Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Sistemas de Equações de Schrödinger não Lineares com Acoplamento

por

Claudiney Goulart

Brasília

2011

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Sistemas de Equações de Schrödinger não Lineares com Acoplamento

por

Claudiney Goulart *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

25 de novembro de 2011

Comissão Examinadora:

____
Prof. Dr. Elves Alves de Barros e Silva - Orientador (MAT/UnB)

____
Profa. Dra. Mágda Soares Xavier - (UFES)

____
Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - (UFPB)

____
Prof. Dr. Carlos Alberto Pereira dos Santos - (MAT/UnB)

____
Profa. Dra. Simone Mazzini Bruschi - (MAT/UnB)

*O autor foi bolsista do CNPq durante parte da elaboração deste trabalho.

Aos meus pais Osório e Maria das Mercês, minha esposa Grace Kelly e minha filha Yasmim.

Agradecimentos

Sobretudo, agradeço a Deus, por tudo que tem proporcionado em minha vida.

Agradeço ao meu orientador Elves Alves de Barros e Silva, por sua orientação sempre clara, dedicada e segura, sem a qual não seria possível a conclusão deste trabalho.

Agradeço ao meu pai, Osório Goulart, minha mãe Maria das Mercês Goulart e meus irmãos Claudiano e Claudio pela confiança que sempre depositaram em mim.

Em especial agradeço à minha esposa Grace Kelly e minha filha Yasmim, pela paciência durante o período que estive envolvido com o curso de doutorado.

Agradeço a todos que também fazem parte de minha família, como tios, sogro, sogra que, intercedendo a Deus, acompanharam todo este processo de formação, sempre acreditando em mim.

Agradeço de forma especial aos professores, Mágda Soares Xavier, Everaldo Souto de Medeiros, Simone Mazzini Bruschi e Carlos Alberto Pereira dos Santos pelas correções e sugestões que com certeza melhoraram este trabalho.

Agradeço aos colegas da Coordenação do Curso de Matemática da UFG, Campus Jataí, pelo incentivo e por terem assumido as minhas atividades na Coordenação, durante o tempo que permaneci ausente cursando o doutorado.

Agradeço aos professores da Pós-Graduação do Departamento de Matemática da UnB, pelas disciplinas que lecionaram, contribuindo para a formação do meu conhecimento e, de certa forma, para o sucesso deste trabalho. Em especial ao Prof. Leandro Martins Cioletti que se dispôs de seu tempo para algumas discussões.

Agradeço ao Prof. Olimpio Hiroshi Miyagaki (UFJF) que desde que foi meu orientador na iniciação científica sempre foi um grande amigo e incentivador.

Agradeço aos funcionários do Departamento de Matemática da UnB, em especial ao Manuel (*in memorium*), pela maneira simpática e eficiente que sempre me atendeu.

Agradeço aos colegas da Pós-Graduação, em especial à Laura, Mariana, Ricardo, Manuela, Anyelle e Evander pela amizade.

Enfim, agradeço ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo financiamento de parte de meus estudos.

Resumo

Neste trabalho, utilizamos métodos variacionais para estabelecer resultados sobre a existência e multiplicidade de soluções positivas para uma classe de sistemas de equações de Schrödinger não lineares com acoplamento, possuindo crescimento crítico ou subcrítico, em $\mathbb{R}^N$. Mais especificamente, considerando o funcional associado restrito à variedade de Nehari, aplicamos argumentos de minimização local e global combinados com métodos de minimax. No caso em que o acoplamento possui crescimento crítico, estabelecemos estimativas apropriadas para o nível determinado pelo Teorema do Passo da Montanha e utilizamos argumentos desenvolvidos por Brézis e Nirenberg para o estudo de problemas semilineares com crescimento crítico.

Palavras-Chaves: Equações de Schrödinger não Lineares, Sistemas não Lineares, Solução Positiva, Expoente Crítico de Sobolev

Abstract

In this paper, we use variational methods to establish results on the existence and multiplicity of positive solutions for a class of systems of coupled nonlinear Schrodinger equations which subcritical or critical growth in $\mathbb{R}^N$. More specifically, considering the associated functional restricted to the Nehari monifold, we apply local and global minimization arguments combined with minimax methods. When the coupling has critical growth, we establish appropriate estimates for the level determined by Mountain Pass Theorem and use arguments developed by Brézis and Nirenberg for the study of semilineares problems with critical growth.

keywords: Nonlinear Schrödinger Equations, Nonlinear Systems, Positive Solutions, Sobolev Critical Exponent

Sumário

Notações

Neste trabalho consideramos as seguintes notações:

- Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $|u|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{1/p}$ denota a norma de u em $L^p(\Omega)$. Por simplicidade, se $\Omega = \mathbb{R}^N$, escrevemos $|u|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = |u|_p$.

- $E_j = H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}), j = 1, 2$, denota o espaço de Sobolev, com o produto escalar e norma associado a λ_1 e λ_2, respectivamente, dado por

$$\langle u, \phi \rangle_j = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \phi + \lambda_j u \phi), \quad ||u||_j^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + \lambda_j u^2\right), \quad j = 1, 2.$$

- $E = E_1 \times E_2$; um elemento em E será denotado por $z = (u, v)$; como uma norma em E consideramos $||z||^2 = ||u||_1^2 + ||v||_2^2$.

- $\mathbb{E}_j, j = 1, 2$, denota o espaço das funções radialmente simétricas em E_j.

- $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$.

- $\to$ e $\rightharpoonup$, denotam convergência forte e convergência fraca, respectivamente.

- $B_R(p)$ denota a bola aberta de raio R com centro no ponto $p \in \mathbb{R}^N$; e $\partial B_R(p)$, denota a fronteira desta bola.

- Dado $A \subset \mathcal{M}_\beta$, $\mathcal{M}_\beta$ a variedade de Nehari em $\mathbb{E}$, denotamos por ∂A, a fronteira de A em $\mathcal{M}_\beta$.

- $supp\, \varphi$ denota o suporte da função φ.

- $A = O(x)$ quando $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|A|}{|x|} \leq M$, para alguma constante $M > 0$.

- $A_n = o_n(1)$ se $\lim\limits_{n \to \infty} |A_n| \to 0$ quando $n \to \infty$.

Introdução

Nosso trabalho tem como foco o estudo de sistemas de equações de Schrödinger não lineares com acoplamento que descrevem fenômenos físicos. Conforme citam Ambrosetti-Colorado em [2, 3] (veja também suas referências), esta classe de problemas têm grande aplicação no estudo de propagação de pulsos em fibra óptica não linear. Por exemplo, se $\mathbf{E}(x,t)$ denota a envoltória complexa de um campo elétrico, a propagação estacionária de feixes planares na direção t em um meio não-linear é descrita, a menos de reescalonamento, pela equação de Schrödinger

$$i\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_{xx} + \kappa|\mathbf{E}|^{\mathbf{2}}\mathbf{E} = \mathbf{0},$$

onde i denota a unidade imaginária e os subscritos denotam derivadas parciais. Considerando sem perda de generalida, $\kappa = 1$, se $\mathbf{E} = a_1\mathbf{E}_1 + a_2\mathbf{E}_2$, em que a_1 e a_2 são vetores complexos unitários e ortogonais, em [28, 29] os autores estabelecem que a equação anterior origina o seguinte sistema de equações de Schrödinger

$$\begin{cases} i(\mathbf{E}_1)_t & + & (\mathbf{E}_1)_{xx} + (a_1^2|\mathbf{E}_1|^2 + a_2^2|\mathbf{E}_2|^2)\mathbf{E}_1 = 0, \\ i(\mathbf{E}_2)_t & + & (\mathbf{E}_2)_{xx} + (a_1^2|\mathbf{E}_2|^2 + a_2^2|\mathbf{E}_1|^2)\mathbf{E}_2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Quando buscamos soluções do tipo ondas estacionárias, isto é, soluções para (1) na forma

$$\mathbf{E}_1(x,t) = exp(i\lambda_1 t)u(x) \quad \text{e} \quad \mathbf{E}_2(x,t) = exp(i\lambda_2 t)v(x),\ \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

obtemos um sistema elíptico da seguinte forma

$$\begin{cases} -u_{xx} + \lambda_1 u & = & (a_1^2 u^2 + a_2^2 v^2)u, & \text{em} & \mathbb{R}, \\ -v_{xx} + \lambda_2 v & = & (a_1^2 v^2 + a_2^2 u^2)v, & \text{em} & \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

Desde o famoso artigo sobre existência de solução para problemas escalares de equações de Schrödinger não lineares devido a Rabinowitz [33], diversos autores têm se dedicado ao estudo dessa classe de problemas (veja, por exemplo, [5, 4, 8, 11, 35, 30] e suas referências).

Trabalhos recentes, [2, 3, 14, 24], se dedicaram ao estudo do Sistema (2) no caso multidimensional. Entres outros resultados, os autores estabelecem a existência de solução de menor energia para o sistema. Como referência para o estudo de existência de solução para sistemas de equações de Schrödinger, podemos citar ainda [7, 13, 16, 19, 20, 25, 27, 36, 37].

Neste trabalho utilizamos métodos variacionais para estudar a existência de soluções positivas para a seguinte classe de sistemas de equações de Schrödinger não lineares

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u+\lambda_1 u &=& |u|^{p-2}u+\frac{2\beta\alpha}{\alpha+\mu}|u|^{\alpha-2}u|v|^{\mu}, & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v+\lambda_2 v &=& |v|^{q-2}v+\frac{2\beta\mu}{\alpha+\mu}|v|^{\mu-2}v|u|^{\alpha}, & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{array}\right. \tag{3}$$

com $N \geqslant 2$, $\beta > 0$, $\alpha, \mu > 1$, $\alpha + \mu \leq 2^*$, $2 < p, q < 2^*$ e $\lambda_1,\ \lambda_2 > 0$. Observamos que $2^* = \infty$ se $N = 2$ e $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ se $N \geq 3$.

Note que $z_0 = (0, 0)$ é uma solução trivial do Sistema (3). Além disso, o sistema possui duas soluções $z_1 = (u_1, 0)$ e $z_2 = (0, v_1)$, sendo $u_1,\ v_1 > 0$, respectivamente, as únicas soluções positivas e radiais (a menos de translação) das seguintes equações de Schrödinger não lineares (para mais detalhes veja, por exemplo [22, 31, 40]),

$$-\Delta u+\lambda_1 u = |u|^{p-2}u, \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{4}$$

$$-\Delta v+\lambda_2 v = |v|^{q-2}v, \text{ em } \mathbb{R}^N. \tag{5}$$

Utilizando a nomenclatura existente na literatura (por exemplo, em [2, 3]), dizemos que z_1 e z_2 são soluções semitriviais do Sistema (3).

Nosso principal objetivo neste trabalho é estabelecer a existência (e multiplicidade) de soluções positivas do Sistema (3), isto é, $z = (u, v)$ tal que u, v satisfazem o Sistema (3) e $u, v > 0$ em $\mathbb{R}^N$.

A motivação inicial para o estudo de existência de solução do Sistema (3) foram os artigos [2, 3, 14, 27]. Em particular, destacamos os artigos [2, 3], devidos a Ambrosetti - Colorado, nos quais os autores estudam o seguinte sistema subcrítico

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u+\lambda_1 u &=& \mu_1 u^3+\beta u v^2, & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v+\lambda_2 v &=& \mu_2 v^3+\beta u^2 v, & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{array}\right. \tag{6}$$

com $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2, \beta > 0$ e $N = 2, 3$. Nestes trabalhos, os autores determinam constantes positivas Λ e Λ', dependendo de $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2$, tais que o Sistema (6) tem solução positiva para todo $\beta \in (0, \Lambda) \cup (\Lambda', +\infty)$. Além disto, a solução encontrada é de menor energia quando $\beta \in (\Lambda', +\infty)$. Em [14], de Figueiredo e Lopes também estabelecem resultados de existência de solução positiva do Sistema (6) incluindo o caso em que $N = 1$.

Em [2, 3], Ambrosetti-Colorado utilizam o fato do funcional associado ao Sistema (6) ser de classe $C^2(\mathbb{E}, \mathbb{R})$ para estimar os índices de Morse dos pontos z_1 e z_2. Estas estimativas permitem verificar que z_1 e z_2 são pontos de mínimos locais do funcional associado ao sistema, restrito à variedade de Nehari, quando $\beta > 0$ é suficientemente pequeno. Uma aplicação do Teorema do Passo da Montanha permite estabelecer uma solução positiva do Sistema (6). Para $\beta > 0$ suficientemente grande, os autores verificam que z_1 e z_2 não são pontos de mínimos locais do funcional associado sobre a variedade de Nehari. A existência de solução positiva de menor energia é estabelecida através de um processo de minimização global.

Destacamos ainda que em [27], Maia, Montefusco e Pellacci estudam a seguinte versão do Sistema (3)

$$\begin{cases} -\Delta u + u = |u|^{p-2}u + \beta|u|^{\frac{p}{2}-2}u|v|^{\frac{p}{2}}, & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \omega^2 v = |v|^{p-2}v + \beta|u|^{\frac{p}{2}}|v|^{\frac{p}{2}-2}v, & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{7}$$

sendo $\beta, \omega > 0$, $2 < p < 2^*$ e $N \geq 1$. No artigo [27], entre outros resultados, os autores estabelecem a existência de uma solução positiva de menor energia para o Sistema (7) sempre que $\beta \geq C$, sendo C uma constante positiva dependendo de ω.

É importante observar que, o funcional associado ao Sistema (3) não apresenta, em geral, a mesma regularidade que aquele associado ao Sistema (6). Por esta razão não utilizamos neste trabalho a teoria de Morse para estabelecer estimativas locais em vizinhanças de z_1 e z_2 do funcional associado ao Sistema (3) restrito à variedade de Nehari.

Muito embora o acoplamento deva ser considerado superlinear em relação às variáveis u e v, tendo em vista que $\alpha + \mu > 2$, ele pode apresentar características distintas quando fixamos uma das variáveis. Por esta razão, baseados na nomenclatura utilizada em resultados clássicos para problemas elípticos (veja, por exemplo, [4, 6]), afirmamos que o acoplamento é superlinear, linear ou sublinear em relação à variável u se $\alpha > 2$, $\alpha = 2$ ou $1 < \alpha < 2$, respectivamente. De maneira análoga, definimos o acoplamento superlinear, linear e sublinear em relação à variável v. Além disto, afirmamos que o acoplamento é duplamente sublinear se ele for sublinear em relação à variável u e à variável v, ou seja, $\alpha, \mu < 2$. De maneira análoga, dizemos que o acoplamento é duplamente superlinear, se $\alpha, \mu > 2$.

O acoplamento é dito duplamente linear em relação às variáveis u e v se for linear em relação às variáveis u e v. Com essa nomenclatura no Sistema (6), por exemplo, o acoplamento será dito duplamente linear em relação às variáveis u e v.

Note que, se consideramos o caso em que o acoplamento é duplamente linear em relação às variáveis u e v, o Sistema (3) se reduz ao Sistema (6), mas sem a restrição $p = q = 4$. Além disto, o Sistema (7) é duplamente sublinear, linear ou superlinear, se $p < 4$, $p = 4$ ou $p > 4$, respectivamente. Observamos ainda, que se consideramos $p = q$, $\alpha = \mu = \dfrac{p}{2}$ e $\omega^2 = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$, o Sistema (3) se reduz ao Sistema (7).

Na primeira parte do nosso trabalho (**Capítulo 1**), consideramos o Sistema (3) no caso em que o acoplamento apresenta crescimento subcrítico, contribuindo desta maneira com o estudo da existência e multiplicidade de solução positiva para esta classe de sistemas. No nosso primeiro resultado, a existência de solução positiva é obtida independentemente do acoplamento ser sublinear, linear ou superlinear em relação a qualquer uma das variáveis.

Teorema 0.1. *Existem $\beta_0, \beta_1 > 0$ tais que o Sistema (3) possui uma solução positiva para todo $\beta \in [0, \beta_0)$ e uma solução positiva de menor energia para todo $\beta \in (\beta_1, +\infty)$.*

O Teorema 0.1 é uma versão do resultado devido a Ambrosetti-Colorado [2, 3] para o Sistema (3). Estabelecemos ainda, que dependendo da relação entre os níveis de menor energia associados aos Problemas (4) e (5), o Sistema (3) tem uma solução positiva para todo $\beta > 0$ (veja Teorema 1.23).

Para demonstrar o Teorema 0.1, exploramos a presença de z_1 e z_2. Na realidade, o argumento principal é verificar que o funcional associado restrito à variedade de Nehari, possui a Geometria do Passo da Montanha se consideramos caminhos ligando z_1 e z_2. Por outro lado, para $\beta > 0$ suficientemente grande, z_1 e z_2 não são pontos de mínimos globais associados ao funcional restrito à variedade de Nehari. Estes fatos, combinados com métodos variacionais, nos permitem provar a existência de soluções positivas ou soluções positivas de menor energia do Sistema (3).

Quando o acoplamento em relação à variável v é sublinear, podemos verificar que, independentemente do valor de $\beta > 0$, z_1 não é um ponto de mínimo local do funcional associado, restrito à variedade de Nehari. Um resultado análogo é válido para o ponto z_2 se supormos que o acoplamento seja sublinear em relação à variável u. Inspirados no trabalho devido a Ambrosetti, Brézis e Cerami [4] para o problema escalar com não linearidade côncavo-convexo, obtemos

Teorema 0.2. *Suponha que o acoplamento seja sublinear em relação a uma das variáveis. Então, existe $\beta_0 > 0$ tal que o Sistema (3) possui pelo menos duas soluções positivas para todo $0 < \beta < \beta_0$.*

No caso em que o acoplamento é duplamente sublinear, estabelecemos a existência de pelo menos três soluções positivas do Sistema (3) quando $\beta > 0$ for suficientemente pequeno. Além disto, verificamos que o sistema tem uma solução positiva de menor energia para todo $\beta > 0$.

Teorema 0.3. *Suponha que o acoplamento seja duplamente sublinear. Então, o Sistema (3) tem uma solução positiva de menor energia para todo $\beta > 0$. Além disso, existe $\beta_0 > 0$ tal que o Sistema (3) tem pelo menos três soluções positivas para todo $0 < \beta < \beta_0$.*

Quando o acoplamento em relação à variável v é superlinear, podemos verificar que, independentemente do valor de $\beta > 0$, z_1 é ponto de um mínimo local do funcional associado restrito à variedade de Nehari. Um resultado análogo é válido para o ponto z_2 se supormos que o acoplamento seja superlinear em relação à variável u.

No caso em que o acoplamento é duplamente superlinear, verificamos que o sistema tem solução positiva para todo $\beta > 0$ e tem pelo menos duas soluções positivas para $\beta > 0$ suficientemente grande, como pode ser visto no teorema abaixo.

Teorema 0.4. *Suponha que o acoplamento seja duplamente superlinear. Então, o Sistema (3) tem uma solução positiva para todo $\beta > 0$. Além disso, existe $\beta_1 > 0$ tal que o Sistema (3) tem pelo menos duas soluções positivas para todo $\beta > \beta_1$, sendo uma delas de menor energia.*

Note que os Teoremas 0.3 e 0.4, garantem a existência, para todo $\beta > 0$, de uma solução positiva do Sistema (3), se o acoplamento for duplamente sublinear ou duplamente superlinear. Em particular, isto implica que o Sistema (7) tem uma solução positiva para todo $\beta > 0$, quando $p \neq 4$. Além disto, se $N \geq 4$, então $p < 2^* \leq 4$. Portanto, neste caso, o Teorema 0.3 estabelece, a existência de uma solução positiva de menor energia do Sistema (7), para todo $\beta > 0$. Isto responde a um questionamento feito pelos autores em [27] sobre uma condição necessária para a existência de solução positiva de menor energia do Sistema (7) quando a dimensão de $\mathbb{R}^N$ for maior ou igual a 4.

Observamos também que o Teorema 0.3 nos permite afirmar que o Sistema (3) possui uma solução positiva de menor energia para todo $\beta > 0$ quando a dimensão de $\mathbb{R}^N$ for maior ou igual a 6 pois, neste caso, temos que o acoplamento é duplamente sublinear, uma vez que, $\alpha, \mu > 1$ e $\alpha + \mu < 2^* \leq 3$. Finalmente, como consideramos o acoplamento duplamente superlinear no Teorema 0.4, este se aplica para as dimensões $N = 2, 3$.

Nos teoremas a seguir, inspirados pelos artigos [2, 3], estimamos os valores de $\beta_0, \beta_1 > 0$ dados pelo Teorema 0.1, quando o acoplamento é linear em relação a uma das variáveis. Objetivando estas estimativas, lembramos inicialmente que (veja [22, 31] ou [40], Apêndice A)

$$u_1(x) = \lambda_1^{\frac{1}{p-2}} U_p\left(\sqrt{\lambda_1}x\right) \quad \text{e} \quad v_1(x) = \lambda_2^{\frac{1}{q-2}} U_q\left(\sqrt{\lambda_2}x\right) \tag{8}$$

são as únicas soluções positivas e radiais (a menos de translação) dos problemas escalares (4) e (5), sendo U_p e U_q as soluções positivas e radiais de (4) e (5) quando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

No caso em que o acoplamento é linear em relação à variável v, definimos

$$\gamma_{1,\alpha}^2 = \inf_{\varphi \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{(\alpha+2)||\varphi||_2^2}{4\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^\alpha |\varphi|^2}. \tag{9}$$

De maneira análoga, quando o acoplamento é linear em relação à variável u, consideramos

$$\gamma_{2,\mu}^2 = \inf_{\varphi \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{(\mu+2)||\varphi||_1^2}{4\int_{\mathbb{R}^N} |v_1|^\mu |\varphi|^2}. \tag{10}$$

Definindo

$$F(\lambda_1) = C_{p,q}\lambda_1^{\frac{(2^*-p)(q-2)}{(2^*-q)(p-2)}},$$

com $C_{p,q}^{\frac{(2^*-q)}{2^*(q-2)N}} = \dfrac{q(p-2)}{p(q-2)}\dfrac{|U_p|_p^p}{|U_q|_q^q}$, observamos que F nos permite estabelecer uma relação entre os níveis de menor energia associados aos problemas escalares (4) e (5). Utilizando esta relação, obtemos

Teorema 0.5. *Suponha que o acoplamento seja linear em relação a uma das variáveis. Então,*

1. *o Sistema (3) tem uma solução positiva nas seguintes condições:*

   (i) $\lambda_2 \leq F(\lambda_1)$, *o acoplamento é linear em relação à variável* v *e* $\beta \in [0, \gamma_{1,\alpha}^2)$;

   (ii) $\lambda_2 \geq F(\lambda_1)$, *o acoplamento é linear em relação à variável* u *e* $\beta \in [0, \gamma_{2,\mu}^2)$.

2. *o Sistema (3) tem uma solução positiva de menor energia nas seguintes condições:*

   (i) $\lambda_2 \geq F(\lambda_1)$, *o acoplamento é linear em relação à variável* v *e* $\beta \in (\gamma_{1,\alpha}^2, +\infty)$;

   (ii) $\lambda_2 \leq F(\lambda_1)$, *o acoplamento é linear em relação à variável* u *e* $\beta \in (\gamma_{2,\mu}^2, +\infty)$.

Agora, considerando o caso em que o acoplamento é duplamente linear, definimos

$$\Lambda = \min\{\gamma_{1,2}^2, \gamma_{2,2}^2\} \ \text{ e } \ \Lambda' = \max\{\gamma_{1,2}^2, \gamma_{2,2}^2\}, \tag{11}$$

sendo $\gamma_{1,2}^2$ e $\gamma_{2,2}^2$, dados por (9) e (10), quando $\alpha = 2$ e $\mu = 2$, respectivamente.

Como consequência direta do Teorema 0.5, temos

Teorema 0.6. *Suponha que o acoplamento seja duplamente linear. Então o Sistema (3) tem uma solução positiva para todo* $\beta \in [0, \Lambda)$, *e tem uma solução positiva de menor energia, para todo* $\beta \in (\Lambda', +\infty)$.

Note que os Teoremas 0.5 e 0.6 nos fornecem estimativas para $\beta_0, \beta_1 > 0$, dados pelo Teorema 0.1, quando o acoplamento é linear em relação a pelo menos uma das variáveis. Embora a abordagem deste trabalho seja distinta, nossas estimativas são similares àquelas obtidas em [2, 3] (veja também [14] para resultados relacionados). No caso particular em que $p = q = 4$ com acoplamento duplamente linear, o Teorema 0.6 nos fornece os mesmos valores que aqueles obtidos em [2, 3]. Como no Teorema 0.6 consideramos o acoplamento duplamente linear e $\alpha + \mu < 2^*$, neste caso temos que $N = 2, 3$.

Para finalizarmos esta primeira parte do trabalho, inspirados nos resultados devidos a Maia, Montefusco e Pellacci [27], buscamos obter resultados que nos permitem fornecer condições necessárias e condições suficientes para a existência de solução positiva de menor energia do Sistema (3).Para tal, consideramos o Sistema (3) no caso particular em que $p = q$, isto é

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} -\Delta u + \lambda_1 u &=& |u|^{p-2}u + \frac{2\beta\alpha}{\alpha+\mu}|u|^{\alpha-2}u|v|^{\mu}, & \text{em} & \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \lambda_2 v &=& |v|^{p-2}v + \frac{2\beta\mu}{\alpha+\mu}|v|^{\mu-2}v|u|^{\alpha}, & \text{em} & \mathbb{R}^N. \end{array} \right. \tag{12}$$

Denotando por $\omega^2 = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$, a razão entre as frequências λ_1 e λ_2 do Sistema (12), definimos

$$f(\omega) \;=\; \left[1 + \frac{N}{2} - \frac{N}{p} + \frac{1}{\omega^2}\left(1 - \frac{N}{2} + \frac{N}{p}\right)\right]^{\frac{p}{2}} \omega^{\frac{N(2^*-p)}{2^*}}. \tag{13}$$

Os resultados, a seguir, complementam as estimativas obtidas em [27] para a existência de solução positiva de menor energia.

Teorema 0.7. *Suponha que $\alpha + \mu = p$. Se $\beta > 0$ satisfaz*

$$\beta \geq \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}f(\omega) - 1, & \textit{se } \omega \geq 1, \\ \\ \frac{1}{2}f(\frac{1}{\omega}) - 1, & \textit{se } \omega \leq 1, \end{array} \right. \tag{14}$$

então o Sistema (12) tem uma solução positiva de menor energia.

A demonstração do teorema acima é baseada na demonstração de [27], para o caso particular em que $\alpha = \mu = \frac{p}{2}$ (*Teorema 2.3*). Por uma questão de completude e para facilidade do leitor, apresentamos sua demonstração neste trabalho.

Considerando $p = \alpha + \mu$ no Sistema (12), demonstramos uma versão do resultado devido a Maia, Montefusco e Pellacci [27] que nos fornece uma condição necessária para existência de solução positiva de menor energia do Sistema (12).

Supondo, sem perda de generalidade, que $\alpha \geq \mu$ e $\alpha \geq \frac{p}{2}$, definimos os seguintes valores

$$
\begin{aligned}
a = a(\alpha,\mu,p) &= \left[\left(2^{\frac{p}{2}}-2\right)^{2(\mu-2)}\left(\frac{p}{2}\right)^{(\alpha-\mu)}\right]^{\frac{1}{p-4}} \text{ se } p>4 \quad \text{e} \quad a=2 \text{ se } p=4, && (15)\\
\gamma^* &= \gamma^*(N,p) = \frac{N(2^*-p)}{2^*p}. && (16)
\end{aligned}
$$

Teorema 0.8. *Suponha que $\alpha+\mu=p$ e que o acoplamento seja superlinear ou linear em relação à uma das variáveis. Se o Sistema (12) possui uma solução de menor energia positiva, então $2\beta \geq a \max\left\{\frac{1}{\omega^{\gamma^*\alpha}},\ \omega^{\gamma^*\mu}\right\}$.*

Em [27] os autores estabelecem que se $p \geq 4$ e o Sistema (7) tem uma solução positiva de menor energia, então $\beta \geq 2^{\frac{p}{2}-1}-1$. A restrição $p \geq 4$, neste caso, implica que $N = 1,2,3$. Como já observamos anteriormente o Teorema 0.3 implica que o Sistema (7) tem uma solução positiva de menor energia para todo $\beta > 0$. Por outro lado, como também observamos anteriormente, se $N \geq 6$, então o Sistema (3) é duplamente sublinear e, pelo Teorema 0.3, possui uma solução de menor energia para todo $\beta > 0$.

Note que, se consideramos no Teorema 0.8, $\alpha = \mu = \dfrac{p}{2}, p > 4$ temos que, se o Sistema (7) possui uma solução positiva de menor energia, então

$$
\beta \geq (2^{\frac{p}{2}-1}-1)\max\left\{\frac{1}{\omega^{\gamma^*\alpha}},\ \omega^{\gamma^*\mu}\right\}. \tag{17}
$$

Como $\max\left\{\dfrac{1}{\omega^{\gamma^*\alpha}},\ \omega^{\gamma^*\mu}\right\} \geq 1$ a nossa estimativa melhora aquela obtida por Maia, Montefusco e Pellacci em [27]. Observamos ainda, que se supomos $\mu = \alpha = \frac{p}{2} = 2$, a relação (17) é idêntica à obtida em [27] (veja, *Teorema* 2.9).

Se consideramos no Teorema 0.8, $\mu = 2$ e $\alpha = p-2 \geq \mu = 2$, obtemos que se o Sistema (12) possui uma solução positiva de menor energia então

$$
2\beta \geq \frac{p}{2}\max\left\{\frac{1}{\omega^{\gamma^*(p-2)}},\ \omega^{\gamma^*2}\right\}. \tag{18}
$$

Na segunda parte desse trabalho (**Capítulo 2**) consideramos $N \geq 3$ e o caso em que o acoplamento tem crescimento crítico, ou seja $\alpha+\mu = 2^*$. Estudos de existência de solução de sistemas tendo um crescimento crítico podem ser encontrados em [1, 16, 36] e suas referências.

Um ponto importante que diferencia esta parte do trabalho do Capítulo 1 é que, mesmo considerando espaços radiais, não conseguimos verificar a condição de compacidade devido a Palais-Smale para todo os valores $c \in \mathbb{R}$. No entanto, verificamos que abaixo de um determinadado nível essa condição de compacidade é válida. Este fato, combinado com métodos de minimização e o Teorema do Passo da Montanha, nos permite estabelecer resultados de existência e multiplicidade de soluções positivas do Sistema (3), similares aos obtidos no caso em que o acoplamento é subcrítico.

No caso em que o acoplamento tem crescimento crítico e $\beta > 0$ não está próximo da origem, consideramos a condição

(H) $N \geq 3$ e se $N = 3$, p, q satisfazem $4 < \max\{p, q\} < 2^* = 6$

utilizada, em geral, em problemas com crescimento crítico (veja por exemplo [30]).

O primeiro resultado desta seção estabelece uma versão do Teorema 0.1 no caso em que o acoplamento possui crescimento crítico.

Teorema 0.9. *Suponha que o acoplamento seja crítico. Então, existe $\beta_0 > 0$ tal que o Sistema (3) possui uma solução positiva para todo $\beta \in [0, \beta_0)$. Além disto, se a condição (H) é satisfeita, existe $\beta_1 > 0$ tal que o Sistema (3) tem uma solução positiva de menor energia para todo $\beta \in (\beta_1, +\infty)$.*

A seguir, enunciamos versões dos Teoremas 0.2 e 0.3, para o caso em que o acoplamento é crítico.

Teorema 0.10. *Suponha que o acoplamento seja crítico e sublinear em relação à uma das variáveis. Então, existe $\beta_0 > 0$ tal que o Sistema (3) possui pelo menos duas soluções positivas para todo $0 < \beta < \beta_0$.*

Teorema 0.11. *Suponha que o acoplamento seja crítico e duplamente sublinear. Então, existe $\beta_0 > 0$ tal que o Sistema (3) tem pelo menos três soluções para todo $\beta < \beta_0$. Além disto, o Sistema (3) tem uma solução positiva de menor energia para todo $\beta > 0$.*

Como no Teorema 0.11 o acoplamento é duplamente sublinear e $\alpha + \mu = 2^*$, este teorema se aplica quando a dimensão de $\mathbb{R}^N$ é maior ou igual a 5.

Em [2, 3] Ambrosetti-Colorado, considerando o acoplamento duplamente linear e $p = q = 4$, verificam que o Sistema (3) tem uma solução de menor energia para todo $\beta > \Lambda'$ para o caso em que o crescimento do acoplamento é subcrítico. No Teorema 0.6 da primeira parte deste trabalho, conseguimos verificar esse mesmo resultado sem supor $p = q = 4$. Também verificamos um resultado similar considerando o acoplamento com crescimento crítico e duplamente linear. Aqui também não precisamos supor que $p = q = 4$.

Inicialmente estabelecemos uma versão do Teorema 0.5, considerando o acoplamento com crescimento crítico.

Teorema 0.12. *Suponha que o acoplamento seja crítico e linear em relação à uma das variáveis. Se a condição (H) é satisfeita, então o Sistema (3) tem uma solução positiva de menor energia, nas seguintes condições*

1. $\lambda_2 \geq F(\lambda_1)$, *o acoplamento é linear em relação à variável v e $\beta \in (\gamma_{1,\alpha}^2, +\infty)$*

2. $\lambda_2 \leq F(\lambda_1)$, *o acoplamento é linear em relação à variável u e $\beta \in (\gamma_{2,\mu}^2, +\infty)$.*

O fato de termos $\alpha = 2$ ou $\mu = 2$ no Teorema 0.12, implica que a dimensão de $\mathbb{R}^N$ é menor ou igual a 5. Além disto, se o acoplamento é duplamente linear, então $N = 4$. Com isto, temos

Teorema 0.13. *Suponha que $N = 4$ e que o acoplamento seja duplamente linear. Então, o Sistema (3) tem uma solução positiva de menor energia para todo $\beta \in (\Lambda', +\infty)$, com Λ' dado por (11).*

Nas demonstrações dos teoremas do **Capítulo 1 e 2**, nós consideramos o espaço de Sobolev $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$, onde $\mathbb{E}_1$, $\mathbb{E}_2$ denotam os espaços de funções radialmente simétricas no espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$. No Capítulo 1, como consideramos o acoplamento com crescimento subcrítico, o fato de usarmos o espaço de funções radiais nos permite verificar que o funcional associado, satisfaz a condição de compacidade devido a Palais-Smale, quando este está restrito à variedade de Nehari. Para obtermos pontos críticos do funcional associado ao Sistema (3) nos baseamos em Métodos Variacionais. Mais especificamente, métodos de minimização local e global, e métodos de minimax, aplicados de acordo com o tipo de acoplamento do Sistema (3). Ppara garantirmos que os pontos críticos obtidos são soluções do Sistema (3), utilizamos o Princípio da Criticalidade Simétrica (veja por exemplo [41]).

Para estabelecer a existência de soluções positivas exploramos a presença das soluções semitriviais, z_1 e z_2. Para isto, verificamos o comportamento do funcional associado ao sistema em vizinhanças dessas soluções semitriviais. Este comportamento depende essencialmente do tipo de acoplamento considerado. Se o acoplamento for superlinear em relação à variável v, estabelecemos que z_1 é um mínimo local do funcional associado restrito à variedade de Nehari, para todo $\beta > 0$. Por outro lado, se o acoplamento for linear em relação à variável v verificamos que z_1 é um mínimo local se $\beta > 0$ for suficientemente pequeno. Além disto, verificamos que, se o acoplamento for sublinear em relação à variável v, então z_1 não é um mínimo local do funcional associado restrito à variedade de Nehari. Resultados similares são obtidos se consideramos o comportamento do funcional em vizinhanças de z_2.

No **Capítulo 2**, como estamos considerando o sistema com acoplamento crítico, o funcional associado ao sistema não satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale para todos os níveis $c \in \mathbb{R}$. Conseguimos superar essa dificuldade técnica, verificando que, abaixo de um determinado nível, o funcional sempre satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale. Estimativas apropriadas para os valores críticos considerados, nos permitem estabelecer os resultados aqui enunciados para o Sistema (3). Em particular, para valores de $\beta > 0$ que não estão próximos da origem, estas estimativas são estabelecidas utilizando funções testes apropriadas e argumentando como Brézis-Nirenberg em [8].

Capítulo 1

Sistema de Equações de Schrödinger com Acoplamento Subcrítico

Neste capítulo, utilizamos métodos variacionais para estudar a existência de solução positiva do seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u+\lambda_1 u & = & |u|^{p-2}u+\frac{2\beta\alpha}{\alpha+\mu}|u|^{\alpha-2}u|v|^{\mu}, & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v+\lambda_2 v & = & |v|^{q-2}v+\frac{2\beta\mu}{\alpha+\mu}|v|^{\mu-2}v|u|^{\alpha}, & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{array}\right. \tag{3}$$

com $N \geq 2$, $\beta > 0$, $\alpha, \mu > 1$, $\alpha+\mu < 2^*$, $2 < p, q < 2^*$, e λ_1, $\lambda_2 > 0$.

Como já foi observado na introdução desse trabalho, $z_0 = (0,0), z_1 = (u_1, 0)$ e $z_2 = (0, v_1)$ são soluções do Sistema (3), sendo u_1, $v_1 > 0$ as únicas soluções positivas e radiais (a menos de translação) para os problemas escalares (4) e (5), respectivamente. Portanto, nosso interesse é estabelecer uma solução $z > 0$ do Sistema (3).

Foi descrito também, na introdução deste trabalho que, para a demonstração dos resultados deste capítulo, nos baseamos em Métodos Variacionais. Mais especificamente, métodos de minimização local e global e método de minimax. Estes métodos são aplicados de acordo com o tipo de acoplamento do Sistema (3).

Neste capítulo, verificamos que, se o acoplamento for superlinear em relação à variável v, então z_1 é um mínimo local do funcional associado restrito à variedade de Nehari, para todo $\beta > 0$. Por outro lado, se o acoplamento for linear em relação à variável v estabelecemos que z_1 é um mínimo local se $\beta > 0$ for suficientemente pequeno. Além disto, verificamos que se o acoplamento for sublinear em relação à variável v, então z_1 não é um mínimo local do funcional associado restrito à variedade de Nehari. Resultados similares são obtidos se consideramos o estudo do funcional em vizinhanças de z_2.

Além disto, verificamos que o funcional associado restrito à variedade de Nehari é limitado inferiormente e satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale.

Estes resultados, combinados com os métodos variacionais citados acima, nos permitem estabelecer os teoremas de existência e multiplicidade de solução propostos nessa parte do trabalho.

O **Capítulo 1** está estruturado da seguinte forma: **na Seção 1.1,** estabelecemos a estrutura variacional do Sistema (3). Em seguida, na **Seção 1.2**, definimos a variedade de Nehari associada ao Sistema (3). Já na **Seção 1.3**, tendo como objetivo estabelecer a existência de solução positiva do sistema, verificamos que o funcional associado satisfaz a condição de compacidade devido a Palais-Smale, quando este é considerado restrito à variedade de Nehari. Dando continuidade ao nosso trabalho, na **Seção 1.4**, estabelecemos algumas estimativas locais do funcional restrito à variedade de Nehari. Com base nos resultados obtidos nas seções anteriores, na **Seção 1.5,** demonstramos um resultado de existência de solução positiva do Sistema (3) (Teorema 0.1). Na seção **Seção 1.6,** demonstramos os Teoremas 0.2 e 0.3, em que o acoplamento é sublinear em relação a pelo menos uma das variáveis. Na seção **Seção 1.7,** demonstramos o Teorema 0.4, onde o acoplamento é duplamente superlinear. Na **Seção 1.8,** estabelecemos estimativas similares as estimativas obtidas em [2, 3] (Teoremas 0.5 e 0.6). Finalmente na **Seção 1.9,** obtemos estimativas que nos permitem estabelecer condiçoes suficientes e condições necessárias para existência de solução positiva de menor energia do Sistema (3) (Teoremas 0.7 e 0.8). Nesta seção, as demonstrações dos resultados foram inspiradas em resultados obtidos em [27].

1.1 Estrutura Variacional

Como nosso interesse é estabelecer existência de solução positiva do Sistema (3), consideramos $z^+ = (u^+, v^+)$, $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $v^+ = \max\{v, 0\}$ e associamos ao sistema o seguinte funcional

$$I(z) = \frac{1}{2}||z||^2 - \frac{1}{p}|u^+|_p^p - \frac{1}{q}|v^+|_q^q - \frac{2\beta}{\alpha+\mu}\int_{\mathbb{R}^N} |u^+|^\alpha |v^+|^\mu, \quad z = (u, v) \in \mathbb{E}. \tag{1.1}$$

Como $\alpha, \mu > 1$ e $2 < p, q, \alpha + \mu < 2^*$, podemos argumentar como em [41] (para um problema escalar) para obter que I é bem definido e $I \in C^1(\mathbb{E}, \mathbb{R})$. Além disto, a derivada de Fréchet do funcional I, é dada por

$$\langle I'(z), w\rangle = \langle z, w\rangle_{\mathbb{E}} - \int_{\mathbb{R}^N} |u^+|^{p-1}\phi - \int_{\mathbb{R}^N} |v^+|^{q-1}\psi$$
$$- \quad \frac{2\beta}{\alpha+\mu}\int_{\mathbb{R}^N} (\alpha|v^+|^{\mu}|u^+|^{\alpha-1}\phi + \mu|u^+|^{\alpha}|v^+|^{\mu-1}\psi)), \quad z=(u,v),\ w=(\phi,\psi)\in\mathbb{E}.$$

Consequentemente, tendo em vista o Princípio da Criticalidade Simétrica (veja por exemplo [41]), cada ponto crítico $z=(u,v)\in\mathbb{E}$ de I, é uma solução (fraca) do Sistema (3). Como já vimos antes, se $u,v\neq 0$, dizemos que esse ponto crítico é uma solução não trivial. Se $u\equiv 0$ ou $v\equiv 0$, dizemos que esse ponto crítico é uma solução semitrivial.

Proposição 1.1. *Suponha que $z\in\mathbb{E}\setminus\{0\}$ é um ponto crítico do Funcional (1.1), $z\neq z_1$ e $z\neq z_2$, então $z>0$.*

Demonstração: De fato, inicialmente note que

$$0=\left\langle I'(z), z^-\right\rangle = -||z^-||^2,$$

onde $z^-=(u^-,v^-)$, $u^-=\max\{-u,0\}$ e $v^-=\max\{-v,0\}$. Portanto, $z\geq 0$. Usando o Corolário A.2 temos que $z\in(C^2(\mathbb{R}^N))^2$. Suponha por contradição, que existe $x_0\in\mathbb{R}^N$ tal que $u(x_0)=0$. Como z é uma solução do Sistema (3), então u satisfaz

$$-\Delta u+\lambda_1 u = |u|^{p-1}+\frac{2\beta\alpha}{\alpha+\mu}|u|^{\alpha-1}|v|^{\mu}\geq 0.$$

Portanto, aplicando o Princípio do Máximo Forte [18] em uma bola arbitrária centrada em x_0 obtemos que $u\equiv 0$. Mas isto é uma contradição pois, $u\not\equiv 0$. De forma similar estabelecemos que $v>0$. ∎

Observamos que a proposição acima ainda é válida se o acoplamento for crítico.

Associados aos Problemas (4) e (5) consideramos, respectivamente, os funcionais $J_p\in C^2(\mathbb{E}_1,\mathbb{R})$ e $J_q\in C^2(\mathbb{E}_2,\mathbb{R})$ dados por

$$J_p(u)=\frac{1}{2}||u||_1^2-\frac{1}{p}|u^+|_p^p,\quad u\in\mathbb{E}_1, \tag{1.2}$$

$$J_q(v)=\frac{1}{2}||v||_2^2-\frac{1}{q}|v^+|_q^q,\quad v\in\mathbb{E}_2. \tag{1.3}$$

Em particular, podemos escrever o Funcional (1.1) da seguinte forma

$$I(z)=J_p(u)+J_q(v)-\frac{2\beta}{\alpha+\mu}\int_{\mathbb{R}^N}|u^+|^{\alpha}|v^+|^{\mu},\quad z=(u,v)\in\mathbb{E}.$$

A seguir, demonstramos alguns resultados que serão essenciais para estabelecer a existência de pelo menos uma solução não trivial ou semitrivial do Sistema (3).

1.2 A Variedade de Nehari e Algumas Propriedades

Tendo em vista a busca por pontos críticos do Funcional (1.1), consideramos a função $\psi : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\psi(z) = \langle I'(z), z\rangle = ||z||^2 - |u^+|_p^p - |v^+|_q^q - 2\beta \int_{\mathbb{R}^N} |u^+|^\alpha |v^+|^\mu, \quad z \in \mathbb{E}. \tag{1.4}$$

Associados aos funcionais J_p e J_q, consideramos também os funcionais

$$\begin{aligned} \psi_p(u) &= \left\langle J_p'(u), u \right\rangle = ||u||_1^2 - |u^+|_p^p, \quad u \in \mathbb{E}_1, \\ \psi_q(v) &= \left\langle J_q'(v), v \right\rangle = ||v||_2^2 - |v^+|_q^q, \quad v \in \mathbb{E}_2. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Como $\alpha, \mu > 1$ e $2 < p, q, \alpha + \mu < 2^*$ obtemos que $\psi \in C^1(\mathbb{E}, \mathbb{R})$. Além disso, o mesmo argumento verifica que $\psi_p \in C^2(\mathbb{E}_1, \mathbb{R})$ e $\psi_q \in C^2(\mathbb{E}_2, \mathbb{R})$.

Definimos também as chamadas variedades de Nehari associadas a I, J_p e J_q, respectivamente, por

$$\mathcal{M}_\beta = \{z \in \mathbb{E} \setminus \{0\} : \psi(z) = 0\}, \tag{1.6}$$

$$\mathcal{N}_p = \{u \in \mathbb{E}_1 \setminus \{0\} : \psi_p(u) = 0\} \tag{1.7}$$

$$\mathcal{N}_q = \{v \in \mathbb{E}_2 \setminus \{0\} : \psi_q(v) = 0\}. \tag{1.8}$$

Observamos que, se $z = (u, 0) \in \mathcal{M}_\beta$, então $u \in \mathcal{N}_p$ e $T_z\mathcal{M}_\beta = T_u\mathcal{N}_p \times \mathbb{E}_2$. Um resultado similar também relaciona $\mathcal{M}_\beta$ e $\mathcal{N}_q$ em $z = (0, v)$.

Vamos denotar por S^∞ a esfera unitária de $\mathbb{E}$. Nossa intenção inicialmente foi verificar que existe um homeomorfismo entre a variedade $\mathcal{M}_\beta$ e S^∞. A idéia era verificar que dado $z \in S^\infty$, existe um único $t = t(z) > 0$, dependendo de β, tal que $t(z)z \in \mathcal{M}_\beta$. Mas facilmente vimos que isso não é verdade, basta considerar $z \in S^\infty$ tal que $z^+ \equiv 0$ e temos $tz \notin \mathcal{M}_\beta$, pois caso contrário $||tz||$=0. Para contornarmos essa dificuldade definimos $A^\infty \subset S^\infty$ onde os elementos tem parte positiva que não é identicamente nula, ou seja,

$$A^\infty := \{w \in S^\infty : w^+ \not\equiv 0\}.$$

Lema 1.2. *A^∞ é aberto em S^∞ e conexo por caminhos.*

Demonstração: De fato, para verificar que A^∞ é aberto em S^∞, basta notar que a aplicação $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}, \;\; f(w) = w^+$ é contínua em $\mathbb{E}$ (para demonstração desse fato veja por exemplo [12]). Portanto, o complementar de A^∞,

$$(A^\infty)^c := \{w \in S^\infty : w^+ \equiv 0\} = f^{-1}(0) \cap S^\infty,$$

é fechado em S^∞.

Para verificar que A^∞ é conexo por caminhos sejam $w = (u, v)$ e $\bar{w} = (\bar{u}, \bar{v}) \in A^\infty$ e considere $\varphi_R = (\varphi_{1,R}, \varphi_{1,R}), R > 0$ onde $\varphi_{1,R}$ é a primeira autofunção associada ao seguinte problema de autovalor,

$$\begin{cases} -\Delta w &= \lambda w \;\text{ em }\; B_R(0), \\ \quad w &= 0 \;\text{ em }\; \partial B_R(0). \end{cases}$$

Feito isto, consideramos $\gamma : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{E}$ e $\eta : [\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{E}$, caminhos ligando w a φ_R e φ_R a $\bar{w}$, respectivamente, contidos em $\mathbb{E}$, dados por $\gamma(t) = (2t\varphi_R + (1-2t)w)$ e $\eta(t) = ((2t-1)\bar{w} + 2(1-t)\varphi_R)$. Agora definimos os conjuntos

$$\begin{aligned} A^+ &:= \{x \in \mathbb{R}^N : w^+(x) \neq 0\}, \\ \bar{A}^+ &:= \{x \in \mathbb{R}^N : \bar{w}^+(x) \neq 0\}, \end{aligned}$$

e tomamos $R > 0$ suficientemente grande de forma que $B_R(0) \cap A^+ \neq \emptyset$ e $B_R(0) \cap \bar{A}^+ \neq \emptyset$. Como $w, \bar{w} \in A^\infty$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $u^+, \bar{u}^+ \not\equiv 0$. Portanto, temos que $(2t\varphi_{1,R} + (1-2t)u)^+ \neq 0$, para todo $t \in [0, \frac{1}{2}]$ e $((2t-1)\bar{u} + 2(1-t)\varphi_{1,R})^+ \neq 0$, para todo $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Consequentemente,

$$\gamma^+(t) = ((2t\varphi_{1,R} + (1-2t)u)^+,\; (2t\varphi_{1,R} + (1-2t)v)^+) \neq 0 \;\text{ para todo }\; t \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

e

$$\eta^+(t) = (((2t-1)\bar{u} + 2(1-t)\varphi_{1,R})^+,\; ((2t-1)\bar{v} + 2(1-t)\varphi_{1,R})^+) \neq 0, \;\text{ para todo }\; t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Além disso, $\tilde{\gamma}(t) = \dfrac{\gamma(t)}{||\gamma(t)||}$ e $\tilde{\eta}(t) = \dfrac{\eta(t)}{||\eta(t)||} \subset S^\infty$. Portanto, considerando a superposição entre $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\eta}$, w e $\bar{w}$ podem ser ligados por caminhos que estão contidos em A^∞. O lema está demonstrado. ∎

Procedendo como acima, definimos $A_p^\infty = \{u \in S_p^\infty : u^+ \not\equiv 0\}$, onde S_p^∞ é a esfera unitária de $\mathbb{E}_1$.

O lema a seguir é de grande importância para o nosso estudo de existência de solução, pois ele nos garante que existe um homeomorfimo entre A^∞ e $\mathcal{M}_\beta$ e é esse homeomorfismo que nos permite estabelecer algumas estimativas locais do Funcional (1.1) restrito à $\mathcal{M}_\beta$ em vizinhanças das soluções semitriviais $z_1 = (u_1, 0)$ e $z_2 = (0, v_1)$. São essas estimativas locais que nos permitem aplicar o Teorema do Passo da Montanha para obtermos a demonstração dos nossos resultados.

Lema 1.3. *Dado $z \in A^\infty$, existe um único $t = t(z) > 0$, dependendo de $\beta > 0$, tal que $t(z)z \in \mathcal{M}_\beta$. Além disso, a função real $z \mapsto t(z)$ é contínua em A^∞ e a aplicação $\phi_\beta : A^\infty \to \mathcal{M}_\beta$, $\phi_\beta(z) = t(z)z$, define um homeomorfismo de A^∞ em $\mathcal{M}_\beta$.*

Demonstração: Seja $z = (u, v) \in A^\infty$ fixado e considere a função $g \in C^1([0, +\infty), \mathbb{R})$ dada por

$$g(t) = I(tz) = \frac{t^2}{2}||z||^2 - \frac{t^p}{p}|u^+|_p^p - \frac{t^q}{q}|v^+|_q^q - \frac{2\beta t^{\alpha+\mu}}{\alpha+\mu}\int_{\mathbb{R}^N}|u^+|^\alpha|v^+|^\mu, \quad t \in [0, +\infty).$$

Como $z \in A^\infty$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $u^+ \not\equiv 0$. Assim, $g(0) = 0$, $g(t) > 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno e $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = -\infty$, desde que $2 < p, q, \alpha + \mu < 2^*$. Usando (1.4), para $t > 0$ temos que

$$g'(t) = \langle I'(tz), z\rangle = \frac{1}{t}\langle I'(tz), tz\rangle = \frac{1}{t}\psi(tz)$$

Portanto, $tz \in \mathcal{M}_\beta$ se, e somente se, $g'(t) = 0$. Seja $\bar{t} > 0$ um ponto tal que $g'(\bar{t}) = 0$. Com isto, temos que

$$||z||^2 = \bar{t}^{p-2}|u^+|_p^p + \bar{t}^{q-2}|v^+|_q^q - 2\beta\bar{t}^{(\alpha+\mu)-2}\int_{\mathbb{R}^N}|u^+|^\alpha|v^+|^\mu.$$

Assim podemos escrever,

$$g'(t) = t\left[(\bar{t}^{p-2} - t^{p-2})|u^+|_p^p + (\bar{t}^{q-2} - t^{q-2})|v^+|_q^q + 2\beta(\bar{t}^{(\alpha+\mu)-2} - t^{(\alpha+\mu)-2})\int_{\mathbb{R}^N}|u^+|^\alpha|v^+|^\mu\right]$$

Consequentemente, usando mais uma vez que $2 < p, q, \alpha + \mu < 2^*$, concluímos que $g'(t) \geq 0$ para todo $t \leq \bar{t}$ e $g'(t) < 0$ para todo $t > \bar{t}$. Agora, usando este fato e lembrando o comportamento de g na origem e no infinito, temos que existe um único $t(z) > 0$, dependendo de $\beta > 0$, tal que $t(z)z \in \mathcal{M}_\beta$. Além disso, $g(t(z)) = \max\limits_{t\geq 0} g(t)$.

A seguir, verificamos que a aplicação $z \mapsto t(z)$ é contínua em A^∞. Para isso consideramos $z \in A^\infty$ e uma sequência $(z_n) \subset A^\infty$ tais que $z_n \to z$ fortemente em $\mathbb{E}$.

Como $z_n \to z \in A^\infty \subset \mathbb{E} \setminus \{0\}$, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor

$$\begin{cases} z_n \to z \text{ in } (L^r(\mathbb{R}^N))^2, \ r \in [2, 2^*], \\ z_n(x) \to z(x) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N, \\ |z_n(x)| = |u_n(x)| + |v_n(x)| \leq h_r(x) \in L^r(\mathbb{R}^N), r \in [2, 2^*], \ \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1.9}$$

Tendo em vista que a aplicação $f : L^r(\mathbb{R}^N) \to L^r(\mathbb{R}^N)$, definida por $f(s) = s^+$ é contínua, invocando as relações acima, concluímos que

$$u_n^+ \to u^+ \text{ e } v_n^+ \to v^+ \ \text{ em } L^r(\mathbb{R}^N) \tag{1.10}$$

Assim, por (1.10) e invocando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\begin{cases} |u_n^+|_p^p = |u^+|_p^p + o_n(1), \\ |v_n^+|_q^q = |v^+|_q^q + o_n(1) \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^+|^\alpha |v_n^+|^\mu = \int_{\mathbb{R}^N} |u^+|^\alpha |v^+|^\mu + o_n(1). \end{cases} \tag{1.11}$$

De fato, para verificarmos a terceira relação em (1.11), é suficiente utilizarmos (1.9) observando que

$$|u_n^+|^\alpha |v_n^+|^\mu \leq |u_n^+|^{\alpha+\mu} + |v_n^+|^{\alpha+\mu} \leq 2h_{\alpha+\mu}^{\alpha+\mu}(x) \in L^1(\mathbb{R}^N), \ \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Agora, usando que $t_n z_n := t_n(z_n) z_n \in \mathcal{M}_\beta$, por (1.6) temos

$$||z_n||^2 = t_n^{p-2} |u_n^+|_p^p + t_n^{q-2} |v_n^+|_q^q + 2\beta t_n^{(\alpha+\mu)-2} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^+|^\alpha |v_n^+|^\mu.$$

Se supomos que $t_n \to \infty$, invocando (1.11), concluímos que $||z_n|| \to \infty$, pois $2 < p, q, \alpha + \mu < 2^*$, e $z \in A^\infty$. Por outro lado, se supomos que $t_n \to 0$, argumentando como acima, temos que $||z_n|| \to 0$. Estes fatos contradizem $z_n \to z \in A^\infty$. Consequentemente, existem constantes $0 < T_1, T_2 < \infty$ tais que

$$T_1 \leq t_n := t(z_n) \leq T_2. \tag{1.12}$$

Portanto, passando a um subsequência se necessário, existe $T_1 \leq \tilde{t} \leq T_2$, tal que

$t(z_n) \to \tilde{t}$. Consequentemente,

$$0 = \lim \langle I'(t(z_n)z_n), z_n \rangle = \lim \frac{1}{t(z_n)} \langle I'(t(z_n)z_n), t(z_n)z_n \rangle = \frac{1}{\tilde{t}} \left\langle I'(\tilde{t}z), \tilde{t}z \right\rangle .$$

Então $\tilde{t}z \in \mathcal{M}_\beta$, e portanto $\tilde{t} = t(z)$. Na verdade, usando os mesmos argumentos acima verificamos que cada subsequência de $t(z_n)$ tem uma subsequência convergindo para $t(z)$. Logo a sequência original converge para $t(z)$. Isto estabelece que $z \mapsto t(z)$ é contínua em A^∞.

Portanto, a continuidade de $z \mapsto t(z)$ implica na continuidade ϕ_β. Além disso, como ϕ_β é a inversa da retração, $z \mapsto \dfrac{z}{||z||}, z \in \mathcal{M}_\beta$. Concluímos que ϕ_β define um homeomorfismo entre $A^\infty \subset S^\infty$ e $\mathcal{M}_\beta$. O lema está demonstrado. ∎

Observação 1.4. *1. Os mesmos argumentos utilizados para a demonstração do lema acima estabelecem que dado $z \in \mathbb{E}^+ = \{z \in \mathbb{E} : z^+ \not\equiv 0\}$, existe um único $t = t(z) > 0$, dependendo de $\beta > 0$, tal que $t(z)z \in \mathcal{M}_\beta$. Além disso, a função $z \mapsto t(z), z \in \mathbb{E}^+$ é contínua.*

2. O Lema 1.3 e o item (1) acima continuam válidos se consideramos A_p^∞, $\mathcal{N}_p$ e $\mathbb{E}_1^+ := \{u \in \mathbb{E}_1 : u^+ \not\equiv 0\}$ no lugar de A^∞, $\mathcal{M}_\beta$ e $\mathbb{E}^+$, respectivamente. Nesse caso vamos denotar o homeomorfismo existente entre A_p^∞e $\mathcal{N}_p$ por $\sigma_p(u) = t_p(u)u$.

O Lema 1.3 ainda continua válido se o acoplamento for crítico.

No próximo lema verificamos que $\mathcal{M}_\beta$ é de classe C^1 e adicionalmente estabelecemos que o funcional I é limitado inferiormente e coercivo em $\mathcal{M}_\beta$.

Lema 1.5. *(i) Suponha que $z \in \mathcal{M}_\beta$. Então, existe uma constante $\eta > 0$ tal que $\langle \psi'(z), z \rangle < -\eta$. Consequentemente, $\mathcal{M}_\beta$ é de classe C^1.*

(ii) Existe $C > 0$ tal que $I(z) \geq C$, para todo $z \in \mathcal{M}_\beta$. Além disso, I é coercivo sobre $\mathcal{M}_\beta$.

(iii) $\partial \mathcal{M}_\beta = \emptyset$.

Demonstração: (**i**) seja $z \in \mathcal{M}_\beta$, então por (1.6), temos

$$||z||^2 = |u^+|_p^p + |v^+|_q^q + 2\beta \int_{\mathbb{R}^N} |u^+|^\alpha |v^+|^\mu. \tag{1.13}$$

Pelo Teorema das imersões de Sobolev existe uma constante positiva C_0, tal que

$$||z||^2 \leq C_0(||z||^p + ||z||^q + ||z||^{\alpha+\mu}).$$

Como $p, q, \alpha + \mu > 2$, obtemos que existe $\delta > 0$, tal que

$$||z||^2 \geq \delta > 0, \text{ para todo } z \in \mathcal{M}_\beta. \tag{1.14}$$

Pela definição de ψ e o fato que $z \in \mathcal{M}_\beta$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \psi'(z), z \rangle &= 2||z||^2 - p|u^+|_p^p - q|v^+|_q^q - 2(\alpha+\mu)\beta \int_{\mathbb{R}^N} |u^+|^\alpha |v^+|^\mu \\ &= (2-p)|u^+|_p^p + (2-q)|v^+|_q^q + 2\beta(2-(\alpha+\mu)) \int_{\mathbb{R}^N} |u^+|^\alpha |v^+|^\mu \\ &\leq -C||z||^2, \end{aligned} \tag{1.15}$$

onde $C = \min\{(p-2), (q-2), 2\beta((\alpha+\mu)-2)\}$

Usando (1.14) podemos concluir que existe $\eta > 0$ tal que $\langle \psi'(z), z \rangle < -\eta$.

Agora, como $2 < p, q, \alpha + \mu < 2^*$, temos que $\psi \in C^1(\mathbb{E}, \mathbb{R})$, além disto, $\psi'(z) \not\equiv 0$. Então, pelo Teorema da função implícita, concluímos que $\mathcal{M}_\beta$ é de classe C^1.

(**ii**) Dado $z \in \mathcal{M}_\beta$ por (1.6), podemos escrever

$$I(z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)|u^+|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)|v^+|_q^q + 2\beta\left(1 - \frac{1}{\alpha+\mu}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |u^+|^\alpha |v^+|^\mu. \tag{1.16}$$

Considerando $\tilde{C} = \min\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right), \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right), 2\beta\left(1 - \frac{1}{\alpha+\mu}\right)\right\}$ e a definição de $\mathcal{M}_\beta$, obtemos

$$I(z) \geq \tilde{C}\left(|u^+|_p^p + |v^+|_q^q + \int_{\mathbb{R}^N} |u^+|^\alpha |v^+|^\mu\right) = \tilde{C}||z||^2.$$

Invocando (1.14) temos que I é limitado inferiormente. Além disto, $||z|| \to \infty$ implica que $I(z) \to \infty$.

(**iii**) Para verificarmos que $\partial\mathcal{M}_\beta = \emptyset$, supomos por contradição que existe $z \in \partial\mathcal{M}_\beta$. Assim, existe uma sequência $(z_n) \subset \mathcal{M}_\beta$ tal que $z_n \to z$. Pelo Lema 1.3, $z^+ \equiv 0$ e, consequentemente $z_n^+ \to 0$. Passando a uma subsequência, se necessário, obtemos que $|u_n^+|_p^p, |v_n^+|_q^q$ e $\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^+|^\alpha |v_n^+|^\mu \to 0$. Logo,

$$||z_n||^2 = |u_n^+|_p^p + |v_n^+|_q^q + 2\beta \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^+|^\alpha |v_n^+|^\mu \to 0.$$

Mas isto contradiz (1.14). O Lema está demonstrado. ■

Para finalizar essa seção verificamos que $\mathcal{M}_\beta$ contém todos os pontos críticos não triviais de I em $\mathbb{E}$.

Proposição 1.6. *$z \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ é ponto crítico de I se, e somente se, $z \in \mathcal{M}_\beta$ e z é um ponto crítico de I sobre $\mathcal{M}_\beta$.*

Demonstração: Se z é um ponto crítico não trivial de I sobre $\mathcal{M}_\beta$, usando o lema anterior e aplicando o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle I'(z), w\rangle = \lambda \langle \psi'(z), w\rangle, \qquad \text{para todo } w \in \mathbb{E}.$$

Em particular,

$$0 = \psi(z) = \langle I'(z), z\rangle = \lambda \langle \psi'(z), z\rangle.$$

Usando o lema anterior mais uma vez concluímos que $\lambda = 0$. Consequentemente, $I'(z) = 0$ e z é um ponto crítico de I sobre $\mathbb{E}$. Por outro lado, se z é um ponto crítico não trivial de I, então $\langle I'(z), w\rangle = 0$, para todo $w \in \mathbb{E}$. Portanto, $\langle I'(z), z\rangle = 0$ e $z \in \mathcal{M}_\beta$. A proposição está demonstrada. ∎

1.3 A Condição de Palais-Smale

Começamos essa seção relembrando a definição da condição de Palais-Smale sobre uma variedade. Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Banach , $\mathcal{M}$ uma variedade de classe C^1 de $\mathbb{X}$ e $I : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1.

1. Dizemos que $(z_n) \subset \mathbb{X}$ é uma sequência de Palais-Smale sobre $\mathcal{M}$ no nível $c \in \mathbb{R}$, $(PS)_c$ sobre $\mathcal{M}$, se (z_n) satisfaz: (i) $I(z_n) \to c$ e (ii) $I'\big|_{\mathcal{M}}(z_n) \to 0$, onde $I'\big|_{\mathcal{M}}(z)$ é a projeção de $I'(z)$ sobre $T_z\mathcal{M}$.

2. I satisfaz a condição $(PS)_c$ sobre $\mathcal{M}$ se toda sequência $(PS)_c$ sobre $\mathcal{M}$, tem uma subsequência convergente em $\mathcal{M}$.

O lema a seguir nos garante que sempre podemos supor que se (z_n) é uma sequência (PS) então (z_n) é uma sequência de termos não negativos. Portanto a partir da demonstração do próximo lema sempre vamos admitir este fato.

Lema 1.7. *Suponha que $(z_n) \subset \mathbb{E}$ é uma sequência $(PS)_c$ associada a I. Então, $(z_n^+) \subset \mathbb{E}$ é uma sequência $(PS)_c$ associada a I.*

Demonstração: Inicialmente note que se $(z_n) \subset \mathbb{E}$ é uma sequência $(PS)_c$ associada a I então

$$||z_n^-|| = o_n(1). \tag{1.17}$$

De fato, como $(z_n) \subset \mathbb{E}$ é uma sequência $(PS)_c$, então

$$o_n(1) = \left\langle I'(z_n), z_n^- \right\rangle = -||z_n^-||^2.$$

Consequentemente podemos escrever $||z_n||^2 = ||z_n^+||^2 + o_n(1)$. Por esta relação e (1.17), temos que

$$|I(z_n) - I(z_n^+)| = \frac{1}{2}||z_n||^2 - \frac{1}{2}||z_n^+||^2 = o_n(1).$$

Logo $I(z_n^+) \to c$. Resta verificar então, que $I'(z_n^+) = o_n(1)$. Para isso note que dado $w \in \mathbb{E}$, temos

$$|\left\langle I'(z_n) - I'(z_n^+), w \right\rangle| = |\left\langle z_n, w \right\rangle - \left\langle z_n^+, w \right\rangle| = |\left\langle z_n^-, w \right\rangle|.$$

Consequentemente, invocando (1.17) mais uma vez, temos

$$\sup_{||w|| \leq 1} |\left\langle I'(z_n) - I'(z_n^+), w \right\rangle| \leq ||z_n^-|| = o_n(1).$$

Portanto $I'(z_n^+) = o_n(1)$. Logo, (z_n^+) é uma sequência $(PS)_c$ associada a I. O Lema está demonstrado. ∎

Tendo em vista o Lema 1.7, sempre que considerarmos uma sequência de $(PS)_c$ vamos supor sem perda de generalidade que $z_n \geq 0$. O lema acima ainda é válido para o caso em que o acoplamento é crítico.

O lema a seguir nos fornece a compacidade das imersões de $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ nos espaços $L^r(\mathbb{R}^N),\ 2 < r < 2^*$.

Lema 1.8. *(Teorema de Strauss [21]) As imersões $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ são compactas para $r \in (2, 2^*)$.*

Baseados no resultado acima, estabelecemos

Lema 1.9. *Suponha que $(z_n) \subset \mathbb{E}$ é uma sequência $(PS)_c$ tal que $z_n \rightharpoonup z$ fracamente em $\mathbb{E}$. Então, z é uma solução (fraca) do Sistema (3).*

Demonstração: Como $z_n \rightharpoonup z$ fracamente em $\mathbb{E}$, invocando o Lema 1.8, e passando a uma subsequência se necessário, obtemos que

$$\begin{cases} z_n \to z \text{ in } (L^r(\mathbb{R}^N))^2,\ r \in (2, 2^*) \\ z_n(x) \to z(x) \text{ q.t.p } \mathbb{R}^N \\ |z_n(x)| = |u_n(x)| + |v_n(x)| \leq h_s(x) \in L^s(\mathbb{R}^N), s \in (2, 2^*) \end{cases} \tag{1.18}$$

Utilizando as relações acima e o Teorema da Convergência de Lebesgue, temos que, dado $w = (\phi, \psi) \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^N))^2$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^{p-1}\phi + |v_n|^{q-1}\psi) = \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^{p-1}\phi + |v|^{q-1}\psi) + o_n(1), \tag{1.19}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|v_n|^{\mu}|u_n|^{\alpha-1}\phi + |u_n|^{\alpha}|v_n|^{\mu-1}\psi) = \int_{\mathbb{R}^N} (|v|^{\mu}|u|^{\alpha-1}\phi + |u|^{\alpha}|v|^{\mu-1}\psi) + o_n(1) \tag{1.20}$$

De fato, basta observar que

$$||v_n|^{\mu}|u_n|^{\alpha-1}\phi| \leq C(|u_n|^{\alpha+\mu-1} + |v_n|^{\alpha+\mu-1}) \leq |h| \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

$$||v_n|^{\mu-1}|u_n|^{\alpha}\psi| \leq C(|u_n|^{\alpha+\mu-1} + |v_n|^{\alpha+\mu-1}) \leq |h| \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Agora, usando (1.19) e (1.20) e lembrando que $I'(z_n) \to 0$ e que $z_n \rightharpoonup z$, fracamente em $\mathbb{E}$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \lim \langle I'(z_n), w \rangle &= \langle z, w \rangle_{\mathbb{E}} - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}\phi - \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{q-1}\psi \\ &- \frac{2\beta}{\alpha + \mu} \int_{\mathbb{R}^N} (\alpha|u|^{\alpha-1}|v|^{\mu}\phi + \mu|u|^{\alpha}|v|^{\mu-1}\psi). \end{aligned}$$

Portanto,

$$0 = \langle I'(z), w \rangle, \text{ para todo } w = (\phi, \psi) \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^N))^2$$

Agora como $I \in C^1(\mathbb{E}, \mathbb{R})$, por densidade, segue que de fato

$$\langle I'(z), w \rangle = 0, \quad \text{para todo } w \in \mathbb{E}. \tag{1.21}$$

Consequentemente temos que z é uma solução (fraca) do Sistema (3). O lema está demonstrado. ■

Observamos que o lema acima e sua demonstração continuam válidos para o caso em que acoplamento tem crescimento crítico. Observamos que, como o Sistema (3) tem crescimento subcrítico, na demonstração do Lema 1.9, podemos utilizar $w \in \mathbb{E}$ em vez de $w \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^N))^2$. Mas como no próximo capítulo consideramos o caso em que o acoplamento tem crescimento crítico fizemos a demonstração no caso mais geral.

No próximo lema verificamos que o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale sobre $\mathbb{E}$. Logo a seguir, como consequência desse resultado, verificamos que o funcional também satisfaz a condição de Palais - Smale sobre $\mathcal{M}_\beta$.

Lema 1.10. *I satisfaz a condição $(PS)_c$ em $\mathbb{E}$.*

Demonstração: Seja $(z_n) \subset \mathbb{E}$ uma sequência tal que $I(z_n) \to c$ e $I'(z_n) \to 0$.

Considerando $2 < \theta < \min\{p, q, \alpha + \mu\}$, temos

$$
\begin{aligned}
c + 1 &\geq I(z_n) - \frac{1}{\theta} \langle I'(z_n), z_n \rangle \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) ||z_n||^2 + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}\right) |u_n|_p^p + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q}\right) |v_n|_q^q \\
&+ 2\beta \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\alpha + \mu}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha |v_n|^\mu .
\end{aligned}
$$

Assim, (z_n) é limitada em $\mathbb{E}$ e, a menos de subsequência podemos assumir que $z_n \rightharpoonup z$ fracamente em $\mathbb{E}$.

Agora, como $I'(z_n) \to 0$, obtemos

$$||z_n||^2 = |u_n|_p^p + |v_n|_q^q + 2\beta \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha |v_n|^\mu + o_n(1). \tag{1.22}$$

Lembrando que $2 < p, q < 2^*$, por (1.18), concluímos que

$$|u_n|_p^p = |u|_p^p + o_n(1) \;\text{ e }\; |v_n|_q^q = |v|_q^q + o_n(1). \tag{1.23}$$

Além disso, argumentando como em (1.11), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha |v_n|^\mu = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^\alpha |v|^\mu + o_n(1).$$

Portanto, invocando (1.22) e (1.23) podemos concluir que

$$||z_n||^2 = |u|_p^p + |v|_q^q + 2\beta \int_{\mathbb{R}^N} |u|^\alpha |v|^\mu + o_n(1). \tag{1.24}$$

Por outro lado, invocando (1.21), temos que

$$\langle I'(z), z \rangle = 0$$

e consequentemente

$$||z||^2 = |u|_p^p + |v|_q^q + 2\beta \int_{\mathbb{R}^N} |u|^\alpha |v|^\mu . \tag{1.25}$$

Invocando (1.24), obtemos que $||z_n||^2 = ||z||^2 + o_n(1)$. Portanto, $z_n \to z$. O lema está demonstrado. ■

Como consequência do Lema 1.10, obtemos o seguinte

Proposição 1.11. *I satisfaz a condição $(PS)_c$ sobre $\mathcal{M}_\beta$.*

Demonstração: Seja $(z_n) \subset \mathcal{M}_\beta$ uma sequência $(PS)_c$ sobre $\mathcal{M}_\beta$, isto é, $I(z_n) \to c$ e $I'\big|_{\mathcal{M}_\beta}(z_n) \to 0$. Afirmamos que (z_n) é uma sequência $(PS)_c$ em $\mathbb{E}$. De fato, usando o Lema 1.5, obtemos que I é coercivo sobre $\mathcal{M}_\beta$, então (z_n) é limitada sobre $\mathbb{E}$. Como $I'\big|_{\mathcal{M}_\beta}(z)$ é a projeção de $I'(z)$ sobre $T_z\mathcal{M}_\beta$ e $\psi'(z)$ é normal a $\mathcal{M}_\beta$, existe uma sequência $(\xi_n) \subset \mathbb{R}$ tal que

$$I'(z_n) = \xi_n \psi'(z_n) + I'\big|_{\mathcal{M}_\beta}(z_n).$$

Como $I'\big|_{\mathcal{M}_\beta}(z_n) \to 0$, obtemos

$$I'(z_n) = \xi_n \psi'(z_n) + o_n(1). \tag{1.26}$$

Lembrando que $(z_n) \subset \mathcal{M}_\beta$, podemos concluir que $\langle I'(z_n), z_n\rangle = 0$, e portanto

$$0 = \langle I'(z_n), z_n\rangle = \xi_n \langle \psi'(z_n), z_n\rangle + o_n(1). \tag{1.27}$$

Pelo Lema 1.5-(i) obtemos que $\xi_n = o_n(1)$.

Por outro lado, temos que $||\psi'(z_n)||_{\mathbb{E}'} = \sup\limits_{||w||\le 1} \langle \psi'(z_n), w\rangle$, $\quad w = (w_1, w_2) \in \mathbb{E}$, é limitado. De fato, por (1.4)

$$\begin{aligned}
|\langle \psi'(z_n), w\rangle| &= |2\langle z_n, w\rangle_{\mathbb{E}} - p\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-1} w_1 - q\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{q-1} w_2 \\
&- 2\beta \int_{\mathbb{R}^N} (\alpha |u_n|^{\alpha-1}|v_n|^{\mu} w_1 + \mu |u_n^+|^{\alpha}|v_n|^{\mu-1} w_2)| \\
&\le 2|\langle z_n, w\rangle_{\mathbb{E}}| + p\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^+|^{p-1}|w_1| + q\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{q-1}|w_2| \\
&+ 2\beta \int_{\mathbb{R}^N} (\alpha |u_n^+|^{\alpha-1}|v_n|^{\mu}|w_1| + \mu |u_n|^{\alpha}|v_n|^{\mu-1}|w_2|).
\end{aligned}$$

Vamos estimar apenas uma das integrais acima, as outras são similares. Note que pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{\alpha-1}|v_n|^{\mu}|w_1| \le \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{\alpha+\mu}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha+\mu}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{\alpha+\mu}\right)^{\frac{\mu}{\alpha+\mu}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |w_1|^{\alpha+\mu}\right)^{\frac{1}{\alpha+\mu}}.$$

Observando que $2 < \alpha + \mu < 2^*$, usando as imersões de Sobolev e considerando $||w|| \le 1$, obtemos uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{\alpha-1}|v_n|^{\mu}|w_1| \le C_0.$$

Procedendo similarmente com as outras integrais obtemos uma constante $C_1 > 0$ tal que $||\psi'(z_n)||_{\mathbb{E}'} \leq C_1$. Consequentemente por (1.26) e (1.27) temos que $I'(z_n) \to 0$. Portanto pelo Lema 1.10, passando a uma subsequência se necessário, $z_n \to z$ fortemente em E. Por (1.14) temos que $z \not\equiv 0$. Logo, $z \in \mathcal{M}_\beta$. A Proposição está demonstrada. ∎

Observação 1.12. *1. Note que a Proposição 1.11 ainda é válida se consideramos o funcional J_p e a variedade de Nehari associada $\mathcal{N}_p$ no lugar de I e $\mathcal{M}_\beta$, respectivamente.*

2. Na demonstração da Proposição 1.11 verificamos que se (z_n) é uma sequência $(PS)_c$ associada ao funcional I restrita à variedade de Nehari, então (z_n) é uma sequência $(PS)_c$ associada ao funcional I em $\mathbb{E}$. Este fato ainda é válido se consideramos o sistema com o acoplamento tendo um crescimento crítico, pois para demonstrar este fato só necessitamos de imersões contínuas.

Na próxima seção exploramos a presença das soluções semitriviais, z_1 e z_2 do Sistema (3), para estabelecermos estimativas locais para o funcional I associado, restrito à variedade de Nehari.

1.4 Estimativas Locais sobre a Variedade de Nehari

Os dois primeiros resultados demonstrados nessa seção são técnicos, e nos auxiliam nas demonstrações dos resultados principais propostos aqui. Na primeira proposição, obtemos uma estimativa local para o funcional I, sem nenhuma restrição no tipo de acoplamento quando $\beta > 0$ é suficientemente pequeno. Em seguida consideramos o acoplamento linear ou superlinear em relação à uma das variáveis. No caso em que o acoplamento for linear em relação à uma das variáveis, obtemos uma estimativa similar a obtida em [2, 3]. Já no caso em que o acoplamento for duplamente superlinear obtemos uma estimativa local para todo $\beta > 0$.

Lema 1.13. *Seja $u_1 > 0$ a única solução positiva e radial do Problema (4). Então dado, $d > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$J_p(u) \geq J_p(u_1) + \delta, \quad \text{para todo } u \in \mathcal{N}_p, \quad ||u - u_1||_1 \geq d.$$

Demonstração: Inicialmente lembramos que usando a Observação 1.12-(1), temos que J_p satisfaz a condição (PS) sobre à variedade $\mathcal{N}_p$. Agora considerando $c = c_1 = J_p(u_1)$

$\bar{\epsilon} = 1$ e $\mathcal{O} = B_d(u_1) \cap \mathcal{N}_p$, podemos aplicar o Lema de Deformação (veja Theorem A4 e Remark (iv) em [32]) para obter $\epsilon \in (0,1)$ e um homeomorfismo $\eta : \mathcal{N}_p \to \mathcal{N}_p$ tal que

$$\eta\left(J_p^{c_1+\epsilon} \setminus B_d(u_1) \cap \mathcal{N}_p\right) \subset J_p^{c_1-\epsilon}. \tag{1.28}$$

Aqui lembramos que $J_p^r = \{u \in \mathcal{N}_p : J_p(u) \leq r\}$. Se tivéssemos $u \notin B_d(u_1) \cap \mathcal{N}_p$ tal que $J_p(u) \leq J_p(u_1) + \epsilon = c_1 + \epsilon$, por (1.28) teríamos que $c_1 \leq J_p(\eta(u)) \leq c_1 - \epsilon$, mas isto contradiz o fato de c_1 ser mínimo global de J_p sobre $\mathcal{N}_p$. O lema está demonstrado. ■

A partir deste momento, neste trabalho, denotamos $w_1 = z_1/||z_1|| = (\hat{u}_1, 0)$, $\quad \hat{u}_1 = u_1/||u_1||_1$. Analogamente, definimos $w_2 = z_2/||z_2||$.

Lembramos que, pelo Lema 1.3, $\phi_\beta : A^\infty \to \mathcal{M}_\beta$, definida por $\phi_\beta(w) = t_\beta(w)w$, é um homeomorfismo. Além disto, por construção, $\phi_\beta(w_1) = z_1$ e $\phi_\beta(w_2) = z_2$.

Dado $\rho > 0$, denotamos por $V_\rho = B_\rho(w_i) \cap A^\infty$, i=1, 2, uma vizinhança de w_i em A^∞ e consideramos $\partial V_\rho = \partial B_\rho(w_i) \cap A^\infty$, a fronteira de V_ρ em A^∞.

Lema 1.14. *Seja $\sigma_p : \mathbb{E}_1^+ \to \mathcal{N}_p$, a aplicação definida na Observação 1.4-(2). Então,*

(1) existe $\bar{\rho} > 0$ tal que $\hat{u} \in \mathbb{E}_1^+$, para todo $w = (\hat{u}, \hat{v}) \in V_{\bar{\rho}} = B_{\bar{\rho}}(w_1) \cap A^\infty$,

(2) dado $\rho \in (0, \bar{\rho})$, existe $\epsilon > 0$ tal que $||\sigma_p(\hat{u}) - u_1||_1 \geq \epsilon$, para todo $w \in \partial V_\rho$, $||\hat{v}||_2 < \epsilon$.

Demonstração: Tendo em vista a continuidade da aplicação $f : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_1$, $f(u) = u^+$, o fato de $u_1 > 0$ e que $||w - w_1||^2 = ||\hat{u} - \hat{u}_1||_1^2 + ||\hat{v}||_2^2$, $\hat{u}_1 = \frac{u_1}{||u_1||_1}$, encontramos $\bar{\rho} > 0$ satisfazendo (1).

A seguir, argumentamos por contradição e supomos que existe $\rho \in (0, \bar{\rho})$ e que não satisfaz (2). Então, encontramos uma sequência $(w_k) = (\hat{u}_k, \hat{v}_k) \subset \partial V_\rho$ tal que

$$||\hat{v}_k||_2 \to 0 \text{ e } ||\sigma_p(\hat{u}_k) - u_1||_1 \to 0. \tag{1.29}$$

Em particular, $\sigma_p(\hat{u}_k) \to u_1$ em $\mathbb{E}_1$. Consequentemente, definindo

$$x_k = \frac{\hat{u}_k}{||\hat{u}_k||_1} = \frac{\sigma_p(\hat{u}_k)}{||\sigma_p(\hat{u}_k)||_1},$$

utilizamos a relação (1.29), para concluir que $x_k \to \frac{u_1}{||u||_1}$. Além disso, como $1 = ||w_k||^2 = ||\hat{u}_k||_1^2 + ||\hat{v}_k||_2^2$, temos que $||\hat{u}_k||_1^2 \to 1$. Finalmente, usando a relação acima, segue que

$$\begin{aligned} ||\hat{u}_k - \hat{u}_1||_1 &\leq ||\hat{u}_k - x_k||_1 + ||x_k - \hat{u}_1||_1 \\ &= \frac{1}{||\hat{u}_k||_1} ||\hat{u}_k(||\hat{u}_k||_1 - 1)||_1 + ||x_k - \hat{u}_1||_1 \\ &= |||\hat{u}_k||_1 - 1| + ||x_k - \hat{u}_1||_1. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\hat{u}_k \to \hat{u}_1$ em $\mathbb{E}_1$. No entanto este fato contradiz (1.29) e a relação

$$0 < \rho^2 = ||w_k - w_1||^2 = ||\hat{u}_k - \hat{u}_1||_1^2 + ||\hat{v}_k||_2^2.$$

O lema está demonstrado. ∎

A proposição a seguir nos fornece uma estimativa local de I sobre à variedade de Nehari sem restrição no acoplamento, quando $\beta > 0$ é suficientemente pequeno.

Proposição 1.15. *Suponha que $u_1, v_1 > 0$ sejam as soluções radiais dos Problema (4) e (5), respectivamente. Então, existem $\beta_0, \delta > 0$ tais que, para todo $\beta \in [0, \beta_0)$, existem vizinhanças U_β^1 e U_β^2 em $\mathcal{M}_\beta$ de z_1 e z_2, respectivamente, com $\overline{U_\beta^1} \cap \overline{U_\beta^2} = \emptyset$, tais que*

$$I(z) \geq I(z_i) + \delta, \ i = 1, \ 2, \ \textit{para todo } z \in \partial U_\beta^i.$$

Demonstração: A demonstração será feita para o caso $i = 1$. A demonstração para o caso $i = 2$ é similar. Inicialmente consideramos $\rho < \min\{\bar{\rho}, \frac{||w_1 - w_2||}{2}\} = \rho_1$, com $\bar{\rho} > 0$ dado pelo Lema 1.14. Seja $w = (\hat{u}, \hat{v}) \in V_\rho = B_\rho(w_1) \cap A^\infty$. Tendo em vista que $\rho < \bar{\rho}$, pelo Lema 1.14, $\hat{u} \in \mathbb{E}_1^+$.

Invocando o Lema 1.3 e a Observação 1.4, concluímos que

$$\max_{t>0} I(tw) = I(\phi_\beta(w)) \geq I(t_p(\hat{u})w), \quad \text{para todo } w = (\hat{u}, \hat{v}) \in V_\rho.$$

Portanto, pela estimativa acima e a definição de I, obtemos

$$\begin{aligned} I(\phi_\beta(w)) \ &\geq \ \frac{t_p^2(\hat{u})}{2}||\hat{u}||_1^2 + \frac{t_p^2(\hat{u})}{2}||\hat{v}||_2^2 - \frac{t_p^p(\hat{u})}{p}|\hat{u}^+|_p^p - \frac{t_p^q(\hat{u})}{q}|\hat{v}^+|_q^q \\ &- \ \frac{2\beta}{\alpha+\mu}t_p^{\alpha+\mu}(\hat{u})\int_{\mathbb{R}^N}|\hat{u}^+|^\alpha|\hat{v}^+|^\mu \\ &= \ J_p(\sigma_p(\hat{u})) + \frac{t_p^2(\hat{u})}{2}||\hat{v}||_2^2 - \frac{t_p^q(\hat{u})}{q}|\hat{v}^+|_q^q - \frac{2\beta}{\alpha+\mu}t_p^{\alpha+\mu}(\hat{u})\int_{\mathbb{R}^N}|\hat{u}^+|^\alpha|\hat{v}^+|^\mu, \end{aligned} \tag{1.30}$$

onde usamos o Lema 1.3 e a Observação 1.4 para escrever $\sigma_p(\hat{u}) = t_p(\hat{u})\hat{u}$.

A seguir, usando a estimativa (1.30), a desigualdade de Hölder e o Teorema das Imersões de Sobolev, obtemos constantes $C_1, C_2 > 0$, tais que se $w = (\hat{u}, \hat{v}) \in V_\rho$

$$I(\phi_\beta(w)) \geq J_p(\sigma_p(\hat{u})) + \frac{t_p^2(\hat{u})}{2}||\hat{v}||_2^2 - C_1\frac{t_p^q(\hat{u})}{q}||\hat{v}||_2^q - \frac{2\beta}{\alpha+\mu}C_2 t_p^{\alpha+\mu}(\hat{u})||\hat{u}||_1^\alpha||\hat{v}||_2^\mu. \tag{1.31}$$

Uma vez que $||\hat{u} - \hat{u}_1||_1 \leq ||w - w_1|| < \rho$, temos que $\hat{u} \in B_\rho(\hat{u}_1)$. Consequentemente, usando a Observação 1.4 e considerando $\rho > 0$ menor se necessário, encontramos constantes

$T_1, T_2 > 0$ tais que

$$T_1 \leq t_p(\hat{u}) \leq T_2, \text{ para todo } w \in V_\rho. \tag{1.32}$$

Portanto, usando essa relação, (1.31) e a limitação de w, encontramos $C_3 > 0$, tal que

$$I(\phi_\beta(w)) \geq J_p(\sigma_p(\hat{u})) + ||\hat{v}||_2^2 \left(\frac{T_1^2}{2} - C_1 \frac{T_2^q}{q} ||\hat{v}||^{q_2 - 2} \right) - C_3\beta \text{ para todo } w \in V_\rho.$$

Logo, tomando $\rho > 0$ suficientemente pequeno, obtemos $C_4 > 0$ tal que

$$I(\phi_\beta(w)) \geq J_p(\sigma_p(\hat{u})) + C_4 ||\hat{v}||_2^2 - C_3\beta, \text{ para todo } w \in V_\rho. \tag{1.33}$$

A seguir, fixamos $0 < \rho_0 < \rho < \rho_1 \leq \bar{\rho}$ e aplicamos o Lema 1.14 para obter $\epsilon > 0$ tal que

$$||\sigma(\hat{u}) - u_1||_1 \geq \epsilon, \quad \text{para todo } w \in \partial V_{\rho_0}, \ \ ||\hat{v}||_2 < \epsilon. \tag{1.34}$$

A estimativa para I com $w \in \partial V_{\rho_0}$ é feita de acordo com as duas possibilidades a seguir.

(a) $||\hat{v}||_2 < \epsilon$. Neste caso, usando (1.33), a afirmação acima e o Lema 1.13 temos que existe $\bar{\delta} > 0$, tal que

$$I(\phi_\beta(w)) \geq J_p(u_1) + \bar{\delta} - C_3\beta, \text{ para todo } w \in \partial V_{\rho_0}. \tag{1.35}$$

(b) $||\hat{v}||_2 \geq \epsilon$. Neste caso, usando (1.33) e o fato que $\sigma_p(\hat{u}) \in \mathcal{N}_p$ e que $u_1 > 0$ é um ponto de mínimo global para J_p sobre $\mathcal{N}_p$, temos

$$I(\phi_\beta(w)) \geq J_p(u_1) + C_4\epsilon^2 - C_3\beta, \text{ para todo } \partial V_{\rho_0}. \tag{1.36}$$

Portanto, considerando $\beta_0 = \min\{\frac{\bar{\delta}}{2C_3}, \frac{C_4\epsilon^2}{2C_2}\}$ e tendo em vista as estimativas (1.35) e (1.36) encontramos $\delta > 0$ tal que, para todo $\beta \in [0, \beta_0)$,

$$I(\phi_\beta(w)) \geq J_p(u_1) + \delta = I(z_1) + \delta, \text{ para todo } w \in \partial V_{\rho_0}.$$

Pelo mesmo argumento, encontramos $0 < \tilde{\rho}_0 < \rho_1$ e $\delta > 0$ tais que

$$I(\phi_\beta(w)) \geq I(z_2) + \delta, \text{ para todo } w \in \partial V_{\tilde{\rho}_0},$$

onde $V_{\tilde{\rho}_0} = B_{\tilde{\rho}_0}(w_2) \cap A^\infty$. Para finalizar a demonstração basta tomar $U_\beta^1 = \phi_\beta(V_{\rho_0})$ e

$U_\beta^2 = \phi_\beta(V_{\tilde{\rho}_0})$. Como $0 < \rho_0, \tilde{\rho}_0 < \min\{\bar{\rho}, \frac{||w_1 - w_2||}{2}\}$, temos que $\overline{V_{\rho_0}} \cap \overline{V_{\tilde{\rho}_0}} = \emptyset$. Pelo Lema 1.3, ϕ_β é um homeomorfismo. Portanto, temos que $\overline{U_\beta^1}$ e $\overline{U_\beta^2}$ são vizinhanças de z_1 e z_2, respectivamente, que satisfazem a estimativa da tese da Proposição 1.15, e além disto, $\overline{U_\beta^1} \cap \overline{U_\beta^2} = \emptyset$. A Proposição está demonstrada. ∎

Antes de enunciarmos o próximo resultado, como já foi comentado na Introdução, lembramos que em [22, 31] ou [40], Appendix A foi demonstrado que o problema

$$-\Delta u + u = |u|^{r-2}u, \ 2 < r < 2^*, \tag{1.37}$$

tem uma única solução positiva e radial(a menos de translação), e essa solução é não degenerada no espaço das funções radialmente simétricas, $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Observamos ainda que, se U_r denota esta solução então

$$u_1(x) = \lambda_1^{\frac{1}{p-2}} U_p\left(\sqrt{\lambda_1}x\right) \quad \text{e} \quad v_1(x) = \lambda_2^{\frac{1}{q-2}} U_q\left(\sqrt{\lambda_2}x\right)$$

são soluções dos problemas escalares (4) e (5), respectivamente.

Tendo em vista u_1 e v_1, citados acima, definimos

$$\gamma_{1,\alpha}^2 = \inf_{\varphi \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{(\alpha+2)||\varphi||_2^2}{4\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^\alpha |\varphi|^2} \ \text{ e } \ \gamma_{2,\mu}^2 = \inf_{\varphi \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{(\mu+2)||\varphi||_1^2}{4\int_{\mathbb{R}^N} |v_1|^\mu |\varphi|^2}.$$

Com isto, temos o seguinte resultado

Lema 1.16. *Existe $\phi \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, $\phi > 0$, tal que*

$$\gamma_{1,\alpha}^2 = \frac{(\alpha+2)||\phi||_2^2}{4\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^\alpha |\phi|^2}. \tag{1.38}$$

Demonstração: De fato, inicialmente observamos que $\gamma_{1,\alpha}^2 > 0$. Para isto, basta observar que pela desigualdade de Hölder e o Teorema das Imersões de Sobolev encontramos $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^\alpha |\varphi|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^{\alpha+2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{\alpha+2}\right)^{\frac{2}{\alpha+2}} \leq C||\varphi||_2^2.$$

Considerando a homogeneidade de $\gamma_{1,\alpha}^2$, obtemos uma sequência $(\phi_n) \subset H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$, $||\phi_n||_2 = 1$, tal que

$$\gamma_{1,\alpha}^2 = \lim \frac{(\alpha+2)}{4\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^\alpha |\phi_n|^2}. \tag{1.39}$$

Passando a uma subsequência, se necessário, $\phi_n \rightharpoonup \phi$ fracamente em $\mathbb{E}_1$. Argumentando como em (1.18) e usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos que

$$\lim \int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^\alpha |\phi_n|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^\alpha |\phi|^2.$$

Esta relação, (1.39) e o fato que $\gamma_{1,\alpha}^2 > 0$ implicam $\phi \not\equiv 0$. Além disto, podemos concluir que

$$\gamma_{1,\alpha}^2 = \frac{\alpha+2}{4\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^\alpha |\phi|^2}.$$

Usando esse fato e lembrando que $||\phi||_2 \leq \liminf ||\phi_n||_2 = 1$, segue que

$$\gamma_{1,\alpha}^2 \leq \frac{(\alpha+2)||\phi||_2^2}{4\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^\alpha |\phi|^2} \leq \gamma_{1,\alpha}^2.$$

Agora, suponha que ϕ satisfazendo a relação (1.38) mude de sinal. Escrevendo, $\phi = \phi^+ - \phi^-$, e argumentando como em, por exemplo, [15, 26], temos

$$\frac{4}{\alpha+2}\gamma_{1,\alpha}^2 = \frac{||\phi^+||_2^2 + ||\phi^-||_2^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^\alpha |\phi^+|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^\alpha |\phi^-|^2} \geq \min\left\{ \frac{||\phi^+||_2^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^\alpha |\phi^+|^2}, \frac{||\phi^-||_2^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^\alpha |\phi^-|^2} \right\}.$$

Com esta relação, supomos sem perda de generalidade, que

$$\frac{4}{\alpha+2}\gamma_{1,\alpha}^2 = \frac{||\phi^+||_2^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^\alpha |\phi^+|^2},$$

isto é, $\phi^+ \geq 0$ satisfaz o problema de autovalor com peso,

$$-\Delta v + \lambda_2 v = \frac{4}{\alpha+2}\gamma_{1,\alpha}^2 |u_1|^\alpha v.$$

Portanto, utilizando o Princípio do Máximo Forte obtemos que $\phi^+ > 0$. Isto contradiz o fato de ϕ mudar de sinal. Consequentemente, existe $\phi \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$, $\phi > 0$ satisfazendo a relação (1.38). Isso conclui a demonstração do lema. ∎

Observamos que, um resultado análogo é válido para $\gamma_{2,\mu}^2$.

Observamos ainda que $\dfrac{4}{\alpha+2}\gamma_{1,\alpha}^2$ é o primeiro autovalor do problema

$$-\Delta v + \lambda_2 v = \theta |u_1|^\alpha v \quad v \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N),$$

e ϕ é uma auto função associada a este autovalor.

Proposição 1.17. *Suponha que* $u_1 > 0$ *seja a solução radial do Problema (4). Então, se o acoplamento for linear em relação à variável* v *e* $0 < \beta < \gamma_{1,\alpha}^2$ *ou superlinear em relação à variável* v *e* $0 < \beta < \infty$, *existem* $\delta > 0$ *e uma vizinhança* U_β^1 *de* z_1 *em* $\mathcal{M}_\beta$, *com* $z_2 \notin U_\beta^1$, *tais que*

$$I(z) \geq I(z_1) + \delta, \text{ para todo } z \in \partial U_\beta^1.$$

Demonstração: Considere $w = (\hat{u}, \hat{v}) \in V_\rho$, $0 < \rho < \rho_1 = \min\{\bar{\rho}, \frac{||w_1 - w_2||}{2}\}$, $\bar{\rho}$ dado pelo Lema 1.14. Argumentando como na Proposição 1.15, temos que $\hat{u} \in \mathbb{E}_1^+$, $\hat{u} \in B_\rho(\hat{u}_1)$ e a estimativa (1.30) é válida, isto é, para todo $w \in V_\rho$

$$I(\phi_\beta(w)) \;\; \geq \;\; J_p(\sigma_p(\hat{u})) + \frac{t_p^2(\hat{u})}{2}||\hat{v}||_2^2 - \frac{t_p^q(\hat{u})}{p}|\hat{v}^+|_q^q - \frac{2\beta}{\alpha+\mu}t_p^{\alpha+\mu}(\hat{u})\int_{\mathbb{R}^N}|\hat{u}^+|^\alpha|\hat{v}^+|^\mu.$$

Agora consideramos separamente duas situações;

(1) Suponha que acoplamento seja superlinear em relação à variável v e $0 < \beta < \infty$. Neste caso, observando que (1.31) e (1.32) são satisfeitas, obtemos constantes $C_3, C_4, C_5 > 0$, tais que para todo $w \in V_\rho$

$$I(\phi_\beta(w)) \;\; \geq \;\; J_p(\sigma_p(\hat{u})) + ||\hat{v}||_2^2\left(C_3 - C_4||\hat{v}||_2^{q-2} - C_5||\hat{v}||_2^{\mu-2}\right) \; . \tag{1.40}$$

Lembrando que $q, \mu > 2$, tomando $\rho > 0$ suficientemente pequeno e argumentando como em (1.33), obtemos

$$I(\phi_\beta(w)) \geq J_p(\sigma_p(\hat{u})) + C_6||\hat{v}||_2^2. \text{ para todo } w \in V_\rho$$

Portanto, considerando $0 < \rho_0 < \rho < \rho_1$, $w \in \partial V_{\rho_0}$ e argumentando como na Proposição 1.15 encontramos $\delta > 0$, dependendo de $\beta > 0$, tal que

$$I(\phi_\beta(w)) \geq J_p(u_1) + \delta = I(z_1) + \delta, \text{ para todo } w \in \partial V_{\rho_0}.$$

Assim, tomando $U_\beta^1 = \phi_\beta(V_{\rho_0})$ e lembrando que ϕ_β é um homeomorfismo e que $\rho_0 < \frac{||w_1 - w_2||}{2}$, obtemos que $z_2 \notin \mathcal{M}_\beta$.

(2) Suponha que o acoplamento seja linear em relação à variável v e $0 < \beta < \gamma_{1,\alpha}^2$. Neste caso, argumentando como no item anterior e invocando (1.30), temos que para todo

$w \in V_\rho$

$$I(\phi_\beta(w)) \geq J_p(\sigma_p(\hat{u})) + \frac{t_p^2(\hat{u})}{2}\left[||\hat{v}||_2^2 - \frac{4\beta}{\alpha+2}\int_{\mathbb{R}^N}|\bar{u}^+|^\alpha|\hat{v}^+|^2\right] - \frac{t_p^q(\hat{u})}{q}|\hat{v}^+|_q^q, \quad (1.41)$$

onde $\bar{u} = t_p(\hat{u})\hat{u}$.

Observando que $||\hat{u} - \hat{u}_1|| \leq ||w - w_1|| < \rho$, dado $\epsilon > 0$, utilizando a continuidade de t_p, podemos supor sem perda de generalidade que

$$|t_p(\hat{u}) - t_p(\hat{u}_1)| < \epsilon, \quad ||\hat{u} - \hat{u}_1|| < \epsilon, \quad \text{para todo } w \in V_\rho. \quad (1.42)$$

A seguir, utilizando a estimativa acima e o fato que $\beta < \gamma_{1,\alpha}^2$, podemos escolher $\epsilon > 0$, tal que

$$\frac{4\beta}{\alpha+2}\int_{\mathbb{R}^N}|\bar{u}^+|^\alpha|\hat{v}^+|^2 \leq \frac{||\hat{v}||_2^2}{\kappa}, \qquad \text{para todo } \ w \in V_\rho, \quad \text{com } \kappa > 1. \quad (1.43)$$

Utilizando o fato acima, o Teorema das Imersões de Sobolev, (1.41), (1.42) e (1.43), encontramos constantes positivas C_1, C_2, tais que

$$I(\phi_\beta(w)) \quad \geq \quad J_p(\sigma_p(\hat{u})) + C_1||\hat{v}||_2^2 - C_2||\hat{v}||_2^q, \quad \text{para todo } \ w \in V_\rho.$$

Portanto, como $q > 2$ considerando $\rho > 0$ menor se necessário, concluímos que

$$I(\phi_\beta(w)) \geq J_p(\sigma_p(\hat{u}) + C_3||\hat{v}||_2^2, \quad \text{para todo } w \in V_\rho,$$

para alguma constante $C_3 > 0$. Tomando agora $0 < \rho_0 < \rho < \rho_1$, $w \in \partial V_{\rho_0}$, invocando os Lemas 1.13, 1.14 e argumentando como na Proposição 1.15, encontramos $\delta > 0$ tal que

$$I(\phi_\beta(w)) \geq J_p(u_1) + \delta = I(z_1) + \delta, \text{ para todo } w \in \partial V_{\rho_0}.$$

Argumentando como no item (1), concluímos a demonstração do item (2). A proposição está demonstrada. ■

Observação 1.18. *Argumentando como na Proposição 1.17 se $u_2 > 0$ for a solução radial do Problema (5) e o acoplamento for linear em relação à variável u com $0 < \beta < \gamma_{2,\mu}^2$ ou superlinear na variável u e $0 < \beta < \infty$, encontramos $0 < \tilde{\rho}_0 < \rho_1$ e $\delta > 0$, tais que*

$$I(\phi_\beta(w)) \geq I(z_2) + \delta, \ \textit{para todo } w \in \partial V_{\tilde{\rho}_0},$$

onde $V_{\tilde{\rho}_0} = B_{\tilde{\rho}_0}(w_2) \cap A^\infty$. *Além disto,* $z_1 \notin \overline{U_\beta^2} = \phi_\beta(\overline{V_{\tilde{\rho}_0}})$.

1.5 Existência de Solução Positiva: Teorema 0.1

Nesta seção, verificamos que existem $\beta_0, \beta_1 > 0$ tais que o Sistema (3) possui uma solução positiva para todo $\beta \in [0, \beta_0)$ e uma solução positiva de menor energia para todo $\beta \in (\beta_1, \infty)$. Além disto, verificamos que se $I(z_1) = I(z_2)$, então o Sistema (3) possui uma solução positiva para todo $\beta > 0$.

No lema a seguir denotamos por c_1 e $c_2 > 0$ os níveis de menor energia associados aos Problemas (4) e (5), isto é

$$I(z_1) = J_p(u_1) = c_1 \quad \text{e } I(z_2) = J_q(v_1) = c_2. \tag{1.44}$$

Além disso, para obtermos uma solução positiva do Sistema (3), tendo em vista o Lema 1.5-(ii), definimos

$$c_\beta = \inf_{z \in \mathcal{M}_\beta} I(z). \tag{1.45}$$

Como consequência direta do Lema 1.5-(ii) e da Proposição 1.11, temos o seguinte

Lema 1.19. *Considere* c_β *definido por (1.45). Então, existe um ponto crítico* $z_\beta \in \mathcal{M}_\beta$ *tal que* $I(z_\beta) = c_\beta$.

O Lema acima, combinado com a Proposição 1.6 nos garante a existência de uma solução não negativa do Sistema (3). O próximo combinado com a Proposição 1.1 nos diz que essa solução é positiva para $\beta > 0$ suficientemente grande.

Lema 1.20. *Sejam* c_1, $c_2 > 0$ *dados por (1.44). Então, existe* $\beta_1 > 0$ *tal que* $0 < c_\beta < \min\{c_1, c_2\}$ *para todo* $\beta > \beta_1$.

Demonstração: Considerando $z = (\phi, \phi)$, onde $\phi \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, $\phi \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\max_{t>0} I(tz) &= \max_{t>0} \left\{ \frac{t^2}{2}||z||^2 - \frac{t^p}{p}|\phi|_p^p - \frac{t^q}{q}|\phi|_q^q - \frac{2\beta}{\alpha+\mu} t^{\alpha+\mu} \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{\alpha+\mu} \right\} \\
&\leq \max_{t>0} \left\{ \frac{t^2}{2}||z||^2 - \frac{2\beta}{\alpha+\mu} t^{\alpha+\mu} \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{\alpha+\mu} \right\}.
\end{aligned}$$

Como $\alpha + \mu > 2$, com um cálculo simples obtemos que

$$c_\beta \leq \max_{t>0} \left\{ \frac{t^2}{2}||z||^2 - \frac{2\beta}{\alpha+\mu} t^{\alpha+\mu} \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{\alpha+\mu} \right\} = \frac{||z||^{\frac{2(\alpha+\mu)}{\alpha+\mu-2}}}{\left[2\beta \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{\alpha+\mu} \right]^{\frac{2}{\alpha+\mu-2}}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+\mu} \right).$$

Consequentemente, existe $\beta_1 > 0$ tal que $0 < c_\beta < \min\{c_1, c_2\}$ para todo $\beta > \beta_1$. O lema está demonstrado. ∎

Observamos que no caso em que α ou $\mu < 2$, não podemos aplicar o resultado devido a Busca-Sirakov [9] para garantir que a solução obtida por minimização sobre a variedade de Nehari é a solução de menor energia procurada. Para mostrarmos este fato argumentamos como em Ambrosetti-Colorado [2, 3] e no próximo lema estabelecemos que se $z_\beta > 0$ é tal

$$I(z_\beta) = \inf_{z \in \mathcal{M}_\beta} I(z),$$

então z_β é uma solução de menor energia para o Sistema (3). Isto é,

$$I(z_\beta) = \inf\{I(z) : z \in E, z > 0 \text{ e } \langle I'(z), z \rangle = 0\},$$

com $E = H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$.

Lema 1.21. *Suponha que* $z_\beta > 0$ *é tal que* $I(z_\beta) = \inf_{z \in \mathcal{M}_\beta} I(z)$. *Então*

$$I(z_\beta) = \inf\{I(z) : z \in E, z > 0 \ e \ \langle I'(z), z \rangle = 0\}.$$

Demonstração: Suponha por contradição que exista $w = (w_1, w_2) \in E$, $w > 0$ tal que $\langle I'(w), w \rangle = 0$ e

$$I(z_\beta) > I(w). \tag{1.46}$$

Agora, se $0 \leq z = (u, v) \in E$, denotamos por $u^* \geq 0$ e $v^* \geq 0$ as funções de simetrização de Schwarz associadas a u e v respectivamente (para maiores detalhes veja [21], 3.3 Théorème & Définition). Em particular, citamos as seguintes propriedades, (veja [21], pag 261-264)

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2, \text{ para todo } u \in H^1(\mathbb{R}^N), \ u \geq 0, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u^*|^r = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^r, \text{ para todo } u \in L^r(\mathbb{R}^N), \ u \geq 0, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u^*||v^*| \geq \int_{\mathbb{R}^N} |u||v|, \text{ para todo } u \in L^r(\mathbb{R}^N), \ v \in L^s(\mathbb{R}^N), \ u, v \geq 0, \end{cases} \tag{1.47}$$

desde que $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}=1$.

Considerando $w^*=(w_1^*,w_2^*)$, a simetrização de w satisfazendo (1.46), temos $||w^*||\leq ||w||$. Agora, invocando esta estimativa e (1.47), obtemos para todo $t\geq 0$

$$\begin{aligned} I(tw^*) &= \frac{t^2}{2}||w^*||^2-\frac{t^p}{p}|w_1^*|_p^p-\frac{t^q}{q}|w_2^*|_q^q-\frac{2\beta t^{\alpha+\mu}}{\alpha+\mu}\int_{\mathbb{R}^N}|w_1^*|^{\alpha}|w_2^*|^{\mu}\\ &\leq \frac{t^2}{2}||w||^2-\frac{t^p}{p}|w_1|_p^p-\frac{t^q}{q}|w_2|_q^q-\frac{2\beta t^{\alpha+\mu}}{\alpha+\mu}\int_{\mathbb{R}^N}|w_1|^{\alpha}|w_2|^{\mu}=I(tw). \end{aligned}$$

Consequentemente, observando que $\langle I'(w),w\rangle=0$ e argumentando como no Lema 1.3, temos

$$\max_{t\geq 0} I(tw^*)\leq \max_{t\geq 0} I(tw)=I(w).$$

Portanto, como $w^*\in\mathbb{E}$, tendo em vista o Lema 1.3, concluímos que

$$I(w)\geq \max_{t\geq 0} I(tw^*)=I(t(w^*)w^*)\geq \inf_{z\in\mathcal{M}_\beta} I(z)=I(z_\beta).$$

Esta estimativa contradiz (1.46). O lema está demonstrado. ■

Observação 1.22. *Observamos que o Lemas 1.20 e 1.21 acima continuam válido no caso em que o acoplamento tem crescimento crítico, isto é,* $\alpha+\mu=2^*$.

A seguir, definimos o nível crítico do Passo da Montanha associado ao funcional I sobre à variedade de Nehari, isto é

$$c_{\mathcal{M}_\beta}=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)), \tag{1.48}$$

onde $\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],\mathcal{M}_\beta):\gamma(0)=z_1,\quad \gamma(1)=z_2\}$.

De acordo com as Proposições 1.1 e 1.6, para estabelecer soluções positivas do Sistema (3) é suficiente encontrar pontos críticos do funcional I restrito à variedade de Nehari, que não sejam o trivial ou os semitriviais. Tendo em vista este fato, a demonstração do Teorema 0.1 é uma consequência direta das Proposições 1.11, 1.15 e do Lema 1.20.

Demonstração do Teorema 0.1: Inicialmente observamos que pela Proposição 1.11, I satisfaz a condição (PS) sobre a variedade $\mathcal{M}_\beta$. Portanto, de acordo com o Lema 1.19 existe $z_3\in\mathcal{M}_\beta$ tal que

$$I(z_3)=\inf_{z\in\mathcal{M}\beta} I(z)=c_\beta.$$

Além disto, tomando $\beta_1 > 0$ dado no Lema 1.20, temos que para todo $\beta > \beta_1$,

$$I(z_3) < \min\{I(z_1), I(z_2)\}.$$

As estimativas acima e as Proposições 1.1 e 1.6 e o Lema 1.21 implicam que z_3 é uma solução positiva de menor energia do Sistema (3).

Por outro lado, invocando a Proposição 1.15 encontramos $\beta_0 > 0$ tal que para todo $\beta \in (0, \beta_0)$ existem vizinhanças, U_β^1 e U_β^2 de z_1 e z_2, respectivamente, em $\mathcal{M}_\beta$, com $\overline{U_\beta^1} \cap \overline{U_\beta^2} = \emptyset$, tais que

$$I\big|_{\partial U_\beta^i}(z) > I(z_i), \ i = 1, 2. \tag{1.49}$$

Consequentemente, usando esse fato, a Proposição 1.11 e o Teorema do Passo da Montanha, encontramos um ponto crítico $z_4 \in \mathcal{M}_\beta$ tal que

$$I(z_4) = c_{\mathcal{M}_\beta} > \max\{I(z_1), I(z_2)\}, \tag{1.50}$$

com $c_{\mathcal{M}_\beta}$ caracterizado por (1.48).

Aplicando as Proposições 1.1 e 1.6, concluímos que z_4 é uma solução positiva do Sistema (3). O teorema está demonstrado. ∎

O próximo teorema é uma versão do Teorema 0.1 numa situação em que o Sistema (3) tem uma solução positiva para todo $\beta > 0$. Estabelecemos o seguinte

Teorema 1.23. *Suponha que $c_1 = c_2$. Então, o Sistema (3) tem uma solução positiva para todo $\beta > 0$.*

Demonstração: Argumentando como na demonstração do Teorema 0.1, existe $z_3 \in \mathcal{M}_\beta$ tal que

$$I(z_3) = c_\beta = \inf_{z \in \mathcal{M}_\beta} I(z).$$

Note que $c_\beta \leq c_1 = c_2$. Se $c_\beta < c_1$ então o sistema possui uma solução z_3 que é não trivial ou semitrivial. Pela Proposição 1.1 temos que $z_3 > 0$. Nesse caso o teorema está demonstrado. Se $c_\beta = c_1 = c_2$ então I possui um ponto crítico $z_4 \in \partial B$, para toda vizinhança pequena B de z_1 em $\mathcal{M}_\beta$ (veja, [32] pag 21). Portanto, $z_4 \neq z_1$ e $z_4 \neq z_2$. Como antes, temos que $z_4 > 0$. O teorema está demonstrado. ∎

Observamos que no caso particular em que $p = q$ e $\lambda_1 = \lambda_2$, o Teorema 1.23 garante a existência de uma solução positiva do Sistema (3) para todo $\beta > 0$.

1.6 Sistemas com Acoplamento Sublinear em uma das Variáveis

Nesta seção, demonstramos os Teoremas 0.2 e 0.3. No primeiro, o acoplamento é sublinear pelo menos em relação à uma da duas variáveis. Já no segundo, o acoplamento é duplamente sublinear. Neste caso, invocando a Proposição 1.15 encontramos $\beta_0 > 0$ tal que para todo $0 < \beta < \beta_0$, existem vizinhanças U_β^1 e U_β^2, de z_1 e z_2, respectivamente, em $\mathcal{M}_\beta$ com $\overline{U_\beta^1} \cap \overline{U_\beta^2} = \emptyset$ e satisfazendo (1.49). A seguir, definimos

$$c_{i,\beta} = \inf_{z \in \overline{U_\beta^i}} I(z), \quad i = 1, 2. \tag{1.51}$$

Proposição 1.24. *Considere $c_{i,\beta}$ dado por (1.51). Então, existe um ponto crítico $\bar{z}_i$ de I sobre $\mathcal{M}_\beta$ tal que $\bar{z}_i \in U_\beta^i$ e $I(\bar{z}_i) = c_{i,\beta}$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade consideramos $i = 1$. Tendo em vista (1.49), obtemos que

$$c_{1,\beta} = \inf_{z \in \overline{U_\beta^1}} I(z) \leq I(z_1) < \inf_{z \in \partial U_\beta^1} I(z). \tag{1.52}$$

Seja $K_{c_{1,\beta}} = \{z \in \mathcal{M}_\beta : I'\big|_{\mathcal{M}_\beta}(z) = 0,\ I(z) = c_{1,\beta}\}$, o conjuntos dos pontos críticos de I sobre $\mathcal{M}_\beta$ no nível $c_{1,\beta}$.

Argumentando por contradição, supomos que não existe um ponto crítico de I sobre $\mathcal{M}_\beta$ no nível $c_{1,\beta}$, isto é, $K_{c_{1,\beta}} \cap U_\beta^1 = \emptyset$. Na realidade, afirmamos que $\mathcal{O} = \mathcal{M}_\beta \backslash \overline{U_\beta^1}$ é uma vizinhança aberta de $K_{c_{1,\beta}}$ em $\mathcal{M}_\beta$. De fato, se tivéssemos $K_{c_{1,\beta}} \not\subset \mathcal{O}$ como $K_{c_{1,\beta}} \subset \mathcal{M}_\beta$, teríamos $z \in K_{c_{1,\beta}} \cap \partial U_\beta^1$. No entanto isso contradiz (1.52). A afirmação está demonstrada.

A seguir, dado $\bar{\epsilon} \in (0, \inf_{z \in \partial U_\beta^1} I(z) - c_{1,\beta})$, utilizamos a Proposição 1.11 e o Lema de Deformação [32] para obter $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ e uma deformação $\eta : [0,1] \times \mathcal{M}_\beta \to \mathcal{M}_\beta$, contínua, satisfazendo

(η_1) $\eta(0, z) = z$, para todo $z \in \mathcal{M}_\beta$ e $t \in [0, 1]$,

(η_2) $\eta(t, z) = z$, para todo $I(z) \geq c_{1,\beta} + \bar{\epsilon}$ e $t \in [0, 1]$,

(η_3) $I(\eta(t, z)) \leq I(z)$, para todo $z \in \mathcal{M}_\beta$ e para todo $t \in [0, 1]$.

(η_4) $I(\eta(1, z)) \leq I(z) - \epsilon$, para todo $z \in \mathcal{M}_\beta \setminus \mathcal{O}$ tal que $I(z) \leq c_{1,\beta} + \epsilon$.

Pela definição de $c_{1,\beta}$, existe $z \in \overline{U_\beta^1}$ tal que

$$I(z) \leq c_{1,\beta} + \epsilon. \tag{1.53}$$

Pela escolha de $\bar{\epsilon}$, usando a estimativa acima e (1.52), temos

$$I(z) < c_{1,\beta} + \bar{\epsilon} < \inf_{z \in \partial U_\beta^1} I(z). \tag{1.54}$$

Portanto, $z \in \mathcal{M}_\beta \setminus \mathcal{O}$. Consequentemente, por (η_4) e (1.53)

$$I(\eta(1,z)) \leq I(z) - \epsilon < c_{1,\beta} \tag{1.55}$$

Por outro lado, utilizando (1.53) mais uma vez, (η_3) e (1.54)

$$I(\eta(t,z)) \leq I(z) < \inf_{z \in \partial U_\beta^1} I(z).$$

Isto implica que $\eta\left([0,1], z\right) \cap \partial U_\beta^1 = \emptyset$. Consequentemente, $\eta(1,z) \subset U_\beta^1$. No entanto este fato contradiz a definição (1.51) de $c_{1,\beta}$ e (1.55). ■

A proposição a seguir, estabelece que, se o acoplamento for sublinear em relação à uma variável, então o ponto crítico semi trivial associado à outra variável não é um ponto de mínimo local do funcional I sobre a variedade de Nehari.

Proposição 1.25. *Suponha que $u_1, v_1 > 0$ sejam as soluções radiais dos Problemas (4) e (5), respectivamente. Então, para todo $\beta > 0$, z_1 ou z_2 não são pontos de mínimos locais de I sobre à variedade $\mathcal{M}_\beta$ se o acoplamento for sublinear em relação à variável v ou u, respectivamente.*

Demonstração: A demonstração da proposição será feita no caso em que o acoplamento é sublinear em relação à variável v. No outro caso a demonstração é similar. Inicialmente fixamos $v \in \mathbb{E}_2^+ = \{v \in \mathbb{E}_2 : v^+ \not\equiv 0\}$. Dado $s \in (0,1)$, definimos $w_s = (\hat{u}_1, sv)$, $\hat{u}_1 = \frac{u_1}{||u_1||_1}$.

Considerando $\phi_\beta : \mathbb{E}^+ \to \mathcal{M}_\beta$ dado por $\phi_\beta(z) = t_\beta(z)z = t(z)z$. De acordo com Lema 1.3 e a Observação 1.4, temos que $t_\beta : \mathbb{E}^+ \to (0, +\infty)$ é contínua, e consequentemente

$$\lim_{s \to 0^+} t_\beta(w_s) = t_\beta(w_1) = ||u_1||_1. \tag{1.56}$$

Pela definição do funcional I, temos

$$
\begin{aligned}
I(\phi_\beta(w)) &= \frac{t^2(w)}{2}||\hat{u}_1||_1^2 + \frac{s^2t^2(w)}{2}||v||_2^2 - \frac{t^p(w)}{p}|\hat{u}_1|_p^p - \frac{s^qt^q(w)}{q}|v|_q^q \\
&- \frac{2\beta s^\mu t^{\alpha+\mu}(w)}{\alpha+\mu}\int_{\mathbb{R}^N}|\hat{u}_1|^\alpha|v|^\mu \\
&\leq I(t(w)(\hat{u}_1,0)) + \frac{s^2t^2(w)}{2}||v||_2^2 - \frac{2\beta s^\mu t^{\alpha+\mu}(w)}{\alpha+\mu}\int_{\mathbb{R}^N}|\hat{u}_1|^\alpha|v^+|^\mu \\
&= I(t(w)(\hat{u}_1,0)) + \frac{s^\mu t^2(w)}{2}\left(||v||_2^2 s^{(2-\mu)} - \frac{4\beta t^{(\alpha+\mu-2)}(w)}{\alpha+\mu}\int_{\mathbb{R}^N}|\hat{u}_1|^\alpha|v|^\mu\right).
\end{aligned}
\tag{1.57}
$$

Como $\mu < 2$, e $2 < \mu + 2 < 2^*$, por (1.56) encontramos $s_1 > 0$ tal que

$$\left(||v||_2^2 s_1^{(2-\mu)} - \frac{4\beta t^{(\alpha+\mu-2)}(w)}{\alpha+\mu}\int_{\mathbb{R}^N}|\hat{u}_1|^\alpha|v|^\mu\right) < 0, \text{ para todo } s \in (0,s_1)$$

Portanto, invocando (1.57)

$$I(\phi_\beta(w)) < I(t(w)(\hat{u}_1,0)) \leq J_p(u_1) = I(z_1), \text{ para todo } s \in (0,s_1).$$

Como $\phi_\beta(w_s) \to u_1$ em $\mathcal{M}_\beta$, a estimativa acima nos diz que z_1 não é um mínimo local de I sobre $\mathcal{M}_\beta$, para todo $\beta > 0$. A proposição está demonstrada. ∎

Demonstração do Teorema 0.2: Inicialmente observamos que pela Proposição 1.15, obtemos $\beta_0 > 0$ tal que para todo $\beta \in (0,\beta_0)$, existem vizinhanças U_β^1 e U_β^2, de z_1 e z_2, respectivamente, em $\mathcal{M}_\beta$ com $z_2 \notin \overline{U_\beta^1}$ e $z_1 \notin \overline{U_\beta^2}$ e satisfazendo (1.49). Além disto, argumentando como na demonstração do Teorema 0.1, encontramos um ponto crítico $z_3 \in \mathcal{M}_\beta$, tal que

$$c_{\mathcal{M}_\beta} = I(z_3) > \max\{I(z_1), I(z_2)\}, \tag{1.58}$$

onde $c_{\mathcal{M}_\beta}$ é dado por (1.48).

A seguir supomos, sem perda de generalidade, que o acoplamento é sublinear em relação à variável v. Pela Proposição 1.24, existe um ponto crítico de I sobre $\mathcal{M}_\beta$, $z_4 \in U_\beta^1$, tal que

$$I(z_4) = \inf_{z\in\overline{U_\beta^1}} I(z) = c_{1,\beta} \tag{1.59}$$

Além disto, invocando a Proposição 1.25, temos que $I(z_4) < I(z_1)$, logo $z_4 \neq z_1$. Como

$z_2 \notin \overline{U_\beta^1}$, temos que $z_4 \neq z_2$. Finalmente, por (1.49), (2.48) e (2.49), temos que $z_4 \neq z_3$. Isto conclui a demonstração do teorema. ■

Na demonstração acima, se supomos que o acoplamento é sublinear em relação às variáveis u e v, somos capazes de verificar que o Sistema (3) tem pelo menos três soluções positivas para $\beta > 0$ suficientemente pequeno. Isso é o que veremos a seguir.

Demonstração do Teorema 0.3:

- Existência de uma solução de menor energia.

Como o acoplamento é duplamente sublinear, de acordo com a Proposição 1.25, temos que z_1 e z_2 não são mínimos locais do funcional I sobre $\mathcal{M}_\beta$ para todo $\beta > 0$. Usando este fato e invocando o Lema 1.19, obtemos z_3 tal que

$$c_\beta = I(z_3) = \inf_{z \in \mathcal{M}_\beta} I(z) < \min\{I(z_1), I(z_2)\}, \tag{1.60}$$

em que c_β é dado por (1.45). Logo, $z_3 \notin \{z_1, z_2\}$. Além disto, aplicando o Lema 1.21, concluímos que z_3 é uma solução de menor energia do Sistema (3).

- Existência de pelo menos três soluções positivas

Invocando a Proposição 1.15 e argumentando como no Teorema 0.1, obtemos $\beta_0 > 0$ tal que para todo $\beta < \beta_0$ existem vizinhanças U_β^1 e U_β^2, de z_1 e z_2, em $\mathcal{M}_\beta$, respectivamente, satisfazendo (1.49) e $\overline{U_\beta^1} \cap \overline{U_\beta^2} = \emptyset$. Além disto, tendo em vista a Proposição 1.11 e o Teorema do Passo da Montanha, obtemos $z_4 \in \mathcal{M}_\beta$ tal que

$$I(z_4) = c_{\mathcal{M}_\beta} > \max\{I(z_1), I(z_2)\}. \tag{1.61}$$

Agora, utilizando o argumento da demonstração do Teorema 0.2, encontramos $z_5 \in U_\beta^1$ e $z_6 \in U_\beta^2$ pontos críticos de I sobre $\mathcal{M}_\beta$ tais que

$$I(z_5) < I(z_1) \quad \text{e} \quad I(z_6) < I(z_2). \tag{1.62}$$

As estimativas (2.51) e (2.52) implicam que $z_5, z_6 \notin \{z_1, z_2, z_4\}$. Além disto, como $\overline{U_\beta^1} \cap \overline{U_\beta^2} = \emptyset$, $z_5 \neq z_6$. Isso conclui a verificação de que o Sistema (3) possui pelo menos três soluções positivas.

Teorema 1.26. *Suponha que o acoplamento seja sublinear em relação à variável u e $c_1 \geq c_2$. Então, o Sistema (3) possui uma solução positiva de menor energia para todo $\beta > 0$.*

Demonstração: Pelo Lema 1.19, existe $z_3 \in \mathcal{M}_\beta$ tal que $I(z_3) = \inf_{z \in \mathcal{M}_\beta} I(z)$. Além disto, invocando a Proposiçao 1.25, como o acoplamento é sublinear em relação à variável u, temos que z_2 não é mínimo local de I sobre $\mathcal{M}_\beta$, para todo $\beta > 0$. Portanto, $I(z_3) < I(z_2) \leq I(z_1)$. Portanto, usando Lema 1.21, temos que z_3 é uma solução positiva de menor energia do Sistema. O teorema está demonstrado. ∎

1.7 Sistemas com Acoplamento Superlinear em uma das Variáveis

Aqui consideramos situações onde o acoplamento é superlinear em pelo menos uma das variáveis, u ou v e onde o acoplamento é duplamente superlinear em relação às variáveis u e v.

Demonstração do Teorema 0.4: Pela Proposição 1.17 e a Observação 1.18, dado $\beta > 0$ existem vizinhanças, U_β^1 e U_β^2 de z_1 e z_2, respectivamente, em $\mathcal{M}_\beta$, com $z_2 \notin \overline{U_\beta^1}$ e $z_1 \notin \overline{U_\beta^2}$, tais que

$$I\big|_{\partial U_\beta^i}(z) > I(z_i),\ i = 1, 2.$$

Consequentemente, usando esse fato, a Proposição 1.11 e o Teorema do Passo da Montanha, encontramos um ponto crítico $z_3 \in \mathcal{M}_\beta$, tal que

$$I(z_3) = c_{\mathcal{M}_\beta} > \max\{I(z_1), I(z_2)\}, \tag{1.63}$$

onde $c_{\mathcal{M}_\beta}$ é caracterizado por (1.48).
Portanto, z_3 é uma solução positiva do Sistema (3).

A seguir invocando o Lema 1.19, encontramos um ponto crítico $z_4 \in I$ em $\mathcal{M}_\beta$, tal que

$$I(z_4) = \inf_{z \in \mathcal{M}_\beta} I(z) = c_\beta.$$

Além disso, pelo Lema 1.20 existe $\beta_1 > 0$ tal que se $\beta > \beta_1$, então

$$c_\beta = I(z_4) < \min\{I(z_2), I(z_1)\} < I(z_3).$$

Esta estimativa e (1.63) implicam que $z_3 \neq z_4$. Utilizando o Lema 1.21 podemos afirmar que z_4 é uma solução de menor energia do Sistema (3). O teorema está demonstrado. ∎

De maneira análoga verificamos o seguinte resultado

Teorema 1.27. *Suponha que o acoplamento seja superlinear em relação à variável v e que $c_1 \geq c_2$, sendo c_1, c_2 dados por (1.44). Então, o Sistema (3) tem uma solução positiva para todo $\beta > 0$. Além disto, existe $\beta_1 > 0$ suficientemente grande tal que Sistema (3) tem pelo menos duas soluções positivas para todo $\beta > \beta_1$, sendo uma delas de menor energia.*

Demonstração: Por hipótese temos que $I(z_1) \geq I(z_2)$. Pela Proposição 1.17, dado $\beta > 0$ existe uma vizinhança U_β^1 de z_1 em $\mathcal{M}_\beta$, com $z_2 \in \mathcal{M}_\beta \setminus U_\beta^1$, tal que $I\big|_{\partial U_\beta^1}(z) > I(z_1)$. Argumentando como na demonstração da primeira parte do Teorema 0.4, obtemos uma solução positiva z_3 do Sistema (3). Além disso, $I(z_3) > I(z_1) \geq I(z_2)$.

Por outro lado, argumentando como na segunda parte da demonstração do Teorema 0.4, encontramos $\beta_1 > 0$ e uma solução $z_4 \notin \{z_1, z_2, z_3\}, I(z_4) = c_\beta < I(z_3)$, para todo $\beta > \beta_1$. Utilizando o Lema 1.21 concluímos ainda que z_4 é uma solução de menor energia do Sistema (3). Isto conclui a demonstração do teorema. ∎

Já no caso em que o acoplamento é sublinear em relação à uma variável e superlinear em relação a outra variável, sob certas condições verificamos que o Sistema (3) possui duas soluções, como está descrito abaixo.

Teorema 1.28. *Suponha que o acoplamento seja sublinear em relação à variável u e superlinear em relação à variável v e que $c_1 \geq c_2$. Então o Sistema (3) tem pelo menos duas soluções positivas para todo $\beta > 0$, sendo uma delas de menor energia.*

Demonstração: De fato, como o acoplamento é superlinear em relação à variável v, usando a Proposição 1.17 e argumentando como no teorema acima, obtemos um ponto crítico $z_3 \in \mathcal{M}_\beta$ tal que $I(z_3) > I(z_1) \geq I(z_2)$. Por outro lado, como o acoplamento é sublinear em relação à variável u, usando a Proposição 1.25 temos que z_2 não é mínimo local para I sobre $\mathcal{M}_\beta$. Portanto, argumentando como na demonstração do Teorema 1.26, obtemos $z_4 \in \mathcal{M}_\beta$ tal que $I(z_4) < I(z_2) \leq I(z_1) < I(z_3)$, sendo z_4 uma solução de menor energia do Sistema (3) para todo $\beta > 0$. Obtendo assim o resultado desejado. ∎

1.8 Estimativas do tipo Ambrosetti-Colorado

Nesta seção, consideramos situações em que o acoplamento é duplamente linear em relação às variáveis ou o é linear em pelo menos uma das variáveis. As estimativas obtidas aqui generalizam as estimativas obtidas por Ambrosetti-Colorado nos artigos [2, 3]. Observamos que a demonstração do Teorema 0.6 é similar a demonstração do

Teorema 0.1. Neste caso, como em [2, 3], somos capazes de estimar os valores $\beta_0, \beta_1 > 0$, obtidos no Teorema 0.1. Para isto, estabelecemos a seguinte

Proposição 1.29. *Suponha que $u_1, v_1 > 0$ sejam as soluções radiais dos Problemas (4) e (5), respectivamente. Se o acoplamento for linear em relação à variável v e $\beta > \gamma_{1,\alpha}^2$, então z_1 não é um mínimo local do funcional I sobre $\mathcal{M}_\beta$. Similarmente, se o acoplamento for linear em relação à variável u e $\beta > \gamma_{2,\mu}^2$, então z_2 não é um mínimo local para o funcional I sobre $\mathcal{M}_\beta$.*

Demonstração: Para a demonstração da proposição, supomos, sem perda de generalidade, que o acoplamento seja linear em relação à variável v e $\beta > \gamma_{1,\alpha}^2$. Como $\beta > \gamma_{1,\alpha}^2$, pela definição de $\gamma_{1,\alpha}^2$, podemos encontrar $v \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\},\ v \geq 0$, tal que

$$\kappa||v||_2^2 = \frac{4\beta}{\alpha+2}\int_{\mathbb{R}^N}|u_1|^\alpha|v|^\mu,$$

para alguma constante $\kappa > 1$.

Fixamos $v \geq 0, v \not\equiv 0$, obtido acima e dado $s \in (0,1)$, definimos $w_s = (\hat{u}_1, sv)$, $\hat{u}_1 = \frac{u_1}{||u_1||_1}$.

Consideramos $\phi_\beta : \mathbb{E}^+ \to \mathcal{M}_\beta$ dado por $\phi_\beta(z) = t_\beta(z)z = t(z)z$. De acordo com Lema 1.3 e a Observação 1.4, temos que $t_\beta : \mathbb{E}^+ \to (0, +\infty)$ é contínua, e consequentemente

$$\lim_{s\to 0^+} t_\beta(w_s) = t_\beta(w_1) = ||u_1||_1. \tag{1.64}$$

Pela definição do funcional I, temos

$$\begin{aligned}
I(\phi_\beta(w)) &= \frac{t^2(w)}{2}||\hat{u}_1||_1^2 + \frac{s^2t^2(w)}{2}||v||_2^2 - \frac{t^p(w)}{p}|\hat{u}_1|_p^p - \frac{s^qt^q(w)}{q}|v|_q^q \\
&- \frac{2\beta s^\mu t^{\alpha+\mu}(w)}{\alpha+\mu}\int_{\mathbb{R}^N}|\hat{u}_1|^\alpha|v|^\mu \\
&\leq I(t(w)(\hat{u}_1,0)) + \frac{s^2t^2(w)}{2}||v||_2^2 - \frac{2\beta s^\mu t^{\alpha+\mu}(w)}{\alpha+\mu}\int_{\mathbb{R}^N}|\hat{u}_1|^\alpha|v|^\mu \\
&= I(t(w)(\hat{u}_1,0)) + \frac{s^2t^2(w)}{2}||v||_2^2 - \frac{2\beta s^\mu t^{\alpha+\mu}(w)}{\alpha+\mu}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_1|^\alpha}{||u_1||_1^\alpha}|v|^\mu.
\end{aligned} \tag{1.65}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
I(\phi_\beta(w)) &\leq I(t(w)(\hat{u}_1,0)) + \frac{t^2(w)||v||_2^2s^2}{2}\left(1 - \frac{4\beta t^\alpha(w)}{\alpha+2}\int_{\mathbb{R}^N}|u_1|^\alpha|v|^2\right) \\
&= I(t(w)(\hat{u}_1,0)) + \frac{t^2(w)||v||_2^2s^2}{2}\left(1 - \frac{t^\alpha(w)\kappa}{||u||_1^\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Invocando (1.64), como $\kappa > 1$, existe $s_0 > 0$ tal que

$$\left(1 - \frac{t^\alpha(w)\kappa}{||u||_1^\alpha}\right) < 0, \text{ para todo } s \in (0, s_0).$$

Consequentemente obtemos que

$$I(\phi_\beta(w)) < I(t(w)(\hat{u}_1, 0)) \leq J_p(u_1) = I(z_1) \text{ para todo } s \in (0, s_0).$$

Como $\phi_\beta(w_s) \to u_1$ em $\mathcal{M}_\beta$, a estimativa acima nos diz que z_1 não é um mínimo local de I sobre $\mathcal{M}_\beta$, para todo $\beta > \gamma_{1,\alpha}^2$. O lema está demonstrado. ∎

Antes de demonstrarmos o Teorema 0.5, lembramos que invocando (8), (1.44) e considerando as formulações fracas dos Problemas (4) e (5), respectivamente, e o fato que $u_1 \in \mathcal{N}_p$ e $v_1 \in \mathcal{N}_q$, podemos escrever

$$c_1 = I(u_1, 0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)|u_1|_p^p = \lambda_1^{\frac{(2^*-p)N}{2(p-2)}}|U_p|_p^p \tag{1.66}$$

$$c_2 = I(0, v_1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)|v_1|_q^q = \lambda_2^{\frac{(2^*-q)N}{2(q-2)}}|U_q|_q^q \tag{1.67}$$

Na Introdução, definimos

$$F(\lambda_1) = C_{p,q}\lambda_1^{\frac{(2^*-p)(q-2)}{(2^*-q)(p-2)}},$$

em que $C_{p,q}^{\frac{(2^*-q)}{2^*(q-2)N}} = \dfrac{q(p-2)}{p(q-2)}\dfrac{|U_p|_p^p}{|U_q|_q^q}$.

Invocando a definição de F, (1.66) e (1.67), obtemos

$$\lambda_2 \leq F(\lambda_1) \text{ se, e somente se, } c_2 \leq c_1. \tag{1.68}$$

Demonstração do Teorema 0.5: Primeiro verificamos o item $(1)-(i)$ do Teorema 0.5. Por hipótese $\lambda_2 \leq F(\lambda_1)$. Portanto, pela estimativa acima, temos que $I(z_1) \geq I(z_2)$. Como o acoplamento é linear em relação à variável v e $\beta \in [0, \gamma_{1,\alpha}^2)$, pela Proposição 1.17, encontramos uma vizinhança, U_β^1 de z_1 em $\mathcal{M}_\beta$ com $z_2 \notin \overline{U_\beta^1}$, tal que

$$I\big|_{\partial U_\beta^1}(z) > I(z_1).$$

Consequentemente, usando esse fato, a Proposição 1.11 e o Teorema do Passo da

Montanha, encontramos um ponto crítico $z_3 \in \mathcal{M}_\beta$, satisfazendo

$$I(z_3) = c_{\mathcal{M}_\beta} > \max\{I(z_1), I(z_2)\}, \tag{1.69}$$

em que $c_{\mathcal{M}_\beta}$ é caracterizado por (1.48).

Aplicando mais uma vez as Proposições 1.1 e 1.6, concluímos que z_3 é uma solução positiva do Sistema (3). Para verificar o item (1) $-$ (ii), utilizamos a Observação 1.18 e argumentamos como acima.

Para a demonstração do item (2) $-$ (i) do Teorema 0.5, lembramos que por hipótese, $\lambda_2 \geq F(\lambda_1)$ e (1.68) implicam que $I(z_2) \geq I(z_1)$. Observamos que pela Proposição 1.11, I satisfaz a condição (PS) sobre a variedade $\mathcal{M}_\beta$. Portanto, de acordo com o Lema 1.19 existe $z_3 \in \mathcal{M}_\beta$ tal que

$$I(z_3) = \inf_{z \in \mathcal{M}_\beta} I(z) = c_\beta.$$

Além disto, tomando $\beta > \gamma_{1,\alpha}^2$, como o acoplamento é linear em relação à variável v, invocando a Proposição 1.29, temos que

$$I(z_3) < I(z_1) \leq I(z_2).$$

As estimativas acima e as Proposições 1.1 e 1.6 e o Lema 1.21 implicam que z_3 é uma solução positiva de menor energia do Sistema (3). Para verificar o item (2) $-$ (ii), basta argumentar como acima. O teorema está demonstrado. ∎

Note que se consideramos $p = q$, então $F(\lambda_1) = \lambda_1$, e o Teorema 0.5 se reduz a

Teorema 1.30. *Suponha que $p = q$ e que o acoplamento seja linear em relação à uma das variáveis u ou v. Então,*

1. *o Sistema (3) tem uma solução positiva nas seguintes condições*

   (i) $\lambda_2 \leq \lambda_1$ *e o acoplamento é linear em relação à variável v e* $\beta \in [0, \gamma_{1,\alpha}^2)$

   (ii) $\lambda_2 \geq \lambda_1$ *e o acoplamento é linear em relação à variável u e* $\beta \in [0, \gamma_{2,\mu}^2)$.

2. *o Sistema (3) tem uma solução positiva de menor energia nas seguintes condições:*

   (i) $\lambda_2 \geq \lambda_1$ *e o acoplamento é linear em relação à variável v e* $\beta \in (\gamma_{1,\alpha}^2, +\infty)$

   (ii) $\lambda_2 \leq \lambda_1$ *e o acoplamento é linear em relação à variável u e* $\beta \in (\gamma_{2,\mu}^2, +\infty)$.

A demonstração do Teorema 0.6 é uma consequência imediata da estimativa (1.68) combinada com a demonstração do Teorema 1.30.

Demonstração do Teorema 0.6: Se $I(z_1) \geq I(z_2)$ então, (1.68) implica que $\lambda_2 \leq F(\lambda_1)$. Além disto, se $\beta < \Lambda$ então, $\beta < \gamma_{1,2}^2$ e como o acoplamento é duplamente linear, o Teorema 0.5 implica que o Sistema (3) tem uma solução positiva. Argumentando como acima estabelecemos o resultado se, $I(z_1) < I(z_2)$. Por outro lado, se $\beta > \Lambda'$ então, $\beta > \gamma_{1,2}^2$. Assim, se supomos $I(z_1) \geq I(z_2)$ e argumentamos como acima, o Teorema 0.5 implica que o Sistema (3) tem uma solução positiva de menor energia. Analogamente verificamos o resultado se $I(z_1) < I(z_2)$. O teorema está demonstrado. ∎

O próximo resultado é uma consequência da combinação dos Teoremas 0.3 e 0.5. Mas aqui, o acoplamento sublinear em relação à uma das variáveis nos permite obter duas soluções positivas do Sistema (3), mesmo considerando o acoplamento linear na outra variável.

Teorema 1.31. *Suponha que o acoplamento é sublinear em relação à variável u e linear em relação à varável v. Então, se $c_1 \geq c_2$ o Sistema (3) possui pelo menos duas soluções positivas para todo $\beta < \gamma_{1,\alpha}^2$.*

Demonstração: Como o acoplamento é sublinear em relação à variável u, utilizando a Proposição 1.25, concluímos que z_2 não é um mínimo local de I sobre $\mathcal{M}_\beta$. Por outro lado, invocando a Proposição 1.11 e o Lema 1.19, encontramos $z_3 \in \mathcal{M}_\beta$ tal que $I(z_3) = \inf\limits_{z \in \mathcal{M}_\beta} I(z)$. Portanto, $I(z_1) \geq I(z_2) > I(z_3)$. Logo, tendo em vista o Lema 1.21 z_3 é uma solução positiva de menor energia do Sistema (3).

Por outro lado, como o acoplamento é linear em relação à variável v, para todo $\beta < \gamma_{1,\alpha}^2$ podemos invocar a Proposição 1.17, e argumentar na demonstração do Teorema 0.6 para encontrarmos uma solução positiva z_4 tal que $I(z_4) > I(z_1) \geq I(z_2) > I(z_3)$. Com isto, obtemos duas soluções positivas do Sistema (3), para todo $\beta < \gamma_{1,\alpha}^2$. ∎

No próximo resultado, consideramos o caso em que o acoplamento é linear em relação à uma variável e superlinear em relação à outra. Observamos que sob essas condições podemos estimar $\beta_0 > 0$ sem nenhuma restrição nos níveis de menor energia c_1 e c_2 associados aos Problemas (4) e (5).

Teorema 1.32. *Suponha que o acoplamento seja linear em relação à variável v e superlinear em relação à variável u. Então, o Sistema (3) tem uma solução positiva para todo $\beta < \gamma_{1,\alpha}^2$.*

Demonstração: Se $I(z_1) \geq I(z_2)$, como o acoplamento é linear em relação à variável v e $\beta < \gamma_{1,\alpha}^2$, basta argumentar como no Teorema 0.5 e obtemos uma solução positiva do Sistema.

Por outro lado, se $I(z_1) < I(z_2)$ como o acoplamento é superlinear em relação à variável u, basta usar a Proposição 1.17 e argumentar como no Teorema 1.27 para obtermos um ponto crítico z_3 com $I(z_3) > I(z_2) > I(z_1)$, para todo $\beta > 0$. O teorema está demonstrado. ■

Um resultado análogo é válido se consideramos o caso em que o acoplamento é linear em relação à variável u e superlinear em relação à variável v e $\beta < \gamma_{2,\mu}^2$.

1.9 Estimativas via Minimização Global

A seguir, inspirados no artigo devido a Maia, Montefusco e Pellacci [27], demonstramos um teorema que nos fornece uma condição suficiente para a existência de solução positiva de menor energia do Sistema (3). Estabelecemos também nessa seção, um resultado que nos dá uma condição necessária para existência de solução positiva de menor energia. Aqui, consideramos a condição adicional $p = q$, além de outras que são citadas em cada teorema. Nos casos considerados até agora, com exceção do Teorema 0.1, as estimativas que nos garantem resultados de existência de solução do Sistema (3) dependem do comportamento do acoplamento. Aqui as estimativas dependem basicamente dos parâmetros λ_1, $\lambda_2 > 0$. Na verdade, dependem do quociente $\omega^2 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Considerando o caso particular $p = q$, (1.44), (1.66), (1.67) e a mudança de variável $y = \sqrt{\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}}x$, concluímos que

$$c_2 = I(0, v_1) = J_p(v_1) = \omega^{\frac{2p-N(p-2)}{p-2}} I(u_1, 0) = \omega^{\frac{2p-N(p-2)}{p-2}} c_1, \tag{1.70}$$

onde $\omega = \sqrt{\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}}$

Demonstração do Teorema 0.7: Invocando os Lemas 1.10 e 1.5 garantimos a existência de uma solução $\tilde{z} \in \mathcal{M}_\beta$, $\tilde{z} = (\tilde{u}, \tilde{v}) \geq 0$ tal que

$$c_\beta = I(\tilde{z}) = \inf_{z \in \mathcal{M}_\beta} I(z).$$

Queremos verificar então que

$$c_\beta = I(\tilde{z}) < \min\{J_p(u_1), J_p(v_1)\} = \min\{c_1, c_2\} = \min\{c_1, c_1\omega^{\frac{2p-N(p-2)}{p-2}}\}. \tag{1.71}$$

Lembrando que $u_1, v_1 > 0$ são soluções dos problemas escalares (4) e (5), respectivamente e usando a formulação fraca, podemos escrever

$$||u_1||_1^2 = |u_1|_p^p \quad \text{e} \quad ||v_1||_2^2 = |v_1|_p^p. \tag{1.72}$$

Além disso, usando a Identidade de Pohozaev [41] para problemas escalares segue que

$$\frac{N-2}{2}|\nabla u_1|_2^2 + \frac{N}{2}\lambda_1|u_1|_2^2 = \frac{N}{p}|u_1|_p^p \quad \text{e} \quad \frac{N-2}{2}|\nabla v_1|_2^2 + \frac{N}{2}\lambda_2|v_1|_2^2 = \frac{N}{p}|v_1|_p^p. \tag{1.73}$$

Combinando (1.72) e (1.73), podemos escrever

$$\lambda_1|u_1|_2^2 = \left[1 - \frac{N}{2} + \frac{N}{p}\right]|u_1|_p^p \quad \text{e} \quad \lambda_2|v_1|_2^2 = \left[1 - \frac{N}{2} + \frac{N}{p}\right]|v_1|_p^p. \tag{1.74}$$

Por outro lado o Lema 1.3 implica

$$c_\beta = I(\tilde{z}) \leq \max_{t>0} I(tz), \text{ para todo } z \in \mathbb{E}.$$

Então, usando (1.71) devemos encontrar $z \in \mathbb{E}$, $u \not\equiv 0$, $v \not\equiv 0$, tal que

$$c_\beta \leq \max_{t>0} I(tz) \leq \min\{c_1, c_1\omega^{\frac{2p-N(p-2)}{p-2}}\}. \tag{1.75}$$

Dado $z \in \mathbb{E}^+$, onde $E^+ = \{z \in \mathbb{E} : z^+ \neq 0\}$, e combinando o Lema 1.3 com a Observação 1.4 consideramos a função $g(t) = I(tz)$. Temos que o ponto de máximo $\bar{t}$ de g satisfaz;

$$\bar{t}^2||z||^2 = \bar{t}^p\left[|u|_p^p + |v|_p^p + 2\beta\int_{\mathbb{R}^N}|u|^\alpha|v|^\mu\right].$$

Portanto

$$\bar{t} = \left[\frac{||z||^2}{G(z)}\right]^{\frac{1}{p-2}}, \tag{1.76}$$

onde $G(z) = |u|_p^p + |v|_p^p + 2\beta\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|u|^\alpha|v|^\mu$.

Invocando as identidades obtidas acima, obtemos que o valor máximo de g é dado por

$$\max_{t>0} I(tz) = g(\bar{t}) = H(z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left[\frac{||z||^p}{G(z)}\right]^{\frac{2}{p-2}} \tag{1.77}$$

Consideramos primeiro o caso em que $\omega \geq 1$. Como $2 < p < 2^*$ implica que $2p - N(p-2) > 0$, então $\min\{c_1, c_1\omega^{\frac{2p-N(p-2)}{p-2}}\} = c_1$. Assim, devemos encontrar $z \in \mathbb{E}$,

$u \not\equiv 0,\ v \not\equiv 0$, tal que

$$c_\beta \leq H(z) \leq I(u_1, 0) = J_p(u_1) = c_1. \tag{1.78}$$

Agora tomando $z = (u_1, v_1)$ e considerando (1.72) e (1.77), lembrando que $\alpha + \mu = p$ e que v_1 é a única solução do problema escalar (5), obtemos

$$\begin{aligned} H(v_1, v_1) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \left[\frac{||v_1||_2^p \left(1 + \frac{||v_1||_1^2}{||v_1||_2^2}\right)^{\frac{p}{2}}}{2(1+\beta)||v_1||_2^2} \right]^{\frac{2}{p-2}} \\ &= c_1 \omega^{\frac{2p - N(p-2)}{p-2}} \left[\frac{\left(1 + \frac{||v_1||_1^2}{||v_1||_2^2}\right)^{\frac{p}{2}}}{2(1+\beta)} \right]^{\frac{2}{p-2}}. \end{aligned}$$

Invocando (1.74), podemos concluir que

$$\begin{aligned} ||v_1||_1^2 &= ||v_1||_2^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)|v_1|_2^2 \\ &= ||v_1||_2^2 + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_2} \left[1 + \frac{N}{p} - \frac{N}{2}\right] |v_1|_p^p. \end{aligned}$$

Portanto, usando (1.72), temos

$$\frac{||v_1||_1^2}{||v_1||_2^2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left[1 + \frac{N}{p} - \frac{N}{2}\right] + \left[\frac{N}{2} - \frac{N}{p}\right].$$

Agora escrevemos,

$$\begin{aligned} c(\omega) &= c\left(\sqrt{\tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left[1 + \frac{N}{p} - \frac{N}{2}\right] + \left[\frac{N}{2} - \frac{N}{p}\right] \\ &= \frac{1}{\omega^2} \left[1 + \frac{N}{p} - \frac{N}{2}\right] + \left[\frac{N}{2} - \frac{N}{p}\right]. \end{aligned}$$

Com isso, é claro que (1.78) é equivalente a

$$\omega^{\frac{2p-N(p-2)}{p-2}} \left[\frac{(1 + c(\omega))^{\frac{p}{2}}}{2(1+\beta)}\right]^{\frac{2}{p-2}} = \omega^{\frac{2p-N(p-2)}{p-2}} \left[\frac{(1 + c(\omega))^{\frac{p}{2}}}{2(1+\beta)}\right]^{\frac{2N(2^*-p)}{2^*(p-2)}} \leq 1.$$

Essa desigualdade é válida desde que $\beta > 0$ satisfaz (14) com $\omega \geq 1$.

Por outro lado, se $\omega < 1$,

$$\min\{c_1, c_1\omega^{\frac{2p-N(p-2)}{p-2}}\} \leq J_p(v_1) = c_1\omega^{\frac{2p-N(p-2)}{p-2}}. \tag{1.79}$$

Considerando nesse caso, $(u, v) = (u_1, u_1)$ e argumentando como nos cálculos acima, obtemos

$$H(u_1, u_1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) ||u_1||_1^2 \left[\frac{(1 + c\left(\frac{1}{\omega}\right))^{\frac{p}{2}}}{2(1+\beta)}\right]^{\frac{2}{p-2}}.$$

Portanto se $\beta > 0$ satisfaz (14), com $\omega < 1$, então (1.79) é satisfeita. O teorema está demonstrado. ∎

Antes de demonstrarmos o Teorema 0.8, lembramos que no apêndice verificamos a seguinte estimativa

Proposição 1.33. *Suponha que $r \geq 2$ e $\frac{r}{2} \leq \gamma \leq r-1$. Então*

$$(1+x)^r \geq 1 + x^r + a_\gamma x^\gamma, \quad \textit{para todo } x \geq 0, \tag{1.80}$$

onde $a_\gamma = \left[(2^r - 2)^{2(r-(\gamma+1))} r^{(2\gamma - r)}\right]^{\frac{1}{r-2}}$ *se* $r > 2$ *e* $a_\gamma = 2$ *se* $r = 2$.

Além disto, temos

Observação 1.34. *1. Note que se $\frac{r}{2} \leq \gamma \leq r-1$ então $\frac{r}{2} \leq r - \gamma \leq r-1$. Assim (1.80) é equivalente a*

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^r \geq 1 + \left(\frac{1}{x}\right)^r + a_\gamma \left(\frac{1}{x}\right)^{r-\gamma}, \quad \textit{para todo } x{>}0.$$

Como a aplicação $h(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$ é bijetora, então na verdade (A.7) equivale a

$$(1+x)^r \geq 1 + x^r + a_\gamma x^{(r-\gamma)}, \quad \textit{para todo } x{>}0. \tag{1.81}$$

2. Sob as hipóteses da proposição acima, se o termo x por substituído por, $\dfrac{x}{y}$ temos que

$$(x+y)^r \geq x^r + y^r + a_\gamma x^\gamma y^{r-\gamma}.$$

Demonstração do Teorema 0.8: Seja $z = (u, v) > 0$ uma solução positiva de menor energia do sistema (3). Argumentando como na demonstração do Teorema 0.7, temos que

$$I(z) = g(\bar{t}) = g(1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \left[\frac{||z||^p}{G(z)}\right]^{\frac{2}{p-2}}. \tag{1.82}$$

Além disto, como z é uma solução de menor energia do sistema, usando (1.70), temos que

$$I(z) \leq \min\{I(u_1, 0), I(0, v_1)\} = \min\{c_1, c_1\omega^{\frac{2p-N(p-2)}{p-2}}\}.$$

Consideramos inicialmente o caso em que $\omega < 1$ (isso equivale ao caso $\lambda_2 < \lambda_1$). Nesse caso temos então

$$I(z) \leq c_1\omega^{\frac{2p-N(p-2)}{p-2}},$$

ou seja

$$C_p \left[\frac{(||u||_1^2 + ||v||_2^2)^{\frac{p}{2}}}{(|u|_p^p + |v|_p^p + 2\beta \int_{\mathbb{R}^N} |u|^\alpha |v|^\mu)}\right]^{\frac{2}{p-2}} \leq c_1\omega^{\frac{2p-N(p-2)}{p-2}},$$

onde $C_p = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$. Portanto

$$C_p^{\frac{p-2}{2}} \left[\frac{(||u||_1^2 + ||v||_2^2)^{\frac{p}{2}}}{(|u|_p^p + |v|_p^p + 2\beta \int_{\mathbb{R}^N} |u|^\alpha |v|^\mu)}\right] \leq c_1^{\frac{p-2}{2}} \omega^{\frac{2p-N(p-2)}{2}}.$$

Invocando a desigualdade de Hölder e lembrando que $p = \alpha + \mu$, obtemos

$$C_p^{\frac{p-2}{2}} (||u||_1^2 + ||v||_2^2)^{\frac{p}{2}} \leq c_1^{\frac{p-2}{2}} \omega^{\frac{2p-N(p-2)}{2}} (|u|_p^p + |v|_p^p + 2\beta |u|_p^\alpha |v|_p^\mu).$$

Como $\alpha, \mu \geq 2$ e $p = \alpha + \mu$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\alpha \geq \frac{p}{2}$. Usando a Proposição 1.33, a Observação 1.34 e considerando $2\gamma = \alpha$ e $r = \frac{p}{2}$, obtemos que

$$(||u||_1^2 + ||v||_2^2)^{\frac{p}{2}} \geq (|u|_p^p + |v|_p^p + a_{\frac{\alpha}{2}} ||u||_1^\alpha ||v||_2^\mu).$$

Como consequência temos,

$$C_p^{\frac{p-2}{2}} (|u|_p^p + |v|_p^p + a_{\frac{\alpha}{2}} ||u||^\alpha ||v||^\mu) \leq c_1^{\frac{p-2}{2}} \omega^{\frac{2p-N(p-2)}{2}} (|u|_p^p + |v|_p^p + 2\beta |u|_p^\alpha |v|_p^\mu). \tag{1.83}$$

Agora, considerando o problema escalar $-\Delta v + \lambda_2 v = |v|^{p-2}v$, argumentando como em (1.77) e lembrando que esse problema tem uma única solução positiva e radial v_1, obtemos que

$$c_2 = I(0, v_1) = \inf_{v \neq 0} \max_{t>0} J_p(tv) = \inf_{u \neq 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \left[\frac{||v||_2^p}{|v|_p^p}\right]^{\frac{2}{p-2}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \left[\frac{||v_1||_2^p}{|v_1|_p^p}\right]^{\frac{2}{p-2}} \quad (1.84)$$

Analogamente, podemos escrever

$$c_1 = I(u_1, 0) = \inf_{u \neq 0} \max_{t>0} J_p(tu) = \inf_{u \neq 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \left[\frac{||u||_2^p}{|u|_p^p}\right]^{\frac{2}{p-2}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \left[\frac{||u_1||_2^p}{|u_1|_p^p}\right]^{\frac{2}{p-2}} \quad (1.85)$$

Note que (1.84) e (1.85) implicam que

$$\frac{||v||_2^p}{|v|_p^p} \geq \left(\frac{c_1}{C_p}\right)^{\frac{p-2}{2}} \omega^{\frac{2p-N(p-2)}{2}} \quad \text{e} \quad \frac{||u||_2^p}{|u|_p^p} \geq \left(\frac{c_1}{C_p}\right)^{\frac{p-2}{2}}. \quad (1.86)$$

Pelas estimativas acima e lembrando que estamos considerando o caso em que $\omega < 1$, temos que

$$|u|_p^p \left[C_p^{\frac{p-2}{2}} \frac{||u||_2^p}{|u|_p^p} - c_1^{\frac{p-2}{2}} \omega^{\frac{2p-N(p-2)}{2}}\right] \geq |u|_p^p c_1^{\frac{p-2}{2}} \left[1 - \omega^{\frac{2p-N(p-2)}{2}}\right] > 0. \quad (1.87)$$

Com os mesmos argumentos verificamos que

$$|v|_p^p \left[C_p^{\frac{p-2}{2}} \frac{||v||_2^p}{|v|_p^p} - c_1^{\frac{p-2}{2}} \omega^{\frac{2p-N(p-2)}{2}}\right] > 0. \quad (1.88)$$

Usando (1.83), (1.86), (1.87) e (1.88), concluímos que

$$C_p^{\frac{p-2}{2}} a_{\frac{\alpha}{2}} ||u||^\alpha ||v||^\mu \leq c_1^{\frac{p-2}{2}} \omega^{\frac{2p-N(p-2)}{2}} 2\beta |u|_p^\alpha |v|_p^\mu.$$

Ou de forma equivalente temos

$$C_p^{\frac{p-2}{2}} a_{\frac{\alpha}{2}} \frac{||u||^\alpha}{|u|_p^\alpha} \frac{||v||^\mu}{|v|_p^\mu} \leq 2\beta c_1^{\frac{p-2}{2}} \omega^{\frac{2p-N(p-2)}{2}}. \quad (1.89)$$

Note que por (1.86), temos

$$\frac{||v||_2^\mu}{|v|_p^\mu} \geq \left(\frac{c_1}{C_p}\right)^{\frac{p-2}{2p}\mu} \omega^{\frac{2p-N(p-2)}{2p}\mu} \quad \text{e} \quad \frac{||u||_2^\alpha}{|u|_p^\alpha} \geq \left(\frac{c_1}{C_p}\right)^{\frac{p-2}{2p}\alpha}.$$

Agora invocando as desigualdades acima e (1.89) obtemos a seguinte estimativa para $\beta > 0$,

$$2\beta \geq a_{\frac{\alpha}{2}} \omega^{\left(\frac{2p-N(p-2)\mu}{2p} - \frac{2p-N(p-2)}{2}\right)} = a_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\omega^{\frac{N(2^*-p)}{2^*p}\alpha}}. \tag{1.90}$$

Por outro lado, se consideramos $\omega \geq 1$, então temos que estudar o caso em que

$$I(z) \leq c_1.$$

Com estimativas similares às obtidas acima, conseguimos verificar que neste caso

$$2\beta \geq a_{\frac{\alpha}{2}} \omega^{\left(\frac{2p-N(p-2)}{2p}\right)} = \omega^{\frac{N(2^*-p)}{2^*p}\mu}. \tag{1.91}$$

Portanto combinando (1.90) e (1.91) concluímos a demonstração do teorema. ∎

Capítulo

2

Sistema de Equações de Schrödinger com Acoplamento Crítico

No Capítulo 1, estabelecemos resultados de existência e multiplicidade de soluções positivas no caso em que o Sistema (3) apresenta um acoplamento com crescimento subcrítico. Neste capítulo, nosso interesse é estabelecer existência de soluções positivas no caso em que o acoplamento possui crescimento crítico. Mais precisamente consideramos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda_1 u &= |u|^{p-2}u + \frac{2\beta\alpha}{2^*}|u|^{\alpha-2}u|v|^{\mu}, \qquad \text{em} \qquad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \lambda_2 v &= |v|^{q-2}v + \frac{2\beta\mu}{2^*}|v|^{\mu-2}v|u|^{\alpha}, \qquad \text{em} \qquad \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3}$$

com , $\beta > 0$, $\alpha, \mu > 1$, $2 < p, q < 2^*$ e λ_1, $\lambda_2 > 0$, na situação em que $\alpha + \mu = 2^*$ e $N \geq 3$.

Nosso objetivo é demonstrar os Teoremas 0.9 - 0.13 citados na introdução e que correspondem ao Sistema (3) com acoplamento tendo crescimento crítico. Para isto, apresentamos todos os resultados técnicos necessários para estas demonstrações. Enfatizando o que foi observado na introdução, lembramos ao leitor que a dificuldade encontrada neste caso é o fato que o funcional associado não satisfaz a condição de Palais-Smale para determinados níveis. Esta dificuldade técnica é superada verificando que este funcional satisfaz tal condição de compacidade abaixo de determinados valores. Este fato combinado com estimativas locais demonstradas no Capítulo 1 e estimativas do nível minimax nos permitem demonstrar a existência de solução do Sistema (3) no caso em que o acoplamento é crítico.

Como no caso escalar (veja [41]), o funcional associado ao Sistema (3), $I : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, dado por

$$I(z) = J_p(u) + J_q(v) - \frac{2\beta}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u^+|^\alpha |v^+|^\mu, \quad z = (u,v) \in \mathbb{E}$$

com J_p e J_q dados por (1.2) e (1.3), respectivamente, está bem definido em $\mathbb{E}$, e além disso $I \in C^1(\mathbb{E}, \mathbb{R})$.

O Capítulo 2 está organizado da seguinte forma: na **Seção 2.1** estabelecemos o comportamento da sequência de Palais-Smale associada ao funcional I. Em seguida, na **Seção 2.2,** estimamos o nível minimax do Passo da Montanha sobre a variedade $\mathcal{M}_\beta$. Na **Seção 2.3,** demonstramos o Teorema 0.9. Já na **Seção 2.4,** demonstramos os resultados onde o acoplamento é sublinear em relação a pelo menos uma das variáveis, isto é os Teoremas 0.10 - 0.11. Finalmente, na **Seção 2.5,** demonstramos os Teoremas 0.12 - 0.13, ou seja, os resultados onde o acoplamento é linear em relação a pelo menos a uma das variáveis.

2.1 Comportamento da Sequência de Palais-Smale

A versão do lema a seguir foi demonstrada no Capítulo 1 na situação em que o acoplamento possui crescimento subcrítico. A demonstração no caso em que o crescimento é crítico é análoga.

Lema 2.1. *Seja $(z_n) \subset \mathbb{E}$ uma sequência $(PS)_c$ associada ao funcional I. Então, (z_n) é limitada em $\mathbb{E}$. Além disso, existe uma subsequência (z_{n_j}) de (z_n) tal que $z_{n_j} \rightharpoonup z$ fracamente em $\mathbb{E}$, sendo z uma solução (fraca) do Sistema (3).*

Demonstração: Para demonstrar a limitação de (z_n) basta proceder como na primeira parte da demonstração da Proposição 1.10. Isto garante a existência de uma subsequência (z_{n_j}) de (z_n) tal que $z_{n_j} \rightharpoonup z$ fracamente em $\mathbb{E}$. O fato de z ser solução (fraca) do Sistema (3) é devido ao mesmo argumento utilizado na demonstração do Lema 1.9. ∎

Observamos que, analogamente ao caso subcrítico (veja Lema (1.7), se (z_n) é uma sequência (PS), então podemos supor que (z_n) é uma sequência de termos não negativos. Este fato é consequência do resultado citado abaixo, e será sempre utilizado de agora em diante.

Lema 2.2. *Suponha que $(z_n) \subset \mathbb{E}$ é uma sequência $(PS)_c$ associada a I. Então, $(z_n^+) \subset \mathbb{E}$ é uma sequência $(PS)_c$ associada a I.*

O lema a seguir é uma versão do Lema de Brézis-Lieb. Para o caso em que o acoplamento é subcrítico a demonstração dessa versão pode ser vista, por exemplo, em [17].

Teorema 2.3. *Suponha que* $\alpha + \mu = 2^*$. *Seja* $(z_n) \subset \mathbb{E}$ *uma sequência tal que* $z_n \geq 0$ *e* $z_n \rightharpoonup z$. *Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha |v_n|^\mu + \int_{\mathbb{R}^N} |(u_n - u)^+|^\alpha |(v_n - v)^+|^\mu = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^\alpha |v|^\mu + o_n(1). \tag{2.1}$$

Demonstração: Inicialmente definimos $(z_n) = (u_n, v_n) = (w_n + u, y_n + v)$ e verificamos a seguinte relação

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha |y_n^+|^\mu = \int_{\mathbb{R}^N} |w_n^+|^\alpha |y_n^+|^\mu + o_n(1). \tag{2.2}$$

Seja $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $z_n(x), z(x) \in \mathbb{R}^2$. Se $w_n(x) \leq 0$, como $u_n(x) = u(x) + w_n(x)$, temos

$$||u_n(x)|^\alpha - |w_n^+(x)|^\alpha| = |u_n(x)|^\alpha \leq |u(x)|^\alpha. \tag{2.3}$$

Por outro lado, se $w_n(x) > 0$, aplicando o Teorema do Valor Médio encontramos $t_0 = t_0(x) \in [0, 1]$, tal que

$$||u_n(x)|^\alpha - |w_n^+(x)|^\alpha| = \alpha |w_n(x) + t_0 u(x)|^{\alpha-1} |u(x)| \leq \alpha 2^{\alpha-1} (|w_n^+(x)|^{\alpha-1} + |u(x)|^{\alpha-1}) |u(x)|.$$

Utilizando esta estimativa e (2.3), encontramos uma constante $C_0 > 0$, tal que

$$|(|u_n|^\alpha - |w_n^+|^\alpha)|y_n^+|^\mu| \leq C_0 (|w_n^+|^{\alpha-1}|u||y_n^+|^\mu + |u|^\alpha |y_n^+|^\mu), \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N. \tag{2.4}$$

Consequentemente, dado um conjunto Lebesgue mensurável $M \subset \mathbb{R}^N$, aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_M |(|u_n|^\alpha - |w_n^+|^\alpha)|y_n^+|^\mu| \leq C_0 \left(|w_n^+|_{2^*}^{\alpha-1} |u|_{L^{2^*}(M)} |y_n^+|_{2^*}^\mu + |u|_{L^{2^*}(M)}^\alpha |y_n^+|_{2^*}^\mu \right)$$

A seguir, utilizando que as sequências (w_n^+) e (y_n^+) são limitadas em $\mathbb{E}$ e o Teorema das Imersões de Sobolev, encontramos $C_1 > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_M |(|u_n|^\alpha - |w_n^+|^\alpha)|y_n^+|^\mu| \leq C_1 (|u|_{L^{2^*}(M)} + |u|_{L^{2^*}(M)}^\alpha), \tag{2.5}$$

para todo conjunto mensurável $M \subset \mathbb{R}^N$.

Além disto, como $(w_n, y_n) \rightharpoonup (0, 0)$ fracamente em $\mathbb{E}$, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que

$$(|u_n|^\alpha - |w_n^+|^\alpha)|y_n^+|^\mu \to 0 \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N. \tag{2.6}$$

Dado $\epsilon > 0$, por (2.5) como $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, existe $R > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{B_R^c(0)} |(|u_n|^\alpha - |w_n^+|^\alpha)|y_n^+|^\mu| < \epsilon. \tag{2.7}$$

Fixado $R > 0$, utilizamos a estimativa acima e (2.5) mais uma vez, para concluir que $(|(u_n|^\alpha - |w_n^+|^\alpha)|y_n^+|^\mu|) \subset L^1(B_R(0))$ é uniformemente integrável. Este fato e (2.6) nos permitem aplicar o Teorema de Vitali para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_R(0)} |(|u_n|^\alpha - |w_n^+|^\alpha)|y_n^+|^\mu| = 0. \tag{2.8}$$

Como $\mathbb{R}^N = B_R(0) \cup B_R^c(0)$, a identidade (2.2) é uma consequência direta de (2.7) e (2.8). Agora tendo em vista (2.2), podemos escrever (2.1) na seguinte forma

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha |v_n|^\mu - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha |y_n^+|^\mu - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^\alpha |v|^\mu = o_n(1). \tag{2.9}$$

Para verificar essa relação, observamos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha |v_n|^\mu &- \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha |y_n^+|^\mu - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^\alpha |v|^\mu = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha (|v_n|^\mu - |y_n^+|^\mu - |v|^\mu) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^\alpha - |u|^\alpha)|v|^\mu.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Inicialmente, estimamos a primeira integral do lado direito da identidade acima.

Seja $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $v_n(x), v(x) \in \mathbb{R}$. Se $y_n(x) = v_n(x) - v(x) \leq 0$, como $v_n(x), v(x) \geq 0$,

$$||v_n(x)|^\mu - |y_n(x)^+|^\mu - |v(x)|^\mu| \leq 2|v(x)|.$$

Caso contrário, aplicamos o Teorema do Valor Médio à função

$$H(t) = (t + y_n)^\mu - t^\mu, \quad t \geq 0,$$

para encontrar $t_0 = t_0(x) \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} ||v_n|^\mu - |y_n^+|^\mu - |v|^\mu| &\leq \mu[|(t_0 v(x) + y_n(x))^{\mu-1} - (t_0 v(x))^{\mu-1}|]|v(x)| \\ &\leq \mu[2^{\mu-1}(|v(x)|^{\mu-1} + |y_n|^{\mu-1})]|v(x)|. \end{aligned}$$

Consequentemente, tendo em vista as estimativas acima existe $C_2 > 0$ tal que

$$||v_n|^\mu - |y_n^+|^\mu - |v|^\mu| \leq C_2(|v|^\mu + |y_n^+|^{\mu-1}|v|), \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N. \tag{2.11}$$

Portanto, utilizando a estimativa acima, lembrando que as sequências (y_n^+) e (u_n) são limitadas em $\mathbb{E}_2$ e $\mathbb{E}_1$, respectivamente, utilizamos a desigualdade de Hölder para obter $C_3 > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_M ||u_n|^\alpha(|v_n|^\mu - |y_n^+|^\mu - |v|^\mu)| \leq C_3(|v|_{L^{2^*}(M)} + |v|^\mu_{L^{2^*}(M)}), \tag{2.12}$$

para todo conjunto Lebesgue mensurável $M \subset \mathbb{R}^N$. A seguir, como $z_n \rightharpoonup z = (u,v)$ fracamente em $\mathbb{E}$ e $y_n^+ \rightharpoonup 0$ fracamente em $\mathbb{E}_2$, podemos supor que

$$(||u_n|^\alpha(|v_n|^\mu - |y_n^+|^\mu - |v|^\mu)| \to 0 \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

O limite acima, (2.12) e o fato de $v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ nos permitem utilizar o argumento utilizado na verificação de (2.2) para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha(|v_n|^\mu - |y_n^+|^\mu - |v|^\mu) = 0$$

De maneira análoga verificamos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^\alpha - |u|^\alpha)|v|^\mu = 0.$$

As relações acima e (2.10) nos fornece (2.9). O teorema está demonstrado. ∎

O lema a seguir nos permite verificar que o funcional I satisfaz a condição (PS) para determinados valores do nível minimax associado ao Passo da Montanha. A demonstração de uma versão desse lema para o caso onde o acoplamento tem crescimento subcrítico pode ser vista em [17].

Lema 2.4. *Seja $(z_n) \subset \mathbb{E}$ uma sequência $(PS)_c$ associada ao funcional I. Então, passando a uma subsequência se necessário, existe $z \in \mathbb{E}$, solução do Sistema (3), tal que $(\tilde{z}_n) = (z_n - z)$ é uma sequência $(PS)_{c'}$ para I, com $c' = c - I(z)$.*

Demonstração: Pelo Lema 2.1 temos que a menos de subsequência, $z_n \rightharpoonup z = (u, v)$, fracamente em $\mathbb{E}$ e que z é uma solução (fraca) do Sistema (3). Além disto, pelo Lema 2.2, podemos considerar sem perda de generalidade que $z_n, z \geq 0$. Como $z_n \rightharpoonup z$, obtemos que $\tilde{z}_n = (w_n, y_n) \rightharpoonup 0$ fracamente em $\mathbb{E}$. De acordo com a definição de I, e aplicando o Lema de Brézis-Lieb para problemas escalares, (veja por exemplo [41]), podemos escrever

$$\begin{aligned} I(z_n) = I(\tilde{z}_n + z) &= \frac{1}{2}||z||^2 + \frac{1}{2}||\tilde{z}_n||^2 + \langle \tilde{z}_n, z\rangle_{\mathbb{E}} - \frac{1}{p}|u|_p^p - \frac{1}{q}|v|_q^q - \frac{1}{p}|w_n^+|_p^p - \\ &- \frac{1}{q}|y_n^+|_q^q - \frac{2\beta}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |(w_n + u)|^\alpha |y_n + v|^\mu + o_n(1). \end{aligned}$$

A seguir, aplicando o Teorema 2.3, obtemos

$$\begin{aligned} I(z_n) &= \frac{1}{2}||z||^2 - \frac{1}{p}|u|_p^p - \frac{1}{q}|v|_q^q - \frac{2\beta}{2^*}\int |u|^\alpha |v|^\mu + \frac{1}{2}||\tilde{z}_n||^2 - \frac{1}{p}|w_n^+|_p^p - \\ &- \frac{1}{q}|y_n^+|_q^q - \frac{2\beta}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |w_n^+|^\alpha |y_n^+|^\mu + o_n(1) \\ &= I(z) + I(\tilde{z}_n) + o_n(1). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lim I(\tilde{z}_n) = c - I(z) = c' \tag{2.13}$$

Para verificar que $\lim I'(\tilde{z}_n) = 0$, primeiro observamos que, dado $w = (\phi, \psi) \in \mathbb{E}$ tal que $||w|| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} I'(z_n) \cdot w &= \langle \tilde{z}_n, w\rangle_{\mathbb{E}} + \langle z, w\rangle_{\mathbb{E}} - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-1}\phi - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{q-1}\psi \\ &- \frac{2\beta}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} (\alpha|u_n|^{\alpha-1}\phi|v_n|^\mu + \mu|u_n|^\alpha|v_n|^{\mu-1}\psi). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Agora, lembrando que z é um ponto crítico de I, podemos escrever

$$\langle z, w\rangle_{\mathbb{E}} = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}\phi + \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{q-1}\psi + \frac{2\beta}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} (\alpha|u|^{\alpha-1}|v|^\mu\phi + \mu|u|^\alpha|v|^{\mu-1}\psi).$$

Substituindo esta relação em (2.14), e utilizando as imersões compactas $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2 \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N),\ r \in (2, 2^*)$, obtemos

$$\begin{aligned} I'(z_n) \cdot w = \langle \tilde{z}_n, w\rangle_{\mathbb{E}} &+ \frac{2\beta}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} \alpha(|u|^{\alpha-1}\phi|v|^\mu - |u_n|^{\alpha-1}\phi|v_n|^\mu) \\ &+ \frac{2\beta}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} \mu(|u|^\alpha|v|^{\mu-1}\psi - |u_n|^\alpha|v_n|^{\mu-1}\psi) + o_n(1). \end{aligned}$$

Na expressão acima, somamos e subtraímos os termos $\int_{\mathbb{R}^N} \alpha|u_n|^{\alpha-1}|y_n^+|^{\mu}\phi$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \mu|u_n|^{\alpha}|y_n^+|^{\mu-1}\psi$ e obtemos

$$\begin{aligned} I'(z_n)\cdot w = \langle \tilde{z}_n, w\rangle_{\mathbb{E}} &- \frac{2\beta}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha\phi|u_n|^{\alpha-1}|y_n^+|^{\mu} + \mu\psi|u_n|^{\alpha}|y_n^+|^{\mu-1}) \\ &+ \frac{2\beta}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}\alpha\phi(|u|^{\alpha-1}|v|^{\mu} - |u_n|^{\alpha-1}|v_n|^{\mu} + |u_n|^{\alpha-1}|y_n^+|^{\mu}) \\ &+ \frac{2\beta}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}\mu\psi(|u|^{\alpha}|v|^{\mu-1} - |u_n|^{\alpha}|v_n|^{\mu-1} + |u_n|^{\alpha}|y_n^+|^{\mu-1}) + o_n(1). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Lembrando que $\tilde{z}_n \rightharpoonup 0$, vamos admitir por um momento que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{\alpha-1}|y_n^+|^{\mu}\phi = \int_{\mathbb{R}^N}|w_n^+|^{\alpha-1}|y_n^+|^{\mu}\phi + o_n(1), \tag{2.16}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{\alpha}|y_n^+|^{\mu-1}\psi = \int_{\mathbb{R}^N}|w_n^+|^{\alpha}|y_n^+|^{\mu-1}\psi + o_n(1), \tag{2.17}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\alpha-1}|v|^{\mu}\phi = \int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{\alpha-1}|v|^{\mu}\phi + o_n(1), \tag{2.18}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\alpha}|v|^{\mu-1}\psi = \int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{\alpha}|v|^{\mu-1}\psi + o_n(1), \tag{2.19}$$

uniformemente para $||w|| \leq 1$. Tendo em vista as afirmações acima, temos que

$$\begin{aligned} I'(z_n)\cdot w &= \langle \tilde{z}_n, w\rangle_{\mathbb{E}} - \frac{2\beta\alpha}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha\phi|w_n^+|^{\alpha-1}|y_n^+|^{\mu} + \mu\psi|w_n^+|^{\alpha}|y_n^+|^{\mu-1}) \\ &+ \frac{2\beta\alpha}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{\alpha-1}(|v|^{\mu} - |v_n|^{\mu} + |y_n^+|^{\mu})\phi \\ &+ \frac{2\beta\mu}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^{\mu-1}(|u|^{\alpha} - |u_n|^{\alpha} + |w_n^+|^{\alpha})\psi + o_n(1). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{\alpha-1}(|v|^{\mu} - |v_n|^{\mu} + |y_n^+|^{\mu})\phi = o_n(1) \tag{2.21}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^{\mu-1}(|u|^{\alpha} - |u_n|^{\alpha} + |w_n^+|^{\alpha})\psi = o_n(1), \tag{2.22}$$

uniformemente para $||w|| \leq 1$. Admitindo essas duas afirmações, invocando (2.20), lembrando que $z_n \rightharpoonup z = (u,v)$ fracamente em $\mathbb{E}$ e usando as imersões compactas $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2 \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N),\ r \in (2, 2^*)$, podemos concluir que

$$\begin{aligned} I'(z_n)\cdot w &= \langle \tilde{z}_n, w\rangle_{\mathbb{E}} - \frac{2\beta}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha\phi|w_n^+|^{\alpha-1}|y_n^+|^{\mu} + \mu\psi|w_n^+|^{\alpha}|y_n^+|^{\mu-1}) + o_n(1) \\ &= I'(\tilde{z}_n)\cdot w + \int_{\mathbb{R}^N}(|w_n^+|^{p-1}\phi + |y_n^+|^{q-1}\psi) + o_n(1). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Além disto, a menos de subsequência temos que $w_n^+, y_n^+ \to 0$ fortemente em $L^r(\mathbb{R}^N)$. Este fato e o fato que (z_n) é uma $(PS)_c$ garantem que $||I'(z_n)||_{\mathbb{E}'} \to 0$. Com isso, para concluirmos a demonstração do teorema resta verificar as afirmações (2.16)-(2.19), (2.21) e (2.22). Começamos com a verificação de (2.21).

Seja $(\Psi_n) = ((\phi_n, \psi_n)) \subset \mathbb{E}$ uma sequência tal que $||\Psi_n|| \leq 1$. O fato de termos $u_n, v \geq 0$ e uma aplicação direta do Teorema do Valor Médio nos permitem encontrar $C_4 > 0$, tal que

$$||v|^{\mu} - |v_n|^{\mu} + |y_n^+|^{\mu}| \leq C_4(|v|^{\mu} + |y_n^+|^{\mu-1}|v|), \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Consequentemente, utilizando as limitações de (u_n) e (ϕ_n) em $\mathbb{E}_1$, e a limitação de (y_n^+) em $\mathbb{E}_2$, e o Teorema das Imersões de Sobolev, encontramos $C_5 > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_M ||u_n|^{\alpha-1}(|v|^{\mu} - |v_n|^{\mu} + |y_n^+|^{\mu})\phi_n| \leq C_5(|v|_{L^{2^*}(M)} + |v|^{\mu-1}_{L^{2^*}(M)}), \tag{2.24}$$

para todo conjunto Lebesgue mensurável $M \subset \mathbb{R}^N$.

Como $\Psi_n \subset \mathbb{E}$ é uma sequência limitada, tomando uma subsequência se necessário, podemos supor que $\Psi_n \rightharpoonup \Psi$ fracamente em $\mathbb{E}$. Além disto, como $z_n \rightharpoonup z$ fracamente em $\mathbb{E}$ e $y_n^+ \rightharpoonup 0$ fracamente em $\mathbb{E}_2$, podemos supor que

$$|u_n|^{\alpha-1}(|v|^{\mu} - |v_n|^{\mu} + |y_n^+|^{\mu})\phi_n \to 0 \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N. \tag{2.25}$$

Portanto, (2.24), (2.25), o fato de $v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e o argumento utilizado na verificação de (2.2) estabelecem (2.21). A afirmação (2.22) é verificada de maneira análoga.

A seguir apresentamos a demonstração de (2.16). Inicialmente afirmamos que existe $C_6 > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} ||w_n + u|^{\alpha-1} - |w_n^+|^{\alpha-1}| &= ||u_n|^{\alpha-1} - |w_n|^{\alpha-1}| \\ &\leq C_6(|w_n|^{\alpha-2}|u| + |u|^{\alpha-1}) \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Utilizando esta relação, as limitações de (u_n), (w_n^+) e (ϕ_n) em $\mathbb{E}_1$, a desigualdade de Hölder e o Teorema das Imersões de Sobolev, encontramos $C_7 > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_M |(|u_n|^{\alpha-1} - |w_n^+|^{\alpha-1})|y_n^+|^{\mu}|\phi_n| \leq C_7(|u|_{L^{2^*}(M)} + |u|_{L^{2^*}(M)}^{\alpha-1}), \tag{2.27}$$

para todo conjunto Lebesque mensurável $M \subset \mathbb{R}^N$. Argumentando como em (2.25), podemos supor que

$$|(|u_n|^{\alpha-1} - |w_n^+|^{\alpha-1})|y_n^+|^{\mu}|\phi_n| \to 0 \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N. \tag{2.28}$$

Como nos casos anteriores, (2.27) e (2.28) e o Teorema de Vitali estabelecem a relação (2.16). Resta verificar a relação (2.26). Seja $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $u_n(x), u(x) \in \mathbb{R}$. Consideramos duas possibilidades em função dos valores do parâmetro α:

Caso 1: $1 < \alpha < 2$. Note que a relação (2.26) é trivialmente satisfeita se $u(x) = 0$. Portanto, podemos supor que $u(x) > 0$. Se $w_n(x) \leq 0$, como $u_n(x), u(x) \leq 0$,

$$||u_n(x)|^{\alpha-1} - |w_n^+|^{\alpha-1}| = |w_n(x) + u(x)|^{\alpha-1} \leq |u(x)|^{\alpha-1}. \tag{2.29}$$

A seguir, considerando que $0 < w_n(x) < 2u(x)$, temos que $|u_n(x)| \leq 3|u(x)|$ e, consequentemente,

$$||u_n(x)|^{\alpha-1} - |w_n^+|^{\alpha-1}| \leq (3^{\alpha-1} + 1)|u(x)|^{\alpha-1}. \tag{2.30}$$

Considerando $w_n(x) \geq 2u(x)$, aplicamos o Teorema do Valor Médio para encontrar $t_0 = t_0(x) \in (0, 1)$ tal que

$$||u_n(x)|^{\alpha-1} - |w_n^+|^{\alpha-1}| = |(\alpha-1)(w_n(x) + t_0 u(x))^{\alpha-2}u(x)| \leq \frac{(\alpha-1)}{2^{2-\alpha}}|u(x)|^{\alpha-1}. \tag{2.31}$$

Esta desigualdade, (2.29) e (2.30) estabelecem (2.26), para o caso em que $1 < \alpha < 2$.

Caso 2: $\alpha \geq 2$. Neste caso, se $w_n(x) > 0$ temos que (2.29) se verifica. Por outro lado, se $w_n(x) > 0$, aplicando mais uma vez o Teorema do Valor Médio, encontramos $t_0 = t_0(x)$ tal que

$$\begin{aligned} ||u_n(x)|^{\alpha-1} - |w_n^+|^{\alpha-1}| &= |(\alpha-1)(w_n(x) + t_0 u(x))^{\alpha-2}u(x)| \\ &\leq 2^{\alpha-2}(|w_n(x)|^{\alpha-2}|u(x)| + |w_n(x)|^{\alpha-1}). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Assim, (2.29), (2.31) e (2.32), implicam que (2.26) é satisfeita. A relação (2.26) está demonstrada.

Finalmente, observamos que (2.17) e (2.18) são estabelecidas utilizando argumentos similares aos utilizados nas verificações de (2.21) e (2.16). A demonstração do Lema 2.4 está concluída. ∎

Nosso próximo objetivo é estabelecer o nível $c \in \mathbb{R}$ abaixo do qual o funcional I satisfaz a condição (PS). Para tal, inicialmente definimos a constante $S_{(\alpha,\mu)}$ associado ao acoplamento crítico por

$$S_{(\alpha,\mu)} = \inf_{(u,v)\in\mathbb{E}\setminus(0,0)} \left\{ \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right)}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^\alpha |v|^\mu\right)^{\frac{2}{2^*}}} \right\} \tag{2.33}$$

Proposição 2.5. *Seja $(z_n) \subset \mathbb{E}$ uma sequência $(PS)_c$ associado ao funcional I, com $0 < c < \dfrac{1}{N}(2\beta)^{\frac{2-N}{2}} S_{(\alpha,\mu)}^{\frac{N}{2}}$. Então I satisfaz a condição $(PS)_c$ sobre $\mathbb{E}$.*

Demonstração: Procedendo como na Proposição 1.10 temos que (z_n) é limitada em $\mathbb{E}$. Então, passando a uma subsequência se necessário, $z_n \rightharpoonup z$ em $\mathbb{E}$. Podemos supor sem perda de generalidade que $z = 0$, pois caso contrário consideramos $\tilde{z}_n = z_n - z$. Nesse caso $\tilde{z}_n \rightharpoonup 0$. Além disto, pelo Lema 2.4, temos que $\tilde{z}_n = z_n - z$ é uma sequência $(PS)_{c'}$ para I, onde $c' = c - I(z)$. Argumentando como no Lema 1.5 obtemos que $I(z) \geq 0$. Portanto $c' < \dfrac{1}{N}(2\beta)^{\frac{2-N}{2}} S_{(\alpha,\mu)}^{\frac{N}{2}}$. Para concluir a demonstração da proposição basta verificar que, a menos de subsequência, $z_n \to 0$ em $\mathbb{E}$.

Como $z_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $\mathbb{E}$, observando que as imersões de $\mathbb{E}_1$ e $\mathbb{E}_2$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ e $L^q(\mathbb{R}^N)$, respectivamente são compactas, temos a menos de subsequênica, que

$$|u_n|_p^p \to 0 \text{ e } |v_n|_q^q \to 0 \text{ fortemente em } \mathbb{E}_1 \text{ e } \mathbb{E}_1, \text{ respectivamente .} \tag{2.34}$$

Agora, definimos

$$\begin{cases} l_1 &= \lim ||u_n||_1^2, \\ l_2 &= \lim ||v_n||_2^2, \\ l &= (l_1 + l_2) = \lim ||z_n||^2. \end{cases} \tag{2.35}$$

Como (z_n) é uma sequência $(PS)_c$, obtemos

$$o(1) = \langle I'(z_n), (u_n, 0)\rangle = ||u_n||_1^2 - \frac{2\beta\alpha}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha |v_n|^\mu,$$

$$o(1) = \langle I'(z_n), (0, v_n)\rangle = ||v_n||_2^2 - \frac{2\beta\mu}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha |v_n|^\mu.$$

Por (2.34), segue que

$$\begin{cases} l_1 &= \lim ||u_n||_1^2 = \dfrac{2\beta\alpha}{2^*} \lim \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha |v_n|^\mu, \\ l_2 &= \lim ||v_n||_2^2 = \dfrac{2\beta\mu}{2^*} \lim \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha |v_n|^\mu \\ l &= 2\beta \lim \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha |v_n|^\mu \end{cases} \tag{2.36}$$

Por outro lado, usando (2.34) novamente, temos

$$\begin{aligned} c + o(1) &= \frac{1}{2}||u_n||_1^2 + \frac{1}{2}||v_n||_2^2 - \frac{2\beta}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha |v_n|^\mu \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) l. \end{aligned}$$

Assim, por (2.35) e (2.36), temos

$$\frac{1}{N}(2\beta)^{\frac{2-N}{2}} S_{(\alpha,\mu)}^{\frac{N}{2}} > c = \frac{1}{N} l \tag{2.37}$$

Usando (2.33) e (2.35), concluímos que

$$S_{(\alpha,\mu)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha |v_n|^\mu \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2 \right) \leq ||z_n||^2.$$

Invocando (2.36) mais uma vez, obtemos

$$\left(\frac{l}{2\beta}\right)^{\frac{2}{2^*}} S_{(\alpha,\mu)} \leq l.$$

Se supomos que $l > 0$, então

$$(2\beta)^{\frac{2-N}{N}} S_{(\alpha,\mu)} \leq l^{\frac{2}{N}}.$$

Consequentemente,

$$(2\beta)^{\frac{2-N}{2}} S_{(\alpha,\mu)}^{\frac{N}{2}} \leq l$$

Isto contradiz (2.37). Portanto $l = 0$, ou seja $||z_n||^2 \to 0$. Como por hipótese $z_n \rightharpoonup 0$, concluímos que $z \to 0$ em $\mathbb{E}$. A proposição está demonstrada. ∎

Como consequência da proposição acima, temos

Proposição 2.6. *Suponha que* $0 < c < \dfrac{1}{N}(2\beta)^{\frac{2-N}{2}} S_{(\alpha,\mu)}^{\frac{N}{2}}$. *Então* I *satisfaz a condição* $(PS)_c$ *sobre* $\mathcal{M}_\beta$.

Demonstração: Invocando a Proposição 2.5, basta argumentar como na demonstração da Proposição 1.11 com acoplamento crítico, tendo em vista a Observação 1.12. ∎

2.2 Estimativas para o nível Minimax

Nesta seção inicialmente verificamos que para $\beta > 0$ suficientemente pequeno o nível minimax é uniformemente limitado em relação ao parâmetro $\beta > 0$. Além disto, utilizando funções testes apropriadas verificamos que o nível minimax está abaixo de $\frac{1}{N}(2\beta)^{\frac{2-N}{2}} S_{(\alpha,\mu)}^{\frac{N}{2}}$.

No próximo lema consideramos $\gamma : [0,1] \to \mathbb{E}^+$, $\gamma(s) = (su_1, (1-s)v_1)$ um caminho contínuo ligando z_1 e z_2. Note que, procedendo como no Lemma 1.3-(i) para cada $s \in [0,1]$ fixado, existe um único $t_\beta(\gamma(s)) > 0$ tal que $\eta_\beta(s) = t_\beta(\gamma(s))\gamma(t) \in \mathcal{M}_\beta$. Além disto, temos que a função $s \mapsto t_\beta(\gamma(s))$ é contínua.

Lema 2.7. *Existe uma constante $D > 0$, independente de $\beta > 0$, tal que*

$$\max_{s\in[0,1]} I(\eta_\beta(s)) \leq D,$$

Demonstração: Inicialmente observamos que

$$I(z) = ||z||^2 - \frac{1}{p}|u^+|_p^p - \frac{1}{q}|v^+|_q^q - \frac{2\beta}{\alpha+\mu}\int_{\mathbb{R}^N} |u^+|^\alpha |v^+|^\mu \leq ||z||^2 - \frac{1}{p}|u^+|_p^p - \frac{1}{q}|v^+|_q^q = I_0(z),$$

onde I_0 corresponde ao funcional I considerando $\beta = 0$. Para concluir note que,

$$\begin{aligned} I(\eta_\beta(s)) &= I(t_\beta(\gamma(s))\gamma(s)) \leq I_0(t_\beta(\gamma(s))\gamma(s)) \\ &\leq \max_{t>0} I_0(t\gamma(s)) = I_0(t_0(\gamma(s))\gamma(s)). \end{aligned}$$

Como $s \mapsto t_\beta(\gamma(s))$, $\gamma(s)$ e I_0 são contínuas e $s \in [0,1]$, por compacidade temos que existe $D > 0$, independente de $\beta > 0$, tal que

$$\max_{s\in[0,1]} I(\eta_\beta(s)) \leq D.$$

O lema está demonstrado. ∎

Nosso objetivo agora é estabelecer uma estimativa envolvendo o nível minimax que nos permitem determinar um intervalo no qual o funcional satisfaz a condição (PS). Para demonstrar os resultado a seguir, dado $\epsilon > 0$, consideramos as funções,

$$u_\epsilon(x) = \frac{(N(N-2)\epsilon)^{\frac{N-2}{4}}}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}} = C_N \frac{\epsilon^{\frac{N-2}{4}}}{(\epsilon+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Observamos (veja [39]) que $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ é uma família de funções nas quais o ínfimo que define a melhor constante, para a imersão de Sobolev $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$,

$$S = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}}, \tag{2.38}$$

é atingido.

O lema a seguir nos fornece uma relação entre S e $S_{\alpha,\mu}$, com $S_{\alpha,\mu}$ dado por (2.33). Esta relação nos permite obter uma uma estimativa para o nível minimax associado ao Sistema (3). A demonstração desse resultado é devido a Alves, Morais Filho e Souto [1]. A demonstração pode ser obtida também em [12], portanto só iremos enunciar o resultado aqui.

Lema 2.8. *Sejam S e $S_{\alpha,\mu}$ dados por (2.38) e (2.33), respectivamente. Então, temos a seguinte relação:*

$$S_{(\alpha,\mu)} = \left(\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{2^*}} + \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^{\frac{-\alpha}{2^*}}\right) S = \frac{2^*}{\alpha^{\frac{\alpha}{2^*}}\mu^{\frac{\mu}{2^*}}} S. \tag{2.39}$$

Além disso, se S é atingido em w_0, então $S_{(\alpha,\mu)}$ é assumido em $u_0 = Aw_0$ e $v_0 = Bw_0$, para cada constante A e B tais que $\dfrac{A}{B} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\mu}}$.

Tomando as funções testes (radiais) $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, tais que $\phi \equiv 1$ em $B_1(0)$ e $\phi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_2(0)$, definimos

$$v_\epsilon(x) = \frac{\phi(x)u_\epsilon(x)}{(\int_{\mathbb{R}^N} |\phi(x)u_\epsilon(x)|^{2^*})^{\frac{1}{2^*}}}. \tag{2.40}$$

O lema abaixo apresenta algumas estimativas que envolvem as famílias de funções v_ϵ definidas acima.

Lema 2.9. *As funções v_ϵ, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, satisfazem:*

1. $X_\epsilon \equiv \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\epsilon|^2 \leq S + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}})$.

2. $|v_\epsilon|_q^q \geq \displaystyle\int_{B_1(0)} |v_\epsilon|^q \geq \int_{B_{\sqrt{\epsilon}}(0)} |v_\epsilon|^q \geq M\epsilon^{\left(\frac{2N-q(N-2)}{4}\right)}$, *para algum $M > 0$, se $q > 2$.*

3. $|v_\epsilon|_2^2 = \begin{cases} O(\epsilon^{\frac{1}{2}}), & se \;\; N = 3 \\ O(\epsilon|\ln\epsilon|), & se \;\; N = 4 \\ O(\epsilon), & se \;\; N \geq 5. \end{cases}$

As demonstrações dos itens (1), (3) são padrões e podem ser encontradas por exemplo [8, 10, 34, 35]. No apêndice, demonstramos o item (2).

Nos lemas a seguir, sem perda de generalidade, admitimos que $\lambda_2 \leq \lambda_1$, Como foi citado acima, a família de funções u_ϵ realiza o ínfimo em (2.38). Considerando $A = \sqrt{\alpha}$ e $B = \sqrt{\mu}$, pelo Lema 2.8, sabemos que $(\sqrt{\alpha}u_\epsilon, \sqrt{\mu}u_\epsilon)$ realiza $S_{(\alpha,\mu)}$. Então, podemos estabelecer a seguinte relação entre S e $S_{(\alpha,\mu)}$

$$S_{(\alpha,\mu)} = \frac{2^*}{\alpha^{\frac{\alpha}{2^*}}\mu^{\frac{\mu}{2^*}}} S = \frac{(A^2 + B^2)}{(A^\alpha B^\mu)^{\frac{2}{2^*}}} S. \tag{2.41}$$

No que segue consideramos $z_\epsilon = (Av_\epsilon, Bv_\epsilon)$, onde v_ϵ é definido por (2.40). Assim, lembrando que $|v_\epsilon|_{2^*} = 1$, podemos escrever,

$$\begin{aligned} I(tz_\epsilon) &= \frac{1}{2}t^2||z_\epsilon||^2 - \frac{1}{p}A^p t^p |v_\epsilon|_p^p - \frac{1}{q}B^q t^q |v_\epsilon|_q^q - A^\alpha B^\mu \frac{2\beta}{2^*} t^{2^*} \\ &\leq \frac{1}{2}t^2||z_\epsilon||^2 - A^\alpha B^\mu \frac{2\beta}{2^*} t^{2^*} - \frac{1}{q}B^q t^q \int_{B_2(0)} |v_\epsilon|_q^q \end{aligned} \tag{2.42}$$

Lema 2.10. *Dado $\epsilon > 0$, existe $t_\epsilon > 0$ tal que $\max_{t>0} I(tz_\epsilon) = I(t_\epsilon z_\epsilon)$. Além disso, existem $\epsilon_0 > 0$, e constantes positivas T_0, T_1 tais que $T_0 \leq t_\epsilon \leq T_1$, para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$.*

Demonstração: Argumentando como no Lema 1.3, dado $\epsilon > 0$, encontramos $t_\epsilon > 0$, tal que

$$\max_{t>0} I(tz_\epsilon) = I(t_\epsilon z_\epsilon).$$

Pelo Lema 2.9 temos que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que X_ϵ e $|v_\epsilon|_2$ são limitadas para $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Mais uma vez, argumentando como no Lema 1.3 verificamos que existem $0 < T_0 \leq T_1 < \infty$ tais que $T_0 \leq t_\epsilon \leq T_1$, para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$. ∎

Finalmente somos capazes de demonstrar que $c_\beta < \frac{1}{N}(2\beta)^{\frac{2-N}{2}} S_{(\alpha,\mu)}^{\frac{N}{2}}$, onde c_β é dado por (1.45). Para isto, estabelecemos:

Lema 2.11. *Seja $t_\epsilon > 0$, dado pelo Lema 2.10. Se a condição (H) é satisfeita, então para todo $\beta > 0$, existe $\tilde{\epsilon_0} > 0$ tal que $I(t_\epsilon z_\epsilon) = \max_{t>0} I(tz_\epsilon) < \frac{1}{N}(2\beta)^{\frac{2-N}{2}} S_{(\alpha,\mu)}^{\frac{N}{2}}$, para todo $0 < \epsilon < \tilde{\epsilon_0}$*

Demonstração: Inicialmente, defina $D_\epsilon = (X_\epsilon + \lambda_1 |v_\epsilon|_2^2)$ e note que a função

$$F(\tau) = \frac{\tau^2}{2}(A^2 + B^2)D_\epsilon - \frac{2\beta}{2^*}\tau^{2^*} A^\alpha B^\mu$$

é crescente em $(0, \bar{\tau}_\epsilon)$, onde

$$\bar{\tau}_\epsilon = \left[\frac{(A^2+B^2)D_\epsilon}{2\beta A^\alpha B^\mu}\right]^{\frac{1}{2^*-1}}.$$

Além disso seu máximo e dado por

$$F(\bar{\tau}_\epsilon) = \frac{1}{N}(2\beta)^{\frac{2-N}{2}}\left[\frac{(A^2+B^2)D_\epsilon}{(A^\alpha B^\mu)^{\frac{2}{2^*}}}\right]^{\frac{N}{2}}. \tag{2.43}$$

Usando esse fato, (2.42) e o Lema 2.10, para cada $\beta > 0$ (fixado), podemos obter uma constante positiva C_0, tal

$$I(t_\epsilon z_\epsilon) \le \frac{1}{N}(2\beta)^{\frac{2-N}{2}}\left[\frac{(A^2+B^2)D_\epsilon}{(A^\alpha B^\mu)^{\frac{2}{2^*}}}\right]^{\frac{N}{2}} - C_0\int_{B_2(0)}|v_\epsilon|_q^q \tag{2.44}$$

Agora tendo em vista aplicar o Lema 2.9, vamos considerar separadamente três casos.

Caso N = 3

Usando a estimativa acima, (2.41) e o Lema 2.9, obtemos uma constante positiva C_1, C_2 tais que

$$\begin{aligned}
I(t_\epsilon z_\epsilon) &\le \frac{1}{3}(2\beta)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{(A^2+B^2)}{(A^\alpha B^\mu)^{\frac{2}{2^*}}}\right]^{\frac{3}{2}}(X_\epsilon + \lambda_1|v_\epsilon|_2^2)^{\frac{3}{2}} - C_0\int_{B_2(0)}|v_\epsilon|_q^q \\
&\le \frac{1}{3}(2\beta)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{(A^2+B^2)}{(A^\alpha B^\mu)^{\frac{2}{2^*}}}\right]^{\frac{3}{2}}(S + O(\epsilon^{\frac{1}{2}}))^{\frac{3}{2}} - C_0\int_{B_2(0)}|v_\epsilon|_q^q \\
&\le \frac{1}{3}(2\beta)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{(A^2+B^2)S}{(A^\alpha B^\mu)^{\frac{2}{2^*}}}\right]^{\frac{3}{2}} + O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) - C_0\int_{B_2(0)}|v_\epsilon|_q^q
\end{aligned}.$$

Agora invocando o Lema 2.9, obtemos

$$\begin{aligned}
I(t_\epsilon z_\epsilon) &\le \frac{1}{3}S_{(\alpha,\mu)}^{\frac{3}{2}}(2\beta)^{-\frac{1}{2}} + O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) - C_0\int_{B_2(0)}|v_\epsilon|_q^q \\
&\le \frac{1}{3}S_{(\alpha,\mu)}^{\frac{3}{2}}(2\beta)^{-\frac{1}{2}} + \epsilon^{\frac{1}{2}}(C_1 - C_2\epsilon^{\frac{4-q}{4}}).
\end{aligned}$$

Invocando a condição (H), obtemos $\epsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$(C_1 - C_2\epsilon_1^{\frac{4-q}{4}}) < 0,$$

para todo $0 < \epsilon < \epsilon_1$. O caso $N = 3$, está demonstrado.

Caso N=4

Argumentando como no caso anterior obtemos constantes positivas C_3 e C_4, tais que

$$\begin{aligned} I(t_\epsilon z_\epsilon) &\leq \frac{1}{4}(2\beta)^{-1}\left[\frac{(A^2+B^2)S}{(A^\alpha B^\beta)^{\frac{2}{2^*}}}\right]^2 + O(\epsilon|\ln\epsilon|) - C_0\int_{B_2(0)}|v_\epsilon|_q^q \\ &\leq \frac{1}{4}(2\beta)^{-1}S^2_{(\alpha,\mu)} + \epsilon|\ln\epsilon|\left[C_3 - C_4\frac{\epsilon^{\frac{2-q}{2}}}{|\ln\epsilon|}\right]. \end{aligned}$$

Portanto como $q > 2$, para cada $\beta > 0$ fixado, existe $\epsilon_2 > 0$ suficientemente pequeno, tal que

$$I(t_\epsilon z_\epsilon) < \frac{1}{4}(2\beta)^{-1}S^2_{(\alpha,\mu)}, \text{ para todo } 0 < \epsilon < \epsilon_2$$

Caso $N \geq 5$

Como nos casos anteriores obtemos contantes positivas C_5 e C_6, tais que

$$\begin{aligned} I(t_\epsilon z_\epsilon) &\leq \frac{1}{N}(2\beta)^{\frac{2-N}{2}}\left[\frac{(A^2+B^2)S}{(A^\alpha B^\beta)^{\frac{2}{2^*}}}\right]^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}) - C_0\int_{B_2(0)}|v_\epsilon|_q^q \\ &\leq \frac{1}{N}(2\beta)^{\frac{2-N}{2}}S^{\frac{N}{2}}_{(\alpha,\mu)} + \epsilon\left[C_5 - C_6\epsilon^{\frac{(N-2)(2-q)}{4}}\right]. \end{aligned}$$

Como $q > 2$, para cada $\beta > 0$ fixado, podemos obter $\epsilon_3 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$I(t_\epsilon z_\epsilon) < \frac{1}{N}(2\beta)^{\frac{2-N}{2}}S^{\frac{N}{2}}_{(\alpha,\mu)}, \text{ para todo } 0 < \epsilon < \epsilon_3.$$

Tomando $\tilde{\epsilon_0} = \min\{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$, Obtemos o resultado desejado. O lema está demonstrado. ■

Nas seções a seguir, demonstramos os resultados de existência e multiplicidade de soluções do Sistema (3) no caso em o acoplamento tem crescimento crítico, isto é, $\alpha + \mu = 2^*$.

Os argumentos para a demonstração dos resultados, no caso em que o acoplamento tem crescimento crítico, são similares aos argumentos utilizados no caso do acoplamento subcrítico. No entanto, vale lembrar que no caso em que o acoplamento é crítico o Lema 1.10 e a Proposição 1.11 não se aplicam para todo nível minimax $c \in \mathbb{R}$. Mas no caso em que o acoplamento é crítico, fomos capazes de verificar a Proposição 2.6 que é uma versão da Proposição 1.11. Esta proposição combinada com as estimativas locais obtidas no Capítulo 1, o Teorema do Passo da Montanha e métodos de minimização, nos permitem demonstrar os resultados propostos no Capítulo 2.

2.3 Existência de Solução Positiva: Teorema 0.9

Nessa seção, estabelecemos uma versão do Teorema 0.1, no caso em que o acoplamento tem crescimento crítico. Os argumentos para demonstração são similares ao caso subcrítico.

De acordo com as Proposições 1.1 e 1.6, para estabelecer soluções positivas do Sistema (3) é suficiente encontrar pontos críticos do funcional I restrito à variedade de Nehari.

Tendo em vista este fato, a demonstração do Teorema 0.9 é uma consequência direta da combinação das Proposições 1.15 e 2.6, do Lema 1.20 e do Lema 2.11.

Demonstração do Teorema 0.9: Invocando o Lema 2.11, temos que para cada $\beta > 0$,

$$c_\beta < \frac{1}{N}(2\beta)^{\frac{2-N}{2}} S_{\alpha,\mu}^{\frac{N}{2}},$$

em que c_β é caracterizado por (1.45). Então, pela Proposição 2.6, I satisfaz a condição $(PS)_{c_\beta}$ sobre a variedade $\mathcal{M}_\beta$. Portanto, de acordo com o Lema 1.19 existe $z_3 \in \mathcal{M}_\beta$ tal que

$$I(z_3) = \inf_{z \in \mathcal{M}_\beta} I(z) = c_\beta.$$

Além disto, tomando $\beta_1 > 0$ dado no Lema 1.20, temos que para todo $\beta > \beta_1$,

$$I(z_3) < \min\{I(z_1), I(z_2)\}.$$

Portanto, as estimativas acima e as Proposições 1.1 e 1.6 e o Lema 1.21, implicam que z_3 é uma solução positiva de menor energia do Sistema (3), para todo $\beta > \beta_1$.

Por outro lado, invocando a Proposição 1.15 encontramos $\beta_0 > 0$ tal que para todo $\beta \in (0, \beta_0)$ existem vizinhanças, U_β^1 e U_β^2 de z_1 e z_2, respectivamente, em $\mathcal{M}_\beta$, com $\overline{U_\beta^1} \cap \overline{U_\beta^2} = \emptyset$, tais que

$$I\big|_{\partial U_\beta^i}(z) > I(z_i),\ i = 1, 2. \tag{2.45}$$

Além disto, considerando $\beta_0 > 0$, menor se necessário, e invocando o Lema 2.7 encontramos $D > 0$, independente de $\beta > 0$, tal que

$$c_{\mathcal{M}_\beta} < D < \frac{1}{N}(2\beta)^{\frac{2-N}{2}} S_{\alpha,\mu}^{\frac{N}{2}} \tag{2.46}$$

com $c_{\mathcal{M}_\beta}$ caracterizado por (1.48). Consequentemente, usando o exposto acima, a Proposição 2.6 e o Teorema do Passo da Montanha, encontramos um ponto crítico

$z_4 \in \mathcal{M}_\beta$ tal que

$$I(z_4) = c_{\mathcal{M}_\beta} > \max\{I(z_1), I(z_2)\}. \tag{2.47}$$

Aplicando as Proposições 1.1 e 1.6, concluímos que z_4 é uma solução positiva do Sistema (3). O teorema está demonstrado. ■

2.4 Sistemas com Acoplamento Sublinear em uma das Variáveis

Nesta seção, consideramos o caso em que o acoplamento é sublinear em relação a pelo menos uma das variáveis, u ou v. Neste caso, se consideramos $\beta > 0$ suficientemente pequeno verificamos que o Sistema (3) com acoplamento crítico tem pelo menos duas soluções positivas. Além disto, se o acoplamento for duplamente sublinear em relação às duas variáveis verificamos que o sistema tem uma solução positiva de menor energia para todo $\beta > 0$.

Neste caso, a demonstração é uma consequência direta das Proposições 2.7, 2.6, 1.25.

Demonstração do Teorema 0.10: Inicialmente observamos que pela Proposição 1.15 obtemos $\beta_0 > 0$ tal que para todo $\beta \in (0, \beta_0)$, existem vizinhanças U_β^1 e U_β^2, de z_1 e z_2, respectivamente, em $\mathcal{M}_\beta$ com $z_1 \notin U_\beta^2$, $z_2 \notin U_\beta^1$ e satisfazendo satisfazendo (2.45) . Além disto, considerando $\beta_0 > 0$ menor se necessário, e argumentando como na demonstração do Teorema 0.9, encontramos um ponto crítico $z_3 \in \mathcal{M}_\beta$, tal que

$$I(z_3) > \max\{I(z_1), I(z_2)\}. \tag{2.48}$$

A seguir supomos, sem perda de generalidade, que o acoplamento é sublinear em relação à variável v. Tendo em vista (2.46) e a Proposição 1.24, existe um ponto crítico de I sobre $\mathcal{M}_\beta$, $z_4 \in U_\beta^1$, tal que

$$I(z_4) = \inf_{z \in \overline{U_\beta^1}} I(z) = c_{1,\beta} \tag{2.49}$$

Além disto, invocando a Proposição 1.25, temos que $I(z_4) < I(z_1)$, logo $z_4 \neq z_1$. Como $z_2 \notin \overline{U_\beta^1}$, temos que $z_4 \neq z_2$. Finalmente, por (2.45), (2.48) e (2.49), temos que $z_4 \neq z_3$. Isto conclui a demonstração do teorema. ■

A seguir, demonstramos que se o acoplamento é duplamente sublinear em relação às variáveis u e v, então o Sistema (3) tem uma solução de menor energia para todo $\beta > 0$ e possui pelo menos três soluções positivas para todo $\beta > 0$ suficientemente pequeno. As Proposições 2.7, 2.6 e o Lema 2.11, nos permitem argumentar como no caso em que o acoplamento é subcrítico para demonstração do resultado.

Demonstração do Teorema 0.11:

- Existência de uma solução de menor energia.

Como o acoplamento é duplamente sublinear, pela Proposição 1.25, temos que z_1 e z_2 não são mínimos locais do funcional I sobre $\mathcal{M}_\beta$ para todo $\beta > 0$. Além disto, dado $\beta > 0$, invocando o Lema 2.11, temos

$$c_\beta \leq \max_{t>0} I(tz) = I(t_\epsilon z_\epsilon) < \frac{1}{N}(2\beta)^{\frac{2-N}{2}} S_{(\alpha,\mu)}^{\frac{N}{2}},$$

com c_β dado por (1.45).

Usando estes fatos e invocando o Lema 1.19 obtemos z_3 tal que

$$\inf_{z\in\mathcal{M}_\beta} I(z) = I(z_3) < \min\{I(z_1), I(z_2)\}. \tag{2.50}$$

Logo, $z_3 \notin \{z_1, z_2\}$. Portanto, usando o Lema 1.21, z_3 é uma solução de menor energia do Sistema (3).

- Existência de pelo menos três soluções positivas.

Invocando a Proposição 1.15 e argumentando como no Teorema 0.9, obtemos $\beta_0 > 0$ tal que para todo $\beta < \beta_0$ existem vizinhanças U_β^1 e U_β^2, de z_1 e z_2, em $\mathcal{M}_\beta$, respectivamente, com $\overline{U_\beta^1} \cap \overline{U_\beta^2} = \emptyset$ e satisfazendo (2.45). Além disto, tendo em vista (2.46), a Proposição 2.6 e o Teorema do passo da Montanha, obtemos $z_4 \in \mathcal{M}_\beta$ tal que

$$I(z_4) = c_{\mathcal{M}_\beta} > \max\{I(z_1), I(z_2)\}. \tag{2.51}$$

Agora utilizando os argumentos da demonstração do Teorema 0.10 encontramos $z_5 \in U_\beta^1$ e $z_6 \in U_\beta^2$ pontos críticos de I sobre $\mathcal{M}_\beta$ tais que

$$I(z_5) < I(z_1) \quad \text{e} \quad I(z_6) < I(z_2). \tag{2.52}$$

De acordo com as estimativas (2.51) e (2.52), obtemos que $z_5, z_6 \notin \{z_1, z_2, z_4\}$. Além disto, como $\overline{U_\beta^1} \cap \overline{U_\beta^2} = \emptyset$, temos que $z_5 \neq z_6$.

Isto estabelece que existe $\beta_0 > 0$, tal que o Sistema (3) tem pelo menos três soluções positivas para todo $\beta < \beta_0$. ∎

2.5 Estimativas do Tipo Ambrosetti-Colorado

Nesta seção, estabelecemos estimativas que nos permitem estimar $\beta_1 > 0$, dado pelo Teorema 0.9. Os argumentos utilizados aqui são similares aos utilizados no caso em que o acoplamento é subcrítico, (veja demonstração do Teorema 0.5).

Antes da demonstração dos teoremas para o Sistema (3) com acoplamento tendo crescimento crítico, verificamos o seguinte resultado

Lema 2.12. *Existe $\phi \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ tal que*

$$\gamma^2_{1,\alpha} = \frac{(\alpha+2)||\phi||^2_2}{4\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^\alpha |\phi|^2}.$$

Demonstração: De fato, inicialmente observamos que como no Lema 1.16, temos que $\gamma^2_{1,\alpha} > 0$. Além disto, tendo em vista a homogeneidade de $\gamma^2_{1,\alpha}$, encontramos uma sequência $\phi_n \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$,$||\phi_n||_2 = 1$, tal que

$$\gamma^2_{1,\alpha} = \frac{(\alpha+2)}{4\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^\alpha |\phi_n|^2} + o_n(1). \tag{2.53}$$

Passando a uma subsequência, se necessário, $\phi_n \rightharpoonup \phi$. Argumentando como em (1.18) temos que, a menos de subsequência, $\phi_n \to \phi$ em $L^\alpha(\mathbb{R}^N)$. Portanto, $(|\phi_n|^\alpha - |\phi|^\alpha) \to 0$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Consequentemente argumentando como na demonstração de (2.18) verificamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^\alpha |\phi|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^\alpha |\phi_n|^2 + o_n(1).$$

Portanto, invocando (2.53), podemos concluir que

$$\gamma^2_{1,\alpha} = \frac{\alpha+2}{4\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^\alpha |\phi|^2}.$$

Este fato, (2.53) e fato que $\gamma^2_{1,\alpha} > 0$, implicam que $\phi \not\equiv 0$.

Usando esse fato e lembrando que $||\phi||_2 \leq \liminf ||\phi_n||_2 = 1$, segue que

$$\gamma^2_{1,\alpha} \leq \frac{(\alpha+2)||\phi||^2_2}{4\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^\alpha |\phi|^2} \leq \gamma^2_{1,\alpha}.$$

Isso conclui a demonstração do lema. ∎

O mesmo resultado vale para $\gamma^2_{2,\mu}$.

Demonstração do Teorema 0.12: Para a demonstração do item (1) do Teorema 0.12, lembramos que por hipótese, $\lambda_2 \geq F(\lambda_1)$. Portanto, (1.68) implica que $I(z_2) \geq I(z_1)$. Invocamos o Lema 2.11 e a Proposição 2.6, para verificar que I satisfaz a condição $(PS)_{c_\beta}$ sobre a variedade $\mathcal{M}_\beta$, para todo $\beta > 0$. Portanto, de acordo com o Lema 1.19 existe $z_3 \in \mathcal{M}_\beta$ tal que

$$I(z_3) = \inf_{z \in \mathcal{M}_\beta} I(z) = c_\beta.$$

Além disto, tomando $\beta > \gamma_{1,\alpha}^2$, como o acoplamento é linear em relação à variável v, invocando a Proposição 1.29, temos que

$$I(z_3) < I(z_1) \leq I(z_2).$$

As estimativas acima e as Proposições 1.1 e 1.6 e o Lema 1.21 implicam que z_3 é uma solução positiva de menor energia do Sistema (3). Para verificar o item (2), basta argumentar como acima. O teorema está demonstrado. ∎

O teorema a seguir é uma consequência direta do Teorema 0.12.

Teorema 2.13. *Suponha $p = q$ e que o acoplamento seja crítico. Se a condição (H) for satisfeita e o acoplamento for linear em relação à uma das variáveis u ou v, então o Sistema (3) tem uma solução positiva de menor energia, nas seguintes condições*

1. *$\lambda_2 \geq \lambda_1$, o acoplamento é linear em relação à variável v e $\beta \in (\gamma_{1,\alpha}^2, +\infty)$*

2. *$\lambda_2 \leq \lambda_1$, o acoplamento é linear em relação à variável u e $\beta \in (\gamma_{2,\mu}^2, +\infty)$.*

Demonstração do Teorema 0.13: Para a demonstração do Teorema 0.13, basta utilizar o Lema 2.11 e 1.19 e as Proposições 1.29, 2.6, e argumentar como na demonstração do Teorema 0.6.

Apêndice

$\mathcal{A}$

Apêndice

Apresentamos inicialmente neste apêndice um resultado que nos permite estabelecer a regularidade das soluções do nosso sistema. Por último apresentamos um lema com o qual conseguimos estabelecer uma cota superior para o nível minimax associado ao Sistema (3).

A.1 Regularidade da solução

Com o objetivo de estabelecer um estudo sobre a regularidade da soluções da classe de sistemas consideradas neste trabalho, consideramos a seguinte versão do Teorema devido a Brézis-Kato (ver [38]) adaptado para sistemas. A demonstração da versão que iremos usar pode ser encontrada em [12]

Teorema A.1. *Sejam Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$ e $f, g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções Caratheodóry . Suponha que existam funções $a, b \in L^{\frac{N}{2}}_{loc}(\Omega)$ tais que*

$$\begin{cases} |f(x,z)| & \leq & a(x)(1+|z|) \ \ e \\ |g(x,z)| & \leq & b(x)(1+|z|), \ \ para\ todo \quad z \in \mathbb{R}^2, \ \ q.t.p. \quad x \in \ \Omega. \end{cases}$$

Se $z \in (H^1_{loc}(\Omega))^2$ é uma solução fraca de

$$\begin{cases} -\triangle u & = & f(x,z), \ \ em \ \ \Omega, \\ -\triangle v & = & g(x,z), \ \ em \ \ \Omega, \end{cases} \tag{A.1}$$

então, $z \in (L^q_{loc}(\Omega))^2$, para todo $q \geq 1$. Se $z \in (H^1_0(\Omega))^2$ e $a, b \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$, então $z \in (L^q(\Omega))^2$, para todo $q \geq 1$.

Corolário A.2. *Suponha que* $2 < p, q < 2^*$ *e* $2 < \alpha + \mu \leq 2^*$. *Se* $z \in \mathbb{E}$ *é uma solução fraca do Sistema (3), então* $z \in (C^2(\mathbb{R}^N))^2$.

Demonstração: Para aplicar o Teorema A.1, note que se $z \in \mathbb{E}$ é uma solução fraca do Problema (A.1), então z é uma solução fraca para o sistema;

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)(1 + |z|) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v = b(x)(1 + |z|) \text{ em } \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{A.2}$$

onde

$$a(x) = \frac{-\lambda_1 u(x) + |u(x)|^{p-1} + |u(x)|^{\alpha-1}|v(x)|^{\mu}}{1 + |z(x)|}$$

e

$$b(x) = \frac{-\lambda_2 v(x) + |v(x)|^{q-1} + |u(x)|^{\alpha}|v(x)|^{\mu-1}}{1 + |z(x)|}$$

Afirmamos que $a, b \in L^{\frac{N}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. De fato, pela desigualdade de Young, obtemos

$$|a(x)|^{\frac{N}{2}} \leq \left[\lambda_1^{\frac{N}{2}} + |u(x)|^{(p-2)\frac{N}{2}} + |u(x)|^{(\alpha+\mu-2)\frac{N}{2}} + |v(x)|^{(\alpha+\mu-2)\frac{N}{2}}\right].$$

e

$$|b(x)|^{\frac{N}{2}} \leq \left[\lambda_2^{\frac{N}{2}} + |v(x)|^{(q-2)\frac{N}{2}} + |u(x)|^{(\alpha+\mu-2)\frac{N}{2}} + |v(x)|^{(\alpha+\mu-2)\frac{N}{2}}\right].$$

Como $2 < p, q < 2^*$ e $2 < \alpha + \mu \leq 2^*$, obtemos que $(p-2)\frac{N}{2}, (q-2)\frac{N}{2} < 2^*$ e $(\alpha + \mu - 2)\frac{N}{2} \leq 2^*$. Portanto temos que $a, b \in L^{\frac{N}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Portanto, pelo Teorema A.1, $u, v \in L^s_{loc}(\mathbb{R}^N)$, para todo $1 \leq s < +\infty$. Isto implica que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= -\lambda_1 u + |u|^{p-1} + |u|^{\alpha-1}|v|^{\mu} \in L^s_{loc}(\mathbb{R}^N), \\ -\Delta v &= -\lambda_2 v + |v|^{q-1} + |u|^{\alpha}|v|^{\mu-1} \in L^s_{loc}(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Assim, pelo *Teorema* 9.15 [18], $u, v \in W^{2,s}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para todo $1 \leq s < +\infty$. Usando o *Teorema* 9.19 [18] obtemos que $u, v \in C^2(\mathbb{R}^N)$. ■

No caso em que o Sistema (3) tem crescimento crítico, o funcional associado ao sistema não satisfaz uma condição de compacidade de Palais-Smale para todo nível $c \in \mathbb{R}$. Para contornar essa dificuldade utilizamos funções testes para estabelecer estimativas relativas ao nível minimax associado ao Sistema (3). Para isso na próxima seção apresentamos algumas estimativas envolvendo essas funções testes.

A.2 As Funções-testes

Aqui consideraramos funções testes apropriadas, como as empregadas por Brézis e Nirenberg [8] para o estudo de problemas escalares elípticos semi lineares, e verificamos alguns resultados auxiliares sobre essas funções. Dado $\epsilon > 0$, consideramos as funções,

$$u_\epsilon(x) = \frac{(N(N-2)\epsilon)^{\frac{N-2}{4}}}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}} = C_N \frac{\epsilon^{\frac{N-2}{4}}}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Como em [39] temos que

$$S = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}}$$

é assumido para as funções u_ϵ. Tomando as funções testes (radiais) $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tais que $\phi \equiv 1$ em $B_1(0)$ e $\phi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_2(0)$, definimos

$$v_\epsilon(x) = \frac{\phi(x) u_\epsilon(x)}{(\int_{\mathbb{R}^N} |\phi(x) u_\epsilon(x)|^{2^*})^{\frac{1}{2^*}}} \tag{A.3}$$

O lema abaixo apresenta algumas estimativas que involvem as famílias de funções v_ϵ definidas acima.

Lema A.3. *As funções u_ϵ e v_ϵ, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, satisfazem:*

1. $X_\epsilon \equiv \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\epsilon|^2 \leq S + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}})$.

2. $|v_\epsilon|_q^q \geq \displaystyle\int_{B_1(0)} |v_\epsilon|^q \geq \int_{B_{\sqrt{\epsilon}}(0)} |v_\epsilon|^q \geq M\epsilon^{\left(\frac{2N-q(N-2)}{4}\right)}$, *para algum $M > 0$, se $q > 2$.*

3. $|v_\epsilon|_2^2 = \begin{cases} O(\epsilon^{\frac{1}{2}}), & se \quad N = 3 \\ O(\epsilon|\ln \epsilon|), & se \quad N = 4 \\ O(\epsilon), & se \quad N \geq 5. \end{cases}$

Demonstração: As demonstrações dos itens (1), (3) são padrões e podem ser encontradas por exemplo [8, 10, 34, 35]. Aqui demonstramos apenas o item (2).

Por (A.3) e o item (1) do Lema, considerando $\epsilon > 0$ suficiente pequeno, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_{\sqrt{\epsilon}}(0)} |v_\epsilon|^q &\geq C\int_{B_{\sqrt{\epsilon}}(0)} \frac{\epsilon^{\frac{q(N-2)}{4}}}{(\epsilon+|x|^2)^{\frac{q(N-2)}{2}}} = C\int_{B_{\sqrt{\epsilon}}(0)} \frac{\epsilon^{\frac{q(N-2)}{4}}}{\epsilon^{\frac{q(N-2)}{2}}\left(1+|\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}|^2\right)^{\frac{q(N-2)}{2}}} \\ &= C\epsilon^{\left(\frac{q(N-2)}{4}-\frac{q(N-2)}{2}\right)}\int_{B_{\sqrt{\epsilon}}(0)} \frac{1}{\left(1+|\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}|^2\right)^{\frac{q(N-2)}{2}}}.\end{aligned} \tag{A.4}$$

Considerando a mudança de variáveis, $r = |x|$, $s = \frac{r}{\sqrt{\epsilon}}$ e denotando por w_{N-1} a área da esfera S^{N-1}, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_{\sqrt{\epsilon}}(0)} |v_\epsilon|^q &= Cw_{N-1}\epsilon^{\left(\frac{q(N-2)}{4}-\frac{q(N-2)}{2}\right)}\int_0^{\sqrt{\epsilon}} \frac{dr}{\left(1+\left(\frac{r}{\sqrt{\epsilon}}\right)^2\right)^{\frac{q(N-2)}{2}}} \\ &= Cw_{N-1}\epsilon^{\left(\frac{q(N-2)}{4}-\frac{q(N-2)}{2}\right)}\int_0^{\sqrt{\epsilon}} \frac{r^{N-1}dr}{\left(1+\left(\frac{r}{\sqrt{\epsilon}}\right)^2\right)^{\frac{q(N-2)}{2}}} \\ &= Cw_{N-1}\epsilon^{\frac{-q(N-2)}{4}}\int_0^1 \frac{\epsilon^{\frac{N-1}{2}}\epsilon^{\frac{1}{2}}s^{N-1}ds}{(1+s^2)^{\frac{q(N-2)}{2}}} \\ &= Cw_{N-1}\epsilon^{\frac{2N-q(N-2)}{4}}\int_0^1 \frac{s^{N-1}ds}{(1+s^2)^{\frac{q(N-2)}{2}}} \geq M\epsilon^{\frac{2N-q(N-2)}{4}}.\end{aligned}$$

A.3 Algumas estimativas importantes

Proposição A.4. *Suponha que $r \geq 2$. Então*

$$(1+x)^r \geq 1 + x^r + 2(2^{r-1}-1)x^{\frac{r}{2}}, \quad \textit{para todo } x \geq 0. \tag{A.5}$$

Demonstração: Inicialmente supomos que $x \geq 1$. Para verificarmos o resultado nesse caso consideramos a seguinte função

$$f(x) = (1+x)^r - 1 - x^r - 2(2^{r-1}-1)x^{\frac{r}{2}}.$$

Note que $f(1) = 0$. Para estabelecermos o resultado, basta verificarmos que f é não decrescente para todo $x \geq 1$. Temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= r((1+x)^{r-1}) - rx^{r-1} - (2^{r-1}-1)x^{\frac{r-2}{2}} \\ &= r(r-1)\int_0^1 [(s+x)^{r-2} - (s+1)^{r-2}x^{\frac{r-2}{2}}]ds. \end{aligned}$$

Note que, dado $s \in [0,1]$, então

$$(s+x)^{r-2} \geq (s+1)^{r-2}x^{\frac{r-2}{2}} \text{ para todo } x \geq 1.$$

De fato, basta notar que $g(x) = \dfrac{s+x}{\sqrt{x}}$ é não decrescente e $g(1) = s+1$. Esse fato conclui a demonstração do resultado no caso em que $x \geq 1$.

Agora, se $x \in (0,1)$, pela demonstração anterior temos que

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^r \geq 1 + \left(\frac{1}{x}\right)^r + 2(2^{r-1}-1)\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{r}{2}}.$$

Mas, esta inequação é equivalente à

$$(1+x)^r \geq 1 + x^r + 2(2^{r-1}-1)x^{\frac{r}{2}}.$$

Assim obtemos a validade de $(A.5)$ para todo $x \geq 0$. A Proposição está demonstrada. ∎

De maneira análoga, estabelecemos a seguinte

Proposição A.5. *Suponha que $r \geq 2$. Então*

$$(1+x)^r \geq 1 + x^r + rx^{r-1}, \quad \textit{para todo } x \geq 0. \tag{A.6}$$

Como consequência das duas Proposições acima somos capazes de mostrar a seguinte

Proposição A.6. *Suponha que $r \geq 2$ e $\frac{r}{2} \leq \gamma \leq r-1$. Então*

$$(1+x)^r \geq 1 + x^r + a_\gamma x^\gamma, \quad \textit{para todo } x \geq 0, \tag{A.7}$$

onde $a_\gamma = \left[(2^r-2)^{2(r-(\gamma+1))}r^{(2\gamma-r)}\right]^{\frac{1}{r-2}}$ se $r > 2$ e $a_\gamma = 2$ se $r = 2$.

Demonstração: Inicialmente observamos que se $r = 2$ podemos tomar $a_\gamma = a_1 = 2$ e temos na verdade a igualdade em (A.7). Por (A.5) e (A.6) para $\gamma = \dfrac{r}{2}$ e $\gamma = r-1$, basta tomar $a_\gamma = a_{\frac{r}{2}} = (2^r-2)$ e $a_\gamma = a_{r-1} = r$, respectivamente. Supomos então que

$\frac{r}{2} < \gamma < r-1$ e escrevemos

$$\gamma = (1-\lambda)\frac{r}{2} + \lambda(r-1), \qquad \lambda \in (0,1).$$

Com isso temos que $\lambda = \dfrac{2\gamma - r}{r-2}$ e, consequentemente, $1-\lambda = \dfrac{2[r-(\gamma+1)]}{r-2}$. Considerando então

$$a_\gamma = a_1^{(1-\lambda)} a_2^{\lambda} = \left[(2^r-2)^{2(r-(\gamma+1))} r^{(2\gamma-r)}\right]^{\frac{1}{r-2}} \tag{A.8}$$

e invocando (A.5), (A.6) e a desigualdade de Young com expoentes $\frac{1}{1-\lambda}$ e $\frac{1}{\lambda}$, obtemos

$$\begin{aligned} 1 + x^r + a_\gamma x^\gamma &\leq 1 + x^r + (1-\lambda)a_1 x^{\frac{r}{2}} + \lambda a_2 x^{r-1} \\ &= (1-\lambda)[1 + x^r + a_1 x^{\frac{r}{2}}] + \lambda[1 + x^r + a_2 x^{r-1}] \\ &\leq (1-\lambda)(1+x)^r + \lambda(1+x)^r = (1+x)^r. \end{aligned}$$

A proposição está demonstrada. ■

Observação A.7. *Note que se $\frac{r}{2} \leq \gamma \leq r-1$ então $\frac{r}{2} \leq r-\gamma \leq r-1$. Assim, (A.7) é equivalente a*

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^r \geq 1 + \left(\frac{1}{x}\right)^r + a_\gamma \left(\frac{1}{x}\right)^{r-\gamma}, \quad \textit{para todo } x>0.$$

Como a aplicação $h(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$ é bijetora então, (A.7) equivale à

$$(1+x)^r \geq 1 + x^r + a_\gamma x^{(r-\gamma)}, \quad \textit{para todo } x>0. \tag{A.9}$$

1. *Sob as hipóteses da proposição acima se o substituimos x por $\dfrac{x}{y}$ temos que*

$$(x+y)^r \geq x^r + y^r + a_\gamma x^\gamma y^{r-\gamma}.$$

Referências Bibliográficas

[1] C. O. ALVES, D. C. MORAIS FILHO and M. A. S. SOUTO, On system of elliptic equations Involving subcritical or critical Sobolev exponents, Journal of Nonlinear Analysis **42** (2000), 771 - 787.

[2] A. AMBROSETTI and E. COLORADO, Bound and ground states of coupled nonlinear Schrödinger equations, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **342** (2006), 453-458.

[3] A. AMBROSETTI and E. COLORADO, Standing waves of some coupled nonlinear Schrödinger equations in $\mathbb{R}^N$, J. Lond. Math. Soc. **2** (2007), 67-82.

[4] A. AMBROSETTI, H. BRÉZIS and G. CERAMI, Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in Some Elliptic Problems, J. Funct. Analysis **122** (1994).

[5] A. AMBROSETTI and A. MALCHIODI, Perturbation methods and semilinear elliptic problems on $\mathbb{R}^N$, Prog. Math. **240** (2005)

[6] A. AMBROSETTI and P. H. RABINOWITZ, Dual variational methods in critical point theory and applications, J. Funct. Analysis **14** (1973), 349-381.

[7] T. BARTSCH, Z-Q. WANG and J. WEI, Bound states for a coupled Schrödinger system, J. Fixed Point Theory Appl. **2** (2007), 353-367.

[8] H. BRÉZIS and L. NIRENBERG, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, Comm. Pure Appl. Math **36** (1983), 437-477.

[9] J. BUSCA and B. SIRAKOV, Symmetry results for semilinear elliptic systems in the whole space, J. Differential Equations **163** (2000) 41-56.

[10] C. GOULART, Problema de Dirichlet quasilinear em $\mathbb{R}^N$ com crescimento crítico (Dissertação de Mestrado), Universidade de Brasília (2000).

[11] S. CINGOLANI and M. NOLASCO, Multi-peak periodic semiclassical states for a class of nonlinear Schrödinger equations, Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sect. **128** (1998) 1249-1260.

[12] P. H. S. COSTA, Sistema de equações elípticas semilineares envolvendo o expoente crítico de Sobolev, (dissertação de Mestrado), Universidade Federal do Espírito Santo, (2009).

[13] E. N. DANCER, J. WEI and T. WETH, A priori bounds versus multiple existence of positive solutions for a nonlinear Schrodinger system, Ann. I. H. Poincaré **27** (2010) 953-969.

[14] D. G. de FIGUEIREDO, O. LOPES, Solitary waves for some nonlinear Schrödinger systems, Ann. I. H. Poincaré **25** (2008) 149-161.

[15] D. G. de FIGUEIREDO, Diferential equations. Lecture Notes in Mathematics **957.** Springer-Verlag, Berlin-New York (1982) 34-87.

[16] D. C. de MORAIS FILHO and M. A. S. SOUTO, System of p-Laplacean equations involving homogeneous nonlinearites with critical Sobolev exponent degrees. Communications in Partial Differential Equations, **24** (1999), 1537-1553.

[17] M. F. FURTADO, E. A. B. SILVA and M. S. XAVIER, Multiplicity and concentration of solutions for elliptic systems with vanishing potentials, J. Diff. Equat. **249** (2010), 2377-2396.

[18] D. GILBARG and N.S. TRUDINGER, Elliptic partial differential equations of second order, Second edition, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[19] N. HIRANO, Multiple Existence of Nonradial Positive Solutions for a Coupled Nonlinear Schrödinger System, Nonlinear differ. Equ. Appl. **16** (2009), 159-188.

[20] N. IKOMA, Existence of Standing Waves for Coupled Nonlinear Schrödinger Equations, Tokyo J. of Math. Volume 33, **1** (2010), 89-116.

[21] O. KAVIAN, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Mathématiques & Aplications, **13**. Springer, 1993.

[22] M. K. KWONG, Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^N$, Arch. Rat. Mech. Anal. **105** (1989) 243-266.

[23] Y. Y. LI, On a singularly perturbed elliptic equation, Adv. Differ. Equ. **2** (1997), 955-980

[24] T. C. LIN and J. WEI, Ground state of N coupled nonlinear Schrödinger equations in $\mathbb{R}^N$ $N \leq 3$, Comm. Math. Phys. **255** (2005), 629-653.

[25] Z. LIU and Z-Q WANG, Multiple Bound States of Nonlinear Schrödinger Systems, Commun. Math. Phys. **282**, 721-731 (2008).

[26] M. L. da SILVA, Existência e Multiplicidade de Soluçoes de um Problema Elíptico Superlinear Indefinido (Tese de Doutorado), Universidade de Brasília (2010).

[27] L. A. MAIA, E. MONTEFUSCO and B. PELLACCI, Positive solutions for a weakly coupled nonlinear Schrödinger system, J. Differ. Equ. **229** (2006), 743-767.

[28] S. V. MANAKOV, On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves, Sov. Phys.-JETP **38** (1974), no.2, 248-253.

[29] C. R. MENYUK, Nonlinear pulse propagation in birifrangent optical fibers, IEEE Jour. Quantum Electr. **23-2** (1987), 174-176.

[30] O. H. MIYAGAKI, On a class of semilinear elliptic problem in $\mathbb{R}^N$ with critical growth, Nonlinear Analysys. **29** (1997), 773-781.

[31] Y. G. OH, On Positive Multi-Lump Bound States of Nonlinear Schrödinger Equations under Multiple Well Potencial, Comm. Math. Phys. **131** (1990) 223-253.

[32] P. H. RABINOWITZ, P. H.: Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. CBMS Conf. Ser. in Math. **65** Amer. Math. Soc., (1986).

[33] P. H. RABINOWITZ, On a Class of Nonlinear Schrödinger Equatios, ZAMP **43** (1992), 270-291.

[34] E. A. B. SILVA, G. F. VIEIRA, Quasilinear asymptotically periodic Schrödinger equations with sub-critical growth, Nonlinear Analysys **72** (2010), 2935-2949.

[35] E. A. B. SILVA, H. F. LINS, Quasilinear asymptotically periodic elliptic equations with critical growth, Nonlinear Analysys **71** (2010), 2890-2905.

[36] E. A. B. SILVA, M. S. XAVIER, Multiplicty of solutions for quasilinear elliptic systems with critical growth, Nonlinear differ. equ. appl. **13** (2007), 619-642.

[37] B. SIRAKOV, Least Energy Solitary Waves for a System of Nonlinear Schrödinger Equations in $\mathbb{R}^N$, Commun. Math. Phys. **271**, 199-221 (2007).

[38] M. STRUWE, Variational Methods: applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian system, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1996

[39] G. TALENTI, Best constant in Sobolev inequality, Ann. Mat. Pura Appl. **110** (1976), 353-372.

[40] M. WEINSTEIN, *Modulational stability of grond states of nonlinear Schrödinger equations*, SIAN J. Math Anal. **16** (1985), 472-491.

[41] M. WILLEN, Minimax Theorems, Birkhäuser, Basel, 1996.