UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

# GRAVITOELETROMAGNETISMO NA GRAVIDADE TELEPARALELA

EDNARDO PAULO SPANIOL

ORIENTADOR(A):

VANESSA CARVALHO DE ANDRADE

Brasília, 2 de dezembro de 2011

Omnia disce, videbis postea nihil esse superfluum.
(Learn everything, you will find nothing superfluous.)

*Hugh of St Victor*

# Agradecimentos

A Deus.

Ao meu pai Décio e à minha mãe Edna pelo amor incondicional, pela educação que me foi dada e pelo carinho que sinto quando estamos juntos. Pai, nunca vou esquecer as conversas que tivemos desde o meu tempo de criança que tanto me ensinaram sobre a vida. Mãe, é até difícil de encontrar palavras pra descrever o cuidado e carinho que você sempre teve comigo. Amo vocês.

Aos meus irmãos Helder e Ana Maria que realmente merecem tal adjetivo. Não conseguiria pensar em irmãos melhores, mesmo quando me dão um pouquinho de trabalho.

À Katiane pelo amor e carinho. Pela compreensão de ter me dedicado tantas horas a este trabalho em vez de estar dando atenção a você minha linda.

À minha orientadora a professora Dra. Vanessa Carvalho de Andrade pelo apoio e incentivo que tornaram possível a realização desse trabalho.

Ao professor Dr. José Wadih Maluf pelas discussões esclarecedoras.

Ao meu grande amigo o professor Dr. Sergio Costa Ulhoa pelas ótimas conversas e discussões que contribuíram de maneira essencial para o desenvolvimento desta tese.

Aos meus amigos pelos momentos felizes e pela ajuda nos não tão felizes.

Ao CNPq por financiar o desenvolvimento desse trabalho.

# Resumo

No contexto do Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral ou Teleparalelismo (ETRG), apresentamos neste trabalho uma nova abordagem para a descrição do Gravitoeletromagnetismo. A analogia formal entre o Eletromagnetismo e a Gravitação, baseada na interpretação de que cargas e correntes de matéria podem gerar campos gravitoelétricos (GE) e gravitomagnéticos (GM), e que nasce junto à própria Relatividade Geral (RG), ganha neste cenário a estrutura geométrica adequada para a descrição dos campos, a partir das componentes do tensor intensidade do campo, que surge exatamente como nas teorias de calibre.

Além disso, dado o formalismo de tetradas no qual o ETGR se estrutura e sua associação com observadores locais no espaço-tempo, é possível obter uma precisa descrição sobre o comportamento dos campos para diferentes configurações de matéria e diferentes observadores. Investigaremos, por exemplo, propriedades dinâmicas associadas aos campos gerados pelo buraco negro de Schwarzschild visto a partir de (i)um observador estático (ii) um observador em queda livre (iii) um observador que realiza um boost na direção x (iv) um observador em rotação. Configurações com simetrias axiais serão analisadas, como buraco negro de Kerr e estrelas de nêutrons e características das ondas gravitacionais serão estudadas ao final.

Estarão presentes nas discussões aspectos fundamentais tais como a força de Lorentz gravitacional, o princípio da equivalência, as definições de energia e momento do campo gravitacional e o caráter absoluto da rotação.

# Abstract

In the context of Teleparallel Equivalent of General Relativity or Teleparallelism (TEGR), this work presents a new approach to the description of the Gravito-electromagnetism. The formal analogy between Electromagnetism and Gravitation, based on interpretation that matter and currents charges can generate gravitoelectric (GE) and gravitomagnetic fields (GM), and which rises very close to General Relativity (GR), wins in this scenario the suitable geometrical structure for the description of fields, from components of the field strength tensor, which precisely arises as in gauge theories.

Moreover, given the tetrad formalism in which ETGR is structured and its association with local observers in space-time it is possible to obtain an accurate description of the behavior of fields for different configurations of matter and different observers. We will investigate, for example, dynamical properties associated with the fields generated by the Schwarzschild black hole seen from (i) a static observer (ii) a free fall observer (iii) an observer who performs a boost in the x direction (iv) a rotating observer. Configurations with axial symmetry will be analyzed, such as Kerr black hole and neutron stars and characteristics of gravitational waves will be studied at the end.

Discussions will include fundamental aspects such as gravitational Lorentz force, the equivalence principle, the definitions of gravitational energy and momentum and the absolute character of rotation.

# Sumário

# Notação:

De acordo com a estrutura geométrica da teoria de gauge para a gravitação, a variedade base representa o espaço-tempo. A cada ponto no espaço está associado um espaço tangente (fibra) no qual o grupo de translações age, e cuja métrica é assumida ser $\eta_{ab} = (-1, +1, +1, +1) = \eta_{\mu\nu}$. Os índices de espaço-tempo serão denotados pelo alfabeto grego ($\mu, \nu, \lambda, ... = 0, 1, 2, 3$) enquanto para o espaço tangente designaremos a primeira metade do alfabeto latino $[a, b, c, ... = 0, 1, 2, 3]$. A segunda metade do alfabeto latino será usado para representar as componentes espaciais dos tensores, ou seja, $i, j, k... = 1, 2, 3$. Índices entre parênteses também estarão relacionados ao espaço tangente. A constante da velocidade da luz e a constante da gravitação universal de Newton serão consideradas iguais a um ($c = G = 1$), menos quando forem essenciais para o entendimento do texto.

Capítulo 1

# Introdução

O Gravitomagnetismo possui uma história no mínimo tão longa quanto a Relatividade Geral (RG). De fato, ele surge da analogia formal entre a lei de Newton da gravitação e a lei de Coulomb do eletromagnetismo. Esta similaridade faz com que investiguemos se o movimento da carga gravitacional (massa) poderia gerar o equivalente ao campo magnético do eletromagnetismo.

O próprio Maxwell [1], em um dos seus trabalhos fundamentais, voltou sua atenção para a possibilidade de formular uma teoria da gravitação de forma correspondente às equações do eletromagnetismo. Na segunda metade do século XIX, Holzmüller [2] e Tisserand [3] postularam que a força gravitacional exercida pelo Sol sobre os planetas do sistema solar possui uma componente "magnética"adicional. Essa força extra poderia ser ajustada de forma a considerar o problema do periélio de Mercúrio. Entretanto, como sabemos, alguns anos depois a RG de Einstein resolveria este problema [4].

Para esclarecermos o problema, considere por exemplo um objeto massivo parado (pode ser um planeta) em relação a um observador. Neste caso, haverá somente campo gravitoelétrico (GE), da mesma forma que no eletromagnetismo temos somente campo elétrico quando uma carga está em repouso em relação a carga teste. Por outro lado, se o planeta é posto em rotação, a teoria newtoniana não prediz nenhum novo efeito gravitacional, o que não acontece quando combinamos gravidade newtoniana e invariância de Lorentz [5]. Este é o caso da teoria da gravitação de Einstein, ou seja, neste exemplo a RG espera o surgimento de um novo campo, o campo gravitomagnético (GM) (este nome nasce novamente da analogia com o eletromagnetismo) que é causado pelo momento angular da fonte do campo gravitacional.

A RG trata este problema praticamente desde seu nascimento em 1916 e diversas abordagens são encontradas na literatura; no capítulo 2 exploraremos algumas delas. O próprio Weyl em 1918 procurou descrever a gravitação e o eletromagnetismo em um único cenário [6]. Também em 1918 Thirring considerou as analogias formais entre as equações de Maxwell e as equações linearizadas de Einstein [7]. Posteriormente Lense e Thirring desenvolveram um trabalho sobre os efeitos do campo GM sobre partículas teste em movimento orbital no regime de rotação lenta [8].

Outro efeito GM bem conhecido da RG consiste na precessão de um giroscópio ao mover-se num campo gravitacional gerado por um corpo massivo em rotação lenta. Tal efeito foi obtido por Schiff em 1960 [9]. Algumas questões sutis sobre os efeitos do campo GM dentro de uma casca esférica maciça foram resolvidos por Pfister e Braun em 1985 [10]. O GM aplicado à cosmologia e ao princípio de Mach no contexto do universo de Friedmann-Robertson-Walker foi recentemente tratado por Schmid [11, 12]. Costa e Herdeiro propuseram uma nova abordagem para a analogia entre a RG e o eletromagnetismo, baseado nos *tidal tensors* de ambas as teorias [13]. Iorio e Corda reexaminaram o gravitomagnetismo e analisaram a contribuição GM em ondas gravitacionais [14]. Owen et al, dividiram o tensor de Weyl em parte elétrica e magnética na tentativa de visualizar o espaço-tempo [15].

Todos estes aspectos justificam o grande esforço experimental durante os últimos 30 anos para medir o gravitomagnetismo. Esta dificuldade está relacionada com o fato de que a contribuição GM é muito menor que a GE. De fato, tentou-se medir a precessão da órbita planetária de Lense-Thirring através de diversos experimentos tais como LAGEOS, LAGEOS II, LAGEOS III [16]. Finalmente, o experimento Gravity Probe B lançado em 2004 obteve êxito em medir efeitos gravitomagnéticos através de giroscópios em órbita ao redor da terra. Os resultados finais foram publicados apenas recentemente (2011) [17].

É interessante estudar esta analogia entre gravitação e eletromagnetismo, do ponto de vista formal, uma vez que este último é bem conhecido e desta forma pode gerar idéias frutíferas para a teoria da gravitação, como por exemplo, hoje entende-se teoricamente que a origem dos jatos de estrutura em objetos astrofísicos vem da força provocada pelos campos Gravitoeletromagnéticos (GEM) [16]. Ainda que a comparação completa seja limitada, visto que há uma diferença estrutural entre as duas teorias com respeito à não linearidade e também ao fato de que os campos de Maxwell se propagarem num dado espaço-tempo, enquanto o campo gravitacional ele próprio gera o espaço-tempo, ela aproxima a descrição da interação gravitacional às demais interações fundamentais da natureza indo ao encontro (de forma modesta) à direção da unificação.

O objetivo deste trabalho é explorar esse paralelo entre as duas teorias citadas num cenário particular e rico para a descrição da interação gravitacional. O Teleparalelismo ou Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral (ETRG), por ter seus fundamentos baseados numa teoria de gauge abeliana, da mesma forma que o eletromagnetismo, nos parece o cenário ideal para compreender a natureza dos campos GEM.

O conceito de uma conexão linear como uma estrutura primária e independente do espaço-tempo foi generalizada por E. Cartan (1923). Em particular, ele introduziu a noção da chamada torção, que corresponde à parte antissimétrica, e portanto tensorial, das componentes da conexão em coordenadas holônomas, que também foi discutida por Weyl sob o ponto de vista geométrico. Em 1979, Hayashi e Shirafuji [18], em um artigo intitulado "Nova Relatividade Geral", propuseram uma teoria de gravitação em que a torção substiuía a curvatura Riemaniana numa formulação de tetrada para o espaço-tempo de Weitzenbök [19, 20]. Na abordagem métrica ocorre o contrário: o tensor de torção é nulo e a curvatura fornece a dinâmica do sistema. Em 1961, Moller [21] procurou abordar o problema da localização da energia do campo gravitacional baseando-se nas idéias do teleparalelismo. Posteriormente Pellegrini e Plebansky [22] mostraram uma formulação lagrangiana do paralelismo absoluto.

Assim, por meio da ferramenta geométrica do ETRG, podemos ver a analogia da seguinte forma: no eletromagnetismo, o tensor intensidade de campo $F_{\mu\nu}$ é definido em termos dos campos de gauge $A_\mu$ ($F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$) e os campos eletromagnéticos surgem como componentes do $F_{\mu\nu}$. Por sua vez, no ETRG, também há um tensor intensidade de campo $F^a{}_{\mu\nu}$ escrito em termos de um potencial de gauge $A^a{}_\mu$ ($F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu$) que corresponde à torção da teoria escrita na base tetrada. Evidentemente, o grupo de gauge de cada teoria difere e o potencial de gauge gravitacional carrega um índice interno com quatro dimensões. Desta forma, definiremos os campos GEM em termos do superpotencial $S_a{}^{\mu\nu}$ que pode ser interpretado como a generalização do $F^a{}_{\mu\nu}$, sendo que a razão para esta escolha é justificada na seção (4.1.1).

Há ainda outras vantagens em se estudar os campos GEM no contexto do Teleparalelismo. A RG possibilita apenas a definição de pseudo-tensores de energia-momento uma vez que estes dependem do sistema de coordenadas. E assim a energia não é bem definida, pois para cada mudança de coordenadas um resultado diferente é obtido. Por outro lado, no ETRG a definição da energia é precisa já que o tensor energia-momento é verdadeiro (se transforma covariantemente por transformações gerais de coordenadas no espaço-tempo e é invariante sob translações locais no espaço interno, ver [23, 24]).

Um outro ponto chave a se considerar é que a descrição teleparalela é baseada no formalismo de tetradas. O campo de tetradas é um conjunto de vetores linearmente independentes que satisfazem uma relação de ortogonalidade. O próprio Einstein na tentativa de unificar a gravitação e o eletromagnetismo buscou descrever o campo gravitacional por meio do campo de tetradas. Dois conjuntos de campos de tetradas podem representar o mesmo espaço-tempo, embora sejam fisicamente diferentes. Ou seja, além de ser o ente fundamental da teoria, o campo de tetradas pode ser interpretado como um sistema de referência adaptado a observadores ideais no espaço-tempo [25, 26]. Esta sutileza não está completamente compreendida na descrição métrica da gravidade.

Na literatura, encontramos vários estudos que abordam os campos GEM estacionários devido ao fato da semelhança entre as equações de campo da teoria eletromagnética e da gravitação ser alcançada neste contexto [27]. Existem alguns trabalhos que lidam com o campo GEM dependente do tempo e a questão da lei de Faraday no contexto da RG [28]. No entanto, não há estudos sobre o comportamento dos campos GEM para os casos em que o observador está se movendo em relação à fonte. Por outro lado, com o advento da mecânica relativística, os princípios da relatividade foram estendidos à eletrodinâmica analisando o comportamento dos campos elétricos e magnéticos em relação a diferentes referenciais inerciais. Do mesmo modo, esperamos que na gravitação os campos GEM assumam diferentes expressões dependendo de como a fonte de gravitação é observada, isto é, diferentes observadores notam diferentes campos GEM. Assim, é natural estudar as consequências físicas desses diferentes campos sob o ponto de vista do próprio observador. Este será o nosso propósito, e para tanto dividiremos o trabalho na forma a seguir.

No capítulo 2 vamos fazer uma breve introdução acerca do GEM no contexto da RG. O capítulo tem por objetivo apenas apresentar as principais abordagens encontradas na literatura.

O capítulo 3 é dedicado a discutir os principais conceitos envolvidos no Teleparalelismo, desde sua formulação de gauge, até sua dinâmica como teoria para o campo gravitacional, além da interpretação do campo de tetradas como sistemas de referência adaptados a observadores ideais no espaço-tempo.

No capítulo 4, apresentamos as definições dos campos GE e GM a partir do ETRG, apresentando as razões para tal escolha. Além disso, analisamos as equações de campo da teoria e a força de Lorentz gravitacional em termos das nossas definições dos campos GEM.

No capítulo 5, investigamos o comportamento do campos GEM sob o ponto de vista de diferentes observadores para uma mesma geometria do espaço-tempo, neste caso, a métrica de Schwarzschild. Inicialmente, consideramos o caso mais simples dado por um campo de tetradas adaptado a um observador estacionário. Então, escolhemos um observador em queda livre em relação ao buraco negro devido à sua atração gravitacional e faremos uma análise, do ponto de vista dinâmico, utilizando os conceitos de força de Lorentz gravitacional e do tensor energia-momento. Em seguida, tomamos um campo de tetradas adaptado a um observador que sofre um *boost* de Lorentz. E finalmente, consideramos um campo de tetradas que representa um observador em rotação em relação ao buraco negro. Primeiramente assumimos uma velocidade angular geral, como função das coordenadas $r$ e $\theta$. Em seguida, assumimos que a velocidade angular do observador é a mesma que a do buraco negro de Kerr com o intuito de comparar os resultados desse observador com um observador estacionário em relação à geometria de Kerr. Nesse último caso, os cálculos foram realizados no regime de campo fraco e movimento lento.

No capítulo 6, calculamos os campos GEM para uma simetria axial, isto é, quando a simetria esférica é quebrada por uma rotação. Optamos por um campo de tetradas adaptado a um observador estacionário em relação a esta geometria. Na sequência, aplicamos os resultados obtidos para o buraco negro de Kerr tanto no contexto da solução exata quanto considerando os limites de campo fraco e movimento lento. Utilizamos ainda os resultados gerais obtidos a partir da simetria axial para encontrarmos os campo GEM de uma estrela de nêutrons. E finalmente, comparamos os resultados alcançados por um observador em rotação em relação ao buraco negro de Schwarzschild e um observador estacionário em relação ao buraco negro de Kerr. Essa comparação foi feita no âmbito de campo fraco e movimento lento.

No capítulo 7, vamos obter os campos GEM de uma onda gravitacional a partir de uma solução exata das equações de Einstein com características de onda plana. Além disso, traçamos um paralelo entre as ondas eletromagnéticas e ondas gravitacionais, e assim, definimos o vetor de Poynting gravitacional. Através do vetor de Poynting gravitacional obtemos uma componente do momento gravitacional de forma totalmente análoga ao que é feito em eletrodinâmica.

No capítulo final são traçadas as principais conclusões do trabalho.

**Capítulo 2**

# Gravitoeletromagnetismo na Relatividade Geral

Nas seções posteriores apresentaremos algumas maneiras de tratar a questão do Gravitoeletromagnetismo no contexto padrão da RG. O presente capítulo tem por objetivo apenas introduzir as principais abordagens sem se estender muito já que uma visão alternativa para essas definições será apresentada ao longo da tese.

## 2.1 Aproximação Linear

Para tratarmos a questão da aproximação linear vamos considerar a hipótese de campo fraco, ou seja, considera-se que a métrica do espaço-tempo é composta por uma parte plana (métrica de Minkowski) mais uma pertubação gerada pela presença de matéria, isto é,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)\,. \tag{2.1}$$

De acordo com Mashhoon [29] pode-se escrever o traço inverso da perturbação como

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \tag{2.2}$$

com $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ o traço de $h_{\mu\nu}$. Ao considerarmos o calibre de Lorentz, $\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$, a equação de Einstein, em primeira ordem, torna-se

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{2.3}$$

É importante ressaltar que nesta seção em particular voltaremos a considerar a constante da velocidade da luz, $c$, e a constante gravitacional, $G$. A solução da equação acima contém uma solução particular e uma homogênea. Considerando somente a solução particular, temos que

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{4G}{c^4}\int\frac{T_{\mu\nu}(ct - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x'. \tag{2.4}$$

Ao desconsiderar termos da ordem $\left(\frac{1}{c^4}\right)$, define-se o potencial gravitoelétrico $\Phi$ e o potencial gravitomagnético $\mathbf{A}$ em termos de componentes da solução da equação (2.4) da seguinte forma:

$$\bar{h}_{00} = 4\Phi/c^2 \tag{2.5}$$

e

$$\bar{h}_{0i} = -2A_i/c^2. \tag{2.6}$$

O tensor $T^{\mu\nu}$ que aparece na equação (2.4) pode ser definido em termos da corrente de massa-energia $J^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ via $T^{00} = \rho c^2$ e $T^{0i} = cj^i$.

Desta forma, segue da condição de calibre $\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ a lei de conservação

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\frac{1}{2}\mathbf{A}\right) = 0. \tag{2.7}$$

Feitas as considerações acima, a métrica pode ser escrita como

$$ds^2 = -c^2\left(1 - 2\frac{\Phi}{c^2}\right)dt^2 - \frac{4}{c}(\mathbf{A}\cdot d\mathbf{x})dt + \left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}\right)\delta_{ij}dx^i dx^j \tag{2.8}$$

e os campos GE e GM são definidos da seguinte forma:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{A}\right), \quad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}. \tag{2.9}$$

A partir de (2.7) e (2.9) seguem as equações de Maxwell gravitacionais

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{B}\right), \quad \nabla\cdot\left(\frac{1}{2}\mathbf{B}\right) = 0 \tag{2.10}$$

e

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi G\rho, \quad \nabla\times\left(\frac{1}{2}\mathbf{B}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} + \frac{4\pi G}{c}\mathbf{j}. \tag{2.11}$$

## 2.2 GEM nas Coordenadas de Fermi

Uma outra possibilidade de abordar o GEM sem a necessidade de se tomar à princípio o limite de campo fraco é utilizando coordenadas de Fermi [30], ou seja, nesta nova abordagem é considerado um espaço-tempo curvo arbitrário.

Nas coordenadas de Fermi $X^\mu = (T, \mathbf{X})$, a métrica do espaço-tempo é dada por:

$$g_{00} = -1 - R_{0i0j} X^i X^j + \ldots, \tag{2.12}$$

$$g_{0i} = -\frac{2}{3} R_{0jik} X^j X^k + \ldots, \tag{2.13}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{ikjl} X^k X^l + \ldots \tag{2.14}$$

Note que as expressões acima tem a forma de uma métrica plana (espaço-tempo de Minkowski) mais termos de correção dados pelas componentes do tensor de Riemann projetado nas respectivas coordenadas. Desta forma, comparando (2.12), (2.13) e (2.8) Mashhoon define os novos potenciais GEM como:

$$\Phi(T, \mathbf{X}) = -\tfrac{1}{2} R_{0i0j}(T) X^i X^j + \ldots, \tag{2.15}$$

$$A_i(T, \mathbf{X}) = \tfrac{1}{3} R_{0jik}(T) X^j X^k + \ldots \tag{2.16}$$

Consequentemente os campos GEM são escritos na forma

$$E_i(T, \mathbf{X}) = R_{0i0j}(T) X^j + \ldots, \tag{2.17}$$

$$B_i(T, \mathbf{X}) = -\tfrac{1}{2} \epsilon_{ijk} R^{jk}{}_{0l}(T) X^l + \ldots. \tag{2.18}$$

É importante ressaltar que as expressões acima correspondem a uma expansão onde usualmente considera-se apenas o termo de primeira ordem, ou seja, trata-se de um caso limite (ordem mais baixa que $|\mathbf{X}|/\mathcal{R}$, com $\mathbf{X}$ sendo as componentes espaciais das coordenadas de Fermi e $\mathcal{R}$ o raio de curvatura do espaço-tempo). Neste limite, é possível combinar (2.17) e (2.18) de forma a se obter o equivalente gravitacional do tensor de Faraday do eletromagnetismo

$$F_{\alpha\beta} = -R_{\alpha\beta 0i} X^i\,. \tag{2.19}$$

Além disso, um tipo de conjunto de equações de Maxwell gravitacionais similares à do eletromagnetismo são recuperadas.

## 2.3 GEM não Linear Via Tensor de Weyl

No eletromagnetismo [31] os campos elétrico $E_\mu$ e magnético $B_\mu$ medidos por observadores $u^\mu$ são definidos em termos do tensor intensidade de campo da teoria $F_{\mu\nu}$ por

$$E_\mu = F_{\mu\nu}u^\nu = E_{<\mu>} \tag{2.20}$$

$$B_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}F^{\nu\mu} \equiv F^*_{\mu\nu}u^\nu = B_{<\mu>}\,, \tag{2.21}$$

aqui (*) denota o dual. Desta forma podemos escrever o tensor intensidade de campo como

$$F_{\mu\nu} = 2u_{[\mu}E_{\nu]} + \varepsilon_{\mu\nu\lambda}B^\lambda\,. \tag{2.22}$$

Nesta abordagem utiliza-se a correspondência entre o tensor de Weyl $C_{\mu\nu\lambda\sigma}$ e o $F_{\mu\nu}$ ($C_{\mu\nu\lambda\sigma} \Leftrightarrow F_{\mu\nu}$), para definir os campos GEM. Assim, para um dado $u^\mu$, temos

$$E_{\mu\nu} = C_{\mu\lambda\nu\sigma}u^\lambda u^\sigma = E_{<\mu\nu>} \tag{2.23}$$

$$B_{\mu\nu} = {}^*C_{\mu\lambda\nu\sigma}u^\lambda u^\sigma = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\lambda\sigma}C^{\lambda\sigma}{}_{\nu\gamma}u^\gamma = B_{<\mu\nu>}\,, \tag{2.24}$$

sendo $E_{\mu\nu}$ o campo gravitoelétrico e $B_{\mu\nu}$ o campo gravitomagnético. Então, o análogo gravitacional da expressão (2.22) é dado por

$$C_{\mu\nu}{}^{\lambda\sigma} = 4\left\{u_{[\mu}u^{[\lambda} + h_{[\mu}{}^{[\lambda}\right\}E_{\nu]}{}^{\sigma]} + 2\varepsilon_{\mu\nu\theta}u^{[\lambda}B^{\sigma]e} + 2u_{[\mu}B_{\nu]e}\varepsilon^{\lambda\sigma\theta}\,. \tag{2.25}$$

Desta forma, podemos dizer que as quantidades fundamentais neste contexto são a pressão, densidade de energia e os campos gravitoelétrico e gravitomagnético. Estas quantidades por sua vez são governadas pelas identidades de Bianchi e as equações de Einstein.

Para finalizar este breve capítulo, é preciso reconhecer nestas diferentes definições, entes geométricos distintos, através dos quais, suas componentes (a métrica, o tensor de Riemann e o tensor de Weyl), são identificados com os campos elétricos e magnéticos sem qualquer paralelo quanto à origem das estruturas geométricas dos mesmos. É até de certo ponto artificial e as comparações fenomenológicas não são precisas o suficiente para corroborar esses modelos [13].

Capítulo 3

# O Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral

## 3.1 Fundamentos do Teleparalelismo

O Teleparalelismo é uma teoria que descreve a interação gravitacional e que surge de uma formulação de gauge para o grupo das translações, construída a partir de um espaço-tempo plano (Minkowski), com a métrica

$$\eta_{ab} = (-1, +1, +1, +1), \tag{3.1}$$

onde a cada ponto está associado um espaço tangente. É neste espaço tangente, ou interno, onde os potenciais de gauge $A^a{}_\mu$ serão definidos. A transformação de gauge será uma translação local nas coordenadas da fibra (espaço interno)

$$x'^a = x^a + a^a(x^\mu) \ , \tag{3.2}$$

e a derivada covariante será definida na forma usual das teorias de gauge

$$D_\mu \, \Phi = \partial_\mu \, \Phi + A^a{}_\mu \ P_a \, \Phi, \tag{3.3}$$

$P_a$ são os geradores das translações que atuam sob um campo qualquer $\Phi$. Além disso, podemos definir o tensor intensidade de campo na forma também usual

$$F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu \ , \tag{3.4}$$

que satisfaz a relação

$$[D_\mu, D_\nu]\Phi = F^a{}_{\mu\nu} P_a \, \Phi. \tag{3.5}$$

O campo de tetradas surge da própria definição de derivada covariante. De fato, podemos escrever (3.3) como

$$D_\mu \, \Phi = h^a{}_\mu \, \partial_a \, \Phi \tag{3.6}$$

e a tetrada é dada por

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + A^a{}_\mu \equiv D_\mu \, x^a \ . \tag{3.7}$$

Esta é uma tetrada não trivial e a gravitação, na forma do potencial de gauge $A^a{}_\mu$, representa esta não trivialidade. Se os dois espaços (tangente e físico) descrevem o espaço-tempo de Minkowski, então as tetradas são determinadas por

$$h^a{}_\mu = \frac{\partial q^a}{\partial x^\mu}. \tag{3.8}$$

Assim, a transformação $dq^a = h^a{}_\mu(x) dx^\mu$ poderá ser integrada globalmente e a transformação será chamada de holonômica. Neste caso temos uma tetrada trivial.

Da covariância de $D_\mu \Phi$ determinamos a lei de transformação dos potenciais de gauge:

$$A^{a'}{}_\mu = A^a{}_\mu - \partial_\mu \delta\alpha^a \ . \tag{3.9}$$

A presença da tetrada no espaço-tempo induz a existência de estruturas adicionais no mesmo. Assim, o campo de tetradas define de forma natural uma métrica Riemanniana

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \, h^a{}_\mu \, h^b{}_\nu \ , \tag{3.10}$$

em termos da qual a conexão de Levi–Civita

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left[ \partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \right] \tag{3.11}$$

pode ser introduzida. Tal conexão dará origem à uma curvatura no espaço-tempo, cenário onde se desenvolve a RG de Einstein, em que a interação gravitacional é representada por uma geometrização deste espaço

Por outro lado, o campo de tetradas pode também ser usado para definir a conexão

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = h_a{}^{\sigma} \partial_\nu h^a{}_\mu \, , \tag{3.12}$$

chamada conexão de Cartan, cuja peculiaridade é transportar paralelamente a tetrada (daí o nome teleparalelismo, ou paralelismo absoluto):

$$\nabla_\nu h^a{}_\mu \equiv \partial_\nu h^a{}_\mu - \Gamma^{\theta}{}_{\mu\nu} h^a{}_\theta = 0 \, . \tag{3.13}$$

Tal conexão gera, por sua vez, uma torção no espaço resultante da não simetria de seus últimos índices

$$T^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\mu} \, . \tag{3.14}$$

Uma importante propriedade da teoria é o fato de o tensor intensidade de campo $F^a{}_{\mu\nu}$ corresponder exatamente à torção escrita na base tetrada:

$$F^a{}_{\mu\nu} = \; h^a{}_\rho \, T^{\rho}{}_{\mu\nu} \, . \tag{3.15}$$

Consideremos novamente a conexão de Cartan. Calculando sua curvatura, vemos que ela se anula identicamente, ou seja:

$$R^{\theta}{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\theta}{}_{\rho\nu} + \Gamma^{\theta}{}_{\sigma\mu} \, \Gamma^{\sigma}{}_{\rho\nu} - (\mu \leftrightarrow \nu) \equiv 0 \, . \tag{3.16}$$

Assim, a conexão de Cartan caracteriza um espaço onde há torção somente para a descrição da interação gravitacional. Tal espaço é chamado de Weitzenböck [19] e esse é o palco para a descrição teleparalela da gravitação.

É importante ressaltar que as conexões de Levi-Civita e Cartan estão definidas no mesmo espaço e, portanto, o mesmo é munido de duas estruturas simultâneas: uma Riemanniana e uma teleparalela. Nesse espaço, os índices locais de Lorentz são abaixados e levantados com a métrica de Lorentz $\eta_{ab}$ e os índices tensoriais de espaço-tempo são abaixados e levantados com a métrica Riemanniana $g_{\mu\nu}$. Entretanto, a descrição da gravitação requer apenas uma das estruturas geométricas dadas acima. Podemos facilmente passar de um formalismo ao outro por meio da relação entre as conexões

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu} + K^{\sigma}{}_{\mu\nu} \;, \tag{3.17}$$

com

$$K^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[T_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu} + T_{\nu}{}^{\sigma}{}_{\mu} - T^{\sigma}{}_{\mu\nu}\right], \tag{3.18}$$

o tensor de contorção. É possível ainda encontrar uma relação entre as curvaturas das conexões de Cartan e Levi-Civita utilizando a relação (3.17):

$$R^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} = \overset{\circ}{R}{}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} + Q^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} \equiv 0 \;, \tag{3.19}$$

sendo $\overset{\circ}{R}{}^{\theta}{}_{\rho\mu\nu}$ a curvatura da conexão de Levi-Civita e

$$Q^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} = D_{\mu}K^{\rho}{}_{\theta\nu} - D_{\nu}K^{\rho}{}_{\theta\mu} + K^{\sigma}{}_{\theta\nu}\, K^{\rho}{}_{\sigma\mu} - K^{\sigma}{}_{\theta\mu}\, K^{\rho}{}_{\sigma\nu}. \tag{3.20}$$

Surge neste ponto o conceito de derivada covariante teleparalela, denotada por $D_{\mu}$. Ela corresponde exatamente à derivada covariante de Levi-Civita reescrita em termos das grandezas do espaço de Weitzenböck.

Consideremos agora a dinâmica dos campos de gauge. Ela será dada pela lagrangiana

$$\mathcal{L}_G = \frac{h}{16\pi}\, S^{\rho\mu\nu}\, T_{\rho\mu\nu} \;, \tag{3.21}$$

com $h = \det(h^{a}{}_{\mu})$ e

$$S^{\rho\mu\nu} = -S^{\rho\nu\mu} \equiv \frac{1}{2}\left[K^{\mu\nu\rho} - g^{\rho\nu}\, T^{\theta\mu}{}_{\theta} + g^{\rho\mu}\, T^{\theta\nu}{}_{\theta}\right]. \tag{3.22}$$

Como nas teorias de gauge usuais, essa lagrangiana é quadrática no tensor intensidade de campo. Considerando a relação (3.17), podemos reescrevê-la em termos da conexão de Levi-Civita somente. A menos de uma divergência total, ela corresponde exatamente à lagrangiana de Hilbert–Einstein da RG

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\,\overset{\circ}{R}, \tag{3.23}$$

considerando a identificação $h = \sqrt{-g}$.

Além disso, as equações de campo que surgem dessa lagrangiana

$$\partial_\sigma (h S_a{}^{\sigma\rho}) - 4\pi (h j_a{}^\rho) = 0 \ , \tag{3.24}$$

com

$$j_a{}^\rho \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^a{}_\rho} = \frac{h_a{}^\lambda}{4\pi} (F^c{}_{\mu\lambda} S_c{}^{\mu\rho} - \frac{1}{4} \delta_\lambda{}^\rho F^c{}_{\mu\nu} S_c{}^{\mu\nu}) \tag{3.25}$$

se mostram totalmente equivalentes às equações de Einstein. Esta é a corrente energia-momento de gauge, no contexto da teoria de gauge para o grupo das translações. Como pode ser visto, $j_a{}^\rho$ se transforma covariantemente sob transformações gerais de coordenadas no espaço-tempo, é invariante sob translação local (gauge) no espaço tangente e se transforma covariantemente sob transformações globais no espaço tangente, o que significa que ele é um tensor verdadeiro (para uma discussão mais detalhada, ver [23, 24]). Vamos escrever agora a versão teleparalela do pseudo-tensor do campo gravitacional

$$h t_\lambda{}^\rho = \frac{h}{4\pi} \left( \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \, S_\mu{}^{\rho\nu} - \frac{1}{4} \, \delta_\lambda{}^\rho \, T^\theta{}_{\mu\nu} \, S_\theta{}^{\mu\nu} \right) . \tag{3.26}$$

Podemos escrever o $t_\lambda{}^\rho$ em termos da corrente de gauge $j_a{}^\rho$ como

$$t_\lambda{}^\rho = h^a{}_\lambda j_a{}^\rho + \frac{1}{4\pi} \, \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \, S_\mu{}^{\rho\nu} . \tag{3.27}$$

Vemos claramente a origem do termo de conexão que transforma a corrente de gauge $j_a{}^\rho$ em um pseudo-tensor $t_\lambda{}^\rho$.

## 3.2 O Campo de Tetradas como Sistema de Referência

Como vimos, o campo de tetradas $h^a{}_\mu$ conecta o espaço-tempo físico ao espaço-tangente ou interno apresentados na seção anterior, ou seja, $h^a{}_\mu$ pode projetar um vetor do espaço-tempo no espaço tangente

$$U^\mu = h_a{}^\mu U^a \tag{3.28}$$

assim como, através de sua inversa, trazer um vetor do espaço tangente ao espaço-tempo, ou seja,

$$U^a = h^a{}_\mu U^\mu \; . \tag{3.29}$$

Os índices de espaço-tempo do campo de tetradas podem ser abaixados e levantados pelo tensor métrico, isto é,

$$h_{a\mu} = g_{\mu\nu} h_a{}^\nu \; , \qquad h_a{}^\mu = g^{\mu\nu} h_{a\nu}, \tag{3.30}$$

e os índices do espaço-tangente são abaixados e levantados pela métrica de Minkowski $\eta_{ab}$ e sua inversa $\eta^{ab}$,

$$h_a{}^\mu = \eta_{ab} h^{b\mu} \; , \qquad h^{a\mu} = \eta^{ab} h_b{}^\mu. \tag{3.31}$$

A tetrada inversa é definida por

$$h_a{}^\mu h^b{}_\mu = \delta^b_a. \tag{3.32}$$

Através da relação

$$g_{\mu\nu} = h^a{}_\mu h_{a\nu} \tag{3.33}$$

vemos que uma geometria Riemanniana corresponde a uma classe de geometrias Teleparalelas, ou seja, uma dada geometria Riemanniana (caracterizada pelo tensor métrico) existem inúmeras formas de se construir geometrias Teleparalelas (caracterizadas pelo campo de tetradas).

Além disso, o campo de tetradas desempenha um importante papel pois pode ser interpretado como sistema de referência adaptado a observadores ideais no espaço-tempo. Considere a linha mundo W com um observador do espaço-tempo simbolizado por $x^\mu(s)$, com s o tempo próprio do observador [32]. Neste caso, a velocidade do observador ao longo de W é dada por

$$u^\mu(s) = \frac{dx^\mu}{ds}. \tag{3.34}$$

É possível identificar a velocidade acima com a componente (0) do campo de tetradas [33], isto é,

$$u^\mu(s) = h_{(0)}{}^\mu. \tag{3.35}$$

Por sua vez a aceleração é definida como a derivada total da velocidade $u^\mu$ ao longo de W,

$$a^\mu = \frac{Du^\mu}{ds} \tag{3.36}$$

e devido a relação (3.35), podemos reescrever a equação anterior como,

$$a^\mu = \frac{Dh_{(0)}{}^{\mu}}{ds} = u^\alpha \nabla_\alpha h_{(0)}{}^{\mu}. \tag{3.37}$$

É importante ressaltar que a conexão que aparece na expressão acima é a conexão de Levi-Civita.

Destes fatos concluímos que através do campo de tetradas pode-se obter a velocidade e a aceleração de sistemas de referência. O tensor métrico, por ser simétrico, apresenta dez graus de liberdade, já o campo de tetradas apresenta dezesseis. Estes graus de liberdade extras são fixados pelas condições acima.

Portanto, é possível adequar observadores de acordo com a nossa finalidade. Caso o objetivo seja examinar uma geometria do espaço-tempo de forma estacionária, devemos escolher um $h_a{}^\mu$ que respeite a seguinte condição:

$$h_{(0)}{}^{\mu}(ct, r, \theta, \phi) = \Big(\frac{1}{A}, 0, 0, 0\Big) \tag{3.38}$$

com A um fator de normalização, assim, $h_{(0)}{}^{i} = 0$ é a condição para que tenhamos um observador estacionário.

Podemos ainda, por exemplo, considerar um campo de tetradas adaptado a um observador em rotação em torno de uma determinada geometria do espaço-tempo. Nesse caso, a componente $h_{(0)}{}^{3}$ será diferente de zero e proporcional à velocidade angular. Por outro lado, para considerar um *boost* dependente do tempo na direção $x$, o campo de tetradas deve satisfazer

$$h_{(0)}{}^{\mu}(ct, x, y, z) = \Big(\gamma, \beta\gamma, 0, 0\Big) \tag{3.39}$$

onde $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\beta = v/c$ e $v = v(t)$. Um campo de tetrada correspondente pode ser

$$h^a{}_\mu(ct,x,y,z) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \tag{3.40}$$

e calculando a aceleração para este sistema, obtém-se

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{d}{dx^0}[\beta\gamma] = \frac{d}{dt}\Big[\frac{v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\Big] , \\ a_2 &= 0 , \\ a_3 &= 0 , \end{aligned} \tag{3.41}$$

ou seja, só há aceleração na direção $x$, o que está em pleno acordo com o desejado. Para maiores detalhes ver [32].

## Capítulo 4

# Equações de Maxwell e Força de Lorentz Gravitacionais

## 4.1 O Campo GEM no ETRG

Assim como a teoria eletromagnética, o ETRG surge de uma teoria de calibre abeliana, porém com um diferente grupo de simetria, o grupo das translações. Desta forma, nos parece mais natural definir os campos gravitoelétricos e gravitomagnéticos no contexto do ETRG através das estruturas geométricas da teoria de calibre do que defini-los no cenário da RG através de identificações com a métrica ou curvatura. Devido ao fato de que nossas definições têm outro fundamento, elas são conceitualmente diferentes das definições usualmente feitas na RG, e portanto não teremos o compromisso de reduzirmos umas às outras. Ainda assim, em casos limites é esperado que elas convirjam.

### 4.1.1 Definição dos Campos Gravitoeletromagnéticos

A possibilidade da mistura e contração entre índices internos (de álgebra) e índices externos (de espaço-tempo) é uma propriedade típica de teorias de gauge para a gravitação. Tecnicamente, isso ocorre devido à presença de uma forma soldadora que corresponde ao campo de tetradas. Essa propriedade provoca profundas mudanças com relação às teorias de gauge usuais internas. No teleparalelismo, esse efeito já foi observado, por exemplo, na construção da lagrangiana teleparalela. Somente para ilustrar essa idéia vamos rever sua construção. O ponto de partida é considerar a lagrangiana usual das teorias de gauge:

$$\mathcal{L} = \frac{h}{16\pi}[\frac{1}{4}\, F^{a}{}_{\mu\nu} F_{a}{}^{\mu\nu}] \tag{4.1}$$

ou ainda

$$\mathcal{L} = \frac{h}{16\pi}\left[\frac{1}{4}\, F^{a}{}_{\mu\nu}\, F^{b}{}_{\theta\rho}\, g^{\mu\theta} N_{ab}{}^{\nu\rho}\right] \ , \tag{4.2}$$

com

$$N_{ab}{}^{\nu\rho} = \eta_{ab} g^{\nu\rho} \equiv \eta_{ab} h_{c}{}^{\nu} h^{c\rho}. \tag{4.3}$$

Entretanto, a tetrada sugere uma generalização nas contrações de índices, realizada com a inclusão de permutações cíclicas em $N_{ab}{}^{\nu\rho}$:

$$\begin{aligned} N_{ab}{}^{\mu\rho,\nu\lambda} &= \frac{1}{2}\eta_{ab}\left[g^{\mu\rho}\, g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda}\, g^{\nu\rho}\right] + \frac{1}{2} h_{a}{}^{\rho}\left[h_{b}{}^{\mu}\, g^{\nu\lambda} - h_{b}{}^{\nu}\, g^{\mu\lambda}\right] - \frac{1}{2} h_{a}{}^{\lambda}[h_{b}{}^{\mu}\, g^{\nu\rho} \\ &- h_{b}{}^{\nu}\, g^{\mu\rho}] + h_{a}{}^{\mu}\left[h_{b}{}^{\lambda}\, g^{\nu\rho} - h_{b}{}^{\rho}\, g^{\mu\lambda}\right] - h_{a}{}^{\nu}\left[h_{b}{}^{\lambda}\, g^{\mu\rho} - h_{b}{}^{\rho}\, g^{\mu\lambda}\right]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Feito isso e usando a identificação (3.15) podemos reescrever a lagrangiana como

$$\mathcal{L} = \frac{h}{16\pi}\left[\frac{1}{4}\, T^{\rho}{}_{\mu\nu}\, T_{\rho}{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\, T^{\rho}{}_{\mu\nu}\, T^{\nu\mu}{}_{\rho} - T_{\rho\mu}{}^{\rho}\, T^{\nu\mu}{}_{\nu}\right] \ . \tag{4.5}$$

Fazendo uso da definição do superpotencial (3.22) podemos reescrever a lagrangiana acima da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_G = \frac{h}{16\pi}\, S^{\rho\mu\nu}\, T_{\rho\mu\nu} \ . \tag{4.6}$$

Esta é a lagrangiana teleparalela equivalente (a menos de divergências) à lagrangiana da Relatividade Geral. Além disso, o termo derivativo que aparece na equação de campo é escrito em termos do superpotencial, ou seja,

$$\partial_{\sigma}(h S_{a}{}^{\sigma\rho}) = 4\pi(h j_{a}{}^{\rho}) \ , \tag{4.7}$$

de maneira análoga ao papel do tensor $F^{\mu\nu}$ na equação de campo do eletromagnetismo.

Essa generalização para a obtenção da lagrangiana também irá se refletir em outras grandezas da teoria, como por exemplo, na definição da generalização da torção dual [34]. Da mesma forma, iremos argumentar aqui que nas equações de campo, a grandeza que desempenha o papel do tensor intensidade de campo análogo das teorias de Yang-Mills não será $F^a{}_{\mu\nu}$, mas sim sua generalização dado pelo superpotencial $S^a{}_{\mu\nu}$, definido por

$$S_a{}^{\mu\nu} = h_{a\rho} S^{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2} h_{a\rho} \left[ K^{\mu\nu\rho} - g^{\rho\nu}\, T^{\theta\mu}{}_\theta + g^{\rho\mu}\, T^{\theta\nu}{}_\theta \right] \ . \tag{4.8}$$

É natural, portanto, considerar que os campos gravitoelétrico e gravitomagnético sejam componentes deste tensor intensidade de campo generalizado, ou seja,

$$S_a{}^{0i} = E_a{}^i; \tag{4.9}$$

$$S_a{}^{ij} = \epsilon^{ijk} B_{ak}. \tag{4.10}$$

com $\epsilon^{ijk} \equiv \epsilon^{0ijk}$ o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita, que considera apenas a permutação nos índices espaciais.

Como pode ser observado a partir das definições, $E_a{}^i$ e $B_{ak}$ se transformam covariantemente por transformações locais de Lorentz no espaço tangente. Além disso, são vetores sob rotações no espaço tridimensional, sendo $B_{ak}$, de fato, uma densidade vetorial. Embora estas sejam as mais apropriadas definições para os campos GEM no contexto do ETRG, seguindo os argumentos das teorias de gauge, outras abordagens na gravidade teleparalela podem ser encontradas [35, 36, 37, 38]. O próximo passo é ver como as equações de campo se comportam frente a essa nova definição. E é exatamente o que faremos na próxima seção.

### 4.1.2 Primeiro Par das Equações de Campo

No formalismo covariante do eletromagnetismo a equação dinâmica da teoria pode ser escrita como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\mu. \tag{4.11}$$

Tomando $\nu = 0$ em (4.11) obtemos a equação da lei de Gauss, isto é

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{4.12}$$

e para $\nu = i$ chegamos à lei de Ampère-Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{4.13}$$

Consideremos agora a versão teleparalela das equações de campo gravitacional sem fontes:

$$\partial_\sigma (h S_a{}^{\sigma\rho}) - 4\pi (h j_a{}^\rho) = 0. \tag{4.14}$$

Ao adotarmos $\rho = 0$ em (4.14) esperamos obter o equivalente gravitacional da lei de Gauss (4.12) sem fonte. Desta forma, para $\rho = i$ esperamos obter o análogo da lei de Ampère-Maxwell (4.13).

Considerando $\rho = 0$ em (4.14), temos a forma geral:

$$\partial_i (h E_a{}^i) = 4\pi (h j_a{}^0). \tag{4.15}$$

Observe que a escolha do superpotencial $S_a{}^{\sigma\rho}$, como sendo o tensor intensidade de campo gravitacional generalizado, permitiu que surgisse naturalmente na equação o análogo do divergente de $\vec{E}$ a menos de um fator multiplicativo dado pelo determinante da tetrada. Escrita nesta forma, vemos a interpretação direta de $hj_a{}^0$ como fonte de campo gravitacional na equação, totalmente análoga à Lei de Gauss. Temos explicitamente que "gravitação gera gravitação".

Reescrevendo a equação (4.15) através da expressão da corrente (3.25) em termos dos campos $E_b{}^i$ e $B_{bk}$ obtemos um termo derivativo, análogo a lei de Gauss, e vários termos de acoplamentos do tipo $(E_b{}^i)^2$, $(B_{bk})^2$ e termos cruzados $(E_b{}^i)(B_{bk})$.

Consideremos agora a componente espacial da equação de campo (4.14) $\rho = q$. Após a aplicação das nossas definições obtemos a forma compacta

$$\epsilon^{qjk} \partial_j (h B_a{}^k) - \partial_0 (h E_a{}^q) = 4\pi (h j_a{}^q). \tag{4.16}$$

Novamente, aqui, se considerarmos $hj_a{}^q$ como fonte das equações, encontramos algo muito similar à lei de Àmpere corrigida do eletromagnetismo. Podemos escrever explicitamente a corrente energia-momento $j_a{}^q$ em função dos Campos $E_b{}^i$ e $B_{bk}$ previamente definidos. Surgem novamente muitos termos de acoplamentos. Estas equações são apresentadas na íntegra em [39].

Portanto, o primeiro par das equações de campo, em sua forma exata, é evidentemente mais complexo que o respectivo par eletromagnético, isto é de fato esperado, devido à não-linearidade da gravitação. Porém, quando o tensor energia-momento gravitacional é considerado fonte, as equações se tornam muito similares.

### 4.1.3 Segundo Par das Equações de Campo

O segundo par das equações para o campo eletromagnético é obtido a partir das identidades de Bianchi,

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0, \tag{4.17}$$

ou seja, a decomposição da equação acima resulta em:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{4.18}$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{4.19}$$

sendo esta última a lei de Faraday.

Analogamente ao Eletromagnetismo, o segundo par das equações de Maxwell gravitacionais deve surgir do contexto geométrico das teorias de gauge. Isto é, devemos considerar a primeira identidade de Bianchi da geometria teleparalela, dada por:

$$\partial_\rho F^a{}_{\mu\nu} + \partial_\mu F^a{}_{\nu\rho} + \partial_\nu F^a{}_{\rho\mu} = 0. \tag{4.20}$$

A expressão (3.22) nos dá $S_a{}^{\mu\nu}$ em função de $F^a{}_{\mu\nu}$, mas a equação acima está escrita em termos do próprio $F^a{}_{\mu\nu}$, então, devemos inverter a relação (3.22) e escrever $F^a{}_{\mu\nu}$ como função de $S_a{}^{\mu\nu}$. Isto deve ser feito pois os campos GEM foram definidos a partir de $S_a{}^{\mu\nu}$. Com isso, encontramos

$$F^a{}_{\gamma\delta} = h^b{}_\gamma g_{\rho\delta} h^a{}_\mu S_b{}^{\mu\rho} - h^b{}_\delta g_{\nu\gamma} h^a{}_\mu S_b{}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^a{}_\delta g_{\nu\gamma} h^b{}_\theta S_b{}^{\theta\nu} + \frac{1}{2} h^a{}_\gamma g_{\rho\delta} h^b{}_\theta S_b{}^{\theta\rho}. \quad (4.21)$$

Após a substituição da relação acima nas identidades de Bianchi e a aplicação das definições dos campos GEM, obtemos uma equação mais complexa que a análoga eletromagnética [39]. Aparecem agora campos E e B em todos os termos derivativos além de produtos de componentes da tetrada e do tensor métrico, o que é facilmente visto quando substituímos (4.21) em (4.20). Feito isso, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\partial_\sigma \left[\mathcal{O}^{ba}{}_{\gamma i\delta} E_b{}^i + \mathcal{P}^{ba}{}_{\gamma ij\delta} \epsilon^{ijk} B_b{}^k\right] \\
&+\partial_\gamma \left[\mathcal{Q}^{ba}{}_{\delta i\sigma} E_b{}^i + \mathcal{R}^{ba}{}_{\delta ij\sigma} \epsilon^{ijk} B_b{}^k\right] \\
&+\partial_\delta \left[\mathcal{S}^{ba}{}_{\sigma i\gamma} E_b{}^i + \mathcal{T}^{ba}{}_{\sigma ij\gamma} \epsilon^{ijk} B_b{}^k\right] = 0. \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

Os dois primeiros coeficientes assumem a forma explícita

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^{ba}{}_{\gamma i\delta} = {}& h^b{}_\gamma h^a{}_0 g_{i\delta} - h^b{}_\gamma h^a{}_i g_{0\delta} + -h^b{}_\delta h^a{}_0 g_{i\gamma} + h^b{}_\delta h^a{}_i g_{0\gamma} + \\
&\frac{1}{2} h^a{}_\delta h^b{}_0 g_{i\gamma} - \frac{1}{2} h^a{}_\delta h^b{}_i g_{0\gamma} - \frac{1}{2} h^a{}_\gamma h^b{}_0 g_{i\delta} + \frac{1}{2} h^a{}_\gamma h^b{}_i g_{0\delta}; \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{P}^{ba}{}_{\gamma ij\delta} = h^b{}_\gamma h^a{}_i g_{j\delta} - h^b{}_\delta h^a{}_i g_{j\gamma} + \frac{1}{2} h^a{}_\delta h^b{}_i g_{j\gamma} - \frac{1}{2} h^a{}_\gamma h^b{}_i g_{j\delta}. \qquad (4.24)$$

e a partir de $\mathcal{O}^{ba}{}_{\gamma i\delta}$ e $\mathcal{P}^{ba}{}_{\gamma ij\delta}$ obtemos $\mathcal{Q}^{ba}{}_{\delta i\sigma}$ e $\mathcal{R}^{ba}{}_{\delta ij\sigma}$ realizando a troca de índices ($\gamma \to \delta$ e $\delta \to \sigma$) e $\mathcal{S}^{ba}{}_{\sigma i\gamma}$ e $\mathcal{T}^{ba}{}_{\sigma ij\gamma}$ fazendo ($\gamma \to \sigma$ e $\delta \to \gamma$), respectivamente.

Esta é uma expressão evidentemente mais complexa e se torna menos semelhante à identidade de Bianchi do Eletromagnetismo. Poderíamos ainda tentar evidenciar o análogo gravitacional ao segundo par de equações de Maxwell fazendo as substituições $(\sigma\gamma\delta) \to (012), (013), (023)$ para obter o análogo à Lei de Faraday ou fazendo $(\sigma\gamma\delta) \to (123)$ para obter a lei de divergência do campo gravitomagnético. Mas as equações, nessa forma exata, diferem radicalmente. Entretanto, assumindo limite de campo fraco os campos de tetradas se tornam $\delta_a{}^\rho$, a métrica

$\eta_{\mu\nu}$ e as multiplicações entre os campos são desprezadas, assim, a semelhança entre as equações acima e às do eletromagnetismo é recuperada.

## 4.2 Equação de Força Para uma Partícula na Presença de Gravitação

Consideremos, no cenário da gravitação teleparalela, o movimento de uma partícula sem spin e de massa $m$ na presença do campo gravitacional representado pelo potencial de gauge $A^a{}_\mu$. A ação, inspirada na ação eletromagnética, será escrita na forma [40]

$$S = \int_a^b L\, ds \equiv \int_a^b \left[ -m\, \sqrt{-u^2} + m\, A^a{}_\mu\, u_a\, u^\mu \right] ds\ , \tag{4.25}$$

com $L$ representando a lagrangiana do sistema,

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \tag{4.26}$$

a quadri-velocidade e

$$ds = (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.27}$$

o intervalo no espaço-tempo de Minkowski. Note que essa ação é integrada ao longo da linha mundo da partícula no espaço-tempo plano. O primeiro termo representa a ação de uma partícula livre e o segundo o acoplamento da massa da partícula com o campo gravitacional. Essa separação da ação em dois termos é somente possível numa teoria de gauge, como o teleparalelismo, não sendo, portanto, possível na RG. Porém, podemos mostrar facilmente que essa ação se reduz à ação usual da RG,

$$S = \int_a^b m ds \tag{4.28}$$

com $ds = (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{\frac{1}{2}}$ representando o intervalo não trivial.

Tomando a variação funcional em (4.25), chegamos a

$$m \left[ \frac{du_\mu}{ds} + A^a{}_\mu \frac{du_a}{ds} \right] = m F^a{}_{\mu\nu}\, u_a\, u^\nu\ , \tag{4.29}$$

e fazendo uso da relação

$$\frac{du_\mu}{ds} = \left(\frac{\partial x^a}{\partial x^\mu}\right) \frac{du_a}{ds} \ , \tag{4.30}$$

obtemos

$$(\partial_\mu x^a + A^a{}_\mu) \frac{du_a}{ds} = \ F^a{}_{\mu\nu} \, u_a \, u^\nu \ , \tag{4.31}$$

que é a equação de movimento para uma partícula no espaço plano e sentindo o efeito do campo gravitacional através de $A^a{}_\mu$. Observe que o fator equivalente ao $\frac{e}{m}$ do eletromagnetismo não aparece aqui, pois a massa gravitacional é cancelada com a massa inercial, dado o princípio de equivalência fraco. Através da relação (3.7) a equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$h^a{}_\mu \frac{du_a}{ds} = \ F^a{}_{\mu\nu} \, u_a \, u^\nu \ . \tag{4.32}$$

Vale salientar que essa equação pode ser reescrita como uma equação de força no teleparalelismo, com a torção desempenhando o papel de força, ou, alternativamente, pode ser escrita como a equação da geodésica da RG. Para tal, devemos considerar que

$$u_a = h_{a\mu} \, u^\mu, \tag{4.33}$$

e assim a equação acima torna-se

$$\frac{du_\mu}{ds} - \Gamma_{\theta\mu\nu} \, u^\theta \, u^\nu = \ T_{\theta\mu\nu} \, u^\theta \, u^\nu \ . \tag{4.34}$$

Neste ponto devemos considerar a simetria de $u^\theta \, u^\nu$ sob a troca de $(\theta \leftrightarrow \nu)$. Feito isso, a equação acima pode ser reescrita na forma

$$\frac{du_\mu}{ds} - \Gamma_{\theta\mu\nu} \, u^\theta \, u^\nu = \ K_{\mu\theta\nu} \, u^\theta \, u^\nu, \tag{4.35}$$

lembrando que a relação entre a conexão de Cartan e a conexão de Levi-Cevita é dada por (3.17), ou seja,

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^\sigma{}_{\mu\nu} + K^\sigma{}_{\mu\nu} \ . \tag{4.36}$$

Então, finalmente, chegamos a

$$\frac{du_\mu}{ds} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\theta\mu\nu} u^\theta \, u^\nu = 0. \tag{4.37}$$

Esta é precisamente a equação da geodésica da RG.

### 4.2.1 Força de Lorentz e Campos Gravitoeletromagnéticos

Consideremos a expressão da força de Lorentz gravitacional na forma:

$$h^{a}{}_{\mu}\,\frac{du_a}{ds} = F^{a}{}_{\mu\nu}\,u_a\,u^{\nu}\,, \tag{4.38}$$

por meio das identificações (3.22) e (3.18) a equação adquire a forma

$$h^{a\mu}\frac{du_a}{ds} = h^{a}{}_{\rho}\left[S^{\mu\nu\rho} - S^{\nu\rho\mu} - \frac{1}{2}g^{\rho\nu}S^{\theta\mu}{}_{\theta} + \frac{1}{2}g^{\mu\rho}S^{\theta\nu}{}_{\theta}\right]u_a u_{\nu}. \tag{4.39}$$

Usando o campo de tetradas, podemos escrever os superpotenciais $S^{\mu\nu\rho}$ com o primeiro índice de álgebra para aplicação posterior das definições dos campos GEM.

$$h^{a\mu}\frac{du_a}{ds} = -h_b{}^{\nu}S^{b\rho\mu}u_\rho u_\nu - \frac{1}{2}h_{b\theta}(S^{b\mu\theta}u^2 - S^{b\nu\theta}u^{\mu}u_{\nu}). \tag{4.40}$$

Aplicando $u^2 = -1$, abrindo explicitamente o somatório em parte espacial e temporal e substituindo o modelo em questão, encontramos, para $\mu = 0$

$$h^{a0}\frac{du_a}{ds} = \mathcal{C}_{bi}E^{bi} + \mathcal{D}_{bj}\epsilon^{ijk}B^{bk}u_i, \tag{4.41}$$

com

$$\mathcal{C}_{bi} = h_b{}^{j}u_i u_j - \frac{h_{bi}}{2} + \frac{1}{2}h_{bi}u^0 u_0 - \frac{1}{2}h_{b0}u^0 u_i$$

e

$$\mathcal{D}_{bj} = \frac{1}{2}h_{bj}u^0.$$

Para $\mu = k$, obtemos

$$h^{ak}\frac{du_a}{ds} = \mathcal{F}_b E^{bk} + \mathcal{G}^{k}{}_{ib}E^{bi} + \mathcal{H}^{kl}{}_{b}B^{bl}, \tag{4.42}$$

com

$$\mathcal{F}_b = -h_b{}^{0}u_0 u_0 - h_b{}^{i}u_0 u_i + \frac{h_{b0}}{2}$$

$$\mathcal{G}^{k}{}_{ib} = \frac{1}{2}h_{bi}u^k u_0 - \frac{1}{2}h_{b0}u^k u_i$$

$$\mathcal{H}^{kl}{}_b = -h_b{}^0 \epsilon^{ikl} u_i u_0 - h_b{}^j \epsilon^{ikl} u_i u_j + \frac{u^2}{2} h_{bi} \epsilon^{ikl} + \frac{1}{2} h_{bj} \epsilon^{ijl} u^k u_i.$$

Encontramos, portanto, equações visivelmente mais complexas que as do eletromagnetismo, complexidade esta que surge devido à presença do campo de tetradas, tornando não triviais os coeficientes que acompanham os campos gravitacionais elétrico e magnético.

**Capítulo 5**

# Gravitoeletromagnetismo: O Papel dos Observadores no Espaço-tempo de Schwarzschild

Realizamos até este ponto do trabalho uma analogia formal ao eletromagnetismo que resultou no surgimento de campos gravitoeletromagnéticos como componentes do tensor superpotencial da teoria. Assim, o paralelo foi feito no domínio das teorias de gauge. Devemos investigar, portanto, se a esses campos estão associados fenômenos físicos semelhantes aos observados e previstos pelo eletromagnetismo. Em poucas palavras, cargas elétricas estáticas geram campos elétricos e cargas em movimento geram campos magnéticos. Da mesma forma, é desejável constatar uma associação entre os campos sugeridos em modelo com matéria estática e matéria em movimento. O objetivo deste capítulo será, então, observar como a matéria define os campos em questão, considerando para tanto o buraco negro de Schwarzschild. Além disso, vamos investigar como os campos se comportam frente a diferentes observadores, sempre em relação a esta mesma geometria, ou seja, a definida pela métrica de Schwarzschild.

## 5.1 Observador Estacionário

A solução de Schwarzschild pode ser representada pelo conhecido elemento de linha escrito em coordenadas esféricas:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2\right). \tag{5.1}$$

A escolha do observador corresponde a um específico campo de tetradas associado com a métrica de Schwarzschild e é crucial para nossas conclusões sobre os campos GE e GM que emergem da teoria, da mesma forma que no eletromagnetismo. Assim, nós inicialmente adotaremos um conjunto de tetradas que é adaptado a um observador estacionário em relação ao espaço-tempo de Schwarzschild. Portanto, desejamos um observador que possua uma quadri-velocidade com a seguinte forma:

$$u^\mu = (A^{-1}, 0, 0, 0). \tag{5.2}$$

Esse conjunto de campos de tetrada pode ser representado por [41]:

$$h^a{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{11} sen\theta cos\phi & rcos\theta cos\phi & -rsen\theta sen\phi \\ 0 & \gamma_{11} sen\theta sen\phi & rcos\theta sen\phi & rsen\theta cos\phi \\ 0 & \gamma_{11} cos\theta & -rsen\theta & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

nesta notação $\gamma_{00} = \sqrt{g_{00}}$ e $\gamma_{11} = \sqrt{-g_{11}}$.

Com a finalidade de calcular os campos GEM para essa configuração, temos que calcular a inversa da tetrada acima. Fazendo isso temos:

$$h_a{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma_{00}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{11}^{-1} sen\theta cos\phi & r^{-1} cos\theta cos\phi & -(rsen\theta)^{-1} sen\phi \\ 0 & \gamma_{11}^{-1} sen\theta sen\phi & r^{-1} cos\theta sen\phi & (rsen\theta)^{-1} cos\phi \\ 0 & \gamma_{11}^{-1} cos\theta & -r^{-1} sen\theta & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

É fácil verificar que (5.3) e (5.4) satisfazem as relações abaixo:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_\mu h^b{}_\nu, \tag{5.5}$$

$$h^a{}_\mu \, h_a{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu \tag{5.6}$$

e

$$h^a{}_\mu \, h_b{}^\mu = \delta^a{}_b. \tag{5.7}$$

Note que a linha da tetrada inversa acima, ou seja, $h_{(0)}{}^\mu = (\gamma_{00}^{-1}, 0, 0, 0)$ está de acordo com a quadri-velocidade requerida anteriormente.

A partir da expressão usual da torção escrita em termos da tetrada

$$T^\sigma{}_{\mu\nu} = h_a{}^\sigma \partial_\mu h^a{}_\nu - h_a{}^\sigma \partial_\nu h^a{}_\mu, \tag{5.8}$$

calculamos as componentes de $T^\sigma{}_{\mu\nu}$, das quais as não nulas são:

$$T^0{}_{01} = -\frac{M}{r^2} g_{00}^{-1}, \tag{5.9}$$

$$T^2{}_{12} = T^3{}_{13} = \frac{1}{r}(1 - \gamma_{11}). \tag{5.10}$$

A partir da definição de campo GE retomamos a expressão da componente de interesse do superpotencial em termos de torções:

$$S_b{}^{0i} = \frac{1}{2}[h_b{}^\lambda T^{i0}{}_\lambda + h_b{}^\lambda T_\lambda{}^{0i} - h_b{}^\lambda T^{0i}{}_\lambda] - h_b{}^i T^{\theta 0}{}_\theta + h_b{}^0 T^{\theta i}{}_\theta. \tag{5.11}$$

Após algumas simplificações, dadas as simetrias e componentes nulas dos tensores envolvidos, obtemos a relação direta entre o campo elétrico e a torção:

$$E_b{}^i = h_b{}^0 T^{ji}{}_j. \tag{5.12}$$

Para $b \neq 0$ é trivial verificar que as componentes se anulam, ou seja, $E_k{}^i = 0$ e para $b = 0$, $E_{(0)}{}^\theta = 0$, $E_{(0)}{}^\phi = 0$ e ainda

$$E_{(0)}{}^r \;=\; -\frac{1}{r}(\gamma_{00} - 1), \tag{5.13}$$

ou seja, apenas a componente radial com $b = 0$, em (5.12), é diferente de zero, coerente com a distribuição esfericamente simétrica de matéria.

Nosso próximo passo é analisar a existência de componente GM. Para isso, vamos considerar a definição de campo GM e retomar a expressão do superpotencial em termos de torções:

$$S_b{}^{ij} = \frac{1}{2}[h_b{}^{\lambda}T^{ji}{}_{\lambda} + h_b{}^{\lambda}T^{ij}_{\lambda} - h_b{}^{\lambda}T^{ij}{}_{\lambda}] - h_b{}^{j}T^{\theta i}{}_{\theta} + h_b{}^{i}T^{\theta j}{}_{\theta}, \tag{5.14}$$

após algumas simplificações, chegamos em

$$\begin{aligned} S_b{}^{12} &= -h_b{}^{2}g^{11}[T^{0}{}_{10} + T^{3}_{13}]\,, & (5.15)\\ S_b{}^{13} &= -h_b{}^{3}g^{11}[T^{0}{}_{10} + T^{2}_{12}]\,, & (5.16)\\ S_b{}^{23} &= 0 & (5.17)\end{aligned}$$

e finalmente, obtemos as componentes GM:

$$\begin{aligned} B_{(0)\phi} &= B_{(0)\theta} = B_{(0)r} = 0\,,\\ B_{(1)\phi} &= \frac{cos\theta cos\phi}{2r^2}(1-\gamma_{11}{}^{-1}-\frac{M}{r}),\\ B_{(2)\phi} &= \frac{cos\theta sin\phi}{2r^2}(1-\gamma_{11}{}^{-1}-\frac{M}{r}),\\ B_{(3)\phi} &= -\frac{sin\theta}{2r^2}(1-\gamma_{11}{}^{-1}-\frac{M}{r}),\\ B_{(1)\theta} &= \frac{sin\phi}{2r^2 sin\theta}(1-\gamma_{11}{}^{-1}-\frac{M}{r}),\\ B_{(2)\theta} &= -\frac{cos\phi}{2r^2 sin\theta}(1-\gamma_{11}{}^{-1}-\frac{M}{r}),\\ B_{(3)\theta} &= B_{(1)r} = B_{(2)r} = B_{(3)r} = 0. \end{aligned}$$

Do ponto de vista teórico, a ausência de componentes nulas para o que temos chamado de campo gravitomagnético não representa realmente um problema, considerando que temos realizado uma definição formal, inspirada no eletromagnetismo, que resulta em um campo com mais graus de liberdade. Esses graus de liberdade extras surgem do fato de que os grupos internos relacionados a cada teoria de calibre têm dimensões diferentes. Como vamos notar, ao fazermos as interpretações corretas sobre a origem dessas componentes, recuperamos a fenomenologia semelhante à eletromagnética e ainda levaremos em conta o efeitos da não-linearidade da gravitação.

Como pode ser visto, o escalar resultante da contração de todos os índices internos e externos podem ser associados a um tipo de módulo de um vetor GM que não apresenta dependência angular. O que está de acordo com a simetria esférica da solução de Schwarzschild, ou seja, $B^2 \equiv g_{ij}{B_a}^i B^{aj} = \frac{1}{gr^2}(1 - {\gamma_{11}}^{-1} - \frac{M}{r})^2$, com $g$ sendo o determinante da métrica. Observe também que no caso exato, as componentes $B_{(0)i}$ são iguais a zero.

É importante agora considerarmos a hipótese de aproximação, ou seja, a métrica do espaço-tempo será decomposta em uma parte plana trivial ,$\eta_{\mu\nu}$, mais uma pertubação gerada pela presença de matéria, $a_{\mu\nu}$, isto é, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + a_{\mu\nu}$. O limite de campo fraco significa essencialmente que devemos descartar termos de segunda ordem $(\frac{m}{r})^2 = O(\epsilon^2)$, o que corresponde a considerarmos

$$\frac{m}{r} << 1, \tag{5.18}$$

e desta maneira, podemos conduzir as expressões envolvidas na forma de expansão em Taylor e considerar apenas a primeira ordem. Aqui se faz, portanto, a hipótese de campo fraco. Fazendo uso dessas aproximações em (5.13) nós vemos que a componente GE não nula, torna-se

$${E_{(0)}}^r = \frac{m}{r^2}, \tag{5.19}$$

ou seja, a componente acima ($a = 0$) desempenha um papel totalmente análogo ao do campo elétrico coulombiano do eletromagnetismo. Assim, vemos que a expressão (5.13) possui limite newtoniano, como esperado.

Ao voltarmos nossa atenção para as componentes GM, notamos que nesta ordem de aproximação, todas elas se anulam, isto é

$$B_{(0)k} = B_{(i)j} = 0 \tag{5.20}$$

A partir das nossas componentes GE e GM obtidas no caso geral e depois da hipótese de campo fraco, nós podemos inferir que somente as componentes $E_{(0)k}$ e $B_{(0)k}$ possuem o comportamento análogo ao campos eletromagnéticos do ponto de vista fenomenológico, isto é, eles podem ser associados a campos gerados por uma distribuição de matéria estática e em movimento, respectivamente.

Por outro lado, observando que as componentes GM $B_{(i)j}$ são diferentes de zero no caso exato e que elas se anulam no regime linear, e relacionado a isso o fato de que a corrente energia-momento de gauge ${j_a}^\rho$ definida por (3.25) também se anula no regime de campo fraco, nós podemos presumir que $B_{(i)j}$ não estão associados com efeitos de arrasto de referenciais inerciais relacionados a rotação no espaço-tempo de Schwarzschild. Em vez disso, eles estão apenas relacionados à corrente de gauge gravitacional, o responsável pelos efeitos não lineares da gravitação. E por essa razão essas componentes GM não possuem qualquer paralelo com o eletromagnetismo.

## 5.2 Observador em Queda Livre no Espaço-tempo de Schwarzschild

O princípio da equivalência afirma que um sistema inercial em que atua um campo gravitacional homogêneo é equivalente a um sistema de referência não inercial, livre de campos gravitacionais, caracterizado por uma aceleração constante. Um fato crucial para essa equivalência é a igualdade entre as massas gravitacional e inercial, fato esse, que é verificado experimentalmente.

Desta forma, a igualdade entre as massas gravitacional e inercial possibilitou a Einstein pressupor que um sistema de referência em queda livre não é capaz de detectar um campo gravitacional uniforme, uma vez que esse sistema possui a mesma aceleração do campo gravitacional. Assim, um sistema de referência inercial, na ausência de campo gravitacional, é equivalente a um sistema de referência em queda livre na presença de um campo gravitacional uniforme.

No caso de um campo gravitacional arbitrário não conseguimos obter seu anulamento num sistema de referência sem rotação em queda livre. Entretanto, se considerarmos uma região suficientemente pequena onde podemos conceber o campo homogêneo e uniforme teremos o anulamento do campo gravitacional. Como o campo de tetradas representa um sistema de referência local adaptado a um observador não inercial vamos analisar o comportamento dos campos GEM obtidos a partir de uma determinada escolha de campos de tetradas.

Nesta seção, investigaremos o que dois observadores específicos concluem sobre os campos GEM no contexto do espaço-tempo de Schwarzschild e de Minkowski. Inicialmente, vamos considerar um observador em queda livre no buraco negro de Schwarzschild, isto é, um observador que cai radialmente na direção do buraco negro devido à sua força gravitacional. Posteriormente consideraremos um segundo observador que agora está parado em relação ao espaço-tempo de Minkowski. Em linhas gerais, veremos que nossos resultados estarão em plena concordância com o princípio da equivalência já que os dois observadores se manterão indistinguíveis do ponto de vista dinâmico: a força de Lorentz e a energia gravitacional se anularão em ambos os casos.

### 5.2.1 Geometria

Como dito anteriormente, analisaremos o comportamento dos campos GEM obtidos a partir de um observador em queda livre no espaço-tempo de Schwarzschild. Inicialmente, vamos considerar a métrica de Schwarzschild reescrita da forma

$$ds^2 = -\alpha^{-2}dt^2 + \alpha^2 dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin\theta^2 d\phi^2) \tag{5.21}$$

com

$$\alpha^{-2} = 1 - \frac{2m}{r}. \tag{5.22}$$

Um observador que move radialmente em queda livre devido a atração do buraco negro de Schwarzschild deve ter uma quadri-velocidade da forma [42]

$$u^\nu = \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, -\left(\frac{2m}{r}\right)^{1/2}, 0, 0\right]. \tag{5.23}$$

Um conjunto de campos de tetradas que satisfaz a condição acima é dada por [32]

$$h_{a\mu} = \begin{pmatrix} -1 & -\alpha^2\beta & 0 & 0 \\ \beta sin\theta cos\phi & \alpha^2 sin\theta cos\phi & rcos\theta cos\phi & -rsin\theta sin\phi \\ \beta sin\theta sen\phi & \alpha^2 sin\theta sen\phi & rcos\theta sin\phi & rsin\theta cos\phi \\ \beta cos\theta & \alpha^2 cos\theta & -rsin\theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

aqui $\beta$ é definido por

$$\beta = \sqrt{\frac{2m}{r}}. \quad (5.25)$$

Novamente, através da expressão da torção escrita em termos do campo de tetrada

$$T^{\sigma}{}_{\mu\nu} = h_a{}^{\sigma}\partial_\mu h^a{}_\nu - h_a{}^{\sigma}\partial_\nu h^a{}_\mu, \quad (5.26)$$

nós podemos calcular as componentes de $T_{\sigma\mu\nu}$, das quais as não nulas são

$$\begin{aligned} T_{001} &= -\beta\partial_r\beta, \\ T_{101} &= -\alpha^2\partial_r\beta, \\ T_{202} &= -r\beta, \\ T_{303} &= -r\beta\sin^2\theta, \\ T_{212} &= r(1-\alpha^2), \\ T_{313} &= r(1-\alpha^2)\sin^2\theta. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Com estes resultados, podemos calcular o superpotencial que nos permitirá encontrar os campos GEM [43]. Desta maneira, para obtermos os campos GE precisamos das seguintes componentes de $S_b{}^{\mu\nu}$:

$$S_b{}^{0i} = \frac{1}{4}\Big[h_b{}^k g^{00}g^{ij}T_{j0k} + h_b{}^k g^{00}g^{ij}T_{k0j}\Big] + \frac{1}{2}\Big[h_b{}^0 g^{ij}g^{lk}T_{kjl} - h_b{}^i g^{00}g^{kj}T_{j0k}\Big]. \quad (5.28)$$

As componentes radiais são obtidas ao considerarmos $i = 1$, isto é

$$S_b{}^{01} = E_b{}^1 = \frac{1}{2}\Big[h_b{}^0 g^{11}g^{22}T_{212} + h_b{}^0 g^{11}g^{33}T_{313} - h_b{}^1 g^{00}g^{22}T_{202} - h_b{}^1 g^{00}g^{33}T_{303}\Big]. \quad (5.29)$$

Para as componentes angulares $\theta$ tomamos $i = 2$ na expressão acima (5.28) e encontramos

$$S_b{}^{02} = E_b{}^2 = -\frac{1}{2}\left[h_b{}^2 g^{00} g^{11} T_{101} + h_b{}^2 g^{00} g^{33} T_{303}\right]. \tag{5.30}$$

As componentes $\phi$ são obtidas ao fazermos $i = 3$

$$S_b{}^{03} = E_b{}^3 = -\frac{1}{2}\left[h_a{}^3 g^{00} g^{11} T_{101} + h_a{}^3 g^{00} g^{22} T_{202}\right]. \tag{5.31}$$

Agora, vamos considerar o índice de espaço interno igual a zero nas expressões acima, ou seja, $b = 0$ e assim chegamos a

$$\begin{aligned} E_{(0)}{}^r &= 0, \\ E_{(0)}{}^\theta &= 0, \\ E_{(0)}{}^\phi &= 0. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Em seguida, calculamos as componentes espaciais de $b$. Considerando (5.29) e atribuindo $b = 1, 2, 3$ chegamos a

$$E_{(1)}{}^r = -\frac{\beta}{r}\sin\theta\cos\phi, \tag{5.33}$$

$$E_{(2)}{}^r = -\frac{\beta}{r}\sin\theta\sin\phi, \tag{5.34}$$

$$E_{(3)}{}^r = -\frac{\beta\cos\theta}{r}. \tag{5.35}$$

Da mesma maneira, atribuindo os valores $b = 1, 2, 3$ em (5.30), obtemos

$$E_{(1)}{}^\theta = -\frac{\alpha^2\beta}{4r^2}\cos\theta\cos\phi, \tag{5.36}$$

$$E_{(2)}{}^\theta = -\frac{\alpha^2\beta}{4r^2}\cos\theta\sin\phi, \tag{5.37}$$

$$E_{(3)}{}^\theta = -\frac{\alpha^2\beta}{4r^2}\sin\theta, \tag{5.38}$$

e finalmente, tomando $b = 1, 2, 3$ em (5.31) encontramos

$$E_{(1)}{}^\phi = \frac{\alpha^2\beta\sin\phi}{4r^2\sin\theta}, \tag{5.39}$$

$$E_{(2)}{}^{\phi} = -\frac{\alpha^2\beta\cos\phi}{4r^2\sin\theta}, \tag{5.40}$$

$$E_{(3)}{}^{\phi} = 0. \tag{5.41}$$

Vamos agora calcular os campos GM para esta configuração. Novamente escrevendo o superpotencial em termos das torções,

$$\begin{aligned} S_b{}^{ij} &= \frac{1}{4}\left[h_a{}^0 g^{ik} g^{jm}\left(T_{mk0} + T_{0km} - T_{km0}\right) + h_a{}^n g^{ik} g^{jm}\left(T_{mkn} + T_{nkm} - T_{kmn}\right)\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[-h_a{}^j g^{ik}(g^{nm}T_{mkn} - g^{00}T_{00k}) + h_a{}^i g^{jl}(g^{nm}T_{mln} - g^{00}T_{00l})\right], \end{aligned} \tag{5.42}$$

e usando a definição (4.10) com o índice interno $b = 0$ na expressão acima, obtemos

$$B_{(0)\phi} = 0,$$

$$B_{(0)\theta} = 0,$$

$$B_{(0)r} = 0. \tag{5.43}$$

Na sequência consideramos $b = 1, 2, 3$ para cada coordenada do espaço-tempo. Para a componente $\phi$:

$$B_{(1)\phi} = \frac{m}{2r^3}\cos\theta\cos\phi, \tag{5.44}$$

$$B_{(2)\phi} = \frac{m}{2r^3}\cos\theta\sin\phi, \tag{5.45}$$

$$B_{(3)\phi} = -\frac{m}{2r^3}\sin\theta. \tag{5.46}$$

Para a componente $\theta$:

$$B_{(1)\theta} = \frac{m}{2r^3}\frac{\sin\phi}{\sin\theta}, \tag{5.47}$$

$$B_{(2)\theta} = -\frac{m}{2r^3}\frac{\cos\phi}{\sin\theta}, \tag{5.48}$$

$$B_{(3)\theta} = 0. \tag{5.49}$$

E finalmente, as demais componentes radiais

$$B_{(1)r} = 0, \tag{5.50}$$

$$B_{(2)r} = 0, \tag{5.51}$$

$$B_{(3)r} = 0. \tag{5.52}$$

Por outro lado, se considerarmos um observador estacionário no espaço-tempo de Minkowski e realizarmos um cálculo similar, todas as componentes do campo GEM se mostram iguais a zero. Entretanto, assumindo a validade do princípio da equivalência, nós esperaríamos não sermos capaz de discernir entre estes dois observadores, um em queda livre no buraco negro de Schwarzschild e o outro estacionário no espaço-tempo de Minkowski. Essa aparente inconsistência desaparecerá quando investigarmos o papel das componentes não nulas $b = 1, 2, 3$ através da dinâmica.

Antes de fazermos essa análise, vamos tecer alguns comentários. De acordo com [11] no GEM linearizado dado pela RG, a definição operacional (que permite uma analogia direta com o eletromagnetismo) para os campos GEM deve estar de acordo com o princípio de equivalência, ou seja, para um observador em queda livre e não girante não há forças gravitacionais e assim os campos GEM são nulos. Nossa definição está em completa concordância com isso, uma vez que no limite de campo fraco

$$\frac{m}{r} << 1 \tag{5.53}$$

todas as componentes acima são nulas. Além disso, mesmo no caso exato, nós mostramos que as componentes $b = 0$ se anulam. Isso mostra que as definições operacionais devem estar relacionadas com as componentes $b = 0$, o que está em completa concordância com a análise da seção anterior.

Vamos agora verificar os efeitos da componentes não nulas dos campos GE e GM na dinâmica dos observadores.

### 5.2.2 Força de Lorentz Gravitacional

Assim como mencionado anteriormente, como consequência do princípio da equivalência, um observador ideal representado por um campo de tetrada não girante e em queda livre no espaço-tempo de Schwarzschild, não seria capaz de distinguir - ao menos do ponto de vista dinâmico - se está em queda livre nesse espaço-tempo ou se está em repouso no espaço-tempo de Minkowski. Uma maneira de abordar esse problema é utilizar a equação que descreve o comportamento de partículas escalares na presença de gravitação, a força de Lorentz gravitacional [40]:

$$h^a{}_\mu \frac{du_a}{ds} = F^a{}_{\mu\nu} u_a u^\nu \,. \tag{5.54}$$

Nesta equação, o lado esquerdo corresponde à quadri-aceleração do observador e o lado direito desempenha o papel de força, de maneira análoga à força de Lorentz do eletromagnetismo. Alternativamente, essa equação pode ser reescrita como a equação da geodésica no contexto da RG. A partir dessa equação, podemos avaliar as consequências das componentes diferentes de zero dos campos GEM previamente obtidos.

Uma vez que os campos GEM são definidos a partir do superpotencial $S^{b\rho\mu}$ é conveniente reescrevermos a equação acima em termos dessas quantidades. Para tal, devemos reescrever o tensor intensidade de campo gravitacional em termos do superpotencial, ou seja,

$$F^a{}_{\gamma\delta} = h^b{}_\gamma g_{\rho\delta} h^a{}_\mu S_b{}^{\mu\rho} - h^b{}_\delta g_{\nu\gamma} h^a{}_\mu S_b{}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^a{}_\delta g_{\nu\gamma} h^b{}_\theta S_b{}^{\theta\nu} + \frac{1}{2} h^a{}_\gamma g_{\rho\delta} h^b{}_\theta S_b{}^{\theta\rho} \tag{5.55}$$

assim, obtemos

$$h^{a\mu} \frac{du_a}{ds} = -h_b{}^\nu S^{b\rho\mu} u_\rho u_\nu - \frac{1}{2} h_{b\theta} (S^{b\mu\theta} u^\rho u_\rho - S^{b\nu\theta} u^\mu u_\nu). \tag{5.56}$$

Fazendo uso da expressão (5.23) e dos campos GEM obtidos na seção anterior podemos calcular o lado direito da equação (5.56) para um observador em queda livre no espaço-tempo de Schwarzschild. Desta forma, obtemos um resultado nulo para todas as componentes da força de Lorentz, isto é, os campos GEM diferentes de zero, obtidos nessa seção, são combinados de tal maneira que eliminam a força sentida pelo observador. O mesmo resultado é obtido quando consideramos um observador estacionário em relação ao espaço-tempo de Minkowski, uma vez que nesse caso todas as componentes GEM são nulas. Portanto, em certo sentido, podemos dizer que os componentes do superpotencial com índice zero de espaço interno representam a definição operacional dos campos GEM uma vez que, sendo igual a zero, estas componentes já estavam em concordância com o princípio da equivalência.

### 5.2.3 Energia do Campo Gravitacional

Outra evidência física que nos permite tratar da questão das componentes não nulas dos campos GEM para o caso de um sistema de referência em queda livre no buraco negro de Schwarzschild é a energia do campo gravitacional. Novamente, sendo válido o princípio da equivalência, não seríamos capazes de discernir entre a energia observada pelos mesmos dois observadores, um em queda livre no buraco negro de Schwarzschild e um outro estacionário no espaço-tempo de Minkowski. Assim, sendo zero a energia do campo gravitacional associado com a segunda situação, o mesmo resultado deveria ocorrer com a energia medida pelo observador da primeira situação. Nós podemos calcular a energia do campo gravitacional através da componente zero de (3.25), a partir dos campos GEM para um observador representado pelo campo de tetradas dado por (5.24), uma vez que eles são definidos a partir do superpotencial que aparece na definição do tensor energia momento. Vamos considerar então

$$j_{(0)}{}^{0} = h_{(0)}{}^{\lambda}(F^{c}{}_{i\lambda}S_{c}{}^{i0} - \frac{1}{4}\delta_{\lambda}{}^{0}F^{c}{}_{\mu\nu}S_{c}{}^{\mu\nu}). \tag{5.57}$$

Substituindo (5.55) em (5.57) chegamos a

$$\begin{aligned} j_{(0)}{}^{0} &= h_{(0)}{}^{\lambda}\Big(h^{b}{}_{i}g_{\rho\lambda}h^{c}{}_{\gamma}S_{b}{}^{\gamma\rho} - h^{b}{}_{\lambda}g_{\rho i}h^{c}{}_{\gamma}S_{b}{}^{\gamma\rho} - \frac{1}{2}h^{c}{}_{\lambda}g_{\rho i}h^{b}{}_{\gamma}S_{b}{}^{\gamma\rho} \\ &+ \frac{1}{2}h^{c}{}_{i}g_{\rho\lambda}h^{b}{}_{\gamma}S_{b}{}^{\gamma\rho}\Big)S_{c}{}^{0i} + \frac{1}{4}h_{(0)}{}^{0}\Big(h^{b}{}_{\mu}g_{\rho\lambda}h^{c}{}_{\gamma}S_{b}{}^{\gamma\rho} - h^{b}{}_{\lambda}g_{\rho\mu}h^{c}{}_{\gamma}S_{b}{}^{\gamma\rho} \\ &- \frac{1}{2}h^{c}{}_{\lambda}g_{\rho\mu}h^{c}{}_{\gamma}S_{b}{}^{\gamma\rho} + \frac{1}{2}h^{c}{}_{\mu}g_{\rho\lambda}h^{b}{}_{\gamma}S_{b}{}^{\gamma\rho}\Big)S_{c}{}^{\mu\lambda}. \end{aligned} \tag{5.58}$$

Usando as definições do campo GE e GM podemos reescrever a expressão acima em termos de $E_{a}{}^{i}$ e $B_{a}{}^{i}$. Note que (5.58) é quadrática no superpotencial e consequentemente também será quadrática nos campos GEM. Após um longo cálculo, encontramos o seguinte resultado para a componente acima

$$j_{(0)}{}^{0} = 0, \tag{5.59}$$

ou seja, a energia do campo gravitacional escrita em termos dos campos GEM é zero para o caso de um observador em queda livre no buraco negro de Schwarzschild. Embora existam componentes do campo GEM diferentes de zero, elas se combinam de tal maneira que não alteram o resultado esperado da energia do campo gravitacional, de maneira similar ao que acontece no cálculo da força de Lorentz gravitacional. Como consequência, não é possível para um observador local distinguir entre estar em queda livre no buraco negro de Schwarzschild ou em repouso no espaço-tempo de Minkowski.

Assim, a partir de (5.58) e (5.59), podemos definir uma "energia operacional"do campo gravitacional de maneira completamente análoga à do eletromagnetismo, a saber:

$$\mathsf{E} = \int \left[ \left(E_{(0)}{}^{i}\right)^2 + \left(B_{(0)i}\right)^2 \right] d^3x. \tag{5.60}$$

É importante ressaltar que esta definição foi inferida com base apenas no caso de um sistema de referência em queda livre no buraco negro de Schwarzschild, sendo sua validade estendida ainda sob investigação.

## 5.3 *Boost* em Relação ao Buraco Negro de Schwarzschild

Para enriquecer nossa compreensão a respeito do papel dos observadores e efeitos de referenciais na medição dos campos GEM, vamos considerar aqui um observador realizando um *boost* de Lorentz na direção **x** em relação ao buraco negro de Schwarzschild.

Assim, vamos considerar inicialmente a métrica de Schwarzschild escrita em termos de coordenadas isotrópicas, isto é

$$ds^2 = -A^2(dx^0)^2 + B^2(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta d\phi^2) \ , \tag{5.61}$$

com

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{(1-m/2\rho)^2}{(1+m/2\rho)^2} \ , \\ B^2 &= (1+m/2\rho)^4 \ , \end{aligned} \tag{5.62}$$

e $m = MG/c^2$. A variável $\rho$ é dada em termos de $r$, $r = \rho(1 + m/2\rho)^2$ e as coordenadas $x, y$ e $z$ são definidas como $x = \rho \sin\theta \cos\phi$, $y = \rho \sin\theta \sin\phi$ e $z = \rho \cos\theta$.

Visto que nosso objetivo é analisar o comportamento dos campos GEM através de um observador que se move na direção $\mathbf{x}$, ou seja, *boost* na direção $\mathbf{x}$, a partir da métrica de Schwarzschild devemos trabalhar com essa métrica em coordenadas cartesianas.

$$ds^2 = -A^2(dx^0)^2 + B^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \; . \tag{5.63}$$

Neste ponto devemos escolher o campo de tetradas que representará nosso observador. Consideremos previamente a formulação usual das transformações de Lorentz aplicadas ao espaço-tempo plano. Um *boost* na direção $\mathbf{x}$ pode ser escrito através do campo de tetradas como [44]

$$h^a{}_\mu(x^0, x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \tag{5.64}$$

onde $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\beta = v/c$.

O *boost* na direção $\mathbf{x}$ em relação ao buraco negro de Schwarzschild é construído a partir de (5.64) considerando os coeficientes $A$ e $B$ que geram o tensor métrico (5.63) e assim obtemos

$$h^a{}_\mu(x^0, x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma A & -\beta\gamma B & 0 & 0 \\ -\beta\gamma A & \gamma B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{pmatrix} , \tag{5.65}$$

com $h^a{}_\mu h_{a\nu} = g_{\mu\nu}$. Novamente nós temos $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\beta = v/c$.

Os fatores A e B que aparecem na expressão acima são dados em coordenadas cartesianas por

$$A = \frac{r - 2m + r\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}{r + r\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \tag{5.66}$$

e

$$B = \Big(\frac{r + r\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}{r - m + r\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}\Big)^2, \tag{5.67}$$

respectivamente. O fator $r$ que aparece nas expressões acima é dado por:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{5.68}$$

Usando a tetrada acima obtemos as seguintes componentes não nulas da torção (5.26):

$$T_{001} = A\partial_x A \tag{5.69}$$

$$T_{002} = A\partial_y A \tag{5.70}$$

$$T_{003} = A\partial_z A \tag{5.71}$$

$$T_{121} = B\partial_y B \tag{5.72}$$

$$T_{131} = B\partial_z B \tag{5.73}$$

$$T_{212} = B\partial_x B \tag{5.74}$$

$$T_{232} = B\partial_z B \tag{5.75}$$

$$T_{313} = B\partial_x B \tag{5.76}$$

$$T_{323} = B\partial_y B. \tag{5.77}$$

A partir da expressão para o superpotencial (3.22), escrito em termos das torções, podemos calcular o campo GE medido por um referencial que representa um *boost* na direção $\mathbf{x}$ relativo ao buraco negro de Schwarzschild. Quando consideramos $b = 0$ na definição do campo GE, obtemos

$$\begin{aligned} E_{(0)}{}^x &= \frac{\gamma}{AB^3}\partial_x B, \\ E_{(0)}{}^y &= \frac{\gamma}{AB^3}\partial_y B, \\ E_{(0)}{}^z &= \frac{\gamma}{AB^3}\partial_z B. \end{aligned} \tag{5.78}$$

Vamos considerar agora as componentes GM obtidas a partir da definição (4.10). Novamente tomamos $b = 0$ e com isso chegamos a:

$$
\begin{aligned}
B_{(0)x} &= 0, \\
B_{(0)y} &= \frac{\beta\gamma\partial_z(AB)}{2AB^4}, \\
B_{(0)z} &= \frac{\beta\gamma\partial_y(AB)}{2AB^4}.
\end{aligned} \tag{5.79}
$$

Notem que os campos GEM sofreram um aumento de um fator $\gamma$ devido ao movimento do observador em relação à fonte de campo gravitacional, ou seja, o buraco negro de Schwarzschild. Outras componentes do campo GE são obtidas quando fazemos $i = 1$ e $b = 1, 2, 3$, isto é

$$
\begin{aligned}
E_{(1)}{}^{x} &= \frac{\gamma\beta}{AB^3}\partial_x B, \\
E_{(2)}{}^{x} &= 0, \\
E_{(3)}{}^{x} &= 0,
\end{aligned} \tag{5.80}
$$

Levando em consideração $i = 2$ e $i = 3$ em $S_a{}^{0i} = E_a{}^i$ extraímos as componentes GE $y$ e $z$ respectivamente

$$
\begin{aligned}
E_{(1)}{}^{y} &= \frac{\gamma\beta}{AB^3}\partial_y B, \\
E_{(2)}{}^{y} &= 0, \\
E_{(3)}{}^{y} &= 0
\end{aligned} \tag{5.81}
$$

e

$$
\begin{aligned}
E_{(1)}{}^{z} &= \frac{\gamma\beta}{AB^3}\partial_z B, \\
E_{(2)}{}^{z} &= 0, \\
E_{(3)}{}^{z} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.82}
$$

E por fim vamos calcular as demais componentes GM. Para tal, devemos considerar $i = 2$ e $j = 3$ e assim obtermos as componentes $x$

$$
B_{(1)x} = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
B_{(2)x} &= \frac{\gamma\partial_z(AB)}{2AB^4}, \\
B_{(3)x} &= -\frac{\gamma\partial_y(AB)}{2AB^4}.
\end{aligned} \tag{5.83}
$$

Com $i = 1$ e $j = 3$ alcançamos as componentes $y$

$$
\begin{aligned}
B_{(1)y} &= -\frac{\gamma\partial_z(AB)}{2AB^4}, \\
B_{(2)y} &= 0, \\
B_{(3)y} &= \frac{\partial_x(AB)}{2AB^4}.
\end{aligned}
$$

E finalmente as componentes $z$

$$
\begin{aligned}
B_{(1)z} &= \frac{\gamma\partial_y(AB)}{2AB^4}, \\
B_{(2)z} &= -\frac{\partial_x(AB)}{2AB^4}, \\
B_{(3)z} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.84}
$$

As expressões, da maneira que estão, fogem de qualquer interpretação usual baseada no eletromagnetismo. Desta forma, vamos nos focalizar nas componentes com índice de espaço-tangente iguais a zero que, como já mencionado, mostram ser a "definição operacional"para os campos GEM. Além disso, uma comparação direta com o eletromagnetismo pode ser feita quando consideramos o regime linear na gravitação. Isso será feito na próxima seção.

### 5.3.1 Regime de Campo Fraco

Para a comparação com a situação similar na eletrodinâmica, consideramos um observador que se move com velocidade constante em relação a uma carga elétrica em repouso. A configuração consiste em uma carga pontual em repouso na origem de um sistema de referência inercial (S). De forma geral, os campos eletromagnéticos em um referencial que realiza um *boost* com velocidade constante na direção $\mathbf{x}$ ($S'$) estão relacionados com os valores para os campos vistos no referencial inercial S por

[45]

$$
\begin{aligned}
E'_x &= E_x,\\
E'_y &= \gamma(E_y - vB_z),\\
E'_z &= \gamma(E_z + vB_y),\\
B'_x &= B_x,\\
B'_y &= \gamma\Big(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\Big),\\
B'_z &= \gamma\Big(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\Big).
\end{aligned}
\tag{5.85}
$$

É importante ressaltar que na situação descrita acima as componentes magnéticas serão nulas no referencial em repouso, o que nos leva a

$$
\begin{aligned}
E'_x &= E_x,\\
E'_y &= \gamma E_y,\\
E'_z &= \gamma E_z,\\
B'_x &= 0,\\
B'_y &= \frac{\beta\gamma}{c}E_z,\\
B'_z &= -\frac{\beta\gamma}{c}E_y.
\end{aligned}
\tag{5.86}
$$

Como temos constatado, a direta analogia entre eletromagnetismo e gravitação ocorre quando ambas teorias estão no regime linear. Sendo assim, vamos linearizar as componentes dos campos GEM obtidas anteriormente. Para tal, vamos considerar que

$$
\frac{m}{r} << 1. \tag{5.87}
$$

Nesse regime, obtemos as seguintes componentes GE:

$$
\begin{aligned}
{E'_{(0)}}^x &= \frac{\gamma m x}{r^3},\\
{E'_{(0)}}^y &= \frac{\gamma m y}{r^3} = \gamma {E_{(0)}}^y,\\
{E'_{(0)}}^z &= \frac{\gamma m z}{r^3} = \gamma {E_{(0)}}^z.
\end{aligned}
\tag{5.88}
$$

O resultado obtido aqui é interessante, já que, no regime de campo fraco os campos GE são do tipo newtoniano, aumentados por um fator $\gamma$ devido ao movimento do observador em relação à fonte do campo gravitacional. Porém, neste ponto surge uma diferença essencial entre as teorias. Para as componentes associadas às direções independentes do *boost*, os campos possuem o mesmo comportamento, enquanto a componente $\mathbf{x}$, associada ao *boost*, ganha um fator de Lorentz $\gamma$ extra que não existe quando comparamos os resultados acima com as expressões derivadas a partir da teoria eletromagnética (5.86). Assim, o fator $\gamma$ presente na primeira componente de (5.88) poderia representar um problema em nossa linha de raciocínio dada a declarada similaridade. Observemos, entretanto, que sendo válido o princípio da equivalência, a massa $m$ em (5.88) pode ser tomada como a massa inercial. Como sabemos, a massa inercial não é um invariante de Lorentz e se transforma de acordo com:

$$m' = \gamma m. \tag{5.89}$$

De fato, a massa de repouso $m_0$ é um verdadeiro invariante de Lorentz. Como resultado, a responsabilidade do fator $\gamma$ na componente $x$ do caso gravitacional poder ser colocada sobre o fato de a massa presente na expressão do campo GE não ser apenas a massa de repouso, ou algum invariante de Lorentz, análogo à carga elétrica. O fato que confirma essa afirmação é que a componente alterada no caso gravitacional está na mesma direção do movimento observador, que é a direção $\mathbf{x}$. E não havendo movimento nas direções $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$, a massa nas expressões dessas componentes permanece inalterada. Assim,

$${E'_{(0)}}^{x} = \frac{m'x}{r^3} = {E_{(0)}}^{x}. \tag{5.90}$$

Indiretamente há uma corroboração do princípio da equivalência, ou seja, para realizar-se uma associação entre o campo elétrico e o campo GE (no limite de campo fraco) é necessário, para a justificativa da presença do fator $\gamma$, a substituição da massa gravitacional ($m_g$) pela massa inercial ($m_i$).

Se considerarmos o limite de campo fraco para as componentes GM com índice de espaço tangente igual a zero, obtemos

$$\begin{aligned} B'_{(0)x} &= 0, \\ B'_{(0)y} &= \beta\gamma\frac{m^2 z}{4r^4}, \\ B'_{(0)z} &= \beta\gamma\frac{m^2 y}{4r^4}, \end{aligned} \tag{5.91}$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} B'_{(0)x} &= 0, \\ B'_{(0)y} &= \beta\gamma\frac{m}{4r}{E_{(0)}}^{z}, \\ B'_{(0)z} &= \beta\gamma\frac{m}{4r}{E_{(0)}}^{y}, \end{aligned} \tag{5.92}$$

onde ${E_{(0)}}^y$ e ${E_{(0)}}^z$ são as componentes do campo GE medidas a partir de um observador em repouso. Vemos assim uma completa concordância entre os resultados acima apresentados e as expressões eletromagnéticas (5.86), ou seja, a componente GM na direção do *boost* se anula e as demais são escritas em termos dos campos GE obtidos a partir de um observador em repouso.

Além disso, ao compararmos (5.86) com (5.92) vemos que o fator relativo a velocidade da luz, no caso do *boost* no contexto da eletrodinâmica, $\frac{1}{c}$, é substituído por um fator $\frac{m}{r}$ quando consideramos um *boost* no caso gravitacional. Ou seja, na teoria eletromagnética o campo magnético é menor que o campo elétrico por um fator de $c$. Por outro lado, no caso gravitacional o campo GM é $\frac{m}{r}$ menor que o campo GE. É importante ressaltar que no regime considerado a razão $\frac{m}{r}$ é considerada muito menor que um. Essa comparação pode nos mostrar a magnitude do campo GM em relação ao campo GE, isto é

$$\frac{m}{r} \Leftrightarrow c^{-1}. \tag{5.93}$$

o que nos dá uma idéia quantitativa da diferença entre os campos GE e GM.

A partir deste ponto serão calculadas apenas as componentes "operacionais", ou seja, as componentes com índice de espaço tangente iguais a zero, que são aquelas onde a analogia se verifica. Porém, é importante ressaltar que as demais componentes guardam informação importante sobre os campos, mas sem o paralelo com a fenomenologia do eletromagnetismo.

## 5.4 Observador em Rotação no Buraco Negro de Schwarzschild

Nessa seção vamos considerar mais uma vez a métrica de Schwarzschild escrita na forma

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix}. \tag{5.94}$$

No entanto, queremos obter as expressões dos campos GEM a partir de um observador em rotação representado pelo campo de tetradas. Assim, devemos considerar uma quadri-velocidade do tipo:

$$u^\mu = (A, 0, 0, A\Omega), \tag{5.95}$$

com $\Omega(r,\theta)$ a velocidade angular do observador que de maneira geral pode depender de $r$ e $\theta$.

Através da relação $g^{\mu\nu} = h^{a\mu} h_a{}^\nu$ e da condição $h_{(0)}{}^\mu = u^\mu$, podemos construir um campo de tetradas que satisfaz as condições acima. Feito isso, obtemos

$$h_a{}^\mu = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & A\Omega \\ -Csin\phi & \alpha^{-1}sin\theta cos\phi & r^{-1}cos\theta cos\phi & -\frac{Zsin\phi}{rsin\theta} \\ Ccos\phi & \alpha^{-1}sin\theta sen\phi & r^{-1}cos\theta sin\phi & \frac{Zsin\phi}{rsin\theta} \\ 0 & \alpha^{-1}cos\theta & -r^{-1}sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.96}$$

com

$$\Omega = \Omega(r,\theta),$$

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{A^2 - \alpha^2}\,, \\ Z &= \sqrt{1 + A^2\Omega^2 r^2 sin^2\theta}\,, \\ A &= \frac{\alpha}{(1 - \alpha^2\Omega^2 r^2 sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}}\,. \end{aligned} \tag{5.97}$$

De posse do campo de tetradas, podemos calcular as torções das quais as diferentes de zero são:

$$T_{001} = \frac{\sin\theta A(\partial_r C)\Omega r - Z(\partial_r A)}{A\alpha^2(Z - sin\theta\Omega r)}\,, \tag{5.98}$$

$$T_{002} = \frac{\sin\theta A(\partial_\theta C)\Omega r - Z(\partial_\theta A)}{A\alpha^2(Z - sin\theta\Omega r)}\,, \tag{5.99}$$

$$T_{212} = r(1 - \alpha)\,, \tag{5.100}$$

$$T_{203} = \frac{r^2\Omega\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta C r\Omega - Z}\,, \tag{5.101}$$

$$T_{301} = r\sin^2\theta\Big[\frac{A\Omega(Z - r\partial_r Z) + Zr(\partial_r(A\Omega))}{A(Z - Cr\Omega\sin\theta)}\Big]\,, \tag{5.102}$$

$$T_{302} = r^2\sin^2\theta\Big[\frac{-\Omega A(\sin\theta(\partial_\theta Z) - Z\cos\theta) + Z\sin\theta\partial_\theta(A\Omega))}{A(Z - Cr\Omega\sin\theta)}\Big]\,, \tag{5.103}$$

$$\begin{aligned} T_{323} &= \frac{r^2\sin\theta}{A(Z - Cr\Omega\sin\theta)}\Big[A\sin\theta(\partial_\theta Z) - rC\sin^2\theta\partial_\theta(A\Omega) \\ &- \Omega r CAZ\sin\theta\cos\theta - ZA\cos\theta(Z - 1)\Big]\,, \end{aligned} \tag{5.104}$$

$$\begin{aligned} T_{313} &= \frac{r\sin^2\theta}{A(Z - Cr\Omega\sin\theta)}\Big[AC\sin\theta r^2(\partial_r\Omega) - Z\alpha AC\Omega r\sin\theta + \Omega r^2 C\sin\theta(\partial_r A) \\ &- Z^2 A\alpha + AZ - Ar(\partial_r Z)\Big]\,, \end{aligned} \tag{5.105}$$

$$\begin{aligned} T_{013} &= \frac{1}{A\alpha^2(Z - Cr\Omega\sin\theta)}\Big[AC^2\alpha\Omega\sin^2\theta - ZCA\alpha\sin\theta \\ &+ r\sin\theta[A(\partial_r C) - C(\partial_r A)]\Big]\,, \end{aligned} \tag{5.106}$$

$$
\begin{aligned}
T_{023} &= \frac{r}{A\alpha^2(Z - Cr\Omega\sin\theta)}\Big[ - AC^2\Omega r\sin\theta\cos\theta + CAZ\cos\theta \\
&+ \sin\theta[A(\partial_\theta C) - C(\partial_\theta A)]\Big]\,, \qquad (5.107)
\end{aligned}
$$

$$
T_{103} = -\frac{r\Omega\alpha\sin^2\theta}{Z - Cr\Omega\sin\theta}\,. \qquad (5.108)
$$

A partir das torções calculadas, podemos obter os campos GEM para um observador em rotação no buraco negro de Schwarzschild. O procedimento para a obtenção desses campos é totalmente análogo ao apresentado nas seções anteriores. Assim, a componente radial do campo GE é dada por:

$$
\begin{aligned}
{E_{(0)}}^{r} &= -\frac{1}{4r\alpha^2(Z - Cr\Omega\sin\theta)}\Big[\alpha r^2\sin^2\theta\Big( - A\Omega^2\alpha^2 + \alpha\Omega AZ \\
&+ \alpha AZ\Omega(\partial_r\Omega)rAC^2\Omega^2 + \Omega^2\alpha Z(\partial_r A)r - \alpha\Omega^2 A(\partial_r Z)r\Big) \\
&+ r\sin\theta\Big(2AC\Omega - C\Omega(\partial_r A)r - 2CA\Omega\alpha - A\Omega(\partial_r C)r \\
&- 2AC(\partial_r\Omega)r - 3CAZ\Omega\alpha\Big) + 2A\Big( - 2Z + Z\alpha + r(\partial_r Z) \\
&+ \alpha Z^2\Big)\Big]. \qquad (5.109)
\end{aligned}
$$

Vemos que o fato de o observador estar em rotação altera radicalmente a expressão do campo GE quando comparamos com o valor obtido para o observador estacionário (5.13). É importante ressaltar que se pararmos o observador, ou seja, tomando $\Omega(r,\theta) = 0$, em (5.109) recuperamos (5.13), como esperado.

Neste contexto surge uma outra componente do campo GE, a componente angular ${E_{(0)}}^{\theta}$ dada pela seguinte equação:

$$
\begin{aligned}
{E_{(0)}}^{\theta} &= \frac{1}{4r^2\sin\theta(Z - Cr\Omega\sin\theta)}\Big[ - \Omega^2C^2r^2A\cos\theta\sin^2\theta \\
&+ \Omega^2r^2\alpha^2A\cos\theta\sin^2\theta(1 - Z) + \Omega^2r^2\alpha^2(A\partial_\theta Z - Z\partial_\theta A)\sin^3\theta \\
&+ \Omega r\partial_\theta(AC)\sin^2\theta + 2CrA(\partial_\theta\Omega)\sin^2\theta - \Omega\alpha^2ZAr^2(\partial_\theta\Omega)\sin^3\theta \\
&+ 2ZA(1 - Z)\cos\theta + 3\Omega rCAZ\sin\theta\cos\theta - 2A(\partial_\theta Z)\sin\theta\Big]. \qquad (5.110)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, a componente angular ${E_{(0)}}^{\phi}$ é nula:

$$
{E_{(0)}}^{\phi} = 0
$$

Agora vamos voltar nossa atenção para as componentes GM obtidas para este observador. Da mesma forma que no caso do campo GE, surge uma componente radial GM dada por:

$$\begin{aligned} B_{(0)r} &= \frac{1}{4r^3\alpha^2\sin^2\theta[Z - Cr\Omega\sin\theta]}\Big[\alpha^2 rZA(\partial_\theta\Omega)\sin^2\theta + \Omega r\alpha^2\partial_\theta(AZ)\sin^2\theta \\ &- 2\alpha^2 Ar^2\Omega^2(\partial_\theta c)\sin^3\theta + CAZ\cos\theta - \Omega rA(\alpha^2 + C^2)\sin\theta\cos\theta \\ &- \alpha^2\Omega ArZ\sin\theta\cos\theta - \sin\theta(C\partial_\theta A - A\partial_\theta C)\Big]. \end{aligned} \tag{5.111}$$

E do mesmo modo, surge uma componente GM $B_{(0)\theta}$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} B_{(0)\theta} &= -\frac{1}{4r^2\alpha^4\sin\theta[Z - Cr\Omega\sin\theta]}\Big[- 2\Omega^2\alpha^2 Ar^3(\partial_r C)\sin^2\theta + C\alpha AZ \\ &- 2\Omega^2 r^2 AC\alpha^2(\alpha - 1)\sin^2\theta - r(C\partial_r A - A\partial_r C) - \Omega C^2 r\alpha A\sin\theta \\ &- r^2\alpha^2 AZ(\partial_r\Omega)\sin\theta + \Omega r^2\alpha^2\partial_r(AZ)\sin\theta - 3\Omega r\alpha^2 AZ\sin\theta \\ &- \Omega r\alpha^3 A\sin\theta + 2\alpha^3 r\Omega AZ\sin\theta\Big]. \end{aligned} \tag{5.112}$$

Finalmente, a componente $B_{(0)\phi}$ é dada por:

$$B_{(0)\phi} = 0$$

É importante notar que ${E_{(0)}}^\theta, B_{(0)r}$ e $B_{(0)\theta}$ se anulam no caso de considerarmos $\Omega(r,\theta) = 0$, o que é esperado tendo em vista que essas componentes foram todas nulas no caso de um observador estacionário (ver seção 4.1).

Desta forma, obtivemos expressões gerais para os campos GEM no caso de um observador em rotação que possua uma velocidade angular que seja função de $r$ e $\theta$, ou seja, $\Omega(r,\theta)$. Será interessante agora calcular os valores dos campos para uma escolha de velocidade específica, descrita em termos dos parâmetros físicos. Optamos em considerar a velocidade angular do observador em relação ao buraco negro de Schwarzschild como sendo exatamente a velocidade angular do buraco negro de Kerr em relação a um observador estacionário, isto é,

$$\Omega(r,\theta) = \frac{\chi}{\Sigma^2}, \tag{5.113}$$

ou ainda,

$$\Omega(r,\theta) = \frac{2amr}{(r^2+a^2)^2 - (r^2+a^2-2mr)a^2\sin^2\theta}\,, \tag{5.114}$$

com $a = J/m$, ou seja, $a$ é o momento angular por unidade de massa. Essa escolha deve-se ao fato de que no próximo capítulo serão obtidos os campos GEM do buraco negro de Kerr em relação a um campo de tetradas adaptado a um observador estacionário. E assim, poderemos comparar o efeito dos referenciais sobre os campos GEM.

Ao substituirmos a velocidade angular (5.114) nas expressões dos campos GEM obtidas anteriormente chegamos a resultados extremamente longos e de difícil interpretação. Uma alternativa a esse problema foi considerar os limites de campo fraco e rotação lenta. Tal consideração será apresentada na próxima seção.

### 5.4.1 Observador em Rotação no Limite de Campo Fraco e Movimento Lento

Novamente vamos considerar o limite de campo fraco, isto é,

$$\frac{m}{r} << 1 \tag{5.115}$$

e ainda o limite de movimento lento dado por:

$$\frac{a}{r} << 1. \tag{5.116}$$

Os campos GEM estão escritos em termos das quantidades $\alpha, A, C, Z$ e $\Omega$. Assim, vamos considerar os limites (5.115) e (5.116) nessas quantidades e posteriormente substituir esses valores nas expressões dos campos GEM obtidas na seção anterior.

Ao tomarmos novamente a expressão da velocidade angular

$$\Omega = \frac{2amr}{(r^2+a^2)^2 - (r^2+a^2-2mr)a^2\sin^2\theta} \tag{5.117}$$

e considerarmos os limites de campos fraco e movimento lento, chegamos a:

$$\Omega = \frac{2am}{r^3} \,. \tag{5.118}$$

A partir de agora quando mencionarmos a velocidade angular do observador em rotação estaremos nos referindo à expressão acima. Assumindo as aproximações (5.115), (5.116) e (5.118) e expandindo em série de Taylor os coeficientes $\alpha, C, A$ e $Z$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 + \frac{m}{r} \,, \\
C &= 2\left(1 + 2\,\frac{m}{r}\right)\frac{am\sin\theta}{r^2} \,, \\
A &= 1 + \frac{m}{r} + 2\,\frac{a^2m^2\left(\sin\theta\right)^2}{r^4} \,, \\
Z &= 1 + 2\,\frac{a^2m^2\left(\sin\theta\right)^2}{r^4} \,,
\end{aligned} \tag{5.119}$$

respectivamente. Neste ponto, podemos substituir os coeficientes acima nas expressões gerais dos campos GEM obtidas na seção anterior. Assim, as componentes GE surgem quando utilizamos (5.119) em (5.109) e (5.110), o que gera:

$$E_{(0)}{}^{r} = -\frac{m}{r^2} + \frac{a^2m^2}{r^5}\sin^2\theta \tag{5.120}$$

e

$$E_{(0)}{}^{\theta} = \frac{a^2m^2}{r^6}\sin\theta\cos\theta. \tag{5.121}$$

A componente $\phi$ do campo GE é nula, mesmo no caso geral

$$E_{(0)}{}^{\phi} = 0. \tag{5.122}$$

Note que a contribuição devido à rotação do observador são desprezíveis se comparadas com as considerações (5.115) e (5.116), entretanto essas também são os maiores termos provenientes do momento angular do observador. Considerando rigorosamente os limites de campo fraco e movimento lento temos que

$$\begin{aligned}
E_{(0)}{}^{r} &\approx -\frac{m}{r^2} \,, \\
E_{(0)}{}^{\theta} &\approx 0 \,, \\
E_{(0)}{}^{\phi} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.123}$$

Para o cálculo do campo GM devemos substituir (5.119) nas expressões (5.111) e (5.112). Após algumas manipulações algébricas chegamos a:

$$B_{(0)r} = \frac{am^2 \cos\theta}{r^6 \sin\theta}\,, \tag{5.124}$$

$$B_{(0)\theta} = -\frac{2am}{r^4} \tag{5.125}$$

e

$$B_{(0)\phi} = 0\,. \tag{5.126}$$

Assim, podemos considerar que a única contribuição GM é devida a componente $\theta$, dado o caráter das aproximações. Uma comparação dos resultados acima com os provenientes do buraco negro de Kerr será realizada no próximo capítulo.

## Capítulo 6

# Os Campos Gravitoeletromagnéticos de uma Simetria Axial

### 6.1 O Campo Gravitoeletromagnético de uma Simetria Axial no Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral

A simetria axial é obtida quando a simetria esférica é quebrada por uma rotação. Estudar o comportamento dos campos GEM nesse tipo de simetria é importante uma vez que esta engloba um grande número de configurações físicas, como por exemplo, sistemas binários, estrelas de nêutrons, aglomerados de galáxias, incluindo até mesmo o buraco negro de Kerr. Desta forma, conseguimos obter expressões gerais para os campos GEM.

Inicialmente vamos considerar a métrica de uma simetria axial escrita na sua forma mais geral, ou seja, [46]

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{03}d\phi dt + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\phi^2\,. \tag{6.1}$$

É importante ressaltar que todas as componentes do tensor métrico escrito acima dependem de $r$ e $\theta$. Optaremos por um observador estacionário em relação à simetria axial. Um conjunto de campos de tetrada que satisfaz essa condição é dado por:

$$h_{a\mu} = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & -B \\ 0 & \sqrt{g_{11}}\sin\theta\cos\phi & \sqrt{g_{22}}\cos\theta\cos\phi & -C\sin\theta\sin\phi \\ 0 & \sqrt{g_{11}}\sin\theta\sin\phi & \sqrt{g_{22}}\cos\theta\sin\phi & C\sin\theta\cos\phi \\ 0 & \sqrt{g_{11}}\cos\theta & -\sqrt{g_{22}}\sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(-g_{00})}\,, \\ AB &= -g_{03}\,, \\ C\sin\theta &= \frac{\delta^{1/2}}{\sqrt{(-g_{00})}} \end{aligned} \tag{6.3}$$

e o coeficiente $\delta$ que aparece acima é dado por:

$$\delta = g_{03}g_{03} - g_{00}g_{33}. \tag{6.4}$$

Através da expressão

$$T_{\sigma\mu\nu} = \Gamma_{\sigma\mu\nu} - \Gamma_{\sigma\nu\mu}, \tag{6.5}$$

obtemos as seguintes componentes da torção diferentes de zero:

$$\begin{aligned} T_{013} &= -A\partial_1 B\,, \\ T_{023} &= -A\partial_2 B\,, \\ T_{001} &= \frac{1}{2}\partial_1(A^2)\,, \\ T_{002} &= \frac{1}{2}\partial_2(A^2)\,, \\ T_{112} &= -\frac{1}{2}\partial_2(g_{11})\,, \\ T_{212} &= \frac{1}{2}\partial_1(g_{22}) - \sqrt{g_{11}g_{22}}\,, \\ T_{313} &= \frac{1}{2}\partial_1(g_{33}) - \sqrt{g_{11}}C\sin^2\theta\,, \\ T_{323} &= \frac{1}{2}\partial_2(g_{33}) - \sqrt{g_{22}}C\sin\theta\cos\theta\,. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Através da expressão (4.9) e da definição do superpotencial (3.22) vamos calcular os campos GE. Após alguma manipulação algébrica obtemos as componentes radiais do campo GE, ou seja,

$$\begin{aligned} S_b{}^{01} = E_b{}^r &= \frac{1}{4}\Big[h_b{}^3 g^{00} g^{11}(T_{301} - T_{013}) + h_b{}^0 g^{03} g^{11}(T_{013} - T_{301})\Big] \\ &+ \frac{1}{2}\Big[h_b{}^0 g^{22} g^{11} T_{212} + h_b{}^0 g^{33} g^{11} T_{313} - h_b{}^3 g^{03} g^{11} T_{313}\Big] . \end{aligned} \tag{6.7}$$

Na expressão acima surgem componentes do tensor métrico contravariante. Assim, vamos escrevê-lo em termos da métrica (6.1). Fazendo isso, obtemos:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{g_{33}}{\delta} & 0 & 0 & \frac{g_{03}}{\delta} \\ 0 & \frac{1}{g_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{g_{22}} & 0 \\ \frac{g_{03}}{\delta} & 0 & 0 & -\frac{g_{00}}{\delta} \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

e novamente $\delta = g_{03} g_{03} - g_{00} g_{33}$.

Ao considerarmos o índice de espaço interno, $b = 0$, encontramos

$$\begin{aligned} E_{(0)}{}^r &= \frac{g_{00}}{4 g_{11} \sqrt{-g_{00}}\,\delta}\partial_1(g_{11}) + \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{g_{11} g_{22} \sqrt{-g_{00}}}\Big(\frac{1}{2}\partial_1(g_{22}) - \sqrt{g_{22} g_{11}}\Big) \\ &- \frac{g_{00}}{g_{11}\sqrt{-g_{00}}\,\delta}\Big(\frac{1}{2}\partial_1(g_{33}) - \sqrt{g_{11}}\, C \sin^2\theta\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Para obtermos a componente angular $\theta$ tomamos $i = 2$ na definição de campo GE (4.9). Desta forma, obtemos inicialmente

$$\begin{aligned} S_b{}^{02} = E_b{}^\theta &= \frac{1}{4}\Big[h_b{}^3 g^{00} g^{22}(T_{302} - T_{023}) + h_b{}^0 g^{03} g^{22}(T_{023} - T_{302})\Big] \\ &+ \frac{1}{2}\Big[h_b{}^0 g^{11} g^{22} T_{121} + h_b{}^0 g^{33} g^{22} T_{323} - h_b{}^3 g^{03} g^{22} T_{323}\Big] . \end{aligned} \tag{6.10}$$

Novamente, devemos fazer $b = 0$ na expressão acima, assim

$$\begin{aligned} E_{(0)}{}^\theta &= \frac{1}{4\sqrt{-g_{00}}}\Big[\frac{g_{03}}{g_{22}\delta}\partial_2(g_{03}) + \frac{1}{g_{22} g_{11}}\partial_2(g_{11})\Big] \\ &- \frac{g_{00}}{2 g_{22}\sqrt{-g_{00}}\,\delta}\Big[\frac{1}{2}\partial_2(g_{33}) - \sqrt{g_{22}}\, C \sin\theta\cos\theta\Big] . \end{aligned} \tag{6.11}$$

E finalmente a componente $\phi$ do campo GE é obtida a partir de (4.9) com $i = 3$ e $b = 0$:

$$\begin{aligned} S_{(0)}{}^{03} = E_{(0)}{}^{\phi} &= \frac{1}{4}\Big[h_{(0)}{}^{1}g^{00}g^{33}(T_{301} + T_{013}) - h_{(0)}{}^{1}g^{03}g^{30}(T_{013} - T_{301}) \\ &+ h_{(0)}{}^{2}g^{00}g^{33}(T_{302} + T_{023}) - h_{(0)}{}^{2}g^{03}g^{30}(T_{302} + T_{023})\Big] . \end{aligned} \tag{6.12}$$

Pelo fato de termos adotado um campo de tetradas que represente um observador estacionário, as componentes $h_{(0)}{}^{1}$ e $h_{(0)}{}^{2}$ são nulas e assim

$$E_{(0)}{}^{\phi} = 0. \tag{6.13}$$

Neste ponto vamos voltar nossa atenção para o campo GM de uma simetria axial. Desta forma, consideramos a definição (4.10).

A componente $\theta$ é obtida ao tomarmos $i = 1$ e $j = 3$ na definição mencionada acima. Após um longo cálculo, porém simples, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} S_{b}{}^{13} = -B_{b\theta} &= \frac{1}{4}\Big[h_{b}{}^{0}g^{11}g^{33}(T_{013} - T_{301}) + h_{b}{}^{3}g^{11}g^{30}(T_{301} - T_{013})\Big] \\ &+ \frac{1}{2}\Big[h_{b}{}^{3}g^{00}g^{11}T_{001} - h_{b}{}^{0}g^{11}g^{30}T_{001} - h_{b}{}^{3}g^{11}g^{22}T_{212}\Big] . \end{aligned} \tag{6.14}$$

Com isso, após a substituição das componentes do tensor métrico dado por (6.8) e das torções (6.6) e ainda com $b = 0$ a expressão para $S_{(0)}{}^{13}$ pode ser simplificada como:

$$B_{(0)\theta} = -\frac{1}{4\sqrt{-g_{00}}g_{11}\delta}\Big[g_{03}\partial_1(g_{00}) - g_{00}\partial_1(g_{03})\Big] . \tag{6.15}$$

Chegamos à componente radial do campo GM ao considerarmos $i = 2$ e $j = 3$ na definição (4.10),

$$\begin{aligned} S_{b}{}^{23} = B_{br} &= \frac{1}{4}\Big[h_{b}{}^{3}g^{22}g^{30}(T_{302} - T_{023}) + h_{b}{}^{0}g^{22}g^{33}(T_{023} - T_{302})\Big] \\ &+ \frac{1}{2}\Big[h_{b}{}^{3}g^{00}g^{22}T_{002} - h_{b}{}^{0}g^{22}g^{30}T_{002} - h_{b}{}^{3}g^{11}g^{22}T_{121}\Big] \end{aligned} \tag{6.16}$$

e assim, fazendo $b = 0$ na equação acima, encontramos:

$$B_{(0)r} = \frac{1}{4\sqrt{-g_{00}}g_{22}\delta}\Big[g_{03}\partial_2(g_{00}) - g_{00}\partial_2(g_{03})\Big] . \tag{6.17}$$

Finalmente vamos fazer $i = 1$ e $j = 2$, o que resulta em:

$$
\begin{aligned}
B_{(0)\phi} &= \frac{1}{2}\Big[{h_{(0)}}^2 g^{11} g^{03}(T_{301} - T_{013}) - {h_{(0)}}^1 g^{22} g^{03}(T_{302} - T_{023}) \\
&+ {h_{(0)}}^2 g^{00} g^{11} T_{001} - {h_{(0)}}^2 g^{11} g^{33} T_{313} \\
&- {h_{(0)}}^1 g^{00} g^{22} T_{002} + {h_{(0)}}^1 g^{33} g^{22} T_{323}\Big]\,. \qquad (6.18)
\end{aligned}
$$

Devemos destacar novamente que ${h_{(0)}}^2 = 0$ e ${h_{(0)}}^1 = 0$ pois escolhemos um campo de tetrada que representa um observador estacionário à simetria axial. O que resulta em:

$$
B_{(0)\phi} = 0\,.
$$

É importante ressaltar que esse é um resultado geral e pode ser aplicado a todas as configurações físicas que possuem simetria axial. Como aplicações, iremos calcular os campos GEM, considerando-se um observador estacionário, para o buraco negro de Kerr e para uma estrela de nêutrons.

## 6.2 Buraco Negro de Kerr

O elemento de linha da métrica de Kerr nas coordenadas de Boyer-Lindquist é dado por [4]

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -\frac{\psi^2}{\rho^2}dt^2 - \frac{2\chi\sin^2\theta}{\rho^2}\,d\phi\,dt + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 \\
&\quad +\rho^2 d\theta^2 + \frac{\Sigma^2\sin^2\theta}{\rho^2}d\phi^2\,, \qquad (6.19)
\end{aligned}
$$

com

$$
\begin{aligned}
\Delta &= r^2 + a^2 - 2mr\,, \\
\rho^2 &= r^2 + a^2\cos^2\theta\,, \\
\Sigma^2 &= (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta\,, \\
\psi^2 &= \Delta - a^2\sin^2\theta\,, \\
\chi &= 2amr\,. \qquad (6.20)
\end{aligned}
$$

A quantidade $am = J$ é o momento angular do buraco negro de Kerr.

O campo de tetradas previamente escolhido é adaptado a observadores estacionários, então teremos aqui o mesmo tipo de observador. Explicitamente, podemos substituir o tensor métrico acima em (6.2) o que nos leva a [47]:

$$h_{a\mu} = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & -B \\ 0 & \sqrt{\frac{\rho^2}{\Delta}}\sin\theta\cos\phi & \sqrt{\rho^2}\cos\theta\cos\phi & -C\sin\theta\sin\phi \\ 0 & \sqrt{\frac{\rho^2}{\Delta}}\sin\theta\sin\phi & \sqrt{\rho^2}\cos\theta\sin\phi & C\sin\theta\cos\phi \\ 0 & \sqrt{\frac{\rho^2}{\Delta}}\cos\theta & -\sqrt{\rho^2}\sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.21}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{\psi^2}{\rho^2}}\,, \\ AB &= \frac{2\chi\sin^2\theta}{\rho^2}\,, \\ C\sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\psi^2}{\rho^2}}}\left[\left(\frac{2\chi\sin^2\theta}{\rho^2}\right)^2 - \left(\frac{\psi^2}{\rho^2}\right)\left(\frac{\Sigma^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{6.22}$$

É importante ressaltar que no caso do buraco negro de Kerr, sabemos que não é possível existir um observador estacionário na região da ergosfera, definida por $r_+ < r < r^*$, com $r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2}$ e $r^* = m + \sqrt{m^2 + a^2\cos^2\theta}$. Neste caso vamos considerar $r$ a partir da superfície da ergosfera, ou seja, a coordenada radial será $r > r^*$.

As componentes da torção diferentes de zero são dadas por (6.6), o que para esse caso específico resulta em:

$$\begin{aligned} T_{001} &= \frac{1}{2}\partial_1\frac{\psi^2}{\rho^2}\,, \\ T_{002} &= \frac{1}{2}\partial_2\frac{\psi^2}{\rho^2}\,, \\ T_{013} &= -A\partial_1 B\,, \\ T_{023} &= -A\partial_2 B\,, \\ T_{112} &= -\frac{1}{2}\partial_2(\frac{\rho^2}{\Delta})\,, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T_{212} &= \frac{1}{2}\partial_1(\rho^2) - \sqrt{\frac{\rho^2}{\Delta}}\rho^2\,, \\
T_{301} &= B\partial_1 A\,, \\
T_{302} &= B\partial_2 A\,, \\
T_{313} &= \frac{1}{2}\partial_1\left(\frac{\Sigma^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) - \sqrt{\frac{\rho^2}{\Delta}}C\sin^2\theta\,, \\
T_{323} &= \frac{1}{2}\partial_2\left(\frac{\Sigma^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) - \sqrt{\rho^2}C\sin\theta\cos\theta\,. \qquad (6.23)
\end{aligned}
$$

A componente radial do campo GE é dada por (6.9). Substituindo as componentes do campo de tetradas (6.21), do tensor métrico (6.19) e das torções acima obtemos

$$
\begin{aligned}
{E_{(0)}}^r &= \frac{\Delta}{2\sqrt{\frac{\psi^2}{\rho^2}(\chi^2\sin^2\theta + \psi^2\Sigma^2)}}\Big[\frac{\chi a m\sin^2\theta}{\rho^4}(\rho^2 - 2r^2) \\
&+ \frac{\psi^2}{\rho^2}[2r(r^2+a^2) - (r-m)a^2\sin^2\theta] - \frac{r\psi^2\Sigma^2}{\rho^4}\Big] \\
&+ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho^2}{\psi^2}}\Big(\frac{r\Delta}{\rho^4} - \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho^2}\Big) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho^2\Delta}{\chi^2\sin^2\theta + \psi^2\Sigma^2}}. \qquad (6.24)
\end{aligned}
$$

É importante salientar que o resultado acima deve conter a solução de Schwarzschild uma vez que podemos pensar que espaço-tempo de Kerr equivale a uma quebra de simetria por rotação do espaço-tempo de Schwarzschild (no domínio considerado). De fato isso acontece, ou seja, considerando o momento angular ($J = am$) igual a zero na expressão acima, obtemos o campo GE do buraco negro de Schwarzschild [39]. Além disso, o resultado acima também possui limite newtoniano quando fazemos $J = 0$ e $\frac{m}{r} << 1$.

Como mostrado na seção anterior, a simetria axial gera uma outra componente para o campo GE além da radial, ou seja, surge nesse contexto a componente ${E_{(0)}}^\theta$ que é dada por (6.11). No caso específico da geometria de Kerr obtemos:

$$
{E_{(0)}}^\theta = \frac{\cos\theta}{2\sin\theta}\sqrt{\frac{1}{\rho^2\psi^2}}\Big[1 - \frac{\psi^2\Delta a^2\cos\theta\sin^2\theta}{\chi^2\sin^2\theta + \psi^2\Sigma^2} - \rho^2\sqrt{\frac{\psi^2}{\chi^2\sin^2\theta + \psi^2\Sigma^2}}\Big]. \qquad (6.25)
$$

Este resultado é novamente coerente com o obtido ao considerarmos o espaço-tempo de Schwarzschild, já que a componente acima anula-se se tomarmos $J = 0$. Observamos que é razoável o aparecimento desta componente de campo GE, além da radial obtida em Schwarzschild, uma vez que a simetria do problema foi alterada. Portanto, quebrando a simetria esférica da solução de Schwarzschild é natural que surjam contribuições de campos em outras direções. E por fim temos que a componente angular $\phi$ do campo GE é nula, ou seja, ${E_{(0)}}^{\phi} = 0$.

Agora vamos voltar a nossa atenção para as componentes GM obtidas a partir da solução de Kerr. A componente $\phi$ do campo GM resulta em

$$B_{(0)\phi} = 0\,, \tag{6.26}$$

o que está de pleno acordo com o resultado análogo obtido no eletromagnetismo. Ou seja, uma casca esférica carregada eletricamente e em rotação possui o potencial vetor na direção direção $\phi$, porém campo magnético apenas nas direções r e $\theta$.

A partir do resultado (6.15) obtivemos a seguinte componente do campo GM:

$$B_{(0)\theta} = \frac{1}{\sqrt{\psi^2\rho^2}}\frac{\Delta am(r^2 - a^2 + a^2\sin^2\theta)}{2(\chi^2\sin^2\theta + \psi^2\Sigma^2)}. \tag{6.27}$$

Note que ao anularmos o momento angular na solução de Kerr a componente acima desaparece, mais uma vez em concordância com os resultados obtidos no capítulo anterior, pois se considerarmos o espaço-tempo de Schwarzschild não esperamos obter componentes GM.

Assim como no caso eletromagnético, aqui também surge uma componente radial para o campo GM. O resultado geral obtido na seção anterior é dado pela expressão (6.17). No caso específico do buraco negro de Kerr encontramos

$$B_{(0)r} = \frac{1}{\sqrt{\psi^2\rho^2}}\frac{amr\cos\theta(\psi^2 - a^2\sin^2\theta)}{\sin\theta(\chi^2\sin^2\theta + \psi^2\Sigma^2)}. \tag{6.28}$$

Novamente tomando $J = 0$, a componente $B_{(0)r}$ acima anula-se e recuperamos o resultado obtido para a solução de Schwarzschild.

### 6.2.1 Limite de Campo Fraco e Movimento Lento na Solução de Kerr

Agora vamos considerar o espaço-tempo de Kerr nos limites de campo fraco e movimento lento [16]. Campo fraco significa admitir grandes valores de $r$, isto é

$$\frac{m}{r} << 1. \tag{6.29}$$

Por outro lado, o limite de movimento lento é obtido ao considerarmos

$$\frac{a}{r} << 1, \tag{6.30}$$

onde $a$, como vimos, corresponde ao momento angular por unidade de massa. Desta forma, o elemento de linha da solução de Kerr nos limites de campo fraco e movimento lento torna-se:

$$\begin{aligned} ds^2 &\cong -\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1+\frac{2m}{r}\right)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\ &- \frac{4J}{r}\sin^2\theta\, d\phi\, dt, \end{aligned} \tag{6.31}$$

Assim, para obtermos os campos GEM levando em consideração o limite de campo fraco e movimento lento, basta substituirmos as componentes do tensor métrico acima nas soluções gerais previamente obtidas. Então, a componente radial do campo GE pode ser obtida a partir do resultado (6.9). Consideremos as componentes do tensor métrico (6.31) na expressão acima e tomamos as expansões

$$(1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + .... \tag{6.32}$$

e

$$(1 \pm x)^{-\frac{1}{2}} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \mp \frac{5}{16}x^3 + .... \tag{6.33}$$

Aqui $x$ representa as razões $\frac{m}{r}$ e $\frac{a}{r}$ ou ainda termos multiplicativos envolvendo esses dois termos. Esses cálculos nos levam a

$$\begin{aligned} {E_{(0)}}^r &= -\frac{a^2m^2sin^2\theta}{r^5}\Big(1-\frac{2m}{r}\Big)\Big(1+\frac{m}{r}\Big)\Big(1+\frac{2m}{r}-\frac{4a^2m^2sin^2\theta}{r^4}\Big) \\ &+ \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{r}\Big(1-\frac{2m}{r}\Big)\Big(1+\frac{m}{r}\Big) - \frac{1}{r}\Big(1-\frac{m}{r}\Big)\Big(1+\frac{m}{r}\Big) \\ &+ \frac{1}{r}\Big(1-\frac{m}{r}\Big)\Big(1-\frac{2m}{r}\Big)\Big(1+\frac{2m}{r}-\frac{4a^2m^2sin^2\theta}{r^4}\Big) \\ &- \frac{1}{r}\Big(1-\frac{m}{r}\Big)\Big(1+\frac{m}{r}-\frac{2a^2m^2sin^2\theta}{r^4}\Big)\Big] \end{aligned} \tag{6.34}$$

o que resulta em

$$E_{(0)}{}^{r} = -\frac{m}{r^2} - \frac{2a^2m^2\sin^2\theta}{r^5}. \tag{6.35}$$

Note que o primeiro termo do lado direito da expressão acima é o maior dentre os que surgem da razão $\frac{m}{r}$ e que o segundo termo é a maior contribuição devido à rotação. Este resultado é muito interessante pois vemos claramente o efeito da rotação somada à gravitação Newtoniana. Ou seja, para um corpo em rotação a componente radial do campo GE é acrescida por uma contribuição vinda do momento angular da fonte de campo gravitacional. Por outro lado, devemos notar que o termo que surge devido ao momento angular da fonte de campo gravitacional é muito pequeno. Termos dessa ordem já foram desconsiderados quando obtivemos o tensor métrico (6.31). As contribuições desses termos para o campo $E_{(0)}{}^{r}$ seriam muito menores do que a exibida em (6.35), logo este é de fato o termo de correção do momento angular ao campo newtoniano. Assim, levando em consideração as aproximações (6.29) e (6.30), a componente radial do campo GE é dado pelo campo newtoniano.

Neste contexto, surge uma componente GE angular dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} E_{(0)}{}^{\theta} &= \frac{1}{4\sqrt{-g_{00}}}\Big[\frac{g_{03}}{g_{22}\delta}\partial_2(g_{03}) + \frac{1}{g_{22}g_{11}}\partial_2(g_{11})\Big] \\ &- \frac{g_{00}}{2g_{22}\sqrt{-g_{00}}\delta}\Big[\frac{1}{2}\partial_2(g_{33}) - \sqrt{g_{22}}C\sin\theta\cos\theta\Big]. \end{aligned} \tag{6.36}$$

No limite considerado a componente do tensor métrico $g_{11}$ passa a não depender do ângulo $\theta$, ou seja, $\partial_2(g_{11}) = 0$. Levando em consideração que

$$C\sin\theta = \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{-g_{00}}} \tag{6.37}$$

obtemos

$$E_{(0)}{}^{\theta} = \frac{g_{03}\partial_2(g_{03})}{4\sqrt{-g_{00}}g_{22}\delta} + \frac{\sqrt{-g_{00}}\partial_2(g_{33})}{4g_{22}\delta} - \frac{\cos\theta}{2\sqrt{g_{22}}\delta^{\frac{1}{2}}}$$

e assim chegamos a

$$E_{(0)}{}^{\theta} = \frac{2a^2m^2\sin\theta\cos\theta}{r^6}. \tag{6.38}$$

É importante observar que esta componente do campo GE depende diretamente do momento angular, assim anulando a rotação do buraco negro de Kerr recuperamos o resultado de Schwarzschild como obtido no capítulo anterior para o observador estacionário.

Novamente, se olharmos com atenção para os limites considerados (6.29) e (6.30) veremos que

$$E_{(0)}{}^{\theta} \approx 0. \tag{6.39}$$

Este resultado é esperado já que os efeitos de rotação lenta são desprezíveis quando comparamos com o campo newtoniano (considere a Terra como exemplo).

A componente $E_{(0)}{}^{\phi}$ é igual a zero mesmo no caso sem aproximações, o que está coerente com os resultados análogos do eletromagnetismo.

Sejam agora as componentes GM calculadas a partir de um observador estacionário em relação ao buraco negro de Kerr e nos limites de campo fraco e movimento lento. Para tal, vamos considerar novamente o resultado obtido para a componente radial do campo GM de uma simetria axial, isto é,

$$B_{(0)r} = \frac{1}{4\sqrt{-g_{00}}g_{22}\delta}\Big[g_{03}\partial_2(g_{00}) - g_{00}\partial_2(g_{03})\Big]. \tag{6.40}$$

Note que no regime em que consideramos (6.29) e (6.30) a componente $g_{00}$ do tensor métrico (6.31) não depende de $\theta$ e assim

$$\partial_2(g_{00}) = 0, \tag{6.41}$$

o que reduz a componente GM acima a

$$B_{(0)r} = -\frac{g_{00}\partial_2(g_{03})}{4\sqrt{-g_{00}}g_{22}\delta} \tag{6.42}$$

e além disso podemos reescrever $g_{00}$ como

$$g_{00} = -\sqrt{-g_{00}}\sqrt{-g_{00}}, \tag{6.43}$$

assim chegamos a

$$B_{(0)r} = -\frac{\sqrt{-g_{00}}\partial_2(g_{03})}{4g_{22}\delta}. \tag{6.44}$$

Substituindo as componentes do tensor métrico (6.31) na expressão acima e levando em conta as aproximações feitas até aqui, obtemos:

$$B_{(0)r} = -\frac{am\cos\theta}{r^5\sin\theta}. \tag{6.45}$$

É importante notar que esse é o maior termo entre todos do cálculo efetuado acima. E mesmo assim muito pequeno comparado com nossas aproximações de forma que consideramos a componente acima nula, $B_{(0)r} \approx 0$.

Para a componente $\theta$ do campo GM o procedimento será o mesmo, ou seja, vamos substituir o tensor métrico aproximado (6.31) no resultado geral obtido a partir da simetria axial (6.15). Feito isso, encontramos

$$B_{(0)\theta} = -\frac{2am}{r^4}, \tag{6.46}$$

e novamente o resultado acima corresponde ao maior termo obtido entre todos para essa componente. Além disso, note que tanto a componente $B_{(0)r}$ quanto $B_{(0)\theta}$ são diretamente proporcionais ao momento angular da fonte e assim, caso o buraco negro pare de girar, as componentes acima desaparecerão.

Finalmente, resta-nos a componente $\phi$ do campo GM. O resultado obtido a partir da simetria axial é nulo (6.19), isto é, mesmo no caso geral a componente angular $\phi$ é zero. Assim

$$B_{(0)\phi} = 0 \tag{6.47}$$

Resumidamente, podemos dizer que a rotação da fonte do campo gravitacional, ou seja, o momento angular do buraco negro de Kerr gera uma pertubação angular no campo GE e uma pertubação radial no campo GM.

## 6.3 Sobre o Caráter Absoluto da Rotação

Nesta seção vamos comparar o resultados obtidos na seção (4.4) do capítulo anterior com os resultados da seção acima, ou seja, vamos comparar os campos

GEM obtidos por um observador estacionário em relação ao buraco negro de Kerr com os campos GEM de um observador em rotação em relação ao buraco negro de Schwarzschild com a mesma velocidade angular do buraco negro de Kerr. É importante lembrar que essa comparação só será possível na âmbito do limite de campo fraco e movimento lento.

Tendo em vista a natureza dos sistemas físicos descritos acima, podemos fazer uma breve discussão sobre o caráter absoluto da aceleração utilizando nossas definições dos campos GEM. Essa questão foi abordada inicialmente por Mashhoon [48] para o gravitomagnetismo no contexto da RG. Sua principal conclusão é que efeitos gravitomagnéticos são medidas absolutas de um corpo massivo. Mashhoon considerou um corpo astronômico em rotação, por exemplo, a Terra no interior de uma casca esférica concêntrica que representa o céu e as estrelas. Então estudou duas situações diferentes, isto é, a Terra em rotação com a casca esférica estática e a Terra parada com a casca esférica girando. Ele concluiu que uma partícula teste na Terra sentiria efeitos físicos diferentes em cada situação. Portanto, *a priori*, seria possível distinguir as duas situações evidenciando o caráter absoluto da rotação que em última análise estaria relacionada à aceleração (centrípeta).

No mesmo sentido Maluf concluiu que a aceleração possui caráter absoluto, mas de uma maneira totalmente diferente [49]. Ele considerou outras duas situações. (i) um observador linearmente acelerado em relação a um buraco negro estacionário. (ii) um buraco negro linearmente acelerado em relação a um observador em repouso. A análise foi realizada com base na medida feita pelo observador da radiação gravitacional através de uma superfície esférica. Na situação (i) a expressão obtida para a radiação foi exata enquanto na (ii) o resultado encontrado foi aproximadamente o mesmo, isto é, foi mostrada uma diferença sutil entre os dois casos.

Voltando a nossa análise, vamos reunir os resultados anteriormente obtidos. Assim, no caso do observador em rotação no buraco negro de Schwarzschild chegamos às seguintes componentes GE:

$$E_{(0)}{}^{r} = -\frac{m}{r^2} + \frac{a^2m^2}{r^5}\sin^2\theta\,, \tag{6.48}$$

$$E_{(0)}{}^{\theta} = \frac{a^2m^2}{r^6}\sin\theta\cos\theta\,, \tag{6.49}$$

$$E_{(0)}{}^{\phi} = 0\,. \tag{6.50}$$

As componentes GM obtidas foram

$$B_{(0)r} = \frac{am^2\cos\theta}{r^6\sin\theta}\,, \tag{6.51}$$

$$B_{(0)\theta} = -\frac{2am}{r^4}\,, \tag{6.52}$$

$$B_{(0)\phi} = 0\,. \tag{6.53}$$

Por outro lado, os campos GE de um observador estacionário em relação ao buraco negro de Kerr encontrados foram:

$$E_{(0)}{}^{r} = -\frac{m}{r^2} - \frac{2a^2m^2}{r^5}\sin^2\theta\,, \tag{6.54}$$

$$E_{(0)}{}^{\theta} = \frac{2a^2m^2}{r^6}\sin\theta\cos\theta\,, \tag{6.55}$$

$$E_{(0)}{}^{\phi} = 0\,. \tag{6.56}$$

Finalmente, as componentes para as componentes GM temos que:

$$B_{(0)r} = -\frac{am\cos\theta}{r^5\sin\theta}\,. \tag{6.57}$$

$$B_{(0)\theta} = -\frac{2am}{r^4}\,, \tag{6.58}$$

$$B_{(0)\phi} = 0\,. \tag{6.59}$$

De maneira geral observamos uma grande similaridade para os campo GE e GM calculados nas duas configurações. Para as componentes radiais (6.48) e (6.54) o termo newtoniano ganha o mesmo fator de correção (a menos de um coeficiente 2) porém com sinais diferentes e a rotação gera um campo efetivo ligeiramente menor ou maior que o newtoniano em cada caso. As componentes (6.49) e (6.55) são idênticas (a menos do fator 2), da mesma forma que (6.50) e (6.56). A maior diferença está entre os campos GM radiais encontrados (6.51) e (6.57), por corresponderem a diferentes ordens de grandeza , ou seja, $\frac{m}{r}$ inferior no caso do observador em rotação comparada a mesma componente obtida a partir do buraco negro de Kerr e sinais diferentes. E as demais componentes (6.52) e (6.58) ou ainda (6.53) e (6.59) são idênticas. Ainda assim, concluímos existir uma sutil diferença entre os dois casos, exatamente de acordo com a literatura.

É importante notar que não podemos afirmar de forma unulante o absolutismo da aceleração nos casos estudados, dada as muitas aproximações feitas até a obtenção dos resultados acima. Assim, os cálculos aqui apresentados mostram uma diferença tênue entre os dois sistemas físicos, ou seja, são aproximadamente iguais. Isso se deve ao fato de que a única contribuição forte o suficiente para ser facilmente detectada é a contribuição newtoniana, enquanto as outras requerem uma aparelhagem com grande precisão. Esperamos que cálculos exatos dos campos GEM confirmem a suspeita acerca do absolutismo da aceleração.

## 6.4 Estrela de Nêutrons

Nosso objetivo agora é aplicar os resultados gerais obtidos para os campos GEM a partir de um observador parado em relação a uma geometria axial em uma configuração que apresente campo gravitacional intenso. Desta forma, vamos considerar a geometria de uma estrela de nêutrons. Uma estrela de nêutrons que apresente rotação aproximadamente rígida possui um tensor métrico dado por [50]:

$$ds^2 = -A^2 dt^2 + B^2 dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta (d\phi - \omega dt)^2 \,, \tag{6.60}$$

ou de forma mais explícita

$$ds^2 = (-A^2 + r^2\omega^2 \sin^2\theta)dt^2 + B^2 dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 - 2\omega r^2 \sin^2\theta d\phi dt. \quad (6.61)$$

Vemos claramente que o tensor métrico acima possui simetria axial e, desta forma, podemos aplicar os resultados previamente obtidos. Nosso interesse é calcular os campos GEM exterior à estrela de nêutrons, e nesse caso temos que os parâmetros acima são dados por

$$\begin{aligned} A^2 &= [1 - \frac{2mR}{r}], \\ B^2 &= [1 - \frac{2mR}{r}]^{-1}, \\ \omega &= 2Jr^{-3}, \end{aligned} \quad (6.62)$$

para $r \geq R$. Aqui $R$ é o raio da estrela, $\omega$ é a velocidade de observadores inerciais ao longo do eixo de rotação e $J$ é o momento angular da estrela.

Primeiramente vamos calcular a componente $B_{(0)\theta}$ através da equação (6.15) obtida de forma geral na seção anterior. Substituindo as componentes do tensor métrico (6.61) na equação acima chegamos a

$$B_{(0)\theta} = \frac{J}{2r^4(1 - \frac{2mR}{r} - \frac{4J^2\sin^2\theta}{r^4})^{1/2}}\Big(1 + \frac{12J^2\sin^2\theta}{r^4}\Big). \quad (6.63)$$

Por outro lado a componente $B_{(0)r}$ dada por (6.17) torna-se

$$B_{(0)r} = \frac{J\cos\theta}{r^5\sin\theta(1 - \frac{2mR}{r} - \frac{4J^2\sin^2\theta}{r^4})^{1/2}}. \quad (6.64)$$

Note que as componentes acima são diretamente proporcionais ao momento angular da estrela de nêutrons, ou seja, as componentes acima anulam-se caso a estrela perca sua rotação, o que é um resultado esperado. A componente $B_{(0)\phi} = 0$, já que trata-se de simetria axial.

Agora voltaremos nossa atenção para as componentes GE geradas por uma estrela de nêutrons. Obtemos a seguinte componente GE ${E_{(0)}}^r$

$${E_{(0)}}^r = \frac{\Big(1 - \frac{2mR}{r}\Big) - \Big(1 - \frac{2mR}{r}\Big)^{\frac{1}{2}}}{2r\Big(1 - \frac{2mR}{r} - \frac{4J^2\sin^2\theta}{r^4}\Big)^{1/2}} - \frac{J^2\sin^2\theta}{r^5\Big(1 - \frac{2mR}{r} - \frac{4J^2\sin^2\theta}{r^4}\Big)^{1/2}}.$$

Devemos notar que, a componente radial GE acima é alterada devido a rotação da estrela. O segundo termo da expressão acima é diretamente proporcional ao quadrado do momento angular da estrela de nêutrons.

O fato de a estrela de nêutrons estar girando gera o surgimento de uma outra componente GE, a componente ${E_{(0)}}^{\theta}$, dada por (6.11) e assim

$$\begin{aligned} {E_{(0)}}^{\theta} &= \frac{2J^2 \sin\theta\cos\theta}{r^6\left(1 - \frac{2mR}{r} - \frac{4J^2\sin^2\theta}{r^4}\right)^{1/2}} \\ &+ \frac{\cos\theta}{2r^2\left(1 - \frac{2mR}{r}\right)\sin\theta}\left[\left(1 - \frac{2mR}{r} - \frac{4J^2\sin^2\theta}{r^4}\right)^{1/2} - 1\right]. \end{aligned} \tag{6.65}$$

Finalmente a componente ${E_{(0)}}^{\phi} = 0$ como visto anteriormente. É importante ressaltar que a única componente que permanece diferente de zero quando anulamos o momento angular da estrela de nêutrons é a componente ${E_{(0)}}^{r}$, o que é um resultado esperado.

Os resultados acima mostram entre outras coisas que as nossas definições de campos GEM podem ser utilizadas tanto no contexto exato quanto no aproximado. Ou seja, mostram-se apropriadas para tratarmos problemas referentes a campos gravitacionais intensos e a sua corroboração espera ainda por dados observacionais relativos a essas configurações.

## Capítulo 7

# Ondas Gravitacionais

## 7.1 Campos GEM em ondas Gravitacionais

A existência de ondas gravitacionais é discutida desde que o próprio Einstein estudou soluções de campo fraco em suas equações de campo. Mas apesar de serem previstas teoricamente, as ondas gravitacionais, como fenômeno físico, tem sido aceita apenas nos últimos anos. Um dos grandes fatores que promoveu esta aceitação foi a descoberta do pulsar PSR1913+16 em 1974 por R. A. Hulse e J. H. Taylor, que corresponde a um sistema binário que sofre um decaimento do seu período orbital, o que foi explicado pela possível emissão de ondas gravitacionais [51]. Os dados medidos nos últimos 30 anos tangenciam de forma impressionante as previsões de ondas gravitacionais feita pela RG. Esta evidência fenomenológica é considerada uma observação indireta das ondas gravitacionais e por este trabalho, Hulse e Taylor receberam o prêmio Nobel em 1993.

Atualmente existem inúmeros detectores de ondas gravitacionais espalhados pelo mundo e que utilizam diferentes técnicas de medida [52, 53, 54]. Há inclusive um detector no Brasil chamado Mário Schenberg, em homenagem ao físico brasileiro, localizado na Universidade de São Paulo num prédio de mesmo nome. Apesar disso, nenhuma medida direta foi feita até o momento.

Na literatura encontramos inúmeros modelos que descrevem ondas gravitacionais. A abordagem mais usual é dada por métodos pertubativos, considerando por exemplo, o caso do campo gravitacional fraco. Neste caso, a métrica do espaço-tempo corresponde à soma de uma métrica plana mais uma pertubação, que é substituída nas equações de Einstein. As ondas gravitacionais também são discutidas na literatura no contexto do regime não linear [55].

Nosso objetivo é estudar as ondas gravitacionais no contexto exato a partir das nossas definições dos campos GEM, ou seja, pretendemos caracterizar as grandezas físicas associadas à onda, tal como, escrever o vetor de Poyntig em termos dos campos GEM. Finalmente, pretendemos investigar se as ondas gravitacionais possuem características de propagação análogas às do eletromagnetismo, por exemplo, se ${E_b}^i$ e $B_{bk}$ gravitacionais são perpendiculares à propagação da onda.

### 7.1.1 Solução Exata para Onda Plana

É possível obter uma solução exata das equações de Einstein que tenha características similares às das ondas planas gravitacionais no contexto da teoria linearizada. Entretanto, algumas condições comuns às duas abordagens devem ser satisfeitas [55, 56], ou seja,

$$R_{\mu\nu} = 0, \qquad \nabla_\nu K_\mu = 0, \qquad K_\mu K^\mu = 0, \tag{7.1}$$

com $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci e $K^\mu$ o quadri-vetor de onda. A segunda relação acima generaliza a propriedade de ondas planas no espaço plano. Desta forma, um elemento de linha que descreve uma frente de onda gravitacional plana viajando na direção $z$ e que representa uma solução exata das equações de campo da RG, é dada por:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + 2dudv + H(x, y, u)du^2\,, \tag{7.2}$$

com H(x,y,u) uma função que gera a onda gravitacional e que deve satisfazer a seguinte condição:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)H(x, y, u) = 0. \tag{7.3}$$

Para reescrevermos a métrica acima em coordenadas cartesianas usuais, devemos considerar a seguinte transformação

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(z - t) \tag{7.4}$$

e

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}(z + t) \tag{7.5}$$

e assim encontramos

$$ds^2 = -\Big(\frac{1}{2}H - 1\Big)dt^2 - dx^2 - dy^2 - \Big(\frac{1}{2}H + 1\Big)dz^2 + Hdtdz. \tag{7.6}$$

Devido ao fato de que inicialmente a nossa finalidade é observar o comportamento dos campos GEM da onda acima, escolhemos um campo de tetrada adaptado a observadores estacionários no espaço-tempo. Um campo de tetrada que satisfaz esta condição, isto é, $h_{(0)}{}^i = 0$ é dado por [57]:

$$h_{b\mu} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & B \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \tag{7.7}$$

com

$$\begin{aligned} A &= (-\frac{1}{2}H + 1)^{\frac{1}{2}}\,, \\ AB &= \frac{1}{2}H\,, \\ AC &= 1\,. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Em (7.7) (b) denota linha e ($\mu$) coluna. Note que tomando $H = 0$ a métrica acima se torna plana (espaço-tempo de Minkowski), o campo de tetradas se reduz a $h^a{}_\mu = \delta^a{}_\mu$ e conseqüentemente as torções serão nulas ($T_{\lambda\mu\nu} = 0$), o que é esperado.

Através da relação (3.14) obtemos os seguintes componentes do tensor de torção não nulos:

$$\begin{aligned}
T_{001} &= -\frac{1}{2}\partial_1 A^2,\\
T_{002} &= -\frac{1}{2}\partial_2 A^2,\\
T_{003} &= -\frac{1}{2}\partial_3 A^2 + A\partial_0 B,\\
T_{013} &= +A\partial_1 B,\\
T_{023} &= +A\partial_2 B,\\
T_{301} &= -B\partial_1 A,\\
T_{302} &= -B\partial_2 A,\\
T_{303} &= \frac{1}{2}\partial_0(B^2 - C^2) - B\partial_3 A,\\
T_{313} &= \frac{1}{2}\partial_1(B^2 - C^2),\\
T_{323} &= \frac{1}{2}\partial_2(B^2 - C^2)\,. \qquad (7.9)
\end{aligned}$$

De posse das torções, estamos novamente aptos a calcular os campos GEM definidos em termos da expressão (3.22). Com isso a expressão para $S_b{}^{0i}$ é:

$$\begin{aligned}
S_b{}^{0i} &= \frac{1}{4}\Big[h_b{}^1 g^{00} g^{i3} T_{301} + h_b{}^2 g^{00} g^{i3} T_{302} + h_b{}^3 g^{00} g^{i3} T_{303} + h_b{}^1 g^{03} g^{0i} T_{031}\\
&+ h_b{}^2 g^{03} g^{0i} T_{032} + h_b{}^3 g^{00}\Big(g^{i1}T_{301} + g^{i2}T_{302} + g^{i3}T_{303}\Big)\\
&+ h_b{}^0 g^{03}\Big(g^{i1}T_{013} + g^{i2}T_{023}\Big) + h_b{}^1 g^{00}\Big(g^{i2}T_{012} + g^{i3}T_{013}\Big)\\
&- h_b{}^2 g^{00}\Big(g^{i1}T_{012} + g^{i3}T_{032}\Big) - h_b{}^3 g^{00}\Big(g^{i1}T_{013} + g^{i2}T_{023}\Big)\\
&+ h_b{}^0 g^{03}\Big(g^{i1}T_{310} + g^{i2}T_{320}\Big) - h_b{}^1 g^{03} g^{0i} T_{301} - h_b{}^2 g^{03} g^{0i} T_{302}\Big]\\
&+ \frac{1}{2}\Big[h_b{}^3 g^{03}\Big(g^{0i}T_{330} + g^{i1}T_{331} + g^{i2}T_{332}\Big) - h_b{}^i g^{00} g^{33} T_{303} - h_b{}^i g^{03} g^{03} T_{330}\\
&+ h_b{}^0 g^{03} g^{i3} T_{303} + h_b{}^0 g^{33}\Big(g^{0i}T_{303} + g^{i1}T_{313} + g^{i2}T_{323}\Big)\Big]. \qquad (7.10)
\end{aligned}$$

Neste ponto devemos tomar o índice de espaço-tempo $b = 0$ na expressão acima e posteriormente considerar o índice latino $i = 1, 2$ e 3, o que corresponde às componentes x, y e z do campo GE, respectivamente. Desta maneira, chegamos a:

$$E_{(0)}{}^x = \frac{1}{2}h_{(0)}{}^0 g^{33} g^{11} T_{313} + \frac{1}{4}h_{(0)}{}^0 g^{03} g^{11}\left(T_{013} + T_{310}\right)\,,$$

$$
\begin{aligned}
E_{(0)}{}^{y} &= \frac{1}{2} h_{(0)}{}^{0} g^{33} g^{22} T_{323} + \frac{1}{4} h_{(0)}{}^{0} g^{03} g^{22} \left(T_{023} + T_{320}\right) \,, \\
E_{(0)}{}^{z} &= 0. \qquad (7.11)
\end{aligned}
$$

Note que a expressão para $E_{(0)}{}^{x}$ é totalmente análoga à $E_{(0)}{}^{y}$, o que é interessante já que a onda gravitacional está se propagando na direção $z$. Ao substituirmos as componentes do tensor métrico, do campo de tetradas e das torções nas expressões acima, obtemos:

$$
\begin{aligned}
E_{(0)}{}^{x} &= -\frac{1}{8A} \partial_x H \,, \\
E_{(0)}{}^{y} &= -\frac{1}{8A} \partial_y H \,, \\
E_{(0)}{}^{z} &= 0 \,. \qquad (7.12)
\end{aligned}
$$

Observamos que não há campo GE na direção de propagação.

Seguindo o mesmo esforço, vamos calcular as componentes gravitomagnéticas definidas de acordo com

$$
S_{(0)}{}^{ij} = \epsilon^{ijk} B_{(0)k}. \qquad (7.13)
$$

Pelo fato de a expressão $S_b{}^{ij}$ ser muito extensa, neste caso, optamos por omití-la. Desta forma, a componente z do campo GM surge quando concebemos o superpotencial com $i = 1$ e $j = 2$ , (pois $S_b{}^{12} = \epsilon^{123} B_{b3} = \epsilon^{123} B_{bz}$), isto é:

$$
\begin{aligned}
S_b{}^{12} &= \frac{1}{2} \Big[ h_b{}^{2} g^{11} \left( g^{00} T_{001} + g^{03} T_{301} - g^{03} T_{013} - g^{33} T_{313} \right) \\
&- h_b{}^{1} g^{22} \left( g^{00} T_{002} + g^{03} T_{302} - g^{03} T_{023} - g^{33} T_{323} \right) \Big]. \qquad (7.14)
\end{aligned}
$$

Substituindo as componentes acima, chegamos a:

$$
B_{(0)z} = 0, \qquad (7.15)
$$

pois escolhemos um observador estacionário em relação a onda gravitacional e desta maneira $h_{(0)}{}^{i} = 0$. Assim, a componente $z$ do campo gravitomagnético se anulou mesmo na solução exata, ou seja, este resultado nos mostra que não há campo GM na direção de propagação da onda.

Agora vamos considerar $i = 1$ e $j = 3$ na definição do campo GM (4.10), o que resulta em

$$S_{(0)}{}^{13} = -\frac{1}{2}h_{(0)}{}^{0}g^{11}g^{03}T_{001} + \frac{1}{4}h_{(0)}{}^{0}g^{11}g^{33}\left(T_{013} - T_{301}\right) \tag{7.16}$$

ou seja,

$$B_{(0)y} = -\frac{1}{8A}\partial_x H\,. \tag{7.17}$$

Finalmente devemos fazer $i = 2$ e $j = 3$ e, assim, calcularmos a componente $x$ GM. Feito isso, temos

$$S_{(0)}{}^{23} = B_{(0)x} = -\frac{1}{2}h_{(0)}{}^{0}g^{22}g^{03}T_{002} + \frac{1}{4}h_{(0)}{}^{0}g^{22}g^{33}\left(T_{023} - T_{302}\right). \tag{7.18}$$

Note que a expressão acima é totalmente análoga à (7.16), o que é esperado uma vez que a onda gravitacional se propaga na direção $z$. O que resulta em:

$$B_{(0)x} = \frac{1}{8A}\partial_y H\,. \tag{7.19}$$

Portanto, o cálculo dos campos GEM para a solução exata de uma onda plana nos mostra que as ondas gravitacionais desse tipo são transversais, ou seja, os campos GEM são perpendiculares à direção de propagação da mesma forma que no eletromagnetismo, para onda plana se propagando no vácuo.

A partir dos campos GEM podemos pensar numa definição análoga ao vetor de Poynting do eletromagnetismo [45]. Da eletrodinâmica, sabemos que a energia por unidade de tempo e por unidade de área, transportada pelos campos eletromagnéticos é dada pelo de vetor de Poynting, isto é

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})\,, \tag{7.20}$$

de maneira que o momento armazenado pelos próprios campos eletromagnéticos num dado volume $V$ pode ser escrito da forma

$$\mathbf{P}_{em} = \mu_0\varepsilon_0 \int_V \mathbf{S}\, d^3x \tag{7.21}$$

Na tentativa de generalização para gravitação, vamos definir o vetor de Poynting gravitacional através do produto vetorial entre os campos GEM, ou seja,

$$S_g^i = \frac{1}{\kappa_1}(\epsilon^{ijk} E_j B_k)\,, \tag{7.22}$$

e ainda o momento do campo gravitacional dado por:

$$\mathbf{P}_g = \kappa_2 \int_V d^3x\, h\, \mathbf{S}_g\,. \tag{7.23}$$

com $h$ sendo o determinante da parte espacial do campo de tetradas (7.7). As componentes $\kappa_1$ e $\kappa_2$ podem ser definidas em termos de $c$, $G$ e $\pi$.

As componentes dos campos GEM obtidos foram perpendiculares à direção de propagação da onda gravitacional e desta forma teremos o vetor de Poynting gravitacional na direção $z$ e consequentemente a mesma componente para o momento gravitacional. Desenvolvendo a expressão do vetor de Poynting gravitacional (7.22) e substituindo em (7.23), obtemos

$$P_g^z = \kappa_2 \int_V d^3x\, \frac{1}{(A)^3}\Big[(\partial_x H)^2 + (\partial_y H)^2\Big]\,, \tag{7.24}$$

lembrando que $A = (-\frac{1}{2}H + 1)^{\frac{1}{2}}$. Este resultado está de pleno acordo com o obtido em [57]. Neste trabalho, os autores obtêm o momento da onda gravitacional através da expressão de energia-momento proveniente do estudo dos vínculos na formulação Hamiltoniana no contexto do ETRG. Ou seja, a partir de procedimentos completamente diferentes (ainda que no cenário Teleparalelo) foi possível chegar-se à mesma definição desta quantidade física, o que torna as definições (7.22) e (7.23) legítimas e estreitam ainda mais os laços com o eletromagnetismo.

## Capítulo 8

# Conclusão e Perspectivas

A Gravidade Teleparalela ou ETRG, embora equivalente a RG, possui seus fundamentos numa teoria de gauge abeliana, da mesma forma que o eletromagnetismo. Esse fato motiva uma tentativa de colocar as equações dinâmicas de forma semelhante e fazer uma interpretação mais profunda de sua fenomenologia. Como as diferenças cruciais entre a natureza dessas duas interações fundamentais estão presentes (a principal delas, o caráter não linear da gravitação em oposição à linearidade do eletromagnetismo), o paralelo foi realizado na medida do possível.

O que seriam as equações de Maxwell gravitacionais em sua forma exata, se mostraram definitivamente mais complexas que as eletromagnéticas. Este é de fato um resultado esperado que tem sua origem na já mencionada não linearidade da gravitação. As derivadas dos campos GE e GM aparecem nas equações gravitacionais de maneira similar ao que ocorre nas equações de Maxwell, mas observamos o surgimento de termos de acoplamento desempenhando o papel de fonte, que caracteriza o que temos identificado como "gravitação como fonte de gravitação". A forma exata das equações de campo nos padrões da RG, apesar de conceitualmente diferentes, também apresentam a mesma complexidade.

Em uma tentativa de entender se o modelo proposto está associado com fenômenos físicos análogos aos eletromagnéticos, nós aplicamos pela primeira vez nossas definições para uma geometria bem conhecida, a solução de Schwarzschild.

A única componente não nula do campo GE, ${E_{(0)}}^r$, mostrou-se fisicamente consistente e no limite de campo fraco tornou-se totalmente análoga ao campo elétrico coulombiano do eletromagnetismo. As componentes com índice de espaço tangente igual a zero, $b = 0$, dos campos GM anularam-se para esta configuração estática e por esta razão estão associadas as fontes de matéria. Por outro lado, as componentes GM ($b = i$) no cálculo exato foram diferentes de zero e então atribuídas a efeitos de segunda ordem devido a não linearidade da gravitação que no ETRG é imputado à corrente de gauge gravitacional. Estas componentes desaparecem quando consideramos a gravidade linear fazendo com que o Teleparalelismo se aproxime do eletromagnetismo.

Há um outro ponto interessante a ser notado: a abordagem do Teleparalelismo destaca o papel desempenhado pelos observadores, representados aqui pelos campos de tetrada. Esta sutileza não está presente de forma clara na descrição métrica da gravidade. Assim, mesmo para uma distribuição estática de matéria, espera-se, em princípio, campos GM quando consideramos observadores em movimento, em completo acordo a situação análoga eletromagnética. Neste sentido, consideramos como segunda aplicação investigar os campos GEM que emergem no contexto de um sistema de referência em queda livre no buraco negro de Schwarzschild. Obtivemos um resultado nulo para todas as componentes GE e GM com índice interno igual a zero, o que corrobora a idéia de "operacionalidade"para os campos com componente $b = 0$. Vale notar que a escolha do sistema de coordenadas é o mesmo nos casos acima mencionados, através do uso apropriado dos campos de tetrada. Este é um resultado muito interessante e que mostra a consistência da definição dos campos GEM com o princípio da equivalência. Os efeitos locais da gravidade não são medidos por um observador em queda livre que define um sistema de referência localmente inercial. Desta forma, tal observador não é capaz de distinguir se está em queda livre no buraco negro de Schwarzschild ou em repouso no espaço-tempo de Minkowski. Embora esta análise pareça ser natural, devido ao princípio da equivalência, fizemos uma análise mais profunda, já que descobrimos componentes dos campos GEM não nulas. Uma possibilidade seria considerar somente as componentes operacionais ($b = 0$), já que são todas iguais a zero e simplesmente descartar as componentes não nulas. Entretanto, essas componentes poderiam armazenar alguma informação importante que violaria a idéia central. Para investigarmos o papel das componentes dos campos GEM não nulas utilizamos a força de Lorentz gravitacional escrita em termos dos próprios campos. Concluímos que essas componentes se cancelam mutuamente resultando em uma força total nula medida pelo observador em queda livre no buraco negro de Schwarzschild, da mesma forma que um observador parado no espaço-tempo de Minkowski. Além disso, para apoiar nossos resultados, mostramos que a energia do campo gravitacional medida por um observador em queda livre é igual a zero, o que está de pleno acordo com a literatura. É importante enfatizar que todos os cálculos foram feitos a partir dos campos GEM e fora do limite de campo fraco.

Seguindo a análise do papel dos observadores nesta descrição, escolhemos um campo de tetradas adaptado a um observador que sofre um *boost* de Lorentz em relação ao buraco negro de Schwarzschild. As expressões obtidas inicialmente se mostraram mais complexas que as eletromagnéticas. Entretanto, quando assumimos o limite de campo fraco e consideramos somente as componentes GEM com índice do espaço-tangente igual a zero, o paralelo entre a gravitação e o eletromagnetismo aparece de forma surpreendente. No entanto, uma diferença crucial surgiu quanto à componente $x$ do campo GE, ou seja, um fator de Lorentz também apareceu nessa componente. Isso ocorreu devido ao fato de que a massa não é um invariante de Lorentz e sim a massa própria. Neste sentido, vamos ao encontro do princípio da equivalência novamente quando misturamos os conceitos de massa inercial e massa gravitacional. Outro fato que evidencia a conclusão acima é que a componente alterada é exatamente a componente que está na direção do *boost*.

Como último estudo dos efeitos dos diferentes observadores sobre os campos GEM em relação ao buraco negro de Schwarzschild, escolhemos um campo de tetradas adaptado a um observador em rotação. Inicialmente optamos por uma velocidade angular genérica, isto é, uma velocidade angular que dependesse das coordenadas $r$ e $\theta$. Neste sentido, obtivemos expressões gerais para os campos GEM. Tivemos ainda, o surgimento de novas componentes GE e GM, ou seja, nesse caso constatamos o aparecimento de uma componente $\theta$ do campo GE além das componentes GM $r$ e $\theta$, fato que não ocorreu quando consideramos um observador estacionário à geometria de Schwarzschild. Além disso, do mesmo modo que no eletromagnetismo, as componentes $\phi$ obtidas foram iguais a zero. Com o intuito de compararmos os campos GEM de um observador em rotação com os campos provenientes de um observador estacionário em relação ao buraco negro de Kerr tomamos a velocidade angular do observador em rotação como sendo exatamente a velocidade angular do buraco negro de Kerr. No cálculo exato, as expressões se mostraram extremamente longas e complicadas. Assim, resolvemos impor o regime de campo fraco e movimento lento para que pudéssemos simplificar nossos resultados. A componente radial GE obtida foi escrita em termos do campo newtoniano mais uma contribuição muito pequena devido ao momento angular do observador. E ainda mostramos que a componente $\theta$ do campo GE assim como as componentes GM são diretamente proporcionais ao momento angular do observador sendo seus valores absolutos extremamente pequenos. É importante salientar que recuperamos o campo newtoniano ao considerarmos a velocidade angular do observador igual a zero.

Aplicamos nossas definições de campo GEM a uma simetria axial. Assim, obtivemos expressões gerais para os campos GEM em função das componentes do tensor métrico, ou seja, podemos utilizar os resultados obtidos em qualquer sistema que possa ser representado por tal simetria. Empregamos esses resultados na geometria de Kerr tanto no contexto exato quanto considerando o regime de campo fraco e movimento lento. Obtivemos ainda, os campos GEM de uma estrela de nêutrons e com isso vimos que as nossas definições podem ser utilizadas em cálculos sem aproximação, isto é, não precisamos trocar a abordagem de acordo com a situação física. Comparamos assim os resultados para os campos GEM em duas situações diferentes: (i) um observador em rotação no espaço-tempo de Schwarzschild, (ii) um observador estacionário em relação ao buraco negro de Kerr. A velocidade angular nas duas situações foram iguais. E vimos que os efeitos dinâmicos não são completamente iguais, ou seja, não podemos simular completamente a gravitação através de efeitos não inerciais. Este resultado está em concordância com a literatura.

E finalmente, obtivemos os campos GEM de uma onda gravitacional plana obtida como solução exata das equações de Einstein. A partir da analogia com o eletromagnetismo definimos o vetor de Poynting gravitacional e calculamos o momento do campo gravitacional. A expressão para o momento do campo gravitacional está de pleno acordo com resultados recentes publicados na área.

O cenário GEM do Teleparalelismo parece, ao final desta tese, estar bem estabelecido. A formulação teórica com base nas novas definições para os campos GEM mostrou-se elegante e coerente com a estreita analogia proposta. Além disso, as inúmeras aplicações ao qual foram submetidas resultaram interessantes e bem sucedidas. Entretanto, o estudo de outras configurações gravitacionais podem vir a acrescentar novos *insights* sobre a natureza do campo.

Assim, como perspectivas futuras é possível, por exemplo, analisar o comportamento dos campos GEM frente a geometrias que permitam estudar a radiação gravitacional levando em conta fontes gravitacionais aceleradas. Podemos também explorar métricas não estacionárias a fim de investigar se é possível introduzir o conceito de indução gravitacional através do análogo da lei de Faraday e da lei de Lenz do eletromagnetismo. Além disso, encontramos na literatura indícios de que a formação de jatos de matéria em buracos negros supermassivos devem-se aos intensos campos GEM, o que pode ser tratado através do formalismo aqui sugerido.

# Referências Bibliográficas


[1] Maxwell J.C. Phil. Trans. **155**, (1865) 492.

[2] G. Holzmüller, Z. Moth. Phys. **15**, 69 (1870).

[3] F. Tisserand, Compt. Rend. **75**, 760 (1872); **110**, 313 (1890).

[4] R. D´inverno, *Introducing Einstein´s Relativity* (Clarendon Press, Oxford, 1996).

[5] A. R. Khan, R. F. O´Connell, Nature. **261**, 480-481 (1976).

[6] H. Weyl, Gravitation und Eliktrizitüt, Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaften Berlin, 465 (1918).

[7] H. Thirring, Physikalische Zeitschrift. **19**, 204-205 (1918).

[8] J. Lense, H. Thirring, Physikalische Zeitschrift. **19**, 156-163 (1918).

[9] L.Schiff, Phys. Rev. Lett. **4**, 2157 (1960).

[10] H. Pfister, K.H. Braun, Class. Quantum Grav. **2**, 909-918 (1985).

[11] C. Schmid, Phys. Rev. D **74**, 044031 (2006).

[12] C. Schmid, Phys. Rev. D **79**, 064007 (2009).

[13] L.F.O. Costa, C.A.R. Herdeiro, Phys. Rev. D **78**, 024021 (2008).

[14] L. Iorio, C. Corda, The Open Astronomy Journal **4**, 84-97 (2011).

[15] R. Owen et al, Phys. Rev. Lett. **106**, 151101 (2011).

[16] I. Ciufolini and J. A. Wheeler, *Gravitation and Inertia* (Princeton University Press, Princeton, 1951).

[17] C. W. F. Everitt et al, Phys. Rev. Lett. **106**, 221101 (2011).

[18] K. Hayashi and T. Shirafuji, Phys. Rev D **19**, 3524 (1979).

[19] R. Weitzenböck, *Invariantentheorie* (Noordhoff, Gronningen, 1923).

[20] K. Hayashi and T. Nakano, Proy. Theor. Phys. **38**, 491. (1967).

[21] C. Moller, K. Dan. Vidensk. Selsk. Mot. Fys, **1**, no. 10 (1961)

[22] C. Pellegrini on J. Plebanski, K. Dan. Vidensk. Selsk. Mot. Fys. Skr. **Z**, no. 2 (1962)

[23] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen e J. G. Pereira, Phys. Rev. Lett. **84**, 4533 (2000).

[24] R. Aldrovandi, J.G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics* (World Scientific, Singapore, 1995).

[25] J.W. Maluf, F.F. Faria and S.C. Ulhoa, Classical and Quantum Gravity **34**, 2743 (2007).

[26] F. H. Hehl, J. Lemke and E. W. Mielke, Two Lectures on Fermions and Gravity, in Geometry and Theoretical Physics, edited by J. Debrus.

[27] B. Mashhoon *Gravitoelectromagnetism: A Brief review* in Iorio, L. (Ed.), *Measuring Gravitomagnetism: A Challenging Enterprise*, (Nova Publishers, Hauppauge NY,2007) pp. 29-39, arxiv:gr-qc/0311030. More references: *Phys.Lett.A* **292** (2001) 49; *Phys.Rev.D* **65** (2002) 064025; *Int. J. Mod. Phys. D.* **14**, 12 (2005).

[28] D. Bini, C. Cherubini, C. Chicone and B. Mashhoon *Gravitational Induction*, arxiv:gr-qc/0803.0390v2.

[29] B. Mashhoon, International Journal of Modern Physics D **14**, 12 (2005).

[30] B. Mashhoon, F. W. Hehl, D. S. Theiss, GRG **16**, 8 (1984).

[31] R. Maartens, Gen. Relativ. Gravit. **40** 1203-1217 (2008).

[32] J. W. Maluf, F. F. Faria, S. C. Ulhoa, Class. Quantum Grav. **24** No 10 (21 May 2007).

[33] F. H. Hehl, J. Lemke and E. W. Mielke, *Two Lectures on Fermions and Gravity*, in “Geometry and Theoretical Physics", edited by J. Debrus and A. C. Hirshfeld (Springer, Berlin Heidelberg, 1991).

[34] V. C. de Andrade, A. L. Barbosa e J. G. Pereira, International Journal of Modern Physics D **14**, 9 (2005).

[35] R. Aldrovandi, J. G. Pereira and K. H. Vu, *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) 51.

[36] J. G. Pereira, T. Vargas and C. M. Zhang *Class. Quant. Grav.* **18** (2001) 5.

[37] A. A. Sousa and J.W. Maluf, *Gen. Rel. Grav.* **36** (2004) 967.

[38] M. Blagojević, *Gravitation and Gauge Symmetries* (Inst. of Phys. Pub., Bristol, 2002).

[39] E. P. Spaniol, V. C. Andrade, International Journal of Modern Physics D **19**, 489; (2010).

[40] V. C. de Andrade e J. G. Pereira, Phys. Rev. D **56**, 4689 (1997).

[41] J. G. Pereira, T. Vargas, C. M. Zhang, Phys.Rev. D **64** (2001) 027502.

[42] J. B. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity* (Addison-Wesley, San Francisco, 2003), p. 198.

[43] E. P. Spaniol, V. C. Andrade, , L. R. A. Belo, J. A. de Deus, arxiv:gr-qc/1111.1908v1 (2011).

[44] J.W. Maluf, Gravitation & Cosmology, **11**,n. 3, 284-288. (2005)

[45] D. J. Griffiths, *Introduction to Eletrodynamics* (Prentice Hall, New Jersey, 1999).

[46] J. W. Maluf, S. C. Ulhoa, Gen Relativ Gravit. **41** 1233-1247 (2009).

[47] J. W. Maluf, S. C. Ulhoa and J. F. Rocha-Neto, Class. Quantum Grav. **23** (6 Oct 2006).

[48] B. Mashhoon, *On the relativity of rotation, in Directions of General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).

[49] J. W. Maluf, V. C. de Andrade, J. R. Steiner, International Journal of Modern Physics D. **16** 857-874 ( 2007).

[50] R. C. Adams, J. M. Cohen, The Astrophysical Journal. **192** 525-528 (1974).

[51] R. A. Hulse, J. H. Taylor, The Astrophysical Journal. **195** L51-L53 (1975).

[52] L. Wen, Y. Chen, Phys. Rev. D **81**, 082001 (2010).

[53] K. Kiuchi, Y. Sekiguchi, M. Shibata, K. Taniguchi, Phys. Rev. Lett. **104**, 141101 (2010).

[54] E. Nakar, T. Piran, Nature **478**, 82-84 (2011).

[55] H. Stephani, *An Introduction to Special and General Relativity* (Cambridge University Press, Cambrige, 3rd edition, 2004).

[56] L. Landau and E. Lifchitz, *Teoria do Campo* (Hemus, São Paulo).

[57] J. W. Maluf e S. C. Ulhoa, Phys. Rev. D **78**, 047502 (2008).