Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

As Identidades de uma Álgebra vista como um Anel

por

Jorge Augusto Gonçalo de Brito

Brasília
2011

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

As Identidades de uma Álgebra vista como um Anel

por

Jorge Augusto Gonçalo de Brito*

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 12 de dezembro de 2011.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alexei Krassilnikov - UnB (Orientador)

Profa. Dra. Ana Cristina Vieira-UFMG

Prof. Dr. Plamen Emilov Koshlukov-Unicamp

Prof. Dr. Dimas José Gonçalves-UnB

Prof. Dr. José Antônio de Oliveira Freitas-UnB

*O autor foi bolsista CAPES e CNPq durante parte da elaboração deste trabalho.

Agradecimentos

-Agradeço primeiramente a Deus por mais essa conquista e pela oportunidade diária de aprendizado que é a dádiva da vida.

-Aos meus pais (Juvenal e Francisca) e às minhas irmãs (Elaine e Deise) pelo apoio e incentivo.

-Ao professor Dr. Alexei Krassilnikov, pela orientação, paciência e por sua suma importância nessa minha busca pela construção do conhecimento.

-Aos professores Dr. Plamen Emilov Koshlukov, Dra. Ana Cristina Vieira, Dr. Dimas José Gonçalves e Dr. José Antônio Oliveira de Freitas por participarem da banca examinadora.

-À todos que foram meus professores no departamento de matemática da UnB e nas demais instituições de ensino as quais eu passei durante os 23 anos que estive estudando.

-Ao CNPq/CAPES pelo apoio financeiro.

- Por fim agradeço a todos os amigos e a todos que torceram por mim.

Obrigado a todos.

Resumo

Sejam K um corpo de característica 0 e M_K o seguinte conjunto de matrizes

$$M_K = \begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij} \in K \right\}.$$

Consideramos M_K como diversas estruturas algébricas, tais como: K-álgebra associativa, K-álgebra de Lie, anel associativo, anel de Lie, entre outras. Como, pelo resultado de Il'tyakov, toda álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo de característica 0 possui uma base finita de identidades, a álgebra de Lie M_K possui uma tal base. Por outro lado, Krasilnikov demonstrou recentemente que as identidades do anel de Lie M_K não tem base finita. Contudo, estas bases (finita para a álgebra e infinita para o anel) não foram encontradas explicitamente. Neste trabalho exibimos estas bases de identidades. Mais precisamente, demonstramos que M_K visto como uma K-álgebra de Lie tem uma base formada pela única identidade $[x_1, x_2, [x_3, x_4], x_5]$ e que uma base de identidades de M_K visto como anel de Lie é

$$\{[x_1, x_2, [x_3, x_4], x_5]\} \cup \{[x_1, x_2, [x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r]] \mid r = 4, 6, 8, \ldots\}$$

$$\cup \{[x_1, x_2, [x_3, x_4, x_5, \ldots, x_r]] + [x_1, x_3, [x_4, x_2, x_5, \ldots, x_r]] + [x_1, x_4, [x_2, x_3, x_5, \ldots, x_r]] \mid r = 5, 7, \ldots\}.$$

Além disso, considerando o problema semelhante para álgebras associativas, demonstramos que uma base de identidades da K-álgebra associativa M_K é formada por $x_1[x_2, x_3]x_4$ e esta mesma identidade forma uma base de M_K visto como anel associativo. Por fim, também encontramos bases de identidades graduadas para M_K, com algumas graduações, considerando-lo como as mesmas estruturas algébricas (K-álgebra associativa, K-álgebra de Lie, anel associativo e anel de Lie).

Abstract

Let K be a field of characteristic 0 and M_K the following set of matrices

$$M_K = \begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; a_{ij} \in K \right\}.$$

We consider M_K as varias algebraic structures, such as: associative K-algebra, Lie K-algebra, associative ring, Lie ring, etc. Since, by Il'tyakov's result, each finite dimensional Lie algebra over a field of characteristic 0 has a finite basis of identities, the Lie algebra M_K has such a basis. On the other hand, recently Krasilnikov proved that the identities of the Lie ring M_K has no finite basis. However, these bases (finite for the algebra and infinite for the ring) were not found explicitly. In the presente thesis we exhibit these bases of identities. More precisely, we show that M_K viewed as a Lie K-algebra has a basis formed by the single identity $[x_1,x_2,[x_3,x_4]x_5]$ and a basis of identities for M_K viewed as Lie ring is

$$\{[x_1,x_2,[x_3,x_4],x_5]\} \cup \{[x_1,x_2,[x_1,x_2,x_3,\ldots,x_r]] \mid r = 4,6,8,\ldots\}$$

$$\cup \{[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5,\ldots,x_r]] + [x_1,x_3,[x_4,x_2,x_5,\ldots,x_r]] + [x_1,x_4[x_2,x_3,x_5,\ldots,x_r]] \mid r = 5,7,\ldots\}.$$

Furthermore, considering the similar problem for associative algebras, we prove that a basis of identities of the associative K-algebra M_K consists of $x_1[x_2,x_3]x_4$ and the same identity forms a basis of identities for M_K viewed as an associative ring. Finally, we also found a basis of graded identities for M_K, with some gradings, considering it as the same algebraic structures (associative K-algebra, Lie K-algebra, associative ring and Lie ring).

Sumário

Introdução

A teoria de identidades e variedades de estruturas algébricas (seja de grupos, álgebras, anéis, entre outras) é uma importante sub-área da álgebra contemporânea. Esta sub-área vem se desenvolvendo muito nas últimas décadas. Desta forma existe uma gama de resultados publicados (veja por exemplo [1, 2, 16, 17, 24, 23, 27] e bibliografia lá). Vários destes resultados mostram a existência ou não de uma base finita de identidades para uma variedade ou uma determinada álgebra.

Seja M_K o seguinte conjunto de matrizes

$$M_K = \begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; a_{ij} \in K \right\},$$

onde K é um corpo de característica 0. M_K é uma álgebra de Lie que também podemos considerar como anel de Lie.

Como, pelo resultado de Il'tyakov [26], toda álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo de característica zero possui uma base finita de identidades, a álgebra de Lie M_K possui uma tal base. Por outro lado, Krasilnikov [30] demonstrou que as identidades do anel de Lie M_K não tem base finita. Contudo, estas bases (finita para as identidades da álgebra e infinita para o anel) não foram encontradas explicitamente. No presente trabalho exibimos estas bases de identidades. Os primeiros resultados principais desta tese são os seguintes:

Teorema I.1. *Seja K um corpo de característica zero. Então as identidades de M_K vista como álgebra de Lie têm base formada pela identidade $v = [x_1, x_2, [x_3, x_4], x_5]$.*

Teorema I.2. *Seja K um corpo de característica zero. Então o conjunto*

$$\{[x_1,x_2,[x_3,x_4],x_5]\} \cup \{[x_1,x_2,[x_1,x_2,x_3,\ldots,x_r]] \mid r = 4,6,8,\ldots\}$$

$$\cup\{[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5,\ldots,x_r]]+[x_1,x_3,[x_4,x_2,x_5,\ldots,x_r]]+[x_1,x_4,[x_2,x_3,x_5,\ldots,x_r]] \mid r = 5,7,\ldots\}$$

é uma base de identidades para o anel de Lie M_K. Além disso, esta base é minimal, isto é, não contém nenhum subconjunto próprio que gera o mesmo ideal verbal. Em particular, M_K visto como anel de Lie não tem base finita de identidades.

Sejam $L_K(X)$ a álgebra de Lie livre, de posto enumerável, sobre K, com geradores livres $x_1,x_2,\ldots,$ $V_K(v)$ o ideal verbal de $L_K(X)$ gerado por $v = [x_1,x_2,[x_3,x_4],x_5]$ e $V_K(M_K)$ o ideal verbal das identidades de M_K. Como consequência direta destes dois teoremas temos o seguinte corolário.

Corolário I.3. *Seja $\mathscr{L} = L_K(X)/V_K(v)$ a K-álgebra de Lie centro por metabeliana livre de posto enumerável, sobre um corpo K de característica 0. Então $\mathscr{L}$ vista como anel de Lie não tem base finita de identidades. Mais precisamente, $\mathscr{L}$ tem a seguinte base de identidades:*

$$\{[x_1,x_2,[x_3,x_4],x_5]\} \cup \{[x_1,x_2,[x_1,x_2,x_3,\ldots,x_r]] \mid r = 4,6,8,\ldots\}$$

$$\cup\,\{[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5,\ldots,x_r]]+[x_1,x_3,[x_4,x_2,x_5,\ldots,x_r]]+[x_1,x_4,[x_2,x_3,x_5,\ldots,x_r]] \mid r = 5,7,\ldots\}$$

e essa base não é equivalente a nenhum conjunto finito de identidades.

Para álgebras de Lie são conhecidos alguns exemplos de álgebras as quais possuem base finita de identidades. Veja por exemplo [41, 42, 46]. Todavia, desconhecemos se estas álgebras de Lie têm base finita para suas identidades quando vistas como anéis de Lie (exceto quando a álgebra de Lie é nilpotente ou metabeliana). Desta forma, M_K é o primeiro exemplo de álgebra de Lie que possui base finita de identidades mas que não possui tal base se vista como anel de Lie. Naturalmente nos surgem perguntas semelhantes sobre álgebras associativas, ou seja:

existe alguma álgebra associativa que possui base finita de identidades, mas que não possui base finita de identidades se vista como anel associativo? Em particular, a álgebra associativa M_K satisfaz esta propriedade?

Assim, estudamos as identidades de M_K visto como anel associativo e visto como álgebra associativa. Em contraste com o caso anterior, obtivemos resposta negativa para a segunda questão. A primeira questão é um problema em aberto. Nossos próximos resultados principais são:

Teorema I.4. *Seja K um corpo de característica zero. Então as identidades da K-álgebra associativa M_K têm base formada por $x_1[x_2,x_3]x_4$.*

Teorema I.5. *Seja K um corpo de característica zero. Então as identidades de M_K, visto como anel associativo, têm base formada por $x_1[x_2,x_3]x_4$.*

Estes dois teoremas são consequências dos resultados que seguem, os quais demonstraremos no capítulo 2.

Teorema I.6. *Seja K um domínio de integridade infinito. Então as identidades da K-álgebra associativa M_K têm base formada por $x_1[x_2,x_3]x_4$.*

Teorema I.7. *Seja K um domínio de integridade de característica zero. Então as identidades de M_K, visto como anel associativo, têm base formada por $x_1[x_2,x_3]x_4$.*

Se K é um corpo infinito, então o Teorema I.6 é um caso particular do resultado de Guterman [25].

Como dissemos anteriormente, existem vários resultados publicados sobre identidades e variedades de estruturas algébricas. Contudo, são raros os casos onde se tem a descrição completa das identidades de uma álgebra, ou seja, onde uma base de identidades é exibida explicitamente. Elucidamos as principais álgebras para as quais se conhece uma base de identidades. Nosso trabalho apresenta mais alguns exemplos de bases de identidades.

Sejam E e $E^{(1)}$ as álgebras de Grassmann (ou álgebras exteriores) de dimensão infinita sem unidade e com unidade respectivamente. Sejam ainda E_k e $E_k^{(1)}$ as álgebras de Grassmann de um espaço vetorial de dimensão finita k. São conhecidas bases de identidades para todas essas álgebras sobre qualquer corpo (veja [8, 10, 21, 29, 44]). Além disso, para um corpo base de característica zero, também sabemos a descrição de uma base finita para as identidades das álgebras $E\otimes E$ e $E^{(1)}\otimes E^{(1)}$ (veja [40]).

Outra álgebra para a qual conhecemos uma base finita de identidades é a álgebra associativa $M_2(K)$, de matrizes 2×2, sobre qualquer corpo K, exceto quando K é infinito de característica 2, neste caso o problema está em aberto (veja [31, 41]).

Sejam $gl_2(K)$ a álgebra de Lie das matrizes 2×2 sobre K e $sl_2(K)$ a subalgebra das matrizes de traço zero. Se K é um corpo de característica $p\neq 2$, então $gl_2(K)$ e $sl_2(K)$ possuem mesmas identidades. Sobre um corpo infinito de característica diferente de 2 foi exibida uma base de identidades para estas álgebras, veja [41] e [46]. Se K é infinito de característica 2 é conhecida uma base para $gl_2(K)$ (veja [16, Teorema 3.1.5]), neste caso $sl_2(K)$ também tem base finita e conhecida.

A álgebra associativa $UT_n(K)$, de todas matrizes triangulares superiores, sobre um corpo infinito K, tem base formada por uma única identidade. Se K é um corpo infinito, então para álgebra de Lie adjunta a $UT_n(K)$ também é conhecida uma base finita de identidades (veja [39] e [43]).

Para um corpo base K finito, foram explicitadas bases finitas de identidades para as álgebras $M_2(K)$, $M_3(K)$ e $M_4(K)$ (veja [20, 22, 38]). Se K é um corpo finito de característica $p > 2$, então também é conhecida a base de identidades comum as álgebras $gl_2(K)$ e $sl_2(K)$ (veja [41] e [42]).

Essa é a lista quase completa das álgebras para as quais uma base de identidades explicita é conhecida. Mesmo para as álgebras $M_3(K)$ e $sl_3(K)$ não é conhecida uma base explícita de identidades sobre corpos infinitos. No entanto, se K tem característica 0, pelos resultados de Kemer [28] e Il'tyakov [26] estas álgebras possuem uma base finita de identidades. Sobre corpos infinitos de característica positiva, não sabemos se existe alguma base finita de identidades para estas álgebras.

Consideremos o caso onde K é um corpo infinito de característica 2. Nesta situação o problema da existência de uma base finita de identidades para a álgebra associativa $M_2(K)$ está em aberto. Contudo, observe que $sl_2(K)$ é nilpotente de classe 2 e de dimensão 3, logo $[[x_1,x_2],x_3]$ forma uma base para suas identidades. Já a álgebra de $gl_2(K)$ não possui nenhuma base finita de identidades, isto foi demonstrado em 1970, por Vaughan-Lee [48]. Uma base para $gl_2(K)$ foi descoberta por Drensky e enunciada no livro [16].

Teorema I.8 (Drensky, veja [14] e [16]). *Seja K um corpo infinito de característica 2. Então o conjunto*

$$\{[x_1,x_2,[x_3,x_4],x_5]\} \cup \{[x_1,x_2,[x_1,x_2,x_3,\ldots,x_r]] \mid r = 3,4,5,\ldots\} \cup$$

$$\{[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5,\ldots,x_r]] + [x_1,x_3,[x_4,x_2,x_5,\ldots,x_r]] + [x_1,x_4,[x_2,x_3,x_5,\ldots,x_r]] \mid r = 4,5,6,\ldots\}$$

é uma base de identidades para $gl_2(K)$. Além disso, esta base não é equivalente a nenhum conjunto finito de identidades.

Uma demonstração deste resultado foi escrita na tese [14] porém nunca foi publicada em uma revista científica. No apêndice demonstraremos este teorema.

Também estudamos as identidades graduadas de M_K para algumas graduações. Exibiremos estas bases para M_K, visto como as mesmas estruturas algébricas, para duas diferentes graduações. Antes de apresentarmos estas bases, vejamos alguns dos principais resultados conhecidos sobre identidades graduadas.

Primeiramente exporemos alguns resultados sobre identidades graduadas da álgebra de Grassmann. Em 2009, no caso onde o corpo base tem característica 0, Di Vincenzo e Da Silva [12] descreveram as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de E, com respeito a algumas Z_2-graduações. Recentemente Centrone [6] resolveu o problema análogo para um corpo infinito de característica $p > 2$. Em sua tese Centrone [7] faz uma descrição das identidades H-graduadas de E para um grupo abeliano finito de ordem ímpar H.

Se o corpo base tem característica 0, Di Vincenzo [11] mostrou que as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $E \otimes E$ tem base formada por 2 elementos.

A álgebra de matrizes $M_n(K)$ sobre um corpo K possui uma natural $\mathbb{Z}_n$-graduação.

$$M_n(K) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_n} M_n^{(\alpha)},$$

onde $M_n^{(\alpha)}$ é o subespaço de $M_n(K)$ gerado por todas matrizes E_{ij} tais que $\overline{j-i} = \alpha$. Assim, $M_n^{(0)}$ consiste de todas matrizes diagonais

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & & & \\ & a_{2,2} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

e, para $0 < t \leq n-1$, $M_n^{(\bar{t})}$ consiste em todas matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,t+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2,t+2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-t,n} \\ a_{n-t+1,1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n,\,t} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Se K é um corpo infinito, as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_n(K)$ possuem base finita, veja [3, 5, 11, 32, 47].

A $\mathbb{Z}_n$-graduação da álgebra $M_n(K)$ induz uma $\mathbb{Z}_n$-graduação para a álgebra de matrizes triangulares $UT_n(K)$. Entre outros resultados conhecidos para as identidades graduadas de $UT_n(K)$, sabemos uma base finita explícita para suas identidades com esta $\mathbb{Z}_n$-graduadas, para qualquer corpo infinito K, veja [33].

No que concerne à identidades graduadas, nosso principal resultado foi obtido quando graduamos M_K, visto como álgebra de Lie e como anel de Lie, por $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$. Temos a seguinte graduação: $M_K = V_0 \oplus V_1$, onde

$$V_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Também podemos graduar o anel de Lie livre $L_{\mathbb{Z}}(X)$ e a álgebra de Lie livre $L_K(X)$ por $\mathbb{Z}_2$. Fazendo $X = Y \cup Z$, $Y = \{y_i \mid i = 1,2,\ldots\}$ e $Z = \{z_i \mid i = 1,2,\ldots\}$. Consideramos Y é o conjunto de geradores pares e Z é conjunto de geradores ímpares.

Para as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de M_K, visto como álgebra de Lie, encontramos uma situação semelhante ao caso das identidades ordinárias, também visto como álgebra de Lie.

Teorema I.9. *Seja K um corpo de característica zero. Então as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas da K-álgebra de Lie M_K tem base finita enquanto as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de M_K visto como anel de Lie não tem base finita.*

Para provar este teorema usaremos o teorema que segue.

Teorema I.10. *Seja K um domínio de integridade de característica zero. Então:*

1) *Se 2 é invertível em K, então as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas da K-álgebra de Lie M_K têm base finita enquanto as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de M_K visto como anel de Lie não têm base finita.*

2) *Se 2 não é invertível em K, então M_K não possui base finita de identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas tanto visto como K-álgebra de Lie quanto visto como anel de Lie.*

Por sua vez o Teorema I.10 é consequência do próximo teorema.

Teorema I.11. *Seja K um domínio de integridade de característica zero. Então:*

1) *Se 2 é invertível em K, então as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas da K-álgebra de Lie M_K têm base*

$$C = \{[y_1,y_2];\ [z_1,z_2,z_3]\}.$$

Já as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de M_K visto como anel de Lie têm base

$$D = \{[y_1,y_2];\ [z_1,z_2,z_3]\} \cup \{[z_1,y_1,\ldots,y_{2k},z_1] \mid k = 1,2,\ldots\},$$

que não é equivalente a nenhuma base finita de identidades.

2) *Se 2 não é invertível em K, então D é uma base de identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas para M_K visto tanto como K-álgebra de Lie quanto como anel de Lie. Nestes casos a base D também não é equivalente a nenhum conjunto finito de identidades.*

Quando consideramos M_K como anel associativo e álgebra associativa, com a graduação por $\mathbb{Z}_2$ dada acima, encontramos uma situação totalmente diferente. Neste caso tanto a álgebra quanto o anel tem base finita. A saber

Teorema I.12. *Sejam $C = \{[y_1,y_2];\ y_1z_1y_2;\ y_1z_1z_2;\ z_1z_2y_1;\ z_1z_2z_3\}$ e K um domínio de integridade de característica zero. Então o conjunto C gera as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de M_K tanto visto como álgebra associativa, quanto visto como anel associativo.*

Também podemos graduar M_K pelo grupo de Klein. Com tal graduação as quatro estruturas as quais consideramos o conjunto M_K (anel associativo, álgebra associativa, anel de Lie e álgebra de Lie) possuem base finita de identidades graduadas. Seja $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0);(0,1);(1,0);(1,1)\}$. Temos $M_K = V_{(0,0)} \oplus V_{(0,1)} \oplus V_{(1,0)} \oplus V_{(1,1)}$, onde

$$V_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Façamos

$$X = X^{(0,0)} \cup X^{(1,0)} \cup X^{(0,1)} \cup X^{(1,1)} = Y \cup W \cup Z \cup T,$$

onde $X^{(0,0)} = Y, X^{(1,0)} = W, X^{(0,1)} = Z, X^{(1,1)} = T$. Além disso, $Y = \{y_i \mid i = 1,2,\ldots\}$, $W = \{w_i \mid i = 1,2,\ldots\}$, $Z = \{z_i \mid i = 1,2,\ldots\}$ e $T = \{t_i \mid i = 1,2,\ldots\}$. Desta forma as estruturas livres $\mathbb{Z}\langle X\rangle$, $K\langle X\rangle$, $L_{\mathbb{Z}}(X)$ e $L_K(X)$ são H-graduadas.

Teorema I.13. *Seja K um domínio de integridade de característica zero. Então o conjunto*

$$\{[y_1,y_2];\ yw;\ w_1w_2;\ zw;\ tw;\ wy;\ wz;\ wt;\ yz;\ tz;\ z_1z_2;\ ty;\ t_1t_2\}$$

gera as identidades H-graduadas de M_K tanto visto como álgebra associativa quanto visto como anel associativo.

Teorema I.14. *Seja K um domínio de integridade de característica zero. Então o conjunto*

$$\begin{gathered}\{[y_1,y_2];\ [w_1,w_2];\ [z_1,z_2];\ [t_1,t_2]\} \cup \{[w,y];\ [w,z];\ [w,t]\}\\ \cup\{[z,t,y];\ [z_1,t,z_2];\ [z,t_1,t_2]\} \cup \{[z,y_1,y_2]-[z,y_2,y_1];\ [t,y_1,y_2]-[t,y_2,y_1]\}\end{gathered}$$

gera as identidades H-graduadas de M_K visto tanto como álgebra de Lie quanto como anel de Lie.

No último capítulo deste trabalho exibimos uma classe infinita de álgebras $M_K^{(n)}$ as quais possuem mesmas identidades ordinárias de M_K. Contudo essas álgebras possuem diferentes graduações. Encontramos bases de identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas para estas álgebras. Nossos resultados principais do último capítulo são:

Teorema I.15. *Seja K um domínio de integridade de característica zero. Então o conjunto*

$$\{[y_1^{(0)},y_2^{(0)}]\} \cup \{y_2^{(j)}y_1^{(i)}y_3^{(k)} \mid i = 1,2,\ldots,n-1;\ j,k = 0,1,\ldots,n-1\}$$

gera as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_K^{(n)}$ tanto visto como K-álgebra associativa, quanto visto como anel associativo.

Teorema I.16. *Seja K um domínio de integridade de característica 0. Então as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas da K-álgebra de Lie $M_K^{(n)}$ têm base finita enquanto as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_K^{(n)}$ visto como anel de Lie não têm base finita.*

Capítulo

1

Preliminares

Neste capítulo exporemos algumas noções e fatos conhecidos sobre anéis, álgebras, identidades, identidades graduadas, produto tensorial (para álgebras associativas, álgebras de Lie, anéis associativos e anéis de Lie).

1.1 Anéis e Álgebras

Anéis

Definição 1.1. Um *anel* R é definido como um conjunto não-vazio com duas operações binárias $+$ e $\cdot$ tais que o par $(R,+)$ é um grupo abeliano e valem as leis distributivas:

$$(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z, \text{ para todos } x,y,z \in R,$$

$$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z, \text{ para todos } x,y,z \in R.$$

Um anel R é dito um *anel associativo* se, para todos $a,b,c \in R$, temos:

$$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)\ .$$

Um *anel de Lie* é definido como um anel com multiplicação anti-comutativa e satisfazendo a identidade de Jacobi. Mais precisamente temos a

Definição 1.2. O anel (L , + , [,]) é um *anel de Lie*, se

1. Para todos $x,y,z \in L$,

$$[x,y,z]+[y,z,x]+[z,x,y]=0 \quad .$$

Usamos a notação $[a,b,c]=[[a,b],c]$.

2. Para todo $x \in L$,

$$[x,x]=0 \quad .$$

Observemos que um anel de Lie é anti-comutativo. De fato, como $[a+b,a+b]=0$ temos $[a,b]=-[b,a]$.

Módulos

Definição 1.3. Seja R um anel associativo e comutativo. Um R-módulo (ou um módulo sobre R) é um grupo abeliano M, com multiplicação de escalares de R sobre M, tais que valem as seguintes propriedades:

1. $(r+s)m=rm+sm$,
2. $(rs)m=r(sm)$,
3. $r(m+n)=rm+rn$,
4. $1m=m$, se R possui 1,

para todos $r,s \in R$ e $m,n \in M$. A multiplicação por escalares é uma aplicação de $R \times M$ para M a qual denotamos por rm.

Se o anel R for um corpo, então o R-módulo M é um espaço vetorial, onde os elementos de R são os escalares.

Álgebras

Definição 1.4. Seja K um anel associativo comutativo com unidade. Uma *K-álgebra (linear) A* é um K-módulo com uma multiplicação $\cdot : A \times A \longrightarrow A$ com as seguintes propriedades:

1. A terna $(A, +, \cdot)$ é um anel.
2. Para todos $x, y \in A$ e $\alpha \in K$, temos

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y).$$

Assim, toda álgebra linear pode ser vista como um anel, se considerada apenas com as operações binárias $+$ e $\cdot$. Além disso, uma álgebra A é dita associativa, comutativa, de Lie ou com unidade conforme o anel $(A, +, \cdot)$ for, respectivamente, associativo, comutativo, de Lie ou com unidade.

Assim como para grupos e anéis um homomorfismo de álgebras é uma função que preserva as operações das respectivas álgebras, mais precisamente temos

Definição 1.5. Sejam A_1 e A_2 duas álgebras sobre K. Uma aplicação $f : A_1 \to A_2$ chama-se um homomorfismo se:

1. f é um homomorfismo de K-módulos.
2. $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, para todos $x, y \in A$.

Os teoremas usuais que se referem a isomorfismos de espaços vetoriais, anéis e grupos também são válidos para álgebras.

A propriedade de possuir um objeto livre pode ser definida para qualquer estrutura algébrica. Definiremos a seguir objetos livres para álgebras associativas.

Definição 1.6. Sejam K um anel associativo comutativo com unidade e $X = \{x_i \mid i \in I\}$ um conjunto não vazio. A *K-álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$* sem unidade é definida como o K-módulo livre gerado livremente pelos elementos $\{x_{i_1} \dots x_{i_n} \mid x_i \in X;\ n = 1, 2, \dots\}$, com uma multiplicação tal que

$$(x_{i_1} \dots x_{i_m})(x_{j_1} \dots x_{j_n}) = x_{i_1} \dots x_{i_m} x_{j_1} \dots x_{j_n}, \quad x_{i_k}, x_{j_l} \in X.$$

Agora exibiremos, para álgebras associativas, uma propriedade importante e bem conhecida, inerente aos objetos livres, a chamada *propriedade universal*.

Proposição 1.7. *Seja A uma K-álgebra associativa. Então qualquer aplicação $\varphi : X \to A$ pode ser estendida à um único homomorfismo $f : K\langle X\rangle \to A$. Em outras palavras, existe um único homomorfismo $f : K\langle X\rangle \to A$ tal que $f(x) = \varphi(x)$, para todo $x \in X$.*

Demonstração: Definamos uma função $f : K\langle X\rangle \to A$ como segue. Seja

$$\bar{X} = \{x_{i_1} \dots x_{i_n} \mid x_i \in X;\ n = 1, 2, \dots\}.$$

Primeiramente,

$$\text{se } m \in \bar{X},\ \text{então } f(m) = f(x_{i_1} \dots x_{i_n}) = \varphi(x_{i_1}) \dots \varphi(x_{i_n}).$$

Seja $p = \alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_r m_r \in K\langle X\rangle$, onde $m_j \in \bar{X}$. Assim podemos definir

$$f(p) = \alpha_1 f(m_1) + \dots + \alpha_r f(m_r).$$

Pela definição de f temos que $f(x) = \varphi(x)$, para todos $x \in X$. Por outro lado é direto verificar que f é um homomorfismo. Além disso, como o conjunto X gera $K\langle X\rangle$ como álgebra, este isomorfismo é único. □

Com as definições dadas acima, todo anel pode ser visto como uma álgebra sobre o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$. Além disso, a $\mathbb{Z}$-álgebra associativa livre $\mathbb{Z}\langle X\rangle$ geralmente é chamada de *anel associativo livre*, ou seja, $\mathbb{Z}\langle X\rangle$ é o objeto livre na classe dos anéis.

Daremos agora uma forma de obtenção de álgebras de Lie. Este método consiste em definir uma nova multiplicação para uma álgebra associativa. Seja $(R, +, \cdot)$ uma álgebra associativa. Podemos definir a seguinte operação em R:

$$\begin{aligned} [,]:\ & R \times R && \longrightarrow R \\ & (a,b) && \longmapsto [a,b] = ab - ba \end{aligned}$$

É direto verificar que R com esta nova multiplicação é uma álgebra de Lie. Esta nova álgebra, isto é, $(R, +, [,])$, é chamada de álgebra de Lie associada (ou adjunta) à R e denotada por $R^{(-)}$. Além disso, para qualquer álgebra de Lie L existe uma álgebra associativa R, tal que L é isomorfa à uma subalgebra de $R^{(-)}$. Este fato é demonstrado no famoso teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, que enunciaremos a seguir.

Definição 1.8. Seja R uma álgebra associativa e L uma álgebra de Lie. Se L é isomorfa à uma subalgebra de $R^{(-)}$ dizemos que R é um envolvente de L. Dizemos que a álgebra associativa $U = U(L)$ é o envolvente universal da álgebra de Lie L, se L é uma subalgebra de $U^{(-)}$ e tem a seguinte propriedade universal: para toda álgebra associativa R e todo homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : L \longrightarrow R^{(-)}$ existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\psi : U \longrightarrow R$ que estende ϕ, isto é, ψ é igual a ϕ em L.

Teorema 1.9 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *Toda álgebra de Lie L possui um único (a menos de isomorfismos) envolvente universal $U(L)$. Se L tem base $\{e_i \mid i \in I\}$, onde o conjunto de índices I é ordenado, então $U(L)$ tem base*

$$\{e_{i_1} \dots e_{i_q} \mid i_1 \leq \dots \leq i_q;\ q = 0, 1, \dots\}.$$

Para uma demonstração veja, por exemplo, [16, Teorema 1.3.2].

Definição 1.10. Seja $L_K(X)$ uma K-álgebra de Lie, onde $X \subset L_K(X)$. A álgebra de Lie $L_K(X)$ chama-se *álgebra de Lie livre*, com conjunto de *geradores livres* X, se para cada álgebra de Lie L, qualquer aplicação $\varphi : X \to L$ pode ser estendida à um único homomorfismo $f : L_K(X) \to L$. Em outras palavras, existe um único homomorfismo $f : L_K(X) \to L$ tal que $f(x) = \varphi(x)$, para todos $x \in X$. A cardinalidade do conjunto X é chamada de *posto* da álgebra de Lie livre $L_K(X)$.

Teorema 1.11 (Witt)**.** *A subálgebra $L < K\langle X \rangle^{(-)}$ gerada por X é isomorfa à álgebra de Lie livre $L_K(X)$. Além disso, $U(L_K(X)) = K\langle X \rangle$.*

Demonstração: Seja L uma álgebra de Lie e R uma envolvente associativa. Uma aplicação $\theta : X \longrightarrow G \subset R$ induz um homomorfismo $\bar{\theta} : K\langle X \rangle \longrightarrow R$; sua restrição para L é um homomorfismo de L para $R^{(-)}$, o qual envia geradores de L para G. Desta forma a imagem de L está em G, o que implica que L é a álgebra de Lie livre com conjunto de geradores livres X $(L = L_K(X))$.

Por outro lado, consideremos uma álgebra associativa R e $\phi : L \longrightarrow R^{(-)}$. A aplicação $\phi' : X \longrightarrow R$, definida por $\phi'(x) = \phi(x), x \in X$, induz um único homomorfismo $\psi : K\langle X \rangle \longrightarrow R$. Desde que $\phi(x) = \psi(x)$, para todo $x \in X$, obtemos que a restrição de ψ para L é igual à ϕ. Portanto $U(L_K(X)) = K\langle X \rangle$. □

1.2 Identidades

Definição 1.12. Sejam $X = \{x_i \mid i = 1,2,\ldots\}$ e $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre sobre K, sem unidade, gerada livremente por X. Dizemos que um elemento $u = u(x_1,\ldots,x_n) \in K\langle X\rangle$ é uma *identidade* (ou *identidade polinomial*) em uma álgebra associativa R, se $u(r_1,\ldots,r_n) = 0$, para todos $r_1,\ldots,r_n \in R$.

Analogamente definimos identidades em álgebras de Lie, como elementos da K-álgebra de Lie livre $L_K(X)$.

Definição 1.13. Um ideal $I < K\langle X\rangle$ é dito um T-ideal se $\varphi(I) \subset I$ para todo endomorfismo φ de $K\langle X\rangle$.

Para álgebras de Lie um ideal com tal propriedade muitas vezes é chamado de ideal verbal, esta denominação vem da teoria de grupos.

Observação 1.14. Seja R uma K-álgebra associativa. O conjunto $T_K(R)$, de todas identidades de R, é um T-ideal de $K\langle X\rangle$. Além disso, cada T-ideal T de $K\langle X\rangle$ é desta forma, isto é, existe uma álgebra associativa R tal que $T = T_K(R)$. Basta fazer $R = K\langle X\rangle/T$.

Definição 1.15. Uma *base de identidades* para uma álgebra associativa A é um subconjunto $B \subset T_K(A)$ que gera $T_K(A)$ como T-ideal. Se existe tal B finito, dizemos que A tem base finita de identidades.

O próximo teorema é resultado bastante conhecido e utilizado na teoria de álgebras com identidades.

Teorema 1.16. *Seja A uma álgebra associativa. Então A possui uma base finita de identidades β se, e somente se, toda base de identidades γ de A possui um subconjunto finito equivalente a γ.*

Demonstração: Primeiramente, é claro que se toda base γ de A é equivalente a um subconjunto finito de γ, então A possui uma base finita.

Reciprocamente, seja $\beta = \{f_1, f_2,\ldots, f_k\}$ uma base finita de A. Seja $\gamma = \{h_j \mid j = 1,2,\ldots\}$ uma base qualquer de A. Notemos que cada f_i, pertence a um T-ideal gerado por uma quantidade finita de elementos $h_{i_1}, h_{i_2},\ldots,h_{i_{l_i}}$, para algum $l_i \geq 1$. Assim, temos que cada f_i, $i =$

$1, 2, \ldots, k$ é consequência de uma quantidade finita de identidades $h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_{l_i}}$, para algum $l_i \geq 1$. Desta forma, a base de identidades β é consequência de uma quantidade finita de identidades h_j, $j = 1, 2, \ldots, s$. Logo, a base de identidades $\gamma = \{h_1, h_2, \ldots\}$ é consequência de seu subconjunto finito $\{h_j \mid j = 1, 2, \ldots, s\}$. Portanto γ é equivalente a subconjunto finito. $\square$

Definição 1.17. A classe $\mathbf{V}$, de todas as álgebras satisfazendo um dado conjunto de identidades V, será chamada uma *variedade de álgebras.* O conjunto V é dito uma *base de identidades* para a variedade $\mathbf{V}$.

Teorema 1.18 (Birkhoff)**.** *Uma classe* $\mathbf{C}$ *de álgebras é fechada para subalgebras, quocientes e produtos cartesianos se, e somente se,* $\mathbf{C}$ *é uma variedade de álgebras.*

Demonstração: Faremos uma demonstração para anéis, nos demais casos a situação é análoga. É claro que uma variedade é fechada para subanéis, quocientes e produtos cartesianos. Inversamente, suponhamos que uma classe de anéis $\mathbf{C}$ é fechada para subanéis, quocientes e produtos cartesianos. Sejam V o conjunto das identidades satisfeitas por todos os anéis de $\mathbf{C}$. Definamos $\mathbf{V}$ como a variedade com base V. É claro que $\mathbf{C} \subset \mathbf{V}$. Queremos provar que $\mathbf{V} \subset \mathbf{C}$. Como $\mathbf{C}$ é fechada para quocientes, é suficiente provar que cada anel livre de $\mathbf{V}$ pertence à $\mathbf{C}$. Sabemos que um anel livre nesta variedade é da forma

$$R = \mathbb{Z}\langle X \rangle / T(V).$$

Para cada $w \notin V$ existe um anel $R_w \in \mathbf{C}$ tal que w não é uma identidade em R_w. Desta forma, existe um homomorfismo

$$\varphi_w : R \longrightarrow R_w, \text{ com } \varphi_w(w + T(V)) \neq 0.$$

O produto cartesiano $\overline{R} = \prod_{w \in R} R_w$ pertence à $\mathbf{C}$, pois esta classe é fechada para produtos cartesianos. Seja $\varphi : R \longrightarrow \overline{R}$ o homomorfismo cuja imagem de um elemento x na w-ésima posição é $\varphi_w(x)$. Pela forma que definimos φ temos que $\ker \varphi = T(V)$, ou seja, φ é um monomorfismo. Portanto $R \cong \varphi(R) < \overline{R}$. Como $\mathbf{C}$ é fechada para subanéis o teorema está demonstrado. $\square$

Elementos Multi-homogêneos e Multilineares

Podemos graduar $K\langle X \rangle$ da seguinte forma:

$$K\langle X \rangle = K^{(1)} \oplus K^{(2)} \oplus K^{(3)} \oplus \ldots,$$

onde $K^{(i)}$ é o submódulo gerado por todos os monômios de grau i. Os subespaços $K^{(i)}$'s são chamados de componentes homogêneas de $K\langle X\rangle$. Além disso, podemos redecompor cada componente $K^{(i)}$ da seguinte forma:

$$K^{(i)} = \sum_{i_1+\ldots+i_n=i} K^{(i_1,\ldots,i_n)}$$

onde $K^{(i_1,\ldots,i_n)}$ é o subespaço gerado por monômios de grau i_1 em $x_1,\ldots,i_n$ em x_n. Um elemento $f \in K^{(i_1,\ldots,i_n)}$ é dito multi-homogêneo de multigrau $(i_1,\ldots,i_n)$. O elemento f é dito multilinear se é multi-homogêneo de multigrau $(1,\ldots,1)$.

O próximo teorema é encontrado em vários livros de álgebras com identidades, veja por exemplo [16, Proposição 4.2.3].

Teorema 1.19. *Seja*

$$f(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{i=0}^{n} f_i = f_0+\ldots+f_n \in K\langle X\rangle,$$

onde f_i é a componente homogênea de grau i em x_1.

1) Se K é um corpo infinito, então as componentes f_i pertencem ao T-ideal gerado por f.

2) Se K é um corpo de característica zero, então f é equivalente a um conjunto finito de identidades multilineares.

Demonstração:

1) Seja $T = T_K(f)$ o T-ideal gerado por f. Para cada $\alpha \in K$ a identidade $f(\alpha x_1,\ldots,x_m)$ é consequência de f. Temos $f_\alpha(x_1,\ldots,x_m) = f(\alpha x_1,\ldots,x_m) = f_0+\alpha f_1+\ldots+\alpha^n f_n$. Como K é infinito podemos escolher $n+1$ elementos distintos $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in K$. Logo os elementos $f_{\alpha_i}(x_1,\ldots,x_m) = f_0+\alpha_i f_1+\ldots+\alpha_i^n f_n$ pertencem à T. Podemos escrever

$$\begin{pmatrix} f_{\alpha_0} \\ f_{\alpha_1} \\ \vdots \\ f_{\alpha_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \ldots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \dots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix} \neq 0,$$

pois esse é um determinante de Vandermonde. De fato, ele é igual a

$$\prod_{0 \leq k < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_k)$$

e é diferente de zero pois os elementos α_i são todos distintos. Assim a matriz de Vandermonde acima é invertível e

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \dots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_{\alpha_0} \\ f_{\alpha_1} \\ \vdots \\ f_{\alpha_n} \end{pmatrix}.$$

Como $f_{\alpha_0}, \dots, f_{\alpha_n} \in T$, segue que $f_0, \dots, f_n \in T$.

2) Usaremos o processo de linearização. Pelo item 1 podemos assumir que $f(x_1, \dots, x_m)$ é homogêneo em cada uma de suas variáveis. Seja d o grau de f em x_1. Temos que $f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_m) \in T_K(f)$. Podemos escrever

$$f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^{d} f_i(y_1, y_2, x_2, \dots, x_m)$$

onde f_i é a componente homogênea de grau i em y_1. Portanto $f_i \in T_K(f)$ e, para $i = 1, 2, \dots, d-1$, o grau de f_i em y_1 é menor que d. Além disso,

$$f_i(y_1, y_1, x_2, \dots, x_m) = \begin{pmatrix} d \\ i \end{pmatrix} f(y_1, x_2, \dots, x_m).$$

Como $\begin{pmatrix} d \\ i \end{pmatrix}$ é invertível, já que $charK = 0$, segue que cada f_i é equivalente a f, isto é, $T_K(f_i) = T_K(f)$.

Aplicando esse processo indutivamente obtemos um conjunto de identidades multilineares equivalentes a f. □

Todas estas definições e resultados, que foram enunciados para álgebras associativas, possuem análogos para álgebras de Lie.

Identidades Fracas

Sejam R uma K-álgebra associativa e S um subespaço vetorial de R, tal que S gera a álgebra R. O polinômio $f(x_1,\dots,x_n)$ é uma identidade fraca para o par (R,S) se $f(s_1,\dots,s_n)=0$ para todos $s_1,\dots,s_n \in S$. As identidades fracas para o par (R,S) formam o ideal em $K\langle X\rangle$. Observe que, diferentemente dos T-ideais, os ideais de identidades fracas não são, necessariamente, fechados com relação a endomorfismos de $K\langle X\rangle$.

Um caso particular, de maior interesse, é quando o espaço vetorial S é uma subálgebra de Lie da álgebra de Lie adjunta de R. Neste caso, o ideal $T_K(R,S)$ é fechado com respeito a substituições de Lie. Em outras palavras, se $f(x_1,\dots,x_n) \in T_K(R,S)$, então $f(y_1,\dots,y_n) \in T_K(R,S)$, para todos $y_1,\dots,y_n \in L_K(X)$.

Exemplo 1.20. É direto verificar que o par $(M_2(K), sl_2(K))$ satisfaz a identidade fraca $[x_1^2,x_2]$, onde $M_2(K)$ é a álgebra associativa de matrizes 2×2 e $sl_2(K)$ é a álgebra de Lie de matrizes de traço zero.

1.3 Álgebras Graduadas

Sejam H um grupo abeliano aditivo finito e A uma álgebra. A álgebra A é H-graduada, se existem subespaços vetoriais $A^{(\alpha)} < A$, $\alpha \in H$, tais que

1. A é a soma direta dos subespaços $A^{(\alpha)}$, isto é, $A = \sum_{\alpha\in H} A^{(\alpha)}$ e
2. $A^{(\alpha_1)}A^{(\alpha_2)} \subset A^{(\alpha_1+\alpha_2)}$, para todos $\alpha_1,\alpha_2 \in H$.

Seja $X = \bigcup_{\alpha\in H} X^{(\alpha)} = X^{(\alpha_1)} \cup X^{(\alpha_2)} \cup \ldots \cup X^{(\alpha_s)}$, onde cada $X^{(\alpha)}$ é um conjunto enumerável e $X^{(\alpha_i)} \cap X^{(\alpha_j)} = \emptyset$. Um elemento $x \in X$ é dito de grau α, escrevemos $\partial(x)=\alpha$, se $x \in X^{(\alpha)}$. Seja $m = x_{i_1}\ldots x_{i_s}$ um monômio em $K\langle X\rangle$. Definimos o grau de m por $\partial(m) = \partial(x_{i_1}) + \ldots + \partial(x_{i_s})$. Para $\alpha \in H$ denotemos por $K\langle X\rangle^{(\alpha)}$ o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado por todos os monômios de grau α. É direto verificar que

$$K\langle X\rangle = \sum_{\alpha\in H} K\langle X\rangle^{(\alpha)}$$

define uma H graduação para $K\langle X\rangle$. Um ideal I de $K\langle X\rangle$ é dito um T_H ideal se ele é invariante sobre endomorfismo $\phi : K\langle X\rangle \longrightarrow K\langle X\rangle$, tais que $\phi(K\langle X\rangle^{(\alpha)}) \subset K\langle X\rangle^{(\alpha)}$, para todo $\alpha \in H$.

Seja $A = \sum_{\alpha\in H} A^{(\alpha)}$ um álgebra H-graduada. Dizemos que $f(x_1,\ldots,x_n) \in K\langle X\rangle$ é uma identidade graduada de A se $f(a_1,\ldots,a_n) = 0$ para todos $a_1,\ldots,a_n \in A$ tais que $a_s \in A^{\partial(x_s)}$, $s = 1,\ldots,n$. O conjunto $T_H(A)$ de todas as identidades H-graduadas de A é um T_H-ideal de $K\langle X\rangle$. Seja $\beta \subset K\langle X\rangle$. Denotamos por $T_H(\beta)$ o T_H-ideal gerado por β. Um conjunto $\beta \subset K\langle X\rangle$ é dito uma base das identidades H-graduadas de A, se $T_H(\beta) = T_H(A)$. Quando H é o grupo trivial de um único elemento as identidades H-graduadas de A são as identidades de A (tal como na Definição 1.12). Algumas vezes chamaremos essas identidades de identidades ordinárias afim de diferenciá-las das identidades graduadas.

Analogamente definimos identidades graduadas e T_H-ideais em álgebras de Lie, no entanto, em álgebras de Lie, os T_H-ideais também são chamados de ideais verbais graduados. O ideal verbal graduado das identidades de uma álgebra de Lie L também é denotado por $V_H(L)$.

1.4 Álgebras Relativamente Livres

Definição 1.21. Seja T um T-ideal. Então a álgebra $A = K\langle X\rangle/T$ é dita uma *álgebra relativamente livre*.

Algumas vezes define-se álgebras relativamente livres através de um conjunto de geradores livres. Esta definição é equivalente a definição que demos e este fato é explicitado na proposição que segue.

Proposição 1.22. *Uma álgebra A é relativamente livre se, e somente se, possui um conjunto de geradores, chamados geradores livres, tal que toda aplicação deste conjunto na álgebra A pode ser estendida à um endomorfismo.*

Para uma demonstração veja [16, Proposição 2.2.5].

Sejam K um anel associativo comutativo com unidade e

$$K[Y] = K[y_{ij}^{(r)} \mid i,j = 1,2,\ldots,n;\ r = 1,2,\ldots]$$

a K-álgebra de polinômios (associativa e comutativa) de posto enumerável. As matrizes

$$y_r = \sum_{i,j=1}^{n} y_{ij}^{(r)} E_{ij}, r = 1, 2, \ldots,$$

onde E_{ij} são as matrizes elementares, são chamadas de matrizes genéricas $n \times n$. A K-álgebra associativa R_n gerada por todas essas matrizes é a K-álgebra associativa de matrizes genéricas $n \times n$.

Proposição 1.23. *A álgebra associativa de matrizes genéricas R_n é relativamente livre.*

Não é difícil mostrar que as matrizes genéricas y_r formam um conjunto de geradores livres para R_n. Assim, utilizando a Proposição 1.22 demonstra-se esta proposição.

Proposição 1.24. *Seja K um domínio de integridade infinito. Então a K-álgebra associativa relativamente livre da variedade gerada por $M_n(K)$ é isomorfa à K-álgebra associativa de matrizes genéricas R_n.*

Esta proposição demonstra-se de forma análoga a Proposição 1.26 a qual demonstraremos abaixo.

Podemos também considerar a álgebra de Lie $\overline{R_n}$ gerada pelas matrizes genéricas $n \times n$. Resultados análogos das proposições anteriores são válidos para $\overline{R_n}$.

Seja H um grupo e

$$M_n(K) = \sum_{h \in H} M_n^{(h)},$$

uma H-graduação para $M_n(K)$. Consideremos as matrizes

$$y_r^{(h)} = \sum_{E_{ij} \in M_n^{(h)}} y_{ij}^{(r)} E_{ij}, r = 1, 2, \ldots.$$

A álgebra associativa $R_{n,H}$ gerada pelas matrizes $y_r^{(h)}$ possui uma H-graduação natural.

Proposição 1.25. *Seja K um domínio de integridade infinito. Então a álgebra associativa $M_n(K)$ tem mesmas identidades H-graduadas que a álgebra associativa $R_{n,H}$.*

Esta proposição também demonstra-se de forma análoga a Proposição 1.26.

Resultado análogo vale para a álgebra de Lie $\overline{R_{n,H}}$.

Podemos também considerar matrizes genéricas correspondente a M_K. Por exemplo, seja G a K-álgebra associativa de matrizes genéricas gerada livremente pelos elementos

$$g_r = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12}^{(r)} & \xi_{13}^{(r)} \\ 0 & \xi_{22}^{(r)} & \xi_{23}^{(r)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $K[\Xi] = K[\xi_{ij}^{(r)} \mid i = 1,2;\ j = 2,3;\ r = 1,2,\ldots]$ é a álgebra de polinômios (associativa e comutativa) sem unidade, nas variáveis $\xi_{ij}^{(r)}$, de posto enumerável.

Proposição 1.26. *Seja K um domínio de integridade infinito. Então a K-álgebra associativa relativamente livre da variedade gerada por M_K é isomorfa à K-álgebra associativa de matrizes genéricas G.*

Para demonstrar esta proposição usaremos o seguinte lema, o qual é bem conhecido.

Lema 1.27. *Sejam K um domínio de integridade infinito e $f(x_1,\ldots,x_n) \in K[X]$, $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, um polinômio não nulo. Então existem $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$, tais que $f(a_1,\ldots,a_n) \neq 0$.*

A demonstração seguinte é análoga à demonstração para $M_n(K)$ quando K é um corpo, esta pode ser encontrada, por exemplo, em [17, Proposição 1.3.2].

Demonstração da Proposição 1.26: Consideremos os homomorfismos canônicos

$$\begin{array}{llll} \pi_1: & K\langle X\rangle & \longrightarrow K\langle X\rangle / T_K(M_K) \text{ e} \\ & x_i & \longmapsto x_i + T_K(M_K) \end{array} \quad \begin{array}{llll} \pi_2: & K\langle X\rangle & \longrightarrow & G \\ & x_i & \longmapsto & g_i \end{array}.$$

É suficiente demonstrarmos que $ker\pi_1 = ker\pi_2$; isto é, $f \in K\langle X\rangle$ é uma identidade em M_K se, e somente se, f é identidade em G. Se $f \in ker\pi_2$, então $f(g_1,\ldots,g_t) = 0$. Dados $m_1,\ldots,m_t \in M_K$, existe um homomorfismo natural que aplica g_i para m_i. Logo $f(m_1,\ldots,m_t) = 0$, ou seja, f também é uma identidade para M_K. Por outro lado, seja f uma identidade para M_K. Suponhamos por absurdo que

$$f(g_1,\ldots,g_t) = \begin{pmatrix} 0 & f_{12} & f_{13} \\ 0 & f_{22} & f_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Sem perda de generalidade podemos supor que a entrada $f_{12} = f_{12}(\xi_{rs}^{(i)})$ é um polinômio não nulo em $K[\Xi]$. Pelo Lema 1.27, existem $a_{rs}^{(i)} \in K$, $i = 1,2,\ldots,t$, tais que $f_{12}(a_{rs}^{(i)}) \neq 0$. Isto significa que, para as matrizes

$$m_i = \sum_{r,s} a_{rs}^{(i)} E_{rs}, \quad i = 1, \ldots, t,$$

a expressão $f(m_1, \ldots, m_t)$ é diferente de zero, o que é uma contradição. $\square$

Além da proposição anterior, resultados análogos para álgebras associativa graduadas, álgebras de Lie e álgebra de Lie graduadas, são válidos para álgebras de matrizes genéricas correspondentes a M_K. Todos estes resultados têm demonstração análoga a demonstração da Proposicão 1.26.

1.5 Produto Tensorial

Primeiramente definiremos produto tensorial para módulos.

Sejam R um anel associativo, comutativo com unidade, V e W R-módulos gerados respectivamente por $\{e_i \mid i \in I\}$ e $\{f_j \mid j \in J\}$. Seja $R(V \times W)$ o R-módulo gerado livremente pelo produto cartesiano de V por W,

$$R(V \times W) = \left\{ \sum_{s=1}^{n} \alpha_s u_{(v_s, w_s)} \;\middle|\; n = 1, 2, \ldots; \alpha_i \in R; (v_s, w_s) \in V \times W \right\}.$$

Seja ainda S o sub-módulo de $R(V \times W)$ gerado pelos elementos:

$$\begin{array}{lclcl} u_{(v_1+v_2,w)} & - & u_{(v_1,w)} & - & u_{(v_2,w)} \\ u_{(v,w_1+w_2)} & - & u_{(v,w_1)} & - & u_{(v,w_2)} \\ \alpha u_{(v,w)} & - & u_{(\alpha v,w)} & & \\ \alpha u_{(v,w)} & - & u_{(v,\alpha w)} & & \end{array}$$

com $v_1, v_2, v \in V$; $w_1, w_2, w \in W$ e $\alpha \in R$. Assim, definimos o *produto tensorial* de V por W, denotado por $V \otimes_R W$ (ou simplesmente $V \otimes W$), como sendo o quociente

$$V \otimes_R W = R(V \times W)/S.$$

Usaremos a seguinte notação

$$u_{(v,w)} + S = v \otimes w.$$

A proposição seguinte é de fácil verificação.

Proposição 1.28. *$V \otimes_R W$ é gerado pelo conjunto $\{e_i \otimes f_j \mid i \in I, j \in J\}$.*

Se A e B são R-álgebras definimos o produto tensorial de R-álgebras como o produto tensorial $A \otimes_R B$ (vistas como R-módulos) com produto induzido por

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2 \otimes b_1 b_2).$$

O produto tensorial muitas vezes é definido através de uma propriedade universal. Enunciaremos a seguir essa propriedade como consequência de nossa definição.

Proposição 1.29. *Sejam A e B duas R-álgebras e $\otimes : A \times B \longrightarrow A \otimes_R B$ a projeção canônica. Então para quaisquer R-álgebra L e aplicação bilinear $\theta : A \times B \longrightarrow L$, tal que*

$$\theta((a_1, b_1)(a_2, b_2)) = \theta(a_1, b_1)\theta(a_2, b_2),$$

existe um único homomorfismo $\overline{\theta} : A \otimes_R B \longrightarrow L$ tal que $\overline{\theta} \circ \otimes = \theta$.

Demonstração: Seja $\tilde{\theta} : R(A \times B) \longrightarrow L$ o homomorfismo de R-módulos tal que

$$\tilde{\theta}(u_{(a,b)}) = \theta(a, b).$$

Seja S o sub-módulo de $R(A \times B)$ gerado pelos elementos

$$\begin{array}{lclcl} u_{(a_1+a_2,b)} & - & u_{(a_1,b)} & - & u_{(a_2,b)} \\ u_{(a,b_1+b_2)} & - & u_{(a,b_1)} & - & u_{(a,b_2)} \\ \alpha u_{(a,b)} & - & u_{(\alpha a,b)} & & \\ \alpha u_{(a,b)} & - & u_{(a,\alpha b)} & & \end{array}$$

onde $a_1, a_2, a \in A$; $b_1, b_2, b \in B$ e $\alpha \in R$. Temos que $S \subset ker\tilde{\theta}$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(u_{(a_1+a_2,b)} - u_{(a_1,b)} - u_{(a_2,b)}) &= \tilde{\theta}(u_{(a_1+a_2,b)}) - \tilde{\theta}(u_{(a_1,b)}) - \tilde{\theta}(u_{(a_2,b)}) \\ &= \theta(a_1 + a_2, b) - \theta(a_1, b) - \theta(a_2, b). \end{aligned}$$

Como θ é bilinear segue que

$$\tilde{\theta}(u_{(a_1+a_2,b)} - u_{(a_1,b)} - u_{(a_2,b)}) = 0.$$

Analogamente

$$\tilde{\theta}(u_{(a,b_1+b_2)} - u_{(a,b_1)} - u_{(a,b_2)}) = \tilde{\theta}(\alpha u_{(a,b)} - u_{(\alpha a,b)}) = \tilde{\theta}(\alpha u_{(a,b)} - u_{(a,\alpha b)}) = 0.$$

Logo $S \subset ker\tilde{\theta}$. Como $A \otimes_R B = R(A \times B)/S$, podemos definir

$$\begin{aligned} \overline{\theta}: \quad & A \otimes_R B \longrightarrow L \\ & \overline{\theta}(a \otimes b) = \tilde{\theta}(u_{(a,b)}) = \theta(a,b) \end{aligned}$$

É direto verificar que $\overline{\theta} \circ \otimes = \theta$. Além disso, $\overline{\theta}$ é um homomorfismo de R-módulos pois $\tilde{\theta}$ o é. Por fim,

$$\begin{aligned} \overline{\theta}((a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2)) &= \overline{\theta}(a_1 a_2 \otimes b_1 b_2) = \theta(a_1 a_2, b_1 b_2) \\ &= \theta((a_1, b_1)(a_2, b_2)) = \theta(a_1, b_1)\theta(a_2, b_2) \\ &= \overline{\theta}(a_1 \otimes b_1)\overline{\theta}(a_2 \otimes b_2). \end{aligned}$$

Portanto $\overline{\theta}$ é um homomorfismo de R-álgebras com as propriedades desejadas. A unicidade é consequência direta da propriedade $\overline{\theta} \circ \otimes = \theta$. □

Proposição 1.30. *Sejam K um corpo de característica zero e $L_{\mathbb{Z}}(X)$ o anel de Lie livre de posto enumerável. Seja ainda $C \subset L_{\mathbb{Z}}(X)$ um conjunto de elementos (identidades) multilineares. Então*

$$L_K(X)/V_K(C) \cong K \otimes_{\mathbb{Z}} L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(C).$$

Demonstração: Demonstraremos que $\mathscr{T} = K \otimes_{\mathbb{Z}} L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(C)$ é a K-álgebra livre, da variedade **C** definida por C, gerada livremente por $\tilde{X} = \{1 \otimes \overline{x_i} \mid i = 1, 2, \ldots\}$, onde $\overline{x_i} = x_i + V_{\mathbb{Z}}(C)$.

Primeiramente provaremos que $\mathscr{T}$ pertence à **C**. Sejam $w = w(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C$ e $1 \otimes B$ uma base do espaço vetorial $\mathscr{T}$, tal que B gera $L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(C)$ como grupo aditivo. Como w é multilinear, para provar que $\mathscr{T}$ satisfaz a identidade w, é suficiente mostrar que

$$w(1 \otimes b_1, 1 \otimes b_2, \ldots, 1 \otimes b_n) = 0,$$

$b_i \in B$. Contudo,

$$w(1 \otimes b_1, 1 \otimes b_2, \ldots, 1 \otimes b_n) = 1 \otimes w(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 1 \otimes 0 = 0,$$

pois $L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(C)$ satisfaz a identidade w. Logo $\mathscr{T}$ pertence a $\mathbf{C}$.

Resta-nos provar que $\mathscr{T}$ é livre na variedade $\mathbf{C}$. Sejam L uma K-álgebra em $\mathbf{C}$ e

$$\begin{array}{rccc} \beta: & \tilde{X} & \longrightarrow & L \\ & 1 \otimes \overline{x_i} & \longmapsto & l_i \end{array},$$

uma aplicação.

Como $L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(C)$ é o anel livre da variedade gerada por C, existe um único homomorfismo de anéis $\phi : L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(C) \longrightarrow L$ tal que $\phi(\overline{x_i}) = l_i$.

Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rl} \theta: & K \times (L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(C)) \longrightarrow L \\ & (\alpha, f + V_{\mathbb{Z}}(C)) \longmapsto \alpha\phi(f + V_{\mathbb{Z}}(C)) \end{array}.$$

É direto verificar que θ é uma aplicação bilinear que preserva produtos. Assim, pela propriedade universal do produto tensorial, existe um único homomorfismo de anéis $\overline{\theta}$ tal que

$$\begin{array}{rl} \overline{\theta}: & K \otimes_{\mathbb{Z}} L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(C) \longrightarrow L \\ & \alpha \otimes (f + V_{\mathbb{Z}}(C)) \longmapsto \alpha\phi(f + V_{\mathbb{Z}}(C)) \end{array}.$$

Temos que $\overline{\theta}$ é o único homomorfismo de $\mathscr{T}$ que estende β. Portanto $\mathscr{T}$ é a K-álgebra livre de $\mathbf{C}$ gerada livremente por $\tilde{X}$ e

$$K \otimes_{\mathbb{Z}} L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(C) \cong L_K(X)/V_K(C).$$

□

A proposição anterior também é válida quando o corpo base K tem característica positiva p. No entanto, neste caso devemos considerar a imagem do conjunto de identidades C módulo p, isto é, devemos considerar o homomorfismo de anéis $\varphi : L_{\mathbb{Z}}(X) \longrightarrow L_K(X)$ tal que $\varphi(x_i) = x_i$. Assim, devemos considerar o ideal gerado pelo conjunto $\varphi(C) = \varphi(C + pL_{\mathbb{Z}}(X))$ em $L_K(X)$. Mais precisamente temos o

Corolário 1.31. *Sejam K um corpo de característica $p \neq 0$ e $L_{\mathbb{Z}}(X)$ o anel de Lie livre de posto enumerável. Seja ainda $C \subset L_{\mathbb{Z}}(X)$ um conjunto de elementos (identidades) multilineares. Então*

$$L_K(X)/V_K(\varphi(C)) \cong K \otimes_{\mathbb{Z}} L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(C).$$

Este corolário se demonstra de forma análoga a Proposição 1.30, enunciamos separadamente apenas para simplificar as notações.

1.6 Produto Semidireto de Álgebras de Lie

Definição 1.32. Seja L uma álgebra de Lie sobre um anel associativo, comutativo e com unidade K. Uma derivação de L é uma aplicação K-linear

$$\begin{array}{rrcl} \delta: & L & \longrightarrow & L \\ & x & \longmapsto & [\delta, x] \end{array}$$

tal que

$$[\delta,[x,y]] = [[\delta,x],y] + [x,[\delta,y]]$$

para todos $x, y \in L$.

Denotamos por $Der_K(L)$ o conjunto de todas as derivações de L. Observamos que o conjunto $End_K(L)$ de todas aplicações K-lineares de L em L, isto é, todos endomorfismo de L vista como K-módulo, forma uma álgebra associativa com soma e multiplicação usuais e produto composição de aplicações. Além disso, não é difícil verificar que $Der_K(L)$ não é uma subalgebra associativa de $End_K(L)$, haja vista que não é fechado para composição de aplicações. Contudo, $Der_K(L)$ é uma subalgebra de Lie da álgebra de Lie adjunta à $End_K(L)$. Este fato está enunciado na proposição que segue.

Proposição 1.33. *$Der_K(L)$ forma uma álgebra de Lie com a usual K-linear estrutura de endomorfismo de espaços vetorias, com produto definido por*

$$[\delta_1, \delta_2] = \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1,$$

onde $\circ$ denota a composição de aplicações.

Esta proposição é de verificação direta.

Definição 1.34. Sejam L e G duas álgebras de Lie e $\varphi : G \to Der_K(L)$ um homomorfismo. A álgebra de Lie $G \ltimes L$ é chamada o produto semidireto de L e G com respeito à φ e é definida como o espaço vetorial $G \oplus L$ (soma direta de espaços vetoriais) com produto de Lie tal que

$$[(g_1, l_1), (g_2, l_2)] = ([g_1, g_2], [l_1, l_2] + [\varphi g_1, l_2] - [\varphi g_2, l_1]).$$

Observe que existem um ideal L_1 e uma subalgebra G_1 de $G \ltimes L$ tais que $L_1 \cong L$, $G_1 \cong G$ e $L_1 \cap G_1 = \{0\}$. Além disso, $[G_1, L_1] = G \ltimes L$, isto é, L_1 e G_1 juntos geram $G \ltimes L$ como álgebra.

Capítulo

2

Identidades de M_K visto como Álgebra Associativa

Neste capítulo K denota um anel associativo comutativo com unidade. O conjunto,

$$M_K = \begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in K \right\},$$

forma uma K-álgebra associativa com operações usuais de matrizes. É direto verificar que M_K satisfaz a identidade $u = x_1[x_2,x_3]x_4$.

Teorema I.4. *Seja K um corpo de característica zero. Então as identidades da K-álgebra associativa M_K têm base formada por $x_1[x_2,x_3]x_4$.*

Teorema I.5. *Seja K um corpo de característica zero. Então as identidades de M_K, visto como anel associativo, têm base formada por $x_1[x_2,x_3]x_4$.*

Estes dois teoremas são consequências dos resultados que seguem, os quais demonstramos, de fato, neste capítulo.

Teorema I.6. *Seja K um domínio de integridade infinito. Então as identidades da K-álgebra associativa M_K têm base formada por $x_1[x_2,x_3]x_4$.*

Teorema I.7. *Seja K um domínio de integridade de característica zero. Então as identidades de M_K, visto como anel associativo, têm base formada por $x_1[x_2,x_3]x_4$.*

Seja $K\langle X\rangle$ a K-álgebra associativa livre (sem unidade) de posto enumerável com geradores livres $x_1,x_2,\ldots$. Consideremos ainda $T_K(u)$ o T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por u e $T_K(M_K)$ o T-ideal de $K\langle X\rangle$ das identidades de M_K.

Seja G a álgebra associativa de matrizes genéricas correspondente a M_K, ou seja, a K-álgebra gerada livremente pelos elementos

$$g_r = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12}^{(r)} & \xi_{13}^{(r)} \\ 0 & \xi_{22}^{(r)} & \xi_{23}^{(r)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $K[\Xi] = K[\xi_{ij}^{(r)} \mid i=1,2;\ j=2,3;\ r=1,2,\ldots]$ é a álgebra de polinômios (associativa e comutativa) sem unidade, nas variáveis $\xi_{ij}^{(r)}$, de posto enumerável.

Pela Proposição 1.26, se K é um domínio de integridade infinito, a álgebra associativa M_K tem as mesmas identidades da álgebra associativa de matrizes genéricas G. Assim o Teorema I.6 é consequência do teorema que segue.

Teorema 2.1. *Para qualquer anel associativo comutativo unitário K, as identidades de G têm base formada por $x_1[x_2,x_3]x_4$.*

O teorema anterior por sua vez é equivalente ao seguinte teorema.

Teorema 2.2. *Seja K um anel associativo comutativo unitário. Então o T-ideal $T_K(G)$ é gerado por $u = x_1[x_2,x_3]x_4$ (como tal).*

Provaremos que $T_K(u) = T_K(G)$.

Como $T_K(u) \leq T_K(G)$, podemos considerar o homomorfismo canônico

$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & K\langle X\rangle/T_K(u) & \longrightarrow & G \\ & x_i + T_K(u) & \longmapsto & g_i \end{array}$$

É suficiente provarmos que φ é um isomorfismo. Com efeito, se φ é um isomorfismo, então $z \in T_K(G) - T_K(u)$ implica que $z + T_K(u) \in ker\varphi$. Assim, $z = 0$ (uma contradição) e $T_K(G) = T_K(u)$.

Para provar o Teorema 2.2 encontraremos um conjunto que gera $K\langle X\rangle / T_K(u)$ como K-módulo. Em seguida demonstraremos que a imagem deste conjunto por φ é linearmente independente em G.

Lema 2.3. *Seja K um anel associativo comutativo unitário. Então o conjunto*

$$\{x_{i_1}\ldots x_{i_k}+T_K(u) \mid k=1,2,\ldots;\ i_2\leq i_3\leq\ldots\leq i_{k-1}\}$$

gera $K\langle X\rangle / T_K(u)$ como K-módulo.

Demonstração: Sabemos que o conjunto $B=\{x_{i_1}\ldots x_{i_k} \mid k=1,2,\ldots\}$ gera livremente $K\langle X\rangle$ como K-módulo. Agora basta observar que a imagem de B no quociente $K\langle X\rangle / T_K(u)$ é exatamente $\{x_{i_1}\ldots x_{i_k}+T_K(u) \mid i_2\leq i_3\leq\ldots\leq i_{k-1}\}$. □

Lema 2.4.

$$\varphi(x_1\ldots x_n)=g_1\ldots g_n=\begin{pmatrix} 0 & \xi_{12}^{(1)}\xi_{22}^{(2)}\ldots\xi_{22}^{(n)} & \xi_{12}^{(1)}\xi_{22}^{(2)}\ldots\xi_{22}^{(n-1)}\xi_{23}^{(n)} \\ 0 & \xi_{22}^{(1)}\ldots\xi_{22}^{(n)} & \xi_{22}^{(1)}\ldots\xi_{22}^{(n-1)}\xi_{23}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este lema é de demonstração direta.

Demonstração do Teorema 2.2:

Se olharmos para a primeira linha e terceira coluna destas matrizes, isto é, o elemento $\xi_{12}^{(1)}\xi_{22}^{(2)}\ldots\xi_{22}^{(n-1)}\xi_{23}^{(n)}$, é fácil ver que o conjunto

$$\varphi(\{x_{i_1}\ldots x_{i_k} \mid i_2\leq i_3\leq\ldots\leq i_{k-1}\})=\{g_{i_1}\ldots g_{i_k} \mid i_2\leq i_3\leq\ldots\leq i_{k-1}\}$$

é linearmente independente, o que demonstra o Teorema 2.2. □

Demonstração do Teorema I.7: Provaremos que $T_{\mathbb{Z}}(M_K)=T_{\mathbb{Z}}(u)$. Como M_K satisfaz a identidade u, temos que $T_{\mathbb{Z}}(M_K)\supset T_{\mathbb{Z}}(u)$. Por outro lado, o anel associativo $M_{\mathbb{Z}}$ tem base de identidades formada por $u=x_1[x_2,x_3]x_4$. Assim $T_{\mathbb{Z}}(M_{\mathbb{Z}})=T_{\mathbb{Z}}(u)$. Como $M_{\mathbb{Z}}$ é subanel de M_K, segue que $T_{\mathbb{Z}}(M_K)\subset T_{\mathbb{Z}}(M_{\mathbb{Z}})$, o que implica que $T_{\mathbb{Z}}(M_K)\subset T_{\mathbb{Z}}(u)$. Portanto $T_{\mathbb{Z}}(M_K)=T_{\mathbb{Z}}(u)$, o que demonstra o corolário. □

Corolário 2.5. *Seja K um anel associativo comutativo unitário. Então*

$$T_K(u)=ideal\langle\{x_i[x_j,x_k]x_l \mid i,j,k,l\in\mathbb{N}\}\rangle.$$

Demonstração: Seja $I = \text{ideal}\langle\{x_i[x_j,x_k]x_l \mid i,j,k,l \in \mathbb{N}\}\rangle$. Consideremos o quociente $K\langle X\rangle/I$. Como $I \leq T_K(u)$, podemos considerar o homomorfismo canônico

$$\begin{aligned} \pi: \quad & K\langle X\rangle/I \longrightarrow K\langle X\rangle/T_K(u) \\ & x_i + I \longmapsto x_i + T_K(u) \end{aligned}$$

Tal como no Lema 2.3 $K\langle X\rangle/I$ é gerado livremente, como K-módulo, pelo conjunto

$$\{x_{i_1}\dots x_{i_k} + I \mid k = 1,2,\dots;\ i_2 \leq i_3 \leq \dots \leq i_{k-1}\}.$$

Desta forma π é um isomorfismo. Contudo, se $T_K(u) \neq I$, então existe $z \in T_K(u) - I$. Obtemos assim a contradição $z + I \in ker\pi$. Portanto, $I = T_K(u)$ e o Corolário 2.5 está demonstrado. □

Como consequência direta deste corolário, temos o seguinte resultado.

Corolário 2.6. *Sejam K um anel associativo comutativo unitário e $T_K(M_K, M_K^{(-)})$ o ideal das identidades fracas do par $(M_K, M_K^{(-)})$. Então o elemento $u = x_1[x_2,x_3]x_4$ gera $T_K(M_K, M_K^{(-)})$ como tal. Além disso, $T_K(M_K, M_K^{(-)}) = T_K(u)$.*

Demonstração: Segue imediatamente do corolário anterior, haja vista que $T_K(M_K, M_K^{(-)})$ contém o conjunto $\{x_i[x_j,x_k]x_l \mid i,j,k,l \in \mathbb{N}\}$. □

Capítulo

3

Identidades de M_K visto como Álgebra de Lie

Neste capítulo consideramos M_K visto como uma K-álgebra de Lie, onde K denota um corpo de característica 0,

$$M_K = \begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij} \in K \right\}.$$

É direto verificar que esta álgebra satisfaz a identidade $v = [x_1, x_2, [x_3, x_4], x_5]$. Assim a álgebra de Lie M_K é centro-por-metabeliana.

Teorema I.1. *Seja K um corpo de característica zero. Então as identidades de M_K vista como álgebra de Lie têm base formada pela identidade $v = [x_1, x_2, [x_3, x_4], x_5]$.*

Tal como na Proposição 1.26 a álgebra relativamente livre da variedade gerada por M_K é isomorfa a álgebra de matrizes genéricas G, gerada livremente pelos elementos

$$g_r = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12}^{(r)} & \xi_{13}^{(r)} \\ 0 & \xi_{22}^{(r)} & \xi_{23}^{(r)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sendo $K[\xi] = K[\xi_{ij}^{(r)} \mid i = 1,2; j = 2,3; r = 1,2,\ldots]$ a álgebra de polinômios (associativa e comutativa), nas variáveis $\xi_{ij}^{(r)}$, de posto enumerável.

Sejam $L_K(X)$ a álgebra de Lie livre sobre K, com geradores livres $x_1, x_2, \ldots$, $V_K(v)$ o ideal verbal de $L_K(X)$ gerado por $v = [x_1, x_2, [x_3, x_4], x_5]$ e $V_K(M_K)$ o ideal verbal das identidades de M_K.

Como $V_K(M_K) \supset V_K(v)$ podemos considerar o homomorfismo canônico induzido pela aplicação

$$\begin{array}{rllll} \psi: & L_K(X)/V_K(v) & \longrightarrow & L_K(X)/V_K(M_K) & \cong G \\ & x_i + V_K(v) & \longmapsto & x_i + V_K(M_K) & \leftrightarrow g_i. \end{array}$$

Provaremos que ψ é um isomorfismo entre a álgebra de Lie centro-por-metabeliana livre $\mathscr{L} = L_K(X)/V_K(v)$ e a álgebra de Lie de matrizes genéricas G. Consequentemente, como $G \cong L_K(X)/V_K(M_K)$ e os ideais $V_K(M_K)$ e $V_K(v)$ são verbais, obteremos que $V_K(M_K) = V_K(v)$. Em outras palavras temos o seguinte teorema.

Teorema 3.1. *Seja K um corpo de característica zero. Então o ideal verbal $V_K(M_K)$ é gerado por v, como tal.*

Provaremos que $ker\psi = \{0\}$. Para tanto, utilizaremos a seguinte observação.

Observação 3.2. Se $ker\psi \neq \{0\}$, então existe $f \in L_K(X)$ multilinear, $f \notin V_K(v)$, tal que $f + V_K(v) \in ker\psi$.

Demonstração: Suponhamos $ker\psi \neq \{0\}$ e consideremos $\overline{f} + V_K(v) \in ker\psi$, $\overline{f} \notin V_K(v)$. Desta forma $\overline{f}$ é uma identidade em G e, por conseguinte, em M_K. Além disso, sobre um corpo de característica zero toda identidade é equivalente a um conjunto de identidades multilineares. Logo $V_K(\overline{f}) \subset V_K(M_K)$ contém elementos multilineares. $\square$

Lema 3.3. *Se f é multilinear e $f + V_K(v) \in ker\psi$, então $f \in L_K(X)''$.*

Demonstração: Seja $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ como nas hipóteses do lema. Existem g e c tais que $f = g + c$, $c \in L_K(X)''$ e g é uma combinação linear de comutadores da forma

$$g = \sum_{k=2}^{n} \alpha_k [x_{i_k}, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, \hat{x}_{i_k}, \ldots, x_{i_n}];$$

$i_1 < \ldots < i_n$. Sejam

$$a = E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } b = E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos $[a,b] = E_{12}E_{22} - E_{22}E_{12} = E_{12} = a$. Para cada $r = 2,3,\ldots,n$ podemos substituir x_{i_r} por a e x_{i_s} por b para $s \neq r$. Segue que

$$f(b,\ldots,b,a,b,\ldots,b) = \alpha_r a + c(b,\ldots,b,a,b,\ldots,b) = 0.$$

Dado que a álgebra gerada por a e b é metabeliana, $c(b,\ldots,b,a,b,\ldots,b) = 0$. Logo $\alpha_r = 0$, para todo r o que implica que $g = 0$ e $f = c \in L_K(X)''$. □

Sejam $L_{\mathbb{Z}}(X)$ o anel de Lie livre livremente gerado por $\{x_1, x_2, \ldots\}$ e $V_{\mathbb{Z}}(v) < L_{\mathbb{Z}}(X)$ o ideal verbal gerado por $v = [x_1, x_2, [x_3, x_4], x_5]$. Seja ainda $\mathscr{P} = L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(v)$ o anel de Lie centro-por-metabeliano livre.

Utilizaremos a seguir um conjunto gerador de $L_K(X)/V_K(v)$ como espaço vetorial. Este conjunto foi obtido como consequência direta do teorema de Ju. V. Kuz'min [34]. No entanto, para obtermos uma demonstração independente para o Teorema I.1, redemonstraremos, no final deste capítulo, que tal conjunto gera o espaço vetorial $L_K(X)/V_K(v)$. A versão original do teorema de Kuz'min é a que segue. Observamos que nesta versão original o elemento

$$[x_i, x_j, [x_k, x_l]c], \text{ onde } c = y_{m_1} \ldots y_{m_{r-4}},$$

representa o comutador

$$[x_i, x_j, [x_k, x_l, x_{m_1}, \ldots, x_{m_{r-4}}]].$$

Teorema 3.4 (Kuz'min). *Sejam $\mathscr{P}_n$ o anel de Lie centro-por-metabeliano livre com geradores livres $x_1, \ldots, x_n$; $y_i = x_i + \mathscr{P}_n'$ e $\mathscr{P}_{n,r}''$ a componente homogênea de grau r do segundo comutador de $\mathscr{P}_n$.*

1) Se r é ímpar e $r > n$, então $\mathscr{P}_{n,r}''$ é um grupo abeliano livre com geradores

$$[x_i, x_j, [x_k, x_l]c], \text{ onde } c = y_{m_1} \ldots y_{m_{r-4}},$$

$i > j, k > l, i \geq k, j \geq l$ e $j \leq m_1 \leq \ldots \leq m_{r-4}$.

2) Se r é ímpar e $r \leq n$, então $\mathscr{P}_{n,r}''$ é soma direta do grupo abeliano livre pelos elementos *na forma do item anterior, com o 2-grupo abeliano elementar gerado pelos elementos na forma*

$$\omega(i,j,k,l,c) = [x_i,x_j,[x_k,x_l]c] + [x_i,x_k,[x_l,x_j]c] + [x_i,x_l,[x_j,x_k]c]$$

onde $c = y_{m_1}\dots y_{m_{r-4}}$. Estes elementos são invariantes sobre permutação de índices (incluindo índices na expressão de c); se dois índices são iguais, então $\omega(i,j,k,l,c) = 0$; além disso o conjunto de elementos $\omega(i,j,k,l,c)$ nos quais todos os índices são ordenados é linearmente independente.

3) Se r é par e $r > n$, então $\mathscr{P}''_{n,r}$ é uma soma direta do grupo abeliano livre cujos geradores livres são elementos tais como no item 1), onde $(i,j) \neq (k,l)$ e de um 2-grupo gerado pelos elementos linearmente independentes tais como em 1), onde $i = k$, $j = l$ e c não é um quadrado.

4) Se r é par e $r \leq n$, então devemos adicionar aos geradores do grupo abeliano livre descrito em 3) os elementos da forma $\omega(i,j,k,l,c)$ nos quais todos os índices são distintos e j,k,l são menores que todos os outros índices; estes elementos são skew-simétricos em j,k,l e invariantes sobre transposição de i com índice ocorrendo na expressão de c.

Sejam $L_{\mathbb{Z}}(X_r)$ o anel de Lie livre livremente gerado por $X_r = \{x_1,\dots,x_r\}$ e $V_{\mathbb{Z},r}(v)$ o ideal verbal de $L_{\mathbb{Z}}(X_r)$ gerado por v.

Como consequência imediata do teorema anterior temos o seguinte teorema.

Teorema 3.5. *O grupo abeliano aditivo $\mathscr{P}''_r$ pode ser escrito na forma*

$$\mathscr{P}''_r = \mathscr{A} \oplus \mathscr{B},$$

onde $\mathscr{A}$ é um grupo abeliano livre e $\mathscr{B}$ é um 2-grupo abeliano elementar. Temos

I) Se r é ímpar, então:

O grupo aditivo $\mathscr{A}$ tem base

$$u(i,j,k,l,m_1,\dots,m_{r-4}) + V_{\mathbb{Z},r}(v) = [x_i,x_j,[x_k,x_l,x_{m_1},\dots,x_{m_{r-4}}]] + V_{\mathbb{Z},r}(v), \tag{3.1}$$

onde $i > j, k > l, i \geq k, j \geq l$ e $j \leq m_1 \leq \dots \leq m_{r-4}$.

O grupo aditivo $\mathscr{B}$ tem base

$$\begin{aligned} w(i,j,k,l,\ldots,m_{r-4})+V_{\mathbb{Z},r}(v) &= [x_i,x_j,[x_k,x_l,x_{m_1},\ldots,x_{m_{r-4}}]] + \\ &+ [x_i,x_k,[x_l,x_j,x_{m_1},\ldots,x_{m_{r-4}}]] + \\ &+ [x_i,x_l,[x_j,x_k,x_{m_1},\ldots,x_{m_{r-4}}]] + V_{\mathbb{Z},r}(v), \end{aligned}$$

onde $i<j<k<\ldots<m_{r-4}$.

II) Se r é par, então:

O grupo aditivo $\mathscr{A}$ tem base formada pelos elementos

$$u(i,j,k,l,m_1,\ldots,m_{r-4})+V_{\mathbb{Z},r}(v),$$

tais que $(i,j)\neq(k,l)$ acrescentados aos elementos

$$w(i,\ldots,m_{r-4})+V_{\mathbb{Z},r}(v),$$

onde $i<j<k<l<m_1<\ldots<m_{r-4}$.

O grupo aditivo $\mathscr{B}$ tem base formada pelos elementos

$$u(i,j,k,l,m_1,\ldots,m_{r-4})+V_{\mathbb{Z},r}(v),$$

tais que $i=k, j=l$ e $x_{m_{2t-1}}\neq x_{m_{2t}}$ para algum $t\in\{1,2,\ldots,\frac{r-4}{2}\}$.

Como consequência deste teorema, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.6. *$\mathscr{L}''$ é um espaço vetorial com base formada pelos elementos*

I) Para r ímpar

$$u(i,j,k,l,m_1,\ldots,m_{r-4})+V_K(v), \tag{3.2}$$

$r\geq 4, i>j, k>l, i\geq k, j\geq l$ *e* $j\leq m_1\leq\ldots\leq m_{r-4}$.

II) Para r par

$$u(i,j,k,l,m_1,\ldots,m_{r-4})+V_K(v), \tag{3.3}$$

$r \geq 4, i > j, k > l, i \geq k, j \geq l$ e $j \leq m_1 \leq \ldots \leq m_{r-4}; (i,j) \neq (k,l)$. *Além dos elementos*

$$w(i,j,k,l,\ldots,m_{r-4}) + V_K(v), \tag{3.4}$$

$i < j < k < l < m_1 < \ldots < m_{r-4}$.

Demonstração: Observe que, pela Proposição 1.30, $\mathscr{L} \cong K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{P}$, isto é, a K-álgebra de Lie centro por metabeliana livre é o produto tensorial do anel de Lie centro por metabeliano livre pelo corpo K. Por outro lado, o K-espaço vetorial $K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{P}$ tem base formada pelos elementos $1 \otimes v$, onde v pertence a base de $\mathscr{P}$ descrita no Teorema 3.5. Além disso, se $2v = 0$, então $1 \otimes v = \frac{1}{2} \otimes 2v = 0$. Logo os elementos descritos no corolário geram $\mathscr{L}$. É direto verificar que estes elementos são linearmente independentes, o que demonstra o corolário. $\square$

3.1 Demonstração do Teorema 3.1

Pelo Lema 3.3, resta-nos mostrar que a imagem dos elementos multilineares nas formas (3.2), (3.3) e (3.4) por ψ é linearmente independente.

Lema 3.7.

$$\psi(u(i,j,k,l,m_1,\ldots,m_{r-4})) = [g_i, g_j, [g_k, g_l, g_{m_1}, \ldots, g_{m_{r-4}}]] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{u} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $r \geq 4$ *e*

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}(i,j,k,l,m_1,\ldots,m_{r-4}) \\ &= \{(-1)^{r+1}(\xi_{12}^{(i)}\xi_{22}^{(j)} - \xi_{22}^{(i)}\xi_{12}^{(j)})(\xi_{23}^{(k)}\xi_{22}^{(l)} - \xi_{22}^{(k)}\xi_{23}^{(l)}) - (\xi_{22}^{(i)}\xi_{23}^{(j)} - \xi_{23}^{(i)}\xi_{22}^{(j)}) \times \\ &\quad \times (\xi_{12}^{(k)}\xi_{22}^{(l)} - \xi_{22}^{(k)}\xi_{12}^{(l)})\}\xi_{22}^{(m_1)} \ldots \xi_{22}^{(m_{r-4})}. \end{aligned}$$

Demonstração:

$$[g_r, g_s] = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12}^{(r)}\xi_{22}^{(s)} - \xi_{22}^{(r)}\xi_{12}^{(s)} & * \\ 0 & 0 & \xi_{22}^{(r)}\xi_{23}^{(s)} - \xi_{23}^{(r)}\xi_{22}^{(s)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $* \in K[\xi]$. Assim

$$[g_k, g_l, g_{m_1}] = \begin{pmatrix} 0 & (\xi_{12}^{(k)}\xi_{22}^{(l)} - \xi_{22}^{(k)}\xi_{12}^{(l)})\xi_{22}^{(m_1)} & * \\ 0 & 0 & -(\xi_{22}^{(k)}\xi_{23}^{(l)} - \xi_{23}^{(k)}\xi_{22}^{(l)})\xi_{22}^{(m_1)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$* \in K[\xi]$. Temos ainda

$$[g_i, g_j, [g_k, g_l, g_{m_1}]] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde

$$a_{13} = \{((\xi_{12}^{(i)}\xi_{22}^{(j)} - \xi_{22}^{(i)}\xi_{12}^{(j)})(\xi_{23}^{(k)}\xi_{22}^{(l)} - \xi_{22}^{(k)}\xi_{23}^{(l)}) - (\xi_{22}^{(i)}\xi_{23}^{(j)} - \xi_{23}^{(i)}\xi_{22}^{(j)})(\xi_{12}^{(k)}\xi_{22}^{(l)} - \xi_{22}^{(k)}\xi_{12}^{(l)})\}\xi_{22}^{(m_1)}.$$

Indutivamente temos:

$$[g_i, g_j, [g_k, g_l, g_{m_1}, \ldots, g_{m_{r-4}}]] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{u} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $r \geq 4$ e

$$\begin{aligned} \bar{u} \;=\; & \{(-1)^{r+1}(\xi_{12}^{(i)}\xi_{22}^{(j)} - \xi_{22}^{(i)}\xi_{12}^{(j)})(\xi_{23}^{(k)}\xi_{22}^{(l)} - \xi_{22}^{(k)}\xi_{23}^{(l)}) - (\xi_{22}^{(i)}\xi_{23}^{(j)} - \xi_{23}^{(i)}\xi_{22}^{(j)})\times \\ & \times(\xi_{12}^{(k)}\xi_{22}^{(l)} - \xi_{22}^{(k)}\xi_{12}^{(l)})\}\xi_{22}^{(m_1)}\ldots\xi_{22}^{(m_{r-4})}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

□

Sabemos que $K[\xi]$ possui graduação $K[\xi] = P_0 \oplus P_1 \oplus \ldots$, onde P_i é o espaço vetorial gerado pelos monômios de grau i; $i = 0, 1, 2, \ldots$. Segue que $G'' = E_4 \oplus E_5 \oplus E_6 \oplus \ldots$, onde E_s é um subespaço vetorial de G'' com matrizes na forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b_s \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e b_s é um polinômio de grau s em $K[\xi]$.

Lema 3.8. *Suponha que a imagem (por ψ) dos elementos multilineares nas formas (3.3) e (3.4)* *tais que*

$$\{i, j, k, l, m_1, \ldots, m_{r-4}\} = \{1, \ldots, r\}$$

é linearmente independente. Então a imagem do conjunto de todos elementos multilineares nas formas (3.3) e (3.4) é linearmente independente.

Demonstração: Vimos acima que $G'' = E_4 \oplus E_5 \oplus E_6 \oplus \ldots$. Como estamos interessados apenas em elementos multilineares, podemos nos restringir aos subespaços de E_r gerados por elementos multilineares, isto é, subespaços vetoriais de E_r da forma

$$V(i_1, \ldots, i_r) = \left\langle \{[g_{i_1}, g_{i_2}, [g_{i_3}, g_{i_4}, \ldots, g_{i_r}]] \mid i_p \neq i_q, \text{ se } p \neq q\} \right\rangle.$$

Consideremos o endomorfismo δ de G que estende a aplicação

$$g_t \to g_t, t \in \{1, \ldots, r\};\ g_t \to 0, t \notin \{1, \ldots, r\}.$$

Observe que δ aplica identicamente elementos multilineares nas formas (3.3) e (3.4) tais que

$$\{i, j, k, l, m_1, \ldots, m_{r-4}\} = \{1, \ldots, r\}.$$

Além disso, demais elementos multilineares nas formas (3.3) e (3.4) são aplicados para 0. Em outras palavras

$$\delta(V(1, \ldots, r)) = V(1, \ldots, r) \text{ e } \delta(V(i_1, \ldots, i_r)) = \{0\}, \text{ se } \{i_1, \ldots, i_r\} \neq \{1, \ldots, r\}.$$

Segue que $V(i_1, \ldots, i_r) \cap V(1, \ldots, r) = \{0\}$, se $\{i_1, \ldots, i_r\} \neq \{1, \ldots, r\}$. Analogamente

$$V(i_1, \ldots, i_r) \cap V(j_1, \ldots, j_r) = \{0\}, \text{ se } \{i_1, \ldots, i_r\} \neq \{j_1, \ldots, j_r\}.$$

Por outro lado, se os elementos nas condições do Lema 3.8 são linearmente independentes, obtemos que eles o são para qualquer conjunto de índices $\{i, j, k, l, m_1, \ldots, m_{r-4}\}$. Basta considerar um isomorfismo ϕ de G, induzido por uma permutação dos geradores g_i, tal que

$$\phi(g_1) = g_i,\ \phi(g_2) = g_j, \ldots,\ \phi(g_r) = g_{m_{r-4}},$$

assim, $\phi(V(1, \ldots, r)) = V(i, j, k, l, m_1, \ldots, m_{r-4})$. $\square$

Demonstração do Teorema 3.1:

Provaremos que ψ é um isomorfismo entre álgebra de Lie centro-por-metabeliana livre $\mathscr{L} = L_K(X)/V_K(v)$ e G. Pelo Lema 3.3 e pelo Corolário 3.6 é suficiente provar a independência linear dos elementos multilineares nas formas (3.3) e (3.4). Utilizando o lema anterior podemos supor que

$$\{i, j, k, l, m_1, \ldots, m_{r-4}\} = \{1, \ldots, r\}.$$

Como $j < i, l < k < i$ e $l < j < m_1 < \ldots < m_{r-4}$, segue que $l = 1$ e $j \in \{2,3\}$. Se $j = 3$ então $k = 2$. Assim temos os seguintes elementos:

Para $j = 3$ temos os elementos da forma

$$\bar{u}(s,3,2,1,4,\ldots,\hat{s},\ldots,r) = \{(-1)^{r+1}(\xi_{12}^{(s)}\xi_{22}^{(3)} - \xi_{22}^{(s)}\xi_{12}^{(3)})(\xi_{23}^{(2)}\xi_{22}^{(1)} - \xi_{22}^{(2)}\xi_{23}^{(1)})$$

$$-(\xi_{22}^{(s)}\xi_{23}^{(3)} - \xi_{23}^{(s)}\xi_{22}^{(3)})(\xi_{12}^{(2)}\xi_{22}^{(1)} - \xi_{22}^{(2)}\xi_{12}^{(1)})\}\xi_{22}^{(4)}\ldots\hat{\xi}_{22}^{(s)}\ldots\xi_{22}^{(r)},$$

$(s = 4, \ldots, r)$ totalizando $r-3$ elementos. São eles:

$\bar{u}(4,3,2,1,5,\ldots,r)$; $\bar{u}(5,3,2,1,4,6,\ldots,r)$; $\bar{u}(6,3,2,1,4,5,7,\ldots,r)$; $\ldots$;
$\bar{u}(r,3,2,1,,4,\ldots,r-1)$.

Para $j = 2$ temos os elementos da forma

$$\bar{u}(s,2,t,1,3,\ldots,\hat{t},\ldots,\hat{s},\ldots,r) = \{(-1)^{r+1}(\xi_{12}^{(s)}\xi_{22}^{(2)} - \xi_{22}^{(s)}\xi_{12}^{(2)})(\xi_{23}^{(t)}\xi_{22}^{(1)} - \xi_{22}^{(t)}\xi_{23}^{(1)})$$

$$-(\xi_{22}^{(s)}\xi_{23}^{(2)} - \xi_{23}^{(s)}\xi_{22}^{(2)})(\xi_{12}^{(t)}\xi_{22}^{(1)} - \xi_{22}^{(t)}\xi_{12}^{(1)})\}\xi_{22}^{(3)}\ldots\hat{\xi}_{22}^{(t)}\ldots\hat{\xi}_{22}^{(s)}\ldots\xi_{22}^{(r)},$$

$r \geq s > t \geq 3$; totalizando $\frac{(r-3)(r-2)}{2}$. São eles:

$\bar{u}(4,2,3,1,5,\ldots,r)$; $\bar{u}(5,2,3,1,4,6\ldots,r)$; $\bar{u}(5,2,4,1,3,6\ldots,r)$; $\bar{u}(6,2,3,1,4,\ldots,r)$; $\ldots$;

$\bar{u}(6,2,4,1,3,5,\ldots,r)$; $\bar{u}(6,2,5,1,3,4,\ldots,r)$; $\bar{u}(r,2,3,1,4,\ldots,r-1)$; $\ldots$

$\bar{u}(r,2,4,1,3,5,\ldots,r-1)$; $\ldots$; $\bar{u}(r,2,r-1,1,3,\ldots,r-2)$.

Temos ainda um único elemento na forma (3.4) cuja imagem é

$$\bar{w}(4,3,2,1,5,\ldots,r) = \bar{u}(4,3,2,1,5,\ldots,r) + \bar{u}(4,2,1,3,5,\ldots,r) + \bar{u}(4,1,3,2,5,\ldots,r)$$

$$= \{\xi_{12}^{(3)}(\xi_{23}^{(2)}\xi_{22}^{(1)} - \xi_{22}^{(2)}\xi_{23}^{(1)}) + \xi_{12}^{(2)}(\xi_{23}^{(1)}\xi_{22}^{(3)} - \xi_{22}^{(1)}\xi_{23}^{(3)}) + \xi_{12}^{(1)}(\xi_{23}^{(3)}\xi_{22}^{(2)} - \xi_{22}^{(3)}\xi_{23}^{(2)})\}\xi_{22}^{(4)} \dots \xi_{22}^{(r)}.$$

Suponhamos que alguma combinação linear destes elementos seja nula. Observe agora que nos elementos $\overline{u}(s,2,t,1,3,\dots,\hat{t},\dots,\hat{s},\dots,r)$ aparecem os monômios

$$\xi_{12}^{(s)}\xi_{22}^{(2)}\xi_{23}^{(t)}\xi_{22}^{(1)}\xi_{22}^{(3)} \dots \hat{\xi}_{22}^{(t)} \dots \hat{\xi}_{22}^{(s)} \dots \xi_{22}^{(r)}$$

$r \geq s > t \geq 3$, que não está presente nos demais monômios acima. Assim o coeficiente dos elementos $\overline{u}(s,2,t,1,3,\dots,\hat{t},\dots,\hat{s},\dots,r)$ deve ser nulo. Na expressão restante observe que nos elementos $\overline{u}(s,3,2,1,4,\dots,\hat{s},\dots,r)$ aparecem os monômios

$$\xi_{12}^{(s)}\xi_{22}^{(3)}\xi_{23}^{(2)}\xi_{22}^{(1)}\xi_{22}^{(4)} \dots \hat{\xi}_{22}^{(s)} \dots \xi_{22}^{(r)};$$

$s = 4,\dots,r$.

Segue que todos os coeficientes devem ser nulos. O que demonstra o teorema. □

3.2 Geradores do grupo aditivo $L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(v)$

Nesta seção exibiremos um conjunto que gera, como grupo aditivo, o anel de Lie centro-por-metabeliano livre $\mathscr{P} = L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(v)$. Para tanto, provaremos parte do Teorema 3.4, devido a Kuz'min. Demonstraremos que o conjunto exibido neste teorema gera, como grupo aditivo, $\mathscr{P}''$ e acrescentaremos alguns elementos para obter um conjunto gerador de $\mathscr{P}$. Com isto teremos uma prova do Teorema I.1 independente do resultado de Kuz'min. Enunciamos o resultado aqui demonstrado no próximo teorema.

Teorema 3.9. *O grupo abeliano aditivo $\mathscr{P}_r''$ pode ser escrito na forma*

$$\mathscr{P}_r'' = \mathscr{A} \oplus \mathscr{B},$$

onde $\mathscr{A}$ é um grupo abeliano livre e $\mathscr{B}$ é um 2-grupo abeliano elementar. Temos

I) Se r é ímpar, então:

O grupo aditivo $\mathscr{A}$ é gerado por

$$u(i,j,k,l,m_1,\dots,m_{r-4}) + V_{\mathbb{Z},r}(v) = [x_i,x_j,[x_k,x_l,x_{m_1},\dots,x_{m_{r-4}}]] + V_{\mathbb{Z},r}(v), \quad (3.6)$$

onde $i > j, k > l, i \geq k, j \geq l$ *e* $j \leq m_1 \leq \ldots \leq m_{r-4}$.

O grupo aditivo $\mathscr{B}$ *é gerado por*

$$\begin{aligned} w(i,j,k,l,\ldots,m_{r-4}) + V_{\mathbb{Z},r}(v) &= [x_i,x_j,[x_k,x_l,x_{m_1},\ldots,x_{m_{r-4}}]] + \\ &+ [x_i,x_k,[x_l,x_j,x_{m_1},\ldots,x_{m_{r-4}}]] + \\ &+ [x_i,x_l,[x_j,x_k,x_{m_1},\ldots,x_{m_{r-4}}]] + V_{\mathbb{Z},r}(v), \end{aligned}$$

onde $i < j < k < \ldots < m_{r-4}$.

II) Se r é par, então:

O grupo aditivo $\mathscr{A}$ *é gerado pelos elementos*

$$u(i,j,k,l,m_1,\ldots,m_{r-4}) + V_{\mathbb{Z},r}(v),$$

tais que $(i,j) \neq (k,l)$ *acrescentados aos elementos*

$$w(i,\ldots,m_{r-4}) + V_{\mathbb{Z},r}(v),$$

onde $i < j < k < l < m_1 < \ldots < m_{r-4}$.

O grupo aditivo $\mathscr{B}$ *é gerado pelos elementos*

$$u(i,j,k,l,m_1,\ldots,m_{r-4}) + V_{\mathbb{Z},r}(v),$$

tais que $i = k, j = l$ *e* $x_{m_{2t-1}} \neq x_{m_{2t}}$ *para algum* $t \in \{1,2,\ldots,\frac{r-4}{2}\}$.

A demonstração da independência linear destes elementos é um fato profundo a qual não faremos aqui, mas pode ser encontrada em [34], artigo que tem a prova completa do Teorema 3.4.

Primeiramente observemos que para obter uma base do anel $\mathscr{P}$ basta adicionar, aos geradores de $\mathscr{P}''$, os elementos do conjunto

$$\{[x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},\ldots,x_{i_k}] \mid i_1 > i_2 \leq i_3 \leq \ldots \leq i_k;\ k = 1,2,3,\ldots\} + V_{\mathbb{Z}}(v)$$

o qual sabemos que gera $\mathscr{P}/\mathscr{P}''$ como grupo aditivo.

O ideal $\mathscr{P}''$ é gerado pelo conjunto $C = \{[c_1, c_2, [c_3, c_4]] \mid c_i \in \mathscr{P}\}$. No entanto, este conjunto é central em $\mathscr{P} = L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(v)$, haja vista que $v = [x_1, x_2, [x_3, x_4], x_5]$. Assim, $\mathscr{P}''$ é igual ao grupo aditivo gerado por C.

Por outro lado, sabemos que o ideal derivado $\mathscr{P}'$ é gerado por comutadores à esquerda da forma

$$\{[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}] \mid k = 2, 3, \ldots\}.$$

Assim $\mathscr{P}''$ é gerado como grupo aditivo por

$$\{[x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}, [x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}]] \mid s, t = 2, 3, \ldots\}.$$

Nesta construção dos geradores de $\mathscr{P}''$ utilizaremos algumas identidades, tais como

$$[x_1, x_2, [x_3, x_4, x_5]] = -[x_1, x_2, x_5, [x_3, x_4]] \pmod{V_{\mathbb{Z}}(v)}.$$

O que se prova facilmente usando a identidade de Jacobi.

Assim temos que $\mathscr{P}''$ é gerado por

$$u(i, j, k, l, m_1, \ldots, m_{r-4}) = [x_i, x_j, [x_k, x_l, x_{m_1}, \ldots, x_{m_{r-4}}]].$$

Além disso, pela anti-comutatividade do produto de Lie podemos supor

$$i > j, k > l, i \geq k.$$

Temos ainda a identidade

$$[x_1, x_2, [x_3, x_4, x_5, x_6]] = [x_1, x_2, [x_3, x_4, x_6, x_5]] \pmod{V_{\mathbb{Z}}(v)}.$$

Logo, podemos supor

$$m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_{r-4}.$$

Algumas vezes omitiremos os índices $m_1, \ldots, m_{r-4}$, fazendo

$$u(i, j, k, l) = u(i, j, k, l, m_1, \ldots, m_{r-4}).$$

A seguir apresentaremos e demonstraremos alguns lemas. Todos eles foram demonstrados por Kuz'min em [34].

Lema 3.10. *O anel $\mathscr{P}''$ é gerado como grupo aditivo por*

$$u(i,j,k,l) = [x_i, x_j, [x_k, x_l, x_{m_1}, \ldots, x_{m_{r-4}}]] + V_{\mathbb{Z}}(v) \tag{3.7}$$

$i > j;\ k > l;\ i \geq k;\ j,l \leq m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_{r-4}$.

Demonstração: Já provamos a suficiência de todas condições, exceto $j,l \leq m_1$. Pela identidade de Jacobi temos

$$\begin{aligned}
[x_i, x_j, [x_k, x_l, x_{m_1}]] &= -[x_i, x_j, [x_l, x_{m_1}, x_k]] - [x_i, x_j, [x_{m_1}, x_k, x_l]] \\
&= -[x_i, x_j, [x_l, x_{m_1}, x_k]] + [x_i, x_j, [x_k, x_{m_1}, x_l]].
\end{aligned}$$

Desta forma podemos supor que $l \leq m_1$. Por outro lado, também podemos supor que $j \leq m_1$. De fato, se $j > m_1$

$$[x_i, x_j, [x_k, x_l, x_{m_1}]] = -[x_i, x_j, x_{m_1}, [x_k, x_l]] = [([x_j, x_{m_1}, x_i] + [x_{m_1}, x_i, x_j]), [x_k, x_l]] =$$

$$= -[[x_j, x_{m_1}], [x_k, x_l, x_i]] + [[x_{m_1}, x_i], [x_k, x_l, x_j]] \pmod{V_{\mathbb{Z}}(v)}.$$

Como $i > j > m \geq l$ e $l < k$, os dois últimos termos tem a forma desejada. □

Chamaremos um elemento satisfazendo as condições deste lema de monotônico se $j \geq l$. Seja

$$w(i,j,k,l,m_1,\ldots,m_{r-4}) = w(i,j,k,l) = u(i,j,k,l) + u(i,k,l,j) + u(i,l,j,k)$$

o qual chamaremos elemento jacobiano. Estas nomenclaturas são baseadas no artigo de Kuz'min [34].

Lema 3.11. *Os elementos jacobianos e os elementos monotônicos geram $\mathscr{P}''$.*

Demonstração: Suponhamos que um elemento na forma (3.7) não é monotônico, isto é, $j < l$. Assim,

$$u(i,j,k,l) = w(i,j,k,l) - u(i,k,l,j) + u(i,l,k,j)$$

o terceiro termo é monotônico. Se $k \leq m_1$ o segundo termo também o é. Caso contrário, podemos utilizar a identidade de Jacobi, como fizemos no lema anterior, para escrever os elementos na forma desejada. □

Observe que no lema anterior utilizamos apenas de elementos jacobianos tais que $i \geq k,\ j < l$ e $l \leq m_1$. Assim $\mathscr{P}$ é gerado por elementos monotônicos, isto é, elementos $u(i,j,k,l,\ldots,m_{r-4})$ tais que

$$i > j,\ k > l,\ i \geq k,\ j \geq l \text{ e } j \leq m_1 \leq \ldots \leq m_{r-4}$$

e elementos jacobianos tais que

$$i \geq k > l > j,\ l \leq m_1.$$

Lema 3.12.

$$w(i,j,k,l,m_1,\ldots,m_t) = w(m_1,j,k,l,i,\ldots,m_t).$$

Demonstração:

$$w(i,j,k,l,m_1,\ldots) = -([x_i,x_j,x_{m_1},[x_k,x_l,\ldots]] + [x_i,x_k,x_{m_1},[x_l,x_j,\ldots]] + [x_i,x_l,x_{m_1},[x_j,x_k,\ldots]])$$

$$\begin{aligned}
&= [x_j,x_{m_1},x_i,[x_k,x_l,\ldots]] + [x_{m_1},x_i,x_j[x_k,x_l,\ldots]] + [x_k,x_{m_1},x_i,[x_l,x_j,\ldots]] \\
&+ [x_{m_1},x_i,x_k,[x_l,x_j,\ldots]] + [x_l,x_{m_1},x_i,[x_j,x_k,\ldots]] + [x_{m_1},x_i,x_l,[x_j,x_k,\ldots]] \\
\\
&= [x_{m_1},x_j,[x_k,x_l,x_i\ldots]] - [x_{m_1},x_i,[x_k,x_l,x_j\ldots]] + [x_{m_1},x_k,[x_l,x_j,x_i\ldots]] \\
&- [x_{m_1},x_i,[x_l,x_j,x_k\ldots]] + [x_{m_1},x_l,[x_j,x_k,x_i\ldots]] - [x_{m_1},x_i,[x_j,x_k,x_l\ldots]] \\
\\
&= [x_{m_1},x_j,[x_k,x_l,x_i\ldots]] + [x_{m_1},x_k,[x_l,x_j,x_i\ldots]] + [x_{m_1},x_l,[x_j,x_k,x_i\ldots]] \\
&- [x_{m_1},x_i,([x_k,x_l,x_j\ldots] + [x_l,x_j,x_k\ldots] + [x_j,x_k,x_l\ldots])] \\
\\
&= [x_{m_1},x_j,[x_k,x_l,x_i\ldots]] + [x_{m_1},x_k,[x_l,x_j,x_i\ldots]] + [x_{m_1},x_l,[x_j,x_k,x_i\ldots]] \\
\\
&= w(m_1,j,k,l,i,\ldots).
\end{aligned}$$

□

Com este lema podemos considerar elementos jacobianos tais que

$$j < l < k \leq i \leq m_1 \leq \ldots \leq m_{r-4}. \tag{3.8}$$

Lema 3.13.

$$w(i,j,k,l,m_1,\ldots,m_t) = -w(k,j,i,l,m_1,\ldots,m_t),$$

se t é ímpar e

$$w(i,j,k,l,m_1,\ldots,m_t) = w(k,j,i,l,m_1,\ldots,m_t) + 2u(i,k,l,j,m_1,\ldots,m_t),$$

se t é par.

Demonstração:

$$\begin{aligned} w(i,j,k,l,m_1,\ldots,m_t) &= [x_i,x_j,[x_k,x_l,x_{m_1},\ldots]] + [x_i,x_k,[x_l,x_j,x_{m_1},\ldots]] \\ &\quad + [x_i,x_l,[x_j,x_k,x_{m_1},\ldots]] \\ \\ &= \pm[x_k,x_l,[x_j,x_i,x_{m_1},\ldots]] - [x_k,x_i,[x_l,x_j,x_{m_1},\ldots]] \\ &\quad \pm[x_k,x_j,[x_i,x_l,x_{m_1},\ldots]]. \end{aligned}$$

Se t é ímpar temos

$$w(i,j,k,l,m_1,\ldots,m_t) = -w(k,j,i,l,m_1,\ldots,m_t).$$

Se t é par temos

$$w(i,j,k,l,m_1,\ldots,m_t) = [x_k,x_l,[x_j,x_i,x_{m_1}\ldots]] - [x_k,x_i,[x_l,x_j,x_{m_1}\ldots]] + [x_k,x_j,[x_i,x_l,x_{m_1}\ldots]]$$

$$= w(k,j,i,l,m_1,\ldots,m_t) + 2[x_i,x_k,[x_l,x_j,x_{m_1}\ldots]].$$

$\square$

Com este último lema podemos considerar elementos jacobianos tais que todos os índices são distintos. De fato, se $i = k$, temos

$$\begin{aligned} w(i,j,i,l,m_1,\ldots,m_t) &= u(i,j,i,l,m_1,\ldots,m_t) + u(i,l,j,i,m_1,\ldots,m_t) \\ \\ &= (-1)^{t+1}u(i,l,i,j,m_1,\ldots,m_t) - u(i,l,i,j,m_1,\ldots,m_t). \end{aligned}$$

Assim $w(i,j,i,l,m_1,\ldots,m_t)$ é nulo ou é igual $-2u(i,l,i,j,m_1,\ldots,m_t)$, o qual é um elemento monotônico.

Por (3.8) e pelo Lema 3.12 é suficiente considerar o caso $i = m_1$. Se t é ímpar, pelo Lema

3.13 , temos

$$\begin{aligned}
w(i,j,k,l,i,m_2,\dots,m_t) &= -w(k,j,i,l,i,m_2,\dots,m_t) = -w(i,j,i,l,k,m_2,\dots,m_t) \\
&= -w(i,j,i,l,k,m_2,\dots,m_t) \\
&= -u(i,j,i,l,k,m_2,\dots,m_t) - u(i,l,j,i,k,m_2,\dots,m_t) \\
&= (-1)^t u(i,l,i,j,k,m_2,\dots,m_t) + u(i,l,i,j,k,m_2,\dots,m_t).
\end{aligned}$$

Se t é par, novamente usando o Lema 3.13, temos

$$\begin{aligned}
w(i,j,k,l,i,m_2,\dots,m_t) &= (-1)^{t+1} u(i,l,i,j,k,m_2,\dots,m_t) - u(i,l,i,j,k,m_2,\dots,m_t) + \\
&\quad +2u(i,k,l,j,i,m_2,\dots,m_t).
\end{aligned}$$

Assim, se t é ímpar $w(i,j,k,l,i,m_2,\dots,m_t) = 0$ e se t é par

$$w(i,j,k,l,i,m_2,\dots,m_t) = -2u(i,l,i,j,k,m_2,\dots,m_t) + 2u(i,k,l,j,i,m_2,\dots,m_t).$$

Onde $u(i,l,i,j,k,m_2,\dots,m_t)$ e $u(i,k,l,j,i,m_2,\dots,m_t)$ são monotônicos.

Assim provamos que $\mathscr{P}''$ é gerado por elementos monotônicos $u(i,l,i,j,k,m_2,\dots,m_t)$ juntamente com elementos jacobianos $w(i,l,i,j,k,m_2,\dots,m_t)$ tais que $j < l < k < i < m_1 < \ldots < m_t$. Estes últimos podem ser substituídos por elementos jacobianos tais que $i < j < k < l < m_1 < \ldots < m_t$. Resta-nos provar que certos elementos têm ordem aditiva 2.

Lema 3.14. *Se t é ímpar*

$$2w(i,j,k,l,m_1,\dots,m_t) = 0.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
w(i,j,k,l,m_1,\dots) &= w(m_1,j,k,l,i,\dots) &&= -w(k,j,m_1,l,i,\dots) \\
&= -w(i,j,m_1,l,k,\dots) &&= w(m_1,j,i,l,k,\dots) \\
&= w(k,j,i,l,m_1,\dots) &&= -w(i,j,k,l,m_1,\dots).
\end{aligned}$$

Logo,

$$2w(i,j,k,l,m_1,\dots,m_t) = 0.$$

□

Lema 3.15.

1)

$$2u(i,j,i,j,m_1,\dots,m_{2t}) = 0$$

e

2)

$$u(i,j,i,j,m_1,m_1,m_2,m_2,\dots,m_t,m_t) = 0.$$

Demonstração: 1)

$$\begin{aligned} u(i,j,i,j,m_1,\dots,m_{2t}) &= [x_i,x_j,[x_i,x_j,x_{m_1},\dots,x_{m_{2t}}]] \\ &= [x_i,x_j,x_{m_1},\dots,x_{m_{2t}},[x_i,x_j]] \\ &= -[x_i,x_j,[x_i,x_j,x_{m_1},\dots,x_{m_{2t}}]]. \end{aligned}$$

Logo

$$2u(i,j,i,j,m_1,\dots,m_{2t}) = 2[x_i,x_j,[x_i,x_j,x_{m_1},\dots,x_{m_{2t}}]] = 0$$

2)

$$\begin{aligned} u(i,j,i,j,m_1,m_1,m_2,m_2,\dots,m_t,m_t) &= [x_i,x_j,[x_i,x_j,x_{m_1},x_{m_1},\dots,x_{m_t},x_{m_t}]] \\ &= \pm[x_i,x_j,x_{m_1},\dots,x_{m_t},[x_i,x_j,x_{m_1},\dots,x_{m_t}]] = 0. \end{aligned}$$

Desta forma provamos que os elementos $u(i,j,i,j,m_1,m_1,m_2,m_2,\dots,m_t,m_t)+V_{\mathbb{Z}}(v)$ são nulos e que os elelementos $u(i,j,i,j,m_1,m_2,\dots,m_{2t})$ e os elementos $w(i,j,i,j,m_1,m_2,\dots,m_{2t+1})$ tem ordem aditiva 2, o que demonstra o Teorema 3.9. □

Com isto tornamos nossa demonstração do Teorema I.1 completa e independente do resultado de Kuz'min (Teorema 3.4), haja vista que não utilizamos que os elementos descritos neste teorema são linearmente independentes.

Capítulo 4

Identidades de M_K visto como Anel de Lie

Neste capítulo provaremos que, para um corpo K de característica zero, M_K visto como anel de Lie não possui nenhuma base finita para suas identidades. Para tanto, exibiremos uma base infinita minimal (em certo sentido) das identidades deste anel de Lie. O principal resultado deste capítulo é o seguinte teorema:

Teorema I.2. *Seja K um corpo de característica zero. Então o conjunto*

$$\{[x_1,x_2,[x_3,x_4],x_5]\}\cup\{[x_1,x_2,[x_1,x_2,x_3,\ldots,x_r]]\mid r=4,6,8,\ldots\}\cup$$

$$\{[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5,\ldots,x_r]]+[x_1,x_3,[x_4,x_2,x_5,\ldots,x_r]]+[x_1,x_4,[x_2,x_3,x_5,\ldots,x_r]]\mid r=7,9,\ldots\} \tag{4.1}$$

é uma base de identidades para o anel de Lie M_K. Além disso, esta base é minimal, isto é, não contém nenhum subconjunto próprio que gera o mesmo ideal verbal. Em particular, M_K visto como anel de Lie não tem base finita de identidades.

Dividiremos este teorema em duas partes. A primeira delas, descrita no próximo teorema, demonstramos de forma independente do teorema de Kuz'min. A segunda parte está descrita no Teorema 4.3 e depende do resultado de Kuz'min.

Teorema 4.1. *Seja K um corpo de característica zero. Então o conjunto (4.1) é uma base de identidades do anel de Lie M_K. Essa base não é equivalente a nenhum conjunto finito de identidades, ou seja, M_K não tem base finita de identidades.*

A proposição seguinte implica diretamente que os elementos (4.1) formam uma base de identidades para o anel de Lie M_K.

Proposição 4.2. *Seja K um corpo de característica zero. Então o conjunto*

$$\{[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5,\ldots,x_r]]+[x_1,x_3,[x_4,x_2,x_5,\ldots,x_r]]+[x_1,x_4,[x_2,x_3,x_5,\ldots,x_r]]+V_{\mathbb{Z}}(v) \mid r=5,7,9,\ldots\}\cup\{[x_1,x_2,[x_1,x_2,x_3\ldots,x_r]]+V_{\mathbb{Z}}(v) \mid r=4,6,8,\ldots\}$$

gera a imagem do ideal verbal $V_{\mathbb{Z}}(M_K)$ no quociente $L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(v)$, isto é, gera o ideal verbal $V_{\mathbb{Z}}(M_K)/V_{\mathbb{Z}}(v)$.

Demonstração: Como dissemos no capítulo anterior os elementos nas formas (3.3) e (3.4) e alguns elementos de ordem aditiva 2 geram o grupo aditivo do anel centro-por-metabeliano livre $\mathscr{P}=L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(v)$. Desta forma, a imagem de uma identidade do anel de Lie M_K no quociente $L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(v)$ será uma combinação linear de tais elementos. Como já demonstramos, nenhuma combinação linear dos elementos (3.3) e (3.4) é identidade na álgebra de Lie M_K. Por outro lado, os elementos de ordem aditiva 2 pertencem à $V_{\mathbb{Z}}(M_K)$. Com efeito, seja $w+V_{\mathbb{Z}}(v)$ um elemento de ordem aditiva 2 em $\mathscr{P}=L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(v)$. Logo $2w\in V_{\mathbb{Z}}(v)\subset V_K(v)$. Obtemos assim $2w\in V_K(v)\subset V_K(M_K)$. Logo $w\in V_K(M_K)$. Como $V_{\mathbb{Z}}(M_K)=L_{\mathbb{Z}}(X)\cap V_K(M_K)$ e estes elementos de ordem aditiva 2 pertencem à $L_{\mathbb{Z}}(X)$, segue que estes elementos pertencem à $V_{\mathbb{Z}}(M_K)$. Portanto, uma identidade para o anel de Lie M_K, isto é, um elemento em $V_{\mathbb{Z}}(M_K)$, é combinação linear dos elementos de ordem aditiva 2. Assim a imagem desses elementos gera $V_{\mathbb{Z}}(M_K)/V_{\mathbb{Z}}(v)$ como grupo aditivo. Pelo Teorema 3.4, devido à Ju. V. Kuz'min, temos que a imagem do ideal verbal $V_{\mathbb{Z}}(M_K)$, no quociente $L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(v)$, é gerado como ideal verbal pela imagem dos elementos

$$w_r=[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5,\ldots,x_r]]+[x_1,x_3,[x_4,x_2,x_5,\ldots,x_r]]+[x_1,x_4,[x_2,x_3,x_5,\ldots,x_r]]$$

$(r=5,7,9,\ldots)$, juntamente com os elementos de comprimento par

$$z_r=[x_1,x_2,[x_1,x_2,x_3\ldots,x_r]]$$

$(r=4,6,8,\ldots)$, o que demonstra a proposição. □

O fato do anel de Lie M_K não ter base finita para suas identidades segue de [30], o que demonstra o Teorema 4.1. No entanto, utilizamos o teorema de Kuz'min para provar que a base descrita no Teorema 4.1 possui uma certa propriedade de minimalidade. Como descrito no teorema seguinte.

Teorema 4.3. *O conjunto de identidades (4.1) é independente, ou seja, nenhuma identidade desse conjunto é consequência das demais identidades deste conjunto.*

Este teorema é consequência de dois resultados, o primeiro destes está descrito no próximo teorema. Usaremos a seguinte notação:

$$\bar{w_r} = w_r + V_{\mathbb{Z}}(v) \text{ e } \bar{z_r} = z_r + V_{\mathbb{Z}}(v).$$

Teorema 4.4. *O conjunto*

$$\{\bar{w_r} \mid r = 5,7,9,\dots\} \cup \{\bar{z_r} \mid r = 4,6,8,\dots\}$$

(gerador do ideal $V_{\mathbb{Z}}(M_K)/V_{\mathbb{Z}}(v)$), é um conjunto gerador minimal, isto é, não contém subconjuntos próprios que geram o mesmo ideal verbal.

Para demonstrar o Teorema 4.4 consideremos alguns resultados.

Lema 4.5. *O ideal verbal de $\mathscr{P} = L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(v)$ gerado por um elemento $\bar{w_r}$ $(r = 5,7,9,\dots)$ é um 2-grupo abeliano elementar aditivo gerado por palavras de grau r.*

Demonstração: Pelo resultado de Kuz'min (Teorema 3.4) temos que $w_r \notin V_{\mathbb{Z}}(v)$, isto é, os elementos $\bar{w_r}$ não são nulos. Além disso, como w_r é multilinear, $\bar{w_r}$ gera um ideal verbal que, como grupo aditivo, é gerado por elementos da forma

$$w' = [m_1,m_2,[m_3,m_4,m_5\dots,m_r]] + [m_1,m_3,[m_4,m_2,m_5\dots,m_r]] + [m_1,m_4,[m_2,m_3,m_5\dots,m_r]],$$

onde os m_i são monômios em $\mathscr{P}$. Suponhamos que m_1 tenha grau maior que 1, $m_1 = [f_1, f_2]$. Temos

$$w' = [f_1, f_2, m_2,[m_3,m_4,\dots,m_r]] + [f_1, f_2, m_3,[m_4,m_2,\dots,m_r]] + [f_1, f_2, m_4,[m_2,m_3,\dots,m_r]] =$$

$$= -([f_1, f_2,[m_3,m_4,m_2,\dots,m_r]] + [f_1, f_2,[m_4,m_2,m_3,\dots,m_r]] + [f_1, f_2,[m_2,m_3,m_4,\dots,m_r]]).$$

Pela identidade de Jacobi segue que $w' = 0$.

Agora suponhamos que m_2 tenha grau maior que 1, $m_2 = [q_1,q_2]$. Temos

$$w' = [m_1,[q_1,q_2],[m_3,\dots,m_r]] + [m_1,m_3,[m_4,[q_1,q_2],\dots,m_r]] + [m_1,m_4,[[q_1,q_2],m_3,\dots,m_r]]$$

$$= -([[q_1,q_2,m_1],[m_3,\ldots,m_r]] + [m_1,m_3,[[q_1,q_2,m_4],\ldots,m_r]] + [q_1,q_2,m_3,\ldots,m_r,[m_1,m_4,]])$$

$$= -([[q_1,q_2],[m_3,m_4,m_1\ldots,m_r]] + [[q_1,q_2],[m_1,m_3,\ldots,m_r]] + [[q_1,q_2],[m_4,m_1,m_3\ldots,m_r]]).$$

Novamente, pela identidade de Jacobi, temos que $w' = 0$.

Como w_r é anti-simétrico em $2,3,4$ e invariante sobre permutações do conjunto $\{1,5,6,\ldots,r\}$ (veja o Teorema 3.4 ou o Teorema 3.9) o lema está demonstrado. $\square$

A demonstração da próxima proposição tem argumentos análogos aos usados por Vaughan-Lee [48].

Lema 4.6. *O ideal verbal de $\mathscr{P}$ gerado pelo elemento $\overline{z_r}$ $(r = 4,6,8,\ldots)$ é um 2-grupo abeliano elementar aditivo gerado por palavras da forma*

$$[m_1,m_2,[m_1,m_2,m_3\ldots,m_r]]\ (r = 4,6,8,\ldots),$$

onde $m_1,m_2,m_3\ldots,m_r$ são monômios em $\mathscr{P}$.

Demonstração: Como z_r é linear em $x_3,\ldots,x_r$ o ideal gerado por $\overline{z_r}$ como grupo é gerado por elementos da forma $\overline{z_r}(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_r)$, onde $a_3,\ldots,a_r$ são monômios. Suponhamos que a_1 não seja um monômio, $a_1 = \alpha b_1 + \beta b_2$, com $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$. Temos

$$z(\alpha b_1 + \beta b_2,a_2,a_3\ldots,a_r) = [\alpha b_1 + \beta b_2,a_2,[\alpha b_1 + \beta b_2,a_2,a_3\ldots,a_r]]$$

$$= \alpha^2[b_1,a_2,[b_1,a_2,a_3\ldots,a_r]] + \alpha\beta[b_1,a_2,[b_2,a_2,a_3\ldots,a_r]] + \alpha\beta[b_2,a_2,[b_1,a_2,a_3\ldots,a_r]]$$

$$+\beta^2[b_2,a_2,[b_2,a_2,a_3\ldots,a_r]]$$

$$= \alpha^2[b_1,a_2,[b_1,a_2,a_3\ldots,a_r]] + \alpha\beta[b_1,a_2,a_3\ldots,a_r,[b_2,a_2]] + \alpha\beta[b_2,a_2,[b_1,a_2,a_3\ldots,a_r]]$$

$$+\beta^2[b_2,a_2,[b_2,a_2,a_3\ldots,a_r]]$$

$$= \alpha^2[b_1,a_2,[b_1,a_2,a_3\ldots,a_r]] + \beta^2[b_2,a_2,[b_2,a_2,a_3\ldots,a_r]]$$

$$= \alpha^2 z(b_1,a_2,a_3\ldots,a_r) + \beta^2 z(b_2,a_2,a_3\ldots,a_r).$$

Portanto o ideal é gerado como grupo por $\overline{z_r}(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_r)$ onde cada a_i é um monômio.

$\square$

A proposição seguinte é um resultado bem conhecido.

Proposição 4.7. *Seja $u(x_1,\ldots,x_n)$ um elemento multilinear em $L_{\mathbb{Z}}(X)$. Então o ideal verbal*

$V_{\mathbb{Z}}(u)$ é multi-homogêneo, ou seja, se $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_k \in V_{\mathbb{Z}}(u)$, então $f_1, f_2, \ldots, f_k \in V_{\mathbb{Z}}(u)$, desde que esses elementos sejam multi-homogêneos.

Demonstração: Como u é multilinear, $V_{\mathbb{Z}}(u)$ é gerado como grupo aditivo por

$$[u(m_1,\ldots,m_n), m_1^{'},\ldots,m_l^{'}]$$

onde $m_j^{'}, m_i$ são monômios em $L_{\mathbb{Z}}(X)$. Seja $f \in V_{\mathbb{Z}}(u)$, $f = \sum [u_n, m_{i_1}^{'}, \ldots, m_{i_l}^{'}]$, onde $u_n = u(m_{i_1},\ldots,m_{i_n})$ e cada componente $[u_n, m_1^{'},\ldots,m_l^{'}]$ pertence à $V_{\mathbb{Z}}(u)$. Portanto cada componente multi-homogênea de f pertence à $V_{\mathbb{Z}}(u)$, isto é, $V_{\mathbb{Z}}(u)$ é multi-homogêneo. □

Corolário 4.8. *$\mathscr{P} = L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(v)$ é um anel multigraduado, isto é, é graduado pelo semigrupo $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots$.*

Demonstração: Basta definir a graduação induzida pela multigraduação de $L_{\mathbb{Z}}(X)$. □

A demonstração da proposição seguinte segue as mesmas idéias da Proposição 3.1 demonstrada por Vaughan-Lee [48].

Proposição 4.9. *O elemento $\overline{z_r} = \overline{z}(x_1,\ldots,x_r) = [x_1,x_2,[x_1,x_2,x_3\ldots,x_r]] + V_{\mathbb{Z}}(v)$ não pertence ao ideal verbal $I \lhd \mathscr{P}$ gerado pelo conjunto $\{\overline{z}(x_1,\ldots,x_s) \mid s \geq 3;\ s \neq r\}$.*

Demonstração: Suponhamos $\overline{z}(x_1,\ldots,x_r) \in I$. Assim

$$\overline{z}(x_1,\ldots,x_r) = \sum \alpha_s \overline{t_s}$$

onde $\overline{t_s} = [m_{i_1}, m_{i_2}, [m_{i_1}, m_{i_2}, m_{i_3}\ldots, m_{i_s}]]$ e $s \neq r$. Como $\mathscr{P}$ é graduado e $\overline{z}(x_1,\ldots,x_r)$ tem grau 2 em x_1 e x_2 e é linear em $x_3,\ldots x_r$; segue que cada $\overline{t_s}$ tem mesmos multigraus. Assim $\overline{t_s}$ é de grau $r+2$ e $s < r$. Provaremos que cada m_{i_t} deveria ter grau 1, o que contradiz o fato que $\overline{t_s}$ tem grau $r+2$. Se $m_{i_t}, t > 2$, tem grau maior que 1 segue que $\overline{t_s} = 0$. Se m_{i_1} tem grau maior que 1, é fácil ver que $\overline{t_s}$ não é do multigrau desejado. Portanto $m_{i_1},\ldots,m_{i_s}$ são todos de grau 1, o que conclui a demonstração da proposição. □

Demonstração do Teorema 4.4:

Segue diretamente dos lemas 4.5 e 4.6 e da propoição anterior. □

Proposição 4.10. *Seja $W = W_1 \cup W_2$, onde*

$$W_1 = \{[x_1,x_2,[x_1,x_2,x_3,\ldots,x_r]] \mid r = 4,6,8,\ldots\}\ e$$

$$
\begin{aligned}
W_2 &= \{[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5,\ldots,x_r]]+[x_1,x_3,[x_4,x_2,x_5,\ldots,x_r]]\\
&\quad +[x_1,x_4,[x_2,x_3,x_5,\ldots,x_r]] \mid r=7,9,\ldots\}.
\end{aligned}
$$

Então $V_{\mathbb{Z}}(v)\cap W=\emptyset$ *e* $v\notin V_{\mathbb{Z}}(W)$.

Demonstração: Pelo Teorema 3.4, devido à Ju. V. Kuz'min, a imagem de W no quociente $L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(v)$ é linearmente independente, logo $V_{\mathbb{Z}}(v)\cap W=\emptyset$. Assim, resta-nos provar que $v\notin V_{\mathbb{Z}}(W)$. Primeiramente observe que

$$2v=w_{15}+w_{45}-w_{25}-w_{35},$$

onde

$$
\begin{aligned}
w_{15} &= [x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]]+[x_1,x_3,[x_4,x_2,x_5]]+[x_1,x_4,[x_2,x_3,x_5]],\\
w_{45} &= [x_4,x_1,[x_2,x_3,x_5]]+[x_4,x_2,[x_3,x_1,x_5]]+[x_4,x_3,[x_1,x_2,x_5]],\\
w_{25} &= [x_2,x_1,[x_3,x_4,x_5]]+[x_2,x_3,[x_4,x_1,x_5]]+[x_2,x_4,[x_1,x_3,x_5]],\\
w_{35} &= [x_3,x_1,[x_2,x_4,x_5]]+[x_3,x_2,[x_4,x_1,x_5]]+[x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]].
\end{aligned}
$$

Assim, $2v\in V_{\mathbb{Z}}(W)$. Suponhamos por absurdo que $v\in V_{\mathbb{Z}}(W)$. Como $V_{\mathbb{Z}}(W_1)$ tem apenas elementos de grau no mínimo 6, segue que $v\in V_{\mathbb{Z}}(W_2)$. Além disso, podemos definir de forma análoga os vetores w_{ij}, os quais geram o grupo aditivo

$$Q=\left\langle \{w_{ij}\mid i,j=1,2,3,4,5; i\neq j\}\right\rangle.$$

Sabemos, pelo Teorema de Witt, que $L_{\mathbb{Z}}(X)\subset \mathbb{Z}\langle X\rangle$ (o anel de Lie livre é subconjunto do anel associativo livre). Assim, escrevendo cada w_{ij} como combinação linear de monômios associativos, é direto verificar que os elementos w_{ij} são linearmente independentes, isto é, Q é um grupo abeliano livre de posto 20.

Como $v\in V_{\mathbb{Z}}(W)$, temos que v é uma combinação linear com coeficientes inteiros dos elementos w_{ij}. Mas $2v=w_{15}+w_{45}-w_{25}-w_{35}$, isto contradiz o fato de estes elementos serem linearmente independentes. Portanto $v\notin V_{\mathbb{Z}}(W)$. □

Esta proposição significa que na base (4.1) não podemos eliminar o elemento

$$v=[x_1,x_2,[x_3,x_4],x_5].$$

Logo esta proposição juntamente com o Teorema 4.4 implicam o Teorema 4.3.

Corolário I.3. *Seja $\mathscr{L} = L_K(X)/V_K(v)$ a K-álgebra de Lie centro por metabeliana livre de posto enumerável, sobre um corpo K de característica 0. Então $\mathscr{L}$ vista como anel de Lie não tem base finita de identidades. Mais precisamente, $\mathscr{L}$ tem a seguinte base de identidades:*

$$\{[x_1,x_2,[x_3,x_4],x_5]\} \cup \{[x_1,x_2,[x_1,x_2,x_3,\ldots,x_r]] \mid r = 4,6,8,\ldots\}$$

$$\cup\, \{[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5,\ldots,x_r]] + [x_1,x_3,[x_4,x_2,x_5,\ldots,x_r]] + [x_1,x_4,[x_2,x_3,x_5,\ldots,x_r]] \mid r = 5,7,\ldots\}$$

e essa base não é equivalente a nenhum conjunto finito de identidades.

Demonstração: Como, pelo Teorema I.1, $V_K(v) = V_K(M_K)$, segue que $\mathscr{L} \cong L_K(X)/V_K(M_K)$ tem a base de identidades descrita no corolário. Por outro lado, pelo Teorema 4.1 este conjunto não é equivalente a nenhum conjunto finito de identidades, o que demonstra o corolário. $\square$

Capítulo

5

Identidades Graduadas de M_K visto como Álgebra Associativa

Neste capítulo vamos estudar as identidades graduadas de M_K visto como K-álgebra associativa e anel associativo para duas diferentes graduações. K denota um domínio de integridade infinito. Assim como para identidades ordinárias obtemos bases finitas para as identidades graduadas de M_K visto tanto como anel associativo quanto como álgebra associativa.

5.1 M_K Graduada por $\mathbb{Z}_2$

Nesta seção consideramos o conjunto

$$M_K = \begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in K \right\},$$

como anel associativo e como K-álgebra associativa. Em ambos os casos M_K possui graduação por $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ dada por $M_K = V_0 \oplus V_1$, onde

$$V_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema I.12. *Sejam $C = \{[y_1,y_2];\ y_1z_1y_2;\ y_1z_1z_2;\ z_1z_2y_1;\ z_1z_2z_3\}$ e K um domínio de integridade de característica zero. Então o conjunto C gera as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de M_K tanto visto como álgebra associativa, quanto visto como anel associativo.*

Seja $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre, onde $X = Y \cup Z$, $Y = \{y_i \mid i = 1,2,\ldots\}$ e $Z = \{z_i \mid i = 1,2,\ldots\}$. Tal como dissemos no Capítulo 1, $K\langle X\rangle = K\langle X\rangle^{(0)} \oplus K\langle X\rangle^{(1)}$ é $\mathbb{Z}_2$-graduado, onde Y é o conjunto de geradores pares e Z é conjunto de geradores ímpares. Sejam $T_{K,\mathbb{Z}_2}(M_K) < K\langle X\rangle$ o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal das identidades graduadas de M_K com graduação dada acima e $T_{K,\mathbb{Z}_2}(C) < K\langle X\rangle$ o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal gerado pelo conjunto C.

Teorema 5.1. *Seja K um domínio de integridade infinito. Então o conjunto*

$$C = \{[y_1,y_2];\ y_1z_1y_2;\ y_1z_1z_2;\ z_1z_2y_1;\ z_1z_2z_3\}$$

gera o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal de identidades graduadas $T_{K,\mathbb{Z}_2}(M_K)$, isto é, $T_{K,\mathbb{Z}_2}(M_K) = T_{K,\mathbb{Z}_2}(C)$.

É direto verificar que M_K satisfaz todas identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de C.

Como K é um domínio de integridade infinito, tal como na Proposição 1.26, temos que a álgebra graduada relativamente livre $K\langle X\rangle / T_{K,\mathbb{Z}_2}(M_K)$ é isomorfa à álgebra de matrizes genéricas (também graduada) G, gerada livremente pelos elementos

$$g_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi_{13}^{(r)} \\ 0 & \xi_{22}^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, g_r' = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12}^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{23}^{(r)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sendo $K[\xi] = K[\xi_{ij}^{(r)} \mid i = 1,2;\ j = 2,3;\ r = 1,2,\ldots]$ a álgebra de polinômios (associativa e comutativa), nas variáveis $\xi_{ij}^{(r)}$, de posto enumerável.

Consideremos o homomorfismo canônico

$$\begin{array}{rrcll} \varphi: & K\langle X\rangle/T_{K,\mathbb{Z}_2}(C) & \longrightarrow & K\langle X\rangle/T_{K,\mathbb{Z}_2}(M_K) \cong G & \\ & y_i + T_{K,\mathbb{Z}_2}(C) & \longmapsto & y_i + T_{K,\mathbb{Z}_2}(M_K) & \leftrightarrow g_i \\ & z_i + T_{K,\mathbb{Z}_2}(C) & \longmapsto & z_i + T_{K,\mathbb{Z}_2}(M_K) & \leftrightarrow g_i^{'} \end{array}$$

Para provar o teorema encontraremos um conjunto que gera $K\langle X\rangle/T_{K,\mathbb{Z}_2}(C)$ como K-módulo livre. Em seguida demonstraremos que a imagem deste conjunto por φ é linearmente independente.

Lema 5.2. *A álgebra $K\langle X\rangle/T_{K,\mathbb{Z}_2}(C)$ é gerada como K-módulo livre por*

$$\begin{array}{rcl} B & = & B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4, \text{ onde} \\ & & B_1 = \{y_{i_1}\ldots y_{i_k} + T_{K,\mathbb{Z}_2}(C) \mid k = 1,2,\ldots;\ i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k\}, \\ & & B_2 = \{z_i y_{i_1}\ldots y_{i_k} + T_{K,\mathbb{Z}_2}(C) \mid i = 1,2,\ldots;\ k = 0,1,\ldots;\ i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k\}, \\ & & B_3 = \{y_{i_1}\ldots y_{i_k} z_i + T_{K,\mathbb{Z}_2}(C) \mid i = 1,2,\ldots;\ k = 1,2\ldots;\ i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k\}, \\ & & B_4 = \{z_i y_{i_1}\ldots y_{i_k} z_j + T_{K,\mathbb{Z}_2}(C) \mid i,j = 1,2,\ldots;\ k = 0,1,\ldots;\ i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k\}. \end{array}$$

Demonstração: Sabemos que $K\langle X\rangle$ é gerado como K-módulo livre por monômios, isto é, pelo conjunto

$$A = \{x_{i_1}\ldots x_{i_k} \mid x_j \in X = Y \cup Z\}.$$

Provaremos que a imagem deste conjunto no quociente $K\langle X\rangle/T_{K,\mathbb{Z}_2}(C)$ é o conjunto B.

Seja $m = x_{i_1}\ldots x_{i_k};\ x_{i_r} \in A$. Primeiramente, se $x_{i_r} \in Z$, para algum $r \in \{2,\ldots,k-1\}$, então $x_{i_{r-1}} x_{i_r} x_{i_{r+1}} \in T_{K,\mathbb{Z}_2}(C)$. Logo $m \in T_{K,\mathbb{Z}_2}(C)$.

Por outro lado, $y_1 y_2 + T_{K,\mathbb{Z}_2}(C) = y_2 y_1 + T_{K,\mathbb{Z}_2}(C)$, o que implica que $A + T_{K,\mathbb{Z}_2}(C) = B$. $\square$

O próximo lema é de verificação direta.

Lema 5.3.

$$\begin{aligned}
g_1\dots g_n &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{22}^{(1)}\dots\xi_{22}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ n=2,3,\dots;\\
g_1^{'}g_1\dots g_n &= \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12}^{(1)}\xi_{22}^{(1)}\dots\xi_{22}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ n=1,2,\dots;\\
g_1\dots g_n g_1^{'} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{22}^{(1)}\dots\xi_{22}^{(n)}\xi_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ n=1,2,\dots;\\
g_1^{'}g_1\dots g_n g_2^{'} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi_{12}^{(1)}\xi_{22}^{(1)}\dots\xi_{22}^{(n)}\xi_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ n=0,1,\dots.
\end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 5.1: É consequência do lema anterior que $\varphi(B)$ é linearmente independente em $G \cong K\langle X\rangle / T_{K,\mathbb{Z}_2}(M_K)$, o que demonstra o Teorema 5.1. □

Corolário 5.4. *Se K é um domínio de integridade de característica zero, então as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de M_K, visto como anel associativo, seguem de*

$$C = \{[y_1,y_2];\ y_1z_1y_2;\ y_1z_1z_2;\ z_1z_2y_1;\ z_1z_2z_3\}.$$

Demonstração: Provaremos que $T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(M_K) = T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(C)$. Como M_K satisfaz as identidades graduadas de C, temos que $T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(M_K) \supset T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(C)$. Por outro lado, pelo Teorema 5.1, o anel associativo $M_{\mathbb{Z}}$ tem base de identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas C. Assim $T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(M_{\mathbb{Z}}) = T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(C)$. Como $M_{\mathbb{Z}}$ é subanel de M_K, segue que $T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(M_K) \subset T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(M_{\mathbb{Z}})$, o que implica que $T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(M_K) \subset T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(C)$. Portanto $T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(M_K) = T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(C)$, o que demonstra o corolário. □

O Teorema I.12 é consequência direta do Teorema 5.1 e do corolário anterior.

5.2 M_K Graduada por $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Consideremos agora a graduação de M_K pelo grupo de Klein

$$H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0);(0,1);(1,0);(1,1)\},$$

dada por $M_K = V_{(0,0)} \oplus V_{(0,1)} \oplus V_{(1,0)} \oplus V_{(1,1)}$, onde

$$V_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Façamos

$$X = X^{(0,0)} \cup X^{(1,0)} \cup X^{(0,1)} \cup X^{(1,1)} = Y \cup W \cup Z \cup T,$$

onde $X^{(0,0)} = Y, X^{(1,0)} = W, X^{(0,1)} = Z, X^{(1,1)} = T$. Além disso, $Y = \{y_i \mid i = 1,2,\ldots\}$, $W = \{w_i \mid i = 1,2,\ldots\}$, $Z = \{z_i \mid i = 1,2,\ldots\}$ e $T = \{t_i \mid i = 1,2,\ldots\}$. Desta forma

$$K\langle X\rangle = K\langle X\rangle^{(0,0)} \oplus K\langle X\rangle^{(1,0)} \oplus K\langle X\rangle^{(0,1)} \oplus K\langle X\rangle^{(1,1)}$$

é H-graduada. Sejam $T_{K,H}(M_K) < K\langle X\rangle$ o T_H-ideal das identidades graduadas de M_K com a graduação dada acima e $T_{K,H}(D)$ o T_H-ideal gerado pelo conjunto D.

Teorema I.13. *Seja K um domínio de integridade de característica zero. Então o conjunto*

$$D = \{[y_1,y_2];\ yw;\ w_1w_2;\ zw;\ tw;\ wy;\ wz;\ wt;\ yz;\ tz;\ z_1z_2;\ ty;\ t_1t_2\}.$$

gera as identidades H-graduadas de M_K visto tanto como álgebra associativa quanto como anel associativo.

Teorema 5.5. *Seja K um domínio de integridade infinito. Então o conjunto*

$$D = \{[y_1,y_2];\ yw;\ w_1w_2;\ zw;\ tw;\ wy;\ wz;\ wt;\ yz;\ tz;\ z_1z_2;\ ty;\ t_1t_2\}.$$

gera o T_H-ideal de identidades graduadas $T_{K,H}(M_K)$, isto é, $T_{K,H}(M_K) = T_{K,H}(D)$.

É direto verificar que M_K satisfaz todas identidades graduadas de D.

Como K é um domínio de integridade infinito, tal como na Proposição 1.26, temos que a álgebra graduada relativamente livre $K\langle X\rangle/T_{K,H}(M_K)$ é isomorfa à álgebra de matrizes genéricas G, gerada livremente pelos elementos

$$g_r^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{22}^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ g_r^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi_{13}^{(r)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_r^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12}^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ g_r^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{23}^{(r)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(r = 1,2,\ldots)$, sendo $K[\xi] = K[\xi_{ij}^{(r)} \mid i = 1,2; j = 2,3;\ r = 1,2,\ldots]$ a álgebra de polinômios (associativa e comutativa), nas variáveis $\xi_{ij}^{(r)}$, de posto enumerável.

Consideremos o homomorfismo canônico

$$\begin{aligned} \phi:\quad & K\langle X\rangle/T_{K,H}(D) \longrightarrow K\langle X\rangle/T_{K,H}(M_K) \cong G \\ & y_i + T_{K,H}(D) \longmapsto y_i + T_{K,H}(M_K) \leftrightarrow g_i^{(1)} \\ & w_i + T_{K,H}(D) \longmapsto w_i + T_{K,H}(M_K) \leftrightarrow g_i^{(2)} \\ & z_i + T_{K,H}(D) \longmapsto z_i + T_{K,H}(M_K) \leftrightarrow g_i^{(3)} \\ & t_i + T_{K,H}(D) \longmapsto t_i + T_{K,H}(M_K) \leftrightarrow g_i^{(4)} \end{aligned}$$

Provaremos que ϕ é um isomorfismo. Para tanto, encontraremos um conjunto que gera $K\langle X\rangle/T_{K,H}(D)$ como K-módulo livre. Em seguida demonstraremos que a imagem deste conjunto por ϕ é linearmente independente.

Lema 5.6. *A álgebra $K\langle X\rangle/T_{K,H}(D)$ é gerada como K-módulo livre por*

$$\begin{aligned} B \;=\; & B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5,\ \textit{onde} \\ & B_1 = \{y_{i_1}\ldots y_{i_k} + T_{K,H}(D) \mid k = 1,2,\ldots;\ i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k\}, \\ & B_2 = \{z_i y_{i_1}\ldots y_{i_k} + T_{K,H}(D) \mid i = 1,2,\ldots;\ k = 0,1,\ldots;\ i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k\}, \\ & B_3 = \{y_{i_1}\ldots y_{i_k} t_i + T_{K,H}(D) \mid i = 1,2,\ldots;\ k = 0,1\ldots;\ i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k\}, \\ & B_4 = \{z_i y_{i_1}\ldots y_{i_k} t_j + T_{K,H}(D) \mid i,j = 1,2,\ldots;\ k = 0,1,\ldots;\ i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k\}, \\ & B_5 = \{w_i + T_{K,H}(D) \mid i = 1,2,\ldots\}. \end{aligned}$$

Demonstração: Tal como fizemos no Lema 5.2 provaremos que a imagem da base de $K\langle X\rangle$, visto como K-módulo livre,

$$A = \{x_{i_1}\dots x_{i_k} \mid x_j \in X = Y\cup W\cup Z\cup T\},$$

no quociente $K\langle X\rangle/T_{K,H}(D)$, é o conjunto B.

Seja $m = x_{i_1}\dots x_{i_k}$ um monômio pertencente à A. É claro que se $x_{i_r}\in W$, para algum r, então $m = w_i + T_{K,H}(D)$ ou $m\in T_{K,H}(D)$. Por outro lado, suponhamos $x_{i_r}\in Z$, para algum $r\in\{2,\dots,k\}$. Como $yz, tz, z_1z_2 \in T_{K,H}(D)$ segue que $x_{i_{r-1}}x_{i_r}\in T_{K,H}(D)$. Logo $m\in T_{K,H}(D)$. Analogamente, se $x_{i_r}\in T$, para algum $r\in\{1,\dots,k-1\}$, então $m\in T_{K,H}(D)$. Como $y_1y_2 + T_{K,H}(D) = y_2y_1 + T_{K,H}(D)$, segue que $A + T_H(D) = B$. □

O próximo lema é de verificação direta.

Lema 5.7.

$$\begin{aligned}
g_1^{(1)}\dots g_n^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & \xi_{22}^{(1)}\dots\xi_{22}^{(n)} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ n=1,2,\dots;\\
g_1^{(3)}g_1^{(1)}\dots g_n^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12}^{(1)}\xi_{22}^{(1)}\dots\xi_{22}^{(n)} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ n=0,1,\dots;\\
g_1^{(1)}\dots g_n^{(1)}g_1^{(4)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \xi_{22}^{(1)}\dots\xi_{22}^{(n)}\xi_{23}^{(1)}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ n=0,1,\dots;\\
g_1^{(3)}g_1^{(1)}\dots g_n^{(1)}g_1^{(4)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi_{12}^{(1)}\xi_{22}^{(2)}\dots\xi_{22}^{(n)}\xi_{23}^{(1)}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ n=0,1,\dots.
\end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 5.5: É consequência do lema anterior que $\phi(B)$ é linearmente independente em $G\cong K\langle X\rangle/T_{K,H}(M_K)$, o que demonstra o Teorema 5.5. □

Corolário 5.8. *Se K é um domínio de integridade de característica zero, então as identidades H-graduadas de M_K, visto como anel associativo, seguem de*

$$D = \{[y_1,y_2];\ yw;\ w_1w_2;\ zw;\ tw;\ wy;\ wz;\ wt;\ yz;\ tz;\ z_1z_2;\ ty;\ t_1t_2\}.$$

A demonstração deste corolário é análoga a demonstração do Corolário 5.4.

O Teorema I.13 é consequência direta do Teorema 5.5 e do corolário anterior.

Capítulo

6

Identidades Graduadas de M_K visto como Álgebra de Lie

Neste capítulo vamos estudar as identidades graduadas de M_K visto como K-álgebra de Lie e visto como anel de Lie para duas diferentes graduações, as mesmas consideradas no capítulo anterior. Aqui a comparação com as identidades ordinárias depende da graduação. Para a graduação por $\mathbb{Z}_2$ obtemos situação semelhante às identidades ordinárias, onde as identidades de M_K possuem base finita quando visto como álgebra de Lie mas não a possuem se visto como anel de Lie. Para a graduação por $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ obtemos base finita de identidades para M_K tanto visto como álgebra de Lie quanto visto como anel de Lie.

6.1 M_K Graduada por $\mathbb{Z}_2$

Nesta seção consideramos o conjunto

$$M_K = \begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in K \right\},$$

como anel de Lie e como K-álgebra de Lie. Tal como no capítulo anterior M_K possui graduação por $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ dada por $M_K = V_0 \oplus V_1$, onde

$$V_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema I.9. *Seja K um corpo de característica zero. Então as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas da K-álgebra de Lie M_K têm base finita enquanto as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de M_K visto como anel de Lie não têm base finita.*

Este teorema é consequência do teorema que segue.

Teorema I.10. *Seja K um domínio de integridade de característica zero. Então:*

1) *Se 2 é invertível em K, então as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas da K-álgebra de Lie M_K têm base finita enquanto as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de M_K visto como anel de Lie não têm base finita.*

2) *Se 2 não é invertível em K, então M_K não possui base finita de identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas tanto visto como K-álgebra de Lie quanto visto como anel de Lie.*

Por sua vez o Teorema I.10 é consequência do próximo teorema.

Teorema I.11. *Seja K um domínio de integridade de característica zero. Então:*

1) *Se 2 é invertível em K, então as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas da K-álgebra de Lie M_K têm base*

$$C = \{[y_1, y_2];\ [z_1, z_2, z_3]\}.$$

Já as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de M_K visto como anel de Lie têm base

$$D = \{[y_1, y_2];\ [z_1, z_2, z_3]\} \cup \{[z_1, y_1, \ldots, y_{2k}, z_1] \mid k = 1, 2, \ldots\},$$

que não é equivalente a nenhuma base finita de identidades.

2) *Se 2 não é invertível em K, então D é uma base de identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas para M_K visto tanto como K-álgebra de Lie quanto como anel de Lie. Nestes casos a base D também não é equivalente a nenhum conjunto finito de identidades.*

Seja $L_K(X)$ a álgebra de Lie livre, onde $X = Y \cup Z$, $Y = \{y_i \mid i = 1,2,\ldots\}$ e $Z = \{z_i \mid i = 1,2,\ldots\}$. Desta forma $L_K(X) = L_K(X)^{(0)} \oplus L_K(X)^{(1)}$ é $\mathbb{Z}_2$-graduado, onde Y é o conjunto de geradores livres pares e Z é o conjunto de geradores livres impares. Sejam $V_{K,\mathbb{Z}_2}(M_K) < L_K(X)$ o ideal verbal graduado das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de M_K com graduação por $\mathbb{Z}_2$ dada acima e $V_{K,\mathbb{Z}_2}(D)$ o ideal verbal graduado gerado pelo conjunto D.

Teorema 6.1. *Seja K um domínio de integridade infinito. Então o conjunto*

$$D = \{[y_1,y_2];\ [z_1,z_2,z_3]\} \cup \{[z_1,y_1,\ldots,y_{2k},z_1] \mid k = 1,2,\ldots\}$$

gera o ideal verbal graduado de identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas $V_{K,\mathbb{Z}_2}(M_K)$, isto é, $V_{K,\mathbb{Z}_2}(M_K) = V_{K,\mathbb{Z}_2}(D)$.

É direto verificar que M_K satisfaz todas as identidades graduadas de D.

Como K é um domínio de integridade infinito, tal como na Proposição 1.26, temos que a álgebra de Lie graduada relativamente livre $L_K(X)/V_{K,\mathbb{Z}_2}(M_K)$ é isomorfa à álgebra de Lie graduada de matrizes genéricas G, gerada livremente pelos elementos

$$g_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi_{13}^{(r)} \\ 0 & \xi_{22}^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_r = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12}^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{23}^{(r)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sendo $K[\xi] = K[\xi_{ij}^{(r)} \mid i = 1,2;\ j = 2,3;\ r = 1,2,\ldots]$ a álgebra de polinômios (comutativa e associativa), nas variáveis $\xi_{ij}^{(r)}$, de posto enumerável.

Consideremos o homomorfismo canônico

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & L_K(X)/V_{K,\mathbb{Z}_2}(D) & \longrightarrow & L_K(X)/V_{K,\mathbb{Z}_2}(M_K) \cong G \\ & y_i + V_{K,\mathbb{Z}_2}(D) & \longmapsto & y_i + V_{K,\mathbb{Z}_2}(M_K) \ \leftrightarrow g_i \\ & z_i + V_{K,\mathbb{Z}_2}(D) & \longmapsto & z_i + V_{K,\mathbb{Z}_2}(M_K) \ \leftrightarrow h_i \end{array}$$

Provaremos que φ é um isomorfismo. Para tanto, encontraremos um conjunto que gera $L_K(X)/V_{K,\mathbb{Z}_2}(D)$ como K-módulo livre. Em seguida demonstraremos que a imagem deste conjunto por φ é linearmente independente. Isto implicará diretamente que $ker\varphi = 0$, ou seja, $V_{K,\mathbb{Z}_2}(D) = V_{K,\mathbb{Z}_2}(M_K)$, demonstrando o Teorema 6.1.

Lema 6.2. *Seja $C = \{[y_1,y_2];\ [z_1,z_2,z_3]\}$. Então as seguintes identidades pertencem à $V_{K,\mathbb{Z}_2}(C)$*

1. $[z_1,z_2,y_1]$.

2. $[z_1,y_1,y_2]-[z_1,y_2,y_1]$;

3. $[z_1,y_1,\ldots,y_k,z_2]+(-1)^k[z_2,y_1,\ldots,y_k,z_1]$; $k=0,1,2,\ldots$;

4. $[z_1,y_1,\ldots,y_k,[z_2,y_{k+1}]]+[z_1,y_1,\ldots,y_{k+1},z_2]$; $k=0,1,\ldots$.

Demonstração: Seja ϕ o endomorfismo de $L_K(X)$ que aplica y_1 para $[z_1,z_2]$. Temos que $\phi([y_1,y_2])=[z_1,z_2,y_2]$. Logo $[z_1,z_2,y_1]\in V_{K,\mathbb{Z}_2}(C)$, o que demonstra o item 1.

Por outro lado, pela identidde de Jacobi,

$$[z,y_1,y_2]+[y_1,y_2,z]+[y_2,z,y_1]=0.$$

Como $[y_1,y_2]\in C$, segue que

$$[z,y_1,y_2]-[z,y_2,y_1]\in V_{K,\mathbb{Z}_2}(C).$$

Para provar o item 3 usaremos indução sobre k. Se $k=0$ segue da anticomutatividade. Para $k=1$ segue do item 1 e da identidade de Jacobi. Por hipótese de indução

$$[z_1,y_2,\ldots,y_{k+1},z_2]+(-1)^k[z_2,y_2,\ldots,y_{k+1},z_1]\in V_{K,\mathbb{Z}_2}(C).$$

Sabemos que $V_{K,\mathbb{Z}_2}(C)$ é fechado sobre endomorfismo de $L_K(X)$ que preservam graduação. Desta forma, podemos considerar o endomorfismo que aplica z_1 para $[z_1,y_1]$ e fixa os demais geradores, obtendo

$$[z_1,y_1,\ldots,y_{k+1},z_2]+(-1)^k[z_2,y_2,\ldots,y_{k+1},[z_1,y_1]]\in V_{K,\mathbb{Z}_2}(C). \tag{6.1}$$

Pela identidade de Jacobi,

$$\begin{aligned}
[z_2,y_2,\ldots,y_{k+1},[z_1,y_1]] &= -[z_1,[y_1,[z_2,y_2,\ldots,y_{k+1}]]]-[y_1,[z_2,y_2,\ldots,y_{k+1},z_1]]\\
&= -[z_1,[y_1,[z_2,y_2,\ldots,y_{k+1}]]]\\
&= [z_1,[z_2,y_2,\ldots,y_{k+1},y_1]]\\
&= -[z_2,y_2,\ldots,y_{k+1},y_1,z_1] \pmod{V_{K,\mathbb{Z}_2}(C)}.
\end{aligned}$$

Pela igualdade anterior e pelo item 2 temos

$$[z_2,y_2,\ldots,y_{k+1},[z_1,y_1]] = -[z_2,y_1,\ldots,y_{k+1},z_1] \pmod{V_{K,\mathbb{Z}_2}(C)}.$$

Utilizando esta última igualdade em (6.1) temos

$$[z_1,y_1,\ldots,y_{k+1},z_2]+(-1)^{k+1}[z_2,y_1,\ldots,y_{k+1},z_1] \in V_{K,\mathbb{Z}_2}(C),$$

o que demonstra o item 3.

Por fim provaremos o item 4. Utilizando novamente a identidade de Jacobi temos

$$[z_1,y_1,\ldots,y_k,y_{k+1},z_2]+[y_{k+1},z_2,[z_1,y_1,\ldots,y_k]]+[z_2,[z_1,y_1,\ldots,y_k],y_{k+1}] = 0$$

Observe que $[z_2,[z_1,y_1,\ldots,y_k],y_{k+1}] \in V_{K,\mathbb{Z}_2}(C)$, pois $[z_1,z_2]$ é central em $L_K(X)/V_{K,\mathbb{Z}_2}(C)$. Logo

$$[z_1,y_1,\ldots,y_{k+1},z_2] = [z_2,y_{k+1},[z_1,y_1,\ldots,y_k]] = -[[z_1,y_1,\ldots,y_k],[z_2,y_{k+1}]] \pmod{V_{K,\mathbb{Z}_2}(C)}.$$

Portanto,

$$[z_1,y_1,\ldots,y_k,[z_2,y_{k+1}]]+[z_1,y_1,\ldots,y_{k+1},z_2] \in V_{K,\mathbb{Z}_2}(C).$$

□

Usaremos este lema para demonstrar a próxima proposição.

Proposição 6.3. *A álgebra $L_K(X)/V_{K,\mathbb{Z}_2}(D)$ é gerada como K-módulo livre, por*

$$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4, \textit{ onde}$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{y_i+V_{K,\mathbb{Z}_2}(D) \mid i = 1,2,\ldots\},\\
B_2 &= \{[z_i,y_{i_1},\ldots,y_{i_k}]+V_{K,\mathbb{Z}_2}(D) \mid i = 1,2,\ldots;\ k = 0,1,\ldots;\ i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k\},\\
B_3 &= \{[z_i,y_{i_1},\ldots,y_{i_{2k-1}},z_j]+V_{K,\mathbb{Z}_2}(D) \mid i,j,k = 1,2,\ldots;\ i \ge j;\ i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_{2k-1}\},\\
B_4 &= \{[z_i,y_{i_1},\ldots,y_{i_{2k}},z_j]+V_{K,\mathbb{Z}_2}(D) \mid i,j = 1,2,\ldots; i > j;\ k = 0,1,\ldots; i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_{2k}\}.
\end{aligned}$$

Demonstração: Sabemos que $L_K(X)$ é gerada como K-módulo por monômios. Assim, consideremos $m+V_{K,\mathbb{Z}_2}(D) \in L_K(X)/V_{K,\mathbb{Z}_2}(D)$, onde m é um monômio. Provaremos por indução sobre o grau de m que uma das seguintes situações ocorre:

1. $m \in V_{K,\mathbb{Z}_2}(D)$

2. $m+V_{K,\mathbb{Z}_2}(D)\in B$

3. $-m+V_{K,\mathbb{Z}_2}(D)\in B$.

Se $m\in X$, então claramente $m\in B_1$ ou $m\in B_2$. Suponhamos que o grau de m seja maior que 1, digamos $m=[m_1,m_2]$. Por hipótese de indução $m_1+V_{K,\mathbb{Z}_2}(D), m_2+V_{K,\mathbb{Z}_2}(D)\in B$. Observe que, como $[z_1,z_2]+V_{K,\mathbb{Z}_2}(D)$ é central em $L_K(X)/V_{K,\mathbb{Z}_2}(D)$, B_3 e B_4 também o são. Assim, se $m_1+V_{K,\mathbb{Z}_2}(D)$ ou $m_2+V_{K,\mathbb{Z}_2}(D)$ pertencer à $B_3\cup B_4$, então $m=[m_1,m_2]\in V_{K,\mathbb{Z}_2}(D)$. Por outro lado, sendo $[B_i,B_j]=\{[b_i,b_j]\mid b_i\in B_i,\ b_j\in B_j\}$, temos $[B_1,B_1]=0$ e $[B_2,B_1]=B_2$ (aqui utilizamos que $[z,y_1,y_2]-[z,y_2,y_1]\in V_{K,\mathbb{Z}_2}(D)$). Desta forma resta-nos analisar o caso em que $m_1+V_{K,\mathbb{Z}_2}(D), m_2+V_{K,\mathbb{Z}_2}(D)\in B_2$. Temos

$$m_1=[z_i,y_{i_1},\ldots,y_{i_r}]+V_{K,\mathbb{Z}_2}(D),\ m_2=[z_j,y_{j_1},\ldots,y_{j_s}]+V_{K,\mathbb{Z}_2}(D);\ i_1\leq\ldots\leq i_r \text{ e } j_1\leq\ldots\leq j_s.$$

Pelo item 4 do lema anterior temos

$$m=[m_1,m_2]=(-1)^l[z_i,y_{i_1},\ldots,y_{i_r},y_{j_s},\ldots,y_{j_1},z_j]+V_{K,\mathbb{Z}_2}(D)$$

Agora analisaremos 2 casos: $r+s$ impar e $r+s$ par.

Com $r+s$ par, se $i=j$, então $m\in V_{K,\mathbb{Z}_2}(D)$,pois $[z,y_1,\ldots,y_{2k},z]\in V_{K,\mathbb{Z}_2}(D)$. Para $i\neq j$, utilizando o item 3 do lema anterior, podemos supor $i>j$. Logo, $m+V_{K,\mathbb{Z}_2}(D)\in B_4$.

No outro caso, novamente utilizando o item 3 do lema anterior, podemos supor $i\geq j$. Logo, $m+V_{K,\mathbb{Z}_2}(D)\in B_3$, o que conclui a demonstração do lema. □

Lema 6.4.

$$[g_1',g_1,\ldots,g_n] = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12}^{(1)}\xi_{22}^{(1)}\ldots\xi_{22}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n\xi_{23}^{(1)}\xi_{22}^{(1)}\ldots\xi_{22}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, n=1,2,\ldots;$$

$$[g_1',g_1,\ldots,g_n,g_2'] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi_{12}^{(1)}\xi_{23}^{(2)}\xi_{22}^{(1)}\ldots\xi_{22}^{(n)}+(-1)^{n+1}\xi_{23}^{(1)}\xi_{12}^{(2)}\xi_{22}^{(1)}\ldots\xi_{22}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$n=0,1,\ldots$.

Este lema é de demonstração direta.

É consequência do lema anterior que $\varphi(B)$ é linearmente independente em

$$G \cong L_K(X)/V_{K,\mathbb{Z}_2}(M_K),$$

o que demonstra o Teorema 6.1.

Lema 6.5. *Sejam K um domínio de integridade infinito tal que 2 não é invertível e $\gamma_k = [z_1, y_1, \ldots, y_{2k}, z_1]$. Então*

$$\gamma_k \notin V_{K,\mathbb{Z}_2}(C);\ k = 1, 2, \ldots.$$

Demonstração: Sejam $\mathscr{F} = \{s \subset \mathbb{N} \mid s \text{ é finito}\}$ e $\overline{K} = K/2K$. Seja ainda A a $\overline{K}$-álgebra de Lie gerada pelos elementos $a_s, s \in \mathscr{F}$, com a seguinte tabela de multiplicação

$$[a_s, a_t] = \begin{cases} c_{s\cup t}, & se \quad s \cap t = \emptyset \\ 0, & se \quad s \cap t \neq \emptyset \end{cases},$$

$$\begin{array}{l} [a_s, c_t] = 0, \quad \forall\, s, t \in \mathscr{F} \\ [c_s, c_t] = 0, \quad \forall\, s, t \in \mathscr{F} \quad . \end{array}$$

A álgebra de Lie A tem derivações b_i, $i \in \mathbb{N}$, definidas por

$$[a_s, b_i] = \begin{cases} a_{s\cup\{i\}}, & se \quad i \notin s \\ 0, & se \quad i \in s \end{cases}; \ \forall\, i \in \mathbb{N},\ s \in \mathscr{F}.$$

$$[c_s, b_i] = 0,\ \forall\, i \in \mathbb{N},\ s \in \mathscr{F}.$$

De fato, como c_s é central em A é suficiente provar que

$$[[a_s, a_t], b_i] = [[a_s, b_i], a_t] + [a_s, [a_t, b_i]].$$

Contudo, o lado esquerdo da igualdade é nulo. Se $i \in s \cup t$ ou $s \cap t \neq \emptyset$ o lado direito também nulo. Caso contrário este é igual a $2c_{s\cup t\cup\{i\}}$, o qual é nulo pois $\overline{K}$ tem característica 2. Logo cada b_i é uma derivação de A.

Observe que

$$[a_s, b_i, b_j] = [a_s, b_j, b_i];\ i, j \in \mathbb{N};\ s \in \mathscr{F}.$$

Assim as derivações b_i comutam.

Seja B o produto semidireto de A pela álgebra de Lie abeliana gerada pelos elementos $b_i,\ i \in$

$\mathbb{N}$. Sejam B_0 o $\overline{K}$-submódulo de B gerado pelo conjunto $\{c_s \mid s \in \mathscr{F}\} \cup \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e B_1 o $\overline{K}$-submódulo de B gerado pelo conjunto $\{a_s \mid s \in \mathscr{F}\}$. É direto verificar que $B = B_0 \oplus B_1$, é uma $\mathbb{Z}_2$ graduação para B. Também é direto que B satisfaz as identidades graduadas $[y_1, y_2]$ e $[z_1, z_2, z_3]$. Por outro lado,

$$[a_\emptyset, b_1, \ldots, b_{2k}, a_\emptyset] = [a_{\{1,\ldots,2k\}}, a_\emptyset] = c_{\{1,\ldots,2k\}} \neq 0.$$

Assim B não satisfaz as identidades graduadas $[z_1, y_1, \ldots, y_{2k}, z_1]$; $k = 1, 2, \ldots$. Logo a K-álgebra B satisfaz as identidades graduadas de C mas não satisfaz as identidades graduadas γ_k. Portanto

$$\gamma_k = [z_1, y_1, \ldots, y_{2k}, z_1] \notin V_{K,\mathbb{Z}_2}(C);\ k = 1, 2, \ldots .$$

$\square$

Lema 6.6. *Seja K um domínio de integridade infinito tal que 2 não é invertível. Sejam ainda $\mathscr{M} = L_K(X)/V_{K,\mathbb{Z}_2}(C)$ e $\overline{\gamma_k} = \gamma_k + V_{K,\mathbb{Z}_2}(C)$. Então o ideal verbal graduado gerado pelo elemento $\overline{\gamma_k}; k = 1, 2, \ldots$; é gerado como K-submódulo por elementos da forma*

$$[b, a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, b];\ k = 1, 2, \ldots;$$

onde $b, a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ são monômios em $\mathscr{M}$.

Demonstração: Como γ_k é linear em $y_1, \ldots, y_{2k}$ o ideal é gerado como K-módulo por elementos da forma $\gamma_K(b, a_1, a_2, \ldots, a_{2k})$, onde $a_1 \ldots, a_{2k}$ são monômios. Suponhamos que b não seja um monômio, $b = \alpha b_1 + \beta b_2$, com $\alpha, \beta \in K$. Temos

$$\begin{aligned}
&[\alpha b_1 + \beta b_2, a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, \alpha b_1 + \beta b_2] = \\
= \ & \alpha^2 [b_1, a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, b_1] + \alpha\beta [b_1, a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, b_2] + \alpha\beta [b_2, a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, b_1] + \\
& + \beta^2 [b_2, a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, b_2] \\
= \ & \alpha^2 [b_1, a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, b_1] + \alpha\beta [b_1, a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, b_2] - \alpha\beta [b_1, a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, b_2] + \\
& + \beta^2 [b_2, a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, b_2] \\
= \ & \alpha^2 [b_1, a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, b_1] + \beta^2 [b_2, a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, b_2].
\end{aligned}$$

Portanto o ideal é gerado como K-submódulo por $[b, a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, b]$ onde b e cada a_i são monômios.

$\square$

Lema 6.7. *O ideal $V_{K,\mathbb{Z}_2}(C)$ é multi-homogêneo, logo $L_K(X)/V_{K,\mathbb{Z}_2}(C)$ é a soma direta de K-submódulos gerados por monômios multi-homogêneos. Isto significa que $L_K(X)/V_{K,\mathbb{Z}_2}(C)$ é graduado por $\mathbb{N}\oplus\mathbb{N}\oplus\ldots$.*

Como $[y_1,y_2]$ e $[z_1,z_2,z_3]$ são multilineares, assim como no Corolário 4.8, $L_K(X)/V_{K,\mathbb{Z}_2}(C)$ é soma direta de submódulos gerados por monômios multi-homogêneos, a qual define uma graduação por $\mathbb{N}\oplus\mathbb{N}\oplus\ldots$.

A demonstração da próxima proposição segue as mesmas idéias da Proposição 3.1 demonstrada por Vaughan-Lee [48].

Proposição 6.8. *Seja K um domínio de integridade infinito tal que 2 não é invertível. Então o elemento $\overline{\gamma_k}=[z_1,y_1,\ldots,y_{2k},z_1]+V_{K,\mathbb{Z}_2}(C)$ não pertence ao ideal verbal graduado $I\triangleleft\mathscr{M}$ gerado pelo conjunto $\{\overline{\gamma_l}\mid l=1,2,\ldots;\ l\neq k\}$.*

Demonstração: Suponhamos $\overline{\gamma_k}\in I$. Assim

$$\overline{\gamma_k}=\sum_{l\neq k}\alpha_l\overline{\delta_l}.$$

onde $\overline{\delta_l}=[b,a_{i_1},\ldots,a_{i_{2l}},b]+V_{K,\mathbb{Z}_2}(C)$ e $l\neq k$. Como $\mathscr{M}$ é multigraduado e $\overline{\gamma_k}$ tem grau 2 em z_1 e é linear em $y_1,\ldots y_{2k}$; segue que cada $\overline{\delta_l}$ tem mesmos multigraus. Assim $\overline{\delta_l}$ é de grau $2k+2$ e $l<k$. Provaremos que b e cada a_{i_n} deveria ter grau 1, o que contradiz o fato que $\overline{\delta_l}$ tem grau $2k+2$. Se a_{i_n} tem grau maior que 1 segue que $\overline{\delta_l}=0$. Se b tem grau maior que 1, é fácil ver que $\overline{\delta_l}$ não é do multigrau desejado. Portanto $b,a_{i_1},\ldots,a_{i_l}$ são todos de grau 1, o que conclui a demonstração da proposição. $\square$

Demonstração do Teorema I.11:

Primeiramente provaremos que, se 2 é invertível em K, então as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas da K-álgebra de Lie M_K têm base C. Este fato é consequência quase imediata do Teorema 6.1. É suficiente provar que o ideal verbal graduado $V_{K,\mathbb{Z}_2}(M_K)<L_K(X)$ é gerado por C, isto é, $V_{K,\mathbb{Z}_2}(M_K)=V_{K,\mathbb{Z}_2}(C)$. Pelo Lema 6.2

$$\{[z_1,y_1,\ldots,y_{2k},z_2]+[z_2,y_1,\ldots,y_{2k},z_1]\}\subset V_{K,\mathbb{Z}_2}(C).$$

Como 2 é invertível, fazendo $z_1 = z_2$, temos

$$\{[z_1, y_1, \dots, y_{2k}, z_1] \mid k = 1, 2, \dots\} \subset V_{K,\mathbb{Z}_2}(C).$$

Portanto, $V_{K,\mathbb{Z}_2}(C) = V_{K,\mathbb{Z}_2}(D) = V_{K,\mathbb{Z}_2}(M_K)$.

É consequência direta do Lema 6.5 e da Proposição 6.8 que, se 2 não é invertível em K, então D não é equivalente a nenhum conjunto finito de identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $L_K(X)$. Em outras palavras, M_K vista como K-álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada não tem base finita de identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas.

Resta-nos provar que M_K visto como anel de Lie tem base de identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas D a qual não é equivalente a nenhuma base finita de identidades. Isto não depende de 2 ser invertível em K. Como M_K satisfaz as identidades de D, temos que $V_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(M_K) \supset V_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(D)$. Por outro lado, o anel associativo $M_{\mathbb{Z}}$ tem base de identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas D. Assim $V_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(M_{\mathbb{Z}}) = V_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(D)$. Como K tem característica zero temos que $M_{\mathbb{Z}}$ é subanel de M_K, logo $V_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(M_K) \subset V_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(M_{\mathbb{Z}})$, o que implica que $V_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(M_K) \subset V_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(D)$. Portanto $V_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(M_K) = V_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2}(D)$. Por outro lado, pelo Lema 6.5 e pela Proposição 6.8, para $K = \mathbb{Z}$, D não é equivalente a nenhuma base de identidades graduadas em $L_{\mathbb{Z}}(X)$, o que demonstra o teorema.

$\square$

6.2 M_K Graduada por $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Consideremos agora a graduação de M_K pelo grupo de Klein

$$H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0); (0,1); (1,0); (1,1)\},$$

dada por $M_K = V_{(0,0)} \oplus V_{(0,1)} \oplus V_{(1,0)} \oplus V_{(1,1)}$, onde

$$V_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Façamos

$$X = X^{(0,0)} \cup X^{(1,0)} \cup X^{(0,1)} \cup X^{(1,1)} = Y \cup W \cup Z \cup T,$$

onde $X^{(0,0)} = Y, X^{(1,0)} = W, X^{(0,1)} = Z, X^{(1,1)} = T$. Além disso, $Y = \{y_i \mid i = 1,2,\ldots\}$, $W = \{w_i \mid i = 1,2,\ldots\}$, $Z = \{z_i \mid i = 1,2,\ldots\}$ e $T = \{t_i \mid i = 1,2,\ldots\}$. Desta forma

$$L_K(X) = L_K(X)^{(0,0)} \oplus L_K(X)^{(1,0)} \oplus L_K(X)^{(0,1)} \oplus L_K(X)^{(1,1)}$$

é H-graduado.

Teorema I.14. *Seja K um domínio de integridade de característica zero. Então o conjunto*

$$\begin{aligned} D = &\{[y_1,y_2];\ [w_1,w_2];\ [z_1,z_2];\ [t_1,t_2]\} \cup \{[w,y];\ [w,z];\ [w,t]\} \\ &\cup\{[z,t,y];\ [z_1,t,z_2];\ [z,t_1,t_2]\} \cup \{[z,y_1,y_2]-[z,y_2,y_1];\ [t,y_1,y_2]-[t,y_2,y_1]\} \end{aligned}$$

gera as identidades H-graduadas de M_K visto tanto como álgebra de Lie quanto como anel de Lie.

Sejam $V_H(M_K) = V_{K,H}(M_K) < L_K(X)$ o ideal verbal graduado das identidades graduadas de M_K com graduação por H dada acima e $V_{K,H}(D)$ o ideal verbal graduado gerado pelo conjunto D.

Teorema 6.9. *Seja K um domínio de integridade infinito. Então o conjunto*

$$\begin{aligned} D \ = \ &\{[y_1,y_2],[w_1,w_2],[z_1,z_2],[t_1,t_2]\} \cup \{[w,y],[w,z],[w,t]\}\cup \\ &\cup\{[z,t,y],[z_1,t,z_2],[z,t_1,t_2]\} \cup \{[z,y_1,y_2]-[z,y_2,y_1],[t,y_1,y_2]-[t,y_2,y_1]\} \end{aligned}$$

gera o ideal verbal graduado de identidades H-graduadas $V_{K,H}(M_K)$, isto é, $V_{K,H}(M_K) = V_{K,H}(D)$.

É direto verificar que M_K satisfaz todas identidades H-graduadas de C.

Como K é um domínio de integridade infinito, tal como na Proposição 1.26, temos que a álgebra de Lie relativamente livre $L_K(X)/V_H(M_K)$ é isomorfo à álgebra de Lie de matrizes genéricas G, gerada livremente pelos elementos

$$g_r^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{22}^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; g_r^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi_{13}^{(r)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_r^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12}^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; g_r^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{23}^{(r)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$r = 1, 2, \ldots$; sendo $K[\xi] = K[\xi_{ij}^{(r)} \mid i = 1,2; j = 2,3; r = 1,2,\ldots]$ a álgebra de polinômios (comutativa e associativa), nas variáveis $\xi_{ij}^{(r)}$, de posto enumerável.

Consideremos o homomorfismo canônico

$$\begin{array}{rccccc} \varphi: & L_K(X)/V_{K,H}(D) & \longrightarrow & L_K(X)/V_H(M_K) \cong G & & \\ & y_i + V_H(D) & \longmapsto & y_i + V_H(M_K) & \leftrightarrow & g_i^{(1)} \\ & w_i + V_H(D) & \longmapsto & w_i + V_H(M_K) & \leftrightarrow & g_i^{(2)} \\ & z_i + V_H(D) & \longmapsto & z_i + V_H(M_K) & \leftrightarrow & g_i^{(3)} \\ & t_i + V_H(D) & \longmapsto & t_i + V_H(M_K) & \leftrightarrow & g_i^{(4)} \end{array}$$

Provaremos que φ é um isomorfismo. Para tanto, encontraremos um conjunto que gera $L_K(X)/V_{K,H}(D)$ como K-módulo livre. Em seguida demonstraremos que a imagem deste conjunto por φ é linearmente independente. Isto significará que $V_{K,H}(M_K) = V_{K,H}(D)$, demonstrando o teorema 6.9.

Lema 6.10. *As seguintes identidades pertencem à* $V_{K,H}(D)$

1. $[z, y_1, \ldots, y_k, t] + (-1)^k [t, y_1, \ldots, y_k, z]; k = 0, 1, \ldots;$
2. $[[z, y_1, \ldots, y_k, [t, y_{k+1}]] + [z, y_1, \ldots, y_{k+1}, t]; k = 0, 1, \ldots.$

Demonstração: Provaremos o primeiro item por indução sobre k. Se $k = 0$ segue diretamente da anticomutatividade. Por hipótese de indução

$$[z, y_2, \ldots, y_{k+1}, t] + (-1)^k [t, y_2, \ldots, y_{k+1}, z] \in V_{K,H}(D)$$

Sabemos que $V_{K,H}(D)$ é fechado sob endomorfismos de $L_K(X)$ que preservam graduação. Desta forma, podemos considerar o endomorfismo que aplica z para $[z, y_1]$ e fixa os demais geradores, obtendo

$$[z,y_1,\dots,y_{k+1},t]+(-1)^k[t,y_2,\dots,y_{k+1},[z,y_1]]. \tag{6.2}$$

Pela identidade de jacobi

$$[t,y_2,\dots,y_{k+1},[z,y_1]]+[z,[y_1,[t,y_2,\dots,y_{k+1}]]]+[y_1,[[t,y_2,\dots,y_{k+1}],z]]=0.$$

Todavia, $[y_1,[[t,y_2,\dots,y_{k+1}],z]]\in V_{K,H}(D)$, pois $[z,t]$ é central em $L_K(X)/V_{K,H}(D)$. Logo,

$$\begin{aligned}
[t,y_2,\dots,y_{k+1},[z,y_1]] &= -[z,[y_1,[t,y_2,\dots,y_{k+1}]]]\\
&= [z,[t,y_2,\dots,y_{k+1},y_1]]\\
&= -[t,y_2,\dots,y_{k+1},y_1,z]\\
&= -[t,y_1,\dots,y_{k+1},z] \pmod{V_{K,H}(D)}.
\end{aligned}$$

Utilizando esta igualdade em (6.2) temos

$$[z,y_1,\dots,y_{k+1},t]+(-1)^{k+1}[t,y_1,\dots,y_{k+1},z]$$

o que conclui a demonstração do item 1.

Para provar o item 2 observe que, pela identidade de Jacobi

$$[z,y_1,\dots,y_k,y_{k+1},t]+[y_{k+1},t,[z,y_1,\dots,y_k]]+[t,[z,y_1,\dots,y_k],y_{k+1}]=0.$$

Além disso, $[t,[z,y_1,\dots,y_k],y_{k+1}]\in V_{K,H}(D)$, pois $[z,t]$ é central em $L_K(X)/V_{K,H}(D)$. Logo

$$[z,y_1,\dots,y_{k+1},t]=[t,y_{k+1},[z,y_1,\dots,y_k]]=-[[z,y_1,\dots,y_k],[t,y_{k+1}]] \pmod{V_{K,H}(D)}.$$

Portanto,

$$[z,y_1,\dots,y_k,[t,y_{k+1}]]+[z,y_1,\dots,y_{k+1},t]\in V_{K,H}(D).$$

□

Usaremos este lema na demonstração da proposição seguinte.

Proposição 6.11. *A álgebra $L_K(X)/V_{K,H}(D)$ é gerada como K-módulo livre por*

$$\begin{aligned}
B &= B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4, \text{ onde} \\
&\quad B_1 = \{y_i + V_{K,H}(D), w_i + V_{K,H}(D), z_i + V_{K,H}(D), t_i + V_{K,H}(D); i = 1,2,\ldots\}, \\
&\quad B_2 = \{[z_i, y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}] + V_{K,H}(D); i = 1,2,\ldots, k = 1,2,\ldots, i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k\}, \\
&\quad B_3 = \{[t_i, y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}] + V_{K,H}(D); i = 1,2,\ldots, k = 1,2,\ldots, i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k\}, \\
&\quad B_4 = \{[z_i, y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}, t_j] + V_{K,H}(D); i, j = 1,2,\ldots, k = 0,1,\ldots, i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k\}.
\end{aligned}$$

Demonstração: Sabemos que $L_K(X)$ é gerado como K-módulo por monômios. Assim, consideremos $m + V_{K,H}(D) \in L_K(X)/V_{K,H}(D)$, onde m é um monômio. Provaremos por indução sobre o grau de m que uma das três situações ocorre

1. $m \in V_{K,H}(D)$
2. $m + V_{K,H}(D) \in B$
3. $-m + V_{K,H}(D) \in B$.

Se $m \in X$ não temos nada a demonstrar. Suponhamos que o grau de m seja maior que 1, digamos $m = [m_1, m_2]$. Por hipótese de indução $m_1 + V_{K,H}(D), m_2 + V_{K,H}(D) \in B$. Observemos que, como $[z,t] + V_{K,H}(D)$ é central em $L_K(X)/V_{K,H}(D)$, B_4 também o é. Desta forma, se $m_1 + V_{K,H}(D)$ ou $m_2 + V_{K,H}(D) \in B_4$, teremos $m \in V_{K,H}(D)$. Temos ainda que, se $m_1 + V_{K,H}(D)$ e $m_2 + V_{K,H}(D) \in B_1$, temos

$$m \in V_{K,H}(D) \text{ ou } m \in \{\pm[y_i, z_j]; \pm[y_i, t_j]; \pm[z_i, t_j]\},$$

o que nos permite eliminar este caso. Por outro lado, como $[z, y_1, y_2] - [z, y_2, y_1], [t, y_1, y_2] - [t, y_2, y_1] \in V_{K,H}(D)$, segue que $[B_2, B_1] = B_2; [B_3, B_1] = B_3$ (aqui $[B_i, B_j] = \{[b_i, b_j]; b_i \in B_i, b_j \in B_j\}$). Desta forma resta-nos analisar o caso em que $m_1 + V_{K,H}(D), m_2 + V_{K,H}(D) \in B_2 \cup B_3$. Contudo,

$$[z_1, z_2] \in V_{K,H}(D) \text{ implica que } [B_2, B_2] \subset V_{K,H}(D);$$

$$[t_1, t_2] \in V_{K,H}(D) \text{ implica que } [B_3, B_3] \subset V_{K,H}(D) \text{ e}$$

pelo item 2 do lema anterior,

$$[B_2, B_3] \subset \pm B_4,$$

o que conclui a demonstração da proposição. □

O próximo lema é de verificação direta.

Lema 6.12.

$$
\begin{aligned}
[g_1^{(3)}, g_1^{(1)}, \ldots, g_n^{(1)}] &= \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12}^{(1)}\xi_{22}^{(1)}\ldots\xi_{22}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, n = 1, 2, \ldots; \\
[g_1^{(4)}, g_1^{(1)}, \ldots, g_n^{(1)}] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n\xi_{23}^{(1)}\xi_{22}^{(1)}\ldots\xi_{22}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, n = 1, 2, \ldots; \\
[g_1^{(3)}, g_1^{(1)}, \ldots, g_n^{(1)}, g_1^{(4)}] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi_{12}^{(1)}\xi_{23}^{(2)}\xi_{22}^{(1)}\ldots\xi_{22}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, n = 0, 1, \ldots.
\end{aligned}
$$

É consequência do lema anterior que $\varphi(B)$ é linearmente independente em

$$G \cong L_K(X)/V_H(M_K),$$

o que demonstra o Teorema 6.9.

Corolário 6.13. *Se K é um domínio de integridade infinito, então as identidades H-graduadas de M_K, visto como anel de Lie, seguem de*

$$
\begin{aligned}
D \;=\; & \{[y_1, y_2], [w_1, w_2], [z_1, z_2], [t_1, t_2]\} \cup \{[w, y], [w, z], [w, t]\} \cup \\
& \cup \{[z, t, y], [z_1, t, z_2], [z, t_1, t_2]\} \cup \{[z, y_1, y_2] - [z, y_2, y_1], [t, y_1, y_2] - [t, y_2, y_1]\}
\end{aligned} .
$$

A demonstração deste corolário é análoga a demonstração do Corolário 5.4.

O Teorema I.14 é consequência direta do Teorema 6.9 e do corolário anterior.

Capítulo

7

Uma Família de Álgebras com mesmas Identidades

Neste capítulo exibimos uma classe infinita de álgebras $M_K^{(n)}$ as quais possuem mesmas identidades de M_K visto como K-álgebra associativa e, por consequência, também mesmas identidades visto como K-álgebra de Lie. Por outro lado, cada K-álgebra $M_K^{(n)}$ possui uma $\mathbb{Z}_n$-graduação natural. Encontramos bases de identidades graduadas para estas diferentes graduações. Para as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_K^{(n)}$ a situação é semelhante às identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de M_K.

7.1 As Álgebras $M_K^{(n)}$

Nesta seção exibimos a classe enumerável de álgebras matriciais associativas $M_K^{(n)}$ e provamos que estas álgebras têm as mesmas identidades ordinárias de M_K.

Consideremos a álgebra associativa,

$$M_K^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K & K & K \\ 0 & 0 & K & K & K \\ 0 & 0 & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij} \in K \right\},$$

onde K é um domínio de integridade infinito. Denotaremos esta álgebra por

$$M_K^{(3)} = \left[\begin{bmatrix} K & K & K \\ K & K & K \\ K & K & K \end{bmatrix} \right].$$

Analogamente definimos o conjunto de matrizes $M_K^{(n)}, n = 2, 3, \ldots$, das matrizes $2n-1 \times 2n-1$ tais que as $n-1$ primeiras colunas e as $n-1$ últimas linhas são nulas.

$$M_K^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & K & \ldots & K \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & K & \ldots & K \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}_{2n-1 \times 2n-1} = \left[\begin{bmatrix} K & \ldots & K \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K & \ldots & K \end{bmatrix} \right].$$

Proposição 7.1. *Seja K um domínio de integridade infinito. Então as álgebras $M_K^{(n)}$ têm as mesmas identidades ordinárias, isto é,*

$$T_K(M_K^{(n)}) = T_K(M_K), \; n = 2, 3, \ldots.$$

Demonstração: Primeiramente observemos que $M_K = M_K^{(2)}$ é quociente de $M_K^{(3)}$. De fato, podemos considerar o epimorfismo

$$\begin{array}{cccc} \theta : & M_K^{(3)} & \longrightarrow & M_K^{(2)} \\ & \left[\begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix} \right] & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & a_{13}+a_{23} & a_{14}+a_{15}+a_{24}+a_{25} \\ 0 & a_{33} & a_{34}+a_{35} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Como

$$\left[\left[\begin{array}{ccc} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right]\right]\left[\left[\begin{array}{ccc} a'_{13} & a'_{14} & a'_{15} \\ a'_{23} & a'_{24} & a'_{25} \\ a'_{33} & a'_{34} & a'_{35} \end{array}\right]\right] = \left[\left[\begin{array}{ccc} a_{13}a'_{33} & a_{13}a'_{34} & a_{13}a'_{35} \\ a_{23}a'_{33} & a_{23}a'_{34} & a_{23}a'_{35} \\ a_{33}a'_{33} & a_{33}a'_{34} & a_{33}a'_{35} \end{array}\right]\right]$$

é direto verificar que θ preserva produto.

Também podemos considerar o epimorfismo

$$\begin{array}{cccc} \theta' : & M_K^{(3)} & \longrightarrow & M_K^{(2)} \\ & \left[\left[\begin{array}{ccc} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right]\right] & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Desta forma, $T_K(M_K^{(2)}) \supset T_K(M_K^{(3)})$. Por outro lado, é direto verificar que $M_K^{(3)}$ satisfaz a identidade $x_1[x_2,x_3]x_4$. Como, pelo Teorema 2.2, as identidades de $M_K^{(2)}$ tem base $x_1[x_2,x_3]x_4$, segue que

$$T_K(M_K^{(3)}) \supset T_K(x_1[x_2,x_3]x_4) = T_K(M_K^{(2)}).$$

Portanto, $T_K(M_K^{(2)}) = T_K(M_K^{(3)})$.

Analogamente prova-se que $M_K^{(n)}$ é quociente de $M_K^{(n+1)}$, $n = 2,3,\ldots$. Portanto $T_K(M_K^{(n)}) = T_K(M_K^{(2)})$, para todo $n \in \{2,3,\ldots\}$, o que demonstra a proposição. $\square$

Pelo teorema de Birkhoff $M_K^{(3)}$ pode ser obtido de $M_K^{(2)}$ através produtos cartesianos, quocientes e subanéis. Desta forma, construiremos monomorfismo de $M_K^{(3)}$ para um produto cartesiano de cópias de $M_K^{(2)}$. A existência deste monomorfismo comprova o teorema de Birkhoff para este caso, isto é, nos da uma prova alternativa de que $T_K(M_K^{(3)}) = T_K(M_K^{(2)})$.

$$
\begin{array}{lcl}
\sigma : \quad M_K^{(3)} & \longrightarrow & M_K^{(3)} \oplus M_K^{(3)} \oplus M_K^{(3)} \oplus M_K^{(3)} \oplus M_K^{(3)} \oplus M_K^{(3)} \\
\left[\left[\begin{array}{ccc} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right]\right] & \longmapsto & \left(\left[\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ a_{23} & a_{24} & 0 \\ a_{33} & a_{34} & 0 \end{array}\right]\right], \left[\left[\begin{array}{ccc} a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{33} & 0 & 0 \end{array}\right]\right], \right. \\
& & \left[\left[\begin{array}{ccc} a_{13} & a_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{33} & a_{34} & 0 \end{array}\right]\right], \left[\left[\begin{array}{ccc} a_{13} & 0 & a_{15} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{33} & 0 & a_{35} \end{array}\right]\right], \\
& & \left. \left[\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ a_{23} & 0 & a_{25} \\ a_{33} & 0 & a_{35} \end{array}\right]\right], \left[\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{33} & 0 & a_{35} \end{array}\right]\right] \right).
\end{array}
$$

Como

$$
\left[\left[\begin{array}{ccc} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right]\right] \left[\left[\begin{array}{ccc} a'_{13} & a'_{14} & a'_{15} \\ a'_{23} & a'_{24} & a'_{25} \\ a'_{33} & a'_{34} & a'_{35} \end{array}\right]\right] = \left[\left[\begin{array}{ccc} a_{13}a'_{33} & a_{13}a'_{34} & a_{13}a'_{35} \\ a_{23}a'_{33} & a_{23}a'_{34} & a_{23}a'_{35} \\ a_{33}a'_{33} & a_{33}a'_{34} & a_{33}a'_{35} \end{array}\right]\right]
$$

é direto verificar que σ é um monomorfismo. Além disso $\sigma(M_K^{(3)})$ é isomorfo ao produto cartesiano

$$
M_K^{(2)} \oplus \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

De fato, a composta $\overline{\theta} \circ \sigma$ é um monomorfismo.

$$
\begin{array}{lcl}
\overline{\theta} \circ \sigma : \quad M_K^{(3)} & \longrightarrow & M_K^{(2)} \oplus M_K^{(2)} \oplus M_K^{(2)} \oplus M_K^{(2)} \oplus M_K^{(2)} \oplus M_K^{(2)} \\
\left[\left[\begin{array}{ccc} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right]\right] & \longmapsto & \left(\begin{pmatrix} 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
& & \left. \begin{pmatrix} 0 & a_{13} & a_{15} \\ 0 & a_{33} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_{23} & a_{25} \\ 0 & a_{33} & a_{35}, \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)
\end{array}
$$

onde $\overline{\theta} = \theta \oplus \theta \oplus \theta \oplus \theta \oplus \theta \oplus \theta$, isto é,

$$\begin{array}{rcl} \overline{\theta} : M_K^{(3)} \oplus M_K^{(3)} \oplus M_K^{(3)} \oplus M_K^{(3)} \oplus M_K^{(3)} \oplus M_K^{(3)} & \longrightarrow & M_K^{(2)} \oplus M_K^{(2)} \oplus M_K^{(2)} \oplus M_K^{(2)} \oplus M_K^{(2)} \oplus M_K^{(2)} \\ (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) & \longmapsto & (\theta(a_1), \theta(a_2), \theta(a_3), \theta(a_4), \theta(a_5), \theta(a_6)) \end{array}$$

De forma análoga podemos definir homomorfismos de $M_K^{(n)}$ para uma soma direta de cópias de $M_K^{(n-1)}$.

7.2 $M_K^{(n)}$ Graduada por $\mathbb{Z}_n$

7.2.1 $M_K^{(n)}$ Vista como Álgebra Associativa Graduada

Nesta seção encontramos bases de identidades graduadas da álgebra associativa $M_K^{(n)}$ graduada por $\mathbb{Z}_n$. Aqui generalizamos o resultado principal da primeira seção do capítulo 5. Provamos que, para um corpo de característica 0, as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_K^{(n)}$ possuem base finita tanto visto como K-álgebra associativa quanto visto como anel associativo. K denota um domínio de integridade infinito.

A álgebra $M_K^{(n)}$ possui uma $\mathbb{Z}_n$-graduação:

$$M_K^{(n)} = \sum_{\overline{\alpha} \in \mathbb{Z}_n} V_n^{(\alpha)} = V_n^{(0)} \oplus V_n^{(1)} \oplus \ldots \oplus V_n^{(n-1)},$$

onde $V_n^{(\alpha)}$ é o subespaço de $M_K^{(n)}$ gerado por todas matrizes E_{ij} tais que $\overline{j-i} = \overline{\alpha}$ e $E_{ij} \in M_K^{(n)}$. Assim, $V_n^{(n-1)}$ consiste de todas matrizes na forma

$$\left[\begin{bmatrix} a_{1,n} & & & \\ & a_{2,n+1} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{n,2n-1} \end{bmatrix}\right],$$

e, para $0 \leq t \leq n-2$, $V_n^{(t)}$ consiste em todas matrizes da forma

$$\left[\left[\begin{array}{ccccccc} 0 & \dots & 0 & a_{1,n+t+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2,n+t+2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-t-1,2n-1} \\ a_{n-t,n} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n,n+t} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]\right].$$

Seja $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre de posto enumerável, onde $X = Y^{(0)} \cup \ldots \cup Y^{(n-1)}$, $Y^{(i)} = \{y_j^{(i)} \mid j = 1,2,\ldots\}$. Desta forma

$$K\langle X\rangle = K\langle X\rangle^{(0)} \oplus K\langle X\rangle^{(1)} \oplus \ldots \oplus K\langle X\rangle^{(n-1)}$$

é $\mathbb{Z}_n$-graduada.

Teorema I.15. *Seja K um domínio de integridade de característica zero. Então o conjunto*

$$\{[y_1^{(0)}, y_2^{(0)}]\} \cup \{y_2^{(j)} y_1^{(i)} y_3^{(k)} \mid i = 1,2,\ldots,n-1;\ j,k = 0,1,\ldots,n-1\}$$

gera as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_K^{(n)}$ tanto visto como K-álgebra associativa, quanto visto como anel associativo.

Seja $T_{K,\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)}) < K\langle X\rangle$ o $T_{K,\mathbb{Z}_n}$-ideal das identidades graduadas de $M_K^{(n)}$ com graduação dada acima.

Teorema 7.2. *Seja K um domínio de integridade infinito. Então o conjunto*

$$C = \{[y_1^{(0)}, y_2^{(0)}]\} \cup \{y_2^{(j)} y_1^{(i)} y_3^{(k)} \mid i = 1,2,\ldots,n-1;\ j,k = 0,1,\ldots,n-1\}$$

gera o $T_{K,\mathbb{Z}_n}$-ideal de identidades graduadas $T_{K,\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)})$ como tal.

É direto verificar que $M_K^{(n)}$ satisfaz todas identidades graduadas de C.

Sabemos que a álgebra graduada relativamente livre $K\langle X\rangle / T_{K,\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)})$ é isomorfa à álgebra de matrizes genéricas graduada G, correspondente à $M_K^{(n)}$ com esta graduação. Esta álgebra G

é gerada livremente pelos elementos

$$g_r^{(0)} = \left[\left[\begin{array}{cccc} 0 & \xi_{1,n+1}^{(r)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_{n-1,2n-1}^{(r)} \\ \xi_{n,n}^{(r)} & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]\right], \dots, g_r^{(n-1)} = \left[\left[\begin{array}{cccc} \xi_{1,n}^{(r)} & & & \\ & \xi_{2,n+1}^{(r)} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \xi_{n,n-1}^{(r)} \end{array}\right]\right],$$

$r = 1,2,\dots$ e $K[\xi] = K[\xi_{ij}^{(r)} \mid i = 1,2,\dots,n;\ j = n,n-1,\dots,2n-1;\ r = 1,2,\dots]$ é a álgebra de polinômios (comutativa e associativa), nas variáveis $\xi_{ij}^{(r)}$, de posto enumerável.

Seja $T_{K,\mathbb{Z}_n}(C)$ o $T_{K,\mathbb{Z}_n}$-ideal, da álgebra livre graduada $K\langle X\rangle$, gerado pelo conjunto C. Consideremos o homomorfismo canônico

$$\begin{array}{rlll} \varphi: & K\langle X\rangle / T_{K,\mathbb{Z}_n}(C) & \longrightarrow K\langle X\rangle / T_{K,\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)}) \cong G & \\ & y_j^{(i)} + T_{K,\mathbb{Z}_n}(C) & \longmapsto y_j^{(i)} + T_{K,\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)}) & \leftrightarrow g_j^{(i)} \end{array}$$

Para provar o teorema encontraremos um conjunto que gera $K\langle X\rangle / T_{K,\mathbb{Z}_n}(C)$ como K-módulo livre. Em seguida demonstraremos que a imagem deste conjunto por φ é linearmente independente.

Lema 7.3. *A álgebra $K\langle X\rangle / T_{K,\mathbb{Z}_n}(C)$ é gerada como K-módulo livre por*

$$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4, \text{ onde}$$

$$B_1 = \{y_{i_1}^{(0)} \dots y_{i_k}^{(0)} + T_{K,\mathbb{Z}_n}(C) \mid k = 1,2,\dots;\ i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k\}$$

$$B_2 = \{y_j^{(i)} y_{i_1}^{(0)} \dots y_{i_k}^{(0)} + T_{K,\mathbb{Z}_n}(C) \mid i = 1,\dots,n-1;\ j = 1,2,\dots;\ k = 0,1,\dots;\ i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k\}$$

$$B_3 = \{y_{i_1}^{(0)} \dots y_{i_k}^{(0)} y_j^{(i)} + T_{K,\mathbb{Z}_n}(C) \mid i = 1,\dots,n-1;\ j = 1,2,\dots;\ k = 1,2\dots;\ i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k\}$$

$$B_4 = \{y_j^{(i)} y_{i_1}^{(0)} \dots y_{i_k}^{(0)} y_m^{(l)} + T_{K,\mathbb{Z}_n}(C) \mid i,l = 1,\dots,n-1;\ j,m = 1,2,\dots;\ k = 0,1,\dots;\ i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k\}.$$

Demonstração: Sabemos que $K\langle X\rangle$ é gerado como K-módulo por monômios, isto é, pelo conjunto

$$A = \{x_{i_1} \dots x_{i_k} \mid x_j \in X = Y^{(0)} \cup \dots \cup Y^{(n-1)}\}.$$

Provaremos que a imagem deste conjunto no quociente $K\langle X\rangle / T_{K,\mathbb{Z}_n}(C)$ é o conjunto B.

Seja $m = x_{i_1} \dots x_{i_k}$; $x_{i_r} \in X$. Primeiramente, se $x_{i_r} \in Y^i, i = 1, \dots, n-1$; para algum $r \in \{2, \dots, k-1\}$, então $x_{i_{r-1}} x_{i_r} x_{i_{r+1}} \in T_{K,\mathbb{Z}_n}(C)$. Logo $m \in T_{K,\mathbb{Z}_n}(C)$.

Por outro lado, $y_1^{(0)} y_2^{(0)} + T_{K,\mathbb{Z}_n}(C) = y_2^{(0)} y_1^{(0)} + T_{K,\mathbb{Z}_n}(C)$, o que implica que $A + T_{K,\mathbb{Z}_n}(C) = B$. □

Lema 7.4.

$$g_1^{(0)} \dots g_r^{(0)} = \left[\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n,n}^{(1)} \dots \xi_{n,n}^{(r)} & \dots & 0 \end{bmatrix}\right], \ r = 2, 3, \dots;$$

$$g_1^{(1)} g_1^{(0)} \dots g_r^{(0)} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1,n}^{(1)} \xi_{n,n}^{(1)} \dots \xi_{n,n}^{(r)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}\right], \ r = 2, 3, \dots;$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$g_1^{(n-1)} g_1^{(0)} \dots g_r^{(0)} = \left[\begin{bmatrix} \xi_{1,n}^{(1)} \xi_{n,n}^{(1)} \dots \xi_{n,n}^{(r)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}\right], \ r = 2, 3, \dots;$$

$$g_1^{(0)} \dots g_r^{(0)} g_1^{(1)} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_{n,n+1}^{(1)} \xi_{n,n}^{(1)} \dots \xi_{n,n}^{(r)} & \dots & 0 \end{bmatrix}\right], \ r = 2, 3, \dots;$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$g_1^{(0)}\dots g_r^{(0)}g_1^{(n-1)} \quad = \quad \left[\left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_{n,n-1}^{(1)}\xi_{n,n}^{(1)}\dots\xi_{n,n}^{(r)} \end{array}\right]\right], \; r = 2,3,\dots.$$

Este lema é de demonstração direta.

Demonstração do Teorema 7.2: É consequência do lema anterior que $\varphi(B)$ é linearmente independente em $G \cong K\langle X\rangle / T_{K,\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)})$, o que demonstra o teorema. □

Corolário 7.5. *Se K é um domínio de integridade de característica 0, então as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_K^{(n)}$, visto como anel associativo, seguem de*

$$C = \{[y_1^{(0)}, y_2^{(0)}]\} \cup \{y_2^{(j)}y_1^{(i)}y_3^{(k)} \mid i = 1,2,\dots,n-1;\; j,k = 0,1,\dots,n-1\}.$$

Demonstração: Provaremos que $T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)}) = T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(C)$. Como $M_K^{(n)}$ satisfaz as identidades graduadas de C, temos que $T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)}) \supset T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(C)$. Por outro lado, pelo Teorema 7.2, o anel associativo $M_{\mathbb{Z}}^{(n)}$ tem base de identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas C. Assim $T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(M_{\mathbb{Z}}^{(n)}) = T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(C)$. Como $M_{\mathbb{Z}}^{(n)}$ é subanel de $M_K^{(n)}$, segue que $T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)}) \subset T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(M_{\mathbb{Z}}^{(n)})$, o que implica que $T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)}) \subset T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(C)$. Portanto $T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)}) = T_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(C)$, o que demonstra o corolário. □

O Teorema I.15 é consequência direta do Teorema 7.2 e do corolário anterior.

7.2.2 $M_K^{(n)}$ Vista como Álgebra de Lie Graduada

Consideramos nesta seção a álgebra de Lie $M_K^{(n)}$ com a $\mathbb{Z}_n$-graduação apresentada na seção anterior. Aqui generalizamos o resultado principal da primeira seção do capítulo 6. Provamos que, para um corpo de característica 0, as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_K^{(n)}$ visto como K-álgebra de Lie graduada possuem base finita enquanto as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_K^{(n)}$ visto como anel de Lie graduado não possuem base finita.

Teorema I.16. *Seja K um domínio de integridade de característica 0. Então as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas da K-álgebra de Lie $M_K^{(n)}$ têm base finita enquanto as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_K^{(n)}$ visto como anel de Lie não têm base finita.*

Seja $L_K(X)$ a álgebra de Lie livre de posto enumerável, onde $X = Y^{(0)} \cup \ldots \cup Y^{(n-1)}$, $Y^{(i)} = \{y_j^{(i)} \mid j = 1,2,\ldots\}$. Desta forma

$$L_K(X) = L_K(X)^{(0)} \oplus L_K(X)^{(1)} \oplus \ldots \oplus L_K(X)^{(n-1)}$$

é $\mathbb{Z}_n$-graduada. O Teorema I.16 é consequência direta do próximo teorema.

Teorema 7.6. *Seja K um domínio de integridade de característica 0. Então:*

1) Se 2 é invertível em K, então as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas da K-álgebra de Lie $M_K^{(n)}$ têm base

$$E = \{[y_1^{(0)}, y_2^{(0)}]\} \cup \{[y_1^{(i)}, y_2^{(j)}, y_3^{(l)}] \mid i,j = 1,\ldots n-1;\ l = 0,1,\ldots n-1\}.$$

Já as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_K^{(n)}$ visto como anel de Lie tem base

$$\begin{aligned} D \;=\; & \{[y_1^{(0)}, y_2^{(0)}]\} \cup \{[y_1^{(i)}, y_2^{(j)}, y_3^{(l)}] \mid i,j = 1,\ldots n-1;\ l = 0,1,\ldots n-1\} \\ & \cup \{[y_1^{(i)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_{2k}^{(0)}, y_1^{(i)}] \mid i = 1,2,\ldots,n-1;\ k = 1,2,\ldots\}, \end{aligned}$$

que não é equivalente a nenhuma base finita de identidades.

2) Se 2 não é invertível em K, então D é uma base de identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas para $M_K^{(n)}$ visto tanto como K-álgebra de Lie quanto como anel de Lie. Nestes casos a base D também não é equivalente a nenhum conjunto finito de identidades.

Seja $V_{K,\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)}) < L_K(X)$ o ideal verbal graduado das identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_K^{(n)}$ com graduação por $\mathbb{Z}_n$ dada acima.

Teorema 7.7. *Seja K um domínio de integridade infinito. Então o conjunto*

$$\begin{aligned} D \;=\; & \{[y_1^{(0)}, y_2^{(0)}]\} \cup \{[y_1^{(i)}, y_2^{(j)}, y_3^{(l)}] \mid i,j = 1,\ldots,n-1; l = 0,1,\ldots,n-1\} \\ & \cup \{[y_1^{(i)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_{2k}^{(0)}, y_1^{(i)}] \mid i = 1,2,\ldots,n-1; k = 1,2,\ldots\}, \end{aligned}$$

gera o ideal verbal graduado $V_{K,\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)})$ como tal.

É direto verificar que $M_K^{(n)}$ satisfaz todas identidades graduadas de D.

Sabemos que a álgebra de Lie graduada relativamente livre $L_K(X)/V_{K,\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)})$ é isomorfa à álgebra de Lie de matrizes genéricas graduada G, correspondente à $M_K^{(n)}$ com esta graduação.

Esta álgebra de Lie é gerada livremente pelos elementos

$$g_r^{(0)} = \left[\left[\begin{array}{cccc} 0 & \xi_{1,n+1}^{(r)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_{n-1,2n-1}^{(r)} \\ \xi_{n,n}^{(r)} & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]\right], \dots, g_r^{(n-1)} = \left[\left[\begin{array}{cccc} \xi_{1,n}^{(r)} & & & \\ & \xi_{2,n+1}^{(r)} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \xi_{n,n-1}^{(r)} \end{array}\right]\right],$$

$r = 1,2,\dots$ e $K[\xi] = K[\xi_{ij}^{(r)} \mid i = 1,\dots n; j = n,\dots,n-1; r = 1,2,\dots]$ é a álgebra de polinômios (associativa e comutativa), nas variáveis $\xi_{ij}^{(r)}$, de posto enumerável.

Seja $V_{K,\mathbb{Z}_n}(D)$ o ideal verbal graduado, da álgebra de Lie livre graduada $L_K(X)$, gerado pelo conjunto D. Consideremos o homomorfismo canônico

$$\begin{array}{rl} \varphi : & L_K(X)/V_{K,\mathbb{Z}_n}(D) \longrightarrow L_K(X)/V_{K,\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)}) \cong G \\ & y_j^{(i)} + V_{K,\mathbb{Z}_n}(D) \longmapsto y_j^{(i)} + V_{K,\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)}) \leftrightarrow g_j^{(i)} \end{array}$$

Para provar o Teorema 7.7 encontramos um conjunto que gera $L_K(X)/V_{K,\mathbb{Z}_n}(D)$ como K-módulo livre. Em seguida demonstramos que a imagem deste conjunto por φ é linearmente independente.

Lema 7.8. *Seja* $E = \{[y_1^{(0)}, y_2^{(0)}]\} \cup \{[y_1^{(i)}, y_2^{(j)}, y_3^{(l)}] \mid i,j = 1,\dots n-1;\ l = 0,1,\dots n-1\}$ *. Então as seguintes identidades pertencem à* $V_{K,\mathbb{Z}_n}(E) \subset V_{K,\mathbb{Z}_n}(D)$*.*

1. $[y_1^{(i)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}] - [y_1^{(i)}, y_2^{(0)}, y_1^{(0)}]$;
2. $[y_1^{(i)}, y_1^{(0)}, \dots, y_k^{(0)}, y_2^{(j)}] + (-1)^k [y_2^{(j)}, y_1^{(0)}, \dots, y_k^{(0)}, y_1^{(i)}]$; $k = 0,1,\dots$; $i,j = 1,\dots,n-1$;
3. $[y_1^{(i)}, y_1^{(0)}, \dots, y_k^{(0)}, [y_2^{(j)}, y_{k+1}^{(0)}]] - [y_1^{(i)}, y_1^{(0)}, \dots, y_k^{(0)}, y_{k+1}^{(0)}, y_2^{(j)}]$; $k = 0,1,2,\dots$; $i,j = 1,\dots,n-1$.

Este lema pode ser demonstrado de forma análoga à Proposição 6.2.

Lema 7.9. *A álgebra $L_K(X)/V_{K,\mathbb{Z}_n}(D)$ é gerada como K-módulo livre por*

$$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4, \text{ onde}$$

$$B_1 = \{y_j^{(i)} + V_{\mathbb{Z}_n}(D) \mid i = 0,1,\ldots,n-1;\ j = 1,2,\ldots\},$$

$$B_2 = \{[y_j^{(i)}, y_{i_1}^{(0)}, \ldots, y_{i_k}^{(0)}] + V_{\mathbb{Z}_n}(D) \mid i = 1,\ldots,n-1;\ j,k = 1,2,\ldots; \\ i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k\},$$

$$B_3 = \{[y_j^{(i)}, y_{i_1}^{(0)}, \ldots, y_{i_{2k-1}}^{(0)}, y_m^{(l)}] + V_{\mathbb{Z}_n}(D) \mid i,l = 1,\ldots,n-1;\ j,m,k = 1,2,\ldots; \\ i > l \text{ ou } (i = l \text{ e } j \geq m);\ i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_{2k-1}\},$$

$$B_4 = \{[y_j^{(i)}, y_{i_1}^{(0)}, \ldots, y_{i_{2k}}^{(0)}, y_m^{(l)}] + V_{\mathbb{Z}_n}(D) \mid j,m,k = 1,2,\ldots;\ i,l = 1,\ldots,n-1; \\ i > l \text{ ou } (i = l \text{ e } j > m);\ i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_{2k}\}.$$

Demonstração: Análoga a demonstração da Proposição 6.3. □

Lema 7.10.

$$[g_1^{(1)}, g_1^{(0)}, \ldots g_r^{(0)}] = \left[\left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1,n}^{(1)}\xi_{n,n}^{(1)}\ldots\xi_{n,n}^{(r)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (-1)^r\xi_{n,n+1}^{(1)}\xi_{n,n}^{(1)}\ldots\xi_{n,n}^{(r)} & \ldots & 0 \end{array}\right]\right],$$

$r = 2,3,\ldots;$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$[g_1^{(n-1)}, g_1^{(0)}, \ldots g_r^{(0)}] = \left[\left[\begin{array}{cccc} \xi_{1,n}^{(1)}\xi_{n,n}^{(1)}\ldots\xi_{n,n}^{(r)} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & (-1)^r\xi_{n,2n-1}^{(1)}\xi_{n,n}^{(1)}\ldots\xi_{n,n}^{(r)} \end{array}\right]\right],$$

$r = 2,3,\ldots;$

$$\begin{cases} \left([g_1^{(i)}, g_1^{(0)}, \ldots, g_r^{(0)}, g_2^{(j)}]\right)_{n-i,n+j} = \xi^{(1)}_{n-i,n}\xi^{(2)}_{n,n+j}\xi^{(1)}_{22}\ldots\xi^{(r)}_{22}, \\ \left([g_1^{(i)}, g_1^{(0)}, \ldots, g_r^{(0)}, g_2^{(j)}]\right)_{n-j,n+i} = (-1)^{r+1}\xi^{(1)}_{n-j,n}\xi^{(2)}_{n,n+i}\xi^{(1)}_{22}\ldots\xi^{(r)}_{22} \\ \left([g_1^{(i)}, g_1^{(0)}, \ldots, g_r^{(0)}, g_2^{(j)}]\right)_{l,m} = 0, \ \ se \ \ (l,m) \neq (n-i,n+j) \ \ e \ \ (l,m) \neq (n-j,n+i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left([g_1^{(i)}, g_1^{(0)}, \ldots, g_r^{(0)}, g_2^{(i)}]\right)_{l,m} = & 0, \ \ se \ \ (l,m) \neq (n-i,n+i) \ \ e \\ \left([g_1^{(i)}, g_1^{(0)}, \ldots, g_r^{(0)}, g_2^{(i)}]\right)_{n-i,n+i} = & \xi^{(1)}_{n-i,n}\xi^{(2)}_{n,n+i}\xi^{(1)}_{22}\ldots\xi^{(r)}_{22}+ \\ & +(-1)^{r+1}\xi^{(1)}_{n,n+i}\xi^{(2)}_{n-i,n}\xi^{(1)}_{22}\ldots\xi^{(r)}_{22} \end{cases}$$

Este lema é de demonstração direta.

Demonstração do Teorema 7.7: É consequência do lema anterior que $\varphi(B)$ é linearmente independente em $G \cong L_K(X)/V_{K,\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)})$, o que demonstra o teorema. $\square$

Para demonstrar o Teorema 7.6 consideramos primeiro alguns resultados auxiliares.

Lema 7.11. *Sejam K um domínio de integridade infinito tal que 2 não é invertível e $\beta_k^{(i)} = [y_1^{(i)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_{2k}^{(0)}, y_1^{(i)}]$; $i = 1, \ldots, n-1$. Então*

$$\beta_k^{(i)} \notin V_{K,\mathbb{Z}_n}(E); \ i = 1, \ldots, n-1; \ k = 1, 2, \ldots.$$

Demonstração: Sejam $\mathscr{F} = \{s \subset \mathbb{N} \mid s \text{ é finito}\}$ e $\overline{K} = K/2K$. Seja ainda A a $\overline{K}$-álgebra de Lie gerada pelos elementos $a_s^{(i)}, s \in \mathscr{F}$, $i \in \{\overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$, com a seguinte tabela de multiplicação

$$[a_s^{(i)}, a_t^{(j)}] = \begin{cases} c_{s\cup t}^{(i+j)}, & se \quad s \cap t = \emptyset \\ 0, & se \quad s \cap t \neq \emptyset \end{cases}$$

$$[a_s^{(i)}, c_t^{(j)}] = 0, \quad \forall\, s,t \in \mathscr{F}$$
$$[c_s^{(i)}, c_t^{(j)}] = 0, \quad \forall\, s,t \in \mathscr{F}$$

A álgebra de Lie A tem derivações b_l, $l \in \mathbb{N}$, definidas por

$$[a_s^{(i)}, b_l] = \begin{cases} a_{s\cup\{l\}}^{(i)}, & se \quad l \notin s \\ 0, & se \quad l \in s \end{cases} ; \ \forall\, l \in \mathbb{N}, \ s \in \mathscr{F}.$$

$$[c_s^{(i)}, b_l] = 0, \ \forall\, l \in \mathbb{N},\ s \in \mathscr{F}.$$

De fato, como $c_s^{(i)}$ é central em A é suficiente provar que

$$[[a_s^{(i)}, a_t^{(j)}], b_l] = [[a_s^{(i)}, b_l], a_t^{(j)}] + [a_s^{(i)}, [a_t^{(j)}, b_l]].$$

Contudo, o lado esquerdo da igualdade é nulo. Se $l \in s \cup t$ ou $s \cap t \neq \emptyset$ o lado direito também é nulo. Caso contrário este é igual a $2c_{s\cup t\cup\{l\}}^{(i+j)}$, o qual é nulo pois $\overline{K}$ tem característica 2. Logo cada b_i é uma derivação de A.

Observe que

$$[[a_s^{(i)}, b_l], b_m] = [[a_s^{(i)}, b_m], b_l];\ l, m \in \mathbb{N};\ s \in \mathscr{F}.$$

Assim as derivações b_l comutam.

Seja B o produto semidireto de A pela álgebra de Lie abeliana gerada pelos elementos b_l, $l \in \mathbb{N}$. Temos que

$$B = B_0 \oplus B_1 \oplus \ldots \oplus B_{n-1},$$

onde B_0 é o $\overline{K}$-submódulo de B gerado pelo conjunto $\{c_s^{(0)} \mid s \in \mathscr{F}\} \cup \{b_l \mid l \in \mathbb{N}\}$ e B_i é o $\overline{K}$-submódulo de B gerado pelo conjunto $\{a_s^{(i)} \mid s \in \mathscr{F}\} \cup \{c_s^{(i)} \mid s \in \mathscr{F}\}$; $i \geq 1$. É direto verificar que $B = B_0 \oplus B_1 \oplus \ldots \oplus B_{n-1}$, é uma $\mathbb{Z}_n$ graduação para B. Também é direto que B satisfaz as identidades graduadas $[y_1^{(0)}, y_2^{(0)}]$ e $[y_1^{(i)}, y_2^{(j)}, y_3^{(l)}]$. Por outro lado,

$$[a_\emptyset^{(i)}, b_1, \ldots, b_{2k}, a_\emptyset^{(i)}] = [a_{\{1,\ldots,2k\}}^{(i)}, a_\emptyset^{(i)}] = c_{\{1,\ldots,2k\}}^{(2i)} \neq 0.$$

Assim B não satisfaz as identidades graduadas $[y_1^{(i)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_{2k}^{(0)}, y_1^{(i)}]$; $k = 1, 2, \ldots$. Logo a K-álgebra B satisfaz as identidades graduadas de E mas não satisfaz as identidades graduadas $\beta_k^{(i)}$. Portanto

$$\beta_k^{(i)} = [y_1^{(i)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_{2k}^{(0)}, y_1^{(i)}] \notin V_{K,\mathbb{Z}_n}(E);\ k = 1, 2, \ldots.$$

$\square$

Proposição 7.12. *Seja K um domínio de integridade infinito tal que 2 não é invertível. Então o elemento $\overline{\beta}_k^{(i)} = [y_1^{(i)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_{2k}^{(0)}, y_1^{(i)}] + V_{K,\mathbb{Z}_n}(E)$ não pertence ao ideal verbal graduado $I \lhd \mathscr{M} = L_K(X)/V_{K,\mathbb{Z}_n}(E)$ gerado pelo conjunto $\{\overline{\beta}_l^{(i)} \mid l = 1, 2, \ldots; l \neq k\}$.*

Esta proposição pode ser demonstrada de forma análoga à Proposição 6.8.

Demonstração do Teorema 7.6:

Primeiramente provaremos que, se 2 é invertível em K, então as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas da K-álgebra de Lie $M_K^{(n)}$ tem base E. Este fato é consequência quase imediata do Teorema 7.7. É suficiente provar que o ideal verbal graduado $V_{K,\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)}) < L_K(X)$ é gerado por E, isto é, $V_{K,\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)}) = V_{K,\mathbb{Z}_n}(E)$. Pelo Lema 7.8

$$\{[y_1^{(i)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_{2k}^{(0)}, y_2^{(j)}] + [y_2^{(j)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_{2k}^{(0)}, y_1^{(i)}] \mid i, j = 1, \ldots, n-1;\ k = 1, 2, \ldots\} \subset V_{K,\mathbb{Z}_n}(E).$$

Como 2 é invertível, fazendo $y_1^{(i)} = y_2^{(j)}$, temos

$$\{[y_1^{(i)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_{2k}^{(0)}, y_1^{(i)}] \mid i = 1, \ldots, n-1;\ k = 1, 2, \ldots\} \subset V_{K,\mathbb{Z}_n}(E).$$

Portanto, pelo Teorema 7.7, $V_{K,\mathbb{Z}_n}(E) = V_{K,\mathbb{Z}_n}(D) = V_{K,\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)})$.

É consequência direta do Lema 7.11 e da Proposição 7.12 que, se 2 não é invertível em K, então D não é equivalente a nenhum conjunto finito de identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $L_K(X)$. Em outras palavras, se 2 não é invertível em K, $M_K^{(n)}$ visto como K-álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada não tem base finita de identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas.

Resta-nos provar que $M_K^{(n)}$ visto como anel de Lie tem base de identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas D a qual não é equivalente a nenhuma base finita de identidades. Isto não depende de 2 ser invertível em K. Como $M_K^{(n)}$ satisfaz as identidades de D, temos que $V_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)}) \supset V_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(D)$. Por outro lado, o anel associativo $M_{\mathbb{Z}}^{(n)}$ tem base de identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas D. Assim $V_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(M_{\mathbb{Z}}^{(n)}) = V_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(D)$. Como $M_{\mathbb{Z}}^{(n)}$ é subanel de $M_K^{(n)}$, segue que $V_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)}) \subset V_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(M_{\mathbb{Z}}^{(n)})$, o que implica que $V_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)}) \subset V_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(D)$. Portanto $V_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(M_K^{(n)}) = V_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n}(D)$. Por outro lado, pelo Lema 7.11 e pela Proposição 7.12, para $K = \mathbb{Z}$, D não é equivalente a nenhuma base de identidades graduadas em $L_{\mathbb{Z}}(X)$, o que demonstra o teorema.

$\square$

Apêndice

$\mathcal{A}$

Base de Identidades para $gl_2(K)$, $\mid K \mid = \infty$, $charK = 2$

Se o corpo base K for infinito de característica 2, a álgebra de Lie $gl_2(K)$ não possui nenhuma base finita de identidades, isto foi demonstrado em 1970, por Vaughan-Lee [48]. Porém ele não exibiu nenhuma base explícita de identidades para $gl_2(K)$. Esta base explícita foi descoberta por Drensky e enunciada no livro [16]. Além disso, uma demonstração deste resultado foi escrita na tese [14] e nunca foi publicada em uma revista científica. Neste apêndice demonstramos este fato. Mais precisamente demonstramos o seguinte teorema.

Teorema I.8. (Drensky, veja [14] e [16]). *Seja K um corpo infinito de característica 2. Então o conjunto*

$$\{[x_1,x_2,[x_3,x_4],x_5]\} \cup \{[x_1,x_2,[x_1,x_2,x_3,\ldots,x_r]] \mid r = 3,4,5,\ldots\} \cup$$

$$\{[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5,\ldots,x_r]] + [x_1,x_3,[x_4,x_2,x_5,\ldots,x_r]] + [x_1,x_4,[x_2,x_3,x_5,\ldots,x_r]] \mid r = 4,5,6,\ldots\}$$

é uma base de identidades para $gl_2(K)$. Além disso, esta base não é equivalente a nenhum conjunto finito de identidades.

Seja K um corpo infinito de característica 2. Consideremos a álgebra de Lie de matrizes

2×2 sobre K

$$gl_2(K) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right) \middle| \; a_{ij} \in K \right\}.$$

É direto verificar que, neste caso,

$$gl_2(K) \cong M_K = \left(\begin{array}{ccc} 0 & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Esse isomorfismo é definido pela aplicação

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Assim, para provar o Teorema I.8, podemos considerar identidades de M_K ao invés de considerar identidades de $gl_2(K)$.

Sejam $L_K(X)$ a álgebra de Lie livre sobre K, com geradores livres $x_1, x_2, \ldots$, $V_K(v)$ o ideal verbal de $L_K(X)$ gerado por $v = [x_1, x_2, [x_3, x_4], x_5]$ e $V_K(M_K)$ o ideal das identidades de M_K.

Seja $\mathscr{F} = L_K(X)/V_K(v)$. Utilizaremos a seguir um conjunto que gera $\mathscr{F}''$ como espaço vetorial. Este conjunto foi obtido como consequência do teorema de Ju. V. Kuz'min [34].

Sejam

$$\begin{aligned} w(i, j, k, l, m_1, \ldots, m_{r-4}) &= [x_i, x_j, [x_k, x_l, x_{m_1}, \ldots, x_{m_{r-4}}]] + \\ &+ [x_i, x_k, [x_l, x_j, x_{m_1}, \ldots, x_{m_{r-4}}]] + \\ &+ [x_i, x_l, [x_j, x_k, x_{m_1}, \ldots, x_{m_{r-4}}]], \end{aligned}$$

$$u(i, j, k, l, m_1, \ldots, m_{r-4}) = [x_i, x_j, [x_k, x_l, x_{m_1}, \ldots, x_{m_{r-4}}]].$$

Como consequência direta do Teorema 3.5 temos o seguinte teorema.

Teorema A.1. *Sejam K um corpo infinito de característica 2 e $\mathscr{F} = L_K(X)/V_K(v)$. Então $\mathscr{F}''$*

é um espaço vetorial com base formada pelos elementos

$$w(i,j,k,l,m_1,\ldots,m_{r-4}) + V_K(v),$$

onde $i < j < k < \ldots < m_{r-4}$. *Juntamente com os elementos*

$$u(i,j,k,l,m_1,\ldots,m_{r-4}) + V_K(v),$$

tais que $r \geq 4, i > j, k > l, i \geq k, j \geq l$ *e* $j \leq m_1 \leq \ldots \leq m_{r-4}$. *Além disso, se* $(i,j) = (k,l)$, *para* r *par,* $x_{m_{2t-1}} \neq x_{m_{2t}}$ *para algum* $t \in \{1,2,\ldots,\frac{r-4}{2}\}$.

Demonstração: Os elementos $w(i,j,k,l,\ldots,m_{r-4}) + V_{\mathbb{Z}}(v)$ e $u(i,j,k,l,m_1,\ldots,m_{r-4}) + V_{\mathbb{Z}}(v)$ geram, como grupo aditivo, $L_{\mathbb{Z}}(X)''/V_{\mathbb{Z}}(v)$. Utilizando o Corolário 1.31, temos

$$L_K(X)/V_K(v) \cong K \otimes_{\mathbb{Z}} L_{\mathbb{Z}}(X)/V_{\mathbb{Z}}(v).$$

Assim $w(i,j,k,l,\ldots,m_{r-4}) + V_K(v)$ e $u(i,j,k,l,m_1,\ldots,m_{r-4}) + V_K(v)$ geram $\mathscr{F}''$ como espaço vetorial. $\square$

É direto verificar que M_K satisfaz as identidades do conjunto C definido a seguir

$$C = \{w(1,2,\ldots,r) \mid r = 4,5,6,\ldots\} \cup \{u(1,2,1,2,\ldots,r);\ \ r = 3,4,5,6,\ldots\}.$$

Seja V o ideal verbal gerado por $\{v\} \cup C$, isto é, $V = V_K(\{v\} \cup C)$. O próximo lema é consequência direta do Teorema A.1.

Lema A.2. *Sejam* K *um corpo infinito de característica 2 e* $\mathscr{H} = L_K(X)/V$. *Então* $\mathscr{H}''$ *é um espaço vetorial com base formada pelos elementos*

$$[x_i, x_j, [x_k, x_l, x_{m_1}, \ldots, x_{m_{r-4}}]] + V \tag{A.1}$$

tais que $(i,j) \neq (k,l)$, $r \geq 4, i > j, k > l, i \geq k, j \geq l$ *e* $j \leq m_1 \leq \ldots \leq m_{r-4}$.

A álgebra relativamente livre da variedade gerada por M_K é isomorfa a álgebra de matrizes genéricas G, gerada livremente pelos elementos

$$g_r = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12}^{(r)} & \xi_{13}^{(r)} \\ 0 & \xi_{22}^{(r)} & \xi_{23}^{(r)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sendo $K[\xi] = K[\xi_{ij}^{(r)} \mid i = 1,2;\ j = 2,3;\ r = 1,2,\ldots]$ a álgebra de polinômios (associativa e comutativa), nas variáveis $\xi_{ij}^{(r)}$, de posto enumerável.

Para demonstrar o Teorema I.8 consideremos o homomorfismo canônico

$$\begin{array}{llll} \varphi: & L_K(X)/V & \longrightarrow & L_K(X)/V_K(M_K) & \cong G \\ & x_i + V & \longmapsto & x_i + V_K(M_K) & \leftrightarrow g_i \end{array}$$

É suficiente mostrar que φ é um isomorfismo. Para tanto, utilizaremos a seguinte observação.

Observação A.3 Se $ker\varphi \neq \{0\}$, então existe $f \in L_K(X)$ multilinear, $f \notin V_K(v)$, tal que $f + V \in ker\varphi$.

De fato Vaughan-Lee [48] demonstrou que se z é uma identidade não multilinear para M_K e z não é consequência de $v = [x_1, x_2, [x_3, x_4], x_5]$, então z é consequência de

$$\{[x_1, x_2, [x_1, x_2, x_3 \ldots, x_r]] \mid r = 3,4,5\ldots\}.$$

Lema A.3. *Se f é multilinear e $f + V \in ker\varphi$, então $f \in L_K(X)''$.*

A demonstração deste lema é completamente análoga a demonstração do Lema 3.3.

Assim resta-nos mostrar que a imagem dos elementos multilineares na forma (A.1) por φ é linearmente independente.

Lema A.4.

$$\varphi(u(i,j,k,l,m_1,\ldots,m_{r-4})) = [g_i, g_j, [g_k, g_l, g_{m_1}, \ldots, g_{m_{r-4}}]] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{u} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $r \geq 4$ *e*

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}(i,j,k,l,m_1,\ldots,m_{r-4}) \\ &= \{(-1)^{r+1}(\xi_{12}^{(i)}\xi_{22}^{(j)} - \xi_{22}^{(i)}\xi_{12}^{(j)})(\xi_{23}^{(k)}\xi_{22}^{(l)} - \xi_{22}^{(k)}\xi_{23}^{(l)}) - (\xi_{22}^{(i)}\xi_{23}^{(j)} - \xi_{23}^{(i)}\xi_{22}^{(j)})\times \\ &\quad \times(\xi_{12}^{(k)}\xi_{22}^{(l)} - \xi_{22}^{(k)}\xi_{12}^{(l)})\}\xi_{22}^{(m_1)}\ldots\xi_{22}^{(m_{r-4})}. \end{aligned}$$

Sabemos que $K[\xi]$ possui graduação $K[\xi] = P_0 \oplus P_1 \oplus \ldots$, onde P_i é o espaço vetorial gerados pelos monômios de grau i; $\quad i = 0,1,2,\ldots$. Segue que $G'' = E_4 \oplus E_5 \oplus E_6 \oplus \ldots$, onde E_s é um subespaço vetorial de G'' com matrizes na forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b_s \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e b_s é um polinômio de grau s em $K[\xi]$.

Lema A.5. *Suponha que a imagem (por φ) dos elementos multilineares na forma (A.1) tais que*

$$\{i,j,k,l,m_1,\ldots,m_{r-4}\} = \{1,\ldots,r\}$$

é linearmente independente. Então a imagem do conjunto de todos elementos multilineares na forma (A.1) é linearmente independente.

A demonstração deste lema é completamente análoga a demonstração do Lema 3.8.

Demonstração do Teorema I.8:

Vaughan-Lee [48] provou que $gl_2(K)$ não possui nenhuma base finita de identidades. Assim devemos demonstrar que os elementos descritos no Teorema I.8 formam uma base de identidades para $M_K \cong gl_2(K)$. Provaremos que φ é um isomorfismo entre álgebra relativamente livre $\mathscr{L} = L_K(X)/V$ e G. Pelos lemas A.2 e A.3 é suficiente provar a independência linear dos elementos multilineares na forma (A.1). Utilizando o lema anterior podemos supor que

$$\{i,j,k,l,m_1,\ldots,m_{r-4}\} = \{1,\ldots,r\}.$$

Como $j < i, l < k < i$ e $l < j < m_1 < \ldots < m_{r-4}$, segue que $l = 1$ e $j \in \{2,3\}$. Se $j = 3$ então $k = 2$. Assim temos os seguintes elementos

Para $j = 3$ temos os elementos da forma

$$\bar{u}(s,3,2,1,4,\ldots,\hat{s},\ldots,r) = \{(-1)^{r+1}(\xi_{12}^{(s)}\xi_{22}^{(3)} - \xi_{22}^{(s)}\xi_{12}^{(3)})(\xi_{23}^{(2)}\xi_{22}^{(1)} - \xi_{22}^{(2)}\xi_{23}^{(1)}) -$$

$$(\xi_{22}^{(s)}\xi_{23}^{(3)} - \xi_{23}^{(s)}\xi_{22}^{(3)})(\xi_{12}^{(2)}\xi_{22}^{(1)} - \xi_{22}^{(2)}\xi_{12}^{(1)})\}\xi_{22}^{(4)}\ldots\hat{\xi}_{22}^{(s)}\ldots\xi_{22}^{(r)}$$

$(s = 4,\ldots,r)$, totalizando $r-3$ elementos.

Para $j = 2$ temos os elementos da forma

$$\bar{u}(s,2,t,1,3,\ldots,\hat{t},\ldots,\hat{s},\ldots,r) = \{(-1)^{r+1}(\xi_{12}^{(s)}\xi_{22}^{(2)} - \xi_{22}^{(s)}\xi_{12}^{(2)})(\xi_{23}^{(t)}\xi_{22}^{(1)} - \xi_{22}^{(t)}\xi_{23}^{(1)}) -$$

$$(\xi_{22}^{(s)}\xi_{23}^{(2)} - \xi_{23}^{(s)}\xi_{22}^{(2)})(\xi_{12}^{(t)}\xi_{22}^{(1)} - \xi_{22}^{(t)}\xi_{12}^{(1)})\}\xi_{22}^{(3)}\ldots\hat{\xi}_{22}^{(t)}\ldots\hat{\xi}_{22}^{(s)}\ldots\xi_{22}^{(r)},$$

$r \geq s > t \geq 3$, totalizando $\frac{(r-3)(r-2)}{2}$.

Suponhamos que alguma combinação linear destes elementos é nula. Observe agora que nos elementos $\bar{u}(s,2,t,1,3,\ldots,\hat{t},\ldots,\hat{s},\ldots,r)$ aparecem os monômios

$$\xi_{12}^{(s)}\xi_{22}^{(3)}\xi_{23}^{(t)}\xi_{22}^{(1)}\xi_{22}^{(3)}\ldots\hat{\xi}_{22}^{(t)}\ldots\hat{\xi}_{22}^{(s)}\ldots\xi_{22}^{(r)}$$

$r \geq s > t \geq 3$; que não está presente nos demais monômios acima. Assim o coeficiente dos elementos $\bar{u}(s,2,t,1,3,\ldots,\hat{t},\ldots,\hat{s},\ldots,r)$ deve ser zero. Na expressão restante observe que nos elementos $\bar{u}(s,3,2,1,4,\ldots,\hat{s},\ldots,r)$ aparecem os monômios

$$\xi_{12}^{(s)}\xi_{22}^{(3)}\xi_{23}^{(2)}\xi_{22}^{(1)}\xi_{22}^{(4)}\ldots\hat{\xi}_{22}^{(s)}\ldots\xi_{22}^{(r)};$$

$s = 4,\ldots,r.$

Segue que todos os coeficientes devem ser nulos, o que demonstra o teorema. □

Referências Bibliográficas

[1] E. Aladova, A. Krasilnikov, *Polynomial identities in nil-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), 5629-5646.

[2] E. Aljadeff, A. Kanel-Belov, *Reprensentability and Specht Problem for G-graded Algrebras*, Adv. in Math. **225** (2010), 2391-2428.

[3] S.S. Azevedo, *Graded identities for the matrix algebra of order n over an infinite field*, Commun. Algebra, **30** (12) (2002), 5849-5860.

[4] Yu.A. Bahturin, A.Yu. Olshanskii, *Identical relations in finite Lie rings*. Mat. Sb. (N.S.) **96 (138)** (1975), 543-559.

[5] A.P. Brandão Jr., P. Koshlukov, A. Krasilnikov, *Graded central polynomials for the matrix algebra of order two*, Monatsh. Math. **157** (2009), 247-256.

[6] L. Centrone, $\mathbb{Z}_2$*-graded identities of the Grassmann algebra in positive characteristic*, Linear Algebra Appl. **435** (2011), 3297-3313.

[7] L. Centrone, *Polynomial identities of some minimal varieties with low PI-exponent*, Ph.D. thesis, 2011.

[8] P. Zh. Chiripov, P. N. Siderov, *On bases for identities of some varieties of associative algebras*, Pliska Studia Math. Bulgarica **2** (1981), 103-115 (Russian).

[9] J. Colombo, P. Koshlukov, *Central polynomials in the matrix algebra of order two*. Linear Algebra Appl. **377** (2004), 53-67.

[10] O.M. Di Vincenzo, *A note on the identities of the Grassmann algebras*, Unione Math. Italiana. Bollettino A **7 (5)**, (1991), 307-315.

[11] O.M. Di Vincenzo, *On the graded identities of $M_{1,1}(E)$*, Israel J. Math. **80** (3) (1992), 323-335.

[12] O.M. Di Vincenzo, V.R.T. Da Silva, *On $\mathbb{Z}_2$-graded polynomial identities of the Grassmann algebra*, Linear Algebra Appl. **431** (2009), 56-72.

[13] V. S. Drensky, *Identities in Lie algebras*, Algebra i Logika **13** (1974), 265-290 (Russian).

[14] V. S. Drensky, *Solvable Varieties of Lie algebras*, Ph. D. thesis, Dept. of Mechanics and Math. Moscow State Univ., Moscow, 1974 (Russian).

[15] V. Drensky, *A minimal basis of identities for a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*, Algebra i Logika **20**, (1981), 282-290 (Russian); Algebra and Logic **20**, (1981), 188-194 (Engl. transl.).

[16] V. Drensky, *Free Algebras and PI-Algebras*, Graduate Course in Algebra, Springer, Singapore, New York, 1999.

[17] V. Drensky, E. Formanek, *Polynomial identity rings. Advanced Courses in Mathematics*. CRM Barcelona. Birkhauser Verlag, Basel, 2004.

[18] V.T. Filippov, *Varieties of Mal'tsev algebras*, Algebra i Logika **20**, No. 3 (1981), 300-314 (Russian); Algebra and Logic **20**, (1981), 200-210 (Engl. transl.).

[19] G.K. Genov, *On the Specht property of certain varieties of associative algebras over a field of characteristic zero*, Dokl. Bulg. AN 29 (1976), 939-941 (Russian).

[20] G.K. Genov, *A basis for identities of third order matrix algebra over a finite field*, Algebra and Logic, **20** (1981), 241-257.

[21] A. Giambruno, P. Koshlukov, *On the identities of the Grassmann algebras in characteristic* $p > 0$, Israel J. Math. **122** (2001), 305-316.

[22] A. Giambruno, A. Valenti, *Central polynomial and matrix invariant*, Israel J. Math. **96** (1996), 281-297.

[23] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, Math. Surveys and Monographs, 2005.

[24] C. K. Gupta, A. Krasilnikov, *The finite basis question for varieties of groups-some recent results*, Illinois J. Math. **47** (2003), 273-283.

[25] A. È. Guterman, *Identities of nearly triangular matrices*, Mat. Sb. **192** (2001), 3-14.

[26] A. V. Il'tyakov, *On finite basis of identities of Lie algebra representations*, Nova J. Algebra Geom. **1** (1992), 207-259.

[27] A. Kanel-Belov, L. H. Rowen, *Computational aspects of polynomial identities*, AK Peters, 2005.

[28] A. Kemer, *Finite basability of identities of associative algebras*, Algebra i Logika 26 (1987), 597-641 (Russian); Algebra and Logic **26** (1988), 362-397 (Engl. transl.).

[29] D. Krakowski, A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **181** (1973), 429-438.

[30] A. N. Krasilnikov, *The identities of a Lie algebra view as a Lie Ring*, Quart. J. Math. **60** (2009), 57-61.

[31] P. Koshlukov, *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic* $p \neq 2$. J. Algebra **241**, (2001), 410-434.

[32] P. Koshlukov, S.S. de Azevedo, *Graded identities for T-prime algebras over fields of positive characteristic*, Israel J. Math. **128** (2002), 157-176.

[33] P. Koshlukov, A. Valenti, *Graded identities for the algebra of* $n \times n$ *upper triangular matrices over an infinite field*, Internat. J. Algebra Comput. **13** no. 5, (2003), 517-526.

[34] Ju. V. Kuz'min, *Free Center-by-metabelian groups, Lie algebra, and* $\mathscr{D}$*-groups*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **41**, (1977), 1-29.

[35] S. Lang, *Algebra*, Springer-Verlag, New Haven, 2000.

[36] V.N. Latyshev, *Partially ordered sets and nonmatrix identities of associative algebras*, Algebra i Logika **15**, (1976), 53-70 (Russian).

[37] I.V. Lvov, *Varieties of associative rings*, Algebra i Logika 12 no. **3** (1973), 269-297 (Russian); Algebra and Logic **12** (1973), 667-688 (Engl. transl.).

[38] Yu.N. Maltsev, E. N. Kuz'min, *A basis for the identities of the algebra of second order matrices over a finite field*, Algebra i Logika **17**, (1978), 28-32 (Russian); Algebra and Logic **17**, (1978), 18-21 (Engl. transl.).

[39] Yu. N. Maltsev, *A basis for the identities of the algebra of upper triangular matrices*, Algebra i Logika **10** (1971), 393-400 (Russian); Algebra and Logic **10** (1971), 242-247 (Engl. transl.).

[40] A. P. Popov, *Identities of tensor product of two copies of Grassmann algebra*, Algebra i Logika, **21**, (1982), 442-471, (in Russian); Engl. Transl. Algebra and Logic, **21**, (1982), 296-316.

[41] Yu.P. Razmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*, Algebra i Logika **12** (1973), 83-113 (Russian); Algebra and Logic **12** (1973), 47-63 (Engl. transl.).

[42] K. N. Semenov, *Basis of identities of the algebra sl(2; k) over a finite field*, Math. Zametki **52** (1992), 114-119.

[43] P. N. Siderov, *A basis for identities of an algebra of triangular matrices over an arbitrary field*, PLISKA Stud. Math. Bulgar. **2** (1981), 143-152.

[44] A. H. Stojanova-Venkova, *Bases of identities of Grassmann algebras*, Serdica **6**, no. 1 (1980), 63-72 (Russian).

[45] B. T. Tki, *On the basis of the identities of the matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*, Serdica **7**, no. 3 (1981), 187-194.

[46] S. Yu. Vasilovsky, *The basis of identities of a three-dimensional simple Lie algebra over an infinite field*, Algebra i Logika **28**, (1989), 534-554 (Russian); Algebra and Logic **28**, (1989), 355-368 (Engl. transl.).

[47] S. Yu. Vasilovsky, $\mathbb{Z}_n$*-Graded Polynomial Identities of the Full Matrix Algebra of order* n, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 3517-3524.

[48] M. R. Vaughan-Lee, *Varieties of Lie algebras*, Quart. J. Math. Oxford (2) **21** (1969), 297-308.