

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Humanas
Departamento de Economia
Doutorado em Economia

Luiz Alberto D'Ávila de Araújo

**A Estrutura a Termo de Juros e o Modelo dos Novos
Keynesianos: Uma Aplicação no Brasil**

Brasília

16 de Setembro de 2011

Luiz Alberto D'Ávila de Araújo

**A Estrutura a Termo de Juros e o Modelo dos Novos
Keynesianos: Uma Aplicação no Brasil**

Tese apresentada ao Departamento de Economia da Universidade de Brasília, como requisito para obtenção do título de Doutor em Economia.

Orientador: Joaquim Pinto de Andrade

Brasília

16 de Setembro de 2011

**Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Humanas
Departamento de Economia**

**A Estrutura a Termo de Juros e o Modelo dos Novos
Keynesianos: Uma Aplicação no Brasil**

Luiz Alberto D'Ávila de Araújo

Tese Aprovada em 16/09/2011.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Joaquim Pinto de Andrade (orientador) (UnB)

Prof. Dr. Roberto de Góes Ellery Júnior (UnB)

Prof. Dr. Paulo de Melo Jorge Neto (UFC/CAEN)

Prof. Dr. José Ângelo Costa do Amor Divino (UCB)

Prof. Dr. Manoel Carlos de Castro Pires (IPEA)

Agradecimentos

Ao professor e orientador Joaquim Pinto de Andrade por todo conhecimento compartilhado ao longo desses quatros anos que permitiram a conclusão deste trabalho e pelo exemplo de superação e excelência.

Aos membros da banca de defesa desta tese de doutorado: prof. Roberto de Góes Ellery Júnior, prof. Paulo de Melo Jorge Neto, prof. José Ângelo Costa do Amor Divino e prof. Manoel Carlos de Castro Pires, pela disponibilidade e conhecimento compartilhado.

Aos colegas do doutorado, Flávio Augusto Correa Basílio, Gilvan Cândido da Silva, Gustavo José Guimarães e Souza, e Márcio Francisco da Silva que, direta ou indiretamente, ajudaram nas discussões do grupo de política monetária do prof. Joaquim Andrade.

Agradeço aos demais professores do ECO-UnB que participaram da minha formação, prof. Mauro Boianovsky, Prof. Vitor Gomes, Prof. Rodrigo Peñaloza, Prof. Daniel Cajueiro e Prof. José Guilherme Resende.

Ao professor Seonghoon Cho, da Universidade de Yonsei na Coréia, pelo auxílio com o código central que foi utilizado para estimar o modelo estrutural da economia brasileira.

Um agradecimento especial à minha família que esteve ao meu lado durante todo doutorado.

Aos meus pais, Alberto de Araújo e Deusemar Siqueira D'Ávila de Araújo, que sempre foram exemplo de perseverança e superação dos desafios, a quem dedico esta tese.

Por fim, e mais importante, agradeço a Deus pelas graças recebidas e pelos dons que permitiram que eu concluísse esta etapa da minha vida, superando os desafios pessoais e acadêmicos, por maiores que tenham sido.

Nós tudo podemos naquele que nos fortalece!

Sumário

| | |
|--------------------------------|-------------|
| ÍNDICE DE TABELAS | XI |
| ÍNDICE DE FIGURAS | XIII |
| RESUMO..... | XIV |
| ABSTRACT | XVII |
| INTRODUÇÃO..... | 1 |

CAPÍTULO 1 – A ESTRUTURA A TERMO DAS TAXAS DE JUROS

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.1 INTRODUÇÃO | 3 |
| 1.2 OPORTUNIDADES DE ARBITRAGEM E A PRECIFICAÇÃO DOS TÍTULOS..... | 5 |
| 1.3 TÍTULOS DE RENDA FIXA DERIVADOS DAS TAXAS DE JUROS | 11 |
| 1.3.1 BLACK E SCHOLES E A PRECIFICAÇÃO DOS TÍTULOS DESCONTADOS | 11 |
| 1.3.2 CLASSIFICANDO OS MODELOS DE PRECIFICAÇÃO DOS TÍTULOS E DA CURVA DE JUROS | 13 |
| 1.4 MODELOS PARA A ESTRUTURA A TERMO DE TAXAS DE JUROS..... | 16 |
| 1.4.1 MODELO DE MERTON | 16 |
| 1.4.2 MODELO DE VASICEK | 21 |
| 1.4.3 MODELO DE COX, INGERSOLL E ROSS | 27 |
| 1.4.4 MODELO DE HO E LEE | 33 |
| 1.4.5 MODELO DE HULL E WHITE..... | 36 |
| 1.4.6 MODELO DE HEATH, JARROW E MORTON..... | 37 |
| 1.4.7 MODELO DE DIEBOLD, RUDEBUSCH E ARUOBA | 38 |
| 1.5 CONCLUSÃO..... | 42 |

CAPÍTULO 2 – IMPACTO DAS VARIÁVEIS MACROECONÔMICAS NA ESTRUTURA DAS TAXAS DE JUROS

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.1 INTRODUÇÃO | 43 |
| 2.2 VARIÁVEIS MACROECONÔMICAS E A ESTRUTURA A TERMO DAS TAXAS DE JUROS | 46 |
| 2.3 HIPÓTESE DAS EXPECTATIVAS E A MODELAGEM ECONOMETRICA PARA NÃO LINEARIDADE | 52 |
| MODELO LINEAR X NÃO LINEAR (LSTR1 OU LSTR2)..... | 55 |
| 2.4 AVALIAÇÃO EMPÍRICA NA ECONOMIA BRASILEIRA | 59 |
| 2.5 CONCLUSÃO..... | 72 |
| APÊNDICE 2.I – EVOLUÇÃO DA ESTRUTURA A TERMO E DO PRÊMIO DO TERMO DAS TAXAS DE JUROS DO MERCADO FINANCEIRO BRASILEIRO..... | 74 |
| APÊNDICE 2.II – SÉRIES: LINEAR, NÃO LINEAR, AJUSTADA E ORIGINAL | 75 |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| APÊNDICE 2.III – CORREÇÃO DA AUTOCORRELAÇÃO – MÉTODO DE COCHRANE-ORKUTT..... | ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO. |
| APÊNDICE 2.IV – FORMAÇÃO DA ESTRUTURA A TERMO DE TAXAS DE JUROS | 76 |

CAPÍTULO 3 – ESTRUTURA A TERMO DAS TAXAS DE JUROS NO MODELO DSGE: UMA ANÁLISE PARA O BRASIL

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1 INTRODUÇÃO | 79 |
| 3.2 MACROECONOMIA NOVO KEYNESIANA E ESTRUTURA A TERMO DAS TAXAS DE JUROS | 81 |
| 3.3 EQUILÍBRIO GERAL DINÂMICO ESTOCÁSTICO E A ESTRUTURA A TERMO..... | 86 |
| 3.4 AVALIAÇÃO EMPÍRICA DA ECONOMIA BRASILEIRA | 93 |
| 3.5 CONCLUSÃO..... | 114 |
| APÊNDICE 3.I – A CURVA IS E A CURVA DE DEMANDA AGREGADA..... | 117 |
| APÊNDICE 3.II – CURVA DE PHILLIPS, PERSISTÊNCIA ENDÓGENA DO PRODUTO NATURAL E O HIATO DO PRODUTO..... | 121 |
| APÊNDICE 3.III – REGRA DE POLÍTICA MONETÁRIA | 131 |
| APÊNDICE 3.IV – META DE INFLAÇÃO, A ESTRUTURA A TERMO NO MODELO NOVO KEYNESIANO E A SOLUÇÃO DE EXPECTATIVAS RACIONAIS | 133 |
| APÊNDICE 3.V – ESTRUTURA A TERMO DAS TAXAS DE JUROS E A FORMAÇÃO DO SPREAD DO TERMO | 143 |
| APÊNDICE 3.VI – RELAÇÃO ENTRE OS PARÂMETROS ESTRUTURAIS DO MODELO DSGE COM ETTJ | 151 |
| APÊNDICE 3.VII – OUTROS RESULTADOS ALTERANDO AS OPÇÕES DE SELEÇÃO | 153 |
| APÊNDICE 3.VIII – OS CÓDIGOS UTILIZADOS NO MATLAB..... | 165 |
| APÊNDICE 3.IX – A ESTIMAÇÃO PELO MÉTODO GENERALIZADO DOS MOMENTOS ... | 167 |
| CONCLUSÕES..... | 179 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 183 |

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1 – Estatística Descritiva da Amostra – 1996/03 a 2010/12

Tabela 2.2 – Teste de Linearidade do Modelo Estimado

Tabela 2.3 – Testes de Especificação do Modelo

Tabela 2.4 – Modelo STR Estimado

Tabela 3.1 – Estatística Descritiva e Correlação – 1996 a 2010

Tabela 3.2 – Função de Autocorrelação ACF – Persistência

Tabela 3.3 – Teste Jarque-Bera para normalidade dos resíduos FIML

Tabela 3.4 – Estimação pelo Método GMM em dois estágios

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 – Modelo de Merton

Figura 1.2 – Modelo de Vasicek

Figura 2.1 – Formatos da Curva de Juros de Acordo com Vencimento

Figura 2.2 – IPCA, ETTJ e Spread do Termo

Figura 2.3 – Selic versus IPCA (ajuste por mínimos quadrados)

Figura 2.4 – Taxa de Juros Real vs Juros de Longo Prazo vs Inflação Esperada

Figura 2.5 – Risco Brasil, Câmbio e Resultado Primário/PIB últimos 12 meses

Figura 2.6 – Produção Física Industrial, Produto Potencial e Hiato do Produto

Figura 3.1 – Evolução do Produto e Produto Natural

Figura 3.2 – Evolução do IPCA e das Metas de Inflação no Brasil

Figura 3.3 – Decomposição da Variância – Inflação, Produto e Juros

Figura 3.4 – Ajuste da ETTJ do Modelo DSGE-Financeiro

Figura 3.5 – Impulso Resposta dos Fatores Latentes da ETTJ frente aos choques macroeconômicos (AS , IS , i , y^n e π^*)

Figura 3.6 – Decomposição da Variância – Fatores Latentes da ETTJ

Figura 3.7 – Impulso Resposta da Estrutura a Termo de Taxas de juros frente aos choques macroeconômicos (AS , IS , i , y^n e π^*)

RESUMO

Palavras chave: inflação, estrutura a termo de taxas de juros e política monetária.

O objetivo desta tese de doutorado é estudar os movimentos das taxas de juros de curto, médio e longo prazo. Em particular, esclarecendo como são influenciados pelas variáveis macroeconômicas e como influencia os parâmetros estruturais da economia brasileira.

A tese inicia apresentando a importância da não existência de oportunidades de arbitragem livres de risco e como influencia o equilíbrio do mercado. Em seguida, discrimina os principais modelos que esclarecem o comportamento da estrutura a termo das taxas de juros.

O importante no primeiro capítulo é perceber os modelos de Cox, Ingersoll e Ross (CIR) e de Diebold, Rudebusch e Aruoba (DRA), os quais serão utilizados na análise empírica da economia brasileira dos capítulos 2 e 3.

O capítulo 2 mostra que a relevância de analisar a estrutura a termo de juros no Brasil é esclarecer como as mudanças nas expectativas da condução da política monetária e da política fiscal podem modificar as taxas de longo prazo e, também, verificar se os movimentos verificados de longo prazo estão em desacordo com a atuação da autoridade monetária no curto prazo.

Note que as taxas de juros de longo prazo podem embutir um prêmio de risco associado ao vencimento dos títulos, mas se a estrutura a termo acompanhar a hipótese das expectativas racionais esse prêmio é nulo ou constante no tempo e as taxas de longo prazo são uma média das taxas de curto prazo, o que facilita as previsões das variáveis macroeconômicas.

O capítulo 2 conclui que o spread do vencimento tem um comportamento não linear mensurado pelo modelo de regressão de transição suave – STR e que essa não linearidade depende do regime de política macroeconômica adotado.

O capítulo 3 estima um modelo para estrutura a termo dos juros praticados no mercado financeiro brasileiro, inserido dentro do modelo dos novos keynesiano. Com a inclusão da curva de juros espera-se melhorar os parâmetros do modelo DSGE, em virtude da incorporação das variáveis que não são observáveis.

Ao estimar, simultaneamente, os efeitos macroeconômicos sobre a estrutura a termo de taxas de juros e o efeito do termo das taxas de juros sobre a macroeconomia, contribui com as pesquisas empíricas que avaliam a economia brasileira.

Ao final, o capítulo 3 apresenta o impacto da estrutura a termo de juros sobre os coeficientes da inflação, produto e taxa básica de juros do banco central, ao mesmo tempo, em que avalia o impacto dos choques macroeconômicos no comportamento dos fatores latentes nível, inclinação e curvatura, que descrevem a estrutura a termo de taxas de juros.

ABSTRACT

Keywords: inflation, term structure of interest rates, monetary policy.

This work study the movements of interest rates on short and long term. In particular, clarifying how they are influenced by macroeconomic variables and how they influence the structural parameters of the Brazilian economy.

The thesis begins by presenting the importance of non-existence of arbitrage opportunities free of risk and how they influence the market equilibrium. Then discriminates the main models that clarify the behavior of the term structure of interest rates.

The first chapter is important in realizing the models of Cox, Ingersoll and Ross (CIR) and Diebold, Rudebusch and Aruoba (DRA), which will be used in the empirical analysis of the Brazilian economy of Chapters 2 and 3.

Chapter 2 shows that is important to answer how changes in expectations of monetary policy and fiscal policy can modify the long-term rates and also check whether the observed long-term movements are in disagreement with the actions of the monetary authority in the short run. Note that long-term interest rates can embed a risk premium associated with the maturity of the securities, but if the term structure follow the hypothesis of rational expectations this premium is null or constant in time and long-term rates are an average of short-term rates. However, some studies indicate that the spread of the term is not constant and, therefore, the expectations hypothesis is no longer valid, for example, Mankiw and Miron (1986), Andrade and Tabak (2001) and Issler and Lima (2003). If this occurs, it becomes necessary to identify the variables responsible for the premium to improve the predictability of the macroeconomic variables.

Regarding the Brazilian data, we must note two important facts. The first fact shows that it is common to observe an "almost" inversion of the term structure, ie, times when abrupt increases in the short term interest rates are

not always accompanied by increases in long-term rate. The second fact relates to the asymmetric rate of change in the spread between short and long where it is common to observe abrupt elevations, while falls are slower.

The chapter 3 estimates a model for the term structure of interest rates at the Brazilian financial market, inserted into the new Keynesian model. It is expected that the inclusion of the yield curve will improve the parameters of the DSGE model due to the incorporation of variables that are not observable.

In estimating both the macroeconomic effects on the term structure of interest rates and the effect of the term of interest rates on the macroeconomy, it contributes to the empirical research that evaluates the Brazilian economy.

The term structure of interest rates will incorporate the spread between long and short term (the term spread), where the rate of short-term interest is the rate that represents the monetary policy. The importance of studying the spread of the term is the possibility of interpreting their effects like the financial market expectations regarding inflation and interest rates contained in the term structure of interest rates.

Then, chapter 3 discriminates the impact of the term structure of interest on the coefficients of inflation, output and basic interest rate of the central bank and at the same time, evaluate the impact of macroeconomic shocks on the behavior of the latent factors level, slope and curvature, which describe the term structure of interest rates.

INTRODUÇÃO

A tese está dividida em três capítulos que são complementares.

A tese inicia esclarecendo a precificação dos títulos e as principais modelagens utilizadas para explicar a estrutura a termo das taxas de juros.

Do primeiro capítulo percebemos a importância da inexistência das oportunidades de arbitragem para atingir o equilíbrio do mercado e destacamos os modelos de Diebold, Rudebusch e Aruoba, bem como o modelo de Cox, Ingersoll e Ross, para explicar o impacto das variáveis macroeconômicas sobre a curva de juros e para derivar um modelo de equilíbrio geral dinâmico estocástico contendo a estrutura a termo de juros.

O capítulo 2 traz uma análise de equilíbrio parcial que utiliza o modelo de Diebold, Rudebusch e Aruoba para explicar os movimentos do spread do termo dos juros praticados no mercado financeiro do Brasil, por intermédio de algumas variáveis macroeconômicas.

O capítulo 3 fecha a tese com uma análise de equilíbrio geral, avaliando a causalidade da estrutura de juros e das variáveis macroeconômicas nas duas direções e de forma simultânea. Para atingir esse objetivo a modelagem da curva de juros é introduzida dentro do modelo DSGE, por intermédio da dedução do modelo de Cox, Ingersoll e Ross dentro do modelo novo keynesiano e, com isso, explica de forma explícita como ocorre a precificação do termo dos juros e, por definição, do *spread* do termo.

CAPÍTULO 1

A ESTRUTURA A TERMO DAS TAXAS DE JUROS

1.1 Introdução

Este capítulo fornece uma descrição de alguns modelos de estrutura a termo de taxas de juros, considerando os títulos de renda fixa de preços. Esse ramo de pesquisa sempre esteve em foco, mas nas últimas décadas tem testemunhado um desenvolvimento dos mercados de renda fixa e, com isso, a necessidade de entender o comportamento da curva de juros.

Os mercados financeiros mundiais criaram novos instrumentos de renda fixa, dentre os quais podemos citar os vários títulos para financiar a dívida pública, títulos comerciais lastreados em hipotecas, diversas modalidades de debêntures, dívidas subordinadas, instrumentos nos mercados futuros e de opções atrelados às taxas de juros, operações de swaps de crédito, taxas de juros dentre outros.

Além desses novos instrumentos, o mercado de renda fixa também apresentou um crescimento expressivo no Brasil, implicando em novas análises do ponto de vista de investimento que, por sua vez, levam a novas necessidades de entender os movimentos desses títulos.

Nesse ambiente financeiro dinâmico, a estrutura a termo das taxas de juros apresenta uma importância central dada sua relação com os preços dos títulos descontados.

Para apresentar alguns dos modelos utilizados na precificação começamos com seis modelos que seguem uma abordagem que pressupõe ausência de oportunidade de arbitragem livre de risco e terminamos com um modelo que desconsidera essa premissa de forma explícita para avaliar o impacto de variáveis macroeconômicas sobre a curva de juros.

Dos modelos apresentados, destacamos o modelo de Diebold, Rudebusch e Aruoba que será estimado para economia brasileira no capítulo 2, numa análise de equilíbrio parcial, e o modelo de Cox, Ingersoll e Ross porque será obtido a partir de um modelo de equilíbrio geral dinâmico estocástico

padrão dos novos keynesianos, funcionando como elo entre a estrutura a termo e a abordagem de equilíbrio macroeconômico.

Para atingir o objetivo de esclarecer a precificação dos títulos, a formação da estrutura a termo de taxas de juros e apresentar dois modelos que serão testados de forma empírica, este capítulo está subdividido nas seguintes seções: (1.2) destaca as implicações da existência ou não de oportunidades de arbitragem livre de risco e esclarece a precificação dos títulos, (1.3) apresenta os títulos de renda fixa que são derivados das taxas de juros e destaca a característica central dos modelos de estrutura a termo de taxas de juros apresentados, (1.4) descreve sete modelos para explicar a estrutura a termo das taxas de juros e (1.5) traz a conclusão da revisão da literatura da curva de juros.

1.2 Oportunidades de Arbitragem e a Precificação dos Títulos

A explicação da estrutura a termo de taxas de juros começa com a definição da existência de oportunidades de arbitragem e com o esclarecimento de sua importância para o equilíbrio de uma economia.

Dada uma economia em que existem duas datas para negociação de títulos, a data corrente 0 e a data final T , onde $T \geq 0$. Caso exista incerteza nessa economia teremos que definir um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, onde Ω é o espaço amostral com um número finito de elementos ω_j , $j = 1, \dots, M$, tem cada elemento interpretado como um estado possível dessa economia.

Nessa economia existem diversas medidas de probabilidade, mas existe uma medida P que pode ser substituída por outra medida equivalente $P^*(\omega_j) > 0$, esta última indicando que os investidores concordam sobre os estados possíveis da economia.

Note que não é necessário que os investidores concordem no momento inicial sobre as probabilidades dos estados possíveis no tempo T . Entretanto, existe uma revelação da informação no tempo que é definida pela filtragem $F = \{\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_T\}$, sendo que \mathfrak{F}_0 é igual à $\{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathfrak{F}_T = \mathfrak{F}$, este último representando o conjunto de todos os subconjuntos de Ω .

O mercado financeiro dessa economia possui N títulos negociáveis no tempo 0 , cujos preços são dados por $S(0)$ e possui componentes de preços iguais a $S_1(0), S_2(0), \dots, S_N(0)$, onde cada processo do componente S_i é estritamente positivo e adaptado à filtragem F , o que possibilita a adoção da premissa de passivo limitado.

O conjunto dos valores possíveis para os títulos no tempo T é especificado pela matriz $S(T) \in \mathfrak{R}^{N \times M}$, tal que $S(T)_{i,j} = S_i(T)(\omega_j)$, para $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, M$. Sem perda de generalidade, podemos representar o primeiro ativo como um título livre de risco cujo valor corrente é igual à unidade (numerário) e paga uma taxa de juros $r(0)$, onde $r(0) \geq 0$, isto é:

$$S(T)_{i,j} = (1 + r(0)), \quad \forall j = 1, \dots, M \quad (1.1)$$

Por outro lado, uma carteira de ativos negociáveis é interpretada como um conjunto $N(T)$, que representa as estratégias de negociação definidas como $N_1(T), N_2(T), \dots, N_N(T)$, onde $N(T) \in \mathfrak{T}_0$.

Os componentes $N_i(T)$ são interpretados como a quantidade de títulos $i, j = 1, \dots, N$ mantida na carteira, os quais podem assumir valores positivos quando comprados e negativos quando associado às posições vendidas. A premissa adotada de que $N(T)$ é previsível implica que a carteira pode ser definida antes de saber o preço dos títulos negociáveis no tempo T .

O valor da carteira $V_0(N(T))$ no tempo 0 é representado por:

$$V_0(N(T)) = S(0)^T N(T) \quad (1.2)$$

Os valores possíveis da carteira no tempo T são:

$$V_T(N(T)) = S(T)^T N(T) \quad (1.3)$$

Munnik (1992) mostrou que uma parte significativa dos modelos que tratam da estrutura a termo de taxas de juros apresenta quatro características básicas: (1ª) possui data inicial e data final, (2ª) considera um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathfrak{T}, F, P)$, (3ª) contém um processo que segue o movimento browniano padrão m -dimensional $\{W(t); t \in T\}$ e (4ª) um processo de preços $(n+1)$ -dimensional $\{P(t); t \in T\}$.

A primeira característica mostra que temos uma data de negociação inicial 0 e um horizonte de planejamento fixado e caracterizado pela data final T . Note que o conceito de tempo contínuo representa um número ilimitado de instantes em que é possível negociar, $T \subseteq [0, T]$, e caracteriza-se como uma aproximação do mundo real dos mercados financeiros, que é em tempo discreto ou onde existe um número limitado de instantes onde é possível negociar os títulos, $\{0 = t_1, t_2, \dots, t_k = T\} \subseteq [0, T]$. Entretanto, se diminuirmos o espaço temporal entre os instantes de negociação, a aproximação obtida torna-se próxima da realidade dos investidores do mercado financeiro. A importância de seguirmos uma economia em tempo contínuo é permitir a utilização do cálculo estocástico, simplificando as formulações e enriquecendo mais os resultados do que em tempo discreto.

A segunda característica indica que a incerteza em tempo contínuo é especificada pelo espaço de probabilidade filtrado representado pela quádrupla $(\Omega, \mathfrak{F}, F, P)$, onde Ω define o espaço amostral, P é uma medida de probabilidade, \mathfrak{F} é a sigma-álgebra e F é a filtragem da subsigmas-álgebras \mathfrak{F}_t ou família crescente de subsigmas-álgebras com $0 \leq t \leq T$, onde $F = \{\mathfrak{F}_t; t \in T\}$. Os termos $\omega \in \Omega$ representam os possíveis estados da natureza e a estrutura do mercado dos ativos é dada por $\{\mathfrak{F}_t; t \in T\}$ e deve satisfazer as seguintes condições: (a) $\mathfrak{F}_0 = \{A \subset \Omega \mid P(A) = 0\} \cup \Omega$; (b) $\mathfrak{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathfrak{F}_s$, $0 < t < T$ e (c) $\mathfrak{F}_T = \mathfrak{F}$. Na primeira condição percebemos que \mathfrak{F}_0 é formado pelo espaço amostral acrescido dos conjuntos que possuem uma probabilidade nula, logo \mathfrak{F}_0 representa o menor nível de informação possível. A segunda condição indica que \mathfrak{F}_t é crescente em $0 \leq t \leq T$, portanto a quantidade de informação disponível sobre o verdadeiro estado da natureza aumenta com o passar do tempo. A terceira condição implica que o último estágio da evolução da informação é a sigma-álgebra do espaço de probabilidade $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_T$, sendo \mathfrak{F}_t um conjunto que contém todos os conjuntos na data t , que representa a informação disponível no tempo t .

A terceira característica é o processo Wiener padrão definido como um processo estocástico $W : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow R^m$, isto é, $W(t) = [W_1(t), \dots, W_m(t)]$ e possui as propriedades: (a) $W(0) = 0$, (b) para as datas t e $s > t$ temos que $W(s) - W(t)$ possui uma distribuição normal multivariada com média zero e matriz de variância e covariância diagonal, onde os termos da diagonal são iguais a $s - t$, (c) para as datas $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq \infty$ os incrementos $W(t_0), W(t_1) - W(t_0), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ são independentemente distribuídos, (d) para cada $\omega \in \Omega$ a trajetória amostra $t \rightarrow W(\omega, t)$ é contínua. Os investidores concordam somente no conjunto nulo de medida de probabilidade ao invés de concordar sobre a avaliação corrente das probabilidades de certos eventos, os quais implicam que P pode ser substituído por uma medida de probabilidade equivalente P^* .

Na quarta característica, os processos que seguem os preços são processos de Itô¹. Assim, $P(t, \omega) = (P_0(t, \omega), P_1(t, \omega), \dots, P_n(t, \omega))$ representa o processo de preços da economia e $P_i(t, \omega)$ é o preço do i -ésimo ativo na data t e estado da natureza ω . Assim, podemos chamar $P(t, \omega)$ de mercado.

Com $P_i(0)$ sendo um número real. O processo de preço $P_i(t, \omega)$ é adaptado e o preço do ativo i , na data t , também faz parte da informação disponível em t . Observe, ainda que:

$$P_0(t, \omega) = 1 + \int_0^t \mu_0(s, \omega) ds = 1 + \int_0^t P_0(s, \omega) r(s, \omega) ds \quad (1.4)$$

Como $\sigma_0(t) = 0$, então, o ativo $P_0(t)$ é um ativo livre de risco que possui valor inicial unitário e taxa de rendimento instantâneo igual a $P_0(t)r(t)$, onde $r(t)$ é a taxa de juros de curtíssimo prazo.

Depois dessas definições introdutórias, é possível tratar das oportunidades de arbitragem, as quais podem ocorrer de duas formas, quais sejam do primeiro tipo e do segundo tipo.

Inicialmente vamos tratar das “**oportunidades de arbitragem do primeiro tipo**”, as quais ocorrem quando existe uma estratégia de negociação autofinanciável N e uma carteira $N(T)$, onde o investimento inicial (ou valor corrente da carteira) é igual a zero e o valor futuro da carteira na data final T é não negativo com probabilidade unitária e estritamente positivo com probabilidade positiva:

$$V_0(N(T)) = 0 \quad (1.5)$$

$$V_T(N(T)) \geq 0 \quad V_T(N(T)) \neq 0 \quad (1.6)$$

As “**oportunidades de arbitragem do segundo tipo**” existem quando uma estratégia de negociação autofinanciável N , é tal que o valor corrente da carteira é negativo com probabilidade unitária e o valor final não negativo:

$$V_0(N(T)) < 0 \quad (1.7)$$

$$V_T(N(T)) \geq 0 \quad (1.8)$$

¹ O processo $P_i(t, \omega)$ é um processo de Itô se $P_i(t, \omega) = P_i(0) + \int_0^t \mu_i(s, \omega) ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(s, \omega) dW_j(s, \omega)$, implica que $P_i(t, \omega) = P_i(0) + \int_0^t \mu_i(s, \omega) ds + \int_0^t \sigma_i(s, \omega) dW(s, \omega)$

A **existência de uma oportunidade de arbitragem do primeiro tipo** numa economia ocorre se, e somente se, existe uma oportunidade de arbitragem do primeiro tipo equivalente nessa economia, onde os preços são expressos em termos do valor de um ativo do mercado monetário que é localmente livre de risco.

Adicionalmente, se existe uma oportunidade de arbitragem do segundo tipo na economia em tempo contínuo, então existe uma oportunidade de arbitragem do primeiro tipo.

Por outro lado, a **inexistência de oportunidade de arbitragem do primeiro tipo** ocorre se, e somente se, existe uma medida de probabilidade Q , equivalente a P , tal que os valores descontados das estratégias de negociação autofinanciáveis são martingales com respeito a essa medida.

Uma diferença entre as economias em tempo discreto com vários períodos e a economia em tempo contínuo é que se os preços relativos dos títulos são martingales, os valores relativos das estratégias de negociação são martingales locais no caso contínuo.

Note que se os valores relativos das estratégias de negociação autofinanciáveis são martingales² com respeito à medida de probabilidade Q , então os preços relativos são martingales com respeito a essa medida de probabilidade. Entretanto, se os preços são martingales com respeito à medida de probabilidade Q , as estratégias de negociação autofinanciáveis relativas são martingales locais com respeito a essa medida.

Assim, notamos que as estratégias de negociação N devem cumprir certas condições para assegurar que, sob uma medida de probabilidade Q onde os preços relativos são martingales, as estratégias de negociação relativas também são martingales. Como a classe dos martingales locais é muito grande, é necessário impor certas condições para impedir a ocorrência de estratégias de arbitragem livre de risco.

² Um martingale é um processo estocástico onde o valor esperado condicional de uma observação em um tempo t , dadas todas as observações até algum tempo anterior S , é igual à observação no tempo anterior S . Um martingale em tempo discreto é um processo discreto X_1, X_2, X_3, \dots que satisfaz para qualquer n , $E(|X_n|) < \infty$ e $E(X_{n+1} | X_1, \dots, X_n) = X_n$. Um martingale contínuo no tempo é um processo estocástico X_t onde para qualquer t , $E(|X_t|) < \infty$ e $E(X_n | \{X_\tau, \tau < s\}) = X_s, \forall s \leq t$.

Algumas condições de negociação exógenas delimitam a classe dos martingales local e asseguram que as oportunidades de arbitragem não existem. Kreps (1979) impôs uma distribuição uniforme ao invés de um limite local sobre o vetor processo previsível N . Embora o número total de títulos remanescente seja um candidato natural e não parece restringir as estratégias de negociação, posições de venda a descoberto são ignoradas e o limite uniforme é inconsistente com as fricções do mercado de títulos nas quais os títulos são infinitamente divisíveis.

Outra condição possível é a especificação da data inicial de um número finito de datas nas quais os investidores podem negociar. Isso foi discutido por Harrison e Kreps (1979), mas são muito restritivas. Não podemos garantir que todos os direitos contingentes são atingíveis a menos que uma estrutura adicional sobre as preferências dos investidores seja definida.

Uma condição sobre o valor da carteira total do investidor serve como restrição de negociação onde o valor relativo de uma carteira é martingale se os preços relativos são martingales. Essa restrição é investigada como restrição de riqueza geral em Dybvig (1980) e nos requisitos de margem em Heath e Jarrow (1987).

Outro conceito importante é o de **economia completa**, para que isso ocorra não devem existir oportunidades de arbitragem e deve haver uma única medida de probabilidade equivalente onde as estratégias de negociação autofinanciáveis relativas são martingales.

Com isso, as condições necessárias são definidas e garantimos, sob essas condições, que não existem oportunidades de arbitragem na economia e, assim, sabemos que existe um **único preço** $\pi(s)$ associado a qualquer direito contingente atingível que satisfaz essas condições.

1.3 Títulos de Renda Fixa derivados das Taxas de Juros

A avaliação dos títulos que derivam das taxas de juros está relacionada ao conceito de oportunidades de arbitragem.

Note que todo direito contingente pode ser replicado por uma carteira composta por títulos negociáveis, quando existe uma única medida de probabilidade equivalente na qual o valor das estratégias de negociação é expresso em termos da conta do mercado monetário, numerário, logo essa medida é um martingale e esse resultado permite obter o valor de qualquer direito contingente a partir do cálculo do valor descontado esperado desse direito no vencimento.

1.3.1 Black e Scholes e a Precificação dos Títulos Descontados

O artigo de Black e Scholes (1973) é um dos modelos mais utilizadas para avaliar as opções de compra e venda de ações, também sendo adotado como exemplo da abordagem de não arbitragem. Esse modelo considera um movimento Browniano geométrico para descrever o comportamento estocástico das ações num período de tempo e com a taxa de juros sendo constante, onde os investidores podem financiar suas posições.

Ao adotar a abordagem de Black e Scholes para avaliar opções emitidas sobre títulos descontados, algumas diferenças entre o comportamento estocástico das ações e dos títulos devem ser destacadas.

A primeira diferença é notar que, no caso dos títulos, a qualquer momento antes do vencimento o investidor sabe com certeza que no vencimento receberá o pagamento integral do principal. Assim, o processo estocástico que descreve o preço do título deve garantir que, no vencimento, o valor do título é igual ao seu valor de face – isto é, o título possui um valor fixo e conhecido na data de seu vencimento. Nas ações e suas opções isso não ocorre.

A segunda diferença importante é que a incerteza existente no preço dos títulos, ou a variância dos retornos dos títulos, vai diminuindo durante o

tempo até atingir zero no vencimento do título. Portanto, a modelagem dos títulos de renda fixa inviabiliza a utilização do modelo tradicional de Black e Scholes, dado que a variância do movimento browniano geométrico aumenta proporcionalmente na raiz quadrada do tempo, ao contrário da característica dos títulos de renda fixa onde a variância diminui na medida em que se aproxima do vencimento.

A terceira característica mostra que, devido à correspondência quase um-para-um entre os preços dos títulos e as taxas de juros, é inconsistente assumir que a taxa de curto prazo dos juros é constante como exemplificado no trabalho de Black e Scholes. Assim, percebemos que os preços de ativos ligados à estrutura a termo de juros dependem do processo estocástico seguido pela taxa de juros, ao contrário do processo das ações que adota a hipótese de que as taxas de juros são constantes. Note que isso não tem relação com os argumentos macroeconômicos de que as taxas de juros tendem a apresentar um comportamento de “reversão à média”, isto é, a taxa de juros de curto prazo tem um comportamento tal que tende a convergir para um valor denominado de estado estacionário (ou “*steady state*”), pois é necessário vincular essa convergência ao comportamento das opções referenciadas em títulos descontados³.

O quarto aspecto relevante na precificação dos títulos o considera como um processo estocástico de toda a curva de juros (*yield curve*), nesse sentido, uma carteira de títulos prefixados adota vários prazos de vencimentos e alguns deles apresentam o pagamento de cupons que, na ausência de arbitragem, assemelham-se a uma carteira de títulos sem cupons com diferentes datas de vencimentos. Portanto, essa modelagem deve descrever uma evolução simultânea das taxas de juros dos diferentes prazos contidos na carteira.

Por último, citamos a característica de que os títulos de renda fixa possuem medidas de correlações entre os diferentes vértices (ou vencimentos) dos contratos referenciados nas taxas de juros, que não são perfeitas e que as

³ Diferentes vencimentos de títulos podem apresentar volatilidades diferentes, dado que os títulos possuem valor fixo e conhecido no vencimento, quando a volatilidade será nula. Entretanto, antes do vencimento, os preços dos títulos (ou *yield to maturity*) possuem volatilidades diferentes e estritamente positivas que, quanto mais distantes, tendem a serem maiores. Entretanto, é possível observar títulos de

correlações entre vértices adjacentes (ou mais próximos) tendem a ser menor do que os vértices mais distantes.

Portanto, concluímos que os títulos possuem características próprias que a diferem das ações, exigindo que a teoria para sua precificação e para modelagem da estrutura a termo das taxas de juros seja diferente do modelo de Black e Scholes, para representar a realidade do mercado dos títulos de renda fixa.

1.3.2 Classificando os modelos de precificação dos títulos e da curva de juros

Apesar dos aspectos anteriormente citados, Munnik (1992) iniciou sua avaliação dos títulos que derivam das taxas de juros, com a explicação explícita dos valores subjacentes e definindo como “**abordagem direta**” a abordagem onde o problema é modelado de forma próxima a Black e Scholes (1973).

Nesses modelos classificados como abordagem direta, partimos da especificação do processo estocástico do preço dos títulos, ao invés de utilizar a taxa de juros de curto prazo, isto é, não utilizamos a relação de preferência existente entre os agentes ou da tecnologia existente na economia. Com isso, o preço da opção segue um movimento browniano geométrico, antecipadamente definido, e representado por uma análise de equilíbrio parcial que fornece resultados práticos e simples.

Logo, a principal característica da abordagem direta é a formulação explícita dos processos estocásticos dos títulos em que o direito contingente é dependente. Uma desvantagem dessa abordagem é o fato de que estes processos precisam capturar as características específicas do título, como por exemplo, o valor de face no seu vencimento. Entretanto, uma vantagem é a exigência de especificar somente os processos dos títulos sob os quais o direito é dependente, não exigindo premissas adicionais sobre a existência de equilíbrio geral do mercado de renda fixa. Outra vantagem é que, depois de

longo prazo com volatilidade menor do que títulos de médio e curto prazo. Macroeconomicamente interpretamos como uma convergência para o estado estacionário.

obtido o processo dos títulos, os preços observados daqueles títulos podem ser usados para estimar os parâmetros necessários.

Numa outra classificação, denominada por Munnik de “**abordagem indireta**”, os preços dos títulos derivados das taxas de juros são modelados como função da taxa instantânea de curto prazo. Esse tipo de abordagem foi subdividido em “**classe dos modelos endógenos**” e “**classe dos modelos exógenos**”.

A abordagem indireta, ao invés de supor um processo estocástico para o preço dos títulos, supõe um processo estocástico para as taxas de juros de curto prazo e para a taxa de juros futura (*forward rate*). Em virtude dessa premissa adotada pela abordagem indireta, muitos dos modelos tradicionais que explicam a estrutura a termo de taxas de juros (*yield curve* ou curva de rendimento dos títulos) seguem esse tipo de abordagem.

Ao caracterizarmos o grupo dos modelos da abordagem indireta denominados de “**modelos endógenos**”, estaremos tratando de modelos onde o processo estocástico seguido pelo preço dos títulos é derivado do processo das taxas de juros de curto prazo e onde a distribuição de probabilidade da estrutura a termo futura e a estrutura a termo da data corrente são obtidas de forma endógena, ou seja, é uma função dos parâmetros do processo da taxa de curto prazo e uma função do valor corrente da taxa de juros de curto prazo. Esses modelos nem sempre são consistentes com as curvas de juros observadas no mercado financeiro brasileiro e mundial.

Na mesma linha, os modelos da abordagem indireta denominados de “**modelos exógenos**” apresentam um processo estocástico para o preço dos títulos que deriva do processo da taxa de juros de curto prazo, mas a curva de juros teórica da data corrente utilizada no modelo deve ser exatamente igual àquela observada no mercado financeiro. De certa forma poderiam ser considerados como endógenos, mas Munnik (1992) denomina de exógenos porque utilizam a estrutura a termo da data inicial observada no mercado financeiro como uma informação dada, ao invés de derivar seu valor dentro do modelo. Com isso, não explicam a estrutura a termo da data corrente, mas essas informações do mercado financeiro são utilizadas para derivar a estrutura a termo das datas futuras. Em virtude da utilização da informação observada no mercado financeiro para a estrutura a termo da data corrente,

essa classe de modelo é utilizada no gerenciamento do risco de mercado, estabelecido e definido na regulação do mercado financeiro, denominada de “Acordo de Basiléia”.

A classificação de Munnik (1992) tem como objetivo destacar as características marcantes dos modelos que representam a literatura de estrutura a termo de taxas de juros. Assim, é possível listar como modelos da Abordagem Direta, os modelos desenvolvidos por Ball e Toulos (1983), Nelson e Siegel (1987) e Munnik (1992). Na abordagem indireta da classe endógena podemos incluir os modelos de Merton (1973), Vasicek (1977) e Cox, Ingersoll e Ross (1985) e nos modelos da classe exógena os desenvolvidos por Ho e Lee (1986), Hull e White (1990) e Heath, Jarrow e Morton (1992).

Além da classificação de Munnik, existem outros modelos recentes que procuram explicar a curva de juros fazendo uma ligação entre as variáveis financeiras e as variáveis macroeconômicas, ao invés de partir unicamente do processo estocástico do preço dos títulos ou da taxa de juros de curto prazo, essa abordagem utiliza, além das taxas de juros, outras variáveis macroeconômicas que representam características da economia. Dentre os modelos classificados como “**modelos macro-financeiros**”, podemos citar os trabalhos de Ang e Piazzesi (2003), Hördahl et al (2006), Kozicki e Tinsley (2001) e Wu (2006), que incorporam explicitamente variáveis macroeconômicas em modelos multi-fatores para estrutura a termo das taxas de juros.

Neste capítulo estaremos apresentando os principais modelos dessas abordagens para esclarecer a evolução da modelagem da estrutura a termo e, também, para destacar a contribuição do modelo Cox, Ingersoll e Ross (1985) que será derivado a partir do modelo novo keynesiano no capítulo 3 e a contribuição do modelo de Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) que será estimado para a economia brasileira no capítulo 2.

1.4 Modelos para a Estrutura a Termo de Taxas de Juros

Nesta subseção apresentamos sete modelos, dentre os quais seis são classificados como indireto, com um fator, onde a descrição do processo estocástico da taxa de curto prazo ocorre em conjunto com a condição de não existência de oportunidades de arbitragem e fornece as condições de avaliação que todos os títulos devem obedecer. E o último modelo classificado como modelo macro-financeiro vai considerar além de preços de títulos ou taxas de juros, variáveis que os macroeconomistas consideram fundamentais para justificar suas análises econômicas.

Nesse sentido, os modelos endógenos da estrutura a termo são caracterizados por um processo estocástico da taxa de juros de curto prazo (taxa *spot*). Como os parâmetros do processo constantes do modelo não variam no tempo, então não temos uma comparação explícita com a estrutura a termo observada no mercado financeiro. Aqui eles são representados pelos trabalhos de Merton, Vasicek e Cox, Ingersoll e Ross.

Noutra linha de trabalho, os modelos exógenos assumem como dada a taxa de juros de curto prazo, ou seja, assumem a curva observada no mercado financeiro. Nessa seção apresentaremos os modelos de Ho e Lee, Hull e White e Heath, Jarrow e Morton.

Por sua vez, o modelo macro-financeiro não assume a condição de inexistência de arbitragem livre de risco e não atém a explicar a curva de juros com base no preço dos títulos e das taxas de juros, mas também incorpora variáveis macroeconômicas centrais para os formuladores de política econômica. Para tanto, essa categoria está representada pelo estudo de Diebold, Rudebusch e Aruoba.

1.4.1 Modelo de Merton

Merton (1973) deduz um conjunto de restrições sobre a precificação de opções para torná-la consistente com uma teoria de precificação racional dos

títulos, explicitando fórmulas de precificação das opções de compra e de venda que permitiram extensões na teoria de precificação dos passivos corporativos.

Merton explica a estrutura a termo de taxas de juros na nota de rodapé da página 163, mostrando um exemplo ilustrativo onde os preços dos títulos para todos os vencimentos são uma função das taxas de juros de curto prazo corrente e futura. Além disso, assume que a taxa de curto prazo segue um processo Wiener gaussiano com *drift*. Assim, considera que os preços dos títulos são função de um processo estocástico que representa a taxa de juros de curto prazo.

No modelo de Merton a incerteza temporal pode ser especificada por um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathfrak{F}, F, P)$, onde $F = \{\mathfrak{F}_t\}$. Os investidores concordam sobre o conjunto nulo da medida de probabilidade e não fazem afirmação sobre as probabilidades de certos eventos, sendo que a medida de probabilidade P pode ser substituída por uma medida equivalente P^* .

A equação diferencial estocástica da taxa de juros de curto prazo instantânea de Merton (1973) é igual a:

$$dr(t) = a dt + g dW(t) \quad (1.9)$$

Onde a e g são constantes reais e $W = \{W(t), t \geq 0\}$ é o movimento browniano padrão.

Merton indicou que a premissa de processo estocástico para a taxa de juros nominal de curto prazo é irreal, pois admite taxas de juros nominais com valores negativos. Situação incoerente com a contribuição de Böhm-Bawerk, que, ao considerar o capital como fator intermediário (fator “produzido”), esclareceu que a taxa de juros deve assumir valores positivos decorrente dos fatores “originais” de produção, em especial o fator “espera” que representa o fato de deixar de consumir hoje para consumir amanhã, e do papel do capital que implica na adoção de métodos de maior custo de produção e que são mais demorados, mas que geram bens de capital fisicamente mais produtivo.

Note, ainda, que, se $a \neq 0$, a média condicional da taxa de juros de curto prazo no tempo s varia segundo t . Logo, quando $a > 0$, a taxa de juros cresce de forma ilimitada com o passar do tempo.

Em $s, s \leq t$, considerando $dr(t) = a dt - g dW(t)$, temos que:

$$r(t) = r(s) + \int_s^t a ds - \int_s^t g dW(s) = r(s) + a(s-t) - g(W(s) - W(t)) \quad (1.10)$$

Como a taxa de curto prazo no tempo t , dado o conjunto de informação no tempo s , é normalmente distribuída, então:

$$r(t) | \mathfrak{F}_s \sim N(r(s) + a(t-s), g^2(t-s))$$

Com período de maturidade igual a $\tau = t - s$, temos:

$$r(t) | \mathfrak{F}_s \sim N(r(s) + a\tau, g^2\tau) \quad (1.11)$$

Assim percebemos que a média e a variância condicional de $r(t)$ tendem ao infinito quanto t cresce.

Como a incerteza da economia esta contida somente no processo $W(t)$, e como $dW(t)$ é a única fonte de incerteza capaz de afetar o preço do título $P(\tau)$, podemos chegar à dinâmica do retorno do preço dos títulos:

$$\frac{dP(s,t)}{P} = \mu(s,t)dt + \sigma(s,t)dW(s) \quad (1.12)$$

Onde $\mu(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$ são funções que satisfazem às condições de integrabilidade necessária.

Outra forma de obter o preço dos títulos é partir da premissa de que o preço é uma função de $r(t)$, s e t , da forma $P(s,t) = P(r(s), s, t)$. Considerando que essa função é duas vezes continuamente diferenciável em relação a $r(t)$ e uma vez em relação a t , sabemos que o Lema de Itô pode ser aplicado e encontramos que $\frac{dP(s,t)}{P} = \mu(s,t)dt + \sigma(s,t)dW(s)$.

Como o mercado de títulos pode ser considerado a partir de $\frac{dP(s,t_i)}{P} = \mu(s,t_i)dt + \sigma(s,t_i)dW(s) \quad i = 1, \dots, n$ e de $dr(t) =adt - gdW(t)$, é possível incluir o investimento livre de risco:

$$dP_0(s) = r(s)P_0(s)dt \quad (1.13)$$

Entretanto, não incluímos $dP_0(s) = r(s)P_0(s)dt$ no modelo, dado que é possível utilizar o numerário, ou conta do mercado monetário, ou $P_0 = 1$.

Como não existe arbitragem no mercado se, e somente se, for redutível, então a condição de inexistência de arbitragens equivale à existência de um processo $\lambda(s)$, de tal forma que temos:

$$\frac{\mu(s, t_i) - r(s)P(s, t_i)}{\sigma(s, t_i)} = \lambda(s) \quad \forall s \geq 0, s \leq t_i \text{ e } i = 1, \dots, n \quad (1.14)$$

Para simplificar a análise podemos adotar a premissa de que $\lambda(s)$ é constante, e definir λ como o apetite ao risco dos investidores invariante ou como o preço de mercado do risco.

Sob a medida de probabilidade equivalente Q , o valor do título descontado $P(r(t), t, \tau)$ no tempo t com período remanescente até o vencimento igual a τ e valor de face unitário, é igual ao seu valor esperado descontado. A expectância tem que ser tomada com respeito à medida de probabilidade equivalente única tal que os valores das estratégias de negociação em termo da quantia do mercado monetário são martingales. No caso dos modelos de estrutura a termo endógeno, isso pode ser estabelecido pelo cálculo da expectância sob a medida única Q , e temos:

$$P(r(t), t, \tau) = \exp\left(-r(t)\tau - \frac{a}{2}\tau^2 + \frac{g^2}{6}\tau^3\right) \quad (1.15)$$

Na medida única Q os investidores são neutros ao risco e o retorno esperado instantâneo e a volatilidade do retorno sobre o título são $r(t)$ e $-g\tau$, respectivamente.

Na medida de probabilidade original P , o retorno esperado instantâneo e a volatilidade são iguais a $r(t) + \lambda g\tau$ e $\sigma\tau$. Assim, percebe-se que quando os investidores são avessos ao risco e o preço de mercado do risco é positivo, o relacionamento entre o retorno esperado instantâneo e a volatilidade dos títulos é linear e apresenta coeficiente de inclinação positivo e igual à λ .

A estrutura a termo de taxas de juros $R(t, \tau)$ no tempo t , obtida a partir do valor dos títulos é:

$$R(t, \tau) = -\frac{\ln P(r(t), t, \tau)}{\tau} = r(t) + \frac{(a + \lambda g)}{2}\tau - \frac{g^2}{6}\tau^2 \quad (1.16)$$

Como a estrutura a termo das taxas de juros é igual ao somatório das taxas de juros instantâneas de curto prazo e uma função quadrática em τ , as mudanças nos valores da taxa de curto prazo implicam em deslocamentos paralelos em toda a estrutura a termo. Além disso, os rendimentos (*yield*) são uma função côncava da volatilidade da taxa de curto prazo.

Com isso, percebemos que os rendimentos são negativamente relacionados com o valor da volatilidade e ao aumentar a volatilidade, a curvatura da estrutura a termo também aumenta e, no final, o valor do vencimento infinito tem rendimento $R(t, \infty)$ é igual a:

$$R(t, \infty) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} R(t, \tau) = -\infty \quad (1.17)$$

Devido à distribuição normal das taxas spot instantânea, uma maior volatilidade aumenta a probabilidade de maiores e menores taxas spot. Entretanto, o relacionamento entre os valores dos títulos e as taxas spot é convexo, implicando em maior impacto das taxas menores sobre os valores dos títulos. Em virtude da volatilidade das taxas spot também aumentar como função do vencimento, os relacionamentos acima podem ser verificados.

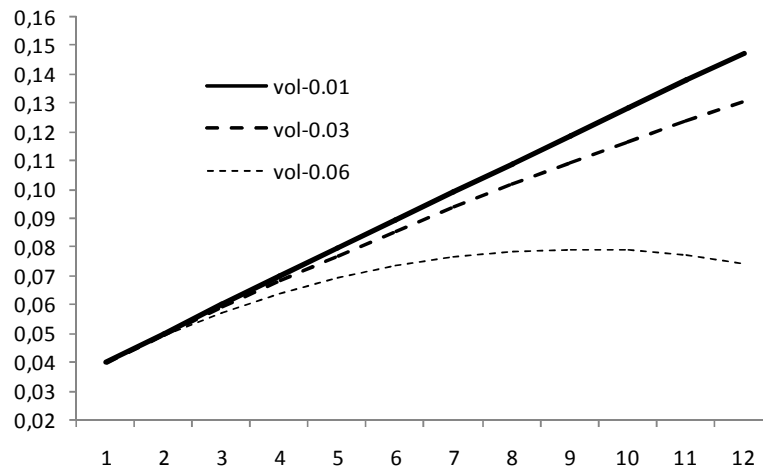
O rendimento até o vencimento (*yield to maturity*) no tempo t , $R(t, \tau)$, dado o conjunto de informação no tempo $s, s \leq t$, é normalmente distribuído:

$$R(t, \tau) | \mathfrak{F}_s \sim N\left(R(s, \tau) + a(t-s), g^2(t-s)^2\right) \quad (1.18)$$

A volatilidade do rendimento até o vencimento é independente do tempo até o vencimento, implicando que as volatilidades endógenas da estrutura a termo de taxas de juros é uma função flat.

Para uma análise gráfica da estrutura a termo das taxas de juros, a figura 1.1 considera a taxa de juros instantânea de curto prazo de $r(t) = 0,04$ e o termo neutro ao risco $\lambda = 0,01$. Adicionalmente, simula o efeito de diferentes volatilidades ao adotar os valores de 0,01; 0,03 e 0,06.

Figura 1.1 – Modelo de Merton



1.4.2 Modelo de Vasicek

Vasicek (1977) derivou uma forma geral da estrutura a termo de taxas de juros com as premissas de que a taxa instantânea (ou taxa spot) segue um processo difusão, o preço do título descontado depende somente da taxa spot sobre seu termo e que o mercado é eficiente.

Assim, mostrou por meio do argumento de arbitragem que a taxa esperada de retorno de qualquer título que excede a taxa spot é proporcional ao seu desvio padrão.

Considere uma economia onde o mercado financeiro possui investidores que compram e emitem títulos livres de default (títulos descontados) sobre uma quantia de moeda a ser entregue numa data futura. A incerteza temporal pode ser especificada por um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathfrak{F}, F, Q)$, com $F = \{\mathfrak{F}_t\}$. Sendo $P(s, t)$ o preço no tempo s de um título descontado que vence no tempo t , $s \leq t$, cujo valor no vencimento é igual a $P(t, t) = 1$. O rendimento do título até o vencimento $R(s, \tau)$ é a taxa interna de retorno no tempo s sobre um título com data de vencimento $t = s + \tau$ é igual a:

$$R(s, \tau) = -\frac{\log P(s, s + \tau)}{\tau}, \quad \tau > 0 \quad (1.19)$$

A taxa $R(s, \tau)$ é definida como função de τ e é denominada de estrutura a termo no tempo s .

A taxa futura $F(s, t)$, ou forward rate, será definida segundo a equação:

$$R(s, \tau) = \frac{1}{\tau} \int_s^{s+\tau} F(s, \tau) d\tau \quad (1.20)$$

A equação da forma explícita da taxa futura é:

$$F(s, \tau) = \frac{\partial}{\partial t} [(t-s)R(s, t-s)] \quad (1.21)$$

A taxa futura pode ser interpretada como a taxa marginal do retorno de um investimento num título em um instante adicional.

Definimos a taxa spot como a taxa instantânea de tomar emprestado e emprestar:

$$r(t) = R(s, 0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} R(s, \tau) \quad (1.22)$$

Um empréstimo na quantia W na taxa spot aumentará no valor do incremento $dW = Wr(t)dt$, com certeza. Em qualquer tempo s , o valor corrente $r(t)$ da taxa spot é a taxa instantânea do aumento no valor do empréstimo. Os valores subseqüentes da taxa spot são um processo estocástico, sujeitos à: (1) $r(t)$ é uma função contínua do tempo e (2) $r(t)$ segue um processo Markov.

Logo, a trajetória futura da taxa spot dado seu valor presente é independente da trajetória passada que levou ao nível presente. A distribuição de probabilidade do segmento $\{r(T), T \geq s\}$ é completamente determinada pelo valor de $r(t)$:

$$dr(t) = f(r, t)ds + \rho(r, t)dW \quad (1.23)$$

Onde $W(t)$ é um processo de Wiener com variância incremental $d(t)$. As funções $f(r, t)$ e $\rho^2(r, t)$ representam o *drift* e a variância do processo $r(t)$. Espera-se que o preço do título descontado seja determinado unicamente pela taxa de juros spot sobre seu termo, isto é, pela avaliação corrente da trajetória da taxa spot em relação ao termo do título, sem assumir uma forma particular de comportamento.

O preço do título descontado $P(s, t)$ é determinado pela avaliação, no tempo s , do segmento $\{r(T), s \leq T \leq t\}$ do processo da taxa spot sobre o termo do título.

A premissa que $r(t)$ segue um processo Markov, em conjunto com as hipóteses das expectativas, da segmentação do mercado e da preferência pela liquidez, postula que:

$$R(s, \tau) = E_s \left(\frac{1}{\tau} \int_s^{s+\tau} r(T) dT \right) + \bar{\pi}(s, \tau, r(s)) \quad (1.24)$$

Onde a função $\bar{\pi}(s, \tau, r(s))$ pode apresentar várias especificações.

Se a premissa de mercado eficiente for mantida, não existe custo de transação, a informação está disponível para todos os investidores simultaneamente e todo investidor age racionalmente (ou seja, prefere mais riqueza a menos e usa toda informação disponível), implicando que os investidores possuem expectativas homogêneas e que não existem oportunidades de arbitragem livre de risco.

Como $r(t)$ é uma função contínua do tempo, a trajetória do processo da taxa spot sobre o intervalo (s, t) , $s \leq t$, dado seu valor *prior* no tempo s , depende somente do valor corrente de $r(t)$. Como $r(t)$ segue um processo Markov, então o preço $P(s, t)$ é uma função de $r(t)$:

$$P(s, t) = P(s, t, r(t)) \quad (1.25)$$

Das equações (1.23) e (1.25), a regra de diferenciação de Itô (1961) indica que o preço dos títulos satisfaz a equação diferencial estocástica:

$$dP(s, t) = P(s, t)\mu(s, t)dt + P(s, t)\sigma(s, t)dW(s)$$

Onde os parâmetros da distribuição $\mu(s, t) = \mu(s, t, r(s))$ e $\sigma(s, t) = \sigma(s, t, r(s))$ são iguais a:

$$\begin{aligned} \mu(s, t, r) &= \frac{1}{P(s, t, r)} \left[\frac{\partial P(s, t, r)}{\partial s} + \frac{\partial P(s, t, r)}{\partial r} f + \frac{1}{2} \rho^2 \frac{\partial^2 P(s, t, r)}{\partial r^2} \right] \\ \sigma(s, t, r) &= -\frac{1}{P(s, t, r)} \left[\frac{\partial P(s, t, r)}{\partial r} \rho \right] \end{aligned} \quad (1.26)$$

As funções $\mu(s, t, r)$ e $\sigma^2(s, t, r)$ representam a média e a variância da taxa instantânea de retorno no tempo s sobre um título com vencimento na data t , dado que a taxa spot corrente é $r(t) = r$.

Para ilustrar o caso geral, a estrutura a termo das taxas de juros será obtida explicitamente a partir da premissa que o preço de mercado do risco

$\lambda(s, r) = \lambda$ independe do tempo e do nível da taxa spot. A segunda premissa é que a taxa spot $r(t)$ segue o seguinte processo denominado de Ornstein-Uhlenbeck:

$$dr(t) = \kappa(a - r(t))dt + g dW(t) \quad (1.27)$$

Os parâmetros κ , a e g são constantes positivas e $W = \{W(t), t \geq 0\}$ é um processo Wiener com variância incremental dt . As funções $f(r, t) = \kappa(a - r(t))$ e g são o termo *drift* e a variância do processo $r(t)$.

O processo Ornstein-Uhlenbeck com $\kappa > 0$ é chamado de caminho aleatório elástico. É um processo Markov com incrementos distribuídos normalmente. Ao contrário do caminho aleatório (ou processo Wiener), o qual é um processo instável e depois de um longo prazo divergirá para valores infinitos, o processo Ornstein-Uhlenbeck possui uma distribuição estacionária.

A incerteza segue o modelo de Merton, mas a taxa de juros não possui uma tendência de crescimento ilimitada. O parâmetro “ a ” corresponde à taxa de juros de curto prazo esperada para vigorar no longo prazo. Quando $r(t)$ fica acima de “ a ”, o termo $\kappa(a - r(t))$ será negativo e $\kappa(a - r(t))dt$ faz com que aumente a probabilidade de taxas menores no futuro. Quando $r(t)$ fica abaixo de “ a ” temos maior probabilidade de taxas maiores no futuro. O grau dessa força depende de κ que denominado de parâmetro de reversão a média. A distribuição da taxa de curto prazo no tempo t , dado o conjunto de informação em s , $s \leq t$, é:

$$r(t) | \mathfrak{F}_s \sim N\left(a + (r(s) - a)e^{-\kappa(t-s)}, \frac{g^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa(t-s)})\right), \quad s \leq t \quad (1.28)$$

O processo da taxa de juros de curto prazo permite a existência de taxas de juros negativas, pois a distribuição de $r(t)$ é normal.

A solução da equação da estrutura a termo de taxas de juros é:

$$P(s, t, r) = \exp\left[\frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(t-s)})(R(\infty) - r) - (t - s)R(\infty) - \frac{g^2}{4\kappa^3}(1 - e^{-\kappa(t-s)})^2\right], \quad s \leq t \quad (1.29)$$

Onde:

$$R(\infty) = a + \lambda \frac{g}{\kappa} - \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\kappa} \right)^2 \quad (1.30)$$

A média e o desvio padrão da taxa instantânea de retorno do título que vence no tempo t são:

$$\begin{aligned} \mu(t, s) &= r(s) + \lambda \frac{g}{\kappa} [1 - \exp(-\kappa(t-s))] \\ \sigma(s, t) &= \frac{g}{\kappa} [1 - \exp(-\kappa(t-s))] \end{aligned} \quad (1.31)$$

Logo, a taxa de retorno esperado instantâneo e a volatilidade do retorno sobre o título sem cupom (*zero coupon bond*) sob essa medida são $r(s) + \frac{\lambda g [1 - \exp(-\kappa\tau)]}{\kappa}$ e $\frac{g [1 - \exp(-\kappa\tau)]}{\kappa}$, respectivamente.

Para um título de longo prazo, quando $s \rightarrow \infty$, a média e o desvio-padrão aproximam-se dos limites:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} E(r(t) | \mathfrak{F}_s) &= r(s) + \frac{\lambda g}{\kappa} \\ \lim_{s \rightarrow \infty} Var_p(r(t) | \mathfrak{F}_s) &= \frac{g}{\kappa} \end{aligned} \quad (1.32)$$

Portanto, ao contrário do modelo de Merton onde o retorno e volatilidade dependiam linearmente do vencimento, o retorno e a volatilidade instantâneos em Vasicek (1977) aumentam não linearmente, quando diminui o vencimento dos valores limitantes $r(s) + \frac{\lambda g}{\kappa}$ e $\frac{g}{\kappa}$, assumindo que o preço de mercado do risco é positivo.

Quando temos investidores que são avessos ao risco $\lambda > 0$, o retorno instantâneo esperado dos títulos aumenta linearmente com a volatilidade da taxa de juros de curto prazo e não linearmente com o prazo para o vencimento do contrato. A volatilidade segue comportamento semelhante, mas no vencimento do contrato ($\tau = 0$), a volatilidade é nula.

Com isso, a estrutura a termo de taxas de juros endogenamente obtida no tempo t é:

$$R(s, \tau) = R(\infty) + (r(s) - R(\infty)) \frac{1 - \exp(-\kappa\tau)}{\kappa\tau} + \frac{g^2}{4\kappa^3\tau} [1 - \exp(-\kappa\tau)]^2, \tau \geq 0 \quad (1.33)$$

Logo, a estrutura a termo representa uma combinação linear entre a taxa de juros instantânea $r(t)$ e o retorno de um título com vencimento infinito $R(t, \infty)$ que é acrescida de uma função côncava que introduz a curvatura.

A curva de juros acima, equação (1.35), começa no nível corrente da taxa spot $r(s)$ para $\tau = 0$ e aproxima da assíntota comum $R(\infty)$ quando $\tau \rightarrow \infty$.

Para valores de $r(s)$ pequenos ou iguais a $R(\infty) - \frac{1}{4} \frac{g^2}{\kappa^2}$ a curva de juros é monotonicamente crescente. Para de $r(s)$ maiores do que $R(\infty) - \frac{1}{4} \frac{g^2}{\kappa^2}$ e abaixo de $R(\infty) - \frac{1}{2} \frac{g^2}{\kappa^2}$ é uma curva em forma de corcunda.

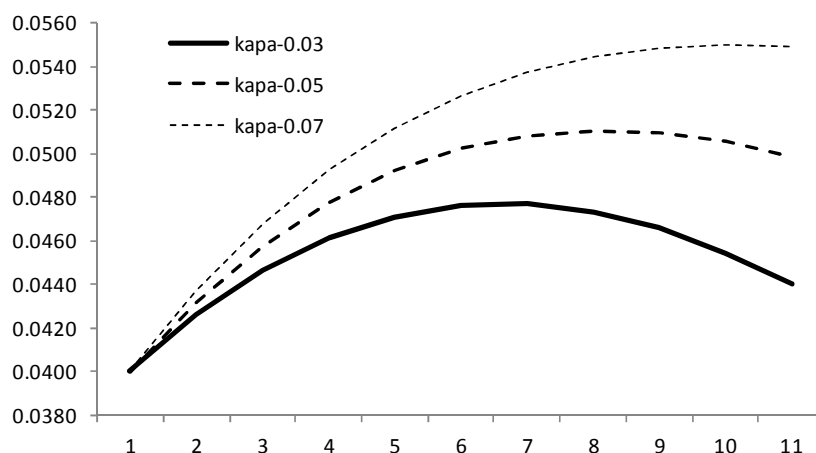
A estrutura a termo representa uma combinação linear entre a taxa de juros instantânea $r(s)$ e o retorno de um título com vencimento infinito $R(\infty)$ que é acrescida de uma função côncava que introduz a curvatura.

Substituindo $R(\infty)$ na equação acima:

$$R(s, \tau) = \left(a + \lambda \frac{g}{\kappa} - \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\kappa} \right)^2 \right) \left(1 - \frac{1 - \exp(-\kappa\tau)}{\kappa\tau} \right) + r(s) \left(\frac{1 - \exp(-\kappa\tau)}{\kappa\tau} \right) + g(1 - \exp(-\kappa\tau))^2 \quad (1.34)$$

A figura 1.2 apresenta a ilustração gráfica da estrutura a termo das taxas de juros com diferentes valores do parâmetro de reversão à média κ (0,3 – 0,5 – 0,7). Nesse exemplo, o valor inicial da taxa spot instantânea é 0,04 e o valor da média incondicional neutra ao risco é $a + \lambda \frac{g}{\kappa}$, enquanto que a volatilidade é igual a 0,10.

Figura 1.2 – Modelo de Vasicek



As estruturas a termo das taxas de juros são explicadas pelo valor do retorno do título com vencimento infinito $R(t, \infty)$ e pelo retorno da taxa de curto prazo na expressão da estrutura a termo. Quanto maior o valor de kappa, maior o valor do retorno com vencimento infinito, rotacionando a curva de retorno (*yield curve*).

Um aumento no valor de kappa coloca mais peso no retorno com vencimento infinito em comparação com a taxa de juros instantânea de curto prazo, aumentando a curvatura da estrutura a termo. O retorno de vencimento infinito é sempre menor do que a média incondicional neutra ao risco da taxa spot instantânea, devido à relação convexa entre os valores dos títulos e as taxas spot.

1.4.3 Modelo de Cox, Ingersoll e Ross

Cox, Ingersoll e Ross (1985), doravante denominado de modelo CIR, apresentou um modelo de precificação de ativo em equilíbrio geral para estudar a estrutura a termo das taxas de juros. Assim, desenvolveu modelo onde as antecipações, aversão ao risco, alternativas de investimento e preferências sobre o momento temporal do consumo tem um papel importante na determinação do preço dos títulos.

O modelo CIR veio para solucionar o problema de crescimento ilimitado da taxa de juros do modelo de Merton e o problema da possibilidade de taxas de juros nominais negativas de Merton e Vasicek. Ao mesmo tempo em que o modelo CIR aumenta a complexidade analítica e tornam as provas mais complexas, suas premissas qualificam esse modelo para ser utilizado no modelo de equilíbrio geral estocástico dinâmico dos novos keynesianos, do capítulo 3.

O modelo CIR é um modelo de equilíbrio geral, com uma descrição intertemporal completa de uma economia competitiva em tempo contínuo. A economia é composta por indivíduos idênticos que maximizam uma função objetivo, representada pela função utilidade $U(C(s), Y(s), s)$ do tipo Von Neumann-Morgenstern, que é composta por consumo e pelo estado da tecnologia. No equilíbrio da sociedade homogênea, a taxa de juros e a taxa de retorno esperada sobre os direitos contingentes precisam se ajustar até que toda riqueza seja investida num processo de produção. O investimento pode ser feito pelos indivíduos ou pelas firmas, o valor de equilíbrio é dado pela solução do problema com um único produto físico. A estrutura de preferência é especializada para o caso de função de utilidade de aversão ao risco relativo constante, e assume a seguinte forma:

$$U(C(s), s) = e^{-\rho s} \left[\frac{C(s)^\gamma - 1}{\gamma} \right]$$

No modelo de estrutura a termo de taxas de juros, a mudança nas oportunidades de produção no tempo é descrita pela variável estado Y . A trajetória da variável estado é dada por uma equação diferencial estocástica do tipo:

$$dY(t) = [\xi Y + \zeta] dt + \nu \sqrt{Y} dW(t)$$

Logo, a incerteza da economia pode ser especificada pelo espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathfrak{F}, F, Q)$ e o processo estocástico da taxa de curto prazo instantânea mantém a propriedade de reversão à média (convergência ao estado estacionário) e exclui as taxas de juros negativas. A dinâmica das taxas de juros pode ser expressa como:

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma \sqrt{r(t)} dW(t) \tag{1.31}$$

Os parâmetros κ , θ e σ^2 são constantes, com $\kappa\theta \geq 0$, $\sigma^2 > 0$ e $W = \{W(t), t \geq 0\}$ é um processo Wiener unidimensional. O espaço de probabilidade e a medida de probabilidade seguem os modelos anteriores, logo as taxas de juros flutuam ao redor de θ , que continua sendo vista como a taxa de juros de curto prazo esperada no longo prazo.

Para $\kappa, \theta > 0$, temos um processo autoregressivo de primeira ordem onde a taxa de juros $r(t)$ move-se estocasticamente ao redor do parâmetro θ com velocidade de ajustamento ou força de reversão à média igual a κ , que é o parâmetro da velocidade de ajustamento.

Uma análise do critério de estabelecimento dos limites mostra que $r(t)$ pode atingir valor zero se $\sigma^2 > 2\kappa\theta$. Por outro lado, quando $2\kappa\theta \geq \sigma^2$, o drift é suficientemente grande para não atingir a origem e $r(0) > 0$, então $r(t)$ não será negativa e a volatilidade da taxa de juros de curto prazo será igual a $\sigma\sqrt{r(t)}$. Intuitivamente, sempre que $r(t)$ aproximar-se de zero, a raiz quadrada de $r(t)$ tornar-se-á um número muito pequeno, fazendo com que a volatilidade do processo torne-se desprezível. Nesse momento, a magnitude do termo $\kappa(\theta - r(t))dt$ será dominante e $r(t)$ irá se afastar da origem e sempre assumindo valor positivo.

O comportamento da taxa de juros que está implícito nessa estrutura segue as seguintes propriedades: (a) as taxas de juros negativas são excluídas, (b) se a taxa de juros atinge o valor zero, em seguida será positiva, (c) a variância absoluta da taxa de juros aumenta quando a taxa de juros aumenta, e (d) existe uma distribuição no estado estacionário para a taxa de juros.

A densidade de probabilidade da taxa de juros no tempo s , condicional ao valor no tempo corrente t , é dada por:

$$f(r(s), s; r(t), t) = ce^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{q/2} I_q(2(uv)^{1/2}) \quad (1.32)$$

A função distribuição das taxas spot no tempo t , dado o conjunto de informação s , $t \leq s$, é uma distribuição qui-quadrado não centrada $\chi^2(2cr(s); 2q + 2, 2u)$, com $2q + 2$ graus de liberdade e parâmetro de não

centralidade igual a $2u$ que é proporcional à taxa de juros de curto prazo spot $r(s)$. As variáveis c , u , v e q são definidas como:

$$c = \frac{2\kappa}{\sigma^2(1 - e^{-\kappa(s-t)})}$$

$$u = cr(t)e^{-\kappa(s-t)}$$

$$v = cr(t)$$

$$q = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} - 1$$

A média e a variância da taxa spot $r(s)$ no tempo t , dado o conjunto de informação em s , $s \leq t$ é:

$$\begin{aligned} E(r(s)|r(t)) &= r(t)e^{-\kappa(s-t)} + \theta(1 - e^{-\kappa(s-t)}) \\ Var(r(s)|r(t)) &= r(t)\left(\frac{\sigma^2}{\kappa}\right)(e^{-\kappa(s-t)} - e^{-2\kappa(s-t)}) + \theta\left(\frac{\sigma^2}{2\kappa}\right)(1 - e^{-\kappa(s-t)})^2 \end{aligned} \quad (1.33)$$

A expectância condicional de $r(t)$ é dada pela média ponderada entre a taxa de juros spot de curto prazo $r(s)$ e a taxa de juros de curto prazo esperada no longo prazo θ , refletindo a propriedade de reversão à média. A variância condicional depende positivamente da taxa spot $r(s)$ de maneira que quando a taxa de curto prazo se aproxima de zero sua variância reduz.

Quando κ se aproxima de zero, a média condicional vai para a taxa de juros corrente e a variância vai para $\sigma^2 r(t)(s-t)$. Se a taxa de juros mostra uma reversão à média ($\kappa, \theta > 0$), então quando s torna-se grande sua distribuição aproxima de uma distribuição gama. A função densidade do estado estacionário é $f[r(\infty), \infty; r(t), t] = \frac{\omega^\nu}{\Gamma(\nu)} r^{\nu-1} e^{-\omega r}$, onde $\omega = \frac{2\kappa}{\sigma^2}$ e $\nu = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}$.

Assim, a média e a variância no estado estacionário da taxa spot são:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} E_p(r(t)|\mathfrak{F}_s) &= \theta \\ \lim_{t \rightarrow \infty} Var_p(r(t)|\mathfrak{F}_s) &= \nu = \theta\left(\frac{\sigma^2}{2\kappa}\right) \end{aligned} \quad (1.34)$$

O problema de avaliação do título descontado livre de risco prometendo pagar uma unidade no tempo T . Os preços desses títulos para todo T serão determinados pela estrutura a termo das taxas de juros. O preço de mercado do risco λ é uma constante real fixa. Ao contrário de Merton e

Vasicek, a mudança da medida de probabilidade é explicitamente dependente do valor da taxa de curto prazo.

Os preços dos títulos são dados por:

$$P(r(t), t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r} \quad (1.38)$$

Onde:

$$A(t, T) = \left(\frac{2\gamma e^{(\kappa + \lambda + \gamma)(T-t)/2}}{(\kappa + \lambda + \gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}}$$

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\kappa + \lambda + \gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$$

$$\gamma = \left((\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2 \right)^{1/2}$$

Os parâmetros do processo da taxa de juros têm os seguintes efeitos. O preço dos títulos é uma função convexa decrescente da média do nível da taxa de juros θ e função côncava crescente (convexa decrescente) do parâmetro da velocidade de ajustamento κ se a taxa de juros é maior do que θ . Ambos os resultados advêm dos efeitos sobre a taxa de juros futura esperada. Ambos os preços são um função côncava crescente do parâmetro de risco do mercado λ . Isso ocorre porque maiores valores de λ indicam uma maior covariância da taxa de juros com a riqueza. Assim, quanto maior λ mais provável é que o preço dos títulos sejam maiores quando a riqueza é menor e, com isso, maior é a utilidade marginal. O preço dos títulos é uma função côncava crescente da variância da taxa de juros σ^2 . Agora, vários efeitos estão envolvidos, o mais importante é que um maior valor de σ^2 indica mais incerteza sobre as oportunidades de produção futura e mais incerteza sobre o consumo futuro. Num mundo de investidores averssos ao risco será exigida uma garantia maior sobre o direito a ser exercido no título.

Com a aplicação do Lema de Itô encontramos o processo estocástico do preço dos títulos:

$$dP(s, t) = r(s)(1 + \lambda\sigma B(t, T))P(s, t)dt + B(t, T)P\sigma\sqrt{r(t)}dW(s) \quad (1.40)$$

Quanto maior o valor da constante λ (componente do preço de mercado do risco), maior será o retorno instantâneo esperado nos títulos. Como ocorreu nos modelos de Merton e Vasicek, esse resultado é intuitivo e

reflete o fato de que os investidores mais avessos ao risco exigem maiores retornos esperados.

Outro aspecto mostra que quando a taxa de curto prazo se aproxima de zero, a volatilidade instantânea dos títulos tende a zero. Quando $r(t)$ se aproxima da origem, a própria volatilidade da taxa de curto prazo reduz. Assim, o comportamento assemelha-se a um processo determinístico, quando a taxa de curto prazo é quase-determinística, os preços dos títulos não podem ser voláteis.

A estrutura a termo pode ser obtida de forma endógena pela equação (1.38) da seguinte forma:

$$R(t, \tau) = \frac{r(t)B(t, T) - \ln A(t, T)}{T - t} \quad (1.41)$$

O rendimento do título de renda fixa (*yield*) é dado pela soma ponderada entre a taxa de curto prazo e o rendimento de um título com maturidade infinita.

Quando o vencimento se aproxima, a rendimento até o vencimento (*yield-to-maturity*) aproxima-se da taxa de juros corrente independente de qualquer parâmetro. À medida que consideramos vencimentos cada vez mais distantes, o rendimento se aproxima de um limite que é independente da taxa de juros corrente. Em outras palavras, o retorno com vencimento infinito $R(r, t, \infty)$ é igual ao valor constante de:

$$R(r, t, \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} R(r, t, T) = \frac{2\kappa\theta}{\kappa + \lambda + \gamma} \quad (1.39)$$

Quando a taxa spot fica abaixo da taxa de longo prazo, a estrutura a termo aumenta uniformemente. Quando a taxa de juros de longo prazo fica acima da taxa spot no valor de $\kappa\theta/(\kappa + \lambda)$, a estrutura a termo diminui. Quando estamos em valores intermediários, a curva de juros é uma corcunda. A partir da função de precificação dos títulos percebemos que um aumento na taxa de juros corrente aumenta a curva de juros para todos os vencimentos, mas o efeito é maior para os vencimentos mais curtos. Um aumento na média do estado estacionário θ aumenta toda a curva de juros, mas o efeito é maior nos vencimentos mais distantes. O rendimento até o vencimento (*yield to maturity*) diminui quando σ^2 ou λ aumenta. Por outro lado, o efeito de uma mudança na

velocidade de ajustamento κ pode ter qualquer sinal, dependendo da taxa de juros corrente.

Sempre houve grande preocupação com as previsões imparciais sobre as taxas de juros futuras. Na presente situação, poderíamos trabalhar diretamente com a equação da média e variância, que dá valores esperados das taxas de juros futuras em termos da taxa corrente e dos parâmetros κ e θ . No entanto, no modelo de expectativas racionais toda a informação corrente sobre o movimento futuro das taxas de juro é incorporada no preço dos títulos e na estrutura a termo. Se esse modelo está correcto, qualquer parâmetro pode ser determinado a partir da estrutura a termo. Essa abordagem é particularmente importante quando o modelo é estendido para permitir um termo drift dependente do tempo, $\theta(t)$. Podemos, então, utilizar as informações contidas na estrutura a termo para obter $\theta(t)$ e as taxas futuras esperadas sem ter que colocar restrições prévias em sua forma funcional.

As taxas de juros baseadas no modelo CIR são sempre menores do que as taxas do modelo Vasicek. Como a volatilidade instantânea da taxa spot é linearmente dependente da raiz quadrada da taxa spot no modelo CIR, um valor menor dessa taxa aumenta a probabilidade de uma taxa relativamente menor num instante seguinte. Assim como no modelo de Vasicek, as taxas de juros de longo prazo são menos voláteis do que as taxas de juros de curto prazo.

1.4.4 Modelo de Ho e Lee

No modelo de Ho e Lee (1986), a incerteza temporal contínua pode ser especificada por um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathfrak{F}, F, Q)$, satisfazendo um intervalo de negociação de $[0, T]$. A suposição de que o mercado de títulos é livre de arbitragem e completo implica que a medida de probabilidade Q é martingal equivalente, existe e é única. Logo, a escolha do processo de taxa de juros de curto prazo dado por $(\Omega, \mathfrak{F}, F, P)$ ou $(\Omega, \mathfrak{F}, F, Q)$ ocorre de forma arbitrária.

A estrutura a termo de taxas de juros exógena na data de negociação inicial 0 é dada e representada pela estrutura a termo inicial das taxas forward $f(0,t)$, $t \in [0,T]$, que não é aleatória, é mensurável, é absolutamente integrável e é definida como:

$$P(0,\tau) = e^{-\int_0^\tau f(0,s)ds}, \quad \forall \tau \in [0,T] \quad (1.45)$$

O valor da taxa de juros de curto prazo instantânea no tempo $t \in [0,T]$, obedece:

$$r(t) = \alpha(t) + \sigma \tilde{W}(t) \quad (1.46)$$

Nessa expressão $\alpha(t)$ é não aleatório, mensurável e absolutamente integrável. Como as oportunidades de arbitragem são excluídas, então existe uma única medida de probabilidade equivalente tal que os valores de todos os títulos derivados de taxas de juros são martingales relativo a conta do mercado monetário (numerário) são martingales. Por definição, essa medida de probabilidade é Q e impondo condições na função $\alpha(t)$, $t \in [0,T]$, podemos assegurar que dado a estrutura a termo das taxas futuras na data de negociação inicial 0 é obtida. O valor do título descontado $P(0,\tau)$ no tempo 0 com maturidade τ , $\tau \in [0,T]$, portanto tem que ser igual a seguinte expressão:

$$P(0,\tau) = \exp\left(-\int_0^\tau f(0,s)ds\right) = E_Q\left(\exp\left(-\int_0^\tau r(s)ds\right) \mid \mathfrak{F}_0\right) \quad (1.47)$$

Calculando a $E(e^{\tilde{x}}) = e^{E(\tilde{x}) + \frac{1}{2}Var(\tilde{x})}$, com \tilde{x} sendo normalmente distribuído, temos que:

$$\alpha(t) = f(0,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2, \quad \forall t \in [0,T] \quad (1.48)$$

Para obter o valor de um título descontado $P(t,\tau)$ em algum tempo $t \in [0,T]$ com vencimento em τ , o valor esperado descontado é calculado com respeito à medida de probabilidade única Q é igual a:

$$\begin{aligned} P(t,\tau) &= E_Q\left(\exp\left(-\int_t^{t+\tau} r(s)ds\right) \mid \mathfrak{F}_t\right) \\ &= \exp\left(-\int_t^{t+\tau} f(0,s)ds - \tau\sigma\tilde{W}(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\tau(t+\tau)\right) \end{aligned} \quad (1.49)$$

As estruturas a termo de taxas de juros possíveis no tempo $t \in [0, T]$ podem ser derivadas dos valores desses títulos, como eles estão implícitos na estrutura a termo de taxas de juros na data de negociação inicial e o movimento estocástico da taxa de curto prazo sobre o tempo:

$$\begin{aligned}
 R(t, \tau) &= -\frac{\ln P(t, \tau)}{\tau} = \frac{\int_t^{t+\tau} f(0, s) ds}{\tau} + \sigma \tilde{W}(t) + \sigma^2 t(t + \tau) \\
 &= r(t) - f(0, t) + \frac{\int_t^{t+\tau} f(0, s) ds}{\tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 t \tau
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

A expressão na qual os rendimentos futuros estão relacionados com o valor da taxa de curto mostra a semelhança entre os modelos de Merton e de Ho e Lee. O valor de um rendimento no tempo $t \in [0, T]$ com maturidade τ é o somatório da diferença entre o taxa de curto instantânea e taxa futura (taxa forward), a taxa futura na data de negociação inicial 0 que abrange o período o período $[t, t + \tau]$, e um termo refletindo a convexidade entre taxas de juros e os preços dos títulos. Da mesma forma que em Merton, mudanças nas taxas de curto prazo causam deslocamentos paralelos na estrutura a termo. O modelo de Ho e Lee tem limite se o valor das taxas forward for limitado:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(t, \tau) = \infty$$

Como o termo drift da taxa de curto prazo aumenta sem limite quando aumenta o vencimento, o efeito convexidade que implica que o fato do rendimento no vencimento infinito diminuir sem limite no modelo de Merton é desconsiderado.

Esse modelo de Ho e Lee foi o precursor dos modelos exógenos, mas é muito parecido com o modelo de Merton, enquanto em Merton $P(t, T)$ refere-se a preços obtidos endogenamente, em Ho e Lee $P(0, T)$ são preços observados no mercado. Dessa forma, percebemos que o modelo de Ho e Lee é um modelo de Merton estendido.

1.4.5 Modelo de Hull e White

O modelo de Hull e White (1990) está para Vasicek, assim como o modelo de Ho e Lee está para Merton, isto é, trata do modelo de Vasicek com estrutura a termo inicial exógena.

O processo estocástico da taxa de juros de curto prazo é:

$$dr(t) = (a(t) - \kappa r(t))dt + g d\tilde{W}(t) \quad (1.58)$$

Onde $a(t)$ é uma função determinística, κ e g são constantes positivas e $\tilde{W}(t)$ é um processo Wiener unidimensional em $(\Omega, \mathfrak{F}, Q)$.

Note que para a relação exata entre os modelos de Vasicek e Ho e Lee, o processo deveria ser $dr(t) = \kappa \left(\frac{\partial a(t)}{\partial t} - r(t) \right) dt + g d\tilde{W}(t)$, mas a notação utilizada é de Hull (1997).

A função $a(t)$ é escolhida de tal forma que a estrutura a termo gerada pelo modelo na data inicial é exatamente igual à estrutura a termo que é observada no mercado financeiro, por intermédio da taxa forward:

$$P(0, T) = \exp\left(-\int_0^T f(0, s) ds\right) = E_Q\left(\exp\left(-\int_0^T r(s) ds\right) \mid \mathfrak{F}_0\right) \quad (1.59)$$

Como a taxa de juros de curto prazo possui distribuição normal podemos solucionar (1.59) e obter $\theta(t)$ em função da taxa forward:

$$a(t) = f_t(0, t) + \kappa f(0, t) + \frac{g^2}{2\kappa} [1 - \exp(-2\kappa t)] \quad (1.60)$$

Onde o subscrito é a derivada parcial.

Caso suponhamos que o último termo seja aproximadamente zero, a substituição de (1.60) em (1.58) mostra que o *drift* da taxa de curto prazo é igual a $f_t(0, t) + \kappa(f(0, t) - r(t))$. Assim, percebemos que a taxa de juros de curto prazo acompanha a taxa forward da data inicial, tendendo a retornar a ela caso ocorra um desvio momentâneo.

Isso não significa um resgate da hipótese clássica de expectativas não viesadas, onde a taxa forward instantânea seria um previsor não viesado da taxa de juros instantânea no futuro, de Fisher (1896). A razão disso é que não podemos esquecer que o processo com o qual estamos lidando está no espaço de probabilidade da medida martingal equivalente e não no espaço de

probabilidade da medida verdadeira. Exceto no caso em que o preço de mercado do risco é igual a zero, a transição de um espaço de probabilidades para o outro causa uma modificação no drift do processo.

Como o processo estocástico da taxa de juros de curto prazo foi inteiramente especificado, a obtenção da distribuição de probabilidade dos preços futuros dos títulos e também da estrutura a termo futura é feita como em Ho e Lee.

1.4.6 Modelo de Heath, Jarrow e Morton

A relação do modelo de Hull e White para Vasicek e do modelo de Ho e Lee para Merton, pode ser observada ainda no modelo de Heath, Jarrow e Morton (1992), ou modelo HJM, como extensão do modelo de Cox, Ingersoll e Ross. Note que o modelo HJM é um modelo geral, sobre o qual podemos obter diversos casos particulares, como o modelo de Ho e Lee, bem como, Hull e White.

A taxa futura instantânea no tempo t para data $T > t$, $f(t, T)$ é definida por:

$$f(t, T) = -\frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T}, \quad \forall T \in [0, \tau], \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.61)$$

A taxa forward é definida implicitamente pela equação:

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, s) ds\right)$$

A taxa de juros spot no tempo t é a taxa de juros instantânea no tempo t para a data t , sendo definida como:

$$r(t) = f(t, t), \quad \forall t \in [0, \tau]$$

A equação diferencial estocástica seguida por $f(t, T)$ é:

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t)$$

Como T arbitrário e fixo, para cada valor de T existe um processo estocástico que descreve a evolução de $f(t, T)$, impactando toda a curva de taxas forward.

O modelo HJM indica que a não existência de oportunidades de arbitragem leva a uma restrição sobre a taxa futura. O termo $\alpha(t, T)$ em função da estrutura a termo da volatilidade da taxa futura:

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, u) du \quad (1.62)$$

Substituindo a equação acima na equação diferencial, temos que:

$$df(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, u) du dt + \sigma(t, T) dW(t)$$

Considerando a equação acima e a taxa de juros spot $r(t) = f(t, t)$ obtemos:

$$r(t) = f(0, t) + \int_0^t \sigma(s, t) \int_s^t \sigma(s, u) du ds + \int_0^t \sigma(s, t) dW(s) \quad (1.63)$$

Logo, o processo estocástico da taxa de juros de curto prazo pode ser escrito substituindo o preço de mercado do risco pela expressão que descreve a estrutura a termo da volatilidade da taxa futura (taxa forward).

Sendo a data inicial $t = 0$ e $f(0, t)$ uma informação exógena e conhecida em $t \in [0, T]$, a equação que define a taxa futura implicitamente implica que a estrutura a termo inicial também é exógena no modelo HJM.

A distribuição de probabilidade da estrutura a termo futura pode ser obtida substituindo $df(t, T)$ em $P(t, T)$:

$$\begin{aligned} R(t, \tau) &= \frac{1}{\tau} \int_t^\tau f(t, v) dv = \frac{1}{\tau} \int_t^\tau f(0, v) dv + \frac{1}{\tau} \int_t^\tau \int_0^t \sigma(v, s) \int_s^t \sigma(v, y) dy dv ds \\ &\quad + \frac{1}{\tau} \int_t^\tau \int_0^t \sigma(v, s) dW(v) dv \end{aligned} \quad (1.64)$$

1.4.7 Modelo de Diebold, Rudebusch e Aruoba

Numa abordagem que não exige inexistência de oportunidades de arbitragem, Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) modelaram a estrutura a termo de taxas de juros utilizando fatores latentes denominados de nível, inclinação e curvatura, e, ainda, incluíram algumas variáveis macroeconômicas

observáveis que medem a atividade real da economia, a inflação e o instrumento de política monetária.

O modelo de Diebold, Rudebusch e Aruoba (DRA) possibilitou a caracterização das interações dinâmicas entre a macroeconômica e a curva de juros, mostrando que existe forte evidência de efeitos de variáveis macroeconômicas sobre os movimentos futuros da estrutura a termo das taxas de juros.

Para capturar a dinâmica da curva de juros, fizeram uma extensão do modelo de Nelson e Siegel (1987), pela sua flexibilidade e parsimônia. Entretanto, não impuseram explicitamente a restrição de ausência de arbitragem, porque, mesmo podendo perder eficiência em não impor essa restrição quando ela é válida, aceitam os movimentos de mercado sem liquidez onde essa premissa não se verifica.

O modelo define a curva de juros como $y(\tau)$, onde τ representa a maturidade. Como em Nelson e Siegel (1987), utilizaram uma representação da curva de juros da seguinte forma:

$$y(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right) \quad (1.65)$$

Onde β_1, β_2 e β_3 são parâmetros. A representação pode ser interpretada numa forma dinâmica como um modelo de fator latente no qual β_1, β_2 e β_3 são fatores nível, inclinação e curvatura que variam no tempo e os termos que multiplicam esses fatores são cargas fatoriais. Reescreveram como:

$$y(\tau) = L_t + S_t \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + C_t \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right) \quad (1.65)$$

Onde L_t, S_t e C_t são os β_1, β_2 e β_3 que variam no tempo.

Se os movimentos dinâmicos de L_t, S_t e C_t seguem um processo autoregressivo de primeira ordem, o modelo formará um sistema espaço-estado. A equação de transição que governará a dinâmica do vetor estado é:

$$\begin{pmatrix} L_t - \mu_L \\ S_t - \mu_S \\ C_t - \mu_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{t-1} - \mu_L \\ S_{t-1} - \mu_S \\ C_{t-1} - \mu_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_t(L) \\ \eta_t(S) \\ \eta_t(C) \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

Onde $t = 1, \dots, T$. A equação de mensuração que relaciona um conjunto de N rendimentos a esses três fatores não observáveis é:

$$\begin{pmatrix} y_t(\tau_1) \\ y_t(\tau_2) \\ \vdots \\ y_t(\tau_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda\tau_1} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda\tau_1} - e^{-\lambda\tau_1} \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_2}}{\lambda\tau_2} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_2}}{\lambda\tau_2} - e^{-\lambda\tau_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_3}}{\lambda\tau_3} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_3}}{\lambda\tau_3} - e^{-\lambda\tau_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_t \\ S_t \\ C_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t(\tau_1) \\ \varepsilon_t(\tau_2) \\ \vdots \\ \varepsilon_t(\tau_N) \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

Em notação matricial, o sistema espaço-estado é:

$$(f_t - \mu) = A(f_{t-1} - \mu) + \eta_t \quad (1.68)$$

$$y_t = \Lambda f_t + \varepsilon_t \quad (1.69)$$

Onde $f_t = (L_t \ S_t \ C_t)'$, $\mu = (\mu_L \ \mu_S \ \mu_C)'$ e $t = 1, \dots, T$.

Para caracterizar os relacionamentos entre $\hat{L}_t, \hat{S}_t, \hat{C}_t$ com as variáveis da macroeconomia, incluíram três variáveis: a utilização capacidade de produção, a taxa dos *federal funds* e a inflação dos preços anualizadas, para representar o nível da atividade econômica real em relação ao potencial, o instrumento de política monetária e a taxa de inflação. A escolha dessas variáveis ocorreu segundo Rudebusch e Svensson (1999), bem como, em Kozicki e Tinsley (2001).

Em seguida, efetuaram uma extensão direta do modelo somente com a curva de juros para incorporar as três variáveis macroeconômicas:

$$(f_t - \mu) = A(f_{t-1} - \mu) + \eta_t \quad (1.70)$$

$$y_t = \Lambda f_t + \varepsilon_t \quad (1.71)$$

$$\begin{pmatrix} \eta_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} \sim WN \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \right] \quad (1.72)$$

Onde $f_t = (L_t \ S_t \ C_t \ UC_t \ i_t^m \ \pi_t)'$. Esse novo sistema forma o modelo de estrutura a termo de taxas de juros com as variáveis

macroeconômicas de utilização da capacidade instalada (UC), taxa de juros de curtíssimo prazo (i_t^m) e taxa de inflação (π_t).

1.5 Conclusão

Este capítulo teve o objetivo de mostrar que para uma economia ser completa, não deve existir oportunidades de arbitragem livres de risco e deve haver uma única medida de probabilidade equivalente onde as estratégias de negociação autofinanciáveis relativas são martingales. Ao assumir essas condições, temos a garantia de existência de um preço único de negociação dos títulos que balizam a formação da estrutura a termo das taxas de juros, no qual o mercado financeiro estará equilibrado.

Além de explicitar a precificação dos títulos descontados, também contextualiza a pesquisa empírica a ser desenvolvida nos próximos capítulos, ao apresentar a modelagem da estrutura a termo das taxas de juros presente nos trabalhos de Merton, Vasicek, Ho e Lee, Hull e White e, ainda, Heath, Jarrow e Morton.

Entretanto, a principal contribuição deste capítulo para a tese é descrever as premissas e características centrais dos modelos de Cox, Ingersoll e Ross, bem como de Diebold, Rudebusch e Aruoba, pois os mesmos serão testados de forma empírica para o Brasil, nesta tese.

Adicionalmente, percebemos que Diebold et al utiliza uma representação do modelo estado-espço conveniente que facilita a estimativa, a extração de fatores latentes da curva de juros a partir de interações dinâmicas de variáveis da macroeconomia. Portanto, torna possível encontrar evidências dos efeitos macroeconômicos sobre a curva de juros. Do ponto de vista financeiro, esse modelo não impõe a restrição de ausência de arbitragem livre de risco, justificada pelas situações onde essa premissa é violada devido à falta de liquidez em mercados financeiros com pouca negociação.

De forma resumida, pode-se perceber que o modelo CIR veio solucionar o problema de crescimento ilimitado da taxa de juros do modelo de Merton e a possibilidade de taxas de juros nominais negativas de Merton e Vasicek. Ao mesmo tempo, suas premissas permitem derivá-lo dentro da abordagem de equilíbrio geral estocástico dinâmico dos novos keynesianos.

CAPÍTULO 2

Impacto das Variáveis Macroeconômicas na Estrutura a Termo de Juros

2.1 Introdução

Nos dias atuais, os bancos centrais procuram conduzir a política monetária estabelecendo uma comunicação efetiva junto aos participantes do mercado financeiro, para reduzir a incerteza de sua atuação nas taxas de juros de curto prazo e fornecer informações para que mercado avalie o caminho esperado das taxas de juro de longo prazo. Em outras palavras, a autoridade monetária utiliza uma taxa de juros de curto prazo como instrumento de política monetária, com a esperança de que ao afetar essa taxa estará alterando a taxa de juros de longo prazo da economia, que é a taxa que afeta a demanda agregada.

A relevância de analisar a estrutura a termo de juros no Brasil é esclarecer como as mudanças nas expectativas da condução da política monetária e da política fiscal podem modificar as taxas de longo prazo e, também, verificar se os movimentos verificados de longo prazo estão em desacordo com a atuação da autoridade monetária no curto prazo.

Note que as taxas de juros de longo prazo podem embutir um prêmio de risco associado ao vencimento dos títulos, mas se a estrutura a termo acompanhar a hipótese das expectativas racionais esse prêmio é nulo ou constante no tempo e as taxas de longo prazo são uma média das taxas de curto prazo, o que facilita as previsões das variáveis macroeconômicas.

Entretanto, alguns trabalhos indicam que o spread do termo não é constante e, com isso, a hipótese das expectativas deixa de ser válida, por exemplo, Mankiw e Miron (1986), Tabak e Andrade (2001) e Lima e Issler (2003). Caso isso ocorra, torna-se necessário identificar as variáveis responsáveis pela variação desse prêmio para melhorar a previsibilidade das variáveis macroeconômicas.

As evidências empíricas, citadas no parágrafo anterior, indicam que a não verificação da hipótese das expectativas pode ser decorrente dessa não

linearidade da estrutura de juros. Para resolvermos esse problema temos os modelos “threshold”, que são uma boa opção para identificar a variável econômica responsável pela inclinação e curvatura da estrutura a termo de taxas de juros e do spread.

Adicionalmente, percebe-se na literatura, que a mudança na curva de rendimento durante os ciclos econômicos pode estar associada com períodos de recessão, conforme Haubrich e Dombrosky (1995), Stock e Watson (2001) e Hamilton e Kim (2002). Nesse sentido, a curva de juros pode fornecer informações que antecipem as recessões (inclinação passando de positiva para negativa), pois o prêmio dos títulos de longo prazo tem comportamento anticíclico (investidores não desejam assumir riscos em momentos incertos) e os rendimentos dos títulos curtos prazo pró-cíclico (política monetária reduz os rendimentos de curto prazo durante a recessão para estimular a atividade econômica). Note que a existência da taxa de inflação é que gera o formato de inclinação positiva, uma vez que o dinheiro amanhã terá um valor menor do que hoje, enquanto que uma possível deflação poderia ter efeito inverso.

Como ingrediente adicional nesta análise, a crise econômica denominada subprime, iniciada em 2007 nos EUA, cujos reflexos na economia brasileira ocorreram a partir de 2008, ressaltou os desafios de entender os movimentos transitórios para melhorar a condução da política monetária. Certos aspectos que chamam nossa atenção dizem respeito ao comportamento das taxas de juros de longo prazo dos títulos de 10 anos do governo norte-americano (taxa à vista que o mercado espera vigorar no futuro, acrescida do prêmio do termo), cuja taxa futura de um ano para os próximos três anos, a partir de 2004, subiu 1,5%, enquanto a taxa de um ano para os próximos nove anos caiu 1,5% e a taxa para os próximos 10 anos ficou inalterada. Os efeitos verificados na economia norte-americana reforçam a conclusão de que, nem sempre, uma atuação na taxa de curto prazo pode gerar o efeito com a mesma magnitude sobre toda a estrutura a termo de taxas de juros, realçando a necessidade de identificar quais variáveis macroeconômicas são responsáveis pelos movimentos na estrutura a termo de juros.

Em relação aos dados brasileiros, cumpre notar dois fatos importantes. O primeiro fato mostra que é comum observar uma “quase” inversão da estrutura a termo, ou seja, momentos em que elevações abruptas da taxa de juros de curto prazo nem sempre são acompanhadas de elevações na taxa de longo prazo. O segundo fato diz respeito ao spread entre a taxa curta e longa, onde é comum observar elevações abruptas, enquanto as quedas são mais lentas.

Este trabalho conclui que o spread do vencimento tem um comportamento não linear mensurado pelo modelo de regressão de transição suave – STR e que essa não linearidade depende do regime de política macroeconômica adotado.

Este capítulo é composto de outras seções além desta introdução. A seção 2.2 fornece uma revisão da literatura da relação entre macroeconomia e estrutura a termo de taxas de juros; a seção 2.3 discute a hipótese das expectativas e a não linearidade; a seção 2.4 apresenta o modelo utilizado nesta investigação; a seção 2.5 formaliza o estimador econométrico e discrimina os resultados empíricos para o caso brasileiro e a seção 2.6 traz a conclusão das discussões levantadas.

2.2 Variáveis Macroeconômicas e a Estrutura a Termo das Taxas de Juros

O estudo da estrutura a termo de taxas de juros e sua relação com as variáveis macroeconômicas tem aumentado nos últimos anos e essa nova linha de estudo já não considera mais suficiente avaliar a estrutura a termo num contexto de não arbitragem e com fatores não observáveis. A nova linha de pesquisa tenta identificar as forças macroeconômicas que afetam os movimentos da estrutura de taxas de juros, indicando como a autoridade monetária está influenciando as expectativas do mercado sobre a trajetória presente e futura dos juros.

Bernanke (1983) utilizou o spread de risco de crédito obtido pela diferença entre a taxa dos *commercial papers* e a taxa das letras do Tesouro norte-americano como instrumento preditivo do nível de produção nos Estados Unidos.

Stock e Watson (1989) explicaram o ciclo econômico por intermédio do spread de crédito (diferença entre *commercial paper* e títulos governamentais) e pelo spread do termo (diferença entre as taxas de longo e curto prazo dos papéis governamentais), sendo este último representativo da curva de rendimento dos títulos (estrutura a termo de taxas de juros ou *yield curve*).

A importância do spread de crédito vem do fato que representam o risco de crédito (risco de inadimplência ou do atraso no pagamento) que é um indicativo para antecipar o processo recessivo (associado ao canal do crédito). Por outro lado, a importância do spread do termo está atrelada à informação da postura da política monetária, com a crença dos agentes na capacidade da autoridade conduzir a política monetária no ambiente econômico a ser perseguido.

Na análise do spread do crédito ou *spread short*, Bernanke (1990) mostrou que uma política monetária restritiva pelo aumento na taxas dos fedfunds, tem o efeito de aumentar o custo dos fundos para os bancos. Para evitar esse aumento no custo de captação de recursos, os bancos devem escolher entre emitir certificados de depósitos (CD nos EUA ou CDB no Brasil),

reduzirem sua carteira de crédito, vender títulos públicos de sua carteira de ativos e/ou aumentar a taxa de juros cobrada nos empréstimos concedidos. As duas primeiras ações aumentam a taxa dos *commercial paper* em relação aos títulos públicos (CDs e *commercial papers* são substitutos). O aumento da taxa dos empréstimos concedidos leva as firmas a optarem por tomar emprestado em *commercial papers*, o que eleva a diferença entre os papéis comerciais e os títulos públicos. A opção de vender títulos públicos de sua carteira própria tem um impacto oposto, isto é, reduz o spread entre a taxa dos *commercial papers* e a taxa dos títulos públicos, pois aumenta a taxa dos títulos públicos. Entretanto, como os bancos não vendem títulos públicos facilmente, por representarem um ativo de alta liquidez capaz de proteger contra o risco de liquidez, ou risco de faltar de recursos para honrar os compromissos contratuais assumidos no vencimento ou o risco de resgates inesperados em depósitos.

Na análise do spread do termo, Campbell (1995) definiu os títulos de renda fixa, como papéis que pagam um valor determinado aos investidores. Logo, para avaliar um título não precisamos quantificar os pagamentos futuros aleatórios (como é o caso das ações), somente é necessário descontar os pagamentos futuros e trazer esses fluxos a valor presente. É preciso notar que alguns títulos não estão em conformidade com essa concepção, pois os emissores podem atrasar os pagamentos. Entretanto, nos títulos públicos desconsideramos esse risco de inadimplência.

Para entender a estrutura a termo de taxas de juros, Campbell utilizou um exemplo numérico para explicar a formação das expectativas no mercado de títulos. Pense num título de 30 anos cujo rendimento (ou *yield*) é de 7% ao ano e em outro título de 1 ano cujo retorno é 4% ao ano. A princípio, parece que o retorno de 7% é melhor do que o retorno de 4%, mas devemos considerar que o retorno de 4% é um rendimento certo no prazo de 1 ano, enquanto que os 7% serão certos somente após 30 anos. Supondo que o título de 1 ano seja reinvestido anualmente nos 29 anos seguintes, então, o retorno de 4% após o primeiro ano, só renderia o mesmo que um título de 29 anos se o outro título pagasse 7,1%. Nesse ponto surge a teoria da hipótese das expectativas, cujo pressuposto é igualar uma estratégia de investimento de

longo prazo (ou 30 anos) com a estratégia de investimento de curto prazo que implica em trinta aplicações de 1 ano.

Note que o mercado de títulos indica que a taxa de juros é contratada para uma data futura por intermédio de uma taxa *spot* de juros. Assim, se considerarmos uma taxa *spot* de 10% e 11% para investimentos de um e dois anos, então a taxa futura de 1 ano que deveria estar em vigor no segundo ano seria 12%. Com isso, uma aplicação de 11% por dois anos teria o mesmo rendimento de uma aplicação no ano 1 rendendo 10% e outra no ano 2 rendendo 12%.

Portanto, a hipótese das expectativas racionais aplicada sobre a estrutura a termo da taxa de juros define o termo do prêmio como a diferença esperada entre o rendimento obtido em reter um título de longo prazo e o retorno de um título de curto prazo. Esse prêmio representa o rendimento adicional para reter um ativo de longo prazo, em detrimento de uma estratégia de aplicar num ativo de curto prazo. Quando a inclinação da estrutura a termo é positiva temos indícios de que a taxa de longo prazo deve aumentar e quando a inclinação for negativa é indicativo de que a taxa de longo prazo deve cair.

Ao considerarmos somente a importância de trazer todos os pagamentos futuros a valor presente, desconsiderando o risco de crédito, é possível perceber a importância da estrutura a termo de taxas de juros, pois representa as taxas utilizadas para fazer essa mudança temporal no valor dos fluxos de caixas. Outro aspecto relevante é que apesar de não considerarmos o risco de crédito, oscilações na estrutura a termo de taxas de juros causam uma oscilação no valor presente dos fluxos de caixa e afetam a expectativa de retorno (logo, a taxa de juro) dos detentores dos ativos financeiros.

Assim, percebemos que a estrutura a termo causa impactos sobre as principais variáveis econômicas, ao mesmo tempo em que sabemos, que a autoridade monetária procura formar as expectativas do mercado em relação à trajetória futura das taxas de juros. Neste artigo estaremos interessados somente em avaliar o impacto da atuação do banco central na formação das expectativas sobre as taxas futuras, em outras palavras, o impacto das variáveis macroeconômicas sobre a estrutura a termo de taxas de juros.

Para esclarecer a inclusão de variáveis macroeconômicas vamos acompanhar Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) que forneceram um caminho para introduzir variáveis macroeconômicas na especificação financeira da estrutura a termo de juros dos modelos afim.

A representação do modelo, sem variáveis macroeconômicas, expressa os rendimentos de vários vencimentos como função dos fatores não observáveis. Esse modelo embute a hipótese das expectativas racionais, onde a taxa de juros de longo prazo será formada por uma média das taxas de juros de curto prazo esperadas para o futuro e por um prêmio do spread do termo que é nulo ou constante.

Uma classe de funções que levam a forma da curva de juros típica está associada com soluções de equações por diferença ou diferenciais. Por exemplo, se a taxa futura instantânea para o vencimento τ , definido por $y(\tau)$, é dada pela solução de uma equação diferencial de segunda ordem com raízes reais e diferentes temos, segundo Nelson e Siegel (1987) temos:

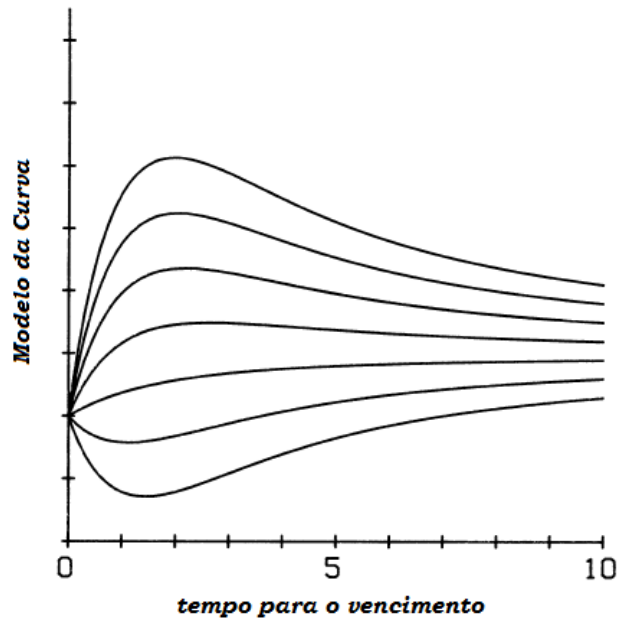
$$y(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \left(e^{-\frac{\tau}{m_1}} \right) + \beta_3 \left(e^{-\frac{\tau}{m_2}} \right) \quad (2.1)$$

Onde m_1 e m_2 são raízes diferentes, reais e constantes no tempo e β_1, β_2 e β_3 são parâmetros determinados pelas equações iniciais. As curvas de taxas futuras obtidas podem ser monotônica, em corcova ou na forma de S. Com o rendimento linear nos coeficientes, dado τ , e com o limite de $Y(\tau)$ quando τ assume grandes valores sendo β_1 e quando τ assume pequenos valores sendo $(\beta_1 + \beta_2)$, uma interpretação gráfica dos possíveis formatos da curva de juros é obtida fazendo $\tau = 1$, $\beta_1 = 1$ e $(\beta_1 + \beta_2) = 0$, onde

$$Y(\tau) = 1 + (1 - a) \left(\frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \right) - a(e^{-\tau}).$$

Nesse caso, a Figura 2.1 mostra que ao variarmos o parâmetro a (valores negativos e positivos), em valores iguais, obtemos as curvas monotônica, em corcova e na forma de S.

Figura 2.1 – Formatos da Curva de Juros de acordo com Vencimento



Em Diebold et ali (2006), $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ e λ são parâmetros, β_2 é o fator de declividade definido como “rendimento de longo prazo menos curto prazo” (inclinação, S_t ou “slope”), β_1 é o nível (L_t ou “level”) e β_3 representa a curvatura (C_t ou “curvature”), onde o movimento dinâmico de L_t, S_t e C_t segue um processo autoregressivo de primeira ordem:

$$\begin{pmatrix} L_t - \mu_L \\ S_t - \mu_S \\ C_t - \mu_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{t-1} - \mu_L \\ S_{t-1} - \mu_S \\ C_{t-1} - \mu_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_t(L) \\ \eta_t(S) \\ \eta_t(C) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Com $f_t = (L_t \ S_t \ C_t)'$, $\mu = (\mu_L \ \mu_S \ \mu_C)'$ e $t = 1, \dots, T$, em notação matricial:

$$(f_t - \mu) = A(f_{t-1} - \mu) + \eta_t \quad (2.3)$$

$$y_t = \Lambda f_t + \varepsilon_t \quad (2.4)$$

Diebold et ali (2006) avançaram ao relacionar $\hat{L}_t, \hat{S}_t, \hat{C}_t$ com variáveis da macroeconomia, fazendo a extensão do modelo sem variáveis macroeconômicas para um sistema do tipo $f_t = (L_t \ S_t \ C_t \ UC_t \ i_t^m \ \pi_t)'$. Esse novo sistema forma o modelo de estrutura a termo de taxas de juros com

as variáveis macroeconômicas de utilização da capacidade instalada (UC), taxa de juros de curtíssimo prazo (i_t^m) e taxa de inflação (π_t).

Neste artigo, a variável L_t corresponde à constante da regressão e a inflação mensurada pelo IPCA e o Superávit Primário (ao invés da utilização da capacidade instalada) foram escolhidas pela sua importância para na política econômica brasileira. A modelagem econométrica de não-linearidade permitiu identificar o Risco Brasil como a variável não observável responsável pelos movimentos na estrutura a termo de taxas de juros, ao contrário do usual que é utilizar as variáveis não-observáveis (S_t e C_t).

Adicionalmente, como este trabalho pretende explicar os efeitos do prêmio do spread do termo e não o efeito da estrutura a termo das taxas de juros torna-se necessário incluir a taxa de juros de curto prazo dentro da variável dependente:

$$y_t = L_t + S_t + C_t + UC_t + i_t^m + \pi_t + \varepsilon_t \quad (2.5)$$

$$SPR_t = L_t + RBrasil_t + UC_t + \pi_t + \varepsilon_t \quad (2.6)$$

Onde $RBrasil_t = S_t + C_t$ substitui as variáveis inclinação e curvatura e $SPR_t = i_t^n - i_t^m$ representa o spread de vencimento ou diferença entre a taxa de juros de longo prazo e a taxa de juros de curto prazo. Logo, o spread do termo pode ser representado pelo prêmio do spread do vencimento adicionado de um erro aleatório.

2.3 Hipótese das Expectativas e a Modelagem Econométrica para Não Linearidade

A teoria das expectativas é uma das teorias mais tradicionais, sua origem se deve à Fischer (1896) e indica que um investidor ao carregar um título por um longo tempo apropria-se de um rendimento que é uma média das taxas oscilantes daqueles que especularam nesse período. O argumento baseia-se na idéia de arbitragem, porque com oportunidades de arbitragem os tomadores teriam incentivos a tomar emprestado no curto prazo e emprestar no longo prazo (taxa de curto prazo menor que a taxa de longo prazo).

Como a hipótese das expectativas estabelece um relacionamento entre a taxa de longo prazo e a taxa de curto prazo, a média das taxas à vista futuras esperadas, então o spread (ou prêmio de risco do vencimento) pode ser considerado como a inclinação da estrutura a termo.

Dado alguns resultados inconclusivos de modelos de valor presente utilizados para testar a abordagem das expectativas, é comum o uso de modelos ampliados que incorporam outras variáveis e não somente as taxas de juros. Evans (1985 e 1987), por exemplo, estuda o efeito da política fiscal, particularmente de déficits, sobre as taxas de juros. No primeiro artigo, o autor encontra evidências de que déficits “grandes” afetam a taxa de juros de longo prazo e não a de curto prazo, alterando, portanto, a estrutura a termo. No segundo artigo, mostra que existem efeitos temporários associados aos anúncios de déficits sobre a taxa de juros de curto prazo.

Nas aplicações da estrutura a termo aos dados brasileiros, encontramos esse modelo ampliado. Por exemplo, Rocha, Moreira e Magalhães (2002) analisam a importância do endividamento externo no spread de títulos soberanos. Na mesma linha, Matsumura e Moreira (2005) estudam a importância das variáveis macroeconômicas na determinação dos spreads.

No caso da estrutura a termo de títulos no mercado interno, uma fonte de pesquisa é estudar, assim como Evans, o efeito da política fiscal sobre a estrutura a termo. Essa é uma das principais conclusões obtidas por Lima e Issler (2003, p.896):

“Há um campo aberto de pesquisa para testar teorias alternativas sobre a estrutura a termo no Brasil e, ..., examinar o papel do gerenciamento da dívida pública pode ser um dos caminhos a ser trilhado”.

Mesmo que modelos “aumentados” da estrutura a termo se constituam em importantes fontes de pesquisa, a relevância da não linearidade não deve ser subestimada. A série de *spread* apresentada em Lima e Issler (2003) mostra que é comum verificar choques abruptos seguidos de reduções graduais no *spread*.

Esse fato estilizado pode ser estudado a partir de modelos não lineares de série temporais, tais como os modelos de “*threshold*”. Num modelo “*threshold*”, a variável dependente é função das variáveis independentes de forma peculiar: a variável dependente é descrita por um processo linear até certo limite (ou “*threshold*”), a partir do qual a relação das variáveis se altera.

A idéia básica é ajustar os dados por modelos locais e o grande apelo é que podemos usar a intuição econômica para fazer esse ajuste. Nesse caso, o aspecto crítico do modelo é identificar a região onde temos a mudança na dinâmica do modelo, ou seja, identificar o \bar{x} e, além disso, quantas regiões ou \bar{x} 's existem.

A abordagem “*threshold*” baseia-se em Hansen (2000), que forneceu a possibilidade de dividir a amostra e utilizar uma função indicadora com variáveis observáveis para determinar a divisão da amostra em subgrupos. Esse modelo de regressão pode ser descrito como:

$$y_i = \theta_1' x_i + e_i, \quad q_i \leq \gamma \quad (2.7)$$

$$y_i = \theta_2' x_i + e_i, \quad q_i > \gamma \quad (2.8)$$

A variável “*threshold*” é definida por q_i e tem sua utilização atrelada a divisão da amostra em grupos que podem ser considerados como classes ou regimes de política econômica. A variável aleatória e_i corresponde ao erro da regressão.

Assim, temos uma amostra observada $\{y_i, x_i, q_i\}_{i=1}^n$, onde y_i e q_i são valores reais e x_i é um vetor de dimensão m . A variável “*threshold*” q_i pode ser um elemento de x_i e é assumida como apresentando uma distribuição contínua.

Pode-se definir uma variável *dummy* como sendo $d_i(\gamma) = I\{q_i \leq \gamma\}$, onde $I\{\cdot\}$ é a função indicadora e fazendo $x_i(\gamma) = x_i d_i(\gamma)$, as equações são resumidas ao modelo:

$$y_i = \theta_2' x_i + \delta_n' x_i(\gamma) + e_i \quad (2.9)$$

Onde $\delta_n = \theta_2 - \theta_1$ denota o efeito “*threshold*”.

Em seguida, torna-se necessário encontrar o valor de $\hat{\gamma}$ que minimiza $\delta_n(\gamma)$ dentro do conjunto Γ , isto é, $\hat{\gamma} = \arg \min_{\gamma \in \Gamma_n} \delta_n(\gamma)$, onde $\Gamma_n = [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}] \cap \{q_1, \dots, q_n\}$ e $\{q_1, \dots, q_n\}$ é a amostra de variáveis candidatas a “*threshold*”.

Conforme Teräsvirta (2007), os modelos não-lineares ganharam importância na macroeconomia e na modelagem financeira e podem ser divididos em duas grandes categorias. A primeira categoria contém os modelos que não possuem o modelo linear como caso especial. A segunda engloba vários modelos populares que possuem o modelo linear. Neste artigo, a discussão é modelar as séries temporais econômicas pelos modelos de regressão com transição suave (*Smooth Transition Regression – STR*).

O modelo STR é um modelo de regressão não-linear que pode ser visto como uma evolução do modelo de regressão de *switching*. Note que o modelo de regressão *switching*, com dois regimes e com variável *switching* observável, é um caso especial do modelo STR-padrão. Entretanto, o modelo de regressão *switching* com mais de dois regimes não possui o caso particular do modelo linear.

O modelo STR padrão é definido como:

$$y_t = \phi' z_t + \theta' z_t G(\gamma, c, s_t) + u_t = [\phi + \theta G(\gamma, c, s_t)]' z_t + u_t \quad (2.10)$$

Onde $t=1, \dots, T$, $z_t = (w_t', x_t')$ é um vetor de variáveis explicativas, $w_t' = (1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p})$ e um vetor de variáveis exógenas $x_t = (x_{1t}, \dots, x_{kt})'$. Assim, $\phi_t = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m)'$ e $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m)'$ são vetores de parâmetros $((m+1) \times 1)$ e $u_t \sim iid(0, \sigma^2)$.

A função de transição $G(\gamma, c, s_t)$ possui um limite s_t , é uma função contínua no espaço parâmetro para qualquer valor de s_t , γ é o parâmetro de inclinação e $c = (c_1, \dots, c_k)'$ é um vetor de parâmetros de localização, onde $c_1 \leq \dots \leq c_k$.

A última expressão da equação (10) indica que o modelo pode ser interpretado como um modelo linear com coeficientes estocásticos que variam no tempo $\phi + \theta G(\gamma, c, s_t)$. A função de transição é uma função logística geral do tipo:

$$G(\gamma, c, s_t) = \left(1 + \exp \left\{ -\gamma \prod_{k=1}^K (s_t - c_k) \right\} \right)^{-1}, \gamma > 0 \quad (2.11)$$

Onde $\gamma > 0$ é uma restrição de identificação. As equações (2.10) e (2.11), em conjunto, definem a função Logística STR (LSTR).

Modelo Linear x Não Linear (LSTR1 ou LSTR2)

Quando $\gamma = 0$, então a função de transição $G(\gamma, c, s_t) \equiv 1/2$ e o modelo STR da equação (6) é um modelo linear. Neste caso, a escolha para K está restrita a $K=1$ ou $K=2$. Para $K=1$, os parâmetros $\phi + \theta G(\gamma, c, s_t)$ mudam monotonicamente como função de s_t de ϕ até $\phi + \theta$. Para $K=2$, eles mudam simetricamente ao redor do ponto médio $(c_1 + c_2)/2$, onde a função logística atinge seu valor mínimo. O valor mínimo fica entre zero e $1/2$, atingindo zero quando $\gamma \rightarrow \infty$ e $1/2$ quando $c_1 = c_2$ e $\gamma < \infty$. O parâmetro γ controla a inclinação e c_1 e c_2 fornecem a localização da função de transição.

O modelo LSTR com $K=2$ (LSTR2) é apropriado em situações nas quais o comportamento dinâmico local do processo é similar para grandes e pequenos valores de s_t e diferente no meio. Quando $\gamma \rightarrow \infty$, o modelo LSTR2 apresenta o resultado do modelo de regressão *switching* com três regimes, onde os regimes exteriores são idênticos e o regime do meio é diferente.

Para a especificação do modelo temos duas fases. Na primeira fase, o ponto de partida é o modelo linear, que é submetido a testes de linearidade e, em seguida, seleciona-se o tipo de modelo STR (LSTR1 ou LSTR2) por intermédio do auxílio da teoria econômica. A linearidade é testada contra um modelo com variável de transição predeterminada, o teste pode ser repetido para cada variável constante do conjunto de variáveis de transição potenciais, subconjunto de z_t . O objetivo do teste é avaliar a linearidade contra diferentes direções no espaço de parâmetros (se não rejeitar a hipótese nula, aceita o modelo linear e não usa o modelo STR) e utilizar seus resultados para escolher o modelo (se a hipótese nula é rejeitada para ao menos um dos modelos, o modelo rejeitado que é medido pelo valor-p mais forte, é escolhido para ser o modelo STR a ser estimado).

O modelo STR tem a propriedade de ser identificado somente quando rejeita a hipótese nula de linearidade, $\gamma = 0$ (Estatística-t elevada, isto é, valor-p menor que 50%). O problema de identificação decorrente do teste de linearidade pode ser contornado aproximando a função de transição pela expansão de Taylor ao redor da hipótese nula $\gamma = 0$.

Assuma que a variável de transição s_t é um elemento em z_t e com $z_t = (1, \tilde{z}_t')$, onde \tilde{z}_t' é um vetor $(m \times 1)$. A aproximação gera a seguinte regressão auxiliar:

$$y_t = \beta_0' z_t + \sum_{j=1}^3 \beta_j' \tilde{z}_t s_t^j + u_t^*, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.12)$$

Onde $u_t^* = u_t + R_3(\gamma, c, s_t) \theta' z_t$ com o restante $R_3(\gamma, c, s_t)$. A hipótese nula é $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ porque cada β_j , $j = 1, 2, 3$, é da forma $\gamma \tilde{\beta}_j$, onde $\tilde{\beta}_j \neq 0$ é uma função de θ e c . Esta é a hipótese linear num modelo linear nos

parâmetros. Como $u_t^* = u_t$ sob a hipótese nula, a teoria de distribuição assintótica não é afetada se o teste LM é usado.

Quando a linearidade for rejeitada e uma variável de transição for selecionada, o próximo passo é escolher o tipo do modelo. A escolha de $K = 1$ ou $K = 2$ na equação (11), implica que o modelo é do tipo LSTR1 cujos parâmetros mudam monotonicamente como uma função da variável de transição (não necessitam mudar na mesma direção) e LSTR2 cujos parâmetros mudam simetricamente ao redor de $(c_1+c_2)/2$. A forma $K=1$ tem dois regimes extremos que são diferentes. Por exemplo, se a variável de transição é um indicador de ciclo de negócios, um regime será relacionado ao ciclo de expansão e o outro ao ciclo de contração. Entretanto, para $K=2$ o regime do meio é o regime diferente.

A escolha entre os dois modelos pode ser caracterizada na regressão (12). Os vetores de coeficientes β_j , $j = 1, 2, 3$, em (2.12) são funções dos parâmetros em (11). Para o caso especial de $c = 0$, pode ser mostrado que $\beta_2 = 0$ ocorre quando é um modelo LSTR1, enquanto que $\beta_1 = \beta_3 = 0$ ocorre quando o modelo é LSTR2. Quando $c \neq 0$, β_2 mais próximo do vetor nulo do que β_1 ou β_3 ocorre quando o modelo é um LSTR1 e vice-versa para o modelo LSTR2. A seqüência de teste é:

1. Testa a hipótese nula H_{04} : $\beta_3 = 0$ na equação (2.12).
2. Testa H_{03} : $\beta_2 = 0 \mid \beta_3 = 0$.
3. Testa H_{03} : $\beta_1 = 0 \mid \beta_2 = \beta_3 = 0$.

Se o teste de H_{03} gera a maior rejeição mensurada pelo valor-p, escolhe-se o modelo LSTR2. De outra forma, escolhe-se o modelo LSTR1. Todas as três hipóteses podem ser simultaneamente rejeitadas num nível de significância convencional de 0,05 ou 0,01 – pela contagem da maior rejeição.

Os parâmetros do modelo STR são estimados usando a máxima verossimilhança condicional. A log-verossimilhança é maximizada numericamente com derivadas numéricas para esse propósito. Encontrar bons valores iniciais para o algoritmo é importante. Assim, quando γ e c da função transição são fixos, o modelo STR é linear nos parâmetros. Isso sugere

construir um *grid*, estimar os parâmetros remanescentes ϕ e θ condicionais a (γ, c_1) ou (γ, c_1, c_2) para $K = 2$, e calcular a soma dos quadrados dos resíduos. O processo é repetido para N combinações desses parâmetros e selecionam-se os valores dos parâmetros que minimizam a soma dos quadrados dos resíduos.

2.4 Avaliação Empírica na Economia Brasileira

Este capítulo utiliza uma base de dados com informações mensais obtidas para o período de agosto de 1997 até setembro de 2011 (169 observações). As séries históricas das operações de Futuro Pré x DI foram obtidas junto à BM&F para montagem da estrutura a termo das taxas de juros⁴; o resultado primário foi obtido pelo conceito “abaixo da linha” com informações do Banco Central do Brasil e os valores são informados como percentual do PIB, dados dos últimos doze meses; a taxa de inflação medida pelo Índice Nacional de Preços ao Consumidor - Amplo (IPCA) para 12 meses foi obtida junto ao IBGE e a taxa Selic foi obtida junto ao Banco Central do Brasil; a taxa de câmbio real/dólar foi obtida pela PTAX800 junto ao Banco Central do Brasil. A evolução do EMBI+Brasil⁵ (*Emerging Markets Bond Index*) foi obtida junto à Bloomberg para criar a série de Risco Brasil e permite avaliar o risco de dependência do capital internacional da economia brasileira junto aos investidores internacionais. Adicionalmente, ressalta-se que as variáveis foram dessazonalizadas pela aplicação do filtro X12 e incluímos variáveis explicativas defasadas para ajuste de especificação do modelo.

Na Tabela 2.1 estão discriminadas as estatísticas descritivas da amostra utilizada para investigação empírica da economia brasileira. Essa tabela mostra uma inclinação positiva da estrutura a termo de juros, pois sinaliza um comportamento médio onde o spread para os vencimentos de 3 e 6 meses e 1, 2, 5 e 10 anos varia de 0,11% a 0,73%. Note que as taxas mínimas e máximas nesses vencimentos corresponderam a -7,61% e +8,37% ao ano, são verificadas no spread medido pela diferença entre a taxa de 10 anos e a taxa de 1 dia. O desvio-padrão da amostra indica significativa variância contida na amostra, que cresce para os termos mais longos. A variável SUP apresenta

⁴ O cálculo utilizado para obter os spreads de vencimento mensais que compõem a amostra, estão discriminados no Apêndice IV.

⁵ O Embi+Brasil mede a oscilação de preços dos títulos de um dia para o outro, sem avaliar opinião de especialistas. Sua unidade é o ponto base, ou seja, 500 pontos base implicam que os títulos brasileiros pagam 5% a mais do que os EUA, considerando pagamentos periódicos de juros, preço de compra, valor de resgate e tempo que falta até o prazo de vencimento das obrigações. É utilizado por investidores domésticos e internacionais.

um resultado médio de 1,90% de utilização da capacidade instalada da economia brasileira. O IPCA e o Risco Brasil, também, apresentaram significativa dispersão nos dados, variando de 1,64% a 17,24% ao ano e 142 a 2.395 pontos base, respectivamente.

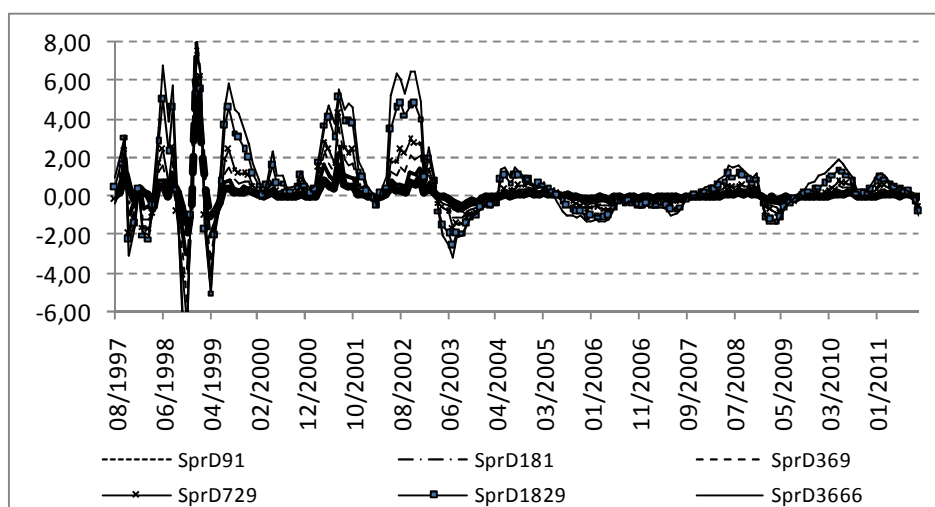
Tabela 2.1 – Estatística Descritiva da Amostra – 1997/08 a 2011/09

| Variável | Média | Mediana | Mínimo | Máximo | Desvio-padrão | C.V. | Assimetria | Curtose |
|----------------|---------|---------|--------|---------|---------------|--------|------------|---------|
| Rbrasil | 580 | 461 | 142 | 2395 | 418 | 1,388 | 1,528 | 3,097 |
| Selic | 16,077 | 16,578 | 7,132 | 40,014 | 5,917 | 2,717 | 1,393 | 2,710 |
| IPCA | 6,303 | 2,142 | 1,645 | 17,236 | 2,973 | 2,120 | 1,800 | 4,090 |
| II | 102,707 | 102,940 | 89,420 | 111,790 | 4,206 | 24,419 | -0,688 | 0,836 |
| SUP | 1,901 | 102,940 | -0,253 | 3,059 | 0,810 | 2,345 | -1,151 | 0,445 |
| Spread_3 meses | 0,110 | 0,030 | -1,865 | 5,989 | 0,617 | 0,178 | 6,116 | 54,740 |
| Spread_6 meses | 0,142 | 0,060 | -3,761 | 8,370 | 0,966 | 0,147 | 4,384 | 37,364 |
| Spread_1 ano | 0,185 | 0,108 | -5,473 | 8,330 | 1,223 | 0,151 | 1,928 | 17,201 |
| Spread_2 anos | 0,251 | 0,331 | -6,537 | 7,517 | 1,425 | 0,176 | 0,632 | 8,528 |
| Spread_5 anos | 0,506 | 0,499 | -7,608 | 5,489 | 1,938 | 0,261 | 0,047 | 2,631 |
| Spread_10 anos | 0,739 | 0,594 | -7,590 | 6,820 | 2,306 | 0,321 | 0,331 | 1,659 |

Fonte: Estatísticas apuradas pelos autores.

A Figura 2.2 mostra que as taxas de longo prazo ficaram bem superiores as taxas de curto prazo no período de 07/1999 a 09/1999, de 06/2001 a 03/2003, de 06/2004 a 10/2004, de 05/2008 a 09/2008 e de 11/2009 a 06/2010, enquanto que no restante da amostra, apesar de algumas diferenças, não se verificou diferença tão significativa.

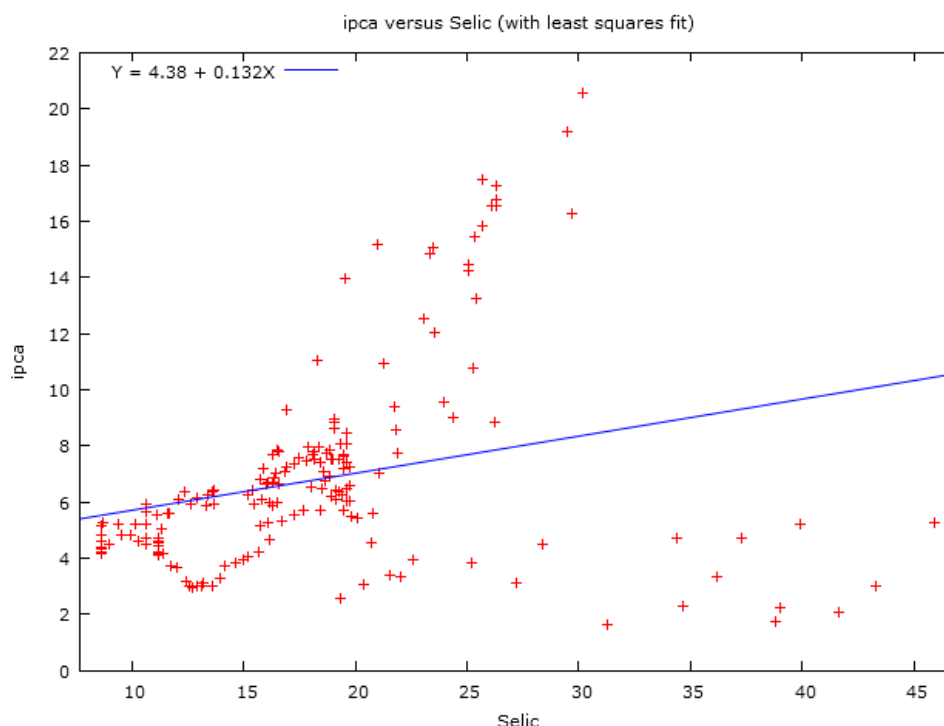
Figura 2.2 – IPCA, ETTJ e Spread do Termo



Por outro lado, a Figura 2 mostra ainda que a estrutura a termo das taxas de juros brasileiras nem sempre apresenta um comportamento positivamente inclinado, indicativo de prosperidade e crescimento econômico (spread com valores acima de zero). Um aspecto relevante a ser observado indica que, a princípio, existe um relacionamento inverso entre a taxa de inflação e o spread do termo. Adicionalmente, o período de 2002 a 2003 apresenta indícios de um movimento não linear nas variáveis analisadas.

A não linearidade é o aspecto importante a ser analisado, é indicativo de mudanças de regimes de condução econômica decorrentes de crises financeiras (ou outros choques) que precisam ser identificadas em seu período de início e fim, bem como, explicar durante essas crises como as variáveis macroeconômicas afetam o comportamento das taxas de juros do mercado financeiro, sinalizando uma maior ou menor força das políticas monetária e fiscal.

Figura 2.3 – Selic versus IPCA (ajuste por mínimos quadrados)

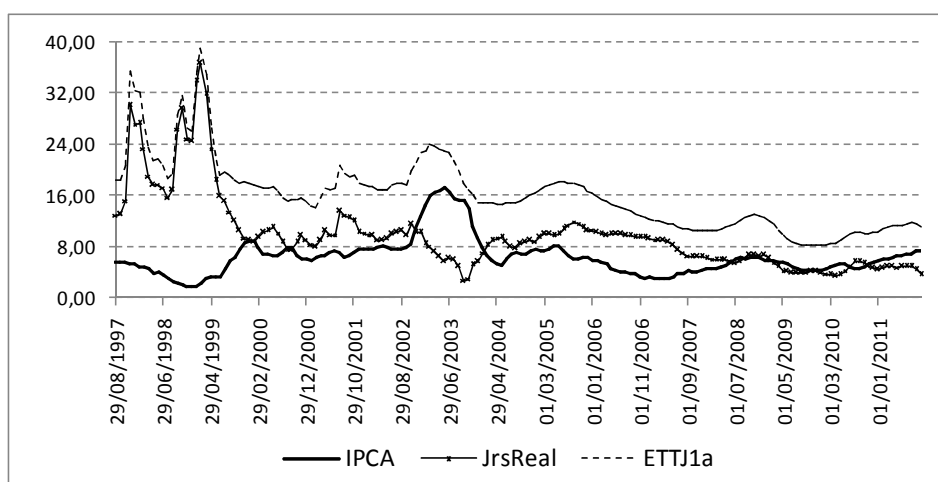


A constatação da relação entre a taxa de inflação e a taxa de política Selic é reforçada pela Figura 2.3, onde existem indícios de que a inflação medida pelo IPCA tem tido um papel relevante na definição na taxa de juros

básica da economia, para uma boa parte dos dados, onde os dados que não apresentam associação devem ser anteriores à introdução do regime de metas de inflação em fev/1999.

Para fornecer subsídios adicionais do motivo pelo qual o prêmio do vencimento diminui quando a inflação aumenta (ou aumenta, quando a inflação diminui), a Figura 2.4 mostra o efeito das taxas de juros real em relação ao termo de 1 ano.

Figura 2.4 – Taxa de Juros Real vs. Taxa de Juros de Longo Prazo vs. Inflação Esperada Focus



Fonte: Estrutura a termo da inflação esperada foi construída pelos autores com base nas informações divulgadas na pesquisa Focus, obtida junto ao Banco Central do Brasil.

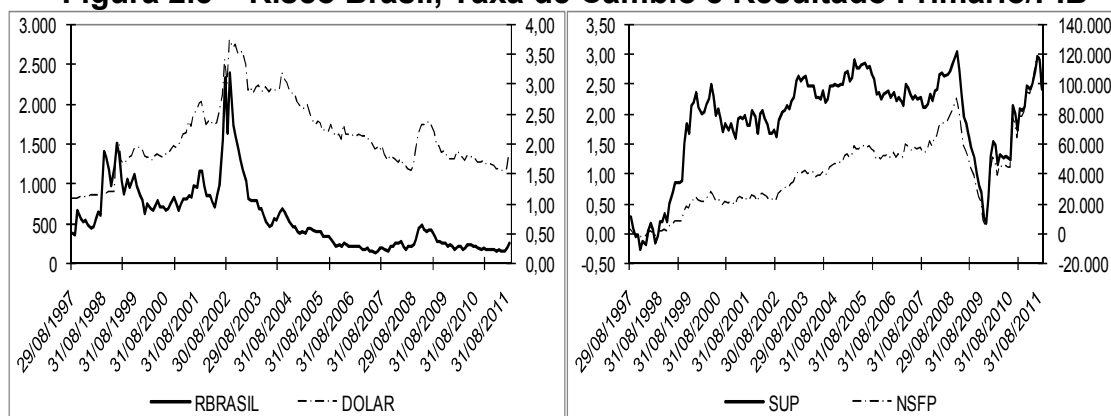
As análises das Figuras 2.2 e 2.4 fornecem subsídios de que o relacionamento negativo entre taxa de inflação e spread de vencimento, possivelmente, está associado com uma redução da taxa de juros real (ou taxa de juros natural) da economia brasileira.

Os modelos de “*threshold*” podem avaliar essa assimetria (não linearidade) mencionada entre elevações repentinas no prêmio de risco do termo e reduções graduais no mesmo, mas as aplicações de modelos “*threshold*”, apesar de abundantes em economia, têm o problema de que seu acesso é restrito. A importância dessa modelagem não deve ser menosprezada. Em modelos lineares, a hipótese de que o termo de erro pode ser aproximado pela distribuição gaussiana significa dizer que o gráfico tal como o gráfico da esquerda da Figura 2.2 (*forward* no tempo) deveria ter uma

aparência similar ao gráfico da mesma série refletida por um espelho (*backward* no tempo).

Outra variável macroeconômica relevante para a economia brasileira é a taxa de câmbio real/dólar e o risco Brasil. Conforme mostra a Figura 2.5, o período de 2002/2003 apresentou elevado crescimento do prêmio de Risco Brasil, mesmo período em que as taxas de juros de longo prazo da estrutura a termo de taxas de juros e o prêmio de risco do termo (ver Figura 2.2) apresentaram elevação significativa.

Figura 2.5 – Risco Brasil, Taxa de Câmbio e Resultado Primário/PIB



Fonte: Risco Brasil obtido junto à Bloomberg (EMBI+), Taxa de Câmbio e superávit primário pelo conceito “abaixo da linha” obtido junto ao Banco Central do Brasil.

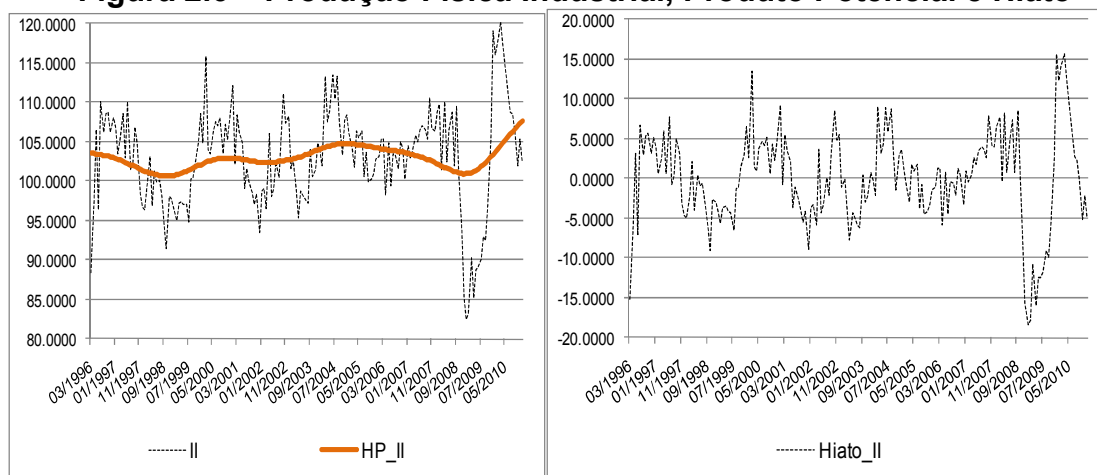
Para avaliar o impacto da política fiscal sobre o nível de taxas de juros da economia brasileira, o resultado primário, medido pelo conceito “abaixo da linha”⁶ do Banco Central do Brasil, mostra um crescente aumento do superávit em relação ao Produto Interno Bruto – PIB (nos últimos doze meses) até o final de 2008, conforme Figura 2.4. Entretanto, a partir de 2009 o superávit começou a diminuir e depois voltou a aumentar a partir de 2010.

A última variável macroeconômica acompanhada neste artigo representa o nível de atividade econômica real em relação ao nível potencial, mensurada pela diferença entre o nível de Produção Física Industrial

⁶ Essa apuração verifica a variação decorrente de juros, quando a dívida ao final de um período menos os juros pagos for maior que a existente no começo do período, constata-se déficit primário. No Brasil, esse resultado é calculado pelo Banco Central para todo o Setor Público (incluindo estados, municípios e estatais). As metodologias “acima” e “abaixo da Linha” são propostas pelo Fundo Monetário Internacional por meio dos Manuais de Estatísticas de Finanças Públicas.

(considerando a industrial em geral) e a aplicação do filtro Hodrick-Prescott – HP, conforme Figura 2.6. Note que a produção industrial brasileira foi afetada pela crise financeira internacional (crise subprime iniciada em agosto de 2007).

Figura 2.6 – Produção Física Industrial, Produto Potencial e Hiato



Fonte: Tabela 2295 referente à- Produção física industrial por tipo de índice e seções e atividades industriais, obtida junto ao IBGE. Produto Potencial obtido por intermédio da aplicação do filtro HP na série de produção física industrial.

Assim, percebe-se que a economia brasileira apresenta algumas características próprias que podem indicar não linearidades (mudança de regime), cujos reflexos podem estar alterando o comportamento da estrutura a termo de taxas de juros, bem como, o spread do termo. Além disso, os aumentos abruptos e as quedas lentas reforçam a necessidade da adoção de instrumental não linear, contemplando algumas variáveis macroeconômicas e analisando seus resultados esperados, contidos na literatura de política monetária e fiscal.

Spread do Termo e as Variáveis Macroeconômicas no Brasil

Esta seção estabelece o modelo econométrico a ser estimado e avalia os aspectos empíricos da macroeconomia, da estrutura a termo de taxas de juros e do spread de vencimento (ou do termo) verificados no Brasil.

Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) sugeriram que a incorporação das variáveis macroeconômicas na estimação da estrutura a termo de taxas de juros é importante para explicar os fatores de política econômica que estão afetando as oscilações das taxas de juros da economia. Nesse sentido, este trabalho pretende avaliar o impacto das variáveis macroeconômicas sobre o spread do termo da estrutura das taxas de juros brasileiras, obtidas no mercado financeiro.

Esta seção investiga, empiricamente no Brasil, se existe uma relação entre o spread do vencimento e algumas variáveis macroeconômicas que refletem a condução da política econômica de um país. As variáveis macroeconômicas escolhidas representam o resultado primário da economia, o comércio exterior, a aversão ao risco global em relação ao Brasil e a taxa de inflação. Por sua vez, os efeitos da estrutura a termo de taxas de juros são considerados como a taxa verificada nas operações no mercado futuro PRE x DI, sendo que para o primeiro ponto da curva (1 dia) utiliza-se o CDI e para os demais são utilizadas as taxas dos contratos de DI futuro (operações de compra e venda futura), em diversos prazos obtidos no arquivo de fechamento da BM&F-Bovespa.

Outras variáveis macroeconômicas foram testadas, mas não se mostraram significantes nessa modelagem não linear, dentre as quais destacamos a taxa de câmbio e a expectativa de inflação futura (pesquisa Focus do Banco Central).

O índice de preços ao consumidor foi obtido junto ao IBGE e apurado com valores mensais verificados nos últimos doze meses. O resultado primário conceito “abaixo da linha” em percentual do PIB dos últimos doze meses. A *proxy* para dependência do capital internacional é o nível de risco país Brasil medido pelo EMBI+ Brasil: quanto maior a cotação implica em maior percepção de risco pelo mercado financeiro internacional para aos rumos da economia brasileira.

Portanto, o objetivo deste artigo é explicar o comportamento do spread do termo, por intermédio dos impactos oriundos das variáveis macroeconômicas, associando os efeitos da condução da política econômica

com os movimentos no mercado financeiro, fornecendo subsídios para os formuladores de política econômica, em particular, o formulador da política monetária.

Inicialmente, para entender o comportamento da estrutura a termo de taxas de juros, é estimar o spread do termo, partindo da equação da taxa forward:

$$SPR_t^{n,m} = i_t^n - i_t^1 = L_t + RBrasil_t + SUP_t + Câmbio_t + \pi_t + \varepsilon_t \quad (2.13)$$

Após encontrar a série do spread de vencimento, o objetivo é explicá-lo em função da variável não-observável denominada das variáveis econômicas que representam a política monetária, o equilíbrio das contas públicas, o comércio exterior e a inclinação/curvatura dos juros no Brasil:

$$SPR_t^{n,m} = c_1 + c_2 Ipca_t + c_3 SUP_t + c_4 Câmbio_t + c_5 RBrasil_t + \varepsilon_t \quad (2.14)$$

Onde SPR é o spread do termo obtido pela diferença entre taxa de juros de longo prazo e taxa DI de um dia. A taxa de juros de longo prazo é obtida no mercado futuro Pré x DI negociado na BM&F e a taxa de juros de curto prazo é a taxa DI de um dia praticada no mercado financeiro. Ipca é a taxa de inflação do Índice de Preços ao Consumidor Amplo, SUP é o resultado primário medido pelo conceito “abaixo da linha” do Banco Central do Brasil, Câmbio é a taxa de câmbio real-dólar apurada pela PTAX800 e RBrasil é o risco país medido pelo EMBI+Brasil e o último termo é o erro de previsão do prêmio do spread do termo. O subscrito t representa o mês de apuração das observações e sobrescrito n,m representa o prazo referente ao prêmio de risco do termo do spread entre a taxa de longo prazo m e a taxa de curtíssimo prazo n observadas no mercado financeiro

O spread do vencimento pode apresentar comportamento não linear e, para isso, adotou-se o modelo STR para identificar a mudança dos regimes para, em seguida, estimar a regressão para cada uma das amostras com características diferentes. Entretanto, para aplicação do modelo “threshold” é necessário definir a variável de transição que explicaria a mudança entre regimes. Para escolher a variável de transição foram testadas as variáveis taxa de inflação, superávit primário, utilidade da capacidade instalada, nível de

produção física, risco Brasil e hiato do produto. A escolha do modelo obedeceu à minimização dos critérios de informação de Akaike (AIC), de Schwarz (SC) e de Hannah-Quinn (HQ).

A equação (2.14) foi estimada pelo modelo *Smooth Transition Regression* – STR, conforme Teräsvirta (2007). A escolha desse estimador econométrico centrou-se na desconfiança da presença de não linearidade nas variáveis da amostra. Em particular, reforçou-se a desconfiança pelo comportamento histórico da estrutura a termo de taxas de juros, do spread do termo, da inflação e do risco Brasil.

Nas estimações iniciais, foram encontrados problemas de autocorrelação e heterocedasticidade dos resíduos, motivo pelo qual foi adotado o procedimento de dessazonalizar as séries por intermédio da aplicação do filtro X12 e, também, o procedimento de incluir variáveis explicativas defasadas.

Alguns resultados são esperados na estimação. A variável do nível de preços ao consumidor (**IPCA**) tem como resultado esperado um efeito positivo sobre as taxas de juros da estrutura a termo. Entretanto, como estamos avaliando o spread do vencimento (taxa longa menos taxa curta), é importante verificar se é a taxa de curto prazo ou de longo prazo que apresentará o maior efeito positivo.

O resultado primário (**SUP**) tem como resultado esperado um efeito **negativo** sobre o spread do termo da estrutura das taxas de juros. Esse resultado é esperado porque o Banco Central do Brasil divulga o resultado primário conceito “abaixo da linha” para representar o montante de recursos obtido pelo governo que será deduzido da dívida líquida do setor público. Logo, quanto maior o superávit primário, menor será a dívida interna, implicando em menor percepção ao risco, indicativo de menor spread do termo das taxas de juros.

A taxa de câmbio (**Câmbio**) tem como resultado esperado um efeito **negativo** sobre o spread do termo da estrutura das taxas de juros. Esse resultado é esperado porque ao elevar a taxa de câmbio real/dólar espera-se um aumento da taxa de juros, sendo o aumento maior nos termos mais curtos.

Logo, com a taxa de curto prazo aumentando mais do que a de longo prazo, o spread reduz.

Outra variável de controle reflete a aversão ao risco global em relação à economia brasileira (**RBrasil**) medida pelo EMBI+ Brasil, cujo efeito esperado é **positivo**, isto é, quanto maior o risco país maior será o spread do termo exigido pelos investidores externos e domésticos, pois a precificação do risco do país é mensurada pela média ponderada dos títulos brasileiros negociados no exterior em relação aos títulos de mesma característica do governo dos Estados Unidos. Note que esse efeito decorre do fato que os títulos incluídos na apuração do risco país são de longo prazo e a precificação a mercado desses títulos já embute uma trajetória futura esperada para as duas economias e, em especial, do Brasil.

Após a indicação dos impactos esperados nas variáveis de controle da estimação do spread do termo, o próximo passo é estimar a equação (2.14) e aplicar os testes econométricos de correta especificação do modelo. O primeiro passo é testar existência de linearidade ou não no modelo estimado. A escolha do valor de K ($K = 1$ ou $K = 2$) sinalizou a utilização do modelo de regressão suave logístico LSTR1, conforme pode ser observado na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Teste de Linearidade contra STR

| Valor-p dos testes F para variável de transição RBRASIL(t): | | | | | |
|-------------------------------------------------------------|----------|----------|----------|----------|--------|
| Termo | F | F4 | F3 | F2 | Modelo |
| 3 meses | 3,80E-07 | 3,96E-03 | 5,47E+00 | 1,05E+01 | LSTR1 |
| 6 meses | 2,31E-11 | 4,41E-04 | 2,96E-01 | 5,75E-02 | LSTR1 |
| 1 ano | 1,17E-10 | 7,72E-04 | 3,92E-01 | 1,40E-01 | LSTR1 |
| 2 anos | 1,58E-08 | 7,44E-03 | 1,08E+00 | 9,39E-01 | LSTR1 |
| 5 anos | 3,16E-04 | 1,44E+00 | 1,85E+01 | 1,02E+01 | LSTR1 |
| 10 anos | 2,94E-03 | 1,73E+01 | 2,43E+01 | 6,26E+00 | LSTR1 |

Amostra: [1997 M9 2011 M9] T = 169

Ressalta-se, ainda, que foram avaliadas diversas defasagens no spread do termo e nas variáveis macroeconômicas, mas o modelo foi reduzido com a eliminação das variáveis redundantes, ficando somente o Spread, Ipca, Superávit, Dólar e RBrasil com uma defasagem no tempo.

Em seguida, foram feitas várias estimações da equação (2.14), uma para cada um dos spreads dos termos referentes da estrutura a termo de taxas de juros, quais sejam: 3 meses, 6 meses, 1 ano, 2 anos, 5 anos e 10 anos. Ao rodar essa estimacão com as variáveis explicativas citadas anteriormente, o critério de informao de Akaike (AIC) foi utilizado para escolher o modelo dentre os modelos candidatos, sendo o preferido aquele que minimizou o valor AIC. Para avaliar a qualidade da especificao do modelo, foram aplicados os testes de não autocorrelao de Godfrey e o teste de homocedasticidade denominado ARCH-LM, avaliando se os resíduos não rejeitam a hipótese nula e chegamos aos resultados da Tabela 2.3.

Tabela 2.3 – Testes de Especificao do Modelo

| TESTE DE ERROS NÃO AUTOCORRELACIONADOS | | | | | | |
|----------------------------------------|---------|---------|--------|--------|--------|---------|
| lag / valor-p | 3 meses | 6 meses | 1 ano | 2 anos | 5 anos | 10 anos |
| 1 | 0,2353 | 0,1283 | 0,1122 | 0,2335 | 0,0749 | 0,0281 |
| 2 | 0,5288 | 0,3084 | 0,0793 | 0,0338 | 0,0948 | 0,0486 |
| 3 | 0,0462 | 0,0280 | 0,0119 | 0,0092 | 0,0932 | 0,0405 |
| 8 | 0,0690 | 0,0995 | 0,0678 | 0,0600 | 0,2822 | 0,1195 |

| TESTE ARCH-LM | | | | | | |
|----------------------|---------|---------|--------|--------|--------|---------|
| lag / valor-p | 3 meses | 6 meses | 1 ano | 2 anos | 5 anos | 10 anos |
| valor-p (χ^2) | 0,4959 | 0,0504 | 0,0033 | 0,0007 | 0,0580 | 0,1672 |
| valor-p (F) | 0,4636 | 0,0351 | 0,0014 | 0,0002 | 0,0412 | 0,1378 |

A estimacão do spread de vencimento da estrutura a termo de taxas de juros corrobora a conclusão que Diebold, Rudebusch e Aruoba (2004) e constata-se que as variáveis macroeconômicas apresentam certo poder explicativo sobre a volatilidade do spread do termo das taxas de juros observadas no mercado financeiro brasileiro.

Uma das principais variáveis adotadas no regime de metas de inflao vigente no Brasil durante o período da amostra  o nível de preços da economia medido pelo **IPCA**. Nesse contexto, a autoridade monetária determina a taxa básica Selic em resposta aos choques e para atingir a estabilizao da economia. O coeficiente do IPCA  positivo na parte linear da estimacão, mostrando que o efeito da taxa de curtíssimo prazo, ou seja de 1 dia,  inferior ao efeito na taxa de longo prazo. Ressalta-se o maior efeito

positivo (maior impacto na taxa de longo prazo) nos termos de 6 meses, 1 ano, 2 anos e 5 anos. É importante destacar que os coeficientes apresentaram a significância estatística esperada, com exceção do termo de 10 anos onde o valor-p ficou em 0,13 – mas próximo do 0,10 que era esperado. Na parte não linear da estimação, observamos que os coeficientes apresentam o efeito inverso e todos os coeficientes estimados foram significantes, indicando que o efeito da inflação ocorre em maior grau nas taxas de curto prazo, isto é indicativo de relacionamento positivo entre inflação e spread do vencimento durante inversões na condução das condições econômicas.

Tabela 2.4 – Modelo STR Estimado

| Variáveis | 3 meses | | 6 meses | | 1 ano | | 2 anos | | 5 anos | | 10 anos | |
|-------------------------|------------|---------|----------|---------|----------|---------|----------|---------|----------|---------|----------|---------|
| | Estimativa | Valor-p | estimate | p-value | estimate | p-value | estimate | p-value | estimate | p-value | estimate | p-value |
| Parte Linear | | | | | | | | | | | | |
| Constante | -0,3925 | 0,2947 | -0,7370 | 0,0678 | -0,9613 | 0,0343 | -0,9936 | 0,0475 | -0,2323 | 0,6981 | 0,1239 | 0,8470 |
| Spread(t-1) | -0,3190 | 0,0000 | -0,2125 | 0,0026 | -0,0681 | 0,3419 | 0,0536 | 0,4675 | 0,2847 | 0,0002 | 0,3850 | 0,0000 |
| Ipca(t) | 0,3765 | 0,0479 | 0,4924 | 0,0154 | 0,6223 | 0,0063 | 0,7063 | 0,0051 | 0,5362 | 0,0851 | 0,4956 | 0,1365 |
| Sup(t) | -0,1384 | 0,7590 | 0,0306 | 0,9498 | 0,1588 | 0,7723 | 0,2505 | 0,6804 | 0,5366 | 0,4519 | 0,6191 | 0,4161 |
| RBrasil(t) | 0,0021 | 0,1744 | 0,0046 | 0,0053 | 0,0069 | 0,0002 | 0,0084 | 0,0000 | 0,0099 | 0,0001 | 0,0103 | 0,0001 |
| Dolar(t) | -1,5016 | 0,2134 | -1,8759 | 0,1482 | -1,8704 | 0,2005 | -1,6193 | 0,3158 | -1,4107 | 0,4637 | -1,0442 | 0,6100 |
| Ipca(t-1) | -0,3752 | 0,0386 | -0,4817 | 0,0130 | -0,6011 | 0,0058 | -0,6816 | 0,0047 | -0,5616 | 0,0575 | -0,5428 | 0,0865 |
| Sup(t-1) | -0,0014 | 0,9976 | -0,0937 | 0,8496 | -0,1727 | 0,7570 | -0,2469 | 0,6895 | -0,4698 | 0,5169 | -0,6066 | 0,4335 |
| RBrasil(t-1) | -0,0023 | 0,1082 | -0,0047 | 0,0022 | -0,0070 | 0,0001 | -0,0084 | 0,0000 | -0,0092 | 0,0001 | -0,0094 | 0,0002 |
| Dolar(t-1) | 1,8255 | 0,1186 | 2,2594 | 0,0728 | 2,2906 | 0,1065 | 2,0335 | 0,1944 | 1,4610 | 0,4311 | 1,0222 | 0,6041 |
| Parte Não Linear | | | | | | | | | | | | |
| Constante | 9,2638 | 0,0000 | 11,3392 | 0,0000 | 10,9398 | 0,0003 | 9,7904 | 0,0030 | 4,8774 | 0,1724 | 3,5311 | 0,3840 |
| Spread(t-1) | 0,5850 | 0,0004 | 0,4512 | 0,0029 | 0,3101 | 0,0623 | 0,1762 | 0,3614 | -0,2584 | 0,2498 | -0,4031 | 0,1069 |
| Ipca(t) | -3,2045 | 0,0017 | -4,3511 | 0,0012 | -5,1269 | 0,0023 | -5,2853 | 0,0056 | -5,5618 | 0,0000 | -5,9455 | 0,0000 |
| Sup(t) | -26,7692 | 0,0087 | -32,9896 | 0,0222 | -38,9276 | 0,0304 | -39,3966 | 0,0440 | -40,3836 | 0,0002 | -43,3575 | 0,0004 |
| RBrasil(t) | -0,0205 | 0,0000 | -0,0284 | 0,0000 | -0,0325 | 0,0000 | -0,0326 | 0,0000 | -0,0313 | 0,0000 | -0,0309 | 0,0000 |
| Dolar(t) | 27,9603 | 0,0000 | 35,9496 | 0,0001 | 39,5148 | 0,0009 | 37,9613 | 0,0038 | 35,7477 | 0,0000 | 35,4680 | 0,0000 |
| Ipca(t-1) | 1,5779 | 0,0823 | 2,2362 | 0,0579 | 2,6745 | 0,0763 | 2,6970 | 0,1179 | 3,2105 | 0,0056 | 3,3827 | 0,0060 |
| Sup(t-1) | 4,9465 | 0,2531 | 5,0061 | 0,3341 | 6,1623 | 0,3031 | 6,4718 | 0,3186 | 4,7349 | 0,3502 | 6,5796 | 0,2392 |
| RBrasil(t-1) | -0,0046 | 0,0966 | -0,0042 | 0,2069 | -0,0041 | 0,3066 | -0,0037 | 0,4019 | -0,0053 | 0,1347 | -0,0071 | 0,0636 |
| Dolar(t-1) | -0,6854 | 0,8025 | -0,4788 | 0,8803 | 2,0015 | 0,5870 | 4,3873 | 0,2763 | 9,9400 | 0,0103 | 13,0576 | 0,0029 |
| Gamma | 14,48 | 0,1087 | 15,75 | 0,0794 | 19,72 | 0,1780 | 23,52 | 0,3319 | 3819,32 | 0,9967 | 1080,18 | 0,8351 |
| C1 | 1204,01 | 0,0000 | 1213,10 | 0,0000 | 1220,02 | 0,0000 | 1219,65 | 0,0000 | 1164,96 | 0,0000 | 1164,91 | 0,0000 |
| Função Transição | LSTR1 | | LSTR1 | | LSTR1 | | LSTR1 | | LSTR1 | | LSTR1 | |
| AIC | 0,2428 | | 0,3936 | | 0,6402 | | 0,8449 | | 1,1619 | | 1,2847 | |
| SC | 0,6519 | | 0,8027 | | 1,0493 | | 1,2540 | | 1,5710 | | 1,6938 | |
| HQ | 0,4088 | | 0,5596 | | 0,8062 | | 1,0109 | | 1,3279 | | 1,4507 | |
| R2 ajustado | 0,4742 | | 0,5403 | | 0,5171 | | 0,4885 | | 0,5121 | | 0,5729 | |
| Variância resíduos | 1,1289 | | 1,3127 | | 1,6797 | | 2,0614 | | 2,8301 | | 3,1999 | |
| Desvio resíduos | 1,0625 | | 1,1457 | | 1,2960 | | 1,4357 | | 1,6823 | | 1,7888 | |

Modelo estimado: Spread = Constante + Spread(t-1) + Ipca + Superavit + Dolar + RBrasil + Ipca(t-1) + Superavit(t-1) + Dolar(t-1) + RBrasil(t-1)

Variável de Transição: RBrasil(t)

Amostra: setembro/1997 a setembro/2011

Na parte linear, o resultado primário (**SUP**) não apresentou o impacto negativo esperado na variável em nível, somente na variável defasada, mas ambas variáveis não apresentaram a significância estatística esperada. Na parte não linear, o efeito negativo foi observado com coeficientes significantes, indicativo que durante momentos de turbulência o controle do resultado primário é importante para explicar a estrutura a termo de taxas de juros, por

gerar credibilidade de que o montante de recursos obtido pelo governo terá o impacto benéfico de reduzir a dívida líquida do setor público. Logo, quanto maior o superávit primário, menor será a dívida interna, implicando em menor percepção ao risco, indicando menor spread do termo das taxas de juros.

Os coeficientes estimados para a taxa de câmbio (**Câmbio**) não apresentaram significância estatística na parte linear, seja na variável em nível como na variável defasada. Na parte não linear, a variável defasada também não foi significativa e o efeito da variável em nível foi inverso do esperado em períodos de normalidade econômica.

A análise da variável de transição e que representa a aversão ao risco global em relação à economia brasileira corrente, **RBrasil**, apresentou o efeito positivo esperado na variável em nível e na parte de linear, indicando que maior dependência do capital internacional implica em maior prêmio de risco do termo das taxas de juros do mercado financeiro brasileiro. Na parte não linear essa relação positiva da variável em nível não foi. Apesar de RBrasil ser fundamental para identificar a não linearidade das séries analisadas (períodos de choques na economia brasileira), a magnitude dos coeficientes obtidos tanto na parte linear e como na parte não linear, foi muito baixa e mostra que essa variável não é relevante para explicar as variações no prêmio de risco do termo das taxas de juros brasileiras.

Além dos efeitos observados nas variáveis explicativas defasadas, as mesmas e a taxa de câmbio ao serem introduzidas corrigiram problemas de autocorrelação e heterocedasticidade identificados anteriormente, além do que muitas delas mostraram sua importância com coeficientes estimados sendo significantes.

Portanto, mesmo num modelo de equilíbrio parcial que considera somente a direção das variáveis macroeconômicas influenciando o spread dos juros, a incorporação das variáveis macroeconômicas é relevante para explicar o spread do termo das taxas de juros e, conseqüentemente, a inclinação da estrutura a termo das taxas de juros brasileira.

2.5 Conclusão

O objetivo deste trabalho foi explicar os movimentos da inclinação da estrutura a termo de taxas de juros como função de variáveis macroeconômicas observáveis. Para tanto, utiliza um estimador econométrico não linear para encontrar a variável inclinação e curvatura das taxas de juros brasileiras.

As conclusões indicam que a política monetária tem um efeito significativo sobre o diferencial de entre as taxas de juros de curto e longo prazo. Em particular, verificou-se que o coeficiente do IPCA é positivo na parte linear da estimação, mostrando que o efeito da taxa de curto prazo é superior ao efeito na taxa de longo prazo. Logo, ao controlar a inflação via política monetária, o Banco Central estará controlando a expectativa do mercado financeiro quanto às taxas de juros de curto prazo.

O resultado primário é relevante nos momentos de instabilidade econômica (parte não linear da estimação), pois o efeito negativo com coeficientes significantes é indicativo que o superávit primário é importante para gerar a credibilidade de que o montante de recursos obtidos pelo governo será suficiente para controlar a dívida líquida e, com isso, menor será a percepção de risco do mercado financeiro, evidenciado pela redução do spread do termo das taxas de juros.

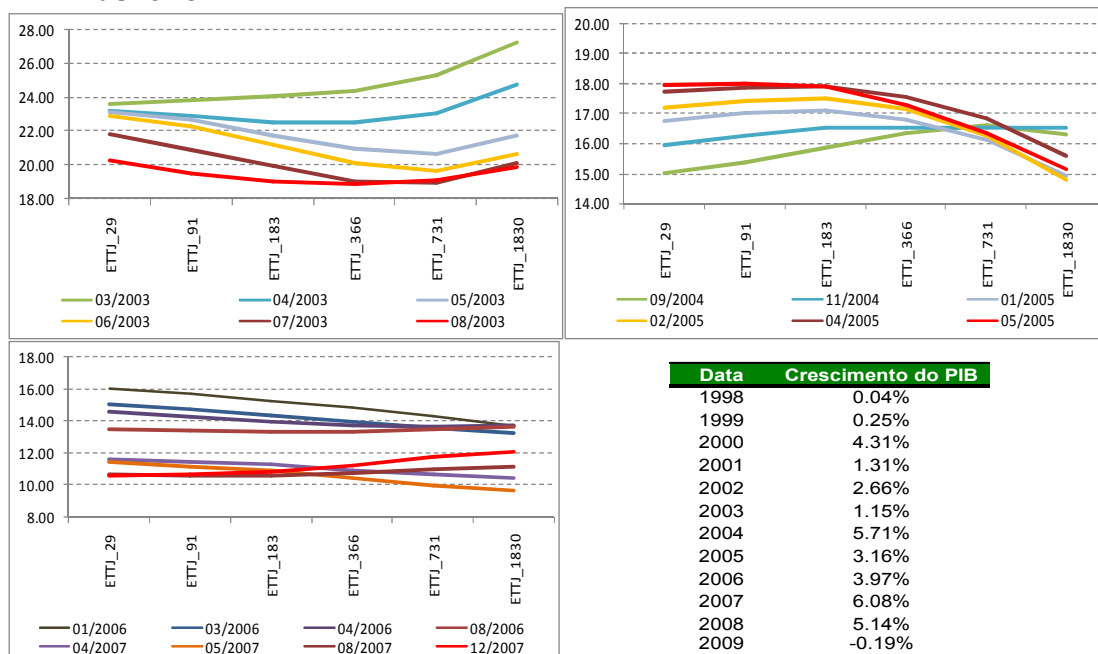
Adicionalmente, um dos resultados mais relevantes dessa pesquisa é encontrar a variável macroeconômica capaz de explicar as alterações na estrutura a termo de taxas de juros da economia brasileira (inclinação e curvatura), em particular, destaca-se sua relevância para explicar os momentos de crise. Na economia brasileira, e na amostra estudada, a variável que desempenha essa função é o Risco Brasil, mensurado pelo EMBI+ Brasil.

Com isso, foi possível observar a relevância do modelo de equilíbrio parcial que avalia numa única direção (variáveis macroeconômicas influenciando o spread dos juros), em explicar a inclinação da estrutura a termo das taxas de juros brasileira.

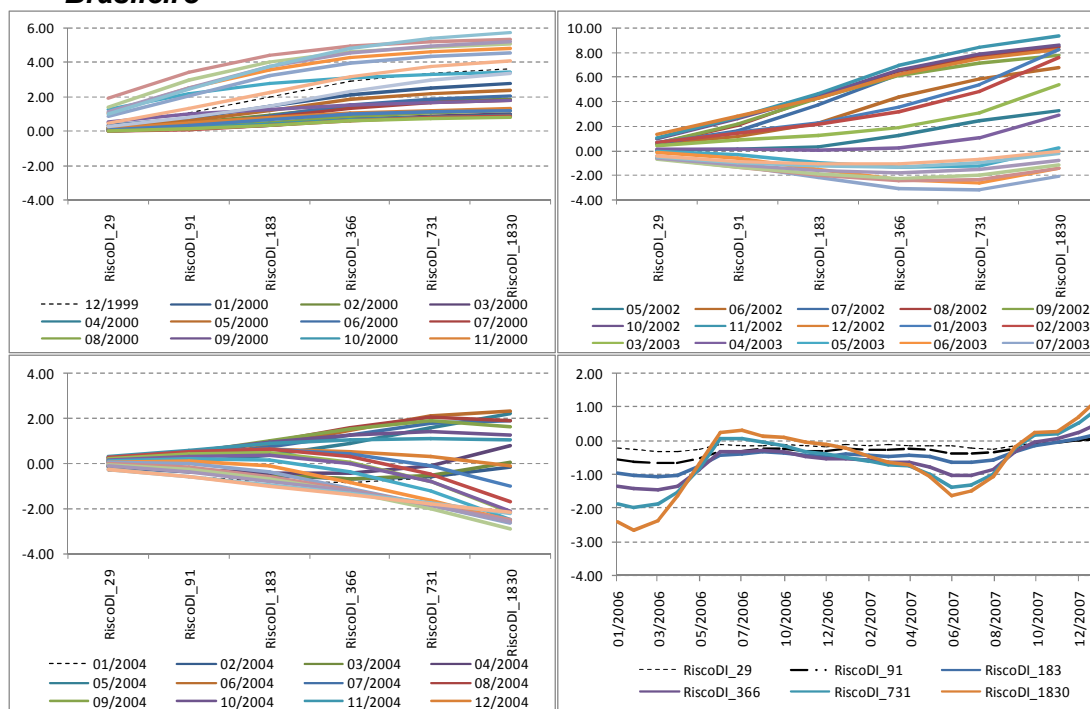
Ao final, destacamos a relevância de trabalhos futuros para avaliar o impacto das variáveis macroeconômicas e da percepção do mercado financeiro medida pela curva de juros, dentro de um instrumento de equilíbrio geral onde a causalidade ocorrerá nas duas direções, possibilitando avaliar as trajetórias de equilíbrio da economia e seus efeitos sobre a estrutura a termo de taxas de juros.

Apêndice 2.I – Evolução da Estrutura a termo e do prêmio do termo das taxas de juros do mercado financeiro brasileiro

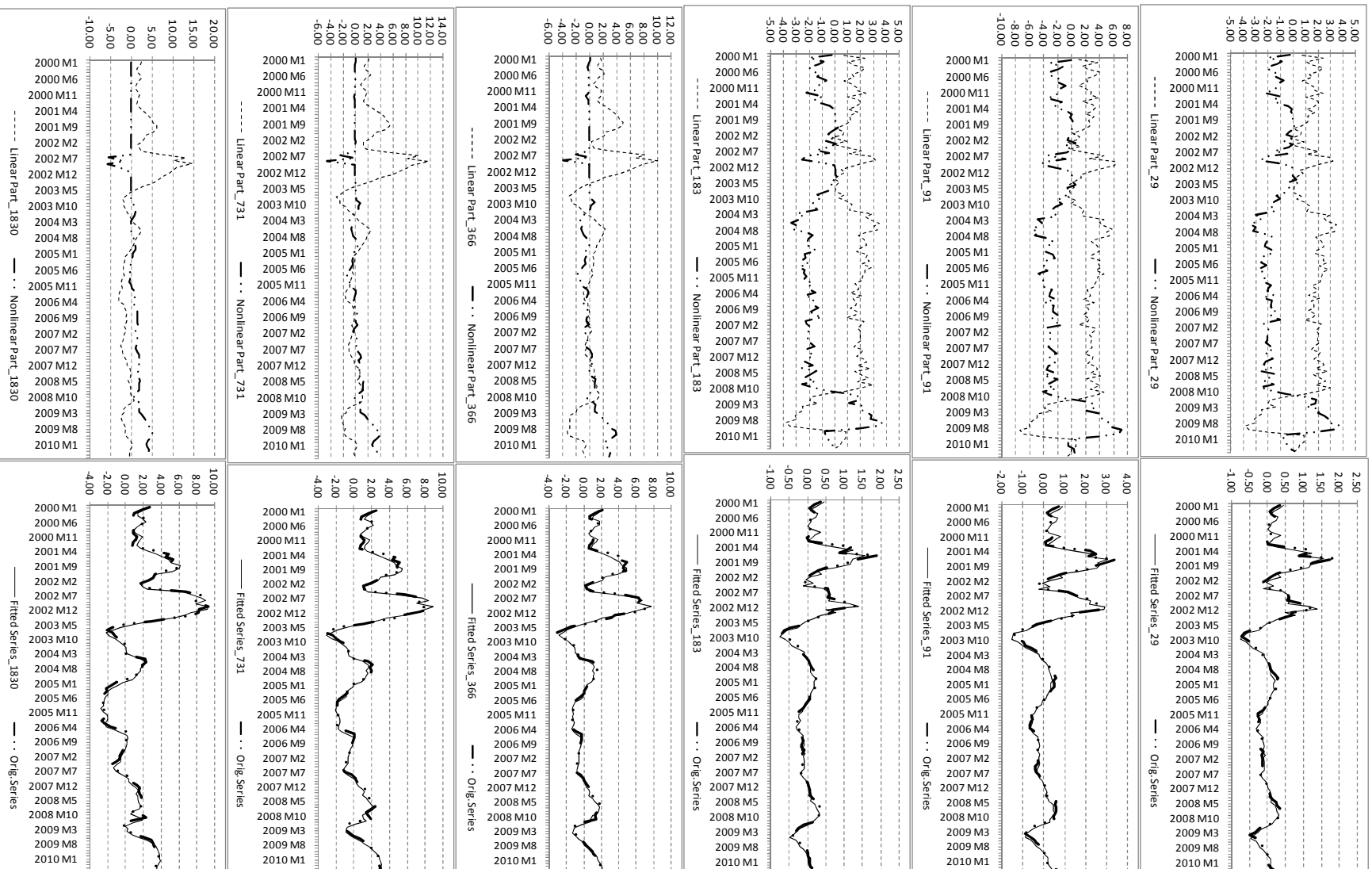
Inversões na Estrutura a Termo de Taxas de Juros do Mercado Financeiro Brasileiro



Prêmio do spread do Termo das Taxas de Juros do Mercado Financeiro Brasileiro



Apêndice 2.II – Séries: Linear, Não Linear, Ajustada e Original



Apêndice 2.III – Formação da Estrutura a Termo de Taxas de Juros

Os vértices que compõe a estrutura a termo de taxas de juros do mercado financeiro brasileiro formam um curva de taxas de juros denominada de curva prefixada sem caixa.

Essa curva é apurada diariamente e indica as taxas de juros para períodos futuros (vértices ou termos) num regime de capitalização composto, na base anual com 252 dias úteis.

Os vértices escolhidos para forma a curva de juros brasileira são: 1 dia, 1 mês, 3 meses, 6 meses, 1 ano, 2 anos, 5 anos e 10 anos.

O primeiro termo, 1 dia, utiliza a taxa CDI que reflete o mercado de Depósito Interfinanceiro. Ao passo que os demais vértices utilizam os contratos futuros Pré x DI negociados na BM&F – Bovespa

A obtenção dos vértices superiores a 1 dia ocorre utilizando a equação abaixo:

$$ETTJ_t = \left[\left(\frac{100.000}{PU_t} \right)^{\frac{252}{t}} \right] - 1$$

Onde:

$ETTJ_t$ = curva de juros, denominada prefixada sem caixa, para o prazo em dias úteis t , com regime de capitalização composta e para 252 dias úteis.

PU_t = PU de ajuste da BM&F – Bovespa, para o contrato futuro de Pré x DI negociado para t dias úteis.

t = corresponde ao prazo em dias úteis do contrato futuro de Pré x DI.

Alguns aspectos adicionais precisam ser esclarecidos para o entendimento de como foi formada a curva de juros. Inicialmente, note que quando o vencimento do contrato futuro cair um dia útil à frente, foi considerado a taxa diária do CDI.

Quando o vértice desejado (1 mês, 3 meses, etc) cair entre o vencimento de dois contratos futuros, será feita a interpolação da taxa embutida nesse período por intermédio da seguinte equação:

$$i_i = \left(F_j \left(\frac{F_k}{F_j} \right)^{\frac{t_i - t_j}{t_k - t_j}} \right)^{\frac{252}{t_i}} - 1$$

Onde:

i_i = é a taxa de juros anual obtida por intermédio da interpolação entre as duas taxas de juros obtidas para dois vencimentos diferentes de contratos futuros na BMF & Bovespa.

t_i = prazo em dias úteis a ser interpolado.

F_j = fator acumulado para o período de t_j .

F_k = fator acumulado para o período de t_k .

t_j = prazo em dias úteis referente ao vencimento de contrato anterior (vértice anterior).

t_k = prazo em dias úteis referente ao vencimento de contrato posterior (vértice posterior).

Note que o fator acumulado para o prazo em dias úteis t corresponde à $F_j = (ETTJ_t)^{\frac{1}{252}}$, e a ETTJ em dias úteis t está expressa por capitalização composta e considerando 252 dias úteis.

Quando ocorrer um feriado em São Paulo, sede da BMF & Bovespa, será efetuada a atualização das taxas do dia anterior pela taxa CDI de um dia

útil, ou seja, $ETTJ_t = \left[\left(\frac{100.000}{PU_{t-1} \times (1 + CDI)^{\frac{1}{252}}} \right)^{\frac{252}{t}} \right] - 1$.

Após a obtenção das taxas para cada um dos termos (1 dia, 1 mês, 3 meses, 6 meses, 1 ano, 2 anos, 5 anos e 10 anos) e para cada dia no período da amostra, torna-se necessário apurar a taxa dos termos para os meses que

compõe a amostra e que serão utilizadas para fazer a estimação em base mensal.

A obtenção da taxa mensal dos termos é feita trazendo a taxa anual para 252 dias úteis para um dia útil e acumulando para cada uma das taxas de cada dia útil que compõe o mês e, posteriormente, a taxa mensal é anualizada da seguinte forma:

$$ETTJ_t^{mensal} = \left[\left(1 + ETTJ_t^{1^o \text{ dia útil}}\right)^{\frac{1}{252}} \times \dots \times \left(1 + ETTJ_t^{n\text{-ésimo dia útil}}\right)^{\frac{1}{252}} \right]^{\frac{252}{\text{nr. de dias úteis do mês}}} - 1$$

Dessa forma, obtemos uma amostra com as taxas que compõe a estrutura a termo de taxas de juros para cada um dos meses que compõe a amostra sob a qual será executada a estimação econométrica.

CAPÍTULO 3

ESTRUTURA A TERMO DAS TAXAS DE JUROS NO MODELO DSGE: UMA ANÁLISE PARA O BRASIL

3.1 Introdução

Este artigo estima um modelo para estrutura a termo dos juros praticados no mercado financeiro brasileiro, inserido dentro do modelo dos novos keynesiano. Com a inclusão da curva de juros espera-se melhorar os parâmetros do modelo DSGE, em virtude da incorporação das variáveis que não são observáveis.

Ao estimar, simultaneamente, os efeitos macroeconômicos sobre a estrutura a termo de taxas de juros e o efeito do termo das taxas de juros sobre a macroeconomia, contribui com as pesquisas empíricas que avaliam a economia brasileira.

O artigo vai utilizar um modelo estrutural composto pela curva IS que representa a demanda agregada, pela curva de Phillips que indica a oferta agregada e pela regra de política monetária, segundo Bekaert, Cho e Moreno (2010).

A estrutura a termo de taxas de juros será incorporada pelo diferencial entre as taxas de longo e de curto prazo (spread do termo), onde a taxa de juros de curto prazo é a taxa que representa a condução da política monetária. A importância de estudar o *spread* do termo é a possibilidade de interpretar seus efeitos, pois ao incorporar o spread do termo podemos analisar as expectativas do mercado financeiro quanto à taxa de inflação e de juros contidas na estrutura a termo das taxas de juros.

O capítulo está estruturado em cinco seções. Além desta introdução, a seção 3.2 traz a revisão da literatura dos novos keynesianos e da estrutura a termo de juros; a seção 3.3 apresenta o modelo DSGE incorporando a curva de juros; a seção 3.4 faz a avaliação empírica sobre a economia brasileira e a seção 3.5 mostra as principais conclusões do trabalho.

Ao final espera-se discriminar o impacto da estrutura a termo de juros sobre os coeficientes da inflação, produto e taxa básica de juros do banco central, ao mesmo tempo, em que avalia o impacto dos choques macroeconômicos no comportamento dos fatores latentes nível, inclinação e curvatura, que descrevem a estrutura a termo de taxas de juros.

3.2 Macroeconomia Novo Keynesiana e Estrutura a Termo das Taxas de Juros

A teoria macroeconômica dos novos keynesianos é a teoria que fornece fundamentos microeconômicos num ambiente onde prevalece a hipótese de expectativas racionais.

A principal premissa dos novos keynesianos é que famílias e empresas possuem expectativas racionais, cujos preços e salários são "viscosos" e não permitem ajustes instantâneos às mudanças nas condições econômicas. Essa rigidez nos preços e as falhas de mercado implicam que uma das situações possíveis é a economia não atingir o pleno emprego.

Um aspecto relevante na teoria novo keynesiana é que a taxa natural de juros pode ser definida com a taxa encontrada em equilíbrio com expectativas racionais e preços flexíveis. Essa taxa natural possui três propriedades: (a) é a taxa de juros de um período, (b) é a taxa real de juros no equilíbrio período a período e (c) é uma taxa que está sujeita a variações de curto e longo prazo.

Dentro desses conceitos é introduzida a política monetária para manter a estabilização dos preços e a expansão monetária no curto prazo atua como resposta a choques inesperados que afetam a economia e diminuem o produto e tragam instabilidade para a taxa de inflação, conforme Woodford (2003) e Galí (2008).

Eventuais desvios na taxa de juro de curto prazo em relação aos movimentos na taxa de juro de longo prazo devem ser considerados como desvios da taxa natural de juros e seus reflexos devem ser incorporados ao modelo estrutural da economia para avaliar o impacto na magnitude do parâmetro estrutural e nas trajetórias das variáveis macroeconômicas.

Portanto, trata-se de um modelo parcimonioso que não descreve os efeitos da estrutura a termo dos juros. Com isso, vamos buscar uma interpretação fora da macroeconomia para entender os movimentos da curva

de juros, no caso, na literatura microeconômica, para explicar sua formação e derivar a curva de juros dentro do modelo novo keynesiano.

A literatura financeira de estrutura a termo de juros começa com a definição da existência de oportunidades de arbitragem e com o esclarecimento de sua importância para o equilíbrio de uma economia. Note que as oportunidades de arbitragem podem ser de dois tipos. A “*arbitragem do primeiro tipo*” ocorre quando existe uma estratégia de negociação e uma carteira de ativos, cujo valor corrente da carteira é igual a zero e o valor futuro da carteira na data final é não negativo com probabilidade unitária e estritamente positivo com probabilidade positiva. As “*oportunidades de arbitragem do segundo tipo*” existem quando uma estratégia de negociação é tal que o valor corrente da carteira é negativo com probabilidade unitária e o valor final não negativo.

A existência de uma oportunidade de arbitragem do primeiro tipo numa economia ocorre se, e somente se, existe uma oportunidade de arbitragem do primeiro tipo equivalente nessa economia, onde os preços são expressos em termos do valor de um ativo do mercado monetário que é localmente livre de risco.

Com as condições necessárias garantimos que não existem oportunidades de arbitragem na economia e, assim, sabemos que existe um único preço associado a qualquer direito contingente atingível que satisfaz essas condições. Com isso, a premissa de não existência de arbitragem centra-se na ocorrência de um ajuste perfeito da estrutura a termo num ponto do tempo. A opção de modelagem da estrutura de juros pela não arbitragem, considerando a abordagem na qual a curva de juros de curto prazo é exógena e obtida diretamente do mercado financeiro, foi apresentada por Hull e White (1990) e Heath, Jarrow e Morton (1992).

Por outro lado, a abordagem de equilíbrio com não arbitragem onde a taxa de juros de curto prazo é incorporada de forma endógena na modelagem da dinâmica da estrutura a termo das taxas de juros, no denominado modelo afim, foi apresentada nas contribuições de Merton (1973), Vasicek (1977) e Cox, Ingersoll e Ross (1985).

Merton (1973) deduz um conjunto de restrições sobre a precificação de opções para torná-la consistente com a teoria de precificação racional dos títulos, explicitando fórmulas de precificação das opções de compra e de venda que permitiram extensões na teoria de precificação dos passivos corporativos. A equação diferencial estocástica da taxa de juros de curto prazo instantânea de Merton é igual a $dr(t) = adt + gdW(t)$, onde a e g são constantes reais e $W = \{W(t), t \geq 0\}$ é o movimento browniano padrão. Merton indicou que a premissa de processo estocástico para a taxa de juros nominal de curto prazo é irreal, pois admite taxas de juros nominais com valores negativos.

Vasicek (1977) derivou uma forma geral da estrutura a termo de taxas de juros com as premissas de que a taxa spot segue um processo difusão, onde o preço do título descontado depende somente da taxa spot sobre seu termo e que o mercado é eficiente. Assim, mostrou por meio do argumento de arbitragem que a taxa esperada de retorno de qualquer título que excede a taxa spot é proporcional ao seu desvio padrão. A equação diferencial estocástica é da forma $dr(t) = f(r, t)dt + \rho(r, t)dW$, onde $W(t)$ é um processo de Wiener com variância incremental $d(t)$. As funções $f(r, t)$ e $\rho^2(r, t)$ representam o *drift* e a variância do processo $r(t)$. Espera-se que o preço do título descontado seja determinado unicamente pela taxa de juros spot sobre seu termo, isto é, pela avaliação corrente da trajetória da taxa spot em relação ao termo do título, sem assumir uma forma particular de comportamento.

Cox, Ingersoll e Ross (1985) apresentaram um modelo de precificação de ativo em equilíbrio geral para estudar a estrutura a termo das taxas de juros. Assim, as antecipações, aversão ao risco, alternativas de investimento e preferências sobre o momento temporal do consumo tem um papel importante na determinação do preço dos títulos. Esse modelo veio para solucionar o problema de crescimento ilimitado da taxa de juros do modelo de Merton e o problema da possibilidade de taxas de juros nominais negativas de Merton e Vasicek.

O modelo CIR é um modelo de equilíbrio geral, com uma descrição intertemporal completa de uma economia competitiva em tempo contínuo. A economia é composta por indivíduos idênticos que maximizam uma função

objetivo, representada pela função utilidade do tipo Von Neumann-Morgenstern composta por consumo e pelo estado da tecnologia. No equilíbrio da sociedade homogênea, a taxa de juros e a taxa de retorno esperada sobre os direitos contingentes precisam se ajustar até que toda riqueza seja investida num processo de produção. O investimento pode ser feito pelos indivíduos ou pelas firmas, o valor de equilíbrio é dado pela solução do problema com um único produto físico. A trajetória da variável-estado é dada por uma equação diferencial estocástica do tipo $dY(t) = [\xi Y + \zeta]dt + v\sqrt{Y}dW(t)$ e a dinâmica das taxas de juros pode ser expressa como $dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$.

O comportamento da taxa de juros que está implícito na estrutura CIR segue as seguintes propriedades: (a) as taxas de juros negativas são excluídas, (b) se a taxa de juros atinge o valor zero, em seguida será positiva, (c) a variância absoluta da taxa de juros aumenta quando a taxa de juros aumenta, e (d) existe uma distribuição no estado estacionário para a taxa de juros.

Em Ho e Lee (1986), a incerteza temporal contínua pode ser especificada por um espaço de probabilidade filtrado. Com a suposição de que o mercado de títulos é livre de arbitragem e completo. A escolha do processo de taxa de juros de curto prazo dado ocorre de forma arbitrária.

O modelo de Hull e White (1990) está para Vasicek, assim como o modelo de Ho e Lee está para Merton, isto é, trata do modelo de Vasicek com estrutura a termo inicial exógena. O processo estocástico da taxa de juros de curto prazo é $dr(t) = (a(t) - \kappa r(t))dt + g d\tilde{W}(t)$, onde $a(t)$ é uma função determinística, κ e g são constantes positivas e $\tilde{W}(t)$ é um processo Wiener unidimensional.

A relação do modelo de Hull e White para Vasicek e do modelo de Ho e Lee para Merton, pode ser observada ainda no modelo de Heath, Jarrow e Morton (1992), como extensão do modelo de Cox, Ingersoll e Ross. Note que o modelo HJM é um modelo geral, sobre o qual podemos obter diversos casos particulares, como o modelo de Ho e Lee, bem como, Hull e White. O modelo

HJM indica que a não existência de oportunidades de arbitragem leva a uma restrição sobre a taxa futura.

A inclusão da estrutura a termo no modelo novo keynesiano, assumindo a condição de não existência de arbitragem e a introdução de heterocedasticidade na forma de raiz quadrada vai permitir derivarmos o modelo CIR dentro do modelo DSGE.

Um dos trabalhos pioneiros que procurou interpretar os resultados macroeconômicos em conjunto com a curva de juros foi Bekaert, Cho e Moreno (2010), cujos resultados procuraremos analisar na economia brasileira.

3.3 Equilíbrio Geral Dinâmico Estocástico e a Estrutura a Termo

Nesta seção procuramos esclarecer como a estrutura a termo de taxas de juros insere-se dentro do modelo de equilíbrio geral dinâmico estocástico, seguindo o trabalho desenvolvido por Bekaert, Cho e Moreno (2010). Destacamos também a relevância de modelar o produto natural e a meta de inflação de forma endógena.

Note que o modelo macroeconômico novo keynesiano é representado por um sistema de equações simultâneas com três equações: a curva IS, a curva de Phillips e a regra de política monetária.

Esse sistema de equações fornece uma representação estrutural da economia dentro da visão novo keynesiana, mas não trata de forma explícita como a estrutura a termo de juros está inserida no modelo e com os movimentos da curva de juros e a atuação da autoridade monetária podem estar sincronizadas para responder a movimentos transitórios que podem afetar o nível natural de longo prazo da economia e, talvez, criando alguma persistência adicional.

Nessa busca de esclarecer a modelagem que inclui a curva de juros, vamos partir do problema do consumidor e utilizar as três equações padrão, em seguida incluiremos duas equações adicionais, a primeira equação vai determinar uma trajetória do produto natural de forma endógena e, com isso, vai afetar o hiato do produto. A segunda equação vai estabelecer a dinâmica da meta de inflação com base na estrutura a termo da taxa de inflação. A estrutura a termo de juros será obtida de forma indireta a partir do problema do consumidor, conforme determina o modelo CIR, donde partimos da precificação dos ativos para obter a formação da estrutura a termo de juros do mercado financeiro.

Vamos começar a explicação pelo problema do consumidor representativo, que é maximizador de sua utilidade dentro de sua restrição orçamentária. Note que a função utilidade representa a importância dada pelo consumidor para a aquisição de bens de consumo e para as horas dedicadas ao trabalho que serão remuneradas pelas firmas. Por outro lado, a restrição

orçamentária retrata a diferença entre os gastos desse consumidor com consumo e aquisição de títulos e os ganhos oriundos do rendimento dos títulos adquiridos no período anterior, a receita que ele obtém com a venda de seu trabalho e, também, com as transferências que pode receber.

O problema do consumidor é maximizar sua função de utilidade sujeita à restrição orçamentária:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } E_t \sum_{s=t}^{\infty} \psi^{s-t} U(C_s, N_s; F_x) &= E_t \sum_{s=t}^{\infty} \psi^{s-t} \left[\frac{F_s C_s^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_s^{1+\chi}}{1+\chi} \right] \\
 \text{s.a: } P_t C_t + d_t' Q_t &\leq W_t N_t + (D_t + Q_t)' d_{t-1} \\
 \lim_{T \rightarrow \infty} E_t \{B_T\} &\geq 0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Onde o fator de mudança ou de deslocamento da demanda agregada assume a forma $F_t = H_t G_t$, com H_t sendo o nível de hábito externo que é exógeno ao agente e depende do consumo passado e G_t representando o choque exógeno de demanda agregada que pode ser interpretado como choque de preferência sobre o consumo. A persistência endógena do produto é criada conforme Fuhrer (2000), isto é, $H_t = C_{t-1}^\eta$ e η mede o grau de dependência do hábito sobre o nível de consumo passado. Essa persistência do hábito tem uma relação linear com a persistência do hábito de Fuhrer (2000), que é da forma $\eta = h(\sigma - 1)$, onde h é o parâmetro de persistência do hábito em Fuhrer.

Ao resolver o problema acima, a condição de maximização de primeira ordem do consumidor termina numa equação que caracteriza seu comportamento maximizador. Na interpretação mais simples desse problema, segundo Galí (2008), temos:

$$Q_t = E_t \left\{ \beta \frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\} \tag{3.1}$$

Note que essa equação pode se interpretada como uma equação de precificação dos títulos mantidos pelas famílias para acumular riqueza. Essa equação mais simples possibilita reescrever obter dois componentes. Um *pay-off* representado por x_{t+1} e um fator de desconto responsável por trazer o valor

desse *pay-off* no tempo futuro para o tempo presente e que é representado por m_{t+1} , isto é $Q_t = E_t \{m_{t+1}x_{t+1}\}$.

Adicionalmente, observe que o fator de desconto $m_{t+1} = 1/E_t \{\beta(U_{c,t+1}/U_{c,t})\}$ indica a diferença entre o consumo presente em relação ao consumo futuro, em condições normais. Por outro lado, o *pay-off* $x_{t+1} = 1/\pi_{t+1} = P_t/P_{t+1}$ representa a relação entre os preços presentes e futuros.

Cochrane (2001) mostrou que essa equação representa o princípio fundamental da precificação de qualquer ativo contingente e indica que o preço de um ativo é formado pela expectativa do seu *pay-off* descontado por um fator de ajuste associado com a aversão ao risco. Em outras palavras, o preço de um ativo é formado pelo fator que representa a taxa marginal de substituição intertemporal do consumo, também conhecida como fator de desconto estocástico ou processo do núcleo de precificação (*pricing kernel process*).

Esse fator de desconto estocástico é o elo que permite a incorporação da estrutura a termo de taxas de juros no modelo novo keynesiano padrão.

Agora, vamos começar a discriminar as equações do modelo estrutural que será estimado neste capítulo. Essa análise específica adota a formação de hábito externo no consumo, inserido dentro da função utilidade do consumidor. Essa formação de hábito cria uma persistência no produto, fazendo com que o produto precise de um tempo maior para retornar a seu nível natural, após sofrer um choque. Vamos considerar a função utilidade do tipo Lucas (1978):

$$U(C_t, N_t; F_t) = \left[(F_t C_t^{1-\sigma} - 1) / (1-\sigma) \right] - \left[N_t^{1+\chi} / 1 + \chi \right] \quad (3.2)$$

Note que σ é o coeficiente de aversão ao risco ou elasticidade intertemporal inversa do consumo, χ é a elasticidade intertemporal inversa da oferta de trabalho, F_t é o fator de mudança da demanda agregada com componente de hábito externo e outro de choque exógeno na demanda agregada.

Como premissa, o deslocamento da curva de demanda agregada pode assumir a forma de $F_t = H_t G_t$, com H_t representando o nível de hábito externo exógeno ao consumidor e G_t um choque exógeno na demanda

agregada que pode representar, por exemplo, um choque de preferência sobre o consumo. Definindo $H_t = C_{t-1}^\eta$ temos que η representa o grau de dependência do hábito em relação ao consumo passado.

Como discriminado no Apêndice 3.I, a resolução apropriada do problema do consumidor mostra $M_{t+1} = \psi(Y_{t+1}^{-\sigma} / Y_t^{-\sigma})(F_{t+1} / F_t)(P_t / P_{t+1})$ é o processo que representa o núcleo de precificação da forma, obtido a partir da primeira equação do sistema estrutural da economia, a curva IS.

Depois de resolvido o problema do consumidor, devemos entender o comportamento das firmas para obtermos a representação entre a inflação e o hiato do produto. Os detalhes da análise do problema de maximização do lucro das firmas está discriminada no Apêndice 3.II.

Para maximizar seu lucro diante de um ambiente de competição monopolística no mercado de bens intermediários, seguimos Blanchard e Kyiotaki (1987) onde uma fração das firmas reajustamo o preço de seu produto seguindo Calvo (1983). Ao encontrarmos o ponto de máximo lucro, obtermos a segunda equação estrutural, a curva de Phillips (AS).

A terceira equação é a tradicional regra de política monetária do Banco Central de Clarida, Galí e Gertler (1999), onde a autoridade de monetária estabelece a taxa de juros de curto prazo suavizando as taxas de juros. Os detalhes dessa especificação estão discriminadas no apêndice 3.III.

Uma diferença em relação ao modelo padrão, dos novos keynesianos, é a presença da equação para definir a dinâmica do produto natural, de forma endógena. Para esclarecer essa modelagem, o Apêndice 3.II discrimina que a obtenção dessa curva a partir da função de produção, ocorre com a adoção do custo médio e da presença de markup no mercado do produtor.

Outra diferença deste modelo é a inclusão da equação que modela a postura da autoridade monetária, cujo comportamento é estabelecer a meta de inflação ideal da economia com base nas expectativas do setor privado para a inflação no longo prazo. Nesse modelo o valor esperado da taxa de inflação é obtido pela média ponderada das taxas de inflação futuras e da meta, esta última deve ser definida para ficar próxima da inflação futura e para suavizar as

mudanças das metas definidas anteriormente. Para esclarecer como isso ocorre, pode-se acompanhar a demonstração do apêndice 3.IV.

Com isso, o modelo estrutural da economia brasileira será composto por um sistema com cinco equações simultâneas que contém três variáveis observáveis (inflação, produto e taxa nominal de juros) e duas variáveis que não são observáveis (produto natural e meta de inflação):

$$\begin{aligned}
 y_t &= \alpha_{IS} + \mu E_t y_{t+1} + (1 - \mu) y_{t-1} - \phi (i_t - E_t \pi_{t+1}) + \varepsilon_{IS,t} \\
 \pi_t &= \delta E_t \pi_{t+1} + (1 - \delta) \pi_{t-1} - \kappa (y_t - y_t^n) + \varepsilon_{AS,t} \\
 i_t &= \alpha_{MP} + \rho i_{t-1} + (1 - \rho) [\bar{i}_t + \beta (E_t \pi_{t+1} - \pi_t^*) + \gamma (y_t - y_t^n)] + \varepsilon_{MP,t} \\
 y_t^n &= \alpha_{y^n} + \lambda y_{t-1}^n + \varepsilon_{y^n,t} \\
 \pi_t^* &= \varphi_1 E_t \pi_{t+1}^* + \varphi_2 \pi_{t-1}^* + \varphi_3 \pi_t + \varepsilon_{\pi^*,t}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

O sistema de equações acima, que caracteriza o modelo estrutural da economia, não permite observar de forma explícita o efeito da estrutura a termo das taxas de juros. Entretanto, conforme Cox, Ingersoll e Ross (1985), é possível obter a curva de juros a partir do problema de maximização do consumidor.

Estrutura a Termo de Taxas de Juros: precificação e spread

Para seguir os passos do modelo CIR, é necessário manter a premissa da inexistência de oportunidades de arbitragem livre de risco e saber que os agentes comportam-se como se fossem neutros ao risco, existindo ativos com diferentes perfis de risco.

Do problema de maximização do consumidor encontramos a oferta de trabalho ao fazer $\frac{\partial L}{\partial N_t} = 0$ e obter a equação $\frac{W_t}{P_t} = \frac{N_t^\zeta}{C_t^{1-\sigma}} \frac{1}{F_s}$. Entretanto, para descrever a curva de juros, é necessário maximizar com respeito ao vetor de

pesos que compõe a carteira de ativos das famílias, fazendo $\frac{\partial L}{\partial d_t} = 0$ para

$$\text{atingir a equação } M_{t+1} = \psi \frac{Y_{t+1}^{-\sigma} F_{t+1}}{Y_t^{-\sigma} F_t} \frac{P_t}{P_{t+1}}.$$

As premissas dos mercados completos e a ausência de oportunidades de arbitragem implicam que o preço de qualquer título sem cupom é $PT_{n,t} = E_t M_{t+1} PT_{n-1,t+1}$, com $M_{t+1} = \psi \left(\frac{Y_{t+1}^{-\sigma}}{Y_t^{-\sigma}} \right) \left(\frac{F_{t+1}}{F_t} \right) \left(\frac{P_t}{P_{t+1}} \right)$, decorrente da condição de primeira ordem do problema de maximização do consumidor.

Como demonstrado no Apêndice 4.VI, percebemos que o preço no período t de um título com vencimento para $t+n$ é igual a $pt_{n,t} = a_n + b_n' x_t$ e a equação de precificação depende das principais variáveis de condução das políticas macroeconômicas, pois $x_t = [\pi_t \quad y_t \quad i_t \quad y_t^n \quad \pi_t^*]'$.

A condição de não existência de arbitragem é mantida por construção e o modelo log-normal mostra que a precificação do título assume a forma de $E_t[m_{t+1}] + \frac{1}{2} Var_t[m_{t+1}] = -i_t$ ou $m_{t+1} = -i_t - \frac{1}{2} \Lambda_t' D \Lambda_t - \Lambda_t' \varepsilon_{t+1}$, com $\Lambda_t = \Lambda_0 + \Lambda_1 x_t$ e $\Lambda_t = [1 \quad \sigma \quad 0 \quad 0 \quad 0] \Gamma - [0 \quad (\sigma + \eta) \quad 0 \quad 0 \quad 0]$.

Ao introduzir na heterocedasticidade na forma de raiz quadrada é possível associar o modelo DSGE com o modelo da curva de juros desenvolvido por Cox, Ingersoll e Ross (1985).

Note que o vetor Λ_t é formado por dois parâmetros estruturais do modelo DSGE, σ e η que correspondem aos fatores de aversão ao risco e de persistência do hábito externo de consumo, ambos encontramos no procedimento de obtenção da curva IS.

Após encontrar o valor dos títulos de longo prazo, a apuração do *spread* da estrutura a termo de taxas de juros ocorre por definição. Em outras palavras, como o *spread* representa a inclinação da curva, basta obter a diferença entre a taxa de retorno de um título de longo prazo com vencimento para n períodos à frente e a taxa de juros de curto prazo de 1 dia, isto é, $sp_{n,t} = \log(RT_{n,t}) - \log(RT_{1,t})$.

Agora, de posse do valor do *spread*, temos que incluir a informação da inclinação da estrutura a termo de taxas de juros dentro do modelo estrutural da economia e a dinâmica conjunta da curva de juros e do modelo DSGE pode ser representada pelo seguinte sistema de equações simultâneas:

$$\begin{aligned} x_t &= c + \Omega x_{t-1} + \Gamma \varepsilon_t \\ z_t &= A_z + B_z x_t \end{aligned} \tag{3.4}$$

Onde $x_t = [\pi_t \quad y_t \quad i_t \quad y_t^n \quad \pi_t^*]$ e $z_t = [\pi_t \quad y_t \quad i_t \quad sp_{n1,t} \quad sp_{n2,t}]$. Note que n_1 e n_2 referem-se a dois diferentes vencimentos para os rendimentos dos títulos de longo prazo, ou seja, aos dois *spreads* dos termos de longo prazo.

Logo, ao resolver o segundo sistema para $x_t = B_z^{-1}(z_t - A_z)$, encontraremos um modelo de VAR $z_t = a_z + \Omega_z z_{t-1} + \Gamma_z \varepsilon_t$, que deve ser estimado.

3.4 Avaliação Empírica da Economia Brasileira

A base de dados utilizada na avaliação empírica da economia brasileira corresponde aos valores trimestrais, obtidos entre os meses de março de 1996 e dezembro de 2010. O produto da economia brasileira mensurado pelo Produto Interno Bruto a Preços de Mercado, a Produção Física industrial e a taxa de inflação medida pelo Índice Nacional de Preços ao Consumidor - Amplo (IPCA) para 12 meses, foram obtidos junto ao Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, a taxa de política monetária e as metas de inflação foram consideradas como sendo a taxa média Selic e as metas de inflação constantes no relatório de inflação do Banco Central do Brasil.

A estrutura a termo de taxas de juros da economia brasileira foi construída com base nas séries históricas da taxa CDI diária e das operações no mercado de futuros Pré x DI, cujas bases estão referendadas pelas informações disponibilizadas pela BM&F-Bovespa. A taxa de um dia corresponde à taxa CDI e os vencimentos futuros avaliados correspondem aos vértices de seis meses e um ano calculados com base no PU dos futuros pré x DI. Também analisamos a evolução temporal dos termos de três e seis meses, bem como, um, dois, cinco e dez anos.

As estatísticas descritivas e a correlação, para o período de maio/1996 a dezembro/2010, estão discriminadas na tabela 3.1. O valor médio da estrutura a termo de taxas de juros do mercado financeiro apresenta uma curva de juros levemente inclinada de forma positiva, passando de 17,04% para três meses a 18,20% para dez anos – diferença entre 10 anos e 6 meses de 1,16% que representa 6% da taxa de 10 anos. Em particular, pode-se observar que a volatilidade medida pelo desvio padrão pouco aumenta com o aumento no termo da estrutura de juros. Adicionalmente, percebe-se que a correlação entre a taxa de inflação e os vértices da estrutura a termo de juros praticada no mercado financeiro é pouco significativa, entre 0,31 e 0,37. Por outro lado, a correlação entre a taxa Selic e as taxas da estrutura a termo de juros são expressivas, ficando entre 0,96 e 0,85. Por último, a correlação entre Selic e o

IPCA apresenta diferenças dependendo do período da amostra avaliado: de mai/1996 a dez/2010 ficou em 0,26; de fev/1999 a dez/2010 ficou em 0,45 e de jan/2000 a dez/2010 ficou em 0,81. Esse comportamento entre a inflação e a taxa básica de juros mostra a mudança da postura de atuação política monetária por parte do Banco Central do Brasil que, a partir de fevereiro de 1999, adotou o sistema de metas de inflação centrado na taxa de inflação medida pelo IPCA.

Tabela 3.1 – Estatística Descritiva e Correlação – 1996 a 2010

| | Média | Mediana | Mínimo | Máximo | Desvio-pad | C.V. | Assimetria | Curtose |
|---------|---------|---------|--------|---------|------------|-------|------------|---------|
| ipca | 6.836 | 6.060 | 1.645 | 20.550 | 3.613 | 0.529 | 1.612 | 2.529 |
| II | 102.920 | 103.430 | 82.530 | 120.170 | 6.472 | 0.063 | -0.377 | 0.934 |
| Selic | 18.549 | 18.071 | 8.650 | 45.902 | 7.228 | 0.390 | 1.291 | 2.119 |
| ETTJ3m | 17.047 | 16.923 | 8.266 | 39.015 | 5.888 | 0.345 | 0.918 | 1.225 |
| ETTJ6m | 17.290 | 17.013 | 8.337 | 39.093 | 5.916 | 0.342 | 0.795 | 0.834 |
| ETTJ1a | 17.585 | 16.723 | 8.728 | 39.132 | 5.945 | 0.338 | 0.749 | 0.531 |
| ETTJ2a | 17.874 | 16.562 | 9.906 | 39.151 | 5.921 | 0.331 | 0.779 | 0.381 |
| ETTJ5a | 18.102 | 16.574 | 9.696 | 39.163 | 5.998 | 0.331 | 0.804 | 0.224 |
| ETTJ10a | 18.208 | 16.608 | 9.601 | 39.167 | 6.084 | 0.334 | 0.821 | 0.189 |

| Matriz de Correlação | | | | | | | | | |
|----------------------|------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | ipca | II | Selic | ETTJ3m | ETTJ6m | ETTJ1a | ETTJ2a | ETTJ5a | ETTJ10a |
| ipca | 1 | -0.0176 | 0.2648 | 0.3133 | 0.3173 | 0.3191 | 0.3279 | 0.3557 | 0.3742 |
| II | | 1 | -0.2948 | -0.2548 | -0.2290 | -0.2062 | -0.2067 | -0.2294 | -0.2450 |
| Selic | | | 1 | 0.9636 | 0.9396 | 0.9118 | 0.8895 | 0.8707 | 0.8596 |
| ETTJ3m | | | | 1 | 0.9944 | 0.9794 | 0.9627 | 0.9440 | 0.9313 |
| ETTJ6m | | | | | 1 | 0.9947 | 0.9831 | 0.9656 | 0.9522 |
| ETTJ1a | | | | | | 1 | 0.9959 | 0.9823 | 0.9695 |
| ETTJ2a | | | | | | | 1 | 0.9940 | 0.9846 |
| ETTJ5a | | | | | | | | 1 | 0.9977 |
| ETTJ10a | | | | | | | | | 1 |

Obs: Coeficientes de Correlação utilizando observações de 1996:03 a 2010:12, 5% de valor crítico (bilateral) = 0,1471 para n=178.

A tabela 3.2 discrimina as funções de autocorrelação que são necessárias para avaliar a persistência temporal das variáveis estudadas. Note que os autocorrelogramas da inflação e da taxa de juros caem mais lentamente do que os autocorrelogramas do produto e o *spread* do termo. Adicionalmente, percebe-se que o produto apresenta, inclusive, autocorrelação negativa nos vencimentos mais longos.

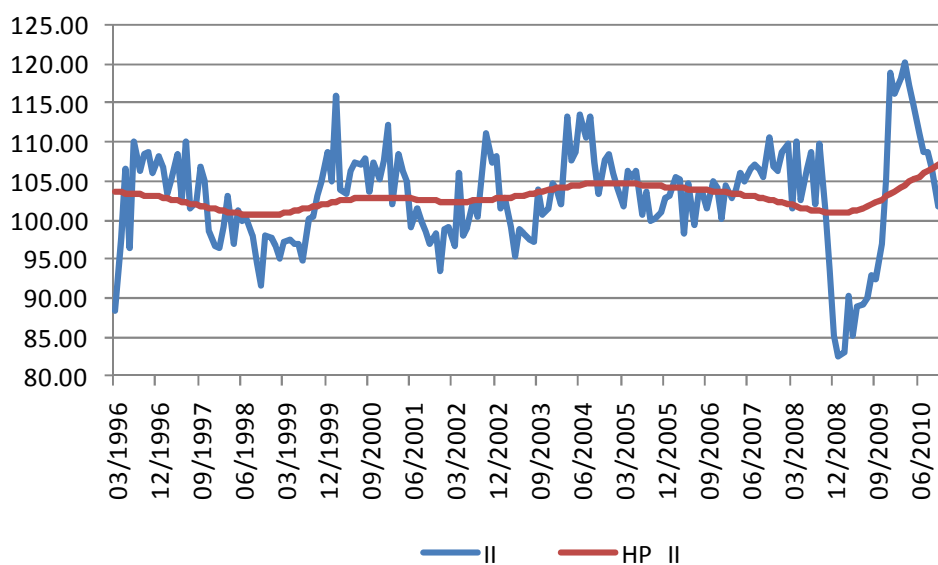
Tabela 3.2 – Função de Autocorrelação ACF – Persistência

| Diferença | ipca | II | Selic | ETTJ3m | ETTJ6m | ETTJ1a | ETTJ2a | ETTJ5a | ETTJ10a |
|-----------|--------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| 1 | 0.9426 | 0.7433 | 0.9060 | 0.9253 | 0.9267 | 0.9257 | 0.9241 | 0.9237 | 0.9231 |
| 2 | 0.8625 | 0.6792 | 0.8016 | 0.8364 | 0.8413 | 0.8399 | 0.8357 | 0.8344 | 0.8336 |
| 3 | 0.7904 | 0.5741 | 0.7234 | 0.7708 | 0.6971 | 0.7803 | 0.7754 | 0.7734 | 0.7722 |
| 5 | 0.6249 | 0.2937 | 0.6194 | 0.6700 | 0.6060 | 0.7044 | 0.7033 | 0.7025 | 0.7007 |
| 8 | 0.3829 | -0.0445 | 0.5078 | 0.5705 | 0.5992 | 0.6178 | 0.6179 | 0.6166 | 0.6132 |
| 10 | 0.2571 | -0.2652 | 0.5390 | 0.5651 | 0.5855 | 0.5898 | 0.5848 | 0.5762 | 0.5676 |

Se o spread do termo possuir capacidade de prever as variáveis macroeconômicas como mostrado nos capítulos 2 e 3 para o caso brasileiro e norte-americano, então ao aumentarmos o conjunto de informação dos agentes com a inclusão das informações da estrutura a termo estaremos melhorando a precisão dos parâmetros estruturais. Para reforçar as conclusões dos capítulos 2 e 3, Diebold et ali (2006) também mostraram a capacidade do poder preditivo de variáveis macro para as variáveis estrutura a termo.

A evolução do hiato do produto pode ser acompanhada na figura 3.1, esta é uma variável importante na condução monetária pelo seu papel crucial no mecanismo de transmissão monetária de muitos modelos macroeconômicos.

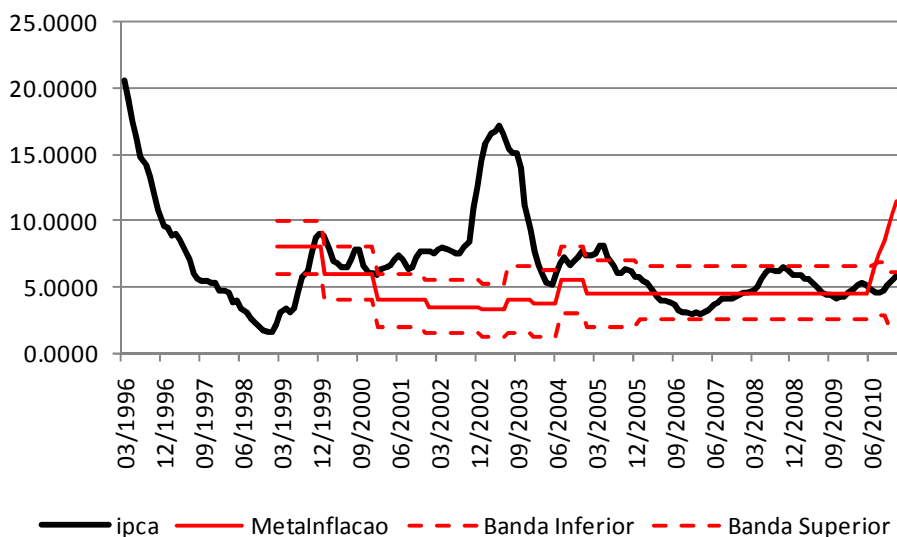
Figura 3.1 – Evolução do Produto e Produto Natural



A figura 3.1 mostra que a evolução do hiato do produto (produto efetivo menos produto potencial) fica acima de zero durante boa parte da amostra. Um desvio positivo é normalmente interpretado como uma *proxy* para o excesso de demanda. O hiato negativo pode ser uma resposta da política monetária agressiva à alta taxa de inflação ou por um aumento na taxa natural de produto, que permanece acima da tendência.

A meta de inflação é uma variável importante na formação das expectativas do setor privado brasileiro, pois o conhecimento da meta de inflação é útil para tomar decisões de investimento real e financeiro. Mesmo que o banco central tenha um compromisso com a meta para inflação, nos momentos de ruptura financeira os agentes podem desconfiar da capacidade da autoridade monetária perseguir a meta estabelecida e podem acreditar que o banco central está perseguindo uma meta diferente da divulgada. Por outro lado, ao não divulgar uma meta explícita, a importância de entender e prever essa variável torna-se ainda mais relevante para encontrar o equilíbrio no modelo estrutural da economia.

Figura 3.2 – Evolução do IPCA e das Metas de Inflação no Brasil



A figura 3.2 mostra que o IPCA ficou acima da meta de inflação divulgada pelo Banco Central do Brasil durante quase todo o período da amostra, entretanto, muitas vezes ficou dentro das faixas aceitáveis para sua flutuação, exceção ficou por conta dos anos de 2002 e 2003.

Estimação do Modelo Estrutural da Economia Brasileira

Como visto anteriormente, o modelo implica num VAR de primeira ordem em $\bar{z}_t = z_t - \hat{E}z_t$, com restrições não lineares. Logo, o modelo macroeconômico e financeiro a ser estimado para a economia brasileira corresponde ao sistema de equações simultâneas com \bar{z}_t e onde $z_t = (\pi_t \ y_t \ i_t \ sp_{n1,t} \ sp_{n2,t})'$. Os dois termos da curva de juros escolhidos para calcular o *spread* do termo foram de 1 e 5 anos, e o *spread* é obtido pela diferença entre as taxas de juros de 1 e 5 anos e a taxa de juros de 1 dia denominada de taxa CDI.

Com cinco variáveis que são a taxa de inflação, o produto da economia, a taxa de juros de curto prazo de condução monetária e dois *spread* para dois termos para médio e longo prazo, vamos obter os quinze parâmetros estruturais da economia, que são $\delta, \kappa, \sigma, \eta, \rho, \beta, \gamma, \lambda, \omega, d, \sigma_{AS}, \sigma_{IS}, \sigma_{MP}, \sigma_{y^n}$ e σ_{π^*} .

Para estimar os parâmetros dos modelos Novos Keynesianos é comum a utilização do estimador de Máxima Verossimilhança com Informação Completa (*Full Information Maximum Likelihood – FIML*). Um dos pressupostos para utilização do estimador FIML é que os erros sejam normalmente distribuídos.

A premissa da homocedasticidade dos resíduos é aceitável quando a hipótese das expectativas racionais é verificada e, com isso, temos que o *spread* do termo não varia no tempo.

Para testar a normalidade dos resíduos, a tabela 3.3 apresenta o teste Jarque-Bera, cujo resultado implica na rejeição da hipótese nula de normalidade nos resíduos em todas as cinco equações do sistema DSGE.

Tabela 3.3 – Teste Jarque-Bera para normalidade dos resíduos FIML

| $\mathcal{E}_{AS,t}$ | | $\mathcal{E}_{IS,t}$ | | $\mathcal{E}_{MP,t}$ | | $\mathcal{E}_{y^n,t}$ | | $\mathcal{E}_{\pi^*,t}$ | |
|----------------------|---------|----------------------|---------|----------------------|---------|-----------------------|---------|-------------------------|---------|
| JB | p-valor | JB | p-valor | JB | p-valor | JB | p-valor | JB | p-valor |
| 77650,40 | 0,0000 | 61,7626 | 0,0000 | 147,9960 | 0,0000 | 46,3985 | 0,0000 | 1587,14 | 0,0000 |

O desvio da premissa de normalidade e a possível não homocedasticidade, prejudica a adoção do estimador da máxima verossimilhança com informação completa e, com isso, optamos em utilizar o estimador GMM em dois estágios, conforme Hansen (1982).

Como nosso artigo não tem o objetivo de avaliar os drifts, é possível fazer o procedimento de estimação com os valores da amostra subtraídos de sua média $\bar{z}_t = z_t - \hat{E}z_t$, implicando no modelo do tipo $\bar{z}_t = \Omega_z \bar{z}_{t-1} + \Gamma_z u_t$ com $u_t = \Sigma^{-1} \varepsilon_t \sim (0, I_5)$ e onde a matriz de covariância é do tipo $\Sigma = \text{diag}(\sigma_{AS}, \sigma_{IS}, \sigma_{MP}, \sigma_{y^n}, \sigma_{\pi^*})$.

Inicialmente, note que o sistema tem 15 parâmetros estruturais que precisam ser estimados estão divididos nas cinco equações. Na curva IS temos que estimar σ e η ou μ e ϕ , pois $\mu = \sigma\phi$ e $\phi = 1/(\sigma + \eta)$. Na curva de Phillips estimaremos δ e κ porque indiretamente obtemos $(1 - \delta)$ e χ , pois $1 = \delta + (1 - \delta)$ e $\kappa = \sigma + \chi$ ou $\chi = \kappa - \sigma$. Na curva de regra de política monetária vamos obter ρ , β e γ . Na equação do produto natural temos que encontrar λ , que pode ocorrer via estimação ou de forma indireta, dependendo da escolha dos parâmetros a serem estimados na curva IS, pois $\lambda = \eta/(\sigma + \chi)$. Na definição da meta de inflação temos d e ω , pois obtemos indiretamente $\varphi_1 = \omega/(1 + d\omega)$, $\varphi_2 = d/(1 + d\omega)$ e $\varphi_3 = 1 - \varphi_1 - \varphi_2$. Note que, a princípio, não faz sentido a inclusão da inflação corrente na apuração da meta de inflação, mas, como mostrado no apêndice, essa variável vai aparecer com a demonstração da quinta equação e esperamos que o coeficiente de varphi assumo o valor nulo. Por último temos os cinco desvios padrão que representam os resíduos macroeconômicos σ_{AS} , σ_{IS} , σ_{MP} , σ_{y^n} e σ_{π^*} .

Dada a utilização do método GMM é necessário definir as condições de momentos que serão utilizadas, as quais são definidas como $h_t = \begin{bmatrix} h'_{1,t} & h'_{2,t} \end{bmatrix}$, onde $h_{1,t} = u_t \otimes \bar{z}_{t-1}$, $h_{2,t} = \text{vech}(u_t u_t' - I_5)$ e $E[h_t] = 0$.

Note que $\text{vech}(u_t u_t' - I_5)$ representa um vetor coluna com os elementos que estão sob e abaixo da diagonal principal da matriz $(u_t u_t' - I_5)$, empilhados um sobre o outro. Por outro lado, $u_t \otimes \bar{z}_{t-1}$ refere-se ao produto de Kronecker ou o produto de cada elemento do vetor u_t pela matriz \bar{z}_{t-1} .

Note que $h_{1,t}$ possui vinte e cinco condições de momentos que capturam os parâmetros de *feedback*, pois $h_{1,t} = u_t \otimes \bar{z}_{t-1}$ obtido considerando que $u_t = \Sigma^{-1} \varepsilon_t \sim (0, I_5)$, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_{AS} \quad \sigma_{IS} \quad \sigma_{MP} \quad \sigma_{y^n} \quad \sigma_{\pi^*})$, lembrando que $z_t = (\pi_t \quad y_t \quad i_t \quad sp_{n1,t} \quad sp_{n2,t})'$.

Observe ainda que $h_{2,t}$ possui quinze condições de momentos que capturam a estrutura decorrente da matriz de variância e covariância das inovações, pois $h_{2,t} = \text{vech}(u_t u_t' - I_5)$

Considerando que $h_t = \begin{bmatrix} h'_{1,t} & h'_{2,t} \end{bmatrix}$ e que $W = \begin{bmatrix} h_t & h_t' \end{bmatrix}^{-1}$, então a matriz de ponderação ótima será:

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} I \otimes \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \bar{z}_{t-1} \bar{z}_{t-1}' & \mathbf{0}_{25 \times 15} \\ \mathbf{0}_{15 \times 25} & I_{15} + \text{vech}(I_5) \text{vech}(I_5)' \end{bmatrix}^{-1}$$

Observe que essa matriz não é dependente dos parâmetros, somente depende das variáveis macroeconômicas e dos *spreads* do termo escolhidos, isto é, demonstramos que as cinco variáveis que são inflação, produto, juros de curto prazo, spread de médio prazo e spread de longo prazo serão suficientes para obtermos todos os parâmetros estruturais da economia.

Em seguida, temos que minimizar a função objetivo GMM que é a função $Q = (\hat{E}[h_t])' \hat{W}(\hat{E}[h_t])$, onde $\hat{E}[h_t] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h_t$.

Dessa forma, no primeiro estágio vamos encontrar estimativas próximas aquelas que seriam obtidas se fossem utilizado o estimador de máxima verossimilhança com informação completa. Em seguida, de posse das estimativas iniciais construímos a matriz de ponderação do segundo estágio que vai permitir a presença de heterocedasticidade na construção da matriz de variância e covariância.

O esperado é que o estimador econométrico utilizado no primeiro estágio do GMM apresente estimativas próximas que não são boas estimativas, mas que são úteis para encontrar a matriz de ponderação inicial. Posteriormente, estimaremos o segundo estágio que apresenta resultados melhores e que serão obtidos pela repetição do processo até a convergência do sistema.

Como vimos anteriormente, temos 40 condições dos momentos e 15 parâmetros a serem estimados em cinco equações do sistema, pois os demais serão obtidos de forma indireta. Dessa forma, percebemos que estamos diante de uma distribuição χ^2 com 25 graus de liberdade, porque existem 40 condições momentos e 15 parâmetros.

As variáveis utilizadas como instrumentos são as variáveis dependentes defasadas e incluímos um instrumento adicional que é o spread do termo de 10 anos.

Note que uma variável instrumental precisa satisfazer a duas exigências, ser correlacionada com as variáveis endógenas e ser ortogonais aos erros. Portanto, a independência dos instrumentos em relação a um erro que não é observável pode ser verificada se, e somente se, o número de instrumentos excluídos da equação excede o número de variáveis endógenas incluídas. Esse teste pode ser realizado como um diagnóstico padrão em qualquer estimativa de variáveis instrumentais sobreidentificadas.

Esse teste apresenta duas hipóteses conjuntas, a especificação do modelo correto e as condições de ortogonalidade. A rejeição da hipótese nula

pode ser decorrente de uma ou ambas as hipóteses. Para testar a restrição de sobreidentificação, podemos utilizar a estatística J de Hansen (1982) e discutida por Baum (2003), onde essa estatística é o valor da função objetivo GMM, avaliada no estimador eficiente. A hipótese nula representada por:

$$J(Q_{EGMM}) = n(\hat{E}[h_t])' \hat{W}(\hat{E}[h_t]) \sim \chi^2_{L-K}$$

A estatística J é distribuída χ^2 com o número de graus de liberdade sendo igual ao número de restrições sobreidentificadas ($L - K$) preferentemente ao número de condições dos momentos L , pois os K graus de liberdades são utilizados na estimação dos coeficientes. Uma rejeição da hipótese nula implica que os instrumentos não satisfazem a condição de ortogonalidade exigida, seja porque eles não são exógenos ou porque foram incorretamente excluídos da regressão.

O teste aplicado nesta amostra não rejeitou que os instrumentos são válidos aos níveis de 5% e 1%, pois a estatística calculada ficou em 10,842 e as estatísticas tabeladas correspondem a 14,611 e 11,524, respectivamente.

A tabela 3.4 discrimina os parâmetros estimados obtidos de forma direta pelo estimador GMM de dois estágios e de forma indireta pela relações lineares entre alguns parâmetros, conforme discriminado no apêndice. Os coeficientes estimados apresentaram muitos sinais esperados e próximos aos encontrados no trabalho de Bekaert, Cho e Moreno (2010) para a economia norte-americana. Obviamente existem diferenças na magnitude dos parâmetros estimados, no erro padrão dos mesmos e alguns resultados diferentes por estarmos avaliando a economia brasileira.

Os parâmetros estruturais que foram estimados apresentam o erro-padrão ao lado e os demais são obtidos por relação linear com outros parâmetros, conforme foi demonstrado nos apêndices 3.I a 3.V e resumido no apêndice 3.VI. Para obtermos os resultados estimados devemos escolher as opções de simulação, na tabela 3.4 a estimação utilizou a produção industrial física do IBGE, os spreads de 1 e 5 anos (médio e longo prazo), estimou sigma e eta ao invés de mu e phi e definiu psi em 0.99 ao invés de deixar psi livre. Os demais resultados e suas decomposições das variâncias estão discriminados nas tabelas e gráficos do apêndice 3.VII.

Tabela 3.4 – Estimação pelo Método GMM em dois estágios

| Parâmetros | Estimativa | Erro-padrão |
|------------------------------------|-------------------|--------------------|
| Curva IS | | |
| μ | 0,456 | |
| $(1-\mu)$ | 0,544 | |
| ϕ | 0,141 | |
| σ | 3,238 | 0,165 |
| η | 3,863 | 0,080 |
| h | 1,726 | |
| Curva de Phillips | | |
| $\delta = \delta_1$ | 0,437 | 0,010 |
| $(1 - \delta) = \delta_2$ | 0,563 | |
| κ | 0,117 | 0,013 |
| χ | 0,773 | |
| τ | 1,279 | |
| θ | 0,777 | |
| ϖ | 0,029 | |
| ζ | 0,207 | |
| Regra de Política Monetária | | |
| ρ | 0,813 | 0,009 |
| β | 1,991 | 0,139 |
| γ | 0,002 | 0,048 |
| Produto Natural Endógeno | | |
| λ | 0,963 | 0,017 |
| ϑ | 1,771 | |
| Meta de Inflação | | |
| d | 0,412 | |
| ω | 0,993 | 0,083 |
| φ_1 | 0,497 | |
| φ_2 | 0,503 | |
| φ_3 | 0,000 | |
| Desvio-padrão dos choques | | |
| $\sigma_{AS,t}$ | 5,192 | 0,235 |
| $\sigma_{IS,t}$ | 2,556 | 0,076 |
| $\sigma_{MP,t}$ | 5,978 | 0,153 |
| $\sigma_{y,t}^n$ | 4,110 | 0,119 |
| $\sigma_{\pi,t}^*$ | 3,393 | 0,158 |

Dentre os parâmetros estimados na curva IS, o impacto do produto esperado μ ficou em 0,456 e abaixo do impacto do produto passado em $(1 - \mu)$ em 0,544 que mostra a relevância do produto passado na formação do produto

corrente. Por outro lado, o parâmetro da taxa de juros real ϕ ficou em 0,141 e superior ao observado nos EUA de 0,134. O desvio-padrão dos resíduos σ_{IS} foi elevado, ficando em 2,556 com o erro padrão de 0,076.

A análise da elasticidade intertemporal inversa de substituição σ mostra que se ela for elevada, então temos um indicativo de que a curva IS é um canal de pouca eficácia na transmissão da política monetária. Na literatura macroeconômica esse parâmetro de curvatura da função utilidade do consumidor representativo σ deve ficar entre 1 e 4, conforme Lucas. Nossa estimação encontrou um parâmetro σ igual a 3,238 que é pouco superior ao 3,156 obtido por Bekaert, Cho e Moreno para os Estados Unidos da América do Norte.

Por outro lado, o grau de dependência do hábito do modelo estimado sobre o nível de consumo passado η ficou em 3,863 indicativo de uma persistência do hábito do consumo passado que é significativa e superior ao observado na economia norte-americana. A título ilustrativo, o parâmetro de Fuhrer (2000) ficou em $h = 1,726$, pois sabemos que existe uma relação linear do parâmetro daquele autor com o parâmetro deste modelo que é do tipo $\eta = h / (\sigma - 1)$.

Dentre os parâmetros estimados na curva de Phillips, o componente *forward-looking* δ ficou em 0,437 e o componente *backward-looking* $\delta_2 = (1 - \delta)$ foi igual a 0,563. Esse resultado é oposto ao verificado por Bekaert, Cho e Moreno nos EUA. Além disso, a elasticidade intertemporal inversa da oferta de trabalho χ ficou em 0,773.

O impacto do hiato do produto κ ficou em 0,117, com erro padrão de 0,013. O desvio-padrão dos resíduos da curva de Phillips σ_{AS} foi elevado e igual a 5,192 com erro padrão de 0,235.

Na estimação da regra de política monetária, o parâmetro que avalia o impacto da taxa de juros passada ρ ficou em 0,813 e erro-padrão de 0,009. Por outro lado, a diferença entre a inflação esperada e a meta de inflação medida pelo parâmetro β ficou em 1,991 e esse resultado foi superior ao parâmetro de 1,525 da economia norte-americana.

Ainda na regra de política monetária temos o impacto do hiato do produto γ de 0,002 e erro-padrão de 0,048. O desvio-padrão dos resíduos da equação da regra de política monetária σ_{MP} ficou em 5,978 e erro-padrão de 0,153.

Uma das inovações desse modelo é a determinação do produto natural, onde o coeficiente estimado indica que o impacto do produto natural passado λ ficou em 0,963 e erro-padrão de 0,017. O desvio-padrão dos resíduos σ_{y^n} ficou em 4,110 com erro-padrão de 0,119. A relação entre persistência endógena do produto natural sobre resposta produto real corrente às mudanças no produto real passado ϑ foi de 1,771.

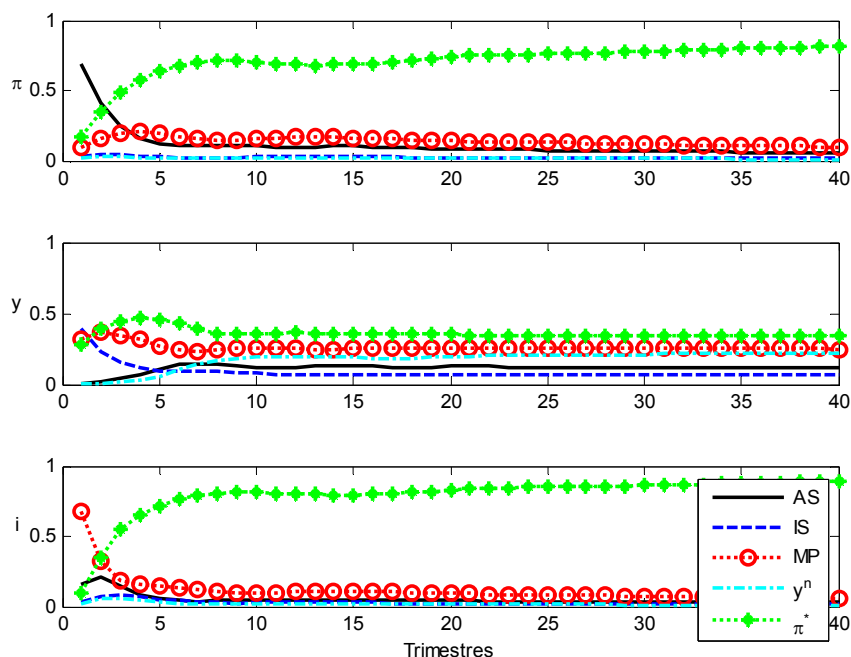
Outra contribuição inovadora desse modelo é a determinação da meta de inflação de forma endógena, onde percebemos que o parâmetro do peso das taxas de inflação futura na definição da taxa de inflação de longo prazo d ficou em 0,412 e o parâmetro de suavização da inflação passada na determinação da meta de inflação ω ficou em 0,993.

A resposta da meta inflação futura às mudanças na meta corrente φ_1 ficou em 0,497 e a resposta da meta inflação passada às mudanças na meta corrente φ_2 ficou em 0,503. Como esperado, a resposta da inflação corrente às mudanças na meta corrente φ_3 é nula. O desvio-padrão dos resíduos da trajetória da meta de inflação σ_{π^*} ficou em 3,393 com erro-padrão de 0,158.

Adicionalmente, a decomposição da variância descrita na figura 3.3 mostra a contribuição de cada choque macroeconômico para a variação da variável macroeconômica em diferentes horizontes temporais. Note que variância da inflação no curto prazo é explicada pelo choque da curva de Phillips (AS), mas a partir do terceiro trimestre é explicada pelos choques da meta de inflação e, em menor grau, da política monetária e da curva de Phillips. A variância do produto, no curto prazo, é explicada pelos choques da curva IS, da meta de inflação e da política monetária e no médio e longo prazo passa a sofrer a influência do choque no produto natural e da curva de Phillips. A variação da taxa de juros de curto prazo é explicada, no horizonte de curto prazo, pelo choque de política monetária, mas nos horizontes temporais

posteriores ao terceiro trimestre essa variação é explicada pelo choque da meta de inflação.

Figura 3.3 – Decomposição da Variância – Inflação, Produto e Juros



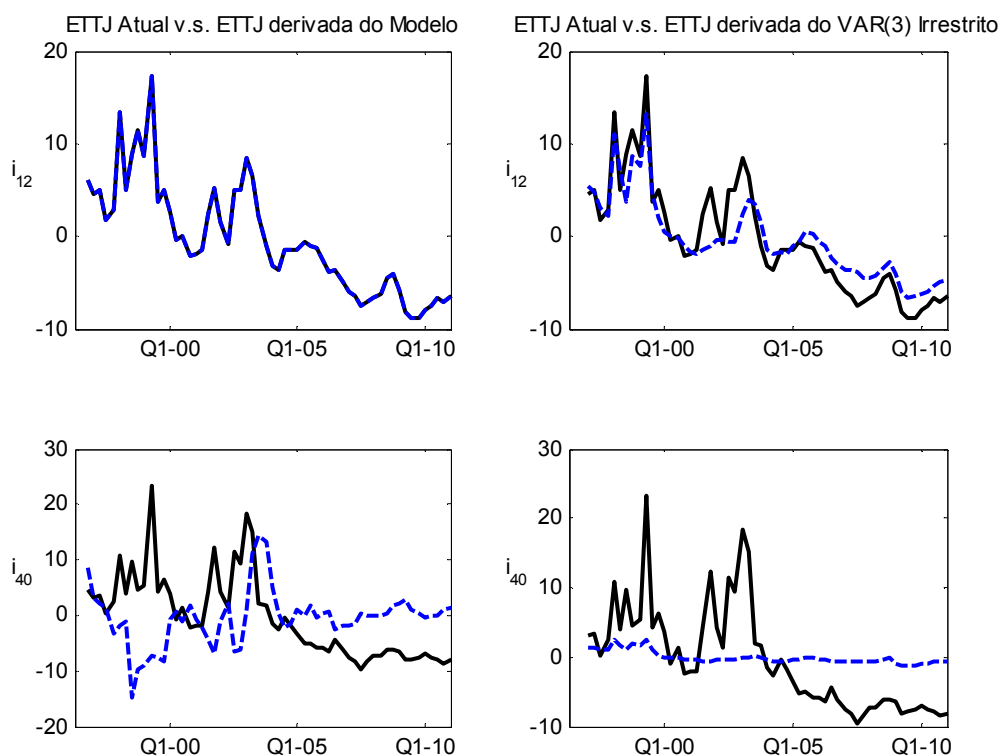
Como o Banco Central do Brasil é responsável pelos choques de política monetária e da meta de inflação, percebe-se a importância da política monetária na definição da inflação e das taxas de juros, principalmente. Para o nível de produção da economia notamos que, além política monetária, os choques de produtividade e da curva IS também são relevantes.

Uma pergunta que surge é saber se o modelo macroeconômico e financeiro que estima as variáveis macroeconômicas e a curva de juros se ajusta bem em toda a estrutura a termo. Para responder a essa pergunta, podemos avaliar a diferença entre os valores observados na estrutura a termo de juros e os valores previstos pelo modelo, ou seja, observar o erro de medição.

Apesar de o modelo manter a Hipótese das Expectativas, a figura 3.4 mostra que ele se encaixa melhor na estrutura a termo observada do que o

modelo de vetor autoregressivo tradicional, que nesse comparativo utilizamos um VAR(3).

Figura 3.4 – Ajuste da ETTJ do Modelo DSGE-Financeiro



Na figura 3.4, os gráficos à direita representam os valores dos termos de 1 ano e 10 anos, obtidos por um VAR(3) e os gráficos à esquerda mostram os valores para os mesmo termos obtidos pelo modelo macroeconômico estrutural adotado. Os gráficos mostram que o erro de medição é menor para o termo de 1 ano do que para o termo de 10 anos. Por outro lado, para o termo de 10 anos temos que o modelo macro não é muito diferente do VAR(3), mas notamos que o modelo macro acompanha melhor as mudanças na taxa de juros, enquanto que o VAR(3) apresenta valores aproximadamente constantes.

Após observar o ajuste do modelo, é importante avaliar como se propagam e quais são os efeitos dos choques na curva IS, na curva de Phillips, na política monetária, no produto natural e na meta de inflação. Para tanto, utilizaremos as funções de impulso e resposta, em relação ao equilíbrio no estado estacionário.

A idéia da função impulso resposta é mostrar, graficamente, o que acontece com a variável de interesse em resposta a um choque exógeno da economia, condicionado a economia estar em equilíbrio antes do choque. Em outras palavras, observar a resposta de uma determinada variável a um choque específico, como resultado de efeitos transitórios sobre o estado estacionário da economia que são avaliados para a curva de juros praticada no mercado financeiro brasileiro.

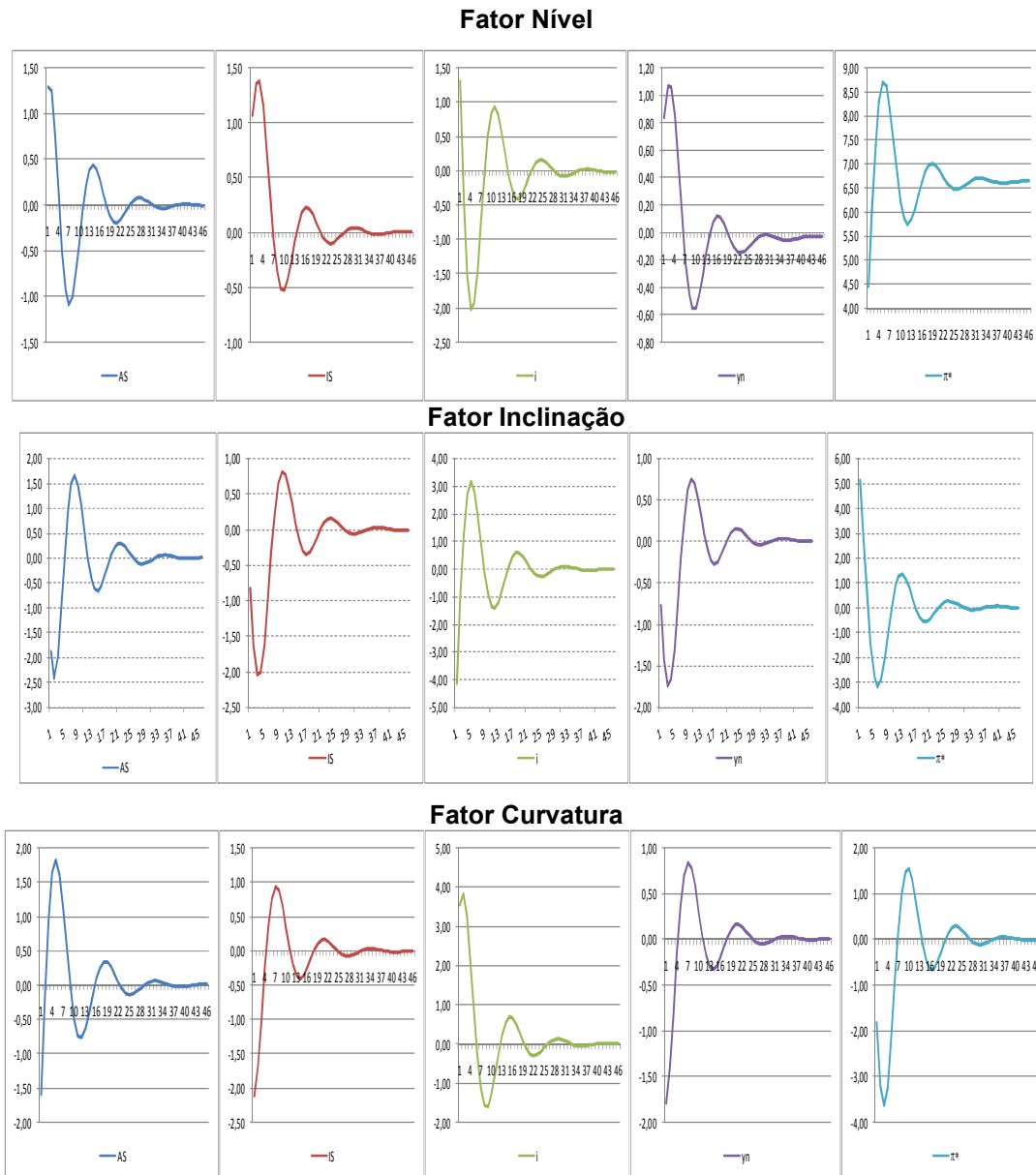
Note que quando duas variáveis estão correlacionadas no tempo, de tal forma que exista uma relação estável entre ambas, espera-se que um choque sobre uma das variáveis se propague para a outra variável, sendo esse choque conhecido como inovação ou impulso. Para verificar esse efeito, as figuras a seguir apresentam o efeito dos juros no mercado financeiro diante de impulsos nas demais variáveis, entre 1 e 50 trimestres, considerando um impulso na magnitude de 1 ponto percentual.

Como visto nos capítulos anteriores desta tese, é comum a literatura financeira utilizar os três fatores latentes obtidos com informações da própria estrutura a termo de juros para avaliar sua dinâmica, sem a preocupação de considerar os impactos decorrentes de choques macroeconômicos. Nesta seção vamos avaliar esse aspecto e, para tanto, o nível é considerado como a média ponderada das taxas de 1 dia, 1 ano e 5 anos, a inclinação como sendo o spread de 10 anos e a curvatura é representada pela soma da taxa de 1 dia e de 5 anos menos duas vezes a taxa de 1 ano, seguindo, quando for conveniente, Bekaert, Cho e Moreno (2010).

Assim, a figura 3.5 mostra a resposta dos fatores latentes da curva de juros do mercado financeiro brasileiro aos impulsos decorrentes de choques estruturais da economia (AS , IS , i , y^n , π^*). Inicialmente, vamos analisar o choque da curva de Phillips (AS) sobre os fatores latentes, de imediato o choque aumenta o fator nível, mas, logo depois, reduz o nível para abaixo do estado estacionário até o décimo trimestre. Esse undershooting na taxa de juros pode estar relacionado com uma resposta endógena da autoridade monetária para conter a inflação, que diminui a inflação abaixo do estado estacionário por certo tempo, conforme observado também em Bekaert, Cho e Moreno (2010). Na avaliação do impacto sobre o fator inclinação, note que de

imediatamente cai abaixo do estado estacionário, cai um pouco mais em seguida, e posteriormente quando o nível fica negativo faz com que a inclinação aumente acima do estado estacionário. O efeito sobre o fator curvatura é uma queda seguida de aumento para acima do estado estacionário e vai oscilando até se acomodar no estado estacionário.

Figura 3.5 – Impulso Resposta dos Fatores Latentes da ETTJ frente aos choques macroeconômicos (AS, IS, i , y^n e π^*)



O segundo choque macroeconômico é o impulso na curva IS, cuja resposta do fator nível é o aumento, seguido de outro aumento suave, ficando acima do nível do estado estacionário até o décimo trimestre. No fator

inclinação e curvatura o efeito é inverso, reduzindo esses fatores, o que pode estar associado à curva em forma de corcunda da figura 2.3 (do capítulo 2) e com a hipótese das expectativas racionais cujo efeito dever indicar uma resposta maior nos prazos mais curtos.

O terceiro choque macroeconômico é o choque macroeconômico na taxa de curto prazo, ou taxa Selic. O impulso desse choque provoca como resposta um aumento inicial do fator nível, seguido por uma queda abrupta que mantém o nível abaixo do estado estacionário até o sétimo trimestre, que pode estar associado ao undershooting da taxa de juros de curto prazo após um choque de política monetária. A resposta do fator inclinação é uma queda de imediato que mantém o fator abaixo do nível estacionário até o quinto trimestre, quando começa a oscilar em torno do referido nível até convergir. O resultado de queda imediata pode indicar que o choque de política monetária aumenta a taxa de curto prazo e reduz a taxa de longo prazo pelos reflexos sobre as expectativas de inflação futura. O fator curvatura fica acima do estado estacionário por seis trimestres e depois vai oscilando até convergir.

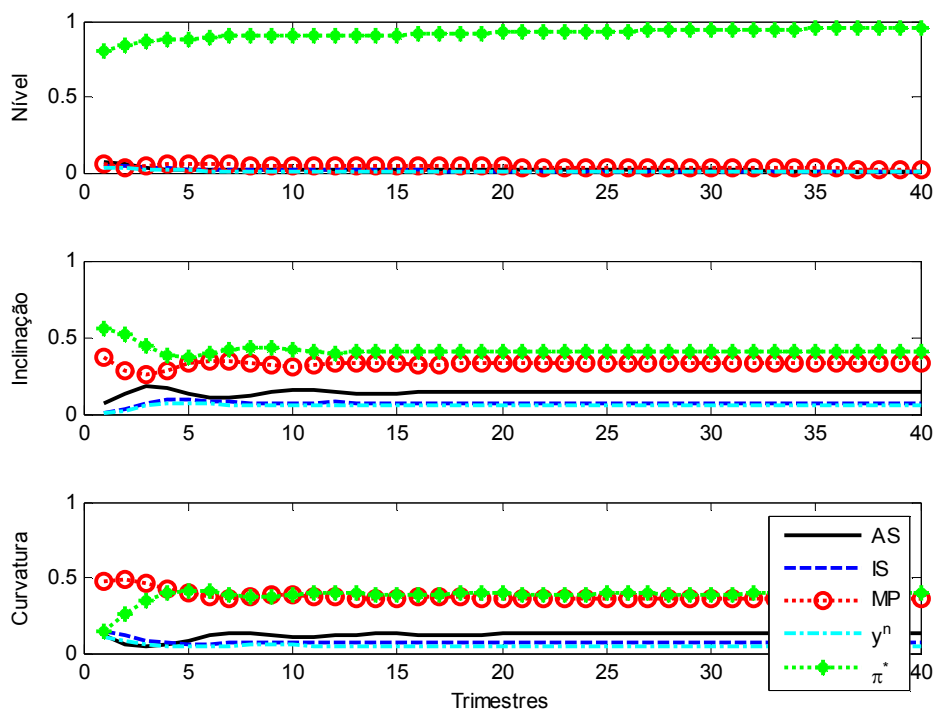
O impulso no choque de produtividade representado pelo choque no produto natural obtido de forma endógena mostra uma resposta que aumenta o fator nível de imediato, diferentemente do que foi observado na economia norte-americana, segundo o trabalho de Bekaert, Cho e Moreno (2010). Entretanto, no longo prazo os resultados são semelhantes.

Por último temos o impulso sobre o choque nas metas de inflação que são obtidas de forma endógena, cuja resposta aumentou o fator nível e, surpreendentemente, a convergência ocorre num nível superior ao estado estacionário. Esse efeito também foi observado na economia americana, mas o nível nos EUA volta a ficar próximo ao estado estacionário, indicativo de uma forte persistência das taxas de juros ao choque. Os impulsos sobre os fatores inclinação e curvatura voltam para o estado estacionário.

A figura 3.6 mostra a decomposição da variância do nível, onde o choque da meta de inflação explica mais de 70% da variação do nível no curto prazo e quase 100% da variação no longo prazo, os demais choques não têm um poder de explicação significativo sobre o fator nível.

No fator inclinação observamos que o choque de meta de inflação explica um pouco mais de 50% e o choque de política monetária um pouco menos, no médio e longo prazo esses dois choques explicam, aproximadamente, 40% da variação no fator inclinação. Outro choque importante para explicar as variações no fator inclinação é o choque da curva de Phillips (AS), que fica pouco abaixo de 10% no curto prazo, mas no médio e longo prazo fica em, aproximadamente, 20%. Os choques da curva IS e de produtividade (produto natural endógeno) representam entre 5% e 10% das variações na inclinação da curva de juros do mercado financeiro brasileiro.

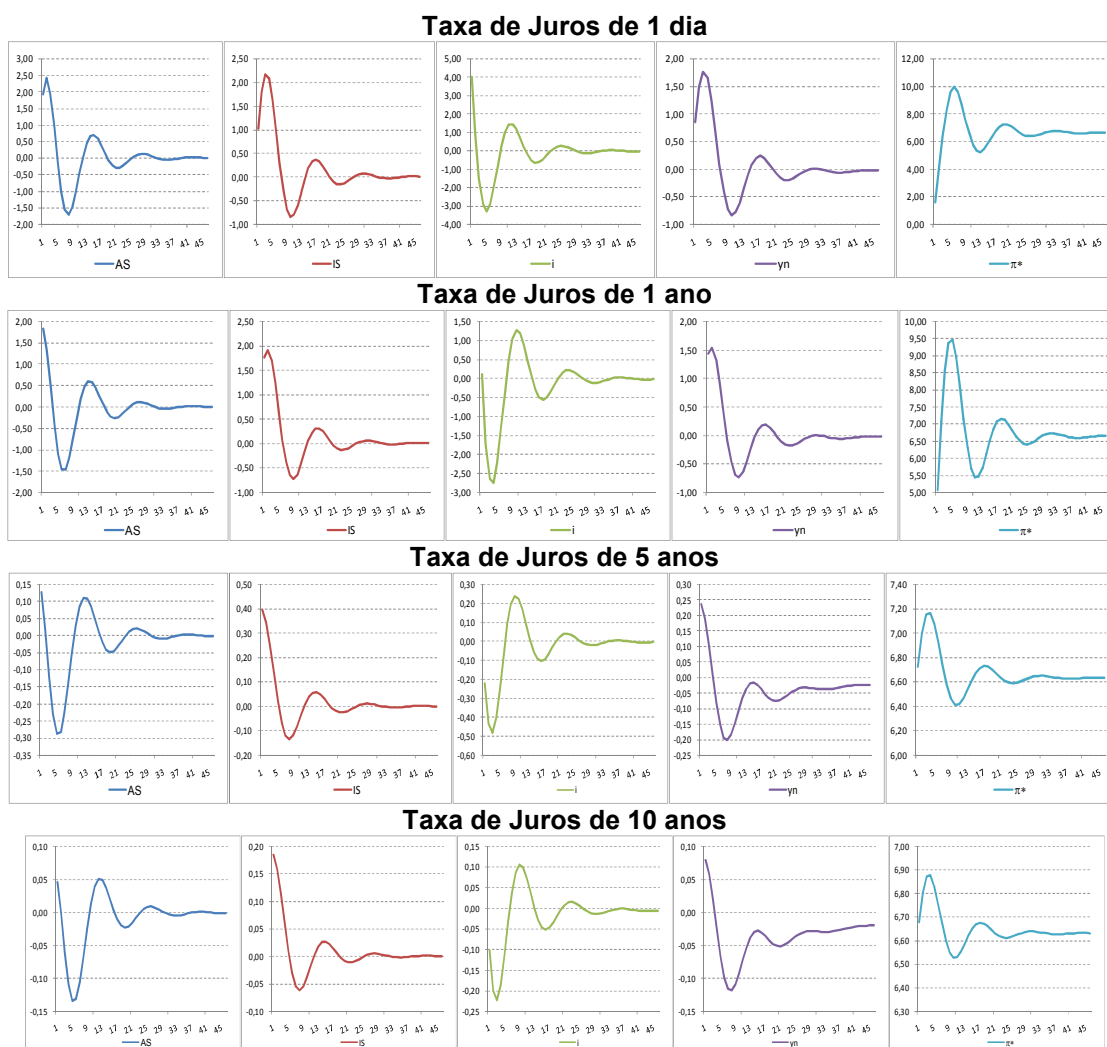
Figura 3.6 – Decomposição da Variância – Fatores Latentes da ETTJ



A decomposição da variância do último fator latente, a curvatura, indica que o choque de política monetária explica entre 40% e 50% em todo horizonte temporal avaliado. O choque de meta de inflação no curto prazo é pouco significativo para explicar as variações no fator curvatura, mas no médio e longo prazo é tão significativo quanto o choque de política monetária. A exemplo do fator inclinação, a importância do choque da curva de Phillips é seguida dos choques da curva IS e do produto natural, na explicação da variação do fator curvatura.

Para complementar a análise das funções impulso e da decomposição da variância sobre os fatores latentes, a figura 3.7 mostra o efeito do impulso sobre os cinco choques macroeconômicos que implica em determinadas respostas das taxas de juros de 1 dia, de 1 ano, de 5 anos e de 10 anos.

Figura 3.7 – Impulso Resposta da Estrutura a Termo de Taxas de juros frente aos choques macroeconômicos (AS, IS, i , y^n e π^*)



O choque da curva de Phillips (ou demanda agregada, AS) sobre as taxas de juros aumenta de imediato as taxas e vai oscilando em torno do estado estacionário até convergir após quarenta trimestres. Outro aspecto relevante é o impacto é maior nas taxas dos termos de curto prazo e vai reduzindo o impacto conforme vai aumentando o termo, até a taxa de 10 anos.

O choque na curva IS tem como resposta um aumento nas taxas de juros de todos os termos, com efeito semelhante na taxa para 1 dia e para 1 ano (4 trimestres). Nos termos de 5 anos (20 trimestres) e 10 anos (40 trimestres) o efeito do aumento vai reduzindo.

O choque de política monetária mostra um aumento relevante na taxa de juros de 1 dia e vai oscilando até convergir no estado estacionário. A resposta da taxa de 1 ano é um suave aumento e posterior oscilação até a convergência. Nas taxas para 5 e 10 anos o efeito é uma redução nas taxas com impacto maior de queda na taxa de 20 trimestres.

O choque de produtividade tem como resposta um aumento no curto prazo de todos os termos das taxas de juros. Os efeitos de curto nas taxas de 1 dia e 1 ano são semelhantes e nas taxas de 5 e 10 anos vão reduzindo, todos vão oscilando até convergir no estado estacionário.

Os choques nas metas de inflação aumentam todos os termos das taxas de juros no horizonte de curto prazo, mas os efeitos são maiores sobre os termos de prazos mais curtos (1 dia e 1 ano), quando comparado aos termos de longo prazo (5 e 10 anos).

Assim, percebemos que existem indícios de que a transmissão monetária no Brasil não é muito elevada, quando estimamos o período de março/1996 a dezembro/2010, pelo método GMM em dois estágios.

O grau de dependência do consumo passado na economia brasileira é alto e o coeficiente que avalia a diferença entre a inflação esperada e a meta de inflação é uma variável importante na condução da política monetária.

A novidade estimar o produto natural de forma endógena mostra que o produto natural do período passado é relevante para definir o produto natural corrente.

A análise da decomposição da variância mostra a importância da meta de inflação para explicar os choques na inflação corrente e na taxa de juros. Por outro lado, os choques no produto corrente são explicados pelo produto natural, pela política monetária, pela curva de Phillips e pela meta de inflação, de forma aproximadamente igual.

Por fim, e com a mesma conclusão obtida nos outros capítulos anteriores, percebemos que as variáveis macroeconômicas são importantes para explicar o comportamento da estrutura a termo de taxas de juros. O fator nível da curva de juros foi explicado pela meta de inflação, o fator curvatura foi explicado pela meta de inflação e pela regra de política monetária e o fator inclinação da curva de juros foi explicado pela curva de Phillips, pela meta de inflação e pela regra de política.

3.5 Conclusão

Os modelos dos novos keynesianos são parcimoniosos e, devido a essa característica, possuem informação limitada. Ao incorporarmos a informação contida na estrutura a termo de taxas de juros estamos ajudando a recuperar importantes parâmetros estruturais. Além disso, ao incluir um componente de hábito externo do consumo passado e incluindo duas equações para definir a trajetória do produto natural e da meta de inflação, estamos gerando persistências endógenas adicionais.

Os resultados obtidos mostram boas e grandes estimativas para a curva de Phillips, para o parâmetro da taxa de juros real e o modelo exibe uma relevante resposta contemporânea da estrutura a termo aos cinco choques macroeconômicos estruturais do modelo.

Dentre os parâmetros estimados na curva IS, o impacto do produto esperado foi menor que o impacto do produto passado, que mostra a relevância do produto passado na formação do produto corrente. Por outro lado, o parâmetro da taxa de juros real foi ligeiramente superior ao observado nos EUA. A elasticidade intertemporal inversa de substituição mostrou que a curva IS é um canal de pouca eficácia na transmissão da política monetária.

Na curva de Phillips, o componente *forward-looking* foi inferior ao componente *backward-looking*, resultado oposto ao verificado por Bekaert, Cho e Moreno nos EUA.

Na estimação da regra de política monetária, a diferença entre a inflação esperada e a meta de inflação medida pelo parâmetro foi 20% superior ao verificado na economia norte-americana.

Uma contribuição importante desse modelo é perceber que o parâmetro do peso das taxas de inflação futura na definição da taxa de inflação de longo prazo é menor do que o parâmetro de suavização da inflação passada na determinação da meta de inflação.

A variância da inflação no curto prazo é explicada, principalmente, pelo choque da curva de Phillips. A variância do produto, no curto prazo, é explicada pelos choques da curva IS, da meta de inflação e da política monetária e no médio e longo prazo passa a sofrer a influência do choque no produto natural e da curva de Phillips. A variação da taxa de juros de curto prazo é explicada, no horizonte de curto prazo, pelo choque de política monetária, mas nos horizontes temporais posteriores ao terceiro trimestre essa variação é explicada pelo choque da meta de inflação.

Assim, percebemos a importância da política monetária na definição da inflação e das taxas de juros. Quanto ao nível de produção, notamos que, além política monetária, os choques de produtividade e da curva IS também são relevantes.

Adicionalmente, concluímos que esse modelo macroeconômico e financeiro se ajusta melhor à estrutura a termo de juros da economia brasileira do que os modelos de vetor autoregressivo tradicional no DSGE, quando comparamos os erros de medição.

O impulso da curva de Phillips sobre os fatores latentes, de imediato o choque aumenta o fator nível, esse undershooting na taxa de juros pode estar relacionado com uma resposta endógena da autoridade monetária para conter a inflação, que diminui a inflação abaixo do estado estacionário por certo tempo. O impulso na curva IS tem como resposta o aumento do fator nível e o impulso do choque de política monetária provoca uma resposta de aumento inicial do fator nível, seguido por uma queda abrupta, que pode estar associado ao undershooting da taxa de juros de curto prazo após um choque de política monetária. Os impulsos no choque de produtividade e no choque nas metas de inflação aumentam o fator nível.

O choque de política monetária mostra um aumento relevante na taxa de juros de 1 dia e vai oscilando até convergir no estado estacionário. A resposta da taxa de 1 ano é um suave aumento e posterior oscilação até a convergência. Nas taxas para 5 e 10 anos o efeito é uma redução nas taxas com impacto maior de queda na taxa de 20 trimestres.

O choque de produtividade tem como resposta um aumento no curto prazo de todos os termos das taxas de juros. Os efeitos de curto nas taxas de 1 dia e 1 ano são semelhantes e nas taxas de 5 e 10 anos vão reduzindo, todos vão oscilando até convergir no estado estacionário.

Os choques nas metas de inflação aumentam todos os termos das taxas de juros no horizonte de curto prazo, mas os efeitos são maiores sobre os termos de prazos mais curtos (1 dia e 1 ano), quando comparado aos termos de longo prazo (5 e 10 anos).

Logo, existem indícios de que a transmissão monetária no Brasil não é muito elevada e que o grau de dependência do consumo passado na economia brasileira é alto. A novidade estimar o produto natural de forma endógena mostra que o produto natural do período passado é relevante para definir o produto natural corrente.

Por fim, e com a mesma conclusão obtida nos outros capítulos anteriores, percebemos que as variáveis macroeconômicas são importantes para explicar o comportamento da estrutura a termo de taxas de juros. O fator nível da curva de juros foi explicado pela meta de inflação, o fator curvatura foi explicado pela meta de inflação e pela regra de política monetária e o fator inclinação da curva de juros foi explicado pela curva de Phillips, pela meta de inflação e pela regra de política.

Apêndice 3.1 – A Curva IS e a curva de demanda agregada

Para a obtenção da curva IS, o problema de maximização do consumidor considera uma função utilidade com formação de hábito e oferta de trabalho aditiva (separada do consumo). A adoção de hábito procura criar uma persistência no produto (choque implica em tempo maior para retornar a seu nível natural).

A curva dinâmica IS será obtida pelas condições de primeira ordem de um consumidor representativo que maximiza a função utilidade, segundo Lucas (1978):

$$U(C_t, N_t; F_t) = \frac{F_t C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\chi}}{1+\chi} \quad (3.5)$$

Onde C_t é o índice composto do nível de consumo, σ é o coeficiente de aversão ao risco (ou inverso da elasticidade intertemporal do consumo), N_t é a oferta de trabalho em horas dedicadas ao trabalho, χ é o inverso da elasticidade intertemporal da oferta de trabalho, F_t é um fator de mudança na demanda agregada com hábito externo e choque exógeno de demanda agregada e ψ é o fator de desconto temporal.

O fator de mudança ou de deslocamento da demanda agregada assume a seguinte forma:

$$F_t = H_t G_t$$

Onde H_t é o nível de hábito externo que é exógeno ao agente e depende do consumo passado e G_t é o choque exógeno de demanda agregada que pode ser interpretado como choque de preferência sobre o consumo. A persistência endógena do produto é criada conforme Fuhrer (2000), isto é, $H_t = C_{t-1}^\eta$ e η mede o grau de dependência do hábito sobre o nível de consumo passado. Essa persistência do hábito tem uma relação linear

com a persistência do hábito de Fuhrer (2000), que é da forma $\eta = h(\sigma - 1)$, onde h é o parâmetro de persistência do hábito em Fuhrer.

O problema do consumidor contempla, ainda, uma restrição orçamentária da seguinte forma:

$$P_t C_t + d_t' Q_t \leq W_t N_t + (D_t + Q_t)' d_{t-1} \quad (3.6)$$

Onde P_t é o nível de preços, d_t é o vetor de pesos que compõe a carteira de ativos, Q_t é o vetor de preços dos ativos e D_t é o vetor de dividendos. Nesta análise o governo não é considerado de forma explícita.

Portanto, o problema do agente representativo é maximizar sua função de utilidade sujeita à restrição orçamentária:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & E_t \sum_{s=t}^{\infty} \psi^{s-t} U(C_s N_s; F_s) = E_t \sum_{s=t}^{\infty} \psi^{s-t} \left[\frac{F_s C_s^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_s^{1+\chi}}{1+\chi} \right] \\ \text{s.a:} \quad & P_t C_t + d_t' Q_t \leq W_t N_t + (D_t + Q_t)' d_{t-1} \\ & \lim_{T \rightarrow \infty} E_t \{B_T\} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Reescrevendo o problema do consumidor para:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & E_t \sum_{s=t}^{\infty} \psi^{s-t} U(C_s N_s; F_s) = E_t \sum_{s=t}^{\infty} \psi^{s-t} \left[\frac{H_t C_{t-1}^{\eta} C_s^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_s^{1+\chi}}{1+\chi} \right] \\ \text{s.a:} \quad & C_t = \frac{W_t N_t + (D_t + Q_t)' d_{t-1} - d_t' Q_t}{P_t} \end{aligned}$$

O primeiro passo no processo de solução do problema do consumidor é encontrar a oferta de trabalho, obtendo a condição de primeira ordem em relação ao trabalho:

$$\frac{\partial L}{\partial N_t} = \psi^{t-t} F_s U_{C,t} \left(\frac{W_t}{P_t} \right) - \psi^{t-t} U_{N,t} = 0$$

$$F_s \left(\frac{W_t}{P_t} \right) = \frac{U_{N,t}}{U_{C,t}}$$

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{U_{N,t}}{U_{C,t}} \frac{1}{F_s}$$

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{\frac{1+\chi}{1-\sigma} N_t^\chi}{\frac{1-\sigma}{1-\sigma} F_s C_t^{-\sigma}}$$

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{N_t^\chi}{C_t^{-\sigma} F_s} \quad (3.8)$$

Log-linearizando a oferta de trabalho temos:

$$w_t - p_t = \sigma c_t + \chi n_t - f_s \quad (3.9)$$

O segundo passo para solucionar o problema do consumidor é encontrar a curva IS, isto é, maximizar a função objetivo considerando a restrição orçamentária, com respeito ao vetor de pesos que compõe a carteira de ativos das famílias:

$$\frac{\partial L}{\partial d_t} = \psi^{t-t} F_t U_{C,t} \left(\frac{Q_t}{P_t} \right) - \psi^{t+1-t} F_{t+1} U_{C,t+1} \left(\frac{D_{t+1} + Q_{t+1}}{P_{t+1}} \right) = 0$$

$$F_t U_{C,t} \left(\frac{Q_t}{P_t} \right) = \psi F_{t+1} U_{C,t+1} \left(\frac{D_{t+1} + Q_{t+1}}{P_{t+1}} \right)$$

$$\frac{Q_t}{D_{t+1} + Q_{t+1}} = \psi \frac{F_{t+1} U_{C,t+1}}{F_t U_{C,t}} \frac{P_t}{P_{t+1}}$$

$$\frac{Q_t}{D_{t+1} + Q_{t+1}} = \psi \frac{C_{t+1}^{-\sigma} F_{t+1}}{C_t^{-\sigma} F_t} \frac{P_t}{P_{t+1}}$$

Pelas equações (3.2) e (3.3), obtemos:

$$M_{t+1} = \psi \frac{C_{t+1}^{-\sigma} F_{t+1}}{C_t^{-\sigma} F_t} \frac{P_t}{P_{t+1}} \quad (3.10)$$

A condição de equilíbrio de mercado, $C_t = Y_t$:

$$M_{t+1} = \psi \frac{Y_{t+1}^{-\sigma} F_{t+1}}{Y_t^{-\sigma} F_t} \frac{P_t}{P_{t+1}}$$

Log-linearizando a equação:

$$m_{t+1} = \log(\psi) - \sigma y_{t+1} + \sigma y_t + f_{t+1} - f_t + p_t - p_{t+1}$$

Considerando que $f_t = h_t + g_t = \eta y_{t-1} + g_t$ e log-linearizando, temos:

$$m_{t+1} = \log(\psi) - \sigma y_{t+1} + \sigma y_t + \eta y_t + g_{t+1} - \eta y_{t-1} - g_t + p_t - p_{t+1}$$

$$m_{t+1} = \log(\psi) - \sigma y_{t+1} + (\sigma + \eta)y_t - \eta y_{t-1} + (g_{t+1} - g_t) - (p_{t+1} - p_t)$$

$$m_{t+1} = \log(\psi) - \sigma y_{t+1} + (\eta + \sigma)y_t - \eta y_{t-1} + (g_{t+1} - g_t) - \pi_{t+1} \quad (3.11)$$

Em particular, a taxa nominal de juros satisfaz:

$$E_t[M_{t+1}(1 + i_t)] = 1$$

Sob log-normalidade:

$$E_t m_{t+1} + 0,5V_t(m_{t+1}) = -i_t \quad (3.12)$$

Substituindo a equação (3.11) em (3.12):

$$E_t(\log \psi - \sigma y_{t+1} + (\eta + \sigma)y_t - \eta y_{t-1} + (g_{t+1} - g_t) - \pi_{t+1}) + 0,5V_t(m_{t+1}) = -i_t$$

$$\log \psi - \sigma E_t(y_{t+1}) + (\eta + \sigma)y_t - \eta y_{t-1} + (g_{t+1} - g_t) - E_t \pi_{t+1} + 0,5V_t(m_{t+1}) = -i_t$$

$$(\eta + \sigma)y_t = -\log \psi + \sigma E_t(y_{t+1}) + \eta y_{t-1} - (g_{t+1} - g_t) + E_t \pi_{t+1} - 0,5V_t(m_{t+1}) - i_t$$

$$y_t = -\frac{1}{(\eta + \sigma)}[\log \psi + 0,5V_t(m_{t+1})] + \frac{\sigma}{(\eta + \sigma)}E_t(y_{t+1}) + \frac{\eta}{(\eta + \sigma)}y_{t-1}$$

$$+ \frac{1}{(\eta + \sigma)}[E_t(\pi_{t+1}) - i_t] + \frac{1}{(\eta + \sigma)}(g_{t+1} - g_t)$$

$$y_t = \alpha_{IS} + \mu E_t y_{t+1} + (1 - \mu)y_{t-1} - \phi(i_t - E_t \pi_{t+1}) + \varepsilon_{IS,t} \quad (3.13)$$

Onde y_t é o hiato do produto dessazonalizado, i_t é a taxa de juros de curto prazo, $\phi = \frac{1}{\sigma + \eta}$ e $\mu = \sigma\phi$, com ϕ representando a resposta do produto dessazonalizado às mudanças na taxa de juros real. Além disso, $\alpha_{IS} = -\phi(\log \psi + 0,5V_t(m_{t+1}))$ e o choque da curva IS é igual a $\varepsilon_{IS,t} = \phi(g_{t+1} - g_t)$ e é independente e identicamente distribuído, com variância homocedástica σ_{IS}^2 . Note que $V_t(m_{t+1})$ depende da dinâmica da variável estado do modelo, se as inovações do modelo forem homocedástica, então a variância do núcleo de precificação é constante.

Apêndice 3.II – Curva de Phillips, persistência endógena do produto natural e o hiato do produto

Curva de Phillips e a curva de oferta agregada

A curva de Phillips (PC), também conhecida como equação de oferta agregada (AS), pode ser obtida pela relação entre a inflação corrente com a inflação esperada no futuro e com o custo marginal real, conforme Woodford (2003), e implica num relacionamento positivo entre o custo marginal real e a inflação e, sob certas condições, o hiato do produto é proporcional ao custo marginal.

A curva de Phillips é obtida resolvendo o problema de maximização das firmas. Este artigo assume a presença de competição monopolística no mercado de bens intermediários, num contínuo de produtos $Y_t(i)$ com elasticidade de substituição entre eles igual a $\varepsilon > 1$ e cujo índice de produto agregado é:

$$Y_t \equiv \left(\int_0^1 Y_t(i)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} di \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \quad (3.14)$$

A demanda pelo produto i produzido pela firma i com preços $P_t(i)$ é obtida pela expressão de Blanchard e Kyiotaki (1987):

$$Y_t(i) = \left[\frac{P_t(i)}{P_t} \right]^{-\varepsilon} Y_t \quad (3.15)$$

Onde $P_t(i)$ é o preço do produto da firma i e P_t é o índice de preços agregado definido como:

$$P_t \equiv \left(\int_0^1 P_t(i)^{1-\varepsilon} di \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \quad (3.16)$$

Segundo Calvo (1983), as firmas maximizam seu lucro, mas somente uma fração $(1 - \theta)$ maximiza o lucro no período t reajustando o preço do seu produto, ou seja, ajustam preço com a probabilidade $(1 - \theta)$ num dado período qualquer e independente do tempo decorrido desde o último ajustamento. Assim, uma fração θ não reajusta seu preço no período t e corrige seus preços pela inflação do período anterior. Essa fração que mantém seus preços inalterados gera uma persistência endógena $\tau \in [0,1]$. Logo, temos que:

$$P_t(i) = P_{t-1}(i) \left[\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \right]^\tau \quad (3.17)$$

Onde τ é o grau de indexação da inflação anterior situado entre 0 e 1.

Para obter a dinâmica de preços agregado utilizamos a definição de nível de preços:

$$P_t \equiv \left(\int_0^1 P_t(i)^{1-\varepsilon} di \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

Incluindo a precificação da firma i e considerando o fato de que todas as firmas que ajustam seus preços escolhem um preço idêntico $\bar{P}_t(i)$ com probabilidade $(1 - \theta)$, temos:

$$P_t = \left(\theta \left(P_{t-1} \left[\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \right]^\tau \right)^{(1-\varepsilon)} + (1-\theta) \bar{P}_t(i)^{1-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

$$P_t = \left((1-\theta) \bar{P}_t(i)^{1-\varepsilon} + \theta \left(P_{t-1} \left[\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \right]^\tau \right)^{(1-\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \quad (3.18)$$

Log-linearizando a equação (3.18):

$$P e^{\ln \frac{P_t}{P_t}} = \left((1-\theta) P^{1-\varepsilon} e^{\ln \left(\frac{\bar{P}_t(i)}{P_t} \right)^{1-\varepsilon}} + \theta \left(P e^{\ln \left(\frac{P_{t-1}}{P_t} \right)} \left[\frac{P e^{\ln \left(\frac{P_{t-1}}{P_t} \right)}}{P e^{\ln \left(\frac{P_{t-2}}{P_t} \right)}} \right]^\tau \right)^{(1-\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

$$\begin{aligned}
1 &\cong (1-\theta)(1+(1-\varepsilon)\hat{p}_t(i))+\theta(1-(1-\varepsilon)(\pi_t-\tau\pi_{t-1})) \\
1 &\cong 1+(1-\varepsilon)\hat{p}_t(i)-\theta-\theta(1-\varepsilon)\hat{p}_t(i)+\theta-\theta(1-\varepsilon)(\pi_t-\tau\pi_{t-1}) \\
0 &\cong (1-\varepsilon)\hat{p}_t(i)-\theta(1-\varepsilon)\hat{p}_t(i)-\theta(1-\varepsilon)(\pi_t-\tau\pi_{t-1}) \\
0 &\cong (1-\varepsilon)[\hat{p}_t(i)-\theta\hat{p}_t(i)-\theta(\pi_t-\tau\pi_{t-1})] \\
0 &\cong (1-\theta)\hat{p}_t(i)-\theta(\pi_t-\tau\pi_{t-1}) \\
\theta(\pi_t-\tau\pi_{t-1}) &\cong (1-\theta)\hat{p}_t(i)
\end{aligned}$$

No estado estacionário com inflação zero, uma aproximação log-linear para o índice de preços agregado gera:

$$\pi_t - \tau\pi_{t-1} = \frac{1-\theta}{\theta} \hat{p}_t(i) \quad (3.19)$$

$$\text{Onde } \hat{p}_t(i) = \log\left(\frac{\bar{P}_t(i)}{P_t}\right)$$

E problema da firma é escolher $\bar{P}_t(i)$ no seguinte problema:

$$\max_{P_t(i)} E_t \sum_{k=0}^{\infty} \theta^{T-t} M_{t,T} \Pi_T(i) \quad (3.20)$$

Onde $M_{t,T}$ é o fator de desconto nominal (núcleo de precificação com direitos contingentes, o fator é estocástico), $\Pi_T(i)$ é o lucro nominal da firma i no tempo T , que vai de t até ∞ . Alterando o índice temporal do fator de desconto estocástico temos que:

$$M_{t,T} = \psi^{T-t} \frac{U_C(C_T, N_T; F_T) P_t}{U_C(C_t, N_t; F_t) P_T} \quad (3.21)$$

Por outro lado, o lucro é igual à receita total deduzida dos custos totais:

$$\Pi_T(i) = RT(i) - CT(i) = P_T(i)Y_T(i) - CT(i) \quad (3.22)$$

Note que a firma i escolhe hoje (período t) o preço de seu produto $P_t(i)$ e, a partir daí, seu preço somente sofre atualização da inflação agregada da mesma forma que as firmas que não otimizam. Como o tempo t é o tempo hoje

e o período de maximização vai até ∞ , note que o subscrito maiúsculo T no índice agregado de preço e de produto é o indicativo de que eles podem mudar nos períodos futuros.

$$\Pi_T(i) = P_T(i)Y_T(i) - [CF + CV]$$

Com custo fixo igual a zero:

$$\Pi_T(i) = P_T(i)Y_T(i) - S_T(i)P_T Y_T(i)$$

Utilizando as equações (3.15) e (3.17), com $Y_t(i) = Y_T(i)$, e sabendo que

o custo marginal é definido por $S_T(i) = \frac{(W_T/P_T)}{(\partial Y_T(i)/\partial N_T)}$, temos que:

$$\begin{aligned} \Pi_T(i) &= \left(P_T(i) \left[\frac{P_{T-1}}{P_T} \right]^\tau \left[\frac{P_t(i)}{P_T} \left(\frac{P_{T-1}}{P_{t-1}} \right)^\tau \right]^{-\varepsilon} Y_T - S_T(i) P_T \left[\frac{P_t(i)}{P_T} \left(\frac{P_{T-1}}{P_{t-1}} \right)^\tau \right]^{-\varepsilon} Y_T \right) \\ \Pi_T(i) &= \left(P_t(i) \left[\frac{P_{T-1}}{P_{t-1}} \right]^\tau - S_T(i) P_T \right) \left[\frac{P_t(i)}{P_T} \left(\frac{P_{T-1}}{P_{t-1}} \right)^\tau \right]^{-\varepsilon} Y_T \end{aligned} \quad (3.23)$$

Utilizando as equações (3.17), (3.21) e (3.23), o problema da firma fica:

$$\max_{P_t(i)} E_t \sum_{k=0}^{\infty} (\theta\psi)^{T-t} M_{t,T} \left(P_t(i) \left[\frac{P_{T-1}}{P_{t-1}} \right]^\tau - S_T(i) P_T \right) \left[\frac{P_t(i)}{P_T} \left(\frac{P_{T-1}}{P_{t-1}} \right)^\tau \right]^{-\varepsilon} Y_T$$

As firmas maximizam sua função lucro em relação aos preços para obter a condição de primeira ordem:

$$E_t \sum_{T=t}^{\infty} (\theta\psi)^{T-t} \left[U_C(C_t; F_t) Y_T \bar{P}_t(i)^{-\varepsilon} P_T^\varepsilon \left(\frac{P_{T-1}}{P_{t-1}} \right)^{-\varepsilon} \left[\frac{\bar{P}_t(i)}{P_T} \left(\frac{P_{T-1}}{P_{t-1}} \right)^\tau - \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} S_T(i) \right] \right] = 0 \quad (3.24)$$

Log-linearizando a condição de primeira ordem em torno do estado estacionário e resolvendo para $\hat{p}_t(i)$:

$$\hat{p}_t(i) = (1 - \theta\psi) \sum_{T=t}^{\infty} (\theta\psi)^{T-t} E_t \hat{s}_T(i) + \sum_{T=t+1}^{\infty} (\theta\psi)^{T-t} E_t [\pi_T - \tau\pi_{T-1}] \quad (3.25)$$

Onde $\hat{s}_T(i)$ é o desvio percentual do estado estacionário do logaritmo do custo marginal real de produzir $Y_t(i)$. Assim, vamos retirar a indexação do custo marginal real.

Reescrevendo:

$$\hat{p}_t(i) = (1 - \theta\psi)\hat{s}_t + \theta\psi E_t[\pi_{t+1} - \tau\pi_t] + \left[(1 - \theta\psi) \sum_{T=t+1}^{\infty} (\theta\psi)^{T-t} E_t \hat{s}_T + \sum_{T=t+2}^{\infty} (\theta\psi)^{T-t} E_t [\pi_T - \tau\pi_{T-1}] \right]$$

$$\hat{p}_t(i) = (1 - \theta\psi)\hat{s}_t + \theta\psi E_t[\pi_{t+1} - \tau\pi_t] + \theta\psi \left[(1 - \theta\psi) \sum_{T=t+1}^{\infty} (\theta\psi)^{T-t-1} E_t \hat{s}_T + \sum_{T=t+2}^{\infty} (\theta\psi)^{T-t-1} E_t [\pi_T - \tau\pi_{T-1}] \right]$$

Como $E_t E_{t+1} \{x_{t+k}\} = E_t \{x_{t+k}\}$ para qualquer variável aleatória x_{t+k} , podemos reescrever a equação para:

$$\hat{p}_t(i) = (1 - \theta\psi)\hat{s}_t + \theta\psi E_t[\pi_{t+1} - \tau\pi_t] + \theta\psi \left[(1 - \theta\psi) \sum_{T=t+1}^{\infty} (\theta\psi)^{T-t-1} E_t E_{t+1} \hat{s}_T + \sum_{T=t+2}^{\infty} (\theta\psi)^{T-t-1} E_t E_{t+1} [\pi_T - \tau\pi_{T-1}] \right]$$

$$\hat{p}_t(i) = (1 - \theta\psi)\hat{s}_t + \theta\psi E_t[\pi_{t+1} - \tau\pi_t] + \theta\psi \left[(1 - \theta\psi) \sum_{T=t+1}^{\infty} (\theta\psi)^{T-t-1} E_{t+1} \hat{s}_T + \sum_{T=t+2}^{\infty} (\theta\psi)^{T-t-1} E_{t+1} [\pi_T - \tau\pi_{T-1}] \right]$$

$$\hat{p}_t(i) = (1 - \theta\psi)\hat{s}_t + \theta\psi E_t[\pi_{t+1} - \tau\pi_t] + \theta\psi E_t \hat{p}_{t+1}$$

Como $\pi_t - \tau\pi_{t-1} = \frac{1-\theta}{\theta} \hat{p}_t(i)$ implica que $\hat{p}_t(i) = \frac{\theta}{1-\theta} [\pi_t - \tau\pi_{t-1}]$, temos:

$$\frac{\theta}{1-\theta} [\pi_t - \tau\pi_{t-1}] = (1 - \theta\psi)\hat{s}_t + \theta\psi E_t[\pi_{t+1} - \tau\pi_t] + \theta\psi \frac{\theta}{1-\theta} E_t[\pi_{t+1} - \tau\pi_t]$$

$$[\pi_t - \tau\pi_{t-1}] = \frac{(1-\theta)(1-\theta\psi)}{\theta} \hat{s}_t + \frac{(1-\theta)}{\theta} \theta\psi E_t[\pi_{t+1} - \tau\pi_t] + \frac{(1-\theta)}{\theta} \theta\psi \frac{\theta}{1-\theta} E_t[\pi_{t+1} - \tau\pi_t]$$

$$[\pi_t - \tau\pi_{t-1}] = \frac{(1-\theta)(1-\theta\psi)}{\theta} \hat{s}_t + (1-\theta)\psi E_t[\pi_{t+1} - \tau\pi_t] + \theta\psi E_t[\pi_{t+1} - \tau\pi_t]$$

$$\pi_t - \tau\pi_{t-1} = \frac{(1-\theta)(1-\theta\psi)}{\theta} \hat{s}_t + \psi E_t[\pi_{t+1} - \tau\pi_t] \quad (3.26)$$

$$\pi_t + \tau\psi\pi_t = \frac{(1-\theta)(1-\theta\psi)}{\theta} \hat{s}_t + \psi E_t[\pi_{t+1}] + \tau\pi_{t-1}$$

Assim, temos:

$$\pi_t = \frac{\psi}{1+\psi\tau} E_t[\pi_{t+1}] + \frac{\tau}{1+\psi\tau} \pi_{t-1} + \frac{(1-\theta)(1-\theta\psi)}{\theta(1+\psi\tau)} \hat{s}_t$$

Logo, a equação de oferta agregada ou da curva de Phillips corresponde a:

$$\pi_t = \delta_1 E_t[\pi_{t+1}] + \delta_2 \pi_{t-1} + \varpi \hat{s}_t$$

Onde $\delta_1 = \frac{\psi}{1+\psi\tau}$, $\delta_2 = \frac{\tau}{1+\psi\tau}$ e $\varpi = \frac{(1-\theta)(1-\theta\psi)}{\theta(1+\psi\tau)}$. Logo, para o parâmetro

ψ próximo a unidade, temos que a soma $\delta_1 + \delta_2$ é aproximadamente igual a unidade e podemos fazer $\delta_1 = \delta$ e $\delta_2 = (1-\delta)$. Note que ϖ captura a relação de curto prazo entre a inflação e o custo marginal real e que $(1-\delta)$ caracteriza a persistência endógena da inflação.

$$\pi_t = \delta E_t[\pi_{t+1}] + (1-\delta)\pi_{t-1} + \varpi \hat{s}_t \quad (3.27)$$

Persistência endógena do produto natural e o hiato do produto

Para mostrar que o modelo produz uma dinâmica endógena para o produto natural Y_t^n e, conseqüentemente, para o hiato do produto, partimos da função de produção:

$$Y_t = \xi_t N_t \quad (3.28)$$

Onde ξ_t é o choque tecnológico independente da produção.

O custo médio é obtido pela razão entre o custo da mão-de-obra e a função de produção Y_t :

$$\frac{N_t \frac{W_t}{P_t}}{Y_t} = \frac{N_t \frac{W_t}{P_t}}{\xi_t N_t} = \frac{W_t}{\xi_t P_t}$$

Se o custo médio de produção for constante, então o custo marginal real S_t será constante e igual ao custo médio, e a demanda por trabalho pode ser simplificada para:

$$S_t = \xi_t^{-1} \frac{W_t}{P_t} \quad (3.29)$$

A condição de primeira ordem do problema de maximização das famílias fornece a oferta de trabalho:

$$\frac{W_t}{P_t} = - \frac{U_N(N_t)}{U_C(C_t; F_t)} \quad (3.30)$$

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{U_{N,t}}{U_{C,t}} \frac{1}{F_s}$$

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{N_t^\chi}{C_t^{-\sigma}} \frac{1}{F_s}$$

Substituindo $F_t = C_{t-1}^\eta G_t$, obtemos:

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{N_t^\chi}{C_t^{-\sigma} F_s} = \frac{N_t^\chi}{C_t^{-\sigma} C_{t-1}^\eta G_t}$$

$$\frac{W_t}{P_t} = N_t^\chi C_t^\sigma C_{t-1}^{-\eta} G_t^{-1} \quad (3.31)$$

Da equação (3.29) obtemos $\frac{W_t}{P_t} = S_t \xi_t$ e igualando com a demanda por trabalho descrita pela equação (3.31):

$$S_t \xi_t = N_t^\chi C_t^\sigma C_{t-1}^{-\eta} G_t^{-1}$$

$$S_t = \xi_t^{-1} N_t^\chi C_t^\sigma C_{t-1}^{-\eta} G_t^{-1} \quad (3.32)$$

Substituindo a condição de equilíbrio no mercado $Y_t = C_t$:

$$S_t = \xi_t^{-1} N_t^\chi Y_t^\sigma Y_{t-1}^{-\eta} G_t^{-1}$$

Podemos reescrever a equação (3.28) para $N_t = Y_t \xi_t^{-1}$ e substituir:

$$S_t = \xi_t^{-1} (Y_t \xi_t^{-1})^\chi Y_t^\sigma Y_{t-1}^{-\eta} G_t^{-1}$$

$$S_t = Y_t^{\chi+\sigma} Y_{t-1}^{-\eta} G_t^{-1} \xi_t^{-1-\chi} \quad (3.33)$$

Como estamos num mercado de competição monopolística, se normalizarmos a inovação, $G_t = \xi_t = 1$, então Y_t^n será o nível do produto que satisfaz ao custo marginal do tipo:

$$\begin{aligned} S_t^n &\equiv S_t(Y_t = Y_t^n; G_t = 1; \xi_t = 1) \\ S_t^n &= (Y_t^n)^{\chi+\sigma} (Y_{t-1}^n)^{-\eta} (1)^{-1} (1)^{-1-\chi} \\ S_t^n &= (Y_t^n)^{\chi+\sigma} (Y_{t-1}^n)^{-\eta} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Dado que estamos em competição monopolística, o nível de produto natural satisfaz o fato de que o custo marginal no estado estacionário é igual ao *markup* sobre o preço:

$$S_t^n = \frac{1}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

Substituindo a equação (3.34):

$$(Y_t^n)^{\chi+\sigma} (Y_{t-1}^n)^{-\eta} = \frac{1}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \quad (3.35)$$

Log-linearizando:

$$(\chi + \sigma)y_t^n - \eta y_{t-1}^n = \log(1) - \log\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\right)$$

$$(\chi + \sigma)y_t^n = \eta y_{t-1}^n - \log\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\right)$$

$$y_t^n = -\frac{1}{(\chi + \sigma)} \log\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\right) + \frac{\eta}{(\chi + \sigma)} y_{t-1}^n$$

$$\text{Fazendo } \alpha_{y^n} = -\frac{1}{(\chi + \sigma)} \log\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\right) \text{ e } \lambda = \frac{\eta}{(\chi + \sigma)}:$$

$$y_t^n = \alpha_{y^n} + \lambda y_{t-1}^n \quad (3.36)$$

O nível de produto natural pode estar sujeito a ocorrências inovações, isto é, um choque de markup $\varepsilon_{y^n,t}$ com desvio padrão σ_{y^n} e que altera o nível natural para:

$$y_t^n = \alpha_{y^n} + \lambda y_{t-1}^n + \varepsilon_{y^n,t} \quad (3.37)$$

Para chegar à curva de Phillips, torna-se necessário construir o desvio do custo marginal em relação ao custo marginal com preços flexíveis e competição perfeita. Com isso, o custo marginal real é dado por:

$$S_t - S_t^n = Y_t^{\chi+\sigma} Y_{t-1}^{-\eta} G_t^{-1} \xi_t^{-1-\chi} - (Y_t^n)^{\chi+\sigma} (Y_{t-1}^n)^{-\eta}$$

Fazendo $\hat{S}_t = S_t - S_t^n$ e log-linearizando:

$$\hat{s}_t = (\chi + \sigma)y_t - \eta y_{t-1} - g_t - (1 + \chi)\ln \xi_t - (\chi + \sigma)y_t^n - \eta y_{t-1}^n$$

$$\hat{s}_t = (\chi + \sigma)[y_t - y_t^n] - \eta[y_{t-1} - y_{t-1}^n] - g_t - (1 + \chi)\ln \xi_t$$

$$\hat{s}_t = (\chi + \sigma) \left[(y_t - y_t^n) - \frac{\eta}{(\chi + \sigma)} (y_{t-1} - y_{t-1}^n) \right] - g_t - (1 + \chi)\ln \xi_t$$

Fazendo $\lambda = \frac{\eta}{(\chi + \sigma)}$:

$$\hat{s}_t = (\chi + \sigma) \left[y_t - y_t^n - \lambda (y_{t-1} - y_{t-1}^n) \right] - g_t - (1 + \chi)\ln \xi_t \quad (3.38)$$

Para obter a equação de oferta agregada ou curva de Phillips é necessário de substituir a equação (3.38) na equação de custo marginal real dentro da equação (3.27) que descreve a curva de Phillips:

$$\pi_t = \delta_1 E_t[\pi_{t+1}] + \delta_2 \pi_{t-1} + \varpi \left[(\chi + \sigma) \left[y_t - y_t^n - \lambda (y_{t-1} - y_{t-1}^n) \right] - g_t - (1 + \chi)\ln \xi_t \right]$$

Fazendo $\kappa = \varpi(\sigma + \chi)$, $\varepsilon_{IS,t} = g_t$ e $\varepsilon_{AS,t} = -\varpi(1 + \chi)\ln \xi_t$, temos:

$$\pi_t = \delta_1 E_t[\pi_{t+1}] + \delta_2 \pi_{t-1} - \kappa \left[(y_t - y_t^n) - \lambda (y_{t-1} - y_{t-1}^n) \right] - \zeta \varepsilon_{IS,t} + \varepsilon_{AS,t}$$

$$\pi_t = \delta_1 E_t[\pi_{t+1}] + \delta_2 \pi_{t-1} - \kappa (y_t - y_t^n) - \lambda_{cp} (y_{t-1} - y_{t-1}^n) - \zeta \varepsilon_{IS,t} + \varepsilon_{AS,t}$$

Note que os choques entram na curva de Phillips e que $\zeta = \varpi(\sigma + \eta)$ porque $\kappa = \varpi(\sigma + \chi) \therefore \varpi = \frac{\kappa}{(\sigma + \chi)}$. O choque tecnológico da curva IS entra na equação AS (ou curva de Phillips) devido ao custo marginal depender dos choques de demanda agregada que são exógenos G_t . O parâmetro λ_{cp} captura o impacto do hiato entre o produto real e o produto natural sobre a inflação, que está em termos de parâmetros estruturais e corresponde à $\lambda_{cp} = \kappa\lambda$. Isso ocorre porque a estrutura adota considera uma defasagem na especificação dos hábitos externos e, por isso, temos esse resultado.

Entretanto, dependendo da especificação que adotamos para \hat{s}_t podemos estimar o modelo desconsiderando o impacto do choque tecnológico da curva IS e o hiato entre o produto real e o produto natural, obtendo a seguinte curva de Phillips:

$$\pi_t = \delta_1 E_t[\pi_{t+1}] + \delta_2 \pi_{t-1} - \kappa(y_t - y_t^n) + \varepsilon_{AS,t} \quad (3.39)$$

Apêndice 3.III – Regra de política monetária

A regra considerada é a tradicional de Clarida, Galí e Gertler (1999), logo, a autoridade monetária especifica uma meta de taxa de juros nominal que é sua meta de política monetária i_t^* , essa decisão é tomada com base numa regra de Taylor do tipo *forward-looking*:

$$i_t^* = \bar{i}_t + \beta(E_t \pi_{t+1} - \pi_t^*) + \gamma(y_t - y_t^n) \quad (3.40)$$

Onde π_t^* é a meta de inflação que varia no tempo e \bar{i}_t é o nível da taxa de juros nominal do estado estacionário, que ocorre quando $E_t \pi_{t+1} = \pi_t^*$ e $y_t = y_t^n$. Note que β mede a resposta de longo prazo da taxa de juros quanto à inflação esperada, isto é, mede a postura da autoridade monetária em relação à inflação.

Podemos assumir que \bar{i}_t é constante $\bar{i}_t = \bar{i}$, mas existem algumas especificações alternativas, onde \bar{i}_t varia no tempo. Por exemplo, pode-se escolher a hipótese alternativa $\bar{i}_t = \bar{r} + E_t \pi_{t+1}$, onde a taxa nominal é consistente com a hipótese de Fisher de que a taxa juros real da curva IS é constante se a inflação atinge a meta e se o produto atinge o nível potencial. Outra especificação $\bar{i}_t = \bar{r}_t + E_t \pi_{t+1}$, onde a taxa de juros real varia no tempo e especificada segundo Woodford (2003), $\bar{r}_t = \frac{1}{\phi} [\mu E_t y_{t+1}^n + (1 - \mu) y_{t-1}^n - y_t^n]$.

A equação $\bar{i}_t = \bar{r}_t + E_t \pi_{t+1}$ é equivalente a equação $\bar{i}_t = \bar{r} + E_t \pi_{t+1}$, exceto pela taxa desejada de juros \bar{r}_t variar no tempo. Bekaert, Cho e Moreno (2010) indicam que essas especificações alternativas podem ser desconsideradas, dado que geram resultados similares.

Conforme Woodford (2003), temos que:

$$\bar{r}_t = \frac{1}{\phi} [\mu E_t y_{t+1}^n + (1 - \mu) y_{t-1}^n - y_t^n] \quad (3.41)$$

A taxa de juros real coincide com a taxa natural de Wicksell, ou seja, com a taxa real que não exerce pressão monetária sobre o hiato do produto, e também sobre a inflação.

Clarida, Galí e Gertler (1999) mostraram que a autoridade monetária procura estabelecer a taxa de juros de curto prazo como média ponderada entre a taxa de juros defasada em um período e a meta da taxa de juros, com intuito de suavizar as taxas de juros:

$$i_t = \rho i_{t-1} + (1 - \rho) i_t^* + \varepsilon_{MP,t}$$

Onde ρ é o parâmetro de suavização e $\varepsilon_{MP,t}$ é o choque exógeno de política monetária, que é i.i.d. com desvio-padrão σ_{MP} .

A regra de política monetária é obtida substituindo a equação (3.40):

$$i_t = \rho i_{t-1} + (1 - \rho) \left[\bar{i}_t + \beta (E_t \pi_{t+1} - \pi_t^*) + \gamma (y_t - y_t^n) \right] + \varepsilon_{MP,t}$$

Fazendo $\alpha_{MP} = (1 - \rho) \bar{i}_t$, encontramos:

$$i_t = \alpha_{MP} + \rho i_{t-1} + (1 - \rho) \left[\beta (E_t \pi_{t+1} - \pi_t^*) + \gamma (y_t - y_t^n) \right] + \varepsilon_{MP,t} \quad (3.42)$$

Apêndice 3.IV – Meta de inflação, a estrutura a termo no modelo novo keynesiano e a solução de expectativas racionais

O processo estocástico para a meta de inflação ocorre com base nas expectativas de inflação de longo prazo do setor privado e de algumas informações exógenas.

Meta de Inflação

Inicialmente, acreditamos que a autoridade monetária estabelece a meta de inflação seguindo as expectativas de inflação de longo prazo do setor privado. Com isso, o valor esperado de longo prazo da inflação π_t^{LR} é definido como a média ponderada de todas as taxas de inflação futuras:

$$\pi_t^{LR} = (1-d) \sum_{j=0}^{\infty} d^j E_t \pi_{t+j}$$

Com $0 < d < 1$.

Note que a equação acima é a solução da equação:

$$\pi_t^{LR} = d E_t \pi_{t+1} + (1-d) \pi_t$$

Onde $0 \leq d \leq 1$.

Portanto, quando $d = 0$ temos uma igualdade entre a inflação de longo prazo e a inflação corrente $\pi_t^{LR} = \pi_t$ e quando $d = 1$ temos a inflação de longo prazo aproximando-se da inflação esperada $\pi_t^{LR} \rightarrow E_t \pi_{t+1}^{LR}$ e indica que a inflação esperada não está condicionada a inflação corrente.

Como adotamos a premissa de que a autoridade monetária determina sua meta de inflação ao redor da inflação futura π_t^{LR} , procurando suavizar as mudanças na meta, temos que:

$$\pi_t^* = \omega \pi_{t-1}^* + (1-\omega) \pi_t^{LR} + \varepsilon_{\pi^*,t} \quad (3.43)$$

Onde $\varepsilon_{\pi^*,t}$ é um erro aleatório que caracteriza uma mudança exógena na postura da política monetária em relação à taxa de inflação de longo prazo ou em relação à meta de inflação. Essa mudança de postura tem um comportamento independente e identicamente distribuído, com desvio-padrão igual a σ_{π^*} .

Substituindo a equação da inflação de longo prazo na equação de determinação da meta de inflação π_t^* e adiantando o período, temos:

$$\pi_t^* = \omega\pi_{t-1}^* + (1-\omega)[dE_t\pi_{t+1}^{LR} + (1-d)\pi_t] + \varepsilon_{\pi^*,t}$$

$$\pi_t^* = \omega\pi_{t-1}^* + (1-\omega)dE_t\pi_{t+1}^{LR} + (1-\omega)(1-d)\pi_t + \varepsilon_{\pi^*,t}$$

$$\pi_t^* = \omega\pi_{t-1}^* + (1-\omega)d[dE_t\pi_{t+2}^{LR} + (1-d)\pi_{t+1}] + (1-\omega)(1-d)\pi_t + \varepsilon_{\pi^*,t}$$

$$\pi_t^* = \omega\pi_{t-1}^* + (1-\omega)d^2E_t\pi_{t+2}^{LR} + d(1-\omega)(1-d)\pi_{t+1} + (1-\omega)(1-d)\pi_t + \varepsilon_{\pi^*,t}$$

$$\pi_t^* = \omega\pi_{t-1}^* + (1-\omega)d^3E_t\pi_{t+3}^{LR} + d^2(1-\omega)(1-d)\pi_{t+2} + d(1-\omega)(1-d)\pi_{t+1} + (1-\omega)(1-d)\pi_t + \varepsilon_{\pi^*,t}$$

$$\pi_t^* = \omega\pi_{t-1}^* + (1-\omega)d^{n+1}E_t\pi_{t+n+1}^{LR} + (1-\omega)(1-d)\left(\sum_{n=1}^{\infty} d^n \pi_{t+n}\right) + (1-\omega)(1-d)\pi_t + \varepsilon_{\pi^*,t}$$

Quando $n \rightarrow \infty$, temos que $(1-\omega)d^{n+1}E_t\pi_{t+n+1}^{LR} \rightarrow 0$, logo:

$$\pi_t^* = \omega\pi_{t-1}^* + (1-\omega)(1-d)\left(\sum_{n=1}^{\infty} d^n \pi_{t+n}\right) + (1-\omega)(1-d)\pi_t + \varepsilon_{\pi^*,t}$$

$$\pi_t^* = (1-\omega)(1-d)\left(\sum_{n=1}^{\infty} d^n \pi_{t+n}\right) + \omega\pi_{t-1}^* + (1-\omega)(1-d)\pi_t + \varepsilon_{\pi^*,t}$$

$$\pi_t^* = \frac{d}{1+d\omega}E_t\pi_{t+1}^* + \frac{\omega}{1+d\omega}\pi_{t-1}^* + \left[\frac{(1-\omega)(1-d)}{1+d\omega}\right]\pi_t + \varepsilon_{\pi^*,t}$$

$$\pi_t^* = \frac{d}{1+d\omega}E_t\pi_{t+1}^* + \frac{\omega}{1+d\omega}\pi_{t-1}^* + \left[\frac{1+d\omega-d-\omega}{1+d\omega}\right]\pi_t + \varepsilon_{\pi^*,t}$$

$$\pi_t^* = \frac{d}{1+d\omega}E_t\pi_{t+1}^* + \frac{\omega}{1+d\omega}\pi_{t-1}^* + \left[1 - \frac{d}{1+d\omega} - \frac{\omega}{1+d\omega}\right]\pi_t + \varepsilon_{\pi^*,t}$$

$$\pi_t^* = \varphi_1 E_t \pi_{t+1}^* + \varphi_2 \pi_{t-1}^* + \varphi_3 \pi_t + \varepsilon_{\pi^*,t} \quad (3.44)$$

$$\text{Onde } \varphi_1 = \frac{d}{1+d\omega}, \varphi_2 = \frac{\omega}{1+d\omega} \text{ e } \varphi_3 = 1 - \varphi_1 - \varphi_2.$$

Modelo Novo Keynesiano incluindo a estrutura a termo da inflação

O sistema de equações simultâneas que descreve o modelo novo keynesiano é formado pela equação (3.13) da curva IS, da equação (3.37) do produto natural com persistência endógena, da equação (3.39) da curva de Phillips, da equação (3.42) da regra de política monetária e da equação (3.44) que representa a meta de inflação.

Com as três equações padrão utilizadas no modelo novo keynesiano e a inclusão da equação da persistência do produto natural e do processo estocástico da estrutura a termo da taxa de inflação, nosso modelo passa a ser composto por cinco equações, sendo três variáveis observáveis (inflação, produto e taxa nominal de juros) e duas variáveis não observáveis (produto natural e meta de inflação desejada):

$$\begin{aligned} \pi_t &= \delta_1 E_t \pi_{t+1} + \delta_2 \pi_{t-1} + \kappa(y_t - y_t^n) + \varepsilon_{AS,t} \\ y_t &= \alpha_{IS} + \mu E_t y_{t+1} + (1 - \mu)y_{t-1} - \phi(i_t - E_t \pi_{t+1}) + \varepsilon_{IS,t} \\ i_t &= \alpha_{MP} + \rho i_{t-1} + (1 - \rho) \left[\beta(E_t \pi_{t+1} - \pi_t^*) + \gamma(y_t - y_t^n) \right] + \varepsilon_{MP,t} \\ y_t^n &= \alpha_{y^n} + \lambda y_{t-1}^n + \varepsilon_{y^n,t} \\ \pi_t^* &= \varphi_1 E_t \pi_{t+1}^* + \varphi_2 \pi_{t-1}^* + \varphi_3 \pi_t + \varepsilon_{\pi^*,t} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Colocando as variáveis endógenas correntes no lado esquerdo e as variáveis adiantadas e defasadas ao lado direito, temos:

$$\begin{aligned} \pi_t - \kappa y_t + \kappa \lambda y_t^n &= \delta_1 E_t \pi_{t+1} + \delta_2 \pi_{t-1} + \varepsilon_{AS,t} \\ y_t + \phi i_t &= \alpha_{IS} + \phi E_t \pi_{t+1} + \mu E_t y_{t+1} + (1 - \mu)y_{t-1} + \varepsilon_{IS,t} \end{aligned}$$

$$-\gamma(1-\rho)y_t + i_t + \gamma(1-\rho)y_t^n + \beta(1-\rho)\pi_t^* = \alpha_{MP} + \beta(1-\rho)E_t\pi_{t+1} + \alpha_{i,t-1} + \varepsilon_{MP,t}$$

$$y_t^n = \alpha_{y^n} + \lambda y_{t-1}^n + \varepsilon_{y^n,t}$$

$$\varphi_3\pi_t + \pi_t^* = \varphi_1 E_t\pi_{t+1}^* + \varphi_2\pi_{t-1}^* + \varepsilon_{\pi^*,t}$$

Esse sistema pode ser descrito na forma matricial como:

$$Bx_t = \alpha + AE_tx_{t+1} + Jx_{t-1} + C\varepsilon_t$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -\kappa & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \phi & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma(1-\rho) & 1 & \gamma(1-\rho) & \beta(1-\rho) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \varphi_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_{IS} \\ \alpha_{MP} \\ \alpha_{y^n} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \beta(1-\rho) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_1 \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} \delta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Onde $x_t = (\pi_t \quad y_t \quad i_t \quad y_t^n \quad \pi_t^*)'$, B , A e J são as matrizes com os coeficientes dos parâmetros da forma estrutural, α é um vetor de constantes e $\varepsilon_t = (\varepsilon_{AS,t} \quad \varepsilon_{IS,t} \quad \varepsilon_{MP,t} \quad \varepsilon_{y^n,t} \quad \varepsilon_{\pi^*,t})'$ é um vetor de termos distúrbios na forma estrutural. O vetor de distúrbios adota a premissa de que $\varepsilon_t \sim (0, D)$, onde o vetor 5×1 com zeros com as médias dos erros e D corresponde à matriz diagonal contendo as variâncias dos erros.

No caso desse sistema de equações simultâneas possuírem todas as suas equações identificadas, seja com restrições no coeficiente dos parâmetros e/ou a matriz de variância ou covariância, então será possível estimar os coeficientes do sistema na forma reduzida e, posteriormente, encontrar os coeficientes da forma estrutural.

Encontrando a forma reduzida por expectativas racionais

Note que assumindo a premissa de expectativas racionais e sem informação assimétrica entre os agentes econômicos e a autoridade de política monetária:

$$x_{t+1} = E_t x_{t+1} + v_{t+1} \quad (3.46)$$

Onde v_{t+1} é o vetor de erros com expectativas racionais.

Além do problema de identificação do sistema, a abordagem de coeficientes indeterminados mostra que uma solução estável do sistema (3.45) pode ser escrito na forma reduzida.

$$x_{t+1} = c + \Omega x_t + \Gamma \varepsilon_{t+1} \quad (3.47)$$

Onde c é um vetor de constantes, Ω e Γ são matrizes 5×5 . Para mostrarmos que a equação (3.47) é uma solução na forma reduzida, vamos substituir a equação (3.47) na equação (3.45) e aplicar expectativas racionais ($E_t v_{t+1} = 0$), temos:

$$Bx_t = \alpha + AE_t x_{t+1} + Jx_{t-1} + C\varepsilon_t$$

$$Bx_t = \alpha + AE_t [c + \Omega x_t + \Gamma \varepsilon_{t+1}] + Jx_{t-1} + C\varepsilon_t$$

$$(B - A\Omega)x_t = \alpha + Ac + Jx_{t-1} + C\varepsilon_t$$

Se existir independência linear entre as cinco equações, então a matriz $(B - A\Omega)$ é não singular. Pré-multiplicando a equação acima por $(B - A\Omega)^{-1}$ em ambos os lados:

$$(B - A\Omega)^{-1}(B - A\Omega)x_t = (B - A\Omega)^{-1}(\alpha + Ac + Jx_{t-1} + C\varepsilon_t)$$

$$x_t = (B - A\Omega)^{-1}\alpha + (B - A\Omega)^{-1}Ac + (B - A\Omega)^{-1}Jx_{t-1} + (B - A\Omega)^{-1}C\varepsilon_t \quad (3.48)$$

Definindo:

$$\Omega = (B - A\Omega)^{-1}J \quad (3.49)$$

$$\Gamma = (B - A\Omega)^{-1}C \quad (3.50)$$

E, ainda:

$$c = (B - A\Omega)^{-1} \alpha + (B - A\Omega)^{-1} Ac$$

$$c - (B - A\Omega)^{-1} Ac = (B - A\Omega)^{-1} \alpha$$

$$c [I - (B - A\Omega)^{-1} A] = (B - A\Omega)^{-1} \alpha$$

$$c = (B - A\Omega)^{-1} \alpha [I - (B - A\Omega)^{-1} A]^{-1}$$

$$c = [B - A\Omega - A]^{-1} \alpha \quad (3.51)$$

Assim, chegamos à equação:

$$x_t = c + \Omega x_{t-1} + \Gamma \varepsilon_t$$

E encontramos a equação (3.52) como sendo a equação matricial que representa a forma reduzida do sistema de equações simultâneas do modelo novo keynesiano:

$$x_t = c + \Omega x_{t-1} + v_t \quad (3.52)$$

Portanto, a equação (3.47) com Ω , Γ e c que satisfaz as equações (3.49), (3.50) e (3.51), é uma das possíveis soluções da equação (3.45).

Note que essa forma reduzida corresponde a um simples modelo de VAR de primeira ordem com restrições não lineares nos parâmetros,

Pelas equações (3.49) e (3.50), existe uma relação linear entre Ω e Γ dada por intermédio de J e C , pois igualando $(B - A\Omega) = \Omega^{-1}J$ e $(B - A\Omega) = \Gamma^{-1}C$, encontramos:

$$\Omega = \Gamma C^{-1}J$$

Temos, ainda, uma relação entre os erros estruturais ε_t e os erros na forma reduzida com expectativas racionais v_t , por intermédio de Γ :

$$v_{t+1} = \Gamma \varepsilon_{t+1}$$

Encontrando a solução com expectativas racionais

Para obtermos a solução do sistema de equações do modelo novo keynesiano torna-se necessário encontrar a matriz Ω . Inicialmente, vamos pré-multiplicar a equação (3.49) por $(B - A\Omega)$:

$$(B - A\Omega)\Omega = (B - A\Omega)(B - A\Omega)^{-1}J$$

Obtemos a seguinte equação matricial:

$$A\Omega^2 - B\Omega + J = 0 \tag{3.53}$$

Se encontrarmos Ω , então Γ , J e C são obtidos diretamente pelas equações (3.49), (3.50) e (3.51).

Para encontrar Ω temos que resolver a equação (3.53) com expectativas racionais, encontrando uma solução com valores reais e estacionária.

Como Ω é uma função não linear dos parâmetros estruturais B , A e J , existe a possibilidade de não encontrarmos uma solução estacionária ou múltiplas soluções estacionárias. Além disso, existe a possibilidade de encontrarmos valores complexos. Outro problema para solucionarmos a equação (3.53) deve-se à matriz A ser uma matriz singular (determinante da matriz A é igual a zero).

Dentre os métodos a serem escolhidos para solucionarmos o problema, dois podem ser adotados de forma conjunta. O primeiro é a decomposição generalizada Schur (método QZ) para solução de modelos de expectativas racionais, conforme Uhlig (1997), Cho e Moreno (2003) e Bekaert, Cho e Moreno (2010). Esse método é útil para ser aplicado numa solução sem bolha, com valor real e estacionário, e quando a matriz A é singular.

Defina duas matrizes de dimensão $2n \times 2n$:

$$A_{ER} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_{ER} = \begin{bmatrix} B & -J \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

Onde n é o número de variáveis endógenas. O conjunto de todas as matrizes da forma $B_{ER} - \lambda A_{ER}$, com λ igual ao autovalor da matriz. Defina Λ como a matriz diagonal cujos elementos diagonais são autovalores e S é a matriz cujas colunas correspondem aos autovalores, tais que, $B_{ER}S = A_{ER}S\Lambda$.

Assim, temos uma ou várias submatrizes $n \times n$, denominadas S_{ij} e Λ_{ij} , das matrizes S e Λ que podem satisfazer a equação (3.53):

$$\Omega = S_{21}\Lambda_{11}S_{21}^{-1}$$

A caracterização da estacionariedade, unicidade e valores reais ocorre da seguinte forma:

- (a) Estacionariedade: se todos os autovalores de Λ_{11} são menores do que a unidade em valor absoluto, então Ω é estacionária.
- (b) Unicidade: se o número de autovalores for o mesmo número de variáveis predeterminadas (variáveis endógenas defasadas que são cinco) existe uma única solução, se existem mais do que cinco autovalores generalizados estáveis teremos múltiplas soluções e se existir menos do que cinco autovalores estáveis não teremos uma solução estável.
- (c) Valores reais: Ω será real se todo autovalor em Λ_{11} for um número real ou se para todo autovalor complexo em Λ_{11} seu conjugado complexo também for um autovalor em Λ_{11} .

Logo, percebe-se que o método QZ possibilita determinar se existe uma solução real e estacionária dentro das classes das soluções livres de bolhas, mas não esclarece qual deve ser a solução escolhida se estivermos no caso com múltiplas soluções.

Portanto, é necessário utilizarmos o segundo método para encontrarmos a solução estacionária no caso de múltiplas soluções. Nesse contexto, a função do método recursivo é fornecer a solução estacionária se ela existir, mas não diz se a solução é ou não é única.

Resolvendo o modelo recursivamente podemos usar um critério de seleção que é livre de bolha e com valores reais por construção. O objetivo é construir seqüência de matrizes convergentes $\{c_k, \Omega_k, \Gamma_k, k = 1, 2, 3, \dots\}$ tal que:

$$\bar{x}_t = c_k E_t \bar{x}_{t+k+1} + \Omega_k \bar{x}_{t-1} + \Gamma_k \varepsilon_t \quad (3.54)$$

Onde $\bar{x}_t = x_t - E x_t$. Para encontrarmos a solução recursiva, primeiro, checamos se $\Omega^* \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k$ e $\Gamma^* \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma_k$ existem e se Ω^* é a mesma solução dentre as soluções obtidas pelo método QZ. Para o limite da equação (3.54) ser uma solução livre de bolhas, torna-se necessário que o $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k E_t \bar{x}_{t+k+1}$ seja um vetor de zeros e a solução tenha a seguinte forma:

$$\bar{x}_t = \Omega^* \bar{x}_{t-1} + \Gamma^* \varepsilon_t \quad (3.55)$$

Em seguida, temos que checar se $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k E_t \bar{x}_{t+k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k^* = 0$, utilizando a equação (3.55).

Portanto, percebemos que o método QZ e o método recursivo são métodos complementares a ser utilizado conjuntamente como um critério de escolha da solução economicamente relevante.

Apêndice 3.V – Estrutura a termo das taxas de juros e a formação do spread do termo

Esta seção tem o intuito de procurar esclarecer como é feita a precificação dos títulos e a definição do spread de vencimento (ou do termo) da estrutura a termo das taxas de juros.

Precificação dos títulos e a estrutura a termo afim das taxas de juros

No modelo de estrutura a termo decorrente do modelo macroeconômico, a derivação a partir da curva IS assume uma estrutura de preferências em particular, onde o núcleo de precificação é dado pela taxa marginal de substituição do consumo intertemporal descrita na equação (3.11), isto é:

$$m_{t+1} = \ln \psi - \sigma v_{t+1} + (\sigma + \eta)y_t - \eta v_{t-1} + (g_{t+1} - g_t) - \pi_{t+1}$$

Para estabelecer a dinâmica da variável-estado, que está implícita no modelo novo keynesiano da equação (3.52), é necessário representá-la pela classe das funções afim e assumir que o choque é normalmente distribuído $\varepsilon_t \sim N(0, D_{t-1})$:

$$m_{t+1} = c_m + A_m' x_t + A_0' v_{t+1} \quad (3.56)$$

Onde c_m são elementos em c correspondendo a log-linearização de m_{t+1} ao redor do estado estacionário determinístico. A_m e Λ_0' são os vetores coluna correspondente de Ω e Γ e são funções dos parâmetros estruturais do modelo DSGE.

Então, sabemos que o processo do núcleo de precificação, M_{t+1} , determina os preços de todos os títulos de tal forma que:

$$E_t [M_{t+1} RT_{t+1}] = 1$$

Na hipótese de mercados completos e de ausência de oportunidades de arbitragem que corresponde a $M_{t+1} > 0$ (conforme Harrison e Kreps, 1979).

Em particular, o preço e o retorno de um título sem cupom com vencimento em n :

$$PT_{n,t} = E_t M_{t+1} PT_{n-1,t+1} \quad (3.57)$$

$$RT_{t+1} = \frac{PT_{n-1,t+1}}{PT_{n,t}} \quad (3.58)$$

Agora, tomando o logaritmo na equação (3.57), obtemos:

$$pt_{n,t} = \log(E_t M_{t+1}) + pt_{n-1,t+1}$$

$$pt_{n,t} = E_t [m_{t+1}] + \frac{1}{2} \text{var}_t [m_{t+1}] + pt_{n-1,t+1} \quad (3.59)$$

Onde essa relação ocorre se a distribuição condicional dos preços do título $pt_{n-1,t+1}$ e o fator de desconto m_{t+1} são variáveis log-normais conjuntas.

Substituindo a equação (3.56) na equação (3.59) para $n = 1$ e definindo $PT_{0,t+1} = 1$, o preço do título com vencimento no período 1 será dado por⁷:

$$-i_t = pt_{1,t} = c_m + A'_m x_t + \frac{1}{2} A'_0 q A_0 \quad (3.60)$$

O último termo é quadrático e estaria ausente num modelo log-linear estrito, sendo sua função capturar a compensação ao risco para os agentes.

Se o fator de desconto estocástico for do tipo afim como descrito na equação (3.56), então a equação de precificação do logaritmo dos títulos também ser uma função afim.

Para provar que a equação de precificação do logaritmo dos títulos é uma função afim e, conseqüentemente, o fator de desconto estocástico também assume a forma afim, vamos começar com o caso $n = 1$ e considerando a premissa de $PT_{0,t+1} = 1$, temos:

$$PT_{1,t} = E_t M_{t+1} + PT_{0,t+1}$$

$$PT_{1,t} = E_t M_{t+1} + 1$$

Aplicando o logaritmo em $PT_{1,t}$:

$$pt_{1,t} = \log(E_t M_{t+1})$$

$$pt_{1,t} = E_t(m_{t+1}) + \frac{1}{2} Var_t(m_{t+1})$$

Substituindo a equação (3.56) e considerando que a média do termo erro e a variância de uma constante são iguais a zero:

$$pt_{1,t} = E_t(c_m + \Lambda'_m x_t + \Lambda'_0 v_{t+1}) + \frac{1}{2} Var_t(c_m + \Lambda'_m x_t + \Lambda'_0 v_{t+1})$$

$$pt_{1,t} = c_m + \Lambda'_m x_t + \frac{1}{2} Var_t(\Lambda'_0 v_{t+1})$$

Como a variância de uma variável aleatória é igual ao quadrado da mesma:

$$pt_{1,t} = c_m + \Lambda'_m x_t + \frac{1}{2} \Lambda'_0 v_{t+1} v'_{t+1} \Lambda_0$$

$$pt_{1,t} = c_m + \Lambda'_m x_t + \frac{1}{2} \Lambda'_0 q \Lambda_0$$

Onde $q = E(v_{t+1} v'_{t+1})$ e o termo $\Lambda'_0 q \Lambda_0$ é um termo quadrático que representa a compensação por tomar risco que é exigida pelos agentes. Note que o preço de mercado do risco é dado pelos elementos de Λ_0 . Assim, percebe-se que o modelo introduz uma heterocedasticidade na forma de raiz quadrada, segundo Cox, Ingersoll e Ross (1985).

$$pt_{1,t} = c_m + \frac{1}{2} A'_0 q A_0 + A'_m x_t \quad (3.61)$$

Fazendo $a_1 = c_m + \frac{1}{2} A'_0 q A_0$ e $b'_1 = A'_m$, temos:

$$pt_{1,t} = a_1 + b'_1 x_t$$

⁷ A prova de detalhada da precificação dos títulos e o formato de função afim esta discriminada no final desta seção.

Assim, percebemos que de $pt_{1,t} = \log(E_t M_{t+1})$ temos $pt_{1,t+1} = \log(E_t M_{t+2})$.

Para $n = 2$, a equação (3.57) corresponde a:

$$PT_{2,t} = E_t M_{t+1} PT_{1,t+1}$$

Substituindo $pt_{1,t+1} = \log(E_t M_{t+2})$ do caso em que $n = 1$:

$$pt_{2,t} = \log(E_t M_{t+1} E_t M_{t+2})$$

Calculando o logaritmo:

$$pt_{2,t} = E_t(m_{t+1}) + \frac{1}{2} Var_t(m_{t+1}) + E_t(E_{t+1} m_{t+2}) + \frac{1}{2} Var_t(E_{t+1} m_{t+2}) + cov(m_{t+1}, E_{t+1} m_{t+2})$$

Substituindo a equação (3.56):

$$pt_{2,t} = c_m + A'_m x_t + \frac{1}{2} \Lambda'_0 q \Lambda_0 + c_m + A'_m \mu + A'_m A x_{t-1} + \frac{1}{2} A'_m B q B' A_m + \Lambda'_0 q B \Lambda_m$$

Podemos identificar a_2 e b_2 como sendo:

$$a_2 = c_m + \frac{1}{2} \Lambda'_0 q \Lambda_0 + c_m + A'_m \mu + \frac{1}{2} A'_m B q B' A_m + \Lambda'_0 q B \Lambda_m$$

$$b_2 = A'_m + A'_m A$$

Logo, a equação de precificação para $n = 2$ é:

$$pt_{2,t} = a_2 + b'_2 x_t$$

E podemos, ainda, expressar a_2 e b_2 em termos de a_1 e b_1 como:

$$a_2 = a_1 + c_m + b_1 \mu + \frac{1}{2} b'_1 B q B' b_1 + \Lambda'_0 q B b_1$$

$$b_2 = b'_1 + b'_1 A$$

Portanto, a equação de precificação de títulos com vencimento n é uma função afim que possui o formato de função afim que se pretendia provar:

$$pt_{n,t} = a_n + b'_n x_t \quad (3.62)$$

Além disso, percebe-se que a equação de precificação depende das principais variáveis de condução das políticas macroeconômicas:

$$pt_{n,t} = a_n + b_n' \begin{bmatrix} \pi_t \\ y_t \\ i_t \\ y_t^n \\ \pi_t^* \end{bmatrix}$$

Onde $pt_{n,t}$ é o preço no período t de um título cujo vencimento ocorrerá em $t+n$.

Portanto, a condição de não arbitragem é mantida por construção e o modelo log-normal implica que a precificação do título de um período é:

$$E_t[m_{t+1}] + \frac{1}{2}Var_t[m_{t+1}] = -i_t$$

O núcleo de precificação pode ser escrito como:

$$m_{t+1} = -i_t - \frac{1}{2}\Lambda_t'D\Lambda_t - \Lambda_t'\varepsilon_{t+1}$$

$\Lambda_t = \Lambda_0 + \Lambda_1 x_t$, Λ_0 é um vetor 5×1 e Λ_1 uma matriz 5×5 .

Onde o vetor Λ_t é formado pelos parâmetros estruturais do modelo DSGE obtidos na taxa marginal de substituição intertemporal das famílias. Como σ e η são os fatores de aversão ao risco e de suavização do consumo constantes da curva IS, onde $\mu = \frac{\sigma}{\sigma + \eta}$, tem-se que:

$$\Lambda_t = [1 \quad \sigma \quad 0 \quad 0 \quad 0] \Gamma - [0 \quad (\sigma + \eta) \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Como provado anteriormente, a equação de precificação dos títulos é uma função afim do tipo:

$$pt_{n,t} = a_n + b_n' x_t$$

Onde, por log-normalidade:

$$pt_{n,t} = E_t(m_{t+1} + pt_{n-1,t+1}) + \frac{1}{2}Var_t(m_{t+1} + pt_{n-1,t+1})$$

E pela indução verificada nos argumentos anteriores:

$$a_n = a_{n-1} + b'_{n-1}c + \frac{1}{2}b'_{n-1}\Gamma D\Gamma' b_{n-1} - \Lambda' D\Gamma' b_{n-1}$$

$$b'_n = -e'_3 + b'_{n-1}\Omega$$

Dai e Singleton (2002) mostraram que $D_t = D$ é um vetor 1×5 que representa o preço gaussiano do modelo de risco que não varia no tempo.

Um modelo alternativo assume que $\Lambda_t = \Lambda$ e $\varepsilon_t \sim N(0, D_{t-1})$ com $D_t = D_0 + D_1 \text{diag}(x_t)$, onde a $\text{diag}(x_t)$ é a matriz diagonal com vetor x_t na sua diagonal. A introdução da heterocedasticidade na forma de raiz quadrada é muito utilizada na literatura financeira, conforme Cox, Ingersoll e Ross (1985).

Adicionalmente, ainda temos outro modelo que assume $\Lambda_t = \Lambda_0$ e $D_t = D$, trata-se do modelo denominado homocedástico.

Spread da estrutura a termo de taxas de juros

O logaritmo do preço do título é conhecido e corresponde ao logaritmo de seu valor de face (*zero coupon bond* tem preço conhecido com certeza), considerando o retorno desse título para n períodos à frente é possível fazer uma relação entre a precificação do títulos e a curva de rendimento (*yield curve* ou estrutura a termo de taxas de juros) mensurada pelo *spread* do termo:

$$\log(RT_{t+1}) = \frac{-\log(PT_{n,t})}{n}$$

Substituindo a equação (3.62) temos o logaritmo do retorno do título (yield curve):

$$\log(RT_{t+1}) = \frac{-a_n - b'_n x_t}{n}$$

$$\log(RT_{t+1}) = -\frac{a_n}{n} - \frac{b'_n}{n} x_t$$

O *spread* da estrutura a termo corresponde a diferença entre a taxa de juros (ou retorno) de um título com vencimento para n períodos à frente (longo prazo) e a taxa de juros de curto prazo:

$$sp_{n,t} = \log(RT_{n,t}) - \log(RT_{1,t})$$

$$sp_{n,t} = -\frac{a_n}{n} - \left(\frac{b_n}{n} + \varepsilon_3 \right)' x_t \quad (3.62)$$

Onde o *spread* $sp_{n,t} \equiv \log(RT_{n,t}) - i_t$ é o *spread* entre o rendimento com n períodos e a taxa de juros de curto prazo.

Portanto, o modelo fornece uma dinâmica conjunta das variáveis macroeconômicas e dos spreads dos termos, representada pelo sistema:

$$x_t = c + \Omega x_{t-1} + \Gamma \varepsilon_t \quad (3.63)$$

$$z_t = A_z + B_z x_t \quad (3.64)$$

Onde n_1 e n_2 referem-se a dois diferentes vencimentos para os rendimentos para *spread* dos títulos de longo prazo e:

$$z_t = \begin{bmatrix} \pi_t \\ y_t \\ i_t \\ sp_{n1,t} \\ sp_{n2,t} \end{bmatrix}, \quad A_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{a_{n1}}{n_1} \\ -\frac{a_{n2}}{n_2} \end{bmatrix}, \quad B_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{b_{n1}}{n_1} + \varepsilon_3 \right) \\ -\left(\frac{b_{n2}}{n_2} + \varepsilon_3 \right) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x_t = \begin{bmatrix} \pi_t \\ y_t \\ i_t \\ y_t^n \\ \pi_t^* \end{bmatrix}$$

Note que da equação (3.64) temos $x_t = B_z^{-1}(z_t - A_z)$ e podemos escrever a equação (3.63) como:

$$B_z^{-1}(z_t - A_z) = c + \Omega B_z^{-1}(z_{t-1} - A_z) + \Gamma \varepsilon_t$$

$$z_t = B_z c + A_z + B_z \Omega B_z^{-1}(z_{t-1} - A_z) + \Gamma \varepsilon_t$$

Encontramos que:

$$z_t = a_z + \Omega_z z_{t-1} + \Gamma_z \varepsilon_t \quad (3.65)$$

Onde:

$$\Omega_z = B_z \Omega B_z^{-1}$$

$$\Gamma_z = B_z \Gamma$$

$$a_z = B_z c + A_z - B_z \Omega B_z^{-1} A_z$$

Apêndice 3.VI – Relação entre os parâmetros estruturais do modelo DSGE com ETTJ

A relação existente entre os parâmetros estruturais do modelo DSGE permite estimar alguns parâmetros e deixar que os demais parâmetros estruturais sejam obtidos de forma implícita.

Para facilitar o entendimento das relações existentes, resumimos abaixo a relação entre todos os parâmetros, destacando a escolha na curva IS entre estimar os parâmetros μ e ϕ ou estimar os parâmetros σ e η .

Na Curva IS:

| | | |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| μ | μ = resposta do produto corrente às mudanças no produto futuro | $\mu = \sigma / (\sigma + \eta)$ |
| $1 - \mu$ | $(1 - \mu)$ = resposta do produto corrente às mudanças no produto passado | $(1 - \mu) = \eta / (\sigma + \eta)$ |
| ϕ | ϕ = resposta do produto às mudanças na taxa real de juros | $\phi = 1 / (\sigma + \eta)$ |
| σ | σ = coeficiente de aversão ao risco (inverso da elasticidade intertemporal do consumo) | $\sigma = \mu / \phi$ |
| η | η = dependência do hábito externo sobre consumo passado | $\eta = h / (\sigma - 1) = (1 - \mu) / \phi$ |
| h | h = persistência do hábito em Fuhrer (2000) | $h = (1 - \mu) / (\mu - \phi)$ |

Na Curva de Phillips:

| | | |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| δ | δ = resposta da inflação corrente às mudanças na inflação futura | $\delta = \delta_1 = \psi / (1 + \psi\tau)$ |
| $1 - \delta$ | $(1 - \delta)$ = resposta da inflação corrente às mudanças na inflação passada | $(1 - \delta) = \tau / (1 + \psi\tau)$ |
| κ | κ = resposta da inflação corrente às mudanças no hiato do produto | $\kappa = \varpi (\sigma + \chi)$ |
| χ | χ = inverso da elasticidade intertemporal da oferta de trabalho | $\chi = [1 - \mu(1 + \lambda)] / \lambda\phi$ |
| τ | τ = grau de indexação da inflação anterior, situado entre 0 e 1, conforme Calvo (1983) | $\tau = (1 / \delta) - (1 / 0.99)$ |
| θ | θ = fração que não reajusta seu preço em t e corrige pela inflação em $t-1$, em Calvo (1983) | |
| ϖ | ϖ = captura a relação de curto prazo entre a inflação e o custo marginal real | $\varpi = \kappa / (\sigma + \chi)$ |
| ζ | ζ = impacto do erro da curva IS que afeta a curva de Phillips | $\zeta = \varpi (\sigma + \eta) = \lambda\kappa / (1 - \mu)$ |
| | λ_{cp} = captura a relação entre a inflação e o hiato do produto | $\lambda_{cp} = \lambda \kappa$ |

Na Regra de Política Monetária:

| | |
|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ρ | ρ = parâmetro de suavização da taxa nominal de juros passada |
| β_π | $\beta_\pi = 1 + \beta$ = resposta da meta de inflação às mudanças no desvio da inflação futura |
| γ | γ = resposta da meta de inflação às mudanças no hiato do produto |

Na Trajetória do Produto Natural:

| | | |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| ρ_n | λ = persistência endógena, impacto no produto natural corrente do produto natural passado | $\lambda = \eta / (\chi + \sigma)$ |
| ϑ | ϑ = relação entre persistência endógena do produto natural sobre resposta produto real corrente às mudanças no produto real passado | $\vartheta = \lambda / (1 - \mu)$ |

Na Meta de Inflação:

| | | |
|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| ψ_p ou ψ_s | d = pesos dos termos futuros de inflação na apuração da inflação de longo prazo | |
| ρ_{π^*} | ω = peso da inflação passada na suavização que define a meta de inflação | |
| φ_1 | φ_1 = resposta da meta inflação futura às mudanças na meta corrente | $\varphi_2 = \omega / (1 + d\omega)$ |
| φ_2 | φ_2 = resposta da meta inflação passada às mudanças na meta corrente | $\varphi_1 = d / (1 + d\omega)$ |
| φ_3 | φ_3 = resposta da inflação corrente às mudanças na meta corrente | $\varphi_3 = 1 - \varphi_1 - \varphi_2$ |

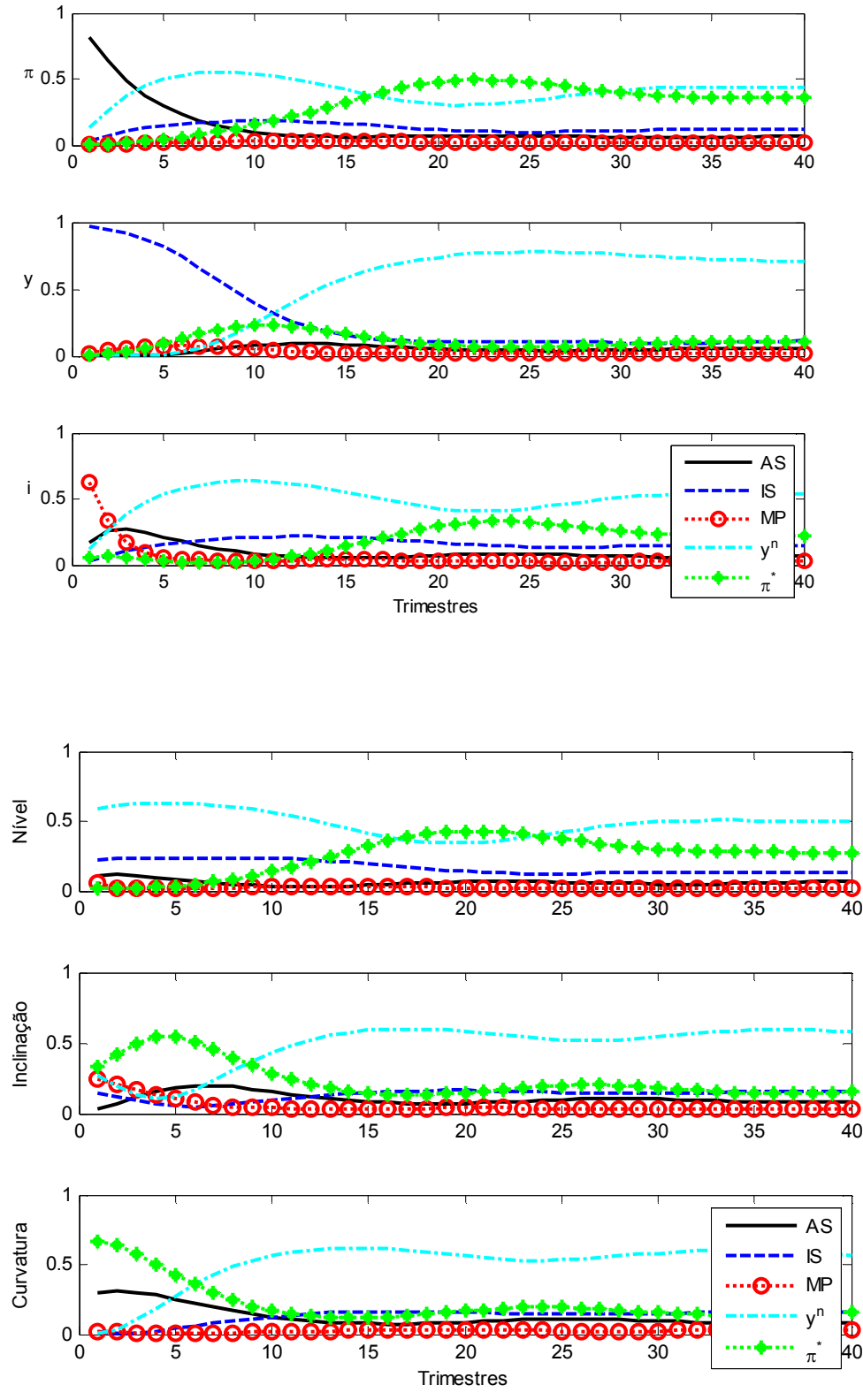
Apêndice 3.VII – Outros resultados alterando as opções de seleção

4.VII.1 – Estimações e decomposição da variância, considerando o PIB do IBGE:

| | PIB yn mu e phy 1 e 5 anos psi em 0.99 1-0-15-0 | | PIB yn mu e phy 1 e 5 anos psi livre 1-0-15-1 | | PIB yn sigma e eta 1 e 5 anos psi em 0.99 1-1-15-0 | | PIB yn sigma e eta 1 e 5 anos psi livre 1-1-15-1 | |
|------------------------------------|----------------------------------------------------------------|-------------|--------------------------------------------------------------|-------------|-------------------------------------------------------------------|-------------|-----------------------------------------------------------------|-------------|
| Parâmetros | Estimativa | Erro-padrão | Estimativa | Erro-padrão | Estimativa | Erro-padrão | Estimativa | Erro-padrão |
| Curva IS | | | | | | | | |
| μ | 0,143 | 0,080 | 0,147 | 0,082 | 0,361 | | 0,361 | |
| $(1-\mu)$ | 0,857 | | 0,853 | | 0,639 | | 0,639 | |
| ϕ | 0,036 | 0,007 | 0,038 | 0,008 | 0,021 | | 0,021 | |
| σ | 3,943 | | 2,310 | 0,091 | 16,980 | 11,143 | 17,063 | 11,729 |
| η | 23,726 | | 22,309 | | 30,079 | 0,628 | 30,267 | 0,658 |
| h | 8,061 | | 7,810 | | 1,882 | | 1,884 | |
| Curva de Phillips | | | | | | | | |
| $\delta = \delta_1$ | 0,409 | 0,035 | 0,399 | 0,039 | 0,046 | 0,722 | 0,011 | 1,141 |
| $(1-\delta) = \delta_2$ | 0,591 | | 0,601 | | 0,954 | | 0,989 | |
| κ | 0,097 | 0,033 | 0,097 | 0,034 | 0,083 | 0,137 | 0,099 | 0,218 |
| χ | 20,455 | | 19,092 | | 13,574 | | 13,633 | |
| τ | 1,436 | | 1,499 | | 20,525 | | 88,585 | |
| θ | 0,911 | | 0,907 | | 0,790 | | 0,592 | |
| ϖ | 0,004 | | 0,004 | | 0,003 | | 0,003 | |
| ζ | 0,110 | | 0,111 | | 0,128 | | 0,152 | |
| Regra de Política Monetária | | | | | | | | |
| ρ | 0,694 | 0,011 | 0,694 | 0,012 | 0,245 | 0,016 | 0,239 | 0,016 |
| β | 2,154 | 0,063 | 2,167 | 0,067 | 1,816 | 0,077 | 1,615 | 0,073 |
| γ | 0,002 | 0,107 | 0,002 | 0,107 | 0,002 | 0,053 | 0,002 | 0,081 |
| Produto Natural Endógeno | | | | | | | | |
| λ | 0,972 | 0,005 | 0,972 | 0,006 | 0,984 | 0,013 | 0,986 | 0,018 |
| ϑ | 1,134 | | 1,140 | | 1,540 | | 1,542 | |
| Meta de Inflação | | | | | | | | |
| d | 0,438 | | 0,444 | 0,029 | 0,329 | | 0,436 | 0,845 |
| ω | 0,982 | 0,011 | 0,981 | 0,041 | 0,996 | 0,081 | 0,994 | 0,167 |
| φ_1 | 0,499 | | 0,499 | | 0,496 | | 0,492 | |
| φ_2 | 0,500 | | 0,501 | | 0,504 | | 0,508 | |
| φ_3 | 0,000 | | 0,000 | | 0,000 | | 0,000 | |
| Desvio-padrão dos choques | | | | | | | | |
| $\sigma_{AS,t}$ | 2,112 | 0,150 | 2,220 | 0,179 | 2,774 | 2,111 | 2,500 | 2,880 |
| $\sigma_{IS,t}$ | 1,303 | 0,111 | 1,283 | 0,116 | 0,919 | 0,111 | 0,923 | 0,118 |
| $\sigma_{MP,t}$ | 4,535 | 0,122 | 4,474 | 0,119 | 2,815 | 0,043 | 2,813 | 0,047 |
| $\sigma_{y,t}^n$ | 3,085 | 0,091 | 3,031 | 0,100 | 4,883 | 0,703 | 4,941 | 1,065 |
| $\sigma_{\pi,t}^*$ | 2,300 | 0,084 | 2,310 | 0,091 | 3,479 | 0,225 | 4,085 | 2,030 |

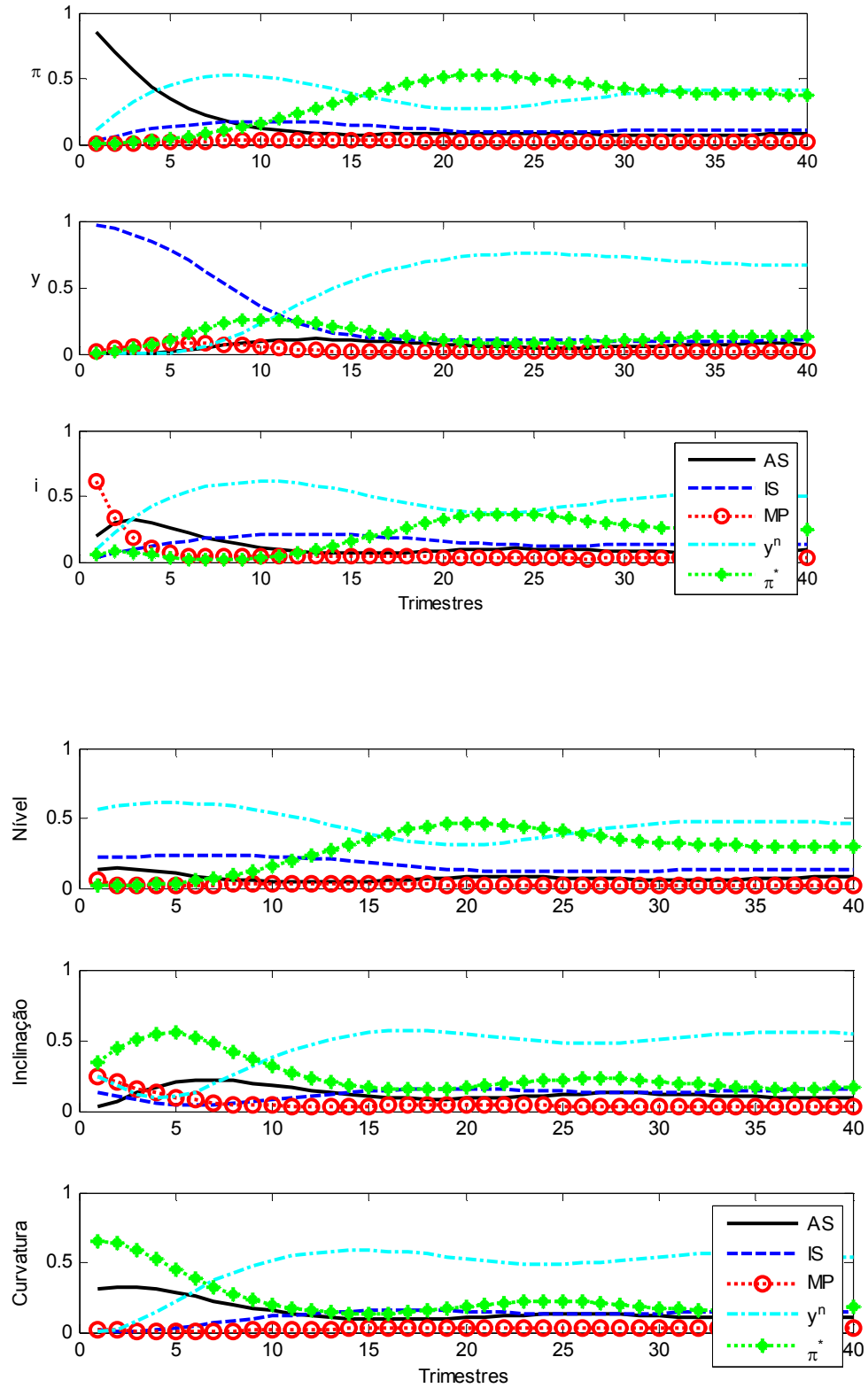
Opção de seleção dos dados:

opt.yⁿ=1 yⁿ
 opt.sigeta=0 mu e phy
 opt.yield=15 yields de 1 e 5 anos
 opt.psip=0 Se psi fixada em 0.99 com opt.ITI=1 ou em 0 com opt.ITI=2.



Opção de seleção dos dados:

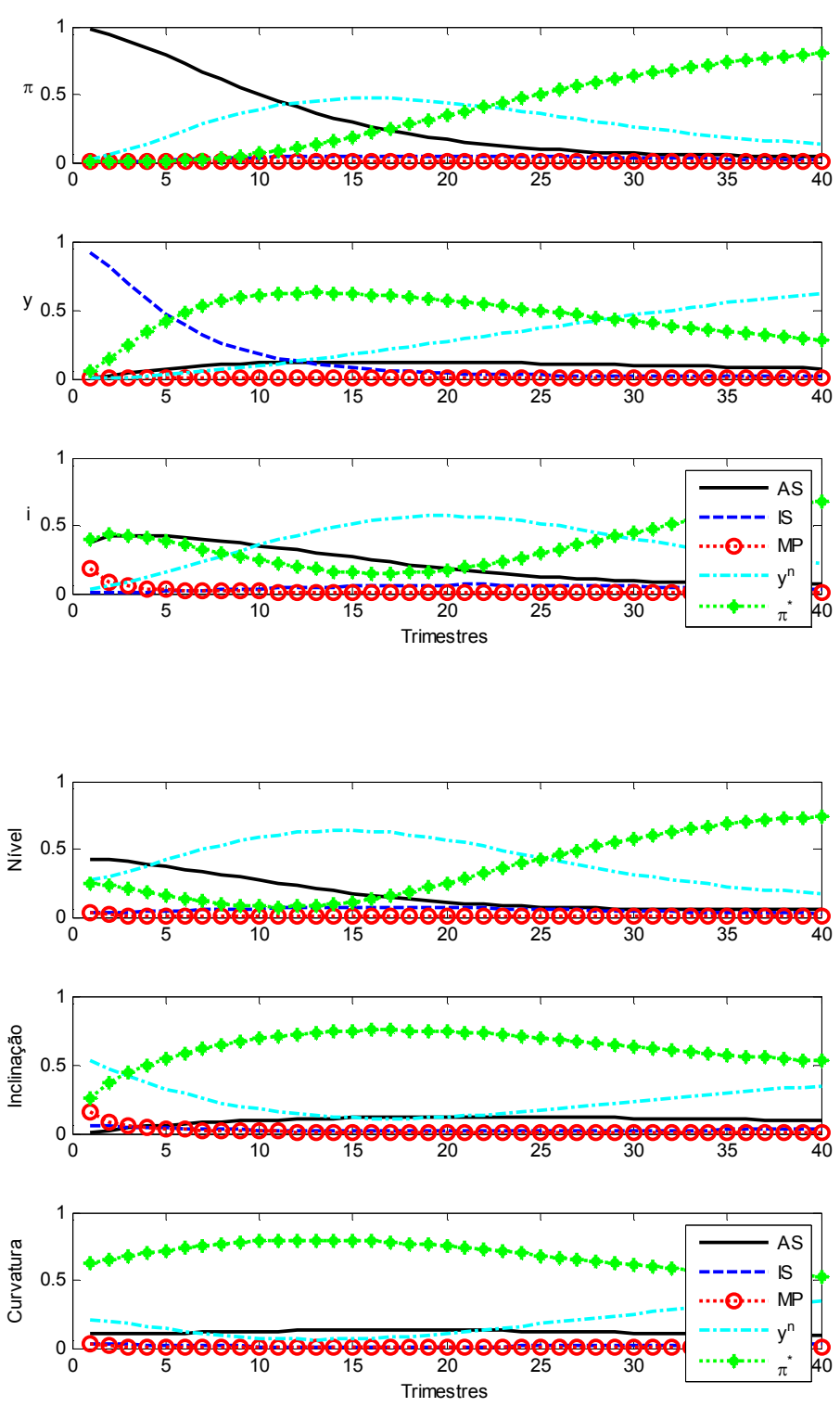
opt.yn=1 y^n
 opt.sigeta=0 μ e ϕ_y
 opt.yield=15 yields de 1 e 5 anos
 opt.psip=1 Se ψ está livre



Opção de seleção dos dados:

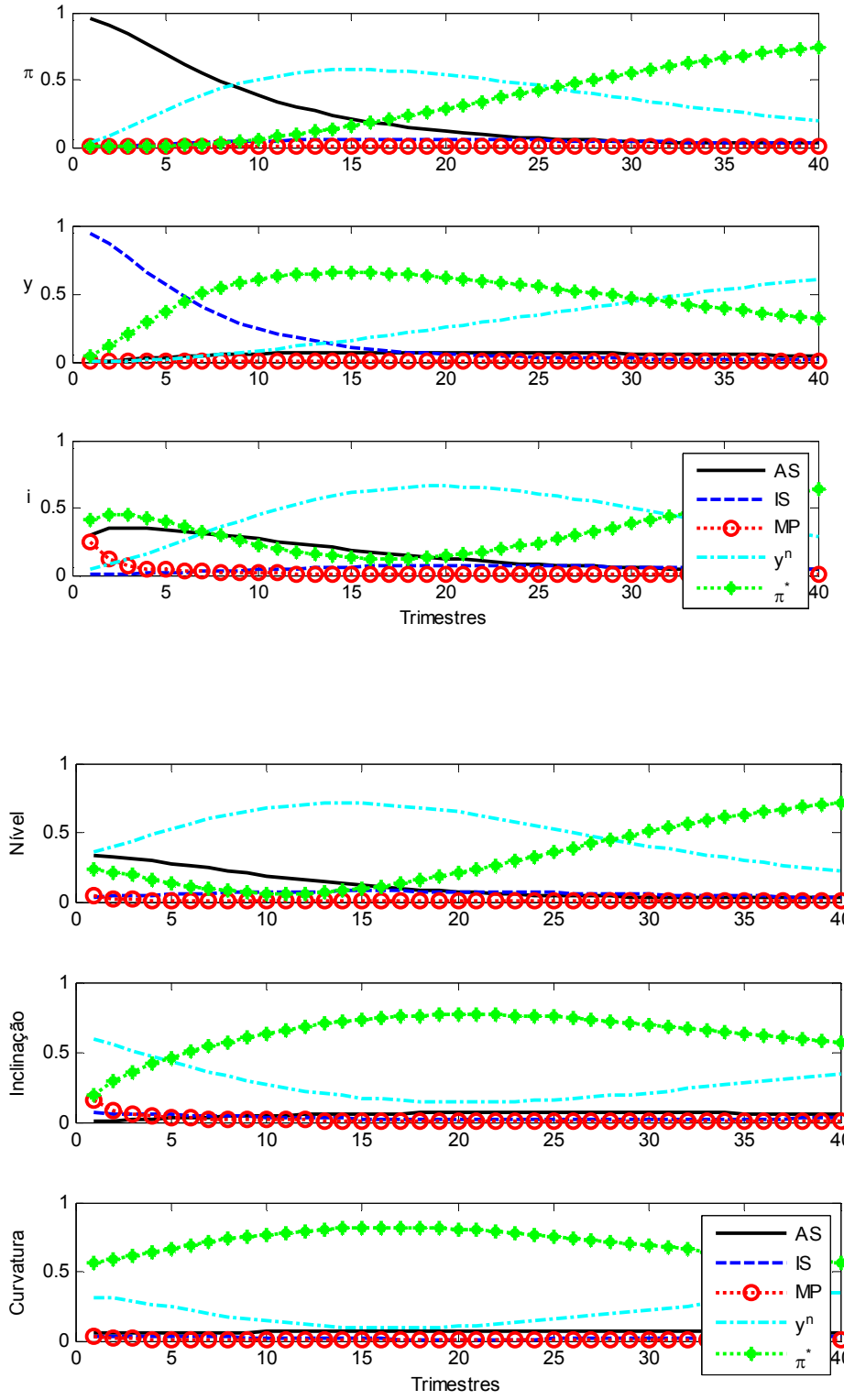
opt.yⁿ=1
 opt.sigeta=1
 opt.yield=15
 opt.psi=0

yⁿ
 sigma e eta
 yields de 1 e 5 anos
 Se psi fixada em 0.99 com opt.ITI=1 ou em 0 com opt.ITI=2.



Opção de seleção dos dados:

opt.yⁿ=1 yⁿ
 opt.sigeta=1 sigma e eta
 opt.yield=15 yields de 1 e 5 anos
 opt.psip=1 Se psi está livre

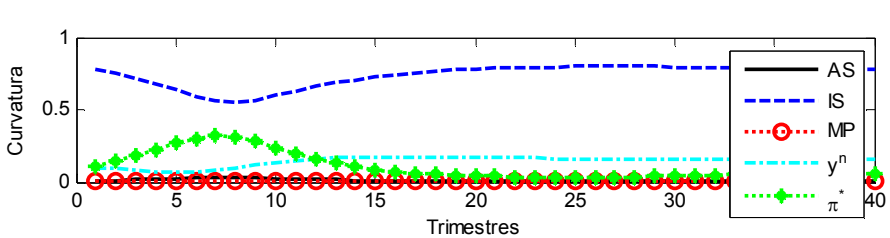
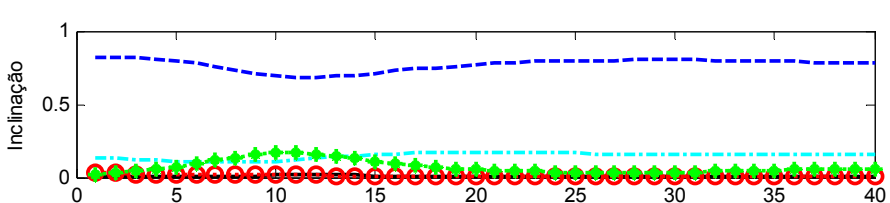
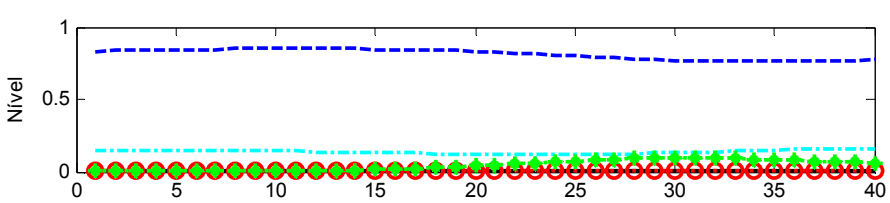
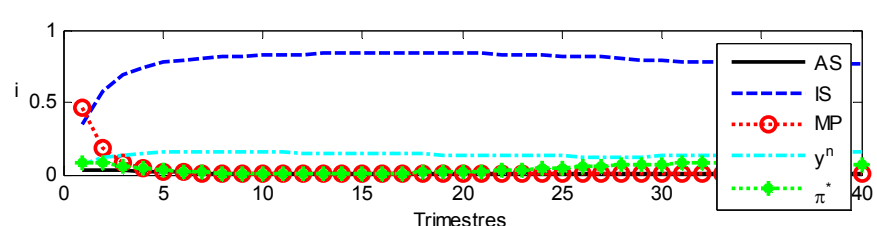
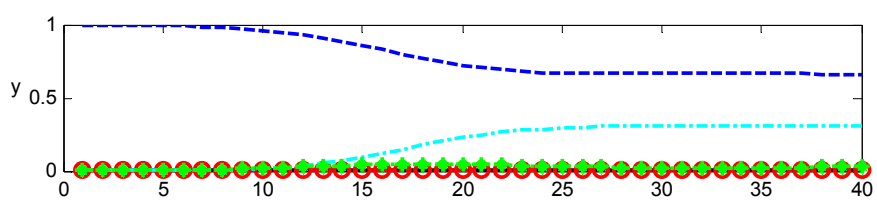
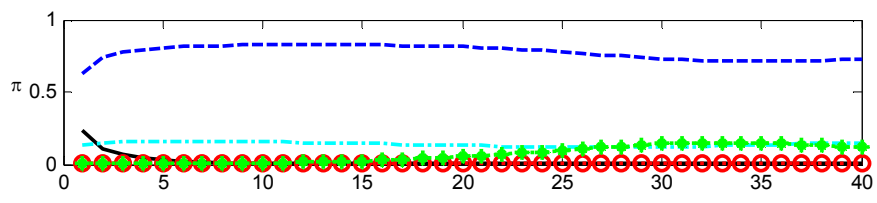


3.VII.2 – Estimções e decomposição da variância, considerando o Produção física industrial do IBGE:

| Parâmetros | II yn sigma e eta 1 e 5 anos psi em 0.99 1-1-15-0 | | II yn sigma e eta 1 e 5 anos psi livre 1-1-15-1 | | II yn mu e phy 1 e 5 anos psi em 0.99 1-0-15-0 | | II yn mu e phy 1 e 5 anos psi livre 1-0-15-1 | |
|------------------------------------|------------------------------------------------------------------|-------------|----------------------------------------------------------------|-------------|---------------------------------------------------------------|-------------|-------------------------------------------------------------|-------------|
| | Estimativa | Erro-padrão | Estimativa | Erro-padrão | Estimativa | Erro-padrão | Estimativa | Erro-padrão |
| Curva IS | | | | | | | | |
| μ | 0,456 | | 0,400 | | 0,148 | 0,354 | 0,159 | 0,444 |
| $(1-\mu)$ | 0,544 | | 0,600 | | 0,852 | | 0,841 | |
| ϕ | 0,141 | | 0,065 | | 0,028 | 0,027 | 0,031 | 0,039 |
| σ | 3,238 | 0,165 | 6,200 | 0,613 | 5,349 | | 5,163 | |
| η | 3,863 | 0,080 | 9,300 | 0,109 | 30,733 | | 27,349 | |
| h | 1,726 | | 1,789 | | 7,067 | | 6,570 | |
| Curva de Phillips | | | | | | | | |
| $\delta = \delta_1$ | 0,437 | 0,010 | 0,743 | 0,020 | 0,284 | 0,189 | 0,298 | 0,186 |
| $(1 - \delta) = \delta_2$ | 0,563 | | 0,257 | | 0,716 | | 0,702 | |
| κ | 0,117 | 0,013 | 0,220 | 0,018 | 0,137 | 0,121 | 0,126 | 0,118 |
| χ | 0,773 | | 3,404 | | 25,869 | | 22,654 | |
| τ | 1,279 | | 0,336 | | 2,514 | | 2,350 | |
| θ | 0,777 | | 0,844 | | 0,888 | | 0,888 | |
| ϖ | 0,029 | | 0,023 | | 0,004 | | 0,005 | |
| ζ | 0,207 | | 0,356 | | 0,158 | | 0,148 | |
| Regra de Política Monetária | | | | | | | | |
| ρ | 0,813 | 0,009 | 0,757 | 0,027 | 0,625 | 0,022 | 0,613 | 0,027 |
| β | 1,991 | 0,139 | 1,843 | 0,464 | 2,153 | 0,105 | 2,202 | 0,127 |
| γ | 0,002 | 0,048 | 0,002 | 0,382 | 0,002 | 0,123 | 0,002 | 0,131 |
| Produto Natural Endógeno | | | | | | | | |
| λ | 0,963 | 0,017 | 0,968 | 0,015 | 0,984 | 0,005 | 0,983 | 0,006 |
| ϑ | 1,771 | | 1,614 | | 1,156 | | 1,169 | |
| Meta de Inflação | | | | | | | | |
| d | 0,412 | | 0,919 | 5,320 | | | 0,977 | 0,160 |
| ω | 0,993 | 0,083 | 0,305 | | 0,257 | | 0,438 | |
| φ_1 | 0,497 | | 0,997 | 0,112 | 0,997 | 0,168 | 0,990 | 0,113 |
| φ_2 | 0,503 | | 0,479 | | 0,496 | | 0,497 | |
| φ_3 | 0,000 | | 0,520 | | 0,504 | | 0,503 | |
| | | | 0,000 | | 0,000 | | 0,000 | |
| Desvio-padrão dos choques | | | | | | | | |
| $\sigma_{AS,t}$ | 5,192 | 0,235 | 6,947 | 0,411 | 1,480 | 0,413 | 1,483 | 0,421 |
| $\sigma_{IS,t}$ | 2,556 | 0,076 | 8,134 | 0,228 | 9,068 | 3,747 | 8,494 | 4,404 |
| $\sigma_{MP,t}$ | 5,978 | 0,153 | 7,701 | 0,341 | 6,379 | 0,141 | 5,885 | 0,150 |
| $\sigma_{y,t}^n$ | 4,110 | 0,119 | 4,482 | 0,183 | 4,903 | 0,294 | 4,833 | 0,321 |
| $\sigma_{\pi,t}^*$ | 3,393 | 0,158 | 4,138 | | 3,168 | 0,258 | 3,069 | 0,271 |

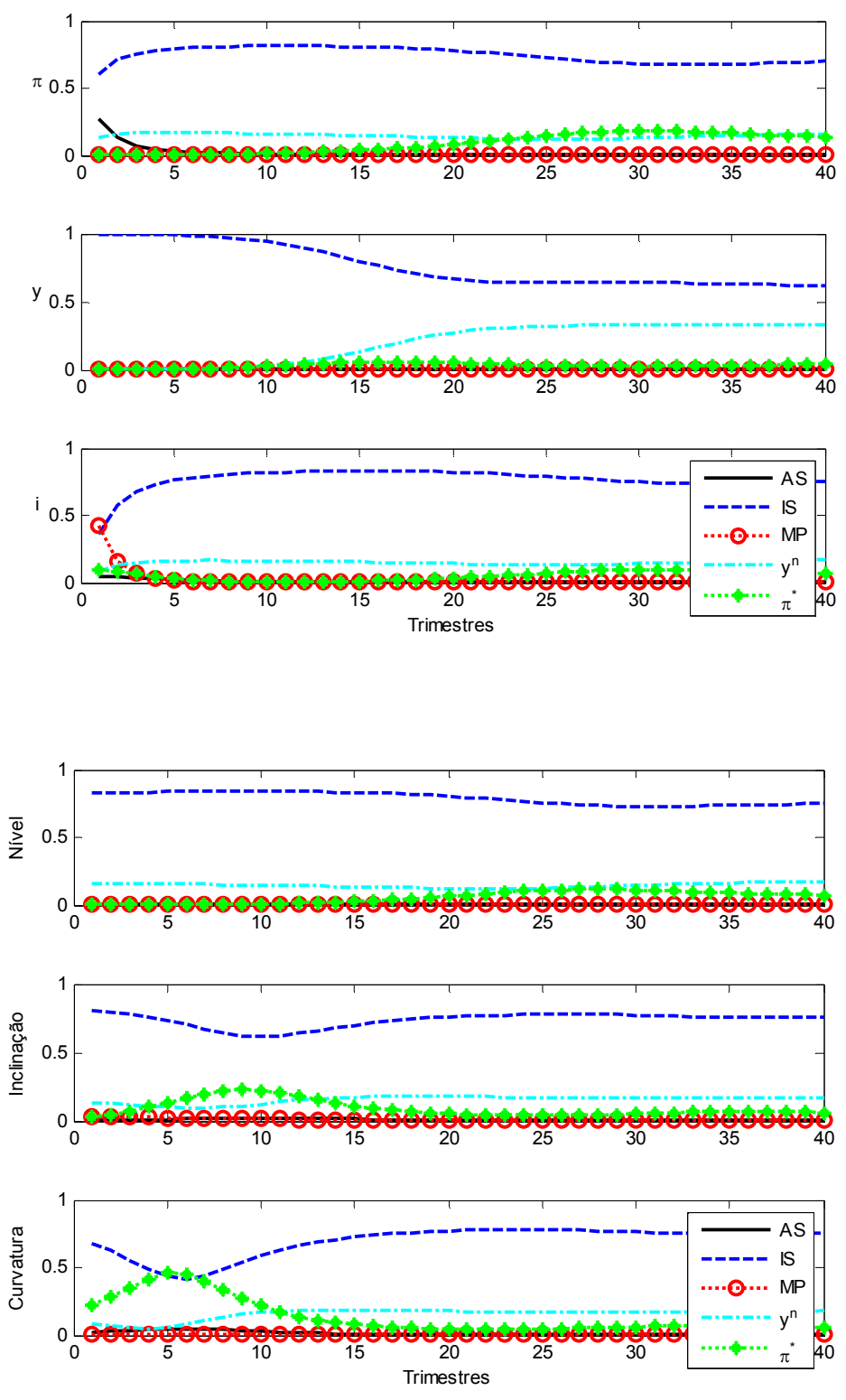
Opção de seleção dos dados:

opt.yn=1 y^n
 opt.sigeta=0 μ e ϕ_y
 opt.yield=15 yields de 1 e 5 anos
 opt.psisp=0 Se ψ fixada em 0.99 com opt.ITI=1 ou em 0 com opt.ITI=2.



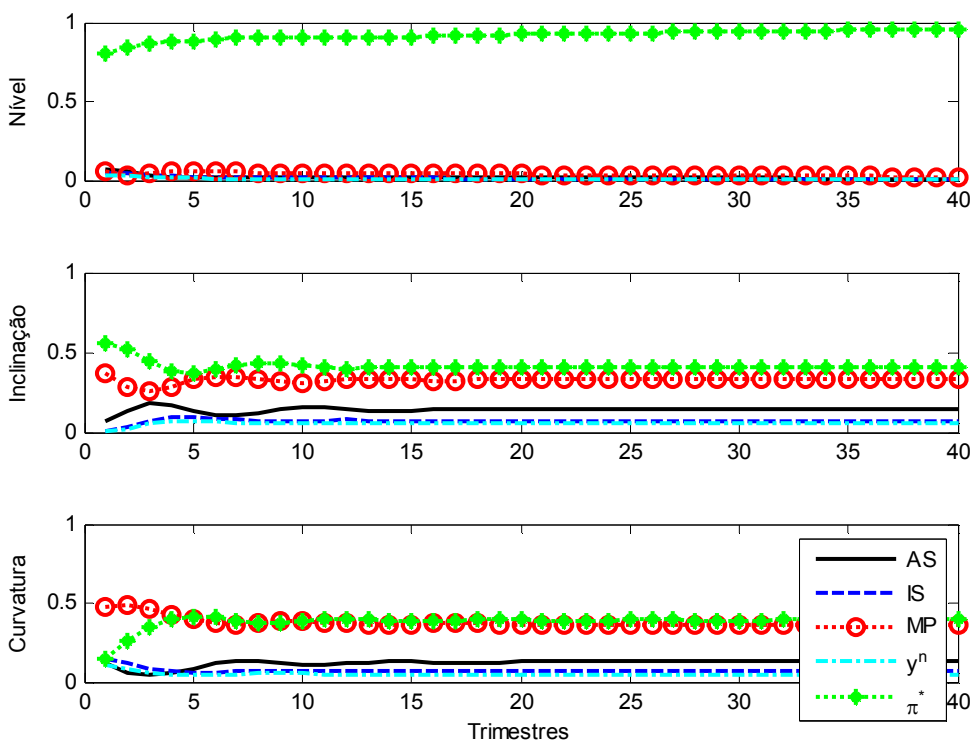
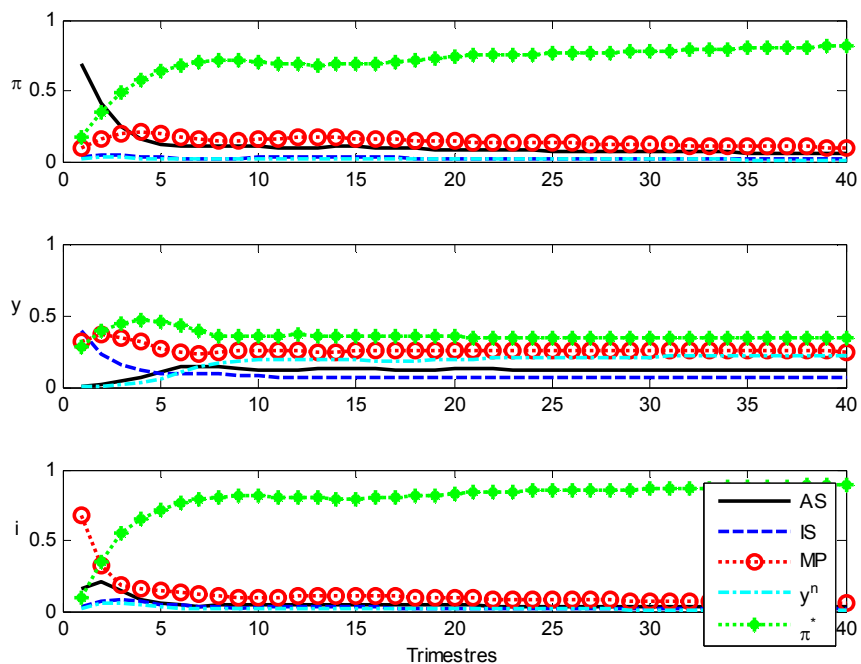
Opção de seleção dos dados:

opt.yn=1 y^n
 opt.sigeta=0 mu e phy
 opt.yield=15 yields de 1 e 5 anos
 opt.psip=1 Se psi está livre



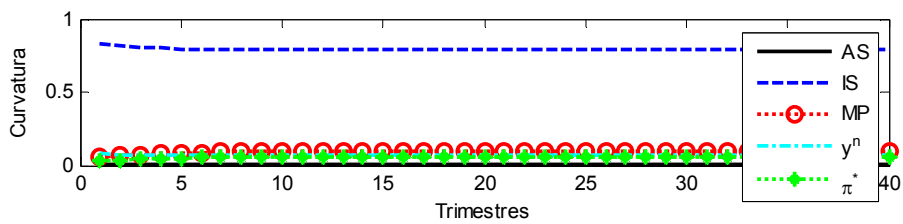
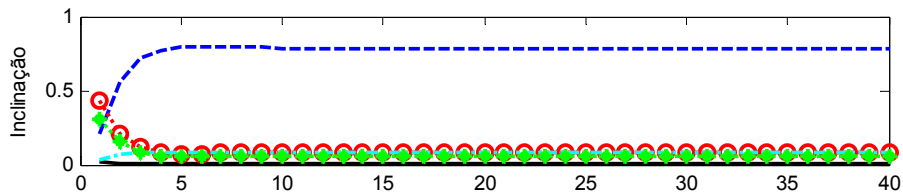
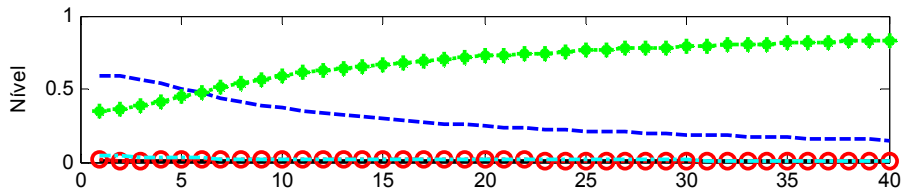
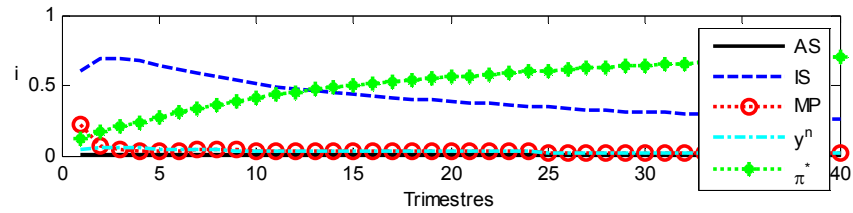
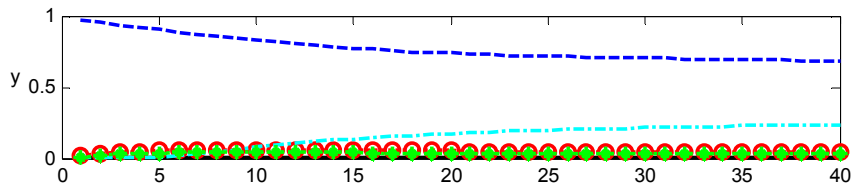
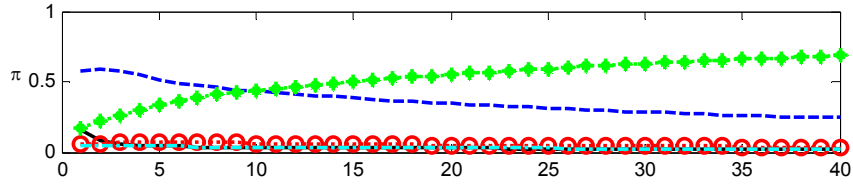
Opção de seleção dos dados:

opt.yn=1 y^n
 opt.sigeta=1 sigma e eta
 opt.yield=15 yields de 1 e 5 anos
 opt.psip=0 Se psi fixada em 0.99 com opt.ITI=1 ou em 0 com opt.ITI=2.



Opção de seleção dos dados:

opt.yⁿ=1 yⁿ
 opt.sigeta=1 sigma e eta
 opt.yield=15 yields de 1 e 5 anos
 opt.psip=1 Se psi está livre



Apêndice 3.VIII – Os códigos utilizados no MatLab

O código principal é o arquivo bcmnpf.m desenvolvido por Seonghoon Cho, sobre o qual fizemos algumas pequenas alterações.

Principais códigos:

- (a) bcmnpf.m → código central do modelo
- bcmnpfQ.m → código com a função objetivo do GMM
- bcmnpfEval.m → código para emissão dos relatórios com os resultados de estimação

Para fazer a especificação do modelo no código bcmnpf.m:

- Se for estimar com y^n fazer opt.yn=1 e se estimar com ytil fazer opt.yn=0
- Se for estimar o modelo com sigma and eta fazer opt.sigeta=1 e se for estimar com um e phy fazer opt.sigeta=0
- Se estimar com as yields de 1 e 5 anos fazer opt.yield=15 e se for usar yields de 3 e 5 anos usar opt.yield=35
- Se psi está livre fazer opt.psip=1 e se fazer psi fixado em 0.99 com opt.ITI=1, or 0 if opt.ITI=2 fazer opt.psip=0
- Se S não for estimada conjuntamente fazer opt.se=0 e de outro modo fazer opt.se=1

Para fazer os cálculos ajustar os controles de estimação no código bcmnpf.m:

- Registrar os valores abaixo para fazer a calibração nos valores iniciais:
 Cal=1 Initialsearch=1 opt.gmmiter=1 opt.Eval=0
- Registrar os valores abaixo para fazer a estimação do primeiro estágio:
 Cal=0 Initialsearch=1 opt.gmmiter=1 opt.Eval=0
- Registrar os valores abaixo para fazer a estimação do segundo estágio:
 Cal=0 Initialsearch=0 opt.gmmiter=0 opt.Eval=0
- Registrar os valores abaixo para fazer a avaliação da primeira estimativa:
 Cal=1 Initialsearch=0 opt.gmmiter=1 opt.Eval=1
- Registrar os valores abaixo para fazer a avaliação da estimativa final:
 Cal=1 Initialsearch=0 opt.gmmiter=0 opt.Eval=1

Se fizer a estimação com fminsearch para valor inicial usar a unidade e para fazer a estimação central usar zero: Initial=0

Se for calibração é unidade e se for estimação é zero: Cal=1

Se for sem restrição não linear usar zero e se for com restrição não linear usar:

 nlcon=1 – Cal
 opt.nlcon=nlcon

Se for usar bl com valor inicial usar unidade e se for usar fminsearch para valor inicial usar zero: Initialsearch=1

Se for usar matriz de ponderação inicial manter unidade e se for usar matriz de ponderação NW manter zero: opt.gmmiter=1

Se recuperar toda a informação definir unidade e se for fazer estimação ou calibração usar zero: opt.Eval=0

Para gerar os relatórios com os resultados é necessário rodar o arquivo bcmnpfEval.m

Funções programadas para serem utilizadas nos códigos bcmnpf.m e bcmnpfQ e bcmnpfEval:

1. autoc.m → função de autocorrelação da matriz X
2. bcmnpfQ.m → função objetivo do GMM
3. bdiag.m → modela a matriz diagonal de matrizes quadradas A,B,...,K
4. ei.m → vetor indicador de zero com o i-ésimo componente sendo 1
5. hp.m → não está sendo usado, mas gera o resíduo filtro HP
6. hpfilter → não está sendo usado, mas calcula o filtro HP, oriundo de Hodrick e Prescott
7. IRFC.m → Geração do coeficiente da função impulso resposta
8. KF → não está sendo usado, mas calcula o filtro de Kalman.
1. lp.m → filtro linear
2. Lplot.m → formatos para desenhar o relatório
3. mdv.m → calcula o desvio médio da matriz X
4. mprint1.m → deve estar errada a sintaxe no código bcmnpf.m e acredito que o correto seria mymprint1.m
5. mymprint1.m → definições para impressão
6. mystrvcat.m → concatenar strings verticalmente
7. qp.m → não está sendo usado, mas é um filtro linear parecido com lp.m e que usa o código ols.m
8. qzc.m → usa método de McCallum (nargin =3) ou Uhlig (nargin=4) e que usa o código qzij.m
9. repmat.m → replica e cobre uma disposição
10. rows.m → calcula o número de linhas numa matriz X
11. RS.m → cálculo recursivo para frente (Forward Recursive) de ômega, gamma e das condições de estabilidade
12. selif.m → seleciona valores de x para os quais a condição é verdadeira
13. seqa.m → produz uma sequência de valores
14. tug.m → function p=tug(Parameter Vector,Lower Bound,Upper Bound,(Transform=1,Untransform=2, Gradient=3)
15. UVARIR → Estimação do VAR padrão e da função impulso resposta, com o erro padrão
16. vec.m → cria um matriz empilhada de colunas de Y.

Apêndice 3.IX – A Estimação pelo Método Generalizado dos Momentos

O Método dos Momentos Generalizados (*Generalized Method of Moments* – GMM) é um método de estimação geral e poderoso, que engloba quase todas as técnicas de estimação utilizadas na econometria. Inicialmente, introduzido por Hansen (1982) e Hansen e Singleton (1982).

O princípio básico da construção do GMM supõe que desejamos estimar um parâmetro escalar θ baseado numa amostra x_1, x_2, \dots, x_T . Seja θ_0 o “verdadeiro” valor de θ . Considerações teóricas da estatística e economia sugerem um relacionamento da seguinte:

$$E[x_t - g(\theta)] = 0 \Leftrightarrow \theta = \theta_0$$

Onde $g(\theta)$ é função contínua e inversível. Logo, existe uma função dos parâmetros e dos dados, cuja propriedade é ter média zero se, e somente se, é avaliada no verdadeiro valor do parâmetro.

Se o modelo de amostragem para os x_t 's é uma versão da Lei dos Grandes Números, então:

$$\bar{X} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t \xrightarrow{P} g(\theta_0)$$

Como $g(\theta)$ é inversível, temos a estatística:

$$\hat{\theta} = g^{-1}(\bar{X}) \xrightarrow{P} \theta_0$$

Com isso, $\hat{\theta}$ é um estimador consistente de θ . Um caminho diferente para encontrar o mesmo resultado é escolher, como estimador de θ , o valor que minimiza a função objetivo:

$$F(\theta) = \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_t - g(\theta)) \right]^2 = [\bar{X} - g(\theta)]^2$$

O mínimo é trivialmente atingido em $\hat{\theta} = g^{-1}(\bar{X})$, quando a expressão entre colchetes torna-se igual a zero. Para generalizar esse raciocínio, suponha que θ é um n-vetor e que temos m relações do tipo:

$$E[f_i(x_t, \theta)] = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, m$$

Onde $E[\cdot]$ é a expectativa condicional ao conjunto de p variáveis z_t , chamadas de instrumentos. Num exemplo de $m = 1$ e $f(x_t, \theta) = x_t - g(\theta)$, o único instrumento usado é $z_t = 1$.

$$E[f_i(x_t, \theta) \cdot z_{j,t}] = E[f_{i,j,t}(\theta)] \quad \text{para todo } i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, p$$

Essa equação é conhecida como condição de ortogonalidade ou condição dos momentos. O estimador é definido como o mínimo da forma quadrática $F[\theta, W] = \bar{f}' W \bar{f}$, onde \bar{f} é um $(1 \times m \cdot p)$ vetor mantendo a média das condições de normalidade e W é alguma matriz simétrica e positiva definida, conhecida como matriz de pesos. Uma condição necessária para o mínimo existir é a condição de ordem $n \leq m \cdot p$.

A estatística $\hat{\theta} = \text{Arg min}_{\theta} F(\theta, W)$ é um estimador consistente de θ qualquer que seja W . Entretanto, para atingir a máxima eficiência assintótica, W precisa ser proporcional a inversa da matriz de covariância de longo prazo das condições de ortogonalidade. Se W não é conhecida, um estimador consistente é suficiente.

Essas condições levam a:

1. Escolha uma matriz W positiva definida e calcule o estimador GMM $\hat{\theta}_1$ de um estágio. Escolhas usuais de W são $I_{m \cdot p}$ ou $I_m \otimes (Z'Z)^{-1}$.
2. Use o estimador $\hat{\theta}_1$ para estimar $V(f_{i,j,t}(\theta))$ e use sua inversa como matriz de pesos. O estimador $\hat{\theta}_2$ resultante é chamado de estimador de dois estágios.
3. Estime, agora, $V(f_{i,j,t}(\theta))$ por meio de $\hat{\theta}_2$ e obtenha $\hat{\theta}_3$; repetir até convergir. Assintoticamente, esses passos extras são desnecessários, dado que o estimador de dois estágios é consistente e eficiente. Entretanto, o estimador iterado tem melhores propriedades para pequenas amostras e não depende da escolha da matriz W feita no 1º passo.

No caso especial do número de n parâmetros serem igual ao número de condições de ortogonalidade $m \cdot p$, o segundo estágio (ou iterações sucessivas) é necessário para atingir a eficiência e o estimador obtido pode ser muito diferente, em amostras finitas, do estimador de um estágio. Além disso, o valor da função objetivo no mínimo, devidamente dimensionada pelo número de observações, rende uma estatística J de Hansen. Essa estatística pode ser interpretada como estatística de teste que tem uma distribuição qui-quadrado com $m \cdot p - n$ graus de liberdade sob a hipótese nula de especificação correta.

Generalizando o método dos momentos

Num exemplo onde existem tantas equações dos momentos quantos forem os parâmetros a serem estimados, é o caso denominado de exatamente identificado e quando existe uma única solução para as equações dos momentos. Nessa solução, as equações são exatamente satisfeitas. Entretanto, existem casos nos quais existem mais equações dos momentos do que parâmetros, que são definidos como sistemas sobre determinados e quando existirão mais de uma solução.

É necessário, num sistema com L equações e K parâmetros desconhecidos, encontrar os $\binom{L}{K}$ diferentes conjuntos de estimativas que podem ser produzidas. Uma possibilidade é minimizar uma função pela soma dos quadrados:

$$q = \sum_{l=1}^L \bar{m}_l^2 = \bar{m}(\theta)' \bar{m}(\theta)$$

Hansen (1982) mostrou que, sob certas condições, em particular $p \lim \bar{m}(\theta) = E[\bar{m}(\theta)] = 0$, minimizando q produzimos um estimador consistente de θ . De fato, usando o critério de soma ponderada dos quadrados:

$$q = \bar{m}(\theta)' W_n \bar{m}(\theta)$$

Onde W_n é uma matriz definida positiva que pode depender dos dados, mas não é uma função de θ , tal como a matriz identidade, produz um estimador consistente de θ .

Por exemplo, podemos usar a matriz diagonal de pesos quando possuímos informação sobre a relevância dos diferentes momentos. Uma premissa adicional é assumir $p \lim W$ é uma matriz definida positiva W .

Seguindo a mesma lógica de preferir os mínimos quadrados generalizados ao invés dos mínimos quadrados ordinários, pode ser benéfico utilizar um critério de ponderação no qual os pesos são inversamente proporcionais as variâncias dos momentos. Seja W uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal são recíprocos das variâncias dos momentos individuais

$$w_{ll} = \frac{1}{\text{Asy.Var}[\sqrt{n\bar{m}_l}]} = \frac{1}{\phi_{ll}}$$

Note que o lado direito envolve a variância da média amostral que é da ordem $(1/n)$. Assim, os mínimos quadrados ponderados procederão à minimização $q = \bar{m}(\theta)' \Phi^{-1} \bar{m}(\theta)$

Em geral, os L elementos de \bar{m} são livremente correlacionados. Nessa equação acima, usamos uma diagonal W que ignora essa correlação. Para usar os mínimos quadrados generalizados temos que definir a matriz completa $W = \{\text{Asy.Var}[\sqrt{n\bar{m}_l}]\}^{-1} = \Phi^{-1}$. E os estimadores são definidos escolhendo θ que minimiza $q = \bar{m}(\theta)' W_n \bar{m}(\theta)$, que são estimadores de distância mínima. O resultado geral é que se W_n é uma matriz definida positiva e se

$$p \lim \bar{m}(\theta) = 0$$

Então o estimador de distância mínima (método dos momentos generalizados ou GMM) de θ é consistente. Logo, temos que decidir qual é a melhor matriz W a ser utilizada. A intuição pode sugerir corretamente que uma definida em $W = \{\text{Asy.Var}[\sqrt{n\bar{m}_l}]\}^{-1} = \Phi^{-1}$ seria ótima, como encontrado por Hansen (1982).

A matriz de covariância assintótica do estimador do método generalizado dos momentos é:

$$V_{GMM} = \frac{1}{n} [\Gamma' W \Gamma]^{-1} = \frac{1}{n} [\Gamma' \Phi^{-1} \Gamma]^{-1}$$

Onde Γ é uma matriz de derivadas com a j -ésima linha igual a:

$$\Gamma^j = p \lim \frac{\partial \bar{m}_j(\theta)}{\partial \theta'}$$

E $\Phi = \text{Asy.Var}[\sqrt{n\bar{m}}]$. Finalmente, devido ao Teorema do Limite Central aplicado nos momentos amostrais e ao Teorema de Slutsky aplicado para essa manipulação, podemos esperar que o estimador seja assintoticamente distribuído normalmente.

Propriedades do Estimador GMM

Como o estimador GMM inclui outras famílias de estimadores, incluindo os mínimos quadrados (lineares e não lineares), variável instrumental e máxima verossimilhança, esses resultados serão expandidos para todos os casos.

O estimador GMM está baseado no conjunto das condições de ortogonalidade da população:

$$E[m_i(\theta_0)] = 0$$

Onde o vetor do verdadeiro parâmetro é θ_0 e o subscrito i do termo do lado direito indica dependência sobre os dados observados, y_i, x_i, z_i . A média das observações amostrais produz uma equação de momento amostral:

$$E[\bar{m}_n(\theta_0)] = 0$$

Onde

$$\bar{m}_n(\theta_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N m_i(\theta_0)$$

Esse momento é um conjunto de L equações envolvendo os K parâmetros. Assumiremos que essa expectância existe e que a amostra relativa converge para ela. As definições são elencadas em termos de parâmetros populacionais e são indexadas pelo tamanho da amostra. Para fixar essa idéia, considere as equações de momento empírico que definem o estimador de variável instrumental para um modelo de regressão linear ou não linear.

Por exemplo, a equação para o momento empírico de variável instrumental num modelo de regressão linear ou não linear assume:

$$E[\bar{m}_n(\beta)] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N z_i [y_i - h(x_i, \beta)]\right]$$

Onde existem L variáveis instrumentais em z_i e K parâmetros em β . Essa afirmação define L equações de momento, uma para cada variável instrumental.

Logo, temos que seguir premissas para o modelo e para os momentos empíricos.

Premissa 1: Convergência dos momentos empíricos – O processo gerador dos dados é assumido encontrar as condições pela Lei dos Grandes Números para aplicar, tal que os momentos empíricos convergem em probabilidade para sua expectância:

$$\bar{m}_n(\theta_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i(\theta_0) \xrightarrow{p} 0$$

A Lei dos Grandes Números acomoda os casos onde as observações são independentes. Para os casos onde as observações são correlacionadas ou dependentes são obtidas sobre o Teorema Ergótico. Para esse caso mais geral assumiremos que a seqüência de observações $m(\theta)$ constante num processo ergótico e estacionário (L x 1) conjuntamente

Os momentos empíricos são assumidos serem contínuos e funções diferenciáveis continuamente dos parâmetros. Por exemplo, significaria que a

função média condicional $h(x_i, \beta)$ é uma função contínua de β , embora não necessariamente de x_i .

Teorema Ergótico: Se $\{z_t\}_{t=-\infty}^{t=\infty}$ é um processo de uma série temporal que é estacionária e ergótica e $E[|z_t|]$ é uma constante finita e $E[z_t]$, e se $\bar{z}_T = \left(\frac{1}{T}\right) \sum_{t=1}^T z_t$, então $\bar{z}_T \xrightarrow{a.s.} \mu$. Note que a convergência é quase-certamente, não é em probabilidade (que está implícita) ou em quadrado médio (que também está implícita).

Com continuidade e diferenciabilidade, estaremos preparados também para assumir que as derivadas dos momentos:

$$\bar{G}_n(\theta_0) = \frac{\partial \bar{m}_n(\theta_0)}{\partial \theta_0'} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial m_{i,n}(\theta_0)}{\partial \theta_0'}$$

convergem para um limite de probabilidade, digamos $\bar{G}_n(\theta_0) = \bar{G}(\theta_0)$. Para o conjunto de observações independentes, a continuidade das funções e as derivadas invocarão o Teorema de Slutsky para obter esse resultado. Para o caso mais geral das seqüências de observações dependentes, o Teorema da Ergodicidade das Funções fornecerá uma contrapartida do Teorema de Slutsky para dados em séries temporais. Em resumo, se os momentos obedecem a Lei dos Grandes Números, então é razoável assumir que as derivadas deles também obedecem.

Premissa 2: Identificação – Para qualquer $n \geq K$, se θ_1 e θ_2 são dois vetores de parâmetros diferentes, então existe conjuntos de dados que $\bar{m}_n[\theta_1] \neq \bar{m}_n[\theta_2]$. A identificação é definida para implicar que o limite de probabilidade da função critério GMM é unicamente minimizado nos verdadeiros parâmetros θ_0 .

A condição de identificação tem três implicações importantes:

- Condição da ordem: O número de condições de momentos é no mínimo tão grande quanto o número de parâmetros $L \geq K$. Isso é necessário, mas não é suficiente para a identificação.
- Condição do posto (ou rank): A matriz $L \times K$ de derivadas $\bar{G}_n(\theta_0)$ terá posto da linha igual a K. Note que o número de linhas deve ser igual ou maior do que o número de colunas.
- Unicidade: Com a premissa de continuidade, a premissa de identificação implica que o vetor de parâmetros que satisfaz a condição de momento da população é único. Sabemos que o verdadeiro vetor parâmetro $p \lim \bar{m}_j(\theta_0) = 0$. Se θ_1 é qualquer vetor parâmetro que satisfaz essa condição, então temos que θ_1 é igual a θ_0 .

As premissas de Convergência dos Momentos Empíricos e de Identificação caracterizam a parametrização do modelo. Juntas elas estabelecem que o vetor parâmetro será estimado.

1. Opções de matriz de covariância

A matriz de covariâncias dos parâmetros estimados depende da escolha de W , através:

$$\Sigma = (J'WJ)^{-1} J'W\Omega WJ (J'WJ)^{-1}$$

Onde J é um termo jacobiano:

$$J_{ij} = \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial \theta_j}$$

E Ω é a matriz de covariância de longo prazo das condições de ortogonalidade.

Assim como para Ω , uma estimativa consistente é necessária. A escolha mais simples é uma matriz de covariância amostral dos f_{ij} :

$$\hat{\Omega}_0(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f_t(\theta) f_t(\theta)'$$

Esse estimador é robusto com respeito à heterocedasticidade, mas não com respeito à autocorrelação. Uma variante consistente a heterocedasticidade e autocorrelação (HAC) pode ser obtida usando Bartlett Kernel ou similar. Uma versão univariada disso é usada no contexto da função Lrvar(). A versão multivariada é definida abaixo:

$$\hat{\Omega}_K(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=k}^{T-k} \left[\sum_{i=-k}^k w_i f_t(\theta) f_{t-i}(\theta)' \right]$$

O Gretl calcula a matriz de covariância HAC como padrão para o modelo GMM estimado em séries temporais. É possível controlar o kernel e o bandwidth (isto é, o valor de k na equação acima) usando o comando “set”. Também é possível fazer o Gretl não usar a versão HAC fazendo:

Matriz de covariância para restrições não lineares e heterocedasticidade

O modelo macroeconômico e financeiro estudado neste capítulo implica num VAR de primeira ordem sobre z_t com equações cruzadas e com restrições não-lineares, por isso, adotou-se o critério BIC para selecionar um VAR de primeira ordem entre os diversos VAR irrestritos com defasagens até 5. A estimação ocorreu sobre dados subtraídos da média, $\bar{z}_t = z_t - \hat{E}z_t$, onde $\hat{E}z_t$ corresponde à média da amostra de z_t . Os parâmetros estruturais a serem estimados são $\delta, \kappa, \sigma, \eta, \rho, \beta, \gamma, \lambda, \omega, d, \sigma_{AS}, \sigma_{IS}, \sigma_{MP}, \sigma_{y^n}$ e σ_{π^*} . Com a premissa de que os erros são normais, simplificamos o problema adotando a função de verossimilhança e o estimador de máxima verossimilhança com informação completa (FIML). Entretanto, a possibilidade de desvio das premissas de normalidade e de homocedasticidade, levou a utilização do estimador GMM em dois estágios, conforme adotado por Hansen (1982). Para fazer isso, reescrevemos o modelo da forma seguinte:

$$\bar{z}_t = \Omega_z \bar{z}_{t-1} + \Gamma_z \varepsilon_t = \Omega_z \bar{z}_{t-1} + \Gamma_z u_t$$

Onde $u_t = \Sigma^{-1} \varepsilon_t \sim (0, I_5)$ e $\Sigma = \text{diag}(\sigma_{AS} \quad \sigma_{IS} \quad \sigma_{MP} \quad \sigma_{y^n} \quad \sigma_{\pi^*})$, isto é, $\Sigma^2 = D$.

Para construir as condições de momentos considere os seguinte processos:

$$h_{1,t} = u_t \otimes \bar{z}_{t-1}$$

$$h_{2,t} = \text{vech}(u_t u_t' - I_5)$$

$$h_t = [h_{1,t}' \quad h_{2,t}']$$

Onde *vech* representa um operador de empilhamento dos elementos acima ou abaixo da diagonal principal da matriz. O modelo impõe que $E[h_t] = 0$. A vigésima quinta condição dos momentos $h_{1,t}$ captura os parâmetros de feedback, as décima quinta condição dos momentos $h_{2,t}$ captura a estrutura imposta pelo modelo sobre a matriz de variância e covariância das inovações. Ao invés de utilizar uma matriz identidade inicial como matriz de ponderação que poderia fornecer estimativas do primeiro estágio pobres utilizou-se uma matriz de ponderação implícita no modelo sob normalidade. Sob a hipótese nula do modelo, a matriz de ponderação deve ser:

$$W = \begin{bmatrix} h_t & h_t' \end{bmatrix}^{-1}$$

Com normalidade e erro estrutural implícitos pelo modelo, encontramos de forma direta que a matriz de ponderação ótima é dada por:

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} I \otimes \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \bar{z}_{t-1} \bar{z}_{t-1}' & 0_{25 \times 15} \\ 0_{15 \times 25} & I_{15} + \text{vech}(I_5) \text{vech}(I_5)' \end{bmatrix}^{-1}$$

A matriz de ponderação não depende dos parâmetros. Assim, minimizamos a função objetivo GMM:

$$Q = (\hat{E}[h_t])' \hat{W} (\hat{E}[h_t])$$

Onde $\hat{E}[h_t] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h_t$. Com isso, temos estimativas muito próximas do

que seria obtido com a máxima verossimilhança. Dadas essas estimativas,

podemos encontrar a matriz de ponderação do segundo estágio que permite heterocedasticidade e cinco defasagens Newey-West (Newey e West 1987) na construção da matriz de variância e covariância das condições de ortogonalidade. Além disso, temos que repetir o sistema até convergir. Essa estimação se mostrou global e robusta com as estimativas dos parâmetros variando pouco depois da primeira rodada.

CONCLUSÕES

Inicialmente, a tese conclui que para uma economia ser completa, não devem existir oportunidades de arbitragem livres de risco e deve haver uma única medida de probabilidade equivalente cujas estratégias de negociação autofinanciáveis relativas são martingales. Ao assumir essas condições, temos a garantia de existência de um preço único de negociação dos títulos que balizam a formação da estrutura a termo das taxas de juros, no qual o mercado financeiro estará equilibrado.

Posteriormente, mostra a importância do modelo de Cox, Ingersoll e Ross para estimar o modelo de equilíbrio geral e do modelo de Diebold, Rudebusch e Aruoba para uma representação do modelo estado-espço conveniente que facilita a extração de fatores latentes da curva de juros a partir de interações dinâmicas de variáveis da macroeconomia, ambos para a economia brasileira.

Assim, este trabalho explica os movimentos da inclinação da estrutura a termo de taxas de juros brasileiras como função de variáveis macroeconômicas observáveis, por intermédio de um estimador econométrico não linear para encontrar a variável inclinação e curvatura das taxas de juros brasileiras.

As conclusões do modelo de Diebold, Rudebusch e Aruoba indicam que a política monetária tem um efeito significativo sobre o diferencial de entre as taxas de juros de curto e longo prazo. Em particular, verificou-se que o coeficiente do IPCA é positivo na parte linear da estimação, mostrando que o efeito da taxa de curto prazo é superior ao efeito na taxa de longo prazo. Logo, ao controlar a inflação via política monetária, o Banco Central estará controlando a expectativa do mercado financeiro quanto às taxas de juros de curto prazo.

O resultado primário é relevante nos momentos de instabilidade econômica (parte não linear da estimação), pois o efeito negativo com coeficientes significantes é indicativo que o superávit primário é importante

para gerar a credibilidade de que o montante de recursos obtidos pelo governo será suficiente para controlar a dívida líquida e, com isso, menor será a percepção de risco do mercado financeiro, evidenciado pela redução do spread do termo das taxas de juros.

Adicionalmente, um dos resultados mais relevantes dessa pesquisa é encontrar a variável macroeconômica capaz de explicar as alterações na estrutura a termo de taxas de juros da economia brasileira (inclinação e curvatura), em particular, destaca-se sua relevância para explicar os momentos de crise. Na economia brasileira, e na amostra estudada, a variável que desempenha essa função é o Risco Brasil, mensurado pelo EMBI+ Brasil.

Com isso, foi possível observar a relevância do modelo de equilíbrio parcial que avalia numa única direção (variáveis macroeconômicas influenciando o spread dos juros), em explicar a inclinação da estrutura a termo das taxas de juros brasileira.

Com isso, destacamos a relevância de trabalhos futuros para avaliar o impacto das variáveis macroeconômicas e da percepção do mercado financeiro medida pela curva de juros, dentro de um instrumento de equilíbrio geral onde a causalidade ocorrerá nas duas direções, possibilitando avaliar as trajetórias de equilíbrio da economia e seus efeitos sobre a estrutura a termo de taxas de juros.

Ao final, ao derivar o modelo de Cox, Ingersoll e Ross é possível estimar o modelo novo keynesiano de equilíbrio geral, cujos resultados mostram boas e grandes estimativas para a curva de Phillips, para o parâmetro da taxa de juros real e o modelo exhibe uma relevante resposta contemporânea da estrutura a termo aos cinco choques macroeconômicos estruturais do modelo.

Dentre os parâmetros estimados na curva IS, o impacto do produto esperado foi menor que o impacto do produto passado, que mostra a relevância do produto passado na formação do produto corrente. Por outro lado, o parâmetro da taxa de juros real foi ligeiramente superior ao observado nos EUA. A elasticidade intertemporal inversa de substituição mostrou que a curva IS é um canal de pouca eficácia na transmissão da política monetária.

Na curva de Phillips, o componente forward-looking foi inferior ao componente backward-looking, resultado oposto ao verificado por Bekaert, Cho e Moreno nos EUA.

Na estimação da regra de política monetária, a diferença entre a inflação esperada e a meta de inflação medida pelo parâmetro foi 20% superior ao verificado na economia norte-americana.

Uma contribuição importante desse modelo é perceber que o parâmetro do peso das taxas de inflação futura na definição da taxa de inflação de longo prazo é menor do que o parâmetro de suavização da inflação passada na determinação da meta de inflação.

Assim, percebemos a importância da política monetária na definição da inflação e das taxas de juros. Quanto ao nível de produção, notamos que, além da política monetária, os choques de produtividade e da curva IS também são relevantes.

Adicionalmente, concluímos que esse modelo macroeconômico e financeiro se ajusta melhor à estrutura a termo de juros da economia brasileira do que os modelos de vetor autoregressivo tradicional no DSGE, quando comparamos os erros de medição.

O impulso da curva de Phillips sobre os fatores latentes, de imediato o choque aumenta o fator nível, esse undershooting na taxa de juros pode estar relacionado com uma resposta endógena da autoridade monetária para conter a inflação, que diminui a inflação abaixo do estado estacionário por certo tempo. O impulso na curva IS tem como resposta o aumento do fator nível e o impulso do choque de política monetária provoca uma resposta de aumento inicial do fator nível, seguido por uma queda abrupta, que pode estar associado ao undershooting da taxa de juros de curto prazo após um choque de política monetária. Os impulsos no choque de produtividade e no choque nas metas de inflação aumentam o fator nível.

O choque de política monetária mostra um aumento relevante na taxa de juros de 1 dia e vai oscilando até convergir no estado estacionário. A resposta da taxa de 1 ano é um suave aumento e posterior oscilação até a convergência. Nas taxas para 5 e 10 anos o efeito é uma redução nas taxas com impacto maior de queda na taxa de 20 trimestres.

O choque de produtividade tem como resposta um aumento no curto prazo de todos os termos das taxas de juros. Os efeitos de curto nas taxas de 1 dia e 1 ano são semelhantes e nas taxas de 5 e 10 anos vão reduzindo, todos vão oscilando até convergir no estado estacionário.

Os choques nas metas de inflação aumentam todos os termos das taxas de juros no horizonte de curto prazo, mas os efeitos são maiores sobre os termos de prazos mais curtos (1 dia e 1 ano), quando comparado aos termos de longo prazo (5 e 10 anos).

Logo, existem indícios de que a transmissão monetária no Brasil não é muito elevada e que o grau de dependência do consumo passado na economia brasileira é alto. A novidade estimar o produto natural de forma endógena mostra que o produto natural do período passado é relevante para definir o produto natural corrente.

Por fim, e com a mesma conclusão obtida nos outros capítulos anteriores, percebemos que as variáveis macroeconômicas são importantes para explicar o comportamento da estrutura a termo de taxas de juros. O fator nível da curva de juros foi explicado pela meta de inflação, o fator curvatura foi explicado pela meta de inflação e pela regra de política monetária e o fator inclinação da curva de juros foi explicado pela curva de Phillips, pela meta de inflação e pela regra de política.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ang, Andrew; Monika Piazzesi e Min Wei (2004). *What does the Yield Curve Tell us about GDP Growth?*, NBER Working Paper nr. 10672, p. 1-58.
- Ball, C.A. and W.N. Torous (1983). "Bond Price Dynamics and Options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 18, pp. 517–31.
- Baum, Christopher F. e Mark E. Schaffer (2003). Instrumental variables and GMM: estimation and testing, *The Stata Journal* 3, nr. 1, pp. 1-31.
- Bekaert, Geert; Senghoon Cho, e Antonio Moreno (2010). "New-Keynesian Macroeconomics and the Term Structure", *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 42, n^o. 1, p. 33-62.
- Bernanke, B. S. (1983). "Nonmonetary aspects of the financial crisis in the propagation of the great depression", *The American Economic Review*, v. 73, p. 257-276.
- _____ (1990). "On the predictive power of interest rates and interest rate spreads", *New England Economic Review*, Federal Reserve Bank of Boston, p. 51-68.
- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, Vol. 81, pp. 637–59.
- Campbell, J. Y. (1995). "Some lessons from the yield curve", *Journal of Economic Perspectives*, v. 9, n. 3, p. 129-152.
- Cochrane, John H. (2001). "Asset Pricing", Princeton NJ: Princeton University Press.
- Cox, John; Jonathan Ingersoll e Stephen Ross (1985). "A theory of term structure of interest rates", *Econometrica* 53, 385-408.
- Diebold, Francis X. & Rudebusch, Glenn D. & Boragan Aruoba, S. (2006). "*The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach*", *Journal of Econometrics*, Elsevier, vol. 131(1-2), pages 309-338
- Dybvig, Ph.H. (1980). "A Positive Wealth Constraint Precludes Arbitrage Profits (e.g. from Doubling) in the Black-Scholes model," Unpublished Manuscript, Princeton University, New Jersey.
- Evans, P. (1985). *Do Large Deficits Produce High Interest Rates?* *The American Economic Review*, 75(1), 68-87.

- _____ (1987). *Interest Rates and Expected Future Budget Deficits in the United States*. The Journal of Political Economy, 95(1), 34-58.
- Fisher, I. (1896). *Appreciation and interest*. Publications of the American Economic Association, 11, 21–29.
- Fuhrer, Jeffrey C. (2000). “Habit Formation in Consumption and Its Implications for Monetary-Policy Models”, American Economic Review 90, 367-389.
- Galí, J. (2008). *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework*. Princeton University Press.
- Hamilton, James D. and Dong H. Kim (2002). *A Re-Examination of the Predictability of the Yield Spread for Real Economic Activity*. Journal of Money, Credit, and Banking, 34, 340-60.
- Hansen, B. E. (2000). *Sample splitting and “threshold” estimation*. Econometrica, vol. 68, no. 3, 575-603.
- Hansen, L. P. (1982). “Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators”, Econometrica, 50, 1029–1054.
- Harrison, J.M. and D. Kreps (1979). “Martingales and Arbitrages in Multiperiod Security Markets,” Journal of Economic Theory, Vol. 20, pp. 381–408.
- Haubrich, Joseph G. e Ann M. Dombrosky (1996). *Predicting Real Growth Using the Yield Curve*, Federal Reserve Bank of Cleveland Economic Review, vol. 32, no. 1, (quarter 1 1996) pp. 26-35.
- Heath, D.C. and R.A. Jarrow (1987). “Arbitrage, Continuous Trading, and Margin Requirements,” The Journal of Finance, Vol. 42, No. 5, pp. 1129–42.
- Heat, D., R. Jarrow e A. Morton, (1992). Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation. Econometrica, 60, 77-105.
- Ho, T.S.Y, and S.-B. Lee, 1986, “Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims,” The Journal of Finance, Vo1. 41, pp. 1011–29.
- Hördahl, Peter, Oreste Tristani e David Vestin (2006). “A Joint Econometric Model of Macroeconomic and Term Structure Dynamics.” Journal of Econometrics, 131, 405–44.
- Hull, J. and A. White (1990). “Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method,” Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 25, pp. 87–100.

- Kozicki, Sharon e Peter A. Tinsley (2001). "Shifting Endpoints in the Term Structure of Interest Rates." *Journal of Monetary Economics*, 47, 613–52.
- Kreps, D. (1979). "Three Essays on Capital Markets," Technical Report No. 298, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences.
- Lima, A. M. C. e J.V. Issler (2003). *A Hipótese das Expectativas na Estrutura a Termo de Juros no Brasil: Uma Aplicação de Modelos de Valor Presente*. *Revista Brasileira de Economia*, 57(4): 873-898.
- Lucas Jr., Robert E. (1978). "Asset prices in an exchange economy", *Econometrica* 46, 1426-1446.
- Mankiw, Gregory N. e Jeffrey A. Miron (1986). *The Changing Behaviour of the Term Structure of Interest Rates*. *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 101, nº 2, p. 211-228.
- Matsumura, M. e A. Moreira (2005). *Can Macroeconomics Variáveis Account for the Structure of Sovereign Spreads? Studying the Brazilian Case*. Texto para Discussão IPEA nº 1.106.
- Merton, R (1973). *The Theory of Rational Option Pricing*, *Journal of Economics and Management Science* 4, p. 141-183.
- Munnik, Jeroen F. J. (1996). *The Valuation of Interest Rate Derivative Securities*, Taylor & Francis e-Library.
- Nelson, Charles R. e Andrew F. Siegel (1987). *Parsimonious Modeling of Yield Curves*. *The Journal of Business*, vol. 60, nº 4, p. 473-489.
- Rocha, K.; Moreira, A. e R. Magalhães (2002). *Determinantes do Spread Brasileiro: Uma Abordagem Estrutural*. Texto para Discussão IPEA nº 890.
- Stock, James H. e Mark W. Watson (1989). *New Indexes of Coincident and Leading Economic Indicators*, in Olivier Blanchard and Stanley Fischer, *NBER Macroeconomics Annual*, Cambridge MA: MIT Press.
- _____ (2001). "Forecasting Output and Inflation: The Role of Asset Prices", NBER Working Papers 8180, National Bureau of Economic Research, Inc.
- Tabak, B. e S. Andrade (2001). *Testing the expectations hypothesis in the Brazilian term structure of interest rates*. Brasília: Banco Central do Brasil Working Paper nr. 30.
- Teräsvirta, Timo (2007). *Smooth Transition Regression Modeling. Themes in modern econometrics: Applied Time Series Econometrics*, cap. 6, 222-242, Cambridge University Press.

Vasicek, Oldrich (1977). *An Equilibrium Characterization of the Term Structure*.
Journal of Financial Economics 5, p. 177-188.

Woodford, Michael (2003). "Interest and Prices – Foundations of a Theory of
Monetary Policy", Princeton University Press, USA.

Wu, Tao. (2006) "Macro Factors and the Affine Term Structure of Interest
Rates." Journal of Money, Credit and Banking, 51, 1847–75.