

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**Análise de Tensões em Placas  
Finas Laminadas sob Carregamento Dinâmico  
Usando o Método dos Elementos de Contorno**

**Autor:** Lucas Silveira Campos

**Orientador:** Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque

**Curso:** Mestrado em Ciências Mecânicas

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Ciências Mecânicas da Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ciências Mecânicas.

Brasília, 2012

DF - Brasil

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO**

**Análise de Tensões em Placas  
Finas Laminadas sob Carregamento Dinâmico  
Usando o Método dos Elementos de Contorno**

**Autor:** Lucas Silveira Campos

**Orientador:** Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

---

**Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque, Presidente**

**ENM/UnB**

---

**Prof. Dr. Paulo Sollero**

**FEM/UNICAMP**

---

**Prof. Dr. Paul William Partridge**

**ENC/UnB**

Brasília, 9 de Abril de 2012.

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

CAMPOS, LUCAS SILVEIRA

Análise de Tensões em Placas Finas Laminadas sob Carregamento Dinâmico Usando o Método dos Elementos de Contorno. [DISTRITO FEDERAL] 2012. 93 p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2012).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Mecânica

- |                                |                                     |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| 1. Materiais Compósitos        | 2. Método dos Elementos de Contorno |
| 3. Método da Integração radial | 4. Anisotropia                      |
| I. ENM/FT/UnB                  | II. ENM.DM - 170A/2012              |

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

CAMPOS, LUCAS SILVEIRA (2012). Análise de Tensões em Placas Finas Laminadas sob Carregamento Dinâmico Usando o Método dos Elementos de Contorno. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM.DM - 170A/2012. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília – DF, 89 p.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

NOME DO AUTOR: Lucas Silveira Campos

TÍTULO: Análise de Tensões em Placas Finas Laminadas sob Carregamento Dinâmico Usando o Método dos Elementos de Contorno

GRAU: Mestre

ANO:2012.

É concedida a Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Lucas Silveira Campos

zaz1588@gmail.com

## **Agradecimentos**

Ao meu orientador por tornar simples o que antes parecia impossível.

## Resumo

Campos, Lucas Silveira, *Análise de Tensões em Placas Finas Laminadas sob Carregamento Dinâmico Usando o Método dos Elementos de Contorno*. Brasília, 2012. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília.

Este trabalho apresenta uma formulação dinâmica do método dos elementos de contorno para o cálculo de tensões de placas finas anisotrópicas. As formulações usam soluções fundamentais elasto-estáticas e os termos de inercia são tratados como forças de corpo. As integrais de domínio provenientes das forças de corpo são transformadas em integrais de contorno usando o método da integração radial (MIR). No MIR, a função de aproximação de placas finas aumentada é usada na aproximação das forças de corpo. São implementadas formulações para a análise transiente de placas finas. A integração no tempo é realizada usando o método de Houbolt. As tensões no domínio são calculadas através de equações integrais. Quando o ponto fonte é colocado no contorno, estas equações integrais se tornam mais que hipersingulares, demandando uma abordagem alternativa para o cálculo das tensões no contorno. Desta forma, as tensões no contorno são obtidas por um procedimento que usa equações integrais para calcular as primeiras derivadas do deslocamento, derivadas das funções de forma e relações constitutivas. Apenas o contorno é discretizado.

*Palavras chaves:* Materiais Compósitos, Método dos Elementos de Contorno, Método da Integração Radial, Anisotropia.

## Abstract

Campos, Lucas Silveira, *Stress Analysis of Thin Plate Composite Materials Under Dynamic Loads using the Boundary Element Method*. Brasília, 2012. Master Thesis, Faculty of Technology, University of Brasília.

This work presents a dynamic formulation of the boundary element method for the computation of stresses of anisotropic thin plates. The formulation uses elastostatic fundamental solutions and inertia terms are treated as body forces. Domain integrals that come from body forces are transformed into boundary integrals using the radial integration method (RIM). In the RIM, the augmented thin plate spline is used as the approximation function. The time integration is carried out using the Houbolt method. Stresses inside the domain are calculated using integral equations. When the source point is on the boundary, these integral equations become more than hypersingular, demanding an alternative approach to calculate stresses on the boundary. Therefore stresses on the boundary are computed by a procedure that uses integral equations for the first transversal displacement derivatives, derivatives of shape functions, and constitutive relations. Only the boundary is discretized in the formulation.

*Keywords:* Composite Materials, Boundary Element Method, Radial Integration Method, Anisotropy.

# Símbolos

## Letras gregas

$\alpha$  = Ângulo.

$\varepsilon$  = Deformação normal.

$\phi$  = Ângulo.

$\Gamma$  = Contorno.

$\gamma$  = Deformação cisalhante.

$\mu$  = Raiz da equação característica.

$\nu$  = Razão de Poisson.

$\Omega$  = Domínio do problema.

$\theta$  = Ângulo entre o ponto de integração e o ponto fonte.

$\rho$  = Distância.

$\sigma$  = Tensão normal.

$\tau$  = Tensão cisalhante.

## Letras arábicas

**A** = Matriz de rigidez extensional.

**B** = Matriz de rigidez de acoplamento.

**C** = Matriz de efeitos viscosos.

**C, G, H, K** = Constantes.

**D** = Matriz de rigidez de flexão.

**D'** = Inversa da matriz **D**.

*d* = Parte real de  $\mu$ .

*E* = Módulo de elasticidade.

*e* = Parte imaginária de  $\mu$ .

*M* = Momento.

*N* = Função de interpolação.

**n** = Vetor normal ao contorno.

$Q$  = Ponto campo.

$\mathbf{Q}$  = Matriz das constantes elásticas da lâmina no sistema de coordenadas local.

$\overline{\mathbf{Q}}$  = Matriz de constantes elásticas da lâmina no sistema de coordenadas global.

$q$  = Força transversal distribuída.

$R_i$  = Função.

$r_i, s_i, q_i, p_i$  = Constantes.

$S_i$  = Função.

$\mathbf{T}$  = Matriz de transformação.

$t$  = Espessura da placa.

$u, v$  = Deslocamentos no plano da placa.

$w$  = Deslocamento transversal.

$x, y, z$  = Eixos de coordenadas.

$z$  = Distância transversal do plano médio da placa à um ponto.

## Subscritos

$\Gamma$  = Contorno.

$\Omega$  = Domínio.

1, 2, 3 = Direções principais.

$c$  = Compressão, elemento contínuo.

$d$  = Elemento descontínuo.

$L$  = Direção longitudinal às fibras.

$n$  = Direção normal.

$ns$  = Direção tangencial.

$T$  = Direção transversal às fibras.

$t$  = Tração.

$x, y, z$  = Direções principais do sistema de coordenadas.

## Sobrescritos

1, 2, 3 = Nós do elemento.

\* = Soluções fundamentais.



## *Lista de Figuras*

2.1	Placa Fina. . . . .	6
2.2	Tensões em um elemento de placa . . . . .	7
2.3	Forças e momentos em um elemento da placa . . . . .	8
2.4	Deformação em um elemento da placa. . . . .	9
2.5	Posições inicial e final de um elemento de placa. . . . .	11
2.6	Compósito laminado com quatro lâminas . . . . .	14
3.1	Sistema de coordenadas $(n, s)$ normal e tangente ao contorno $\Gamma$ . . . . .	21
3.2	Canto $i$ da placa e os momentos antes e depois a este canto. . . . .	24
3.3	Elemento quadrático descontínuo. . . . .	35
4.1	Transformação da integral de domínio em integral de contorno. . . . .	43
4.2	Posição dos pontos no domínio. . . . .	51
4.3	Variação da deformação e da tensão em um laminado simétrico hipotético . . . . .	53
4.4	Direções normal $m$ and tangencial $t$ no ponto fonte. . . . .	59
5.1	Placa quadrada ortotrópica engastada (Fonte: Sousa (2009)). . . . .	66
5.2	Carregamento tipo função degrau. . . . .	67
5.3	Tensão $\sigma_{22}$ em função do tempo, variando-se o número de pontos internos. . . . .	67
5.4	Tensão $\sigma_{22}$ em função do tempo, variando-se o número de elementos. . . . .	68
5.5	Tensão $\sigma_{22}$ em função do tempo, variando-se o número de intervalos de tempo. . . . .	70
5.6	Deslocamentos no centro obtidos por Santana (2008) e por Sladek et al. (2007) para a placa engastada. . . . .	71

5.7	Mapa de $\sigma_{11}$ no instante de máxima tensão absoluta na placa engastada. . . . .	72
5.8	Mapa de $\sigma_{22}$ no instante de máxima tensão absoluta na placa engastada. . . . .	73
5.9	Mapa de $\sigma_{12}$ no instante de máxima tensão absoluta na placa engastada. . . . .	74
5.10	Placa quadrada ortotrópica apoiada (Fonte: Sousa (2009)). . . . .	75
5.11	Tensão $\sigma_{12}$ em função do tempo na placa simplesmente apoiada. . . . .	76
5.12	Deslocamentos obtidos por Santana (2008) e por Sladek et al. (2007) para a placa apoiada. . . . .	77
5.13	Mapa de $\sigma_{11}$ no instante de máxima tensão absoluta na placa simplesmente apoiada.	77
5.14	Mapa de $\sigma_{22}$ no instante de máxima tensão absoluta na placa simplesmente apoiada.	78
5.15	Mapa de $\sigma_{12}$ no instante de máxima tensão absoluta na placa simplesmente apoiada.	79
5.16	Placa quadrada ortotrópica engastada em um lado e livre em três lados (Fonte: Sousa (2009)). . . . .	80
5.17	Tensão $\sigma_{22}$ em função do tempo na placa engastada-livre. . . . .	81
5.18	Mapa de $\sigma_{11}$ no instante de máxima tensão absoluta na placa engastada-livre. . . .	82
5.19	Mapa de $\sigma_{22}$ no instante de máxima tensão absoluta na placa engastada-livre. . . .	83
5.20	Mapa de $\sigma_{12}$ no instante de máxima tensão absoluta na placa engastada-livre. . . .	84

# *Sumário*

Resumo . . . . .	v
Abstract . . . . .	vi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Placas anisotrópicas . . . . .	2
1.2 Método dos elementos de contorno . . . . .	3
1.3 Descrição do trabalho . . . . .	4
<b>2 Teoria Clássica de Flexão em Placas Anisotrópicas</b>	<b>5</b>
2.1 Relações básicas para placas anisotrópicas . . . . .	5
2.2 Materiais Compósitos . . . . .	11
2.2.1 Material compósito laminado . . . . .	12
2.2.2 Equação constitutiva do laminado . . . . .	12
2.3 Cálculo da matriz de rigidez de flexão em uma direção arbitrária . . . . .	18
<b>3 O Método dos Elementos de Contorno para Flexão em Placas Anisotrópicas</b>	<b>20</b>
3.1 Equação integral de contorno . . . . .	20
3.2 Soluções fundamentais para problemas de flexão em materiais anisotrópicos . . . . .	27
3.3 Elementos Quadráticos . . . . .	34
3.4 Equação matricial . . . . .	36
<b>4 Formulação dinâmica do método dos elementos de contorno para flexão de placas</b>	<b>41</b>

4.1	Transformação exata das integrais de domínio em integrais de contorno para flexão em placas anisotrópicas . . . . .	41
4.2	Método da integração radial - MIR . . . . .	48
4.3	Tensões em placas compósitas laminadas . . . . .	52
4.3.1	Tensão e deformação de placas compósitas laminadas . . . . .	52
4.3.2	Cálculo das tensões no contorno . . . . .	59
4.4	Problemas transientes . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>65</b>
5.1	Placa quadrada engastada nos quatro lados sob carga uniformemente distribuída . .	65
5.1.1	Sensibilidade ao número de pontos internos . . . . .	65
5.1.2	Sensibilidade ao número de elementos . . . . .	68
5.1.3	Sensibilidade ao passo de tempo . . . . .	69
5.2	Placa quadrada simplesmente apoiada nos quatro lados sob carga uniformemente distribuída . . . . .	75
5.3	Placa engastada-livre sob carga uniformemente distribuída . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>85</b>
6.1	Sugestões para trabalhos futuros . . . . .	86
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>87</b>

# *1 Introdução*

Os compósitos estruturais tornaram viáveis importantes conquistas tecnológicas recentes, principalmente em áreas como aeronáutica, aeroespacial, petroquímica, naval, bioengenharia, automobilística, construção civil e de artigos esportivos. Essa classe de materiais tem como característica básica combinar, a nível macroscópico, pelo menos, duas fases distintas denominadas matriz e reforço. Essa associação faz com que esses materiais apresentem um excelente desempenho estrutural, considerando tanto a resistência como a rigidez.

As matrizes poliméricas, apesar de apresentar baixa massa específica, são bem menos resistentes e rígidas que as fibras de reforço, o que ocasiona mudança das propriedades do material de acordo com a orientação das fibras em relação às solicitações mecânicas aplicadas ao objeto. Esse comportamento anisotrópico torna a análise, quando comparada aos materiais estruturais isotrópicos tradicionais (metais), significativamente mais complexa. Os materiais metálicos apresentam propriedades e comportamento bem definidos e comprovados ao longo de muitas décadas enquanto os compósitos necessitam de um tratamento matemático mais difícil e trabalhoso para modelar seu comportamento mecânico. Essa complexidade, no entanto, permite adequar o material a um requisito específico de projeto.

Dentre os variados tipos de materiais compósitos encontrados, tem posição de destaque os laminados com reforço unidirecional, devido à sua eficiência estrutural e sua ampla utilização. Esse trabalho tem como objetivo analisar esse tipo de material sobre um carregamento dinâmico, condição essa usual de trabalho em grande parte de suas aplicações, como podemos observar nas indústrias aeronáuticas e aeroespaciais onde as estruturas estão constantemente expostas a carregamentos dinâmicos.

## 1.1 Placas anisotrópicas

Placas, por definição, são elementos estruturais de superfície, simétricos em relação a um plano médio, cuja dimensão menor, que está na direção normal a este plano é denominada espessura da placa. O carregamento é transversal ao plano médio. De acordo com o material a qual é constituída, as placas podem ser classificadas como: anisotrópicas (com propriedades diferentes em qualquer direção), ortotrópicas (com propriedades diferentes em duas direções perpendiculares), ou isotrópicas (com propriedades iguais em qualquer direção). E, de acordo com a espessura, as placas são classificadas como finas e espessas. A literatura recomenda, para metais, a formulação de placas finas para  $1/80 < t/a < 1/5$  e espessa para  $t/a > 1/5$ , onde  $t$  é a espessura e  $a$  é a aresta da placa. Os modelos matemáticos para placas finas não levam em conta os efeitos da deformação por cisalhamento transversal enquanto que nos modelos de placa espessa estes efeitos são considerados. Trabalhos recentes, como em Reis (2010), tem mostrado que, além da espessura, outros aspectos do problema devem ser levados em conta na consideração ou não dos efeitos do cisalhamento transversal. Dentre estes aspectos, pode-se citar a geometria da placa, as condições de contorno, as propriedades do material e o tipo de análise que se está fazendo (análise apenas dos deslocamentos ou análise de tensões).

A primeira teoria de placas foi proposta por Kirchhoff (1850). Esta teoria é comumente referenciada como teoria clássica ou teoria de placas finas, na qual é desconsiderada a deformação por cisalhamento, ou distorção, ao longo da espessura da placa. No caso de materiais compósitos ou placas anisotrópicas onde o módulo do cisalhamento é muito pequeno quando comparado com o módulo de elasticidade na direção das fibras, a teoria clássica pode não ter resultados satisfatórios mesmo para placas finas. Isto também ocorre em placas isotrópicas com furos da ordem da espessura da placa ou menor. Outra teoria de placas foi proposta por Reissner (1945). Esta teoria é baseada em um modelo bi-dimensional o qual assume variações de tensão ao longo da espessura da placa (terceira dimensão). A teoria considera que a deformação por cisalhamento transversal e a tensão normal transversal não são desprezíveis. Mindlin (1951) propôs uma outra formulação, similar a de Reissner, baseada no deslocamento ao longo da espessura da placa. Tanto a teoria de Reissner quanto a de Mindlin são consideradas teoria de placas espessas, por considerarem a deformação de cisalhamento na direção transversal. Estas teorias descrevem o deslocamento ao longo da espessura da placa por uma função linear e, por isso, também são conhecidas como teorias de placas de primeira ordem.

A hipótese de placa fina condiz com o problema do material compósito modelado visto que a espessura das lâminas está, normalmente, no intervalo das placas finas. Por isso, neste trabalho será apresentado uma análise de placas finas de materiais compósitos usando o método dos elementos de contorno.

## 1.2 Método dos elementos de contorno

O método dos elementos de contorno vem sendo desenvolvido há várias décadas se consolidando como uma eficaz ferramenta de análise computacional. Entretanto, a análise de problemas de materiais anisotrópicos usando o método dos elementos de contorno ainda demanda muita pesquisa.

As formulações de elementos de contorno têm sido aplicadas a problemas de flexão em placas anisotrópicas, considerando a teoria de Kirchhoff, bem como teorias de placas deformáveis ao cisalhamento (teorias de Reissner e Mindlin). Shi e Bazine (1990) apresentam uma análise por elementos de contorno de problemas de flexão de placa usando a solução fundamental proposta por Wu e Altiero (1981) baseadas nos pressupostos de flexão da placa de Kirchhoff. Rajamohan e Raamachandran (1999) propuseram uma formulação na qual as singularidades são evitadas por pontos fontes colocados fora do domínio. Paiva, Sollero e Albuquerque (2003) apresentaram um tratamento analítico para integrais singulares e hipersingulares da formulação proposta por Shi e Bazine (1990). Placas deformáveis por cisalhamento tem sido analisadas usando o método dos elementos de contorno por Wang e Schweizerhof (1996b), Wang e Schweizerhof (1997) com a solução fundamental proposta por Wang e Schweizerhof (1995).

No método dos elementos de contorno para flexão de placas, a presença de forças distribuídas no domínio faz aparecer integrais de domínio na formulação. Com o objetivo de resolver estas integrais, o esquema de integração por células pode dar resultados precisos, como demonstrado por Shi e Bazine (1990) para problemas de flexão em placas anisotrópicas. Contudo, a discretização do domínio em células elimina uma das principais vantagens do método dos elementos de contorno que é a discretização somente do contorno. Uma alternativa para este procedimento foi apresentada por Rajamohan e Raamachandran (1999) que propuseram o uso de soluções particulares para aproximar a discretização do domínio. Entretanto, o uso de soluções particulares requer a busca de uma função que satisfaça a equação governante. Dependendo do quão complexa seja a equação governante, esta função pode ser difícil de ser encontrada.

Neste trabalho, integrais de domínio devido a cargas distribuídas são transformadas em integrais de contorno pelo método da integração radial. Este método foi inicialmente apresentado por Venturini (1987) para problemas de flexão em placas isotrópicas. Gao (2002) estendeu o método para problemas de elasticidade isotrópica tridimensional e Albuquerque et al. (2006) para placa de Kirchhoff anisotrópica. Albuquerque, Sollero e Paiva (2007) estenderam a formulação para problemas dinâmicos, enquanto Reis, Albuquerque, Torsani, Palermo e Sollero (2011) apresentaram a análise de tensões de placas finas anisotrópicas.

### **1.3 Descrição do trabalho**

Neste trabalho são apresentadas formulações do método dos elementos de contorno para análise dinâmica de tensões em placas finas de materiais anisotrópicos. Trata-se de uma continuação dos trabalhos de Santana (2008) que implementou o cálculo dos deslocamentos de placas finas de materiais anisotrópicos e de Sousa (2009) que implementou o cálculo dos momentos e das tensões em pontos internos. A principal contribuição deste trabalho para a literatura é o cálculo das tensões no contorno para placas sob carregamento dinâmico. No próximo capítulo, o capítulo 2, a teoria clássica de flexão em placas anisotrópicas é apresentada, além de uma breve descrição de materiais anisotrópicos e de materiais compósitos. O capítulo 3 apresenta a formulação básica do método do elementos de contorno para flexão em placas anisotrópicas segundo a teoria clássica, obtendo a equação integral de contorno e também a solução fundamental anisotrópica. Apresenta-se os elementos quadráticos e se constrói a equação matricial do problema. No capítulo 4 são apresentadas técnicas para esse problema específico. É descrita a transformação de integrais de domínio em integrais de contorno de maneira exata, para o carregamento, e de maneira numérica, usando o método da integração radial, para os efeitos de inércia. É descrito o procedimento para o cálculo das tensões tanto no interior quanto no contorno do problema. Para finalizar o capítulo, apresenta-se o método de Houbolt que é usado na integração no tempo nesse trabalho. O capítulo 5 contém os resultados numéricos obtidos, comparando-os com os resultados estáticos para os mesmos casos. No sexto e último capítulo estão localizados sugestões para futuros trabalhos e as considerações finais.



## ***2 Teoria Clássica de Flexão em Placas Anisotrópicas***

Uma placa é um elemento estrutural definido por duas superfícies planas e paralelas (Figura 2.1) onde as cargas são transversalmente aplicadas. A distância entre estas duas superfícies define a espessura da placa, a qual é pequena quando comparada com as outras dimensões da placa.

Considerando as propriedades do material, uma placa pode ser anisotrópica, com diferentes propriedades em diferentes direções, ou isotrópica, com propriedades iguais em todas as direções. Dependendo de sua espessura, uma placa pode ser considerada fina ou espessa. A teoria de placas finas não leva em conta os efeitos da deformação por cisalhamento e é conhecida também como teoria clássica de flexão de placas. Já as teorias para placas espessas levam em conta este efeito e por isso são também conhecidas como teoria de placas deformáveis por cisalhamento. Neste trabalho será desenvolvida a formulação para placas finas anisotrópicas.

A teoria clássica de flexão em placas anisotrópicas está baseada nos seguintes pressupostos:

1. Seções planas, que no seu estado não deformado são normais à superfície média, continuam retas e normais à superfície média deformada depois do carregamento.
2. A tensão normal  $\sigma_z$  na seção transversal paralela ao plano médio é nula.

### **2.1 Relações básicas para placas anisotrópicas**

Considere um elemento de placa seguindo os pressupostos já definidos. A Figura 2.2 mostra este elemento com um estado de tensões agindo nele e uma força distribuída aplicada em sua superfície. Integrando as componentes de tensão ao longo da espessura da placa, pode-se definir os momentos e forças de cisalhamento (Figura 2.3):

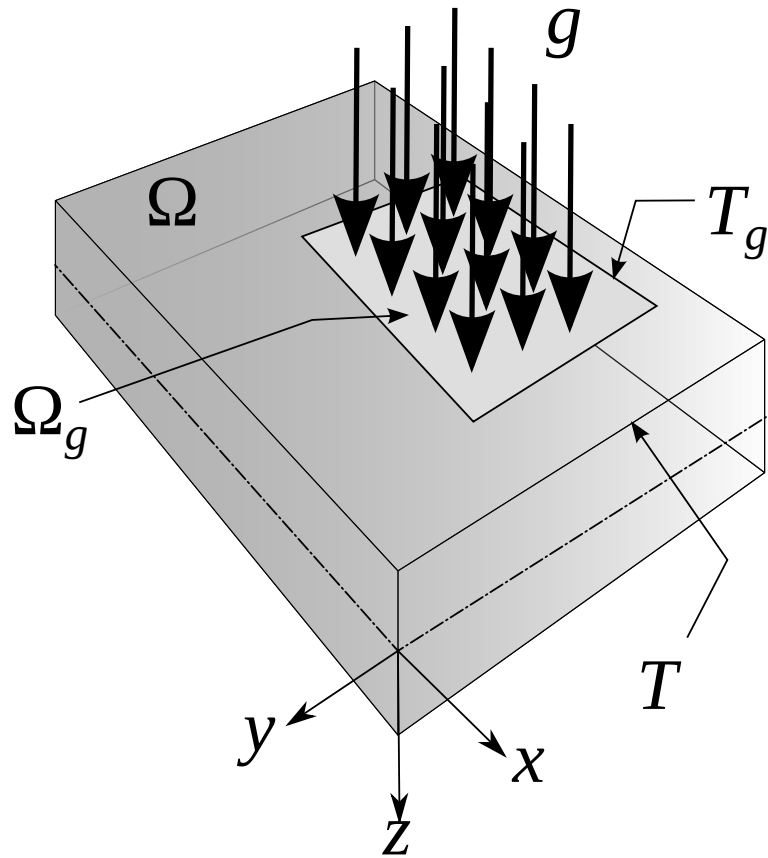


Figura 2.1: Placa Fina.

$$M_{xx} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz, \quad (2.1)$$

$$M_{yy} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz, \quad (2.2)$$

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz, \quad (2.3)$$

$$M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} z dz, \quad (2.4)$$

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz, \quad (2.5)$$

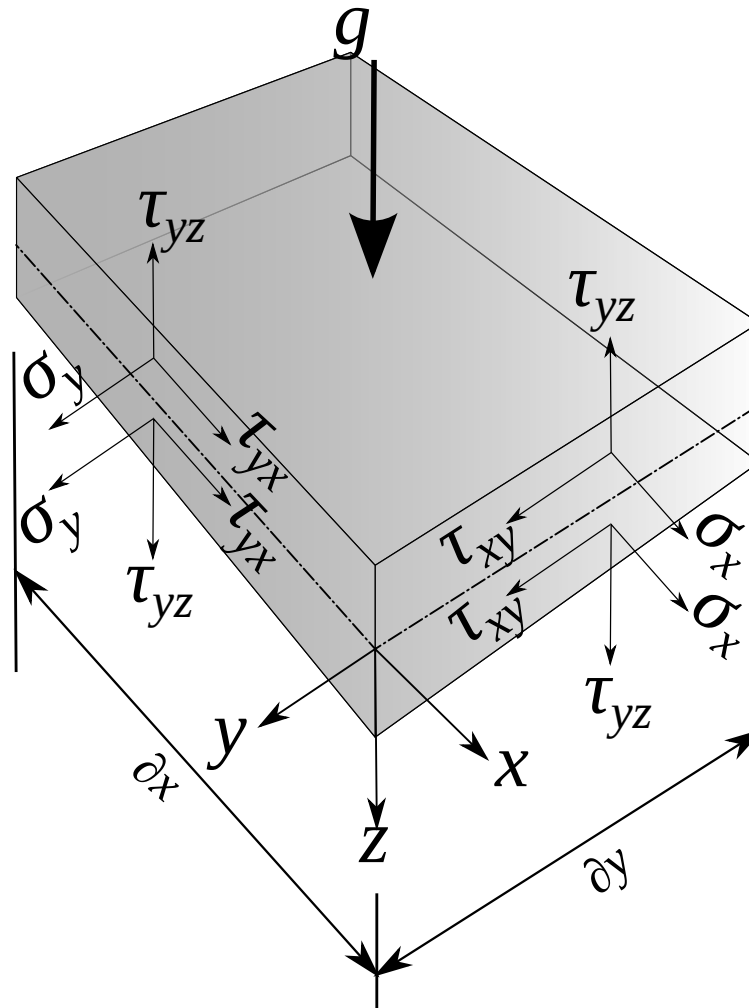


Figura 2.2: Tensões em um elemento de placa

e

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz. \quad (2.6)$$

Do equilíbrio de forças e momentos, pode-se escrever:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + g = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0. \quad (2.9)$$

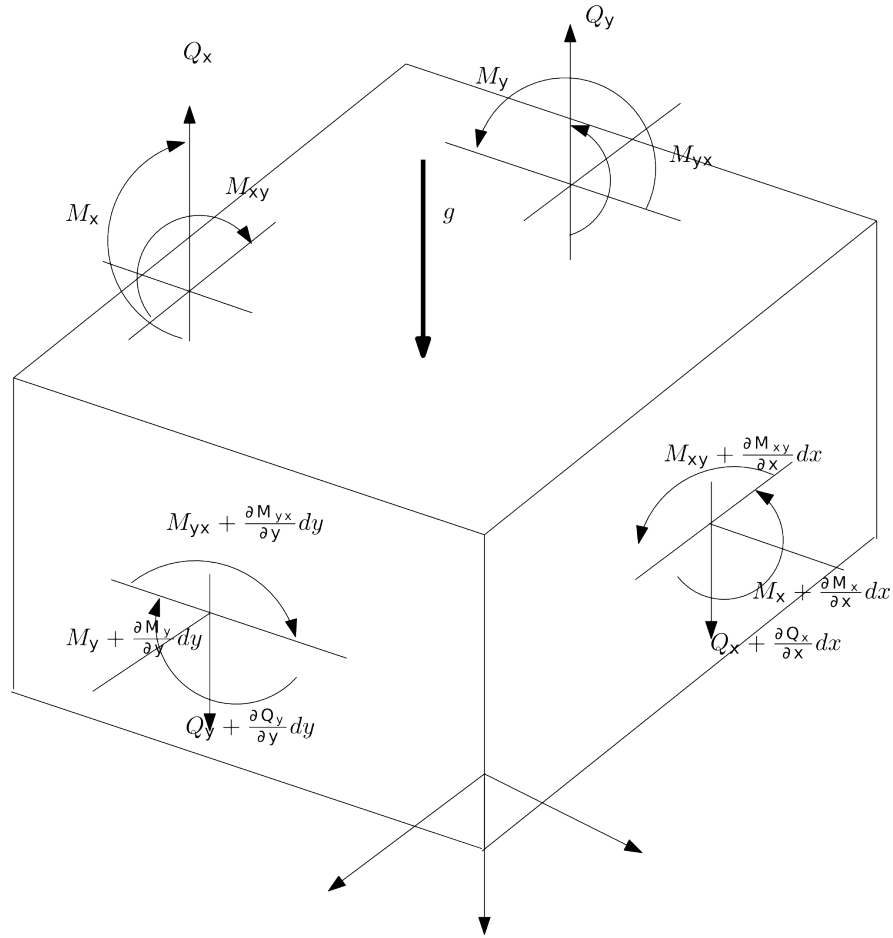


Figura 2.3: Forças e momentos em um elemento da placa

Resolvendo as equações (2.8) e (2.9) para  $Q_x$  e  $Q_y$ , respectivamente, substituindo na equação (2.7) e considerando a simetria de momentos ( $M_{xy} = M_{yx}$ ), tem-se:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = -g. \quad (2.10)$$

Considere as posições inicial e final de um elemento da placa dado por  $abcd$  paralelo ao plano médio com lados  $ab$  e  $ad$  paralelos aos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente, a uma distância  $z$  do plano médio (Figura 2.4).

Assumindo que, durante a flexão da placa, os pontos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ , movem-se para  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  e  $d'$ , chamando as componentes de deslocamento do ponto  $a$  nas direções  $x$  e  $y$  de  $u_0$  e  $v_0$  (Figura 2.4), respectivamente, o deslocamento do ponto  $b$  na direção  $x$  é dado por:

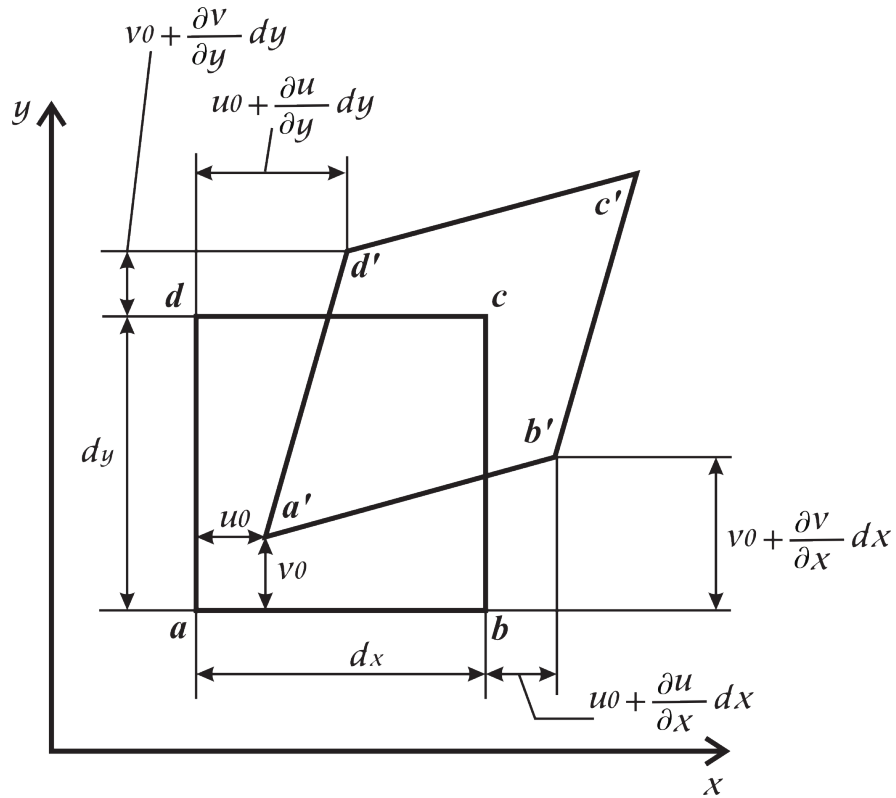


Figura 2.4: Deformação em um elemento da placa.

$$b'_x - b_x = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} dx. \quad (2.11)$$

Então, o incremento do comprimento  $dx$  na direção  $x$  é dado por:

$$\Delta dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad (2.12)$$

e a deformação na direção  $x$  é dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.13)$$

Da mesma forma, pode-se escrever:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2.15)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.16)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (2.17)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (2.18)$$

No sistema de coordenadas cilíndricas, as componentes de deformação em função dos deslocamentos são escritas como:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2.21)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}, \quad (2.22)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad (2.23)$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}. \quad (2.24)$$

A Figura 2.5 mostra as posições inicial e final de uma seção da placa, paralela ao plano  $xz$ , que contém os pontos  $a$ ,  $b$ ,  $n_1$  e  $n_2$ . A rotação do elemento  $an_1$ , inicialmente na posição vertical, é igual a  $\frac{\partial w}{\partial x}$  (Figura 2.5). Então, o deslocamento do ponto na direção  $x$ , a uma distância  $z$  da superfície média pode ser escrita como:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (2.25)$$

Seguindo um procedimento similar, o deslocamento de um ponto na direção  $y$  é dado por:

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.26)$$

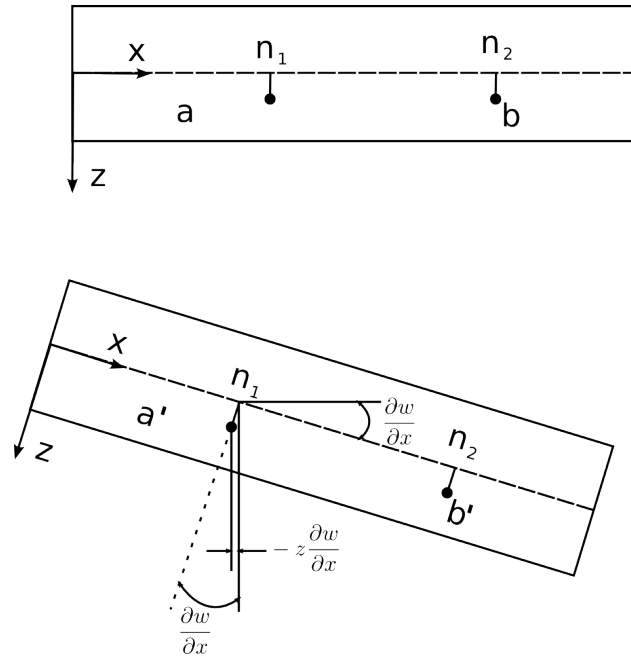


Figura 2.5: Posições inicial e final de um elemento de placa.

Substituindo as equações (2.25) e (2.26) nas equações (2.13), (2.14) e (2.16), pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = z \kappa_x, \\
 \epsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = z \kappa_y, \\
 \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = z \kappa_{xy},
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

onde  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$  e  $\kappa_{xy}$  são as curvaturas da placa dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \tag{2.28}$$

## 2.2 Materiais Compósitos

Os materiais anisotrópicos apresentam duas características interessantes. Se por um lado o grande número de variáveis e constantes elásticas necessárias para descrever o seu comportamento tornam sua análise extremamente trabalhosa e complexa, por outro essas mesmas variáveis

dão várias opções para a otimização do elemento projetado. As propriedades mecânicas podem ser maximizadas em determinadas direções, justamente àquelas que estarão sujeitas às maiores solicitações, sem um aumento significativo de peso.

Embora a maioria dos materiais apresente algum grau de anisotropia, ela pode, em muitos casos, ser ignorada por não ser relevante para uma determinada aplicação. O exemplo mais importante desse comportamento é o aço laminado, no qual é notada uma resistência à tração ligeiramente maior na direção de laminação. Na maioria das aplicações essa diferença não é importante, porém em outras ela pode ser determinante. O exemplo mais conhecido de material anisotrópico é, sem dúvida, a madeira com seus veios, cuja direção determina a direção de maior resistência e de maior rigidez.

### **2.2.1 Material compósito laminado**

Os materiais compósitos são aqueles constituídos por duas ou mais fases bem definidas, geralmente com propriedades mecânicas bastante distintas. As duas fases sempre presentes são a matriz e o reforço. A matriz é um material homogêneo que tem a finalidade de aglutinar as fibras ou partículas do material de reforço. O material de reforço tem a função de aumentar a resistência mecânica do elemento. O reforço pode estar na forma de fibras curtas, fibras longas ou de partículas. As fibras curtas e particulados são largamente utilizados como reforço em materiais termoplásticos injetados. Nestes materiais são acrescentados principalmente fibras de vidro picadas e talco industrial para aumentar a rigidez e a resistência mecânica dos componentes injetados. Nestes casos buscam-se geralmente um comportamento isotrópico e o controle da direção preferencial das fibras é quase nulo. As fibras longas, por sua vez, são usadas com matrizes de resinas termofixas como o poliéster e epóxi. Os materiais compósitos com reforço de fibras longas permitem um maior controle das propriedades mecânicas anisotrópicas pelo direcionamento das fibras e sua proporção na composição do material. Normalmente este material é constituído de várias camadas, que são as lâminas nas quais as fibras possuem uma única direção. Por ser formado por várias lâminas, estes materiais são conhecidos como compósitos laminados (Figura 2.6).

### **2.2.2 Equação constitutiva do laminado**

Como apresentado por Agarwal e Broutman (1990), as tensões em cada lâmina podem ser calculadas a partir das deformações como segue:



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{Q}}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (2.29)$$

onde a matriz  $\bar{\mathbf{Q}}_k$  é dada por:

$$\bar{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q}_k \mathbf{T}^{-T}. \quad (2.30)$$

A matriz de transformação  $\mathbf{T}$  é dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2nm \\ n^2 & m^2 & -2nm \\ -nm & nm & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

sendo,  $m = \cos \theta$  e  $n = \sin \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre as fibras de uma lâmina  $k$  e o eixo  $x$ .

A matriz das constantes elásticas  $\mathbf{Q}$  é dada, em termos das constantes de engenharia, por:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

onde:  $E_L$  é o módulo de elasticidade longitudinal (na direção das fibras),  $E_T$  é o módulo de elasticidade transversal (ortogonal às fibras),  $G_{LT}$  é o módulo de cisalhamento no plano da lâmina,  $\nu_{LT}$  é a razão de Poisson principal e  $\nu_{TL} = \nu_{LT} \frac{E_T}{E_L}$ , os subscritos  $L$  e  $T$  referem-se respectivamente às direções longitudinal e transversal à direção das fibras.

As tensões nas direções longitudinal e transversal do reforço com fibras podem ser calculadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.33)$$

Integrando ao longo da espessura (Figura 2.6) as equações (2.1), (2.2) e (2.3) obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz \quad (2.34)$$

Usando-se as equações (2.29) e (2.27), a equação (2.34) pode ser escrita para um laminado como:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z^2 dz \right\}, \quad (2.35)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (2.36)$$

onde

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3), \quad (2.37)$$

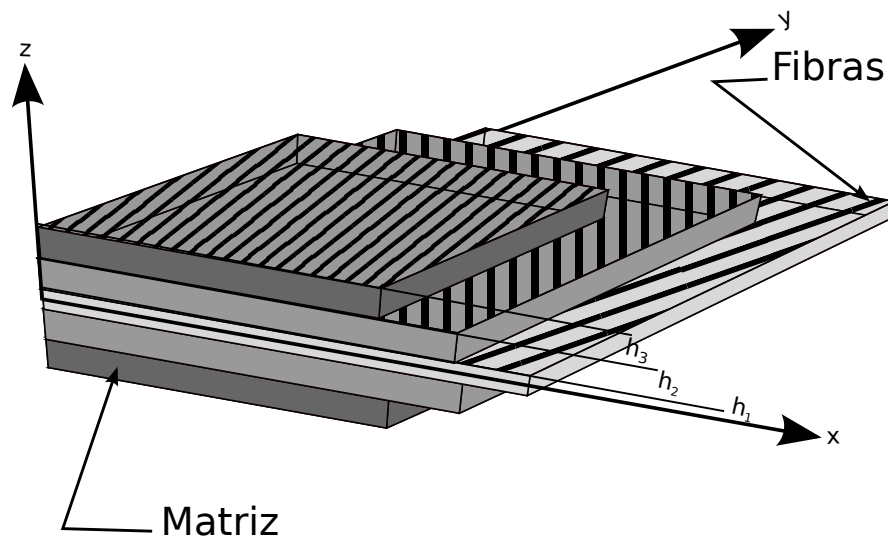


Figura 2.6: Compósito laminado com quatro lâminas

e  $h_k$  é a distância do plano médio do laminado até a interface  $k$  (Figura 2.6). A equação (2.36) pode

ser escrita, na forma expandida como:

$$\begin{aligned}
 M_{xx} &= - \left( D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\
 M_{yy} &= - \left( D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\
 M_{xy} &= - \left( D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right),
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Substituindo as equações (2.38) nas equações (2.8) e (2.9), pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 Q_x &= - \left[ D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right], \\
 Q_y &= - \left[ D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right].
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

A equação (2.10) pode ser reescrita, usando as equações (2.38), como:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = g. \tag{2.40}$$

A equação (2.40) pode ser integrada no plano característico complexo

$$\begin{aligned}
 z &= x + \mu y, \\
 \mu &= d + ie,
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

onde  $d$  e  $e$  são as partes real e imaginária de  $\mu$ , respectivamente. Usando a equação (2.41) e considerando as forças de corpo nulas, a equação (2.40) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^4} [D_{11}\mu^4 + 4D_{16}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{26}\mu + D_{22}] = 0. \quad (2.42)$$

A solução geral para  $w$  na equação (2.40) depende das raízes  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\bar{\mu}_1$  e  $\bar{\mu}_2$  da equação característica dada por:

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0, \quad (2.43)$$

cuja validade é condição para a existência de soluções não triviais da equação (2.42).

As raízes desta equação, como mostrado por Lekhnitskii (1968), são sempre complexas para materiais homogêneos. As raízes complexas  $\mu_1 = d_1 + e_1i$  e  $\mu_2 = d_2 + e_2i$  são conhecidas como parâmetros complexos de deflexão. Em geral, estas raízes são números complexos diferentes.

Uma expressão geral para a deflexão tem a forma:

1. no caso de parâmetros complexos diferentes ( $\mu_1 \neq \mu_2$ ):

$$w = w_o + 2\text{Re}[w_1(z_1) + w_2(z_2)]. \quad (2.44)$$

2. no caso de parâmetros complexos iguais ( $\mu_1 = \mu_2$ ):

$$w = w_o + 2\text{Re}[w_1(z_1) + \bar{z}_1 w_2(z_1)]. \quad (2.45)$$

onde  $w_o$  é uma solução particular da equação (2.40) que depende da força distribuída  $g$  nas superfícies da placa,  $w_1(z_1)$  e  $w_2(z_2)$  são funções analíticas arbitrárias de variáveis complexas  $z_1 = x + \mu_1 y$  e  $z_2 = x + \mu_2 y$ . Neste trabalho a formulação desenvolvida considera apenas o caso em que  $\mu_1 \neq \mu_2$ . Desta forma, a formulação não se aplica a materiais isotrópicos, onde  $\mu_1 = \mu_2$ . Entretanto, pode-se analisar problemas com materiais isotrópicos considerando  $E_1 = E_2 + \delta$ , onde  $\delta$  é um número pequeno, da ordem de  $E_2/1000$ .

Baseada nas equações (2.38) e (2.39), podem ser obtidas expressões gerais para forças e momentos como (para o caso  $\mu_1 \neq \mu_2$ ):

$$M_{xx} = M_{xx}^o - 2\text{Re}[p_1 w''(z_1) + p_2 w''(z_2)],$$

$$\begin{aligned}
M_{yy} &= M_{yy}^o - 2\text{Re}[q_1 w''(z_1) + q_2 w''(z_2)], \\
M_{xy} &= M_{xy}^o - 2\text{Re}[r_1 w''(z_1) + r_2 w''(z_2)], \\
Q_x &= Q_x^o - 2\text{Re}[\mu_1 s_1 w'''(z_1) + \mu_2 s_2 w'''(z_2)], \\
Q_y &= Q_y^o - 2\text{Re}[s_1 w'''(z_1) + s_2 w'''(z_2)].
\end{aligned} \tag{2.46}$$

onde  $M_{xx}^o$ ,  $M_{yy}^o$ ,  $M_{xy}^o$ ,  $Q_x^o$  e  $Q_y^o$  são momentos e forças cisalhantes correspondentes a função  $w_0$  calculada pelas equações (2.38) e (2.39). As outras constantes são dadas por:

$$\begin{aligned}
p_1 &= D_{11} + D_{12}\mu_1^2 + 2D_{16}\mu_1, & p_2 &= D_{11} + D_{12}\mu_2^2 + 2D_{16}\mu_2, \\
q_1 &= D_{12} + D_{22}\mu_1^2 + 2D_{26}\mu_1, & q_2 &= D_{12} + D_{22}\mu_2^2 + 2D_{26}\mu_2, \\
r_1 &= D_{16} + D_{26}\mu_1^2 + 2D_{66}\mu_1, & r_2 &= D_{16} + D_{26}\mu_2^2 + 2D_{66}\mu_2, \\
s_1 &= \frac{D_{11}}{\mu_1} + 3D_{16} + D_{12} + D_{66}\mu_1 + D_{26}\mu_1^2, & & \\
s_2 &= \frac{D_{11}}{\mu_2} + 3D_{16} + D_{12} + D_{66}\mu_2 + D_{26}\mu_2^2, & & \\
s_1 - r_1 &= \frac{p_1}{\mu_1}, & s_2 - r_2 &= \frac{p_2}{\mu_2}, \\
s_1 + r_1 &= -q_1\mu_1, & s_2 + r_2 &= -q_2\mu_2.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Expressões similares podem ser obtidas para o caso isotrópico, onde  $\mu_1 = \mu_2$ . Conforme citado anteriormente, estas expressões não serão apresentadas neste trabalho.

## 2.3 Cálculo da matriz de rigidez de flexão em uma direção arbitrária

Considerando que as constantes de rigidez à flexão de uma placa em um sistema de coordenadas  $x, y, z$  são dadas por  $D_{ij}(i, j = 1, 2, 6)$  e em um sistema de coordenadas  $x', y', z'$  rotacionado com respeito ao primeiro sistema de coordenadas, são dados por  $D'_{ij}(i, j = 1, 2, 6)$ , as equações relacionando estas constantes, como mostrado por Lekhnitskii (1968), são dadas por:

$$D'_{11} = D_{11} \cos^4 \phi + 2(D_{12} + 2D_{66}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi + D_{22} \sin^4 \phi + 2(D_{16} \cos^2 \phi + D_{26} \sin^2 \phi) \sin 2\phi, \quad (2.48)$$

$$D'_{22} = D_{11} \sin^4 \phi + 2(D_{12} + 2D_{66}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi + D_{22} \cos^4 \phi + 2(D_{16} \sin^2 \phi + D_{26} \cos^2 \phi) \sin 2\phi, \quad (2.49)$$

$$D'_{12} = D_{12} + [D_{11} + D_{22} - 2(D_{12} + 2D_{66})] \sin^2 \phi \cos^2 \phi + (D_{26} - D_{16}) \cos 2\phi \sin 2\phi, \quad (2.50)$$

$$D'_{66} = D_{66} + [D_{11} + D_{22} - 2(D_{12} + 2D_{66})] \sin^2 \phi \cos^2 \phi + (D_{26} - D_{16}) \cos 2\phi \sin 2\phi, \quad (2.51)$$

$$D'_{16} = \frac{1}{2} [D_{22} \sin^2 \phi - D_{11} \cos^2 \phi + (D_{12} + 2D_{66}) \cos 2\phi] \sin 2\phi + D_{16} \cos^2 \phi (\cos^2 \phi - 3 \sin^2 \phi) + D_{26} \sin^2 \phi (3 \cos^2 \phi - \sin^2 \phi), \quad (2.52)$$

$$D'_{26} = \frac{1}{2} [D_{22} \cos^2 \phi - D_{11} \sin^2 \phi + (D_{12} + 2D_{66}) \cos 2\phi] \sin 2\phi + D_{16} \sin^2 \phi (\cos^2 \phi - 3 \sin^2 \phi) + D_{26} \cos^2 \phi (3 \cos^2 \phi - \sin^2 \phi). \quad (2.53)$$

As componentes de tensão  $\sigma_n$  e  $\tau_{ns}$ , tensões normal e cisalhante, respectivamente, estão relacionadas com as tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  por:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (2.54)$$

$$\tau_{ns} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \quad (2.55)$$

As componentes do momento fletor e da força cortante podem ser escritas explicitamente no sistema  $ns$  como:

$$M_{nn} = M_{xx} \cos^2 \alpha + M_{yy} \sin^2 \alpha + 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (2.56)$$

$$M_{ss} = M_{xx} \sin^2 \alpha + M_{yy} \cos^2 \alpha - 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (2.57)$$

$$M_{ns} = (M_{yy} - M_{xx}) \sin \alpha \cos \alpha + M_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \quad (2.58)$$

$$Q_n = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha, \quad (2.59)$$

$$Q_s = Q_y \cos \alpha - Q_x \sin \alpha. \quad (2.60)$$

Com o objetivo de resolver a equação diferencial da placa dada por (2.40), é necessário a imposição das condições de contorno para o deslocamento  $w$  e sua derivada  $\frac{\partial w}{\partial n}$ . Kirchhoff (1850) mostrou que as condições de contorno da força cisalhante  $Q_n$  e momento volvente  $M_{ns}$  podem ser escritas como uma única condição dada por:

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}. \quad (2.61)$$

A outra condição de carregamento no contorno é o momento  $M_{nn}$ .

### 3 *O Método dos Elementos de Contorno para Flexão em Placas Anisotrópicas*

Neste Capítulo é desenvolvida a formulação dos elementos de contorno para o tratamento de problemas de elasticidade plana em materiais anisotrópicos, considerando a presença de forças de corpo genéricas. As integrais de domínio, provenientes do carregamento distribuído, são transformadas em integrais de contorno usando o método de integração radial.

#### 3.1 Equação integral de contorno

Usando o teorema da reciprocidade de Betti, pode-se relacionar dois estados de tensão-deformação de um material linear como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* d\Omega. \quad (3.1)$$

Escrevendo o lado direito da equação (3.1) na notação de von Karman, tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_x \epsilon_x^* + \sigma_y \epsilon_y^* + \sigma_z \epsilon_z^* + \tau_{xy} \gamma_{xy}^* + \tau_{xz} \gamma_{xz}^* + \tau_{yz} \gamma_{yz}^*) d\Omega. \quad (3.2)$$

Desconsiderando as tensões normais à superfície média da placa, a equação (3.2) é escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_x \epsilon_x^* + \sigma_y \epsilon_y^* + \tau_{xy} \gamma_{xy}^*) d\Omega. \quad (3.3)$$

Substituindo as equações (2.29) e (2.27) na equação (3.3), pode-se escrever o primeiro termo



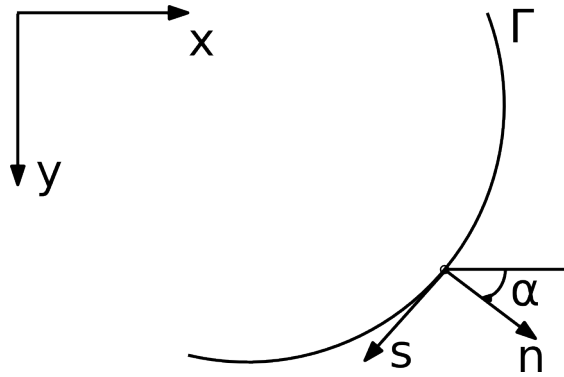


Figura 3.1: Sistema de coordenadas  $(n, s)$  normal e tangente ao contorno  $\Gamma$ .

da integral no lado direito da equação (3.3) como:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = \int_{\Omega} \left( D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega = - \int_{\Omega} M_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} d\Omega. \quad (3.4)$$

A equação (3.4) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( M_{xx} \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \right] d\Omega. \quad (3.5)$$

Usando o teorema de Green (GREEN; ZERNA, 1968), a equação (3.5) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = - \int_{\Gamma} M_{xx} \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} d\Omega. \quad (3.6)$$

O segundo termo do lado direito da equação (3.6), pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} d\Omega = - \int_{\Gamma} M_{xx} \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha d\Gamma + \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( w^* \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \right) - w^* \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} \right] d\Omega. \quad (3.7)$$

Depois, usando o teorema de Green, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left( -M_{xx} \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + w^* \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \cos \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} w^* \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} d\Omega. \quad (3.8)$$

Seguindo um procedimento similar, pode-se mostrar que:

$$\int_{\Omega} \sigma_y \varepsilon_y^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left( -M_{yy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + w^* \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \sin \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} w^* \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} d\Omega, \quad (3.9)$$

e

$$\int_{\Omega} \tau_{xy} \gamma_{xy}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left( -M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha - M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha + w^* \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \sin \alpha \right. \\ \left. + w^* \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \cos \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} 2w^* \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} d\Omega. \quad (3.10)$$

Assim, a equação (3.3) é escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = - \int_{\Gamma} \left( M_{xx} \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + M_{yy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha \right. \\ \left. + M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} w^* \left[ \left( \cos \alpha \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \left( \sin \alpha \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \right] d\Gamma \\ - \int_{\Omega} w^* \left( \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} \right) d\Omega. \quad (3.11)$$

Substituindo as equações (2.8), (2.9) e (2.10) e usando a equação (2.59), a equação (3.11) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = - \int_{\Gamma} \left( M_{xx} \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + M_{yy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha \right. \\ \left. + M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} w^* Q_n d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \quad (3.12)$$

Da relação entre dois sistemas de coordenadas  $(x, y)$  e  $(n, s)$  figura (3.1) tem-se:

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \alpha, \\ \frac{\partial w^*}{\partial y} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \sin \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha. \quad (3.13)$$

Substituindo as equações (3.13) na equação (3.12) tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = - \int_{\Gamma} \left[ M_{xx} \cos \alpha \left( \frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \alpha \right) \right. \\ \left. + M_{yy} \sin \alpha \left( \frac{\partial w^*}{\partial n} \sin \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha \right) + M_{xy} \cos \alpha \left( \frac{\partial w^*}{\partial n} \sin \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha \right) \right]$$

$$+M_{xy} \sin \alpha \left( \frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \alpha \right) \Big] d\Gamma + \int_{\Gamma} w^* Q_n d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \quad (3.14)$$

Depois de algumas manipulações algébricas, a equação (3.14) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega &= - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial w^*}{\partial n} (M_{xx} \cos^2 \alpha + M_{yy} \sin^2 \alpha + 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial w^*}{\partial s} [M_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (M_{yy} - M_{xx}) \sin \alpha \cos \alpha] \right\} d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma} w^* Q_n d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Substituindo as equações (2.56) e (2.58) na equação (3.15), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = - \int_{\Gamma} \left( M_{nn} \frac{\partial w^*}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} - Q_n w^* \right) d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \quad (3.16)$$

Calculando o segundo termo da primeira integral do lado direito da equação (3.16), tem-se:

$$\int_{\Gamma} M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = M_{ns} w^* \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma, \quad (3.17)$$

onde  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são as coordenadas dos extremos do contorno onde a integração está sendo realizada.

No caso de um contorno fechado sem canto, isto é, a função que descreve o contorno e suas derivadas são contínuas, o primeiro termo do lado direito da equação (3.17) se anula. No caso onde há cantos, a equação (3.17) pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma} M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = - \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma, \quad (3.18)$$

onde

$$R_{c_i} = M_{ns_i}^+ - M_{ns_i}^-, \quad (3.19)$$

e os termos  $w_{c_i}$ ,  $M_{ns_i}^+$ ,  $M_{ns_i}^-$  são, respectivamente, os valores de deslocamentos e momentos depois e antes do canto  $i$  da placa,  $N_c$  é o número total de cantos no contorno (Figura 3.2) (PAIVA, 1987).

Das equações (3.16) e (3.18), pode-se escrever:

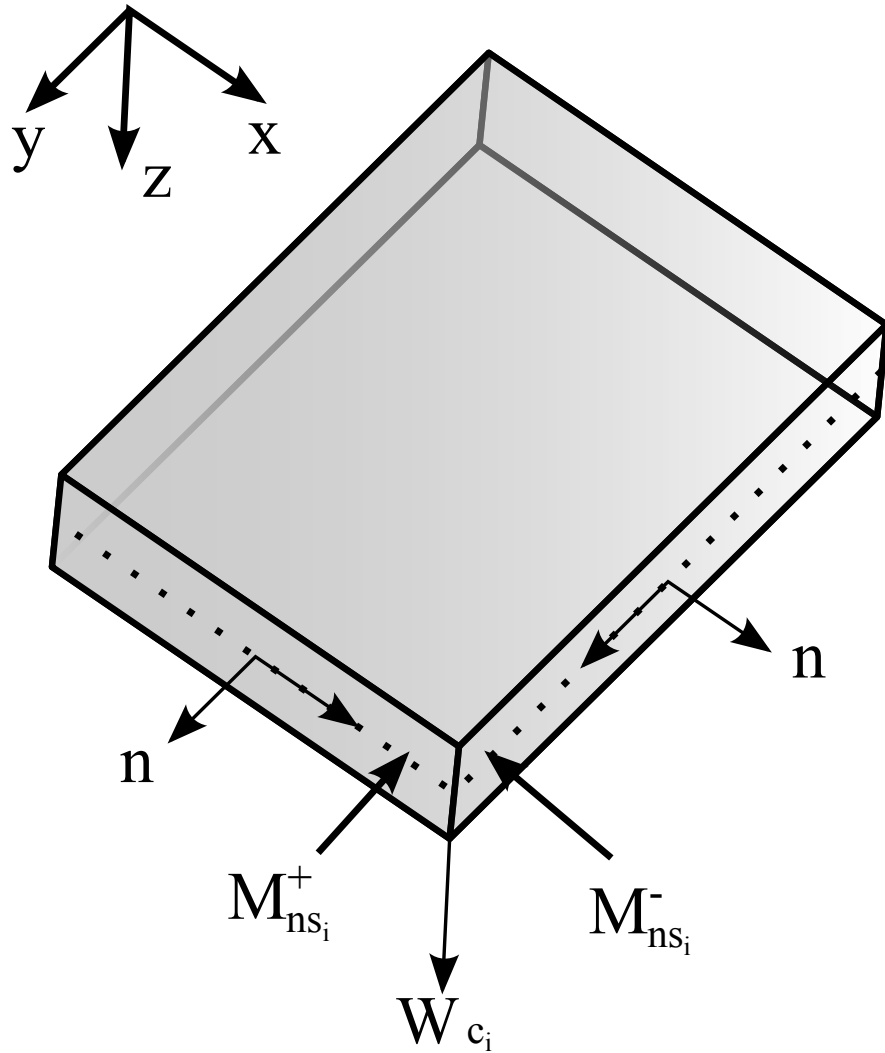


Figura 3.2: Canto  $i$  da placa e os momentos antes e depois a este canto.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left( Q_n w^* - M_{nn} \frac{\partial w^*}{\partial n} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \quad (3.20)$$

Das equações (3.20) e (2.61), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left( V_n w^* - M_{nn} \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \quad (3.21)$$

Seguindo um procedimento similar àquele usado para obtermos a equação (3.21), o lado esquerdo da equação (3.1) pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} \left( V_n^* w - M_{nn} \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^* w_{c_i} + \int_{\Omega} g^* w d\Omega. \quad (3.22)$$

Substituindo as equações (3.21) e (3.22) na equação (3.1), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left( V_n w^* - M_{nn} \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \\ & = \int_{\Gamma} \left( V_n^* w - M_{nn}^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^* w_{c_i} + \int_{\Omega} g^* w d\Omega. \end{aligned} \quad (3.23)$$

A equação (3.23) relaciona dois estados de um material elástico. Para aplicar esta equação para resolver problemas de flexão, precisamos considerar um dos estados como conhecido e o outro como o estado que queremos analisar. Para obter a equação integral de contorno, o estado conhecido é ajustado para que a integral de domínio dada por:

$$\int_{\Omega} g^* w d\Omega \quad (3.24)$$

desapareça. Usando as propriedades da função delta de Dirac  $\delta(P, q)$ , de forma que  $g^* = \delta(P, Q)$ , a integral (3.24) é escrita como:

$$\int_{\Omega} \delta(P, Q) w(P) d\Omega(P) = w(Q), \quad (3.25)$$

onde  $Q$  é o ponto onde a carga é aplicada, conhecido como ponto fonte, e  $P$  é o ponto onde a deflexão é observada, conhecido como ponto campo.

O estado correspondente a um material linear sob carregamento de uma função delta de Dirac é conhecido como um estado fundamental e as variáveis da equação (3.23) relacionadas a este estado ( $w^*, V_n^*$  e  $M_{nn}^*$ ) são conhecidas como soluções fundamentais, as quais são calculadas analiticamente a partir da equação diferencial (2.40).

Considerando o estado ""\*"" como o estado fundamental, a equação (3.23) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
Kw(Q) + \int_{\Gamma} \left[ V_n^*(Q, P)w(P) - M_{nn}^*(Q, P) \frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(Q, P)w_{c_i}(P) \\
= \int_{\Gamma} \left[ V_n(P)w^*(Q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*(Q, P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P)w_{c_i}^*(Q, P) \\
+ \int_{\Omega} g(P)w^*(Q, P)d\Omega. \tag{3.26}
\end{aligned}$$

A constante  $K$  é introduzida para considerar que a função delta de Dirac pode ser aplicada no domínio, no contorno ou fora do domínio. Se a função delta de Dirac é aplicada em um ponto onde o contorno é suave, então  $K = 1/2$ .

As variáveis da equação (3.26) são deslocamentos  $w(P)$ , rotações  $\frac{\partial w(P)}{\partial n}$ , momentos  $M_{nn}(P)$ , e forças  $V_n(P)$ . Para uma dada condição de contorno, algumas destas variáveis são conhecidas e outras desconhecidas. Para termos um número de equações igual ao número de variáveis desconhecidas, é necessário escrever a equação integral correspondente a derivada do deslocamento  $w(Q)$  em relação ao sistema de coordenadas cartesiano fixo no ponto de origem, isto é, o ponto onde o delta de Dirac do estado fundamental é aplicado. As direções dos eixos deste sistema de coordenadas são coincidentes com as direções normal e a tangente ao contorno no ponto de origem.

Para um caso particular onde o ponto fonte é localizado em um ponto onde o contorno é suave, a equação de contorno correspondente à derivada do deslocamento é dada por (PAIVA, 1987):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial w(Q)}{\partial m} + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P)w(P) - \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) \\
+ \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{c_i}^*}{\partial m}(Q, P)w_{c_i}(P) = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \right\} d\Gamma(P) \\
+ \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P) \frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial m}(Q, P) + \int_{\Omega} g(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P)d\Omega. \tag{3.27}
\end{aligned}$$

É importante dizer que é possível usar apenas a equação (3.26) em uma formulação de elementos de contorno usando como pontos fontes os nós do contorno e um número igual de pontos externo ao domínio do problema. Esta abordagem é utilizada, por exemplo, por Ameen (2001).

## 3.2 Soluções fundamentais para problemas de flexão em materiais anisotrópicos

A solução fundamental do deslocamento transversal de placas fletidas é calculado fazendo o termo não-homogêneo da equação diferencial (2.40) igual a uma força concentrada dada por uma função delta de Dirac  $\delta(Q, P)$ , isto é:

$$\Delta\Delta w^*(Q, P) = \delta(Q, P), \quad (3.28)$$

onde  $\Delta\Delta(\cdot)$  é o operador diferencial:

$$\begin{aligned} \Delta\Delta(\cdot) = & \frac{D_{11}}{D_{22}} \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^4} + 4 \frac{D_{16}}{D_{22}} \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial^3 \partial y} + \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{D_{22}} \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & + 4 \frac{D_{26}}{D_{22}} \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial y^4}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Como mostrado por Shi e Bezine (1988), a solução fundamental do deslocamento transversal é dada por:

$$w^*(\rho, \theta) = \frac{1}{8\pi} \{C_1 R_1(\rho, \theta) + C_2 R_2(\rho, \theta) + C_3 [S_1(\rho, \theta) - S_2(\rho, \theta)]\}, \quad (3.30)$$

onde

$$\rho = [(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2]^{1/2}, \quad (3.31)$$

$x$  e  $y$  são as coordenadas do ponto campo  $P$ ,  $x_o$  e  $y_o$  são as coordenadas do ponto fonte  $Q$ ,

$$\theta = \arctan \frac{y - y_o}{x - x_o}, \quad (3.32)$$

$$C_1 = \frac{(d_1 - d_2)^2 - (e_1^2 - e_2^2)}{GHe_1}, \quad (3.33)$$

$$C_2 = \frac{(d_1 - d_2)^2 + (e_1^2 - e_2^2)}{GHe_2}, \quad (3.34)$$

$$C_3 = \frac{4(d_1 - d_2)}{GH}, \quad (3.35)$$

$$G = (d_1 - d_2)^2 + (e_1 + e_2)^2, \quad (3.36)$$

$$H = (d_1 - d_2)^2 + (e_1 - e_2)^2, \quad (3.37)$$

$d_i$  e  $e_i$  são respectivamente as partes real e imaginária das raízes  $\mu_i$  da equação característica (2.43).

$$\begin{aligned} R_i &= \rho^2 \left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 - e_i^2 \sin^2 \theta \right] \\ &\quad \times \left\{ \log \left[ \frac{\rho^2}{a^2} \left( (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right) \right] - 3 \right\} \\ &\quad - 4\rho^2 e_i \sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

e

$$\begin{aligned} S_i &= \rho^2 e_i \sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) \\ &\quad \times \left\{ \log \left[ \frac{\rho^2}{a^2} \left( (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right) \right] - 3 \right\} \\ &\quad + \rho^2 \left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 - e_i^2 \sin^2 \theta \right] \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

O índice repetido  $i$  nos termos de  $R_i$  e  $S_i$  não implicam em soma. O coeficiente  $a$  é uma constante arbitrária tomada como  $a = 1$ .

As outras soluções fundamentais são dadas por:



$$M_{nn}^* = - \left( f_1 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + f_2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} + f_3 \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right), \quad (3.40)$$

$$R_{c_i}^* = - \left( g_1 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + g_2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} + g_3 \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right), \quad (3.41)$$

$$V_n^* = - \left( h_1 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^3} + h_2 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^2 \partial y} + h_3 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x \partial y^2} + h_4 \frac{\partial^3 w^*}{\partial y^3} \right) \\ - \frac{1}{\bar{R}} \left( h_5 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + h_6 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} + h_7 \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right). \quad (3.42)$$

onde  $\bar{R}$  é o raio de curvatura em um ponto suave do contorno  $\Gamma$ . As demais constantes são definidas como:

$$f_1 = D_{11}n_x^2 + 2D_{16}n_xn_y + D_{12}n_y^2, \quad (3.43)$$

$$f_2 = 2(D_{16}n_x^2 + 2D_{66}n_xn_y + D_{26}n_y^2), \quad (3.44)$$

$$f_3 = D_{12}n_x^2 + 2D_{26}n_xn_y + D_{22}n_y^2, \quad (3.45)$$

$$g_1 = (D_{12} - D_{11}) \cos \alpha \sin \alpha + D_{16}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \quad (3.46)$$

$$g_2 = 2(D_{26} - D_{16}) \cos \alpha \sin \alpha + 2D_{66}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \quad (3.47)$$

$$g_3 = (D_{22} - D_{12}) \cos \alpha \sin \alpha + D_{26}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \quad (3.48)$$

$$h_1 = D_{11}n_x(1 + n_y^2) + 2D_{16}n_y^3 - D_{12}n_xn_y^2, \quad (3.49)$$

$$h_2 = 4D_{16}n_x + D_{12}n_y(1 + n_x^2) + 4D_{66}n_y^3 - D_{11}n_x^2n_y - 2D_{26}n_xn_y^2, \quad (3.50)$$

$$h_3 = 4D_{26}n_y + D_{12}n_x(1 + n_y^2) + 4D_{66}n_x^3 - D_{22}n_xn_y^2 - 2D_{16}n_x^2n_y, \quad (3.51)$$

$$h_4 = D_{22}n_y(1 + n_x^2) + 2D_{26}n_x^3 - D_{12}n_x^2n_y, \quad (3.52)$$

$$h_5 = (D_{12} - D_{11}) \cos 2\alpha - 4D_{16} \sin 2\alpha, \quad (3.53)$$

$$h_6 = 2(D_{26} - D_{16}) \cos 2\alpha - 4D_{66} \sin 2\alpha, \quad (3.54)$$

$$h_7 = (D_{22} - D_{12}) \cos 2\alpha - 4D_{26} \sin 2\alpha, \quad (3.55)$$

e  $\alpha$  é o ângulo entre o sistema de coordenadas global  $xy$  e um sistema de coordenadas  $ns$  o qual tem seus eixos paralelos aos vetores  $n$  e  $s$ , normal e tangente, respectivamente, ao contorno no ponto  $Q$ . As derivadas da solução fundamental do deslocamento transversal podem ser expressas pela combinação linear das derivadas das funções  $R_i$  e  $S_i$ . Por exemplo:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} = \frac{1}{8\pi} \left[ C_1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial y^2} + C_2 \frac{\partial^2 R_2}{\partial y^2} + C_3 \left( \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 S_2}{\partial y^2} \right) \right]. \quad (3.56)$$

As derivadas de  $R_i$  e  $S_i$  são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i}{\partial x} &= 2r(\cos \theta + d_i \sin \theta) \left\{ \log \left[ \frac{r^2}{a^2} \left( (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right) \right] - 2 \right\} \\ &\quad - 4re_i \sin \theta \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i}{\partial y} &= 2r [d_i (\cos \theta + d_i \sin \theta) - e_i^2 \sin \theta] \\ &\quad \times \left\{ \log \left[ \frac{r^2}{a^2} \left( (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right) \right] - 2 \right\} \\ &\quad - 4re_i (\cos \theta + 2d_i \sin \theta) \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial x^2} = 2 \log \left\{ \frac{r^2}{a^2} \left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right] \right\}, \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R_i}{\partial x \partial y} &= 2d_i \log \left\{ \frac{r^2}{a^2} \left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right] \right\} \\ &\quad - 4e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R_i}{\partial y^2} &= 2(d_i^2 - e_i^2) \log \left\{ \frac{r^2}{a^2} \left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right] \right\} \\ &\quad - 8d_i e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial x^3} = \frac{4(\cos \theta + d_i \sin \theta)}{r \left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]}, \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial x^2 \partial y} = \frac{4 \left[ d_i (\cos \theta + d_i \sin \theta) + e_i^2 \sin \theta \right]}{r \left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]}, \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial x \partial y^2} = \frac{4 \left[ (d_i^2 - e_i^2) \cos \theta + (d_i^2 + e_i^2) d_i \sin \theta \right]}{r \left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]}, \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial y^3} = \frac{4 \left[ d_i (d_i^2 - 3e_i^2) \cos \theta + (d_i^4 - e_i^4) \sin \theta \right]}{r \left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]}, \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x^4} = -\frac{4 \left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 - e_i^2 \sin^2 \theta \right]}{r^2 \left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]^2}, \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 R_i}{\partial x^3 \partial y} &= -\frac{4}{r^2} \left\{ \frac{d_i}{(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2e_i^2 \sin \theta \cos \theta}{\left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]^2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{4}{r^2} \left\{ \frac{(d_i^2 + e_i^2)}{\left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]} \right\}$$

$$\left. -\frac{2e_i^2 \cos^2 \theta}{\left[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta\right]^2} \right\}, \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x \partial y^3} = -\frac{4}{r^2} \left\{ \frac{d_i (d_i^2 + e_i^2)}{\left[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta\right]} - \frac{2e_i^2 \cos \theta (2d_i \cos \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin \theta)}{\left[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta\right]^2} \right\}, \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial y^4} = -\frac{4}{r^2} \left\{ \frac{(d_i^4 - e_i^4)}{(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta} - \frac{2e_i^2 \cos \theta [(3d_i^2 - e_i^2) \cos \theta + 2d_i (d_i^2 + e_i^2) \sin \theta]}{\left[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta\right]^2} \right\}, \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_i}{\partial x} &= re_i \sin \theta \left\{ \log \left[ \frac{r^2}{a^2} \left( (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right) \right] - 2 \right\} \\ &\quad + 2r (\cos \theta + d_i \sin \theta) \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_i}{\partial y} &= re_i (\cos \theta + 2d_i \sin \theta) \left\{ \log \left[ \frac{r^2}{a^2} \left( (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right) \right] - 2 \right\} \\ &\quad + 2r [d_i (\cos \theta + d_i \sin \theta) - e_i^2 \sin \theta] \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x^2} = 2 \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta}, \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_i}{\partial x \partial y} &= e_i \log \left\{ \frac{r^2}{a^2} \left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right] \right\} \\ &\quad + 2d_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial y^2} = 2d_i e_i \log \left\{ \frac{r^2}{a^2} \left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right] \right\}$$

$$+2(d_i^2 - e_i^2) \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta}, \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x^3} = -\frac{2e_i \sin \theta}{r \left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]}, \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x^2 \partial y} = \frac{2e_i \cos \theta}{r \left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]}, \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x \partial y^2} = \frac{2e_i \left[ 2d_i (\cos \theta + d_i \sin \theta) - (d_i^2 - e_i^2) \sin \theta \right]}{r \left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]}, \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial y^3} = \frac{2e_i \left[ (3d_i^2 - e_i^2) \cos \theta + 2d_i (d_i^2 + e_i^2) \sin \theta \right]}{r \left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]}, \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x^4} = \frac{4e_i \sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta)}{r^2 \left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]^2}, \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x^3 \partial y} = \frac{2e_i}{r^2} \left\{ \frac{1}{(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta)}{\left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]^2} \right\}, \quad (3.81)$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{4e_i \cos \theta \left[ d_i (\cos \theta + d_i \sin \theta) + e_i^2 \sin \theta \right]}{r^2 \left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]^2}, \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x \partial y^3} = -\frac{2e_i}{r^2} \left\{ \frac{(d_i^2 + e_i^2)}{(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta} + \frac{2(d_i^2 + e_i^2) \cos \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) - 4e_i^2 \cos^2 \theta}{\left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]^2} \right\}, \quad (3.83)$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial y^4} = -\frac{4e_i}{r^2} \left\{ \frac{d_i (d_i^2 + e_i^2)}{(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta} + \frac{\cos \theta \left[ d_i (d_i^2 - 3e_i^2) \cos \theta + (d_i^4 - e_i^4) \sin \theta \right]}{\left[ (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta \right]^2} \right\}. \quad (3.84)$$

Como pode ser visto, as derivadas de  $R_i$  e  $S_i$  apresentam singularidades fracas ( $\log r$ ), singularidades fortes ( $1/r$ ), e hipersingularidades ( $1/r^2$ ) que precisarão de uma atenção especial durante sua integração.

### 3.3 Elementos Quadráticos

Como enfatizado por Kane (1994), o passo fundamental para o desenvolvimento do método dos elementos de contorno é o abandono da aspiração por uma solução exata do problema. Este requisito é substituído por outra estratégia: encontrar uma solução aproximada de alta qualidade em um número finito de pontos no contorno do problema, os nós. Assim, visando aumentar a convergência dos resultados para a formulação apresentada aqui, foram implementados os elementos quadráticos, os quais são os mais simples elementos de contorno curvo. Neste trabalho são usados os elementos quadráticos descontínuos para representar os elementos físicos e os elementos quadráticos contínuos para representar os elementos geométricos.

Nos elementos quadráticos, os deslocamentos e forças podem ser representados como:

$$\left\{ \begin{array}{c} w \\ \frac{\partial w}{\partial n} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} & 0 \\ 0 & N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w^{(1)} \\ \frac{\partial w^{(1)}}{\partial n} \\ w^{(2)} \\ \frac{\partial w^{(2)}}{\partial n} \\ w^{(3)} \\ \frac{\partial w^{(3)}}{\partial n} \end{array} \right\}, \quad (3.85)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} V_n \\ M_{nn} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} & 0 \\ 0 & N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} V_n^{(1)} \\ M_{nn}^{(1)} \\ V_n^{(2)} \\ M_{nn}^{(2)} \\ V_n^{(3)} \\ M_{nn}^{(3)} \end{array} \right\}, \quad (3.86)$$

onde  $N_d^{(i)}$  são as funções de interpolação, ou funções de forma, descontínuas dadas por:

$$N_d^{(1)} = \xi \left( \frac{9}{8}\xi - \frac{3}{4} \right); \quad (3.87)$$

$$N_d^{(2)} = \left( 1 - \frac{3}{2}\xi \right) \left( 1 + \frac{3}{2}\xi \right); \quad (3.88)$$

$$N_d^{(3)} = \xi \left( \frac{9}{8}\xi + \frac{3}{4} \right). \quad (3.89)$$

$\xi$  é a coordenada adimensional ao longo do elemento (Figura 3.3). E  $w^{(i)}$ ,  $\frac{\partial w^{(i)}}{\partial n}$ ,  $V_n^{(i)}$  e  $M_{nn}^{(i)}$  são os deslocamentos transversais, as rotações, as forças transversais e os momentos em cada nó dos elementos, respectivamente.

Nos elementos quadráticos descontínuos, os nós são colocados em  $\xi = -2/3$ ,  $\xi = 0$  e  $\xi = +2/3$ , como mostrado na Figura 3.3.

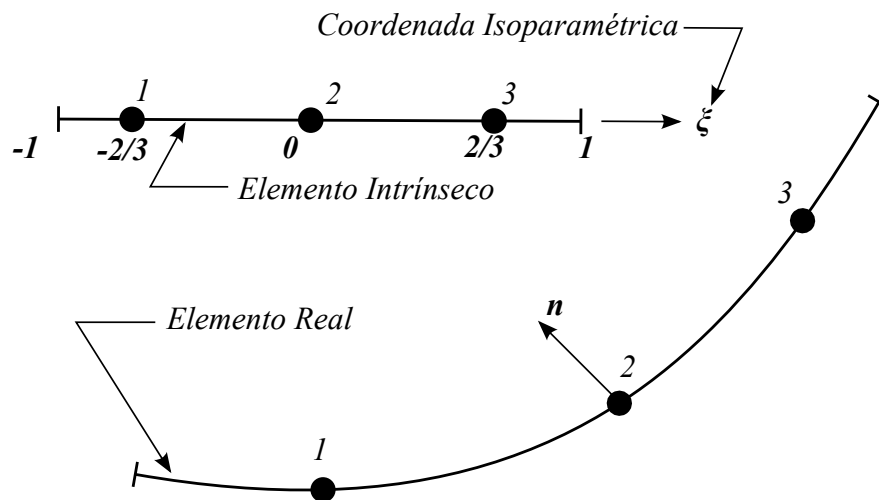


Figura 3.3: Elemento quadrático descontínuo.

A geometria do elemento também pode ser considerada como quadrática e é representada por coordenadas nodais na forma:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_c^{(1)} & 0 & N_c^{(2)} & 0 & N_c^{(3)} & 0 \\ 0 & N_c^{(1)} & 0 & N_c^{(2)} & 0 & N_c^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ x^{(2)} \\ y^{(2)} \\ x^{(3)} \\ y^{(3)} \end{Bmatrix}, \quad (3.90)$$

onde  $N_c^{(i)}$  são as funções de interpolação para elementos quadráticos contínuos, dadas por:

$$N_c^{(1)} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1); \quad (3.91)$$

$$N_c^{(2)} = (1 - \xi^2); \quad (3.92)$$

$$N_c^{(3)} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1), \quad (3.93)$$

$x^{(i)}, y^{(i)}$  são as coordenadas de cada nó.

### 3.4 Equação matricial

Com o objetivo de calcular as variáveis de contorno desconhecidas, o contorno  $\Gamma$  é discretizado em  $N_e$  elementos curvos e as variáveis de contorno  $w$ ,  $\partial w/\partial n$ ,  $M_{nn}$  e  $V_n$  são assumidas com uma variação quadrática ao longo de cada elemento. Tomando um nó  $d$  como o ponto fonte, as equações (3.26) e (3.27) podem ser escritas, na forma matricial, como:

$$\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w^{(d)} \\ \frac{\partial w}{\partial m}^{(d)} \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^{N_e} \begin{bmatrix} h_{11}^{(i,d)} & h_{12}^{(i,d)} & h_{13}^{(i,d)} & h_{14}^{(i,d)} & h_{15}^{(i,d)} & h_{16}^{(i,d)} \\ h_{21}^{(i,d)} & h_{22}^{(i,d)} & h_{23}^{(i,d)} & h_{24}^{(i,d)} & h_{25}^{(i,d)} & h_{26}^{(i,d)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w^{(i,1)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(i,1)} \\ w^{(i,2)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(i,2)} \\ w^{(i,3)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(i,3)} \end{Bmatrix}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{N_e} \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccccc} g_{11}^{(i,d)} & g_{12}^{(i,d)} & g_{13}^{(i,d)} & g_{14}^{(i,d)} & g_{15}^{(i,d)} & g_{16}^{(i,d)} \\ g_{21}^{(i,d)} & g_{22}^{(i,d)} & g_{23}^{(i,d)} & g_{24}^{(i,d)} & g_{25}^{(i,d)} & g_{26}^{(i,d)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} V_n^{(i,1)} \\ M_{nn}^{(i,1)} \\ V_n^{(i,2)} \\ M_{nn}^{(i,2)} \\ V_n^{(i,3)} \\ M_{nn}^{(i,3)} \end{array} \right\} \\ + \sum_{i=1}^{N_c} \left( \left\{ \begin{array}{c} R_1^{(i,d)} \\ R_2^{(i,d)} \end{array} \right\} w_c^{(i)} \right) + \sum_{i=1}^{N_c} \left( \left\{ \begin{array}{c} c_1^{(i,d)} \\ c_2^{(i,d)} \end{array} \right\} R_c^{(i)} \right) + \left\{ \begin{array}{c} P_1^{(d)} \\ P_2^{(d)} \end{array} \right\}. \end{array} \right. \quad (3.94)
\end{aligned}$$

Os termos da equação (3.94) são integrais dadas por:

$$h_{11}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} V_n^* d\Gamma, \quad h_{12}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} M_{nn}^* d\Gamma, \quad (3.95)$$

$$h_{13}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} V_n^* d\Gamma, \quad h_{14}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} M_{nn}^* d\Gamma, \quad (3.96)$$

$$h_{15}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} V_n^* d\Gamma, \quad h_{16}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} M_{nn}^* d\Gamma, \quad (3.97)$$

$$h_{21}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} \frac{\partial V_n^*}{\partial m} d\Gamma, \quad h_{22}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial m} d\Gamma, \quad (3.98)$$

$$h_{23}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} \frac{\partial V_n^*}{\partial m} d\Gamma, \quad h_{24}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial m} d\Gamma, \quad (3.99)$$

$$h_{25}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} \frac{\partial V_n^*}{\partial m} d\Gamma, \quad h_{26}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial m} d\Gamma, \quad (3.100)$$

$$g_{11}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} w^* d\Gamma, \quad g_{12}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (3.101)$$

$$g_{13}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} w^* d\Gamma, \quad g_{14}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (3.102)$$

$$g_{15}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} w^* d\Gamma, \quad g_{16}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (3.103)$$

$$g_{21}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} \frac{\partial w^*}{\partial m} d\Gamma, \quad g_{22}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(1)} \frac{\partial}{\partial m} \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (3.104)$$

$$g_{23}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} \frac{\partial w^*}{\partial m} d\Gamma, \quad g_{24}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(2)} \frac{\partial}{\partial m} \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (3.105)$$

$$g_{25}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} \frac{\partial w^*}{\partial m} d\Gamma, \quad g_{26}^{(i,d)} = - \int_{\Gamma_i} N_d^{(3)} \frac{\partial}{\partial m} \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial n} d\Gamma, \quad (3.106)$$

$$c_1^{(i,d)} = w_{ci}^*, \quad c_2^{(i,d)} = \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}, \quad (3.107)$$

$$R_1^{(i,d)} = R_{ci}^*, \quad R_2^{(i,d)} = \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}, \quad (3.108)$$

$$P_1^{(d)} = \int_{\Omega} g w^* d\Omega, \quad P_2^{(d)} = \int_{\Omega} g \frac{\partial w}{\partial m} d\Omega. \quad (3.109)$$

sendo o contorno  $\Gamma$  dado por:

$$\Gamma = \sum_{e=1}^{N_e} \Gamma_e, \quad (3.110)$$

onde  $N_e$  é o número de elementos.

O desenvolvimento das integrais ao longo do elemento na equação (3.94) requer o uso do Jacobiano já que as funções de forma são expressas em termos da coordenada adimensional mas as integrais são resolvidas ao longo do contorno  $\Gamma_e$ . O Jacobiano desta transformação é dado por:

$$J(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} = \frac{d\Gamma_e}{d\xi}. \quad (3.111)$$

Assim:

$$d\Gamma_e = J(\xi) d\xi. \quad (3.112)$$

A equação matricial (3.94) tem duas equações e  $6N_e + N_c$  variáveis desconhecidas. Para se obter um sistema linear linearmente independente, o ponto fonte é colocado sucessivamente em

cada nó do contorno ( $d = 1, \dots, 6N_e$ ) bem como em cada nó de canto ( $d = 6N_e + 1, \dots, 6N_e + N_c$ ). É importante notar que enquanto ambas as equações, (3.26) e (3.27), são usadas para cada nó de contorno (fornecendo as primeiras  $6N_e$  equações), somente a equação (3.26) é usada para cada canto (fornecendo outras  $N_c$  equações). Então, a seguinte equação matricial é obtida:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}' & \mathbf{R}' \\ \mathbf{H}'' & \mathbf{R}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{bn} \\ \mathbf{w}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}' & \mathbf{C}' \\ \mathbf{G}'' & \mathbf{C}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{bn} \\ \mathbf{V}_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{bn} \\ \mathbf{P}_c \end{Bmatrix}, \quad (3.113)$$

onde  $\mathbf{w}_{bn}$  contém o deslocamento transversal e a rotação de cada nó de contorno,  $\mathbf{V}_{bn}$  contém a força cisalhante e o momento torsor de cada nó de contorno,  $\mathbf{P}_{bn}$  contém a integral de domínio para cada nó de contorno,  $\mathbf{w}_c$  contém o deslocamento transversal de cada canto,  $\mathbf{V}_c$  contém a reação de canto para cada canto,  $\mathbf{P}_c$  contém a integral de domínio para cada canto. Os termos  $\mathbf{H}'$ ,  $\mathbf{C}'$ ,  $\mathbf{R}'$  e  $\mathbf{G}'$  são matrizes que contém os respectivos termos da equação (3.94) escritos para os  $6N_e$  nós de contorno. Os termos  $\mathbf{H}''$ ,  $\mathbf{C}''$ ,  $\mathbf{R}''$  e  $\mathbf{G}''$  são matrizes que contém os respectivos primeiros termos lineares da equação (3.94) escrita para os  $N_c$  cantos.

A equação (3.113) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{H}\mathbf{w} = \mathbf{G}\mathbf{V} + \mathbf{P}, \quad (3.114)$$

onde

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}' & \mathbf{R}' \\ \mathbf{H}'' & \mathbf{R}'' \end{bmatrix}, \quad (3.115)$$

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{bn} \\ \mathbf{w}_c \end{Bmatrix}, \quad (3.116)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}' & \mathbf{C}' \\ \mathbf{G}'' & \mathbf{C}'' \end{bmatrix}, \quad (3.117)$$

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{bn} \\ \mathbf{V}_c \end{Bmatrix}, \quad (3.118)$$

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{bn} \\ \mathbf{P}_c \end{Bmatrix}. \quad (3.119)$$

Aplicando as condições de contorno, a equação (3.113) pode ser rearranjada como:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (3.120)$$

que pode ser resolvida pelo procedimento padrão para sistemas lineares.

## ***4 Formulação dinâmica do método dos elementos de contorno para flexão de placas***

A aplicação do método dos elementos de contorno requer, preferencialmente, que a solução fundamental para o problema em consideração seja conhecida. Essa solução fundamental deve levar em conta todos os termos da equação governante de forma a obter uma formulação onde apenas o contorno é discretizado. Quando isso não for possível, os termos não considerados na obtenção da solução fundamental produzirão integrais de domínio que preferencialmente, devem ser transformadas em integrais de contorno. A primeira alternativa é fazer a transformação exata da integral de domínio em integral de contorno. Porém, isto só é possível quando os termos não considerados são funções apenas da geometria (carregamento distribuído, por exemplo). A segunda alternativa é transferir os efeitos da integral de domínio para o contorno usando-se o método de elementos de contorno de reciprocidade dual ou da integração radial. Estes procedimentos são mais gerais e podem ser empregados para forças de corpo que sejam funções da solução do problema. No caso deste trabalho, as integrais de domínio provenientes da carga distribuída serão transformadas em integrais de contorno por transformação exata, enquanto que os termos de inércia serão transformados usando o método de integração radial.

### **4.1 Transformação exata das integrais de domínio em integrais de contorno para flexão em placas anisotrópicas**

Como pôde ser visto nas equações (3.26) e (3.27), há integrais de domínio na formulação devido a carga distribuída no domínio. Estas integrais podem ser calculadas no domínio por integração direta na área  $\Omega_g$  (ver Figura 2.1). Contudo, a formulação dos elementos de contorno

perde seu principal atrativo que é a discretização somente do contorno. Neste trabalho, as integrais de domínio, oriundas das cargas distribuídas, são transformadas em integrais de contorno por uma transformação exata.

Considere a placa da Figura 2.1, sob o carregamento  $g$ , aplicado em uma área  $\Omega_g$ . Assumindo que o carregamento  $g$  tem uma distribuição linear  $(Ax + By + C)$  na área  $\Omega_g$ , a integral de domínio pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega_g} gw^* d\Omega = \int_{\Omega_g} (Ax + By + C)w^* \rho d\rho d\theta, \quad (4.1)$$

ou

$$\int_{\Omega_g} gw^* d\Omega = \int_{\theta} \int_0^r (Ax + By + C)w^* \rho d\rho d\theta, \quad (4.2)$$

onde  $r$  é o valor de  $\rho$  em um ponto do contorno  $\Gamma_g$ .

Definindo  $F^*$  como a seguinte integral:

$$F^* = \int_0^r (Ax + By + C)w^* \rho d\rho, \quad (4.3)$$

pode-se escrever:

$$\int_{\Omega_g} gw^* d\Omega = \int_{\theta} F^* d\theta. \quad (4.4)$$

Considerando um ângulo infinitesimal  $d\theta$  (Figura 4.1), a relação entre o comprimento do arco  $r d\theta$  e o comprimento infinitesimal do contorno  $d\Gamma$ , pode ser escrito como:

$$\cos \alpha = \frac{r \frac{d\theta}{2}}{\frac{d\Gamma}{2}}, \quad (4.5)$$

ou

$$d\theta = \frac{\cos \alpha}{r} d\Gamma. \quad (4.6)$$

Usando as propriedades do produto interno dos vetores unitários  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{r}$ , indicados na Figura 4.1,

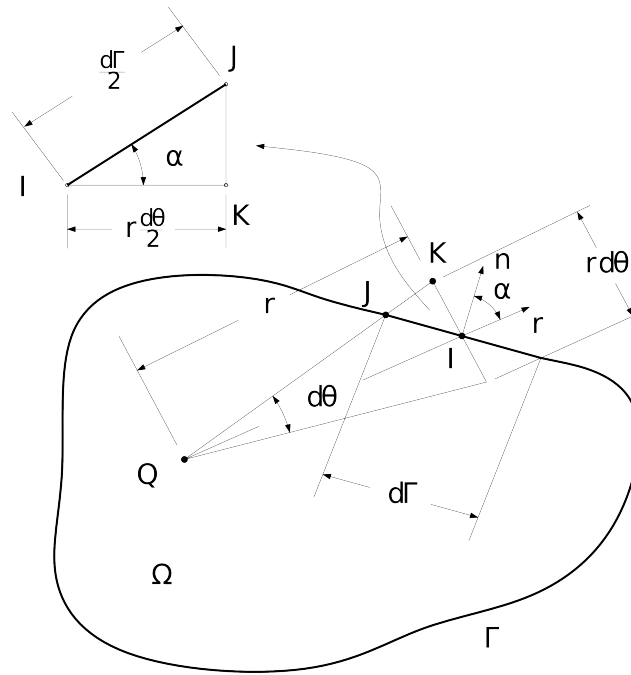


Figura 4.1: Transformação da integral de domínio em integral de contorno.

pode-se escrever:

$$d\theta = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma. \quad (4.7)$$

Finalmente, substituindo a equação (4.7) na equação (4.4), a integral de domínio da equação (3.26) pode ser escrita como uma integral de contorno dada por:

$$\int_{\Omega_g} gw^* d\Omega = \int_{\Gamma_g} \frac{F^*}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma. \quad (4.8)$$

Sabendo que

$$x = \rho \cos \theta, \quad (4.9)$$

e

$$y = \rho \sin \theta, \quad (4.10)$$

a integral  $F^*$  pode ser escrita como:

$$F^* = \int_0^r \frac{1}{8\pi} (A\rho \cos \theta + B\rho \sin \theta + C) [C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 (S_1 - S_2)] \rho d\rho, \quad (4.11)$$

onde  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são dados pelas equações (3.33), (3.34) e (3.35), respectivamente. A equação (4.11) pode ser reescrita como:

$$F^* = \frac{1}{8\pi} \left\{ (A \cos \theta + B \sin \theta) \int_0^r \rho^2 [C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 (S_1 - S_2)] d\rho + C \int_0^r \rho [C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 (S_1 - S_2)] d\rho \right\}. \quad (4.12)$$

Seguindo um procedimento similar para obter a equação (4.12), o termo de domínio da equação (3.27) pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega_g} g \frac{\partial w^*}{\partial m} d\Omega = \int_{\theta} G^* d\theta, \quad (4.13)$$

onde

$$G^* = \int_0^r (Ax + By + C) \frac{\partial w^*}{\partial m} \rho d\rho, \quad (4.14)$$

ou

$$G^* = \frac{1}{8\pi} \left\{ (A \cos \theta + B \sin \theta) \int_0^r \rho^2 \left[ C_1 \frac{\partial R_1}{\partial m} + C_2 \frac{\partial R_2}{\partial m} + C_3 \left( \frac{\partial S_1}{\partial m} - \frac{\partial S_2}{\partial m} \right) \right] d\rho + C \int_0^r \rho \left[ C_1 \frac{\partial R_1}{\partial m} + C_2 \frac{\partial R_2}{\partial m} + C_3 \left( \frac{\partial S_1}{\partial m} - \frac{\partial S_2}{\partial m} \right) \right] d\rho \right\}. \quad (4.15)$$

Como pode ser visto, as equações (4.12) e (4.15) não são dependentes de  $\theta$ . Por integração



analítica, pode-se obter:

$$\begin{aligned}
\int_0^r R_i \rho d\rho &= \frac{r^4}{16} \left\{ -16e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) \right. \\
&\quad \left. - \left[ -7 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \right. \\
&\quad \left. \times [-1 - d_i^2 + e_i^2 + (-1 + d_i^2 - e_i^2) \cos 2\theta - 2d_i \sin 2\theta] \right\}, \tag{4.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^r S_i \rho d\rho &= \frac{r^4}{16} \left\{ 2e_i \left[ -7 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \right. \\
&\quad \times \sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) + 2 \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \\
&\quad \left. \times [1 + d_i^2 - e_i^2 + (1 - d_i^2 + e_i^2) \cos 2\theta + 2d_i \sin 2\theta] \right\}, \tag{4.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^r R_i \rho^2 d\rho &= \frac{r^5}{50} \left\{ -40e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) \right. \\
&\quad \left. - \left[ -17 + 5 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \right. \\
&\quad \left. \times [-1 - d_i^2 + e_i^2 + (-1 + d_i^2 - e_i^2) \cos 2\theta - 2d_i \sin 2\theta] \right\}, \tag{4.18}
\end{aligned}$$

$$\int_0^r S_i \rho^2 d\rho = \frac{r^5}{50} \left\{ 2e_i \left[ -17 + 5 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) + 5 \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \\
& \times [1 + d_i^2 - e_i^2 + (1 - d_i^2 + e_i^2) \cos 2\theta + 2d_i \sin 2\theta] \Big\}, \tag{4.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial x} \rho d\rho &= \frac{2r^3}{9} \left\{ -6e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \sin \theta \right. \\
& \left. + \left[ -8 + 3 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] (\cos \theta + d_i \sin \theta) \right\}, \tag{4.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial y} \rho d\rho &= \frac{2r^3}{9} \left\{ -6e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} (\cos \theta + 2d_i \sin \theta) \right. \\
& \left. + \left[ -8 + 3 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] [d_i \cos \theta + (d_i^2 - e_i^2) \sin \theta] \right\}, \tag{4.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial x} \rho d\rho &= \frac{r^3}{9} \left\{ e_i \left[ -8 + 3 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \sin \theta \right. \\
& \left. + 6 \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} (\cos \theta + d_i \sin \theta) \right\}, \tag{4.22}
\end{aligned}$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial y} \rho d\rho = \frac{r^3}{9} \left\{ e_i \left[ -8 + 3 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \right\}$$

$$\times (\cos \theta + 2d_i \sin \theta) - 6 \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} [d_i \cos \theta + (d_i^2 - e_i^2) \sin \theta] \left. \vphantom{\frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta}} \right\}, \quad (4.23)$$

$$\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial x} \rho^2 d\rho = \frac{r^4}{4} \left\{ -4e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \sin \theta \right. \\ \left. + \left[ -5 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] (\cos \theta + d_i \sin \theta) \right\}, \quad (4.24)$$

$$\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial y} \rho^2 d\rho = \frac{r^4}{4} \left\{ -4e_i \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} (\cos \theta + 2d_i \sin \theta) \right. \\ \left. + \left[ -5 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] [d_i \cos \theta + (d_i^2 - e_i^2) \sin \theta] \right\}, \quad (4.25)$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial x} \rho^2 d\rho = \frac{r^4}{8} \left\{ e_i \left[ -5 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \sin \theta \right. \\ \left. + 4 \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} (\cos \theta + d_i \sin \theta) \right\}, \quad (4.26)$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial y} \rho^2 d\rho = \frac{r^4}{8} \left\{ e_i \left[ -5 + 2 \log \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] \right. \\ \left. \times (\cos \theta + 2d_i \sin \theta) + 4 \arctan \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} [d_i \cos \theta + (d_i^2 - e_i^2) \sin \theta] \right\}. \quad (4.27)$$

Para casos onde o carregamento  $g$  é diferente de uma carga linearmente distribuída, o mesmo procedimento pode ser aplicado, porém integrando  $F^*$  numericamente. Por exemplo, caso se tenha

$g = \sin(\pi x)$  a integral (4.3) é escrita como  $F^* = \int_0^r \sin(\pi x) w^* \rho d\rho$  que pode ser integrada numericamente.

## 4.2 Método da integração radial - MIR

O Método da integração radial (MIR) aproxima a força de corpo  $b$  como uma soma de  $M$  produtos de funções de aproximação  $f^m$  e coeficientes a determinar  $\gamma^m$ , ou seja:

$$b(P) = \sum_{m=1}^M \gamma^m f^m \quad (4.28)$$

para as funções de aproximação baseadas puramente em funções de base radiais, ou:

$$b(P) = \sum_{m=1}^M \gamma^m f^m + ax + by + c \quad (4.29)$$

e

$$\sum_{m=1}^M \gamma^m x_m = \sum_{m=1}^M \gamma^m y_m = \sum_{m=1}^M \gamma^m = 0 \quad (4.30)$$

para as funções de aproximação expandidas por polinômios. A integral de domínio da equação (3.26) pode ser escrita como:

$$P_1(Q) = \sum_{m=1}^M \gamma^m \int_{\Omega_g} f^m w^*(Q, P) \rho d\rho d\theta \quad (4.31)$$

ou

$$P_1(Q) = \sum_{m=1}^M \gamma^m \int_{\theta} \int_0^r f^m w^*(Q, P) \rho d\rho d\theta, \quad (4.32)$$

onde  $r$  é o valor de  $\rho$  em um ponto no contorno  $\Gamma_g$  (ver Figura 4.1):

Definindo  $F^m(Q)$  como:

$$F^m(Q) = \int_0^r f^m w^*(Q, P) \rho d\rho, \quad (4.33)$$

pode-se escrever:

$$P_1(Q) = \sum_{m=1}^M \gamma^m \int_{\theta} F^m(Q) d\theta. \quad (4.34)$$

Substituindo a equação (4.7) na equação (4.34), a equação integral de domínio da equação (3.26) pode ser escrita na seguinte integral de contorno dada por:

$$P_1(Q) = \sum_{m=1}^M \gamma^m \int_{\Gamma_g} \frac{F^m(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma. \quad (4.35)$$

Seguindo procedimentos similares aos usados para obter a equação (4.35), o termo de domínio da equação pode ser escrito assim:

$$P_2(Q) = \int_{\Omega_g} b \frac{\partial w^*(Q, P)}{\partial n_1} d\Omega = \sum_{m=1}^M \gamma^m \int_{\Gamma_g} \frac{G^m(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma, \quad (4.36)$$

onde

$$G^m(Q) = \int_0^r f^m \frac{\partial w^*}{\partial n_1} \rho d\rho. \quad (4.37)$$

Assim, a integral de domínio da equação (3.94) pode ser escrita como:

$$\left\{ \begin{array}{c} P_1^{(d)} \\ P_2^{(d)} \end{array} \right\} = \sum_{m=1}^M \gamma^m \sum_{i=1}^{N_e} \left\{ \begin{array}{c} p_1^{(d,m)} \\ p_2^{(d,m)} \end{array} \right\}, \quad (4.38)$$

onde

$$p_1^{(d,m)} = \int_{\Gamma_i} \frac{F^{(d,m)}}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma, \quad p_2^{(d,m)} = \int_{\Gamma_i} \frac{G^{(d,m)}}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma. \quad (4.39)$$

ou, na forma matricial, como:

$$P(Q) = \left[ \int_{\Gamma} \frac{F_1(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma \quad \int_{\Gamma} \frac{F_2(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma \quad \dots \quad \int_{\Gamma} \frac{F_M(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma \right] \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_M \end{Bmatrix}. \quad (4.40)$$

Para calcular  $\gamma_m$ , é necessário considerar a força de corpo em  $M$  pontos do domínio e do contorno. No caso deste trabalho, estes pontos são os nós do contorno e os pontos internos. Assim, a equação (4.28) pode ser escrita como:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\boldsymbol{\gamma} \quad (4.41)$$

e  $\boldsymbol{\gamma}$  pode ser calculado como:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{b}, \quad (4.42)$$

Substituindo (4.42) na equação (4.40), tem-se:

$$P(Q) = \left[ \int_{\Gamma} \frac{F_1(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma \quad \int_{\Gamma} \frac{F_2(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma \quad \dots \quad \int_{\Gamma} \frac{F_M(Q)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma \right] \mathbf{F}^{-1}\mathbf{b}. \quad (4.43)$$

Escrevendo a equação (4.43) para todos os pontos do domínio, isto é, todos os nós do contorno e pontos internos, tem-se:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{b}, \quad (4.44)$$

onde  $\mathbf{S} = \mathbf{R}\mathbf{F}^{-1}$ ,  $\mathbf{P}$  é um vetor que contém os valores de  $P(Q)$  em todos os pontos fontes  $Q$  e  $\mathbf{R}$  é uma matriz que contém todos os valores das integrais (4.43) quando esta equação é escrita para todos os pontos fontes  $Q$ .

As funções de aproximação  $f^m$  serão funções de base radial escritas em termos de  $R$ , onde  $R$

é a distância entre o centro  $S$  da função de base radial e o ponto de integração  $P$ . Da Figura 4.2, pode-se escrever:

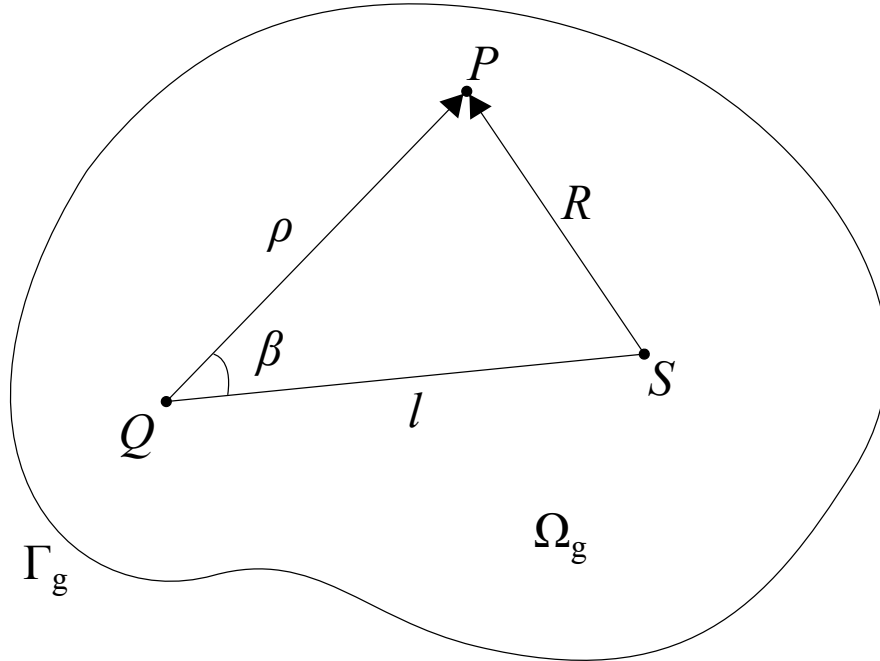


Figura 4.2: Posição dos pontos no domínio.

$$R = \sqrt{\rho^2 + l^2 - 2\rho l \cos \beta}, \quad (4.45)$$

onde  $l$  é a distância entre os pontos  $S$  e  $Q$  e  $\beta$  é o ângulo entre  $\rho$  e  $l$  conforme observado na (Figura 4.2).

O custo computacional do RIM é maior que do DRM uma vez que as integrais dadas pelas equações (4.33) e (4.37) não podem ser calculadas analiticamente para a maioria das funções de aproximação. Por exemplo, se  $f^m = R$ , a equação (4.33) é escrita como:

$$F^m(Q) = \int_0^r c_1 \sqrt{\rho^2 + l^2 - 2\rho l \cos \beta} \log(c_2 \rho) \rho^3 d\rho, \quad (4.46)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são coeficientes que não dependem de  $\rho$ . A integral da equação (4.46) não pode ser calculada analiticamente. O cálculo numérico desta integral torna mais alto o custo computacional do RIM, uma vez que no DRM não se faz nenhuma integração numérica na transformação da integral de domínio em integrais de contorno. A vantagem mais interessante do RIM sobre o

DRM para formulações que envolvam materiais anisotrópicos é que as funções de aproximação  $f_m$  podem ser escolhidas livremente, pois o RIM não usa as soluções particulares  $\hat{w}_m$  obtidas da equação diferencial (2.40).

Estas soluções particulares são necessárias no DRM, o que restringe a escolha das funções de aproximação devido a complexidade da equação (2.40).

Neste trabalho foi usada como função de aproximação a função de base radial denominada spline de placas finas que é dada por:

$$f_{m_3} = R^2 \log(R). \quad (4.47)$$

Alguns trabalhos da literatura (GOLBERG; CHEN; BOWMAN, 1999) mostraram que esta função possui uma alta taxa de convergência quando usadas na forma aumentada por polinômios, ou seja, quando a aproximação da força de corpo é dada pelas equações (4.29) e (4.30). Neste caso ela é chamada de função *spline* de placas finas aumentada, ou ATPS (*augmented thin plate spline*), que é usada nesse trabalho.

## 4.3 Tensões em placas compósitas laminadas

As lâminas de um material compósito formado por fibras unidirecionais apresentam um comportamento anisotrópico bem definido, cujas propriedades variam com as direções porém permanecem constantes em uma dada direção. Assim, a resistência na direção longitudinal às fibras será a mesma por toda a lâmina, bem como a resistência na direção perpendicular às fibras e na direção normal à lâmina. Essa característica permite que o fabricante tenha controle sobre as propriedades da lâmina através de poucas variáveis. Quando várias lâminas unidirecionais são unidas para formar um laminado, surgem outras variáveis, como o número de lâminas e o ângulo das fibras de cada lâmina. O comportamento elástico de cada lâmina pode ser completamente distinto uma das outras.

### 4.3.1 Tensão e deformação de placas compósitas laminadas

Os laminados são fabricados para agir como um elemento estrutural único. Para atender a essa condição, a união entre duas lâminas do laminado deve ser infinitesimalmente fina e não deformável



por cisalhamento para que o deslizamento de umas lâminas sobre outras seja evitado, e para permitir o deslocamento contínuo ao longo da união (AGARWAL; BROUTMAN, 1990). Assim, pode-se considerar que as deformações são contínuas ao longo da espessura. Contudo, como as lâminas tem propriedades diferentes, as tensões apresentam descontinuidades ao longo das interfaces do laminado, como mostrado na Figura 4.3.

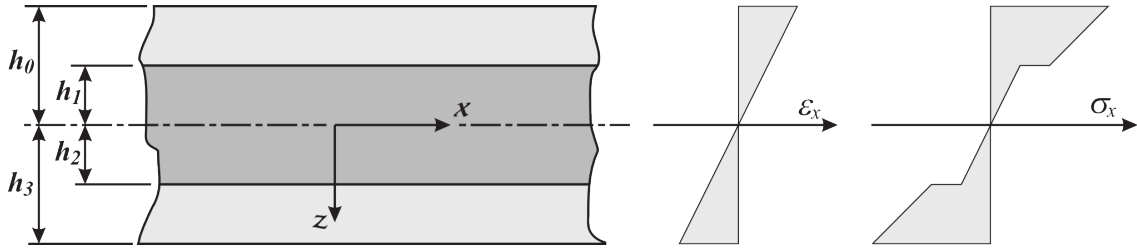


Figura 4.3: Variação da deformação e da tensão em um laminado simétrico hipotético

Para obter as deformações (2.27), os momentos (2.38) e as tensões (2.29) nas placas de Kirchhoff, as derivadas segunda da equação integral (3.26) precisam ser calculadas. Essas derivadas são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w(Q)}{\partial x^2} &= \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x^2}(Q, P) w(P) - \frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x^2}(Q, P) \frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_{c_i}^*}{\partial x^2}(Q, P) w_{c_i}(P) \\
 &\quad - \int_{\Gamma} \left[ V_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}(Q, P) - M_{m_n}(P) \frac{\partial^3 w^*}{\partial n \partial x^2}(Q, P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P) \frac{\partial^2 w_{c_i}^*}{\partial x^2}(Q, P) \\
 &\quad + \int_{\Omega} g(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}(Q, P) d\Omega.
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w(Q)}{\partial y^2} &= \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial y^2}(Q, P) w(P) - \frac{\partial^2 m_n^*}{\partial y^2}(Q, P) \frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_{c_i}^*}{\partial y^2}(Q, P) w_{c_i}(P) \\
 &\quad - \int_{\Gamma} \left[ V_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}(Q, P) - M_{m_n}(P) \frac{\partial^3 w^*}{\partial n \partial y^2}(Q, P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P) \frac{\partial^2 w_{c_i}^*}{\partial y^2}(Q, P) \\
 &\quad + \int_{\Omega} g(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}(Q, P) d\Omega.
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w(Q)}{\partial x \partial y} &= \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x \partial y}(Q, P) w(P) - \frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x \partial y}(Q, P) \frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_{c_i}^*}{\partial x \partial y}(Q, P) w_{c_i}(P) \\
&\quad - \int_{\Gamma} \left[ V_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y}(Q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial^3 w^*}{\partial n \partial x \partial y}(Q, P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P) \frac{\partial^2 w_{c_i}^*}{\partial x \partial y}(Q, P) \\
&\quad + \int_{\Omega} g(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y}(Q, P) d\Omega. \tag{4.50}
\end{aligned}$$

onde as segundas derivadas das soluções fundamentais são dadas por:

$$\frac{\partial^2 w^*(\rho, \theta)}{\partial x^2} = \frac{1}{8\pi} \left\{ C_1 \frac{\partial^2 R_1(\rho, \theta)}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 R_2(\rho, \theta)}{\partial x^2} + C_3 \left[ \frac{\partial^2 S_1(\rho, \theta)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_2(\rho, \theta)}{\partial x^2} \right] \right\}, \tag{4.51}$$

sendo que  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são dados pelas equações (3.33), (3.34) e (3.35), respectivamente;  $\rho$  é dado pela equação (3.31) e  $\theta$  é dado pela equação (3.32).

As outras derivadas da solução fundamental são dadas por:

$$\frac{\partial^2 M_{nn}^*}{\partial x^2} = - \left( f_1 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + f_2 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^3 \partial y} + f_3 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial y^2} \right), \tag{4.52}$$

$$\frac{\partial^2 R_{c_i}^*}{\partial x^2} = - \left( g_1 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + g_2 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^3 \partial y} + g_3 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial y^2} \right), \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x^2} &= - \left( h_1 \frac{\partial^5 w^*}{\partial x^5} + h_2 \frac{\partial^5 w^*}{\partial x^4 \partial y} + h_3 \frac{\partial^5 w^*}{\partial x^3 \partial y^2} + h_4 \frac{\partial^5 w^*}{\partial x^2 \partial y^3} \right) \\
&\quad - \frac{1}{\bar{R}} \left( h_5 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + h_6 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^3 \partial y} + h_7 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial y^2} \right). \tag{4.54}
\end{aligned}$$

As derivadas para  $y$  e  $xy$  são dadas por procedimentos similares. Todas as derivadas das soluções fundamentais do deslocamento transversal  $w$  podem ser expressas pela combinação linear das derivadas de  $R_i$  e  $S_j$ . Todas as derivadas de  $R_i$  e  $S_j$  até a 4ª ordem são dadas pelas equações de (3.57) até (3.84). As derivadas de 5ª ordem são dadas por:

$$\frac{\partial^5 R_i}{\partial x^5} = \frac{8(\cos \theta + d_i \sin \theta) [\cos^2 \theta + (d_i^2 - 3e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]}{R^3 [\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3}, \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 R_i}{\partial x^4 \partial y} &= \frac{8}{R^3} \left\{ \frac{d_i \cos^3 \theta + 3(d_i^2 + e_i^2) \sin \theta \cos^2 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3d_i(d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta \cos \theta + (d_i^4 - e_i^4) \sin^3 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right\}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 R_i}{\partial x^3 \partial y^2} &= \frac{8}{R^3} \left\{ \frac{(d_i^2 - e_i^2) \cos^3 \theta + 3d_i(d_i^2 + e_i^2) \sin \theta \cos^2 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(d_i^2 + e_i^2)^2 \sin^2 \theta \cos \theta + d_i(d_i^2 + e_i^2)^2 \sin^3 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right\}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 R_i}{\partial x^2 \partial y^3} &= \frac{8}{R^3} \left\{ \frac{d_i(d_i^2 - 3e_i^2) \cos^3 \theta + 3(d_i^4 - e_i^4) \sin \theta \cos^2 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3d_i(d_i^2 + e_i^2)^2 \sin^2 \theta \cos \theta + (d_i^2 + e_i^2)^3 \sin^3 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right\}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 R_i}{\partial x \partial y^4} &= \frac{8}{R^3} \left\{ \frac{(d_i^4 - 6e_i^2 d_i^2 + e_i^4) \cos^3 \theta + 3d_i(d_i^4 - 2e_i^2 d_i^2 - 3e_i^4) \sin \theta \cos^2 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(d_i^2 - e_i^2)(d_i^2 + e_i^2)^2 \sin^2 \theta \cos \theta + d_i(d_i^2 + e_i^2)^3 \sin^3 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right\}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial^5 R_i}{\partial y^5} = \frac{8}{R^3} \left\{ \frac{d_i(d_i^4 - 10e_i^2 d_i^2 + 5e_i^4) \cos^3 \theta + 3(d_i^6 - 5e_i^2 d_i^4 - 5e_i^4 d_i^2 + e_i^6) \sin \theta \cos^2 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right\}$$

$$+ \left. \frac{3d_i (d_i^2 - 3e_i^2) (d_i^2 + e_i^2)^2 \sin^2 \theta \cos \theta + (d_i^2 - e_i^2) (d_i^2 + e_i^2)^3 \sin^3 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right\}, \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial^5 S_i}{\partial x^5} = \frac{4e_i \sin \theta [-3 \cos^2 \theta - 6d_i \sin \theta \cos \theta + (e_i^2 - 3d_i^2) \sin^2 \theta]}{R^3 [\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3}, \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial^5 S_i}{\partial x^4 \partial y} = \frac{4e_i [\cos^3 \theta - 3(d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta \cos \theta - 2d_i (d_i^2 + e_i^2) \sin^3 \theta]}{R^3 [\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3}, \quad (4.62)$$

$$\frac{\partial^5 S_i}{\partial x^3 \partial y^2} = \frac{4e_i [2d_i \cos^3 \theta + 3(d_i^2 + e_i^2) \sin \theta \cos^2 \theta - (d_i^2 + e_i^2)^2 \sin^3 \theta]}{R^3 [\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3}, \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 S_i}{\partial x^2 \partial y^3} = & \frac{4e_i \cos \theta}{R^3} \left\{ \frac{(3d_i^2 - e_i^2) \cos^2 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right. \\ & \left. + \frac{3(d_i^2 + e_i^2) \sin \theta [2d_i \cos \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin \theta]}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right\}, \quad (4.64) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 S_i}{\partial x \partial y^4} = & \frac{4e_i}{R^3} \left\{ \frac{4d_i (d_i - e_i) (d_i + e_i) \cos^3 \theta + 3(3d_i^2 - e_i^2) (d_i^2 + e_i^2) \sin \theta \cos^2 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right. \\ & \left. + \frac{6d_i (d_i^2 + e_i^2)^2 \sin^2 \theta \cos \theta + (d_i^2 + e_i^2)^3 \sin^3 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right\}, \quad (4.65) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 S_i}{\partial y^5} = & \frac{4e_i}{R^3} \left\{ \frac{(5d_i^4 - 10e_i^2 d_i^2 + e_i^4) \cos^3 \theta + 12d_i (d_i^4 - e_i^4) \sin \theta \cos^2 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right. \\ & \left. - \frac{3(e_i^2 - 3d_i^2) (d_i^2 + e_i^2)^2 \sin^2 \theta \cos \theta + 2d_i (d_i^2 + e_i^2)^3 \sin^3 \theta}{[\cos^2 \theta + (d_i^2 + e_i^2) \sin^2 \theta + d_i \sin 2\theta]^3} \right\}, \quad (4.66) \end{aligned}$$

O último termo da equação (4.48) pode ser transformado de uma integral de domínio para uma integral de contorno, seguindo um processo similar ao procedimento mostrado na seção 4.1. Então:

$$\int_{\Omega_g} g \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega = \int_{\theta} H^* d\theta, \quad (4.67)$$

onde

$$H^* = \int_0^r (Ax + By + C) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \rho d\rho, \quad (4.68)$$

ou

$$\begin{aligned} H^* = & \frac{1}{8\pi} \left\{ (A \cos \theta + B \sin \theta) \int_0^r \rho^2 \left[ C_1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 R_2}{\partial x^2} + C_3 \left( \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \right) \right] d\rho \right. \\ & \left. + C \int_0^r \rho \left[ C_1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 R_2}{\partial x^2} + C_3 \left( \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \right) \right] d\rho \right\}, \quad (4.69) \end{aligned}$$

As integrais das segundas derivadas de  $R_i$  e  $S_i$  que aparecem na equação (4.69), tanto as multiplicadas por  $\rho$  quanto por  $\rho^2$ , podem ser resolvidas analiticamente e são dadas por:

$$\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial x^2} \rho d\rho = r^2 \left\{ \log \left[ \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] - 1 \right\}, \quad (4.70)$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial x^2} \rho^2 d\rho = \frac{2}{9} r^3 \left\{ 3 \log \left[ \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right] - 2 \right\}, \quad (4.71)$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial x^2} \rho d\rho = r^2 \arctan \left[ \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right], \quad (4.72)$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial x^2} \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} r^3 \arctan \left[ \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right], \quad (4.73)$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial y^2} \rho d\rho = r^2 \left\{ (d_i^2 - e_i^2) \left[ \log \left( \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right) - 1 \right] \right\}$$

$$-4d_i e_i \tan^{-1} \left[ \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right] \}, \quad (4.74)$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial y^2} \rho^2 d\rho = \frac{2}{9} r^3 \left\{ (d_i^2 - e_i^2) \left[ 3 \log \left( \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right) - 2 \right] \right. \\ \left. - 12d_i e_i \tan^{-1} \left[ \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right] \right\}, \quad (4.75)$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial y^2} \rho d\rho = r^2 \left\{ (d_i^2 - e_i^2) \arctan \left[ \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right] \right. \\ \left. + d_i e_i \left[ \log \left( \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right) - 1 \right] \right\}, \quad (4.76)$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial y^2} \rho^2 d\rho = \frac{2}{9} r^3 \left\{ 3 (d_i^2 - e_i^2) \arctan \left[ \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right] \right. \\ \left. + d_i e_i \left[ 3 \log \left( \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right) - 2 \right] \right\}, \quad (4.77)$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial x \partial y} \rho d\rho = r^2 \left\{ d_i \left[ \log \left( \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right) - 1 \right] \right. \\ \left. - 2e_i \tan^{-1} \left[ \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right] \right\}, \quad (4.78)$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 R_i}{\partial x \partial y} \rho^2 d\rho = \frac{2}{9} r^3 \left\{ 6e_i \tan^{-1} \left[ \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right] \right. \\ \left. + d_i \left[ 2 - 3 \log \left( \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right) \right] \right\}, \quad (4.79)$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial x \partial y} \rho d\rho = \frac{1}{2} r^2 \left\{ 2d_i \arctan \left[ \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right] \right. \\ \left. + e_i \left[ \log \left( \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right) - 1 \right] \right\}, \quad (4.80)$$

$$\int_0^r \frac{\partial^2 S_i}{\partial x \partial y} \rho^2 d\rho = \frac{1}{9} r^3 \left\{ 6d_i \arctan \left[ \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right] + e_i \left[ 3 \log \left( \frac{r^2 (e_i^2 \sin^2 \theta + (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2)}{a^2} \right) - 2 \right] \right\}. \quad (4.81)$$

As tensões são então calculadas usando o procedimento apresentado na seção 2.2.1, pela equação (2.33).

### 4.3.2 Cálculo das tensões no contorno

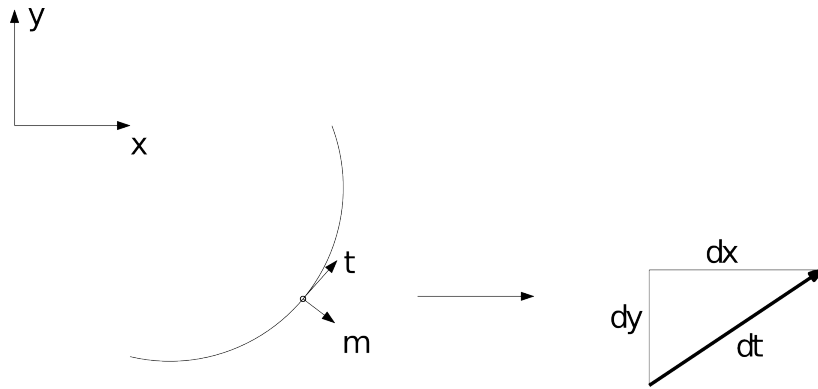


Figura 4.4: Direções normal  $m$  and tangencial  $t$  no ponto fonte.

Para calcular as tensões no contorno, será apresentada uma abordagem alternativa, uma vez que, para se calcular a tensão no contorno usando as equações (4.48), (4.49) e (4.50), as integrais seriam hiper-singular de ordem superior, ou seja ( $1/r^3$ ), o que dificultaria bastante a análise do problema.

A derivada da equação (3.26) na direção tangencial no ponto fonte, que é um nó no contorno (Figura 4.4), é dado por:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial t} + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial V_n^*}{\partial t} w - \frac{\partial M_{nn}^*}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \right) + \sum \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial t} w_{ci} \\ &= \int_{\Gamma} \left( V_n \frac{\partial w^*}{\partial t} - M_{nn} \frac{\partial^2 w^*}{\partial n \partial t} \right) d\Gamma + \sum R_{ci} \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial t} + \int_{\Omega} g \frac{\partial w^*}{\partial t} d\Omega. \end{aligned} \quad (4.82)$$

E na direção normal ao ponto fonte tem-se:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial m} + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial V_n^*}{\partial m} w - \frac{\partial M_n^*}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \right) + \sum \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m} w_{ci}$$

$$= \int_{\Gamma} \left( V_n \frac{\partial w^*}{\partial m} - M_n \frac{\partial^2 w^*}{\partial n \partial m} \right) d\Gamma + \sum R_{ci} \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m} + \int_{\Omega} g \frac{\partial w^*}{\partial m} d\Omega. \quad (4.83)$$

No interior de um elemento de contorno quadrático, a derivada direcional do deslocamento transversal na direção tangencial é dada por:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = N_d^{(1)} \frac{\partial w_1}{\partial t} + N_d^{(2)} \frac{\partial w_2}{\partial t} + N_d^{(3)} \frac{\partial w_3}{\partial t}. \quad (4.84)$$

onde  $\frac{\partial w_1}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial w_2}{\partial t}$  e  $\frac{\partial w_3}{\partial t}$  são derivadas de  $w$  em um nó de um elemento de contorno na direção tangente ao ponto fonte,  $N_d^{(1)}$ ,  $N_d^{(2)}$ , e  $N_d^{(3)}$  são funções de forma quadráticas descontínuas dadas pelas equações (3.87), (3.88) e (3.89).

A derivada segunda do deslocamento transversal é dada por:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \frac{d\xi}{dt}. \quad (4.85)$$

Escrevendo  $\frac{\partial w}{\partial t}$  em termos de valores nodais interpolados pelas funções de forma, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{d}{d\xi} \left( N_d^{(1)} \frac{\partial w_1}{\partial t} + N_d^{(2)} \frac{\partial w_2}{\partial t} + N_d^{(3)} \frac{\partial w_3}{\partial t} \right) \frac{d\xi}{dt}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \left( \frac{dN_d^{(1)}}{d\xi} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{dN_d^{(2)}}{d\xi} \frac{\partial w_2}{\partial t} + \frac{dN_d^{(3)}}{d\xi} \frac{\partial w_3}{\partial t} \right) \left( 1 / \frac{dt}{d\xi} \right). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Seguindo um procedimento similar para  $\frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t}$ , é possível obter:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t} = \left( \frac{dN_d^{(1)}}{d\xi} \frac{\partial w_1}{\partial m} + \frac{dN_d^{(2)}}{d\xi} \frac{\partial w_2}{\partial m} + \frac{dN_d^{(3)}}{d\xi} \frac{\partial w_3}{\partial m} \right) \left( 1 / \frac{dt}{d\xi} \right). \quad (4.87)$$

onde  $\frac{\partial w_1}{\partial m}$ ,  $\frac{\partial w_2}{\partial m}$ , e  $\frac{\partial w_3}{\partial m}$  são derivadas de  $w$  nos nós do elemento de contorno na direção normal ao ponto fonte.

Não é possível calcular  $\frac{\partial^2 w}{\partial m^2}$  da mesma forma que  $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  e  $\frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t}$  porque não tem  $\frac{dm}{d\xi}$ .

Uma alternativa é escrever as equações do momento no sistema  $mt$ :



$$M_{mm} = - \left( D'_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial m^2} + D'_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2D'_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t} \right), \quad (4.88)$$

$$M_{tt} = - \left( D'_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial m^2} + D'_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2D'_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t} \right), \quad (4.89)$$

e

$$M_{mt} = - \left( D'_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial m^2} + D'_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2D'_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t} \right). \quad (4.90)$$

onde  $D'_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) são os termos da matriz de rigidez:

$$\mathbf{D}' = \begin{bmatrix} D'_{11} & D'_{12} & D'_{16} \\ D'_{12} & D'_{22} & D'_{26} \\ D'_{16} & D'_{26} & D'_{66} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{D} (\mathbf{T}^{-1})^T, \quad (4.91)$$

Neste sistema, as variáveis conhecidas são:  $M_{mm}$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  e  $\frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t}$ , e as desconhecidas são:  $M_{tt}$ ,  $M_{mt}$ , and  $\frac{\partial^2 w}{\partial m^2}$ .

Escrevendo essas equações na forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} M_{mm} \\ M_{tt} \\ M_{mt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D'_{11} & D'_{12} & D'_{16} \\ D'_{12} & D'_{22} & D'_{26} \\ D'_{16} & D'_{26} & D'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial m^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t} \end{Bmatrix}. \quad (4.92)$$

Assim, expandindo a equação (4.92), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial m^2} &= S'_{11} M_{mm} + S'_{12} M_{tt} + S'_{16} M_{mt}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= S'_{12} M_{mm} + S'_{22} M_{tt} + S'_{26} M_{mt}, \end{aligned} \quad (4.93)$$

e

$$\frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t} = S'_{16} M_{mm} + S'_{26} M_{tt} + S'_{66} M_{mt}, \quad (4.94)$$

onde

$$\mathbf{S}' = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{26} \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{66} \end{bmatrix} = \mathbf{D}'^{-1}. \quad (4.95)$$

Isolando as variáveis desconhecidas:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 w}{\partial m^2} + S'_{12}M_{tt} + S'_{16}M_{mt} &= -S'_{11}M_{mm}, \\ S'_{22}M_{tt} + S'_{26}M_{mt} &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - S'_{12}M_{mm}, \end{aligned} \quad (4.96)$$

e

$$S'_{26}M_{tt} + S'_{66}M_{mt} = \frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t} - S'_{16}M_{mm}, \quad (4.97)$$

que pode ser escrita na forma de matrix, como:

$$\begin{bmatrix} -1 & S'_{12} & S'_{16} \\ 0 & S'_{22} & S'_{26} \\ 0 & S'_{26} & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial m^2} \\ M_{tt} \\ M_{mt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -S'_{11}M_{mm} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - S'_{12}M_{mm} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial m \partial t} - S'_{16}M_{mm} \end{Bmatrix}. \quad (4.98)$$

As variáveis desconhecidas  $\frac{\partial^2 w}{\partial m^2}$ ,  $M_{tt}$  e  $M_{mt}$  podem ser calculadas resolvendo o sistema linear (4.98).

## 4.4 Problemas transientes

O método dos elementos de contorno de integração radial será aplicados ao cálculo dos campos de deslocamentos para problemas transientes no domínio do tempo. A integração no tempo será realizada utilizando o método proposto por Houbolt (1950) por já ter sido mostrado por Loeffler e Mansur (1987) que o método de Houbolt é o mais apropriado para se usar na integração direta no tempo junto com o método dos elementos de contorno de integração radial. O método de Houbolt usa expressões padrões de diferenças finitas para aproximar a velocidade e a aceleração em termos das componentes de deslocamento. As seguinte expansões em diferenças finitas são utilizadas no método da integração de Houbolt:

$$\ddot{\mathbf{w}}_{\tau+\Delta\tau} = \frac{1}{\Delta\tau^2} (2\mathbf{w}_{\tau+\Delta\tau} - 5\mathbf{w}_{\tau} + 4\mathbf{w}_{\tau-\Delta\tau} - 2\mathbf{w}_{\tau-2\Delta\tau}). \quad (4.99)$$

e

$$\dot{\mathbf{w}}_{\tau+\Delta\tau} = \frac{1}{6\Delta\tau} (11\mathbf{w}_{\tau+\Delta\tau} - 18\mathbf{w}_{\tau} + 9\mathbf{w}_{\tau-\Delta\tau} - \mathbf{w}_{\tau-2\Delta\tau}). \quad (4.100)$$

onde:

$\tau + \Delta\tau \rightarrow$  passo de tempo atual;

$\tau \rightarrow$  passo de tempo imediatamente anterior ao passo atual  $\tau + \Delta\tau$ ;

$\tau - \Delta\tau \rightarrow$  passo de tempo imediatamente anterior ao passo  $\tau$ ;

$\tau - 2\Delta\tau \rightarrow$  passo de tempo imediatamente anterior ao passo  $\tau - \Delta\tau$ ;

$\Delta\tau \rightarrow$  intervalo de tempo entre passos consecutivos de tempo.

Para obter a solução do problema no instante  $\tau \rightarrow$  deve-se solucionar a equação de equilíbrio dinâmico nesse instante, que pode ser escrito de forma alternativa da equação 3.114:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}_{\tau+\Delta\tau} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}}_{\tau+\Delta\tau} + \mathbf{H}\mathbf{w}_{\tau+\Delta\tau} = \mathbf{G}\mathbf{V}_{\tau+\Delta\tau} + \mathbf{P}_{\tau+\Delta\tau} \quad (4.101)$$

O problema tratado nesse trabalho não considera os efeitos viscosos e por isso a matriz  $\mathbf{C}$ , responsável por esses efeitos, deve ser eliminada da equação. Substituindo a equação (4.99) na equação (4.101) e posicionando os valores conhecidos no lado direito da equação obtém-se:

$$\left(\frac{2}{\Delta\tau^2}\mathbf{M} + \mathbf{H}\right)\mathbf{w}_{\tau+\Delta\tau} = \mathbf{G}\mathbf{V}_{\tau+\Delta\tau} + \mathbf{P}_{\tau+\Delta\tau} + \frac{5}{\Delta\tau^2}\mathbf{M}\mathbf{w}_{\tau} - \frac{4}{\Delta\tau^2}\mathbf{M}\mathbf{w}_{\tau-\Delta\tau} + \frac{1}{\Delta\tau^2}\mathbf{M}\mathbf{w}_{\tau-2\Delta\tau} \quad (4.102)$$

Pelo sistema linear acima pode-se notar que a solução necessita do resultado dos últimos três passos. Na inicialização do problema o conhecimento das condições anteriores se torna necessário, caso isso não seja possível algum procedimento de partida especial deve ser adotado. Devido a natureza do problema analisado aqui, um caso no qual antes do período de análise não havia esforços no material, os deslocamentos anteriores são adotados como nulos.

Para o cálculo da matriz massa,  $\mathbf{M}$ , considera-se os efeitos de inércia como forças de corpo, ou

seja, nas equações (3.27) e (3.26) haverá outra integral de domínio, permutando o termo  $\mathbf{g}$ , na nova integral, da seguinte forma:

$$\mathbf{g} = \rho h \ddot{\mathbf{w}}. \quad (4.103)$$

A integral de domínio será resolvida pelo método da integração radial.

Uma importante característica do método de Houbolt é que ele tem um alto amortecimento numérico. Este amortecimento torna os resultados obtidos pelo método dos elementos de contorno de integração radial mais suaves que os obtidos por outras formulações do método dos elementos de contorno aplicadas à elasto-dinâmica (FEDELINSKI; ALIABADI; ROOKE, 1996) e (CHIRINO et al., 1994). Porém, o amortecimento numérico pode ser reduzido usando-se passos de tempo menores. Algumas vezes, para se conseguir reduzir o passo de tempo e obter uma maior precisão dos resultados é necessário refinar a malha ou aumentar o número de nós internos.

## 5 *Resultados*

Nesta seção, resultados numéricos para tensões são apresentados para placas sob cargas dependentes do tempo. Os valores obtidos em um ponto do contorno da placa não puderam ser comparados diretamente, visto que, na literatura, não encontrou-se resultado equivalente. Com o objetivo de validar o resultados comparou-se o resultado dinâmico com o dobro do resultado estático, uma vez que o maiores valores dinâmicos, para carregamento do tipo função degrau, devem estar próximos de duas vezes o estático. Esse comportamento pode ser claramente observado em Santana (2008), na análise dos deslocamentos, e em Sousa (2009), na análise dos momentos. Essa análise pode confirmar os valores de tensão obtidos. Para se garantir que o período encontrado está correto, vamos comparar com o resultado de deslocamento obtido por Santana (2008) e por Sladek et al. (2007), uma vez que o período tanto das tensões quanto dos deslocamentos tem de ser iguais para um mesmo problema.

### 5.1 **Placa quadrada engastada nos quatro lados sob carga uniformemente distribuída**

Considere uma placa engastada (Figura 5.1) carregada no instante  $\tau_o = 0$  s por uma carga  $q = 2,07 \times 10^6$  N/m<sup>2</sup> tipo degrau (Figura 5.2). A placa é ortotrópica e apresenta as seguintes propriedades e dimensões:  $E_2 = 6895$  MPa,  $E_1 = 2E_2$ ,  $G_{12} = 2651,9$  MPa,  $\nu_{12} = 0,3$ ,  $\rho = 7166$  kg/m<sup>3</sup>,  $a = 254$  mm e espessura  $h = 12,7$  mm. Este problema é equivalente ao problema proposto por Sladek et al. (2007) que foi analisado usando o método sem malha de Petrov-Galerkin.

#### 5.1.1 **Sensibilidade ao número de pontos internos**

A placa foi discretizada usando 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento e 50 intervalos iguais de tempo. O problema foi analisado utilizando-se 1, 9 e 25

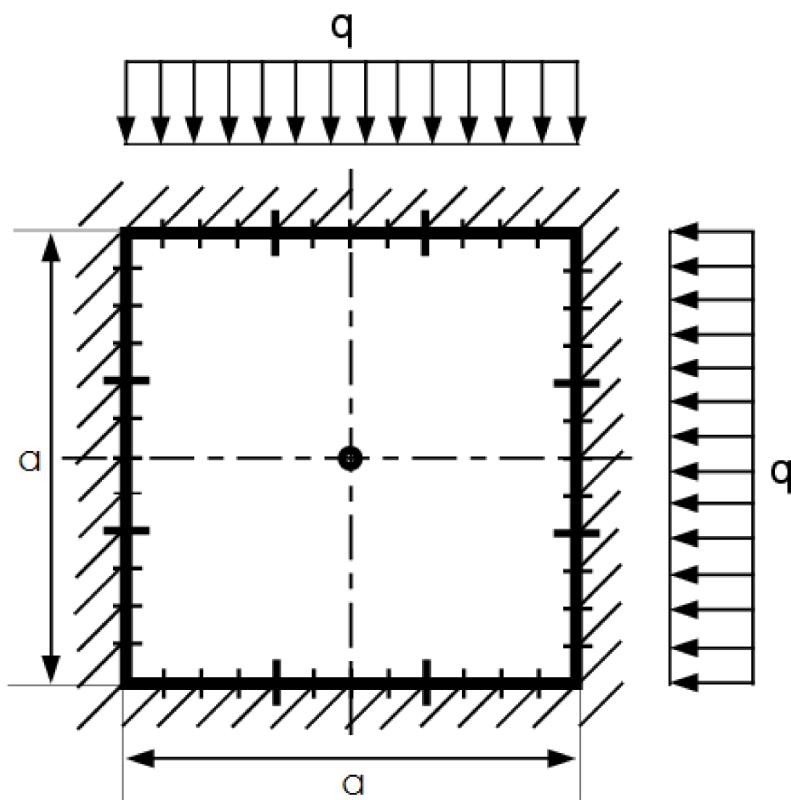


Figura 5.1: Placa quadrada ortotrópica engastada (Fonte: Sousa (2009)).

pontos internos distribuídos uniformemente. A Figura 5.3 mostra a tensão  $\sigma_{22}$  no centro da borda inferior da placa tanto para o problema dinâmico quanto para o estático.

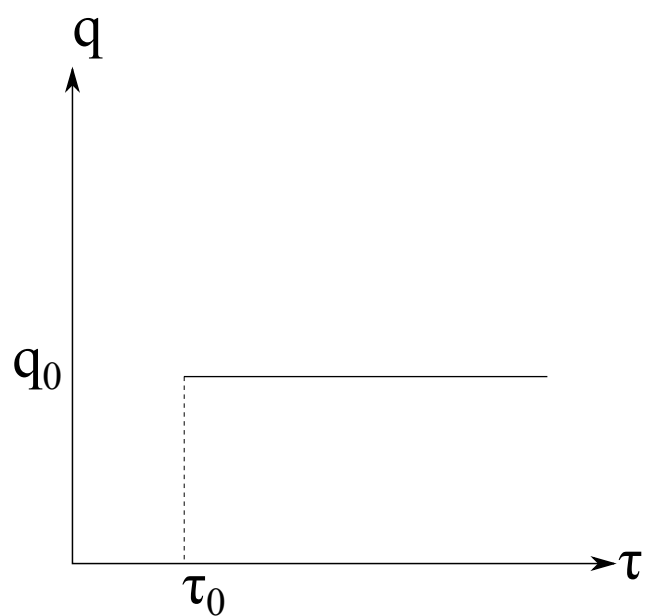


Figura 5.2: Carregamento tipo função degrau.

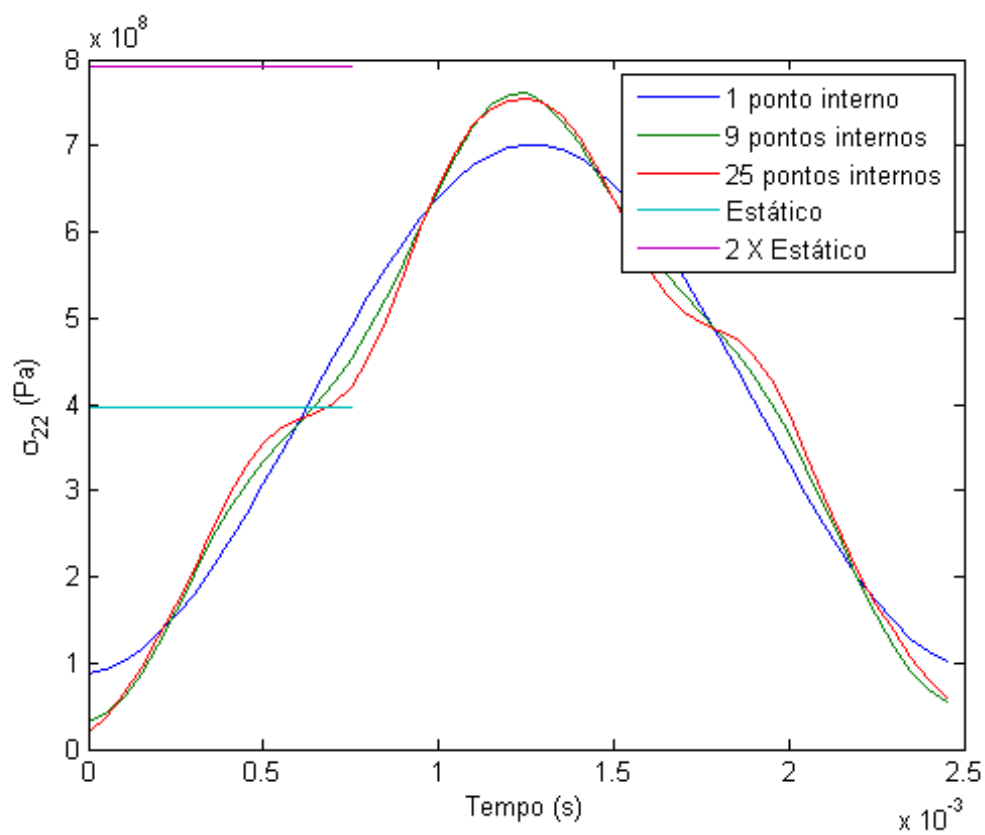


Figura 5.3: Tensão  $\sigma_{22}$  em função do tempo, variando-se o número de pontos internos.

Pode-se observar que os pontos internos tem uma participação significativa na precisão dos resultados, conforme mostrado na Figura 5.3. Com apenas 1 ponto interno existe uma diferença expressiva em relação aos demais resultados, apresentando uma resposta excessivamente suavizada e, portanto, sendo incapaz de modelar satisfatoriamente o problema. Conforme se aumenta o número de pontos internos os resultados tornam-se menos suaves e com picos mais próximos do valor esperado que é o dobro do resultado estático.

### 5.1.2 Sensibilidade ao número de elementos

A placa foi discretizada usando-se 9 pontos internos e 50 intervalos iguais de tempo. O problema foi analisado utilizando-se 4, 12, 20 e 28 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento. A Figura 5.4 mostra a tensão  $\sigma_{22}$  no centro da borda inferior da placa tanto para o problema dinâmico quanto para o estático.

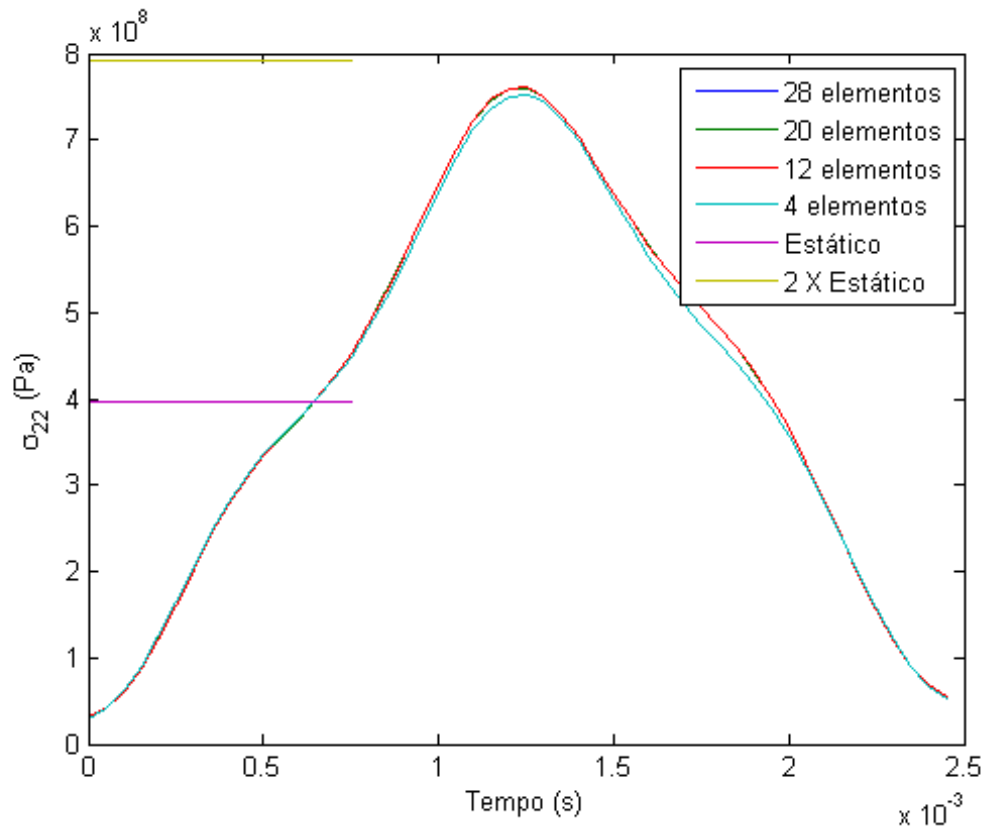


Figura 5.4: Tensão  $\sigma_{22}$  em função do tempo, variando-se o número de elementos.



Pode-se observar na Figura 5.4 que o número de elementos do contorno da placa não é um fator crítico na análise desse problema, visto que para todas as discretizações analisadas não se observou uma variação significativa mostrando que mesmo para uma discretização muito grosseira, com um elemento por lado, ainda se obtém bons resultados.

### **5.1.3 Sensibilidade ao passo de tempo**

A placa foi discretizada usando-se 9 pontos internos e 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento. O problema foi analisado utilizando-se 25, 50 e 100 intervalos iguais de tempo. A Figura 5.5 mostra a tensão  $\sigma_{22}$  no centro da borda inferior da placa tanto para o problema dinâmico quanto para o estático.

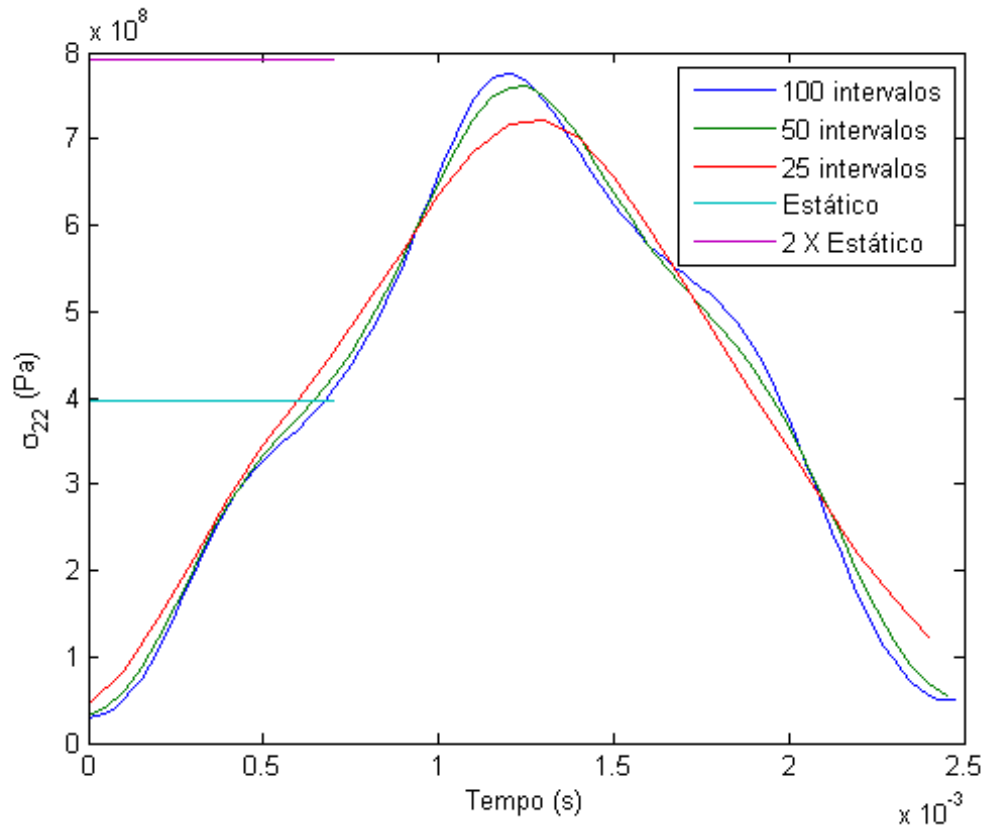


Figura 5.5: Tensão  $\sigma_{22}$  em função do tempo, variando-se o número de intervalos de tempo.

Conforme observado na Figura 5.5, ocorreu uma suavização a medida que se diminuiu a quantidade de intervalos, mostrando que 25 intervalos não é uma quantidade adequada para esse caso e que uma quantidade maior de 100 intervalos não impactaria de maneira expressiva os resultados.

Foi observado que o passo de tempo tem grande influência nos resultados. Este comportamento já havia sido relatado por Santana (2008) na análise dos deslocamentos e por Sousa (2009) na análise dos momentos, ambos para o mesmo problema.

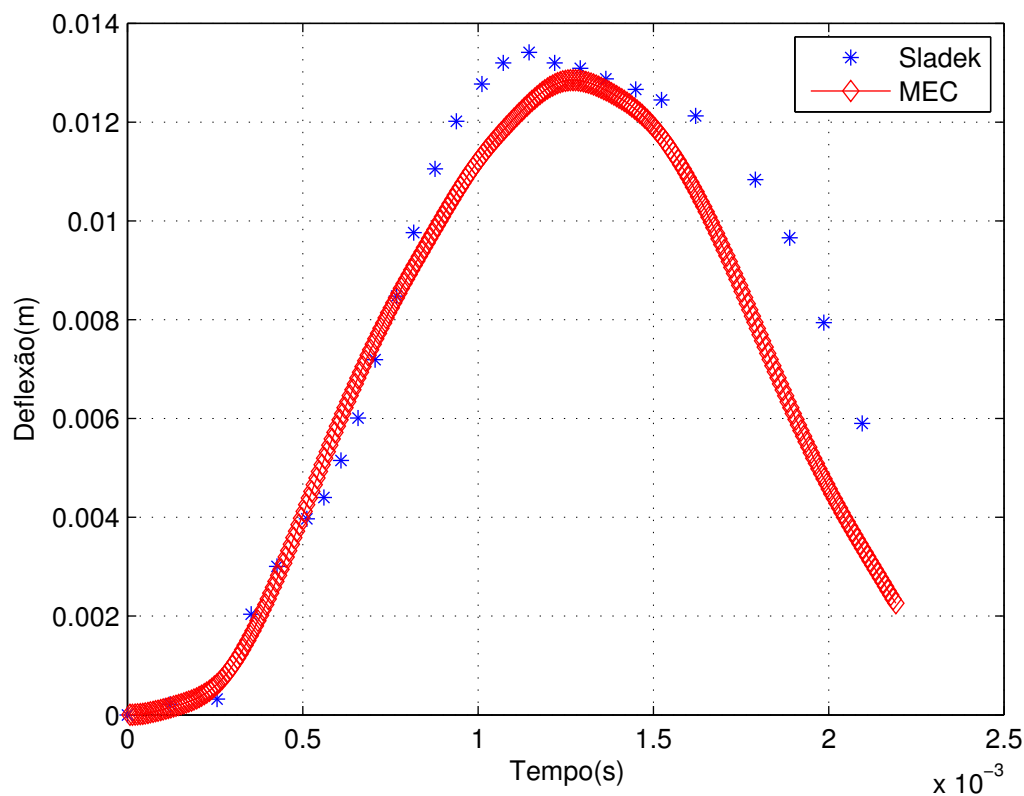


Figura 5.6: Deslocamentos no centro obtidos por Santana (2008) e por Sladek et al. (2007) para a placa engastada.

A figura 5.6 apresenta o resultado para o deslocamento no centro da placa para esse problema. Estes resultados foram calculados por Santana (2008) usando o método dos elementos de contorno e comparado com os resultados de Sladek et al. (2007) calculados usando o método sem malha de Petrov-Galerkin. O período de um ciclo dos deslocamento deve coincidir com o período das tensões. Observando as figuras e 5.5 e 5.6 podemos observar que o período obtido está em conformidade com os resultados da literatura.

Nas figuras 5.7, 5.8 e 5.9 pode-se observar os campos de tensão da placa engastada em análise.

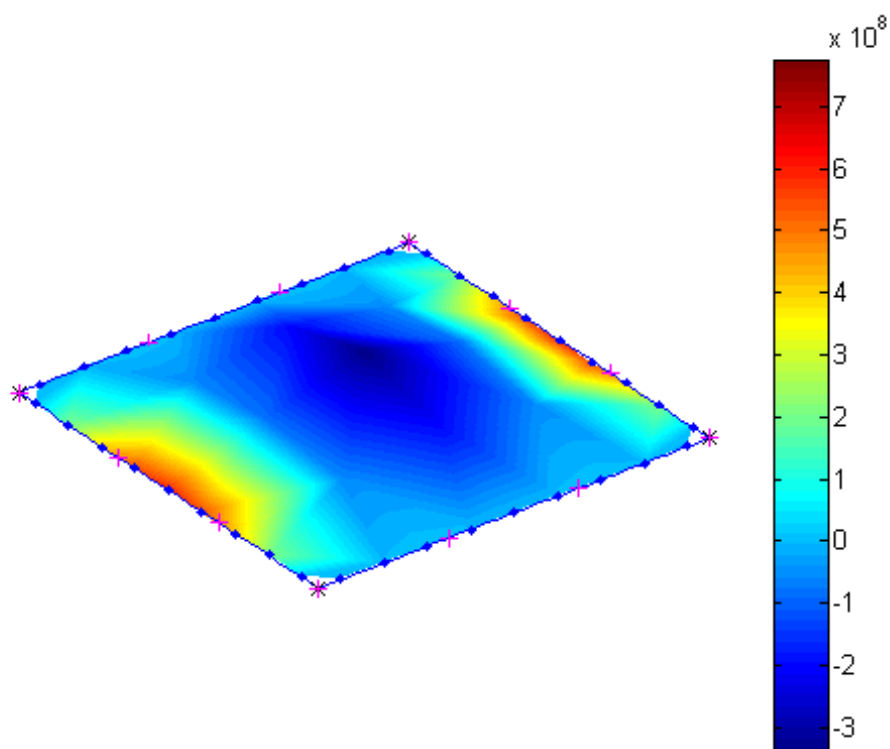


Figura 5.7: Mapa de  $\sigma_{11}$  no instante de máxima tensão absoluta na placa engastada.

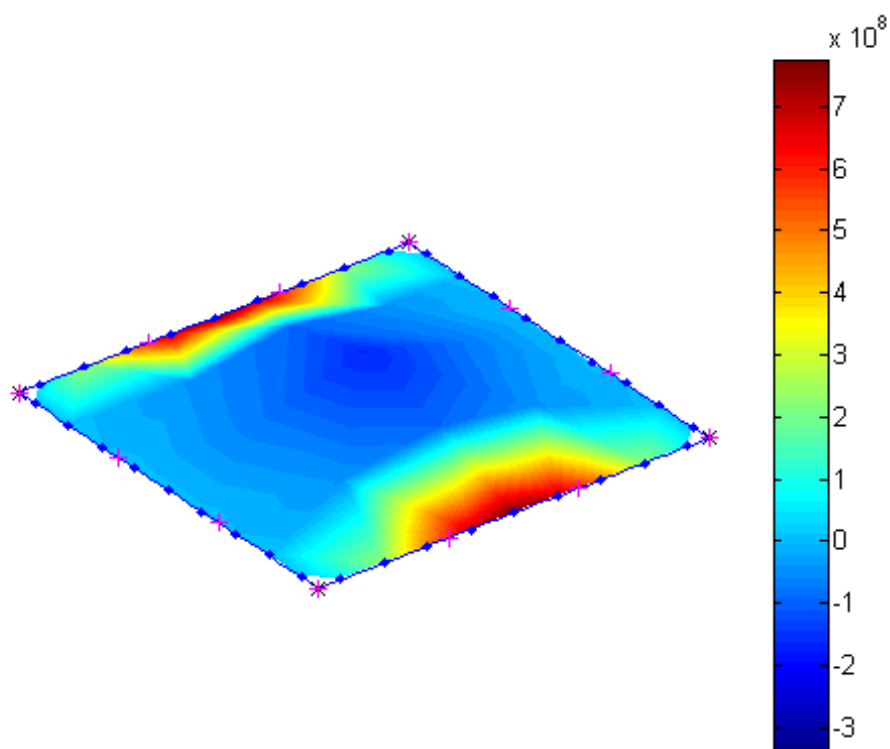


Figura 5.8: Mapa de  $\sigma_{22}$  no instante de máxima tensão absoluta na placa engastada.

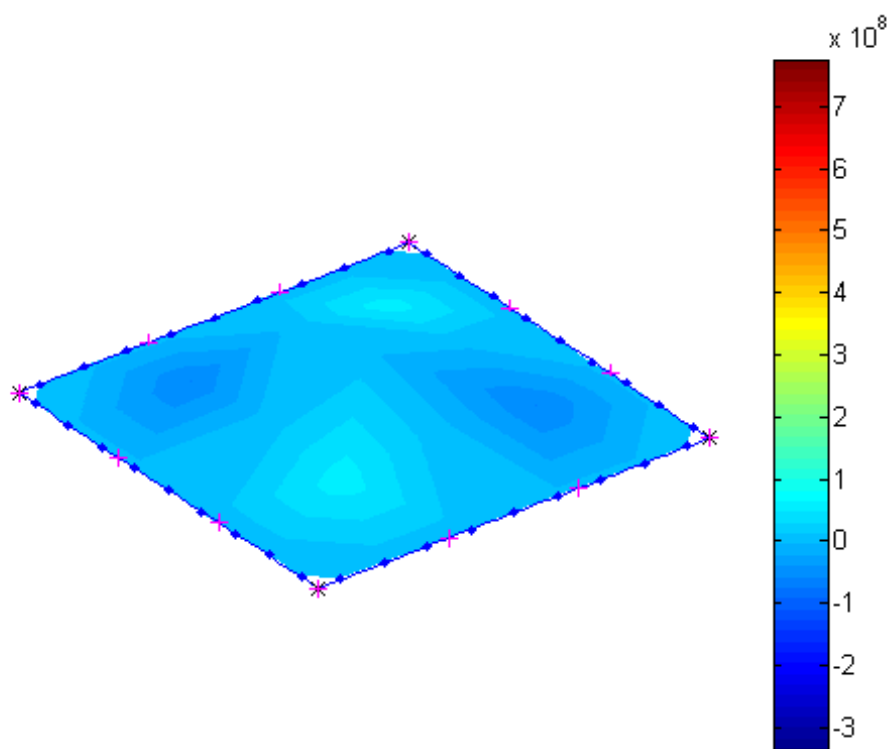


Figura 5.9: Mapa de  $\sigma_{12}$  no instante de máxima tensão absoluta na placa engastada.

## 5.2 Placa quadrada simplesmente apoiada nos quatro lados sob carga uniformemente distribuída

Considere uma placa apoiada (Figura 5.10) carregada no instante  $\tau_o = 0$  s por uma carga tipo degrau  $q = 2,07 \times 10^6$  N/m<sup>2</sup> (Figura 5.2). A placa considerada apresenta as mesmas propriedades e dimensões da seção anterior. A única diferença é a condição de contorno que agora é simplesmente apoiada.

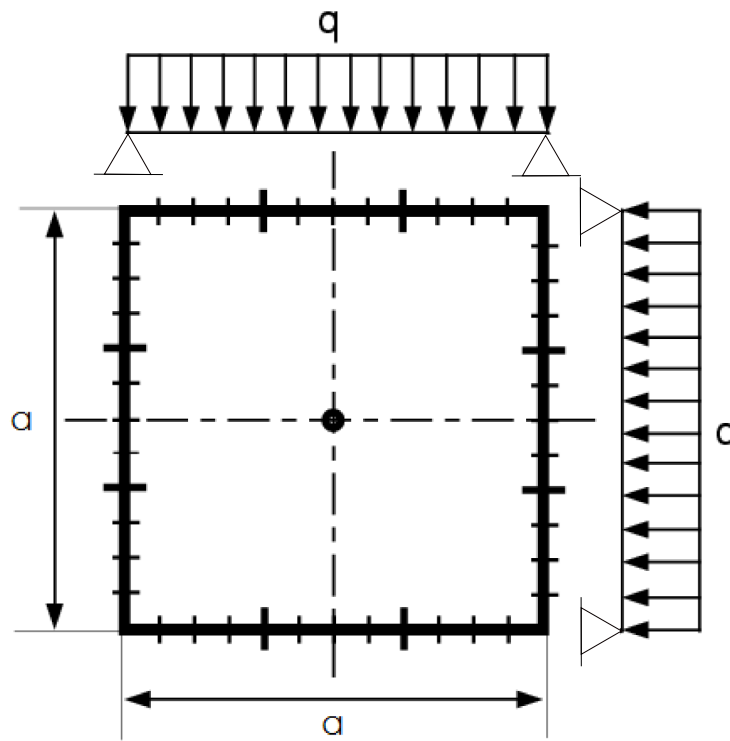


Figura 5.10: Placa quadrada ortotrópica apoiada (Fonte: Sousa (2009)).

A placa foi discretizada usando-se 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento, 100 intervalos iguais de tempo e 9 pontos internos distribuídos uniformemente. A Figura 5.11 mostra a tensão  $S_{12}$  no primeiro nó da borda inferior da placa tanto para o problema dinâmico quanto para o estático. Neste caso não foi analisada a tensão no centro da borda pois nesse ponto as tensões são nulas para este problema.

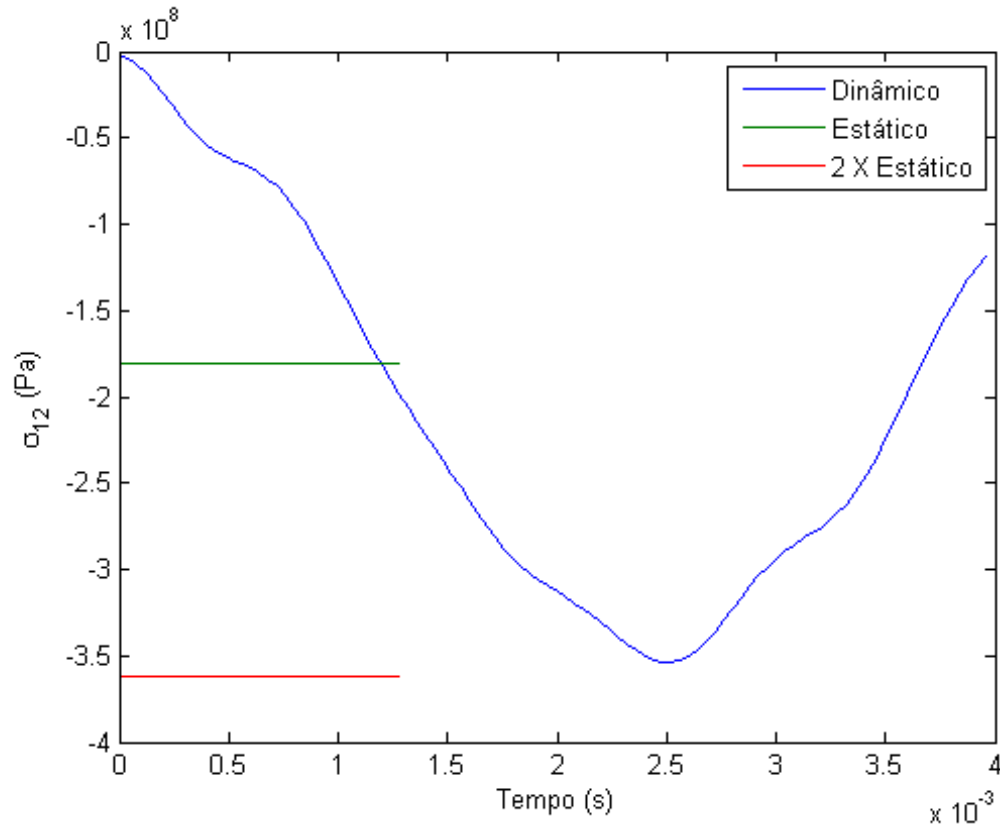


Figura 5.11: Tensão  $\sigma_{12}$  em função do tempo na placa simplesmente apoiada.

Esse nó e essa componente da tensão foram escolhidos por ser onde a tensão apresenta os valores mais críticos, com o maior valor absoluto de tensão do problema. Mais uma vez pode ser observado uma boa concordância com o resultado esperado.



Figura 5.12: Deslocamentos obtidos por Santana (2008) e por Sladek et al. (2007) para a placa apoiada.

Na Figura 5.12 podemos observar que o período obtido está de acordo com os resultados da literatura.

Nas figuras 5.13, 5.14 e 5.15 pode-se observar os campos de tensão da placa apoiada em análise.

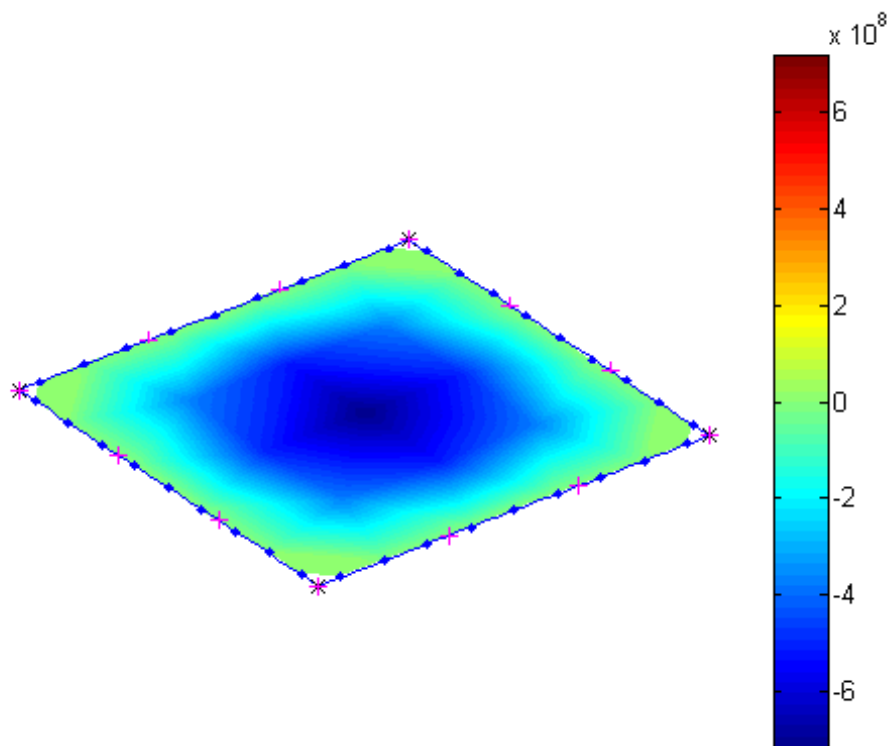


Figura 5.13: Mapa de  $\sigma_{11}$  no instante de máxima tensão absoluta na placa simplesmente apoiada.

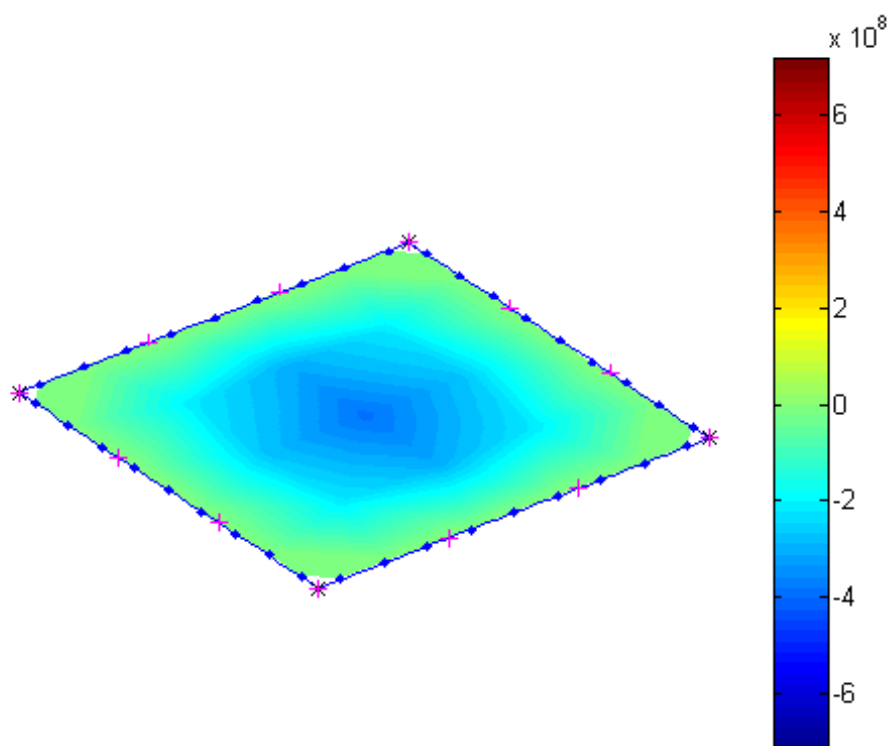


Figura 5.14: Mapa de  $\sigma_{22}$  no instante de máxima tensão absoluta na placa simplesmente apoiada.

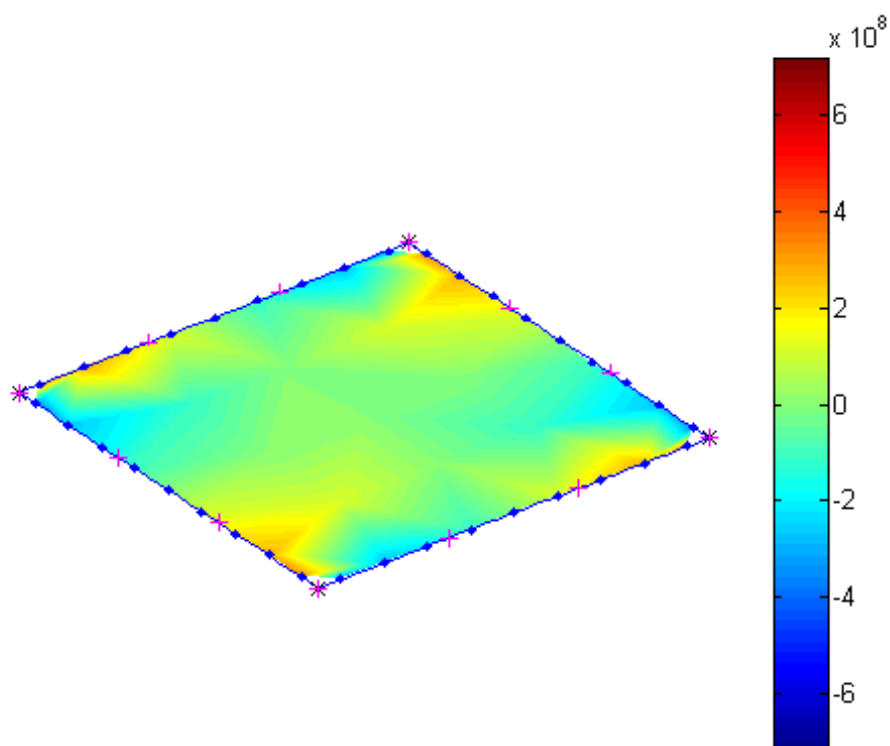


Figura 5.15: Mapa de  $\sigma_{12}$  no instante de máxima tensão absoluta na placa simplesmente apoiada.

### 5.3 Placa engastada-livre sob carga uniformemente distribuída

Considere uma placa engastada-livre (Figura 5.16) carregada no instante  $\tau_o = 0$  s por uma carga tipo degrau  $q = 2,07 \times 10^6$  N/m<sup>2</sup> (Figura 5.2). A placa considerada apresenta as mesmas propriedades e dimensões das seções anteriores.

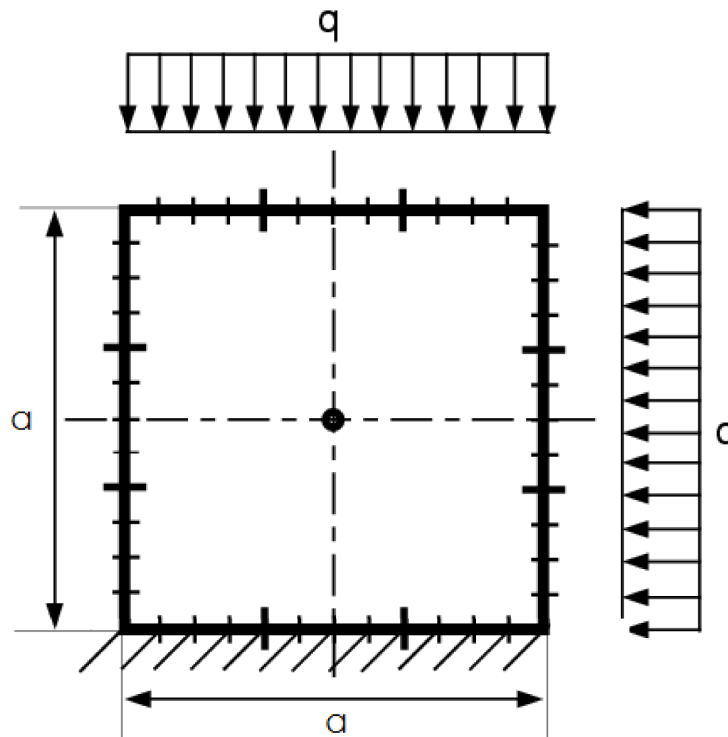


Figura 5.16: Placa quadrada ortotrópica engastada em um lado e livre em três lados (Fonte: Sousa (2009)).

A placa foi discretizada usando-se 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento, 100 intervalos iguais de tempo e 9 pontos internos distribuídos uniformemente. A Figura 5.17 mostra a tensão  $\sigma_{22}$  no centro da borda inferior da placa tanto para o problema dinâmico quanto para o estático.

Pode-se observar na Figura 5.17 que os resultados se apresentaram satisfatórios quando comparados com o resultado estático.

Nas figuras 5.18, 5.19 e 5.20 pode-se observar os campos de tensão da placa engastada-livre

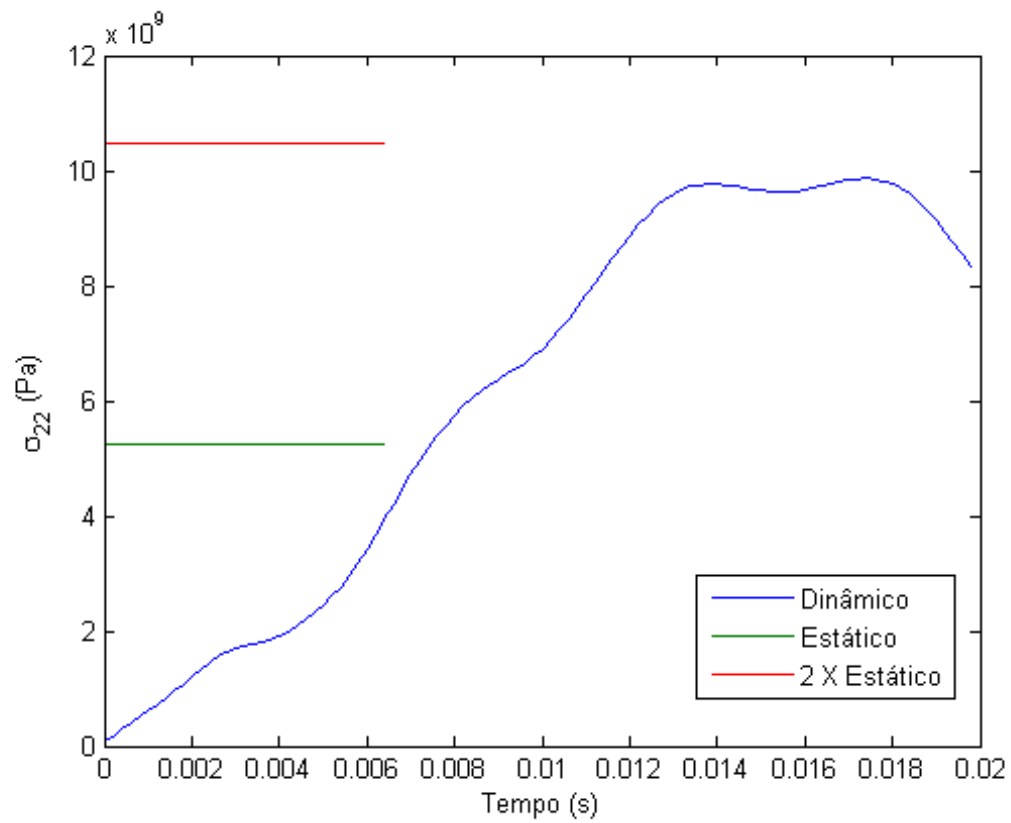


Figura 5.17: Tensão  $\sigma_{22}$  em função do tempo na placa engastada-livre.

em análise no instante onde a tensões tem seu máximo valor absoluto.

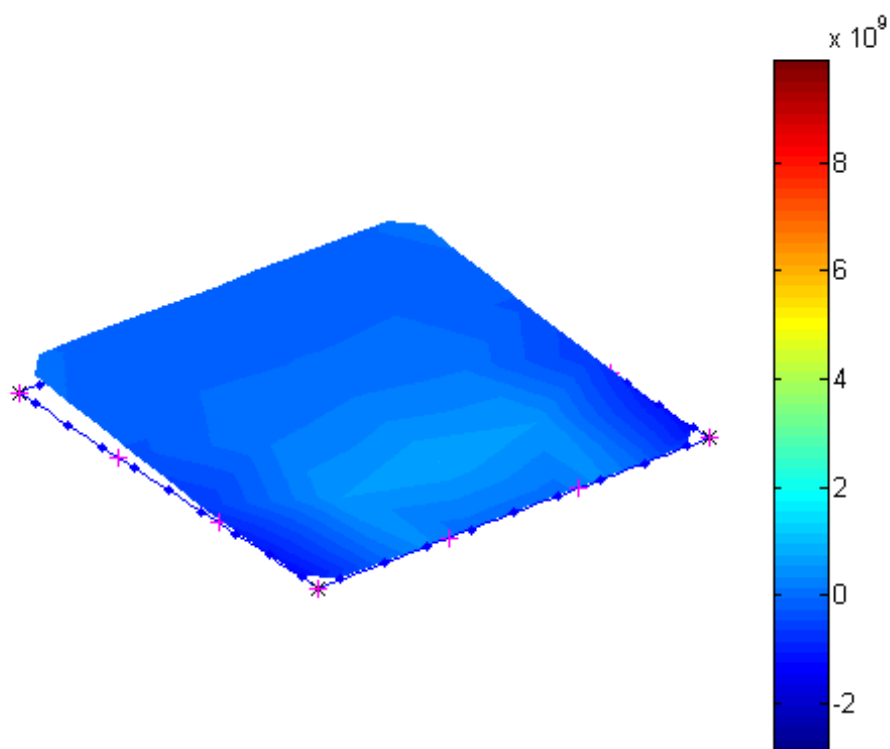


Figura 5.18: Mapa de  $\sigma_{11}$  no instante de máxima tensão absoluta na placa engastada-livre.

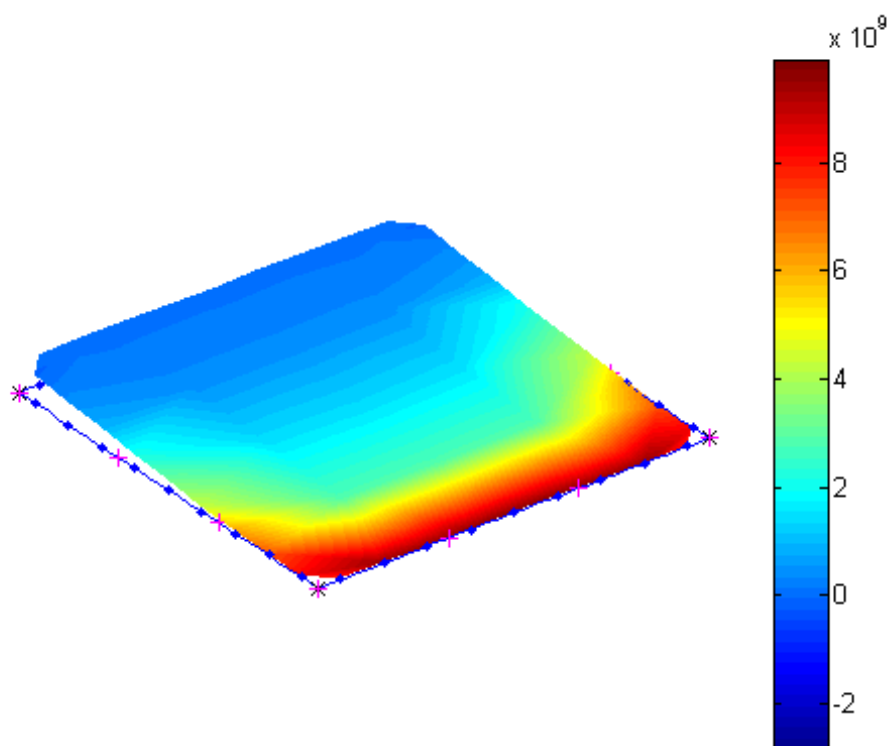


Figura 5.19: Mapa de  $\sigma_{22}$  no instante de máxima tensão absoluta na placa engastada-livre.

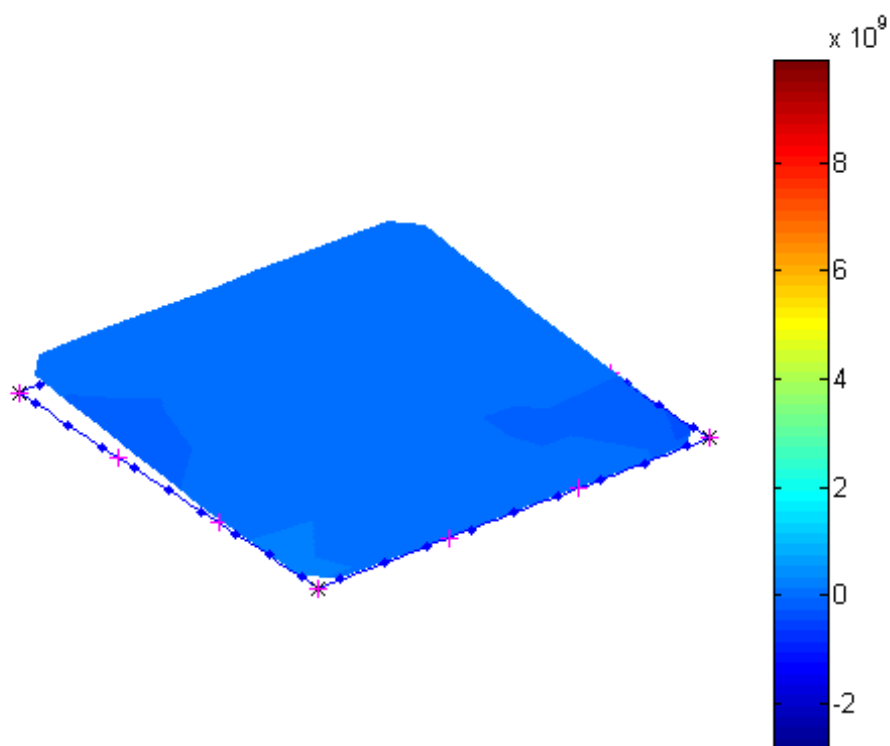


Figura 5.20: Mapa de  $\sigma_{12}$  no instante de máxima tensão absoluta na placa engastada-livre.



## 6 *Considerações finais*

Este trabalho apresentou uma formulação do método dos elementos de contorno para análise de problemas dinâmicos em placas finas de materiais compósitos calculando momentos, tensões e deformações tanto em pontos internos quanto no contorno. A formulação do método dos elementos de contorno para a análise de problemas de elastodinâmica em materiais anisotrópicos foi obtida usando soluções fundamentais da elastostática e considerando os termos de inércia como forças de corpo. Foram usados elementos de contorno quadráticos descontínuos. As integrais de domínio provenientes dos termos de inércia foram transformadas em integrais de contorno usando o método da integração radial.

No método da integração radial foi utilizada como função de aproximação a função de base radial spline de placas finas aumentadas por polinômios que, conforme relatado na literatura, apresenta um bom desempenho em várias formulações.

A formulação desenvolvida foi aplicada a vários problemas numéricos e mostrou que os resultados tem uma boa aproximação com os resultados esperados. Foram feitas análises de sensibilidade ao número de pontos internos, número de elementos e o tamanho de passo de tempo.

O método se mostrou sensível ao número de pontos internos, exigindo um número mínimo de pontos internos a partir do qual a resposta se apresentasse condizente. Quando são usados poucos pontos internos, os resultados tendem a ser mais suaves.

Houve pouca sensibilidade quanto ao número de elementos de contorno da malha, obtendo-se boa concordância mesmo para malhas bastante grosseiras.

O método mostrou-se sensível ao tamanho do passo de tempo. Passos de tempo grandes tendem a suavizar os resultados, embora ainda permanecendo com bons resultados.

No geral, a formulação desenvolvida apresentou um bom desempenho na modelagem de problemas dinâmicos de placas anisotrópicas finas, constituindo-se, como uma alternativa para a

análise de estruturas de materiais compósitos laminados sujeitas a cargas transientes.

## **6.1 Sugestões para trabalhos futuros**

- Extensão da formulação para análise de danos causados por impacto de baixa velocidade em placas de materiais compósitos laminados;
- Desenvolvimento de formulações similares que considere o efeito da deformação de cisalhamento transversal (placas espessas);
- Extensão da formulação desenvolvida para problemas de placas finas sob grandes deflexões;
- Desenvolvimento de procedimentos que reduzam o custo computacional do RIM.

## *Referências Bibliográficas*

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover Publications, 1965.
- AGARWAL, B. D.; BROUTMAN, L. J. *Analysis of performance of fiber composites*. New York: John Wiley and Sons Inc., 1990.
- ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P.; PAIVA, W. P. The radial integration method applied to dynamic problems of anisotropic plates. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 23, p. 805–818, 2007.
- ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P.; VENTURINI, W. S.; ALIABADI, M. H. Boundary element analysis of anisotropic Kirchhoff plates. *International Journal of Solids and Structures*, v. 43, p. 4029–4046, 2006.
- ALTIERO, N. J.; SIKARSKIE, D. L. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form. *Computers and Structures*, v. 9, p. 163–168, 1978.
- AMEEN, M. *Boundary Element Analysis: Theory and Programming*, Narosa, 2001.
- BARCELLOS, C. S.; SILVA, L. H. M. e. A boundary element formulation for the Mindlin's plate model. *Brebbia C.A., Venturini W.C., editors. Proceedings of the Third International Conference On Boundary Element Technology. Computational Mechanics Publications*, p. 123–130, 1989.
- BARCELLOS, C. S.; WESTPHAL, T. J. Reissner/Mindlin's plate models and the boundary element method. *Brebbia C.A., Ingber M.S., editors. Proceedings of the Seventh International Conference On Boundary Element Technology. Computational Mechanics Publications*, p. 589–604, 1992.
- BETTI, E. Teoria dell elasticità. *II Nuovo Cimento*, p. 7–10, 1872.
- BEZINE, G. Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. *Mechanics Research Communications*, v. 5, p. 197–206, 1978.
- BREBBIA, C.; DOMINGUEZ, J. *Boundary Element an Introductory Course*. Second. Southampton, Boston: Computation Mechanics Publications, 1989.
- CHIRINO, F. et al. A comparative study of three boundary element approaches to transient dynamic crack problems. *IEngineering Analysis with Boundary Elements*, v. 13, p. 11–19, 1994.
- CODY, W. J.; HENRY-JR, C. T. Chebyshev approximations for the exponential integral  $e_i(x)$ . *Mathematics Compuutatioal*, v. 23, p. 289–303, 1969.

- COOK, R. D. *Finite Element Modeling for stress analysis*. New York: John Wiley and Sons, 1995.
- CRUZE, T. A. Numerical solutions in three-dimensional elastostatics. *International Journal of Solids and Structures*, v. 5, p. 1259–1274, 1969.
- DEANS, S. *The Radon transform and some of its applications*. Malabar, Flórida: Krieger Publishing Company, 1993.
- DIRGANTARA, T. *A New Boundary Element Formulation for Shear Deformable Shells Analysis*. Southampton: WIT Press, 2002.
- EL-ZAFRANY, A.; DEBBIH, M.; FADHIL, S. Boundary element analysis of thick Reissner plates in bending. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 14, p. 159–169, 1994.
- FEDELINSKI, P.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. Boundary element formulations for the dynamic analysis of cracked structures. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 17, p. 45–56, 1996.
- FREDHOLM, I. Sur une classe d' equations fonctionelles. *Acta Mathematica*, v. 27, p. 365–390, 1903.
- GANAPATHY, S.; RAO, K. P. Failure analysis of laminated composite cylindrical/spherical shell panels subjected to low-velocity impact. *Computers and Structures*, v. 68, p. 627–641, 1998.
- GAO, X. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary only discretization. *Engn. Analysis with Boundary Elements*, v. 26, p. 905–916, 2002.
- GAUL, L.; KöGL, M.; WAGNER, M. *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists*. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- GEL'FAND, I. M.; GRAEV, M. I.; VILENKIN, N. Y. *Generalized Functions, Vol.1*. New York: Academic, 1966.
- GHOSH, A. K.; DEY, S. S. A simple finite element for the analysis of laminated plates. *Computers and Structures*, v. 44, p. 585–596, 1992.
- GOLBERG, M. A.; CHEN, C. S.; BOWMAN, H. Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the bem. *Engineering Analysis with Boundary Element*, v. 23, p. 285–296, 1999.
- GOUVÊA, A. R.; ALBUQUERQUE, E. L.; PALERMO-JR., L. The boundary element method applied to thick orthotropic plates. In: *XXIX CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*. Maceio, Brazil: [s.n.], 2008.
- GREEN, A.; ZERNA, W. *Theoretical Elasticity*. Second. London: Oxford University Press, 1968.
- HILL, R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceedings of the Royal Society*, v. 193, p. 281–297, 1950.
- HöMANDER, L. *Linear partial differential operators*. Berlin: Springer Verlag, 1963.

- HOUBOLT, J. C. A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. *J. of Aeronautical and Science*, v. 17, p. 540–550, 1950.
- KANE, J. H. *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. New Jersey: Prentice Hall, 1994.
- KARAM, V. J.; TELLES, J. C. F. On boundary elements for Reissner's plate theory. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 5, p. 21–27, 1988.
- KATSIKADELIS, J. T.; YOTIS, A. J. A new boundary element solution of thick plates modelled by Reissner's theory. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 12, p. 65–74, 1993.
- KIRCHHOFF, G. On the equilibrium and motion of an elastic plate. *J. Math.*, v. 40, p. 51–58, 1850. In German.
- KUPRADZE, V. *Potential methods in the theory of elasticity*. Jerusalém: Israel program for Scientific Translation, 1965.
- LACHAT, J. A. *A further development of the boundary integral technique for elastostatic*. Tese (Doutorado) — University of Southampton, 1975.
- LAKSHMINARAYANA, H. V.; MURTHY, S. S. A shear-flexible triangular finite element model for laminated composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 20, p. 591–623, 1984.
- LEKHNITSKII, S. G. *Anisotropic plates*. New York: Gordon and Breach, 1968.
- LI, C. F. et al. Low-velocity impact-induced damage of continuous fiber-reinforced composite laminates. part i. an fem numerical model. *Composite: Part A*, v. 33, p. 1055–1062, 2002.
- LI, C. F. et al. Low-velocity impact-induced damage of continuous fiber-reinforced composite laminates. part ii. verification and numerical investigation. *Composite: Part A*, v. 33, p. 1063–1072, 2002.
- LOEFFLER, C.; MANSUR, W. J. Analysis of time integration schemes for boundary element applications to transient wave propagation problems. In: BREBBIA, C. A.; VENTURINI, W. S. (Ed.). *Boundary Element techniques: Applications in stress analysis and heat transfer*. Computational Mechanics Publications, Southampton: [s.n.], 1987. p. 105–122.
- LONG, S. Y.; BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F. Boundary element bending analysis of moderately thick plates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 5, p. 64–74, 1988.
- LUO, R. K.; GREEN, E. R.; MORRISON, C. J. Impact damage analysis of composite plates. *Int. J. of Impact Engineering*, v. 22, p. 435–447, 1999.
- MARCZACK, R. J.; CREUS, G. J. Direct evaluation of singular integrals in boundary element analysis of thick plates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 26, p. 653–665, 2002.
- MAWENYA, A. S. *Finite element analysis of sandwich plate structures*. Tese (Doutorado) — University of Wales, Swansea, 1973.

- MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics.*, v. 18, p. 31–38, 1951.
- NETO, L. O.; PAIVA, J. B. Cubic approximation for the transverse displacement in BEM for elastic plates analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 28, p. 869–880, 2004.
- NETO, L. O.; PAIVA, J. B. Uma formulação do método dos elementos de contorno com três parâmetros nodais em deslocamentos para placas delgadas e suas aplicações a problemas de engenharia estrutural. *Cadernos de Engenharia de Estruturas n. 22, São Carlos*, v. 7, p. 61–87, 2005.
- PAGANO, N. J.; HATFIELD, S. J. Elastic behaviour of multilayered bidirectional composites. *AIAA Journal*, v. 10, p. 931–933, 1972.
- PAIVA, J. B. *Boundary element formulation for plate bending and its application in engineering*. Tese (Doutorado) — University of São Paulo, São Carlos School of Engineering, 1987. In Portuguese.
- PAIVA, W. P.; SOLLERO, P.; ALBUQUERQUE, E. L. Treatment of hypersingularities in boundary element anisotropic plate bending problems. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 1, p. 49–73, 2003.
- PAIVA, J. B.; NETO, L. O. An alternative boundary element formulation for plate bending analysis. *Aliabadi M.H., Brebbia C.A., Dular P., Nicolet A., editors. Boundary Element Technology X*, p. 1–8, 1995.
- PALERMO-JR., L. *Análise estática de placas e o método dos elementos de contorno, Tese de Livre-Docência*. Tese (Doutorado) — University of Campinas, Faculty of Engineering Civil, 2000.
- PANDA, S. C.; NATARAJAN, R. Finite element analysis of laminated composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 14, p. 69–79, 1979.
- PILKEY, W.; WUNDERLICH, W. *Mechanics of structures: variational and computational methods*. Inc Boca Raton, Florida: CRC Press, 1994.
- POISSON, S. D. Tmemoire sur l'équilibre et le mouvement des corps solides. *Journal of Mathematics Physics*, v. 12, p. 8, 1829.
- RAJAMOHAN, C.; RAAMACHANDRAN, J. Bending of anisotropic plates by charge simulation method. *Advances in Engineering Software*, v. 30, p. 369–373, 1999.
- RAJAMOHAN, C.; RAAMACHANDRAN, J. Bending of anisotropic plates by charge simulation method. *Advances in Engn. Software*, v. 30, p. 369–373, 1999.
- REDDY, J. *Mechanics of laminated composite plates*. Inc Boca Raton, Florida: CRC Press, 1997.
- REDDY, J. N. Exact solutions of moderately thick laminated shells. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 110, p. 794–809, 1984.

- REIS, A. Formulações do Método dos Elementos de contorno para Análise de Placas de Materiais Compósitos Laminados. *Tese (Doutorado) — Universidade estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, 2010.*
- REIS, A.; ALBUQUERQUE, E. L.; TORSANI, F. L.; PALERMO, L.; SOLLERO, P. Computation of moments and stresses in laminated composite plates by the boundary element method *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 35, p. 105–113, 2011.
- REISSNER, E. On the theory of bending of elastic plates. *Journal Math Physics*, v. 23, p. 184, 1944.
- REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, v. 12, p. 69–77, 1945.
- REZENDE, M. C.; BOTELHO, E. C. O uso de compósitos estruturais na indústria aeroespacial. *Polímeros*, v. 10, p. 33–42, 2000.
- RICARDELLA, P. *An implementation of the boundary integral technique for planar problems in elasticity and elasto-plasticity*. Tese (Doutorado) — Carnegie-Mellon University, 1973.
- RIZZO, F. J. An integral approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quarterly of Applied mathematics*, v. 25, p. 83–92, 1967.
- SANTANA, A. P. Formulações dinâmicas do método dos elementos de contorno aplicado a análise de placas finas de compósitos laminados. *Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, 2008.*
- SHI, G.; BEZINE, G. A general boundary integral formulation for the anisotropic plate bending problems. *Journal of Composite Materials*, v. 22, p. 694–716, 1988.
- SHI, G.; BEZINE, G. Buckling analysis of orthotropic plates by boundary element method. *Mechanics Research Communications*, v. 26, p. 1351–1370, 1990.
- SLADEK, J. et al. Local boundary integral equations for orthotropic shallow shells. *International Journal of Solids and Structures*, v. 44, p. 2285–2303, 2007.
- SOUSA, K. R. P. Análise de tensões em placas finas de materiais compósitos sob carregamento dinâmico usando o método dos elementos de contorno. *Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, 2009.*
- SLADEK, J. et al. Analysis of orthotropic thick plates by meshless local petrov-galerkin method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 67, p. 1830–1850, 2006.
- SOMIGLIANA, C. Sopra l'equilíbrio di un corpo elastico isotropo. *II Nuovo Cimento*, p. 17–20, 1885.
- SOUTHWELL, R. *Relaxation Methods in Theoretical Physics*. London: Oxford University Press, 1946.

- STERN, M. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. *International Journal of Solids and Structures*, v. 15, p. 769–782, 1979.
- STROUD, A. H.; SECREST, D. *Gaussian Quadrature Formulas*. New Jersey: Prentice Hall, 1966.
- SYNGELLAKIS, S.; CHERUKUNNATH, N. Boundary element analysis of symmetrically laminated plates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 28, p. 1005–1016, 2004.
- TELLES, J. C. F. A self adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 24, p. 959–973, 1987.
- TOTTENHAM, H. *The boundary element method for plates and shells*. London: P. K. Banerjee and R. Butterfield. Applied Science, 1979.
- USECHE, J. *Finite Element Analysis Program for Linear Static and Dynamic Analysis of Composite Shell Structures*. Shellcomp, v3.4. Cartagena, Colômbia, 2008.
- VENTURINI, W. S. *Boundary Element Method In Geomechanics*. Berlin: SPRINGER-VERLAC, 1984. 246 p.
- VINSON, J. R.; SIERKOWSKI, R. L. *The behavior of structures composed of composite materials*. Boston: Martinus Nijhoff, 1987.
- WANG, J.; HUANG, M. Boundary element method for orthotropic thick plates. *Acta Mechanica Sinica*, v. 7, p. 258–266, 1991.
- WANG, J.; SCHWEIZERHOF, K. The fundamental solution of moderately thick laminated anisotropic shallow shells. *International Journal of Engineering Science*, v. 33, p. 995–1004, 1995.
- WANG, J.; SCHWEIZERHOF, K. A boundary integral equation formulation for moderately thick laminated orthotropic shallow shells. *Computers and Structures*, v. 58, p. 277–287, 1996.
- WANG, J.; SCHWEIZERHOF, K. Fundamental solutions and boundary integral equations of moderately thick symmetrically laminated anisotropic plates. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 12, p. 383–394, 1996.
- WANG, J.; SCHWEIZERHOF, K. Free vibration of laminated anisotropic shallow shells including transverse shear deformation by the boundary-domain element method. *Computers and Structures*, v. 62, p. 151–156, 1997.
- WEEËN, V. F. Application of the boundary integral equation method to Reissner's plate model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering, John Wiley and Sons Ltda*, v. 18, p. 1–10, 1982.
- WEN, P. H.; ALIABADI, M. H. Displacement discontinuity formulation for modeling cracks in orthotropic shear deformable plates. *International Journal of Fracture*, v. 142, p. 69–79, 2006.



WESTPHAL, T. J.; BARCELLOS, C. S. Applications of the boundary element method to Reissner's and Mindlin's plate model. *Tanaka M., Brebbia C.A. and Honma T., editors. Proceedings of the 12th International Conference On Boundary Element Technology. Computational Mechanics Publications*, v. 1, p. 467–477, 1990.

WU, B. C.; ALTIERO, N. J. A new numerical method for the analysis of anisotropic thin plate bending problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 25, p. 343–353, 1981.

YAN, X. A new BEM approach for Reissner's plate bending. *Computers and Structures*, v. 54, p. 1085–1090, 1995.

ZHAO, G. P.; CHO, C. D. Damage initiation and propagation in composite shells. *Composite Structures*, p. Early view, 2006.