



**MODELAGEM MATEMÁTICA E CONTROLE DE UM QUADRIMOTOR**

**MIGUEL ENRIQUE PARRA MUÑOZ**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM SISTEMAS MECATRÔNICOS**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELAGEM MATEMÁTICA E CONTROLE DE UM QUADRIMOTOR**

**MIGUEL ENRIQUE PARRA MUÑOZ**

**ORIENTADOR: PROF. DR. EUGENIO FORTALEZA  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM SISTEMAS MECATRÔNICOS**

**PUBLICAÇÃO ENM.DM-51 A/12**

**PUBLICAÇÃO**

**BRASÍLIA/DF:18/10/2012**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELAGEM MATEMÁTICA E CONTROLE DE UM QUADRIMOTOR**

**MIGUEL ENRIQUE PARRA MUÑOZ**

*Dissertação submetida ao departamento de engenharia mecânica da faculdade de tecnologia da universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de mestre em sistemas mecatrônicos*

**Banca Examinadora:**

---

**Prof: Eugênio Liborio Feitosa Fortaleza, Dr (FT/UnB)**

**(orientador):**

---

**Prof: Guilherme Caribé de Carvalho, Dr (FT/UnB)**

**(Examinador interno)**

---

**Prof: Manuel Nascimento Dias Barcelos Júnior**

**(Examinador externo)**

**BRASÍLIA/DF, 18/10/2012**

## FICHA CATALOGRÁFICA

MUÑOZ, MIGUEL ENRIQUE PARRA

Modelagem matemática e controle de um quadrimotor

xvi,104 p. 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Sistemas Mecatrônicos, 2012).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

- |                              |                |
|------------------------------|----------------|
| 1. Controle não linear       | 2. Quadrimotor |
| 3. Controle por planejamento | 4. Variância   |

I. ENM/FT/UnB

II. Título (série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MUÑOZ, M.E.P (2012), Modelagem matemática e controle de um quadrimotor por controle de trajetórias, Dissertação de Mestrado em Sistemas Mecatrônicos, Publicação ENM.DM-51A/12, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília,DF, 104p.

## CESSÃO DE DIREITOS

**AUTOR:** Miguel Enrique Parra Muñoz.

**TÍTULO:** Modelagem matemática e controle de um quadrimotor por controle de trajetórias

**GRAU:** Mestre

**ANO:** 2012

É concedida Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta Dissertação de Mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos, científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Miguel Enrique Parra Muñoz

## **AGRADECIMENTOS.**

*Agradeço a Deus, Aos meus Pais, Gloria Muñoz e Miguel Enrique Parra Parra, pelo amor e apoio em cada passo de minha vida, aos meus irmãos que sempre tem estado comigo, animando-me e demonstrando-me seu carinho, ao meu orientador, o Professor Eugenio Liborio Feitosa Fortaleza, pela amizade, a orientação, e a confiança depositada em mim. À Universidade de Brasília, especialmente ao Professor Carlos Llanos, pela oportunidade de fazer o curso de mestrado neste país maravilhoso. Ao Jones pela sua colaboração nos testes feitos no desenvolvimento do trabalho, aos meus amigos e colegas, que durante o curso de mestrado fizeram parte de minha vida, Cristian Gasca, Miguel Ordoñez, David Vallejos, Giuliano Souza, Luiz Miguel, Liliana Lopez, Giselle Leite. Marrocos, a todos eles agradeço pela amizade. Ao Grupo de Automação e Controle (GRACO.). Finalmente, À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, pelo apoio financeiro durante o curso.*

*Miguel Enrique Parra Muñoz*

## RESUMO

# MODELAGEM MATEMATICA E CONTROLE DE UM QUADRIMOTOR

**Autor: Miguel Enrique Parra Muñoz.**

**Orientador: Eugenio Fortaleza**

**Programa de pós-graduação em sistemas mecatrônicas.**

**Universidade de Brasília 2012.**

Este documento mostra a modelagem matemática de um quadrimotor, onde foram feitas as seguintes considerações do sistema: é analisado como um corpo sólido o qual gira em 3D, o sistema foi modelado mediante a segunda lei de Newton e as equações de *Euler-Lagrange*, obtendo assim o sistema em função da geometria do quadrimotor e os ângulos de *Euler* nos eixos correspondentes. O método de controle é feito por planejamento de trajetórias e controle estocástico, com objetivo de controlar a não linearidade do sistema, fazendo assim que o sistema seja comportado de forma desejada em malha aberta. O desenvolvimento do projeto é baseado na construção e na simulação de trajetória desenhadas em MATLAB e SIMULINK, tendo condições iniciais definidas, com objetivo de obter os dados das simulações para a realização dos testes no quadrimotor. Como equipamento de trabalho foi disponibilizado um quadrimotor (Parrot Ar Drone), o qual tem desenvolvido um programa na plataforma de Java para sua comunicação.

A parte final do trabalho é fundamentada na análise estocástica do sistema em relação aos parâmetros do controle PID e PD, o qual permitiu a identificação do controlador que for projetado para a realização dos testes. Finalmente com o controlador projetado foram realizadas as provas e posteriormente foram processados e analisados os dados obtidos experimentalmente, para ser comparados com os dados teóricos enviados ao quadrimotor, com a finalidade de analisar o comportamento do controlador projetado no sistema real.

## RESUMEN

# MODELAMIENTO MATEMATICO E CONTROL DE CUADRIMOTOR

**Autor: Miguel Enrique Parra Muñoz.**

**Orientador: Eugenio Fortaleza**

**Programa de pós-graduação em sistemas mecatrônicas.**

**Universidade de Brasília 2012.**

Este documento muestra el modelamiento matemático de un cuadrimotor, donde fueron realizadas las siguientes consideraciones del sistema: es analizado como un cuerpo sólido el cual gira en 3D, el sistema fue modelado mediante la segunda ley de Newton y las ecuaciones de *Euler- Lagrange*, obteniendo así el sistema en función de la geometría del cuadrimotor y los ángulos de *Euler* en los ejes correspondientes, el método de control es realizado por planeamiento de trayectorias y control estocástico, con el objetivo de controlar la no linealidad del sistema, logrando a si que el sistema se comporte de forma deseada en lazo abierto. El desarrollo del proyecto es basado en la construcción y simulación de trayectorias realizadas previamente en MATLAB y SIMULINK, las cuales tienen condiciones iniciales definidas, obteniendo así los parámetros de las simulaciones para ser programados en el cuadrimotor (Parrot Ar Drone), utilizando para realizar las pruebas del sistema el programa de adquisición de datos realizada en JAVA con el que cuenta el vehículo no tripulado.

La parte final del trabajo se fundamenta en el análisis estocástico del sistema en relación a los parámetros del controlador PID y PD, permitiendo así la identificación del controlador que fue diseñado para la realización de las pruebas. Finalmente como el controlador diseñado fueron realizadas las pruebas y posteriormente fueron procesados y analizados los datos obtenidos experimentalmente, para ser comparados con los datos teóricos enviados al cuadrimotor, con la finalidad de analizar el comportamiento del controlador diseñado en un sistema real.

## **ABSTRACT**

### **MATHEMATICAL MODELING AND CONTROL OF A FOUR-ENGINE HELICOPTER**

**Author: Miguel Enrique Parra Muñoz.**

**Supervisor: Eugenio Fortaleza**

**Programa de pós-graduação em sistemas mecatrônicas.**

**Universidade de Brasília 2012.**

This paper shows the mathematical modeling of a quadrotor, where the following observations were made in the system: it is analyzed as a solid body which rotates in 3D, for modeling purposes the system was represented by Newton's second law and the Euler-Lagrange equations obtaining in this way the system in function from the four engine geometry and the Euler angles in the corresponding axes, the control method is performed by planning paths and stochastic control. The trajectories were worked with the aim of controlling the nonlinearity of the system, thus making it behave in a desired way, this is in an open loop. The development of the project is based on the construction and simulation of trajectories previously performed in MATLAB and Simulink, which have defined initial conditions, obtaining the parameters of the simulations to be programmed in quadrotor (Parrot Ar Drone), used to perform system testing program data acquisition JAVA on that account to the unmanned vehicle.

The final part of the paper is to be based on the stochastic analysis of the system relative to the parameters of PID and PD controller, thereby allowing the identification of the controller was designed for performing tests. Finally as the controller designed tests were performed and were subsequently processed and analyzed the data obtained experimentally, to be compared with the theoretical data sent to the quadrotor, in order to analyze the behavior of the controller designed in a real system



# SUMÁRIO.

<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 JUSTIFICATIVA DO TRABALHO	2
1.2 OBJETIVOS	3
1.2.1 Objetivo Geral	3
1.2.2 Objetivos Específicos	3
1.2.3 Metodologia	4
1.3 ESTRUTURA DO DOCUMENTO	5
<b>2. ANALIS MATEMÁTICA DO QUADRIMOTOR</b>	<b>6</b>
2.1 MODELAGEM DINÂMICA	6
2.1.1 Equações Euler – Lagrange.	6
<b>3 LINEARIZAÇÃO DOS SISTEMAS NÃO LINEARES.</b>	<b>11</b>
3.1 LINEARIZAÇÕES DE SISTEMAS EM MALHA FECHADA.	11
3.2 LINEARIZAÇÕES DE SISTEMAS NÃO LINEARES	11
3.3 MÉTODOS DE LINEARIZAÇÃO	12
3.4 LINEARIZAÇÃO MEDIANTE A EXPANSÃO POR SÉRIE DE TAYLOR.	14
<b>4 METODOS DE CONTROLE</b>	<b>17</b>
4.1 CONTROLES PD	17
4.1.1 Controlador PD para o eixo Z	19
4.2 CONTROL PID.	20
4.2.1 Controle PID para o eixo x	21
4.3 ANÁLISES DO CONTROLE PID EM MALHA FECHADA	23
4.4 CONTROLES POR PLANEJAMENTO	27
4.5 PLANEJAMENTOS DE TRAJETÓRIAS	28
4.6 PLANEJAMENTO E ACOMPANHAMENTO DE RAJETORIAS.	29
4.7 DESCRIÇÃO DO MÉTODO.	31
4.7.1 Exemplo de planejamento de trajetórias.	31
4.7.2 Controle linearizante de um sistema sinusoidal.	34
4.7.3 Sistema linear massa - mola	36

4.7.4	Acompanhamento de trajetória (modelagem eixo z).	39
4.7.5	Planejamento de trajetórias para um sistema em malha fechada.	41
<b>5.</b>	<b>ANÁLISE MATEMÁTICO DA ESPIRAL</b>	<b>43</b>
5.1	ANÁLISE MATEMÁTICA PARA A ESPIRAL NO EIXO X	45
5.2	ANÁLISE MATEMÁTICA PARA A ESPIRAL NO EIXO Y	46
5.3	ANÁLISE MATEMÁTICA PARA A ESPIRAL NO EIXO Z	47
<b>6.</b>	<b>ANÁLISE ESTOCASTICO DO SISTEMA</b>	<b>49</b>
6.1	VARIÂNCIAS NA SAÍDA DO SISTEMA PARA O CONTROLE PID	52
6.1.1.	Estritamente estacionário.	60
6.1.2.	Estacionário em sentido lato (ou estacionário de segunda ordem)	60
6.2	VARIÂNCIA DO CONTROL PD DE PÓLOS IGUAIS COM UM $\beta \neq 0$	64
6.2.1	Obtenção dos parametros do controle a partir do polos iguais	68
6.3	ANÁLISE DO PARÂMETRO DERIVATIVO VARIÁVEL	72
6.4	VALORES ESPERADO DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL	75
<b>7</b>	<b>ANÁLISES DE RESULTADOS</b>	<b>79</b>
7.1	CARACTERÍSTICAS FÍSICAS E TÉCNICAS DO QUADRIMOTOR.	79
7.2	RESULTADOS OBTIDOS.	81
7.3	DISCUÇÃO DE RESULTADOS	87
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.</b>	<b>92</b>
	<b>REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS</b>	<b>95</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>99</b>
APÊNDICE 1	A1-1 SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM	100
APÊNDICE 2	A2-1. PROGRAMA PARA O CÁLCULO DA VARIÂNCIA	104

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Forças e momentos do helicóptero de quatro rotores.	1
Figura 2.1	Rotação dos eixos para os ângulos de Tait-Bryan	7
Figura 3.1	Representação do sistema linear	13
Figura 3.2	Modelo da planta, e resposta no tempo.	16
Figura 4.1	Diagrama de Bode assintótico do controle PD	17
Figura 4.2	Sintonização do controle pelo método de Ziegler-Nichols.	18
Figura 4.3	Resposta do sistema ante uma entrada degrau	20
Figura 4.4	Representação da saída da sintonização do controle PID, A) $C_{PID1}$ , B) $C_{PID2}$ , C) $C_{PID3}$	22
Figura 4.5	Representação do sistema em malha fechada com o controle PID	24
Figura 4.6	Resposta ao degrau do sistema frente a diferentes valores de entrada de $K_d$ .	25
Figura 4.7	Saída do sistema com amortecimento A) $\xi=1/2$ ; B) $\xi=1$ ; C) superposição do sistema.	26
Figura 4.8	A) Diagrama feito em Simulink do sistema. B) Saída do sistema com relação à lei de controle e o polinômio de entrada. C) Ampliação do sinal de saída.	33
Figura 4.9	Representação do sistema linearizado pelo método tangente	35
Figura 4.10	Representação do sistema não linear	35
Figura 4.11	Parte não linear do sistema	36
Figura 4.12	Sistema massa mola	36
Figura 4.13	Resposta da lei de controle e função de entrada.	38
Figura 4.14	Diagrama de Simulink para a simulação.	38
Figura 4.15	Aplicação da lei de controle	39

Figura 4.16	Sistema em malha aberta da força no eixo Z, com ângulos nulos	40
Figura 4.17	Resposta do sistema, acompanhamento da trajetória planejada no eixo Z, com ângulos nulos.	40
Figura 4.18	Representação do sistema de controle com perturbação e ruído.	41
Figura 4.19	A) Diagrama de blocos do sistema. B) Saída do sistema em presença de ruído e perturbação.	42
Figura 5.1	Diagrama da posição. A) No plano XY B) No espaço XYZ	43
Figura 5.2	Velocidade e aceleração no espaço da espiral	44
Figura 5.3	A) Representação do ângulo com relação do tempo, B) Representação da velocidade angular em relação ao tempo.	46
Figura 5.4	A) Representação do ângulo em relação ao tempo, B) Representação da velocidade angular em relação ao tempo.	47
Figura 5.5	Relação das velocidades angulares nos eixos X e Y	47
Figura 5.6	Representação da velocidade linear em função do plano XY	48
Figura 6.1	Representação do sistema general quadrimotor	49
Figura 6.2	A) saída correspondente nos eixo X e Y. B) Saída combinada do sistema	50
Figura 6.3	Sistema general do quadrimotor modificado	50
Figura 6.4	A) Resposta do sistema experimental pela exportação, B) Resposta de saída do eixo X e Y. C) Saída do sistema	51
Figura 6.5	Sistema de controle para velocidade	52
Figura 6.6	Comportamento da variância em relação à mudança dos parametros do controlador.	63
Figura 6.7	Variância do controle PD com pólos iguais em função de $\beta$ .	68
Figura 6.8	Resposta do controle obtido para um sistema de pólos iguais de valor unitário.	71
Figura 6.9	Distribuição normal e sua probabilidade acumulada.	72
Figura 6.10	Saída do sistema geral para a função de transferência variável.	74

Figura 6.11	Valor esperado do controlador.	76
Figura 6.12.	Sistema em malha fechada para o controle PD variável	77
Figura 6.13.	Saída do sistema em malha fechada para com filtro passa banda de frequência PI e para uma perturbação impulso	78
Figura 7.1	Quadrimotor utilizado para realizar os testes	79
Figura 7.2	Trajectoria em função dos três velocidades e a rotação enviada ao quadrimotor	82
Figura 7.3	Comparação da entrada – saída do sistema quadrimotor	83
Figura 7.4	Espiral com altitude variável e rotação zero	84
Figura 7.5	Espiral com altitude constante e rotação zero	85
Figura 7.6	Espiral com altitude variável e rotação variável.	86
Figura 7.7	Saída do sistema para valores de planta diferentes.	87
Figura 78	Resposta do quadrimotor com um controlador linear	89
Figura 7.9	Resposta do quadrimotor para um controle de altura	90
Figura 7.10	Resposta do quadrimotor para uma lei de controle não linear.	90

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	Características do controle PID (Teoria de Ziegler e Nichols).	18
Tabela 4.2.	Constante do controlador PID. (Teoria de Ziegler e Nichols)	19
Tabela 4.3.	Representação da sintonização do controle PID.	22
Tabela 6.1.	Obtenção da variância do sistema partindo dos parâmetros do controlador PID	63
Tabela 7.1	Características do Quadrimotor.	80

## LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURAS E ABREVIACÕES.

$f_i$  Forças produzidas por cada motor.

$k$  Constante do quadrimotor.

Velocidades angulares.

$x$  Posição com relação ao eixo X.

$y$  Posição com relação ao eixo Y.

$z$  Posição com relação ao eixo Z.

$t$  Tempo.

$E(q, \dot{q})$  Energia total do sistema.

$T(q, \dot{q})$  Energia cinética.

$U$  Energia Potencial do sistema.

$q$  Coordenada generalizada.

$\psi$  Ângulo yaw.

$\theta$  Ângulo roll.

$\phi$  Ângulo pitch.

$L(q, \dot{q})$  Lagrangeano.

$T_{trans}$  Energia cinética translacional.

$T_{rot}$  Energia cinética rotacional.

$g$  Gravidade.

$\gamma$  Coordenada generalizada para a posição.

$\eta$  Coordenada generalizada para a rotação.

$m$  Massa do quadrimotor.

$M_R$  Matriz de rotação.

$M_{R\phi}$  Matriz de rotação com relação ao ângulo Pitch.

$M_{R\psi}$  Matriz de rotação com relação ao ângulo Yaw.

$M_{R\theta}$  Matriz de rotação com relação ao ângulo roll.

X. Eixo X.

Y. Eixo Y.

Z. Eixo Z.

$\ddot{x}$  Aceleração com relação ao eixo X.

$\ddot{y}$  Aceleração com relação ao eixo Y.

$\ddot{z}$  Aceleração com relação ao eixo Z.

$F_x$  Componente da força dos motores no eixo X.

$F_y$  Componente da força dos motores no eixo Y.

$F_z$  Componente da força dos motores no eixo Z.

$\|V\|$  Modulo da velocidade com relação ao eixo Z.

$u$ . Entrada ao sistema.

$\beta$  Forçamento do filtro.

$e(t)$  Erro com relação ao tempo.

$U_x$  Lei de controle do eixo X.

$U_y$  Lei de controle do eixo Y.

$U_z$  Lei de controle do eixo Z.

$r$  Trajetória da espiral de forma vetorial.

$var[y(n)]$  Variância da função  $y(n)$ .

$erf(x)$  Função erro.

$P$  Probabilidade da distribuição normal.

$\sigma$  Desvio padrão.

$\mu$  Media.

$E[x]$  Valor esperado de  $x$ .

$cov[x]$  Covariância de  $x$ .

$E\{x(k)\}$  Valor esperado de uma sequencia aleatória.

$\delta$  Transformada delta.



$\varphi$  Espaço de estados de um processo Markoviano.

$(X_n)_{n \geq 0}$  Processo Estocástico em tempo discreto.

$\sigma^2$  Variância.

*CM* Cadeia de Markov.

PID Controle Proporcional Integral Derivativo.

PD Controle Proporcional- Derivativo.

LQG Controle Linear Quadrático Gaussiano.

LQR Controle Linear Quadrático Regulador.

## 1. INTRODUÇÃO.

Um quadrimotor é um helicóptero de quatro motores, onde os motores adjacentes giram em sentido contrário. As forças exercidas pela hélice são perpendiculares ao plano dos motores, o centro de massa é localizado no centro do veículo, em relação a um helicóptero tradicional o quadrimotor apresenta grandes vantagens por ser um veículo simétrico, tanto na simplicidade de construção como na robusteza e facilidade de manutenção [1]. Estas vantagens são devido ao fato que o quadrimotor possui ângulos constantes em todas suas hélices, evitando o uso de sistemas de variação dos ângulos das hélices que são sistemas complexos, pouco robustos e que necessitam de muita manutenção.

O helicóptero quadrimotor tem a vantagem de ser controlada a partir da variação das quatro velocidades angulares dos quatro motores, cada força produzida por cada motor é igual ao quadrado das velocidades angulares ( $f_i = k\omega_i^2$ ) [2], é importante saber que o motor só pode girar numa direção fixa, pelo qual as forças sempre são positivas, como pode-se observar na figura 1.

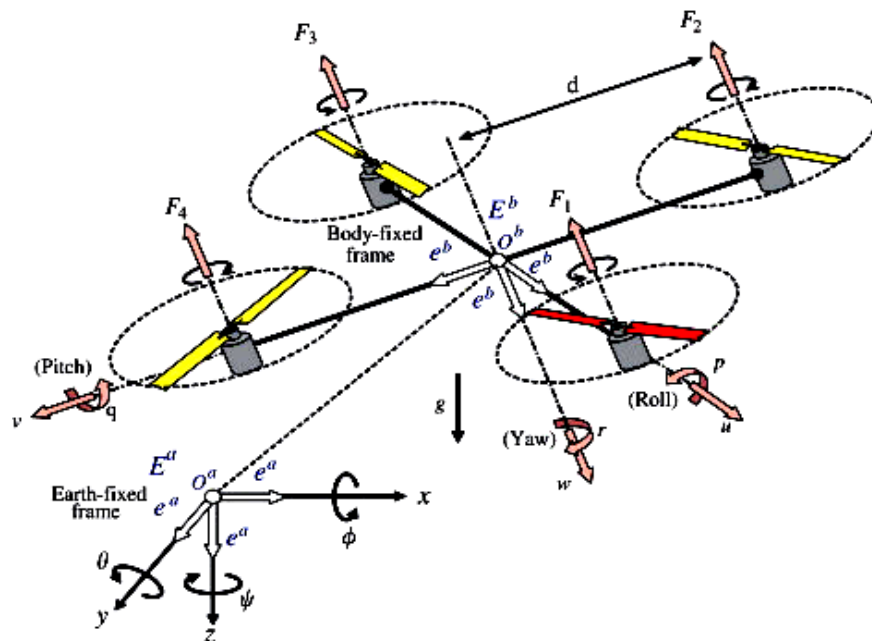


Figura 1.1: Forças e momentos do helicóptero quadrimotor [3].

Um dos principais problemas no trabalho com quadrimotores é a dificuldade que existe na construção de um sistema de controle que seja robusto e permita uma adequada funcionalidade do sistema, a razão principal é que o quadrimotor não é ainda um

equipamento que faça parte da pesquisa tradicional, pelo fato que normalmente é comercializado como um brinquedo.

O propósito principal no desenvolvimento do projeto é a edificação da planta do sistema e a projeção de um controlador que permita a manipulação do quadrimotor, por esta razão serão estudadas algumas técnicas de controle, sendo o enfoque principal a projeção de um controlador baseado no estudo estocástico, levando a análise ao tempo discreto que permita a identificação das propriedades Markovianas, e por tanto o sistema possa ser analisado como uma cadeia de *Markov*, com a finalidade de obtêm uma relação matemática que represente as características estatísticas do sistema, de maneira que possa ser projetado um controlador a partir dos pólos do mesmo, fazendo uma adequada determinação dos parâmetros do controlador e a variância, os quais serão analisados e provados no desenvolvimento do projeto.

## **1.1 JUSTIFICATIVA DO TRABALHO.**

O quadrimotor é um veículo não tripulado que apresenta grandes vantagens por sua simplicidade de construção e manutenção, o qual faz que o veículo seja ótimo para desenvolvimento em pesquisa. Um dos problemas que surgem da manipulação destes veículos é a projeção de um controle que seja ótimo e confiável e que permita ao veículo ser capaz de seguir uma trajetória preestabelecida para realizar alguma tarefa específica.

Dada à natureza do sistema quadrimotor, a qual é instável porque apresenta um duplo integrador no denominador [2], tradicionalmente a metodologia de controle que dá solução à instabilidade de um sistema é baseada numa pequena região onde o sistema apresenta um comportamento quase linear, às vezes esta suposição não é a melhor solução ao problema, porque se esta limitando o comportamento do sistema mediante uma aproximação que pode ser inadequada para a representação do sistema de maneira real. Para trabalhar com o sistema de maneira real é necessário à modelagem do sistema não linear, pelo qual é fundamental desenvolver técnicas de controle não linear que apresentem uma solução ótima e possam descrever o comportamento do sistema de forma geral.

A principal dificuldade que é identificada em relação ao trabalho com o quadrimotor é o projeto de um sistema de controle, que seja confiável e apresente boa performance em sua funcionalidade, para isso neste trabalho serão estudadas algumas técnicas de controle clássico, posteriormente será projetado um controle PD não linear que

permita controlar as entrada planejada ao quadrimotor, a razão principal é que mediante um controle não linear é possível controlar o sistema em toda a região de trabalho, para esta finalidade será projetado um controle por meio de técnicas estatísticas, o qual será analisado no domínio do tempo discreto, para realizar uma identificação adequada dos parâmetros do controlador, com a objetivo de obter um controle robusto que permita a manipulação adequada do quadrimotor, posteriormente será avaliado o comportamento do sistema para uma entrada planejada mediante a realização de alguns testes.

## **1.2 OBJETIVOS**

### **1.2.1 Objetivo Geral**

Encontrar o modelo matemático do quadrimotor e realizar o controle por meio de trajetórias planejadas e estratégias de controle linear e não linear que permitam a manipulação do sistema quadrimotor.

### **1.2.2 Objetivos Específicos**

A fim de atingir o objetivo geral desta pesquisa foram propostos os seguintes objetivos específicos:

- Obter um modelo matemático que represente a dinâmica do sistema quadrimotor e possa ser representado de forma geral para efeitos de simulação
- Desenvolver estratégias de controle que permitam a manipulação do sistema de forma adequada, analisando sistemas lineares e não lineares.
- Estudar o comportamento do sistema em relação ao controle proposto, e o efeito que tem os parâmetros do controlador PD de pólos iguais no cálculo da na variância.
- Estudar o comportamento do sistema em presença de perturbações e ruído para avaliar o comportamento da estratégia do controle frente a mudanças bruscas do valor de referência.

- Realizar testes para verificar a funcionalidade do controle e testar de maneira real as trajetórias planejadas no sistema quadrimotor.

### 1.2.3 Metodologia

Com o fim de desenvolver a modelagem e o controle do sistema quadrimotor, propõem-se os seguintes passos:

- Determinar o modelo matemático que identifica o sistema quadrimotor, obtendo o modelo correspondente para cada eixo.
- Obter a faixa de movimentação dos ângulos de *Tait-Bryan*, por meio de simulações, as quais serão feitas em MATLAB e SIMULINK.
- Construir alternativas de controle iniciando com controle clássico PID, PD e passando ao controle não linear e controle PD para pólos iguais, analisando o sistema como um sistema da segunda ordem e modificando o amortecimento do sistema em relação à constante derivativa do sistema.
- Construir a metodologia de trabalho gerando trajetórias planejadas e construir assim a trajetória espiral para ser testada no quadrimotor e criar um modelo de simulação que faça a representação do sistema quadrimotor de forma geral, que permita a obtenção dos dados das trajetórias planejadas para ser verificadas no sistema quadrimotor real.
- Estudar o comportamento da variância do sistema em malha fechada em relação aos parâmetros do controle PID, e identificar quais dos parâmetros são significantes no cálculo da variância.
- Estudar o comportamento do controle PD com pólos iguais e sua relação com a constante  $\beta$  (constante de um filtro da primeira ordem), o qual esta em função dos pólos do sistema e o efeito que têm a constante no cálculo da variância do sistema.
- Estudar o valor esperado em função do ruído o qual é analisado como uma distribuição normal, para obter a saída da constante derivativa em relação de um intervalo de variação que permita movimentar o sistema de um estado sub-amortecido à criticamente amortecido.

- Obter para um sistema em função do ruído, as constantes do controlador, o valor do filtro limitante e a variância do sistema, partindo do valor dos pólos do sistema.
- Realizar testes das trajetórias espirais geradas e analisar seu comportamento, fazendo a comparação dos dados de entrada ao quadrimotor com relação aos dados de saída.

### 1.3 ESTRUTURA DO DOCUMENTO

O documento apresentado encontra-se dividido em oito capítulos: no Capítulo 2 é apresentada a metodologia realizada para a análise matemática do quadrimotor, gerando o modelo dinâmico do sistema e fazendo a representação do quadrimotor em relação aos eixos (X, Y, Z) e os ângulos de *Tait-Bryan*; no Capítulo 3 é mostrada a metodologia de linearização com a finalidade de estudar a dinâmica do sistema; no Capítulo 4 são construídas as estratégias de controle clássico, iniciando por o controle PD, passando ao controle PID e projetando um controle PD de pólos iguais para um sistema linear e sistemas não linear, aplicado as técnicas estudadas ao sistema quadrimotor; no Capítulo 5 é construída a trajetória espiral utilizando a metodologia apresentada no capítulo quatro para ser testada no quadrimotor; no Capítulo 6 é apresenta desenvolvimento do sistema geral que faz a representação do sistema quadrimotor.

Adicionalmente mostra o estudo estatístico realizado para o sistema de controle baseados na teoria Markoviana, a qual permitiu a identificação dos parâmetros do controlador para ser testados. Finaliza com a análise do valor esperado em relação a constante derivativa do controlador. No Capítulo 7 são amostrados os resultados obtidos na realização dos testes com o quadrimotor para a obtenção das trajetórias espirais a partir das trajetórias planejadas geradas e é realizado um análises dos resultados obtidos. No Capítulo 8 são apresentadas as conclusões do trabalho e algumas propostas para trabalhos futuros.

## 2. ANÁLISE MATEMÁTICA DO QUADRIMOTOR

Nesta seção é analisada a modelagem matemática do quadrimotor mediante a utilização das equações *Euler-Lagrange*, o modelo obtido representa um sistema das forças exercidas para cada eixo (X, Y, Z), não são considerados no desenvolvimento do projeto a análises dos momentos em função das coordenadas generalizadas em relação aos ângulos de *Euler* dada que não são analisados no controlador projetado para o quadrimotor.

### 2.1 MODELAGEM DINÂMICA.

Para encontrar o modelo matemático do quadrimotor, se faz a consideração de representá-lo como um corpo sólido em três dimensões, sujeito a uma força principal e três momentos, onde o centro de massa fica no centro do sistema. Adicionalmente são considerados insignificantes os efeitos dos momentos causados pelo corpo rígido sobre a dinâmica translacional e os efeitos do solo, o modelo é obtido à partir de equações Euler – Lagrange.

#### 2.1.1 Equações *Euler – Lagrange*.

A equação de *Euler-Lagrange* descreve o comportamento de um sistema dinâmico em termos de suas coordenadas generalizadas, sejam  $q_i, \dots, q_n$ , as coordenadas generalizadas que traduzem completamente um sistema dinâmico [4], sejam T e U as energias totais cinéticas e potencial, respectivamente, armazenadas no sistema dinâmico [4], a equação Lagrangeana é definida como mostra a equação (2-1):

$$L(q, \dot{q}) = T - U \tag{2-1}$$

Como a energia cinética e potencial é função das coordenadas generalizadas e suas derivadas temporais, a equação Langrangeana é função das mesmas variáveis, [4] então sua definição é representada na equação (2-2):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, \dots, n \tag{2-2}$$

Onde  $Q_i$ , é a força generalizada correspondente a cada coordenada generalizada  $q_i$ .

Baseados na definição apresentada na equação (2-2), o quadrimotor apresenta seis graus de liberdade, os quais são representados em coordenadas generalizadas como apresentada na equação (2-3):

$$q(\gamma, \eta) = (x, y, z, \psi, \theta, \phi) \in R^6 \quad (2-3)$$

Onde:

$\gamma = (x, y, z) \in R^3$ , é a posição do centro de massa do quadrimotor relativo ao eixo de referência.

$\eta = (\psi, \theta, \phi) \in R^3$ , é um tensor de inércia em função dos três ângulos de Euler,  $\psi$  é ângulo *yaw* (guinada),  $\phi$  é ângulo *pitch* (arfagem),  $\theta$  é ângulo *roll* (rolagem).

O quadrimotor apresenta um movimento de rotação com relação a seus eixos, e um movimento de translação em relação a sua posição, então baseados na equação (2-1) a equação Lagrangeana para o sistema quadrimotor é representado na equação (2-4):

$$L(q, \dot{q}) = T_{trans} + T_{rot} - U \quad (2-4)$$

Onde:

$$T_{trans} = \frac{1}{2} m \dot{\gamma}^T \dot{\gamma}, \text{ é a energia cinética translacional [5].}$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \omega^T I \omega, \text{ é a energia cinética rotacional [5].}$$

$$U = mgz, \text{ é a energia potencial do veículo.}$$

Para o sistema geral,  $z$  é a altura do veículo,  $m$  a massa do quadrimotor,  $\omega$  velocidade angular,  $I$  é a matriz de inércia e  $g$ , é a aceleração da gravidade [6], então a equação de *Lagrange* está definida como mostra a equação (2-5):

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{\gamma}^T \dot{\gamma} + \frac{1}{2} \omega^T I \omega - mgz \quad (2-5)$$

Como as energias potenciais e cinéticas são funções das coordenadas generalizadas e suas derivadas temporais, a equação Lagrangeana é também função das mesmas variáveis [4], usando equação Lagrangeana, as equações de movimento do sistema dinâmico são dadas pela equação (2-6):



$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = [F_u] \quad (2-6)$$

Onde  $F_u = M_R F$ , é a forma de translação aplicada para cada uma das componentes (X,Y,Z), F é a força aplicada ao veículo,  $M_R$  é a matriz de rotação,  $\tau$  são os momentos correspondentes aos ângulos de Euler, portanto a orientação do helicóptero será definida pela matriz do orientação, a qual relaciona o movimento nos eixos com os três ângulos de *Euler* [4].

A solução da equação (2-6) é dividida na dinâmica para as coordenadas  $\gamma$  e as coordenadas para  $\eta$ , pelo fato que equação Lagrangeana é definida em função da energia cinética translacional e energia cinética rotacional, como é representado nas equações (2-7) e (2-8).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{Tras}}{\partial \dot{\gamma}} - \frac{\partial L_{Tras}}{\partial \gamma} = F_u \quad (2-7)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{Rot}}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial L_{Rot}}{\partial \eta} = \tau \quad (2-8)$$

A orientação de um corpo rígido pode-se obter utilizando diferentes métodos. Na realidade existem doze combinações possíveis para representar a orientação relativa dos sistemas de coordenadas, as mais populares são as rotações em relação aos eixos Z-X-Z (Ângulos de *Euler* clássicos) conhecidos em modelagem de maquinas e astronomia; as rotações sobre os eixos Z-Y-Z conhecidos em mecânica quântica; e as rotações nos eixos Z-Y-X conhecidos em mecânica de vôo, a última convenção é a mais utilizada para aplicações de engenharia aero espacial e é chamada como os ângulos de *Tait-Bryan* [7]. Portanto, os ângulos de *Tait-Bryan* são formados por três ângulos utilizados para descrever a rotação geral no espaço Euclidiano tridimensional, através de três rotações sucessivas em torno dos eixos do sistema no qual ficam definidos. [7]. Assim, os ângulos de *Tait-Bryan* descrevem a orientação do helicóptero como mostra a equação (2-5) a qual é o resultado da rotação mostrada na figura 2.1

$$M_R = M_{R\psi} M_{R\theta} M_{R\phi} \quad (2-9)$$

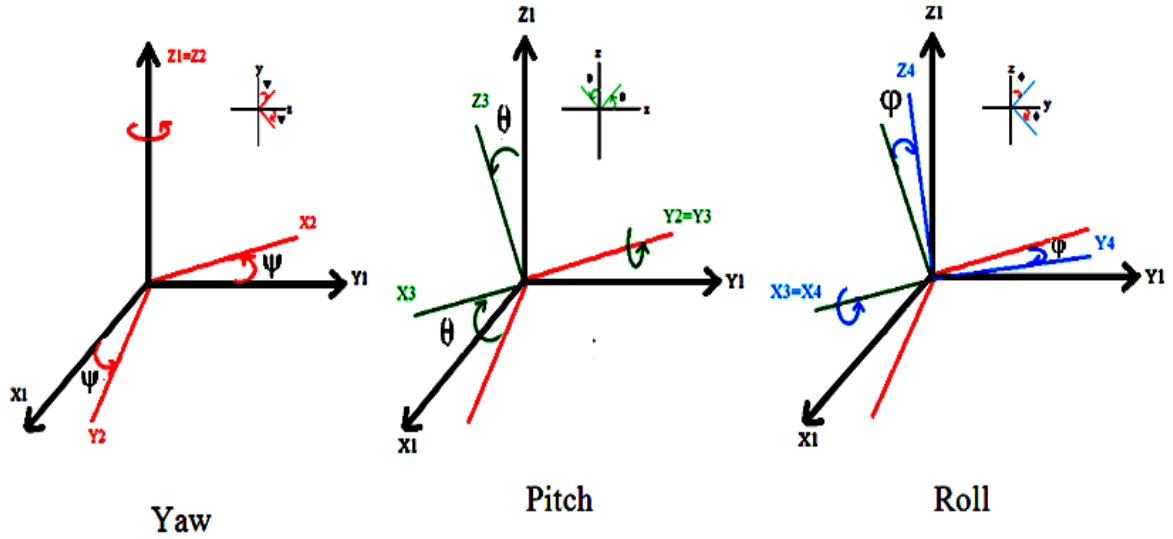


Figura 2.1 Rotação dos eixos para os ângulos de Tait-Bryan.

Onde os vetores da cor preta são os eixos de referência, o vetor da cor vermelha representa a primeira rotação em torno do eixo Z, os da cor verde são da segunda rotação em torno do eixo Y e os vetores da cor azul representam a terceira rotação em torno do eixo X. A ordem da multiplicação da matriz de rotação vai corresponder à ordem da transformação como mostra a equação (2-10), e a matriz de rotação corresponde para cada eixo em função dos ângulos de *Tait-Bryan* [5], é representada na equação (2-10):

$$M_R = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

Realizando a multiplicação a matriz de rotação é representada pela equação (2-11):

$$M_R = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta\sin\phi - \sin\psi\sin\phi & \cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\phi \\ \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta\sin\phi + \cos\phi\cos\psi & \sin\psi\sin\theta\cos\phi - \cos\psi\sin\phi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

Como é conhecida a matriz de rotação, a solução geral do sistema em função da equação de *Euler-Lagrange* para a equação (2-7) é dada por:

$$F_u = \frac{d}{dt} * \frac{\partial}{\partial \dot{\gamma}} \left( \frac{1}{2} m \dot{\gamma}^T \dot{\gamma} - mgz \right) - \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{1}{2} m \dot{\gamma}^T \dot{\gamma} - mgz \right)$$

$$F_u = \frac{d}{dt}(m\dot{\gamma}) - \frac{\partial}{\partial \gamma}(-mgz)$$

$$M_R F = m(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) + mg(\vec{k}) \quad (2-12)$$

Onde  $F$ , é a força resultante aplicada no centro do veículo e é fundamental para gerar o movimento do mesmo, o movimento de decolar e pousar do quadrimotor requer de uma força  $L_T$  a qual representa a entrada de controle principal em função do eixo Z, e depende da geometria das hélices, onde a parte mais importante é a longitude da mesma, a qual define a eficiência do veículo de vôo [6], a sustentação é a força perpendicular da velocidade que mantém um corpo em vôo, e é proporcional ao quadrado das suas velocidades angulares, conhecida como força de sustentação [6], representada na equação (2-13)

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_T \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

Onde:

$$L_T = k\omega^2$$

A equação (2-13) representa a força para o sistema de forma ideal, onde os motores têm as mesmas constantes e velocidades, o qual no caso real não acontece porque o sistema apresenta variações nas forças geradas pelos motores, às quais podem ser ocasionadas por constantes diferentes ou velocidades angulares que rodam com diferentes revoluções.

Substituindo as equações (2-11) e (2-13) na equação (2-12) tem-se a equação (2-14).

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ m\ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_T(\cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\phi) \\ L_T(\sin\psi\sin\theta\cos\phi - \cos\psi\sin\phi) \\ L_T(\cos\theta\cos\phi) - mg \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

A equação (2-14) mostra o sistema físico para cada eixo o qual será trabalhado de forma independente para gerar as trajetórias que serão demonstradas posteriormente.

Se é feita a solução da equação (2-8), é obtido os momentos generalizados em função dos ângulos de Euler, este procedimento matemático não é apresentado no devolvimento do projeto, dada que nas conclusões não vão ser analisadas em relação a seu efeito no controlador projetado para a o quadrimotor.

### **3. LINEARIZAÇÃO DOS SISTEMAS NÃO LINEARES.**

Nesta seção são apresentados os métodos para realizar a linearização de sistemas, inicialmente, é mostrada a técnica de linearização para um sistema que apresente não linearidades, analisado a técnica no sistema quadrimotor para o eixo Y, posteriormente é apresentada uma técnica de linearização clássica pelo método de series de Taylor a qual é aplicada ao eixo Z do sistema, com a finalidade de identificar a estabilidade do sistema.

#### **3.1. LINEARIZAÇÕES DE SISTEMAS EM MALHA FECHADA.**

O primeiro passo na concepção de um sistema de controle para um modelo físico é determinar um modelo matemático da planta, ou seja, um modelo que possa captar a dinâmica da planta na faixa de frequência de interesse. Os modelos dos sistemas físicos apresentam diversas formas, dependendo da abordagem da modelagem e das suposições assumidas, facilitando o projeto do controle linearizado com realimentação, e com a aplicação de técnicas de transformação do modelo original em sistemas de modelos equivalentes que tenha um projeto de controlador simplificado. [8].

A linearização do sistema em malha fechada pode ser usada como uma metodologia de trabalho para sistemas não lineares. A noção básica é a transformação de um sistema não linear em um sistema linear (total ou parcialmente) e depois são usadas técnicas de controle linear para completar o projeto do controlador. Abordagem que tem sido usada para resolver uma série de problemas práticos de controle não linear. Aplica-se a importantes classes de sistemas não lineares (os chamados linear de entrada-estado ou sistemas de fase mínima) e, normalmente, exige a medição de estados. Mas este não garante a robustez frente às incertezas de parâmetros ou distúrbios. [8].

#### **3.2 LINEARIZAÇÕES DE SISTEMAS NÃO LINEARES.**

Seja  $u$  a entrada de controle e  $x$  a saída de interesse  $X = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T$  conhecido como vetor de estados, e  $f(x)$  e  $b(x)$  são funções não-lineares dos estados. Tem - se o seguinte espaço de estados [8]:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \\ f(x) + b(x)u \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

Para os sistemas que podem ser expressos na forma canônica controlável, usando a entrada de controle em função de uma entrada equivalente,  $v$ . E de uma função não linear  $b$  diferente de zero, como mostra a equação (3-2)

$$u = \frac{1}{b} [v - f] \quad (3-2)$$

Pode-se cancelar as não linearidades e obter a relação de entrada-saída simples (forma de múltiplos integradores) [12].

$$x^n = v$$

Onde a lei de controle é definida como mostra a equação (3-3)

$$v = -k_0x - k_1\dot{x} - \dots - k_{n-1} x^{(n-1)} \quad (3-3)$$

O valor de  $k_i$  é escolhido do polinômio  $p^n + k_{n-1}p^{(n-1)} + \dots + k_0$ , tendo todas as raízes estritamente no plano esquerdo complexo, tornando assim a dinâmica do sistema exponencialmente estável.

$$x^n + k_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + k_0x = 0 \quad (3-4)$$

Isso implica que  $x(t) \rightarrow 0$ , para tarefas de rastreamento envolvendo a saída de um  $xd(t)$  desejada, pode-se escrever a lei de controle como mostra a equação (3-5)

$$v = xd^n - k_0e - k_1\dot{e} - \dots - k_{n-1}e^{(n-1)} \quad (3-5)$$

Onde,  $e(t) = x(t) - xd(t)$  é o erro de rastreamento.

### 3.3 MÉTODOS DE LINEARIZAÇÃO

Desenvolvendo o método descrito anteriormente para o eixo Y tem-se:

$$m\ddot{y} = L_T(\text{sen}\psi\text{sen}\theta\text{cos}\phi - \text{cos}\psi\text{sen}\phi) \quad (3-6)$$

Onde,

$$u = \omega^2$$

$$y_1 = y \quad (3-7)$$

$$y_2 = \dot{y}_1 = \dot{y} \quad (3-8)$$

$$\dot{y}_2 = \ddot{y}_1 = \ddot{y} \quad (3-9)$$

Saída,  $z = y_2$  (3-10)

O modelo do sistema no espaço de estados fica como mostra a equação (3-11)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{4k}{m} u (\sin\psi \sin\theta \cos\phi - \cos\psi \sin\phi) \\ z = y_2 \end{array} \right\} \quad (3-11)$$

Onde a lei de controle que faz o sistema linear é a seguinte:

$$u = \frac{u_2 + v}{\sin\psi \sin\theta \cos\phi - \cos\psi \sin\phi} \quad (3-12)$$

$$v = -k_1 y_1 - k_2 y_2 \quad (3-13)$$

Substituindo a lei de controle pela equação (3-12), o sistema em malha fechada será estável, a representação do sistema é mostrada na equação (3-14)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{4k}{m} (u_2 - k_1 y_1 - k_2 y_2) \\ z = y_2 \end{array} \right\} \quad (3-14)$$

O sistema de espaço de estado da figura (3-14) no software SIMULINK, onde a figura 3.1 apresenta a saída do sistema. Para efeitos de simulação as constantes do quadrimotor são assumidas com valores unitários.

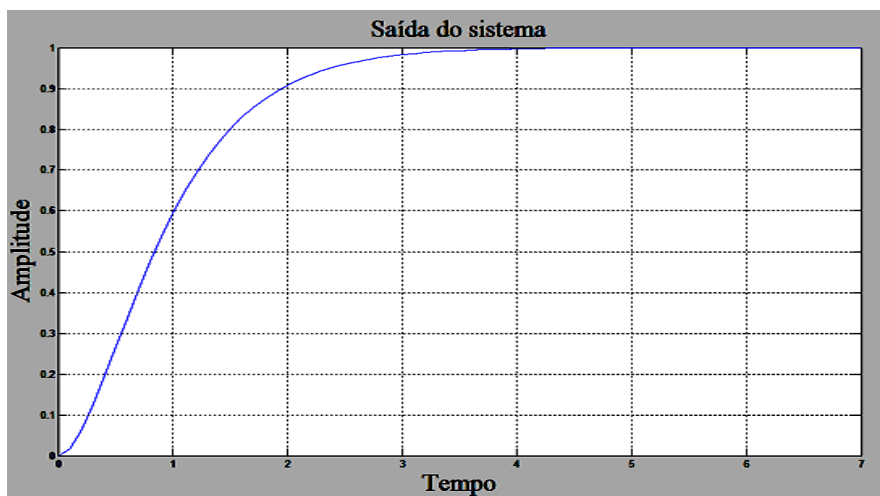


Figura 3.1: Representação do sistema linear.

### 3.4 LINEARIZAÇÃO MEDIANTE A EXPANSÃO POR SÉRIE DE TAYLOR.

Um dos métodos utilizado para realizar a linearização de uma equação é a série de Taylor [9], onde ela é definida como mostra a equação (3-15):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n \quad a_n = \frac{f^{(n)}}{n!} \quad (3-15)$$

Uma série de Taylor é uma expansão de uma função ao redor de um ponto em uma serie polinomial. A serie de Taylor tem uma característica muito importante que a associa a uma função  $f$  que é infinitamente diferenciável, onde ela pode ser real ou complexa e está definida num intervalo aberto entre  $(a-r$  e  $a+r)$ , em geral a série e definida pela equação (3-16).

$$f(x) = f(a)(x - a)^0 + \frac{f'(a)(x - a)^1}{1!} + \frac{f''(a)(x - a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^n(a)(x - a)^n}{n!} \quad (3-16)$$

A aplicação da série é utilizada para fazer a linearização do sistema matemático que faz a descrição da planta estudada, a qual foi apresentada na equação (2-14), dado que o sistema cuja parte não linear depende das funções sinusoidais [9], a expansão da série de Taylor para estas funções são mostradas nas equações (3-17) e (3-18):

$$f(x) = \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (3-17)$$

$$f(x) = \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3-18)$$

A linearização dos parâmetros das funções é feita para ângulos pequenos ( $x \approx 0$ ), é definida da seguinte forma:

$$\text{sen}(x) = x \quad e \quad \cos(x) = 1 \quad (3-19)$$

A equação (3-19) representa os termos linearizados das funções sinusoidais. Aplicando a linearização dos termos ao sistema representado pela equação (2-14), é obtida a equação (3-20).

$$\begin{bmatrix} m\ddot{X} \\ m\ddot{Y} \\ m\ddot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_T(\theta + \psi\phi) \\ L_T(\psi\theta - \phi) \\ L_T - mg \end{bmatrix} \quad (3-20)$$

Onde,

$$L_T = 4K\omega^2$$

Do sistema de equações linearizadas, pode-se observar que o sistema para cada um dos eixos vai depender de um duplo integrador, por exemplo, seja o sistema que faz a descrição do eixo Z:

$$m\ddot{Z} = L_T - mg \quad (3-21)$$

A dinâmica do sistema é representada mediante a aplicação das transformadas de *Laplace* ao sistema no domínio do tempo, com a finalidade de levar ao sistema no domínio da frequência e realizar as simulações mediante o software SIMULINK, para identificar seu comportamento. A equação (3-21) representa o sistema de forças em relação ao eixo Z, pode-se observar que esta equação apresenta um parâmetro constante, razão pela qual não é possível a aplicação da transformada de *Laplace* diretamente, então é necessário realizar algumas mudanças de variáveis para que o sistema fique em função da entrada e saída, seja a lei de controle para o sistema:

$$U = \omega^2$$

Aplicando a lei de controle à equação (3-21) tem-se:

$$\ddot{Z} = \frac{4kU}{m} - g \quad (3-21)$$

Os pontos de equilíbrio do sistema são:

$$\dot{Z} = 0 \text{ e } \ddot{Z} = 0.$$

Aplicando a lei de controle que cancela o parâmetro constante é representado pela equação (3-22)

$$U = \frac{gm}{4k} \quad (3-22)$$

Da equação (3-22), pode deduzir uma lei de controle que represente o sistema em função da entrada e saída, a qual é representada na equação (3-23):



$$U = U' + \frac{gm}{4k} \quad (3-23)$$

Substituindo a equação (3-23), na equação (3-21), tem-se a equação (3-24):

$$\ddot{Z} = \frac{4kU'}{m} \quad (3-24)$$

A equação (3-24) pode-se representar no domínio de Laplace, onde a dinâmica da planta é representada na equação (3-25).

$$\frac{Z(s)}{U'(s)} = \frac{4k}{mS^2} \quad (3-25)$$

Pode-se observar que o sistema representado na equação (3-25) é de segunda ordem, sem zeros, marginalmente estável, com dois integradores puros, o que indica que tem dois pólos de origem, observando a equação pode-se deduzir que efetivamente o sistema é instável, a figura (3-2) apresenta a simulação da planta realizada no software SIMULINK, para valores de quadrimotor de valor unitário

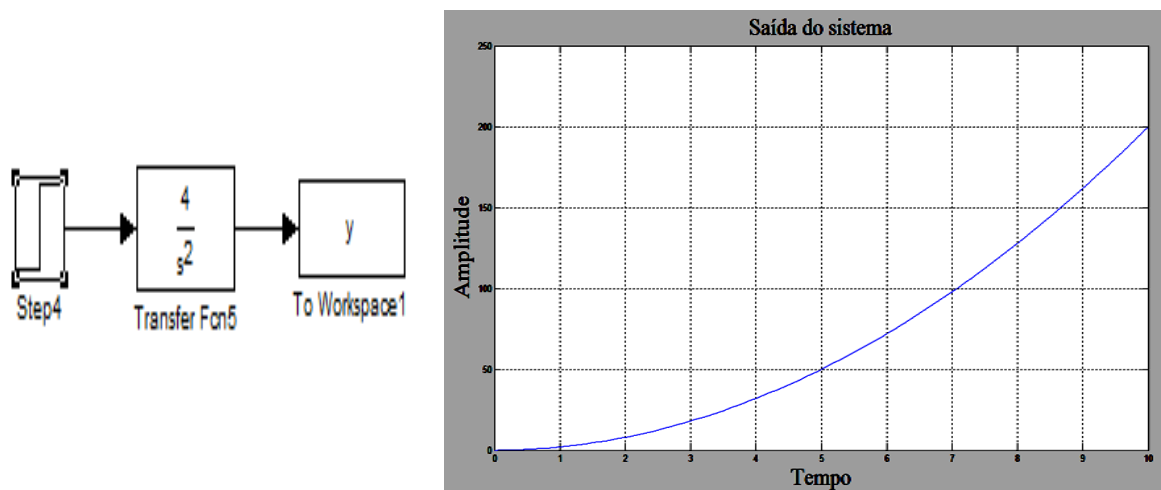


Figura 3.2: Modelo da planta, e resposta no tempo.

A figura 3.2 apresenta a dinâmica do sistema a qual é instável, se é feito análises similares sobre a equação (3-20) que representa o sistema de forças em função dos eixos (X, Y, Z), para o eixo X e Y, efetivamente vai se encontrar uma função que descreve o sistema, a qual terá um comportamento similar a encontrado para o eixo Z, razão pela qual é necessário a projeção de técnicas de controle que façam que o sistema seja estabilizado, estas técnicas serão apresentadas no capítulo 4 do manuscritos.

## 4. MÉTODOS DE CONTROLE.

Nesta seção serão apresentadas algumas metodologias da projeção de técnicas de controle para o desenvolvimento do projeto, inicialmente será trabalhado o controle clássico PD e PID aplicado ao sistema quadrimotor, posteriormente realizar-se a análise do controle PID do sistema em malha fechada, assim passado ao controle por planejamento, e finalizando com apresentação de alguns exemplos que permitam o entendimento da aplicação do controle mediante o planejamento de trajetórias.

### 4.1 CONTROLE PD

O controlador PD é uma versão simplificada do compensador de avanço e tem a função de transferência descrita pela equação (4-1), e a representação do diagrama de Bode apresentado na figura 4.1:

$$G(s) = K_p(1 + T_d S) \quad (4-1)$$

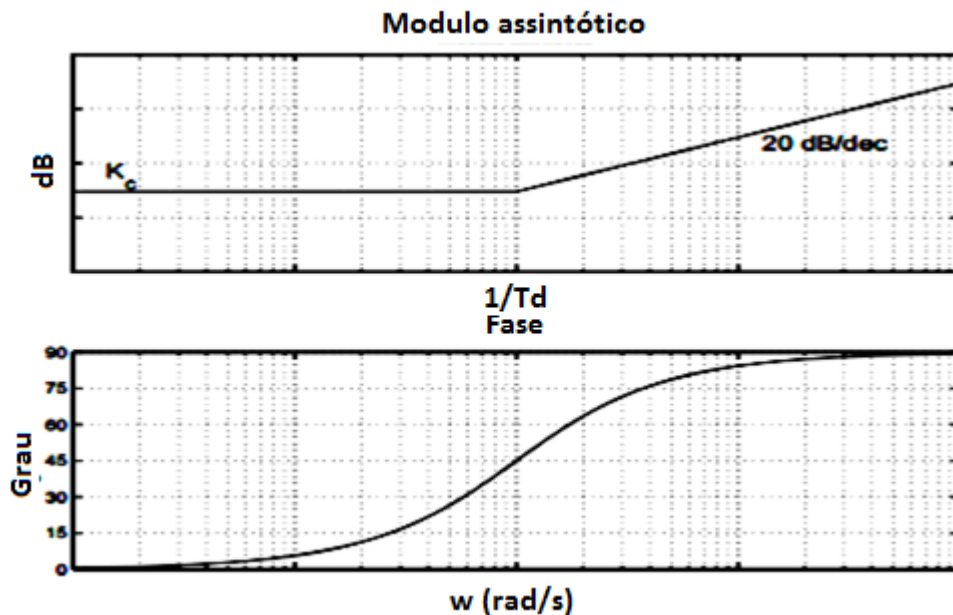


Figura 4.1. Diagrama de Bode assintótico do controle PD [8].

Em geral o valor de  $K_p$  é determinado para satisfazer as condições de estado estável, a frequência de corte  $1/T_d$  é escolhida, de modo que o adiantamento de fase seja próximo da frequência de corte do ganho. Mas a margem de fase tem um aumento superior ao  $45^\circ$  para frequências superiores ao zero, como apresenta a figura 4.1 [10], o que pode causar aumento na magnitude do compensador a qual continua aumentando para a região

de frequência  $\frac{1}{T_d} < \omega$  (portanto o compensador PD é um filtro limitante) [11], este aumento de magnitude é inconveniente, dado que ele faz uma amplificação no ruído de alta frequência que pode perturbar o sistema, desta maneira é feita uma limitação da parte derivativa fazendo a multiplicação pelo fator [10]:

$$\frac{1}{\beta s + 1}$$

Onde  $\beta$  é um valor pequeno, para não ter efeito no controlador. [12], a tabela 4.1 apresenta os critérios para a sintonização do controlador de *Ziegler - Nichols*

Tabela 4.1. Características do controle PID (Teoria de *Ziegler-Nichols*) [13].

RESPOSTA	TEMPO DE SUBIDA	SOBRE SINAL	TEMPO DE ESTABILIZAÇÃO	ERRO ESTACIONÁRIO
Proporcional	Diminuição	Aumento	Sem alteração	Diminuição
Integral	Diminuição	Aumento	Aumento	Elimina
Derivativo	Sem alteração	Diminuição	Diminuição	Sem alteração

A tabela 4.1 mostra a sintonização do controlador pelo *Ziegler -Nichols*, para um sistema em malha fechada, fazendo que o sistema para uma entrada degrau fique oscilando constantemente como mostra a figura 4.2. Dependendo assim, somente da ação proporcional  $K_p$  onde ela é aumentada até atingir a oscilação desejada, levando do mesmo modo a ter um valor de Ganho crítico  $K_{cr}$  e o período de oscilação  $P_{cr}$ , como mostra a figura 4.2:

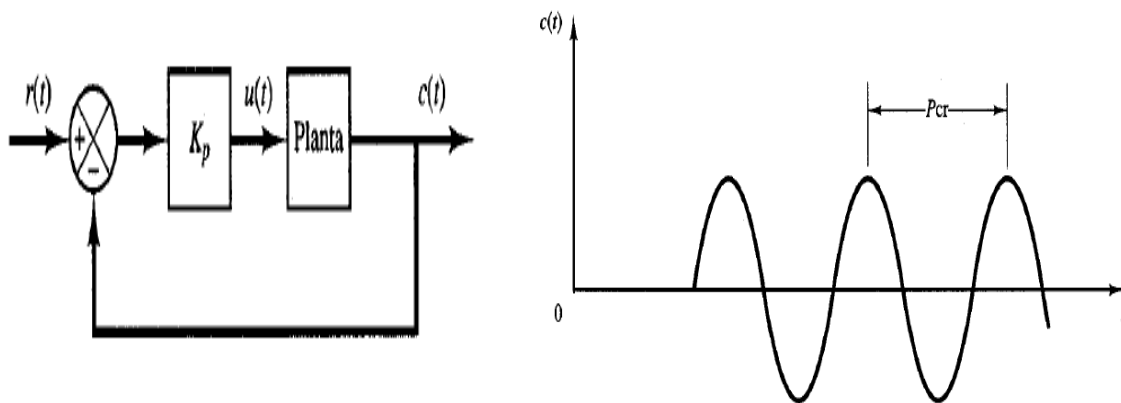


Figura 4.2 Sintonização do controle pelo método de *Ziegler-Nichols* [12].

Da figura 4.2, pode-se obter a seguinte tabela que faz a descrição da sintonização do controlador pelo método de *Ziegler -Nichols* para um controlador P, PI e PID.

Tabela 4.2. Constante do controlador PID. (Teoria de *Ziegler e Nichols*) [12].

CONTROLE	FÓRMULAS		
P	$k_p = 0.5K_{cr}$	0	$\infty$
PI	$k_p = 0.45K_{cr}$	0	$T_i = P_{cr}/1.2$
PID	$k_p = 0.6K_{cr}$	$Td = 0.125P_{cr}$	$T_i = 0.5P_{cr}$

#### 4.1.1 Controlador PD para o eixo Z:

A função que realiza a descrição matemática do sistema no eixo Z é mostrada na equação (4-2):

$$u = \omega^2$$

$$\ddot{z} = \frac{4K\omega^2}{m} - mg \quad (4-2)$$

Onde o erro é definido como mostra a equação (4-3):

$$e = h - z \quad (4-3)$$

$$\dot{e} = \dot{h} - \dot{z}$$

Sendo que h é uma altura desejada e z a altura real:

$$\frac{4K\omega^2}{m} - mg = K_p e + K_d \dot{e} \quad (4-4)$$

O controle vai ficar como mostra a equação (4-5):

$$\ddot{z} = K_p e + K_d \dot{e} \quad (4-5)$$

No domínio de *Laplace* temos:

$$C_{PD} = K_p + K_d S \quad (4-6)$$

Como a função de transferência do controle PD tem um derivador puro como foi mencionado anteriormente, é feita uma amplificação do ruído para altas frequências [8], além disso, o sistema não pode ser representado fisicamente por ser um sistema não causal

[8], razão pela qual é necessário limitar as frequências, então o controlador PD com limitação é representado na equação (4-7):

$$C_{PD} = \frac{K_p + K_d S}{\beta s + 1} \quad (4-7)$$

Da mesma forma foram projetados os controladores PD com relação os eixos X e Y.

Aplicando a técnica de sintonização descrita pelo método de Ziegler-Nichols, é obtido o período crítico e o ganho crítico do sistema, baseados na figura 4.3, os quais foram os seguintes:

$$K_{cr} = 0.1 \text{ e } P_{cr} = 10$$

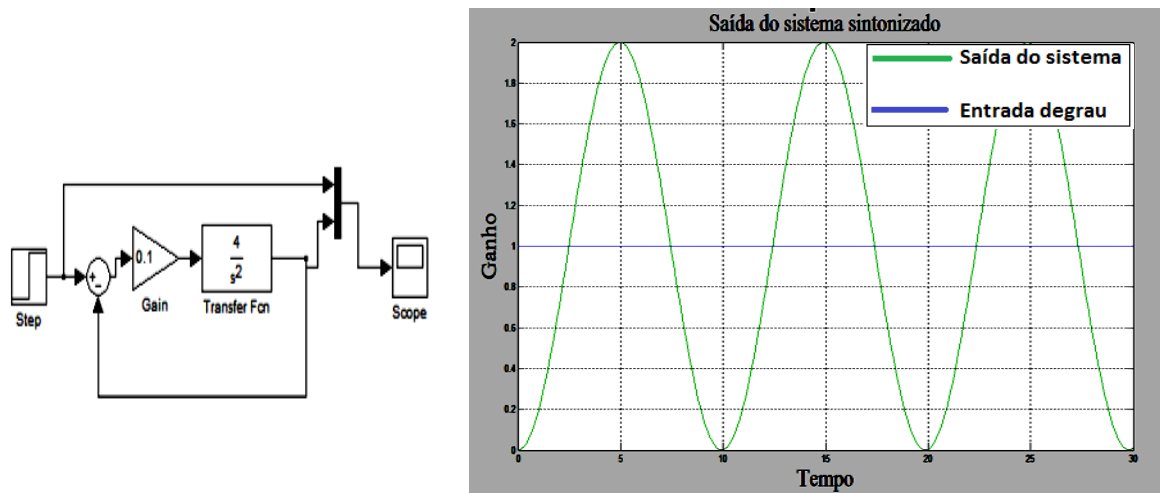


Figura 4.3. Resposta do sistema ante uma entrada degrau

A figura 4.3 apresenta o sistema desenhado em SIMULINK para a sintonização do controlador PID, onde se pode observar o diagrama de blocos que mostra o valor de ganho crítico e o período crítico, os quais são fundamentais para obter os parâmetros correspondentes do controle PID.

## 4.2 CONTROLE PID.

A parte derivativa do controle PID antecipa a tendência da saída da planta, que é utilizada para fazer ajustes em processos baseados na razão de troca da saída da planta em relação ao set-point. Uma característica do controle é que se o erro é mantido constante ou em seu limite máximo, fazendo a mesma analogia, a parte integral é aquela que faz

antecipação do comportamento futuro da planta, o controle proporcional utiliza a derivada do sinal de erro e a função que faz a representação do controle [14], é dado pela equação (4-8):

$$u = K_p * e(t) + K_i \int_0^t e(t)dt + K_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (4-8)$$

Onde:

$$\begin{aligned} K_p &= \text{Constante Proporcional.} & K_d &= \text{Constante Derivativa} \\ K_i &= \text{Constante Integral.} & e(t) &= \text{Função do erro} \end{aligned}$$

No domínio de Laplace o controle é representado pela equação [14], (4-9):

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i} s + T_d s \right) \quad (4-9)$$

Dependendo do tipo de planta que se precisa controlar, pode-se utilizar um controle P, PI, PD ou PID onde os valores dos ganhos proporcional, integral e derivativa podem ser obtidos com a utilização de técnicas como a regra de *Ziegler-Nichols* ou lugar geométrico das raízes entre outras [10].

#### 4.2.1 Controle PID para o eixo x.

Da mesma forma mostrada no controle PD, o controle PID é calculado, agora fazendo o processo para o eixo X, onde a equação (4-10) faz a representação do controle [12].

$$C_{PID} = \frac{(K_d s^2 + s(K_p + \beta K_i) + K_i)}{s(\beta s + 1)} \quad (4-10)$$

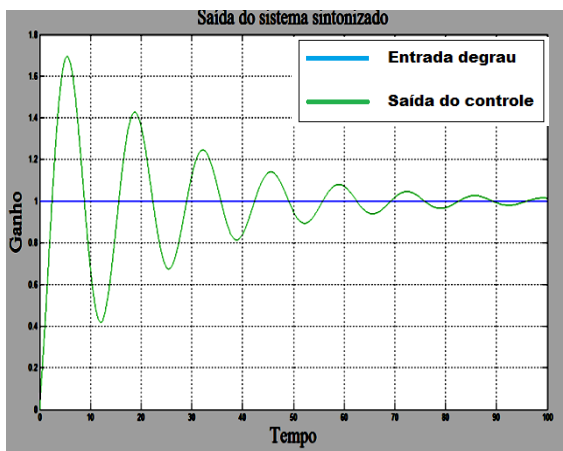
Para o controle PID realizando o método de Ziegler-Nichols a saída em malha fechada é mostrada na figura 4.2, onde o ganho para o controle PID é  $K_{cr} = 0.1$  e  $P_{cr} = 10$ , os valores para ganhos do controlador são:

$$K_p = 0.06 \quad K_d = K_p * T_d = 0.075 \quad K_i = \frac{K_p}{T_i} = 0.012$$

Seguindo a metodologia do controle PD agora para o controle PID, a tabela 4.3, mostra as mudanças feitas no controle com relação à função de transferência, e a figura 4.4 mostra a sintonização do controlador PID, onde os parâmetros são os seguintes:

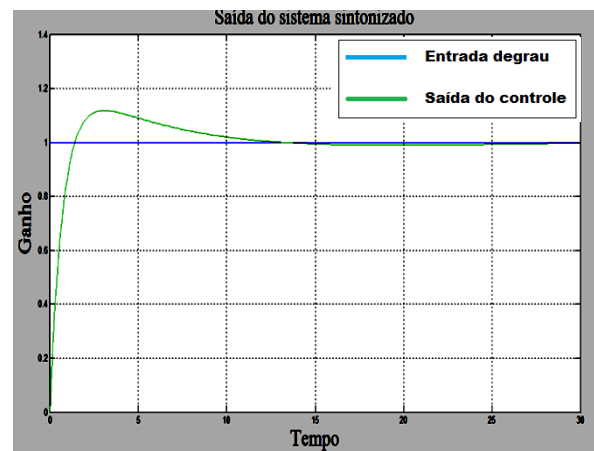
Tabela 4.3. Representação da sintonização do controle PID.

	$C_{PID1}$	$C_{PID2}$	$C_{PID3}$
<b><math>M_p</math> Sobre sinal máximo</b>	69%	11.1%	9.4%
<b><math>t_p</math> Tempo de pico</b>	73s	3s	1.4s
<b><math>t_s</math> Tempo de estabilização</b>	23s	11.1s	4s
<b><math>t_r</math> Tempo de subida</b>	2s	0.13s	0.26s
<b><math>t_d</math> Tempo de atraso</b>	2.3s	1s	0.14s



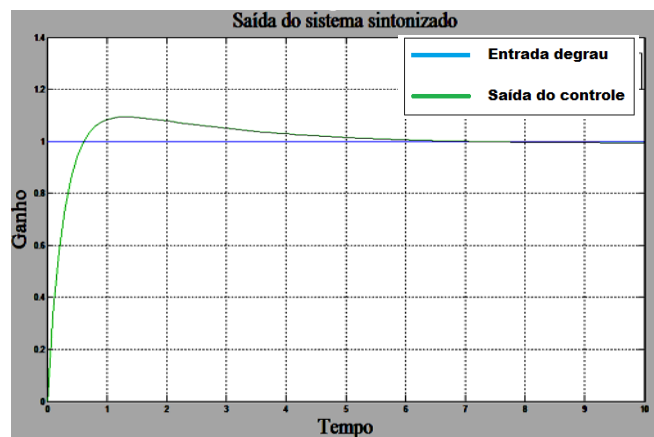
$$C_{PID1} = \frac{0.075s^2 + 0.06s + 0.012}{s(0.001s + 1)}$$

A)



$$C_{PID2} = \frac{0.4s^2 + 0.1s + 0.01}{s(0.001s + 1)}$$

B)



$$C_{PID3} = \frac{s^2 + 0.5s + 0.0795}{s(0.001s + 1)}$$

C)

Figura 4.4. Representação da saída da sintonização do controle PID, A)  $C_{PID1}$ , B)

$C_{PID2}$ , C)  $C_{PID3}$

A figura 4.4 A, mostra que o sobre sinal máximo tem 69% do valor de pico, que o maior, fazendo o ajuste dos parâmetros da função de transferência para fazer menor o sobre sinal e o tempo de acomodação.

A tabela 4.3 mostra o controle  $C_{PID1}$  com suas características onde ele tem dois pólos em ( $s=0$  e  $s=-1000$ ) e dois zeros em ( $s=-0.4$  e  $s=-0.4$ ), os quais são reais, agora a nova função de transferência que descreve o sistema, tem que ser modificada baseando-se na tabela 4.1. Pode-se analisar que a parte derivativa tem que aumentar para que o sobre sinal seja menor, da mesma forma a parte proporcional.

A tabela 4.3, que mostra a função de transferência  $C_{PID2}$  que representa o controle PID modificado, pode-se observar na tabela 4.3 e figura 4.4 B, que ainda apresenta sobre sinal grande de um valor de 11.1%, correspondente a dois zeros complexos conjugados nos valores de ( $s = -0.1250 + 0.0968i$  e  $s = -0.1250 - 0.0968i$ ) e dois pólos reais em ( $s = 0$ ;  $s = -1000$ ), fazendo a mudança na parte derivativa e parte e integral para reduzir o tempo de estabilização, tal como mostra a tabela 4.1, o novo controle PID é mostrado na tabela 4.3.

Na função  $C_{PID3}$ , pode-se ver na figura 4.4 C, que o sistema tem um tempo de acomodação de 4 s menor, e que o sobre sinal agora é de 9.1%, e os outros parâmetros que representam o controle PID são menores que os mostrados no controle  $C_{PID1}$  e  $C_{PID2}$ , adicionalmente pode-se analisar que os zeros complexos conjugados do controle PID são próximo do valor de zero na parte imaginária, ( $s=-0.2500 + 0.1304i$ ;  $s = -0.2500 - 0.1304i$ ).

Sendo assim o sistema estável, o qual mostra que fazendo a aproximação dos zeros para um valor nulo o sobre sinal e o tempo de acomodação vai ser menor.

### **4.3 ANÁLISES DO CONTROLE PID EM MALHA FECHADA**

Partindo dos resultados obtidos pela sintonização do controle PID como foi apresentado na figura 4.4, nesta seção é analisado o controle em relação à planta do sistema como mostra a figura 4.5, onde o modelo apresentado corresponde à um sistema ideal em malha fechada, sem perturbações e distúrbios, o modelo é analisado mediante a implementação do código no software SIMULINK e MATLAB.



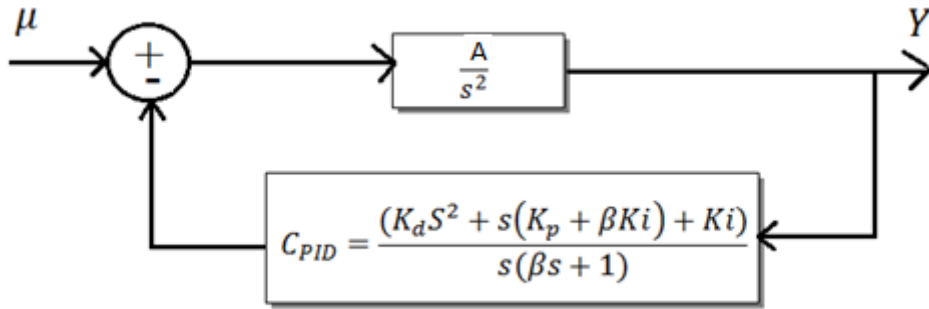


Figura 4.5. Representação do sistema em malha fechada com o controle PID

Na figura 4.5 mostra o controlador PID e a planta do sistema que depende do A, onde A é uma constante dos parâmetros do quadrimotor, dado que o sistema tem um duplo integrador, então não é necessária a parte integral do controlador, dado que o duplo integrador da planta elimina o erro de estado estacionário [15], então o sistema em malha fechada é representado pela equação (4-13):

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{A(K_d s + K_p)}{s^2(\beta s + 1) + AK_d s + AK_p} \quad (4-13)$$

Para  $\beta \ll 1$  a função de transferência fica como mostra a equação (4-14):

$$H(s) = \frac{A(K_d s + K_p)}{s^2 + AK_d s + AK_p} \quad (4-14)$$

Deseja-se um sistema com amortecimento crítico ( $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \xi \leq 1$ ), o qual indica que o sistema vai mudar entre sub amortecido e criticamente amortecido, a equação que faz a descrição da função de transferência para um sistema de segunda ordem sem zeros e ganho unitário é mostrado na equação (4-15):

$$H(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} \quad (4-15)$$

Onde,  $s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = 0$  e representam os pólos do sistema, onde é requerido que o sistema seja não oscilatório com amortecimento crítico, pois este é o mínimo amortecimento que torna o sistema não oscilatório, então para pólos idênticos tem-se:

$$(s + x)^2 = s^2 + 2xs + x^2 = s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = s^2 + AK_d s + AK_p \quad (4-16)$$

Seja:

$$x^2 = AK_p \qquad 2x = AK_d$$

Como  $A$ , é a constante do sistema, fazendo a substituição de  $x$  tem-se:

$$K_p = A \left( \frac{K_d}{2} \right)^2 \quad (4-17)$$

Onde a função de transferência é mostrada na seguinte equação:

$$H(s) = \frac{K_d s + A \left( \frac{K_d}{2} \right)^2}{s^2 + K_d s + A \left( \frac{K_d}{2} \right)^2} \quad (4-18)$$

A equação (4-18) representa a função de transferência a qual depende do valor  $K_d$ , diretamente, fazendo que o valor de  $K_d$  mude numa faixa de 0.001 até 100 como mostra a figura 4.6 tem-se:

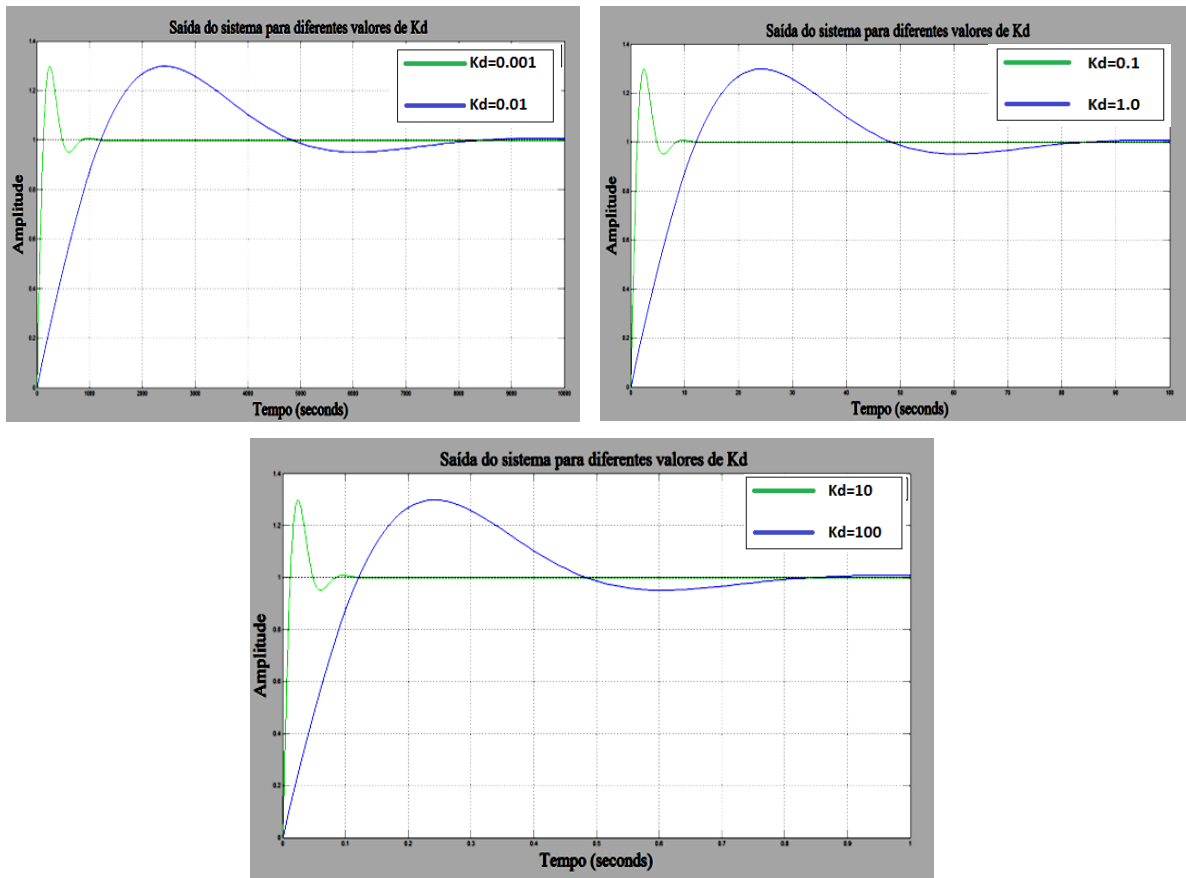


Figura 4.6: Resposta ao degrau do sistema frente a diferentes valores de entrada de  $K_d$ .

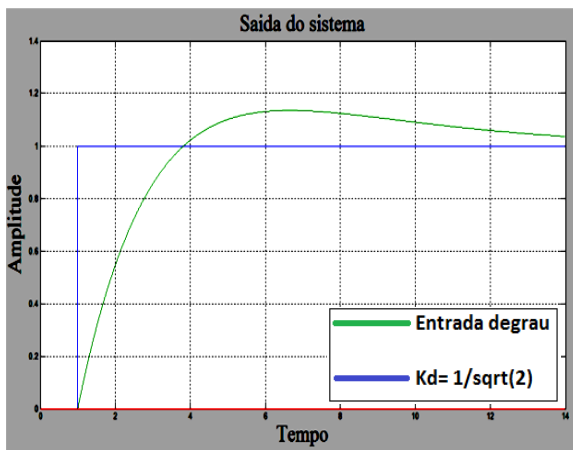
Pode-se ver no gráfico 4.6 que à medida que o valor de  $K_d$  cresce o controlador fica mais rápido, estabilizando-se num tempo menor, o qual mostra que o valor de  $K_d$  tem que ser grande para que o controle seja rápido. Dado que o sistema depende do amortecimento, fazendo a aproximação do amortecimento com o parâmetro derivativo do controle, então este muda numa faixa de  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq K_d \leq 1$ , como apresenta a figura 4.7:

$$K_d = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

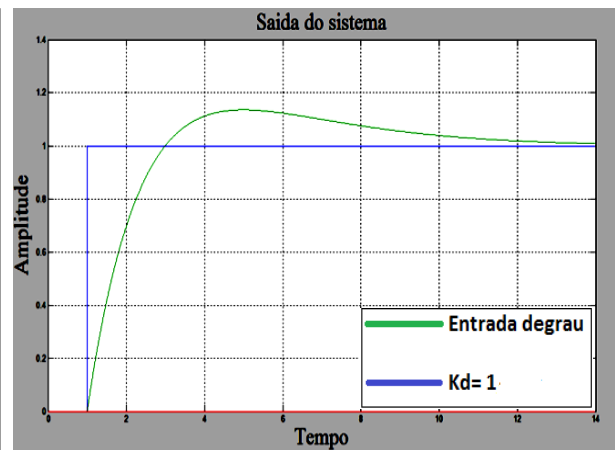
$$H(s) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}s + \frac{1}{8}}{s^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}s + \frac{1}{8}}$$

$$K_d = 1$$

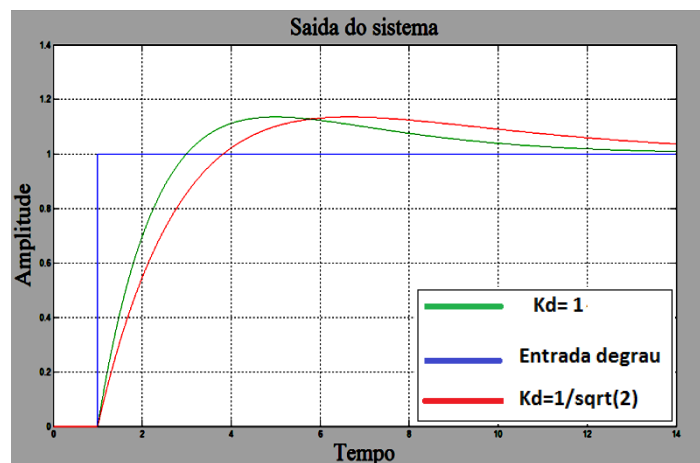
$$H(s) = \frac{s + 1/4}{s^2 + s + 1/4}$$



A)



B)



C)

Figura 4.7: Saída do sistema com amortecimento A)  $\xi = 1/\sqrt{2}$ ; B)  $\xi = 1$ ; C) superposição do sistema.

A figura 4.7 foi desenhada para o valor de  $K_d = 1$ , a figura 4.7 B tem um zero em ( $s=-0.2500$ ) e dois pólos reais em ( $s=-0.5000$ ), indicando assim uma resposta sub-

mortecido, a figura 4.7 A tem um zeros em ( $s=-0.1768$ ) e dois pólos em ( $s=-0.3536$ ), os quais são reais e iguais, indicando assim uma resposta criticamente amortecida.

Pode-se observar na figura 4.7 C se tem os dois gráficos onde o gráfico da cor vermelha é feito para  $\xi = 1/\sqrt{2}$ , e o verde é feito para  $\xi = 1$ . É possível analisar que o ganho estático é maior para o amortecimento  $\xi = 1$ , o qual mostra que à medida que o amortecimento cresce o ganho cresce e o controlador é fica mais rápido.

#### 4.4 CONTROLE POR PLANEJAMENTO

Mais de 10 anos atrás, *Fliess Michel* e colegas de trabalho [16], introduziram uma classe especial de sistemas não lineares ditos sistemas planejados. Estes sistemas são caracterizados pela existência de uma saída planejada como mostra a equação (4-19):

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad (4-19)$$

O qual é planejado só se existe  $m = \dim(u)$ , tal que seja real e planejada, então:

$$h = (h_1, \dots, h_m^\alpha) \quad (4-20)$$

Como o valor de  $x$  depende do número finito de  $u$  derivadas, o valor de  $\alpha$  vai representar o número de derivadas, tal que, a solução  $(x, u)$  do sistema quadrado diferencial- algébrico este dado por:

$$t \rightarrow y(t) \quad (4-21)$$

Onde ele envolve a seguinte equação diferencial:

$$\Phi(y, \dot{y}, \dots, y^{(\beta)}), \quad u = \psi(y, \dot{y}, \dots, y^{(\beta+1)}) \quad (4-22)$$

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y(t) = h(x, u, \dot{u}, \dots, u^\alpha) \quad (4-23)$$

Os parâmetros  $\Psi$  e  $\Phi$  são funções suaves e  $\beta$  é um número finito, chamado planejamento de saída ou linearização da saída, em linguagem de controle, a saída planejada é o inverso da  $y(t) = h(x, u, \dot{u}, \dots, u^\alpha)$ . Este planejamento é relacionado com o estado de realimentação e linearização do sistema, onde pode ser considerado dois controles  $\dot{x} = f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2$ , em geral, o problema da caracterização do planejamento está totalmente aberta para sistemas com multiplas entradas,  $\dim(u) > 1$ . A

situação é de alguma forma comparável com os sistemas integráveis Hamiltoniano, onde não tem nenhum algoritmo para decidir se um dado Hamiltoniano  $H(q, p)$  produz um sistema integrável, na realidade existem exemplos de interesse físico de sistemas integráveis, onde a solução tem forma geral em termos das condições iniciais, e só estas condições são avaliadas, o papel dos sistemas de planejamento dentro do conjunto menor de sistemas diferenciais ordinárias é muito semelhante aos sistemas integráveis dentro do conjunto de sistemas diferenciais ordinários [16].

Alguns problemas importantes podem ser resolvidos com o controle por planejamento, por exemplo, um carro ao longo de uma trajetória prescrita ou controle de um reator químico operacional. Existem métodos de controle de movimento para a resolução de problemas que muitas vezes dependem de modelos não lineares. Devido à significativa mudança do comportamento do sistema para movimentos grandes.

Os controladores de planejamento de trajetórias em malha aberta podem ser facilmente projetados, isso significa que a propriedade de acompanhamento de todas as trajetórias do sistema pode ser calculada partindo de funções de um número finito de derivadas temporais associadas numa trajetória de saída planejada. A relação entre este planejamento e o sistema de variáveis de saída, é que não envolve nenhuma integração e avaliação depende de apenas uma função, o objetivo do planejamento em meios de movimento como a saturação do atuador pode ser explicada tendo a saída planejada expressada como um sistema em malha aberta. [17]

#### **4.5 PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIAS.**

Trabalhos recentes apresentam o planejamento de movimento para controle de fronteira infinitodimensional em sistemas de parâmetros distribuídos que são sistemas de dimensão infinita [18]. O trabalho com o planejamento de trajetórias é muito interessante, pois pode definir matematicamente a trajetória de vôo que vai ser aplicado no veículo não tripulado, permitindo o controle da posição, da velocidade e da aceleração do veículo.

O problema da execução de trajetórias é constituído pelo planejamento e o rastreamento de trajetórias os quais são estudados num contexto de sistemas lineares de dimensão finita e são representadas por equações diferenciais tendo um número finito de entradas ou variáveis de controle [18]. Na prática os sistemas são representados pelo conhecimento da evolução de variáveis com relação ao tempo, e controle de variáveis que depois são designadas como entradas dos sistemas [18], numerosas exemplos destes

sistemas podem ser encontrados em sistemas mecânicos como motores de satélites, aeronaves, carros, entre outros, em sistemas elétricos como circuitos eletrônicos para entrada de corrente e voltagem, conversores eletromagnéticos, térmicos como trocadores de calor, resistores, reatores químicos, biotecnológicos e processos que têm componentes químicos entre outros exemplos [18].

O processo de construção e planejamento de trajetórias correspondente é intuitivamente entendido como a preparação de um plano de vôo ou um plano de movimento de antecedência. Mas se temos um sistema off-line, a construção de caminho esta relacionada com ação de controle de caminho, os caminhos limitados pelas condições iniciais e condições finais. A malha aberta é baseada no conhecimento do modelo do sistema, no caso ideal que o sistema não tenha perturbações e não considerando as possíveis medidas do sistema de estados, as trajetórias são chamadas de referência ou trajetórias nominais e são relacionadas com o controle de referência ou controle nominal. Esta noção é natural do controle de sistemas mecânicos, aeronaves, motores, carros, sistemas de posicionamento e alguns sistemas químicos e biológicos. [18]

O rastreamento da trajetória está relacionado com uma lei de controle capaz de seguir a trajetória, mesmo, se alguns distúrbios desconhecidos forçaem o sistema a desviar-se, para esse efeito, esta lei de controle deve levar informações adicionais, ou seja, medições on-line, a observação para que o deslocamento sempre seja com referência à trajetória deduzida, na prática a observação é feita pela utilização de sensores. [18]

A classe de controle que faz as observações do estado de sistemas geralmente é chamada de controle de malha fechada ou controle de circuito fechado. Sem desvio (sem distúrbios), o controle coincide com o controle em malha aberta, mas assim quando um desvio é detectado, a lei de controle de malha fechada deve assegurar a convergência do sistema para sua trajetória de referência e o tipo de convergência (local, global, polinomial, exponencial, etc.) que pode ser garantida [18].

#### **4.6 PLANEJAMENTO E ACOMPANHAMENTO DE TRAJETÓRIAS.**

No controle por planejamento de trajetórias, a realimentação é fundamental para cancelar os efeitos de distúrbios desconhecidos e fornecer ações de compensação em

tarefas de acompanhamento. Muitas vezes é impossível estabilizar o sistema sem realimentação, onde reside a principal importância da malha fechada.

É importante saber que os controladores por planejamento e acompanhamento são representados como mostra a equação (4-24):

$$\mathbf{u} = \mathbf{feedforward} + \mathbf{feedback} \quad (4-24)$$

Onde parte *feedforward* pretende fornecer os elementos para a realização da trajetória e cancelar os efeitos de alterações conhecidos [18]. O controle *feedforward* tem como objetivo específico medir as perturbações mais significativas, e gerar uma ação preventiva antes que as mudanças aconteçam na variável controlada [19]. Para conseguir isto, a medição da perturbação se deve realimentar mediante um controlador chamado *feedforward*, o qual compensa a ação das perturbações sob a planta ou processo [19].

O controlador *feedforward* é projetado para compensar as características da planta que são descobertos durante a modelagem [20]. Quando o erro torna-se pequeno, o modelagem termina e apenas uma pequena parte do erro é necessário para compensar as incertezas que são imprevisíveis e aleatórios [20], Uma consequência imediata da utilização do controlador *feedforward* é que acelera a resposta do sistema [20].

A parte *feedback* estabiliza a dinâmica de erro de rastreamento compensa os erros de modelagem e cancela as perturbações [21]. A vantagem principal de um controle *feedback*, é que permite fazer a identificação exata da perturbação entrante ao sistema, o qual é feito mediante a medição do erro, fornecendo tarefas de correção [22].

A combinação dos dois controles *feedforward* e *feedback*, tem como vantagem que os benefícios delas também ficam combinados, compensando assim cada uma das fraquezas da outra técnica de controle, enquanto o controle *feedforward* trabalha com os distúrbios medidos, o controle *feedback* compensa imprecisões no modelo do processo ou distúrbios não estimados. Para o processo de projeto e sintonização dos controladores, é separado as malhas do controle e é sintonizado cada um de maneira independente [19].

## 4.7 DESCRIÇÃO DO MÉTODO.

O controle por planejamento de trajetória é um método que hoje é utilizado para o controle de sistemas autônomos na indústria, o desenvolvimento do método é baseado na construção de uma trajetória de modo que o sistema tenha que fazer o acompanhamento da trajetória planejada tendo em consideração um polinômio de acompanhamento o qual depende diretamente do sistema, seja o sistema descrito pela equação (4-25):

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{numerador}}{\text{denominador}} \quad (4-25)$$

A trajetória planejada para o sistema é representada pela equação (4-26.)

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{\text{denominador}} \quad (4-26)$$

Onde a lei de controle depende diretamente do polinômio do denominador como apresentada a equação (4-26), depois é necessário comprovar a estabilidade do sistema fazendo se for estável, o controle do sistema provocando oscilações e instabilidade de vôo.

Para realizar o cálculo do grau do polinômio correspondente à trajetória planejada precisa conhecer as condições iniciais onde a ordem do polinômio correspondente será igual ao número das condições iniciais menos um.

### 4.7.1 Exemplo de planejamento de trajetórias.

Seja o sistema em função de transferência, representado pela equação (4-27):

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{s + 2}{s^4 + 1.5s^3 + 10s^2 + 6s + 10} \quad (4-27)$$

Deseja-se que o sistema estabilize num tempo de 5 segundos, onde as condições iniciais são zero para fazer o seguimento da trajetória.

Para o sistema anterior os pólos correspondem a:

$$\begin{array}{ll} -0.4529 + 2.8363i & -0.2971 + 1.0601i \\ -0.45291 - 2.8363i & -0.2971 - 1.0601i \end{array}$$



Pode-se observar que os pólos do sistema são complexos conjugados, baseando-se no método apresentado nesta seção a trajetória planejada para o sistema é:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^4 + 1.5s^3 + 10s^2 + 6s + 10} \quad (4-27)$$

A lei de controle é:

$$U(s) = (s^4 + 1.5s^3 + 10s^2 + 6s + 10)X(s) \quad (4-28)$$

No domínio do tempo:

$$U(t) = X^{IV} + 1.5\ddot{X} + 10\ddot{X} + 6\dot{X} + 10X \quad (4-29)$$

Para o sistema anterior as condições iniciais são nulas e precisa-se que ele fique estável no valor de 5 segundos depois, então:

$$X(0) = 0; X(\dot{0}) = 0; X(\ddot{0}) = 0; X(\ddot{\ddot{0}}) = 0; X(0)^{IV} = 0;$$

$$X(5) = 1; X(\dot{5}) = 0; X(\ddot{5}) = 0; X(\ddot{\ddot{5}}) = 0; X(5)^{IV} = 0;$$

O polinômio correspondente no sistema de acordo com as condições iniciais é:

$$X(t) = at^9 + bt^8 + ct^7 + dt^6 + et^5 + ft^4 + gt^3 + ht^2 + it + j \quad (4-30)$$

Avaliando as condições iniciais nulas é obtido:

$$j = 0; i = 0; h = 0; g = 0; f = 0$$

Então o polinômio fica:

$$X(t) = at^9 + bt^8 + ct^7 + dt^6 + et^5 \quad (4-31)$$

Aplicando as condições finais do sistema temos um sistema de cinco equações, e fazendo a solução do sistema os dados correspondentes às constantes são:

$$a = 3,584e - 5 \quad b = 8,064e - 4$$

$$c = 6,912e - 3 \quad d = 2,688e - 2$$

$$e = 4,032e - 2$$

Depois avaliando as derivadas como mostra a lei de controle na equação (4-29) a qual depende do polinômio X mostrado na equação (4-31), a nova lei de controle fica da seguinte forma:

$$U(t) = 3.58t^9 + 1t^8 + 0.13t^7 + 1.038t^6 + 4.78t^5 + 11.59t^4 + 18.7t^3 + 13.3t^2 + 4.84t$$

A saída do sistema é mostrada na figura 4.8, onde ela apresenta um polinômio P o qual é estabilizado em 5 segundos como é planejada, a figura 4.8 B. mostra o comportamento da lei de controle que realizará o seguimento da trajetória, o seguinte diagrama mostra o seguimento da trajetória realizada e o sistema simulado em SIMULINK.

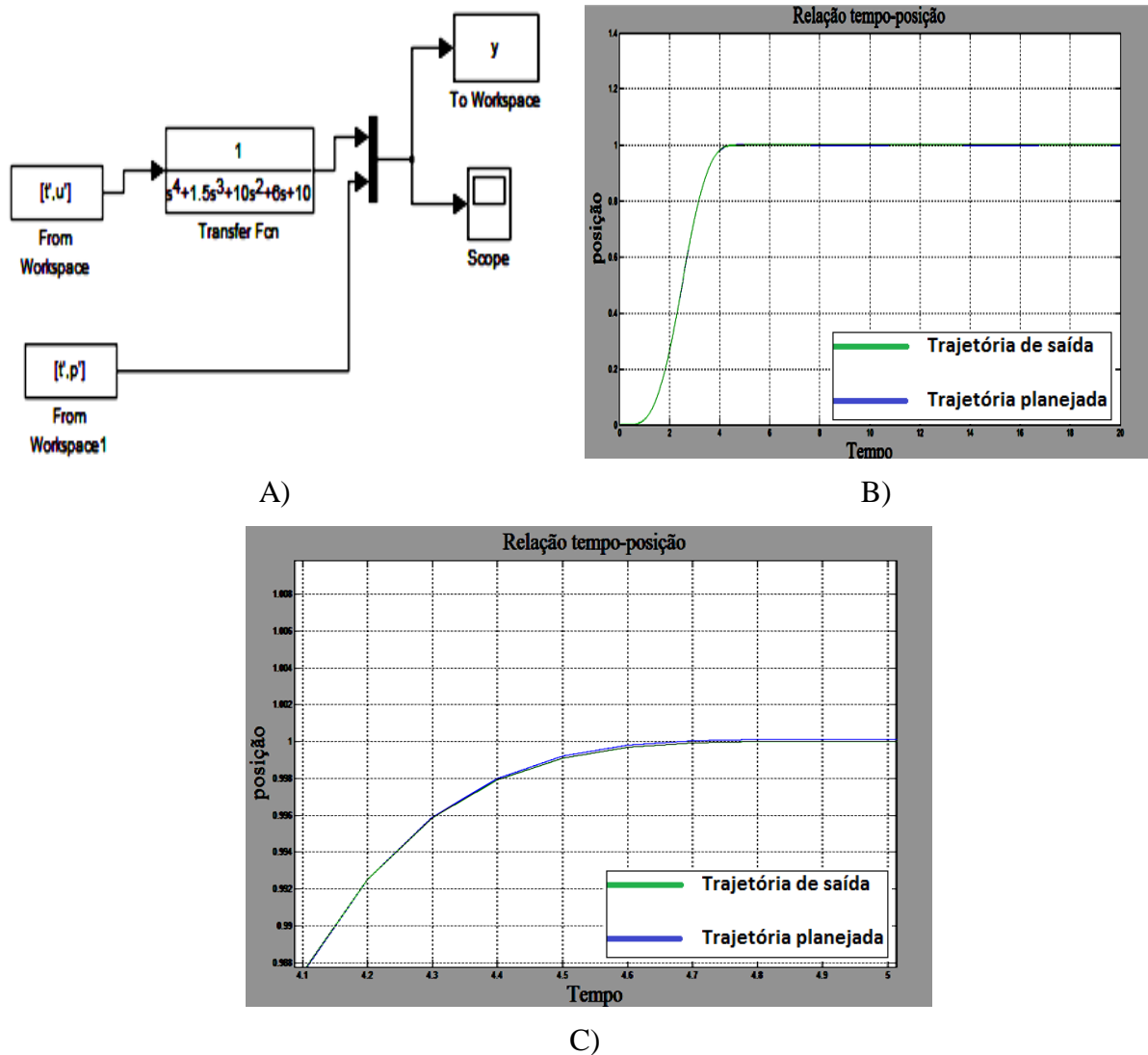


Figura 4.8: A) Diagrama feito em Simulink do sistema. B) Saída do sistema com relação à lei de controle e o polinômio de entrada. C) Ampliação do sinal de saída.

A figura 4.8 A. representa o sistema feito em Simulink onde se pode observar a trajetória planejada e a figura 4.8 B representam a saída do sistema, pode-se verificar que o sistema esta fazendo o acompanhamento do polinômio X, e em 5 segundos ele estabiliza no valor um (1), como foi pedido na realização do exemplo, na figura 4.8 C mostra uma ampliação da imagem de saída onde se pode perceber de melhor forma que efetivamente o seguimento é feito, assim satisfazendo as especificações definidas inicialmente.

A metodologia do trabalho para o cálculo das trajetórias e o seguimento delas é muito importante, pois o mesmo método foi utilizado no desenvolvimento das trajetórias planejadas, primeiramente com um sistema massa-mola para que ficasse claro o método e posteriormente a análise do sistema quadrimotor nos diferentes eixos, onde foram realizados os cálculos dos ângulos de giro do helicóptero, chegando assim a fazer o planejamento de trajetórias em forma de espiral, que apresenta o modelo completo do sistema para realizar as mudanças necessárias.

#### 4.7.2 Controle linearizante de um sistema sinusoidal.

Seja o sistema mostrado na equação (4-28)

$$\ddot{x} = -\text{sen}x + u \quad (4-28)$$

Em espaço de estados tem- se:

$$x_1 = x \quad (4-29)$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x} \quad (4-30)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} \quad (4-31)$$

Então o sistema em espaço de estados é dado pela equação (4-32) e (4-33)

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4-32)$$

$$\dot{x}_2 = -\text{sen}x_1 + u \quad (4-33)$$

Os pontos de equilíbrio do sistema como são:

$$x_1 = 0; x_2 = 0$$

Então a lei de controle que realiza a linearização do sistema é representada pela equação (4-34):

$$u = \text{sen}x1 + v \quad (4-34)$$

Onde

$$v = -k1x1 - k2x2 \quad (4-35)$$

Agora fazendo a linearização tangente para a parte não linear que é a função sinusoidal no ponto de equilíbrio, como representa a equação (4-36) e (4-37):

$$\text{sen}x = f(0) + \frac{df(0)}{dx}(x - 0) \quad (4-36)$$

$$\text{sen}x = 0 + \cos(0)(x - 0) = x \quad (4-37)$$

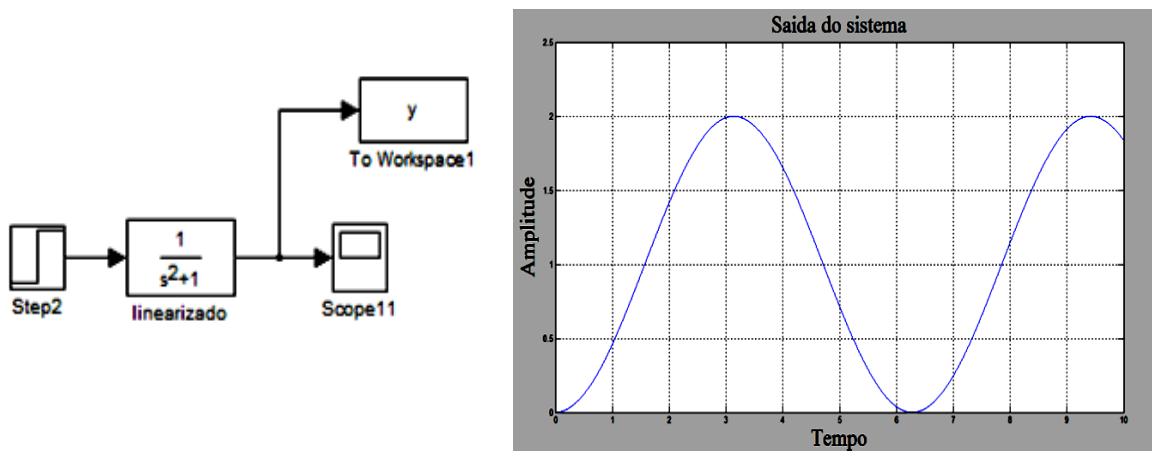


Figura 4.9. Representação do sistema linearizado pelo método tangente

A figura 4.9 mostra o comportamento do sistema linearizado pelo método de linearização tangente, onde o sistema apresenta uma forma oscilatória, o objetivo é projetar um controle linearizante para um sistema não linear, de maneira que saída do sistema possa acompanhar entrada, o sistema é representado na figura 4.10 a qual foi feita em SIMULIK.

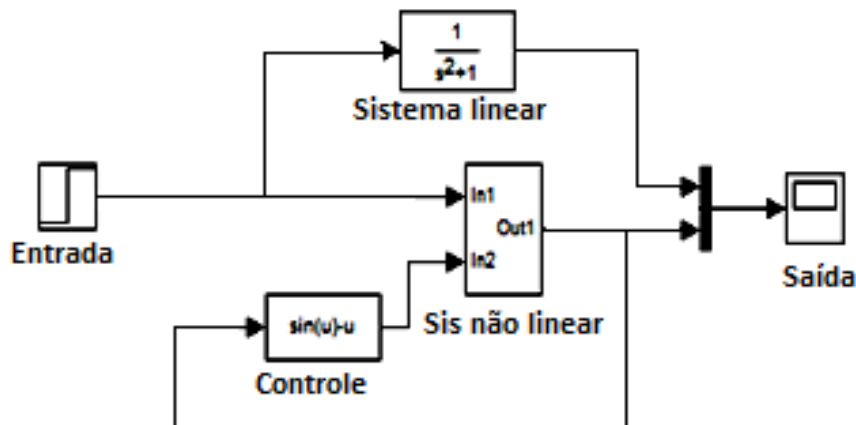


Figura 4.10. Representação do sistema não linear

A parte não linear do sistema é mostrada na figura 4.11:

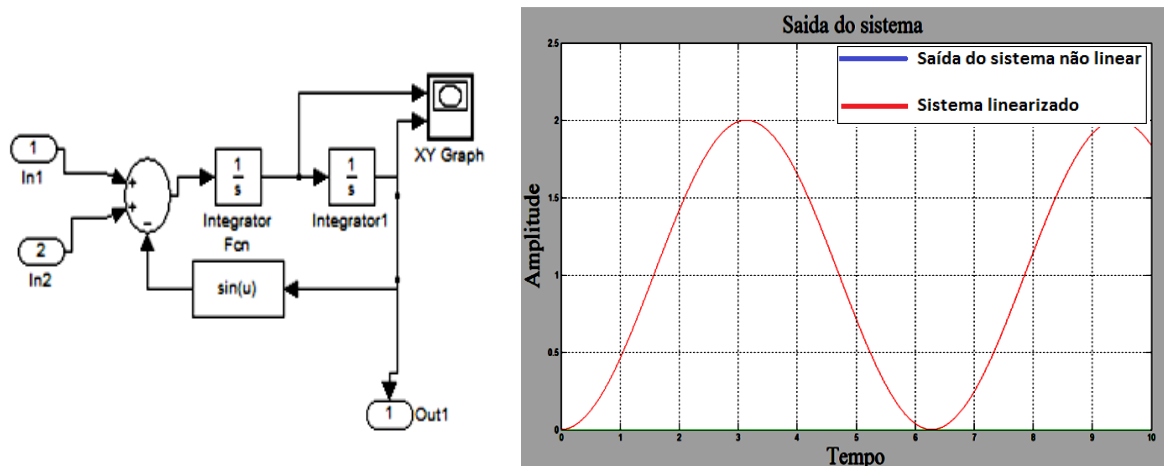
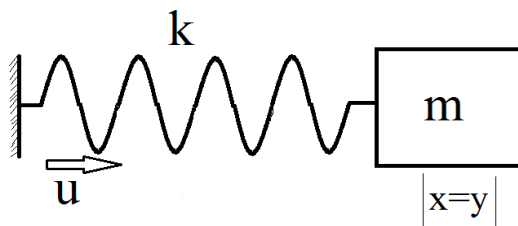


Figura 4.11: Parte não linear do sistema

Utilizando o gráfico do sistema linearizado pelo método da tangente e fazendo a superposição do gráfico linearizado pelo método do controle, é obtida a saída do sistema como representa a figura 4.11, onde o gráfico vermelho corresponde à saída do sistema completamente superposto sobre o sistema linearizado, então o controlador que faz a linearização do sistema funciona corretamente, já que ele tem o mesmo comportamento, do sistema linearizado pelo método da tangente.

#### 4.7.3 Sistema linear massa- mola.

Considerando o sistema linear massa mola descrita pela equação (4-38) e representado na figura 4.12:



$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{kX}{m} = \frac{ku}{m} \quad (4-38)$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{k(u - X)}{m} \quad (4-39)$$

Figura 4.12: Sistema massa mola.

Deseja-se que ele realize o seguimento da trajetória descrita pela equação (4-40), a qual corresponde a um polinômio de quarta ordem como apresenta a equação (4-40).

$$X(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e \quad (4-40)$$

Onde as condições iniciais são representadas pela equação (4-41):

$$\frac{d^2X(t_f)}{dt^2} = 0; \frac{dX(t_f)}{dt} = 0; X(t_f) = v_f \quad (4-41)$$

A equação (4-41) representa as condições iniciais do sistema, dada que o sistema é de segunda ordem, duas de suas condições iniciais são zero para que o sistema seja estabilizado na posição desejada, avaliando as condições iniciais tem-se as equações (4-42), (4-43) e (4-44):

$$X(0) = 0 \text{ então } e = 0$$

$$\frac{dX(0)}{dt} = 0 \text{ então } d = 0$$

$$X(t_f) = v_f: \quad v_f = at_f^4 + bt_f^3 + 2ct_f^2 \quad (4-42)$$

$$\frac{dX(t_f)}{dt} = 0; \quad 0 = 4at_f^3 + 3bt_f^2 + 2ct_f \quad (4-43)$$

$$\frac{d^2X(t_f)}{dt^2} = 0; \quad 0 = 12at_f^2 + 6bt_f + 2c \quad (4-44)$$

Fazendo as contas por meio da manipulação das equações (4-42), (4-43) e (4-44) é possível calcular os valores de a, b, c:

$$a = \frac{-3b}{8t_f} \quad b = \frac{-8v_f}{t_f^3} \quad c = \frac{-3t_fb}{4}$$

Para  $t_f = 5s$ , as constantes do polinômio são:

$$b = -0.064v_f; \quad a = 0.0048v_f \quad c = 0.24v_f$$

Substituído os parâmetros na equação (4-40), tem-se a equação (4-45):

$$X(t) = 0.0048v_ft^4 - 0.064v_ft^3 + 0.24v_ft^2 \quad (4-45)$$

Fazendo a segunda derivada da equação (4-45), tem-se o polinômio da equação (4-46):

$$\ddot{X}(t) = 0.0572v_ft^2 - 0.384v_ft + 0.48v_f \quad (4-46)$$

A lei de controle é mostrada na equação (4-47):

$$u = \frac{m\ddot{X}}{k} + X \quad (4-47)$$

Substituindo os dados da aceleração na lei de controle é obtida a equação (4-47), para efeitos de simulação os valores de m y k foram assumidos com valor unitário e os resultados são mostrados na figura 4.13.

$$u = 0.0048v_f t^4 - 0.064v_f t^3 + 0.2976v_f t^2 - 0.384v_f t + 0.48v_f \quad (4-48)$$

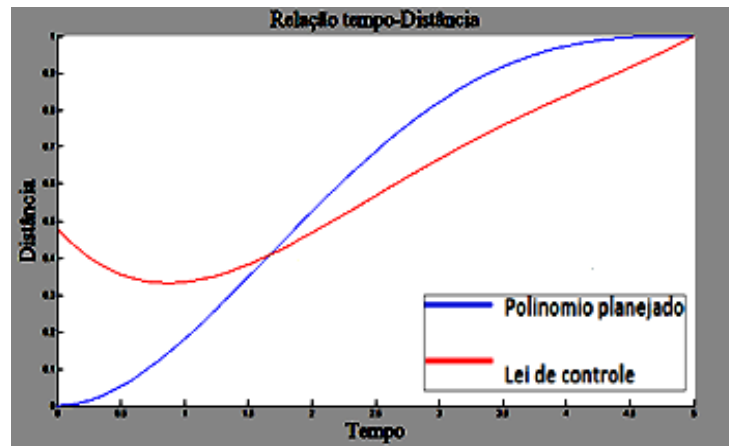


Figura 4.13: Resposta da lei de controle e função de entrada.

Para efeitos de análises a representação em diagrama de blocos é feita em Simulink, como mostra a seguinte figura:

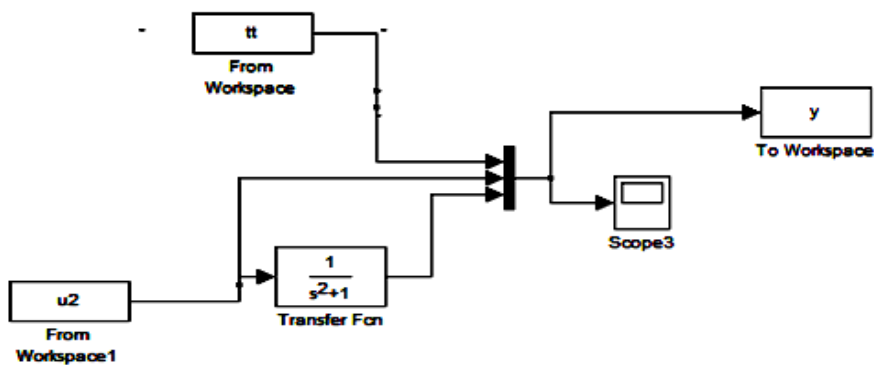


Figura 4.14. Diagrama de Simulink para a simulação.

A figura 4.14 mostra um bloco U2, que é a lei de controle, a qual é a entrada da função de transferência que descreve o sistema massa mola, ela foi calculada partindo da equação (4-49):

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{kX}{m} = \frac{ku}{m} \quad (4-49)$$

Fazendo a transformada de Laplace do sistema massa mola é obtido:

$$s^2 X(s) + \frac{kX(s)}{m} = \frac{kU(s)}{m} \quad \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{\frac{k}{m}}{s^2 + \frac{k}{m}}$$

Para  $k=1$  e  $m=1$  a função de transferência fica como apresenta a equação (4-50):

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 1} \quad (4-50)$$

Agora tendo a função que descreve o sistema e as entradas, os resultados da simulação são mostrados na seguinte figura 4.15:

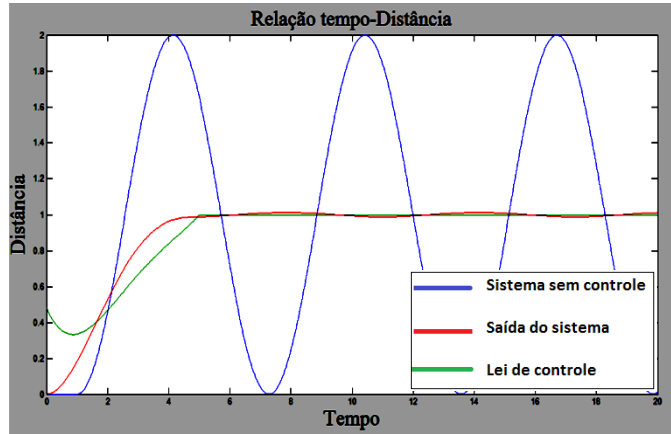


Figura 4.15: Aplicação da lei de controle.

Pode-se verificar que o controle atua realmente sobre a trajetória como é mostrado na figura 4.15 onde é observado que efetivamente é feito o seguimento da trajetória planejada, adicionalmente é mostrado que o tempo de estabilização é de 5 segundos. Como foi calculada inicialmente, a figura 4.15, tem um gráfico azul a qual mostra o sistema oscilatório no tempo, frente a uma entrada degrau, correspondente ao sistema sem controle.

#### 4.7.4 Acompanhamento de trajetória (modelagem eixo z).

Tendo a função da trajetória planejada do sistema massa mola como referência, para fazer o acompanhamento da função que modela o eixo Z, o processo é igual ao sistema anterior, mas agora vai ser obrigada a seguir a trajetória planejada como no sistema anterior, seja o polinômio planejado descrito pela equação (4-45) e (4-46) do sistema massa-mola, mas agora com relação ao eixo Z, realizando a modelagem do eixo Z como mostra a equação (4-51)

$$\ddot{Z}(t)m = L_T(\cos\theta\cos\phi) - mg \quad (4-51)$$

O procedimento da linearização para o sistema representado na equação (4-51), foi apresentado no capítulo 3.4, nas equações (3.20) até (3.24), onde o sistema ficou



representado como apresentou a equação (3-24), e o sistema no domínio de Laplace foi apresentado na equação (3-25), onde a representação em função da trajetória planejada é representada na figura 4.16

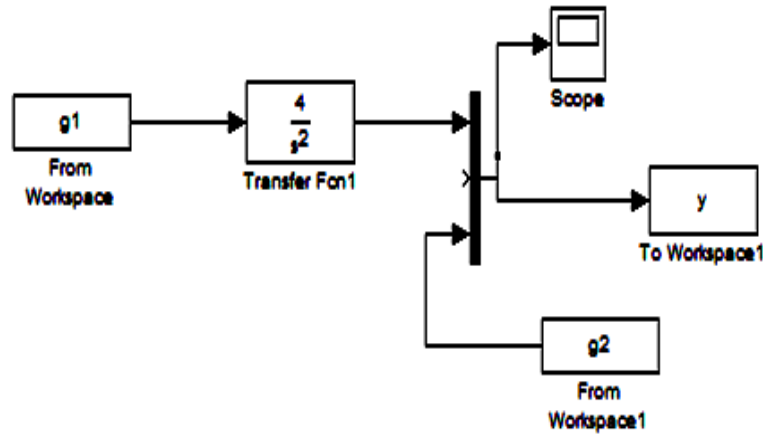


Figura 4.16: Sistema em malha aberta da força no eixo Z, com ângulos nulos.

A figura 4.16 mostra um sistema em malha aberta, onde g1 tem os dados da lei de controle, e g2 tem os dados de Z, o bloco da função de transferência 1, descreve a dinâmica do sistema, apresentada na equação (3-25) do capítulo 3. A figura 4.17 apresenta a saída do sistema.

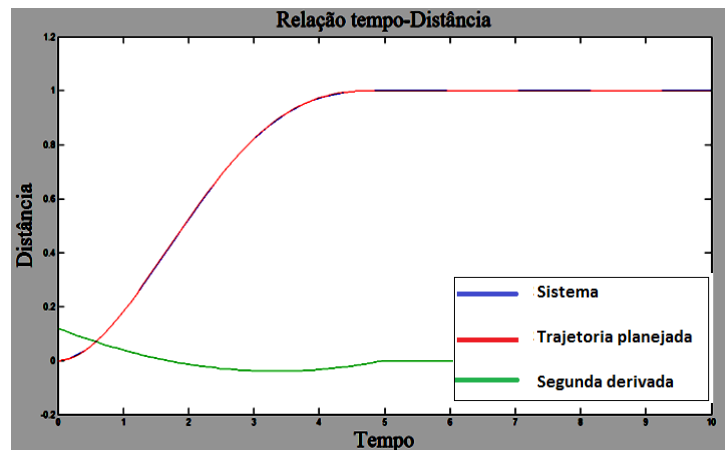


Figura 4.17: Resposta do sistema, acompanhamento da trajetória planejada no eixo Z, com ângulos nulos.

Onde analisando a figura 4.17 é possível observar que o sistema (gráfico da cor azul) e o gráfico da cor vermelha está realizando o acompanhamento da trajetória planejada. O gráfico da cor verde é a representação da segunda derivada da função com relação ao eixo Z, onde é observado que são obtidos os dados esperados da simulação e

que o sistema em malha aberta com as condições iniciais para os ângulos acompanha trajetória desejada, fazendo a representação do movimento do quadrimotor em uma direção fixa, onde ele estabiliza no tempo escolhido.

#### 4.7.5 Planejamento de trajetórias para um sistema em malha fechada.

Fazendo as análises do sistema em malha fechada, frente à uma perturbação ruidosa com distribuição Gaussiana como apresenta a figura 4.18, em função do controle PID sintonizado pelo método de *Ziegler - Nichols*, o qual for apresentado no capítulo 4.2, tem-se:

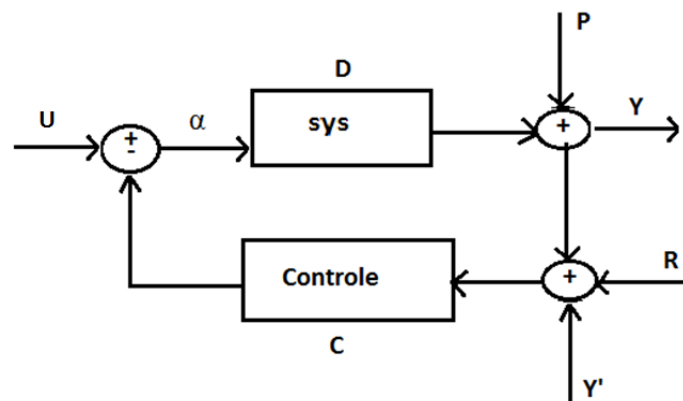


Figura 4.18. Representação do sistema de controle com perturbação e ruído.

Para a figura 4.18, a descrição matemática da função de transferência é mostrada na equação (4-52):

$$Y = P + \alpha D$$

$$\alpha = -(Y + R)C + U$$

$$Y = P - D(Y + R)C + DU$$

$$Y = \frac{P}{1 + CD} - \frac{CDR}{1 + CD} + \frac{DU}{1 + CD} \quad (4-52)$$

Onde:

U é a entrada planejada

D é o sistema

P é a perturbação

C é o controle

Y' saída planejada.

R é o erro.

A representação da saída em função do ruído é apresentada na equação (4-53):

$$\frac{Y}{R} = -\frac{CD}{1+CD} \quad (4-53)$$

Onde, D é descrição matemática do quadrimotor e C é o controle PID definido neste capítulo. Dando continuidade ao trabalho é mostrada o seguinte gráfico que representa a função de transferência e a saída respectiva frente a uma entrada planejada feita anteriormente a qual foi mostrada no capítulo quatro.

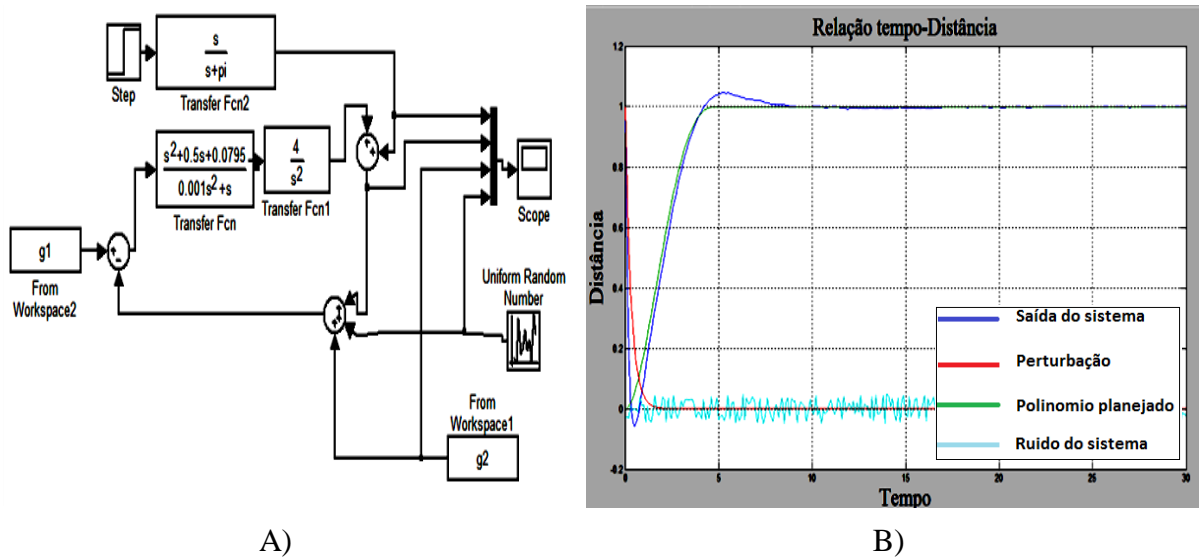


Figura 4.19. A) Diagrama de blocos do sistema. B) Saída do sistema em presença de ruído e perturbação.

A figura 4.19 A, mostra o sistema geral feito para a simulação, onde  $g_1$  é a entrada planejada,  $g_2$  é a saída planejada, e o ruído aleatório e uma perturbação, para este caso particular foi trabalhado um filtro de banda passante de frequência  $\pi$ , a figura 4.19 B mostra a saída do sistema onde a cor azul clara mostra o ruído que foi inserido no sistema, a linha de cor vermelho mostra a entrada do filtro de frequência passante  $\pi$ , a cor verde é a saída planejada, e a cor azul é a saída geral do sistema.

Pode-se analisar que o sistema em malha fechada apresenta um zero instável o qual é produzido pela inserção do filtro, e é mostrado na figura com o acompanhamento que esta fazendo a saída até a frequência passante  $\pi$  da perturbação, pode-se analisar na figura 4.19 que o sistema faz o acompanhamento da entrada planejada ainda quando ele tem perturbações ou ruído ou os dois ao mesmo tempo, o qual mostra que o controle PID esta fazendo o trabalho de acompanhamento de trajetória desejada.

## 5. ANÁLISE MATEMÁTICO DA ESPERIAL

Para o desenvolvimento do projeto é de interesse conhecer a descrição matemática da uma trajetória em forma de espiral, como método de verificação do controle projetado, dado que existem diferentes equações matemáticas que faz a descrição das diferentes formas de espiral, para o caso particular foi trabalhado a espiral de Arquimedes em coordenadas cilíndricas, com objetivo de obter uma descrição matemática da trajetória nos diferentes eixos, que permitam a realização dos testes de verificação que serão apresentados posteriormente, a espiral de Arquimedes em coordenadas cilíndricas é representadas pelas equações (5-1) a (5- 3);

$$X = btcos(t) \quad (5-1)$$

$$Y = btsin(t) \quad (5-2)$$

$$Z = ct \quad (5-3)$$

Onde  $b$  e  $c$  são constantes que alteram a amplitude e a inclinação da espiral, e  $t$  é uma variação angular, para efeitos de simulação o valor das constantes foram considerados 0,1, a figura 5.1 mostra trajetória espiral trabalhada:

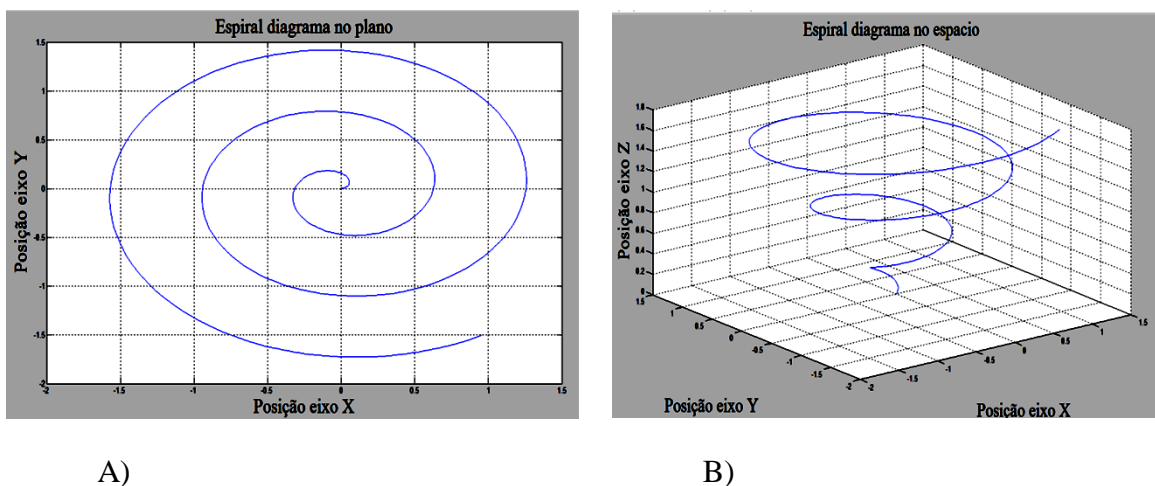
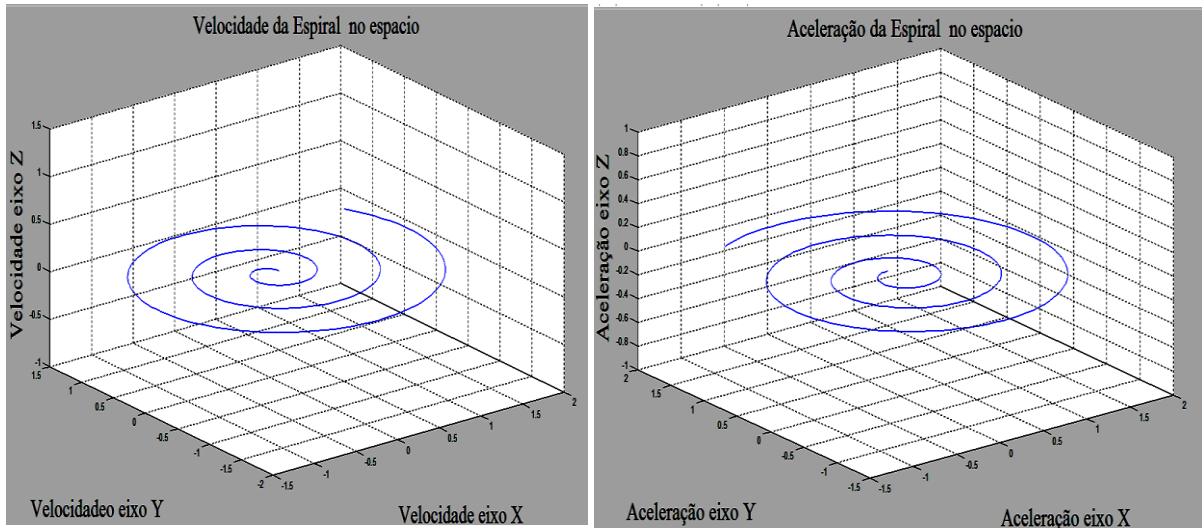


Figura 5.1: Diagrama da posição. A) No plano XY B) No espaço XYZ

A figura 5.2 A mostra a mudança da trajetória no plano XY tendo uma variação numa faixa (-1.5 e 1.5) e a figura 5.2 B mostra a espiral no eixo Z com incrementos de 0 a 1.5, representado assim a posição da trajetória, dado que a espiral tem componentes nos

três eixos é fundamental conhecer o comportamento da velocidade e da aceleração, as quais são apresentadas na figura 5.2.



$$\dot{X} = b(\cos(t) - t\sin(t))$$

$$\ddot{X} = b(2\sin(t) + t\cos(t))$$

$$\dot{Y} = b(\sin(t) + t\cos(t))$$

$$\ddot{Y} = b(2\cos(t) - t\sin(t))$$

$$\dot{Z} = c$$

$$\ddot{Z} = 0$$

A)

B)

Figura 5.2: Velocidade e aceleração no espaço da espiral.

A figura 5.2 A mostra a mudança da velocidade no plano XY numa faixa de dados entre (-1 e 1), com relação ao eixo Z, pode-se observar que o valor é fixado numa constante  $c = 0.1$ , na figura 5.2B representa as equações de aceleração da espiral, mostrando uma mudança de dados em uma faixa entre (1.7 e 1.7) para o plano XY, sendo o valor do eixo Z fixo em zero, como mostra equação da aceleração para a espiral.

Os dados de posição, velocidade e aceleração são importantes para o movimento do quadrimotor, porque eles mostram o comportamento ideal da trajetória planejada que o veículo vai acompanhar, o qual será verificado mediante a realização de alguns testes que incluem trajetórias tipo espiral, o propósito principal é projetar as trajetórias e obter uma serie de dados que fazem a representação do movimento, os quais serão manipulados no software SIMULINK e MATLAB para a projeção do controle do veículo.

Dado que o sistema é instável em malha aberta como foi apresentado no item 3.4 na figura 3.2, e baseados no sistema de forças que representa o quadrimotor apresentado no capítulo 2, mediante a equação (2-14), foram projetadas leis de controle para cada um dos

eixos como mostram as equações (5-4) a (5-6), de maneira que estas leis de controle possam cancelar as não linearidades do sistema como foi apresentado no capítulo 3.3:

$$U_x = m\ddot{X}/4K(\cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\phi) \quad (5-4)$$

$$U_y = m\ddot{Y}/4K(\sin\psi\sin\theta\cos\phi - \cos\psi\sin\phi) \quad (5-5)$$

$$U_z = m\ddot{Z}/4K(\cos\theta\cos\phi) \quad (5-6)$$

A equação (2-14) representa a dinâmica do sistema em função das forças, onde é possível fazer uma representação do sistema em função da força de sustentação e o peso de veículo, fazendo assim análise para cada um dos eixos, com a finalidade de analisar o comportamento dos ângulos em relação às coordenadas do sistema, obtendo três análises:

- Análise matemática para a espiral no eixo X
- Análise matemática para a espiral no eixo Y
- Análise matemática para a espiral no eixo Z

## 5.1 ANÁLISE MATEMÁTICA PARA A ESPIRAL NO EIXO X

Seja o sistema de forças no eixo X representado pela equação (5-7) a (5-9):

$$mg = F_x \tan(\phi) \quad (5-7)$$

$$mg = m\ddot{X} \tan(\phi) \quad (5-8)$$

$$\tan(\phi) = mg/m\ddot{X} \quad (5-9)$$

A trajetória da espiral é dada pela equação (5-10):

$$r = b\cos(t), b\sin(t), ct \quad (5-10)$$

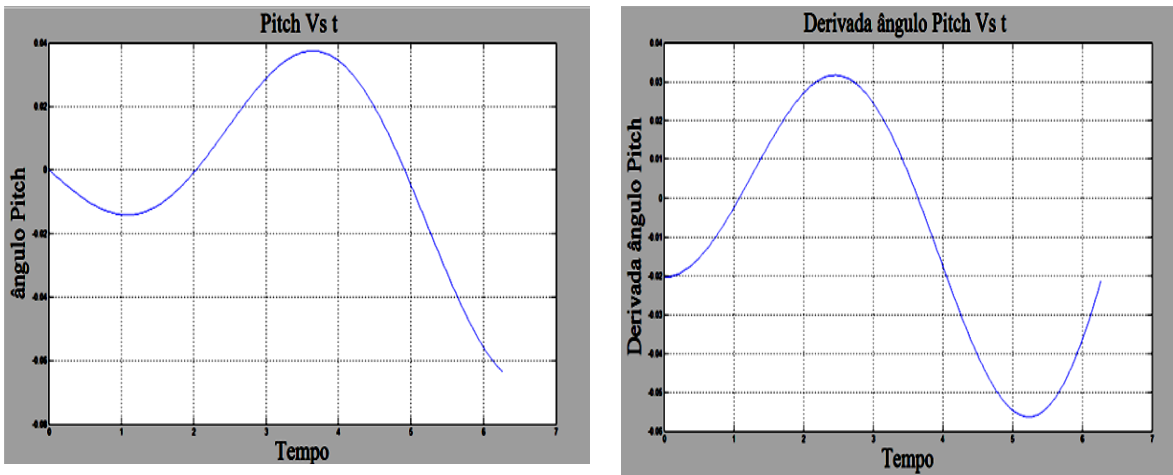
Como as três componentes no eixo X, Y e Z tem segundas derivadas mostradas na figura 5.2 . Então fazendo a substituição correspondente no eixo X o ângulo é representado pela figura (5-12):

$$\tan\phi = \frac{g}{b(2\sin(t) + t\cos(t))} \quad (5-11)$$

$$\phi = \arctan(g/(b(2\sin(t) + t\cos(t)))) \quad (5-12)$$

Derivando a equação (5-12), é obtida a equação (5-13), a qual é mostrada na figura 5.3:

$$\dot{\phi} = (gb(t \sin(t) - 2\cos(t)))/(b^2(\sin(t) + t\cos(t))^2 + g^2) \quad (5-13)$$



A)

B)

Figura 5.3. A) Representação do ângulo com relação do tempo, B) Representação da velocidade angular em relação ao tempo.

A figura 5.3A mostra o comportamento do ângulo pitch (arfagem), e a figura 5.3B representa a derivada da equação (5-12), representado a velocidade angular em função do eixo X.

## 5.2 ANÁLISE MATEMÁTICA PARA A ESPIRAL NO EIXO Y

Seja o sistema de forças no eixo Y representado pela equação (5-14), da mesma forma analisada para o eixo X, é feito o análise para o eixo Y para obter a equação (5-16):

$$\tan(\theta) = \frac{mg}{m\ddot{Y}} \quad (5-14)$$

$$\tan\theta = \frac{g}{b(2\cos(t) - t\sin(t))} \quad (5-15)$$

$$\theta = \arctan(g/(b(2\cos(t) - t\sin(t)))) \quad (5-16)$$

A derivada da função é definida como mostra a equação (5-28) e representada na figura 5.4:

$$\dot{\theta} = (gb(2\sin(t) - t\cos(t)))/(b^2(2\cos(t) - t\sin(t))^2 + g^2) \quad (5-17)$$

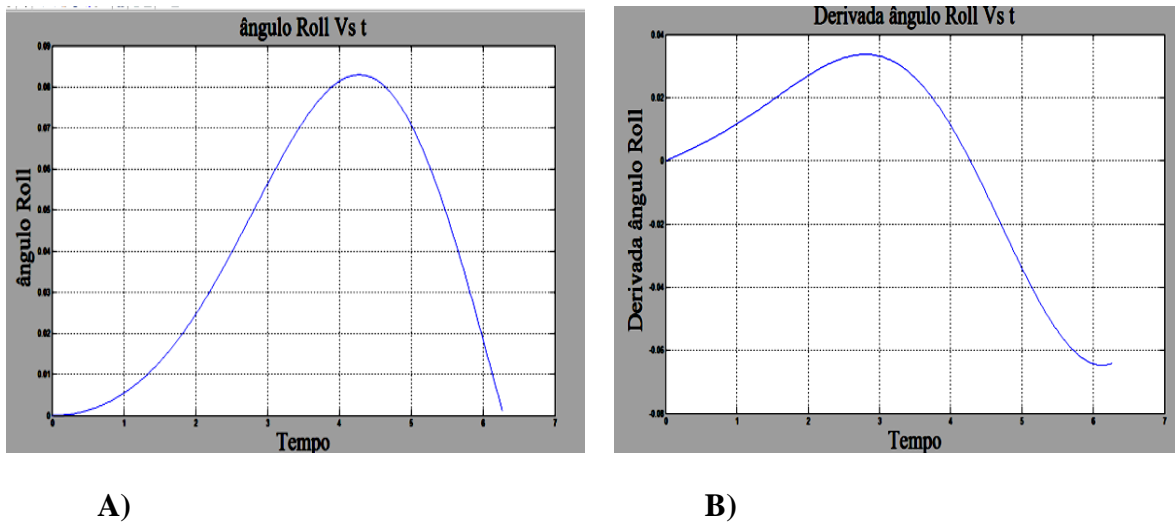


Figura 5.4. A) Representação do ângulo com relação do tempo, B) Representação da velocidade angular em relação ao tempo.

A figura 5.4 mostra o comportamento do ângulo e a velocidade angular em função do eixo Y para o ângulo *Roll* ( $\theta$ ) (rolagem), o movimento no eixo Y é oposto ao movimento no eixo X, agora como é conhecido o comportamento das velocidades angulares nos eixos X e Y, os quais são mostrados nas figuras 5.3 e 5.4, a figura 5.5 mostra o comportamento dos eixos (X-Y) em função da mudança das velocidades.

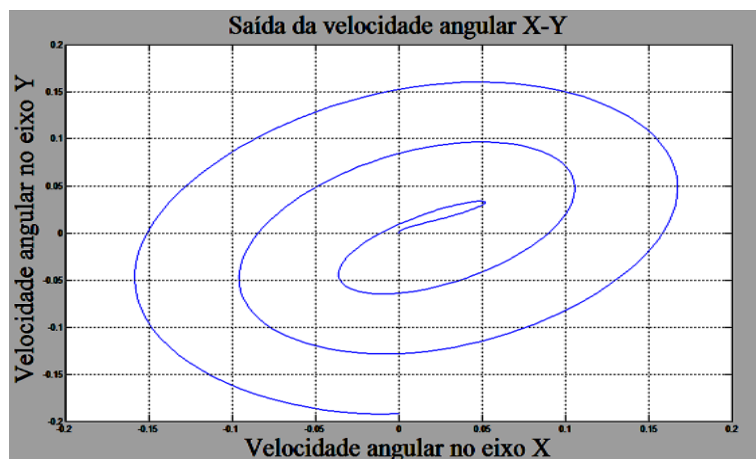


Figura 5.5: Relação das velocidades angulares nos eixos X e Y.

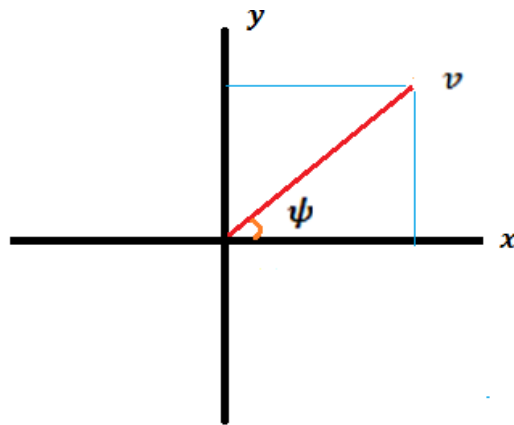
### 5.3. ANÁLISE MATEMÁTICA PARA A ESPIRAL NO EIXO Z.

Realizando o análises para o eixo Z, como a segunda derivada em relação no eixo Z é igual zero, o ângulo vai tender para  $90^\circ$  que é uma assíntota da função tangente, sendo assim de valor constante, como a velocidade angular é zero, é necessário fazer as análises



da velocidade linear, como a velocidade muda à medida que o tempo evolui, por tanto a espiral cresce, além disso, a análise é a mesma feita antes para encontrar os ângulos nos diferentes eixos, como a trajetória que faz a descrição do movimento foi apresentada na equação (5-10).

O movimento que mostra a velocidade no espaço é representado como mostra a figura 5.6:



$$\|V\| = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (5-18)$$

$$\psi = \text{arccotan}\left(\frac{Y}{X}\right) \quad (5-19)$$

Figura 5.6: Representação da velocidade linear em função do plano XY.

Na figura 5.6 pode-se observar a velocidade linear com relação no plano XY, a qual é representada pela equação (5-18) e o ângulo feito com relação aos eixos na equação (5-19), então a velocidade linear é definida como apresenta equação (5-21), e o valor do ângulo é representado pela equação (5-24).

$$\|V\| = \sqrt{(bt\cos(t))^2 + (bt\sin(t))^2} \quad (5-20) \quad \psi = \text{arccotan}\left(\frac{bt\sin(t)}{bt\cos(t)}\right) \quad (5-22)$$

$$\|V\| = bt \quad (5-21) \quad \psi = \text{arccotan}(\tan(t)) \quad (5-23)$$

$$\psi = t \quad (5-24)$$

Pode-se observar na equação (5-24), que o valor do ângulo corresponde à reta dependente do tempo, a qual está limitada pelas condições iniciais, e a velocidade angular é determinada pela derivada da reta, a qual corresponde um valor constante.

## 6. ANALISE ESTOCASTICO DO SISTEMA.

Nos capítulos anteriores o trabalho foi baseado na modelagem do sistema quadrimotor, na construção das trajetórias planejadas, na identificação das técnicas de controle que se pode aplicar ao sistema para sua manipulação e a definição do sistema de controle em malha aberta do quadrimotor.

Nesta seção, será estudado um modelo que representa o sistema de forma geral, enfocando a análise de um ponto de vista estatístico, iniciando com a análise dos parâmetros do controlador PID e sua influencia no cálculo da variância do sistema, seguidamente é projetado um controle com pólos iguais o qual é utilizado para a verificação do sistema, É controlado as velocidades de entrada ao quadrimotor, posteriormente é analisado o comportamento do parâmetro derivativo variável no sistema, o valor esperado da função erro é analisada para o calcula da variância e finalmente é apresentado um modelo em malha fechada para a verificação dos parâmetros do controlador projetado. A figura 6.1 apresenta a primeira aproximação do sistema em malha aberta que descreve a dinâmica do quadrimotor.

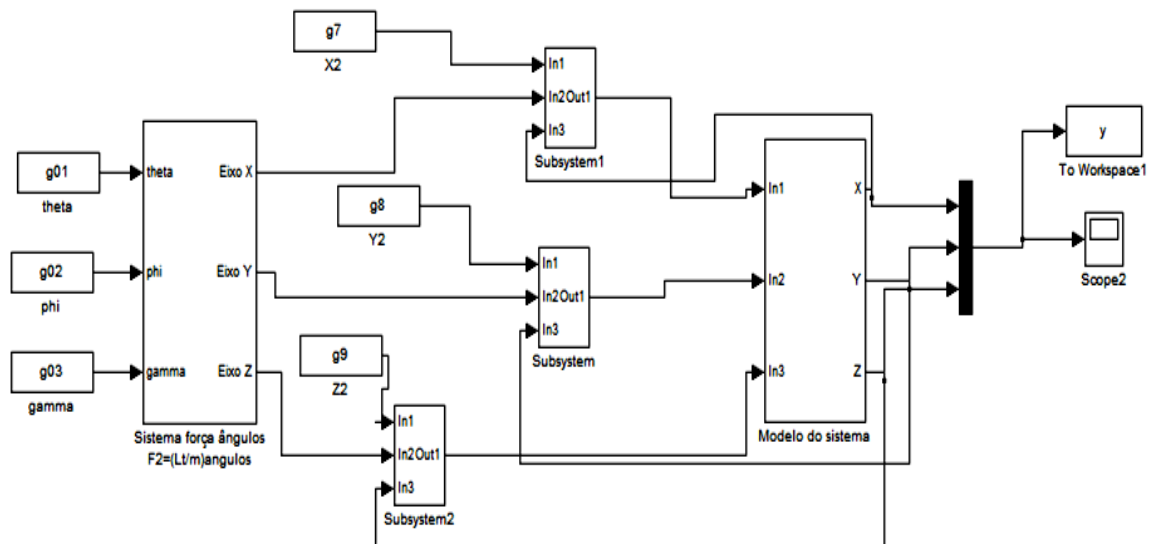


Figura 6.1. Representação general do sistema quadrimotor

A figura 6.1 mostra um bloco correspondente ao sistema geral de ângulos de Euler que fazem a descrição da rotação em cada eixo. Para realizar as provas do sistema foi implementada uma trajetória em espiral como foi falado no capítulo 5 em relação a cada um dos eixos. A figura 6.1 mostra os subsistemas g7, g8 y g9, que correspondem as entradas planejadas do sistema, o último bloco corresponde à descrição da planta

apresentada no capítulo dois, onde a saída é independente para um dos eixos, esta saída é representada pela figura 6.2:

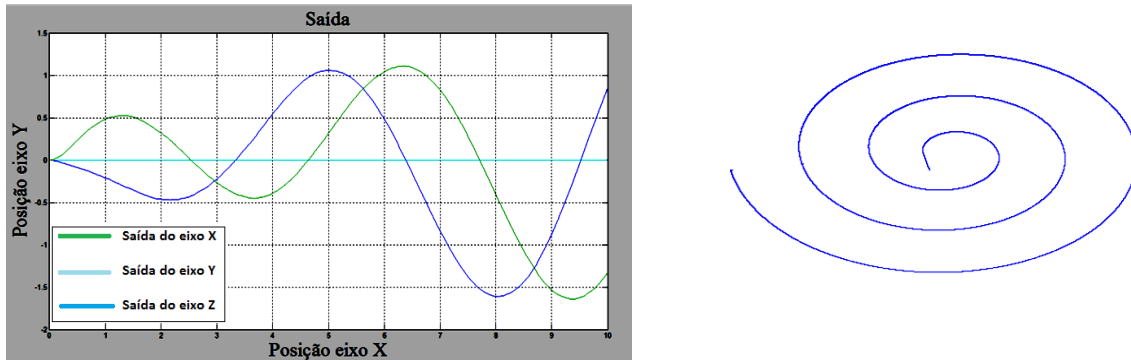


Figura 6.2: A) saída correspondente nos eixo X e Y. B) Saída combinada do sistema

A figura 6.2 A. mostra a saída correspondente para cada um dos eixos, X (verde), Y(azul) e Z (azul claro), onde relacionando os eixos X e Y é obtida a figura 6.2 B, assim realizando as mudanças no sistema geral baseados nos requerimentos do sistema, o quadrimotor têm um programa de aquisição de dados que requer como entrada três velocidades nos eixos X,Y, Z e rotação no eixo Z, para obter na saída duas velocidades nos eixos X e Y, a altitude e três ângulos, a figura 6.3 mostra o sistema com as mudanças feitas.

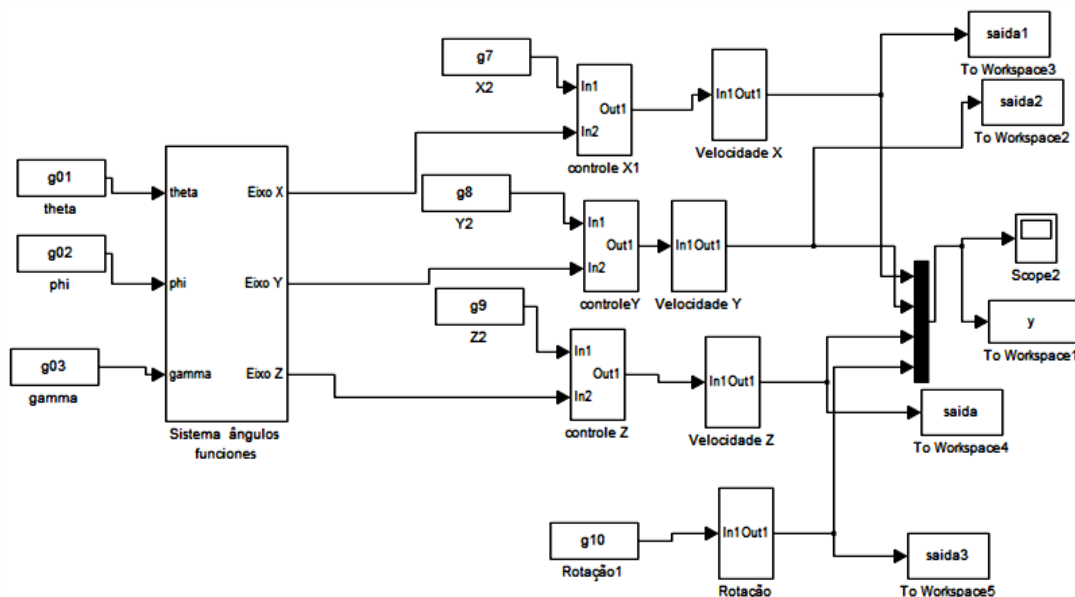


Figura 6.3: Sistema general do quadrimotor modificado

A figura 6.1 apresentou um sistema onde às saídas são posições da trajetória espiral, dado que se precisam velocidades, são adicionados blocos que fazem a conversão da posição em velocidade para cada um dos eixos como é mostrado na figura 6.3. O

controle envolvido no sistema para manipulação das posições e das velocidades é um controle PD de pólos iguais similar ao projetado no capítulo 4, como será falado posteriormente.

Adicionalmente a figura 6.3 relaciona as entradas requeridas do quadrimotor, com as saídas requeridas pelo sistema, onde a rotação é obtida da seguinte forma:

$$\|V\| = bt ; V = \omega r$$

A velocidade angular no eixo Z é representada pela equação (6-1):

$$\frac{bt}{r} = \omega \quad (6-1)$$

Para efeitos de simulação a constante b foi assumido com valor unitário, então o valor da velocidade angular no eixo Z tem o mesmo valor numérico que o tempo. A figura 6.4 mostra a saída do sistema:

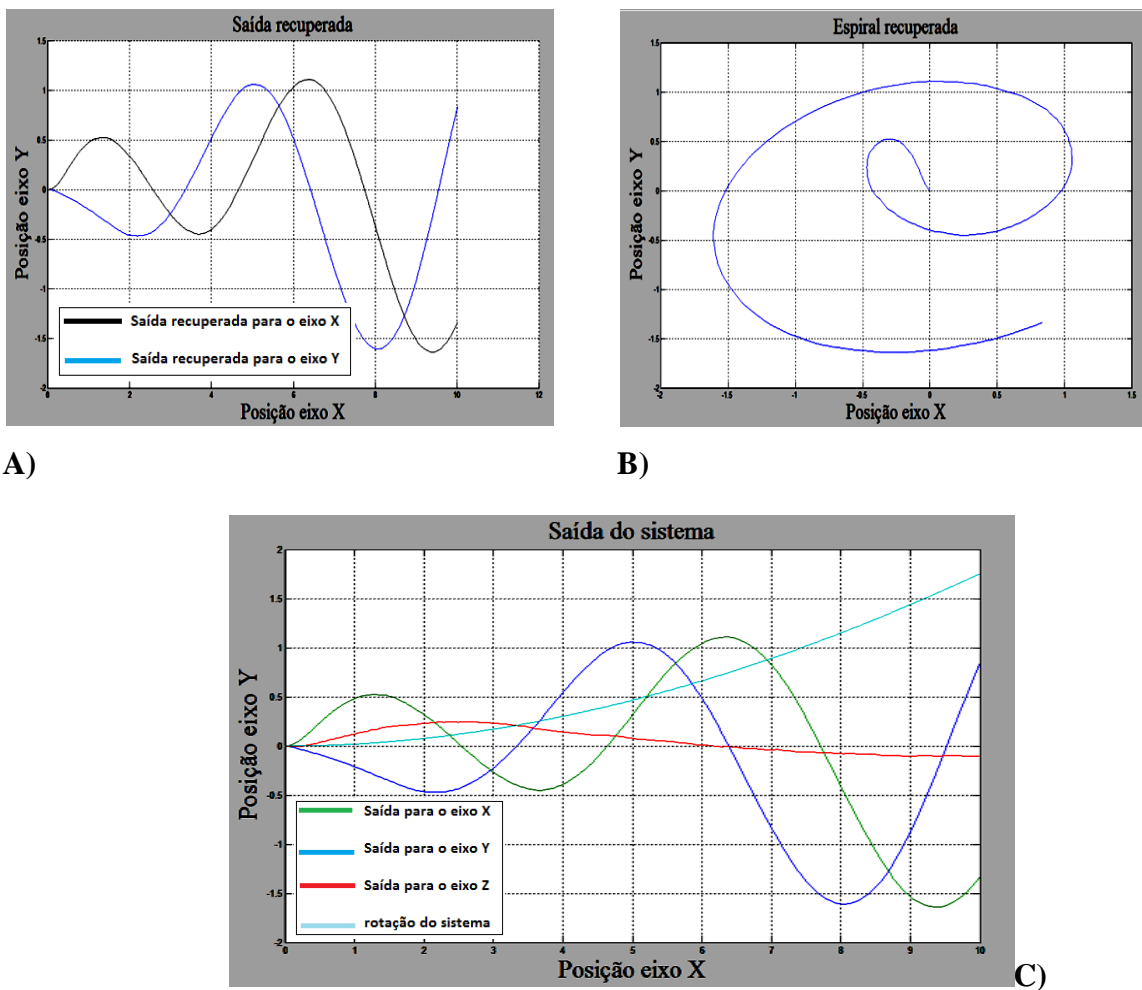


Figura 6.4. A) Resposta do sistema experimental, B) resposta de saída do eixo X e Y. C) Saída do sistema

A figura 6.4A mostra a saída do sistema, onde são recuperados os dados de velocidade nos três eixos para ser testados mediante um tempo de amostragem de 0.003s. Na figura 6.4 C, mostra a saída do sistema a qual é idêntica à saída recuperada mostrada na figura 6.4 A. Adicionalmente são perceptíveis três cores, a figura da cor verde corresponde ao eixo X, à figura da cor azul corresponde ao eixo Y e a figura da cor vermelha corresponde ao eixo Z, à rotação do sistema é mostrada na figura da cor azul claro, além de isso a saída combinada do sistema é em forma de espiral como mostra a figura 6.4 B.

Tendo o sistema pronto para ser trabalhado, os dados serão enviados no programa do quadrimotor onde vão ser testadas as trajetórias geradas, e as saídas medidas vão ser três velocidades as quais serão analisados para a conclusão do trabalho.

### 6.1 VARIÂNCIAS NA SAÍDA DO SISTEMA PARA O CONTROLE PID.

O objetivo nesta seção é fazer a análise da variância do sistema em função do controlador, dado que o propósito fundamental é a construção de um controlador a partir da estatística do sistema, a figura 4.4 mostra o modelo trabalhado para fazer as análises. O sistema analisado é um sistema de velocidade o qual é mostrado na figura 6.5. Inicialmente a análise é feita mediante a projeção do controle PID, com a finalidade de identificar quais parâmetros do controlador são significativos no cálculo da variância em presença de uma perturbação de ruído Gaussiano.

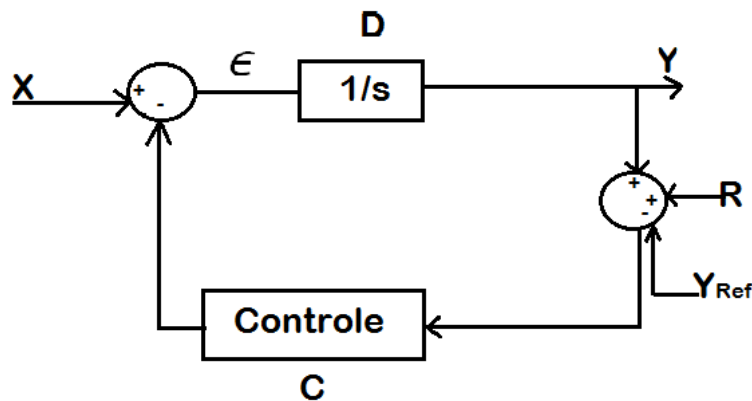


Figura 6.5. Sistema de controle para velocidade

A relação que descreve matematicamente o sistema anterior é mostrada a seguir:

$$Y = \epsilon * D \qquad Y = \left( X - C * (Y + R - Y_{Ref}) \right) * D$$

$$\epsilon = X - C * (Y + R - Y_{Ref}) \quad Y(1 + CD) = DX - CDR + CDY_{Ref}$$

$$Y = \frac{D}{(1 + CD)}X - \frac{CD}{(1 + CD)}R + \frac{CD}{(1 + CD)}Y_{Ref} \quad (6-2)$$

Como:

$$Y_{Ref} = XD^*$$

Onde:

$Y_{Ref}$  Saída de referência.

$R$  Ruído Gaussiano.

$X$  Entrada do sistema.

$C$  Controlador

$Y$  Saída do sistema.

$D$  Sistema.

Então o sistema fica como mostra a equação (6-3).

$$Y = \frac{(1 + CD^*)}{(1 + CD)}DX - \frac{CD}{(1 + CD)}R \quad (6-3)$$

Como :

$$D^* = D$$

Então o sistema geral é representado pela equação (6-4).

$$Y = DX - \frac{CD}{(1 + CD)}R \quad (6-4)$$

Da equação anterior, pode-se observar que a resposta do sistema está em função da entrada planejada e o ruído, onde o sistema com relação ao ruído tem ganho unitário, para a análise da variância é considerado a presença do ruído como mostra a equação (6-5).

$$\frac{Y}{R} = -\frac{CD}{(1 + CD)} \quad (6-5)$$

Como

$$D = \frac{1}{s} \quad C = \frac{Kds^2 + Kps + ki}{s(\beta s + 1)} \quad (6-6)$$

Para  $\beta \ll 1$ , onde  $\beta$  é o valor do filtro da primeira ordem e substituindo os parâmetros do controlador e a planta, o sistema no domínio de Laplace é representado pela equação (6-7)

$$\frac{Y}{R} = -\frac{Kds^2 + Kps + ki}{s^2(Kd + 1) + Kps + Ki} \quad (6-7)$$

Dividindo a equação (6-7) por  $\frac{1}{(Kd+1)}$ , é obtido o sistema da equação (6-8):

$$\frac{Y}{R} = -\frac{\frac{Kd}{(Kd+1)}s^2 + \frac{Kp}{(Kd+1)}s + \frac{ki}{(Kd+1)}}{s^2 + \frac{Kp}{(Kd+1)}s + \frac{Ki}{(Kd+1)}} \quad (6-8)$$

Onde

$$a = \frac{Kp}{(Kd+1)} \quad b = \frac{Ki}{(Kd+1)} \quad c = \frac{Kd}{(Kd+1)}$$

Então o sistema em função das constantes a,b e c é representado pela equação (6-9):

$$\frac{Y}{R} = -\frac{cs^2 + as + b}{s^2 + as + b} \quad (6-9)$$

Relacionando a equação anterior com o modelo discretizado, mediante transformada delta, a qual apresenta as seguintes características:

- Minimizar os erros causados por truncamento e arredondamento numérico, típicos de processadores de ponto [23].
- Aproximar o modelo matemático de um sistema discreto a de um sistema contínuo [23].
- Apresentar pequenos erros de discretização quando a frequência de amostragem é muito maior que a frequência de operação do sistema [23].

A Transformada delta esta definida como mostra a equação (6-10) [23]:

$$\delta f(KT) = \frac{f(k+1)T - f(KT)}{T} = \frac{z-1}{T} \quad (6-10)$$

Onde:

$T$  É o tempo de amostragem, então o estado anterior é definido como:

$$f(KT) = \frac{f(KT) - f(k-1)T}{T} = \frac{1-z^{-1}}{T} \quad (6-11)$$

Então o valor do parâmetro no domínio de Laplaces, no estado anterior é:

$$s = \frac{z-1}{zT}$$

Agora substituindo o valor de  $s$  na função de transferência tem-se a equação (6-12):

$$\frac{Y}{R} = - \frac{c\left(\frac{z-1}{zT}\right)^2 + a\left(\frac{z-1}{zT}\right) + b}{\left(\frac{z-1}{zT}\right)^2 + a\left(\frac{z-1}{zT}\right) + b} \quad (6-12)$$

O sistema pode-se escrever como mostra a equação (6-13):

$$\frac{Y}{R} = - \frac{z^3(Tc + aT^2 + bT^3) - z^2(2Tc + aT^2) + Tcz}{z^3(T + aT^2 + bT^3) - z^2(2T + aT^2) + Tz} \quad (6-13)$$

As novas constantes em função dos parâmetros do controlador são:

$$d = (Tc + aT^2 + bT^3) = \frac{TKd}{(Kd+1)} + \frac{T^2Kp}{(Kd+1)} + \frac{T^3Ki}{(Kd+1)}$$

$$e = (2Tc + aT^2) = \frac{2}{(Kd+1)}(TKd + T^2Kp)$$

$$f = (T + aT^2 + bT^3) = T + \frac{T^2}{(Kd+1)}(Kp + TKi)$$

$$g = (2T + aT^2) = 2T + \frac{T^2Kp}{(Kd+1)}$$

Simplificando o sistema mediante a substituição dos parâmetros anteriores tem-se:

$$\frac{Y}{R} = - \frac{dZ^2 - eZ + cT}{fZ^2 - gZ + T} \quad (6-14)$$



A equação (6-14) apresenta um polinómio discreto de segunda ordem no denominador, onde a solução dele é baseada no desenvolvimento matemático de um sistema semelhante como é apresentado no apêndice 1, a solução obtida para dito sistema é apresentado nas equações (6-15) e (6-16):

$$\frac{y_2(n)}{x(n)} = \left(\frac{k}{z+a}\right) \left(\frac{1}{z+\bar{a}}\right) \quad (6-15)$$

Onde:

$a$  É uma variável relacionada com o pólo do sistema.

$\bar{a}$  É uma variável relacionada com o pólo do sistema.

$k$  É uma constante do sistema.

$y_2(n)$  Saída do sistema de segunda ordem.

$x(n)$  Entrada do sistema.

A solução pode-se escrever como mostra a equação (6-16):

$$\left(\frac{k}{z+a}\right) \left(\frac{1}{z+\bar{a}}\right) = \frac{k \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \bar{a}^j \dot{a}^{(i-j)} x(n-2-i)}{x(n)} \quad (6-16)$$

Com:

$$\dot{\bar{a}} = -\bar{a}$$

$$\dot{a} = -a$$

Então o sistema mostrado na equação (6-14), considerando as equações (6-15) e (6-16), pode ser representado pela equação (6-17):

$$\frac{Y}{R} = -\frac{\frac{d}{f}Z^2 - \frac{e}{f}Z + \frac{cT}{f}}{Z^2 - \frac{g}{f}Z + \frac{T}{f}} = -\frac{\frac{d}{f}Z^2}{Z^2 - \frac{g}{f}Z + \frac{T}{f}} + \frac{\frac{e}{f}Z}{Z^2 - \frac{g}{f}Z + \frac{T}{f}} - \frac{\frac{cT}{f}}{Z^2 - \frac{g}{f}Z + \frac{T}{f}} \quad (6-17)$$

O qual pode-se escrever como mostra a equação (6-18):

$$\frac{Y}{R} = -Z^2 \left(\frac{\frac{d}{f}}{z+a}\right) \left(\frac{1}{z+\bar{a}}\right) + Z \left(\frac{\frac{e}{f}}{z+a}\right) \left(\frac{1}{z+\bar{a}}\right) - \left(\frac{\frac{cT}{f}}{z+a}\right) \left(\frac{1}{z+\bar{a}}\right) \quad (6-18)$$

Analogamente para o sistema feito no apêndice 1, o sistema da equação (6-18) tem a mesma forma que o sistema mostrada a equação (6-16), então a solução pode ser

representada mediante a multiplicação da resposta geral pelos fatores de avanço, obtendo-se assim a seguinte resposta:

$$\begin{aligned}
-Z^2 \left( \frac{d}{f} \right) \left( \frac{1}{z+a} \right) &= - \frac{d \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \dot{\bar{a}}^j \dot{a}^{(i-j)} x(n-i)}{x(n)} \\
Z \left( \frac{e}{f} \right) \left( \frac{1}{z+a} \right) &= \frac{e \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \dot{\bar{a}}^j \dot{a}^{(i-j)} x(n-1-i)}{x(n)} \\
- \left( \frac{cT}{f} \right) \left( \frac{1}{z+a} \right) &= - \frac{cT \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \dot{\bar{a}}^j \dot{a}^{(i-j)} x(n-2-i)}{x(n)}
\end{aligned}$$

Para o sistema trabalhado, o valor de  $x(n) = R(n)$ , substituindo os termos tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{y_2(n)}{R(n)} &= - \frac{d \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \dot{\bar{a}}^j \dot{a}^{(i-j)} x(n-i)}{R(n)} + \frac{e \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \dot{\bar{a}}^j \dot{a}^{(i-j)} x(n-1-i)}{R(n)} \\
&\quad - \frac{cT \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \dot{\bar{a}}^j \dot{a}^{(i-j)} x(n-2-i)}{R(n)} \tag{6-19}
\end{aligned}$$

A equação (6-19), mostra no sistema o termo de  $R(n)$ , o qual é cancelado, dependendo assim somente do estado anterior da entrada X como mostra a equação (6-20).

$$\begin{aligned}
y_2(n) &= - \frac{d}{f} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \dot{\bar{a}}^j \dot{a}^{(i-j)} x(n-i) + \frac{e}{f} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \dot{\bar{a}}^j \dot{a}^{(i-j)} x(n-1-i) \\
&\quad - \frac{cT}{f} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \dot{\bar{a}}^j \dot{a}^{(i-j)} x(n-2-i) \tag{6-20}
\end{aligned}$$

A equação (6-20) pode-se escrever como apresenta a equação (6-21):

$$\begin{aligned}
y_2(n) &= - \frac{d}{f} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \left( \frac{\dot{\bar{a}}}{\dot{a}} \right)^j \dot{a}^i x(n-i) + \frac{e}{f} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \left( \frac{\dot{\bar{a}}}{\dot{a}} \right)^j \dot{a}^i x(n-1-i) \\
&\quad - \frac{cT}{f} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \left( \frac{\dot{\bar{a}}}{\dot{a}} \right)^j \dot{a}^i x(n-2-i) \tag{6-21}
\end{aligned}$$

Como a equação (6-21), depende de somatórios, é preciso conhecer algumas propriedades fundamentais que possam ajudar a reescrever a equação anterior de forma reduzida, ditas propriedades são as seguintes:

$$\sum_{j=0}^i (l)^j = \frac{1 - l^{i+1}}{1 - l} \quad (6-22)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (l)^j = \frac{1}{1 - l} \quad (6-23)$$

Aplicando as propriedades anteriores aos somatórios da equação (6-21) tem-se:

$$\sum_{j=0}^i \left(\frac{\dot{a}}{\ddot{a}}\right)^j = \frac{1 - \left(\frac{\dot{l}}{\ddot{l}}\right)^{i+1}}{1 - \left(\frac{\dot{l}}{\ddot{l}}\right)} = \frac{\dot{l}^{i+1} - \ddot{l}^{i+1}}{\frac{\dot{l}^i}{\ddot{l}}} \quad (6-24)$$

Onde:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \left(\frac{\dot{l}}{\ddot{l}}\right)^j \dot{l}^i = \sum_{i=0}^{\infty} \dot{l}^i \frac{\dot{l}^{i+1} - \ddot{l}^{i+1}}{\frac{\dot{l}^i}{\ddot{l}}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\dot{l}^{i+1} - \ddot{l}^{i+1}}{\dot{l} - \ddot{l}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b^i}{\dot{l} - \ddot{l}} \quad (6-25)$$

Então:

$$b^i = \dot{l}^{i+1} - \ddot{l}^{i+1} \quad (6-26)$$

Substituindo no sistema a equação (6-21) tem-se a equação (6-28):

$$y_2(n) = \frac{1}{(\dot{a} - \ddot{a})f} \left( -d \sum_{i=0}^{\infty} b^i x(n-i) + e \sum_{i=0}^{\infty} b^i x(n-1-i) - cT \sum_{i=0}^{\infty} b^i x(n-2-i) \right) \quad (6-27)$$

$$y_2(n) = \frac{1}{(\dot{a} - \ddot{a})f} \left( -dx(n) + x(n-1)(-bd + e) + e \sum_{i=2}^{\infty} (-db^i + eb^{i-1} - cb^{i-2})x(n-i) \right) \quad (6-28)$$

Pode-se observar na equação (6-28) que o sistema depende de uma série de termos que estão somados, por tanto é importante ter a sequência deles, para tal caso e feito o proceso mostrado no apendice 1, onde a sequência para cada estado até o sexto termo é mostrado a seguir:

$$x(n) = -d$$

$$x(n-1) = -db + eb^0$$

$$x(n-2) = -db^2 + eb - cT = b^0(-db^2 + eb - cT)$$

$$x(n-3) = -db^3 + eb^2 - cTb = b^1(-db^2 + eb - cT)$$

$$x(n-4) = -db^4 + eb^3 - cTb^2 = b^2(-db^2 + eb - cT)$$

$$x(n-5) = -db^5 + eb^4 - cTb^3 = b^3(-db^2 + eb - cT)$$

$$x(n-6) = -db^6 + eb^5 - cTb^4 = b^4(-db^2 + eb - cT)$$

Então relacionando os termos anteriores, com o objetivo de representa-los em forma de série, pode-se analisar de forma recursiva a saída do sistema é representado mediante o estado atual e anterior da entrada, assim o sistema de forma geral pode ser representado como mostra a equação (6-29) :

$$y_2(n) = \frac{1}{(\dot{a} - \ddot{a})f} \left[ (-db^2 + eb - cT) \sum_{i=0}^{\infty} b^i x(n-2-i) + (-db + e)x(n-1) - dx(n) \right] \quad (6-29)$$

A equação (6-29) tem uma característica importante, que o estado da saída somente depende do estado da entrada, não dos estados passados da propia saída, esta propriedade é conhecida como Markoviana [24], na composição da equação anterior pode-se analisar como uma distribuição de cadeia Markoviana, onde uma cadeia é um processo estocástico no qual o tempo é movimentado em forma discreta, e a variável aleatória só toma valores discretos no espaço de estados e obedecendo as propriedades Markovianas [24].

É dito que um processo cumpre com a propriedade de Markov quando a historia passada do processo pode-se resumir na posição atual que está ocupando o processo, para fazer o cálculo de probabilidade para mudar ao outro estado, ou em outras palavras os estados passados de um processo não influenciam o estados atuais, então, o valor atual do processo, é a única informação necessária para fazer a melhor estimação do valor futuro[24]. Se um processo satisfaz tal regra e é movimentado de forma discreta no tempo é chamado de cadeia de Markov (CM). Formalmente um processo estocástico em tempo discreto é representado como  $X_n \geq 0$  [25], onde a cadeia de Markov fica definida como mostra equação (6-30) [25]:

$$P(X_n = x_n | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) \quad (6-30)$$

Outra forma de escrever a propriedade de transição é da forma seguinte:

$$P_r(X_n = j | X_{n-1} = i) = p_{ij}(n) \quad (6-31)$$

Uma propriedade muito importante que pode ter uma cadeia é que os valores de  $p_{ij}(n)$ , não dependem do valor de  $n$ , o que significa que a probabilidade de mudar de estado é a mesma em qualquer instante, o qual é conhecido como propriedades de transição estacionárias. Um processo estocástico cujas características estatísticas não variam com o tempo, é dito como um processo estocástico estacionário. Mas se suas características mudam com o tempo diz-se que não é estacionário [26]. Um processo estacionário pode-se classificar em estritamente estacionário e estacionário em sentido lato (ou estacionário de segunda ordem) [26].

### 6.1.1. Estritamente estacionário.

Quando suas estatísticas não são afetadas por variações devido à escolha da origem dos tempos, ou seja, quando as séries  $x_t$ , e  $x_{t+1}$ , estão distribuídas identicamente, qualquer que seja  $k$ , então a função densidade de probabilidade de um processo estritamente estacionário deve ser tal que permaneça idêntica quando se varia a origem dos tempos [26], ou seja:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_t, t_1, t_2, \dots, t_t) = F(x_1, x_2, \dots, x_t, t_{1+k}, t_{2+k}, \dots, t_{t+k}) \quad (6-32)$$

Para quaisquer  $t_1, t_2, \dots, t_t, \in T$  e  $k$ .

### 6.1.2 Estacionária em sentido lato (ou estacionário de segunda ordem).

Quando a sua função valor médio é constante e sua função de covariância depende somente da diferença, em valor absoluto, de  $t_s - t_j$ , um processo é estacionário em sentido lato se suas condições envolvem somente momentos de primeira e segunda ordem. Mas se o processo for gaussiano e estacionário em sentido lato, ele será estritamente estacionário, devido ao fato de a distribuição normal é determinada unicamente em termos do primeiro e do segundo momento [26].

Sendo o processo estacionário Gaussiano suas condições estatísticas são:

$$\mu_t = \mu$$

$$\sigma_t^2 = \sigma^2$$

$$cov(t, t + j) = cov(s, s + j)$$

A importância de saber se o processo é estacionário ou não reside em que quando se trabalha com uma série estacionária, a série do processo tem a mesma forma em todos os instantes de tempo  $t \in T$ , o que faz as estimativas das características do processo bastante simples.

Voltando à equação (6-21), e analisando as propriedades faladas para os processos Markovianos,  $y_2(n)$ , pode ser considerado como uma cadeia de Markov, que é afetada por um ruído branco, o qual apresenta media zero e variancia  $\delta^2$ .

O sistema geral da equação (6-21), apresenta as seguintes características para cada estado de tempo:

$$\mu_n = E(x_n), \quad n = 0, 1, 2 \dots \dots \quad (6-33)$$

$$\sigma_n^2 = Var(x_n) = E(x_n^2) - \mu_n^2, \quad n = 0, 1, 2 \dots \dots \quad (6-34)$$

Dado que a variância é independente dos estados anteriores e é calculada para cada estado atual, então pode-se representar da seguinte forma:

$$Var[x(n)] = Var[x(n-1)] = Var[x(n-2)] = \sigma^2 \quad (6-35)$$

Aplicando as variâncias da equação (6-35), à equação (6-21) tem-se equação (6-36):

$$\begin{aligned} \llbracket Var[y]_2(n) \rrbracket = Var \left[ \frac{1}{(a - \bar{a})f} \left[ (-db^2 + eb - cT) \sum_{i=0}^{\infty} b^i x(n-2-i) \right. \right. \\ \left. \left. + (-db + e)x(n-1) - dx(n) \right] \right] \quad (6-36) \end{aligned}$$

Onde pode ser representada como mostra a equação (6-37):

$$\begin{aligned} \text{var}[y_2(n)] = & \left( \frac{1}{(\dot{a} - \bar{a})f} \right)^2 \sigma^2 \left[ (-db^2 + eb - cT)^2 \left( \sum_{i=0}^{\infty} b^i \right)^2 \right. \\ & \left. + (-db + e)^2 + (-d)^2 \right] \end{aligned} \quad (6-37)$$

Da equação (6-26), tem-se os parâmetros das variáveis relacionadas com os pólos do sistema da seguinte forma:

$$b^0 = \dot{a}^1 - \bar{a}^1$$

$$b^1 = \dot{a}^2 - \bar{a}^2$$

$$b^2 = \dot{a}^3 - \bar{a}^3$$

Aplicando a propriedade da somatoria mostrada na equação (6-26) tem-se:

$$\sum_{i=0}^{\infty} b^i = \frac{1}{1-b} = \frac{1}{1-(\dot{a}^2 - \bar{a}^2)} \quad (6-38)$$

Substituindo a equação (6-38), e os parâmetros das variáveis relacionadas com os pólos do sistema na equação (6-37), a variancia do sistema é dada pela equação (6-39):

$$\begin{aligned} \text{var}[y_2(n)] = & \left( \frac{1}{(\dot{a} - \bar{a})f} \right)^2 \sigma^2 \left[ -d(\dot{a}^3 - \bar{a}^3) + e(\dot{a}^2 - \bar{a}^2) \right. \\ & \left. - cT(\dot{a} - \bar{a})^2 \left( \frac{1}{1 - (\dot{a}^2 - \bar{a}^2)} \right)^2 \right. \\ & \left. + (-d(\dot{a}^2 - \bar{a}^2) + e(\dot{a} - \bar{a}))^2 + (-d(\dot{a} - \bar{a}))^2 \right] \end{aligned} \quad (6-39)$$

Observando a equação (6-39), esta depende dos parâmetros  $\dot{a}$  e  $\bar{a}$ , e estes parâmetros dependem diretamente das constantes do controlador, então:

$$\begin{aligned} Z^2 - \frac{g}{f}Z + \frac{T}{f} &= (z + a)(z + \bar{a}) = Z^2 + Z(a + \bar{a}) + a\bar{a} \\ a + \bar{a} &= \frac{g}{f} \end{aligned} \quad (6-40)$$

$$a\bar{a} = \frac{T}{f} \quad (6-41)$$

Fazendo o cálculo dos parâmetros  $\hat{a}$  e  $\bar{a}$ , é obtido o comportamento da variância com relação à mudança dos parâmetros do controlador. Para efeitos de simulação o tempo de amostragem foi considerado de 0.1 s e o valor de  $\sigma^2 = 1$ , A tabela 6.1 e a figura 6.6 mostram os resultados obtidos.

Tabela 6.1. Obtenção da variância do sistema partindo dos parâmetros do controlador PID

<b>Kp</b>	<b>Kd</b>	<b>Ki</b>	<b>Variância</b>
<b>0.5</b>	<b>1.0</b>	<b>0.0795</b>	<b>0.2640</b>
0.9	1.0	0.0795	0.2768
0.1	1.0	0.0795	0.2527
0.5	1.5	0.0795	0.3707
0.5	0.5	0.0795	0.1280
0.5	1.0	0.0845	0.2640
0.5	1.0	0.0745	0.2640

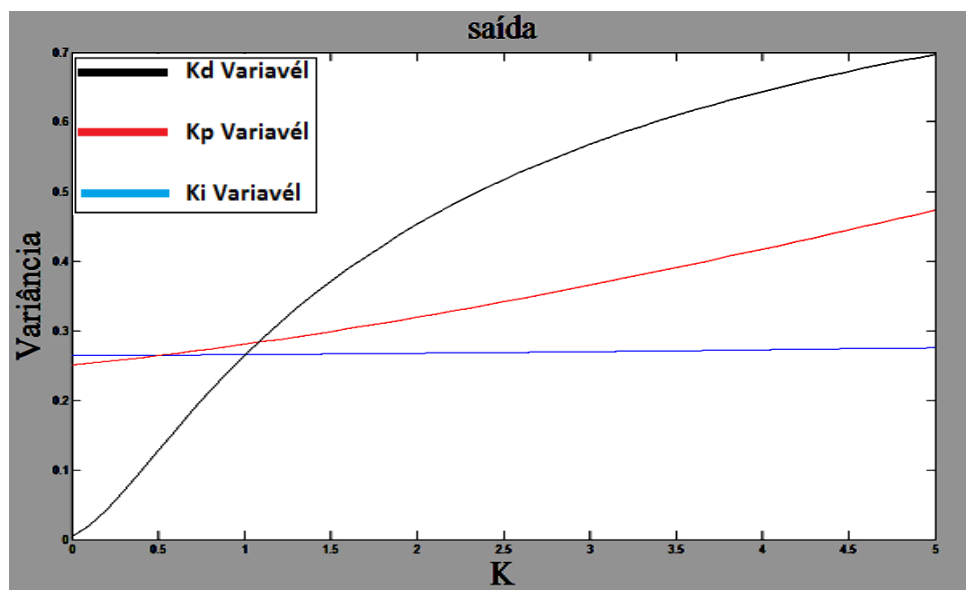


Figura 6.6 Comportamento da variância em relação à mudança dos parâmetros do controlador.



A tabela 6.1 apresenta a variância do sistema em relação à mudança dos diferentes parâmetros do controlador, a primeira coluna mostra a variação do parâmetro proporcional, a segunda coluna mostra a variação do parâmetro derivativo e a terceira coluna mostra a variação do parâmetro integral. Pode-se analisar que o parâmetro que permitiu uma mudança maior no cálculo da variância foi o parâmetro derivativo, seguido do parâmetro proporcional e adicionalmente pode-se observar, que a variação do termo integral não teve praticamente efeito no cálculo da variância do sistema.

A figura 6.6, representa de forma clara as mudanças dos parâmetros do controlador em relação à variância do sistema, no eixo horizontal da figura 6.6 é observado um valor de  $K$ , o qual representa as diferentes mudanças feitas para os diferentes parâmetros do controlador (Proporcional, derivativo e integral), os parâmetros foram mudados numa faixa de (0-5), de maneira independente.

A figura 6.1 a cor preta apresenta a mudança só do parâmetro derivativo em função da variância do sistema, a figura da cor vermelha apresenta a mudança do parâmetro proporcional em função da variância do sistema quando os outros parâmetros são constantes, e finalmente a figura da cor azul representa mudança do parâmetro integral em função da variância do sistema. Pode-se analisar que efetivamente a variância do sistema é sensível as mudanças dos parâmetros derivativos e proporcionais, como foi apresentado na tabela 6.1 e como foi corroborado na figura 6.6.

Dado que o termo integral não é fundamental para o cálculo da variância no sistema, este parâmetro é tirado do controlador, de maneira que o controle fique simplificado e possa ser analisado de maneira mais simples. Com as mudanças feitas na próxima seção é projetado um controle PD de polos iguais para determinar a variância do sistema em função dos pólos inseridos ao sistema.

## **6.2 VARIÂNCIA DO CONTROLE PD DE PÓLOS IGUAIS COM UM $\beta \neq 0$ .**

Nesta seção é realizada a análise da variância do controlador PD, em função de  $\beta$ , que é a variável que limita a parte derivativa mediante a incorporação de um filtro de primeira ordem, limitando assim amplificação do ruído para altas frequências, com o objetivo de conhecer a influencia de  $\beta$  e o ruído do sistema, e fazendo assim a estimação dos parâmetros do controlador a partir dos pólos do sistema. A figura 6.6 mostra o sistema

geral trabalhado, onde são realizando as mudanças com relação ao controlador, como apresenta a equação (6-42):

$$\frac{Y}{R} = - \frac{Kds + Kp}{\beta s^2 + s(Kd + 1) + Kp} \quad (6-42)$$

Com  $\beta$  em evidência tem-se a equação (6-43):

$$\frac{Y}{R} = - \frac{\frac{Kd}{\beta} s + \frac{Kp}{\beta}}{s^2 + s \frac{(Kd + 1)}{\beta} + \frac{Kp}{\beta}} \quad (6-43)$$

Onde:

$$c = \frac{Kd}{\beta} \qquad d = \frac{Kp}{\beta}$$

Como o controle é baseado num sistema de pólos iguais fazendo a transformação seguinte à função de transferência é representada pela equação (6-44):

$$\frac{Y}{R} = - \frac{\frac{Kd}{\beta} s + \frac{kp}{\beta}}{s^2 + \frac{(kd + 1)}{\beta} s + \frac{Kp}{\beta}} = \frac{cs + d}{(s + p)(s + \bar{p})} \quad (6-44)$$

Onde

$p \simeq \bar{p}$  São os pólos do sistema.

E:

$$c = \frac{Kd}{\beta}$$

$$d = \frac{Kp}{\beta}$$

Aplicando a transformação delta da equação (6-11) à equação (6-44), tem-se:

$$\frac{Y}{R} = - \frac{c \left( \frac{z-1}{zT} \right) + d}{\left( \left( \frac{z-1}{zT} \right) + p \right) \left( \left( \frac{z-1}{zT} \right) + \bar{p} \right)} \quad (6-45)$$

Manipulando matemática a equação (6-45), e escrevendo o sistema da forma representada na equação (6-15), o sistema discretizado é mostrado na equação (4-46):

$$\frac{Y}{R} = \frac{-gZ^2 + fZ}{(z + a)(z + \bar{a})} \quad (6-46)$$

Onde:

$$g = \frac{cT + dT^2}{1 + pT} \quad a = \frac{-1}{1 + pT}$$

$$f = \frac{cT}{1 + pT} \quad \bar{a} = \frac{-1}{1 + \bar{p}T}$$

Dada que  $a$  e  $\bar{a}$  são parâmetros que dependem dos pólos do controlador e o tempo de amostragem, então se baseando no apêndice 1, como foi falado anteriormente, e seguindo a metodologia mostrada para obter a equação (6-16), e aplicando a resposta como foi feito para obter a equação (6-18) à equação (6-46) tem-se:

$$\frac{-g}{(z + a)(z + \bar{a})} Z^2 = \frac{-g \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \bar{a}^j \dot{a}^{(i-j)} x(n - i)}{x(n)}$$

$$\frac{f}{(z + a)(z + \bar{a})} Z = \frac{f \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \bar{a}^j \dot{a}^{(i-j)} x(n - 1 - i)}{x(n)}$$

Substituindo os termos anteriores a equação fica:

$$\frac{Y}{x(n)} = \frac{-g \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \bar{a}^j \dot{a}^{(i-j)} x(n - i)}{x(n)} + \frac{f \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \bar{a}^j \dot{a}^{(i-j)} x(n - 1 - i)}{x(n)} \quad (6-47)$$

Aplicando as propriedades do somatório mostradas na equação (6-22) e (6-23) à equação (6-47), a saída do sistema pode-se representar como mostra a equação (6-48):

$$Y(n) = \frac{1}{(\dot{a} - \bar{a})} \left( -g \sum_{i=0}^{\infty} w^i x(n - i) + f \sum_{i=0}^{\infty} w^i x(n - 1 - i) \right) \quad (6-48)$$

O valor de  $w^i$  está relacionado com os pólos do sistema como foi mostrado na equação (6-26), então realizando a expansão dos termos para obter um somatório que faça a representação geral do sistema tem-se::

$$\begin{aligned}
x(n) &= -g \\
x(n-1) &= -gw + fw^0 \\
x(n-2) &= -gw^2 + fw = wx(n-1) \\
x(n-3) &= -gw^3 + fb^2 = w^2x(n-2) \\
x(n-4) &= -gw^4 + fb^3 = w^3x(n-3) \\
x(n-5) &= -gw^5 + fb^4 = w^4x(n-4) \\
x(n-6) &= -gw^6 + fb^5 = w^5x(n-5)
\end{aligned}$$

Da mesma forma feita para o item 6.1, pode-se analisar que o sistema pode-se representar com os estados futuros em base dos estados atuais, então a somatória geral pode-se escrever da seguinte forma:

$$y(n) = \frac{1}{(\dot{a} - \bar{a})} \left[ (-gw + f) \sum_{i=0}^{\infty} w^i x(n-1-i) + gx(n) \right] \quad (6-49)$$

Aplicando a propriedades da variância tem-se:

$$\begin{aligned}
var(y(n)) &= \left( \frac{1}{(\dot{a} - \bar{a})} \right)^2 \left[ (-gw + f)^2 var \left( \sum_{i=0}^{\infty} w^i x(n-1-i) \right) \right. \\
&\quad \left. + g^2 var(x(n)) \right] \quad (6-50)
\end{aligned}$$

Baseado nas propriedades das somatorias e nas propriedades da serie que descreve a equação, a qual corresponde um processo Markoviano como foi falado no item 6.1. tem-se a equação (6-51):

$$var[y(n)] = \left( \frac{1}{(\dot{a} - \bar{a})} \right)^2 \left[ \left( \frac{-gw + fw^0}{1-w} \right)^2 + g^2 w^0 \right] \sigma^2 \quad (6-51)$$

Da equação (6-51) pose-se analisar a variância do sistema para o controle PD com pólos iguais, em função do parâmetro limitante do filtro passa altas  $\beta$ , aqual é representada mediante a seguinte figura:

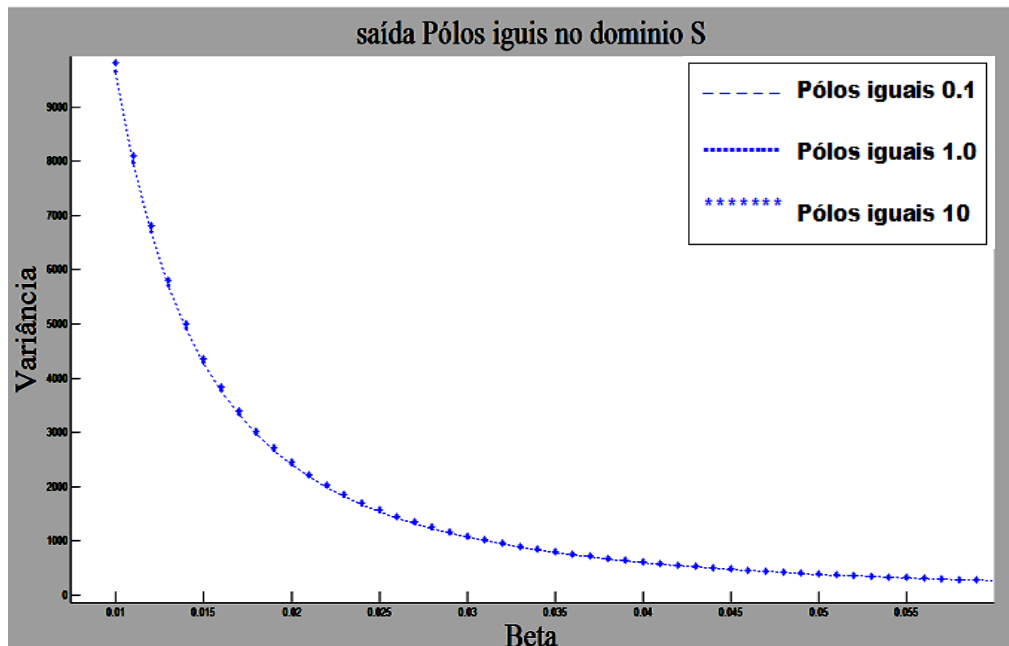


Figura 6.7. Variância do controle PD com pólos iguais em função de  $\beta$ .

A figura 6.7 mostra a saída da variância em função de  $\beta$ , onde pode se analisar que no sistema a variância decresce à medida que o valor de  $\beta$  aumenta, o gráfico mostra três sinais diferentes, a figura pontuada e a saída da variância para pólos iguais de valor 0.1, os pontos correspondem à saída do sistema para pólos iguais de valor 1.0 e os asteriscos fazem a representação da saída do sistema para pólos iguais de valor 10. Pode-se analisar que o sistema tem uma variância grande quando o valor de  $\beta$  é pequeno, a medida que o valor  $\beta$  aumenta a variância tem um decaimento exponencial.

### 6.2.1 Obtenção dos parâmetros do controle a partir do pólos iguais.

Na seção anterior foi obtida a variância para o sistema com pólos iguais, onde o parâmetro do filtro limitante  $\beta$  é variável como mostrou a figura 6.7, agora partindo da expressão matemática que representa a variância do sistema para um controlador PD de pólos iguais como foi mostrada na equação (6-51), são obtidos os valores das constantes do controle para um valor de:

$$\beta = \frac{1}{10P}$$

Onde:

$P$  é o pólo do sistema.

Fazendo a seguinte transformação de variáveis na equação (6-51):

$$\begin{aligned}g_1 &= (\dot{a} - \bar{a}) = w^0 \\g_2 &= (\dot{a}^2 - \bar{a}^2) = w \\g_3 &= 1 - (\dot{a}^2 - \bar{a}^2) = 1 - w\end{aligned}$$

A variância do sistema pode-se representar como mostra a equação (6-52)

$$\begin{aligned}\frac{\text{var}[y(n)]g_1^2g_3^2}{\sigma^2} &= [g^2g_1^2 + f^2g_2^2 - 2gfg_1g_2 + g^2g_1g_3^2] \\ \frac{\text{var}[y(n)]g_1^2g_3^2}{\sigma^2} &= (g_1^2 + g_1g_3^2)g^2 + f^2g_2^2 - 2gfg_1g_2\end{aligned}\quad (6-52)$$

Mudando as variáveis a variância é representada como mostra a equação (6-53.)

$$\begin{aligned}g_4 &= (g_1^2 + g_1g_3^2) \\g_5 &= g_1g_2 \\ \frac{\text{var}[y(n)]g_1^2g_3^2}{\sigma^2} &= g_4g^2 + f^2g_2^2 - 2gfg_5\end{aligned}\quad (6-53)$$

Substituindo os parâmetros de  $g$  e  $f$ , da equação (6-46), na equação (6-53) tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\text{var}[y(n)]g_1^2g_3^2}{\sigma^2\dot{a}^2} &= g_4[(cT)^2 + (dT^2)^2 + 2cTdT^2] + (cT)^2g_2^2 - 2(cT)(cT + dT^2)g_5 \\ \frac{\text{var}[y(n)]g_1^2g_3^2}{\sigma^2\dot{a}^2T^2} &= c^2(g_4 + g_2^2 - 2g_5) + d^2(T^2g_4) + cd(g_4 - g_5)2T\end{aligned}\quad (6-54)$$

Seja:

$$\begin{aligned}g_6 &= (g_4 + g_2^2 - 2g_5) \\g_7 &= (T^2g_4) \\g_8 &= (g_4 - g_5)T\end{aligned}$$

Substituindo as variáveis anteriores na equação da variância fica representada pela equação (6-55)

$$\frac{\text{var}[y(n)]g_1^2g_3^2}{\sigma^2\dot{a}^2T^2} = c^2g_6 + d^2g_7 + 2cdg_8 \quad (6-55)$$

Substituindo os valores de  $c$  e  $d$ , da equação (6-43), para que a relação matemática que representa a variância em função dos parâmetros do controlador  $k_d$  e  $k_p$ :

$$\frac{\text{var}[y(n)]g_1^2g_3^2\beta^2}{\sigma^2\dot{a}^2T^2} = k_d^2g_6 + k_p^2g_7 + 2k_dk_pg_8 \quad (6-55)$$

A equação (6-55) tem forma de um polinômio quadrado perfeito, então pode-se representar da seguinte forma, fazendo a seguinte substituição:

$$k_1 = \frac{\text{var}[y(n)]g_1^2g_3^2\beta^2}{\sigma^2\dot{a}^2T^2} \quad (6-56)$$

Substituindo a equação (6-56) tem-se:

$$k_1 = (k_d\sqrt{g_6} + k_p\sqrt{g_7})^2 = k_d^2g_6 + k_p^2g_7 + 2k_dk_p\sqrt{g_6g_7} \quad (6-57)$$

A equação (6-57), pode-ser representada como polinômio quadrado perfeito, comparando com a equação (6-55) pelo fato que cumpre que:

$$g_8 \cong \sqrt{g_6g_7}$$

Então a relação matemática que define os parâmetros do controle PD em função dos pólos do sistema e em relação à variância é dada pela equação (6-58)

$$\sqrt{k_1} = (k_d\sqrt{g_6} + k_p\sqrt{g_7}) \quad (6-58)$$

Fazendo o mesmo trabalho apresentado no capítulo 4 para obter a equação (4-17), onde é obtido o parâmetro proporcional em função do parâmetro derivativo, tem-se:

$$0 = \frac{1}{\beta} \left( \frac{k_d + 1}{2} \right)^2 \sqrt{g_7} + k_d\sqrt{g_6} - \sqrt{k_1}$$

$$k_d = \frac{-\left(\sqrt{g_6} + \frac{\sqrt{g_7}}{2 * \beta}\right) \pm \sqrt{\left(\sqrt{g_6} + \frac{\sqrt{g_7}}{2 * \beta}\right)^2 - \frac{\sqrt{g_7}}{\beta} \left(\frac{\sqrt{g_7}}{4 * \beta} - \sqrt{k_1} + \right)}}{\frac{\sqrt{g_7}}{2 * \beta}} \quad (6-59)$$

Substituindo a equação (6-59), na equação (4-17), tem-se a constante proporcional do controlador como mostrou a equação (4-28), a equação (6-59) e (4-17) representam os parâmetros do controlador PD com pólos iguais onde eles dependem diretamente do valor do pólo desejado, então para pólos com valor unitário no sistema mostrado na equação (6-60), os valores dos parâmetros são:

$$H(s) = \frac{\frac{Kd}{\beta}s + \frac{kp}{\beta}}{s^2 + \frac{(kd + 1)}{\beta}s + \frac{Kp}{\beta}} \quad (6-60)$$

$$\beta = 0.1$$

$$k_d = 0.1606$$

$$var = 0.0618$$

$$K_p = 3.3677$$

Substituindo os parâmetros na função de transferência da equação (6-60), a saída do sistema frente uma entrada degrau é mostrada na figura 6.8:

$$H(s) = \frac{1.606 s + 33.68}{s^2 + 11.61 s + 33.68}$$

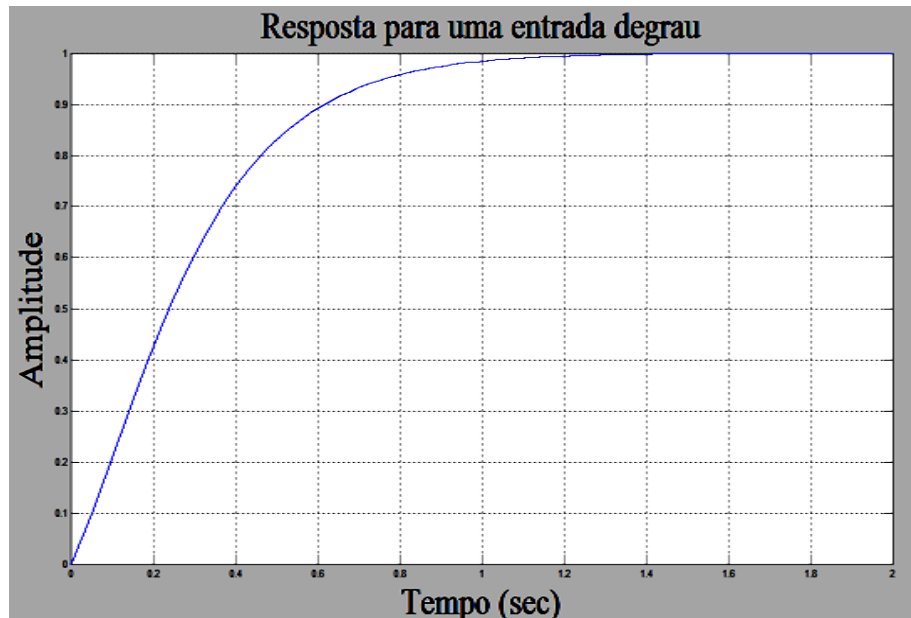


Figura 6.8. Resposta do controle obtido para um sistema de pólos iguais a 1.



A figura 6.8 mostra a saída do sistema substituindo os parâmetros do controlador para uma entrada degrau, a qual é representada pela equação (6-60), a importância do método utilizado para a análise de variância é que por meio da análise de pólos iguais do sistema pode-se obter a variância do sistema, a constante do filtro limitante da primeira ordem e os parâmetros do controle PD.

### 6.3 ANÁLISE DO PARÂMETRO DERIVATIVO VARIÁVEL.

Na seção 4.3 foi demonstrado que o valor do amortecimento está relacionado com o valor da constante derivativa do controlador PD, adicionalmente foi demonstrado na seção 6.1 pelo método de variância que a constante derivativa é aquela que faz a maior mudança no sistema, nesta seção será estudado o comportamento dos valores de  $K_d$ , os quais variam numa faixa determinada  $k_0 \leq k_d \leq k_1$ , como:

$$k_1 = 1 \qquad k_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Onde a variação da constante derivativa vai ser estudada como probabilidade, a qual é afetada por uma perturbação com distribuição Gaussiana, A distribuição normal de probabilidade de forma gráfica é representada pela figura 6.9:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$P = \frac{1}{2}(1 + \text{erf}(z))$$

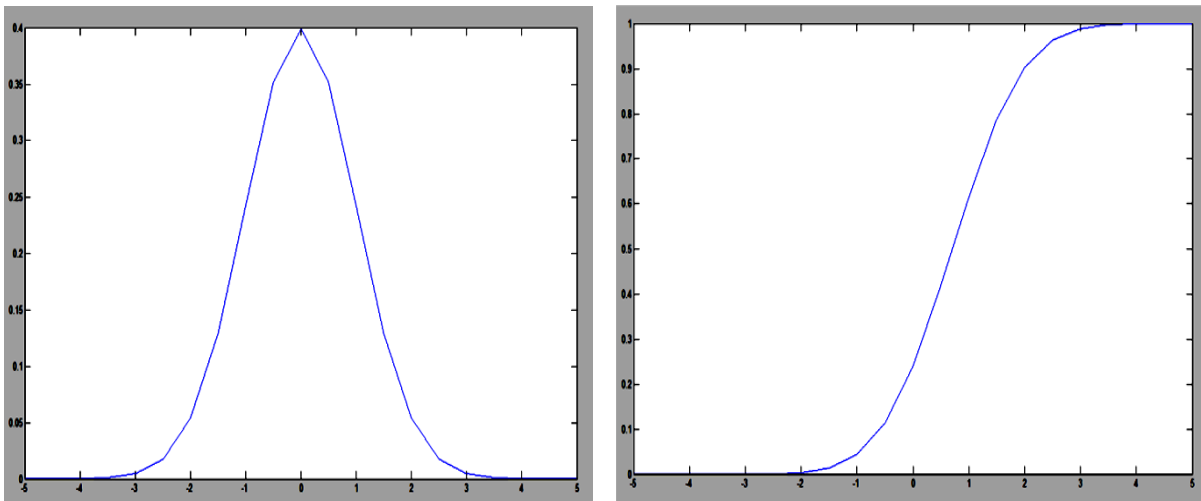


Figura 6.9: Distribuição normal e sua probabilidade acumulada.

A figura 6.9 mostra a distribuição normal com  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$ , e a probabilidade acumulada dela, se pode observar que a probabilidade acumulada vai ter valores entre 0 e

1, e a função  $f(x)$  representa o ruído do sistema. O processo para o cálculo da probabilidade é mostrado a seguir:

Seja a distribuição gaussiana [27] dada pela equação (6-61):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (6-61)$$

A probabilidade de uma variável aleatória no intervalo  $a \leq x \leq b$  [28], é dado pela equação (6-62):

$$P = \int_a^b f(x) dx \quad (6-62)$$

Para a distribuição normal a probabilidade é dada pela equação (6-63):

$$P = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$P = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad (6-63)$$

Normalizando a equação tem-se:

$$z = \frac{x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}$$

$$dx = \sqrt{2}\sigma dz$$

$$P = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-(z)^2} \sqrt{2}\sigma dz \quad (6-64)$$

A probabilidade é descrita como mostra a equação (6-65):

$$P = \frac{2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{b-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-(z)^2} dz - \frac{2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{a-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-(z)^2} dz \quad (6-65)$$

Por definição matemática a integral da função normalizada é a função erro [26], a qual é mostrada na equação (6-66):

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-(z)^2} dz \quad (6-66)$$

Então a probabilidade é dada pela equação (6-67):

$$P = \frac{1}{2} \left( \text{erf} \left( \frac{b - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) - \text{erf} \left( \frac{a - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right) \quad (6-67)$$

Agora fazendo a análise para a parte derivativa do controle, onde deseja-se que ele possa variar como apresenta a equação (6-68):

$$K_d = |P - 0.5| * 2(k_1 - k_0) + k_0 \quad (6-68)$$

Onde P é a probabilidade da distribuição, e faz que  $K_d = k_0$ , para um valor de probabilidade de 50%,  $K_d = k_1$ , para um valor de probabilidade do 100% ou 0%.

Avaliando o sistema geral em função do erro ante uma entrada derivativa variável representada como mostrou a equação (6-68), é obtida a figura 6.10, a qual foi desenhada com ajuda do comando ODE45 de MATLAB onde o resultado foi o seguinte:

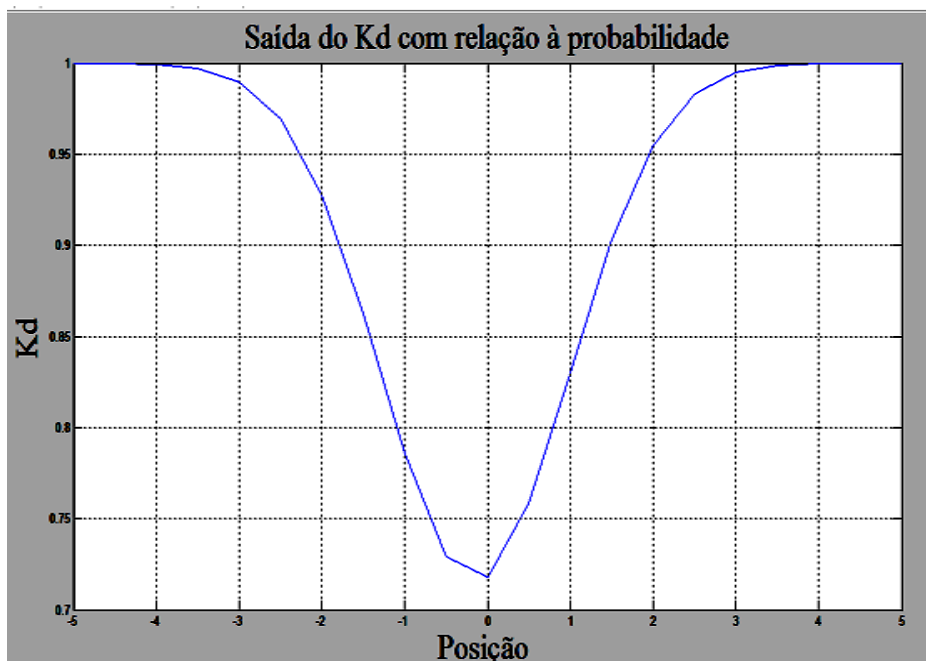


Figura 6.10: Saída do sistema geral para a função de transferência variável.

Pode ver na figura (6-10) que a saída inicia em  $k_0$  e vai até  $k_1$ , ficando constantes, do ponto de vista as análises do sistema mostra que o ganho vai crescer à medida que o valor da constante derivativa cresce, e é simétrico com relação no eixo x, o gráfico mostra que quando o sistema muda da parte sub amortecido a criticamente amortecido a constante derivativa vai ser constante igual ao valor unitário.

#### 6.4 VALOR ESPERADO DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Nesta seção será estudado o valor esperado da distribuição normal pelo fato que o ruído analisado no sistema tem estas características, outra razão importante é que a constante derivativa do sistema esta relacionada com a probabilidade a qual é afetada pelo erro. Na seção anterior, a distribuição normal foi mostrada na equação (6-61) e sua normalização é representada pela equação [30] (6-69), onde z, é a normalização da função distribuição Gaussiana e depende do valor aleatório x:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (6-69)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} \quad (6-70)$$

O valor esperado de uma variável aleatória [28] é representado pela equação (6-71):

$$E(x) = \int_{-\infty}^x xf(x)dx \quad (6-71)$$

Aplicando a normalização mostrada na equação (6-69) e na equação (6-70) e substituindo na equação (6-71) tem-se o valor esperado como mostra a equação (6-73):

$$x = z\sigma + \mu \quad (6-72)$$

$$E(z) = \int_{-\infty}^z (z\sigma + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz \quad (6-73)$$

A equação pode ser expressa em duas integrais como mostra a equação (6-74)

$$E(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z ze^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz \quad (6-74)$$

Aplicando o método de substituição a primeira integral da equação (6-74), como se mostra a seguir, é obtido o valor esperado como representa equações (6-75) e (6-76).

$$t = \frac{z^2}{2}$$

$$dt = z dz$$

$$E(z) = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{z^2}{2}}^{\infty} e^{-t} dt + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz \quad (6-75)$$

$$E(z) = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{e^{-\infty} - e^{-\frac{z^2}{2}}}{-1} \right) + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} * \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \right) + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} * \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \right) * \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \quad (6-76)$$

Finalmente o valor esperado é dado pela equação (6-77):

$$E(z) = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} + \frac{\mu}{2} * \left( 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \right) \quad (6-77)$$

Na equação (6-77) pode-se observar que o valor esperado depende do desvio padrão e da função normalização (Z). Dado que o ruído branco tem variância unitária e media zero, o segundo termo não vai influenciar no cálculo do valor esperado pelo fato que o sistema apresenta media zero, a figura 6.13 mostra o valor esperado em função da função normalização.

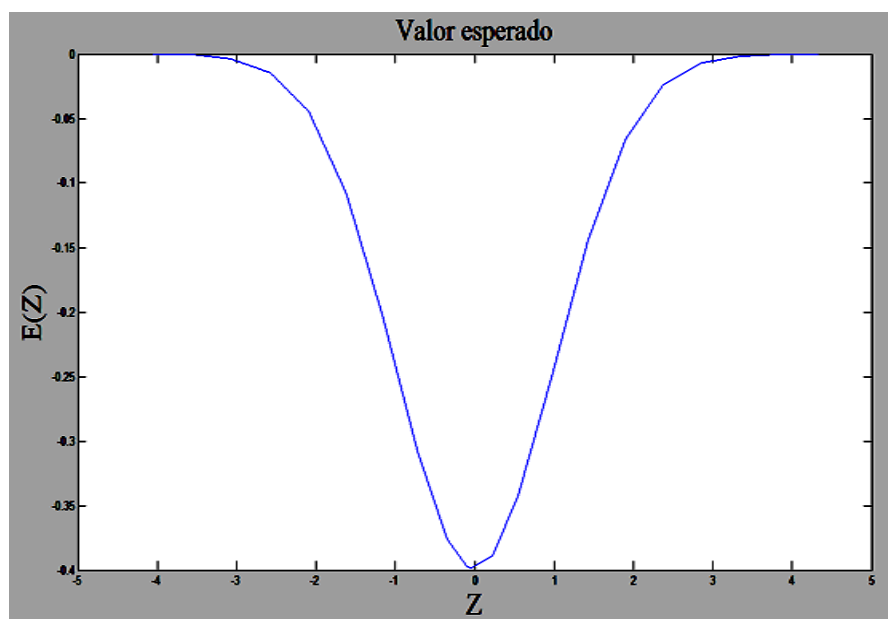
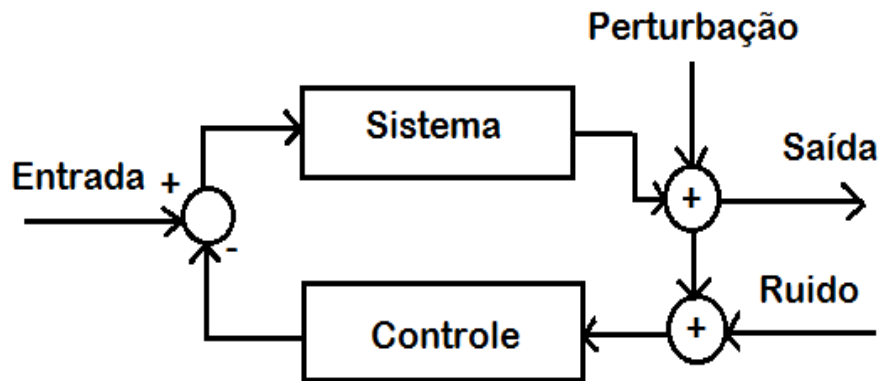


Figura 6.11. Valor esperado do controlador.

A figura 6.11 é obtida para uma variação aleatória  $-5 \leq z \leq 5$ , pode-se observar que o valor esperado depende diretamente da função exponencial, o qual é observado em seu comportamento para a faixa avaliada, como é preciso que o valor esperado seja constante, pode-se analisar na figura 6.11 que o desvio padrão tem que ter forma exponencial.

Fechando a malha do sistema e fazendo a consideração do controle PD com pólos idênticos como foi apresentado no item 6.2.1. O sistema fica como mostra a figura 6.12

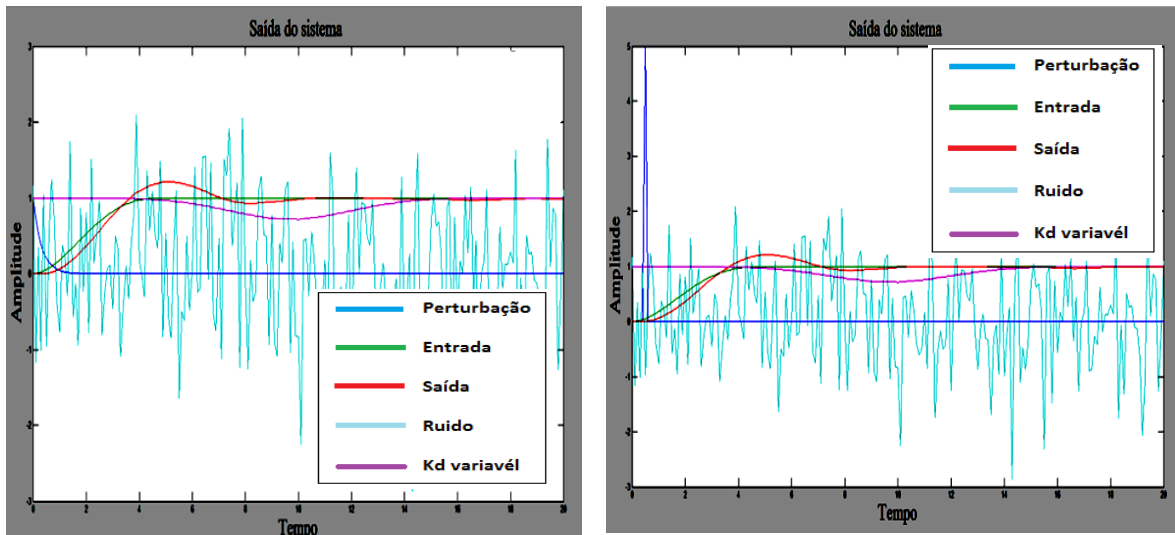


*Figura 6.12 Sistema em malha fechada para o controle PD variável*

A figura 6.12 mostra o sistema em malha fechada onde a entrada corresponde à trajetória planejada, o controlador corresponde a um controle PD variável que tem como entrada a parte derivativa variável como foi descrito no item 6.2.1. O sistema apresenta um ruído com distribuição aleatória, o qual corresponde ao ruído branco discreto que pode-se considerar como uma sequência de elementos que tem variação aleatória independente entre eles [32], a definição matemática é a seguinte [33]:

$$\{x(k)\} = 0 \quad (6-78)$$

Em outras palavras o valor esperado é igual à zero, e o ruído branco tem média zero e variância unitária [34]. A figura 6.13 mostra também a perturbação introduzida ao sistema, às simulações foram realizadas no software SIMULINK e MATLAB, onde foram consideradas duas perturbações, uma de filtro passa banda com frequência de  $\pi$ , e outra como um impulso, as respostas das simulações são mostradas na figura 6.13.



*Figura 6.13. Saída do sistema em malha fechada com filtro passa banda de frequência PI e para uma perturbação impulso*

Na figura 6.13, pode-se observar que gráfico da cor azul corresponde à perturbação, o gráfico da cor vermelha representa a saída do sistema, o gráfico da cor verde mostra a entrada planejada e o gráfico da cor púrpura corresponde ao valor de  $K_d$  variável do controle PD de pólos iguais, A figura 6.12 mostra o modelo desenhado para obter as saídas da figura 6.13. Pode-se analisar que o sistema frente a uma perturbação e um ruído branco apresenta robusteza, o qual é mostrado no gráfico de cor vermelha onde é observado que a saída esta fazendo o acompanhamento da entrada planejada, obtendo assim um controle que teria boa resposta frente às perturbações e os ruídos externos.

## 7. ANÁLISES DOS RESULTADOS.

Nas seções anteriores foi apresentada, a modelagem matemática do quadrimotor, a análise das técnicas de linearização do sistema, a projeção das técnicas de controle, a construção das trajetórias para ser testadas e a análise estatística no sistema, com objetivo de obter um controle que permita a avaliação do trabalho. Nesta seção inicialmente são mostradas as características do quadrimotor, posteriormente serão apresentados os resultados obtidos na realização dos testes, os quais foram feitos inicialmente, num lugar fechado e depois num lugar aberto para analisar o comportamento do quadrimotor em relação ao vento.

### 7.1 CARACTERÍSTICAS FÍSICAS E TÉCNICAS DO QUADRIMOTOR.

Para a realização dos testes foi utilizado um quadrimotor de referencia (*Parrot AR.Drone*). Este veículo é movimentado mediante quatro hélices, ele tem duas carcaças, uma é disponibilizada para vôos em lugares fechados e outra para vôos em lugares abertos como apresenta a figura 7.1 [35]. O *AR. Drone* normalmente é utilizado como brinquedo, e é controlado mediante *iPhone*, *iPod touch* e *iPad* [36]. Adicionalmente o *AR. Drone* tem um sensor de ultra-som e acelerômetros para controlar a altitude, o controle dos ângulos é feito mediante giroscópios [34], além disso tem duas câmeras uma para medir a altitude e outra câmera frontal a qual é disponibilizada para captura de vídeos [35].



A)



B)

Figura 7.1 Quadrimotor utilizado para realizar os testes [38]



A figura 7.1 mostra as duas carcaças fabricadas de fibra de vidro e a parte da espuma é feita de polipropileno o que dá proteção em caso de batidas, conseguido assim um peso muito leve. A tabela 7.1 apresenta as seguintes características do quadrimotor:

Tabela 7.1 Características do Quadrimotor. [39]

<b>Características</b>	
<b>Tipo</b>	Veículo aéreo não tripulado
<b>Fabricante</b>	<i>Parrot</i> (empresa)
<b>Alcance do sinal</b>	50 m. lugares fechados, 200 m lugares abertos
<b>Alimentação</b>	Bateria 3 células de lítio 11.1v, 1000mAh
<b>Dimensões com capacete</b>	52,5 x 51,5 cm
<b>Dimensões sem capacete</b>	Sin casco: 45 x 29 cm
<b>Efeito de luzes</b>	4 <i>leds</i>
<b>Efeito de som</b>	Não possui
<b>Escala</b>	Não possui
<b>Modelo</b>	<i>Parrot – AR. Drone</i>
<b>Peso com capacete</b>	420g
<b>Peso sem capacete</b>	380g
<b>Tempo da bateria</b>	12 min.
<b>Voltagem</b>	110v - 220v
<b>Velocidade</b>	5 m/s, 18 km/h
<b>Wi-fi</b>	Sim
<b>Alcance Maximo Wi-fi</b>	Entre 50 – 120 m
<b>Microprocessador</b>	ARM9 RISC de 32 bits @ 468 MHz
<b>Memória RAM.</b>	DDR SDRAM de 128 MB @ 200 MHz
<b>Conector</b>	USB
<b>Sistema de orientação</b>	MEMS (Sistema eletro micro mecânico)

<b>interna.</b>	Três eixos de acelerômetro Dois eixos giroscópio Um eixo giroscópio precisão <i>yaw</i>
<b>Motores</b>	4 de 3500 RPM de 15w.
<b>Câmera</b>	Com sensor CMOS de tipo grande angular da lente diagonal. 93 graus de amplitude, Resolução 640x480 pixels (VGA), Resposta em frequência: 15 quadros / s, Codificação e transmissão ao vivo de Imagens em para o dispositivo IOS.
<b>Altímetro</b>	Ultra-sm com base Faixa 6m Frequência de emissão 40khz Estabilização vertical

## 7.2 RESULTADOS OBTIDOS.

Para a realização dos testes os dados foram enviados do computador ao quadrimotor mediante a comunicação *Wi-Fi* que o quadrimotor possui, o trabalho foi feito da seguinte forma: foram construídas trajetórias planejadas tipo espiral baseado na teoria apresentada no capítulo 5 e utilizando o modelo do sistema geral mostrado na figura 6.3, o controle de velocidade foi feito mediante a construção do controle PD de malha fechada com pólos iguais como foi apresentado no capítulo 4, e corrigido com base nos resultados obtidos da análise da variância para o sistema no capítulo 6.

A realização dos testes foi feita implementado os algoritmos no *software* SIMULINK e MATLAB, gerando como entrada para o sistema trajetórias como são apresentadas na figura 7.2, onde o primeiro teste foi feito num lugar fechado com a primeira carcaça como foi mostrado na figura 7.1.

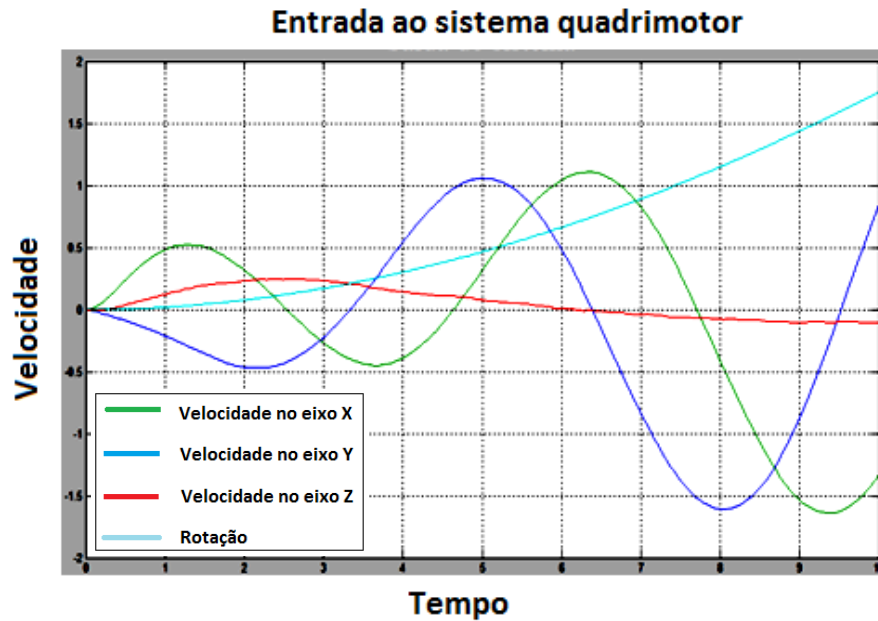
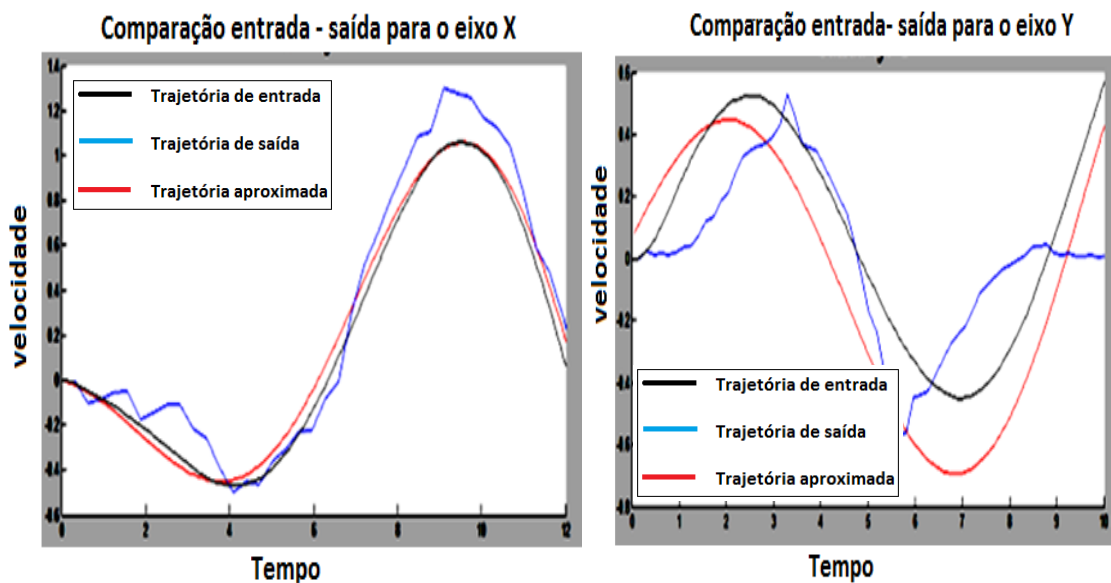


Figura 7.2 Trajetória em função dos três velocidades e a rotação enviada ao quadrimotor

A figura 7.2 representa os dados enviados ao sistema quadrimotor, a figura da cor verde representa a velocidade no eixo X, a figura da cor azul representa a velocidade no eixo Y, a figura da cor vermelha representa a velocidade do eixo Z e a figura da cor azul clara representa a rotação do sistema, estes dados foram pegos dos subsistemas de saída apresentados na figura 6.3 com um tempo de amostragem 62.8 ms. A comparação dos resultados entrada saída é representada pela figura 7.3:



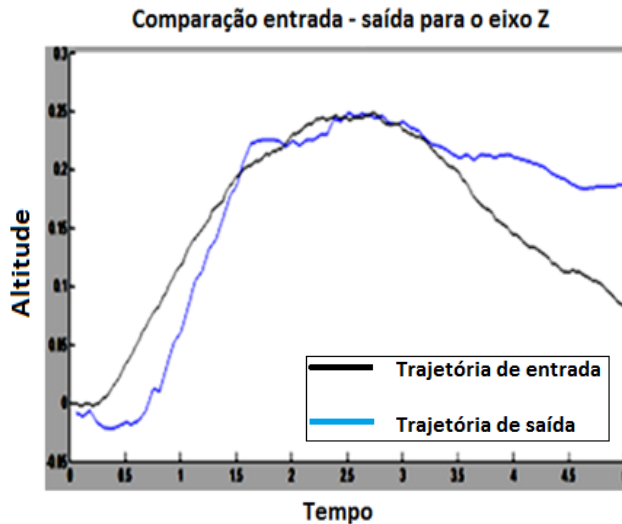


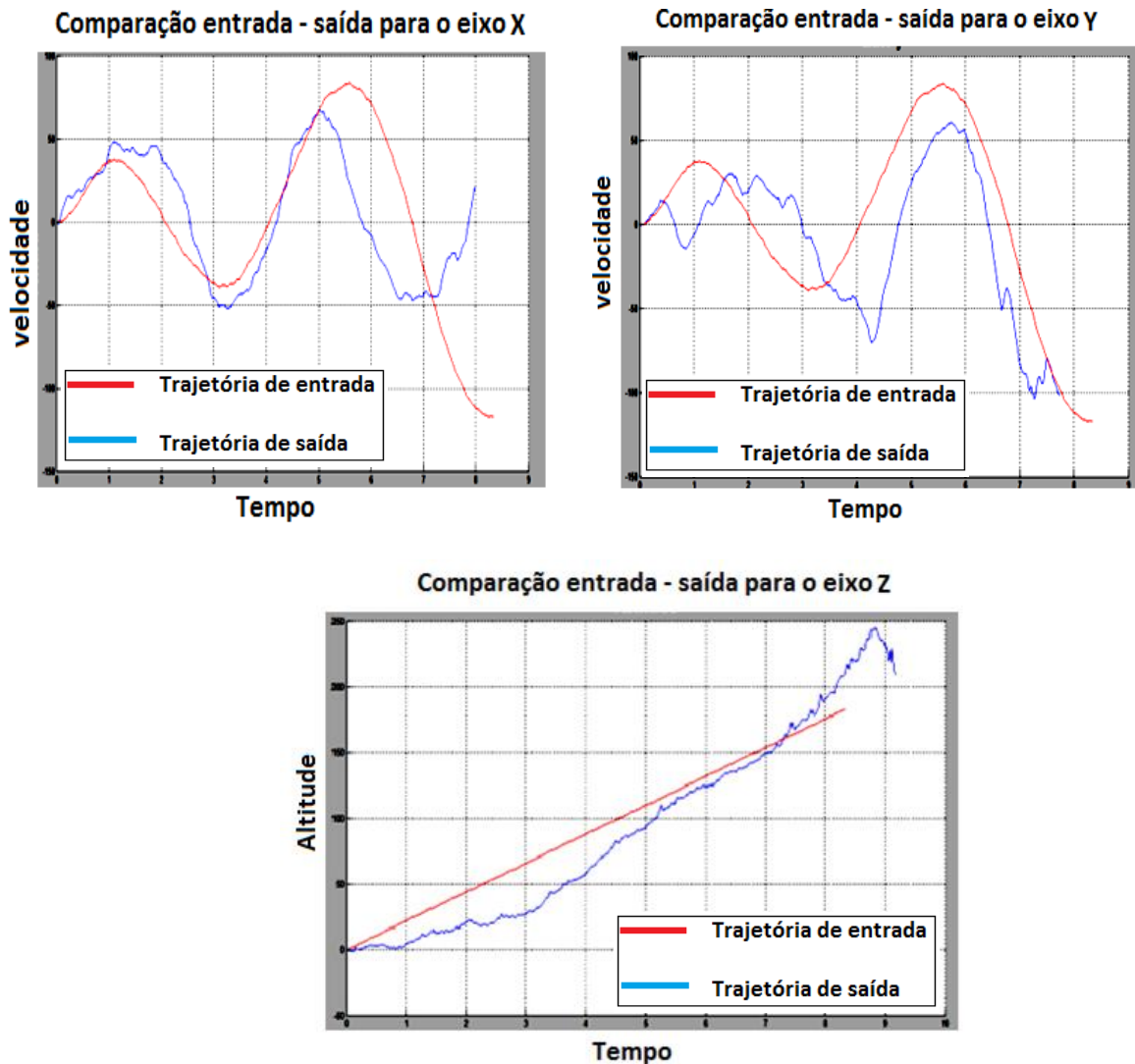
Figura 7.3 Comparação da entrada – saída do sistema quadrimotor

Na figura 7.3 podem se observar três cores, a figura da cor azul corresponde aos dados obtidos do quadrimotor, o gráfico da cor preto corresponde aos dados da trajetória enviada e o gráfico da cor vermelha corresponde à trajetória aproximada, como os dados enviados ao quadrimotor são pegos das saídas 1,2,3 e 4 respectivamente como mostra a figura 6.3, não é conhecida uma função matemática exata da trajetória enviada, a razão é que os dados passam por múltiplos integradores durante um ciclo, o qual faz que os erros numéricos se sejam maiores em cada passo de integração e por tanto alterando assim a função original.

Observando a saída do sistema na figura 7.3 com relação aos eixos X e Y, os dados obtidos do quadrimotor têm o mesmo comportamento que a trajetória que faz a representação dos dados enviados. Em relação ao eixo Z ocorre uma situação particular a qual foi mencionado anteriormente com relação aos erros numéricos, onde a aceleração com relação ao eixo Z é zero, fazendo assim que a lei de controle do eixo matematicamente seja zero, mas a saída com relação ao eixo Z da figura 7.3 mostra que não acontece como representa o gráfico de cor preta, observando o comportamento da entrada saída do eixo Z pode-se analisar que inicialmente os dados aumentam, e depois decresce, o que indica o acompanhamento que a sinal de saída esta fazendo sobre o sinal de entrada.

A trajetória feita no primeiro teste foi calculada com um tempo de amostragem diferente ao tempo de amostragem de processamento do quadrimotor, para realizar uma comparação adequada entre os dados de saída e os dados de entrada ao quadrimotor, foram

desenhadas três novas trajetórias com um tempo de amostragem igual ao tempo de amostragem do sistema real, estes testes são realizados num lugar aberto onde se tem efeitos do vento, para tal caso foi utilizada a segunda carcaça como representou a figura 7.1. As trajetórias obtidas na saída são as representadas pela figura 7.4:



*Figura 7.4 Espiral com altitude variável e rotação zero*

As figuras 7.4 mostram uma trajetória espiral com altitude variável e rotação zero, onde o gráfico da cor vermelha corresponde aos dados enviados ao quadrimotor e o gráfico da cor azul são os dados obtidos depois de ser feita a trajetória, pode-se analisar da comparação dos dados que o quadrimotor efetivamente esta acompanhando a trajetória espiral. Observando o gráfico de altitude mostra que a resposta na saída corresponde à resposta desejada, onde é obtido um comportamento crescente como foi desejado dado que a altitude para esta trajetória foi variável.

Adicionalmente é observado na trajetória na parte final e inicial, que esta apresentada uma perturbação forte para cada um dos eixos, isso acontece porque o programa que permite a manipulação do quadrimotor tem um comando que permite que o veículo decolar e pousar, mas o envio de dados é constante, o qual é mostrado na figura 7.4 com as perturbações fortes no inicio e final da trajetória. Continuando com os testes a seguinte trajetória do tipo espiral foi feita para eixo X, Y altitude variável e rotação constante, obtendo os resultados mostrados na figura 7.5.

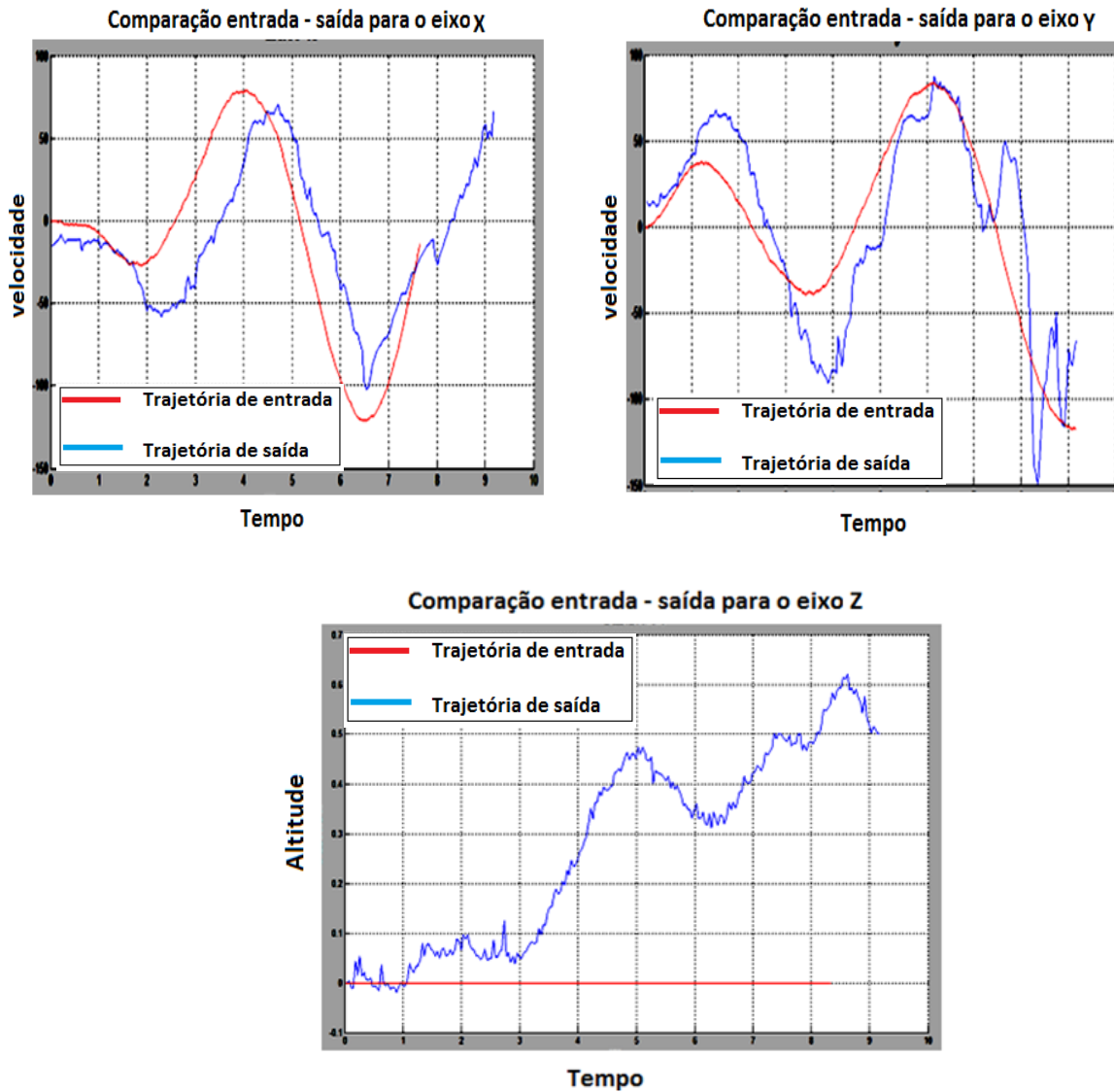


Figura 7.5 Espiral com altitude constante e rotação zero

Analisando os gráficos obtidos na figura 7.5, pode-se observar que estes apresentam um comportamento similar ao mencionado na figura 7.4, onde as trajetórias apresentam perturbações na parte inicial e na parte final da mesma.

Comparando os eixos X e Y, é observado que a trajetórias obtidas tem forma próxima à trajetória de entrada, dos gráficos azuis dos eixos X e Y, é notável alguns picos significativos correspondentes aos efeitos do vento onde foram feitos os testes, isso acontece porque os testes foram realizados no ar livre e o veículo é leve, o que pode-se observar na figura 7.45 com relação à altitude.

Na altitude pode-se observar que o acompanhamento da trajetória é feito nos primeiros segundos e depois ela apresenta um aumento de altitude, o qual é causado pelo efeito do sensor de ultra-som, este sensor entre suas características esta a alta sensibilidade que ele apresenta, se ele detecta mudanças bruscas de altitude, sua resposta é um aumento da altura, depois o quadrimotor é estabilizado e a trajetória continua até finalizar e o veículo pousa como foi observado na realização dos testes. Continuando com o trabalho foi realizado o último teste com uma trajetória espiral com altitude variável e rotação variável como mostra a figura 7.6

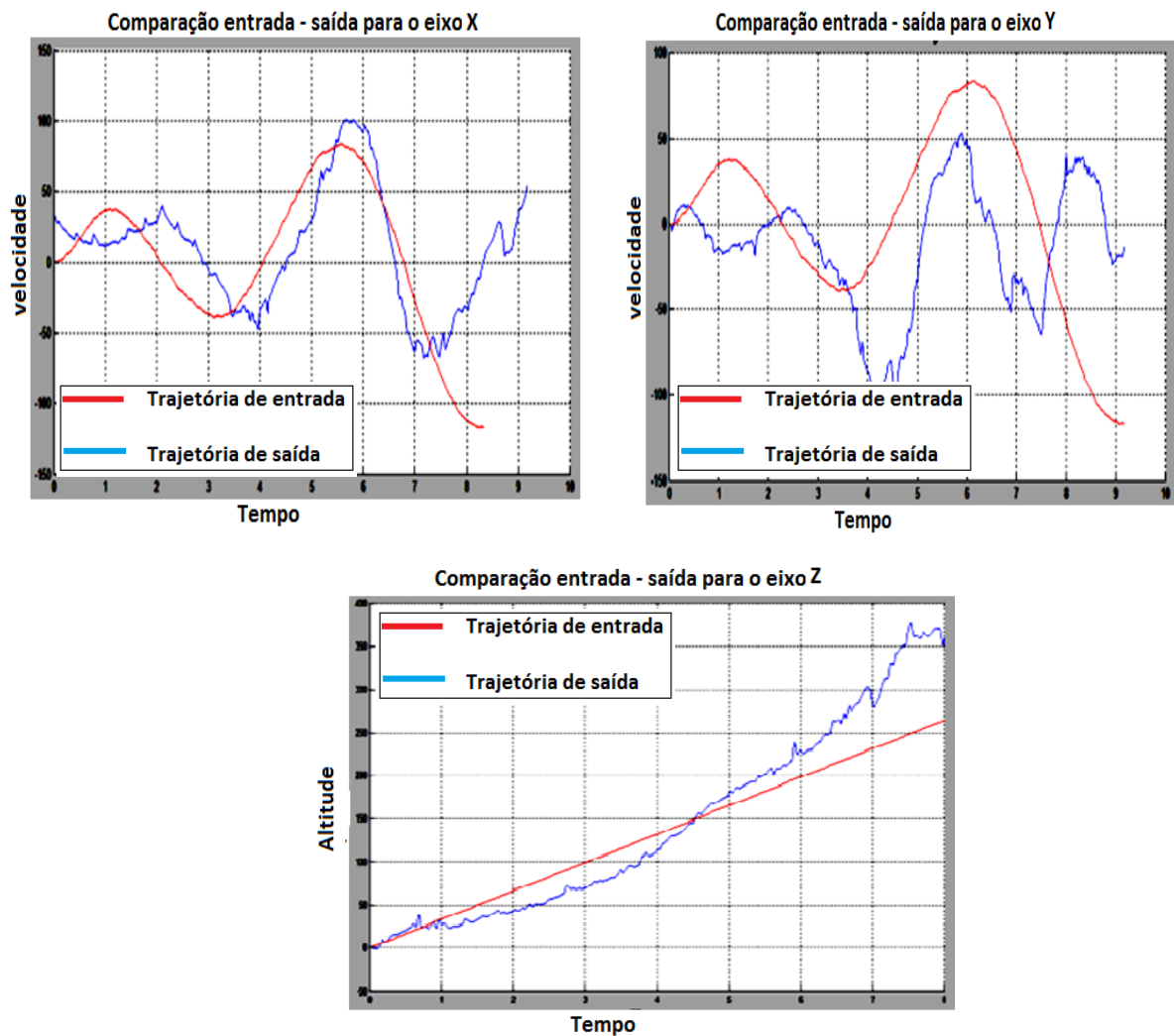


Figura 7.6 Espiral com altitude variável e rotação variável.

Figura 7.6 mostra um comportamento similar ao falado nas outras duas trajetórias mostradas nas figuras 7.5 e 7.4, mas esta trajetória apresenta rotação no vôo, o qual faz que o comportamento em relação aos eixos X e Y esteja afetado pela rotação do sistema, observando a figura 7.6 com relação às velocidades nos eixos X e Y, pode-se perceber efetivamente o acompanhamento das trajetórias de velocidade. Com relação à altitude é observado o acompanhamento da trajetória como aconteceu com as outras trajetórias testadas, adicionalmente é observado que a figura apresenta o mesmo comportamento irregular ao inicio e ao final da trajetória o qual acontece quando o quadrimotor decola e pousa como foi relado anteriormente.

### 7.3 DISCUÇÃO DE RESULTADOS.

Para realizar as análises dos resultados obtidos é importante considerar, que o modelo do sistema quadrimotor foi modelado de maneira ideal como foi apresentado na equação (2-14). O quadrimotor apresenta duas constantes importantes, uma diretamente relacionada com a dinâmica e a física do modelo e outra que é a massa do sistema, mas para efeitos de simulações estas constantes foram assumidas de valor unitário, de maneira que facilitam os cálculos do sistema. A razão fundamental para fazer esta suposição, é baseada em que a mudança das constantes da planta influencia diretamente os pólos do sistema, dado que o controle é projetado mediante a escolha dos pólos do sistema, então os parâmetros físicos do sistema pode-se ajustar por meio de testes e simulações para obter um resultado próximo ao real. A figura 7.7 mostra uma simulação da saída do sistema para diferentes constantes da planta

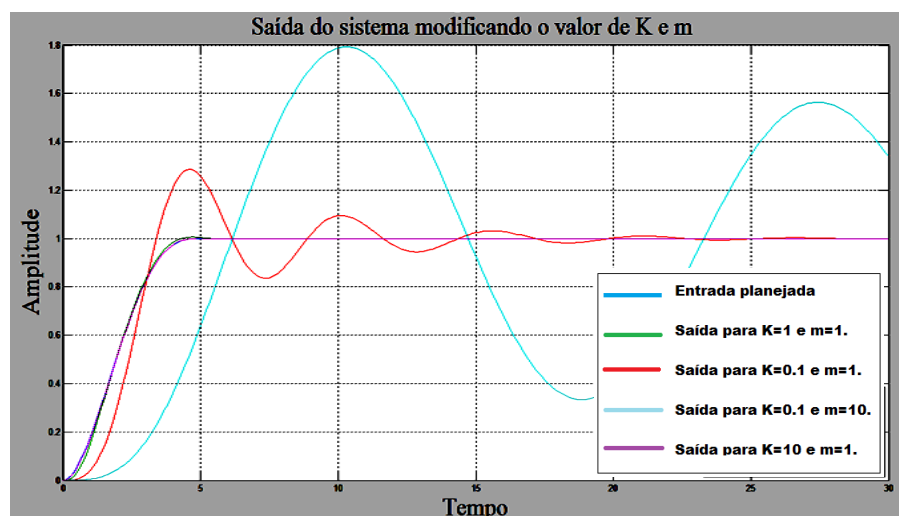


Figura 7.7 saída do sistema para valores de planta diferentes.



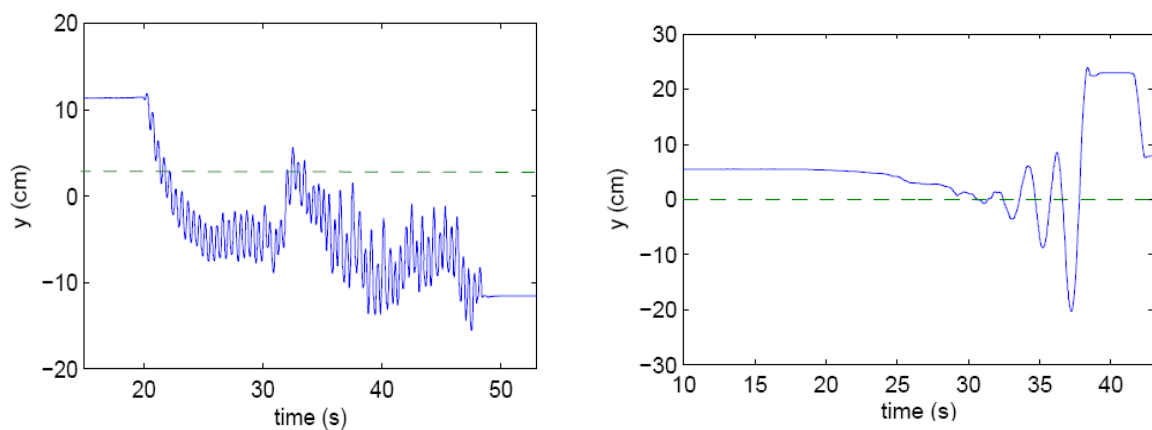
A figura 7.7 mostra um sistema simulado em malha fechada para diferentes valores da planta, a figura da cor azul representa a entrada planejada do sistema, a figura da cor verde representa a saída do sistema normalizada para  $k=1$  e  $m=1$ , a figura da cor vermelha representa a saída do sistema para  $k=0.1$  e  $m=1$ , a figura da cor azul clara representa a saída do sistema para  $k=0.1$  e  $m=10$  e a saída púrpura mostra a saída do sistema para  $k=10$  e  $m=1$ .

Da figura anterior se pode concluir que a velocidade do seguimento esta relacionada com o valor do pólo, onde se o pólo é distante do zero no plano esquerdo complexo, o sistema vai ter uma resposta mais lenta para realizar o acompanhamento da trajetória de entrada como aconteceu com a figura azul claro que apresentou pólos em  $(-20.45 ; -4.02)$ , a figura da cor vermelha tem pólos em  $(-1.25 + 2.61i ; -1.25 - 2.61i)$ , o acompanhamento foi melhor nas figuras da cor verde porque teve pólos iguais à  $(-0.12 + 0.90i ; -0.12 - 0.90i)$  e púrpura com pólos  $(-0.012 + 0.29i ; -0.012 - 0.29i)$ . Então da figura 7.7 pode-se concluir que se o sistema apresenta pólos que fiquem próximos de zero o sistema fará um melhor seguimento da trajetória planejada.

Dado que os pólos do sistema são fundamentais para o desenvolvimento do projeto, foi considerada esta parte do trabalho como a mais importante a qual foi apresentada no capítulo 6, onde foi descrito o processo estatístico que permitiu obter o controle PD de pólos iguais, mediante a modificação dos pólos do sistema, permitindo assim a identificação dos parâmetros do controlador e a variância do sistema em relação aos pólos introduzidos, os resultados obtidos mediante a projeção deste controle foram apresentados na seção 7.2. Como que o sistema trabalhado foi testado com este controlador obtido de maneira estocástica serão feitas algumas comparações de desempenho em relação a outros trabalhos apresentados na literatura.

Os trabalhos consultados reportados na literatura normalmente apresentam resultados de sistema simulados mediante diferentes algoritmos, onde são apresentados os comportamentos das diferentes técnicas de controle que vão desde controle linear [6] até controle não linear [40], adicionalmente alguns trabalhos apresentam simulações com controladores robustos como LQG e LQR [1], onde são obtidas excelentes respostas com os controladores projetados para o quadrimotor e suas leis de controle, mas não apresentam resultados de testes reais, onde se possa fazer uma verificação da adequada funcionalidade das estratégias de controle projetada.

Na literatura consultada foi encontrado o trabalho (“*Modelamiento y estabilización de un helicóptero con cuatro rotores*”) dos autores (CASTILLO P; GARCÍA P; LOZANO R; ALBERTOS P) referenciados como [2] nas referências bibliográficas, onde ele trabalha com diferentes técnicas de controle entre as que estão o controle LQR, e obtêm alguns resultados para os ângulos de *Euler* e as diferentes posições com relação ao acompanhamento de trajetórias, é de interesse observar os resultados obtidos pelo autor, para a verificação dos resultados obtidos no desenvolvimento deste projeto, as comparações feitas não serão baseadas no processo que o autor desenvolveu, dada que as condições do trabalho são diferentes como é apresentado em [2], porque o quadrimotor que utilizado para o desenvolvimento do projeto em [2], apresenta características diferentes ao quadrimotor disponibilizado para o desenvolvimento deste projeto. Baseado nesses fatos só será analisado o rastreamento feito com as posições. A figura 7.8 apresenta o primeiro teste desenvolvido pelo autor.



*Figura 7.8 Resposta do quadrimotor com um controlador linear LQR [2].*

Na figura 7.8 se observa uma linha pontuada corresponde à trajetória desejada e a figura da cor azul é a saída obtida com o quadrimotor, analisando a figura 7.8 mediante a comparação visual das duas figuras, o seguimento da trajetória planejada não esta sendo feito, e adicionalmente é observável que a saída tem uma margem de erro muito grande do seguimento porque a figura da cor verde fica muito distante da figura da cor azul, como foi apresentado em [2]. A figura 7.9 apresenta outros resultados obtidos pelo autor:

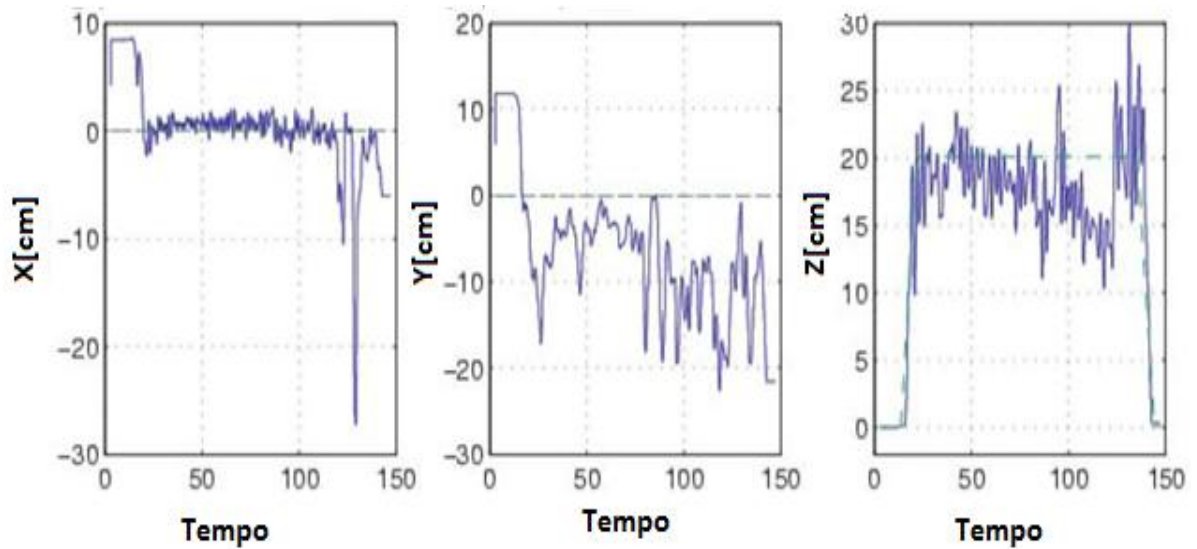


Figura 7.9 Resposta do quadrimotor para um controle de altura [2].

Na figura 7.9 a cor verde representa a trajetória desejada e a figura da cor azul representa a saída do sistema real, pode-se analisar da figura 7.9 que os resultados obtidos neste teste melhoram com relação aos resultados obtidos no teste anterior representados pela figura 7.8, o seguimento da trajetória desejada é bem melhor, o erro de rastreamento é menor, mas ainda continua apresentando problemas de seguimento, adicionalmente a trajetória que faz o seguimento do eixo Z faz um melhor seguimento da trajetória desejada com algumas perturbações. Na figura 7.10 apresenta o último teste feito pelo autor citado:

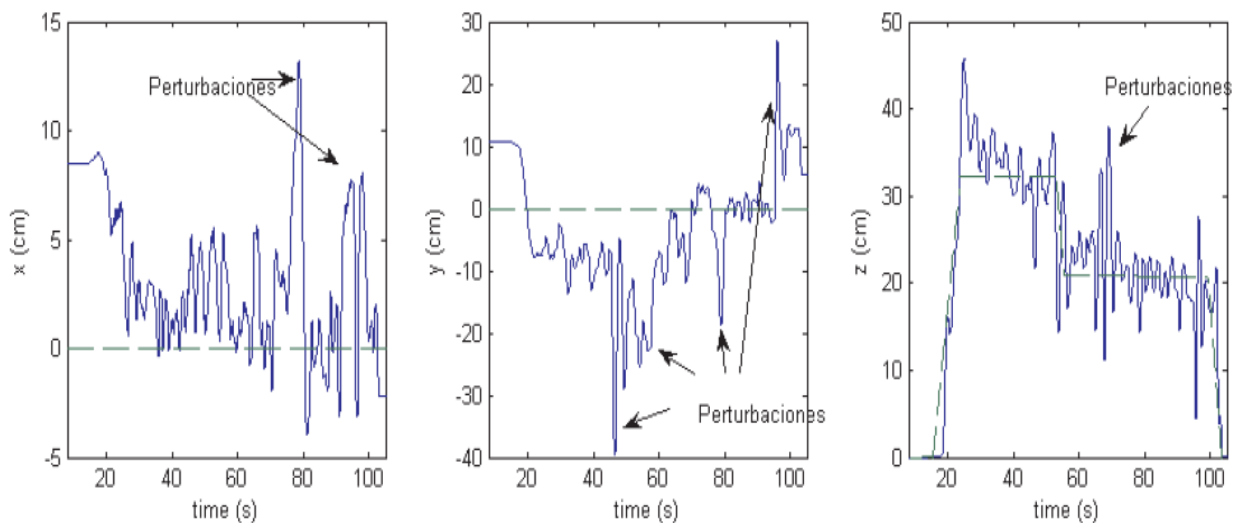


Figura 7.10 Resposta do quadrimotor para uma lei de controle não linear [2].

Na figura 7.10 a figura ponteadada apresenta a trajetória desejada e a figura da cor azul representa a trajetória obtida na saída do quadrimotor, pode-se analisar que estas trajetórias são muito similares as trajetórias obtidas no teste anterior mostrada na figura 7.8 e a figura 7.9, onde são apresentada uma serie de perturbações fortes nos eixos X e Y, o resultado melhora com o eixo Z que mede a altitude dado o quadrimotor esta fazendo um seguimento da trajetória desejada.

Comparando os resultados obtidos por este autor e os resultados obtidos no desenvolvimento deste projeto, pode-se concluir que o controle projetado para o quadrimotor mediante a combinação das trajetórias planejadas foi considerado como bom, dado que mediante a execução dos testes o controle ficou robusto em relação às perturbações e é perceptível o seguimento das trajetórias desejadas, o qual mostra que o controle projetado tem boa resposta para o sistema trabalhado. Uma comparação à profundidade não pode ser feita deste trabalho com o trabalho apresentado pelo autor [2], pelo fato que as condições de trabalho e características do quadrimotor são diferentes.

Dado que os resultados foram bons no desenvolvimento do trabalho, é feita uma observação: estes resultados podem ser melhorados se é trabalhado no fechamento da malha o qual fará que o sistema seja mais robusto a perturbações fortes do vento.

Adicionalmente é importante esclarecer que o controle projetado foi baseado na planta ideal, onde não são conhecidas as características das constantes do quadrimotor, as constantes do quadrimotor não foram identificadas pelo fato que o desenvolvimento do projeto foi enfocado na identificação de estratégias de controle que permitam projetado um controle robusto para um sistema general, e o trabalho não foi baseado no desenho e construção de um quadrimotor onde são consideradas efeitos do vento, geometria das hélices comprimento dos rotores ao centro do veículo entre outras considerações feitas para a modelagem dinâmica de um sistema.

Se for feita uma adequada identificação das constantes principais que faz parte da descrição matemática da planta ( $k$  e  $m$ ), pode-se obter um melhor seguimento do sistema em malha aberta e posteriormente podem-se melhorar os resultados projetado um controle em malha fechada, assim o sistema terá um melhor desempenho de trabalho dado que ficaria mais robusto a perturbações externas do sistema.

## 8. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.

- Foi obtido um modelo matemático que permitiu a modelagem do sistema quadrimotor, para analisar trajetórias e testar os sistemas de controle projetados para o desenvolvimento do projeto
- Foram projetadas diferentes técnicas de controle que possibilitou a análises do sistema em relação às trajetórias planejadas, enfocando a análise do controle PD não linear de pólos iguais estudado de maneira discreta para obter os parâmetros do controlador e a variância do sistema.
- As propriedades Markovianas são fundamentais no desenvolvimento de este trabalho, porque facilitam o estudo estocástico para a identificação da variância no sistema de forma discreta, permitindo tratar cada componente de forma independente e assim obter uma relação matemática que permita descrever o sistema.
- O cálculo estatístico é uma ferramenta poderosa porque permite analisar para um sistema quais das variáveis são significativas, e baseadas nas conclusões pode-se desenvolver um controle mais robusto, o qual permita que os pólos do sistema se movimentem em uma região de amortecimento desejado e possa voltar novamente a seu estado de equilíbrio.
- Mediante o controle projetado PD de pólos iguais foi possível obter os parâmetros do controlador, o valor do filtro da primeira ordem e a variância correspondente para os pólos inserido no sistema.
- A metodologia aplicada para a identificação dos parâmetros do controlador tem a vantagem de ser aplicada para diferentes sistemas que possam ser levados ao tempo discreto, onde é possível analisar o comportamento do sistema e obter por meio desta análise a variância do sistema e os parâmetros do controlador

- Foi estudado o sistema em malha fechada em função dos parâmetros de entrada do sistema quadrimotor como apresentou a figura 6.13, onde foi observado que efetivamente o controle projetado pelo método estatístico apresentou uma resposta boa para um sistema cujas entradas foram uma perturbação forte e o ruído inserido ao sistema.
- Foram feitos diferentes testes para a verificação do sistema de controle, é importante lembrar que o sistema geral é um sistema em malha aberta, onde a técnica de controle é baseada no planejamento de trajetórias, foi possível fazer o acompanhamento das trajetórias planejadas introduzidas no sistema.
- Pode-se concluir que a técnica de controle utilizada tem uma resposta boa para o rastreamento de trajetórias como foi mostrado nos testes feitos, mas o resultado pode ser melhorado trabalhando com um sistema em malha fechada para evitar que o sistema possa sair da trajetória deduzida em presença de uma perturbação forte.
- O trabalho desenvolvido satisfaz os objetivos desejados, já que foi obtido um modelo matemático da dinâmica do quadrimotor, e um controle por planejamento de trajetórias que envolvem o controle PD de pólos iguais, o qual permite o controle de ruído e perturbações no modelo de veículos não tripulados, permitindo assim simulação das trajetórias nos três eixos e de seus ângulos de inclinação. A verificação dos resultados obtidos foi feita mediante a comparação dos dados enviados ao quadrimotor com relação aos dados obtidos.
- O material bibliográfico é muito reduzido em relação aos quadrimotores, por enquanto algumas universidades e laboratórios de pesquisa estão desenvolvendo projetos com quadrimotores autônomos capazes de evitar obstáculos verticais e horizontais. Com a finalidade de relacionar estes equipamentos em projetos de pesquisa gerando conhecimento que permitam conhecer mais profundamente a funcionalidade e aplicações de veículos não tripulados.

- Como trabalho futuro é proposto trabalhar no fechamento da malha do sistema quadrimotor, para obter melhores resultados nos testes, de maneira que o sistema fique mais robusto em relação às perturbações externas que se possam apresentar.
- Baseados nos resultados obtidos durante o desenvolvimento do projeto e as vantagens que apresentam o sistema sob ótica discreta e estocástica é pretendido como trabalhos futuros, o desenho de técnicas de controle estocástico para sistemas discretizados, porque mediante a utilização destas técnicas pode-se construir controladores robustos em relação ao ruído que permitam a utilização de ganhos menores durante a maior parte do tempo capazes de compensar de maneira efetiva as perturbações do sistema. Estes controladores permitem uma melhor utilização dos atuadores do sistema de maneira que evitam o desgaste precoce dos mesmos, garantindo bom desempenho do sistema

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] DÍAZ CANO J. M., Modelo y Control LQR de una aeronave de cuatro rotores. Tesis de grado, Universidad de Sevilla. Escuela Superior de Ingenieros. Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática. Ingeniería en Automática y Electrónica Industrial Sevilla, pp 6, 2007

[2] CASTILLO P; GARCÍA P ; LOZANO R ; ALBERTOS P, Modelamiento y estabilización de un helicóptero con cuatro rotores, vol 4, N 1, pp 41-57, 2007, ISSN 1697 7912.

[3] DERAFA L.; A. BENALLEGUE A.; FRIDMAN L., Advances in Guidance and Control of Aerospace Vehicles using Sliding Mode Control and Observation Techniques, vol 349, Issue 2, pp 685-699, 2012

[4] GOMES A. J. Controle de forças de manipuladores robóticos, dissertação (Mestrado), Universidade do Porto, Portugal, Faculdade de engenharia, departamento de engenharia electotécnica e de computadores, pp 12,13, 1994.

[5] GOLDSTEIN P; SAFKO, Classical mechanics, Addison Wesley, (3ra ed.), Barcelona, pp 63,152,153,191, 2000.

[6] MAYORGA R; CASAS J, Sistema de Navegación para Vehículos Aéreos Cuadricópteros, Tesis de grado, Universidad politecnica de cataluña, facultad de Ingeniería Técnica, departamento de Aeronáutica especialidad Aeronavegación, pp 8, 9,22, 23, 35, 2009.

[7] VIANNA G. Modelado y control de un helicóptero Quadrotor, , Tesis (Master), universidad de Sevilla, programa de posgraduación en ingenierías, pp12. 2007.

[8] JACQUES J: SLOTINE, W. LI Applied Nonlinear Control, Prentice Hall Englewood Cliffs, New Jersey 07632, Massachusetts Institute of Technology , pp 199, 204, 210. 1991.

[9] KENT NAGLE R; EDWARD B; SAFF, SNIDER A. D., Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de frontera, Pearson Addison Wesley, (4ta ed.), Mexico, pp 31 2005.



[10] LIMÓN D; CUESTA F; SALAS F; VIVAS C; ALAMO T; PÉREZ DE LA PARTE M, Diseño de controladores en el dominio frecuencia, Universidad de Sevilla, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, pp. 7.

[11] MENEGHETTI F, Sistemas de controle, universidade federal do rio grande do norte, centro de tecnologia dept. de engenharia de computação e automação, pp 23, 2007.

[12] OGATA K, ingeniería de control moderno, Pearson educación (3ra ed.), Madrid, pp 672,673,679,680,691. 1998.

[13] ARAÚJO R, Sintonia de controladores PID em malha de controle de pressão, dissertação (graduação), Universidade federal do espírito santo, centro tecnológico , departamento de engenharia elétrica ,2007

[14] MAZZONE V, Controladores PID Automatización y Control Industrial, Universidad Nacional de Quilmes, pp 6,7, 2002.

[15] MAROTO R, Ciudad Universitaria Rodrigo Facio , Ecuaciones para la sintonización de controladores PID con acción derivativa aplicada a la señal realimentada, Universidad de Costa Rica, Facultad de Ingeniería, Escuela de Ingeniería Eléctrica, pp 13, 2007.

[16] ROUCHON P, Flatness based control of oscillators, , Plenary lecture presented at the 75th Annual GAMM Conference, Dresden/Germany, 22–26 March 2004, Ecole des Mines de Paris, Centre Automatique et Systemes, 60, Bd Saint-Michel, 75272 Paris, cedex 06, France, Received 7 June 2004, revised and accepted 4 January 2005, Published online 2005.

[17] LYNCH A.F ; WANG D, Flatness-based Control of a Flexible Beam in a Gravitational Field, Proceeding of the 2004 American Control Conference Boston, Massachusetts June 30 - July 2, 2004, Frp09.1

[18] LÉVINE J, Analysis and control of nonlinear systems, a flatness- based Approach, ,Springer Verlag Berlin Heidelberg , . pp 2,3, 2009.

[19] AGUDELO S;ORTIZ E; VÁSQUEZ R ;CASTRILLÓN F, Comparación de técnicas adicionales de control, Universidad Pontificia Bolivariana, Colombia, 2008.

[20] ARTURO ROJAS A; CÓRDOVA C, Diseño e implementación de un neuro controlador aplicado a un servosistema no lineal, Vol 8 N°03, Universidad Nacional de Ingeniería, Instituto de Automática e Inteligencia Artificial, Lima, pp.11-17, 1999

[21] JACQUES J: SLOTINE, W. LI Applied Nonlinear Control, Prentice Hall Englewood Cliffs, New Jersey 07632, Massachusetts Institute of Technology , pp 199, 204, 210. 1991.

[22] ALAN V. OPPENLIEIR Signals and Systems, Phentlce-Hall signal processing series, pp 685, 1982.

[23] VARELLA R.T, Implementação de Controladores Discretos via Transformada Delta, Grupo de Eletrônica de Potência e Controle (GEPOC), Santa Maria, pp 7,8,9,13,29,25, 2011.

[24] MASCAREÑAS J, Procesos estocásticos: el proceso de wiener, Universidad Complutense de Madrid , material de Aula, pp 2, 2008.

[25] M. CAMPOS MAURO C, Cadeias de Markov em Tempo Discreto, pp 2, 2010.

[26] FISCHER S, series univariantes de tempo - metodologia de Box & Jenkins, Administração Amaral de Souza, Porto Alegre, FEE, PP 24-26, 1982.

[26] J EVANS M; ROSENTHAL J. S; Probabilidad y estadísticas la ciencia de la incertidumbre, reverté, Barcelona españa ,pp80, 2004.

[28] BENJUMEA J. C, matemáticas avanzadas y estadísticas para ciências e ingenieria ,editorial de sevilla, universidad de sevilla, España, Pg 195, 2006

[29] DIAS N, Matemática Aplicada à Engenharia, Departamento de Engenharia Ambiental, Universidade Federal do Paraná, 2011

[30] SHELDON M ROSS, introducción a la estadística, editorial reverté, Barcelona españa ,pp 276, 2005.

[31] BLACO C. L, probabilidad, universidad nacional de colombia, facultad de ciencias, unibiblos, bogota, Pg 67, 2004

[32] JARA M; ROSEL J, Análisis de series temporales, universitat Jaume, españa pp23,2001

[33] ARNAU GRAS J, diseño de series temporales: Técnica de análisis, editorial universitat de Barcelona, España pp 26, 2001

[34] ARAHAL M., Manuel berenguel soria, francisco Rodríguez Díaz,técnicas de predicción con aplicaciones en ingeniería , universidad de Sevilla, los autores españa pp 91 , 2006.

[35] Ortiz A,Probamos el Parrot AR.Drone, un cuadricóptero que se maneja con el iPhone,06 de 2010, disponible em:<http://www.xataka.com/analisis/probamos-el-parrot-ardrone-un-cuadricoptero-que-se-maneja-con-el-iphone>

[36] Parrot SA., especificaciones técnicas, 2012 disponible em:<http://ardrone2.parrot.com/ardrone-2/especificaciones/>

[37] Parrot SA , Altitude ´ressure sensor 2012 disponible em:<http://ardrone2.parrot.com/ardrone-2/altitud/>

[38] Cabacas T, Parrot AR. Drone 2.0, primer contacto, 03 de 2012, disponible em: <http://www.muycomputer.com/2012/03/14/parrot-ar-drone-2-0-caracteristicas-precio>

[39]Amazon, Parrot AR.Drone Quadricopter Controlled by iPod touch, iPhone, iPad, and Android Devices (Orange/Blue), 09 do 2010, disponible em:<http://www.amazon.com/Parrot-AR-Drone-Quadricopter-Controlled-Android/dp/B003ZVSHB0>

[40]MARTIN P; SALA E, The True Role of Accelerometer Feedback in Quadroter Control, vol 1, hal- 00422423, 2009

## **APÊNDICES**

## APÊNDICE 1.

### A1 -1 SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM.

Seja o sistema descrito pela seguinte equação:

$$G(z) = \frac{k}{Z^2 + 2\zeta\omega_n Z + \omega_n^2} \approx \left(\frac{k}{z+a}\right) \left(\frac{1}{z+\bar{a}}\right) \quad (\text{A1 -1})$$

Onde

$$\frac{y(n)}{x(n)} = \frac{k}{z+a} \quad (\text{A1 -2})$$

Escrevendo o sistema como equação de diferenças tem-se:

$$y(n) + ay(n-1) = kx(n-1)$$

$$y(n) = kx(n-1) - ay(n-1)$$

$$y(n) = kx(n-1) + \dot{a}y(n-1) \quad (\text{A1 -3})$$

Fazendo o mesmo tratamento feito para a equação (A1-2) para a equação (A1-4) tem-se:

$$\frac{y_2(n)}{y(n)} = \frac{1}{z+\bar{a}} \quad (\text{A1 -4})$$

$$y_2(n) + \bar{a}y(n-1) = y_2(n-1)$$

$$y_2(n) = y_2(n-1) - \bar{a}y_2(n-1)$$

$$y_2(n) = y_2(n-1) + \dot{\bar{a}}y_2(n-1) \quad (\text{A1 -5})$$

Onde

$$\dot{\bar{a}} = -\bar{a}$$

$$\dot{a} = -a$$

Fazendo a solução para a equação (A1 -2) tem-se:

$$y(n) = kx(n - 1) + \dot{a}y(n - 1)$$

Então:

$$y(n - 1) = kx(n - 2) + \dot{a}y(n - 2) \quad (\text{A1 -6})$$

$$y(n - 2) = kx(n - 3) + \dot{a}y(n - 3) \quad (\text{A1 -7})$$

$$y(n - 3) = kx(n - 4) + \dot{a}y(n - 4) \quad (\text{A1 -8})$$

Substituição a equação (A1 -6) na equação (A1 -2) vai se ter

$$y(n) = kx(n - 1) + \dot{a}(kx(n - 2) + \dot{a}y(n - 2)) \quad (\text{A1 -9})$$

E fazendo as substituições nas equações (A1-7), (A1-8) e (A1-9) na equação (A1 -2) o sistema vai ficar como mostra a equação (A1 -10)

$$y(n) = kx(n - 1) + \dot{a}kx(n - 2) + \dot{a}^2kx(n - 3) + \dot{a}^3kx(n - 4) + \dot{a}^4y(n - 4) \quad (\text{A1-10})$$

Então a relação que descreve a expansão da serie mostrada na figura anterior é

$$y(n) = k \sum_{i=0}^{\infty} \dot{a}^i x(n - 1 - i) \quad (\text{A1 -11})$$

Fazendo o mesmo desenvolvimento matemática para a equação (A1 -5 ) tem-se:

$$y_2(n) = y(n - 1) + \dot{a}y(n - 1)$$

Como o sistema depende de um estado anterior, da equação (A1 -11) tem-se:

$$y(n - 1) = k \sum_{i=0}^{\infty} \dot{a}^i x(n - 2 - i) \quad (\text{A1 -12})$$

Substituindo a equação (A1 -12) na equação (A1 -5) tem-se:

$$y_2(n) = k \sum_{i=0}^{\infty} \dot{a}^i x(n - 2 - i) + \dot{a}y_2(n - 1) \quad (\text{A1 -13})$$

Onde as espangões respectivas são dadas pelas seguintes equações:

$$y_2(n-1) = k \sum_{i=0}^{\infty} \dot{a}^i x(n-3-i) + \ddot{a} y_2(n-2) \quad (\text{A1 -14})$$

$$y_2(n-2) = k \sum_{i=0}^{\infty} \dot{a}^i x(n-4-i) + \ddot{a} y_2(n-3) \quad (\text{A1 -15})$$

$$y_2(n-3) = k \sum_{i=0}^{\infty} \dot{a}^i x(n-5-i) + \ddot{a} y_2(n-4) \quad (\text{A1 -16})$$

$$y_2(n-4) = k \sum_{i=0}^{\infty} \dot{a}^i x(n-6-i) + \ddot{a} y_2(n-5) \quad (\text{A1 -17})$$

Fazendo a substituição dos termos respectivamente correspondentes na equação (A1 -13) tem-se a equação (A1 -18):

$$\begin{aligned} y_2(n) = & k \sum_{i=0}^{\infty} \dot{a}^i x(n-2-i) + k \ddot{a} \sum_{i=0}^{\infty} \dot{a}^i x(n-3-i) \\ & + k \ddot{a}^2 \sum_{i=0}^{\infty} \dot{a}^i x(n-4-i) + k \ddot{a}^3 \sum_{i=0}^{\infty} \dot{a}^i x(n-5-i) \\ & + k \ddot{a}^4 \sum_{i=0}^{\infty} \dot{a}^i x(n-6-i) + \ddot{a}^5 y_2(n-5) \end{aligned} \quad (\text{A1 -18})$$

A equação (A1-18) apresenta uma serie de somatorios os quais podem transformar em um sumatorio, conhecendo a sequência e o comportamento das constantes  $\dot{a}$  e  $\ddot{a}$ , mediante a expansão dos termos fazendo a seguinte metodologia

$$x(n-2) = k$$

$$x(n-3) = k\dot{a} + k\ddot{a}$$

$$x(n-4) = k\dot{a}^2 + k\bar{a}\dot{a} + k\ddot{a}^2$$

$$x(n-5) = k\dot{a}^3 + k\bar{a}\dot{a}^2 + k\ddot{a}^2\dot{a} + k\ddot{a}^3$$

$$x(n-6) = k\dot{a}^4 + k\bar{a}\dot{a}^3 + k\ddot{a}^2\dot{a}^2 + k\ddot{a}^3\dot{a} + k\ddot{a}^4$$

As equações anteriores apresentam um padrom similar, que é quando a potencia de  $\hat{a}'$  disminui a potencia de  $\hat{\bar{a}}$  aumenta, então a representação geral vai estar dada por a seguinte equação:

$$y_2(n) = k \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \hat{\bar{a}}^j \hat{a}'^{(i-j)} x(n-2-i) \quad (\text{A1 -19})$$

Substituindo as equações (A1 -11) e (A1 -18) na equação (A1-1) tem-se:

$$\left(\frac{k}{z+a}\right)\left(\frac{1}{z+\bar{a}}\right) = \frac{y(n) y_2(n)}{x(n) y(n)} = \frac{k \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \hat{\bar{a}}^j \hat{a}'^{(i-j)} x(n-2-i)}{x(n)} \quad (\text{A1 -20})$$

Onde a solução encontrada para o exemplo do apendice 1, mostrada mediante a equação (A1 -20), é importante para dar solução au sistema (A1 -1), e fundamental para a solução da variância do sistema.



## APENDICE 2

### A2-1. PROGRAMA PARA O CÁLCULO DA VARIÂNCIA

```
clc;
T=0.1;
delta=1.0;
kp=0.5;
kd=[0:0.1:5];
ki=0.0795;

c=kd./(1+kd);
d=(1./(1+kd)).*(kd*T + T*T*kp + T*T*T*ki);
e=(2./(1+kd)).*(T*kd + T*T*kp);
f=T + ((T*T)./(1+kd)).*(kp + T*ki);
g= 2*T + ((T*T*kp)./(1+kd));

%Zeros
s=[f -g T];
roots(s);
a= (2*T)./g;
a1=g./(2*f);
A=(1-(a.^2-a1.^2)).^2;
B=(-d.*(a.^3-a1.^3) + e.*(a.^2-a1.^2) - c*T.*(a-a1)).^2;
C=(-d.*(a.^2 - a1.^2)+ e.*(a - a1)).^2;
D=(-d.*(a-a1)).^2;
E= (1./(f.*(a-a1))).^2;
var=E.*(B./A + C + D )*(delta^2)

plot(kd,var,'k')
hold on;
title('saída','FontName','Times','FontSize',28)
xlabel('Kd','FontName','Times','FontSize',28)
ylabel('Variância','FontName','Times','FontSize',28)
```