

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**Confinamento Quântico no Modelo de Duas
Cadeias Acopladas de Férmions sem Spin**

THIAGO PRUDÊNCIO DE OLIVEIRA

Brasília, 2012

TESE DE DOUTORADO

**Confinamento Quântico no Modelo de Duas
Cadeias Acopladas de Férmions sem Spin**

THIAGO PRUDÊNCIO DE OLIVEIRA

ORIENTADOR:

Prof. Dr. ÁLVARO FERRAZ FILHO

Brasília, 2012

42

“Às vezes é preciso desentender para
compreender.”

(Autor desconhecido)

Agradecimentos

À minha família, pelo apoio incondicional.

Aos amigos, sem motivos.

Aos meus professores, pelos ensinamentos e conselhos que nortearam minha formação acadêmica.

Aos membros da banca examinadora, cujas observações foram cruciais para a tese nesta forma final.

Ao meu orientador, pela paciência e discussões que possibilitaram a conclusão deste trabalho de tese.

À Universidade de Brasília (UnB), por ser uma instituição fundamental para minha formação.

Ao Instituto de Física (IF -UnB), por possibilitar este doutorado em Física.

Ao Instituto Internacional de Física - Universidade Federal do Rio Grande do Norte (IIF - UFRN), pela hospitalidade para minhas pesquisas em Física Teórica durante parte do doutorado.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES - UnB), pelo financiamento deste projeto de doutorado.

A Deus.

Resumo

Realizamos um estudo completo baseado no grupo de renormalização (RG) de duas cadeias de Luttinger acopladas (MDCA) de férmions sem spin sob interações do tipo intrabanda frontal e interbanda frontal, backscattering e umklapp até a ordem de 2-loops. Demonstramos a presença do confinamento quântico nos pontos de Fermi, com os acoplamentos fluindo para os pontos fixos de um líquido de Luttinger.

Abstract

We perform a field theory renormalization group (RG) calculation for two coupled chains model (TCCM) of spinless fermions in the presence of intraband forward, interband forward, backscattering and umklapp interactions up to two-loops. We demonstrate the presence of quantum confinement of the renormalized Fermi points with the renormalized couplings flowing towards the single chain Luttinger liquid fixed points.

Sumário

1	Introdução	1
2	Sistemas unidimensionais	6
2.1	Diagonalização dos elétrons em uma rede unidimensional	6
2.2	Interação elétron-elétron	8
2.3	Modelo de Hubbard 1D	10
2.4	Linearizando a relação de dispersão	12
2.5	Tipos de interação para o modelo linearizado	14
2.6	Introdução do cutoff Λ	16
2.7	Simetria $U(1)$	16
2.8	Lagrangiano	17
2.9	O modelo de Tomonaga-Luttinger	18
3	Acoplamento de duas cadeias de férmions sem spin	20
3.1	Diagonalização do sistema de duas cadeias acopladas	20
3.2	Linearização do modelo	24
4	Interações intrabanda e interbandas, simetria quirial e trocas de cor	28
4.1	Interações interbandas e intrabandas	28
4.2	Lagrangiano	30
4.3	Conservação energia-momento, trocas de cor e simetria quirial	32
4.4	Bolhas de polarização de uma cor e duas cores	34

5	Transformações Quirais, Identidade de Ward-Takahashi e Anomalia Quântica	37
5.1	Ação em termos de interações de cor	37
5.2	Transformações quirais, identidade de Ward-Takahashi e Anomalia quântica	39
6	Prescrições de grupo de renormalização	48
6.1	As grandezas nuas	50
6.2	Equações de fluxo de renormalização	51
7	Funções irreduzíveis renormalizadas de uma partícula	53
7.1	Autoenergias e funções renormalizadas $\Gamma^{(2)}$	53
7.2	Prescrição física para $\Gamma_R^{(2)}$ e fluxo de renormalização para $\Delta_{F,R}^k$	58
8	Funções irreduzíveis renormalizadas de duas partículas	61
8.1	Funções irreduzíveis renormalizadas de duas partículas $\Gamma_R^{(4)}$ e contra- termos para os canais de espalhamento	61
9	Equações de fluxo do grupo de renormalização	76
9.1	Equações de fluxo de renormalização para os acoplamentos renorma- lizados até 2-loops	76
9.2	O caso 1-loop e uma solução analítica	80
9.3	Solução numérica 1-loop	85
9.4	Solução numérica das equações de GR em 2-loops	86
10	Confinamento Quântico no MDCA	92
11	Conclusão e Perspectivas	101
.1	Polarização de uma “cor”	104
.2	Polarização de duas “cores”	109
.1	Espalhamento interfrontal partícula-buraco	114

.2	Espalhamento interfrontal partícula-partícula	120
.3	Interbackscattering no canal de espalhamento interfrontal	126

Capítulo 1

Introdução

O líquido de Luttinger, que é característico de um sistema de elétrons correlacionados em uma dimensão espacial (1D), representam um dos mais interessantes exemplos de comportamento do tipo não-líquido de Fermi, com intrincadas propriedades sem contraparte em dimensões superiores, como a separação de spin e de carga [1] e a correspondência direta entre as excitações bosônicas e fermiônicas [2].

O crossover entre o estado de líquido de Luttinger e o líquido de Fermi é um problema fundamental para transições de fase quânticas em sistemas fortemente correlacionados. Quando isso ocorre, os graus de liberdade do sistema comportam-se como se estivessem se reduzindo a 1D. Sistemas importantes como condutores orgânicos [3], os estados de borda¹ de sistemas Hall quânticos [4], isolantes topológicos [5], nanotubos de carbono [6, 7] e supercondutores de alta temperatura crítica (alto-Tc) [8, 9, 10] são relacionados ao comportamento típico de líquidos de Luttinger. Intermediário entre sistemas 1D e duas dimensões espaciais (2D), o acoplamento entre duas cadeias de Luttinger é na prática um sistema quasi-1D. Tais sistemas servem, a grosso modo, como protótipos para o estudo de condutores orgânicos [11], as cadeias CuO e os planos CuO₂ associados aos supercondutores de alto-Tc [10]. Como no caso 1D, a superfície de Fermi de sistemas quasi-1D consiste em pontos de Fermi discretos ou um conjunto de pontos de Fermi que formam uma superfície de Fermi discreta, em contraste com sistemas de dimensões 2D e di-

¹do inglês *edge states*.

mensões superiores, onde a superfície de Fermi é contínua ou um conjunto de partes contínuas.

Com efeito, muitos estudos têm se focado em sistemas de elétrons fortemente correlacionados quasi-1D, de modo a se ter maior controle das técnicas analíticas e métodos numéricos, devido à proximidade com o caso de sistemas 1D, que são integráveis e exatamente solúveis. A abordagem de grupo de renormalização tem sido muito eficiente nesse contexto, permitindo a investigação de muitos fenômenos associados a esses sistemas, tais como os efeitos de desordem [12], o comportamento crítico [13], fases de acoplamento fraco [14] e acoplamento forte [15] e emparelhamento supercondutor [16].

A investigação de sistemas quasi-1D também levanta a questão sobre a existência ou não da quebra do regime do líquido de Fermi em dimensões superiores, como ocorre no caso 1D, e, se for esse o caso, de como se daria o crossover dessa nova fase para o regime de líquido de Fermi. Nesse contexto, o problema do confinamento quântico é um dos mais importantes no sentido de se responder esta questão. Um primeiro ponto se refere à relevância do *hopping* perpendicular t_{\perp} envolvendo duas cadeias de férmions, responsável pelo movimento transversal entre cadeias, discutida inicialmente por Anderson [17]. Esperaria-se que se t_{\perp} fosse suficientemente fraco, não haveria uma mudança considerável no sistema quasi-1D, e as quasipartículas continuariam a não ser bem definidas como em 1D. Trabalhos mais recentes têm mostrado que essa questão não é tão simples como pode parecer à primeira vista. De fato, ela deve envolver uma cuidadosa consideração da renormalização da superfície de Fermi [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24]. Nesse contexto, o efeito de interações fortes na forma da superfície de Fermi de cadeias fracamente acopladas tem sido observado com um estado confinado onde os termos perpendiculares, responsáveis pela mobilidade entre cadeias, se anulam levando à ausência de mobilidade entre cadeias [25, 26]. Esses trabalhos, no entanto, levam em conta essencialmente o

termo de *backscattering*² interbanda³ ou não são completamente autoconsistentes [27], uma abordagem mais apropriada deve conter todas as interações compatíveis de interações elétron-elétron entre as duas cadeias desse sistema e um procedimento de renormalização autoconsistente.

Além disso, a consistência dos métodos de grupo de renormalização está também associada à cuidadosa observação das identidades de Ward-Takahashi [31, 32], algo que já é bem observado no contexto das teorias de gauge em altas energias [33]. Nesse sentido, os trabalhos de Dzyaloshkii e Larkin [34] e Di Castro e Metzner [35], discutem essas identidades no contexto de sistemas 1D, para o líquido de Luttinger, mas não levam em conta a presença de anomalias quânticas, que são a quebra de simetria clássica pelo procedimento de quantização [36]. A presença dessas anomalias é bem estabelecida no contexto de teoria de gauge envolvendo férmions quirais ($1 + 1$, $3 + 1$, etc.) e isso nos obriga a observar ainda mais cuidadosamente a construção de uma identidade de Ward-Takahashi anômala que incorpora o termo de anomalia [38]. Numa tentativa incorporar essas questões no contexto de física da matéria condensada, os trabalhos de Benfatto, Galavotti e Mastropietro tem abordado a inclusão de métodos não-perturbativos para atacar os problemas de elétrons fortemente correlacionados [39, 40, 41] e em particular a questão da anomalia no líquido de Luttinger [42]. Mais recentemente, essas técnicas foram utilizadas em conjunto com a abordagem perturbativa, por Costa, Ferraz e Mastropietro para construir e resolver consistentemente a identidade de Ward-Takahashi anômala para o sistema quasi-1D de duas cadeias acopladas de férmions sem spin, envolvendo o conjunto completo de interações entre cadeias com simetria quiral [43].

Nos últimos anos, os métodos de grupo de renormalização de teoria quântica de campos têm sido empregados na abordagem de problemas de sistemas de elétrons fortemente correlacionados em modelos fermiônicos, tais como, por exemplo, o modelo de Tomonaga-Luttinger [44], modelos com superfícies de Fermi chatas em

²Espalhamento “para trás”.

³Resultante da interação entre cadeias.

2D [45], susceptibilidades de carga uniformes em baixa dimensionalidade [46], fase líquida de spin isolante [47], cálculos de funções resposta [48] e quebra do regime do líquido de Fermi em 2D [49], entre outros [50, 51].

Nesse contexto, consideramos nesta tese, o modelo de duas cadeias acopladas (MDCA) levando explicitamente em conta as interações entre partículas de quiralidades opostas que preservam a simetria quiral e realizam todas as possíveis trocas de “cor”⁴ (representando processos associados às bandas ligante e antiligante, que se originam da presença do termo perpendicular) e que, no limite de confinamento quântico, reduzem-se a interações apenas do tipo g_2 , que são interações frontais elétron-elétron em 1D. Mais especificamente são consideradas as interações intrabanda frontal e interbanda frontal, *backscattering* e *umklapp*⁵. Aplicamos completamente a abordagem de teoria quântica de campos para grupo de renormalização até a ordem de dois loops (2-loops), levando em consideração a renormalização auto-consistente do peso da quasipartícula, dos pontos de Fermi e de todos os acoplamentos existentes. Para tanto determinamos um conjunto de equações de fluxo de renormalização para todas essas grandezas físicas mencionadas acima. Calculamos assim as funções irreduzíveis renormalizadas de uma e duas partículas que descrevem, respectivamente, as contribuições devidas à autoenergia e aos processos de espalhamento envolvidos, até a ordem de 2-loops, levando em conta todo o procedimento de renormalização.

O foco principal desta tese é o problema do confinamento quântico, como resultado do estudo do sistema de equações de grupo de renormalização até a ordem de 2-loops obtido para esse sistema. Antes de tratarmos dessa renormalização, discutimos as relações de Ward-Takahashi propriamente ditas e a anomalia quântica associada que foram objeto de discussão de outro trabalho independente [43]. Nós reproduzimos alguns desses resultados usando um formalismo com campos livres de

⁴O termo “cor” é mais apropriadamente associado ao “sabor” em altas energias. O uso do termo fica claro aqui, uma vez que as bandas são distinguidas por duas cores.

⁵Interações com troca de bandas (“cor”).

Dirac em $1 + 1$ na presença de interações de uma e duas cores. Nós mostramos que as interações de uma cor (interações frontais intrabanda e interbandas) podem ser associados às correntes axiais, em um contexto semelhante ao que acontece com o modelo de Schwinger em $1+1$ [52, 53, 54]. Como é sabido, nesse modelo a ação de um campo externo associado a correntes axiais em um campo de Dirac leva à presença de anomalia, que é um resultado dos requerimentos simultâneos de conservação da corrente vetorial (conservação de carga) e conservação da corrente axial (simetria quiral) sob as transformações vetorial e axial, respectivamente. Assim, usando uma nova roupagem nós reproduzimos as identidades de Ward-Takahashi e identidades de Ward-Takahashi anômalas obtidas em [43].

Esta tese está organizada da seguinte maneira: primeiramente, discutimos alguns sistemas 1D e também duas cadeias acopladas. Depois, discutimos a questão das anomalias quânticas no MDCA. Em seguida, iniciamos a análise detalhada do MDCA dentro da abordagem de grupo de renormalização, efetuando as análises completas das funções irreduzíveis de uma e duas partículas, as equações de grupo de renormalização. Finalmente, discutimos a questão da presença de confinamento quântico no MDCA. Incluímos também alguns apêndices, onde alguns detalhes de cálculos importantes, mas que não cabem no texto, são detalhados.

Capítulo 2

Sistemas unidimensionais

2.1 Diagonalização dos elétrons em uma rede unidimensional

O hamiltoniano livre em uma rede unidimensional pode ser escrito da seguinte forma em linguagem de segunda quantização

$$\hat{H}_0 = \sum_{i,j,\sigma} t_{ij} \hat{\psi}_{i\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{j\sigma}, \quad (2.1)$$

onde t_{ij} são os elementos da matriz de transferência do sítio i para o sítio j , $\hat{\psi}_{i\sigma}^\dagger$ e $\hat{\psi}_{j\sigma}$ são operadores fermiônicos.

Podemos também escrever $\hat{\psi}_{i\sigma}$ no espaço dos momentos ($\hbar = 1$) através da seguinte transformada de Fourier

$$\hat{\psi}_{k\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_i e^{ikx_i} \hat{\psi}_{i\sigma}, \quad (2.2)$$

ou através da transformada inversa

$$\hat{\psi}_{i\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_k e^{-ikx_i} \hat{\psi}_{k\sigma}, \quad (2.3)$$

onde \mathcal{N} representa o número total de sítios.

Considerando apenas *hopping* entre primeiros vizinhos (modelo de *tight-binding*) a matriz de transferência (“salto”) pode ser definida através de seus elementos t_{ij} ,

$$t_{ij} = \begin{cases} -t & \text{se } j = i + 1, i - 1; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Podemos então reescrever o hamiltoniano livre (2.1) como

$$\begin{aligned} H_0 &= -t \sum_{i,j,\sigma} (\delta_{j,i+1} + \delta_{j,i-1}) \hat{\psi}_{i\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{j\sigma} \\ &= -t \sum_{i,\sigma} (\hat{\psi}_{i\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{i+1\sigma} + \hat{\psi}_{i\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{i-1\sigma}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Da equação (2.3), temos

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{i\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{i\pm 1\sigma} &= \frac{-t}{\mathcal{N}} \sum_{k,k'} e^{ikx_i} \hat{\psi}_{k\sigma}^\dagger e^{-ik'x_{i\pm 1}} \hat{\psi}_{k'\sigma} \\ &= \frac{-t}{\mathcal{N}} \sum_{k,k'} e^{ikx_i} \hat{\psi}_{k\sigma}^\dagger e^{-ik'(x_i \pm \mathbf{a})} \hat{\psi}_{k'\sigma}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde usamos $x_{i\pm 1} = x_i \pm \mathbf{a}$, uma vez que a distância entre primeiros vizinhos é a constante da rede \mathbf{a} . Podemos simplificar um pouco a equação (2.5), usando a relação anterior, equação (2.6), na seguinte soma

$$\hat{\psi}_{i\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{i+1\sigma} + \hat{\psi}_{i\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{i-1\sigma} = \frac{-2t}{\mathcal{N}} \sum_{k,k'} e^{ix_i(k-k')} \cos(k'\mathbf{a}) \hat{\psi}_{k\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{k'\sigma}. \quad (2.7)$$

Usando também a relação

$$\sum_i e^{ix_i(k-k')} = \mathcal{N} \delta_{kk'}, \quad (2.8)$$

podemos reescrever a hamiltoniana como

$$\hat{H}_0 = -2t \sum_{k,\sigma} \cos(k\mathbf{a}) \hat{\psi}_{k\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{k\sigma}. \quad (2.9)$$

Definindo a energia dependente de k ,

$$\varepsilon_k = -2t \cos(k\mathbf{a}), \quad (2.10)$$

chegamos finalmente a equação do hamiltoniano em sua forma diagonalizada

$$\hat{H}_0 = \sum_{k,\sigma} \varepsilon_k \hat{\psi}_{k\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{k\sigma}. \quad (2.11)$$

Da equação (2.10), temos também

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{k+\frac{2\pi}{a}}, \quad (2.12)$$

isto é, a relação dispersão (2.10) é periódica de período $2\pi/a$ no espaço dos momentos k . Podemos assim definir a zona de Brillouin, confinando o sistema a valores de k no intervalo $\pi/a \geq k \geq -\pi/a$. A relação de dispersão ε_k define uma estrutura de banda única para o sistema.

No ensemble grande-canônico, podemos definir a seguinte quantidade

$$\hat{H}_0 - \mu \hat{N} = \sum_{k,\sigma} \xi_k \hat{\psi}_{k\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{k\sigma} \quad (2.13)$$

onde \hat{N} é o operador número total e

$$\xi_k = \varepsilon_k - \mu. \quad (2.14)$$

É interessante ressaltar a diferença entre a relação de dispersão em uma rede unidimensional, que é periódica, $-2t \cos(ka) - \mu$ e a relação de dispersão dos elétrons no espaço vazio (gás de elétrons), que é parabólica, ou seja, $\hbar k^2/2m - \mu$. Na figura 2.1, traçamos esses dois casos.

2.2 Interação elétron-elétron

Considere inicialmente uma interação elétron-elétron que pode ser representada genericamente por

$$\begin{aligned} H_{int} &= \sum_{ij'j'\sigma\sigma'} \langle i, j | V | i', j' \rangle \hat{\psi}_{i\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{j\sigma'}^\dagger \hat{\psi}_{j'\sigma'} \hat{\psi}_{i'\sigma} \\ &= \sum_{ij'j'\sigma\sigma'} V_{ij'j'\sigma\sigma'} \hat{\psi}_{i\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{j\sigma'}^\dagger \hat{\psi}_{j'\sigma'} \hat{\psi}_{i'\sigma}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

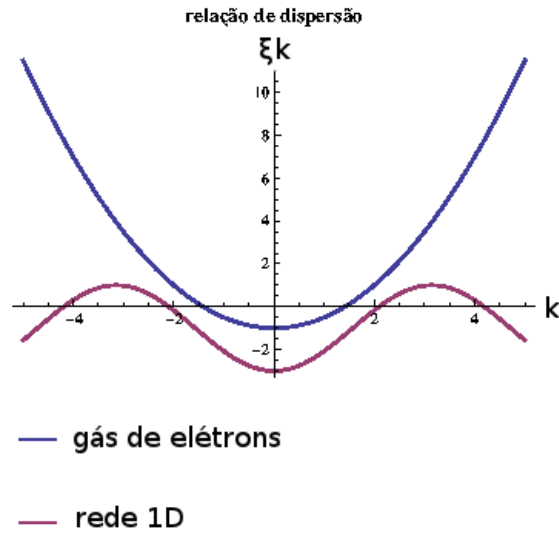


Figura 2.1: Comparação entre as relações de dispersão de um gás de elétrons e em uma rede 1D. A primeira região de periodicidade, entre $-\pi$ e π é a primeira zona de Brillouin ($a = 1$). O potencial químico μ corresponde aos pontos onde $\xi_k = 0$, i.e., os pontos de Fermi k_F , tais que $\mu = \varepsilon_{k_F} = \varepsilon_F$ é a energia de Fermi.

onde $\hat{\psi}_{i\sigma}^\dagger$ e $\hat{\psi}_{i\sigma}$ são operadores de criação e aniquilação para elétrons com operadores de projeção de spin $\sigma = \uparrow, \downarrow$ no sítio i ,

$$V_{ij'j'} = \begin{cases} V > 0 & \text{se } j = i = j' = i'; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.16)$$

A fim de obedecer o princípio de exclusão de Pauli, sob uma interação de elétrons precisamos ter spins opostos. Assim,

$$\begin{aligned} H_{int} &= \sum_{i\sigma\sigma'} V (\delta_{\sigma\uparrow}\delta_{\sigma'\downarrow} + \delta_{\sigma\downarrow}\delta_{\sigma'\uparrow}) \hat{\psi}_{i\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{i\sigma'}^\dagger \hat{\psi}_{i\sigma'} \hat{\psi}_{i\sigma} \\ &= V \sum_i \left(\hat{\psi}_{i\uparrow}^\dagger \hat{\psi}_{i\downarrow}^\dagger \hat{\psi}_{i\downarrow} \hat{\psi}_{i\uparrow} + \hat{\psi}_{i\downarrow}^\dagger \hat{\psi}_{i\uparrow}^\dagger \hat{\psi}_{i\uparrow} \hat{\psi}_{i\downarrow} \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Podemos definir o operador número

$$\hat{n}_{i\sigma} = \hat{\psi}_{i\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{i\sigma}, \quad (2.18)$$

tal que o produto para spins opostos σ pode ser escrito como

$$\hat{n}_{i\uparrow}\hat{n}_{i\downarrow} = \hat{\psi}_{i\uparrow}^\dagger \hat{\psi}_{i\uparrow} \hat{\psi}_{i\downarrow}^\dagger \hat{\psi}_{i\downarrow}. \quad (2.19)$$

Podemos assim reescrever o termo de interação da seguinte forma

$$H_{int} = V \sum_i (\hat{n}_{i\uparrow}\hat{n}_{i\downarrow} + \hat{n}_{i\downarrow}\hat{n}_{i\uparrow}). \quad (2.20)$$

Uma vez que operadores números comutam, temos

$$H_{int} = 2V \sum_i \hat{n}_{i\uparrow}\hat{n}_{i\downarrow}. \quad (2.21)$$

Podemos então realizar a seguinte transformação $2V \rightarrow U$ tal que a interação é de fato dada pelo seguinte termo

$$H_{int} = U \sum_i \hat{n}_{i\uparrow}\hat{n}_{i\downarrow}. \quad (2.22)$$

2.3 Modelo de Hubbard 1D

O modelo de Hubbard 1D consiste em um modelo de *tight-binding* mais o termo de interação (2.22), ambos descritos nas seções anteriores. Temos assim,

$$\hat{H} = \sum_{k,\sigma} \varepsilon_k \hat{\psi}_{k\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{k\sigma} + U \sum_i \hat{n}_{i\uparrow}\hat{n}_{i\downarrow} \quad (2.23)$$

e também

$$\hat{H} - \mu \hat{N} = \sum_{k,\sigma} \xi_k \hat{\psi}_{k\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{k\sigma} + U \sum_i \hat{n}_{i\uparrow}\hat{n}_{i\downarrow} \quad (2.24)$$

onde \hat{N} é o operador número total

$$\hat{N} = \sum_{i,\sigma} \hat{n}_{i\sigma}. \quad (2.25)$$

μ é o potencial químico e ξ_k é a relação de dispersão com o potencial químico levado em consideração.

Podemos escrever o termo de interação no espaço dos momentos k . Por meio da transformada de Fourier

$$\hat{\psi}_{i\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_k e^{-ikx_i} \hat{\psi}_{k\sigma},$$

os operadores número podem ser reescritos

$$\hat{n}_{i\sigma} = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k,k'} e^{i(k-k')x_i} \hat{\psi}_{k\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{k'\sigma}. \quad (2.26)$$

Usando a relação

$$\hat{n}_{i\uparrow} \hat{n}_{i\downarrow} = \frac{1}{\mathcal{N}^2} \sum_{k,k',q,q'} e^{i(k-k'+q-q')x_i} \hat{\psi}_{k\uparrow}^\dagger \hat{\psi}_{k'\uparrow} \hat{\psi}_{q\downarrow}^\dagger \hat{\psi}_{q'\downarrow}, \quad (2.27)$$

temos

$$\sum_i \hat{n}_{i\uparrow} \hat{n}_{i\downarrow} = \frac{1}{\mathcal{N}^2} \sum_{k,k',q,q'} \hat{\psi}_{k\uparrow}^\dagger \hat{\psi}_{k'\uparrow} \hat{\psi}_{q\downarrow}^\dagger \hat{\psi}_{q'\downarrow} \sum_i e^{i(k-k'+q-q')x_i}. \quad (2.28)$$

Considerando a relação

$$\sum_i e^{ix_i(k-k'+q-q')} = \mathcal{N} \delta_{k+q,k'+q'}, \quad (2.29)$$

mudamos a equação (2.28):

$$\begin{aligned} \sum_i \hat{n}_{i\uparrow} \hat{n}_{i\downarrow} &= \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k,k',q,q'} \hat{\psi}_{k\uparrow}^\dagger \hat{\psi}_{k'\uparrow} \hat{\psi}_{q\downarrow}^\dagger \hat{\psi}_{q'\downarrow} \delta_{k+q,k'+q'} \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k,k',q} \hat{\psi}_{k\uparrow}^\dagger \hat{\psi}_{k'\uparrow} \hat{\psi}_{q\downarrow}^\dagger \hat{\psi}_{k+q-k'\downarrow}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Finalmente, o hamiltoniano de interação pode ser reescrito como

$$\hat{H}_{int} = \frac{U}{\mathcal{N}} \sum_{k,k',q} \hat{\psi}_{k\uparrow}^\dagger \hat{\psi}_{q\downarrow}^\dagger \hat{\psi}_{k+q-k'\downarrow} \hat{\psi}_{k'\uparrow}. \quad (2.31)$$

O modelo de Hubbard $1D$ no espaço dos momentos k pode então ser expresso do seguinte modo

$$\hat{H} - \mu \hat{N} = \sum_{k,\sigma} \xi_k \hat{\psi}_{k\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{k\sigma} + \frac{U}{\mathcal{N}} \sum_{k,k',q} \hat{\psi}_{k\uparrow}^\dagger \hat{\psi}_{q\downarrow}^\dagger \hat{\psi}_{k+q-k'\downarrow} \hat{\psi}_{k'\uparrow}. \quad (2.32)$$

No limite termodinâmico, em que o número de sítios tende ao infinito ($\mathcal{N}, L \rightarrow \infty$), as somas nos momentos podem ser convertidas em integrais por meio da relação

$$\sum_k \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int dk. \quad (2.33)$$

2.4 Linearizando a relação de dispersão

Expandindo a relação de dispersão em (2.32) numa série de Taylor em torno do ponto de Fermi k_F , temos

$$\xi_k^{(+)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n \xi_k}{dk^n} \right|_{k=k_F} (k - k_F)^n. \quad (2.34)$$

Podemos linearizar a relação de dispersão considerando apenas termos de primeira ordem. Assim,

$$\xi_k^{(+)} = \xi_F + \left. \frac{d\xi_k}{dk} \right|_{k=k_F} (k - k_F). \quad (2.35)$$

onde

$$\xi_F^{(+)} = \xi_k|_{k=k_F}. \quad (2.36)$$

Definindo a velocidade de Fermi v_F

$$v_F = \left. \frac{d\xi_k}{dk} \right|_{k=k_F}, \quad (2.37)$$

temos

$$\xi_k^{(+)} = \xi_F + v_F (k - k_F). \quad (2.38)$$

A energia de Fermi é tal que, em $T = 0$,

$$\varepsilon_F = -2t \cos(k_F \mathbf{a}) = \mu. \quad (2.39)$$

Assim $\xi_F = 0$ e a forma final da relação de dispersão linearizada é dada por

$$\xi_k^{(+)} = v_F (k - k_F). \quad (2.40)$$

Podemos também realizar a expansão em torno do ponto de Fermi oposto $-k_F$. Neste caso,

$$\xi_k^{(-)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n \xi_k}{dk^n} \right|_{k=-k_F} (k + k_F)^n. \quad (2.41)$$

e linearizando até primeira ordem, temos

$$\xi_k^{(-)} = \xi_F + \frac{d\xi_k}{dk}\Big|_{k=-k_F}(k + k_F). \quad (2.42)$$

Uma vez que a função cosseno é par, vemos que a energia de Fermi no nível de Fermi é ainda igual ao potencial químico μ , assim $\xi_F = 0$. Podemos também observar que a velocidade de Fermi é $-v_F$, isto é,

$$\frac{d\xi_k}{dk}\Big|_{k=-k_F} = -v_F. \quad (2.43)$$

Temos então que na vizinhança de $k = -k_F$,

$$\xi_k^{(-)} = -v_F(k + k_F). \quad (2.44)$$

Desse modo, a linearização divide o espaço dos momentos em duas vizinhanças quirais, uma próxima a k_F , lado direito (+), e a outra próxima a $-k_F$, lado esquerdo (-). Com efeito, a “superfície” de Fermi consiste aqui (em 1D) em dois pontos: k_F e $-k_F$.

De modo geral, podemos escrever

$$\xi_k^{(s)} = v_F(sk - k_F), \quad (2.45)$$

onde $s = \pm$. Notamos que as partículas próximas a k_F têm momento positivo e próximas a $-k_F$ apresentam momento negativo. Assim, reescrevemos (2.45) da seguinte forma

$$\xi_k^{(s)} = v_F(|k| - k_F). \quad (2.46)$$

Podemos redefinir a equação $\xi_k^{(s)} = \varepsilon_{sk}$, tal que

$$\varepsilon_{sk} = v_F(sk - k_F). \quad (2.47)$$

Os termos de operadores de criação e aniquilação também carregam a quiralidade, de modo que $\hat{\psi}_{-k\sigma}^\dagger$ e $\hat{\psi}_{-k\sigma}$ representam partículas da esquerda e $\hat{\psi}_{k\sigma}^\dagger$ e $\hat{\psi}_{k\sigma}$ partículas da direita. O hamiltoniano livre é assim reescrito como

$$\hat{H}_0 = \sum_{sk\sigma} \varepsilon_{sk} \hat{\psi}_{sk\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{sk\sigma}, \quad (2.48)$$

onde $s = \pm$. Note-se que, dessa maneira, \hat{H}_0 apresenta, obviamente, simetria quiral, que é invariância sobre trocas $\pm \rightarrow \mp$.

2.5 Tipos de interação para o modelo linearizado

As interações envolvendo o modelo linearizado podem ser classificadas em quatro diferentes tipos, seguindo a abordagem de acoplamentos (g -ologia) que representam possíveis processos de espalhamento partícula-partícula e partícula-buraco para o sistema. Há quatro possíveis acoplamentos, denominados, respectivamente, g_1 , g_2 , g_3 e g_4 . O acoplamento g_1 representa o processo chamado *backscattering*, o acoplamento g_2 representa o espalhamento frontal entre as duas quiralidades diferentes, o acoplamento g_3 representa o espalhamento que é chamado *umklapp* e finalmente g_4 representa o espalhamento do tipo frontal entre partículas de mesma quiralidade. A figura 2.2 resume os tipos de interação, onde as linhas cheias representam partículas “+” (lado direito) e as tracejadas as partículas “-” (lado esquerdo). As interações $-ig_2$ e $-ig_4$ estão relacionadas a pequenas transferências de momento, menores que k_F , a interação de *backscattering* $-ig_1$ é da ordem de $2k_F$, interação do tipo *umklapp* $-ig_3$ torna-se relevante apenas no caso envolvendo uma banda semi-cheia, da ordem de $4k_F$. A presença de spin gera para todos os acoplamentos termos de spins paralelo \parallel e antiparalelo \perp [11]. Assim o hamiltoniano de interação passa a ser escrito

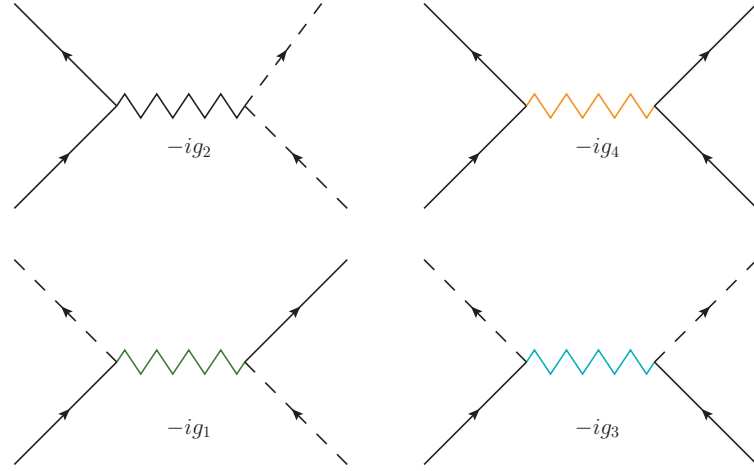


Figura 2.2: Linhas tracejadas correspondem aos férmions da esquerda (“-”), linhas cheias correspondem aos férmions da direita (“+”). Acoplamentos para os diferentes tipos de espalhamento no sistema: tipo frontal $-ig_2$ representa o espalhamento entre + e -; tipo frontal $-ig_4$, entre + e + ou - e -; do tipo *backscattering* $-ig_1$ representa o espalhamento com troca de ramos $\pm\mp \rightarrow \mp\pm$; do tipo *umklapp* $-ig_3$ representa dupla troca de ramos $\pm\pm \rightarrow \mp\mp$.

como¹

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{int} &= \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k,k',q,\sigma,\sigma'} (g_{1\parallel}\delta_{\sigma,\sigma'} + g_{1\perp}\delta_{\sigma,-\sigma'}) \hat{\psi}_{k,\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{-k',\sigma'}^\dagger \hat{\psi}_{k'+2k_F+q,\sigma'} \hat{\psi}_{-(k-2k_F-q),\sigma} \\
&+ \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k,k',q,\sigma,\sigma'} (g_{2\parallel}\delta_{\sigma,\sigma'} + g_{2\perp}\delta_{\sigma,-\sigma'}) \hat{\psi}_{k,\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{-k',\sigma'}^\dagger \hat{\psi}_{-(k'+q),\sigma'} \hat{\psi}_{k-q,\sigma} \\
&+ \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{k,k',q,\sigma,\sigma'} (g_{3\parallel}\delta_{\sigma,\sigma'} + g_{3\perp}\delta_{\sigma,-\sigma'}) \hat{\psi}_{k,\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{k',\sigma'}^\dagger \hat{\psi}_{-(k'-2k_F+q),\sigma'} \hat{\psi}_{-(k-2k_F-q),\sigma} \\
&+ \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{k,k',q,\sigma,\sigma'} (g_{3\parallel}\delta_{\sigma,\sigma'} + g_{3\perp}\delta_{\sigma,-\sigma'}) \hat{\psi}_{-k,\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{-k',\sigma'}^\dagger \hat{\psi}_{k'-2k_F+q,\sigma'} \hat{\psi}_{k-2k_F-q,\sigma} \\
&+ \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{k,k',q,\sigma,\sigma'} (g_{4\parallel}\delta_{\sigma,\sigma'} + g_{4\perp}\delta_{\sigma,-\sigma'}) \hat{\psi}_{k,\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{k',\sigma'}^\dagger \hat{\psi}_{k'+q,\sigma'} \hat{\psi}_{k-q,\sigma} \\
&+ \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{k,k',q,\sigma,\sigma'} (g_{4\parallel}\delta_{\sigma,\sigma'} + g_{4\perp}\delta_{\sigma,-\sigma'}) \hat{\psi}_{-k,\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{-k',\sigma'}^\dagger \hat{\psi}_{-(k'+q),\sigma'} \hat{\psi}_{-(k-q),\sigma}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

¹A presença de simetria SU(2) simplifica o número de acoplamentos.

Note que a razão do processo de *backscattering* necessitar de momentos da ordem de $2k_F$ se dá devido ao fato de que uma partícula de cada lado cruza para o ramo oposto, o que corresponde a uma diferença de $|\pm(k_F - (-k_F))| = 2k_F$. Já o processo de *umklapp* envolve o cruzamento de duas partículas de um mesmo ramo para o ramo oposto, o que corresponde ao dobro da diferença anterior $2|\pm(k_F - (-k_F))| = 4k_F$. Por outro lado, como nos espalhamentos frontais as partículas não mudam de quiralidade, as transferências de momento são pequenas, de magnitude menor que k_F .

2.6 Introdução do cutoff Λ

Agora introduziremos um cutoff ultravioleta fixo Λ que restringe os estados permitidos de uma partícula, especificando assim os valores de momento dentro do seguinte intervalo

$$-\Lambda + k_F < |k| < k_F + \Lambda. \quad (2.50)$$

O cutoff de energia correspondente é definido por

$$\Omega = 2v_F\Lambda \quad (2.51)$$

O uso de um cutoff aplica-se igualmente aos dois ramos do espaço k , isto é, nas vizinhanças dos pontos de Fermi $-k_F$ e k_F .

Quando $\Lambda \rightarrow \infty$ temos o mar de Dirac, correspondendo a um infinito de partículas em cada quiralidade.

2.7 Simetria $U(1)$

A simetria $U(1)$ é basicamente dada pela invariância sob a seguinte transformação global de fase, que está diretamente associada à conservação de carga,

$$\hat{\psi}_{j\sigma} \rightarrow e^{i\alpha} \hat{\psi}_{j\sigma}. \quad (2.52)$$

Podemos ver que o hamiltoniano total não se altera

$$\sum_{k,\sigma} \xi_k e^{-i\alpha} \hat{\psi}_{k\sigma}^\dagger e^{i\alpha} \hat{\psi}_{k\sigma} + \frac{U}{\mathcal{N}} \sum_{k,k',q} e^{-i\alpha} \hat{\psi}_{k\uparrow}^\dagger e^{-i\alpha} \hat{\psi}_{q\downarrow}^\dagger e^{i\alpha} \hat{\psi}_{k+q-k'\downarrow} e^{i\alpha} \hat{\psi}_{k'\uparrow} \quad (2.53)$$

Os termos $e^{-i\alpha}$ e $e^{i\alpha}$ se cancelam, deixando assim o sistema invariante sob a transformação de simetria $U(1)$.

2.8 Lagrangiano

A utilização do lagrangiano é de particular importância no desenvolvimento do método perturbativo para os cálculos de diagramas de Feynman e para a obtenção do gerador funcional.

Por meio de uma transformação de Legendre, segue-se então que ($\hbar = 1$),

$$\mathcal{L} = \sum_{k,\sigma} \hat{\psi}_{k\sigma}^\dagger i\partial_t \hat{\psi}_{k\sigma} - \hat{\mathcal{H}}. \quad (2.54)$$

Em particular, usando o hamiltoniano (2.32)

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{H} - \mu\hat{N} = \sum_{k,\sigma} \xi_k \hat{\psi}_{k\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{k\sigma} + \frac{U}{\mathcal{N}} \sum_{k,k',q} \hat{\psi}_{k\uparrow}^\dagger \hat{\psi}_{q\downarrow}^\dagger \hat{\psi}_{k+q-k'\downarrow} \hat{\psi}_{k'\uparrow},$$

temos

$$\mathcal{L} = \sum_{k,\sigma} \hat{\psi}_{k\sigma}^\dagger (i\partial_t - \xi_k) \hat{\psi}_{k\sigma} - \frac{U}{\mathcal{N}} \sum_{k,k',q} \hat{\psi}_{k\uparrow}^\dagger \hat{\psi}_{q\downarrow}^\dagger \hat{\psi}_{k+q-k'\downarrow} \hat{\psi}_{k'\uparrow}. \quad (2.55)$$

Usando a forma linearizada da relação de dispersão ξ_k , dada pela equação (2.47), obtemos

$$\mathcal{L} = \sum_{k,\sigma} \hat{\psi}_{k\sigma}^\dagger [i\partial_t - v_F(|k| - k_F)] \hat{\psi}_{k\sigma} - \frac{U}{\mathcal{N}} \sum_{k,k',q} \hat{\psi}_{k\uparrow}^\dagger \hat{\psi}_{q\downarrow}^\dagger \hat{\psi}_{k+q-k'\downarrow} \hat{\psi}_{k'\uparrow}. \quad (2.56)$$

Considerando as contribuições devidas a cada quiralidade $s = \pm$, podemos reescrever

$$\mathcal{L} = \sum_{k,s,\sigma} \hat{\psi}_{sk\sigma}^\dagger [i\partial_t - \varepsilon_{sk}] \hat{\psi}_{sk\sigma} - \frac{U}{\mathcal{N}} \sum_{k,k',s,s',q} \hat{\psi}_{sk\uparrow}^\dagger \hat{\psi}_{q\downarrow}^\dagger \hat{\psi}_{sk+q-s'k'\downarrow} \hat{\psi}_{s'k'\uparrow}. \quad (2.57)$$

Levando-se em conta agora as interações envolvendo os acoplamentos na representação de g -ologia, podemos reescrever o lagrangiano na forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \sum_{k,s,\sigma} \hat{\psi}_{sk\sigma}^\dagger [i\partial_t - \varepsilon_{sk}] \hat{\psi}_{sk\sigma} \\
& - \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k,k',q,\sigma,\sigma'} (g_{1\parallel} \delta_{\sigma,\sigma'} + g_{1\perp} \delta_{\sigma,-\sigma'}) \hat{\psi}_{k,\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{-k',\sigma'}^\dagger \hat{\psi}_{k'+2k_F+q,\sigma'} \hat{\psi}_{-(k-2k_F-q),\sigma} \\
& - \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k,k',q,\sigma,\sigma'} (g_{2\parallel} \delta_{\sigma,\sigma'} + g_{2\perp} \delta_{\sigma,-\sigma'}) \hat{\psi}_{k,\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{-k',\sigma'}^\dagger \hat{\psi}_{-(k'+q),\sigma'} \hat{\psi}_{k-q,\sigma} \\
& - \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{k,k',q,\sigma,\sigma'} (g_{3\parallel} \delta_{\sigma,\sigma'} + g_{3\perp} \delta_{\sigma,-\sigma'}) \hat{\psi}_{k,\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{k',\sigma'}^\dagger \hat{\psi}_{-(k'-2k_F+q),\sigma'} \hat{\psi}_{-(k-2k_F-q),\sigma} \\
& - \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{k,k',q,\sigma,\sigma'} (g_{3\parallel} \delta_{\sigma,\sigma'} + g_{3\perp} \delta_{\sigma,-\sigma'}) \hat{\psi}_{-k,\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{-k',\sigma'}^\dagger \hat{\psi}_{k'-2k_F+q,\sigma'} \hat{\psi}_{k-2k_F-q,\sigma} \\
& - \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{k,k',q,\sigma,\sigma'} (g_{4\parallel} \delta_{\sigma,\sigma'} + g_{4\perp} \delta_{\sigma,-\sigma'}) \hat{\psi}_{k,\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{k',\sigma'}^\dagger \hat{\psi}_{k'+q,\sigma'} \hat{\psi}_{k-q,\sigma} \\
& - \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{k,k',q,\sigma,\sigma'} (g_{4\parallel} \delta_{\sigma,\sigma'} + g_{4\perp} \delta_{\sigma,-\sigma'}) \hat{\psi}_{-k,\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{-k',\sigma'}^\dagger \hat{\psi}_{-(k'+q),\sigma'} \hat{\psi}_{-(k-q),\sigma}, \quad (2.58)
\end{aligned}$$

onde novamente a dependência temporal está implícita, $\hat{\psi}_{k,\sigma} = \hat{\psi}_{k,\sigma}(t)$.

2.9 O modelo de Tomonaga-Luttinger

Seguindo a convenção de g -ologia, a Lagrangiana de Tomonaga-Luttinger [44] consiste em desconsiderar na equação (2.58) os termos de backscattering e umklapp, tendo assim apenas processos de espalhamento frontal g_2 e g_4 ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \sum_{k,s,\sigma} \hat{\psi}_{sk\sigma}^\dagger [i\partial_t - \varepsilon_{sk}] \hat{\psi}_{sk\sigma} \\
& - \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k,k',q,\sigma,\sigma'} (g_{2\parallel} \delta_{\sigma,\sigma'} + g_{2\perp} \delta_{\sigma,-\sigma'}) \hat{\psi}_{k,\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{-k',\sigma'}^\dagger \hat{\psi}_{-(k'+q),\sigma'} \hat{\psi}_{k-q,\sigma} \\
& - \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{k,k',q,\sigma,\sigma'} (g_{4\parallel} \delta_{\sigma,\sigma'} + g_{4\perp} \delta_{\sigma,-\sigma'}) \hat{\psi}_{k,\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{k',\sigma'}^\dagger \hat{\psi}_{k'+q,\sigma'} \hat{\psi}_{k-q,\sigma} \\
& - \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{k,k',q,\sigma,\sigma'} (g_{4\parallel} \delta_{\sigma,\sigma'} + g_{4\perp} \delta_{\sigma,-\sigma'}) \hat{\psi}_{-k,\sigma}^\dagger \hat{\psi}_{-k',\sigma'}^\dagger \hat{\psi}_{-(k'+q),\sigma'} \hat{\psi}_{-(k-q),\sigma}. \quad (2.59)
\end{aligned}$$

No modelo com cutoff, $g_{4\perp}$ não contribui [11]. A fim de simplificar a notação, consideraremos também apenas g_2 , de forma que o modelo de Tomonaga-Luttinger renormalizado pode ser escrito da seguinte forma [44]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{k,s,\sigma} (1 + \delta Z) \hat{\psi}_{sk\sigma,R}^\dagger [i\partial_t - \varepsilon_{sk}] \hat{\psi}_{sk,\sigma,R} \\ &- \sum_{k,k',q,\sigma,\sigma'} (g_{2R} + \delta g_{2R}) \hat{\psi}_{k,\sigma,R}^\dagger \hat{\psi}_{-k',\sigma',R}^\dagger \hat{\psi}_{-(k'+q),\sigma',R} \hat{\psi}_{k-q,\sigma,R} \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\sigma,\sigma'} (g_{4R} + \delta g_{4R}) \hat{\psi}_{sk,\sigma,R}^\dagger \hat{\psi}_{sk',\sigma',R}^\dagger \hat{\psi}_{s(k'+q),\sigma',R} \hat{\psi}_{s(k-q),\sigma,R}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde δZ é o contratermo do campo fermiônico, δg_{2R} e δg_{4R} são os contratermos associados a renormalização em cada acoplamento, e o índice R indica que as quantidades envolvidas são renormalizadas.

Com esse modelo pode-se, por exemplo, descrever o processo de separação spin-carga típico do sistema 1D [1]. Além disso, esse modelo é integrável e pode ser bosonizado, isto é, pode ser estabelecida uma correspondência direta entre excitações fermiônicas e bosônicas.

Para as discussões que se seguirão no próximo capítulo, podemos considerar o caso sem spin e a ausência de interações do tipo g_4 , o que nos leva ao seguinte modelo simplificado²

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{k,s} (1 + \delta Z) \hat{\psi}_{sk,R}^\dagger [i\partial_t - \varepsilon_{sk}] \hat{\psi}_{sk,R} \\ &- \sum_{k,k',q} (g_{2R} + \delta g_{2R}) \hat{\psi}_{k,R}^\dagger \hat{\psi}_{-k',R}^\dagger \hat{\psi}_{-(k'+q),R} \hat{\psi}_{k-q,R}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

² Desconsiderar g_4 , significa que vamos focar em interações frontais entre quiralidades opostas, g_2 , o que leva ao modelo simplificado. Ambas interações envolvem pequenas transferências de momento.

Capítulo 3

Acoplamento de duas cadeias de férmions sem spin

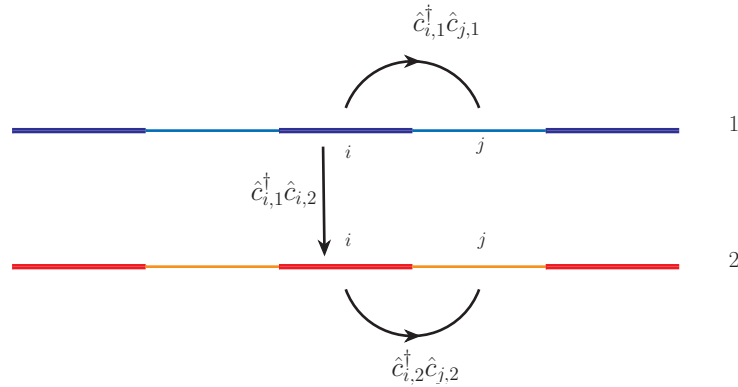


Figura 3.1: Esquema do modelo de duas cadeias acopladas.

3.1 Diagonalização do sistema de duas cadeias acopladas

O acoplamento de duas cadeias de férmions sem spin se dá pela introdução de um termo que representa o salto de partículas na direção perpendicular das duas cadeias e introduz o novo parâmetro de acoplamento perpendicular t_\perp entre as cadeias

$$\hat{H}_0 = -t \sum_{\langle i,j \rangle} \left(\hat{c}_{i,1}^\dagger \hat{c}_{j,1} + \hat{c}_{i,2}^\dagger \hat{c}_{j,2} + \text{h.c.} \right) - t_\perp \sum_i \left(\hat{c}_{i,1}^\dagger \hat{c}_{i,2} + \text{h.c.} \right), \quad (3.1)$$

onde i e j representam sítios vizinhos, 1 e 2 representam as cadeias, \hat{c}^\dagger e \hat{c} representam operadores de criação e aniquilação nos respectivos sítios e cadeias.

Podemos representar os operadores \hat{c}^\dagger e \hat{c} na forma de Wannier no espaço dos momentos por meio das transformadas de Fourier

$$\hat{c}_{i,1} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_k e^{-ikx_i} \hat{c}_{k,1} \quad (3.2)$$

$$\hat{c}_{i,2} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_k e^{-ikx_i} \hat{c}_{k,2} \quad (3.3)$$

Segue que

$$\hat{c}_{i,1}^\dagger \hat{c}_{j,1} = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k,k'} e^{ik'x_i} e^{-ikx_j} \hat{c}_{k',1}^\dagger \hat{c}_{k,1}. \quad (3.4)$$

Considerando a soma em primeiros vizinhos temos $x_j = x_i \pm \mathbf{a}$, onde \mathbf{a} é o espaçamento da rede ao longo das cadeias, considerado constante. Assim,

$$\sum_{\langle i,j \rangle} \hat{c}_{i,1}^\dagger \hat{c}_{j,1} = \sum_i \left(\hat{c}_{i,1}^\dagger \hat{c}_{i+1,1} + \hat{c}_{i,1}^\dagger \hat{c}_{i-1,1} \right). \quad (3.5)$$

Portanto, somando as expressões

$$\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{i+1} = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k,k'} e^{-i(k-k')x_i} e^{-ika} \hat{c}_{k'}^\dagger \hat{c}_k \quad (3.6)$$

$$\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{i-1} = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k,k'} e^{-i(k-k')x_i} e^{ika} \hat{c}_{k'}^\dagger \hat{c}_k \quad (3.7)$$

e utilizando a relação

$$\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_i e^{-i(k-k')x_i} = \delta_{kk'} \quad (3.8)$$

a equação (3.5) pode ser escrita como

$$\sum_{\langle i,j \rangle} \hat{c}_{i,1}^\dagger \hat{c}_{j,1} = 2 \sum_k \cos(k\mathbf{a}) \hat{c}_{k,1}^\dagger \hat{c}_{k,1} \quad (3.9)$$

Segue que o hamiltoniano (3.1) pode agora ser reescrito como

$$\hat{H}_0 = -2t \sum_k \cos(k\mathbf{a}) \left(\hat{c}_{k,1}^\dagger \hat{c}_{k,1} + \hat{c}_{k,2}^\dagger \hat{c}_{k,2} + \text{h. c.} \right) - t_\perp \sum_i \left(\hat{c}_{i,1}^\dagger \hat{c}_{i,2} + \text{h. c.} \right). \quad (3.10)$$

Agora vamos tratar o termo devido ao *hopping* entre as duas cadeias. Das transformadas em (3.2) e (3.3), podemos escrever

$$\hat{c}_{i,1}^\dagger \hat{c}_{i,2} = \frac{1}{N} \sum_{k,k'} e^{ik'x_i} e^{-ikx_i} \hat{c}_{k',1}^\dagger \hat{c}_{k,2}. \quad (3.11)$$

Temos assim, usando (3.8),

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= -2t \sum_k \cos(ka) \left(\hat{c}_{k,1}^\dagger \hat{c}_{k,1} + \hat{c}_{k,2}^\dagger \hat{c}_{k,2} + \text{h.c.} \right) \\ &- t_\perp \left(\sum_k \hat{c}_{k,1}^\dagger \hat{c}_{k,2} + \text{h.c.} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Vemos que o termo de *hopping* transverso t_\perp impede a diagonalização do hamiltoniano. Esse problema pode ser resolvido por meio da seguinte transformação canônica

$$\hat{b}_k = \frac{\hat{c}_{k,1} + \hat{c}_{k,2}}{\sqrt{2}} \quad (3.13)$$

$$\hat{a}_k = \frac{\hat{c}_{k,1} - \hat{c}_{k,2}}{\sqrt{2}} \quad (3.14)$$

que pode também ser escrita de modo inverso

$$\hat{c}_{k,1} = \frac{\hat{b}_k + \hat{a}_k}{\sqrt{2}} \quad (3.15)$$

$$\hat{c}_{k,2} = \frac{\hat{b}_k - \hat{a}_k}{\sqrt{2}} \quad (3.16)$$

Utilizando-se (3.15) e (3.16), temos

$$\hat{c}_{k,1}^\dagger \hat{c}_{k,1} = \frac{1}{2} \left(\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) + \frac{1}{2} \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{b}_k + \hat{b}_k^\dagger \hat{a}_k \right) \quad (3.17)$$

$$\hat{c}_{k,2}^\dagger \hat{c}_{k,2} = \frac{1}{2} \left(\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) - \frac{1}{2} \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{b}_k + \hat{b}_k^\dagger \hat{a}_k \right) \quad (3.18)$$

$$\hat{c}_{k,1}^\dagger \hat{c}_{k,2} = \frac{1}{2} \left(\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k - \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) + \frac{1}{2} \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{b}_k - \hat{b}_k^\dagger \hat{a}_k \right) \quad (3.19)$$

$$\hat{c}_{k,2}^\dagger \hat{c}_{k,1} = \frac{1}{2} \left(\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k - \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) + \frac{1}{2} \left(-\hat{a}_k^\dagger \hat{b}_k + \hat{b}_k^\dagger \hat{a}_k \right). \quad (3.20)$$

De (3.17), (3.18), (3.19) e (3.20), reescrevemos (3.24) na forma diagonalizada

$$\hat{H}_0 = \sum_k \left(-2t \cos(ka) - t_\perp \right) \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \sum_k \left(-2t \cos(ka) + t_\perp \right) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \quad (3.21)$$

Definindo

$$\varepsilon_k^b = -2t \cos(ka) - t_\perp, \quad (3.22)$$

$$\varepsilon_k^a = -2t \cos(ka) + t_\perp. \quad (3.23)$$

Chegamos finalmente à forma

$$\hat{H}_0 = \sum_k \left(\varepsilon_k^a \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \varepsilon_k^b \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \right). \quad (3.24)$$

Isto é, a presença do termo de *hopping* transverso t_\perp entre as cadeias faz com que o espectro de energias seja dividido em duas bandas (figura 3.2). Denominamos ε_k^a relação de dispersão da banda antiligante e ε_k^b relação de dispersão da banda ligante.

Note que o gap de energia entre as bandas ligante e antiligante é constante

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_k^a - \varepsilon_k^b = 2t_\perp. \quad (3.25)$$

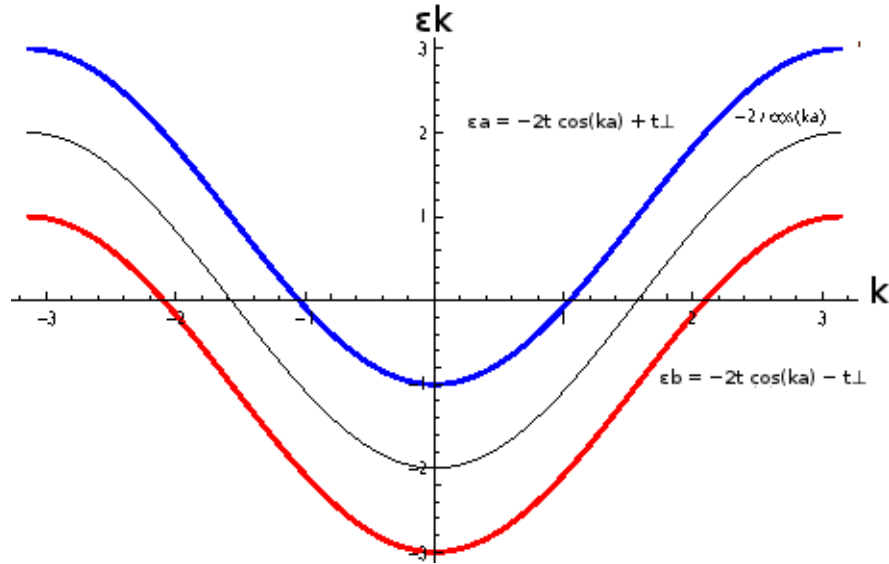


Figura 3.2: A linha azul corresponde à relação de dispersão da banda antiligante, ε_k^a , e a linha vermelha à ligante, ε_k^b . A linha preta corresponde ao caso sem *hopping* transversal t_\perp .

3.2 Linerarização do modelo

A expansão em série de Taylor das relações de dispersão das bandas ligante e antiligante em torno dos respectivos pontos de Fermi leva a quatro diferentes expansões, i.e., k_F^a , $-k_F^a$, k_F^b e $-k_F^b$,

$$\varepsilon_{sk}^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n \varepsilon_k^a}{dk^n} \right|_{k=sk_F^a} (k - sk_F^a)^n, \quad (3.26)$$

$$\varepsilon_{sk}^b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n \varepsilon_k^b}{dk^n} \right|_{k=sk_F^b} (k - sk_F^b)^n, \quad (3.27)$$

onde $s = \pm$ é o termo de quiralidade. Considerando apenas os termos de primeira ordem, obtemos as relações de dispersão das bandas ligante b e antiligante a em sua forma linearizada em torno dos respectivos pontos de Fermi

$$\varepsilon_s^\alpha(k) = \left. \frac{d\varepsilon^\alpha(k)}{dk} \right|_{k=sk_F^\alpha} (k - sk_F^\alpha), \quad (3.28)$$

onde $\alpha = a, b$ é o índice de cor correspondente às bandas a e b . Podemos escrever as derivadas nos pontos de Fermi em termos das velocidades de Fermi em cada banda

$$v_F^a = \left. \frac{d\varepsilon^a(k)}{dk} \right|_{k=k_F^a} = - \left. \frac{d\varepsilon^a(k)}{dk} \right|_{k=-k_F^a} \quad (3.29)$$

$$v_F^b = \left. \frac{d\varepsilon^b(k)}{dk} \right|_{k=k_F^b} = - \left. \frac{d\varepsilon^b(k)}{dk} \right|_{k=-k_F^b}. \quad (3.30)$$

Utilizando (3.29) e (3.30), podemos escrever

$$\varepsilon_{sk}^\alpha = v_F^\alpha (sk - k_F^\alpha), \quad (3.31)$$

onde $s = \pm$ é o índice de quiralidade, $\alpha = a, b$ é o índice de “cor” (banda).

Na figura (3.3) temos as bandas linearizadas, onde a linha azul corresponde à relação de dispersão linearizada da banda antiligante, ε_k^a , e a linha vermelha corresponde à relação de dispersão linearizada da banda ligante, ε_k^b .

Na figura (3.4), incluímos o tracejado, para destacarmos a quiralidade. A linha azul cheia corresponde à relação de dispersão linearizada da banda antiligante no ramo positivo, ε_{+k}^a e a linha azul tracejada corresponde ao ramo negativo ε_{-k}^a . A

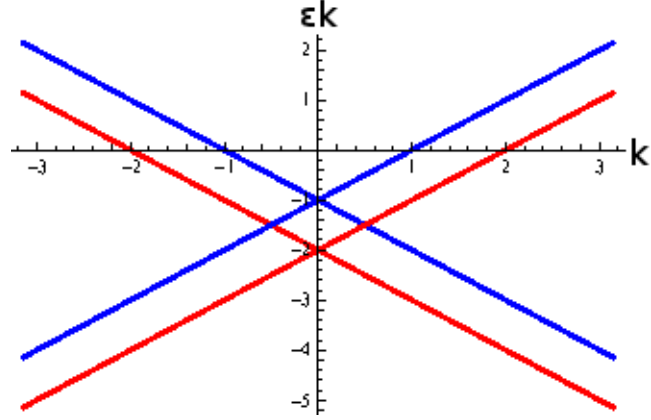


Figura 3.3: Bandas linearizadas. Linhas azuis correspondem à banda antiligante a ; linhas vermelhas à banda ligante b .

linha vermelha cheia corresponde à relação de dispersão linearizada da banda ligante no ramo positivo, ε_{+k}^b e a linha vermelha tracejada corresponde ao ramo negativo ε_{-k}^b . A distância entre duas linhas cheias ou duas linhas tracejadas, ao longo de k , é sempre $2t_{\perp}$, mas entre cheia e tracejada, depende de $r(k)$.

A diferença entre os pontos de Fermi $\Delta k_F = k_F^b - k_F^a$, para mesma velocidades de Fermi, v_F , pode assim ser escrita como

$$\Delta k_F = \varepsilon_{sk}^a - \varepsilon_{sk}^b = \frac{2t_{\perp}}{v_F}, \quad (3.32)$$

para um dado k e quiralidade s fixos.

Podemos assim escrever o hamiltoniano para o modelo de duas cadeias acopladas linearizado

$$\hat{H}_0 = \sum_{k,\alpha,s} \varepsilon_{sk}^{\alpha} \hat{\psi}_{sk}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{sk}^{\alpha}, \quad (3.33)$$

onde agora simplificamos a notação utilizando $\hat{\psi}$'s, com $\alpha = a, b$, sendo a a banda antiligante e b a banda ligante, caracterizando um índice de cor, e $s = \pm$ o índice que especifica a quiralidade.

Assim, esse sistema quasi-1D é caracterizado por duas cores (a and b) e quiralidades s esquerda ($-$) e direita ($+$) dos fermions quirais sem spin. Por meio

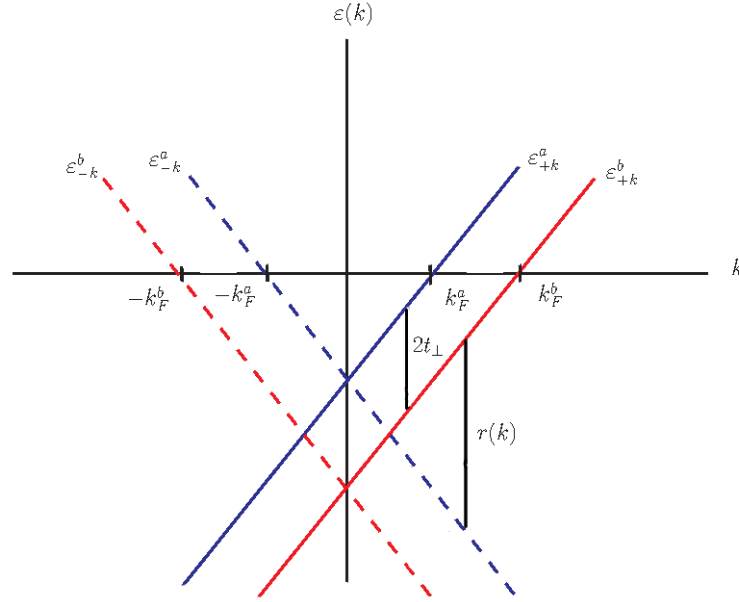


Figura 3.4: Bandas linearizadas. As bandas de quiralidade “-” correspondem às linhas tracejadas; as de quiralidade “+” correspondem às linhas cheias. A linearização altera a diferença $2t_{\perp}$ para quiralidades opostas, que dada é $r(k)$. Para $k = 0$, $r(0) = 2t_{\perp}$, mas em geral $r(k) \neq 2t_{\perp}$.

de uma transformada de Legendre, podemos também escrever

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{k,\alpha,s} \psi_{sk}^{\dagger\alpha} (k_0 - \varepsilon_{sk}^{\alpha}) \psi_{sk}^{\alpha}, \quad (3.34)$$

onde a frequência k_0 aparece em função da transformada de Fourier na parte temporal. Alternativamente, podemos escrever no espaço de coordenadas \vec{x}

$$\mathcal{L}_0 = \int d^2x \psi_s^{\alpha\dagger}(\vec{x}) (i\partial_t - isv_F\partial_x + v_F k_F^{\alpha}) \psi_s^{\alpha}(\vec{x}) \quad (3.35)$$

Levando em conta as matrizes gama 1+1 com índices superiores¹ γ^0 , γ^1 e $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1$,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

¹Em 1+1, temos a identificação com as matrizes de Pauli $\gamma^0 = \sigma_x$, $\gamma^1 = -i\sigma_y$ e $\gamma^5 = \sigma_z$.

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

e índices inferiores $\gamma_0 = \gamma^0$, $\gamma_5 = -\gamma^5$ e $\gamma_1 = -\gamma^1$,

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

definindo os pseudo-espinores,

$$\psi^\alpha = \begin{pmatrix} \psi_+^\alpha \\ \psi_-^\alpha \end{pmatrix}, \psi^{\alpha\dagger} = \left(\psi_+^{\alpha\dagger} \quad \psi_-^{\alpha\dagger} \right), \quad (3.40)$$

$$\bar{\psi}^\alpha = \psi^{\alpha\dagger} \gamma^0, \quad (3.41)$$

onde $\alpha = a, b$, podemos escrever a ação como um campo de Dirac 1 + 1 com um termo adicional. Isto pode ser facilmente visto, para $v_F = 1$, $x^0 = t$ e $x^1 = x$, com $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$, $\mu = 0, 1$, tal que a ação livre correspondente ao sistema quasi-1D de férmions sem spin pode ser escrito como

$$\mathcal{S}_0 = \sum_\alpha \int d^2x \bar{\psi}^\alpha (i\not{\partial} + \gamma^0 k_F^\alpha) \psi^\alpha, \quad (3.42)$$

que é particularmente útil para a análise da anomalia quântica quando acoplamos as interações de banda.

Capítulo 4

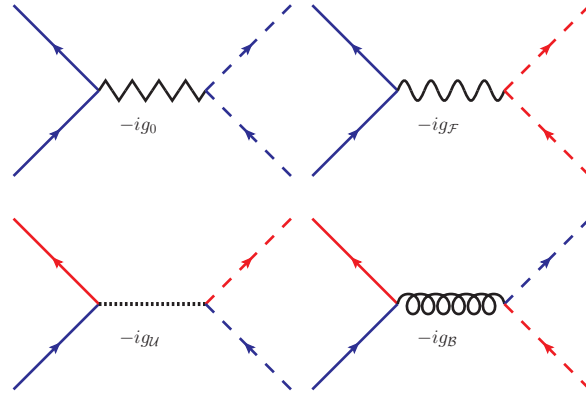
Interações intrabanda e interbandas, simetria quiral e trocas de cor

4.1 Interações interbandas e intrabandas

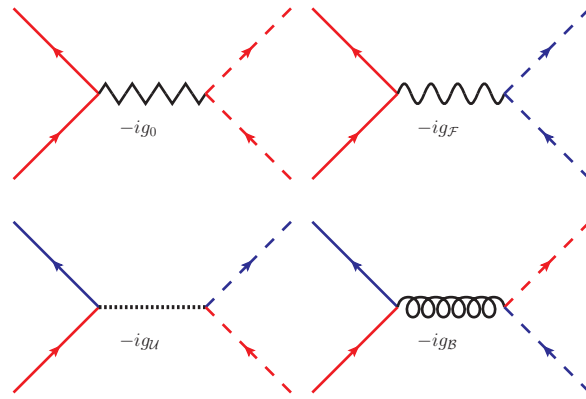
Para simplificarmos nossa discussão ao máximo, vamos considerar apenas as interações com partículas de quiralidades opostas que preservam a simetria quiral e realizam todas as possíveis trocas de “cor”¹ (trocas $a \leftrightarrow b$), reduzindo a líquidos de Luttinger com interações do tipo $-ig_2$ e sem interações do tipo $-ig_4$ no limite de uma cadeia². Sob tal consideração, temos quatro possíveis interações: frontal, interfrontal, *backscattering* interbanda e *umklapp* interbanda (figura 4.1) [44]. Alternativamente, essas interações podem ser equivalentemente entendidas por meio da abordagem de *g*-ologia [27]. Daqui para frente, denominaremos as interações *backs-*

¹O termo mais apropriado seria “sabor”, se mantivermos a convenção em altas energias. No entanto, como representamos aqui as “cores” em azul e vermelho, associadas às bandas, o uso do termo “cor” fica bem claro no presente contexto.

²A introdução de todos os acoplamentos possíveis, embora razoável, tornaria o modelo complicado. Nossa escolha permite focar, por meio de um modelo simples, o problema de interesse.



(a)



(b)

Figura 4.1: (a) Interações intrabanda e interbanda: Frontal $-ig_0$, interfrontal $-ig_{\mathcal{F}}$, backscattering $-ig_{\mathcal{B}}$, umklapp $-ig_{\mathcal{U}}$. (b) Troca de “cor” $a \leftrightarrow b$.

cattering interbanda e *umklapp* interbanda apenas por backscattering e umklapp, por simplicidade³.

A interação frontal é a interação intrabanda do tipo $-ig_2$, denotada aqui por $-ig_0$. A interação interfrontal $-ig_{\mathcal{F}}$ consiste de espalhamentos interbanda de quiralidades opostas sem troca de “cor”. A interação backscattering $-ig_{\mathcal{B}}$ é um espalhamento de quiralidades opostas com troca de cor, onde as cores iniciais de quiralidades opostas são diferentes. A interação umklapp $-ig_{\mathcal{U}}$ é um espalhamento

³Não se deve confundir essas interações com os correspondentes 1D, $-ig_1$ e $-ig_3$.

de quiralidades opostas com troca de “cor”, onde as “cores” iniciais de quiralidades opostas são as mesmas. O hamiltoniano de interação correspondente a essas interações é então dado por

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{int} &= \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{k,k',q,s,\alpha} g_0 \hat{\psi}_{sk}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{-sk'}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q)}^{\alpha} \hat{\psi}_{-s(k'-q)}^{\alpha} \\
&+ \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{k,k',q,s,\alpha\neq\beta} g_{\mathcal{F}} \hat{\psi}_{sk}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{-sk'}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q)}^{\alpha} \hat{\psi}_{-s(k'-q)}^{\beta} \\
&+ \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{k,k',q,s,\alpha\neq\beta} g_{\mathcal{B}} \hat{\psi}_{sk}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{-sk'}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q)}^{\beta} \hat{\psi}_{-s(k'-q)}^{\alpha} \\
&+ \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{k,k',q,s,\alpha\neq\beta} g_{\mathcal{U}} \hat{\psi}_{sk}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{-sk'}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q)}^{\alpha} \hat{\psi}_{-s(k'-q)}^{\alpha}, \tag{4.1}
\end{aligned}$$

onde $s = \pm$ é o índice de quiralidade, $\alpha, \beta = a, b$ são os índices de cor, e k, k', q são os momentos correspondentes às trocas em cada interação. O termo de $1/2$ se deve à explícita introdução do termo de quiralidade s .

4.2 Lagrangiano

Podemos agora escrever o lagrangiano correspondente ao modelo, como fizemos para o caso 1D. Note que agora, o modelo 1D sem spin, equação (2.61), aparece aqui generalizado para duas bandas, com a introdução de interações interbandas.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sum_{k,s,\alpha} (1 + \delta Z) \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} [i\partial_t - \varepsilon_{sk}^{\alpha}] \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha} \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha} (g_{0,R} + \delta g_{0,R}) \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{-sk',R}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),R}^{\alpha} \hat{\psi}_{-s(k'-q),R}^{\alpha} \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha\neq\beta} (g_{\mathcal{F},R} + \delta g_{\mathcal{F},R}) \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{-sk',R}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),R}^{\alpha} \hat{\psi}_{-s(k'-q),R}^{\beta} \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha\neq\beta} (g_{\mathcal{B},R} + \delta g_{\mathcal{B},R}) \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{-sk',R}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),R}^{\beta} \hat{\psi}_{-s(k'-q),R}^{\alpha} \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha\neq\beta} (g_{\mathcal{U},R} + \delta g_{\mathcal{U},R}) \hat{\psi}_{sk,R}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{-sk',R}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),R}^{\alpha} \hat{\psi}_{-s(k'-q),R}^{\alpha}, \tag{4.2}
\end{aligned}$$

onde o índice R significa renormalizado e δZ , $\delta g_{0,R}$, $\delta g_{\mathcal{F},R}$, $\delta g_{\mathcal{B},R}$ e $\delta g_{\mathcal{U},R}$ são contratermos respectivos a cada interação e os ψ 's são dependentes do tempo t . Por

meio de uma transformada de Fourier no tempo, podemos escrever o lagrangiano em termos de momento e frequência k_0 , já que no procedimento de grupo de renormalização levaremos em conta a escala de energia nos pontos de Fermi, que se identifica com a frequência ($\hbar = 1$). Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sum_{k,s,\alpha} (1 + \delta Z) \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} [k_0 - \varepsilon_{sk}^\alpha] \hat{\psi}_{sk,R}^\alpha \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha} (g_{0,R} + \delta g_{0,R}) \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{-sk',R}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),R}^\alpha \hat{\psi}_{-s(k'-q),R}^\alpha \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha \neq \beta} (g_{\mathcal{F},R} + \delta g_{\mathcal{F},R}) \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{-sk',R}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),R}^\alpha \hat{\psi}_{-s(k'-q),R}^\beta \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha \neq \beta} (g_{\mathcal{B},R} + \delta g_{\mathcal{B},R}) \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{-sk',R}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),R}^\beta \hat{\psi}_{-s(k'-q),R}^\alpha \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha \neq \beta} (g_{\mathcal{U},R} + \delta g_{\mathcal{U},R}) \hat{\psi}_{sk,R}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{-sk',R}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),R}^\alpha \hat{\psi}_{-s(k'-q),R}^\beta, \quad (4.3)
\end{aligned}$$

onde agora os ψ 's são dados em termos de momento e frequência $\vec{k} = (k_0, k)$.

Os propagadores livres podem então ser escritos como

$$G_s^\alpha(\vec{k}) = \frac{\theta_{sk}^{\alpha>}}{k_0 - \varepsilon_{sk}^\alpha + i\delta} + \frac{\theta_{sk}^{\alpha<}}{k_0 - \varepsilon_{sk}^\alpha - i\delta}, \quad (4.4)$$

onde $s = \pm$ corresponde ao termo de quiralidade, α corresponde ao índice de cor e

$$\theta_{sk}^{\alpha>} = \theta(sk - k_F^\alpha), \quad (4.5)$$

$$\theta_{sk}^{\alpha<} = \theta(k_F^\alpha - sk), \quad (4.6)$$

são as correspondentes funções degrau. Os termos infinitesimais $\pm i\delta$ indicam os polos de resíduos no eixo imaginário.

A figura (4.2) nos dá a regra de Feynman para o propagador livre. As regras de Feynman para as interações são dadas na figura (4.3). Deve-se considerar ainda para as regras de Feynman que a presença de loops fermiônicos contribui com sinal -1 .

$$\begin{aligned}
 G_+^a &= \text{---} \longrightarrow \text{---} \\
 G_+^b &= \text{---} \longrightarrow \text{---} \\
 G_-^a &= \text{---} \longrightarrow \text{---} \\
 G_-^b &= \text{---} \longrightarrow \text{---}
 \end{aligned}$$

Figura 4.2: Regras de Feynman para o propagador livre.

$$\begin{aligned}
 -ig_0 &= \text{~~~~~} \\
 -ig_F &= \text{~~~~~} \\
 -ig_B &= \text{~~~~~} \\
 -ig_U &= \text{~~~~~}
 \end{aligned}$$

Figura 4.3: Representação pictórica dos acoplamentos que aparecerão nos diagramas de Feynman.

4.3 Conservação energia-momento, trocas de cor e simetria quiral

O sistema quasi-1D com interações frontal, interfrontal, backscattering e umklapp apresentam algumas propriedades não-usuais interessantes, correspondentes aos índices de cor e quiralidade.

As trocas de cor são mediadas por interações interbandas. No canal interfrontal, não há troca de cor. Nos canais backscattering e umklapp há sempre trocas de cor, onde no umklapp as cores iniciais em quiralidades opostas são as mesmas e no backscattering as cores iniciais em quiralidades opostas são diferentes (figure 4.4). Como uma consequência desse fato, as interações de vértice ⁴, onde não há troca de cor, estão associadas às interações frontal e interfrontal (figura 4.5). A mediação de trocas de cor por meio de interações de bandas também levam à conservação do número de cores, expressa pelo fato de o número de cores que entram ser igual ao número de cores que saem.

⁴Ver capítulo 5.

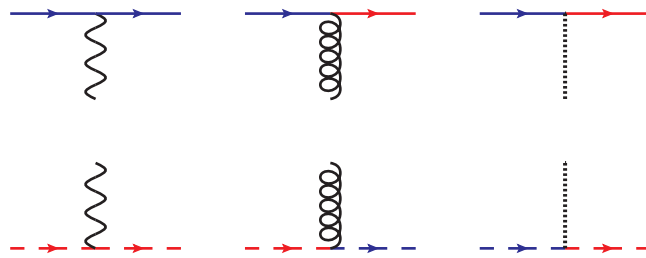


Figura 4.4: Trocas de cor.

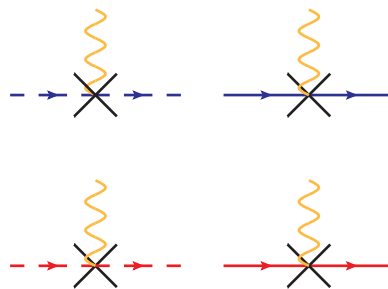


Figura 4.5: Interações de vértice.

Não há trocas quirais, isto é, não há interações que realizam a mediação de troca de quiralidade, implicando que as quiralidades de entrada (s_{in}) e a de saída (s_{out}) são iguais (figura 4.6), ou seja,

$$s_{in} = s_{out}. \quad (4.7)$$

Devido a isso, podemos notar também que a simetria quiral não proíbe interações do tipo $-ig_4$, mas exclui interações do tipo $-ig_1$ e $-ig_3$ que estão associados às interações intrabanda umklapp and backscattering [11].

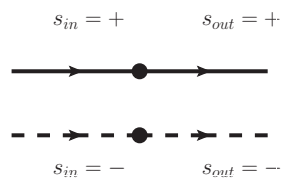


Figura 4.6: Simetria quiral.

4.4 Bolhas de polarização de uma cor e duas cores

As “bolhas” de polarização de uma cor (i.e., com um único índice de cor α), são dadas por

$$\chi_s^\alpha(\vec{q}) = - \int_{\vec{q}'} iG_s^\alpha(\vec{q}') iG_s^\alpha(\vec{q}' + \vec{q}), \quad (4.8)$$

onde o sinal negativo deve-se ao loop fermiônico. Considerando a polarização em b (figura 4.7) chegamos em



Figura 4.7: Bolha de polarização de uma cor.

$$\chi_-^b(\vec{q}) = -i \frac{q}{2\pi} G_-^b(q_0, q - k_F^b). \quad (4.9)$$

No caso geral,

$$\chi_s^\alpha(\vec{q}) = i \frac{sq}{2\pi} G_s^\alpha(q_0, q + sk_F^\alpha), \quad (4.10)$$

onde $s = \pm$, $\alpha = a, b$.

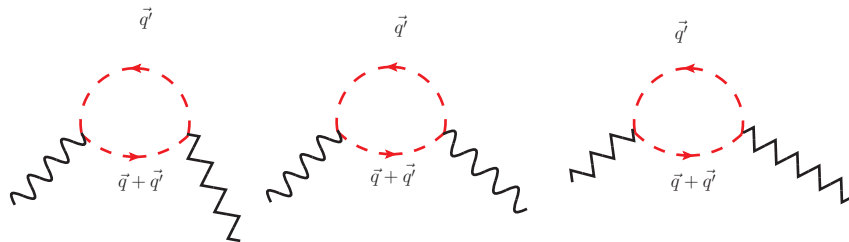


Figura 4.8: Bolha de polarização de uma cor associada a interações frontal e inter-frontal.

Como não há trocas de cor nesse caso, as bolhas de polarização de uma cor são sempre associadas às interações frontal ou interfrontal (figure 4.8).

As bolhas de polarização de duas cores são dadas por

$$\chi_s^{\alpha\beta}(\vec{q}) = - \int_{\vec{q}'} iG_s^\alpha(\vec{q}') iG_s^\beta(\vec{q}' + \vec{q}), \quad (4.11)$$

onde $s = \pm$, $\alpha = a, b$ e $\alpha \neq \beta$. Daqui por diante, vamos supor que as velocidades de Fermi sejam iguais. Ao calcular a bolha de polarização ab (figura 4.9), chegamos naturalmente ao resultado de bandas diferentes

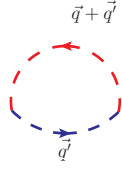


Figura 4.9: Bolha de polarização de duas cores.

$$\chi_-^{ab}(\vec{q}) = -\frac{i}{2\pi}(q + \Delta k_F)G_-^b(q_0, q - k_F^a). \quad (4.12)$$

No caso geral, temos

$$\chi_s^{\alpha\beta}(\vec{q}) = \frac{is}{2\pi}(q + k_F^\alpha - k_F^\beta)G_s^\beta(q_0, q + sk_F^\alpha), \quad (4.13)$$

onde consideramos o cutoff Λ nos cálculos.

Como as bolhas de polarização de duas cores envolvem trocas de cor, elas estão sempre associadas a interações backscattering e umklapp (figura 4.10).

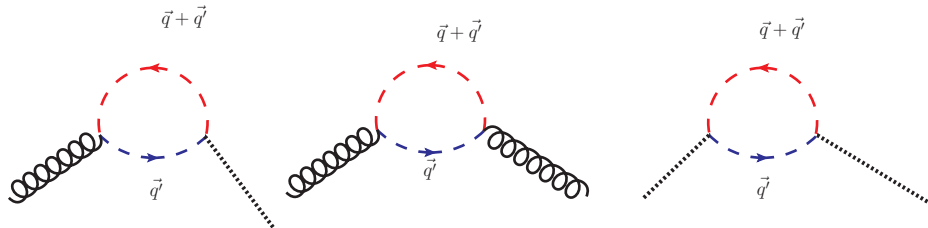


Figura 4.10: Bolhas de polarização de duas cores associadas a interações backscattering e umklapp.

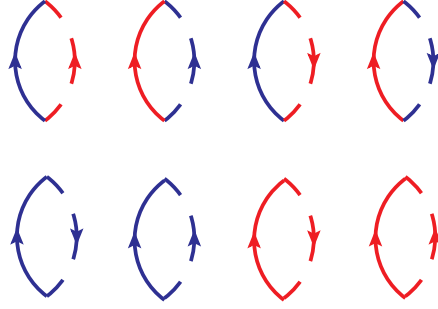


Figura 4.11: Polarizações de diferentes quiralidades.

Como não existem trocas de quiralidade, os diagramas de duas quiralidades (figura 4.11) são sempre associados a interações de duas partículas de lados opostos e dependem das pernas externas (figura 4.12). Estes tipos de polarizações podem

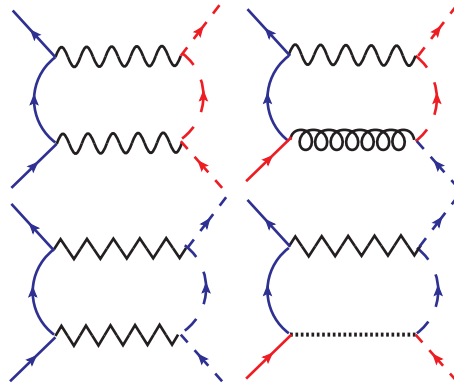


Figura 4.12: Polarização de diferentes quiralidades em associação a interações de duas partículas.

ser definidas da seguinte forma

$$\Pi_{ss'}^{\alpha\beta}(\vec{p}) = \int_{\vec{q}} iG_s^\alpha(\vec{q})iG_{s'}^\beta(\vec{p} - \vec{q}), \quad (4.14)$$

$$\chi_{ss'}^{\alpha\beta}(\vec{p}) = \int_{\vec{q}} iG_s^\alpha(\vec{q})iG_{s'}^\beta(\vec{p} + \vec{q}), \quad (4.15)$$

onde $s \neq s'$, $s = \pm$, $s' = \pm$, $\alpha = a, b$ e $\beta = a, b$. Note que aqui $\Pi_{ss'}^{\alpha\beta}$ corresponde a um processo partícula-partícula e $\chi_{ss'}^{\alpha\beta}$ a um processo partícula-buraco.

Capítulo 5

Transformações Quirais, Identidade de Ward-Takahashi e Anomalia Quântica

5.1 Ação em termos de interações de cor

Em uma dimensão, ou seja, $1 + 1$, podemos representar a ação do MDCA em termos de um campo de Dirac $1 + 1$ na presença de interações que não mudam “cor” e podem ser representadas por um campo A_s^α e interações que mudam “cor” e são representadas por outro campo $B_s^{\alpha\beta}$ (figura 5.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & \int d^2x \sum_{\alpha} \bar{\psi}^{\alpha} \not{\partial} \psi^{\alpha} + \sum_{\alpha,s} \int d^2x \psi_s^{\alpha\dagger} A_s^{\alpha} \psi_s^{\alpha} \\ & + \sum_{\alpha \neq \beta, s} \int d^2x \psi_s^{\alpha\dagger} B_s^{\alpha\beta} \psi_s^{\beta}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde $\alpha = a, b$; $\beta = a, b$ são índices de “cor”, $s = \pm$ índice de quiralidade, e a parte livre vem da ação (3.42). Como discutimos no capítulo anterior, as interações que mudam “cor” são as interações interbanda do tipo backscattering e umklapp que mudam as cores das partículas espalhadas e elas assim podem ser representadas pela interação entre os férmions sem spin e o campo $B_s^{\alpha\beta}$. Note que $B_s^{\alpha\beta} = 0$, se $\alpha = \beta$.

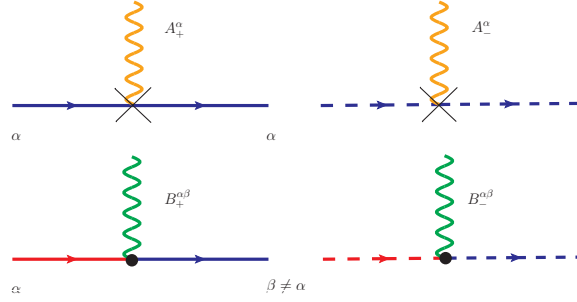


Figura 5.1: Interações que mudam cor ($B_+^{\alpha\beta}$ e $B_-^{\alpha\beta}$) e interações que não mudam cor (A_+^α e A_-^α).

Com efeito, as interações podem ser escritas como

$$A_s^\alpha(\vec{x}) = v_F k_F^\alpha + A_{s0}^\alpha(\vec{x}) + A_{s1}^\alpha(\vec{x}), \quad (5.2)$$

$$B_s^{\alpha\beta}(\vec{x}) = B_{s0}^{\alpha\beta}(\vec{x}) + B_{s1}^{\alpha\beta}(\vec{x}), \quad (5.3)$$

onde a interação intrabanda frontal

$$A_{s0}^\alpha(\vec{x}) = -i \int d^2 x' g_0(\vec{x}, \vec{x}') \psi_{-s}^{\alpha\dagger}(\vec{x}') \psi_{-s}^\alpha(\vec{x}'), \quad (5.4)$$

e interbandas do tipo frontal

$$A_{s1}^\alpha(\vec{x}) = -i \sum_{\beta} (1 - \delta^{\alpha\beta}) \int d^2 x' g_{\mathcal{F}}(\vec{x}, \vec{x}') \psi_{-s}^{\beta\dagger}(\vec{x}') \psi_{-s}^\alpha(\vec{x}'), \quad (5.5)$$

do tipo backscattering

$$B_{s0}^{\alpha\beta}(\vec{x}) = -i \int d^2 x' g_{\mathcal{B}}(\vec{x}, \vec{x}') \psi_{-s}^{\beta\dagger}(\vec{x}') \psi_{-s}^\alpha(\vec{x}'), \quad (5.6)$$

e do tipo umklapp

$$B_{s1}^{\alpha\beta}(\vec{x}) = -i \int d^2 x' g_{\mathcal{U}}(\vec{x}, \vec{x}') \psi_{-s}^{\alpha\dagger}(\vec{x}') \psi_{-s}^\beta(\vec{x}'). \quad (5.7)$$

Note que essas interações são de fato provenientes de (4.3)¹, mais o termo de $v_F k_F^\alpha$ da ação livre, com campos fermiônicos ψ_s^α no espaço das coordenadas $1+1$, $\vec{x} = (t, x)$.

¹Não incluímos, por simplicidade, os contratermos para os campos fermiônicos, acoplamentos e pontos de Fermi, uma vez que eles não serão necessários na discussão deste capítulo.

A ação (5.1) pode assim ser reescrita incluindo cada tipo de interação intrabanda e interbanda

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \sum_{\alpha,s} \int d^2x \psi_s^{\alpha\dagger}(\vec{x}) i [\partial_t + s v_F \partial_x + v_F k_F^\alpha + A_{s0}^\alpha(\vec{x}) + A_{s1}^\alpha(\vec{x})] \psi_s^\alpha(\vec{x}) \\ &+ \sum_{\alpha,\beta,s} \int d^2x \psi_s^{\alpha\dagger}(\vec{x}) i \left(B_{s0}^{\alpha\beta}(\vec{x}) + B_{s1}^{\alpha\beta}(\vec{x}) \right) \psi_s^\beta(\vec{x}), \end{aligned} \quad (5.8)$$

Podemos ainda representar a interação como resultado de um campo total

$$\mathcal{A}_s^{\alpha\beta} = A_s^\alpha + B_s^{\alpha\beta} \quad (5.9)$$

que se acopla aos campos de Dirac 1 + 1 da seguinte forma

$$\mathcal{L} = \sum_{\alpha} \bar{\psi}^\alpha i \not{\partial} \psi^\alpha + \sum_{\alpha,\beta,s} \psi_s^{\alpha\dagger} \mathcal{A}_s^{\alpha\beta} \psi_s^\beta, \quad (5.10)$$

onde $\alpha = a, b$, $\beta = a, b$, $s = \pm$.

5.2 Transformações quirais, identidade de Ward-Takahashi e Anomalia quântica

Tendo em vista a obtenção da identidade de Ward-Takahashi para esse sistema quasi-1D obtida em [43], vamos aqui utilizar as interações que mudam e não mudam de “cor”, para obter o mesmo resultado.

Vamos considerar uma transformação de uma quiralidade apenas, um procedimento usual para 1 + 1 que pode ser visto em [55]. Vamos considerar então a transformação quiral, envolvendo a quiralidade + (vizinhança de $+k_F^\alpha$),

$$\psi_+ \rightarrow e^{-i\theta(x)} \psi_+ = (1 - i\theta(x)) \psi_+ \quad (5.11)$$

$$\psi_+^\dagger \rightarrow e^{i\theta(x)} \psi_+^\dagger = (1 + i\theta(x)) \psi_+^\dagger \quad (5.12)$$

e a ação (5.8) muda da seguinte forma

$$\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} + \int d^2x J_+^\alpha (-i\partial_+ \theta(x)), \quad (5.13)$$

onde $J_+^\alpha = \psi_+^{\alpha\dagger}\psi_+^\alpha$ é a densidade de corrente correspondente à quiralidade +, e $\partial_+ = \partial_t - iv_F\partial_x$. O funcional gerador, na definição usual [58], é alterado nessa transformação da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}'[J, \eta, \eta^\dagger] &= \int \mathcal{D}(\mathcal{A}', \psi', \psi'^\dagger) \\ &\times \exp \left[\mathcal{S} + \int d^2x \left(\sum_{\alpha, \beta; s} J_s^{\alpha\beta} \mathcal{A}_s^{\alpha\beta} + \sum_{\alpha; s} \eta_s^{\alpha\dagger} \psi_s^\alpha - \sum_{\alpha; s} \psi_s^{\alpha\dagger} \eta_s^\alpha \right) \right] \\ &\times \exp \int d^2x \left(\sum_\alpha [-i\partial_+\theta(x)] J_+^\alpha + \sum_\alpha i\theta(x) \eta_+^{\alpha\dagger} \psi_+^\alpha - \sum_\alpha i\theta(x) \psi_+^{\alpha\dagger} \eta_+^\alpha \right), \end{aligned} \quad (5.14)$$

levando à seguinte identidade de Ward-Takahashi

$$\theta(x) \left(\sum_\alpha i\partial_+ J_+^\alpha + \sum_\alpha i\eta_+^{\alpha\dagger} \psi_+^\alpha - \sum_\alpha i\psi_+^{\alpha\dagger} \eta_+^\alpha \right) Z = 0. \quad (5.15)$$

Fazemos as devidas associações de Ward-Takahashi

$$A_+^\alpha \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_+^\alpha} \quad (5.16)$$

$$\psi_+^\alpha \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta_+^{\alpha\dagger}} \quad (5.17)$$

$$\psi_+^{\alpha\dagger} \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta_+^\alpha} \quad (5.18)$$

De tal forma que, utilizando também $Z = e^{iW}$, onde W é o funcional gerador das funções conectadas, temos

$$\theta(x) \left(\sum_\alpha i\partial_+ J_+^\alpha + \sum_\alpha i\eta_+^{\alpha\dagger} \frac{\delta W}{\delta \eta_+^{\alpha\dagger}} + \sum_\alpha i\eta_+^\alpha \frac{\delta W}{\delta \eta_+^\alpha} \right) = 0. \quad (5.19)$$

Como uma consequência disso, temos a relação de Ward-Takahashi

$$\sum_\alpha i\partial_+ J_+^\alpha = - \left(\sum_\alpha i\eta_+^{\alpha\dagger} \frac{\delta W}{\delta \eta_+^{\alpha\dagger}} + \sum_\alpha i\eta_+^\alpha \frac{\delta W}{\delta \eta_+^\alpha} \right). \quad (5.20)$$

Note que a contribuição de corrente é devida às interações que não mudam “cor”, umas vez que essas interações estão associadas às contribuições de vértice.

Considerando a transformação de Legendre usual de teoria quântica de campos [58], podemos definir

$$\Gamma[\psi, \psi^\dagger, A] = W[\eta, \eta^\dagger, J] - \int d^2x [\psi^\dagger \eta + \eta^\dagger \psi + AJ] \quad (5.21)$$

onde

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_+^{\alpha\beta}} = -J_+^{\alpha\beta}, \quad (5.22)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_+^\alpha} = -\eta_+^{\alpha\dagger}, \quad (5.23)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_+^{\alpha\dagger}} = -\eta_+^\alpha, \quad (5.24)$$

$$\frac{\delta W}{\delta J_+^{\alpha\beta}} = A_+^{\alpha\beta}, \quad (5.25)$$

$$\frac{\delta W}{\delta \eta_+^{\alpha\dagger}} = \psi_+^\alpha, \quad (5.26)$$

$$\frac{\delta W}{\delta \eta_+^\alpha} = \psi_+^{\alpha\dagger}. \quad (5.27)$$

Então, de (5.20), temos a seguinte expressão

$$- \sum_\alpha i \partial_+^{\vec{x}} \frac{\delta \Gamma}{\delta A_+^\alpha(\vec{x})} = \sum_\alpha i \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_+^\alpha(\vec{x})} \psi_+^\alpha(\vec{x}) + \sum_\alpha i \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_+^{\alpha\dagger}(\vec{x})} \psi_+^{\alpha\dagger}(\vec{x}) \quad (5.28)$$

Levando em conta as derivadas funcionais com respeito a $\psi_{s'}^{\alpha'\dagger}(\vec{z})$ e $\psi_{s'}^{\alpha'}(\vec{y})$, chegamos na identidade de Ward-Takahashi primitiva

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \partial_+^{\vec{x}} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \psi_{s'}^{\alpha'\dagger}(\vec{z}) \delta \psi_{s'}^{\alpha'}(\vec{y}) \delta A_+^\alpha(\vec{x})} = \\ \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_{s'}^{\alpha'\dagger}(\vec{z}) \delta \psi_{s'}^{\alpha'}(\vec{y})} \delta_{+,s'} \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_+^{\alpha'\dagger}(\vec{z}) \delta \psi_{s'}^{\alpha'}(\vec{y})} \delta_{+,s'} \delta(\vec{x} - \vec{z}). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Segue que

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \partial_+^{\vec{x}} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \psi_+^{\alpha'\dagger}(\vec{z}) \delta \psi_+^{\alpha'}(\vec{y}) \delta A_+^\alpha(\vec{x})} = \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_+^{\alpha'\dagger}(\vec{z}) \delta \psi_+^{\alpha'}(\vec{y})} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ - \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_+^{\alpha'\dagger}(\vec{z}) \delta \psi_+^{\alpha'}(\vec{y})} \delta(\vec{x} - \vec{z}), \end{aligned} \quad (5.30)$$

levando em conta as transformadas de Fourier (Apêndice 4), chegamos na identidade de Ward-Takahashi primitiva no espaço dos momentos

$$q_+ \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha\alpha',++}^{(2,1)}(p, p+q; q) = \Gamma_{\alpha',+}^{(2)}(p+q) - \Gamma_{\alpha',+}^{(2)}(p), \quad (5.31)$$

onde $q_s = q_0 - sv_F q$, $s = \pm$.

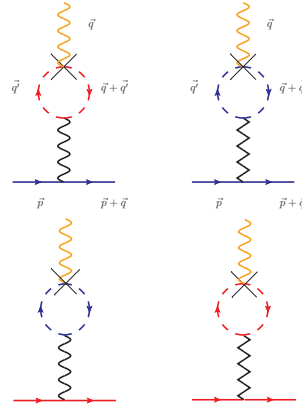


Figura 5.2: Funções vértice em 1-loop.

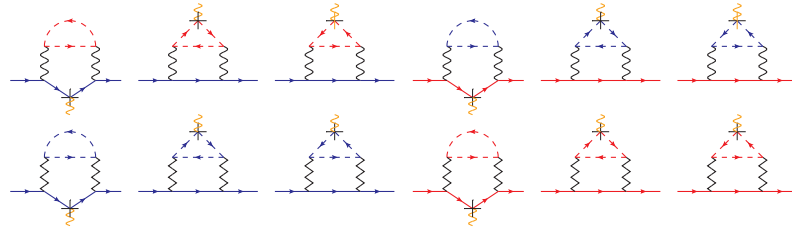


Figura 5.3: Diagramas de função vértice em 2-loops para interações frontal e inter-frontal.

Como observado em [43], essa identidade de Ward-Takahashi primitiva é violada pelas bolhas de polarização de 1-loop que envolvem interações intra e inter frontais, que são termos anômalos. Ela deve ser corrigida por uma identidade de Ward-Takahashi que incorpore os termos anômalos, denominada identidade de Ward-Takahashi anômala [38].

Os termos de bolha de polarização de uma cor, de fato correspondem ao caso 1 + 1 das anomalias triangulares que surgem em 3 + 1, são expansões em 1-loop

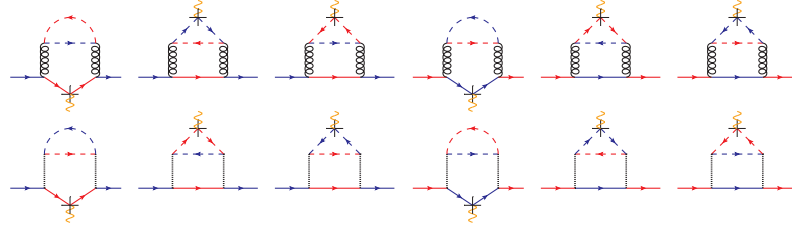


Figura 5.4: Diagramas de função vértice em 2-loops para interações backscattering e umklapp.

da função vértice $\Gamma_{\alpha\alpha',++}^{(2,1)}(p, p+q; q)$ (figura 5.2), correspondente ao acoplamento de interações de uma cor A_+^α (figura 5.1).

$$\begin{aligned}\Gamma_{ab,++}^{(2,1)(1\text{-loop})}(\vec{q}) &= -ig_{\mathcal{F}}\chi_-^b(\vec{q}) \\ &= -g_{\mathcal{F}}\frac{q}{2\pi}G_-^b(q_0, q - k_F^b),\end{aligned}\quad (5.32)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{aa,++}^{(2,1)(1\text{-loop})}(\vec{q}) &= -ig_{0,R}\chi_-^a(\vec{q}) \\ &= -g_0\frac{q}{2\pi}G_-^a(q_0, q - k_F^a),\end{aligned}\quad (5.33)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ba,++}^{(2,1)(1\text{-loop})}(\vec{q}) &= -ig_{\mathcal{F}}\chi_-^a(\vec{q}) \\ &= -g_{\mathcal{F}}\frac{q}{2\pi}G_-^a(q_0, q - k_F^a),\end{aligned}\quad (5.34)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{bb,++}^{(2,1)(1\text{-loop})}(\vec{q}) &= -ig_0\chi_-^b(\vec{q}) \\ &= -g_{0,R}\frac{q}{2\pi}G_-^b(q_0, q - k_F^b),\end{aligned}\quad (5.35)$$

Por outro lado, a contribuição da função de vértice não envolvendo bolhas de

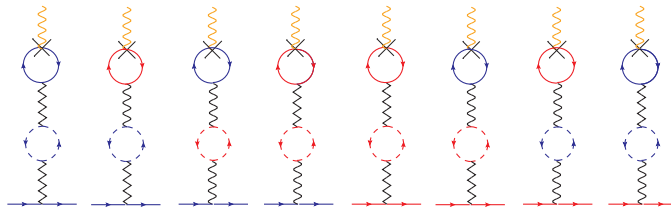


Figura 5.5: Termos anômalos na função vértice em 2-loops.

polarização de uma cor são identicamente canceladas (figuras 5.3 e 5.4), como predito pelo teorema de Adler-Bardeen [56], que demonstra que os termos de anomalia vem

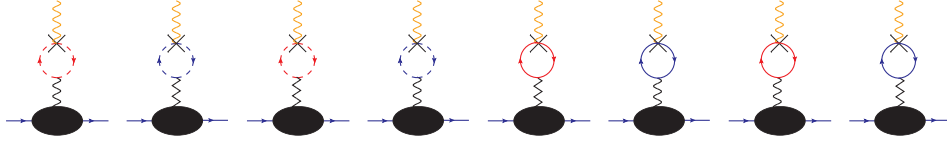


Figura 5.6: Termos anômalos genéricos na função vértice.

apenas de 1-loop, não surgindo novas contribuições em loops superiores, a não ser por meio de contribuições parquet de 1-loop. Assim, os termos anômalos em 2-loops são diagramas parquet envolvendo bolhas de polarização de uma “cor” (figura 5.5). Em ordens superiores, os termos anômalos são dados genericamente com os termos acoplados a bolhas de polarização de uma “cor” (figura 5.6).

Os termos anômalos que levam à anomalia quântica (figure 5.6), associados a interação de uma cor A_+^α , podem ser escritos como

$$\begin{aligned} F_{\alpha\alpha',++}(p, p+q; q) &= (g_0\chi_-^a + g_f\chi_-^b)\Gamma_{\alpha\alpha',++}^{(2,1)}(p, p+q; q) \\ &+ (g_0\chi_+^a + g_f\chi_+^b)\Gamma_{\alpha\alpha',++}^{(2,1)}(p, p+q; q), \end{aligned} \quad (5.36)$$

e para o lado esquerdo (figure 5.6), associados a interação de uma cor A_-^α ,

$$\begin{aligned} F_{\alpha\alpha',--}(p, p+q; q) &= (g_0\chi_-^a + g_f\chi_-^b)\Gamma_{\alpha\alpha',--}^{(2,1)}(p, p+q; q) \\ &+ (g_0\chi_+^a + g_f\chi_+^b)\Gamma_{\alpha\alpha',--}^{(2,1)}(p, p+q; q). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Como consequência, a identidade de Ward-Takahashi anômala para o lado direito pode ser escrito como

$$\begin{aligned} q_+ \sum_{\alpha} \left(\Gamma_{\alpha\alpha',++}^{(2,1)}(p, p+q; q) - F_{\alpha\alpha',++}(p, p+q; q) \right) &= \\ \Gamma_{\alpha',+}^{(2)}(p+q) - \Gamma_{\alpha',+}^{(2)}(p) \end{aligned} \quad (5.38)$$

e para o lado esquerdo pode ser escrito por

$$\begin{aligned} q_- \sum_{\alpha} \left(\Gamma_{\alpha\alpha',--}^{(2,1)}(p, p+q; q) - F_{\alpha\alpha',--}(p, p+q; q) \right) &= \\ \Gamma_{\alpha',-}^{(2)}(p+q) - \Gamma_{\alpha',-}^{(2)}(p). \end{aligned} \quad (5.39)$$

No caso da eletrodinâmica quântica, e em particular no modelo de Schwinger em $1 + 1$ a anomalia é o resultado de uma acoplamento de interações envolvendo a corrente axial de um espinor livre de Dirac [57, 54]. Para verificar isso no nosso caso, vamos reescrever as interações em termos de correntes para verificar que, de fato, os termos de interação relacionados a correntes axiais são os que não mudam cor. Isto é, as interações que não mudam cor são associadas aos vetores axiais, enquanto as interações que mudam cor (interbackscattering e interumklapp) não são. De fato, podemos escrever as interações intra e interbanda explicitamente em termos de componentes de correntes

$$g_0 \psi_+^{a\dagger} \psi_-^{b\dagger} \psi_-^b \psi_+^a = g_0 J_+^a J_-^a \quad (5.40)$$

$$g_{\mathcal{F}} \psi_+^{a\dagger} \psi_-^{b\dagger} \psi_-^b \psi_+^a = g_{\mathcal{F}} J_+^a J_-^b \quad (5.41)$$

$$g_{\mathcal{B}} \psi_+^{b\dagger} \psi_-^{a\dagger} \psi_-^b \psi_+^a = g_{\mathcal{B}} J_+^{ba} J_-^{ab} \quad (5.42)$$

$$g_{\mathcal{U}} \psi_+^{b\dagger} \psi_-^{b\dagger} \psi_-^a \psi_+^a = g_{\mathcal{U}} J_+^{ba} J_-^{ba} \quad (5.43)$$

Por outro lado, em coordenadas $1 + 1$, as correntes axial e vetorial [58]

$$J_A^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi, \quad (5.44)$$

$$J_V^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (5.45)$$

podem ser escritas, respectivamente, como

$$J_A = \begin{pmatrix} \psi_+^\dagger \psi_+ - \psi_-^\dagger \psi_- \\ \psi_+^\dagger \psi_+ + \psi_-^\dagger \psi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_A^0 \\ J_A^1 \end{pmatrix}, \quad (5.46)$$

$$J_V = \begin{pmatrix} \psi_+^\dagger \psi_+ + \psi_-^\dagger \psi_- \\ \psi_+^\dagger \psi_+ - \psi_-^\dagger \psi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_V^0 \\ J_V^1 \end{pmatrix}. \quad (5.47)$$

A seguinte relação $1 + 1$ é satisfeita $J_A = \gamma^0 J_V$ e podemos também escrever

$$J_A^0 + J_A^1 = 2J_+, \quad (5.48)$$

$$J_A^0 - J_A^1 = -2J_-. \quad (5.49)$$

Como consequência, as interações frontal e interfrontal podem ser escritas em termos de componentes de correntes axiais

$$g_0 J_+^a J_-^a = -\frac{g_0}{4} (J_A^{0a} + J_A^{1a}) (J_A^{0a} - J_A^{1a}), \quad (5.50)$$

$$g_{\mathcal{F}} J_+^a J_-^b = -\frac{g_{\mathcal{F}}}{4} (J_A^{0a} + J_A^{1a}) (J_A^{0b} - J_A^{1b}). \quad (5.51)$$

Por outro lado, as interações backscattering e umklapp não podem ser definidas por meio de espinores usuais que levem a combinações de vetores axiais. Podemos ver isso multiplicando correntes axiais para ver que nunca chegamos às formas (5.42) e (5.43). Uma possibilidade é definirmos esses espinores numa formulação semelhante à de Nambu (Apêndice 5), mas isso nos levaria a misturar representações de espinores.

Finalmente, podemos também considerar o termo envolvendo $v_F k_F^\alpha$,

$$\sum_{\alpha} \bar{\psi}^{\alpha} \gamma^0 v_F k_F^{\alpha} \psi^{\alpha} = \sum_{\alpha} v_F k_F^{\alpha} (J_+^{\alpha} + J_-^{\alpha}) = \sum_{\alpha} v_F k_F^{\alpha} J_A^{1\alpha}. \quad (5.52)$$

onde utilizamos $J_A^1 = J_+ + J_-$

Devemos observar ainda que a anomalia quântica em $1 + 1$ é mais apropriadamente devida à componente J_A^0 do vetor axial, como uma consequência da diferença entre o números de Fermi nos lados esquerdo e direito [36, 57]. Isto é, $J_A^0 = \psi_+^{\dagger} \psi_+ - \psi_-^{\dagger} \psi_-$ é relacionado à simetria quiral, a componente $J_A^1 = \psi_+^{\dagger} \psi_+ + \psi_-^{\dagger} \psi_-$ é relacionada à conservação de carga.

Apenas os termos das interações de uma cor frontal e interfrontal, levam essa componente J_A^0 , daí sua relação associada a anomalia quântica, verificada diagramaticamente.

Do ponto de vista da regularização, a teoria renormalizada é dada em termos da identidade de Ward-Takahashi anômala. De fato, a anomalia é inerente, tanto à teoria regularizada como a não-regularizada [33].

Na formulação devida a Fujikawa [36], as anomalias emergem como o resultado do cálculo do determinante no funcional gerador como a consideração do cálculo do Jacobiano. Além disso, como existe uma relação direta dos férmions em

1 + 1 com bósons, no processo de bosonização, a inclusão do termo devido às anomalias aparece na teoria bosonizada via um termo de ação de Wess-Zumino [55]. Essas questões não foram exploradas nesta tese, mas são questões pertinentes também.

Capítulo 6

Prescrições de grupo de renormalização

A lagrangiana renormalizada (4.3) envolve uma prescrição de renormalização. Incluindo também os momentos e a velocidade de Fermi renormalizados a prescrição de renormalização deve incluir tanto contratermos para a velocidade de Fermi como para os momentos de Fermi em cada banda, envolvendo uma correção em ε_{sk}^α para o termo livre. O termo livre renormalizado passa a ser então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0R} &= \sum_{k,s,\alpha} \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} [k_0 - v_{F,R} (sk - k_{F,R}^\alpha)] \hat{\psi}_{sk,R}^\alpha \\ &+ \sum_{k,s,\alpha} \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} [k_0 \delta Z - sk \delta v_{FR} + v_{F,R} \delta k_F^\alpha] \hat{\psi}_{sk,R}^\alpha \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde temos contratermos associados à velocidade de Fermi $\delta v_{F,R}$, aos momentos de Fermi δk_F^α e a renormalização dos campos fermiônicos. Podemos ainda descrever o contratermo associado à velocidade de Fermi em termos de δZ , por meio da relação $\delta v_{F,R} = v_{F,R} \delta Z$. Podemos então reescrever a lagrangiana anterior da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0R} &= \sum_{k,s,\alpha} \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} [k_0 - v_{F,R} (sk - k_{F,R}^\alpha)] \hat{\psi}_{sk,R}^\alpha \\ &+ \sum_{k,s,\alpha} \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} [k_0 \delta Z - sk v_{F,R} \delta Z + v_{F,R} \delta k_F^\alpha] \hat{\psi}_{sk,R}^\alpha \end{aligned} \quad (6.2)$$

que agora envolve o termo renormalizado $\varepsilon_{sk,R}^\alpha = v_{F,R} (sk - k_{F,R}^\alpha)$ e os contratermos associados. Note que consideramos, por simplicidade, velocidades de Fermi iguais $v_{F,R}$.

A lagrangiana renormalizada total pode então ser reescrita, explicitando as contribuições devidas aos contratermos, da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_R &= \sum_{k,s,\alpha} \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} [k_0 - \varepsilon_{sk,R}^\alpha] \hat{\psi}_{sk,R}^\alpha \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha} g_{0,R} \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{-sk',R}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),R}^\alpha \hat{\psi}_{-s(k'-q),R}^\alpha \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha \neq \beta} g_{\mathcal{F},R} \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{-sk',R}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),R}^\alpha \hat{\psi}_{-s(k'-q),R}^\beta \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha \neq \beta} g_{\mathcal{B},R} \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{-sk',R}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),R}^\beta \hat{\psi}_{-s(k'-q),R}^\alpha \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha \neq \beta} g_{\mathcal{U},R} \hat{\psi}_{sk,R}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{-sk',R}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),R}^\alpha \hat{\psi}_{-s(k'-q),R}^\alpha \\
&+ \sum_{k,s,\alpha} \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} [k_0 \delta Z - sk v_{F,R} \delta Z + v_{F,R} \delta k_{F,R}^\alpha] \hat{\psi}_{sk,R}^\alpha \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha} \delta g_{0,R} \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{-sk',R}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),R}^\alpha \hat{\psi}_{-s(k'-q),R}^\alpha \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha \neq \beta} \delta g_{\mathcal{F},R} \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{-sk',R}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),R}^\alpha \hat{\psi}_{-s(k'-q),R}^\beta \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha \neq \beta} \delta g_{\mathcal{B},R} \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{-sk',R}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),R}^\beta \hat{\psi}_{-s(k'-q),R}^\alpha \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha \neq \beta} \delta g_{\mathcal{U},R} \hat{\psi}_{sk,R}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{-sk',R}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),R}^\alpha \hat{\psi}_{-s(k'-q),R}^\alpha. \tag{6.3}
\end{aligned}$$

O procedimento de grupo de renormalização realiza uma modificação nos campos fermiônicos, que se relaciona aos campos “nus” (\mathbb{N}) por meio da seguinte relação

$$\hat{\psi}_{sk,R}^\alpha = Z^{-1/2} \hat{\psi}_{sk,\mathbb{N}}^\alpha \tag{6.4}$$

onde $Z = 1 + \delta Z$ é o denominado peso da quasipartícula.

6.1 As grandezas nuas

Os campos “nus”(N) são campos invariantes sob o grupo de renormalização. A lagrangiana, se escrita em termos das grandezas nuas, torna-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_R &= \sum_{k,s,\alpha} \hat{\psi}_{sk,N}^{\alpha\dagger} [k_0 - \varepsilon_{sk,N}^\alpha] \hat{\psi}_{sk,N}^\alpha \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha} g_{0,N} \hat{\psi}_{sk,N}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{-sk',N}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),N}^\alpha \hat{\psi}_{-s(k'-q),N}^\alpha \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha \neq \beta} g_{\mathcal{F},N} \hat{\psi}_{sk,N}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{-sk',N}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),N}^\alpha \hat{\psi}_{-s(k'-q),N}^\beta \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha \neq \beta} g_{\mathcal{B},N} \hat{\psi}_{sk,N}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{-sk',N}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),N}^\beta \hat{\psi}_{-s(k'-q),N}^\alpha \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha \neq \beta} g_{\mathcal{U},N} \hat{\psi}_{sk,N}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{-sk',N}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),N}^\alpha \hat{\psi}_{-s(k'-q),N}^\alpha, \tag{6.5}
\end{aligned}$$

Assim a lagrangiana tem a forma do modelo não-renormalizado. Usando o resultado (6.4) podemos então reescrever \mathcal{L}_R como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_R &= \sum_{k,s,\alpha} Z \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} [k_0 - \varepsilon_{sk,N}^\alpha] \hat{\psi}_{sk,R}^\alpha \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha} Z^2 g_{0,N} \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{-sk',R}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),R}^\alpha \hat{\psi}_{-s(k'-q),R}^\alpha \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha \neq \beta} Z^2 g_{\mathcal{F},N} \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{-sk',R}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),R}^\alpha \hat{\psi}_{-s(k'-q),R}^\beta \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha \neq \beta} Z^2 g_{\mathcal{B},N} \hat{\psi}_{sk,R}^{\alpha\dagger} \hat{\psi}_{-sk',R}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),R}^\beta \hat{\psi}_{-s(k'-q),R}^\alpha \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k,k',q,s,\alpha \neq \beta} Z^2 g_{\mathcal{U},N} \hat{\psi}_{sk,R}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{-sk',R}^{\beta\dagger} \hat{\psi}_{s(k+q),R}^\alpha \hat{\psi}_{-s(k'-q),R}^\alpha, \tag{6.6}
\end{aligned}$$

Como a equação (6.6) é idêntica à equação (6.3) podemos relacionar as grandezas nuas (\mathbb{N}) e renormalizadas (\mathbb{R}) diretamente:

$$Zk_{0,\mathbb{N}} = k_{0,\mathbb{R}} + \delta Zk_{0,\mathbb{R}} \quad (6.7)$$

$$Z\varepsilon_{sk,\mathbb{N}}^\alpha = \varepsilon_{sk,\mathbb{R}}^\alpha + skv_{F,\mathbb{R}}\delta Z - v_{F,\mathbb{R}}\delta k_{F,\mathbb{R}}^\alpha \quad (6.8)$$

$$Z^2g_{0,\mathbb{N}} = g_{0,\mathbb{R}} + \delta g_{0,\mathbb{R}} \quad (6.9)$$

$$Z^2g_{\mathcal{F},\mathbb{N}} = g_{\mathcal{F},\mathbb{R}} + \delta g_{\mathcal{F},\mathbb{R}} \quad (6.10)$$

$$Z^2g_{\mathcal{B},\mathbb{N}} = g_{\mathcal{B},\mathbb{R}} + \delta g_{\mathcal{B},\mathbb{R}} \quad (6.11)$$

$$Z^2g_{\mathcal{U},\mathbb{N}} = g_{\mathcal{U},\mathbb{R}} + \delta g_{\mathcal{U},\mathbb{R}} \quad (6.12)$$

Da equação (6.8), obtemos também as relações

$$Zv_{F,\mathbb{N}} = v_{F,\mathbb{R}} + v_{F,\mathbb{R}}\delta Z = Zv_{F,\mathbb{R}} \quad (6.13)$$

de onde segue $v_{F,\mathbb{N}} = v_{F,\mathbb{R}}$, ou seja a velocidade de Fermi não é renormalizada. Daí temos que

$$Zk_{F,\mathbb{N}}^\alpha = k_{F,\mathbb{R}}^\alpha + \delta k_{F,\mathbb{R}}^\alpha. \quad (6.14)$$

Definindo como $\Delta k_F = k_F^b - k_F^a$ a diferença entre os pontos de Fermi das bandas b e a , podemos também escrever essa diferença em relação às grandezas nuas \mathbb{N} e renormalizadas

$$Z\Delta k_{F,\mathbb{N}} = \Delta k_{F,\mathbb{R}} + \delta\Delta k_{F,\mathbb{R}}, \quad (6.15)$$

onde definimos também $\delta\Delta k_{F,\mathbb{R}} = \delta k_{F,\mathbb{R}}^b - \delta k_{F,\mathbb{R}}^a$.

6.2 Equações de fluxo de renormalização

Considerando a relação geral entre acoplamentos \mathbb{N} e renormalizados \mathbb{R}

$$g_{\mathbb{N}} = Z^{-2}(g_{\mathbb{R}} + \delta g_{\mathbb{R}}) \quad (6.16)$$

podemos calcular o fluxo das grandezas renormalizadas em função da escala de renormalização ω . Assim, segue-se que

$$\omega \frac{dZ^{-2}}{d\omega} (g_R + \delta g_R) + Z^{-2} \left(\omega \frac{dg_R}{d\omega} + \omega \frac{d\delta g_R}{d\omega} \right) = 0, \quad (6.17)$$

onde levamos em conta o fato de que as grandezas N não fluem com ω , $\omega \frac{dg_N}{d\omega} = 0$.

Definindo a dimensão anômala γ como sendo

$$\gamma = \frac{\omega}{Z} \frac{dZ}{d\omega}, \quad (6.18)$$

chegamos à equação

$$\omega \frac{dg_R}{d\omega} = 2\gamma (g_R + \delta g_R) - \omega \frac{d\delta g_R}{d\omega}. \quad (6.19)$$

No caso específico dos canais de espalhamento do nosso modelo, as equações de fluxo de GR são portanto:

$$\omega \frac{dg_{0R}}{d\omega} = 2\gamma (g_{0R} + \delta g_{0R}) - \omega \frac{d\delta g_{0R}}{d\omega}, \quad (6.20)$$

$$\omega \frac{dg_{\mathcal{F},R}}{d\omega} = 2\gamma (g_{\mathcal{F},R} + \delta g_{\mathcal{F},R}) - \omega \frac{d\delta g_{\mathcal{F},R}}{d\omega}, \quad (6.21)$$

$$\omega \frac{dg_{\mathcal{B},R}}{d\omega} = 2\gamma (g_{\mathcal{B},R} + \delta g_{\mathcal{B},R}) - \omega \frac{d\delta g_{\mathcal{B},R}}{d\omega}, \quad (6.22)$$

$$\omega \frac{dg_{\mathcal{U},R}}{d\omega} = 2\gamma (g_{\mathcal{U},R} + \delta g_{\mathcal{U},R}) - \omega \frac{d\delta g_{\mathcal{U},R}}{d\omega}. \quad (6.23)$$

Capítulo 7

Funções irreduzíveis renormalizadas de uma partícula

7.1 Autoenergias e funções renormalizadas $\Gamma^{(2)}$

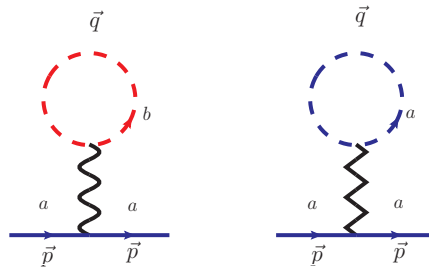


Figura 7.1: Autoenergia $-i\Sigma_+^a$ da banda a em 1-loop.

Em 1-loop os diagramas de autoenergia envolvem somente bolhas de polarização de uma cor (figura 7.1), elas são dadas pela seguinte fórmula

$$-i\Sigma_{s,R}^\alpha = g_{\mathcal{F},R} \int_{\vec{q}} G_{s,R}^\beta(\vec{q}) + g_{0,R} \int_{\vec{q}} G_{s,R}^\alpha(\vec{q}), \quad (7.1)$$

onde $\alpha = a, b$, $\beta = a, b$, $\alpha \neq \beta$. Ao integrar sobre \vec{q} , com cutoff de momento Λ , temos explicitamente

$$-i\Sigma_{-,R}^a = i(\bar{g}_{\mathcal{F},R} + \bar{g}_{0,R})\Omega, \quad (7.2)$$

$$-i\Sigma_{+,R}^a = i(\bar{g}_{\mathcal{F},R} + \bar{g}_{0,R})\Omega, \quad (7.3)$$

$$-i\Sigma_{-,R}^b = i(\bar{g}_{\mathcal{F},R} + \bar{g}_{0,R})\Omega, \quad (7.4)$$

$$-i\Sigma_{+,R}^b = i(\bar{g}_{\mathcal{F},R} + \bar{g}_{0,R})\Omega, \quad (7.5)$$

onde $\bar{g}_{\mathcal{F},R} = \frac{g_{\mathcal{F},R}}{\pi V_F}$, $\bar{g}_{0,R} = \frac{g_{0,R}}{\pi V_F}$ e $\Omega = \Lambda V_F$, $V_F = 2v_F$. Assim, em 1-loop as contribuições de autoenergia são dadas por interações intrafrontal e interfrontal. Se considerarmos as contribuições de 2-loops, por outro lado, temos contribuições adicionais produzidas pelos demais acoplamentos de backscattering e umklapp, com a possibilidade assim de termos bolhas de polarização de duas cores e trocas de cor (figuras 7.2 e 7.3).

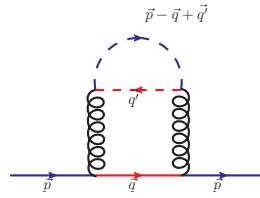


Figura 7.2: Diagrama de autoenergia em 2-loops com interação backscattering.

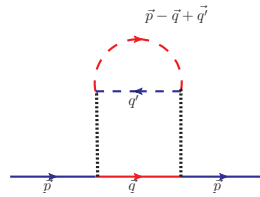


Figura 7.3: Diagrama de autoenergia em 2-loops com interação umklapp.

A contribuição da interação frontal em 2-loops para a autoenergia é dada por (figura 7.4)

$$-i\Sigma_{+,R,g_{0,R}}^a(\vec{p}) = (-ig_{0,R})^2 \int_{\vec{q}} iG_{+,R}^a(\vec{q})\chi_{-,R}^a(\vec{p} - \vec{q}). \quad (7.6)$$

Na vizinhança da superfície de Fermi, $p_0 = \omega$ e $p = k_{F,R}^a$,

$$-i\Sigma_{+,R,g_{0,R}}^a(k_{F,R}^a, \omega) = \frac{ig_{0,R}^2\omega}{2(\pi V_F)^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right). \quad (7.7)$$

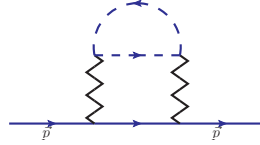


Figura 7.4: Diagrama de autoenergia em 2-loops com interação frontal.

As contribuições de autoenergia da interação interfrontal em 2-loops (7.5) é dada por

$$-i\Sigma_{+,R,g_{\mathcal{F},R}}^a(\vec{p}) = (-ig_{\mathcal{F},R})^2 \int_{\vec{q}} iG_{+,R}^a(\vec{q})\chi_{-,R}^b(\vec{p}-\vec{q}), \quad (7.8)$$

que se reduz, na vizinhança do ponto de Fermi, $p_0 = \omega$ e $p = k_{F,R}^a$, para velocidades de Fermi iguais $v_{F,R}$, a

$$-i\Sigma_{+,R,g_{\mathcal{F},R}}^a(k_{F,R}^a, \omega) = \frac{ig_{\mathcal{F},R}^2\omega}{2(\pi V_F)^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right). \quad (7.9)$$

Ambas as contribuições frontal e interfrontal são bolhas de polarização de uma só cor para a autoenergia

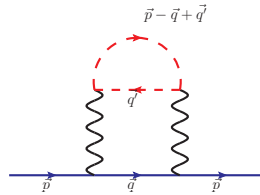


Figura 7.5: Diagrama de 2-loops para $-i\Sigma_+^a$ associado ao acoplamento interfrontal.

Agora, considerando as contribuições de duas cores em 2-loops para a autoenergia, temos a contribuição da interação backscattering (figura 7.2),

$$\Sigma_{+,R,g_{\mathcal{B},\mathcal{R}}}^a = (-ig_{\mathcal{B},\mathcal{R}})^2 \int_{\vec{q}} iG_+^b(\vec{q})\chi_-^{ba}(\vec{p}-\vec{q}) \quad (7.10)$$

que na superfície de Fermi $\vec{p} = (\omega, k_{F,R}^a)$, no caso de mesmas velocidades de Fermi, é dada por

$$-i\Sigma_{+,R,g_{B,R}}^a(k_{F,R}^a, \omega) = \frac{ig_{B,R}^2 V_F \Delta k_{F,R}}{2(\pi V_F)^2} \ln\left(\frac{\Omega}{V_F \Delta k_{F,R}}\right) + \frac{ig_{B,R}^2 \omega}{2(\pi V_F)^2} \ln\left(\frac{\Omega}{V_F \Delta k_{F,R}}\right), \quad (7.11)$$

e a contribuição da interação de umklapp (figure 7.3)

$$-i\Sigma_{+,R,g_{U,R}}^a = (-ig_{U,R})^2 \int_{\vec{q}} iG_{+,R}^b(\vec{q}) \chi_{-,R}^{ab}(\vec{p} - \vec{q}), \quad (7.12)$$

que na superfície de Fermi $\vec{p} = (k_{F,R}^a, \omega)$, no caso de velocidades de Fermi iguais, é

$$-i\Sigma_{+,R,g_{U,R}}^a(k_{F,R}^a, \omega) = \frac{ig_{U,R}^2 \omega}{2(\pi V_F)^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right). \quad (7.13)$$

Agora, podemos escrever a contribuição total da autoenergia até 2-loops para a

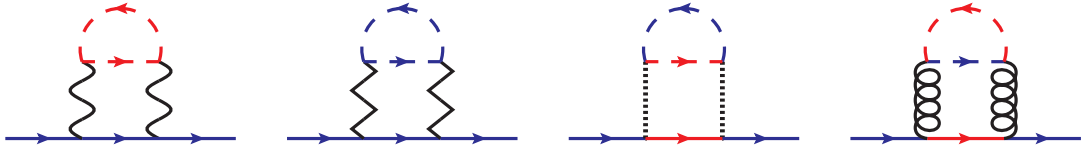


Figura 7.6: Diagramas de autoenergia em 2-loops, banda $a+$.

banda a , lado direito, na superfície de Fermi (SF),

$$-i\Sigma_{+,R}^a|_{SF} = \frac{ig_{F,R}^2 \omega}{2(\pi V_F)^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \frac{ig_0^2 \omega}{2(\pi V_F)^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \frac{ig_{B,R}^2 (V_F \Delta k_{F,R} + \omega)}{2(\pi V_F)^2} \ln\left(\frac{\Omega}{V_F \Delta k_{F,R}}\right) + \frac{ig_{U,R}^2 \omega}{2(\pi V_F)^2} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \quad (7.14)$$

e a correspondente função irreduzível renormalizada de uma partícula $\Gamma^{(2)}$ em um

dos pontos de Fermi é então

$$\begin{aligned}
\Gamma_{a+R}^{(2)}(\omega, k_F^a) &= \omega - (\bar{g}_{0R} + \bar{g}_{\mathcal{F},R}) \Omega \\
&+ \omega \left[\frac{\bar{g}_{\mathcal{F},R}^2}{2} + \frac{\bar{g}_{0,R}^2}{2} + \frac{\bar{g}_{\mathcal{U},R}^2}{2} \right] \ln \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) \\
&+ \omega \frac{\bar{g}_{\mathcal{B},R}^2}{2} \ln \left(\frac{\Omega}{V_F \Delta k_F} \right) \\
&+ (V_F \Delta k_F) \frac{\bar{g}_{\mathcal{B},R}^2}{2} \ln \left(\frac{\Omega}{V_F \Delta k_F} \right) \\
&+ \omega \delta Z - k_{F,R}^a v_F \delta Z + v_F \delta k_{F,R}^a,
\end{aligned} \tag{7.15}$$

onde δZ e $\delta k_{F,R}^a$ são os correspondentes contratermos, introduzidos no correspondente lagrangiano renormalizado. Por outro lado, se lidarmos a banda b (figura 7.7),



Figura 7.7: Diagrama de autoenergia em 2-loops, banda $b+$.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{b+R}^{(2)}(\omega, k_F^b) &= \omega - (\bar{g}_{0R} + \bar{g}_{\mathcal{F},R}) \Omega \\
&+ \omega \left[\frac{\bar{g}_{\mathcal{F},R}^2}{2} + \frac{\bar{g}_{0,R}^2}{2} + \frac{\bar{g}_{\mathcal{U},R}^2}{2} \right] \ln \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) \\
&+ \omega \frac{\bar{g}_{\mathcal{B},R}^2}{2} \ln \left(\frac{\Omega}{V_F \Delta k_{F,R}} \right) \\
&- (V_F \Delta k_{F,R}) \frac{\bar{g}_{\mathcal{B},R}^2}{2} \ln \left(\frac{\Omega}{V_F \Delta k_{F,R}} \right) \\
&+ \omega \delta Z - k_{F,R}^b v_F \delta Z + v_F \delta k_{F,R}^b,
\end{aligned} \tag{7.16}$$

onde agora temos o contratermo $\delta k_{F,R}^b$ e introduzimos a notação $\bar{g}_R = g_R/\pi V_F$ para

cada acoplamento correspondente. Cálculos similares são aplicados para quiralidades opostas $\Gamma_{a-R}^{(2)}$ e $\Gamma_{b-R}^{(2)}$ (figura 7.8).

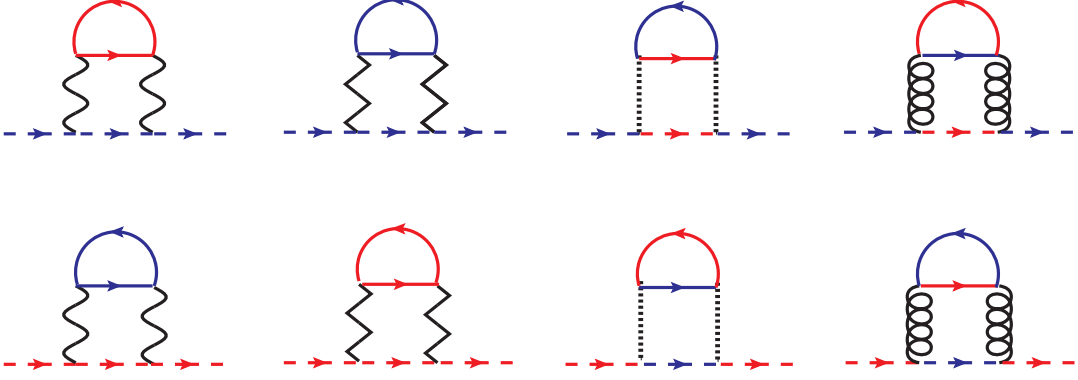


Figura 7.8: Diagramas de autoenergia em 2-loops, bandas $a-$ e $b-$.

7.2 Prescrição física para $\Gamma_R^{(2)}$ e fluxo de renormalização para

$$\Delta k_{F,R}$$

Para determinarmos as grandezas renormalizadas necessitamos de uma prescrição apropriada de grupo de renormalização (GR) para $\Gamma_R^{(2)}$ no ponto de Fermi correspondente. Vamos definir então para cada banda, no ponto de Fermi correspondente, $\Gamma_R^{(2)}|_{PF} = \omega$. Assim, usando as equações (7.15) e (7.16), chegamos naturalmente ao resultado

$$\delta Z = -\frac{1}{2} [\bar{g}_{\mathcal{F},R}^2 + \bar{g}_{0,R}^2 + \bar{g}_{\mathcal{U},R}^2] \ln \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mathcal{B},R}^2 \ln \left(\frac{\Omega}{V_F \Delta k_{F,R}} \right), \quad (7.17)$$

e aos respectivos contratermos de momento de Fermi

$$\begin{aligned} \delta k_{F,R}^a &= k_{F,R}^a \delta Z + (\bar{g}_{0,R} + \bar{g}_{\mathcal{F},R}) \frac{\Omega}{v_F} \\ &\quad - \Delta k_{F,R} \bar{g}_{\mathcal{B},R}^2 \ln \left(\frac{\Omega}{V_F \Delta k_{F,R}} \right), \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned}\delta k_{F,R}^b &= k_{F,R}^b \delta Z + (\bar{g}_{0,R} + \bar{g}_{\mathcal{F},R}) \frac{\Omega}{v_{F,R}} \\ &+ \Delta k_{F,R} \bar{g}_{\mathcal{B},R}^2 \ln \left(\frac{\Omega}{V_{F,R} \Delta k_{F,R}} \right).\end{aligned}\quad (7.19)$$

Adicionando $k_{F,R}^\alpha$, $\alpha = a, b$, em cada contratermo correspondente para o momento de Fermi e levando em conta a relação $\delta Z = Z - 1$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\delta k_{F,R}^a + k_{F,R}^a &= k_{F,R}^a Z + (\bar{g}_{0,R} + \bar{g}_{\mathcal{F},R}) \frac{\Omega}{v_{F,R}} \\ &- \Delta k_{F,R} \bar{g}_{\mathcal{B},R}^2 \ln \left(\frac{\Omega}{V_{F,R} \Delta k_{F,R}} \right),\end{aligned}\quad (7.20)$$

$$\begin{aligned}\delta k_{F,R}^b + k_{F,R}^b &= k_{F,R}^b Z + (\bar{g}_{0,R} + \bar{g}_{\mathcal{F},R}) \frac{\Omega}{v_{F,R}} \\ &+ \Delta k_{F,R} \bar{g}_{\mathcal{B},R}^2 \ln \left(\frac{\Omega}{V_{F,R} \Delta k_{F,R}} \right).\end{aligned}\quad (7.21)$$

Levando em consideração a relação entre os momentos de Fermi nus e renormalizados

$$k_{F,N}^a = \frac{\delta k_{F,R}^a + k_{F,R}^a}{Z}, \quad (7.22)$$

$$k_{F,N}^b = \frac{\delta k_{F,R}^b + k_{F,R}^b}{Z}, \quad (7.23)$$

podemos escrever a relação entre $\Delta k_{F,N}$ e $\Delta k_{F,R}$ explicitamente

$$\begin{aligned}\Delta k_{F,N} &= k_{F,N}^b - k_{F,N}^a \\ &= \Delta k_{F,R} \left[1 + 2 \frac{\bar{g}_{\mathcal{B},R}^2}{Z} \ln \left(\frac{\Omega}{V_{F,R} \Delta k_{F,R}} \right) \right].\end{aligned}\quad (7.24)$$

Como as quantidades nus não fluem com respeito ao nosso parâmetro de escala de GR, chegamos à equação de fluxo correspondente para $\Delta k_{F,R}$:

$$\begin{aligned}\omega \frac{d\Delta k_{F,N}}{d\omega} &= \omega \frac{d\Delta k_{F,R}}{d\omega} \left[1 + 2 \frac{\bar{g}_{\mathcal{B},R}^2}{Z} \ln \left(\frac{\Omega}{V_{F,R} \Delta k_{F,R}} \right) \right] \\ &+ \Delta k_{F,R} \left[-2 \frac{\bar{g}_{\mathcal{B},R}^2}{Z^2} \omega \frac{dZ}{d\omega} \ln \left(\frac{\Omega}{V_{F,R} \Delta k_{F,R}} \right) \right. \\ &- \left. 2 \frac{\bar{g}_{\mathcal{B},R}^2}{Z} \frac{1}{\Delta k_{F,R}} \omega \frac{d\Delta k_{F,R}}{d\omega} \right] \\ &= 0.\end{aligned}\quad (7.25)$$

Incluindo a dimensão anômala

$$\gamma = \frac{\omega}{Z} \frac{dZ}{d\omega} \quad (7.26)$$

e multiplicando ambos os lados por Z , chegamos a

$$\omega \frac{d\Delta k_{F,R}}{d\omega} = \frac{2\Delta k_{F,R} \bar{g}_{B,R}^2 \gamma \ln\left(\frac{\Omega}{V_{F,R} \Delta k_{F,R}}\right)}{Z + 2\bar{g}_{B,R}^2 \left[\ln\left(\frac{\Omega}{V_{F,R} \Delta k_{F,R}}\right) - 1\right]}. \quad (7.27)$$

Isto pode também ser escrito na seguinte forma simplificada

$$\omega \frac{d \ln \Delta k_{F,R}}{d\omega} = \frac{\gamma}{1 - \frac{1}{\ln(\Lambda/\Delta k_{F,R})} \left[1 - \frac{Z}{2\bar{g}_{B,R}^2}\right]}, \quad (7.28)$$

onde consideramos o termo de cutoff $\Lambda = \Omega/V_{F,R}$.

Capítulo 8

Funções irreduzíveis renormalizadas de duas partículas

8.1 Funções irreduzíveis renormalizadas de duas partículas

$\Gamma_R^{(4)}$ e contratermos para os canais de espalhamento

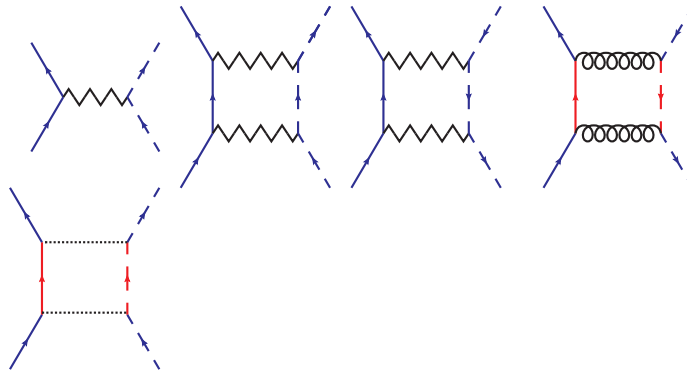


Figura 8.1: Diagramas do canal de espalhamento frontal em 1-loop.

Agora consideramos as funções irreduzíveis renormalizadas de duas partículas $\Gamma_R^{(4)}$ para os correspondentes canais de espalhamento das interações frontal, inter-frontal, backscattering e umklapp. No canal de espalhamento frontal (figura 8.1),

a função irreduzível de duas partículas em 1-loop na vizinhança do ponto de Fermi tem a seguinte contribuição

$$\begin{aligned}\Gamma_{0,R}^{(4)} &= -ig_{0,R} - \frac{ig_{B,R}^2}{\pi V_F} \ln \left(\frac{\Omega}{V_{F,R} \Delta k_{F,R}} \right) \\ &+ \frac{ig_{U,R}^2}{\pi V_{F,R}} \ln \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) - i\delta g_{0,R},\end{aligned}\quad (8.1)$$

onde $-i\delta g_{0,R}$ é o correspondente contratermo para o canal frontal nessa ordem de perturbação.

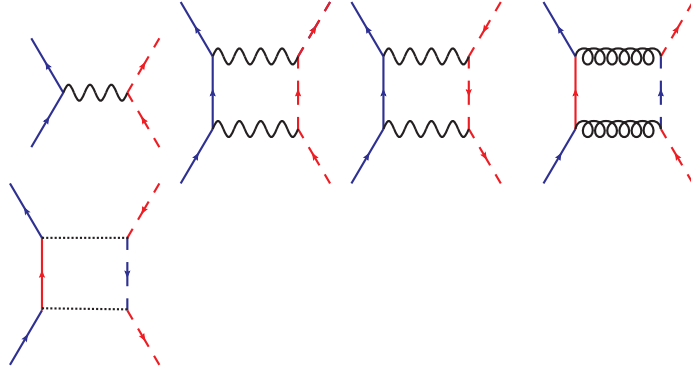


Figura 8.2: Diagramas do canal de espalhamento interfrontal em 1-loop.

No canal de espalhamento interfrontal (figura 8.2) a função irreduzível de duas partículas em 1-loop na vizinhança do mesmo ponto de Fermi é, por sua vez,

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathcal{F},R}^{(4)} &= -ig_{\mathcal{F},R} + \frac{ig_{B,R}^2}{\pi V_{F,R}} \ln \left(\frac{\Omega}{V_{F,R} \Delta k_F} \right) \\ &- \frac{ig_{U,R}^2}{\pi V_{F,R}} \ln \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) - i\delta g_{\mathcal{F},R},\end{aligned}\quad (8.2)$$

onde $-i\delta g_{\mathcal{F},R}$ é o correspondente contratermo desse canal de espalhamento em 1-loop.

No canal de espalhamento backscattering (figura 8.3), temos na vizinhança

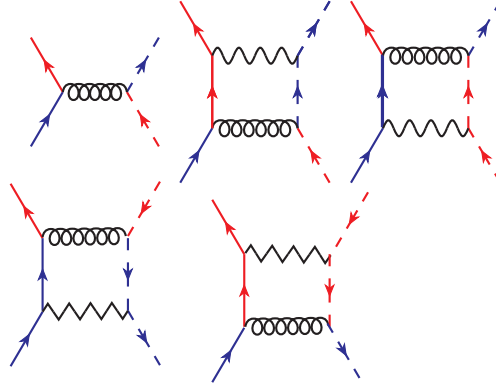


Figura 8.3: Diagramas do canal de espalhamento backscattering em 1-loop.

do ponto de Fermi

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{B,R}^{(4)} &= -ig_{B,R} + \frac{ig_{B,R}g_{F,R}}{\pi V_{F,R}} \ln\left(\frac{\Omega}{V_{F,R}\Delta k_{F,R}}\right) \\
 &+ \frac{ig_{F,R}g_{B,R}}{\pi V_{F,R}} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - \frac{ig_{B,R}g_{0,R}}{\pi V_{F,R}} \ln\left(\frac{\Omega}{V_F\Delta k_{F,R}}\right) \\
 &- \frac{ig_{0,R}g_{B,R}}{\pi V_{F,R}} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - i\delta g_{B,R},
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

onde $-i\delta g_{B,R}$ é o correspondente contratermo.

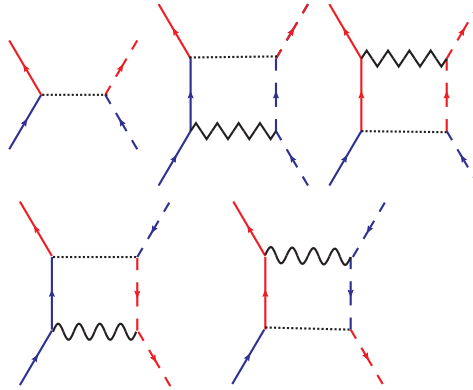


Figura 8.4: Diagramas do canal de espalhamento umklapp em 1-loop.

No canal de espalhamento umklapp (figura 8.4), temos a seguinte contri-

buição na vizinhança do ponto de Fermi

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathcal{U},R}^{(4)} &= -ig_{\mathcal{U},R} + 2i\frac{g_{\mathcal{U},R}g_{0,R}}{\pi V_{F,R}} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\ &\quad - 2i\frac{g_{\mathcal{U},R}g_{\mathcal{F},R}}{\pi V_{F,R}} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - i\delta g_{\mathcal{U},R},\end{aligned}\quad (8.4)$$

onde $-i\delta g_{\mathcal{U},R}$ é o contratermo correspondente para o canal de espalhamento umklapp em 1-loop.

A prescrição física de renormalização para as funções irreduzíveis de duas partículas nos pontos de Fermi são os correspondentes acoplamentos renormalizados. Isto é:

$$\Gamma_{0,R}^{(4)} = -ig_{0,R}, \quad (8.5)$$

$$\Gamma_{\mathcal{F},R}^{(4)} = -ig_{\mathcal{F},R}, \quad (8.6)$$

$$\Gamma_{\mathcal{B},R}^{(4)} = -ig_{\mathcal{B},R}, \quad (8.7)$$

$$\Gamma_{\mathcal{U},R}^{(4)} = -ig_{\mathcal{U},R}. \quad (8.8)$$

Podemos então calcular explicitamente todos os contratermos ordem a ordem em

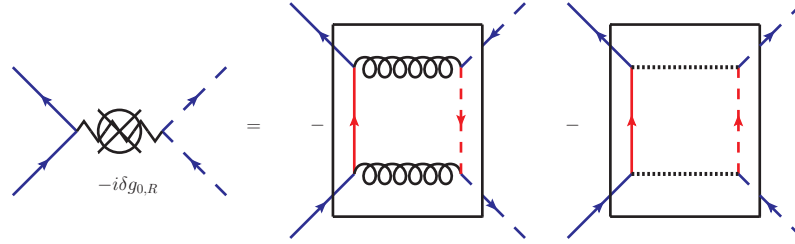


Figura 8.5: Diagrama de Feynman correspondente ao contratermo para o canal de espalhamento frontal.

teoria de perturbação. Em particular, em 1-loop, para o canal de espalhamento frontal (figure 8.5)

$$\delta g_{0,R} = -\frac{g_{\mathcal{B},R}^2}{\pi V_{F,R}} \ln\left(\frac{\Omega}{V_{F,R}\Delta k_{F,R}}\right) + \frac{g_{\mathcal{U},R}^2}{\pi V_{F,R}} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right), \quad (8.9)$$

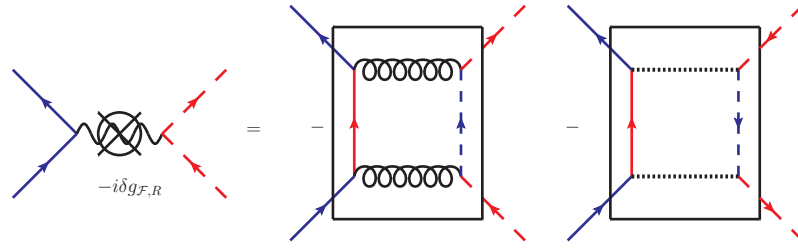


Figura 8.6: Diagrama de Feynman correspondente ao contratermo para o canal de espalhamento interfrontal.

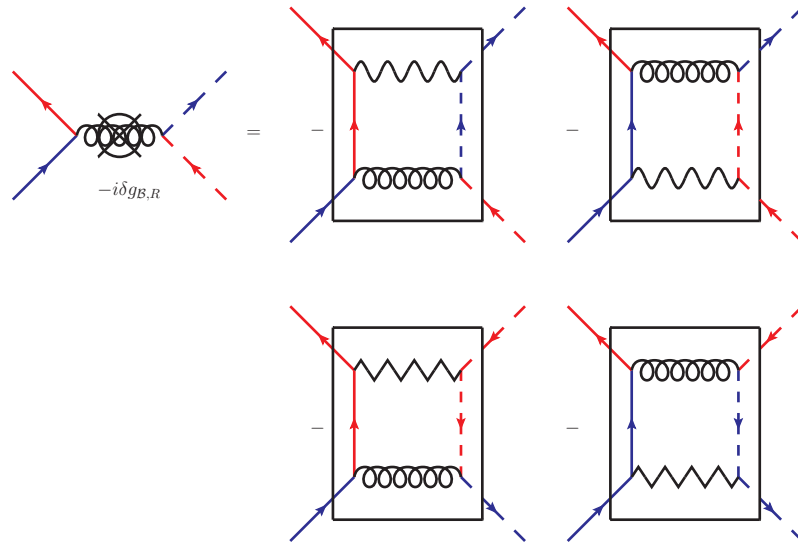


Figura 8.7: Diagrama de Feynman correspondente ao contratermo para o canal de espalhamento backscattering.

para o canal de espalhamento interfrontal (figura 8.6)

$$\begin{aligned} \delta g_{F,R} &= \frac{g_{B,R}^2}{\pi V_{F,R}} \ln \left(\frac{\Omega}{V_{F,R} \Delta k_{F,R}} \right) \\ &- \frac{g_{U,R}^2}{\pi V_{F,R}} \ln \left(\frac{\Omega}{\omega} \right), \end{aligned} \quad (8.10)$$

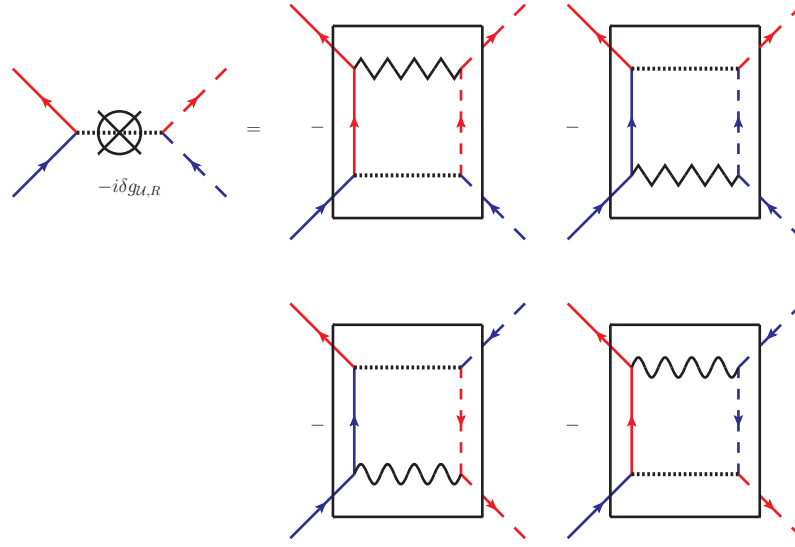


Figura 8.8: Diagrama de Feynman correspondente ao contratermo para o canal de espalhamento umklapp.

para o canal de espalhamento backscattering (figura 8.7)

$$\begin{aligned}
 \delta g_{B,R} &= \frac{g_{B,R}g_{F,R}}{\pi V_F} \ln \left(\frac{\Omega}{V_{F,R}\Delta k_{F,R}} \right) + \frac{g_{F,R}g_{B,R}}{\pi V_{F,R}} \ln \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) \\
 &- \frac{g_{B,R}g_{0,R}}{\pi V_{F,R}} \ln \left(\frac{\Omega}{V_{F,R}\Delta k_{F,R}} \right) \\
 &- \frac{g_{0,R}g_{B,R}}{\pi V_F} \ln \left(\frac{\Omega}{\omega} \right), \tag{8.11}
 \end{aligned}$$

e finalmente para o canal de espalhamento umklapp (figura 8.8)

$$\begin{aligned}
 \delta g_{U,R} &= 2 \frac{g_{0,R}g_{U,R}}{\pi V_{F,R}} \ln \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) \\
 &- 2 \frac{g_{U,R}g_{F,R}}{\pi V_{F,R}} \ln \left(\frac{\Omega}{\omega} \right). \tag{8.12}
 \end{aligned}$$

Em 2-loops os diagramas de contratermos aparecem como contribuições parquet¹ dos contratermos de 1-loop (figura 8.9) cancelando todas as contribuições do tipo parquet dos canais de espalhamento que aparecem em 2-loops (figuras 8.10, 8.11,

¹Isto é, contribuições resultantes da combinações das contribuições de ordem inferior.

8.12, 8.13). Ao calcularmos as contribuições de diagramas não-parquet em 2-

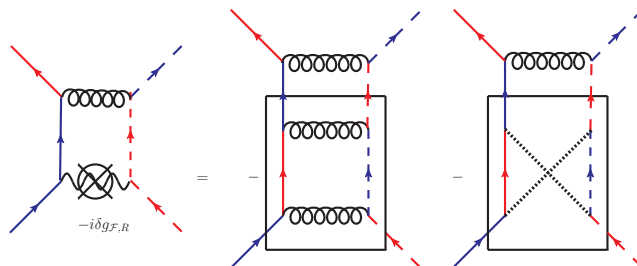


Figura 8.9: Diagrama de contratermo em 2-loops.

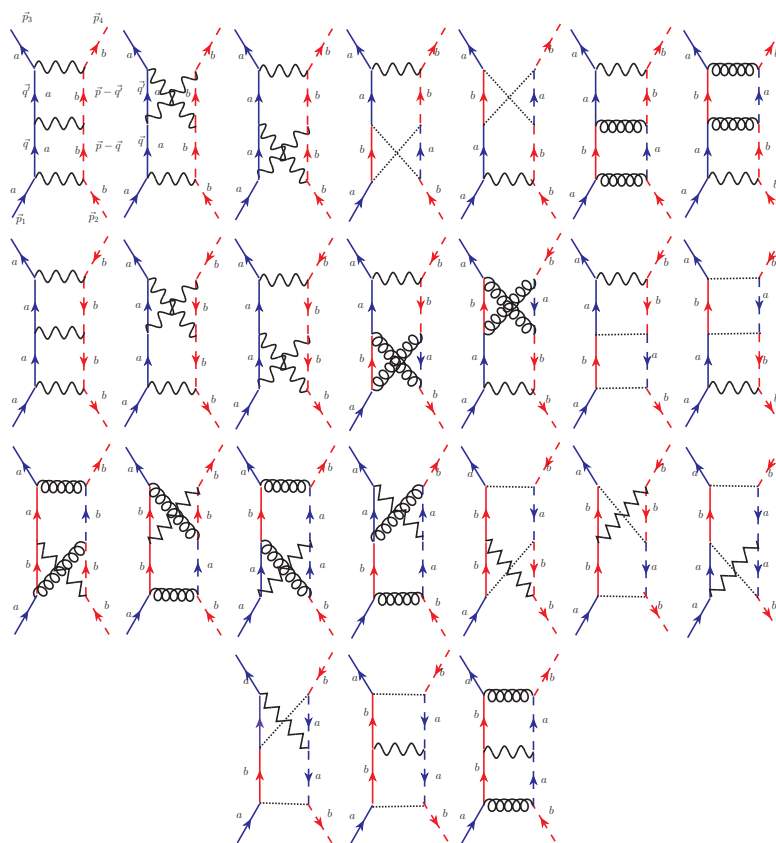


Figura 8.10: Diagramas parquet em 2-loops para o canal de espalhamento interfrontal.

Onde $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$.

loops, segue-se então que no canal de espalhamento frontal (figure 8.14), a função irreduzível renormalizada de duas partículas em 2-loops, na vizinhança de um ponto

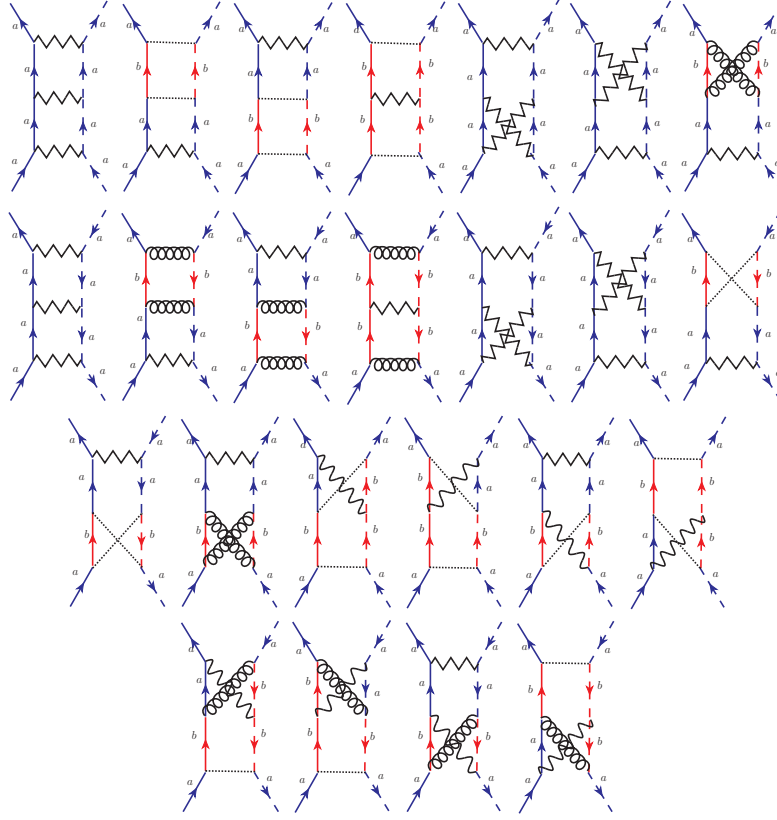


Figura 8.11: Diagramas parquet em 2-loops para o canal de espalhamento frontal.

de Fermi, é dada por

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{0,R}^{(4)} &= -i\bar{g}_{0,R} + i\bar{g}_{U,R}^2 \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - i\bar{g}_{B,R}^2 \ln\left(\frac{\Omega}{V_{F,R}\Delta k_{F,R}}\right) \\
&- i\bar{g}_{0,R}^3 \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - i\bar{g}_{\mathcal{F},R}^2 \bar{g}_{0,R} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\
&- i\bar{g}_{U,R}^2 \bar{g}_{\mathcal{F},R} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\
&- i\bar{g}_{B,R}^2 \bar{g}_{\mathcal{F},R} \ln\left(\frac{\Omega}{V_{F,R}\Delta k_{F,R}}\right) - i\delta\bar{g}_{0,R},
\end{aligned} \tag{8.13}$$

onde $-i\delta\bar{g}_{0,R}$ é o contratermo correspondente até 2-loops, e $\bar{\Gamma}_{0,R}^{(4)} = \Gamma_{0,R}^{(4)}/\pi V_{F,R}$.

Incluindo-se, por sua vez, a contribuição não-parquet para o canal inter-frontal (figure 8.15) as funções irreduzíveis de duas partículas em 2-loops no ponto de Fermi correspondente tem a seguinte contribuição

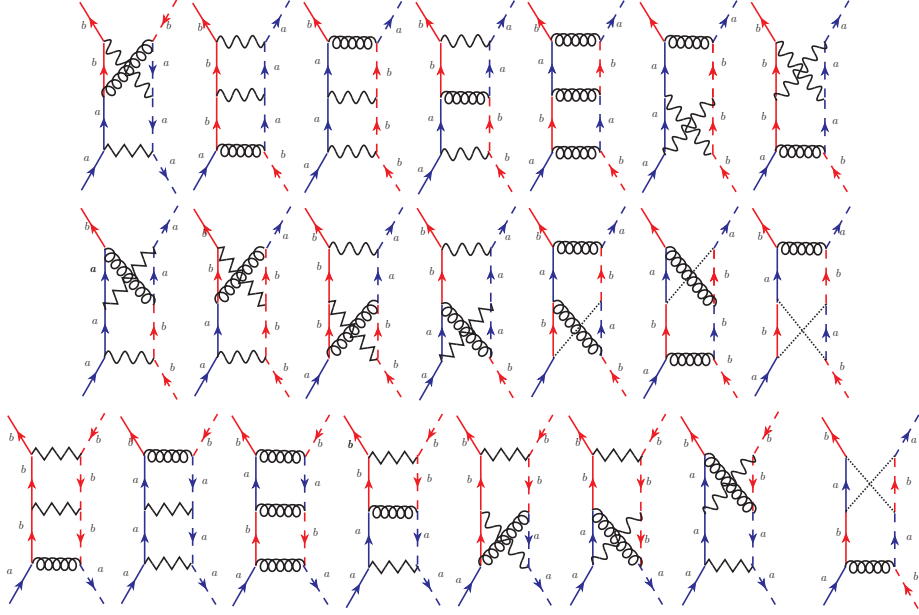


Figura 8.12: Diagramas parquet em 2-loops para o canal de espalhamento backscattering.

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{\mathcal{F},R}^{(4)} &= -i\bar{g}_{\mathcal{F},R} - i\bar{g}_{\mathcal{U},R}^2 \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + i\bar{g}_{\mathcal{B},R}^2 \ln\left(\frac{\Omega}{V_F\Delta k_{F,R}}\right) \\
&- i\bar{g}_{0,R}^2\bar{g}_{\mathcal{F},R} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - i\bar{g}_{\mathcal{F},R}^3 \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\
&- i\bar{g}_{\mathcal{U},R}^2\bar{g}_{0,R} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - i\bar{g}_{\mathcal{B},R}^2\bar{g}_{0,R} \ln\left(\frac{\Omega}{V_F\Delta k_{F,R}}\right) \\
&- i\delta\bar{g}_{\mathcal{F},R},
\end{aligned} \tag{8.14}$$

onde $-i\delta\bar{g}_{\mathcal{F},R} = -i\delta g_{\mathcal{F},R}/\pi V_F$ é o contratermo correspondente para o canal de espalhamento interfrontal em 2-loops, e seguindo a mesma convenção anterior $\bar{\Gamma}_{\mathcal{F},R}^{(4)} = \Gamma_{\mathcal{F},R}^{(4)}/\pi V_F$.

Semelhantemente, calculando-se a contribuição não-parquet para o canal de espalhamento backscattering (figure 8.16) a função irreduzível de duas partículas em 2-loops no seu ponto de Fermi é dada por

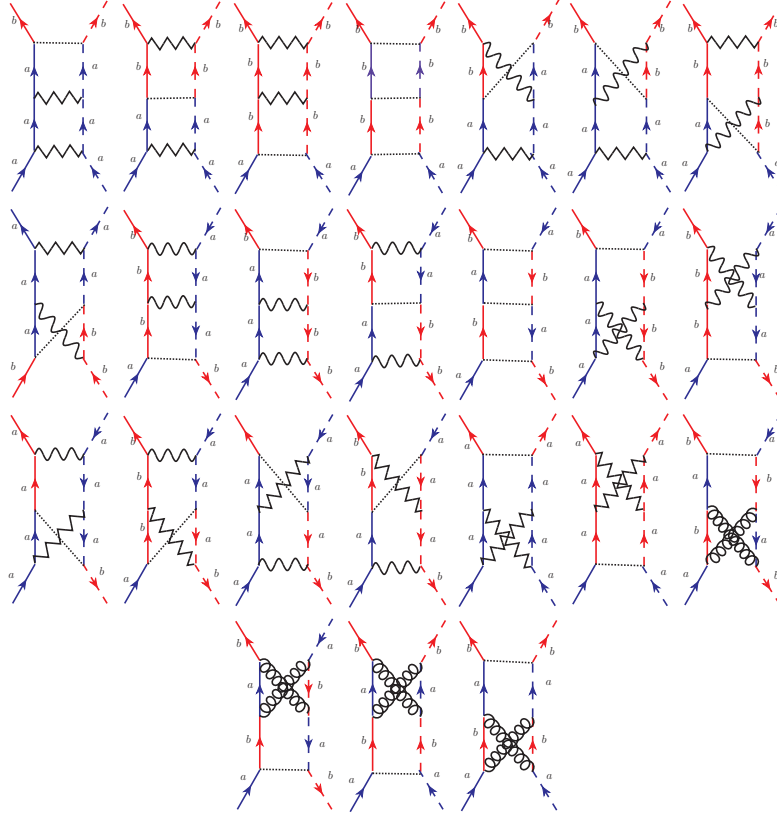


Figura 8.13: Diagramas parquet em 2-loops no canal de espalhamento umklapp.

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{B,R}^{(4)} &= -i\bar{g}_{B,R} + i\bar{g}_{B,R}\bar{g}_{F,R} \ln\left(\frac{\Omega}{V_{F,R}\Delta k_{F,R}}\right) \\
&+ i\bar{g}_{B,R}\bar{g}_{F,R} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - i\bar{g}_{0,R}\bar{g}_{B,R} \ln\left(\frac{\Omega}{V_{F,R}\Delta k_{F,R}}\right) \\
&- i\bar{g}_{0,R}\bar{g}_{B,R} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - i\bar{g}_{U,R}^2\bar{g}_{B,R} \ln\left(\frac{\Omega}{V_{F,R}\Delta k_{F,R}}\right) \\
&- 2i\bar{g}_{0,R}\bar{g}_{F,R}\bar{g}_{B,R} \ln\left(\frac{\Omega}{V_{F,R}\Delta k_{F,R}}\right) \\
&+ i\bar{g}_{U,R}^2\bar{g}_{B,R} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - i\delta\bar{g}_{B,R},
\end{aligned} \tag{8.15}$$

onde mais uma vez $-i\delta\bar{g}_{B,R} = -i\delta g_{B,R}/\pi V_{F,R}$ é o contratermo correspondente para o canal de espalhamento backscattering em 2-loops, e $\bar{\Gamma}_{B,R}^{(4)} = \Gamma_{B,R}^{(4)}/\pi V_{F,R}$.

Finalmente, calculando-se a contribuição não-parquet do canal de umklapp

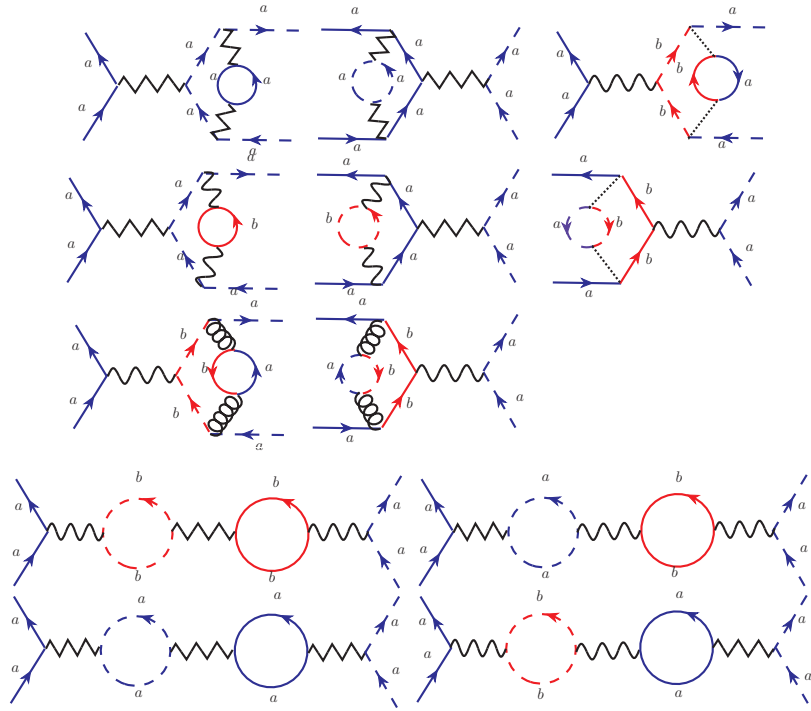


Figura 8.14: Diagramas não-parquet em 2-loops para os canais de espalhamento frontal.

(figure 8.17), temos então

$$\begin{aligned}
 \bar{\Gamma}_{\mathcal{U},R}^{(4)} &= -i\bar{g}_{\mathcal{U},R} + 2i\bar{g}_{0,R}\bar{g}_{\mathcal{U},R}\bar{g}_{B,R} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\
 &\quad - 2i\bar{g}_{\mathcal{F},R}\bar{g}_{\mathcal{U},R} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\
 &\quad - 2i\bar{g}_{0,R}\bar{g}_{\mathcal{F},R}\bar{g}_{\mathcal{U},R} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\
 &\quad - 2i\bar{g}_{\mathcal{U},R}\bar{g}_{B,R}^2 \ln\left(\frac{\Omega}{V_{F,R}\Delta k_{F,R}}\right) - i\delta\bar{g}_{\mathcal{U},R},
 \end{aligned} \tag{8.16}$$

onde $-i\delta\bar{g}_{\mathcal{U},R} = -i\delta g_{\mathcal{U},R}/\pi V_{F,R}$ é o contratermo correspondente em 2-loops, e $\bar{\Gamma}_{\mathcal{U},R}^{(4)} = \Gamma_{\mathcal{U},R}^{(4)}/\pi V_{F,R}$.

Tendo em conta as prescrições físicas para os canais de espalhamento nos

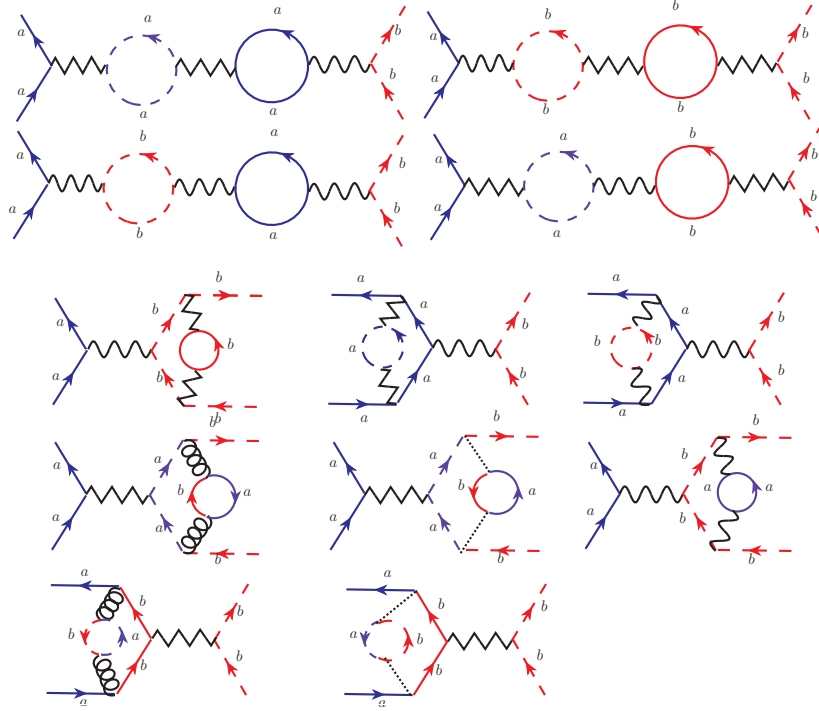


Figura 8.15: Diagramas não-parquet em 2-loops no canal de espalhamento interfrontal.

pontos de Fermi

$$\bar{\Gamma}_{0,R}^{(4)} = -i\bar{g}_{0,R}, \quad (8.17)$$

$$\bar{\Gamma}_{\mathcal{F},R}^{(4)} = -i\bar{g}_{\mathcal{F},R}, \quad (8.18)$$

$$\bar{\Gamma}_{\mathcal{B},R}^{(4)} = -i\bar{g}_{\mathcal{B},R}, \quad (8.19)$$

$$\bar{\Gamma}_{\mathcal{U},R}^{(4)} = -i\bar{g}_{\mathcal{U},R}, \quad (8.20)$$

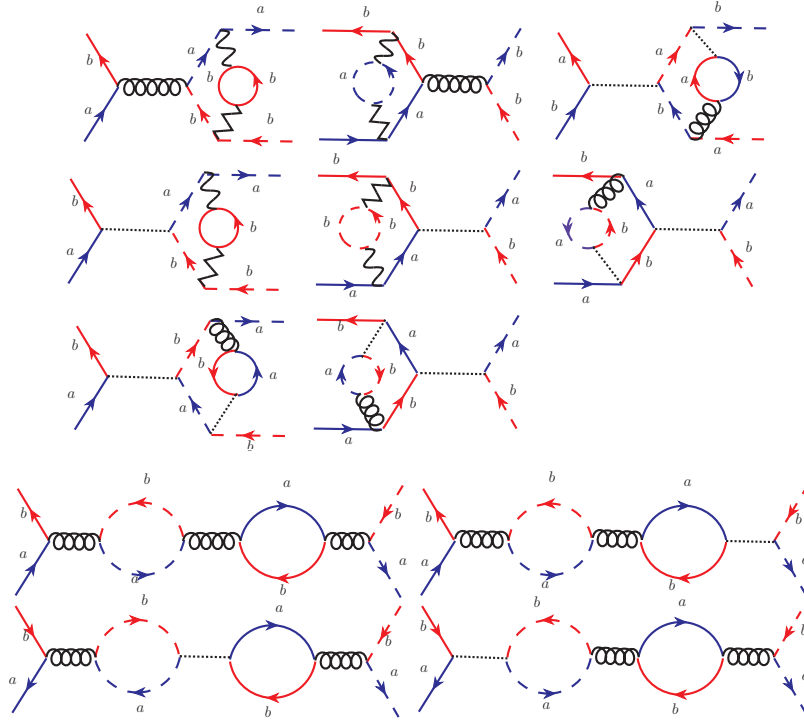


Figura 8.16: Diagramas não-parquet em 2-loops no canal de espalhamento backscattering.

chegamos facilmente aos valores dos contratermos explicitamente até 2-loops:

$$\begin{aligned}
\delta\bar{g}_{0,R} &= \bar{g}_{U,R}^2 \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - \bar{g}_{B,R}^2 \ln\left(\frac{\Omega}{V_{F,R}\Delta k_{F,R}}\right) \\
&- \bar{g}_{0,R}^3 \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - \bar{g}_{F,R}^2 \bar{g}_{0,R} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\
&- \bar{g}_{U,R}^2 \bar{g}_{F,R} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\
&- \bar{g}_{B,R}^2 \bar{g}_{F,R} \ln\left(\frac{\Omega}{V_{F,R}\Delta k_{F,R}}\right), \tag{8.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\bar{g}_{F,R} &= -\bar{g}_{U,R}^2 \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) + \bar{g}_{B,R}^2 \ln\left(\frac{\Omega}{V_{F,R}\Delta k_{F,R}}\right) \\
&- \bar{g}_{0,R}^2 \bar{g}_{F,R} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - \bar{g}_{F,R}^3 \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\
&- \bar{g}_{U,R}^2 \bar{g}_{0,R} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\
&- \bar{g}_{B,R}^2 \bar{g}_{0,R} \ln\left(\frac{\Omega}{V_{F,R}\Delta k_{F,R}}\right), \tag{8.22}
\end{aligned}$$

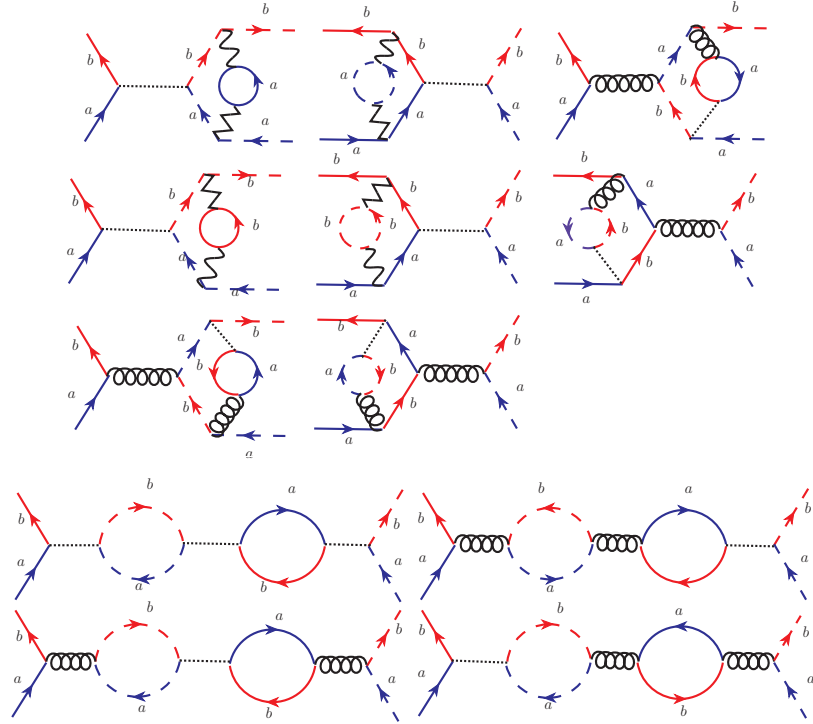


Figura 8.17: Diagramas não-parquet em 2-loops no canal de espalhamento umklapp.

$$\begin{aligned}
\delta \bar{g}_{B,R} &= \bar{g}_{B,R} \bar{g}_{F,R} \ln \left(\frac{\Omega}{V_{F,R} \Delta k_{F,R}} \right) + \bar{g}_{B,R} \bar{g}_{F,R} \ln \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) \\
&- \bar{g}_{0,R} \bar{g}_{B,R} \ln \left(\frac{\Omega}{V_{F,R} \Delta k_{F,R}} \right) - \bar{g}_{0,R} \bar{g}_{B,R} \ln \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) \\
&- 2 \bar{g}_{0,R} \bar{g}_{F,R} \bar{g}_{B,R} \ln \left(\frac{\Omega}{V_{F,R} \Delta k_{F,R}} \right) \\
&- \bar{g}_{U,R}^2 \bar{g}_{B,R} \ln \left(\frac{\Omega}{V_{F,R} \Delta k_{F,R}} \right) \\
&+ \bar{g}_{U,R}^2 \bar{g}_{B,R} \ln \left(\frac{\Omega}{\omega} \right), \tag{8.23}
\end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned}
\delta\bar{g}_{\mathcal{U},R} &= 2\bar{g}_{0,R}\bar{g}_{\mathcal{U},R}\bar{g}_{\mathcal{B},R} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\
&- 2\bar{g}_{\mathcal{F},R}\bar{g}_{\mathcal{U},R} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\
&- 2\bar{g}_{0,R}\bar{g}_{\mathcal{F},R}\bar{g}_{\mathcal{U},R} \ln\left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\
&- 2\bar{g}_{\mathcal{U},R}\bar{g}_{\mathcal{B},R}^2 \ln\left(\frac{\Omega}{V_{F,R}\Delta k_{F,R}}\right).
\end{aligned} \tag{8.24}$$

Capítulo 9

Equações de fluxo do grupo de renormalização

9.1 Equações de fluxo de renormalização para os acoplamentos renormalizados até 2-loops

Usando nossos resultados anteriores, equações (6.16) a (6.23), vimos que

$$\omega \frac{dg_{0R}}{d\omega} = 2\gamma (g_{0R} + \delta g_{0,R}) - \omega \frac{d\delta g_{0R}}{d\omega}, \quad (9.1)$$

$$\omega \frac{dg_{\mathcal{F},R}}{d\omega} = 2\gamma (g_{\mathcal{F},R} + \delta g_{\mathcal{F},R}) - \omega \frac{d\delta g_{\mathcal{F},R}}{d\omega}, \quad (9.2)$$

$$\omega \frac{dg_{\mathcal{B},R}}{d\omega} = 2\gamma (g_{\mathcal{B},R} + \delta g_{\mathcal{B},R}) - \omega \frac{d\delta g_{\mathcal{B},R}}{d\omega}, \quad (9.3)$$

$$\omega \frac{dg_{\mathcal{U},R}}{d\omega} = 2\gamma (g_{\mathcal{U},R} + \delta g_{\mathcal{U},R}) - \omega \frac{d\delta g_{\mathcal{U},R}}{d\omega}. \quad (9.4)$$

Dividindo ambos os lados por $\pi V_{F,R}$, temos finalmente

$$\omega \frac{d\bar{g}_{0R}}{d\omega} = 2\gamma (\bar{g}_{0R} + \delta\bar{g}_{0,R}) - \omega \frac{d\delta\bar{g}_{0R}}{d\omega}, \quad (9.5)$$

$$\omega \frac{d\bar{g}_{\mathcal{F},R}}{d\omega} = 2\gamma (\bar{g}_{\mathcal{F},R} + \delta\bar{g}_{\mathcal{F},R}) - \omega \frac{d\delta\bar{g}_{\mathcal{F},R}}{d\omega}, \quad (9.6)$$

$$\omega \frac{d\bar{g}_{\mathcal{B},R}}{d\omega} = 2\gamma (\bar{g}_{\mathcal{B},R} + \delta\bar{g}_{\mathcal{B},R}) - \omega \frac{d\delta\bar{g}_{\mathcal{B},R}}{d\omega}, \quad (9.7)$$

$$\omega \frac{d\bar{g}_{\mathcal{U},R}}{d\omega} = 2\gamma (\bar{g}_{\mathcal{U},R} + \delta\bar{g}_{\mathcal{U},R}) - \omega \frac{d\delta\bar{g}_{\mathcal{U},R}}{d\omega}. \quad (9.8)$$

Usando os contratermos em 2-loops, descritos nas equações (8.21) a (8.24), podemos escrever os fluxos de GR para os acoplamentos renormalizados na seguinte forma

$$\begin{aligned} \omega \frac{d\bar{g}_{0,R}}{d\omega} &= 2\gamma \bar{g}_{0,R} + \bar{g}_{\mathcal{U},R}^2 - \bar{g}_{\mathcal{B},R}^2 \frac{\omega}{\Delta k_{F,R}} \frac{d\Delta k_{F,R}}{d\omega} - \bar{g}_{0,R}^3 \\ &\quad - \bar{g}_{\mathcal{F},R}^2 \bar{g}_{0,R} - \bar{g}_{\mathcal{U},R}^2 \bar{g}_{\mathcal{F},R} \\ &\quad - \bar{g}_{\mathcal{B},R}^2 \bar{g}_{\mathcal{F},R} \frac{\omega}{\Delta k_{F,R}} \frac{d\Delta k_{F,R}}{d\omega}, \end{aligned} \quad (9.9)$$

$$\begin{aligned} \omega \frac{d\bar{g}_{\mathcal{F},R}}{d\omega} &= 2\gamma \bar{g}_{\mathcal{F},R} - \bar{g}_{\mathcal{U},R}^2 + \bar{g}_{\mathcal{B},R}^2 \frac{\omega}{\Delta k_{F,R}} \frac{d\Delta k_{F,R}}{d\omega} - \bar{g}_{\mathcal{F},R}^3 \\ &\quad - \bar{g}_{\mathcal{I},R}^2 \bar{g}_{\mathcal{F},R} - \bar{g}_{\mathcal{U},R}^2 \bar{g}_{0,R} \\ &\quad - \bar{g}_{\mathcal{B},R}^2 \bar{g}_{0,R} \frac{\omega}{\Delta k_{F,R}} \frac{d\Delta k_{F,R}}{d\omega}, \end{aligned} \quad (9.10)$$

$$\begin{aligned} \omega \frac{d\bar{g}_{\mathcal{B},R}}{d\omega} &= 2\gamma \bar{g}_{\mathcal{B},R} + \bar{g}_{\mathcal{B},R} \bar{g}_{\mathcal{F},R} \frac{\omega}{\Delta k_{F,R}} \frac{d\Delta k_{F,R}}{d\omega} + \bar{g}_{\mathcal{B},R} \bar{g}_{\mathcal{F},R} \\ &\quad - \bar{g}_{0,R} \bar{g}_{\mathcal{B},R} \frac{\omega}{\Delta k_{F,R}} \frac{d\Delta k_{F,R}}{d\omega} - \bar{g}_{0,R} \bar{g}_{\mathcal{B},R} \\ &\quad - 2\bar{g}_{0,R} \bar{g}_{\mathcal{F},R} \bar{g}_{\mathcal{B},R} \frac{\omega}{\Delta k_{F,R}} \frac{d\Delta k_{F,R}}{d\omega} \\ &\quad - \bar{g}_{\mathcal{U},R}^2 \bar{g}_{\mathcal{B},R} \frac{\omega}{\Delta k_{F,R}} \frac{d\Delta k_{F,R}}{d\omega} \\ &\quad - \bar{g}_{\mathcal{U},R}^2 \bar{g}_{\mathcal{B},R}, \end{aligned} \quad (9.11)$$

$$\begin{aligned}
\omega \frac{d\bar{g}_{U,R}}{d\omega} &= 2\gamma\bar{g}_{U,R} + 2\bar{g}_{0,R}\bar{g}_{U,R} - 2\bar{g}_{\mathcal{F},R}\bar{g}_{U,R} \\
&- 2\bar{g}_{0,R}\bar{g}_{\mathcal{F},R}\bar{g}_{U,R}, \\
&- 2\bar{g}_{U,R}\bar{g}_{\mathcal{B},R}^2 \frac{\omega}{\Delta k_{F,R}} \frac{d\Delta k_{F,R}}{d\omega}.
\end{aligned} \tag{9.12}$$

Em 2-loops, se o cutoff é significativamente grande, o fluxo de GR para $\Delta k_{F,R}$, dado pela equação (7.28), reduz-se, para cutoff Ω suficientemente grande, a

$$\omega \frac{d \ln \Delta k_{F,R}}{d\omega} = \gamma. \tag{9.13}$$

Semelhantemente, como

$$\begin{aligned}
Z &= 1 + \delta Z \\
&= 1 - \left[\frac{\bar{g}_{fR}^2}{2} + \frac{\bar{g}_{0R}^2}{2} + \frac{\bar{g}_{uR}^2}{2} \right] \ln \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) \\
&- \frac{\bar{g}_{bR}^2}{2} \ln \left(\frac{\Omega}{V_F \Delta k_F} \right)
\end{aligned} \tag{9.14}$$

e como a dimensão anômala γ é dada por

$$\gamma = \frac{\bar{g}_{fR}^2}{2} + \frac{\bar{g}_{0R}^2}{2} + \frac{\bar{g}_{uR}^2}{2} - \frac{\bar{g}_{bR}^2}{2} \frac{\omega}{\Delta k_F} \frac{d\Delta k_F}{d\omega}. \tag{9.15}$$

Logo, em uma aproximação de 2-loops, γ reduz-se a

$$2\gamma = \bar{g}_{fR}^2 + \bar{g}_{0R}^2 + \bar{g}_{uR}^2. \tag{9.16}$$

Levando-se em conta somente termos até 2-loops nos acoplamentos renormalizados, podemos finalmente chegar na equação de GR para o canal de espalhamento frontal

$$\begin{aligned}
\omega \frac{d\bar{g}_{0,R}}{d\omega} &= 2\gamma\bar{g}_{0,R} + \bar{g}_{U,R}^2 - \bar{g}_{0,R}^3 - \bar{g}_{\mathcal{F},R}^2\bar{g}_{0,R} \\
&- \bar{g}_{U,R}^2\bar{g}_{\mathcal{F},R},
\end{aligned} \tag{9.17}$$

De modo semelhante, a equação de GR pra o acoplamento interfrontal é dada por

$$\begin{aligned} \omega \frac{d\bar{g}_{\mathcal{F},R}}{d\omega} &= 2\gamma\bar{g}_{\mathcal{F},R} - \bar{g}_{\mathcal{U},R}^2 - \bar{g}_{\mathcal{F},R}^3 - \bar{g}_{0,R}^2\bar{g}_{\mathcal{F},R} \\ &\quad - \bar{g}_{\mathcal{U},R}^2\bar{g}_{0,R}, \end{aligned} \quad (9.18)$$

e, semelhantemente, para o canal de espalhamento backscattering,

$$\begin{aligned} \omega \frac{d\bar{g}_{\mathcal{B},R}}{d\omega} &= 2\gamma\bar{g}_{\mathcal{B},R} + \bar{g}_{\mathcal{B},R}\bar{g}_{\mathcal{F},R} - \bar{g}_{0,R}\bar{g}_{\mathcal{B},R} \\ &\quad - \bar{g}_{\mathcal{U},R}^2\bar{g}_{\mathcal{B},R}, \end{aligned} \quad (9.19)$$

e o acoplamento umklapp, por sua vez, reduz-se a

$$\begin{aligned} \omega \frac{d\bar{g}_{\mathcal{U},R}}{d\omega} &= 2\gamma\bar{g}_{\mathcal{U},R} + 2\bar{g}_{0,R}\bar{g}_{\mathcal{U},R} - 2\bar{g}_{\mathcal{F},R}\bar{g}_{\mathcal{U},R} \\ &\quad - 2\bar{g}_{0,R}\bar{g}_{\mathcal{F},R}\bar{g}_{\mathcal{U},R}, \end{aligned} \quad (9.20)$$

Finalmente, a equação de GR para a diferença dos pontos de Fermi renormalizados em 2-loops,

$$\omega \frac{d\Delta k_{F,R}}{d\omega} = \gamma\Delta k_{F,R}. \quad (9.21)$$

9.2 O caso 1-loop e uma solução analítica

Considerando o caso particular de 1-loop, podemos escrever (para velocidades de Fermi diferentes)

$$\omega \frac{d}{d\omega} g_{\mathcal{F},R}(\omega) = -\frac{g_{\mathcal{U},R}(\omega)^2}{2\pi v_F} \quad (9.22)$$

$$\omega \frac{d}{d\omega} g_{0,R}(\omega) = \frac{g_{\mathcal{U},R}(\omega)^2}{2\pi v_F^b} \quad (9.23)$$

$$\omega \frac{d}{d\omega} g_{\mathcal{B},R}(\omega) = g_{\mathcal{B},R}(\omega) \left[\frac{g_{\mathcal{F},R}(\omega)}{2\pi v_F} - \frac{g_{0,R}(\omega)}{2\pi v_F^a} \right] \quad (9.24)$$

$$\omega \frac{d}{d\omega} g_{\mathcal{U},R}(\omega) = g_{\mathcal{U},R}(\omega) \left[\frac{g_{0,R}(\omega)}{2\pi v_F^a} + \frac{g_{0,R}(\omega)}{2\pi v_F^b} - \frac{g_{\mathcal{F},R}(\omega)}{\pi v_F} \right]. \quad (9.25)$$

onde $v_F = \frac{v_F^a + v_F^b}{2}$ e $V_F = 2v_F$. Utilizando $\bar{g} = \frac{g}{2\pi V_F}$, podemos reescrever do seguinte modo

$$\omega \frac{d}{d\omega} \bar{g}_{fR}(\omega) = -\bar{g}_{uR}(\omega)^2 \quad (9.26)$$

$$\omega \frac{d}{d\omega} \bar{g}_{0R}(\omega) = \frac{v_F}{v_F^b} \bar{g}_{uR}(\omega)^2 \quad (9.27)$$

$$\omega \frac{d}{d\omega} \bar{g}_{BR}(\omega) = \bar{g}_{BR}(\omega) \left[\bar{g}_{fR}(\omega) - \frac{v_F}{v_F^a} \bar{g}_{0R}(\omega) \right] \quad (9.28)$$

$$\omega \frac{d}{d\omega} \bar{g}_{uR}(\omega) = 2\bar{g}_{uR}(\omega) \left[\frac{v_F^2}{v_F^a v_F^b} \bar{g}_{0R}(\omega) - \bar{g}_{fR}(\omega) \right]. \quad (9.29)$$

Definindo as quantidades $\bar{g}_{\pm} = \bar{g}_{0R} \pm \bar{g}_{fR}$, podemos escrever as equações (9.26) e (9.27), como

$$\omega \frac{d}{d\omega} \bar{g}_{+}(\omega) = \left(\frac{v_F}{v_F^b} - 1 \right) \bar{g}_{uR}(\omega)^2, \quad (9.30)$$

$$\omega \frac{d}{d\omega} \bar{g}_{-}(\omega) = \left(\frac{v_F}{v_F^b} + 1 \right) \bar{g}_{uR}(\omega)^2. \quad (9.31)$$

E usando as relações

$$\bar{g}_{0,R} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{+,R} + \bar{g}_{-,R}), \quad (9.32)$$

$$\bar{g}_{\mathcal{F},R} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{+,R} - \bar{g}_{-,R}), \quad (9.33)$$

podemos reescrever as equações (9.28) e (9.29)

$$\omega \frac{d}{d\omega} \bar{g}_{\mathcal{B},R}(\omega) = \frac{1}{2} \bar{g}_{\mathcal{B},R}(\omega) \left[\left(\frac{v_F}{v_F^a} + 1 \right) \bar{g}_{+,R}(\omega) + \left(\frac{v_F}{v_F^a} - 1 \right) \bar{g}_{-,R}(\omega) \right], \quad (9.34)$$

$$\omega \frac{d}{d\omega} \bar{g}_{\mathcal{U},R}(\omega) = \bar{g}_{\mathcal{U},R}(\omega) \left[\left(\frac{v_F^2}{v_F^a v_F^b} - 1 \right) \bar{g}_{+,R}(\omega) + \left(\frac{v_F^2}{v_F^a v_F^b} + 1 \right) \bar{g}_{-,R}(\omega) \right]. \quad (9.35)$$

Se as velocidades de Fermi são iguais $v_F = v_F^a = v_F^b$, então

$$\omega \frac{d}{d\omega} \bar{g}_{+,R}(\omega) = 0 \quad (9.36)$$

$$\omega \frac{d}{d\omega} \bar{g}_{-,R}(\omega) = 2\bar{g}_{\mathcal{U},R}(\omega)^2 \quad (9.37)$$

$$\omega \frac{d}{d\omega} \bar{g}_{\mathcal{B},R}(\omega) = \bar{g}_{\mathcal{B},R}(\omega) \bar{g}_{+,R}(\omega) \quad (9.38)$$

$$\omega \frac{d}{d\omega} \bar{g}_{\mathcal{U},R}(\omega) = 2\bar{g}_{\mathcal{U},R}(\omega) \bar{g}_{-,R}(\omega). \quad (9.39)$$

Usando a primeira equação, as duas últimas podem também ser reduzidas

$$\omega \frac{d}{d\omega} \left(\ln \bar{g}_{\mathcal{B},R}(\omega) + \frac{1}{2} \ln \bar{g}_{\mathcal{U},R}(\omega) \right) = \bar{g}_{+,R}(\omega) + \bar{g}_{-,R}(\omega) \quad (9.40)$$

Podemos também obter uma solução analítica. De fato, fixando $x = -\log \omega$,

$$\frac{d}{dx} \bar{g}_{+,R}(x) = 0 \quad (9.41)$$

$$\frac{d}{dx} \bar{g}_{-,R}(x) = -2\bar{g}_{\mathcal{U},R}(x)^2 \quad (9.42)$$

$$\frac{d}{dx} \bar{g}_{\mathcal{B},R}(x) = -\bar{g}_{\mathcal{B},R}(x) \bar{g}_{+,R}(x) \quad (9.43)$$

$$\frac{d}{dx} \bar{g}_{\mathcal{U},R}(x) = -2\bar{g}_{\mathcal{U},R}(x) \bar{g}_{-,R}(x). \quad (9.44)$$

Da equação (9.41), temos

$$\bar{g}_{+,R}(x) = \alpha \quad (9.45)$$

onde α é uma constante em x . Podemos usar este resultado para resolver a equação

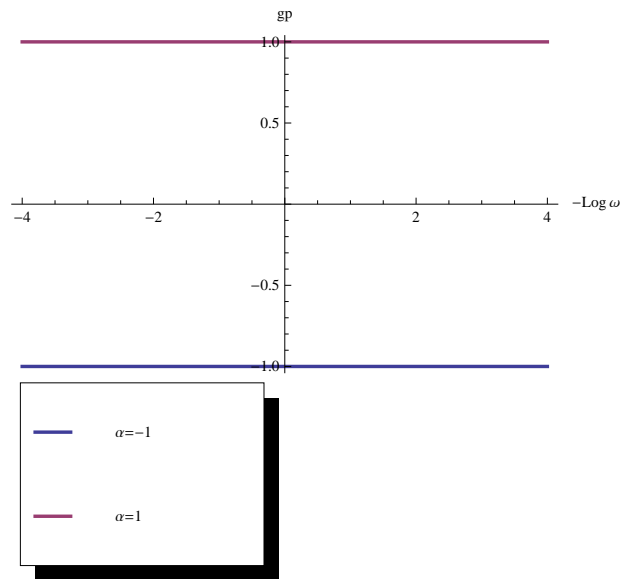


Figura 9.1: Solução $g_{+,R}(x)$ no caso onde α é -1 e 1 .

(9.43), tal que

$$\bar{g}_{B,R}(x) = \bar{g}_{B,R}(0)e^{-\alpha x}. \quad (9.46)$$

Das equações (9.42) e (9.44), no caso $\bar{g}_{U,R}(x) \neq 0$, $\bar{g}_{-,R}(x) \neq 0$ e sem pontos de máximo ou mínimo $\bar{g}'_{U,R}(x) \neq 0$, $\bar{g}'_{-,R}(x) \neq 0$, temos

$$\frac{\bar{g}'_{U,R}(x)}{\bar{g}'_{-,R}(x)} = \frac{\bar{g}_{-,R}(x)}{\bar{g}_{U,R}(x)}, \quad (9.47)$$

Temos assim

$$g_{U,R}(x)^2 - g_{-,R}(x)^2 = \rho^2 \quad (9.48)$$

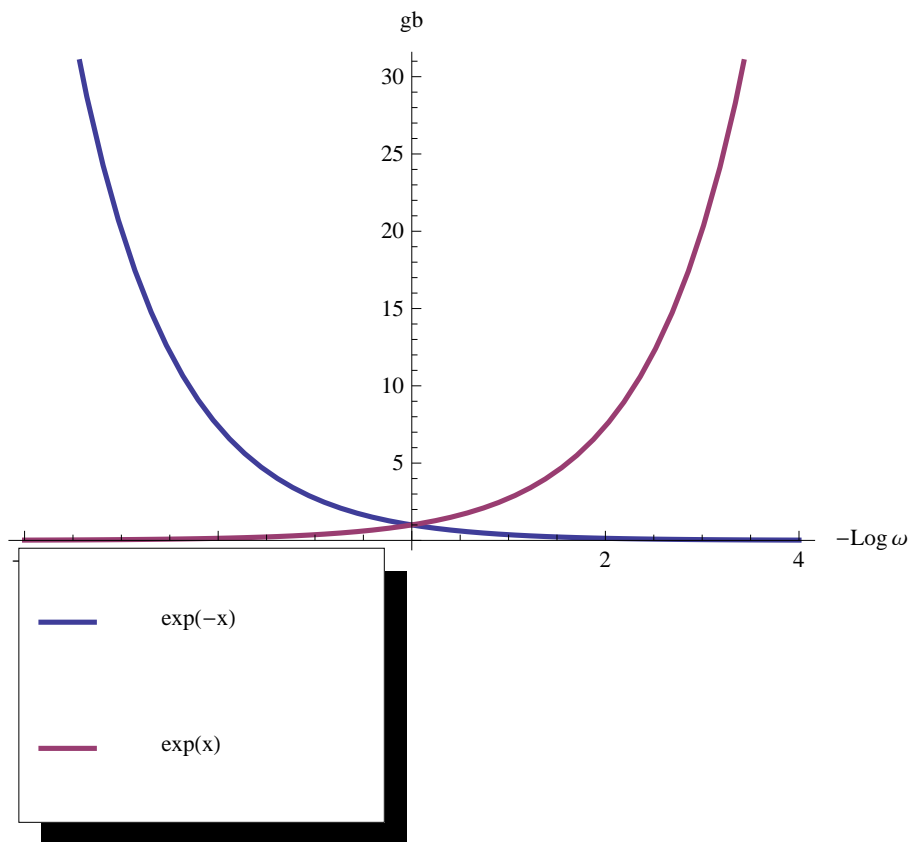


Figura 9.2: Solução de $g_{B,R}$ no caso onde α é -1 e 1 .

onde ρ é uma constante em x . A equação (9.48) é de fato uma equação de hipérbole.

Podemos assim escrever a solução paramétrica

$$\bar{g}_{U,R}(x) = \rho \cosh(x), \quad (9.49)$$

$$\bar{g}_{-,R}(x) = \rho \sinh(x). \quad (9.50)$$

Assim para as soluções analíticas, o termo de backscattering pode fluir para zero exponencialmente em 1-loop (9.46), mas os acoplamentos (9.49) e (9.50) fluem hiperbolicamente.

Em outro caso, considerando o regime de confinamento em que já partimos

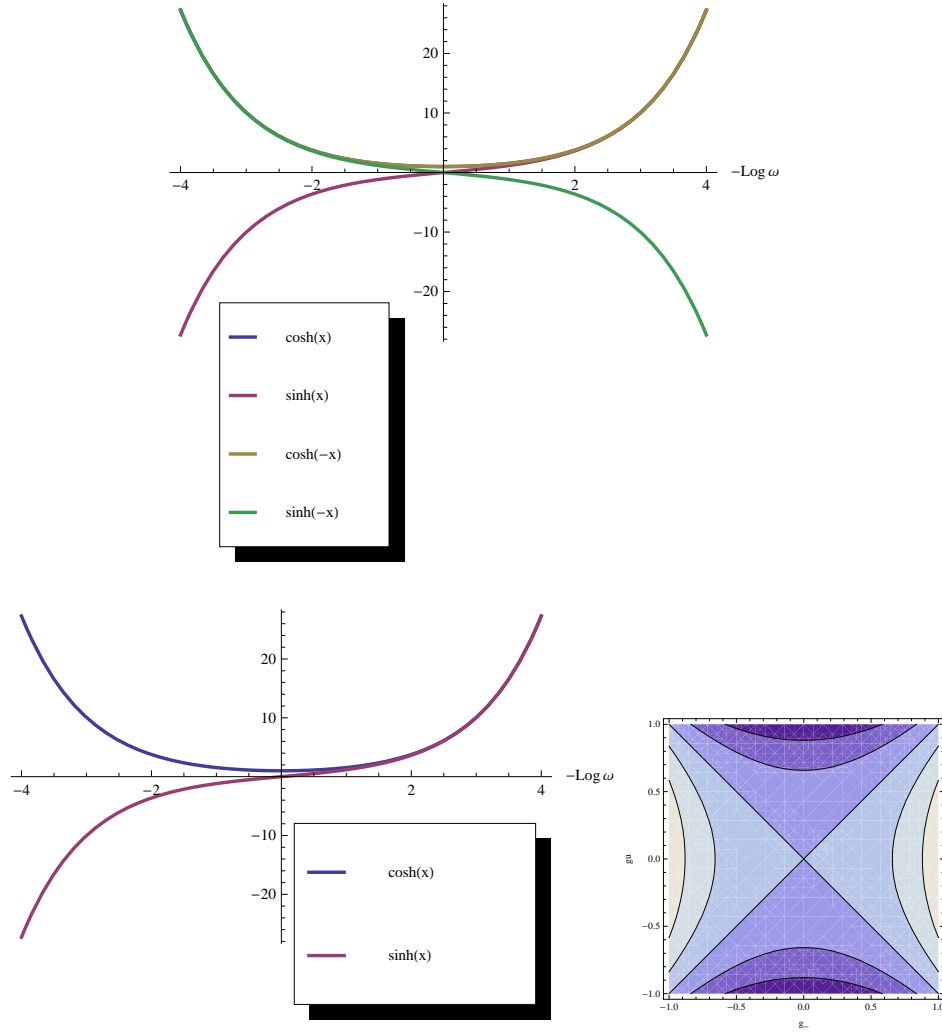


Figura 9.3: Solução hiperbólica $\bar{g}_{U,R}$ e $\bar{g}_{-,R}$.

de $\Delta k_F = 0$ ou Δk_F da ordem de ω , as equações de RG em 1-loop podem ser escritas

$$\omega \frac{d}{d\omega} \bar{g}_{\mathcal{F},R}(\omega) = (\bar{g}_{\mathcal{B},R}(\omega)^2 - \bar{g}_{U,R}(\omega)^2), \quad (9.51)$$

$$\omega \frac{d}{d\omega} \bar{g}_{0,R}(\omega) = (\bar{g}_{U,R}(\omega)^2 - \bar{g}_{\mathcal{B},R}(\omega)^2), \quad (9.52)$$

$$\omega \frac{d}{d\omega} \bar{g}_{BR}(\omega) = 2\bar{g}_{\mathcal{B},R}(\omega) (\bar{g}_{\mathcal{F},R}(\omega) - \bar{g}_{0,R}(\omega)), \quad (9.53)$$

$$\omega \frac{d}{d\omega} \bar{g}_{U,R}(\omega) = 2\bar{g}_{U,R}(\omega) (\bar{g}_{0,R}(\omega) - \bar{g}_{\mathcal{F},R}(\omega)). \quad (9.54)$$

Quando o sistema se confina totalmente em 1D, as constantes de acoplamento reduzem-se a interações do tipo g_2 , recaindo assim no fluxo de renormalização de Tomonaga-Luttinger sem interação g_4 , e todo o sistema flui para o regime de ponto fixo de Luttinger

$$\omega \frac{d}{d\omega} \bar{g}_{\mathcal{F},R}(\omega) = 0, \quad (9.55)$$

$$\omega \frac{d}{d\omega} \bar{g}_{0,R}(\omega) = 0, \quad (9.56)$$

$$\omega \frac{d}{d\omega} \bar{g}_{\mathcal{B},R}(\omega) = 0, \quad (9.57)$$

$$\omega \frac{d}{d\omega} \bar{g}_{\mathcal{U},R}(\omega) = 0. \quad (9.58)$$

9.3 Solução numérica 1-loop

As equações (9.59), (9.18), (9.19), (9.20) e (9.21), considerando termos até 1-loop, podem ser reescritas como

$$\omega \frac{d\bar{g}_{0,R}}{d\omega} = \bar{g}_{\mathcal{U},R}^2 \quad (9.59)$$

$$\omega \frac{d\bar{g}_{\mathcal{F},R}}{d\omega} = -\bar{g}_{\mathcal{U},R}^2 \quad (9.60)$$

$$\omega \frac{d\bar{g}_{\mathcal{B},R}}{d\omega} = \bar{g}_{\mathcal{B},R}\bar{g}_{\mathcal{F},R} - \bar{g}_{0,R}\bar{g}_{\mathcal{B},R} \quad (9.61)$$

$$\omega \frac{d\bar{g}_{\mathcal{U},R}}{d\omega} = 2\bar{g}_{0,R}\bar{g}_{\mathcal{U},R} - 2\bar{g}_{\mathcal{F},R}\bar{g}_{\mathcal{U},R} \quad (9.62)$$

$$\omega \frac{d\Delta k_{\mathcal{F},R}}{d\omega} = 0. \quad (9.63)$$

Podemos resolver estas equações numericamente. Para pequenos valores de acoplamento, o fluxo de RG apresenta um perfil constante, dentro do alcance desta aproximação, para além os acoplamentos divergem (figura 9.4). Assim, precisamos ir para 2-loops a fim de estudar o comportamento do sistema completo de equações de GR. Na ordem de 1-loop, como $\gamma = 0$, o fluxo dos pontos de Fermi é constante, o que impossibilita o confinamento.

9.4 Solução numérica das equações de GR em 2-loops

Considerando agora as equações de fluxo de renormalização em 2-loops (9.59), (9.18), (9.19), (9.20) e (9.21), podemos resolver numericamente para valores iniciais negativos e positivos dos acoplamentos. Vemos que as equações vão todas para pontos fixos e o termo de $\Delta k_{F,R}$ flui para o confinamento e o backscattering flui para um ponto fixo de valor zero, acompanhando $\Delta k_{F,R}$ (figuras 9.5, 9.6, 9.7 e 9.8). Temos assim confinamento quântico tanto para valores iniciais positivos como negativos dos acoplamentos.

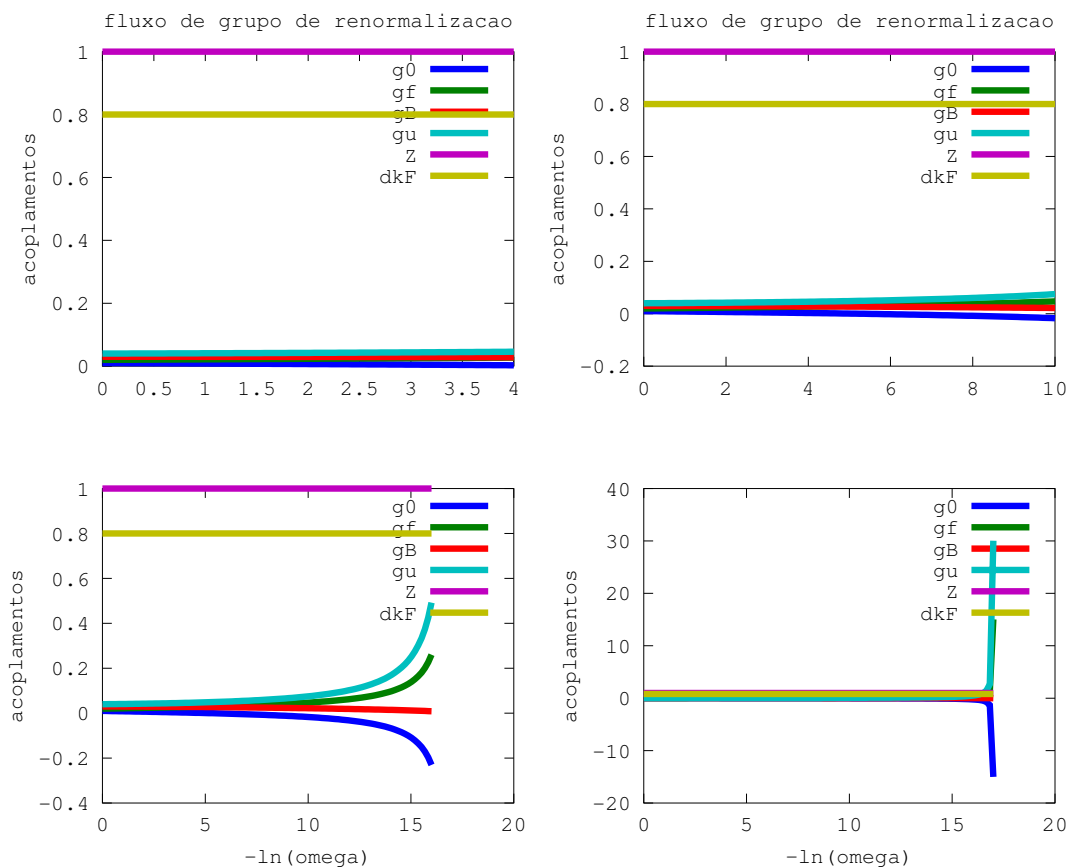


Figura 9.4: Fluxo de renormalização em 1-loop: para pequenos valores de acoplamento o fluxo tem o perfil constante, e divergem quando vamos para além da aproximação, não fluem para pontos fixos. Nesse caso $\Delta k_{F,R}$ permanece constante, não há confinamento, e Z igual a 1.

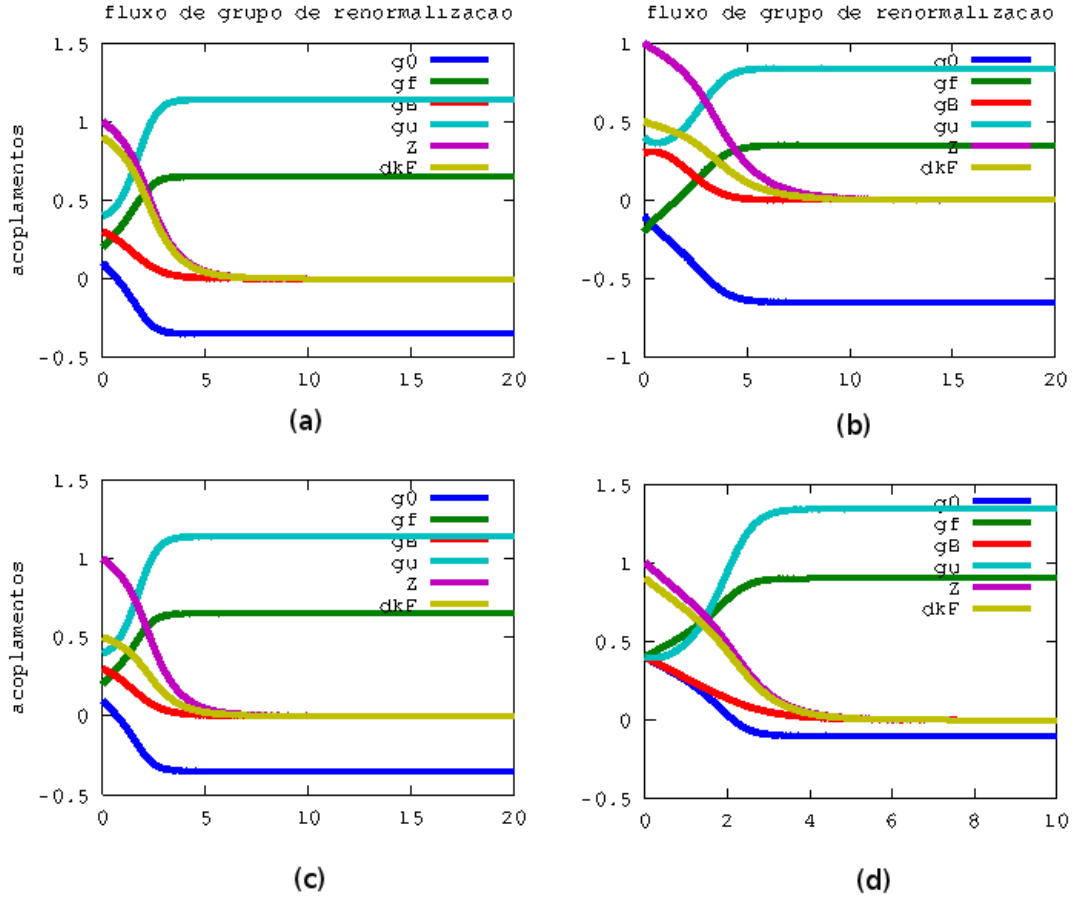


Figura 9.5: Fluxos de renormalização em 2-loops. Acoplamentos com valores iniciais: (a) $\bar{g}_{0,R}(0) = 0.1$, $\bar{g}_{\mathcal{F},R}(0) = 0.2$, $\bar{g}_{\mathcal{B},R}(0) = 0.3$, $\bar{g}_{\mathcal{U},R}(0) = 0.4$; (b) $\bar{g}_{0,R}(0) = -0.1$, $\bar{g}_{\mathcal{F},R}(0) = -0.2$, $\bar{g}_{\mathcal{B},R}(0) = 0.3$, $\bar{g}_{\mathcal{U},R}(0) = 0.4$; (c) Mesmos acoplamentos de “(a)”;

(d) Todos acoplamentos iniciais iguais a $\bar{g}_R(0) = 0.4$. Diferença entre pontos de Fermi iniciais: $\Delta k_{F,R}(0) =$ (a) 0.9; (b) 0.5; (c) 0.5 (d) 0.9. Pesos de quasipartícula iniciais: $Z(0)$ sempre iguais a 1. Os acoplamentos fluem para pontos fixos; $\Delta k_{F,R}$ flui para zero; Z flui para zero.

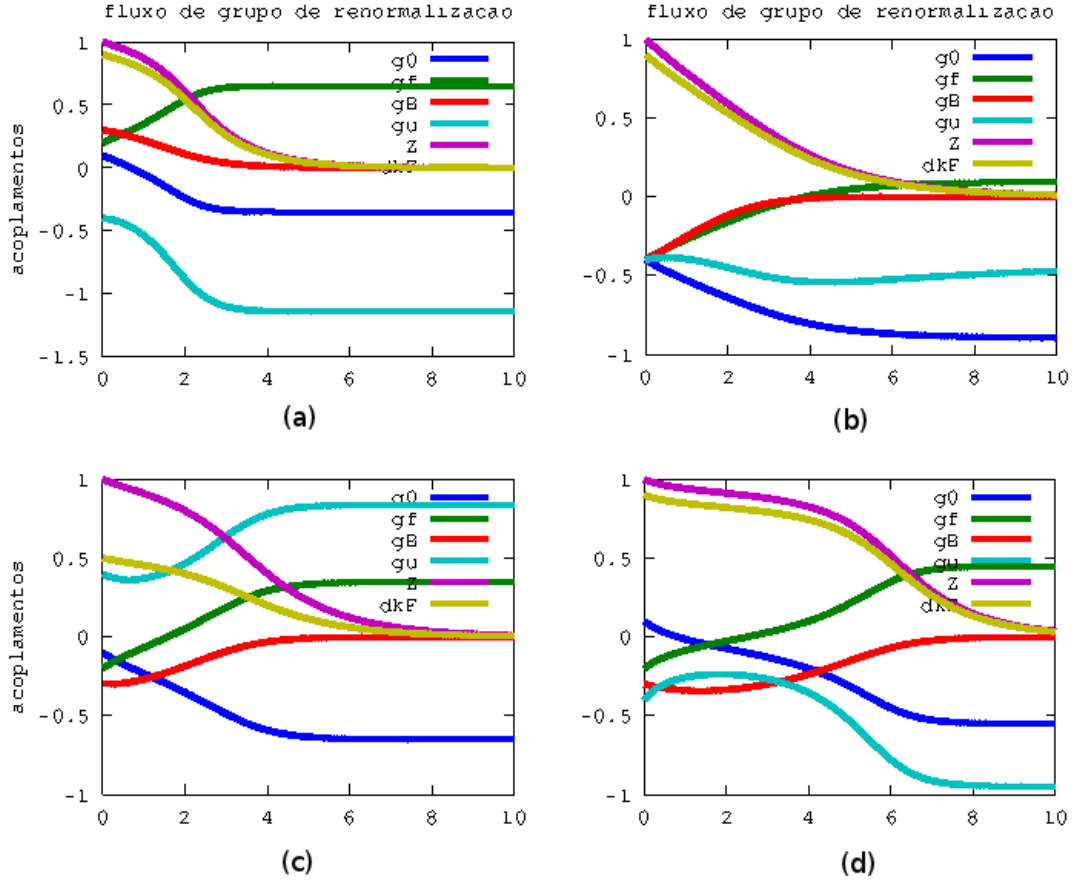


Figura 9.6: Fluxos de renormalização em 2-loops. Acoplamentos com valores iniciais: (a) $\bar{g}_{0,R}(0) = 0.1$, $\bar{g}_{\mathcal{F},R}(0) = 0.2$, $\bar{g}_{\mathcal{B},R}(0) = 0.3$, $\bar{g}_{\mathcal{U},R}(0) = -0.4$; (b) Todos acoplamentos iniciais iguais a $\bar{g}_R(0) = -0.4$; (c) $\bar{g}_{0,R}(0) = -0.1$, $\bar{g}_{\mathcal{F},R}(0) = -0.2$, $\bar{g}_{\mathcal{B},R}(0) = -0.3$, $\bar{g}_{\mathcal{U},R}(0) = 0.4$; (d) $\bar{g}_{0,R}(0) = 0.1$, $\bar{g}_{\mathcal{F},R}(0) = -0.2$, $\bar{g}_{\mathcal{B},R}(0) = -0.3$, $\bar{g}_{\mathcal{U},R}(0) = -0.4$. Diferença entre pontos de Fermi iniciais: $\Delta k_{F,R}(0) =$ (a) 0.9; (b) 0.5; (c) 0.9 (d) 0.9. Pesos de quasipartícula iniciais: $Z(0)$ sempre iguais a 1. Os acoplamentos fluem para pontos fixos; $\Delta k_{F,R}$ flui para zero; Z flui para zero.

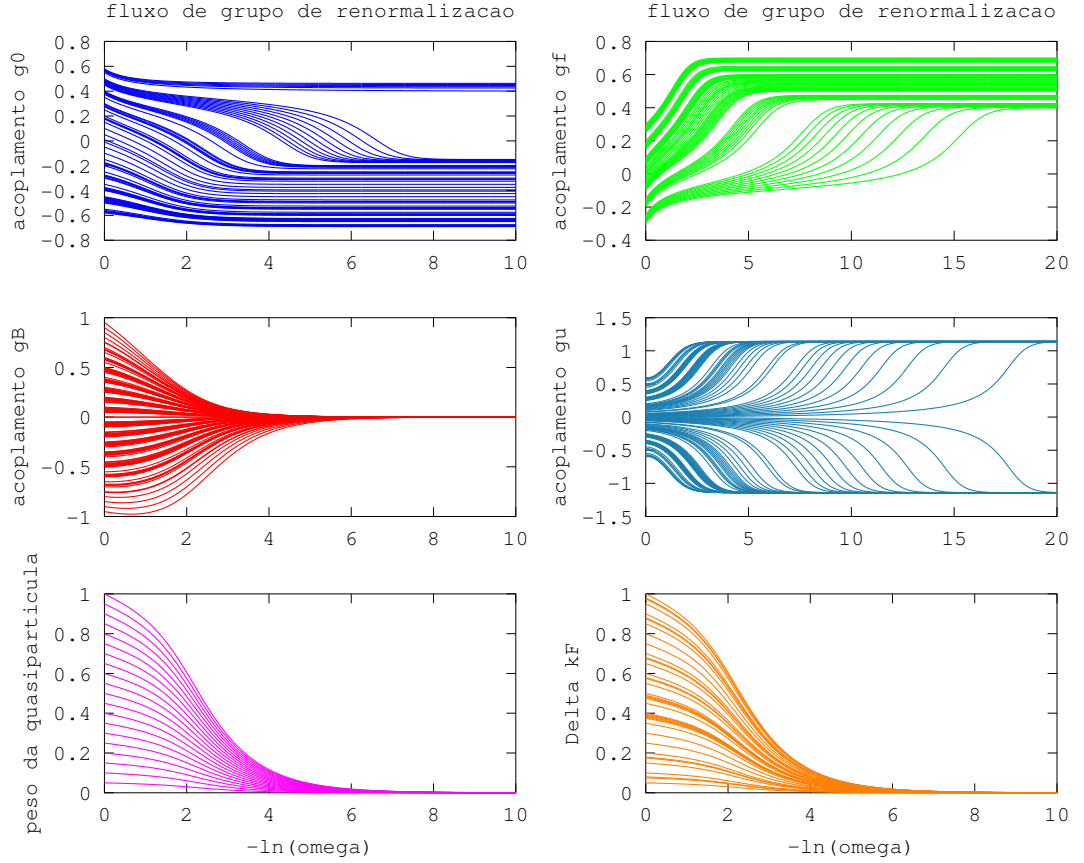


Figura 9.7: Fluxos de GR em 2-loops. Fixamos valores iniciais $\bar{g}_{0,R}(0) = 0.1$, $\bar{g}_{F,R}(0) = 0.2$, $\bar{g}_{B,R}(0) = 0.3$, $\bar{g}_{U,R}(0) = 0.4$, $Z(0) = 1$, $\Delta k_{F,R}(0) = 1$, então variamos cada condição inicial individualmente, mantendo as outras condições iniciais fixas. Os acoplamentos fluem para pontos fixos; $\Delta k_{F,R}$ flui para zero; Z flui para zero.

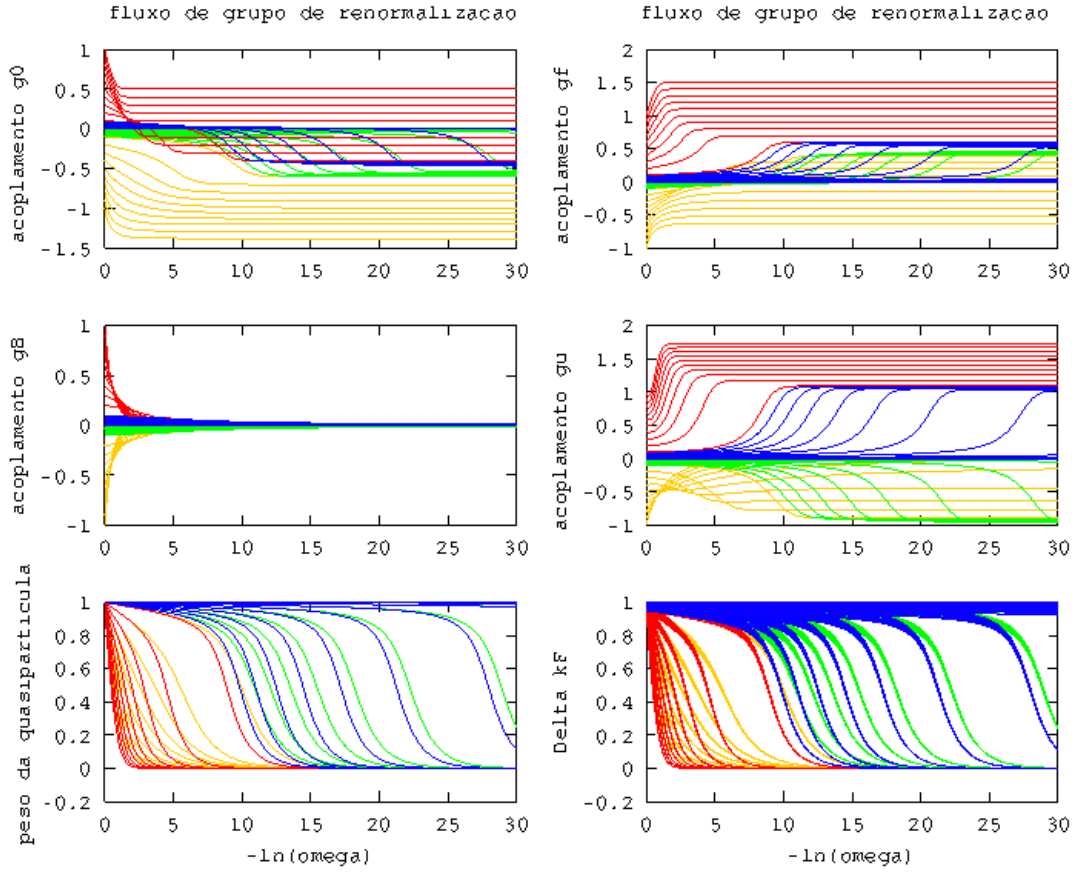


Figura 9.8: Fluxo de GR dos acoplamentos, peso da quasipartícula e $\Delta k_{F,R}$. Linhas vermelhas (de 0.1 a 1) e azuis (entre 0.1 e 0) correspondem aos mesmos valores iniciais positivos para acoplamentos. Linhas amarelas (de -0.1 a -1) e verdes (entre -0.1 e 0) correspondem aos mesmos valores iniciais negativos para acoplamentos. Valor inicial do peso da quasipartícula sempre $Z(0) = 1$. Valores iniciais $\Delta k_{F,R}(0)$, de 0.9 to 1. Exceto para valores muito baixos (recaindo em 1-loop, dentro dos casos verde e azul), os acoplamentos fluem para pontos fixos; $\Delta k_{F,R}$ flui para zero; Z flui para zero.

Capítulo 10

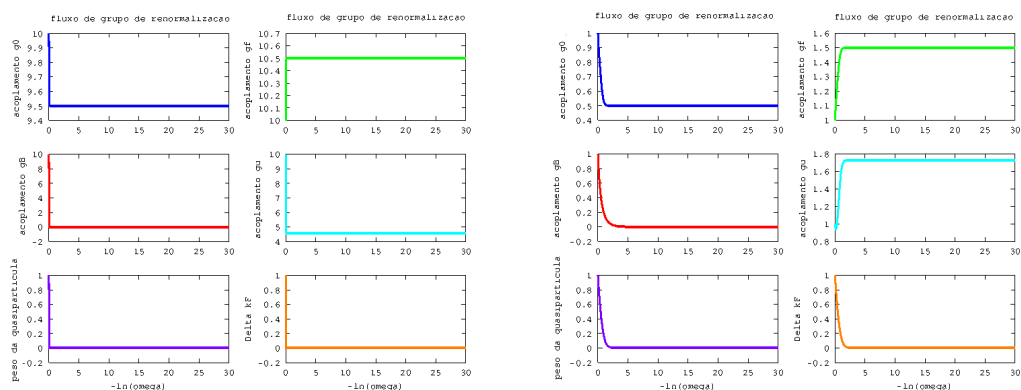
Confinamento Quântico no MDCA

O resultado das equações de fluxo de GR em 2-loops demonstra que o MDCA possui de fato regime de confinamento quântico. Isto é, os pontos de Fermi renormalizados fluem para $\Delta k_{F,R} = 0$. Consequentemente, a interação de backscattering e o peso da quasipartícula também fluem para zero como resultado de sua relação direta com o fluxo de $\Delta k_{F,R}$.

As figuras 9.7 e 9.8 resumem nossos resultados dos fluxos de GR para vários valores iniciais de acoplamento, peso da quasipartícula e $\Delta k_{F,R}$. Em particular, nossos resultados não são sensíveis a escolhas de valores iniciais dos parâmetros do modelo. A figura 10.1 mostra que quanto maiores os acoplamentos iniciais, mais rápido o sistema vai para o confinamento quântico.

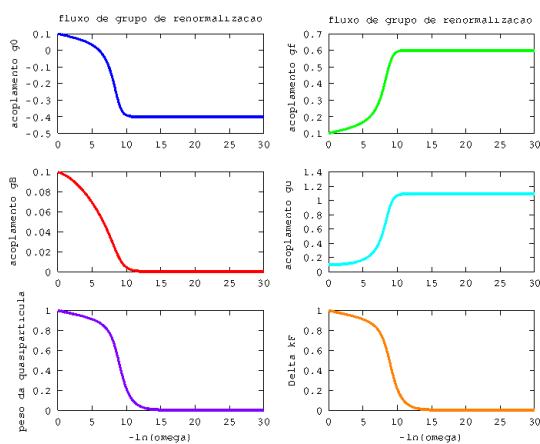
Os acoplamentos frontal, interfrontal e umklapp fluem para valores fixos, indicando que quando o sistema sofre confinamento quântico as duas bandas ainda se comunicam através dessas interações intercadeias. Por outro lado, o peso da quasipartícula vai sempre a zero. Com efeito, o fluxo do peso da quasipartícula

para zero, implica que, de fato, não há excitações de quasipartícula fermiônicas bem definidas no limite de baixa energia, somente a possibilidade de excitações de carga bosônicas coletivas, caracterizadas pelos pontos fixos de um líquido de Luttinger.



(a)

(b)



(c)

Figura 10.1: Valores iniciais de acoplamentos: (a) 10, (b) 1, (c) 0.1. Para valores iniciais de acoplamentos entre 0.1 to 10 há sempre confinamento. Quanto maior o valor inicial, mais rápido o sistema confina, os fluxos dos acoplamentos vão para pontos fixos e o peso da quasipartícula vai a zero.

Nosso resultado confirma que o backscattering está ligado a $\Delta k_{F,R}$. Algo verificado também em trabalhos anteriores, usando cálculos em 2-loops, em ausência [19] e presença de confinamento [25, 26]. Esses trabalhos levam apenas em conta apenas a presença de backscattering, mas não consideram as outras interações. Por outro lado, nossos fluxos de backscattering e $\Delta k_{F,R}$ incluem interações que não estão presentes em modelos envolvendo apenas backscattering.

Por outro lado, um resultado prévio de 2-loops [27], usando o método de renormalização de Wilson admite a possibilidade de confinamento quântico, mas nesse caso o sistema de equações de GR proposto admite a possibilidade não-física de pesos de quasipartícula negativos, o que pode ter relação com inconsistências na prescrição de renormalização adotada. Esse resultado prevê ainda o distanciamento dos pontos de Fermi antes do confinamento, com um pico que, para o caso mais geral apresentado, adquire valores não-físicos.

Em nosso caso, por outro lado, as equações são obtidas consistentemente e o fluxo de renormalização de Z vai sempre para zero, caracterizando de fato um regime de líquido de Luttinger. Além disso, nosso resultado prevê um fluxo para o confinamento sem prever antes disso o distanciamento dos pontos de Fermi, como ocorre em [27]. De fato, é mais razoável que os pontos de Fermi se aproximem cada vez mais ao invés de se distanciarem, levando o termo de acoplamento perpendicular t_{\perp} a ser reduzido na presença de interações, levando o sistema a um estado efetivo de líquido de Luttinger, como originalmente discutido por Anderson [17], que também é confirmado pelo fluxo da quasipartícula para zero. Nosso resultado também implica

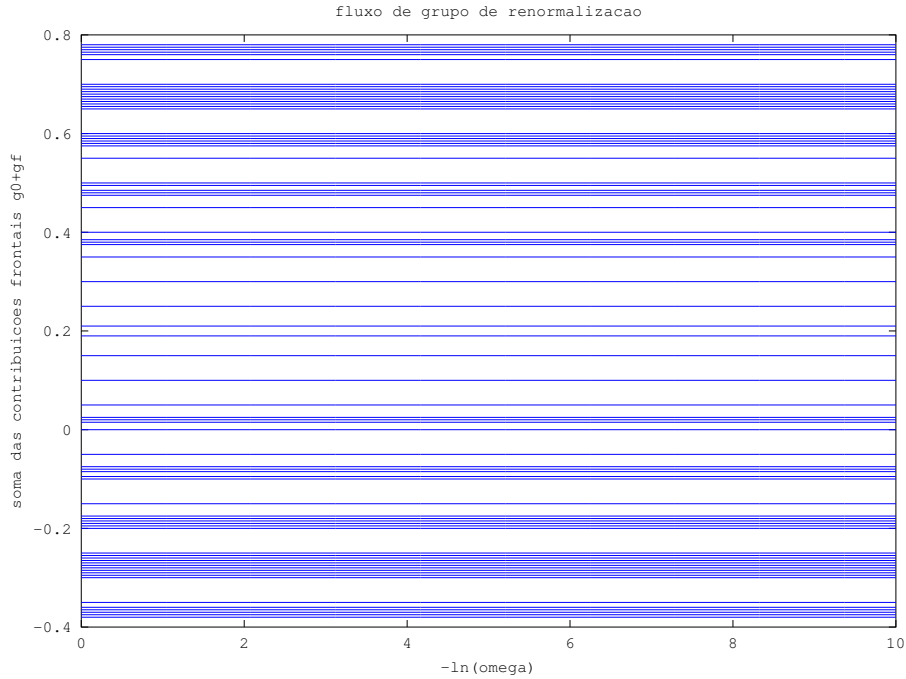
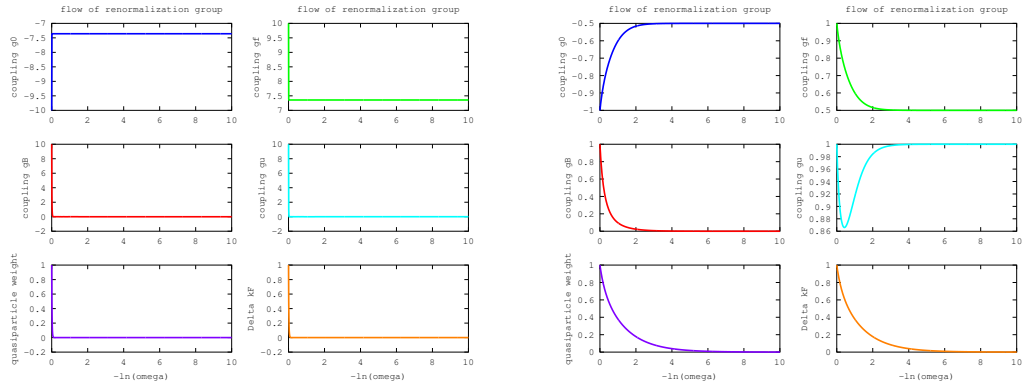


Figura 10.2: Fluxos de GR da soma das contribuições frontais $\bar{g}_{0,R} + \bar{g}_{\mathcal{F},R}$.

que no confinamento quântico, as únicas trocas de “cor” são realizadas por umklapp. Os processos de interações que não realizam troca de cor, frontal e interfrontal, fluem para pontos fixos opostos, caracterizando um fluxo de GR constante para contribuições totais de tipo frontal $g_{0,R} + g_{\mathcal{F},R}$. Na figura 10.2, mostramos que de fato, $g_{0,R} + g_{\mathcal{F},R}$ flui para pontos fixos contantes independentemente das condições iniciais. Note que se somarmos diretamente as equações de fluxo de GR para $\bar{g}_{0,R}$ e $\bar{g}_{\mathcal{F},R}$ chegamos imediatamente essa condição

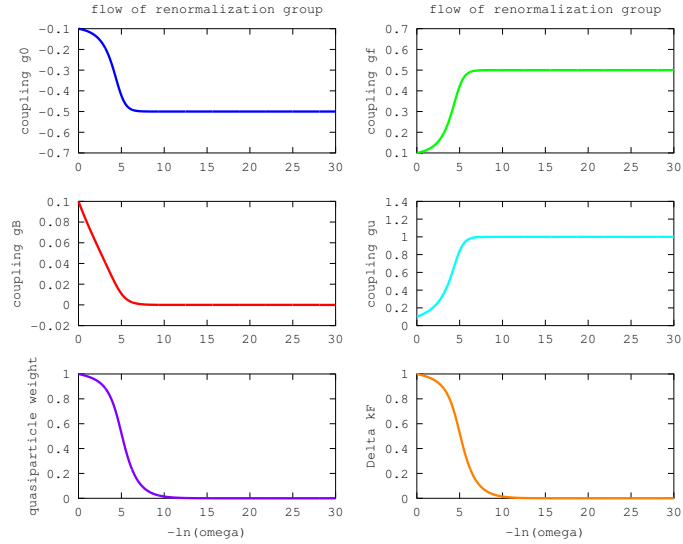
$$\omega \frac{d(\bar{g}_{0,R} + \bar{g}_{\mathcal{F},R})}{d\omega} = 0. \quad (10.1)$$

O resultado (10.1) é importante em virtude de sua conexão com o teorema de Luttinger (TL) [28, 29, 30]. O TL relaciona $K_{F,R} = k_{F,R}^a + k_{F,R}^b$ à densidade total de férmions. Como resultado, se este número é constante, $K_{F,R}$ não flui. De fato, po-



(a)

(b)



(c)

Figura 10.3: Valores iniciais de acoplamentos: (a) 10, com $\bar{g}_{0,R}(0) = -10$; (b) 1, com $\bar{g}_{0,R}(0) = -1$; (c) 0.1, com $\bar{g}_{0,R}(0) = -0.1$. Para estes casos $\bar{g}_{0,R}(0) + \bar{g}_{\mathcal{F},R}(0) = 0$, o teorema de Luttinger é satisfeito. Quanto maior o valor inicial, mais rápido o sistema confina, os fluxos dos acoplamentos vão para pontos fixos e o peso da quasipartícula vai a zero. Para valores altos, umklapp vai a zero.

demos escrever a equação para $K_{F,R}$, em termos da correspondente grandeza “nua”, considerando (7.20), (7.21), (7.22) e (7.23),

$$K_{FN} = \frac{\delta k_{F,R}^a + k_{F,R}^a + \delta k_{F,R}^b + k_{F,R}^b}{Z} \quad (10.2)$$

$$= K_{F,R} + 2(\bar{g}_{0R} + \bar{g}_{fR}) \frac{\Omega}{Zv_F} \quad (10.3)$$

que leva ao fluxo de GR de $K_{F,R}$, dado por

$$\omega \frac{dK_{FN}}{d\omega} = \omega \frac{dK_{F,R}}{d\omega} + 2(\bar{g}_{0R} + \bar{g}_{fR}) \frac{\gamma\Omega}{Zv_F} = 0, \quad (10.4)$$

que para $\bar{g}_{0,R} + \bar{g}_{f,R} = 0$ leva a

$$\omega \frac{dK_{F,R}}{d\omega} = 0, \quad (10.5)$$

conservando assim $K_{F,R}$.

Isto é particularmente importante na vizinhança dos pontos de Fermi, com $g_{0,R} + g_{f,R} = 0$ o que leva ao fluxo constante de $K_{F,R} = k_{F,R}^a + k_{F,R}^b$, em acordo com o teorema de Luttinger e em consistência com a identidade de Ward-Takahashi [43]. Por outro lado, essa condição limita as condições iniciais para os acoplamentos frontais, caracterizando os estados que obedecem o teorema de Luttinger. A figura 10.3 apresenta os fluxos de GR nesse caso. Para valores altos de acoplamento o umklapp também flui para zero. Por outro lado, todos os outros comportamentos são semelhantes ao anterior para QCR, exceto pelo fato de que agora os fluxos de $g_{0,R}$ e $g_{f,R}$ tem valores iniciais opostos que resultam $g_{0,R} + g_{f,R} = 0$ para todo o fluxo da soma. Podemos também calcular a dimensão anômala (DA) quando os fluxos atingem os pontos fixos, γ^* . Nesse caso, podemos distinguir entre os casos

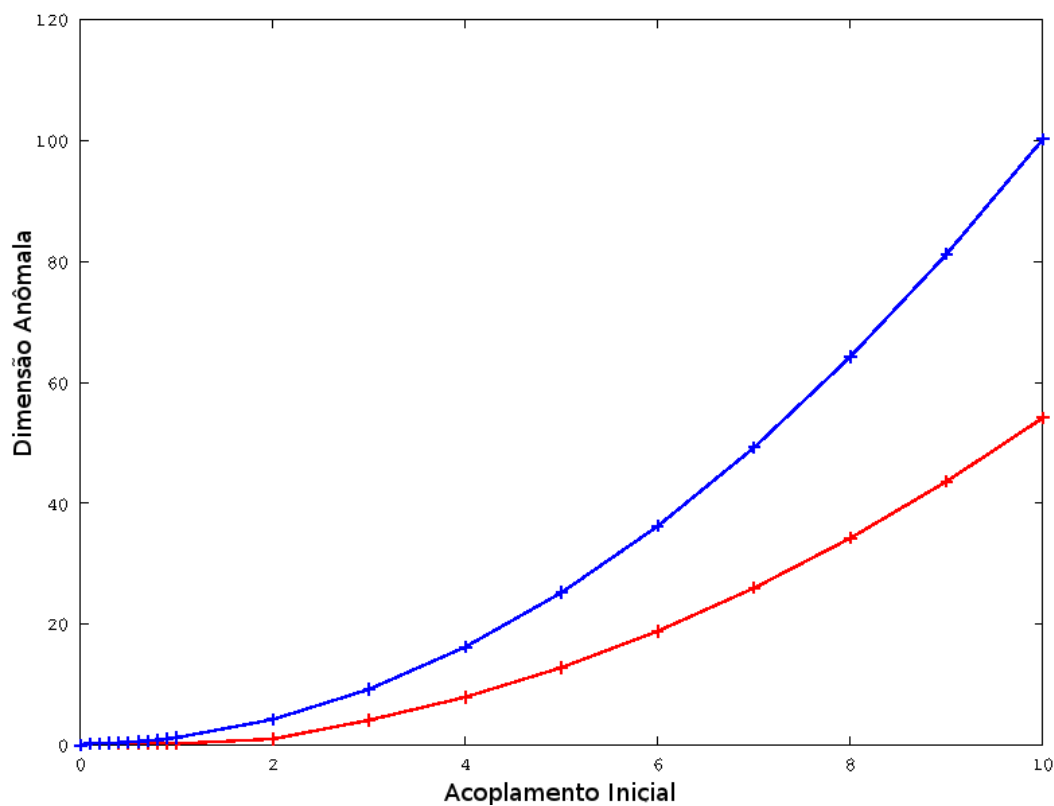


Figura 10.4: Dimensão Anômala γ^* em função dos acoplamentos iniciais $\bar{g}(0)$, em módulo.

As linhas vermelhas correspondem aos casos onde o TL é satisfeito (frontal e interfrontal com sinais opostos), estado de líquido de Luttinger. A linha azul corresponde ao caso onde o TL é violado, um outro estado de líquido de não-Fermi. A dimensão anômala cresce para valores iniciais maiores, implicando no fluxo mais rápido do peso da quasipartícula e confinamento para valores mais altos.

que satisfazem o teorema de Luttinger e os que o violam. Na figura 10.4, mostramos a DA γ^* , que é atingida no ponto fixo, em função dos valores de acoplamento inicial $\bar{g}(0)$, com variação em módulo de 0 a 10. Para estados que violam o teorema de Luttinger os valores de DA são maiores que os que satisfazem esse teorema, o que

permite caracterizar cada estado. Como esperado, a DA cresce quando os valores dos acoplamentos iniciais são maiores. Isto também é uma consequência do resultado anterior, obtido das equações de GR, de quanto maiores os acoplamentos iniciais, mais rápida a nulificação do peso da quasipartícula, confinamento quântico e fluxo dos acoplamentos para pontos fixos.

Temos assim duas fases de líquido de não-Fermi, determinadas pelo teorema de Luttinger. Num líquido de Luttinger o teorema de Luttinger é satisfeito, enquanto o estado onde esse teorema não é satisfeito pode caracterizar uma outra transição, como uma transição para um isolante de Mott, que pode ser violar o TL, como encontrado em [20, 21], resultado do efeito da renormalização dos pontos de Fermi [23, 24].

Note ainda que, devido ao teorema de Luttinger, a conservação da densidade total de fermions é conservada $n = n_+ + n_-$ devido sua relação com K_F , onde n_s corresponde à densidade em cada quiralidade. Isso pode ser calculado explicitamente,

$$n_+ = \int \frac{dk}{2\pi} [\theta(k - k_F^a) + \theta(k - k_F^b)] = \frac{K_F}{2\pi}, \quad (10.6)$$

$$n_- = \int \frac{dk}{2\pi} [\theta(k_F^a - k) + \theta(k_F^b - k)] = \frac{K_F}{2\pi}. \quad (10.7)$$

Contudo, a diferença entre n_+ e n_- é alterada devido às interações. Suponha que as interações levem a $n'_+ = n_+ + \delta n$ e $n'_- = n_- - \delta n$, então a soma $n'_+ + n'_- = n$, porém a diferença $\Delta n = n_+ - n_- = 0$ é alterada

$$\Delta n' = n'_+ - n'_- = 2\delta n, \quad (10.8)$$

que se deve à assimetria nas densidades de férmions em cada quiralidade, e que está assim relacionada à anomalia quirial do modelo.

Em resumo, o confinamento quântico no MDCA, caracterizado pela redução da distância entre os pontos de Fermi renormalizados associados às bandas ligante e antiligante, com fluxo de GR para zero, e o fluxo das interações para pontos fixos, é uma manifestação do comportamento de líquido de não-Fermi no MDCA, que é deste modo um exemplo do comportamento efetivo de estado de líquido de Luttinger neste modelo quasi-1D, quando o teorema de Luttinger é satisfeito.

Capítulo 11

Conclusão e Perspectivas

Consideramos nesta tese um sistema quasi-1D de cadeias de férmions sem spin sob interações frontal, interfrontal, backscattering e umklapp, o modelo de duas cadeias acopladas (MDCA). Mostramos que este sistema pode ser descrito em termos de interações com índices de cores, isto é, interações que não alteram cor e que mediam mudança de cor, associadas às bandas ligante e antiligante formadas pelos acoplamentos entre cadeias, e realizamos um estudo de grupo de renormalização desse modelo a fim de estudar o problema do confinamento quântico.

Considerando a questão da anomalia quântica, levantada no trabalho [43], consideramos o problema em termos de interações de duas cores, onde a anomalia inerente ao sistema é vista como uma consequência do acoplamento de campos de Dirac $1 + 1$ a interações de uma cor e duas cores. Mostramos as interações de uma cor podem ser escritas em termos de componentes de vetores axiais, enquanto as interações que mediam trocas de cor (backscattering e umklapp) não podem ser associados a vetores axiais, embora possam ser associados a espinores que não

misturam quiralidades. Em $1+1$, a componente zero do vetor axial J_A^0 está associada à simetria quiral, enquanto a componente um do vetor axial J_A^1 está associada à conservação de carga. O fato de as interações frontal e interfrontal envolverem a componente J_A^0 relacionada à simetria quiral, indica que a contribuição desses termos para a anomalia quiral está também associado a vetores axiais, similar ao caso no modelo de Schwinger $1 + 1$ [54].

Por meio da realização completa de grupo de renormalização (GR), obtivemos apropriadamente as quantidades “nuas” e renormalizadas que levam ao conjunto de equações de fluxo de GR para todas as grandezas físicas associadas ao MDCA. Mostramos que as diferenças interbanda dos pontos de Fermi renormalizados $\Delta k_{F,R}$ fluem para zero em 2-loops, caracterizando assim o confinamento quântico. Em particular, este trabalho estende e confirma resultados anteriores [19, 25, 26, 27, 22], como a relação do termo de backscattering com o termo de $\Delta k_{F,R}$ associado ao confinamento quântico .

Assim, o principal resultado deste trabalho de tese [59] é o estudo de confinamento quântico no MDCA em 2-loops, em que verificamos o fluxo de GR das interações para pontos fixos, o fluxo do peso da quasipartícula para zero e a redução da distância entre os pontos de Fermi renormalizados associados às bandas ligante e antiligante, fluxo de GR de $\Delta k_{F,R}$ para zero, verificando dessa maneira que o MDCA comporta-se efetivamente como um líquido de Luttinger em quasi-1D, no regime de confinamento quântico. Levamos também em consideração o teorema de Luttinger, encontrando fases de confinamento onde esse teorema é satisfeito e fases onde o

teorema é violado. No caso em que TL é satisfeito, o estado de líquido de Luttinger fica precisamente caracterizado no confinamento quântico. Notamos ainda que o confinamento não é afetado pela simetria quirial, e por conseguinte da anomalia quirial, visto que isto dependeria da diferença das densidades de férmions das duas quiralidades, mas $\Delta k_{F,R}$ não mistura quiralidades.

Como projetos futuros, podemos estudar o confinamento quântico envolvendo o acoplamento de mais cadeias, o caso limite contínuo e a presença de outros tipos de interação, como interações para cadeias não-vizinhas, por exemplo. Além disso, a questão das anomalias quânticas deve também ser melhor explorada, como em processos onde as diferenças das densidades de férmions de diferentes quiralidades está envolvida. Também pretendemos explorar as técnicas aqui abordadas em outros contextos em sistemas de elétrons fortemente correlacionados e sistemas de física da matéria condensada [60, 61, 62, 63], bem como a interligação com outras áreas de interesse [64, 65], com possíveis aplicações do método de grupo renormalização em outros contextos.

Apêndice 1: Cálculo explícito das polarizações de uma e duas cores

.1 Polarização de uma “cor”

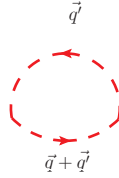


Figura 1: Polarização de uma “cor”.

Considerando a polarização de uma “cor” (figura 1)

$$\chi_-^b(\vec{q}) = - \int_{\vec{q}'} iG_-^b(\vec{q}') iG_-^b(\vec{q}' + \vec{q}) \quad (1)$$

e as funções de Green correspondentes

$$G_-^b(\vec{q}') = \frac{\theta_{-q'}^{b>}}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^b + i\delta} + \frac{\theta_{-q'}^{b<}}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^b - i\delta} \quad (2)$$

$$G_-^b(\vec{q}' + \vec{q}) = \frac{\theta_{-(q'+q)}^{b>}}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b + i\delta} + \frac{\theta_{-(q'+q)}^{b<}}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b - i\delta} \quad (3)$$

Podemos realizar a integração em \vec{q}'

$$\begin{aligned}
\chi_-^b(\vec{q}) &= \int_{\vec{q}'} \frac{\theta_{-q'}^{b>}}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^b + i\delta} \frac{\theta_{-(q'+q)}^{b>}}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b + i\delta} \\
&+ \int_{\vec{q}'} \frac{\theta_{-q'}^{b>}}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^b + i\delta} \frac{\theta_{-(q'+q)}^{b<}}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b - i\delta} \\
&+ \int_{\vec{q}'} \frac{\theta_{-q'}^{b<}}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^b - i\delta} \frac{\theta_{-(q'+q)}^{b>}}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b + i\delta} \\
&+ \int_{\vec{q}'} \frac{\theta_{-q'}^{b<}}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^b - i\delta} \frac{\theta_{-(q'+q)}^{b<}}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b - i\delta}
\end{aligned} \tag{4}$$

Primeiro integrando nas frequência q'_0

$$\begin{aligned}
&\int_{q'_0} \frac{\theta_{-q'}^{b>}}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^b + i\delta} \frac{\theta_{-(q'+q)}^{b>}}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b + i\delta} \\
&+ \int_{q'_0} \frac{\theta_{-q'}^{b>}}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^b + i\delta} \frac{\theta_{-(q'+q)}^{b<}}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b - i\delta} \\
&+ \int_{q'_0} \frac{\theta_{-q'}^{b<}}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^b - i\delta} \frac{\theta_{-(q'+q)}^{b>}}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b + i\delta} \\
&+ \int_{q'_0} \frac{\theta_{-q'}^{b<}}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^b - i\delta} \frac{\theta_{-(q'+q)}^{b<}}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b - i\delta}
\end{aligned} \tag{5}$$

Temos assim que no caso

$$\int_{q'_0} \frac{1}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^b + i\delta} \frac{1}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b + i\delta} \tag{6}$$

a integral não tem pontos singulares, resultando zero. E no caso

$$\int_{q'_0} \frac{1}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^b + i\delta} \frac{1}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b - i\delta} \tag{7}$$

o ponto singular $q'_0 = -q_0 + \varepsilon_{-(q'+q)}^b + i\delta$, resulta

$$\frac{i}{-q_0 + \varepsilon_{-(q'+q)}^b - \varepsilon_{-q'}^b + i\delta} \tag{8}$$

a terceira integração

$$\int_{q'_0} \frac{1}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^b - i\delta} \frac{1}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b + i\delta} \quad (9)$$

tem como ponto singular $q'_0 = \varepsilon_{-q'}^b + i\delta$, o que resulta em

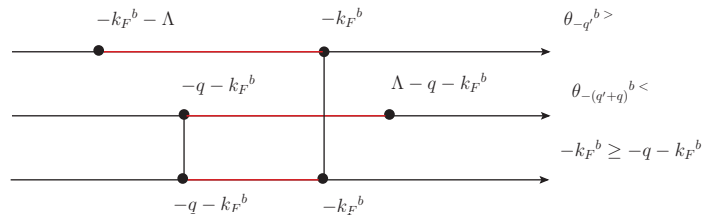
$$\frac{i}{q_0 + \varepsilon_{-q'}^b - \varepsilon_{-(q'+q)}^b + i\delta}. \quad (10)$$

A quarta integração

$$\int_{q'_0} \frac{1}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^b - i\delta} \frac{1}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b - i\delta} \quad (11)$$

tem os pontos singulares $q'_0 = \varepsilon_{-q'}^b + i\delta$ e $q'_0 = -q_0 + \varepsilon_{-(q'+q)}^b + i\delta$, e o resultado da integral é também zero.

Podemos agora incluir os cutoffs para a integração nos momentos, levando em conta os produtos das funções theta. A primeira $\theta_{-q'}^{b>} \theta_{-(q'+q)}^{b>}$ não é necessária pois a integração nas frequências é nula. A segunda $\theta_{-q'}^{b>} \theta_{-(q'+q)}^{b<}$ pode ser melhor realizada levando-se em conta o diagrama incluindo os cutoffs (figura 2(a))

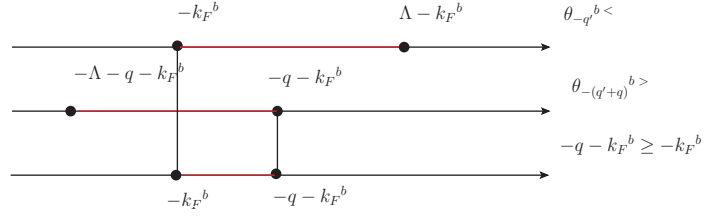


(a) $-k_F^b \geq -q - k_F^b$

Figura 2: Intervalos de cutoff em q' para $\theta_{-q'}^{b>}$, $\theta_{-(q'+q)}^{b<}$.

Dos intervalos de cutoff para $\theta_{-q'}^{b<}$ e $\theta_{-(q'+q)}^{b<}$ (figura 2(a)),

$$-k_F^b \geq -q - k_F^b \rightarrow \theta(q) \frac{1}{2\pi} \int_{-q - k_F^b}^{-k_F^b} dq' \quad (12)$$



$$(a) -k_F^b \geq -q - k_F^b$$

Figura 3: Intervalo de cutoff em q' para $\theta_{-q'}^{b>}$, $\theta_{-(q'+q)}^{b<}$.

O terceiro cutoff $\theta_{-q'}^{b<}, \theta_{-(q'+q)}^{b>}$ (figura 3(a)) Dos intervalos de cutoff para $\theta_{-q'}^{b<}$ e $\theta_{-(q'+q)}^{b<}$ (figura 3(a)),

$$-q - k_F^b \geq -k_F^b \rightarrow \theta(-q) \frac{1}{2\pi} \int_{-k_F^b}^{-q - k_F^b} dq' \quad (13)$$

O quarto produto $\theta_{-q'}^{b<}, \theta_{-(q'+q)}^{b<}$ não é necessário, pois a integral se anula.

Com a inclusão dos cutoffs podemos incluir a integração nos momentos q' .

A primeira é zero. A segunda integral

$$i \int_{q'} \frac{1}{-q_0 + \varepsilon_{-(q'+q)}^b - \varepsilon_{-q'}^b + i\delta}. \quad (14)$$

Usando a relação $\varepsilon_{-(q'+q)}^b - \varepsilon_{-q'}^b = -v_F^b q$, temos

$$i \frac{1}{-q_0 - v_F^b q + i\delta} \int_{q'}. \quad (15)$$

Incluindo o cutoff

$$\frac{\theta(q)}{2\pi} \int_{-q - k_F^b}^{-k_F^b} dq', \quad (16)$$

temos

$$i \frac{q}{-q_0 - v_F^b q + i\delta} \frac{\theta(q)}{2\pi}. \quad (17)$$

A terceira integração

$$i \int_{q'} \frac{1}{q_0 + \varepsilon_{-q'}^b - \varepsilon_{-(q'+q)}^b + i\delta} \quad (18)$$

Usando a relação $\varepsilon_{-q'}^b - \varepsilon_{-(q'+q)}^b = v_F^b q$, temos

$$i \frac{1}{q_0 + v_F^b q + i\delta} \int_{q'}. \quad (19)$$

Incluindo o cutoff

$$\frac{\theta(-q)}{2\pi} \int_{-k_F^b}^{-q-k_F^b} dq', \quad (20)$$

temos

$$i \frac{-q}{q_0 + v_F^b q + i\delta} \frac{\theta(-q)}{2\pi}. \quad (21)$$

A quarta integral por fim é nula.

O resultado final é a soma de (17) e (21) que resulta

$$\chi_-^b(\vec{q}) = \frac{-iq}{2\pi} \left(\frac{\theta(q)}{q_0 + v_F^b q - i\delta} + \frac{\theta(-q)}{q_0 + v_F^b q + i\delta} \right). \quad (22)$$

Usando $v_F^b q = -\varepsilon_{-(q-k_F^b)}^b$, temos

$$\chi_-^b(\vec{q}) = \frac{-iq}{2\pi} \left(\frac{\theta(q)}{q_0 - \varepsilon_{-(q-k_F^b)}^b - i\delta} + \frac{\theta(-q)}{q_0 - \varepsilon_{-(q-k_F^b)}^b + i\delta} \right). \quad (23)$$

Temos também a relação

$$\begin{aligned} \theta_{-(q-k_F^b)}^{b<} &= \theta(k_F^b + (q - k_F^b)) = \theta(q), \\ \theta_{-(q-k_F^b)}^{b>} &= \theta(-(q - k_F^b) - k_F^b) = \theta(-q), \end{aligned} \quad (24)$$

então temos

$$\chi_-^b(\vec{q}) = \frac{-iq}{2\pi} \left(\frac{\theta_{-(q-k_F^b)}^{b>}}{q_0 - \varepsilon_{-(q-k_F^b)}^b + i\delta} + \frac{\theta_{-(q-k_F^b)}^{b<}}{q_0 - \varepsilon_{-(q-k_F^b)}^b - i\delta} \right). \quad (25)$$

Finalmente, chegamos ao resultado da polarização de uma cor

$$\chi_-^b(\vec{q}) = \frac{-iq}{2\pi} G_-^b(q_0, q - k_F^b). \quad (26)$$

.2 Polarização de duas “cores”

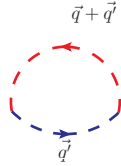


Figura 4: Polarização de duas “cores”.

Considerando a polarização de duas “cores” (figura 4)

$$\chi_-^{ab}(\vec{q}) = - \int_{\vec{q}'} iG_-^a(\vec{q}') iG_-^b(\vec{q}' + \vec{q}) \quad (27)$$

levando em conta as funções de Green

$$G_-^a(\vec{q}') = \frac{\theta_{-q'}^{a>}}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^a + i\delta} + \frac{\theta_{-q'}^{a<}}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^a - i\delta} \quad (28)$$

$$G_-^b(\vec{q}' + \vec{q}) = \frac{\theta_{-(q'+q)}^{b>}}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b + i\delta} + \frac{\theta_{-(q'+q)}^{b<}}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b - i\delta} \quad (29)$$

Integrando em \vec{q}'

$$\begin{aligned}
\chi_-^{ab}(\vec{q}) &= \int_{\vec{q}'} \frac{\theta_{-q'}^{a>}}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^a + i\delta} \frac{\theta_{-(q'+q)}^{b>}}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b + i\delta} \\
&+ \int_{\vec{q}'} \frac{\theta_{-q'}^{a>}}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^a + i\delta} \frac{\theta_{-(q'+q)}^{b<}}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b - i\delta} \\
&+ \int_{\vec{q}'} \frac{\theta_{-q'}^{a<}}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^a - i\delta} \frac{\theta_{-(q'+q)}^{b>}}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b + i\delta} \\
&+ \int_{\vec{q}'} \frac{\theta_{-q'}^{a<}}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^a - i\delta} \frac{\theta_{-(q'+q)}^{b<}}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b - i\delta}
\end{aligned} \tag{30}$$

Integrando nas frequências primeiro q'_0

$$\begin{aligned}
&\int_{q'_0} \frac{\theta_{-q'}^{a>}}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^a + i\delta} \frac{\theta_{-(q'+q)}^{b>}}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b + i\delta} \\
&+ \int_{q'_0} \frac{\theta_{-q'}^{a>}}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^a + i\delta} \frac{\theta_{-(q'+q)}^{b<}}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b - i\delta} \\
&+ \int_{q'_0} \frac{\theta_{-q'}^{a<}}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^a - i\delta} \frac{\theta_{-(q'+q)}^{b>}}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b + i\delta} \\
&+ \int_{q'_0} \frac{\theta_{-q'}^{a<}}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^a - i\delta} \frac{\theta_{-(q'+q)}^{b<}}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b - i\delta}
\end{aligned} \tag{31}$$

temos que a primeira equação

$$\int_{q'_0} \frac{1}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^a + i\delta} \frac{1}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b + i\delta} = 0 \tag{32}$$

e a segunda

$$\int_{q'_0} \frac{1}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^a + i\delta} \frac{1}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b - i\delta} = \frac{i}{-q_0 + \varepsilon_{-(q'+q)}^b - \varepsilon_{-q'}^a + i\delta} \tag{33}$$

que apresenta ponto singular $q'_0 = -q_0 + \varepsilon_{-(q'+q)}^b + i\delta$. A terceira

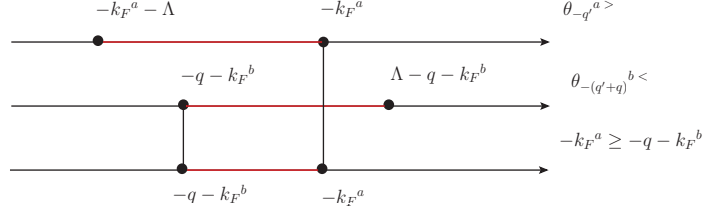
$$\int_{q'_0} \frac{1}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^a - i\delta} \frac{1}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b + i\delta} = \frac{i}{q_0 + \varepsilon_{-q'}^a - \varepsilon_{-(q'+q)}^b + i\delta} \quad (34)$$

com ponto singular $q'_0 = \varepsilon_{-q'}^a + i\delta$. A quarta

$$\int_{q'_0} \frac{1}{q'_0 - \varepsilon_{-q'}^a - i\delta} \frac{1}{q'_0 + q_0 - \varepsilon_{-(q'+q)}^b - i\delta} = 0 \quad (35)$$

com pontos singulares $q'_0 = \varepsilon_{-q'}^a + i\delta$ e $q'_0 = -q_0 + \varepsilon_{-(q'+q)}^b + i\delta$.

Incluindo os cutoffs, temos, para a primeira $\theta_{-q'}^{a>} \theta_{-(q'+q)}^{b<}$



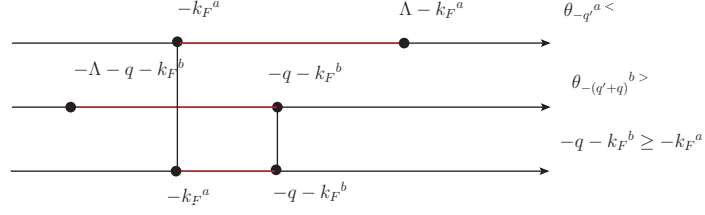
(a) $-k_F^a \geq -q - k_F^b$

Figura 5: Intervalos de cutoff em q' para $\theta_{-q'}^{a>}$, $\theta_{-(q'+q)}^{b<}$.

Dos intervalos de cutoff $\theta_{-q'}^{a>}$ and $\theta_{-(q'+q)}^{b<}$ (figura 5(a)),

$$-k_F^a \geq -q - k_F^b \rightarrow \theta(\Delta k_F + q) \frac{1}{2\pi} \int_{-q - k_F^b}^{-k_F^a} dq' \quad (36)$$

O segundo intervalo de cutoff para o produto $\theta_{-q'}^{a<} \theta_{-(q'+q)}^{b>}$

(a) $-q - k_F^b \geq -k_F^a$ Figura 6: Intervalos de cutoff em q' para $\theta_{-q'}^{a<}$, $\theta_{-(q'+q)}^{b<}$.

Dos intervalos de cutoff para $\theta_{-q'}^{a<}$ and $\theta_{-(q'+q)}^{b<}$ (figura 6(a)),

$$-q - k_F^b \geq -k_F^a \rightarrow \theta(-(q + \Delta k_F)) \frac{1}{2\pi} \int_{-k_F^a}^{-q - k_F^b} dq' \quad (37)$$

A integração nos momentos em q' pode então ser realizada em dois casos. Se $\Delta v_F \neq 0$, temos $\varepsilon_{-q'}^a - \varepsilon_{-(q'+q)}^b = \Delta v_F q' - \varepsilon_{-q}^b + \varepsilon_0^a$. Se $\Delta v_F = 0$, temos $\varepsilon_{-q'}^a - \varepsilon_{-(q'+q)}^b = -\varepsilon_{-q}^b + \varepsilon_0^a$. Assim, para $\Delta v_F \neq 0$,

$$\theta(\Delta k_F + q) \frac{1}{2\pi} \int_{-q - k_F^b}^{-k_F^a} dq' \frac{i}{-q_0 - \Delta v_F q' + \varepsilon_{-q}^b - \varepsilon_0^a + i\delta} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & \frac{i\theta(\Delta k_F + q)}{2\pi} \int_{-q - k_F^b}^{-k_F^a} dq' \frac{1}{-q_0 - \Delta v_F q' + \varepsilon_{-q}^b - \varepsilon_0^a + i\delta} = \\ & -i \frac{\theta(\Delta k_F + q)}{2\pi} \frac{1}{\Delta v_F} \ln \left(\frac{\Delta v_F k_F^a - q_0 + \varepsilon_{-q}^b - \varepsilon_0^a + i\delta}{\Delta v_F (q + k_F^b) - q_0 + \varepsilon_{-q}^b - \varepsilon_0^a + i\delta} \right) \end{aligned} \quad (39)$$

e se $\Delta v_F = 0$, temos

$$\theta(\Delta k_F + q) \frac{1}{2\pi} \frac{i(q + \Delta k_F)}{-q_0 + \varepsilon_{-q}^b - \varepsilon_0^a + i\delta} \quad (40)$$

Para a segunda integral se $\Delta v_F \neq 0$

$$\theta(-(q + \Delta k_F)) \frac{1}{2\pi} \int_{-k_F^a}^{-q - k_F^b} dq' \frac{i}{q_0 + \Delta v_F q' - \varepsilon_{-q}^b + \varepsilon_0^a + i\delta} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & \theta(-(q + \Delta k_F)) \frac{1}{2\pi} \int_{-k_F^a}^{-q-k_F^b} dq' \frac{i}{q_0 + \Delta v_F q' - \varepsilon_{-q}^b + \varepsilon_0^a + i\delta} = \\ & \theta(-(q + \Delta k_F)) \frac{i}{2\pi} \frac{1}{\Delta v_F} \ln \left(\frac{-\Delta v_F (q + k_F^b) + q_0 - \varepsilon_{-q}^b + \varepsilon_0^a + i\delta}{-\Delta v_F k_F^a + q_0 - \varepsilon_{-q}^b + \varepsilon_0^a + i\delta} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

Se $\Delta v_F = 0$

$$\theta(-(q + \Delta k_F)) \frac{1}{2\pi} \frac{i(-q - \Delta k_F)}{q_0 - \varepsilon_{-q}^b + \varepsilon_0^a + i\delta} \quad (43)$$

Temos assim o resultado final para o caso $\Delta v_F \neq 0$

$$\chi_-^{ab}(\vec{q}) = -\frac{i}{2\pi} \frac{1}{\Delta v_F} \ln \left(\frac{\Delta v_F k_F^a - q_0 + \varepsilon_{-q}^b - \varepsilon_0^a + i\delta}{\Delta v_F (q + k_F^b) - q_0 + \varepsilon_{-q}^b - \varepsilon_0^a + i\delta} \right) \quad (44)$$

e

$$\chi_-^{ba}(\vec{q}) = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{\Delta v_F} \ln \left(\frac{-\Delta v_F k_F^b - q_0 + \varepsilon_{-q}^a - \varepsilon_0^b + i\delta}{-\Delta v_F (q + k_F^a) - q_0 + \varepsilon_{-q}^a - \varepsilon_0^b + i\delta} \right) \quad (45)$$

E para o caso $\Delta v_F = 0$, somando (40) e (43)

$$\chi_-^{ab}(\vec{q}) = -\frac{i}{2\pi} (q + \Delta k_F) G_-^b(q_0, q - k_F^a), \quad (46)$$

$$\chi_-^{ba}(\vec{q}) = -\frac{i}{2\pi} (q - \Delta k_F) G_-^a(q_0, q - k_F^b). \quad (47)$$

Temos também neste caso a relação

$$\chi_-^{ba}(-\vec{q}) = \chi_-^{ab}(\vec{q}). \quad (48)$$

que pode ser provada

$$-\frac{i}{2\pi} (q + \Delta k_F) G_-^b(q_0, q - k_F^a) \quad (49)$$

Apêndice 2: Cálculo explícito de alguns espalhamentos

A fim de ilustrar os procedimentos para os cálculos de espalhamento realizados em todos os canais de espalhamento, realizamos aqui passo a passo alguns espalhamentos partícula-buraco e partícula-partícula no canal interfrontal.

.1 Espalhamento interfrontal partícula-buraco

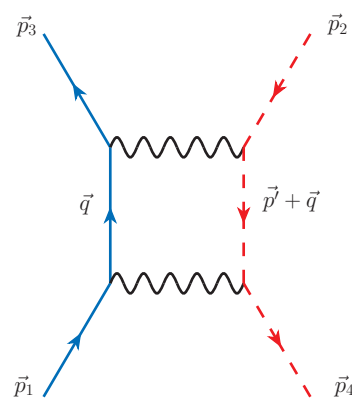


Figura 7: Diagrama partícula-buraco para o espalhamento interfrontal

A contribuição em 1-loop para o espalhamento interfrontal (figure 7) é dado

pela seguinte integral

$$\chi_{\mathcal{F}}(\vec{p}') = (-ig_{\mathcal{F}})^2 \int_{\vec{q}} iG_+^a(\vec{q}) iG_-^b(\vec{p}' + \vec{q}), \quad (50)$$

onde $\vec{p}' = \vec{p}_4 - \vec{p}_1$. Podemos também escrever (120) como

$$\chi_{\mathcal{F}}(\vec{p}') = -g_{\mathcal{F}}^2 \int_{\vec{q}} iG_+^a(\vec{q}) iG_-^b(\vec{p}' + \vec{q}), \quad (51)$$

As funções de Green correspondentes

$$G_+^a(\vec{q}) = \frac{\theta_q^{a>}}{q^0 - \varepsilon_q^a + i\delta} + \frac{\theta_q^{a<}}{q^0 - \varepsilon_q^a - i\delta} \quad (52)$$

e

$$G_-^b(\vec{p}' + \vec{q}) = \frac{\theta_{-(p'+q)}^{b>}}{p'^0 + q^0 - \varepsilon_{-(p'+q)}^b + i\delta} + \frac{\theta_{-(p'+q)}^{b<}}{p'^0 + q^0 - \varepsilon_{-(p'+q)}^b - i\delta}. \quad (53)$$

Temos assim

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{F}}(\vec{p}') &= g_{\mathcal{F}}^2 \int_{\vec{q}} \left(\frac{\theta_q^{a>}}{q^0 - \varepsilon_q^a + i\delta} \right. \\ &+ \left. \frac{\theta_q^{a<}}{q^0 - \varepsilon_q^a - i\delta} \right) \left(\frac{\theta_{-(p'+q)}^{b>}}{p'^0 + q^0 - \varepsilon_{-(p'+q)}^b + i\delta} + \frac{\theta_{-(p'+q)}^{b<}}{p'^0 + q^0 - \varepsilon_{-(p'+q)}^b - i\delta} \right), \end{aligned} \quad (54)$$

Assim, podemos fatorar o produto

$$\begin{aligned} G_+^a(\vec{q}) G_-^b(\vec{p}' + \vec{q}) &= \frac{\theta_q^{a>}}{q^0 - \varepsilon_q^a + i\delta} \frac{\theta_{-(p'+q)}^{b>}}{p'^0 + q^0 - \varepsilon_{-(p'+q)}^b + i\delta} \\ &+ \frac{\theta_q^{a>}}{q^0 - \varepsilon_q^a + i\delta} \frac{\theta_{-(p'+q)}^{b<}}{p'^0 + q^0 - \varepsilon_{-(p'+q)}^b - i\delta} \\ &+ \frac{\theta_q^{a<}}{q^0 - \varepsilon_q^a - i\delta} \frac{\theta_{-(p'+q)}^{b>}}{p'^0 + q^0 - \varepsilon_{-(p'+q)}^b + i\delta} \\ &+ \frac{\theta_q^{a<}}{q^0 - \varepsilon_q^a - i\delta} \frac{\theta_{-(p'+q)}^{b<}}{p'^0 + q^0 - \varepsilon_{-(p'+q)}^b - i\delta}. \end{aligned} \quad (55)$$

Do lema de Jordan, temos para (51)

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{F}}(\vec{p}') &= g_{\mathcal{F}}^2 \int_{\bar{q}} \left(\frac{\theta_q^{a>}}{q^0 - \varepsilon_q^a + i\delta} \right) \left(\frac{\theta_{-(p'+q)}^{b<}}{p'^0 + q^0 - \varepsilon_{-(p'+q)}^b - i\delta} \right) \\ &+ g_{\mathcal{F}}^2 \int_{\bar{q}} \left(\frac{\theta_q^{a<}}{q^0 - \varepsilon_q^a - i\delta} \right) \left(\frac{\theta_{-(p'+q)}^{b>}}{p'^0 + q^0 - \varepsilon_{-(p'+q)}^b + i\delta} \right). \end{aligned} \quad (56)$$

Integrando nas frequência, no semi-plano complexo positivo, de acordo com o teorema de Cauchy, temos

$$\int_{\bar{q}} \frac{\theta_q^{a>} \theta_{-(p'+q)}^{b<}}{(q^0 - \varepsilon_q^a + i\delta)(p'^0 + q^0 - \varepsilon_{-(p'+q)}^b - i\delta)} = \int_q \frac{i\theta_{-(p'+q)}^{b>} \theta_q^{a<}}{-p'^0 - (\varepsilon_q^a - \varepsilon_{-(p'+q)}^b) + i\delta} \quad (57)$$

e

$$\int_{\bar{q}} \frac{\theta_q^{a<} \theta_{-(p'+q)}^{b>}}{(q^0 - \varepsilon_q^a - i\delta)(p'^0 + q^0 - \varepsilon_{-(p'+q)}^b + i\delta)} = \int_q \frac{i\theta_{-(p'+q)}^{b<} \theta_q^{a>}}{p'^0 + \varepsilon_q^a - \varepsilon_{-(p'+q)}^b + i\delta}. \quad (58)$$

Podemos simplificar usando as relações

$$\begin{aligned} \varepsilon_q^a - \varepsilon_{-(p'+q)}^b &= v_F^a(q - k_F^a) - v_F^b(-(p' + q) - k_F^b) \\ &= V_F q + \varepsilon_0^a - \varepsilon_{-p'}^b. \end{aligned} \quad (59)$$

Das equações (57), (58) e (59), temos então

$$\chi_{\mathcal{F}}(\vec{p}') = ig_{\mathcal{F}}^2 \left[- \int_q \frac{\theta_{-(p'+q)}^{b>} \theta_q^{a<}}{p'^0 + V_F q + \varepsilon_0^a - \varepsilon_{-p'}^b - i\delta} + \int_q \frac{\theta_{-(p'+q)}^{b<} \theta_q^{a>}}{p'^0 + V_F q + \varepsilon_0^a - \varepsilon_{-p'}^b + i\delta} \right]. \quad (60)$$

Incluindo o cutoff Λ , para $\theta_{-(p'+q)}^{b<} \theta_q^{a>}$, temos os seguintes intervalos

$$\Lambda \geq k_F^b + (p' + q) \geq 0, \quad (61)$$

$$\Lambda \geq q - k_F^a \geq 0. \quad (62)$$

Para $\theta_{-(p'+q)}^{b>} \theta_q^{a<}$, temos os seguintes intervalos

$$\Lambda \geq -(p' + q) - k_F^b \geq 0, \quad (63)$$

$$\Lambda \geq k_F^a - q \geq 0. \quad (64)$$

Podemos assim escrever para $\theta_{-(p'+q)}^{b<} \theta_q^{a>}$,

$$\Lambda - (k_F^b + p') \geq q \geq -(k_F^b + p'), \quad (65)$$

$$\Lambda + k_F^a \geq q \geq k_F^a, \quad (66)$$

e para $\theta_{-(p'+q)}^{b>} \theta_q^{a<}$, temos os seguintes intervalos,

$$\Lambda + (k_F^b + p') \geq -q \geq (k_F^b + p'), \quad (67)$$

$$\Lambda - k_F^a \geq -q \geq -k_F^a, \quad (68)$$

ou

$$-(k_F^b + p') \geq q \geq -(k_F^b + p') - \Lambda, \quad (69)$$

$$k_F^a \geq q \geq k_F^a - \Lambda. \quad (70)$$

Temos duas possíveis situações

i) $K_F + p' \geq 0$;

$$\Lambda - (k_F^b + p') \geq q \geq k_F^a, \text{ for } \theta_{-(p'+q)}^{b<} \theta_q^{a>}. \quad (71)$$

$$-(k_F^b + p') \geq q \geq k_F^a - \Lambda, \text{ for } \theta_{-(p'+q)}^{b>} \theta_q^{a<}. \quad (72)$$

com contribuição de $\theta(K_F + p')$.

ii) $K_F + p' \leq 0$;

$$\Lambda + k_F^a \geq q \geq -(k_F^b + p'), \text{ for } \theta_{-(p'+q)}^{b<} \theta_q^{a>}. \quad (73)$$

$$k_F^a \geq q \geq -(k_F^b + p') - \Lambda, \text{ for } \theta_{-(p'+q)}^{b>} \theta_q^{a<}. \quad (74)$$

com contribuição de $\theta(-(K_F + p'))$.

Assim, a contribuição total é dada por

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{F}}(\vec{p}') = & - ig_{\mathcal{F}}^2 \int_{k_F^a}^{\Lambda - (k_F^b + p')} \frac{dq}{2\pi} \frac{\theta(K_F + p')}{p'^0 + V_F q + \varepsilon_0^a - \varepsilon_{-p'}^b - i\delta} \\ & - ig_{\mathcal{F}}^2 \int_{-(k_F^b + p')}^{\Lambda + k_F^a} \frac{dq}{2\pi} \frac{\theta(-(K_F + p'))}{p'^0 + V_F q + \varepsilon_0^a - \varepsilon_{-p'}^b - i\delta} \\ & + ig_{\mathcal{F}}^2 \int_{k_F^a - \Lambda}^{-(k_F^b + p')} \frac{dq}{2\pi} \frac{\theta(K_F + p')}{p'^0 + V_F q + \varepsilon_0^a - \varepsilon_{-p'}^b + i\delta} \\ & + ig_{\mathcal{F}}^2 \int_{-(k_F^b + p') - \Lambda}^{k_F^a} \frac{dq}{2\pi} \frac{\theta(-(K_F + p'))}{p'^0 + V_F q + \varepsilon_0^a - \varepsilon_{-p'}^b + i\delta}. \end{aligned}$$

Temos assim

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{F}}(\vec{p}') = & - \frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{2\pi} \int_{k_F^a}^{\Lambda - (k_F^b + p')} dq \frac{\theta(K_F + p')}{p'^0 + v_F q + \varepsilon_0^a - \varepsilon_{-p'}^b - i\delta} \\ & - \frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{2\pi} \int_{-(k_F^b + p')}^{\Lambda + k_F^a} dq \frac{\theta(-(K_F + p'))}{p'^0 + V_F q + \varepsilon_0^a - \varepsilon_{-p'}^b - i\delta} \\ & - \frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{2\pi} \int_{-(k_F^b + p')}^{k_F^a - \Lambda} dq \frac{\theta(K_F + p')}{p'^0 + V_F q + \varepsilon_0^a - \varepsilon_{-p'}^b + i\delta} \\ & - \frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{2\pi} \int_{k_F^a}^{-(k_F^b + p') - \Lambda} dq \frac{\theta(-(K_F + p'))}{p'^0 + v_F q + \varepsilon_0^a - \varepsilon_{-p'}^b + i\delta}. \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathcal{F}}(\vec{p}') = & - \frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{2\pi V_F} \theta(K_F + p') \ln \left(\frac{p'^0 + v_F(\Lambda - (k_F^b + p')) + \varepsilon_0^a - \varepsilon_{-p'}^b - i\delta}{p'^0 + v_F(k_F^a) + \varepsilon_0^a - \varepsilon_{-p'}^b - i\delta} \right) \\
& - \frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{2\pi V_F} \theta(-(K_F + p')) \ln \left(\frac{p'^0 + v_F(\Lambda + k_F^a) + \varepsilon_0^a - \varepsilon_{-p'}^b - i\delta}{p'^0 + v_F(-(k_F^b + p')) + \varepsilon_0^a - \varepsilon_{-p'}^b - i\delta} \right) \\
& - \frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{2\pi V_F} \theta(k_F + p') \ln \left(\frac{p'^0 + v_F(k_F^a - \Lambda) + \varepsilon_0^a - \varepsilon_{-p'}^b + i\delta}{p'^0 + v_F(-(k_F^b + p')) + \varepsilon_0^a - \varepsilon_{-p'}^b + i\delta} \right) \\
& - \frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{2\pi V_F} \theta(-(K_F + p')) \ln \left(\frac{p'^0 + v_F(-(k_F^b + p') - \Lambda) + \varepsilon_0^a - \varepsilon_{-p'}^b + i\delta}{p'^0 + v_F(k_F^a) + \varepsilon_0^a - \varepsilon_{-p'}^b + i\delta} \right).
\end{aligned}$$

Podemos ainda usar as seguintes simplificações

$$\varepsilon_0^a = -v_F^a k_F^a \quad (75)$$

$$\varepsilon_{-p'}^b = v_F^b (-(k_F^b + p')) \quad (76)$$

$$\Omega = V_F \Lambda \quad (77)$$

$$V_F (-(k_F^b + p')) = v_F^a (-(k_F^b + p')) + \varepsilon_{-p'}^b \quad (78)$$

$$V_F k_F^a = v_F^b k_F^a - \varepsilon_0^a \quad (79)$$

Podemos ainda simplificar mais usando as seguintes relações

$$v_F^b k_F^a - \varepsilon_{-p'}^b = v_F^b (p' + K_F) \quad (80)$$

$$v_F^a (-(k_F^b + p')) + \varepsilon_0^a = -v_F^a (p' + K_F). \quad (81)$$

Temos assim

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{F}}(\vec{p}') = & - \frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{2\pi V_F} \theta(K_F + p') \ln \left(\frac{p'^0 + \Omega - v_F^a(p' + K_F) - i\delta}{p'^0 + v_F^b(p' + K_F) - i\delta} \right) \\ & - \frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{2\pi V_F} \theta(-(K_F + p')) \ln \left(\frac{p'^0 + \Omega + v_F^b(p' + K_F) - i\delta}{p'^0 - v_F^a(p' + K_F) - i\delta} \right) \\ & - \frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{2\pi V_F} \theta(K_F + p') \ln \left(\frac{p'^0 - \Omega + v_F^b(p' + K_F) + i\delta}{p'^0 - v_F^a(p' + K_F) + i\delta} \right) \\ & - \frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{2\pi V_F} \theta(-(K_F + p')) \ln \left(\frac{p'^0 - \Omega - v_F^a(p' + K_F) + i\delta}{p'^0 + v_F^b(p' + K_F) + i\delta} \right).\end{aligned}$$

Considerando a conservação $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4$, temos na superfície de Fermi $K_F + p' = 0$ e usando a relação para funções theta $\theta(x) + \theta(-x) = 1$, chegamos ao resultado

$$\chi_{\mathcal{F}}(\vec{p}') = -\frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{\pi V_F} \ln \left(\frac{\Omega}{\omega} \right). \quad (82)$$

.2 Espalhamento interfrontal partícula-partícula

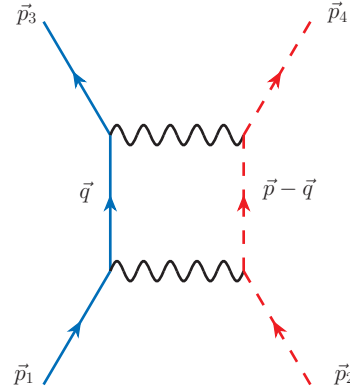


Figura 8: Diagram particle-particle interforward scattering

A contribuição em 1-loop para o espalhamento interfrontal partícula-partícula (figura 9) é dado pela seguinte integral

$$\Pi_{\mathcal{F}}(\vec{p}) = (-ig_{\mathcal{F}})^2 \int_{\vec{q}} iG_+^a(\vec{q}) iG_-^b(\vec{p} - \vec{q}), \quad (83)$$

onde $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. As funções de Green são dadas por

$$G_+^a(\vec{q}) = \frac{\theta_q^{a>}}{q^0 - \varepsilon_q^a + i\delta} + \frac{\theta_q^{a<}}{q^0 - \varepsilon_q^a - i\delta} \quad (84)$$

e

$$G_-^b(\vec{p} - \vec{q}) = \frac{\theta_{-(p-q)}^{b>}}{p^0 - q^0 - \varepsilon_{-(p-q)}^b + i\delta} + \frac{\theta_{-(p-q)}^{b<}}{p^0 - q^0 - \varepsilon_{-(p-q)}^b - i\delta}. \quad (85)$$

Temos então

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{F}}(\vec{p}) &= g_{\mathcal{F}}^2 \int_{\vec{q}} \left(\frac{\theta_q^{a>}}{q^0 - \varepsilon_q^a + i\delta} + \frac{\theta_q^{a<}}{q^0 - \varepsilon_q^a - i\delta} \right) \left(\frac{\theta_{-(p-q)}^{b>}}{p^0 - q^0 - \varepsilon_{-(p-q)}^b + i\delta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta_{-(p-q)}^{b<}}{p^0 - q^0 - \varepsilon_{-(p-q)}^b - i\delta} \right). \end{aligned} \quad (86)$$

Assim, podemos fatorar nos seguintes produtos

$$\begin{aligned} G_+^a(\vec{q})G_-^b(\vec{p} - \vec{q}) &= \frac{\theta_q^{a>}}{q^0 - \varepsilon_q^a + i\delta} \frac{\theta_{-(p-q)}^{b>}}{p^0 - q^0 - \varepsilon_{-(p-q)}^b + i\delta} \\ &+ \frac{\theta_q^{a>}}{q^0 - \varepsilon_q^a + i\delta} \frac{\theta_{-(p-q)}^{b<}}{p^0 - q^0 - \varepsilon_{-(p-q)}^b - i\delta} \\ &+ \frac{\theta_q^{a<}}{q^0 - \varepsilon_q^a - i\delta} \frac{\theta_{-(p-q)}^{b>}}{p^0 - q^0 - \varepsilon_{-(p-q)}^b + i\delta} \\ &+ \frac{\theta_q^{a<}}{q^0 - \varepsilon_q^a - i\delta} \frac{\theta_{-(p-q)}^{b<}}{p^0 - q^0 - \varepsilon_{-(p-q)}^b - i\delta}. \end{aligned} \quad (87)$$

Colocando -1 em evidência,

$$\begin{aligned} G_+^a(\vec{q})G_-^b(\vec{p} - \vec{q}) &= - \frac{\theta_q^{a>}}{p^0 + q^0 - \varepsilon_q^a + i\delta} \frac{\theta_{-(p-q)}^{b>}}{-p^0 + q^0 + \varepsilon_{-(p-q)}^b - i\delta} \\ &- \frac{\theta_q^{a>}}{q^0 - \varepsilon_q^a + i\delta} \frac{\theta_{-(p-q)}^{b<}}{-p^0 + q^0 + \varepsilon_{-(p-q)}^b + i\delta} \\ &- \frac{\theta_q^{a<}}{q^0 - \varepsilon_q^a - i\delta} \frac{\theta_{-(p-q)}^{b>}}{-p^0 + q^0 + \varepsilon_{-(p-q)}^b - i\delta} \\ &- \frac{\theta_q^{a<}}{q^0 - \varepsilon_q^a - i\delta} \frac{\theta_{-(p-q)}^{b<}}{-p^0 + q^0 + \varepsilon_{-(p-q)}^b + i\delta}. \end{aligned} \quad (88)$$

Do lema de Jordan, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{F}}(\vec{p}) &= -g_{\mathcal{F}}^2 \int_{\vec{q}} \left(\frac{\theta_q^{a>}}{q^0 - \varepsilon_q^a + i\delta} \right) \left(\frac{\theta_{-(p-q)}^{b>}}{-p^0 + q^0 + \varepsilon_{-(p-q)}^b - i\delta} \right) \\ &- g_{\mathcal{F}}^2 \int_{\vec{q}} \left(\frac{\theta_q^{a<}}{q^0 - \varepsilon_q^a - i\delta} \right) \left(\frac{\theta_{-(p-q)}^{b<}}{-p^0 + q^0 + \varepsilon_{-(p-q)}^b + i\delta} \right). \end{aligned} \quad (89)$$

Integração na frequência, no plano complexo positivo, de acordo com o teorema de Cauchy,

$$\int_{\vec{q}} \frac{\theta_q^{a>} \theta_{-(p-q)}^{b>}}{(q^0 - \varepsilon_q^a + i\delta)(q^0 - p^0 + \varepsilon_{-(p-q)}^b - i\delta)} = \int_q \frac{i\theta_q^{a>} \theta_{-(p-q)}^{b>}}{p^0 - (\varepsilon_q^a + \varepsilon_{-(p-q)}^b) + i\delta} \quad (90)$$

e

$$\int_{\vec{q}} \frac{\theta_q^{a<} \theta_{-(p-q)}^{b<}}{(q^0 - \varepsilon_q^a - i\delta)(q^0 - p^0 + \varepsilon_{-(p-q)}^b + i\delta)} = \int_q \frac{i\theta_q^{a<} \theta_{-(p-q)}^{b<}}{-p^0 + \varepsilon_q^a + \varepsilon_{-(p-q)}^b + i\delta} \quad (91)$$

Podemos simplificar usando

$$\begin{aligned} \varepsilon_q^a + \varepsilon_{-(p-q)}^b &= v_F^a(q - k_F^a) + v_F^b(-(p - q) - k_F^b) \\ &= V_F q + \varepsilon_0^a + \varepsilon_{-p}^b. \end{aligned} \quad (92)$$

Depois da integração na frequência, de (90), (91) e (92), temos

$$\Pi_{\mathcal{F}}(\vec{p}) = -ig_{\mathcal{F}}^2 \left[- \int_q \frac{\theta_q^{a>} \theta_{-(p-q)}^{b>}}{-p^0 + V_F q + \varepsilon_0^a + \varepsilon_{-p}^b - i\delta} + \int_q \frac{\theta_q^{a<} \theta_{-(p-q)}^{b<}}{-p^0 + V_F q + \varepsilon_0^a + \varepsilon_{-p}^b + i\delta} \right]. \quad (93)$$

Incluindo o cutoff Λ , para o produto $\theta_q^{a>} \theta_{-(p-q)}^{b>}$, temos os seguintes intervalos

$$\Lambda \geq -(p - q) - k_F^b \geq 0, \quad (94)$$

$$\Lambda \geq q - k_F^a \geq 0. \quad (95)$$

Para $\theta_q^a < \theta_{-(p-q)}^b$, temos os seguintes intervalos

$$\Lambda \geq k_F^b + (p - q) \geq 0, \quad (96)$$

$$\Lambda \geq k_F^a - q \geq 0. \quad (97)$$

Podemos também escrever para $\theta_q^a > \theta_{-(p-q)}^b$,

$$\Lambda + (k_F^b + p) \geq q \geq (k_F^b + p), \quad (98)$$

$$\Lambda + k_F^a \geq q \geq k_F^a, \quad (99)$$

e para $\theta_q^a < \theta_{-(p-q)}^b$, temos os seguintes intervalos,

$$\Lambda - (k_F^b + p) \geq -q \geq -(k_F^b + p), \quad (100)$$

$$\Lambda - k_F^a \geq -q \geq -k_F^a, \quad (101)$$

ou

$$(k_F^b + p) \geq q \geq (k_F^b + p) - \Lambda, \quad (102)$$

$$k_F^a \geq q \geq k_F^a - \Lambda. \quad (103)$$

Temos duas possíveis situações

i) $\Delta k_F + p \geq 0$;

$$\Lambda + k_F^a \geq q \geq (k_F^b + p), \text{ for } \theta_q^a > \theta_{-(p-q)}^b. \quad (104)$$

$$k_F^a \geq q \geq (k_F^b + p) - \Lambda, \text{ for } \theta_q^a < \theta_{-(p-q)}^b. \quad (105)$$

com contribuição de $\theta(\Delta k_F + p')$.

ii) $\Delta k_F + p \leq 0$;

$$\Lambda + (k_F^b + p) \geq q \geq k_F^a, \text{ for } \theta_q^{a>} \theta_{-(p-q)}^{b>}. \quad (106)$$

$$(k_F^b + p) \geq q \geq k_F^a - \Lambda, \text{ for } \theta_q^{a<} \theta_{-(p-q)}^{b<}. \quad (107)$$

com contribuição de $\theta(-(\Delta k_F + p'))$.

E a contribuição total

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{F}}(\vec{p}) &= ig_{\mathcal{F}}^2 \int_{(k_F^b+p)}^{\Lambda+k_F^a} \frac{dq}{2\pi} \frac{\theta(\Delta k_F + p')}{-p^0 + v_F q + \varepsilon_0^a + \varepsilon_{-p}^b - i\delta} \\ &+ ig_{\mathcal{F}}^2 \int_{k_F^a}^{\Lambda+(k_F^b+p)} \frac{dq}{2\pi} \frac{\theta(-(\Delta k_F + p'))}{-p^0 + v_F q + \varepsilon_0^a + \varepsilon_{-p}^b - i\delta} \\ &- ig_{\mathcal{F}}^2 \int_{(k_F^b+p)-\Lambda}^{k_F^a} \frac{dq}{2\pi} \frac{\theta(\Delta k_F + p')}{-p^0 + v_F q + \varepsilon_0^a + \varepsilon_{-p}^b + i\delta} \\ &- ig_{\mathcal{F}}^2 \int_{k_F^a-\Lambda}^{(k_F^b+p)} \frac{dq}{2\pi} \frac{\theta(-(\Delta k_F + p'))}{-p^0 + v_F q + \varepsilon_0^a + \varepsilon_{-p}^b + i\delta}. \end{aligned} \quad (108)$$

Podemos então integrar nos momentos, onde temos quatro integrações possíveis de cada condição na última seção

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{F}}(\vec{p}) &= ig_{\mathcal{F}}^2 \int_{(k_F^b+p)}^{\Lambda+k_F^a} \frac{dq}{2\pi} \frac{\theta(\Delta k_F + p')}{-p^0 + v_F q + \varepsilon_0^a + \varepsilon_{-p}^b - i\delta} \\ &+ ig_{\mathcal{F}}^2 \int_{k_F^a}^{\Lambda+(k_F^b+p)} \frac{dq}{2\pi} \frac{\theta(-(\Delta k_F + p'))}{-p^0 + v_F q + \varepsilon_0^a + \varepsilon_{-p}^b - i\delta} \\ &+ ig_{\mathcal{F}}^2 \int_{k_F^a}^{(k_F^b+p)-\Lambda} \frac{dq}{2\pi} \frac{\theta(\Delta k_F + p')}{-p^0 + v_F q + \varepsilon_0^a + \varepsilon_{-p}^b + i\delta} \\ &+ ig_{\mathcal{F}}^2 \int_{(k_F^b+p)}^{k_F^a-\Lambda} \frac{dq}{2\pi} \frac{\theta(-(\Delta k_F + p'))}{-p^0 + v_F q + \varepsilon_0^a + \varepsilon_{-p}^b + i\delta}. \end{aligned} \quad (109)$$

Isto leva a

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathcal{F}}(\vec{p}) &= \frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{2\pi V_F} \theta(\Delta k_F + p) \ln \left(\frac{-p^0 + v_F(\Lambda + k_F^a) + \varepsilon_0^a + \varepsilon_{-p}^b - i\delta}{-p^0 + v_F(k_F^b + p) + \varepsilon_0^a + \varepsilon_{-p}^b - i\delta} \right) \\
&+ \frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{2\pi V_F} \theta(-(\Delta k_F + p)) \ln \left(\frac{-p^0 + v_F(\Lambda + (k_F^b + p)) + \varepsilon_0^a + \varepsilon_{-p}^b - i\delta}{-p^0 + v_F k_F^a + \varepsilon_0^a + \varepsilon_{-p}^b - i\delta} \right) \\
&+ \frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{2\pi V_F} \theta(\Delta k_F + p) \ln \left(\frac{-p^0 + v_F((k_F^b + p) - \Lambda) + \varepsilon_0^a + \varepsilon_{-p}^b + i\delta}{-p^0 + v_F k_F^a + \varepsilon_0^a + \varepsilon_{-p}^b + i\delta} \right) \\
&+ \frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{2\pi V_F} \theta(-(\Delta k_F + p)) \ln \left(\frac{-p^0 + v_F(k_F^a - \Lambda) + \varepsilon_0^a + \varepsilon_{-p}^b + i\delta}{-p^0 + v_F(k_F^b + p) + \varepsilon_0^a + \varepsilon_{-p}^b + i\delta} \right).
\end{aligned} \tag{110}$$

Simplificações

$$\varepsilon_0^a = -v_F^a k_F^a \tag{111}$$

$$\varepsilon_{-p}^b = v_F^b (-(k_F^b + p)) \tag{112}$$

$$\Omega = V_F \Lambda \tag{113}$$

$$V_F(k_F^b + p) = v_F^a(k_F^b + p) - \varepsilon_{-p}^b \tag{114}$$

$$V_F k_F^a = v_F^b k_F^a - \varepsilon_0^a \tag{115}$$

Podemos simplificar ainda mais pelas seguintes relações

$$V_F k_F^a + \varepsilon_0^a + \varepsilon_{-p}^b = -v_F^b (\Delta k_F + p) \tag{116}$$

$$V_F(k_F^b + p) + \varepsilon_0^a + \varepsilon_{-p}^b = v_F^a (\Delta k_F + p). \tag{117}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathcal{F}}(\vec{p}) &= \frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{2\pi V_F} \theta(\Delta k_F + p) \ln \left(\frac{-p^0 + \Omega - v_F^b(\Delta k_F + p) - i\delta}{-p^0 + v_F^a(\Delta k_F + p) - i\delta} \right) \\
&+ \frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{2\pi V_F} \theta(-(\Delta k_F + p)) \ln \left(\frac{-p^0 + \Omega + v_F^a(\Delta k_F + p) - i\delta}{-p^0 - v_F^b(\Delta k_F + p) - i\delta} \right) \\
&+ \frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{2\pi V_F} \theta(\Delta k_F + p) \ln \left(\frac{-p^0 - \Omega + v_F^a(\Delta k_F + p) + i\delta}{-p^0 - v_F^b(\Delta k_F + p) + i\delta} \right) \\
&+ \frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{2\pi V_F} \theta(-(\Delta k_F + p)) \ln \left(\frac{-p^0 - \Omega - v_F^b(\Delta k_F + p) + i\delta}{-p^0 + v_F^a(\Delta k_F + p) + i\delta} \right). \quad (118)
\end{aligned}$$

Na superfície de Fermi, $\Delta k_F + p = 0$, e usando a relação para funções theta $\theta(x) + \theta(-x) = 1$, temos

$$\Pi_{\mathcal{F}}(\vec{p}) = \frac{ig_{\mathcal{F}}^2}{\pi V_F} \ln \left(\frac{\Omega}{\omega} \right). \quad (119)$$

.3 Interbackscattering no canal de espalhamento interfrontal

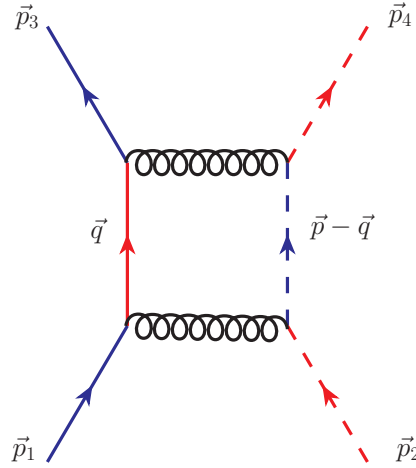


Figura 9: Diagrama de espalhamento envolvendo interbackscattering no canal de espalhamento interfrontal

A contribuição de interbackscattering no canal de espalhamento interfrontal

(figure 9) é dada por

$$\Pi_{\mathcal{B}}(\vec{p}) = (-ig_{\mathcal{B}})^2 \int_{\vec{q}} iG_+^b(\vec{q})iG_-^a(\vec{p}-\vec{q}), \quad (120)$$

Podemos realizar este cálculo passo a passo, como os anteriores, mas podemos também notar que este caso pode ser relacionado ao espalhamento interfrontal partícula-partícula por meio das seguintes substituições no interior $a \rightarrow b$ e $\Delta k_F \rightarrow -\Delta k_F$. Temos assim

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{B}}(\vec{p}) &= \frac{ig_{\mathcal{B}}^2}{2\pi V_F} \theta(-\Delta k_F + p) \ln \left(\frac{-p^0 + \Omega - v_F^a(-\Delta k_F + p) - i\delta}{-p^0 + v_F^b(-\Delta k_F + p) - i\delta} \right) \\ &+ \frac{ig_{\mathcal{B}}^2}{2\pi V_F} \theta(-(-\Delta k_F + p)) \ln \left(\frac{-p^0 + \Omega + v_F^b(-\Delta k_F + p) - i\delta}{-p^0 - v_F^a(-\Delta k_F + p) - i\delta} \right) \\ &+ \frac{ig_{\mathcal{B}}^2}{2\pi V_F} \theta(-\Delta k_F + p) \ln \left(\frac{-p^0 - \Omega + v_F^b(-\Delta k_F + p) + i\delta}{-p^0 - v_F^a(-\Delta k_F + p) + i\delta} \right) \\ &+ \frac{ig_{\mathcal{B}}^2}{2\pi V_F} \theta(-(-\Delta k_F + p)) \ln \left(\frac{-p^0 - \Omega - v_F^a(-\Delta k_F + p) + i\delta}{-p^0 + v_F^b(-\Delta k_F + p) + i\delta} \right). \end{aligned}$$

Na superfície de Fermi, $\Delta k_F + p = 0$, o que resulta no seguinte

$$\Pi_{\mathcal{B}}(\vec{p}) = \frac{ig_{\mathcal{B}}^2}{2\pi V_F} \left[\ln \left(\frac{\Omega}{2v_F^b \Delta k_F} \right) + \ln \left(\frac{\Omega}{2v_F^a \Delta k_F} \right) \right], \quad (121)$$

e para velocidades iguais $v_F^b = v_F^a$, temos

$$\Pi_{\mathcal{B}}(\vec{p}) = \frac{ig_{\mathcal{B}}^2}{\pi V_F} \ln \left(\frac{\Omega}{V_F \Delta k_F} \right). \quad (122)$$

Apêndice 3: Diagramas parquet

2-loops

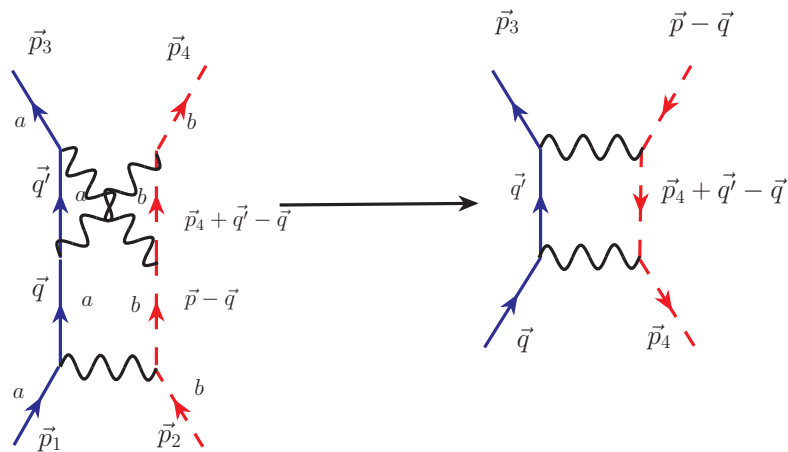


Figura 10: Diagrama parquet em 2-loops com termo cruzado. $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$.

Os diagramas parquet em 2-loops aparecem como combinação dos diagramas não-parquet em 1-loop, o que implica que são cancelados pelos contratermos de 1-loop. Ver que os diagramas partícula-partícula e partícula-buraco sem termos cruzados são parquet é quase imediato, porque levam a integrações independentes. Menos óbvio são os diagramas com termos cruzados. Estes são na verdade combinações de diagramas partícula-partícula e partícula-buraco. Um diagrama

partícula-partícula com termo cruzado é dado por

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathcal{F}}^{(-1,1)}(\vec{p}, \vec{p}_4) &= (-ig_{\mathcal{F}})^3 \int_{\vec{q}, \vec{q}'} iG_+^a(\vec{q}) iG_+^a(\vec{q}') iG_-^b(\vec{p} - \vec{q}) iG_-^b(\vec{p}_4 + \vec{q}' - \vec{q}) \\ &= (-ig_{\mathcal{F}})^3 \int_{\vec{q}} iG_+^a(\vec{q}) iG_-^b(\vec{p} - \vec{q}) \chi_{+-}^{ab}(\vec{p}_4 - \vec{q}),\end{aligned}\quad (123)$$

onde o termo -1 em $\Pi_f^{(-1,1)}$ significa o termo cruzado. A figura 10 mostra que na verdade o termo cruzado é um termo partícula-buraco.

Outro diagrama de termo cruzado do tipo parquet em 2-loops é dado na figura 11, mostra que o termo cruzado também é um termo partícula-buraco

$$\begin{aligned}\Pi_f^{(1,-1)}(\vec{p}, \vec{p}_2) &= (-ig_f)^3 \int_{\vec{q}, \vec{q}'} iG_+^a(\vec{q}) iG_+^a(\vec{q}') iG_-^b(\vec{p} - \vec{q}') iG_-^b(\vec{p}_2 + \vec{q} - \vec{q}') \\ &= (-ig_f)^3 \int_{\vec{q}} iG_+^a(\vec{q}) iG_-^b(\vec{p} - \vec{q}) \chi_{+-}^{ab}(\vec{p}_2 - \vec{q}).\end{aligned}\quad (124)$$

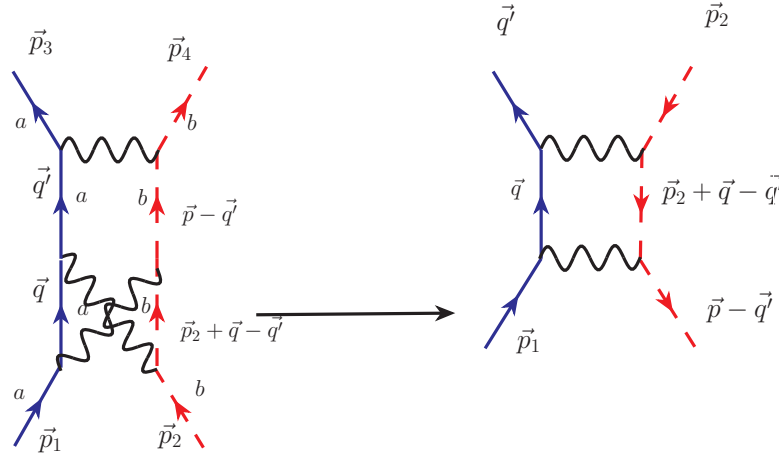


Figura 11: Diagrama parquet em 2-loops com termo cruzado.

Apêndice 4: Transformadas de Fourier envolvendo $\Gamma^{(2)}$ e $\Gamma^{(2,1)}$

Considerando as transformadas de Fourier para $\Gamma^{(2)}$ e $\Gamma^{(2,1)}$

$$\int dzdy e^{i(p'z-py)} \Gamma^{(2)}(z, y) = (2\pi)^2 \delta(\vec{p}' - \vec{p}) \Gamma^{(2)}(\vec{p}), \quad (125)$$

$$\int dx dz dy e^{i(p'z-py-qx)} \Gamma^{(2,1)}(z, y, x) = (2\pi)^2 \delta(\vec{p}' - \vec{p} - \vec{q}) \Gamma^{(2,1)}(\vec{p}, \vec{q}, \vec{p}') \quad (126)$$

$$\partial_x \Gamma^{(2,1)}(z, y; x) = \delta(x - z) \Gamma^{(2)}(z, y) - \delta(x - y) \Gamma^{(2)}(z, y), \quad (127)$$

Integrando em $dx dy dz$ e $e^{i(p'z-py)} e^{-iqx}$,

$$\int dx dy dz e^{i(p'z-py)} e^{-iqx} \partial_x \Gamma^{(2,1)} = -iq(2\pi)^2 \delta(p' - q - p) \Gamma^{(2,1)}(p, q, p + q) \quad (128)$$

$$\begin{aligned} \int dx dy_1 dx_1 e^{i(p'x_1-py_1)} e^{-iqx} \delta(x - y_1) \Gamma^{(2)}(x_1, y_1) &= \\ \int dy_1 dx_1 e^{ip'x_1} e^{-i(p+q)y_1} \Gamma^{(2)}(x_1, y_1) &= \\ i(2\pi) \delta(p' - q - p) \Gamma^{(2)}(p + q), & \quad (129) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int dx dy_1 dx_1 e^{i(p'x_1 - py_1)} e^{-iqx} \delta(x - x_1) \Gamma^{(2)}(x_1, y_1) &= \\
\int dy_1 dx_1 e^{i(p' - q)x_1} e^{-ipy_1} \Gamma^{(2)}(x_1, y_1) &= \\
i(2\pi) \delta(p' - q - p) \Gamma^{(2)}(p). & \quad (130)
\end{aligned}$$

Cancelando $i(2\pi)\delta(p' - q - p)$ em ambos os lados, chegamos à identidade de Ward-Takahashi no espaço dos momentos

$$q\Gamma^{(2,1)}(p, q, p + q) = \Gamma^{(2)}(p + q) - \Gamma^{(2)}(p) \quad (131)$$

Apêndice 5: Espinores para interações que mudam cor

Mostramos aqui que as interações interbackscattering e interumklapp podem ser escritas em termos de espinores que não misturam quiralidades (semelhantes aos espinores de Nambu)

$$\psi_{C+} = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_+^\dagger \end{pmatrix}, \psi_{C-} = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_-^\dagger \end{pmatrix} \quad (132)$$

$$\psi_{C+}^\dagger = \begin{pmatrix} \psi_+^\dagger & \psi_+ \end{pmatrix}, \psi_{C-}^\dagger = \begin{pmatrix} \psi_-^\dagger & \psi_- \end{pmatrix} \quad (133)$$

com as correspondentes correntes definidas como

$$J_{C+}^\mu = \bar{\psi}_{C+} \gamma^\mu \gamma^5 \psi'_{C+}, \quad (134)$$

$$J_{C-}^\mu = \bar{\psi}_{C-} \gamma^\mu \gamma^5 \psi'_{C-}. \quad (135)$$

Em 1 + 1 podemos escrever, incluindo os índices de cor (banda)

$$J_{C+}^{ab} = \begin{pmatrix} \psi_+^{a\dagger} \psi_+^b + \psi_+^{b\dagger} \psi_+^a \\ \psi_+^{a\dagger} \psi_+^b - \psi_+^{b\dagger} \psi_+^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{C+}^{0ab} \\ J_{C+}^{1ab} \end{pmatrix}, \quad (136)$$

$$J_{C-}^{ab} = \begin{pmatrix} \psi_-^{a\dagger} \psi_-^b + \psi_-^{b\dagger} \psi_-^a \\ \psi_-^{a\dagger} \psi_-^b - \psi_-^{b\dagger} \psi_-^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{C-}^{0ab} \\ J_{C-}^{1ab} \end{pmatrix}. \quad (137)$$

Consequentemente, podemos associar essas correntes às interações de mudança de cor, interbackscattering e interumklapp

$$J_{C-}^{0ab} = J_-^{ab} + J_-^{ba}, \quad (138)$$

$$J_{C-}^{1ab} = J_-^{ab} - J_-^{ba}, \quad (139)$$

$$J_{C+}^{0ab} = J_+^{ab} + J_+^{ba}, \quad (140)$$

$$J_{C+}^{1ab} = J_+^{ab} - J_+^{ba}. \quad (141)$$

$$J_{C-}^{0ba} = J_-^{ba} + J_-^{ab}, \quad (142)$$

$$J_{C-}^{1ba} = J_-^{ba} - J_-^{ab}, \quad (143)$$

$$J_{C+}^{0ba} = J_+^{ba} + J_+^{ab}, \quad (144)$$

$$J_{C+}^{1ba} = J_+^{ba} - J_+^{ab}, \quad (145)$$

Assim, os termos interbackscattering e interumklapp podem ser escritos em termos de correntes $J_{C\pm}^\mu$

$$g_{\mathcal{B}} J_+^{ba} J_-^{ab} = \frac{g_{\mathcal{B}}}{4} (J_{C+}^{0ab} - J_{C+}^{1ab}) (J_{C-}^{0ab} + J_{C-}^{1ab}), \quad (146)$$

$$g_{\mathcal{U}} J_+^{ba} J_-^{ba} = \frac{g_{\mathcal{U}}}{4} (J_{C+}^{0ab} - J_{C+}^{1ab}) (J_{C-}^{0ab} - J_{C-}^{1ab}). \quad (147)$$

ou equivalentemente

$$g_{\mathcal{B}} J_+^{ba} J_-^{ab} = \frac{g_{\mathcal{B}}}{4} (J_{C+}^{0ba} + J_{C+}^{1ba}) (J_{C-}^{0ba} - J_{C-}^{1ba}), \quad (148)$$

$$g_{\mathcal{U}} J_+^{ba} J_-^{ba} = \frac{g_{\mathcal{U}}}{4} (J_{C+}^{0ba} + J_{C+}^{1ba}) (J_{C-}^{0ba} + J_{C-}^{1ba}). \quad (149)$$

Referências Bibliográficas

- [1] A. Ferraz, *Renormalization group treatment of spin-charge separation effects*, Phys. Rev. B, **75** (2007) 233103.
- [2] F. D. M. Haldane, *'Luttinger liquid theory' of one-dimensional quantum fluids. I. Properties of the Luttinger model and their extension to the general 1D interacting spinless Fermi gas* J. Phys. C: Solid State Phys., **14** (1981) 2585.
- [3] T. Lorenz et al., *Evidence for spin-charge separation in quasi-one-dimensional organic conductors*, Nature **418** (2002) 614.
- [4] X. G. Wen, Phys. Rev. B, *Chiral Luttinger liquid and the edge excitations in the fractional quantum Hall states*, **41** (1990) 12838.
- [5] R. Egger, A. Zazunov, A. L. Yeyati, *Helical Luttinger Liquid in Topological Insulator Nanowires*, **105** (2010) 136403.
- [6] M. Bockrath, et al. *Luttinger-liquid behavior in carbon nanotubes*, Nature **397** (1999) 598.
- [7] Yao et al., *Carbon nanotube intramolecular junctions*, Nature, **402** (1999) 273.

-
- [8] P.D.C. King et al., *Structural Origin of Apparent Fermi Surface Pockets in Angle-Resolved Photoemission of $\text{Bi}_2\text{Sr}_{2-x}\text{La}_x\text{CuO}_{6+\delta}$* , Phys. Rev. Lett. **106** (2011) 127005.
- [9] D. Fournier et al., *Loss of nodal quasiparticle integrity in underdoped $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+x}$* , Nature Physics **6** (2010) 905.
- [10] T. Kondo et al., *Anomalies in the Fermi Surface and Band Dispersion of Quasi-One-Dimensional CuO Chains in the High-Temperature Superconductor $\text{YBa}_2\text{Cu}_4\text{O}_8$* , Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 267003.
- [11] J. Sólyom, *The Fermi gas model of one-dimensional conductors*, Advances in Physics, **28** (1979) 201.
- [12] E. Orignac, T. Giamarchi, *Effects of disorder on two strongly correlated coupled chains*, Phys. Rev. B, **56** (1997) 7167.
- [13] N. Menyhárd, *On the critical behaviour in quasi-1D metallic systems*, J. Phys. C, **12** (1979) 1297.
- [14] H-H. Lin, L. Balents, M. P. A. Fisher, *N-chain Hubbard model in weak coupling*, Phys. Rev. B, **56** (1997) 6569.
- [15] M. Fabrizio, A. Parola, E. Tosatti, *Strong-coupling phases of two Hubbard chains with interchain hopping*, Phys. Rev. B, **46** (1992) 3159.

-
- [16] J. C. Nickel, R. Duprat, C. Bourbonnais, N. Dupuis, *Superconducting pairing and density-wave instabilities in quasi-one-dimensional conductors*, Phys. Rev. B **73** (2006) 165126.
- [17] P. W. Anderson, “*Confinement*” in the One-Dimensional Hubbard Model: Irrelevance of Single-Particle Hopping, Phys. Rev. Lett., **67** (1991) 3844.
- [18] P. Nozières, *Theory of Interacting Fermi Systems* (Benjamin, New York, 1964).
- [19] S. Ledowski, P. Kopietz, A. Ferraz, *Self-consistent Fermi surface renormalization of two coupled Luttinger liquids*, Phys. Rev. B, **71** (2005) 235106.
- [20] L. F. Tocchio, F. Becca, C. Gros, *Strong renormalization of the Fermi-surface topology close to the Mott transition*, Phys. Rev. B **86** (2012) 035102.
- [21] C. Gros, K. Hamacher, W. Wenzel, *Breakdown of the Luttinger sum rule at the Mott-Hubbard transition in the one-dimensional t_1 - t_1 Hubbard model*, Europhysics Lett. **69** (2005) 616.
- [22] C. Gros, R. Valenti, Phys. Rev. B, *Cluster expansion for the self-energy: A simple many-body method for interpreting the photoemission spectra of correlated Fermi systems*, **48** (1993) 418.
- [23] K. Louis, J.V. Alvarez, C. Gros, *Fermi surface renormalization in Hubbard ladders*, Phys. Rev. B, **64** (2001) 113106.

-
- [24] K. Hamacher, C. Gros, and W. Wenzel, *Interaction-Induced Collapse of a Section of the Fermi Sea in the Zigzag Hubbard Ladder*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 217203.
- [25] S. Ledowski, P. Kopietz, *Fermi-surface renormalization and confinement in two coupled metallic chains*, Phys. Rev. B **75** (2007) 045134.
- [26] S. Ledowski, P. Kopietz, *Confined coherence in quasi-one-dimensional metals*, Phys. Rev. B **76** (2007) 121403(R).
- [27] M. Fabrizio, *Role of transverse hopping in a two-coupled-chains model*, Phys. Rev. B, **48** (1993) 15838.
- [28] F. D. M. Haldane, *Luttinger's Theorem and Bosonization of the Fermi Surface*, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi" (North-Holland, Amsterdam, 1994).
- [29] J.M. Luttinger, *Fermi Surface and Some Simple Equilibrium Properties of a System of Interacting Fermions*, Phys. Rev. **119** (1960) 1153.
- [30] M. Yamanaka, M. Oshikawa, I. Affleck, *Non-perturbative approach to Luttinger's theorem in one dimension*, Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 1110.
- [31] J. C. Ward, *An Identity in Quantum Electrodynamics*, Phys. Rev. **78** (1950) 182.
- [32] Y. Takahashi, *On the generalized Ward identity*, Nuovo Cimento **6** (1957) 371.

-
- [33] C. Itzykson, B. Zuber, *Quantum Field Theory* (Mc-GrawHill Inc., New York, 1980).
- [34] I. E. Dzyaloshinskii, A. I. Larkin, *Correlation functions for a one-dimensional Fermi system with long-range interaction (Tomonaga model)*, Sov.Phys-JEPT, **38** (1974) 202.
- [35] C. Di Castro, W. Metzner, *Ward identities and the β function in the Luttinger liquid*, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 3852.
- [36] K. Fujikawa, S. Suzuki, *Path Integrals and Quantum Anomalies* (Clarendon Press, Oxford, 2004).
- [37] P. Kopietz, L. Bartosch, L. Costa, A. Isidori, A. Ferraz, *Ward identities for the Anderson impurity model: derivation via functional methods and the exact renormalization group*, J. Phys. A: Math. Theor. **43** (2010) 385004.
- [38] A. Das, *Field Theory A Path Integral Approach* (World Scientific, Singapore, 2006).
- [39] G. Benfatto, G. Gallavotti, *Renormalization Group*, (Princeton University Press, 1993)
- [40] V. Mastropietro, *Non-perturbative renormalization* (World Scientific, Singapore, 2008).

-
- [41] V. Mastropietro, *Conductivity between Luttinger liquids: Coupled chains and bilayer graphene* Phys. Rev. B **84** (2011) 035109.
- [42] G. Benfatto, V. Mastropietro, *Ward Identities and Chiral Anomaly in the Luttinger Liquid*, Commun. Math. Phys., **258** (2005) 609.
- [43] L. Costa, A. Ferraz, V. Mastropietro, *Ward Identities for the Two-Coupled-Chains Model*, trabalho submetido, arXiv:1103.2744.
- [44] A. Ferraz, *Field theory renormalization group: the Tomonaga-Luttinger model revisited*, J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006) 7963.
- [45] H. Freire, E. Corrêa, A. Ferraz, Phys. Rev. B, *Field-theoretical renormalization group for a flat two-dimensional Fermi surface*, **71** (2005) 165113.
- [46] H. Freire, E. Corrêa, A. Ferraz, *Renormalization group calculation of the uniform susceptibilities in low-dimensional systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006) 7977.
- [47] H. Freire, E. Corrêa, A. Ferraz, *Insulating spin liquid in the lightly doped two-dimensional Hubbard model*, Phys. Rev. B, **73** (2006) 073103.
- [48] E. Corrêa, H. Freire, A. Ferraz, *Two-loop renormalization group calculation of response functions for a two-dimensional flat Fermi surface*, Phys. Rev. B **78** (2008) 195108.

-
- [49] H. Freire, E. Corrêa, A. Ferraz, *Breakdown of the Fermi-liquid regime in the two-dimensional Hubbard model from a two-loop field-theoretical renormalization group approach*, Phys. Rev. B, **78** (2008) 125114.
- [50] E. Corrêa, *Susceptibilidades de Carga e Spin para uma Superfície de Fermi Chata Bidimensional*, Tese de Doutorado, Instituto de Física, Universidade de Brasília-UnB, Brasília, 2006.
- [51] H. Freire, *O Líquido de Spin Isolante no Modelo de Hubbard Bidimensional Levemente Dopado*, Tese de Doutorado, Instituto de Física, Universidade de Brasília-UnB, Brasília, 2006.
- [52] J. Schwinger, *On Gauge Invariance and Vacuum Polarization*, Phys. Rev. **82** (1951) 664.
- [53] J. Schwinger, *Gauge Invariance and Mass. II*, Phys. Rev. **125** (1962) 2542.
- [54] N. S. Manton, *The Schwinger Model and Its Axial Anomaly*, Annals of Physics, **159** (1985) 220.
- [55] A. P. Balachandram, G. Marmo, B. S. Skargestam, A. Stern, *Classical Topology and Quantum States*, (World Scientific, Singapore, 1991).
- [56] S. L. Adler, W. A. Bardeen, *Absence of Higher Order Corrections in the Anomalous Axial-Vector Divergence Equation*, Phys. Rev. **182** (1969) 1517.

-
- [57] L. Alvarez-Gaumé, M. A. Vazquez-Mozo, *An invitation to quantum field theory* (Springer Verlag, Berlin, 2012).
- [58] L. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [59] T. Prudêncio, A. Ferraz, *Quantum confinement in the two-coupled chains model*, trabalho submetido.
- [60] A. Ferraz, E. A. Kochetov *Effective action for strongly correlated electron systems*, Nuc. Phys. B **853** (2011) 710.
- [61] G. I. Japaridze, H. Johannesson, A. Ferraz *Metal-insulator transition in a quantum wire driven by a modulated Rashba spin-orbit coupling*, Phys. Rev. B **80** (2009) 041308(R).
- [62] C. Pepin, M. R. Norman, S. Burdin, A. Ferraz, *Modulated Spin Liquid: A New Paradigm for URu₂Si₂*, Phys. Rev. Lett. **106** (2011) 106601.
- [63] E. Eriksson, A. Ström, G. Sharma, H. Johannesson, *Electrical control of the Kondo effect in a helical edge liquid*, Phys. Rev. B **86** (2012) 161103(R).
- [64] T. Prudêncio, *No-cloning theorem in thermofield dynamics*, International Journal of Quantum Information, **10** (2012) 1230001.
- [65] T. Prudêncio, *Parametric down conversion of a bosonic thermofield vacuum*, International Journal of Modern Physics A, **27** (2012) 1250124.