

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

**Hipersuperfícies Conformemente Planas em \mathbb{R}^4
e superfícies planas helicoidais em \mathbb{H}^3**

por

João Paulo dos Santos

Orientadora: Keti Tenenblat

Brasília

2012

*Aos meus pais,
Maria José dos Santos e
Walter da Silva Santos Júnior
e minha esposa, Daniele Nantes Sobrinho.*

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus, pela oportunidade de evoluir e por mais uma etapa vencida.

À minha grande família, meus pais e minha irmã, meus avós, minha tia e minhas primas, meu sogro e minha sogra. Agradeço por terem dado todo o apoio e pela disposição em ajudar em todos os momentos que precisei.

À Dani, pelo amor, carinho e apoio incondicional. Agradeço por estar presente em minha vida por todo este período, compartilhando alegrias e superando juntos os obstáculos que nos foram colocados. Sem ela, seria muito mais difícil chegar até aqui.

À professora Ketí Tenenblat pela oportunidade única de trabalhar sob sua orientação, o que me possibilitou uma experiência grandiosa. Agradeço por sua dedicação, pela paciência e competência profissional.

Ao professor Antonio Martínez, pela excelente orientação durante o estágio de doutorado sanduíche na Universidad de Granada. Agradeço pelo aprendizado que obtive através da dedicação e sabedoria em transmitir seu conhecimento.

Aos professores membros da banca, Kellcio Araújo, Paolo Piccione, Pedro Roitman e WALTERSON FERREIRA, por tornarem o meu trabalho melhor através das suas críticas e sugestões.

Aos professores do departamento de Matemática da UnB e do instituto de Matemática e Estatística da UFG, que foram fundamentais em minha formação profissional. Aos funcionários, agradeço pela eficiência nos serviços prestados.

Finalmente, mas não menos importante, agradeço aos colegas da UnB que participaram de todo o processo, desde a chegada em Brasília até a conclusão desta tese. Um agradecimento especial aos colegas e professores da Universidad de Granada. *¡Gracias por todo!*

Ao CNPq e CAPES, através dos programas CAPES/PROCAD e CAPES/DGU, pelo apoio financeiro.

“ Qualquer idéia que te agrade,

Por isso mesmo... é tua.

*O autor nada mais fez que vestir a verdade
Que dentro em ti se achava inteiramente nua... “*

Mário Quintana

Resumo

Estudamos classes de hipersuperfícies conformemente planas associadas a soluções invariantes por um grupo de simetria das equações de Lamé com a condição de Guichard.

Mostramos que os grupos de simetria deste sistema de equações diferenciais são dados por translações e dilatações nas variáveis independentes e dilatações nas variáveis dependentes. Além disso, obtemos as soluções invariantes pelo grupo de translação.

A partir dessas soluções, usamos os resultados de Hertrich-Jeromin para obter as hipersuperfícies conformemente planas e descrever as redes de Guichard correspondentes. Obtemos parametrizações explícitas de hipersuperfícies conformemente planas geradas a partir de superfícies planas no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 e na esfera \mathbb{S}^3 . Mais ainda, mostramos que associada a uma solução dada em termos de funções de Jacobi elípticas existe uma nova classe de hipersuperfícies conformemente planas. Quanto às redes de Guichard correspondentes, mostramos que suas superfícies coordenadas tem curvatura Gaussiana constante, e a soma das três curvaturas é igual a zero. Além disso, as redes de Guichard são folheadas por planos com curvatura Gaussiana nula e curvatura média constante.

Mostramos que a superfície plana em \mathbb{H}^3 possui primeira forma fundamental determinada por uma função linear. Em geral, uma superfície plana em \mathbb{H}^3 é determinada por uma função harmônica, assim como por dados meromorfs. Uma classificação completa de superfícies planas helicoidais em \mathbb{H}^3 é obtida em termos de suas aplicações de Gauss hiperbólicas e por funções harmônicas lineares. Incluímos uma família de exemplos que fornece a classificação das superfícies planas helicoidais. Mais ainda, mostramos que uma superfície plana em \mathbb{H}^3 correspondente a uma função harmônica linear é localmente congruente a uma superfície helicoidal ou ao “peach front”.

Palavras-chave: hipersuperfícies conformemente planas, equação de Lamé, Grupos de Simetria, Redes de Guichard, superfícies planas, superfícies helicoidais, espaço hiperbólico.

Abstract

We study classes of conformally flat hypersurfaces associated to solutions invariant by a symmetry group of Lamé's Equation satisfying the Guichard condition.

We show that the symmetry group of such system of differential equations are given by translations and dilations in the independent variables and dilations in the dependents variables. Moreover, we obtain the solutions invariant solutions by the translation group.

From these solutions, we use the results due to Hertrich-Jeromin in order to obtain the conformally flat hypersurfaces and describe the corresponding Guichard nets. We obtain explicit parametrizations of conformally flat hypersurfaces that are generated from flat surfaces in the hyperbolic spaces \mathbb{H}^3 and in the sphere \mathbb{S}^3 . Moreover, we show that associated to a solution, given in terms of Jacobi elliptic functions, there exists a new class of conformally flat hypersurfaces. With respect to the corresponding Guichard net, we show that their coordinate surfaces have constant Gaussian curvature, and the sum of the three curvatures is equal to zero. Moreover, the Guichard nets are foliated by flat planes with constant mean curvature.

We show that the flat surface in \mathbb{H}^3 has its first fundamental form determined by a linear function. In general, a flat surface in the hyperbolic space \mathbb{H}^3 is determined by a harmonic function, as well as by its meromorphic data. A complete classification of the helicoidal flat fronts is given in terms of their hyperbolic Gauss maps as well as by means of linear harmonic functions. A family of examples which provides the classification of the helicoidal flat fronts is included. Moreover, it is shown that a flat surface in \mathbb{H}^3 , that corresponds to a linear harmonic function, is locally congruent to a helicoidal flat front or to a "peach front".

Keywords: conformally flat hypersurfaces, Lamé's equations, symmetry groups, Guichard nets, flat surfaces, helicoidal surfaces, hyperbolic space.

Sumário

Introdução	1
1 Hipersuperfícies conformemente planas e Redes de Guichard	9
1.1 Definição do espaço ambiente	9
1.2 Imersões isométricas em L^5	13
1.3 Referencial adaptado e equações de compatibilidade	15
1.4 Imersões conformemente planas	19
1.5 Redes de Guichard	21
2 O grupo de simetria para as equações de Lamé	31
2.1 Introdução à Teoria dos Grupos de Simetria	31
2.1.1 Ação Local	32
2.1.2 Fluxos	33
2.1.3 Invariantes	35
2.1.4 Grupos de Simetria	37
2.2 Equações de Lamé	47
2.2.1 Cálculo dos Grupos	47
2.2.2 Cálculo dos invariantes	58
2.3 Soluções Invariantes das Equações de Lamé	61
3 Classes de hipersuperfícies conformemente planas associadas às soluções invariantes	69
3.1 O sistema de equações diferenciais do referencial adaptado	70
3.2 O referencial para soluções invariantes por subgrupo de translação das equações de Lamé	72

3.2.1	O caso $\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$	72
3.2.2	O caso geral $\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$	90
3.2.3	Os casos restantes	95
4	Propriedades Geométricas das redes de Guichard associadas às soluções in-	
	variantes	97
4.1	Superfícies de nível ξ_0	98
4.2	Superfícies Coordenadas	101
5	Superfícies planas no espaço hiperbólico associadas às hipersuperfícies con-	
	formemente planas	104
5.1	Modelos do Espaço Hiperbólico	105
5.2	Parametrizações das superfícies planas associadas	107
5.3	Superfícies helicoidais em \mathbb{H}^3	110
5.4	Representação conforme	112
5.5	Exemplos Classificatórios	116
5.6	Caracterização	120
A	O método das características	128

Introdução

Classificar hipersuperfícies conformemente planas tem sido um tópico de interesse em geometria diferencial há algum tempo. Assim como vemos em outros problemas de geometria, o problema em questão é fortemente influenciado pela dimensão da hipersuperfície.

Quando temos uma superfície regular, ou seja, uma hipersuperfície de dimensão $n = 2$ em \mathbb{R}^3 , o problema está resolvido. A solução está relacionada ao fato de que sempre é possível obter coordenadas isotérmicas para superfícies. Dessa forma, hipersuperfícies de dimensão $n = 2$ sempre são conformemente planas.

Para dimensões maiores, a primeira solução obtida foi dada em [6] por E. Cartan, em 1917. Neste trabalho Cartan deu uma classificação completa para as hipersuperfícies conformemente planas em formas espaciais de dimensão $n + 1 \geq 5$, caracterizando-as por aquelas quasi-umbílicas, ou seja, onde uma das curvaturas principais tem multiplicidade pelo menos $n - 1$.

No mesmo trabalho, Cartan fez um estudo de hipersuperfícies conformemente planas em formas espaciais de dimensão 4. Embora tenha mostrado que as quasi-umbílicas são conformemente planas, a recíproca não é verdadeira. Para aquelas hipersuperfícies conformemente planas genéricas, isto é, com curvaturas principais distintas, Cartan obteve a seguinte caracterização:

Uma hipersuperfície com três curvaturas principais distintas em uma forma espacial de dimensão 4 é conformemente plana se, e somente se, suas seis "distribuições umbílicas" (ou seja, os planos onde a segunda forma fundamental é múltipla da primeira forma fundamental) são integráveis.

Este foi por um bom tempo o único resultado existente para hipersuperfícies conformemente planas genéricas. Nesse sentido, o que tem sido feito desde então foi procurar classificações, mesmo que parciais, para esta classe de hipersuperfícies que satisfizessem a caracterização dada por Cartan, ou até mesmo fazendo uma releitura do seu trabalho, na intenção de obter mais

informações sobre tais hipersuperfícies.

Em 1988, Lafontaine em [15], tratou das hipersuperfícies do tipo $M^3 = M^2 \times I \subset \mathbb{R}^4$, obtendo três classes de soluções, as quais listamos aqui da maneira como estão resumidas em [30]:

- **Tipo produto direto:** M^3 é do tipo

$$M^3 = M^2 \times I \subset \mathbb{R}^3 \times I \subset \mathbb{R}^4,$$

onde M^2 é uma superfície de curvatura constante munida da métrica induzida por \mathbb{R}^3 ;

- **Tipo cone:** M^3 é do tipo

$$M^3 = \{tp : 0 < t < \infty, p \in M^2\},$$

onde M^2 é uma superfície de curvatura constante munida da métrica induzida por S^3 ;

- **Tipo rotação:** Seja \mathbb{H}^3 o espaço hiperbólico, onde podemos pensá-lo como subconjunto de \mathbb{R}^4 da seguinte maneira

$$\mathbb{H}^3 = \{(y^1, y^2, y^3, 0) : y^3 > 0\} \subset \mathbb{R}^4 = \{(y^1, y^2, y^3, y^4) : y^i \in \mathbb{R}\}.$$

Considere agora as rotações do eixo y^3 em torno do eixo y^4 , isto é,

$$(y^1, y^2, y^3, 0) \rightarrow (y^1, y^2, y^3 \cos t, y^3 \sin t),$$

então M^3 é obtida rotacionando da maneira acima uma superfície $M^2 \subset \mathbb{H}^3$ de curvatura constante na métrica induzida por \mathbb{H}^3 .

O trabalho de Lafontaine é notável e foi por algum tempo a principal referência para trabalhos posteriores. Os estudos que vieram posteriormente, trataram de obter novas classes que não estavam contidas nas três classes descritas acima.

Em 1994, Hertrich-Jeromin em [11], estudou o artigo de Cartan e tentou dar uma resposta mais satisfatória à questão envolvendo a dimensão da forma espacial igual a 4. Neste trabalho, o autor conseguiu uma correspondência entre as hipersuperfícies conformemente planas de dimensão 3 e as redes de Guichard, uma espécie de sistema triplamente ortogonal de superfícies consideradas inicialmente por C. Guichard em 1905 [10] onde se referiu a esses sistemas como um

análogo às coordenadas isotérmicas. Dessa forma, Hertrich-Jeromin transferiu o problema de classificar as hipersuperfícies conformemente planas para o problema de classificação das redes de Guichard em \mathbb{R}^3 , isto é, um sistema triplamente ortogonal de superfícies $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com uma métrica dada por

$$g = l_1^2(dx_1)^2 + l_2^2(dx_2)^2 + l_3^2(dx_3)^2, \quad (1)$$

onde as funções l_1 , l_2 e l_3 satisfazem a condição de Guichard

$$l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 = 0, \quad (2)$$

e o sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem, denominado equações de Lamé [16], dado por

$$\begin{aligned} l_{i,x_j x_k} - \frac{l_{i,x_j} l_{j,x_k}}{l_j} - \frac{l_{i,x_k} l_{k,x_j}}{l_k} &= 0, \\ \left(\frac{l_{i,x_j}}{l_j}\right)_{,x_j} + \left(\frac{l_{j,x_i}}{l_i}\right)_{,x_i} + \frac{l_{i,x_k} l_{j,x_k}}{l_k^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

para i, j, k distintos.

Usando redes de Guichard, Hertrich-Jeromin conseguiu um exemplo de rede de Guichard construída a partir de superfícies paralelas da hélice de Dini e verificou que a hipersuperfície conformemente plana correspondente não pertencia às classes produto das descritas por Lafontaine, fornecendo assim um novo exemplo ao problema.

A partir dos trabalhos de Cartan, Lafontaine e Hertrich-Jeromin, Suyama em 2000 e em 2005, com os trabalhos [28] e [29], conseguiu ampliar ainda mais o leque de classes de hipersuperfícies conformemente planas. A estratégia de Suyama foi verificar que, a partir das redes de Guichard descritas por Hertrich-Jeromin, sempre podemos supor que hipersuperfícies conformemente planas em formas espaciais de dimensão 4 admitem uma parametrização onde a primeira forma fundamental é dada por

$$g = e^{2P(x)} \{ \cos^2 \varphi(x) (dx_1)^2 + \sin^2 \varphi(x) (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \}, \quad (4)$$

ou

$$g = e^{2P(x)} \{ \cosh^2 \varphi(x) (dx_1)^2 + \sinh^2 \varphi(x) (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \}, \quad (5)$$

com respectivas segundas formas

$$II = e^{2P(x)} \{ a_1(x) \cos^2 \varphi(x) (dx_1)^2 + a_2(x) \sin^2 \varphi(x) (dx_2)^2 + a_3(x) (dx_3)^2 \}, \quad (6)$$

$$II = e^{2P(x)} \{a_1(x)\cosh^2\varphi(dx_1)^2 + a_2(x)\sinh^2\varphi(dx_2)^2 + a_3(x)(dx_3)^2\}. \quad (7)$$

Assim caracterizaram as hipersuperfícies em termos de primeira e segunda formas fundamentais. Especificamente, Suyama mostrou que a função φ é um invariante conforme, isto é, parametrizações com a mesma φ levam em hipersuperfícies conformemente equivalentes. Além disso, conseguiu classificar todas as classes já descobertas a partir da função φ , mostrando que, quando φ não depende de uma variável, a hipersuperfície está em uma das classes descritas por Lafontaine. Além disso, mostrou que o exemplo dado por Hertrich-Jeromin se encaixa na classe com primeira forma fundamental (4) onde

$$\varphi_{,x_1x_2} = \varphi_{,x_2x_3} = 0. \quad (8)$$

Partindo desta condição nas derivadas parciais de φ , Suyama obteve uma classificação parcial, fornecendo construções explícitas para as hipersuperfícies encontradas.

Em 2007, Hertrich-Jeromin e Suyama descreveram em [13] uma classificação total de hipersuperfícies conformemente planas que satisfazem (8). A classificação obtida foi dada em termos de redes de Guichard, seguindo as idéias introduzidas por Hertrich-Jeromin em [11], onde mostrou-se que as hipersuperfícies desta classe estão relacionadas a um tipo especial de redes de Guichard, denominada pelos autores de redes de Guichard cíclicas. Tal nome se deve ao fato de que uma das curvas coordenadas sempre está contida em um círculo.

O presente trabalho consiste em obter soluções l_1 , l_2 e l_3 para o sistema (2) e (3) e em seguida, utilizando o que foi descrito por Hertrich-Jeromin em [11], obter uma classe de hipersuperfícies conformemente planas correspondente. Para obter as soluções, utilizamos a teoria de grupos de simetrias para equações diferenciais parciais, através da teoria dada em [22]. A motivação segue do fato de que as equações de Lamé (3) com a condição de Guichard (2), reduzidas a um sistema de primeira ordem, assemelham-se tanto às equações generalizadas intrínsecas da onda e de sine-Gordon, quanto às equações generalizadas de Laplace e de sinh-Gordon elíptica. Tenenblat e Winternitz em [32] obtiveram o grupo de simetria para as equações generalizadas intrínsecas da onda e de sine-Gordon, enquanto Ferreira em [8], considerou as equações generalizadas de Laplace e de sinh-Gordon elíptica. As soluções invariantes pelo subgrupo de translação obtidas em [32] e [8] generalizam os resultados dados por Rabelo e Tenenblat em [23], onde consideraram soluções das equações generalizadas intrínsecas da onda e de sine-Gordon que dependem apenas de uma variável. Tais soluções estão associadas a

subvariedades de \mathbb{R}^{2n-1} e \mathbb{S}^{2n-1} chamadas subvariedades toroidais. Dessa forma, utilizamos as técnicas dos trabalhos citados para obter subgrupos de simetria para as equações de Lamé com a condição de Guichard, além das soluções invariantes por subgrupos de translação. Com essas soluções em mãos, partimos para a construção de hipersuperfícies conformemente planas associadas a essas soluções. Obtivemos parametrizações explícitas de hipersuperfícies contidas nas classes dadas por Lafontaine, além de uma classe onde temos a primeira forma fundamental do tipo (4) ou (5), onde a função φ é do tipo

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(\xi), \quad \text{com } \xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,$$

que satisfaz a equação

$$\varphi_{,\xi}^2 = \lambda(c_1 \cos^2 \varphi - c_2), \quad (9)$$

ou

$$\varphi_{,\xi}^2 = \lambda(c_1 \cosh^2 \varphi - c_2). \quad (10)$$

onde c_1 , c_2 e λ são constantes não nulas. Observe que podemos expressar as derivadas parciais de φ nas variáveis (x_1, x_2, x_3) em termos das derivadas ordinárias de φ em termos da variável ξ , através das relações

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \alpha_i \frac{d\varphi}{d\xi}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} &= \alpha_i \alpha_j \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2}. \end{aligned}$$

Considerando que todos os α_i 's são não nulos, temos a partir das relações acima que esta é uma nova classe que não está incluída em nenhuma classe obtida nos trabalhos anteriores.

Com relação à construção das hipersuperfícies conformemente planas associadas, mostramos que quando todos os α_i 's são não nulos, a construção está relacionada como soluções da equação diferencial parcial

$$f + f_{,x_1 x_1} - f_{,x_2 x_2} + f_{,x_3 x_3} - \beta_{12} f_{,x_1 x_2} - \beta_{13} f_{,x_1 x_3} - \beta_{23} f_{,x_2 x_3} = 0,$$

onde

$$\beta_{12} = \left(\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2}{\alpha_1 \alpha_2} \right), \quad \beta_{13} = \left(\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{\alpha_1 \alpha_3} \right), \quad \beta_{23} = \left(\frac{\alpha_3^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_2 \alpha_3} \right).$$

Quando um dos α_i 's é nulo, obtemos parametrizações explícitas para as hipersuperfícies conformemente planas. Neste caso os exemplos pertencem às duas das classes dadas por Lafontaine,

a saber, o tipo cone e o tipo rotação. Em ambos os casos as superfícies geratrizes correspondentes são superfícies de curvatura zero e estão parametrizadas por linhas de curvatura.

Estudamos ainda propriedades geométricas das redes de Guichard associadas as soluções invariantes por subgrupo de translação. Mostramos que suas superfícies coordenadas possuem curvatura Gaussiana constante e que a soma dessas curvaturas é igual a zero. Utilizando as técnicas descritas em [8], mostramos também que tais redes são folheadas por superfícies de curvatura gaussiana nula e curvatura média constante.

A segunda parte do trabalho consiste nos resultados obtidos durante o programa de doutorado sanduíche na Universidad de Granada, sob a co-orientação do professor Antonio Martínez. Neste parte, estudamos as superfícies planas obtidas através das hipersuperfícies planas correspondentes ao tipo rotação, isto é, estudamos superfícies planas no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 .

A teoria das superfícies planas no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 teve um desenvolvimento importante nos últimos anos. O renovado interesse nessa teoria teve início com o trabalho [9], onde foi provado que superfícies planas em \mathbb{H}^3 admitem uma representação de Weierstrass em termos de dados meromorfos, de modo análogo ao que ocorre com superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 . Este fato gerou um grande interesse no estudo de tais superfícies.

Sabe-se da teoria geral de superfícies planas no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 que, em uma vizinhança de um ponto não umbílico, sempre existe uma parametrização por linhas de curvatura onde a primeira e segunda forma fundamental são dadas por (para detalhes veja [31], página 8, Teorema 2.4 e página 15, Corolário 2.7)

$$I = \cosh^2 \phi(u, v)(du)^2 + \sinh^2 \phi(u, v)(dv)^2, \quad (11)$$

$$II = \sinh \phi(u, v) \cosh \phi(u, v) ((du)^2 + (dv)^2), \quad (12)$$

onde ϕ é uma função harmônica, na métrica Euclidiana, i.e., $\Delta\phi = 0$.

No caso das superfícies planas que obtivemos, a função harmônica correspondente é linear. Nesse sentido, como a primeira e a segunda formas fundamentais determinam a superfície a menos de uma isometria do espaço ambiente, caracterizamos as superfícies planas de \mathbb{H}^3 que possuem primeira e segunda formas fundamentais dadas pelas Equações (11) e (12), onde a função ϕ é dada por

$$\phi(u, v) = au + bv + c, \quad (13)$$

onde a , b e c são números reais tais que $(a, b, c) \neq (0, \pm 1, 0)$.

O método empregado para obter os resultados de classificação foi a representação de superfícies planas no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 via dados holomorfos introduzida por [9]. Esta representação é similar àquela empregada no estudo de superfícies mínimas de \mathbb{R}^3 e basicamente nos diz que, qualquer superfície plana de \mathbb{H}^3 está determinada por duas funções holomorfas g e g^* , chamadas *aplicações de Gauss hiperbólicas*, que são obtidas a partir da intersecção da geodésica normal a superfície, com a fronteira ideal de \mathbb{H}^3 . Reciprocamente, a partir de quaisquer duas funções holomorfas $g \neq g^*$, podemos recuperar uma imersão plana de \mathbb{H}^3 .

Como principais resultados obtidos, caracterizamos as superfícies planas em \mathbb{H}^3 com primeira e segunda formas fundamentais dadas por (11) e (12) em termos de suas aplicações de Gauss hiperbólicas e classificamos em termos de propriedades geométricas, a saber, são superfícies invariantes por um movimento helicoidal do espaço ambiente, denominadas *superfícies helicoidais*.

Organizamos o presente trabalho nos seguintes capítulos

- **Capítulo 1: Hipersuperfícies Conformemente planas e Redes de Guichard.**

Neste capítulo, apresentamos a teoria sobre hipersuperfícies conformemente planas e redes de Guichard desenvolvida por Hertrich-Jeromin em [11]. Consideramos imersões de variedades riemannianas de dimensão 3 no cone de luz dentro do espaço de Minkowski e observamos como essas imersões podem nos ajudar a obter condições para que hipersuperfícies em formas espaciais sejam conformemente planas. Apresentamos também a correspondência obtida entre tais hipersuperfícies e as Redes de Guichard.

- **Capítulo 2: O grupo de simetria para as equações de Lamé.**

Neste capítulo apresentamos a teoria de grupos de simetria de um sistema de equações diferenciais parciais. Apresentamos uma breve introdução aos métodos e técnicas, descrito de uma forma mais ampla e detalhada em [22]. Uma vez familiarizados com esta teoria, calculamos o grupo de simetria para as equações de Lamé, onde as funções l_1 , l_2 e l_3 satisfazem a condição de Guichard (2). Mostramos que o grupo consiste de translações e dilatações no espaço das variáveis e de dilatações no espaço das funções. Calculamos as soluções invariantes pelo subgrupo de translação, onde obtivemos funções trigonométricas, hiperbólicas e elípticas de Jacobi.

- **Capítulo 3: Classes de hipersuperfícies conformemente planas associadas às**

soluções invariantes. Neste capítulo, trabalhamos na integração do sistema descrito no Capítulo 1 que fornece a imersão plana no cone e o correspondente referencial adaptado, utilizando as soluções invariantes obtidas no Capítulo 2. Como resultados, obtivemos classes explícitas de hipersuperfícies conformemente planas, que podem ser vistas como subclasses das classes dadas por Lafontaine. Além disso, obtivemos uma nova classe, onde mostramos que a imersão é descrita através de uma equação diferencial parcial de segunda ordem com coeficientes constantes.

- **Capítulo 4: Propriedades geométricas das redes de Guichard associadas às soluções invariantes.** Neste capítulo mostramos as propriedades geométricas das redes de Guichard associadas às soluções invariantes obtidas no Capítulo 2. Mostramos que tais redes são folheadas por superfícies geodesicamente paralelas de curvatura Gaussiana nula e curvatura média constante. Além disso, mostramos que as superfícies coordenadas possuem curvatura Gaussiana constante e a soma dessas curvaturas é igual a zero.
- **Capítulo 5: Superfícies planas no espaço hiperbólico associadas às hipersuperfícies conformemente planas.** Neste capítulo mostramos os resultados gerais para superfícies helicoidais no espaço hiperbólico. Mostramos que as superfícies helicoidais planas em \mathbb{H}^3 são caracterizadas, por aquelas que, em seus pontos regulares não-umbílicos possuem uma parametrização por linhas de curvatura onde as primeira e segunda formas são dadas por (11) e (12), onde $\phi(u, v) = au + bv + c$, com $(a, b, c) \neq (0, 1, 0)$.

Capítulo 1

Hipersuperfícies conformemente planas e Redes de Guichard

Apresentaremos neste capítulo os principais resultados do trabalho de Hertrich-Jeromin [11]. Veremos como imersões isométricas de variedades riemannianas de dimensão 3 no cone de luz do espaço Minkowski nos ajudam a obter condições para que tenhamos hipersuperfícies de formas espaciais conformemente planas. Para isso, começaremos o capítulo estudando tais espaços. Uma vez estabelecidas as formas espaciais, estudaremos as imersões no cone de luz definindo o referencial móvel e a equação de Maurer-Cartan. Dessa forma, introduziremos as formas fundamentais conformes que darão origem a sistemas de coordenadas especiais, chamados redes de Guichard. Finalmente, mostraremos como as redes de Guichard e as equações de Lamé estão relacionadas com as hipersuperfícies conformemente planas.

Além do trabalho de Hertrich-Jeromin [11], outras referências para este capítulo são dadas por [12] e [25], onde as demonstrações detalhadas dos teoremas podem ser encontradas.

1.1 Definição do espaço ambiente

Definiremos a seguir o espaço em que iremos trabalhar de agora em diante. Veremos que, não teremos agora, no espaço ambiente, uma métrica positiva definida, mas o que é usualmente chamada de métrica *semi-riemanniana*. O leitor interessado poderá consultar [21] onde terá à disposição uma boa abordagem sobre o assunto.

Definição 1.1 Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^6 e a forma bilinear simétrica, não-degenerada

\langle, \rangle dada por:

$$\begin{aligned} \langle, \rangle &: \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto -v_0w_0 + \sum_{i=1}^5 v_iw_i. \end{aligned}$$

Dessa forma, \mathbb{R}^6 munido com o produto escalar \langle, \rangle é chamado espaço *Minkowski* e denotado por \mathbb{R}_1^6 .

Observação 1.1 Dizer que a forma bilinear simétrica é *não-degenerada* significa que se $\langle v, w \rangle = 0$ para todo w em \mathbb{R}^6 então $v = 0$.

Observação 1.2 Lembramos que quando temos uma transformação linear em \mathbb{R}^6 que preserva o produto interno usual, chamamos essa transformação de transformação ortogonal. No caso do espaço Minkowski \mathbb{R}_1^6 , as transformações lineares que preservam o produto escalar definido acima são chamadas *transformações de Lorentz* e o conjunto de todas as transformações de Lorentz formam um grupo, chamado *grupo de Lorentz* e denotado por $O_1(6)$.

O conjunto de todos os vetores y tais que $\langle y, y \rangle = 0$ será chamado *cone de luz* e denotado por L^5 . Assim,

$$L^5 = \{y \in \mathbb{R}_1^6 \mid \langle y, y \rangle = 0\}. \quad (1.1)$$

Trabalhando no cone de luz, vamos estudar subconjuntos que identificaremos com as formas espaciais. Especificamente, considere os vetores

$$m_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0), \quad m_0 = (1, 0, 0, 0, 0, -1), \quad m_{-1} = (0, 1, 0, 0, 0, 0). \quad (1.2)$$

Vamos mostrar que os conjuntos

$$M_K^4 = \{y \in L^5 \mid \langle y, m_K \rangle = -1\}, \quad (1.3)$$

onde $K = 1, 0$ ou -1 , com a métrica induzida por \mathbb{R}_1^6 são variedades riemannianas de curvatura seccional constante 1, 0 e -1, de acordo com K .

Começando com m_1 , considere o conjunto dado por $E_1^6 = \{y \in \mathbb{R}_1^6 \mid \langle y, m_1 \rangle = -1\}$. Em coordenadas, escrevendo $y = (y_0, \dots, y_5)$ concluímos que $E_1^6 = \{y \in \mathbb{R}_1^6 \mid y_0 = 1\}$. Assim, E_1^6 é um hiperplano passando por m_1 .

Identificando m_1 como a origem 0 do espaço vetorial E_1^6 podemos associar, para cada $y \in E_1^6$ um vetor $\bar{y} = y - m_1 = (0, y_1, \dots, y_5)$. Com essa identificação, olhamos para E_1^6 como o conjunto

dos vetores \bar{y} satisfazendo $\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^5 y_i^2$, que a métrica euclidiana usual. Dessa forma, E_1^6 torna-se um espaço euclidiano de dimensão 5.

Segue da definição de E_1^6 e de M_1^4 que $M_1^4 = E_1^6 \cap L^5$ e então se $y \in M_1^4$ temos

$$0 = \langle y, y \rangle = -1 + \sum_{i=1}^5 y_i^2,$$

o que implica

$$\sum_{i=1}^5 y_i^2 = \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = 1.$$

Assim, obtemos que M_1^4 é a esfera padrão unitária dentro de um espaço euclidiano de dimensão 5. Logo, M_1^4 é uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante igual a 1.

Para o caso m_{-1} temos uma situação bastante parecida. A saber,

$$E_{-1}^6 = \{y \in \mathbb{R}_1^6 \mid \langle y, m_{-1} \rangle = -1\} = \{y \in \mathbb{R}_1^6 \mid y_1 = -1\}.$$

E então, identificando a origem de E_{-1}^6 com $-m_{-1}$, E_{-1}^6 é visto como o conjunto dos vetores $\bar{y} = y - (-m_{-1}) = (y_0, 0, y_2, \dots, y_5)$ satisfazendo $\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = -y_0^2 + \sum_{i=2}^5 y_i^2$. Dessa forma, E_{-1}^6 torna-se um espaço Minkowski de dimensão 5.

Como $M_{-1}^4 = E_{-1}^6 \cap L^5$, temos que, se $y \in M_{-1}^4$,

$$0 = \langle y, y \rangle = -y_0^2 + \sum_{i=2}^5 y_i^2 + 1,$$

o que nos dá

$$-y_0^2 + \sum_{i=2}^5 y_i^2 = \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = -1.$$

Esta é a equação de um hiperbolóide de duas folhas em um espaço Minkowski de dimensão 5, variedade que sabemos ser Riemanniana e ter curvatura seccional constante igual à -1.

Considere agora o vetor m_0 . Nesse caso, se $y \in M_0^4$ então $\langle y, m_0 \rangle = -1$ portanto, $\langle y, m_0 \rangle = -y_0 - y_5 = -1$, isto é

$$y_0 + y_5 = 1. \tag{1.4}$$

Como $y \in L^5$ temos que $\langle y, y \rangle = 0$ e então $-y_0^2 + \sum_{i=1}^4 y_i^2 + y_5^2 = 0$ o que é equivalente a

$$\sum_{i=1}^4 y_i^2 = (y_0 + y_5)(y_0 - y_5).$$

Seja $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $x = (y_1, \dots, y_4)$ e então, denotando por $x \cdot x$ o produto interno usual de \mathbb{R}^4 e usando (1.4) podemos reescrever a equação acima como

$$x \cdot x = y_0 - y_5. \quad (1.5)$$

E assim, as equações (1.4) e (1.5) nos fornecem o seguinte sistema

$$\begin{cases} y_0 + y_5 = 1 \\ y_0 - y_5 = x \cdot x, \end{cases}$$

o que implica em

$$y_0 = \frac{1 + x \cdot x}{2} \quad \text{e} \quad y_5 = \frac{1 - x \cdot x}{2}.$$

Considere então a aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow L^5 \subset \mathbb{R}_1^6 \\ x &\longmapsto \left(\frac{1 + x \cdot x}{2}, x, \frac{1 - x \cdot x}{2} \right). \end{aligned}$$

Temos que f é claramente uma bijeção entre \mathbb{R}^4 e M_0^4 . Além disso, f é uma imersão isométrica. De fato, dados $p, v \in \mathbb{R}^4$ temos que $df_p(v) = (p \cdot v, v, -p \cdot v)$ e então

$$\begin{aligned} \langle df_p(v), df_p(w) \rangle &= -(p \cdot v)(p \cdot w) + v \cdot w + (p \cdot v)(p \cdot w) \\ &= v \cdot w. \end{aligned}$$

Como a curvatura seccional é preservada por isometrias obtemos que M_0^4 é uma variedade Riemanniana de curvatura seccional 0.

Observação 1.3 Para que tenhamos uma forma espacial conexa de curvatura seccional -1 usaremos somente a parte do cone de luz onde $y_0 > 0$, e assim, M_{-1}^4 terá somente uma componente conexa.

Observação 1.4 Inicialmente, notamos que se $y \in L^5$ então $\lambda y \in L^5$. Pelo que vimos acima, conseguimos uma isometria entre \mathbb{R}^4 e M_0^4 ,

$$x \in \mathbb{R}^4 \leftrightarrow \left(\frac{1 + |x|^2}{2}, x, \frac{1 - |x|^2}{2} \right) \in M_0^4 \subset L^5.$$

Note agora que, se $\lambda = \frac{2}{1 + |x|^2}$ temos

$$\lambda \left(\frac{1 + |x|^2}{2}, x, \frac{1 - |x|^2}{2} \right) = \left(1, \frac{2x}{1 + |x|^2}, \frac{1 - |x|^2}{1 + |x|^2} \right) \in L^5.$$

Mas vimos que, o conjunto dos pontos em L^5 tais que $y_0 = 1$ é exatamente M_1^4 . Dessa forma, passamos de M_0^4 para M_1^4 através de uma simples multiplicação por uma função escalar. Perceba ainda que a expressão que obtivemos é exatamente aquela da projeção estereográfica, já que podemos fazer a identificação

$$p \in S^3 \subset \mathbb{R}^4 \leftrightarrow (1, p) \in M_1^4 \subset L^5.$$

1.2 Imersões isométricas em L^5

O objetivo desta seção é estudar imersões isométricas de variedades riemannianas de dimensão 3 no cone de luz L^5 . A idéia é obter informações sobre essas aplicações e introduzir alguns conceitos importantes. Como as imersões serão sempre isométricas, as trataremos somente por imersões.

Iniciaremos com imersões de variedades tridimensionais nas formas espaciais de curvatura constante M_K^4 . Essas observações serão importantes pois, localmente, podemos ver a imersão como uma subvariedade de M_K^4 . Tais subvariedades serão hipersuperfícies, já que a codimensão é 1.

Considere então uma imersão Riemanniana $f : M^3 \rightarrow M_K^4 \subset L^5$ com um campo normal unitário n , ou seja, $\langle df, n \rangle \equiv 0$. Além disso, o campo n satisfaz $\langle n, m_K \rangle = 0$ e $\langle n, f \rangle = 0$, onde os m_K são dados por (1.2). De fato, para todo $p \in M^3$, $n(p) \in T_{f(p)}M_K^4$, e então se $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M_K^4$ é tal que $\alpha(0) = f(p)$ e $\alpha'(0) = n(p)$, temos

$$\langle \alpha(t), m_K \rangle = -1 \quad \text{e} \quad \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle = 0, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

o que implica, derivando em $t = 0$,

$$\langle \alpha'(0), m_K \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \alpha'(0), f(p) \rangle = 0.$$

Motivados com o que vimos acima, considere agora uma imersão $f : M^3 \rightarrow L^5$ (não necessariamente em M_K^4) com um campo normal unitário satisfazendo $\langle f, n \rangle = 0$. Como $\langle f, f \rangle = 0$ temos que $\langle df_p(v), f \rangle = 0$, assim seja u uma função diferenciável em M^3 , se $\tilde{f} = e^u f$ então

$$d\tilde{f}_p(v) = e^u du_p(v) f + e^u df_p(v).$$

Então a métrica induzida por \tilde{f} é tal que

$$\begin{aligned}\langle d\tilde{f}_p(v), d\tilde{f}_p(v) \rangle &= e^{2u} [du_p(v)]^2 \langle f, f \rangle + 2e^{2u} \langle f, df_p(v) \rangle + e^{2u} \langle df_p(v), df_p(v) \rangle \\ &= e^{2u} \langle df_p(v), df_p(v) \rangle\end{aligned}$$

ou seja, é uma métrica conforme à métrica induzida por f .

Assim, dada uma imersão $f : M^3 \rightarrow L^5$ podemos obter, através de uma simples multiplicação por uma função escalar, uma outra imersão \tilde{f} cuja métrica induzida é conforme à induzida por f .

Dada uma função diferenciável a em M^3 , se $\tilde{n} = n + af$, temos que

$$\begin{aligned}\langle f, n + af \rangle &= \langle f, n \rangle + a \langle f, f \rangle = 0 \\ \langle df, n + af \rangle &= \langle df, n \rangle + a \langle df, f \rangle = 0\end{aligned}$$

e assim, \tilde{n} ainda é um campo normal a f e a df . Além disso,

$$\begin{aligned}\langle \tilde{n}, \tilde{f} \rangle &= \langle \tilde{n}, e^u f \rangle = 0 \\ \langle \tilde{n}, d\tilde{f} \rangle &= \langle \tilde{n}, e^u (duf + df) \rangle = 0 \\ \langle \tilde{n}, \tilde{n} \rangle &= \langle n, n \rangle = 1\end{aligned}$$

Tais observações nos conduzem à seguinte definição:

Definição 1.2 Seja $f : M^3 \rightarrow L^5$ uma imersão tal que a métrica induzida $\langle df, df \rangle$ é positiva definida, seja n um campo normal unitário de f tal que $\langle f, n \rangle = 0$ e sejam u e a funções diferenciáveis em M^3 . Então o par (f, n) é denominado uma *faixa* e a mudança

$$\tilde{f} = e^u f \quad , \quad \tilde{n} = n + af$$

é chamada uma *deformação conforme* da faixa (f, n) .

Observação 1.5 Como vimos, considerando a mudança $\tilde{f} = e^u f$, continuamos com uma imersão em L^5 mas agora com uma métrica induzida conforme à métrica induzida por f . Assim, a idéia é obter uma imersão $f : M^3 \rightarrow L^5$ através de uma deformação conforme e obter condições para que a imersão \tilde{f} tenha métrica induzida plana, e portanto condições para que f seja conformemente plana. Dessa forma, obtida uma imersão com esta propriedade no cone de luz L^5 , basta fazer uma deformação conforme para que tenhamos $f : M^3 \rightarrow M_K^4$ conformemente plana e portanto hipersuperfícies conformemente planas nas formas espaciais. A mudança $\tilde{n} = n + af$ será conveniente em alguns casos, e ficará mais clara com o que faremos mais adiante.

1.3 Referencial adaptado e equações de compatibilidade

Para estudar as imersões em L^5 definiremos agora o referencial adaptado com que iremos trabalhar. Antes, considere uma base *pseudo-ortonormal* de \mathbb{R}_1^6 , isto é, um conjunto $\{e_1, \dots, e_6\} \in \mathbb{R}_1^6$ onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle e_A, e_B \rangle = \delta_{AB}, \quad \text{para } 1 \leq A, B \leq 4, \\ \langle e_5, e_A \rangle = \langle e_6, e_A \rangle = 0, \quad \text{para } 1 \leq A \leq 4, \\ \langle e_5, e_5 \rangle = \langle e_6, e_6 \rangle = 0, \\ \langle e_5, e_6 \rangle = \langle e_6, e_5 \rangle = 1. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Definição 1.3 Um *referencial adaptado* para uma faixa (f, n) é uma aplicação que associa a cada $p \in M^3$, uma base pseudo-ortonormal $\{n_1(p), \dots, n_6(p)\}$ satisfazendo, de acordo com os índices, as relações (1.6) acima, de forma que $\{n_1(p), n_2(p), n_3(p)\}$ é uma base ortonormal de $df_p(T_pM)$, $n_4 = n$ e $n_5 = f$.

Dessa forma, os vetores n_1, n_2 e n_3 são tangentes a M e n_4, n_5 e n_6 são normais a M. Por isso, é importante neste ponto, estabelecer a seguinte convenção de índices:

- as letras maiúsculas A, B, C, \dots serão usadas para variar os índices de 1 a 6;
- as letras minúsculas i, j, k, \dots serão usadas para variar os índices de 1 a 3;
- as letras gregas $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ serão usadas para variar os índices de 4 a 6.

Introduzimos agora as 1-formas diferenciais ω_A e ω_{AB} definidas por:

$$\begin{aligned} df &= \sum_{A=1}^6 \omega_A n_A, \\ dn_A &= \sum_{C=1}^6 \omega_{AC} n_C. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Como df está sempre no espaço tangente, concluímos que, ω_4, ω_5 e ω_6 são identicamente nulas. Se $x_i \in \mathfrak{X}(M)$ são tais que $df_p(x_i(p)) = n_i(p)$, então temos que $\omega_i(x_j) = \delta_{ij}$. O conjunto $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ é chamado *co-referencial adaptado* e as formas ω_{AB} são as *formas de conexão*.

Note que, a partir de (1.7), podemos obter informações importantes com relação às formas de conexão ω_{AB} . Inicialmente, se $n_5 = f$, obtemos de (1.7) que:

$$\begin{aligned} \omega_{5i} &= \omega_i, \\ \omega_{5\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Por (1.6) temos que $\langle n_A, n_B \rangle$ é constante, o que implica $\langle dn_A, n_B \rangle + \langle n_A, dn_B \rangle = 0$ e então, por (1.7) obtemos que

$$\left\langle \sum_{C=1}^6 \omega_{AC} n_C, n_B \right\rangle + \left\langle n_A, \sum_{C=1}^6 \omega_{BC} n_C \right\rangle = 0, \quad (1.9)$$

que reduz-se aos seguintes casos:

$$\begin{cases} \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, & 1 \leq A, B \leq 4, \\ \omega_{A6} + \omega_{5A} = 0, & 1 \leq A \leq 4, \\ \omega_{A5} + \omega_{6A} = 0, & 1 \leq A \leq 4, \\ 2\omega_{56} = 0, \\ 2\omega_{65} = 0, \\ \omega_{55} + \omega_{66} = 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

obtidos considerando em (1.9) $B = 5$ (respectivamente $B = 6$) para obter a 2ª relação (respectivamente 3ª relação), $A = B = 5$ (respectivamente $A = B = 6$) para obter a 4ª relação (respectivamente 5ª relação) e $A = 5, B = 6$ para a última relação.

Se $\omega_{5\alpha} = 0$, temos que (1.10) implica em:

$$\begin{aligned} \omega_{46} &= -\omega_{54} = 0, \\ \omega_{66} &= -\omega_{55} = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Assim, a partir de (1.8), (1.10) e (1.11) concluimos que:

$$\begin{cases} \omega_{5i} = \omega_i, & 1 \leq i \leq 3, \\ \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, & 1 \leq A, B \leq 4, \\ \omega_{A6} + \omega_{5A} = 0, & 1 \leq A \leq 4, \\ \omega_{A5} + \omega_{6A} = 0, & 1 \leq A \leq 4, \\ \omega_{AA} = 0, & 1 \leq A \leq 6, \\ \omega_{5\alpha} = 0, & 4 \leq \alpha \leq 6, \\ \omega_{65} = \omega_{46} = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Considerando a diferencial de (1.7), obtemos as chamadas *equações de estrutura*:

$$\begin{cases} d\omega_A = \sum_{B=1}^6 \omega_B \wedge \omega_{BA}, \\ d\omega_{AB} = \sum_{C=1}^6 \omega_{AC} \wedge \omega_{CB}, \end{cases} \quad (1.13)$$

Pelo teorema fundamental das subvariedades, que também vale para o espaço Minkowski, a condição necessária e suficiente para que exista uma imersão $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+k}$ é que, definido um referencial adaptado, o co-referencial e as formas de conexão satisfaçam as equações de estrutura. O enunciado e a prova completa do teorema fundamental das subvariedades, para o caso euclidiano, podem ser encontrados em [33].

Como vimos $\omega_\alpha = 0$ (lembre-se que as letras gregas representam os índices de 4 a 6). Para $\alpha = 4$ temos $n_4 = n$, o vetor normal unitário que compõe a faixa (f, n) . Portanto:

$$d\omega_4 = \sum_{A=1}^6 \omega_A \wedge \omega_{A4} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \wedge \omega_{i4} + \sum_{\alpha=4}^6 \omega_\alpha \wedge \omega_{\alpha 4} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \wedge \omega_{i4}.$$

Pelo lema de Cartan, existem funções h_{ij}^4 tais que

$$\omega_{i4} = \sum_{j=1}^3 h_{ij}^4 \omega_j, \quad h_{ij}^4 = h_{ji}^4. \quad (1.14)$$

Como consequência, para cada $p \in M$ a forma bilinear definida em $T_p M \times T_p M$ dada por

$$H_n = \sum_{i=1}^3 \omega_i \omega_{i4} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 h_{ij}^4 \omega_i \omega_j, \quad (1.15)$$

é uma forma bilinear simétrica. E assim, podemos associar a H_n uma forma quadrática

$$II_n(x) = H_n(x, x),$$

chamada *segunda forma quadrática*. Decorre do que vimos acima que,

$$-\langle df, dn \rangle = -\left\langle \sum_{i=1}^3 \omega_i n_i, \sum_{A=1}^6 \omega_{4A} n_A \right\rangle = -\sum_{i=1}^3 \omega_i \omega_{4i} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \omega_{i4} = H_n, \quad (1.16)$$

relação que será útil em alguns casos.

Sabemos que a toda forma bilinear simétrica definida em um espaço vetorial está associada uma aplicação linear auto-adjunta. Assim, definimos o *tensor de Weingarten* A_n que a cada $p \in M$ associa uma aplicação linear auto-adjunta $A_n : T_p M \rightarrow T_p M$ tal que:

$$H_n(x, y) = -g(A_n(x), y), \quad (1.17)$$

onde g é a métrica induzida.

Dessa forma, usando (1.15) e (1.17) podemos obter facilmente a matriz de A_n na base $\{x_1, x_2, x_3\}$ já que

$$\begin{aligned} (A_n)_{lk} = g(An(x_l), x_k) = -H_n(x_l, x_k) &= -\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 h_{ij}^4 \omega_i(x_l) \omega_j(x_k) \\ &= -\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 h_{ij}^4 \delta_{il} \delta_{jk} = -h_{lk}^4. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Sendo A_n uma matriz auto-adjunta, admite então uma base ortonormal de auto-vetores onde, nesta base, a matriz de A_n é dada por

$$\begin{pmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 \end{pmatrix},$$

nesse caso, $h_{ii}^4 = a_i$ e $h_{ij}^4 = 0$ para $i \neq j$.

Assim, as funções a_i são as curvaturas principais e os auto-vetores que constituem essa base são as direções principais associados a faixa (f, n) . Quando o referencial adaptado for definido de forma que a parte tangencial seja dada por $n_i = df(v_i)$ com v_i uma direção principal da faixa (f, n) , chamaremos esse referencial de um *referencial adaptado de direções principais para a faixa (f, n)* .

Vamos agora relacionar o que introduzimos acima com as formas diferenciais definidas com o referencial adaptado. Temos que:

$$\omega_{4i} = -\sum_{j=1}^3 h_{ij}^4 \omega_j. \quad (1.19)$$

Portanto por (1.15), H_n fica da forma:

$$H_n = -\sum_{i=1}^3 \omega_i \omega_{4i}. \quad (1.20)$$

Trabalhando com um referencial adaptado de direções principais, as equações anteriores se reduzem à:

$$\omega_{4i} = -a_i \omega_i \text{ e } H_n = \sum_{i=1}^3 a_i \omega_i^2.$$

1.4 Imersões conformemente planas

O objetivo desta seção é mostrar condições necessárias e suficientes para que uma imersão $f : M^3 \rightarrow L^5$ seja conformemente plana. Embora estejamos procurando imersões conformemente planas nas formas espaciais $M_K^4 \subset L^5$, é suficiente encontrá-las simplesmente em L^5 já que, por uma deformação conforme, podemos obter uma imersão \tilde{f} em M_K^4 cuja métrica induzida é conforme à métrica induzida por f e então, se f for uma imersão conformemente plana em L^5 , \tilde{f} será uma imersão conformemente plana em M_K^4 . Dessa forma, o que faremos é obter o referencial adaptado e as formas de conexão de uma faixa (\tilde{f}, \tilde{n}) resultante de uma deformação conforme da faixa (f, n) . A idéia é obter ambos em função do referencial e das formas de (f, n) e assim, exigindo que a imersão \tilde{f} seja plana, obteremos f conformemente plana.

Temos a seguir uma seqüência de proposições relacionadas às deformações conformes. Tais proposições mostram a construção de um referencial adaptado para a faixa (\tilde{f}, \tilde{n}) bem como as correspondentes formas de conexão.

Proposição 1.1 *Dado um referencial adaptado para uma faixa (f, n) como definido na Definição 1.3, um referencial adaptado para a deformação conforme (\tilde{f}, \tilde{n}) , onde $\tilde{f} = e^u f$ e $\tilde{n} = n + af$, é dado por:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{n}_i = n_i + u_i f, \\ \tilde{n} = n + af, \\ \tilde{f} = e^{-u} f, \\ \tilde{n}_6 = e^{-u} \left\{ \sum_{j=1}^3 (-u_j) n_j - an + \left[-\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^3 u_j^2 + a^2 \right) \right] f + n_6 \right\}. \end{array} \right. \quad (1.21)$$

onde $u_i = du(v_i)$.

Proposição 1.2 *Dados o co-referencial adaptado ω_i e as formas de conexão ω_{AB} de um referencial adaptado para a faixa (f, n) . Então, as formas correspondentes para a faixa (\tilde{f}, \tilde{n}) , onde*

$\tilde{f} = e^u f$ e $\tilde{n} = n + af$ são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\omega}_i = e^u \omega_i, \\ \tilde{\omega}_{ij} = u_i \omega_j - u_j \omega_i + \omega_{ij}, \\ \tilde{\omega}_{4i} = \omega_{4i} + a \omega_i, \\ \tilde{\omega}_{6i} = e^{-u} \left(\omega_{6i} - a \omega_{4i} - \frac{1}{2} a^2 \omega_i - \tau_i \right), \\ \tilde{\omega}_{64} = e^{-u} \left(\sum_{j=1}^3 u_j \omega_{4j} + a du + \omega_{64} - da \right). \end{array} \right. \quad (1.22)$$

Além disso, se $\rho_{ij} = -d\omega_{ij} + \sum_{k=1}^3 \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$ são as formas de curvatura da faixa (f, n) , então as formas de curvatura correspondentes à faixa (\tilde{f}, \tilde{n}) são dadas por:

$$\tilde{\rho}_{ij} = \rho_{ij} - (\omega_i \wedge \tau_j + \tau_i \wedge \omega_j), \quad (1.23)$$

$$\text{onde } \tau_i = du_i - \sum_{j=1}^3 u_j \omega_{ij} - u_i du + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 u_j^2 \omega_i.$$

Proposição 1.3 *Sejam v_i as direções principais e a_i as curvaturas principais de uma faixa (f, n) . Seja (\tilde{f}, \tilde{n}) uma deformação conforme dada por*

$$\tilde{f} = e^u f \quad \text{e} \quad \tilde{n} = n + af.$$

Então as direções principais são preservadas pela deformação conforme e as curvaturas principais \tilde{a}_i associadas a (\tilde{f}, \tilde{n}) são dadas por:

$$\tilde{a}_i = e^{-u} (a_i - a). \quad (1.24)$$

De agora em diante, vamos considerar que estaremos sempre trabalhando em um referencial adaptado de direções principais para a faixa (f, n) . Além disso, vamos estabelecer uma convenção envolvendo as curvaturas principais. Sempre que falarmos das funções a_1 , a_2 e a_3 , elas estarão satisfazendo à seguinte ordem:

$$a_1 < a_2 < a_3$$

Com isso, temos a seguinte definição:

Definição 1.4 Definimos as *formas fundamentais conformes* da faixa (f, n) como sendo as formas α_i dadas por:

$$\begin{cases} \alpha_1 &= \sqrt{a_3 - a_1} \sqrt{a_2 - a_1} \omega_1, \\ \alpha_2 &= \sqrt{a_2 - a_1} \sqrt{a_3 - a_2} \omega_2, \\ \alpha_3 &= \sqrt{a_3 - a_2} \sqrt{a_3 - a_1} \omega_3. \end{cases} \quad (1.25)$$

Uma observação interessante é que as formas α_i são invariantes por deformações conformes. Como vimos em (1.24), com uma deformação conforme, passando da faixa (f, n) para a faixa (\tilde{f}, \tilde{n}) , as curvaturas principais passam de a_i para $\tilde{a}_i = e^{-u}(a_i - a)$ e então, calculando $\tilde{\alpha}_1$, por exemplo, temos

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= \sqrt{\tilde{a}_3 - \tilde{a}_1} \sqrt{\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1} \tilde{\omega}_1 = \sqrt{e^{-u}(a_3 - a - a_1 + a)} \sqrt{e^{-u}(a_2 + a - a_1 - a)} e^u \omega_1 \\ &= \sqrt{e^{-2u}(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)} e^u \omega_1 \\ &= \sqrt{a_3 - a_1} \sqrt{a_2 - a_1} \omega_1 \\ &= \alpha_1. \end{aligned}$$

Dessa forma, exigindo que a métrica $\langle d\tilde{f}, d\tilde{f} \rangle$ de uma deformação conforme (\tilde{f}, \tilde{n}) de uma faixa (f, n) seja plana, temos o seguinte teorema, que caracteriza imersões conformemente planas de dimensão 3 em L^5 :

Teorema 1.1 *Seja $f : M^3 \rightarrow L^5$ uma imersão riemanniana e n um vetor normal unitário tal que $\langle f, n \rangle = 0$. Então f é conformemente plana se, e somente se, as formas fundamentais conformes da faixa (f, n) dadas em (1.25) são fechadas, isto é, $d\alpha_i = 0$.*

1.5 Redes de Guichard

Nesta seção, usaremos o Teorema 1.1 para mostrar a existência de uma parametrização por linhas de curvatura através de um sistema de coordenadas especial, chamado redes de Guichard.

Definição 1.5 (Redes de Guichard) *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 3 e*

$$X = (x_1, x_2, x_3) : (M^3, g) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

um sistema de coordenadas onde as componentes da métrica g são dadas por $g_{ij} = l_i \delta_{ij}$. Se as funções l_i satisfazem a relação

$$l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 = 0, \quad (1.26)$$

então o sistema de coordenadas X será chamada uma *Rede de Guichard* e a relação (1.26) será chamada *condição de Guichard*.

Segue então da definição de Redes de Guichard e do Teorema 1.1, o seguinte teorema:

Teorema 1.2 *Se uma imersão $f : M^3 \rightarrow L^5$ é conformemente plana e n um campo normal a f tal que $\langle f, n \rangle = 0$. Então existe uma parametrização por linhas de curvatura para a faixa (f, n) dada por uma rede de Guichard. Se além disso, f é uma imersão plana, então as componentes da métricas l_i satisfazem as equações de Lamé:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l_i}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{1}{l_j} \frac{\partial l_i}{\partial x_j} \frac{\partial l_j}{\partial x_k} - \frac{1}{l_k} \frac{\partial l_i}{\partial x_k} \frac{\partial l_k}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{l_j} \frac{\partial l_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{l_i} \frac{\partial l_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{l_k^2} \frac{\partial l_i}{\partial x_k} \frac{\partial l_j}{\partial x_k} &= 0, \end{aligned} \quad (1.27)$$

onde i, j e k são índices distintos variando em $\{1, 2, 3\}$.

Demonstração: Vimos no Teorema 1.1 que, a imersão $f : M^3 \rightarrow L^5$ é conformemente plana se, e somente se, as formas fundamentais conformes da faixa (f, n) , dadas por (1.25) são fechadas. Assim, usando o lema de Poincaré, obtemos um sistema de coordenadas X , através de funções x_i definidas em um aberto $U \subset M^3$ tal que

$$X = (x_1, x_2, x_3) : U \subset M^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

com $dx_i = \alpha_i$. Considerando as funções q_i :

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{\sqrt{a_3 - a_1} \sqrt{a_2 - a_1}}, \\ q_2 = \frac{1}{\sqrt{a_2 - a_1} \sqrt{a_3 - a_2}}, \\ q_3 = \frac{1}{\sqrt{a_3 - a_2} \sqrt{a_3 - a_1}}, \end{cases} \quad (1.28)$$

temos $dx_i = \frac{1}{q_i} \omega_i$. Seja $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$ a base de vetores tangentes às curvas coordenadas, então,

$$\delta_{ij} = dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{q_i} \omega_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \omega_i \left(\frac{1}{q_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Portanto

$$\frac{1}{q_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = v_i, \quad (1.29)$$

são as direções principais, já que as formas fundamentais conformes são definidas para um referencial adaptado de direções principais para a faixa (f, n) . Temos portanto uma parametrização por linhas de curvatura e conseqüentemente, um sistema de coordenadas *triplamente ortogonal*, ou seja, as superfícies coordenadas x_i constantes intersectam-se ortogonalmente.

Dado este sistema de coordenadas, considere

$$l_i = \sqrt{\left\langle df \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right), df \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right\rangle}.$$

Uma conseqüência do que vimos acima é que

$$l_i = \sqrt{\left\langle df \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right), df \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right\rangle} = \sqrt{\langle df(q_i v_i), df(q_i v_i) \rangle} = q_i. \quad (1.30)$$

Portanto as funções l_i satisfazem

$$l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 = q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 = \frac{1}{(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)} - \frac{1}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)} + \frac{1}{(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)} = 0,$$

o que prova a condição de Guichard. Quando temos uma imersão plana $f : M^3 \rightarrow L^5$, as equações de Lamé seguem diretamente da equação de Gauss.

□

Observação 1.6 As equações de Lamé 1.27 foram introduzidas por G. Lamé em [16], como equações que descrevem parametrizações ortogonais em \mathbb{R}^3 .

Uma vez garantida a existência de uma rede de Guichard para uma imersão plana $f : M^3 \rightarrow L^5$, podemos escrever o co-referencial e as formas de conexão do referencial adaptado em termos das funções l_i . É o que nos diz o seguinte teorema:

Teorema 1.3 *Seja $f : M^3 \rightarrow L^5$ uma imersão com métrica induzida plana g e curvaturas principais distintas a_1, a_2 e a_3 , associadas ao campo normal n , tal que $\langle f, n \rangle = 0$ e seja $X = (x_1, x_2, x_3) : (M^3, g) \rightarrow \mathbb{R}^3$ sua rede de Guichard correspondente dada pelo Teorema 1.2. Considere o referencial adaptado de direções principais*

$$n_i = \frac{1}{l_i} df \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad n_4 = n + a_3 f, \quad n_5 = f, \quad n_6,$$

onde $l_i = \sqrt{g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right)}$ satisfaz (1.27). Então, podemos escrever o co-referencial e as formas de conexão do referencial adaptado n_i , em termos da rede de Guichard, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\omega_i &= l_i dx_i, \\ \omega_{ij} &= -\frac{1}{l_j} \frac{\partial l_i}{\partial x_j} dx_i + \frac{1}{l_i} \frac{\partial l_j}{\partial x_i} dx_j, \\ \omega_{41} &= \frac{l_2}{l_3} dx_1, & \omega_{61} &= -\frac{l_1}{2l_3^2} dx_1, \\ \omega_{42} &= \frac{l_1}{l_3} dx_2, & \omega_{62} &= -\frac{l_2}{2l_3^2} dx_2, \\ \omega_{43} &= 0, & \omega_{63} &= \frac{1}{2l_3} dx_3,\end{aligned}\tag{1.31}$$

$$\begin{aligned}\omega_{5i} &= \omega_i, \\ \omega_{5\alpha} &= 0, \quad 4 \leq \alpha \leq 6,\end{aligned}$$

$$\omega_{64} = \frac{1}{l_1 l_2 l_3^2} \left(l_1^2 dl_3 + l_3^2 \frac{\partial l_3}{\partial x_1} dx_1 - l_1 l_3 \frac{\partial l_1}{\partial x_3} dx_3 \right),$$

e pelas relações

$$\begin{aligned}\omega_{AB} + \omega_{BA} &= 0, \quad 1 \leq A, B \leq 4, \\ \omega_{A6} + \omega_{5A} &= 0, \quad 1 \leq A \leq 4, \\ \omega_{A5} + \omega_{6A} &= 0, \quad 1 \leq A \leq 4, \\ \omega_{55} + \omega_{66} &= 0, \\ \omega_{65} &= \omega_{56} = 0.\end{aligned}\tag{1.32}$$

Como curvatura zero é uma propriedade intrínseca, consideramos M^3 como um subconjunto $U \subset \mathbb{R}^3$ com a métrica usual e f como uma imersão isométrica em L^5 . Assim, temos uma rede de Guichard em $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Podemos pensar na recíproca deste resultado, isto é, dada uma rede de Guichard em \mathbb{R}^3 queremos saber se é possível obter uma imersão plana $f : M^3 \rightarrow L^5$ e por consequência, uma imersão conformemente plana nas variedades de curvatura constante M_K^4 . Este é o conteúdo do seguinte resultado, que será fundamental para nossos objetivos futuros:

Teorema 1.4 *Seja $X = (x_1, x_2, x_3) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, uma rede de Guichard com suas funções l_i definidas por $l_i = \sqrt{g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right)}$, onde g a métrica euclidiana em U . Então, as funções*

l_i satisfazem (1.27) e as formas diferenciais (1.31) e (1.32), dadas em termos das funções l_i satisfazem as equações de estrutura e existe uma imersão isométrica $f : U \rightarrow L^5 \subset \mathbb{R}_1^6$ com primeira forma fundamental $I = \sum_{s=1}^3 l_s^2(dx_s)^2$ e um campo normal n tal que $\langle f, n \rangle = 0$, onde as curvaturas principais relativas a n são distintas.

Uma demonstração completa pode ser encontrada em [12] e [25]. A demonstração consiste em usar a condição de Guichard e as equações de Lamé para mostrar que as formas diferenciais dadas no teorema satisfazem as equações de estrutura (1.13) e assim, pelo Teorema Fundamental das Subvariedades, existe uma imersão $f : U \rightarrow \mathbb{R}_1^6$ e uma aplicação $F : U \rightarrow O_1(6)$, o grupo das transformações ortogonais de \mathbb{R}_1^6 , que para cada $p \in U$ associa uma base pseudo-ortonormal $\{n_1, \dots, n_6\}$ de vetores em \mathbb{R}_1^6 de forma que

$$\begin{cases} \langle n_A, n_B \rangle = \delta_{AB}, & 1 \leq A, B \leq 4 \\ \langle n_A, n_5 \rangle = \langle n_A, n_6 \rangle = 0, & 1 \leq A \leq 4 \\ \langle n_5, n_6 \rangle = 1, \\ \langle n_5, n_5 \rangle = \langle n_6, n_6 \rangle = 0. \end{cases}$$

Além disso, $\{n_1, n_2, n_3\}$ formam uma base para o espaço tangente de f e $\{n_4, n_5, n_6\}$ formam uma base para o espaço normal ao espaço tangente de f . Temos ainda que as formas ω_i e ω_{AB} estão relacionadas aos vetores n_A pelas relações:

$$\begin{aligned} df &= \sum_{i=1}^3 \omega_i n_i, \\ dn_A &= \sum_{B=1}^6 \omega_{AB} n_B. \end{aligned}$$

Como $\omega_{5i} = \omega_i$ e $\omega_{5\alpha} = 0$ temos que

$$dn_5 = \sum_{B=1}^6 \omega_{5B} n_B = \sum_{i=1}^3 \omega_i n_i = df.$$

Portanto, $dn_5 = df$ o que implica

$$n_5 = f + v,$$

onde $v \in \mathbb{R}_1^6$ é um vetor contante. Fixado $p_0 \in U$, podemos escolher nossa condição inicial de forma que $f(p_0) = n_5(p_0)$ o que implica em $v = 0$. Então

$$f(p) = n_5(p),$$

para todo $p \in U$. Como n_5 é normal ao espaço tangente de f , concluímos que

$$\langle df, f \rangle = 0,$$

implicando que $\langle f, f \rangle$ é constante. Escolhendo a condição inicial tal que $\langle f(p_0), f(p_0) \rangle = 0$ concluímos que

$$f(p) \in L^5,$$

para todo $p \in U$. Portanto, $f : U \rightarrow L^5 \subset \mathbb{R}_1^6$.

Denotando $n = n_4$ temos que $\langle f, n \rangle = \langle df, n \rangle = 0$. Portanto, (f, n) constituem uma faixa para a imersão f . Por (1.31), temos que:

$$\begin{aligned}\omega_{41} &= \frac{l_2}{l_3} dy_1 = \frac{l_2}{l_1 l_3} \omega_1, \\ \omega_{42} &= \frac{l_1}{l_3} dy_2 = \frac{l_1}{l_2 l_3} \omega_2, \\ \omega_{43} &= 0.\end{aligned}$$

Então as curvaturas principais associadas a faixa (f, n) são dadas por

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{l_2}{l_1 l_3}, \\ a_2 &= \frac{l_1}{l_2 l_3}, \\ a_3 &= 0.\end{aligned}$$

Afirmamos que as curvaturas principais são distintas. De fato, como as funções l_i são não nulas, temos inicialmente que

$$a_3 \neq a_1 \quad \text{e} \quad a_2 \neq a_1.$$

Suponha por contradição que $a_1 = a_2$, então

$$\frac{l_2}{l_1 l_3} = \frac{l_1}{l_2 l_3},$$

o que implica

$$\frac{l_2^2}{l_1 l_2 l_3} = \frac{l_1^2}{l_1 l_2 l_3}.$$

Portanto, $l_2^2 = l_1^2$, o que é um absurdo já que, pela condição de Guichard

$$l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 = 0,$$

implicando em $l_3 = 0$.

Como consequência dos Teoremas 1.3 e 1.4 temos então a correspondência entre redes de Guichard em \mathbb{R}^3 e hipersuperfícies conformemente planas em formas espaciais de dimensão 4.

Teorema 1.5 *Considere uma hipersuperfície conformemente plana, com curvaturas principais distintas, em uma forma espacial M_K^4 . Então existe uma rede de Guichard $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ para um aberto U do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , com as funções l_i definidas por $l_i = \sqrt{g \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right)}$, onde g a métrica euclidiana em U , que satisfazem (1.27). Tal rede é única a menos de transformações conformes.*

Reciprocamente, seja $X = (x_1, x_2, x_3) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, uma rede de Guichard com suas funções l_i definidas por $l_i = \sqrt{g \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right)}$, onde g a métrica euclidiana em U , que satisfazem (1.27). Então existe uma imersão $\tilde{f} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow M_K^4$ conformemente plana com curvaturas principais distintas em uma forma espacial M_K^4 , cuja métrica é dada por

$$g = e^{2u(x)} \{l_1^2(dx_1)^2 + l_2^2(dx_2)^2 + l_3^2(dx_3)^2\}, \quad (1.33)$$

onde u é uma função diferenciável que depende de M_K^4 . Neste caso, redes conformemente equivalentes implicam em imersões conformemente equivalentes.

Demonstração: A primeira parte é a conclusão do que fizemos neste capítulo. Dada uma hipersuperfície conformemente plana $f : M^3 \rightarrow M_K^4 \subset L^5$, aplicamos uma deformação conforme e obtemos uma imersão em $\tilde{f} : M^3 \rightarrow L^5$ com métrica induzida plana. Neste caso, pelo Teorema 1.2, existe uma rede de Guichard $X : M^3 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde as funções l_i satisfazem (1.27). Como curvatura zero é uma propriedade intrínseca, consideramos M^3 como um subconjunto $U \subset \mathbb{R}^3$ com a métrica euclidiana e f como uma imersão isométrica em L^5 . Assim, temos uma rede de Guichard em $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Para a recíproca, dada uma rede de Guichard em $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, o Teorema 1.4 garante que existe uma imersão $f : U \rightarrow L^5$ com primeira forma fundamental $I = \sum_{s=1}^3 l_s^2(dx_s)^2$ e um vetor normal n tal que $\langle f, n \rangle = 0$, onde as curvaturas principais relativas a n são distintas. Segue então da Proposição 1.3 que, se f é uma imersão com métrica induzida plana, efetuando uma deformação conforme (\tilde{f}, \tilde{n}) , onde $\tilde{f} = e^u f$ e $\tilde{n} = n + af$, obtemos uma imersão $\tilde{f} : U \rightarrow M_K^4$ conformemente plana, onde u e a são funções definidas em U que dependem de M_K^4 . Sejam a_i as curvaturas principais da imersão plana f referente ao campo normal n dados no teorema anterior. Como vimos em (1.24), com a deformação conforme, as curvaturas principais passam a ser

$$\tilde{a}_i = e^{-u}(a_i - a).$$

Então, se as curvaturas principais a_i são distintas, \tilde{a}_i também são. Dessa forma, obtemos uma imersão conformemente plana em M_K^4 com curvaturas principais distintas. Como a métrica plana é dada por $\langle df, df \rangle = \sum_{s=1}^3 l_s^2 (dx_s)^2$, segue que a métrica para \tilde{f} será dada por (1.33).

□

Além da correspondência entre redes de Guichard em \mathbb{R}^3 e hipersuperfícies conformemente planas em formas espaciais M_K^4 , outro ponto fundamental do teorema anterior é mostrar como podemos construir uma hipersuperfície conformemente plana a partir de um conjunto de funções reais e diferenciáveis (l_1, l_2, l_3) . Para isso, é necessário e suficiente que (l_1, l_2, l_3) satisfaçam o sistema de equações de Lamé

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l_i}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{1}{l_j} \frac{\partial l_i}{\partial x_j} \frac{\partial l_j}{\partial x_k} - \frac{1}{l_k} \frac{\partial l_i}{\partial x_k} \frac{\partial l_k}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{l_j} \frac{\partial l_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{l_i} \frac{\partial l_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{l_k^2} \frac{\partial l_i}{\partial x_k} \frac{\partial l_j}{\partial x_k} &= 0, \end{aligned}$$

e a condição de Guichard $l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 = 0$. Através deste conjunto de soluções, escrevemos as formas diferenciais (1.31) e (1.32) e obtemos um sistema integrável de equações diferenciais para um referencial adaptado a uma imersão plana $f : U \rightarrow L^5$. Integrando o sistema e realizando uma deformação conforme, a hipersuperfície conformemente plana em M_k^4 é obtida. No próximo capítulo, mostraremos como obter uma classe de soluções para as equações de Lamé com a condição de Guichard.

Para finalizar o capítulo, temos o seguinte corolário do Teorema 1.2

Corolário 1.1 *Dada uma hipersuperfície (M^3, g) conformemente plana em uma forma espacial de dimensão 4, existe uma parametrização por linhas de curvatura $X = (x_1, x_2, x_3) : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que g é dada nesta parametrização, por:*

$$g = e^{2P(x)} \{ \cos^2 \varphi(x) (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \sin^2 \varphi(x) (dx_3)^2 \} \quad (1.34)$$

ou

$$g = e^{2P(x)} \{ \sinh^2 \varphi(x) (dx_1)^2 + \cosh^2 \varphi(x) (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \} \quad (1.35)$$

com respectivas segundas formas quadráticas:

$$II = e^{2P(x)} \{ a_1(x) \cos^2 \varphi(x) (dx_1)^2 + a_2(x) (dx_2)^2 + a_3(x) \sin^2 \varphi(x) (dx_3)^2 \} \quad (1.36)$$

ou

$$II = e^{2P(x)} \{a_1(x)\sinh^2\varphi(x)(dx_1)^2 + a_2(x)\cosh^2(dx_2)^2 + a_3(x)(dx_3)^2\} \quad (1.37)$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ e $a_3(x)$ são as curvaturas principais.

Demonstração: Pelo Teorema 1.2, temos uma parametrização por linhas de curvatura para a nossa hipersuperfície dada por uma rede de Guichard $X = (x_1, x_2, x_3) : (M^3, g) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Como os vetores $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$ são ortogonais e $l_i = \sqrt{g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right)}$ temos que a métrica g induzida pela imersão, é dada por:

$$g = (l_1)^2(dx_1)^2 + (l_2)^2(dx_2)^2 + (l_3)^2(dx_3)^2.$$

Considere $l_2^2 = e^{2P(x)}$, então g é expressa por:

$$g = e^{2P(x)} \left\{ \frac{l_1^2}{l_2^2}(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \frac{l_3^2}{l_2^2}(dx_3)^2 \right\}.$$

Como $l_2^2 = l_1^2 + l_3^2$ temos que

$$0 < \frac{l_1^2}{l_2^2} = \frac{l_1^2}{l_1^2 + l_3^2} < 1,$$

o que é equivalente a $0 < \frac{l_1}{l_2} < 1$. Portanto, existe uma função diferenciável tal que $\cos \varphi(x) = \frac{l_1}{l_2}$.

Como

$$\frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{l_3^2}{l_2^2} = \frac{l_1^2 + l_3^2}{l_2^2} = 1,$$

temos que

$$\frac{l_3}{l_2} = \sin \varphi(x).$$

E obtemos (1.34). Para a equação (1.35), basta considerar $l_3^2 = e^{2P(x)}$ para obter

$$g = e^{2P(x)} \left\{ \frac{l_1^2}{l_3^2}(dx_1)^2 + \frac{l_2^2}{l_3^2}(dx_2)^2 + (dx_3)^2 \right\}.$$

Agora vemos que

$$\frac{l_2^2}{l_3^2} = \frac{l_1^2 + l_3^2}{l_3^2} > 1.$$

Dessa forma, tomamos uma função diferenciável tal que $\cosh \varphi(x) = \frac{l_2}{l_3}$. Como

$$\frac{l_2^2}{l_3^2} - \frac{l_1^2}{l_3^2} = \frac{l_2^2 - l_1^2}{l_3^2} = 1,$$

temos que

$$\frac{l_1}{l_3} = \sinh \varphi(x).$$

E obtemos (1.35).

Para obter (1.36) e (1.37), basta notar que, quando temos uma parametrização por linhas de curvatura, ao escrevermos uma métrica g da forma:

$$g = g_{11}(dx_1)^2 + g_{22}(dx_2)^2 + g_{33}(dx_3)^2,$$

a segunda forma fica dada por:

$$II = a_1(x)g_{11}(dx_1)^2 + a_2(x)g_{22}(dx_2)^2 + a_3(x)g_{33}(dx_3)^2.$$

Pelo que fizemos acima e pela expressão anterior, segue diretamente que as segundas formas fundamentais, relacionadas às métricas são dadas respectivamente por

$$II = e^{2P(x)} \{a_1(x) \cos^2 \varphi(x)(dx_1)^2 + a_2(x)(dx_2)^2 + a_3(x) \sin^2 \varphi(x)(dx_3)^2\},$$

e

$$II = e^{2P(x)} \{a_1(x) \sinh^2 \varphi(x)(dx_1)^2 + a_2(x) \cosh^2 \varphi(x)(dx_2)^2 + a_3(x)(dx_3)^2\}.$$

□

Observação 1.7 O Corolário 1.1 é o ponto de partida para o trabalho desenvolvido por Suyama em [29]. Suyama mostrou que a função φ é um invariante conforme, isto é, parametrizações com a mesma φ levam em hipersuperfícies conformemente equivalentes. Além disso, conseguiu classificar todas as classes já descobertas a partir da função φ , mostrando que, quando φ não depende de uma variável, a hipersuperfície está em uma das classes descritas por Lafontaine. Além disso, mostrou que o exemplo dado por Hertrich-Jeromin se encaixa na classe onde

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3} = 0. \quad (1.38)$$

Partindo desta condição nas derivadas parciais de φ Suyama obteve uma classificação parcial, fornecendo construções explícitas para as hipersuperfícies encontradas. Em 2007, Hertrich-Jeromin e Suyama descrevem em [13] uma classificação total de hipersuperfícies conformemente planas que satisfazem (1.38), para o caso (1.34) e que satisfazem

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3} = 0. \quad (1.39)$$

para o caso (1.35). A classificação obtida foi dada em termos de redes de Guichard, seguindo as idéias introduzidas por Hertrich-Jeromin em [11], onde mostrou-se que as hipersuperfícies desta classe estão relacionadas a um tipo especial de redes de Guichard, denominada pelos autores de redes de Guichard cíclicas.

Capítulo 2

O grupo de simetria para as equações de Lamé

Neste capítulo iremos calcular o grupo de simetria para as equações de Lamé (1.27) assim como soluções invariantes por subgrupos de translação. Faremos inicialmente uma introdução à Teoria dos Grupos de Simetria, para deixar o leitor familiarizado com os métodos e técnicas para calcular o grupo de simetria, efetuar cálculo de invariantes básicos e também de soluções invariantes.

Uma vez estabelecidas as noções da teoria dos grupos de simetria, partiremos em busca do grupo de simetria para as equações de Lamé. Veremos que o grupo é constituído de translações e dilatações no espaço das variáveis, e de dilatações no espaço das funções. Dando sequência ao capítulo, calcularemos os invariantes pelo subgrupo de translação e também as soluções do sistema invariantes pela ação deste subgrupo.

2.1 Introdução à Teoria dos Grupos de Simetria

A noção de grupos de simetria de sistema de equações diferenciais foi introduzida por Lie no final do século 19. Veremos que um grupo de Lie é um grupo de simetria de um sistema de equações diferenciais, quando, a grosso modo, a ação do grupo transforma soluções do sistema em outras soluções. Porém, a aplicação mais importante, consiste no uso de invariantes pela ação do grupo (ou de subgrupos) para reduzir o número de variáveis de uma equação diferencial parcial, podendo até mesmo, reduzir para um sistema de equações diferenciais ordinárias que

apresenta uma quantidade maior de técnicas de resolução, o que, em teoria, facilitaria nosso trabalho na busca de soluções para o sistema original.

Faremos nessa sessão uma breve introdução à teoria dos grupos de simetria de um sistema de equações diferenciais parciais. Por breve, entenderemos definições e exemplos básicos, assim como os resultados mais importantes para o nosso trabalho. O leitor interessado em aprofundar-se nesta teoria, poderá encontrar as demonstrações dos resultados, exemplos mais avançados e outras técnicas em [22].

2.1.1 Ação Local

Definição 2.1 Seja M uma variedade diferenciável. Um *grupo local de transformações* agindo em M é dado por um grupo de Lie G , um subconjunto aberto \mathcal{U} , tal que

$$\{e\} \times M \subset \mathcal{U} \subset G \times M,$$

onde e é o elemento neutro do grupo, e uma aplicação diferenciável $\Psi : \mathcal{U} \mapsto M$ satisfazendo as seguintes propriedades:

a) Se (h, x) , $(g, \Psi(h, x))$ e $(g \cdot h, x)$ pertencem a \mathcal{U} , então

$$\Psi(g, \Psi(h, x)) = \Psi(g \cdot h, x).$$

b) Para todo $x \in M$,

$$\Psi(e, x) = x.$$

c) Se $(g, x) \in \mathcal{U}$, então $(g^{-1}, \Psi(g, x)) \in \mathcal{U}$ e

$$\Psi(g^{-1}, \Psi(g, x)) = x.$$

Para simplificar a notação denotaremos $\Psi(g, x)$ por $g \cdot x$, de forma que as condições da definição acima são escritas como

$$\begin{aligned} g \cdot (h \cdot x) &= (g \cdot h) \cdot x, \\ e \cdot x &= x, \\ g^{-1} \cdot (g \cdot x) &= x. \end{aligned}$$

Onde g , h e x estão nas condições da definição.

Definição 2.2 Seja G um Grupo de Lie local de transformações agindo em M , então, para cada $x \in M$, definimos a *órbita através de x* por

$$\mathcal{O}_x = \{g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_k \cdot x \mid k \geq 1, g_i \in G \text{ e } g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_k \cdot x \text{ está definido.}\}$$

Além disso, dizemos que o grupo G age *semi-regularmente* se todas as órbitas são subvariedades de M com a mesma dimensão.

Exemplo 2.1 Exemplo de Grupos de Transformações.

a) O grupo de *translações* em \mathbb{R}^m : Seja $v \neq 0$ um vetor fixado em \mathbb{R}^m e seja $G = \mathbb{R}$ o grupo aditivo. Defina,

$$\Psi_v(\varepsilon, x) = x + \varepsilon v, x \in \mathbb{R}^m, \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

É fácil ver que as órbitas são retas paralelas a v de forma que a ação é semi-regular com órbitas unidimensionais.

b) O grupo de *dilatações* em \mathbb{R}^m : Considere novamente o grupo aditivo $G = \mathbb{R}$, uma constante $\lambda > 0$ e defina

$$\Psi_\lambda(\varepsilon, x) = \lambda^\varepsilon x, x \in \mathbb{R}^m, \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, temos órbitas unidimensionais, quando $x \neq 0$ e a órbita singular consistindo apenas da origem $\{0\}$. Dessa forma, a ação é semi-regular no conjunto aberto $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.

2.1.2 Fluxos

Seja \mathbf{v} um campo de vetores, vamos denotar por $\Psi(\varepsilon, x)$ a curva integral maximal de \mathbf{v} passando por x e dizer que Ψ é o *fluxo* gerado por \mathbf{v} . O fluxo de um campo vetorial possui as seguintes propriedades:

$$\Psi(\delta, \Psi(\varepsilon, x)) = \Psi(\delta + \varepsilon, x), x \in M, \quad (2.1)$$

para todo $\delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que ambos os lados estão definidos,

$$\Psi(0, x) = x, \quad (2.2)$$

e ainda,

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Psi(\varepsilon, x) = \mathbf{v}|_{\Psi(\varepsilon, x)}. \quad (2.3)$$

Comparando as propriedades (2.1) e (2.2) com os itens a) e b) da Definição 2.1, podemos ver que o fluxo gerado por um campo vetorial representa uma ação local do grupo de Lie \mathbb{R} em uma variedade M , dessa forma dizemos que Ψ é um *grupo a 1-parâmetro de transformações* e \mathbf{v} é chamado *gerador infinitesimal* da ação. Perceba que as órbitas deste grupo são as curvas integrais maximais do campo vetorial \mathbf{v} .

Reciprocamente, se $\Psi(\varepsilon, x)$ é um grupo a 1-parâmetro de transformações qualquer agindo em M , então o gerador infinitesimal é obtido fazendo

$$\mathbf{v}|_x = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Psi(\varepsilon, x). \quad (2.4)$$

Assim, o teorema de existência e unicidade garante que o fluxo gerado por \mathbf{v} coincide com a dada ação local de \mathbb{R} em M no domínio comum de definição.

Um grupo a 1-parâmetro gerado por um dado campo vetorial \mathbf{v} é frequentemente chamado de *exponenciação* do campo vetorial. Usaremos aqui a seguinte notação

$$\exp(\varepsilon \mathbf{v})x \equiv \Psi(\varepsilon, x).$$

Exemplo 2.2 *Exemplos de campos vetoriais e fluxos.*

a) Seja $M = \mathbb{R}$ com coordenada x e $\partial_x \equiv \vec{01}$ o vetor coordenado usual. Considere o campo vetorial $\mathbf{v} = \partial_x$. Segue que

$$\exp(\varepsilon \mathbf{v})x = \alpha(\varepsilon),$$

onde α é uma curva que satisfaz

$$\begin{cases} \alpha'(\varepsilon) = \mathbf{v}, \\ \alpha(0) = x. \end{cases} \quad (2.5)$$

Dessa forma temos que $\exp(\varepsilon \mathbf{v})x = x + \varepsilon$. Para o campo vetorial $\mathbf{v} = x\partial_x$, basta analisar o sistema (2.5) para ver que, neste caso $\exp(\varepsilon \mathbf{v})x = e^\varepsilon x$.

b) Seja $M = \mathbb{R}^2$ com coordenadas (x, y) e base coordenada usual $\partial_x \equiv e_1, \partial_y \equiv e_2$, onde $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica. Considere o grupo de rotações no plano

$$\exp(\varepsilon \mathbf{v})(x, y) = (x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon, x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon).$$

Seu gerador infinitesimal é um campo vetorial $\mathbf{v} = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$, onde, de acordo com (2.4)

$$\begin{aligned}\xi(x, y) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} (x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon) = -y, \\ \eta(x, y) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} (x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon) = x.\end{aligned}$$

Assim, $\mathbf{v} = -y\partial_x + x\partial_y$ é o gerador infinitesimal e, de fato, o grupo de transformações acima coincide com as soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x'(\varepsilon) = -y, \\ y'(\varepsilon) = x. \end{cases}$$

2.1.3 Invariantes

Definição 2.3 Seja G um grupo local de transformações agindo em uma variedade M . Uma função $\xi : M \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada um *invariante* de G se para todo $x \in M$ e para todo $g \in G$ tal que $g \cdot x$ está definido, vale

$$\xi(g \cdot x) = \xi(x).$$

Proposição 2.1 Seja G um grupo conexo de transformações agindo em uma variedade M . Uma função diferenciável $\xi : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função invariante para G se, e somente se,

$$\mathbf{v}(\xi) = 0, \quad \forall x \in M, \quad (2.6)$$

e para todo gerador infinitesimal \mathbf{v} de G .

Definição 2.4 Considere $\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)$ funções reais e diferenciáveis, definidas em M . Então

a) ξ_1, \dots, ξ_k são chamadas *funcionalmente dependentes* se para cada $x \in M$ existe uma vizinhança U de x e uma função real diferenciável $F(z_1, \dots, z_k)$, não identicamente nula em qualquer subconjunto de \mathbb{R}^k , tal que

$$F(\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)) = 0, \quad (2.7)$$

para todo $x \in U$.

b) ξ_1, \dots, ξ_k são chamadas *funcionalmente independentes* se não são funcionalmente dependentes quando restritas a um subconjunto aberto qualquer $U \subset M$.

O seguinte teorema nos dá a quantidade máxima de invariantes funcionalmente independentes que podemos obter por uma ação de G em M :

Teorema 2.1 *Suponha que G age semi-regularmente na variedade M de dimensão m com órbitas s -dimensionais. Se $x_0 \in M$, então existem precisamente $m - s$ invariantes funcionalmente independentes ξ_1, \dots, ξ_{m-s} definidos em uma vizinhança de x_0 . Além disso, qualquer outro invariante definido nesta vizinhança é da forma*

$$\xi(x) = F(\xi_1(x), \dots, \xi_{m-s}(x)), \quad (2.8)$$

para alguma função diferenciável F .

Falta mostrar como encontrar invariantes de um dado grupo de transformações. Inicialmente, suponha que G é um grupo de transformações a 1-parâmetro agindo em M , com gerador infinitesimal

$$\mathbf{v} = \eta_1(x)\partial_{x_1} + \dots + \eta_m(x)\partial_{x_m},$$

expresso em alguma parametrização local dada. Pela equação (2.6), um invariante ξ de G é uma solução da seguinte equação diferencial parcial linear de 1ª ordem

$$\mathbf{v}(\xi) = \eta_1(x)\partial_{x_1}\xi + \dots + \eta_m(x)\partial_{x_m}\xi = 0. \quad (2.9)$$

O Teorema 2.1 diz então que, se \mathbf{v} é não nulo, então existem $m-1$ invariantes funcionalmente independentes, conseqüentemente, $m-1$ soluções funcionalmente independentes da equação diferencial parcial (2.9) em uma vizinhança de $x_0 \in M$.

O cálculo de invariantes independentes para grupo de transformações a r -parâmetros consiste no seguinte: Se $\mathbf{v}_k = \sum_i \eta_i^k \partial_{x_i}$, $k = 1, \dots, r$ forma uma base para os geradores infinitesimais, então os invariantes são encontrados resolvendo o seguinte sistema linear homogêneo de equações diferenciais parciais de primeira ordem

$$\mathbf{v}_k(\xi) = \sum_{i=1}^m \eta_i^k \partial_{x_i} \xi = 0, \quad k = 1, \dots, r.$$

Uma maneira de proceder este cálculo é trabalhar de maneira indutiva, isto é, uma vez que ξ é necessariamente um *invariante simultâneo* de todos os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, calculamos inicialmente os invariantes de v_1 . Como qualquer invariante simultâneo ξ deve, em particular, ser um invariante de v_1 , escrevemos ξ como função dos invariantes calculados de \mathbf{v}_1 . Assim,

deveríamos reexpressar os vetores restantes v_2, \dots, v_r usando os invariantes de v_1 como coordenadas e então encontrar os invariantes simultâneos destes $r - 1$ “novos” campos vetoriais. Procedendo indutivamente, deveríamos ser capazes de encontrar os invariantes independentes simultâneos. Tal processo porém, pode não ser simples. Veremos na construção dos invariantes necessários para nosso problema, como esse procedimento funciona.

2.1.4 Grupos de Simetria

Considere um sistema \mathcal{S} de equações diferenciais envolvendo p variáveis independentes $x = (x_1, \dots, x_p)$ e q variáveis dependentes $u = (u_1, \dots, u_q)$. Seja $X = \mathbb{R}^p$, com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_p)$, o espaço das variáveis independentes e $U = \mathbb{R}^q$, com coordenadas $u = (u_1, \dots, u_q)$. Temos então a seguinte definição

Definição 2.5 Seja \mathcal{S} um sistema de equações diferenciais. Um *grupo de simetria* do sistema \mathcal{S} é um grupo local de transformações G agindo em um aberto $M \subset X \times U$ com a propriedade de sempre que $u = f(x)$ é uma solução de \mathcal{S} e sempre que $g \cdot f$ está definido para $g \in G$, então $u = g \cdot f(x)$ é ainda uma solução do sistema.

Uma das vantagens de se conhecer um grupo de simetria de um sistema de equações diferenciais é que podemos construir novas soluções do sistema a partir daquelas conhecidas. De fato, se sabemos que $u = f(x)$ é uma solução do problema, então $\tilde{u} = g \cdot f(\tilde{x})$ é também uma solução para qualquer elemento g , portanto, podemos encontrar famílias de soluções apenas aplicando a ação a uma solução conhecida por todos os elementos do grupo.

A outra vantagem consiste em encontrar soluções invariantes pela ação de um grupo de simetria. Veremos que esta vantagem é mais interessante, uma vez que o método de encontrar soluções invariantes permite reduzir a quantidade de variáveis do sistema, podendo inclusive reduzi-lo a uma equação diferencial ordinária que, na teoria, possui mais métodos para encontrar soluções. Por hora, vamos nos concentrar nos métodos para encontrar o grupo de simetria e posteriormente, mostraremos como encontrar soluções invariantes.

Considere uma função real diferenciável $f(x) = f(x_1, \dots, x_p)$ de p variáveis independentes. Um cálculo combinatório mostra que existem

$$p_k \equiv \binom{p+k-1}{k}$$

diferentes derivadas parciais de k -ésima ordem de f . Vamos empregar a seguinte notação de multi-índice:

$$f_{,J}(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_k}}. \quad (2.10)$$

Nesta notação, $J = (j_1, \dots, j_k)$ é uma k -upla não ordenada de inteiros, com entradas $1 \leq j_k \leq p$, indicando quais derivadas estão sendo tomadas. Denotamos a ordem de tal multi-índice por $|J| \equiv k$. Em geral, se $f : X \rightarrow U$ é uma função diferenciável de $X \subset \mathbb{R}^p$ para $U \subset \mathbb{R}^q$, de forma que $u = (u_1(x), \dots, u_q(x))$, existem $q \cdot p_k$ números $u_{\alpha,J}$ necessários para representar todas as diferentes derivadas de k -ésima ordem das componentes de u em um ponto x . Seja $U_k \equiv \mathbb{R}^{q \cdot p_k}$, munido com coordenadas $u_{\alpha,J}$ para α variando de 1 a q e para todos multi-índices $J = (j_1, \dots, j_k)$ de ordem k .

Definimos então o *espaço de jatos* de ordem n sobre o espaço $X \times U$ o conjunto

$$X \times U^{(n)} := X \times U \times U_1 \cdots \times U_n, \quad (2.11)$$

que representa as variáveis independentes, as variáveis dependentes e as derivadas das variáveis independentes de ordens no máximo k . Um ponto de $U^{(n)}$ será denotado por

$$u^{(n)} = \text{pr}^{(n)}u(x), \quad (2.12)$$

chamado o n -ésimo *prolongamento* de u . Dessa forma, $\text{pr}^{(n)}u$ é uma função de X no espaço $U^{(n)}$ que para cada x em X associa um vetor tal que suas coordenadas representam os valores de u e suas derivadas de ordem no máximo n em x .

Voltemos agora ao nosso sistema de equações diferenciais. Um sistema de equações diferenciais \mathcal{S} de ordem n em p variáveis independentes e q variáveis dependentes é dado por um sistema de equações

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, m.$$

Assumiremos que as funções $\Delta(x, u^{(n)}) = (\Delta_1(x, u^{(n)}), \dots, \Delta_m(x, u^{(n)}))$ são diferenciáveis em seus argumentos, de forma que Δ pode ser vista como uma aplicação diferenciável do espaço de jatos $X \times U^{(n)}$ em algum espaço euclidiano m -dimensional,

$$\Delta : X \times U^{(n)} \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Assim, o sistema \mathcal{S} indica onde a aplicação Δ se anula em $X \times U^{(n)}$ e, conseqüentemente, determina uma subvariedade

$$\mathcal{S}_\Delta = \{(x, u^{(n)}) : \Delta(x, u^{(n)}) = 0\} \subset X \times U^{(n)}. \quad (2.13)$$

do espaço de jatos. Deste ponto de vista, dizer que uma função u é solução do sistema \mathcal{S} é equivalente a dizer que o gráfico do prolongamento $\text{pr}^{(n)}u$ está contido inteiramente na subvariedade \mathcal{S}_Δ , determinada pelo sistema.

Exemplo 2.3 Considere a equação de Laplace no plano

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Neste caso, temos $p = 2$, $q = 1$ e $n = 2$. Em termos de coordenadas $(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$ de $X \times U^{(2)}$, a equação de Laplace define uma subvariedade linear, ou um hiperplano neste espaço, dado pelo conjunto cuja soma da quarta coordenada com a sexta é igual a zero. Tal hiperplano é o conjunto \mathcal{S}_Δ da equação de Laplace. Perceba que a função,

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2,$$

é solução, uma vez que o gráfico de

$$\text{pr}^{(2)}f(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2 - 3y^2, -6xy, 6x, -6y, -6x),$$

está contido em \mathcal{S}_Δ (a soma da quarta e sexta coordenada se anula).

O que veremos a seguir é como usar este conceito de subvariedade do espaço de jatos associada ao sistema de equações diferenciais para determinar se um dado grupo é um grupo de simetria do sistema.

Suponha que G é um grupo local de transformações agindo em um subconjunto aberto $M \subset X \times U$ do espaço das variáveis independentes e dependentes. Existe uma ação local induzida por G no espaço de jatos $M^{(n)}$, chamada n -ésimo prolongamento da ação de G em M e denotada por $\text{pr}^{(n)}G$. Este prolongamento é definido de forma que transforma as derivadas de uma função u em derivadas correspondentes da função transformada \tilde{u} . Mais precisamente, determinamos a ação de uma transformação prolongada $\text{pr}^{(n)}g$ no ponto $(x_0, u_0^{(n)})$ avaliando as derivadas da função transformada $g \cdot u$ no ponto $\tilde{x}_0 = g \cdot x_0$, explicitamente,

$$\text{pr}^{(n)}g \cdot (x_0, u_0^{(n)}) = (\tilde{x}_0, \tilde{u}_0^{(n)}),$$

onde

$$\tilde{u}_0^{(n)} \equiv \text{pr}^{(n)}(g \cdot u)(\tilde{x}_0).$$

Podemos então estabelecer o seguinte teorema que determina se um dado grupo é um grupo de simetria de um sistema de equações diferenciais parciais usando o ambiente na qual estamos inseridos, isto é, espaços de jato e prolongamentos.

Teorema 2.2 *Seja M um subconjunto aberto de $X \times U$ e suponha que $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ é um sistema de equações diferenciais de ordem n definido em M , com subvariedade correspondente $\mathcal{S}_\Delta \subset M^{(n)}$. Suponha que G é um grupo local de transformações agindo em M cujo prolongamento deixa \mathcal{S}_Δ invariante, no sentido de que se $(x, u^{(n)}) \in \mathcal{S}_\Delta$ então temos que $\text{pr}^{(n)}g \cdot (x, u^{(n)}) \in \mathcal{S}_\Delta$ para todo $g \in G$, tal que a ação está definida. Então G é um grupo de simetria do sistema.*

Demonstração: A prova consiste apenas em esclarecer e usar as definições anteriores. Suponha que $u = f(x)$ é uma solução local para $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$. Isso implica que o gráfico

$$\Gamma_f^{(n)} = \{(x, \text{pr}^{(n)}f(x))\}$$

do prolongamento $\text{pr}^{(n)}f$ está inteiramente contido em \mathcal{S}_Δ . Se $g \in G$ é tal que a função transformada $g \cdot f$ está bem definida, o gráfico do seu prolongamento, a saber $\Gamma_{g \cdot f}^{(n)}$, é o mesmo gráfico transformado de $\text{pr}^{(n)}f$ pelo elemento prolongado $\text{pr}^{(n)}g$:

$$\Gamma_{g \cdot f}^{(n)} = \text{pr}^{(n)}g \left(\Gamma_f^{(n)} \right).$$

Como \mathcal{S}_Δ é invariante sob $\text{pr}^{(n)}g$, o gráfico de $\text{pr}^{(n)}(g \cdot f)$ novamente está inteiramente contido em \mathcal{S}_Δ , mas isso é apenas outra forma de dizer que a função $g \cdot f$ é uma solução do sistema Δ . □

Vamos agora em direção de um importante teorema que nos dará um critério para que um grupo local de transformações seja um grupo de simetria de um sistema de equações diferenciais. Para isto, precisamos da seguinte definição,

Definição 2.6 *Seja*

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, m,$$

um sistema de equações diferenciais. O sistema é dito de *posto máximo* se a matriz Jacobiana

$$J_\Delta(x, u^{(n)}) = \left(\frac{\partial \Delta_\nu}{\partial x_i}, \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u_j^\alpha} \right)$$

de Δ com respeito a todas as variáveis $(x, u^{(n)})$ é de posto m sempre que $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$.

Assim, por exemplo, a equação de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

é de posto máximo, já que a matriz Jacobiana nas variáveis $(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$ em $X \times U^{(2)}$ é

$$J = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1),$$

que é de posto 1.

Assim como as próprias transformações, podemos também definir o prolongamento dos correspondentes geradores infinitesimais da ação. De fato, estes serão justamente os geradores infinitesimais da ação prolongada do grupo.

Definição 2.7 Seja $M \subset X \times U$ um aberto e suponha que \mathbf{v} é um campo vetorial em M , com correspondente grupo a 1-parâmetro $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$. O n -ésimo prolongamento de \mathbf{v} , denotado por $\text{pr}^{(n)}\mathbf{v}$, será um campo vetorial no espaço de jatos $M^{(n)}$ e é definido como o gerador infinitesimal do correspondente grupo a 1-parâmetro prolongado $\text{pr}^{(n)}[\exp(\varepsilon\mathbf{v})]$. Em outras palavras,

$$\text{pr}^{(n)}\mathbf{v}|_{(x,u^{(n)})} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \text{pr}^{(n)}[\exp(\varepsilon\mathbf{v})](x, u^{(n)}),$$

para qualquer $(x, u^{(n)}) \in M^{(n)}$.

Neste ponto, podemos enunciar um dos teoremas mais importantes para o cálculo dos grupos de simetria. Omitiremos aqui a prova, que pode ser encontrada em [22].

Teorema 2.3 *Suponha que*

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, m,$$

é um sistema de equações diferenciais de posto máximo, definido sobre $M \subset X \times U$. Se G é um grupo local de transformações agindo em M , e

$$\text{pr}^{(n)}\mathbf{v}[\Delta_\nu(x, u^{(n)})] = 0, \quad \nu = 1, \dots, m, \quad \text{sempre que } \Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad (2.14)$$

para todo gerador infinitesimal \mathbf{v} de G , então G é um grupo de simetria do sistema.

Dessa forma, a equação (2.14) torna-se um critério para determinar se um dado grupo de transformações é um grupo de simetria do sistema, na verdade, mostra-se que essa é uma condição necessária e suficiente e esta prova pode ser encontrada em [22] (Teorema 2.71). O que nos interessa, por hora, é como usar esse critério para encontrar o grupo de simetria. Uma vez encontradas simetrias infinitesimais que satisfazem (2.14), a seguinte proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em [22], garante que obtemos uma álgebra com essas simetrias:

Proposição 2.2 *Seja Δ um sistema de equações diferenciais parciais de posto máximo definido em $M \subset X \times U$. O conjunto de todas simetrias infinitesimais do sistema forma uma álgebra de Lie de campos vetoriais em M . Além disso, se essa álgebra de Lie é de dimensão finita, a componente conexa da identidade do grupo de simetria do sistema é um grupo de Lie de transformações agindo em M .*

Veremos agora como escrever o prolongamento de um dado campo vetorial, antes, precisaremos da seguinte definição:

Definição 2.8 *Seja $P(x, u^{(n)})$ uma função diferenciável de x, u e as derivadas de u de ordem no máximo n , definida em um subconjunto aberto $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$. A derivada total com relação a x_i é dada por*

$$D_i P = \frac{\partial P}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J \frac{\partial u_{\alpha,J}}{\partial x_i} \frac{\partial P}{\partial u_{\alpha,J}}$$

onde $u_{\alpha,J} = \frac{\partial^k u_\alpha}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}$ para $J = (j_1, \dots, j_k)$.

Por exemplo, no caso onde $X = \mathbb{R}^2$, com coordenadas (x, y) e $U = \mathbb{R}^2$, temos

$$\begin{aligned} D_x P &= \frac{\partial P}{\partial x} + u_x \frac{\partial P}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial P}{\partial u_x} + u_{yx} \frac{\partial P}{\partial u_y} + u_{xxx} \frac{\partial P}{\partial u_{xx}} + \cdots, \\ D_y P &= \frac{\partial P}{\partial y} + u_y \frac{\partial P}{\partial u} + u_{xy} \frac{\partial P}{\partial u_x} + u_{yy} \frac{\partial P}{\partial u_y} + u_{xyy} \frac{\partial P}{\partial u_{xx}} + \cdots, \end{aligned}$$

Assim, se $P = xuu_{xy}$, temos

$$\begin{aligned} D_x P &= uu_{xy} + xu_x u_{xy} + xuu_{xxy}, \\ D_y P &= xu_y u_{xy} + xuu_{xyy} \end{aligned}$$

Nesse ponto já estamos em condições de entender o enunciado do próximo teorema que é peça chave para o cálculo dos grupos de simetria.

Teorema 2.4 *Seja*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u_\alpha}$$

um campo vetorial definido em um subconjunto aberto de $M \subset X \times U$. O n -ésimo prolongamento de \mathbf{v} é o campo vetorial

$$\text{pr}^{(n)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J \phi_{(J)}^\alpha(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_{\alpha, J}} \quad (2.15)$$

definido no espaço de jatos correspondente $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$, onde a segunda soma é feita sobre todos multi-índices $J = (j_1, \dots, j_k)$, com $1 \leq j_k \leq p$, $1 \leq k \leq n$ e os coeficientes $\phi_{(J)}^\alpha$ de $\text{pr}^n\mathbf{v}$ são dados pela seguinte fórmula:

$$\phi_{(J)}^\alpha(x, u^{(n)}) = D_J \left(\phi^\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_{\alpha, i} \right) + \sum_{i=1}^p \xi^i (u_{\alpha, J})_{, i}, \quad (2.16)$$

onde $u_{\alpha, i} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}$ e $(u_{\alpha, J})_{, i} = \frac{\partial u_{\alpha, J}}{\partial x_i}$.

A prova é bastante extensa e não é interessante neste momento estudá-la em detalhes aqui. O que nos interessa são as fórmulas (2.15) e (2.16), que serão úteis no que veremos a seguir. O leitor interessado na demonstração do Teorema 2.4 pode encontrá-la em [22].

O Teorema 2.3 juntamente com as fórmulas (2.15) e (2.16) fornece um método efetivo para encontrar o grupo de simetria (conexo) mais geral de quase todos sistema de equações diferenciais. Neste método, considera-se os coeficientes $\xi^i(x, u)$ e $\phi^\alpha(x, u)$ do gerador infinitesimal \mathbf{v} de um grupo de simetria a 1-parâmetro hipotético como funções de x e u desconhecidas. Os coeficientes $\phi_{(J)}^\alpha$ do gerador infinitesimal prolongado $\text{pr}^{(n)}\mathbf{v}$ serão expressões envolvendo derivadas parciais de ξ^i e ϕ^α com respeito tanto a x quanto a u . O critério de invariância infinitesimal (2.14) irá então envolver x , u e as derivadas de u com relação a x , assim como ξ^i , ϕ^α e suas derivadas parciais com relação a x e u . Após eliminar quaisquer dependências entre as derivadas de u causadas pelo sistema (uma vez que a equação (2.14) deve valer apenas quando o sistema é satisfeito), podemos então igualar a zero os coeficientes das derivadas parciais independentes de u remanescentes e assim obter um grande número de equações diferenciais parciais elementares para as funções ξ^i e ϕ^α , chamadas *equações determinantes* para o grupo de simetria do sistema dado. Na maioria dos casos, estas equações determinantes podem ser resolvidas por métodos elementares, e a solução geral irá determinar a simetria infinitesimal mais geral do

sistema. A Proposição 2.2 assegura que o sistema resultante de geradores infinitesimais forma uma álgebra de Lie de simetrias e o grupo de simetria pode ser encontrado exponenciando os campos vetoriais dados.

Veremos com um exemplo simples, como esse método é desenvolvido. Escolhemos aqui a equação do calor para obter grupos de simetria.

Exemplo 2.4 *A equação do calor.* Considere a equação do calor dada por

$$u_t = u_{xx}.$$

Aqui temos duas variáveis independentes, x e t , e apenas uma dependente, a função u . Portanto, $p = 2$ e $q = 1$ na nossa notação. Como a equação é de segunda ordem, temos $n = 2$ e podemos identificá-la com a subvariedade linear em $X \times U^{(2)}$ determinada por

$$\Delta(x, t, u^{(2)}) = u_t - u_{xx} = 0.$$

Seja

$$\mathbf{v} = \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (2.17)$$

um campo vetorial em $X \times U$. Queremos determinar todos os coeficientes possíveis ξ , τ e ϕ de forma que o grupo a 1-parâmetro $\exp(\varepsilon \mathbf{v})$ é um grupo de simetria da equação do calor. De acordo com o Teorema 2.3, precisamos saber o segundo prolongamento

$$\text{pr}^{(2)} \mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi_{(x)} \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi_{(t)} \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi_{(xx)} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi_{(xt)} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi_{(tt)} \frac{\partial}{\partial u_{tt}}$$

de \mathbf{v} . Quando aplicamos $\text{pr}^{(2)} \mathbf{v}$ a equação do calor, descobrimos que o critério infinitesimal (2.14) será

$$\phi_{(t)} = \phi_{(xx)}, \quad (2.18)$$

que deve ser satisfeito sempre que $u_t = u_{xx}$. Os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned} \phi_{(t)} &= \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t) u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2, \\ \phi_{(xx)} &= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx}) u_x - \tau_{xx} u_t + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 - 2\tau_{xu} u_x u_t - \xi_{uu} u_x^3 - \tau_{uu} u_x^2 u_t \\ &\quad + (\phi_u - 2\xi_x) u_x x - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt} \end{aligned}$$

Substituindo os coeficientes dados acima em (2.18), substituindo u_t por u_{xx} para eliminar a dependência funcional e igualando a zero os coeficientes dos monômios nas primeiras e segundas

derivadas de u , encontramos as equações determinantes para o grupo de simetria. Abaixo seguem essas equações, onde entre parênteses indicamos qual é o monômio que determina a equação:

$$\tau_u = 0, \quad (u_x u_{xt}) \quad (2.19)$$

$$\tau_x = 0, \quad (u_{xt}) \quad (2.20)$$

$$0 = 0, \quad (u_{xx}) \quad (2.21)$$

$$\tau_{uu} = 0, \quad (u_x^2 u_{xx}) \quad (2.22)$$

$$\tau_{xu} + \xi_u = 0, \quad (u_x u_{xx}) \quad (2.23)$$

$$\tau_{xx} - \tau_t - 2\xi_x = 0, \quad (u_{xx}) \quad (2.24)$$

$$\xi_{uu} = 0, \quad (u_x^3) \quad (2.25)$$

$$\phi_{uu} - 2\xi_{xu} = 0, \quad (u_x^2) \quad (2.26)$$

$$2\phi_{xu} - \xi_{xx} + \xi_t = 0, \quad (u_x) \quad (2.27)$$

$$\phi_{xx} - \phi_t = 0, \quad (1) \quad (2.28)$$

Vamos agora resolver as equações determinantes. Primeiro, (2.19) e (2.20) exigem que τ seja uma função apenas da variável t . Então (2.23) mostra que ξ não depende de u e (2.24) requer que $\tau_t = 2\xi_x$, então $\xi(x, t) = \frac{1}{2}\tau_t x + \sigma(t)$, onde σ é alguma função que depende apenas de t . Em seguida, por (2.26), ϕ é linear em u , então

$$\phi(x, t, u) = \beta(x, t)u + \alpha(x, t),$$

para certas funções α e β . De acordo com (2.27), $\xi_t = -2\beta_x$, de forma que β é no máximo quadrática em x , com

$$\beta = -\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\sigma_t x + \rho(t).$$

Finalmente, a última equação (2.28) exige que ambas α e β sejam soluções da equação do calor.

Usando a forma que obtemos anteriormente para β temos

$$\tau_{ttt} = 0, \quad \sigma_{tt} = 0, \quad \rho_t = -\frac{1}{4}\tau_{tt}.$$

Assim, τ é quadrática em t , σ é linear em t e podemos então escrever ξ e ϕ diretamente de ρ , σ e τ . Como temos todas as equações determinantes satisfeitas, concluímos que a simetria

infinitesimal mais geral da equação do calor tem os seguintes coeficientes

$$\begin{aligned}\xi &= c_1 + c_4x + 2c_5t + 4c_6xt, \\ \tau &= c_2 + 4c_4t + 4c_6t^2, \\ \phi &= (c_3 - c_5x - 2c_6t - c_6x^2)u + \alpha(x, t),\end{aligned}$$

onde c_1, \dots, c_6 são constantes arbitrárias e $\alpha(x, t)$ é uma solução qualquer da equação do calor. Assim a álgebra de Lie das simetrias infinitesimais da equação do calor é gerada pelos seis campos vetoriais seguintes

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathbf{v}_3 &= u \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{v}_4 &= x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathbf{v}_5 &= 2t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{v}_6 &= 4tx \frac{\partial}{\partial x} + 4t^2 \frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)u \frac{\partial}{\partial u},\end{aligned}$$

e a subálgebra de dimensão infinita

$$\mathbf{v}_\alpha = \alpha(x, t) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Onde α é uma solução arbitrária da equação do calor.

Os grupos a 1-parâmetro G_i gerados por \mathbf{v}_i são dados abaixo. As entradas fornecem o ponto transformado $\exp(\varepsilon \mathbf{v}_i)(x, t, u) = (\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u})$:

$$\begin{aligned}G_1 &: (x + \varepsilon, t, u), \\ G_2 &: (x, t + \varepsilon, u), \\ G_3 &: (x, t, e^\varepsilon u), \\ G_4 &: (e^\varepsilon x, e^{2\varepsilon} t, u), \\ G_5 &: (x + 2\varepsilon t, t, u \cdot e^{(-\varepsilon x - \varepsilon^2 t)}), \\ G_6 &: \left(\frac{x}{1 - 4\varepsilon t}, \frac{t}{1 - 4\varepsilon t}, u \sqrt{1 - 4\varepsilon t} e^{\left(\frac{-\varepsilon}{1 - 4\varepsilon t}\right)} \right), \\ G_3 &: (x, t, u + \varepsilon \alpha(x, t)).\end{aligned}$$

O grupo a 1-parâmetro de simetria mais geral é obtido considerando a combinação linear geral

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_6 \mathbf{v}_6 + \mathbf{v}_\alpha$$

dos vetores encontrados, no entanto, a fórmula explícita do grupo é bem complicada.

No nosso trabalho também escreveremos apenas subgrupos e não o grupo todo, o que irá nos interessar são soluções invariantes por determinados subgrupos de simetria, o que já nos dará soluções especiais para o sistema de equações diferenciais que estamos estudando.

2.2 Equações de Lamé

Nesta seção apresentaremos o cálculo dos grupos de simetria para as equações de Lamé. A motivação para a aplicação da teoria de grupos de simetria a este sistema de equações veio do trabalho de Tenenblat e Winternitz [32], onde foi calculado o grupo de simetria para as equações generalizadas intrínsecas da onda e de sine-Gordon, e do trabalho de Ferreira [8], onde foi calculado o grupo de simetria para as equações generalizadas intrínsecas de Laplace e de sinh-Gordon elípticas. Uma vez que estes sistemas de equações são de certa forma semelhantes ao que estamos tratando aqui, utilizaremos as técnicas desenvolvidas nestes trabalhos para calcular o grupo de simetria para as equações de Lamé. Veremos aqui que a condição de Guichard exerce um papel fundamental, mostrando que o grupo de simetria é diferente daqueles considerados nas equações acima.

2.2.1 Cálculo dos Grupos

Utilizando a notação que adotamos neste capítulo, escrevemos as equações de Lamé (1.27) como

$$l_{i,x_j x_k} - \frac{l_{i,x_j} l_{j,x_k}}{l_j} - \frac{l_{i,x_k} l_{k,x_j}}{l_k} = 0, \quad (2.29)$$

$$\left(\frac{l_{i,x_j}}{l_j}\right)_{,x_j} + \left(\frac{l_{j,x_i}}{l_i}\right)_{,x_i} + \frac{l_{i,x_k} l_{j,x_k}}{l_k^2} = 0, \quad (2.30)$$

onde i, j e k são índices distintos variando em $\{1, 2, 3\}$ e todas as funções l_i são distintas de zero.

Como vimos, a ordem de derivação do sistema influi diretamente no cálculo do grupo de simetria procurado. Dessa forma, é conveniente em alguns casos, reduzir a ordem de derivação introduzindo novas funções.

É o que faremos para o nosso problema. Considere então as funções h_{ij} , com $i \neq j$, definidas por

$$l_{i,x_j} - h_{ij}l_j = 0. \quad (2.31)$$

Considerando a equação (2.29) temos

$$\frac{l_j l_{i,x_j x_k} - l_{i,x_j} l_{j,x_k}}{l_j^2} - \frac{l_{i,x_k} l_{k,x_j}}{l_k l_j} = 0,$$

o que implica em

$$\left(\frac{l_{i,x_j}}{l_j} \right)_{,x_k} - \left(\frac{l_{i,x_k}}{l_k} \right) \left(\frac{l_{k,x_j}}{l_j} \right) = 0. \quad (2.32)$$

Dessa forma, obtemos a partir de (2.31) e (2.32) a seguinte equação

$$h_{ij,x_k} - h_{ik} h_{kj} = 0, \quad (2.33)$$

para i, j, k distintos.

Considerando agora a equação (2.30) podemos reescrevê-la como

$$\left(\frac{l_{i,x_j}}{l_j} \right)_{,x_j} + \left(\frac{l_{j,x_i}}{l_i} \right)_{,x_i} + \left(\frac{l_{i,x_k}}{l_k} \right) \left(\frac{l_{j,x_k}}{l_k} \right) = 0,$$

de onde obtemos

$$h_{ij,x_j} + h_{ji,x_i} + h_{ik} h_{jk} = 0, \quad (2.34)$$

para i, j, k distintos.

Uma vez que as funções l_1, l_2 e l_3 satisfazem a relação de Guichard (1.26)

$$l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 = 0,$$

existem outras relações envolvendo as derivadas de l_i e h_{ij} diferente das apresentadas em (2.31), (2.33) e (2.34). Vamos obtê-las a seguir para usá-las no cálculo do grupo de simetria. Para isso, consideraremos a seguinte notação para sinal, denotada por ε_s dada por

$$\varepsilon_s = \begin{cases} 1 & \text{se } s = 1 \text{ ou } s = 3, \\ -1 & \text{se } s = 2, \end{cases}$$

o que nos possibilita escrever a relação de Guichard da forma

$$\varepsilon_i l_i^2 + \varepsilon_j l_j^2 + \varepsilon_k l_k^2 = 0. \quad (2.35)$$

Derivando (2.35) em relação a x_i temos

$$2(\varepsilon_i l_i l_{i,x_i} + \varepsilon_j l_j l_{j,x_i} + \varepsilon_k l_k l_{k,x_i}) = 0,$$

de onde obtemos

$$\varepsilon_i l_{i,x_i} + \varepsilon_j l_j \frac{l_{j,x_i}}{l_i} + \varepsilon_k l_k \frac{l_{k,x_i}}{l_i} = 0.$$

Assim, basta usar a definição das funções h_{ij} para obter

$$\varepsilon_i l_{i,x_i} + \varepsilon_j h_{ji} l_j + \varepsilon_k h_{ki} l_k = 0, \quad (2.36)$$

para i, j, k distintos.

Derivando agora a equação acima em x_j , obtemos

$$\varepsilon_i l_{i,x_i x_j} + \varepsilon_j h_{ji,x_j} l_j + \varepsilon_j h_{ji} l_{j,x_j} + \varepsilon_k h_{ki,x_j} l_k + \varepsilon_k h_{ki} l_{k,x_j} = 0.$$

Substituindo l_{j,x_j} , h_{ki,x_j} e l_{k,x_j} através das equações (2.36), (2.33) e (2.31) respectivamente (com os índices ajustados) obtemos

$$\varepsilon_i l_{i,x_i x_j} + \varepsilon_j h_{ji,x_j} l_j - h_{ji} (\varepsilon_i h_{ij} l_i + \varepsilon_k h_{kj} l_k) + \varepsilon_k h_{kj} h_{ji} l_k + \varepsilon_k h_{ki} h_{kj} l_j = 0.$$

Dividimos agora por l_j temos

$$\varepsilon_i \frac{l_{i,x_i x_j}}{l_j} + \varepsilon_j h_{ji,x_j} - \frac{h_{ji} \varepsilon_i h_{ij} l_i}{l_j} + \varepsilon_k h_{ki} h_{kj} = 0.$$

Escrevendo agora as funções h_{ij} e h_{ji} da forma como são dadas em (2.31) obtemos

$$\varepsilon_i \left(\frac{l_{i,x_j x_i} l_j - l_{i,x_j} l_{j,x_i}}{l_j^2} \right) + \varepsilon_j h_{ji,x_j} + \varepsilon_k h_{ki} h_{kj} = 0,$$

o que implica

$$\varepsilon_i \left(\frac{l_{i,x_j}}{l_j} \right)_{,x_i} + \varepsilon_j h_{ji,x_j} + \varepsilon_k h_{ki} h_{kj} = 0,$$

isto é,

$$\varepsilon_i h_{ij,x_i} + \varepsilon_j h_{ji,x_j} + \varepsilon_k h_{ki} h_{kj} = 0. \quad (2.37)$$

Resumimos então as equações (2.31), (2.33), (2.34), (2.35), (2.36) e (2.37) no seguinte sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem envolvendo as funções l_i e h_{ij} :

$$\varepsilon_i l_i^2 + \varepsilon_j l_j^2 + \varepsilon_k l_k^2 = 0 \quad (2.38)$$

$$l_{i,x_j} - h_{ij} l_j = 0 \quad (2.39)$$

$$\varepsilon_i l_{i,x_i} + \varepsilon_j h_{ji} l_j + \varepsilon_k h_{ki} l_k = 0 \quad (2.40)$$

$$h_{ij,x_k} - h_{ik} h_{kj} = 0 \quad (2.41)$$

$$h_{ij,x_j} + h_{ji,x_i} + h_{ik} h_{jk} = 0 \quad (2.42)$$

$$\varepsilon_i h_{ij,x_i} + \varepsilon_j h_{ji,x_j} + \varepsilon_k h_{ki} h_{kj} = 0 \quad (2.43)$$

O sistema acima será chamado *equações de Lamé de 1ª ordem* e o denotaremos por $\Delta = (\Delta_\nu(x, l, h_{ij}, l_{i,x_s}, h_{ijs,x_s})) = 0$, onde ν representa a coordenada da função Δ e $1 \leq \nu \leq 22$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $l = (l_1, l_2, l_3)$. Perceba que $X \times U^{(1)}$ possui 39 coordenadas, uma vez que temos:

3 variáveis independentes : x_1, x_2, x_3

9 variáveis dependentes : l_1, l_2, l_3, h_{ij}

27 derivadas : l_{i,x_s}, h_{ij,x_s}

Assim, para mostrar que o sistema é de posto máximo, basta mostrar que a matriz Jacobiana de $\Delta = (\Delta_\nu)$ possui 22 colunas linearmente independentes. Observe que:

- $\frac{\partial \Delta}{\partial l_{i,x_j}}$ fornece 9 vetores l.i., através da análise das equações (2.39) e (2.40);
- $\frac{\partial \Delta}{\partial h_{ij,x_s}}$ fornece 6 vetores l.i, através da análise da equação (2.41);
- $\frac{\partial \Delta}{\partial h_{ij,x_i}}$, com $i < j$, fornece 3 vetores l.i, através da análise da equação (2.42);
- $\frac{\partial \Delta}{\partial h_{ij,x_j}}$, com $i < j$, fornece 3 vetores l.i, através da análise da equação (2.42);
- $\frac{\partial \Delta}{\partial l_1} = (2l_1, 0, 0, -h_{21}l_1, 0, -h_{31}, 0, -h_{12}, h_{13}, 0, \dots, 0)$.

Como os vetores acima constituem 22 vetores linearmente independentes, segue que o sistema é de posto máximo.

Vamos então ao cálculo dos grupos de simetria do sistema Δ . Começaremos calculando o gerador infinitesimal da ação do grupo.

Teorema 2.5 *Seja V o gerador infinitesimal do grupo de simetria das equações de Lamé de 1ª ordem (2.38)-(2.43), dado por*

$$V = \sum_{i=1}^3 \xi^i(x, l, h) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 \eta^i(x, l, h) \frac{\partial}{\partial l_i} + \sum_{i,j=1, i \neq j}^3 \phi^{ij}(x, l, h) \frac{\partial}{\partial h_{ij}}.$$

Então as funções ξ^i , η^i e ϕ^{ij} são dadas por

$$\begin{aligned} \xi^i &= ax_i + a_i, \\ \eta^i &= cl_i, \\ \phi^{ij} &= -ah_{ij}, \end{aligned} \tag{2.44}$$

onde a , c e a_i são constantes reais.

Antes de demonstrar o Teorema 2.5, observamos que temos como consequência as transformações do grupo de simetria para as equações de Lamé, obtidas exponenciando o gerador infinitesimal V :

Corolário 2.1 *o grupo de simetria das equações de Lamé de 1ª ordem, (2.38)-(2.43) é dado pelas seguintes transformações:*

1. *translação nas variáveis independentes: $\tilde{x}_i = x_i + v_i$;*
2. *dilatação nas variáveis independentes: $\tilde{x}_i = \lambda x_i$;*
3. *dilatação nas variáveis dependentes: $\tilde{l}_i = \rho l_i$;*

onde v_i , λ e ρ são constantes reais.

Demonstração do Teorema 2.5: As funções ξ^i , η^i , ϕ^{ij} serão obtidas resolvendo as equações determinantes que são obtidas através da aplicação do primeiro prolongamento de V a cada equação do sistema. A expressão para este primeiro prolongamento é dado por

$$\text{pr}^{(1)}V = V + \sum_{i,k} D_k(\eta^i) \frac{\partial}{\partial l_{i,k}} + \sum_{i,j,k, i \neq j} D_k(\phi^{ij}) \frac{\partial}{\partial h_{ij,k}} - \sum_{i,k,r} D_k(\xi^r) l_{i,r} \frac{\partial}{\partial l_{i,k}} - \sum_{i,j,k,r} D_k(\xi^r) h_{ij,r} \frac{\partial}{\partial h_{ij,k}}.$$

Para eliminar possíveis dependências funcionais, faremos as substituições

$$l_{i,x_j} = h_{ij} l_j, \quad i \neq j, \tag{2.45}$$

$$l_{i,x_i} = -\varepsilon_i \varepsilon_j h_{ji} l_j - \varepsilon_i \varepsilon_k h_{ki} l_k, \tag{2.46}$$

$$h_{ij,x_k} = h_{ik} h_{kj}, \tag{2.47}$$

$$h_{ij,x_j} = -h_{ji,x_i} - h_{ik} h_{jk}, \quad i < j, \tag{2.48}$$

$$h_{ij,x_i} = -\varepsilon_i \varepsilon_j h_{ji,x_j} - \varepsilon_i \varepsilon_k h_{ki} h_{kj}, \quad i < j. \tag{2.49}$$

Fixando i, j e k , índices distintos, vamos começar aplicando $\text{pr}^{(1)}V$ à equação (2.41). Temos então o seguinte,

$$\phi_{(k)}^{ij} - \phi^{ik}h_{kj} - h_{ik}\phi^{kj} = 0,$$

usando as fórmulas para o prolongamento, temos

$$\begin{aligned} \phi_{,x_k}^{ij} + \sum_r \phi_{,l_r}^{ij} l_{r,x_k} + \sum_{r,s} \phi_{,h_{rs}}^{ij} h_{rs,x_k} - \sum_t \left(\xi_{,x_k}^t + \sum_r \xi_{,l_r}^t l_{r,x_k} + \sum_{r,s} \xi_{,h_{rs}}^t h_{rs,x_k} \right) h_{ij,x_t} \\ - \phi^{ik}h_{kj} - h_{ik}\phi^{kj} = 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Suponha que $i < j$. Aplicando então as substituições e analisando separadamente as parcelas, temos que

$$\sum_r \phi_{,l_r}^{ij} l_{r,x_k} = \sum_{r \neq k} \phi_{,l_r}^{ij} h_{rk}l_k - \phi_{,l_k}^{ij} (\varepsilon_k \varepsilon_j h_{jk}l_j + \varepsilon_k \varepsilon_i h_{ik}l_i), \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \sum_{r,s} \phi_{,h_{rs}}^{ij} h_{rs,x_k} &= \sum_{r \neq k, s \neq k} \phi_{,h_{rs}}^{ij} h_{rk}h_{ks} + \sum_{s < k} \phi_{,h_{ks}}^{ij} h_{ks,x_k} \\ &\quad - \sum_{s > k} \phi_{,h_{ks}}^{ij} (\varepsilon_k \varepsilon_s h_{sk,x_s} + \varepsilon_k \varepsilon_m h_{mk}h_{ms}) \\ &\quad - \sum_{r < k} \phi_{,h_{rk}}^{ij} (h_{kr,x_r} + h_{rn}h_{kn}) + \sum_{r > k} \phi_{,h_{rk}}^{ij} h_{rk,x_k}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \sum_t \left(\xi_{,x_k}^t + \sum_r \xi_{,l_r}^t l_{r,x_k} + \sum_{r,s} \xi_{,h_{rs}}^t h_{rs,x_k} \right) h_{ij,x_t} &= C_k^k h_{ik}h_{kj} - C_k^j (h_{ji,x_i} + h_{ik}h_{jk}) \\ &\quad - C_k^i (\varepsilon_i \varepsilon_j h_{ji,x_j} + \varepsilon_i \varepsilon_k h_{ki}h_{kj}), \end{aligned} \quad (2.53)$$

com os coeficientes C_k^t dados por

$$\begin{aligned} C_k^t &= \xi_{,x_k}^t + \sum_{r \neq k} \xi_{,l_r}^t h_{rk}l_k - \xi_{,l_k}^t (\varepsilon_k \varepsilon_j h_{jk}l_j + \varepsilon_k \varepsilon_i h_{ik}l_i) + \sum_{r \neq k, s \neq k} \xi_{,h_{rs}}^t h_{rk}h_{ks} + \sum_{s < k} \xi_{,h_{ks}}^t h_{ks,x_k} \\ &\quad - \sum_{s > k} \xi_{,h_{ks}}^t (\varepsilon_k \varepsilon_s h_{sk,x_s} + \varepsilon_k \varepsilon_m h_{mk}h_{ms}) - \sum_{r < k} \xi_{,h_{rk}}^t (h_{kr,x_r} + h_{rn}h_{kn}) + \sum_{r > k} \xi_{,h_{rk}}^t h_{rk,x_k}, \end{aligned}$$

onde os índices m e n introduzidos são tais que $\{k, s, m\}$ e $\{k, r, n\}$ constituem conjuntos formados por índices distintos.

Passemos então às análises dos coeficientes da equação (2.50), considerando (2.51)-(2.53). Igualando a zero os coeficientes de $h_{ji,x_j}h_{ks,x_k}$ com $k > s$, obtemos $\xi_{,h_{ks}}^i = 0$. De forma análoga, para os coeficientes de $h_{ji,x_j}h_{sk,x_s}$ com $k < s$, obtemos $\xi_{,h_{ks}}^i = 0$. De onde concluímos que

$$\xi_{,h_{ks}}^i = 0, \forall s, s \neq k, \text{ i.e. } \xi_{,h_{kj}}^i = \xi_{,h_{ki}}^i = 0.$$

Da mesma forma, com os coeficientes de $h_{ji,x_j}h_{kr,x_k}$, $r < k$ e $h_{ji,x_j}h_{rk,x_k}$ com $r > k$, obtemos que

$$\xi_{,h_{rk}}^i = 0, \forall r, r \neq k, \text{ i.e. } \xi_{,h_{jk}}^i = \xi_{,h_{ik}}^i = 0.$$

Para ξ^j , trabalhamos com os coeficientes de $h_{ji,x_i}h_{ks,x_k}$ com $k > s$ e $h_{ji,x_i}h_{sk,x_s}$ com $k < s$, temos que

$$\xi_{,h_{ks}}^j = 0, \forall s, s \neq k, \text{ i.e. } \xi_{,h_{ki}}^j = \xi_{,h_{kj}}^j = 0.$$

Analogamente, os coeficientes de $h_{ji,x_i}h_{kr,x_r}$ com $k > r$ e $h_{ji,x_i}h_{rk,x_k}$ com $k < r$ fornecem

$$\xi_{,h_{rk}}^j = 0, \forall r, r \neq k, \text{ i.e. } \xi_{,h_{ik}}^j = \xi_{,h_{jk}}^j = 0.$$

Como $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ são índices distintos e arbitrários com $i < j$, concluímos que $\xi_{,h_{st}}^m = 0$ para quaisquer índices, m, s e t , $s \neq t$, ou seja, ξ^m só depende de x e l .

Usando as informações que obtivemos, resulta que C_k^t fica reduzido a

$$C_k^t = \xi_{,x_k}^t + \sum_{r \neq k} \xi_{,l_r}^t h_{rk} l_k - \xi_{,l_k}^t (\varepsilon_k \varepsilon_j h_{jk} l_j + \varepsilon_k \varepsilon_i h_{ik} l_i),$$

que pode ser reescrita como

$$C_k^t = \xi_{,x_k}^t + \sum_{r \neq k} (\xi_{,l_r}^t l_k - \xi_{,l_k}^t \varepsilon_r \varepsilon_k l_r) h_{rk}. \quad (2.54)$$

Vamos agora aos coeficientes de 1ª ordem. A partir de (2.52) temos que na equação (2.50) os coeficientes de h_{ks,x_k} com $s < k$ e os coeficientes de h_{sk,x_s} com $s > k$ fornecem

$$\phi_{,h_{ks}}^{ij} = 0, \forall s \neq k, \text{ i.e. } \phi_{,h_{ki}}^{ij} = \phi_{,h_{kj}}^{ij} = 0.$$

Analisando a equação (2.53) temos que os coeficientes de h_{ji,x_i} e h_{ji,x_j} fornecem respectivamente, $C_k^j = 0$ e $C_k^i = 0$. Como $i < j$ e $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ são arbitrários e distintos, concluímos que $C_k^i = C_k^j = 0$, para todo i, j, k .

Uma vez que ξ^m não depende de h_{st} , a análise de (2.54) nos fornece o seguinte sistema

$$\begin{cases} \xi_{,x_k}^m = 0, \\ \xi_{,l_r}^m l_k - \varepsilon_r \varepsilon_k \xi_{,l_k}^m l_r = 0, \forall r \neq k, \end{cases}$$

Qualquer que seja $m \neq k$.

A primeira equação do sistema nos diz que ξ^m depende apenas de x_m e l . Pelo método das características (ver apêndice A), a segunda parte do sistema implica que ξ^m depende de x_m e

uma variável $\zeta = \varepsilon_i l_i^2 + \varepsilon_j l_j^2 + \varepsilon_k l_k^2$. Porém, pela condição de Ghichard, $\zeta \equiv 0$, o que mostra que ξ^m não depende de l_s , para todo s .

A conclusão que obtemos a partir da análise destes termos de primeira ordem é que

$$\phi^{st} = \phi^{st}(h_{st}, h_{ts}, x, l) \text{ e } \xi^m = \xi^m(x_m).$$

Vamos agora analisar a equação (2.39). Aplicando o prolongamento, temos

$$\eta_{(j)}^i - \phi^{ij} l_j - h_{ij} \eta^j = 0,$$

o que implica usando (2.15), em

$$\eta_{,x_j}^i + \sum_r \eta_{,l_r}^i l_{r,x_j} + \sum_{r,s} \eta_{,h_{rs}}^i h_{rs,x_j} - \xi_{,x_j}^j l_{i,x_j} - \phi^{ij} l_j - h_{ij} \eta^j = 0. \quad (2.55)$$

Vamos obter duas parcelas de (2.55). Temos que, aplicando (2.45)

$$\sum_r \eta_{,l_r}^i l_{r,x_j} = \sum_{r \neq j} \eta_{,l_r}^i h_{rj} l_j - \eta_{,l_j}^i (\varepsilon_j \varepsilon_i h_{ij} l_i + \varepsilon_j \varepsilon_k h_{kj} l_k).$$

Aplicando (2.47), (2.48) e (2.49) temos

$$\begin{aligned} \sum_{r,s} \eta_{,h_{rs}}^i h_{rs,x_j} &= \sum_{r \neq j, s \neq j} \eta_{,h_{rs}}^i h_{rj} h_{js} + \sum_{s < j} \eta_{,h_{js}}^i h_{js,x_j} - \sum_{s > j} (\varepsilon_j \varepsilon_s h_{sj,x_s} + \varepsilon_j \varepsilon_m h_{mj} h_{ms}) \\ &\quad - \sum_{r < j} \eta_{,h_{rj}}^i (h_{jr,x_r} + h_{rn} h_{jn}) + \sum_{r > j} \eta_{,h_{rj}}^i h_{rj,x_j}. \end{aligned}$$

Analisando na equação (2.55) os coeficientes de h_{js,x_j} com $s < j$ e h_{sj,x_s} com $s > j$, concluímos que $\eta_{,h_{js}}^i = 0$. De forma análoga, a análise dos coeficientes de h_{jr,x_r} com $r < j$ e h_{rj,x_j} com $r > j$, obtemos $\eta_{,h_{rj}}^i = 0$. Dessa forma, concluímos que

$$\eta_{,h_{jt}}^i = \eta_{,h_{tj}}^i = 0, \quad \forall t \neq j. \quad (2.56)$$

Como i e $t \neq j$ são arbitrários, concluímos que η^m não depende de h_{st} , para quaisquer índices, $m, s \neq t$. Portanto, (2.55) reduz-se a

$$\eta_{,x_j}^i + \left(\eta_{,l_i}^i l_j - \varepsilon_i \varepsilon_j \eta_{,l_j}^i l_i - \xi_{,x_j}^j l_j - \eta^j \right) h_{ij} + \left(\eta_{,l_k}^i l_j - \varepsilon_j \varepsilon_k \eta_{,l_j}^i l_k \right) h_{kj} - \phi^{ij} l_j = 0. \quad (2.57)$$

Como η^i não depende de h_{st} e ϕ^{ij} depende apenas de x, l, h_{ij} e h_{ji} , obtemos o seguinte sistema

$$\eta_{,l_k}^i l_j - \varepsilon_j \varepsilon_k \eta_{,l_j}^i l_k = 0, \quad (2.58)$$

$$\eta_{,x_j}^i + \left(\eta_{,l_i}^i l_j - \varepsilon_i \varepsilon_j \eta_{,l_j}^i l_i - \xi_{,x_j}^j l_j - \eta^j \right) h_{ij} - \phi^{ij} l_j = 0. \quad (2.59)$$

Segue de (2.59) pelo método das características que $n^i = n^i(x, l_i)$. Derivando (2.59) com relação a h_{ji} temos que

$$\phi_{,h_{ji}}^{ij} = 0. \quad (2.60)$$

Por outro lado, derivando (2.59) duas vezes com relação a h_{ij} , obtemos que

$$\phi_{,h_{ij}h_{ij}}^{ij} = 0. \quad (2.61)$$

Portanto, segue de (2.60) e (2.61) que ϕ^{ij} é da forma

$$\phi^{ij} = A^{ij}(x, l)h_{ij} + B^{ij}(x, l) \quad (2.62)$$

Voltamos agora à equação (2.50) para analisar os termos restantes. Reescrevendo-a a partir das informações que obtidas acima temos

$$\phi_{,x_k}^{ij} + \sum_r \phi_{,l_r}^{ij} l_{r,x_k} + A^{ij} h_{ij,x_k} - \xi_{,x_k}^k h_{ij,x_k} - (A^{ik} h_{ik} + B^{ik}) h_{kj} - (A^{kj} h_{kj} + B^{kj}) h_{ik} = 0. \quad (2.63)$$

Efetuada as substituições necessárias em (2.63) obtemos

$$\begin{aligned} & \phi_{,x_k}^{ij} + \phi_{,l_i}^{ij} h_{ik} l_k + \phi_{,l_j}^{ij} h_{jk} l_k - \phi_{,l_k}^{ij} (\varepsilon_k \varepsilon_j h_{jk} l_j + \varepsilon_k \varepsilon_i h_{ik} l_i) + \\ & + A^{ij} h_{ik} h_{kj} - \xi_{,x_k}^k h_{ik} h_{kj} - A^{ik} h_{ik} h_{kj} - B^{ik} h_{kj} - A^{kj} h_{ik} h_{kj} - B^{kj} h_{ik} = 0. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Usando (2.62) e agrupando os termos em (2.64) temos

$$\begin{aligned} & B_{,x_k}^{ij} + A_{,x_k}^{ij} h_{ij} + (B_{,l_i}^{ij} l_k - \varepsilon_k \varepsilon_i B_{,l_k}^{ij} l_i - B^{kj}) h_{ik} + (B_{,l_j}^{ij} l_k - \varepsilon_k \varepsilon_j B_{,l_k}^{ij} l_j) h_{jk} - B^{ik} h_{kj} + \\ & (A_{,l_i}^{ij} l_k - \varepsilon_k \varepsilon_i A_{,l_k}^{ij} l_i) h_{ik} h_{ij} + (A_{,l_j}^{ij} l_k - \varepsilon_k \varepsilon_j A_{,l_k}^{ij} l_j) h_{ij} h_{jk} + (A^{ij} - \xi_{,x_k}^k - A^{ik} - A^{kj}) h_{ik} h_{kj} = 0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Pelo coeficiente de h_{kj} temos que $B^{ik} = 0$. Permutando os índices i, j e k obtemos que

$$B^{st} = 0, \quad \forall s, t, s \neq t. \quad (2.66)$$

Igualando a zero os coeficientes de $h_{ik} h_{kj}$ e $h_{ij} h_{jk}$ obtemos

$$\begin{cases} A_{,l_i}^{ij} l_k - \varepsilon_k \varepsilon_i A_{,l_k}^{ij} l_i = 0, \\ A_{,l_j}^{ij} l_k - \varepsilon_k \varepsilon_j A_{,l_k}^{ij} l_j = 0, \end{cases} \quad (2.67)$$

que o método das características nos diz que A^{ij} só depende de x . Por outro lado, o coeficiente de h_{ij} nos diz que A^{ij} não depende de x_k , logo $A^{ij} = A^{ij}(x_i, x_j)$. Quanto ao coeficiente de $h_{ik} h_{kj}$, obtemos a seguinte equação

$$A^{ij} - \xi_{,x_k}^k - A^{ik} - A^{kj} = 0. \quad (2.68)$$

Voltamos agora a (2.57) que a partir das informações acima, reduz-se a

$$\eta_{,x_j}^i + \left(\eta_{,l_i}^i l_j - \xi_{,x_j}^j l_j - \eta^j - A^{ij} l_j \right) h_{ij} = 0 \quad (2.69)$$

Como η^i não depende de h_{ij} devemos ter

$$\eta_{,x_j}^i = 0, \quad (2.70)$$

$$\eta_{,l_i}^i l_j - \xi_{,x_j}^j l_j - \eta^j - A^{ij} l_j = 0, \quad (2.71)$$

Aplicamos agora o prolongamento na equação (2.42). Temos então que

$$\phi_{(j)}^{ij} + \phi_{(i)}^{ji} + \phi^{ik} h_{kj} + h_{ik} \phi^{kj} = 0,$$

que implica em

$$\phi_{,x_j}^{ij} + \phi_{,h_{ij}}^{ij} h_{ij,x_j} - \xi_{,x_j}^j h_{ij,x_j} + \phi_{,x_i}^{ji} + \phi_{,h_{ji}}^{ji} h_{ji,x_i} - \xi_{,x_i}^i h_{ji,x_i} + \phi^{ik} h_{kj} + h_{ik} \phi^{kj} = 0. \quad (2.72)$$

Vamos supor que $i < j$ para substituir h_{ij,x_j} dada por (2.48) e obter

$$\phi_{,x_j}^{ij} + \phi_{,x_i}^{ji} + \left(\xi_{,x_j}^j - A^{ij} + A^{ji} - \xi_{,x_i}^i \right) h_{ji,x_i} + \left(\xi_{,x_j}^j - A^{ij} + A^{ik} + A^{kj} \right) h_{ik} h_{jk} = 0. \quad (2.73)$$

Assim, o coeficiente de h_{ji,x_i} nos dá a seguinte equação

$$\xi_{,x_j}^j - A^{ij} + A^{ji} - \xi_{,x_i}^i = 0. \quad (2.74)$$

Mantendo $i < j$ e aplicando o prolongamento a (2.43) temos

$$\varepsilon_i \phi_{(i)}^{ij} + \varepsilon_j \phi_{(j)}^{ji} + \varepsilon_k \phi^{ki} h_{kj} + \varepsilon_k \phi^{kj} h_{ki} = 0,$$

que implica em

$$\varepsilon_i \left(\phi_{,x_i}^{ij} + \phi_{,h_{ij}}^{ij} h_{ij,x_i} - \xi_{,x_i}^i h_{ij,x_i} \right) + \varepsilon_j \left(\phi_{,x_j}^{ji} + \phi_{,h_{ji}}^{ji} h_{ji,x_j} - \xi_{,x_j}^j h_{ji,x_j} \right) + \varepsilon_k \left(\phi^{ki} h_{kj} + \phi^{kj} h_{ki} \right) = 0 \quad (2.75)$$

Ao substituir h_{ij,x_i} e agrupando os termos, temos

$$\varepsilon_i \phi_{,x_j}^{ij} + \varepsilon_j \phi_{,x_j}^{ji} + \varepsilon_j \left(\xi_{,x_i}^i - A^{ij} + A^{ji} - \xi_{,x_j}^j \right) h_{ji,x_j} + \varepsilon_k \left(\xi_{,x_i}^i - A^{ij} + A^{ki} + A^{kj} \right) h_{ki} h_{kj} = 0. \quad (2.76)$$

Obtemos então, a partir do coeficiente de h_{ji,x_j} que

$$A^{ij} - \xi_{,x_i}^i - A^{ji} + \xi_{,x_j}^j = 0. \quad (2.77)$$

Subtraindo (2.74) de (2.77) temos

$$2(A^{ij} - A^{ji}) = 0,$$

o que implica

$$A^{ji} = A^{ij}. \quad (2.78)$$

Dessa forma, ambas equações nos fornecem $\xi_{,x_i}^i = \xi_{,x_j}^j$. Como ξ^m depende apenas de x_m para todo m . Segue que

$$\xi^m = ax_m + a_m, \quad \forall 1 \leq m \leq 3, \quad (2.79)$$

onde a e a_m são constantes reais.

Vamos reescrever a equação (2.68) na forma original e também na forma quando permutamos j por k , usando as informações acima, isto é

$$\begin{aligned} A^{ij} - a - A^{ik} - A^{kj} &= 0, \\ A^{ik} - a - A^{ij} - A^{jk} &= 0. \end{aligned}$$

Somando essas duas equações e usando a equação (2.78) obtemos que

$$A^{kj} = -a.$$

O que nos leva a concluir, juntamente com (2.66) que

$$\phi^{st} = -ah_{st}, \quad \forall s \neq t \quad (2.80)$$

Usamos os últimos resultados obtidos para voltar à equação (2.71) para obter

$$\eta_{,l_i}^i l_j = \eta^j. \quad (2.81)$$

Mas sabemos que η^m é uma função que depende apenas de x_m e l_m , logo, concluímos a partir de (2.81) que $\eta_{,l_i}^i l_i = 0$, isto é

$$\eta^i = N^i(x_i)l_i + M^i(x_i). \quad (2.82)$$

Segue então de (2.81) e (2.82) que

$$\eta_{,l_i}^i = \eta_{,l_j}^j = N(x_i),$$

o que implica em

$$N'(x_i) = \eta_{,l_j x_i}^j = 0,$$

consequentemente,

$$\eta^i = cl_i + M^i(x_i). \quad (2.83)$$

Para finalizar, vamos aplicar o prolongamento à equação (2.40), obtendo assim

$$\varepsilon_i \eta_{(i)}^i + \varepsilon_j \phi^{ji} l_j + \varepsilon_j h_{ji} \eta^j + \varepsilon_k \phi^{ki} l_k + \varepsilon_k h_{ki} \eta^k = 0. \quad (2.84)$$

Aplicando as fórmulas do prolongamento, temos

$$\varepsilon_i \eta_{,x_i}^i + \varepsilon_i \eta_{,l_i}^i l_{i,x_i} - \varepsilon_i \xi_{,x_i}^i l_{i,x_i} + \varepsilon_j \phi^{ji} l_j + \varepsilon_j h_{ji} \eta^j + \varepsilon_k \phi^{ki} l_k + \varepsilon_k h_{ki} \eta^k = 0. \quad (2.85)$$

Aplicando a substituição (2.46) para l_{i,x_i} e as equações (2.79), (2.80), (2.83) obtemos

$$\varepsilon_i M_{,x_i}^i + \varepsilon_j h_{ji} M^i + \varepsilon_k h_{ki} M^k = 0. \quad (2.86)$$

Através da análise dos coeficientes de h_{ji} e h_{ki} obtemos que

$$M^i = M^k = 0, \quad (2.87)$$

de onde concluímos que

$$\eta^m = cl_m, \quad \forall 1 \leq m \leq 3. \quad (2.88)$$

Para concluir o teorema basta resumir as conclusões que obtivemos nas equações (2.79), (2.80) e (2.88)

$$\begin{aligned} \xi^i &= ax_i + a_i, \\ \eta^i &= cl_i, \\ \phi^{ij} &= -ah_{ij} \end{aligned}$$

□

2.2.2 Cálculo dos invariantes

Usaremos agora as técnicas apresentadas na Seção 2.1.3 para calcular um invariante básico para o subgrupo de translação.

Se G age semi-regularmente em uma variedade de dimensão m , com órbitas de dimensão s , então de acordo com o Teorema 2.1, existem exatamente $m - s$ invariantes independentes.

No nosso caso, o espaço das variáveis é tal que $X = R^3$, dessa forma, $m = 3$, vamos considerar o grupo de translações gerado por dois vetores linearmente independentes na Álgebra

de Lie do grupo de simetria. Em geral, escolher s como a dimensão da subálgebra já será suficiente para que s seja a dimensão das órbitas do subgrupo, exceto casos raros, que não trataremos aqui (para maiores detalhes específicos sobre este ponto confira [22]). Neste caso, teremos apenas 1 invariante básico, o que será muito interessante quando tratarmos de soluções invariantes. Temos então a seguinte proposição.

Proposição 2.3 *Um invariante básico para um subgrupo de translação de dimensão 2 do grupo de simetria, é dado por*

$$\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \quad (2.89)$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ são constantes reais.

Demonstração: Consideremos dois vetores linearmente independentes na álgebra de Lie do subgrupo de translação

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= a_{11}\partial_{x_1} + a_{12}\partial_{x_2} + a_{13}\partial_{x_3}, \\ \mathbf{v}_2 &= a_{21}\partial_{x_1} + a_{22}\partial_{x_2} + a_{23}\partial_{x_3}. \end{aligned}$$

Para encontrar os invariantes, procedemos da seguinte forma. Primeiro aplicamos o critério de invariância com o primeiro vetor, isto é, ξ é invariante sob a ação de \mathbf{v}_1 se, e somente se, $\mathbf{v}_1(\xi) = 0$, ou seja,

$$a_{11}\xi_{,x_1} + a_{12}\xi_{,x_2} + a_{13}\xi_{,x_3} = 0. \quad (2.90)$$

A teoria clássica de equações diferenciais parciais de primeira ordem homogêneas mostra que a solução geral de (2.90) pode ser encontrada integrando o correspondente *sistema característico* de equação diferenciais ordinárias, dado por

$$\frac{dx_1}{a_{11}} = \frac{dx_2}{a_{12}} = \frac{dx_3}{a_{13}},$$

cujas soluções gerais são da forma

$$a_{11}x_2 - a_{12}x_1 = c_1, \quad a_{12}x_3 - a_{13}x_2 = c_2,$$

onde c_1 e c_2 são constantes de integração. Temos então que invariantes básicos para \mathbf{v}_1 são dados pelas seguintes soluções de (2.90)

$$\begin{aligned} \xi_{11} &= a_{11}x_2 - a_{12}x_1, \\ \xi_{12} &= a_{12}x_3 - a_{13}x_2. \end{aligned}$$

O próximo passo é encontrar um invariante básico simultâneo para \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 . Para isso escrevemos \mathbf{v}_2 em termos de $\partial_{\xi_{11}}$ e $\partial_{\xi_{12}}$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}\partial_{x_1} &= -a_{12}\partial_{\xi_{11}}, \\ \partial_{x_2} &= a_{11}\partial_{\xi_{11}} - a_{13}\partial_{\xi_{12}}, \\ \partial_{x_3} &= a_{12}\partial_{\xi_{12}}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2 &= -a_{21}a_{12}\partial_{\xi_{11}} + a_{22}a_{11}\partial_{\xi_{11}} - a_{22}a_{13}\partial_{\xi_{12}} + a_{23}a_{12}\partial_{\xi_{12}} \\ &= (a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12})\partial_{\xi_{11}} + (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})\partial_{\xi_{12}}.\end{aligned}$$

Dessa forma, $\eta(\xi_{11}, \xi_{12})$ é um invariante por \mathbf{v}_2 se, e somente se, $\mathbf{v}_2\eta = 0$. Portanto, temos a seguinte equação diferencial parcial:

$$(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12})\eta_{,\xi_{11}} + (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})\eta_{,\xi_{12}} = 0,$$

que possui como sistema característico

$$\frac{d\xi_{11}}{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}} = \frac{d\xi_{12}}{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}},$$

cujas soluções gerais são

$$(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})\xi_{11} - (a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12})\xi_{12} = c_3,$$

onde c_3 é uma constante de integração. Voltando as variáveis anteriores, temos

$$\begin{aligned}c_3 &= (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})(a_{11}x_2 - a_{12}x_1) - (a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12})(a_{12}x_3 - a_{13}x_2) \\ &= -a_{12}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})x_1 + a_{12}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})x_2 - a_{12}(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12})x_3 \\ &= -a_{12}[(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})x_1 - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})x_2 + (a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12})x_3].\end{aligned}$$

O que nos dá como invariante simultâneo para \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2

$$\xi = (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})x_1 - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})x_2 + (a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12})x_3, \quad (2.91)$$

que pode ser escrito da seguinte forma

$$\xi = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3. \quad (2.92)$$

Uma vez que os vetores (a_{11}, a_{12}, a_{13}) e (a_{21}, a_{22}, a_{23}) são linearmente independentes, segue que pelo menos um dos α_i é não nulo.

□

Observação 2.1 Uma observação interessante é que podemos interpretar a parte analítica sobre a invariância descrita acima geometricamente. De fato, olhando para a expressão (2.91) e considerando $\xi = cte$, obtemos planos que são gerados pelos vetores (a_{11}, a_{12}, a_{13}) e (a_{21}, a_{22}, a_{23}) e conseqüentemente, são invariantes por qualquer translação gerada por esses vetores.

2.3 Soluções Invariantes das Equações de Lamé

Consideraremos nesta seção soluções das equações de Lamé (2.38)-(2.43) que são invariantes pela ação do subgrupo de translação. Nesse sentido, o que iremos fazer é procurar soluções l_i tais que

$$l_i(x_1, x_2, x_3) = l_i(\xi), \quad 1 \leq i \leq 3. \quad (2.93)$$

onde ξ é o invariante simultâneo encontrado na seção anterior, dado por $\xi = \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1$. Dessa forma, impondo a condição (2.93), nosso sistema de equações originais reduz-se a um sistema de equações diferenciais ordinárias na variável ξ , observando que

$$l_{i,x_j} = \alpha_j l_{i,\xi}.$$

Perceba que o nome *soluções invariantes* torna-se agora trivial. Uma vez que ξ é um invariante básico, a condição (2.93) impõe que as soluções encontradas sob essa condição também serão invariantes pelo subgrupo de translação. Este fato será interessante quando tratarmos das propriedades geométricas associadas.

Vamos começar com dois lemas que relacionam as funções l_i com as constantes α_j .

Lema 2.1 *Seja $l_s(\xi)$, $s = 1, 2, 3$, onde $\xi = \sum_{s=1}^3 \alpha_s x_s$, uma solução das equações de Lamé (2.38)-(2.43). Sejam $i, k \in \{1, 2, 3\}$ índices fixos e distintos tais que $\alpha_i = \alpha_k = 0$. Então l_i ou l_k é constante.*

Demonstração: Seja $j \in \{1, 2, 3\}$, um índice fixo distinto de i e k . Lembramos a equação (2.42):

$$h_{ij,x_j} + h_{ji,x_i} + h_{ik}h_{jk} = 0.$$

Usando que $\alpha_i = \alpha_k = 0$, temos de (2.39) que

$$\alpha_j^2 \left[\frac{l_{i,\xi}}{l_j} \right]_{,\xi} = 0.$$

como pelo menos um α_s deve ser não nulo, temos $\alpha_j \neq 0$ e então $l_{i,\xi} = c_i l_j$. Trocando i por k obtemos de maneira análoga $l_{k,\xi} = c_k l_j$.

Finalmente, trocando k por j , obtemos

$$\alpha_j^2 \frac{l_{i,\xi} l_{k,\xi}}{l_j^2} = 0.$$

De onde concluímos que

$$\alpha_j^2 c_i c_k = 0,$$

e portanto que l_i é constante ou l_k é constante. □

Lema 2.2 *Seja $l_s(\xi)$, $s = 1, 2, 3$, onde $\xi = \sum_{s=1}^3 \alpha_s x_s$, uma solução das equações de Lamé (2.38)-(2.43). Se existe um único $j \in \{1, 2, 3\}$ tal que a função l_j é uma constante não nula, então $\alpha_j = 0$.*

Demonstração: Permutando os índices em (2.41), obtemos seguidamente,

$$\alpha_j \alpha_k \left(l_{i,\xi\xi} - \frac{l_{i,\xi} l_{k,\xi}}{l_k} \right) = 0, \quad (2.94)$$

$$\alpha_j \alpha_i \left(l_{k,\xi\xi} - \frac{l_{k,\xi} l_{i,\xi}}{l_i} \right) = 0, \quad (2.95)$$

e uma identidade.

Analogamente, considerando (2.42), obtemos

$$\alpha_j^2 l_{i,\xi\xi} = 0, \quad (2.96)$$

$$\alpha_j^2 l_{k,\xi\xi} = 0, \quad (2.97)$$

$$\alpha_k^2 \left(\frac{l_{i,\xi}}{l_k} \right)_{,\xi} + \alpha_i^2 \left(\frac{l_{k,\xi}}{l_i} \right)_{,\xi} + \alpha_j^2 \frac{l_{i,\xi} l_{k,\xi}}{l_j^2} = 0 \quad (2.98)$$

Suponha por contradição que $\alpha_j \neq 0$. Então segue de (2.96) e (2.97) que

$$l_{i,\xi\xi} = l_{k,\xi\xi} = 0,$$

o que implica $l_{i,\xi} = c_i$ e $l_{k,\xi} = c_k$. Decorre de (2.94) e (2.95) que

$$\begin{aligned}\alpha_k c_i c_k &= 0, \\ \alpha_i c_k c_i &= 0,\end{aligned}$$

Como l_j é a única solução constante, temos que $c_i \neq 0$ e $c_k \neq 0$ e então $\alpha_i = \alpha_k = 0$. Pelo Lema 2.1, segue que l_i ou l_k é constante, o que é uma contradição.

□

Iniciaremos procurando soluções invariantes, todas não constantes, de acordo com o seguinte teorema:

Teorema 2.6 *Seja $l_s(\xi)$, $s = 1, 2, 3$, onde $\xi = \sum_{s=1}^3 \alpha_s x_s$, uma solução das equações de Lamé (2.38)-(2.43), tal que $l_{s,\xi} \neq 0$, para todo s . Então existem constantes $c_s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tal que*

$$l_{i,\xi} = c_i l_k l_j, \quad i, j, k \text{ distintos}, \quad (2.99)$$

$$\alpha_1^2 c_2 c_3 + \alpha_2^2 c_1 c_3 + \alpha_3^2 c_1 c_2 = 0, \quad (2.100)$$

$$c_1 - c_2 + c_3 = 0. \quad (2.101)$$

Além disso, as funções $l_i(\xi)$ são dadas por

$$l_{1,\xi}^2 = c_2(c_2 - c_1) \left(l_1^2 - \frac{\lambda}{c_2} \right) \left(l_1^2 - \frac{\lambda}{c_2 - c_1} \right), \quad (2.102)$$

$$l_2^2 = \frac{c_2}{c_1} \left(l_1^2 - \frac{\lambda}{c_2} \right), \quad (2.103)$$

$$l_3^2 = \frac{c_2 - c_1}{c_1} \left(l_1^2 - \frac{\lambda}{c_2 - c_1} \right), \quad (2.104)$$

onde λ é uma constante real.

Demonstração: Por hipótese, buscamos soluções todas não constantes. Então pelo Lema 2.1, temos no máximo um índice s tal que α_s é nulo, portanto, pelo menos duas constantes α_s são não nulas.

Fixando α_j e α_k não nulos e usando as equações (2.39) e (2.41) para obter

$$\left[\frac{l_{i,x_j}}{l_j} \right]_{,x_k} - \frac{l_{i,x_k}}{l_k} \frac{l_{k,x_j}}{l_j} = 0, \quad i \neq j,$$

consequentemente,

$$\alpha_j \alpha_k \left\{ \left[\frac{l_{i,\xi}}{l_j} \right]_{,\xi} - \frac{l_{i,\xi}}{l_j} \frac{l_{k,\xi}}{l_k} \right\} = 0.$$

Concluimos então que

$$\left[\frac{l_{i,\xi}}{l_j} \right]_{,\xi} \left[\frac{l_{i,\xi}}{l_j} \right]^{-1} = \frac{l_{k,\xi}}{l_k}. \quad (2.105)$$

Integrando (2.105), obtemos $l_{i,\xi} = c_i l_k l_j$, como queríamos em (2.99).

Se $\alpha_i \neq 0$, analogamente considerando os pares (α_i, α_j) e (α_i, α_k) não nulos, obtemos que $l_{k,\xi} = c_k l_i l_j$ e $l_{j,\xi} = c_j l_i l_k$, o que prova (2.99). Suponha então que $\alpha_i = 0$. Pela equação (2.42) temos

$$\left[\frac{l_{i,x_j}}{l_j} \right]_{,x_j} + \frac{l_{i,x_k}}{l_k} \frac{l_{j,x_k}}{l_k} = 0.$$

Como vale (2.99), temos

$$\alpha_j^2 c_i l_{k,\xi} + \alpha_k^2 c_i l_j \frac{l_{j,\xi}}{l_k} = 0,$$

como l_i não é constante, temos que $c_i \neq 0$ e obtemos a expressão

$$\alpha_j^2 l_k l_{k,\xi} + \alpha_k^2 l_j l_{j,\xi} = 0. \quad (2.106)$$

Integrando (2.106) obtemos

$$\alpha_j^2 l_k^2 + \alpha_k^2 l_j^2 = \lambda, \quad (2.107)$$

onde λ é uma constante. Podemos então escrever l_j^2 em função de l_k da seguinte forma

$$l_j^2 = \frac{\alpha_j^2}{\alpha_k^2} \left(\frac{\lambda}{\alpha_j^2} - l_k^2 \right). \quad (2.108)$$

Além disso, podemos usar (2.108) e a condição de Guichard (2.38) para escrever l_i^2 em função de l_k . De fato, combinando as duas equações obtemos

$$\varepsilon_i l_i^2 + \varepsilon_j \frac{\alpha_j^2}{\alpha_k^2} \left(\frac{\lambda}{\alpha_j^2} - l_k^2 \right) + \varepsilon_k l_k^2 = 0.$$

Portanto,

$$l_i^2 = \frac{\varepsilon_i}{\alpha_k^2} [l_k^2 (\varepsilon_j \alpha_j^2 - \varepsilon_k \alpha_k^2) - \varepsilon_j \lambda].$$

Derivando em relação a ξ e usando que $l_{i,\xi} = c_i l_k l_j$, temos

$$l_i (c_i l_k l_j) = \frac{\varepsilon_i}{\alpha_k^2} l_k l_{k,\xi} (\varepsilon_j \alpha_j^2 - \varepsilon_k \alpha_k^2).$$

Se $\varepsilon_j \alpha_j^2 - \varepsilon_k \alpha_k^2 \neq 0$, concluímos a partir da equação acima que

$$l_{k,\xi} = \frac{\varepsilon_i c_i \alpha_k^2}{\varepsilon_j \alpha_j^2 - \varepsilon_k \alpha_k^2} l_i l_j = c_k l_i l_j.$$

Derivando agora (2.108) em relação a ξ obtemos

$$l_j l_{j,\xi} = -\frac{\alpha_j^2}{\alpha_k^2} l_k l_{k,\xi} = -\frac{\alpha_j^2}{\alpha_k^2} l_k (c_k l_i l_j),$$

de onde concluímos que

$$l_{j,\xi} = c_j l_i l_k.$$

Vamos mostrar agora que $\varepsilon_j \alpha_j^2 - \varepsilon_k \alpha_k^2 \neq 0$ e assim provamos (2.99). Suponha por contradição que $\varepsilon_j \alpha_j^2 - \varepsilon_k \alpha_k^2 = 0$, temos então que

$$\frac{\alpha_j^2}{\alpha_k^2} = \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_j}.$$

Como consequência, pela equação (2.108)

$$l_j^2 = \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_j} \left(\frac{\lambda}{\alpha_j^2} - l_k^2 \right),$$

e assim,

$$\varepsilon_j l_j^2 + \varepsilon_k l_k^2 = \text{const.}$$

O que implica, pela condição de Guichard, que l_i é constante, o que é uma contradição.

Para provar a relação entre as constantes, basta ver que, para quaisquer i, j, k temos

$$h_{ij} = c_i \alpha_j l_k, \tag{2.109}$$

onde usamos (2.39) e (2.99). Logo, por (2.40), temos

$$\varepsilon_i c_i \alpha_i l_k l_j + \varepsilon_j c_j \alpha_i l_k l_j + \varepsilon_k c_k \alpha_i l_j l_k = 0.$$

De onde concluímos que

$$\varepsilon_i c_i + \varepsilon_j c_j + \varepsilon_k c_k = 0,$$

que implica (2.101). Para obter a outra relação, utilizamos (2.42) e a expressão (2.109). De fato, combinando as duas equações, temos o seguinte,

$$(c_i \alpha_j l_k)_j + (c_j \alpha_i l_k)_i + c_i c_j \alpha_k^2 l_i l_j = 0.$$

Portanto, segue de (2.99) que

$$(\alpha_j^2 c_i c_k + \alpha_i^2 c_j c_k + \alpha_k^2 c_i c_j) l_i l_j = 0.$$

Como $l_i l_j \neq 0$, obtemos que a relação (2.100) vale.

Para obter as funções l_i observamos que

$$l_{1,\xi} = c_1 l_2 l_3, \quad (2.110)$$

$$l_{2,\xi} = c_2 l_1 l_3, \quad (2.111)$$

$$l_{3,\xi} = c_3 l_1 l_2. \quad (2.112)$$

Multiplicando (2.111) por l_2 obtemos

$$l_{2,\xi} l_2 = c_2 l_1 (l_2 l_3),$$

de onde obtemos

$$l_{2,\xi} l_2 = \frac{c_2}{c_1} l_1 l_{1,\xi}.$$

Integrando a equação acima temos que (2.103) se verifica. Usando (2.103) e a condição de Guichard (1.26) escrevemos

$$l_1^2 - \frac{c_2}{c_1} \left(l_1^2 - \frac{\lambda}{c_2} \right) + l_3^2 = 0,$$

que implica em (2.104).

Usando agora as equações (2.110), (2.103) e (2.104), obtemos

$$\begin{aligned} l_{1,\xi}^2 &= c_1^2 \left[\frac{c_2}{c_1} \left(l_1^2 - \frac{\lambda}{c_2} \right) \right] \left[\frac{c_2 - c_1}{c_1} \left(l_1^2 - \frac{\lambda}{c_2 - c_1} \right) \right] \\ &= c_2 (c_2 - c_1) \left(l_1^2 - \frac{\lambda}{c_2} \right) \left(l_1^2 - \frac{\lambda}{c_2 - c_1} \right). \end{aligned}$$

Concluindo a demonstração. □

Observação 2.2 Embora o cálculo do grupo de simetria para as equações de Lamé possua técnicas similares àquelas usadas por Tenenblat e Winternitz em [32], observamos que as soluções invariantes são diferentes. De fato, quando consideramos as soluções invariantes pelo subgrupo de translação no Teorema 2.6, as soluções de (2.102) são dadas por funções elípticas de Jacobi que não podem ser reduzidas a funções elementares. A principal razão é devido a condição de Guichard, que além de afetar as soluções, fornece uma nova transformação no grupo de simetria, a saber, a dilatação nas variáveis dependentes l_i .

Agora que já sabemos as soluções quando nenhuma das funções l_i é constante, vamos considerar o caso onde temos apenas uma delas constante. Perceba que pela condição de Guichard $l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 = 0$, somente essa situação é possível, isto é, duas soluções constantes implicam imediatamente que a terceira é constante. Temos então o seguinte teorema

Teorema 2.7 *Seja $l_s(\xi)$, $s = 1, 2, 3$, onde $\sum_{s=1}^3 \alpha_s x_s$, uma solução das equações de Lamé (2.38)-(2.43), tal que apenas uma das funções l_s é constante. Então um dos seguintes casos ocorre:*

a) $l_1 = \lambda_1$, $l_2 = \lambda_1 \cosh(b\xi + \xi_0)$, $l_3 = \lambda_1 \sinh(b\xi + \xi_0)$, onde $\xi = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$, $\alpha_2^2 + \alpha_3^2 \neq 0$, b e ξ_0 são constantes;

b) $l_2 = \lambda_2$, $l_1 = \lambda_2 \cos \varphi(\xi)$, $l_3 = \lambda_2 \sin \varphi(\xi)$, onde $\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3$, $\alpha_1^2 + \alpha_3^2 \neq 0$, e φ é dada considerando os seguintes casos:

b.1) $\varphi(\xi) = b\xi + \xi_0$, se $\alpha_1^2 \neq \alpha_3^2$, onde ξ_0 e b são constantes;

b.2) φ é qualquer função de ξ , se $\alpha_1^2 = \alpha_3^2$;

c) $l_3 = \lambda_3$, $l_2 = \lambda_3 \cosh(b\xi + \xi_0)$, $l_1 = \lambda_3 \sinh(b\xi + \xi_0)$, onde $\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ e ξ_0 é uma constante.

Demonstração: a) Se $l_1 = \lambda_1$, então, pelo Lema 2.2 devemos ter $\xi = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$ e pela condição de Guichard, $l_2 = \lambda_1 \cosh \varphi(\xi)$ e $l_3 = \lambda_1 \sinh \varphi(\xi)$. Para determinar φ , usamos (2.42) com os seguintes índices

$$h_{23,3} + h_{32,2} + h_{21}h_{31} = 0$$

e obtemos

$$\alpha_3^2 \left(\frac{\lambda_1 \varphi_{,\xi} \sinh \varphi}{\lambda_1 \sinh \varphi} \right)_{,\xi} + \alpha_2^2 \left(\frac{\lambda_1 \varphi_{,\xi} \cosh \varphi}{\lambda_1 \cosh \varphi} \right)_{,\xi} = 0,$$

que implica em

$$(\alpha_3^2 + \alpha_2^2) \varphi_{,\xi\xi} = 0.$$

Como l_2 e l_3 não são constantes, então $\alpha_3^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ e conseqüentemente devemos ter $\varphi(\xi) = b(\xi + \xi_0)$.

b) Se $l_2 = \lambda_2$, segue pelo Lema 2.2 que $\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3$ e pela condição de Guichard devemos ter $l_1 = \lambda \cos \varphi(\xi)$ e $l_3 = \lambda \sin \varphi(\xi)$. Para determinar φ , usamos (2.42) com os seguintes índices

$$h_{13,3} + h_{31,1} + h_{12}h_{32} = 0$$

e obtemos

$$-\alpha_3^2 \left(\frac{\lambda_2 \varphi_{,\xi} \sin \varphi}{\lambda_2 \sin \varphi} \right)_{,\xi} + \alpha_1^2 \left(\frac{\lambda_2 \varphi_{,\xi} \cos \varphi}{\lambda_2 \cos \varphi} \right)_{,\xi} = 0,$$

que implica em

$$(\alpha_1^2 - \alpha_3^2) \varphi_{,\xi\xi} = 0.$$

Como l_1 e l_3 não são constantes, temos $\alpha_1^2 + \alpha_3^2 \neq 0$. Dessa forma, temos dois casos a considerar:

b.1) Se $\alpha_1^2 \neq \alpha_3^2$, então $\varphi(\xi) = b(\xi + \xi_0)$;

b.2) se $\alpha_1^2 = \alpha_3^2$, então φ é qualquer função de ξ .

c) Se $l_3 = \lambda_3$, os cálculos são análogos a parte a) de onde obtemos $l_1 = \lambda_3 \sinh b(\xi + \xi_0)$ e $l_2 = \lambda_3 \cosh b(\xi + \xi_0)$, onde $\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ e $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$.

□

Capítulo 3

Classes de hipersuperfícies conformemente planas associadas às soluções invariantes

Neste capítulo combinaremos os resultados dos Capítulos 1 e 2 para obter classes de hipersuperfícies conformemente planas. Partindo do último resultado do Capítulo 2, onde vimos que, dadas soluções l_i para as equações de Lamé, satisfazendo as condições de Guichard, podemos obter formas diferenciais que satisfazem as equações de estrutura para um referencial pseudo-ortonormal adaptado a uma imersão em L^5 . Dessa forma, com as soluções invariantes sob ação do subgrupo de translação obtidas no Capítulo 2, vamos escrever o sistema de equações diferenciais parciais para o dado referencial e buscar maneiras de integrá-lo. Veremos que o caso das soluções invariantes onde uma das l_i é constante pode ser integrado explicitamente, com um método análogo para os três casos, ilustraremos este exemplo em um dos casos. Para a situação onde nenhuma solução é constante, obtivemos que a imersão no cone de luz satisfaz uma equação diferencial parcial de segunda ordem, homogênea de coeficientes constantes. Além disso, mostramos que neste caso temos uma nova classe de hipersuperfícies conformemente planas.

3.1 O sistema de equações diferenciais do referencial adaptado

Nesta seção mostraremos o sistema de equações diferenciais parciais para o referencial $\{n_i\}_{i=1}^6$. Convém lembrar neste momento que todas as equações diferenciais que aparecerão neste capítulo envolvem funções vetoriais, neste caso, se $f = (f_0, \dots, f_5)$, é uma função vetorial em \mathbb{R}_1^6 , então

$$f_{x_i} = (f_{0,x_i}, \dots, f_{5,x_i}).$$

Para montar o sistema, lembramos que o referencial adaptado satisfaz a seguinte equação

$$dn_A = \sum_{B=1}^6 \omega_{AB} n_B,$$

onde as formas de conexão ω_{AB} são dadas por (1.31) e (1.32). Como $dn_A = n_{A,x_1} dx_1 + n_{A,x_2} dx_2 + n_{A,x_3} dx_3$, o que devemos fazer é escrever as formas ω_{AB} na base dx_1 , dx_2 e dx_3 , usar que este é um conjunto linearmente independente no espaço das 1-formas e então, obter as derivadas parciais de n_A . Por exemplo, para n_1 , devemos ter

$$\begin{aligned} dn_1 &= \omega_{12}n_2 + \omega_{13}n_3 + \omega_{14}n_4 + \omega_{15}n_5 + \omega_{16}n_6 \\ n_{1,x_1}dx_1 + n_{1,x_2}dx_2 + n_{1,x_3}dx_3 &= \left(-\frac{l_{1,x_2}}{l_2}dx_1 + \frac{l_{2,x_1}}{l_1}dx_2 \right) n_2 + \left(-\frac{l_{1,x_3}}{l_3}dx_1 + \frac{l_{3,x_1}}{l_1}dx_3 \right) n_3 \\ &\quad - \frac{l_2}{l_3}dx_1n_4 + \frac{l_1}{2l_3^2}dx_1n_5 - l_1dx_1n_6 \\ &= \left(-\frac{l_{1,x_2}}{l_2}n_2 - \frac{l_{1,x_3}}{l_3}n_3 - \frac{l_2}{l_3}n_4 + \frac{l_1}{2l_3^2}n_5 - l_1n_6 \right) dx_1 \\ &\quad + \left(\frac{l_{2,x_1}}{l_1}n_2 \right) dx_2 + \left(\frac{l_{3,x_1}}{l_1}n_3 \right) dx_3 \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de dx_1 , dx_2 e dx_3 , obtemos que

$$n_{1,x_1} = -\frac{l_{1,x_2}}{l_2}n_2 - \frac{l_{1,x_3}}{l_3}n_3 - \frac{l_2}{l_3}n_4 + \frac{l_1}{2l_3^2}n_5 - l_1n_6, \quad (3.1)$$

$$n_{1,x_2} = \frac{l_{2,x_1}}{l_1}n_2, \quad (3.2)$$

$$n_{1,x_3} = \frac{l_{3,x_1}}{l_1}n_3, \quad (3.3)$$

lembrando que aqui temos um sistema de funções vetoriais. Para as outras derivadas, o procedimento é exatamente o mesmo, de onde obtemos assim, os seguintes sistemas.

Para as derivadas parciais de n_2 , temos

$$n_{2,x_1} = \frac{l_{1,x_2}}{l_2} n_1, \quad (3.4)$$

$$n_{2,x_2} = -\frac{l_{2,x_1}}{l_1} n_1 - \frac{l_{2,x_3}}{l_3} n_3 - \frac{l_1}{l_3} n_4 + \frac{l_2}{2l_3^2} n_5 - l_2 n_6, \quad (3.5)$$

$$n_{2,x_3} = \frac{l_{3,x_2}}{l_2} n_3. \quad (3.6)$$

Para as derivadas parciais de n_3 , temos

$$n_{3,x_1} = \frac{l_{1,x_3}}{l_3} n_1, \quad (3.7)$$

$$n_{3,x_2} = \frac{l_{2,x_3}}{l_3} n_2, \quad (3.8)$$

$$n_{3,x_3} = -\frac{l_{3,x_1}}{l_1} n_1 - \frac{l_{3,x_2}}{l_2} n_2 - \frac{1}{2l_3} n_5 - l_3 n_6. \quad (3.9)$$

Para as derivadas parciais de n_4 , temos

$$n_{4,x_1} = \frac{l_2}{l_3} \left(n_1 - \frac{l_{3,x_1}}{l_1 l_3} n_5 \right), \quad (3.10)$$

$$n_{4,x_2} = \frac{l_1}{l_3} \left(n_2 - \frac{l_{3,x_2}}{l_2 l_3} n_5 \right), \quad (3.11)$$

$$n_{4,x_3} = \frac{1}{l_2} \left(\frac{l_1}{l_3} \right)_{,x_3} n_5. \quad (3.12)$$

Para as derivadas parciais de n_5 , temos

$$n_{5,x_1} = l_1 n_1, \quad (3.13)$$

$$n_{5,x_2} = l_2 n_2, \quad (3.14)$$

$$n_{5,x_3} = l_3 n_3. \quad (3.15)$$

Para as derivadas parciais de n_6 , temos

$$n_{6,x_1} = -\frac{l_1}{2l_3^2} n_1 + \frac{l_2 l_{3,x_1}}{l_1 l_3^2} n_4, \quad (3.16)$$

$$n_{6,x_2} = -\frac{l_2}{2l_3^2} n_2 + \frac{l_1 l_{3,x_2}}{l_2 l_3^2} n_4, \quad (3.17)$$

$$n_{6,x_3} = \frac{1}{2l_3} n_3 - \frac{1}{l_2} \left(\frac{l_1}{l_3} \right)_{,x_3} n_4. \quad (3.18)$$

3.2 O referencial para soluções invariantes por subgrupo de translação das equações de Lamé

Nossa tarefa agora é integrar o sistema (3.1)-(3.18) para o referencial n_i usando as soluções das equações de Lamé invariantes pelo subgrupo de translação que obtivemos no capítulo anterior. Lembramos que tais soluções são funções da variável $\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$, onde α_i são constantes reais, cujas soluções são dadas nos Teoremas 2.6 e 2.7.

3.2.1 O caso $\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$

Nesta seção vamos trabalhar com o sistema onde $\alpha_3 = 0$, cujas soluções, descritas no Teorema 2.7, são dadas por $l_1 = \lambda_3 \sinh(b\xi + \xi_0)$, $l_2 = \lambda_3 \cosh(b\xi + \xi_0)$ e $l_3 = \lambda_3$. Vamos introduzir a seguinte notação que será utilizada nos teoremas que demonstraremos nesta seção:

$$c = \frac{\sqrt{k^2 + 4} + k}{4}, \quad \bar{c} = \frac{\sqrt{k^2 + 4} - k}{4}, \quad \text{com } k = \frac{b^2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) - 1}{\alpha_1 \alpha_2 b^2}, \quad (3.19)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{|\alpha_1 \alpha_2| c}}{\alpha_1}, \quad \bar{\beta} = \frac{\sqrt{|\alpha_1 \alpha_2| \bar{c}}}{\alpha_1}, \quad (3.20)$$

$$\gamma = b(\alpha_1 - \alpha_2 c), \quad \bar{\gamma} = b(\alpha_1 + \alpha_2 \bar{c}), \quad (3.21)$$

$$\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \quad \tilde{\xi} = b\xi + \xi_0, \quad (3.22)$$

$$\tau = b\sqrt{|\alpha_1 \alpha_2|}(\sqrt{\bar{c}}x_2 + \sqrt{c}x_1), \quad \bar{\tau} = b\sqrt{|\alpha_1 \alpha_2|}(\sqrt{c}x_2 - \sqrt{\bar{c}}x_1). \quad (3.23)$$

observe que $c\bar{c} = 1$. O objetivo desta subseção é demonstrar os seguintes teoremas:

Teorema 3.1 *Uma hipersuperfície conformemente plana $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, associada às soluções das equações de Lamé invariantes por translação $l_i(x_1, x_2, x_3) = l_i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$, $\alpha_1 \alpha_2 > 0$, é dada por*

$$X(x_1, x_2, x_3) = \lambda(x_1, x_2)Y(x_1, x_2, x_3),$$

onde Y é uma função vetorial dada por

$$Y = \left(\gamma \left[\cosh \tilde{\xi} \cos \bar{\tau} - \bar{\beta} \sinh \tilde{\xi} \sin \bar{\tau} \right], \gamma \left[\cosh \tilde{\xi} \sin \bar{\tau} + \bar{\beta} \sinh \tilde{\xi} \cos \bar{\tau} \right], \sin x_3, \cos x_3 \right)$$

e λ é uma função real dada por

$$\lambda = \lambda(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{c(c^2 + 1)}}{b(\alpha_1 c + \alpha_2) \left(\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - c} \right) e^\tau \left[\cosh \tilde{\xi} - \beta \sinh \tilde{\xi} \right]},$$

onde usamos a notação dada pelas equações (3.19)-(3.23).

Teorema 3.2 Uma hipersuperfície conformemente plana $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, associada às soluções das equações de Lamé invariantes por translação $l_i(x_1, x_2, x_3) = l_i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$, $\alpha_1 \alpha_2 < 0$, é dada por

$$X(x_1, x_2, x_3) = \lambda(x_1, x_2)Y(x_1, x_2, x_3),$$

onde Y é uma função vetorial dada por

$$Y = \left(\bar{\gamma} \left[\cosh \tilde{\xi} \cos \tau + \beta \sinh \tilde{\xi} \sin \tau \right], \bar{\gamma} \left[\cosh \tilde{\xi} \sin \tau - \beta \sinh \tilde{\xi} \cos \tau \right] \operatorname{sen} x_3, \cos x_3 \right)$$

e λ é uma função real dada por

$$\lambda = \lambda(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{(c^2 + 1)}}{b(\alpha_1 - \alpha_2 c) \left[\sqrt{-\left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} c\right)} \right] e^{\bar{\tau}} \left[\cosh \tilde{\xi} + \frac{\sqrt{-\alpha_1 \alpha_2 c}}{\alpha_1} \sinh \tilde{\xi} \right]},$$

onde usamos a notação dada pelas equações (3.19)-(3.23).

Teorema 3.3 Uma hipersuperfície conformemente plana $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, associada às soluções das equações de Lamé invariantes por translação $l_i(x_1, x_2, x_3) = l_i(\alpha_1 x_1)$, $\alpha_1 \neq 0$, é dada de acordo com α_1 por

i) Se $|\alpha_1| < 1$, então

$$X(x_1, x_2, x_3) = \lambda(x_1, x_2)Y(x_1, x_3),$$

onde λ é uma função real dada por

$$\lambda(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{1 - \alpha_1^2}}{e^{\sqrt{1 - \alpha_1^2} x_2} \cosh(\alpha_1 x_1)},$$

e Y é uma função vetorial dada por

$$Y(x_1, x_3) = \left(\begin{aligned} & \sinh(\alpha_1 x_1) \operatorname{sen}(\sqrt{1 - \alpha_1^2} x_1) + \frac{\alpha_1}{\sqrt{1 - \alpha_1^2}} \cosh(\alpha_1 x_1) \cos(\sqrt{1 - \alpha_1^2} x_1), \\ & -\sinh(\alpha_1 x_1) \cos(\sqrt{1 - \alpha_1^2} x_1) + \frac{\alpha_1}{\sqrt{1 - \alpha_1^2}} \cosh(\alpha_1 x_1) \operatorname{sen}(\sqrt{1 - \alpha_1^2} x_1), \\ & \operatorname{sen} x_3, \cos x_3 \end{aligned} \right).$$

ii) Se $|\alpha_1| > 1$, então

$$X(x_1, x_2, x_3) = \lambda(x_1)Y(x_1, x_2, x_3),$$

onde λ é uma função real dada por

$$\lambda(x_1) = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 - 1}}{\alpha_1 e^{\sqrt{\alpha_1^2 - 1}x_1} \left[\cosh(\alpha_1 x_1) - \frac{\sqrt{\alpha_1^2 - 1}}{\alpha_1} \sinh(\alpha_1 x_1) \right]},$$

e Y é uma função vetorial dada por

$$Y(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{|\alpha_1|}{\alpha_1 \sqrt{\alpha_1^2 - 1}} \cosh(\alpha_1 x_1) \cos(\sqrt{\alpha_1^2 - 1}x_2), \right. \\ \left. \frac{|\alpha_1|}{\alpha_1 \sqrt{\alpha_1^2 - 1}} \cosh(\alpha_1 x_1) \sin(\sqrt{\alpha_1^2 - 1}x_2), \right. \\ \left. \sin x_3, \cos x_3 \right).$$

iii) Se $\alpha_1 = \pm 1$. Então

$$X(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 - \tanh x_1, x_2, \frac{1}{\cosh x_1}, \sin x_3, \cos x_3 \right).$$

Teorema 3.4 Uma hipersuperfície conformemente plana $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, associada às soluções das equações de Lamé invariantes por translação $l_i(x_1, x_2, x_3) = l_i(\alpha_2 x_2)$, $\alpha_2 \neq 0$, é dada por

$$X(x_1, x_2, x_3) = \lambda(x_2)Y(x_1, x_2, x_3),$$

onde λ é uma função real dada por

$$\lambda(x_2) = \frac{1}{e^{\sqrt{1+\alpha_2^2}x_2} \left[\cosh(\alpha_2 x_2) - \frac{\alpha_2}{\sqrt{1+\alpha_2^2}} \sinh(\alpha_2 x_2) \right]}$$

e Y é uma função vetorial dada por

$$Y(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{|\alpha_2|}{\alpha_2 \sqrt{1+\alpha_2^2}} \sinh(\alpha_2 x_2) \cos(\sqrt{1+\alpha_2^2}x_1), \right. \\ \left. \frac{|\alpha_2|}{\alpha_2 \sqrt{1+\alpha_2^2}} \sinh(\alpha_2 x_2) \sin(\sqrt{1+\alpha_2^2}x_1), \right. \\ \left. \cos x_3, \sin x_3 \right).$$

Vamos dar uma demonstração completa do Teorema 3.1, os outros teoremas seguem a mesma linha de raciocínio, com pequenas alterações que observaremos posteriormente.

Neste sentido, podemos supor que $\lambda_3 = 1$ e escrever

$$\begin{aligned} l_1 &= \sinh(b\xi + \xi_0) \\ l_2 &= \cosh(b\xi + \xi_0) \\ l_3 &= 1 \end{aligned} \tag{3.24}$$

uma vez que o valor da constante λ_3 não influi no fato da métrica ser plana. Além disso, como faremos deformações conformes para encontrar a hipersuperfície em alguma forma espacial, o valor dessa constante será embutido no coeficiente conforme.

Como $\alpha_3 = 0$, podemos listar as derivadas de l_1 , l_2 e l_3 , conforme segue

$$\begin{aligned} l_{1,x_i} &= \alpha_i b \cosh(b\xi + \xi_0), \\ l_{2,x_i} &= \alpha_i b \sinh(b\xi + \xi_0), \\ l_{3,x_i} &= 0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Para começar a análise do sistema com essas funções, vamos listar as equações (3.1), (3.5) e (3.9):

$$n_{1,x_1} + \alpha_2 b n_2 + \cosh(b\xi + \xi_0) n_4 - \sinh(b\xi + \xi_0) \left(\frac{1}{2} n_5 - n_6 \right) = 0, \tag{3.26}$$

$$n_{2,x_2} + \alpha_1 b n_1 + \sinh(b\xi + \xi_0) n_4 - \cosh(b\xi + \xi_0) \left(\frac{1}{2} n_5 - n_6 \right) = 0, \tag{3.27}$$

$$n_{3,x_3} + \frac{1}{2} n_5 + n_6 = 0. \tag{3.28}$$

Multiplicando (3.26) por $\sinh(b\xi + \xi_0)$, (3.27) por $-\cosh(b\xi + \xi_0)$ e somando as três equações, obtemos

$$\sinh(b\xi + \xi_0) (n_{1,x_1} + \alpha_2 b n_2) - \cosh(b\xi + \xi_0) (n_{2,x_2} + \alpha_1 b n_1) + n_{3,x_3} + n_5 = 0. \tag{3.29}$$

Dessa forma, para obter n_5 , que é especificamente o vetor que procuramos, basta encontrar os vetores n_1 , n_2 e n_3 . É o que iremos fazer no próximo lema:

Lema 3.1 *Considere o sistema de equações diferenciais parciais (3.1)-(3.18) para o referencial $\{n_1, \dots, n_6\}$ com as funções l_i dadas por (3.24) e $\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $\alpha_1 \alpha_2 \neq 0$. Então os campos vetoriais n_1 , n_2 e n_3 são dados por:*

$$n_1 = \begin{cases} C_1 \cos \bar{\tau} + C_2 \sin \bar{\tau} + C_3 \cosh \tau + C_4 \sinh \tau, & \text{se } \alpha_1 \alpha_2 > 0 \\ C_1 \cosh \bar{\tau} + C_2 \sinh \bar{\tau} + C_3 \cos \tau + C_4 \sin \tau, & \text{se } \alpha_1 \alpha_2 < 0 \end{cases} \tag{3.30}$$

$$n_2 = \begin{cases} \frac{\sqrt{|\alpha_1 \alpha_2|}}{\alpha_1} [\sqrt{c} (-C_1 \sin \bar{\tau} + C_2 \cos \bar{\tau}) + \sqrt{c} (C_3 \sinh \tau + C_4 \cosh \tau)], & \alpha_1 \alpha_2 > 0 \\ \frac{\sqrt{|\alpha_1 \alpha_2|}}{\alpha_1} [\sqrt{c} (C_1 \sinh \bar{\tau} + C_2 \cosh \bar{\tau}) + \sqrt{c} (-C_3 \sin \tau + C_4 \cos \tau)], & \alpha_1 \alpha_2 < 0 \end{cases} \tag{3.31}$$

$$n_3 = -C_5 \sin x_3 + C_6 \cos x_3. \tag{3.32}$$

O campo vetorial n_5 é dado por

$$\begin{aligned} n_5 = & \gamma \left\{ \left[\cosh \tilde{\xi} \cos \bar{\tau} - \bar{\beta} \sinh \tilde{\xi} \sin \bar{\tau} \right] C_1 + \left[\cosh \tilde{\xi} \sin \bar{\tau} + \bar{\beta} \sinh \tilde{\xi} \cos \bar{\tau} \right] C_2 \right\} + \\ & + \bar{\gamma} \left\{ \left[\cosh \tilde{\xi} \cosh \tau - \beta \sinh \tilde{\xi} \sinh \tau \right] C_3 + \left[\cosh \tilde{\xi} \sinh \tau - \beta \sinh \tilde{\xi} \cosh \tau \right] C_4 \right\} + \\ & + C_5 \sin x_3 + C_6 \cos x_3, \end{aligned} \quad (3.33)$$

quando $\alpha_1 \alpha_2 > 0$. Se $\alpha_1 \alpha_2 < 0$, n_5 é dado por

$$\begin{aligned} n_5 = & \gamma \left\{ \left[\cosh \tilde{\xi} \cosh \bar{\tau} + \bar{\beta} \sinh \tilde{\xi} \sinh \bar{\tau} \right] C_1 + \left[\cosh \tilde{\xi} \sinh \bar{\tau} + \bar{\beta} \sinh \tilde{\xi} \cosh \bar{\tau} \right] C_2 \right\} + \\ & + \bar{\gamma} \left\{ \left[\cosh \tilde{\xi} \cos \tau + \beta \sinh \tilde{\xi} \sin \tau \right] C_3 + \left[\cosh \tilde{\xi} \sin \tau - \beta \sinh \tilde{\xi} \cos \tau \right] C_4 \right\} + \\ & + C_5 \sin x_3 + C_6 \cos x_3, \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde utilizamos a notação dada em (3.20)-(3.23) e $\{C_1, \dots, C_6\}$ são vetores constantes.

Demonstração: A demonstração consiste em obter expressões para os campos n_1 , n_2 e n_3 e em seguida, usar a expressão (3.29) para obter n_5 . Começando com n_1 , note que segue de (3.3) e (3.24) que n_1 é uma função de x_1 e x_2 . Escrevendo as equações (3.2) e (3.4) temos que

$$n_{1,x_2} = \alpha_1 b n_2, \quad (3.35)$$

$$n_{2,x_1} = \alpha_2 b n_1. \quad (3.36)$$

Derivando a equação (3.35) e comparando com (3.36), segue que n_1 satisfaz a equação de Klein-Gordon

$$n_{1,x_2 x_1} - \alpha_1 \alpha_2 b^2 n_1 = 0. \quad (3.37)$$

Por outro lado, derivando a equação (3.26) em x_1

$$\begin{aligned} & n_{1,x_1 x_1} + \alpha_2 b n_{2,x_1} + \alpha_1 b \sinh(b\xi + \xi_0) n_4 + \cosh(b\xi + \xi_0) n_{4,x_1} \\ & - \alpha_1 b \cosh(b\xi + \xi_0) \left(\frac{1}{2} n_5 - n_6 \right) - \sinh(b\xi + \xi_0) \left(\frac{1}{2} n_{5,x_1} - n_{6,x_1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Neste ponto, precisamos das derivadas em x_1 de n_4 , n_5 e n_6 . Usando as equações (3.10), (3.13) e (3.16), concluímos que essas derivadas são dadas por

$$n_{4,x_1} = \cosh(b\xi + \xi_0) n_1, \quad (3.39)$$

$$n_{5,x_1} = \sinh(b\xi + \xi_0) n_1, \quad (3.40)$$

$$n_{6,x_1} = -\frac{\sinh(b\xi + \xi_0)}{2} n_1. \quad (3.41)$$

Substituindo as equações (3.36), (3.39), (3.40) e (3.41) em (3.38), obtemos

$$n_{1,x_1x_1} + [(\alpha_2 b)^2 + 1] n_1 - \alpha_1 b \left[\cosh(b\xi + \xi_0) \left(\frac{1}{2} n_5 - n_6 \right) - \sinh(b\xi + \xi_0) n_4 \right] = 0. \quad (3.42)$$

Por outro lado, derivando (3.35) em x_2 , temos

$$n_{1,x_2x_2} - \alpha_1 b n_{2,x_2} = 0, \quad (3.43)$$

substituindo agora (3.27) em (3.43), obtemos

$$n_{1,x_2x_2} + (\alpha_1 b)^2 n_1 - \alpha_1 b \left[\cosh(b\xi + \xi_0) \left(\frac{1}{2} n_5 - n_6 \right) - \sinh(b\xi + \xi_0) n_4 \right] = 0. \quad (3.44)$$

Portanto,

$$n_{1,x_1x_1} - n_{1,x_2x_2} - [b^2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) - 1] n_1 = 0. \quad (3.45)$$

Combinando as equações (3.37) e (3.45), concluímos que

$$n_{1,x_1x_1} - n_{1,x_2x_2} - k n_{1,x_2x_1} = 0. \quad (3.46)$$

onde $k = \frac{b^2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) - 1}{\alpha_1 \alpha_2 b^2}$.

Para estudar a equação diferencial parcial faremos uma mudança de variável para reduzi-la a sua forma normal (ver [14] e [27]). A mudança a que estamos nos referindo será a seguinte

$$\begin{cases} s &= x_2 - \bar{c}x_1, \\ t &= x_2 + cx_1. \end{cases} \quad (3.47)$$

onde c e \bar{c} estão definidas em (3.19). Observe que $\bar{c} > 0$, já que

$$\sqrt{k^2 + 4} > \sqrt{k^2} = |k| \geq k.$$

Além disso, $\bar{c}c = 1$ e portanto $c > 0$.

Seja $u(s, t) = n_1(x_1, x_2)$, então segue que,

$$\begin{aligned} n_{1,x_1x_1} &= \bar{c}u_{,ss} - 2u_{,st} + c^2u_{,tt}, \\ n_{1,x_1x_2} &= -\bar{c}u_{,ss} - (\bar{c} - c)u_{,st} + cu_{,tt}, \\ n_{1,x_2x_2} &= u_{,ss} + 2u_{,st} + u_{,tt}. \end{aligned}$$

Segue de (3.19) que

$$\bar{c}^2 + k\bar{c} - 1 = c^2 - kc - 1 = 0,$$

e portanto concluímos que,

$$n_{1,x_1x_1} - n_{1,x_2x_2} - kn_{1,x_1x_2} = -(k^2 + 4)u_{,st}.$$

Segue então de (3.46) que $u_{,st} = 0$ e assim,

$$u(s, t) = F_1(s) + F_2(t),$$

consequentemente,

$$n_1(x_1, x_2) = F_1(x_2 - \bar{c}x_1) + F_2(x_2 + \bar{c}x_1). \quad (3.48)$$

Lembramos que a equação (3.37) deve ser satisfeita. Nesta direção, vamos calcular n_{1,x_2x_1} em função de F_1 e F_2 . Como $n_{1,x_2} = F_1'(s) + F_2'(t)$, segue que

$$n_{1,x_2x_1} = -\bar{c}F_1''(s) + cF_2''(t).$$

Portanto, segue de (3.37)

$$-\bar{c}F_1''(s) + cF_2''(t) = \alpha_1\alpha_2b^2(F_1 + F_2),$$

o que implica,

$$cF_2''(t) - \alpha_1\alpha_2b^2F_2(t) = \bar{c}F_1''(s) + \alpha_1\alpha_2b^2F_1(s).$$

Como o lado esquerdo só depende de t e o lado direito só depende de s , segue que ambos os lados são iguais a uma constante, vamos chamá-la V . Escrevemos então,

$$\bar{c}F_1''(s) + \alpha_1\alpha_2b^2F_1(s) = V,$$

portanto usando a propriedade $c\bar{c} = 1$, temos

$$F_1''(s) + c\alpha_1\alpha_2b^2F_1(s) = cV.$$

Analogamente,

$$F_2''(t) - \bar{c}\alpha_1\alpha_2b^2F_2(t) = \bar{c}V.$$

Destas duas equações concluímos que

$$F_1(s) = \begin{cases} C_1 \cos b\sqrt{\alpha_1\alpha_2c}s + C_2 \text{sen} b\sqrt{\alpha_1\alpha_2c}s + \frac{V}{\alpha_1\alpha_2b^2}, & \text{se } \alpha_1\alpha_2 > 0, \\ C_1 \cosh b\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|c}s + C_2 \text{senh} b\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|c}s + \frac{V}{\alpha_1\alpha_2b^2}, & \text{se } \alpha_1\alpha_2 < 0, \end{cases}$$

e

$$F_2(t) = \begin{cases} C_3 \cosh b\sqrt{\alpha_1\alpha_2}\bar{c}t + C_4 \sinh b\sqrt{\alpha_1\alpha_2}\bar{c}t - \frac{V}{\alpha_1\alpha_2 b^2}, & \text{se } \alpha_1\alpha_2 > 0, \\ C_4 \cos b\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|}\bar{c}t + C_4 \sin b\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|}\bar{c}t - \frac{V}{\alpha_1\alpha_2 b^2}, & \text{se } \alpha_1\alpha_2 < 0. \end{cases}$$

Onde C_1, C_2, C_3 e C_4 são vetores constantes.

Observamos que de (3.47) e da propriedade $c\bar{c} = 1$, temos que

$$\begin{aligned} b\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|}cs &= b\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|}\sqrt{\bar{c}}(x_2 - \bar{c}x_1) = b\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|}(\sqrt{\bar{c}}x_2 - \sqrt{\bar{c}}x_1), \\ b\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|}\bar{c}t &= b\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|}\sqrt{\bar{c}}(x_2 + cx_1) = b\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|}(\sqrt{\bar{c}}x_2 + \sqrt{\bar{c}}x_1). \end{aligned}$$

Tendo em vista as funções τ e $\bar{\tau}$ definidas em (3.23), temos que

$$b\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|}cs = \bar{\tau} \quad \text{e} \quad b\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|}\bar{c}t = \tau.$$

Portanto, concluímos que

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \begin{cases} C_1 \cos \bar{\tau} + C_2 \sin \bar{\tau} + \frac{V}{\alpha_1\alpha_2 b^2}, & \text{se } \alpha_1\alpha_2 > 0, \\ C_1 \cosh \bar{\tau} + C_2 \sinh \bar{\tau} + \frac{V}{\alpha_1\alpha_2 b^2}, & \text{se } \alpha_1\alpha_2 < 0, \end{cases} \\ F_2(t) &= \begin{cases} C_3 \cosh \tau + C_4 \sinh \tau - \frac{V}{\alpha_1\alpha_2 b^2}, & \text{se } \alpha_1\alpha_2 > 0, \\ C_3 \cos \tau + C_4 \sin \tau + \frac{V}{\alpha_1\alpha_2 b^2}, & \text{se } \alpha_1\alpha_2 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dessa forma, segue de (3.48) e das expressões acima a expressão para n_1 dada em (3.30).

Para obter n_2 , basta usar (3.30) e (3.35). Considerando que

$$\bar{\tau}_{,x_2} = b\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|}c \quad \text{e} \quad \tau_{,x_2} = b\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|}\bar{c}, \quad (3.49)$$

obtemos (3.31).

Uma vez que encontramos as soluções gerais para n_1 e n_2 , vamos obter uma expressão para n_3 . Segue de (3.7) e (3.8) que n_3 só depende de x_3 . Por outro lado, a partir de (3.9) temos

$$n_{3,x_3} = -\frac{1}{2}n_5 - n_6. \quad (3.50)$$

Derivando em x_3 a equação (3.50) obtemos

$$n_{3,x_3x_3} = -\frac{1}{2}n_{5,x_3} - n_{6,x_3}, \quad (3.51)$$

usando as equações (3.15) e (3.18) concluímos que

$$n_{5,x_3} = n_3 \quad (3.52)$$

$$n_{6,x_3} = \frac{1}{2}n_3 \quad (3.53)$$

Combinando as equações (3.50), (3.52) e (3.53) obtemos

$$n_{3,x_3x_3} = -n_3,$$

Como n_3 só depende de x_3 segue que n_3 é dado por (3.32).

Neste ponto podemos obter uma expressão explícita para n_5 através da equação (3.29)

$$n_5 = \cosh(b\xi + \xi_0) (n_{2,x_2} + \alpha_1 b n_1) - \sinh(b\xi + \xi_0) (n_{1,x_1} + \alpha_2 b n_2) - n_{3,x_3},$$

e das expressões de n_1 , n_2 e n_3 que obtivemos dadas em (3.30), (3.31) e (3.32). Como

$$\bar{\tau}_{,x_1} = -b\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|\bar{c}} \quad \text{e} \quad \tau_{,x_1} = b\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|c},$$

segue que

$$n_{1,x_1} = \begin{cases} b\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|} [\sqrt{\bar{c}}(C_1 \sin \bar{\tau} - C_2 \cos \bar{\tau}) + \sqrt{c}(C_3 \sinh \tau + C_4 \cosh \tau)], & \alpha_1\alpha_2 > 0, \\ b\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|} [-\sqrt{\bar{c}}(C_1 \sinh \bar{\tau} + C_2 \cosh \bar{\tau}) + \sqrt{c}(-C_3 \sinh \tau + C_4 \cosh \tau)], & \alpha_1\alpha_2 < 0, \end{cases} \quad (3.54)$$

Por outro lado, considerando (3.49) segue que

$$n_{2,x_2} = \begin{cases} b\alpha_2 [-c(C_1 \cos \bar{\tau} + C_2 \sinh \bar{\tau}) + \bar{c}(C_3 \cosh \tau + C_4 \sinh \tau)], & \alpha_1\alpha_2 > 0 \\ b\alpha_2 [-c(C_1 \cosh \bar{\tau} + C_2 \sinh \bar{\tau}) + \bar{c}(C_3 \cos \tau + C_4 \sinh \tau)], & \alpha_1\alpha_2 < 0. \end{cases} \quad (3.55)$$

Portanto, concluimos das derivadas acima e das expressões (3.30), (3.31) e (3.32) que, se $\alpha_1\alpha_2 > 0$, devemos ter (3.29) dada por

$$\begin{aligned} n_5 &= \cosh(b\xi + \xi_0) \{ b\alpha_2 [-c(C_2 \sinh \bar{\tau} + C_1 \cos \bar{\tau}) + \bar{c}(C_4 \sinh \tau + C_3 \cosh \tau)] + \\ &\quad + b\alpha_1 [C_1 \cos \bar{\tau} + C_2 \sinh \bar{\tau} + C_3 \cosh \tau + C_4 \sinh \tau] \} - \\ &\quad - \sinh(b\xi + \xi_0) \left\{ b\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|} [\sqrt{\bar{c}}(C_1 \sinh \bar{\tau} - C_2 \cos \bar{\tau}) + \sqrt{c}(C_3 \sinh \tau + C_4 \cosh \tau)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b\alpha_2}{\alpha_1} \sqrt{|\alpha_1\alpha_2|} [\sqrt{c}(C_2 \cos \bar{\tau} - C_1 \sinh \bar{\tau}) + \sqrt{\bar{c}}(C_4 \cosh \tau + C_3 \sinh \tau)] \right\} + \\ &\quad + C_5 \cos x_3 + C_6 \sinh x_3 \\ &= b \cosh(b\xi + \xi_0) \{ (\alpha_1 - \alpha_2 c) (\cos \bar{\tau} C_1 + \sinh \bar{\tau} C_2) + (\alpha_1 + \alpha_2 \bar{c}) (\cosh \tau C_3 + \sinh \tau C_4) \} - \\ &\quad - b\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|} \sinh(b\xi + \xi_0) \left\{ \left(\sqrt{\bar{c}} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \sqrt{c} \right) (\sinh \bar{\tau} C_1 - \cos \bar{\tau} C_2) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sqrt{c} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \sqrt{\bar{c}} \right) (\sinh C_3 + \cosh C_4) \right\} + C_5 \cos x_3 + C_6 \sinh x_3, \end{aligned}$$

segue então que,

$$\begin{aligned}
n_5 = & b(\alpha_1 - \alpha_2 c) \left\{ \left[\cosh(b\xi + \xi_0) \cos \bar{\tau} - \frac{\sqrt{|\alpha_1 \alpha_2| \bar{c}}}{\alpha_1} \sinh(b\xi + \xi_0) \sin \bar{\tau} \right] C_1 + \right. \\
& \left. \left[\cosh(b\xi + \xi_0) \sin \bar{\tau} + \frac{\sqrt{|\alpha_1 \alpha_2| \bar{c}}}{\alpha_1} \sinh(b\xi + \xi_0) \cos \bar{\tau} \right] C_2 \right\} + \\
& + b(\alpha_1 + \alpha_2 \bar{c}) \left\{ \left[\cosh(b\xi + \xi_0) \cosh \tau - \frac{\sqrt{|\alpha_1 \alpha_2| c}}{\alpha_1} \sinh(b\xi + \xi_0) \sinh \tau \right] C_3 + \right. \\
& \left. \left[\cosh(b\xi + \xi_0) \sinh \tau - \frac{\sqrt{|\alpha_1 \alpha_2| c}}{\alpha_1} \sinh(b\xi + \xi_0) \cosh \tau \right] C_4 \right\} + \\
& + C_5 \cos x_3 + C_6 \sin x_3.
\end{aligned}$$

Usando a notação (3.20)-(3.23), temos a expressão (3.33). Analogamente se obtém (3.34) e o lema está provado. □

Uma vez que obtivemos uma expressão para o campo n_5 , precisamos determinar como os vetores constantes C_1, \dots, C_6 estão relacionados. Tal fato está estabelecido no seguinte lema

Lema 3.2 *Considere os campos vetoriais n_1, n_2 e n_3 dados pelo Lema 3.1. Para que esses campos sejam unitários e ortogonais entre si, é necessário e suficiente que os vetores constantes de integração $\{C_1, \dots, C_6\}$ satisfaçam as seguintes relações:*

$$\langle C_i, C_j \rangle = 0, \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq 6, i \neq j, \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned}
\langle C_5, C_5 \rangle &= 1, \\
\langle C_6, C_6 \rangle &= 1.
\end{aligned} \quad (3.57)$$

Além disso,

i) se $\alpha_1 \alpha_2 > 0$, então

$$\langle C_1, C_1 \rangle = \langle C_2, C_2 \rangle = \frac{\alpha_2 + \alpha_1 c}{\alpha_2(c^2 + 1)} > 0 \quad \text{e} \quad \langle C_3, C_3 \rangle = -\langle C_4, C_4 \rangle = \frac{c(\alpha_2 c - \alpha_1)}{\alpha_2(c^2 + 1)} < 0. \quad (3.58)$$

ii) se $\alpha_1 \alpha_2 < 0$, então

$$\langle C_1, C_1 \rangle = -\langle C_2, C_2 \rangle = \frac{\alpha_2 + \alpha_1 c}{\alpha_2(c^2 + 1)} < 0 \quad \text{e} \quad \langle C_4, C_4 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = \frac{c(\alpha_2 c - \alpha_1)}{\alpha_2(c^2 + 1)} > 0. \quad (3.59)$$

Demonstração: Inicialmente, vamos estudar as relações entre os vetores n_1 e n_2 e suas derivadas. Pelas equações (3.26) e (3.35) temos que

$$\begin{aligned}\langle n_{1,x_1}, n_{1,x_1} \rangle &= (\alpha_2 b)^2 + 1, \\ \langle n_{1,x_2}, n_{1,x_2} \rangle &= (\alpha_1 b)^2, \\ \langle n_{1,x_1}, n_{1,x_2} \rangle &= -\alpha_1 \alpha_2 b^2.\end{aligned}\tag{3.60}$$

Derivando (3.30) em x_2 temos

$$n_{1,x_2} = \begin{cases} b\sqrt{|\alpha_1 \alpha_2|}c(-C_1 \sin \bar{\tau} + C_2 \cos \bar{\tau}) + b\sqrt{|\alpha_1 \alpha_2|}\bar{c}(C_3 \sinh \tau + C_4 \cosh \tau), & \alpha_1 \alpha_2 > 0, \\ b\sqrt{|\alpha_1 \alpha_2|}c(C_1 \sinh \bar{\tau} + C_2 \cosh \bar{\tau}) + b\sqrt{|\alpha_1 \alpha_2|}\bar{c}(-C_3 \sin \tau + C_4 \cos \tau), & \alpha_1 \alpha_2 < 0, \end{cases}\tag{3.61}$$

Avaliando (3.54) e (3.61) em $(x_1, x_2) = (0, 0)$, temos $\tau = \bar{\tau} = 0$, portanto

$$\begin{aligned}n_{1,x_1}(0, 0) &= b\sqrt{|\alpha_1 \alpha_2|}(-\sqrt{\bar{c}}C_2 + \sqrt{c}C_4), \\ n_{1,x_2}(0, 0) &= b\sqrt{|\alpha_1 \alpha_2|}(\sqrt{c}C_2 + \sqrt{\bar{c}}C_4).\end{aligned}\tag{3.62}$$

Aplicando as relações (3.60) a (3.62), obtemos o seguinte sistema linear nas variáveis $\langle C_2, C_2 \rangle$, $\langle C_2, C_4 \rangle$ e $\langle C_4, C_4 \rangle$

$$\begin{cases} \bar{c} \langle C_2, C_2 \rangle - 2 \langle C_2, C_4 \rangle + c \langle C_4, C_4 \rangle = \frac{(\alpha_2 b)^2 + 1}{|\alpha_1 \alpha_2| b^2}, \\ c \langle C_2, C_2 \rangle + 2 \langle C_2, C_4 \rangle + \bar{c} \langle C_4, C_4 \rangle = \left| \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right|, \\ -\langle C_2, C_2 \rangle + (c - \bar{c}) \langle C_2, C_4 \rangle + \langle C_4, C_4 \rangle = -\varepsilon, \end{cases}\tag{3.63}$$

onde $\varepsilon = \text{sgn}(\alpha_1, \alpha_2)$, cuja solução é dada por

$$\begin{aligned}\langle C_2, C_2 \rangle &= \frac{\varepsilon(\alpha_2 + \alpha_1 c)}{\alpha_2(c^2 + 1)}, \\ \langle C_2, C_4 \rangle &= 0, \\ \langle C_4, C_4 \rangle &= \frac{\varepsilon c(\alpha_1 - \alpha_2 c)}{\alpha_2(c^2 + 1)}.\end{aligned}\tag{3.64}$$

Vamos agora fazer o mesmo processo, usando neste caso, as derivadas de n_2 . Pelas equações (3.36) e (3.27) temos

$$\begin{aligned}\langle n_{2,x_1}, n_{2,x_1} \rangle &= (\alpha_2 b)^2, \\ \langle n_{2,x_2}, n_{2,x_2} \rangle &= (\alpha_1 b)^2 - 1, \\ \langle n_{2,x_1}, n_{2,x_2} \rangle &= -\alpha_1 \alpha_2 b^2.\end{aligned}\tag{3.65}$$

Derivando (3.31) em x_1 e x_2 temos

$$n_{2,x_1} = \begin{cases} b\alpha_2(C_1 \cos \bar{\tau} + C_2 \sin \bar{\tau} + C_3 \cosh \tau + C_4 \sinh \tau), & \alpha_1 \alpha_2 > 0 \\ b\alpha_2(C_1 \cosh \bar{\tau} + C_2 \sinh \bar{\tau} + C_3 \cos \tau + C_4 \sin \tau), & \alpha_1 \alpha_2 < 0 \end{cases}\tag{3.66}$$

Avaliando (3.55) e (3.66) em $(x_1, x_2) = (0, 0)$, obtemos

$$\begin{aligned} n_{2,x_1}(0, 0) &= b\alpha_2(C_1 + C_3), \\ n_{2,x_2}(0, 0) &= b\alpha_2(-cC_1 + \bar{c}C_3). \end{aligned} \quad (3.67)$$

De maneira análoga ao caso anterior, aplicando as relações (3.65) a (3.67), obtemos o seguinte sistema linear nas variáveis $\langle C_1, C_1 \rangle$, $\langle C_1, C_3 \rangle$ e $\langle C_3, C_3 \rangle$

$$\begin{cases} \langle C_1, C_1 \rangle + 2\langle C_1, C_3 \rangle + \langle C_3, C_3 \rangle = 1, \\ c^2 \langle C_1, C_1 \rangle - 2\langle C_1, C_3 \rangle + \bar{c}^2 \langle C_3, C_3 \rangle = \frac{(\alpha_1 b)^2 - 1}{(b\alpha_2)^2}, \\ -c \langle C_1, C_1 \rangle + (\bar{c} - c) \langle C_1, C_3 \rangle + \bar{c} \langle C_3, C_3 \rangle = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \end{cases} \quad (3.68)$$

cuja solução é dada por

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_1 \rangle &= \frac{\alpha_2 + \alpha_1 c}{\alpha_2(c^2 + 1)}, \\ \langle C_2, C_3 \rangle &= 0, \\ \langle C_3, C_3 \rangle &= \frac{c(\alpha_2 c - \alpha_1)}{\alpha_2(c^2 + 1)}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Para completar as relações entre as constantes C_1, \dots, C_4 , vamos considerar agora os seguintes produtos internos:

$$\begin{aligned} \langle n_1, n_{1,x_1} \rangle &= 0, \\ \langle n_1, n_{1,x_2} \rangle &= 0, \\ \langle n_2, n_{2,x_1} \rangle &= 0, \\ \langle n_2, n_{2,x_2} \rangle &= 0, \\ \langle n_{2,x_2}, n_{1,x_1} \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.70)$$

As quatro primeiras relações são imediatas, enquanto que a última segue das equações (3.1) e (3.5). Avaliando os vetores em $(x_1, x_2) = (0, 0)$, temos que, além das equações (3.62) e (3.67), temos ainda

$$\begin{aligned} n_1(0, 0) &= C_1 + C_3, \\ n_2(0, 0) &= \frac{\sqrt{|\alpha_1 \alpha_2|}}{\alpha_1} (\sqrt{c}C_2 + \sqrt{\bar{c}}C_4) \end{aligned} \quad (3.71)$$

Aplicando as relações (3.70) aos vetores acima, temos que

$$\begin{cases} -\sqrt{\bar{c}} \langle C_1, C_2 \rangle + \sqrt{c} \langle C_1, C_4 \rangle - \sqrt{\bar{c}} \langle C_3, C_2 \rangle + \sqrt{c} \langle C_3, C_4 \rangle = 0, \\ \sqrt{c} \langle C_1, C_2 \rangle + \sqrt{\bar{c}} \langle C_1, C_4 \rangle + \sqrt{c} \langle C_3, C_2 \rangle + \sqrt{\bar{c}} \langle C_3, C_4 \rangle = 0, \\ \sqrt{c} \langle C_1, C_2 \rangle + \sqrt{\bar{c}} \langle C_1, C_4 \rangle + \sqrt{c} \langle C_3, C_2 \rangle + \sqrt{\bar{c}} \langle C_3, C_4 \rangle = 0, \\ -c\sqrt{c} \langle C_1, C_2 \rangle - c\sqrt{\bar{c}} \langle C_1, C_4 \rangle + \bar{c}\sqrt{c} \langle C_2, C_3 \rangle + \bar{c}\sqrt{\bar{c}} \langle C_3, C_4 \rangle = 0, \\ c\sqrt{\bar{c}} \langle C_1, C_2 \rangle - c\sqrt{c} \langle C_1, C_4 \rangle - \bar{c}\sqrt{\bar{c}} \langle C_2, C_3 \rangle + \bar{c}\sqrt{c} \langle C_3, C_4 \rangle = 0. \end{cases} \quad (3.72)$$

Observe que a segunda e a terceira linha do sistema se repetem, eliminando uma delas e usando o fato de que $\bar{c} = \frac{1}{c}$, chegamos ao seguinte sistema homogêneo,

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{c} & 1 & -\frac{1}{c} & 1 \\ 1 & \frac{1}{c} & 1 & \frac{1}{c} \\ -c & -1 & \frac{1}{c} & \frac{1}{c^2} \\ 1 & -c & -\frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle C_1, C_2 \rangle \\ \langle C_1, C_4 \rangle \\ \langle C_3, C_2 \rangle \\ \langle C_3, C_4 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cujas matrizes possuem determinante igual a

$$-\frac{1 + 4c^2 + 6c^4 + 4c^6 + c^8}{c^6},$$

que é sempre diferente de zero. Logo o sistema possui solução trivial, e então

$$\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_4 \rangle = \langle C_3, C_2 \rangle = \langle C_3, C_4 \rangle = 0. \quad (3.73)$$

Nosso próximo passo é encontrar as relações envolvendo as constantes C_5 e C_6 envolvidas na expressão de n_3 . Lembramos que $n_3 = -C_5 \sin x_3 + C_6 \cos x_3$, devemos ter as seguintes relações

$$\begin{aligned} \langle n_3, n_3 \rangle &= 1, \\ \langle n_3, n_{3,x_3} \rangle &= 0, \\ \langle n_{3,x_3}, n_{3,x_3} \rangle &= 1. \end{aligned} \quad (3.74)$$

As duas primeiras relações são triviais, a terceira decorre da equação (3.50). Além disso, temos

$$n_{3,x_3} = -C_5 \cos x_3 - C_6 \sin x_3, \quad (3.75)$$

avaliando em $x_3 = 0$,

$$\begin{aligned} n_3(0) &= C_6, \\ n_{3,x_3}(0) &= -C_5. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Assim, aplicando as relações (3.74) a (3.76), concluímos que

$$\begin{aligned} \langle C_6, C_6 \rangle &= 1, \\ \langle C_6, C_5 \rangle &= 0, \\ \langle C_5, C_5 \rangle &= 1. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Utilizando as equações (3.26), (3.35), (3.36) e (3.27), temos

$$\begin{aligned}
\langle n_{1,x_1}, n_3 \rangle &= 0, \\
\langle n_{1,x_2}, n_3 \rangle &= 0, \\
\langle n_{2,x_1}, n_3 \rangle &= 0, \\
\langle n_{2,x_2}, n_3 \rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Vamos aplicar as duas primeiras relações de (3.78) aos vetores (3.62) e (3.76) para obter o sistema homogêneo

$$\begin{cases} -\sqrt{\bar{c}} \langle C_2, C_6 \rangle + \sqrt{c} \langle C_4, C_6 \rangle = 0, \\ \sqrt{c} \langle C_2, C_6 \rangle + \sqrt{\bar{c}} \langle C_4, C_6 \rangle = 0, \end{cases} \tag{3.79}$$

que possui apenas a solução trivial

$$\langle C_2, C_6 \rangle = \langle C_4, C_6 \rangle = 0. \tag{3.80}$$

De maneira análoga, as duas últimas relações de (3.78) aplicada aos vetores (3.67) e (3.76) fornecem

$$\begin{cases} \langle C_1, C_6 \rangle + \langle C_3, C_6 \rangle = 0, \\ -c \langle C_1, C_6 \rangle + \bar{c} \langle C_3, C_6 \rangle = 0, \end{cases} \tag{3.81}$$

da mesma forma, o sistema (3.81), possui apenas a solução trivial

$$\langle C_1, C_6 \rangle = \langle C_3, C_6 \rangle = 0. \tag{3.82}$$

Realizando o mesmo processo, agora com as equações (3.26), (3.35), (3.36), (3.27) e (3.50), obtemos as relações

$$\begin{aligned}
\langle n_{1,x_1}, n_{3,x_3} \rangle &= 0, \\
\langle n_{1,x_2}, n_{3,x_3} \rangle &= 0, \\
\langle n_{2,x_1}, n_{3,x_3} \rangle &= 0, \\
\langle n_{2,x_2}, n_{3,x_3} \rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Que fornecem de maneira análoga

$$\langle C_i, C_5 \rangle = 0, \text{ para } i = 1, \dots, 4 \tag{3.84}$$

Assim, as equações (3.64), (3.69), (3.73), (3.77), (3.80), (3.82) e (3.84) fornecem (3.56) e (3.57) e as igualdades de (3.58) e (3.59).

Para estudar as desigualdades de (3.58) e (3.59), olhamos os ítems separadamente:

i). Inicialmente observe que

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1 c}{\alpha_2(c^2 + 1)} = \frac{1}{c^2 + 1} \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} c \right) > 0,$$

pois $c > 0$ e $\alpha_1 \alpha_2 > 0$ é equivalente a $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > 0$.

Mostremos a outra desigualdade de (3.58). Lembramos de (3.19) que

$$c = \frac{\sqrt{k^2 + 4} + k}{2},$$

onde k é dado por

$$k = \frac{b^2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) - 1}{b^2 \alpha_1 \alpha_2},$$

que pode ser escrito como

$$k = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{1}{b^2 \alpha_1 \alpha_2}. \quad (3.85)$$

Além disso, note que

$$\begin{aligned} k^2 + 4 &= \frac{b^4(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)^2 - 2b^2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + 1}{b^4 \alpha_1^2 \alpha_2^2} + 4 \\ &= \frac{b^4(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)^2 - 2b^2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + 1 + 4b^4 \alpha_1^2 \alpha_2^2}{b^4 \alpha_1^2 \alpha_2^2} \\ &= \frac{b^4(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 + 2b^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + 1 - 4b^2 \alpha_1^2}{b^4 \alpha_1^2 \alpha_2^2} \\ &= \frac{[b^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + 1]^2 - 4b^2 \alpha_1^2}{b^4 \alpha_1^2 \alpha_2^2}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Logo,

$$\frac{k^2 + 4}{4} = \left(\frac{b^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + 1}{2b^2 \alpha_1 \alpha_2} \right)^2 - \frac{1}{b^2 \alpha_2^2} < \left(\frac{b^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + 1}{2b^2 \alpha_1 \alpha_2} \right)^2. \quad (3.87)$$

Queremos provar que $\frac{c(\alpha_2 c - \alpha_1)}{\alpha_2(c^2 + 1)} < 0$. Como $\frac{c}{c^2 + 1} > 0$, basta provar que $c - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < 0$.

Neste sentido, segue de (3.85) e (3.87) que

$$\begin{aligned} c - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} &= \frac{\sqrt{k^2 + 4}}{2} + \frac{k}{2} - \left(k + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{1}{b^2 \alpha_1 \alpha_2} \right) \\ &< \frac{b^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + 1}{2b^2 \alpha_1 \alpha_2} - \frac{k}{2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{1}{b^2 \alpha_1 \alpha_2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

ii) Neste caso temos $\alpha_1 \alpha_2 < 0$ e então, $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < 0$, o que implica

$$\frac{c(\alpha_2 c - \alpha_1)}{\alpha_2(c^2 + 1)} = \frac{c}{c^2 + 1} \left(c - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) > 0.$$

Para a outra desigualdade de (3.59), procedemos como em em (3.86). Temos que

$$\begin{aligned} k^2 + 4 &= \frac{b^4(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 + 2b^2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) + 1}{b^4(\alpha_1\alpha_2)^2} \\ &= \frac{b^4(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 - 2b^2(\alpha_2^2 + \alpha_1^2) + 1 + 4b^2\alpha_2^2}{b^4(\alpha_1\alpha_2)^2} \\ &= \frac{[b^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - 1]^2 + 4b^2\alpha_2^2}{b^4(\alpha_1\alpha_2)^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{k^2 + 4}{4} = \left(\frac{b^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - 1}{2b^2|\alpha_1\alpha_2|} \right)^2 + \frac{1}{b^2\alpha_1^2} + \frac{1}{b^2\alpha_1^2} > \left(\frac{b^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - 1}{2b^2|\alpha_1\alpha_2|} \right)^2 \quad (3.88)$$

Vamos provar que $\frac{\alpha_2 + \alpha_1 c}{\alpha_2(c^2 + 1)} < 0$. Como $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < 0$ basta provar que $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + c > 0$. Pelas equações (3.85) e (3.88), temos que

$$\begin{aligned} c + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} &= \sqrt{\frac{k^2 + 4}{4}} + \frac{k}{2} - k\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{1}{b^2\alpha_1\alpha_2} \\ &> \frac{b^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - 1}{2b^2|\alpha_1\alpha_2|} - \frac{k}{2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{1}{b^2\alpha_1\alpha_2}, \end{aligned}$$

Como $\alpha_1\alpha_2 < 0$, temos que

$$c + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} > -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{2\alpha_1} + \frac{1}{2b^2\alpha_1\alpha_2} - \frac{k}{2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{1}{b^2\alpha_1\alpha_2} = 0.$$

□

Agora que temos as informações dadas pelos Lemas 3.1 e 3.2, podemos demonstrar o Teorema 3.1:

Demonstração do Teorema 3.1: Como $\alpha_1\alpha_2 > 0$, segue do Lema 3.1 que

$$\begin{aligned} n_5 &= \gamma \left\{ \left[\cosh \tilde{\xi} \cos \bar{\tau} - \bar{\beta} \sinh \tilde{\xi} \sin \bar{\tau} \right] C_1 + \left[\cosh \tilde{\xi} \sin \bar{\tau} + \bar{\beta} \sinh \tilde{\xi} \cos \bar{\tau} \right] C_2 \right\} + \\ &+ \bar{\gamma} \left\{ \left[\cosh \tilde{\xi} \cosh \tau - \beta \sinh \tilde{\xi} \sinh \tau \right] C_3 + \left[\cosh \tilde{\xi} \sinh \tau - \beta \sinh \tilde{\xi} \cosh \tau \right] C_4 \right\} + \\ &+ C_5 \sin x_3 + C_6 \cos x_3. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.2, temos que $\langle C_5, C_5 \rangle = \langle C_6, C_6 \rangle = 1$,

$$\langle C_1, C_1 \rangle = \langle C_2, C_2 \rangle = \frac{\alpha_2 + \alpha_1 c}{\alpha_2(c^2 + 1)} > 0 \text{ e } \langle C_3, C_3 \rangle = -\langle C_4, C_4 \rangle = \frac{c(\alpha_2 c - \alpha_1)}{\alpha_2(c^2 + 1)} < 0.$$

Seja $(e_i)_{i=0}^5$ a base canônica de \mathbb{R}_1^6 , isto é, $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ onde 1 aparece na i -ésima coordenada. Além disso, temos as seguintes relações

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_j \rangle &= 0, \text{ para } i \neq j, \\ \langle e_i, e_i \rangle &= 1, \text{ para } 1 \leq i \leq 5, \\ \langle e_0, e_0 \rangle &= -1. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Podemos então escolher a nossa base C_1, \dots, C_6 , da seguinte forma

$$\begin{aligned}
C_1 &= \sqrt{\frac{\alpha_2 + \alpha_1 c}{\alpha_2(c^2 + 1)}} e_1, \\
C_2 &= \sqrt{\frac{\alpha_2 + \alpha_1 c}{\alpha_2(c^2 + 1)}} e_2, \\
C_3 &= \sqrt{\frac{c(\alpha_1 - \alpha_2 c)}{\alpha_2(c^2 + 1)}} e_0, \\
C_4 &= \sqrt{\frac{c(\alpha_1 - \alpha_2 c)}{\alpha_2(c^2 + 1)}} e_5, \\
C_5 &= e_3, \\
C_6 &= e_4.
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Além da óbvia opção da escolha da base em termos dos sinais, a determinação acima tem outra razão que ficará mais clara a seguir, quando fizermos a imersão em \mathbb{R}^4 .

Para fazer a imersão, usamos o argumento do início do Capítulo 1, onde vimos \mathbb{R}^4 como uma subvariedade do cone de luz L^5 , através da isometria com a subvariedade $M_0^4 \subset L^5$, dada pelo conjunto

$$M_0^4 = \{y \in L^5 \mid \langle y, m_0 \rangle = -1\},$$

onde $m_0 = (1, 0, 0, 0, 0, -1)$. Neste caso, a isometria é dada por

$$x \in \mathbb{R}^4 \leftrightarrow \left(\frac{1 + |x|^2}{2}, x, \frac{1 - |x|^2}{2} \right) \in M_0^4 \subset L^5. \tag{3.91}$$

De agora em diante, seja $f = n_5$. De acordo com o que vimos, procuramos λ tal que $\tilde{f} = \lambda f$ satisfaça

$$\langle \tilde{f}, m_0 \rangle = -1,$$

Se escrevemos $f = (f_0, \dots, f_5)$, concluímos que

$$\lambda = \frac{1}{f_0 + f_5}. \tag{3.92}$$

Segue de (3.33) que

$$\begin{aligned}
f_0 + f_5 &= \sqrt{\frac{c(\alpha_1 - \alpha_2 c)}{\alpha_2(c^2 + 1)}} b(\alpha_1 + \alpha_2 \bar{c}) \left[\cosh(b\xi + \xi_0) \cosh \tau - \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 c}}{\alpha_1} \sinh(b\xi + \xi_0) \sinh \tau + \right. \\
&\quad \left. \cosh(b\xi + \xi_0) \sinh \tau - \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 c}}{\alpha_1} \sinh(b\xi + \xi_0) \cosh \tau \right] \\
&= \sqrt{\frac{c(\alpha_1 - \alpha_2 c)}{\alpha_2(c^2 + 1)}} b(\alpha_1 + \alpha_2 \bar{c}) \left\{ \left[\cosh(b\xi + \xi_0) - \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 c}}{\alpha_1} \sinh(b\xi + \xi_0) \right] (\sinh \tau + \cosh \tau) \right\} \\
&= \sqrt{\frac{c(\alpha_1 - \alpha_2 c)}{\alpha_2(c^2 + 1)}} b(\alpha_1 + \alpha_2 \bar{c}) e^\tau \left[\cosh(b\xi + \xi_0) - \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 c}}{\alpha_1} \sinh(b\xi + \xi_0) \right].
\end{aligned}$$

Assim,

$$\lambda = \frac{\sqrt{c(c^2 + 1)}}{b(\alpha_1 c + \alpha_2) \left(\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - c} \right) e^\tau \left[\cosh(b\xi + \xi_0) - \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 c}}{\alpha_1} \sinh(b\xi + \xi_0) \right]}. \quad (3.93)$$

Teremos então a imersão dada por $\tilde{f} = \lambda f$. Portanto, concluímos que

$$\tilde{f} = (\lambda f_0, \lambda Y, \lambda f_5), \quad (3.94)$$

onde

$$Y = \left(\sqrt{\frac{\alpha_2 + \alpha_1 c}{\alpha_2(c^2 + 1)}} b(\alpha_1 - \alpha_2 c) \left[\cosh(b\xi + \xi_0) \cos \bar{\tau} - \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 c}}{\alpha_1} \sinh(b\xi + \xi_0) \sin \bar{\tau} \right], \right. \\ \left. \sqrt{\frac{\alpha_2 + \alpha_1 c}{\alpha_2(c^2 + 1)}} b(\alpha_1 - \alpha_2 c) \left[\cosh(b\xi + \xi_0) \sin \bar{\tau} + \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 c}}{\alpha_1} \sinh(b\xi + \xi_0) \cos \bar{\tau} \right], \sin x_3, \cos x_3 \right) \quad (3.95)$$

Portanto, pela isometria (3.91) entre M_0^4 e \mathbb{R}^4 , segue que a hipersuperfície conformemente plana procurada é exatamente λY dada em (3.94), o que demonstra o teorema. □

Para o caso $\alpha_1 \alpha_2 < 0$ os cálculos são análogos, de forma que temos também a demonstração para o Teorema 3.2:

Demonstração do Teorema 3.2: Vamos escrever o vetor n_5 dado pelo Lema 3.1

$$n_5 = \gamma \left\{ \left[\cosh \tilde{\xi} \cosh \bar{\tau} + \bar{\beta} \sinh \tilde{\xi} \sinh \bar{\tau} \right] C_1 + \left[\cosh \tilde{\xi} \sinh \bar{\tau} + \bar{\beta} \sinh \tilde{\xi} \cosh \bar{\tau} \right] C_2 \right\} + \\ + \bar{\gamma} \left\{ \left[\cosh \tilde{\xi} \cos \tau + \beta \sinh \tilde{\xi} \sin \tau \right] C_3 + \left[\cosh \tilde{\xi} \sin \tau - \beta \sinh \tilde{\xi} \cos \tau \right] C_4 \right\} + \\ + C_5 \sin x_3 + C_6 \cos x_3$$

Pelo Lema 3.2 *ii*) temos que $\langle C_5, C_5 \rangle = \langle C_6, C_6 \rangle = 1$, além de

$$\langle C_1, C_1 \rangle = -\langle C_2, C_2 \rangle = \frac{\alpha_2 + \alpha_1 c}{\alpha_2(c^2 + 1)} < 0 \quad \text{e} \quad \langle C_3, C_3 \rangle = \langle C_4, C_4 \rangle = \frac{c(\alpha_2 c - \alpha_1)}{\alpha_2(c^2 + 1)} > 0.$$

Vamos agora relacionar C_1, \dots, C_6 com a base canônica, da forma como fizemos anteriormente, devemos ter

$$\begin{aligned}
C_1 &= \sqrt{-\frac{\alpha_2 + \alpha_1 c}{\alpha_2(c^2 + 1)}} e_0, \\
C_2 &= \sqrt{-\frac{\alpha_2 + \alpha_1 c}{\alpha_2(c^2 + 1)}} e_5, \\
C_3 &= \sqrt{\frac{c(\alpha_2 c - \alpha_1)}{\alpha_2(c^2 + 1)}} e_1, \\
C_4 &= \sqrt{\frac{c(\alpha_2 c - \alpha_1)}{\alpha_2(c^2 + 1)}} e_2, \\
C_5 &= e_3, \\
C_6 &= e_4.
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Assim, determinamos uma imersão conformemente plana em \mathbb{R}^4 associada as soluções invariantes por um subgrupo de simetria onde o invariante básico é dado por $\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, com $\alpha_1 \alpha_2 < 0$.

□

As demonstrações para os Teoremas 3.3 e 3.4 são análogas, porém mais simples, uma vez que segue diretamente de (3.37) que $n_1(x_1, x_2) = H_1(x_1) + H_2(x_2)$ e então, usamos (3.45) para determinar H_1 e H_2 .

3.2.2 O caso geral $\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$

Nesta seção estudaremos o caso geral para soluções invariantes pelo subgrupo de translação, isto é, vamos trabalhar com todos α_i 's todos não nulos. Pelo Teorema 2.6, lembramos que

$$\begin{cases} l_{1,\xi} = c_1 l_2 l_3, \\ l_{2,\xi} = c_2 l_1 l_3, \\ l_{3,\xi} = (c_2 - c_1) l_1 l_2. \end{cases} \tag{3.97}$$

Portanto, obtemos o seguinte sistema de derivadas parciais para os campos n_i : as equações (3.1)-(3.3) nos dão

$$\begin{aligned}
n_{1,x_1} &= -c_1 \alpha_2 l_3 n_2 - c_1 \alpha_3 l_2 n_3 - \frac{l_2}{l_3} n_4 + \frac{l_1}{2l_3^2} n_5 - l_1 n_6, \\
n_{1,x_2} &= c_2 \alpha_1 l_3 n_2, \\
n_{1,x_3} &= (c_2 - c_1) \alpha_1 l_2 n_3.
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Para as derivadas parciais de n_2 , as equações (3.4)-(3.6) se reduzem a

$$\begin{aligned} n_{2,x_1} &= c_1 \alpha_2 l_3 n_1, \\ n_{2,x_2} &= -c_2 \alpha_1 l_3 n_1 - c_2 \alpha_3 l_1 n_3 - \frac{l_1}{l_3} n_4 + \frac{l_2}{2l_3^2} n_5 - l_2 n_6, \\ n_{2,x_3} &= (c_2 - c_1) \alpha_2 l_1 n_3. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Segue de (3.7)-(3.9) que as derivadas parciais de n_3 são dadas por

$$\begin{aligned} n_{3,x_1} &= c_1 \alpha_3 l_2 n_1, \\ n_{3,x_2} &= c_2 \alpha_3 l_1 n_2, \\ n_{3,x_3} &= -(c_2 - c_1) \alpha_1 l_2 n_1 - (c_2 - c_1) \alpha_2 l_1 n_2 - \frac{1}{2l_3} n_5 - l_3 n_6. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Para as derivadas parciais de n_4 , as equações (3.10)-(3.12) se reduzem a

$$\begin{aligned} n_{4,x_1} &= \frac{l_2}{l_3} n_1 - \alpha_1 (c_2 - c_1) \frac{l_2^2}{l_3^2} n_5, \\ n_{4,x_2} &= \frac{l_1}{l_3} n_2 - \alpha_2 (c_2 - c_1) \frac{l_1^2}{l_3^2} n_5, \\ n_{4,x_3} &= \frac{1}{l_2} \left(\frac{l_1}{l_3} \right)_{,x_3} n_5. \end{aligned} \quad (3.101)$$

As derivadas parciais de n_5 , são obtidas de (3.13)-(3.15) e são dadas por

$$\begin{aligned} n_{5,x_1} &= l_1 n_1, \\ n_{5,x_2} &= l_2 n_2, \\ n_{5,x_3} &= l_3 n_3. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Segue de (3.16)-(3.18) que as derivadas parciais de n_6 , são dadas por

$$\begin{aligned} n_{6,x_1} &= -\frac{l_1}{2l_3^2} n_1 + \alpha_1 (c_2 - c_1) \frac{l_2^2}{l_3^2} n_4, \\ n_{6,x_2} &= -\frac{l_2}{2l_3^2} n_2 + \alpha_2 (c_2 - c_1) \frac{l_1^2}{l_3^2} n_4, \\ n_{6,x_3} &= \frac{1}{2l_3} n_3 - \frac{1}{l_2} \left(\frac{l_1}{l_3} \right)_{,x_3} n_4. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Utilizando as equações acima, provaremos o seguinte teorema.

Teorema 3.5 *Seja $\{n_1, \dots, n_6\}$ um referencial que é solução do sistema (3.98)-(3.103). Então o campo n_5 satisfaz a seguinte equação diferencial parcial de segunda ordem de coeficientes constantes*

$$n_5 + n_{5,x_1 x_1} - n_{5,x_2 x_2} + n_{5,x_3 x_3} - \beta_{12} n_{5,x_1 x_2} - \beta_{13} n_{5,x_1 x_3} - \beta_{23} n_{5,x_2 x_3} = 0, \quad (3.104)$$

onde

$$\begin{aligned}\beta_{12} &= \left(\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2}{\alpha_1 \alpha_2} \right), \\ \beta_{13} &= \left(\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{\alpha_1 \alpha_3} \right), \\ \beta_{23} &= \left(\frac{\alpha_3^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_2 \alpha_3} \right).\end{aligned}$$

Demonstração: A demonstração consiste em calcular efetivamente as derivadas de segunda ordem de n_5 . Começamos com as derivadas duplas, usando as equações acima, obtemos que

$$\begin{aligned}n_{5,x_1x_1} &= c_1 \alpha_1 l_2 l_3 n_1 - c_1 \alpha_2 l_1 l_3 n_2 - c_1 \alpha_3 l_1 l_2 n_3 - \frac{l_1 l_2}{l_3} n_4 + \frac{l_1^2}{2l_3^2} n_5 - l_1^2 n_6, \\ n_{5,x_2x_2} &= c_2 \alpha_2 l_1 l_3 n_2 - c_2 \alpha_1 l_2 l_3 n_1 - c_2 \alpha_3 l_1 l_2 n_3 - \frac{l_1 l_2}{l_3} n_4 + \frac{l_2^2}{2l_3^2} n_5 - l_2^2 n_6, \\ n_{5,x_3x_3} &= (c_2 - c_1) \alpha_3 l_1 l_2 n_3 - (c_2 - c_1) \alpha_1 l_2 l_3 n_1 - (c_2 - c_1) \alpha_2 l_1 l_3 n_2 - \frac{1}{2} n_5 - l_1^3 n_6.\end{aligned}$$

Calculando agora $n_{5,x_1x_1} - n_{5,x_2x_2} + n_{5,x_3x_3}$, temos

$$n_{5,x_1x_1} - n_{5,x_2x_2} + n_{5,x_3x_3} = 2 [c_1 \alpha_1 l_2 l_3 n_1 - c_2 \alpha_2 l_1 l_3 n_2 + (c_2 - c_1) \alpha_3 l_1 l_2 n_3] - n_5. \quad (3.105)$$

Vamos agora calcular as derivadas mistas. Temos que

$$\begin{aligned}n_{5,x_1x_2} &= c_1 \alpha_2 l_2 l_3 n_1 + c_2 \alpha_1 l_1 l_3 n_2, \\ n_{5,x_1x_3} &= c_1 \alpha_3 l_2 l_3 n_1 + (c_2 - c_1) \alpha_1 l_1 l_2 n_3, \\ n_{5,x_2x_3} &= c_2 \alpha_3 l_1 l_3 n_2 + (c_2 - c_1) \alpha_2 l_1 l_2 n_3.\end{aligned}$$

Observe agora que

$$\begin{aligned}\alpha_3 n_{5,x_1x_2} + \alpha_2 n_{5,x_1x_3} - \alpha_1 n_{5,x_2x_3} &= 2c_1 \alpha_2 \alpha_3 l_2 l_3 n_1, \\ \alpha_3 n_{5,x_1x_2} - \alpha_2 n_{5,x_1x_3} + \alpha_1 n_{5,x_2x_3} &= 2c_2 \alpha_1 \alpha_3 l_1 l_3 n_2, \\ -\alpha_3 n_{5,x_1x_2} + \alpha_2 n_{5,x_1x_3} + \alpha_1 n_{5,x_2x_3} &= 2(c_2 - c_1) \alpha_1 \alpha_2 l_1 l_2 n_3.\end{aligned}$$

Como α_1 , α_2 e α_3 são não nulos, podemos escrever

$$\begin{aligned}2c_1 \alpha_1 l_2 l_3 n_1 &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3} (\alpha_3 n_{5,x_1x_2} + \alpha_2 n_{5,x_1x_3} - \alpha_1 n_{5,x_2x_3}), \\ 2c_2 \alpha_2 l_1 l_3 n_2 &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \alpha_3} (\alpha_3 n_{5,x_1x_2} - \alpha_2 n_{5,x_1x_3} + \alpha_1 n_{5,x_2x_3}), \\ 2(c_2 - c_1) \alpha_3 l_1 l_2 n_3 &= \frac{\alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2} (-\alpha_3 n_{5,x_1x_2} + \alpha_2 n_{5,x_1x_3} + \alpha_1 n_{5,x_2x_3}).\end{aligned} \quad (3.106)$$

Substituindo (3.106) em (3.105), obtemos

$$\begin{aligned}
n_{5,x_1x_1} - n_{5,x_2x_2} + n_{5,x_3x_3} &= \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1\alpha_2} \right) n_{5,x_1x_2} + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3} + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1\alpha_3} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right) n_{5,x_1x_3} + \\
&+ \left(-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2\alpha_3} - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} + \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right) n_{5,x_2x_3} - n_5 \\
&= \left(\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2}{\alpha_1\alpha_2} \right) n_{5,x_1x_2} + \left(\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{\alpha_1\alpha_3} \right) n_{5,x_1x_3} + \\
&+ \left(\frac{\alpha_3^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_2\alpha_3} \right) n_{5,x_2x_3} - n_5.
\end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$n_5 + n_{5,x_1x_1} - n_{5,x_2x_2} + n_{5,x_3x_3} - \beta_{12}n_{5,x_1x_2} - \beta_{13}n_{5,x_1x_3} - \beta_{23}n_{5,x_2x_3} = 0.$$

□

Vamos agora caracterizar a classe de hipersuperfícies conformemente planas associadas ao caso geral $\xi = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3$, onde $\alpha_i \neq 0$, em termos da parametrização por linhas de curvatura dada no Corolário 1.2.

Teorema 3.6 *Considere uma hipersuperfície conformemente plana na forma espacial M_K^4 , associada à uma solução das equações de Lamé $l_i(x_1, x_2, x_3) = l_i(\xi)$, com $\xi = \sum_{s=1}^3 \alpha_s x_s$, com $\alpha_s \neq 0$, para todo s . Então sua primeira forma fundamental g é dada por*

$$g = e^{2P(x)} \{ \cos^2 \varphi(\xi)(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \sin^2 \varphi(\xi)(dx_3)^2 \}, \quad (3.107)$$

onde φ satisfaz,

$$\varphi_{,\xi}^2 = \lambda(a \cos^2 \varphi - b), \quad (3.108)$$

ou g é do tipo

$$g = e^{2\tilde{P}(x)} \{ \sinh^2 \tilde{\varphi}(\xi)(dx_1)^2 + \cosh^2 \tilde{\varphi}(\xi)(dx_2)^2 + (dx_3)^2 \} \quad (3.109)$$

onde $\tilde{\varphi}$ satisfaz

$$\tilde{\varphi}_{,\xi}^2 = \lambda(b \cosh^2 \tilde{\varphi} - b). \quad (3.110)$$

Onde λ , a e b são constantes reais não nulas e $P(x)$ e $\tilde{P}(x)$ são funções diferenciáveis que dependem de l_s e da forma espacial M_K^4 .

Demonstração: A demonstração baseia-se principalmente na condição de Guichard

$$l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 = 0.$$

De fato, para a primeira parte, basta dividirmos a expressão acima por l_2^2 para obter

$$\left(\frac{l_1^2}{l_2^2}\right) + \left(\frac{l_3^2}{l_2^2}\right) = 1. \quad (3.111)$$

Como $\alpha_s \neq 0$ para todo s , segue do Lema 2.2 que l_s não é constante, segue então de (3.111) que podemos escrever

$$l_1 = l_2 \cos \varphi, \quad (3.112)$$

$$l_3 = l_2 \operatorname{sen} \varphi. \quad (3.113)$$

onde φ é uma função de ξ não constante. Pelo Teorema 1.4, vemos na equação (1.33) que

$$g = e^{2u} \{l_1^2(dx_1)^2 + l_2^2(dx_2)^2 + l_3^2(dx_3)^2\},$$

onde a função u depende de M_K^4 . Observe que podemos escrever g como

$$g = (e^u l_2)^2 \left\{ \frac{l_1^2}{l_2^2}(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \frac{l_3^2}{l_2^2}(dx_3)^2 \right\},$$

o que implica

$$g = e^{2P} \{ \cos^2 \varphi (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \operatorname{sen}^2 \varphi (dx_3)^2 \}.$$

Para obter a expressão para a derivada de φ com relação a ξ , vamos derivar l_1 usando a forma como está escrito em (3.112), temos

$$l_{1,\xi} = l_{2,\xi} \cos \varphi - l_2 \varphi_{,\xi} \operatorname{sen} \varphi.$$

Usando (3.97), temos que

$$c_1 l_2 l_3 = c_2 l_1 l_3 \cos \varphi - \varphi_{,\xi} l_3,$$

para c_1 e c_2 constantes não nulas, o que implica

$$\varphi_{,\xi} = l_2 (c_2 \cos^2 \varphi - c_1). \quad (3.114)$$

Derivando a equação (3.114) em ξ e usando (3.112) e (3.113) temos

$$\begin{aligned} \varphi_{,\xi\xi} &= l_{2,\xi} (c_2 \cos^2 \varphi - 1) - 2c_2 l_2 \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \varphi_{,\xi} \\ &= \frac{1}{l_2} [l_{2,\xi} \varphi_{,\xi} - 2c_2 (l_2 \cos \varphi) (l_2 \operatorname{sen} \varphi) \varphi_{,\xi}] \\ &= \frac{1}{l_2} [l_{2,\xi} \varphi_{,\xi} - 2c_2 l_1 l_3 \varphi_{,\xi}] \\ &= \frac{1}{l_2} [l_{2,\xi} \varphi_{,\xi} - 2l_{2,\xi} \varphi_{,\xi}] \\ &= -\frac{l_{2,\xi} \varphi_{,\xi}}{l_2}. \end{aligned}$$

De onde obtemos que

$$\varphi_{,\xi} l_2 = \lambda, \quad (3.115)$$

onde λ é uma constante real não nula, já que $\varphi_{,\xi} \neq 0$. Assim, multiplicando a equação (3.114), por $\varphi_{,\xi}$ e usando (3.115), obtemos

$$\varphi_{,\xi}^2 = \lambda (c_2 \cos^2 \varphi - c_1). \quad (3.116)$$

o que mostra o primeiro caso. O segundo caso é análogo, basta utilizar a condição de Guichard, agora dividindo por l_3 , para usar a relação fundamental das funções hiperbólicas

$$\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1.$$

□

O Teorema anterior é um resultado fundamental no sentido que mostra que a classe de hipersuperfícies conformemente planas para o caso geral é uma classe que ainda não foi estudada na literatura. Lembramos que a função φ é um invariante conforme e a classificação feita nos trabalhos de Suyama e Hertrich-Jeromin é feita a partir das derivadas parciais de φ . Os casos classificados constituem aqueles onde φ não depende de uma coordenada, que são as classes de Lafontaine e aqueles onde φ possuem duas derivadas mistas nulas, que constituem as classes associadas a redes de Guichard cíclicas.

Como $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(\xi)$, $\xi = \sum_{s=1}^3 \alpha_s x_s$, com $\alpha_s \neq 0$, temos que $\varphi_{,x_s} = \alpha_s \varphi_{,\xi} \neq 0$, o que mostra que esta hipersuperfície não pertence aos produtos de Lafontaine. Além disso segue de (3.108) que

$$\begin{aligned} \varphi_{,x_i x_j} &= \alpha_i \alpha_j \varphi_{,\xi \xi}, \\ &= -\alpha_i \alpha_j \lambda c_2 \cos \varphi \sin \varphi, \end{aligned}$$

de onde concluímos $\varphi_{,x_i x_j}$ não é identicamente nula. Dessa forma, a hipersuperfície considerada não pertence às classes associadas a redes de Guichard cíclicas.

3.2.3 Os casos restantes

Nos demais casos, isto é, para os invariantes $\xi = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$ e $\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3$ são cálculos exatamente análogos ao da Subseção 3.2.1 Todos os passos são efetuados da mesma maneira.

O caso onde $\xi = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$ possui os mesmos cálculos do caso $\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$. Era de se esperar algo nesse sentido, uma vez que as funções invariantes neste caso são dadas por

$$\begin{aligned} l_1 &= \lambda_1, \\ l_2 &= \lambda_1 \cosh(b\xi + \xi_0), \\ l_3 &= \lambda_1 \sinh(b\xi + \xi_0), \end{aligned}$$

e além disso, a métrica é dada por $g = l_1^2(dx_1)^2 + l_2^2(dx_2)^2 + l_3^2(dx_3)^2$. Assim, com uma mudança de variáveis, especificamente, trocando x_1 por x_3 , passamos de um caso para o outro.

O caso onde $\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3$, embora apresente como soluções invariantes

$$\begin{aligned} l_1 &= \lambda_2 \sin(b\xi + \xi_0), \\ l_2 &= \lambda_2, \\ l_3 &= \lambda_2 \cos(b\xi + \xi_0), \end{aligned}$$

os cálculos são semelhantes, passando por equações de Klein-Gordon da mesma maneira como fizemos anteriormente. Porém, temos uma imersão um pouco diferente do caso anterior, para o caso $\alpha_1 \alpha_3 > 0$, temos como imersão

$$\begin{aligned} X(x_1, x_2, x_3) &= e^{-x_2} \left(\bar{\gamma} \sqrt{\frac{c\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_3(c^2 - 1)}} (bc \cos \tilde{\xi} \sin \bar{\tau} - \beta \sin(b\xi + \xi_0) \cos \bar{\tau}), \right. \\ &\quad \bar{\gamma} \sqrt{\frac{c\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_3(c^2 - 1)}} (bc \cos \tilde{\xi} \cos \bar{\tau} + \beta \sin \tilde{\xi} \sin \bar{\tau}), \\ &\quad \gamma \sqrt{\frac{c(\alpha_3 - \alpha_1)}{\alpha_3(c^2 - 1)}} (b\bar{c} \cos \tilde{\xi} \sin \tau + \bar{\beta} \sin \tilde{\xi} \cos \tau), \\ &\quad \left. \gamma \sqrt{\frac{c(\alpha_3 - \alpha_1)}{\alpha_3(c^2 - 1)}} (b\bar{c} \cos \tilde{\xi} \cos \tau - \bar{\beta} \sin \tilde{\xi} \sin \tau) \right) \end{aligned} \quad (3.117)$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha_3 - \alpha_1 c, \\ \bar{\gamma} &= \alpha_1 \bar{c} - \alpha_3, \\ \tau &= b\sqrt{\alpha_1 \alpha_3} (\sqrt{\bar{c}} x_3 + \sqrt{c} x_1), \\ \bar{\tau} &= b\sqrt{\alpha_1 \alpha_3} (\sqrt{c} x_3 - \sqrt{\bar{c}} x_1), \end{aligned}$$

Os casos onde um dos α_i é nulo estão contidos nas classes dadas por Lafontaine. Os casos onde $\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ e $\xi = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$ são classes de hipersuperfícies conformemente planas contidas na classe de rotação, isto é, são obtidas pela rotação de superfícies de curvatura gaussiana constante no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 . Já o caso onde $\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3$ é uma classe de hipersuperfícies conformemente planas contida na classe tipo cone, isto é, construído a partir de uma superfície de curvatura constante sobre a esfera S^3 .

Capítulo 4

Propriedades Geométricas das redes de Guichard associadas às soluções invariantes

Neste capítulo, apresentamos as propriedades geométricas das redes de Guichard associadas as soluções invariantes por subgrupo de translação obtidas no Capítulo 2. Vamos considerar as redes de Guichard $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que induz em U uma métrica Riemanniana g definida em U por

$$g = l_1^2(dx_1)^2 + l_2^2(dx_2)^2 + l_3^2(dx_3)^2, \quad (4.1)$$

onde as funções l_i satisfazem a condição de Guichard $l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 = 0$ e além disso, estamos supondo que satisfazem as equações de Lamé (1.27)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l_i}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{1}{l_j} \frac{\partial l_i}{\partial x_j} \frac{\partial l_j}{\partial x_k} - \frac{1}{l_k} \frac{\partial l_i}{\partial x_k} \frac{\partial l_k}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{l_j} \frac{\partial l_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{l_i} \frac{\partial l_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{l_k^2} \frac{\partial l_i}{\partial x_k} \frac{\partial l_j}{\partial x_k} &= 0, \end{aligned}$$

que é equivalente a dizer que a métrica g é plana.

Mostraremos primeiro que as redes de Guichard são folheadas por planos de curvatura Gaussiana nula, curvatura média constante e são geodesicamente paralelas. Como essas superfícies são obtidas a partir dos planos ξ_0 , vamos chamá-las de *planos de nível* ξ_0 . Este resultado segue o que foi proposto por Ferreira em [8] e por Barbosa, Ferreira e Tenenblat [1], cuja a demonstração apresenta argumentos similares aos empregados nestes trabalhos. Na seção seguinte,

demonstraremos um interessante resultado relacionado às superfícies coordenadas da rede de Guichard. Mostraremos que tais superfícies possuem curvatura Gaussiana constante e a soma dessas curvaturas é igual a zero.

4.1 Superfícies de nível ξ_0

Para a demonstração do principal teorema desta seção, necessitamos definir o conceito de subvariedades geodesicamente paralelas.

Definição 4.1 Seja M^n , uma variedade Riemanniana e seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Diz-se que as subvariedades de nível de f são *geodesicamente paralelas* se $|\text{grad}f|$ é constante, não nula, ao longo de cada uma destas subvariedades.

A razão desta definição é justificada pelo fato de que, neste caso, as trajetórias do campo $\text{grad}f$, parametrizadas pelo comprimento de arco, são geodésicas de M , ortogonais às subvariedades de nível de f , conforme a seguinte proposição:

Proposição 4.1 *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, onde M^n é uma variedade Riemanniana. Se $\text{grad}f(p) \neq 0$, para todo $p \in M$ e $|\text{grad}f|$ é constante, ao longo de cada subvariedade de nível de f , então as curvas integrais do campo $\mathbf{v} = \frac{\text{grad}f}{|\text{grad}f|}$, são geodésicas de M .*

Demonstração: Vamos mostrar que $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v} = 0$, onde ∇ é a conexão Riemanniana. Para isto, tomamos $X(x_1, \dots, x_n)$ um sistema de coordenadas locais em M tal que $(f \circ X)(x_1, \dots, x_n) = x_1$, podemos encontrar este resultado em [17]. Dessa forma,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = df(\partial_{x_j}) = \langle \text{grad}f, \partial_{x_j} \rangle = \delta_{1j}.$$

Portanto

$$\text{grad}f = \frac{1}{g_{11}}\partial_{x_1}.$$

Como $|\text{grad}f| = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}$ é constante ao longo de cada subvariedade de nível de f , segue que g_{11} só depende de x_1 . Para $j \geq 2$, temos

$$\langle \mathbf{v}, \partial_{x_j} \rangle = 0,$$

o que implica

$$\langle \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v}, \partial_{x_j} \rangle + \langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{v}} \partial_{x_j} \rangle = 0.$$

Por outro lado, para todo $j \geq 2$,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{v}} \partial_{x_j} \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \partial_{x_1}, \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \nabla_{\partial_{x_1}} \partial_{x_j} \right\rangle \\ &= \frac{1}{g_{11}} \langle \partial_{x_1}, \nabla_{\partial_{x_1}} \partial_{x_j} \rangle \\ &= \frac{1}{g_{11}} \langle \partial_{x_1}, \nabla_{\partial_{x_j}} \partial_{x_1} \rangle \\ &= \frac{1}{2g_{11}} \partial_{x_j} \langle \partial_{x_1}, \partial_{x_1} \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois g_{11} só depende de x_1 , logo $\langle \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v}, \partial_{x_j} \rangle = 0$, para $j \geq 2$. Por outro lado, como $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 1$, segue que $\langle \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$, de onde concluímos que

$$\langle \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v}, \partial_{x_1} \rangle = 0.$$

Assim, segue que $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v} = 0$, como queríamos. □

Temos então o seguinte teorema

Teorema 4.1 *Considere a variedade Riemanniana (U, g) , $U \subset \mathbb{R}^3$, com a métrica g dada por (4.1). Então os planos P_{ξ_0} definidos por $\sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i = \xi_0$, $\xi_1 < \xi_0 < \xi_2$, munidos com a métrica induzida por g , possuem curvatura gaussiana constante zero, curvatura média constante (dependendo de ξ_0) e são geodesicamente paralelos.*

Demonstração: Como observamos na equação (2.92), pelo menos um α_i é não nulo, suponhamos que este seja α_3 , podemos então parametrizar P_{ξ_0} por

$$X(x_1, x_2) = \left(x_1, x_2, \frac{\xi_0 - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2}{\alpha_3} \right),$$

portanto

$$X_{,1} = \left(1, 0, -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) \text{ e } X_{,2} = \left(0, 1, -\frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right).$$

Calculando os coeficientes da primeira forma na métrica induzida, temos

$$\begin{aligned} g(X_{,1}, X_{,1}) &= l_1^2(\xi_0) + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right)^2 l_3^2(\xi_0), \\ g(X_{,1}, X_{,2}) &= \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3^2} l_3^2(\xi_0), \\ g(X_{,2}, X_{,2}) &= l_2^2(\xi_0) + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right)^2 l_3^2(\xi_0). \end{aligned}$$

Assim, os coeficientes da primeira forma são constantes, o que implica, pela fórmula de Gauss, que a curvatura Gaussiana é constante igual a zero.

Considere agora a função $h(x) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i$. Temos então que

$$P_{\xi_0} = h^{-1}(\xi_0).$$

Lembramos agora do vetor $\text{grad}h$, definido por

$$g(\text{grad}h, \mathbf{v}) = dh(\mathbf{v}) \quad (4.2)$$

Como h é constante ao longo de P_{ξ_0} , segue que $\text{grad}h$, é normal ao longo de P_{ξ_0} . Além disso, se escrevemos $\text{grad}h = \sum_{j=1}^3 A_j \partial_{x_j}$, segue que

$$A_j = \frac{1}{l_j^2} g(\text{grad}h, \partial_{x_j}),$$

o que implica $A_j = \frac{\alpha_j}{l_j^2}$. Portanto,

$$g(\text{grad}h, \text{grad}h) = \sum_{j=1}^3 \frac{\alpha_j^2}{l_j^2},$$

o que implica $|\text{grad}h| = \sqrt{\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\alpha_j}{l_j(\xi_0)}\right)^2}$, que é constante em P_{ξ_0} . Segue então da Definição 4.1 que os planos são geodesicamente paralelos.

Passamos agora às curvaturas médias. Dado $p \in P_{\xi_0}$ seja $A : T_p P_{\xi_0} \rightarrow T_p P_{\xi_0}$ o operador autoadjunto associado à segunda forma fundamental de P_{ξ_0} , isto é $A\mathbf{v} = -\nabla_{\mathbf{v}} \left(\frac{\text{grad}h}{|\text{grad}h|} \right) (p)$, onde ∇ é a conexão Riemanniana em (U, g) . Como $|\text{grad}h|$ é normal ao longo de P_{ξ_0} segue que

$$A\mathbf{v} = -\frac{1}{|\text{grad}h|} \nabla_{\mathbf{v}} \text{grad}h(p).$$

Considere agora E_1, E_2 uma base ortonormal de $T_p\xi_0$, como a curvatura média de P_{ξ_0} é o traço de A , segue que

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^3 g(A(E_i), E_i) \\ &= -\frac{1}{|\text{grad}h|} \sum_{i=1}^3 g(\nabla_{E_i} \text{grad}h, E_i) \\ &= -\frac{1}{|\text{grad}h|} \text{div}(\text{grad}h)(p) \\ &= -\frac{\Delta h(p)}{|\text{grad}h|} \end{aligned}$$

Lembramos agora a fórmula geral para o Laplaciano de uma função para uma variedade Riemanniana

$$\Delta h = \sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial h}{\partial x_k} \right\},$$

de onde concluímos que, no nosso caso

$$\Delta h = \sum_{i,k} -\frac{1}{l_i^2(\xi_0)} \Gamma_{ii}^k \alpha_k. \quad (4.3)$$

Calculando os símbolos de Christoffel, temos que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m \{g_{jm,i} + g_{im,j} - g_{ij,m}\},$$

como $g_{ij} = \delta_{ij} l_i^2(\xi)$, segue que Γ_{ij}^k é função apenas de ξ . Dessa forma, pela equação (4.3), segue que Δh é função apenas de ξ e conseqüentemente, constante ao longo de P_{ξ_0} . Como a curvatura média é o traço de A , segue que a curvatura média dos planos P_{ξ_0} é constante.

□

4.2 Superfícies Coordenadas

Nessa seção usaremos as equações de Lamé para mostrar que as superfícies coordenadas da rede de Guichard em questão possuem curvatura constante. Além disso, um fato bastante interessante, consiste em relacionar essas curvaturas com uma relação algébrica das soluções invariantes l_i , que obtemos no capítulo 2. Tal relação mostrará que a soma das curvaturas Gaussianas das superfícies coordenadas é igual a zero.

Teorema 4.2 *Seja (U, g) a variedade Riemanniana onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e g é dada por (4.1). As superfícies coordenadas S_i de Ω , dadas por*

$$S_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in U | x_i = cte\}, \quad (4.4)$$

com métrica induzida por g , possuem curvatura Gaussiana K_i constante com a propriedade de que

$$K_1 + K_2 + K_3 = 0. \quad (4.5)$$

Demonstração: Dividimos a prova em várias etapas, cada uma de acordo com uma solução invariante encontrada anteriormente.

i) Nenhuma função l_s é constante e $\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$, com $\alpha_s \neq 0$, para todo s .

Neste caso, temos que $l_{i,\xi} = c_i l_j l_k$, onde i, j e k são distintos percorrendo $\{1, 2, 3\}$. Vamos então calcular a curvatura Gaussiana K_i de S_i , temos que a métrica induzida por g em S_i é dada por

$$g_i = l_j^2 (dx_j)^2 + l_k^2 (dx_k)^2.$$

Lembramos a fórmula de Gauss para cálculo da curvatura Gaussiana quando temos uma parametrização ortogonal, isto é, quando a primeira forma é dada por $I = E(du)^2 + G(dv)^2$, (ver [4]):

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_{,v}}{\sqrt{EG}} \right)_{,v} + \left(\frac{G_{,u}}{\sqrt{EG}} \right)_{,u} \right\}.$$

Aplicando à nossa métrica, obtemos a seguinte expressão

$$K_i = -\frac{1}{l_j l_k} \left\{ \left(\frac{l_{j,x_k}}{l_k} \right)_{,x_k} + \left(\frac{l_{k,x_j}}{l_j} \right)_{,x_j} \right\},$$

usando (2.30), temos que

$$K_i = \frac{1}{l_j l_k} \left(\frac{l_{k,x_i} l_{j,x_i}}{l_i^2} \right). \quad (4.6)$$

Basta agora substituir as derivadas para concluir que

$$K_i = \frac{(c_k l_i l_j \alpha_i)(c_j l_i l_k \alpha_i)}{(l_j l_k l_i^2)} = c_j c_k \alpha_i^2.$$

Agora, pela equação (2.100), segue que

$$K_1 + K_2 + K_3 = \alpha_1^2 c_2 c_3 + \alpha_2^2 c_3 c_1 + \alpha_3^2 c_1 c_2 = 0.$$

ii) Uma das funções l_i é constante.

Nesse caso já vimos no Lema 2.2 que, se l_i é constante, então $\alpha_i = 0$. Neste caso, usando a equação (4.6), obtemos que todas as curvaturas são nulas. De fato, fixados i, j e k distintos, temos que

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{1}{l_j l_k} \left(\frac{l_{k,i} l_{j,i}}{l_i^2} \right) \\ K_j &= \frac{1}{l_i l_k} \left(\frac{l_{k,j} l_{i,j}}{l_j^2} \right) \\ K_k &= \frac{1}{l_j l_i} \left(\frac{l_{i,k} l_{j,k}}{l_k^2} \right) \end{aligned}$$

a conclusão segue na primeira equação devido as funções não dependerem de x_i , para as outras duas, segue da função l_i ser constante. Dessa forma as curvaturas gaussianas são constantes nulas e a soma ser igual a zero, nesse caso, é trivial.

□

Capítulo 5

Superfícies planas no espaço hiperbólico associadas às hipersuperfícies conformemente planas

Neste capítulo faremos um estudo detalhado das superfícies planas no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 que geram as hipersuperfícies dadas nos Teoremas 3.1 e 3.2. Como mencionado ao final da Seção 3.2.3 do capítulo anterior, tais hipersuperfícies são obtidas através de uma rotação de uma superfície de curvatura gaussiana constante no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 quando este é considerado com o modelo do semi-espaço $\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3, 0), x_3 > 0\} \subset \mathbb{R}^4$. Daremos parametrizações explícitas para as superfícies obtidas mostraremos que todas possuem curvatura gaussiana nula e a propriedade de serem invariantes por movimento helicoidal, de forma que serão chamadas *superfícies helicoidais planas*.

Superfícies helicoidais surgem como generalizações das superfícies rotacionais, possuindo assim um interesse independente. O objetivo deste capítulo é obter resultados gerais para superfícies helicoidais no espaço hiperbólico. Mostraremos que as superfícies helicoidais planas em \mathbb{H}^3 são caracterizadas, por aquelas que, em seus pontos regulares não-umbílicos possuem uma parametrização por linhas de curvatura onde as primeira e segunda formas são dadas por

$$\begin{aligned} I &= \cosh^2 \phi(u, v)(du)^2 + \sinh^2 \phi(u, v)(dv)^2, \\ II &= \sinh \phi(u, v) \cosh \phi(u, v) ((du)^2 + (dv)^2), \end{aligned}$$

onde ϕ é uma função harmônica do tipo linear, isto é,

$$\phi(u, v) = au + bv + c,$$

o que concorda com as superfícies que obtivemos a partir de invariantes do tipo $\xi = \sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i$, onde um dos α_i é nulo.

Neste sentido, usaremos uma representação conforme apresentada por [9] extendida a superfícies chamadas *flat fronts* apresentada por [19], uma vez que as superfícies obtidas possuem singularidades.

Neste capítulo estão descritos os resultados obtidos durante o programa de doutorado sanduíche na Universidad de Granada, sob a co-orientação do professor Antonio Martínez. Estes resultados também constituem o trabalho [20].

5.1 Modelos do Espaço Hiperbólico

Quando tratamos do espaço hiperbólico, é usual na literatura considerar distintas representações segundo seja conveniente em cada caso. Daremos aqui uma pequena descrição de algumas delas que são bastantes usuais e que serão úteis no decorrer do capítulo.

Modelo do semi-espço superior: Considere o semi-espço superior de \mathbb{R}^3 dado por

$$\mathbb{R}_+^3 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, y_3 > 0\},$$

munido da métrica

$$g = \frac{1}{y_3^2} \{(dy_1)^2 + (dy_2)^2 + (dy_3)^2\},$$

é um variedade completa de curvatura seccional constante -1 .

Modelo Conforme da Bola Unitária: Denotamos por $B^3(1)$ a bola de centro 0 e raio 1 em \mathbb{R}^3 . Consideramos sobre ela a seguinte métrica de curvatura seccional constante -1 :

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad (5.1)$$

com $|\cdot|$ a norma usual de \mathbb{R}^3 . Então a aplicação $\mathbb{R}_+^3 \rightarrow B^3(1)$ dada por

$$(y; y_3) \mapsto \frac{1}{y_1^2 + y_2^2 + (y_3 + 1)^2} (2y; y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1) \quad (5.2)$$

com $y = (y_1, y_2)$ e $y_3 > 0$, é uma isometria.

Modelo Lorentziano: Seja \mathbb{L}^4 o espaço Minkowski 4-dimensional, munido de coordenadas lineares (x_0, x_1, x_2, x_3) e o produto escalar \langle, \rangle dado por

$$\langle, \rangle = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \quad (5.3)$$

O espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 será a subvariedade Riemanniana tridimensional com curvatura seccional -1 , dada pelo conjunto

$$\mathbb{H}^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1\}, \quad (5.4)$$

com métrica induzida por \mathbb{L}^4 .

Podemos ver que a aplicação

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \rightarrow \frac{1}{x_0 + x_3}(x_1, x_2, 1) \quad (5.5)$$

é uma isometria entre o modelo Lorentziano e o modelo do semi-espaço superior, com inversa dada por

$$(y_1, y_2, y_3) \rightarrow \frac{1}{2y_3} \left(1 + \sum_{i=1}^3 y_i^2, 2y_1, 2y_2, 1 - \sum_{i=1}^3 y_i^2 \right) \quad (5.6)$$

Modelo de Matrizes Hermitianas: Considere o espaço de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^4 introduzido na subseção anterior. Identificamos \mathbb{L}^4 com o conjunto das matrizes hermitianas 2×2 , $\mathbb{Herm}(2)$, isto é, o conjunto das matrizes 2×2 com entradas complexas a_{ij} tais que $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, correspondendo o ponto (x_0, x_1, x_2, x_3) com a matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Dessa forma, tem-se que, para todo $v \in \mathbb{L}^4$, $\langle v, v \rangle = -\det(m(v))$, onde $m(v)$ é a matriz correspondente a v em $\mathbb{Herm}(2)$. Além disso, $\text{tr}(m(v)) = 2x_0$. Usando o modelo Lorentziano, podemos escrever o espaço hiperbólico neste caso como

$$\mathbb{H}^3 = \{X \in \mathbb{Herm}(2) : \det X = 1, \text{tr} X > 0\}. \quad (5.8)$$

Considere agora o conjunto $\mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$, formado pelas matrizes complexas de ordem 2 e determinante 1. Observe que, para qualquer matriz $A \in \mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$, temos que $AA^* \in \mathbb{H}^3$, onde $A^* = \bar{A}^t$. outro lado, qualquer matriz $X \in \mathbb{Herm}(2)$, pode ser escrita como

$$X = A\Lambda A^*,$$

onde $A \in \mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$ e Λ é uma matriz diagonal com valores reais.

5.2 Parametrizações das superfícies planas associadas

Ao considerarmos hipersuperfícies conformemente planas em \mathbb{R}^4 associadas as funções

$$\begin{aligned} l_1 &= \sinh(\xi), \\ l_2 &= \cosh(\xi), \\ l_3 &= 1. \end{aligned}$$

onde $\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, obtivemos imersões nos Teoremas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 do tipo

$$f(x_1, x_2, x_3) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2) \cos x_3, f_3(x_1, x_2) \sin x_3).$$

De acordo com as métricas produto conformemente planas dadas por Lafontaine, as hipersuperfícies do tipo acima são obtidas através da rotação de superfícies (f_1, f_2, f_3) de curvatura constante no espaço \mathbb{H}^3 definido como o semi-espaço superior visto como subconjunto de \mathbb{R}^4 através da inclusão

$$\mathbb{H}^3 = \{(y_1, y_2, y_3, 0) \in \mathbb{R}^4, y_3 > 0\}.$$

No nosso caso, verificamos que as superfícies planas associadas possuem curvatura constante nula. O que foi feito aqui foi extrair as parametrizações das superfícies planas de \mathbb{H}^3 a partir das parametrizações das hipersuperfícies conformemente planas. As parametrizações obtida são por linhas de curvatura com primeira forma dada por

$$I = \sinh^2(\xi)(dx_1)^2 + \cosh^2(\xi)(dx_2)^2$$

Parametrizações para $\xi = \alpha_1 x_1$: Vamos usar os resultados do Teorema 3.3, temos 3 casos:

1º Caso: $|\alpha_1| < 1$. Neste caso $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ é dada por

$$X(x_1, x_2) = \lambda(x_1, x_2)Y(x_1),$$

onde $\lambda : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $Y : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ são dadas por

$$\lambda(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{1 - \alpha_1^2}}{e^{\sqrt{1 - \alpha_1^2} x_2} \cosh(\alpha_1 x_1)},$$

$$Y(x_1) = \left(\begin{aligned} &\sinh(\alpha_1 x_1) \sin(\sqrt{1 - \alpha_1^2} x_1) + \frac{\alpha_1}{\sqrt{1 - \alpha_1^2}} \cosh(\alpha_1 x_1) \cos(\sqrt{1 - \alpha_1^2} x_1), \\ &-\sinh(\alpha_1 x_1) \cos(\sqrt{1 - \alpha_1^2} x_1) + \frac{\alpha_1}{\sqrt{1 - \alpha_1^2}} \cosh(\alpha_1 x_1) \sin(\sqrt{1 - \alpha_1^2} x_1), 1 \end{aligned} \right)$$

2º Caso: $|\alpha_1| > 1$. Neste caso $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ é dada por

$$X(x_1, x_2) = \lambda(x_1)Y(x_1, x_2),$$

onde $\lambda : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\lambda(x_1) = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 - 1}}{\alpha_1 e^{\sqrt{\alpha_1^2 - 1}x_1} \left[\cosh(\alpha_1 x_1) - \frac{\sqrt{\alpha_1^2 - 1}}{\alpha_1} \sinh(\alpha_1 x_1) \right]},$$

e $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é definida de acordo com o sinal de α_1 . Se $\alpha_1 > 0$ temos

$$Y(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 - 1}} \cosh(\alpha_1 x_1) \cos(\sqrt{\alpha_1^2 - 1}x_2), \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 - 1}} \cosh(\alpha_1 x_1) \sin(\sqrt{\alpha_1^2 - 1}x_2), 1 \right)$$

Se $\alpha_1 < 0$, devemos ter

$$Y(x_1, x_2) = - \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 - 1}} \cosh(\alpha_1 x_1) \cos(\sqrt{\alpha_1^2 - 1}x_2), \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 - 1}} \cosh(\alpha_1 x_1) \sin(\sqrt{\alpha_1^2 - 1}x_2), 1 \right)$$

Observação 5.1 O sinal das duas primeiras coordenadas muda já na imersão conformemente plana original. Quanto ao sinal da terceira coordenada, mudamos de forma que a imersão $X = \lambda Y$ esteja em \mathbb{H}^3 . Tal mudança depende de α_1 porque o sinal de λ é o mesmo sinal de α_1 . Observe ainda que para mudar o sinal da terceira coordenada basta fazer uma translação em x_3 na imersão conformemente plana original.

3º Caso: $\alpha_1 = \pm 1$. Neste caso, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ é dada por

$$X(x_1, x_2) = \left(x_1 - \tanh x_1, x_2, \frac{1}{\cosh x_1} \right).$$

Parametrizações para $\xi = \alpha_2 x_2$: Vamos usar os resultados do Teorema 3.4. Para esta forma de ξ , $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ é dada por

$$X(x_1, x_2) = \lambda(x_2)Y(x_1, x_2),$$

onde $\lambda : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\lambda(x_2) = \frac{1}{e^{\sqrt{1+\alpha_2^2}x_2} \left[\cosh(\alpha_2 x_2) - \frac{\alpha_2}{\sqrt{1+\alpha_2^2}} \sinh(\alpha_2 x_2) \right]}$$

e $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é definida de acordo com o sinal de α_2 da seguinte forma: Se $\alpha_2 > 0$ então

$$Y(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha_2^2}} \sinh(\alpha_2 x_2) \cos(\sqrt{1+\alpha_2^2}x_1), \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_2^2}} \sinh(\alpha_2 x_2) \sin(\sqrt{1+\alpha_2^2}x_1), 1 \right).$$

Se $\alpha_2 < 0$, devemos ter

$$Y(x_1, x_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_2^2}} \sinh(\alpha_2 x_2) \cos(\sqrt{1 + \alpha_2^2} x_1), -\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_2^2}} \sinh(\alpha_2 x_2) \sin(\sqrt{1 + \alpha_2^2} x_1), 1 \right).$$

Parametrizações para $\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$: Vamos usar os resultados dos Teoremas 3.1 e 3.2, temos então dois casos:

1º Caso: $\alpha_1 \alpha_2 > 0$. Neste caso a imersão $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ é dada por

$$X(x_1, x_2) = \lambda(x_1, x_2) Y(x_1, x_2)$$

Onde $\lambda : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real dada por

$$\lambda(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{c(c^2 + 1)}}{(\alpha_1 c + \alpha_2) \left(\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - c} \right) e^\tau \left[\cosh \tilde{\xi} - \beta \sinh \tilde{\xi} \right]},$$

e $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ será definida de acordo com o sinal de α_1 . Se $\alpha_1 > 0$, devemos ter

$$Y = \left(\gamma \left[\cosh \tilde{\xi} \cos \bar{\tau} - \bar{\beta} \sinh \tilde{\xi} \sin \bar{\tau} \right], \gamma \left[\cosh \tilde{\xi} \sin \bar{\tau} + \bar{\beta} \sinh \tilde{\xi} \cos \bar{\tau} \right], 1 \right).$$

Quando $\alpha_1 < 0$ devemos ter

$$Y = \left(\gamma \left[\cosh \tilde{\xi} \cos \bar{\tau} - \bar{\beta} \sinh \tilde{\xi} \sin \bar{\tau} \right], \gamma \left[\cosh \tilde{\xi} \sin \bar{\tau} + \bar{\beta} \sinh \tilde{\xi} \cos \bar{\tau} \right], -1 \right)$$

onde usamos a notação dada por (3.19)-(3.23).

Observação 5.2 Outra vez mudamos a função Y de acordo com o sinal de α_1 para que a terceira coordenada de X seja sempre positiva. Para isso, basta ver que o sinal de λ é o mesmo sinal de α_1 . De fato, inicialmente, temos que se $\alpha_1 \alpha_2 > 0$, então

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - c > 0,$$

Dessa forma,

$$\beta^2 = \frac{\alpha_2 c}{\alpha_1} < 1,$$

logo $|\beta| < 1$, o que implica

$$\cosh \tilde{\xi} - \beta \sinh \tilde{\xi} > 0.$$

Portanto, o sinal de λ é o mesmo de $\alpha_1 c + \alpha_2$. Como $\alpha_1 \alpha_2 > 0$ e $c > 0$, segue que o sinal de $\alpha_1 c + \alpha_2$ é o mesmo de α_1 .

2º Caso: $\alpha_1\alpha_2 < 0$. Neste caso a imersão $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ é dada por

$$X(x_1, x_2) = \lambda(x_1, x_2)Y(x_1, x_2)$$

onde $\lambda : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real dada por

$$\lambda(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{(c^2 + 1)}}{(\alpha_1 - \alpha_2 c) \left[\sqrt{-\left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} c\right)} e^{\tilde{\tau}} \left[\cosh \tilde{\xi} + \bar{\beta} \sinh \tilde{\xi} \right] \right]}$$

e $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ será definida de maneira semelhante ao caso anterior, isto é

$$Y = \left(\bar{\gamma} \left[\cosh \tilde{\xi} \cos \tau + \beta \sinh \tilde{\xi} \sin \tau \right], \bar{\gamma} \left[\cosh \tilde{\xi} \sin \tau - \beta \sinh \tilde{\xi} \cos \tau \right], \operatorname{sgn}(\alpha_1) \right)$$

onde usamos a notação dada por (3.19)-(3.23) e $\operatorname{sgn}(\alpha_1)$ vale 1 quando $\alpha_1 > 0$ e -1 quando $\alpha_1 < 0$.

Observação 5.3 De maneira análoga ao caso anterior, escolhemos o sinal da função λ de acordo com o sinal de α_1 , para que λ seja sempre uma função positiva. A análise neste caso é essencialmente a mesma para o caso anterior, podemos mostrar que, para $\alpha_1\alpha_2 < 0$,

$$\bar{c} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < 0,$$

o que implica

$$\bar{\beta}^2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \bar{c} < 1,$$

logo $\cosh \tilde{\xi} + \bar{\beta} \sinh \tilde{\xi} > 0$. O que mostra que λ e $\alpha_1 - \alpha_2 c$ tem o mesmo sinal. Portanto, se $\alpha_1 > 0$, temos $\alpha_2 < 0$ e

$$\alpha_1 - \alpha_2 c > 0.$$

Por outro lado, se $\alpha_1 < 0$ devemos ter $\alpha_2 > 0$ e assim

$$\alpha_1 - \alpha_2 c < 0.$$

5.3 Superfícies helicoidais em \mathbb{H}^3

Superfícies helicoidais surgem como uma generalização natural das superfícies rotacionais. São invariantes por um grupo helicoidal de isometrias, i.e., dado um eixo r , consideramos uma translação ao longo desse r composto com uma rotação em torno de r . Para visualizar tal grupo,

consideramos o modelo do semi-espço superior e, a menos de movimento rígio, podemos considerar o eixo y_3 . Assim, o grupo helicoidal relativo ao eixo y_3 é dado pela composição

$$h_t = \begin{pmatrix} e^{\beta t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\beta t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\beta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha t & -\text{sen} \alpha t & 0 \\ \text{sen} \alpha t & \cos \alpha t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ode uma rotação em torno do eixo y_3 de *velocidade angular* com uma translação hiperbólica de *passo* β ao longo deste eixo. Uma superfície que é invariante por um movimento helicoidal é chamada *superfície helicoidal*. Quando $\beta = 0$, temos as *superfícies rotacionais* e quando $\alpha = 0$, temos as superfícies cônicas. Os demais casos, chamaremos de *superfícies propriamente helicoidais*.

Toda superfície helicoidal pode ser gerada por uma curva apropriada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^3$ considerando a composição

$$\psi(t, s) = (h_t \circ \gamma)(s). \quad (5.9)$$

Observe que a curva γ é escolhida de maneira que (5.9) seja uma superfície regular.

Para que a superfície helicoidal (5.9) seja plana, impõe-se condições sobre a curva γ , como nos seguintes casos particulares::

- i) Superfícies rotacionais planas ($\beta = 0$). Considere uma curva parametrizada pelo comprimento de arco no plano $\{y_2 \equiv 0\}$. Segue da equação de Gauss que as coordenadas restantes y_1 e y_3 devem satisfazer a equação diferencial (veja [5] e [26]):

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \end{bmatrix}'' \frac{y_3}{y_1} = 0,$$

nos fornecendo a relação $y_1(s) = (as + b)y_3(s)$.

- ii) Superfícies cônicas planas ($\alpha = 0$). Neste caso, temos apenas a invariância pelo movimento de translação. Considere uma curva γ na horosfera $\{y_3 = 1\}$, onde $c > 0$ é uma constante. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $c = 1$ e considerar γ dada por

$$\gamma(s) = (r(s) \cos \theta(s), r(s) \sin \theta(s), 1),$$

parametrizada pelo comprimento de arco, i.e.,

$$(r')^2 + (r\theta')^2 = 1.$$

Então a superfície é plana se, e somente se, vale a seguinte expressão para r

$$r(s) = \sqrt{(as + b)^2 - 1}.$$

Queremos descrever todas as superfícies planas helicoidais, generalizando os casos que vimos acima.

5.4 Representação conforme

Em seguida vamos caracterizar as superfícies planas helicoidais em termos de suas primeira e segunda formas fundamentais. Para essas superfícies sabemos que em uma vizinhança de pontos não-umbílicos, temos sempre uma parametrização por linhas de curvatura tal que a primeira e segunda forma são dadas por (para detalhes, veja [31], página 8, Teorema 2.4 e página 15, Corolário 2.7)

$$I = \cosh^2 \phi(u, v)(du)^2 + \sinh^2 \phi(u, v)(dv)^2, \quad (5.10)$$

$$II = \sinh \phi(u, v) \cosh \phi(u, v) ((du)^2 + (dv)^2), \quad (5.11)$$

onde ϕ é uma função harmônica. Queremos mostrar aqui que uma superfície plana helicoidal é caracterizada por aquelas com primeira e segunda formas fundamentais dadas por (5.10) e (5.11) onde ϕ é linear, isto é,

$$\phi(u, v) = au + bv + c, \quad (5.12)$$

onde a, b e c são números reais tais que $(a, b, c) \neq (0, \pm 1, 0)$.

Iremos usar a representação conforme de superfícies planas in \mathbb{H}^3 introduzida por [9] e que será usada aqui como está descrito em [7] e [19]. Seja Σ uma variedade bidimensional $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão plana. Pela equação de Gauss, a segunda forma fundamental $d\sigma^2$ é definida e assim Σ é orientável e possui uma estrutura conforme de superfície de Riemann tal que a segunda forma fundamental $d\sigma^2$ é hermitiana. Esta estrutura conforme de superfície de Riemann fornece uma representação conforme para a imersão ψ que permite recuperar qualquer superfície plana em \mathbb{H}^3 em termos de dados holomorfos (ver detalhes em [9] e [19]). Ao longo de todo este capítulo trataremos Σ como uma superfície de Riemann com a estrutura conforme determinada pela segunda forma fundamental $d\sigma^2$.

Para qualquer $p \in \Sigma$, existe $g(p), g^*(p) \in \mathbb{C}_\infty$ pontos distintos na fronteira ideal tais que a geodesica normal orientada em $\psi(p)$ é a geodésica em \mathbb{H}^3 partindo de $g^*(p)$ em direção à $g(p)$. As aplicações $g, g^* : \sigma \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ são chamadas *aplicações de Gauss hiperbólicas* e esta provado em [9] que, para superfícies planas, tais aplicações são holomorfas quando olhamos para \mathbb{C}_∞ como a esfera de Riemann.

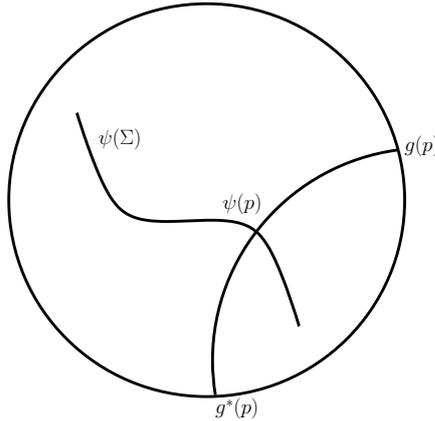


Figura 5.1: Aplicações de Gauss hiperbólicas

Kokubu, Umehara e Yamada em [19] investigaram como recuperar imersões planas com possíveis singularidades, a saber *flat fronts*, em termos das aplicações de Gauss hiperbólicas. Essas singularidades surgem quando a primeira forma fundamental degenera e também é mostrado como as aplicações de Gauss hiperbólicas são bem definidas através das singularidades. Reformulando os resultados do Teorema 2.11 e da Proposição 2.5 para o semi-espaco superior, temos o seguinte teorema (veja [7]):

Teorema 5.1 *Sejam g e g^* duas funções meromorfas não constantes em uma superfície de Riemann Σ tais que $g(p) \neq g^*(p)$ para todo $p \in \Sigma$. Assuma que*

1. *todos os pólos da 1-forma $\frac{dg}{g-g^*}$ são de ordem 1, e*
2. *$\operatorname{Re} \int_\gamma \frac{dg}{g-g^*} = 0$, para cada loop γ em Σ .*

Considere

$$\xi := c \exp \int \frac{dg}{g-g^*}, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (5.13)$$

Então, a aplicação $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^3$ dada por

$$\psi_1 + i\psi_2 = g - \frac{|\xi|^4(g - g^*)}{|\xi|^4 + |g - g^*|^2}, \quad \psi_3 = \frac{|\xi|^2|g - g^*|^2}{|\xi|^4 + |g - g^*|^2}, \quad (5.14)$$

é um flat front. Além disso, se consideramos as 1-formas

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{1}{\xi^2}dg, \\ \theta &= \frac{\xi^2}{(g - g^*)^2}dg^*, \end{aligned} \quad (5.15)$$

então as primeiras e segunda formas fundamentais são representadas como

$$I = (\omega + \bar{\theta})(\bar{\omega} + \theta) \quad (5.16)$$

$$II = |\theta|^2 - |\omega|^2 \quad (5.17)$$

A próxima proposição nos fornece condições necessárias e suficientes nas funções g e g^* para diagonalizar as primeira e segunda formas fundamentais simultaneamente:

Proposição 5.1 *Seja Σ um flat front em \mathbb{H}^3 como dado no Teorema 5.1. Um parâmetro complexo para Σ , $\eta = u + iv$, diagonaliza as primeira e segunda formas fundamentais simultaneamente, como (5.10) e (5.11) se, e somente se,*

$$\frac{g_\eta g_\eta^*}{(g - g^*)^2} = -\frac{1}{4}, \quad (5.18)$$

onde $(\cdot)_\eta$ é a derivada com respeito a η . Neste caso, a função harmônica ϕ é dada por

$$e^{2\phi} = \frac{|g_\eta^*||\xi|^4}{|g_\eta||g - g^*|^2} = \frac{|\xi|^4}{4|g_\eta|^2}. \quad (5.19)$$

Demonstração: Segue das equações (5.15) e (5.16) escrevemos

$$I = \omega\bar{\omega} + \theta\bar{\theta} + 2\text{Re}(\omega\bar{\theta}). \quad (5.20)$$

Como g e g^* são funções holomorfas no parâmetro η escrevemos $\omega\theta$ como

$$\omega\theta = -\frac{g_\eta g_\eta^* (d\eta)^2}{(g - g^*)^2}. \quad (5.21)$$

Escrevendo $\theta = hd\eta$, $\omega = fd\eta$ and $hf = A + iB$, temos

$$\operatorname{Re}(\theta\omega) = A(du^2 - dv^2) - 2Bdudv. \quad (5.22)$$

Se η diagonaliza as primeira e segunda formas fundamentais como em (5.10) e (5.11), devemos ter $B = 0$. Portanto hf é real ou $\frac{g_\eta g_\eta^*}{(g - g^*)^2}$ é real. Se $\frac{g_\eta g_\eta^*}{(g - g^*)^2}$ é real e holomorfa, deve ser necessariamente uma função constante, que vamos nomear por c_g , i.e.,

$$\frac{g_\eta g_\eta^*}{(g - g^*)^2} = c_g. \quad (5.23)$$

Para obter c_g , vamos usar a Equação (5.20) para escrever

$$\begin{aligned} I &= |f|^2 (du^2 + dv^2) + |h|^2 (du^2 + dv^2) - 2c_g (du^2 - dv^2) \\ &= (|f|^2 + |h|^2 - 2c_g) du^2 + (|f|^2 + |h|^2 + 2c_g) dv^2. \end{aligned}$$

Agora, temos a primeira forma fundamental como (5.10) se, e somente se,

$$\begin{aligned} |f|^2 + |h|^2 - 2c_g &= \cosh^2 \phi, \\ |f|^2 + |h|^2 + 2c_g &= \sinh^2 \phi, \end{aligned} \quad (5.24)$$

i.e., $c_g = -\frac{1}{4}$ e (5.18) está provado. Com este valor para c_g usamos (5.23) para escrever a expressão da Equação (5.19). Vamos trabalhar agora com a segunda forma fundamental. Inicialmente, lembramos que

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\xi^2} dg = -\frac{1}{\xi^2} g_\eta d\eta \\ \theta &= \frac{\xi^2}{(g - g^*)^2} dg = \frac{\xi^2}{(g - g^*)^2} g_\eta^* d\eta \end{aligned}$$

e usamos (5.24) para escrever

$$\begin{aligned} \frac{|g_\eta|^2}{|\xi|^4} + \frac{|\xi|^4 |g_\eta^*|^2}{|g - g^*|^4} + \frac{1}{2} &= \cosh^2 \phi, \\ \frac{|g_\eta|^2}{|\xi|^4} + \frac{|\xi|^4 |g_\eta^*|^2}{|g - g^*|^4} - \frac{1}{2} &= \sinh^2 \phi. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Usando (5.18) e (5.23), podemos escrever as expressões acima como

$$\begin{aligned} \frac{|g_\eta||g - g^*|^2}{4|\xi|^4 |g_\eta^*|} + \frac{|\xi|^4 |g_\eta^*|}{4|g_\eta||g - g^*|^2} + \frac{1}{2} &= \cosh^2 \phi, \\ \frac{|g_\eta||g - g^*|^2}{4|\xi|^4 |g_\eta^*|} + \frac{|\xi|^4 |g_\eta^*|}{4|g_\eta||g - g^*|^2} - \frac{1}{2} &= \sinh^2 \phi, \end{aligned} \quad (5.26)$$

escrevendo $\lambda = \frac{|g_\eta||g - g^*|^2}{|\xi|^4|g_\eta^*|}$, concluímos que

$$\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = e^{2\phi} + e^{-2\phi}. \quad (5.27)$$

Se trabalhamos agora com a segunda forma fundamental, teremos

$$\begin{aligned} II &= |\theta|^2 - |\omega|^2 \\ &= \left(\frac{|\xi|^4|g_\eta^*|}{4|g - g^*|^2|g_\eta|} - \frac{|g - g^*|^2|g_\eta|}{4|\xi|^4|g_\eta^*|} \right) (du^2 + dv^2) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda \right) (du^2 + dv^2). \end{aligned}$$

Portanto, pela Equação (5.11) devemos ter

$$\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right) = e^{2\phi} - e^{-2\phi}. \quad (5.28)$$

Combinando as Equações (5.27) e (5.28) concluímos que

$$e^{2\phi} = \frac{1}{\lambda} = \frac{|\xi|^4|g_\eta^*|}{|g_\eta||g - g^*|^2} \quad (5.29)$$

□

Corolário 5.1 *Seja Σ um flat front em \mathbb{H}^3 . Dois parâmetros z e w diagonalizam a primeira e segunda forma fundamental se, e somente se, $w = \pm z + c$, onde $c \in \mathbb{C}$ é uma constante.*

5.5 Exemplos Classificatórios

Nesta seção apresentaremos uma importante classe de exemplos associados com a função ϕ dada na Proposição 5.1 quando tal função é linear. Nomearemos estes exemplos por *exemplos classificatórios* e veremos que cada flat front com este tipo de ϕ deve ser localmente congruente a um dos exemplos classificatórios ou o exemplo apresentado em [18], que é chamado “peach front”.

Teorema 5.2 *Para cada $z_0 \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ considere $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ a função holomorfa dada por*

$$g(z) = e^{(\varepsilon \sinh z_0)z} \quad (5.30)$$

e $g^* = e^{2z_0}g$. Então existe um flat front $\psi_{z_0} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{H}^3$, cujo conjunto singular é dado por

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}[(\varepsilon \cosh z_0)z] = 0\}, \quad \varepsilon^2 = -1.$$

Mais ainda, as primeira e segunda formas fundamentais da imersão plana $\psi_{z_0} : \mathbb{C} \setminus \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{H}^3$, podem ser escritas como (5.10) e (5.11), onde $\phi_{z_0}(z, \bar{z})$ é uma constante não nula ou

$$\begin{aligned} \phi_{z_0}(u, v) &= -\operatorname{Re}[(\varepsilon \cosh z_0)z] \\ &= au + bv. \end{aligned}$$

Demonstração: Por definição de g e g^* e como $z_0 \neq 0$, temos imediatamente que g e g^* são duas funções holomorfas não constantes e $g \neq g^*$. Além disso, temos que

$$\frac{dg}{g - g^*} = -\frac{\varepsilon dz}{2e^{z_0}},$$

o que implica que as condições 1 e 2 do Teorema 5.1 são satisfeitas. Por outro lado,

$$\frac{g_z g_z^*}{(g - g^*)^2} = \frac{e^{2z_0} (g_z)^2}{(1 - e^{2z_0})^2 g^2} = \frac{\varepsilon^2 e^{2z_0} \sinh^2 z_0}{(1 - e^{2z_0})^2} = -\frac{1}{4}.$$

Segue do Teorema 5.1 e da Proposição 5.1, que existe um flat front $\psi_{z_0} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{H}^3$, dado por $\psi_{z_0} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, com ψ_1, ψ_2, ψ_3 como em (5.13) e (5.14). Mais ainda, suas primeira e segunda formas fundamentais são dadas como em (5.10) e (5.11). Segue da definição de g e g^* e das equações (5.13) e (5.19), que $\phi_{z_0}(z, \bar{z})$ é uma constante não nula, se $\cosh z_0 = 0$, i.e., $e^{z_0} = \pm i$, ou,

$$\phi(z, \bar{z}) = -\operatorname{Re}(\varepsilon \cosh z_0 z) = au + bv, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

No último caso, o conjunto singular de ψ_{z_0} é a reta dada por

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\varepsilon \cosh z_0 z) = 0\}.$$

□

Escolhendo diferentes valores para z_0 obtemos todos os flat fronts que mencionamos na Introdução, cujas representações gráficas apresentaremos aqui no modelo da bola conforme:

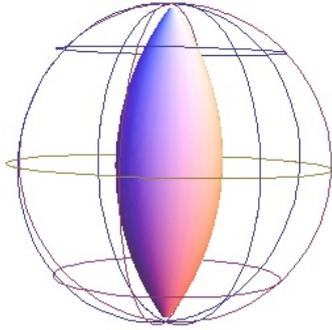


Figura 5.2: Cilindro hiperbólico

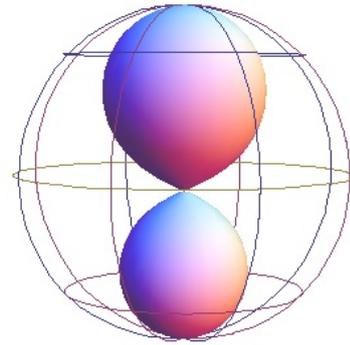


Figura 5.3: *Hourglass*

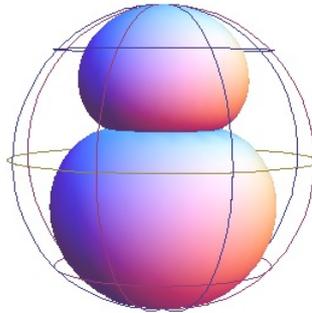


Figura 5.4: *Snowman*

i) *Flat fronts rotacionais*. Estes flat flat fronts são obtidos quando $e^{2z_0} \in \mathbb{R}$. O cilindro hiperbólico (Figura 5.2) é obtido quando $e^{2z_0} = -1$. Quando $e^{2z_0} < 0$, com $e^{2z_0} \neq -1$ nós temos o *hourglass* (Figura 5.3) e para $e^{2z_0} > 0$ nós temos o *snowman* (Figura 5.4).

ii) *Flat Fronts cônicos*. Este flat front (Figura 5.5) é obtido quando temos $e^{2z_0} = \pm i$. Neste caso temos a invariância somente pelo movimento de translação:

iii) *Flat Fronts Propriamente Helicoidais*. Os casos não mencionados acima são invariantes pelos dois movimentos, o movimento rotacional e a translação (Figura 5.6):

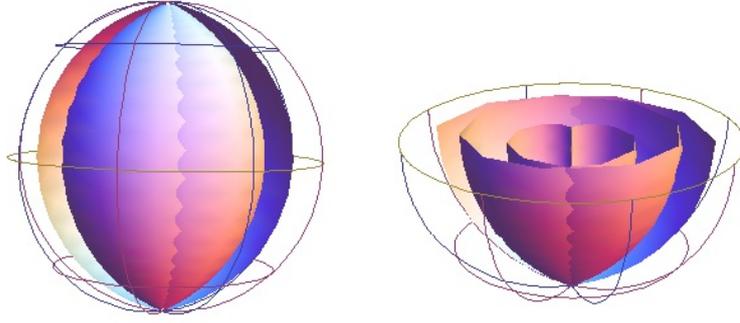


Figura 5.5: *Flat Front* cônico

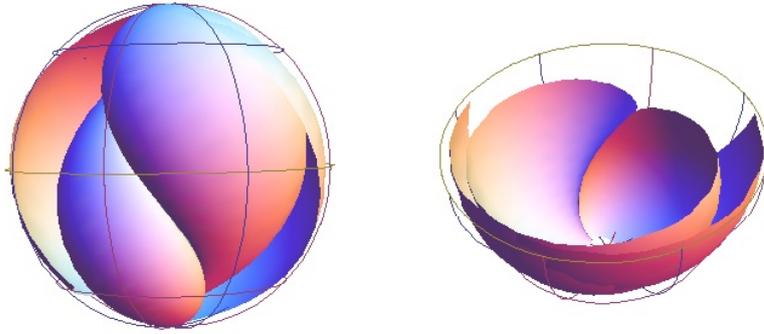


Figura 5.6: Flat Fronts Propriamente Helicoidais

A classe de exemplos obtidas no Teorema 5.2 será chamada *exemplos classificatórios*.

Observação 5.4 O exemplo dado em [18] chamado *peach front* (Figura 5.7) é um caso onde as aplicações de gauss hiperbólicas satisfazem $g^* = g - 1$ e pode ser parametrizado usando o Teorema 5.1 da seguinte forma

$$(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = \left(\pm \frac{v}{2} - \frac{e^{\pm 2v}}{e^{\pm 2v} + 1}, \mp \frac{u}{2}, \frac{e^{\pm v}}{e^{\pm 2v} + 1} \right),$$

onde as primeiras e segunda formas fundamentais são dadas como (5.10) e (5.11) com $\phi(u, v) = \pm v$. Observe que este valor de ϕ pode ser visto como $\phi(z, \bar{z}) = -\text{Re}(\varepsilon \cosh z_0 z)$, with $z_0 = 0$.

Teorema 5.3 *Seja $\Sigma \subset \mathbb{H}^3$ um flat front com um parâmetro complexo $z = u + iv$ que diagonaliza as primeira e segunda formas fundamentais simultaneamente como em (5.10) e*

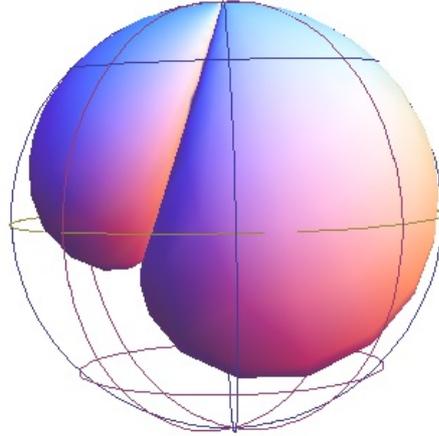


Figura 5.7: O *Peach Front*

(5.11). Então $\phi(u, v) = au + bv + c$ se, e somente se, o “flat front” correspondente é localmente congruente a um dos exemplos classificatórios ou ao “peach front”.

Demonstração: Como ϕ e $z = u + iv$ determinam as primeira e segunda formas fundamentais, é imediato que qualquer imersão plana tal que

$$\phi(z, \bar{z}) = -\operatorname{Re}(\varepsilon \cosh z_0 z),$$

para algum $z_0 \in \mathbb{C}^*$, deve ser localmente congruente a um dos exemplos classificatórios.

Por outro lado, como vimos na Observação 5.4, o *peach front* admite uma parametrização que diagonaliza simultaneamente as primeira e segunda formas fundamentais com $\phi(u, v)$ como acima, com $z_0 = 0$.

□

5.6 Caracterização

Nesta seção provaremos que um *flat front* em \mathbb{H}^3 é helicoidal se, e somente se, é localmente congruente a um dos exemplos classificatórios na seção anterior. Além disso, obteremos uma classificação completa dos *flat fronts* helicoidais em termos de suas aplicações de Gauss hiperbólicas assim como em termos de funções harmônicas lineares. Como uma consequência do Teorema

5.3 provaremos que qualquer superfície plana em \mathbb{H}^3 que corresponde a uma função harmônica linear ou é localmente congruente a uma superfície plana helicoidal ou a um “peach front”.

Teorema 5.4 *Um flat front em \mathbb{H}^3 é helicoidal se, e somente se, é localmente congruente a um dos exemplos classificatórios.*

Vamos dividir nossa prova em dois lemas. O primeiro lema estabelecerá que todo exemplo classificatório, tem a propriedade geométrica de ser invariante por um grupo helicoidal de isometrias, i.e., um flat front helicoidal. No segundo, mostraremos a recíproca, i.e., toda superfície plana helicoidal é localmente congruente a um dos exemplos classificatórios, mostrando que as aplicações de gauss hiperbólicas satisfazem $g^* = e^{2z_0}g$. Uma vez estabelecidos estes dois lemas, a prova consiste apenas em associá-los com a Proposição 5.1 e o Teorema 5.3.

Lema 5.1 *Todo exemplo classificatório é um flat front helicoidal.*

Demonstração: Os exemplos classificatórios foram obtidos usando o método de produzir *flat fronts* dado pelo Teorema 5.2. Dado tal *flat front*, suas aplicações de Gauss hiperbólicas g e g^* satisfazem $g^* = e^{2z_0}g$ e $g = e^{(\varepsilon \sinh z_0)z}$, onde z_0 é um número complexo não nulo, i.e., $1 - e^{z_0} \neq 0$. Queremos obter a imersão em \mathbb{H}^3 do *flat front*, associado a g e g^* , usando o Teorema 5.1. Como $g^* = e^{2z_0}g$, temos

$$g - g^* = (1 - e^{2z_0})g, \quad (5.31)$$

pela equação (5.13) e escrevendo $g = Re^{iv}$, segue que

$$\xi = c \exp\left(\frac{\log R + iv}{1 - e^{2z_0}}\right).$$

De agora em diante, vamos adotar a seguinte notação

$$\frac{1}{1 - e^{2z_0}} = x_0 + iy_0, \quad (5.32)$$

dessa forma, temos

$$|\xi|^2 = |c|^2 e^{2(x_0 \log R - y_0 v)}. \quad (5.33)$$

Podemos agora escrever a imersão através da equação (5.14). Usando (5.31) e (5.33) temos que

$$\psi_1 + i\psi_2 = \left(1 - \frac{|c|^4 e^{4(x_0 \log R - y_0 v)} (x_0 - iy_0)}{|c|^4 e^{4(x_0 \log R - y_0 v)} (x_0^2 + y_0^2) + e^{(2 \log R)}}\right) Re^{iv} \quad (5.34)$$

$$\psi_3 = \frac{|c|^2 e^{2(x_0 \log R - y_0 v + \log R)}}{(x_0^2 + y_0^2) |c|^4 e^{4(x_0 \log R - y_0 v)} + e^{2 \log R}} \quad (5.35)$$

Simplificando (5.35) segue que

$$\begin{aligned}
\psi_3 &= \frac{|c|^2 R e^{(2x_0 \log R - 2y_0 v + \log R)}}{(x_0^2 + y_0^2) |c|^4 e^{4(x_0 \log R - y_0 v)} + e^{2 \log R}} \\
&= \frac{|c|^2 R}{(x_0^2 + y_0^2) |c|^4 e^{(2x_0 \log R - 2y_0 v - \log R)} + e^{(-2x_0 \log R + 2y_0 v + \log R)}} \\
&= \frac{|c|^2 R}{(x_0^2 + y_0^2) |c|^4 e^x + e^{-x}},
\end{aligned} \tag{5.36}$$

onde $x = (2x_0 - 1) \log R - 2y_0 v$. Usando este fato, reescrevemos (5.34) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\psi_1 + i\psi_2 &= \left(1 - \frac{|c|^4 e^{(4x_0 \log R - 4y_0 v)} (x_0 - iy_0)}{(x_0^2 + y_0^2) |c|^4 e^{(4x_0 \log R - 4y_0 v)} + e^{(2 \log R)}} \right) R e^{iv} \\
&= \left(1 - \frac{|c|^4 e^{(2x_0 \log R - 2y_0 v - \log R)} (x_0 - iy_0)}{(x_0^2 + y_0^2) |c|^4 e^{(2x_0 \log R - 2y_0 v - \log R)} + e^{(-2x_0 \log R + 2y_0 v + \log R)}} \right) R e^{iv} \\
&= \left(1 - \frac{|c|^4 (x_0 - iy_0) e^x}{(x_0^2 + y_0^2) |c|^4 e^x + e^{-x}} \right) R e^{iv}.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Agora queremos provar que a superfície imersa é invariante por um grupo helicoidal de isometrias de \mathbb{H}^3 . Inicialmente, vamos considerar o caso onde $y_0 = 0$. Podemos ver a partir de (5.36) e (5.37) que este caso corresponde às superfícies rotacionais. Por outro lado, quando $y_0 \neq 0$ podemos escrever

$$v = f(R) - \frac{x}{2y_0},$$

onde $f(R) = \frac{2x_0 - 1}{2y_0} \log R$. Com essa notação, concluímos que

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= R [c_1(x) \cos f(R) - c_2(x) \sin f(R)], \\
\psi_2 &= R [c_1(x) \sin f(R) + c_2(x) \cos f(R)],
\end{aligned}$$

onde c_1 e c_2 são funções reais dadas por

$$\begin{aligned}
c_1(x) &= \frac{[(x_0^2 + y_0^2 - x_0) |c|^4 e^x + e^{-x}] \cos\left(\frac{x}{2y_0}\right) + y_0 |c|^4 e^x \sin\left(\frac{x}{2y_0}\right)}{(x_0^2 + y_0^2) |c|^4 e^x + e^{-x}}, \\
c_2(x) &= -\frac{[(x_0^2 + y_0^2 - x_0) |c|^4 e^x + e^{-x}] \sin\left(\frac{x}{2y_0}\right) + y_0 |c|^4 e^x \cos\left(\frac{x}{2y_0}\right)}{(x_0^2 + y_0^2) |c|^4 e^x + e^{-x}}.
\end{aligned}$$

Usando a notação $\psi_3 = R c_3(x)$, temos então a seguinte expressão para a imersão:

$$(\psi_1, \psi_2, \psi_3)(R, x) = R \begin{pmatrix} \cos f(R) & -\sin f(R) & 0 \\ \sin f(R) & \cos f(R) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ c_3(x) \end{pmatrix}.$$

Quando $x_0 = \frac{1}{2}$, temos $f(R) = 0$ e conseqüentemente, não temos o movimento rotacional. Por outro lado, se $x_0 \neq \frac{1}{2}$, consideramos $f(R) = y$ e escrevemos

$$(\psi_1, \psi_2, \psi_3)(y, x) = \exp\left(\frac{2y_0}{2x_0 - 1}y\right) \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ c_3(x) \end{pmatrix}$$

□

O segundo lema irá mostrar que qualquer superfície helicoidal em \mathbb{H}^3 é congruente a uma superfície cujas aplicações de Gauss hiperbólicas satisfazem $g^* = cg$, onde c é um número complexo.

Nesse sentido, consideraremos uma abordagem próxima àquela dada em [24]. Considere o modelo Lorentziano para o espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 , isto é, seja \mathbb{L}^4 o espaço Minkowski 4-dimensional, munido de coordenadas lineares (x_0, x_1, x_2, x_3) e o produto escalar \langle, \rangle dado por

$$\langle, \rangle = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \quad (5.38)$$

O espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 será a subvariedade Riemanniana tridimensional com curvatura seccional -1 , dada pelo conjunto

$$\mathbb{H}^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1\}, \quad (5.39)$$

com métrica induzida por \mathbb{L}^4 .

Podemos ver que a aplicação

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \rightarrow \frac{1}{x_0 + x_3}(x_1, x_2, 1) \quad (5.40)$$

é uma isometria entre os dois modelos com inversa dada por

$$(y_1, y_2, y_3) \rightarrow \frac{1}{2y_3} \left(1 + \sum_{i=1}^3 y_i^2, 2y_1, 2y_2, 1 - \sum_{i=1}^3 y_i^2 \right) \quad (5.41)$$

Com essas aplicações em mente, podemos ver como trabalhar com superfícies helicoidais no modelo Lorentziano. Seja $O_1(4)$ o grupo ortogonal em \mathbb{L}^4 , dado por todas transformações lineares que preservam \langle, \rangle . Considere agora $m_t \in O_1(4)$ dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} \cosh \beta t & 0 & 0 & \sinh \beta t \\ 0 & \cos \alpha t & -\sin \alpha t & 0 \\ 0 & \sin \alpha t & -\cos \alpha t & 0 \\ \sinh \beta t & 0 & 0 & \cosh \beta t \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

Observe que m_t é um subgrupo a 1-parâmetro de isometrias de \mathbb{H}^3 dada por uma translação

$$\begin{pmatrix} \cosh \beta t & 0 & 0 & \sinh \beta t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \beta t & 0 & 0 & \cosh \beta t \end{pmatrix}$$

ao longo da geodésica $\gamma : -x_0^2 + x_3^2 = -1$, composta com a rotação

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha t & -\sin \alpha t & 0 \\ 0 & \sin \alpha t & \cos \alpha t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe também que a geodésica γ que estamos considerando é a imagem do eixo- y_3 pela aplicação (5.41). Verifica-se que qualquer órbita de m intersecta a subvariedade totalmente geodésica $P^2 = \{x_3 = 0\}$ apenas uma vez. Assim, qualquer superfície invariante por m é gerada por uma curva em P^2 .

Para obter as aplicações de Gauss hiperbólicas, consideramos o modelo de Matrizes Hermitianas para \mathbb{H}^3 . Para ver como isso funciona, seja \mathbb{N}^3 a parte do cone de luz tal que $x_0 > 0$, isto é

$$\mathbb{N}^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, x_0 > 0\}. \quad (5.43)$$

Se associarmos para cada $v \in \mathbb{N}^3$ a semi-reta $[v]$, obtemos uma partição de \mathbb{N}^3 e a fronteira ideal, \mathbb{S}_∞^2 , de \mathbb{H}^3 pode ser vista como o quociente de \mathbb{N}^3 sob a relação de equivalência associada. Assim, a métrica induzida está bem definida a menos de um múltiplo escalar, onde \mathbb{S}_∞^2 recebe uma estrutura conforme natural como o quociente $\mathbb{N}^3/\mathbb{R}^+$. Nesta configuração, como podemos ver em [9] as aplicações de Gauss hiperbólicas de uma imersão $\psi : S \rightarrow \mathbb{H}^3$, com normal unitário N , são dadas por

$$g = [\psi + N] \quad \text{e} \quad g^* = [\psi - N] \quad (5.44)$$

Usamos a identificação entre \mathbb{L}^4 e o conjunto das matrizes hermitianas 2×2 , $\mathbb{H}\text{erm}(2)$, onde o ponto (x_0, x_1, x_2, x_3) é identificado com a matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Uma vez que temos as coordenadas de $\psi + N$ e $\psi - N$ in \mathbb{L}^4 , encontramos suas respectivas matrizes e escrevendo-as da seguinte forma

$$\psi + N = \begin{pmatrix} A\bar{A} & A\bar{B} \\ \bar{A}B & B\bar{B} \end{pmatrix}, \quad (5.45)$$

e

$$\psi - N = \begin{pmatrix} C\bar{C} & C\bar{D} \\ \bar{C}D & D\bar{D} \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

Portanto, as aplicações de gauss hiperbólicas serão dadas por (veja [9] para mais detalhes):

$$g = \frac{A}{B} \quad \text{e} \quad g^* = \frac{C}{D}. \quad (5.47)$$

Com esta abordagem, estamos preparados para estabelecer e provar o segundo lema:

Lema 5.2 *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão de uma superfície plana em \mathbb{H}^3 . Então existe um movimento rígido de \mathbb{H}^3 , tal que suas aplicações de gauss hiperbólicas g e g^* satisfazem $g = e^{2z_0}g^*$, onde $z_0 \neq 0$ é um número complexo.*

Demonstração: Iniciamos com uma superfície helicoidal imersa em \mathbb{H}^3 . Então, considerando o modelo do semi-espaco para \mathbb{H}^3 , existe um movimento rígido de \mathbb{H}^3 que leva o eixo da superfície helicoidal para o eixo y_3 . Então, considerando a isometria (5.41), entre modelo do semi-espaco e $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$, a menos de movimento rígido de \mathbb{H}^3 , podemos considerar a imersão ψ da superfície helicoidal como

$$\psi(t, s) = m_t(c(s)),$$

onde c é uma curva em P^2 parametrizada pelo comprimento de arco.

Para descrever as aplicações de Gauss hiperbólicas, g e g^* , precisamos obter as aplicações $\psi + N$ e $\psi - N$. Lembramos que um vetor normal unitário a imersão é dado por

$$N = \frac{\boxtimes(\psi, \psi_t, \psi_s)}{|\boxtimes(\psi, \psi_t, \psi_s)|},$$

onde $\boxtimes(\psi, \psi_t, \psi_s)$ é o produto vetorial lorentziano entre ψ, ψ_t, ψ_s . Se escrevemos $c(s) = (x_0(s), x_1(s), x_2(s), 0)$, temos que $\psi_t(t, s) = m_t(v(s))$, onde $v(s) = (0, -\alpha x_2(s), \alpha x_1(s), \beta x_0(s))$. Este fato e a ortogonalidade de m_t , nos permite concluir que

$$N(t, s) = m_t(\eta(s)), \quad (5.48)$$

onde $\eta(s) = \frac{\Re(c(s), v(s), c's)}{|\Re(c(s), v(s), c's)|}$. Portanto

$$\begin{aligned}\psi + N &= m_t(c + \eta), \\ \psi - N &= m_t(c - \eta).\end{aligned}$$

Pelas equações (5.45), (5.46) and (5.47) temos que

$$g(s, t) = g_0(s)e^{(\beta+i\alpha)t} \quad \text{and} \quad g^*(s, t) = g_0^*(s)e^{(\beta+i\alpha)t}. \quad (5.49)$$

Agora o que vemos é que $\frac{g}{g^*}$ é uma função somente na variável s , e como podemos ver em [9], g e g^* são holomorfas quando a superfície é plana, portanto, $\frac{g}{g^*}$ é uma função holomorfa que depende apenas de uma variável, o que implica

$$g = \omega_0 g^*, \quad (5.50)$$

onde $\omega_0 \in \mathbb{C}$ é uma constante diferente de 1 pelas equações (5.45), (5.46), (5.47) e o fato de que ψ e N são ortogonais. Portanto, existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tal que $g = e^{2z_0} g^*$.

□

Podemos provar agora o Teorema 5.4.

Demonstração: (Prova do Teorema 5.4) Uma direção da prova é dada pelo Lema 5.1, i.e., todo exemplo classificatório é um flat front helicoidal. Reciprocamente, dada qualquer superfície helicoidal em \mathbb{H}^3 , segue do Lema 5.2, que esta é congruente a uma superfície cujas aplicações de Gauss hiperbólicas satisfazem $g = e^{2z_0} g^*$, onde $z_0 \neq 0$. Mais ainda, usando a Proposição 5.1, podemos escolher um parâmetro complexo $\eta = u + iv$ tal que (5.19) vale. Portanto, localmente g é dada por

$$g = e^{\varepsilon(\sinh z_0)\eta}.$$

Então, segue de (5.19) que ϕ deve ser linear. Dessa forma, o Teorema 5.3 implica que este *flat front* helicoidal é localmente congruente a um dos exemplos classificatórios.

□

Como uma consequência dos Teoremas 5.4, Proposição 5.1, Teorema 5.2 e a definição de exemplos classificatórios, temos uma classificação completa *flat fronts* helicoidais em termos de suas aplicações de Gauss hiperbólicas, determinadas por um número complexo não nulo.

Teorema 5.5 *Um flat front em \mathbb{H}^3 é helicoidal se, e somente se, a menos de um movimento rígido de \mathbb{H}^3 , existe um parâmetro complexo η tal que suas aplicações de Gauss hiperbólicas g e g^* são funções holomorfas dadas por,*

$$g = e^{\varepsilon(\sinh z_0)\eta} \quad \text{and} \quad g^* = e^{2z_0}g,$$

onde z_0 é um número complexo e $\varepsilon^2 = 1$.

Como um consequência dos Teoremas 5.2, 5.4 e 5.5, obtemos os seguintes seguintes resultados formulados em termos de funções harmônicas.

Teorema 5.6 *Um flat front em \mathbb{H}^3 é helicoidal se, e somente se, existe uma parametrização local por linhas de curvatura, em uma vizinhança de um ponto não singular, tal que primeira e segunda formas fundamentais são dadas por (5.10) e (5.11), onde $\phi = au + bv + c$ and $(a, b, c) \neq (0, \pm 1, 0)$.*

Teorema 5.7 *Seja Σ um flat front em \mathbb{H}^3 com uma parametrização local, em uma vizinhança de um ponto não singular e não umbílico, tal que as primeira e segunda formas fundamentais são diagonais e dadas por (5.10) e (5.11), onde ϕ é uma função harmônica euclidiana). Então ϕ é linear, i.e., $\phi = au + bv + c$ se, e somente se, Σ é localmente congruente ou a um flat front helicoidal ou a um “peach front”.*

Apêndice A

O método das características

O método das características é um procedimento para resolver equações diferenciais parciais homogêneas de primeira ordem do tipo

$$a_1(x) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + a_m(x) \frac{\partial f}{\partial x_m} = 0. \quad (\text{A.1})$$

A teoria clássica de tais equações mostra que a solução geral de (A.1) pode ser encontrada integrando o correspondente *sistema característico* de equações diferenciais ordinárias, dado por

$$\frac{dx_1}{a_1(x)} = \frac{dx_2}{a_2(x)} = \cdots = \frac{dx_m}{a_m(x)}. \quad (\text{A.2})$$

A solução geral de A.2 pode ser escrita da forma

$$f_1(x_1, \dots, x_m) = c_1, \dots, f_{m-1}(x_1, \dots, x_m) = c_{m-1},$$

onde c_1, \dots, c_{m-1} são as constantes de integração. Neste caso, as funções f_i são soluções da equação (A.1) e qualquer outra solução desta equação será necessariamente uma função de f_1, \dots, f_{m-1} .

Exemplo A.1 Considere a equação diferencial parcial

$$-y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

O correspondente sistema característico é dado por

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x},$$

que é equivalente a

$$x dx = -y dy,$$

o que implica $x^2 + y^2 = c$, para uma constante arbitrária c . Assim, $f(x, y) = x^2 + y^2$ é uma solução da equação, assim como, qualquer função $g(x, y) = F(x^2 + y^2)$.

Exemplo A.2 Considere a equação diferencial parcial

$$-y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} + (1 + z^2) \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (\text{A.3})$$

O correspondente sistema característico é dado por

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Vimos no exemplo anterior que a primeira equação implica em $x^2 + y^2 = c$. Escrevendo $x = \sqrt{c - y^2}$ e trabalhando com a segunda equação, obtemos que

$$\frac{dy}{\sqrt{c - y^2}} = \frac{dz}{1 + z^2},$$

o que implica

$$\arcsen\left(\frac{y}{\sqrt{c}}\right) - \arctanz = c_1,$$

equivalentemente, aplicando a tangente da soma, devemos ter

$$\frac{y - xz}{x + yz} = \tilde{c}_1.$$

Portanto, uma solução geral para a EDP (A.3) é dada por $f(x, y, z) = F\left(x^2 + y^2, \frac{y - xz}{x + yz}\right)$.

Referências Bibliográficas

- [1] Barbosa, J.L., Ferreira, W., Tenenblat, K., *Submanifolds of Constant Sectional Curvature in Pseudo-Riemannian Manifolds*, Annals of Global Analysis and Geometry 14, (1996), 381-401.
- [2] Carmo, M. P., *Formas Diferenciais e Aplicações*, 8º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Edição (1971).
- [3] Carmo, M. P., *O método do referencial móvel*, II Escola Latino Americana de Matemática, IMPA, (1976).
- [4] Carmo, M. P., *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Textos Universitários, SBM. 2ª Edição (2005).
- [5] Carmo, M.P., Dajczer, M., *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Trans. Amer. Math. Soc., 227, 2, (1983), 685-709.
- [6] Cartan, E., *La déformation des hypersurfaces dans l'espace conforme réel à $n \geq 5$ dimensions*, Bull. Soc. Math. France 45 (1917) 57-121, (Euvres Complètes Partie 3, Vol. 1, S. 221, Paris 1955)
- [7] Corro, A.V., Martínez, A., Milán, F., *Complete flat surfaces with two isolated singularities in hyperbolic 3-space*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 366, (2010), 582-592.
- [8] Ferreira, W. P. *Soluções invariantes pelos grupos de simetria de Lie das Equações Generalizadas Intrínsecas de Laplace e de sinh-Gordon elíptica e propriedades geométricas das subvariedades associadas*, Tese de Doutorado, Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, (1994).

- [9] Galvez, J.A., Martínez, A., Milán, F., *Flat surfaces in the hyperbolic 3-space*, Math. Ann., 316, (2000), 419-435.
- [10] Guichard, C., *Sur les systèmes triplement indéterminés et sur systèmes triplement orthogonaux*, Scienta 25, Paris (1905).
- [11] Hertrich-Jeromin, U., *On conformally flat hypersurfaces and Guichard's nets*, Beitrage zur Algebra und Geometrie, **35** (1994), 315-331.
- [12] Hertrich-Jeromin, U., *Introduction to Möbius Differential Geometry*, London Mathematical Society Lecture Notes Series 300, Cambridge University Press (2003).
- [13] Hertrich-Jeromin, U., Suyama, Y., *Conformally Flat Hypersurfaces with cyclic guichard net*, International Journal of Mathematics, Vol. 18, **3** (2007) 301-329.
- [14] John, F., *Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Science 1, 4th Edition, Springer-Verlag (1982).
- [15] Lafontaine, J., *Conformal geometry from Riemannian viewpoint*, in *Conformal Geometry (R.S. Kulkarni and U. Pinkall, eds.)*, Aspects of Math. Vol. E12, Max-Plank-Ins. für Math., (1988) 65-92.
- [16] Lamé, G., *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, Mallet-Bachelier, 1859, 73-78.
- [17] Lima, E.L., *Varietades Diferenciáveis*, Monografias de Matemática 15, IMPA, (1973).
- [18] Kokubu, M., Rossmann, W., Saji, K., Umehara, M., Yamada, K., *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math., 221, 2, (2005), 303-251.
- [19] Kokubu, M., Umehara, M., Yamada, K., *Flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math., 216, 2, (2004), 149-175.
- [20] Martínez, A., Santos, J.P., Tenenblat, K., *Helicoidal flat surfaces in the hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math., aceito para publicação.
- [21] O'Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry, with applications to relativity*, Academic Press (1983).

- [22] Olver, P. J., *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Second Edition, GTM **107** (2000).
- [23] Rabelo, M. Tenenblat, K., *Toroidal submanifolds of constant nonpositive curvature*, In Memoriam of N.I. Lobachevskii, Ed. A.P. Shirokov, Kazan Univ. Publ. Vol. III Part 1 (1995), 135-159.
- [24] Ripoll, J.B., *Helicoidal minimal surfaces in hyperbolic space*, Nagoya Mathematics Journal, 114, (1989), 4-27.
- [25] Santos, J.P., *Hipersuperfícies conformemente planas em formas espaciais de dimensão 4*, dissertação de mestrado, Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, (2009).
- [26] Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol.2*, Publish or Perish, (1979).
- [27] Strauss, W. A., *Partial Differential Equations: an Introduction*, John Wiley and Sons, (1992).
- [28] Suyama, Y., *Conformally flat hypersurfaces in Euclidean 4-space*, Nagoya Math. J, Vol.158 (2000) 1-42.
- [29] Suyama, Y., *Conformally flat hypersurfaces in Euclidean 4-space II*, Osaka Math. J, **42** (2005) 573-598.
- [30] Suyama, Y., *Conformally flat hypersurfaces in Euclidean 4-space and a class of Riemannian 3-Manifolds*, RIMS Kokyuroku **1236** (2001), 60-89.
- [31] Tenenblat, K., *Transformations of Manifolds and Application to Differential Equations*, Longman Sc and Tech, 1998.
- [32] Tenenblat, K., Winternitz, P., *On the Simetry Groups of the Intrinsec Generalized Wave and sine-Gordon Equations*, J. Math. Phys. **34** (8) (1993), 3527-3542.
- [33] Tenenblat, K., *On isometric immersions of riemannian manifolds*, Boletim da Soc. Bras. de Mat, Vol.2 (1971) 15-22.