

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

O Método dos Elementos de Contorno Rápido com
Expansão em Multipólos Aplicado a Problemas de
Condução de Calor

LUCIANA MOREIRA BRAGA

ORIENTADOR: ÉDER LIMA DE ALBUQUERQUE

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM
CIÊNCIAS MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO: ENM.DM - 178 A/2012

BRASÍLIA-DF
SETEMBRO - 2012

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

O Método dos Elementos de Contorno Rápido com
Expansão em Multipólos Aplicado a Problemas de
Condução de Calor

LUCIANA MOREIRA BRAGA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS MECÂNICAS.

APROVADA POR:

Prof. Éder Lima de Albuquerque, DSc. (ENM-UnB)
(Orientador)

Prof. Luciano Mendes Bezerra, PhD. (ENC-UnB)
(Examinador Externo)

Profa. Carla Tatiana Mota Anflor, DSc. (FGA-UnB)
(Examinador Interno)

BRASÍLIA/DF, 27 DE SETEMBRO DE 2012.

FICHA CATALOGRÁFICA

BRAGA, LUCIANA MOREIRA

O Método dos Elementos de Contorno Rápido com Expansão
em Multipólos Aplicado a Problemas de Condução de Calor.
[Distrito Federal] 2012.

xvii, 114p., 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2012).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Método dos elementos de contorno

2. Expansão em multipólos

3. Séries de Taylor

4. Método dos mínimos resíduos
generalizados

I. ENM/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BRAGA, LUCIANA MOREIRA (2012). O Método dos Elementos de Contorno Rápido com Expansão em Multipólos Aplicado a Problemas de Condução de Calor. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM.DM - 178 A/2012, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 114p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DA AUTORA: Luciana Moreira Braga.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: O Método dos Elementos de Contorno Rápido com Expansão em Multipólos Aplicado a Problemas de Condução de Calor.

GRAU / ANO: Mestre / 2012

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação, bem como emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. A autora reserva outros direitos de publicação, desse modo nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a autorização por escrito da autora.

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado
a minha avó Maria José
e aos meus pais Helio Braga
e Rosario Braga.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Éder Lima de Albuquerque a quem quero expressar toda minha admiração e gratidão pela qualidade das informações transmitidas durante a realização deste trabalho, por sua paciência, compromisso e disponibilidade que ratificam o seu incontestável caráter e profissionalismo.

Ao Prof. Luciano Mendes Bezerra do Programa de Pós-graduação em Estruturas do qual fui aluna na disciplina de Métodos dos Elementos de Contorno que com seu conhecimento transmitiu com muita tranquilidade os conceitos teóricos do método.

A CAPES pelo apóio financeiro sem o qual não teria condições de realizar este trabalho.

Aos meus colegas Nuno, Dalmo e Gabriela pela amizade e ajuda nos momentos difíceis.

Aos meus pais Helio e Rosário pelo apóio e incentivo.

Ao meu colega de pós-graduação e esposo Jefferson por sua colaboração financeira no início do curso e revisão ortográfica deste trabalho.

RESUMO

O Método dos Elementos de Contorno Rápido com Expansão em Multipólos Aplicado a Problemas de Condução de Calor

Autor: Luciana Moreira Braga

Orientador: Éder Lima de Albuquerque

Programa de Pós-graduação em Ciências Mecânicas

Brasília, Setembro de 2012.

Este trabalho apresenta uma formulação do método dos elementos de contorno rápido com expansão em multipólos e sua aplicação em problemas de condução de calor. Primeiramente é feita a descrição da formulação direta do método dos elementos de contorno para a equação de Laplace considerando funções de forma constantes, lineares contínuas e quadráticas contínuas. Então, a formulação do método dos elementos de contorno rápido com expansão em multipolos é desenvolvida usando variáveis complexas e a expansão das soluções fundamentais em séries de Taylor. Uma vez que as matrizes de influência não são montadas de maneira explícita, é necessário usar um método iterativo para resolução de sistemas lineares. O método dos mínimos resíduos generalizados foi o escolhido, com base em trabalhos prévios. É feita uma descrição da estrutura hierárquica de dados utilizada e do algoritmo implementado. A validação é realizada comparando os resultados com resultados obtidos utilizando a formulação direta do método dos elementos de contorno. É analisada a influência do número de termos na expansão em série de Taylor na aproximação da solução fundamental e no cálculo das matrizes de influência. O custo computacional de ambas as formulações são comparadas.

ABSTRACT

The Boundary Element Method with Fast Multipole Applied to Problems of Heat Conduction

Author: Luciana Moreira Braga

Supervisor: Éder Lima de Albuquerque

Mechanical Science Graduate Program

Brasília, September, 2012.

This paper presents a formulation of the fast multipole boundary element method and its application to a problem of heat conduction. Firstly, the direct boundary element formulation for the Laplace equation is described considering constant, continuum linear and continuum quadratic shape functions. So, the fast multipole boundary element method is developed using complex variables and Taylor series in the expansion of fundamental solutions. Provided that influence matrices are not explicitly obtained, it is necessary the use of an iterative method to solve the linear system. The generalized minimum residue method (GMRES) was chosen based on previous work. The hierarchical data structure and the implemented algorithm are described. Validation is carried out through comparison of results obtained by both formulations: the direct boundary element method and the fast multipole boundary element method. It is analysed the influence of the number of terms in the series expansion on the computation of fundamental solution and influence matrices. The computational cost of both formulations are compared.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Os métodos rápidos dos elementos de contorno	1
1.2	Organização do trabalho	9
2	O Método dos Elementos de Contorno	10
2.1	Introdução	10
2.2	Equação de Poisson para transferência de calor	10
2.2.1	Solução fundamental para a equação de Laplace	13
2.3	Equação integral de contorno	17
2.4	Discretização das equações integrais de contorno	23
2.5	Cálculo da temperatura e do fluxo em pontos internos	24
2.6	Elementos de contorno constantes	25
2.6.1	Integração das matrizes $[H]$ e $[G]$ quando o ponto fonte não pertence ao elemento	28
2.6.2	Integração das matrizes $[H]$ e $[G]$ quando o ponto fonte pertence ao elemento	32
2.7	Elementos de contorno lineares contínuos	33
2.7.1	Integração das matrizes $[H]$ e $[G]$ quando o ponto fonte não pertence ao elemento	38

2.7.2	Integração da matriz $[G]$ quando o ponto fonte pertence ao elemento	38
2.7.3	Método indireto para o cálculo da diagonal da matriz $[H]$	41
2.8	Quadratura de Gauss logarítmica	42
2.9	Elementos de contorno quadráticos contínuos	43
2.9.1	Integração das matrizes $[H]$ e $[G]$ quando o ponto fonte não pertence ao elemento	47
2.9.2	Integração da matriz $[H]$ quando o ponto fonte pertence ao elemento	47
2.9.3	Integração da matriz $[G]$ quando o ponto fonte pertence ao elemento	47
2.10	Integração analítica com elementos constantes	52
3	O Método dos Elementos de Contorno Rápido com Expansão em Multipólos	55
3.1	Primeiras Noções	55
3.2	Método dos elementos de contorno rápido com expansão em multipólos para problemas de potencial em 2 dimensões	57
3.3	Operações do MECMP	58
3.3.1	Expansão em multipólos (momentos)	58
3.3.2	Translação momento-para-momento ($M2M$)	61
3.3.3	Expansão local e translação momento-para-local ($M2L$)	62
3.3.4	Translação local-para-local ($L2L$)	63
3.4	Algoritmo	63
3.5	Matriz de pré-condicionamento	67
4	Resultados numéricos	71
4.1	Comparação entre os diferentes tipos de elementos de contorno	71

4.1.1	Condução de calor em um cilindro	71
4.1.2	Condução de calor em uma placa	79
4.2	Expansão das soluções fundamentais em séries de Taylor	86
4.3	Aproximação dos termos das matrizes $[G]$ e $[H]$ usando a expansão em séries de Taylor	88
4.4	Comparação do MEC com o MECMP	91
5	Conclusões e trabalhos futuros	95
5.1	Conclusões	95
5.2	Publicações	96
5.3	Trabalhos futuros	97

Capítulo 1

Introdução

1.1 Os métodos rápidos dos elementos de contorno

O sucesso de simulações numéricas ao lado do acelerado desenvolvimento dos computadores e da complexidade dos problemas de engenharia têm levado a uma constante demanda por cálculos de alta precisão em problemas de grande dificuldade na modelagem matemática. Para satisfazer às novas exigências de aplicações industriais, o número de graus de liberdade N de uma aproximação deve ser suficientemente grande. Um valor típico para N hoje em dia pode alcançar vários milhões. Este tamanho tende a aumentar ainda mais no futuro, uma vez que muitos problemas de interesses práticos ainda só podem ser tratados pelos métodos numéricos existentes em sistemas computacionais com vários processadores em paralelos e uma grande capacidade de memória para armazenamento dos dados. Mesmo com a evolução dos computadores, algoritmos nos quais o número de operações aumentam assintoticamente com o número de graus de liberdade, como N^2 ou mesmo mais que isso, não são aceitos em programas comerciais, pois os mesmos não são capazes de analisar problemas em larga escala (problemas com milhões de graus de liberdade). Se a próxima geração de computadores contar com duas vezes mais memória que os atuais, é natural que os usuários queiram resolver problemas com duas vezes

mais graus de liberdade do que os que são resolvidos atualmente. Entretanto, um algoritmo com complexidade quadrática requer quatro vezes mais memória para se resolver um problema com duas vezes mais graus de liberdade. A mesma análise é feita quando se considera o custo computacional representado pelo tempo de processamento ou pelo número de operações com pontos flutuantes. Uma vez que a velocidade de processamento tende a aumentar com o passar do tempo, é natural que o desejo do usuário seja rodar problemas cada vez maiores em tempos cada vez menores. Desta forma, é de fundamental importância que os algoritmos sejam capazes de resolver problemas com complexidade linear ou quase linear, ou seja, com uma complexidade que seja igual a N ou no máximo igual a $N \log N$.

Em problemas de larga escala, tanto o método dos elementos finitos (MEF) quanto o método das diferenças finitas (MDF) têm como gargalo a resolução de um sistema linear que, no caso deste método, é esparso e simétrico. Estes sistemas lineares são resolvidos preferencialmente por métodos iterativos que, ao contrário dos métodos diretos, não mudam a esparsidade do sistema durante o cálculo. Devido à simetria e à esparsidade, ambos os métodos possuem complexidade quase linear, tanto na montagem da matriz quanto na resolução do sistema linear.

O método dos elementos de contorno (MEC) baseia-se na solução de equações integrais sobre o contorno oriundas de equações diferenciais que regem o problema. A formulação dessa equação integral necessita de uma solução fundamental que corresponde à resposta em um ponto do domínio à aplicação de uma força em outro ponto deste. O MEC apresenta-se como uma alternativa ao MEF, com a vantagem de precisar apenas da discretização do contorno da região estudada, reduzindo a ordem da dimensão do problema e oferecendo facilidades na modelagem de contornos de geometria complexa e de condições de contorno não uniformes. Além disso, a utilização do MEC é ideal para problemas cujos domínios são infinitos ou onde é necessária apenas a discretização de uma parte do contorno, pois a solução fundamental requerida pelo método já considera a influência do infinito e semi-infinito. Também é ideal para problemas cujas respostas possuem altos gradientes como, por exemplo,

mecânica da fratura e propagação de ondas, sendo utilizado ainda em análises estruturais, térmicas, acústicas, elastodinâmicas, fluidos, etc.

Apesar da facilidade de modelagem dos problemas, a eficiência do MEC tem sido um grande entrave no que diz respeito à análise de modelos em grande escala. Enquanto o MEF é usado rotineiramente para resolver problemas com vários milhões de graus de liberdade, o MEC, por muito tempo, limitou-se a resolver problemas com alguns milhares de graus de liberdade. Isso porque, embora haja a redução da dimensão do problema, em geral, o MEC produz matrizes densas e não simétricas que necessitam de operações com complexidade $O(N^2)$ para gerar a matriz dos coeficientes e operações de complexidade $O(N^3)$ para resolver o sistema linear por meio de métodos diretos. Por sua vez, métodos numéricos iterativos apresentam complexidade $O(N^2)$ para a resolução de sistemas lineares densos e não simétricos

Uma das primeiras tentativas de se melhorar o desempenho das formulações do MEC foi através da técnica da decomposição do domínio e do uso de computação paralela. Esta técnica foi usada para estudar problemas potenciais por Kamiya et al. [1], Davies e Mushtaq [2], e Mai-Duy et al. [3], problemas não homogêneos por Popov e Power [4], condução de calor, linear e não linear por Divo et al. [5], Ingber et al. [6], e Erhart et al. [7], problemas de fluido viscoso por Power e Mingo [8], dentre outras aplicações. Na decomposição em subdomínios, o domínio do problema é dividido em subdomínios, cada um com o seu contorno. Assim, são criadas interfaces artificiais entre dois subdomínios que aumentam o número de graus de liberdade do problema. Entretanto, existem várias vantagens que a decomposição de domínio propicia ao MEC. Como o tamanho do sistema linear associado a cada subdomínio é significativamente menor, a memória necessária para o armazenamento das matrizes é reduzida, conforme mostrado por [6] e [7]. Para algoritmos não iterativos, a decomposição do domínio pode fornecer sistemas lineares esparsos (veja os trabalhos de [4] e [9]). Para métodos iterativos, a decomposição de domínio é extremamente fácil de paralelizar, uma vez que um algoritmo sequencial do MEC pode ser usado em cada subdomínio e as únicas comunicações paralelas necessárias são a atualização das condições de contorno da interface artificial e a verificação

do critério de convergência [6]. Apesar destas vantagens, não existe um algoritmo robusto que seja capaz de fazer a decomposição geométrica adequada de domínios complexos. A decomposição do domínio é deixada a cargo do usuário, tornando o pré-processamento muito mais trabalhoso. Uma outra desvantagem da divisão em subdomínios com o uso de computação paralela é o custo financeiro para se montar clusters de processadores. Uma estação de trabalho com vários processadores tem custo elevado, o que pode inviabilizar a aplicabilidade desta técnica.

Uma alternativa ao uso de estações de trabalho com clusters de processadores é o uso de placas gráficas para o processamento matricial. Conhecidas como GPUs (graphical processing units), seu custo financeiro é consideravelmente menor que a montagem de clusters de processadores. A aplicação de GPUs na computação científica tem crescido nos últimos anos. A fabricante de placas gráficas NVIDIA tem sido uma das principais promotoras deste movimento com o desenvolvimento de uma arquitetura computacional denominada CUDA (computer device unified architecture). Os trabalhos de [10] e [11] mostram o impacto do uso de GPUs no cálculo de problemas de iteração de múltiplos corpos, usando ou não algoritmos rápidos. A razão de velocidade entre o processamento sem e com o uso de GPUs são relatadas como superiores a 100. O uso de GPUs com o método dos elementos de contorno foi inicialmente proposto por [12]. O primeiro uso de GPUs junto com algoritmos rápidos de elementos de contorno foi proposto por [13].

O método da decomposição em subdomínio junto com processamento paralelo reduz muito o tempo de processamento e, em menor quantidade, a necessidade de memória para armazenamento das matrizes. Entretanto, este método não muda a complexidade do método dos elementos de contorno que continua sendo $O(N^2)$. A redução da complexidade requer o uso de algoritmos que tornam possível a resolução de sistemas lineares sem que se tenha que calcular todos os termos das matrizes de influência $[G]$ e $[H]$ do método dos elementos de contorno. Uma vez que estas matrizes são cheias e não simétricas, a sua montagem é de complexidade $O(N^2)$. Os algoritmos rápidos baseiam-se na aproximação destas matrizes por procedimentos de complexidade quase linear.

Alguns destes métodos se baseiam na aproximação explícita das soluções fundamentais e, por conseguinte, dos termos das matrizes de influência, por uma soma finita de funções separáveis que pode ser vista como uma aproximação das matrizes por blocos de matrizes de baixo posto. Esta aproximação permite uma rápida multiplicação de vetor por matriz que pode ser explorado com o uso de métodos iterativos para a resolução de sistemas lineares. Estes blocos podem ser armazenados de forma eficiente, de maneira a reduzir a quantidade de memória necessária. Entre os métodos que fazem a expansão explícita das soluções fundamentais pode-se citar o método rápido dos elementos de contorno com expansão em multipólos (MECMP) e o método de agrupamento de painéis (panel clustering method).

Beylkin et al. [14] foram os primeiros a reconhecer que as bases *wavelet* podem ser vantajosas para a discretização das equações integrais. Isto levou ao desenvolvimento de uma nova classe de algoritmos rápidos para o método dos elementos de contorno, principalmente para as formulações baseadas em técnicas de Galerkin. Esta nova classe de algoritmo não requer expansões das soluções fundamentais em séries. Esses algoritmos empregam as bases *wavelet* para interpolação tanto da função de forma dentro de cada elemento quanto a distribuição de erros dentro do elemento fonte. Uma boa descrição desta técnica é apresentada por Lage e Schwab [15], que também propõe quadraturas numéricas específicas para a integração. Problemas com 10^5 graus de liberdade foram resolvidos sem acesso a memória externa do computador. A base desta técnica está no fato que a transformada rápida de *wavelet* remove a redundância de campos distantes através da compressão dos mesmos. Mas este processo só pode ser aplicado após as matrizes terem sido montadas por meios convencionais. Basicamente, este procedimento tira vantagem do fato da matriz original, que é densa, possuir uma matriz esparsa correspondente. Esta matriz esparsa é calculada através da transformada de *wavelet*. Entretanto, como as matrizes precisam ser montadas antecipadamente, este método não reduz o tempo de montagem das matrizes de influência, procedimento que continua tendo complexidade $O(N^2)$.

Proposto por Rokhlin [16] e Greengard [17] na década de 1980, o método

rápido de expansão em multipólos (MRMP) é considerado um dos 10 algoritmos mais importantes para a computação científica desenvolvidos no século XX. Inicialmente aplicado a problemas físicos de potencial eletrostático ou gravitacional governados pela equação de Laplace em duas ou três dimensões, este método foi combinado ao MEC, produzindo então o MECMP. Com esta combinação, foi possível aplicar o MEC para problemas de grande escala com vantagens sobre os métodos tradicionais, tais como o MEF e o MDF.

A ideia básica do MECMP é a tradução das iterações de nó-a-nó (ou elemento a elemento) para célula-a-célula, onde essas células possuem uma estrutura hierárquica tipo árvore em que as menores células (folhas) contêm um número prescrito de elementos do contorno. O agrupamento desses elementos nas células e a expansão das soluções fundamentais em séries multipólos fazem com que ocorra a redução do custo computacional. Além disso, é utilizado um método iterativo para a resolução de sistemas lineares, geralmente o método dos mínimos resíduos generalizados (GMRES - Generalized Minimal Residual Method) que dispensa o armazenamento da matriz dos coeficientes na memória do computador. A relação entre o MRMP e o MEC ocorre devido à semelhança deste último com os problemas da física de partículas, problemas estes que o MRMP surgiu para resolver. Dessa forma, o MECMP que é a combinação entre o MRMP com o MEC é uma alternativa para suprir a deficiência do MEC no que diz respeito à sua complexidade, possibilitando a resolução de problemas, até então, inviáveis pelo MEC convencional devido ao elevado custo computacional. A complexidade reduz de $O(N^2)$ para $O(N)$ ou, no máximo, para $O(N \log N)$, que é a complexidade do MEF e do MDF. O livro do Liu [18] traz uma descrição detalhada do MECMP, juntamente com um código em Fortran da formulação pontencial bidimensional.

Para problemas de elasticidade $2D$, há várias aplicações de MECMP. Greengard et al. [19, 20] desenvolveram uma formulação do MECMP baseada nas equações biharmônicas da elasticidade bidimensional. Eles aplicaram a formulação de variável complexa de Sherman para resolver a equação biharmônica e fizeram aplicações em vários problemas de grande escala. Pierce e Napier [21] desenvolveram uma abordagem espectral de multipólos que tem características

comuns com o MECMP. Nesta abordagem, um reticulado (grid) é gerado e a expansão em série de Taylor das integrais é feita nos pontos do reticulado. A interpolação destes valores fornece os valores nos pontos de colocação. Esta abordagem é de complexidade $O(N \log N)$. Richardson et al. [22] propuseram um método espectral similar usando as equações de deslocamento e tração na forma regularizada. A representação em variáveis complexas dos termos das integrais e a expansão em multipólos foram originalmente propostas para problemas bidimensionais por [23, 24]. Liu [25] apresentou uma formulação nas quais os momentos para elasticidade bidimensional são escritos em uma forma compacta, com todas as translações simétricas, o que favorece a eficiência do método. Neste mesmo trabalho, problemas de grande escala de elasticidade 2D, com o número total de graus de liberdade superior a um milhão, foram resolvidos em um laptop com 1 GBytes de memória. Wang e Yao [26] também estudaram problemas de mecânica da fratura usando o método dos elementos de contorno dual com expansão em multipólos. No trabalho [27], os autores estudaram problemas bidimensionais com múltiplos domínios usando apenas a equação integral de deslocamentos. Em outro trabalho, usando a formulação complexa [28], foi apresentado um algoritmo para o cálculo preciso de problemas elásticos envolvendo várias trincas e não homogeneidades circulares em um plano infinito.

Embora o MECMP seja eficiente para resolver problemas de larga escala, sua principal desvantagem é que é necessário o conhecimento prévio da expansão da solução fundamental em séries. Além disso, todos os termos da série precisam ser calculados com antecedência com uma dada precisão e depois integrados, o que demanda modificações significativas nos códigos padrões de elementos de contorno já implementados. Do ponto de vista algébrico, a integração de soluções fundamentais degeneradas, ou seja, das soluções fundamentais expandidas em séries, pode ser vista como uma aproximação de blocos das matrizes de influência por matrizes de baixo posto. Esta ideia possibilitou o desenvolvimento de novos métodos puramente algébricos para a aproximação das matrizes de elementos de contorno de problemas de larga escala. Tyrtshnikov [29] percebeu que a aproximação das matrizes do método dos elementos

de contorno por matrizes de baixo posto pode ser feita com o cálculo de apenas algumas linhas e colunas pré-selecionadas de blocos das matrizes originais. Desta forma, surgiu a ideia dos métodos rápidos puramente algébricos que é dividir as matrizes do MEC em submatrizes de posto e cheio e baixo posto. A escolha óbvia para a obtenção de matrizes de baixo posto é a decomposição da matriz em valores singulares. Entretanto os métodos de decomposição em valores singulares são computacionalmente caros, de complexidade $O(N^3)$, o que inviabiliza o seu uso. Uma alternativa é a obtenção destas matrizes usando a aproximação cruzada adaptativa (ACA) que é uma aproximação da decomposição em valores singulares, porém bem mais barata, de complexidade $O(N \log N)$. O ACA, desta forma, tem se estabelecido como uma técnica efetiva para resolver problemas de matrizes não simétricas e cheias, decrescendo significativamente o custo de montagem e de operações de multiplicação por vetor [30]. A solução do sistema linear é acelerada pelo cálculo de somente poucas entradas da matriz original. O ACA tem sido aplicado a problemas de acústica governados pela equação de Helmholtz [31, 32], problemas eletromagnéticos [33, 34, 35], elasticidade plana [36] e mecânica da fratura [37].

Para muitos usuários e mesmo pesquisadores do MEC, o uso de elementos de contorno com funções de forma de ordem menor demanda um número maior de nós para obter uma precisão semelhante a de uma formulação com elementos com funções de forma de ordem maior. Entretanto, não foi encontrado na literatura uma análise do quanto a ordem da função de forma influencia na precisão dos resultados. Esta análise passa a ser importante no MECMP, uma vez que, dada ao grande número de expansões necessárias, o uso de elementos de contorno com funções de forma de baixa ordem (constante de preferência) é muito conveniente. Por este motivo, nesta dissertação é feita primeiro uma análise da influência da ordem das funções de forma na resposta do MEC padrão. Em seguida, a formulação do MECMP é detalhada. A influência na resposta obtida do número de termos de expansão da série é também analisada. Finalmente, é feita uma comparação quanto ao custo computacional do MECMP com o MEC padrão. É notado que para problemas de pequena escala o MEC padrão possui um custo computacional menor que o MECMP.

Entretanto, devido à sua complexidade, a partir de um certo número de graus de liberdade, o custo do MEC padrão passa a ser maior que o MECMP. Esta diferença do custo tende a ser considerável para problemas de larga escala.

1.2 Organização do trabalho

A sequência deste trabalho é dividida em 4 outros capítulos.

O capítulo 2 apresenta uma breve revisão sobre a formulação clássica do MEC para problemas bidimensionais governados pela equação de Laplace. É detalhada a obtenção e a discretização da equação integral de contorno. Três tipos de elementos de contorno são considerados: elementos constantes, elementos lineares e elementos quadráticos. O capítulo termina com uma descrição da formulação de elementos de contorno constante onde todas as integrais são calculadas analiticamente.

O capítulo 3 descreve a formulação do MECMP onde inicialmente é feita uma descrição matemática da teoria requerida pelo método e a dedução das equações para as expansões e para os momentos multipólos. Em seguida, é feita uma descrição do algoritmo implementado e, por último, algumas análises relevantes sobre o método.

No capítulo 4 são mostrados os resultados e discussões referentes à aplicação do MEC padrão e do MECMP para alguns problemas presentes na literatura. É feita uma análise da influência da ordem dos elementos na precisão dos resultados considerando o MEC padrão. Em seguida, é feita uma análise da influência do número de termos na expansão da solução fundamental no cálculo das matrizes de influência. Por fim, é feita a comparação do custo computacional do MEC padrão com o MECMP.

No capítulo 5 são apresentadas as conclusões sobre o trabalho realizado e também algumas propostas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

O Método dos Elementos de Contorno

2.1 Introdução

Este capítulo descreve com detalhes a formulação do MEC para problemas bidimensionais de condução de calor. Primeiramente a equação governante do problema, que é a equação de Laplace, é deduzida através de considerações da física do problema. Em seguida, a solução fundamental da equação de Laplace é calculada. Então, a equação integral de contorno é deduzida e discretizada, obtendo-se a formulação do método dos elementos de contorno. Três tipos de elementos são considerados: elementos constantes, elementos lineares e elementos quadráticos. Por fim, é deduzida uma formulação de elementos de contorno onde todas as integrais são calculadas analiticamente.

2.2 Equação de Poisson para transferência de calor

A condução de calor é regida pela lei de Fourier, uma equação determinada experimentalmente que relaciona o gradiente da temperatura com a taxa de condução de calor no tempo.

Para o caso da condução de calor unidirecional, conforme mostra a Figura 2.1, Q_x é a quantidade de calor transmitida na direção x e t é o tempo.

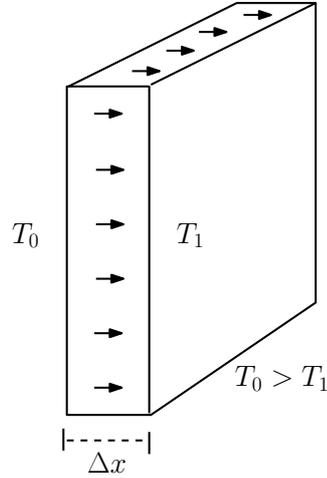


Figura 2.1: Transferência de calor de T_0 para T_1 .

O fluxo de calor na direção x é dado por:

$$\dot{Q}_x = \frac{\partial Q_x}{\partial t}.$$

Assim, a energia térmica que flui através de um corpo de seção transversal A , é definida como:

$$\dot{Q}_x = -kA \frac{(T_1 - T_0)}{\Delta x},$$

onde k é a condutividade térmica do material, A é a área e T_1 e T_0 são as temperaturas nas faces paralelas da placa.

Fazendo $\Delta x \rightarrow 0$, segue que:

$$\dot{Q}_x = -kA \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T_1 - T_0}{\Delta x},$$

da qual é obtida:

$$\dot{Q}_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.1)$$

que é a equação da quantidade de calor transferida por condução na unidade de tempo.

Generalizando para um caso 3D e considerando a taxa de condução de calor por unidade de área, pode-se definir:

$$\vec{q} = \frac{1}{dA} (\dot{Q}_x \vec{i} + \dot{Q}_y \vec{j} + \dot{Q}_z \vec{k})$$

onde \dot{Q}_x , \dot{Q}_y e \dot{Q}_z são os fluxos de calor nas direções x , y e z , respectivamente. Assim

$$\begin{aligned}\dot{\vec{q}} &= \frac{1}{dA} \left[-kdA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right) \right], \\ &= -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right), \\ \dot{\vec{q}} &= -k \vec{\nabla} T,\end{aligned}\tag{2.2}$$

onde

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)$$

é o operador gradiente.

Da primeira lei da termodinâmica segue:

$$\dot{Q}_e + \dot{Q}_g = \dot{Q}_s + \dot{U},$$

onde \dot{Q}_e , \dot{Q}_g e \dot{Q}_s são os fluxos de calor que entra, que é gerado e que sai do sistema, respectivamente, e \dot{U} é a variação da energia térmica do sistema.

Para um caso unidimensional, conforme Fig.(2.1), a 1ª lei da termodinâmica é dada por:

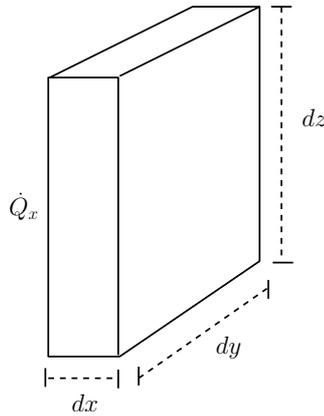


Figura 2.2: Fluxo de calor unidirecional.

$$\dot{Q}_x + \dot{q}_g dV = \left(\dot{Q} + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} dx \right) + c\rho dV \dot{T},$$

em que \dot{q}_g é a geração de calor por unidade de volume, c o calor específico, ρ a densidade do material e $\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t}$.

Isolando $\dot{q}_g dV$ e considerando a temperatura como estacionária, isto é, $\dot{T} = 0$, segue:

$$\dot{q}_g dV = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} dx. \quad (2.3)$$

Substituindo a Eq.(2.1) na Eq.(2.3), obtém-se:

$$\dot{q}_g dx dy dz = \frac{\partial}{\partial x} \left(-kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx.$$

Como $A = dy dz$ e considerando k constante em todo material, tem-se:

$$\dot{q}_g = -k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Expandindo para o caso 3D, segue:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{\dot{q}_g}{k},$$

que é conhecida como equação de Fourier para condução de calor. Esta equação ainda pode ser escrita como:

$$\nabla^2 T = -\frac{\dot{q}_g}{k},$$

onde

$$\nabla^2 T = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

é o operador laplaciano.

Quando $\dot{q}_g = 0$ a equação de Fourier se reduz a $\nabla^2 T = 0$ que é conhecida como equação de Laplace.

2.2.1 Solução fundamental para a equação de Laplace

A solução fundamental, que é a base da formulação do MEC, para a equação de Laplace, corresponde à resposta da temperatura em um meio infinito

quando a fonte de geração de calor é concentrada em um ponto. Matematicamente, ela corresponde à solução particular analítica da equação de Fourier quando o termo não homogêneo (termo referente à geração de calor) é igual ao delta de Dirac, ou seja:

$$\nabla^2 T^* = -\frac{\delta(x-d)}{k}. \quad (2.4)$$

Uma função que satisfaz essa equação é dada por:

$$T^* = A \ln r, \quad (2.5)$$

em que r é a distância entre o ponto onde a fonte de calor é aplicada (ponto fonte) e o ponto onde a temperatura é medida (ponto campo) e A é uma constante a se determinar.

Sem perder generalidade, considere o sistema de coordenadas com origem no ponto fonte, conforme Fig. 2.3.

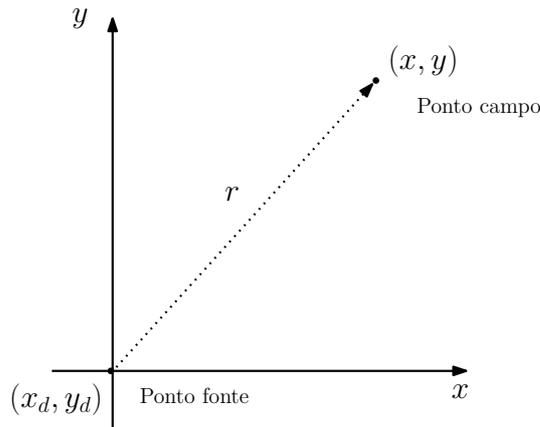


Figura 2.3: Distância r entre o ponto fonte eo ponto campo.

Da figura pode-se notar

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Como

$$T^* = A \ln r$$

,

$$\frac{\partial T^*}{\partial x} = A \frac{\partial(\ln r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}.$$

Calculando o termo $\frac{\partial r}{\partial x}$ segue

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}.$$

Assim

$$\frac{\partial T^*}{\partial x} = A \frac{1}{r} \frac{x}{r} = \frac{Ax}{r^2}.$$

Da mesma forma, pode-se mostrar que:

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} = \frac{A}{r^2} - 2 \frac{Ax^2}{r^4},$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial y} = \frac{Ay}{r^2},$$

e

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} = \frac{A}{r^2} - 2 \frac{Ay^2}{r^4}.$$

Daí, segue que:

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} = A \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} - \frac{2y^2}{r^4} \right),$$

$$\nabla^2 T^* = 2A \underbrace{\left(\frac{1}{r^2} - \frac{x^2 + y^2}{r^4} \right)}_{\delta(x-0)}. \quad (2.6)$$

Como $\nabla^2 T^* = 0$ para qualquer ponto exceto o ponto de aplicação da fonte, segue que:

$$\nabla^2 T^* = 2A\delta(x-0). \quad (2.7)$$

Igualando as equações (2.4) e (2.7) com $(x_d, y_d) = (0, 0)$, segue:

$$-\frac{\delta(x-0)}{k} = 2A\delta(x-0) \implies 2A = -\frac{1}{k}$$

da qual obtém-se o valor de A , dado por:

$$A = -\frac{1}{2k}.$$

Substituindo o valor de A na Eq.(2.5), segue que:

$$T^* = \frac{-1}{2k} \ln r.$$

Contudo, a fim de obter uma formulação numérica esteticamente melhor é comum considerar:

$$T^* = \frac{-1}{2\pi k} \ln r. \quad (2.8)$$

Considerando que o sistema de referência tem origem em uma posição qualquer, r é dado por:

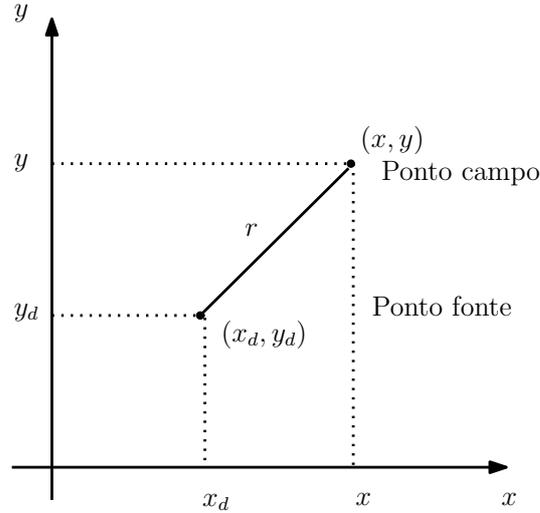


Figura 2.4: Posições dos pontos fonte e campo.

$$r = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2}, \quad (2.9)$$

onde (x_d, y_d) são coordenadas do ponto fonte.

Fluxo de calor através do contorno

Define-se fluxo de calor através do contorno pela expressão

$$q = \dot{\vec{q}} \cdot \vec{n}, \quad (2.10)$$

onde q é a quantidade de calor que passa através do contorno por unidade de tempo e por unidade de área. Substituindo na Eq.(2.10) o valor de $\dot{\vec{q}}$ dado pela Eq.(2.2), obtém-se

$$q = \dot{\vec{q}} \cdot \vec{n} = -k \vec{\nabla} \cdot T \vec{n},$$

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial n},$$

onde $\frac{\partial T}{\partial n}$ é a derivada da temperatura na direção do vetor normal ao contorno \vec{n} . Dessa forma, é possível definir a solução fundamental para o fluxo de calor dada por:

$$q^* = -k \frac{\partial T^*}{\partial n}. \quad (2.11)$$

Substituindo na Eq.(2.11) o valor de T^* dado pela Eq.(2.8), segue:

$$q^* = -k \frac{\partial}{\partial n} \left(-\frac{1}{2\pi k} \ln r \right),$$

$$q^* = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\ln r) n_x + \frac{\partial}{\partial y} (\ln r) n_y \right]. \quad (2.12)$$

Calculando o termo $\frac{\partial}{\partial x} (\ln r)$, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial x} (\ln r) = \frac{\partial \ln r}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}. \quad (2.13)$$

Substituindo na Eq.(2.13) o valor de r dado pela Eq.(2.9), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\ln r) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} [(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2]^{\frac{1}{2}}, \\ &= \frac{1}{r} \frac{(x - x_d)}{[(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2]^{\frac{1}{2}}}, \\ &= \frac{1}{r} \frac{(x - x_d)}{r}, \\ \frac{\partial}{\partial x} (\ln r) &= \frac{x - x_d}{r^2}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

De modo análogo, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial y} (\ln r) = \frac{y - y_d}{r^2}. \quad (2.15)$$

Substituindo a Eq.(2.14) e a Eq.(2.15) na Eq.(2.12), segue:

$$q^* = \frac{1}{2\pi r^2} [(x - x_d)n_x + (y - y_d)n_y], \quad (2.16)$$

que é a solução fundamental de fluxo.

2.3 Equação integral de contorno

Nesta seção será desenvolvida a equação integral de contorno para a equação de Laplace. Esta equação será, posteriormente, discretizada em elementos de contorno, obtendo-se então a formulação do MEC.

Dada a equação de Laplace

$$\nabla^2 T = 0, \quad (2.17)$$

multiplicando a equação (2.17) por uma função peso $\omega(x, y)$ e integrando sobre o domínio A , assume-se que o resultado da integral é zero (método dos resíduos ponderados). Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \iint_A (\nabla^2 T) \omega dA &= 0, \\ \iint_A \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \omega dA &= 0, \\ \iint_A \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \omega dA + \iint_A \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \omega dA &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Pelo teorema de Gauss-Green, tem-se:

$$\int_s f(x, y) n_x ds = \int_A \frac{\partial f}{\partial x} dA$$

onde f é uma função qualquer, n_x é a componente na direção x do vetor \vec{n} normal ao contorno s da área A . Aplicando o teorema dado na primeira parcela da Eq.(2.18), tem-se:

$$\int_s \frac{\partial T}{\partial x} \omega n_x ds = \int_A \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \omega \right) dA.$$

Aplicando a regra da derivada do produto de funções, tem-se:

$$\int_s \frac{\partial T}{\partial x} \omega n_x ds = \int_A \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \omega dA + \int_A \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dA.$$

Escrevendo os termos da equação de forma conveniente, segue:

$$\int_A \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \omega dA = \int_s \frac{\partial T}{\partial x} \omega n_x ds - \int_A \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dA. \quad (2.19)$$

De modo análogo, obtém-se:

$$\int_A \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \omega dA = \int_s \frac{\partial T}{\partial y} \omega n_y ds - \int_A \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} dA. \quad (2.20)$$

Substituindo as Eqs.(2.19) e (2.20) na Eq.(2.18), tem-se:

$$\int_s \left(\frac{\partial T}{\partial x} \omega n_x + \frac{\partial T}{\partial y} \omega n_y \right) ds - \int_A \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dA = 0.$$

Simplificando

$$\int_s \frac{\partial T}{\partial n} \omega ds - \int_A \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dA = 0. \quad (2.21)$$

Considerando as igualdades:

$$\int_A \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dA = \int_s T \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x ds - \int_A T \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dA \quad (2.22)$$

e

$$\int_A \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} dA = \int_s T \frac{\partial \omega}{\partial y} n_y ds - \int_A T \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} dA. \quad (2.23)$$

Substituindo as equações (2.22) e (2.23) na equação (2.21), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_s \frac{\partial T}{\partial n} \omega ds - \int_s \left(T \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x + T \frac{\partial \omega}{\partial y} n_y \right) ds + \int_A T \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) dA = 0, \\ \int_s \frac{\partial T}{\partial n} \omega ds - \int_s T \frac{\partial \omega}{\partial n} ds + \int_A T \nabla^2 \omega dA = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Com o objetivo de obter uma equação integral que não possua integrais de domínio (integrais de área) a função ω deve ser escolhida de forma que a integral de domínio da Eq.(2.19) desapareça. Qualquer função harmônica, ou seja, função que o laplaciano é igual a zero, satisfaz essa exigência. Contudo, por razões numéricas, a escolha mais adequada é a função cujo laplaciano é o delta de Dirac.

$$\nabla^2 \omega = -\frac{\delta(x - x_d)}{k},$$

o que implica que $\omega = T^*$. Então tem-se:

$$\int_s \frac{\partial T}{\partial n} T^* ds - \int_s T \frac{\partial T^*}{\partial n} ds + \int_A T \frac{[-\delta(x - x_d)]}{k} dA, \quad (2.25)$$

onde x_d é a coordenada do ponto fonte. Tomando o ponto fonte no interior do domínio A , pela propriedade do delta de Dirac, tem-se:

$$\int_s \frac{\partial T}{\partial n} T^* ds - \int_s T \frac{\partial T^*}{\partial n} ds - \frac{T(x_d, y_d)}{k} = 0.$$

Multiplicando os termos por $-k$, obtém-se:

$$\int -k \frac{\partial T}{\partial n} T^* ds + \int_s T \left(\frac{k \partial T^*}{\partial n} \right) ds + T(x_d, y_d) = 0,$$

$$T(x_d, y_d) = \int_s Tq^* ds - \int_s qT^* ds. \quad (2.26)$$

A Eq.(2.26) é a *equação integral de contorno* quando o ponto fonte encontra-se no interior do domínio.

A fim de considerar o ponto (x_d, y_d) no contorno, faz-se uma pequena modificação no mesmo, conforme Fig. 2.5:

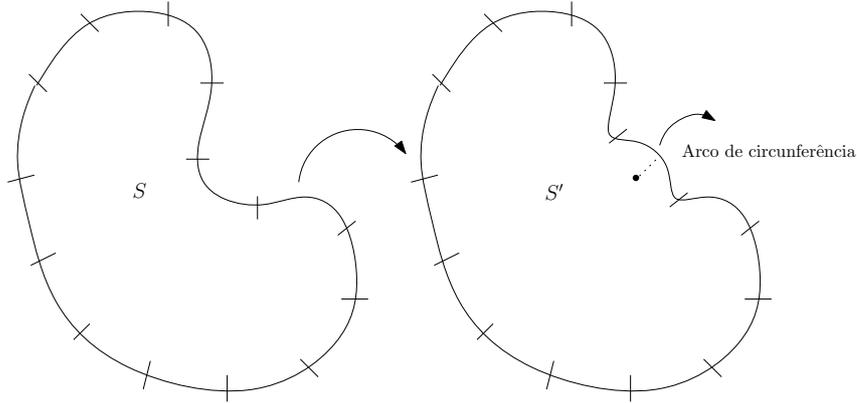


Figura 2.5: Contornos original e adaptado.

Assim, tem-se:

$$T(x_d, y_d) = \int_{s-s^*} Tq^* ds - \int_{s-s^*} T^* q ds + \int_{s^*} Tq^* ds - \int_{s^*} T^* q ds. \quad (2.27)$$

Conforme visto na Eq.(2.16):

$$q^* = \frac{1}{2\pi r^2} [(x - x_0)n_x + (y - y_0)n_y],$$

com $r = [(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2]$, logo

$$\int_{s^*} Tq^* ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} T \frac{1}{2\pi r^2} [(x - x_d)n_x + (y - y_d)n_y] ds.$$

Em s^* , tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (x - x_d)\vec{i} + (y - y_d)\vec{j}, \\ |\vec{r}| = r &= \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2}, \\ \vec{n} &= \frac{(x - x_d)\vec{i} + (y - y_d)\vec{j}}{r}, \end{aligned}$$

onde \vec{n} é um vetor unitário. Quando $r_x = (x - x_d)$ e $r_y = (y - y_d)$ tem-se:

$$\vec{n} = \frac{r_x \vec{i} + r_y \vec{j}}{r}$$

com

$$n_x = \frac{r_x}{r} \quad \text{e} \quad n_y = \frac{r_y}{r}.$$

Assim

$$\int_{s^*}^s Tq^* ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{T}{2\pi r^2} \left(r_x \frac{r_x}{r} + r_y \frac{r_y}{r} \right) \varepsilon d\theta.$$

Observando que $r = \varepsilon$ para qualquer θ , portanto;

$$\int_{s^*}^s Tq^* ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{T}{2\pi \varepsilon^2} \left(\frac{r_x^2 + r_y^2}{\varepsilon} \right) \varepsilon d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{T}{2\pi} d\theta.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, T assume o valor de $T(d)$. Por fim, tem-se

$$\int_s Tq^* ds = \frac{T(d)(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi}.$$

A mesma análise deve ser feita para:

$$\int_{s^*} T^* q ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{-1}{2\pi r} \ln r q r d\theta.$$

Como $r = \varepsilon = \text{constante}$, tem-se:

$$\int_{s^*} T^* q ds = \frac{-1}{2\pi k} \varepsilon \ln \varepsilon \int_{\theta_1}^{\theta_2} q d\theta.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, tem-se:

$$\int_{s^*} T^* q ds = \frac{-1}{2\pi k} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon (\theta_2 - \theta_1),$$

$$\int_{s^*} T^* q ds = 0.$$

Voltando a equação original, segue:

$$T(x_d, y_d) = \int_s Tq^* ds - \int_{s^*} T^* q ds + \frac{T(x_d, y_d)(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} - 0,$$

$$T(x_d, y_d) \left[1 - \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} \right] = \int_s Tq^* ds - \int_{s^*} T^* q ds,$$

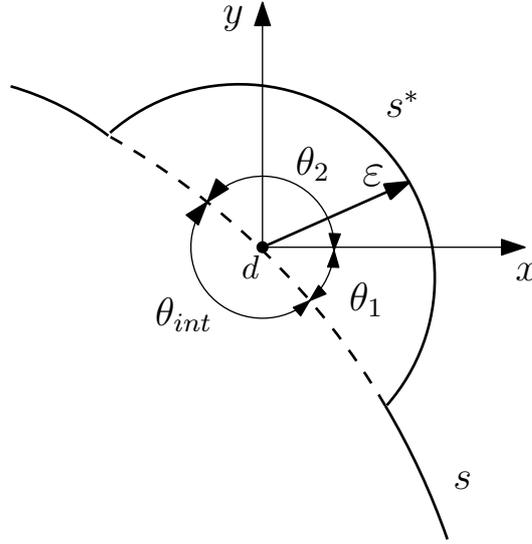


Figura 2.6: Ângulo interno do contorno.

$$T(x_d, y_d) \left[\frac{2\pi - (\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} \right] = \int_s Tq^* ds - \int_s T^* q ds.$$

Conforme a Fig.(7), θ_{int} é o ângulo interno do contorno.

Assim:

$$\frac{\theta_{int}}{2\pi} T(x_d, y_d) = \int_s Tq^* ds - \int_s T^* q ds,$$

que é a integral de contorno quando o ponto fonte pertence ao contorno.

Quando o ponto fonte não pertence ao contorno nem ao domínio, devido à propriedade do delta de Dirac, tem-se:

$$\int_s Tq^* ds - \int_s T^* q ds = 0. \quad (2.28)$$

Generalizando, a equação integral de contorno pode ser escrita como

$$cT(x_d, y_d) = \int_s Tq^* ds - \int_s T^* q ds, \quad (2.29)$$

onde

$$c = \begin{cases} 1, & \text{se } (x_d, y_d) \in \text{ao domínio} \\ \frac{\theta_{int}}{2\pi}, & \text{se } (x_d, y_d) \in \text{ao contorno} \\ 0, & \text{se } (x_d, y_d) \notin \text{ao domínio ou ao contorno} \end{cases}$$

Quando o ponto fonte encontra-se em ponto suave do contorno, isto é, não é um canto, tem-se:

$$c = \frac{\theta_{int}}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}. \quad (2.30)$$

2.4 Discretização das equações integrais de contorno

Basicamente, a formulação do MEC transforma equações diferenciais em equações integrais no contorno, eliminando, assim, a discretização do domínio. Essas integrais podem ser resolvidas de forma numérica e analítica com a integração feita ao longo do contorno, que é discretizado através da divisão do mesmo em elementos chamados *elementos de contorno* nos quais as condições de contorno são prescritas.

Uma vez obtida a integral de contorno, o próximo passo é a discretização desta equação de forma que as integrais ao longo deste contorno sejam escritas como a soma das partes deste contorno, ou seja:

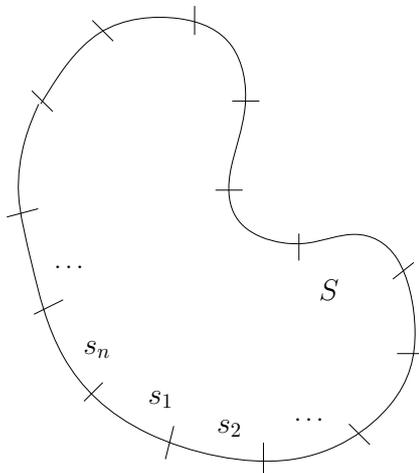


Figura 2.7: Discretização do contorno em n partes.

$$S = s_1 + s_2 + \dots + s_n.$$

Desta forma, a equação integral de contorno (2.29) é escrita como:

$$cT(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^n \int_{s_j} Tq^* ds - \sum_{j=1}^n \int_{s_j} T^* q ds. \quad (2.31)$$

2.5 Cálculo da temperatura e do fluxo em pontos internos

A temperatura e o fluxo em pontos internos, ou seja, em pontos no interior do domínio Ω podem ser calculados facilmente uma vez que os valores do contorno já foram calculados previamente. Para isto, basta considerar que o ponto fonte está localizado no interior do domínio e usar a equação integral (2.26). Uma vez que todas as integrais são calculadas no contorno, a única variável desconhecida é a temperatura no ponto fonte, ou seja, no ponto interno. Já para o cálculo do fluxo, é necessário derivar a equação (2.26) em relação às coordenadas do ponto fonte, ou seja:

$$\frac{\partial T(x_d, y_d)}{\partial x_d} = \frac{\partial}{\partial x_d} \left[\int_s Tq^* ds - \int_s qT^* ds \right]. \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial T(x_d, y_d)}{\partial x_d} = \int_s T \frac{\partial q^*}{\partial x_d} ds - \int_s q \frac{\partial T^*}{\partial x_d} ds. \quad (2.33)$$

onde:

$$\frac{\partial T^*}{\partial x_d} = \frac{r_x}{2\pi kr^2}, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial y_d} = \frac{r_y}{2\pi kr^2}, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial x_d} = \frac{[n_x (r_x^2 - r_y^2) + 2n_y r_x r_y]}{2\pi r^4} \quad (2.36)$$

e

$$\frac{\partial q^*}{\partial y_d} = \frac{[n_y (-r_x^2 + r_y^2) + 2n_x r_x r_y]}{2\pi r^4}. \quad (2.37)$$

2.6 Elementos de contorno constantes

Na discretização utilizando elementos constantes, a geometria é aproximada por segmentos de retas com um nó no meio de cada elemento. Dessa forma, considere que as partes do contorno s_1, s_2, \dots, s_n , sejam aproximadas por segmentos retilíneos e que ao longo destes segmentos, tanto a temperatura quanto o fluxo sejam assumidos como constantes.

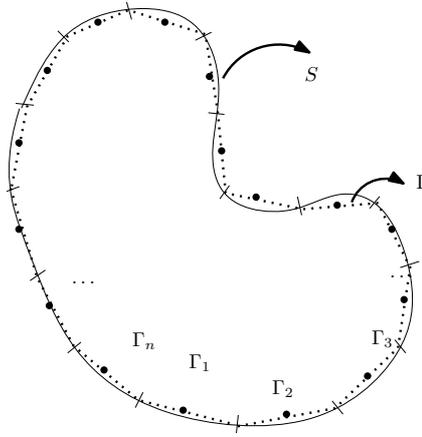


Figura 2.8: Aproximação do contorno por segmentos de retas.

O nó j sempre estará na posição central do elemento j (será sempre em uma região suave do contorno, portanto $c = \frac{1}{2}$). A equação integral é aproximada por:

$$\frac{1}{2}T^{(i)}(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^n \left[T_j \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \right] - \sum_{j=1}^n \left[q_j \int_{\Gamma_j} T^* d\Gamma \right], \quad (2.38)$$

onde i corresponde ao nó do i -ésimo elemento. Daí, tem-se:

$$-\frac{1}{2}T^{(i)}(x_d, y_d) + \sum_{j=1}^n \left[T_j \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \right] = \sum_{j=1}^n \left[q_j \int_{\Gamma_j} T^* d\Gamma \right]. \quad (2.39)$$

Chamando

$$H_{ij} = \begin{cases} \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma, & \text{se } i \neq j \\ -\frac{1}{2} + \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma, & \text{se } i = j \end{cases}$$

e

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} T^* d\Gamma \quad (2.40)$$

pode-se escrever a equação matricial da seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^n [H_{ij} T_j] = \sum_{j=1}^n [G_{ij} q_j]. \quad (2.41)$$

A fim de ilustrar como se aplica as condições de contorno e se calcula as variáveis desconhecidas será analisado um problema de condução de calor unidirecional com uma discretização de um elemento por lado (veja a Figura 2.9).

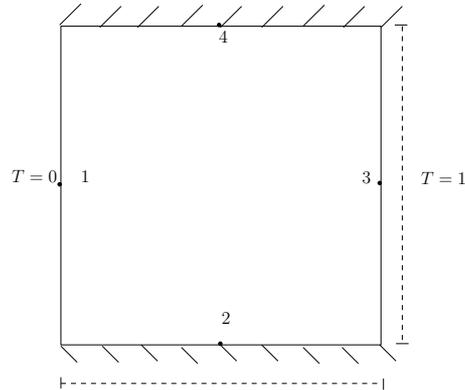


Figura 2.9: Temperatura e fluxo na placa.

Neste caso, as variáveis conhecidas e desconhecidas no contorno do problema são dadas pela Tabela(2.1).

Tabela 2.1: Qualificação das variáveis em cada nó.

nó	variáveis conhecidas	variáveis desconhecidas
1	T_1	q_1
2	q_2	T_2
3	T_3	q_3
4	q_4	T_4

Considerando que o ponto fonte esteja no nó 1 e subscrevendo com uma

barra as variáveis conhecidas, tem-se:

$$H_{11}\bar{T}_1 + H_{12}T_2 + H_{13}\bar{T}_3 + H_{14}T_4 = G_{11}q_1 + G_{12}\bar{q}_2 + G_{13}q_3 + G_{14}\bar{q}_4,$$

onde \bar{T} e \bar{q} são termos conhecidos. Como há apenas 1 equação e 4 variáveis desconhecidas, deve-se gerar mais três equações. Para isso, basta colocar o ponto fonte em cada um dos nós. Por esta razão a escolha da função peso ω deve ser aquela que o laplaciano é igual ao delta de Dirac e não do laplaciano igual a zero. Assim, tem-se:

Para o ponto fonte no nó 2, tem-se:

$$H_{21}\bar{T}_1 + H_{22}T_2 + H_{23}\bar{T}_3 + H_{24}T_4 = G_{21}q_1 + G_{22}\bar{q}_2 + G_{23}q_3 + G_{24}\bar{q}_4.$$

Da mesma forma, faz-se o ponto fonte nos nós 3 e 4. As equações obtidas podem ser escritas na forma matricial, como:

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{T}_1 \\ T_2 \\ \bar{T}_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \bar{q}_2 \\ q_3 \\ \bar{q}_4 \end{pmatrix}$$

que pode ser escrito resumidamente como:

$$[H]\{T\} = [G]\{q\}. \quad (2.42)$$

Separando os termos conhecidos dos desconhecidos, segue:

$$\begin{pmatrix} -G_{11} & H_{12} & -G_{13} & H_{14} \\ -G_{21} & H_{22} & -G_{23} & H_{24} \\ -G_{31} & H_{32} & -G_{33} & H_{34} \\ -G_{41} & H_{42} & -G_{43} & H_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ T_2 \\ q_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -H_{11} & G_{12} & -H_{13} & G_{14} \\ -H_{21} & G_{22} & -H_{23} & G_{24} \\ -H_{31} & G_{32} & -H_{33} & G_{34} \\ -H_{41} & G_{42} & -H_{43} & G_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{T}_3 \\ \bar{q}_4 \end{pmatrix}$$

Assim, pode-se escrever

$$[A]\{x\} = \{b\}, \quad (2.43)$$

ou ainda

$$\{x\} = [A]^{-1}\{b\}. \quad (2.44)$$

Daí, resolve-se o sistema linear acima e calcula-se os valores das variáveis desconhecidas.

2.6.1 Integração das matrizes $[H]$ e $[G]$ quando o ponto fonte não pertence ao elemento

A integração dos termos das matrizes $[H]$ e $[G]$ quando o ponto fonte não pertence aos elementos é uma integração regular que pode ser realizada usando, por exemplo, quadratura de Gauss. Esta integração é descrita a seguir:

- Matriz G

Das Eqs.(2.8) e (2.40), tem-se

$$G_{ij} = \frac{-1}{2\pi k} \int_{\Gamma_j} \ln r d\Gamma \quad (2.45)$$

onde

$$r = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2},$$

(x_d, y_d) são as coordenadas do ponto fonte e (x, y) as coordenadas dos pontos campo (pontos de integração ou pontos de Gauss).

Considerando o elemento j conforme Fig.(11), tem-se:

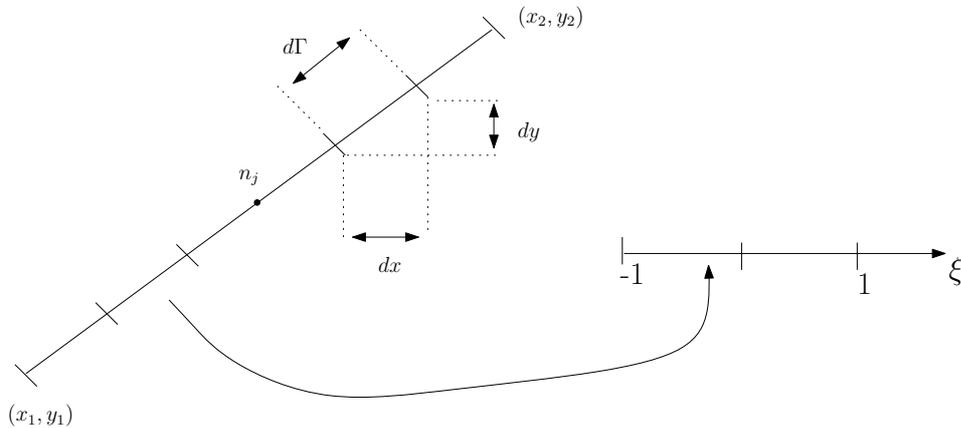


Figura 2.10: Sistemas de referência global e local respectivamente.

$$x = f(\xi) \Rightarrow x(\xi = -1) = x_1 \quad \text{e} \quad x(\xi = 1) = x_2$$

$$y = g(\xi) \Rightarrow y(\xi = -1) = y_1 \quad \text{e} \quad y(\xi = 1) = y_2,$$

onde ξ são os pontos de Gauss no intervalo $[-1, 1]$.

A interpolação linear é dada por:

$$x = a\xi + b \Rightarrow \begin{cases} x(\xi = -1) = x_1 & \Rightarrow x_1 = a(-1) + b \\ x(\xi = 1) = x_2 & \Rightarrow x_2 = a(1) + b, \end{cases}$$

de onde obtém-se

$$x = \frac{(x_2 - x_1)}{2}\xi + \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Assim

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)\xi + (x_1 + x_2)] \\ y &= \frac{1}{2}[(y_2 - y_1)\xi + (y_1 + y_2)] \end{aligned}$$

com $x(\xi = -1) = x_1$, $x(\xi = 1) = x_2$, $y(\xi = -1) = y_1$ e $y(\xi = 1) = y_2$ e

$$d\Gamma = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

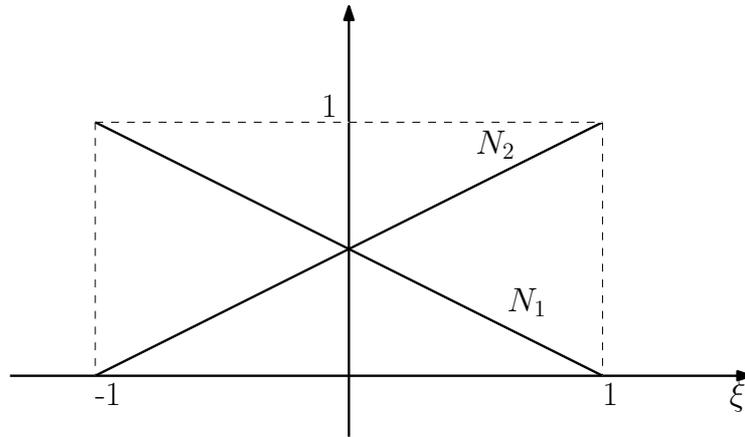


Figura 2.11: Funções de forma para elementos lineares contínuos.

Após algumas manipuações algébricas, obtém-se:

$$\begin{aligned} x &= N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 \\ y &= N_1(\xi)y_1 + N_2(\xi)y_2, \end{aligned}$$

onde $N_1(\xi)$ e $N_2(\xi)$ são as funções de forma lineares contínuas dadas por (Fig. 2.11):

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (2.46)$$

e

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (2.47)$$

Dividindo ambos os termos da igualdade por $d\xi$, obtém-se:

$$\frac{d\Gamma}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}$$

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{x_2 - x_1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{y_2 - y_1}{2}.$$

Assim:

$$\frac{d\Gamma}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right)^2}$$

$$\frac{d\Gamma}{d\xi} = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}_L = \frac{1}{2}L,$$

onde L é o comprimento do elemento. Portanto,

$$G_{ij} = -\frac{1}{2\pi k} \int_{-1}^1 \ln[r(\xi)] \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi \quad (2.48)$$

Usando integração de Gauss, a Eq.(2.48) pode ser escrita como:

$$G_{ij} = -\frac{1}{2\pi k} \sum_{\ell=1}^{NPG} \left\{ \ln[r_\ell] \frac{d\Gamma}{d\xi} \omega_\ell \right\}, \quad (2.49)$$

onde ω_ℓ são os pesos de Gauss e NPG o número de pontos de Gauss.

- Matriz $[H]$

Considerando o ponto fonte não pertencente ao elemento, tem-se:

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{1}{2\pi r^2} (r_x n_x + r_y n_y) d\Gamma \quad (2.50)$$

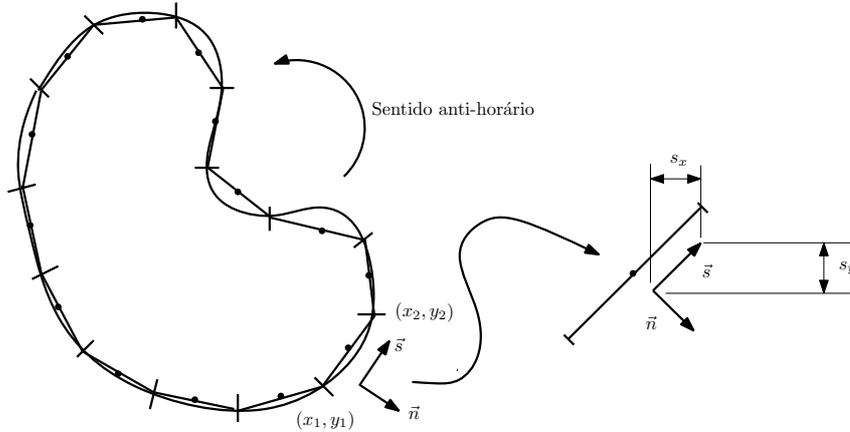


Figura 2.12: Sentido de numeração dos nós.

Assumindo o sentido anti-horário para numeração dos nós, conforme Fig. 13, observa-se que o lado esquerdo do vetor tangente é igual ao interior do domínio enquanto que o lado direito é igual ao exterior do domínio. Dessa forma, o vetor normal \vec{n} aponta para o exterior do domínio. Além disso, os vetores \vec{n} e \vec{s} são perpendiculares entre si, portanto

$$(\vec{n}_x \vec{i} + \vec{n}_y \vec{j})(\vec{s}_x \vec{i} + \vec{s}_y \vec{j}) = 0$$

Dessa forma, pode-se fazer:

$$n_x = s_y \quad \text{e} \quad n_y = -s_x,$$

portanto

$$s_y s_x + (-s_x) s_y = 0.$$

ou ainda,

$$n_x = -s_y \quad \text{e} \quad n_y = s_x,$$

que resulta

$$-s_y s_x + s_x s_y = 0.$$

Observando que, se:

$$s_x > 0 \quad \text{e} \quad s_y > 0 \implies n_x > 0 \quad \text{e} \quad n_y < 0,$$

tem-se:

$$n_x = -s_y \quad \text{e} \quad n_y = -s_x.$$

Como o vetor \vec{s} é unitário, tem-se:

$$\vec{s} = \frac{(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}},$$

$$s_x = \frac{x_2 - x_1}{L} \quad \text{e} \quad s_y = \frac{y_2 - y_1}{L}.$$

Logo:

$$H_{ij} = \frac{1}{2\pi r^2} \int_{-1}^1 \frac{r_x n_x + r_y n_y}{r^2} \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi,$$

onde,

$$r_x = (x - x_d) \quad \text{e} \quad r_y = (y - y_d).$$

Usando integração de Gauss, a Eq.(2.50), pode ser escrita como:

$$H_{ij} = \left[\frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=1}^{NPG} \frac{r_x n_x + r_y n_y}{r^2} \frac{d\Gamma}{d\xi} \omega_\ell \right]. \quad (2.51)$$

2.6.2 Integração das matrizes $[H]$ e $[G]$ quando o ponto fonte pertence ao elemento

Neste caso, se tratando de elementos constantes, a integração é feita de forma analítica, ou seja:

- Matriz H

$$H_{ij} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{r_x n_x + r_y n_y}{r} d\Gamma$$

Como

$$r_x n_x + r_y n_y = \vec{r} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\therefore H_{ij} = -\frac{1}{2} \quad (2.52)$$

- Matriz G

Da Eq.(2.48), tem-se:

$$G = -\frac{1}{2\pi k} \int_{\Gamma_j} \ln r d\Gamma \quad (2.53)$$

Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} G_{ij} &= -\frac{1}{2\pi k} \cdot 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \ln r dr \\ &= -\frac{1}{\pi k} (-r + r \ln r) \Big|_0^{\frac{L}{2}} \\ &= -\frac{1}{\pi k} \left(-\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \ln \frac{L}{2} + 0 - \lim_{r \rightarrow 0} r \ln r \right) \\ &= \frac{L}{\pi k} \left(1 - \ln \frac{L}{2} \right) \end{aligned}$$

2.7 Elementos de contorno lineares contínuos

Na discretização por elementos lineares, a geometria é aproximada por um polinômio do 1º grau, necessitando de dois nós em cada elemento, um em cada extremidade do elemento. A temperatura e o fluxo também são aproximados por um polinômio de 1º grau. A formulação é isoparamétrica, ou seja, as mesmas funções de forma usadas para interpolar a geometria são também usadas para interpolar as variáveis físicas (temperatura e fluxo).

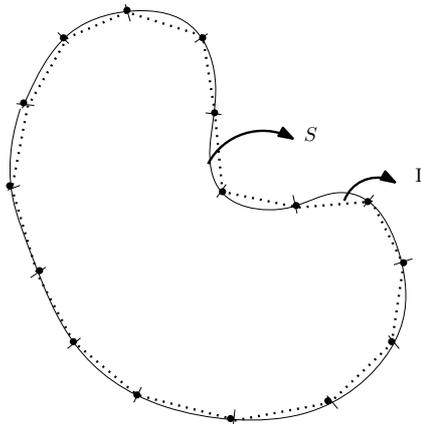


Figura 2.13: Elementos lineares contínuos.

Neste caso, a equação integral é dada por:

$$cT(x_d, y_d) = \int_s Tq^* dS - \int_s T^* q dS.$$

Discretizando em elementos de contorno lineares contínuos, segue:

$$cT(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Gamma_j} Tq^* d\Gamma \right] - \sum_{j=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Gamma_j} T^* q d\Gamma \right]$$

Observando-se que T e q são assumidos com variação linear ao longo do elemento, ou seja,

$$T = N_1 T_1 + N_2 T_2$$

e

$$q = N_1 q_1 + N_2 q_2.$$

onde T_1 é a temperatura no nó local 1, T_2 a temperatura no nó local 2, q_1 é o fluxo no nó local 1 e q_2 é o fluxo no nó local 2, N_1 é a função de forma 1 e N_2 é a função de forma 2.

Da mesma forma, segue:

$$\begin{cases} x = N_1 x_1 + N_2 x_2 \\ y = N_1 y_1 + N_2 y_2 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial, segue:

$$T = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

e

$$q = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}.$$

A equação integral discretizada é então escrita como:

$$cT(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^{n_{elem}} \left\{ \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}_j q^* d\Gamma \right\} - \sum_{j=1}^{n_{elem}} \left\{ \int_{\Gamma} T^* \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j d\Gamma \right\}.$$

Como T_1 , T_2 , q_1 e q_2 são valores nodais, segue:

$$cT(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^{n_{elem}} \left\{ \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} q^* d\Gamma \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}_j \right\} - \sum_{j=1}^{n_{elem}} \left\{ \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} T^* d\Gamma \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j \right\}.$$

que pode ser escrito da seguinte forma:

$$cT(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^{n_{elem}} \left\{ \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}_j - \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j \right\},$$

onde

$$h_1 = \int_{\Gamma_j} N_1 q^* d\Gamma,$$

$$h_2 = \int_{\Gamma_j} N_2 q^* d\Gamma,$$

$$g_1 = \int_{\Gamma_j} N_1 T^* d\Gamma$$

e

$$g_2 = \int_{\Gamma_j} N_2 T^* d\Gamma.$$

Aplicando a formulação desenvolvida no problema de condução de calor abordado anteriormente Fig.(2.9), as condições de contorno e as variáveis desconhecidas são dadas conforme mostrado na tabela 2.2. Note na Tabela 2.2 que a temperatura é contínua no nó j . Por sua vez, of fluxo q_j pode ser descontínuo, ou seja, o fluxo q_j^a , antes do nó j pode ser diferente do fluxo q_j^d , depois do nó j . Entretanto, dada a ordem da equação diferencial de Laplace (segunda ordem), apenas uma variável pode ser desconhecida por nó.

Considerando o ponto fonte no nó 1, a equação integral é descrita como:

$$cT_1 = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}_2 + \dots - \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_1 - \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_2 \dots$$

Tabela 2.2: Qualificação das variáveis em cada nó para o problema dado.

nó	variáveis conhecidas	variáveis desconhecidas
1	$T_1 \quad q_1^a$	q_1^d
2	$T_2 \quad q_2^d$	q_2^a
3	$T_3 \quad q_3^a$	q_3^d
4	$T_4 \quad q_4^d$	q_4^a

Usando o número do nó global, segue:

$$\begin{aligned}
 cT_1 = & \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} \bar{T}_3 \\ \bar{T}_4 \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} \bar{T}_4 \\ \bar{T}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} q_1^d \\ q_2^a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} \bar{q}_2^d \\ \bar{q}_3^a \end{bmatrix} - \\
 & - \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} q_3^d \\ q_4^a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 & g_4 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} \bar{q}_4^d \\ \bar{q}_1^a \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 cT_1 = & \underbrace{(h_{11} + h_{24})}_{\bar{H}_{11}} \bar{T}_1 + \underbrace{(h_{21} + h_{12})}_{\bar{H}_{12}} \bar{T}_2 + \underbrace{(h_{22} + h_{13})}_{\bar{H}_{13}} \bar{T}_3 + \underbrace{(h_{23} + h_{14})}_{\bar{H}_{14}} \bar{T}_4 - \\
 & - g_{11}q_1^d - g_{21}q_2^a - g_{12}\bar{q}_2^d - g_{22}\bar{q}_3^a - g_{13}q_3^d - g_{23}q_4^a - g_{14}\bar{q}_4^d - g_{24}\bar{q}_1^a
 \end{aligned}$$

Escrevendo as matrizes G e H globais, segue:

$$\begin{aligned}
 c_1T_1 = & \bar{H}_{11}T_1 + \bar{H}_{12}T_2 + \bar{H}_{13}T_3 + \bar{H}_{14}T_4 - G_{11}q_1^d - G_{12}q_2^a - \\
 & - G_{13}\bar{q}_2^d - G_{14}\bar{q}_3^a - G_{15}q_3^d - G_{16}q_4^a - G_{17}\bar{q}_4^d - G_{18}\bar{q}_1^a.
 \end{aligned}$$

Fazendo:

$$H_{ij} = \begin{cases} \bar{H}_{ij}, & \text{se } i \neq j \\ -cT_i + \bar{H}_{ij}, & \text{se } i = j \end{cases}$$

segue a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \\ \bar{T}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^d \\ q_2^a \\ \vdots \\ \bar{q}_1^a \end{bmatrix}.$$

Observa-se que há 1 equação e 4 variáveis desconhecidas. A fim de gerar mais 3 equações, basta colocar o ponto fonte nos outros 3 nós. Daí é obtida a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \\ \bar{T}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{18} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{41} & G_{42} & \cdots & G_{48} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^d \\ q_2^a \\ \vdots \\ \bar{q}_1^a \end{bmatrix}.$$

Manipulando a equação matricial de forma que os termos desconhecidos fiquem todos do lado esquerdo e os demais termos do lado direito, segue:

$$\begin{bmatrix} -G_{11} & -G_{12} & -G_{15} & -G_{16} \\ -G_{21} & -G_{22} & -G_{25} & -G_{26} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -G_{41} & -G_{42} & -G_{45} & -G_{46} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^d \\ q_2^a \\ q_3^d \\ \bar{q}_4^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_{11} & -H_{12} & G_{13} & G_{14} & -H_{13} & -H_{14} & G_{17} & G_{18} \\ -H_{21} & -H_{22} & G_{23} & G_{24} & -H_{23} & -H_{24} & G_{27} & G_{28} \\ -H_{31} & -H_{32} & G_{33} & G_{34} & -H_{33} & -H_{34} & G_{37} & G_{38} \\ -H_{41} & -H_{42} & G_{43} & G_{44} & -H_{43} & -H_{44} & G_{47} & G_{48} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ q_2^d \\ q_3^a \\ \bar{T}_3 \\ \bar{T}_4 \\ \bar{q}_4^d \\ \bar{q}_1^a \end{bmatrix},$$

que pode ser escrito na forma linear como:

$$[A]\{x\} = \{b\}$$

2.7.1 Integração das matrizes $[H]$ e $[G]$ quando o ponto fonte não pertence ao elemento

A integração dos termos das matrizes $[H]$ e $[G]$ quando o ponto fonte não pertence ao elemento é regular e não apresenta grandes diferenças em relação à integração do elemento constante (veja a seção 2.6.1). Para evitar a repetição desnecessária, a integração para o elemento linear não será detalhada.

2.7.2 Integração da matriz $[G]$ quando o ponto fonte pertence ao elemento

A integração da matriz $[G]$ quando o ponto fonte pertence ao elemento é feita analiticamente, da mesma forma do elemento constante.

Conforme já visto, a geometria do elemento é aproximada por:

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)x_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)x_2 \\ &= \frac{x_1 - \xi x_1 + x_2 + \xi x_2}{2} = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)\xi + x_2 + x_1] \end{aligned} \quad (2.54)$$

e

$$y = \frac{1}{2}[(y_2 - y_1)\xi + y_2 + y_1]. \quad (2.55)$$

A coordenada x do ponto fonte é dada por $x_d = x(\xi = \xi_d)$ e $y_d = y(\xi = \xi_d)$, sendo que $\xi_d = -1$ para o ponto fonte no nó 1 e $\xi_d = +1$ para o ponto fonte no nó 2. Daí, tem-se:

$$x_d = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)\xi_d + x_2 + x_1], \quad (2.56)$$

$$y_d = \frac{1}{2}[(y_2 - y_1)\xi_d + y_2 + y_1] \quad (2.57)$$

e

$$r = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}, \quad (2.58)$$

onde

$$r_x = x - x_d = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)\xi + x_2 - x_1] - \left\{ \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)\xi_d + x_2 + x_1] \right\} \quad (2.59)$$

$$r_x = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(\xi - \xi_d) \quad (2.60)$$

Da mesma forma, tem-se:

$$r_y = \frac{1}{2}(y_2 - y_1)(\xi - \xi_d) \quad (2.61)$$

e

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left[\frac{1}{2}(x_2 - x_1)(\xi - \xi_d) \right]^2 + \left[\frac{1}{2}(y_2 - y_1)(\xi - \xi_d) \right]^2} \\ &= \frac{1}{2}(\xi - \xi_d)\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{1}{2}(\xi - \xi_d)L \end{aligned} \quad (2.62)$$

Os termos da matriz $[G]$ são dados por:

$$g_1 = \int_{\Gamma_j} T^* N_1 d\Gamma \quad (2.63)$$

e

$$g_2 = \int_{\Gamma_j} T^* N_2 d\Gamma. \quad (2.64)$$

Desta forma, tem-se:

$$\begin{aligned}
g_1 &= \int_{\Gamma_j} T^* N_1 d\Gamma = \int_{-1}^1 T^* N_1 \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi \\
&= \int_{-1}^1 \frac{-1}{2\pi k} \log(r) \frac{L}{2} \frac{1}{2} (1 - \xi) d\xi \\
&= \frac{-L}{8\pi k} \int_{-1}^1 \log \left[L \left(\frac{\xi - \xi_d}{2} \right) \right] (1 - \xi) d\xi \quad (2.65)
\end{aligned}$$

- Ponto fonte no nó 1: $\xi_d = -1$.

$$g_1 = \frac{-L}{8\pi k} \left[\int_{-1}^1 \log \left(\frac{\xi + 1}{2} \right) (1 - \xi) d\xi + \int_{-1}^1 \log(L) (1 - \xi) d\xi \right] \quad (2.66)$$

Fazendo

$$\eta = \frac{\xi + 1}{2} \Rightarrow \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{2} \quad (2.67)$$

tem-se:

$$\eta(\xi = -1) = \frac{-1 + 1}{2} = 0 \quad (2.68)$$

$$\eta(\xi = 1) = \frac{1 + 1}{2} = 1 \quad (2.69)$$

$$\xi = 2\eta - 1 \Rightarrow 1 - \xi = 1 - 2\eta + 1 = 2(1 - \eta) \quad (2.70)$$

Daí, tem-se:

$$\begin{aligned}
g_1 &= -\frac{L}{8\pi k} \left[\int_0^1 \log(\eta) 2(1 - \eta) \frac{d\xi}{d\eta} d\eta + \log(L) \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1 \right] \\
&= -\frac{L}{8\pi k} \left\{ \int_0^1 2(1 - \eta) 2 \log(\eta) d\eta \right. \\
&\quad \left. + \log(L) \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 - (-1) + \left(\frac{-1}{2} \right)^2 \right] \right\} \\
&= -\frac{L}{8\pi k} \left[4 \left(\int_0^1 \log(\eta) d\eta - \int_0^1 \eta \log(\eta) d\eta \right) + 2 \log(L) \right] \quad (2.71)
\end{aligned}$$

$$g_1 = \frac{L}{4\pi k} \left[\frac{3}{2} - \log(L) \right]; \quad (2.72)$$

A integral g_2 não é singular quando o ponto fonte é o nó 1 pois $N_2 = 0$ no nó 1, onde $T^* \rightarrow \infty$.

- Ponto fonte no nó 2: $\xi_d = 1$.

A integral g_1 não é singular quando o ponto fonte é o nó 2 pois $N_1 = 0$ no nó 2, onde $T^* \rightarrow \infty$.

$$\int_{-1}^1 N_1 T^* \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi \Big|_{\xi_d=-1} = \int_{-1}^1 N_2 T^* \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi \Big|_{\xi_d=1} \quad (2.73)$$

Desta forma tem-se:

$$g_2 = \frac{L}{4\pi k} \left[\frac{3}{2} - \log(L) \right]. \quad (2.74)$$

2.7.3 Método indireto para o cálculo da diagonal da matriz $[H]$

Os termos singulares da matriz $[H]$ também podem ser calculados de maneira analítica, da mesma forma como foi feita para elementos constantes. Entretanto, como os nós agora encontram-se nas extremidades do elemento, e não mais no centro, o ponto fonte pode não pertencer a um contorno suave caso seja um nó de canto. Daí, deve-se calcular o ângulo interno θ_{int} pois o termo c da equação (2.29) não é mais igual a $1/2$. Embora este cálculo não apresente grandes dificuldades, existe uma implementação alternativa que normalmente é a preferida quando se trata de elementos contínuos. Esta implementação não faz a integração de maneira explícita mas usa uma propriedade da matriz $[H]$ decorrente da modelagem de um corpo sob temperatura constante. Sem perder a generalidade, considere que todos os nós de um corpo encontrem-se com a temperatura $T = 1$. Neste caso, o fluxo será nulo em todos os nós, ou seja, $q = 0$ em todos os nós. Desta forma, a equação matricial é reescrita como:

$$[H]\{1\} = [G]\{0\} \quad (2.75)$$

onde $\{1\}$ é um vetor com todos os elementos iguais a 1 e $\{0\}$ é um vetor com todos os elementos iguais a zero. Neste caso, é fácil perceber que:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.76)$$

onde N é o número de nós.

Daí, os termos da diagonal da matriz $[H]$ pode ser calculado da seguinte forma:

$$H_{ii} = \sum_{j=1}^N H_{ij}, \text{ com } i \neq j, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.77)$$

uma vez que todos os termos de fora da diagonal são integrais regulares e já foram previamente calculados.

2.8 Quadratura de Gauss logarítmica

Conforme já mostrado, o MEC apresenta algumas integrais de funções singulares (funções que tendem ao infinito). No caso da formulação desenvolvida, as integrais singulares são de dois tipos:

1. Na matriz $[G]$ ela é da forma $\log r$ que é chamada de singularidade fraca (integral imprópria);
2. Na matriz $[H]$ ela é da forma $\frac{1}{r}$ que é chamada de singularidade forte (integral no sentido do valor principal de Cauchy);

Diante disso, o tratamento da singularidade forte pode ser feita de maneira indireta devido as propriedades da matriz $[H]$, conforme foi mostrado na seção 2.7.3. No caso da matriz $[G]$, há duas possibilidades, ou deve-se tratar

numericamente ou de forma analítica, sendo que essa última só é recomendada para elementos constantes ou lineares. No caso de funções de forma de ordem maior, as expressões tornam-se muito extensas e dependendo da complexidade da solução fundamental, o tratamento analítico é inviável. Dessa forma, o tratamento numérico é recomendado.

Integrais singulares da ordem $(\log r)$ podem ser avaliadas eficientemente pela quadratura de Gauss com uma transformação de variáveis cúbica, conforme proposto por Telles [38], que cancela exatamente a singularidade logarítmica. Uma outra possibilidade é o uso da quadratura logarítmica de Gauss [39] que está entre os métodos numéricos mais utilizadas para o tratamento de integrais com singularidade fraca em problemas bi-dimensionais $(\log r)$. Neste método, as integrais impróprias são aproximadas da seguinte forma:

$$\int_0^1 f(x) \ln x dx = \sum_{i=1}^n f(x_i) \rho_i, \quad (2.78)$$

onde ρ_i = pesos de Gauss logarítmico.

A literatura referente ao MEC apresenta tabelas com valores para os pesos e pontos para a quadratura de Gauss logarítmica no intervalo $[0, 1]$.

Maiores informações sobre essas integrais poderão ser encontradas no capítulo 17 do livro do Kane [40].

2.9 Elementos de contorno quadráticos contínuos

Na discretização utilizando elementos quadráticos a geometria é aproximada por uma função quadrática ao longo de cada elemento, sendo necessários três pontos nodais por elemento conforme mostrada na Fig. 2.14.

Assim temperatura e fluxo são aproximados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T &= N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3 \\ q &= N_1 q_1 + N_2 q_2 + N_3 q_3 \end{aligned}$$

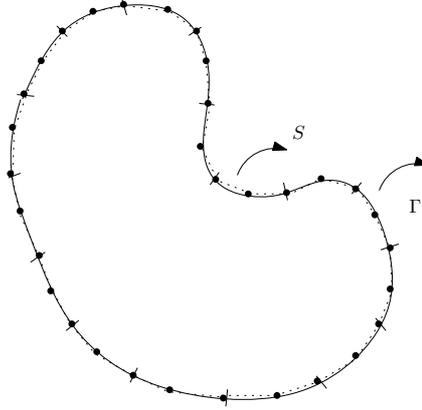


Figura 2.14: Elementos quadráticos contínuos.

onde T_1 é a temperatura no nó local 1, T_2 a temperatura no nó local 2, T_3 a temperatura no nó local 3, q_1 é o fluxo no nó local 1, q_2 é o fluxo no nó local 2, q_3 é o fluxo no nó local 3, N_1 é a função de forma 1, N_2 é a função de forma 2 e N_3 é a função de forma 3.

As funções de forma quadráticas contínuas N_1 , N_2 e N_3 são dadas por (Fig. 2.15):

$$N_1 = \frac{\xi}{2}(\xi - 1) \quad (2.79)$$

$$N_2 = (1 - \xi)(1 + \xi) = 1 - \xi^2 \quad (2.80)$$

$$N_3 = \frac{\xi}{2}(\xi + 1) \quad (2.81)$$

Neste caso, a equação integral é dada por:

$$cT(d) = \int_s Tq^* dS - \int_s T^* qdS.$$

Discretizando em elementos de contorno quadráticos contínuos, segue:

$$cT(d) = \sum_{j=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Gamma_j} Tq^* d\Gamma \right] - \sum_{j=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Gamma_j} T^* qd\Gamma \right]$$

Como T_1, T_2, T_3, q_1, q_2 e q_3 são valores nodais, segue:

$$cT(d) = \sum_{j=1}^{n_{elem}} \left\{ \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} q^* d\Gamma \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}_j \right\} - \sum_{j=1}^{n_{elem}} \left\{ \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} T^* d\Gamma \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}_j \right\}, \quad (2.83)$$

que pode ser escrito da seguinte forma:

$$cT(d) = \sum_{j=1}^{n_{elem}} \left\{ \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}_j - \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}_j \right\},$$

onde

$$h_1 = \int_{\Gamma_j} N_1 q^* d\Gamma,$$

$$h_2 = \int_{\Gamma_j} N_2 q^* d\Gamma,$$

$$h_3 = \int_{\Gamma_j} N_3 q^* d\Gamma,$$

$$g_1 = \int_{\Gamma_j} N_1 T^* d\Gamma,$$

$$g_2 = \int_{\Gamma_j} N_2 T^* d\Gamma$$

e

$$g_3 = \int_{\Gamma_j} N_3 T^* d\Gamma.$$

2.9.1 Integração das matrizes $[H]$ e $[G]$ quando o ponto fonte não pertence ao elemento

A integração dos termos das matrizes $[H]$ e $[G]$ quando o ponto fonte não pertence ao elemento é regular e não apresenta grandes diferenças em relação à integração do elemento constante (veja a seção 2.6.1). Para evitar a repetição desnecessária, a integração para o elemento quadrático não será detalhada.

2.9.2 Integração da matriz $[H]$ quando o ponto fonte pertence ao elemento

A integração dos termos da matriz $[H]$ para elementos quadráticos contínuos é feita de maneira indireta, conforme já descrito na seção 2.7.3 para elementos lineares contínuos.

2.9.3 Integração da matriz $[G]$ quando o ponto fonte pertence ao elemento

Conforme já mostrado, a coordenada x de um ponto pertencente a um elemento quadrático é aproximada por:

$$\begin{aligned} x &= N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 = \frac{\xi}{2}(\xi - 1)x_1 + (1 - \xi^2)x_2 + \frac{\xi}{2}(\xi + 1)x_3 \\ &= \frac{1}{2}\xi^2(x_1 - 2x_2 + x_3) + \frac{1}{2}\xi(x_3 - x_1) + x_2 \end{aligned} \quad (2.84)$$

Da mesma forma, tem-se:

$$y = \frac{1}{2}\xi^2(y_1 - 2y_2 + y_3) + \frac{1}{2}\xi(y_3 - y_1) + y_2 \quad (2.85)$$

O ponto fonte tem coordenada (x_d, y_d) , sendo $x_d = x(\xi = \xi_d)$ e $y_d = y(\xi = \xi_d)$. Desta forma, tem-se $\xi_d = -1$ para o ponto fonte no nó 1, $\xi_d = 0$ para o ponto fonte no nó 2 e $\xi_d = +1$ para o ponto fonte no nó 3. Daí, tem-se:

$$x_d = \frac{1}{2}\xi_d^2(x_1 - 2x_2 + x_3) + \frac{1}{2}\xi_d(x_3 - x_1) + x_2 \quad (2.86)$$

$$y_d = \frac{1}{2}\xi_d^2(y_1 - 2y_2 + y_3) + \frac{1}{2}\xi_d(y_3 - y_1) + y_2 \quad (2.87)$$

$$r = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \quad (2.88)$$

onde

$$r_x = x - x_d = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi_d^2)(x_1 - 2x_2 + x_3) + \frac{1}{2}(\xi - \xi_d)(x_3 - x_1) \quad (2.89)$$

$$r_x = \frac{1}{2}(\xi - \xi_d)[(x_1 - 2x_2 + x_3)(\xi + \xi_d) + x_3 - x_1] \quad (2.90)$$

Da mesma forma, tem-se:

$$r_y = \frac{1}{2}(\xi - \xi_d)[(y_1 - 2y_2 + y_3)(\xi + \xi_d) + y_3 - y_1] \quad (2.91)$$

e

$$r = \frac{1}{2}(\xi - \xi_d) \left\{ [(x_1 - 2x_2 + x_3)(\xi + \xi_d) + x_3 - x_1]^2 + [(y_1 - 2y_2 + y_3)(\xi + \xi_d) + y_3 - y_1]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.92)$$

Chamando

$$r_A = \frac{1}{2}(\xi - \xi_d) \quad (2.93)$$

e

$$r_B = \left\{ [(x_1 - 2x_2 + x_3)(\xi + \xi_d) + x_3 - x_1]^2 + [(y_1 - 2y_2 + y_3)(\xi + \xi_d) + y_3 - y_1]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.94)$$

tem-se que

$$r = r_A r_B \quad (2.95)$$

onde $r_B > 0$.

$$[g] = \int T^* [N_1 \quad N_2 \quad N_3] d\Gamma = [g_1 \quad g_2 \quad g_3] \quad (2.96)$$

onde

$$g_1 = \int_{\Gamma_j} T^* N_1 d\Gamma, \quad (2.97)$$

$$g_2 = \int_{\Gamma_j} T^* N_2 d\Gamma \quad (2.98)$$

e

$$g_3 = \int_{\Gamma_j} T^* N_3 d\Gamma. \quad (2.99)$$

A integral g_1 é dada por:

$$\begin{aligned} g_1 &= \int_{\Gamma_j} T^* N_1 d\Gamma = \int_{-1}^1 T^* N_1 \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi \\ &= \int_{-1}^1 \frac{-1}{2\pi k} \log(r_A r_B) N_1 \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi \\ &= \frac{-1}{2\pi k} \int_{-1}^1 [\log(r_A) + \log(r_B)] N_1 \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi = g_{1s} + g_{1ns} \end{aligned} \quad (2.100)$$

onde

$$g_{1s} = \frac{-1}{2\pi k} \int_{-1}^1 \log(r_A) N_1 \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi \quad (2.101)$$

é uma integral de singularidade fraca que será integrada usando quadratura de Gauss logarítmica e

$$g_{1ns} = \frac{-1}{2\pi k} \int_{-1}^1 \log(r_B) N_1 \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi \quad (2.102)$$

é uma integral regular (não singular) que será integrada usando quadratura de Gauss padrão.

- Ponto fonte no nó 1: $\xi_d = -1$.

$$g_{1s} = \frac{-1}{2\pi k} \int_{-1}^1 \log(r_A) \frac{\xi}{2} (\xi - 1) \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi \quad (2.103)$$

Fazendo

$$\eta = \frac{\xi + 1}{2} \Rightarrow \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{2} \quad (2.104)$$

tem-se:

$$\eta(\xi = -1) = \frac{-1 + 1}{2} = 0 \quad (2.105)$$

$$\eta(\xi = 1) = \frac{1 + 1}{2} = 1 \quad (2.106)$$

$$\xi = 2\eta - 1 \Rightarrow 1 - \xi = 1 - 2\eta + 1 = 2(1 - \eta) \quad (2.107)$$

$$r_A = \frac{\xi - \xi_d}{2} = \eta \quad (2.108)$$

Daí, tem-se:

$$g_{1s} = \frac{-1}{2\pi k} \int_0^1 \log(\eta) N_1(\xi(\eta)) \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{d\eta} d\eta = \frac{-1}{\pi k} \int_0^1 \log(\eta) N_1(\xi(\eta)) \frac{d\Gamma}{d\xi} d\eta \quad (2.109)$$

As integrais g_2 e g_3 não são singulares quando o ponto fonte é o nó 1 pois $N_2 = N_3 = 0$ no nó 1, onde $T^* \rightarrow \infty$.

- Ponto fonte no nó 2: $\xi_d = 0$.

$$r_A = \frac{\xi - \xi_d}{2} = \frac{\xi - 0}{2} = \frac{\xi}{2} \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} g_{2s} &= \frac{-1}{2\pi k} \int_{-1}^1 \log\left(\frac{\xi}{2}\right) N_2 \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi = \frac{-1}{2\pi k} \int_{-1}^1 \log(\xi) N_2 \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi \\ &\quad - \frac{-1}{2\pi k} \int_{-1}^1 \log(2) N_2 \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi = g_{2s1} + g_{2s2} \end{aligned} \quad (2.111)$$

onde

$$g_{2s2} = \frac{-1}{2\pi k} \int_{-1}^1 \log(2) N_2 \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi \quad (2.112)$$

é uma integral regular e pode ser integrada usando quadratura de Gauss padrão.

$$g_{2s1} = \frac{-1}{2\pi k} \int_{-1}^1 \log(\xi) N_2 \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi \quad (2.113)$$

é uma integral com singularidade fraca e deve ser calculada usando quadratura de Gauss logarítmica através da seguinte transformação:

$$\eta = \xi \Rightarrow \frac{d\eta}{d\xi} = 1 \quad (2.114)$$

tem-se:

$$\eta(\xi = 0) = 0 \quad (2.115)$$

$$\eta(\xi = 1) = 1 \quad (2.116)$$

$$r_A = \frac{\xi - \xi_d}{2} = \frac{\xi}{2} = \frac{\eta}{2} \quad (2.117)$$

Daí, tem-se:

$$g_{2s1} = 2 \times \frac{-1}{2\pi k} \int_0^1 \log\left(\frac{\eta}{2}\right) N_2(\xi(\eta)) \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{d\eta} d\eta = \frac{-1}{\pi k} \int_0^1 \log(\eta) N_2(\xi(\eta)) \frac{d\Gamma}{d\xi} d\eta \quad (2.118)$$

As integrais g_1 e g_3 não são singulares quando o ponto fonte é o nó 2 pois $N_1 = N_3 = 0$ no nó 2, onde $T^* \rightarrow \infty$.

- Ponto fonte no nó 3: $\xi_d = 1$.

As integrais g_1 e g_2 não são singulares quando o ponto fonte é o nó 3 pois $N_1 = N_2 = 0$ no nó 3, onde $T^* \rightarrow \infty$.

$$\int_{-1}^1 N_1 T^* \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi \Big|_{\xi_d=-1} = \int_{-1}^1 N_3 T^* \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi \Big|_{\xi_d=1} \quad (2.119)$$

Desta forma, a integral g_3 não precisa ser calculada quando o ponto fonte é o nó 3 pois usa-se o valor calculado da integral g_1 quando o ponto fonte é o nó 1.

2.10 Integração analítica com elementos constantes

Conforme mostrado por Banerjee [41], a integração analítica dos elementos da matrizes $[H]$ e $[G]$ pode ser feita facilmente considerando um sistema de coordenadas $x'y'$ com origem no ponto fonte e com o eixo y' paralelo ao elemento. Desta forma, tem-se:

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} T^* d\Gamma = \frac{-1}{2\pi k} \int_{\Gamma_j} \ln r d\Gamma \quad (2.120)$$

Da figura 2.16, tem-se:

$$r = h \sec \theta$$

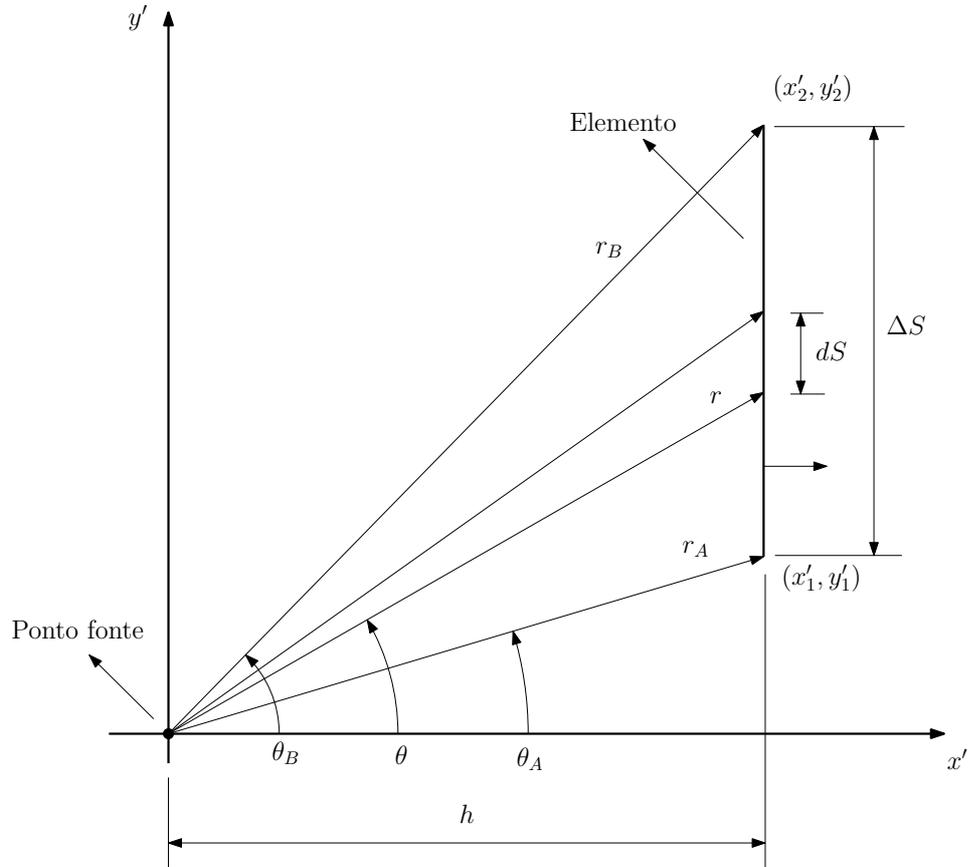


Figura 2.16: Sistema de referências usado para o cálculo das integrais analíticas

$$r_x n_x + r_y n_y = r \cos \theta$$

$$x' = r \cos \theta$$

$$y' = r \sin \theta$$

$$dy' = dS = h \sec^2 \theta d\theta$$

$$G_{ij} = \frac{-1}{2\pi k} \int_{\Delta S} \ln r dy' = \frac{-1}{2\pi k} \int_{\theta_A}^{\theta_B} \ln(h \sec \theta) h \sec^2 \theta d\theta \quad (2.121)$$

$$G_{ij} = \frac{-h}{2\pi k} \left[\tan \theta (\ln |(h \sec \theta) - 1| + \theta h) \right]_{\theta_A}^{\theta_B} \quad (2.122)$$

Da mesma forma, tem-se que:

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{r_x n_x + r_y n_y}{r^2} dy' = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta S} \frac{r \cos \theta}{r^2} h \sec^2 \theta d\theta \quad (2.123)$$

$$H_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{h \sec \theta \cos \theta}{h^2 \sec^2 \theta} h \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta = \frac{1}{2\pi} [\theta] \Big|_{\theta_A}^{\theta_B} \quad (2.124)$$

Capítulo 3

O Método dos Elementos de Contorno Rápido com Expansão em Multipólos

3.1 Primeiras Noções

Diante da formulação do MEC exposta no Capítulo 2, transforma-se as equações integrais de contorno em equações algébricas que, por fim, são escritas na forma de um sistema linear dado pela equação (2.43). Conforme já mencionado, a construção da matriz $[A]$, que geralmente é densa e não simétrica, requer operações de complexidade $O(N^2)$, que também é válida para o espaço exigido da memória para o seu armazenamento. Além disso, a solução do sistema de equações descrito pela equação (2.43) utilizando eliminação de Gauss requer operações de complexidade $O(N^3)$. Mesmo optando pela utilização de métodos iterativos, a resolução ainda requer operações de $O(N^2)$. São esses fatores que ocasionam a ineficiência do MEC no que se refere a resolução de problemas em larga escala.

O MECMP abrange dois aspectos importantes: a utilização de métodos iterativos para a resolução de sistemas lineares (no caso é usado o GMRES) para resolver o sistema dado pela equação (2.43) e a utilização MRMP para acelerar o produto entre a matriz $[A]$ e o vetor $\{x\}$ de termos desconhecidos em

cada iteração, sem que haja o armazenamento completo da matriz $[A]$. Outra característica do MECMP é a adoção do MEC convencional para os elementos próximos ao ponto fonte através das integrações diretas e a utilização do MRMP para os elementos longe do ponto fonte através das expansões multipolares.

As Figuras 3.1 e 3.2 ilustram a comparação entre o MEC convencional e o MECMP, onde os pontos são os nós e as linhas são as iterações. Pode-se observar que as iterações diretas do MEC convencional são substituídas por iterações expandidas, isto é, enquanto no MEC convencional as iterações são elemento-a-elemento no MECMP as interações são entre grupos de elementos. Dessa forma, pode-se perceber uma considerável redução do número de operações.

A redução do custo computacional é alcançada por meio da expansão das

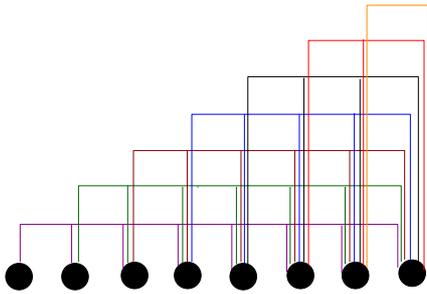


Figura 3.1: Iterações no MEC.

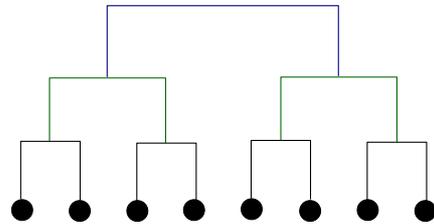


Figura 3.2: Iterações no MRMP.

soluções fundamentais que se encontram na equação integral de contorno. Essas expansões podem ser de várias formas, sendo adotada principalmente a expansão em séries de Taylor. Desse modo, fazendo a expansão da solução fundamental T^* que compõe a equação integral de contorno dada pela Eq.(2.29), pode-se escrever:

$$\int_{S_c} T^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d)q(\mathbf{x})ds(\mathbf{x}) = \sum_i T_i^{*x}(\mathbf{x}_d, \mathbf{x}_c) \int_{S_c} T_i^{*y}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_c)q(\mathbf{x})ds(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{x}_c = (x_c, y_c)$ é o ponto de expansão, S_c é um subconjunto de \mathbf{x} longe de \mathbf{x}_d , e $\mathbf{x}_d = (x_d, y_d)$ é o ponto fonte. Fazendo uma comparação entre os dois lados da Eq.(3.1) é possível notar que na integral do lado esquerdo utilizada pelo MEC convencional qualquer alteração na posição do ponto \mathbf{x}_d exige uma nova

avaliação, enquanto que na expressão do lado direito utilizada pelo MECMP quando S_c está longe de \mathbf{x}_d a integral deve ser avaliada uma única vez, já que o termo dependente de \mathbf{x}_d está fora da integral devido a introdução do ponto de expansão \mathbf{x}_c . Dessa forma, a relação direta entre \mathbf{x} e \mathbf{x}_d é interrompida no MECMP, que com a aplicação dessas e de outras expansões corroboram para a redução do custo computacional.

3.2 Método dos elementos de contorno rápido com expansão em múltiplos para problemas de potencial em 2 dimensões

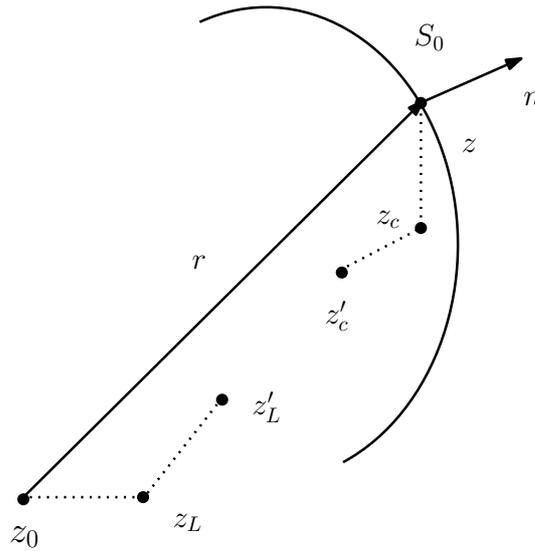


Figura 3.3: Pontos de expansão do MRMP.

Considerando a solução fundamental de temperatura T^* que compõe a equação integral de contorno

$$\int_{S_c} T^*(\mathbf{x}_d, \mathbf{x})q(\mathbf{x})ds(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

onde \mathbf{x}_c é o ponto de expansão, S_c é um subconjunto de S longe de \mathbf{x}_d . Intro-

duzindo, por conveniência, notação complexa, tem-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_d \Rightarrow z_0 &= x_d + iy_d \\ \mathbf{x} \Rightarrow z &= x + iy.\end{aligned}$$

Dessa forma, pode-se escrever:

$$T^*(\mathbf{x}_d, \mathbf{x}) = \text{Re}[T^*(z_0, z)]. \quad (3.3)$$

onde $\text{Re}[z]$ representa a parte real do número complexo z .

A partir da Eq.(2.8), pode-se escrever em coordenadas complexas:

$$T^*(z_0, z) = -\frac{1}{2\pi k} \ln(z - z_0). \quad (3.4)$$

Desse modo, a integral descrita em (3.2) pode ser escrita como:

$$\int_{S_c} T^*(z_0, z) q(z) ds(z). \quad (3.5)$$

3.3 Operações do MECMP

3.3.1 Expansão em multipólos (momentos)

Dada a equação

$$T^*(z_0, z) = -\frac{1}{2\pi k} \log(z_0 - z). \quad (3.6)$$

Supondo z_c um ponto próximo ao ponto \mathbf{z} (ponto campo) e $\|z - z_c\| \ll \|z_0 - z_c\|$, a Eq.(3.6) pode ser escrita como:

$$T^*(z_0, z) = -\frac{1}{2\pi k} \left[\log(z_0 - z_c) + \log \left(1 - \frac{z - z_c}{z_0 - z_c} \right) \right] \quad (3.7)$$

Fazendo

$$\xi = \left(\frac{z - z_c}{z_0 - z_c} \right) \quad (3.8)$$

e expandindo o segundo logaritmo em série de Taylor de modo a avaliar $\log(1 - \xi)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
P(z) &= \log(1) + \left[\frac{\log(1)}{1!} \right]' (z-1) + \left[\frac{\log(1)}{2!} \right]'' (z-1)^2 + \left[\frac{\log(1)}{3!} \right]''' (z-1)^3 + \dots + \left[\frac{\log(1)}{n!} \right]^{(ordem\ n)} (z-1)^n, \\
P(z) &= (z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - \dots + \frac{1}{k}(z-1)^k, \\
P(1-\xi) &= (1-\xi-1) - \frac{1}{2}(1-\xi-1)^2 + \frac{1}{3}(1-\xi-1)^3 - \dots + \frac{1}{l}(1-\xi-1)^l \\
&= -\xi - \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} - \dots - \frac{\xi^l}{l}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

portanto,

$$\log(1-\xi) = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\xi^l}{l}, \quad |\xi| < 1. \tag{3.10}$$

Substituindo a Eq.(3.10) na Eq.(3.7), pode-se escrever:

$$T^*(z_0, z) = \frac{1}{2\pi k} \sum_{l=0}^{\infty} O_l(z_0 - z_c) I_l(z - z_c), \tag{3.11}$$

onde, por conveniência, são introduzidas duas funções auxiliares:

$$\begin{aligned}
I_l(z) &= \frac{z^l}{l!}, \quad l \geq 0; \\
O_l(z) &= \frac{(l-1)!}{z^l}, \quad l \geq 1;
\end{aligned} \tag{3.12}$$

com $O_0(z) = -\log(z)$ e derivadas que satisfazem

$$\begin{aligned}
I'_l(z) &= I_{l-1}(z), \quad l \geq 1; \\
O'_l(z) &= -O_{l+1}(z), \quad l \geq 0;.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Tem-se ainda as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
I_l(z_1 + z_2) &= \sum_{m=0}^l I_{l-m}(z_1) I_m(z_2) = \sum_{m=0}^l I_m(z_1) I_{l-m}(z_2), \\
O_l(z_1 + z_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m O_{l+1}(z_1) I_m(z_2), \quad \text{para } |z_2| < |z_1|;.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Observando a Eq.(3.11), pode-se notar que os pontos z_0 e z_c são separados devido a introdução do ponto de expansão z_c . Essa separação é a base do MECMP, pois acaba com a relação direta entre os pontos fonte e campo.

Prova

$$\begin{aligned}
T^*(z_0, z) &= \frac{1}{2\pi k} [O_0(z_0 - z_c)I_0(z - z_c) + O_1(z_0 - z_c)I_1(z - z_c) + O_2(z_0 - z_c) \\
&\quad I_2(z - z_c) + O_3(z_0 - z_c)I_2(z - z_c) + \dots + O_n(z_0 - z_c)I_n(z - z_c) + \dots], \\
&= \frac{1}{2\pi k} \left[-\log(z_0 - z_c) + \frac{(z - z_c)}{(z_0 - z_c)} + \frac{(z - z_c)^2}{2(z_0 - z_c)^2} + \frac{(z - z_c)^3}{3!(z_0 - z_c)^3} + \right. \\
&\quad \left. + \dots + \frac{(n-1)!(z - z_c)^n}{n!(z_0 - z_c)^n} + \dots \right], \\
&= \frac{1}{2\pi k} \left[-\log(z_0 - z_c) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(z - z_c)^l}{l(z_0 - z_c)^l} \right], \\
&= -\frac{1}{2\pi k} \left[\log(z_0 - z_c) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\epsilon^l}{l} \right],
\end{aligned}$$

portanto, (3.7)=(3.11).

Dessa forma, a integral da solução fundamental T^* pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\int_{S_c} T^*(z_0, z)q(z)ds(z) &= \frac{1}{2\pi k} \int_{S_c} \left[\sum_{l=0}^{\infty} O_l(z_0 - z_c)I_l(z - z_c) \right] q(z)ds(z), \\
&= \frac{1}{2\pi k} \sum_{l=0}^{\infty} O_l(z_0 - z_c)M_l(z_c), \tag{3.15}
\end{aligned}$$

que é a expansão multipólo, onde

$$M_l(z_c) = \int_{S_c} I_l(z - z_c)q(z)ds(z) \tag{3.16}$$

são os momentos próximos ao ponto z_c independentes da posição de z_0 e só precisam ser calculados uma única vez, já que depende apenas dos pontos campo z e de expansão z_c .

A expansão da solução fundamental de fluxo q^* é dada por:

$$q^*(z) = -k \frac{dT^*}{dn} = -k(n_x + in_y) = -kn(z)q' \tag{3.17}$$

onde

$$q' = \frac{dT^*}{dz} \quad (3.18)$$

e

$$n(z) = n_x + in_y \quad (3.19)$$

Desta forma, a solução fundamental q^* em variáveis reais é dada por:

$$q^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d) = \text{Re} [q^*(z_0, z)] = n_x \text{Re}[q'] - n_y \text{Im}[q'] \quad (3.20)$$

onde $\text{Im}[z]$ representa a parte imaginária do número complexo z .

Da equação 3.11, tem-se que:

$$q' = \frac{1}{2\pi k} \sum_l = 1^\infty O_l(z_0 - z_c) I_{l-1}(z - z_c) \quad (3.21)$$

Daí, tem-se que:

Das Eq.(2.29) e Eq.(3.11), tem-se:

$$\int_{S_c} q^*(z_0, z) T(z) ds(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} O_l(z_0 - z_c) N_l(z_c), \quad (3.22)$$

onde

$$N_l(z_c) = \int_{S_c} n(z) I_{l-1}(z - z_c) T(z) ds(z). \quad (3.23)$$

3.3.2 Translação momento-para-momento ($M2M$)

Supondo um ponto z'_c para o qual é movido o ponto z_c , conforme ilustrado na Fig. 3.3, a translação $M2M$ para a integral da solução fundamental de temperatura T^* é dada como segue:

$$\begin{aligned} M_l(z'_c) &= \int_{S_c} I_l(z - z'_c) q(z) ds(z) \\ &= \int_{S_c} I_l[(z - z_c) + (z - z'_c)] q(z) ds(z). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Aplicando a fórmula binomial

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^m b^{n-m} \quad (3.25)$$

à equação anterior, obtém-se:

$$M_l(z'_c) = \sum_{i=0}^l I_{l-i}(z - z'_c) M_i(z_c). \quad (3.26)$$

De modo análogo, a translação $M2M$ é aplicada à integral da solução fundamental de fluxo q^* .

3.3.3 Expansão local e translação momento-para-local ($M2L$)

Supondo um ponto z_L próximo ao ponto fonte z_0 conforme Fig.(3.3), com $|z_0 - z_L| \ll |z_c - z_L|$, segue da expansão multipólo descrita na Eq. (3.15):

$$\begin{aligned} & \int_{S_c} T^*(z_0, z) q(z) ds(z) \\ &= \frac{1}{2\pi k} \sum_{l=0}^{\infty} O_l(z_0 - z_c) M_l(z_c) \\ &= \frac{1}{2\pi k} \sum_{l=0}^{\infty} O_l[(z_L - z_c) + (z_0 - z_L)] M_l(z_c). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Aplicando a equação (3.14) com $z_1 = z_L - z_c$ e $z_2 = z_0 - z_L$, obtém-se a seguinte expansão:

$$\int_{S_c} T^*(z_0, z) q(z) ds(z) = \frac{1}{2\pi k} \sum_{l=0}^{\infty} L_l(z_L) I_l(z_0 - z_L), \quad (3.28)$$

que é a expansão local, onde os coeficientes são dados pela seguinte translação $M2L$:

$$L_l(z_L) = \frac{(-1)^l}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} O_{l+m}(z_L - z_c) M_m(z_c). \quad (3.29)$$

De modo análogo, a translação $M2L$ é aplicada para a integral da solução fundamental de fluxo q^* , ou seja, dos termos da matriz $[H]$.

3.3.4 Translação local-para-local ($L2L$)

Supondo um ponto z'_L para o qual o ponto de expansão local z_L é movido conforme Fig. (3.3). A partir da expansão local descrita na Eq.(3.28) com p termos, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{S_c} T^*(z_0, z)q(z)ds(z) &= \frac{1}{2\pi k} \sum_{l=0}^p L_l(z_L)I_l(z_0 - z_L) \\ &= \frac{1}{2\pi k} \sum_{l=0}^p L_l(z_L)I_l[(z_0 - z'_L) + (z'_L - z_L)] \end{aligned} \quad (3.30)$$

Aplicando a fórmula binomial e a relação

$$\sum_{l=0}^p \sum_{m=0}^l = \sum_{m=0}^p \sum_{l=m}^p, \quad (3.31)$$

obtém-se

$$\int_{S_c} T^*(z_0, z)q(z)ds(z) = \frac{1}{2\pi k} \sum_{l=0}^p L_l(z'_L)I_l(z_0 - z'_L), \quad (3.32)$$

cujos coeficientes são dados a partir da translação $L2L$:

$$L_l(z'_L) = \sum_{m=l}^p I_{m-l}(z'_L - z_L)L_m(z_L). \quad (3.33)$$

Fazendo $o = m - l$, a Eq.(3.33) pode ser escrita como:

$$L_l(z'_L) = \sum_{o=0}^{p-l} I_o(z'_L - z_L)L_{l+o}(z_L). \quad (3.34)$$

De modo análogo, a translação $L2L$ é aplicada à integral da solução fundamental de fluxo q^* .

3.4 Algoritmo

Passo 1: Discretização

Discretizar o contorno S de modo análogo ao MEC convencional, usando elementos constantes.

Passo 2: Determinar a estrutura hierárquica (árvore) da malha.

Essa estrutura está organizada em células da seguinte forma: Primeiro constrói-se um retângulo circunscrito à malha, que é a célula do nível 0. Depois o retângulo é dividido em 4 retângulos iguais. Destes 4 retângulos, os que contém nós no seu interior são considerados células do nível 1. Mais uma vez divide-se cada célula do nível 1 em 4 retângulos iguais e os retângulos que possuem nós no seu interior são as células do nível 2. Divide-se então as células de nível 2 em 4 retângulos e repete-se o procedimento de refinamento da árvore até que seja alcançada a quantidade mínima de nós por célula (veja a Figura 3.4). A estrutura de células pode ser representada na forma de uma árvore hierárquica quaternária (veja a Figura 3.5). As células que não podem mais ser divididas são chamadas de *células folhas*.

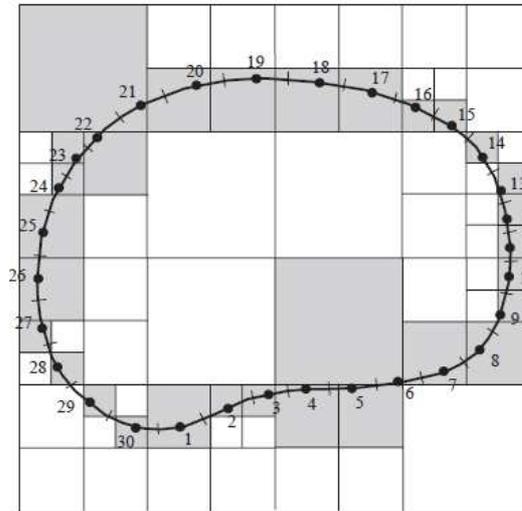


Figura 3.4: Estrutura de células cobrindo os elementos de contorno (Fonte: [18]).

Passo 3: Cálculo dos momentos multipólo

O cálculo dos momentos multipólo é dado pelas Eqs.(3.16) e (3.23) considerando o ponto z_c como o centro das células. Para as células do nível l que não são folhas, os momentos multipólo são calculados somando os momentos multipólo de suas células filhas, aplicando a translação $M2M$ dada pela equa-

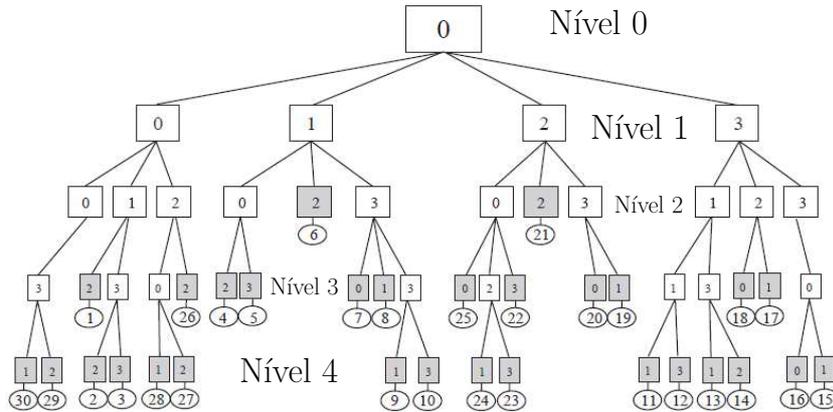


Figura 3.5: Árvore quaternária hierárquica com as folhas representadas em cinza (Fonte: [18]).

ção Eq.(3.24). Neste caso, z'_C é o centróide da célula pai enquanto que z_C é o centróide da célula filha. Note que os momentos devem ser calculados para cada iteração pois a integral contém os valores de fluxo e temperatura.

Passo 4: Cálculo dos coeficientes das expansões locais

Neste passo é preciso definir o que é lista de iteração, células adjacentes e células distantes de uma dada célula C . Duas células de um mesmo nível l são ditas adjacentes se elas têm pelo menos um vértice comum. Se duas células folhas forem de níveis diferentes, elas serão adjacentes se o pai de uma das células folhas divide pelo menos um vértice comum com a outra célula folha. Duas células são ditas bem separadas em um nível l se elas não forem adjacentes no nível l , mas suas células pais forem adjacentes no nível $l - 1$. A lista de células bem separadas de uma célula C de um nível l é chamada de lista de iteração. Uma célula é chamada distante de C se seu pai não é adjacente ao pai da célula C (veja a Figura 3.7).

Os coeficientes das expansões locais são calculados em todas as células a partir do nível 2 e seguindo a estrutura de árvore para baixo, até alcançar as folhas. A expansão local associada a uma célula C é a soma das contribuições das células na lista iteração das células C e de todas as células distantes. As contribuições da lista de iteração são calculadas pela translação $M2L$, Eq.

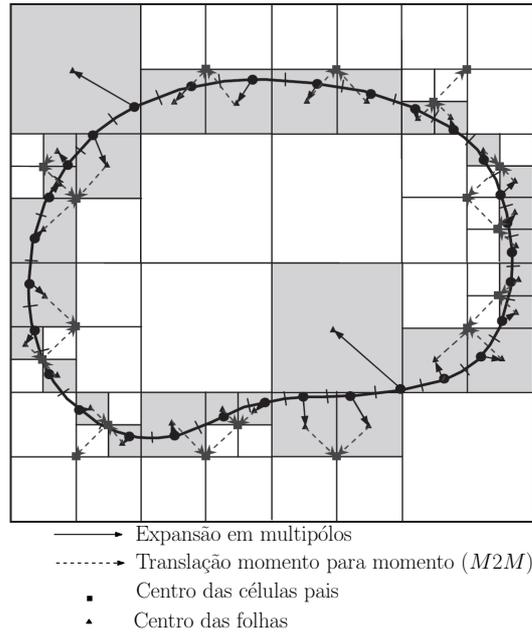


Figura 3.6: Expansões em multipólos e translações $M2M$ (Fonte: [18]).

(3.28), usando os momentos associados com as células na lista de iteração. As contribuições das células distantes são calculadas pela translação $L2L$, Eq. (3.33) ou (3.34), para a célula mãe de C com o ponto de expansão sendo deslocado a partir do centróide da célula mãe de C para o ponto C . Para uma célula C do nível 2, usamos apenas a translação $M2L$ para calcular os coeficientes da expansão local. A Figura 3.8 mostra como os coeficientes de expansão local são calculados seguindo a árvore de cima para baixo para a célula C onde o nó 29 está localizado.

Passo 5: Avaliação das integrais de contorno

Deve-se calcular o lado direito da Eq.(3.1). As contribuições dos elementos que pertencem a célula que contém o ponto fonte z_0 e as células que são adjacentes a C são calculadas pelo MEC convencional. A contribuição de todo o resto é dada pela expansão local Eq.(3.28) que, por sua vez, utiliza os coeficientes calculados no *Passo 4* (veja as Figuras 3.9 e 3.10).

Passo 6: Iterações da solução

Neste passo, o vetor de valores desconhecidos do sistema dado pela Eq.(3.16)

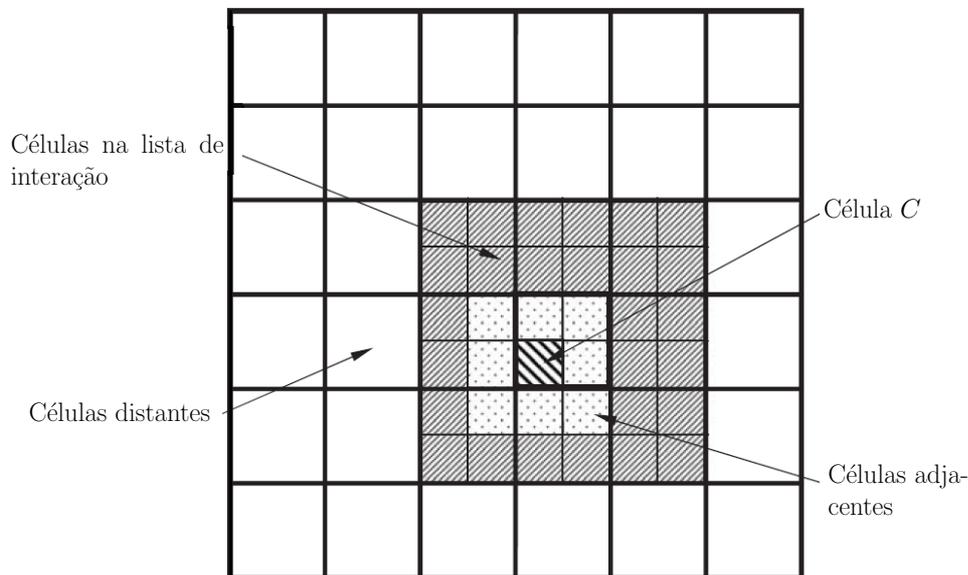


Figura 3.7: Caracterização das demais células em relação à célula C (Fonte: [18]).

é atualizado e o algoritmo volta ao *Passo 3* até que a solução convirja dentro de uma tolerância dada.

O algoritmo rápido multipolar discutido nesta secção é o algoritmo original [23], conforme mostrado no livro [18], que é eficaz para os modelos em que os elementos são aproximadamente do mesmo tamanho e distribuídos uniformemente em um domínio volumoso. Para modelos do MEC com distribuições não uniformes de elementos e especialmente com elementos grandes adjacentes a elementos pequenos, os chamados MECMP adaptativos são mais eficientes. Neste caso, as definições das células adjacentes e células na lista iteração são ainda mais refinados. As discussões sobre os algoritmos adaptativos podem ser encontrados em [42, 43, 44, 45, 46].

3.5 Matriz de pré-condicionamento

A aplicação de um bom pré-condicionador é muito benéfico, se não crucial, para a convergência das soluções de métodos iterativos de resolução de siste-

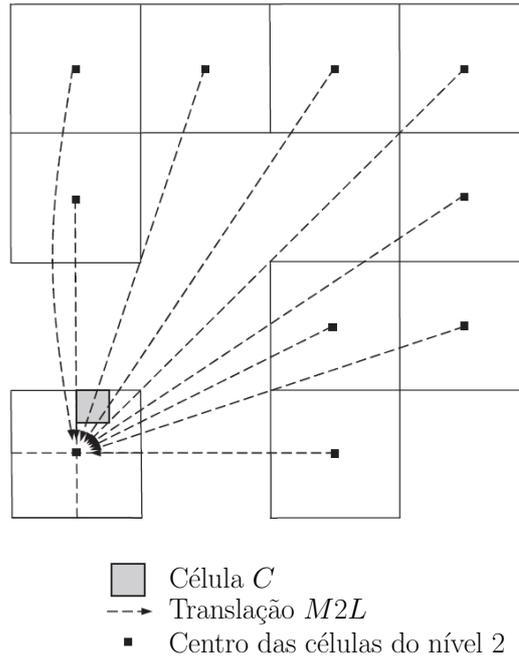


Figura 3.8: Expansões $M2L$ e $L2L$ no nível 2 (Fonte: [18]).

mas lineares. Ao contrário dos métodos diretos, o tempo de processamento de um método iterativo na resolução de um sistema de equações lineares é imprevisível. A solução pode convergir em algumas iterações para alguns casos, enquanto que pode levar algumas centenas de iterações em outros casos, dependendo do condicionamento do sistema. O número de iterações está diretamente relacionado com o número de condicionamento do sistema de equações. Para acelerar o processo iterativo de solução, ou seja, para reduzir o número de iterações para uma dada tolerância, uma matriz de pré-condicionamento deve ser introduzida.

Usando uma matriz pré-condicionadora $[M]$, o sistema original $[A]\{x\} = \{b\}$ é modificado da seguinte forma:

$$([M]^{-1}[A])\{x\} = [M]^{-1}\{b\} \quad (3.35)$$

para condicionamento à esquerda, ou para

$$([A][M]^{-1})[M]\{x\} = \{b\} \quad (3.36)$$

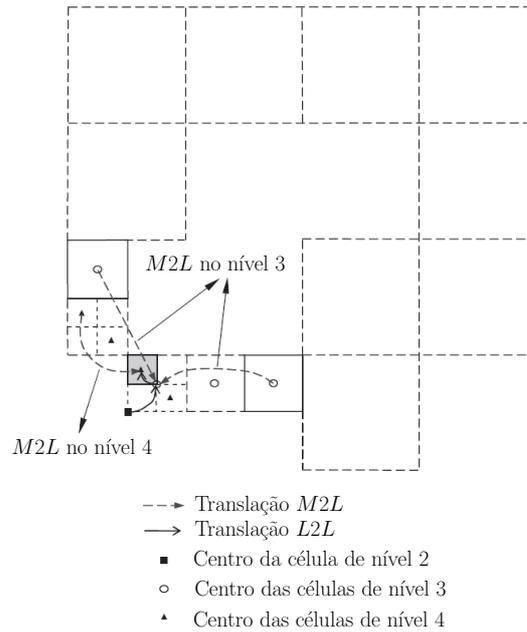


Figura 3.9: Expansões $M2L$ e $L2L$ nos níveis 3 e 4 (Fonte: [18]).

para o condicionamento à direita. Ambos devem melhorar significativamente o condicionamento do sistema.

O ideal é que a matriz de condicionamento $[M]$ fosse a matriz $[A]$ pois o produto de $[A]^{-1}[A]$ é a matriz identidade que possui número de condicionamento igual a 1, que é o melhor possível. Neste caso, todos os métodos iterativos convergiriam em apenas uma iteração. Entretanto, obter a inversa de $[A]$ tem custo computacional maior do que a resolução do sistema, o que elimina a possibilidade da mesma ser uma matriz de condicionamento. Desta forma, torna-se desejável que o produto $[M]^{-1}[A]$ seja o mais próximo da matriz identidade. Porém, a matriz $[M]$ também tem que ser uma matriz facilmente inversível. As matrizes mais facilmente inversíveis são as matrizes diagonais cujas inversas são calculadas em um só passo, bastando inverter os termos das diagonais. Em seguida, são as matrizes bloco diagonais, cujo cálculo da inversa corresponde ao cálculo da inversa de várias matrizes menores.

No caso do MECMP, uma escolha simples e eficaz que tem sido amplamente utilizada na literatura, conforme mostrado por [18], e que foi adotada neste trabalho, é a utilização como matriz de condicionamento $[M]$ uma matriz

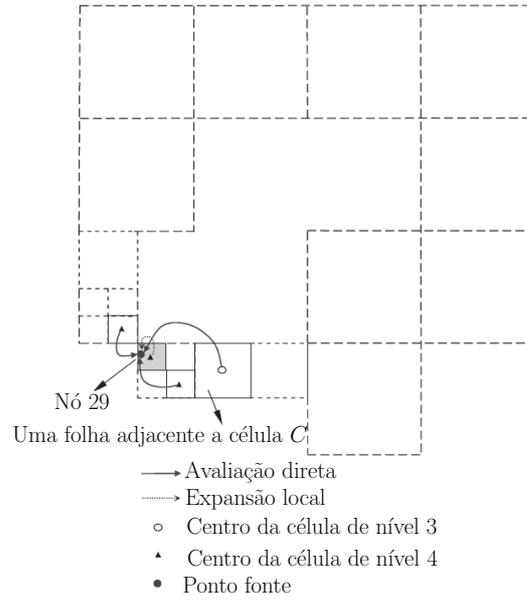


Figura 3.10: Cálculo de todas as integrais para um dado ponto fonte (Fonte: [18]).

bloco diagonal na forma:

$$[M] = \begin{bmatrix} [A]_1 & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [A]_2 & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [A]_n \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

em que $[A]_i$ é uma submatriz de $[A]$ com os coeficientes formados pelos pontos fontes e elementos de uma folha, por avaliação direta das integrais dentro dessa folha.

Capítulo 4

Resultados numéricos

4.1 Comparação entre os diferentes tipos de elementos de contorno

Para avaliar as formulações de elementos de contorno usando elementos constantes, lineares e quadráticos, foi analisada a distribuição de temperatura em um cilindro e em uma placa retangular. No cilindro, as condições de contorno são constantes nos diâmetros externo e interno, enquanto na placa, as condições de contorno variam em cada ponto do contorno.

4.1.1 Condução de calor em um cilindro

Considere um cilindro com dimensões mostrada na figura 4.1. O problema foi discretizado com diferentes malhas, das mais grosseiras às mais refinadas. Foi considerado $r_i = 1$, $r_o = 2$, $T(r_i) = 100$ e $q(r_o) = -200$, $k = 1$.

A solução analítica para a temperatura é dada por:

$$T(r) = T(r_i) - q(r_o) r_o \log(r/r_i) \quad (4.1)$$

e para o fluxo por:

$$q(r) = -q(r_o) \frac{r_o}{r}. \quad (4.2)$$

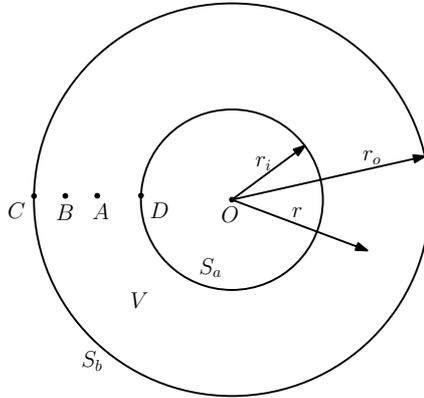


Figura 4.1: Dimensões do cilindro

As figuras 4.2, 4.3 e 4.4 mostram, respectivamente, uma malha de 16 nós com elementos de contorno constantes, uma malha de 112 nós com elementos de contorno constante e uma malha de 16 nós com elementos de contorno quadrático. Note que, para uma discretização grosseira, com 16 nós, a aproximação de uma circunferência com elementos quadráticos, que podem ser curvos, é melhor satisfeita que com elementos retilíneos (elementos constantes ou lineares).

Os resultados foram avaliados em 4 pontos. Os dois primeiros pontos são os pontos internos A e B , onde $r_A = (r_i + r_o)/2 = 1,50$ e $r_B = (r_i + 3r_o)/4 = 1,75$. Os dois outros são os pontos do contorno C e D . O valor da temperatura T e do fluxo q nestes pontos foram calculados com diferentes malhas e diferentes tipos de elementos e os resultados foram comparados com a soluções analíticas do problema para temperatura e fluxo, dadas pelas equações (4.1) e (4.2), respectivamente. As figuras 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10 mostram estas comparações.

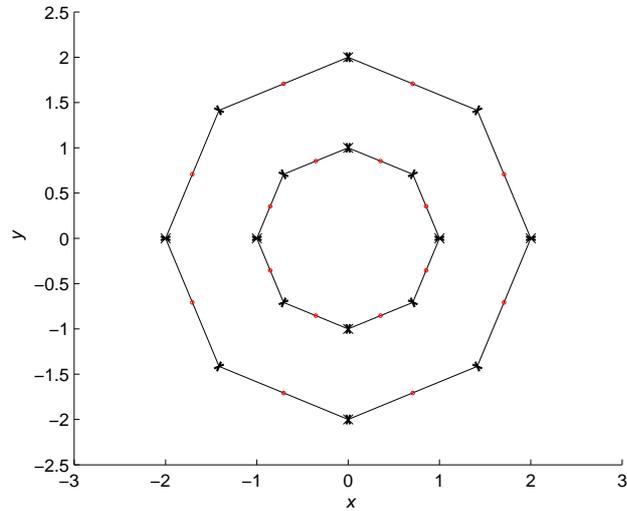


Figura 4.2: Malha de elementos de contorno com 16 nós com elementos constantes (8 no contorno externo e 8 no contorno interno)

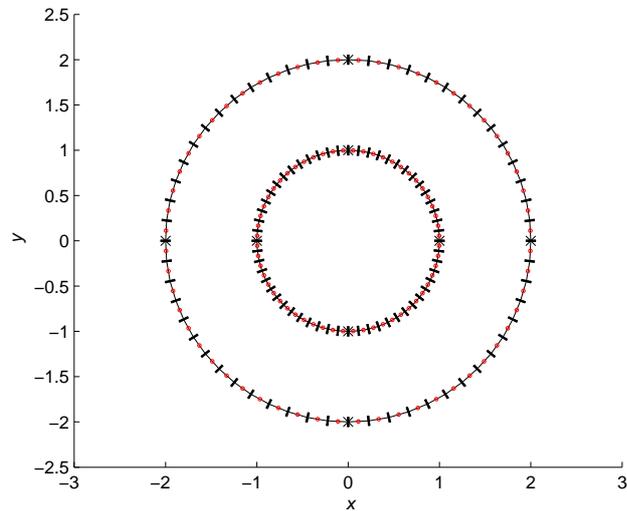


Figura 4.3: Malha de elementos de contorno com 112 nós com elementos constantes (56 no contorno externo e 56 no contorno interno)

Tomou-se o cuidado para que o número de nós fosse o mesmo em cada comparação. Para isso, o número de elementos quadráticos foi a metade do número de elementos lineares e constantes. Além disso, para que a precisão da integração não influísse na análise, foi usado um número grande de pontos de integração em todas as integrais do método dos elementos de contorno. Todas as integrais foram calculadas com 16 pontos de Gauss que representa um número mais do que suficiente para uma integração com boa precisão.

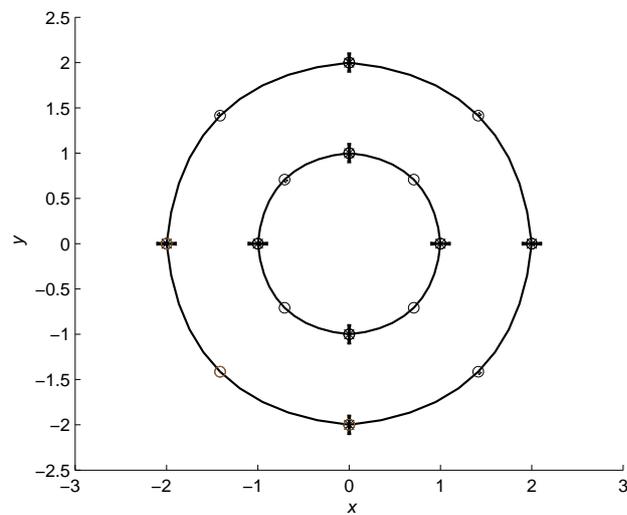


Figura 4.4: Malha de elementos de contorno com 16 nós com elementos quadráticos (8 no contorno externo e 8 no contorno interno)

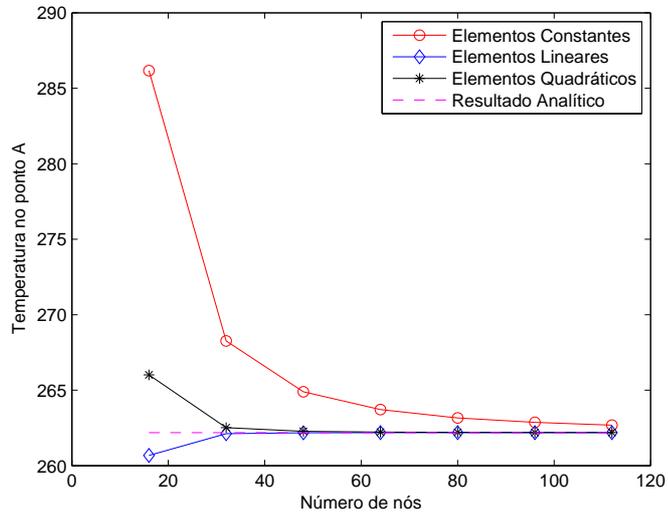


Figura 4.5: Temperatura no ponto *A*.

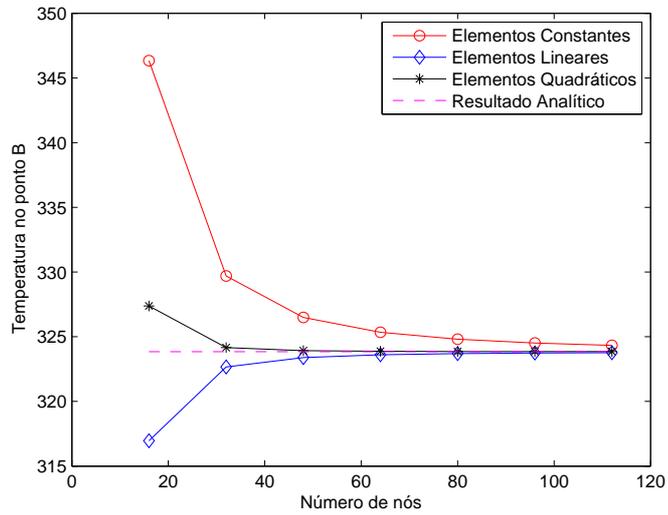


Figura 4.6: Temperatura no ponto *B*.

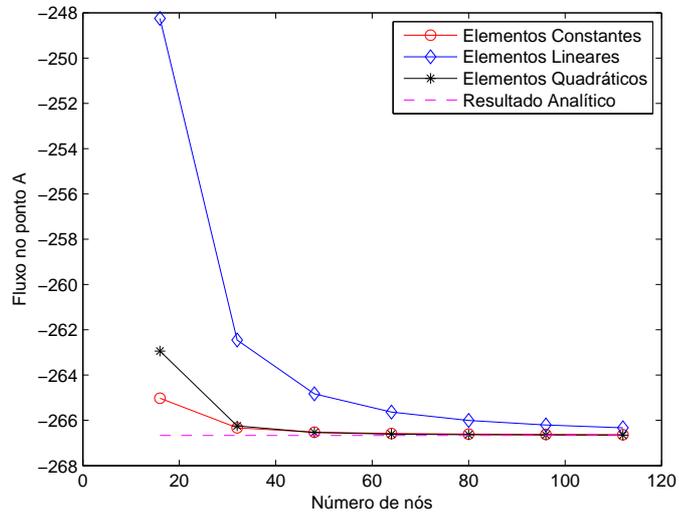


Figura 4.7: Fluxo no ponto *A*.

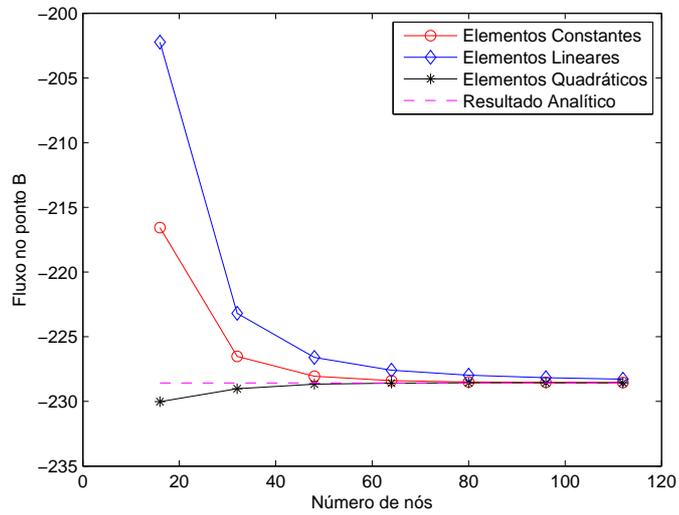


Figura 4.8: Fluxo no ponto *B*.

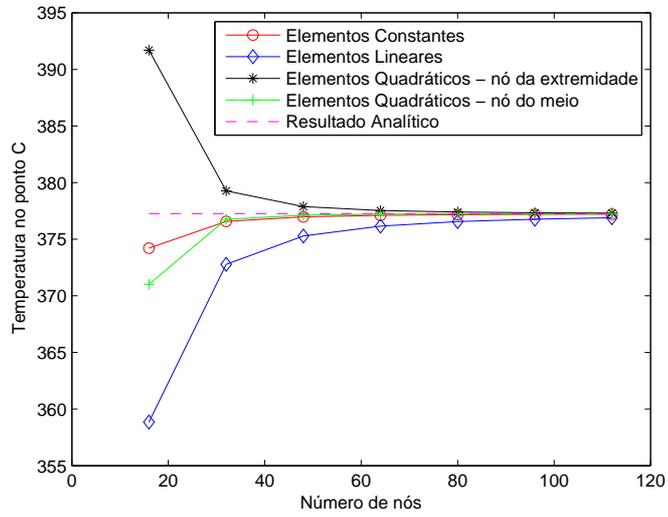


Figura 4.9: Temperatura no ponto C.

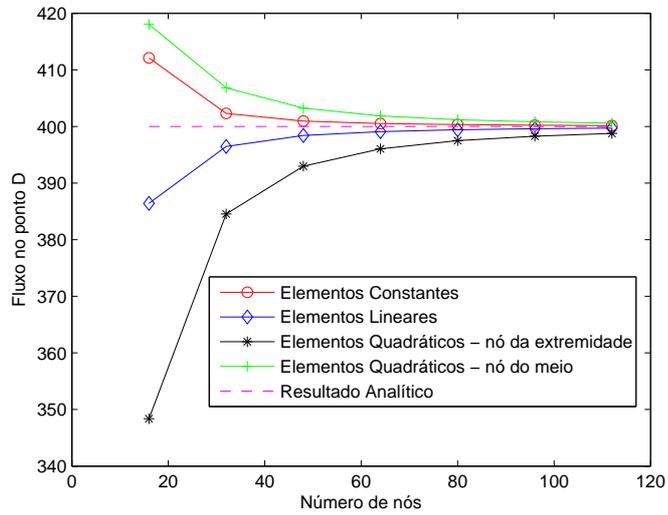


Figura 4.10: Fluxo no ponto D.

Analisando as figuras 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10, nota-se que todas as formulações convergem para a solução analítica conforme a malha é refinada. Entretanto, não se pode observar nenhum elemento que apresentasse convergência mais rápida em todos os casos. Para a temperatura nos pontos internos A e B , os elementos quadráticos apresentaram a convergência mais rápida e os elementos constantes a convergência mais lenta. Para o fluxo nos pontos interno A e B , os elementos lineares apresentaram a convergência mais lenta enquanto que os elementos constantes convergiram mais rápido no ponto A e os quadráticos convergem mais rápido no ponto B . Nos pontos C e D , pertencentes aos contornos interno e externo, respectivamente, os resultados para elementos quadráticos foram analisados tanto em nós das extremidades dos elementos quanto em nós do meio do elemento. No caso do ponto C , onde a temperatura era a variável desconhecida, a convergência mais rápida foi apresentada pelos elementos constantes enquanto a mais lenta foi apresentada pelos elementos lineares. No caso do ponto D , onde o fluxo foi calculado, a convergência mais rápida foi a dos elementos constantes, enquanto a mais lenta foi apresentada pelos elementos lineares. Nos dois últimos casos a convergência para a malha de elementos quadráticos foi mais rápida nos nós do meio que nos nós da extremidade dos elementos.

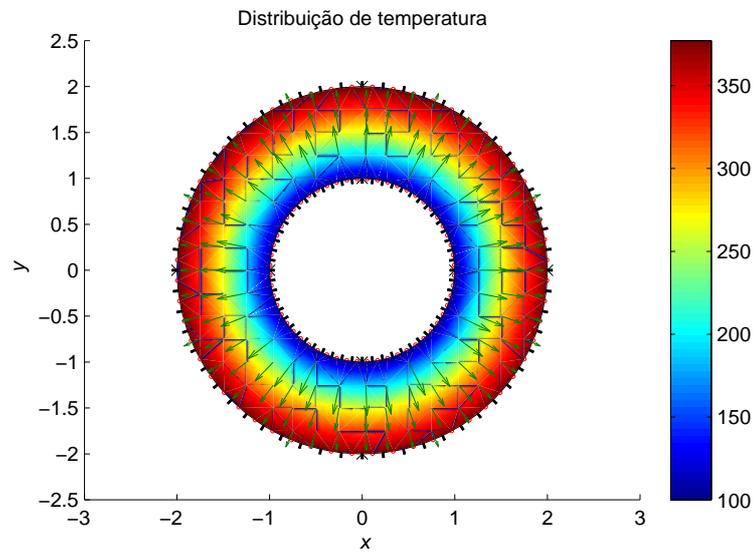


Figura 4.11: Distribuição de temperatura e fluxo de calor ao longo do cilindro.

4.1.2 Condução de calor em uma placa

Considere uma placa retangular $ABCD$ conforme mostrado na figura 4.12. Foi considerado $k = 1$. As condições de contorno na placa são as seguintes:

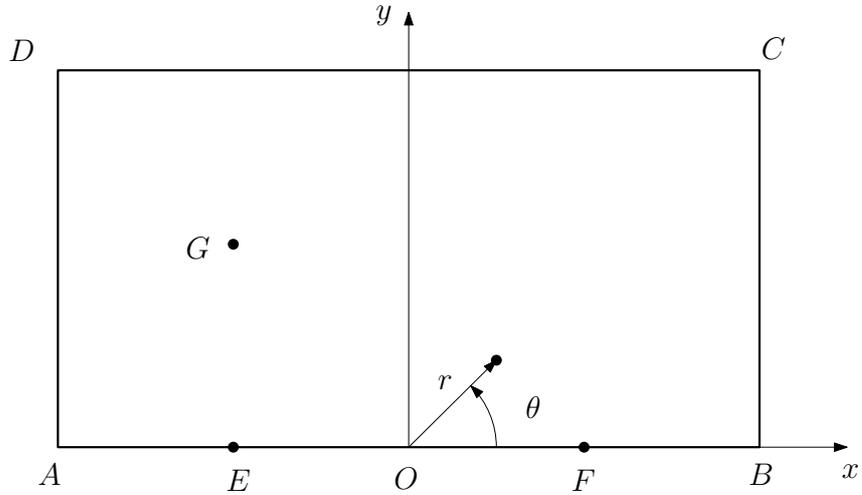


Figura 4.12: Placa retangular.

$$q = -\frac{1}{2\sqrt{r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \theta + \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) \text{ em } BC, \quad (4.3)$$

$$q = -\frac{1}{2\sqrt{r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \sin \theta - \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta \right) \text{ em } CD, \quad (4.4)$$

$$q = \frac{1}{2\sqrt{r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \theta + \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) \text{ em } DA, \quad (4.5)$$

$$T = 0 \text{ em } AO \quad (4.6)$$

e

$$q = 0 \text{ em } OB. \quad (4.7)$$

A solução analítica para este problema é dada por:

$$u = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \quad (4.8)$$

$$q_x = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{2\sqrt{r}} \quad (4.9)$$

e

$$q_y = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{2\sqrt{r}}. \quad (4.10)$$

As coordenadas dos pontos A e C são, respectivamente $(-1,0; 0,0)$ e $(1,0; 1,0)$. O ponto E é o ponto médio do segmento AO e o ponto F é o ponto médio do segmento OB . O ponto G tem coordenada $(-0,5; 0,5)$.

Da mesma forma que no exemplo anterior, a placa retangular também foi discretizada com diferentes malhas, das mais grosseiras (24 nós) até as mais refinadas (120 nós). Em todos os casos, os elementos usados tinham tamanhos próximos porém não iguais. O valor da temperatura T foi calculado nos pontos F e G , o fluxo normal ao contorno q foi calculado no ponto E e fluxos q_x e q_y , nas direções x e y , respectivamente, foram calculados no ponto G . As figuras 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17 mostram os valores das temperaturas e fluxos nestes pontos.

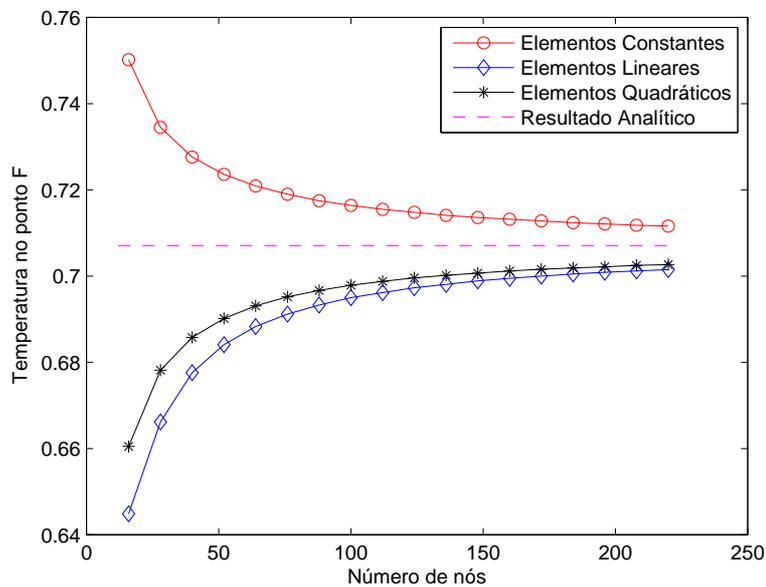


Figura 4.13: Temperatura no ponto F .

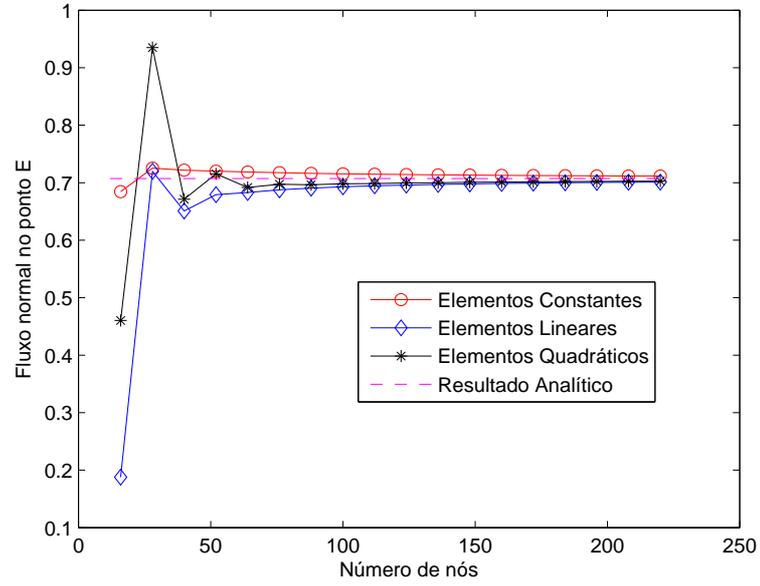


Figura 4.14: Fluxo de calor normal ao contorno no ponto E .

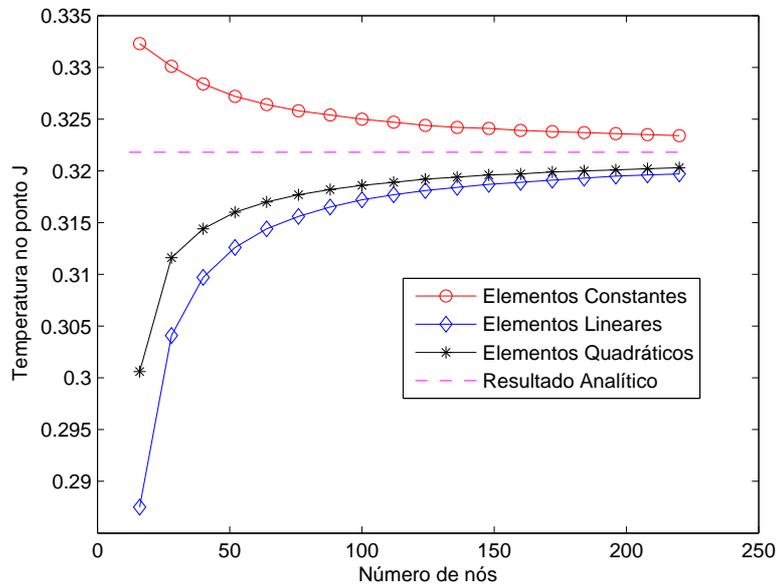


Figura 4.15: Temperatura no ponto G .

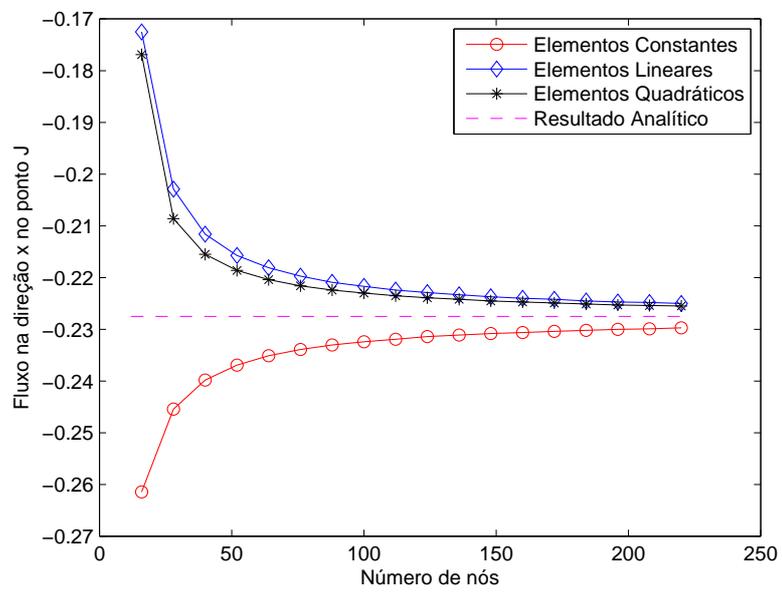


Figura 4.16: Fluxo de calor na direção x no ponto G .

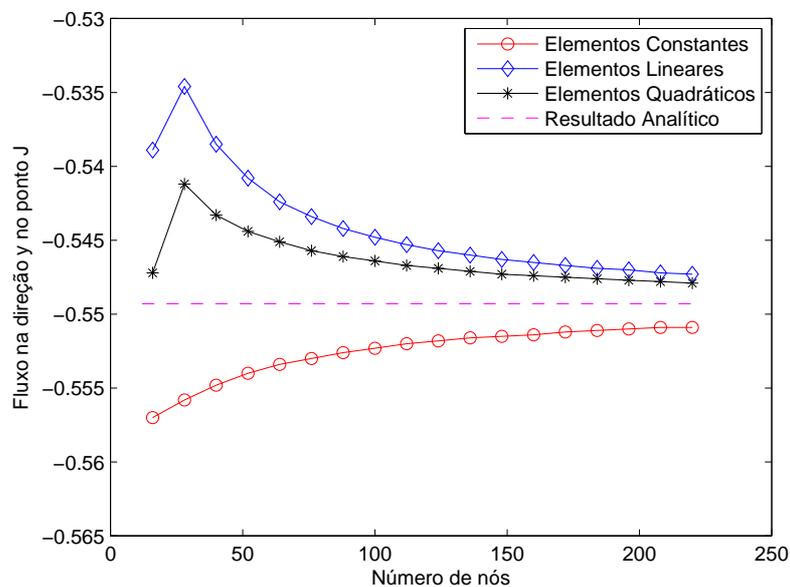


Figura 4.17: Fluxo de calor na direção y no ponto G .

A figura 4.18 mostra a distribuição de temperatura e o fluxo de calor na placa retangular.

O comportamento dos resultados obtidos neste exemplo são, na maioria dos casos, muito similares ao comportamento obtidos no exemplo anterior. Todas as formulações convergem para a solução analítica em todos os pontos tanto para temperatura quanto para fluxo. Os elementos lineares se mostraram com uma convergência um pouco mais lenta que os elementos quadráticos e constantes, sendo que estes dois últimos apresentam convergência muito semelhante, embora aproximem-se da solução analítica por lados opostos (um por cima e outro por baixo da solução analítica). No caso da Figura 4.14, os elementos quadráticos e lineares apresentaram oscilações expressivas para as malhas mais grosseiras que se estabilizaram com o refinamento da malha. Estas oscilações também ocorreram de maneira menos expressivas na Figura 4.17.

A opção desta dissertação para o desenvolvimento da formulação do MECMP foi trabalhar com elementos constantes pois é um elemento de formulação mais simples, cuja integrais podem ser facilmente calculadas analiticamente nos ca-

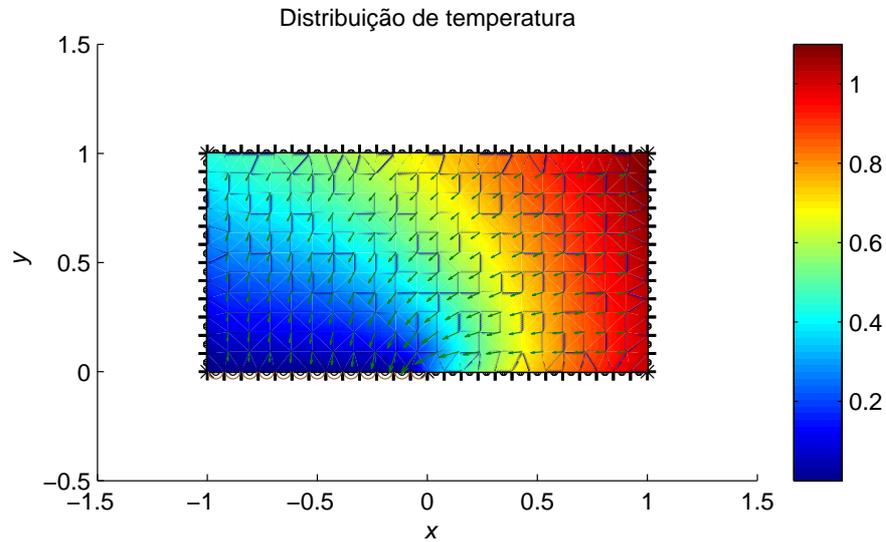


Figura 4.18: Distribuição de temperatura e fluxo de calor na placa.

sos onde a expansão não é possível. Dado o grande número de expansões necessárias na formulação do MECMP, o uso de elementos constantes se torna ideal pois as expressões obtidas pelas expansões são pequenas. Desta forma, ganha-se em simplicidade na implementação e em tempo de processamento durante a execução do programa. Além disso, dada a análise dos dois exemplos anteriores, nota-se que, na maioria dos casos, mesmo para problemas de contornos curvos e também de condições de contorno variáveis, a formulação com elementos constantes apresenta convergência mais satisfatória que elementos de mais alta ordem.

4.2 Expansão das soluções fundamentais em séries de Taylor

Esta seção tem como objetivo mostrar o efeito do aumento do número de termos na aproximação das soluções fundamentais. Para isso, considere como coordenadas do ponto fonte o ponto $(x_d, y_d) = (1, 0; 0, 0)$ e como ponto de expansão $(x_c, y_c) = (0, 0; 0, 0)$. O vetor normal foi considerado $\vec{n} = \sqrt{2}/2\vec{i} + \sqrt{2}/2\vec{j}$ e a condutividade térmica foi assumida como $k = 1$. As Figuras 4.19 e 4.20 mostram as expansões das soluções fundamentais de temperatura T^* e fluxo q^* , respectivamente, com 1, 5, 11 e 16 termos nas séries de Taylor.

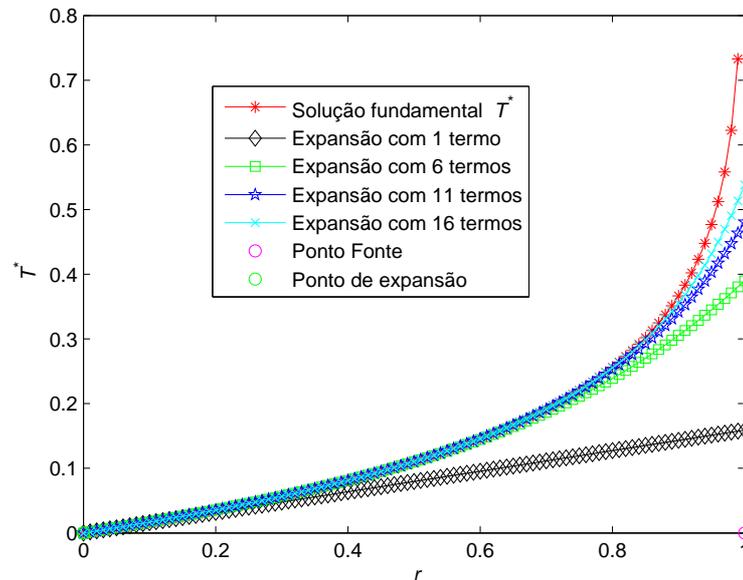


Figura 4.19: Expansão da solução fundamental de temperatura T^* .

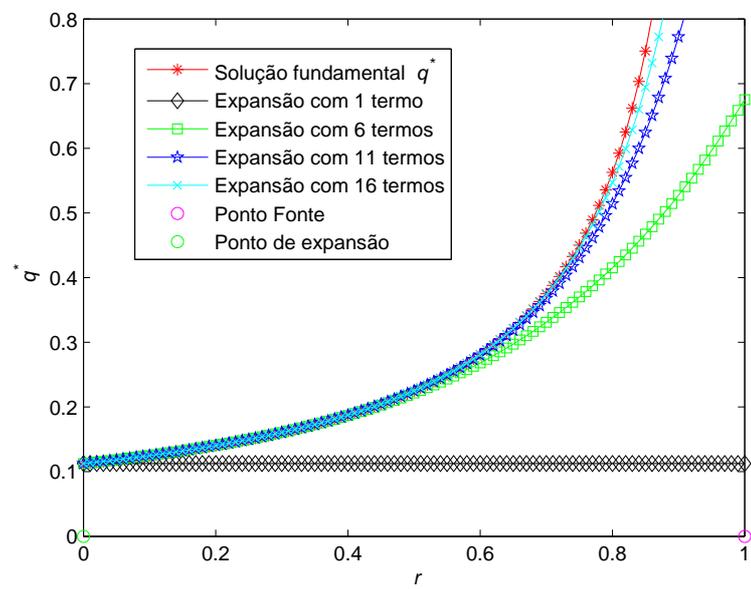


Figura 4.20: Expansão da solução fundamental de fluxo q^* .

Note que as aproximações em séries se aproximam das soluções fundamentais conforme se aumenta o número de termos na série de Taylor. A aproximação da solução fundamental de temperatura se dá de forma mais rápida que a aproximação da solução fundamental de fluxo. Isto se deve ao tipo de singularidade destas soluções fundamentais que é uma singularidade fraca no caso da solução fundamental de temperatura e uma singularidade forte no caso da solução fundamental de fluxo. Esta análise mostra que deve-se buscar um balanço entre o número de termos da série, diretamente relacionado com a precisão dos resultados e do custo computacional, que também aumenta com o aumento do número de termos usados na expansão em séries de Taylor.

4.3 Aproximação dos termos das matrizes $[G]$ e $[H]$ usando a expansão em séries de Taylor

Esta seção tem como objetivo demonstrar numericamente as operações do MECMP e também o efeito do número de termos na série de Taylor na expansão das matrizes $[H]$ e $[G]$. Para isso, são calculadas as matrizes $[G]$ e $[H]$ para os elementos 15 e 16 da malha mostrada na Figura 4.21 quando os pontos fontes são os nós 2 e 3. A Figura 4.22 mostra a numeração das células. Neste problema assumiu-se o número máximo de elementos por célula igual a 1. A Figura 4.23 mostra a numeração dos nós junto com as células. Primeiramente é calculada as matrizes usando o MECMP na seguinte sequência: calcula-se os momentos dos elementos 15 e 16 em relação ao centro das células 54 e 55, respectivamente (veja a Figura 4.22). Então, usando as operações Moment2Moment, faz a translação dos momentos para o centro da célula 37 que é o pai das células 54 e 55. Aí, soma-se os dois momentos, uma vez que ambos estão calculados em relação ao mesmo ponto (centro da célula 37). Em seguida, usando Momento2Local, calcula-se a expansão local L a partir do momento do centro da célula 37 para o centro da célula 20 que é a célula pai das células 38 e 39. As células 38 e 39, por sua vez, contém os pontos fontes, que são os nós 2 e 3 (veja a Figura 4.23). Então, faz-se a translação da expansão Local do centro da célula 20 para os centros das células 38 e 39.

Depois disso, usando ExpansaoLocal, calcula-se as integrais das matrizes $[G]$ e $[H]$. Por último, para comparar os resultados, foram calculadas as integrais das matrizes $[G]$ e $[H]$ usando elementos de contorno padrão. A Tabela 4.1 mostra uma comparação com o MECMP com diferentes número de termos na expansão em séries.

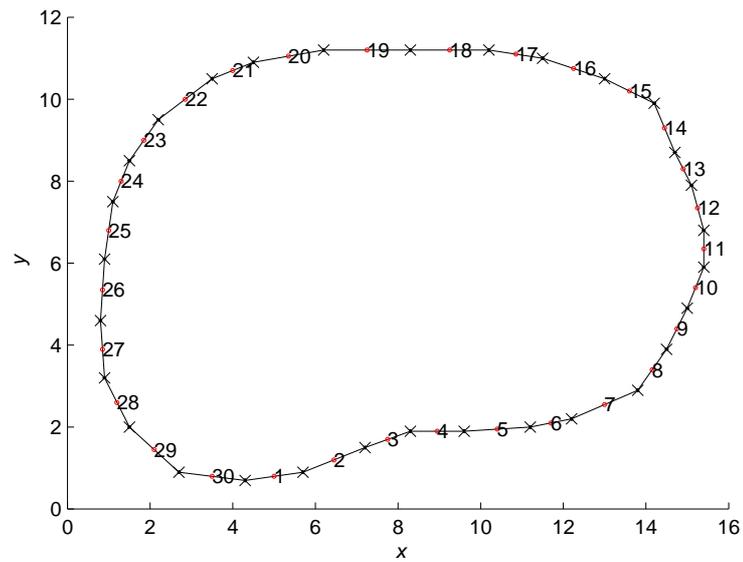


Figura 4.21: Malha de elementos constantes com número dos nós.

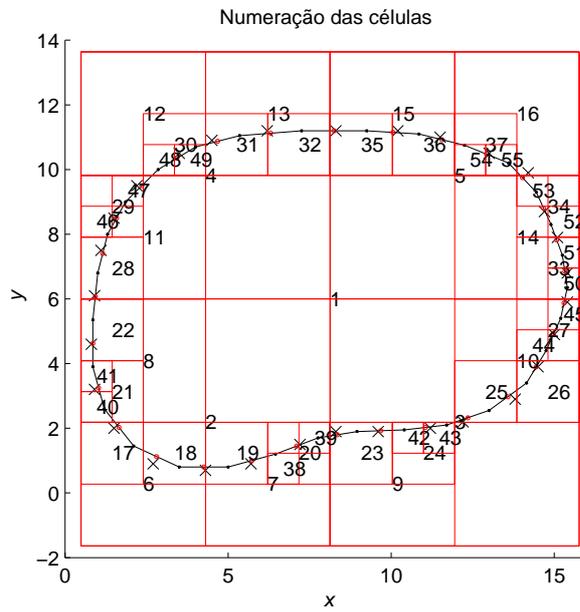


Figura 4.22: Numeração das células.

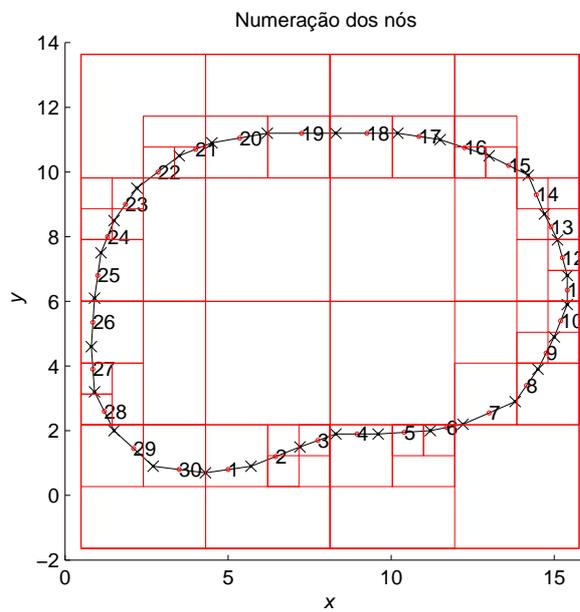


Figura 4.23: Células e número de nós.

Tabela 4.1: Comparação entre o MECMP e o MEC.

Número de termos	$[G]$ nó 2	$[H]$ nó 2	$[G]$ nó 3	$[H]$ nó 3
1	-1.1386	-0.038664	-1.0825	-0.043696
2	-1.1279	-0.040448	-1.0809	-0.045303
4	-1.1291	-0.040087	-1.0809	-0.045075
6	-1.1291	-0.040089	-1.0809	-0.045076
8	-1.1291	-0.04009	-1.0809	-0.045076
MEC padrão	-1.1291	-0.04009	-1.0809	-0.045076

Pode-se notar na Tabela 4.1 que a solução por séries de Taylor se torna mais próxima do MEC padrão com o aumento de número de termos na série de Taylor. A aproximação é mais rápida para a matriz $[G]$ do que para a matriz $[H]$. Da mesma forma que na seção anterior, a aproximação mais rápida se deve ao tipo de singularidade da matriz $[G]$ que é uma singularidade fraca, enquanto a da matriz $[H]$ é uma singularidade forte.

4.4 Comparação do MEC com o MECMP

Considere o mesmo problema analisado na seção 4.1. Este problema será agora analisado tanto pela formulação do MEC padrão quanto pela do MECMP. Na formulação do MEC padrão foi usada a formulação de elementos de contorno constantes com todas as integrais analíticas. A resolução do sistema linear se deu através do método de eliminação de Gauss utilizando a subrotina fornecida por Brebbia e Dominguez [39], porém reescrita para o MatLab. Na formulação do MECMP foi utilizada como número máximo de elementos em uma folha igual a 20 e o número de termos na expansão em multipolos igual a 15. Ambas as formulações foram implementadas em MatLab e nenhuma *function* do código foi compilada. Os códigos utilizados foram baseados nos códigos presentes no livro do Liu [18] porém ambos, MEC padrão e MECMP, reescritos do Fortran para o MatLab, versão R2009. O computador utilizado foi um HP modelo 6360br, com processador Intel CORE i5 de 3,2 GHz. A memória instalada era de 4 GBytes e o sistema operacional Windows

7 de 64 bits. Foi utilizada a *function gmres* do MatLab para a resolução do sistema linear no MECMP. A tolerância usada na *function gmres* foi igual a 10^{-6} e o número máximo de iterações foi igual a 15. Optou-se por não usar o comando barra invertida para resolver o sistema linear no MEC padrão por se tratar de uma *function* já compilada do MatLab, embora a mesma utilize também métodos diretos de resolução de sistemas lineares. O uso de funções compiladas pode reduzir de maneira significativa o custo computacional. Entretanto, neste trabalho o objetivo era comparar as formulações em "igualdade de condições", o que tornou o uso de *functions* não compiladas ideal para este tipo de análise. Também não foram usados comandos de programação paralela do MatLab.

A Figura 4.24 mostra a árvore criada para o problema de condução de calor no cilindro.

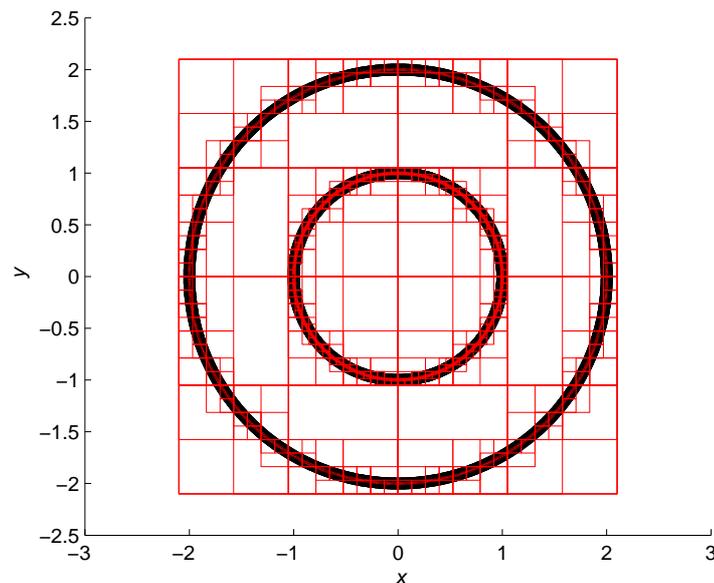


Figura 4.24: Estrutura de árvore para o problema de condução de calor em um cilindro.

A Figura 4.25 mostra a comparação dos tempos obtidos usando o MEC padrão e o MECMP. O tempo do MEC padrão compreende o tempo de montagem da matriz $[A]$ e do vetor $\{b\}$ e o tempo de resolução do sistema linear.

O tempo do MECMP compreende o tempo para montar a árvore de células, para calcular o vetor $\{b\}$ usando as operações do MECMP, para calcular a matriz de condicionamento $[M]$ e para a resolução do sistema linear através do método GMRES. A *function gmres* chama as *functions* do MECMP sem que, em nenhum instante, a matriz $[A]$ seja calculada de forma explícita.

Tabela 4.2: Operações contabilizadas no tempo de processamento.

MEC Padrão	MECMP
Montagem da matriz A ;	Montagem da árvore hierárquica;
Montagem do vetor b ;	Cálculo do vetor b ;
Resolução do sistema linear	Cálculo da matriz de condicionamento M ;
	Resolução do sistema linear utilizando o GMRES;

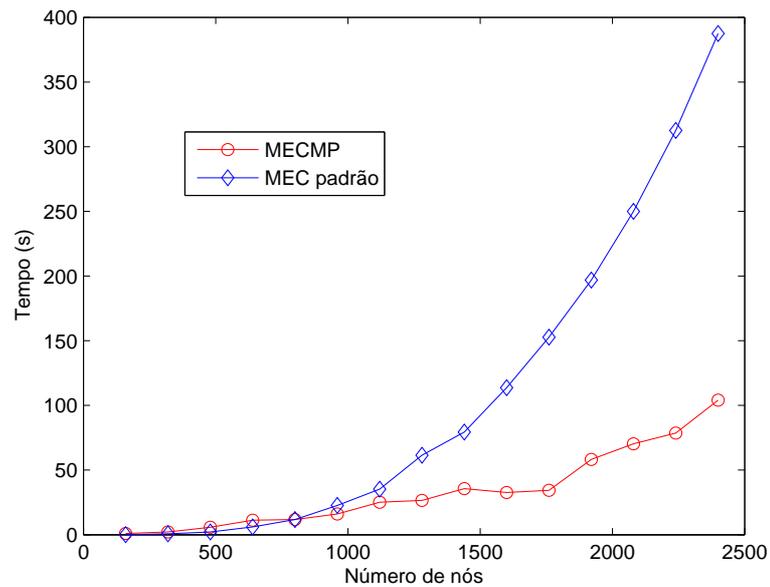


Figura 4.25: Comparação do tempo de processamento (custo computacional) entre o MEC padrão e o MECMP.

Como pode ser notado, o MEC padrão possui custo computacional menor que o MECMP para problemas com poucos graus de liberdade. Com 160 nós, o tempo de processamento do MEC padrão é 10 vezes menor que o MECMP, sendo 0,1 s para o MEC padrão e 1 s para o MECMP. Com 800 nós, ambas

Tabela 4.3: Número de nós x Tempo de processamento em segundos.

N. de Nós	MEC Padrão	MECMP
160	0,1	1,0
800	11,8	11,8
1600	113,7	32,6
2240	312,6	78,0

as formulações resolvem o problema em 11,8 s. Para números de nós maiores que 800, o MECMP tem custo computacional menor que o MEC padrão. Esta diferença torna-se bastante significativa conforme o número de nós aumenta. Por exemplo, para 1600 nós, o tempo gasto pelo MEC padrão é de 113,7 s enquanto que o MECMP é de apenas 32,6. Para o número de nós igual a 2240, o tempo de processamento para o MEC padrão foi de 312,6 s e o do MECMP foi de 78,6 s, ou seja, o MECMP é aproximadamente 4 vezes mais rápido que o MEC padrão. A forma da curva do MEC padrão dá uma boa ideia da inviabilidade do mesmo para a resolução de problemas de larga escala (problemas com número de graus de liberdade maior que 1 milhão).

A forma não tão suave da curva do tempo computacional do MECMP pode ser explicada devido ao método iterativo GMRES convergir em mais ou menos iterações. Este número de iterações variou entre 3 e 4 iterações externas e entre 6 e 10 iterações internas. Não existe, entretanto, uma relação entre o número de iterações e o número de graus de liberdade. Por exemplo, para 1760 nós, o GMRES convergiu com 3 iterações internas e 7 externas. Já para 1920 nós ele convergiu com 4 iterações externas e 6 iterações internas.

Capítulo 5

Conclusões e trabalhos futuros

5.1 Conclusões

Este trabalho apresentou uma análise de problemas de condução de calor bidimensional através do método rápido dos elementos de contorno com expansão em multipólos e também através do método dos elementos de contorno padrão. Foi feita uma comparação da precisão dos resultados em função do número de nós usando elementos de contorno constantes, lineares contínuos e quadráticos contínuos. Esta comparação foi feita em dois problemas, um com geometria curva e condições de contorno constantes ao longo da geometria e outro com geometria retilínea porém com condições de contorno que variavam ponto a ponto. Não foi identificado nenhum elemento com taxa de convergência superior em todos os casos analisados. Esta constatação faz com que o uso de elementos de contorno constantes seja bastante recomendada em formulações de elementos de contorno, uma vez que é um elemento mais simples, com custo computacional reduzido e que apresenta taxa de convergência semelhante aos elementos de ordem maior.

Também foi apresentada uma formulação do método dos elementos de contorno constantes onde todas as integrais foram calculadas analiticamente. Este procedimento, além de reduzir significativamente o custo computacional, elimina também a necessidade de escolha de número de pontos de integração

que, para ser usado de forma eficiente, deve variar conforme a distância entre o ponto fonte e o elemento que está sendo integrado.

Na formulação apresentada para o MECMP, foram usadas variáveis complexas e as soluções fundamentais foram expandidas em séries de Taylor. A influência do número de termos das séries de Taylor na aproximação das soluções fundamentais de temperatura e de fluxo foi analisada. Notou-se que a aproximação da solução fundamental de fluxo, por ter uma ordem maior de singularidade, tende a ficar mais longe que a aproximação da solução fundamental de temperatura se for usado o mesmo número de termos na expansão. Entretanto, para não gerar complexidade no código, ambas são aproximadas com o mesmo número de termos. A influência do número de termos nas integrais da solução fundamental também tem comportamento semelhante à aproximação das soluções fundamentais, sendo que a matriz $[H]$ necessita de mais termos que a matriz $[G]$ para uma aproximação semelhante.

Por fim, foi analisado o custo computacional, medido através do tempo de processamento do MECMP e do MEC padrão. Foi constatado que o MECMP possui custo computacional maior quando o número de graus de liberdade é pequeno. Isto se deve ao número de operações extras que o MECMP tem que fazer, tais como a construção da árvore e da matriz de condicionamento. Entretanto, com o aumento do número de graus de liberdade este custo computacional se igualou por volta de 800 graus de liberdade e, a partir daí, o custo computacional do MEC padrão ficou cada vez maior que o do MECMP. Desta forma, o MECMP mostrou-se uma alternativa viável para estender o uso do MEC para problemas de larga escala, pois a sua complexidade torna-se aproximadamente linear, ou seja, da mesma ordem de métodos tradicionalmente usado para estes tipos de problema, tais como o MEF e o MDF.

5.2 Publicações

Este trabalho deu origem a duas publicações:

- L. M. Braga, E. L. Albuquerque, and L. Mancine. Boundary Element

Method with Fast Multipole Expansion applied to problems of heat conduction with generation. In: *XXXII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2011, Ouro Preto.

- L. M. Braga, C. T. M. Anflor, ; E. L. Albuquerque; The Fast Multipole Boundary Element Method for topology problems. In: *International Conference on Boundary Element Techniques*, 2012, Praga.

5.3 Trabalhos futuros

Como sugestões de trabalho futuro, pode-se citar os seguintes tópicos:

- Estender a formulação do MECMP para a análise de problemas com forças de corpo, usando técnicas de transformação de integrais de domínio em integrais de contorno como, por exemplo, o método da integração radial e o método dos elementos de contorno de reciprocidade dual.
- Estender a formulação do MECMP para problemas não lineares.
- Estender a formulação para problemas anisotrópicos.
- Investigar novos algoritmos para a formação da árvore e também da matriz de condicionamento.
- Investigar a utilização de outros tipos de expansões em séries no método estudado.

Referências Bibliográficas

- [1] N. Kamiya N, H. Iwase, and E. Kita. Parallel implementation of boundary element method with domain decomposition. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 18:209–216, 1996.
- [2] A. J. Davies and J. Mushtaq. The domain decomposition boundary element method on a network of transputers. In R. C. Ertekin, C. A. Brebbia, M. Tanaka, and R. Shaw, editors, *Boundary element technology XI*, pages 397–406. Computational Mechanics Publications, 1989.
- [3] N. Mai-Duy, P. Nguyen-Hong, and T. Tran-Cong. A fast convergent iterative boundary element method on a pvm cluster. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 22:307–316, 1998.
- [4] V. Popov V and H. Power. The drm-md integral equation method: an efficient approach for the numerical solution of domain dominant problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44:327–353, 1999.
- [5] E. Divo E, A. J. Kassab, and M. S. Ingber. Shape optimization of acoustic scattering bodies. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27:695–703, 2003.
- [6] M. S. Ingber, C. C. Schmidt, J. A. Tanski, and J. Phillips. Boundary element analysis of 3d diffusion problems using a parallel domain decomposition method. *Numerical Heat Transfer Part B*, 44:145–164, 2003.
- [7] K. Erhart, E. Divo, and A. J. Kassab. A parallel domain decomposition boundary element method approach for the solution of large-scale

- heat conduction problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30:553–563, 2006.
- [8] H. Power and R. Mingo. The drm subdomain decomposition approach to solve the two-dimensional navier-stokes system of equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24:107–119, 2000.
- [9] M. I. Portapila and H. Power. Iterative schemes for the solution of systems of equations arising from drm in multi-domain approach, and a comparative analysis of the performance of two different radial basis functions used in the interpolation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29:107–125, 2005.
- [10] N. A. Gumerov and R. Duraiswami. Fast multipole methods on graphics processors. *Journal of Computational Physics*, 227:8290–8313, 2008.
- [11] R. Yokota, T. Narumi, R. Sakamaki, S. Kameoka, S. Obi, and K. Yasuoka. Fast multipole methods on a cluster of gpus for the meshless simulation of turbulence. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 180:2066–2078, 2009.
- [12] T. Takahashi and T. Hamada. Gpu-accelerated boundary element method for helmholtz’ equation in three dimensions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 80:1295–1321, 2009.
- [13] K. Erhart, E. Divo, and A. J. Kassab. Gpu-accelerated indirect boundary element method for voxel model analyses with fast multipole method. *Computer Physics Communications*, 182:1162–1168, 2011.
- [14] G. Beylkin, R. Coifman, and V. Rokhlin. Fast wavelet transforms and numerical algorithms. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 44:141–183, 1991.
- [15] C. Lage and C. Schwab. Wavelet galerkin algorithms for boundary integral equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 20:2195–2222, 1999.
- [16] V. Rokhlin. Rapid solution of integral equations of classical potential theory. *Journal of Computational Physics*, 60:187–207, 1985.

- [17] L. F. Greengard. A fast algorithm for particle simulations. *Journal of Computational Physics*, 73:325–348, 1987.
- [18] Y. J. Liu. *Fast Multipole Boundary Element Method: Theory and Applications in Engineering*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [19] L. F. Greengard, M. C. Kropinski, and A. Mayo. Integral equation methods for stokes flow and isotropic elasticity in the plane. *Journal of Computational Physics*, 125:403–414, 1996.
- [20] L. F. Greengard and J. Helsing. On the numerical evaluation of elastostatic fields in locally isotropic two-dimensional composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46:1441–1462, 1998.
- [21] A. P. Peirce and J. A. L. Napier. A spectral multipole method for efficient solution of large-scale boundary element models in elastostatics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:4009–4034, 1995.
- [22] J. D. Richardson, L. J. Gray, T. Kaplan, and J. A. Napier. Regularized spectralmultipole bem for plane elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 25:297–311, 2001.
- [23] L. F. Greengard. *The rapid evaluation of potential fields in particle systems*. MIT Press, Cambridge, 1988.
- [24] Y. J. Liu and N. Nishimura. The fast multipole boundary element method for potential problems: a tutorial. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30:371–381, 2006.
- [25] Y. J. Liu. A new fast multipole boundary element method for solving large-scale two-dimensional elastostatic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65:863–881, 2005.
- [26] P. Wang and Z. Yao. Fast multipole dbem analysis of fatigue crack growth. *Computational Mechanics*, 38:223–233, 2006.

- [27] Z. Yao, F. Kong, H. Wang, and P. Wang. 2d simulation of composite materials using bem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28:927–935, 2004.
- [28] J. Wang, S. L. Crouch, and S. G. Mogilevskaya. A fast and accurate algorithm for a galerkin boundary integral method. *Computational Mechanics*, 37:96–109, 2005.
- [29] E. E. Tyrtysnikov. Mosaic-skeleton approximations. *Calcolo*, 33:47–57, 1996.
- [30] M. Bebendorf and S. Rjasanow. Adaptive low-rank approximation of collocation matrices. *Computing*, 70:1–24, 2003.
- [31] O. Von Estorff, S. Rjasanow, M. Stolper, and O. Zalesk. Two efficient methods for a multifrequency solution of the helmholtz equation. *Computing and Visualization in Science*, 8:159–167, 2005.
- [32] A. Brancati, M. H. Aliabadi, and I. Benedetti. Hierarchical adaptive cross approximation gmres technique for solution of acoustic problems using the boundary element method. *CMES Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 45:149–172, 2009.
- [33] S. Kurz, O. Rain, and S. Rjasanow. The adaptive cross approximation technique for the 3-d boundary element method. *IEEE Transactions on Magnetism*, 38:421–424, 2002.
- [34] K. Zhao, M. N. Vouvakis, and J. F. Lee. The adaptive cross approximation algorithm for accelerated method of moments computation of emc problems. *IEEE Transaction on Electromagnetic Compatibility*, 47:763–773, 2005.
- [35] J. Ostrowski, Z. Andjelic, M. Bebendorf, B. Cranganu-Cretuand, and J. Smajic. Fast bem-solution of laplace problems with hmatrices and aca. *IEEE Transactions on Magnetism*, 42:627–630, 2006.

- [36] M. Bebendorf and R. Grzhibovskis. Accelerating galerkin bem for linear elasticity using adaptive cross approximation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 29:1721–1747, 2006.
- [37] I. Benedetti, M. H. Aliabadi, and G. Daví. A fast 3d dual boundary element method based on hierarchical matrices. *International Journal of Solids and Structures*, 45:2355–2376, 2008.
- [38] J. C. F. Telles. A self adptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:959–973, 1987.
- [39] C. Brebbia and J. Dominguez. *Boundary Element an Introductory Course*. Computation Mechanics Publications, Southampton, Boston, second edition, 1992.
- [40] J. H. Kane. *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1994.
- [41] P. K. Banerjee. *The Boundary Element Methods in Engineering*. MacGraw-Hill, London, second edition, 1994.
- [42] H. Cheng, L. Greengard, and V. Rokhlin. A fast adaptive multipole algorithm in three dimensions. *Journal of Computational Physics*, 155:468–498, 1999.
- [43] L. Shen and Y. J. Liu. An adaptive fast multipole boundary element method for three-dimensional potential problems. *Computational Mechanics*, 39:681–691, 2007.
- [44] L. Shen and Y. J. Liu. An adaptive fast multipole boundary element method for three-dimensional acoustic wave problems based on the burton-miller formulation. *Computational Mechanics*, 40:461–472, 2007.
- [45] M. S. Bapat, L. Shen, and Y. J. Liu. Adaptive fast multipole boundary element method for three-dimensional half-space acoustic wave problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33:1113–1123, 2009.

- [46] M. S. Bapat and Y. J. Liu. A new adaptive algorithm for the fast multipole boundary element method. *CMES Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 58:161–184, 2010.