Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Convergência, na Distância Mallows, de Cadeias de Markov para Distribuições Estáveis

por

Euro Gama Barbosa

Brasília, 18 de Junho de 2007.

Agradecimentos

Agradeço às seguintes pessoas:

Glorinha (mãe) - esperança infinita

Jacy (pai) - visão além do alcance

Jasse (irmã) - determinação, luta e coragem para realizarmos o mesmo sonho

Talles (sobrinho) - não será matemático

Tássio (sobrinho) - poderá ser matemático

Chang - confiança recíproca

Adriana - menina mulher

Débora - moça menina

Juliana - teúda e manteúda (conforme nosso código secreto)

Sandra - de Dores para o Mundo

Raquel - dizem que vai voltar americanizada...

Leonardo - superação

Gisliane - meiga

Elenilson - polêmicas matriz e filial

Miguel e Magno - dupla dinâmica

Sérgio - primeiro co-orientando

Aline, Fernanda e Jorge - inseriram Jataí na civilização

Jhone - futuro autor renomado

Luciene - resmas e resmas...

Fágner e Fabiana, Théo e Flávia - casais intra-área

Lineu e Kélen, Rafael e Ingrid, Ricardo e Anyelle - casais inter-área

Ary, Cira, Danielle e Jacques - honrados, prestimosos e inigualáveis predecessores

Fabiano - deixo-lhe, de lembrança, o bastão

César - perseverança

Lindemberg - eterno vice

Fernando - bom menino

Jander, Luverci e Walter - 1,65 m é muito

Adail, Jhames, Nilton e Pablo - presenças bissextas

Abílio, Anderson, Evander e Tiago - turma da Álgebra

Karise - sempre acho que é algebrista mas, na verdade, é geômetra

Aílton, Gari, Lucimar, Luís, Manoel, Tania e Taumari - simpatia, cordialidade, presteza,...

Cátia, Elves e Liliane - exímios professores

Banco Central do Brasil - oportunidade de afastamento

Delor Moreira dos Santos - confiança e admiração

Resumo

Esta tese objetiva formular condições suficientes para aproximarmos, em distância de Mallows e, também, em distribuição, uma variável aleatória α-estável, $\alpha \in (1,2)$, por uma soma de variáveis aleatórias (não necessariamente independentes e não necessariamente identicamente distribuídas), as quais constituem uma cadeia de Markov uniformemente ergódica. Para tanto, utilizamos conceitos e resultados dos temas Cadeias de Markov com Espaço de Estados Geral, Distribuições Estáveis, Distância de Mallows e ϕ-*mixing*.

Palavras-chaves: Cadeias de Markov; Distribuições Estáveis; Distância de Mallows; ϕ-*mixing*; Teorema do Limite Central

Abstract

This work objectives to formulate sufficient conditions to approach, in Mallows Distance and in distribution, a α-stable random variable, $\alpha \in (1,2)$, for a sum of random variables (no necessarily independent nor necessarily identically distributed) but that are ergodic uniformily Markov chain. Because of that, we use definitions and results from the topics: Markov Chains with General State Space, Stable Law, Mallows Distance and *ϕ-mixing*.

Keywords: Markov Chains; Stable Law; Mallows Distance; *ϕ-mixing*; Central Limit Theorem

Sumário

Introdução

Esta tese objetiva formular condições suficientes para aproximarmos, em distância de Mallows e em distribuição, uma variável aleatória estritamente α-estável, $\alpha \in (1,2)$, por uma soma de variáveis aleatórias (não necessariamente independentes e não necessariamente identicamente distribuídas), as quais constituem uma cadeia de Markov uniformemente ergódica.

Assim, conforme nosso objetivo, ressaltamos que, nesta tese, restringimo-nos, de modo geral, ao estudo do caso de convergência, em distância de Mallows e em distribuição, para distribuições de variáveis aleatórias estritamente α-estáveis, $\alpha \in (1,2)$.

Seja, então, Y uma variável aleatória estritamente α-estável, com $\alpha \in (1,2)$. Sabemos que o domínio de atração da função de distribuição dessa variável aleatória é um conjunto não vazio. Portanto, existem seq*ü*ências $\{X_n\}_{n\,\geq\,1}$ de variávéis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e seq*ü*ências de números reais $\{a_n\}_{n\,\geq\,1}$ e $\{b_n\}_{n\,\geq\,1}$ tais que $\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} Y$, onde $a_n \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, e $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Com o auxílio de resultados relacionados aos temas distância de Mallows e distribuições estáveis, mostramos que as hipóteses de independência e de mesma distribuição podem ser descartadas, mediante a adoção de outras hipóteses convenientes. Então, neste trabalho, apresentamos os novos resultados obtidos, em termos das convergências já citadas, para variáveis aleatórias estritamente α-estáveis, nos estudos realizados para os seguintes casos:

(a) $\{X_n\}_{n\,\geq\,1}$ - seq*ü*ências de variávéis aleatórias independentes

(b) $\left\{S_n,\ \mathscr{G}_n\right\}$ - martingale,

(c) $\{X_n\}_{n\,\geq\,1}$ - ϕ-*mixing*, e

(d) $\{X_n\}_{n\,\geq\,1}$ - cadeia de Markov uniformemente ergódica.

Este trabalho foi motivado, inicialmente, pelo interesse em obter uma demonstração elegante para a aproximação, em distribuição, de uma variável aleatória α-estável, com $\alpha \in (0,2)$, por uma soma de variáveis aleatórias independentes e não necessariamente com mesma distribuição. O primeiro passo decorreu da constatação da necessidade de ajuste em uma demonstração publicada por Johnson e Samworth [12] em 2005. Essa situação será comentada de forma mais detalhada no Capítulo 3.

A motivação para o caso seguinte (martingale) originou-se do fato de uma seq*ü*ência de variáveis aleatórias independentes $\{X_n\}_{n \geq 1}$, com média zero, implicar que $\left\{S_n, \mathscr{F}_n\right\}$ constitui uma martingale. Nesse ponto, obtivemos um resultado de convergência que excluía a necessidade de independência e de distribuição idêntica das variáveis aleatórias X_n, pois tratavámos do caso mais geral: $\left\{S_n, \ \mathscr{G}_n\right\}$ martingale.

Uma vez eliminada a hipótese de independência, começamos a estruturar um resultado que considerasse a possibilidade de algum "grau" de dependência entre as variáveis aleatórias X_n. Daí, surgiu a idéia de se adotar a hipótese de ϕ-*mixing* com as variações ϕ_1 e ϕ_2. Essa idéia foi reforçada pela existência de diversos resultados de Roussas e Ioannides [17] para esses tipos de dependência.

O caminho naturalmente adotado a seguir foi considerar uma cadeia de Markov uniformemente ergódica, haja vista que essa cadeia constitui-se em um caso de ϕ_2-*mixing*.

A propósito, as diversas restrições e condições que tivemos de impor para atingir nosso objetivo são gradativamente explicadas no decorrer deste texto.

Para atingir nosso objetivo, estruturamos este trabalho em três capítulos. A partir deste ponto, apresentamos, nesta introdução, uma visão mais ampla desta tese.

No Capítulo 1, apresentamos definições e resultados básicos relativos aos tópicos Distribuições Estáveis, Cadeias de Markov com Espaço de Estados Geral e Distância de Mallows. Esses temas contribuem para a formação do suporte teórico deste trabalho e colaboram para contextualizá-lo, por meio da distância de Mallows, no universo das distribuições estáveis e das cadeias de Markov.

Por oportuno, registramos o conceito da distância de Mallows:

Para qualquer $r > 0$, definimos a distância r de Mallows ou, resumidamente, distância de Mallows, entre as funções de distribuição F_X e F_Y como

$$d_r(F_X, F_Y) = \left(\inf_{(X,Y)} E(|\, X - Y|^r\,) \right)^{\frac{1}{r}} ,$$

onde o ínfimo é calculado sobre os pares (X, Y) cujas funções de distribuição marginal são F_X e F_Y, respectivamente.

O tópico distância de Mallows será abordado em dois momentos. Na seção 1.4, fazemos uma síntese histórica sobre a distância de Mallows. Em seguida, definimos a citada distância e destacamos algumas peculiaridades.

Na seção 2.3, iniciamos com o registro do fato de o ínfimo da equação acima ser assumido para $r \geq 1$. Nesse sentido, apresentamos dois resultados: um devido a Major [14] e o outro, a Johnson e Samworth [12] (Teoremas 2.14 e 2.15, respectivamente).

O Corolário 2.17 destaca uma conclusão primordial: para $r \geq 1$, $\lim d_r(F_n, F) = 0$ (ou, equivalente em termos de notação, $d_r(F_n, F) \to 0$) implica $X_n \xrightarrow{d} X$, onde a variável aleatória X_n (X) tem função de distribuição F_n (F), desde que $\mathrm{E}|X_n|$ e $\mathrm{E}|X|$ sejam finitas.

A seção 1.2 registra, resumidamente, os conceitos e os resultados, relacionados às distribuições estáveis, que utilizamos nesta tese. Por sua vez, o tema Cadeias de Markov com Espaço de Estados Geral é tratado, numa visão introdutória, na seção 1.3.

No Capítulo 2, deduzimos, na seção 2.2, duas desigualdades (Lemas 2.12 e 2.13), que serão fundamentalmente importantes na formação dos resultados do Capítulo 3 e que integram o conjunto de resultados que obtivemos no decorrer da pesquisa. Para tanto, nessa seção, apresentamos, inicialmente, desigualdades clássicas para momentos (Proposição 2.1). Em seguida, enunciamos as desigualdades de Bahr-Esseen e de Burkholder (Proposições 2.2 e 2.4, respectivamente), as quais subsidiarão o desenvolvimento de resultados da citada seção e do Capítulo 3.

A propósito, essas desigualdades assim se configuram:

<u>Bahr-Esseen:</u> para $1 < r < 2$, com a condição $E\left(X_{n+1}|S_n\right) = 0$ q.c., temos:

$$E\left|S_n\right|^r \leq 2\left(\sum_{i=1}^{n} E\left|X_i\right|^r\right);$$

<u>Burkholder:</u> para $r > 1$, com a condição de $\left\{S_n,\ \mathscr{G}_n\right\}$ ser uma martingale, temos:

$$E\left|S_n\right|^r \leq C\left(r\right)\ E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{\frac{r}{2}}.$$

No próximo passo, registramos as definições de duas variações de dependência do tipo *mixing* (Definição 2.5 - ϕ_1-*mixing* e Definição 2.7 - ϕ_2-*mixing*), a saber:

<u>ϕ_1-*mixing*:</u>

$$\left|P\left(A \cap B\right) - P\left(A\right)P\left(B\right)\right| \leq \phi_1\left(n\right)P\left(A\right)P\left(B\right),$$

<u>ϕ_2-*mixing*:</u>

$$\left|P\left(A \cap B\right) - P\left(A\right)P\left(B\right)\right| \leq \phi_2\left(n\right)P\left(A\right),$$

$\forall\ A \in \mathscr{F}_k,\ \forall\ B \in \mathscr{F}_{k+n}^{\infty},\ \forall\ k \geq 0$, com $\phi_1\left(n\right) \downarrow 0$ e $\phi_2\left(n\right) \downarrow 0$, observado que as definições clássicas das σ-álgebras $\mathscr{F}_k$, e $\mathscr{F}_{k+n}^{\infty}$ encontram-se na seção 2.2.

Para complementar o tema *mixing*, enunciamos duas desigualdades presentes em Roussas e Ioannides [17] (Teoremas 2.6 e 2.8). Com o suporte teórico descrito anteriormente, deduzimos, como parte de nossa contribuição, quatro desigualdades (para momentos) tipo Bahr-Esseen para seqüências *mixing* (Lemas 2.10 a 2.13). Ratificamos que duas são de especial interesse:

$$E\left|S_n\right|^r \leq C_3\left\{m_n^r b_n^r k_n^{\frac{r}{2}} + m_n^{r-1}\sum_{i=1}^{n} E\left(\left|X_i\right|^r I_{\{\ |X_i|\ >\ b_n - \phi_1(m_n)M\}}\right) + \left(m_n k_n \phi_1\left(m_n\right)M\right)^r\right\}, e$$

$$E\left|S_n\right|^r \leq C_4\left\{m_n^r b_n^r k_n^{\frac{r}{2}} + m_n^{r-1}\sum_{i=1}^{n} E\left(\left|X_i\right|^r I_{\{\ |X_i|\ >\ b_n - \phi_2(m_n)M\}}\right) + \left(m_n k_n \phi_2\left(m_n\right)M\right)^r\right\},$$

com $C_3 = C_3(r), C_4 = C_4(r), m_n, b_n$ e k_n explicadas no decorrer da seção 2.2.

O Capítulo 3 constitui-se na principal parte desta tese. Utilizamos a distância de Mallows para aproximar, em distribuição, uma variável aleatória estritamente α-estável Y, $\alpha \in (1, 2)$, por uma soma de variáveis aleatórias (não necessariamente independentes e nem necessariamente identicamente distribuídas), desde que sejam adotadas hipóteses convenientes.

Por oportuno, apresentamos, em seq*ü*ência, justificativas para a escolha de $\alpha > 1$, a partir do desenvolvimento do seguinte raciocínio. Procuramos, inicialmente, obter a convergência $\lim d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = 0$, onde Y é uma variável aleatória α-estável, $\alpha \in (1, 2)$, e $S_n^{(\alpha)} = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) / n^{\frac{1}{\alpha}}$, com $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma seq*ü*ência de variáveis aleatórias.

Conforme já citamos, analisamos os seguintes casos para essa seq*ü*ência de variáveis aleatórias:

(a) independência,

(b) $\left\{ S_n, \mathscr{G}_n \right\}$ martingale,

(c) ϕ-*mixing*, e

(d) cadeia de Markov uniformemente ergódica.

Na demonstração dos três últimos casos, utilizamos a desigualdade de Burkholder, a qual pressupõe $\alpha > 1$.

Posteriormente, pretendemos aplicar o Corolário 2.17, nos quatro casos descritos acima, para concluir que $\lim d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = 0$ implica $S_n^{(\alpha)} \xrightarrow{d} Y$. Para tanto, precisamos garantir que $E\left|S_n^{(\alpha)}\right| < \infty$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, e que $E\,|Y| < \infty$.

A primeira condição é satisfeita para os casos de independência, ϕ-*mixing* e cadeia de Markov uniformemente ergódica ao assumirmos que $EX_n = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, e, como conseq*ü*ência, $ES_n^{(\alpha)} = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. No caso martingale, pela própria definição, temos que $E\left|S_n^{(\alpha)}\right| < \infty$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

A escolha de $\alpha > 1$ permite satisfazer a segunda condição, uma vez que, para uma variável aleatória α-estável Y, com $\alpha \in (0, 2)$, temos que $E\,|Y|^p < \infty$, para $0 < p < \alpha$. Esse resultado será visto com mais detalhes na seção 1.2.

Retiramos, inicialmente, a hipótese de distribuição idêntica para as variáveis aleatórias X_n, $n \in \mathbb{N}^*$. A partir de um teorema, cuja demonstração foi sugerida por uma referência anônima, publicado por Johnson e Samworth [12] em 2005 e que originou esta pesquisa, apresentamos o primeiro teorema de convergência que elaboramos (Teorema 3.2). Esse resultado elimina certa inconsistência, comentada na seção 3.2, encontrada no desenvolvimento da citada demonstração.

Teorema *Fixe $\alpha \in (0,2)$. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias independentes, com $EX_n = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, se $\alpha > 1$. Denotamos $S_n^{(\alpha)} = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) / n^{\frac{1}{\alpha}}$. Considere Y uma variável aleatória estritamente α-estável e Y_1, Y_2, ... cópias independentes de Y. Suponhamos que esteja satisfeita a condição:*

$$\forall\ b > 0,\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^{\alpha}\, I_{\{\ |X_i - Y_i| \,>\, b\, n^{\delta}\}}\right) \to 0\ ,\ \textit{quando}\ \ n \to \infty\ ,$$

com $0 < \delta < \left(\frac{2-\alpha}{2\,\alpha}\right)$, se $\alpha \in [1,2)$ e $0 < \delta < \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)$, se $\alpha \in (0,1)$.

Se $\alpha \neq 1$ então $\lim d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = 0$. Se $\alpha = 1$ então existe uma seqüência $c_n = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\,(X_i - Y_i)$ tal que $\lim d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)} - c_n}, F_Y) = 0$.

Observamos que, nas condições desse Teorema, com $\alpha \in (1,2)$, o Corolário 2.17 implica que $S_n^{(\alpha)} \xrightarrow{d} Y$.

Posteriormente, na seção 3.3, estudamos o caso martingale. Excluímos a hipótese de independência e de distribuição idêntica das variáveis aleatórias X_n, $n \in \mathbb{N}^*$. Adotamos, entretanto, que $\left\{S_n,\ \mathscr{G}_n\right\}$ é uma martingale. Com as mesmas condições do teorema anterior, obtemos, para $\alpha \in (1,2)$, que $\lim d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = 0$ e, conseqüentemente, $S_n^{(\alpha)} \xrightarrow{d} Y$ (Teorema 3.5). Esse resultado também foi elaborado no decorrer desta tese.

Na seção 3.4 tratamos o caso ϕ-*mixing* com as variações ϕ_1-*mixing* e ϕ_2-*mixing* para a seqüência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n \geq 1}$. Novamente, a hipótese de mesma distribuição dessas variáveis é descartada.

Ressaltamos que, tanto para ϕ_1-*mixing* quanto para ϕ_2-*mixing*, com a adoção de hipóteses similares aos casos anteriores, temos, para $\alpha \in (1,2)$, que $\lim d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = 0$ e, conseqüentemente, $S_n^{(\alpha)} \xrightarrow{d} Y$. No caso *mixing* (Teoremas 3.6 e 3.8, de nossa autoria), assumimos, também, a hipótese adicional:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^l \phi_i\,(n) < \infty, \forall\; l \in \mathbb{N}^*,$$

com $i = 1$ ou 2.

Esclarecemos que o resultado para ϕ_1-*mixing* está fortemente baseado na estimativa desenvolvida no Lema 2.12. Em contrapartida, para o caso ϕ_2-*mixing*, a demonstração está concentrada na estimativa do Lema 2.13.

Na última seção do Capítulo 3 e, conseqüentemente, desta tese, sintetizamos o presente trabalho. Iniciamos com a definição de cadeia de Markov uniformemente ergódica. Com o apoio de resultados de Roussas e Ioannides [17] e de Campos e Dorea [3] (Teorema 3.10), mostramos que toda cadeia de Markov uniformemente ergódica é ϕ_2-*mixing*, com coeficiente *mixing* $\phi_2\,(n) = 2\lambda\,\rho^n$ (Proposição 3.11). Retornamos ao caso da seção 3.4.

Assim, mediante a adoção de condições similares às hipóteses dos resultados já comentados, conseguimos obter, a exemplo dos casos anteriores, que, para $\alpha \in (1,2)$, $\lim d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = 0$ e, conseqüentemente, $S_n^{(\alpha)} \xrightarrow{d} Y$.

Isto é, encontramos condições suficientes para aproximarmos, em distância de Mallows e em distribuição, uma variável aleatória estritamente α-estável, $\alpha \in (1,2)$, por uma soma de variáveis aleatórias (não necessariamente independentes e não necessariamente identicamente distribuídas), as quais constituem uma cadeia de Markov uniformemente ergódica (Teorema 3.12, que elaboramos especialmente para este trabalho). Esse é o objetivo desta tese.

A nossa contribuição, conforme já mencionada, está registrada no Capítulo 2 (Lemas 2.10 a 2.13) e, sobretudo, no Capítulo 3 (Teoremas 3.2, 3.5, 3.6, 3.8 e 3.12 e Proposição 3.3). Ressaltamos que, antes de cada um dos citados resultados, há, no texto, uma menção a nossa autoria. Além disso, de modo a permitir, no decorrer da leitura desta tese, ágil identificação visual de nossos resultados, utilizamos o símbolo * após a respectiva numeração. Por exemplo, Teorema 3.12.*.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos definições e resultados básicos relativos aos tópicos Distribuições Estáveis, Cadeias de Markov com Espaço de Estados Geral e Distância de Mallows. Esses itens contribuem para a formação do suporte teórico deste trabalho e colaboram para contextualizá-lo, por meio da distância de Mallows, no universo das distribuições estáveis e das cadeias de Markov.

A seção 1.2 é dedicada ao tópico Distribuições Estáveis. Após citar algumas referências bibliográficas consultadas, registramos, sinteticamente, os conceitos e os resultados que utilizamos nesta tese.

Na seção seguinte, definimos Cadeias de Markov com Espaço de Estados Geral e realizamos alguns comentários pertinentes.

Na seção 1.4, desenvolvemos, a partir de uma coletânea de artigos pesquisados, um resumo histórico sobre a distância de Mallows. Em seguida, enunciamos a definição da citada distância e destacamos algumas peculiaridades.

1.2 Distribuições Estáveis

As definições e os resultados desta seção foram extraídos de Embrechts [8], Feller [9], Ibragimov [11] e Samorodnitsky e Taqqu [19].

Definição 1.1. *Uma variável aleatória Y possui distribuição estável se, para Y_1, Y_2, ... cópias independentes de Y, existem seqüências $\{c_n\}_{n\,\geq\,1}$, $c_n \in \mathbb{R}^*_+$, $\forall\; n \in \mathbb{N}^*$, e $\{d_n\}_{n\,\geq\,1}$, $d_n \in \mathbb{R}$, $\forall\; n \in \mathbb{N}^*$, tais que*

$$Y_1 + Y_2 + ... + Y_n \stackrel{d}{=} c_n Y + d_n \;. \tag{1.1}$$

Se $d_n = 0$, $\forall\; n \in \mathbb{N}^*$, então a variável aleatória Y possui distribuição estritamente estável.

Ressaltamos que as seqüências $\{c_n\}_{n\,\geq\,1}$ e $\{d_n\}_{n\,\geq\,1}$ serão explicitadas após enunciarmos a próxima definição, a qual relaciona a representação das distribuições estáveis por função característica e é equivalente à Definição 1.1.

Definição 1.2. *Uma variável aleatória Y possui distribuição estável se existem parâmetros $\alpha \in (0,2]$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $\beta \in [-1,1]$ e $\mu \in \mathbb{R}$ tais que a sua função característica tem a seguinte forma:*

$$\phi\,(t) = E\,(i\;t\;Y) = \begin{cases} \exp\left\{-\sigma^\alpha\,|t|^\alpha\;\left(1 - i\;\beta\,(sinal\,t)\;\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\;\mu\;t\right\}, & se \quad \alpha \neq 1, \;\; e \\ \\ \exp\left\{-\sigma\,|t|\;\left(1 + i\;\beta\;\frac{2}{\pi}\,(sinal\,t)\;\ln|t|\right) + i\;\mu\;t\right\}, & se \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

A propósito, α, σ, β e μ são denominados, respectivamente, parâmetro (expoente ou índice) de estabilidade, parâmetro de escala, parâmetro de assimetria (ou viés) e parâmetro de locação. O parâmetro α é o mais importante dentre os quatro parâmetros citados na caracterização de uma variável aleatória com distribuição estável. Assim, adotaremos, doravante, a terminologia distribuição (ou variável aleatória) α-estável.

Proposição 1.3. *Seja Y uma variável aleatória α-estável, com $\alpha \in (0,2]$. Então,*

$$c_n = n^{\frac{1}{\alpha}}, \;\; com \;\; \alpha \in (0,2]\,; \;\; e \tag{1.2}$$

$$d_n = \begin{cases} \mu\left(n - n^{\frac{1}{\alpha}}\right), & se \quad \alpha \neq 1, \;\; e \\ \\ \frac{2}{\pi}\,\sigma\,\beta\,n\;\ln\,(n)\,, & se \quad \alpha = 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Enunciaremos, a seguir, dois resultados relacionados às distribuições de variáveis aleatórias estritamente α-estáveis.

Proposição 1.4. *Uma variável aleatória α-estável Y, com $\alpha \neq 1$ $(\alpha = 1)$, é estritamente α-estável se, e somente se, $\mu = 0$ $(\beta = 0)$.*

Corolário 1.5. *Seja Y uma variável aleatória α-estável, com $\alpha \neq 1$. Então, a variável aleatória $Y - \mu$ é estritamente α-estável.*

Registramos, agora, dois resultados referentes aos momentos de variáveis aleatórias α-estáveis.

Proposição 1.6. *Seja Y uma variável aleatória α-estável, com $\alpha \in (0, 2)$. Então,*

(a) $E\,|Y|^p < \infty$, *se* $0 < p < \alpha$, *e*

(b) $E\,|Y|^p = \infty$, *se* $p \geq \alpha$.

Proposição 1.7. *Seja Y uma variável aleatória α-estável, com $\alpha \in (1, 2]$. Então, o parâmetro de locação μ é igual a média, isto é, $\mu = EY$.*

Assim, com as Proposições 1.4 e 1.7, podemos considerar que uma variável aleatória estritamente α-estável Y, com $1 < \alpha \leq 2$, possui média igual a zero, isto é, $EY = 0$.

Concluíremos esta seção com a definição de domínio de atração de uma função de distribuição de uma variável aleatória e a relação entre esse domínio e as variáveis aleatórias α-estáveis.

Definição 1.8. *Dada uma variável aleatória Y, com função de distribuição F_Y, definimos o domínio de atração de F_Y como sendo o seguinte conjunto:*

$$DA(F_Y) = \Big\{G : G \text{ é função de distribuição e para } X_1, X_2, \ldots \text{ iid com função de distribuição } G, \text{ temos que existem seqüências} \{a_n\}_{n\,\geq\,1}, a_n \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \text{ e } \{b_n\}_{n\,\geq\,1}, b_n \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \text{ tais que } \tfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} Y\Big\}.$$

Proposição 1.9. *Uma variável aleatória Y, com função de distribuição F_Y, é estável se, e somente se, $DA(F_Y) \neq \emptyset$.*

De acordo com as referências bibliográficas citadas no início desta seção e observada a Proposição 1.9, as seqüências $\{a_n\}_{n\,\geq\,1}$ e $\{b_n\}_{n\,\geq\,1}$ da Definição 1.8 assim se configuram:

(a) $a_n = n^{1/\alpha}\, L\,(n)$, $\forall\; n \in \mathbb{N}^*$, onde L é uma função de variação lenta (ver Apêndice), e

(b) $b_n = n\, \int_{|x| \leq\, a_n} x\; dG\,(x)$, $\forall\; n \in \mathbb{N}^*$.

Em particular, podemos tomar $b_n = b\; n$, $\forall\; n \in \mathbb{N}^*$, onde

$$b = \begin{cases} EX_1, & \text{se} \quad \alpha \in (1, 2]\,, \\ \;\;0, & \text{se} \quad \alpha \in (0, 1)\,, \quad \text{e} \\ \;\;0, & \text{se} \quad \alpha = 1 \;\; \text{e} \;\; G \;\; \text{é simétrica.} \end{cases}$$

Definição 1.10. *Dada uma variável aleatória Y, com função de distribuição F_Y, definimos o domínio normal de atração de F_Y como sendo o seguinte conjunto:*

$DNA\,(F_Y) = \{G : G$ *é função de distribuição e para* $X_1, X_2, ...$ *iid com função de distribuição* G*, temos que existem uma constante* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *e uma seqüência* $\{b_n\}_{n\,\geq\,1}$, $b_n \in \mathbb{R}, \forall\; n \in \mathbb{N}^*$, *tais que* $\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n - b_n}{a\; n^{\frac{1}{\alpha}}} \xrightarrow{d} Y \Big\}$.

Observamos que $DNA\,(F_Y) \;\subseteq\; DA\,(F_Y)$.

1.3 Cadeias de Markov com Espaço de Estados Geral

O conteúdo desta seção foi baseado em Meyn e Tweedie [16]. Consideremos uma cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\,\geq\,0}$ com espaço de estados geral $\Big(\mathbb{E},\; \mathscr{E}\Big)$, onde $\mathbb{E}$ é um conjunto arbitrário qualquer e $\mathscr{E}$ é uma σ-álgebra gerada por subconjuntos de $\mathbb{E}$.

Essa cadeia de Markov, que assume valores em $\mathbb{E}$, apresenta o núcleo de transição descrito abaixo:

$$P = \Big\{P(x, A) : x \in \mathbb{E} \;\; e \;\; A \in \; \mathscr{E}\Big\}.$$

Relativamente a esse núcleo, observamos que estão satisfeitas as seguintes equações:

$$P(X_{n+1} \in A|X_0, ..., X_n) = P(X_{n+1} \in A|X_n) \ , \ e \tag{1.4}$$

$$P(X_n \in A|X_0 = x) = P^n(x, A) = \int_{\mathbb{E}} P^m(x, dy) \ P^{n-m}(y, A), \ \ 1 \leq m \leq n \ . \tag{1.5}$$

A propósito, ressaltamos que a última igualdade, denominada equação de Chapman-Kolmogorov, decorre da equação (1.4), conhecida como propriedade de Markov.

Lembramos que, pelo fato de o processo markoviano $\{X_n\}_{n \geq 0}$ ficar completamente determinado pelo núcleo P e por uma distribuição inicial $\mu_0 \, (A) = P \, (X_0 \in A)$, temos:

$$P(X_0 \in A_0, ..., X_n \in A_n) = \int_{A_0} \mu_0 \, (dx_0) \int_{A_1} P(x_0, dx_1) \ ... \int_{A_n} P(x_{n-1}, dx_n) \ .$$

Registramos que uma situação interessante ocorre quando $\mu_0 \, (A) = \delta_x(A)$, onde

$$\delta_x \, (A) = \begin{cases} 1, & \text{se } \ x \in A, \ \text{e} \\ 0, & \text{se } \ x \notin A. \end{cases}$$

Nesse caso, dizemos que o processo se inicia em x e denotamos isso por

$$P(X_n \in A|X_0 = x) = P_x(X_n \in A) \, .$$

Concluíremos esta seção com a apresentação de duas definições importantes no estudo das cadeias de Markov e que compõem o suporte teórico desta tese.

Definição 1.11. *Uma medida de probabilidade π é denominada uma distribuição estacionária (ou invariante) se $\pi = \pi P$.*

Definição 1.12. *Uma medida de probabilidade π é denominada uma distribuição de equilíbrio (ou limite a longo prazo) se*

$$\lim_{n \to \infty} |P^n(x, A) - \pi \, (A)| = 0 \ , \forall \ x \in \mathbb{E} \ \ e \, \forall \ A \in \ \mathscr{E}. \tag{1.6}$$

1.4 Distância de Mallows

1.4.1 Histórico

O termo distância de Wasserstein, também conhecida como distância de Mallows, apareceu pela primeira vez num trabalho de Dobrushin [7] em 1970. Wasserstein [22] havia introduzido, em 1969, a métrica $l_1(F_X, F_Y) = \inf\{E[d(X,Y)]\}$, onde o ínfimo é calculado sobre todas as variáveis aleatórias X e Y com funções de distribuição F_X e F_Y, respectivamente, num espaço métrico (M, d).

Porém, a história dessa métrica iniciou-se um pouco antes. Em 1914, Gini, cujo trabalho encontramos, apenas, em citações, apresentou a métrica l_1 num conjunto discreto na linha real. Por sua vez, Kantorovich [13], em 1940, estudou-a no contexto de espaços métricos compactos. Esse trabalho foi motivado pelo clássico Problema de Transporte de Monge. Mais tarde, Kantorovich generalizou a distância-transporte para funcionais de custo geral: o caso especial c(x, y) $= d^r(x, y)$ estabeleceu uma correspondência entre a métrica $l_r(F_X, F_Y) = \inf\{\|d(X,Y)\|_r\}$ e a norma usual do espaço métrico L^r.

Salvemi [18], em 1943, para o caso discreto, e Dall'Aglio [6], em 1956, para o caso geral, provaram a representação básica:

$$l_r^r(F_X, F_Y) = \int_0^1 \left| F_X^{-1}(u) - F_Y^{-1}(u) \right|^r \, du \ , \ r \geq 1, \tag{1.7}$$

onde F_X e F_Y são as funções de distribuição de X e de Y, respectivamente, e

$$F_X^{-1}(u) = \sup\{x \in \mathbb{R} : \ F_X(x) \leq u\}. \tag{1.8}$$

Em seu trabalho, Gini apresentou a fórmula (1.7) para distribuições empíricas com $r = 1$ e $r = 2$. O estudo de Gini estimulou, na Escola Italiana de Probabilidade, a elaboração de muitos trabalhos em medidas com marginais dadas, enquanto que Fréchet [10], em 1957, explicitou as propriedades métricas dessas distâncias.

Mallows [15] introduziu, em 1972, a métrica l_2 num contexto estatístico. Utilizou as propriedades dessa métrica para provar um teorema do limite central. Além disso, provou a equação (1.7). Baseado nesse trabalho, Bickel e Freedman [1] descreveram, em 1981, as propriedades topológicas e investigaram aplicações para problemas estatísticos como, por exemplo, uso do método "bootstrap".

Portanto, como a métrica l_r foi historicamente introduzida diversas vezes sob diferentes perspectivas, deveríamos chamá-la de Gini-Kantorovich-Dall'Aglio-Wasserstein-Mallows. Neste trabalho, para simplificar, adotamos apenas o nome Distância (ou métrica) de Mallows.

1.4.2 Definição

Definição 1.13. *Para qualquer $r > 0$, definimos a distância r de Mallows ou, resumidamente, distância de Mallows, entre as funções de distribuição F_X e F_Y como*

$$d_r(F_X, F_Y) = \left(\inf_{(X,Y)} E(|\, X - Y|^r\,) \right)^{\frac{1}{r}}, \tag{1.9}$$

onde o ínfimo é calculado sobre os pares (X, Y) cujas funções de distribuição marginal são F_X e F_Y, respectivamente.

Observamos que o ínfimo da equação (1.9) pode ser infinito. Isso ocorre, por exemplo, quando X é α - estável, $\alpha \in (0, 2)$ e $Y = 0$ quase certamente, uma vez que $E\,|X|^r = \infty$, para $r \geq \alpha$. Veremos, em seguida, uma das situações em que temos o ínfimo finito.

Definição 1.14. *Definimos $\mathbb{F}_r = \{F : F$ é função de distribuição e $\int |x|^r \; dF(x) < \infty\}$.*

Ressaltamos que, pela desigualdade de Minkowski, para F_X e F_Y em $\mathbb{F}_r$, $r \geq 1$, $d_r(F_X, F_Y) < \infty$. Além disso, para F_X e F_Y em $\mathbb{F}_r$, $r < 1$, $d_r(F_X, F_Y) < \infty$, uma vez que $|\, x + y|^r \leq |\, x|^r + |\, y|^r$, $\forall\, x$ e $y \in \mathbb{R}$.

Capítulo 2

Desigualdades para Momentos

2.1 Introdução

Neste capítulo, deduzimos, na seção 2.2, duas desigualdades (Lemas 2.12 e 2.13), que serão fundamentalmente importantes na formação dos resultados do Capítulo 3 e que integram o conjunto de resultados que obtivemos no decorrer da pesquisa. Para tanto, nessa seção, apresentamos, inicialmente, desigualdades clássicas para momentos (Proposição 2.1). Em seguida, enunciamos as desigualdades de Bahr-Esseen e de Burkholder (Proposições 2.2 e 2.4, respectivamente), as quais subsidiarão o desenvolvimento de resultados da citada seção e do Capítulo 3.

A propósito, essas desigualdades assim se configuram:

Bahr-Esseen: para $1 < r < 2$, com a condição $E\left(X_{n+1}|S_n\right) = 0$ q.c., temos:

$$E\left|S_n\right|^r \leq 2\left(\sum_{i=1}^{n} E\left|X_i\right|^r\right);$$

Burkholder: para $r > 1$, com a condição de $\left\{S_n,\ \mathscr{G}_n\right\}$ ser uma martingale, temos:

$$E\left|S_n\right|^r \leq C\left(r\right)\ E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{\frac{r}{2}}.$$

No próximo passo, registramos as definições de duas variações de dependência do tipo *mixing* (Definição 2.5 - ϕ_1-*mixing* e Definição 2.7 - ϕ_2-*mixing*), a saber:

ϕ_1-*mixing*:

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \phi_1(n)P(A)P(B),$$

ϕ_2-*mixing*:

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \phi_2(n)P(A),$$

$\forall\ A \in \mathscr{F}_k$, $\forall\ B \in \mathscr{F}_{k+n}^{\infty}$, $\forall\ k \geq 0$, com $\phi_1(n) \downarrow 0$ e $\phi_2(n) \downarrow 0$, observado que as σ-álgebras clássicas $\mathscr{F}_k$, e $\mathscr{F}_{k+n}^{\infty}$ estão devidamente definidas na seção 2.2.

Para complementar o tema *mixing*, enunciamos duas desigualdades presentes em Roussas e Ioannides [17] (Teoremas 2.6 e 2.8). Com o suporte teórico anterior, obtemos, como parte de nossa contribuição, quatro desigualdades tipo Bahr-Esseen (momentos) para seqüências *mixing* (Lemas 2.10 a 2.13), sendo duas de especial interesse:

$$E|S_n|^r \leq C_3 \left\{ m_n^r b_n^r k_n^{\frac{r}{2}} + m_n^{r-1} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i|^r I_{\{\,|X_i| > b_n - \phi_1(m_n)M\}}\right) + (m_n k_n \phi_1(m_n) M)^r \right\}, e$$

$$E|S_n|^r \leq C_4 \left\{ m_n^r b_n^r k_n^{\frac{r}{2}} + m_n^{r-1} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i|^r I_{\{\,|X_i| > b_n - \phi_2(m_n)M\}}\right) + (m_n k_n \phi_2(m_n) M)^r \right\},$$

com $C_3 = C_3(r), C_4 = C_4(r), m_n, b_n$ e k_n explicadas no decorrer da seção 2.2.

Na seção 2.3, retornamos ao tema distância de Mallows tratado, introdutoriamente, na seção 1.4. Iniciamos com o registro do fato de o ínfimo da equação (1.9), ou seja,

$$d_r(F_X, F_Y) = \left(\inf_{(X,Y)} E(|\,X - Y|^r\,) \right)^{\frac{1}{r}},$$

ser assumido para $r \geq 1$. Nesse sentido, apresentamos dois resultados: um devido a Major [14] e o outro, a Johnson e Samworth [12] (Teoremas 2.14 e 2.15, respectivamente).

O Corolário 2.17 consolida uma importante conclusão: para $r \geq 1$, $\lim d_r(F_n, F) = 0$ implica $X_n \xrightarrow{d} X$, onde a variável aleatória X_n (X) tem função de distribuição F_n (F), desde que E$|X_n|$ e E$|X|$ sejam finitas. Completamos o Capítulo 2 com a demonstração que a distância de Mallows constitui-se em uma métrica (Proposições 2.19 e 2.20).

2.2 Desigualdades Tipo Bahr-Esseen para Seqüências ϕ-*mixing*

A proposição abaixo apresenta três desigualdades de momento bastante conhecidas e que podem ser localizadas em Chung [5].

Proposição 2.1. *Sejam X uma variável aleatória e $\{X_n\}_{n\,\geq\,1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias. Então,*

(a) $(E\,|X|^s)^{\frac{1}{s}} \leq (E\,|X|^r)^{\frac{1}{r}}$, *se* $0 < s \leq r$;

(b) $E\,|S_n|^r \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E\,|X_i|^r$, *se* $0 < r \leq 1$; *e*

(c) $E\,|S_n|^r \leq n^{r-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E\,|X_i|^r$, *se* $r > 1$.

Os três resultados seguintes referem-se às desigualdades de Bahr-Esseen e de Burkholder, as quais serão utilizadas para desenvolver resultados desta seção e do próximo capítulo.

Proposição 2.2. *(von Bahr e Esseen [21], 1965) Seja $\{X_n\}_{n\,\geq\,1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias que satisfazem a condição $E\,(X_{n+1}|S_n) = 0$, q.c. . Se $1 < r < 2$, então*

$$E\,|S_n|^r \leq 2\left(\sum_{i=1}^{n} E\,|X_i|^r\right). \tag{2.1}$$

Para $r = 2$, temos:

$$E\left(S_n^2\right) = \sum_{i=1}^{n} EX_i^2\ . \tag{2.2}$$

Demonstração:

Caso 1: $1 < r < 2$

A demonstração desse fato pode ser encontrada em von Bahr e Esseen [21] ou em Chatterji [4].

Caso 2: $r = 2$

Consideremos $n = 2$. Notamos que:

$$E\left(X_1 \, X_2\right) = E\left(E\left(X_1 \, X_2\right)|X_1\right) = E\left(X_1 \, E\left(X_2|X_1\right)\right) = 0,$$

devido ao fato de $E\left(X_2|X_1\right) = 0$.

Portanto, $E\left(X_1 + X_2\right)^2 = EX_1^2 + EX_2^2 + 2 \, E\left(X_1 \, X_2\right) = EX_1^2 + EX_2^2$.

A demonstração para n qualquer segue por indução. ∎

Corolário 2.3. *Se $1 < r < 2$ $(r = 2)$, então a desigualdade (2.1) (igualdade (2.2)) permanece válida nos seguintes casos:*

(a) *as variáveis aleatórias X_1, X_2, ... são independentes e $EX_n = 0$, $\forall \, n \in \mathbb{N}^*$, e*

(b) $\left\{S_n, \mathscr{F}_n\right\}$ *é uma martingale, onde $\mathscr{F}_n = \sigma\left(X_i : i = 1, ..., n\right)$.*

Demonstração:

Item (a):

Imediata, pois a condição $E\left(X_{n+1}|S_n\right) = 0$, q.c., é trivialmente satisfeita.

Item (b):

Observamos que $E\left(X_{n+1}|S_n\right) = E\left\{E\left(X_{n+1}|\mathscr{F}_n\right)|S_n\right\} = 0$, q.c., pois, devido à hipótese de martingale, $E\left(X_{n+1}|\mathscr{F}_n\right) = 0$, q.c. . ∎

Proposição 2.4. *(Burkholder [2], 1973) Seja $\left\{S_n, \mathscr{G}_n\right\}$ uma martingale. Se $r > 1$, então*

$$E\left|S_n\right|^r \leq C\left(r\right) \; E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{\frac{r}{2}}. \tag{2.3}$$

Construíremos, a partir deste ponto, os dois principais resultados desta seção (Lemas 2.12 e 2.13), as quais se constituem em desigualdades tipo Bahr-Esseen para seqüências *ϕ-mixing*. Essas desigualdades, que desenvolvemos para esta tese, configuram-se como subsídios para alguns dos mais relevantes resultados deste trabalho, conforme pode ser conferido no Capítulo 3.

Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias. Consideremos, então, as seguintes σ-álgebras:

(a) $\mathscr{F}_0 = \{ \emptyset, \Omega\}$,

(b) $\mathscr{F}_k = \sigma(X_i : i = 1, ..., k)$, $\forall\, k \geq 1$, e

(c) $\mathscr{F}_{k+n}^{\infty} = \sigma(X_i : i \geq k+n)$, $\forall\, n \geq 1$ e $\forall\, k \geq 0$.

Definição 2.5. *Uma seqüência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n \geq 1}$ é denominada ϕ_1-mixing, com coeficiente mixing ϕ_1, se*

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \phi_1(n)\, P(A)\, P(B)\,, \tag{2.4}$$

$\forall\, A \in \mathscr{F}_k$, $\forall\, B \in \mathscr{F}_{k+n}^{\infty}$, $\forall\, k \geq 0$ *e com* $\phi_1(n) \downarrow 0$.

Teorema 2.6. *(Roussas e Ioannides [17], 1987) Consideremos η uma variável aleatória $\mathscr{F}_{k+n}^{\infty}$-mensurável com $E|\eta| < \infty$. Então, sob ϕ_1-mixing, temos:*

$$\left| E\left(\eta | \mathscr{F}_k\right) - E(\eta)\right| \leq \phi_1(n)\, E|\eta|\,, \ q.c.\ . \tag{2.5}$$

Definição 2.7. *Uma seqüência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n \geq 1}$ é denominada ϕ_2-mixing, com coeficiente mixing ϕ_2, se*

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \phi_2(n)\, P(A)\,, \tag{2.6}$$

$\forall\, A \in \mathscr{F}_k$, $\forall\, B \in \mathscr{F}_{k+n}^{\infty}$, $\forall\, k \geq 0$ *e com* $\phi_2(n) \downarrow 0$.

Teorema 2.8. *(Roussas e Ioannides [17], 1987) Consideremos η uma variável aleatória $\mathscr{F}_{k+n}^{\infty}$-mensurável tal que $|\eta| < M$, q.c. . Então, sob ϕ_2-mixing, temos:*

$$\left| E\left(\eta | \mathscr{F}_k\right) - E(\eta)\right| \leq 2\, \phi_2(n)\ M, \ q.c.\ . \tag{2.7}$$

A proposição a seguir nos permite reduzir as etapas de demonstração dos lemas subseqüentes, conforme constataremos adiante, e pode ser encontrada em Chung [5]. Em todos esses resultados, $\{m_n\}$ denota uma subseqüência, onde $m_n \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in A \subseteq \mathbb{N}^*$ e $\{k_n\}$ a seqüência definida por $k_n = [n/m_n]$ (parte inteira), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Proposição 2.9. *Seja* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *uma seqüência de variáveis aleatórias, tal que* $E|X_n| < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Consideremos* $\{m_n\}$ *e* $\{k_n\}$ *na forma explicada anteriormente. Então, para cada* $j = 1, ..., m_n$ *fixado,* $\left\{ \sum_{i=1}^{k_n-1} Z_i(j) \ , \ \mathscr{F}_{(k_n-1)\, m_n+j} \right\}$ *constitui uma martingale, onde* $Z_i(j) = X_{i\, m_n+j} - E\left(X_{i\, m_n+j} \,|\mathscr{F}_{(i-1)\, m_n+j}\right)$.

Demonstração:

Definimos, para cada $j = 1, ..., m_n$ fixado, $U^j_{k_n-1} = \sum_{i=1}^{k_n-1} Z_i(j)$. Pelo fato de $U^j_{k_n-1}$ e de $E\left(X_{k_n\, m_n+j} \,|\mathscr{F}_{(k_n-1)\, m_n+j}\right)$ serem $\mathscr{F}_{(k_n-1)\, m_n+j}$ - mensuráveis, temos a igualdade:

$$\begin{aligned} E\left(U^j_{k_n} |\mathscr{F}_{(k_n-1)\, m_n+j}\right) &= E\left(U^j_{k_n-1} + Z_{k_n}(j) \,|\mathscr{F}_{(k_n-1)\, m_n+j}\right) = \\ &= U^j_{k_n-1} + E\left(X_{k_n\, m_n+j} - E\left(X_{k_n\, m_n+j}|\mathscr{F}_{(k_n-1)\, m_n+j}\right) |\mathscr{F}_{(k_n-1)\, m_n+j}\right) = U^j_{k_n-1}, \text{ q.c..} \end{aligned}$$

■

Com essa proposição, podemos aplicar as desigualdades de Bahr-Esseen e de Burkholder, relativamente a martingale acima, para obter os lemas seguintes, todos de nossa autoria.

Lema 2.10. ** Seja* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *uma seqüência de variáveis aleatórias* ϕ_1 *- mixing. Suponhamos que* $EX_n = 0$ *e que* $E|X_n| \leq M < \infty$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. *Considere* $1 < r < 2$. *Então, dada uma subseqüência* $\{m_n\}$ *de números naturais, existe uma constante* $C_1 = C_1(r) > 0$ *tal que:*

$$E|S_n|^r \leq C_1 \left\{ m_n^{r-1} \sum_{i=1}^{n} E|X_i|^r + (m_n k_n \phi_1(m_n) M)^r \right\}, \tag{2.8}$$

onde $k_n = [n/m_n]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstração:

Definimos $l_n = n - k_n m_n$. Temos, então, que $l_n < m_n$. Assim,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{m_n} X_j + \sum_{j=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{k_n-1} \left(X_{i\, m_n+j} - E\left(X_{i\, m_n+j} \,|\mathscr{F}_{(i-1)\, m_n+j}\right)\right) + \\ &+ \sum_{j=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{k_n-1} E\left(X_{i\, m_n+j} \,|\mathscr{F}_{(i-1)\, m_n+j}\right) + \sum_{l=1}^{l_n} X_{k_n m_n+l}. \end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 2.1, item (c), pelo Teorema 2.6 e pela desigualdade de Bahr-Esseen (caso martingale), obtemos:

$$
\begin{aligned}
E\left|S_n\right|^r \leq\ & 4^{r-1}\left\{E\left|\sum_{j=1}^{m_n} X_j\right|^r + E\left|\sum_{j=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{k_n-1}\left(X_{i\,m_n+j} - E\left(X_{i\,m_n+j}\mid \mathscr{F}_{(i-1)\,m_n+j}\right)\right)\right|^r + \right.\\
&+\ \left. E\left|\sum_{j=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{k_n-1} E\left(X_{i\,m_n+j}\mid \mathscr{F}_{(i-1)\,m_n+j}\right)\right|^r + E\left|\sum_{l=1}^{l_n} X_{k_n m_n+l}\right|^r\right\} \leq \\
\leq\ & 4^{r-1}\left\{m_n^{r-1}\sum_{j=1}^{m_n} E\left|X_j\right|^r + m_n^{r-1}\sum_{j=1}^{m_n} E\left|U_{k_n-1}^j\right|^r + \right.\\
&+\ m_n^{r-1}\left(k_n-1\right)^{r-1}\sum_{j=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{k_n-1} E\left|E\left(X_{i\,m_n+j}\mid \mathscr{F}_{(i-1)\,m_n+j}\right)\right|^r + \\
&+\ \left. l_n^{r-1}\sum_{l=1}^{l_n} E\left|X_{k_n m_n+l}\right|^r\right\} \leq \\
\leq\ & 4^{r-1}\left\{m_n^{r-1}\sum_{j=1}^{m_n} E\left|X_j\right|^r + 2\ m_n^{r-1}\sum_{j=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{k_n-1} E\left|Z_i(j)\right|^r + \right.\\
&+\ \left.\left(m_n k_n \phi_1\left(m_n\right) M\right)^r + m_n^{r-1}\sum_{l=1}^{l_n} E\left|X_{k_n m_n+l}\right|^r\right\} \leq \\
\leq\ & 4^{r-1}\left\{m_n^{r-1}\sum_{j=1}^{m_n} E\left|X_j\right|^r + \right.\\
&+\ 2^r\ m_n^{r-1}\sum_{j=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{k_n-1}\left(E\left|X_{i\,m_n+j}\right|^r + E\left|E\left(X_{i\,m_n+j}\mid \mathscr{F}_{(i-1)\,m_n+j}\right)\right|^r\right) + \\
&+\ \left.\left(m_n k_n \phi_1\left(m_n\right) M\right)^r + m_n^{r-1}\sum_{l=1}^{l_n} E\left|X_{k_n m_n+l}\right|^r\right\}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$E\left|S_n\right|^r \leq 4^{r-1}\,2^r\left\{m_n^{r-1}\sum_{i=1}^{n}E\left|X_i\right|^r+\left(m_n k_n \phi_1\left(m_n\right)M\right)^r\right\}.$$

Ressaltamos que a constante $C_1 = C_1\left(r\right) = 4^{r-1}\,2^r$. ∎

Para o caso ϕ_2 - *mixing*, temos um resultado similar, motivo pelo qual omitimos a respectiva demonstração.

Lema 2.11. ** Seja $\left\{X_n\right\}_{n\,\geq\,1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias ϕ_2 - mixing. Suponhamos que $EX_n = 0$ e que $\left|X_n\right| \;\leq M < \infty$ q.c., $\forall\; n \in \mathbb{N}^*$. Considere $1 < r < 2$. Então, dada uma subseqüência $\left\{m_n\right\}$ de números naturais, existe uma constante $C_2 = C_2\left(r\right) > 0$ tal que:*

$$E\left|S_n\right|^r \leq C_2\left\{m_n^{r-1}\sum_{i=1}^{n}E\left|X_i\right|^r+\left(m_n k_n 2\phi_2\left(m_n\right)M\right)^r\right\}, \tag{2.9}$$

onde $k_n \;=\; [n/m_n]$, $\forall\; n \in \mathbb{N}^*$.

Lema 2.12. ** Seja $\left\{X_n\right\}_{n\,\geq\,1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias ϕ_1 - mixing. Suponhamos que $EX_n = 0$ e que $E\left|X_n\right| \;\leq M < \infty$, $\forall\; n \in \mathbb{N}^*$. Considere $1 < r < 2$. Então, dadas uma seqüência qualquer $\left\{b_n\right\}$, tal que $b_n > 0$, $\forall\; n \in \mathbb{N}^*$, e uma subseqüência $\left\{m_n\right\}$ de números naturais, existe uma constante $C_3 = C_3\left(r\right) > 0$ tal que:*

$$E\left|S_n\right|^r \leq C_3\left\{m_n^r b_n^r k_n^{\frac{r}{2}}+m_n^{r-1}\sum_{i=1}^{n}E\left(\left|X_i\right|^r I_{\left\{\,\left|X_i\right|\,>\,b_n-\phi_1\left(m_n\right)M\right\}}\right)+\left(m_n k_n \phi_1\left(m_n\right)M\right)^r\right\}, \tag{2.10}$$

onde $k_n \;=\; [n/m_n]$, $\forall\; n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstração:

Pela demonstração realizada no Lema 2.10 e pela Desigualdade de Burkholder aplicada a martingale $\left\{\;U_{k_n-1}^j = \sum_{i=1}^{k_n-1} Z_i\left(j\right)\;,\;\mathscr{F}_{\left(k_n-1\right)\,m_n+j}\right\}$, temos:

$$
\begin{aligned}
E\left|S_n\right|^r &\leq 4^{r-1}\left\{m_n^{r-1}\sum_{j=1}^{m_n}E|X_j|^r + m_n^{r-1}\sum_{j=1}^{m_n}E\left|U_{k_n-1}^{j}\right|^r + \right.\\
&+ \left.\left(m_n k_n \phi_1\left(m_n\right)M\right)^r + m_n^{r-1}\sum_{l=1}^{l_n}E\left|X_{k_n m_n+l}\right|^r\right\} \leq \\
&\leq 4^{r-1}\left\{m_n^{r-1}\sum_{j=1}^{m_n}E\left|X_j\right|^r + m_n^{r-1}C\left(r\right)\sum_{j=1}^{m_n}E\left(\sum_{i=1}^{k_n-1}Z_i^2\left(j\right)\right)^{\frac{r}{2}} + \right.\\
&+ \left.\left(m_n k_n \phi_1\left(m_n\right)M\right)^r + m_n^{r-1}\sum_{l=1}^{l_n}E\left|X_{k_n m_n+l}\right|^r\right\}.
\end{aligned}
$$

As quatro etapas seguintes nos permitirão concluir a demonstração deste Lema.

Etapa 1:

Observamos que:

$$
Z_i^2\left(j\right) \;=\; Z_i^2\left(j\right)I_{\{\,|Z_i(j)|\,\leq\, b_n\}} \;+\; Z_i^2\left(j\right)I_{\{\,|Z_i(j)|\,>\, b_n\}}.
$$

Portanto, pela Proposição 2.1, item (b), obtemos:

$$
\begin{aligned}
E\left(\sum_{i=1}^{k_n-1}Z_i^2\left(j\right)\right)^{\frac{r}{2}} &\leq E\left(k_n\, b_n^2 + \sum_{i=1}^{k_n-1}Z_i^2\left(j\right)I_{\{\,|Z_i(j)|\,>\, b_n\}}\right)^{\frac{r}{2}} \leq \\
&\leq k_n^{\frac{r}{2}}\, b_n^r + \sum_{i=1}^{k_n-1}E\left(\left|Z_i\left(j\right)\right|^r I_{\{\,|Z_i(j)|\,>\, b_n\}}\right).
\end{aligned}
$$

Etapa 2:

Pela hipótese de ϕ_1-mixing,

$$
\begin{aligned}
|Z_i(j)| &= \left| X_{i\,m_n+j} - E\left(X_{i\,m_n+j} \,|\mathscr{F}_{(i-1)\,m_n+j} \right) \right| > b_n \Rightarrow \\
&\Rightarrow |X_{i\,m_n+j}| + \left| E\left(X_{i\,m_n+j} \,|\mathscr{F}_{(i-1)\,m_n+j} \right) \right| > b_n \Rightarrow \\
&\Rightarrow |X_{i\,m_n+j}| > b_n - \left| E\left(X_{i\,m_n+j} \,|\mathscr{F}_{(i-1)\,m_n+j} \right) \right| \geq b_n - \phi_1(m_n)\, M \Rightarrow \\
&\Rightarrow I_{\{\,|Z_i(j)| > b_n\}} \leq I_{\{\,|X_{i\,m_n+j}| > b_n - \phi_1(m_n)M\}}.
\end{aligned}
$$

Etapa 3:

Pelas etapas anteriores, temos:

$$
E\left(\sum_{i=1}^{k_n-1} Z_i^2(j) \right)^{\frac{r}{2}} \leq k_n^{\frac{r}{2}}\, b_n^r + \sum_{i=1}^{k_n-1} E\left(|Z_i(j)|^r\, I_{\{\,|X_{i\,m_n+j}| > b_n - \phi_1(m_n)M\}} \right).
$$

Além disso, pela Proposição 2.1, item (c), e pelo Teorema 2.6, obtemos:

$$
\begin{aligned}
& E\left(|Z_i(j)|^r\, I_{\{\,|X_{i\,m_n+j}| > b_n - \phi_1(m_n)M\}} \right) = \\
& = E\left(\left| X_{i\,m_n+j} - E\left(X_{i\,m_n+j} \,|\mathscr{F}_{(i-1)\,m_n+j} \right) \right|^r I_{\{\,|X_{i\,m_n+j}| > b_n - \phi_1(m_n)M\}} \right) \leq \\
& \leq 2^{r-1} \left\{ E\left(|X_{i\,m_n+j}|^r\, I_{\{\,|X_{i\,m_n+j}| > b_n - \phi_1(m_n)M\}} \right) + \right. \\
& \left. + E\left(\left| E\left(X_{i\,m_n+j} \,|\mathscr{F}_{(i-1)\,m_n+j} \right) \right|^r I_{\{\,|X_{i\,m_n+j}| > b_n - \phi_1(m_n)M\}} \right) \right\} \leq \\
& \leq 2^{r-1} \left\{ E\left(|X_{i\,m_n+j}|^r\, I_{\{\,|X_{i\,m_n+j}| > b_n - \phi_1(m_n)M\}} \right) + \phi_1^r(m_n)\, M^r \right\}.
\end{aligned}
$$

Etapa 4:

$$
\begin{aligned}
E\left|X_k\right|^r &= E\left(\left|X_k\right|^r I_{\{\,|X_k|\,>\,b_n-\phi_1(m_n)M\}}\right)+E\left(\left|X_k\right|^r I_{\{\,|X_k|\,\le\,b_n-\phi_1(m_n)M\}}\right)\le \\
&\le E\left(\left|X_k\right|^r I_{\{\,|X_k|\,>\,b_n-\phi_1(m_n)M\}}\right)+E\left(\left|X_k\right|^r I_{\{\,|X_k|\,\le\,b_n\}}\right)\le \\
&\le E\left(\left|X_k\right|^r I_{\{\,|X_k|\,>\,b_n-\phi_1(m_n)M\}}\right)+b_n^r.
\end{aligned}
$$

Com essas etapas, concluímos:

$$
E\left|S_n\right|^r \le 4^{r-1}\left\{m_n^{r-1}\sum_{j=1}^{m_n}E\left|X_j\right|^r+m_n^{r-1}C\left(r\right)\sum_{j=1}^{m_n}E\left(\sum_{i=1}^{k_n-1}Z_i^2\left(j\right)\right)^{\frac{r}{2}}+\right.
$$

$$
\left.+\left(m_nk_n\phi_1\left(m_n\right)M\right)^r+m_n^{r-1}\sum_{l=1}^{l_n}E\left|X_{k_nm_n+l}\right|^r\right\}\le
$$

$$
\le 4^{r-1}\left\{m_n^rb_n^r+m_n^{r-1}\sum_{j=1}^{m_n}E\left(\left|X_j\right|^r I_{\{\,|X_j|\,>\,b_n-\phi_1(m_n)M\}}\right)+C\left(r\right)m_n^rb_n^rk_n^{\frac{r}{2}}+\right.
$$

$$
+C\left(r\right)m_n^{r-1}2^{r-1}\sum_{j=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{k_n-1}E\left(\left|X_{i\,m_n+j}\right|^r I_{\{\,|X_{i\,m_n+j}|\,>\,b_n-\phi_1(m_n)M\}}\right)+
$$

$$
+C\left(r\right)m_n^rk_n2^{r-1}\phi_1^r\left(m_n\right)M^r+\left(m_nk_n\phi_1\left(m_n\right)M\right)^r+m_n^rb_n^r+
$$

$$
\left.+m_n^{r-1}\sum_{l=1}^{l_n}E\left(\left|X_{k_nm_n+l}\right|^r I_{\{\,|X_{k_nm_n+l}|\,>\,b_n-\phi_1(m_n)M\}}\right)\right\}\le
$$

$$
\le C_3\left\{m_n^rb_n^rk_n^{\frac{r}{2}}+m_n^{r-1}\sum_{i=1}^{n}E\left(\left|X_i\right|^r I_{\{\,|X_i|\,>\,b_n-\phi_1(m_n)M\}}\right)+\left(m_nk_n\phi_1\left(m_n\right)M\right)^r\right\}.
$$

∎

Analogamente ao caso anterior, temos um resultado semelhante para ϕ_2 - mixing. Também, devido a similaridade, não apresentamos a demonstração.

Lema 2.13. ** Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias ϕ_2 - mixing. Suponhamos que $EX_n = 0$ e que $|X_n| \leq M < \infty$, q.c., $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Considere $1 < r < 2$. Então, dadas uma seqüência qualquer $\{b_n\}$, tal que $b_n > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, e uma subseqüência $\{m_n\}$ de números naturais, existe uma constante $C_4 = C_4(r) > 0$ tal que:*

$$E|S_n|^r \leq C_4 \left\{ m_n^r b_n^r k_n^{\frac{r}{2}} + m_n^{r-1} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i|^r I_{\{\,|X_i|\,>\,b_n - \phi_2(m_n)M\}}\right) + \left(m_n k_n 2\phi_2(m_n)\, M\right)^r \right\}, \tag{2.11}$$

onde $k_n = [n/m_n]$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

2.3 Distância de Mallows: Caracterização

Iniciamos esta seção com o registro do fato de o ínfimo da equação (1.9), ou seja,

$$d_r(F_X, F_Y) = \left(\inf_{(X,Y)} E(|\,X - Y|^r\,) \right)^{\frac{1}{r}},$$

ser assumido para $r \geq 1$. Os dois próximos resultados referem-se a esse fato.

Teorema 2.14. *(Major [14], 1978) Sejam F_X e F_Y funções de distribuição tais que:*

(a) $\int |x|\ dF_X(x) < \infty$, *e*

(b) $\int |x|\ dF_Y(x) < \infty$.

Seja f uma função convexa. Então:

$$\inf_{(X,Y)} E\left(f\left(X - Y\right)\right) = \int_0^1 f\left(F_X^{-1}(u) - F_Y^{-1}(u)\right)\ du\ , \tag{2.12}$$

onde X (Y) é uma variável aleatória com distribuição F_X (F_Y).

Para o caso particular $f(x) = |x|^r$, com $r \geq 1$, obtemos:

$$d_r(F_X, F_Y) = \left(\int_0^1 \left| F_X^{-1}(u) - F_Y^{-1}(u) \right|^r \, du \right)^{\frac{1}{r}} = \left(E \left| F_X^{-1}(U) - F_Y^{-1}(U) \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}, \qquad (2.13)$$

onde U indica uma variável aleatória com distribuição $U\left([0,1)\right]$.

Como $F_X^{-1}(U)$ (respectivamente, $F_Y^{-1}(U)$) é uma variável aleatória com a mesma distribuição de X (Y), concluímos que o ínfimo da equação (1.9) é assumido para $r \geq 1$.

Observamos, adicionalmente, que a igualdade anterior é idêntica àquela encontrada por Salvemi e Dall´Aglio (equação 1.7). Dobrushin [7], em 1970, havia demonstrado a igualdade (2.13) para o caso $r = 1$, com F_X e F_Y em $\mathbb{F}_1$. Dois anos depois, Mallows [15] apresentou o resultado da equação (2.13) para $r = 2$, com F_X e F_Y em $\mathbb{F}_2$.

Em 1981, Bickel e Freedman [1] apresentaram uma argumentação alternativa para o fato do ínfimo ser assumido, quando F_X e F_Y estão em $\mathbb{F}_r$, $r \geq 1$. Recentemente, em 2005, Johnson e Samworth [12] publicaram uma outra demonstração para esse fato em $\mathbb{F}_r$, $r \geq 1$.

Teorema 2.15. *(Johnson e Samworth [12], 2005) Para $r \geq 1$, consideremos a distribuição conjunta dos pares (X, Y), onde X e Y têm funções de distribuição marginal fixadas F_X e F_Y, ambas em $\mathbb{F}_r$. Então,*

$$E\left|X - Y\right|^r \geq E\left|X^* - Y^*\right|^r ,$$

onde $X^* = F_X^{-1}(U)$, $Y^* = F_Y^{-1}(U)$ e U indica uma variável aleatória com distribuição $U\left([0,1)\right]$.

O próximo Teorema, cuja demonstração encontra-se no Apêndice desta tese, será utilizado para provar os dois resultados seguintes.

Teorema 2.16. *(Teorema Elementar de Skorokhod) Considere que, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, X_n e X são, respectivamente, variáveis aleatórias com funções de distribuição F_n e F. Suponha que $X_n \stackrel{d}{\to} X$. Então, $F_n^{-1}(U) \stackrel{q.c.}{\to} F^{-1}(U)$, onde U indica uma variável aleatória com distribuição $U\left([0,1)\right]$.*

Corolário 2.17. *Consideremos que,* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, X_n *e* X *são, respectivamente, variáveis aleatórias com funções de distribuição* F_n *e* F *em* $\mathbb{F}_1$. *Suponhamos que* $\lim d_r(F_n, F) = 0$, *para algum* $r \geq 1$. *Então, existe uma variável aleatória* Y, *com* $Y \stackrel{d}{=} X$ *e, para cada* $n \in \mathbb{N}^*$, *existe uma variável aleatória* Y_n, *com* $Y_n \stackrel{d}{=} X_n$, *tais que obtemos a seguinte convergência em média:* $Y_n \stackrel{(r)}{\to} Y$. *Além disso, temos* $Y_n \stackrel{q.\,c.}{\to} Y$.

Demonstração:

Da equação (2.13), temos:

$$d_r(F_n, F) = \left(\int_0^1 \left|F_n^{-1}(u) - F^{-1}(u)\right|^r \, du\right)^{\frac{1}{r}} = \left(E\left|F_n^{-1}(U) - F^{-1}(U)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Portanto, $\lim d_r(F_n, F) = 0$ implica que $F_n^{-1}(U) \stackrel{(r)}{\to} F^{-1}(U)$. Basta tomar, então, $Y_n = F_n^{-1}(U)$ e $Y = F^{-1}(U)$. A segunda afirmativa decorre do Teorema Elementar de Skorokhod, uma vez que $X_n \stackrel{d}{=} Y_n \stackrel{d}{\to} Y \stackrel{d}{=} X$. ∎

Esse Corolário consolida uma importante conclusão: para $r \geq 1$, $\lim d_r(F_n, F) = 0$ implica $X_n \stackrel{d}{\to} X$, desde que F_n e F estejam em $\mathbb{F}_1$. O próximo teorema também relaciona convergência em distância de Mallows e convergência em distribuição.

Teorema 2.18. *(Bickel e Freedman [1], 1981) Consideremos que,* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, X_n *e* X *são, respectivamente, variáveis aleatórias com funções de distribuição* F_n *e* F *em* $\mathbb{F}_r$, *com* $r \geq 1$. *Então, são equivalentes:*

(a) $d_r(F_n, F) \to 0$,

(b) $X_n \stackrel{d}{\to} X$ *e* $E\left(|X_n|^r\right) \to E\left(|X|^r\right)$ *; e*

(c) $X_n \stackrel{d}{\to} X$ *e* $|\,x|^r$ *é uniformemente* X_n *- integrável (ver Apêndice).*

Mallows [15], em 1972, apresentou uma demonstração da equivalência dos itens **a** e **b** do Teorema 2.18 para $r = 2$.

Demonstração:

$(a \Rightarrow b)$

Suponhamos que $d_r(F_n, F) \to 0$. Ao se aplicar a desigualdade de Minkowski duas vezes, obtemos:

$$d_r(F_n, F) \geq \left| \left(\int_0^1 \left|F_n^{-1}(u)\right|^r \, du \right)^{\frac{1}{r}} - \left(\int_0^1 \left|F^{-1}(u)\right|^r \, du \right)^{\frac{1}{r}} \right| . \tag{2.14}$$

Portanto, $E\left(|X_n|^r\right) \to E\left(|X|^r\right)$.

Pelo Corolário 2.17, temos que $F_n^{-1}(U) \overset{(r)}{\to} F^{-1}(U)$. Logo,

$$X_n \overset{d}{=} F_n^{-1}(U) \overset{d}{\to} F^{-1}(U) \overset{d}{=} X.$$

$(b \Rightarrow a)$

Como $F \in \mathbb{F}_r$, $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, \delta = \delta\,(\epsilon) > 0$, tal que:

$$\int_{[\delta, 1-\delta]^c} \left|F^{-1}(u)\right|^r \, du \, < \epsilon \, . \tag{2.15}$$

Como $X_n \overset{d}{\to} X$, obtemos $F_n^{-1}(U) \overset{q.\,c.}{\to} F^{-1}(U)$, devido ao Teorema Elementar de Skorokhod. Essa convergência e o fato de a função de distribuição de $F^{-1}(U)$ pertencer a $\mathbb{F}_r$ permitem-nos utilizar o Teorema da Convergência Dominada para obter:

$$\int_\delta^{1-\delta} \left|F_n^{-1}(u) - F^{-1}(u)\right|^r \, du \, < \epsilon \, , \, e \tag{2.16}$$

$$\left| \int_\delta^{1-\delta} \left|F_n^{-1}(u)\right|^r - \left|F^{-1}(u)\right|^r \, du \right| \, < \epsilon \, , \, \forall\, n \geq n_1 = n_1\,(\epsilon, \delta) \, . \tag{2.17}$$

A convergência dos r-ésimos momentos absolutos implica que, $\forall\, n \geq n_2 = n_2\,(\epsilon, \delta)$, obtemos:

$$\left| \int_0^1 \left(\left|F_n^{-1}(u)\right|^r - \left|F^{-1}(u)\right|^r \right) \, du \right| < \epsilon \, . \tag{2.18}$$

Pelas equações (2.17) e (2.18),

$$-\epsilon < -\int_{\delta}^{1-\delta} \left(\left|F_n^{-1}(u)\right|^r - \left|F^{-1}(u)\right|^r \right) \, du \; < \epsilon \; , \; e$$

$$-\epsilon < \int_{0}^{1} \left(\left|F_n^{-1}(u)\right|^r - \left|F^{-1}(u)\right|^r \right) \, du \; < \epsilon \; .$$

Assim,

$$-2\,\epsilon < \int_{[\delta,1-\delta]^c} \left(\left|F_n^{-1}(u)\right|^r - \left|F^{-1}(u)\right|^r \right) \, du \; < 2\,\epsilon \; .$$

Dessa desigualdade, combinada com a equação (2.15), resulta:

$$\int_{0}^{1} \left|F_n^{-1}(u)\right|^r \, du \; < 3\,\epsilon \; , \; \forall\, n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\} \, . \tag{2.19}$$

Ao se aplicar, sucessivamente, a equação (2.16), a desigualdade de Minkowski e as equações (2.15) e (2.19), obtemos:

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^1 \left|F_n^{-1}(u) - F^{-1}(u)\right|^r \, du \;\; &= \;\; \textstyle\int_\delta^{1-\delta} \left|F_n^{-1}(u) - F^{-1}(u)\right|^r \, du \, + \\
&+ \;\; \textstyle\int_{[\delta,1-\delta]^c} \left|F_n^{-1}(u) - F^{-1}(u)\right|^r \, du \;\leq \\
&\leq \;\; \epsilon \; + \; \left\{ \left(\textstyle\int_{[\delta,1-\delta]^c} \left|F_n^{-1}(u)\right|^r \, du \right)^{\frac{1}{r}} + \right. \\
&+ \;\; \left. \left(\textstyle\int_{[\delta,1-\delta]^c} \left|F^{-1}(u)\right|^r \, du \right)^{\frac{1}{r}} \right\}^r \leq \\
&\leq \;\; \epsilon \; + \; \left\{ (3\epsilon)^{\frac{1}{r}} + \epsilon^{\frac{1}{r}} \right\}^r .
\end{aligned}$$

Portanto, $d_r(F_n, F) \to 0$.

$(b \Leftrightarrow c)$

Vimos que $X_n \xrightarrow{d} X$ implica $F_n^{-1}(U) \xrightarrow{q.c.} F^{-1}(U)$ e, portanto, $F_n^{-1}(U) \xrightarrow{p} F^{-1}(U)$. Sob a condição dessa convergência em probabilidade, o teorema de Vitali (ver Apêndice) afirma que $E\left(|X_n|^r\right) \to E\left(|X|^r\right)$ e o fato de a função $|x|^r$ ser uniformemente X_n - integrável são equivalentes. $\blacksquare$

Concluíremos este capítulo com a demonstração de que a distância de Mallows constitui-se em uma métrica.

Proposição 2.19. *(Bickel e Freedman [1], 1981) d_r é uma métrica em $\mathbb{F}_r$, para $r \geq 1$.*

Demonstração:

É claro que $d_r(F_X, F_Y) \geq 0$. A igualdade ocorre se, e somente se, $X \stackrel{d}{=} Y$. De fato, pela equação (2.13), $d_r(F_X, F_Y) = 0$ implica que $F_X^{-1}(U) \stackrel{q.c.}{=} F_Y^{-1}(U)$, onde F_X e F_Y são as funções de distribuição de X e de Y, respectivamente. Logo, $X \stackrel{d}{=} F_X^{-1}(U) \stackrel{d}{=} F_Y^{-1}(U) \stackrel{d}{=} Y$. Por outro lado, se $X \stackrel{d}{=} Y$, então o par (X, X) é um dos elementos do conjunto dos pares (X, Y) com funções de distribuição marginal F_X e F_Y, respectivamente. Portanto, como $E\left(|X - X|^r\right) = 0$, temos $d_r(F_X, F_Y) = 0$. Além disso, $d_r(F_X, F_Y) = d_r(F_Y, F_X)$ e, pela Desigualdade de Minkowski, $d_r(F_X, F_Y) \leq d_r(F_X, F_Z) + d_r(F_Z, F_Y)$. $\blacksquare$

Proposição 2.20. *(Johnson e Samworth [12], 2005) d_r^r é uma métrica em $\mathbb{F}_r$, para $r < 1$.*

Demonstração:

Analogamente ao caso anterior, $d_r^r(F_X, F_Y) \geq 0$. A igualdade ocorre se, e somente se, $X \stackrel{d}{=} Y$. De fato, $d_r^r(F_X, F_Y) = 0$ implica que $X \stackrel{q.c.}{=} Y$. A demonstração da recíproca é idêntica ao caso anterior. Além disso, $d_r^r(F_X, F_Y) = d_r^r(F_Y, F_X)$ e, pelo fato de $|\, x + y|^r \leq |\, x|^r + |\, y|^r$, $\forall\, x$ e $y \in \mathbb{R}$, $d_r^r(F_X, F_Y) \leq d_r^r(F_X, F_Z) + d_r^r(F_Z, F_Y)$. $\blacksquare$

Capítulo 3

Convergência para Distribuições Estáveis

3.1 Introdução

A Proposição 1.9 (domínio de atração de uma variável aleatória α-estável é um conjunto não vazio) afirma que, dada uma variável aleatória α-estável Y, existe uma seq$\ddot{u}$ência $\{X_n\}_{n \geq 1}$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que $\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} Y$. Neste capítulo principal da tese, utilizamos a distância de Mallows para aproximar, em distribuição, uma variável aleatória α-estável Y, $\alpha \in (1,2)$, por uma soma de variáveis aleatórias (não necessariamente independentes e nem necessariamente identicamente distribuídas), desde que sejam adotadas hipóteses convenientes.

Consideraremos, a partir deste ponto, que Y é uma variável aleatória estritamente α-estável. Lembramos que, conforme explicado na seção 1.2, $EY = 0$ quando $\alpha \in (1,2)$.

Retiramos, inicialmente, a hipótese de distribuição idêntica para as variáveis aleatórias X_n, $n \in \mathbb{N}^*$. A partir de um teorema, cuja demonstração foi sugerida por uma referência anônima, publicado por Johnson e Samworth [12] em 2005 e que originou esta pesquisa, apresentamos o primeiro teorema de convergência que elaboramos (Teorema 3.2). Esse resultado elimina certa inconsistência, comentada adiante, encontrada no desenvolvimento da demonstração dos citados autores e está enunciado a seguir.

Teorema *Fixe $\alpha \in (0,2)$. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias independentes, com $EX_n = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, se $\alpha > 1$. Denotamos $S_n^{(\alpha)} = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) / n^{\frac{1}{\alpha}}$. Considere Y uma variável aleatória estritamente α-estável e Y_1, Y_2, ... cópias independentes de Y. Suponhamos que esteja satisfeita a condição:*

$$\forall\ b > 0,\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^{\alpha} I_{\{\ |X_i - Y_i| \,>\, b\, n^{\delta}\}}\right) \to 0 \text{ , } \textit{quando } n \to \infty \text{ ,}$$

com $0 < \delta < \left(\frac{2-\alpha}{2\,\alpha}\right)$, se $\alpha \in [1,2)$ e $0 < \delta < \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)$, se $\alpha \in (0,1)$.

Se $\alpha \neq 1$ então $\lim d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = 0$. Se $\alpha = 1$ então existe uma seqüência $c_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\,(X_i - Y_i)$ tal que $\lim d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)} - c_n}, F_Y) = 0$.

Observamos que, nas condições desse Teorema, com $\alpha \in (1,2)$, o Corolário 2.17 implica que $S_n^{(\alpha)} \xrightarrow{d} Y$.

Em seguida, na seção 3.3, estudamos o caso martingale. Excluímos a hipótese de independência e de distribuição idêntica das variáveis aleatórias X_n, $n \in \mathbb{N}^*$. Adotamos, entretanto, que $\left\{S_n,\ \mathscr{G}_n\right\}$ é uma martingale. Com as mesmas condições do teorema anterior, obtemos, para $\alpha \in (1,2)$, que $\lim d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = 0$ e, conseqüentemente, $S_n^{(\alpha)} \xrightarrow{d} Y$ (Teorema 3.5). Esse se constitui no segundo resultado de convergência que desenvolvemos nesta tese.

A seção 3.4 trata do caso ϕ-*mixing* com as variações ϕ_1-*mixing* e ϕ_2-*mixing* para a seqüência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n \geq 1}$. Novamente, a hipótese de mesma distribuição dessas variáveis é descartada.

Ressaltamos que, tanto para ϕ_1-*mixing* quanto para ϕ_2-*mixing*, com a adoção de hipóteses similares aos casos anteriores, obtemos, para $\alpha \in (1,2)$, que $\lim d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = 0$ e, conseqüentemente, $S_n^{(\alpha)} \xrightarrow{d} Y$. No caso *mixing* (Teoremas 3.6 e 3.8, de nossa autoria), assumimos, também, a hipótese adicional:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^l \phi_i\,(n) < \infty, \forall\ l \in \mathbb{N}^*,$$

com $i = 1$ ou 2.

Esclarecemos que o resultado para ϕ_1-*mixing* está fortemente baseado na Proposição 2.9 e na estimativa desenvolvida no Lema 2.12. Em contrapartida, para o caso ϕ_2-*mixing*, a demonstração está concentrada na Proposição 2.9 e na estimativa do Lema 2.13.

Na última seção deste capítulo e, conseqüentemente, desta tese, sintetizamos o presente trabalho. Iniciamos com a definição de cadeia de Markov uniformemente ergódica, a saber:

Uma cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\,\geq\,1}$ *com espaço de estados geral* $\mathbb{E}$ *é denominada uniformemente ergódica se*

$$|P^n\,(x,A) - \pi\,(A)| \leq \lambda\,\rho^n\;,\forall\;x \in \mathbb{E}\;\;e\,\forall\;A \in\;\mathscr{E},$$

onde $\lambda > 0$ *,* $0 < \rho < 1$*,* π *é a distribuição de equilíbrio, conforme a Definição 1.12,* $\mathbb{E}$ *é um conjunto arbitrário qualquer e* $\mathscr{E}$ *é uma* σ*-álgebra gerada por subconjuntos de* $\mathbb{E}$.

Com o apoio de resultados de Roussas e Ioannides [17] (Teorema 3.10) e de Campos e Dorea [3], temos que toda cadeia de Markov uniformemente ergódica é ϕ_2-*mixing*, com coeficiente *mixing* $\phi_2\,(n) = 2\lambda\,\rho^n$ (Proposição 3.11). Retornamos ao caso da seção 3.4.

Assim, mediante a adoção de condições similares às hipóteses dos resultados já comentados, conseguimos obter, a exemplo dos casos anteriores, que, para $\alpha \in (1,2)$, $\lim d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = 0$ e, conseqüentemente, $S_n^{(\alpha)} \xrightarrow{d} Y$. Isto é, encontramos condições suficientes para aproximarmos, em distribuição, uma variável aleatória estritamente α-estável, $\alpha \in (1,2)$, por uma soma de variáveis aleatórias (não necessariamente independentes e não necessariamente identicamente distribuídas), as quais constituem uma cadeia de Markov uniformemente ergódica (Teorema 3.12, que elaboramos). Esse é o objetivo desta tese.

3.2 Caso: Variáveis Aleatórias Independentes

Dada uma variável aleatória α-estável Y temos, pela Proposição 1.9, que existe uma seqüência $\{X_n\}_{n\,\geq\,1}$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que $\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} Y$. Nesta seção, aproximamos, em distância de Mallows e em distribuição, uma variável aleatória estritamente α-estável Y, $\alpha \in (1,2)$, por uma soma de variáveis aleatórias independentes (não necessariamente identicamente distribuídas), desde que sejam adotadas hipóteses convenientes.

O primeiro resultado desta seção e, conseqüentemente, deste capítulo originou nossa pesquisa e foi publicado por Johnson e Samworth [12], observado que a demonstração foi sugerida por uma referência anônima.

Teorema 3.1. *(Johnson e Samworth [12], 2005) Fixe* $\alpha \in (0,2)$*. Seja* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *uma seqüência de variáveis aleatórias independentes, com* $EX_n = 0$*,* $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$*, se* $\alpha > 1$ *. Denotamos* $S_n^{(\alpha)} = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) / n^{\frac{1}{\alpha}}$*. Suponhamos que existe uma variável aleatória* α *- estável* Y *e variáveis aleatórias* Y_1*,* Y_2*, ... com a mesma distribuição de* Y *satisfazendo a seguinte condição:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^{\alpha}\, I_{\{\,|X_i - Y_i| \,>\, b\}}\right) \to 0,\ \textit{quando}\ \ b \to \infty. \tag{3.1}$$

Se $\alpha \neq 1$ *então* $\lim d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = 0$*. Se* $\alpha = 1$ *então existe uma seqüência* $c_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i - Y_i\right)$ *tal que* $\lim d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)} - c_n}, F_Y) = 0$.

Demonstração:

Como Y é uma variável aleatória α-estável, temos que $Y \stackrel{d}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) / n^{\frac{1}{\alpha}}$.

Temos dois casos para analisar: $\alpha \in [1,2)$ e $\alpha \in (0,1)$.

<u>Caso 1:</u> $\alpha \in [1,2)$

Seja $d_i = E\left(X_i - Y_i\right)$, $\forall\ i = 1, ..., n$. Observamos que $d_i = 0$ se $\alpha > 1$,$\forall\ i = 1, ..., n$. Para $b > 0$ e $\forall\ i = 1, ..., n$, definimos:

$$U_i = \left(X_i - Y_i\right) I_{\{|X_i - Y_i| \,\leq\, b\}} - E\left(\left(X_i - Y_i\right) I_{\{|X_i - Y_i| \,\leq\, b\}}\right),\ e$$

$$V_i = \left(X_i - Y_i\right) I_{\{|X_i - Y_i| \,>\, b\}} - E\left(\left(X_i - Y_i\right) I_{\{|X_i - Y_i| \,>\, b\}}\right).$$

Podemos considerar os pares (X_i, Y_i) mutuamente independentes. De fato, dada uma seqüência (X_i, Y_i), podemos obter uma seqüência $(\widetilde{X}_i, \widetilde{Y}_i)$ tal que $(X_i, Y_i) \stackrel{d}{=} (\widetilde{X}_i, \widetilde{Y}_i)$ e $(\widetilde{X}_i, \widetilde{Y}_i)$ sejam mutuamente independentes. Portanto, $U_i \stackrel{d}{=} \widetilde{U}_i$, $V_i \stackrel{d}{=} \widetilde{V}_i$ e $\widetilde{U}_i\,'s$ $(\widetilde{V}_i\,'s)$ são mutuamente independentes.

Assim, pelas desigualdades da Proposição 2.1, itens (c) e (a), pelas desigualdades de Bahr-Esseen e de Jensen ($|EX|^\alpha \leq E\,|X|^\alpha$), pelo fato de $U_i\,'s$ ($V_i\,'s$) serem mutuamente independentes e com média zero, e por $EU_i^2 \leq b^2$, $\forall\ i = 1, ...n$, temos:

$$
\begin{aligned}
d_\alpha^\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}-c_n}, F_Y) &\leq \frac{1}{n}\, E\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i - d_i)\right|^\alpha = \frac{1}{n}\, E\left|\sum_{i=1}^{n} U_i \,+\, \sum_{i=1}^{n} V_i\right|^\alpha \leq \\
&\leq \frac{2^{\alpha-1}}{n}\, E\left|\sum_{i=1}^{n} U_i\right|^\alpha + \frac{2^{\alpha-1}}{n}\, E\left|\sum_{i=1}^{n} V_i\right|^\alpha \leq \\
&\leq \frac{2^{\alpha-1}}{n}\left(E\left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right)^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{2^\alpha}{n}\sum_{i=1}^{n} E\,|V_i|^\alpha \leq \\
&\leq \frac{2^{\alpha-1}}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} EU_i^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{2^{2\alpha-1}}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|E\left((X_i - Y_i)\, I_{\{\,|X_i - Y_i|\,>\,b\}}\right)\right|^\alpha + \\
&+ \frac{2^{2\alpha-1}}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|E\left((X_i - Y_i)\, I_{\{\,|X_i - Y_i|\,>\,b\}}\right)\right|^\alpha \leq \\
&\leq \frac{2^{\alpha-1}}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} EU_i^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{2^{2\alpha}}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^\alpha\, I_{\{\,|X_i - Y_i|\,>\,b\}}\right) \leq \\
&\leq \frac{2^{\alpha-1}\,(n\,b^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{n} + \frac{2^{2\alpha}}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^\alpha\, I_{\{\,|X_i - Y_i|\,>\,b\}}\right) \leq \\
&= \frac{2^{\alpha-1}\, b^\alpha}{n^{1-\frac{\alpha}{2}}} + \frac{2^{2\alpha}}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^\alpha\, I_{\{\,|X_i - Y_i|\,>\,b\}}\right).
\end{aligned}
$$

O resultado segue ao se escolher b suficientemente grande para controlar o segundo termo e, então, n suficientemente grande para controlar o primeiro. Daí, obtemos que $\lim d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}-c_n}, F_Y) = 0$.

Caso 2: $\alpha \in (0,1)$

Definimos:

$$U_i = (X_i - Y_i)\, I_{\{|X_i - Y_i| \,\leq\, b\}} - E\left((X_i - Y_i)\, I_{\{|X_i - Y_i| \,\leq\, b\}}\right),$$

$$V_i = (X_i - Y_i)\, I_{\{|X_i - Y_i| \,>\, b\}},\ e$$

$$a_i = E\left((X_i - Y_i)\, I_{\{|X_i - Y_i| \,\leq\, b\}}\right).$$

Analogamente ao caso anterior, podemos considerar os pares (X_i, Y_i) mutuamente independentes e, portanto, a seqüência U_i (V_i) também mutuamente independente.

Assim, pelas desigualdades da Proposição 2.1, itens (b) e (a), pelo fato de $U_i\,'s$ serem mutuamente independentes, com $EU_i^2 \leq b^2$ e $EU_i = 0$, $\forall\, i = 1, ...n$, temos:

$$\begin{aligned}
d_\alpha^\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) &\leq \frac{1}{n}\, E\left|\sum_{i=1}^{n} U_i + \sum_{i=1}^{n} V_i + \sum_{i=1}^{n} a_i\right|^\alpha \leq \\
&\leq \frac{1}{n}\, E\left|\sum_{i=1}^{n} U_i\right|^\alpha + \frac{1}{n}\, E\left|\sum_{i=1}^{n} V_i\right|^\alpha + \frac{1}{n}\, E\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|^\alpha \leq \\
&\leq \frac{1}{n}\left(E\left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right)^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\,|V_i|^\alpha + \frac{1}{n}\, n^\alpha\, b^\alpha \leq \\
&\leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} EU_i^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^\alpha\, I_{\{\,|X_i - Y_i| \,>\, b\}}\right) + \frac{b^\alpha}{n^{1-\alpha}} \leq \\
&\leq \frac{b^\alpha}{n^{1-\frac{\alpha}{2}}} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^\alpha\, I_{\{\,|X_i - Y_i| \,>\, b\}}\right) + \frac{b^\alpha}{n^{1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

Com o raciocínio similar ao primeiro caso, obtemos $\lim d_\alpha(F_{S_n^\alpha}, F_Y) = 0$. ∎

Porém, na demonstração desse teorema, consideramos haver certa inconsistência no controle do primeiro e do segundo termo. O(s) autor(es) realizou(aram) as escolhas de b e de n independentemente uma da outra, o que é inadequado, pois essas variáveis parecem estar relacionadas. Para solucionar essa questão, elaboramos o teorema a seguir.

Teorema 3.2. ** Fixe* $\alpha \in (0,2)$. *Seja* $\{X_n\}_{n \geq 1}$ *uma seqüência de variáveis aleatórias independentes, com* $EX_n = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, *se* $\alpha > 1$. *Denotamos* $S_n^{(\alpha)} = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) / n^{\frac{1}{\alpha}}$. *Considere* Y *uma variável aleatória estritamente* α*-estável e* Y_1, Y_2, ... *cópias independentes de* Y. *Suponhamos que esteja satisfeita a condição:*

$$\forall\ b > 0,\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^{\alpha}\, I_{\{\ |X_i - Y_i|\ >\ b\, n^{\delta}\}}\right) \to 0\ ,\ quando\ \ n \to \infty\ , \tag{3.2}$$

com $0 < \delta < \left(\frac{2-\alpha}{2\,\alpha}\right)$, *se* $\alpha \in [1,2)$ *e* $0 < \delta < \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)$, *se* $\alpha \in (0,1)$.

Se $\alpha \neq 1$ *então* $\lim d_{\alpha}(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = 0$. *Se* $\alpha = 1$ *então existe uma seqüência* $c_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E\,(X_i - Y_i)$ *tal que* $\lim d_{\alpha}(F_{S_n^{(\alpha)} - c_n}, F_Y) = 0$.

Demonstração:

Caso 1: $\alpha \in [1,2)$

Em relação ao caso 1 do Teorema 3.1, temos, agora, que:

$$\begin{aligned} d_{\alpha}^{\alpha}(F_{S_n^{(\alpha)} - c_n}, F_Y) \ &\leq\ \frac{2^{\alpha-1}\, b^{\alpha}\, n^{\delta\alpha}}{n^{1-\frac{\alpha}{2}}} \ +\ \frac{2^{2\alpha}}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^{\alpha}\, I_{\{\ |X_i - Y_i|\ >\ b\, n^{\delta}\}}\right) = \\ &=\ \frac{2^{\alpha-1}\, b^{\alpha}}{n^{\left(\frac{2-\alpha}{2}\right) - \delta\,\alpha}} \ +\ \frac{2^{2\alpha}}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^{\alpha}\, I_{\{\ |X_i - Y_i|\ >\ b\, n^{\delta}\}}\right). \end{aligned}$$

Portanto, $\lim d_{\alpha}(F_{S_n^{(\alpha)} - c_n}, F_Y) = 0$ segue ao se considerar a condição (3.2) e a escolha adequada de δ.

Caso 2: $\alpha \in (0,1)$

Relativamente ao caso 2 do Teorema 3.1, obtemos, agora, que:

$$d_{\alpha}^{\alpha}(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) \leq \frac{b^{\alpha}\, n^{\delta\alpha}}{n^{1-\frac{\alpha}{2}}} \ +\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^{\alpha}\, I_{\{\ |X_i - Y_i|\ >\ b\, n^{\delta}\}}\right) \ +\ \frac{b^{\alpha}\, n^{\delta\alpha}}{n^{1-\alpha}}\ .$$

Logo, $\lim d_{\alpha}(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = 0$ ocorre com a condição (3.2) e a escolha adequada de δ. ∎

Observamos que, nas condições do Teorema 3.2, com $\alpha \in (1, 2)$, o Corolário 2.17 implica que $S_n^{(\alpha)} \xrightarrow{d} Y$. Isto é, aproximamos, em distribuição, uma variável aleatória estritamente α-estável Y, com $\alpha \in (1, 2)$, por uma soma de variáveis aleatórias independentes (não necessariamente identicamente distribuídas), desde que a condição (3.2) esteja satisfeita e δ seja adequadamente escolhido.

Se as variáveis aleatórias da seqüência $\{X_n\}_{n \geq 1}$ forem, também, identicamente distribuídas, Johnson e Samworth [12] afirmam que a condição (3.1) é equivalente a $d_\alpha(F_{X_1}, F_Y) < \infty$. A próxima proposição, de nossa autoria, é similar a esse resultado, observados, porém, os ajustes indicados no enunciado do Teorema 3.2.

Proposição 3.3. ** No Teorema 3.2, quando as variáveis aleatórias da seqüência $\{X_n\}_{n \geq 1}$ forem, também, identicamente distribuídas, a condição (3.2) é equivalente a $d_\alpha(F_{X_1}, F_Y) < \infty$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$)

Suponhamos que a condição (3.2) esteja satisfeita. Como, $\forall\ i \in \mathbb{N}^*$, as variáveis aleatórias X_i (Y_i) são identicamente distribuídas, temos:

$$\begin{aligned} d_\alpha^\alpha(F_{X_1}, F_Y) &= d_\alpha^\alpha(F_{X_i}, F_{Y_i}) \leq E\left(|X_i - Y_i|^\alpha I_{\{\ |X_i - Y_i| \leq b\, n^\delta\}}\right) + \\ &+ E\left(|X_i - Y_i|^\alpha I_{\{\ |X_i - Y_i| > b\, n^\delta\}}\right). \end{aligned}$$

Ao somar os lados dessa desigualdade para $i = 1, ..., n$, obtemos:

$$\begin{aligned} d_\alpha^\alpha(F_{X_1}, F_Y) &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^\alpha I_{\{\ |X_i - Y_i| \leq b\, n^\delta\}}\right) + \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^\alpha I_{\{\ |X_i - Y_i| > b\, n^\delta\}}\right) \leq \\ &\leq b^\alpha\, n^{\delta\alpha} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^\alpha I_{\{\ |X_i - Y_i| > b\, n^\delta\}}\right). \end{aligned}$$

Devido à condição (3.2), dado $b > 0$, temos que $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que a segunda parcela da soma anterior é menor que ϵ, $\forall\ n \geq n_0$. Concluímos que:

$$d_\alpha(F_{X_1}, F_Y) \leq b^\alpha\ n_o^{\delta\alpha}\ +\ \epsilon < \infty.$$

$(\Leftarrow)$

Consideremos, agora, que $d_\alpha(F_{X_1}, F_Y) < \infty$. Sabemos que $d_\alpha(F_{X_1}, F_Y) = d_\alpha(F_{X_i}, F_{Y_i})$, $\forall\ i \in \mathbb{N}^*$. Pela definição da distância de Mallows (ínfimo), $d_\alpha(F_{X_i}, F_{Y_i}) < \infty$ implica que existe um par $\left(\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i\right)$ tal que $\tilde{X}_i \stackrel{d}{=} X_i$, $\tilde{Y}_i \stackrel{d}{=} Y_i$ e $E\left(\left|\tilde{X}_i - \tilde{Y}_i\right|^\alpha\right) < \infty$, $\forall\ i \in \mathbb{N}^*$.

Portanto, $\forall\ b > 0$, $E\left(\left|\tilde{X}_i - \tilde{Y}_i\right|^\alpha I_{\{\ |\tilde{X}_i - \tilde{Y}_i|\ >\ b\, n^\delta\}}\right) \to 0$, quando $n \to \infty$.

Por um argumento análogo ao realizado no início da demonstração do Teorema 3.1, podemos considerar que os pares $\left(\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i\right)$ são mutuamente independentes, $\forall\ i \in \mathbb{N}^*$. Dessa forma,

$$S_n^{(\alpha)} = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) / n^{\frac{1}{\alpha}} \stackrel{d}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i\right) / n^{\frac{1}{\alpha}} = \tilde{S_n}^{(\alpha)}.$$

Assim, temos as igualdades $d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}}, Y) = d_\alpha(F_{\tilde{S_n}^{(\alpha)}}, Y)$, quando $\alpha \neq 1$, e $d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)} - c_n}, Y) = d_\alpha(F_{\tilde{S_n}^{(\alpha)} - c_n}, Y)$, quando $\alpha = 1$, as quais serão utilizadas mais adiante para concluir esta demonstração.

Além disso, sem perda de generalidade, podemos assumir que $\tilde{X}_i - \tilde{Y}_i \stackrel{d}{=} \tilde{X}_j - \tilde{Y}_j$, $\forall\ i, j \in \mathbb{N}^*$. Então, pelo parágrafo anterior, quando $n \to \infty$, temos:

$$\forall\ b > 0,\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left(\left|\tilde{X}_i - \tilde{Y}_i\right|^\alpha I_{\{\ |\tilde{X}_i - \tilde{Y}_i|\ >\ b\, n^\delta\}}\right) = E\left(\left|\tilde{X}_i - \tilde{Y}_i\right|^\alpha I_{\{\ |\tilde{X}_i - \tilde{Y}_i|\ >\ b\, n^\delta\}}\right) \to 0.$$

Logo, a condição (3.2) é satisfeita para as variáveis aleatórias $\tilde{X}_i$ e $\tilde{Y}_i$, $\forall\ i \in \mathbb{N}^*$. Aplicamos o Teorema 3.2 com as variáveis aleatórias $\tilde{X}_i$, $\forall\ i \in \mathbb{N}^*$. Obtemos, então, que $d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = d_\alpha(F_{\tilde{S_n}^{(\alpha)}}, F_Y) \to 0$ ou $d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)} - c_n}, Y) = d_\alpha(F_{\tilde{S_n}^{(\alpha)} - c_n}, Y) \to 0$, conforme o caso. ∎

No caso de $\{X_n\}_{n \geq 1}$ ser uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, ressaltamos que, pelo Corolário 2.17, a condição (3.2) ou, equivalentemente, $d_\alpha(F_{X_1}, F_Y) < \infty$ configura-se, quando $\alpha \in (1,2)$, como uma condição suficiente para $F_{X_1} \in \mathrm{DNA}(F_Y)$.

A condição (3.2) é semelhante à condição clássica de Lindeberg. Sejam X_i 's, $i \in \mathbb{N}^*$, respectivamente, variáveis aleatórias independentes, com média finita μ_i, variância finita σ_i^2 e função de distribuição F_{X_i}. Definimos $s_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$. A condição clássica de Lindeberg ($\alpha = 2$) assume a forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{\{x:\, |x-\mu_i| \,\geq\, \epsilon\, s_n\}} (x-\mu_i)^2 \; dF_{X_i}(x) &= \frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - \mu_i|^2\, I_{\{|X_i - \mu_i| \,\geq\, \epsilon\, s_n\}}\right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left(\left| \frac{X_i - \mu_i}{s_n/n^{\frac{1}{2}}} \right|^2 I_{\left\{ \frac{|X_i - \mu_i|}{s_n/n^{\frac{1}{2}}} \,\geq\, \epsilon\, n^{\frac{1}{2}} \right\}} \right). \end{aligned}$$

Podemos fazer a seguinte identificação: $X_i \leftrightarrow \frac{X_i}{s_n/n^{\frac{1}{2}}}$, $Y_i \leftrightarrow \frac{\mu_i}{s_n/n^{\frac{1}{2}}}$ e $b \leftrightarrow \epsilon\ n^{\frac{1}{2}}$. Particularmente, quando, $\mu_i = 0$ e $\sigma_i = 1$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, a última expressão da igualdade anterior assim se apresenta:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i|^\alpha\, I_{\left\{ |X_i| \,\geq\, \epsilon\, n^{\frac{1}{\alpha}} \right\}} \right) \text{ , com } \alpha = 2.$$

3.3 Caso: Martingale

Na seção anterior, estudamos a convergência, em distância de Mallows e em distribuição, de uma soma de variáveis aleatórias independentes para uma variável aleatória estritamente α-estável Y, com $\alpha \in (1,2)$. Eliminaremos, agora, a hipótese de independência e assumiremos que $\left\{ S_n,\ \mathscr{G}_n \right\}$ é uma martingale. Mostraremos que ainda podemos obter esses dois tipos de convergência para o caso martingale mencionado. Para isso, necessitamos do seguinte lema.

Lema 3.4. *Sejam* $\{X_n\}_{n \geq 1}$ *uma seqüência de variáveis aleatórias,* Y *uma variável aleatória estritamente* α*-estável, com* $\alpha \in (1,2)$*, e* Y_1*,* Y_2*,... cópias independentes de* Y*. Definimos* $S_n(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ *e* $S_n(Y) = \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)$*. Suponhamos que* $\left\{S_n(X),\ \mathscr{G}_n\right\}$ *seja uma martingale. Então,* $\left\{S_n(X) - S_n(Y), \mathscr{F}_n(X,Y)\right\}$ *é uma martingale, onde* $\mathscr{F}_n(X,Y) = \sigma(X_i, Y_i : i = 1, ..., n)$*.*

Demonstração:

Sem perda de generalidade, podemos supor que a seqüência de variáveis aleatórias $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ é independente da seqüência $\{X_n\}_{n \geq 1}$. Lembramos, conforme explicado na seção 1.2, que $EY = 0$. Elaboramos a demonstração desse lema em três etapas.

<u>Etapa 1:</u> $\left\{S_n(X), \mathscr{F}_n(X)\right\}$ é uma martingale, onde $\mathscr{F}_n(X) = \sigma(X_i : i = 1, ..., n)$

De fato,

$$\begin{aligned} E\left(S_{n+1}(X)\,|\mathscr{F}_n(X)\right) &= S_n(X) + E\left(X_{n+1}|\mathscr{F}_n(X)\right) = \\ &= S_n(X) + E\left\{E\left(X_{n+1}|\ \mathscr{G}_n\ \right)|\mathscr{F}_n(X)\right\} = S_n(X), q.c., \end{aligned}$$

pois, devido à hipótese de martingale, $E\left(X_{n+1}|\ \mathscr{G}_n\ \right) = 0$, q.c. .

<u>Etapa 2:</u> $\left\{S_n(X), \mathscr{F}_n(X,Y)\right\}$ é uma martingale

Observamos que,

$$\begin{aligned} E\left(S_{n+1}(X)\,|\mathscr{F}_n(X,Y)\right) &= S_n(X) + E\left(X_{n+1}|\mathscr{F}_n(X,Y)\right) = \\ &= S_n(X) + E\left(X_{n+1}|\mathscr{F}_n(X)\right) = S_n(X), q.c., \end{aligned}$$

devido ao fato de a seqüência $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ ser independente da seqüência $\{X_n\}_{n \geq 1}$ e à etapa anterior.

Etapa 3: $\left\{ S_n(Y), \mathscr{F}_n(X,Y) \right\}$ é uma martingale

Essa etapa pode ser provada de duas formas. A primeira é análoga a demonstração realizada na etapa anterior, pois $\left\{ S_n(Y), \mathscr{F}_n(Y) \right\}$ é uma martingale, onde, analogamente, $\mathscr{F}_n(Y) = \sigma(Y_i : i = 1, ..., n)$.

Um outro modo é o seguinte:

$$\begin{aligned} E\left(S_{n+1}(Y) \,|\, \mathscr{F}_n(X,Y)\right) &= S_n(Y) + E\left(Y_{n+1} | \mathscr{F}_n(X,Y)\right) = \\ &= S_n(Y) + E(Y_{n+1}) = S_n(Y), q.c., \end{aligned}$$

uma vez que a seqüência $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ é independente da seqüência $\{X_n\}_{n \geq 1}$.

Assim, concluímos que $\left\{ S_n(X) - S_n(Y), \mathscr{F}_n(X,Y) \right\}$ é uma martingale. ■

Apresentamos, a seguir, o resultado que obtivemos para o caso martingale.

Teorema 3.5. ** Sejam $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias, Y uma variável aleatória estritamente α-estável, com $\alpha \in (1,2)$, e Y_1, Y_2,... cópias independentes de Y. Suponhamos que $\left\{ S_n(X), \mathscr{G}_n \right\}$ seja uma martingale e que esteja satisfeita a condição (3.2), transcrita a seguir:*

$$\forall\, b > 0,\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^\alpha I_{\{\,|X_i - Y_i| > b\, n^\delta\}}\right) \to 0\ ,\ \textit{quando}\ \ n \to \infty\ ,$$

com $0 < \delta < \left(\frac{2-\alpha}{2\,\alpha}\right)$. Então, $\lim d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = 0$.

Demonstração:

Pelo Lema 3.4, como $\alpha \in (1,2)$, então $\left\{ S_n(X) - S_n(Y), \mathscr{F}_n(X,Y) \right\}$ é uma martingale. Pela desigualdade de Burkholder (Proposição 2.4) aplicada a martingale $\left\{ S_n(X) - S_n(Y), \mathscr{F}_n(X,Y) \right\}$ e pela desigualdade da Proposição 2.1, item (b), temos:

$$\begin{aligned}
d_\alpha^\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) &\leq \frac{1}{n} E\left(|S_n(X) - S_n(Y)|^\alpha\right) \leq \\
&\leq \frac{C(\alpha)}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i)^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \leq \\
&\leq \frac{C(\alpha)}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i)^2 I_{\{|X_i - Y_i| \leq b\, n^\delta\}} + \right. \\
&+ \left. \sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i)^2 I_{\{|X_i - Y_i| > b\, n^\delta\}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \leq \\
&\leq \frac{C(\alpha)}{n} E\left(n\, b^2\, n^{2\delta} + \sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i)^2 I_{\{|X_i - Y_i| > b\, n^\delta\}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \leq \\
&\leq \frac{C(\alpha)}{n} \left(n^{\frac{\alpha}{2}}\, b^\alpha\, n^{\delta\alpha} + \sum_{i=1}^{n} E\,|X_i - Y_i|^\alpha I_{\{|X_i - Y_i| > b\, n^\delta\}}\right) = \\
&= \frac{C(\alpha)\; b^\alpha}{n^{\left(\frac{2-\alpha}{2}\right) - \delta\,\alpha}} + \frac{C(\alpha)}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^\alpha I_{\{|X_i - Y_i| > b\, n^\delta\}}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = 0$ segue da condição (3.2) e da escolha adequada de δ. ∎

Observamos que, nas condições do Teorema 3.5, com $\alpha \in (1,2)$, o Corolário 2.17 implica que $S_n^{(\alpha)} \xrightarrow{d} Y$. Isto é, aproximamos, em distribuição, uma variável aleatória estritamente α-estável Y, com $\alpha \in (1,2)$, por uma soma de variáveis aleatórias (não necessariamente independentes nem necessariamente identicamente distribuídas), desde que observadas as condições do citado Teorema.

Para $\alpha \in (1,2)$, quando $\{X_n\}_{n \geq 1}$ for uma seqüência de variáveis aleatórias independentes com $EX_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, temos uma situação particularmente interessante. Como $\left\{S_n(X), \mathscr{F}_n(X)\right\}$ é uma martingale, onde $\mathscr{F}_n(X) = \sigma(X_i : i = 1, ..., n)$, então o resultado do Teorema 3.2, para $\alpha \in (1,2)$, é uma conseqüência imediata do Teorema 3.5, cuja demonstração é mais elegante.

3.4 Caso: ϕ-*mixing*

Analisaremos, nesta seção, a convergência, em distância de Mallows e em distribuição, para uma variável aleatória estritamente α-estável Y, $\alpha \in (1,2)$, quando a seqüência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n \geq 1}$ é ϕ_1-*mixing*. Posteriormente, estudaremos o caso ϕ_2-*mixing*. O primeiro resultado que deduzimos para o caso *mixing* está descrito a seguir.

Teorema 3.6. ** Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias ϕ_1-mixing, de acordo com a Definição 2.5, tal que $EX_n = 0$ e que $E|X_n| \leq M < \infty$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Considere Y uma variável aleatória estritamente α-estável, com $\alpha \in (1,2)$, e Y_1, Y_2, ... cópias independentes de Y. Suponhamos que esteja satisfeita a condição*

$$\forall\, b > 0,\ \frac{1}{n^{1-\beta(\alpha-1)}} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^\alpha I_{\{\,|X_i - Y_i| > b\, n^\delta\}}\right) \to 0\ ,\ \textit{quando}\ \ n \to \infty\ , \tag{3.3}$$

com $0 < \delta < \left(\frac{2-\alpha}{2\,\alpha}\right)$, $\beta = 2\ \left[\left(\frac{2-\alpha}{2\,\alpha}\right) - (\delta + \delta')\right]$, *onde* δ' *é tal que* $0 < \delta + \delta' < \left(\frac{2-\alpha}{2\,\alpha}\right)$.

Suponhamos, ainda, que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^l \phi_1(n) < \infty, \forall\, l \in \mathbb{N}^*. \tag{3.4}$$

Então, $\lim d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = 0$.

Demonstração:

A demonstração deste teorema está fortemente baseada naquelas realizadas na Proposição 2.9 e no Lema 2.12. Observamos que, conforme explicado na seção 1.2, $EY = 0$. Portanto, $E|X_i - Y_i| < \infty$, $\forall\ i = 1, ..., n$. Assim, de acordo, com a citada proposição, $\forall\, j = 1, ..., m_n$ fixado, $\left\{ \sum_{i=1}^{k_n - 1} Z_i^*(j)\ ,\ \mathscr{F}_{(k_n-1)\,m_n+j}(X,Y) \right\}$ constitui uma martingale, onde $Z_i^*(j) = X_{i\,m_n+j} - Y_{i\,m_n+j} - E\left(X_{i\,m_n+j} - Y_{i\,m_n+j}\ |\mathscr{F}_{(i-1)\,m_n+j}(X,Y)\ \right)$. Lembramos que $\mathscr{F}_n(X,Y)$ foi definida no enunciado do Lema 3.4.

Além disso, sem perda de generalidade, podemos supor que a seqüência de variáveis aleatórias $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ é independente da seqüência $\{X_n\}_{n \geq 1}$.

Devido a essa independência, ao fato de $EY = 0$ e à aplicação do Teorema 2.6 para a seqüência $\{X_n\}_{n \geq 1}$ ϕ_1-*mixing*, com $EX_n = 0$ e $E\,|X_n| \leq M < \infty$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, notamos, então, que:

$$\left| E\left(X_{i\, m_n + j} - Y_{i\, m_n+j} \,|\mathscr{F}_{(i-1)\, m_n+j}\,(X,Y) \right) \right| =$$

$$= \left| E\left(X_{i\, m_n+j} |\mathscr{F}_{(i-1)\, m_n+j}\,(X) \right) - E\left(Y_{i\, m_n+j} \right) \right| =$$

$$= \left| E\left(X_{i\, m_n+j} |\mathscr{F}_{(i-1)\, m_n+j}\,(X) \right) \right| \leq \phi_1\,(m_n)\, M.$$

Assim, pelo Lema 2.12, obtemos:

$$\begin{aligned} d_\alpha^\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}(X)}, F_Y) &\leq \frac{1}{n}\, E\left(|S_n\,(X) - S_n\,(Y)|^\alpha \right) \leq \\ &\leq \frac{C_3}{n} \left\{ m_n^\alpha b_n^\alpha k_n^{\frac{\alpha}{2}} + m_n^{\alpha-1} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^\alpha\, I_{\{\, |X_i - Y_i| \,>\, b_n - \phi_1(m_n) M\}} \right) + \right. \\ &+ \left. (m_n k_n \phi_1\,(m_n)\, M)^\alpha \right\}. \end{aligned}$$

Consideremos, agora, $b_n = b\; n^\delta$, com b $\in \mathbb{R}_+^*$, $m_n = \left[n^\beta \right] \leq n^\beta$ e $k_n \cong n^{1-\beta}$.

Observamos que:

(a) $\dfrac{m_n^\alpha\; b_n^\alpha\; k_n^{\frac{\alpha}{2}}}{n} \leq n^{-\delta'\,\alpha} \to 0$, quando $n \to \infty$,

(b) $\dfrac{m_n^{\alpha-1}}{n} \leq \dfrac{1}{n^{1-\beta(\alpha-1)}}$,

(c) $2\left(\sqrt{2}-1\right) < 1 - \beta\,(\alpha - 1) < 1$, pois $\beta < \left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow \beta\;\, (\alpha-1) < -\alpha + 3 - \left(\frac{2}{\alpha}\right) < 3 - 2\sqrt{2}$, e

(d) $\dfrac{(m_n\; k_n\; \phi_1\,(m_n)\;\, M)^\alpha}{n} \leq n^{\alpha-1}\;\, \phi_1^\alpha\,(m_n)\;\; M^\alpha \leq n^{\alpha-1}\;\, \phi_1\,(m_n)\;\; M^\alpha$, pois $\phi_1\,(n) \downarrow 0$, quando $n \to \infty$.

O primeiro termo da desigualdade proveniente do Lema 2.12 tende a 0, quando $n \to \infty$, devido ao item (a) acima. O segundo e o terceiro termos dessa desigualdade tende a 0, quando $n \to \infty$, em razão das condições (3.3) e (3.4), respectivamente.

Logo, $\lim d_\alpha(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = 0$. ∎

Observamos que, nas condições do Teorema 3.6, com $\alpha \in (1,2)$, o Corolário 2.17 implica que $S_n^{(\alpha)} \xrightarrow{d} Y$. Isto é, aproximamos, em distribuição, uma variável aleatória estritamente α-estável Y, com $\alpha \in (1,2)$, por uma soma de variáveis aleatórias ϕ_1-*mixing* (não necessariamente identicamente distribuídas), observadas as condições do citado teorema.

O nosso próximo objetivo é estabelecer um resultado similar para o caso ϕ_2-*mixing*. Entretanto, precisamos do resultado intermediário a seguir.

Proposição 3.7. *Seja* $\{X_n\}_{n\,\geq\,1}$ *uma seqüência de variáveis aleatórias* ϕ_2*-mixing, de acordo com a Definição 2.7, e* $\{Y_n\}_{n\,\geq\,1}$ *uma seqüência de variáveis aleatórias mutuamente independentes. Considere que essas seqüências sejam independentes entre si. Então, a seqüência de variáveis aleatórias* $\{\psi\,(X_n, Y_n)\}_{n\,\geq\,1}$ *também é* ϕ_2*-mixing, onde* $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é mensurável a Borel.*

Demonstração:

Lembramos a σ-álgebra dos borelianos do $\mathbb{R}^2$:

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma\left(B_1 \times B_2 : B_1, B_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\right).$$

Consideremos B $\in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Portanto, $(\psi\,(X,Y))^{-1}(B) = (X,Y)^{-1}(\psi^{-1}(B))$. Como $\psi^{-1}(B) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\psi^{-1}(B) = B_1 \times B_2$, com $B_1, B_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Portanto, $(\psi\,(X,Y))^{-1}(B) = X^{-1}(B_1) \bigcap Y^{-1}(B_2)$.

Definimos, agora, as seguintes σ-álgebras:

(a) $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset,\ \Omega\}$,

(b) $\mathscr{F}_k\,(\psi\,(X,Y)) = \sigma\,(\psi\,(X_i, Y_i) : i = 1, ..., k)$, $\forall\, k \geq 1$, e

(c) $\mathscr{F}_{k+n}^{\infty}\,(\psi\,(X,Y)) = \sigma\,(\psi\,(X_i, Y_i) : i \geq k+n)$, $\forall\, n \geq 1$ e $\forall\, k \geq 0$.

Assim, para conjuntos $C \in \mathscr{F}_k(\psi(X,Y))$ e $D \in \mathscr{F}_{k+n}^{\infty}(\psi(X,Y))$, temos:

$$C = \left(\bigcap_{i=1}^{k} X_i^{-1}(A_i)\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{k} Y_i^{-1}(B_i)\right) \ e \ D = \left(\bigcap_{i=k+n}^{\infty} X_i^{-1}(A_i)\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=k+n}^{\infty} Y_i^{-1}(B_i)\right),$$

com A_i e $B_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \forall\, i \in \mathbb{N}^*$.

Com a independência da seq*ü*ência $\{X_n\}_{n\,\geq\,1}$ em relação à seq*ü*ência $\{Y_n\}_{n\,\geq\,1}$, temos:

$$|P(C \cap D) - P(C)\,P(D)| =$$

$$\left| P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} X_i^{-1}(A_i)\right) \cap \left(\bigcap_{i=k+n}^{\infty} X_i^{-1}(A_i)\right)\right) P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} Y_i^{-1}(B_i)\right) \cap \left(\bigcap_{i=k+n}^{\infty} Y_i^{-1}(B_i)\right)\right) - \right.$$

$$\left. -P\left(\bigcap_{i=1}^{k} X_i^{-1}(A_i)\right) P\left(\bigcap_{i=k+n}^{\infty} X_i^{-1}(A_i)\right) P\left(\bigcap_{i=1}^{k} Y_i^{-1}(B_i)\right) P\left(\bigcap_{i=k+n}^{\infty} Y_i^{-1}(B_i)\right)\right|.$$

Pela independência das variáveis aleatórias $Y_n, \forall\, i \in \mathbb{N}^*$, a igualdade anterior se torna:

$$|P(C \cap D) - P(C)\,P(D)| =$$

$$\left| P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} X_i^{-1}(A_i)\right) \cap \left(\bigcap_{i=k+n}^{\infty} X_i^{-1}(A_i)\right)\right) - P\left(\bigcap_{i=1}^{k} X_i^{-1}(A_i)\right) P\left(\bigcap_{i=k+n}^{\infty} X_i^{-1}(A_i)\right)\right|.$$

$$.\ P\left(\bigcap_{i=1}^{k} Y_i^{-1}(B_i)\right) P\left(\bigcap_{i=k+n}^{\infty} Y_i^{-1}(B_i)\right).$$

Pela hipótese de ϕ_2-*mixing* e pelo fato de $P\left(\bigcap_{i=k+n}^{\infty} Y_i^{-1}(B_i)\right) \leq 1$, obtemos:

$$|P(C \cap D) - P(C)\,P(D)| \leq \phi_2(n)\, P\left(\bigcap_{i=1}^{k} X_i^{-1}(A_i)\right) P\left(\bigcap_{i=1}^{k} Y_i^{-1}(B_i)\right) = \phi_2(n)\, P(C),$$

sendo que a igualdade decorre da independência da seq*ü*ência $\{X_n\}_{n\,\geq\,1}$ em relação à seq*ü*ência $\{Y_n\}_{n\,\geq\,1}$ e da definição do conjunto C. ∎

A partir da proposição anterior, podemos enunciar o resultado que desenvolvemos para o caso ϕ_2-mixing.

Teorema 3.8. ** Sejam $\{X_n\}_{n\,\geq\,1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias ϕ_2-mixing, de acordo com a Definição 2.7, tal que $EX_n = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, Y uma variável aleatória estritamente α-estável, com $\alpha \in (1,2)$, e Y_1, Y_2, ... cópias independentes de Y com a propriedade de $|X_n - Y_n| \leq M < \infty$, q.c., $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Suponhamos que esteja satisfeita a seguinte condição do Teorema 3.6:*

$$\forall\, b > 0,\ \frac{1}{n^{1-\beta(\alpha-1)}} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^{\alpha}\, I_{\left\{\,|X_i - Y_i|\,>\,b\,n^{\delta}\right\}}\right) \to 0\ ,\ \textit{quando}\ \ n \to \infty\ ,$$

com $0 < \delta < \left(\frac{2-\alpha}{2\,\alpha}\right)$, $\beta = 2\ \left[\left(\frac{2-\alpha}{2\,\alpha}\right) - (\delta + \delta')\right]$, onde δ' é tal que $0 < \delta + \delta' < \left(\frac{2-\alpha}{2\,\alpha}\right)$.

Suponhamos, ainda, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^l \phi_2\,(n) < \infty, \forall\ l \in \mathbb{N}^*. \tag{3.5}$$

Então, $\lim d_{\alpha}(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = 0$.

Demonstração:

A demonstração é análoga àquela realizada no Teorema 3.6, com alguns pequenos ajustes.

Ao escolhermos $\psi\,(x,y) = x - y$ no resultado anterior, obtemos, pela Proposição 2.9, que, para cada $j = 1, ..., m_n$ fixado, $\left\{\sum_{i=1}^{k_n-1} Z_i^{**}\,(j)\ ,\ \mathscr{F}_{(k_n-1)\,m_n+j}\,(\psi\,(X,Y))\right\}$ constitui uma martingale, onde

$$Z_i^{**}\,(j) = X_{i\,m_n+j} - Y_{i\,m_n+j} - E\left(X_{i\,m_n+j} - Y_{i\,m_n+j}\ |\mathscr{F}_{(i-1)\,m_n+j}\,(\psi\,(X,Y))\right).$$

Além disso, temos, pela Proposição 3.7, que a seqüência $\{X_n - Y_n\}_{n\,\geq\,1}$ é ϕ_2-*mixing*. Esse resultado, somado ao fato de $EY = 0$ e à aplicação do Teorema 2.8, uma vez que $|X_n - Y_n|\ \leq M\ <\ \infty$, q.c., e $EX_n = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, implica:

$$\left|E\left(X_{i\,m_n+j} - Y_{i\,m_n+j}\ |\mathscr{F}_{(i-1)\,m_n+j}\,(\psi\,(X,Y))\right)\right| \leq 2\,\phi_2\,(m_n)\,M.$$

Assim, pelo Lema 2.13, obtemos:

$$
\begin{aligned}
d_{\alpha}^{\alpha}(F_{S_n^{(\alpha)}(X)}, F_Y) &\leq \frac{1}{n} E\left(|S_n(X) - S_n(Y)|^{\alpha}\right) \leq \\
&\leq \frac{C_4}{n}\left\{ m_n^{\alpha} b_n^{\alpha} k_n^{\frac{\alpha}{2}} + m_n^{\alpha-1} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^{\alpha} I_{\{\, |X_i - Y_i| \,>\, b_n - 2\phi_2(m_n) M\}}\right) + \right. \\
&+ \left. (m_n k_n 2\phi_2(m_n) M)^{\alpha} \right\}.
\end{aligned}
$$

O resultado segue, então, similarmente ao Teorema 3.6. ∎

Analogamente ao caso ϕ_1-*mixing*, ressaltamos que, nas condições do Teorema 3.8, com $\alpha \in (1,2)$, o Corolário 2.17 implica que $S_n^{(\alpha)} \xrightarrow{d} Y$. Isto é, aproximamos, em distribuição, uma variável aleatória estritamente α-estável Y, com $\alpha \in (1,2)$, por uma soma de variáveis aleatórias, as quais constituem uma seqüência ϕ_2-*mixing* (não necessariamente identicamente distribuídas), observadas as condições do citado teorema.

Na demonstração do Teorema 3.8, utilizamos o Teorema 2.8, que contém a estimativa:

$$
\left| E\left(\eta | \mathscr{F}_k\right) - E(\eta) \right| \leq 2\ \phi_2(n)\ M,\ q.c.\ .
$$

Entretanto, para se obter esse resultado, precisamos que a variável aleatória η seja tal que $|\eta| < M$ q.c..

O Teorema 3.8 poderia, a exemplo do Teorema 3.6, ser igualmente demonstrado com a hipótese $|X_n| < M$, q.c., $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, combinada com a hipótese de a seqüência $\{X_n\}_{n\,\geq\,1}$ ser ϕ_2-*mixing*.

Mas, optamos por trabalhar com uma condição menos restritiva: $|X_n - Y_n| < M$, q.c., $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Para tanto, demonstramos, inicialmente, com a Proposição 3.7, que a seqüência de variáveis aleatórias $\{\psi(X_n, Y_n)\}_{n\,\geq\,1}$ é ϕ_2-*mixing*, com $\psi(x,y) = x - y$ e, então, aplicamos o Teorema 2.8 à citada seqüência.

3.5 Caso: Cadeias de Markov

Esta seção relaciona os tópicos cadeia de Markov, seqüência ϕ_2-*mixing* e distância de Mallows. Buscamos estabelecer condições adequadas para obter convergência em distância de Mallows e em distribuição, para uma variável aleatória Y estritamente α-estável, com $\alpha \in (1,2)$, quando a seqüência $\{X_n\}_{n\,\geq\,1}$ é uma cadeia de Markov uniformemente ergódica. Iniciamos com a definição a seguir.

Definição 3.9. *Uma cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\,\geq\,1}$ com espaço de estados geral $\mathbb{E}$ é denominada uniformemente ergódica se*

$$|P^n(x,A) - \pi(A)| \leq \lambda\,\rho^n \;, \forall\, x \in \mathbb{E} \;\; e\, \forall\, A \in \mathscr{E}, \tag{3.6}$$

onde $\lambda > 0$, $0 < \rho < 1$, π é a distribuição de equilíbrio, conforme a Definição 1.12, $\mathbb{E}$ é um conjunto arbitrário qualquer e $\mathscr{E}$ é uma σ-álgebra gerada por subconjuntos de $\mathbb{E}$.

Antes de enunciarmos o resultado principal desta tese, precisamos relacionar cadeia de Markov uniformemente ergódica e ϕ_2-*mixing.* A próxima proposição trata dessa relação. Porém, antes de demonstrá-la, precisamos transcrever mais um resultado.

Teorema 3.10. *(Roussas e Ioannides [17], 1987) A seqüência $\{X_n\}_{n\,\geq\,1}$ é ϕ_2-mixing se, e somente se,*

$$\left|P\left(C|\mathscr{F}_k\right) - P(C)\right| \leq \phi_2(n)\,, \forall C \in \mathscr{F}_{k+n}^{\infty},$$

onde $\mathscr{F}_k$ e $\mathscr{F}_{k+n}^{\infty}$ foram definidas no Capítulo 2.

Destacamos que a demonstração do próximo resultado é devida a Campos e Dorea [3].

Proposição 3.11. *Seja $\{X_n\}_{n\,\geq\,1}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados geral $\mathbb{E}$ e uniformentente ergódica, conforme a Definição 3.9. Então, essa seqüência $\{X_n\}_{n\,\geq\,1}$ de variáveis aleatórias é ϕ_2-mixing, com coeficiente mixing $\phi_2(n) = 2\lambda\,\rho^n$.*

Demonstração:

Sejam μ_0 e π, respectivamente, as distribuições inicial e de equilíbrio da cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\,\geq\,1}$.

Portanto, $\forall\ A \in\ \mathscr{E}$, temos:

$$\mu_0\left(A\right) = \int_A \ \mu_0\left(dx\right) \ \ , e$$

$$\pi\left(A\right) = \int_A \ \pi\left(dx\right) \ \ .$$

Observamos que,

$$\left|P_{\mu_0}\left(X_n \in A\right) - \pi\left(A\right)\right| \leq \left|\int_{\mathbb{E}} \ P^n\left(y, A\right) \ \mu_0\left(dy\right) - \int_{\mathbb{E}} \left(\int_A \ \pi\left(dx\right)\right) \mu_0\left(dy\right)\right| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{E}} \left|P^n\left(y, A\right) \ - \ \int_A \ \pi\left(dx\right)\right| \mu_0\left(dy\right) = \int_{\mathbb{E}} \left|P^n\left(y, A\right) \ - \ \pi\left(A\right)\right| \mu_0\left(dy\right) \leq \lambda\ \rho^n,$$

devido à hipótese de ergodicidade uniforme.

Então, $\forall\ B \in\ \mathscr{E}$, obtemos:

$$\left|E_{\mu_0}\left(I_{\{X_{k+n} \in B\}} | \mathscr{F}_k\right) - E_{\mu_0}\left(I_{\{X_{k+n} \in B\}}\right)\right| =$$

$$= \left|P^n\left(X_k \in B\right) - P_{\mu_0}\left(X_{k+n} \in B\right) + \pi\left(B\right) - \pi\left(B\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|P^n\left(X_k \in B\right) - \pi\left(B\right)\right| + \left|\pi\left(B\right) - P_{\mu_0}\left(X_{k+n} \in B\right)\right| \leq \lambda\ \rho^n + \lambda\ \rho^{k+n} \leq 2\ \lambda\ \rho^n,$$

pela hipótese de ergodicidade uniforme e pela desigualdade anterior.

Assim, pelo Teorema 3.10 concluímos que a cadeia de Markov em questão é ϕ_2-*mixing*, com coeficiente *mixing* $\phi_2\left(n\right) = 2\lambda\ \rho^n$. ∎

O próximo resultado, também de nossa autoria, sintetiza o presente trabalho, pois constitui-se no objetivo e título desta tese.

Teorema 3.12. ** Sejam $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma cadeia de Markov uniformemente ergódica tal que $EX_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, Y uma variável aleatória estritamente α-estável, com $\alpha \in (1, 2)$, e Y_1, Y_2, ... cópias independentes de Y, tais que $|X_n - Y_n| \leq M < \infty$, q.c., $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Suponhamos que esteja satisfeita a seguinte condição do Teorema 3.6:*

$$\forall\, b > 0,\ \frac{1}{n^{1-\beta(\alpha-1)}} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - Y_i|^{\alpha}\, I_{\{\,|X_i - Y_i| > b\, n^{\delta}\}}\right) \to 0\ ,\ \textit{quando}\ \ n \to \infty\ ,$$

com $0 < \delta < \left(\frac{2-\alpha}{2\,\alpha}\right)$, $\beta = 2\ \left[\left(\frac{2-\alpha}{2\,\alpha}\right) - (\delta + \delta')\right]$, *onde* δ' *é tal que* $0 < \delta + \delta' < \left(\frac{2-\alpha}{2\,\alpha}\right)$.

Suponhamos, ainda, que a condição do Teorema 3.8 também seja válida:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^l \phi_2\,(n) < \infty, \forall\, l \in \mathbb{N}^*.$$

Então, $\lim d_{\alpha}(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = 0$.

Demonstração:

Pela Proposição 3.11, a cadeia de Markov do enunciado constitui-se em uma seqüência de variáveis aleatórias ϕ_2-*mixing*, $\phi_2\,(n) = 2\lambda\, \rho^n$. Portanto, a última condição do enunciado desse teorema é satisfeita para esse coeficiente *mixing*, o que pode ser verificado pelo teste da razão, por exemplo. Logo, pelo Teorema 3.8, obtemos que $\lim d_{\alpha}(F_{S_n^{(\alpha)}}, F_Y) = 0$. ■

Mais uma vez, temos $S_n^{(\alpha)} \xrightarrow{d} Y$, com $1 < \alpha < 2$. Com o resultado do Teorema 3.12, concluímos esta tese.

Apêndice A

Definições e Resultados Utilizados

Definição A.1. *(Embrechts [8], pg. 564, ou Feller [9], pg. 276) Uma função positiva e mensurável a Lebesgue L, definida em* $(0, \infty)$*, é denominada de variação lenta no infinito se, e somente se,* $\forall\, x > 0$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{L\,(t\,x)}{L\,(t)} = 1.$$

Teorema A.2. *Teorema Elementar de Skorokhod (Shorack e Wellner [20], pg. 9) Considere que,* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$*,* X_n *e* X *são, respectivamente, variáveis aleatórias com funções de distribuição* F_n *e* F*. Suponha que* $X_n \stackrel{d}{\to} X$*. Então,* $F_n^{-1}(U) \stackrel{q.\,c.}{\to} F^{-1}(U)$*.*

Demonstração:

Considere $0 < u < 1$. Dado $\epsilon > 0$, escolhemos $t \in \mathbb{R}$ tal que $F^{-1}(u) < t < F^{-1}(u) + \epsilon$, com F contínua em t. A escolha desse t é possível, pois o conjunto de descontinuidades de F (função não-decrescente) é enumerável.

O fato de $F^{-1}(u) < t$ implica que $F(t) > u$. Como $F_n(a) \to F(a)$ para todo ponto $a \in \mathbb{R}$ onde F é contínua (pois, $X_n \stackrel{d}{\to} X$), então $F_n(t) > u$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ suficientemente grande. Portanto, $F_n^{-1}(u) \leq t$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ suficientemente grande. Assim, $\limsup\ F_n^{-1}(u) \ \leq\ t\ <\ F^{-1}(u)\ +\ \epsilon$. Logo, $\limsup\ F_n^{-1}(u) < F^{-1}(u)\ +\ \epsilon$. Como essa desigualdade vale $\forall\, \epsilon\ >\ 0$, temos que $\limsup\ F_n^{-1}(u)\ \leq\ F^{-1}(u)$.

Por outro lado, seja $u' < u$. Escolhemos $r \in \mathbb{R}$ tal que $F^{-1}(u') - \epsilon < r < F^{-1}(u')$, com F contínua em r. O fato de $r < F^{-1}(u')$ implica que $F(r) \leq u' < u$. Analogamente ao caso anterior, temos que $F_n(r) \leq u$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ suficientemente grande. Segue, então, que $F_n^{-1}(u) \geq r$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ suficientemente grande. Com o mesmo raciocínio desenvolvido acima, obtemos que $\liminf F_n^{-1}(u) \geq F^{-1}(u')$. Analogamente, $\liminf F_n^{-1}(u) \geq F^{-1}(u)$, desde que F^{-1} seja contínua em u.

Assim, concluímos que $F^{-1}(u) = \lim F_n^{-1}(u)$, para todo u que seja ponto de continuidade de F^{-1}.

Como $P\left(U \in (0,1)\right) = 1$ e F^{-1} é contínua q.c., $F_n^{-1}(U) \overset{q.c.}{\rightarrow} F^{-1}(U)$. ■

Definição A.3. *(Chung [5], pg. 96) Uma família $\{X_n\}$ de variáveis aleatórias é denominada uniformemente integrável se, e somente se,*

$$\lim_{A\to\infty} \int_{\{|X_n|>A\}} |X_n| \; dP \;=\; 0.$$

uniformemente em n.

Teorema A.4. *Teorema de Vitali (Chung [5], pg. 97, ou Shorack e Wellner [20], pg. 9).*

Seja $r > 0$. Considere que $X_n \in \mathbb{F}_r$ e que $X_n \overset{p}{\rightarrow} X$. Então, as seguintes afirmativas são equivalentes:

a) $E\left(|X_n|^r\right) \rightarrow\; E\left(|X|^r\right)$;

b) $|x|^r$ é uniformemente X_n - integrável ; e

c) $X_n \overset{(r)}{\rightarrow} X$.

Referências Bibliográficas

[1] Bickel, P. J.; Freedman., D. A., Some Asymptotic Theory for the Bootstrap, *The Annals of Statistics*, 9 : 1196 - 1217, 1981.

[2] Burkholder, D. L., Distribution Function Inequalities for Martingales, *The Annals of Probability*, 1 (1) : 19 - 42, 1973.

[3] Campos, V. S. M.; Dorea C. C. Y., Kernel Estimation for Stationary Density of Markov Chains with General State Space, *Ann. Inst. Statist. Math*, 57 (3) : 443 - 453, 2005.

[4] Chatterji, S. D., An L^p-Convergence Theorem, *The Annals of Mathematical Statistics*, 40 (3) : 1068 - 1070, 1969.

[5] Chung, K. L., *A Course in Probability Theory*, Segunda Edição, Academic Press, 1974.

[6] Dall'Aglio, G., Sugli Estremi dei Momenti delle Funzioni di Ripartizione Doppia, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, Cl. Sci. 3 (1) : 33 - 74, 1956.

[7] Dobrushin, R. L., Prescribing a System of Random Variables by Conditional Distributions, *Theory of Probability and its Applications*, 15 : 458 - 486, 1970.

[8] Embrechts, P.; Klüppelberg, C.; Mikosch, T., *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Segunda Edição, Springer, 1999.

[9] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Segunda Edição, Volume 2, John Wiley and Sons, 1971.

[10] Fréchet, M., Les Tableaux de Corréllation dont les Marges sont Donnés, *Ann. Univ. Lyon S. A.*, 20 : 13 - 31, 1957.

[11] Ibragimov, I. A.; Kingman, J. F. C.; Linnik, I. V., *Independent and Stationary Sequences of Random Variables*, Groningen: Wolters-Noordhoff, 1971.

[12] Johnson, O.; Samworth, R., Central Limit Theorem and Convergence to Stable Laws in Mallows Distance, *Bernoulli*, 11 (5) : 829 - 845, 2005.

[13] Kantorovich, L. V., On one Effective Method of Solving Certain Classes of Extremal Problems, *Dokl. Akad. Nauk*, USSR, 28 : 212 - 215, 1940.

[14] Major, P., On the Invariance Principle for Sums of Independent Identically Distributed Random Variables, *Journal of Multivariate Analysis*, 8 : 487 - 517, 1978.

[15] Mallows, C. L., A Note on Asymptotic Joint Normality, *The Annals of Mathematical Statistics*, 43 : 508 - 515, 1972.

[16] Meyn, S. P.; Tweedie, R. L., *Markov Chains and Stochastic Stability*, Springer-Verlag, 1993.

[17] Roussas, G. G.; Ioannides, D., Moment Inequalities for Mixing Sequences of Random Variables, *Stochastic Analysis and Applications*, 5 (1) : 61 - 120, 1987.

[18] Salvemi, T., Sul Calcolo degli Indici di Concordanza tra due Caratteri Quantitativi, *Atti della VI Riunione della Soc. Ital. di Statistica*, Roma, 1943.

[19] Samorodnitsky, G.; Taqqu; M.S., *Stable non-Gaussian Random Processes*, Chapman and Hall, 1994.

[20] Shorack, G. R.; Wellner, J. A., *Empirical Processes with Applications to Statistics*, John Wiley e Sons, 1986.

[21] von Bahr, B.; Esseen, C-G, Inequalities for the rth Absolute Moment of a Sum of Random Variables, *The Annals of Mathematical Statistics*, 36 : 299 - 303, 1965.

[22] Wasserstein, L. N., Markov Process over Denumerable Products of Spaces Descibing Large Systems of Automata, *Prob. Inf. Transmission*, 5 : 47 - 52, 1969.