

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado em Matemática

Grupos de Coxeter

Otto Augusto de Moraes Costa

Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Pellegrini

Brasília, 4 de março de 2013

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Grupos de Coxeter.

por

Otto Augusto de Moraes Costa*

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 04 de março de 2013.

Comissão Examinadora:



Prof. Dr. Marco Antonio Pellegrini – MAT/UnB (Orientador)



Profa. Dra. Anita Pasotti – Brescia/Italy



Prof. Dr. José Antônio Oliveira de Freitas - MAT/UnB

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus pais, Osvaldo e Joana D'arc.

Agradecimentos

- A Deus por ter me dado a vida e por ser meu amigo e companheiro em todos os momentos.
- Aos meus pais, Osvaldo e Joana D'arc, pela criação e pela educação que me deram com muito esforço e, acima de tudo, com muito amor.
- À minha irmã, Érika, que sempre me deu muito apoio e carinho.
- De modo geral, aos meus familiares por terem me incentivado a estudar desde pequeno.
- Aos meus amigos-irmãos do grupo vocal Maranata, que, apesar da distância, sempre intercedem por mim em suas orações, o que tem me dado forças para prosseguir.
- Ao casal Hudson e Terezinha Guimarães, que demonstrou muita amizade e prestatividade ao me receber em Brasília.
- Aos meus amigos Lauro e Aramis por terem me estendido a mão no momento em que mais precisei.
- A Tailinny (minha segunda mãe), Fábio, Valdiego, Vinícius Elias, Emerson, Lidiane e Junior (o qual considero como irmão) por tornarem minha estadia em Brasília mais agradável.
- Aos meus amigos do nosso grupo de oração, Junior, Renata, Kali, Elon e Kelem, pela amizade e por terem compartilhado comigo momentos muito agradáveis na presença de Deus.
- Às minhas amigas Ilana e Renata (verdadeiras irmãs para mim), Saieny (Chayzinha), Maria e Keidna e aos meus amigos Lauro, Fábio e Alexandre pelo companheirismo e por termos compartilhado ideias que me fizeram amadurecer como pessoa e como matemático.
- Aos funcionários Claudinha, Thiago e Fabiana, verdadeiros amigos para mim.
- À minha amiga Maria José pelo carinho e pela consideração em estar presente em minha defesa, vindo de Natal a Brasília.

- Aos meus amigos de graduação Romildo Lima e Rainelly Medeiros (Lilly) pela amizade sincera, agradável e duradoura.

- Às professoras Graça Fonseca e Odenise, amigas de longa data, que acreditaram que eu poderia ir mais longe e me deram inúmeras palavras de incentivo.

- Aos professores André Gustavo, Viviane Simioli, Ronaldo Freire, Marcelo Pereira (UFRN) e Irina Sviridova (UnB) por terem contribuído significativamente para minha formação.

- Aos professores Anita Pasotti, José Antônio Oliveira de Freitas e Rudolf Richard Maier por terem aceitado participar da minha banca e pelas contribuições que enriqueceram muito este trabalho.

- Ao meu orientador, Marco Antonio Pellegrini, pela amizade e por tudo que me ensinou, com muita dedicação e paciência, ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

- À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, fazemos um breve estudo a respeito dos grupos de reflexões finitos, para os quais associamos sistemas de raízes, matrizes de Cartan e grafos, a fim de classificarmos todos os tais grupos. Em seguida, estudamos uma generalização desses grupos para os denominados grupos de Coxeter. Utilizando a função comprimento como ferramenta fundamental, mencionamos diversos resultados acerca dos subgrupos parabólicos.

No último capítulo, determinamos a estrutura dos centralizadores dos elementos de um grupo de Coxeter finito, seguindo o artigo: M. Konvalinka, G. Pfeiffer, C.E. Röver, ‘A note on element centralizers in finite Coxeter groups’, *J. Group Theory*, **14** (2011) 727–745.

Como aplicação final, apresentamos uma demonstração alternativa de um importante teorema de Solomon, conhecido como a fórmula de Solomon.

Abstract

This work is a brief study about the finite reflections groups, to which we associate root systems, Cartan matrices and Coxeter graphs, in order to classificate such groups. After that, we study a generalisation of these groups to Coxeter groups. By using the lenght function as fundamental tool, we mention various results about the parabolic subgroups.

In the last chapter we determinate the structure of the element centralisers of a finite Coxeter group, following the paper: M. Konvalinka, G. Pfeiffer, C.E. Röver, ‘A note on element centralizers in finite Coxeter groups’, *J. Group Theory*, **14** (2011) 727–745.

As final application we present an alternative proof of an important theorem of Solomon, known as the Solomon formula.

Sumário

Introdução	1
1 Grupos de reflexões finitos	4
1.1 Reflexões	4
1.2 Raízes	5
1.3 Classificação dos grupos de reflexões finitos	8
1.3.1 Grafos de Coxeter	8
1.3.2 Alguns grafos positivos definidos	11
1.3.3 Alguns grafos positivos semidefinidos	12
1.3.4 Subgrafos	14
1.3.5 Classificação de grafos do tipo positivo	15
2 Grupos de Coxeter	17
2.1 Matrizes de Cartan	17
2.2 O Teorema de Matsumoto	21
2.2.1 Subexpressões	23
2.2.2 Grupos de Coxeter	24
2.2.3 Subgrupos parabólicos	24
2.3 Matrizes de Cartan do tipo finito	25
2.3.1 Sistemas de Coxeter irredutíveis	25
2.3.2 Formas W -invariantes	26
2.4 O elemento de comprimento maximal	29
2.5 Representantes distintos das classes laterais	30
2.6 Classes de Coxeter	34
2.7 Classes cuspidais	36
3 Alguns exemplos de grupos de Coxeter finitos	38
3.1 Tipo A	38
3.2 Tipo B	39
3.3 Tipo D	41
3.4 Tipo $I_2(m)$ e tipo G_2	42
3.5 Tipo F_4	42

3.6	Tipo E_8	43
3.7	Tipo E_7	43
3.8	Tipo E_6	43
3.9	Tipo H_3 e tipo H_4	44
4	Centralizadores de elementos em grupos de Coxeter finitos	45
4.1	Centralizadores	47
4.2	Tipo A	49
4.3	Tipo B	51
4.4	Tipo D	53
4.5	Tipo I	55
4.6	Tipos excepcionais	55
4.7	Aplicações	55
	Referências bibliográficas	62

Introdução

Nesta dissertação, iremos estudar os grupos de Coxeter, vendo algumas das suas propriedades e estudando mais detalhadamente a estrutura dos centralizadores. Iniciamos este trabalho definindo uma reflexão num espaço euclidiano V com produto interno (\cdot, \cdot) , que consiste num operador linear $s_\alpha : V \rightarrow V$ definido por

$$s_\alpha \lambda = \lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha,$$

onde $\alpha \in V - \{0\}$. A partir disso, definimos um grupo de reflexões finito, que é um grupo finito gerado por reflexões no espaço V , sendo, portanto, um subgrupo do grupo ortogonal $O(V)$.

No Capítulo 1, tendo como principal referência o livro de Humphreys [6], estudamos o que vem a ser um sistema de raízes Φ no espaço V e associamos a Φ um grupo de reflexões $W = W(\Phi)$. Do sistema de raízes Φ , podemos extrair um subconjunto $\Delta \subset \Phi$, chamado sistema simples, cujo conjunto de reflexões associado S é um conjunto minimal de geradores para o grupo W . A um grupo de reflexões finito W podemos atribuir um grafo de Coxeter cujo conjunto de vértices se encontra em correspondência biunívoca com o sistema simples Δ (e com o conjunto das reflexões simples S). Concluímos o Capítulo 1 descrevendo todos os grafos de Coxeter conexos do tipo positivo. Essa descrição limita os possíveis grupos de reflexões finitos.

No Capítulo 2, seguindo a abordagem do livro [4] de Geck e Pfeiffer, definimos o que vem a ser uma matriz de Cartan $C = (c_{st})_{s,t \in S}$ com índices num conjunto finito não vazio S e, dado um espaço vetorial real de dimensão $|S|$, associamos à matriz C um grupo $W = W(C) = \langle S \rangle \leq GL(V)$, que ainda chamamos de grupo de reflexões. Podemos introduzir em W o conceito de comprimento da seguinte maneira. Dado um elemento $w \in W$, podemos escrevê-lo como produto de elementos de S , já que S gera W . O comprimento de w é o menor $k \in \mathbb{N}_0$ tal que w é escrito como produto de k elementos de S (expressão reduzida) e definimos o conjunto $J(w)$, formado pelos geradores que compõem tal expressão. A seguir, enunciamos alguns resultados importantes acerca da função comprimento $l : W \rightarrow \mathbb{N}_0$ e, através do teorema de Matsumoto, provamos que, dado um elemento $w \in W$, o conjunto $J(w)$ não depende da escolha da expressão reduzida para w .

Em seguida, generalizamos os grupos de reflexões para os denominados grupos de Coxeter, obtidos da seguinte maneira. Consideramos um conjunto finito X e uma matriz simétrica $M = (m_{xy})_{x,y \in X}$ cujas entradas são inteiros positivos ou ∞ , e o valor 1 aparece (somente) em cada entrada da diagonal principal. O grupo de Coxeter associado à matriz M é o grupo que satisfaz a seguinte apresentação:

$$G(M) = \langle x \in X \mid x^2 = 1 \text{ para } x \in X \text{ e } (xy)^{m_{xy}} = 1 \text{ para } x \neq y, m_{xy} < \infty \rangle.$$

Dentre os subgrupos de um grupo de Coxeter W com conjunto gerador S , destacamos os subgrupos parabólicos standard W_J , que consistem nos subgrupos gerados por subconjuntos J de S , e os seus conjugados, os quais são chamados de subgrupos parabólicos. Em seguida, mostramos que num grupo de Coxeter finito existe um elemento de comprimento maximal, e esse elemento é único. O mesmo vale para subgrupos parabólicos standard, os quais se pode provar que são também grupos de Coxeter.

Dado um subconjunto J de S , W pode ser decomposto na forma $W = W_J \cdot X_J$, onde W_J é o subgrupo parabólico standard gerado por J e X_J é uma transversal à direita de W_J em W cujos elementos são de comprimento minimal nas classes laterais correspondentes. Essa decomposição é de fundamental importância para a prova de diversos resultados posteriores, dentre os quais destacamos a existência de um complemento de W_J em seu normalizador $N_W(W_J)$, denotado por N_J .

No Capítulo 3, com base no artigo [7] de Konvalinka, Pfeiffer e Röver e nos livros de Humphreys [6] e de Geck e Pfeiffer [4], fazemos uma descrição dos grupos de Coxeter finitos, explicitando em cada um deles um sistema de raízes Φ e um sistema simples $\Delta \subset \Phi$. Além disso, determinamos para alguns desses as classes de conjugação e, encontrado um elemento de comprimento minimal em cada classe de conjugação, descrevemos o menor subgrupo parabólico de W que contém esse elemento.

No Capítulo 4, nosso objetivo principal é provar dois teoremas acerca da estrutura dos centralizadores dos elementos de um grupo de Coxeter finito. São eles:

Teorema A *Seja W um grupo de Coxeter finito e seja $w \in W$. Seja V o menor subgrupo parabólico de W que contém w . Então, o centralizador $C_V(w) = C_W(w) \cap V$ é um subgrupo normal do centralizador $C_W(w)$ com quociente $C_W(w)/C_V(w)$ isomorfo ao quociente normalizador $N_W(V)/V$.*

Teorema B *Considere um grupo de Coxeter finito W e um elemento $w \in W$ tal que a classe de conjugação à qual w pertence é não conforme. Se V é o menor subgrupo parabólico de W tal que $w \in V$, então o centralizador $C_W(w)$ decompõe-se em $C_V(w)$ com complemento isomorfo a $N_W(V)/V$.*

Em 2011, Konvalinka, Pfeiffer e Röver [7] provaram o Teorema A para o caso geral, isto é, o caso em que W é um grupo de Coxeter finito qualquer. Em contrapartida, o Teorema B é demonstrado separadamente para cada tipo de grupo de Coxeter finito irredutível, lançando mão da descrição feita no Capítulo 3.

Como aplicação da teoria de grupos de Coxeter estudada neste trabalho, damos uma demonstração alternativa da fórmula de Solomon, a qual afirma que, tomando $J \subseteq S$, vale a igualdade

$$\sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|} \pi_J = \varepsilon,$$

onde π_J indica o caráter de permutação da ação de W sobre as classes laterais de W_J e ε representa o caráter sinal de W . Essa fórmula, primeiramente demonstrada por Solomon [9] em 1966, tem importância fundamental, por exemplo, na teoria dos caracteres dos grupos finitos de tipo Lie.

Capítulo 1

Grupos de reflexões finitos

Neste capítulo, estudamos um pouco sobre os grupos finitos gerados por reflexões. Nosso objetivo aqui é descrever e classificar esses grupos. Aqui, nossa referência principal é o livro de Humphreys, [6].

1.1 Reflexões

Definição 1.1 *Seja V um espaço euclidiano real munido de um produto interno (\cdot, \cdot) . Uma reflexão é um operador linear s em V tal que $s\alpha = -\alpha$ para algum $\alpha \in V - \{0\}$ e $s\lambda = \lambda$ para todo $\lambda \in H_\alpha$, onde $H_\alpha = \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha) = 0\}$ é o hiperplano ortogonal ao vetor α .*

Podemos escrever $s = s_\alpha$, observando que $s_\alpha = s_{c\alpha}$ para qualquer $c \in \mathbb{R} - \{0\}$. É fácil deduzir a seguinte fórmula:

$$s_\alpha \lambda = \lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha. \quad (1.1)$$

Fazendo alguns cálculos simples, podemos concluir que s_α é uma transformação ortogonal, ou seja, $(s_\alpha \lambda, s_\alpha \mu) = (\lambda, \mu)$ para quaisquer $\lambda, \mu \in V$. Além disso, temos $(s_\alpha)^2 = 1$ e, portanto, s_α tem ordem 2 no grupo $O(V)$ das transformações ortogonais de V .

Definição 1.2 *Um grupo de reflexões finito é um grupo finito gerado por reflexões num espaço euclidiano V .*

Um grupo de reflexões finito é um subgrupo especialmente interessante de $O(V)$. Um exemplo clássico de um grupo de reflexões finito é o grupo diedral de ordem $2m$, que descreveremos a seguir.

Exemplo 1.3 *Seja V o plano euclidiano. O grupo diedral de ordem $2m$, denotado por $I_2(m)$, consiste das transformações ortogonais que preservam um polígono regular de n lados centrado na origem. $I_2(m)$ contém exatamente m rotações (por múltiplos de $2\pi/m$)*

e m reflexões (sobre as ‘diagonais’ do polígono). Aqui ‘diagonal’ significa uma linha que bissecta o polígono, unindo dois vértices ou os pontos médios de lados opostos se m é par, ou unindo um vértice ao ponto médio do lado oposto se m é ímpar. Observe que as rotações formam um subgrupo cíclico de índice 2, gerado por uma rotação por $2\pi/m$. O grupo $I_2(m)$ é, de fato, gerado por reflexões, pois uma rotação por $2\pi/m$ pode ser obtida pelo produto de duas reflexões relativas a um par de diagonais adjacentes que fazem um ângulo de $\theta := \pi/m$. Considerando H_α e H_β como sendo as retas de reflexão que contêm essas diagonais, podemos tomar vetores unitários ortogonais $\alpha = (\sin \theta, -\cos \theta)$ e $\beta = (0, 1)$ que formam um ângulo obtuso de $\pi - \theta$, e então $(\alpha, \beta) = -\cos \theta$. Para ver que $s_\alpha s_\beta$ é uma rotação por 2θ , basta encontrar sua matriz relativa à base canônica de \mathbb{R}^2 , tomando H_β como sendo o eixo Ox . A matriz obtida é:

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

1.2 Raízes

De agora em diante, denotamos por W um grupo de reflexões finito, agindo sobre um espaço euclidiano real V . Dizemos que W é **essencial** relativamente a V se W age sobre V sem fixar qualquer vetor não nulo.

Proposição 1.4 [6, p.6] *Se $t \in O(V)$ e α é um vetor não nulo de V , então $ts_\alpha t^{-1} = s_{t\alpha}$. Em particular, se $w \in W$, então $s_{w\alpha} \in W$.*

Agora vamos definir o que é um sistema de raízes.

Definição 1.5 *Seja Φ um conjunto finito de vetores não nulos de V . Dizemos que Φ é um sistema de raízes se as seguintes condições são satisfeitas:*

$$(R1) \quad \Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\} \text{ para todo } \alpha \in \Phi;$$

$$(R2) \quad s_\alpha \Phi = \Phi \text{ para todo } \alpha \in \Phi.$$

Os elementos do conjunto Φ são denominados raízes.

O grupo $W = W(\Phi)$ associado a Φ é o grupo gerado pelas reflexões $s_\alpha, \alpha \in \Phi$.

Todo grupo de reflexões pode ser obtido dessa maneira, possivelmente por muitas escolhas distintas de Φ . É importante verificar que todo grupo W proveniente de um sistema de raízes é, de fato, finito. Em primeiro lugar, observamos que a condição (R2) da definição anterior implica que $w\Phi = \Phi$ para todo $w \in W$. Vemos então que W age sobre o conjunto Φ , definindo um homomorfismo $\psi : W \rightarrow S_\Phi$, onde S_Φ denota o grupo das permutações sobre o conjunto Φ . Com efeito, cada s_α ($\alpha \in \Phi$) e, portanto, cada elemento de W fixa pontualmente o complemento ortogonal do subespaço gerado por Φ . Então

apenas $w = 1$ fixa todos os elementos de Φ . Assim, o homomorfismo ψ tem núcleo trivial. Como S_Φ é finito, podemos concluir, pelo Teorema do Homomorfismo, que W é um grupo de permutações finito.

Observação 1.6 *Dados um sistema de raízes Φ e o grupo de reflexões correspondente W , seja Φ' o conjunto obtido normalizando-se os vetores de Φ . É fácil ver que Φ' é um sistema de raízes com grupo de reflexões correspondente W .*

Veremos a seguir algumas propriedades de um sistema de raízes Φ e de seu grupo associado W .

Observe que W é completamente determinado pelo conjunto Φ , mas há um certo impasse em usar Φ como uma ferramenta na classificação de possíveis grupos de reflexões: a cardinalidade de Φ pode ser muito grande, comparada à dimensão do espaço euclidiano V . Por exemplo, no caso em que W é um grupo diedral, $\dim V = 2$, mas um sistema de raízes Φ pode conter tantos elementos quanto W .

Precisamos então da definição a seguir.

Definição 1.7 *Uma ordenação total do espaço vetorial real V é uma relação transitiva em V , denotada por $<$, que satisfaz as seguintes propriedades:*

- (1) *Para cada par $\lambda, \mu \in V$, exatamente uma das seguintes situações ocorre: ou $\lambda < \mu$ ou $\lambda = \mu$ ou $\mu < \lambda$.*
- (2) *Para quaisquer $\lambda, \mu, \nu \in V$, se $\mu < \nu$, então $\lambda + \mu < \lambda + \nu$.*
- (3) *Se $\mu < \nu$ e c é um número real não nulo, então $c\mu < c\nu$ se $c > 0$, enquanto $c\nu < c\mu$ se $c < 0$.*

Dada uma ordenação total, dizemos que $\lambda \in V$ é **positivo** se $0 < \lambda$. A soma de vetores positivos é também um vetor positivo, assim como o múltiplo escalar de um vetor positivo por um número real positivo.

Se V tem dimensão finita, podemos construir facilmente uma ordenação total de V da seguinte maneira: escolha uma base ordenada arbitrária $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de V e faça $\sum a_i \lambda_i < \sum b_i \lambda_i$ sempre que $a_k < b_k$, onde k é o menor índice i para o qual $a_i \neq b_i$. É fácil verificar que os três axiomas acima são satisfeitos. Observe também que todos os λ_i da base são positivos nessa ordenação.

Definição 1.8 *Seja Φ um sistema de raízes. Dizemos que um subconjunto $\Pi \subset \Phi$ é um sistema positivo se consiste de todas as raízes que são positivas em relação a alguma ordenação total de V .*

É evidente que sistemas positivos existem. Sabemos que, se $\alpha \in \Phi$, então $-\alpha \in \Phi$. Sendo assim, é claro que, se Π é um sistema positivo, então Φ é a união disjunta de Π e $-\Pi$. O conjunto $-\Pi$ recebe o nome de **sistema negativo**. Fixado um sistema positivo Π , podemos escrever $\alpha > 0$ em lugar de $\alpha \in \Pi$.

Definição 1.9 Dizemos que um subconjunto Δ de Φ é um sistema simples (e chamamos seus elementos de raízes simples) se Δ é uma base para o subespaço $\langle \Phi \rangle$ de V e se, além disso, cada $\alpha \in \Phi$ é uma combinação linear de Δ com coeficientes todos de mesmo sinal.

A cardinalidade de um sistema simples Δ é um invariante de Φ , uma vez que mede a dimensão do subespaço $\langle \Phi \rangle$. Então o número $|\Delta|$ recebe o nome de **posto** de W . Ao longo deste capítulo, reservamos o índice n para o posto do grupo W .

Não é de todo evidente a existência de sistemas simples. O que nos dá essa garantia é o teorema a seguir.

Teorema 1.10 [6, p.8] *Valem as seguintes propriedades:*

- (a) *Se Δ é um sistema simples em Φ , então existe um único sistema positivo que contém Δ .*
- (b) *Todo sistema positivo Π em Φ contém um único sistema simples. Em particular, sistemas simples existem.*

A proposição abaixo mostra que o ângulo entre duas raízes simples é sempre reto ou obtuso.

Proposição 1.11 [6, p.9] *Se Δ é um sistema simples em Φ , então $(\alpha, \beta) \leq 0$ para quaisquer $\alpha \neq \beta$ em Δ .*

Segue diretamente da definição que, para todo sistema simples Δ e para todo $w \in W$, $w\Delta$ é também um sistema simples com sistema positivo correspondente $w\Pi$, onde Π é o sistema positivo determinado por Δ . Para entendermos melhor a passagem de Π para $w\Pi$, podemos considerar o caso especial em que $w = s_\alpha$ ($\alpha \in \Delta$). A seguinte proposição mostra que Π e $s_\alpha\Pi$ diferem por uma única raiz. Mais precisamente, α é a única raiz positiva em Φ que tem como imagem por s_α uma raiz negativa.

Proposição 1.12 [6, p.10] *Seja Δ um sistema simples, contido em um sistema positivo Π . Se $\alpha \in \Delta$, então $s_\alpha(\Pi - \{\alpha\}) = \Pi - \{\alpha\}$.*

Teorema 1.13 [6, p.10] *Quaisquer dois sistemas positivos em Φ são conjugados sob a ação de W , ou seja, dados dois sistemas positivos Π, Π' , existe $w \in W$ tal que $\Pi' = w\Pi$.*

Corolário 1.14 [6, p.10] *Quaisquer dois sistemas simples em Φ são conjugados sob a ação de W .*

Sabemos que o grupo W é gerado pelas reflexões s_α ($\alpha \in \Phi$). O próximo teorema mostra que, fixado um sistema simples Δ em Φ , W é gerado pelas **reflexões simples**, que são as reflexões do tipo s_α , com $\alpha \in \Delta$.

Teorema 1.15 *Seja Δ um sistema simples contido em Φ . Então,*

- (1) *O grupo W é gerado pelas reflexões s_α ($\alpha \in \Delta$).*
- (2) *Nenhum subconjunto próprio do conjunto das reflexões simples pode gerar W .*
- (3) *Para todo $\beta \in \Phi$, existe $w \in W$ tal que $w\beta \in \Delta$.*

Demonstração: (2) Suponha que exista $\alpha \in \Delta$ tal que o conjunto $\{s_\beta \mid \beta \in \Delta - \{\alpha\}\}$ ainda gera W . Assim, podemos escrever $s_\alpha = s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_r}$, com $\beta_i \in \Delta - \{\alpha\}$. Então, $(s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_r})\alpha = s_\alpha\alpha = -\alpha < 0$.

Como $\alpha > 0$, existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tal que

$$(s_{\beta_{i+1}} \cdots s_{\beta_r})\alpha > 0 \text{ e } s_{\beta_i}(s_{\beta_{i+1}} \cdots s_{\beta_r})\alpha < 0.$$

Assim, pela Proposição 1.12, $(s_{\beta_{i+1}} \cdots s_{\beta_r})\alpha = \beta_i$, donde podemos concluir, utilizando a fórmula (1.1), que $\alpha = (s_{\beta_r} \cdots s_{\beta_{i+1}})\beta_i$ é combinação linear de β_i, \dots, β_r . Portanto, Δ não pode ser um conjunto linearmente independente, o que contraria a nossa hipótese de que Δ é um sistema simples.

As provas dos itens (1) e (3) encontram-se em [6, p.11] □

Concluimos esta seção com as proposições a seguir.

Proposição 1.16 [6, p.24] *Toda reflexão em W é da forma s_α para algum $\alpha \in \Phi$.*

Proposição 1.17 [10, 1.20] *Seja X um conjunto finito de vetores em V . Então todo elemento $w \in W$ que fixa todos os vetores de X pode ser expresso como produto de reflexões s_α que também fixam todos os vetores de X .*

1.3 Classificação dos grupos de reflexões finitos

1.3.1 Grafos de Coxeter

Definimos um **grafo de Coxeter** como sendo um grafo finito não direcionado cujas arestas são rotuladas com inteiros maiores ou iguais a 3 ou com o símbolo ∞ . Se S denota o conjunto de vértices, denotamos por $m_{st} = m_{ts}$ o rótulo na aresta que une os vértices $s \neq t$. Como o rótulo 3 aparece frequentemente, podemos simplesmente omiti-lo. Quando dois vértices $s \neq t$ não estão interligados por uma aresta, convencionamos que $m_{st} = 2$. Convencionamos também que $m_{ss} = 1$ para todo $s \in S$.

Quando temos um grupo de reflexões finito W e um sistema simples Δ , podemos associar a W um grafo de Coxeter, de modo natural. Neste caso, tomamos como S o conjunto de todas as reflexões simples s_α ($\alpha \in \Delta$) e dizemos que o par (W, S) é um **sistema de Coxeter**. Dados $\alpha, \beta \in \Delta$, denotamos por $m_{s_\alpha s_\beta}$ (ou $m(\alpha, \beta)$) a ordem do

produto $s_\alpha s_\beta$ em W . Observe que $m(\alpha, \alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Delta$. Além disso, se $\alpha, \beta \in \Delta$, então $m(\alpha, \beta) = m(\beta, \alpha)$.

A partir desses inteiros $m(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \Delta$, podemos construir um grafo Γ , com conjunto de vértices S em correspondência biunívoca com Δ , da seguinte maneira. Se $\alpha, \beta \in \Delta$ são raízes distintas tais que $m(\alpha, \beta) \geq 3$, unimos o par de vértices correspondentes a s_α e s_β com uma aresta, e marcamos tal aresta com o valor de $m(\alpha, \beta)$. Se um par de vértices não está unido por uma aresta, subentende-se que $m(\alpha, \beta) = 2$. O grafo construído dessa forma é o **grafo de Coxeter** de W . Esse grafo não depende da escolha do sistema simples Δ . De fato, se Δ, Δ' são dois sistemas simples, então, pelo Corolário 1.14, existe $w \in W$ tal que $\Delta' = w\Delta$. Assim, dados $\alpha, \beta \in \Delta$, temos

$$\begin{aligned} (s_\alpha s_\beta)^m = 1 &\Leftrightarrow w(s_\alpha s_\beta)^m w^{-1} = 1 \Leftrightarrow (ws_\alpha s_\beta w^{-1})^m = 1 \\ &\Leftrightarrow (ws_\alpha w^{-1} w s_\beta w^{-1})^m = 1 \Leftrightarrow (s_{w\alpha} s_{w\beta})^m = 1, \end{aligned}$$

sendo a última equivalência decorrente da Proposição 1.4. Portanto, a ordem de $s_\alpha s_\beta$ coincide com a ordem de $s_{w\alpha} s_{w\beta}$.

A proposição a seguir estabelece um critério muito interessante de isomorfismo entre grupos de reflexões.

Proposição 1.18 [6, p.30] *Sejam W_1, W_2 grupos de reflexões finitos que agem nos espaços euclidianos V_1 e V_2 , respectivamente. Assuma que W_1 e W_2 são essenciais. Se W_1 e W_2 têm o mesmo grafo de Coxeter, então existe uma isometria de V_1 em V_2 induzindo um isomorfismo de W_1 em W_2 . (Em particular, se $V_1 = V_2 = V$, os subgrupos W_1 e W_2 são conjugados em $O(V)$.)*

Um grafo não direcionado Γ é dito **conexo** se, para qualquer par de vértices distintos em Γ , existe um caminho que os une. Dizemos que um sistema de Coxeter (W, S) é **irreduzível** quando o grafo de Coxeter correspondente Γ é conexo. Neste caso, dizemos também que o sistema de raízes Φ é irreduzível. Em geral, se $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ são as componentes conexas de Γ e Δ_i, S_i são os conjuntos correspondentes de raízes simples e reflexões simples, então se $\alpha \in \Delta_i$ e $\beta \in \Delta_j$ ($i \neq j$), temos $m(\alpha, \beta) = 2$ e, portanto, $s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha$. A seguinte proposição mostra que o estudo de grupos de reflexões finitos pode ser reduzido ao caso em que Γ é conexo.

Proposição 1.19 [6, p.30] *Seja (W, S) um sistema de Coxeter com grafo de Coxeter correspondente Γ . Sejam $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ as componentes conexas de Γ e J_1, \dots, J_r os subconjuntos correspondentes de S . Então W é o produto direto dos subgrupos W_{J_1}, \dots, W_{J_r} e cada sistema de Coxeter (W_{J_i}, J_i) é irreduzível.*

Voltamos agora a considerar os grafos de Coxeter no caso geral (não necessariamente associados a grupos de reflexões). A um grafo de Coxeter Γ com conjunto de vértices S de cardinalidade n , associamos uma matriz simétrica $n \times n$, fazendo:

$$a_{st} := -\cos \frac{\pi}{m_{st}}.$$

No caso em que $m_{st} = \infty$, convencionamos que $\frac{\pi}{\infty} = 0$ e, portanto, obtemos $a_{st} = -1$.

Vamos relembrar algumas terminologias. Qualquer matriz simétrica $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ define uma forma bilinear $\beta(x, y) = x^t A y$ ($x, y \in \mathbb{R}^n$), que tem a forma quadrática associada $Q(x) = x^t A x$. Sabe-se, pelo Teorema Espectral, que A é diagonalizável e seus autovalores são todos reais. A matriz A é dita **positiva definida** se $x^t A x > 0$ para todo $x \neq 0$, e **positiva semidefinida** se $x^t A x \geq 0$ para todo x . Equivalentemente, A é positiva definida se todos os seus autovalores são positivos, e positiva semidefinida se todos os seus autovalores são não negativos. Em ambos os casos, dizemos que A é do **tipo positivo**. Por simplicidade, dizemos que o grafo de Coxeter Γ é positivo definido ou positivo semidefinido quando a matriz associada tem a propriedade correspondente.

Existe outra caracterização bem conhecida de matriz do tipo positivo em termos de determinantes. Os **menores principais** de A são os determinantes das submatrizes obtidas ao remover-se as k últimas linhas e as k últimas colunas ($0 \leq k < n$). Então A é positiva definida se, e somente se, todos os seus menores principais são positivos.

Quando Γ é proveniente de um grupo de reflexões finito W , a matriz A é positiva definida, pois representa o produto interno euclidiano usual relativo à base Δ de V , assumindo, por conveniência, que Δ consiste de vetores unitários. De fato, as entradas da matriz do produto interno relativo à base Δ são da forma (α, β) , com $\alpha, \beta \in \Delta$. Como $\{s_\alpha, s_\beta\}$ gera um grupo diedral de ordem $2m(\alpha, \beta)$, então, como vimos no Exemplo 1.3, α e β formam um ângulo de $\pi - \frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}$ e, portanto, $(\alpha, \beta) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}\right) = -\cos \frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}$. Para classificarmos os grupos de reflexões finitos, listaremos todos os possíveis grafos de Coxeter conexos do tipo positivo. No Capítulo 3, mostraremos que cada grafo positivo definido corresponde a um grupo de reflexões finito.

1.3.2 Alguns grafos positivos definidos

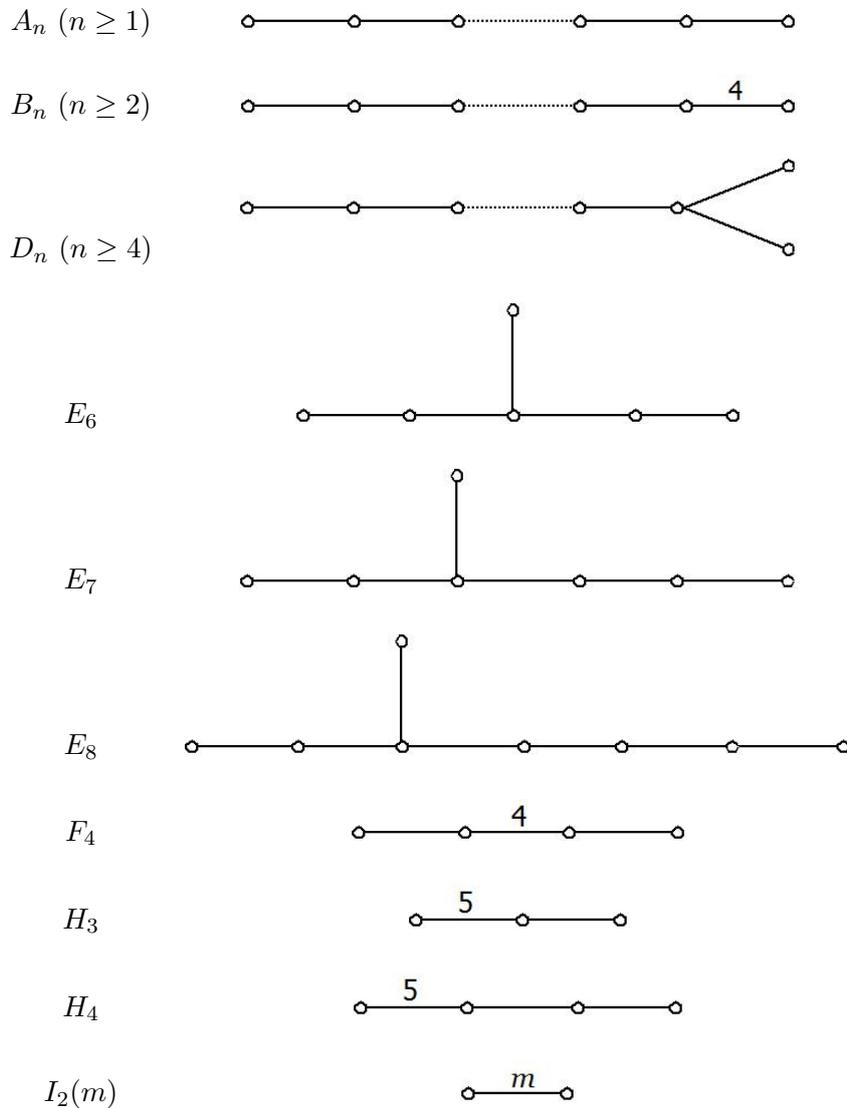


Figura 1: Alguns grafos de Coxeter positivos definidos.

Afirmamos que os grafos na Figura 1 são todos positivos definidos. Para verificarmos isso, podemos calcular os menores principais da matriz correspondente A em cada caso. É fácil ver que cada menor principal é o determinante da matriz relativa a um dos grafos da Figura 1. Então, por indução sobre n (o número de vértices), basta calcular $\det A$ em cada caso. Como o denominador 2 aparece frequentemente, é mais conveniente calcular $\det 2A$.

Vejam os que acontece no grupo de reflexões W do tipo A_n , por exemplo. Vamos provar por indução sobre n que, se $A(n)$ é a matriz associada ao grafo de Coxeter de W , então $\det 2A(n) = n + 1$. De fato, para $n = 1$ temos $2A(1) = (2)$ e $\det 2A(1) = 2$. Se

$n = 2$, obtemos a matriz

$$2A(2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e, portanto, $\det 2A(2) = 3$. Suponha que tenhamos, para algum $n \geq 2$, $\det 2A(k) = k + 1$ para todo $k \leq n$. Observe que

$$2A(n+1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & & & 0 \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & -1 \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Concluimos assim que

$$\det 2A(n+1) = 2 \det 2A(n) + 1(-1) \det 2A(n-1) = 2(n+1) - n = n+2.$$

Fazendo alguns cálculos, podemos construir a seguinte tabela (veja [6, p. 33]):

A_n	B_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	H_3	H_4	$I_2(m)$
$n+1$	2	4	3	2	1	1	$3 - \sqrt{5}$	$(7 - 3\sqrt{5})/2$	$4\text{sen}^2(\pi/m)$

1.3.3 Alguns grafos positivos semidefinidos

Para provarmos que os grafos da Figura 1 são os únicos positivos definidos conexos, apresentamos alguns grafos auxiliares na Figura 2. Afirmamos que todos eles são positivos semidefinidos, mas não positivos definidos. Cada grafo é obtido de um grafo da Figura 1 adicionando-se um único vértice. Em cada caso, o índice n indica então que o número de vértices é $n + 1$.

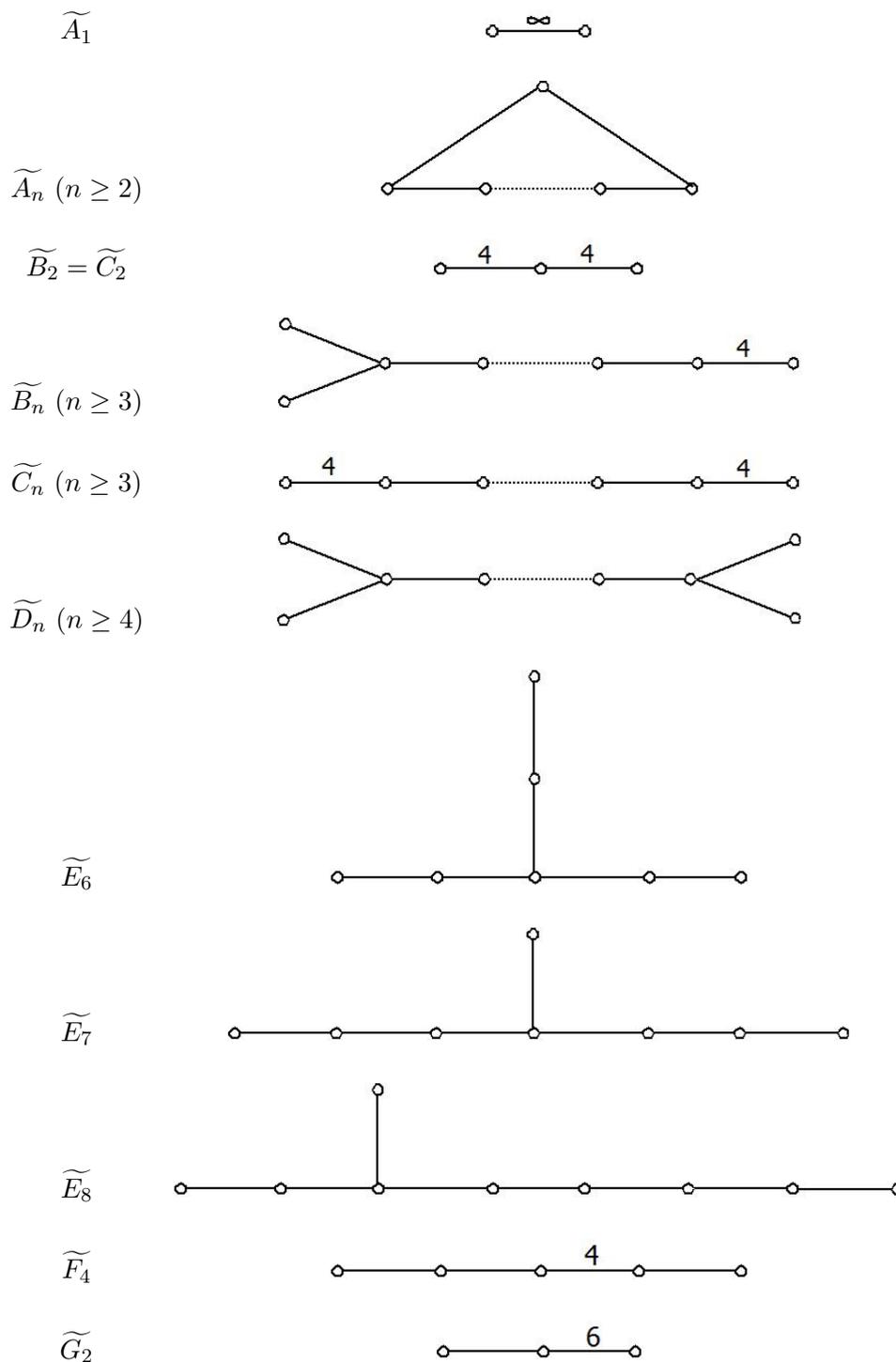


Figura 2: Alguns grafos de Coxeter positivos semidefinidos.

Uma vez que a remoção de um determinado vértice de cada grafo na Figura 2 resulta em um dos grafos positivos definidos da Figura 1, basta verificar que o determinante da matriz A relativa a cada grafo é 0.

Além dos grafos apresentados nas Figuras 1 e 2, será útil sabermos que os grafos de Coxeter Z_4 e Z_5 , ilustrados na Figura 3, não são do tipo positivo. Isso segue do fato de que o determinante de $2A$ em cada caso é, respectivamente, $3 - 2\sqrt{5}$ e $4 - 2\sqrt{5}$, ambos valores negativos. Esses valores podem ser facilmente calculados usando os determinantes encontrados para os tipos H_3 e H_4 .

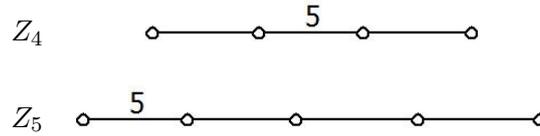


Figura 3: Grafos dos tipos Z_4 e Z_5 .

1.3.4 Subgrafos

Aqui obtemos um fato de extrema importância para a classificação desejada: cada ‘subgrafo’ próprio de um grafo conexo do tipo positivo é positivo definido. Entendemos por um **subgrafo** de um grafo de Coxeter Γ um grafo Γ' obtido pela omissão de alguns vértices (e arestas adjacentes) e/ou pelo decréscimo do valor dos rótulos em uma ou mais arestas. Dizemos também que Γ contém Γ' . Por simplicidade, optamos por não considerar um grafo como um subgrafo de si mesmo.

Antes de darmos prosseguimento, precisamos de alguns fatos sobre a teoria de matrizes. Uma matriz real $n \times n$ A é dita **indecomponível** se não existe uma partição do conjunto de índices em subconjuntos não vazios I, J tais que $a_{ij} = a_{ji} = 0$ sempre que $i \in I$ e $j \in J$. Caso contrário, reordenando os índices, A poderia ser escrita na forma diagonal em blocos. É claro que a matriz relativa a um grafo de Coxeter é indecomponível quando o grafo é conexo.

Proposição 1.20 [6, p.35] *Seja A uma matriz real simétrica $n \times n$ positiva semidefinida e indecomponível. Assuma que $a_{ij} \leq 0$ sempre que $i \neq j$. Então:*

- (a) $N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t A x = 0\}$ coincide com o núcleo de A e tem dimensão menor ou igual a 1.
- (b) O menor autovalor de A tem multiplicidade 1 e, além disso, tem um autovetor cujas coordenadas são todas estritamente positivas.

Corolário 1.21 *Se Γ é um grafo de Coxeter conexo do tipo positivo, então todo subgrafo de Γ é positivo definido.*

Demonstração: Seja Γ' um subgrafo de Γ e sejam A e A' as matrizes associadas a Γ e Γ' , respectivamente. Então, A' é de ordem $k \times k$ para algum $k \leq n$. Como os rótulos das arestas satisfazem $m'_{ij} \leq m_{ij}$, temos então $a'_{ij} = -\cos(\pi/m'_{ij}) \geq -\cos(\pi/m_{ij}) = a_{ij}$. Suponha que A' não seja positiva definida. Então, existe um vetor não nulo $x =$

$(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ tal que $x^t A' x \leq 0$. Aplicando a forma quadrática associada à matriz A ao vetor $(|x_1|, \dots, |x_k|, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, obtemos

$$0 \leq \sum_{i,j \leq k} a_{ij} |x_i| |x_j| \leq \sum_{i,j \leq k} a'_{ij} |x_i| |x_j| \leq \sum_{i,j \leq k} a'_{ij} x_i x_j \leq 0$$

e todas as desigualdades acima são, na verdade, igualdades. A primeira delas mostra que temos um vetor não nulo pertencente ao núcleo de A . Como A não tem autovalores negativos, 0 é o seu menor autovalor e, pelo item (b) da Proposição 1.20, 0 tem multiplicidade 1 como autovalor de A e tem um autovetor cujas coordenadas são todas estritamente positivas. Portanto, devemos ter $k = n$ e todas as coordenadas de x devem ser não nulas. Mas da igualdade $\sum_{i,j \leq k} a_{ij} |x_i| |x_j| = \sum_{i,j \leq k} a'_{ij} |x_i| |x_j|$, concluímos que $a'_{ij} = a_{ij}$ para todos $1 \leq i, j \leq n$, contrariando o fato de que Γ' é um subgrafo de Γ . \square

1.3.5 Classificação de grafos do tipo positivo

Teorema 1.22 *Os grafos da Figura 1 e os da Figura 2 são os únicos grafos de Coxeter conexos do tipo positivo.*

Demonstração: Suponha que exista um grafo de Coxeter Γ do tipo positivo distinto de todos os listados na Figura 1 e na Figura 2. Procedemos em 20 passos para obtermos uma contradição, utilizando repetidamente o Corolário 1.21. Seja n o número de vértices de Γ e seja m o maior valor de rótulo dentre as arestas.

- (1) Todos os grafos de Coxeter de posto 1 ou 2 são claramente do tipo positivo $(A_1, I_2(m), \widetilde{A}_1)$, então devemos ter $n \geq 3$.
- (2) Como \widetilde{A}_1 não pode ser subgrafo de Γ , devemos ter $m < \infty$.
- (3) Como \widetilde{A}_n ($n \geq 2$) não pode ser um subgrafo de Γ , Γ não contém circuitos. Suponha por um momento que $m = 3$.
- (4) Γ deve ter um ponto de ramificação, pois $\Gamma \neq A_n$.
- (5) Γ possui um único ponto de ramificação, pois não contém \widetilde{D}_n , $n > 4$.
- (6) Como Γ não pode conter \widetilde{D}_4 , exatamente três arestas se encontram no ponto de ramificação, e o número de vértices após esse ponto em cada direção é, digamos, a, b e c , com $a \leq b \leq c$.
- (7) Como \widetilde{E}_6 não é subgrafo de Γ , $a = 1$.
- (8) Como \widetilde{E}_7 não é um subgrafo de Γ , $b \leq 2$.
- (9) Como $\Gamma \neq D_n$, b não pode ser 1 e, portanto, $b = 2$.

- (10) Como \widetilde{E}_8 não é um subgrafo de Γ , $c \leq 4$.
- (11) O caso $m = 3$ é impossível, já que $\Gamma \neq E_6, E_7, E_8$. Então $m \geq 4$.
- (12) Γ não contém \widetilde{C}_n , então apenas uma aresta tem um rótulo maior que 3.
- (13) Γ não contém \widetilde{B}_n , então Γ não tem pontos de ramificação.
Agora considere o que acontece se $m = 4$.
- (14) Como $\Gamma \neq B_n$, as duas arestas das extremidades de Γ têm rótulo 3.
- (15) Como Γ não contém \widetilde{F}_4 , n deve ser 4.
- (16) Mas $\Gamma \neq F_4$, o que torna o caso $m = 4$ impossível. Então $m \geq 5$.
- (17) Devemos ter $m = 5$, já que Γ não contém \widetilde{G}_2 .
- (18) Γ não pode conter o grafo não positivo Z_4 , logo as arestas de rótulo 5 devem estar nas extremidades.
- (19) Γ não contém o grafo não positivo Z_5 , logo $n \leq 4$.
- (20) Agora Γ deve ser ou H_3 ou H_4 , o que é absurdo. Eliminamos, então, todas as possibilidades.

□

Como vimos anteriormente, o grafo de Coxeter associado a um grupo de reflexões finito é positivo definido. Portanto, o Teorema 1.22 limita os possíveis grupos de reflexões finitos.

No Capítulo 3, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 1.23 *Cada grafo de Coxeter conexo positivo definido é o grafo associado a um determinado grupo de reflexões finito.*

Capítulo 2

Grupos de Coxeter

Neste capítulo, fazemos uma generalização dos grupos de reflexões finitos para o que chamamos de grupos de Coxeter.

2.1 Matrizes de Cartan

Para desenvolvermos a teoria de grupos de Coxeter, teremos por base o conceito de matriz de Cartan, que nos dá a informação necessária para determinarmos um sistema de raízes e a ação de um grupo de reflexões correspondente sobre tal sistema.

Definição 2.1 *Seja S um conjunto finito não vazio de índices e seja $C = (c_{st})_{s,t \in S}$ uma matriz com entradas em \mathbb{R} . Dizemos que C é uma matriz de Cartan se satisfaz as seguintes condições:*

(C1) *Para $s \neq t$, temos $c_{st} \leq 0$; além disso, $c_{st} = 0$ se, e somente se, $c_{ts} = 0$.*

(C2) *Temos $c_{ss} = 2$ e, para $s \neq t$, temos $c_{st}c_{ts} = 4 \cos^2(\pi/m_{st})$, onde m_{st} é um inteiro maior ou igual a 2 ou $m_{st} = \infty$.*

Seja $C = (c_{st})_{s,t \in S}$ uma matriz de Cartan e seja V um espaço vetorial real de dimensão $|S|$, onde fixamos uma base $\{\alpha_s \mid s \in S\}$. Um elemento $g \in GL(V)$ age sobre V pela direita, e escrevemos essa ação na forma $(v, g) \mapsto v \cdot g$ ($v \in V$). Queremos associar a C um subgrupo de $GL(V)$. Para isso, definimos uma ação linear de cada $s \in S$ sobre V da seguinte maneira:

$$s : V \rightarrow V, \quad \alpha_t \mapsto \alpha_t - c_{st}\alpha_s \quad (t \in S).$$

A essa transformação linear damos o nome de **reflexão** com raiz α_s , devido ao seguinte resultado:

Lema 2.2 [4, Lemma 2.2] *A transformação linear $s : V \rightarrow V$ tem as seguintes propriedades:*

$$\alpha_s \cdot s = -\alpha_s, \text{Tr}(s) = |S| - 2, \text{ e } s^2 = id_V.$$

Consequentemente, cada s é um operador diagonalizável de V , com exatamente $|S| - 1$ autovalores iguais a 1 e exatamente um autovalor igual a -1 .

Definição 2.3 *Seja $C = (c_{st})_{s,t \in S}$ uma matriz de Cartan. Pela ação definida acima, consideramos S como um subconjunto de $GL(V)$ e o grupo*

$$W = W(C) := \langle S \rangle \subset GL(V)$$

recebe o nome de grupo de reflexões associado a C . O subconjunto

$$\Phi = \Phi(C) := \{\alpha_s \cdot w \mid w \in W, s \in S\} \subset V$$

é dito o sistema de raízes associado a C e seus elementos são denominados raízes. Então, Φ é um subconjunto de $V - \{0\}$ que contém uma base de V e que é invariante sob a ação de W . As raízes $\{\alpha_s \mid s \in S\} \subseteq \Phi$ são ditas raízes simples. O inteiro $|S|$ recebe o nome de posto de W (ou posto de Φ).

Observe que $\Phi = -\Phi$, já que $\alpha_s \cdot s = -\alpha_s$ para todo $s \in S$. Além disso, como Φ contém uma base de V , a representação permutação de W em Φ é fiel. Portanto, Φ é finito se, e somente se, W é finito.

Proposição 2.4 *Todo grupo de reflexões finito como na Definição 1.2 satisfaz a Definição 2.3.*

Demonstração: Para provarmos isso, basta observarmos que, dado um grupo de reflexões finito W com sistema simples Δ e conjunto de reflexões simples S , podemos associar a ele uma matriz de Cartan $C = (c_{st})_{s,t \in S}$ da seguinte maneira. Sejam $\alpha_s, \alpha_t \in \Delta$ e denotemos por m_{st} a ordem do produto st , como no Capítulo 1. Definimos então, para quaisquer $s, t \in S$,

$$c_{st} = 2 \frac{(\alpha_s, \alpha_t)}{(\alpha_s, \alpha_s)}.$$

Agora vamos verificar que a matriz $C = (c_{st})_{s,t \in S}$ é de fato uma matriz de Cartan. Se $s \neq t$, então, pela Proposição 1.11, temos $(\alpha_s, \alpha_t) \leq 0$ e, portanto, $c_{st} \leq 0$. A mesma proposição mostra que

$$c_{st} = 0 \Leftrightarrow (\alpha_s, \alpha_t) = 0 \Leftrightarrow (\alpha_t, \alpha_s) = 0 \Leftrightarrow c_{ts} = 0$$

e a condição (C1) da Definição 2.1 é satisfeita. Por outro lado, vemos que

$$c_{ss} = 2 \frac{(\alpha_s, \alpha_s)}{(\alpha_s, \alpha_s)} = 2$$

e, se $s \neq t$, temos

$$c_{st}c_{ts} = 4 \frac{(\alpha_s, \alpha_t)^2}{(\alpha_s, \alpha_s)(\alpha_t, \alpha_t)} = 4 \cos^2(\theta) = 4 \cos^2(\pi - \pi/m_{st}) = 4 \cos^2(\pi/m_{st}),$$

onde $\theta = \angle(\alpha_s, \alpha_t) = \pi - \pi/m_{st}$, conforme o Exemplo 1.3. Portanto, a condição (C2) da Definição também é satisfeita e C é uma matriz de Cartan.

Nosso grupo W satisfaz as condições da Definição 2.3. De fato, pelo Teorema 1.15(c), o sistema de raízes Φ da Definição 1.5 coincide com o conjunto $\Phi(C)$. \square

Tomemos agora um grupo de reflexões $W \subset GL(V)$ associado a uma matriz de Cartan C . Uma ferramenta básica para trabalhar com W é a **função comprimento**, definida a seguir.

Definição 2.5 *Seja $w \in W$. Se $w = 1$, fazemos $l(w) = 0$. Caso contrário, para algum $k \geq 1$, existem elementos $s_1, \dots, s_k \in S$ tais que $w = s_1 \cdots s_k$. Se o k escolhido é o minimal com essa propriedade, temos uma expressão reduzida para w e fazemos $l(w) = k$. A função $l : W \rightarrow \mathbb{N}_0$ assim definida é dita a função comprimento de W .*

Relembramos que W é definido como um subgrupo de $GL(V)$. Portanto, a função determinante define um homomorfismo de grupos $\epsilon : W \rightarrow \mathbb{R}^*$, o qual chamamos de **representação sinal** de W . Pelo Lema 2.2, temos $\epsilon(s) = -1$ para todo $s \in S$ e $\epsilon(w) = (-1)^k$ se $w = s_1 \cdots s_k$, com $s_1, \dots, s_k \in S$. Em particular, $\epsilon(w) = (-1)^{l(w)}$ para todo $w \in W$.

Tomemos agora $w \in W$ e $s \in S$. Observe que $l(sw) \leq l(w) + 1$. A mesma propriedade, aplicada a sw , mostra-nos que $l(w) = l(s(sw)) \leq l(sw) + 1$ e, portanto, sempre temos $l(w) - 1 \leq l(sw) \leq l(w) + 1$. Como ϵ é um homomorfismo, temos $\epsilon(sw) = \epsilon(s)\epsilon(w) = -\epsilon(w)$ e, portanto, $l(sw) \equiv l(w) + 1 \pmod{2}$. Assim, $l(sw) = l(w) \pm 1$ para $s \in S$ e $w \in W$. Observe também que, se $l(sw) < l(w)$, então existe uma expressão reduzida para w que começa com s .

Nossa próxima meta é caracterizar a condição $l(sw) > l(w)$ em termos da ação de W sobre Φ . A prova será feita por redução ao caso em que o posto de W é igual a 2. Portanto, estudaremos primeiramente este caso.

Lema 2.6 [4, Lemma 1.1.6] *Sejam $s, t \in S$, com $s \neq t$, e $V' := \mathbb{R}\alpha_s \oplus \mathbb{R}\alpha_t \subseteq V$. Então V' é invariante sob s e t . A ação de s e t sobre V' com respeito à base $\{\alpha_s, \alpha_t\}$ é dada pelas matrizes*

$$M_s := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -c_{st} & 1 \end{pmatrix} \text{ e } M_t := \begin{pmatrix} 1 & -c_{ts} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ respectivamente.}$$

Além disso, se $m_{st} < \infty$, então existe um subespaço $U \subset V$ tal que $V = V' \oplus U$ e os elementos s e t agem como identidade em U .

Através de várias computações, pode-se verificar o seguinte resultado:

Lema 2.7 *Sejam $c, c' \in \mathbb{R}, c, c' \leq 0$ tais que $cc' = 4 \cos^2 \theta$, onde $\theta = 2\pi/m$, com $2 \leq m < \infty$. Sejam*

$$S := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} \text{ e } T := \begin{pmatrix} 1 & -c' \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Então existe uma matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$ com $x > 0$ e $y \geq 0$ tal que

$$PSP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } PTP^{-1} := \begin{pmatrix} -\cos \theta & \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Além disso,

$$P(ST)^k P^{-1} := \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\text{sen } k\theta \\ \text{sen } k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Introduzimos a seguinte notação. Se (M, \cdot) é um monóide, ou seja, um conjunto com uma multiplicação associativa e um elemento identidade, denotamos

$$\text{Prod}(a, b; m) := \underbrace{aba \cdots}_{m \text{ fatores}} \text{ para alguns } a, b \in M \text{ e } m \geq 0.$$

Sejam $s, t \in S, s \neq t$. Seja $W' := \langle s, t \rangle \subseteq W$ e $\Psi := \{\alpha_s \cdot w', \alpha_t \cdot w' \mid w' \in W'\}$. Como s e t são elementos de ordem 2, o grupo W' é um grupo diedral. Afirmamos que

Lema 2.8 (a) *O elemento st tem ordem m_{st} ;*

(b) *Para cada $\alpha \in \Psi$, ou $\alpha \geq 0$ ou $\alpha \leq 0$;*

(c) *Se $\alpha \in \Psi$ e $u \in \{s, t\}$ são tais que $\alpha \geq 0$ mas $\alpha \cdot u \leq 0$, então α é um múltiplo de α_u .*

Seja $v \in V$. Escrevemos $v \geq 0$ se $v = v_s \alpha_s + v_t \alpha_t$ com $v_s, v_t \geq 0$. Semelhantemente, escrevemos $v \leq 0$ se $v_s \leq 0$ e $v_t \leq 0$.

Demonstração: Sejam M_s, M_t matrizes como no Lema 2.4.

1º caso. Assuma que $m_{st} = \infty$. As declarações acima não são afetadas se substituirmos M_s, M_t por $PM_s P^{-1}, PM_t P^{-1}$, onde P é uma matriz diagonal com entradas positivas. Portanto, escolhendo P adequadamente, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $c_{st} = c_{ts} = -2$. Então, podemos calcular:

$$\alpha_s \cdot \text{Prod}(M_t, M_s; k) = \begin{cases} k\alpha_s + (k+1)\alpha_t & \text{se } k \text{ é ímpar,} \\ (k+1)\alpha_s + k\alpha_t & \text{se } k \text{ é par.} \end{cases}$$

A prova segue facilmente por indução sobre k .

O análogo vale para $\alpha_t \cdot \text{Prod}(M_s, M_t; k)$. Em particular, vemos que a órbita de α_s sob a ação de W' é infinita e, portanto, Ψ também o é. Então, W' é um grupo diedral infinito e o item (a) é verdadeiro. A fórmula acima para ação sobre α_s e α_t também prova os itens (b) e (c).

2º caso. Admita que $m_{st} < \infty$. Pelo Lema 2.7, existe uma matriz invertível $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tal que

$$M'_s := PM_sP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } M'_t := PM_tP^{-1} := \begin{pmatrix} -\cos \theta & \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

onde $\theta = 2\pi/m_{st}$. O Lema 2.7 também nos dá uma relação para $(M'_sM'_t)^k$ ($k \geq 0$), que prova que $M'_sM'_t$ tem ordem m_{st} . Portanto, M_sM_t também tem ordem m_{st} . Pelo Lema 2.4, a ação de st sobre V pode ser representada por uma matriz diagonal em blocos, onde um bloco é a matriz M_sM_t e o outro bloco é a matriz identidade. Portanto, st tem ordem m_{st} , o que prova o item (a). Com algumas computações, prova-se os itens (b) e (c). \square

Lema 2.9 [4, Lemma 1.1.8] *Seja $w \in W$ e seja $J \subseteq S$. Então $w = w'x$, com $w' \in \langle J \rangle$ e $x \in W$ tais que $l(w) = l(w') + l(x)$ e $l(sx) > l(x)$ para todo $s \in J$.*

Agora, podemos obter um resultado básico que relaciona a função comprimento em W com a ação de W sobre o sistema de raízes. Como introduzido antes, para um $v \in V$ qualquer, escrevemos $v \geq 0$ se $v = \sum_{s \in S} v_s \alpha_s$, com $v_s \in \mathbb{R}$ e $v_s \geq 0$ para todo $s \in S$. De modo similar, definimos $v \leq 0$ se $-v \geq 0$.

Teorema 2.10 [4, Theorem 1.1.9] *Seja $s \in S$ e seja $w \in W$. Então $\alpha_s \cdot w \geq 0$ se, e somente se, $l(sw) = l(w) + 1$. Equivalentemente, temos $\alpha_s \cdot w \leq 0$ se, e somente se, $l(sw) = l(w) - 1$.*

Seja $\alpha \in \Phi$. Podemos escrever $\alpha = \alpha_s \cdot w$ para algum $s \in S$ e algum $w \in W$. O teorema acima mostra que se $l(sw) > l(w)$ então $\alpha \geq 0$. Por outro lado, se $l(sw) < l(w)$, podemos então fazer $w' = sw$ e concluir que $-\alpha = -\alpha_s \cdot w = (\alpha_s \cdot s) \cdot w = \alpha_s \cdot w' \geq 0$, já que $l(sw') > l(w')$. Assim, vemos que toda raiz em Φ ou pertence ao conjunto $\Phi^+ := \{\alpha \in \Phi \mid \alpha \geq 0\}$ ou pertence a $\Phi^- := \{-\alpha \mid \alpha \in \Phi^+\}$. Em cada caso, dizemos, respectivamente, que α é uma **raiz positiva** ou uma **raiz negativa**.

2.2 O Teorema de Matsumoto

Seja $C = (c_{st})$ uma matriz de Cartan e seja $W = \langle S \rangle \subset GL(V)$ o grupo de reflexões correspondente, como fizemos na seção anterior. Nesta seção, provamos os teoremas básicos de estrutura acerca do grupo W .

Começamos com uma extensão do Lema 2.9 no caso em que $|J| = 2$. Tomemos $s, t \in S$, $s \neq t$, e consideremos o subgrupo $W_{st} := \langle s, t \rangle$. Pelo item (a) do Lema 2.8, o elemento st tem ordem m_{st} e o grupo W , portanto, ou é um grupo diedral infinito ou é finito de ordem $2m_{st}$. Neste último caso, W_{st} possui um elemento de comprimento maximal:

$$\Delta_{st} := \text{Prod}(s, t; m_{st}) = \text{Prod}(t, s; m_{st}).$$

Isso porque se um elemento $w \in W_{st}$ é escrito na forma $w = \text{Prod}(s, t; k)$ com $m \leq k < 2m_{st}$, então w também pode ser escrito na forma $w = \text{Prod}(t, s; 2m_{st} - k)$ e $2m_{st} - k \leq m_{st}$, considerando que $(st)^{m_{st}} = 1$. Logo, $l(w) \leq m_{st}$.

Lema 2.11 [4, Lemma 1.2.1] *Seja $J = \{s, t\} \subseteq S$, $s \neq t$. Seja $w \in W$ e $w = w'x$ como no Lema 2.9. Se $l(sw) < l(w)$ e $l(tw) < l(w)$, então $m_{st} < \infty$ e $w' = \Delta_{st}$.*

O resultado a seguir é de extrema importância para o que estudaremos a respeito de grupos de Coxeter. As demonstrações de quase todos os resultados que virão dependem, de certa forma, deste fato.

Teorema 2.12 (Matsumoto) *Seja (M, \cdot) um monóide e $f : S \rightarrow M$ uma aplicação tal que*

$$\text{Prod}(f(s), f(t); m_{st}) = \text{Prod}(f(t), f(s); m_{st}) \quad \text{para } s, t \in S, s \neq t, m_{st} < \infty.$$

Então existe uma única aplicação $F : W \rightarrow M$ tal que $F(w) = f(s_1) \cdots f(s_k)$ sempre que $w = s_1 \cdots s_k$ ($s_i \in S$) é uma expressão reduzida.

Demonstração: Veja [4, Theorem 1.2.2]. □

Para todo $w \in W$, definimos $J(w)$ como o conjunto dos s_i que aparecem numa expressão reduzida de w : $w = s_1 \cdots s_k$. Uma aplicação do teorema de Matsumoto é o seguinte resultado:

Corolário 2.13 *Para todo $w \in W$, o conjunto $J(w) = \{s_1, \dots, s_k\}$ não depende da escolha da expressão reduzida para w .*

Demonstração: Seja (M, \cdot) um monóide cujos elementos são os subconjuntos de S e o produto é dado pela união de dois subconjuntos. Considere a aplicação $f : S \rightarrow M$ tal que $f(s) = \{s\} \in M$. Se $s, t \in S$ são tais que $s \neq t$ e $m_{st} < \infty$, então

$$\text{Prod}(f(s), f(t); m_{st}) = \{s\} \cdot \{t\} \cdots = \{s, t\} = \text{Prod}(f(t), f(s); m_{st})$$

e as condições do teorema de Matsumoto são satisfeitas. Seja $F : W \rightarrow M$ a extensão de f como no Teorema 2.12. Tomando um elemento $w \in W$ e uma expressão reduzida $w = s_1 \cdots s_k$ ($s_i \in S$), temos $F(w) = \{s_1, \dots, s_k\}$, ou seja, o conjunto $J(w) = F(w)$ não depende da escolha da expressão reduzida. □

2.2.1 Subexpressões

Seja $w \in W$ com expressão reduzida $w = s_1 \cdots s_k$ ($s_i \in S$). Dizemos que $v \in W$ é uma **subexpressão** de w , e escrevemos

$$v \leq w, \text{ se } v = s_{i_1} \cdots s_{i_l}, \text{ onde } l \geq 0 \text{ e } 1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq k.$$

Apesar da aparência, essa definição não depende da escolha da expressão reduzida para w . De fato, seja M o monóide cujos elementos são os subconjuntos de W e onde o produto é dado por $A \cdot B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ para $A, B \subseteq W$. Vamos verificar agora que as condições do teorema de Matsumoto são realmente satisfeitas para a aplicação $f : S \rightarrow M, s \mapsto \{1, s\}$.

Sejam $s, t \in S$ tais que $s \neq t$ e $m_{st} < \infty$. Então $Prod(f(s), f(t); m_{st})$ é o subconjunto de W que consiste de todos os elementos que podem ser formados por produtos do tipo $st \cdots$ ou $ts \cdots$, onde o número de fatores não excede m_{st} . Como s, t geram o grupo diedral de ordem $2m_{st}$, temos $Prod(f(s), f(t), m_{st}) = \langle s, t \rangle$. Obtemos o mesmo resultado ao calcularmos $Prod(f(t), f(s); m_{st})$. Portanto, as condições do teorema de Matsumoto são satisfeitas.

Assim, existe uma única aplicação $F : W \rightarrow M$ tal que $F(w) = f(s_1) \cdots f(s_k)$ sempre que $w \in W$ e $w = s_1 \cdots s_k$ é uma expressão reduzida. Calculando $f(s_1) \cdots f(s_k)$, observamos que

$$F(w) = \{s_{i_1} \cdots s_{i_l} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq k \text{ para algum } l \geq 0\}.$$

Portanto, o conjunto das subexpressões de $w \in W$ não depende da escolha de uma expressão reduzida para w .

Observe que uma subexpressão de $w \in W$ não é necessariamente reduzida. Mas o seguinte resultado mostra que, de uma expressão de um elemento dada como produto de geradores, podemos extrair uma subexpressão reduzida.

Teorema 2.14 (Lei do cancelamento) *Sejam $s_1, \dots, s_k \in S$ (para algum $k \geq 2$) e assumamos que $l(s_1 \cdots s_k) < k$. Então existem índices $i < j$ tais que $s_1 \cdots s_k = s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots \widehat{s}_j \cdots s_k$, onde a notação $\widehat{}$ indica que o i -ésimo e o j -ésimo fatores são cancelados.*

Demonstração: Veja [4, Theorem 1.2.5]. □

Lema 2.15 [4, Lemma 1.2.6] *Seja $w \in W$ e sejam $s, t \in S$ tais que $l(sw) = l(wt)$ e $l(swt) = l(w)$. Então $sw = wt$.*

Podemos agora enunciar o seguinte teorema, que é um resultado muito importante sobre os grupos W definidos neste capítulo.

Teorema 2.16 *Recordemos que $s^2 = 1$ para todo $s \in S$ e que m_{st} é a ordem de st para $s \neq t$. Então temos uma apresentação da forma*

$$W = \langle s \in S \mid s^2 = 1 \text{ para } s \in S \text{ e } (st)^{m_{st}} = 1 \text{ para } s \neq t, m_{st} < \infty \rangle.$$

Demonstração: Seja G o grupo definido pela apresentação acima. Pelo item (a) do Lema 2.8, os elementos de S satisfazem a relação $(st)^{m_{st}} = 1$. Temos, então, um epimorfismo de grupos $\pi : G \rightarrow W$, que aplica os geradores de G nos geradores de W . Por outro lado, se $s \neq t$ e $m_{st} < \infty$, a relação $(st)^{m_{st}}$ equivale à relação $Prod(s, t; m_{st}) = Prod(t, s; m_{st})$, já que s e t são involuções. O Teorema de Matsumoto nos mostra então que existe uma aplicação $F : W \rightarrow G$ que aplica os geradores de W nos geradores de G . Para verificarmos isso, é suficiente provar que $F(sw) = F(s)F(w)$ para quaisquer $s \in S$ e $w \in W$. Se $l(sw) > l(w)$, essa igualdade é válida pela forma como a aplicação F foi construída. Se $l(sw) < l(w)$, tomando $w' = sw$, concluímos que $F(w) = F(sw') = F(s)F(w') = F(s)F(sw)$, uma vez que $l(sw') > l(w')$. Como $F(s)$ é uma involução, temos $F(sw) = F(s)F(w)$. Portanto, F é um homomorfismo de grupos que aplica os geradores de W nos geradores de G e $F \circ \pi = id_G$. Segue então que π é um isomorfismo de grupos. \square

2.2.2 Grupos de Coxeter

Considere um conjunto finito de índices X e seja $M = (m_{xy})_{x,y \in X}$ uma matriz simétrica cujas entradas são inteiros positivos (ou ∞) tais que $m_{xx} = 1$ e $m_{xy} > 1$ para quaisquer $x, y \in X$ com $x \neq y$. Defina um grupo $G(M)$ pela apresentação:

$$G(M) = \langle x \in X \mid x^2 = 1 \text{ para } x \in X \text{ e } (xy)^{m_{xy}} = 1 \text{ para } x \neq y, m_{xy} < \infty \rangle.$$

Então o par $(G(M), X)$ é dito um **sistema de Coxeter** e o grupo $G(M)$ recebe o nome de **grupo de Coxeter**. Vimos no Teorema 2.16 que grupos de reflexões como no Capítulo 1 e na Seção 2.1 são grupos de Coxeter.

Reciprocamente, observe que a matriz $C = (-2 \cos(\pi/m_{xy}))_{x,y \in X}$ satisfaz as condições da Definição 2.1, isto é, C é uma matriz de Cartan. Então, pelo Teorema 2.16, podemos concluir que $G(M)$ é, na verdade, o grupo de reflexões associado à matriz de Cartan C . Além disso, pelo Lema 2.8, m_{xy} é exatamente a ordem de $xy \in G(M)$. O fato de o grupo abstrato $G(M)$ ser também um grupo de reflexões como na Seção 2.1 permite-nos fazer uma imersão $G(M) \subset GL(V)$, onde V é um espaço vetorial real de dimensão $|X|$ no qual os elementos de X agem como reflexões. A imersão $G(M) \subset GL(V)$ é dita a **representação reflexão** de $G(M)$.

2.2.3 Subgrupos parabólicos

Vamos considerar agora um subconjunto $J \subseteq S$. O subgrupo $W_J := \langle J \rangle \leq W$ recebe o nome de **subgrupo parabólico standard** de W . Os subgrupos conjugados a subgrupos parabólicos standard são chamados **subgrupos parabólicos**.

Seja $V_J := \bigoplus_{s \in J} \mathbb{R}\alpha_s$. Da expressão dada para uma reflexão $s \in S$ na Seção 2.1, podemos concluir que $V_J \cdot s \subseteq V_J$ para todo $s \in J$. Assim, restringindo a aplicação $s : V \rightarrow V$ (para $s \in J$) a V_J , obtemos um epimorfismo canônico de grupos

$$\pi : W_J \rightarrow W(C_J), \text{ onde } C_J = (c_{st})_{s,t \in J}.$$

Por outro lado, como $W(C_J)$ tem uma apresentação como no Teorema 2.16 e os geradores de W_J certamente satisfazem as relações definidas, obtemos também uma aplicação de $W(C_J)$ em W_J identificando os geradores correspondentes. Concluimos que π é também injetiva, sendo, portanto, um isomorfismo. Em particular, segue que (W_J, J) é um sistema de Coxeter.

Agora temos duas funções comprimento em W_J . A primeira é simplesmente a restrição da função comprimento $l : W \rightarrow \mathbb{N}_0$ ao subgrupo W_J . Então, dado $w \in W_J$, o inteiro $l(w)$ é o menor $k \geq 0$ tal que existem $s_1, \dots, s_k \in S$ com $w = s_1 \cdots s_k$. Por outro lado, através do isomorfismo canônico $\pi : W_J \rightarrow W(C_J)$, temos uma segunda função comprimento $l_J : W_J \rightarrow \mathbb{N}_0$: dado $w \in W_J$, o inteiro $l_J(w)$ é o menor $n \geq 0$ tal que existem $s_1, \dots, s_n \in J$ com $w = s_1 \cdots s_n$. O resultado a seguir mostra que essas duas funções comprimento, na verdade, coincidem.

Proposição 2.17 *Considere $J \subseteq S$ e seja $W_J \leq W$ o subgrupo parabólico standard correspondente. Então $l(w) = l_J(w)$ para todo $w \in W_J$. Além disso, qualquer expressão reduzida para um $w \in W_J$ em termos de elementos de S tem todos os seus fatores em J .*

Demonstração: Tomemos $w \in W_J$ e escrevamos $w = s_1 \cdots s_k$ com $s_i \in J$. Podemos aplicar a lei do cancelamento (Teorema 2.14) repetidas vezes, até obtermos uma expressão reduzida para w com todos os fatores em J . Pelo Corolário 2.13, podemos concluir que toda expressão reduzida para w tem todos os fatores em J . \square

2.3 Matrizes de Cartan do tipo finito

Nesta seção, fazemos a classificação de matrizes de Cartan do tipo finito, que definiremos a seguir. Como consequência, vamos provar que os grupos de Coxeter finitos são exatamente os grupos de reflexões finitos descritos no Capítulo 1.

2.3.1 Sistemas de Coxeter irredutíveis

Seja $C = (c_{st})_{s,t \in S}$ uma matriz de Cartan e assumamos que C é decomponível, ou seja, existe uma partição $S = S_1 \amalg S_2$ com $S_1, S_2 \neq \emptyset$ tais que $c_{st} = 0$ sempre que $s \in S_1, t \in S_2$. Note que a propriedade (C1) da Definição 2.1 implica que $c_{ts} = 0$ para quaisquer $s \in S_1, t \in S_2$. Então, podemos escrever C como uma matriz em blocos cujos blocos diagonais são as matrizes $C_1 = (c_{st})_{s,t \in S_1}$ e $C_2 = (c_{st})_{s,t \in S_2}$. Assim, temos também uma decomposição em

soma direta $V = V_1 \oplus V_2$, onde V_1 tem por base $\{\alpha_s \mid s \in S_1\}$ e V_2 tem base $\{\alpha_s \mid s \in S_2\}$. Lançando mão da expressão dada para uma reflexão $s \in S$ na Seção 2.1 e das observações que fizemos acima, é fácil verificar que V_1 e V_2 são invariantes sob a ação de qualquer $s \in S$. Além disso, se $s \in S_1$ então $s|_{V_2} = id_{V_2}$, e se $s \in S_2$ então $s|_{V_1} = id_{V_1}$. Isso implica, em particular, que s e t comutam sempre que $s \in S_1$ e $t \in S_2$. Assim, existe um isomorfismo

$$W(C) \xrightarrow{\cong} W(C_1) \times W(C_2), \quad w \mapsto (w|_{V_1}, w|_{V_2})$$

e uma partição $\Phi(C) = \Phi(C_1) \amalg \Phi(C_2)$, com $\Phi(C_i) = \Phi(C) \cap V_i$ para $i = 1, 2$. Além disso, temos $l(w_1 w_2) = l(w_1) + l(w_2)$ para quaisquer $w_1 \in W(C_1), w_2 \in W(C_2)$.

Dessa forma, o estudo dos grupos de reflexões $W(C)$ é reduzido ao caso em que C é uma matriz de Cartan indecomponível. Neste caso, dizemos que o sistema de Coxeter correspondente (W, S) é um **sistema de Coxeter irredutível**.

2.3.2 Formas W -invariantes

Seja $C = (c_{st})_{s,t \in S}$ uma matriz de Cartan e $W = \langle S \rangle \subset GL(V)$ o grupo de reflexões correspondente.

- (a) Assuma que temos uma forma bilinear simétrica real W -invariante (\cdot, \cdot) em V tal que $(\alpha_s, \alpha_s) > 0$ para todo $s \in S$. Sejam $s, t \in S$. Então, $(\alpha_s, \alpha_t) = (\alpha_s \cdot s, \alpha_t \cdot s) = -(\alpha_s, \alpha_t \cdot s)$. Através da igualdade $\alpha_t \cdot s = \alpha_t - c_{st}\alpha_s$, obtemos

$$c_{st} = 2 \frac{(\alpha_s, \alpha_t)}{(\alpha_s, \alpha_s)} \quad \text{para todo } s \in S.$$

Fazendo $d_s = \sqrt{(\alpha_s, \alpha_s)} > 0$, obtemos $d_s^2 c_{st} = 2(\alpha_s, \alpha_t) = d_t^2 c_{ts}$. Da relação $c_{st} c_{ts} = 4 \cos^2(\pi/m_{st})$ e do fato de que $c_{st} \leq 0$ para $s \neq t$, concluímos que $d_s d_t^{-1} c_{st}/2 = -\cos(\pi/m_{st})$ para quaisquer $s, t \in S$.

- (b) Reciprocamente, se existem números reais positivos d_s ($s \in S$) tais que $d_s d_t^{-1} c_{st}/2 = -\cos(\pi/m_{st})$ para quaisquer $s, t \in S$, então temos uma forma bilinear simétrica W -invariante de V dada por $(\alpha_s, \alpha_t) = d_s^2 c_{st}/2$. De fato, para verificar a W -invariância, calculamos para $s, t, u \in S$:

$$\begin{aligned} (\alpha_s \cdot u, \alpha_t \cdot u) &= (\alpha_s - c_{us}\alpha_u, \alpha_t - c_{ut}\alpha_u) \\ &= (\alpha_s, \alpha_t) - c_{us}d_u^2 c_{ut}/2 - c_{ut}d_s^2 c_{su}/2 + d_u^2 c_{us}c_{ut} \\ &= (\alpha_s, \alpha_t). \end{aligned}$$

A última igualdade vem do fato de que $d_s d_u^{-1} c_{su} = -2 \cos(\pi/m_{su}) = d_u d_s^{-1} c_{us}$. Por exemplo, se C é uma matriz simétrica, podemos tomar $d_s = 1$ para todo $s \in S$ e então a forma definida por $(\alpha_s, \alpha_t) = -\cos(\pi/m_{st})$ é W -invariante.

- (c) Dizemos que C é uma **matriz de Cartan do tipo finito** se existe uma forma bilinear (\cdot, \cdot) como no item (a) que é também positiva definida. Isso equivale à condição de que a matriz $(-\cos(\pi/m_{st}))_{s,t \in S}$ é definida positiva, isto é, $\det(-\cos(\pi/m_{st}))_{s,t \in J} > 0$ para todo subconjunto $J \subseteq S$. Isso acontece, por exemplo, se W é finito. Provaremos isso mais adiante.

Agora podemos descrever a classificação das matrizes de Cartan do tipo finito. A qualquer matriz de Cartan C , podemos associar um grafo de Coxeter da seguinte maneira: os vértices do grafo são rotulados pelos elementos do conjunto S , e dois vértices rotulados por $s \neq t$ são unidos por uma aresta se $m_{st} \geq 3$ (com m_{st} como na Definição 2.1). Além disso, se $m \geq 4$, rotulamos a aresta por m_{st} (como no Capítulo 1). Pelo Teorema 1.22, a Figura 1 descreve completamente os grafos de Coxeter conexos positivos definidos e, portanto, descreve completamente as matrizes de Cartan irredutíveis do tipo finito.

Vimos na Subseção 2.2.2 que qualquer sistema de Coxeter (W, S) é definido em termos de uma determinada matriz de Cartan C tal que $W = \langle S \rangle \subset GL(V)$ é um grupo de reflexões. Em geral, (W, S) não determina unicamente a matriz C e a questão está em haver escolhas mais adequadas que outras. Introduzimos então a seguinte noção.

Definição 2.18 *Dizemos que Φ é um sistema de raízes reduzido se, para todo $\alpha \in \Phi$ e $x \in \mathbb{R}$, temos $x\alpha \in \Phi$ somente se $x = \pm 1$.*

Observe que todo sistema de Coxeter (W, S) é proveniente de uma matriz de Cartan C cujo sistema de raízes é reduzido.

Proposição 2.19 [4, Proposition 1.3.5] *Assuma que Φ é reduzido. Para cada $w \in W$, seja $N(w) := \{\alpha \in \Phi^+ \mid \alpha \cdot w \leq 0\}$ e seja $w = s_1 \cdots s_k$ uma expressão reduzida, com $s_i \in S$. Então, $|N(w)| = l(w)$ e $N(w)$ consiste precisamente das raízes*

$$\alpha_1, \alpha_2 \cdot s_1, \alpha_3 \cdot s_2 s_1, \dots, \alpha_k \cdot s_{k-1} s_{k-2} \cdots s_1,$$

onde α_i denota a raiz simples correspondente ao gerador s_i ($1 \leq i \leq k$).

O resultado a seguir mostra que a propriedade de ter um sistema de raízes reduzido pode ser facilmente verificada a partir da matriz de Cartan.

Proposição 2.20 [4, Proposition 1.3.5] *Assuma que C é uma matriz de Cartan do tipo finito. Então, o sistema de raízes associado Φ é reduzido se, e somente se, $c_{st} = c_{ts}$ para quaisquer $s \neq t$ com m_{st} ímpar.*

O próximo teorema mostra que, no caso finito, os grupos de Coxeter coincidem com os grupos de reflexões definidos no Capítulo 1. Antes de provarmos isso, precisamos do lema a seguir.

Lema 2.21 *Seja G um grupo finito e $\rho : G \rightarrow GL(V)$ uma representação de G em algum espaço vetorial real V de dimensão finita. Seja $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ um produto interno em V e seja $(\cdot, \cdot)' : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$(v, w)' := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (v \cdot g, w \cdot g) \quad \text{para } v, w \in V,$$

onde $g \in G$ age sobre V via $\rho(g)$. Então, $(\cdot, \cdot)'$ é um produto interno tal que $(v \cdot g, w \cdot g)' = (v, w)'$ para quaisquer $v, w \in V$ e $g \in G$.

Demonstração: A bilinearidade e a simetria de $(\cdot, \cdot)'$ decorrem diretamente do fato de que (\cdot, \cdot) desfruta das mesmas propriedades. Precisamos verificar então que $(\cdot, \cdot)'$ é uma forma positiva definida. De fato, se $v \in V$, então $(v \cdot g, v \cdot g) \geq 0$ para todo $g \in G$ e assim $(v, v)' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (v \cdot g, v \cdot g) \geq 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} (v, v)' = 0 &\Leftrightarrow \sum_{g \in G} (v \cdot g, v \cdot g) = 0 \\ &\Leftrightarrow (v \cdot g, v \cdot g) = 0 \quad \forall g \in G \\ &\Leftrightarrow v \cdot g = 0 \quad \forall g \in G \\ &\Leftrightarrow v = 0 \end{aligned}$$

e $(\cdot, \cdot)'$ é um produto interno em V .

Além disso, se $v, w \in V$ e $x \in G$, então

$$(v \cdot x, w \cdot x)' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (v \cdot (xg), w \cdot (xg)) = \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} (v \cdot y, w \cdot y) = (v, w)'$$

e $(\cdot, \cdot)'$ é uma forma G -invariante. □

Teorema 2.22 *Todo grupo de Coxeter finito é um grupo de reflexões finito descrito no Capítulo 1.*

Demonstração: Seja (W, S) um sistema de Coxeter com W finito. Sabemos que existe uma representação $\rho : G \rightarrow GL(V)$ de W em algum espaço vetorial real V de dimensão finita. Pelo Lema 2.21, existe uma forma bilinear simétrica positiva definida $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que é W -invariante. O item (c) da página 27 mostra que a matriz de Cartan C associada a W é do tipo finito e, portanto, seu grafo de Coxeter é positivo definido. Assim, as componentes conexas desse grafo estão entre os grafos descritos na Figura 1 e, pela Proposição 1.19 e pelo Teorema 1.23, W é produto direto de grupos de reflexões finitos, sendo também, portanto, um grupo de reflexões finito. □

2.4 O elemento de comprimento maximal

Seja (W, S) um sistema de Coxeter. Fixemos também a matriz de Cartan correspondente $C = (c_{st})_{s,t \in S}$ tal que $W = \langle S \rangle \subset GL(V)$ é um grupo de reflexões como na Seção 2.1. Podemos assumir que a matriz C é escolhida de tal forma que o sistema de raízes correspondente Φ é reduzido. Uma propriedade básica relativa aos grupos de Coxeter finitos é a existência de um único elemento de comprimento maximal, que será de muita utilidade em diversas situações como veremos a seguir.

Proposição 2.23 [4, Proposition 1.5.1] *As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) *O grupo W é finito.*
- (b) *O conjunto $\{l(w) \mid w \in W\}$ é finito.*
- (c) *Existe um elemento $w_0 \in W$ tal que $l(sw_0) < l(w_0)$ para todo $s \in S$.*

Além disso, se essas condições são satisfeitas, w_0 é unicamente determinado, $w_0^2 = 1$ e $l(w) < l(w_0) = |\Phi^+|$ para todo $w \neq w_0$. Dizemos que w_0 é o elemento de comprimento maximal de W .

O próximo resultado, referente a subgrupos parabólicos standard, será útil para argumentos indutivos. Vimos que, para cada $J \subseteq S$, temos um subgrupo parabólico standard $W_J \leq W$ e, além disso, (W_J, J) é um sistema de Coxeter. Se W_J é finito, vamos denotar por w_J o elemento de comprimento maximal em W_J .

Lema 2.24 [4, Lemma 1.5.2] *Seja $w \in W$ e seja $J \subseteq \{s \in S \mid l(sw) < l(w)\}$. Então, W_J é finito e temos $w = w_J x$, onde $x \in W$ é tal que $l(w) = l(w_J) + l(x)$ e $l(sx) > l(x)$ para todo $s \in J$.*

Lema 2.25 *Assumamos que W é finito e denotemos por w_0 o elemento de comprimento maximal de W . Então $l(w_0 w) = l(w_0 w) = l(w_0) - l(w)$ para todo $w \in W$. Além disso, a conjugação por w_0 define um automorfismo de W que preserva o conjunto S .*

Demonstração: Pela Proposição 2.23, $l(w) \leq l(w_0)$ e a igualdade vale somente se $w = w_0$. No caso em que $w \neq w_0$, temos $w_0 w = 1$ e claramente $l(w_0 w) = l(w_0) - l(w) = 0$. Suponhamos então que $w \neq w_0$. Pelo item (c) da Proposição 2.23, existe $s_1 \in S$ tal que $l(s_1 w) > l(w)$. Se $s_1 w \neq w_0$, existe um $s_2 \in S$ tal que $l(s_2 s_1 w) > l(s_1 w)$. Podemos proceder da mesma maneira até encontrarmos $s_1, \dots, s_k \in S$ tais que $w_0 = s_k \cdots s_1 w$ e $l(w_0) = k + l(w)$. Como $w_0 w^{-1}$ tem comprimento k e o comprimento de cada elemento de W coincide com o de seu inverso, $l(w_0 w) = k = l(w_0) - l(w)$. Além disso, $l(w_0 w) = l((w_0 w)^{-1}) = l(w^{-1} w_0) = l(w_0) - l(w^{-1}) = l(w_0) - l(w)$.

Para provarmos a segunda afirmação, tomemos um elemento $s \in S$. Observe que

$$l(w_0 s w_0) = l(w_0) - l(w_0 s) = l(w_0) - (l(w_0) - l(s)) = l(s) = 1.$$

Isso mostra que $s^{w_0} \in S$ e, portanto, a conjugação por w_0 preserva o conjunto S . \square

2.5 Representantes distintos das classes laterais

Seja (W, S) um grupo de Coxeter e, para cada $J \subseteq S$, consideremos o subgrupo parabólico standard $W_J \leq W$. Sabemos que, com respeito a W_J , o grupo W pode ser particionado em classes laterais à direita, que são da forma $W_J w = \{vw \mid v \in W_J\}$ para um determinado $w \in W$. Nosso objetivo agora é identificar um conjunto particular de representantes das classes laterais à direita de W_J . A partir desta seção, utilizaremos a notação $w \cdot w'$, com $w, w' \in W$, para indicar o elemento ww' sob a condição de que se tenha $l(ww') = l(w) + l(w')$.

Proposição 2.26 [4, Proposition 2.1.1] *Considere $J \subseteq S$ e defina*

$$X_J = \{w \in W \mid l(sw) > l(w) \text{ para todo } s \in J\}.$$

- (a) *Para cada $w \in W$ existe um único $v \in W_J$ e um único $x \in X_J$ tais que $w = vx$. Além disso, $l(w) = l(v) + l(x)$.*
- (b) *Para todo $x \in W$ são equivalentes:*
 - (i) $x \in X_J$;
 - (ii) $l(vx) = l(v) + l(x)$ para todo $v \in W_J$;
 - (iii) x é o único elemento de comprimento minimal em $W_J x$.

Em particular, X_J é um conjunto completo de representantes das classes laterais à direita de W_J em W .

O conjunto X_J é dito o conjunto dos **representantes distintos das classes laterais à direita** de W_J em W . Escrevemos

$$W = W_J \cdot X_J$$

para indicar que a aplicação do produto cartesiano $W_J \times X_J$ no grupo W que associa um par (v, x) ao produto $w = vx$ é uma bijeção com a propriedade adicional de que $l(w) = l(v) + l(x)$.

Para todo $x \in X_J$ e todo $s \in S$ o produto xs pode ser escrito como $xs = vx'$ para algum $v \in W_J$ e algum $x' \in X_J$. De fato, apenas uma escolha muito limitada de pares (v, x') ocorre realmente nesta situação. Isso é descrito pelo seguinte resultado, que é de fundamental importância para o estudo da estrutura do conjunto dos representantes distintos das classes laterais.

Lema 2.27 (Lema de Deodhar) *Considere $J \subseteq S$, $x \in X_J$ e $s \in S$. Então ou $xs \in X_J$ ou $xs = ux$ para algum $u \in J$.*

Demonstração: Veja [4, Lemma 2.1.2]. □

Sempre temos $l(x^{-1}w) \geq l(w) - l(x)$ para $x, w \in W$. Dizemos que o elemento x é um **prefixo** de w se vale a igualdade. Neste caso, existe um $y \in W$ tal que $w = xy$ e $l(w) = l(x) + l(y)$. De modo semelhante, dizemos que x é um **sufixo** de w se $l(wx^{-1}) = l(w) - l(x)$.

Observe que, pelo lema de Deodhar, $xs \in X_J$ sempre que $l(xs) < l(x)$ com $x \in X_J$, pois se ocorresse $xs = ux$ para algum $u \in J$, teríamos $l(xs) = l(ux) > l(x)$.

Lema 2.28 [4, Lemma 2.1.4] *Sejam $J \subseteq S$, $x \in X_J$ e considere $w \in W$ tal que $xw \in X_J$. Então, se $w = s_1 \cdots s_r$ é uma expressão reduzida para w com $s_j \in S$, $j = 1, \dots, r$, temos $xs_1 \cdots s_i \in X_J$ para todo $i \leq r$.*

Quando consideramos cadeias de subgrupos parabólicos standard, utilizamos a seguinte notação. Para subconjuntos $J \subseteq K \subseteq S$, denotamos por X_J^K o conjunto dos representantes distintos das classes laterais à direita de W_J em W_K . Então, podemos fatorar X_J na forma

$$X_J = X_J^K \cdot X_K,$$

já que $W_J \cdot X_J = W = W_K \cdot X_K = W_J \cdot X_J^K \cdot X_K$.

A imagem de X_J pelo anti-automorfismo $w \mapsto w^{-1}$ de W é o conjunto $X_J^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X_J\}$, que é um conjunto de representantes das classes laterais à esquerda de W_J em W . Além disso, se $x \in X_J$ então

$$w \in x^{-1}W_J \Leftrightarrow w^{-1} \in W_Jx.$$

Como x é o único elemento de comprimento minimal em W_Jx e $l(w^{-1}) = l(w)$ para todo $w \in W$, podemos concluir que x^{-1} é o único elemento de comprimento minimal em $x^{-1}W_J$.

Agora vamos determinar representantes para as classes laterais duplas

$$W_JwW_K = \{uvw \mid u \in W_J, v \in W_K\}$$

de W_J e W_K em W , onde $J, K \subseteq S$ e $w \in W$.

Proposição 2.29 *Sejam $J, K \subseteq S$ e defina $X_{JK} = X_J \cap X_K^{-1}$. Então, para cada $w \in W$, existem $u \in W_J$, $v \in W_K$ e um único $d \in X_{JK}$ tais que $w = udv$ e $l(w) = l(u) + l(d) + l(v)$. Além disso, para cada $w \in W$, as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $d \in X_{JK}$;
- (ii) d é o único elemento de comprimento minimal na classe lateral dupla W_JdW_K .

Em particular, X_{JK} é um conjunto completo de representantes das classes laterais duplas de W_J e W_K em W .

Demonstração: Seja $w \in W$ e escreva $w = ux$, onde $u \in W_J$, $x \in X_J$ e $l(w) = l(u) + l(x)$, como na Proposição 2.26. Pela mesma proposição aplicada a $x^{-1} \in W$ e $K \subseteq S$, podemos escrever $x = dv$, onde $d \in X_K^{-1}$, $v \in W_K$ e $l(x) = l(d) + l(v)$ (d é único nessa decomposição). Então $l(w) = l(u) + l(d) + l(v)$. Como d é um prefixo de x , temos $d \in X_J$ e, portanto, $d \in X_J \cap X_K^{-1} = X_{JK}$.

Para provarmos que (ii) implica (i), tomemos um elemento $d \in W$ de comprimento minimal em sua classe lateral dupla $W_J d W_K$. Assim, $l(sd) > l(d)$ para todo $s \in J$ e $l(dt) > l(d)$ para todo $t \in K$, ou seja, $d \in X_J \cap X_K^{-1} = X_{JK}$.

Por outro lado, para mostrarmos que (i) implica (ii), basta provarmos que X_{JK} contém um único elemento de cada classe lateral dupla. De fato, seja $y \in X_{JK} \cap W_J d W_K$. Como provado anteriormente, podemos escrever $y = u d v$ com $u \in W_J$, $d \in X_{JK}$, $v \in W_K$ e $l(y) = l(u) + l(d) + l(v)$. Se $y \neq d$, então ou $u \neq 1$, contradizendo o fato de que $y \in X_J$, ou $v \neq 1$, contradizendo o fato de que $y \in X_K^{-1}$. Portanto, $y = d$. \square

Os elementos de $X_{JK} = X_J \cap X_K^{-1}$ recebem o nome de **representantes distintos das classes laterais duplas** de W_J e W_K em

$$W = \coprod_{d \in X_{JK}} W_J d W_K.$$

Observe que os elementos u e v na decomposição $w = u d v$ não são necessariamente únicos.

Lema 2.30 [4, Lemma 2.1.8] *Sejam $J, K \subseteq S$. Então*

- (i) *Para todo $x \in X_J$ e todo $s \in S$, temos $xs \notin X_J$ se, e somente se, $s \in J^x$.*
- (ii) *Para todo $x \in X_J$, temos $x^{-1} X_J \subseteq X_L$, onde $L = J^x \cap S$.*
- (iii) *Para todo $d \in X_{JK}$, temos $d X_{J^d \cap K} = X_{J \cap d K}$.*

Como consequência da Proposição 2.29, o próximo lema nos dá uma partição do conjunto X_J .

Lema 2.31 (Decomposição de Mackey) *Sejam $J, K \subseteq S$. Então*

$$X_J = \coprod_{d \in X_{JK}} d \cdot X_{J^d \cap K}^K.$$

Em particular, cada $w \in W$ tem uma única decomposição $w = u d v$ onde $u \in W_J$, $d \in X_{JK}$, $v \in X_{J^d \cap K}^K$ e $l(w) = l(u) + l(d) + l(v)$.

Demonstração: Veja [4, Lemma 2.1.9]. \square

Tomando um subconjunto $J \subseteq S$, vamos encontrar agora um importante subgrupo de W , denotado por X_{JJJ} , contido no conjunto X_J .

Teorema 2.32 (Solomon) *Assuma que W é finito. Para cada $J \subseteq S$, defina*

$$x_J = \sum_{x \in X_J} x^{-1} \in \mathbb{Q}W$$

como a soma de todos os representantes distintos das classes laterais à esquerda de W_J em W na álgebra de grupo $\mathbb{Q}W$. Então, para quaisquer $J, K \subseteq S$,

$$x_J x_K = \sum_{L \subseteq S} a_{JKL} x_L,$$

onde, para $J, K, L \subseteq S$,

$$X_{JKL} = \{d \in X_{JK} \mid J^d \cap K = L\} \text{ e } a_{JKL} = |X_{JKL}|.$$

Demonstração: Veja [4, Theorem 2.1.10]. □

Corolário 2.33 *Sejam $J, K, L \subseteq S$ e considere $x \in X_{JKL}$. Então $x^{-1}X_J \subseteq X_L$. Em particular, X_{JJJ} é um subgrupo de W .*

Demonstração: Pelo item (ii) do Lema 2.30, temos $x^{-1}X_J \subseteq X_M$, onde $M = J^x \cap S$. Como $L = J^x \cap K \subseteq M$, segue que $x^{-1}X_J \subseteq X_L$.

Suponha agora que $J = K = L$ e sejam x e y elementos de $X_{JJJ} = \{d \in X_{JJ} \mid J^d \cap J = J\}$. Vamos mostrar que $x^{-1}y \in X_{JJJ}$. De fato, como $y \in X_J$ e $x^{-1}X_J \subseteq X_J$, temos $x^{-1}y \in X_J$. De modo análogo, do fato de que $y^{-1}X_J \subseteq X_J$ segue que $y^{-1}x \in X_J$. Logo, $x^{-1}y \in X_J \cap X_J^{-1} = X_{JJ}$. Observe agora que $J^{x^{-1}y} = J$, uma vez que $J^x = J^y = J$. Portanto, $x^{-1}y \in X_{JJJ}$ e o conjunto X_{JJJ} é um subgrupo de W . □

Observe que o conjunto $X_{JJJ} = \{d \in X_{JJ} \mid J^d \cap J = J\}$ pode ser expresso simplesmente por $X_{JJJ} = \{d \in X_J \mid J^d = J\}$. De fato, as condições $J^d = J$ e $J^d \cap J = J$ são claramente equivalentes e, além disso, se $d \in X_J$ é tal que $J^d = J$, então, para todo $s \in J$, temos $s = d^{-1}s'd$ para algum $s' \in J$ e assim

$$l(sd^{-1}) = l(d^{-1}s'dd^{-1}) = l(d^{-1}s') = l(s'd) > l(d) = l(d^{-1}),$$

donde podemos concluir que $d^{-1} \in X_J$ e, portanto, $d \in X_{JJ}$.

Teorema 2.34 (Kilmoyer, Solomon) *Sejam $J, K \subseteq S$ e considere $d \in X_{JK}$. Então $W_J^d \cap W_K = W_L$, onde $L = J^d \cap K$.*

Demonstração: Veja [4, Theorem 2.1.12]. □

Segue deste último resultado que a interseção de dois subgrupos parabólicos de W é também um subgrupo parabólico de W .

Outra consequência imediata do Teorema 2.34 é que, dados $J, K \subseteq S$, temos $W_J \cap W_K = W_{J \cap K}$ (para provarmos isso, basta tomarmos $d = 1 \in X_{JK}$). Mais do que isso, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.35 [6, p.24] *Sob a correspondência $J \mapsto W_J$, a coleção de subgrupos parabólicos standard W_J ($J \subseteq S$) é isomorfa ao reticulado de subconjuntos de S , ou seja, $W_{J \cup K}$ é gerado por W_J e W_K e, além disso, $W_J \cap W_K = W_{J \cap K}$, quaisquer que sejam $J, K \subseteq S$.*

Podemos então concluir que, se dois subgrupos parabólicos standard de W são conjugados em W , a conjugação pode ser realizada de tal maneira que até mesmo seus conjuntos geradores sejam conjugados.

Corolário 2.36 [4, Corollary 2.1.13] *Sejam $J, K \subseteq S$. Então J é conjugado a K em W se, e somente se, W_J e W_K são conjugados em W . Em particular, $|J| = |K|$ sempre que W_J e W_K são conjugados em W .*

Nosso objetivo agora é fazer uma descrição do normalizador de W_J em W . Antes, porém, precisamos do próximo lema, sobre conjugação por elementos de X_J .

Lema 2.37 [4, Lemma 2.1.14] *Seja $J \subseteq S$ e seja $x \in X_J$. Então $l(w^x) \geq l(w)$ para todo $w \in W_J$.*

Proposição 2.38 [4, 2.1.15] *Seja (W, S) um sistema de Coxeter. Então, para cada $J \subseteq S$:*

- (i) *Se $x \in X_J$ é tal que $W_J^x = W_K$ para algum $K \subseteq S$, então $J^x = K$, $x \in X_{JK}$ e $l(w^x) = l(w)$ para todo $w \in W_J$.*
- (ii) $N_W(W_J) = W_J \rtimes X_{JJJ}$.

Para o próximo lema, vamos assumir que W é finito. Usando prefixos, X_J pode ser determinado por apenas um de seus elementos, o representante de maior comprimento das classes laterais, denotado por d_J . Como na Seção 2.4, denotamos por w_0 o elemento de maior comprimento em W e por w_J o elemento de maior comprimento em W_J , para $J \subseteq S$.

Lema 2.39 [4, Lemma 2.2.1] *Seja $J \subseteq S$ e defina $d_J = w_J w_0$. Então*

- (a) d_J é o único elemento de comprimento maximal em X_J ;
- (b) $X_J = \{w \in W \mid w \text{ é um prefixo de } d_J\}$;
- (c) $d_J^{-1} = d_J^{w_0} = d_{J'}$, onde $J' = J^{w_0}$.

2.6 Classes de Coxeter

O grupo W age por conjugação sobre o conjunto de todos os seus subconjuntos. Para $J \subseteq S$, estamos interessados na órbita dos subgrupos parabólicos standard W_J sob essa ação, em particular nos conjugados de W_J que são também subgrupos parabólicos standard, isto

é, $W_J^w = W_K$ para algum $K \subseteq S$. Pelo Corolário 2.36, isso equivale a estudar a órbita de J sob essa ação e, em particular, os conjugados de J que são também subconjuntos de S . O estabilizador de W_J nessa ação é o normalizador de W_J em W . Vamos assumir que W seja finito.

Definição 2.40 *Dois subconjuntos $J, K \subseteq S$ pertencem à mesma classe de Coxeter de W se existe um elemento $w \in W$ tal que $J^w = K$. Neste caso, escrevemos $J \sim_W K$, ou simplesmente $J \sim K$.*

Observe que, em geral, uma classe de Coxeter não é uma órbita completa sob a ação por conjugação de W .

Proposição 2.41 [4, Proposition 2.3.2] *Seja $J \subset S$ um subconjunto maximal e seja $x \in X_J$. Então $J^x \subseteq S$ se, e somente se, $x = 1$ ou $x = d_J$. Mais precisamente,*

- (i) *os únicos subconjuntos de S conjugados a J em W são J e J^{w_0} ;*
- (ii) *se $J \neq J^{w_0}$, então $N_W(W_J) = W_J$;*
- (iii) *se $J = J^{w_0}$, então $|N_W(W_J) : W_J| = 2$.*

O teorema a seguir mostra que a conjugação de subgrupos parabólicos standard de W sempre pode ser descrita por uma sequência de representantes distintos de comprimento maximal das classes laterais de subgrupos parabólicos standard maximais.

Teorema 2.42 (Lusztig-Spaltenstein, Howlett, Deodhar) *Sejam J, K subconjuntos de S . Então J é conjugado a K se, e somente se, existe uma sequência de subconjuntos J_0, \dots, J_r de S tais que*

$$J_0 = J, J_r = K \text{ e } J_{i-1}^{d_i} = J_i \text{ para todo } i = 1, \dots, r,$$

onde d_i é o representante de classe lateral de $W_{J_{i-1}}$ em W_{L_i} de maior comprimento e $L_i = J_{i-1} \cup \{s_i\}$ para algum $s_i \in S - J_{i-1}$.

Além disso, para todo $x \in X_J$ tal que $J^x = K$ e todo $s \in S$ tal que $l(sx) < l(x)$, o elemento d_i , $i = 1, \dots, r$, pode ser escolhido de modo que $d_1 = d_J^L$, o representante de classe lateral de W_J em W_L de maior comprimento onde $L = J \cup \{s\}$, e também que $x = d_1 \cdots d_r$ e $l(x) = l(d_1) + \dots + l(d_r)$.

Demonstração: Veja [4, Theorem 2.3.3]. □

Como consequência, temos o seguinte resultado.

Corolário 2.43 *Suponha que J e K sejam subconjuntos conjugados de S tais que $J^x = K$ com $x \in X_J$. Se $s \in S$ é tal que $l(sx) < l(x)$, então $x = d \cdot y$, onde $d = w_J w_L$ para $L = J \cup \{s\}$.*

Demonstração: Para provarmos isso, basta tomarmos $r = 2$, $d_1 = d$ e $d_2 = y = d^{-1}x$ no Teorema 2.42. Dessa maneira, temos $J_0 = J$, $J_1 = J_0^d = J^d$ e $J_2 = J_1^y = J^x = K$. Observe que as condições do teorema são satisfeitas. Então, podemos escolher $d = w_J w_L = d_J^L$, o representante de classe lateral de W_J em W_L de maior comprimento (Lema 2.39(a)).
□

2.7 Classes cuspidais

Nesta seção, assumimos que W é um grupo de Coxeter finito com conjunto gerador S .

Definição 2.44 *Uma classe de conjugação C de W é dita uma classe cuspidal se*

$$C \cap W_J = \emptyset \text{ para todo subconjunto próprio } J \subset S.$$

Para cada classe de conjugação C em W , denotamos por

$$C_{min} = \{w \in C \mid l(w) \leq l(v) \text{ para todo } v \in C\}$$

o conjunto dos elementos de comprimento minimal em C .

Nosso objetivo nesta seção é encontrar algumas propriedades e caracterizações de classes cuspidais e descrever o papel desempenhado pelos elementos de comprimento minimal em uma classe de conjugação.

Todo grupo de Coxeter contém elementos que podem ser obtidos como um produto sobre todos os geradores em S , em alguma ordem. Na Seção 2.4, tais elementos foram usados para obter uma expressão reduzida para o elemento de comprimento maximal de W . O conjunto formado por esses elementos é um conjunto típico de elementos de comprimento minimal em uma classe de conjugação cuspidal de W .

Um **elemento de Coxeter** de (W, S) é um produto de todos os $s \in S$ em uma ordem dada qualquer. Assim, se $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, então $w_c = s_1 \cdots s_n$ é um elemento de Coxeter de W e qualquer permutação dos elementos s_i na palavra w_c é ainda um elemento de Coxeter. Note que todo elemento $w \in W$ que é escrito como produto de k geradores distintos em S tem comprimento $l(w) = k$, uma vez que w pode ser visto como um produto de representantes distintos de comprimento 1 de classes laterais em uma cadeia apropriada de subgrupos parabólicos standard. Então, em particular, $l(w_c) = |S|$ para um elemento de Coxeter w_c de (W, S) .

Um fato muito importante sobre elementos de Coxeter é descrito no teorema a seguir.

Teorema 2.45 [4, Theorem 3.1.4] *Quaisquer dois elementos de Coxeter de (W, S) são conjugados em W .*

Assim, todos os elementos de Coxeter de (W, S) pertencem a uma mesma classe de conjugação. Veremos a seguir que essa classe é cuspidal.

Lema 2.46 [4, Lemma 3.1.5] *Seja $J \subseteq S$ e seja w_c um elemento de Coxeter de W . Então, w_c fixa um ponto na ação de W sobre as classes laterais de W_J se, e somente se, $J = S$.*

Proposição 2.47 [4, Proposition 3.1.6] *Seja C a classe de conjugação de W que contém os elementos de Coxeter. Então*

- (i) C é uma classe cuspidal;
- (ii) $C_{min} = \{w \in W \mid w \text{ é um elemento de Coxeter de } W\}$.

No Capítulo 4, iremos necessitar da próxima proposição para a prova de alguns resultados.

Proposição 2.48 [4, Proposition 3.1.11] *Seja C uma classe de conjugação de W e sejam $w, w' \in C_{min}$. Então, $J(w') = J(w)^x$ para algum $x \in X_{J(w), J(w')}$.*

Concluimos este capítulo com as seguintes propriedades:

Proposição 2.49 [4, Proposition 3.1.12] *Seja C uma classe de conjugação de W . As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) C é uma classe de conjugação cuspidal.
- (ii) $J(w) = S$ para todo $w \in C_{min}$.
- (iii) Existe um elemento $w \in C_{min}$ tal que $J(w) = S$.

Teorema 2.50 [4, Theorem 3.2.11] *Seja W um grupo de Coxeter finito com conjunto gerador S . Seja $J \subseteq S$ e seja $w \in W$ tal que a classe de conjugação C_J de w em W_J é cuspidal em W_J . Então*

$$C_J = C \cap W_J,$$

onde C é a classe de conjugação de w em W .

Capítulo 3

Alguns exemplos de grupos de Coxeter finitos

Neste capítulo, temos por objetivo estudar os grupos de Coxeter finitos. Esse estudo irá ajudar-nos a demonstrar alguns dos resultados mais importantes deste trabalho, os quais serão tratados no próximo capítulo. Aqui, nossas referências principais são o livro de Geck e Pfeiffer, [4], e o livro de Humphreys, [6]. Para cada grupo, vamos descrever o sistema de raízes associado, provando assim que a cada grafo de Coxeter da Figura 1 (Capítulo 1) é possível associar um grupo de reflexões finito, provando assim o Teorema 1.23.

3.1 Tipo A

Considere o grupo simétrico S_n . Sabemos que esse grupo pode ser visto como um subgrupo do grupo $O(n, \mathbb{R})$ das matrizes ortogonais $n \times n$ da seguinte maneira. Cada permutação age sobre \mathbb{R}^n permutando os vetores da base canônica $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$. Observe que a transposição (i, j) age como uma reflexão, aplicando $\epsilon_i - \epsilon_j$ em seu oposto e fixando pontualmente seu complemento ortogonal, que consiste de todos os vetores cuja i -ésima coordenada coincide com a j -ésima. Como S_n é gerado pelas transposições $s_i := (i, i + 1)$, $1 \leq i \leq n - 1$, e essas transposições são reflexões, S_n é um grupo de reflexões (e, portanto, um grupo de Coxeter).

Observe que o grupo S_n , quando age sobre \mathbb{R}^n da maneira como descrevemos acima, fixa cada ponto da reta gerada pelo vetor $\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n$ (e os pontos pertencentes a essa reta são os únicos pontos fixos) e mantém fixo o seu complemento ortogonal, o hiperplano V formado pelos vetores cujas coordenadas somam 0. Assim, S_n também age sobre um espaço euclidiano $(n - 1)$ -dimensional como um grupo gerado por reflexões, fixando apenas a origem. Pelo que vimos na Seção 1.2, S_n é essencial relativamente a esse espaço de dimensão $n - 1$. Por causa disso, utiliza-se a notação A_{n-1} para o grupo de reflexões S_n .

Agora vamos encontrar um sistema de raízes Φ para o grupo de reflexões A_{n-1} . Definamos Φ como sendo o conjunto de todos os vetores de comprimento $\sqrt{2}$ na interseção de

V com o reticulado $\mathbb{Z}\epsilon_1 + \dots + \mathbb{Z}\epsilon_n$. Então

$$\Phi = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}.$$

Observe que o conjunto

$$\Delta = \{\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_3, \dots, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n\} \subset \Phi$$

é um sistema simples em Φ , pois é claramente uma base para o hiperplano formado pelos vetores cujas coordenadas somam 0, e todo elemento de Φ é combinação linear de elementos de Δ com coeficientes todos de mesmo sinal. Observe também que S_n é gerado pelas permutações do tipo $(i, i+1)$, $1 \leq i \leq n-1$, que, na ação considerada acima, são reflexões associadas aos vetores do tipo $\epsilon_i - \epsilon_{i+1}$.

Seja W um grupo de Coxeter do tipo A_{n-1} , com geradores de Coxeter $s_i = (i, i+1)$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$. O tipo cíclico de uma permutação $w \in W$ é dado por uma partição $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ de n , que é uma sequência de inteiros positivos $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_t$ tais que $\lambda_1 + \dots + \lambda_t = n$ e w é escrito como produto de ciclos disjuntos de comprimento $\lambda_1, \dots, \lambda_t$. Uma vez que quaisquer dois elementos de W são conjugados em W se, e somente se, têm o mesmo tipo cíclico, as classes de conjugação de elementos de W são naturalmente parametrizadas pelas partições de n .

Dada uma partição $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ de n , existe um subgrupo parabólico standard correspondente $W_J = S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_t}$ que contém um elemento w de tipo cíclico λ . Um elemento de comprimento minimal na classe de conjugação desse elemento w é o produto w_λ de t ciclos disjuntos que consistem de λ_i pontos sucessivos, para $i \in \{1, \dots, t\}$. Por exemplo, um representante de comprimento minimal da classe de conjugação de elementos com estrutura cíclica $\lambda = (1, 2, 2, 3)$ em S_8 é $w_\lambda = (1)(2, 3)(4, 5)(6, 7, 8)$. Observe que $w_\lambda = s_7 s_6 s_4 s_2$ é um elemento de Coxeter de W_J , onde $J = J(w_\lambda) = \{s_2, s_4, s_6, s_7\}$. Em geral, para uma partição $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ de n , se $J = J(w_\lambda)$, então w_λ é um elemento de Coxeter de $W_J = S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_t}$ expresso por

$$w_\lambda = \prod_{s_i \in J} s_i, \tag{3.1}$$

o produto de todos $s_i \in J$ tomando o índice i em ordem decrescente.

3.2 Tipo B

Vimos na Seção 3.1 que o grupo S_n age sobre \mathbb{R}^n ao permutar os elementos da base canônica $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$. Além das reflexões representadas pelas permutações do tipo (i, j) , ou seja, aquelas que aplicam o vetor $\epsilon_i - \epsilon_j$ em seu oposto e mantêm seu complemento ortogonal, outras podem ser definidas. Podemos considerar também reflexões que aplicam um vetor ϵ_i da base canônica em seu oposto e fixam todos os outros ϵ_j . Essas mudanças de sinal geram um grupo de ordem 2^n , isomorfo a $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, que intersecta S_n trivialmente

e é normalizado por S_n , pois ao conjugarmos uma mudança de sinal $\epsilon_i \mapsto -\epsilon_i$ por uma transposição, obtemos também uma mudança de sinal. Assim, o produto semidireto entre S_n e o grupo gerado pelas mudanças de sinal é um grupo de reflexões W de ordem $2^n n!$. É fácil ver que W é essencial. Denotamos esse grupo por B_n .

Vamos definir o sistema de raízes Φ como sendo o conjunto de todos os vetores de comprimento 1 ou $\sqrt{2}$ no reticulado $\mathbb{Z}\epsilon_1 + \dots + \mathbb{Z}\epsilon_n$. Então Φ consiste das $2n$ raízes curtas do tipo $\pm\epsilon_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, e das $2n(n+1)$ raízes longas do tipo $\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j$ ($i < j$), totalizando $2n^2$ raízes. Para o sistema simples Δ , vamos tomar os elementos $\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \alpha_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3, \dots, \alpha_{n-1} = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, \alpha_n = \epsilon_n$.

Seja W um grupo de Coxeter do tipo B_n . Então W é isomorfo ao grupo das permutações w do conjunto $\{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}$ que satisfazem $w(-i) = -w(i)$. Consequentemente, temos $w(0) = 0$ para todo $w \in W$. Sendo $[n] := \{1, \dots, n\}$, podemos representar esse mesmo grupo como o grupo de permutações sinalizadas, isto é, aplicações injetivas de $[n]$ em $[n] \cup -[n]$ cuja imagem contém ou i ou $-i$ para cada i . Como os elementos são permutações, podemos escrevê-los em forma cíclica. Temos dois tipos de ciclos: ciclos que não contêm simultaneamente i e $-i$ para todo i , e ciclos que contêm i se, e somente se, contêm $-i$. Observe que ciclos do primeiro tipo vêm naturalmente em pares. Assim, em vez de $(i_1, \dots, i_k)(-i_1, \dots, -i_k)$, escrevemos simplesmente $(i_1, \dots, i_k)^+$ e esse elemento recebe o nome de ciclo positivo. Ciclos do segundo tipo são da forma $(i_1, \dots, i_k, -i_1, \dots, -i_k)$ e vamos denotá-los por $(i_1, \dots, i_k)^-$. A esses elementos damos o nome de ciclos negativos. Por exemplo, a permutação

$$\begin{aligned} -4 \mapsto 1, \quad -3 \mapsto 2, \quad -2 \mapsto 3, \quad -1 \mapsto -4, \quad 0 \mapsto 0, \\ 1 \mapsto 4, \quad 2 \mapsto -3, \quad 3 \mapsto -2, \quad 4 \mapsto -1 \end{aligned}$$

é escrita na forma $(1, 4)^-(2, -3)^+$. Observe que, nessa notação, se mudamos o sinal de todos os elementos em um ciclo, obtemos exatamente a mesma permutação sinalizada. Os geradores de Coxeter são $t_1 = (1)^-$ e $s_i = (i, i+1)$, $i = 1, \dots, n-1$. Para $i > 1$, também usamos a notação $t_i = (i)^-$.

Um elemento $w \in W(B_n)$ também pode ser representado como uma matriz de permutação sinalizada $n \times n$, que age sobre a base canônica $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ de \mathbb{R}^n da mesma maneira que a permutação w age sobre o conjunto $[n] = \{1, \dots, n\}$, ou seja, para $i \in [n]$, aplica o vetor ϵ_i no vetor $\epsilon_{|w(i)|}$ ou em seu oposto, dependendo do sinal de $w(i)$, se é positivo ou negativo.

Observemos agora que a ação por conjugação sobre as permutações sinalizadas ocorre da mesma maneira que sobre as permutações usuais. Para isso, basta observarmos que, quando conjugamos com w , um elemento i de qualquer ciclo é substituído por $w(i)$. Portanto, duas permutações sinalizadas são conjugadas se, e somente se, possuem, para todos os comprimentos, o mesmo número de ciclos negativos e o mesmo número de ciclos positivos. O tipo cíclico de uma permutação $w \in W$ é uma partição dupla $\lambda = (\lambda^+; \lambda^-)$ com $|\lambda^+| + |\lambda^-| = n$, onde λ^+ representa a estrutura dos ciclos positivos e λ^- , a estrutura dos

ciclos negativos de w . Dois elementos de W são conjugados em W se, e somente se, têm o mesmo tipo cíclico. Portanto, as classes de conjugação de elementos de W são naturalmente parametrizadas pelas partições duplas de n . Por exemplo, a classe de conjugação de $(1, 5, -2)^+(4, 7)^+(3)^-(6, -8)^- \in ((2, 3); (1, 2))$. Observe que podemos tomar como λ^+ ou como λ^- a partição vazia \emptyset .

Tomemos um subconjunto $J \subseteq \{t_1, s_1, \dots, s_{n-1}\}$ e um $w \in W_J$. Se $s_i \notin J$, os elementos $i + 1, \dots, n$ aparecem em ciclos positivos de w , sendo todos os elementos de sinal positivo. Portanto, se temos uma partição dupla $(\lambda^+; \lambda^-)$ de n , onde $\lambda^+ = (\lambda_1^+, \dots, \lambda_t^+)$, $\lambda^- = (\lambda_1^-, \dots, \lambda_s^-)$, o menor subgrupo parabólico W_J que contém um elemento do tipo cíclico (λ^+, λ^-) é da forma $W(B_{|\lambda^-|}) \times S_{\lambda_1^+} \times \dots \times S_{\lambda_t^+}$. Vemos em [4, 3.4.2] que existe um elemento w_λ de comprimento minimal na classe de conjugação correspondente da seguinte forma: os ciclos negativos contêm $1, \dots, |\lambda^-|$, e os ciclos positivos contêm $|\lambda^-| + 1, \dots, n$; além disso, cada ciclo contém apenas números consecutivos em ordem crescente. Por exemplo, um elemento de comprimento minimal na classe de conjugação correspondente a $\lambda = ((1, 1, 3); (1, 2))$ é

$$w_\lambda = (1)^-(2, 3)^-(4)^+(5)^+(6, 7, 8)^+.$$

3.3 Tipo D

Podemos obter outro grupo de reflexões que age sobre \mathbb{R}^n que, na verdade, é um subgrupo de índice 2 do grupo do tipo B_n , descrito na Seção 3.2. Observe que S_n normaliza o subgrupo formado pelas mudanças de sinal que envolvem um número par de sinais, gerado pelas reflexões $\epsilon_i + \epsilon_j \mapsto -(\epsilon_i + \epsilon_j)$, $i \neq j$. Então, o produto semidireto é também um grupo de reflexões (e é essencial), que denotamos por D_n .

Agora vamos definir um sistema de raízes para um grupo W do tipo D_n . Seja $V = \mathbb{R}^n$. Defina Φ como sendo o conjunto de todos os vetores de comprimento $\sqrt{2}$ no reticulado $\mathbb{Z}\epsilon_1 + \dots + \mathbb{Z}\epsilon_n$. Então Φ consiste das $2n(n-1)$ raízes $\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j$ ($1 \leq i < j \leq n$). O sistema simples Δ que vamos considerar, neste caso, é formado pelos elementos $\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \alpha_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3, \dots, \alpha_{n-1} = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, \alpha_n = \epsilon_{n-1} + \epsilon_n$. W é o produto semidireto de S_n e $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$ (agindo por um número par de mudanças de sinal).

Observe que, se W é um grupo de Coxeter do tipo D_n , então W é isomorfo ao grupo das permutações w em $\{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}$ tais que $w(-i) = -w(i)$ para todo i , e um número par de $i > 0$ satisfaz $w(i) < 0$. Podemos também representar esse grupo como o grupo das permutações sinalizadas tais que um número par de $i \in [n]$ tem imagem no conjunto $-[n]$. Essas são exatamente as permutações sinalizadas com um número par de ciclos negativos. Os geradores de Coxeter são $u = (1, -2)^+$ e $s_i = (i, i+1)^+, i \in \{1, \dots, n-1\}$. O tipo cíclico de uma permutação $w \in W$ é uma partição dupla $(\lambda^+; \lambda^-)$ com $|\lambda^+| + |\lambda^-| = n$, sendo λ^+ correspondente aos ciclos positivos de w e λ^- , aos ciclos negativos. Em um grupo do tipo D_n , se dois elementos são conjugados, então eles têm o mesmo tipo cíclico. A recíproca, entretanto, não é verdadeira. Por exemplo, u e s_1

têm o mesmo tipo cíclico, mas não são conjugados. É fácil ver que, se dois elementos têm o mesmo tipo cíclico $(\lambda^+; \lambda^-)$ e $|\lambda^-| > 0$ ou λ^+ contém uma parte ímpar, então eles são conjugados. Se eles têm o mesmo tipo cíclico $(\lambda^+; \emptyset)$, onde λ^+ contém apenas partes pares, eles são conjugados se, e somente se, o número de inteiros negativos em suas decomposições cíclicas têm a mesma paridade.

Dizemos que uma partição é **par** se consiste apenas de partes pares. As classes de conjugação de elementos de W são naturalmente parametrizadas por partições duplas de n , onde λ^- tem um número par de partes, com duas classes quando $\lambda^- = \emptyset$ e λ^+ é par. Dada uma partição dupla $(\lambda^+; \lambda^-)$ de n , onde $\lambda^+ = (\lambda_1^+, \dots, \lambda_t^+)$, $\lambda^- = (\lambda_1^-, \dots, \lambda_s^-)$, e s é par, o subgrupo parabólico W_J correspondente tem a forma $W(D_{|\lambda^-|}) \times S_{\lambda_1^+} \times \dots \times S_{\lambda_t^+}$. Além disso, existe um representante de comprimento minimal w_λ da classe de conjugação correspondente da seguinte forma. Os ciclos negativos contêm $1, \dots, |\lambda^-|$, os ciclos positivos contêm $|\lambda^-| + 1, \dots, n$, e cada ciclo contém apenas inteiros consecutivos em ordem crescente. Se $\lambda^- = \emptyset$ e λ^+ tem apenas partes pares, então existe um representante extra w'_λ em que o primeiro ciclo positivo começa com -1 em vez de 1 . Por exemplo, para $\lambda = ((1, 1, 2); (2, 3))$, temos $w_\lambda = (1, 2)^-(3, 4, 5)^-(6)^+(7)^+(8, 9)^+$, e para $((2, 2, 4); \emptyset)$, temos $w_\lambda = (1, 2)^+(3, 4)^+(5, 6, 7, 8)^+$ e $w'_\lambda = (-1, 2)^+(3, 4)^+(5, 6, 7, 8)^+$.

3.4 Tipo $I_2(m)$ e tipo G_2

Os grupos do tipo $I_2(m)$ são os grupos diedrais de ordem $2m$, descritos no Exemplo 1.3.

Vamos estudar mais detalhadamente o grupo diedral do tipo $I_2(6)$, o qual denotamos por G_2 . Seja V o hiperplano em \mathbb{R}^3 formado pelos vetores cujas coordenadas têm soma igual a zero. Vamos definir o sistema de raízes Φ como sendo o conjunto dos vetores de comprimento $\sqrt{2}$ e $\sqrt{6}$ na interseção de V com o reticulado $\mathbb{Z}\epsilon_1 + \mathbb{Z}\epsilon_2 + \mathbb{Z}\epsilon_3$, onde $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^3 . Assim, Φ consiste de 6 raízes curtas $\pm(\epsilon_i - \epsilon_j)$ ($i < j$) e seis raízes longas $\pm(2\epsilon_i - \epsilon_j - \epsilon_k)$, onde $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. O sistema simples que vamos tomar aqui é o conjunto Δ formado pelos vetores $\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2$ e $\alpha_2 = -2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$.

3.5 Tipo F_4

Seja V o espaço \mathbb{R}^4 com base canônica $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4\}$. Se L' é o reticulado standard $\mathbb{Z}\epsilon_1 + \mathbb{Z}\epsilon_2 + \mathbb{Z}\epsilon_3 + \mathbb{Z}\epsilon_4$, então $L := L' + \mathbb{Z}\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4}{2}$ é também um reticulado. Vamos tomar como sistema de raízes o conjunto Φ formado pelos vetores de L de comprimento 1 ou $\sqrt{2}$. Assim, Φ consiste de 24 raízes longas $\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j$ ($i < j$) e 24 raízes curtas $\pm\epsilon_i, \frac{1}{2}(\pm\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4)$. Para o sistema simples, vamos tomar o conjunto $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ em que

$$\alpha_1 = \epsilon_2 - \epsilon_3, \alpha_2 = \epsilon_3 - \epsilon_4, \alpha_3 = \epsilon_4, \alpha_4 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4).$$

O grupo $W(\Phi)$, denotado por F_4 , possui ordem 1152 e é isomorfo ao grupo $GO^+(4, 3)$, ver [11].

3.6 Tipo E_8

Tomemos $V = \mathbb{R}^8$. Seja L' o reticulado que consiste de todos os vetores $\sum c_i \epsilon_i$ tais que $c_i \in \mathbb{Z}$ e $\sum c_i$ é par. Definimos $L := L' + \mathbb{Z} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \epsilon_i \right)$. Como sistema de raízes, vamos tomar o conjunto Φ formado por todos os vetores de comprimento $\sqrt{2}$ em L . Então Φ consiste de 240 raízes:

$$\pm(\epsilon_i - \epsilon_j)(i < j), \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \pm \epsilon_i \text{ (com número par de sinais positivos)}.$$

Para Δ , vamos tomar $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7 + \epsilon_8)$, $\alpha_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2$, $\alpha_i = \epsilon_{i-1} - \epsilon_{i-2}$ ($3 \leq i \leq 8$).

O grupo $W(\Phi)$, denotado por E_8 , possui ordem $2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$ e é isomorfo ao grupo $2 \cdot GO^+(8, 2)$, ver [11].

3.7 Tipo E_7

A partir do sistema de raízes construído acima para o tipo E_8 , tomemos V como sendo o subespaço $\langle \alpha_i \mid 1 \leq i \leq 7 \rangle$ de \mathbb{R}^8 . O sistema de raízes Φ tomado aqui é o conjunto formado pelos 126 vetores de E_8 que pertencem a V :

$$\pm \epsilon_i \pm \epsilon_j \text{ (} 1 \leq i < j \leq 6 \text{)}, \pm(\epsilon_7 - \epsilon_8), \pm \frac{1}{2} \left(\epsilon_7 - \epsilon_8 + \sum_{i=1}^6 \pm \epsilon_i \right),$$

onde o número de sinais negativos nesse somatório é ímpar. O sistema simples Δ que vamos tomar consiste das raízes α_i ($1 \leq i \leq 7$).

O grupo $W(\Phi)$, denotado por E_7 , possui ordem $2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$ e é isomorfo ao grupo $GO(7, 2) \times C_2$, ver [11].

3.8 Tipo E_6

Neste caso, vamos começar novamente a partir do sistema de raízes do tipo E_8 . Sendo V o subespaço $\langle \alpha_i \mid 1 \leq i \leq 6 \rangle$ de \mathbb{R}^8 , o sistema de raízes Φ considerado aqui é o conjunto constituído pelas 72 raízes de E_8 pertencentes a V :

$$\pm \epsilon_i \pm \epsilon_j \text{ (} 1 \leq i < j \leq 5 \text{)}, \pm \frac{1}{2} \left(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 + \sum_{i=1}^5 \pm \epsilon_i \right),$$

onde o número de sinais negativos nesse somatório é ímpar. As raízes α_i ($1 \leq i \leq 6$) formam o sistema simples Δ .

O grupo $W(\Phi)$, denotado por E_6 , possui ordem $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$ e é isomorfo ao grupo $GO^-(6, 2)$, ver [11].

3.9 Tipo H_3 e tipo H_4

Identificamos $V = \mathbb{R}^4$ com o anel de divisão dos quatérnios \mathbb{H} . Podemos descrever o conjunto Δ das raízes simples tomando

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a - \frac{1}{2}i + bj, & \alpha_2 &= -a + \frac{1}{2}i + bj, \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2} + bi - aj, & \alpha_4 &= -\frac{1}{2} - ai + bk,\end{aligned}$$

onde $a = \cos \frac{\pi}{5}$, $b = \cos \frac{2\pi}{5}$ e $i, j, k \in \mathbb{H}$.

O sistema de raízes Φ contém 120 elementos e o grupo $W(\Phi)$, denotado por H_4 , possui ordem 14400.

Tomando agora $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, o conjunto Φ correspondente possui 30 raízes. O grupo $W(\Phi)$, denotado por H_3 , possui ordem 120 e é isomorfo a $GO(3, 4) \times C_2$.

Capítulo 4

Centralizadores de elementos em grupos de Coxeter finitos

Vimos na Proposição 2.38 que, dado um sistema de Coxeter (W, S) com W finito e $J \subseteq S$, o normalizador $N_W(W_J)$ do subgrupo parabólico W_J é um produto semidireto de W_J e $X_{JJJ} = \{d \in X_J \mid J^d = J\}$. Neste capítulo, mostramos que a maioria dos centralizadores de elementos de W desfruta de uma decomposição semelhante em produto semidireto. Por simplicidade, utilizaremos neste capítulo a notação N_J para indicar o complemento normalizador X_{JJJ} .

Os resultados principais deste trabalho, que consistem nos dois teoremas a seguir, encontram-se no artigo [7], de autoria de Matjaz Konvalinka, Götz Pfeiffer e Claas E. Röver.

Teorema 4.1 *Seja W um grupo de Coxeter finito e seja $w \in W$. Seja V o menor subgrupo parabólico de W que contém w . Então, o centralizador $C_V(w) = C_W(w) \cap V$ é um subgrupo normal do centralizador $C_W(w)$ com quociente $C_W(w)/C_V(w)$ isomorfo ao quociente normalizador $N_W(V)/V$.*

Teorema 4.2 *Considere um grupo de Coxeter finito W e um elemento $w \in W$ tal que a classe de conjugação à qual w pertence é não conforme. Se V é o menor subgrupo parabólico de W tal que $w \in V$, então o centralizador $C_W(w)$ decompõe-se em $C_V(w)$ com complemento isomorfo a $N_W(V)/V$.*

Veremos na Definição 4.15 o que vem a ser uma classe de conjugação não conforme, existente apenas em grupos do tipo D_n . Nos dois teoremas acima, o subgrupo parabólico V está bem definido como a interseção de todos os subgrupos parabólicos que contém w (Teorema 2.34). Para demonstrarmos esses teoremas, iremos supor que w tem comprimento minimal em sua classe de conjugação em W . Então, V coincide com o subgrupo parabólico standard W_J , onde $J = J(w)$.

Observe que essa suposição sobre o elemento w não tira a generalidade dos teoremas. Com efeito, vamos tomar agora dois elementos w_1 e w_2 em uma mesma classe de conjugação. Temos então $w_2 = w_1^g$ para algum $g \in W$. Afirmamos que, se V_1 é o menor subgrupo parabólico de W que contém w_1 e V_2 é o menor subgrupo parabólico que contém w_2 , então valem as seguintes igualdades:

- (1) $V_2 = V_1^g$;
- (2) $C_W(w_2) = C_W(w_1)^g$;
- (3) $C_{V_2}(w_2) = C_{V_1}(w_1)^g$;
- (4) $N_W(V_2) = N_W(V_1)^g$.

A primeira igualdade é evidente. Vamos mostrar então a segunda igualdade. Com efeito, para $x \in W$, temos

$$\begin{aligned}
 x \in C_W(w_2) &\Leftrightarrow xw_2 = w_2x \\
 &\Leftrightarrow xg^{-1}w_1g = g^{-1}w_1gx \\
 &\Leftrightarrow gxg^{-1}w_1 = w_1gxxg^{-1} \\
 &\Leftrightarrow x^{g^{-1}}w_1 = w_1x^{g^{-1}} \\
 &\Leftrightarrow x^{g^{-1}} \in C_W(w_1) \\
 &\Leftrightarrow x \in C_W(w_1)^g.
 \end{aligned}$$

A terceira igualdade decorre diretamente das duas primeiras, já que

$$C_{V_2}(w_2) = C_W(w_2) \cap V_2 = C_W(w_1)^g \cap V_1^g = (C_W(w_1) \cap V_1)^g = C_{V_1}(w_1)^g.$$

Por fim, a quarta igualdade vem do fato de que

$$\begin{aligned}
 x \in N_W(V_2) &\Leftrightarrow V_2^x = V_2 \Leftrightarrow V_1^{gx} = V_1^g \Leftrightarrow V_1^{gxxg^{-1}} = V_1 \\
 &\Leftrightarrow gxg^{-1} \in N_W(V_1) \Leftrightarrow x^{g^{-1}} \in N_W(V_1) \\
 &\Leftrightarrow x \in N_W(V_1)^g.
 \end{aligned}$$

De posse dessas igualdades, vemos então que, se $C_{V_1}(w_1)$ é um subgrupo normal de $C_W(w_1)$, então, para qualquer $x \in C_W(w_2) = C_W(w_1)^g$, temos $x = y^g$ para algum $y \in C_W(w_1)$ e assim

$$C_{V_2}(w_2)^x = C_{V_1}(w_1)^{gx} = (C_{V_1}(w_1)^{gxxg^{-1}})^g = (C_{V_1}(w_1)^y)^g = C_{V_1}(w_1)^g,$$

de onde podemos concluir que $C_{V_2}(w_2)$ é subgrupo normal de $C_W(w_2)$. Além disso, se temos

$$\frac{C_W(w_1)}{C_{V_1}(w_1)} \cong \frac{N_W(V_1)}{V_1},$$

então

$$\begin{aligned} \frac{C_W(w_2)}{C_{V_2}(w_2)} &\cong \frac{C_W(w_1)^g}{C_{V_1}(w_1)^g} \cong \left(\frac{C_W(w_1)}{C_{V_1}(w_1)} \right)^g \\ &\cong \left(\frac{N_W(V_1)}{V_1} \right)^g \cong \frac{N_W(V_1)^g}{V_1^g} \\ &\cong \frac{N_W(V_2)}{V_2} \end{aligned}$$

e podemos, sem perda de generalidade, supor que w é de comprimento minimal em sua classe de conjugação no Teorema 4.1 e no Teorema 4.2.

4.1 Centralizadores

Nesta seção, provamos um teorema geral acerca da estrutura de centralizadores de elementos em grupos de Coxeter finitos. A demonstração é feita essencialmente com base no Teorema 2.50. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $w \in W$ é um elemento de comprimento minimal em sua classe de conjugação em W .

Teorema 4.3 *Se $w \in W$ é um elemento de comprimento minimal em sua classe de conjugação em W e $J = J(w)$, então $C_W(w)W_J = N_W(W_J)$.*

Demonstração: Vamos denotar por C a classe de conjugação de w em W e por C_J a sua classe de conjugação em W_J . Pela Proposição 2.49, C_J é cuspidal em W_J , uma vez que o elemento $w \in (C_J)_{min}$ é tal que $J(w) = J$. Então, pelo Teorema 2.50, temos $C_J = C \cap W_J$. Seja $x \in N_W(W_J)$. Então, tendo em vista que $w \in W_J$, temos $w^x \in W_J \cap C = C_J$. Logo, existe $u \in W_J$ tal que $w^x = w^u$. Mas

$$\begin{aligned} w^x = w^u &\Leftrightarrow x^{-1}wx = u^{-1}wu \\ &\Leftrightarrow ux^{-1}w = wux^{-1} \\ &\Leftrightarrow ux^{-1} \in C_W(w) \\ &\Rightarrow x \in C_W(w)W_J. \end{aligned}$$

Portanto, $N_W(W_J) \subseteq C_W(w)W_J$.

Como $W_J \subseteq N_W(W_J)$, resta-nos mostrar que $C_W(w) \subseteq N_W(W_J)$. De fato, seja $y \in C_W(w)$. Pela Proposição 2.29, y pode ser escrito na forma $y = uxv^{-1}$ para $u, v \in W_J$, $x \in X_{JJ}$. Observe que $w \in C_J^y$, uma vez que $y \in C_W(w)$. Assim, o fato de que $w \in C_J \cap C_J^y$ implica que $w^v \in C_J \cap C_J^{yv} = C_J \cap (C_J^u)^x = C_J \cap C_J^x \subseteq W_J \cap W_J^x = W_{J \cap J^x}$, sendo esta última igualdade decorrente do Teorema 2.34. Como a classe C_J é cuspidal em W_J , devemos ter $J \cap J^x = J$ e, portanto, $x \in N_J = X_{JJ} \subseteq N_W(W_J)$. Logo, $y = uxv^{-1} \in N_W(W_J)$. \square

Observe agora que o Teorema 4.1 segue do resultado acima. Neste caso, V coincide com o subgrupo parabólico standard W_J . Dados $g \in C_W(w), h \in C_V(w)$, é fácil ver que

$hg = gh'$ para algum $h' \in V$, já que $h \in V$ e $g \in C_W(w) \subseteq N_W(V)$, pelo Teorema 4.3. Assim,

$$g^{-1}hg = g^{-1}gh' = h' \in V.$$

Portanto, $g^{-1}hg \in C_W(w) \cap V = C_V(w)$ e $C_V(w)$ é subgrupo normal de $C_W(w)$. Por outro lado, o Segundo Teorema de Isomorfismo para grupos e o Teorema 4.3 nos garantem que

$$C_W(w)/C_V(w) \cong C_W(w)/C_W(w) \cap V \cong C_W(w)V/V \cong N_W(V)/V.$$

A partir de agora, nosso objetivo é provar o Teorema 4.2 para cada tipo de grupo de Coxeter finito irredutível.

Lema 4.4 *Seja $w \in W$ um elemento de comprimento minimal em sua classe de conjugação em W , e seja $J = J(w)$. Se a classe de conjugação à qual w pertence é cuspidal em W ou se $C_{W_J}(w) = W_J$, então N_J é um complemento de $C_{W_J}(w)$ em $C_W(w)$.*

Demonstração: Se a classe de conjugação à qual w pertence é cuspidal em W , então $W_J = W$ e os quocientes $N_W(W_J)/W_J \cong N_J$ e $C_W(w)/C_{W_J}(w)$ são ambos triviais. Por outro lado, se $C_{W_J}(w) = W_J$, então $W_J \subseteq C_W(w)$ e o Teorema 4.3 nos garante que $N_W(W_J) = C_W(w)W_J = C_W(w)$, donde podemos concluir que $C_W(w) = N_W(W_J) = W_J \rtimes N_J = C_{W_J}(w) \rtimes N_J$. \square

Nossa estratégia geral na busca de um complemento centralizador para w será identificar um complemento M de W_J em seu normalizador que centraliza w . Mais precisamente, temos a seguinte consequência do Teorema 4.3.

Proposição 4.5 *Seja $w \in W$ um elemento de comprimento minimal em sua classe de conjugação e seja $J = J(w)$. Suponha que o complemento normalizador N_J é gerado pelos elementos x_1, \dots, x_r . Sejam $u_1, \dots, u_r \in W_J$ tais que $u_i x_i \in C_W(w)$, $i \in \{1, \dots, r\}$, e considere*

$$M = \langle u_1 x_1, \dots, u_r x_r \rangle.$$

Então, M é um complemento de $C_{W_J}(w)$ em $C_W(w)$ sob a condição de que tenhamos $M \cap W_J = \{1\}$.

Demonstração: Primeiramente, observamos que $W_J M = W_J N_J = N_W(W_J)$. De fato, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, $W_J u_i x_i = W_J x_i \subseteq W_J N_J$. Por outro lado, $W_J x_i = W_J u_i x_i \subseteq W_J M$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$ e obtemos, portanto, a igualdade desejada. Como $M \cap W_J = \{1\}$, M é um complemento de W_J em seu normalizador. Além disso, M é um subgrupo de $C_W(w)$, uma vez que cada um de seus geradores centraliza w . Pelo Teorema 4.3, podemos concluir que $C_W(w) \subseteq C_W(w)W_J = N_W(W_J) = W_J M$.

Queremos mostrar agora que $C_W(w) = C_{W_J}(w)M$. Para isso, consideremos agora um elemento $y \in C_W(w)$. Então, y pode ser expresso na forma $y = uv$, onde $u \in W_J, v \in$

$M \subseteq C_W(w)$. Assim, $u = yv^{-1} \in C_W(w) \cap W_J = C_{W_J}(w)$ e chegamos à conclusão de que $y \in C_{W_J}(w)M$, como desejado. Portanto, o fato de os subgrupos $C_{W_J}(w)$ e M terem interseção trivial nos garante que M é um complemento de $C_{W_J}(w)$ em $C_W(w)$. \square

Nas próximas seções, consideraremos alguns exemplos de grupos de Coxeter, a fim de darmos uma prova do Teorema 4.2 fazendo uma análise caso por caso. Antes disso, porém, precisamos definir o produto entrelaçado de grupos, o qual aparece na descrição dos normalizadores dos subgrupos parabólicos e dos centralizadores dos elementos de W . Aqui usamos como referência o livro de Rotman, [8].

Dados dois grupos G e H , seja X um H -conjunto finito, e seja $\{G_x \mid x \in X\}$ uma família de cópias isomorfas a G indexadas por X . Sendo $K = \prod_{x \in X} G_x$, então o **produto entrelaçado** de G por H , denotado por $G \wr H$, é o produto semidireto de K por H , onde H age sobre K por $h \cdot (g_x) = (g_{hx})$ para quaisquer $h \in H$ e $(g_x) \in K = \prod_{x \in X} G_x$.

4.2 Tipo A

Seja $\lambda = (1^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, n^{a_n})$ uma partição de n , com $a_i \geq 0$, seja w_λ como definido na Seção 3.1 e seja $J = J(w_\lambda)$. Observando a ação de W_J sobre o conjunto gerador $\{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$, concluímos que o subgrupo parabólico standard

$$W_J = S_1^{a_1} \times \dots \times S_n^{a_n}$$

é um produto direto de grupos simétricos, e seu normalizador

$$N_W(W_J) = S_1 \wr S_{a_1} \times \dots \times S_n \wr S_{a_n}$$

é um produto direto de produtos entrelaçados de grupos simétricos. De modo semelhante, o centralizador

$$C_W(w_\lambda) = C_1 \wr S_{a_1} \times \dots \times C_n \wr S_{a_n}$$

é um produto direto de produtos entrelaçados de grupos cíclicos com grupos simétricos, e o centralizador

$$C_{W_J}(w_\lambda) = C_1^{a_1} \times \dots \times C_n^{a_n}$$

é um produto direto de grupos cíclicos. Observe que os quocientes $N_W(W_J)/W_J$ e $C_W(w_\lambda)/C_{W_J}(w_\lambda)$ são ambos isomorfos a $S_{a_1} \times \dots \times S_{a_n}$. Para mostrarmos que o complemento normalizador N_J é também um complemento de $C_{W_J}(w_\lambda)$ em $C_W(w_\lambda)$, vamos introduzir a seguinte notação. Denotemos por

$$s(o, m) = (s_{o+1}s_{o+2} \cdots s_{o+2m-1})^m = (o+1, o+2, \dots, o+2m)^m$$

a permutação que, após um deslocamento o , troca dois blocos adjacentes de m pontos $\{o+1, \dots, o+m\}$ e $\{o+m+1, \dots, o+2m\}$. Por exemplo,

$$s(2, 3) = (s_3 s_4 s_5 s_6 s_7)^3 = (3, 4, 5, 6, 7, 8)^3 = (3, 6)(4, 7)(5, 8).$$

Observe que $s_i = s(i - 1, 1)$. Então

$$N_J \cong S_{a_1} \times \dots \times S_{a_n}$$

é um produto direto de grupos simétricos S_{a_m} , com geradores de Coxeter

$$s(o_m, m), s(o_m + m, m), \dots, s(o_m + (a_m - 2)m, m),$$

e desloca

$$o_m = a_1 + 2a_2 + \dots + (m - 1)a_{m-1}, \quad (4.1)$$

para todo $m \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_m > 0$.

Proposição 4.6 *Sejam λ uma partição de n , w_λ a permutação com estrutura cíclica λ como na Seção 3.1, e $J = J(w_\lambda)$ o subconjunto de S correspondente. Então, N_J é um complemento de $C_{W_J}(w_\lambda)$ em $C_W(w_\lambda)$.*

Demonstração: É suficiente considerar o caso em que $\lambda = (m^a)$, uma vez que W_J , $N_W(W_J)$, $C_W(w_\lambda)$, $C_{W_J}(w_\lambda)$ e N_J são todos subgrupos do produto direto

$$S_{1a_1} \times S_{2a_2} \times \dots \times S_{na_n} \leq S_n,$$

e a prova pode ser feita componente a componente.

Se $\lambda = (m^a)$, então N_J é isomorfo a S_a , com $a - 1$ geradores de Coxeter

$$s(0, m), s(m, m), \dots, s((a - 2)m, m),$$

permutando os blocos de m pontos

$$\{1, \dots, m\}, \{m + 1, \dots, 2m\}, \dots, \{(a - 1)m + 1, \dots, am\}.$$

Observe então que o elemento

$$w_\lambda = (1, \dots, m)(m + 1, \dots, 2m) \cdots ((a - 1)m + 1, \dots, am)$$

é centralizado por N_J , isto é, $N_J \subseteq C_W(w_\lambda)$.

Pelo item (ii) da Proposição 2.38, sabemos que W_J e N_J têm interseção trivial e, portanto, $C_{W_J}(w_\lambda) \cap N_J = \{1\}$. Além disso, segue do Teorema 4.3 que $C_W(w_\lambda) \subseteq N_W(W_J)$. Assim, tomando um elemento $x \in C_W(w_\lambda)$, existem $w \in W_J, d \in N_J$ tais que $x = wd$. Como $d \in N_J \subseteq C_W(w_\lambda)$, temos $w = xd^{-1} \in C_W(w_\lambda) \cap W_J = C_{W_J}(w_\lambda)$ e concluímos que $x \in C_{W_J}(w_\lambda)N_J$. Portanto, $C_W(w_\lambda) = C_{W_J}(w_\lambda) \rtimes N_J$ e N_J é um complemento de $C_{W_J}(w_\lambda)$ em $C_W(w_\lambda)$. \square

4.3 Tipo B

Seja $\lambda = (\lambda^+; \lambda^-)$ uma partição dupla de n em que $\lambda^+ = (1^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, n^{a_n})$ e $\lambda^- = (1^{b_1}, 2^{b_2}, \dots, n^{b_n})$. Considere agora o elemento w_λ como na Seção 3.2 e seja $J = J(w_\lambda) \subseteq S$. Observando a ação de W_J sobre o conjunto gerador $\{t_1, s_1, \dots, s_{n-1}\}$ de W (considerando as possíveis permutações e mudanças de sinal), podemos concluir que W_J é um produto direto

$$W_J = W(B_{|\lambda^-|}) \times S_1^{a_1} \times S_2^{a_2} \times \dots \times S_n^{a_n}$$

e seu normalizador

$$N_W(W_J) = W(B_{|\lambda^-|}) \times S_1 \wr W(B_{a_1}) \times S_2 \wr W(B_{a_2}) \times \dots \times S_n \wr W(B_{a_n})$$

é um produto direto de $W(B_{|\lambda^-|})$ e produtos entrelaçados de grupos simétricos e grupos de Coxeter do tipo B . De modo semelhante, o centralizador

$$C_W(w_\lambda) = C_{W(B_{|\lambda^-|})}(w_\lambda) \times C_1 \wr W(B_{a_1}) \times C_2 \wr W(B_{a_2}) \times \dots \times C_n \wr W(B_{a_n})$$

é um produto direto de $C_{W(B_{|\lambda^-|})}(w_\lambda)$ e produtos entrelaçados de grupos cíclicos e grupos de Coxeter do tipo B , e o centralizador

$$C_{W_J}(w_\lambda) = C_{W(B_{|\lambda^-|})}(w_\lambda) \times C_1^{a_1} \times C_2^{a_2} \times \dots \times C_n^{a_n}$$

é um produto direto de $C_{W(B_{|\lambda^-|})}(w_\lambda)$ e grupos cíclicos. É fácil, então, ver que os quocientes $N_W(W_J)/W_J$ e $C_W(w_\lambda)/C_{W_J}(w_\lambda)$ são ambos isomorfos a

$$W(B_{a_1}) \times W(B_{a_2}) \times \dots \times W(B_{a_n}).$$

Mostraremos a seguir que uma variante do complemento normalizador N_J , que denotaremos por N_λ , é um complemento de $C_{W_J}(w_\lambda)$ em $C_W(w_\lambda)$. Para isso, precisamos introduzir a notação a seguir.

Vamos denotar por $r(o, m)$ a permutação definida por

$$x \cdot r(o, m) = \begin{cases} 2o + m + 1 - x, & \text{se } o + 1 \leq x \leq o + m, \\ x, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dessa forma, $r(o, m) = (o + 1, o + m)^+(o + 2, o + m - 1)^+ \dots$ inverte a ordem dos elementos do conjunto $\{o + 1, \dots, o + m\}$, sendo, portanto, o elemento de comprimento maximal do grupo simétrico $S_{\{o+1, \dots, o+m\}}$ com geradores de Coxeter $s_{o+1}, \dots, s_{o+m-1}$. Por exemplo, $r(3, 7) = (4, 10)^+(5, 9)^+(6, 8)^+$.

Vamos denotar também por $t(o, m)$ a permutação

$$t(o, m) = (o + 1)^-(o + 2)^- \dots (o + m)^-,$$

que age como -1 nos pontos do conjunto $\{o + 1, \dots, o + m\}$ e como identidade nos demais pontos.

No caso particular em que $\lambda^+ = (m^a)$ e $\lambda^- = \emptyset$, o subgrupo parabólico W_J é um produto direto de a cópias de S_m e N_J é isomorfo a $W(B_a)$, com geradores de Coxeter

$$r(0, m)t(0, m) \text{ e } s(0, m), s(m, m), \dots, s((a-2)m, m).$$

No caso geral, se $\lambda^+ = (1^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, n^{a_n})$, então W_J é um produto direto de $W(B_{|\lambda^-|})$ e produtos diretos de grupos simétricos e N_J é um produto direto de grupos $W(B_{a_m})$, com geradores de Coxeter

$$r(o_m, m)t(o_m, m) \text{ e } s(o_m, m), s(o_m + m, m), \dots, s(o_m + (a_m - 2)m, m),$$

onde $o_m = |\lambda^-| + a_1 + 2a_2 + \dots + (m-1)a_{m-1}$, para $m \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_m > 0$.

Infelizmente, o subgrupo N_J não centraliza w_λ . Entretanto, se definirmos N_λ como o subgrupo de W gerado pelos mesmos elementos de N_J , substituindo $r(o_m, m)t(o_m, m)$ por $t(o_m, m)$, esse N_λ é um complemento centralizador, como nos mostra a proposição a seguir.

Proposição 4.7 *Sejam λ uma partição dupla de n , w_λ como na Seção 3.2 e $J = J(w)$ o subconjunto de S correspondente. Então*

$$N_\lambda = \langle t(o_m, m), s(o_m + km, m) \mid k \in \{0, \dots, a_m - 2\}, m \in \{1, \dots, n\}, a_m > 0 \rangle$$

é um complemento de $C_{W_J}(w_\lambda)$ em $C_W(w_\lambda)$.

Demonstração: Observemos primeiramente que N_λ centraliza w_λ , já que seus geradores $t(o_m, m)$ e $s(o_m + km, m)$ pertencem ao centralizador $C_W(w_\lambda)$ de w_λ em W . Como N_λ é um complemento de W_J em seu normalizador $N_W(W_J)$, temos $N_\lambda \cap W_J = \{1\}$. A Proposição 4.5 nos garante então que N_λ é um complemento de $C_{W_J}(w_\lambda)$ em $C_W(w_\lambda)$. \square

Para uma melhor compreensão, observemos o que acontece no exemplo a seguir. Tomemos uma partição dupla $\lambda = (\lambda^+; \lambda^-)$ de $n = 12$, em que $\lambda^+ = (1^1, 2^3, 3^1)$ e $\lambda^- = (2)$. Neste caso,

$$w_\lambda = (1, 2)^-(3)^+(4, 5)^+(6, 7)^+(8, 9)^+(10, 11, 12)^+$$

é um representante de comprimento minimal da classe de conjugação associada à partição dupla λ . Observe agora que

$$w_\lambda = (1, 2)^+(1)^-(4, 5)^+(6, 7)^+(8, 9)^+(11, 12)^+(10, 11)^+$$

(multiplicando da esquerda para a direita) é uma expressão reduzida para w_λ , e obtemos o conjunto

$$J = J(w_\lambda) = \{(1)^-, (1, 2)^+, (4, 5)^+, (6, 7)^+, (8, 9)^+, (10, 11)^+, (11, 12)^+\}.$$

Como vimos na Seção 4.3, o subgrupo parabólico W_J é um produto direto

$$W_J = W(B_2) \times S_1 \times S_2 \times S_2 \times S_2 \times S_3$$

e seu normalizador é

$$N_W(W_J) = W(B_2) \times S_1 \wr W(B_1) \times S_2 \wr W(B_3) \times S_3 \wr W(B_1).$$

Fazendo alguns cálculos simples, encontramos os valores:

$$t(o_1, 1) = (3)^-, t(o_2, 2) = (4)^-(5)^-, t(o_3, 3) = (10)^-(11)^-(12)^-;$$

$$r(o_1, 1) = (1)^+, r(o_2, 2) = (4, 5)^+, r(o_3, 3) = (10, 12)^+;$$

$$s(o_2, 2) = (4, 6)^+(5, 7)^+, s(o_2 + 2, 2) = (6, 8)^+(7, 9)^+.$$

Observe que o complemento normalizador

$$\begin{aligned} N_J &= \langle r(o_1, 1)t(o_1, 1), r(o_2, 2)t(o_2, 2), r(o_3, 3)t(o_3, 3), s(o_2, 2), s(o_2 + 2, 2) \rangle \\ &= \langle (3)^-, (4, -5)^+, (10, -12)^+(11)^-, (4, 6)^+(5, 7)^+, (6, 8)^+(7, 9)^+ \rangle \end{aligned}$$

não está contido em $C_W(w_\lambda)$, uma vez que um de seus geradores, o elemento $(10, -12)^+(11)^-$, não comuta com

$$w_\lambda = (1, 2)^-(3)^+(4, 5)^+(6, 7)^+(8, 9)^+(10, 11, 12)^+.$$

Então, N_J não pode ser um complemento de $C_{W_J}(w_\lambda)$ em $C_W(w_\lambda)$. Por outro lado, cada elemento do subgrupo

$$\begin{aligned} N_\lambda &= \langle t(o_1, 1), t(o_2, 2), t(o_3, 3), s(o_2, 2), s(o_2 + 2, 2) \rangle \\ &= \langle (3)^-, (4)^-(5)^-, (10)^-(11)^-(12)^-, (4, 6)^+(5, 7)^+, (6, 8)^+(7, 9)^+ \rangle \end{aligned}$$

comuta com $w_\lambda = (1, 2)^-(3)^+(4, 5)^+(6, 7)^+(8, 9)^+(10, 11, 12)^+$. Com alguns cálculos simples, podemos concluir que $N_\lambda \cap W_J = \{1\}$ e, pelo Teorema 4.5, o subgrupo N_λ é um complemento de $C_{W_J}(w_\lambda)$ em $C_W(w_\lambda)$.

4.4 Tipo D

Como vimos na Seção 3.3, um grupo do tipo D_n é, na verdade, um subgrupo do grupo do tipo B_n . Portanto, o caso de grupos de Coxeter do tipo D_n é melhor tratado quando comparado ao que ocorre no tipo B_n . Nesta seção, vamos tomar $n \geq 4$ e vamos denotar por (W, S) o sistema de Coxeter do tipo B_n , como descrito na Seção 3.2. W' denota o grupo de Coxeter do tipo D_n com conjunto gerador de Coxeter S' , constituído pelas permutações sinalizadas com um número par de ciclos negativos, conforme vimos na Seção 3.3.

Lema 4.8 [7, Lemma 4.5] *Seja $w \in W$ um elemento de tipo cíclico $\lambda = (\lambda^+; \lambda^-)$ tal que λ^- tem um número par de partes e w tem comprimento minimal em sua classe de conjugação em W . Seja $J = J(w)$. Então, valem as seguintes propriedades:*

- (i) w tem comprimento minimal em sua classe em W' .

- (ii) Se $\lambda^- = \emptyset$ e λ^+ é par, então $C_{W'}(w) = C_W(w)$; caso contrário, $C_{W'}(w)$ tem índice 2 em $C_W(w)$.
- (iii) Se $J' = S' \cap W_J$, então $W'_{J'}$ é o menor subgrupo parabólico de W' que contém w .
- (iv) Se $\lambda^- = \emptyset$, então $J' = J$; caso contrário, $W'_{J'} = W_J \cap W'$ é um subgrupo de W_J de índice 2.
- (v) $C_{W'_{J'}}(w) = C_{W_J}(w) \cap W'$ é um subgrupo de $C_{W_J}(w)$ de índice 2, a menos que ocorra $\lambda^- = \emptyset$.
- (vi) Se λ^+ não é par e $\lambda^- = \emptyset$, então $N'_{J'} = N_J \cap W'$ é um subgrupo de índice 2 em N_J ; caso contrário, $N_J \cong N'_{J'}$.

O subgrupo parabólico $W'_{J'}$ é da forma $D_{|\lambda^-|} \times S_{\lambda_1^+} \times \cdots \times S_{\lambda_t^+}$, onde D_m é o subgrupo de W' gerado por $\{u, s_1, \dots, s_{m-1}\}$ para $m \in \{2, \dots, n\}$.

Vamos definir agora o que é uma partição dupla não conforme.

Definição 4.9 Dizemos que $\lambda = (\lambda^+; \lambda^-)$ é uma partição dupla não conforme se λ^+ consiste de uma única parte ímpar e λ^- é uma partição par não vazia constituída de um número par de partes.

Dizemos que uma classe de conjugação C de W é uma classe não conforme se, para algum inteiro ímpar $n > 4$, existem uma partição dupla não conforme λ de n e um subgrupo parabólico W_M de W que possui uma componente irredutível W_K do tipo D_n tal que C contém um elemento de W_M cuja projeção sobre W_K tem tipo cíclico λ .

Por exemplo, no grupo $W = W(D_5)$, os elementos de tipo cíclico $((1); (2, 2))$ formam uma classe não conforme. Outro exemplo de classe não conforme é a formada pelos elementos do grupo $W = W(D_7)$ de tipo cíclico $((1, 2); (2, 2))$, pois um deles pertence a um subgrupo parabólico W_M do tipo $D_5 \times A_1$, com D_5 -parte de tipo cíclico $((1); (2, 2))$.

Vejam agora o seguinte lema.

Lema 4.10 [7, Lemma 4.7] Um elemento $w \in W(D_n)$ de tipo cíclico $\lambda = (\lambda^+; \lambda^-)$ pertence a uma classe não conforme se, e somente se, λ^+ não é uma partição par e λ^- é uma partição par não vazia.

O próximo resultado mostra que, em um grupo de Coxeter W' do tipo D_n , o centralizador $C_{W'}(w)$ decompõe-se sobre $C_{W'_{J'}}(w)$, a menos que a classe de conjugação de $w \in W'$ seja não conforme. Escrevemos $J'(w) \subseteq S'$ para indicar o conjunto de geradores que compõem uma expressão reduzida de w como elemento de W' .

Proposição 4.11 [7, Proposition 4.8] Seja $\lambda = (\lambda^+; \lambda^-)$ uma partição dupla de n tal que o número de partes de λ^- é par. Sejam w_λ e N_λ como na Proposição 4.7 e seja $J' = J'(w_\lambda)$ o subconjunto correspondente de S' . Então,

- (i) Se λ^+ é par, então N_λ é um complemento de $C_{W'_j}(w_\lambda)$ em $C_{W'}(w_\lambda)$.
- (ii) Se λ^+ não é par e $\lambda^- = \emptyset$, então $N_\lambda \cap W'$ é um subgrupo de índice 2 em N_λ e um complemento de $C_{W'_j}(w_\lambda)$ em $C_{W'}(w_\lambda)$.
- (iii) Se $\lambda^+ = (1^{a_1}, \dots, n^{a_n})$ e $\lambda^- = (\lambda_1^-, \dots, \lambda_s^-)$ não é par, então existe um índice $j \leq s$ tal que $k = \lambda_1^- + \dots + \lambda_j^-$ é ímpar, e o subgrupo

$$N'_\lambda = \langle t(0, k)^m t(o_m, m), s(o_m + im, m) \mid i \in \{0, \dots, a_m - 2\}, m \in \{1, \dots, n\}, a_m > 0 \rangle$$

é um complemento de $C_{W'_j}(w_\lambda)$ em $C_{W'}(w_\lambda)$.

Observe que $t(0, k)^m = 1$ se m é par e $t(0, k)^m = t(0, k)$ se m é ímpar.

O próximo teorema mostra que, se w pertence a uma classe não conforme de w , então o seu centralizador não tem complemento.

Teorema 4.12 [7, Theorem 4.10] *Seja W um grupo de Coxeter finito e suponha que w é um elemento de comprimento minimal em uma classe de conjugação não conforme. Então, o centralizador $C_{W_j}(w)$ não possui complemento em $C_W(w)$.*

4.5 Tipo I

Seja W um grupo de Coxeter do tipo $I_2(m)$. Então W é o grupo gerado por elementos s_1 e s_2 que satisfazem $(s_1 s_2)^m = (s_2 s_1)^m$. Cada elemento de W ou é cuspidal ou é uma involução, pois há somente dois subgrupos parabólicos standard próprios, que são $W_{\{s_1\}} = \{1, s_1\}$ e $W_{\{s_2\}} = \{1, s_2\}$. Portanto, o Teorema 4.2 para este tipo segue do Lema 4.4.

4.6 Tipos excepcionais

Para os grupos que compõem os casos excepcionais, isto é, os de tipo E_6, E_7, E_8, F_4, H_3 e H_4 , é possível provar o Teorema 4.2 através de métodos computacionais. Podemos utilizar como ferramenta, por exemplo, o programa GAP [3].

4.7 Aplicações

Nesta seção, provamos um resultado acerca dos representantes de comprimento minimal das classes de conjugação. A partir desse resultado, podemos dar uma demonstração do teorema de Solomon. Antes disso, porém, precisamos dos lemas a seguir.

Lema 4.13 *Suponha que $w \in W$ tem comprimento minimal em sua classe de conjugação em W e seja $J = J(w)$. Então*

- (i) Se $a \in C_W(w)$ e $x \in X_J$ são tais que $C_{W_J}(w)a \subseteq W_Jx$, então $x \in N_J$.
- (ii) Se $x \in X_J$ é tal que $l(w^x) = l(w)$, então $J(w^x) = J^x$.
- (iii) Se $v \in W$ é tal que $l(w^v) = l(w)$, então $J(w^v) = J^x$, onde $v = u \cdot x$ com $u \in W_J$ e $x \in X_J$.

Demonstração: (i) Seja $y \in C_{W_J}(w)$. Como $C_{W_J}(w)a \subseteq W_Jx$, existe um elemento $v \in W_J$ tal que $ya = vx$. Uma vez que $a \in C_W(w)$, temos

$$y \in C_{W_J}(w) \Rightarrow w = w^y \in C_J^y \Rightarrow w = w^a \in C_J^{ya} = C_J^{vx} \subseteq C_J^x.$$

Então, $w \in C_J \cap C_J^x \subseteq W_J \cap W_J^x = W_{J \cap J^x}$ (Teorema 2.34). Além disso, a Proposição 2.49 nos garante que C_J é cuspidal em W_J . Portanto, $J \cap J^x = J$ e $x \in N_J$.

(ii) Como $l(w^x) = l(w)$, o elemento w^x também é de comprimento minimal na classe de conjugação C de w . Então, se $K = J(w^x)$, existe, pela Proposição 2.48, um elemento $y \in X_{KJ}$ tal que $K^y = J$. Unindo a isto o fato de que $w^x \in W_K$, concluímos que $w^{xy} \in W_J$. Como w é de comprimento minimal em sua classe de conjugação em W , temos $l(w^{xy}) \geq l(w) = l(w^x)$. Além disso, o Lema 2.37 nos mostra que a desigualdade $l(w^x) \geq l(w^{xy})$ também é válida, uma vez que $w^{xy} \in W_J$ e $y^{-1} \in X_J$. Portanto, $l(w^{xy}) = l(w^x) = l(w)$. Observe também que, pela Proposição 2.49, a classe C_J é cuspidal em W_J , de onde podemos concluir, pelo Teorema 2.50, que $C \cap W_J = C_J$ e, por isso, $w^{xy} = w^u$ para algum $u \in W_J$. Portanto, $(u^{-1}xy)w^u = u^{-1}xyw^{xy} = u^{-1}wxy = (u^{-1}wu)(u^{-1}xy) = w^u(u^{-1}xy)$ e o elemento $u^{-1}xy$ centraliza w^u . Se escrevemos $u^{-1}xy = a \cdot z$ para $a \in W_J$ e $z \in X_J$ (Proposição 2.26), obtemos claramente a inclusão $C_{W_J}(w^u)(u^{-1}xy) \subseteq W_Jz$ e, pelo item (i), temos $z \in N_J$. Além disso, da igualdade $K^y = J$ segue, pelo item (iii) do Lema 2.30, que $X_K = yX_J$. Como $z \in N_J$ e N_J é subgrupo de W , podemos concluir que $z^{-1} \in N_J \subseteq X_J$ e assim $yz^{-1} \in X_K$. Pelo item (ii) do Lema 2.30, $zy^{-1}X_K \subseteq X_L$, onde $L = K^{yz^{-1}} = J^{z^{-1}} = J$. Segue que $zy^{-1} \in X_{JK}$ é o único elemento de comprimento minimal na classe lateral W_Jx (observe que $zy^{-1} = a^{-1}u^{-1}x \in W_Jx$). Portanto, $zy^{-1} = x$ e $J^x = J(w^x)$.

(iii) Pela Proposição 2.26, podemos escrever v na forma $v = u \cdot x$ com $u \in W_J$, $x \in X_J$. Temos então $w^v = (w^u)^x$. O Lema 2.37 nos garante que a conjugação com x não diminui o comprimento. Logo, $l(w) = l(w^v) \geq l(w^u) \geq l(w)$ e a igualdade $l(w^u) = l(w)$ é verdadeira. Portanto, w^u é de comprimento minimal em sua classe de conjugação. Pelo item (ii), temos $J(w^v) = J((w^u)^x) = J(w^u)^x$ e a Proposição 2.49 nos mostra que $J(w^u) = J$, o que finaliza a demonstração. \square

Antes de enunciarmos o próximo teorema, precisamos das definições a seguir. Dado um elemento $w \in W$, seu **conjunto de ascensão** é o conjunto $\mathcal{A}(w) = \{s \in S \mid l(sw) > l(w)\}$, e o conjunto $\mathcal{D}(w) = \{s \in S \mid l(sw) < l(w)\}$ é chamado **conjunto de descensão** de w . Observe que, dado $J \subseteq S$, o conjunto X_J dos representantes distintos das classes laterais à direita de W_J pode ser definido simplesmente por $X_J = \{w \in W \mid J \subseteq \mathcal{A}(w)\}$.

Teorema 4.14 *Seja $w \in W$ um elemento de comprimento minimal em sua classe de conjugação em W . Então, para $v \in W$, temos*

- (i) $J(w^v) = \mathcal{D}(v^{-1}) \Leftrightarrow v = w_{J(w)}$.
- (ii) $J(w^v) = \mathcal{A}(v^{-1}) \Leftrightarrow v = w_{J(w)}w_0$.

Demonstração: (i) Suponhamos que $J(w^v) = \mathcal{D}(v^{-1})$ e denotemos por L o conjunto $\mathcal{D}(v^{-1})$. Pelo Lema 2.24, $v^{-1} = w_L \cdot x$ para algum $x \in X_L$. Como $J(w^v) = L$, podemos obter uma expressão reduzida $w^v = s_1 \cdots s_k$ com $s_i \in L, i = 1, \dots, k$. Assim, temos $(w^v)^{w_L} = s_1^{w_L} \cdots s_k^{w_L}$ e, como a conjugação por w_L preserva o conjunto L (Lema 2.25), cada $s_i^{w_L}$ é um elemento de L e $l((w^v)^{w_L}) \leq k = l(w^v)$. Por outro lado, considerando que $w^v = ((w^v)^{w_L})^{w_L}$, uma vez que $w_L = (w_L)^{-1}$ (Proposição 2.23), concluímos analogamente que $l((w^v)^{w_L}) \geq l(w^v)$ e, portanto, vale a igualdade $l((w^v)^{w_L}) = l(w^v)$. O Lema 2.37 nos garante que $l(w^v) = l((w^v)^{w_L}) \leq l((w^v)^{w_L x}) = l(w)$ e, portanto, w^v , assim como w , é um elemento de comprimento minimal em sua classe de conjugação. Pela Proposição 2.48, podemos afirmar que $L = J(w^v)$ e $J(w)$ são subconjuntos conjugados de S . O item (iii) do Lema 4.13 mostra mais precisamente que $L^x = J(w)$.

Suponha que $l(x) > 0$. Observe que $x \notin L$, pois, caso contrário, teríamos $x^2 = 1$ e, uma vez que $x \in X_L$, chegaríamos ao absurdo de que $l(1) = l(xx) > l(x)$. Seja $s \in \mathcal{D}(x)$ e seja $M = L \cup \{s\}$. Pelo Corolário 2.43, x é um produto reduzido $x = d \cdot y$ com $d = w_L w_M$, o representante das classes laterais de W_L em W_M de maior comprimento. Segue que $v^{-1} = w_L \cdot x = w_M \cdot y$, e assim $M \subseteq \mathcal{D}(v^{-1}) = L \subsetneq M$. A contradição mostra que $x = 1$ e, portanto, temos $L = J(w)$ e $v = w_L = w_{J(w)}$.

Reciprocamente, tomando $v = w_{J(w)}$ e fazendo $J = J(w)$, temos $w^v \in W_J$, pois $u, v \in W_J$. Logo, $J(w^v) \subseteq J$. Se $s \in J(w^v)$, então $s \in J$, $sv \in W_J$ e, portanto, $l(sv) \leq l(v)$, pois v é o elemento de comprimento maximal em W_J . Como o comprimento de sv difere de $l(v)$ por uma unidade, devemos ter $l(sv) < l(v)$, isto é, $s \in \mathcal{D}(v)$. Portanto, $J(w^v) \subseteq \mathcal{D}(v) = \mathcal{D}(v^{-1})$, já que $v = v^{-1}$.

Por outro lado, se $s \in \mathcal{D}(v)$, então existe uma expressão reduzida para v que começa com s . Como $v \in W_J$, a Proposição 2.17 nos garante que $s \in J$. Observe agora que, como v é de comprimento maximal em W_J , a conjugação por v preserva o conjunto J e, portanto, $l(w^v) = l(w)$ e o elemento w^v , assim como w , é de comprimento minimal em sua classe de conjugação em W . A Proposição 2.48 nos mostra então que $J(w^v) = J^z$ para algum $z \in X_J$. Assim, $|J(w^v)| = |J^z| = |J|$. Por outro lado, como $w^v \in W_J$, temos $J(w^v) \subseteq J$. Mais do que isso, devido ao fato de J ser finito, vale a igualdade $J(w^v) = J$. Portanto, $s \in J = J(w^v)$ e os conjuntos $J(w^v)$ e $\mathcal{D}(v^{-1})$ coincidem.

(ii) Como a conjugação pelo elemento w_0 de comprimento maximal em W preserva o conjunto S (Lema 2.25), é fácil ver que $J(w^{w_0}) = J(w)^{w_0}$ para todo $x \in W$. Afirmamos

também que, se $x \in W$, então $\mathcal{D}(x^{w_0}) = \mathcal{D}(x)^{w_0}$. Com efeito, pelo Lema 2.25, temos

$$\begin{aligned}
 s \in \mathcal{D}(x^{w_0}) &\Leftrightarrow l(sx^{w_0}) < l(x^{w_0}) \\
 &\Leftrightarrow l(sw_0xw_0) < l(w_0xw_0) \\
 &\Leftrightarrow l(w_0) - l(sw_0x) < l(w_0) - l(xw_0) \\
 &\Leftrightarrow l(w_0sw_0x) < l(w_0) - (l(w_0) - l(x)) \\
 &\Leftrightarrow l(s^{w_0}x) < l(x) \\
 &\Leftrightarrow s^{w_0} \in \mathcal{D}(x) \\
 &\Leftrightarrow s \in \mathcal{D}(x)^{w_0}.
 \end{aligned}$$

Observe também que $\mathcal{A}(x) = \mathcal{D}(xw_0)$ para todo $x \in W$. De fato,

$$\begin{aligned}
 s \in \mathcal{A}(x) &\Leftrightarrow l(sx) > l(x) \\
 &\Leftrightarrow l(w_0) - l(sx) < l(w_0) - l(x) \\
 &\Leftrightarrow l(sxw_0) < l(xw_0) \\
 &\Leftrightarrow s \in \mathcal{D}(xw_0).
 \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{D}(x)^{w_0} = \mathcal{D}(x^{w_0}) = \mathcal{D}(w_0xw_0) = \mathcal{A}(w_0x)$ e, pelo item (i), temos

$$J(w^{xw_0}) = J(w^x)^{w_0} = \mathcal{D}(x^{-1})^{w_0} = \mathcal{A}((xw_0)^{-1}) \Leftrightarrow x = w_{J(w)}.$$

Fazendo $v = xw_0$, concluímos a demonstração. \square

O próximo lema, demonstrado por Carter [1] em 1972, é necessário para a nossa prova do teorema de Solomon.

Lema 4.15 *Sejam $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ um conjunto de raízes simples, V um espaço euclidiano que admite Δ como base, e W o grupo de reflexões associado a Δ (como no Capítulo 1). Então, para qualquer $w \in W$, $l(w)$ é igual ao número de autovalores de w diferentes de 1 (considerando suas multiplicidades). Em particular, $l(w) \leq n$.*

Demonstração: Como fizemos no Capítulo 1, dado o sistema simples $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, podemos associar a ele um conjunto $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, onde cada s_i é uma reflexão em V que aplica a raiz simples α_i em seu oposto $-\alpha_i$ e fixa pontualmente o hiperplano ortogonal H_i de α_i . Seja $k = l(w)$ e seja $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ uma expressão reduzida para w com $s_{i_j} \in S$. Tomando l como sendo o número de autovalores de w diferentes de 1 (contando com suas multiplicidades), queremos mostrar que $k = l$. Considere o subespaço

$$U = H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_k}$$

de V formado pelos vetores fixados por w . Afirmamos que $(\mathbb{R}\alpha_{i_1} + \mathbb{R}\alpha_{i_2} \dots + \mathbb{R}\alpha_{i_k})^\perp$ é um subespaço de U . De fato, se u é ortogonal a $\mathbb{R}\alpha_{i_1} + \mathbb{R}\alpha_{i_2} \dots + \mathbb{R}\alpha_{i_k}$, então, em particular,

u é ortogonal a cada α_{i_j} , ou seja, $u \in U$. Como w é um operador linear ortogonal, w é diagonalizável [5, p.317] e $n-l = \dim U \geq \dim(\mathbb{R}\alpha_{i_1} + \mathbb{R}\alpha_{i_2} \dots + \mathbb{R}\alpha_{i_k})^\perp \geq n-k$. Podemos concluir então que $l \leq k$.

Vamos supor por um momento que w não fixa nenhum vetor não nulo, ou seja, $l = n$. Seja $\alpha \in \Delta$ uma raiz simples. Como w não fixa nenhum vetor não nulo, $w - I$ é não singular e, portanto, existe um elemento $v \in V$ tal que $(w - I)v = \alpha$. Então $wv = v + \alpha$. Observe agora que

$$(wv, wv) = (v, v) \Rightarrow (v + \alpha, v + \alpha) = (v, v) \Rightarrow \frac{2(v, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = -1$$

e segue que $s_\alpha v = v + \alpha$. Logo, $wv = s_\alpha v$ e $(s_\alpha w)v = v$. Segue da Proposição 1.17 que $s_\alpha w$ é um produto de reflexões que fixam o elemento v e, portanto, pertence a um grupo de reflexões de posto menor que n . Assim, $s_\alpha w$ é um produto de no máximo $n - 1$ reflexões. Então w é um produto de no máximo n reflexões, isto é, $k = l(w) \leq n = l$.

No caso em que w fixa algum vetor não nulo, podemos tomar V_1 como sendo o subespaço de V formado pelos vetores fixados por w e V_1^\perp , o seu complemento ortogonal. Então, $\dim V^\perp = l$ e $\dim V = n - l$. Como w fixa cada vetor do subespaço V_1 , w fixa, em particular, os vetores de uma base (finita) de V_1 . Pela Proposição 1.17, concluímos que w é um produto de reflexões s_{α_i} que também fixam cada vetor dessa base e, portanto, fixam V_1 pontualmente. Então todas as raízes α_i correspondentes pertencem a V_1^\perp . Como w fixa algum vetor não nulo, temos $\dim V_1 = n - l > 0$ e $\dim V_1^\perp = l < n = \dim V$. As raízes que estão em V_1^\perp formam um sistema de raízes no subespaço gerado por elas. Esse subespaço tem dimensão menor que n e w é um elemento do grupo de reflexões associado a esse sistema de raízes. De modo análogo ao que fizemos no caso em que $l = n$, podemos concluir que w é um produto de no máximo l reflexões, isto é, $k \leq l$. \square

Uma consequência muito relevante do Teorema 4.14 é a seguinte fórmula, provada por Solomon [9] no ano de 1966. Vamos dar aqui uma (nova) demonstração desse teorema usando os resultados encontrados neste capítulo.

Teorema 4.16 (Fórmula de Solomon) *Para $J \subseteq S$, seja π_J o caráter de permutação da ação de W sobre as classes laterais de W_J , definido por $\pi_J(w) = |\text{Fix}_{W/W_J}(w)|$, e seja ε o caráter sinal de W , definido por $\varepsilon(w) = (-1)^{l(w)}$ para $w \in W$. Então vale a igualdade*

$$\sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|} \pi_J = \varepsilon.$$

Demonstração: Seja w um elemento qualquer de W . Observe que $W_J x w = W_J x \Leftrightarrow w^{x^{-1}} \in W_J$. Como X_J é uma transversal à direita de W_J , temos $\pi_J(w) = |\text{Fix}_{W/W_J}(w)| = |\{x \in X_J \mid w^{x^{-1}} \in W_J\}|$. Assim,

$$\sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|} \pi_J(w) = \sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|} \sum_{\substack{x \in X_J \\ w^{x^{-1}} \in W_J}} 1 = \sum_{x \in W} \sum_{J(w^{x^{-1}}) \subseteq J \subseteq \mathcal{A}(x)} (-1)^{|J|},$$

já que

$$x \in X_J \Leftrightarrow J \subseteq \mathcal{A}(x) \text{ e } w^{x^{-1}} \in W_J \Leftrightarrow J(w^{x^{-1}}) \subseteq J.$$

Para calcularmos isto, precisamos observar que, para quaisquer conjuntos finitos A e B com $A \subseteq B$, temos

$$\sum_{A \subseteq J \subseteq B} (-1)^{|J|} = (-1)^{|A|} \sum_{I \subseteq B-A} (-1)^{|I|}.$$

Se $A \neq B$, então, pelo Teorema Binomial,

$$\sum_{I \subseteq B-A} (-1)^{|I|} = \sum_{k=0}^{|B-A|} \binom{|B-A|}{k} (-1)^k = (1 + (-1))^{|B-A|} = 0.$$

Por outro lado, se $A = B$, então $\sum_{I \subseteq B-A} (-1)^{|I|} = (-1)^{|B-A|} = (-1)^0 = 1$. Portanto,

$$\sum_{A \subseteq J \subseteq B} (-1)^{|J|} = \begin{cases} (-1)^{|A|} & \text{se } A = B, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Veja então que, para $A = J(w^{x^{-1}})$ e $B = \mathcal{A}(x)$, temos

$$\sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|} \pi_J(w) = \sum_{\substack{x \in W \\ J(w^{x^{-1}}) = \mathcal{A}(x)}} (-1)^{|\mathcal{A}(x)|}.$$

Sabemos que todo caráter de um grupo é uma função de classe, ou seja, é constante em cada classe de conjugação. Portanto, π_J é uma função de classe para cada $J \subseteq S$ e, conseqüentemente, $\sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|} \pi_J$ também é. Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que w é de comprimento minimal em sua classe de conjugação. Pelo item (ii) do Teorema 4.14, essa soma, na verdade, consiste apenas de um único termo, obtido tomando $x^{-1} = w_{J(w)} w_0$, e temos

$$\sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|} \pi_J(w) = (-1)^{|\mathcal{A}(w_0 w_{J(w)})|}.$$

Como provado no decorrer da demonstração do Teorema 4.14(ii), podemos observar que $\mathcal{A}(w_0 w_{J(w)}) = \mathcal{D}(w_{J(w)}^{w_0}) = \mathcal{D}(w_{J(w)})^{w_0}$ e assim

$$|\mathcal{A}(w_0 w_{J(w)})| = |\mathcal{D}(w_{J(w)})^{w_0}| = |\mathcal{D}(w_{J(w)})| = |J(w)|,$$

onde a última igualdade segue da Proposição 2.23(c).

Observe agora que todos os elementos de $J(w)$ aparecem em qualquer expressão reduzida para w , como vimos no Corolário 2.13. Então, $l(w) \geq |J(w)|$. Por outro lado, o Lema 4.15 nos mostra que $l(w) \leq |J(w)|$ e, portanto, vale a igualdade $l(w) = |J(w)|$, de onde podemos concluir que

$$\sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|} \pi_J(w) = (-1)^{|J(w)|} = (-1)^{l(w)} = \varepsilon(w).$$

□

A importância dessa fórmula torna-se clara, por exemplo, considerando a teoria das representações dos grupos finitos do tipo Lie. De fato, a construção e a irredutibilidade do caráter de Steinberg seguem diretamente da fórmula de Solomon (veja Carter [2]).

Referências Bibliográficas

- [1] R.W. Carter, ‘Conjugacy classes in the Weyl group’, *Compositio Math*, **25** (1972), 1–59.
- [2] R.W. Carter, *Finite groups of Lie type. Conjugacy classes and complex characters*, Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985.
- [3] The GAP Group, *GAP - Groups, Algorithms, and Programming*, Version 3.4.4; 2012.
- [4] M. Geck, G. Pfeiffer, *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*, London Mathematical Society Monographs. New Series, 21, The Clarendon Press, Oxford University, New York, 2000.
- [5] K. Hoffman, R. Kunze, *Linear algebra*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1971.
- [6] J.E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [7] M. Konvalinka, G. Pfeiffer, C.E. Röver, ‘A note on element centralizers in finite Coxeter groups’, *J. Group Theory*, **14** (2011), 727–745.
- [8] J.J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, Fourth edition, Graduate texts in Mathematics, 148, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [9] L. Solomon, ‘The orders of the finite Chevalley groups’, *J. Algebra*, **3** (1966), 376–393.
- [10] R. Steinberg, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Memoirs of the American Mathematical Society, 80, American Mathematical Society, Providence, 1968.
- [11] R.A. Wilson, *The finite simple groups*, Graduate texts in Mathematics, 251, Springer-Verlag London, London, 2009.