

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**IMPLEMENTAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS MORTAR  
UTILIZANDO MULTIPLICADORES DE LAGRANGE EM  
COORDENADAS HOMOGÊNEAS-APLICAÇÃO ÀS  
ESTRUTURAS DE MICRO-ONDAS**

**MOACIR MOURA DE ANDRADE FILHO**

**ORIENTADOR: PLÍNIO RICARDO GANIME ALVES**

**TESE DE DOUTORADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**PUBLICAÇÃO: PPGEE.TD-072/13  
BRASÍLIA/DF: ABRIL-2013**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**IMPLEMENTAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS MORTAR  
UTILIZANDO MULTIPLICADORES DE LAGRANGE EM  
COORDENADAS HOMOGÊNEAS-APLICAÇÃO ÀS ESTRUTURAS DE  
MICRO-ONDAS**

**Moacir Moura de Andrade Filho**

**TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA  
ELÉTRICA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR.**

**APROVADA POR:**

---

**Plínio Ricardo Ganime Alves, Dr., PPGEE/UNB  
(ORIENTADOR)**

---

**Antonio José Martins Soares, Dr., PPGEE/UNB  
(EXAMINADOR INTERNO)**

---

**Leonardo Rodrigues Araújo Xavier de Menezes, Dr., PPGEE/UNB  
(EXAMINADOR INTERNO)**

---

**João Pedro Assumpção Bastos, Dr., GRUCAD/UFSC  
(EXAMINADOR EXTERNO)**

---

**Leonardo Aguayo, Dr., UNB-GAMA  
(EXAMINADOR EXTERNO)**

**Brasília/DF, 30 de Abril de 2013.**

## FICHA CATALOGRÁFICA

**ANDRADE FILHO, MOACIR MOURA DE**

**Implementação dos Elementos Finitos Mortar utilizando Multiplicadores de Lagrange em Coordenadas Homogêneas-Aplicação às Estruturas de Micro-ondas.**

**xiv, 75p., 210x297 mm (ENE/FT/UnB, Doutor, Tese de Doutorado-Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.**

**Departamento de Engenharia Elétrica**

**1. Introdução.**

**2. Guias de Ondas.**

**3. A Técnica de Integração Analítica.**

**4. O Método Mortar.**

**5. Análise e Validação dos Resultados.**

**6. Conclusões e Perspectivas.**

**I. ENE/FT/UnB**

**II. Título (série)**

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

**ANDRADE FILHO, M. M. (2013). Implementação dos Elementos Finitos Mortar utilizando Multiplicadores de Lagrange em Coordenadas Homogêneas - Aplicação às Estruturas de Micro-ondas. Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica, Publicação PPGEE.TD-072/13, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 75p.**

## CESSÃO DE DIREITOS

**AUTOR: Moacir Moura de Andrade Filho.**

**TÍTULO: Implementação dos Elementos Finitos Mortar utilizando Multiplicadores de Lagrange em Coordenadas Homogêneas - Aplicação às Estruturas de Micro-ondas.**

**GRAU: Doutor**

**ANO: 2013**

**É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta Tese de Doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O Autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta Tese de Doutorado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do Autor.**

---

**Moacir Moura de Andrade Filho**

**Endereço: CSA 2 lote 10 Apartamento 33 – Taguatinga/DF.**

**72.015-025 Brasília - DF – Brasil.**

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Professor Dr. Plínio Ricardo Ganime Alves pela orientação segura deste trabalho, amizade e pelo apoio em todos os momentos.

Aos Professores e Alunos do Departamento de Engenharia Elétrica pela amizade e pelo espírito de cooperação, que sempre foram características fortes do grupo.

À Capes pelo suporte financeiro durante os quatro anos de duração do curso.

Dedico à Sirlei, Shirlene, Simone,  
Samuel, aos meus pais e irmãos Moacir, Idê, Debora,  
Yury, Emílio e Otto.

## **RESUMO**

### **IMPLEMENTAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS MORTAR UTILIZANDO MULTIPLICADORES DE LAGRANGE EM COORDENADAS HOMOGÊNEAS - APLICAÇÃO ÀS ESTRUTURAS DE MICRO-ONDAS.**

**Autor: Moacir Moura de Andrade Filho**

**Orientador: Plínio Ricardo Ganime Alves**

**Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica**

**Brasília, mês de abril de 2013**

Este trabalho aborda o desenvolvimento e a implementação computacional, em linguagem de alto desempenho Fortran, de formulações não-conformes Mortar, utilizando a técnica dos Multiplicadores de Lagrange. Aplica-se a técnica na análise de guias de ondas na faixa de micro-ondas. Na implementação, utilizam-se Elementos Finitos Mortar de primeira ordem.

As matrizes resultantes da aplicação do método dos Elementos Finitos Mortar a problemas de propagação foram calculadas por meio de uma técnica de integração analítica estendida, a qual é também apresentada. Esta abordagem estendida permite o cálculo das matrizes universais para elementos finitos nodais e também na função Mortar em qualquer ordem de aproximação. A aplicação da técnica de integração analítica é feita com as integrais escritas nas coordenadas homogêneas do elemento finito. Desta forma, as matrizes são calculadas uma única vez, sendo independentes das dimensões do elemento e dependentes apenas do tipo e da ordem da aproximação utilizada. É apresentada a solução e o tempo de processamento para alguns guias de ondas de geometria complexas. Os resultados obtidos são comparados com aqueles apresentados na literatura. Usando esta técnica, conseguimos uma melhoria na qualidade dos resultados e no tempo de processamento (CPU time) em comparação ao tradicional Método dos Elementos Finitos (MEF).

## **ABSTRACT**

### **IMPLEMENTATION OF FINITE ELEMENTS MORTAR USING LAGRANGE MULTIPLIER IN HOMOGENEOUS COORDINATES - APPLICATION TO STRUCTURES OF MICROWAVES.**

**Author: Moacir Moura de Andrade Filho**

**Supervisor: Plínio Ricardo Ganime Alves**

**Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica**

**Brasília, april of 2013**

This work deals with the development and computing implementation in the high-performance Fortran language of non-conforming Mortar formulations, using the technique of the Lagrange Multipliers. The technique is applied in the analysis of waveguides in the band of microwaves. The implementation uses Mortar Finite Elements of the first orders.

The matrices resulting from the application of the Finite Elements Method Mortar for the problems of propagation were calculated using a technique of extended analytical integration, which is also presented. This extended approach allows the calculation of universal matrices for Finite Element nodal and also in the function Mortar in any order of approximation. The application of analytical integration technique is done with integrals written in homogeneous coordinates of the Finite Element. Thus, the matrices are calculated once and are independent of the dimensions of the element and dependent only on the type and order of approximation used. It is presented the solution and the processing time to some waveguides of complex geometry. The results obtained are compared with those presented in the literature. Using this technique, we have an improved quality of results and processing time (CPU time) compared to traditional Finite Element Method (FEM).

# SUMÁRIO

<b>1 - INTRODUÇÃO.....</b>	<b>01</b>
<b>2 - A TÉCNICA DA INTEGRAÇÃO ANALÍTICA</b>	
<b>2.1 - Guias de ondas homogeneamente preenchidos.....</b>	<b>03</b>
2.1.1 - Ondas TEM - Formulação dos Elementos Finitos.....	06
2.1.2 - Modos TE e TM - Formulação dos Elementos finitos.....	09
<b>2.2 - Uso da técnica de integração analítica para o cálculo dos elementos de matriz</b> .....	<b>10</b>
<b>2.3 - Transformação de coordenadas para o sistema homogêneo no triângulo.....</b>	<b>11</b>
<b>2.4 - Matrizes para implementação.....</b>	<b>13</b>
2.4.1 - Modos TEM.....	14
2.4.2 - Modos TE e TM.....	14
<b>2.5 - Princípio Variacional para potenciais e campos.....</b>	<b>16</b>
2.5.1 - Forma variacional para as equações de Laplace e Poisson.....	17
2.5.2 - Forma variacional para a equação de Helmholtz escalar.....	19
2.5.3 - Procedimento de Rayleig-Ritz.....	20
<b>3 - O MÉTODO MORTAR</b>	
<b>3.1 - Introdução.....</b>	<b>25</b>
<b>3.2 - Método dos Multiplicadores de Lagrange.....</b>	<b>30</b>
3.2.1 - Introdução.....	30
3.2.2 - Formulação para o modo TEM.....	33
3.2.3 - Formulação para os modos TE e TM.....	37
<b>3.3 - Formulação do Método Mortar usando Multiplicadores de Lagrange.....</b>	<b>39</b>
3.3.1 - Formulação para o modo TEM.....	39
3.3.2 - Formulação para o modo TE e TM.....	44
<b>4 - ANÁLISE E VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS</b>	
<b>4.1 - Introdução.....</b>	<b>46</b>



<b>4.2 - Modos TE e TM em guias homogêneos.....</b>	<b>46</b>
<b>4.2.1 - Guia Retangular.....</b>	<b>46</b>
<b>4.2.2 - Guia Horse-Shoe Shaped.....</b>	<b>51</b>
<b>4.2.3 - Guia de Ondas Cilíndricos.....</b>	<b>58</b>
<b>5 - CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS.....</b>	<b>64</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>67</b>
<b>APÊNDICES</b>	
<b>A - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....</b>	<b>71</b>

## LISTAS DE TABELAS

Tabela 4.1- Freqüências de corte para o guia de ondas retangular utilizando o método Mortar..	49
Tabela 4.2 - Freqüências de corte para o guia de ondas retangular utilizando o MEF.....	50
Tabela 4.3 - Tempo de processamento. (Simulação em linguagem Fortran usando um Processador Intel(R) Celeron(R) CPU B800 Windows 8 - 1,50 GHz - 4GB de RAM).....	51
Tabela 4.4 - Guia Horseshoe-Shaped (Malha não-conforme) - $\lambda_c(mm)$ para os dois primeiros modos, TE <sub>1,0</sub> e TE <sub>2,0</sub> . Dimensões do guia: a=10 [mm], b/a= 0,5 e d/b=0,3.....	56
Tabela 4.5 - Guia Horseshoe-Shaped (Malha conforme) - $\lambda_c(mm)$ para os dois primeiros modos, TE <sub>1,0</sub> e TE <sub>2,0</sub> . Dimensões do guia: a= 10 [mm], b/a= 0,5 e d/b=0,3.....	56
Tabela 4.6 - Tempo de processamento. Simulação em linguagem Fortran usando um processador Intel Celeron XP 2000 - 3,0 GHz - 512 MB de RAM.....	57
Tabela 4.7 - Guia de onda Horseshoe-Shaped-Análise dos $\lambda_{c1}$ e $\lambda_{c2}$ para os dois primeiros modos, TE <sub>1,0</sub> e TE <sub>2,0</sub> . Dimensões do guia: a= 10 [mm], s/a=0,2, b/a= 0,5 e d/b=0,3.....	57
Tabela 4.8 - Freqüências de corte para o guia de ondas circular utilizando o método Mortar..	60
Tabela 4.9 - Freqüências de corte para o guia de ondas circular utilizando o MEF.....	60
Tabela 4.10 - Freqüências de corte para o guia de ondas circular utilizando o método Mortar (957 nós).....	62
Tabela 4.11 - Freqüências de corte para o guia de ondas circular utilizando o MEF (957nós).....	62
Tabela 4.12 - Tempo de processamento. (Simulação em linguagem Fortran usando um processador Intel(R) Celeron(R) CPU B800 Windows 8 - 1,50 GHz - 4GB de RAM).....	63

## LISTAS DE FIGURAS

Figura 2.1- Sistema de coordenadas homogêneas.....	11
Figura 3.1- Domínio $\Omega$ decomposto nos subdomínios $\Omega_s$ e $\Omega_m$ separados pela interface....	25
Figura 3.2 - A mulher tem que passar no rio, antes de recolher o leite.....	31
Figura 3.3 - A mulher pode chegar à vaca, por meio de qualquer ponto em uma determinada elipse no mesmo período de tempo.....	32
Figura 4.1 - Guia de onda de formato retangular.....	47
Figura 4.2 - Malha conforme (554 nós e 1046 elementos) para o guia retangular gerada pelo Triangle.....	48
Figura 4.3 - Malha não-conforme com 554 nós (175 nós escravos e 379 nós mestres) e 984 elementos (308 elementos escravos e 676 elementos mestres) gerada pelo Triangle.....	48
Figura 4.4 - Guia de ondas Horseshoe-Shaped.....	51
Figura 4.5 - Malha conforme (62 nós e 84 elementos) para o guia Horseshoe-Shaped gerada pelo Triangle .....	53
Figura 4.6 - Malha não-conforme com 62 nós (42 nós escravos e 20 nós mestres) e 72 elementos (48 elementos escravos e 24 elementos mestres) gerada pelo Triangle.....	53
Figura 4.7 - Malha conforme (353 nós e 593 elementos) para o guia Horseshoe-Shaped gerada pelo Triangle.....	54
Figura 4.8 - Malha não-conforme com 353 nós (198 nós escravos e 155 nós mestres) e 590 elementos (320 elementos mestres e 270 elementos mestres) gerada pelo Triangle.....	54
Figura 4.9 - Malha conforme (1200 nós e 2204 elementos) para o guia Horseshoe-Shaped gerada pelo Triangle.....	55
Figura 4.10 - Malha não-conforme com 1200 nós (712 nós escravos e 488 nós mestres) e 2237 elementos (1336 elementos escravos e 901 elementos mestres) gerada pelo Triangle.....	55
Figura 4.11 - Guia de Ondas Cilíndrico com $a= 1,0$ cm em coordenadas polares.....	58

Figura 4.12 - Malha conforme (570 nós e 997 elementos) para o guia Ondas Circular gerada pelo Triangle.....	59
Figura 4.13 - Malha não-conforme com 570 nós (281 nós escravos e 289 nós mestres) e 992 elementos (498 elementos escravos e 494 elementos mestres) gerada pelo Triangle.....	59
Figura 4.14 - Malha conforme (957 nós e 1816 elementos) para o guia Ondas Circular gerada pelo Triangle.....	61
Figura 4.15 - Malha não-conforme com 957 nós (281 nós escravos e 676 nós mestres) e 1672 elementos (498 elementos escravo e 1264 elementos mestres) gerada pelo Triangle.....	61
Figura A.1 - Fluxograma de implementação computacional do método Mortar para a equação de Laplace (Modo TEM).....	73
Figura A.2 - Fluxograma de implementação computacional do método Mortar para a equação de Laplace (Modos TE e TM).....	75

## LISTAS DE SÍMBOLOS, NOMECLATURA E ABREVIACÕES

$A$ - Matriz que relaciona os potenciais em $\Gamma(\Omega_s)$ e $\Gamma(\Omega_m)$ .....	28
$C$ - Matriz auxiliar no acoplamento entre subdomínios.....	28
$D$ - Matriz auxiliar no acoplamento entre subdomínios.....	28
$det$ - determinante.....	12
$e$ - elemento finito.....	07
$E$ - Campo elétrico [V/m].....	03
$f_c$ - frequência de corte.....	47
$f_s, f_m$ - fontes nos domínios escravo e mestre.....	29
GRUCAD - Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos.....	01
$H$ - Campo magnético [A/m].....	03
$Id$ - Matriz identidade.....	29
$J$ - Jacobiano.....	12
$k_c^2$ - número de onda de corte.....	09
LGEP - Laboratório de Engenharia Elétrica de Paris.....	01
MEF - Método dos Elementos Finitos.....	01
MSE - Modelagem de Sistemas Eletromagnéticos.....	01
$m_s, m_m$ - números de nós da discretização de cada subdomínio $\Omega_s$ e $\Omega_m$ .....	40
$m_m^{\Gamma}$ - número de nós na interface $\Gamma(\Omega_m)$ .....	26
$m_s^{\Gamma}$ - número de nós na interface $\Gamma(\Omega_s)$ .....	27
$\{N\}$ - representa o conjunto completo de funções de base no elemento finito.....	08
$N_i^c, N_i$ - funções de base linearmente independentes.....	34
$N_i$ - funções de interpolação.....	11
$N_j^c _{\Gamma}$ - projeção ou o valor de $N_j^c$ no contorno $\Gamma(\Omega_c)$ .....	35
$N_j^s _{\Gamma}$ - projeção ou o valor de $N_j^s$ na interface $\Gamma(\Omega_s)$ .....	40
$n_0$ - número de pontos nodais no elemento finito.....	08
$ord$ - ordem das aproximações polinomiais.....	12
$[Q]$ - matrizes universais.....	15
$R_m$ - polinômios auxiliares para elementos do tipo Lagrange.....	08

$S$ - matriz tradicional do Método dos Elementos Finitos dos domínios $\Omega_s$ e $\Omega_m$ .....	43
$S_s, S_m$ - matrizes de rigidez dos domínios escravo e mestre.....	29
$[T]$ - matrizes universais.....	15
TE - Onda Transverso-Elétrica.....	03
TEM - Onda Eletromagnética Transversal.....	03
TM - Ondas Transverso-Magnética.....	03
$v_t$ - função de teste .....	26
$W$ - função teste da técnica dos resíduos ponderados.....	07
$\theta$ - frequência angular.....	04
$\varepsilon$ - permissividade.....	04
$\mu$ - permeabilidade.....	04
$\beta$ - constante de propagação.....	04
$\nabla_t^2$ - Operador Laplaciano transversal.....	05
$\Omega$ - domínio de integração.....	06
$\{ \}$ - representa uma matriz linha.....	08
$\{ \}^T$ - matriz transposta.....	08
$\zeta$ - eixos do sistema de coordenadas homogêneo.....	11
$\Delta$ - área do triângulo.....	12
$\Pi$ - Funcional energético.....	17
$\Gamma$ - Interface entre os subdomínios $\Omega_s$ e $\Omega_m$ (ou $\Omega_a$ e $\Omega_b$ ).....	25
$\phi_i$ - Funções de base definidas no nó $i$ de $\Gamma(\Omega_m)$ .....	25
$\psi_i$ - Funções de base definidas no nó $i$ de $\Gamma(\Omega_s)$ .....	25
$\Omega_s$ - Subdomínio escravo.....	25
$\Omega_m$ - Subdomínio mestre.....	25
$\phi_s _{\Gamma}$ - potencial em $\Gamma(\Omega_s)$ .....	25
$\phi_m _{\Gamma}$ - potencial em $\Gamma(\Omega_m)$ .....	25
$\lambda$ - Multiplicador de Lagrange.....	33
$\phi_i^c$ - potencial vetor no nó $i$ da discretização de $\Omega_c$ .....	34
$\lambda_j$ - Multiplicador de Lagrange no nó $j$ de $\Gamma(\Omega_a)$ .....	35

# 1 - INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é empregar o Método dos Elementos Finitos Mortar [1] em estruturas de micro-ondas. Usaremos esse Método para obter uma melhoria na qualidade dos resultados, bem como, uma redução no tempo de processamento (CPU time) em relação ao tradicional Método dos Elementos Finitos (MEF).

Neste trabalho o Método Mortar é empregado utilizando a Técnica de Integração Analítica. A vantagem da utilização dos elementos finitos em coordenadas homogêneas é que as integrais resultantes do Método ficam independentes dos parâmetros geométricos dos elementos, e desta forma, podem ser calculados uma única vez para todos os triângulos do domínio.

O Método Mortar vem sendo estudado sempre no âmbito da matemática por Casarin [2], Braess [3], Wohlmuth [4]. Recentemente foi estendido ao eletromagnetismo através de vários trabalhos publicados por pesquisadores do GRUCAD – Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos (EEL/CTC/UFSC) [5], MSE (Modelagem de Sistemas Eletromagnéticos) do LGEP (Laboratório de Engenharia Elétrica de Paris) na análise de dispositivos com correntes induzidas com elementos nodais e de aresta em duas dimensões e também em três dimensões por Rapetti [6].

O conceito do método Mortar é de implementar uma condição de acoplamento diretamente ao problema discretizado. Um dos subdomínios é chamado de mestre e o outro de escravo. Esta escolha é arbitrária. A condição de acoplamento entre as malhas garante a continuidade na interface. A exatidão do Método depende fortemente da malha. A malha não-conforme deve possuir quantidade maior de triângulos nas regiões de interesse e menor quantidade em regiões afastadas, isto é, triângulos pequenos na região de interesse e triângulos maiores distante dela. Com isto, o processo de análise se torna mais demorado e preciso apenas onde for necessário.

O Método Multiplicadores de Lagrange é concebido a partir da minimização de um

funcional do problema no domínio contínuo. Usaremos, neste trabalho, a técnica dos Multiplicadores de Lagrange para incluir ao funcional original do problema outro que garanta a continuidade da função na Interface [7]. No nosso caso, o funcional adicionado será a chamada condição Mortar. Da minimização do funcional completo obtém-se a forma variacional do problema que pode ser discretizada pelo Método dos Elementos Finitos (MEF).

Este trabalho está organizado em cinco Capítulos e um Apêndice.

No Capítulo 1 é feita a Introdução.

No Capítulo 2 é feita a formulação do Método dos Elementos Finitos para os modos TEM, TE e TM dos Guias de ondas. É abordada a Técnica de Integração Analítica. Apresentamos a transformação de coordenadas para o sistema homogêneo no triângulo. Obtemos as chamadas “matrizes universais” por meio do princípio variacional.

No Capítulo 3 apresentamos a definição de Elementos Finitos Mortar e do Método dos Multiplicadores de Lagrange. Aplicamos as formulações para os Guias de ondas.

No Capítulo 4 são apresentados a análise e os resultados para a formulação não-conforme implementada. O desempenho da formulação não-conforme é analisado em função da geometria dos elementos, da discretização, da ordem de interpolação e da dimensão do Guia. Os resultados para cálculos de parâmetros como a frequência de corte são comparados com os valores encontrados na literatura.

Capítulo 5 é dedicado às conclusões e perspectivas futuras do trabalho.

No Apêndice apresentamos os fluxogramas dos programas em linguagem Fortran para a implementação das formulações desenvolvidas.



## 2 - A TÉCNICA DA INTEGRAÇÃO ANALÍTICA

### 2.1 - Guias de ondas homogeneamente preenchidos

Os Guias de ondas fechados, preenchidos com materiais homogêneos e isotrópicos, são conceitualmente simples e representam importantes estruturas em engenharia de micro-ondas. Os primeiros estudos numéricos de propagação de ondas, apresentados na literatura, foram realizados com esse tipo de dispositivo [9]-[11].

Uma grande variedade de guias de ondas de interesse tecnológico comportam a propagação de modos nos quais as condições de contorno podem ser satisfeitas por campos que tenham todos os componentes presentes. Particularmente, a solução de interesse para linhas de transmissão é uma onda que apresente somente componentes transversais (onda eletromagnética transversal - TEM), ou seja,  $E_z=H_z=0$ , enquanto que para guias de ondas fechados soluções com  $E_z \neq 0$  são possíveis [12].

Ondas TEM possuem  $E_z=H_z=0$  (propagação da onda na direção  $z$ ). Neste caso, o campo elétrico pode ser encontrado a partir do gradiente transversal de uma função escalar  $\phi(x,y)$ , a qual depende somente das coordenadas transversais e é uma solução da equação de Laplace em duas dimensões:

$$\nabla \cdot (\epsilon |\nabla \phi) = 0. \quad (2.1)$$

Por outro lado, ondas transverso-elétricas (TE) apresentam  $E_z=0$ , mas  $H_z \neq 0$ . Neste caso, todos os componentes podem ser obtidos a partir do componente axial  $H_z$  do campo magnético. As ondas transverso-magnéticas (TM) têm  $H_z=0$ , mas  $E_z \neq 0$  e os componentes de campo podem ser derivadas de  $E_z$ .

A equação de onda para os modos transversais TE e TM é obtida partindo-se das equações de Maxwell livres de fontes de correntes internas e assumindo propagação ao longo do eixo  $z$  conforme [13]

$$H_i = |H_i| e^{j(\omega t - \beta z)}, \quad (2.2)$$

$$E_i = |E_i| e^{j(\omega t - \beta z)}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}, \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \vec{H} = +j\omega\epsilon\vec{E}, \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon\vec{E}) = 0, \quad (2.7)$$

onde:  $\omega$  é a frequência angular,  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  são os campos elétrico e magnético,  $\epsilon$  e  $\mu$  são a permissividade e a permeabilidade, respectivamente, e  $\beta$  é a constante de propagação. Em situações em que existam perdas no dielétrico, a constante de propagação é complexa e escrita da forma  $\gamma = \alpha + j\beta$ , sendo  $\alpha$  a constante de atenuação e  $i = x, y, z$ .

Utilizando as equações (2.2)-(2.3) nas equações (2.4)-(2.7) e suprimindo o fator  $e^{j(\omega t - \beta z)}$ , tem-se as relações a seguir:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu H_x \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + j\beta E_x = +j\omega\mu H_y \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = +j\omega\epsilon E_x \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} + j\beta H_x = -j\omega\epsilon E_y \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = +j\omega \epsilon E_z \quad (2.13)$$

Combinando-se as equações (2.8), (2.9), (2.11) e (2.12), pode-se escrever:

$$H_x = \frac{j(\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x})}{(k^2 - \beta^2)}, \quad (2.14)$$

$$H_y = \frac{-j(\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y})}{(k^2 - \beta^2)}, \quad (2.15)$$

$$E_x = \frac{-j(\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y})}{(k^2 - \beta^2)}, \quad (2.16)$$

$$E_y = \frac{j(-\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x})}{(k^2 - \beta^2)}. \quad (2.17)$$

$$\text{onde } k^2 = \omega^2 \mu \epsilon. \quad (2.18)$$

Pode-se observar, a partir das equações (2.14)-(2.17), que se as componentes  $E_z$  e  $H_z$  são considerados, os demais componentes de  $E$  e  $H$  podem ser calculados.

Para ondas TE ( $E_z=0$ ), a equação de onda pode ser obtida a partir da substituição dos componentes de campo (2.16) e (2.17) em (2.10):

$$\nabla_t^2 H_z + (k^2 - \beta^2)H_z = 0, \quad (2.19)$$

onde  $\nabla_t^2$  é o operador Laplaciano transversal dado por

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2.20)$$

Analogamente, para ondas TM ( $H_z = 0$ ), a equação de onda pode ser derivada da substituição dos componentes de campo  $H_x$  e  $H_y$ , dadas em (2.14) e (2.15), na equação (2.13).

$$\nabla_t^2 E_z + (k^2 - \beta^2)E_z = 0 \quad (2.21)$$

As equações (2.19) e (2.21) são equações escalares homogêneas de Helmholtz.

As diversas configurações de campos eletromagnéticos dos modos TE e TM, juntamente com o modo TEM (se este puder existir), constituem um conjunto completo de campos e podem descrever qualquer perturbação eletromagnética em um guia ou cavidade preenchidos homogeneamente com material dielétrico.

Na próxima seção vamos obter as formulações para o MEF das equações de Laplace e Helmholtz obtidas.

### 2.1.1 - Ondas TEM - Formulação dos Elementos Finitos

Em meios anisotrópicos, a equação de Laplace pode ser escrita como:

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \nabla \Phi) = 0. \quad (2.22)$$

A aplicação do MEF a uma certa classe de guias de ondas define as características do meio dielétrico a ser considerado, tal que o tensor permissividade relativo tenha a seguinte forma:

$$\epsilon_r = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Aplicando o método dos resíduos ponderados à equação (2.22), obtém-se a seguinte equação integral sobre o domínio,  $\Omega$ .

$$\int_{\Omega} (\varepsilon_{xx} \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \varepsilon_{yy} \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y}) dx dy = 0 \quad (2.24)$$

onde  $W$  é a função teste da técnica dos resíduos ponderados.

Na construção da solução aproximada da equação (2.24), pelo MEF, a região em estudo é dividida em subdomínios (elementos finitos). Os subdomínios,  $\Omega^e$ , respeitam as seguintes regras:

$$\bigcup_{e=1}^n \Omega^e = \Omega, \quad (2.25)$$

$$\Omega^j \cap \Omega^k = \emptyset, \quad \text{se } 1 \leq j \neq k \leq n. \quad (2.26)$$

O parâmetro  $\Phi$ , na equação (2.24), pode ser determinado de modo a representar a melhor aproximação possível dos valores do potencial para os nós de cada elemento finito. Para os pontos nodais que pertencem à superfície com condições de contorno de Dirichlet,  $\Phi$  assume valores conhecidos  $\Phi_o$ ; e para pontos sobre a superfície com condição de contorno de Neumann,  $\Phi$  permanece não especificado.

Escolher para as funções teste,  $W$ , o próprio conjunto de funções base,  $N$ , procedimento denominado técnica de Galerkin [13], torna possível utilizar estas funções, tanto na interpolação de geometria de cada elemento finito, quanto na interpolação do potencial em seu interior.

A função potencial,  $\Phi$ , e teste,  $W$ , são representadas separadamente, em cada elemento finito, por uma combinação linear de funções de aproximação ou de base,  $N$ .

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n_0} N_j \phi_j = \{N\} \{\phi\}^T \quad (2.27)$$

$$W = \sum_{i=1}^{n_0} N_i \phi_i = \{N\} \{w\}^T. \quad (2.28)$$

Substituindo as expansões dadas em (2.27) e (2.28) na equação (2.24), tem-se:

$$\sum_{i,j=1}^{n_0} \int_{\Omega^e} (\varepsilon_{xx} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \varepsilon_{yy} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y}) \phi_j dx dy = 0 \quad (2.29)$$

Pode-se representar a equação (2.29) na forma de um sistema linear de equações como:

$$[S] \{\phi\}^T = \{b\}^T, \quad (2.30)$$

onde  $\{b\}$  é o vetor das ações e

$$[S] = \int_{\Omega^e} (\varepsilon_{xx} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} + \varepsilon_{yy} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \frac{\partial \{N\}}{\partial y}) dx dy \quad (2.31)$$

onde  $n_0$  é o número de pontos nodais no elemento finito,  $\{N\}$  representa o conjunto completo de funções de base no elemento finito usado,  $\{ \}$  representa uma matriz linha e  $\{ \}^T$  é a matriz transposta.

A expressão apresentada na equação (2.31), para cada elemento finito, pode ser calculada por integração numérica diretamente na implementação computacional do MEF ou pré-calculada por integração analítica, para um elemento finito de referência. O pré-cálculo das matrizes pode reduzir um pouco o tempo de processamento no cálculo e na montagem do sistema de equações. Nesse caso, o custo é o aumento da complexidade de implementação que

é dependente do tipo de problema físico em estudo. Mais detalhes sobre o cálculo dos elementos de matriz serão apresentados no Capítulo 3.

### 2.1.2 - Modos TE e TM - Formulação dos Elementos Finitos

Como mostrado na Seção 2.1, o fenômeno de propagação em guias de ondas fechados, sem fontes internas, pode ser descrito pela equação homogênea de Helmholtz dada por:

$$\nabla_{\perp}^2 \Phi + k_c^2 \Phi = 0, \quad (2.32)$$

onde a função potencial  $\Phi$  satisfaz a equação (2.32) na região  $\Omega$  e  $k_c^2 = k^2 - \beta^2$  é o número de onda de corte.

Aplicando-se à equação (2.32) o método dos resíduos ponderados associado à técnica de Galerkin, obtém-se a seguinte equação matricial:

$$[F]\{\Phi\}^T - k_c^2[M]\{\Phi\}^T = \{0\}^T, \quad (2.33)$$

onde  $\Phi = H_z$ , para ondas do tipo TE, e  $\Phi = E_z$ , para ondas TM.

As matrizes  $[F]$  e  $[M]$  podem ser escritas como [23]:

$$[F] = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} + \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.34)$$

e

$$[M] = \int_{\Omega} \{N\}^T \{N\} dx dy \quad (2.35)$$

Desde que  $[F]$  e  $[M]$  não envolvam quaisquer quantidades relacionadas a  $\omega$ , fica evidente que  $k_c$  é uma constante. Uma vez encontrada  $k_c$ , a constante de propagação,  $\beta$ , pode ser calculada a partir da relação:  $\beta^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - k_c^2$ .

Na próxima Seção vamos utilizar a Técnica de Integração Analítica para fazermos a transformação de coordenadas para o sistema homogêneo no triângulo. Obteremos as chamadas “matrizes universais” para implementação dos modos TEM, TE e TM para os Guias de Ondas.

## 2.2 - Uso da Técnica de Integração Analítica para cálculo dos elementos de matriz

A análise de problemas físicos pelo MEF envolve a construção de certas matrizes para cada elemento finito do domínio. A forma clássica usa fórmulas de quadratura para calcular os elementos da matriz. Esse procedimento é denominado método de integração numérica. Um segundo procedimento, o método da integração analítica, calcula cada elemento de matriz usando fatores paramétricos, os quais dependem do tipo de elemento finito, mas não de sua geometria [14], [15]. Uma terceira possibilidade consiste em definir uma representação exata do operador diferencial [16]. Nesse caso, as matrizes de elementos finitos são calculadas como combinações ponderadas de certas “matrizes universais”.

A integração direta é o método mais simples de implementar, mas é também computacionalmente mais custoso, quando comparado aos outros dois métodos. Implementações baseadas em integrações analíticas são aproximadamente três vezes mais rápidas que o método baseado em fórmulas de quadraturas, no caso de elementos de segunda ordem polinomial, e seis vezes mais rápido para elementos de terceira ordem [14].

Além disso, o cálculo prévio e a armazenagem das matrizes, utilizando a técnica de integração analítica, possibilitam uma eficiente implementação de módulos processadores com adaptação automática da ordem de aproximação dos elementos finitos (“malha tipo p”). Contudo, a complexidade das expressões analíticas obtidas para os elementos da matriz aumenta rapidamente com a ordem de aproximação, fazendo com que a implementação



computacional e a busca de erros seja custosa, sobretudo no caso de problemas com anisotropias arbitrárias e com propriedades físicas que dependam das coordenadas do domínio.

O trabalho pioneiro na sistematização da utilização da técnica de integração analítica foi apresentada por Silvester para elementos finitos triangulares e tetraédricos isotrópicos e homogêneos [14] e [15].

A aplicação da Técnica de Integração Analítica é feita com as integrais escritas nas coordenadas homogêneas do elemento finito. Desta forma, as matrizes são calculadas uma única vez, sendo independentes das dimensões do elemento e dependentes apenas do tipo e da ordem da aproximação utilizada.

### 2.3 - Transformação de coordenadas para o sistema homogêneo no triângulo

Nesse trabalho, os domínios em estudo serão subdivididos em elementos finitos de formato triangular. As funções de base escalares  $N_i$  (funções de interpolação), no sistema de coordenadas homogêneo do triângulo, Figura 2.1, serão escritas pelo produto de polinômios auxiliares de grau  $m$ , para cada eixo  $\zeta$  do sistema de coordenadas homogêneo e para aproximações polinomiais de ordem  $ord$ .

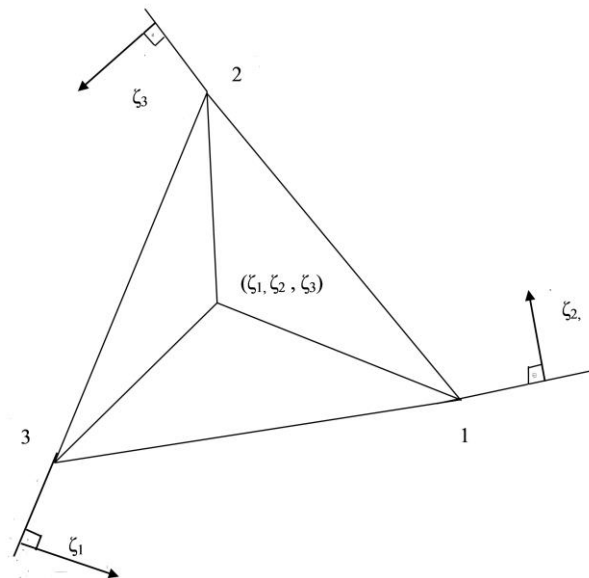


Figura 2.1 - Sistema de coordenadas homogêneo.

Os polinômios auxiliares, para elementos do tipo Lagrange, são definidos por:

$$R_m(ord, \zeta) = \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} (ord\zeta - k) \quad \text{para } 1 \leq m \leq N, \quad (2.36)$$

$$R_0(ord, \zeta) = 1 \quad \text{para } m=0 \quad (2.37)$$

As funções de base, associadas a cada nó do triângulo, são dadas por:

$$N_i = \alpha_{rst} = R_r(ord, \zeta_1) R_s(ord, \zeta_2) R_t(ord, \zeta_3) \quad (2.38)$$

com  $r+s+t=ord$ .

O novo sistema de coordenadas homogêneo é o composto por três coordenadas:  $\zeta_1, \zeta_2$  e  $\zeta_3$ , tal que  $\zeta_3=1-\zeta_1-\zeta_2$ . A matriz Jacobiana da transformação de coordenadas tem a forma:

$$J_\zeta = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

sendo o jacobiano definido como:

$$|J_\zeta| = \det([J_\zeta]) \quad (2.40)$$

Os elementos de superfície de integração, nos domínios transformados e não transformados, são relacionados por:

$$dxdy = |J_\zeta^{-1}| d\zeta_1 d\zeta_2 = 2\Delta \zeta_1 d\zeta_2, \quad (2.41)$$

onde  $\Delta$  corresponde à área do triângulo.

A relação entre as coordenadas homogêneas, locais no triângulo de referência, e as coordenadas cartesianas no domínio, é dada por:

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

onde:  $a_i = x_{i+1}y_{i+2} - x_{i+2}y_{i+1}$ ,

$$b_i = y_{i+1} - y_{i-1},$$

$$c_i = x_{i-1} - x_{i+1},$$

$x$  e  $y$  são as coordenadas cartesianas nos pontos nodais,

$a, b, c$  são obtidos por permutações cíclicas de seus índices e  $i = 1, 2, 3$ .

Nas formulações do MEF normalmente aparecem derivadas parciais das funções de base com relação às coordenadas do domínio. A transformação destas derivadas para as coordenadas homogêneas no triângulo pode ser obtida aplicando-se a regra da cadeia:

$$\frac{\partial\{N\}}{\partial x} = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial\{N\}}{\partial \zeta_m} \frac{\partial \zeta_m}{\partial x} = \sum_{m=1}^3 \frac{b_m}{2\Delta} \frac{\partial\{N\}}{\partial \zeta_m}, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial\{N\}}{\partial y} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial\{N\}}{\partial \zeta_n} \frac{\partial \zeta_n}{\partial y} = \sum_{n=1}^3 \frac{c_n}{2\Delta} \frac{\partial\{N\}}{\partial \zeta_n}. \quad (2.44)$$

## 2.4 - Matrizes para implementação

Nesta seção, serão apresentadas as matrizes locais para as formulações já descritas, considerando o emprego de elementos finitos de formato triangular.

#### 2.4.1 - Modos TEM

O sistema matricial resultante da aplicação do MEF à equação de Laplace é:

$$[S]\{\Phi\}^T = \{b\}^T, \quad (2.45)$$

como apresentado na Seção 2.1.1. A matriz [S] para um dado elemento finito em coordenadas homogêneas será:

$$[S] = \sum_{m,n=1}^3 \frac{b_m b_n \varepsilon_{xx} + c_m c_n \varepsilon_{yy}}{2\Delta} \int_{\zeta_1} \int_{\zeta_2} \frac{\partial\{N\}^T}{\partial\zeta_m} \frac{\partial\{N\}}{\partial\zeta_n} d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (2.46)$$

onde  $\Delta$  é a área do elemento finito.

Para elementos triangulares de primeira ordem de aproximação resulta:

$$[S] = \frac{\varepsilon_{xx}}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2^2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3^2 \end{bmatrix} + \frac{\varepsilon_{yy}}{4\Delta} \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2^2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

#### 2.4.2 - Modos TE e TM

Para ondas transversais elétricas e magnéticas, os seguintes sistemas matriciais são obtidos:

$$\frac{1}{\varepsilon_r} [S]\{H_z\}^T - k_c^2 \mu_r [T]\{H_z\}^T = 0, \quad \text{para o modo TE} \quad (2.48)$$

$$\frac{1}{\mu_r} [S] \{E_z\}^T - k_c^2 \varepsilon_r [T] \{E_z\}^T = 0, \quad \text{para o modo TM} \quad (2.49)$$

Onde

$$[S] = \frac{1}{2\Delta} \sum_{m,n=1}^3 (b_m b_n + c_m c_n) \int_{\zeta_1} \int_{\zeta_2} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial \zeta_m} \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_n} d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (2.50)$$

$$[T] = 2\Delta \int_{\zeta_1} \int_{\zeta_2} \{N\}^T \{N\} d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (2.51)$$

A dupla soma na Equação (2.50) pode ser reduzida a uma soma simples utilizando as seguintes definições [13]:

$$b_i b_j + c_i c_j = -2\Delta \cot \theta_k \quad (i \neq j) \quad (2.52)$$

$$b_i^2 + c_i^2 = 2\Delta (\cot \theta_j + \cot \theta_k), \quad (2.53)$$

onde  $\theta_j$  é o ângulo interno ao triângulo no ponto vértice  $i$  e  $i, j, k$  são os vértices do triângulo.

Escrevendo explicitamente todos os termos da equação (2.50) e substituindo as Equações (2.52) e (2.53) é possível agrupar termos

$$[S] = \sum_{k=1}^3 [Q]_k \cot \theta_k \quad (2.54)$$

$$[Q]_k = \int_{\zeta_1} \int_{\zeta_2} \left( \frac{\partial \{N\}^T}{\partial \zeta_{k+1}} - \frac{\partial \{N\}^T}{\partial \zeta_{k-1}} \right) \left( \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_{k+1}} - \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_{k-1}} \right) d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (2.55)$$

Note-se que as matrizes  $[Q]$  e matriz  $[T]$ , normalizada com respeito à área do elemento finito, são adimensionais e independem da geometria dos elementos finitos, qualquer que seja a ordem de aproximação.

Para elementos triangulares de primeira ordem resulta:

$$[S] = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ b_2b_1 + c_2c_1 & b_2^2 + c_2^2 & b_2b_3 + c_2c_3 \\ b_3b_1 + c_3c_1 & b_3b_2 + c_3c_2 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$[T] = \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Na próxima seção vamos abordar uma outra técnica para obter as equações de campos: a formulação variacional. A principal diferença entre a abordagem pelo Método de Galerkin e a formulação variacional é que a primeira está associada a um argumento puramente matemático, enquanto esta utiliza grandezas com sentido físico (normalmente, funcionais energéticos).

## 2.5 - Princípios Variacionais para potenciais e campos

Grande parte das formulações utilizadas para o Método dos Elementos finitos são derivadas pela utilização de princípios variacionais. Dada uma função  $u$ , satisfazendo a equação:

$$Lu = g \quad (2.58)$$

Onde  $L$  é um operador simbólico e  $g$  uma função conhecida.

O procedimento variacional consiste em obter um funcional  $F(U)$ , cujo valor seja estacionário em torno de  $U = u$ , a solução de (2.58). Em problemas eletromagnéticos, a função  $u$  será um potencial ou um campo e o operador  $L$  deve corresponder aos operadores de Laplace ( $\nabla^2$ ), Helmholtz escalar ( $\nabla^2 + \xi$ ), de modo que a equação (2.58) represente uma das equações apresentadas nas seções anteriores. Em cada caso, existirá uma expressão vetorial estacionária em torno da solução do problema. Em geral, essa expressão deve estar relacionada com a energia armazenada pelo sistema. Assim, pelo princípio de minimização da energia potencial, pode-se mostrar que  $U = u$  corresponde a um ponto de mínimo do respectivo funcional [13]. As expressões variacionais podem ser obtidas de diversas formas. Para operadores auto-adjuntos e positivo-definidos, uma forma variacional é obtida em termos do produto interno entre as funções  $u$ ,  $Lu$  e  $g$ .

A seguir, são apresentadas as formas variacionais para as equações de Laplace, Poisson e Helmholtz escalar.

### 2.5.1 - Forma variacional para as equações de Laplace e Poisson

A equação de Laplace para meios homogêneos (2.59) é associada ao funcional em (2.60):

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.59)$$

$$\Pi(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} p(\nabla \phi) \cdot (\nabla \phi) d\Omega \quad (2.60)$$

onde  $p$  é uma função escalar da posição e  $\Omega$  é o domínio onde (2.59) é imposta.

A Equação (2.60) representa a energia armazenada no sistema:  $p$  é normalmente dependente do material e expressa a relação entre a densidade de energia e a quantidade  $(\nabla \phi) \cdot (\nabla \phi)$ . Por exemplo, em problemas eletrostáticos,  $\phi = V$  e  $p = \varepsilon$ .

As condições de contorno nas fronteiras de  $\Omega$  para (2.60) devem ser:

$$\text{Condição de Dirichlet: } \phi = \phi_0 \quad (2.61a)$$

ou

$$\text{Condição de Neuman: } \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (2.61b)$$

Seja uma solução aproximada,  $\phi' = \phi + \theta h$ , onde  $h$  é uma função suficientemente diferenciável e  $\theta$  é um parâmetro escalar. Para mostrar que (2.60) é estacionário em torno de  $U=u$ , a solução de (2.59) submetida a (2.61), é necessário mostrar que a variação de  $\Pi$  ( $\delta\Pi = \Pi(\phi) - \Pi(\phi')$ ) para a solução  $\phi'$  é nula, se  $\phi'$  estiver suficientemente próximo de  $\phi$ . O funcional para essa solução aproximada será:

$$\Pi(\phi + h\theta) = \Pi(\phi) + \theta^2 \Pi(h) + \int_{\Omega} p \nabla \phi \nabla h d\Omega \quad (2.62)$$

O termo integral de (2.62) pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla h d\Omega = \int_L p h \frac{\partial \phi}{\partial n} dL - \int_{\Omega} p h \nabla^2 \phi d\Omega \quad (2.63)$$

Em (2.63),  $L$  é a fronteira do domínio, onde (2.61) é aplicada.

A segunda integral do segundo membro de (2.63) é nula, pois  $\phi$  satisfaz (2.59). A primeira integral do segundo membro será nula onde  $\phi$  for especificado, desde que  $h=0$  nesses pontos. Isso é equivalente a admitir que a solução aproximada  $\phi'$  seja exatamente a solução  $\phi$  de (2.64), nas fronteiras onde (2.61a) é aplicada. Desse modo, a condição (2.61a) deve ser explicitamente imposta na construção de uma solução aproximada. Esse tipo de condição de contorno é denominada condição essencial. Analogamente, nas fronteiras onde  $\phi$



não for especificado, a solução de (2.59) deve satisfazer a condição (2.61b) e a primeira integral do segundo membro de (2.63) será nula também nesses pontos. Desse modo, pode-se escrever  $\zeta\Pi$  como:

$$\zeta\Pi = \theta^2\Pi(h) \quad (2.64)$$

Para que  $\phi'$  seja suficientemente próximo de  $\phi$ , basta que  $\theta$  seja suficientemente pequeno. No limite, quando  $\theta$  tende a zero,  $\phi' = \phi$  e de (2.64) a variação funcional  $\zeta\Pi = 0$ , mostrando que o funcional (2.60) é estacionário em torno da solução de (2.59). Essa solução pode ser encontrada, procurando-se um valor estacionário para o referido funcional. Deve ser notado ainda que, na construção da solução aproximada para (2.59) pela busca do valor estacionário de (2.60), a condição (2.61b) é naturalmente satisfeita, como pode ser visto da demonstração precedente. Essa condição não precisa ser necessariamente imposta na formulação da solução aproximada. Esse tipo de condição recebe a denominação de condição natural.

A equação de Poisson (2.65) sujeita a condição na forma (2.65) é

$$\nabla \cdot (p \nabla \phi) = g \quad (2.65)$$

Por um procedimento análogo, pode-se mostrar que a solução de (2.65) torna estacionário o seguinte funcional [13]:

$$\Pi(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (p(\nabla \phi) \cdot (\nabla \phi) + 2g\phi) d\Omega \quad (2.66)$$

Também aqui, no processo de minimização de (2.66), a condição do tipo Dirichlet (2.61a) deve ser explicitamente forçada (condição essencial) enquanto a condição do tipo Neumann (2.61b) é naturalmente atendida.

## 2.5.2 - Forma variacional para a equação de Helmholtz escalar

A equação de Helmholtz escalar pode ser genericamente escrita como:

$$\nabla \cdot (p \nabla \phi) + \xi q \phi = g \quad (2.67)$$

As propriedades do material são representadas por  $p$  e  $q$ , funções escalares da posição. A quantidade  $\xi$  é uma constante, invariante com a posição e pode ou não ser conhecida. As condições de contorno são da forma (2.61) e devem ser impostas na fronteira do domínio de aplicação de (2.67).

O funcional para a equação (2.67) é da forma (13):

$$\Pi(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (p(\nabla \phi) \cdot (\nabla \phi) - \xi q \phi^2 + 2g\phi) d\Omega \quad (2.68)$$

Novamente, no processo de minimização de  $\Pi(\phi)$ , a condição do tipo Dirichlet (2.61a) aparece como condição essencial e a condição do tipo Neuman (2.61b) é naturalmente atendida.

### 2.5.3 - Procedimento de Rayleig-Ritz

Para tirar proveito das expressões variacionais derivadas nas seções anteriores, é necessário estabelecer um método de localizar o ponto (solução) onde os funcionais especificados são estacionários. Uma maneira de se obter uma aproximação para essa solução é obtida pela utilização do Método de Rayleig-Ritz [13].

Dado um conjunto de funções base  $\alpha_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) da posição, a solução em questão é aproximada por:

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i \alpha_i \quad (2.69)$$

A Equação (2.69) deve então ser substituída na expressão variacional  $\Pi(\phi)$ . Nas proximidades da solução desejada, o funcional  $\Pi(\phi)$  deve ser estacionário. Desse modo, os coeficientes  $\phi_i$  podem ser encontrados tomando-se as derivadas parciais de  $\Pi(\phi)$  em relação a cada coeficiente e igualando a zero:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \phi_i} = 0 \quad (2.70)$$

Esta equação permite obter um conjunto de n equações lineares em função dos coeficientes desconhecidos  $\phi_i$ . Assim, o cálculo desses coeficientes (e conseqüentemente da solução aproximada em (2.69)) resulta na resolução de um problema de álgebra linear. Esse procedimento será aplicado aos funcionais apresentados na seção anterior.

Torna-se conveniente aproximar o termo independente g nas expressões para os funcionais em termos das funções protótipos usadas na construção da solução aproximada:

$$g \approx G = \sum_{i=1}^n G_i \alpha_i \quad (2.71)$$

Os coeficientes  $G_i$  devem ser escolhidos de forma que a aproximação em (2.71) seja a melhor possível.

Para o funcional da equação de Laplace, substituindo (2.59) em (2.60) tem-se:

$$\Pi(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_i \int_{\Omega} p(\nabla \alpha_i) \cdot (\nabla \alpha_j) d\Omega \phi_j \quad (2.72)$$

A Equação (2.72) pode ser escrita na forma matricial como

$$\Pi(\phi) = \frac{1}{2} \phi^T S \phi \quad (2.73)$$

onde:

$$\phi^T = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n] \quad (2.74)$$

$$S_{ij} = \int_{\Omega} p(\nabla \alpha_i) \cdot (\nabla \alpha_j) d\Omega \quad (2.75)$$

Antes de proceder a minimização de (2.73) pela utilização de (2.70) é necessário aplicar a condição de contorno essencial (2.61a). Normalmente, isso é feito fixando-se alguns coeficientes  $\phi_i$  de modo que (2.69) expresse essa condição nas fronteiras onde ela deve ser forçada. Assim, o vetor  $\phi$  em (2.74) pode ser dividido em:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_f \\ \phi_p \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

onde  $\phi_f$  representa os coeficientes livres (free) para serem especificados pelo processo de minimização e  $\phi_p$  os coeficientes previamente especificados (prescritos) para assegurar a aplicação de (2.61a) nas fronteiras onde ela for requerida. Desse modo, a diferenciação de (2.74) em (2.75) é realizada apenas em função dos coeficientes em  $\phi_f$  resultando em

$$S_{ff}\phi_f = -S_{fp}\phi_p \quad (2.77)$$

Onde  $S_{ff}$  e  $S_{fp}$  correspondem aos elementos de  $S$  relativos a  $\phi_f^T S_{ff} \phi_f$  e  $\phi_f^T S_{fp} \phi_p$ , respectivamente.

Finalmente, a equação (2.77) pode ser resolvida para  $\phi_f$ , completando a especificação da solução aproximada em (2.69).

Analogamente para o funcional da equação de Poisson, substituindo (2.69) e (2.31) obtém-se:

$$\Pi(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_i \int_{\Omega} p(\nabla \alpha_i) \cdot (\nabla \alpha_j) d\Omega \phi_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_i \int_{\Omega} \alpha_i \alpha_j d\Omega G_j \quad (2.78)$$

ou na forma matricial:

$$\Pi(\phi) = \frac{1}{2} \phi^T S \phi + \phi^T T G \quad (2.79)$$

onde:

$$G^T = [G_1, G_2, \dots, G_n] \quad (2.80)$$

$$T_{ij} = \int_{\Omega} \alpha_i \alpha_j d\Omega \quad (2.81)$$

Aplicando a condição de contorno essencial (2.61a) e diferenciando em relação aos coeficientes livres para serem especificados pelo processo de minimização, a solução aproximada é obtida resolvendo-se (2.82) para  $\phi_f$ :

$$S_{ff} \phi_f = [T_{ff} \quad T_{fp}] G - S_{fp} \phi_p \quad (2.82)$$

A expressão para o funcional da equação de Helmholtz escalar (2.67) pode ser escrita em função das matrizes S (2.75) e T (2.81) como:

$$\Pi(\phi) = \frac{1}{2} \phi^T S \phi - \frac{\xi q p^{-1}}{2} \phi^T T \phi + \phi^T S G \quad (2.83)$$

Aplicando a condição de contorno (2.61a) e diferenciando em relação aos coeficientes a serem especificados, obtém-se o seguinte problema generalizado de autovalores:

$$S_{ff}\phi_f - \xi q p^{-1} \begin{bmatrix} T_{ff} & T_{fp} \end{bmatrix} \phi_f = \begin{bmatrix} T_{ff} & T_{fp} \end{bmatrix} G \quad (2.84)$$

A Equação (2.84) é resolvida para obter os autovalores  $\xi$  e os autovalores  $\phi$  correspondentes.

De posse das formulações aqui elaboradas, no próximo capítulo vamos abordar o tema do método Mortar que vai nos permitir acoplar malhas não-conformes na interface entre os domínios. Neste trabalho, será adotada a formulação variacional descrita nesta seção.

### 3 - O MÉTODO MORTAR

#### 3.1 - Introdução

O conceito do método Mortar é impor uma condição de acoplamento entre os domínios diretamente no problema discretizado. O domínio  $\Omega$  é decomposto, como mostrado na Figura 3.1, em dois subdomínios. Um dos subdomínios  $\Omega_m$  é chamado de mestre e o outro  $\Omega_s$  de escravo. Esta escolha é arbitrária.

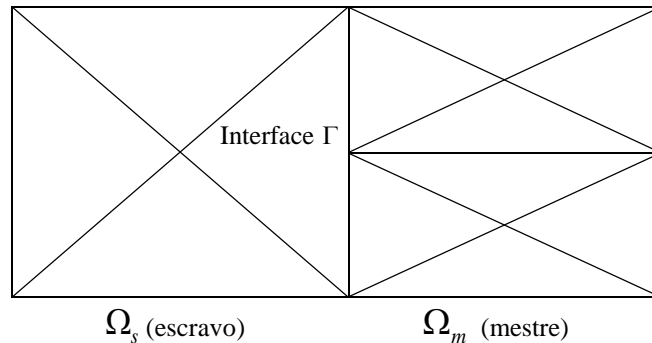


Figura 3.1 - Domínio  $\Omega$  decomposto nos subdomínios  $\Omega_s$  e  $\Omega_m$  separados pela interface  $\Gamma$ .

A condição de acoplamento entre as malhas garante a continuidade do potencial vetor  $\phi$  na interface  $\Gamma$ , ou seja:

$$\phi_s = \phi_m \quad \text{em } \Gamma \tag{3.1}$$

onde  $\phi_s$  é o potencial no subdomínio escravo  $\Omega_s$  e  $\phi_m$  é o potencial no subdomínio mestre  $\Omega_m$ . A expressão (3.1) pode ser reescrita como se segue:

$$\phi_s|_{\Gamma} = \phi_m|_{\Gamma} \quad \text{em } \Gamma \quad (3.2)$$

onde  $\phi_s|_{\Gamma}$  é o potencial em  $\Gamma(\Omega_s)$  e  $\phi_m|_{\Gamma}$  é o potencial em  $\Gamma(\Omega_m)$ . A forma fraca para Equação (3.2) obtém-se através da multiplicação por uma função de teste  $v_t$  e integrando o resultado na interface  $\Gamma$ , tal que:

$$\int_{\Gamma} v_t (\phi_s|_{\Gamma} - \phi_m|_{\Gamma}) d\Gamma = 0 \quad (3.3)$$

A Equação (3.3) é conhecida como “A condição Mortar”. A continuidade do potencial vetor é assim garantida em termos de médias ponderadas. Várias escolhas de  $v_t$  podem “testar” a equação (3.3) em cada pequena porção da interface  $\Gamma$ .

Para a discretização, considera-se a seguinte aproximação do potencial  $\phi_s|_{\Gamma}$  em  $\Gamma(\Omega_s)$ :

$$\phi_s^h|_{\Gamma} = \sum_{j=1}^{m_s^{\Gamma}} \psi_j \phi_{sj}^{\Gamma} \quad (3.4)$$

onde  $m_s^{\Gamma}$  é o número de nós na interface  $\Gamma(\Omega_s)$  no subdomínio escravo  $\Omega_s$  e  $\phi_{sj}^{\Gamma}$  é o potencial em cada nó  $j$  na interface  $\Gamma(\Omega_s)$ . As funções  $\psi_i$  têm seu suporte em  $\Gamma(\Omega_s)$ : elas valem 1 no nó  $i$  e zero nos outros nós da interface  $\Gamma$ . Em outras palavras, elas são funções de interpolação lagrangeanas clássicas de Elementos Finitos 1D definidos sobre cada aresta pertencente à interface  $\Gamma$ .

Para o potencial  $\phi_m|_{\Gamma}$  em  $\Gamma(\Omega_m)$  obtém a seguinte aproximação:



$$\phi_m^h|_{\Gamma} = \sum_{j=1}^{m_m^{\Gamma}} \varphi_j \phi_{mj}^{\Gamma} \quad (3.5)$$

onde  $m_m^{\Gamma}$  é o número de nós na interface  $\Gamma(\Omega_m)$  no subdomínio mestre  $\Omega_m$  e  $\phi_{mj}^{\Gamma}$  o potencial em cada nó  $j$  na interface  $\Gamma(\Omega_m)$ . As funções  $\varphi_i$  têm seu suporte em  $\Gamma(\Omega_m)$ : elas valem 1 no nó  $i$  e zero nos outros nós da interface  $\Gamma(\Omega_m)$ .

O domínio escravo é definido como aquele onde a função de teste  $v_t$  é discretizada. Desta forma a aproximação para  $v_t$  na Equação (3.3) deve ser uma combinação linear das funções de base  $\psi_i$ :

$$v_t = \sum_{i=1}^{m_s^{\Gamma}} \psi_i \beta_i \quad (3.6)$$

O espaço gerado pelas funções  $\psi_i$  é conhecido como espaço das funções Mortar, definido na interface  $\Gamma(\Omega_s)$ . Uma possível escolha para os coeficientes  $\beta_i$  é atribuir:  $\beta_1=1$  e  $\beta_i=0$  para  $i \neq 1$ . Uma outra escolha é  $\beta_2=1$  e  $\beta_i=0$  para  $i \neq 2$ , e assim em diante até  $\beta_{m_s^{\Gamma}}$ . Desta forma pode-se “testar”  $\beta_{m_s^{\Gamma}}$  vezes a forma fraca Equação (3.3) e obter o número de equações necessárias à resolução do problema. Ou seja, faz-se:

$$v_t = \psi_i \quad i=1, \dots, m_s^{\Gamma} \quad (3.7)$$

Empregando as aproximações (3.4), (3.5) e (3.6) em (3.3) obtém-se:

$$\int_{\Gamma} (\phi_s - \phi_m) v_t^h d\Gamma = \int_{\Gamma} \left( \sum_{j=1}^{m_s^{\Gamma}} \psi_j \phi_{sj}^{\Gamma} \right) \psi_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \left( \sum_{j=1}^{m_m^{\Gamma}} \psi_j \phi_{mj}^{\Gamma} \right) \psi_i d\Gamma \quad i=1, \dots, m_s^{\Gamma} \quad (3.8)$$

ou

$$\int_{\Gamma} \sum_{j=1}^{m_s^{\Gamma}} \psi_i \psi_j \phi_{sj}^{\Gamma} d\Gamma - \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^{m_m^{\Gamma}} \psi_i \varphi_j \phi_{mj}^{\Gamma} d\Gamma = 0 \quad i = 1, \dots, m_s^{\Gamma} \quad (3.9)$$

A expressão acima pode ser reescrita na forma matricial:

$$C \phi_s^{\Gamma} - D \phi_m^{\Gamma} = 0 \quad (3.10)$$

$$\text{onde } \phi_s^{\Gamma} = \begin{bmatrix} \phi_{s1}^{\Gamma} \\ \phi_{s2}^{\Gamma} \\ \phi_{s3}^{\Gamma} \\ \vdots \\ \phi_{sm_s^{\Gamma}}^{\Gamma} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \phi_m^{\Gamma} = \begin{bmatrix} \phi_{m1}^{\Gamma} \\ \phi_{m2}^{\Gamma} \\ \phi_{m3}^{\Gamma} \\ \vdots \\ \phi_{mm_m^{\Gamma}}^{\Gamma} \end{bmatrix}$$

Da equação (3.10) obtêm-se:

$$\phi_s^{\Gamma} = C^{-1} D \phi_m^{\Gamma} \quad (3.11)$$

ou

$$\phi_s^{\Gamma} = A \phi_m^{\Gamma} \quad (3.12)$$

onde  $A = C^{-1}D$ , ou seja, os potenciais nos nós no lado escravo da interface  $\Gamma(\Omega_s)$  são função dos potenciais nos nós no lado mestre da interface  $\Gamma(\Omega_m)$ : eis o porquê da denominação mestre e escravo. Os termos das matrizes  $C$  e  $D$  podem ser escritos como:

$$C(i, j) = \int_{\Gamma} \psi_i \psi_j d\Gamma \quad i = 1, \dots, m_s^{\Gamma} \quad j = 1, \dots, m_s^{\Gamma} \quad (3.13)$$

$$D(i, j) = \int_{\Gamma} \psi_i \varphi_j d\Gamma \quad i = 1, \dots, m_s^{\Gamma} \quad j = 1, \dots, m_m^{\Gamma} \quad (3.14)$$

Os potenciais em todo o domínio  $\Omega$ , se as numerações dos nós das discretizações de  $\Omega_m$  e  $\Omega_s$  começam pela interface  $\Gamma$ , podem ser relacionados a partir da expressão:

$$\begin{bmatrix} \phi_s^\Gamma \\ \phi_s^0 \\ \phi_m^\Gamma \\ \phi_m^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Q & 0 \\ Id & 0 & 0 \\ 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_s^0 \\ \phi_m^\Gamma \\ \phi_m^0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

onde  $\phi_s^0$  e  $\phi_m^0$  são os potenciais nos nós nos domínios escravo e mestre que não pertencem à interface  $\Gamma$  e  $Id$  é a matriz identidade. Reescrevendo a expressão (3.15) tem-se:

$$\phi = \tilde{A}\bar{\phi} \quad (3.16)$$

Na expressão (3.16)  $\tilde{A}$  é conhecida como a matriz de acoplamento.

Para cada subdomínio tem-se uma discretização independente, o que resulta no seguinte sistema para o Método de Elementos:

$$\begin{bmatrix} S_s & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & S_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_s^\Gamma \\ \phi_s^0 \\ \dots \\ \phi_m^\Gamma \\ \phi_m^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_s \\ \dots \\ f_m \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

ou

$$S\phi = f \quad (3.18)$$

$S_s$ ,  $S_m$  são as matrizes de rigidez dos domínios escravo e mestre;  $f_s$  e  $f_m$  são os vetores correspondentes às fontes nos domínios escravo e mestre.

Observa-se que os sistemas mestre e escravo estão desacoplados na equação (3.12). Empregando (3.16) em (3.18) e multiplicando os dois lados por  $\tilde{A}^T$  finalmente obtém-se o sistema abaixo:

$$\tilde{A}^T S \tilde{A} \bar{\phi} = \tilde{A}^T f \quad (3.19)$$

O sistema final (3.19) é simétrico, bem condicionado e definido positivo. A solução pode ser obtida por um método iterativo .

Na próxima seção apresentamos a formulação do Método Mortar utilizando os Multiplicadores de Lagrange. A vantagem do Método dos Multiplicadores de Lagrange é que não precisaremos calcular a inversa da matriz  $C$  e construir a Matriz de transformação  $A$ .

## **3.2 - Método dos Multiplicadores de Lagrange**

### **3.2.1 - Introdução**

Um dos problemas mais comuns no cálculo é encontrar máximos ou mínimos (de modo geral, “extremos”) de uma função, mas é sempre difícil encontrar uma forma fechada para a função a ser extremizada. Tais dificuldades muitas vezes surgem quando se pretende minimizar ou maximizar uma função sujeita a condições fixadas ou limitações. O Método dos Multiplicadores de Lagrange, proposto pelo matemático italiano Joseph Louis Lagrange, é uma poderosa ferramenta para resolver este tipo de problemas sem a necessidade de resolver explicitamente as condições e utilizá-las para eliminar variáveis extras.

Para uma ilustração deste tipo de problema, vamos considerar um exemplo clássico que é conhecido como “Milkmaid problem”. Uma mulher foi para o campo para tirar o leite da vaca. Ela tem pressa para voltar para sua casa, pois seu namorado a espera, de modo que ela pretende terminar o seu trabalho o mais rapidamente possível. No entanto, antes que ela possa recolher o leite, ela tem que lavar os seus baldes no rio que fica próximo, veja Figura 3.2.

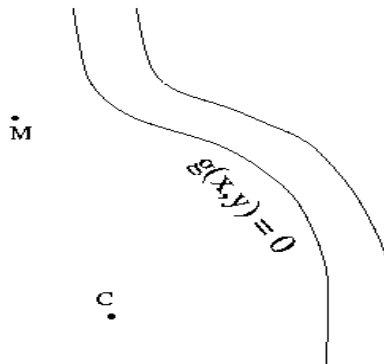


Figura 3.2 - A mulher tem que passar no rio, antes de recolher o leite.

A nossa heroína está no ponto  $M$ , e a vaca, no ponto  $C$  situado logo abaixo. Como ela está com pressa, pretende tomar o caminho mais curto possível, de onde ela está para o rio e, em seguida, para a vaca. Se o contorno do rio é uma curva que satisfaça a função  $g(x, y) = 0$ , qual é o caminho mais curto para a mulher tomar? Para manter as coisas simples, assumimos que o campo é plano e uniforme e que todos os pontos sobre a margem do rio são igualmente bons.

Para colocar o problema em termos matemáticos, a mulher pretende encontrar o ponto  $P$  para que a distância  $d(M, P)$  de  $P$  a  $M$  mais a distância  $d(P, C)$  de  $P$  para  $C$  é um mínimo (assumimos que o campo é plano, então uma linha reta é a distância mais curta entre dois pontos). Poderíamos simplesmente escolher  $P = M$  (ou  $P = C$ , ou  $P$  em qualquer lugar na linha entre  $M$  e  $C$ ): temos de impor a restrição de que  $P$  é um ponto na beira do rio. Formalmente, temos de minimizar a função

$$f(p) = d(M, P) + d(P, C), \tag{3.20}$$

sujeito à restrição que  $g(P) = 0$ .

Vamos analisar este problema observando diretamente a Figura 3.3. Da geometria temos: para cada ponto  $P$  sobre uma elipse, a distância total do foco da elipse para  $P$  e, em seguida, para o outro foco é exatamente o mesmo.

No nosso problema, significa que a mulher poderia chegar à vaca, por meio de qualquer ponto em uma determinada elipse no mesmo período de tempo: as elipses são curvas com  $f(P)$  constante. Portanto, para encontrar o ponto  $P$  na beira do rio, devemos simplesmente encontrar a menor elipse que intersecta a curva do rio. O fato dessas curvas serem elipses é apenas uma conveniência (elipses são fáceis de desenhar). A mesma explanação do problema irá funcionar não importam os tipos de curvas .

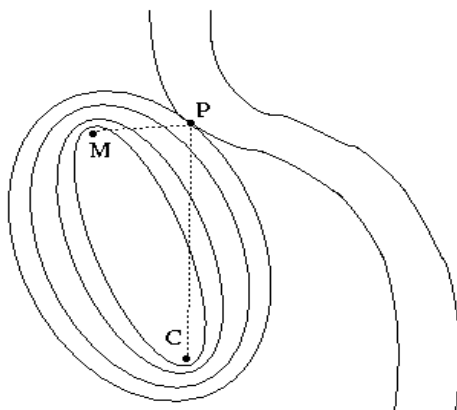


Figura 3.3 - A mulher pode chegar à vaca, por meio de qualquer ponto em uma determinada elipse no mesmo período de tempo.

A Figura 3.3 mostra uma seqüência de elipses cujos focos são  $M$  e  $C$ , que termina com aquela que é apenas tangente à beira do rio. É evidente a partir da figura que a elipse “perfeita” e o rio tangenciam uns aos outros no ponto ideal  $P$ . Matematicamente, isto significa que o vetor normal para a elipse está na mesma direção que o vetor normal para as ribeirinhas. Essa é a visão que nos conduz ao Método dos Multiplicadores de Lagrange: temos uma função  $f(P)$  que precisamos minimizar , sujeita à condição que  $g(P)=0$ . Pelo cálculo avançado temos que fazer

$$\nabla_p(F(P)) = 0 \tag{3.21}$$

Temos que adicionar a condição de restrição ao problema. Para isto, vamos acrescentar ao problema uma nova variável  $\lambda$ , o chamado Multiplicador de Lagrange, e definir um novo funcional para ser minimizado

$$F(P, \lambda) = f(P) + \lambda g(P) \quad (3.22)$$

Agora o problema de minimização se torna

$$\begin{aligned} \text{grad}(F(P, \lambda)) &= 0 \\ \text{ou} & \\ \nabla_{x,y,\lambda} F(P, \lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde

$$\nabla_{x,y,\lambda} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \quad (3.24)$$

### 3.2.2 - Formulação para o Modo TEM

Vamos aplicar o Método dos Multiplicadores de Lagrange para relaxarmos as Condições de Contorno de Dirichlet para os Guias de Ondas [17].

O funcional associado com a equação de Laplace para o domínio  $\Omega$  é :

$$\Pi = \frac{1}{2} \phi^T S \phi \quad (3.25)$$

e, para relaxar a condição de Dirichlet no contorno um novo funcional é adicionado:

$$\Pi^* = \int_{\Gamma} \lambda (\phi - \phi_c) d\Gamma \quad (3.26)$$

onde  $\lambda$  é o Multiplicador de Lagrange.

O funcional completo é:

$$\Pi^c = \Pi + \Pi^* \quad (3.27)$$

ou,

$$\Pi^c = \frac{1}{2} \phi^T S \phi + \int_{\Gamma} \lambda (\phi - \phi_c) d\Gamma \quad (3.28)$$

Vamos agora discretizar a expressão (3.26). Consideram-se as seguintes aproximações nodais para o potencial vetor em cada subdomínio

$$\phi = \sum_{i=1}^m N_i \phi_i \quad (3.29)$$

e

$$\phi_c = \sum_{i=1}^{m_c} N_i^c \phi_i^c \quad (3.30)$$

onde  $m_c$  e  $m$  são os números de nós da discretização de cada subdomínio  $\Omega_c$  e  $\Omega$ .  $N_i^c$  e  $N_i$  são funções de base linearmente independentes,  $\phi_i^c$  é o potencial vetor no nó  $i$  da discretização de  $\Omega_c$  e  $\phi_i$  é o potencial vetor no nó  $i$  da discretização de  $\Omega$ . Se a numeração dos nós é efetuada colocando em primeiro lugar os nós do contorno  $\Gamma$  e se o mesmo espaço discreto da solução aproximada para  $\phi_c$  em  $\Omega_c$  é usada para a discretização do multiplicador de Lagrange  $\lambda$  (pois seu suporte é o contorno  $\Gamma$ ) pode-se escrever:

$$\lambda = \sum_{j=1}^{m_c} N_j^c |_{\Gamma} \lambda_j = \sum_{j=1}^{m_c} \{\lambda_j\}^T \{N_j^c |_{\Gamma}\}^T \quad j \in \Gamma(\Omega_c) \quad (3.31)$$



onde  $N_j^c|_\Gamma$  é a projeção ou o valor de  $N_j^c$  no contorno  $\Gamma(\Omega_c)$ ,  $m_c^\Gamma$  é o número de nós pertencentes à  $\Gamma(\Omega_c)$  e  $\lambda_j$  o multiplicador de Lagrange no nó  $j$  de  $\Gamma(\Omega_c)$ .

Substituindo (3.29) e (3.31) no primeiro termo de (3.26) obtém-se:

$$\int_\Gamma \lambda \phi \, d\Gamma = \sum_{j=1}^{m_c^\Gamma} \{\lambda_j\}^T \int_\Gamma \{N_i^c|_\Gamma\}^T N_j|_\Gamma \, d\Gamma \phi \quad \forall i \in \Omega_c, \quad j \in \Gamma(\Omega_c) \quad (3.32)$$

ou

$$\{\lambda\}^T C \phi \quad (3.33)$$

onde

$$C(i, j) = \int_\Gamma \{N_i^c|_\Gamma\}^T N_j|_\Gamma \, d\Gamma \quad \forall i \in \Omega_c, \quad j \in \Gamma(\Omega_s) \quad (3.34)$$

e

$$\{\lambda\}^T = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_{m_c^\Gamma}] \quad (3.35)$$

Neste ponto uma consideração importante deve ser feita: como na numeração global dos nós os do contorno  $\Gamma$  são tomados em primeiro lugar, para  $i \geq m_c^\Gamma$  as funções  $N_j^c|_\Gamma$  se anulam, porque elas não pertencem a  $\Gamma(\Omega_c)$ .

Empregando as equações (3.30) e (3.31) no segundo termo de (3.26), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \lambda \phi_c d\Gamma = \sum_{j=1}^{m_{\Gamma}} \{\lambda_j\}^T \int_{\Gamma} N_i^c|_{\Gamma} N_j|_{\Gamma} d\Gamma \phi_c \quad \forall i \in \Omega, \quad j \in \Gamma(\Omega_c) \quad (3.36)$$

ou

$$\{\lambda\}^T D \phi_c \quad (3.37)$$

onde:

$$D(i, j) = \int_{\Gamma} N_i^c|_{\Gamma} N_j^c|_{\Gamma} d\Gamma \quad \forall i \in \Omega, \quad j \in \Gamma(\Omega_c), \quad (3.38)$$

$N_i|_{\Gamma}$  é zero para  $i > m^{\Gamma}$ , onde  $m^{\Gamma}$  é o número de nós pertencentes a  $\Gamma(\Omega)$ .

Agora vamos substituir no funcional (3.28) os termos discretizados. Assim temos :

$$\Pi^c = \frac{1}{2} \phi^T S \phi + \{\lambda\}^T \{C \phi - D \phi_c\}. \quad (3.39)$$

Aplicando o procedimento de Rayleigh-Ritz[13] a (3.39) obtemos:

$$\frac{\partial \Pi^c}{\partial \phi} = S \phi + C^T \lambda = 0 \quad (3.40)$$

e

$$\frac{\partial \Pi^c}{\partial \lambda} = C \phi - D \phi_c = 0 \quad (3.41)$$

Finalmente o sistema abaixo é obtido:

$$\begin{bmatrix} S & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ D\phi_c \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

onde  $S$  é a matriz de rigidez e  $\phi_c$  e  $\phi$  são os vetores de fontes tradicionais do Método de Elementos Finitos dos subdomínios  $\Omega_c$  e  $\Omega$ . O sistema (3.42) é simétrico, mal condicionado e não é positivo definido, pois possui autovalores negativos [18].

Fica claro neste ponto que  $N_i^c|_{\Gamma}$  e  $N_i|_{\Gamma}$  assumem valor 1 no nó  $i$  e zero nos outros nós do contorno  $\Gamma$ , isto é, elas são funções de interpolação tradicionais de Elementos Finitos em uma dimensão definidas no contorno. No caso de se utilizar o método Multiplicadores de Lagrange com interpolação de segunda ou terceira ordem na interface deve-se adicionar os graus de liberdade hierárquicos nas arestas dos elementos pertencentes ao contorno.

### 3.2.3 - Formulação para os Modos TE e TM

O funcional associado com a equação de Helmholtz para o domínio  $\Omega$  é :

$$\Pi = \frac{1}{2} \phi^T S \phi - \frac{k_c^2}{2} \phi^T T \phi \quad (3.43)$$

e, como fizemos no caso anterior para relaxar a condição de Dirichlet no contorno, um novo funcional é adicionado:

$$\Pi^* = \int_{\Gamma} \lambda (\phi - \phi_c) d\Gamma \quad (3.44)$$

onde  $\lambda$  é o Multiplicador de Lagrange.

O funcional completo é:

$$\Pi^c = \Pi + \Pi^* \quad (3.45)$$

ou,

$$\Pi^c = \frac{1}{2} \phi^T S \phi - \frac{k_c^2}{2} \phi^T T \phi + \int_{\Gamma} \lambda (\phi - \phi_c) d\Gamma \quad (3.46)$$

Da mesma forma como na seção 3.2.2 discretizamos a 3ª parcela de (3.46). Substituindo os termos discretizados obtemos

$$\Pi^c = \frac{1}{2} \phi^T S \phi - \frac{k_c^2}{2} \phi^T T \phi + \{\lambda\}^T (C\phi - D\phi_c) \quad (3.47)$$

Aplicando o procedimento de Rayleigh-Ritz a (3.47) obtemos:

$$\frac{\partial \Pi^c}{\partial \phi} = S\phi - k_c^2 T\phi + C^T \lambda = 0 \quad (3.48)$$

ou,

$$S\phi + C^T \lambda = k_c^2 T\phi \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \Pi^c}{\partial \lambda} = C\phi - D\phi_c = 0 \quad (3.50)$$

Para o cálculo dos modos TM temos que  $\phi_c = 0$  (Condição de Dirichlet). Finalmente o problema de autovalores abaixo é obtido:

$$\begin{bmatrix} S & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \end{bmatrix} = k_c^2 \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Podemos então utilizar uma rotina do programa Fortran que resolve este problema específico de autovalores.

### 3.3 - Formulação do Método Mortar usando a Técnica dos Multiplicadores de Lagrange

No Capítulo 2 discretizamos as equações de Laplace e Helmholtz empregando a Técnica de Integração Analítica. Adicionaremos aos funcionais obtidos para as equações a chamada “Condição Mortar” para relaxarmos a continuidade na interface  $\Gamma$ .

A “condição Mortar” será discretizada utilizando a Técnica de Integração Analítica. Da minimização do funcional completo, empregando Rayleig-Ritz, obteremos as equações para os Sistemas.

#### 3.3.1 - Formulação para o modo TEM

O funcional associado com a equação de Laplace para o domínio  $\Omega$  é :

$$\Pi = \frac{1}{2} \phi^T S \phi \quad (3.52)$$

e, para assegurar a continuidade do potencial vetor na interface  $\Gamma$ , um novo funcional, a “Condição Mortar”, é adicionada:

$$\Pi^* = \int_{\Gamma} \lambda(\phi_s - \phi_m) d\Gamma, \quad (3.53)$$

onde  $\lambda$  é o Multiplicador de Lagrange.

O funcional completo é:

$$\Pi^c = \Pi + \Pi^* \quad (3.54)$$

ou,

$$\Pi^c = \frac{1}{2} \phi^T S \phi + \int_{\Gamma} \lambda (\phi_s - \phi_m) d\Gamma. \quad (3.55)$$

Consideram-se as seguintes aproximações nodais para o potencial vetor em cada subdomínio :

$$\phi_s = \sum_{i=1}^{m_s} N_i^s \phi_i^s \quad (3.56)$$

e

$$\phi_m = \sum_{i=1}^{m_m} N_i^m \phi_i^m, \quad (3.57)$$

onde  $m_s$  e  $m_m$  são os números de nós da discretização de cada subdomínio  $\Omega_s$  e  $\Omega_m$ .  $N_i^s$  e  $N_i^m$  são funções de base linearmente independentes,  $\phi_i^s$  é o potencial vetor no nó  $i$  da discretização de  $\Omega_s$  e  $\phi_i^m$  é o potencial no nó  $i$  da discretização de  $\Omega_m$ . Se a numeração dos nós é efetuada colocando em primeiro lugar os nós na interface  $\Gamma$  e se o mesmo espaço discreto da solução aproximada para  $\phi_s$  em  $\Omega_s$  é usada para a discretização do multiplicador de Lagrange  $\lambda$  (pois seu suporte é a interface  $\Gamma$ ) pode-se escrever:

$$\lambda = \sum_{j=1}^{m_s^\Gamma} N_j^s|_{\Gamma} \lambda_j, \quad j \in \Gamma(\Omega_s) \quad (3.58)$$

onde  $N_j^s|_{\Gamma}$  é a projeção ou o valor de  $N_j^s$  na interface  $\Gamma(\Omega_s)$ ,  $m_s^\Gamma$  é o número de nós pertencentes à  $\Gamma(\Omega_s)$  e  $\lambda_j$  o Multiplicador de Lagrange no nó  $j$  de  $\Gamma(\Omega_s)$ .

Substituindo (3.56) e (3.58) no primeiro termo de (3.53) obtemos:

$$\int_{\Gamma} \lambda \phi_s d\Gamma = \sum_{j=1}^{m_s^{\Gamma}} \{\lambda_j\}^T \int_{\Gamma} \{N_i^s|_{\Gamma}\}^T N_j^s|_{\Gamma} d\Gamma \phi_s,$$

$$\forall i \in \Omega_s, j \in \Gamma(\Omega_s) \quad (3.59)$$

ou,

$$\{\lambda\}^T C \phi_s \quad (3.60)$$

$C$  é uma matriz  $m_s^{\Gamma} \times m_s^{\Gamma}$ ,

$$C(i, j) = \int_{\Gamma} \{N_i^s|_{\Gamma}\}^T N_j^s|_{\Gamma} d\Gamma$$

$$\forall i \in \Omega_s, j \in \Gamma(\Omega_s) \quad (3.61)$$

e

$$\{\lambda\}^T = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_{m_s^{\Gamma}}] \quad (3.62)$$

Neste ponto uma consideração importante deve ser feita: como na numeração global dos nós da interface  $\Gamma$  são tomados em primeiro lugar, para  $i \geq m_s^{\Gamma}$  as funções  $N_j^s|_{\Gamma}$  se anulam, porque elas não pertencem a  $\Gamma(\Omega_s)$ .

Agora substituindo (3.57) e (3.58) no segundo termo de (3.53) obtemos:

$$\int_{\Gamma} \lambda \phi_m d\Gamma = \sum_{j=1}^{m_s^{\Gamma}} \{\lambda_j\}^T \int_{\Gamma} N_i^s|_{\Gamma} N_j^m|_{\Gamma} d\Gamma \phi_m,$$

$$\forall i \in \Omega_m, \quad j \in \Gamma(\Omega_s) \quad (3.63)$$

ou,

$$\{\lambda\}^T D \phi_m \quad (3.64)$$

onde:

$D$  é uma matriz  $m_m^{\Gamma} \times m_s^{\Gamma}$ ,

$$D(i, j) = \int_{\Gamma} N_i^m|_{\Gamma} N_j^s|_{\Gamma} d\Gamma$$

$$\forall i \in \Omega_m, \quad j \in \Gamma(\Omega_s). \quad (3.65)$$

$N_i^m|_{\Gamma}$  é zero para  $i > m_m^{\Gamma}$ , onde  $m_m^{\Gamma}$  é o número de nós pertencentes a  $\Gamma(\Omega_m)$ .

Substituindo os termos discretizados na equação (3.55), obtemos o funcional

$$\Pi^c = \frac{\phi^T S \phi}{2} + \lambda^T (C \phi_s - D \phi_m). \quad (3.66)$$

Aplicando Rayleig-Ritz:

$$\frac{\partial \Pi^c}{\partial \phi} = S \phi + \lambda^T (C - D) = 0 \quad (3.67)$$



ou,

$$S \phi - (C - D)^T \lambda = 0 \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial \Pi^c}{\partial \lambda} = (C - D)\phi = 0. \quad (3.69)$$

Finalmente o sistema abaixo é obtido:

$$\begin{bmatrix} S & (C-D)^T \\ (C-D) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

$S$  é a matriz tradicional do Método dos Elementos Finitos dos domínios  $\Omega_s$  e  $\Omega_m$ ,  $\phi$  são os potenciais dos nós pertencentes  $\Omega_s$ ,  $\Omega_m$ ,  $\Gamma(\Omega_s)$  e  $\Gamma(\Omega_m)$ . O Sistema (3.70) é simétrico, mal condicionado e não positivo definido, pois possui autovalores negativos [18]. Podemos aplicar um dos métodos: gradiente conjugado, Jacobi ou uma rotina específica do pacote de programas Fortran para a solução do sistema. Fica claro neste ponto, se  $\Omega_s$  é chamado de escravo  $\Omega_m$  de mestre,  $N_i^s|_{\Gamma}$  e  $N_i^m|_{\Gamma}$  assumem valor 1 no nó  $i$  e zero nos outros nós da interface  $\Gamma$ , isto é, elas são funções tradicionais de interpolação dos elementos finitos na dimensão definida na interface. No caso de usarmos o Método dos multiplicadores de Lagrange com interpolação de segunda ou terceira ordem na interface precisamos adicionar os graus de liberdade hierárquicos nos lados dos elementos pertencentes a interface.

### 3.3.2 - Formulação para os modos TE e TM

O funcional associado com a equação Helmholtz para o domínio  $\Omega$  é:

$$\Pi = \frac{1}{2} \phi^T S \phi - \frac{k_c^2}{2} \phi^T T \phi \quad (3.71)$$

e, como foi feito no caso anterior para relaxar as condições de continuidade na interface  $\Gamma$  entre os subdomínios  $\Omega_s$  e  $\Omega_m$  um novo funcional é adicionado

$$\Pi^* = \int_{\Gamma} \lambda(\phi_s - \phi_m) d\Gamma \quad (3.72)$$

onde  $\lambda$  é o Multiplicador de Lagrange. O funcional completo é:

$$\Pi^c = \frac{1}{2} \phi^T S \phi - \frac{k_c^2}{2} \phi^T T \phi + \int_{\Gamma} \lambda(\phi_s - \phi_m) d\Gamma \quad (3.73)$$

Substituindo os termos discretizados da condição de acoplamento Mortar, feito na seção 3.3.1 no funcional (3.73). Obtemos

$$\Pi^c = \frac{1}{2} \phi^T S \phi - \frac{k_c^2}{2} \phi^T T \phi + \lambda^T (C\phi_s - D\phi_m). \quad (3.74)$$

Aplicando Rayleig-Ritz:

$$\frac{\partial \Pi^c}{\partial \phi} = S \phi - k_c^2 T \phi + (C - D)^T \lambda = 0 \quad (3.75)$$

ou,

$$S \phi + (C - D)^T \lambda = k_c^2 T \phi \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial \Pi^c}{\partial \lambda} = (C - D)\phi = 0 \quad (3.77)$$

Finalmente o sistema abaixo é obtido:

$$\begin{bmatrix} S & (C-D)^T \\ (C-D) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \end{bmatrix} = k_c^2 \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \end{bmatrix}. \quad (3.78)$$

Podemos aplicar uma rotina específica do pacote de programas Fortran para a solução do problema de autovalores acima.

## **4 - ANÁLISE E VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS**

### **4.1 - Introdução**

Uma das fases mais importantes no desenvolvimento de software para análise numérica é a validação das formulações e implementações computacionais. A seguir, serão apresentados alguns dos experimentos numéricos selecionados com o propósito de assegurar a confiança no software de elementos finitos em desenvolvimento. Como linha geral, o procedimento de validação adotado foi o estudo de casos que apresentem uma solução analítica exata ou uma solução numérica documentada na literatura especializada.

### **4.2 - Modos TE e TM em guias homogêneos**

Guias de ondas metálicos, preenchidos homogêneamente com material dielétrico, são muito empregados em engenharia de micro-ondas, principalmente em redes para transmissão de sinais de alta potência. Quando os guias apresentam formato geométricos simples, é possível o cálculo analítico e exato das características de propagação da onda eletromagnética. A seguir, serão apresentados alguns resultados para guias convencionais de formato retangular, cilíndrico coaxial e do guia Horseshoes-Shaped, onde o cálculo analítico é difícil ou até impossível.

#### **4.2.1 - Guia Retangular**

Considere um guia de ondas retangular com paredes metálicas perfeitas e preenchido homogêneamente com dielétrico ( $\epsilon_r=1$ ). As dimensões do guia são:  $a=2,0$  cm e  $b=1,0$  cm, Figura 4.1.

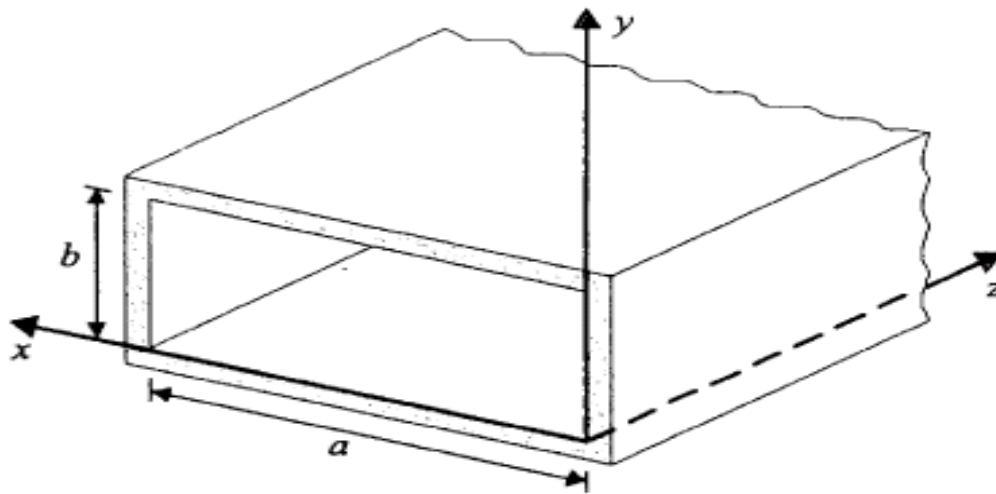


Figura 4.1 - Guia de onda de formato retangular.

A frequência de corte ( $f_c$ ), para os modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$  é dada por [19]:

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} , \quad (4.1)$$

onde  $m$  é o número de meios ciclos na direção  $x$  e  $n$  é o número de meios ciclos na direção  $y$ . Para ondas TE, os subscritos  $m$  e  $n$  podem assumir valores inteiros maiores ou iguais a zero (não simultaneamente), enquanto para modos TM,  $m$  e  $n$  devem ser inteiros maiores ou iguais a um. Deste modo, a onda TM de frequência mais baixa, a ser transmitida por um guia de ondas retangular, é o modo  $TM_{11}$ .

Cada modo de transmissão tem um comprimento de onda de corte. Quando mais de um modo de transmissão é possível o campo resultante é a soma dos campos dos modos individuais no guia.

Considere as seguintes discretizações do domínio  $\Omega$  geradas pelo Triangle [20]: uma

conforme com 554 nós e 1046 elementos, Figura 4.2, e outra não-conforme com 554 nós (175 nós escravos e 379 nós mestres) e 984 elementos (308 elementos escravos e 676 elementos mestres) , Figura 4.3, para o guia de ondas retangular.

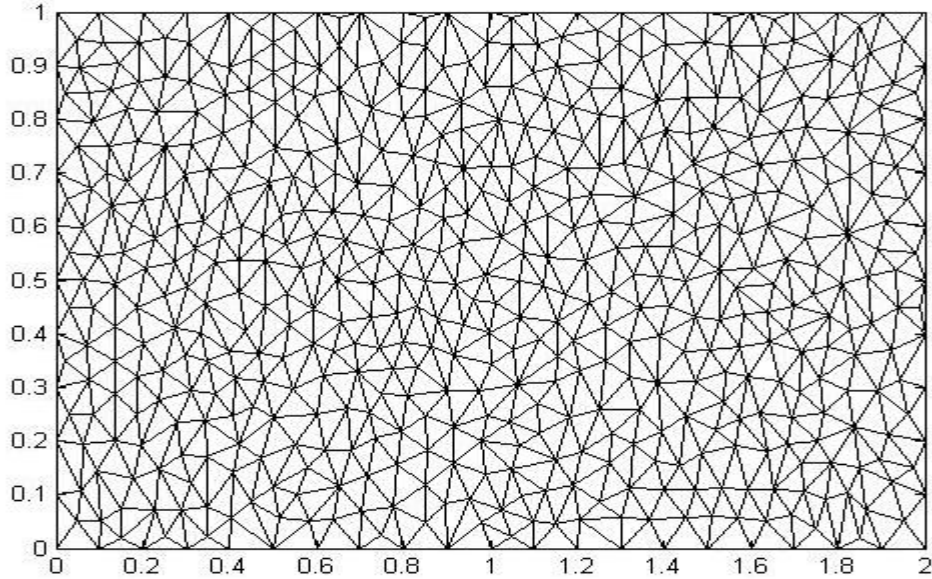


Figura 4.2 - Malha conforme (554 nós e 1046 elementos) para o guia retangular gerada pelo Triangle.

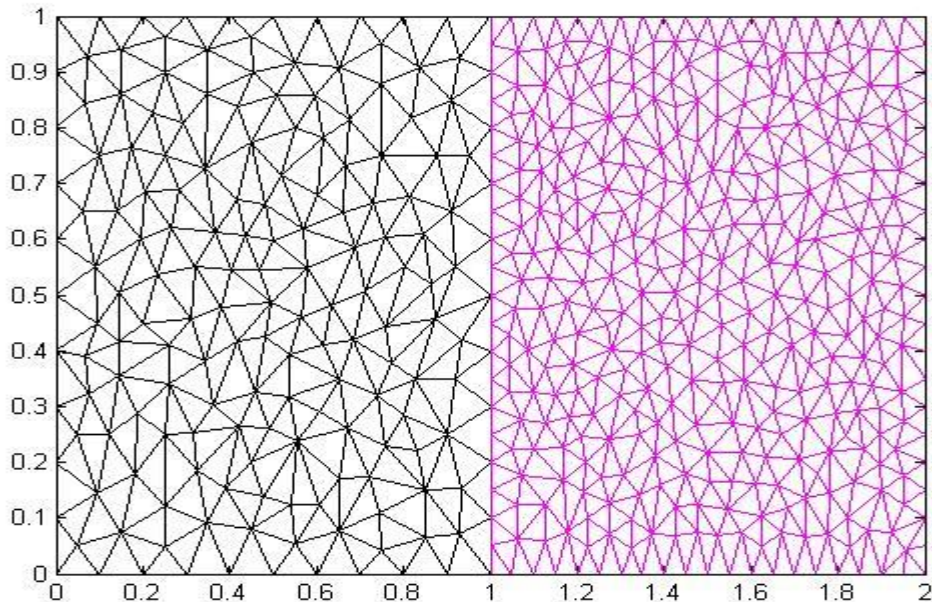


Figura 4.3 - Malha não-conforme com 554 nós (175 nós escravos e 379 nós mestres) e 984 elementos (308 elementos escravos e 676 elementos mestres) gerada pelo Triangle.

As Tabelas 4.1 e 4.2 apresentam os valores das frequências de corte calculadas pelo método Mortar utilizando Multiplicadores de Lagrange, pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) em comparação aos obtidos pelo cálculo analítico exato, para vários modos do guia de ondas retangular. Nesses cálculos, utilizaram-se as malhas conforme e não-conforme, das Figuras 4.1 e 4.2, formadas de elementos finitos triangulares de primeira ordem de aproximação. Os valores das frequências de corte, apresentados nas Tabelas 4.1 e 4.2, mostram um pequeno erro em relação aos valores analíticos exatos mesmo para modos com complexas configurações de campo. Para esses modos mais elevados, uma malha mais refinada pode diminuir significativamente os erros numéricos.

Tabela 4.1 - Frequências de corte para o guia de ondas retangular utilizando o método Mortar.

Modos	Freq. GHz (Mortar)	Freq. GHz(exato)	Erro(%)	Modos	Freq. GHz (Mortar)	Freq. GHz(exato)	Erro(%)
TM11	16,52	16,76	1,4	TE01	7,4	7,5	1,3
TM12	21,03	21,2	0,8	TE10	14,81	15	1,2
TM13	26,76	27,02	0,9	TE02	14,81	15	1,2
TM21	30,57	30,9	1	TE11	16,59	16,76	1
TM22	33,35	33,52	0,5	TE12	20,97	21,2	1
TM14	33,59	33,52	0,2	TE03	22,34	22,48	0,6
TM23	37,2	37,47	0,7	TE13	26,92	27,02	0,3
TM15	40,21	40,36	0,3	TE21	30,82	30,9	0,2
TM24	42,73	42,4	0,7	TE22	33,29	33,52	0,6
TM31	45,37	45,59	0,4	TE14	33,29	33,52	0,6
TM25	47,95	47,99	0	TE23	37,62	37,47	0,4
TM16	48,07	47,4	0,7	TE05	37,7	37,47	0,6
TM32	48,21	47,4	1,7	TE15	40,73	40,36	0,9
TM33	50,19	50,28	0,1	TE24	42,26	42,4	0,3
TM17	54,87	54,56	0,5	TE06	44,9	44,97	0,1
TM26	55,19	54,05	2,1	TE30	44,9	44,97	0,1

Tabela 4.2 - Frequências de corte para o guia de ondas retangular utilizando o MEF.

Modos	Freq. GHz (MEF)	Freq. GHz(exato)	Erro(%)	Modos	Freq. GHz (MEF)	Freq. GHz(exato)	Erro(%)
TM11	16,57	16,76	1,1	TE01	7,4	7,5	1,3
TM12	20,99	21,2	0,9	TE10	14,82	15	1,2
TM13	26,82	27,02	0,7	TE02	14,82	15	1,2
TM21	30,71	30,9	0,6	TE11	16,7	16,76	0,3
TM22	33,35	33,52	0,5	TE12	20,99	21,2	0,9
TM14	33,75	33,52	0,6	TE03	22,28	22,48	0,8
TM23	37,82	37,47	0,9	TE13	26,82	27,02	0,7
TM15	40,76	40,36	0,9	TE21	30,73	30,9	0,5
TM24	42,89	42,4	1,1	TE22	33,36	33,52	0,4
TM31	46,25	45,59	1,4	TE14	33,38	33,52	0,4
TM25	48,7	47,99	1,4	TE23	37,38	37,47	0,2
TM16	48,06	47,4	1,3	TE05	37,4	37,47	0,1
TM32	48,1	47,4	1,4	TE15	40,37	40,36	0
TM33	51,1	50,28	1,6	TE24	42,44	42,4	0
TM17	54,54	54,56	0	TE06	45,07	44,97	0,2
TM26	54,62	54,05	1	TE30	45,12	44,97	0,3

A Tabela 4.3 mostra o tempo de processamento (CPU time) para as duas aproximações. Como podemos observar o método Mortar demonstrou-se favorável. Para realizarmos a montagem das Matrizes de rigidez  $S$  para os métodos MEF e Mortar procedemos da seguinte forma: para cada nó da malha são percorridos todos os elementos e verificado se o mesmo participa ou não do nó global que está sendo calculado, caso seja seu valor é considerado para a composição do valor do nó global. No caso MEF para cada um dos 554 nós, são percorridos todos os 1046 elementos, ou seja, essa rotina é realizada 579484 vezes. Para o Mortar temos 554 nós (175 nós no subdomínio escravo e 379 nós no subdomínio mestre). Para cada um dos 175 nós escravos são percorridos 308 elementos que estão no subdomínio escravo, a rotina é realizada 53900 vezes. Para cada um dos 379 nós mestres são percorridos 676 elementos que estão no subdomínio mestre, a rotina é realizada 256204 vezes. Dessa forma totalizamos para o Mortar 310104 vezes a quantidade que essa rotina é realizada. O tempo de processamento gasto para montagem da Matriz de rigidez  $S$  para o MEF tem que ser necessariamente maior, pois a quantidade de vezes que a rotina é realizada é maior.



Tabela 4.3 - Tempo de processamento. (Simulação em linguagem Fortran usando um processador Intel(R) Celeron(R) CPU B800 Windows 8 - 1.50 GHz – 4GB de RAM).

<i>CPU time</i>				
<i>Método</i>	<i>Número de nós</i>	<i>Número de elementos</i>	<i>CPU time(s) Modo TE</i>	<i>CPU time(s) Modo TM</i>
<i>Mortar</i>	554	984	339,12	335,01
<i>MEF</i>	554	1046	1004,09	1002,89

#### 4.2.2 - Guia Horseshoe-Shaped

O Guia de ondas Horseshoe-Shaped (HSW) com seção complexa tem sido usado em diferentes elementos de engenharia de micro-ondas, Figura 4.4. Os seus autovalores e autovetores foram estudados, pela primeira vez, em [21]. Em comparação com os Guias de ondas retangulares são caracterizados por amplo comprimento de banda, grande comprimento de onda, pequeno tamanho com frequência constante, e uma larga região de seção de corte com campo elétrico uniformemente distribuído. Esta estrutura foi recentemente proposta com o objetivo de se obter largura de faixa de propagação, em um único modo, de até 60 GHz.

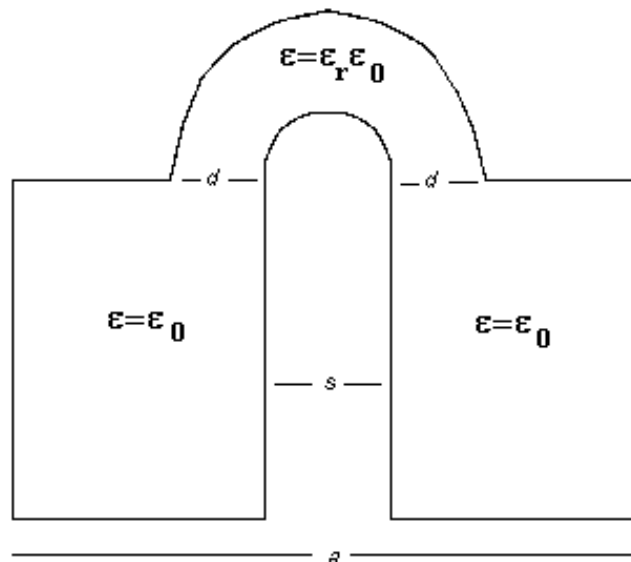


Figura 4.4 - Guia de ondas Horseshoe-Shaped.

Observa-se pelo exame da Figura 4.4 que a geometria do Horseshoe-Shaped se beneficia imediatamente da implementação do Método dos Elementos Finitos Mortar já que a parte em curva dificilmente se adapta ao retângulo se uma malha conforme for utilizada. Outro benefício importante é que podemos inserir uma quantidade maior de elementos triangulares na região da curva, que é região de maior interesse, veja Figura 4.4. Com isto, o processo de análise se torna mais demorado e preciso apenas onde for necessário e, conseqüentemente, obtém-se uma melhoria na qualidade dos resultados e no tempo de processamento.

Foram feitas várias simulações com a malhas conformes (MEF) e outras com malhas não-conformes onde empregamos os Elementos Finitos Mortar e comparamos os resultados nas Tabelas 4.4 e 4.5. Utilizamos para as malhas, as mesmas quantidades de nós, formadas com elementos finitos triangulares de primeira ordem de aproximação, veja Figuras 4.5 com 62 nós e 84 elementos, 4.6 com 62 nós (42 nós escravos e 20 nós mestres) e 72 elementos (48 elementos escravos e 24 elementos mestres), 4.7 com 353 nós e 593 elementos, 4.8 com 353 nós (198 nós escravos e 155 nós mestres) e 590 elementos (320 elementos mestres e 270 elementos escravos), 4.9 com 1200 nós e 2204 elementos, 4.10 com 1200 nós (712 nós escravos e 488 nós mestres) e 2237 elementos (1336 elementos escravos e 901 elementos mestres). Os resultados apresentados, nas Tabelas 4.6 e 4.7, referem-se a uma análise com o guia sem preenchimento dielétrico, ou seja com  $\epsilon_r = 1$ . Como referência para a validação da análise, utilizaram-se os resultados apresentados em [22]. Esses resultados não são necessariamente precisos, pois foram obtidos por extrapolação.

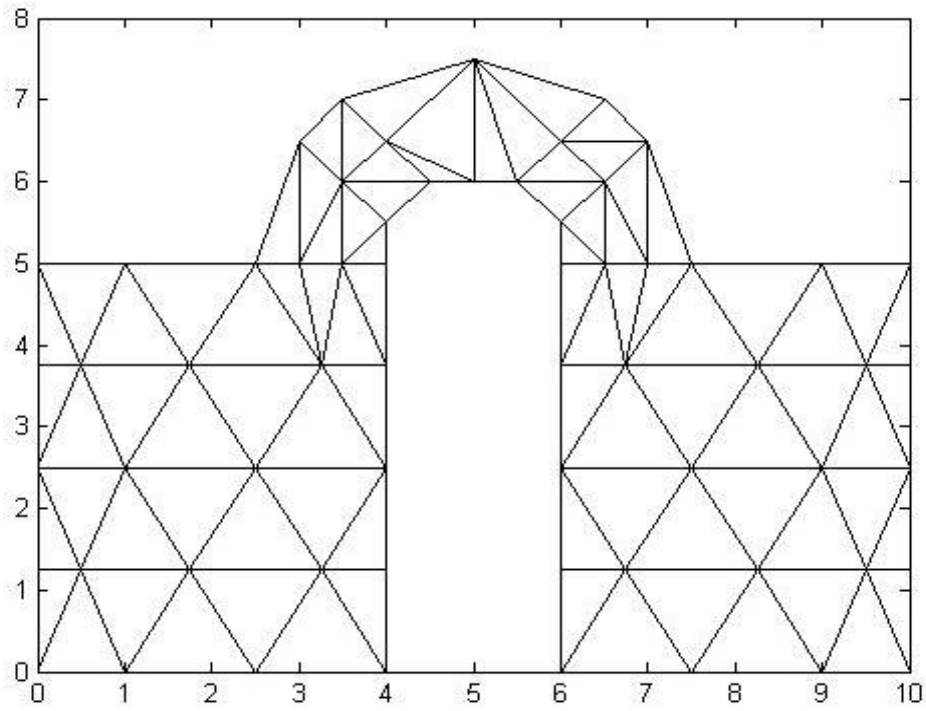


Figura 4.5 - Malha conforme (62 nós e 84 elementos) para o guia Horseshoe-Shaped gerada pelo Triangle.

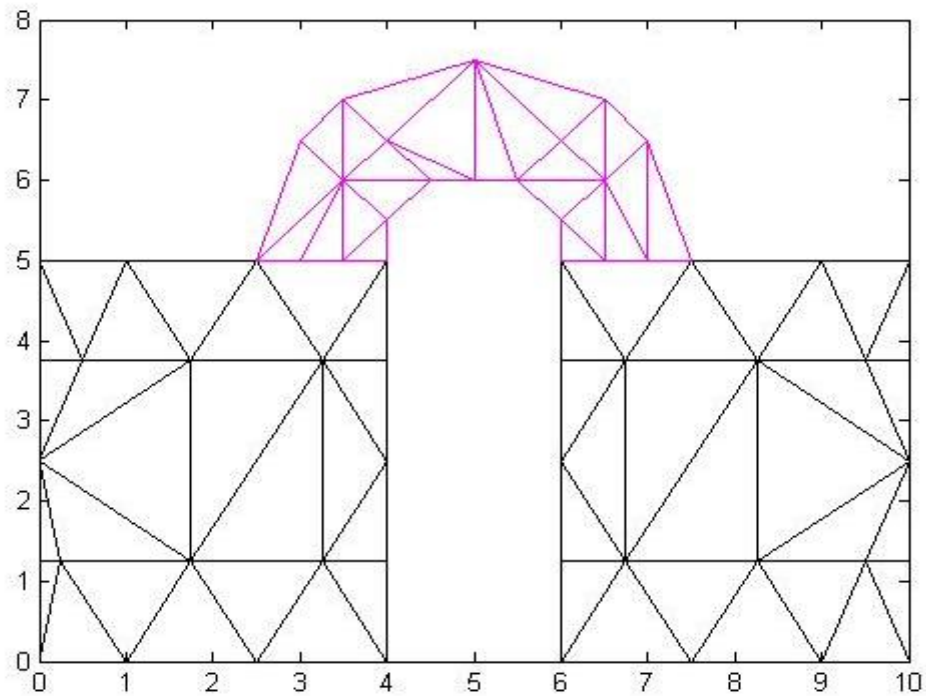


Figura 4.6 - Malha não-conforme com 62 nós (42 nós escravos e 20 nós mestres) e 72 elementos (48 elementos escravos e 24 elementos mestres) gerada pelo Triangle.

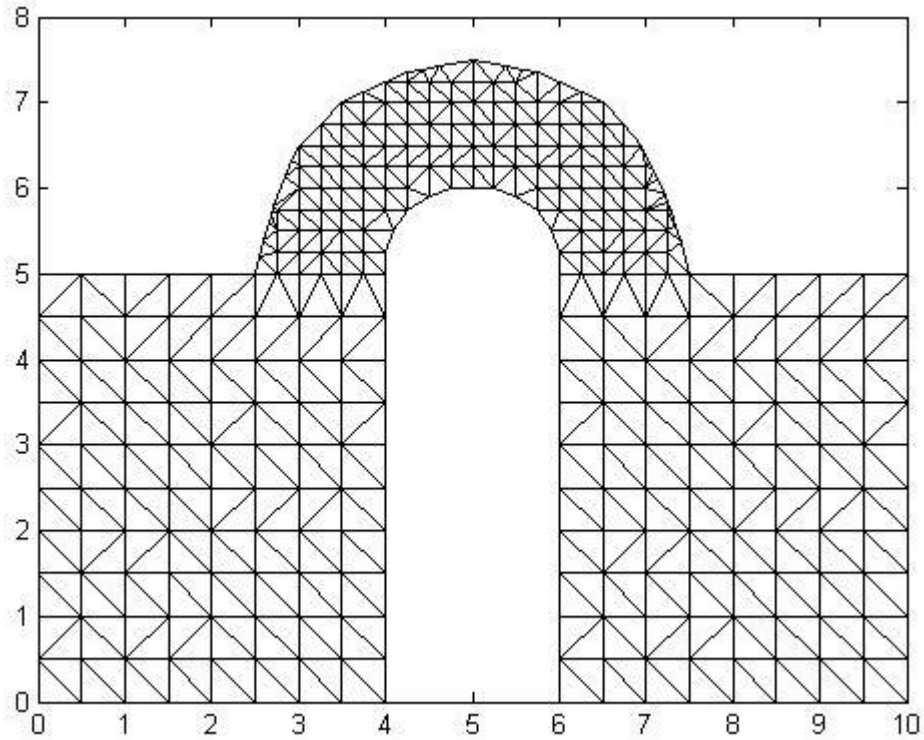


Figura 4.7 - Malha conforme (353 nós e 593 elementos) para o guia Horseshoe-Shaped gerada pelo Triangle.

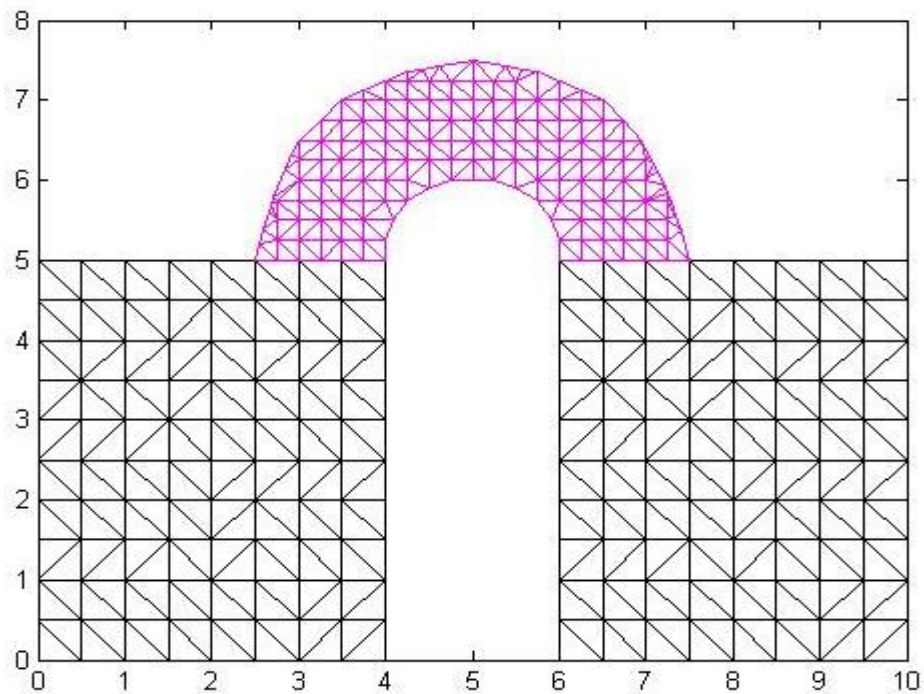


Figura 4.8 - Malha não-conforme com 353 nós (198 nós escravos e 155 nós mestres) e 590 elementos (320 elementos mestres e 270 elementos mestres), gerada pelo Triangle.

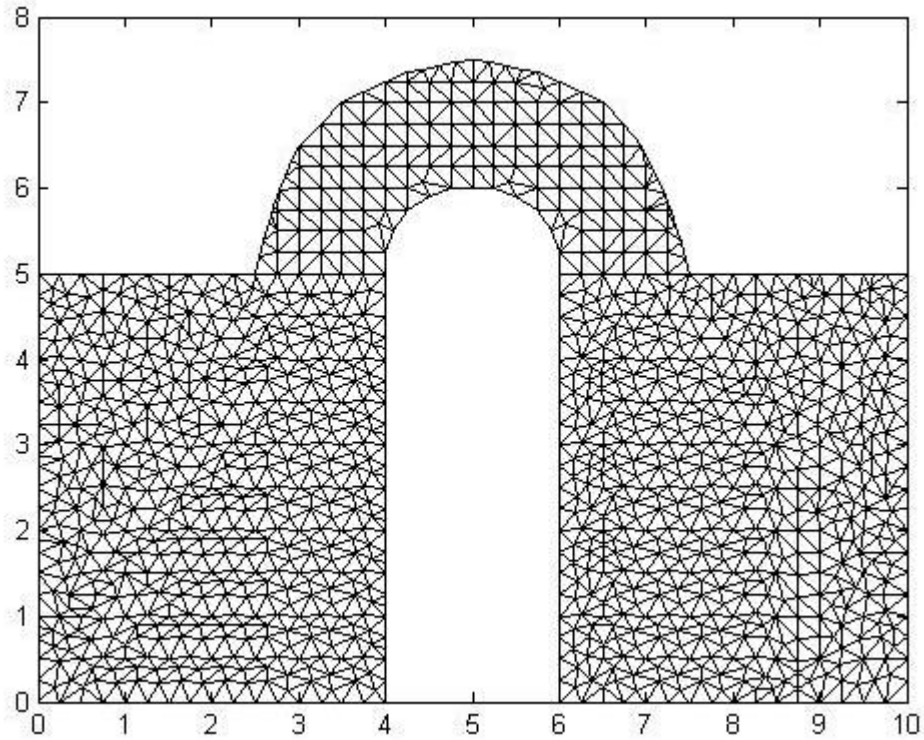


Figura 4.9 - Malha conforme (1200 nós e 2204 elementos) para o guia Horseshoe-Shaped gerada pelo Triangle.

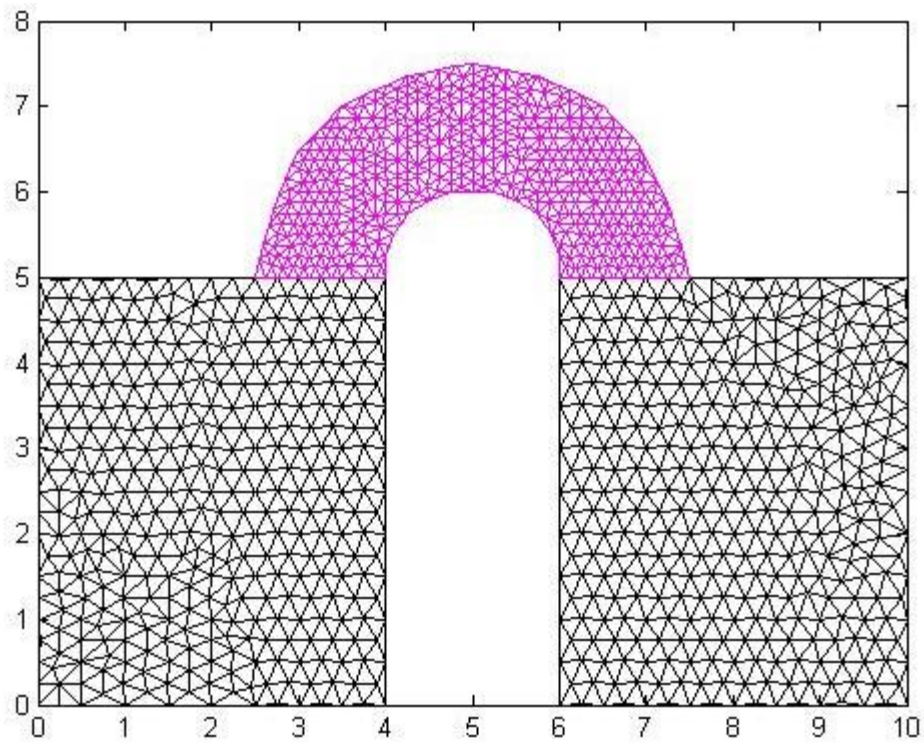


Figura 4.10 - Malha não-conforme com 1200 nós (712 nós escravos e 488 nós mestres) e 2237 elementos (1336 elementos escravos e 901 elementos mestres) gerada pelo Triangle.

Tabela 4.4 - Guia Horseshoe-Shaped (Malha não-conforme) -  $\lambda_c(mm)$  para os dois primeiros modos, TE<sub>1,0</sub> e TE<sub>2,0</sub>. Dimensões do guia: a= 10 [mm], b/a= 0,5 e d/b=0,3.

<i>s/a= 0,2</i>						
<i>Número de nós</i>	$\lambda_{c1}$ <i>Mortar</i>	$\lambda_{c1}$ <i>teórico</i>	<i>Erro (%)</i>	$\lambda_{c2}$ <i>Mortar</i>	$\lambda_{c2}$ <i>teórico</i>	<i>Erro (%)</i>
62	47,21	50,00	5,58	14,43	16,60	13,07
353	52,77	50,00	5,54	18,20	16,60	9,63
1200	50,24	50,00	0,48	16,48	16,60	0,72

Tabela 4.5 - Guia Horseshoe-Shaped (Malha conforme) -  $\lambda_c(mm)$  para os dois primeiros modos, TE<sub>1,0</sub> e TE<sub>2,0</sub>. Dimensões do guia: a= 10 [mm], b/a= 0,5 e d/b=0,3.

<i>s/a= 0,2</i>						
<i>Número de Nós</i>	$\lambda_{c1}$ <i>MEF</i>	$\lambda_{c1}$ <i>teórico</i>	<i>Erro (%)</i>	$\lambda_{c2}$ <i>MEF</i>	$\lambda_{c2}$ <i>teórico</i>	<i>Erro (%)</i>
62	45,83	50,00	8,34	14,60	16,60	12,04
353	46,51	50,00	6,98	15,13	16,60	8,85
1200	49,89	50,00	0,22	16,53	16,60	0,42

A Tabela 4.6 mostra o tempo de processamento (CPU time) para as duas aproximações com precisão mantida constante. A Tabela 4.7 mostra a precisão de cada método para um determinado tempo de processamento (CPU time) constante.

Como podemos ver por ambas Tabelas, o método Mortar foi favorável para o tempo de processamento (CPU time), embora ambos métodos calculem as frequências de corte com precisões similares. A construção de malhas adaptáveis a geometrias complexas é outra importante qualidade do método Mortar. O refinamento da malha mostra a robustez do método e sua aplicabilidade.

Tabela 4.6 - Tempo de processamento. Simulação em linguagem Fortran usando um processador Intel Celeron XP 2000 - 3,0 GHz - 512 MB de RAM.

<i>Precisão</i>	<i>Número de nós (MEF)</i>	<i>Número de nós (Mortar)</i>	<i>CPU time(s) (MEF)</i>	<i>CPU time (s) (Mortar)</i>
≤20%	62	62	63,67	61,96
≤10%	353	353	337,34	194,50
≤1%	1200	1200	976,27	568,13

Tabela 4.7 - Guia de onda Horseshoe-Shaped-Análise dos  $\lambda_{c1}$  e  $\lambda_{c2}$  para os dois primeiros modos,  $TE_{1,0}$  e  $TE_{2,0}$ . Dimensões do guia:  $a= 10$  [mm],  $s/a=0,2$ ,  $b/a= 0,5$  e  $d/b=0,3$ .

<i>Método</i>	<i>CPU time</i>	<i>Número de nós</i>	$\lambda_{c1}$ <i>teórico</i>	$\lambda_{c1}$	<i>Erro (%)</i>	$\lambda_{c2}$ <i>teórico</i>	$\lambda_{c2}$	<i>Erro (%)</i>
<i>MEF</i>	≤ 100s	62	50,00	45,83	8,34	16,60	14,60	12,04
<i>Mortar</i>		62	50,00	47,21	5,58	16,60	14,43	13,07
<i>MEF</i>	≤ 350s	353	50,00	46,51	6,98	16,60	15,13	8,85
<i>Mortar</i>		353	50,00	52,77	5,54	16,60	18,20	9,63
<i>MEF</i>	≤ 1000s	1200	50,00	49,89	0,22	16,60	16,53	0,42
<i>Mortar</i>		1200	50,00	50,24	0,48	16,60	16,48	0,72

### 4.2.3 - Guia de Ondas Cilíndricos

Os guias de ondas circulares têm aplicações muito específicas e importantes, em particular, são úteis em sistemas de radares que necessitam de uma antena giratória e na fabricação de muitos dispositivos de micro-ondas que necessitam de uma ligação que rode livremente, tais como atenuadores, e combinadores de fase de alta precisão. Considere um guia de secção transversal circular de raio  $a = 1,0$  cm com paredes metálicas perfeitas e preenchido uniformemente com dielétrico ( $\epsilon_r = 1$ ), Figura 4.11.

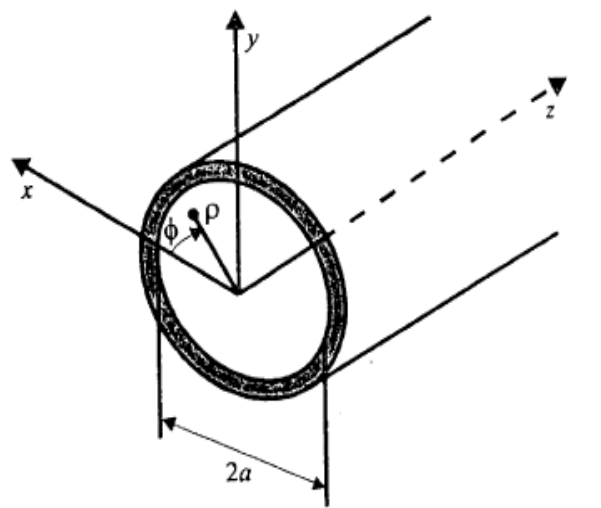


Figura 4.11 - Guia de Ondas Cilíndrico com  $a = 1,0$  cm em coordenadas polares.

Para os cálculos das frequências de corte, utilizaram-se as malhas conforme e não-conforme das Figuras 4.12 com 570 nós e 997 elementos, 4.13 com 570 nós (281 nós escravos e 289 nós mestres) e 992 elementos (498 elementos escravos e 494 elementos mestres), 4.14 com 957 nós e 1816 elementos, 4.15 com 957 nós (281 nós escravos e 676 nós mestres) e 1672 elementos (498 elementos escravo e 1264 elementos mestres). As Tabelas 4.8, 4.9, 4.10 e 4.11 apresentam os valores das frequências de corte calculadas pelo método Mortar utilizando Multiplicadores de Lagrange, pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) em comparação aos obtidos pelo cálculo analítico exato, para vários modos do guia de ondas retangular. Os valores das frequências de corte, apresentados nas Tabelas 4.8, 4.9, 4.10 e 4.11 mostram um pequeno erro em relação ao valores analíticos exatos mesmo para modos com complexas



configurações de campo. Para esses modos mais elevados, uma malha mais refinada pode diminuir significativamente os erros numéricos.

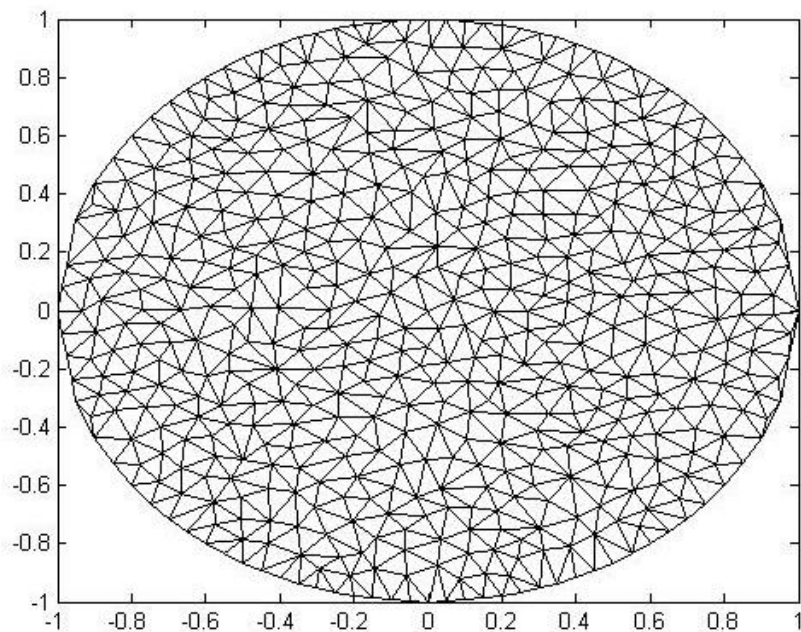


Figura 4.12 - Malha conforme (570 nós e 997 elementos) para o guia Ondas Circular gerada pelo Triangle.

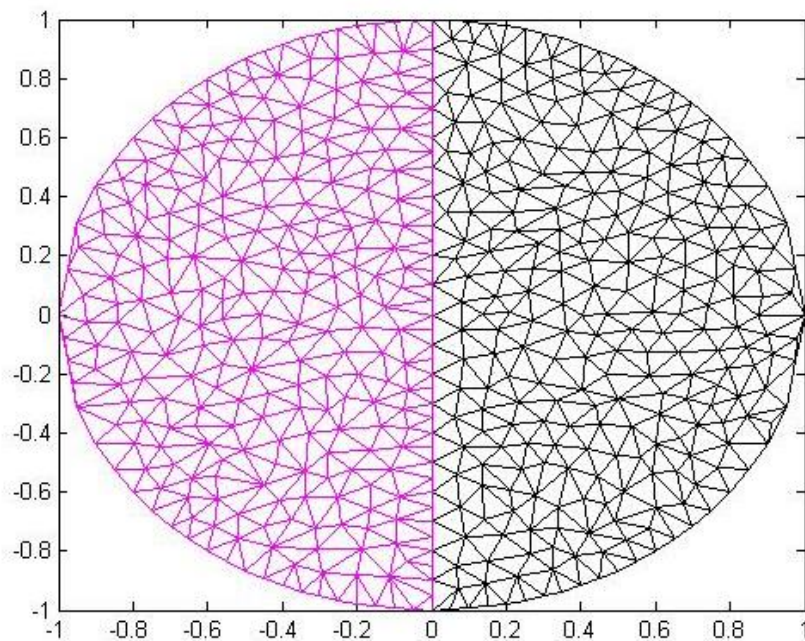


Figura 4.13 - Malha não-conforme com 570 nós (281 nós escravos e 289 nós mestres) e 992 elementos (498 elementos escravos e 494 elementos mestres) gerada pelo Triangle.

Tabela 4.8 - Frequências de corte para o guia de ondas circular utilizando o método Mortar (570 nós).

Modos	Freq. GHz (Mortar)	Freq. GHz(exato)	Erro(%)	Modos	Freq. GHz (Mortar)	Freq. GHz(exato)	Erro(%)
TM01	11,47	11,47	0	TE01	8,76	8,79	0,3
TM11	18,33	18,29	0,2	TE10	18,37	18,28	0,4
TM21	24,43	24,51	0,3	TE02	19,95	20,05	0,4
TM02	26,26	26,34	0,3	TE12	25,33	25,37	0,1
TM31	30,43	30,44	0	TE11	25,41	25,44	0,1
TM12	33,5	33,48	0	TE03	30,62	30,61	0
TM41	36,45	36,21	0,6	TE13	32	32	0
TM22	40,42	40,16	0,6	TE21	33,59	33,47	0,3
TM03	41,26	41,29	0	TE22	38,52	38,24	0,7
TM51	41,76	41,85	0,2	TE14	41,02	40,73	0,7

Tabela 4.9 - Frequências de corte para o guia de ondas circular utilizando o MEF (570 nós).

Modos	Freq. GHz (MEF)	Freq. GHz(exato)	Erro(%)	Modos	Freq. GHz (MEF)	Freq. GHz(exato)	Erro(%)
TM01	11,47	11,47	0	TE01	8,76	8,79	0,3
TM11	18,33	18,29	0,2	TE10	18,37	18,28	0,4
TM21	24,66	24,51	0,6	TE02	19,96	20,05	0,4
TM02	26,27	26,34	0,2	TE12	25,34	25,37	0,1
TM31	30,48	30,44	0,1	TE11	25,42	25,44	0
TM12	33,51	33,48	0	TE03	30,6	30,61	0
TM41	36,39	36,21	0,4	TE13	32,03	32	0
TM22	40,26	40,16	0,2	TE21	33,6	33,47	0,3
TM03	41,21	41,29	0,1	TE22	38,5	38,24	0,6
TM51	41,75	41,85	0,2	TE14	41,11	40,73	0,9

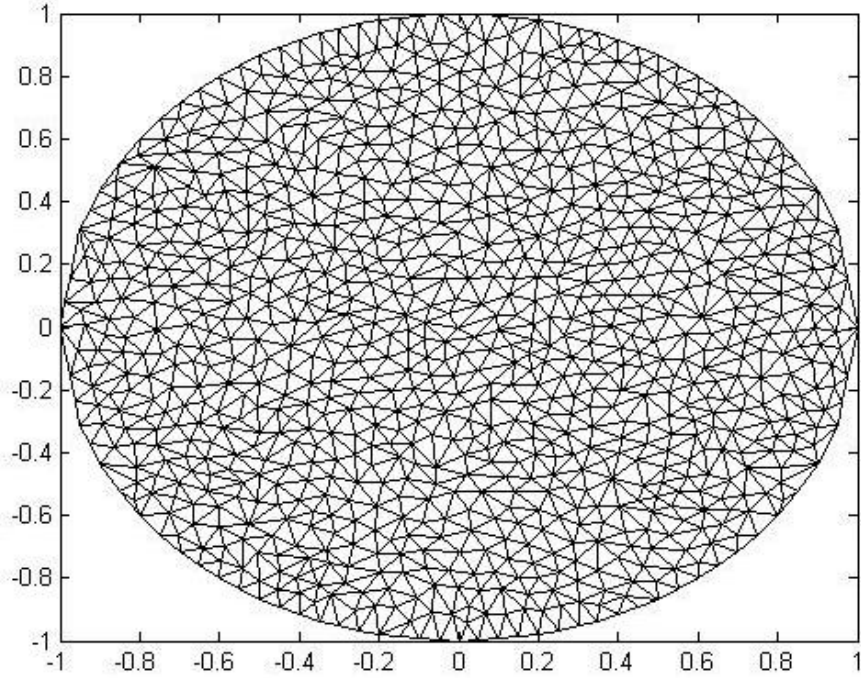


Figura 4.14- Malha conforme (957 nós e 1816 elementos) para o guia Ondas Circular gerada pelo Triangle.

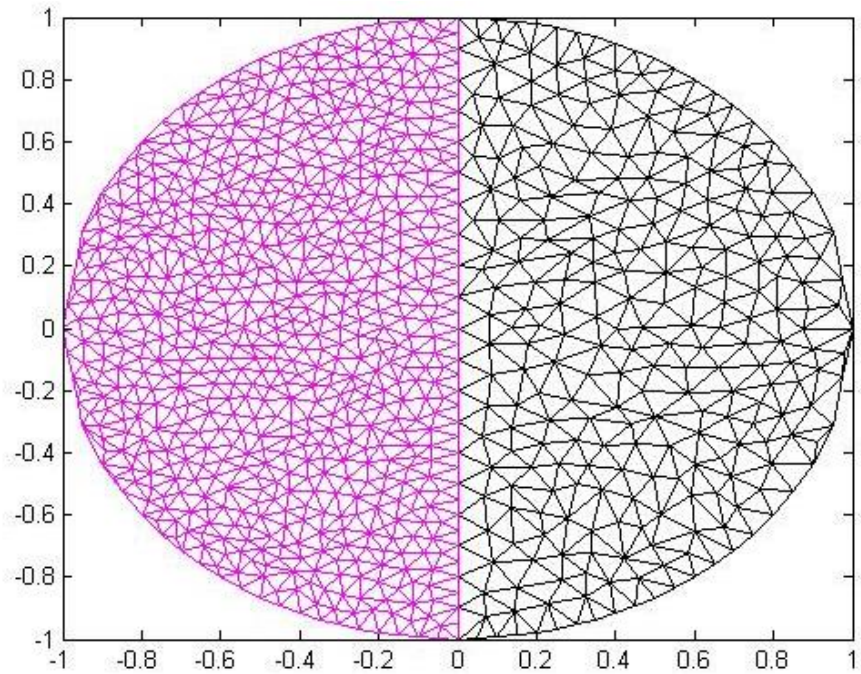


Figura 4.15 - Malha não-conforme com 957 nós (281 nós escravos e 676 nós mestres) e 1672 elementos(498 elementos escravo e 1264 elementos mestres) gerada pelo Triangle.

Tabela 4.10 - Frequências de corte para o guia de ondas circular utilizando o método Mortar (957 nós).

Modos	Freq. GHz (Mortar)	Freq. GHz(exato)	Erro(%)	Modos	Freq. GHz (Mortar)	Freq. GHz(exato)	Erro(%)
TM01	11,47	11,47	0	TE01	8,8	8,79	0,1
TM11	18,23	18,29	0,3	TE10	18,28	18,28	0
TM21	24,51	24,51	0	TE02	20,04	20,05	0
TM02	26,37	26,34	0,1	TE12	25,33	25,37	0,1
TM31	30,51	30,44	0,2	TE11	25,47	25,44	0,1
TM12	33,51	33,48	0	TE03	30,62	30,61	0
TM41	36,12	36,21	0,2	TE13	32	32	0
TM22	40,35	40,16	0,4	TE21	33,59	33,47	0,3
TM03	41,26	41,29	0	TE22	38,47	38,24	0,6
TM51	41,68	41,85	0,4	TE14	40,99	40,73	0,6

Tabela 4.11 - Frequências de corte para o guia de ondas circular utilizando o MEF (957 nós).

Modos	Freq. GHz (MEF)	Freq. GHz(exato)	Erro(%)	Modos	Freq. GHz (MEF)	Freq. GHz(exato)	Erro(%)
TM01	11,47	11,47	0	TE01	8,8	8,79	0,1
TM11	18,28	18,29	0	TE10	18,33	18,28	0,2
TM21	24,36	24,51	0,6	TE02	20,05	20,05	0
TM02	26,17	26,34	0,6	TE12	25,42	25,37	0,1
TM31	30,31	30,44	0,4	TE11	25,47	25,44	0,1
TM12	33,41	33,48	0,2	TE03	30,8	30,61	0,6
TM41	36,14	36,21	0,1	TE13	32,28	32	0,8
TM22	40,21	40,16	0,1	TE21	33,7	33,47	0,6
TM03	41,33	41,29	0	TE22	38,61	38,24	0,9
TM51	41,89	41,85	0	TE14	41,13	40,73	0,9

A Tabela 4.12 mostra o tempo de processamento para as duas aproximações com precisão constante. Como podemos observar o método Mortar demonstrou-se favorável.

Tabela 4.12 - Tempo de processamento. (Simulação em linguagem Fortran usando um processador Intel(R) Celeron(R) CPU B800 Windows 8 - 1.50 GHz - 4GB de RAM).

<i>CPU time</i>				
<i>Método</i>	<i>Número de nós</i>	<i>Número de elementos</i>	<i>CPU time(s) Modo TE</i>	<i>CPU time(s) Modo TM</i>
<i>Mortar</i>	570	992	258,79	257,95
<i>MEF</i>	570	997	904,24	903,66
<i>Mortar</i>	957	1762	1956,82	1931,55
<i>MEF</i>	957	1816	5117,37	5109,55

## 6 - CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O desempenho das formulações Mortar, usando Multiplicadores de Lagrange, foi verificado na precisão do cálculo de parâmetros como frequência de corte e modos de propagação, bem como no tempo de processamento (CPU time) para guias de ondas. Fizemos a malha não-conforme com triângulos pequenos perto da região de maior interesse e triângulos grandes distantes dela. Com isto, o processo de análise se tornou mais demorado e preciso apenas onde foi necessário. Usando essa técnica onde o domínio de discretização foi dividido em dois subdomínios mestre e escravo, conseguimos uma melhoria dos resultados e uma redução considerável no tempo de processamento (CPU time) em relação ao tradicional Método dos Elementos Finitos (MEF).

Para um primeiro exemplo da aplicação dos Multiplicadores de Lagrange, fizemos um estudo e a implementação computacional do Método utilizando a Técnica de Integração Analítica com interpolação de primeira ordem de forma a relaxar as condições de contorno com malha conforme [17].

O Método Multiplicadores de Lagrange é concebido a partir da minimização de um funcional do problema no domínio contínuo. Os sistemas finais para o Método Multiplicadores de Lagrange são mal condicionados e não positivos definidos. Fizemos diversas simulações para a comprovação prática, uma vez que o mal condicionamento do sistema para o método Multiplicadores de Lagrange poderia talvez produzir um resultado diferente para o cálculo dos modos dos guias. Entretanto, isto não foi observado, o Método levou a resultados bem precisos para os parâmetros.

A aplicação da Técnica de Integração Analítica foi feita com as integrais escritas nas coordenadas homogêneas do elemento finito. Desta forma, as matrizes são calculadas uma única vez, sendo independentes das dimensões do elemento e dependentes apenas do tipo e da ordem da aproximação utilizada. Além disso, o cálculo prévio e a armazenagem das matrizes, utilizando esta técnica possibilitou uma eficiente implementação de módulos processadores com adaptação automática da ordem de aproximação dos elementos finitos.

O Método Mortar foi obtido a partir da formulação do Método dos Multiplicadores de Lagrange. Embora o conceito do método Mortar seja implementar uma condição de acoplamento diretamente ao problema discretizado, o Método Multiplicadores de Lagrange é concebido a partir da minimização de um funcional do problema no domínio contínuo. Pode-se obter a partir da formulação do método Multiplicadores de Lagrange, se a numeração dos nós é efetuada tomando os nós pertencentes à interface em primeiro lugar, a condição de acoplamento do Método Mortar, o que demonstra que os dois métodos produzem o mesmo resultado. Os sistemas finais, entretanto, são bem diferentes: para o Mortar tem-se um sistema bem condicionado; para o Método Multiplicadores de Lagrange, como já exposto, o sistema final é mal condicionado e não é positivo definido.

Os resultados apresentados demonstraram que as formulações não-conformes Mortar usando Multiplicadores de Lagrange se mostraram eficazes na implementação pela qualidade dos resultados obtidos para os parâmetros com interpolação de primeira ordem em guias de ondas. A maior vantagem de usarmos os Multiplicadores de Lagrange está no fato de não precisarmos fazer a inversão da matriz  $C$  e a construção da Matriz de acoplamento  $A$ . Os Multiplicadores de Lagrange embora essenciais para assegurar a satisfação das condições Mortar, não se relacionam diretamente com a solução física do problema. Isto representa um dispêndio extra de memória e processamento. Mesmo assim, resultados razoáveis foram conseguidos com esta abordagem.

Como contribuições originais deste trabalho pode-se citar:

a) A implementação dos métodos Mortar e Multiplicadores de Lagrange a problemas de altas frequências;

b) O estudo sistemático do desempenho das formulações não-conformes implementadas na precisão do cálculo de parâmetros como frequência de corte em guias de ondas;

c) O uso da Técnica de Integração Analítica para implementação do Método Mortar e Multiplicadores de Lagrange;

d) Na etapa inicial deste trabalho foi implementado o Método dos Multiplicadores de Lagrange para relaxar as condições de contorno para as equações de Laplace e Helmholtz que resultou na apresentação do artigo “Analysis of the Lagrange Multipliers Method using the Technique of Analytical Integration Applied to Waveguides” [17]. Da aplicação do Método Mortar utilizando Multiplicadores de Lagrange resultou o artigo “Mortar Method using Lagrange Multiplier Applied to the Analysis of Waveguide Horseshoe-Shaped” [23].

O assunto não está esgotado e como continuação natural deste trabalho pode-se sugerir:

a) Implementar o método Mortar com Multiplicadores de Lagrange em um código Matlab para interpolação de primeira, segunda e terceira ordem;

b) A análise em guias de ondas de geometrias mais complexas;

c) O estudo do comportamento dos resultados para os cálculos dos parâmetros empregando interpolação de primeira ordem em um lado da interface e de ordem elevada do outro;

d) Aplicação em casos onde o acoplamento de guias ocorre.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Bernardi, C.; Maday, Y.; Patera, A., 1990. “A New Nonconforming Approach to Domain Decomposition: The Mortar Element Method”, In: *Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications* (1990). Pitman, 1990. p. 13-51.
- [2] Casarin, M.; Widlund, O. B., 1996. “A hierarchical Preconditioner for Mortar Finite Element Method, *Electronic transactions on Numerical Analysis*”, v.4 (Jun.), p.77-88.
- [3] Braess, D.; Dahmen, W.; Wieners, C., 1999. “A Multigrid Algorithm for the Mortar Finite Element Method, *SIAM Journal Numerical on Analysis*”, v.37, p. 48-69.
- [4] Wohlmuth, B. I., 2000. “A Multigrid Method for Saddle Point Problems Arising From Mortar Finite Element Discretizations, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*”, v. 11, p. 43-54.
- [5] Antunes, O. J.; Bastos, J. P. A.; Sadowski, N., 2005a. “Using Hierarchic Interpolation with Mortar Element Method for Electrical Machines Analysis”, *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 41, n.5 (May). p. 1472-1475.
- [6] Rapetti, F.; Maday, Y.; Bouillaut, F., 2002. “Eddy current calculations in three-dimensional moving structures”, *IEEE Transactions on Magnetics*, v.38, n.2, p. 613-616.
- [7] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L., *The Finite Elements Method*, McGraw-Hill International Editions, 1989, 4<sup>a</sup> edition.
- [8] F. Ben Belgacem, “The Mortar Finite Element Method with Lagrange Multipliers”, *Numerical Math.*, v. 84, 1999, p. 173-197.
- [9] Arlett, P. L.; Bahrani, K.; Zienkiewicz, O. C., “Applications of Finite Elements to the Solution of Helmholtz’s Equation,” *Proc. IEE*, v. 115, n.12, p. 1762-1766, 1968.
- [10] Silvester, P. P., “Finite-Element Solution of Homogeneous Waveguide Problems”, v. 38, p. 313-317, 1969.
- [11] Silvester, P. P., “A General High-Order Finite-Element Waveguide Analysis program,” *IEEE Transactions on microwave Theory Techniques*, v. MTT-17, n.4, p. 204-210, 1969.
- [12] Collin, R. E., *Engenharia de Micro-ondas*, Ed. Guanabara Dois , Rio de Janeiro, Brasil, 1979, Capítulo 3.
- [13] Silvester, P. P.; Ferrari, R. L., *Finite Elements for Electrical Engineers*, 2<sup>a</sup> edition, Cambridge University Press, 1990.

- [14] Silvester, P. P., "Tetrahedral Polynomial Finite Elements for the Helmholtz Equation," International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 4, p. 405-413, 1972.
- [15] Silvester, P. P., "Construction of triangular Finite Element Universal Matrices," International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 12, p. 237-244, 1978.
- [16] Csendes, Z. J., "A Finite Element Method for the General Solution of Ordinary Differential Equation", International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 9, p. 551-561, 1975.
- [17] Andrade Filho, M. M.; Ricardo Ganime Alves, Plínio. "Analysis of the Lagrange Multipliers using the Technique of Analytical Integration Applied to Waveguides", International Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC 2007.
- [18] Ortega, J. M., 1988, Introduction to Parallel and Vector Solution of Linear Systems, New York, Plenum Publishing Co..
- [19] Kraus, J. D.; Carver, K. R., Eletromagnetismo, 2ª edição, Ed. Guanabara Dois, 1978.
- [20] Jonathan Richard Shewchuk, Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator, in "Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering" (Ming C. Lin and Dinesh Manocha, editors), v. 1148, Lecture Notes in Computer Science, p. 203-222, Springer-Verlag, Berlin, May 1996.
- [21] Katok, V. B.; Kolomeytsev, V. A.; Yakovlev, V. V., "Eigenvalues and structure of the electromagnetic fields of a horseshoe-shaped waveguide", Radioelectron. Comm, Syst., v. 30, p. 15-20, January 1987.
- [22] Yakovlev, V. V.; Komarov, V. V.; Zheleznyak, A. R., "Analysis of Horseshoe-Shaped Waveguide with Dielectric in Capacitance Gap", IEEE Transactions on Magnetics, v. 29, n.2, march 1993.
- [23] Andrade Filho, M. M.; Ricardo Ganime Alves, Plínio. "Mortar Method Using Lagrange Multiplier Applied to the Analysis of Horseshoe-Shaped Waveguide", Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves (2010) 31: p. 422-429 , Springer, February 09, 2010.
- [24] Silvester, P. P.; Chari, M. V. K., "Finite solution of saturable magnetic field problems". IEEE Transaction on PAS, 89(7): 1642-50, Sep./Oct.1970.
- [25] Szabo, B. A.; Lee, G. C., "Derivation of stiffness matrices for problems in plane elasticity by Galerkin's Methods". International Journal of Numerical Methods in Engineering, v. 1, p. 301-310, 1969.

- [26] Zienkiewicz, O. C.; Parekh, C. J., "Transient field problems: two-dimensional and three-dimensional analysis by isoparametric finite elements. International Journal of Numerical Methods in Engineering", v. 2, n.1, p. 61-71, 1970.
- [27] Lyness, J. F.; Owen, D. R. J.; Zienkiewicz, O. C., "Three-dimensional magnetic field determination using a scalar potential. A finite element solution". Transactions on Magnetics. Institute of Electrical and Electronics Engineers, p. 1649-1656, 1977.
- [28] Belytschko, T., "A Survey of numerical methods and computer programs for dynamic structural analysis". Nuclear Engineering and Design, v. 37, n.1, p. 23-34, 1976.
- [29] Belytschko, T., "Efficient Large-Scale Nonlinear Transient Analysis by Finite Elements". International Journal of Numerical Methods in Engineering, v. 10, n.3, p. 579-596, 1976.
- [30] Rodger, D.; Lai, H. C.; Leonard, P. J., 1990. "Coupled Elements for Problems Involving Movement". IEEE Transactions on Magnetics, v. 26, n.2 (Mar.), p. 548-550.
- [31] Marechal, Y.; Meunier, G.; Coulomb, J. L., 1992. "A General Purpose Tool for Restoring Inter-Element Continuity". IEEE Transactions on Magnetics, v. 28, n.2 (Mar.), p. 1728-1731.
- [32] Rapetti, F.; Maday, Y.; Bouillault, F., 2002. "Eddy current calculations in three-dimensional moving structures". IEEE Transactions on Magnetics, v.38, n.2, p. 613-616.

## **APÊNDICES**

## **A - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL**

### **A.1 - Introdução**

A aplicação de formulações não-conformes do tipo Mortar a problemas de microondas é o objetivo básico do presente trabalho. Nesse contexto, as implementações computacionais foram realizadas com o intuito de permitir, com o menor custo de programação, o teste de várias formulações do MEF.

Rotinas para a fase de processamento e pré-processamento (modelo geométrico, malha, atribuição de propriedades dos materiais e imposição das condições de contorno) do MEF foram desenvolvidas e escritas para o pacote de processamento numérico Fortran. A facilidade de interação com sua linguagem, a possibilidade de manipular matrizes densas e esparsas de maneira direta, a existência de funções especializadas para a solução de problemas de autovalores e auto-vetores em sistemas matriciais esparsos apontam o Fortran como um excelente ambiente para a prototipação e teste de novos desenvolvimentos em formulações do MEF.

### **A.2 - Método Mortar utilizando Multiplicadores de Lagrange**

Os fluxogramas mostrados abaixo ilustram a implementação do Método Mortar utilizando Multiplicadores de Lagrange em um código computacional Fortran .

### **A.3 - Modo TEM (Equação de Laplace)**

Leitura do arquivo com a discretização do domínio.



Entrada de dados:

- Matriz Q (Equação 3.12)
- Matriz  $Q_{\text{amb}}$
- Leitura dos nós globais e coordenadas da malha global
- Leitura dos nós e coordenadas da malha dos elementos mestres
- Leitura dos nós e coordenadas da malha dos elementos escravos
- Leitura das condições de contorno Neumann e Dirichlet



Montagem da Matriz global S (Equação 3.10):

Para cada nó é percorrido todos os elementos e verificado se o mesmo participa ou não do nó global que está sendo calculado. Caso seja seu valor é considerado para a composição do valor do nó global.



Montagem dos Elementos da Matriz Globmort (Matriz C - Equação 4.13) dos elementos escravos e Globmort (Matriz D - Equação 4.14) dos elementos mestres e aplicação das condições Mortar.



Aplicando as Condições de Neumann na global S: Cada linha ou coluna correspondente a um nó Neumann é transposta para a linha e coluna do correspondente nó "imerge". Isso possibilita a utilização de matrizes Globais reduzidas desprezando-se as linhas e colunas.



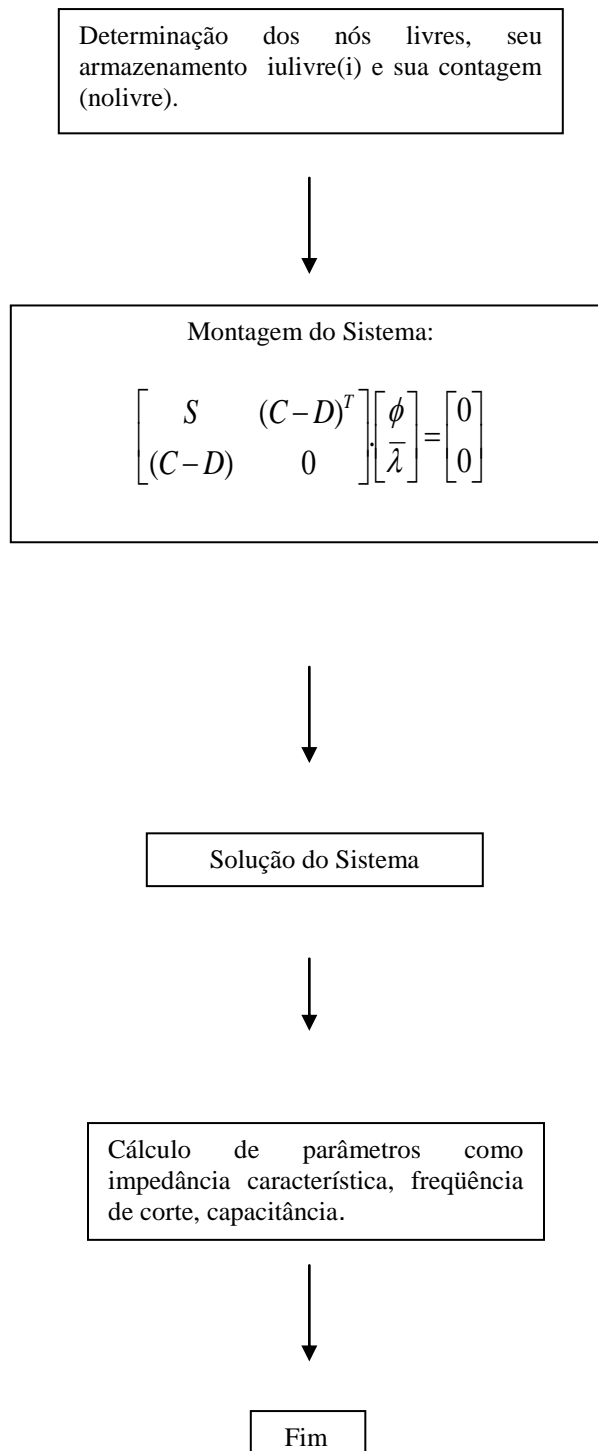


Figura A.1 - Fluxograma de implementação computacional do método Mortar para a equação de Laplace (Modo TEM).

#### A.4 - Modos TE e TM (Equação de Helmholtz)

