Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado em Matemática

Superfícies Regradas Desenvolvíveis Tipo Tempo e Tipo Espaço no Espaço de Minkowski

Fábio Nunes da Silva

Brasília
2013

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado em Matemática

Superfícies Regradas Desenvolvíveis Tipo Tempo e Tipo Espaço no Espaço de Minkowski

Fábio Nunes da Silva

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues

Brasília
2013

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Superfícies Regradas Desenvolvíveis Tipo Tempo e Tipo Espaço no Espaço de Minkowski.

por

Fábio Nunes da Silva*

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 07 de junho de 2013.

Comissão Examinadora:

Prof. Dra. Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues – MAT/UnB
(Orientadora)

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes – UFAM

Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araújo - MAT/UnB

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Agradecimentos

Inicialmente agradeço a Deus, por esta grande oportunidade.

À minha família. Em especial aos meus pais, José do Rozário da Silva e Cleuza Nunes de Oliveira Silva e aos meus irmãos Mônica Nunes da Silva e Fernando Célio da Silva, que sempre me apoiaram nos meus estudos.

À professora Luciana Maria Dias de Àvila Rodrigues por ter me dado a oportunidade de trabalhar sob a sua orientação, que me proporcionou um grande aprendizado. Agradeço pela disponibilidade, pela compreensão e pela paciência com a qual conduziu os meus estudos.

Aos professores e membros da banca examinadora, José Nazareno Vieira Gomes e e Kellcio Oliveira Araújo, que com suas críticas e sugestões tornaram o meu trabalho melhor.

Aos professores do Departamento de Matemática da UnB. Especialmente, aos que me deram aulas e aqueles que me atenderam quando precisei de ajuda. Aos funcionários, agradeço pela competência nos serviços prestados.

Aos amigos que me deram muito apoio nos momentos difíceis e também fizeram parte dos momentos de alegria. Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram com esta grandiosa conquista na minha vida.

Ao CNPq/CAPES pelo apoio financeiro concedido durante a elaboração deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, baseado em [11], [13] e [7] estudamos superfícies regradas tipo espaço ou tipo tempo no espaço de Minkowski. Inicialmente, encontramos expressões para o triedro de Frenet de curvas tipo tempo, tipo espaço ou tipo luz. Mostramos que uma superfície regrada tipo tempo ou tipo espaço é desenvovível se, e somente se, o parâmetro de distribuição é nulo. Então, para o caso em que os vetores de Frenet da diretriz não são tipo luz, mostramos que a superfície regrada tipo espaço ou tipo tempo é desenvolvível se, e somente se, a diretriz é uma hélice. No caso em que algum dos vetores de Frenet da diretriz é tipo luz, mostramos que a superfície regrada tipo tempo ou tipo espaço é desenvolvível se, e somente se, a torção é constante. Estudamos casos especiais, nos quais a superfície regrada tipo tempo ou tipo espaço é gerada por retas que estão no plano osculador, ou no plano normal, ou no plano retificante, ou na direção de algum dos vetores do triedro de Frenet.

Palavras chaves: Espaço de Minkowski, Parâmetro de Distribuição, Superfícies Regradas Desenvolvíveis.

Abstract

In this Work, based in [11], [13] and [7] we study timelike and spacelike ruled surfaces in Minkowski space. Initially we find expressions for Frenet trihedron of lightlike, spacelike or timelike curves. We show that a timelike or spacelike ruled surface is developable if and only if the distribution parameter is null. Then for the case where some of the Frenet vectors of the directrix aren't lightlike, we show that the timelike ou spacelike ruled surface is developable if and only if the directrix is helix. In the case where some of the Frenet vectors of the directrix is lightlike, we show that the timelike or spacelike ruled surface is developable if and only if the torsion is constant. We study special cases which the timelike or spacelike ruled surface is generated for straight line that are in osculating plane, or in normal plane, or in rectifying plane, or in the direction of some of the Frenet vectors.

Key Words: Minkowski Space, Distribution Parameter, Developable Ruled Surfaces.

Sumário

Introdução

Neste trabalho consideramos o *espaço de Minkowski* $\mathbb{R}^3_1$, como sendo o espaço Euclidiano 3-dimensional, $\mathbb{R}^3$, dotado da forma bilinear simétrica não degenarada.

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle_1 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \quad &: \quad \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \quad &\mapsto u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3, \end{aligned}$$

onde a métrica $\langle , \rangle_1$ é chamada *métrica* de Minkowski.

Este espaço foi introduzido por Hermann Minkowski em 1905. Maiores informações sobre este espaço podem ser obtidas nas referências [1], [5], [6], [9] e [10].

Uma superfície no espaço de Minkowski é chamada *tipo tempo* se a métrica de Minkowski é não degenerada. Por outro lado, uma superfície é chamada *tipo espaço* se a métrica de Minkowski é definida positiva [5]. A superfície formada por retas ao longo de uma curva é chamada de *superfície regrada*. Uma parametrização para a superfície regrada é dada seguinte forma

$$\begin{aligned} \chi : I \times \mathbb{R} \quad &: \quad \longrightarrow \mathbb{R}^3_1 \\ (s, t) \quad &\mapsto \chi(s, t) = \alpha(s) + tX(s), \end{aligned}$$

onde a curva $\alpha(s)$ é chamada a *diretriz* e as retas na direção de $X(s)$ são chamadas as *geratrizes* da superfície regrada. Se o plano tangente é constante ao longo de cada reta da superfície a superfície regrada é chamada *superfície regrada desenvolvível*.

O trabalho de Hacisalihoglu e Turgut [3], de 1997, apresenta um estudo sobre as superfícies regradas tipo espaço. Já o artigo de Yayli [12] define o *parâmetro de distribuição* para superfícies regradas tipo tempo e relaciona com as superfícies regradas desenvolvíveis tipo tempo.

Nosso trabalho é baseado nos artigos [11], [13] e [7] e aborda um estudo sobre as superfícies regradas desenvolvíveis utilizando o parâmetro de distribuição. Yayli [12] em 2000, definiu o parâmetro de distribuição para superfícies regradas tipo espaço, onde a diretriz é uma curva tipo espaço. Em 2011, Yayli e Saracoglu [13], estudaram as superfícies regradas tipo tempo e tipo espaço que tem como diretriz uma curva tipo espaço. No ano seguinte, Yayli e Saracoglu [7] estudaram as superfícies regradas tipo tempo ou tipo espaço que tem como diretriz uma curva tipo tempo.

No primeiro capítulo deste trabalho estudamos formas bilineares, curvas, superfícies regradas, linhas de estricção, parâmetro de distribuição, superfícies regradas desenvolvíveis e curvatura Gaussiana das superfícies regradas no espaço Euclidiano.

O segundo capítulo inicia com a definição do espaço de Minkowski e a demonstração das propriedades que serão ultilizadas no decorrer do texto. Estudamos as definições de curvas, superfícies regradas, linhas de estricção e parâmetro de distribuição no espaço de Minkowski. Também classificamos os vetores deste espaço como tipo tempo, tipo espaço e tipo luz. De maneira análoga, classificamos as curvas e superfícies neste espaço. Fazemos um estudo do triedro de Frenet para cada curva regular no espaço de Minkowski. Estudamos alguns resultados sobre hélices similares aos resultados obtidos no espaço Euclidiano. Além disso, falamos sobre superfícies regradas e também sobre o parâmetro de distribuição destas superfícies.

Iniciamos o terceiro capítulo com a definição de superfície regrada desenvolvível no espaço de Minkowski. Em seguida caracterizamos as superfícies regradas desenvolvível tipo tempo e tipo espaço utilizando o parâmetro de distribuição. Estudamos superfícies regradas desenvolvíveis tipo tempo ou tipo espaço que tem como diretriz, uma curva diferenciável parametrizada pelo comprimento de arco tipo tempo ou tipo espaço. Com o auxílio do parâmetro de distribuição, relacionamos as superfícies regradas desenvolvíveis tipo tempo ou tipo espaço com as propriedades da diretriz da superfície regrada. Na última seção, definimos a curvatura Gaussiana para o espaço de Minkowski e obtemos a curvatura Gaussiana para as superfícies regradas e as superfícies regradas desenvolvíveis.

No último capítulo apresentamos alguns exemplos de superfícies regradas. Primeiramente consideramos uma curva α tipo espaço no espaço de Minkowski de forma que α seja uma hélice e escrevemos algumas superfícies regradas desenvolvíveis e não desenvolvíveis que tem α como diretriz. Em seguida, consideramos a mesma curva anterior, só que no espaço Euclidiano. Vamos reparametrizá-la pelo comprimento de arco e mostraremos alguns exemplos de superfícies desenvolvíveis e não desenvolvíveis tendo essa curva como diretriz.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo estudamos alguns conceitos de curvas e superfícies no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$. Iniciamos com a definição de formas bilineares na Seção 1.1, seguindo na Seção 1.2 com o estudo de curvas e superfícies parametrizadas em $\mathbb{R}^3$. Na seção 1.3, definimos superfícies regradas e superfícies regradas desenvolvíveis em $\mathbb{R}^3$. Para finalizar o capítulo, analisamos a curvatura de Gauss das superfícies regradas. Os resultados apresentados estão baseados nas referências [2], [4] e [8].

1.1 Formas Bilineares

Iniciamos estudando as formas bilineares.

Definição 1 *Sejam V,$\overline{V}$ e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma aplicação $\varphi : V \times \overline{V} \longrightarrow W$ definida por $\varphi(x,y)$, chama-se forma bilinear, se dados $x, x' \in V$ e $y, y' \in \overline{V}$, φ satisfaz as seguintes propriedades:*

$$\begin{aligned}
\varphi(x + x', y) &= \varphi(x, y) + \varphi(x', y) \\
\varphi(x, y + y') &= \varphi(x, y) + \varphi(x, y') \\
\varphi(\alpha x, y) &= \alpha\varphi(x, y), \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \\
\varphi(x, \alpha y) &= \alpha\varphi(x, y), \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Uma forma bilinear é chamada positiva se $\varphi(x,x) \geq 0$ e $\varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Dizemos que φ é não degenerada se $\varphi(v,w) = 0, \forall w \in \overline{V}$, então $v = 0$.

Exemplo 1 Considere $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x,y) = \langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ (produto interno usual de $\mathbb{R}^3$), onde $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$. Então φ é uma forma bilinear definida positiva.

De fato, tomando $x' = (x_1', x_2', x_3') \in \mathbb{R}^3$, temos que

$$\begin{array}{rcl}
\varphi(x + x', y) & = & (x_1 + x_1')y_1 + (x_2 + x_2')y_2 + (x_3 + x_3')y_3 \\
& = & x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1'y_1 + x_2'y_2 + x_3'y_3 \\
& = & \varphi(x, y) + \varphi(x', y), \\
\varphi(x, y + x') & = & x_1(y_1 + x_1') + x_2(y_2 + x_2') + x_3(y_3 + x_3') \\
& = & x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' \\
& = & \varphi(x, y) + \varphi(x, x'), \\
\varphi(\alpha x, y) & = & (\alpha x_1)y_1 + (\alpha x_2)y_2 + (\alpha x_3)y_3 = \alpha(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = \alpha\varphi(x, y), \\
\varphi(x, \alpha y) & = & x_1(\alpha y_1) + x_1(\alpha y_2) + x_3(\alpha y_3) = \alpha(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = \alpha\varphi(x, y).
\end{array}$$

Além disso $\varphi(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$ e $\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Leftrightarrow x = (0, 0, 0)$.

Exemplo 2 Considere $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x, y) = \langle x, y\rangle_1 = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$. De modo análogo ao exemplo anterior, prova-se que é bilinear, mas não é uma forma bilinear positiva, pois tomando $x = (1, 0, 1)$ obtemos $\varphi(x, x) = 1 - 1 = 0$.

1.2 Curvas e Superfícies Parametrizadas em $\mathbb{R}^3$

Nesta seção, estudamos as propriedades das curvas e superfícies parametrizadas em $\mathbb{R}^3$ que serão úteis para o desenvolvimento do texto. Esta seção possui como texto base a referência [8].

Definição 2 *i)Uma curva parametrizada em $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$.*
ii)Uma curva parametrizada $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é dita diferenciável se as funções coordenadas $x(t), y(t)$ e $z(t)$ forem diferenciáveis.
iii)A curva α é regular se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Neste capítulo serão consideradas apenas curvas parametrizadas, que possuem todas as suas derivadas contínuas.

Definição 3 *Dado um $x \in \mathbb{R}^3$, o número $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ é chamado comprimento de x. Se $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular parametrizada, a função real*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)| dt$$

é chamada comprimento de arco da curva de t_0 a t. Dizemos que a curva regular está parametrizada pelo comprimento de arco, se $s(t) = t - t_0$.

Quando a curva é regular temos o seguinte resultado.

Lema 1 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $s : I \longrightarrow s(I)$ a função comprimento de arco. Então existe uma função h inversa de s definida em um intervalo aberto $J = s(I)$ e $\beta = \alpha \circ h : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma reparametrização de α tal que $|\beta'(s)| = 1$.*

Demonstração: Como $\frac{ds}{dt} = s'(t) = |\alpha'(t)| > 0$ para todo $t \in I$, assim s é um difeomorfismo sobre $s(I)$, logo existe a inversa h de s, isto é, $h(s(t)) = t$ e ultilizando a regra da cadeia para derivar em relaçao a t, obtemos

$$\frac{dh}{ds}\frac{ds}{dt} = 1 \Rightarrow \frac{dh}{ds} = \frac{1}{|\alpha'(t)|}.$$

Assim tomando $\beta = \alpha \circ h$, temos

$$\beta'(s) = \frac{d\beta}{ds} = \frac{d\alpha}{dt}\frac{dh}{ds} = \frac{1}{|\alpha'(t)|}\alpha'(t),$$

portanto $|\beta'(s)| = 1$. $\square$

O lema acima diz ainda que toda curva regular pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco.

Definição 4 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Definimos:*
i) $\alpha'(s) = T(s)$, o vetor tangente da curva α em $s \in I$.
ii) O número $k(s) = |\alpha''(s)|$, a curvatura de α em $s \in I$.
iii) Se $k(s) > 0$, $N(s) = \alpha''(s)/k(s)$ o vetor normal de α em $s \in I$.
iv) $B(s) = T(s) \wedge N(s)$, o vetor binormal de α em $s \in I$.
v) O número $\tau(s) = -\langle N'(s), B(s)\rangle$, a torção de α em $s \in I$.

Para cada $s \in I$ os vetores $T(s), N(s)$ e $B(s)$ formam uma base ortonormal em $\alpha(s)$ e são chamados *triedro de Frenet* da curva α.

Cada par de vetores do triedro de Frenet determina um plano. O plano de $\mathbb{R}^3$ que contém $\alpha(s)$ e é normal ao vetor $T(s)$ é chamado de *plano normal* a curva $\alpha(s)$. O plano que contém $\alpha(s)$ e que é normal ao vetor $B(s)$ é chamado de *plano osculador*. O plano que contém $\alpha(s)$ e que é normal ao vetor $N(s)$ é chamado de *plano retificante*.

Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco com $k(s) > 0$. Considere $\{T(s), N(s), B(s)\}$ a base de Frenet ao longo da curva α. Então podemos escrever os vetores T', N', B' nesta base da seguinte forma:

$$\begin{cases} T' &= kN \\ N' &= -kT - \tau B \\ B' &= \tau N, \end{cases} \tag{1.1}$$

Estas equações são chamadas *equações de Frenet*.

Algumas curvas em $\mathbb{R}^3$ possuem propriedades interessantes como veremos na definição a seguir.

Definição 5 *Uma curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma hélice, se a função $\frac{\langle \alpha'(s), v\rangle}{|\alpha'(s)||v|}$ é constante para todo $s \in I$, onde $v \in \mathbb{R}^3$ é um vetor não nulo.*

Quando a curvatura e a torção de α são não nulas. Afirmamos que α é uma hélice o que é equivalente a dizermos que a função $\frac{k}{\tau}$ é constante.

A seguir definiremos superfícies parametrizadas em $\mathbb{R}^3$.

Definição 6 *Uma superfície parametrizada regular é uma aplicação $\chi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\chi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, onde U é um conjunto aberto, tal que:*
i) χ é diferenciável de classe C^∞.
ii) Para todo $q = (u, v) \in U$, a diferencial de χ em q, $d\chi_q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora.

Quando χ é uma superfície parametrizada regular $d\chi_q(\mathbb{R}^2)$ é um subespaço de dimensão dois em $\mathbb{R}^3$. Este espaço é chamado *plano tangente* da superfície no ponto $p = \chi(q)$. Como $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ e $d\chi_q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear injetora temos que $\{d\chi_q(e_1) = \chi_u, d\chi_q(e_2) = \chi_v\}$ é uma base para o plano tangente de χ. Além disso, podemos definir o *vetor normal* a superfície da seguinte forma

$$\eta(u, v) = \frac{\chi_u \wedge \chi_v}{|\chi_u \wedge \chi_v|}. \tag{1.2}$$

Quando em $p = \chi(q)$ a transformação linear $d\chi_q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ não é injetora dizemos que p é um *ponto singular*, isto é $\chi_u \wedge \chi_v = 0$.

Observação: No capítulo 2 serão obtidas as equações de Frenet para curvas no espaço de Minkowski e também a definição de superfície parametrizada regular para o espaço de Minkowski.

1.3 Superfícies Regradas em $\mathbb{R}^3$

Nesta seção, estudamos o conceito de superfícies regradas em $\mathbb{R}^3$. Intuitivamente essas superfícies regradas são um conjunto de pontos formados por retas ao longo de curvas em $\mathbb{R}^3$. Para o estudo dessas superfícies ultilizamos o conceito de família a 1-parâmetro de retas.

Uma família a 1-parâmetro de retas $\{\alpha(t), X(t)\}$ é uma correspondência que associa a cada $t \in I$ um ponto $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ e um vetor $X(t) \in \mathbb{R}^3$, com $X(t) \neq 0$ e tais que $\alpha(t)$ e $X(t)$ sejam ambos diferenciáveis em t, onde I é um intervalo aberto da reta real.

Definição 7 *Dada um família a 1-parâmetro de retas $\{\alpha(t), X(t)\}$ a superfície S, parametrizada por*

$$\chi(t, v) = \alpha(t) + vX(t), \ \ t \in I, \ \ v \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

é chamada superfície regrada gerada pela família $\{\alpha(t), X(t)\}$. A curva $\alpha(t)$ é chamada de diretriz da superfície e as retas L_t que passam por $\alpha(t)$ e estão na direção de $X(t)$ são chamadas de geratrizes da superfície.

Vamos supor que $|X(t)| = 1$, com $t \in I$. Além disso suponha também que $|X'(t)| \neq 0$. O lema a seguir mostra que, com essas hipóteses é possível reparametrizar a superfície regrada de forma que a diretriz seja ortogonal as geratrizes.

Lema 2 *Seja S uma superfície regrada parametrizada por $\chi(t, v) = \alpha(t) + vX(t)$, com $|X| = 1$ e $|X'| \neq 0$. Então é possível reparametrizar S de forma única, de modo que $\chi(t, v) = \beta(t) + vX(t)$, com $\langle \beta'(t), X'(t) \rangle = 0$*

Demonstração: Suponha a existência de tal curva $\beta(t) = \alpha(t) + u(t)X(t)$. Para simplicidade dos cálculos escrevamos $\beta(t) = \beta, \ \alpha(t) = \alpha, \ u(t) = u, \ X(t) = X$. Assim

$$\beta = \alpha + uX \Rightarrow \beta' = \alpha' + u'X + uX',$$

e

$$0 = \langle X', \beta' \rangle = \langle X', \alpha' \rangle + u' \langle X', X \rangle + u \langle X', X' \rangle.$$

Como $|X| = 1$ e $|X'| \neq 0$, vamos deduzir que

$$u = -\frac{\langle X', \alpha' \rangle}{\langle X'X' \rangle},$$
$$\beta(t) = \alpha(t) - \frac{\langle X', \alpha' \rangle}{\langle X'X' \rangle} X(t).$$

Assim $\beta(t) \in \chi(t, v) \ \forall t \in I$. Para mostrar que β está bem definida precisamos verificar que não depende da parametrização. Seja $\overline{\alpha}$ outra diretriz da superfície regrada, podemos escrever

$$\chi(t, v) = \alpha(t) + vX(t) = \overline{\alpha}(t) + sX(t), \tag{1.4}$$

para alguma função $s = s(v)$. Assim

$$\beta = \alpha - \frac{\langle \alpha', X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} X, \quad \overline{\beta} = \overline{\alpha} - \frac{\langle \overline{\alpha}', X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} X,$$

daí

$$\beta - \overline{\beta} = (\alpha - \overline{\alpha}) - \frac{\langle \alpha' - \overline{\alpha}', X' \rangle}{\langle X', X' \rangle}.$$

Da equação (1.4) $\alpha - \overline{\alpha} = (s - v)X$, assim $\alpha' - \overline{\alpha'} = (s - v)X'$. A partir desses resultados temos que

$$\begin{aligned}
\beta - \overline{\beta} &= (\alpha - \overline{\alpha}) + \frac{\langle \alpha' - \overline{\alpha}', X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} X \\
&= (s - v)X - \frac{\langle (s - v)X', X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} X \\
&= (s - v)X - (s - v)\frac{\langle X', X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} X \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto $\beta = \overline{\beta}$. □

A curva β dada no Lema (2) é chamada *linha de estricção* da superfície regrada S. Desse modo podemos escrever a parametrização da superfície regrada da seguinte maneira:

$$\chi(t, v) = \beta(t) + vX(t), \tag{1.5}$$

onde β é a linha de estricção. Observe que $\langle \beta', X' \rangle = \langle X', X \rangle = 0$, consequentemente $\beta' \wedge X = \lambda X'$ para alguma função real λ. Aplicando o produto interno por X' em ambos os lados temos

$$\lambda = P_X = \frac{\langle \beta' \wedge X, X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} = \frac{det(\beta', X, X')}{\langle X', X' \rangle}, \tag{1.6}$$

onde $\langle \beta' \wedge X, X' \rangle = det(\beta', X, X')$.

A função real P_X é chamada *parâmetro de distribuição* da superfície regrada. Uma aplicação do parâmetro de distribuição é dada pelo lema a seguir.

Lema 3 *Os pontos singulares da superfície regrada estão sobre a linha de estricção.*

Demonstração: Seja $\chi(t, v) = \beta(t) + vX(t)$ uma parametrização da superfície regrada S dada pelo Lema 2, derivando, obtemos que

$$\begin{aligned}
\chi_t &= \beta' + vX' \\
\chi_v &= X \\
\chi_t \wedge \chi_v &= \beta' \wedge X + vX' \wedge X.
\end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
\langle \chi_t \wedge \chi_v, \chi_t \wedge \chi_v \rangle &= \langle \beta' \wedge X + vX' \wedge X, \beta' \wedge X + vX' \wedge X \rangle \\
&= \langle \lambda X' + vX' \wedge X, \lambda X' + vX' \wedge X \rangle \\
&= \lambda^2 \langle X', X' \rangle + v^2 \langle X', X' \rangle \\
&= (\lambda^2 + v^2) \langle X', X' \rangle,
\end{aligned}$$

A equação acima diz que $(\chi_t \wedge \chi_v)(p) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + v^2 = 0$. Portanto $p \in S$ é um ponto singular de S se, e somente se, $\lambda(p) = 0$ e $v = 0$. Mas se $v = 0$ a parametrização se resume à $\chi(t, v) = \beta(t)$. Concluímos que os pontos singulares da superfície regrada estão sobre a linha de estricção. $\square$

Definição 8 *As superfícies regradas que possuem o plano tangente constante ao longo de cada geratriz são chamadas superfícies regradas desenvolvíveis.*

O lema a seguir caracteriza as superfícies regradas desenvolvíveis utilizando o parâmetro de distribuição.

Lema 4 *Seja $\chi(t, v) = \beta(t) + vX(t)$ uma parametrização para a superfície regrada S em $\mathbb{R}^3$. Então S é desenvolvível se, e somente se, o parâmetro de distribuição é nulo.*

Demonstração: Seja

$$\chi(t, v) = \beta(t) + vX(t)$$

uma parametrização para S. Escrevendo o vetor normal $\eta(t, v) = \lambda(t, v)\chi_t \wedge \chi_v$, onde $\lambda(t, v) = \frac{1}{|\chi_t \wedge \chi_v|}$. Derivando em relação a v, temos que

$$\eta_v = \lambda_v \chi_t \wedge \chi_v + \lambda(\chi_{tv} \wedge \chi_v + \chi_t \wedge \chi_{vv}), \tag{1.7}$$

onde

$$\begin{aligned}
\chi_{tv} &= X', \\
\chi_{vv} &= 0.
\end{aligned}$$

Considere S uma superfície desenvolvível então o plano tangente é constante ao longo de cada reta da superfície. Consequentemente o vetor normal da superfície é constante ao longo destas retas. Logo $\eta_v = 0$, assim $\langle \eta_v, X' \rangle = 0$, ou ainda

$$\begin{aligned} 0 = \langle \eta_v, X' \rangle &= \langle \lambda_v \chi_t \wedge \chi_v + \lambda \chi_{tv} \wedge \chi_v, X' \rangle \\ &= \lambda_v \langle \beta' \wedge X + vX' \wedge X, X' \rangle + \langle \lambda X' \wedge X, X' \rangle \\ &= \lambda_v \langle \beta' \wedge X, X' \rangle. \end{aligned}$$

observe que $\lambda_v \neq 0$, pois

$$\lambda_v = -\frac{v\langle X' \wedge X, X' \wedge X \rangle}{|\chi_u \wedge \chi_v|^{\frac{3}{2}}} \neq 0$$

Portanto o parâmetro de distribuição é nulo.

Reciprocamente observe que mostrar que a superfície é desenvolvível equivale a verificar que $\langle \eta_v, \chi_t \rangle = \langle \eta_v, \chi_v \rangle = 0$, uma vez que $|\eta|^2 = \langle \eta, \eta \rangle = 1 \Rightarrow \langle \eta_v, \eta \rangle = 0$. Usando que o parâmetro de distribuição deve ser nulo e a equação (1.7), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \eta_v, \chi_t \rangle &= \langle \eta_v, \beta' + vX' \rangle \\ &= \langle \lambda_v \chi_t \wedge \chi_v + \lambda \chi_{tv} \wedge \chi_v, \beta' + vX' \rangle \\ &= \lambda_v \langle \beta' \wedge X + vX' \wedge X, \beta' + vX' \rangle + \langle \lambda X' \wedge X, \beta' + vX' \rangle \\ &= \lambda_v v \langle X' \wedge X, \beta' \rangle + \lambda \langle X' \wedge X, \beta' \rangle \\ &= (v\lambda_v + \lambda) \langle X' \wedge X, \beta' \rangle \\ &= -(v\lambda_v + \lambda) \langle \beta' \wedge X, X' \rangle, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \eta_v, \chi_v \rangle &= \langle \eta_v, X \rangle \\ &= \langle \lambda_v \chi_t \wedge \chi_v + \lambda \chi_{tv} \wedge \chi_v, X \rangle \\ &= \lambda_v \langle \beta' \wedge X + vX' \wedge X, X \rangle + \langle \lambda X' \wedge X, X \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo $\langle \eta_v, \chi_t \rangle = \langle \eta_v, \chi_v \rangle = 0$, ou seja η é constante ao longo de cada reta da superfície. Portanto S é uma superfície regrada desenvolvível. $\square$

Exemplo 3 Considere $\chi(u, v) = (vcos(u), vsen(u), au)$, onde $a \neq 0 \in \mathbb{R}$ uma parametrização do Helicóide. Vamos mostrar que o Helicóide é uma superfície regrada não desenvolvível.

De fato, podemos reescrever a parametrização do Helicóide da seguinte forma

$$\chi(u, v) = (0, 0, au) + v(cos(u), sen(u), 0).$$

A linha de estricção de X é dada por

$$\beta(u) = (0, 0, au),$$

pois $\langle \beta', X' \rangle = \langle (0, 0, a), (-sen(u), cos(u), 0) \rangle = 0$ e o parâmetro de distribuição de X é

$$P_X = \frac{det(\beta', X, X')}{\langle X', X' \rangle} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ cos(u) & sen(u) & 0 \\ -sen(u) & cos(u) & 0 \end{vmatrix} = a.$$

Observe que esta superfície regrada não é desenvolvível, pois $P_X = a \neq 0$.

Até o momento o estudo das superfícies regradas desenvolvíveis foi dado de tal forma que, tomando uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, $|X| = 1$ e $|X'| \neq 0$. Mas observe que para cada ponto da curva temos o triedro de Frenet que forma uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, então podemos tomar X escrito como combinação linear dos vetores do triedro de Frenet e a partir daí obter informações sobre a superfície regrada. A seguir faremos tais considerações.

Considere $\alpha(s)$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Seja $\chi(s, v) = \alpha(s) + vX(s)$ uma superfície regrada, onde as geratrizes estão na direção de $X = x_1T + x_2N + x_3B$ ao longo de $\alpha(s)$, com x_1, x_2, x_3 constantes reais não nulas, $|X| = 1$ e $|X'| \neq 0$.

Com base nestes conceitos, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 1 *Seja S uma superfície regrada que tem como diretriz uma curva regular α parametrizada pelo comprimento de arco e as geratrizes na direção de $X(s) = x_1T(s) + x_2N(s) + x_3B(s)$, com $|X| = 1$ e $|X'| \neq 0$. Então S é desenvolvível se, e somente se, α é uma hélice que satifaz a equação*

$$\frac{k}{\tau} = -\frac{x_2^2 + x_3^2}{x_1 x_3}.$$

Demonstração: Usando o triedro de Frenet dado pelas equações (1.1), podemos obter uma expressão para X' da seguinte forma:

$$X' = x_1T' + x_2N' + x_3B' = x_1kN - x_2kT - x_2\tau B + x_3\tau N = -x_2kT + (x_1k + x_3\tau)N - x_2\tau B.$$

Assim o parâmetro de distribuição é escrito como

$$
\begin{aligned}
P_X = \frac{det(\alpha', X, X')}{\langle X', X' \rangle} &= \frac{1}{\langle X', X' \rangle} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2 k & x_1 k + x_3 \tau & -x_2 \tau \end{vmatrix} \\
&= \frac{-x_2^2 \tau - x_1 x_3 k - \tau x_3^2}{(x_2 k)^2 + (x_1 k + x_3 \tau)^2 + (x_2 \tau)^2} \\
&= \frac{-\tau(x_2^2 + x_3^2) - x_1 x_3 k}{(x_2 k)^2 + (x_1 k + x_3 \tau)^2 + (x_2 \tau)^2}. \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 4, a superfície é desenvolvível se, e somente se,

$$\frac{k}{\tau} = -\frac{x_2^2 + x_3^2}{x_1 x_3}.$$

□

Para obter o resultado acima foi essencial que $X = x_1 T + x_2 N + x_3 B$ com $x_i; i = 1, 2, 3$ fossem constantes não nulas, mas a equação (1.8) permite investigar o problema mesmo que alguns x_i sejam nulos. A situação em que isto ocorre são chamadas de casos especiais e serão tratados na seção seguinte.

1.3.1 Casos Especiais

O primeiro resultado dos casos especiais será quando X está na direção de alguns do vetores de Frenet e serão dados no seguinte teorema.

Teorema 2 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e $\chi(s, v) = \alpha(s) + vX(s)$ uma superfície regrada que tem α como diretriz. Então vale as seguintes afirmações.*
i) Se $X = T$ a superfície regrada é desenvolvível.
ii) Se $X = N$, a superfície regrada é desenvolvível se, e somente se, é parte de um plano.
iii) Se $X = B$ a superfície regrada não é desenvolvível.

Demonstração: i) Se $X = T$, temos $x_1 = 1$ e $x_2 = x_3 = 0$. Substituindo na equação (1.8), temos que

$$P_X = 0.$$

ii) Supondo que $X = N$, temos $x_1 = x_3 = 0$ e $x_2 = 1$. Segue da equação (1.8) que

$$P_X = -\frac{\tau}{k^2 + \tau^2}.$$

Portanto $P_X = 0 \Leftrightarrow \tau = 0$. Assim α é uma curva planar no plano osculador. Como X também está no plano osculador a superfície regrada desenvolvível é parte de um plano.

iii) Se $X = B$, temos $x_1 = x_2 = 0$ e $x_3 = 1$. Substituindo na equação (1.8), temos que

$$P_X = \frac{-\tau}{\tau^2} = \frac{-1}{\tau} \neq 0 \ \ \forall (s,v) \in I \times \mathbb{R}.$$

Como $P_X \neq 0$ a superfície regrada não pode ser desenvolvível. $\square$

Quando X está em algum dos planos formados pelos vetores de Frenet, temos o seguinte teorema.

Teorema 3 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e $\chi(s,v) = \alpha(s) + vX(s)$ uma superfície regrada que tem α como diretriz. Então vale as seguintes afirmações.*
i) Se X está no plano normal, a superfície regrada é desenvolvível se, e somente se, $\tau = 0$.
ii) Se X está no plano osculador, a superfície regrada é desenvolvível se, e somente se, $X = T$ ou a superfície regrada é parte de um plano.
iii) Se X está no plano retificante, a superfície regrada é desenvolvível se, e somente se, $X = T$.

Demonstração: i) Se X está no plano normal, temos $x_1 = 0$ e $X = x_2N + x_3B$ com $x_2^2 + x_3^2 = 1$. Utilizando a equação (1.8)

$$P_X = \frac{-(x_2^2 + x_3^2)\tau}{x_2^2(k^2 + \tau^2) + x_3^2\tau^2} = \frac{-\tau}{x_2^2k^2 + \tau^2}.$$

Logo $P_X = 0 \Leftrightarrow \tau = 0$.
ii) Supondo X no plano osculador, temos $x_3 = 0$ e $X = x_1T + x_1N$ com $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Substituindo na equação (1.8) temos que o parâmetro de distribuição é dado por

$$P_X = -\frac{x_2^2\tau}{x_2^2(k^2 + \tau^2) + x_1^2k^2} = -\frac{x_2^2\tau}{k^2 + x_2^2\tau^2}.$$

Logo $P_X = 0 \Leftrightarrow x_2^2\tau = 0$. Se $x_2 = 0$ o resultado segue do Teorema 2. Mas se $\tau = 0$, temos que α é uma curva plana no plano osculador. Como X também está no plano osculador a superfície regrada é parte de um plano.
iii) Se X está no plano retificante, temos $x_2 = 0$, $X = x_1T + x_3B$ e $x_1^2 + x_3^2 = 1$. Substituindo na equação (1.8) temos que o parâmetro de distribuição é dado por

$$P_X = \frac{-x_3^2\tau - x_1kx_3}{(x_1k + x_3\tau)^2} = \frac{-x_3(x_3\tau + x_1k)}{(x_1k + x_3\tau)^2} = \frac{-x_3}{(x_1k + x_3\tau)}.$$

Portanto $P_X = 0$ se, e somente se, $x_3 = 0$. Além disso, α é uma linha de estricção, pois $\langle \alpha', X' \rangle = \langle T, kN \rangle = 0$. $\square$

1.4 A Curvatura de Gauss das Superfícies Regradas

Para finalizar este capítulo, iremos analisar nesta seção a curvatura de Gauss das superfícies regradas.

Considere $\chi(t, v) = \beta(t) + vX(t)$ uma superfície regrada. Sabemos que em cada ponto ponto regular da superfície a curvatura gaussiana é defina por

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

onde $E = \langle \chi_t, \chi_t \rangle$, $G = \langle \chi_v, \chi_v \rangle$, $F = \langle \chi_t, \chi_v \rangle$ $e = \langle \chi_{tt}, \eta \rangle$, $g = \langle \chi_{vv}, \eta \rangle$, $f = \langle \chi_{tv}, \eta \rangle$ são os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental. No nosso caso

$$\chi_{tt} = \beta'' + vX'', \;\; \chi_{tv} = X', \;\; \chi_{vv} = 0. \tag{1.9}$$

Assim

$$\langle \chi_{vv}, \eta \rangle = g = 0$$

e

$$K = \frac{-f^2}{EG - F^2}.$$

Também da equação 1.9 temos

$$f = \langle \chi_{tv}, \eta \rangle = \langle X', \frac{\chi_t \wedge \chi_v}{|\chi_t \wedge \chi_v|} \rangle = \langle X', \frac{\beta' \wedge X}{|\chi_t \wedge \chi_v|} \rangle = \frac{\lambda |X'|^2}{|\chi_t \wedge \chi_v|},$$

como

$$(\lambda^2 + v^2)|X'|^2 = |\chi_t \wedge \chi_v|^2 = \langle \chi_t \wedge \chi_v, \chi_t \wedge \chi_v \rangle = EG - F^2,$$

temos

$$K = \frac{-\lambda^2 |X'|^4}{(\lambda^2 + v^2)^2 |X'|^4} = \frac{-\lambda^2}{(\lambda^2 + v^2)^2}. \tag{1.10}$$

Portanto a curvatura Gaussiana é não positiva e usando o Lema 4 temos que K é identicamente nula se, e somente se, S for uma superfície regrada desenvolvível.

Nos próximos capítulos veremos estes conceitos e resultados para o espaço de Minkowski.

Capítulo 2

Espaço de Minkowski

Neste capítulo vamos definir o espaço de Minkowski e estudar suas propriedades. Além disso vamos fazer um estudo sobre as equações de Frenet para as curvas e sobre as superfícies parametrizadas no espaço de Minkowski. Este capítulo é baseado nas referências [11], [13], [7] e [10].

2.1 Definição e Propriedades

Nesta seção apresentaremos a definição do espaço de Minkowski e suas propriedades.

Definição 9 *O Espaço de Minkowski é o espaço métrico* $(\mathbb{R}^3_1, \langle , \rangle_1)$ *onde dados dois vetores* $u = (u_1, u_2, u_3)$ *e* $v = (v_1, v_2, v_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *a forma bilinear é dada por*

$$\langle u, v \rangle_1 = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3. \tag{2.1}$$

A forma bilinear acima $\langle , \rangle_1$ *é chamada métrica de Minkowski.*

A métrica de Minkowski é também conhecida como métrica de Lorentz. Observe que a forma bilinear $\langle u, u \rangle_1 = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2$ é não definida positiva, porém é não degenerada, isto é, $\langle u, v \rangle_1 = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^3_1$, então $v = 0$. No espaço de Minkowski podemos classificar os vetores da sequinte forma.

Definição 10 *Um vetor* $v \in \mathbb{R}^3_1$ *é chamado:*
1. tipo tempo, se $\langle v, v \rangle_1 < 0$,
2. tipo espaço, se $\langle v, v \rangle_1 > 0$ *ou* v *é o vetor nulo,*
3. tipo luz se, $\langle v, v \rangle_1 = 0$ *e* $v \neq 0$.

Alguns conjuntos neste espaço merecem atenção especial, como o conjunto dos vetores tipo tempo, o conjunto dos vetores tipo luz, também conhecido de *cone de luz* e o

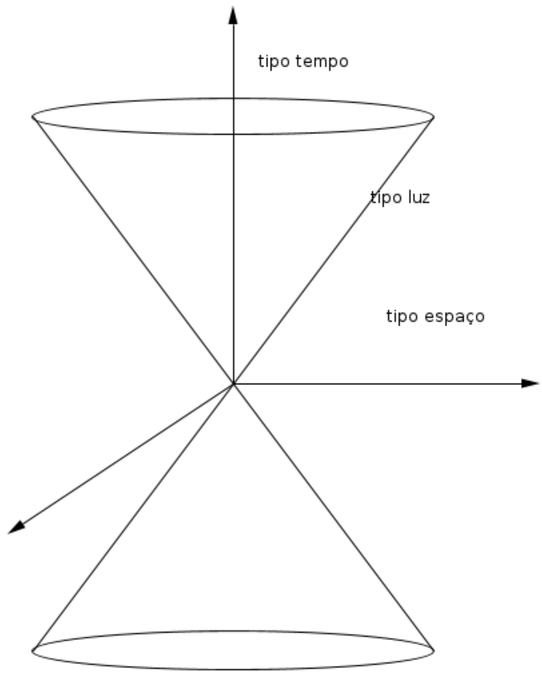

Figura 2.1: Cone de Luz

conjunto dos vetores tipo espaço, dados por:

$$\begin{aligned} T &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1; x^2 + y^2 - z^2 < 0\} \\ C &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1; x^2 + y^2 - z^2 = 0\} - \{(0, 0, 0)\} \\ E &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1; x^2 + y^2 - z^2 > 0\} \cup \{(0, 0, 0)\}. \end{aligned}$$

Observe que $T \cup C \cup E = R^3_1$. Estes conjuntos estão representados na Figura 2.1.

O espaço de Minkowski desperta muitas curiosidades. Tomemos por exemplo, $e_1 = (1, 0, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$, vetores tipo espaço e tipo tempo respectivamente, assim $e_1 + e_3 = (1, 0, 1)$ é um vetor tipo luz, pois $\langle(1, 0, 1), (1, 0, 1)\rangle_1 = 0$ e $\langle e_1, e_3\rangle_1 = 0$. Observações como esta nos motiva a estudar as propriedades deste espaço. Iniciamos este estudo com a definição a seguir.

Definição 11 *a) Seja* $v \in \mathbb{R}^3_1$, *o comprimento de* v *é dado por,* $|v|_1 = \sqrt{|\langle v, v\rangle_1|}$. *Um vetor* $v \in \mathbb{R}^3_1$ *é dito unitário se* $|v|_1 = 1$.
b) Seja $U \subset \mathbb{R}^3_1$:
1. U é dito subespaço não degenerado se a métrica de Minkowski for não degenerada.
2. O subespaço ortogonal de U é descrito pelo conjunto

$$U^\perp = \{w \in \mathbb{R}^3_1; \langle u, w\rangle_1 = 0, \forall u \in U\}.$$

Dois vetores u e v são ortogonais se $\langle u, v\rangle_1 = 0$.

Na definição acima a relação entre um subespaço não degenerado e seu ortogonal está ligada à métrica. A proposição a seguir relaciona a dimensão dos dois espaços e o espaço ambiente.

Proposição 1 *Seja U um subespaço de $\mathbb{R}^3_1$ não degenerado. Então*
i) $dim(U^{\perp}) = dim(\mathbb{R}^3_1) - dim(U)$.
ii) $(U^{\perp})^{\perp} = U$.
iii) Se U é um subespaço não degenerado então $U^{\perp}$ é também não degenerado.

Demonstração: A verificação dessa proposição pode ser encontrada em [6]. □

Definição 12 *Seja $U \subset \mathbb{R}^3_1$ um subespaço.*
i) U é chamado ser tipo espaço, se a métrica de Minkowski induzida neste subespaço é definida positiva.
ii) U é chamado tipo tempo, se a métrica de Minkowski é não degenerada.
iii) U é chamado tipo luz ou nulo, se a métrica de Minkowski é degenerada.

A classificação dos subespaços de $\mathbb{R}^3_1$ é dado a seguir.

Proposição 2 *Seja $v \in \mathbb{R}^3_1$, então v é um vetor tipo tempo se, e somente se, $< v >^{\perp}$ é um subespaço tipo espaço e assim $\mathbb{R}^3_1 =< v > \oplus < v >^{\perp}$. Para vetores tipo espaço temos que se v é tipo espaço, se e somente se $< v >^{\perp}$ é um subespaço tipo tempo.*

Demonstração: Vamos mostrar que os vetores que compoem a base de $< v >^{\perp}$ são vetores tipo espaço. Da definição temos $U =< v >$ é um subespaço não degenerado, então da Proposição 1 temos que $U^{\perp}$ também é não degenerado. Logo $U^{\perp}$ não é tipo luz. Suponha por contradição, que existe $u \in U^{\perp}$ tipo tempo, tal que $\langle u, v\rangle_1 = 0$. Considere os vetores $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ e seja $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3_1$. Escrendo u e v nessa base, temos

$$u = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, \;\; v = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3,$$

onde $a_i, b_i; i = 1, 2, 3$ são números reais. Assim temos que

$$\begin{aligned}\langle u, u\rangle_1 &= a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 < 0,\\ \langle v, v\rangle_1 &= b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 < 0,\\ \langle u, v\rangle_1 &= a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3 = 0,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$a_1^2 + a_2^2 < a_3^2, \tag{2.2}$$
$$b_1^2 + b_2^2 < b_3^2, \tag{2.3}$$
$$a_1b_1 + a_2b_2 = a_3b_3. \tag{2.4}$$

Multiplicando as equações (2.2) e (2.3) temos:

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 < a_3^2b_3^2. \tag{2.5}$$

Elevando a equação (2.4) ao quadrado temos

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 = a_3^2b_3^2 \Longrightarrow a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 = a_3^2b_3^2 - 2a_1b_1a_2b_2. \tag{2.6}$$

Substituindo (2.6) em (2.5) temos que

$$a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_3^2b_3^2 - 2a_1b_1a_2b_2 < a_3^2b_3^2,$$

ou ainda

$$a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_2a_2b_1 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 < 0.$$

que é um absurdo. Logo $u \neq 0 \in \mathbb{R}_1^3$ tal que $\langle u, v\rangle_1 = 0$ é um vetor tipo espaço. Consideremos $\overline{B} = \{u_1, u_2\}$ uma base ortonormal de $U^\perp$ e v temos três vetores ortogonais e linearmente independentes, ou seja, estes três vetores formam uma base de $\mathbb{R}_1^3$. Portanto $\mathbb{R}_1^3 =< v > \oplus < v >^\perp$.
Reciprocamente se $< v >^\perp =< u_1, u_2 >$ é um subespaço tipo espaço então v seria o complemento da base de $\mathbb{R}_1^3$ e obrigatoriamente seria um vetor tipo tempo, pois do contrário teríamos três vetores linearmente independentes tipo espaço.
Analogamente mostramos que, v é um vetor tipo espaço se, e somente se, $< v >^\perp$ é um subespaço tipo tempo. $\square$

De modo geral, para qualquer subespaço de $\mathbb{R}_1^3$ podemos classificar seu espaço ortogonal.

Proposição 3 *Considere $U \subset \mathbb{R}_1^3$ um subespaço. Então*
i) U é tipo espaço se, e somente se, $U^\perp$ é tipo tempo.
ii) U é tipo tempo se, e somente se, $U^\perp$ é tipo espaço.
iii) U é tipo luz se, e somente se, $U^\perp$ é tipo luz.

Demonstração: i) Suponha que U seja tipo espaço, então existe $u \neq 0$ em U que é tipo espaço e da proposição anterior $< u >^\perp$ é um subespaço tipo tempo e $U^\perp$ está contido

em $< u >^{\perp}$, logo é tipo tempo.
Reciprocamente se $U^{\perp}$ é tipo tempo, então existe v em $U^{\perp}$ que é tipo tempo, assim $< v >^{\perp}$ é um subespaço tipo espaço e como U está contido em $< v >^{\perp}$ temos que U é tipo espaço.

ii) É análoga a prova do item i).

iii) A prova é feita por contradição. Suponha que U é um subespaço tipo tempo, então da Proposição 3 temos que $U^{\perp}$ é tipo espaço, portanto uma contradição. Se supomos que $U^{\perp}$ é um subespaço tipo espaço também será uma contradição pela Proposição 3. A recíproca é análoga. □

A proposição seguinte caracteriza dois vetores tipo luz que são linearmente dependentes.

Proposição 4 *Se u e v são dois vetores tipo luz, então eles são linearmente dependentes se e somente se $\langle u, v\rangle_1 = 0$.*

Demonstração: Suponha que u e v são linearmente dependentes, então $u = \alpha v$ para algum número real α, assim

$$\langle u, v\rangle_1 = \langle \alpha v, v\rangle_1 = \alpha\langle v, v\rangle_1 = 0.$$

Reciprocamente sejam u e v vetores tipo luz e ortogonais, isto é, $\langle u, v\rangle_1 = 0$. Considere uma decomposição de $\mathbb{R}^3_1 =< e_3 >^{\perp} \oplus < e_3 >$, onde $e_3 = (0, 0, 1)$. Escrevendo $u = x + w$ e $v = y + w$ temos:

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle_1 + \langle w, w\rangle_1 + \langle x, w\rangle_1 + \langle y, w\rangle_1 &= 0 && (2.7)\\ \langle x, x\rangle_1 + \langle w, w\rangle_1 + 2\langle x, w\rangle_1 &= 0 && (2.8)\\ \langle y, y\rangle_1 + \langle w, w\rangle_1 + 2\langle y, w\rangle_1 &= 0. && (2.9) \end{aligned}$$

Fazendo (2.8)+(2.9)-2(2.7) temos $\langle x, x\rangle_1 + \langle y, y\rangle_1 - 2\langle x, y\rangle_1 = 0$. Como x e y pertencem a um subespaço tipo espaço podemos escrever $\langle x, x\rangle_1 = |x|_1^2$ e $\langle y, y\rangle_1 = |y|_1^2$. Então a expressão anterior se reduz a $|x|_1^2 + |y|_1^2 - 2\langle x, y\rangle_1 = |x - y|_1^2 = 0$. Agora como $x - y$ pertence ao mesmo subespaço tipo espaço temos $x = y$. Portanto u e v são linearmente dependentes. □

Considere U um subespaço de duas dimensão. Sabemos que se existe $v \in U$ um vetor tipo luz então U não é um subespaço tipo espaço, pois neste caso a métrica não é definida positiva. A proposição a seguir diz que quando existem dois vetores linearmente independentes tipo luz, U é um subespaço tipo tempo.

Proposição 5 *Seja $U \subset \mathbb{R}^3_1$ um subespaço bi-dimensional. As seguintes afirmações são equivalentes:*
1. U é um subespaço tipo tempo.
2. U contém dois vetores linearmente independentes tipo luz.
3. U contém um vetor tipo tempo.

Demonstração: $1 \Rightarrow 2$) Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3_1$ com e_3 um vetor tipo tempo. Então $e_2 + e_3$ e $e_2 - e_3$ são vetores linearmente independentes e tipo luz, pois

$$\langle e_2 + e_3, e_2 + e_3 \rangle_1 = \langle e_2, e_2 \rangle_1 + \langle e_3, e_3 \rangle_1 = 1 - 1 = 0$$
$$\langle e_2 - e_3, e_2 - e_3 \rangle_1 = \langle e_2, e_2 \rangle_1 + \langle e_3, e_3 \rangle_1 = 1 - 1 = 0.$$

$2 \Rightarrow 3$) Se u e v são dois vetores linearmente independentes tipo luz, então $u+v$ ou $u-v$ é tipo tempo, pois

$$\langle u+v, u+v \rangle_1 = 2\langle u, v \rangle_1, \quad \langle u-v, u-v \rangle_1 = -2\langle u, v \rangle_1.$$

Como da Proposiçaõ 4 temos $\langle u, v \rangle_1 \neq 0$, segue que existe um vetor tipo tempo.
$3 \Rightarrow 1$) Seja $v \in U$ um vetor tipo tempo. Assim $U^\perp \subset < v >^\perp$ que é um subespaço tipo espaço e então U e um subespaço tipo tempo. □

A proposição acima diz ainda que, se existe um vetor tipo tempo u e um vetor tipo luz v em subespaço $U \subset \mathbb{R}^3_1$ de duas dimensão, necessariamente existe um outro vetor tipo luz w de forma que u e w sejam linearmente independentes, portanto U é um subespaço tipo tempo. A situação em que $U \subset \mathbb{R}^3_1$ possui apenas um vetor tipo luz e não existe nenhum vetor tipo tempo é abordado a seguir.

Proposição 6 *Seja U um subespaço de $\mathbb{R}^3_1$. As seguintes afirmações são equivalentes:*
1. U é um subespaço tipo luz.
2. U contém um vetor tipo luz, mas nenhum vetor tipo tempo.
3. $U \cap C = L - \{(0,0,0)\}$, e $dim(L) = 1$.

Demonstração: $1 \Rightarrow 2$) Suponha que U é um subespaço tipo luz, então existe um vetor v tipo luz. Assim da Proposição 5 não existem vetores tipo tempo.

$2 \Rightarrow 3$) Como existe um vetor tipo luz em U, $U \cap C$ é um conjunto não vazio. Se U contém dois vetores tipo luz linearmente independentes pela Proposição 5 existe um vetor tipo tempo, gerando uma contradição. Portanto $U \cap C = L - \{(0,0,0)\}$ e $dim(L) = 1$.

$3 \Rightarrow 1$) Supondo $U \cap C = L - \{(0,0,0)\}$ e $dim(L) = 1$ da Proposição temos que 5 U não é um subespaço tipo tempo, mas também não pode ser um subespaço tipo espaço, já existe um vetor tipo luz em U. Portanto U é um subespaço tipo luz. □

Proposição 7 *Seja P um plano de $\mathbb{R}^3_1$. Denotemos por n um vetor ortogonal com relação a métrica Euclidiana. Então P é tipo espaço (resp. tipo tempo e tipo luz) se, e somente se, n é um vetor tipo tempo (resp. tipo espaço e tipo luz).*

Demonstração: Se P é escrito como $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; ax + by + cz = 0\}$, então n é proporcional ao vetor (a,b,c). Podemos também escrever P da seguinte forma

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; ax + by + cz = ax + by - (-cz) = 0\} =< (a,b,-c) >^{\perp} .$$

Observe que se $(a,b,-c)$ é um vetor tipo tempo n também é um vetor tipo tempo. O mesmo acontece quando $(a,b,-c)$ é tipo luz ou tipo espaço. Portanto segue o resultado.

□

A proposição a seguir mostra que comprimento de um vetor unitário tipo tempo na métrica de Minkowski nem sempre é unitário na métrica Euclidiana.

Proposição 8 *Se P é um plano tipo espaço e $P =< v >^{\perp}$, com $\langle v,v\rangle_1 = -1$, temos que*

$$|v| \geq 1,$$

Demonstração: Escreve $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; ax+by+cz = 0\}$, com $n = (a,b,c)$ e $a^2+b^2+c^2 = 1$. Então $P =< v >^{\perp}$, onde

$$v = \frac{(a,b,-c)}{\sqrt{c^2 - b^2 - a^2}}$$

e satifaz $\langle v,v\rangle_1 = -1$. Calculando a norma euclidiana de v, tem-se

$$|v|^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{c^2 - b^2 - a^2} = \frac{1}{c^2 - b^2 - a^2} \geq 1$$

□

A definição do produto vetorial no espaço de Minkowski é análoga à definição dada para o ambiente Euclidiano.

Definição 13 *Sejam u e v vetores de $\mathbb{R}^3_1$, definimos o produto vetorial de u e v ao único vetor, denotado por $u \wedge v$, que satisfaz*

$$\langle u \wedge v, w \rangle_1 = det(u, v, w), \tag{2.10}$$

onde $det(u, v, w)$ é o determinante da matriz obtida colocando nas colunas, as coordenada dos três vetores u, v e w.

Considerando $w = (i, j, -k)$ como um dos vetores da base usual, obtemos

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3. \end{vmatrix} \tag{2.11}$$

A bilinearidade da métrica assegura a existência e unicidade deste vetor.

Proposição 9 *O produto vetorial em $\mathbb{R}^3_1$ satisfaz as seguintes propriedades:*
1. $u \wedge v = -v \wedge u$.
2. $u \wedge v$ é ortogonal a u e a v.
3. $u \wedge v = 0$, se e somente se u e v são proporcionais.
4. $u \wedge v \neq 0$ pertence ao plano $P =< \{u, v\} >$, se e somente se o plano P é tipo luz.

Demonstração: As afirmações 1,2 e 3 seguem imediatamente das propriedades do determinante. O ítem 4 segue da Proposição 4 e da Proposição 6. □

2.2 Curvas no Espaço de Minkowski

Nesta seção desenvolvemos a teoria do triedro de Frenet para curvas em $\mathbb{R}^3_1$. Iniciamos com a definição de curva parametrizada diferenciável, que é análoga a definição dada em $\mathbb{R}^3$.

Definição 14 *Uma curva parametrizada em $\mathbb{R}^3_1$ é uma aplicação $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, onde I é um intervalo aberto da reta. A curva α é chamada diferenciável se as funções coordenadas $x(t), y(t)$ e $z(t)$ possuem todas derivadas contínuas.*

Ao decorrer deste trabalho usaremos apenas curvas parametrizadas que possui todas as suas derivadas contínuas. Na seção anterior classificamos todos os vetores de $\mathbb{R}^3_1$ como sendo tipo espaço, tipo tempo e tipo luz. Baseados nessa idéia, também podemos fazer o mesmo para as curvas, tomando como referência o vetor velocidade da curva.

Definição 15 *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ uma curva parametrizada diferenciável.*
i) α é chamada tipo espaço se, $\alpha'(t)$ é um vetor tipo espaço para todo $t \in I$.
ii) α é chamada tipo tempo se, $\alpha'(t)$ é um vetor tipo tempo para todo $t \in I$.
iii) α é chamada tipo luz se, $\alpha'(t)$ é um vetor tipo luz para todo $t \in I$.

Exemplo 4 Defina $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ tal que $\alpha(t) = (cosh(t), t^2, senh(t))$. Assim $\alpha'(t) = (senh(t), 2t, cosh(t))$ e ainda $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_1 = 4t^2 - 1$. Portanto a curva é tipo espaço nos intervalos $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$, é tipo luz para $t = \pm\frac{1}{2}$ e tipo tempo no intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

No espaço de Minkowski a definição de curva regular também é análoga a definição dada em $\mathbb{R}^3_1$, porque a regularidade da curva não depende da métrica.

Definição 16 *Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ é chamada curva regular se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.*

Proposição 10 *Toda curva tipo luz ou tipo tempo é regular.*

Demonstração: Seja α uma curva em $\mathbb{R}^3_1$ parametrizada por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Se α é tipo luz temos $x'(t)^2 + y'(t)^2 - z'(t)^2 = 0$ e assim pelo menos uma dessas parcelas é não nula, logo $\alpha'(t) \neq 0$. Portanto α é regular. Analogamente se α é tipo tempo temos $x'(t)^2 + y'(t)^2 - z'(t)^2 < 0$, logo $z'(t) \neq 0$. Portanto α é uma curva regular. □

As curvas tipo espaço não estão incluídas na proposição porque podemos ter curvas tipo espaço com $\alpha'(t) = 0$, uma vez que o vetor nulo é tipo espaço. Um exemplo desta situação são as curvas constantes.

A seguir veremos em quais situações as curvas no espaço de Minkowski podem ser reparametrizada pelo comprimento de arco.

Definição 17 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada, a função real*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|_1 dt$$

é chamada função comprimento de arco. Dizemos que a curva regular está parametrizada pelo comprimento de arco, se $s(t) = t - t_0$.

Tendo em vista a definição acima podemos enunciar o seguinte lema.

Lema 5 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ uma curva regular tipo tempo ou tipo espaço e $s : I \longrightarrow s(I)$ a função comprimento de arco. Então existe uma função h inversa de s definida em um intervalo aberto $J = s(I)$ e $\beta = \alpha \circ h : J \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ é uma reparametrização de α tal que $|\beta'(s)|_1 = 1$.*

Demonstração: Observe que $\frac{ds}{dt} = s'(t) = |\alpha'(t)|_1 > 0$ para todo $t \in I$, pois α é uma curva tipo tempo ou tipo espaço. Assim s é um difeomorfismo sobre $J = s(I)$, logo existe a inversa de s, isto é, existe $h : J \longrightarrow I$ $h(s(t)) = t$. Utilizando a regra da cadeia para derivar em relaçao a t obtemos

$$\frac{dh}{ds}\frac{ds}{dt} = 1 \Rightarrow \frac{dh}{ds} = \frac{1}{|\alpha'(t)|_1}.$$

Assim tomando $\beta(s) = \alpha \circ h(s(t))$, temos

$$\beta'(s) = \frac{d\beta}{ds} = \frac{d\alpha}{dt}\frac{dh}{ds} = \frac{1}{|\alpha'(t)|_1}\alpha'(t),$$

portanto $|\beta'(s)|_1 = 1$. $\square$

Uma pergunta natural a ser feita é o que acontece com uma curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ regular e tipo luz. Sendo uma curva regular e tipo luz temos $\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle_1 = 0$ para todo $t \in I$, assim não podemos reparametrizada de forma que $\langle \alpha', \alpha'\rangle_1 = 1$. Por diferenciação temos $\langle \alpha''(t), \alpha'(t)\rangle_1 = 0$. Suponha que $\alpha''(t) \neq 0$ a curva $\alpha(t)$ não é uma reta, então $\alpha''(t)$ não está na direção de $\alpha'(t)$. Logo pela Proposição 4 temos que $\alpha''(t)$ não é tipo luz, mas como $< \alpha'(t) >^{\perp}$ é tipo luz a Proposição 6 afirma que $< \alpha'(t) >^{\perp}$ não possui nenhum vetor tipo tempo. Portanto $\alpha''(t)$ é tipo espaço.

Para curvas tipo luz podemos enunciar o seguinte resultado.

Lema 6 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ uma curva tipo luz em $\mathbb{R}^3_1$. Existe uma reparametrização de α dada por $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$ de maneira que $|\beta''(s)|_1 = 1$.*

Demonstração: Escrevendo $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$, onde ϕ é a função procurada. Por diferenciação temos

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \phi'(s)\alpha'(t) \\ \beta''(s) &= \phi''(s)\alpha'(t) + [\phi'(s)]^2\alpha''(t). \end{aligned}$$

Assim

$$\langle \beta''(s), \beta''(s)\rangle_1 = \langle \phi''(s)\alpha'(t) + [\phi'(s)]^2\alpha''(t), \phi''(s)\alpha'(t) + [\phi'(s)]^2\alpha''(t)\rangle_1 = [\phi'(s)]^4\langle \alpha''(t), \alpha''(t)\rangle_1.$$

Em consequência de $\alpha''(t)$ ser tipo espaço, $\beta''(s)$ também é tipo espaço. Para que $|\beta''(s)|_1 = 1$, podemos definir $\phi(s)$ como resultado da seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$\phi(s) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha''(\phi(s))|_1}}, \quad \phi(0) = t_0.$$

O teorema de soluções de equações diferenciais ordinárias garante a existência e unicidade de ϕ. $\square$

2.3 Equações de Frenet

Na Seção 1.2 definimos as equações de Frenet para curvas em $\mathbb{R}^3$. Nesta seção faremos considerações análoga para curvas em $\mathbb{R}^3_1$. Isto é, construiremos uma base formada por vetores ao longo da curva, que será chamada *base de Frenet*. A partir daí deduziremos as equações de Frenet. Neste estudo será considerado apenas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco e curvas tipo luz.

Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Seja $\alpha'(s) = T(s)$ o *vetor tangente*. Observe que $\langle T(s), T'(s)\rangle_1 = 0$ então se α é uma reta $T'(s) = 0$ o vetor tangente é um vetor constante, assim quaisquer três vetores linearmente independentes de maneira que um deles seja o tangente formam uma base de Frenet. Quando α não é uma reta, isto é, $T'(s) \neq 0$ em definimos o *vetor normal* $N(s)$, o *vetor binormal* $B(s)$ de maneira que eles formam uma base de $\mathbb{R}^3_1$ e além disso a curvatura $k(s)$ e a torção $\tau(s)$ de α. Não serão definimos de modo geral como na Seção 1.2 por que devemos considerar o tipo de curvas que estamos trabalhando.

Assim como em $\mathbb{R}^3$ cada par de vetores do triedro de Frenet determina um plano. O plano de $\mathbb{R}^3_1$ que contém $\alpha(s)$ e é formado pelos vetores $N(s)$ e $B(s)$ é o *plano normal* a curva $\alpha(s)$. O plano que contém $\alpha(s)$ e formado por $T(s)$ e $N(s)$ é chamado *plano osculador*. O plano que contém $\alpha(s)$ e formado pelos vetores $T(s)$ e $B(s)$ é chamado *plano retificante*.

2.3.1 Equações de Frenet para Curvas Tipo Tempo

Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ é uma curva tipo tempo temos $\langle T(s), T(s)\rangle_1 = -1$ e $\langle T(s), T'(s)\rangle_1 = 0$, então $T'(s)$ é um vetor tipo espaço independente de $T(s)$. Assim, definimos a *curvatura* de α em s como $k(s) = |T'(s)|_1$. O *vetor normal* $N(s)$ é definido por $N(s) = T'(s)/k(s)$. Além disso, definimos o *vetor binormal* $B(s)$ por $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ e a *torção* como sendo $\tau = \langle N', B\rangle_1$.

O vetor $B(s)$ é unitário e tipo espaço pois $\langle T(s), B(s)\rangle_1 = 0$, assim $B(s) \in < T >^{\perp}$ que é um subespaço tipo espaço. Portanto para cada s, $\{T, N, B\}$ forma uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3_1$ que é chamada de *triedro de Frenet* de α. Logo abaixo descreveremos a relação entre os vetores $\{T, N, B\}$.

Considere $T(s) = T, N(s) = N, B(s) = B$ e $T = (x_1, x_2, x_3), N = (y_1, y_2, y_3), B = (z_1, z_2, z_3)$, então

$$B = T \wedge N = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - y_2x_3, y_1x_3 - x_1y_3, y_1x_2 - y_2x_1) = (z_1, z_2, z_3). \quad (2.12)$$

Calculando $T \wedge B$

$$T \wedge B = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = (x_2z_3 - z_2x_3, z_1x_3 - x_1z_3, z_1x_2 - z_2x_1),$$

usando (2.12) e que $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$

$$\begin{aligned} x_2z_3 - z_2x_3 &= x_2(y_1x_2 - y_2x_1) - (y_1x_3 - x_1y_3)x_3 \\ &= y_1(x_2^2 - x_3^2) - x_1x_2y_2 + x_1x_3y_3 \\ &= y_1(-1 - x_1^2) - x_1x_2y_2 + x_1x_3y_3 \\ &= -y_1 - x_1(x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3) \\ &= -y_1 - x_1\langle T, N\rangle_1 \\ &= -y_1. \end{aligned}$$

Analogamente $z_1x_3 - x_1z_3 = -y_2$ e $z_1x_2 - z_2x_1 = -y_3$. Logo $T \wedge B = -N$. Finalmente calculando $N \wedge B$ temos:

$$N \wedge B = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = (y_2z_3 - z_2y_3, z_1y_3 - y_1z_3, z_1y_2 - z_2y_1),$$

usando (2.12) e que $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 1$, temos que

$$\begin{aligned} y_2z_3 - z_2y_3 &= y_2(y_1x_2 - y_2x_1) - (y_1x_3 - x_1y_3)y_3 \\ &= -x_1(y_2^2 - y_3^2) + x_2y_1y_2 - y_1x_3y_3 \\ &= -x_1(1 - y_1^2) + x_2y_1y_2 - y_1x_3y_3 \\ &= -x_1 + y_1(x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3) \\ &= -x_1 + y_1\langle T, N\rangle_1 \\ &= -x_1. \end{aligned}$$

Análogamente $z_1y_3 - y_1z_3 = -x_2$ e $z_1y_2 - z_2y_1 = -x_3$. Logo $N \wedge B = -T$. Resumindo, mostramos que

$$B = T \wedge N = -N \wedge T, \quad N = B \wedge T = -T \wedge B, \quad T = -N \wedge B = B \wedge N. \tag{2.13}$$

Vamos agora deduzir as equações de Frenet. Da definição do vetor normal temos que $N = T'/k$ com $k(s) = k > 0$, daí

$$T' = kN. \tag{2.14}$$

Utilizando a definição de torção, concluímos que

$$\tau = \langle N', B \rangle_1 = -\langle B', N \rangle_1 \Rightarrow \langle \tau N, N \rangle_1 + \langle B', N \rangle_1 = 0 \Rightarrow \langle \tau N + B', N \rangle_1 = 0.$$

Portanto

$$B' = -\tau N \tag{2.15}$$

Das equações 2.13 podemos escrever $N = B \wedge T$ e usando as equações (2.14) e (2.15), obtemos

$$N' = B' \wedge T + B \wedge T' = -\tau N \wedge T + kB \wedge N = \tau B + kT. \tag{2.16}$$

Assim as equações (2.14), (2.15) e (2.16) são chamadas as equações Frenet para uma curva α tipo tempo.

$$\begin{cases} T' &= kN \\ N' &= kT + \tau B \\ B' &= -\tau N. \end{cases} \tag{2.17}$$

2.3.2 Equações de Frenet para Curvas Tipo Espaço

Considere α uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja $\langle \alpha', \alpha' \rangle_1 = 1$. Como $\alpha' = T$ é tipo espaço $< T >^{\perp}$ é uma subespaço tipo tempo de duas dimensão. A Proposição 5 afirma que existem dois vetores linearmente independentes tipo luz em $< T >^{\perp}$. Assim devemos considerar três casos:

Caso 1) O vetor T' é tipo tempo. Assim, definimos a *curvatura* de α em s como $k(s) = |T'(s)|_1$. O *vetor normal* $N(s)$ é definido por $N(s) = T'(s)/k(s)$. Além disso, definimos o *vetor binormal* $B(s)$ por $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ e a *torção* como sendo $\tau = \langle N', B \rangle_1$. Assim N é um vetor tipo tempo e B é um vetor tipo espaço, pois $B \in < N >^{\perp}$ que é um subespaço tipo espaço. Usando os mesmos argumentos do caso em que α é uma curva tipo tempo, podemos obter as relações abaixo

$$B = T \wedge N = -N \wedge T, \quad T = N \wedge B = -B \wedge N, \quad N = T \wedge B = -B \wedge T. \tag{2.18}$$

As equações de Frenet são obtidas de maneira similar a situação em a curva α é tipo tempo. De fato, da definição do vetor normal obtemos que $T' = kN$. Como a torção $\tau = \langle N', B\rangle_1$ temos

$$\tau = \langle N', B\rangle_1 = -\langle B', N\rangle_1 \Rightarrow \langle \tau N, N\rangle_1 - \langle B', N\rangle_1 = 0 \Rightarrow \langle \tau N - B', N\rangle_1 = 0.$$

Logo

$$B' = \tau N. \tag{2.19}$$

Usando (2.18), a expressão de N' é dada por

$$N' = T' \wedge B + T \wedge B' = kN \wedge B + \tau T \wedge N = kT + \tau B. \tag{2.20}$$

Portanto de (2.19) e (2.20) as equações de Frenet para este caso são

$$\begin{cases} T' &= & kN \\ N' &= & kT + \tau B \\ B' &= & \tau N \end{cases} \tag{2.21}$$

Caso 2) O vetor T' é tipo espaço. Assim, definimos a *curvatura* de α em s como $k(s) = |T'(s)|_1$. O *vetor normal* $N(s)$ é definido por $N(s) = T'(s)/k(s)$. Além disso, definimos o *vetor binormal* $B(s)$ por $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ e a *torção* como sendo $\tau = -\langle N', B\rangle_1$. Assim N é tipo espaço e portanto $B \in <\{T, N\}>^{\perp}$ é tipo tempo pois $<\{T, N\}>$ é um subespaço tipo espaço. Os vetores de Frenet possuem a seguinte relação.

$$B = T \wedge N = -N \wedge T, \quad T = B \wedge N = -N \wedge B, \quad N = T \wedge B = -B \wedge T, \tag{2.22}$$

Da definição do vetor normal temos que $T' = kN$. Por outro lado a torção é dada por $\tau = -\langle N', B\rangle_1$, daí temos que

$$\tau = -\langle N', B\rangle_1 = \langle B', N\rangle_1 \Rightarrow \langle \tau N, N\rangle_1 - \langle B', N\rangle_1 = 0 \Rightarrow \langle \tau N - B', N\rangle_1 = 0.$$

Logo

$$B' = \tau N. \tag{2.23}$$

Derivando N dado na equação (2.22) obtemos

$$N' = T' \wedge B + T \wedge B' = kN \wedge B + \tau T \wedge N = -kT + \tau B.$$

Portanto as equações de Frenet são dadas na seguinte forma:

$$\begin{cases} T' &= kN \\ N' &= -kT + \tau B \\ B' &= \tau N. \end{cases} \tag{2.24}$$

Caso 3) O vetor T' é tipo luz. Neste caso não faz sentido definir a curvatura como $k = |T'|_1$, pois $|T'|_1 = 0$. Definimos $N = T'$ o *vetor normal* de α. Como α é uma curva tipo espaço temos $< T >^{\perp}$ é um subespaço tipo tempo e pela Proposição 5 existem dois vetores tipo luz em $< T >^{\perp}$ linearmente independentes que não são ortogonais. Como N é tipo luz, defina o *vetor binormal* $B \in < T >^{\perp}$ como o único vetor tipo luz tal que $\langle N, B\rangle_1 = 1$. Além disso, defina $\tau = \langle N', B\rangle_1$ a *torção* de α.

Para calcular as equações de Frenet é preciso encontrar uma expressão para T', N' e B'. Observe que $\langle N, N\rangle_1 = 0$, assim $\langle N', N\rangle_1 = 0$. Mas por outro lado

$$\langle T, N\rangle_1 = 0 \Rightarrow \langle T', N\rangle_1 + \langle T, N'\rangle_1 = 0 \Rightarrow \langle T, N'\rangle_1 = 0.$$

Assim podemos escrever $N' = aN + bB$ e

$$\begin{aligned} \tau = \langle N', B\rangle_1 = \langle aN + bB, B\rangle_1 = \langle aN, B\rangle_1 + \langle bB, B\rangle_1 = a \\ 0 = \langle N', N\rangle_1 = \langle aN + bB, N\rangle_1 = \langle aN, N\rangle_1 + \langle bB, N\rangle_1 = b. \end{aligned}$$

Portanto

$$N' = \tau N.$$

Para obter B' observe que

$$\langle N, B\rangle_1 = 1 \Rightarrow \langle N', B\rangle_1 + \langle N, B'\rangle_1 = \langle \tau N, B\rangle_1 + \langle N, B'\rangle_1 + \langle T, N\rangle_1 = \langle T + \tau B + B', N\rangle_1 = 0.$$

Logo

$$B' = -T - \tau B.$$

Portanto as equações de Frenet para este caso são:

$$\begin{cases} T' &= N \\ N' &= \tau N \\ B' &= -T - \tau B. \end{cases} \tag{2.25}$$

2.3.3 Equações de Frenet para Curvas Tipo Luz

Considere $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ uma curva tipo luz. Já vimos anteriormente que α não pode ser parametrizada pelo comprimento de arco, apenas podemos reparametrizar de forma que $|\alpha''(s)|_1 = 1$ pelo Lema 6. Para construir o triedro de Frenet defina $T' = N$ o *vetor normal* de α. O *vetor binormal* B como o único vetor tipo luz ortogonal a N de forma que $\langle T, B\rangle_1 = 1$. Assim temos uma base de $\mathbb{R}^3_1$ que seus vetores se relaciona de forma mais simples, uma vez que neste caso não é possível escrever uma base ortogonal. Analogamente ao caso que α é tipo espaço com T' tipo luz, não definimos a curvatura de α mas a *torção* τ de α é dada por $\tau = \langle N', B\rangle$.

Vamos agora encontrar as equações de Frenet. Sendo $\langle T, B\rangle_1 = 1$ temos

$$0 = \langle T', B\rangle_1 + \langle T, B'\rangle_1 = \langle N, B\rangle_1 + \langle T, B'\rangle_1 = \langle T, B'\rangle_1.$$

Como B é tipo luz e $\langle B, B'\rangle_1 = 0$, podemos escrever $B' = aN + bT$. Daí $a = -\tau$ e $b = 0$, ou ainda,

$$B' = -\tau N. \tag{2.26}$$

De $\langle N, B\rangle_1 = 0$, $\langle B, B\rangle_1 = 0$ e da equação (2.26), obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \langle N', B\rangle_1 + \langle N, B'\rangle_1 &= \langle N', B\rangle_1 - \tau\langle N, N\rangle_1 + \langle B, B\rangle_1 \\ &= \langle N', B\rangle_1 - \langle \tau T, B\rangle_1 + \langle B, B\rangle_1 \\ &= \langle N' - \tau T + B, B\rangle_1, \end{aligned}$$

logo

$$N' = \tau T - B. \tag{2.27}$$

Portanto das equações (2.26) e (2.27) são as equações de Frenet e são dadas por

$$\begin{cases} T' &= N \\ N' &= \tau T - B \\ B' &= -\tau N \end{cases}.$$

Na próxima seção estudamos as hélices.

2.4 Hélices em $\mathbb{R}^3_1$

Vimos na Seção 1.2 que no espaço Euclidiano de três dimensão, uma hélice é uma curva tal que seu vetor tangente faz uma ângulo constante com um direção fixa. Essa direção fixa é chamada eixo da hélice. Um resultado interessante sobre hélices no espaço

Euclidiano mostra que, uma curva em $\mathbb{R}^3$ é uma hélice se, e somente se, $\frac{\tau}{k} = constante$, onde k e τ são a curvatura e torção da curva respectivamente.

Definição 18 *Uma hélice em $\mathbb{R}^3_1$ é uma curva regular tal que $\langle T(s), v\rangle_1$ é uma função constante para algum vetor fixo v não nulo. Cada reta paralela a direção v é chamada eixo da hélice.*

O teorema a seguir caracteriza as hélices tipo espaço e tipo tempo.

Teorema 4 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ uma curva tipo tempo ou tipo espaço com T' não tipo luz em $\mathbb{R}^3_1$. Se α é uma hélice, então τ/k é uma função constante.*

Demonstração: Vamos dividir nos casos em que α é tipo tempo e tipo espaço. Podemos tomar α parametrizada pelo comprimento de arco

caso 1) Considere α uma curva tipo tempo. Derivando a expressão $\langle T, v\rangle_1 = const.$ e usando a equação (2.13) para escrevermos $v = aT + bB$. Novamente derivando e usando a equação (2.17), segue que

$$a'T + akN + b'B - \tau bN = a'T + (-\tau + ak)N + b'B = 0.$$

Pela independência dos vetores $\{T, N, B\}$ temos

$$\begin{aligned} a' &= 0 \\ b' &= 0 \\ -\tau b + ak &= 0. \end{aligned}$$

Logo a e b são constantes e $\frac{\tau}{k} = \frac{a}{b}$ é constante.

Caso 2) Seja α uma curva tipo espaço. Assim devemos considerar duas possibilidades, quando T' é tipo tempo e tipo espaço. Consideremos T' tipo tempo e derivando a expressão $\langle T, v\rangle_1 = const.$ e usando a equação (2.18), para escrevermos $v = aT + bB$, derivando em relação ao parâmetro da curva juntamente com equação (2.21), temos

$$a'T + akN + b'B + \tau bN = a'T + (\tau + ak)N + b'B = 0.$$

Pela indepêndencia dos vetores $\{T, N, B\}$,

$$\begin{aligned} a' &= 0 \\ b' &= 0 \\ \tau b + ak &= 0. \end{aligned}$$

Logo a e b são constantes e $\frac{\tau}{k} = -\frac{a}{b}$ é constante. Para T' tipo espaço, diferenciando $\langle T, v\rangle_1 = const.$, onde v é um vetor fixo, obtemos que $k\langle N, v\rangle_1 = 0$. Logo v pertence ao complemento ortogonal de N. Usando (2.22) para escrevermos $v = aT + bB$ e derivando em relação ao parâmetro da curva juntamente com a equação (2.24), temos que

$$a'T + akN + b'B + \tau bN = a'T + (\tau + ak)N + b'B = 0.$$

Como $\{T, N, B\}$ são vetores linearmentes independentes, então

$$\begin{aligned} a' &= 0 \\ b' &= 0 \\ \tau b + ak &= 0. \end{aligned}$$

portanto a e b são constantes e $\frac{\tau}{k} = -\frac{a}{b}$ é constante. □

A recíproca desse teorema pode ser enunciada da seguinte forma.

Teorema 5 *Seja α uma curva tipo tempo ou tipo espaço, com vetor normal não tipo luz. Se $\frac{\tau}{k}$ é constante, então α é uma hélice.*

Demonstração: Consideremos primeiramente α tipo tempo e $\frac{\tau}{k} = c \Rightarrow \tau = kc$. Definindo $v = cT + B$ e usando a equação (2.17) temos:

$$v' = cT' + B' = ckN - \tau N = k(c - \frac{\tau}{k})N = 0.$$

Além disso,

$$\langle T, v\rangle_1 = \langle T, cT\rangle_1 + \langle T, B\rangle_1 = c.$$

Considere agora α uma curva tipo espaço e N não tipo luz. Dessa forma existem duas possibilidades: N é tipo tempo ou N tipo espaço. Seja N tipo tempo, como $\frac{\tau}{k} = c \Rightarrow \tau = kc$. Defina $v = cT - B$, onde c é uma constante. É necessário provar que $v' = 0$ e $\langle T, v\rangle_1 = const.$. Derivando e usando a equação (2.21) temos:

$$v' = cT' - B' = ckN - \tau N = k(c - \frac{\tau}{k})N = 0.$$

Além disso,

$$\langle T, v\rangle_1 = \langle T, cT\rangle_1 - \langle T, B\rangle_1 = c.$$

O caso em que N é tipo espaço é análogo ao anterior.

Observação: Quando uma curva regular α está contida em um plano temos $\langle T, v\rangle_1 = const.$ com $v \in \mathbb{R}^3_1$, isto é, α é uma hélice. Além disso, temos que uma curva regular α

tipo tempo ou tipo espaço com vetor T' não tipo luz está contida em plano se, e somente se, $\tau = 0$.

$\square$

2.5 Superfícies Parametrizadas No Espaço de Minkowski

Nesta seção estudamos as superfícies parametrizadas para o espaço de Minkowski, que análoga a definição dada para o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ porque não depende da métrica.

Definição 19 *Uma superfície parametrizada regular é uma aplicação $\chi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ definida por $\chi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, onde U é um conjunto aberto, tal que:*
i) χ é diferenciável de classe C^∞.
ii) Para todo $q = (u, v) \in U$, diferencial de χ em q, $d\chi_q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora.

Quando χ é uma superfície parametrizada regular $d\chi_q(\mathbb{R}^2)$ é um subespaço de duas dimensão em $\mathbb{R}^3$. Este espaço é chamado *plano tangente* da superfície no ponto $p = \chi(q)$. Como $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ e $d\chi_q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear injetora, então $\{d\chi_q(e_1) = \chi_u, d\chi_q(e_2) = \chi_v\}$ é uma base para o plano tangente. Quando $d\chi_q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ não é injetora dizemos que o ponto $p = \chi(q)$ é um *ponto singular*

Assim como classificamos os vetores, os subespaços, os planos e as curvas também podemos classificar as superfícies parametrizadas regular.

Definição 20 *Seja $\chi \subset \mathbb{R}^3_1$ uma superfície parametrizada regular.*
i) χ é chamada ser tipo espaço, se o plano tangente for tipo espaço.
ii) χ é chamada tipo tempo, se o plano tangente for tipo tempo.
iii) χ é chamada tipo luz, se o plano tangente for tipo luz.

Na definição do produto vetorial no espaço de Minkowski o vetor $\chi_u \wedge \chi_v$ é ortogonal aos vetores $\{\chi_u, \chi_v\}$. Assim pela Proposição 3 para classificar as superfícies parametrizadas regular, é suficiente analisar $\chi_u \wedge \chi_v$. Quando $\chi_u \wedge \chi_v$ é tipo tempo ou tipo espaço, surge naturalmente a existência de um vetor unitário ortogonal ao plano tangente, denominado de *vetor normal* para cada ponto da superfície, escrito da seguinte forma

$$\eta(u, v) = \frac{\chi_u \wedge \chi_v}{|\chi_u \wedge \chi_v|_1}. \tag{2.28}$$

2.6 Superfícies Regradas No Espaço de Minkowski

Nesta seção, estudamos as superfícies regradas no espaço de Minkowski para que possamos estudar as superfícies desenvolvíveis no próximo capítulo.

Definição 21 *Dada um família a 1-parâmetro de retas $\{\alpha(t), X(t)\}$ a superfície S, parametrizada por*

$$\chi(t,v) = \alpha(t) + vX(t),\ \ t \in I,\ \ v \in \mathbb{R},$$

é chamada superfície regrada gerada pela família $\{\alpha(t), X(t)\}$. A curva $\alpha(t)$ é chamada de diretriz da superfície e as retas L_t que passam por $\alpha(t)$ e está na direção de $X(t)$ são chamadas de geratrizes da superfície.

Lema 7 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3_1$ uma superfície regrada parametrizada por $\chi(t,v) = \alpha(t) + vX(t)$, com α uma curva regular, $|X|_1 = 1$, $|X'|_1 \neq 0$ para todo $u \in I$. Então existe uma única parametrização $\chi(u,v) = \beta(u) + vX(u)$, tal que $\langle \beta'(u), X'(u)\rangle_1 = 0$*

Demonstração: Supondo a existência de uma curva $\beta(u) = \alpha(u) + t(u)X(u)$, escrevamos $\beta(u) = \beta$, $\alpha(u) = \alpha$, $X(u) = X$, $t(u) = t$. Assim

$$0 = \langle \beta', X'\rangle_1 = \langle \alpha' + t'X + tX', X'\rangle_1 = \langle \alpha', X'\rangle_1 + \langle X', X'\rangle_1.$$

Logo $t = -\frac{\langle \alpha', X'\rangle_1}{\langle X', X'\rangle_1}$ e $\beta = \alpha - \frac{\langle \alpha', X'\rangle_1}{\langle X', X'\rangle_1}X$. Para provar que não depende da parametrização, considere $\overline{\alpha}$ definida no mesmo domínio de α, outra diretriz da superfície regrada. Temos

$$\chi(u,v) = \alpha(u) + vX(u) = \overline{\alpha}(u) + sX(u), \tag{2.29}$$

para alguma função $s = s(v)$. Como consequência podemos definir β e $\overline{\beta}$ para cada caso como

$$\beta = \alpha - \frac{\langle \alpha', X'\rangle_1}{\langle X', X'\rangle_1} \quad \overline{\beta} = \overline{\alpha} - \frac{\langle \overline{\alpha}', X'\rangle_1}{\langle X', X'\rangle_1}X.$$

Assim

$$\beta - \overline{\beta} = (\alpha - \overline{\alpha}) - \frac{\langle \alpha' - \overline{\alpha}', X'\rangle_1}{\langle X', X'\rangle_1}X.$$

Mas da equação (2.29), $\alpha - \overline{\alpha} = (s-v)X$ ou ainda $\alpha' - \overline{\alpha'} = (s-v)X'$, a partir destes resultados segue que

$$\begin{aligned}
\beta - \overline{\beta} &= (\alpha - \overline{\alpha}) + \frac{\langle \alpha' - \overline{\alpha}', X' \rangle_1}{\langle X', X' \rangle_1} X \\
&= (s-v)X - \frac{\langle (s-v)X', X' \rangle_1}{\langle X', X' \rangle_1} X \\
&= (s-v)X - (s-v)\frac{\langle X', X' \rangle_1}{\langle X', X' \rangle_1} X \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

A curva β tem um nome especial.

Definição 22 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3_1$ uma superfície regrada parametrizada por $\chi(u,v) = \beta(u) + vX(u)$ e $|X'|_1 \neq 0$, tal que $\langle \beta', X' \rangle_1 = 0$, neste caso chamamos β de linha de estricção de S.*

Seja $S \subset \mathbb{R}^3_1$ uma superfície regrada parametrizada por $\chi(u,v) = \beta(u) + vX(u)$, onde β é uma linha de estricção. Como $|X'|_1 \neq 0$, $|X|_1 = 1$, $\langle \beta', X' \rangle_1 = 0$ e $\langle X, X' \rangle_1 = 0$ pela Proposição 3 a linha de estricção não é tipo luz para nenhum $u \in I$ e ainda $\{\beta', X\} \in < X' >^{\perp}$, logo podemos escrever $\beta' \wedge X = \lambda X'$, ou ainda

$$\lambda = P_X = \frac{\langle \beta' \wedge X, X' \rangle_1}{\langle X', X' \rangle_1} = \frac{det(\beta', X, X')}{\langle X', X' \rangle_1}. \tag{2.30}$$

Chamamos P_X o *parâmetro de distribuição* da superfície regrada S.

Para fazer sentido essa definição é preciso mostrar que o parâmetro de distribuição não depende da parametrização escolhida. De fato, seja $\beta(u) = \alpha(u) + t(u)X(u)$ a linha de estricção de uma superfície regrada parametrizada por $\chi(u,v) = \alpha(u) + vX(u)$. Assim o parâmetro de distribuição é dado por

$$P_X = \frac{det(\beta', X, X')}{\langle X', X' \rangle_1} = \frac{det(\alpha' + uX', X, X')}{\langle X', X' \rangle_1} = \frac{det(\alpha', X, X')}{\langle X', X' \rangle_1} \tag{2.31}$$

No Espaço Euclidiano foi verificado, que os pontos de singularidades da superfície regrada estão sobre a linha estricção. Para o Espaço de Minkowski um resultado semelhante pode ser enuciado, mais com algumas restrições.

Lema 8 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3_1$ superfície regrada tipo espaço ou tipo tempo parametrizada por $\chi(u,v) = \alpha(u) + vX(u)$, tal que $\langle X, X \rangle_1 = -1$ e $|X'|_1 \neq 0$. Então os pontos de singularidades estão sobre a linha de estricção.*

Demonstração: Tomando $\chi(u,v) = \beta(u) + vX(u)$ uma parametrização para a superfície como no Lema 7, temos $\chi_u = \beta' + vX'$ e $\chi_v = X$. Equivalente a $d\chi_q$ não ser uma aplicação injetiva é termos que $(\chi_u \wedge \chi_v)_q = 0$. Suponha $(\chi_u \wedge \chi_v)_q = 0$, então $\langle \chi_u \wedge \chi_v, \chi_u \wedge \chi_v \rangle_1 = 0$. Assim

$$\begin{aligned}
0 = \langle \chi_u \wedge \chi_v, \chi_u \wedge \chi_v \rangle_1 &= \langle \beta' \wedge X + vX' \wedge X, \beta' \wedge X + vX' \wedge X \rangle_1 \\
&= \langle P_X X' + vX' \wedge X, P_X X' + vX' \wedge X \rangle_1 \\
&= \langle P_X X', P_X^2 X' \rangle_1 + \langle vX' \wedge X, vX' \wedge X \rangle_1 \\
&= P_X^2 \langle X', X' \rangle_1 + v^2 \langle X' \wedge X, X' \wedge X \rangle_1
\end{aligned}$$

Como X é tipo tempo, temos X' e $X' \wedge X$ é tipo espaço. Assim $P_X = v = 0$. Se $v = 0$ a parametrização da superfície se resume a $\chi(u,v) = \beta(u)$, demonstrando o lema. □

Capítulo 3

Superfícies Regradas Desenvolvíveis Tipo Tempo e Tipo Espaço no Espaço de Minkowski

No capítulo 1 estudamos sobre as superfícies regradas desenvolvíveis em $\mathbb{R}^3$. Baseado neste estudo, iremos definir as superfícies regradas desenvolvíveis no espaço de Minkowski e com auxílio do parâmetro de distribuição definido na Seção 2.6, relacionar com as propriedades da diretriz da superfície regrada, mais especificamente com a curvatura k e a torção τ da diretriz. Este capítulo foi baseado nas referências [11], [13] e [7].

Definição 23 *Uma superfície regrada no espaço de Minkowski é desenvolvível se ao longo de cada geratriz da superfície regrada o plano tangente é constante.*

Com base nesta definição, temos a seguinte caracterização para as superfícies regradas desenvolvíveis.

Lema 9 *Uma superfície regrada S tipo tempo ou tipo espaço é desenvolvível se e somente o parâmetro de distribuição da superfície regrada é nulo.*

Demonstração: Suponha que S é um superfície regrada desenvolvível. Considere uma parametrização da superfície regrada como no Lema 7. Assim

$$\begin{aligned} \chi_u &= \beta' + vX', \\ \chi_v &= X, \\ \chi_{uv} &= X'. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Como S é tipo tempo ou tipo espaço o vetor normal da superfície está bem definido e escrito como na equaçao (2.28). Seja $a = a(u, v)$ dada por $a = \frac{1}{|\chi_u \wedge \chi_v|_1}$, as expressões para

η e η_v temos:

$$\eta = a(\beta' \wedge X + vX' \wedge X) \Rightarrow \eta_v = a_v(\beta' \wedge X + vX' \wedge X) + aX' \wedge X. \tag{3.2}$$

Como S é desenvolvível, isto é, plano tangente é constante ao longo de cada geratriz da superfície, o vetor normal da superfície é constante para cada geratriz da superfície regrada, daí temos $\eta_v = 0$. Assim

$$0 = \langle \eta_v, X' \rangle_1 = \langle a_v(\beta' \wedge X + vX' \wedge X) + aX' \wedge X, X' \rangle_1 = a_v \langle \beta' \wedge X, X' \rangle_1.$$

Afirmamos que $a_v \neq 0$. De fato, como $\chi_u \wedge \chi_v$ é tipo tempo ou tipo espaço e temos que

$$a_v = \pm \frac{v \langle X' \wedge X, X' \wedge X \rangle_1}{|\chi_u \wedge \chi_v|_1^{\frac{3}{2}}} \neq 0.$$

Logo $\langle \beta' \wedge X, X' \rangle_1 = 0$ e portanto $P_X = 0$. Reciprocamente se $P_X = 0$, devemos mostrar que $\langle \eta_v, \chi_u \rangle_1 = \langle \eta_v, \chi_v \rangle_1 = 0$, pois daí $\eta_v = 0$, uma vez que $|\eta|_1 = 1$, obtemos que η é constante ao longo de cada diretriz da superfície. Das equações (3.1) e (3.2)

$$\langle \eta_v, \chi_v \rangle_1 = \langle a_v(\beta' \wedge X + vX' \wedge X) + aX' \wedge X, X \rangle_1 = 0,$$

e usado que $P_X = 0$ temos

$$\langle \eta_v, \chi_u \rangle_1 = \langle a_v(\beta' \wedge X + vX' \wedge X) + aX' \wedge X, \beta' + vX' \rangle_1 = -a \langle \beta' \wedge X, X' \rangle_1 = 0.$$

Concluindo a demonstração do lema. □

Para o uso nas seções seguintes vamos considerar as seguintes notações.

Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ uma curva tipo tempo ou tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco s e $\{T(s), N(s), B(s)\}$ o triedro de Frenet. Considere $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ um sistema de coordenadas para o espaço de Minkowski. Como os vetores $\{T(s), N(s), B(s)\}$ são linearmente independentes, eles formam uma base para $\mathbb{R}^3_1$ em cada $s \in I$. Seja $\chi(s,v) = \alpha(s) + vX(s)$ a parametrização de uma superfície regrada com

$$X(s) = x_1 T(s) + x_2 N(s) + x_3 B(s), \tag{3.3}$$

$x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$, constantes reais não nulas e $|X(s)|_1 = 1$, $|X(s)'|_1 \neq 0$ para todo $s \in I$. Vamos omitir o parâmetro s e escrever $\alpha(s) = \alpha$, $X(s) = X$, $T(s) = T$, $N(s) = N$, $B(s) = B$, $k(s) = k$, $\tau(s) = \tau$.

Os resultados seguintes estão baseados nas hipóteses acima.

3.1 Superfícies Regradas Desenvolvíveis com Diretriz Tipo Tempo

Considere uma curva tipo tempo $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$. Assim temos que T é um vetor tipo tempo e da Proposição 3, N e B são vetores tipo espaço.

Teorema 6 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ uma curva tipo tempo parametrizada pelo comprimento de arco. A superfície regrada tipo espaço ou tipo tempo que tem α como diretriz e geratrizes na direção de $X = x_1T + x_2N + x_3B$ é desenvolvível se, e somente se, α é uma hélice que satisfaz a seguinte equação*

$$\frac{k}{\tau} = \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_1x_3}. \tag{3.4}$$

Demonstração: De acordo com o Lema 9, devemos mostar que o parâmetro de distribuição de χ é nulo. Usando as equações 2.17, obtemos uma expressão para X' dada por:

$$\begin{aligned} X' &= x_1T' + x_2N' + x_3B' \\ X' &= x_1kN + x_2(kT + \tau B) - x_3\tau N \\ X' &= x_2kT + (x_1k - x_3\tau)N + x_2\tau B. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Substituindo X' na equação (2.30) e calculando o $det(\alpha', X, X')$ na base $\{T, N, B\}$, obtemos

$$\begin{aligned} P_X = \frac{det(\alpha', X, X')}{\langle X', X'\rangle_1} &= \frac{1}{\langle X', X'\rangle_1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2k & x_1k - x_3\tau & x_2\tau \end{vmatrix} \\ &= \frac{x_2^2\tau - (x_1k - x_3\tau)x_3}{-x_2^2k^2 + (x_1k + x_3\tau)^2 + x_2^2\tau^2} \\ &= \frac{(x_2^2 + x_3^2)\tau - x_1kx_3}{x_2^2(\tau^2 - k^2) + (x_1k - x_3\tau)^2}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Assim $P_X = 0$ se, e somente se,

$$\frac{k}{\tau} = \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_1x_3}.$$

□

3.1.1 Casos Especiais Para Curvas Tipo Tempo

No Teorema 6 foi essencial que os números x_1, x_2 e x_3 fossem não nulos. Vamos agora fazer um estudo no caso em que alguns do $x_i; i = 1, 2, 3$ são nulos. Primeiramente vamos considerar X na direção dos vetores do triedro de Frenet e em seguida quando X está em alguns dos planos formado pelos vetores de Frenet. Tais situações são chamadas de casos especiais.

Teorema 7 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ uma curva tipo tempo parametrizada pelo comprimento de arco e $\chi(s, v) = \alpha(s) + vX(s)$ uma parametrização para a superfície regrada tipo tempo ou tipo espaço.*
i) Se $X = T$ a superfície regrada é desenvolvível e tipo tempo.
ii) Se $X = N$ a superfície regrada é desenvolvível se, e somente se, é parte de um plano.
iii) Se $X = B$ a superfície regrada não é desenvolvível.

Demonstração: i) Supondo $X = T$, temos de (3.3) que $x_2 = x_3 = 0$ e $x_1 = 1$. Substituindo na equação (3.6), temos que

$$P_X = 0.$$

Logo a superfície regrada é desenvolvível. Para mostrar que é tipo tempo, observe que das equações (2.13) e (2.17), obtemos

$$\eta = \frac{\chi_s \wedge \chi_v}{|\chi_s \wedge \chi_v|_1} = \frac{kvN \wedge T}{|\chi_s \wedge \chi_v|_1} = \frac{-kvB}{|\chi_s \wedge \chi_v|_1}.$$

Como B é um vetor tipo espaço o plano tangente é tipo tempo, ou seja, a superfície regrada desenvolvível é tipo tempo.

ii) Supondo $X = N$, de (3.3) temos $x_1 = x_3 = 0$ e $x_2 = 1$. Segue da equação (3.6), que

$$P_X = \frac{\tau}{\tau^2 - k^2}.$$

Portanto $P_X = 0 \Leftrightarrow \tau = 0$. Assim α é uma curva planar no plano osculador e como X também está no plano osculador a superfície regrada tipo tempo ou tipo espaço é parte de um plano.

iii) Se $X = B$, segue de (3.3) que $x_1 = x_2 = 0$ e $x_3 = 1$. Substituindo na equação (3.6), temos que

$$P_X = \frac{1}{\tau} \neq 0, \quad \forall\ (s, v) \in I \times \mathbb{R}.$$

Portanto a superfície regrada não é desenvolvível. Mas α é uma linha de estricção da superfície regrada, pois $\langle \alpha', X' \rangle_1 = \langle T, -\tau N \rangle_1 = 0$. □

Quando X está em algum dos planos formados pelos vetores de Frenet, temos o seguinte resultado.

Teorema 8 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ uma curva tipo tempo parametrizada pelo comprimento de arco e $\chi(s,v) = \alpha(s) + vX(s)$ uma parametrização para a superfície regrada tipo tempo ou tipo espaço.*
i) Se X está no plano normal a superfície regrada é desenvolvível se, e somente se, $\tau = 0$.
ii) Se X está no plano osculador a superfície regrada é desenvolvível se, e somente se, $X = T$ ou a superfície regrada é parte de um plano.
iii) Se X está no plano retificante a superfície regrada é desenvolvível se, e somente se, $X = T$

Demonstração: i) O plano normal é formado pelos vetores N e B. Assim de (3.3) escrevemos $X = x_2N + x_3B$ e $x_2^2 + x_3^2 = 1$, pois os vetores N e B são tipo espaço. Utilizando a equação (3.6), o parâmetro de distribuição é dado por

$$P_X = \frac{(x_2^2 + x_3^2)\tau}{x_2^2(\tau^2 - k^2) + x_3^2\tau^2} = \frac{\tau}{\tau^2 - x_2^2k^2}.$$

Portanto $P_X = 0 \Leftrightarrow \tau = 0$. Assim α é uma curva planar.

ii) O plano osculador é formado pelos vetores T e N. Assim de (3.3) escrevemos $X = x_1T + x_2N$ e $-x_1^2 + x_2^2 = 1$, pois T é tipo tempo e B é tipo espaço. Utilizando a equação (3.6) o parâmetro de distribuição é escrito da seguinte forma

$$P_X = \frac{x_2^2\tau}{x_2^2(\tau^2 - k^2) + x_1^2k^2} = \frac{x_2^2\tau}{x_2^2\tau^2 - k^2}.$$

Portanto $P_X = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$ ou $\tau = 0$. Se $x_2 = 0$ temos $X = T$ e o resultado segue do Teorema 7. Se $\tau = 0$, temos que α é uma curva planar no plano osculador. Como X também está no plano osculador concluímos que a superfície regrada tipo tempo ou tipo espaço é parte de um plano.

iii) O plano retificante é formado pelos vetores T e B. Assim de (3.3) segue que $x_2 = 0$ e $X = x_1T + x_3B$. Utilizando (3.6), o parâmetro de distribuição é dado por

$$P_X = \frac{x_3^2\tau - x_1kx_3}{(x_1k - x_3\tau)^2} = \frac{-x_3(x_1k - x_3\tau)}{(x_1k - x_3\tau)^2} = \frac{-x_3}{(x_1k - x_3\tau)}.$$

Logo $P_X = 0$ se, e somente se, $x_3 = 0$. Além disso, observe que $\langle \alpha', X' \rangle_1 = \langle T, kN \rangle_1 = 0$, isto é, α é uma linha de estricção. □

Observe que estamos considerando uma superfície regrada $\chi(s,v) = \alpha(s)+vX(s)$, com α uma curva tipo tempo parametrizada pelo comprimento de arco e $X = x_1T+x_2N+x_3B$,

$|X|_1 = 1$ e $|X'|_1 \neq 0$. Considere novamente uma curva α tipo tempo parametrizada pelo comprimento de arco e uma superfície regrada parametrizada por $\chi(s,v) = \beta(s) + vX(s)$, onde agora a diretriz β é uma curva tal que o seu vetor tangente é dado por $\beta' = y_1T + y_2N + y_3B$; $y_i \in R; i = 1,2,3$ são constantes reais.

A partir das hipóteses acima o seguinte teorema pode ser enunciado.

Teorema 9 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ uma curva tipo tempo parametrizada pelo comprimento de arco e $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$, tal que $\beta' = y_1T + y_2N + y_3B$, onde $y_i \in R; i = 1,2,3$ são constantes reais. A superfície regrada tipo tempo ou tipo espaço que tem β diretriz e as geratrizes na direção de $X = x_1T + x_2N + x_3B$ é desenvolvível se, e somente se, α é uma hélice que satifaz a equação*

$$\frac{k}{\tau} = -\frac{y_1(x_2^2 + x_3^2) - y_2x_1x_2 - y_3x_1x_3}{y_3(x_1^2 - x_2^2) - y_2x_2x_3 + y_1x_1x_3}. \tag{3.7}$$

Demonstração: Considere X' dado na equação (3.5). Utilizando a equação (2.30) para obter o parâmetro de distribuição, temos

$$\begin{aligned} P_X &= \frac{1}{\langle X', X'\rangle_1}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2k & x_1k - x_3\tau & x_2\tau \end{vmatrix} \\ &= \frac{y_1[(x_2^2 + x_3^2)\tau - x_1kx_3] - y_2[x_1x_2\tau - x_2x_3k] + y_3[k(x_1^2 - x_2^2) - x_1x_3\tau]}{x_2^2(\tau^2 - k^2) + (x_1k - x_3\tau)^2} \\ &= \frac{[y_1(x_2^2 + x_3^2) - y_2x_1x_2 - y_3x_1x_3]\tau + k[y_3(x_1^2 - x_2^2) + y_2x_2x_3 - y_1x_1x_3]}{x_2^2(\tau^2 - k^2) + (x_1k - x_3\tau)^2}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Portanto

$$P_X = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{\tau} = \frac{-y_1(x_2^2 + x_3^2) + y_2x_1x_2 + y_3x_1x_3}{y_3(x_1^2 - x_2^2) + y_2x_2x_3 - y_1x_1x_3}.$$

□

Observação: No teorema acima, considerando $y_2 = y_3 = 0$ e $y_1 = 1$ temos exatamente o Teorema 6.

Na proxima seção faremos um estudo análogo para curvas tipo espaço.

3.2 Superfícies Regradas Desenvolvíveis com Diretriz Tipo Espaço

Nesta seção, baseados nas referências [11] e [13], estudamos as superfícies regradas desenvolvíveis com diretriz tipo espaço.

Considere $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco s e $\{T(s), N(s), B(s)\}$ a base de Frenet. Como α é tipo espaço $< T >^\perp$ é um subespaço tipo tempo, assim pela Proposição 5 temos que N pode ser tipo tempo, tipo espaço ou tipo luz. Seja $\chi(s, v) = \alpha(s) + vX(s)$ a parametrização de uma superfície regrada com $X(s) = x_1T(s) + x_2N(s) + x_3B(s)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, constantes reais não nulas e $|X(s)|_1 = 1$, $|X(s)'|_1 \neq 0$ para todo $s \in I$. Para facilitar os cálculos, considere também $\alpha(s) = \alpha$, $X(s) = X$, $T(s) = T$, $N(s) = N$, $B(s) = B$, $k(s) = k$, $\tau(s) = \tau$.

No que segue enunciaremos dois teoremas: um para N tipo tempo e tipo espaço e outro para N tipo luz.

Teorema 10 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco com o vetor normal não tipo luz. A superfície regrada tipo espaço ou tipo tempo que tem α como diretriz e as geratrizes na direção de $X = x_1T + x_2N + x_3B$ é desenvolvível se, e somente se, α é uma hélice que satisfaz a equação.*

$$\frac{k}{\tau} = \frac{x_2^2 - x_3^2}{x_1x_3}. \tag{3.9}$$

Demonstração: Consideremos as possibilidades para N.
i) Considere N um vetor tipo tempo. As equações de Frenet são dadas por (2.21). Utilizando-as para obter uma expressão para X', temos que

$$\begin{aligned} X' &= x_1T' + x_2N' + x_3B' \\ X' &= x_1kN + x_2(kT + \tau B) + x_3\tau N \\ X' &= x_2kT + (x_1k + x_3\tau)N + x_2\tau B. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Logo da equação (2.30) o parâmetro de distribuição calculado na base $\{T, B, N\}$ é dado por

$$\begin{aligned} P_X &= \frac{1}{\langle X', X' \rangle_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2k & x_1k + x_3\tau & x_2\tau \end{vmatrix} \\ &= \frac{(x_2^2 - x_3^2)\tau - x_1kx_3}{x_2^2(\tau^2 + k^2) - (x_1k + x_3\tau)^2}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Portanto $P_X = 0$ se, e somente se,

$$\frac{k}{\tau} = \frac{x_2^2 - x_3^2}{x_1x_3}.$$

ii) Considere N um vetor tipo espaço. As equações de Frenet são dadas por (2.24).

Assim obtemos uma expressão para X' da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
X' &= x_1T' + x_2N' + x_3B' \\
X' &= x_1kN + x_2(-kT + \tau B) + x_3\tau N \\
X' &= -x_2kT + (x_1k + x_3\tau)N + x_2\tau B. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Logo da equação (2.30) o parâmetro de distribuição calculado na base $\{T, B, N\}$, é dado por

$$
\begin{aligned}
P_X &= \frac{1}{\langle X', X'\rangle_1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2k & x_1k + x_3\tau & x_2\tau \end{vmatrix} \\
&= \frac{(x_2^2 - x_3^2)\tau - x_1kx_3}{x_2^2(k^2 - \tau^2) + (x_1k + x_3\tau)^2}. \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

Portanto $P_X = 0$ se, e somente se,

$$\frac{k}{\tau} = \frac{x_2^2 - x_3^2}{x_1x_3}.$$

□

Quando N é tipo luz podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 11 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco com o vetor normal tipo luz. A superfície regrada tipo espaço ou tipo tempo que tem α como diretriz e as geratrizes na direção de $X = x_1T + x_2N + x_3B$ é desenvolvível se, e somente se, τ é constante que satifaz a equação.*

$$\tau = -\frac{x_1}{x_2 + x_3}. \qquad (3.14)$$

Demonstração: Como N é um vetor tipo luz a curvatura não está definida. Utilizando a equação (2.25) para obter uma expressão para X', temos que

$$
\begin{aligned}
X' &= x_1T' + x_2N' + x_3B' \\
X' &= x_1N + x_2\tau N + x_3(-T - \tau B) \\
X' &= -x_3T + (x_1 + x_2\tau)N - x_3\tau B. \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

Consequetemente utilizando a equação (2.30) o parâmetro de distribuição calculado na base $\{T, B, N\}$ é dado por

$$
\begin{aligned}
P_X &= \frac{1}{\langle X', X' \rangle_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_3 & x_1 + x_3\tau & -x_3\tau \end{vmatrix} \\
&= \frac{-(x_2x_3 + x_3^2)\tau - x_1x_3}{x_3^2 - 2x_3\tau(x_1 + x_2\tau)}. \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

Portanto $P_X = 0$ se, e somente se,

$$
\tau = -\frac{x_1x_3}{x_2x_3 + x_3^2} = -\frac{x_1}{x_2 + x_3}.
$$

□

Para obter o Teorema 10 e o Teorema 11 as retas da superfície regrada estão na direção de $X = x_1T + x_2N + x_3B$, onde x_1, x_2, x_2 são constantes reais não nulas. Mas as equações (3.13) e (3.16) são válidas mesmo que alguns dos $x_i; i = 1, 2, 3$ sejam nulos. Tais situações são chamadas casos especiais. Como a curva α é tipo espaço devemos considerar as possibilidades de N e estes serão tratados na próxima seção.

3.2.1 Casos Especiais Para Curvas Tipo Espaço com a Normal Tipo Tempo

Quando N é tipo tempo temos que B é tipo espaço. Para o caso em que X está na direção de alguns dos vetores do triedro de Frenet temos o seguinte resultado.

Teorema 12 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco, com N um vetor tipo tempo e $\chi(s, v) = \alpha(s) + vX(s)$ uma parametrização para a superfície regrada tipo tempo ou tipo espaço.*
i) Se $X = T$ a superfície regrada é desenvolvível e tipo tempo.
ii) Se $X = N$ a superfície regrada é desenvolvível se, e somente se, é parte de um plano.
iii) Se $X = B$ a superfície regrada não é desenvolvível.

Demonstração: i) Se $X = T$, de (3.3) temos $x_1 = 1$ e $x_2 = x_3 = 0$. Substituindo na equação (3.11), temos que

$$
P_X = 0.
$$

Logo a superfície regrada é desenvolvível. Para mostrar que superfície regrada desenvolvível é tipo tempo, observe que das equações (2.18), (2.21) temos que

$$
\eta = \frac{\chi_s \wedge \chi_v}{|\chi_s \wedge \chi_v|_1} = \frac{kvN \wedge T}{|\chi_s \wedge \chi_v|_1} = \frac{-kvB}{|\chi_s \wedge \chi_v|_1}.
$$

Como B é um vetor tipo espaço o plano tangente é tipo tempo, isto é, a superfície regrada desenvolvível é tipo tempo.

ii) Se $X = N$, de (3.3) temos que $x_1 = x_3 = 0$ e $x_2 = 1$. Neste caso $x_1 = x_3 = 0$ e $x_2 = 1$. Substituindo na equação (3.11), temos que

$$P_X = \frac{\tau}{\tau^2 + k^2}.$$

Portanto $P_X = 0 \Leftrightarrow \tau = 0$. Assim α é uma curva planar no plano osculador e como X também está no plano osculador a superfície regrada tipo tempo ou tipo espaço é parte de um plano.

iii) Supondo $X = B$, de (3.3) segue que $x_1 = x_2 = 0$ e $x_3 = 1$. Substituindo na equação (3.11), temos que

$$P_X = \frac{-\tau}{-\tau^2} = \frac{1}{\tau} \neq 0 \quad \forall (s, v) \in I \times \mathbb{R}.$$

Como $P_X \neq 0$, então a superfície regrada tipo tempo tipo ou tipo espaço não pode ser desenvolvível. Além disso α é uma linha de estricção, pois $\langle \alpha', X' \rangle_1 = \langle T, \tau N \rangle_1 = 0$ □

Quando X está em algum dos planos formados pelos vetores de Frenet, temos o seguinte resultado.

Teorema 13 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco com normal tipo tempo e $\chi(s, v) = \alpha(s) + vX(s)$ uma parametrização para a superfície regrada tipo tempo ou tipo espaço.*
i) Se X está no plano normal a superfície regrada é desenvolvível se, e somente se, $\tau = 0$.
ii) Se X está no plano osculador a superfície regrada é desenvolvível se, e somente se, $X = T$ ou a superfície regrada é parte de um plano.
iii) Se X está no plano retificante a superfície regrada é desenvolvível se, e somente se, $X = T$

i) Se X está no plano normal, segue de (3.3) que $x_1 = 0$ $X = x_2 N + x_3 B$ e $-x_2^2 + x_3^2 = \pm 1$, pois N é um vetor tipo tempo. Utilizando a equação (3.11), o parâmetro de distribuição é escrito da seguinte forma

$$P_X = \frac{(x_2^2 - x_3^2)\tau}{x_2^2(\tau^2 + k^2) - x_3^2\tau^2} = \frac{\mp\tau}{\mp\tau^2 - x_2^2 k^2} = \frac{\pm\tau}{\pm\tau^2 + x_2^2 k^2}.$$

Logo $P_X = 0 \Leftrightarrow \tau = 0$.

ii) Se X está no plano osculador, de (3.3) temos $x_3 = 0$, $X = x_1 T + x_2 N$ e $x_1^2 - x_2^2 = \pm 1$.

Substituindo na equação (3.11), o parâmetro de distribuição é dado por

$$P_X = \frac{x_2^2\tau}{x_2^2(\tau^2 + k^2) - x_1^2 k^2} = \frac{x_2^2\tau}{x_2^2\tau^2 \mp k^2}.$$

Para que $P_X = 0$, devemos ter $x_2 = 0$ ou $\tau = 0$. Se $x_2 = 0$, temos $X = T$ e o resultado do Teorema (12). Se $\tau = 0$, a curva α é planar no plano osculador. Como X também está no plano osculador a superfície regrada tipo tempo ou tipo espaço é parte de um plano.

iii) Supondo que X está no plano retificante, de (3.3) temos que $x_2 = 0$, $X = x_1 T + x_2 B$ e $x_1^2 + x_2^2 = 1$, pois T e B são vetores tipo espaço. Substituindo na equação (3.11), o parâmetro de distribuição é dado por

$$P_X = \frac{-x_3^2\tau - x_1 k x_3}{-(x_1 k + x_3\tau)^2} = \frac{x_3(x_3\tau + x_1 k)}{(x_3\tau + x_1 k)^2} = \frac{x_3}{(x_1 k + x_3\tau)}.$$

Portanto $P_X = 0$ se, e somente se, $x_3 = 0$. Além disso, α é uma linha de estricção, isto é, $\langle \alpha', X' \rangle_1 = \langle T, kN \rangle_1 = 0$.

3.2.2 Casos Especiais Para Curvas Tipo Espaço e a Normal Tipo Espaço.

Consideremos agora N um vetor tipo espaço, assim temos que B é um vetor tipo tempo. Para o caso em que X está na direção de algum dos vetores do triedro Frenet podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 14 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco, com N um vetor tipo espaço e $\chi(s,v) = \alpha(s) + vX(s)$ uma parametrização para a superfície regrada tipo tempo ou tipo espaço.*
i) Se $X = T$, a superfície regrada é desenvolvível e tipo espaço.
ii) Se $X = N$, a superfície regrada é desenvolvível se, e somente se, é parte de um plano.
iii) Se $X = B$, a superfície regrada não é desenvolvível.

Demonstração: i) Se $X = T$, segue de (3.3) que $x_2 = x_3 = 0$ e $x_1 = 1$. Substituindo na equação (3.13), temos que

$$P_X = 0.$$

Para mostrar que a superfície regrada desenvolvível é tipo espaço, observe que das equações (2.22) e (2.24), temos que

$$\eta = \frac{\chi_s \wedge \chi_v}{|\chi_s \wedge \chi_v|_1} = \frac{kvN \wedge T}{|\chi_s \wedge \chi_v|_1} = \frac{-kvB}{|\chi_s \wedge \chi_v|_1}.$$

Como B é um vetor tipo tempo o plano tangente é tipo espaço, ou seja, a superfície regrada desenvolvível é tipo espaço.

ii) Se $X = N$, de (3.3) temos que $x_1 = x_3 = 0$ e $x_2 = 1$. Segue da equação (3.13), que

$$P_X = \frac{\tau}{k^2 - \tau^2}.$$

Portanto $P_X = 0 \Leftrightarrow \tau = 0$. Assim α é uma curva planar no plano osculador. Como X também está no plano osculador a superfície regrada desenvolvível é parte de um plano.

iii) Supondo que $X = B$, segue de (3.3) que $x_1 = x_2 = 0$ e $x_3 = 1$. Substituindo na equação (3.13), temos que

$$P_X = \frac{-\tau}{\tau^2} = \frac{-1}{\tau} \neq 0, \quad \forall\, (s, v) \in I \times \mathbb{R}.$$

Como $P_X \neq 0$ a superfície regrada tipo tempo ou tipo espaço não pode ser desenvolvível. Além disso, α é uma linha de estricção, pois $\langle \alpha', X' \rangle_1 = \langle T, \tau N \rangle_1 = 0$. $\square$

Quando X está em algum dos planos formados pelos vetores de Frenet, temos o seguinte teorema.

Teorema 15 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco com normal tipo espaço e $\chi(s, v) = \alpha(s) + vX(s)$ uma parametrização para a superfície regrada tipo tempo ou tipo espaço.*
i) Se X está no plano normal a superfície regrada é desenvolvível se, e somente se, $\tau = 0$.
ii) Se X está no plano osculador a superfície regrada é desenvolvível se, e somente se, $X = T$ ou a superfície regrada é parte de um plano.
iii) Se X está no plano retificante a superfície regrada é desenvolvível se, e somente se, $X = T$.

Demonstração: i) Se X está no plano normal, de (3.3) temos que $x_1 = 0$, $X = x_2 N + x_3 B$ e $x_2^2 - x_3^2 = \pm 1$, pois N é um vetor tipo espaço e B é um vetor tipo tempo. Substituindo na equação (3.13), o parâmetro de distribuição é escrito da seguinte forma

$$P_X = \frac{(x_2^2 - x_3^2)\tau}{x_2^2(k^2 - \tau^2) + x_3^2 \tau^2} = \frac{\pm \tau}{x_2^2 k^2 \mp \tau^2}.$$

Logo $P_X = 0 \Leftrightarrow \tau = 0$. Assim α é uma curva planar.

ii) Se X está no plano osculador, de (3.3) segue que $x_3 = 0$, $X = x_1 T + x_2 N$ e $x_1^2 + x_2^2 = 1$, pois T e N são vetores tipo espaço. Substituindo na equação (3.13), o parâmetro de distribuição é dado por

$$P_X = \frac{x_2^2\tau}{x_2^2(k^2 - \tau^2) + x_1^2k^2} = \frac{x_2^2\tau}{k^2 - x_2^2\tau^2}.$$

Logo $P_X = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$, ou $\tau = 0$. Se $x_2 = 0$ temos $X = T$ o resultado segue do Teorema 14. Se $\tau = 0$, α é uma curva planar no plano osculador. Como neste caso X também está no plano osculador a superfície regrada desenvolvível é parte de um plano.

iii) Se X está no plano retificante, de (3.3) temos que $x_2 = 0$, $X = x_1T + x_3B$ e $x_1^1 - x_3^2 = \pm 1$, pois B é um vetor tipo espaço. Substituindo na equação (3.13), o parâmetro de distribuição é dado por

$$P_X = \frac{-x_3^2\tau - x_1kx_3}{(x_1k + x_3\tau)^2} = \frac{-x_3(x_3\tau + x_1k)}{(x_3\tau + x_1k)^2} = \frac{-x_3}{(x_1k + x_3\tau)}.$$

Portanto $P_X = 0$, se e somente se, $x_3 = 0$. Além disso α é uma linha de estricção, pois $\langle\alpha', X'\rangle_1 = \langle T, kN\rangle_1 = 0$. □

3.2.3 Casos Especiais Para Curvas Tipo Espaço e a Normal Tipo Luz

Quando N é um vetor tipo luz vimos na Seção 2.3.2, que B também é tipo luz. Assim o parâmetro de distribuição não está definido em alguns casos especiais. De fato, suponha $X = T \Rightarrow X' = N$, assim $\langle X', X'\rangle_1 = 0$. O mesmo acontece para $X = N$, $X = x_1T + x_2N$, temos também que $\langle X', X'\rangle_1 = 0$. Observe que se $X = N$ e $X = B$ temos que X não pode ser tomado como unitário, pois são vetores tipo luz. Com essas observações, resta apenas dois casos especiais que serão abordados no próximo teorema.

Teorema 16 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco com o vetor normal tipo tipo luz e $\chi(s, v) = \alpha(s) + vX(s)$ uma parametrização para a superfície regrada tipo tempo ou tipo espaço.*
i) Se X está no plano normal a superfície regrada é desenvolvível se, e somente se, $\tau = 0$ ou $x_2 = -x_3$.
ii) Se X está no plano osculador a superfície regrada é desenvolvível se, e somente se, a torção é constante e satisfaz a equação $\tau = \frac{-x_1}{x_3}$.

Demonstração: i) Supondo que X está no plano normal, devemos ter $x_1 = 0$, $X = x_2N + x_3B$ e $2x_2x_3 = \pm 1$, pois N e B são tipo luz. Utilizando a equação (3.16) o parâmetro de distribuição é escrito da seguinte forma

$$P_X = \frac{-(x_2x_3 + x_3^2)\tau}{x_3^2 - 2x_3x_2\tau^2} = \frac{-(x_2 + x_3)\tau}{x_3 - 2x_2\tau^2}.$$

Logo $P_X = 0 \Leftrightarrow \tau = 0$ ou $x_2 = -x_3$.

ii) Se X está no plano retificante, segue que $x_2 = 0$ e $X = x_1T + x_3B$. Substituindo na equação (3.16), o parâmetro de distribuição é dado por

$$P_X = \frac{-x_3^2\tau - x_1x_3}{x_3^2 + 2x_3x_1\tau} = \frac{-x_3\tau - x_1}{x_3 + 2x_1\tau}$$

Portanto $P_X = 0$ se, e somente se,

$$\tau = \frac{-x_1}{x_3}.$$

Portanto a torção é constante. □

Observe que estamos considerando uma superfície regrada $\chi(s, v) = \alpha(s) + vX(s)$, com α uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco e $X = x_1T + x_2N + x_3B$, $|X|_1 = 1$ e $|X'|_1 \neq 0$. Considere novamente uma curva α tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco e uma superfície regrada parametrizada por $\chi(s, v) = \beta(s) + vX(s)$, onde agora a diretriz β é uma curva tal que o seu vetor tangente é dado por $\beta' = y_1T + y_2N + y_3B$; $y_i \in R; i = 1, 2, 3$ são constantes reais. Como a curva é tipo espaço temos que levar em consideração as possibilidades de N.

A partir das hipóteses acima o seguinte teorema pode ser enunciado.

Teorema 17 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$ uma curva tipo espaço, parametrizada pelo comprimento de arco com o vetor normal N não tipo luz e $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$, tal que $\beta' = y_1T + y_2N + y_3B$, onde $y_i \in R; i = 1, 2, 3$ são constantes reais. A superfície regrada tipo tempo ou tipo espaço que tem β como diretriz e as geratrizes na direção de $X = x_1T + x_2N + x_3B$ é desenvolvível se, e somente se, α é uma hélice que satisfaz umas das seguintes equações.*

$$\frac{k}{\tau} = \frac{y_1(x_2^2 - x_3^2) - y_2x_1x_2 + y_3x_1x_3}{y_3(x_1^2 - x_2^2) + y_2x_2x_3 - y_1x_1x_3} \tag{3.17}$$

$$\frac{k}{\tau} = \frac{-y_1(x_2^2 - x_3^2) + y_2x_1x_2 - y_3x_1x_3}{y_3(x_1^2 + x_2^2) - y_2x_2x_3 - y_1x_1x_3}. \tag{3.18}$$

Demonstração: Assim como no Teorema 10, deve ser levado em consideração as possibilidades do vetor N.

i) Seja N um vetor tipo tempo assim X' é dada pela equação (3.10). Utilizando a equação

(2.30) o parâmetro de distribuição é escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} P_X &= \frac{1}{\langle X', X'\rangle_1}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2k & x_1k + x_3\tau & x_2\tau \end{vmatrix} \\ &= \frac{y_1[(x_2^2 - x_3^2)\tau - x_1kx_3] - y_2[x_1x_2\tau - x_2x_3k] + y_3[k(x_1^2 - x_2^2) + x_1x_3\tau]}{x_2^2(\tau^2 + k^2) - (x_1k + x_3\tau)^2} \\ &= \frac{[y_1(x_2^2 - x_3^2) - y_2x_1x_2 + y_3x_1x_3]\tau + k[y_3(x_1^2 - x_2^2) + y_2x_2x_3 - y_1x_1x_3]}{x_2^2(\tau^2 + k^2) - (x_1k + x_3\tau)^2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Portanto

$$P_X = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{\tau} = -\frac{y_1(x_2^2 - x_3^2) - y_2x_1x_2 + y_3x_1x_3}{y_3(x_1^2 - x_2^2) + y_2x_2x_3 - y_1x_1x_3}.$$

ii) Seja N um vetor tipo espaço, assim X' é dada pela equação (3.12). Utilizando a equação (2.30) para calcular o parâmetro de distribuição, temos que

$$\begin{aligned} P_X &= \frac{1}{\langle X', X'\rangle_1}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2k & x_1k + x_3\tau & x_2\tau \end{vmatrix} \\ &= \frac{y_1[(x_2^2 - x_3^2)\tau - x_1kx_3] - y_2[x_1x_2\tau + x_2x_3k] + y_3[k(x_1^2 + x_2^2) + x_1x_3\tau]}{x_2^2(k^2 - \tau^2) + (x_1k + x_3\tau)^2} \\ &= \frac{[y_1(x_2^2 - x_3^2) - y_2x_1x_2 + y_3x_1x_3]\tau + k[y_3(x_1^2 + x_2^2) - y_2x_2x_3 - y_1x_1x_3]}{x_2^2(k^2 - \tau^2) + (x_1k + x_3\tau)^2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Portanto

$$P_X = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{\tau} = \frac{-y_1(x_2^2 - x_3^2) + y_2x_1x_2 - y_3x_1x_3}{y_3(x_1^2 + x_2^2) - y_2x_2x_3 - y_1x_1x_3}.$$

□

Quando N é um vetor tipo luz temos o seguinte resultado.

Teorema 18 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$ uma curva tipo espaço, parametrizada pelo comprimento de arco com o vetor normal N tipo luz e $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}_1^3$, tal que $\beta' = y_1T + y_2N + y_3B$, onde $y_i \in R; i = 1, 2, 3$ são constantes reais. A superfície regrada tipo tempo ou tipo espaço que tem β como diretriz e as geratrizes na direção de $X = x_1T + x_2N + x_3B$ é desenvolvível se, e somente se, a torção é constante e satisfaz a equação*

$$\tau = \frac{-y_3(x_1^2 + x_2x_3) + y_2x_3^2 + y_1x_1x_3}{-2y_1x_2x_3 + y_2x_1x_3 + y_3x_1x_2}.$$

Demonstração:

Supondo N um vetor tipo luz, temos que X' é dado pela equação (3.15). Utilizando a equação (2.30) para calcular o parâmetro de distribuição, temos que

$$
\begin{aligned}
P_X &= \frac{1}{\langle X', X' \rangle_1} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_3 & x_1 + x_2\tau & -x_3\tau \end{vmatrix} \\
&= \frac{y_1[(-x_2x_3 - x_2x_3)\tau - x_1x_3] - y_2[-x_1x_3\tau + x_3^2] + y_3[x_1^2 + x_1x_2\tau + x_2x_3]}{x_3^2 + 2x_3\tau(x_1 + x_2\tau)} \\
&= \frac{[-2y_1x_2x_3 + y_2x_1x_3 + y_3x_1x_2]\tau + y_3(x_1^2 + x_2x_3) - y_2x_3^2 - y_1x_1x_3}{x_3^2 - 2x_3\tau(x_1 + x_2\tau)}. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

Portanto

$$P_X = 0 \Leftrightarrow \tau = \frac{-y_3(x_1^2 + x_2x_3) + y_2x_3^2 + y_1x_1x_3}{-2y_1x_2x_3 + y_2x_1x_3 + y_3x_1x_2}.$$

□

Observe que se $y_1 = 1$ e $y_2 = y_3 = 0$, temos o caso já estudado no Teorema 16.

3.3 Curvatura de Gauss Para o Espaço de Minkowski

Considere S uma superfície tipo tempo ou tipo espaço. Seja $\chi(u,v)$ uma parametrização da vizinhança de um ponto $p \in S$ e $\{\chi_u, \chi_v\}$ uma base do plano tangente. A primeira forma fundamental é definida por

$$
\begin{aligned}
I_p = \langle , \rangle_1 : T_pS \times T_pS &\longrightarrow \mathbb{R} \\
I_p(u,v) &= \langle u, v \rangle_1. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Dado um vetor $v = a\chi_u + b\chi_v$ do plano tangente, temos que

$$I_p(v,v) = \langle v, v \rangle_1 = a^2\langle \chi_u, \chi_u \rangle_1 + 2ab\langle \chi_u, \chi_v \rangle_1 + b^2\langle \chi_v, \chi_v \rangle_1,$$

ou ainda

$$I_p(v,v) = \langle v, v \rangle_1 = (a \;\; b)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

onde $E = \langle \chi_u, \chi_u \rangle_1, F = \langle \chi_u, \chi_v \rangle_1, E = \langle \chi_v, \chi_v \rangle_1$. Chamados E, F e G de coeficientes da primeira forma fundamental. Como foi visto anteriormente, sendo S uma superfície tipo tempo ou tipo espaço, podemos definir um campo de vetor unitário ortogonal ao plano tangente dado por

$$\eta(u,v) = \frac{\chi_u \wedge \chi_v}{|\chi_u \wedge \chi_v|_1}.$$

Então definimos a segunda forma fundamental de χ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} II_p : T_pS \times T_pS :&\longrightarrow \mathbb{R} \\ II_p(u,v) &= -\langle (d\eta)_p(u), v\rangle_1. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Assim dado um vetor $v = a\chi_u + b\chi_v \in T_pS$, temos que

$$\begin{aligned} II_p(v,v) = \langle (d\eta)_p(v), v\rangle_1 &= -\langle (d\eta)_p(a\chi_u + b\chi_v), a\chi_u + b\chi_v\rangle_1 \\ &= -\langle a(d\eta)_p(\chi_u) + b(d\eta)_p(\chi_v), a\chi_u + b\chi_v\rangle_1 \\ &= -a^2\langle (d\eta)_p(\chi_u), \chi_u\rangle_1 - 2ab\langle (d\eta)_p(\chi_u), \chi_v\rangle_1 - b^2\langle (d\eta)_p(\chi_v), \chi_v\rangle_1 \\ &= a^2e + 2abf + b^2g, \end{aligned}$$

onde $e = -\langle (d\eta)_p(\chi_u), \chi_u\rangle_1 = \langle \eta, \chi_{uu}\rangle_1$, $f = -\langle (d\eta)_p(\chi_u), \chi_v\rangle_1 = \langle \eta, \chi_{uv}\rangle_1$ e $g = -\langle (d\eta)_p(\chi_v), \chi_v\rangle_1 = \langle \eta, \chi_{vv}\rangle_1$. Chamamos e, f e g de coeficientes da segunda forma fundamental. A curvatura de Gauss é definida por

$$K = \frac{eg - f^2}{|EG - F^2|}. \tag{3.24}$$

Foi visto na Seção 1.4, que a curvatura gaussiana da superfície regrada desenvolvível é identicamente nula. Um resultado análogo vale para superfícies regradas desenvolvíveis tipo tempo ou tipo espaço no espaço de Minkowski. De fato, seja $\chi(s,v) = \beta(s) + vX(s)$, uma parametrização de uma superfície regrada tipo espaço ou tipo tempo, com $|X|_1 = 1$ e $|X'|_1 \neq 0$. Assim

$$\chi_v = X(s), \quad \chi_{vv} = 0, \quad \chi_{vu} = \chi_{uv} = X'(s).$$

Logo $e = 0$ e

$$f = \langle N, \chi_{uv}\rangle_1 = \langle X'(s), \frac{\chi_u \wedge \chi_v}{|\chi_u \wedge \chi_v|_1}\rangle_1 = \frac{det(\beta', X, X')}{|\chi_u \wedge \chi_v|_1} = \frac{P_X\langle X', X'\rangle_1}{|\chi_u \wedge \chi_v|_1},$$

onde P_X é o parâmetro de distribuição da superfície regrada definido em (2.30). Dessa forma, a expressão da curvatura de Gauss para este caso é dada por

$$K = \frac{-f^2}{|EG - F^2|} = -\frac{P_X^2(\langle X', X'\rangle_1)^2}{|\chi_u \wedge \chi_v|_1^2(|EG - F^2|)}. \tag{3.25}$$

Portanto $P_X = 0$ se, e somente se, $K = 0$.

Capítulo 4

Exemplos e Aplicações

Nste capítulo vamos mostrar alguns exemplos de superfícies regradas desenvolvíveis e não desenvolvíveis no espaço de Minkowski e no espaço Euclidiano. Para tal consideramos a curva α dada pela parametrização $\alpha(t) = (senh(t), t\sqrt{2}, cosh(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$.

Primeiramente consideremos α no espaço de Minkowski. Assim derivando temos que

$$\alpha'(t) = (cosh(t), 1, senh(t)), \;\; \Rightarrow \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_1 = 2.$$

Observe que α é tipo espaço. Reparametrizando a curva pelo comprimento de arco, obtemos

$$\alpha(s) = \left(senh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}, cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \right).$$

Da Seção 2.3.2, os vetores do triedro de Frenet são dados por

$$\begin{aligned} T(s) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} senh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \right), \\ N(s) &= \left(senh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0, cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \right), \\ B(s) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} senh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \right), \end{aligned}$$

a curvatura e a torção são escritas da seguinte forma

$$\begin{aligned} k(s) &= |T'(s)|_1 = \frac{1}{2}, \\ \tau &= \langle N'(s), B(s) \rangle_1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Observe que $\langle N(s), N(s) \rangle_1 = -1$ e $\langle B(s), B(s) \rangle_1 = 1$, assim o vetor normal é tipo tempo e

$B(s)$ é um vetor tipo espaço. Além disso, se $v = (0, c, 0)$ para c uma constante real não nula, temos que $\langle T(s), v\rangle_1 = const.$, isto é, α é uma hélice no espaço de Minkowski (Veja Figura 4.2). Considerando

$$X(s) = \frac{-1}{\sqrt{3}}T(s) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}N(s) + \frac{2}{\sqrt{3}}B(s),$$

temos que $|X(s)|_1 = 1$ e

$$1 = \frac{k}{\tau} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}.$$

Assim, o Teorema 10 afirma que a superfície regrada parametrizada por $\chi(s, v) = \alpha(s) + vX(s)$ é desenvolvível (Veja Figura 4.1).

Uma parametrização para esta superfície é dada por

$$\begin{aligned}\chi(s, v) &= \left(\left(\frac{\sqrt{3} + v\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \frac{v}{\sqrt{6}}senh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s\sqrt{3} - 3v}{\sqrt{6}}, \left(\frac{\sqrt{3} + v\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)senh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ &+ \left(0, 0, \frac{v}{\sqrt{6}}cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right).\end{aligned}$$

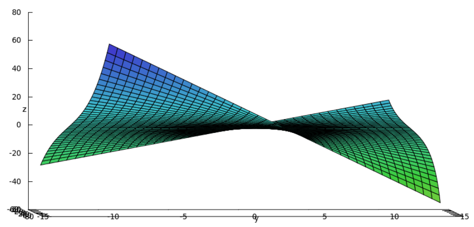

Figura 4.1: Superfície Regrada Desenvolvível.

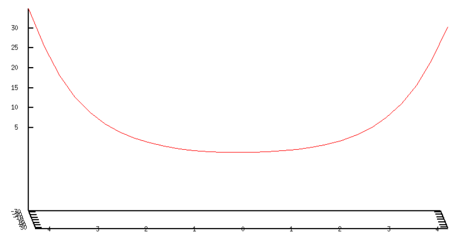

Figura 4.2: Hélice.

Vamos agora considerar $X(s)$ na direção dos vetores de Frenet.

Considerando $X(s) = T(s)$, usando o Teorema 12 temos que a superfície regrada $\chi(s, v) = \alpha(s) + vT(s)$ é desenvolvível (Veja Figura 4.3). Uma parametrização para a superfície regrada desenvolvível é dada por

$$\chi(s, v) = \left(senh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \frac{v}{\sqrt{2}}cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s + v}{\sqrt{2}}, cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \frac{v}{\sqrt{2}}senh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

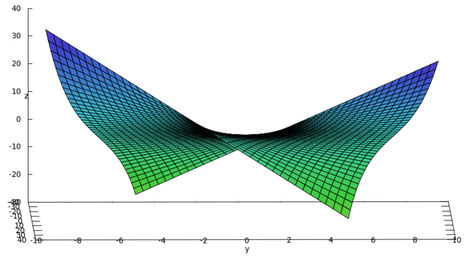

Figura 4.3: Superfície Regrada Desenvolvível $X(s) = T(s)$.

Considerando agora $X(s) = N(s)$. O Teorema 12 afirma que a superfície regrada $\chi(s,v) = \alpha(s) + vN(s)$ não é desenvolvível, pois α não é uma curva planar (Veja Figura 4.4). Uma parametrização para a superfície regrada não desenvolvível é dada por

$$\chi(s,v) = \left((1+v)senh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}, (1+v)cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

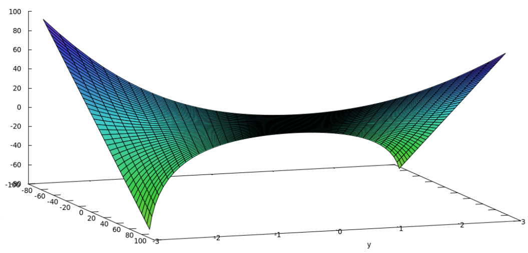

Figura 4.4: Superfície Regrada não Desenvolvível $X(s) = N(s)$.

Considerando agora $X(s) = B(s)$. O Teorema 12 afirma que a superfície regrada $\chi(s,v) = \alpha(s) + vB(s)$ não é desenvolvível (Veja Figura 4.5). Uma parametrização para a superfície regrada não desenvolvível é dada por

$$\chi(s,v) = \left(senh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \frac{v}{\sqrt{2}}cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s-v}{\sqrt{2}}, cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \frac{v}{\sqrt{2}}senh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

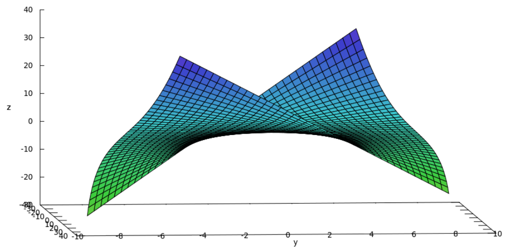

Figura 4.5: Superfície Regrada não Desenvolvível $X(s) = B(s)$.

Agora vamos considerar a mesma curva $\alpha(t) = (senh(t), t, cosh(t))$ em $\mathbb{R}^3$ e fazer considerações análogas ao anterior. Reparametrizando pelo comprimento de arco, obtemos

$$\alpha(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}}, senh^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), cosh\left(senh^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)\right).$$

Da Seção 1.2 os vetores do triedro de Frenet são dados por

$$\begin{aligned}
T(s) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{s^2+2}}, \frac{s}{\sqrt{4+2s^2}}\right),\\
N(s) &= \left(0, \frac{-s}{\sqrt{2+s^2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+s^2}}\right),\\
B(s) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{s^2+2}}, \frac{-s}{\sqrt{4+2s^2}}\right),
\end{aligned}$$

a curvatura e a torção são escritas da seguinte forma

$$\begin{aligned}
k(s) &= |T'(s)| = \frac{1}{s^2+2},\\
\tau(s) &= -\langle N'(s), B(s)\rangle = \frac{-1}{s^2+2}.
\end{aligned}$$

Observe que sendo $v = (c, 0, 0)$, onde c é uma constante não nula temos que $\langle T, c\rangle = \frac{c}{\sqrt{2}} = const.$, isto é, α é uma hélice no espaço Euclidiano. Considerando $X(s)$ como a seguir

$$X(s) = \frac{2}{\sqrt{6}}T(s) + \frac{1}{\sqrt{6}}N(s) + \frac{1}{\sqrt{6}}B(s),$$

temos que $|X(s)| = 1$ e

$$-1 = \frac{k}{\tau} = -\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)}.$$

Logo pelo Teorema 1, a superfície regrada $\chi(s, v) = \alpha(s) + vX(s)$ é desenvolvível (Veja

Figura 4.6). Uma parametrização para esta superfície é dada por

$$\chi(s,v) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{v\sqrt{3}}{2}, senh^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \frac{v(1-s)}{\sqrt{12+6s^2}}, cosh\left(senh^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) + \frac{v(s+2)}{\sqrt{24+12s^2}}\right).$$

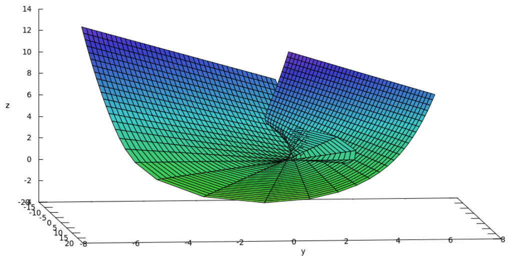

Figura 4.6: Superfície Regrada Desenvolvível.

Agora vamos considerar $X(s)$ na direção dos vetores de Frenet.

Seja $X(s) = T(s)$, usando o Teorema 2 a superfície regrada $\chi(s,v) = \alpha(s) + vT(s)$ é desenvolvível (Veja Figura 4.7). Uma parametrização para esta superfície é dada por

$$\chi(s,v) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}}, senh^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \frac{v}{\sqrt{s^2+2}}, cosh\left(senh^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) + \frac{sv}{\sqrt{4+2s^2}}\right).$$

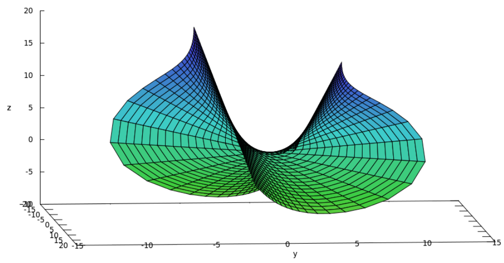

Figura 4.7: Superfície Regrada Desenvolvível $X = T$.

Seja $X(s) = N(s)$, usando o Teorema 2 a superfície regrada $\chi(s,v) = \alpha(s) + vN(s)$ não é desenvolvível, já que α não está contida em um plano (Veja Figura 4.8). Uma parametrização para esta superfície é dada por

$$\chi(s,v) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}}, senh^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - \frac{sv}{\sqrt{s^2+2}}, cosh\left(senh^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) + \frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{2+2s^2}}\right).$$

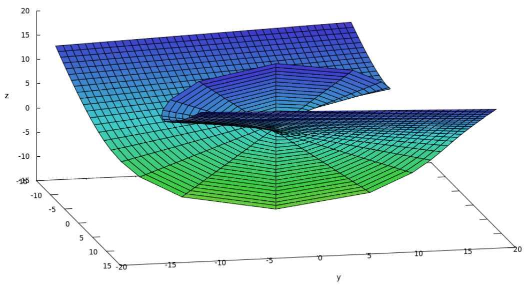

Figura 4.8: Superfície Regrada não Desenvolvível $X = N$.

Seja $X(s) = B(s)$, usando o Teorema 2 a superfície regrada $\chi(s, v) = \alpha(s) + vB(s)$ não é desenvolvível (Veja Figura 4.9). Uma parametrização para esta superfície é dada por

$$\chi(s, v) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}}, senh^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - \frac{v}{\sqrt{s^2+2}}, cosh\left(senh^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) - \frac{sv}{\sqrt{4+2s^2}} \right).$$

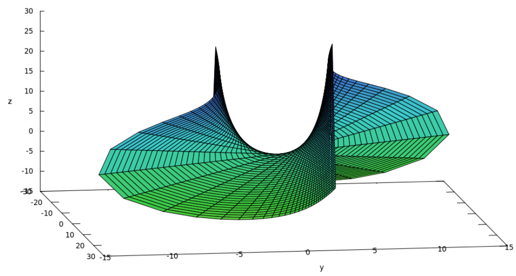

Figura 4.9: Superfície Regrada não Desenvolvível $X = B$.

Referências Bibliográficas

[1] B. O'Neil, *Semi-Riemannian Geometry with application to general relativity,* Academic Press, New York, 1983.

[2] Do Carmo, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.* SBM, 2005.

[3] Hacisalihoglu, H. H.,Turgut, A., *On the Distribution Parameter of Spacelike Ruled Surface in the Minkowski 3-space,* Far East J.Math Sci 5, 321-328, 1997.

[4] Hoffman, K. and Kunze, R. *Linear Algebra.* Second Edition. Prentice-Hall, 1971.

[5] J.K. Beem and P.E Ehrlich, *Global Lorentziam Geometry,* Marcel Dekker Inc. New York, 1981.

[6] Lopez, R., Differential Geometry of curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space, arXiv:0810.3351v1[math.DG.], 2008.

[7] Senra Saracoglu, Yusuf Yayli. *On Timelike and Spacelike Developable Ruled Surfaces.* J. Math. Comput. Sci. 2, No. 6, 1824-1838, 2012.

[8] Tenenblat, K. *Introdução a Geometria diferencial.* Segunda Edição. Blucher, 2008.

[9] T. Weinstein. *An Introduction to Lorentz Surfaces.* Walter de Gruyter, 1996.

[10] Wolfgang Kuhnel, Bruce Hunt. *Differential Geometry: Curves - Surfaces - Manifolds.* Second Edition, A.M.S. 2005.

[11] Y. Yayh. *On The Motion of the Frenet Vectors and Spacelike Ruled Surfaces in Minkowski 3-Space.* Mathematical e Computational Applications 5, 49-55, 2000.

[12] Y. Yayh. *On The Motion of the Frenet Vectors and Timelike Ruled Surfaces in the Minkowski 3-Space.* Academic Journals Inc. 341-347, 2007.

[13] Y. Yayh, S. Saracoglu. *On Developable Ruled Surface in Minkowski Space.* Advances in Applied Clifford Algebras, DOI 10.1007/s00006- 011-0305-5,2011.