



Universidade de Brasília
Instituto de Física

Pós-Graduação

Unificação Geométrica das Interações Fundamentais

Disrael Camargo Neves da Cunha

Maio de 2013

Brasília - DF

Disrael Camargo Neves da Cunha

Unificação Geométrica das Interações Fundamentais

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Física Teórica.

Banca Examinadora

Marcos Duarte Maia (Orientador) - UnB - Física

Aleksandr Nikolaievich Pinzul - UnB - Física

Marco Cézar Barbosa Fernandes - UnB - Física (Suplente)

Pedro Roitman - UnB - Matemática

Mai de 2013

Brasília - DF

“Unificação geométrica das interações fundamentais”

Por

Disrael Camargo neves da Cunha

Dissertação submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Aprovada por:



Prof. Marcos Duarte Maia
IF/UnB



Prof. Aleksander Nikolaievich Pinzul
IF/UnB



Prof. Pedro Roitman
MAT/UnB

Prof. Dr. Demétrio Antônio da Silva Filho
Coordenador de Pós-Graduação
Instituto de Física

Agradecimentos

Esta dissertação não seria possível sem a dedicação constante e atenciosa do meu orientador, Professor Marcos Duarte Maia, que têm o incrível dom de explicar teorias consideradas por mim difíceis, de forma totalmente compreensível. O professor Renato Portugal teve um papel decisivo no meu aprendizado de computação simbólica, utilizada na última parte do trabalho.

Agradeço aos professores Marco César, Lucas Costa, Mauro Patrão, Daniel Müller, Richard Kerner, Pedro Odon, Abraão Capistrano e Edmundo Monte e aos amigos Felipe Dorazio, Bruno Vieira, Alisson Chavier e Natália Coelho por conversarem comigo sobre os assuntos desta dissertação.

Gostaria de agradecer também à minha família. À minha esposa Julia pelo companheirismo neste momento difícil que é o mestrado. Aos meus pais, Eldis e Tarcísio pela inesgotável paciência que tiveram ao responder sempre prontamente às mais variadas perguntas que eu fazia quando criança. Aos meus irmãos Lulu, Theou, Jojô, Marcela, Bebel e Abel que sempre me encorajaram a discutir física de maneira mais didática possível, me ensinando a organizar os conceitos, permitindo uma maior clareza dos conteúdos por mim estudados.

Por fim, agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro.

*"Para se entender
Tem que se achar
Que a vida não é só isso que se vê
É um pouco mais
Que os olhos não conseguem perceber
E as mãos não ousam tocar
E os pés recusam pisar"*

Sei lá, Mangueira. De Herminio Bello de Carvalho e Paulinho da Viola.

Resumo

A teoria de Kaluza-Klein não abeliana, proposta em 1963 para a unificação das interações fundamentais é modificada, utilizando a topologia de imersão do espaço-tempo no lugar da topologia produto original. A ação de Einstein-Hilbert aplicada ao espaço-tempo total é mantida, mas o ansatz da métrica é derivado apenas usando a imersão. O espaço interno não é compacto, mas sim gerado pelas dimensões extras requeridas pela imersão e o grupo de isometria desempenha o papel da simetria de calibre. Os potenciais de calibre são de origem geométrica, dada pela terceira forma fundamental do espaço-tempo quadridimensional. A ação de Einstein-Hilbert do espaço de imersão se decompõe na ação gravitacional usual do espaço-tempo mais a ação de Yang-Mills, adicionado de um termo de interação determinado pela segunda forma fundamental (ou curvatura extrínseca do espaço-tempo). Uma vantagem sobre a teoria de Kaluza-Klein original é que o problema da quiralidade fermiônica na escala eletrofraca é resolvido, juntamente com o problema da hierarquia das interações fundamentais.

Palavras-chave: Kaluza-Klein, Imersão, Unificação

Abstract

The non abelian Kaluza-Klein theory, from 1963 for the unification of the fundamental interactions is modified, using the embedding topology of space-times in place of the original product topology. The Einstein-Hilbert action applied to the higher dimensional embedding space is maintained, but the metric ansatz is derived from the embedding. The internal space is not compact as generated by the extra dimensions of the embedding and its isometry group plays the role of the gauge symmetry. The gauge potentials are of geometrical origin, given by the third fundamental form of the embedded space-time. The Lagrangian of the total space decomposes in the gravitational plus the Yang-Mills plus an interaction term determined by the second fundamental form (or extrinsic curvature). The advantage over the original Kaluza-Klein is that the problem associated with the fermions chirality at the electroweak scale is resolved, together with the the hierarchy of the fundamental interactions.

Keywords: Kaluza-Klein, Embedding, Unification

Índice

Agradecimentos	iv
Resumo	vi
Abstract	vii
Lista de Figuras	x
Lista de Convenções	1
1 Introdução	1
2 Física e Geometria	8
2.1 O Surgimento das Geometrias Não Euclidianas	9
2.2 Geometria Riemanniana	18
3 Geometria Riemanniana Imersa	28
3.1 Importância da Segunda e Terceira Formas Fundamentais	32
3.2 Condição de Integrabilidade da Imersão	38
4 Interações Fundamentais	44
4.1 Gravitação	45
4.1.1 Ação de Einstein-Hilbert	47
4.2 Campos de Calibre	50
4.2.1 Teoria de Calibre de Weyl	51
4.2.2 Renascimento da Teoria de Calibre	52
4.2.3 A Teoria de Yang-Mills	53
4.2.4 Formulação Geométrica da Teoria de Yang-Mills	57
5 Exemplos de Unificação	61
5.1 Teoria de Kaluza-Klein	61

5.1.1	Início da Teoria de Kaluza-Klein	61
5.1.2	Teoria de Kaluza-Klein Não Abeliana	70
5.2	A Hierarquia Gravitacional	80
6	Unificação Geométrica	84
	Conclusão	97
A	Transformação da Terceira Forma Fundamental	99
A.1	Transformação Infinitesimal da Terceira Forma Fundamental	100
A.2	Transformação da Terceira Forma Fundamental	101
B	Exemplo de Imersão e Unificação	104
	Referências	134

Lista de Figuras

2.1	Sólidos Platônicos como Elementos Fundamentais da Natureza	9
2.2	Postulados de Euclides	10
2.3	Contra-Exemplo ao Postulado de Euclides	11
2.4	Soma dos Ângulos internos de triângulos em espaços não Euclidianos	12
2.5	Variação da Normal em relação à uma curva $\alpha(t)$	13
2.6	Secção Normal	14
2.7	Circunferência de maior contato	14
2.8	Superfícies planas isométricas	16
2.9	Hélice	17
2.10	Coordenadas em uma Variedade	19
2.11	Exemplo de transporte paralelo na esfera	21
2.12	Transporte paralelo	21
2.13	Curvatura na esfera	24
2.14	Paralelogramo de Riemann	24
3.1	Função de Imersão	29
3.2	Descrição de Superfícies	32
4.1	Aharonov-Bohm	53
4.2	Fibrado Principal	58
5.1	Cilindro de Einstein	68
5.2	Espaço total como o produto topológico	76
A.1	Simetria de calibre	99

Capítulo 1

Introdução

O esforço para o conhecimento, por sua própria natureza, nos impele ao mesmo tempo para a compreensão da extrema variedade da experiência e para o domínio da simplicidade econômica das hipóteses fundamentais.

Como Vejo o Mundo. Albert Einstein.

O conhecimento científico, em sua busca por compreender a natureza de forma única e simples, sugere que fenômenos naturais genéricos sejam explicados por apenas uma única teoria. A história da ciência está repleta de exemplos que mostram a necessidade de descrever a natureza através da união de teorias antes consideradas distintas. Abdus Salam e Steve Weinberg, ganhadores do prêmio nobel, tiveram sucesso na tentativa de unificação do eletromagnetismo com a força nuclear fraca.

Salam nos lembra em livro de sua publicação [1] de pelo menos 2 marcos importantes na direção da unificação: 1- A unificação feita por Issac Newton no século XVII na qual sua teoria descrevia tanto fenômenos terrestres como celestes, que até a época eram vistos como distintos; 2- a unificação da Eletricidade e do Magnetismo concluída por Maxwell na segunda metade do século XIX, resultando na teoria Eletromagnética; Kant, no seu memorável trabalho *Crítica da Razão Pura* [2], já tratava o espaço e o tempo como pertencentes à uma mesma classe ontológica de formas de percepção. Einstein descreveu o espaço e o tempo como elementos análogos na Teoria da Relatividade Especial.

Atualmente, o Modelo Padrão de partículas descreve de forma satisfatória três das quatro interações fundamentais conhecidas: a força nuclear fraca, a força eletromagnética e a força nuclear forte (todas conhecidas como interações de calibre). A única força fundamental que não pertence à este conjunto é a da gravitação. Um grande esforço para incluí-la foi dispensado pelos cientistas nos últimos anos, sem conclusão final. A maior dificuldade encontrada para incluir a gravidade no modelo padrão é a sua aparente incompatibilidade com a teoria quântica, pois ainda não se conseguiu desenvolver uma teoria testável na qual a gravidade é quantizada. Isto é devido à grande quantidade de energia necessária para realizar tal teste (o problema da hierarquia gravitacional).

Vale ressaltar a importância de teorias unificadoras para uma compreensão mais aprofundada dos fenômenos naturais. Quando combinam-se duas ou mais teorias, o resultado é uma nova teoria que possua mais generalidade (aplica-se a mais fenômenos) e simplicidade. Além disso, o resultado deve apresentar a possibilidade de observação de fenômenos novos. É o caso da teoria Eletromagnética, que explicou as características ondulatórias da luz (incluindo sua velocidade) e previu a existência de outras ondas de mesma natureza em uma vasta faixa de frequências . Este fato foi observado posteriormente através de experimentos realizados por Hertz. Da mesma forma, a RG prevê o fenômeno de ondas gravitacionais, que são perturbações periódicas transmissoras de energia que são causadas por deformações no espaço-tempo. Um exemplo de tais fontes seria um sistema binário de estrelas.

De acordo com Pierre de Maupertuis, filósofo e matemático belga do século XVIII e diretor da Faculdade de Ciências de Berlin, a natureza, na produção de seus efeitos,

sempre age de maneira mais simples. Ele se inspirou nos trabalhos de Fermat, que explicava os padrões de refração da luz pelo postulado de que esta deveria se propagar entre dois pontos no menor tempo possível. Concebeu assim o cálculo variacional com base nos valores mínimos de uma função chamada ação. A ação de Maupertuis era muito simples, dada pelo produto $Matéria \times Movimento \times Espaço$ (da massa pela velocidade e pela distância percorrida por um corpo) que hoje, generalizada, é vista como a integral de uma função chamada Lagrangeana. Esta simplicidade possibilita uma compreensão aprofundada das sutilezas inerentes às teorias. Um exemplo disso é a teoria Newtoniana, que expõe de uma forma muito mais concisa e geral as leis de Kepler (as quais são apenas casos particulares da teoria de Newton) e pode ser derivada de princípios variacionais.

A motivação para se buscar uma teoria unificada é variada. Em relação à idéia de Maupertuis, pode-se dizer que o intuito é descrever uma Lagrangeana que contenha em si todas as características dos fenômenos observáveis possíveis. Hoje em dia existe uma corrente de pensamento que afirma que o objetivo da ciência é chegar a uma resposta final que explique todos os fenômenos perceptíveis. A corrente contrária, também muito difundida, diz que o projeto de unificação é uma ilusão, pois mesmo que se chegue a tal teoria, não se pode provar sua veracidade. De acordo com essa última corrente, poderiam existir várias destas teorias com cada uma partindo de axiomas diferentes. A posição que se adota no presente trabalho é claramente aquela que busca uma teoria unificada, pois pretende-se descrever todas as forças fundamentais em uma só teoria. Porém a teoria a ser apresentada não tem a pretensão de ser última e acabada, mas sim passível de constante revisão. Uma teoria que unifica todas as forças está longe de ser a explicação final, uma vez que provavelmente ainda existirão inúmeros problemas inerentes à própria teoria, à sua aplicabilidade e à questão filosófica de certeza. De acordo com Poincaré [3], não se pode provar a veracidade de uma teoria científica, apenas verificar suas limitações (que são as discordâncias com a experiência). Neste sentido será impossível dizer que uma dada teoria é a explicação final da natureza.

A RG foi desenvolvida por Einstein em 1916 com o objetivo de descrever de maneira satisfatória a interação gravitacional, de modo compatível com a RE de 1905. Para isso, ele usou a geometria Riemanniana como ferramenta matemática no qual a teo-

ria deveria ser fundamentada. Com o uso desta geometria, o espaço-tempo físico a ser estudado é uma variedade dotada de uma métrica, que fornece informações sobre a medida espacial e temporal realizada dentro da variedade, de modo intrínseco, sem a necessidade de realizar nenhuma medida fora da mesma. As equações que descrevem a evolução da métrica (esta também conhecida, em geometria, como primeira forma fundamental) a partir de uma dada distribuição de matéria são derivadas de um princípio variacional, no qual a ação é a integral de uma função, que é definida em toda a variedade, e é chamada de Lagrangeana de Einstein-Hilbert, construída com a curvatura escalar da variedade.

Ao longo dos anos, a RG conseguiu descrever fenômenos gravitacionais de maneira satisfatória, pois explicou observações que não eram consistentes com a teoria Newtoniana da gravitação (como o desvio do periélio de mercúrio) e até recentemente nenhuma evidência experimental direta permitiu descartá-la. Entretanto em astrofísica e cosmologia a teoria de Einstein não explica o movimento de estrelas em galáxias espirais e nem a expansão acelerada do universo (são os problemas da matéria escura e energia escura, respectivamente). Portanto, inúmeras tentativas de modificá-la ou substituí-la vêm sendo propostas. Isso se dá porque ela possui uma dificuldade de se integrar com a mecânica quântica, bem como dificuldade em explicar a energia e matéria escuras e o problema da hierarquia.

O presente trabalho propõe a modificação da teoria da gravitação de Einstein em alguns aspectos com o objetivo de solucionar o problema da unificação. A modificação sugerida leva em conta críticas à geometria Riemanniana em sua formulação original [4], feitas antes mesmo da RG existir.

Para compreender essas críticas, basta notar que Riemann redefiniu o conceito de variedade (este conceito já era usado por Kant como o conjunto de todas as percepções objetivas) sem nenhuma referência à um espaço maior em que esta esteja contida, ou seja, em termos puramente intrínsecos. Disso resulta que a geometria Riemanniana não tem meios para diferenciar localmente um plano de um cilindro, de um cone ou de uma telha qualquer. Portanto, a formulação de Riemann da geometria não leva em conta informações topológicas importantes, necessárias para a plena compreensão das formas dos objetos que ela se propõe a descrever. A solução deste complexo problema de geometria teve seu ápice com o teorema de Nash de 1956,

afirmando que para uma variedade Riemanniana qualquer, existe sempre uma outra com dimensão superior em que aquela está imersa. O teorema usa condições menos restritivas possíveis à esta imersão (mais especificamente, impondo apenas a diferenciabilidade da mesma). A idéia usada por Nash para provar o teorema é bem intuitiva: toma-se uma imersão de uma variedade particular e aplica-se uma deformação (local) nas direções das dimensões extras. Obtém-se assim uma outra variedade com uma dada métrica qualquer.

Na imersão, aparecem outros objetos (além da métrica) que são necessários para caracterizar completamente a variedade, conhecidos como segunda e terceira formas fundamentais. Existe uma versão do teorema de Nash para as variedades usadas na RG (chamadas variedades semi-Riemannianas).

O segundo capítulo desta dissertação apresenta uma revisão histórica e conceitual de geometria. O terceiro capítulo trata da imersão de variedades Riemannianas. Após este capítulo, será feita uma descrição dos campos de calibre e do campo gravitacional. Será visto que estes campos permitem uma descrição geométrica, sendo que o campo gravitacional define a métrica do espaço-tempo e os campos de calibre determinam a conexão afim do espaço interno. Isso reforça a escolha de uma unificação geométrica, concordando com a conjectura feita por Ne'eman, na qual as simetrias de calibre do espaço interno teriam uma origem física nas simetrias das dimensões extras.

Será visto que as equações dos campos de calibre só fazem sentido em 4 dimensões. A RG não é uma teoria de calibre, portanto não possui esta limitação dimensional, podendo se propagar nas dimensões extras. Em face às críticas (feitas inclusive pelo próprio Riemann) quanto à ambiguidade da forma exata das variedades, pode-se postular que o espaço-tempo é uma sub-variedade de uma espaço com dimensão maior que 4, no qual ele está imerso.

A descrição da imersão isométrica (através das formas fundamentais) resolve o problema da forma exata da variedade espaço-temporal. Além disso, os conjuntos abertos usados para assegurar a propriedade de ser o espaço-tempo um espaço topológico (fato este já contido no paper original de Riemann de 1854, mas somente esclarecido em 1931 por Whitehead e Veblen [5]), se estende ao espaço de imersão. Isto significa que se a gravidade se propaga nas dimensões extras, então a topologia

do espaço-tempo também possui extensão natural para além das 4 dimensões postuladas na RE. Isto assegura a possibilidade de que os campos gravitacionais possam acessar continuamente as dimensões extras, dando origem à foliações do espaço de imersão no qual cada folha é um espaço-tempo.

Desta forma, o teorema de Nash provê um forte embasamento matemático para a imersão e aplica-se aos espaços-tempo quadridimensionais usados na relatividade geral, que podem então ser imersos em uma variedade com dimensão superior. Vamos ver que isto também resolve o problema da hierarquia, uma vez que a constante gravitacional Newtoniana G , que aparece na equação de Einstein não é mais uma constante fundamental da natureza, pois sua dimensionalidade é adaptada à três dimensões espaciais, isto sugere que esta seja modificada. Com o formalismo de imersão justifica-se o uso de uma nova constante G^* , adaptável à solução do problema da hierarquia, que corresponda à escala de energia das demais interações.

Outras teorias admitem a existência de dimensões extras. Após o surgimento da teoria de Kaluza-Klein, apareceram a Teoria de Cordas e a Teoria de Branas-Mundo (que serão apresentadas - a primeira e a última - no capítulo 5). A teoria de Kaluza-Klein admite que o princípio de Einstein-Hilbert vale para o espaço de maior dimensão, obtém-se assim equações que descrevem tanto a gravidade quanto as outras forças fundamentais da natureza (as interações de calibre). Isso seria suficiente para realizar a unificação, porém em 1984 descobriu-se que a teoria de Kaluza-Klein contradiz certas observações, como a quiralidade dos férmions à baixas energias. Vale lembrar que este problema surgiu porque se admitia uma topologia bem particular, na qual as dimensões extras eram compactas. A Teoria de Cordas não guarda semelhanças diretas com a Relatividade Geral, uma vez que parte de outro princípio variacional (o princípio de Nambu-Goto) para obter as equações de movimento. Por outro lado, a teoria de branas-mundo usa a hipótese de imersão de variedades e o princípio de Einstein-Hilbert, porém usa também uma condição de contorno conhecida como Israel-Darmois-Lanczos, que não é consequência das outras hipóteses, mas decorre do axioma de simetria de espelho, que tem sua motivação na teoria de cordas.

Na teoria a ser desenvolvida aqui (apresentada no sexto capítulo), mostra-se que somente com a hipótese de imersão e o princípio de Einstein-Hilbert, obtém-se uma métrica semelhante à de Kaluza-Klein, porém, como a topologia é diferente, ela não

contém os mesmos problemas da teoria original. Será visto que a terceira forma fundamental faz o papel de campo de calibre, que se transforma de acordo com o grupo de rotações nas dimensões extras, respondendo à conjectura de Ne'eman, de que as simetrias das dimensões extras poderiam ser geradoras de simetrias internas que descrevem as forças de calibre. A diferença principal em relação à teoria de Kaluza-Klein é o surgimento do termo de interação envolvendo a segunda forma fundamental do espaço-tempo, o qual faz o papel de campo intermediário entre a gravitação e os campos de calibre.

Capítulo 2

Física e Geometria

Riemann, tomando a medida como operação geométrica fundamental, mostrou a necessidade de preceder toda a discussão dos princípios de geometria pelo estudo das variedades, susceptíveis de serem medidas.

Élie Cartan

A idéia de que a geometria está intimamente ligada à descrição da natureza, foi efetivada com o advento da Teoria da Relatividade Geral, ainda que esta associação seja muito mais antiga. De fato, a própria palavra geometria já nos remete à uma noção de medida pois seu significado vêm do grego e é a junção de dois radicais: geo (terra) e metria (medida). Além da referência à medida, que é um conceito essencial à física, este significado tem relação com o surgimento independente em várias cul-

turas antigas de um conjunto prático de conhecimentos sobre comprimentos, áreas e volumes, geralmente ligados à agricultura.

A descrição da realidade através da geometria também é muito antiga. Anaximandro, discípulo de Tales, sugeriu que a Terra estivesse no centro do universo e esta teria uma forma cilíndrica. Aristóteles descreveu uma teoria na qual os constituintes fundamentais da natureza eram formados por cinco elementos diferentes: terra, fogo, ar, água e éter (este último era a matéria-prima do céu). À cada um desses elementos, Aristóteles associou um sólido platônico (ver figura 2.1), afirmando que aos constituintes fundamentais desses elementos correspondiam cada um à um sólido platônico específico.

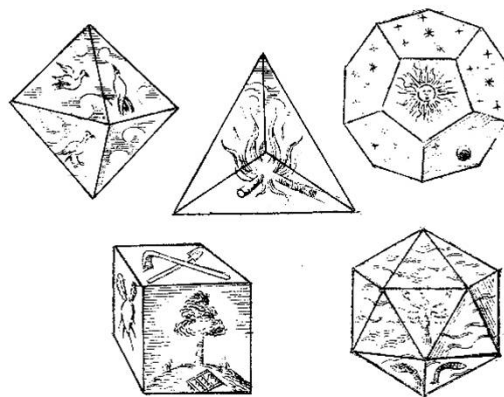


Figura 2.1: Sólidos Platônicos como Elementos Fundamentais da Natureza.

Este trabalho tem como propósito reafirmar a união entre física e geometria de forma que ela leve não só à descrição das interações fundamentais mas sim à uma unificação das mesmas por meio da imersão. Estes tópicos serão, desta forma, desenvolvidos neste capítulo.

2.1 O Surgimento das Geometrias Não Euclidianas

O livro “Elementos” de Euclides (330-277 a.C.) é responsável pela sistematização de todo o saber geométrico disponível em sua época, reunindo proposições e demonstrações tomadas das fontes mais diferentes e apresentando uma estrutura dedutiva.

No primeiro livro dos Elementos, Euclides fixa vinte e três definições, cinco postulados (axiomas) e algumas noções comuns. Os postulados representavam verdades

“indubitáveis” (e estão esquematizados na figura 2.2 abaixo): *I*- pode-se levar uma reta de qualquer ponto a qualquer outro ponto; *II*- uma reta finita pode ser prolongada à vontade; *III*- pode-se traçar um círculo de qualquer centro e raio; *IV*- todos os ângulos retos são iguais; *V*- Se uma reta, encontrando outras duas retas, produz dois ângulos internos localizados na mesma parte, menores do que dois ângulos retos, aquelas retas, prolongadas ao infinito se encontram na mesma parte em que estão os ângulos menores dessas duas retas.

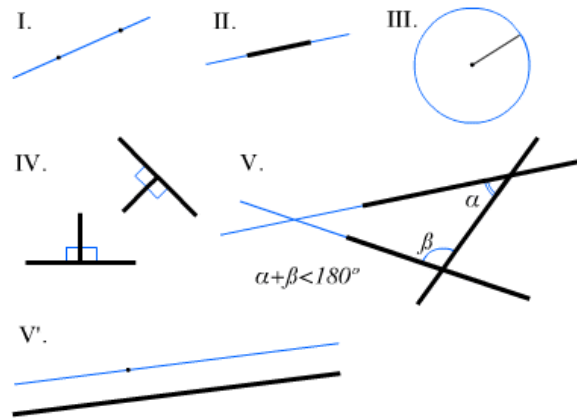


Figura 2.2: Postulados de Euclides

Após definir os conceitos e axiomas, Euclides apresenta teoremas que constituem a base do conhecimento geométrico da época, hoje conhecido como sistema Euclideo. Este modelo de saber dedutivo influenciou o pensamento científico durante séculos. Sendo os teoremas corretamente deduzidos a partir das proposições primeiras (tidas como auto-evidentes), eles também pareciam como indubitavelmente verdadeiros. Porém o conceito de evidência é algo muito subjetivo e desde a antiguidade o quinto postulado não fôra totalmente aceito como tal. Este postulado nos diz que dada uma reta e um ponto fora dela existe no plano somente uma reta que passa por este ponto e não intersecta a primeira reta, chamada de reta paralela (parte *V'* da figura 2.2 abaixo).

Esta proposição não é necessariamente verdadeira, podendo se mostrar falsa em outras situações. De fato, se considerarmos os objetos limitados à uma área finita do plano (como um círculo), então podem existir infinitas retas que passam pelo ponto e não intersectam a primeira reta (ver figura 2.3 abaixo). Que tipo de intuição ou auto-evidência permitiria dizer que este mesmo fato não ocorre quando o plano é ilimitado?

Estas considerações são suficientes para ilustrar o incômodo que o quinto pos-

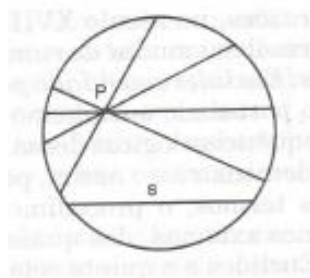


Figura 2.3: Contra-Exemplo ao Postulado de Euclides

tulado provocou nos pensadores gregos, árabes e renascentistas. Por não possuir a simplicidade dos outros, este postulado se assemelha mais à um teorema, daí a tentativa desses pensadores em demonstrá-lo a partir dos quatro anteriores.

Foi Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855) que percebeu a não demonstrabilidade do quinto postulado e a possibilidade da existência de sistemas geométricos diferentes do Euclidiano. Gauss não publicou suas idéias com medo das possíveis reações negativas dos seus contemporâneos. Isto, contudo não impediu Lobachevski e Bolyai de construir, por volta de 1826, independentemente, uma geometria na qual o quinto postulado não valeria mais. A nova geometria é conhecida como hiperbólica e o quinto postulado é substituído pelo postulado que enunciava que não apenas uma reta paralela passaria em um ponto exterior à uma dada reta, mas sim uma infinidade delas. Poucos anos depois Bernhard Riemann (1826 - 1866) construiu um sistema geométrico (antes da criação da teoria conhecida hoje como geometria Riemanniana) no qual o axioma das paralelas era substituído pelo axioma (de Riemann), no qual “duas retas quaisquer têm pelo menos um ponto em comum”. Para se ter uma idéia de tal geometria (chamada de elíptica), basta tomar o modelo de uma esfera em que as retas são representadas por círculos máximos. Não é possível obter duas retas que não se encontrem. Os teoremas Euclidianos também deixam de ser todos válidos. Por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo deixa de ser exatamente 180° para ser um valor maior que este no caso elíptico (ver figura 2.4). Existem também modelos para o espaço hiperbólico, como a pseudo esfera (desenhada na figura 2.4) e a sela de cavalo, onde todos os triângulos possuem ângulos internos cuja soma é inferior à 180° .

Com o desenvolvimento das geometrias não Euclidianas fica evidente que os axiomas são uma questão de escolha, e não uma verdade imposta pela natureza. Assim,

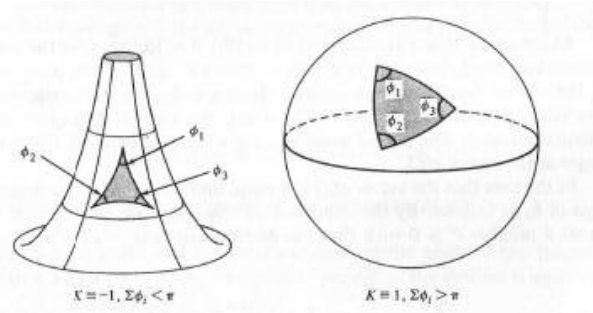


Figura 2.4: Soma dos Ângulos internos de triângulos em espaços não Euclidianos

surge a distinção entre geometria matemática e geometria física: a primeira apresenta suas premissas sem nenhuma ambição em relacioná-las com os objetos do mundo, enquanto a segunda se mostra como um ramo da física e procura traduzir aspectos da experiência sensível, com particular destaque à experiência espacial.

A questão da geometria física foi investigada por Gauss, em seu trabalho [6], no qual propõe a medida da distância entre três montes, com o intuito de demonstrar a natureza do espaço físico: se hiperbólica, elíptica ou Euclídea. Isso poderia ser verificado ao se calcular a soma dos ângulos internos do triângulo cujas extremidades são os picos dos montes e compará-los com o ângulo de 180° .

A partir de 1816 Gauss fez um levantamento de agrimensura de certas áreas da Alemanha e percebeu que para se calcular áreas, ângulos e comprimentos de superfícies não era necessário fazer nenhuma referência ao espaço tridimensional no qual esta estaria imersa. Suas pesquisas relacionadas a este assunto (propriedades matemáticas das superfícies imersas no espaço Euclídeo tridimensional) são o que hoje é conhecido como Geometria Diferencial Clássica de Superfícies.

O estudo de superfícies imersas no espaço Euclídeo \mathbb{R}^3 (SIE) é de fundamental importância para a plena compreensão da Geometria Diferencial [7]. Isto também se dá no estudo da evolução história desta disciplina, uma vez que Gauss e seus antecessores estudavam as superfícies como objetos bidimensionais pertencentes à um espaço euclídeo tridimensional, o \mathbb{R}^3 . Em cada ponto q da superfície S existe um plano tangente $T_q S$ e o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ neste plano fornece uma aplicação

$$g : T_q S \times T_q S \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(u, v) = \langle u, v \rangle$$

denominada métrica, ou primeira forma fundamental. Se $v_\mu (\mu = 1, 2)$ é uma base

de $T_q S$ usa-se a seguinte notação: $g_{\mu\nu} = g(v_\mu, v_\nu)$. Com este objeto, obtido intrinsecamente (calculado somente com instrumentos de medida localizados na própria superfície) é possível calcular quantidades que não dependem da maneira em que a superfície está imersa no \mathbb{R}^3 , tais como áreas de regiões da superfície encerradas por uma curva simples, comprimentos de curvas cujo traço esteja contido na mesma, ângulo entre duas curvas na superfície, etc.

A contribuição de Gauss consiste na prova de que existe uma quantidade (hoje denominada curvatura Gaussiana) que depende somente da métrica, fato este visto como contraintuitivo, uma vez que esta quantidade é construída com objetos extrínsecos (somente depois é que Gauss mostrou que esta é expressa em termos envolvendo somente a métrica, fornecendo uma relação matemática que prova a afirmação - vide fórmula (3.21) a ser derivada logo mais).

Para entender melhor como construir a curvatura Gaussiana, observa-se que dado um ponto q da superfície S , pode-se associar um vetor normal N , que é perpendicular ao plano tangente $T_q S$, calculável através do produto exterior $\frac{v_1 \times v_2}{|v_1 \times v_2|} = N$, onde v_1 e v_2 são vetores não proporcionais que geram o espaço tangente à S . Uma maneira de calcular a curvatura Gaussiana é quantificar a maneira na qual o vetor normal varia na direção de cada vetor tangente à superfície (ver figura 2.5).

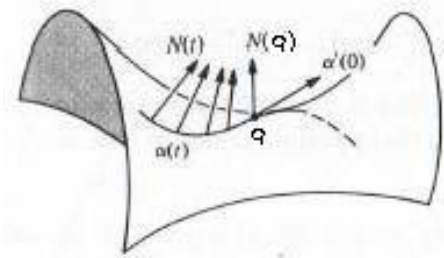


Figura 2.5: Variação da Normal em relação à uma curva $\alpha(t)$

Ao se considerar a intersecção do plano formado por um vetor tangente e a normal com a superfície, obtemos uma curva chamada de secção normal na direção tangente considerada (figura 2.6).

A curvatura direcional associada à cada direção tangente é medida pelo inverso do raio da circunferência que possua maior contato com a secção normal no ponto q considerado ($k = \frac{1}{R}$, ver figura 2.7).

É creditado à Euler a descoberta de que existem duas direções em que esta quan-

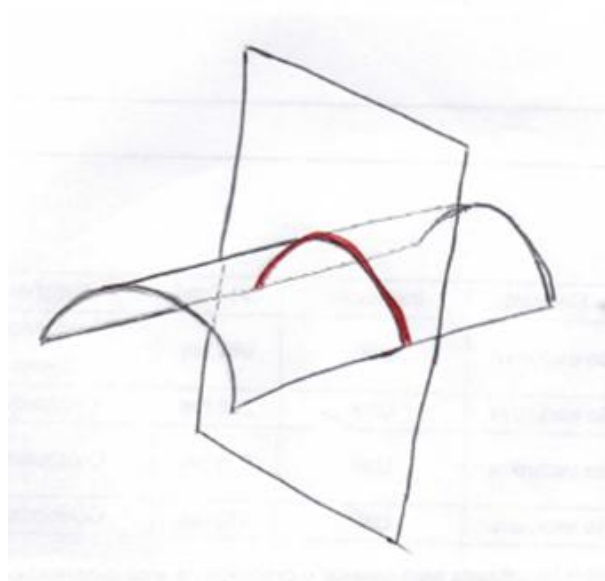


Figura 2.6: Secção Normal

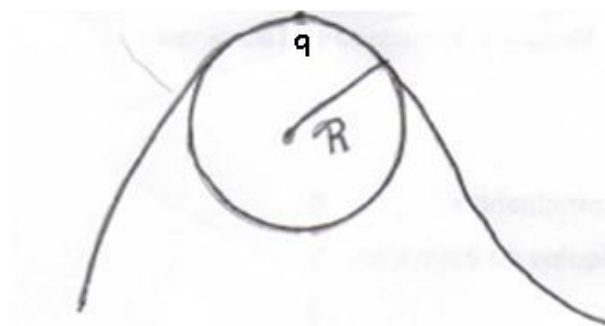


Figura 2.7: Circunferência de maior contato

tidade é extrema, estas chamadas de direções principais, as curvaturas associadas são chamadas de principais e denotadas por k_1 e k_2 . A curvatura Gaussiana K é o produto das curvaturas principais, $K = k_1 k_2$ e a curvatura média H é a metade da soma das curvaturas principais, $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$. O conhecimento das duas quantidades K e H permite a recuperação das quantidades k_1 e k_2 através da solução da equação de segundo grau $x^2 - 2Hx + K = 0$. Portanto, é necessário o conhecimento de ambas as curvaturas, média e Gaussiana, para obter a forma local de uma superfície. Basta que pelo menos uma das duas curvaturas principais se anule para que a curvatura Gaussiana seja nula.

Gauss descobriu que, apesar de K ser definido com o uso do vetor normal (com referência ao espaço de imersão \mathbb{R}^3), este poderia ser expresso apenas com o uso da métrica, atribuindo um caráter intrínseco à quantidade K . Este é o resultado principal

do seu famoso Teorema Egregium [6] e será provado adiante, na fórmula (3.21).

Do ponto de vista computacional, pode-se calcular a curvatura Gaussiana e média com o uso da 2ª forma fundamental [8]. Para um ponto q da superfície e um vetor tangente à este ponto que aponte para a direção μ , deriva-se a normal N nesta direção e obtem-se assim um vetor $N_{,\mu}$ pertencente ao espaço tangente. A projeção deste vetor em um outro vetor tangente v_j , feita através do produto interno cartesiano define a aplicação bilinear $k : T_q S \times T_q S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $k(v_\mu, v_\nu) = - \langle N_{,\mu}, v_\nu \rangle$, chamada segunda forma fundamental. Denota-se $k_{\mu\nu} = k(v_\mu, v_\nu)$. Esta aplicação induz uma transformação linear no espaço tangente (que associa v_μ à $N_{,\mu}$) com as seguintes propriedades (que não dependem de escolha de uma base no espaço tangente): os autovalores são precisamente as curvaturas principais, o determinante é a curvatura Gaussiana e a metade do traço é a curvatura média. É importante notar que a segunda forma é uma quantidade que depende do vetor normal e, portanto, extrínseca (apesar de seu determinante ser intrínseco).

Uma transformação Φ que leva uma superfície em outra é dita isométrica se ela preserva distância medidas dentro de tais superfícies. Um vez que as distância não mudam, os coeficientes da métrica em um dado sistema de coordenadas para uma superfície têm que ser o mesmo no sistema de coordenadas induzido por Φ na outra superfície. Como estes coeficientes não mudam e a curvatura Gaussiana só depende da métrica, superfícies isométricas possuem necessariamente a mesma curvatura Gaussiana. O Teorema Egregium garante então que o conhecimento da primeira forma fundamental (a métrica) determina a superfície a menos de isometrias (transformações que preservam distâncias intrínsecas entre pontos na superfície). O problema é que esta classe de isomerias é muito grande.

Considere um plano. É evidente que o mesmo tem curvatura Gaussiana nula, pois o vetor normal não muda quando o mesmo é deslocado em qualquer direção do plano. Se este plano for uma folha de papel, por exemplo, pode-se deformá-lo sem esticá-lo. Qualquer uma destas deformações manteria constante a distância de uma curva desenhada nesta folha, portanto a curvatura Gaussiana desta classe de superfícies é nula. Exemplos de tais superfícies são o cilindro, o cone e a telha (figura 2.8). Nessas figuras existe uma direção principal na qual a normal não muda, o que confirma o fato de terem estas superfícies curvatura Gaussiana nula. O que diferencia estas três

figuras é a curvatura média (que no caso do plano também é nula, mas nesses casos não).



(a) Cilindro



(b) Cone



(c) Telha

Figura 2.8: Superfícies planas isométricas

Antes de terminar esta secção, vamos falar um pouco sobre geometria de curvas imersas no espaço tridimensional. Uma curva é convenientemente descrita por uma aplicação $\vec{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco (s). A derivada de $\vec{\alpha}(s)$ é um vetor que aponta na direção tangente $\vec{t}(s)$ (portanto $\vec{\alpha}'(s) = \vec{t}(s)$). A derivada deste vetor tangente aponta na direção normal e pode-se fazer com que o seu módulo se torne unitário e obter o vetor normal $\vec{n}(s)$. O coeficiente de proporcionalidade entre estes vetores é denominado $k(s)$ (portanto $\vec{t}'(s) = k(s)\vec{n}(s)$) é uma medida da curvatura, pois o inverso de seu valor indica o raio da circunferência de maior contato com o traço desta curva. Os vetores tangente e normal estão contidos no plano osculador e seu produto vetorial gera um vetor que pode ser unitarizado e é chamado de vetor bi-normal $\vec{b}(s)$. O coeficiente de proporcionalidade entre a derivada do vetor binormal e o vetor tangente, $\tau(s)$ (portanto $\vec{b}'(s) = \tau(s)\vec{t}(s)$) é um indicador da mudança do plano osculador e é chamado de torção. As fórmulas que resumem estas observações são chamadas de equações de Frenet [9]:

$$\vec{t}' = kn \tag{2.1}$$

$$\vec{n}' = -kt - \tau b$$

$$b' = \tau n$$

Para exemplificar, considere a hélice da figura 2.9 abaixo, de raio a e distância periódica vertical de comprimento b . O vetor tangente $\vec{\alpha}'$ está desenhado. O vetor normal aponta sempre para o centro. Juntos, eles formam uma base para o plano osculador. O vetor binormal é perpendicular à este plano. A curvatura, sendo o inverso do raio de maior contato com a curva é dada por $k = \frac{1}{a}$, e a torção é igual à distância periódica vertical de $\tau = b$. Isso concorda com a noção intuitiva de torção, pois quanto maior esta quantidade, mais torcida será a curva e mais ela se afastará do plano xy .

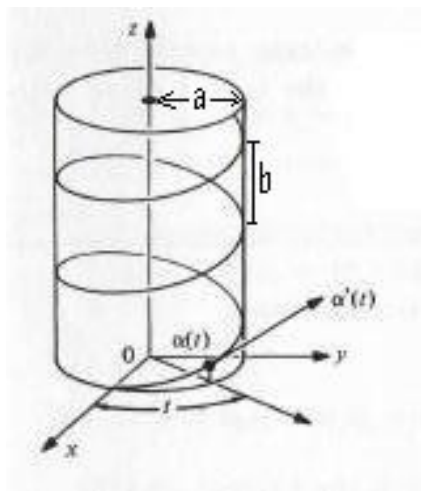


Figura 2.9: Hélice

Além da curvatura Gaussiana, outra quantidade intrínseca importante das superfícies é a existência de várias curvas chamadas de geodésicas, as quais minimizam a distância entre dois pontos, análogas às retas do espaço Euclidiano. A partir de três pontos pode-se construir um triângulo geodésico T . Gauss obteve a fórmula

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = \int \int_T K d\sigma$$

que relaciona a soma dos ângulos internos φ_i deste triângulo com a curvatura Gaussiana (Gauss não chegou a demonstrá-lo, o que foi feito por Bonnet, e é conhecido hoje como teorema de Gauss-Bonnet). Esta fórmula pode ser interpretada com a afirmação de que o excesso da soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico T em relação à π é igual à integral da curvatura gaussiana K sobre T . Eis então um ferramental matemático que permite determinar de forma concisa a natureza do

espaço, possivelmente revelada por medidas experimentais.

Em 1854 Riemann almejava uma posição de conferencista em Göttingen, e entregou três propostas, das quais Gauss escolheu para Riemann a terceira, “Sobre as Hipóteses que Formam os Fundamentos da Geometria”, no qual Riemann propunha a adoção de uma geometria puramente intrínseca, generalizável para qualquer número de dimensões. Na realidade, este trabalho é o fundamento do que hoje se conhece como geometria Riemanniana, que no fundo, é uma tentativa de estender os resultados de Gauss para um número arbitrário de dimensões.

2.2 Geometria Riemanniana

Riemann lançou os fundamentos do que é hoje conhecido como geometria Riemanniana, cujo estudo foi posteriormente detalhado e expandido por personalidades como Christoffel, Levi-Civita e Cartan. Os conceitos básicos desta geometria são a variedade V e a métrica desta, g . A variedade representa um espaço formado por um conjunto de pontos, sendo que para cada ponto é possível encontrar uma vizinhança que permita uma parametrização por algum sistema de coordenadas. E cada ponto q pode-se definir o espaço tangente T_qV , e um produto interno para cada um desses pontos é chamada métrica, denotada por g , ou seja $g : T_qV \times T_qV \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear e simétrica nos argumentos. A definição precisa de Variedade Riemanniana pode ser encontrada em qualquer manual sobre o assunto, por exemplo [7]. Geralmente especifica-se o número de dimensão da variedade a ser estudada (sendo a mesma definida como o número mínimo de funções coordenadas independentes necessárias para parametrizar qualquer vizinhança).

Em SIE não tínhamos dificuldades em definir os vetores do espaço tangente, uma vez que eles eram vetores que pertenciam ao espaço de imersão \mathbb{R}^3 . Mas em Geometria Riemanniana não temos esta referência ao espaço maior em que a variedade esteja imersa. É necessário obter um espaço vetorial intrínseco associado ao espaço tangente da variedade, sem fazer referência a nenhum espaço maior em que esta variedade esteja imersa. Isto pode ser superado se considerarmos um sistema de coordenadas x^μ e notarmos que uma base e_μ adequada para o espaço tangente é a

base formada pelas derivadas direcionais¹ $e_\mu = \partial_\mu$ e a métrica passa a ser um produto interno positivo definido e não degenerado neste espaço vetorial de operadores diferenciais. Assim, a noção intuitiva de espaço tangente como sendo um vetor que aponta na direção considerada é estabelecida intrinsecamente (ver figura 2.10), representando uma grande mudança conceitual com relação às SIE, que destaca a motivação de Riemann de se definir tudo intrinsecamente.

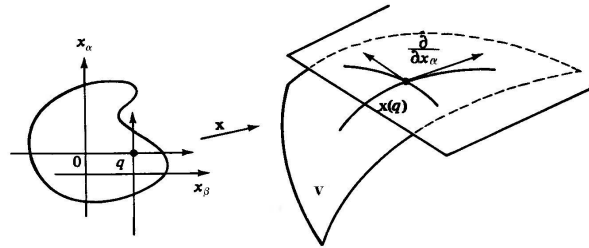


Figura 2.10: Coordenadas em uma Variedade

Se o produto interno não for positivo definido, obtém-se uma variedade semi-Riemanniana (estas são usadas na RG e têm dimensão 4, são chamadas de espaço-tempo quando solução das equações de Einstein, que será vista no capítulo 4).

Dado um sistema de coordenadas (x^μ) , denota-se os coeficientes da métrica neste sistema por $g_{\mu\nu} = g(e_\mu, e_\nu)$. O espaço vetorial dual ao espaço tangente $\{e_\nu\}$ é o espaço das 1-formas $\{dx^\mu\}$ (ou $\{e^\mu\}$), pois dx^α aplicado em ∂_β é $dx^\alpha(\partial_\beta) = \delta_\beta^\alpha$, mas esta associação não é natural². Para obter um isomorfismo natural, usa-se a métrica, que por ser não degenerada, fornece um tal isomorfismo (não depende do sistema de coordenadas) entre o espaço tangente e seu espaço dual, o cotangente, dado por $e_\mu \rightarrow g_{\mu\nu}dx^\nu$. O isomorfismo inverso é dado por $dx^\mu \rightarrow g^{\mu\nu}e_\nu$, onde a matriz $g^{\mu\nu}$ é a matriz inversa de $g_{\mu\nu}$. Vamos ver que muitas quantidades que qualificam aspectos importantes da variedade, como sua curvatura, são tensores, obtidos ao se considerar o produto tensorial³ \otimes de vetores $e^\mu = \partial_\mu$ do espaço tangente e de vetores $e^\nu = dx^\nu$ do espaço cotangente. Assim, um tensor geral T pode ser escrito como (a notação de Einstein é usada no decorrer da dissertação e significa que índices que aparecem

¹A definição de derivada direcional de f na direção e_μ é $e_\mu[f] = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \partial_\mu f$, onde ∂_μ é a notação compacta para o operador $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$

²O isomorfismo $\partial_\mu \rightarrow dx^\mu$ depende do sistema de coordenadas

³O produto tensorial de dois espaços vetoriais de bases b^1, \dots, b^m e c^1, \dots, c^n é um outro espaço vetorial, cuja base podem ser denotada $b^1 \otimes c^1, \dots, b^m \otimes c^n$. Este espaço vetorial tem dimensão dada pelo produto das dimensões dos espaços que o originaram: $m \times n$

repetidos estão sendo somados):

$$T = T^{\alpha\beta\dots\gamma}_{\mu\nu\dots\lambda} e_\alpha \otimes e_\beta \otimes \dots \otimes e_\gamma \otimes e^\mu \otimes e^\nu \otimes \dots \otimes e^\lambda \quad (2.2)$$

As funções $T^{\alpha\beta\dots\gamma}_{\mu\nu\dots\lambda}$ são chamadas de coeficientes do tensor T na base de coordenadas⁴. Dependendo das simetrias dos índices, pode-se ter tipos muito especiais de tensores. Um tensor muito importante é o tensor n-forma, que é formado pelo produto tensorial de vetores do espaço cotangente, e são antissimétricas sobre qualquer permutação de dois índices adjacentes. Com o auxílio das formas fundamentais e de operadores convenientes que atuam neste espaço é possível descrever geometricamente a mecânica clássica, a termodinâmica, a mecânica quântica, a teoria de Yang-Mills, a Geometria Riemanniana, e muitas outras disciplinas estudadas em física [10].

Num espaço Euclideano sabemos que se um dado vetor aponta numa certa direção ele continuará a apontar para a mesma direção caso desloquemos sua origem através de uma curva qualquer. Existe portanto um isomorfismo natural entre os espaços vectoriais de pontos diferentes. No caso de uma variedade arbitrária tal isomorfismo não existe. Vamos exemplificar com um caso em que a variedade é uma esfera. Se o ponto inicial é $(\theta = \pi/2, \phi = 0)$ e o vetor aponta para o polo norte, uma maneira intuitiva de transportá-lo até o polo norte pelo meridiano ($\phi = 0$) mudando “minimamente” seria o considerado na figura 2.11. Intuitivamente para um observador que perceba somente o mundo esférico esta seria a maneira de transportá-lo mudando-o minimamente possível (ou em termos técnicos, fazendo um transporte paralelo). Ao se escolher outro caminho, como por exemplo, uma composição de uma viagem pelo equador de $\phi = 0$ até $\phi = \pi/2$ seguida de uma viagem pelo meridiano deste ponto até o pólo norte, o resultado do transporte paralelo do mesmo vetor através deste outro caminho resulta num vetor final diferente. Isto indica que para uma variedade

⁴ Sendo T um objeto geométrico, não depende do sistema de coordenadas. De fato, se $x^{\bar{\mu}}$ é um outro sistema de coordenadas, existirão funções inversíveis $x^{\bar{\mu}}(x^\nu)$ que transformam as coordenadas do novo sistema nas do antigo. A base do espaço cotangente se transformará de acordo com o jacobiano da transformação (e por isso seus índices são chamados de covariantes): $dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\bar{\nu}}} dx^{\bar{\nu}}$ e sendo a base do espaço tangente escolhida de forma $dx^\mu e_\nu = \delta^\mu_\nu$, os vetores do espaço tangente se transformam com o inverso do Jacobiano da transformação (por isso seus índices são chamados de contravariantes). Portanto, substituindo as transformações das bases na representação tensorial 2.2, os coeficientes do tensor no novo sistema de coordenadas se relacionam com os do antigo da seguinte maneira: $T^{\bar{\alpha}\bar{\beta}\dots\bar{\gamma}}_{\bar{\mu}\bar{\nu}\dots\bar{\lambda}} = \frac{\partial x^{\bar{\alpha}}}{\partial x^\beta} \dots \frac{\partial x^{\bar{\gamma}}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\bar{\mu}}} \dots \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\bar{\lambda}}} T^{\beta\dots\delta}_{\nu\dots\rho}$

genérica não existe um isomorfismo natural entre vetores tangentes pertencentes à pontos diferentes. Veremos adiante que isto é um efeito da curvatura não trivial desta variedade.

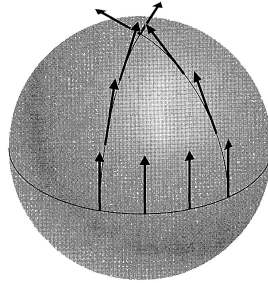


Figura 2.11: Exemplo de transporte paralelo na esfera

Fica claro que precisamos obter uma regra matemática que, especificados dois pontos e um caminho que una estes, forneça um isomorfismo entre os espaços tangentes à estes pontos. Isto esclareceria o problema de encontrar um vetor numa extremidade de um caminho sendo que só sabemos o seu valor numa outra extremidade. Tal regra é chamada de transporte paralelo de vetores através de uma dada curva (figura 2.12).

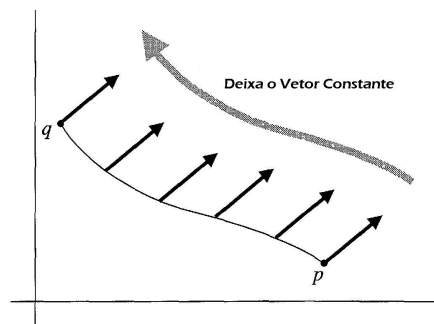


Figura 2.12: Transporte paralelo

Iremos mostrar que a existência de um transporte paralelo é equivalente à existência de uma conexão, a qual pode ser pensada como o análogo diferencial do transporte paralelo. De fato, a conexão é um operador diferencial ∇ que, utilizando o vetor $W = W^\mu e_\mu$, fornece o operador derivada covariante na direção W , denotado por ∇_W . Assim, a derivada covariante ∇ de um campo vetorial u (um campo vetorial é uma aplicação que associa à cada ponto q da variedade um vetor $u(q)$ do espaço tangente à este ponto) na direção do vetor v é denotada por $\nabla_v(u)$ é definida pelas

seguintes propriedades para quaisquer vetores v campos vectoriais u e w e funções escalares f e g :

1. $\nabla_v(u)$ é algebricamente linear em v , ou seja: $\nabla_{fv+gw}(u) = f\nabla_v(u) + g\nabla_w(u)$
2. $\nabla_v(u)$ é distributivo em u , ou seja: $\nabla_v(u+w) = \nabla_v(u) + \nabla_v(w)$
3. $\nabla_v(u)$ obedece a regra do produto $\nabla_v(fu) = f\nabla_v(u) + u\partial_v f$

Quando ∇_v é aplicada à um vetor qualquer, o objeto restante continua sendo um vetor, portanto quando aplicada à um vetor da base de coordenadas e_μ , o resultado pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores da base, $\nabla_\nu e_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda$, onde $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ são os coeficientes de conexão na base e_μ de coordenadas⁵. Um campo vectorial sobre uma curva é dito ser transportado paralelamente àquela curva se a sua derivada covariante na direção tangente à curva é nula em todos os pontos da mesma. Uma vez que a derivada covariante é um operador diferencial de primeira ordem, dado um vetor V em um ponto, para transportá-lo paralelamente através de uma curva α basta resolver a equação $\nabla_{\alpha'} V = 0$, que junto com a condição inicial (o vetor V no ponto inicial) pode ser resolvida unicamente. Para exemplificar, vamos pegar uma curva coordenada, ou seja, uma curva em que o vetor tangente é algum vetor da base de coordenadas e_ν . Escrevendo o vetor V na base de coordenadas $\{e_\mu\}$, temos $V = V^\mu e_\mu$ e então

$$\nabla_\nu V = \nabla_\nu(V^\mu e_\mu) = ((\nabla_\nu V^\mu)e_\mu + V^\mu \nabla_\nu e_\mu) = (V_{;\nu}^\lambda + V^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda)e_\lambda$$

Denotando $V_{;\nu}^\lambda$ como o componente de $\nabla_\nu V$ na base $\{e_\lambda\}$, ou seja, $(V_{;\nu}^\lambda)e_\lambda = (\nabla_\nu V)^\lambda e_\lambda$, teremos que⁶

$$V_{;\mu}^\lambda = V_{,\mu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V^\nu \quad (2.3)$$

⁵Pode-se definir derivadas covariantes para tensores aplicando a regra de Leibniz para o produto tensorial e demandando que a derivada covariante de um tensor seja um tensor de mesma natureza, e para escalares usando a derivada parcial usual. Aplicando ∇_λ em $\delta_\beta^\alpha = e_\beta(dx^\alpha)$, obtém-se $\nabla_\lambda dx^\mu = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda dx^\nu$. Com as fórmulas obtidas para a derivada covariante de escalares, vetores tangentes e cotangentes, é possível obter através da regra de Leibniz a fórmula geral para a derivada covariante de qualquer tensor

⁶A fórmula 2.3 pode ser generalizada para qualquer componente $T^{\alpha\dots\gamma}_{\mu\dots\lambda}$ de um tensor arbitrário. Usando a definição de derivada covariante, chega-se a seguinte fórmula geral para as componentes: $T^{\alpha\dots\gamma}_{\mu\dots\rho;\lambda} = T^{\alpha\dots\gamma}_{\mu\dots\rho,\lambda} + \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha T^{\beta\dots\gamma}_{\mu\dots\rho} + \dots + \Gamma_{\delta\lambda}^\gamma T^{\alpha\dots\delta}_{\mu\dots\rho} - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\alpha\dots\gamma}_{\nu\dots\rho} - \dots - \Gamma_{\rho\lambda}^\sigma T^{\alpha\dots\gamma}_{\mu\dots\sigma}$. Porém só faz sentido se a quantidade $T^{\alpha\dots\gamma}_{\mu\dots\lambda}$ for o coeficiente de um tensor. Isso pode ser verificado fazendo uma transformação de coordenadas e notar que esta quantidade se transforma como os coeficientes de um tensor do respectivo tipo.

portanto igualando a equação acima à zero, obtêm-se uma fórmula que pode ser resolvida unicamente para V^λ , dado o valor desta função num ponto. Uma dada regra equivale portanto à um transporte paralelo na curva coordenada. Reciprocamente, um transporte paralelo para V ao longo da curva coordenada fornece uma solução única para os símbolos de Christoffel.

Uma geodésica é uma curva cujo vetor tangente é transportado paralelamente à si mesmo. Assim, dado um ponto e um vetor tangente, pode-se construir uma única geodésica que possua este vetor como o seu vetor tangente neste ponto.

Existem vários tipos de conexões que se pode atribuir à uma variedade. Na concepção de Riemann, a conexão deveria ser obtida unicamente a partir da métrica. Ele exigiu isto porque queria que todas as quantidades geométricas relevantes dependessem apenas das medidas feitas dentro da própria variedade. Isso é feito exigindo-se que o produto escalar de dois vetores em um ponto tenha o mesmo valor se estes forem transportados paralelamente para um outro ponto qualquer (ou seja, a medida de quantidades transportadas paralelamente permanecem a mesma), fornecendo um critério preciso para a frase “transportar um vetor mudando-o minimamente” utilizada acima. Em termos de conexão, isto equivale a dizer que a métrica (a medida) é transportada paralelamente. Ou seja:

$$g_{\mu\nu;\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha g_{\mu\alpha} = 0$$

Subtraíndo da equação acima duas equações semelhantes, porém utilizando a segunda e terceira permutação cíclica dos coeficientes $(\mu\nu\lambda)$, resulta

$$(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda)g_{\lambda\delta} = g_{\delta\mu,\nu} + g_{\delta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\delta}$$

Para que os coeficientes de conexão sejam completamente determinados pela métrica, basta exigir que sejam simétricos nos índices $\mu\nu$ e fazer uso da métrica inversa e isolar o coeficiente de conexão. Com esta exigência, chamada de condição de simetria, os coeficientes de conexão são dados por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \quad (2.4)$$

e são chamados de símbolos de Christoffel⁷ e a conexão métrica é chamada de Levi-Civita.

Dado um ponto da variedade, pode-se utilizar um sistema de coordenadas chamado de geodésico (ou normal), no qual os vetores tangentes da base são os vetores tangentes à geodésica considerada. Como estes são transportados paralelamente à si mesmos, os coeficientes de Christoffel são nulos neste ponto.

O próximo passo é uma definição de curvatura para a variedade. Observando a esfera da figura 2.13, pode-se notar que dado um vetor inicial no ponto q que aponte para o sul, transportando-o paralelamente através de um loop começando pelo ponto P em direção ao leste, o vetor que retorna ao ponto q não é mais o mesmo, pois após percorrer o loop ele aponta para o leste. Isso se dá pela presença da curvatura na variedade.

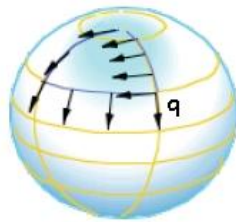


Figura 2.13: Curvatura na esfera

Intuitivamente, para o cálculo da curvatura numa variedade geral, pode-se considerar o paralelogramo infinitesimal formado pelos vetores e_μ e e_ν 2.14.

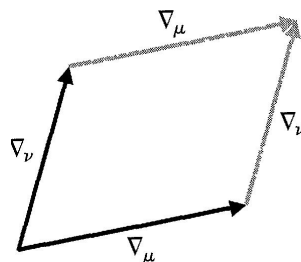


Figura 2.14: Paralelogramo de Riemann

Tome um vetor e_σ e transporte-o paralelamente, fazendo um loop no paralelogramo. O novo vetor é o resultado da aplicação do operador de curvatura $R(e_\mu, e_\nu)$

⁷Note que sobre uma transformação de coordenadas estes coeficientes não se transformam como um tensor

(que contém os vetores do paralelogramo como argumento) ao vetor e_σ e sua componente lambda é o tensor de Riemann $R_{\sigma\mu\nu}^\lambda$. Uma análise da situação descrita acima fornece uma fórmula explícita para o tensor de Riemann em termos dos símbolos de Christoffel.

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\sigma\nu,\mu}^\rho - \Gamma_{\sigma\mu,\nu}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$$

Este tensor generaliza a curvatura Gaussiana e a fórmula obtida coincide com a de Gauss para o caso bidimensional.

Uma maneira análoga de se considerar o tensor de curvatura é transportar paralelamente um vetor de componentes v_μ através de dois lados de um paralelogramo, depois transportá-lo pelos lados opostos e comparar a diferença entre os tensores assim obtidos. Infinitesimalmente, queremos obter $v_{\mu;\nu\gamma} - v_{\mu;\gamma\nu}$. O resultado é conhecido como identidade de Ricci⁸

$$v_{\mu;\nu\gamma} - v_{\mu;\gamma\nu} = v_\lambda R_{\mu\nu\gamma}^\lambda \quad (2.5)$$

O operador de curvatura pode ser pensado abstratamente (sem o uso de índices e de referência às coordenadas) como um operador definido pelo comutador de derivadas covariantes

$$R(e_\mu, e_\nu) = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \quad (2.6)$$

É importante ressaltar que Riemann distinguia a existência de um espaço básico da métrica deste espaço, justamente pelo fato de a métrica ser relacionada à medida. Como diz Mário Schemberg [12]: “A geometria de Euclides era uma geometria métrica, mas Riemann introduziu uma geometria métrica mais generalizada. Achava que a existência do espaço era uma coisa e a existência da métrica, da medida, era outra. Segundo Riemann, a métrica resultaria da matéria e das forças entre as partículas materiais”.

A geometria de Riemann é muito geral e contém os espaços hiperbólicos e elípticos como subcasos, fornecendo portanto um ferramental matemático poderoso para es-

⁸ Observamos que $v_{\mu;\nu\gamma} = \partial_\gamma v_{\mu;\nu} - v_{\lambda;\nu} \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda - v_{\mu;\lambda} \Gamma_{\nu\gamma}^\lambda$ e que $v_{\mu;\nu} = v_{\mu,\nu} - v_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Substituindo estas fórmulas na expressão desejada, obtemos o resultado.

tudar os tipos de espaços possíveis para o nosso mundo. Einstein percebeu este fato e firmou a idéia de que é possível descrever a geometria física com esta técnica puramente intrínseca. Veremos a partir do quinto capítulo que é possível considerar também efeitos da geometria extrínseca no nosso mundo quadridimensional.

Até o final do capítulo será derivado um conjunto de fórmulas bem conhecido em Geometria Riemanniana.

O tensor de Riemann possui várias simetrias. Uma maneira de obtê-las é escrever explicitamente o tensor de Riemann

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}\partial_{\kappa}(g_{\lambda\sigma}g^{\sigma\rho}\{g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}\}) - \frac{1}{2}g_{\lambda\sigma}\partial_{\nu}(g^{\sigma\rho}\{g_{\rho\mu,\kappa} + g_{\rho\kappa,\mu} - g_{\mu\kappa,\rho}\}) \\ + g_{\lambda\sigma}\{\Gamma_{\mu\nu}^{\eta}\Gamma_{\kappa\eta}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\sigma}\}$$

Usando a relação $g_{\lambda\sigma}g^{\sigma\rho} = -g^{\sigma\rho}g_{\lambda\sigma,\kappa} = -g^{\sigma\rho}(\Gamma_{\kappa\lambda}^{\eta}g_{\eta\sigma} + \Gamma_{\kappa\sigma}^{\eta}g_{\eta\lambda})$ obtemos:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}[g_{\lambda\nu,\kappa\mu} - g_{\mu\nu,\kappa\lambda} - g_{\lambda\kappa,\nu\mu} + g_{\mu\kappa,\nu\lambda}] + g_{\eta\sigma}[\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} - \Gamma_{\kappa\lambda}^{\eta}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}] \quad (2.7)$$

Com esta equação (2.7), fica fácil de ver as propriedades algébricas do tensor de curvatura:

Simetria:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu} \quad (2.8)$$

Antissimetria:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = +R_{\mu\lambda\kappa\nu} \quad (2.9)$$

Ciclicidade:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0 \quad (2.10)$$

Esta última expressão é chamada também de primeira identidade de Bianchi. Para derivar a segunda identidade de Bianchi, basta considerar a equação (2.7) num sis-

tema de coordenadas geodésico e derivá-la com relação à η :

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\eta} (g_{\lambda\nu,\kappa\mu} - g_{\mu\nu,\kappa\lambda} - g_{\lambda\kappa,\mu\nu} + g_{\mu\kappa,\nu\lambda})$$

Permutando ciclicamente (ν, κ, η) obtemos a segunda identidade de Bianchi:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0 \quad (2.11)$$

Apenas para título de esclarecimento, pois no decorrer da dissertação iremos usar uma base $\{\tilde{e}_\mu\}$ para o espaço tangente que não provém de um sistema de coordenadas com o intuito de simplificar os cálculos do tensor de curvatura, em tal sistema a expressão para os símbolos de Christoffel e para o tensor de Riemann é mais geral.

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (g_{\nu\sigma,\mu} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma} - c_{\mu\sigma}^\lambda g_{\nu\lambda} - c_{\nu\sigma}^\lambda g_{\mu\lambda}) + \frac{1}{2} c_{\mu\nu}^\rho$$

$$R_{\mu\beta\nu}^\alpha = c_{\mu\beta}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha - \Gamma_{\beta\nu,\mu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu,\beta}^\alpha - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\lambda + \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$$

As funções $c_{\mu\nu}^\lambda$ são os coeficientes de comutação⁹ e são definidas por $[\tilde{e}_\mu, \tilde{e}_\nu] = c_{\mu\nu}^\lambda \tilde{e}_\lambda$. No caso de uma base provinda de um sistema de coordenadas, estes coeficientes se anulam [11] e recupera-se as fórmulas obtidas anteriormente.

⁹A comutação, ou o parênteses de Lie entre dois vetores arbitrários é definida por $[u, v] = [u^\mu \partial_\mu, v^\nu \partial_\nu] = u^\mu \partial_\mu (v^\nu \partial_\nu) - v^\nu \partial_\nu (u^\mu \partial_\mu)$ é um outro vetor. Calcular esta quantidade resulta $[u, v] = (u^\nu v_{,\nu}^\mu - v^\nu u_{,\nu}^\mu) \partial_\mu$

Capítulo 3

Geometria Riemanniana Imersa

..superfícies arbitrárias cônicas e cilíndricas contam como equivalentes à um plano..

B. Riemann

Existe uma classe muito grande de objetos caracterizados pela mesma métrica (ou por uma transformação de coordenadas na qual os mesmos coeficientes da métrica são iguais), que porém diferenciam-se em quantidades extrínsecas, não consideradas por Riemann. Neste sentido, para a geometria Riemanniana não existe diferença local entre um cilindro, um cone¹ e um plano, pois são superfícies que possuem uma transformação isométrica que leva uma na outra .

Para resolver esta indeterminação, L. Schläefli [13] conjecturou que este problema

¹O cone é considerado variedade as se retirar o vértice, cujo plano tangente não é bem definido

poderia ser resolvido ao se admitir que qualquer variedade Riemanniana V_n de dimensão n e métrica $g_{\mu\nu}$ seja imersa isométricamente em uma outra variedade maior V_D ($D > n$) com métrica G_{AB} . A formulação matemática para esta conjectura é prever a existência de uma função de imersão isométrica, $X : V_n \rightarrow V_D$ tal que, se X^A é a função X expressa num sistema de coordenadas de V_D , então o produto interno dos vetores tangentes $X^A_{||\mu}$ em V_D satisfaz a condição de isometria²

$$G_{AB}X^A_{||\mu}X^B_{||\nu} = g_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

Assim como a métrica, pode-se definir uma segunda forma fundamental e uma terceira forma fundamental de maneira análoga às SIE, com o uso de $D - n$ vetores normais N_a escolhidos de forma a serem ortogonais, ou seja: .

$$G_{AB}X^A_{||\mu}N^B_a = 0 \quad (3.2)$$

$$G_{AB}N^A_aN^B_b = \delta_{ab} \quad (3.3)$$

Estas três últimas equações (3.1), (3.2) e (3.3) caracterizam de modo mais completo a geometria de Riemann, que leva em conta apenas a primeira forma, já que agora podemos distinguir a forma local de duas variedades com mesma métrica. A figura a seguir ilustra a função de imersão X :

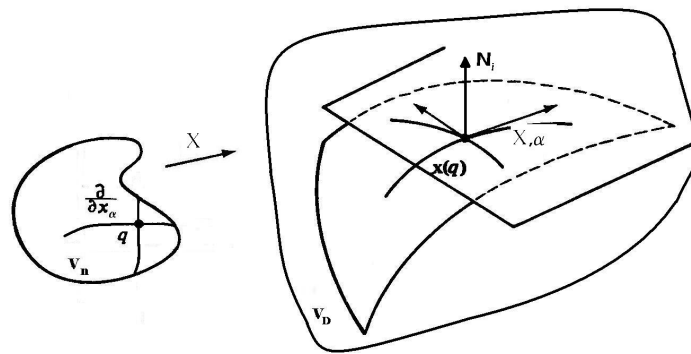


Figura 3.1: Função de Imersão

A segunda forma fundamental e a terceira forma fundamental (denotada por A) da imersão precedente pode ser escrita em componentes como

$$k_{\mu\nu a} = -X^A_{||\mu}N^A_{a||\nu}G_{AB} \quad A_{\mu ab} = N^A_{a||\mu}N^B_bG_{AB} \quad (3.4)$$

²Aqui $||$ significa a derivada covariante com respeito à métrica do espaço de imersão

Posteriormente será dada uma interpretação para essas quantidades. Por enquanto basta dizer que elas já foram definidas para uma variedade unidimensional imersa no \mathbb{R}^3 (vide equações de Frenet (2.1) da página 16), onde fica claro que k é o produto interno da derivada da normal com o vetor tangente e τ é o produto interno do vetor binormal na direção normal. Com os trabalhos de Cartan [14], Janet [15] e Burstin [16], ficou provada a conjectura de Schlaefli de que dada uma variedade Riemanniana é sempre possível achar outra maior em que a primeira é uma subvariedade descrita por uma função de imersão analítica nas coordenadas x^μ .

O mesmo resultado foi obtido também por Nash [17], na qual a hipótese de analiticidade foi substituída pela de diferenciabilidade da imersão (uma condição bem menos restritiva). A extensão do teorema de Nash para variedades semi-Riemannianas foi obtida por Greene [18]. A estratégia de Nash foi começar com uma imersão inicial conhecida de uma dada variedade e então deformá-la na direção normal. No capítulo final iremos ver que os coeficientes da métrica serão perturbados na direção normal também, e sua derivada nesta direção é dada pela equação de Nash (a ser obtida no capítulo final):

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^i} = k_{\mu\nu i} \quad (3.5)$$

Assim, escolhendo o coeficiente da segunda forma convenientemente, é possível fazer uma série de perturbações infinitesimais até se chegar ao coeficiente $g_{\mu\nu}$ da métrica desejada. Com este resultado a condição de analiticidade é dispensada. A imersão feita por Nash foi num espaço Euclideano, e a dimensão mínima requerida foi de $\frac{n(n+3)}{2}$.

O problema da imersão de espaços-tempo é enunciado de forma análoga: dada uma variedade semi-Riemanniana V_4 com métrica $g_{\mu\nu}$ achar uma variedade V_D ($D = 4 + n$, onde n é o número de dimensões extras) com métrica G_{AB} e uma função $X : V_4 \rightarrow V_D$, chamada função de imersão, que satisfaça

$$G_{AB} X^A_{\parallel\mu} X^B_{\parallel\nu} = g_{\mu\nu} \quad (3.6)$$

Um ponto P de V_4 de coordenadas x^μ possui vizinhança³ $U \subset V_4$ e pode, através

³O conceito de vizinhança também foi introduzido por Riemann, referindo-se aos deslocamentos realizados na variedade, e isto emprestou o nome de espaço topológico às variedades Riemannianas

da imersão X , ser descrita em V_D por um conjunto de D funções, as coordenadas $X^A(x^\mu)$ de $X(U)$ em V_D . A expressão acima é a condição de isometria (3.1). Isto estabelece que a imagem local de X , aqui denotada por $X(U)$, é um subconjunto de V_D , e além disso, pode-se achar vetores tangentes à este subespaço tais que o produto interno destes (vistos como vetores do espaço tangente maior) resulte nos coeficientes da métrica do espaço menor. Esta maneira de estabelecer o problema é derivado do problema semelhante de SIE . De fato, a superfície é vista como um subconjunto tal que o produto interno dos vetores tangentes fornece a métrica desta variedade bidimensional. Uma outra motivação para se estabelecer esta relação é que ela implica que a geometria do espaço maior induz a geometria do espaço menor.

Como em cada ponto $q \in X(V_4)$ o espaço tangente $T_q X(V_4)$ formado pelos vetores $X_{,\mu}$ tem dimensão 4 e o espaço tangente de V_D tem dimensão D , a codimensão, definida por $D - 4 = n$, é diferente de zero e podemos atribuir à i -ésima dimensão extra o vetor normal N_i . Por questão de conveniência, usando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt pode-se admitir uma condição de ortonormalidade para estes N vetores normais, que se traduzem nas duas equações seguintes:

$$G_{AB} X_{,\mu}^A N_a^B = 0 \quad (3.7)$$

$$N_i^A N_j^B G_{AB} = g_{ij} \quad (3.8)$$

onde $g_{ij} = \epsilon_i \delta_{ij}$ e $\epsilon_a = \pm 1$, a depender da assinatura da dimensão extra considerada. Estas equações são análogas à (3.2) e (3.3) respectivamente, só que agora definidas para a imersão do espaço-tempo. Vale notar que, além da primeira forma fundamental, outra duas formas fundamentais aparecem: a segunda (denotada por $k_{\mu\nu a}$) e a terceira forma fundamental (denotada por $A_{\mu ab}$), que já foram definidas anteriormente na fórmula (3.4).

A segunda forma é simétrica nos dois primeiros índices e a terceira forma é antisimétrica nos dois últimos índices. Isso será demonstrado na secção seguinte.

3.1 Importância da Segunda e Terceira Formas Fundamentais

Para compreender o significado dos coeficientes da segunda e terceira formas fundamentais e sua importância no entendimento de geometria de variedades (em particular do espaço-tempo) é conveniente verificar um caso mais intuitivo, que é o caso da geometria de SIE. Assim, se (u, v) é um sistema de coordenadas para a superfície S e (x, y, z) o sistema de coordenadas cartesianas para \mathbb{R}^3 , a função de imersão $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ pode ser escrita em coordenadas como $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ (ver figura 3.2). A condição de isometria é fornecida pelo produto cartesiano dos vetores tangentes, uma vez que a métrica do \mathbb{R}^3 é a Euclídeana .

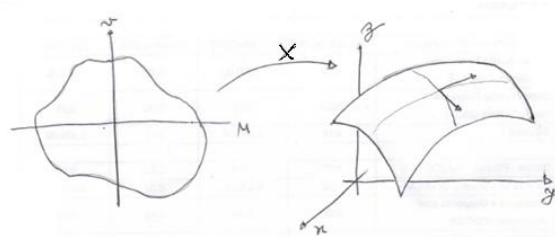


Figura 3.2: Descrição de Superfícies

As equações 3.2 e 3.3 estão implícitas no desenvolvimento, pois para encontrar o vetor normal é só fazer o produto vetorial de dois vetores tangentes linearmente independentes e dividir pelo módulo. Vale notar que nos livros de geometria diferencial clássica (por exemplo [9] [19]), os coeficientes da primeira forma fundamental são denotados da seguinte maneira (mesma feita por Gauss): $g_{uu} = E$, $g_{uv} = g_{vu} = F$ e $g_{vv} = G$. O produto escalar de dois vetores Y e Z é denotado por $Y \cdot Z$. Nesta notação, a condição de isometria (3.1) se escreve :

$$X_{,u} \cdot X_{,u} = E \quad X_{,u} \cdot X_{,v} = F \quad X_{,v} \cdot X_{,v} = G$$

Ou, em forma matricial

$$g_{\mu\nu} = X_{,\mu} \cdot X_{,\nu} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

e as equações (3.2) e (3.3):

$$X_u \cdot N = 0 \quad X_v \cdot N = 0 \quad N \cdot N = 1$$

Sendo N um vetor definido em R^3 , diferente de zero somente na superfície e dependendo das coordenadas (u, v) da superfície, para se ter uma idéia da forma da superfície pode-se derivar este vetor em relação a uma destas coordenadas. O resultado será um outro campo vetorial, $N_{,\mu}$ ($\mu \in \{u, v\}$), que será necessariamente tangente à superfície ⁴: $N_{,\mu} \cdot N = 0$. Portanto, este campo vetorial pode ser escrito como combinação linear dos vetores tangentes da base de coordenadas $X_{,\mu}$:

$$N_{,\mu} = -\mathbb{I}_{\mu}^{\alpha} X_{,\alpha}$$

$\mathbb{I}_{\mu}^{\alpha}$ é o coeficiente da combinação linear e o sinal de menos é tomado por conveniência. Isso quer dizer que se o coeficiente $\mathbb{I}_{\mu}^{\alpha}$ é diferente de zero, existe uma inclinação da normal na direção α quando sua base percorre um caminho na direção μ . Estes coeficientes permitem então descobrir como o plano osculador (tangente à superfície e perpendicular à normal) varia em cada direção, fornecendo uma noção da forma em que a superfície está imersa no espaço tridimensional Euclidiano. Fazendo o produto interno do vetor $N_{,\mu}$ com o vetor $X_{,\nu}$, usando a condição de isometria e baixando o primeiro índice de $\mathbb{I}_{\mu}^{\alpha}$ com a métrica $g_{\alpha\nu}$, obtém-se $\mathbb{I}_{\mu\nu} = -N_{,\mu} \cdot X_{,\nu}$. Uma vez que a métrica do espaço R^3 é Euclidiana, seus coeficientes no sistema de coordenadas cartesiano são dados por $G_{AB} = \delta_{AB}$, ou seja, é uma matriz 3×3 identidade. Desta forma, pode-se escrever $\mathbb{I}_{\mu\nu} = -N_{,\mu}^A X_{,\nu}^B G_{AB}$. Comparando com a definição da segunda forma fundamental⁵ dada pela fórmula 3.4, obtém-se que o tensor $\mathbb{I}_{\mu\nu}$ é a segunda forma fundamental $k_{\mu\nu}$, e portanto a interpretação que foi dada para ele neste parágrafo é a interpretação da segunda forma fundamental.

Têm-se assim a seguinte expressão:

$$N_{,\nu} = -g^{\alpha\beta} k_{\nu\alpha} X_{,\beta} \quad (3.9)$$

Pode-se ver que a segunda forma é um tensor simétrico da seguinte maneira: a equação (3.2) é $X_{,\mu}^A N^B G_{AB} = 0$ e como G_{AB} tem coeficientes constantes no sistema

⁴Para ver isso, basta derivar com relação à μ a equação $N \cdot N = 1$ e usar a regra de Leibniz e a simetria do produto interno Euclidiano

⁵Aqui a codimensão é 1 e o índice que a representa será suprimido

de coordenadas Euclideanas, derivando esta equação com relação à uma direção tangente, obtém-se que $X_{,\mu\nu}^A N^B G_{AB} = -X_{,\mu}^A N_{,\nu}^B G_{AB}$. Portanto $k_{\nu\mu} = X_{,\mu\nu}^A N^B G_{AB}$. Uma vez que a função de imersão X é bem definida e possui derivadas até de terceira ordem contínua, $X_{,\mu\nu} = X_{,\nu\mu}$, o que resulta em $k_{\mu\nu} = k_{\nu\mu}$.

Em vista do que foi dito, pode-se dar outra interpretação para a segunda forma fundamental. Em geometria diferencial clássica, o conjunto de vetores $X_{,u}, X_{,v}$ forma uma base para o espaço tangente, apesar de estarem definidos no \mathbb{R}^3 ⁶. Tomando-se a derivada parcial de cada um deles em uma direção tangente, o resultado em geral será um outro campo vetorial definido na superfície, porém não mais necessariamente tangente à esta. Este campo possuirá tanto componentes normais como componentes tangentes. Quando se escreve este campo como uma combinação linear na base dos vetores tangentes e da normal, os coeficientes associados à base tangente são os símbolos de Christoffel desta superfície⁷, e segue do parágrafo anterior que os coeficientes associados à direção normal são os coeficientes da segunda forma fundamental. Assim,

$$X_{,\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda X_\lambda + k_{\mu\nu} N \quad (3.10)$$

Vale observar que pela equação $N_{,\mu} = -II_\mu^\alpha X_{,\alpha}$ a terceira forma se anula ($A_\mu = 0$), uma vez que $N_{,\mu}^A N^B G_{AB} = 0$. Portanto não faz sentido interpretar a terceira forma fundamental em geometria se SIE, pois a mesma é identicamente nula. Será visto que sempre que a codimensão da imersão for 1, a terceira forma fundamental se anula.

Antes de passar para a interpretação das formas fundamentais em geometria Riemanniana, convém reescrever as equações para as formas fundamentais de uma maneira um pouco diferente. Isso acontece porque em geometria Riemanniana os símbolos de Christoffel (aqui denotado por Υ_{BC}^A) para o espaço de imersão não são geralmente iguais à zero. Somente em espaços planos pode-se achar um sistema de coordenadas em que os símbolos de Christoffel se anulam num conjunto aberto⁸.

⁶Eles só são diferentes de zero na superfície

⁷Será visto adiante que isso é verdade para qualquer variedade Riemanniana, incluindo portanto as superfícies aqui descritas

⁸Num espaço plano, pode-se transportar um conjunto de vetores tangentes paralelamente, e esta associação entre espaços tangentes diferentes não dependerá do caminho, indicando que estes podem ser tomados como base em qualquer ponto (se formarem uma base no ponto inicial). Como os coe-

Em geral, a derivada parcial de um campo vetorial não pode ser interpretada como um outro campo vetorial, pois suas coordenadas não se transformam como tal. A derivada parcial tem que ser substituída pela derivada covariante.

Numa variedade Riemanniana imersa, tanto o espaço de imersão como o espaço imerso têm seus próprios símbolos de Christoffel. Apesar de um induzir o outro (através da indução da métrica contida na relação de imersão isométrica), seus coeficientes se referem à espaços diferentes e portanto em geral são diferentes. Assim, a derivada covariante do espaço imerso será denotada por ∇_{μ} e a derivada covariante do espaço de imersão por uma barra dupla $\bar{\nabla}_{\mu}$.

No caso do estudo de superfícies analisado, usamos um sistema de coordenadas no \mathbb{R}^3 (cartesiano) em que os símbolos de Christoffel se iguala à zero. Portanto a derivada parcial de qualquer campo vetorial do \mathbb{R}^3 (inclusive aqueles definidos somente na superfície) é equivalente à derivada covariante (em relação ao espaço de imersão). Porém isso não seria verdade se fosse usado outro sistema de coordenadas do \mathbb{R}^3 (por exemplo o esférico, onde os símbolos de Christoffel são diferentes de zero). Esta observação é importante, porque em geometria Riemanniana não pode-se admitir de antemão que exista um sistema de coordenadas cartesiano em que os símbolos de Christoffel se anulem num aberto. Desta maneira, usando um sistema de coordenadas curvilíneo em \mathbb{R}^3 a fórmula (3.10) não faz mais sentido pois a derivada parcial comum de $X_{,\mu}$ na direção tangente não é mais um campo de vetores⁹. A substituição a ser feita para aplicar a mesma interpretação é derivar covariantemente em relação à direção tangente o vetor $X_{,\mu}$ (que pode ser escrito $X_{\parallel\mu}$ uma vez que X^A é um escalar), portanto a formula que se busca é $X_{\parallel\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} X_{\lambda} + k_{\mu\nu} N$, e \parallel é a derivada covariante com respeito ao sistema de coordenadas curvilíneos em \mathbb{R}^3 . Se $\bar{\nabla}_{\mu}$ denota a derivada covariante do sistema de coordenadas no espaço imerso e notando que N^A e X^A podem ser vistos como escalares nesta variedade, resulta que $N_{,\mu} = N_{;\mu}$ e $X_{,\mu} = X_{;\mu} = X_{\parallel\mu}$.

Esclarecido o significado da segunda forma fundamental no caso de SIE, em geometria Riemanniana a interpretação da segunda e terceira forma fundamental será feita a seguir de maneira análoga, porém antes vamos demonstrar a afirmação quanto

ficientes da métrica são transportados paralelamente, basta conhecê-los em um único ponto que eles não mudarão na base considerada. Sendo constantes os coeficientes da métrica, o tensor de Riemann se anulará, por causa da anulação dos símbolos de Christoffel, que dependem da derivada da métrica, que é nula

⁹Isso não quer dizer que não possa ser definida essa quantidade, o que é feito, por exemplo em [20]

à simetria dos índices da segunda e terceira forma fundamentais referida anteriormente. A segunda forma é simétrica nos dois primeiros índices e a terceira forma é antissimétrica nos dois últimos índices. Isso pode ser demonstrado da seguinte forma:

Derivando-se covariantemente (3.2) em relação à ν com respeito à métrica G_{AB} , pode-se escrever a segunda forma fundamental como $k_{\mu\nu a} = X_{\parallel\mu\nu}^A N_a^B G_{AB} = X_{\parallel\nu\mu}^A N_a^B G_{AB} = k_{\nu\mu a}$. Fazendo a mesma coisa para (3.8) e substituindo na definição da terceira forma fundamental, $A_{\mu ab} = N_{a\parallel\mu}^A N_b^B G_{AB} = -N_a^A N_{b\parallel\mu}^B G_{AB} = -A_{\mu ba}$. Na explicitação da simetria da segunda forma acima foi usado que $X_{\parallel\nu\mu}^A = X_{\parallel\mu\nu}^A$, o que é verdade devido à simetria do símbolo de Christóffel e da seguinte simetria $X_{,\mu\nu} = X_{,\nu\mu}$ (vide equação 3.15). Será visto adiante que esta condição é não trivial e fundamental para garantir a imersão.

Pode-se então definir a segunda forma de maneira alternativa:

$$k_{\mu\nu i} = X_{\parallel\mu\nu}^A N_i^B G_{AB} \quad (3.11)$$

Agora vamos à interpretação das formas fundamentais em geometria Riemanniana. Como o conjunto de vetores $(X_{,\mu}, N_i)$ forma um referencial (ou uma base) para o espaço tangente de V_D em cada ponto de $X(V_D)$, as derivadas covariantes desses campos vetoriais nas direções tangentes à $X(V_D)$ ¹⁰ com respeito à métrica G_{AB} são outros campos vetoriais e podem ser escritos como combinação linear desses próprios vetores da base (os coeficientes serão denotados por Ξ , \mathbb{I} , $\tilde{\mathbb{I}}$ e \mathbb{III}):

$$X_{\parallel\mu\nu}^A = \Xi_{\mu\nu}^\rho X_{\parallel\rho}^A + \mathbb{I}_{\mu\nu}^a N_a^A \quad (3.12)$$

$$N_{a\parallel\mu}^A = \tilde{\mathbb{I}}_{\mu a}^\rho X_{\parallel\rho}^A + \mathbb{III}_{\mu a}^b N_b^A \quad (3.13)$$

Derivando parcialmente (3.1) na direção X_λ , obtêm-se a equação

$$G_{AB,C} X_{,\lambda}^C X_{,\mu}^A X_{,\nu}^B + G_{AB} (X_{,\mu}^A X_{,\nu\lambda}^B + X_{,\mu\lambda}^A X_{,\nu}^B) = g_{\mu\nu,\lambda}$$

Subtraindo desta equação a soma das duas equações obtidas fazendo duas permutações

¹⁰ numa aplicação física, $D = 4 + n$ e V_4 é o espaço-tempo

cíclicas dos índices $\mu\nu\lambda$, obtém-se

$$G_{AB}X_{,\lambda}^AX_{\|\mu\nu}^B = \Gamma_{\lambda\mu\nu} \quad (3.14)$$

onde

$$X_{\|\mu\nu}^B = X_{,\mu\nu}^B + \Upsilon_{CD}^BX_{,\mu}^CX_{,\nu}^D \quad (3.15)$$

é a derivada covariante de $X_{,\mu}$ na direção ν com respeito à métrica G_{AB} .

Multiplicando a equação (3.12) por $g^{\rho\sigma}G_{AB}X_{,\sigma}^B$, e usando (3.14), (3.1) e (3.2), obtém-se que $\Xi_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho$. Multiplicando esta mesma equação (3.12) por $G_{AB}N_b^B$ e fazendo uso da definição da segunda forma (3.11) e das equações (3.2) e (3.8), obtém-se $\mathbb{I}_{\mu\nu}^a g_{ab} = k_{\mu\nu b}$.

Para a equação (3.13), multiplica-se por $G_{AB}X_{,\sigma}^B$ e usa-se a equação (3.1) e (3.2) e a definição de da segunda forma (3.4) para obter $\tilde{\mathbb{I}}_{\mu\nu a} = -k_{\mu\nu a}$. Multiplicando esta mesma equação por $G_{AB}N_c^B$ e utilizando (3.2) e (3.8) e a definição da terceira forma (3.4), obtém-se $\mathbb{I}_{\mu a}^c g_{cb} = A_{\mu ab}$

É conveniente colocar $k_{\mu\nu}^a = g^{ab}k_{\mu\nu b}$ e $A_{\mu a}^c = g^{cb}A_{\mu ab}$, pois desta maneira os resultados apresentados nos parágrafos anteriores podem ser resumidos pelas seguintes equações:

$$X_{\|\mu\nu}^A = \Gamma_{\mu\nu}^\rho X_{\|\rho}^A + k_{\mu\nu}^a N_a^A \quad (3.16)$$

$$N_{a\|\mu}^A = -k_{\mu a}^\rho X_{\|\rho}^A + A_{\mu a}^b N_b^A \quad (3.17)$$

A interpretação dos coeficientes das formas fundamentais é análoga à feita no caso de superfícies do \mathbb{R}^3 . Variando-se um ponto da superfície numa direção μ , observa-se que se a base de um vetor normal N_a se encontra nesses pontos, sua direção muda. A medida dessa mudança em cada componente da base $\{X_\mu, N_i\}$ (que são justamente os coeficientes que aparecem na combinação linear de (3.17)) fornece a taxa em que esta normal passa a inclinar-se para tal direção. Conhecer esses coeficientes (que são a segunda e terceira forma fundamentais) permite conhecer a direção que as normais variam, e portanto a maneira em que a subvariedade está imersa.

É importante notar que todo o desenvolvimento feito aqui segue naturalmente das equações (3.1),(3.2) e (3.8). Veremos na secção seguinte que é sempre possível achar uma subvariedade se forem fornecidas quantidades $g_{\mu\nu}$, $k_{\mu\nu i}$ e $A_{\mu ij}$, desde que essas mesmas satisfaçam condições de integrabilidade para essas equações.

3.2 Condição de Integrabilidade da Imersão

Queremos obter as condições de integrabilidade para a função de imersão. A primeira pergunta que se faz é quando existe solução para uma dada EDP. A resposta para este problema está contida no Teorema de Frobenius, que fornece uma condição matemática sobre as funções envolvidas, condição esta que se satisfeita garante a existência de uma solução. Isto pode ser visto por exemplo em [10].

Para se ter uma idéia, pode-se imaginar um exemplo simplificado de termodinâmica, na qual existem dois tipos de formas diferenciais, chamadas de exatas e inexatas. As diferenciais exatas derivam de um potencial, e as inexatas não (assim como em mecânica podem existir forças conservativas e não conservativas). Supondo que nos é dada uma forma diferencial w , que num sistema de coordenadas x^A é escrita como $w = w_A dx^A$, onde cada componente w_A é uma função dos x^A . O teorema de Frobenius garante que esta forma diferencial provém de um potencial se as componentes satisfizerem uma equação que já é bem conhecida nos livros de termodinâmica (por exemplo [21]) mas que valem em geral:

$$w_{A,B} = w_{B,A} \quad (3.18)$$

Caso esta condição seja satisfeita, a forma w é exata e pode-se escrever $w = df$, onde f é alguma função de x^A .

Dito de outra forma, a equação $w_A = f_{,A}$ só tem uma solução f (admitindo que os w_A sejam funções) se os w_A satisfizerem (3.18).

Para o estudo que será feito aqui, esta forma de entendimento do teorema de Frobenius basta. No restante desta secção será visto como aplicar este teorema na geometria diferencial clássica e na geometria Riemmaniana, respectivamente¹¹.

¹¹ De fato, o teorema é mais geral. Ele afirma que se Λ é uma distribuição, ou seja uma aplicação que associa a cada ponto da variedade um conjunto de vetores linearmente independentes do espaço tangente a este ponto, com o mesmo número de dimensões independente em cada ponto, então ex-

No estudos de superfícies imersas no espaço Euclidiano, para garantir que a função de imersão exista, bastaria achar um conjunto de equações da forma $X_{,\mu} = \Phi_{\mu}$, para algum conjunto de funções Φ_{μ} , e então aplicar a condição de existência de um potencial X (que neste caso seria a função de imersão) tal que: $(\Phi_{\mu})_{,\nu} = (\Phi_{\nu})_{,\mu}$. Isso só seria satisfatório se tivéssemos equações da forma $X_{,\mu} = \Phi_{\mu}$, porém somente a condição de isometria não fornece essas funções. Teremos que procurar condições de integrabilidade também para cada uma das funções $X_{,u}$, $X_{,v}$ e N (as duas primeiras geram o espaço tangente e a última o espaço normal). Isso seria possível se existissem um conjunto de funções Θ_{μ} , Σ_{μ} e Ω_{μ} que satisfaçam as equações:

$$(X_{,u})_{,\mu} = \Theta_{\mu} \quad (X_{,v})_{,\mu} = \Sigma_{\mu} \quad N_{,\mu} = \Omega_{\mu}$$

Neste caso, a condição de integrabilidade para o triedro $X_{,u}$, $X_{,v}$ e N seria $(\Theta_{\mu})_{,\nu} = (\Theta_{\nu})_{,\mu}$, $(\Sigma_{\mu})_{,\nu} = (\Sigma_{\nu})_{,\mu}$ e $(\Omega_{\mu})_{,\nu} = (\Omega_{\nu})_{,\mu}$. De fato, as funções Θ_{μ} , Σ_{μ} e Ω_{μ} podem ser obtidas. Pelo que foi dito na seção anterior, a condição de isometria garante a existência da segunda forma fundamental (a terceira não aparece porque só existe uma dimensão extra) e isso implica que, pelas equações (3.9) e (3.10) (escolhendo por conveniência um sistema de coordenadas Euclidiano para o \mathbb{R}^3),

$$X_{,\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} X_{,\rho} + k_{\mu\nu} N \quad N_{,\mu} = -k_{\mu}^{\nu} X_{,\nu} \quad (3.19)$$

são justamente as funções Θ_{μ} , Σ_{μ} e Ω_{μ} . usa-se a seguinte notação: $k_{uu} = e$, $k_{uv} = k_{vu} = f$ e $k_{vv} = g$. Em vista da equação acima, as condições de integrabilidade para o triedro são :

$$(X_{,uu})_{,v} = (X_{,uv})_{,u}, \quad (X_{,vv})_{,u} = (X_{,vu})_{,v} \quad (N_{,u})_{,v} = (N_{,v})_{,u} \quad (3.20)$$

Como são três equações vetoriais, e os vetores do triedro são linearmente independentes, estas são na realidade nove equações envolvendo os coeficientes da primeira e segunda forma e os símbolos de Christoffel. Destas nove equações, três são independentes [19]:

istirá uma folheação (um conjunto de subvariedades de mesma dimensão que a distribuição e que preenchem a variedade) cujos vetores tangentes geram a distribuição se, e somente se, $[\Lambda, \Lambda] \subset \Lambda$ (o comutador de quaisquer dois vetores da distribuição têm que ser linearmente dependentes dos vetores da distribuição)

$$K = g^{\mu\nu}(\Gamma_{\mu\rho,\nu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu,\rho}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho}\Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\rho\sigma}^{\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) \quad (3.21)$$

$$e_{,v} - f_{,u} = e\Gamma_{uv}^u + f(\Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uu}^u) - g\Gamma_{uu}^v \quad (3.22)$$

$$f_{,v} - g_{,u} = e\Gamma_{vv}^u + f(\Gamma_{vv}^v + \Gamma_{uv}^u) - g\Gamma_{uv}^v \quad (3.23)$$

onde $K = \det(k_{\mu\nu}) = eg - f^2$ é a curvatura Gaussiana. A equação (3.21) é chamada de equação de Gauss (usada por Gauss para provar que a curvatura Gaussiana só depende da primeira forma fundamental) e (3.22) e (3.23) são chamadas de equações de Codazzi-Mainardi.

Elas permitem dizer se o triedro existe. Podem ser resolvidas para e, f, g e assim, obtém-se as funções $\Theta_{\mu}, \Sigma_{\mu}$ e Ω_{μ} , que agora podem ser integradas, fornecendo uma solução explícita para o triedro. Obtém-se assim as funções Φ_{μ} tais que $X_{,\mu} = \Phi_{\mu}$ e a condição para que exista um potencial X é: $(\Phi_{\mu})_{,\nu} = (\Phi_{\nu})_{,\mu}$. Isto é automaticamente satisfeito em decorrência da simetria da segunda forma fundamental e da simetria do símbolo de Christóffel, pois $X_{,\mu\nu} = X_{,\nu\mu}$ pode ser verificado em (3.19).

Dadas funções E, F, G, e, f e g (ou seja, a primeira e segunda formas fundamentais) que satisfaçam as equações acima, o teorema de Frobenius garante que exista uma superfície com tais formas (a menos de movimentos rígidos). Este resultado é conhecido como Teorema Fundamental das Superfícies.

Uma vez entendido a resolução do problema da imersão para a geometria diferencial clássica de superfícies imersas no \mathbb{R}^3 , sua extensão para variedades Riemannianas surge naturalmente. O problema adicional em relação ao anterior é que os símbolos de Christoffel da métrica G_{AB} já não são mais necessariamente nulos num aberto. Este problema será contornado mostrando uma equação análoga à condição de integrabilidade (3.18). A primeira analogia a ser feita é com relação à condição de Frobenius. Assim como no caso anterior não se pode utilizar a condição de Frobenius diretamente em $X_{,\mu}$, pois não se tem a sua forma funcional. Porém, como foi visto na seção anterior, a condição de isometria (3.1) e ortonormalidade (3.3) e (3.2) implicam que as equações (3.16) e (3.17) sejam verdadeiras. Mas elas envolvem derivadas covariantes, enquanto que a condição de Frobenius só envolve derivadas parciais. Para

poder aplicar o teorema de Frobenius , podemos usar a identidade de Ricci (2.5) para X , na qual $X_{,\mu\nu\lambda} = X_{,\mu\lambda\nu}$ é satisffeito se e somente se

$$X_{;\mu\nu\lambda}^A - X_{;\mu\lambda\nu}^A = X_{,\tau}^A R_{;\mu\nu\lambda}^\tau \quad (3.24)$$

Se quisermos usar esta identidade será conveniente escrever (3.16) e (3.17) em termos da derivadas covariantes da métrica $g_{\mu\nu}$. Primeiro é importante observar que sobre uma transformação de coordenadas de V_4 a quantidade X_μ^A se transforma como uma 1-forma, portanto $X_{\mu;\nu}^A = X_{,\nu}^A - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda X_\lambda^A$. Isolando $X_{,\nu}^A$ desta última equação e substituindo em (3.15) resulta que $X_{\parallel\mu\nu}^B = X_{;\mu\nu}^A + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda X_\lambda^A + \Upsilon_{CD}^B X_{,\mu}^C X_{,\nu}^D$. Substituindo este resultado em (3.16) obtemos:

$$X_{;\mu\nu}^A = -\Upsilon_{BC}^A X_\mu^B X_\nu^C + k_{\mu\nu}^i N_i^A \quad (3.25)$$

Para os vetores normais, nota-se que seus componentes N_A^i podem ser vistos como campos escalares para V_4 , pois não mudam sobre uma transformação de coordenadas desta variedade. Porém para um observador em V^D temos $N_{i\parallel\mu}^C = N_{i,\mu}^C + \Upsilon_{AB}^C X_\mu^A N_i^B$. Assim, (lembrando que $N_{i,\mu}^C = N_{i;\mu}^C$ e fazendo uso de 3.17)

$$N_{i;\mu}^A = -k_{\mu i}^\nu X_\nu^A - \Upsilon_{BC}^A X_{,\mu}^B N_i^C + A_{\mu i}^j N_j^A \quad (3.26)$$

A condição de integrabilidade para os N_i^A é $N_{i,\mu\nu}^A = N_{i,\nu\mu}^A$, que em decorrência da simetria dos símbolos de Christoffel fica:

$$N_{i;\mu\nu}^A = N_{i;\nu\mu}^A \quad (3.27)$$

Substituindo (3.25) e (3.26) na identidade de Ricci, obtem-se uma equação que, se contraída com $G_{AB} X_{\nu\rho}^B$ fornece (3.28) e se contraída com $G_{AB} N_j^B$ obtêm-se (3.29):

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = (k_{\alpha\mu}^i k_{\beta\nu i} - k_{\alpha\nu}^i k_{\beta\mu i}) + \mathcal{R}_{ABCD} X_{,\alpha}^A X_{,\beta}^B X_{,\mu}^C X_{,\nu}^D \quad (3.28)$$

$$k_{\mu\nu a;\lambda} - k_{\mu\lambda a;\nu} = (A_{\lambda a}^i k_{\mu\nu i} - A_{\nu a}^i k_{\lambda\mu i}) + \mathcal{R}_{ABCD} X_{,\mu}^A N_a^B X_{,\nu}^C X_{,\lambda}^D \quad (3.29)$$

Estas equações são conhecidas como equações de Gauss e Codazzi, respectiva-

mente. O tensor \mathcal{R}_{ABCD} é o tensor de Riemman para a métrica G_{AB}

Uma terceira equação surge com a equação (3.27), ao se fazer a substituição das funções (3.25) e (3.26) e contrair com $G_{AB}N^b$:

$$A_{\alpha;\beta ij} - A_{\beta;\alpha ij} = -(A_{\alpha i}^k A_{\beta k j} - A_{\beta j}^k A_{\alpha k i}) - g^{\mu\nu} (k_{\mu\alpha i} k_{\nu\beta j} - k_{\mu\beta i} k_{\nu\alpha j}) + \mathcal{R}_{ABCD} N_i^A N_j^B X_{,\alpha}^C X_{,\beta}^D \quad (3.30)$$

Esta equação é chamada de equação de Ricci.

Resolver este conjunto de equações, (3.28), (3.29) e (3.30) resulta na obtenção das formas fundamentais, bem como a existência de um referencial móvel (X_μ, N_i) . Analogamente ao teorema fundamental das superfícies, pode-se enunciar o teorema fundamental das variedades: dadas funções G_{AB} , $g_{\mu\nu}$, $k_{\mu\nu}^i$ e $A_{\mu ij}$ que satisfaçam as equações de Gauss, Codazzi e Ricci, é garantida a existência de duas variedades, uma com primeira forma G_{AB} contendo uma subvariedade imersa que tenha o restante das funções como formas fundamentais .

Para o caso de curvas imersas no \mathbb{R}^3 , têm-se apenas um índice para a direção tangente. Da equação de Gauss resulta que o único componente da curvatura, R_{1111} , se anula identicamente (isso pode ser visto levando em conta a antissimetria do tensor de Riemann (2.9). Isto indica que um não há meios para se descobrir intrinsecamente a curvatura desta variedade unidimensional, o que é intuitivo uma vêz que se modificarmos um fio sem esticá-lo, o seu comprimento não irá mudar, portanto todas as curvas são localmente isométricas.

Uma vêz que apenas a primeira forma fundamental não caracteriza completamente a variedade, esta é totalmente descrita quando se têm uma imersão¹². Mas é nessesário escolher o espaço de imersão, que não é único. O teorema de Greene garante que existe uma imersão de V_n em um V_m plano se $m = \frac{n(n+3)}{2}$, porém em casos específicos geralmente o número de dimensões requerido é muito menor. Pode-se requerer que para um dado espaço-tempo a imersão a ser considera é aquela em que o número de dimensões seja o menor possível. Mas mesmo assim, isso não fixa a métrica do espaço maior, que não necessariamente será plana. Fala-se, neste caso que o formato de uma variedade é relativa ao espaço de imersão, assim como na RE

¹²Este é o problema fundamental na aplicação física a ser feita na dissertação

o comprimento de um objeto é relativo à um observador.

Com os resultados obtidos neste capítulo fica evidente que o significado das equações de Gauss, Codazzi e Ricci é garantir a existência de uma imersão, justamente porque estas equações são equivalentes à condição de Frobenius para o referencial móvel (X_μ, N_i) . Uma maneira de se entender estas equações é notar que elas fornecem uma expressão para o tensor de Riemann \mathcal{R}_{ABCD} da variedade de imersão em termos do tensor de Riemann $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ da variedade imersa e das segunda e terceira formas fundamentais. A derivação feita aqui para estas equações é semelhante à feita por Eisenhart [20]. Este capítulo tenta suprir a dificuldade encontrada na interpretação dessas equações.

Capítulo 4

Interações Fundamentais

As coisas visíveis são uma espiral sobre o invisível

Demócrito e Anaxágoras.

Uma vez que o objetivo desta dissertação é sugerir uma unificação das interações fundamentais, faz-se necessário uma exposição das teorias que descrevem essas interações, a saber: Teoria da Gravitação e Teoria de Yang-Mills. A primeira será tratada na próxima seção e é responsável pela descrição da força gravitacional, enquanto que a segunda (que será tratada na seção seguinte) é responsável pela descrição das forças de calibre: nuclear forte, eletromagnética e nuclear fraca. Será visto que as equações que governam a dinâmica de ambos os campos provêm de princípios variacionais diferentes, ou seja, com Lagrangeanas diferentes.

4.1 Gravitação

A Teoria da RG foi desenvolvida por Einstein nos anos de 1907 até 1915. Sua intenção era generalizar a RE e incluir a interação gravitacional, até então descrita pela Lei da Gravitação Universal, de Isaac Newton. No séc. XIX a crença na validade da lei de atração de Newton era tão grande que o planeta Netuno teve sua existência postulada somente para poder explicar desvios não previstos pela teoria Newtoniana na órbita de Urano ao redor do Sol. Sua observação direta, através de um telescópio foi feita um ano depois, em 1846. Em 1859 Le Verrier observou que o planeta Mercúrio também apresentava tais desvios (conhecidos como precessão do periélio), porém todas as hipóteses feitas para explicar tais desvios puramente com o arcabolso teórico fornecido pela Gravitação Newtoniana se mostrou inconcludente. Os planetas mais próximos de mercúrio não poderiam provocar a precessão medida. Este problema só veio a ser explicado com a introdução de uma nova teoria gravitacional (a RG), testada por observação direta na cidade de Sobral, em 1919, pela equipe de Eddington.

No discurso de recebimento do seu prêmio nobel (pelo efeito fotoelétrico), Einstein disse que a primeira motivação para a RG foi o fato de que na RE existem referenciais privilegiados (os referenciais inerciais), sendo que uma teoria mais satisfatória não deveria assumir de antemão a existência de tais referenciais (foi levado a postular assim a chamada Covariância Generalizada, na qual todos os sistemas de coordenadas deveriam possuir a mesma equação dinâmica). No artigo de 1907 Einstein mostra que um referencial em queda livre é equivalente à um referencial inercial da RE (na RG é chamado de princípio da equivalência). Em 1914 ele publica outro artigo que faz uma discussão, baseada na equivalência de massa inercial e gravitacional, sobre a impossibilidade de diferenciar localmente um referencial uniformemente acelerado de um referencial parado sobre a ação de um campo gravitacional uniforme.

Uma experiência de pensamento proposta por Einstein ajuda a explicar o porquê da necessidade de usar a geometria Riemanianna. Um observador que esteja na circunferência de um disco em rotação terá o comprimento de sua régua contraído, então irá medir um valor para a circunferência maior do que $2\pi r$, onde r é o raio (que não sofre variação em seu comprimento). Isso indica claramente uma incompatibilidade com a geometria Euclideana. Uma vez que o observador está acelerado, e pelas considerações anteriores, não há como diferenciar a aceleração uniforme da

aceleração causada por um campo gravitacional, pode-se concluir que a presença de uma fonte de campo gravitacional muda a natureza Euclideana do espaço. O próximo passo trilhado por Einstein era descobrir uma teoria geométrica que servisse como ferramental matemático para a descrição dos campos gravitacionais. Com auxílio de Marcel Grossmann estudou geometria Riemanniana e também por conselho de Tullio Levi-Civita começou a estudar a álgebra tensorial, com vistas à aplicação o princípio da covariância generalizada.

O último passo era obter a equação que governasse a geometria a partir de uma dada distribuição de matéria (ou energia - o tensor energia momento). Einstein postulou então que o espaço-tempo físico era uma variedade pseudo-Riemanniana e primeiramente pensou na possibilidade de que o tensor de curvatura $R_{\mu\nu}$ se igualasse ao tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, porém isso leva à não conservação do tensor energia momento¹ uma vez que $R^{\mu\nu}{}_{;\nu}$ não é necessariamente nulo. Através de um estudo da identidade contraída de Bianchi é possível descobrir que a equação compatível com a conservação da energia é

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (4.1)$$

conhecida como equação de Einstein. Para ver que o lado direito é conservado, tome a segunda identidade de Bianchi 2.11 e contraia com $g^{\lambda\nu}$:

$$R_{\mu\kappa;\eta} - R_{\mu\eta;\kappa} - R^{\nu}{}_{\mu\kappa\eta;\nu} = 0$$

Contraíndo de novo temos

$$R_{;\eta} - R^{\mu}{}_{\eta;\mu} - R^{\nu}{}_{\eta;\nu} = 0$$

ou

$$(R^{\mu}{}_{\eta} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\eta}R)_{;\mu} = 0$$

Uma forma mais familiar da equação acima é

¹A conservação do tensor energia-momento é escrita como $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ e pode ser interpretada como uma equação de continuidade semelhante à $j^{\mu}{}_{;\mu} = 0$ da relatividade especial (ou seja, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v})$), porém tomando a derivada covariante. Ela permite dizer que a energia e o momento da fonte do campo gravitacional são conservados.

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)_{;\mu} = 0$$

que é justamente a fórmula que prova a conservação do lado esquerdo da equação de Einstein (4.1). Resolvida esta equação para uma dada distribuição de matéria e energia, descobre-se a métrica $g_{\mu\nu}$. Um percurso de uma partícula em queda-livre $u^\sigma(s)$ será descrito pela equação da geodésica

$$\frac{d^2u^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\nu}{ds} = 0$$

cujo comprimento entre dois pontos é o menor possível (generalização da linha reta Euclideana).

Por ser não-linear, não existe um procedimento geral para resolver a equação de Einstein de maneira explícita e geral. Entretanto, um número limitado de soluções exatas são conhecidas, entre elas, a solução de Schwarzschild, de Reissner-Nordström, Kerr, de Sitter e Robertson-Walker. Considerações cosmológicas levam Einstein à adição do termo $g_{\mu\nu}\Lambda$ no lado esquerdo da equação de Einstein, onde a função constante Λ é chamada de constante cosmológica.

Dentre as previsões observadas, destacam-se a já citada precessão do periélio de mercúrio, o desvio da trajetória da luz e o desvio para o vermelho (conhecidos como testes clássicos da teoria).

4.1.1 Ação de Einstein-Hilbert

Como em toda Física, a equação de Einstein pode e deve ser obtida de um princípio variacional, e de fato foi obtida por Hilbert em 1915, curiosamente antes que o próprio Einstein a publicasse. Hilbert usou o cálculo variacional ao admitir que a ação S é dada por

$$S = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x$$

onde \mathcal{L} é a Lagrangeana da teoria, $\sqrt{-g}d^4x$ é o elemento de volume² (g é o deter-

²O elemento de volume é escolhido desta maneira porque se assim definido ele independe do sistema de coordenadas

minante da métrica³ $g_{\mu\nu}$). Usualmente, a Lagrangeana da teoria é a soma da parte geométrica, a Lagrangeana de Einstein-Hilbert (\mathcal{L}_{E-H}) que dá origem à parte esquerda (geométrica) da equação de Einstein (4.1), com a Lagrangeana \mathcal{L}_M provinda da fonte de matéria e que dá origem ao termo $T_{\mu\nu}$. Para obter as equações de Einstein impõe-se que a Lagrangeana de Einstein-Hilbert seja proporcional ao escalar de curvatura da variedade $\mathcal{L}_{E-H} = \frac{R}{2\kappa}$, onde $\kappa = 8\pi Gc^{-4}$, G é a constante gravitacional de Newton e c é a velocidade da luz no vácuo. Assim, evoca-se o princípio variacional:

$$0 = \delta S = \int \delta \left\{ \left[\frac{1}{2\kappa} R + \mathcal{L}_M \right] \sqrt{-g} \right\} d^4x = 0$$

Estabelecendo que a integral da curvatura R é máxima ou mínima. Isto implica

$$\begin{aligned} 0 &= \int \left[\frac{1}{2\kappa} \frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &= \int \left[\frac{1}{2\kappa} \left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \end{aligned}$$

Como esta equação é verdadeira para qualquer $\delta g^{\mu\nu}$ temos:

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -2\kappa \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (4.2)$$

A variação do determinante é $\delta g = g \cdot g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = g \cdot g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$. Assim⁴ $\frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}} = g \cdot g_{\mu\nu}$, e o lado direito da equação acima fica igual à $\kappa T_{\mu\nu}$, onde define-se $T_{\mu\nu}$ por:

$$T_{\mu\nu} \stackrel{def}{=} \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M \quad (4.3)$$

Para a parte geométrica, vamos considerar primeiro a variação do tensor de Riemann:

³Uma maneira de calcular o determinante é denotar por M a matriz cujos coeficientes m_{β}^{α} sejam os elementos $g_{\alpha\beta}$ e tomar o determinante como $g = \frac{1}{4!} \omega_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu\rho\sigma} m_{\mu}^{\alpha} m_{\nu}^{\beta} m_{\rho}^{\gamma} m_{\sigma}^{\delta}$, onde os valores de $\omega_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu\rho\sigma}$ dependem da relação entre $(\mu\nu\rho\sigma)$ e $(\alpha\beta\gamma\delta)$. É igual à 1 se um for uma permutação par do outro, -1 se for uma permutação ímpar, zero se não tiverem elementos em comum ou se qualquer um deles tiverem pelo menos dois elementos repetidos

⁴ Para provar isso, basta calcular $\delta g = \delta \left(\frac{1}{4!} \omega_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu\rho\sigma} m_{\mu}^{\alpha} m_{\nu}^{\beta} m_{\rho}^{\gamma} m_{\sigma}^{\delta} \right) = \frac{1}{4!} \omega_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu\rho\sigma} (\delta m_{\mu}^{\alpha} m_{\nu}^{\beta} m_{\rho}^{\gamma} m_{\sigma}^{\delta} + m_{\mu}^{\alpha} \delta m_{\nu}^{\beta} m_{\rho}^{\gamma} m_{\sigma}^{\delta} + m_{\mu}^{\alpha} m_{\nu}^{\beta} \delta m_{\rho}^{\gamma} m_{\sigma}^{\delta} + m_{\mu}^{\alpha} m_{\nu}^{\beta} m_{\rho}^{\gamma} \delta m_{\sigma}^{\delta}) = \Delta_{\beta}^{\alpha} \delta m_{\alpha}^{\beta}$, onde a matriz Δ é a matriz cofator de M , dada por $\Delta_{\alpha}^{\mu} = \left(\frac{1}{3!} \omega_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu\rho\sigma} m_{\nu}^{\beta} m_{\rho}^{\gamma} m_{\sigma}^{\delta} \right)$. Usando o resultado de álgebra linear, no qual a matriz cofator é a matriz inversa multiplicada pelo determinante g , segue o resultado

$$\delta R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \delta \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \delta \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \delta \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}$$

Notando que $\delta \Gamma^\rho_{\nu\mu}$ se transforma como um tensor⁵ obtemos:

$$\delta R^\rho_{\sigma\mu\nu} = (\delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma})_{;\mu} - (\delta \Gamma^\rho_{\mu\sigma})_{;\nu}$$

Podemos então escrever

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma^\rho_{\rho\mu})_{;\sigma}$$

O último termo, quando for multiplicado por $\sqrt{-g}$ será uma derivada total⁶, portanto pelo teorema de Stokes, é um termo de fronteira e não conta para a variação da integral.

Podemos considerar então que

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} \quad (4.4)$$

Para finalizar, só resta o termo

$$\frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (4.5)$$

A equação de Einstein (4.1) é obtida ao se substituir as equações (4.4), (4.5) e (4.3) na equação (4.2) .

⁵ Escrevendo a definição 2.4 do símbolo de Christoffel em um outro sistema de coordenadas e notando que os coeficientes da métrica se transformam como um tensor, obtêm-se a fórmula de transformação dos coeficientes de Christoffel para dois sistemas de coordenadas diferentes: $\bar{\Gamma}^{\bar{\lambda}}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^{\bar{\nu}}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^{\bar{\lambda}}} \Gamma^\lambda_{\rho\sigma} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^{\bar{\lambda}}} \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}} \partial \bar{x}^{\bar{\nu}}}$. Se não fosse pelo último termo, este coeficiente se transformaria como um tensor. Porém fazendo a diferença $\delta \Gamma$ de dois símbolos de Christoffel diferentes, este último termo se cancela e a quantidade $\delta \Gamma$ se transformará como um tensor, assim sua derivada covariante faz sentido

⁶ Para ver isso, considere o componente A^α de um vetor qualquer. Temos $\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} A^\alpha)_{;\alpha} = \frac{(g)_{;\alpha} A^\alpha}{2g} + A^\alpha_{;\alpha}$. O termo $(g)_{;\alpha}$ pode ser calculado de maneira análoga à feita no rodapé 4 da página 48 e resulta $g_{;\alpha} = \Delta^\mu_{\nu} (m^\nu_{\mu})_{;\alpha} = g \cdot g^{\mu\nu} g_{\mu\nu;\alpha}$ que é igual à $2g \Gamma^\beta_{\beta\alpha}$ (é só verificar pela substituição direta em 2.4). Portanto $\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} A^\alpha)_{;\alpha} = A^\alpha_{;\alpha}$ ou $\partial_\alpha (\sqrt{-g} A^\alpha) = \sqrt{-g} A^\alpha_{;\alpha}$

4.2 Campos de Calibre

Começaremos com uma breve retrospectiva histórica do desenvolvimento da teoria de Yang-Mills [22]. Houveram três fases importantes no desenvolvimento da teoria: a descoberta inicial de Weyl em 1919 [23], depois o resurgimento da mesma, porém com uma interpretação quântica, em 1929 [24] e finalmente a teoria de Yang-Mills propriamente dita, desenvolvida em 1954 [25].

O essencial de qualquer teoria de calibre é o grupo⁷ de simetria de calibre e o papel crucial que ele desempenha na determinação da dinâmica da teoria. Um outro aspecto marcante é que a simetria de calibre não é uma transformação física de coordenadas no espaço-tempo da RE, mas sim do chamado espaço interno⁸ (de fato, o nome calibre foi dado por Weyl para distinguir as transformações de coordenadas das transformações do potencial). Veremos que isto pode ser revisto quando se leva em conta as teorias cujas transformações de calibre ficam associadas à transformações de coordenadas nas dimensões extras.

Outra contribuição importante veio com o teorema de Noether de 1919, que afirma que o conhecimento da Lagrangeana e das transformações que a deixam invariante permite a obtenção de quantidades conservadas. Por exemplo, se a Lagrangeana é invariante por translação, então o momento linear é conservado [26]. Se for invariante por rotações, então o momento angular é que é conservado. Caso seja também invariante por uma translação temporal, a energia é conservada⁹. Pode-se considerar

⁷Para a física, é comum conceber um grupo como o conjunto das operações que deixam invariante uma certa estrutura, como por exemplo o grupo de transformações ortogonais no espaço \mathbb{R}^n , denotado por $O(n)$, que deixam o produto interno canônico invariante. De maneira abstrata, um grupo é um conjunto munido de uma multiplicação associativa, contendo a identidade e para cada elemento dado, o seu inverso (aquele que se multiplicado pelo elemento inverso se iguala à identidade). Os grupos de Lie contém número infinito de elementos e seus elementos podem ser parametrizados como numa variedade. No exemplo fornecido, uma parametrização seria obtida pelas variáveis independentes que parametrizam as matrizes ortogonais (no caso de três dimensões os ângulos de Euler servem para este propósito)

⁸É comum estudar os vetores tangentes à identidade (denotados por \vec{e}_i), que é um espaço vetorial que parametriza os elementos do grupo de Lie (e por isso chamados de geradores). Isto permite estudar as propriedades dos grupos com muito mais facilidade, e foi sugerido primeiramente por Lie, que forneceu uma parametrização do grupo pela álgebra, chamada de aplicação exponencial. Esta parametrização só alcança a componente conexa da identidade do grupo, mas outras parametrizações são possíveis, que alcancem qualquer elemento do grupo. Para provar isso, Lie sou o fato de que para conhecer a estrutura multiplicativa de um grupo, basta conhecer as constantes de estrutura da álgebra c_{ij}^k , definida por $[\vec{e}_i, \vec{e}_j] = c_{ij}^k \vec{e}_k$. Como os elementos do grupo atuam de forma natural nos elementos da álgebra, pode-se considerar que o espaço interno na qual um dado grupo atua é justamente o espaço da álgebra, que fornece uma representação linear para o grupo, chamada de representação adjunta

⁹Isto é uma motivação para se considerar na mecânica quântica a energia como o auto valor de um

também transformações não apenas nas coordenadas, mas também nas funções, como é o caso da transformação de calibre, que transforma o potencial, mas deixa a lagrangeana invariante. Para transformações locais, dadas as transformações que deixam a Lagrangeana invariante (este conjunto é um grupo de Lie) e a Lagrangeana, Noether obtém uma quantidade T_i^μ que é conservada por uma derivada generalizada, $D_\mu T_i^\mu = 0$, onde $D_\mu = \partial_\nu + C_\mu$, para um operador C_μ . Posteriormente verificou-se que tal operador correspondia à uma derivada covariante D_μ cuja conexão C_μ é análoga à conexão do grupo visto como grupo de calibre, pois se transforma como tal.

4.2.1 Teoria de Calibre de Weyl

Na época em que esta teoria foi desenvolvida, 1919, as únicas partículas elementares que se tinha conhecimento eram o elétron e o próton. A motivação de Weyl em propor a idéia de invariância de calibre veio com a confirmação do desvio da trajetória da luz, prevista pela RG.

Weyl se perguntou: se o campo gravitacional pode ser descrito por uma conexão que fornece as orientações relativas entre dois sistemas de referencial locais no espaço-tempo, poderia também o eletromagnetismo ser associado com uma conexão similar? Sugeriu então que a norma de um vetor físico não seja uma quantidade absoluta, mas dependa da sua localização no espaço-tempo. Para visualizar esta idéia considere um campo vetorial qualquer que em um ponto fixo x dado tenha norma $f(x)$. A norma deste vetor no ponto $x + dx$ é $f(x + dx) \approx f(x) + (\partial_\mu f) dx^\mu$. Agora introduz-se uma mudança de calibre através de um fator multiplicativo S , que é uma função das coordenadas e unitário no ponto x , ou seja: $S(x + dx) = 1 + (\partial_\mu S) dx^\mu$. Agora a nova norma do vetor no ponto $x + dx$ será $S(x + dx)f(x + dx) \approx f(x) + (\partial_\mu S) f dx^\mu + (\partial_\mu f) dx^\mu$, ou seja, $\delta f = (\partial_\mu + (\partial_\mu S))f dx^\mu$. Isso funciona como uma conexão, pois a derivada parcial é substituída por uma outra que difere desta por um termo aditivo.

Weyl interpretou a quantidade $\partial_\mu S$ como o quadri-potencial eletromagnético A_μ porque uma segunda transformação de calibre com um novo fator de escala θ transformará a conexão da seguinte maneira: $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \theta$, que é a transformação de calibre do eletromagnetismo (deixam as equações de Maxwell invariantes, portanto são simetrias de calibre). Aqui $\theta(x^\mu)$ representa o parâmetro local de transformação

operador proporcional à derivada temporal, e o momento linear como proporcional à derivada espacial

de calibre do eletromagnetismo.

Alguns anos depois Bergman (para um relato deste acontecimento, ver [27]) notou que esta interpretação era incorreta, por estar em conflito com a mecânica quântica, na qual o comprimento de onda Compton $\lambda = \frac{h}{mc}$ é uma escala de comprimento natural associada à uma partícula e além disso não depende da posição da mesma. Desconsiderando esta falha inicial, a idéia de invariância de calibre sobreviveu, porém era vista como um acidente matemático que permitia simplificar os cálculos.

4.2.2 Renascimento da Teoria de Calibre

Para contornar a observação de Bergmann, em 1929 Weyl propôs uma nova interpretação para a sua idéia original, mas agora motivado pela teoria quântica (a sugestão foi dada por V.Fock [28] e London [29]). Ao invés de transformar as normas dos vetores, a modificação é feita na fase da função de onda Ψ , solução da equação de Schrodinger¹⁰ na presença de um campo eletromagnético A_μ . Se a nova função de onda $\Psi e^{-ie\lambda(x)}$ for solução da mesma equação de Schrodinger isto implicará que o A_μ deve mudar para $A_\mu - \partial_\mu\lambda$.

A objeção à teoria original de Weyl não se aplica mais porque uma mudança na fase não altera o valor medido para a densidade de probabilidade (que é a norma da função de onda). Fixando um calibre para o campo eletromagnético (fazendo uma escolha para A_μ) possibilita que se fixe a quantidade $\partial_\mu\theta$, e portanto permite que se tenha uma noção de como a função de onda varia de ponto a ponto, conseqüentemente o campo A_μ funciona como uma conexão para a fase de onda. Portanto, apesar das equações de Maxwell serem clássicas a simetria de calibre têm justificativa quântica. O grupo de simetria aqui considerado seria o $U(1)$, o grupo unitário de um parâmetro, correspondente à simetria de calibre do campo eletromagnético.

Um experimento que vem reforçar ainda mais esta relação entre potencial eletromagnético e função de onda é o proposto por Aharonov-Bohm, no qual observa-se a possibilidade de medir o potencial eletromagnético diretamente, dando uma importância mais fundamental à estes do que ao campo eletromagnético propriamente

¹⁰A equação de Schrodinger $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) = [\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}, t)]\psi(\vec{r}, t)$ para um potencial $V(\vec{r}, t)$ é obtida pela lei de conservação de energia não relativística $E = \frac{p^2}{2m} + V$, substituindo a energia E por um operador proporcional à derivada temporal $E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ e o momento linear \vec{p} por um operador proporcional à derivada espacial $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$

dito. O experimento de Aharonov-Bohm mostra a interferência na função de onda do elétron (figura 4.1) causada pelo potencial. Se colocarmos um solenóide entre as fendas os campos elétrico e magnéticos não mudam na região exterior ao solenóide, porém ocorre uma mudança no potencial e uma consequente mudança no padrão de interferência observado. Isto implica que potencial em si é um observável.

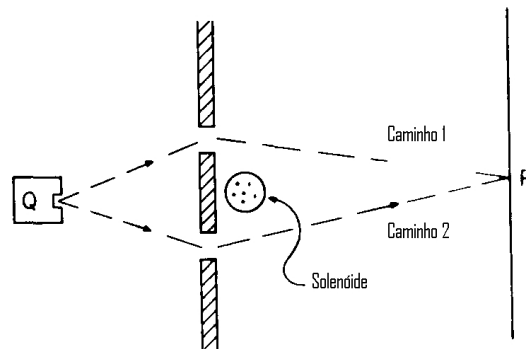


Figura 4.1: Aharonov-Bohm

Apesar disto, a interpretação da invariância de calibre feita por Weyl continuou sendo subestimada e vista apenas como uma propriedade matemática da mecânica quântica, e não como uma propriedade fundamental da natureza. Isso só veio a ocorrer com o desenvolvimento da teoria de Yang-Mills, que generaliza o eletromagnetismo para as outras forças de calibre, levando em conta a propriedade de invariância de calibre da teoria eletromagnética e estendendo-a para as interações nucleares.

4.2.3 A Teoria de Yang-Mills

Dois conceitos básicos foram importantes para o desenvolvimento da teoria de Yang-Mills. O primeiro era a idéia proposta por Yukawa, de que a força nuclear fosse intermediada por uma partícula, chamada de méson π (assim como a força eletromagnética é intermediada por fótons). A segunda idéia veio com a observação de que a força nuclear independia da carga elétrica. Assim, Heisenberg sugeriu que o nêutron e o próton pudessem ser considerados como estados diferentes de uma mesma partícula (em analogia com os estados "up" e "down" do spin). A invariância da carga é obtida quando se observa a invariância da força nuclear sobre a ação de um novo grupo de simetria, o $SU(2)$. Entretanto, diferentemente do $U(1)$ considerado anteriormente, que é uma simetria global (os parâmetros independem das coordenadas),

corresponde à propriedade interna chamada de isospin. O méson π seria o carregador da força nuclear e auto-estado do isospin.

Em 1954 Yang e Mills propuseram uma teoria na qual a interação nuclear é descrita por uma teoria de campo que possua uma invariância de calibre, postulando que o grupo de calibre fosse o $SU(2)$, atuando localmente (em cada ponto do espaço-tempo). A escolha de uma conexão fornece uma regra para determinar como o estado avaliado em um ponto (neste caso, o estado pode ser interpretado como uma combinação linear de próton e nêutron) influencia o estado numa vizinhança deste.

No eletromagnetismo, o potencial eletromagnético A_μ fornece uma conexão entre a fase da função de onda em posições próximas. Na teoria de Yang-Mills a fase é substituída por uma variável local mais complicada, que especifica a direção do isospin. O potencial de Yang-Mills gera uma rotação no espaço de simetria interna (assim como o grupo $SU(2) \approx SO(3)$ gera rotações no \mathbb{R}^3), esta rotação tem geradores que aqui serão denotados por \vec{L} , em analogia com o momento angular, que gera rotações espaciais. Assim, um elemento do grupo de simetria $R(\vec{\theta})$ gera uma rotação no espaço interno dado por $R(\vec{\theta})\Psi = e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{L}}\Psi$, indicando que a forma mais geral para um potencial de Yang-Mills A_μ é uma combinação linear de geradores de rotação no espaço interno $A_\mu = A_\mu^i(x)L_i$. Neste caso, o grupo de simetria tem três geradores independentes (que correspondem à três parâmetros independentes de $SU(2)$), e assim como no caso do momento angular, pode-se escolher L_+ , L_- e L_3 como base e pode-se interpretar, por exemplo, o operador L_+ como uma transformação que muda um próton para um nêutron.

Hoje em dia sabe-se que o próton e o nêutron não são mais partículas fundamentais, sendo os mesmos constituídos por quarks. Assim, a teoria de Yang-Mills teve que se adaptar ao novo modelo de interação forte. O espaço interno não é mais necessariamente o do isospin, mas sim da álgebra de Lie de $SU(3)$, cujos parâmetros são locais e que correspondem à estrutura dos quarks. Dado um grupo de Lie, escolhe-se uma representação linear no mesmo espaço que será representada a função de onda. Os geradores desta transformação serão denotados por F_k , e qualquer elemento do grupo pode ser alcançado por uma aplicação exponencial, escolhidos os parâmetros $\theta^k(x)$ em cada ponto x do espaço-tempo. Assim, dado um elemento arbitrário \hat{g} do grupo de Lie, ele atua numa função de onda da seguinte maneira: $\hat{g}\Psi = (e^{-iq\theta^k(x)F_k})\Psi$,

onde a constante iq é tomada por conveniência e os geradores da álgebra satisfazem a equação de estrutura de Lie,

$$[F_i, F_j] = c_{ij}^k F_k$$

e os c_{ij}^k são constantes de estrutura da Álgebra de Lie do grupo considerado.

Se denotarmos os vetores do espaço interno por u_i , poderemos separar a função de onda em sua parte interna e externa $\Psi(x) = \Psi_i(x)u^i$. Ao se aplicar uma transformação de calibre e se analisar a diferença da função de onda entre dois pontos que diferem infinitesimalmente, percebe-se que não apenas a parte externa $\Psi_i(x)$ muda, mas também a parte do espaço interno u_i .

$$d\Psi = \Psi(x + dx) - \Psi(x) = (\partial_\mu \Psi_i) dx^\mu u^i + \Psi_i du^i$$

Levando em conta o fato de que o grupo atua somente no espaço interno e que os geradores F_k são transformações lineares neste espaço (e são, portanto, matrizes $(F_k)_i^j$), obtem-se $du^i = e^{-iq(\theta^k + d\theta^k)F_k} u^i - e^{-iq(\theta^k)F_k} u^i \approx -iq(\partial_\mu \theta^k) dx^\mu (F_k)_j^i u^j$ (foi tomado até a primeira ordem na expansão). Denotando $(A_\mu)_i^j = (\partial_\mu \theta^k)(F_k)_i^j$ resulta que $d\Psi = (D_\mu \Psi_i) dx^\mu u^i$, onde D_μ é a derivada covariante de calibre, $D_\mu \Psi_i = (\delta_i^j \partial_\mu - iq(A_\mu)_i^j) \Psi_j$. Numa notação mais compacta,

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu - iqA_\mu) \Psi$$

Para uma transformação de calibre geral U , a conexão se transforma da seguinte maneira¹¹:

$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{q} (\partial_\mu U) U^{-1} \quad (4.6)$$

No eletromagnetismo, o campo eletromagnético é dado pelo tensor de Maxwell

$$F_{\mu\nu} = [\partial_\mu - iqA_\mu, \partial_\nu - iqA_\nu]$$

Por generalização, os campos provindos dos potenciais de calibre serão dados por:

¹¹Isto é obtido impondo que a derivada covariante D_μ comute com a ação do grupo U , que pela equação 4.2.3, $(\partial_\mu - iqA_\mu)(U\Psi) = U(\partial_\mu - iqA_\mu)\Psi$ resulta na equação para a transformação da conexão depois de um pouco de manipulação

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} - iq[A_\mu, A_\nu]$$

Note que esta é uma expressão para a curvatura $F_{\mu\nu}$ associada à conexão A_μ (compare com a expressão 2.6 da página 25). Portanto, na teoria de Yang-Mills, fala-se de curvatura referindo-se à $F_{\mu\nu}$.

Na notação covariante, a Lagrangeana do campo eletromagnético é proporcional à $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. No caso da teoria de Yang-Mills a quantidade $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ é a soma de produtos de operadores, sendo então um operador. Uma escolha para uma função Lagrangeana que não dependa da base escolhida para a representação matricial deste operador é o traço desta quantidade, $Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$. Portanto a Lagrangeana para o potencial de Yang-Mills é dada por¹²

$$\mathcal{L}_{Y-M} = -\frac{1}{4}Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

Impondo o princípio de variação mínima da ação com respeito à variação de A_μ , obtém-se uma generalização das equações de Maxwell não homogêneas

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} - iq[A^\mu, F_{\mu\nu}] = j_\nu$$

onde j_ν é a quadricorrente associada à Lagrangeana da fonte. Aqui diferente da RG, a conexão é solução das equações de Yang-Mills e não são dadas por uma expressão em termos da métrica. Outra diferença é que a Lagrangeana é quadrática na curvatura, enquanto que na RG é linear na curvatura. As outras equações homogêneas são identidades e não provêm da Lagrangeana.

O sucesso da teoria veio com a observação que a mesma é quantizável e que os grupos SU(3) e SU(2) são os grupos de calibre das interações forte e fraca, respectivamente. O $U(1)$, como já vimos é o grupo de calibre do eletromagnetismo. Vale notar que, apesar do modelo padrão de partículas abarcar as três interações de calibre, ele só descreve de maneira unificada duas delas, a eletromagnética e a nuclear fraca, sendo esta unificação conhecida como unificação eletrofraca. Uma teoria que unifique

¹²Se um campo presente na Lagrangeana minimiza a ação, então é possível mostrar a equação de Euler-Lagrange é satisfeita [26]. No caso da Lagrangeana de Yang-Mills considerada, a equação de Euler-Lagrange do potencial de calibre que gera a equação de Yang-Mills é a seguinte: $\frac{\partial \mathcal{L}_{Y-M}}{\partial(A_\mu^\nu)} = \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{Y-M}}{\partial(\partial_\nu A_\mu^\nu)} \right]$

todas as interações de calibre está sendo buscada ainda, e é chamada de GUT (sigla em inglês para Grand Unified Theory). O caminho trilhado é achar um grupo que contenha como subgrupo o $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. Os candidatos mais estudados até agora são os grupos de cobertura de $SU(5)$ e de $SO(10)$, ou mesmo os grupos excepcionais E_6 , E_7 , e E_8 .

4.2.4 Formulação Geométrica da Teoria de Yang-Mills

Conforme já foi comentado anteriormente, muitas áreas da física admitem uma descrição geométrica. Para a teoria de Yang Mills isso não deixa de ser verdade.

É comum nessas teorias o uso de formas diferenciais¹³ e seus operadores associados, como o produto exterior¹⁴, produto de Hodge¹⁵, e a derivada exterior¹⁶

Com o uso de tais operadores, escrevemos as equações de Yang-Mills de uma maneira abstrata, que não depende do sistema de coordenadas. Para isso, definimos abstratamente o operador derivada exterior covariante como $D = d + A$, onde d é a derivada exterior e A uma forma de conexão $A = A_\mu dx^\mu$, cujos coeficientes pertençam à álgebra de Lie do grupo de simetria considerado. Definimos abstratamente o tensor de curvatura como

$$F = D \wedge A = (d + A) \wedge A = d \wedge A + A \wedge A$$

Escrevendo $F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ e com o uso das definições dadas, obtêm-se a já conhecida expressão dos coeficientes da curvatura

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} - [A_\mu, A_\nu]$$

¹³Uma p-forma diferencial é um tensor de p índices $F = F_{\mu\nu\dots\lambda} dx^\mu dx^\nu \dots dx^\lambda$ antissimétrico ao se trocar dois índices consecutivos quaisquer, portanto, num espaço de dimensão m, o espaço de n-formas tem dimensão $\frac{m!}{n!(m-n)!}$

¹⁴O produto exterior de uma p-forma ω com uma q-forma η é uma (p+q)-forma denotada por $\omega \wedge \eta$, que se aplicadas os vetores (e_1, \dots, e_{p+q}) é $\omega \wedge \eta(e_1, \dots, e_{p+q}) = \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (\iota_\sigma) \omega(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(p)}) \eta(e_{\sigma(p+1)}, \dots, e_{\sigma(p+q)})$. O conjunto S_n é o das permutações de n números naturais, e o número ι_σ indica qual é o sinal da permutação

¹⁵Pelo número de dimensão das n-formas, é possível descobrir que estas são isomorfas às (m-n) formas, e o produto de Hodge fornece este isomorfismo. Aplicar o produto de Hodge à uma n-forma ω definida num espaço m-dimensional é transformá-la numa (m-n)-forma ω^* cujos coeficientes são $w_{a_1, \dots, a_{m-n}}^* = \epsilon_{b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_{m-n}} \omega^{b_1, \dots, b_n}$, onde o número $\epsilon_{b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_{m-n}}$ é o tensor de Levi-Civita, que é nulo caso dois ou mais coeficientes sejam iguais e ± 1 conforme a paridade da permutação dos índices

¹⁶Leva uma (p)-forma numa (p+1)-forma. Atuando numa função f fornece $df = (\partial_\mu f) dx^\mu$ e atuando numa p-forma F, $dF = \sum_{a_1 < \dots < a_p} dF_{a_1, \dots, a_p} \wedge dx^{a_1} \dots dx^{a_p}$.

Segue também diretamente das definições feitas que a parte homogênea da equação de Yang-Mills é dada por

$$D \wedge F = 0$$

e a parte não homogênea é dada por

$$D \wedge F^* = 4\pi J^*$$

onde J é o tensor quadricorrente (uma 1-forma), $F^{*\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ e $J^{*\lambda\rho\sigma} = \epsilon^{\lambda\rho\sigma\tau} J_\tau$. Para uma derivação detalhada ver [30].

A figura 4.2 a seguir exemplifica o quadro de descrição geométrica dos campos de calibre. O espaço-tempo é representado pelo plano horizontal, enquanto que o espaço interno é desenhado verticalmente à cada ponto. A linha desenhada indica a trajetória de alguma partícula tanto no espaço-tempo como em algum espaço interno, como o $U(1)$. Os geômetras modernos chamam este espaço que descreve tanto o espaço-tempo como o espaço interno de fibrado. Nesta figura, o espaço-tempo é a base do fibrado, e todas as fibras (cada uma delas é o espaço interno associado à um ponto) são isomorfas à um único espaço que é chamado de fibra típica. Este fibrado pode ser visto localmente como o produto cartesiano do espaço-tempo pela fibra típica (que é o espaço interno). A localização de uma partícula no espaço-tempo é representada por um ponto no plano horizontal e sua orientação no espaço interno é especificada por um ponto na fibra.

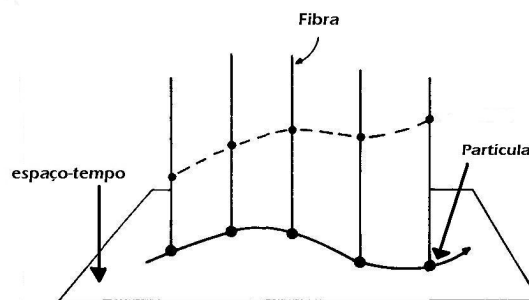


Figura 4.2: Fibrado Principal

Pela equação (4.2.4), a hipótese de que os campos de Yang-Mills são confinados à quadridimensionalidade é necessária. Se o espaço-tempo em que vivemos tem dimensão 4, então o tensor F é necessariamente uma 2-forma (isso é um dado experimental), e $D \wedge F^*$ será uma 3-forma. No lado direito, J é um vetor covariante (o mesmo que 1-forma) também por medidas experimentais, e portanto J^* só será uma 3-forma se a dimensionalidade do espaço for quatro, porque aí então uma 1-forma é isomorfa à uma 3-forma e o produto de Hodge fornece tal isomorfismo. Portanto, uma vez que as quadricorrentes e campos são medidas experimentalmente, as equações de Yang-Mills só fazem sentido em 4 dimensões, caso contrário não teríamos como igualar quantidades que pertençam a espaços não isomorfos. Um argumento Físico a favor da afirmação de que somente a gravitação pode se propagar nas dimensões extras é levar em conta o fato de que os campos de calibre são blindáveis (para o caso eletromagnético, basta considerar a gaiola de Faraday) enquanto que é impossível blindar uma fonte de campo gravitacional.

Note que o campo de Yang-Mills é originalmente definido no espaço-tempo da RE, ou seja, sua métrica é a de Minkowski. Como tal, ele não afeta a geometria do espaço-tempo, uma vez que tem sua métrica (Minkowski) previamente definida. Como o campo de Yang-Mills possui energia (e um tensor de energia-momento não trivial), pode-se considerar o efeito de tal campo na RG, e assim introduzir o tensor energia momento deste campo no lado direito da equação de Einstein, e obter assim uma métrica para o espaço-tempo que não seja necessariamente plana. O efeito da métrica não plana nas equações de Yang-Mills é a substituição da derivada parcial pela derivada covariante com respeito à nova métrica.

O efeito de um campo de Yang-Mills na estrutura do espaço-tempo é obtido ao considerar seu efeito na parte da fonte do campo gravitacional e substituir o tensor de energia-momento T_μ provindo da Lagrangeana de Yang-Mills \mathcal{L}_{Y-M} (substitui-se para isso a métrica de Minkowski por uma métrica geral). Fazendo uso de 4.3, obtemos o tensor energia-momento associado ao campo de Yang-Mills:

$$(T_{Y-M})_{\mu\nu} = Tr \left(F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right)$$

que é uma generalização do tensor energia-momento do campo eletromagnético. É interessante notar que tanto a ação de Einstein-Hilbert como a ação de Yang-

Mills referem-se à curvatura e portanto são primeiramente afirmações sobre a natureza da geometria. Mas enquanto Einstein-Hilbert é linear na curvatura, Yang-Mills é quadrática. A teoria de Kaluza-Klein parte do princípio de Einstein-Hilbert em um número maior de dimensões (maior que 4), resultando que a ação multidimensional contém a ação de Einstein-Hilbert usual de 4-dimensões e a ação de Yang-Mills.

Capítulo 5

Exemplos de Unificação

O que é essencial é invisível aos olhos

Antoine de Saint-Exupéry

Este capítulo será dedicado à dois exemplos de unificação em espaços de dimensão maior que 4 com base na ação de Einstein-Hilbert que são as teorias de Kaluza-Klein (descrito em [31]) e a teoria de branas-mundo (descrita em [32]).

5.1 Teoria de Kaluza-Klein

5.1.1 Início da Teoria de Kaluza-Klein

O propósito da teoria em sua forma original era unir a Gravitação e o Eletromagnetismo através da introdução de uma dimensão a mais do tipo espaço na teoria de Einstein (isto é, em 5 dimensões).

Antes mesmo do advento da Relatividade Geral, Nordström [33] em 1914 propôs uma teoria na qual a gravidade é descrita por um campo escalar acoplado ao traço do tensor energia-momento. Ele adiciona uma dimensão extra ao espaço-tempo 4-dimensional, obtendo uma variedade 5-dimensional. Introduziu um campo vetorial de calibre de 5 componentes, identificando a quinta componente com o campo escalar e as 4 restantes com o potencial eletromagnético. Se as variáveis dinâmicas não dependessem da quinta dimensão, as equações provenientes desta teoria se reduzem às eletromagnética e gravitacional. Esta teoria surgiu antes do desenvolvimento completo da RG, e só reproduzia os resultados da gravitação Newtoniana, sendo, portanto descartada logo após o surgimento da RG. Porém a idéia de que a quinta componente é um campo escalar, e não uma constante, foi incorporada após os trabalhos originais de Kaluza-Klein.

Em 1921, Theodor Kaluza [34] considera um espaço-tempo 5-dimensional, com uma métrica dada por:

$$dS^2 = \gamma_{AB}(x^\mu, y^5) dx^A dx^B$$

Onde

$$\gamma_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & g_{\mu 5} \\ g_{5\nu} & g_{55} \end{pmatrix}$$

Uma vez que as quantidades físicas usuais dependem apenas do espaço-tempo 4-dimensional usual, a métrica não deve depender da coordenada da quinta dimensão:

$$\gamma_{AB,5} = 0$$

que é conhecida como condição de cilindridade de Kaluza. A quantidade g_{55} foi posta igual à unidade por Kaluza, porém os calculos feitos por ele podem também ser feitos considerando esta quantidade como um campo escalar, $g_{55} = 2\phi$. Em seguida, Kaluza calcula os símbolos de Christoffel de primeira espécie da métrica γ_{AB} (aqui denotado por Υ), percebendo que existe uma semelhança entre $g_{5\beta,\alpha}$ e $A_{\nu,\mu}$ pela comparação das seguintes quantidades

$$\Upsilon_{5\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{5\beta,\alpha} - g_{5\alpha,\beta})$$

e o tensor de Maxwell

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$$

idéia esta sugerida anteriormente por Hans Thirring no paper [35] (citado também por Kaluza) intitulado “Uma Analogia Formal Entre As Equações Fundamentais do Eletromagnetismo e as Equações de Einstein da Gravidade em Primeira Aproximação”, bastando para isso fazer $g_{5\alpha}$ proporcional ao quadritensor do potencial eletromagnético A_α , com uma constante de proporcionalidade 2α resultando

$$\Upsilon_{\alpha\beta 5} = \Upsilon_{\alpha 5\beta} = \alpha(A_{\alpha,\beta} - A_{\beta,\alpha}) = \alpha F_{\alpha\beta}$$

Uma consequência desta definição para o tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}$ é a seguinte equação:

$$F_{\mu\nu,\gamma} + F_{\nu\gamma,\mu} + F_{\gamma\mu,\nu} = 0$$

que corresponde ao conjunto geométrico das equações de Maxwell na forma co-variante. Na sequência, Kaluza propõe uma solução aproximadamente linear para as equações de Einstein em $5D$

$$\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{onde } |h_{\mu\nu}| \leq 1$$

$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ é a métrica de Minkowski. Na última parte do seu paper, Kaluza escreve a equação da geodésica em sua versão 5-dimensional (denotando a velocidade quadridimensional por u^α). Colocando $2\alpha c_5 = \frac{q}{m}$, ele obtém

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Upsilon_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma + \frac{q}{m} F_{\beta\alpha} u^\beta + \phi_{,\alpha}(c_5)^2 = 0$$

Portanto, chega-se a conclusão que um mundo 5-dimensional em que apenas a gravitação está presente equivale ao mundo 4-dimensional em que estão presentes a gravitação e o eletromagnetismo. Isso fica evidente ao se notar o termo $\frac{q}{m} F^{ik} u^i$ na equação da geodésica acima, que equivale à força de Lorentz.

Na versão de Klein [36] [37] da proposta de Kaluza, foi considerado inicialmente que a métrica era 5-dimensional $ds^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Porém Klein modificou alguns aspectos que considerava incompletos na teoria precedente, mantendo entretanto a condição de cilindridade. Uma pergunta importante refere-se à aplicação do princípio de covariância generalizada ao espaço total. A resposta dada por Klein é negativa. Uma maneira simples de ver isso é considerar uma transformação de coordenadas arbitrária $x^{\mu'}(x^\mu, y)$ e $y'(x^\mu, y)$, cujas novas coordenadas $(x^{\mu'}, y')$ sejam funções inversíveis das antigas (x^μ, y) . Uma vez que a covariância generalizada é um princípio experimental e as experiências são todas feitas em quatro dimensões, é natural de se supor que este princípio seja válido somente em 4 dimensões. Isso significa que $x^{\mu'}$ depende somente de x^μ . Dito de outra maneira, $\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial y^5} = 0$

No novo sistema de coordenadas a condição de cilindridade deve também valer ($\gamma_{A'B',5'} = 0$). Em particular, considerando a componente $A' = \mu'$ e $B' = 5'$ da métrica γ_{AB} , que se transforma como $\gamma_{\mu'5'} = \frac{\partial x^A}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^B}{\partial y^{5'}} \gamma_{AB} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial y^5}{\partial y^{5'}} \gamma_{\nu 5} + \frac{\partial y^5}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial y^5}{\partial y^{5'}} \gamma_{55}$, temos que a derivada desta quantidade com respeito à $y^{5'}$ deve ser zero. Isso já é verdade para os componentes γ_{55} e $\gamma_{\mu 5}$, mas não necessariamente para seus coeficientes, especificamente os coeficientes $\frac{\partial y^5}{\partial y^{5'}}$ e $\frac{\partial y^5}{\partial x^{\mu'}}$. Para respeitar a condição de cilindridade deve-se impor que:

$$\frac{\partial^2 y^5}{\partial y^{5'} \partial y^{5'}} = 0 \quad \frac{\partial^2 y^5}{\partial y^{5'} \partial y^{\mu'}} = 0$$

A primeira equação tem solução $y^5 = a(x^{\mu'})y^{5'} + b(x^{\mu'})$ (onde $a(x^{\mu'})$ e $b(x^{\mu'})$ são funções arbitrárias), que se substituída na segunda obtém-se que $a(x^{\mu'})$ é constante (por conveniência coloca-se igual à unidade.). Portanto a transformação de coordenadas mais geral para esta teoria é:

$$y^5 \longrightarrow y^{5'} = y^5 + \Phi(x^\nu), \quad x^\mu \longrightarrow x^{\mu'} = \Psi^\mu(x^\nu) \quad (5.1)$$

Esclarecido as possíveis transformações de coordenadas, Klein percebeu que a escolha da métrica feita por Kaluza ($\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$, onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo quadridimensional) ainda é inconsistente com a covariância generalizada quadridimensional. Isso se deve ao fato de que o elemento de linha restrito ao espaço-tempo quadridimensional $ds^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ não é invariante sobre as transformações acima.

O ponto a se chegar agora é impor que o elemento de linha do espaço tempo 4-D usual se torne invariante. Neste momento, o caminho trilhado por Klein fica mais evidente ao se fazer uma analogia. Olhando apenas para a gravitação quadridimensional, uma pergunta é sugerida: como construir um elemento de linha dl apenas espacial (sem incluir a parte temporal) que seja invariante? A resposta já é bem conhecida. Para acompanhar o raciocínio a convenção de índices é temporariamente substituída (os índices gregos variam na parte espacial, $\mu = 1$ à 3, os índices latinos minúsculos representam a parte temporal, $i = 4$ e os índices latinos maiúsculos variam em todos os componentes $A = 1..4$), até que se diga o momento de retorno à convenção usual seguida nesta dissertação). Para determinar o elemento dl , a distância espacial entre dois pontos, supõe-se que um sinal de luz é direcionado de um ponto Q (que possua coordenadas $x^\mu + dx^\mu$) do espaço para um ponto P infinitamente próximo à ele x^μ e depois disso volte pelo mesmo caminho. Obviamente o tempo próprio gasto neste processo (para o observador em Q) quando multiplicado por c fornece duas vezes a distância entre estes pontos. O intervalo será do tipo luz, e portanto [70]

$$0 = ds^2 = g_{AB}dx^A dx^B = g_{ii}dx^i dx^i + 2g_{i\mu}dx^i dx^\mu + g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

Resolvendo esta equação de segundo grau para dx^i (que aqui corresponde à dx^4), tem-se duas raízes (+ e -):

$$dx_{(+)}^4 = \frac{4}{-g_{44}}[g_{4\nu}dx^\nu + \sqrt{(g_{4\mu}g_{4\nu} - g_{\mu\nu}g_{44})dx^\mu dx^\nu}]$$

$$dx_{(-)}^4 = \frac{4}{-g_{44}}[g_{4\nu}dx^\nu - \sqrt{(g_{4\mu}g_{4\nu} - g_{\mu\nu}g_{44})dx^\mu dx^\nu}]$$

Como x^4 é o momento em que o sinal chegou à P, o momento em que ele deixou Q e chegou à ele foi $x^4 + dx_{(+)}^4$ e $x^4 + dx_{(-)}^4$, respectivamente. Assim, a duração desta viagem foi

$$dx_{(+)}^4 - dx_{(-)}^4 = \frac{2}{-g_{44}}\sqrt{(g_{4\mu}g_{4\nu} - g_{\mu\nu}g_{44})dx^\mu dx^\nu}$$

O intervalo de tempo próprio deste processo (para um observador em Q) é obtido notando que neste ponto não houve mudança de posição espacial e que a diferença

de tempo medida foi $dx_{(+)}^4 - dx_{(-)}^4$. Assim,

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = -g_{44}(dx_{(+)}^4 - dx_{(-)}^4)^2$$

Implica que

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{44}} (dx_{(+)}^4 - dx_{(-)}^4)^2$$

Substituindo $(dx_{(+)}^4 - dx_{(-)}^4)^2$ obtem-se o tempo próprio. A distância invariante dl entre estes dois pontos é calculada multiplicando o tempo próprio de ida e volta por $\frac{c}{2}$, resultando:

$$dl^2 = [g_{\mu\nu} - \frac{g_{4\mu}g_{4\nu}}{g_{44}}] dx^\mu dx^\nu \quad (5.2)$$

Este é o elemento de linha espacial entre dois pontos infinitesimais. Ele é invariante sobre a transformação de coordenadas quaisquer pois foi construído pela multiplicação do tempo próprio por $\frac{c}{2}$, sendo estas duas quantidades invariantes. Outro aspecto interessante é que se a métrica espacial depender do tempo, não faz sentido falar de distância entre dois objetos separados por uma distância não infinitesimal, pois a integral de dl dependerá da escolha da linha mundo. Caso contrário tem-se que a métrica espacial não depende do tempo, ou seja, $\partial_4 g_{\mu\nu} = 0$, condição análoga à de cilíndricidade. Somente com esta condição faz sentido falar sobre distância puramente espacial entre dois pontos em RG.

Assim, numa análise espacial da RG, em que a métrica espacial não dependa da coordenada temporal, basta trabalhar com o seguinte elemento de linha espacial:

$$dl^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \text{ onde } \gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{g_{4\mu}g_{4\nu}}{g_{44}}$$

e $\gamma_{\mu\nu}$ caracteriza a métrica invariante 3-D espacial.

Agora volta-se a convenção de índices adotada nesta dissertação. Klein, ao construir sua teoria, tinha em mente justamente a seguinte analogia (em que a dimensão extra faz o papel do tempo na análise anterior): que a métrica do espaço-tempo usual seja independente da quinta dimensão e que o intervalo do espaço-tempo 4-D usual seja um invariante sob transformação de coordenadas (5.1). Pela analogia exposta, a melhor forma de realizar isto é relacionar a métrica espaço-temporal 4-D $g_{\mu\nu}$ com a do espaço total 5-D $\gamma_{\mu\nu}$ da seguinte forma

$$g_{\mu\nu} = \left[\gamma_{\mu\nu} - \frac{\gamma_{\mu 5} \gamma_{\nu 5}}{\gamma_{55}} \right]$$

Certamente $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ assim definido é invariante sobre as transformações definidas por Klein, porém pode-se também verificar esta afirmação aplicando a transformação de coordenadas proposta por Klein diretamente no elemento de linha acima. O fato de valer a condição de cilindridade indica que faz sentido também falar sobre intervalos do espaço-tempo 4-D usual, salvando assim o princípio da covariância generalizada para os observadores restritos à esta variedade. A componente quadriminimal da métrica 5-D é obtida isolando $\gamma_{\mu\nu}$ na equação acima.

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{\gamma_{\mu 5} \gamma_{\nu 5}}{\gamma_{55}}$$

A escolha feita por Klein neste ponto é semelhante à feita por Kaluza: $\gamma_{\mu 5} = \beta A_\mu(x^\mu)$ e $\gamma_{55} = \alpha$ (esta última, constante) (para simplificar as contas, será feito $\alpha = 1$). Isto justifica a métrica escolhida por Klein.

A métrica escolhida por Klein ficou, portanto

$$\gamma_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \beta^2 A_\mu A_\nu & \beta A_\mu \\ \beta A_\nu & 1 \end{pmatrix}$$

Os cálculos envolvidos para mostrar que tal métrica é consequência da imposição de invariância do elemento de linha quadridimensional pela transformação geral (5.1) não foi explicitado por Klein no seu trabalho.

Para descrever o movimento de uma partícula neste campo, considera-se sua lagrangeana, $L = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2$, onde ds é o elemento de linha

$$ds^2 = (g_{\mu\nu} + \beta^2 A_\mu A_\nu) dx^\mu dx^\nu + 2\beta A_\mu dx^\mu dx^5 + (dx^5)^2$$

O momento é calculado de forma usual:

$$p_A = \frac{\partial L}{\partial (dx^A/d\tau)} = m \gamma_{AB} (dx^B/d\tau)$$

A quinta componente fica (denotando $dx^A/d\tau$ por \dot{z}^A)

$$p_5 = m\beta A_\mu \dot{z}^\mu + m\dot{z}^5$$

e a μ -ésima componente de momento (quadridimensional)

$$p_\mu = mg_{\mu\nu}\dot{z}^\nu + m\beta^2 A_\mu A_\nu \dot{z}^\nu + m\beta A_\mu \dot{z}^5 = m\dot{z}_\mu + \beta A_\mu p_5$$

Esta última expressão é aquela de uma partícula carregada se movimentando num campo eletromagnético, desde que se tenha $p_5 = q/\beta$. A quantidade q é interpretada como a carga da partícula. Ao atribuir propriedade quânticas à teoria, Klein usa a relação de de Broglie, que relaciona o comprimento de onda λ_5 (da quinta dimensão, no caso presente) da partícula com o momento (aqui será p_5) $p_5 = 2\pi\hbar/\lambda_5$. Para que este comprimento seja finito, é natural de se supor que este seja uma círculo (figura 5.1, onde V_4 representa o espaço-tempo quadridimensional usual e S o círculo que representa o espaço compacto da dimensão extra). Einstein foi o apresentador do trabalho de Kaluza, chegando a contribuir para a teoria. A figura abaixo é conhecida como cilindro de Einstein.

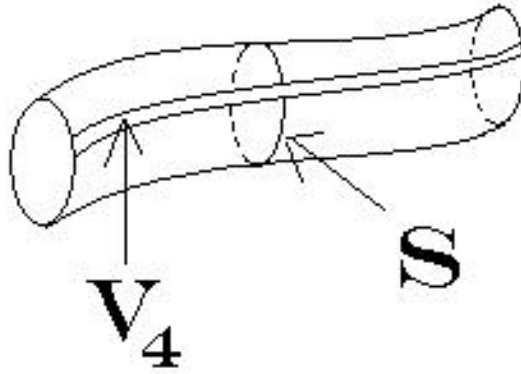


Figura 5.1: Cilindro de Einstein

O círculo tem um perímetro dado por $2\pi r_5 = N\lambda_5$ (onde N é um inteiro) uma vez que apenas um número inteiro de comprimentos de onda pode ocupá-lo, assim a quantização da carga elétrica é explicada, pois:

$$q = N\beta\hbar/r_5$$

Logo em seguida, Klein nota que uma transformação de coordenadas da quinta dimensão respeitando $(x^\mu, y^5) \rightarrow (x^\mu, y^5 + \Phi(x^\mu))$ resulta:

$$\gamma_{\mu'5'} = \frac{\partial x^A}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^B}{\partial y^{5'}} \gamma_{AB} = \frac{\partial y^5}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial y^5}{\partial y^{5'}} \gamma_{55} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial y^5}{\partial y^{5'}} \gamma_{\mu 5}$$

Substituindo os valores correspondentes em γ_{B5} :

$$A_{\mu'} = A_\mu - \beta^{-1} \partial_\mu f$$

Que é o tipo de transformação do potencial de calibre do campo eletromagnético. Isto indica que na teoria de Klein a invariância de calibre está diretamente relacionada com a transformação de coordenadas na quinta dimensão, atribuindo uma justificação geométrica à esta propriedade de invariância.

Outra diferença em relação ao artigo de Kaluza é o fato de Klein ter calculado a ação S de Einstein-Hilbert da teoria, estendida à 5 dimensões:

$$S = \frac{c^3}{16\pi\tilde{G}} \int d^5x \sqrt{-\gamma} \mathcal{R}$$

onde γ é o determinante da métrica 5-D, que coincide com o da métrica 4-D do espaço-tempo, \mathcal{R} é o escalar de curvatura do espaço total e \tilde{G} é um parâmetro livre, equivalente à constante Newtoniana, só que agora definida para o espaço total. Como \mathcal{R} e γ só dependem das coordenadas 4-dimensionais (uma vez que a condição de cilindridade é mantida), pode-se separar o integrando (o que é garantido pela suposição de que a topologia da variedade é um produto da variedade quadridimensional com a dimensão extra):

$$S = \frac{c^3}{16\pi\tilde{G}} \int dx^5 \int d^4x \sqrt{-\gamma} \mathcal{R}$$

Considerando que a dimensão extra seja periódica e possua um raio constante r_5 , tem-se que $\int dx^5 = 2\pi r_5$. A ação pode ser decomposta na soma da ação do eletromagnetismo e da gravitação [38],

$$\mathcal{R} = R - \frac{1}{4} \beta^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

, como demonstrado no artigo citado e na secção seguinte para o caso não-abeliano, no qual este é um caso particular. Assim,

$$S = S_{gr} + S_{el} = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R - \frac{1}{4\mu_0 c} \int d^4x \sqrt{-g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

desde que os parâmetros livres \tilde{G} e β sejam escolhidos como $\tilde{G} = 2\pi r_5 G$ e $\beta = (16\pi G/\mu_0 c^4)^{1/2}$.

Percebe-se, portanto, que as duas teorias, isto é, a versão de Kaluza e versão de Klein, apesar de parecerem diferem na parte geométrica de suas formulações. De fato, Kaluza adicionou a quinta dimensão sem fazer nenhuma mudança na métrica quadridimensional (não admitindo que o elemento de linha das quatro dimensões seja invariante por transformação de coordenadas). Por outro lado, na modificação de Klein a métrica é diferente, porque há aquela suposição (invariância do elemento de linha).

A. Einstein e P. Bergmann [39] mostraram que a teoria de Kaluza-Klein (nome dado à teoria posteriormente) são consistentes, porém com a condição de cilindridade a introdução de uma dimensão a mais torna-se inócua, pois a teoria não acrescenta nenhum fato observável novo quando comparada à teoria de Einstein-Maxwell usual em 4 dimensões. Veremos que isso não prevalece na generalização não-abeliana da teoria de Kaluza-Klein, na qual fenômenos passíveis de observação e comprovação experimental se mostram incompatíveis.

5.1.2 Teoria de Kaluza-Klein Não Abeliana

A generalização da Teoria de Kaluza-Klein para incluir os outros campos de Yang-Mills além do eletromagnético (chamada de generalização não abeliana) surgiu numa lista de exercícios escrita por B.S. DeWitt em 1965 no curso denominado Teoria Dinâmica de Grupos e Campos, lecionado em Les Houches [40]. No problema 77 ele propôs aos alunos que a teoria dinâmica de combinação dos campos de Yang-Mills e gravitacional poderia ser obtida através de uma interpretação puramente geométrica, possivelmente em um espaço de $D=n+4$ dimensões pseudo-Riemanniano V_D . Uma solução do problema proposto por DeWitt foi fornecida por Kerner [41], que calculou o escalar de curvatura associada à métrica do espaço total, mostrando que a ação de Einstein-

Hilbert para o espaço total se decompõe na ação gravitacional adicionada à ação do campo de Yang-Mills. Cho fornece um sistema de coordenadas no qual os cálculos se simplificam enormemente [42]. Vamos aqui resumir e simplificar estes resultados.

O ponto de partida adotado por estes dois autores é feito considerando que o grupo de calibre G atua no espaço total V_D , no qual cada ponto do espaço-tempo usual é visto como uma classe de equivalência, dada pela órbita da ação do grupo (ou seja $V_4 = V_D/G$, ou localmente $V_D = V_4 \times G$). A órbita é isomorfa ao grupo e é chamada de fibra típica do fibrado. Em linguagem de geometria diferencial moderna isso significa que o espaço total é um fibrado principal com o espaço-tempo como base e o grupo de calibre como o grupo de estrutura¹. A seguir, escolhe-se uma base de vetores tangentes ao espaço total (\vec{e}_A), onde os primeiros quatro vetores (\vec{e}_μ) são tangentes ao espaço-tempo e os seguintes (\vec{e}_i) são os geradores da álgebra de Lie na representação induzida pela ação do grupo no espaço total. Estes geradores devem satisfazer uma relação de comutação $[\vec{e}_i, \vec{e}_j] = c_{ij}^k \vec{e}_k$, onde c_{ij}^k são as constantes de estrutura da álgebra. Uma escolha para a métrica deste espaço é a forma de Cartan-Killing $g_{ij} = c_{in}^m c_{jm}^n$, e se esta for inversível, isto equivale a escolha de um grupo G chamado de semi-simples.

Localmente o espaço total pode ser visto como um produto cartesiano do espaço-tempo (chamado de espaço horizontal) pelo grupo de calibre (chamado de espaço vertical), assim um sistema de coordenadas para ambos ((x^μ) e (y^i) , respectivamente) induz um sistema de coordenadas no espaço total (denotada por (x^μ, y^i) , ou seja, o produto cartesiano das duas variedades precedentes). Um requerimento adicional é que a métrica γ_{AB} do espaço total faça os subespaços vertical e horizontal ortogonais entre si, afim de compatibilizar as respectivas métricas. Assim, temos:

$$\gamma_{AB} \vec{e}_\mu^A \vec{e}_\nu^A = g_{\mu\nu} \quad (5.3)$$

$$\gamma_{AB} \vec{e}_\mu^A \vec{e}_i^A = 0 \quad (5.4)$$

$$\gamma_{AB} \vec{e}_i^A \vec{e}_j^A = g_{ij} \quad (5.5)$$

onde denotamos por \vec{e}^A e \vec{e}_i^A as componentes das bases de coordenadas das re-

¹G ser o grupo de estrutura significa dizer que ele atua transitivamente na fibra (pode conectar quaisquer dois pontos) e não deixa nenhum ponto fixo. Assim a fibra típica é isomorfa ao grupo. Este fibrado principal pode ser escrito localmente como o produto cartesiano do espaço-tempo pelo grupo

spectivas variedades. Assim como em geometria Riemanniana, em que uma conexão fornece uma regra de associação entre espaços tangentes infinitesimalmente próximos, no fibrado principal, a conexão fornece uma maneira de relacionar dois pontos de fibras infinitesimalmente próximas. Isto seria especificado por um vetor tangente ao fibrado que aponte na direção horizontal. A escolha de uma conexão para o fibrado principal equivale portanto à escolha de um vetor não vertical (não é gerado pelos \vec{e}_i). Este vetor não vertical é o vetor \vec{e}_μ , que em geral não é ∂_μ , mas pode ter componentes nas direções de \vec{e}_i . Se os coeficientes de \vec{e}_μ nas direções \vec{e}_i forem denotados pelas funções A_μ^i teremos (o sinal negativo é convencional):

$$\vec{e}_\mu = \partial_\mu - A_\mu^i \vec{e}_i \quad (5.6)$$

Calculando o comutador $[\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu]$ resulta $[\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu] = F_{\mu\nu}^k \vec{e}_k$, onde

$$F_{\mu\nu}^k = A_{\mu,\nu}^k - A_{\nu,\mu}^k + c_{ij}^k A_\mu^i A_\nu^j$$

Como se percebe por (5.6), A_μ^i faz o papel de conexão e pode claramente ser interpretada como potencial de Yang-Mills, cuja curvatura $F_{\mu\nu}^k$ faz o papel de campo de Yang-Mills.

Obtem-se a métrica para o espaço total escrevendo-a numa base, como por exemplo, a base do produto direto local $(\partial_\mu, \vec{e}_i)$. Para $\gamma_{\mu\nu}$, basta considerar $\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{AB}(\partial_\mu)^A(\partial_\nu)^B$, que é obtido ao se substituir 5.6 em 5.3, o resultado é $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + g_{ij}A_\mu^i A_\nu^j$. De forma análoga, substituindo 5.6 em 5.4 obtem-se $\gamma_{\mu i} = A_\mu^j g_{ij}$.

Portanto, a métrica pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\gamma_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + g_{ij}A_\mu^i A_\nu^j & g_{ij}A_\mu^j \\ g_{ij}A_\nu^i & g_{ij} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

que é uma métrica muito parecida com a de Kaluza-Klein original de 5 dimensões, porém agora generalizada pela presença da matriz A_μ^i , que fará o papel de campo de Yang-Mills.

Vamos agora calcular o escalar de curvatura do espaço total da teoria de Kaluza-Klein. O tensor de Riemann e o símbolo de Christoffel para o espaço V_D serão denotados por \mathcal{R}_{BCD}^A e Υ_{BC}^A , respectivamente, enquanto que para o espaço-tempo V_4 serão

denotados da forma usual: $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ e $R_{\mu\nu\sigma}^\lambda$.

A primeira coisa a se notar é que a métrica (5.10) não é uma métrica provinda de um sistema de coordenadas. Isso se dá porque os vetores tangentes provindos de um sistema de coordenadas comutam (uma vez que são derivadas parciais na direção de crescimento da função coordenada considerada), e no caso aqui considerado os vetores da base correspondentes à dimensão extra e_i , não comutam (têm c_{ij}^k como coeficientes de comutação (as constantes de estrutura), que geralmente são não-nulos).

Neste caso, a expressão para o símbolo de Christoffel e para o tensor de Riemann é um pouco mais complicada :

$$\Upsilon_{BC}^A = \frac{1}{2}\gamma^{AD}(\gamma_{CD,B} + \gamma_{BD,C} - \gamma_{BC,D} - c_{BD}^E\gamma_{CE} - c_{CD}^E\gamma_{BE}) + \frac{1}{2}c_{BC}^A$$

$$\mathcal{R}_{ABC}^D = c_{AB}^E\Upsilon_{EC}^D - \Upsilon_{BC,A}^D + \Upsilon_{AC,B}^D - \Upsilon_{AE}^D\Upsilon_{BC}^E + \Upsilon_{BC}^D\Upsilon_{AC}^E$$

onde o coeficiente c_{AB}^C só é diferente de zero nas componentes extra-dimensionais.

A métrica inversa é dada pela condição $\gamma^{AB}\gamma_{BC} = \delta_C^A$:

$$\gamma^{AB} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -g^{\mu\nu}A_\nu^i \\ -g^{\mu\nu}A_\mu^j & g_{ij} + g^{\mu\nu}A_\mu^iA_\nu^j \end{pmatrix}$$

Depois de calculados, os símbolos de Christoffel são expressos

$$\Upsilon_{jk}^i = \frac{1}{2}c_{jk}^i$$

$$\Upsilon_{jk}^\mu = 0$$

$$\Upsilon_{k\mu}^i = \frac{1}{2}(c_{jk}^iA_\mu^j + g_{kl}g^{\alpha\beta}A_\alpha^iF_{\beta\mu}^l)$$

$$\Upsilon_{\mu k}^\alpha = \frac{1}{2}g_{kl}g^{\alpha\beta}F_{\mu\beta}^l$$

$$\Upsilon_{\mu\nu}^i = \frac{1}{2}(A_{\nu,\mu}^i + A_{\mu,\nu}^i) + \frac{1}{2}g_{ik}g^{\alpha\beta}A_\alpha^i(A_\nu^kF_{\beta\mu}^j + A_\mu^kF_{\beta\nu}^j) - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha^i$$

$$\Upsilon_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \frac{1}{2}g_{ik}g^{\alpha\beta}(A_\mu^iF_{\nu\beta}^k + A_\nu^iF_{\mu\beta}^k)$$

e o tensor de Ricci

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{ik} &= \frac{1}{4}g_{ik} + \frac{1}{4}g_{ij}g_{kl}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}^jF_{\alpha\beta}^l \\
\mathcal{R}_{\mu k} &= \frac{1}{4}g_{kl}A_{\mu}^l + \frac{1}{4}g_{ij}g_{kl}g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}A_{\mu}^iF_{\alpha\beta}^jF_{\gamma\delta}^l + \frac{1}{2}g_{kl}g^{\alpha\beta}D_{\alpha}F_{\mu\beta}^l \\
\mathcal{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + \frac{1}{4}g_{ik}A_{\mu}^iA_{\nu}^k + \frac{1}{4}g_{ij}g_{kl}g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}A_{\mu}^iA_{\nu}^kF_{\alpha\beta}^jF_{\gamma\delta}^l \\
&\quad - \frac{1}{2}g_{ik}g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}^iF_{\nu\beta}^k + \frac{1}{2}g_{ik}g^{\alpha\beta}(A_{\mu}^iD_{\alpha}F_{\nu\beta}^k + A_{\nu}^iD_{\alpha}F_{\mu\beta}^k)
\end{aligned}$$

onde D_{μ} é a derivada covariante e de calibre $D_{\mu} = \nabla_{\mu} - A_{\mu}^i \nabla_{\vec{e}_i}$. Segue que

$$D_{\alpha}F_{\mu\nu}^k = \partial_{\alpha}F_{\mu\nu}^k - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta}F_{\beta\nu}^k - \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}F_{\mu\beta}^k + c_{ij}^k A_{\alpha}^i F_{\mu\nu}^j$$

O escalar de curvatura resulta em

$$\mathcal{R} = R + \frac{1}{4}g^{ij}g_{ij} - \frac{1}{4}g_{ik}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}^iF_{\alpha\beta}^k \quad (5.8)$$

O primeiro termo é o escalar de curvatura do espaço-tempo quadridimensional, o segundo o escalar de curvatura do grupo de calibre G e o terceiro é a densidade Lagrangeana associado ao campo de Yang-Mills.

Como foi comentado, os cálculos precedentes se mostram muito trabalhosos com esta escolha de base $(\partial_{\mu}, \vec{e}_i)$. Existe uma outra escolha de base em que eles se simplificam muito. Esta base é $(\vec{e}_{\mu}, \vec{e}_{\nu})$ (\vec{e}_{μ} é definido em (5.6)), e a métrica e sua inversa fica

$$\gamma_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix}, \quad \gamma^{AB} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & g^{ij} \end{pmatrix}$$

Nessa base os vetores tangentes associados ao espaço-tempo \vec{e}_{μ} são ortogonais aos vetores associados à dimensão extra \vec{e}_i .

As componentes dos símbolos de Christoffel da métrica γ_{AB} nesta base ortogonal fica

$$\Upsilon_{ij}^k = \frac{1}{2}c_{ij}^k$$

$$\Upsilon_{ij}^{\mu} = 0$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_{\mu k}^i &= 0 \\ \Upsilon_{\mu k}^\alpha &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{kl}F_{\mu\beta}^l \\ \Upsilon_{\mu\nu}^i &= -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^i \\ \Upsilon_{\mu\nu}^\alpha &= \Gamma_{\mu\nu}^\alpha\end{aligned}$$

Calculando o tensor de Ricci obtem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{ik} &= \frac{1}{4}g_{ik} + \frac{1}{4}g_{ij}g_{kl}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}F_{\alpha\gamma}^jF_{\beta\delta}^l \\ \mathcal{R}_{\mu k} &= \frac{1}{2}g_{kl}g^{\alpha\beta}D_\alpha F_{\mu\beta}^l \\ \mathcal{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{ik}g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}^iF_{\nu\beta}^k\end{aligned}$$

E o escalar de curvatura resulta exatamente como em (5.8):

$$\mathcal{R} = R + \frac{1}{4}g^{ij}g_{ij} - \frac{1}{4}g_{ik}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}^iF_{\alpha\beta}^k$$

o que é esperado, já que uma quantidade escalar não depende da escolha de uma base.

Portanto, a Lagrangeana $L = \sqrt{-\gamma}\mathcal{R}$, fica²:

$$L = \sqrt{-\gamma}\mathcal{R} = \sqrt{-g}R + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g_{ij}F_{\mu\alpha}^iF_{\nu\beta}^j + \sqrt{-g}\frac{1}{4}g^{ij}g_{ij} \quad (5.9)$$

Que é a soma da lagrangeana da gravitação usual de 4 dimensões mais a Lagrangeana do campo de Yang-Mills, e o terceiro termo corresponde à uma constante cosmológica (pois são formados pelas constantes de estrutura do grupo).

Nota-se que na derivação deste resultado não se usou a compacticidade das dimensões extras como hipótese. No contexto da generalização não abeliana, esta idéia foi implementada por Cremmer e Scherk [43], no qual o espaço total é visto como um produto do espaço-tempo por um esfera bidimensional com raio da ordem do raio de Planck. A esfera é considerada como um espaço homogêneo, no qual um grupo G atua. Explica-se esta escolha tendo em conta a não observabilidade direta das

²O determinante da métrica γ_{AB} é o mesmo determinante da métrica $g_{\mu\nu}$ pois a matriz deste é obtida da matriz daquele (5.10) por repetidas operações de multiplicação de uma linha por constante e posterior soma em outra linha, e estas operações não mudam o determinante.

dimensões extras. Uma outra exigência feita por eles é que a relatividade especial (espaço-tempo quadridimensional cuja métrica é a de Minkowski) deve ser recuperada no limite plano (na ausência de matéria) e estável (perturbativamente) da RG. Isto gera a imagem em que no nível fundamental da teoria, o espaço total é um produto topológico do espaço de Minkowski por um espaço compacto (conforme ilustrado na figura 5.2)

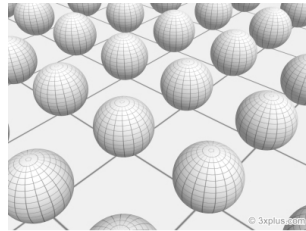


Figura 5.2: Espaço total como o produto topológico

Uma vez que a Lagrangeana do espaço total é a de Einstein-Hilbert, pode-se fazer a variação desta com respeito à métrica do espaço total. No vácuo (na ausência de matéria, ou quando o tensor energia-momento é trivialmente nulo), a equação resultante reproduz as equações de Einstein em $N+4$ dimensões:

$$\mathcal{R}_{AB} - \frac{1}{2}\mathcal{R}\gamma_{AB} = 0 \Rightarrow \mathcal{R}_{AB} = 0$$

Assim, $\mathcal{R}_{ij} = 0$, mas isso não pode acontecer se o espaço interno for curvo, como é o caso dos espaços homogêneos compactos, como a esfera bidimensional considerada (isto é provado por [44]). Este problema ocorre mesmo colocando uma constante cosmológica no espaço maior.

Uma solução para este problema foi buscada por Cremmer e Scherk, e consiste em fazer as componentes da métrica γ_{AB} dependerem de todas as coordenadas, inclusive das dimensões extras (em particular a métrica das dimensões extras g_{ij} , que até então era visto como constante, passa a depender das coordenadas). Com isso a métrica derivada por Cho e Kerner passa a ser generalizada e tomada como um ansatz, pois as quantidades $g_{\mu\nu}$, A_j^i e g_{ij} dependem a partir de então de (x^μ, x^i) . Luciani [45] estendeu o trabalho de Cremmer e Scherk para o caso em que o espaço das dimensões extras é compacto (não necessariamente esférico) e homogêneo. O ansatz da métrica então torna-se:

$$\gamma_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + g_{ij}A_{\mu}^iA_{\nu}^j & g_{ij}A_{\mu}^j \\ g_{ij}A_{\nu}^i & g_{ij} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

e as quantidades $g_{\mu\nu}$, g_{ij} e A_{μ}^i dependem das coordenadas $\{x^{\mu}, y^i\}$, ou seja, passam a depender das coordenadas das dimensões extras (algo contrário à cilindridade de Kaluza).

Com esta alteração, torna-se necessário calcular a decomposição da ação de Einstein-Hilbert do espaço total V_D na parte gravitacional (4-D) adicionada ao termo de Yang-Mills. Para isso, usa-se o fato de que qualquer função num espaço homogêneo compacto B (geralmente descrito como o espaço quociente³ $B = G/H$ de um grupo G por um de seus subgrupos normais H) pode ser escrita em expansões harmônicas. O espaço total passa a ser visto como $V_D = V_4 \times B$.

A série de Fourier é um exemplo de tal expansão para uma função definida no círculo e os harmônicos esféricos formam uma base para a expansão das funções definidas na esfera. Para exemplificar, vamos considerar o caso em que existe somente uma dimensão extra, do tipo circular, como já foi descrito por Klein, porém ele não considerou a dependência da métrica do espaço maior nas coordenadas da dimensão extra (em particular, Klein considerou g_{55} constante). Jordan apontou para as contradições que esta escolha levou [46], entre elas a anulação da Lagrangeana de Yang-Mills $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0$. Mas no caso em que g_{55} seja função das coordenadas, faz-se a expansão de Fourier na coordenada periódica y^i . No geral, para qualquer função Ω definida no espaço 5-dimensional:

$$\Omega(x^{\mu}, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Omega^n(x^{\mu})e^{iny/l}$$

onde l é o perímetro do círculo.

Pode-se usar esta expressão para cada uma das funções $g_{\mu\nu}$, g_{ij} e A_{μ}^i . Considere em seguida a equação de Klein-Gordon⁴ para o espaço maior sem massa associada

³A esfera é um exemplo de tal espaço. Por exemplo, a esfera bidimensional é o quociente do grupo $SO(3)$ pelo subgrupo normal $SO(2)$

⁴A equação de Klein-Gordon é obtida como uma generalização da equação de Schrodinger, uma vez que esta é obtida da equação de conservação de energia não relativística a equação de Klein-Gordon é obtida da equação de conservação de energia relativística $E^2 = \vec{p}^2 + m^2c^4$. Quando esta última equação é quantizada, pela mesma perscrição do rodapé 10 da página 52,obtem-se $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - \nabla^2 \psi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \psi = 0$. De forma covariante, $(-\eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2})\psi = 0$, onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski. A equação pode ser considerada no contexto de espaços curvos, basando por isso substituir a métrica plana de Minkowski

ao espaço total :

$$(g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + \partial_5^2)\Omega(x^\mu, y) = 0$$

Então obtemos para cada termo de ordem n as equações:

$$(g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + \frac{n^2}{l^2})\Omega^n = 0$$

Observamos que cada componente Ω^n adquire uma massa $m_n = \frac{n}{l}$ no espaço-tempo quadridimensional (apesar de não possuir massa quando visto no espaço maior). Uma vez que o diâmetro l do espaço compacto é muito pequeno, esta massa será muito grande. Entretanto, no modo principal da expansão (modo zero) $n = 0$ a massa é nula. Como no modo zero as funções não dependem das dimensões extras, a decomposição da ação é recuperada em primeira aproximação, pois somente com a hipótese de que as quantidades não dependem das dimensões extras é que se chega à tal conclusão. Para incluir as outras ordens da expansão basta considerar perturbações de ordem superior no cálculo da Lagrangeana.

Salam [47] considera o caso geral em que as dimensões extras são formadas por espaços homogêneos ($B = G/H$) compactos para o cálculo da contribuição de ordens mais elevadas da expansão e mostra que estas correspondem à campos com uma massa proporcional ao inverso do diâmetro do espaço compacto, portanto muito grandes e que não desaparecem, dado que o raio do espaço compacto é muito pequeno. O conjunto das massas geradas pelas expansões, e das partículas associadas, ficou conhecido como torre de Kaluza-Klein.

Uma observação que se faz é que, somente os campos de interação fundamental são descritos de forma unificada na teoria de Kaluza-Klein (que recebe a qualidade de teoria de unificação das interações fundamentais). Os termos na Lagrangeana envolvendo a distribuição de matéria (em particular as suas massas) não são fornecidos por esta teoria, e portanto devem ser inseridos como hipóteses adicionais (como por exemplo o campo de Higgs, que dá massa às partículas).

Muitas tentativas foram propostas para explicar porquê algumas dimensões se

por uma métrica g qualquer. No texto fez-se a simplificação $c = 1$ e $\hbar = 1$ por simplicidade. Percebe-se que o operador de Laplace $\square^2 = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ quando aplicado num campo que satisfaça a equação de Klein-Gordom têm como auto-valor uma quantidade proporcional ao quadrado da massa

compactificaram e outras permaneceram não-compactas. Uma resposta foi sugerida pela solução de Kasner das equações de Einstein em 5-dimensões no vácuo (ver, por exemplo em [48]) :

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{t}{t_0}(dx^2 + dy^2 + dz^2) + \frac{t_0}{t}d\omega^2$$

que descreve um universo na qual três dimensões expandem enquanto um encolhe no tempo, propondo assim uma expansão cosmológica e uma contração do espaço interno. Mas é necessário explicar o mecanismo físico pela qual a dimensão extra encolhe e eventualmente pára de encolher. Uma explicação possível para o encolhimento das dimensões extras é atribuída ao efeito Casimir⁵, entendido como um efeito quântico do vácuo gravitacional, o qual teria ocorrido no regime de Planck (este regime será discutido na secção seguinte). A compactificação da dimensão extra seria portanto um efeito topológico (clássico) resultante daquele regime quântico

Finalmente, Witten mostra que, usando argumentos topológicos e admitindo ser o espaço das dimensões extras compacto, o operador de Dirac⁶ em qualquer número de dimensões não pode admitir um espectro quirai [49]. Assim como a equação de Klein-Gordon considerada anteriormente, pode-se considerar a equação de Dirac extendida às dimensões extras⁷. A equação de Dirac descreve corretamente as propriedades de spin das partículas. Os férmions são partículas que têm spin semi-inteiro. A quiralidade pode ser pensada como o sentido do spin (ou helicidade) na direção do movimento em relação à um observador. Se o férmion previsto pela teoria de Kaluza-Klein não apresenta quiralidade em decorrência da compactificação, isto significa que ele não apresenta spin, e isso está em contradição com a experiência, conclui Witten.

Este resultado representou um golpe fatal para a teoria, apesar das boas perspectivas criadas por ela para a unidade da Física. Desde então o interesse na teoria foi diminuindo (chega a exaurir por volta de 1984), apesar de algumas tentativas de superar tal problema. Entre elas, pode-se destacar a tentativa feita por Wetterich [50],

⁵Quando se considera flutuações quânticas, o vácuo passa a ter estrutura e o efeito Casimir explica porque duas placas condutoras próximas e paralelas se atraem mesmo estando neutras e no vácuo

⁶O operador de Dirac de um espaço é um operador cujo quadrado fornece o operador de Laplace, e foi obtido por Dirac primeiramente para um espaço de Minkowski como uma tentativa de tornar a equação de Klein-Gordon uma equação diferencial de primeira ordem nas derivadas, e resultou numa descrição completa do elétron (inclusive sua antipartícula)

⁷Que é $-i\hbar M^A \partial_A \psi + mc\psi$, onde M^A são matrizes chamadas de matrizes de Dirac e satisfazem $M^A M^B + M^B M^A = 2\gamma^{AB}$

no qual argumenta-se que se o espaço das dimensões extras não for compacto o teorema de Witten não se aplica. É mostrado um exemplo em que o espaço extra não é compacto, porém tem um volume finito (chamado de "onion"). Outro exemplo foi mostrado por Weinberg, no qual propõe-se a adoção de uma geometria chamada de "quase-Riemanniana", no qual a equação da geodésica é modificada [51]. Segundo Weinberg, com isso os férmions da teoria podem ser quirais. Entretanto, por volta de 1984, nenhuma dessas medidas salvadoras pareceu convincente e a teoria de Kaluza-Klein foi abandonada em favor da teoria das cordas.

5.2 A Hierarquia Gravitacional

Um grande empecilho para se testar uma teoria de unificação da gravitação com as demais interações é o problema da hierarquia do campo gravitacional. A escala de energia da teoria eletrofraca é da ordem de 10^3 GeV, enquanto que a escala de energia para a Gravidade é dada por 10^{19} GeV. Não há nenhuma maneira conhecida para a construção de um aparato que alcance tal nível de energia para que se possa testar a efetividade da unificação. Para piorar, entre estes dois limites de energia não existe nenhuma outra interação fundamental, sendo chamado às vezes de "Grande Deserto".

Vale resaltar que este último nível de energia surgiu de uma hipótese sugerida por Planck [52], que definiu um sistema de unidades na qual todas as constantes fossem medidas em centímetros. Para isso postulou que a energia potencial (E) de duas partículas de massa m fosse igual à energia de uma função de onda com comprimento de onda λ , sendo este comprimento de onda a distância entre tais partículas:

$$E = \frac{Gm^2}{\lambda} = \frac{\hbar c}{\lambda}$$

De onde ele extraiu $M_{MP} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ que é conhecida como a massa de Planck da teoria quadridimensional. Pode-se notar que ela é inversamente proporcional à raiz da constante gravitacional Newtoniana. Percebendo que a energia na RE de uma partícula também é dada por $E = mc^2$, pode-se isolar λ na equação acima e obter o comprimento de onda quântico $\lambda = \frac{\hbar G}{c^3} \approx 10^{-33} \text{ cm}$ (chamado de comprimento de Planck), bem como a energia de Planck $E \approx 10^{19} \text{ GeV}$. É difícil explicar a realidade física do regime de Planck, exceto por uma analogia do ponto tríplice de uma transição

de fase em física de estado sólido [53]. Neste ponto temos uma configuração em que o elemento está nos 3 estados ao mesmo tempo (sólido, líquido e gasoso). Analogamente, a partícula em regime de Planck deve satisfazer as leis de gravitação Newtoniana, de dinâmica relativística e de regime quântico somente neste ponto tríplice.

Como os laboratórios de hoje em dia não conseguem atingir um nível de energia da ordem de $10^{19} GeV$ (e nem existem condições de existência para tal laboratório - o LHC deve chegar à $14 \cdot 10^3 GeV$ em breve), fica impossível, ao menos com a descrição fornecida pela Relatividade Geral, produzir um experimento que comprove diretamente os efeitos de uma física em que a gravitação está em pé de igualdade com as outras forças. Tal experimento é necessário para a comprovação de vários modelos de unificação. A hipótese feita por Planck era de que a gravitação Newtoniana deveria valer nesta ordem de comprimento de Planck. Isto está longe de ser comprovado, o máximo que se chegou foi de $10^{-4} cm$ [54].

Uma tentativa séria de se entender a origem do regime de Planck apareceu com um artigo de Arkani-Hamed et al [57] no contexto de teoria de branas-mundo⁸. Assumindo que somente a gravitação, por não ser uma teoria de calibre, possa se propagar nas dimensões extras, foi feita uma analogia com o potencial Newtoniano quadridimensional. Mas se a gravitação pode se propagar nas dimensões extras, então a constante gravitacional deve ser diferente da constante gravitacional Newtoniana. Uma nova constante de proporcionalidade G^* foi definida tal que a energia potencial de duas massas m resulte na lei de Newton com maior número de dimensões:

$$E = \frac{G^* m^2}{r^{n+1}}$$

Repetindo o procedimento anterior, como $\frac{\hbar c}{r} = mc^2$, isolando o comprimento r , temos que $r = \frac{\hbar}{mc}$. Substituindo esta última expressão e a expressão $E = mc^2$ na equação do potencial Newtoniano generalizado acima, isolando o número G^* resulta $G^* = \frac{\hbar^{n+1}}{c^{n-1} m^{n+2}}$. Denotando m por $M_{pl (4+n)}$, e notando que a expressão anterior se reduz à já conhecida no caso $n = 0$, obtemos o potencial Newtoniano generalizado para um espaço de $n+4$ dimensões:

⁸ Vale esclarecer que a teoria de branas-mundo não surgiu como uma proposta unificadora, mas em desenvolvimentos mais recentes que usam a correspondência ADS/CFT [55], procura estabelecer uma quantização da gravitação induzida pela quantização do campo de calibre (revivendo a idéia de Ashtekar [56]). Assim, no nível quântico desta teoria obteríamos uma unificação

$$V(r) \sim \frac{m^2}{M_{pl}^{n+2} (4+n)} \frac{1}{r^{n+1}}$$

O fato de só observarmos o decaimento Newtoniano $\frac{1}{r}$ (para $n = 0$) resulta da suposição de que as dimensões extras são espaciais e compactas (diferente da teoria de Kaluza-Klein, podem ser toros planos) de raio R maior que o raio de Plank. Assim, se duas massas estiverem à uma distância $r \ll R$, o potencial será o escrito acima, mas caso $r \gg R$ as linhas de fluxo gravitacional não conseguirão penetrar nas dimensões extras e obtêm-se

$$V(r) \sim \frac{m^2}{M_{pl}^{n+2} (4+n) R^n} \frac{1}{r}$$

Uma forma análoga para explicar o argumento acima é notar que pela periodicidade das dimensões extras⁹ têm-se que matematicamente o problema é idêntico ao de uma massa na origem de um espaço euclideo multidimensional, junto com a presença de várias outras massas dispostas nos pontos de coordenadas $0,0 + R$, $0 + 2R$, $0 + kR$ das dimensões extras onde k é qualquer número inteiro, ou seja, uma infinidade de massas nas dimensões extras à uma distância R uma das outras. Muito próximo à origem, só a presença da primeira massa conta, e teremos então a situação acima. Longe da origem pode-se considerar que a distribuição de massa não é mais discreta, mas sim contínua, análogamente ao que se faz na eletrostática. Teríamos uma 'linha' de n dimensões que num espaço euclideo de $3 + n$ dimensões produz um potencial do tipo newtoniano clássico.

Desta maneira, pela equação (5.2) acima a massa de Planck M_{pl} se relacionaria com a nova massa multidimensional da seguinte forma: $(M_{pl})^2 \sim (M_{pl} (4+n))^{2+n} R^n$. Assumindo que a massa de Planck multidimensional seja da escala de energia da interação eletrofraca, $M_{ef} \simeq 1TeV$, ou em comprimento ($m_{ef}^{-1} \sim 10^{-17}cm$) resulta (para $n \neq 0$)

$$R \sim 10^{\frac{32}{n}-17} cm$$

o caso $n=1$ resulta $R \sim 10^{15}cm$, o que implicaria desvio da gravitação Newtoniana

⁹Foram consideradas do tipo toroidais planas, ou seja, um espaço euclideo na qual os pontos (x, y, \dots, z) e $(x + R, y + R, \dots, z + R)$ são identificados

além da distância do sistema solar, o que é obviamente inobservável. Para todos outros $n \geq 2$ a modificação na gravitação só se torna verificável à distâncias menores do que as já verificadas por experimentos.

A lição mais importante que pode-se tirar com este exemplo de teoria que usa o formalismo de imersão é que a constante gravitacional G que aparece na Relatividade Geral, não precisa ser a constante Newtoniana usual se existirem campos gravitacionais se propagando nas dimensões extras, podendo ser usada outra constante G^* , cuja energia correspondente seja da mesma ordem da energia da interação eletrofraca. O trabalho de Arkani-Hamed (ADD)[57] abriu espaço para outros dois modelos de gravitação extra-dimensional conhecido como modelos de Randall-Sundrum [58][59]. Ambos os modelos resolvem o problema da hierarquia, mas têm insipiação na teoria de cordas (o que justifica o uso da simetria de espelho Z_2), sendo que em um deles a dimensão extras não é compacta. Pode-se resumir os modelos de branas-mundo usual através das seguintes características:

(1) As interações de calibre estão confinadas à quadridimensionalidade, e a variedade em que vivemos está imersa em uma variedade de dimensão maior .

(2) A escala de energia da gravitação é comparável às outras energias das interações de calibre, uma vez que somente a gravitação se propaga nas dimensões extras.

(3) A ação da teoria é dada pela ação de Einstein-Hilbert, somada à ação da tensão na brana

(4) Todas as quantidades definidas no espaço ambiente têm uma simetria Z_2 , o que significa que o valor destas quantidades num ponto $P + y$ é igual ao valor desta quantidade no ponto $P - y$, onde P é um ponto na brana (como é chamado o espaço-tempo imerso) e y é uma coordenada na dimensão extra. Assim, o espaço-tempo faz o papel de um espelho ou contorno fixo separando dois lados do espaço de imersão

Capítulo 6

Unificação Geométrica

Uma vida sem busca não é digna de ser vivida

Sócrates

De acordo com Ne'eman [60], até 1965 o estudo de imersões de variedades Riemannianas tinha motivação unicamente matemática (a saber, a explicação da ambiguidade do tensor de Riemann segundo Schlaefli). Por exemplo, usando imersões C. Fronsdal [61] chega à uma solução de Schwarzschild geodésicamente completa. Porém trata-se apenas de um artifício matemático, uma vez que o mesmo resultado pode ser obtido sem usar imersão [62]. O uso da imersão em RG ganhou impulso com o seminário realizado por Ne'eman, no qual ele propõe que o grupo de isometrias simetria de calibre tem origem nas imersões isométricas do espaço-tempo¹. Com isso,

¹Mas na época em que foi proposta, a idéia de Ne'eman não avançou muito, pois conhecia-se muito pouco sobre as interações nucleares

tanto a simetria do espaço-tempo quanto a simetria interna passam a ser obtidas de uma transformação de coordenadas do espaço de imersão, abrindo espaço para uma unificação verdadeiramente geométrica das interações.

De fato, todos os ingredientes básicos da teoria de Kaluza-Klein são obtidos apenas com a hipótese de imersão, ou seja, que o espaço-tempo usual quadridimensional V_4 é imerso isometricamente em uma variedade V_D , que possui dimensão superior à 5 (para que a terceira forma exista e possa ser interpretada como potencial de calibre) [63]. Desta maneira, a forma da métrica obtida é um pouco mais geral que a de Kaluza-Klein clássica e provê um forte embasamento teórico não somente à conjectura de Ne'eman, mas também para a de Salam, sobre a existência de um campo de spin 2 que intermedia as interações gravitacionais e de calibre. Aqui mostraremos que ambas as propostas se realizam através da imersão. A terceira forma fundamental faz o papel de potencial de calibre e a segunda forma o de campo intermediário entre a gravitação e a interação de calibre. Este é a tese principal desta dissertação.

Na exposição a ser desenvolvida a seguir, considera-se que observadores e observáveis permaneçam nas quatro dimensões usuais, uma vez que as forças de calibre só fazem sentido em 4 dimensões. Entretanto a gravitação pode ser propagar nas dimensões extras, pois ela não é gerada por um campo de calibre e não possui a necessidade de se confinar às quatro dimensões. Isto poderia explicar o porquê da força gravitacional não ser blindável, como é o caso das outras forças. Admitindo que o espaço-tempo em que vivemos é uma variedade imersa isometricamente numa outra variedade de dimensão maior na qual a gravitação pode se propagar, nos perguntamos se existem efeitos gravitacionais adicionais que possam ser medidos pelos observadores restritos às quatro dimensões.

Considere um espaço-tempo \bar{V}_4 da Teoria Gravitacional de Einstein como uma variedade semi-Riemanniana com métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ imersa localmente e isometricamente numa variedade V_D , que possui assinatura $(r + 3)(+) + (s + 1)(-)$, métrica \mathcal{G}_{AB} , e o número de dimensões extras é denotado por $n = D - 4$.

Um ponto P do espaço-tempo \bar{V}_4 de coordenadas x^μ possui vizinhança $U \subset \bar{V}_4$. A imersão local X de \bar{V}_4 em V_D é definida por um conjunto de D funções, as coordenadas $X^A(x^\mu)$ de $X(U)$, que satisfazem a condição de isometria, dada pela expressão (3.1 da página 29)

$$\bar{g}_{\mu\nu} = X_{\parallel\mu}^A X_{\parallel\nu}^B \mathcal{G}_{AB}$$

Com n vetores normais à \bar{V}_4 satisfazendo

$$N_i^A N_j^B \mathcal{G}_{AB} = g_{ij} = \epsilon_i \delta_{ij} \quad e \quad N_i^A X_{\parallel\mu}^B \mathcal{G}_{AB} = 0$$

, onde $\epsilon_i = \pm 1$, a depender da assinatura da métrica na direção considerada.

Por definição (3.4), os coeficientes da segunda e terceira forma quadrática de \bar{V}_4 são expressos como:

$$A_{\beta ab} = \mathcal{G}_{AB} N_a^A N_{b\parallel\beta}^B$$

e

$$\bar{k}_{\alpha\beta i} = -\mathcal{G}_{AB} X_{\alpha}^A N_{i\parallel\beta}^B$$

Assumindo o princípio de Einstein-Hilbert para a métrica da variedade V_D , vamos calcular o escalar de curvatura, pois a Lagrangeana é obtida a partir desta. Para este cálculo faremos uma escolha particular de um sistema de coordenadas.

No sistema de coordenadas admitido inicialmente para o espaço maior, pode-se considerar que a variedade quadridimensional é descrita localmente pelos pontos X^A . Se considerarmos pequenos deslocamentos y^i nas direções das normais N_i^A , obtemos (note que se fixamos y^i a seguinte função descreve uma nova variedade V_4 - os y^i fornecem então uma parametrização para as variedade 4-dimensionais que folheiam o espaço de imersão) :

$$Z^A(x^\mu, y^i) = X^A(x^\mu) + y^i N_i^A(x^\mu) \quad (6.1)$$

Esta função descreve um novo sistema de coordenadas para V_D (que pode ser diferente do considerado inicialmente e que deu origem à métrica \mathcal{G}_{AB}), parametrizado agora pelas quantidades (x^μ, y^i) . Neste novo sistema de referência, os coeficientes da métrica serão diferentes do antigo, os novos serão denotados por G_{AB} , e terão sua expressão dada por

$$G_{AB} = Z_{\parallel A}^C Z_{\parallel B}^D \mathcal{G}_{CD} \quad (6.2)$$

Seu cálculo será feito adiante 6.8, pois antes necessitaremos de algumas fórmulas simplificatórias.

O espaço de imersão V_D tem assinatura $(r + 3, s + 1)$ e grupo de Lorentz $SO(r + 3, s + 1)$, que tem um subgrupo invariante (entende-se subgrupo normal, no sentido de teoria dos grupos²) $SO(r, s)$, das transformações ortonormais no espaço gerado pelos vetores normais N_i .

No apêndice A mostra-se que a terceira forma fundamental se transforma como uma conexão de um campo de calibre para o grupo $SO(r, s)$. Primeiro vamos notar que os números y^i além de fornecerem um complemento para as coordenadas x^μ , eles mesmos fornecem uma base para o espaço vetorial gerado pelos vetores normais N_i através da seguinte aplicação $(y^i) \rightarrow y^i N_i$. Assim qualquer vetor normal à um ponto do espaço tempo \bar{V}_4 pode ser parametrizado pelas coordenadas y^i . Ao invés de fazer os elementos da álgebra de Lie atuarem nos vetores normais, pode-se admitir uma transformação passiva, em que os operadores da álgebra atuem nas coordenadas y^i do espaço vetorial normal. Portanto, os geradores da álgebra de Lie deste subgrupo $SO(r, s)$ atuam nas coordenadas y^i e são expressos em termos das mesmas³

$$L^{ij} = \frac{1}{2}(g^{jk}y^i\partial_k - g^{ik}y^j\partial_k) \quad (6.3)$$

e a relação de comutação de Lie deste operador é típica de um SO , dada por

$$[L^{ij}, L^{mn}] = \frac{1}{2}(g^{jm}L^{in} - g^{jn}L^{im} - g^{im}L^{jn} + g^{in}L^{jm})$$

Como posteriormente vamos mostrar que a terceira forma é um campo de calibre, nada mais natural de que escrevê-la como um operador formado por uma combinação linear dos geradores da álgebra de Lie de $SO(r, s)$, pois na representação dessa álgebra no espaço interno, o espaço em que a álgebra atua coincide com o espaço em que o operador do grupo atua (que neste caso é o espaço gerado pelos vetores normais, e então o operador A_μ será escrito na base da álgebra acima) :

$$A_\mu = A_{\mu ij}L^{ij}$$

²Um subgrupo normal é um subgrupo Nor de G tal que dado um elemento g do grupo G , se considerarmos o conjunto formado pelos elementos gn , onde $n \in Nor$ denotado por $gNor$ então teremos $gNor = Nor g$, onde $Nor g$ é o conjunto formado pelos elementos ng

³Os operadores ∂_i são $\frac{\partial}{\partial y^i}$

O coeficiente deste operador linear é obtido ao aplicá-lo no espaço vetorial de uma coordenada conveniente y_k , definida por $y_k = g_{kl}y^l$ (usaremos $L^{ij}(y_k) = \frac{1}{2}(y_i\delta_k^j - y_j\delta_k^i)$, obtida de (6.3) aplicada à y_k):

$$A_{\mu k} = A_{\mu ij}L^{ij}(y_k) = g_{kl}A_{\mu ij}L^{ij}(y^l) = A_{\mu jk}y^j.$$

Portanto a derivada covariante associada à conexão A_μ é $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$ e a curvatura associada à esta conexão A_μ é

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]_{ij}L^{ij} = [\partial_\mu + A_\mu, \partial_\nu + A_\nu]$$

o qual é também um operador no espaço das coordenadas y , que se avaliado na coordenada y_k tem como coeficiente

$$F_{\mu\nu k} = F_{\mu\nu}(y_k) = A_{\nu k, \mu} - A_{\mu k, \nu} + g^{mn}(A_{\mu m}A_{\nu nk} - A_{\nu m}A_{\mu nk}) \quad (6.4)$$

Vamos agora calcular os componentes G_{AB} da métrica no novo sistema de coordenadas com o uso de (6.1) e (6.2), e das quantidades obtidas acima

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= Z_{\|\mu}^A Z_{\|\nu}^B \mathcal{G}_{AB} = (X_{\|\mu}^A + y^a N_{a\|\mu}^A)(X_{\|\nu}^B + y^b N_{b\|\nu}^B) \mathcal{G}_{AB} \\ &= X_{\|\mu}^A X_{\|\nu}^B \mathcal{G}_{AB} + y^b X_{\|\mu}^A N_{b\|\nu}^B \mathcal{G}_{AB} + y^a X_{\|\nu}^B N_{a\|\mu}^A \mathcal{G}_{AB} + y^a y^b N_{a\|\mu}^A N_{b\|\nu}^B \mathcal{G}_{AB} \end{aligned}$$

o primeiro termo é $\bar{g}_{\mu\nu}$, o segundo e terceiro são (levando em conta a definição da segunda forma (3.11)) $-y^a \bar{k}_{\mu\nu a}$ (a barra na segunda forma fundamental indica que ela é avaliada no ponto $y^i = 0$) e o último (levando em conta (3.13)) resulta em $y^a y^b (g^{\rho\sigma} \bar{k}_{\mu\rho a} \bar{k}_{\nu\sigma b} + g^{cd} A_{\mu ca} A_{\nu bd})$. Portanto

$$G_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} - 2y^a \bar{k}_{\mu\nu a} + y^a y^b (\bar{g}^{\rho\sigma} \bar{k}_{\mu\rho a} \bar{k}_{\nu\sigma b} + g^{cd} A_{\mu ca} A_{\nu bd}) \quad (6.5)$$

O componente $G_{\mu i}$ fica:

$$G_{\mu i} = Z_{\|\mu}^A Z_{,i}^B \mathcal{G}_{AB} = (X_{,\mu}^A + y^j N_{j\|\mu}^A)(N_j^B) \mathcal{G}_{AB} = y^j A_{\mu j i} = A_{\mu i} \quad (6.6)$$

O componentes restantes resultam em

$$G_{ij} = Z_{\parallel i}^A Z_{\parallel j}^B \mathcal{G}_{AB} = N_{\parallel i}^A N_{\parallel j}^B \mathcal{G}_{AB} = g_{ij} \quad (6.7)$$

Portanto, para o sistema de coordenadas considerado, a métrica obtida é escrita da seguinte forma

$$G_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + g^{ij} A_{\mu i} A_{\nu j} & A_{\mu i} \\ A_{\nu j} & g_{ij} \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Onde foi denotado:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} - 2y^i \bar{k}_{\mu\nu i} + y^i y^j (\bar{g}^{\rho\sigma} \bar{k}_{\mu\rho i} \bar{k}_{\nu\sigma j}) \quad (6.9)$$

A partir deste ponto, é importante esclarecer que cada nova variedade da folheação possui sua própria forma fundamental. Por exemplo, escolhendo uma folheação específica (ou seja, escolhendo os y^i), temos que $G_{\mu\nu}$ é a métrica desta nova variedade V_4 . A segunda forma fundamental de V_4 será denotada por $k_{\mu\nu i}$. Note que a expressão para a segunda forma desta variedade é $k_{\mu\nu i}$ e que no ponto (x^μ, y^i) é dada por

$$k_{\mu\nu i} = -Z_{\mu\parallel\nu}^A N_i^B = \bar{k}_{\mu\nu i} - y^j (g^{\rho\sigma} \bar{k}_{\mu\rho i} \bar{k}_{\nu\sigma j} + g^{mn} A_{\mu n i} A_{\nu j m})$$

Derivando $G_{\mu\nu}$ com relação à y^i obtemos:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial y^i} = \bar{k}_{\mu\nu i} - y^j (g^{\rho\sigma} \bar{k}_{\mu\rho i} \bar{k}_{\nu\sigma j} + g^{mn} A_{\mu n i} A_{\nu j m})$$

Comparando esta equação com a de cima, obtemos a equação de Nash:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial y^i} = k_{\mu\nu i} \quad (6.10)$$

Note que a primeira e segunda forma fundamental foram perturbadas nas dimensões extras. Isso não ocorre para os coeficientes da terceira forma fundamental (uma vez que a expressão para os vetores normais não mudam em V_4).

Pode-se observar que a métrica obtida (6.8) coincide com o ansatz métrico da teoria clássica de Kaluza-Klein, não fosse pela presença de termos contendo a segunda forma fundamental $\bar{k}_{\mu\nu i}$. Observe também que existe uma dependência explícita nas coordenadas das dimensões extras. Lembramos que no caso da teoria de Kaluza-

Klein, fazia-se uma primeira aproximação na qual não havia esta dependência, pois as dimensões extras eram compactas e tomava-se apenas o termo zero da expansão harmônica. Se quisermos uma expressão exata para a curvatura (\mathcal{R}) do espaço de imersão, temos que necessariamente calcular as derivadas da métrica nas direções das dimensões extras (um cálculo da curvatura utilizando expansões para pequenos y^i foi feita pelo autor no artigo [64]). A relação de Nash 6.10 provê um auxílio nesta direção, uma vez que ela nos fornece a segunda forma fundamental expressa em termos da derivada da métrica na direção das dimensões extras, fato não considerado na teoria de Kaluza-Klein (e que complica um pouco mais o cálculo da curvatura). Uma vantagem é que com as hipóteses aqui assumidas, esta maneira de escrever a métrica surge de forma natural, ou seja, como consequência da hipótese de imersão. Vamos agora calcular o escalar de curvatura \mathcal{R} associado à métrica do espaço de imersão V_D .

Existe uma base na qual os cálculos para a obtenção do escalar de curvatura se simplificam de maneira significativa. Vamos seguir o caminho sugerido inicialmente por Cho no contexto da teoria de Kaluza-Klein [42], e também por Sepangi et al [65] no contexto de imersões. Nesta base, os vetores tangentes tornam-se ortogonais às normais, diferente da base de vetores normais usada acima (6.8), que têm componente não nula na direção normal devido à presença de $A_{\mu i}$. Se mudarmos os vetores tangentes $Z_{\parallel\mu}^A$ da seguinte maneira (retirando dos vetores tangentes as componentes normais):

$$\mathcal{Y}_{\parallel\mu}^A = Z_{\parallel\mu}^A + g^{ij} A_{\mu j} N_i^A \quad (6.11)$$

A expressão para os coeficientes da métrica de V_D nessa base será diferente, denotada por $\gamma_{AB} = \mathcal{Y}_{\parallel A}^C \mathcal{Y}_{\parallel B}^D \mathcal{G}_{CD}$ (agora o produto interno do vetor tangente $\mathcal{Y}_{\parallel\mu}^A$ com o vetor normal será zero, como vamos ver adiante).

Primeiro vamos calcular $\gamma_{\mu\nu}$:

$$\gamma_{\mu\nu} = (Z_{\parallel\mu}^A + g^{ij} A_{\mu j} N_i^A)(Z_{\parallel\nu}^B + g^{mn} A_{\nu n} N_m^B) \mathcal{G}_{AB}$$

Os cálculos dos produtos dessas quantidades já foram feitos antes (o termo $Z_{\parallel\mu}^A Z_{\parallel\nu}^B \mathcal{G}_{AB}$ foi feito na fórmula (6.5), o termo $Z_{\parallel\mu}^A N_i^B \mathcal{G}_{AB}$ em (6.6) e $N_i^A N_j^B \mathcal{G}_{AB}$ em (6.7)). O

primeiro termo é $g_{\mu\nu} + g^{ij} A_{\mu i} A_{\nu j}$. O segundo e terceiro é $-g^{ij} A_{\mu i} A_{\nu j}$ e o quarto é $-g^{ij} A_{\mu i} A_{\nu j}$. Resulta que $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$.

Agora o termo $\gamma_{\mu k}$:

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu k} &= \mathcal{Y}_{\parallel\mu}^A N_k^B \mathcal{G}_{AB} = (Z_{\parallel\mu}^A + g^{ij} A_{\mu j} N_i^A) N_k^B \mathcal{G}_{AB} \\ &= (X_{\parallel\mu}^A + y^i N_{i\parallel\mu}^A + g^{ij} A_{\mu j} N_i^A) N_k^B \mathcal{G}_{AB} \\ &= y^i A_{\mu k i} + g^{ij} A_{\mu j} g_{ik} = 0\end{aligned}$$

Portanto $\gamma_{\mu i} = 0$. Finalmente $\gamma_{ij} = N_i^A N_j^B \mathcal{G}_{AB} = g_{ij}$. Portanto a nova métrica γ_{AB} fica:

$$\gamma_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix}$$

É importante notar que os coeficientes \mathcal{G}_{AB} , G_{AB} e γ_{AB} são os coeficientes da mesma métrica (do espaço V_D) só que escritos em bases diferentes. Antes de começar o cálculo do escalar de curvatura, vamos obter algumas identidades importantes que serão usadas para tal. Neste novo sistema de coordenadas (com métrica γ_{AB} , os coeficientes da segunda forma mudam, pois os vetores tangentes $Z_{\parallel\mu}^A$ à variedade V_4 mudou para $\mathcal{Y}_{\parallel\mu}^A$. Assim vamos denotar os coeficientes da segunda forma de V_4 neste novo sistema por $\tilde{k}_{\mu\nu i}$, ou seja com um \sim (til) em cima desta quantidade. Portanto:

$$\tilde{k}_{\mu\nu i} = -\mathcal{G}_{AB} \mathcal{Y}_{\parallel\mu}^A N_{i\parallel\nu}^B = \bar{k}_{\mu\nu i} - y^j \bar{g}^{\rho\sigma} (\bar{k}_{\mu\rho j} \bar{k}_{\nu\sigma i}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^a} \quad (6.12)$$

Uma vez que a curvatura que queremos calcular contém derivadas segundas na métrica, e a derivada primeira da métrica com relação à dimensão extra é proporcional à segunda forma (pelo teorema de Nash), teremos que obter uma fórmula para a derivada da segunda forma fundamental com relação à dimensão extra. Isso é feito derivando diretamente a equação acima com relação à dimensão extra:

$$\tilde{k}_{\mu\nu i, j} = -\bar{g}^{\alpha\beta} \bar{k}_{\alpha\mu j} \bar{k}_{\beta\nu i} \quad (6.13)$$

Porém esta expressão ainda é indesejável porque não queremos que a Lagrangeana (e portanto a curvatura) contenha termos envolvido $\bar{k}_{\mu\nu i}$ e $\tilde{k}_{\mu\nu i}$, ou seja, a segunda forma fundamental da variedade inicial \bar{V}_4 e deformada V_4 respectivamente. Isso se dá porque é difícil de se interpretar numa mesma lagrangeana formas fundamentais que se refiram à espaços diferentes. Para remover este problema, vamos expressar \bar{k} em termos de \tilde{k} :

$$\bar{k}_{\mu\nu i} = -X_{\|\mu}^A N_{i\|\nu}^B \mathcal{G}_{AB} = -(\mathcal{Y}_{\|\mu}^A - y^j N_{j\|\mu}^A - g^{mn} A_{\mu m} N_n^A) N_{i\|\nu}^B \mathcal{G}_{AB}$$

ou seja:

$$\bar{k}_{\mu\nu i} = \tilde{k}_{\mu\nu i} + y^k g^{\alpha\beta} \tilde{k}_{\mu\alpha k} \tilde{k}_{\nu\beta i} \quad (6.14)$$

Somando esta equação (6.14) com a equação (6.12) resulta:

$$y^j g^{\alpha\beta} \tilde{k}_{\mu\alpha j} \tilde{k}_{\nu\beta i} = y^j \bar{g}^{\rho\sigma} (\bar{k}_{\mu\rho j} \bar{k}_{\nu\sigma i})$$

Como isso vale para qualquer y^j ,

$$g^{\alpha\beta} \tilde{k}_{\mu\alpha j} \tilde{k}_{\nu\beta i} = \bar{g}^{\alpha\beta} (\bar{k}_{\mu\alpha j} \bar{k}_{\nu\beta i}) \quad (6.15)$$

Usando esta equação (6.15) em (6.13) obtemos finalmente

$$\tilde{k}_{\mu\nu i, j} = -g^{\alpha\beta} \tilde{k}_{\alpha\mu j} \tilde{k}_{\beta\nu i} \quad (6.16)$$

que é o que queríamos, ou seja, expressar a derivada extradimensional da segunda forma fundamental perturbada (de V_4) em termos de quantidade de V_4 .

O próximo passo para a obtenção de \mathcal{R} é calcular os coeficientes de comutação. Para isso é necessário obter uma expressão para os vetores da base nesta nova coordenada.

Pela expressão (6.11), os vetores tangentes desta nova base são dados por $\tilde{e}_\mu = \partial_\mu + g^{ij} A_{\mu j} \partial_i$, uma vêz que eles foram deslocados para a direção normal para que não tenham mais componentes nesta direção. Os vetores normais continuam a ser dados por $\tilde{e}_i = e_i = \partial_i$. O cálculo dos coeficientes de comutação c_{AB}^C é obtido considerando os comutadores $[\tilde{e}_A, \tilde{e}_B] = c_{AB}^C \tilde{e}_C$. O resultado é

$$c_{\mu\nu}^A = \gamma^{Ai} F_{\mu\nu i}, \quad c_{\mu k}^A = \gamma^{Ai} A_{\mu i k}, \quad c_{ij}^A = 0$$

Os símbolos de Christoffel quadridimensional da métrica $g_{\mu\nu}$ serão denotados por $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ e os símbolos de Christoffel da métrica multidimensional γ_{AB} na nova base serão denotados por Υ_{AB}^C . Calculando estes últimos, resulta que:

$$\Upsilon_{ij}^k = 0, \quad \Upsilon_{ij}^\mu = 0, \quad \Upsilon_{\mu i}^k = 0$$

$$\Upsilon_{i\lambda}^\mu = -g^{\mu\nu} \bar{k}_{\nu\lambda i} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} F_{\nu\lambda i}$$

$$\Upsilon_{\mu\nu}^i = g^{ij} \bar{k}_{\mu\nu j} - \frac{1}{2} g^{ij} F_{\mu\nu j}, \quad \Upsilon_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$$

Onde usamos a relação de Nash na quarta e quinta expressão.

O tensor de Ricci do espaço maior com relação à métrica γ_{AB} será denotado por \mathcal{R}_{AB} e para o espaço V_4 com relação à métrica $g_{\mu\nu}$ denotaremos $R_{\mu\nu}$:

$$\mathcal{R}_{ij} = -\frac{1}{4} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha j} F_{\beta\mu i} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\beta\mu j} \tilde{k}_{\nu\alpha i} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha j} \tilde{k}_{\beta\mu i} \quad (6.17)$$

$$\mathcal{R}_{k\lambda} = -g^{\mu\nu} D_\mu \tilde{k}_{\nu\lambda k} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} D_\mu F_{\nu\lambda k} + g^{\mu\nu} D_\lambda \tilde{k}_{\mu\nu k} \quad (6.18)$$

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + g^{ij} g^{\alpha\beta} \tilde{k}_{\alpha\mu i} \tilde{k}_{\beta\nu j} - g^{ij} g^{\alpha\beta} \tilde{k}_{\alpha\beta i} \tilde{k}_{\mu\nu j} + \frac{1}{2} g^{ij} g^{\alpha\beta} F_{\nu\nu j} \tilde{k}_{\alpha\beta i} - \frac{1}{2} g^{ij} g^{\alpha\beta} F_{\beta\mu i} F_{\alpha\nu j} \quad (6.19)$$

Nas três equações (6.17), (6.18) e (6.19) usou-se a relação de Nash e a expressão para a derivada extra dimensional da segunda forma (6.16). Além disso foi utilizado a definição de derivada total $D_\mu = \nabla_\mu + A_\mu$, que inclui a derivada covariante do espaço-tempo V_4 adicionada da conexão A_μ do grupo de calibre.

O escalar de curvatura do espaço total fica:

$$\mathcal{R} = R + g^{ij} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (\tilde{k}_{\mu\alpha i} \tilde{k}_{\nu\beta j} - \tilde{k}_{\alpha\beta i} \tilde{k}_{\mu\nu j}) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu i} F_{\mu\nu i} \quad (6.20)$$

Da hipótese de que a ação \mathcal{I}_{E-H} que fornece as equações de movimento é a de Einstein-Hilbert do espaço total⁴ resulta:

$$\mathcal{I}_{E-H} = \frac{1}{2\kappa^*} \int \mathcal{R} \sqrt{\gamma} d^D V$$

Apenas para completar a ação, consideraremos também a densidade Lagrangeana da fonte $L_{matéria}^*$ com sua respectiva ação $\mathcal{I}_{matéria} = \int L_{matéria}^* \sqrt{\gamma} d^D V$, que dará origem ao tensor energia-momento T_{AB}^* do espaço de imersão V_D .

As equações de movimento são encontradas ao se aplicar o princípio variacional para a ação total $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{E-H} + \mathcal{I}_{matéria}$, com relação à variação da métrica do espaço de imersão. O resultado é análogo ao caso quadridimensional e é dado por uma equação de Einstein multidimensional (note que na sua derivação no capítulo 4 a partir do princípio variacional não foi usado como hipótese a quadridimensionalidade da variedade em que a ação é definida, portanto ela pode ser considerada como valendo para um número arbitrário de dimensões desde que a ação de Einstein-Hilbert valha para o espaço considerado), que escrito na base γ_{AB} :

$$\mathcal{R}_{AB} - \frac{1}{2} \gamma_{AB} \mathcal{R} = \kappa^* T_{AB}^*$$

E resultam em 3 equações⁵ desde que separemos as partes $(\mu\nu)$, (λk) e (ij) , e além disso façamos a substituição das equações (6.17), (6.18) e (6.19):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - Q_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (6.21)$$

$$-g^{\mu\nu} D_\mu \tilde{k}_{\nu\lambda k} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} D_\mu F_{\nu\lambda k} + g^{\mu\nu} D_\lambda \tilde{k}_{\mu\nu k} = \kappa T_{\lambda k} \quad (6.22)$$

e

$$-\frac{1}{4} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha j} F_{\beta\mu i} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\beta\mu j} \tilde{k}_{\nu\alpha i} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha j} \tilde{k}_{\beta\mu i} \quad (6.23)$$

⁴ κ^* é uma constante adaptada ao espaço total, e assim pode conter uma constante gravitacional G^* diferente da Newtonian: $\kappa^* = 8\pi G^* c^{-4}$

⁵Pode-se impor $\kappa^* T_{AB}^* = \kappa T_{AB}$, onde κ e T_{AB} são a constante de proporcionalidade e o tensor energia momento adaptados à quadridimensionalidade, de maneira à recuperar o lado direito usual da equação de Einstein e resolver assim o problema da hierarquia

$$-\frac{1}{2}g_{ij}(R + g^{mn}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}(\tilde{k}_{\mu\alpha n}\tilde{k}_{\nu\beta m} - \tilde{k}_{\alpha\beta n}\tilde{k}_{\mu\nu m}) - \frac{1}{4}g^{mn}F^{\mu\nu n}F_{\mu\nu m}) = \kappa T_{ij}$$

Conhecidas como equação gravi-tensorial (ou equação de Einstein modificada), gravi-vetorial (uma equação do tipo Yang-Mills) e gravi-escalar respectivamente.

Na equação gravi-tensorial (6.21), o termo $Q_{\mu\nu}$ é dado por [66]

$$Q_{\mu\nu} = g^{ij}(\tilde{k}_{\mu}{}^{\lambda}{}_{i}\tilde{k}_{\nu\lambda j} - \tilde{k}_{\mu\nu i}\tilde{H}_j) - \frac{1}{2}(\tilde{k}_{\alpha\rho i}\tilde{k}_{\beta\sigma j} - \tilde{k}_{\alpha\beta i}\tilde{k}_{\rho\sigma j})$$

onde $\tilde{H}_i = g^{\alpha\beta}k_{\alpha\beta i}$, $\tilde{K}^2 = g^{ij}g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}\tilde{k}_{\alpha\rho i}\tilde{k}_{\beta\sigma j}$ e $\tilde{H}^2 = g^{ij}\tilde{H}_i\tilde{H}_j$. Por outro lado, o termo $E_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento associado ao campo de Yang-Mills (ou seja, associado à terceira forma fundamental A_{μ} vista como campo de Yang-Mills):

$$E_{\mu\nu} = (g_{ij}F^{\mu\alpha i}F^{\nu\beta j}g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta i}F_{\alpha\beta i})$$

Finalmente, o último termo que aparece na equação de Einstein modificada é escolhido como sendo $8\pi GT_{\mu\nu} = \kappa^*T_{\mu\nu}^*$, onde $T_{\mu\nu}^*$ é obtida da ação $\mathcal{I}_{matéria}$.

Por construção, $T_{\mu\nu}$ e $E_{\mu\nu}$ se conservam. Vamos mostrar que isso também é verdade para $Q_{\mu\nu}$. De fato,

$$\begin{aligned} Q^{\mu\delta}{}_{;\delta} &= g^{ij}g^{\alpha\beta}g^{\mu\lambda}g^{\rho\sigma}(\tilde{k}_{\lambda\alpha i;\rho}\tilde{k}_{\sigma\beta j} + \tilde{k}_{\lambda\alpha i}\tilde{k}_{\sigma\beta j;\rho} - \tilde{k}_{\lambda\sigma i;\rho}\tilde{k}_{\alpha\beta j} - \tilde{k}_{\lambda\sigma i}\tilde{k}_{\alpha\beta j;\rho}) \\ &\quad - \frac{1}{2}g^{ij}g^{\alpha\beta}g^{\mu\lambda}g^{\rho\sigma}(\tilde{k}_{\alpha\rho i;\lambda}\tilde{k}_{\beta\sigma j} + \tilde{k}_{\alpha\rho i}\tilde{k}_{\beta\sigma j;\lambda} - \tilde{k}_{\alpha\beta i;\lambda}\tilde{k}_{\rho\sigma j} - \tilde{k}_{\alpha\beta i}\tilde{k}_{\rho\sigma j;\lambda}) \end{aligned} \quad (6.24)$$

Definindo $T_{\mu\nu i\lambda} = \tilde{k}_{\mu\nu i;\lambda} - \tilde{k}_{\mu\lambda i;\nu}$ segue que

$$k_{\mu\nu i;\lambda} = k_{\mu\lambda i;\nu} + T_{\mu\nu i\lambda} \quad (6.25)$$

É fácil notar que este tensor é antissimétrico sobre uma permutação do segundo e quarto índices: $T_{\mu\nu i\lambda} = -T_{\mu\lambda i\nu}$. Substituindo 6.25 nos três primeiros termos de 6.24 resulta (as partes com termos envolvendo $T_{\mu\nu i\lambda}$ se anulam individualmente devido à referida antissimetria):

$$Q^{\mu\delta}{}_{;\delta} = g^{ij}g^{\alpha\beta}g^{\mu\lambda}g^{\rho\sigma}(\tilde{k}_{\alpha\rho i;\lambda}\tilde{k}_{\sigma\beta j} + \tilde{k}_{\lambda\alpha i}\tilde{k}_{\sigma\rho j;\beta} - \tilde{k}_{\sigma\rho i;\lambda}\tilde{k}_{\alpha\beta j} - \tilde{k}_{\lambda\sigma i}\tilde{k}_{\alpha\beta j;\rho})$$

$$-\frac{1}{2}g^{ij}g^{\alpha\beta}g^{\mu\lambda}g^{\rho\sigma}(\tilde{k}_{\alpha\rho i;\lambda}\tilde{k}_{\beta\sigma j} + \tilde{k}_{\alpha\rho i}\tilde{k}_{\beta\sigma j;\lambda} - \tilde{k}_{\alpha\beta i;\lambda}\tilde{k}_{\rho\sigma j} - \tilde{k}_{\alpha\beta i}\tilde{k}_{\rho\sigma j;\lambda})$$

Fazendo na expressão acima as seguintes permutações $(\alpha\beta) \leftrightarrow (\rho\sigma)$ no quarto termo, este se cancela com o segundo resulta na expressão:

$$Q^{\mu\delta}{}_{;\delta} = -\frac{1}{2}g^{ij}g^{\alpha\beta}g^{\mu\lambda}g^{\rho\sigma}(\tilde{k}_{\alpha\rho i;\lambda}\tilde{k}_{\beta\sigma j} + \tilde{k}_{\alpha\rho i}\tilde{k}_{\beta\sigma j;\lambda} - \tilde{k}_{\alpha\beta i;\lambda}\tilde{k}_{\rho\sigma j} - \tilde{k}_{\alpha\beta i}\tilde{k}_{\rho\sigma j;\lambda})$$

E fazendo as seguintes permutações na expressão acima: $(\alpha) \leftrightarrow (\beta)$, $(\rho) \leftrightarrow (\sigma)$ e $(i) \leftrightarrow (j)$ no primeiro termo; $(\alpha) \leftrightarrow (\rho)$, $(\beta) \leftrightarrow (\sigma)$ e $(i) \leftrightarrow (j)$ no terceiro; esta expressão se anula, pois o primeiro termo cancela o segundo e o terceiro termo cancela o quarto. Portanto obtemos a conservação de $Q_{\mu\nu}$

$$Q^{\mu\delta}{}_{;\delta} = 0$$

O fato de que nesta formulação de unificação não há problemas com quiralidade fermiônica é visto por dois motivos: o primeiro é que em geral as dimensões extras não são compactas (evitando assim o resultado de Witten). O segundo é que os campos de calibre (e os campos que são fontes para tais) não se propagam nas dimensões extras, significando que não há necessidade de considerar a equação de Dirac em todas as dimensões do espaço total.

Com o intuito de exemplificar a teoria desenvolvida neste capítulo, foi feito um modelo em Maple, em que um buraco negro neutro é carregado eletricamente por meio da deformação de Nash. O resultado está contido no apêndice B.

Conclusão

Mostramos que as interações fundamentais são convenientemente descritas com o uso da geometria. Partimos de críticas à formulação original da geometria Riemanniana, devidamente solucionada através da introdução de dimensões extras. Uma vez que a RG apresenta problemas como o da unificação, mostramos duas teorias de unificação que utilizam dimensões extras. O principal resultado aqui apresentado diz respeito à decomposição da Lagrangeana de Einstein-Hilbert para o espaço total como a soma do termo envolvendo a Lagrangeana de Yang-Mills usual, o termo contendo a Lagrangeana gravitacional usual 4-dimensional e um termo adicional dependente da primeira e segunda formas fundamentais. Outro resultado é a prova de que a terceira forma fundamental se comporta como um campo de calibre sobre ação do grupo $SO(r, s)$, satisfazendo uma equação de Yang-Mills. As principais características de unificação já eram previstas pela teoria de Kaluza-Klein, mas o problema que causou seu abandono foi resolvido, pois as dimensões extras não são mais compactas. Outra vantagem é que a forma da métrica é obtida de uma maneira natural, e não como um axioma.

De posse desse conhecimento, usamos o argumento de ADD (branas-mundo) para justificar a unificação das forças fundamentais de forma efetiva, no sentido que a gravitação pode ter uma escala de energia tão forte como as demais interações (provocando a quebra da hierarquia). Portanto, as considerações da dinâmica extrínseca do espaço-tempo enriquecem consideravelmente a RG, resolvendo o problema da hierarquia e provendo-nos com um embasamento físico e matemático para uma descrição unificada dos campos de interações fundamentais. A consequência disso é uma realização da conjectura de Ne'eman de que o campo de calibre é tão geométrico quanto o campo gravitacional (na verdade é um componente deste), e onde as simetrias de calibre são geradas pelas rotações das normais. A segunda forma fundamental faz o papel de

intermediário entre a gravitação e as interações de calibre.

Ainda falta muito a ser feito, considerando que nem mesmo as interações de calibre foram completamente unificadas por uma teoria GUT. A unificação eletrofraca é descrita de maneira satisfatória, porém ainda assim alguns parâmetros têm que ser medidos e a teoria não os fornece, como é o caso do ângulo de Weinberg. Sobre os estudos desta dissertação, pretende-se publicar o programa desenvolvido em Maple num banco de dados da Internet para que mais pessoas tenham acesso à este ferramenta que permite calcular as quantidades que determinam de maneira mais precisa o universo em que vivemos.

Teremos que fornecer uma explicação dinâmica para o confinamento dos campos de Yang-Mills em 4 dimensões. Explicamos que as equações de Yang-Mills só fazem sentido em quatro dimensões. Mas isso é porque medimos os campos e as quadricorrentes no mundo quadridimensional. Isso quer dizer que o motivo de rejeitamos a versão multidimensional das equações de Yang-Mills é puramente físico. Matematicamente elas fazem sentido. Uma tentativa de explicar o porquê do confinamento dos observadores à quadridimensionalidade é fornecida por Rubakov et al (ver [67]), que considera a possibilidade do espaço-tempo ser uma solução de equilíbrio de potencial criado por uma parede de domínio.

Outro passo adicional a ser feito futuramente é estudar a versão quântica da teoria apresentada. Um importante avanço nesta direção é apresentado em [68], que aplica a quantização ADM ao espaço-tempo imerso.

Por último, é imprescindível fazer um modelo da teoria aqui desenvolvida (modelo este apresentado no apêndice B, por envolver uso de programação em Maple). O modelo é importante porque pode revelar situações passíveis de comprovação experimental da teoria, como por exemplo a criação de mini-buracos negros no LHC [69].

Apêndice A

Transformação da Terceira Forma Fundamental

Fundamental

Intuitivamente, as rotações nas dimensões extras são transformações que deixam o mundo quadridimensional invariante. Uma vez que existem efeitos possivelmente observáveis através dos termos envolvendo as formas fundamentais que são adicionadas à equação de Einstein, vamos calcular a maneira em que a terceira forma se transforma sobre estas rotações. A figura A.1 a seguir ilustra esta simetria:

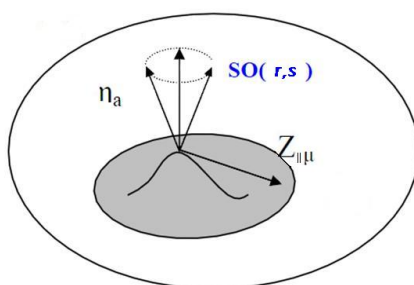


Figura A.1: Simetria de calibre

É possível mostrar que a terceira forma fundamental se transforma como um campo de calibre da Teoria de Yang-Mills, em relação ao grupo $SO(r, s)$. Esta característica foi sugerida primeiramente por Holdon [71]. Vamos mostrar isso de duas maneiras diferentes. Na primeira parte será considerado uma transformação infinitesimal, e na segunda esta hipótese não será considerada.

A.1 Transformação Infinitesimal da Terceira Forma Fundamental

Sob uma transformação infinitesimal de $SO(p-3, q-1)$,

$$x'^{\mu} = x^{\mu} \quad y'^i = y^i + \xi^i(x^{\mu}, y^i)$$

onde $\xi^i = \theta_j^i(x^{\mu})y^j$. Já que $A_{\mu ij} = \frac{\partial \gamma_{\mu i}}{\partial y^j}$, para obter a transformação basta calcular $A'_{\mu ab} = \frac{\partial \gamma'_{\mu a}}{\partial y'^b}$. Começando com $\gamma'_{\mu a}$.

$$\gamma'_{\mu i} = \frac{\partial x^A}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^B}{\partial y'^i} \gamma_{AB} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial y^j}{\partial y'^i} \gamma_{\lambda j} + \frac{\partial y^k}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial y^j}{\partial y'^i} \gamma_{kj} \quad (\text{A.1})$$

Para prosseguir é necessário calcular os termos $\frac{\partial y^j}{\partial y'^i}$ e $\frac{\partial y^k}{\partial x'^{\mu}}$. Notando que as transformações são infinitesimais e portanto basta tomar os termos até primeira ordem em ξ , obtém-se

$$\frac{\partial y^j}{\partial y'^i} = \delta_i^j - \xi_{,i}^j \quad \frac{\partial y^k}{\partial x'^{\mu}} = -\xi_{,\mu}^k$$

Substituindo o resultado acima em (1), obtém-se:

$$\gamma'_{\mu i} = (\delta_i^j - \xi_{,i}^j) \gamma_{\mu j} - \xi_{,\mu}^k g_{ij}$$

Segue que a transformação da terceira forma fundamental é:

$$A'_{\mu ij} = \frac{\partial \gamma'_{\mu i}}{\partial y'^j} = \frac{\partial y^k}{\partial y'^j} \frac{\partial \gamma'_{\mu i}}{\partial y^k} = (\delta_j^k - \theta_j^k) [(\delta_i^l - \theta_i^l) A_{\mu lk} - \theta_{k,\mu}^l g_{il}]$$

Tomando os termos de primeira ordem em θ , resulta

$$A'_{\mu ij} = A_{\mu ij} - \theta_j^k A_{\mu ik} - \theta_i^k A_{\mu kj} - \theta_{j,\mu}^k g_{ik}$$

que é o tipo de transformação de calibre referente às transformações nas normais pelo grupo das pseudo- rotações.

A.2 Transformação da Terceira Forma Fundamental

Nesta teoria, a conexão é fornecida pelo operador $A_\mu = A_{\mu ij} L^{ij}$ que atua nas coordenadas y^i . O operador A_μ têm representação matricial $(A_\mu)_i^k$, definida por $A_\mu(y^k) := (A_\mu)_i^k y^i$ e dada por

$$A_\mu(y^k) = A_{\mu ij} L^{ij}(y^k) = \frac{1}{2} A_{\mu ij} (g^{jk} y^i - g^{ik} y^j) = y^i g^{jk} A_{\mu ij}$$

Portanto $(A_\mu)_i^k = g^{kj} A_{\mu ij}$.

Conforme comentado, o grupo pode atuar ativamente, transformando os vetores normais (que num sistema de coordenadas w^A qualquer do espaço maior pode ser expresso como $\partial_i = N_i^A \frac{\partial}{\partial w^A}$), ou passivamente, atuando nas coordenadas dos vetores. Esta última convenção é a adotada. Um elemento U qualquer do grupo $SO(p, q)$, quando atua nos vetores é representado pelo operador linear R e quando atua nas coordenadas y^i é dado pelo operador inverso R^{-1} (isto é uma convenção).

Para ver como o operador de conexão se transforma sobre ação de U , ou melhor, sua representação matricial $(A_\mu)_i^k$, precisamos saber como $A_{\mu ij}$ se transforma. Mas esta quantidade é formada a partir dos coeficientes N_μ^A . Portanto, vamos ver como o elemento U atua nos coeficientes N_i^A .

Sendo um operador linear R , têm representação matricial R_j^i , e como é o seu inverso que atua nas coordenadas,

$$\bar{y}^i = (R^{-1})_j^i y^j$$

Derivando esta expressão com relação à y^j

$$\delta_j^i = (R^{-1})_k^i \frac{\partial y^k}{\partial \bar{y}^j} \Rightarrow \frac{\partial y^i}{\partial \bar{y}^j} = R_j^i$$

Usando a regra da cadeia,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}^j} = \frac{\partial y^i}{\partial \bar{y}^j} \frac{\partial}{\partial y^i} = R_j^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

No novo sistema de coordenadas produzido por R , o coeficiente da normal \bar{N}_i^A será definido por $\frac{\partial}{\partial \bar{y}^i} = \bar{N}_i^A \frac{\partial}{\partial w^A}$. Pela equação anterior,

$$R_j^i \frac{\partial}{\partial y^i} = \bar{N}_i^A \frac{\partial}{\partial w^A} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y^i} = (R^{-1})_i^j \bar{N}_j^A \frac{\partial}{\partial w^A}$$

Comparando esta última expressão com $\frac{\partial}{\partial y^i} = N_i^A \frac{\partial}{\partial w^A}$, resulta:

$$N_i^A = (R^{-1})_i^j \bar{N}_j^A \quad \text{ou} \quad \bar{N}_j^A = R_j^i N_i^A$$

Vale notar que o operador U é justamente o que deixa a métrica do espaço normal g^{ij} invariante. Isso quer dizer que uma vez que $N_i^A N_j^B G_{AB} = g_{ij}$, temos

$$g_{ij} = \bar{N}_i^A \bar{N}_j^B G_{AB} = (R_i^m N_m^A)(R_j^n N_n^B) G_{AB}$$

Ou seja:

$$g_{ij} = R_i^m R_j^n g_{mn} \tag{A.2}$$

Agora estamos em condições de avaliar a transformação para $A_{\mu ij}$:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\mu ij} &= (\bar{N}_{i\|\mu}^A)(\bar{N}_j^B) G_{AB} = (R_i^k N_k^A)_{\|\mu} (R_j^l N_l^B) G_{AB} \\ &= (R_{i,\mu}^k N_k^A + R_i^k N_{k\|\mu}^A)(R_j^l N_l^B) G_{AB} \\ &= R_{i,\mu}^k R_j^l N_k^A N_l^B G_{AB} + R_i^k R_j^l N_{k\|\mu}^A N_l^B G_{AB} \\ &= R_{i,\mu}^k R_j^l g_{kl} + R_i^k R_j^l A_{\mu kl} \end{aligned}$$

A transformação para a matriz $(\bar{A}_\mu)_i^k$ fica:

$$\begin{aligned} (\bar{A}_\mu)_i^k &= g^{kj} \bar{A}_{\mu ij} \\ &= +g^{kj} R_{i,\mu}^k R_j^l g_{kl} + g^{kj} R_i^k R_j^l A_{\mu kl} \end{aligned}$$

Fazendo uso de duas equações

$$R_{i,\mu}^m R_j^n g_{mn} = R_i^m R_{j,\mu}^n g_{mn}$$

e

$$(R^{-1})_m^k = g^{ij} R_j^n g_{mn}$$

Obtidas da fórmula (A.2), a primeira derivando-a e a segunda fazendo uso das inversas de R e g_{ij} . Substituindo estas duas equações na expressão obtida para $(\bar{A}_\mu)_i^k$, resulta:

$$(\bar{A}_\mu)_i^k = (R^{-1})_l^k (g^{ln} A_{\mu mn}) (R_i^m) - (R^{-1})_{j,\mu}^k R_i^j$$

Uma vez que a matriz acima atua nas coordenadas y^i , o elemento U do grupo pode ser realizado como sendo a matriz (R^{-1}) . Assim a expressão acima torna-se uma realização da equação geral de transformação de calibre (4.6) mostrada na página 55:

$$(\bar{A}_\mu)_i^k = (U)_l^k (A_\mu)_m^l (U^{-1})_i^m - (U)_{j,\mu}^k (U^{-1})_i^j$$

Apêndice B – Exemplo de Imersão e Unificação

O programa se dividirá em 3: a Primeira Parte A será feita para mostrar que é possível deformar uma imersão inicial de buraco negro para um buraco negro carregado. A Parte B será feita para mostrar uma função de imersão que forneça as formas usadas. A parte C será feita para mostrar que as condições de integrabilidade são satisfeitas.

Nesta primeira parte A apresentaremos um modelo no qual mostra-se que, com a perturbação de Nash, é possível obter um potencial de Yang-Mills. Uma possibilidade explícita observada é que, a partir de uma solução de um buraco negro não carregado é possível, através da perturbação nas dimensões extras, obter uma solução do buraco negro carregado.

Neste exemplo, iremos usar o resultado (6.19), da página 93:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R} + g^{ij}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} \left(k_{\mu\alpha i}^{\sim} k_{\nu\beta j}^{\sim} - k_{\alpha\beta i}^{\sim} k_{\mu\nu j}^{\sim} \right) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu i} F_{\mu\nu i}$$

Vemos claramente que a Lagrangeana total \mathcal{L} se decompõe em 3:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{RG} + \mathcal{L}_k + \mathcal{L}_{YM}$$

Onde

$$\mathcal{L}_{RG} = \mathcal{R}$$

é a Lagrangeana da Relatividade Geral (de Einstein-Hilbert), que dá origem à parte geométrica das equações de Einstein.

$$\mathcal{L}_k = g^{ij}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} \left(k_{\mu\alpha i}^{\sim} k_{\nu\beta j}^{\sim} - k_{\alpha\beta i}^{\sim} k_{\mu\nu j}^{\sim} \right)$$

é a Lagrangeana que depende da segunda forma fundamental, k , e dá origem ao termo $\mathcal{Q}_{\mu\nu}$ na equação de Einstein.

$$\mathcal{L}_{YM} = - \frac{1}{4} F^{\mu\nu i} F_{\mu\nu i}$$

é o termo de Yang-Mills, que aqui, depende da terceira forma.

A ação é escrita

$$S = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} \, dx^D$$

Considerando que apenas a primeira forma $R^{\mu\nu}$ e terceira forma $A_{\mu ij}$ aparecem na Lagrangeana \mathcal{L} com termos envolvendo derivadas, consideraremos as equações provindas dos seguintes princípios variacionais:

$$\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} S = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial A_{\mu i}} S = 0$$

Estas equações são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - Q_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} = 0 \quad \text{e} \quad g^{\mu\nu} F_{\nu\lambda i; \mu} - \left[A^\mu, F_{\mu\lambda} \right]_i = 0$$

Que são as equações de Einstein e Maxwell, respectivamente. Porém, como a Lagrangeana \mathcal{L}

que consideramos não contem termos de fonte, é importante adicionar à ela o termo

$$\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_M + J^{\mu i} A_{\mu i}$$

Cuja primeira componente permite introduzir o termo $T_{\mu\nu}$ de fonte na equação de Einstein, e a segunda componente permite introduzir o termo de fonte $J_{\mu i}$ da equação de Yang-Mills. Com esta prescrição, as resulta nas equações

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - Q_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

e

$$g^{\mu\nu} F_{\nu\lambda i; \mu} - \left[A^\mu, F_{\mu\lambda} \right]_i = J_{\lambda i}$$

No modelo que vamos considerar, haverão 2 dimensões extras (pois queremos simular uma fonte carregada eletricamente), de forma que a equação de Yang-Mills é uma equação de Maxwell. Vamos considerar a solução de um buraco negro neutro e tentar perturbá-la para um buraco-negro carregado.

> *restart, with (DifferentialGeometry) : with (Tensor) : with (LinearAlgebra) :*
with (Tools) : with (PDEtools) : with (DEtools) :

A coordenada do espaço menor será denotada por vars.

> vars := (r, θ, φ, t);

vars := r, θ, φ, t (1)

No próximo comando será definido a variedade do espaço menor inicial (não perturbado), denotada V4.

> DGsetup([vars], V4);

frame name: V4 (2)

Vamos agora definir a métrica do espaço menor, denotada por "GSchw", pois o exemplo considerado será a métrica de Schwarzschild. (Lembre-se que esta métrica é a não-perturbada). Ela será escrita em um sistema de coordenadas diferentes, de uma forma que apareçam termos fora da diagonal, para que os cálculos se simplifiquem. (uma derivação desta forma de apresentar a métrica de Schwarzschild pode ser vista no livro do Anderson, Principles of Relativity, pg 387)

V
4
> GSchw := evalDG((1 - 2m/r)*dt&t dt - (1 + 2m/r)*dr&t dr + (-2m/r)*dr&t dt + (-2m/r)*
&t dr - (r^2)*dtheta&t dtheta - (r^2)*((sin(θ))^2)*dphi&t dphi);

GSchw1 := DGinfo(GSchw, "CoefficientList", "all") :

GSchw2 := convert(GSchw, DGArray);

GSchwInv := InverseMetric(GSchw) :

GSchwInv1 := DGinfo(GSchwInv, "CoefficientList", "all") :

GSchwInv2 := convert(GSchwInv, DGArray) :

$$GSchw := -\frac{(r+2m) dr dr}{r} - \frac{2m dr dt}{r} - r^2 d\theta d\theta - r^2 \sin(\theta)^2 d\phi d\phi - \frac{2m dt dr}{r} - \frac{(-r+2m) dt dt}{r}$$

$$GSchw2 := \begin{pmatrix} -\frac{r+2m}{r} & 0 & 0 & -\frac{2m}{r} \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) & 0 \\ -\frac{2m}{r} & 0 & 0 & -\frac{r+2m}{r} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Vamos definir a assinatura das dimensões extras como do tipo espaço.

V4 > $\epsilon := (-1, -1); DimM := nops([\epsilon]) + 4; \text{for } i \text{ from } 5 \text{ to } DimM \text{ do } \epsilon_i := \epsilon_{i-4} \text{ od};$

$\epsilon := -1, -1$

$DimM := 6$

$\epsilon_5 := -1$

$\epsilon_6 := -1$

(4)

Vamos definir a métrica do espaço deformado , que pela equação (6,8) é dada por

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - 2y^i k_{\mu\nu i} + y^i y^j g^{\rho\sigma} k_{\mu\rho i} k_{\nu\sigma j}$$

onde as quantidades em vermelho se referem à primeira e segunda forma fundamentais da variedade não perturbada (no texto estas quantidades estão denotadas com uma barra em cima, mas no Maple esta denotação não é possível). Esta métrica será denotada por $GP_{\mu\nu}$

```
V for  $\mu$  from 1 to 4 do
4 for  $\nu$  from 1 to 4 do
>  $GP_{\mu\nu} := GSchw2_{\mu\nu} - 2 \cdot add(k_{\mu\nu i}(r) \cdot y \| i, i = 5..6) + expand(add(add(y \| i \cdot y \| j$ 
   $\cdot add(add(GSchwInv2_{\rho\sigma} \cdot k_{\rho\mu i}(r) \cdot k_{\sigma\nu j}(r), \rho = 1..4), \sigma = 1..4), i = 5..6), j = 5..6));$ 
od;
od;
```

Uma escolha possível para a segunda forma fundamental cuja perturbação acima forneça Reisner-Nordström é a seguinte:

$k_{\mu\nu i} = -\frac{1}{2a r^2}$ para $i=5$ e μ (ou ν) iguais a um dos elementos do seguinte conjunto: $\{1,4\}$. Caso contrário a segunda forma fundamental será nula. A constante "a" será determinada logo mais, e dependerá da carga elétrica dentro do buraco negro.

Vamos então fazer a substituição acima (chamaremos de SubsRN).

```
V4 > GPseq := [seq(seq(GP_{\mu,\nu}, \nu = 1..4), \mu = 1..4)]:
```

```
V
4 SubsRN := [seq(seq(seq(if((i = 6) and ((\alpha = 1 and \beta = 4) or (\alpha = 4 and \beta = 1) or (\alpha = 1 and \beta = 1),
> = 4 and \beta = 4)), k_{\alpha,\beta,i}(r) = -\frac{1}{2a r^2}, k_{\alpha,\beta,i}(r) = 0), \beta = 1..4), \alpha = 1..4), i = 5..DimM)]:
```

```
V4 > GPseq2 := subs(SubsRN, GPseq):
```

Com os coeficientes da métrica prontos, vamos definir a métrica da variedade perturbada VP4, que terá métrica chamada de RN (com termos fora da diagonal)

```
V \Omega := Tools:-DGinfo("FrameBaseForms"); ss := GenerateTensors([\Omega, \Omega]) : tt := GenerateTensors([\Omega]) :
4
>
```

$$\Omega := [dr, dtheta, dphi, dt] \tag{5}$$

```
V4 > RN := DGzip(GPseq2, ss, "plus");
RN2 := convert(RN, DGArray);
RNinv := InverseMetric(RN);
RNinv2 := convert(RNinv, DGArray):
```

$$\begin{aligned}
RN := & -\frac{(ar^2 + 2arm - y6) dr dr}{ar^2} - \frac{(2arm - y6) dr dt}{ar^2} - r^2 dtheta dtheta - r^2 \sin(\theta)^2 dphi dphi \\
& - \frac{(2arm - y6) dt dr}{ar^2} - \frac{(-ar^2 + 2arm - y6) dt dt}{ar^2} \\
RN2 := & \begin{pmatrix} -\frac{ar^2 + 2arm - y6}{ar^2} & 0 & 0 & -\frac{2arm - y6}{ar^2} \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin(\theta)^2 & 0 \\ -\frac{2arm - y6}{ar^2} & 0 & 0 & -\frac{-ar^2 + 2arm - y6}{ar^2} \end{pmatrix} \quad (6)
\end{aligned}$$

Fica evidente que a métrica de Reissner-Nordström pode ser obtida pela perturbação, na qual a distância da perturbação $y6$ fornece a carga. Mas temos que verificar se a equação de Einstein modificada é satisfeita. Para isso, temos que calcular todos os termos que aparecem nela. Com o que já foi feito até agora, é possível calcular o tensor de Einstein, que denotaremos por TERN.

v4 > $CRN := Christoffel(RN)$:

v4 > $RRN := CurvatureTensor(CRN)$:

v4 > $ETRN1 := EinsteinTensor(RN, RRN)$:

v4 > $ETRN2 := RaiseLowerIndices(RN, ETRN1, [1, 2])$:

v4 for μ from 1 to 4 do for ν from 1 to 4 do TERN $_{\mu\nu} := convert(ETRN2, DGArray)_{\mu\nu}$: od od
>

È possível também definir o tensor $Q_{\mu\nu}$. Ele é dado por

$$Q_{\mu\nu} = g^{ij} g^{\rho\sigma} \left(k_{\mu\rho}^{\sim} k_{\nu\sigma}^{\sim} - k_{\mu\nu}^{\sim} k_{\rho\sigma}^{\sim} \right) - \frac{1}{2} \left(k^{\sim\alpha\beta i} k_{\alpha\beta i}^{\sim} - g^{\tilde{y}} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} k_{\alpha\beta i}^{\sim} k_{\gamma\delta j}^{\sim} \right) g_{\mu\nu}$$

Mas vale lembrar que

$$k_{\mu\nu i}^{\sim} = k_{\mu\nu i} - y^j g^{\rho\sigma} k_{\mu\rho j} k_{\nu\sigma i}$$

E esta última quantidade chamaremos de "kp", pois é a segunda forma perturbada.

```

V for  $\mu$  from 1 to 4 do
4 for  $\nu$  from 1 to 4 do
> for  $i$  from 5 to 6 do
     $kp_{\mu,\nu,i}^j := k_{\mu,\nu,i}(r) - \text{expand}(\text{add}(y \parallel j \cdot \text{add}(\text{add}(GSchwInv2_{\rho,\sigma} \cdot k_{\rho,\mu,j}(r) \cdot k_{\sigma,\nu,i}(r), \rho = 1..4), \sigma =$ 
     $..4), j = 5..6));$ 

od:
od:
od:

```

```

V4 > for  $i$  from 5 to 6 do  $SeqKp \parallel i := [seq(seq(kp_{\mu,\nu,i}^j, \nu = 1..4), \mu = 1..4)];$  od:

```

```

V4 > for  $i$  from 5 to 6 do  $SeqKp2 \parallel i := \text{subs}(\text{SubsRN}, SeqKp \parallel i);$  od:

```

```

V4 > for  $i$  from 5 to 6 do  $kp \parallel i := \text{DGzip}(SeqKp2 \parallel i, ss, "plus");$  od:

```

O termo $Q_{\mu\nu}$ será calculado. O primeiro termo será denotado por Q1, o segundo Q2 e o último termo entre parênteses será denotado por Q3 . Como $kp_5=0$, só consideraremos kp_6 ;

```

V4 >  $Q1a := \text{evalDG}(RNInv \&t kp6 \&t kp6);$ 
 $Q1b := \text{ContractIndices}(Q1a, [[1, 4], [2, 6]]);$ 
 $Q2b := \text{ContractIndices}(Q1a, [[1, 5], [2, 6]]);$ 
 $Q1 := \text{convert}(Q1b, DGArray);$ 
 $Q2 := \text{convert}(Q2b, DGArray);$ 

```

```

V4 >  $IInv := \text{RaiseLowerIndices}(RNInv, kp6, [1, 2]);$ 
 $Q3a := \text{evalDG}(IInv \&t kp6 \&t RN);$ 
 $Q3b := \text{ContractIndices}(Q3a, [[1, 3], [2, 4]]);$ 
 $Q4a := \text{evalDG}(RNInv \&t RNInv \&t kp6 \&t kp6 \&t RN);$ 

```



```

Q4b := ContractIndices(Q4a, [[1, 5], [2, 6], [3, 7], [4, 8]]) :
Q3 := convert(Q3b, DGArray) :
Q4 := convert(Q4b, DGArray) :

```

```

V4 > for v from 1 to 4 do
  for mu from 1 to 4 do
    Q_{mu,v} := (Q1)_{mu,v} - (Q2)_{mu,v} + (1/2) ((Q3)_{mu,v} - (Q4)_{mu,v});
  od:
od:

```

```

V4 > seq(seq(Q_{mu,v}, v=1..4), mu=1..4)

```

$$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \quad (7)$$

Isto indica que $Q_{\mu\nu}$ é nulo

O último termo que falta para completar a equação de Einstein é o tensor energia momento do campo de calibre

$$E_{\mu\nu} = -g^{ij} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha i} F_{\beta\nu j} + \frac{1}{4} g^{ij} g_{\mu\nu} F_{\sigma\alpha i} g^{\alpha\beta} F_{\beta\rho j} g^{\rho\sigma}$$

Como só iremos considerar duas dimensões extras,

$$F_{\mu\nu i} = A_{\nu i, \mu} - A_{\mu i, \nu} \quad e$$

$$A_{\mu i} = y^j A_{\mu j i}$$

Já que estamos interessados na simulação de um campo Coulombiano, e a terceira forma faz papel de potencial de calibre, faremos

$$A_{\mu j i} = \frac{1}{r}$$

```

V4 > for mu from 1 to 4 do
  for v from 1 to 4 do
    for i from 5 to 6 do
      F_{mu,v,i} := add(j || j . simplify(diff(A_{v,j,i}(r), vars[mu]) - diff(A_{mu,j,i}(r), vars[v])), j=5..6);
    od:
  od:
od:

```

```

od:
od:
od:

V for v from 1 to 4 do
4 for μ from 1 to 4 do
> E_{μ v} := -add(add(add(e_i · RNnv2_{α β} · F_{μ α i} · F_{β v i} i = 5..6), α = 1..4), β = 1..4) + 1/4 RNQ_{μ v}
· add(add(add(add(add(e_i · RNnv2_{α β} · RNnv2_{η δ} · F_{η α i} · F_{β δ i} i = 5..6), δ = 1..4), η = 1..4), α = 1
..4), β = 1..4);

od:
od:

```

Vamos verificar se a equação de Einstein é satisfeita. Para isso, faremos

$$EQE_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - Q_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}$$

```

V for v from 1 to 4 do for μ from 1 to 4 do EQE_{μ v} := TERN_{μ v} - Q_{μ v} + E_{μ v}; od: od:
4
>

```

Vamos substituir agora o campo Coulombiano

```

V AantDiag := [seq(seq(seq(iff(i = j, A_{μ i j}(r) = 0, A_{μ j i}(r) = -A_{μ i j}(r)), j = i..DimM), i = 5..DimM), μ
4
> ..4)];

```

$$Coulomb := [seq(seq(seq(iff(\alpha = 4, A_{\alpha i j}(r) = \frac{1}{r}, A_{\alpha i j}(r) = 0), \alpha = 1..4), j = 6), i = 5)];$$

$$AantDiag := [A_{1,5,5}(r) = 0, A_{1,6,5}(r) = -A_{1,5,6}(r), A_{1,6,6}(r) = 0, A_{2,5,5}(r) = 0, A_{2,6,5}(r) = -A_{2,5,6}(r),$$

$$A_{2,6,6}(r) = 0, A_{3,5,5}(r) = 0, A_{3,6,5}(r) = -A_{3,5,6}(r), A_{3,6,6}(r) = 0, A_{4,5,5}(r) = 0, A_{4,6,5}(r) = -A_{4,5,6}(r),$$

$$A_{4,6,6}(r) = 0]$$

$$\text{Coulomb} := \left[A_{1,5,6}(r) = 0, A_{2,5,6}(r) = 0, A_{3,5,6}(r) = 0, A_{4,5,6}(r) = \frac{1}{r} \right] \quad (8)$$

V4 > `eq := expand(subs(Coulomb, subs(AantiDiag, [seq(seq(EQE_{\mu, \nu}, \nu = 1..4), \mu = 1..4)]))));`

$$\begin{aligned} \text{eq} := & \left[-\frac{y6}{ar^4} - \frac{2y6m}{ar^5} + \frac{y6^2}{a^2r^6} - \frac{1}{2} \frac{y6^2}{r^4} - \frac{y6^2m}{r^5} + \frac{1}{2} \frac{y6^3}{ar^6} - \frac{1}{2} \frac{y5^2}{r^4} - \frac{y5^2m}{r^5} + \frac{1}{2} \frac{y5^2y6}{ar^6}, 0, 0 \right. \\ & - \frac{2y6m}{ar^5} + \frac{y6^2}{a^2r^6} - \frac{y6^2m}{r^5} + \frac{1}{2} \frac{y6^3}{ar^6} - \frac{y5^2m}{r^5} + \frac{1}{2} \frac{y5^2y6}{ar^6}, 0, \frac{y6}{ar^2} + \frac{1}{2} \frac{y6^2}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{y5^2}{r^2}, 0, 0, 0, 0, \\ & \left. \frac{\sin(\theta)^2 y6}{ar^2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(\theta)^2 y6^2}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(\theta)^2 y5^2}{r^2}, 0, -\frac{2y6m}{ar^5} + \frac{y6^2}{a^2r^6} - \frac{y6^2m}{r^5} + \frac{1}{2} \frac{y6^3}{ar^6} - \frac{y5^2m}{r^5} \right) \\ & + \frac{1}{2} \frac{y5^2y6}{ar^6}, 0, 0, \frac{y6}{ar^4} - \frac{2y6m}{ar^5} + \frac{y6^2}{a^2r^6} + \frac{1}{2} \frac{y6^2}{r^4} - \frac{y6^2m}{r^5} + \frac{1}{2} \frac{y6^3}{ar^6} + \frac{1}{2} \frac{y5^2}{r^4} - \frac{y5^2m}{r^5} \\ & + \frac{1}{2} \frac{y5^2y6}{ar^6} \end{aligned} \quad (9)$$

O próximo comando fornece uma solução para as constantes "a", "y5" e "y6".

V4 > `allvalues(solve(eq, [y5, y6]))`

$$\left[\left[y5 = \sqrt{-\frac{2y6 + y6^2 a}{a}}, y6 = y6 \right], \left[y5 = -\sqrt{-\frac{2y6 + y6^2 a}{a}}, y6 = y6 \right] \right] \quad (10)$$

Sendo y6 a carga, faremos

$$y6 = q \quad y5 = q \quad e \quad a = -\frac{1}{q}$$

Que fornece uma solução possível para o sistema acima

V4 > `subs([y6 = q, y5 = q, a = -1/q], eq)`

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0] \quad (11)$$

Isto indica que a equação de Einstein modificada é satisfeita, desde que se escolha as constantes adequadamente.

O próximo passo é verificar se a equação de Maxwell é válida.

$$g^{\mu\nu} F_{\nu\lambda;i;\mu} = 0$$

Para isso, vamos calcular primeiro $F_{\mu\nu;\lambda}$

```
V4 > F5 := expand(subs(Coulomb, subs(AantDiag, [seq(seq(F_{\mu, \nu, 5}, \nu = 1..4), \mu = 1..4)]))) :
      F6 := expand(subs(Coulomb, subs(AantDiag, [seq(seq(F_{\mu, \nu, 6}, \nu = 1..4), \mu = 1..4)]))) :
```

```
V4 > for i from 5 to 6 do FT[i] := DGzip(F[i], ss, "plus") ; od:
```

```
V4 > for i from 5 to 6 do FCD[i] := CovariantDerivative(FT[i], CRN) ; od:
```

```
V4 > for i from 5 to 6 do
      EMa[i] := evalDG(RNinv & FCD[i]) :
      EM[i] := ContractIndices(EMa[i], [[1, 3], [2, 4]]) :
    od:
```

A equação de Maxwell está contida no tensor EM5 e EM6:

```
V4 > EMS
```

$$0 \text{ dr} \quad (12)$$

v4 > EM6

$$0 \, dr \tag{13}$$

Isto indica que as equações de Maxwell são satisfeitas;

Vamos para a parte B, no qual vamos mostrar uma função de imersão X que forneça a segunda e terceira forma fundamentais usadas na parte A. Isso será feito usando as equações

$$k_{\mu\nu} = -Z^A_{,\mu} N^B_{\alpha,\nu} G_{AB}$$

e

$$A^A_{\mu ij} = N^A_{i,\mu} N^B_j G_{AB}$$

Mas antes vamos definir a variedade do espaço maior, denotada por M6, com métrica GM

v4 > `VarM := (r, theta, phi, t, y5, y6); DGsetup([VarM], M6);`

`VarM := r, theta, phi, t, y5, y6`

$$\text{frame name: } M6 \tag{14}$$

```

M for mu from 1 to 4 do
6 for nu from 1 to 4 do
> GMa_{mu,nu} := GSchw2_{mu,nu} - 2 * add(k_{mu,nu,i}(r) * y || i, i = 5..6) + expand(add(add(y || i * y || j
    * add(add(GSchwInv2_{rho,sigma} * k_{rho,mu,i}(r) * k_{sigma,nu,j}(r), rho = 1..4), sigma = 1..4), i = 5..6), j = 5..6)) + expand(add(e,
    * add(A_{mu,m,i}(r) * y || m, m = 5..DimM) * add(A_{nu,n,i}(r) * y || n, n = 5..DimM), i = 5..DimM));

od:
od:

```

M6 > for μ from 1 to 4 do

 for i from 5 to $DimM$ do

$GMa_{\mu,i} := add(A_{\mu,j,i}(r) \cdot y \| j, j = 5 .. DimM);$

$GMa_{i,\mu} := add(A_{\mu,j,i}(r) \cdot y \| j, j = 5 .. DimM);$

 od:

od:

M for i from 5 to $DimM$ do for j from 5 to $DimM$ do if $i = j$ then $GMa_{i,j} := e_i$; else $GMa_{i,j} := 0$; end if od: oi

6

>

M6 > $GMseq := [seq(seq(GMa_{A,B}, B = 1 .. DimM), A = 1 .. DimM)]:$

M6 > $\Omega M := Tools:-DGinfo("FrameBaseForms"); ssM := GenerateTensors([\Omega M, \Omega M]):$

$$\Omega M := [dr, dtheta, dphi, dt, dy5, dy6] \quad (15)$$

M6 > $GMseq2 := subs(SubsRM, (subs(Coulomb, subs(AantDiag, GMseq)))):$

M6 > $GM := DGzip(GMseq2, ssM, "plus");$

$CM := Christoffel(GM):$

$RM := CurvatureTensor(CM):$

$RicM := RicciTensor(RM):$

$EscM := RicciScalar(GM, RM):$

$$\begin{aligned} GM := & -\frac{(ar^2 + 2arm - y6) dr dr}{ar^2} - \frac{(2arm - y6) dr dt}{ar^2} - r^2 dtheta dtheta - r^2 \sin(\theta)^2 dphi dphi \\ & - \frac{(2arm - y6) dt dr}{ar^2} - \frac{(-ar^2 + 2arm + y5^2 a + y6^2 a - y6) dt dt}{ar^2} - \frac{y6 dt dy5}{r} + \frac{y5 dt dy6}{r} \\ & - \frac{y6 dy5 dt}{r} - dy5 dy5 + \frac{y5 dy6 dt}{r} - dy6 dy6 \end{aligned} \quad (16)$$

M6 > $\text{FbfM} := \text{Tools}:-\text{DGinfo}(\text{"FrameBaseForms"})$; $\text{FbvM} := \text{Tools}:-\text{DGinfo}(\text{"FrameBaseVectors"})$;

Vamos agora definir as funções de imersão e ver se ela satisfaz a isometria.

M $X1 := (\text{vars}) \rightarrow r$; $X2 := (\text{vars}) \rightarrow \theta$; $X3 := (\text{vars}) \rightarrow \phi$; $X4 := (\text{vars}) \rightarrow t$; $X5 := (\text{vars}) \rightarrow 0$; $X6 := (\text{vars}) \rightarrow 0$

$X1 := \text{vars} \rightarrow r$

$X2 := \text{vars} \rightarrow \theta$

$X3 := \text{vars} \rightarrow \phi$

$X4 := \text{vars} \rightarrow t$

$X5 := \text{vars} \rightarrow 0$

$X6 := \text{vars} \rightarrow 0$

(17)

M6 > $\text{Transf1} := [\text{seq}(\text{vars}_\mu = \text{vars}_\mu, \mu = 1..4), y5 = 0, y6 = 0]$;

M6 > $\text{Transf} := \text{Transformation}(V4, M6, \text{Transf1})$;

$\text{Transf} := [r = r, \theta = \theta, \phi = \phi, t = t, y5 = 0, y6 = 0]$

(18)

M6 > $\text{JTransf} := \text{Tools}:-\text{DGinfo}(\text{Transf}, \text{"JacobianMatrix"})$;

```

TTransf := Transpose(JTransf) :
GMa := subs(Transf1, convert(GM, DGArray)) :
GMb := convert(GMa, Matrix) :
simplify(simplify(TTransf.GMb.JTransf)) ;

```

$$\begin{pmatrix} -\frac{r+2m}{r} & 0 & 0 & -\frac{2m}{r} \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) & 0 \\ -\frac{2m}{r} & 0 & 0 & -\frac{-r+2m}{r} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Esta última conta foi feita apenas para mostrar que a condição de isometria é satisfeita. O que indica que a imersão é de Schwarzschild.

A próxima tarefa é definir os vetores tangentes (denotados por T_i , onde i é a direção considerada, com respeito à ordem de definição de variáveis) e normais (denotados por N). Primeiro os tangentes.

```

M6 > ChangeFrame(V4);

```

$M6$ (20)

```

V4 > FbvV4 := Tools:-DGinfo("FrameBaseVectors") :

```

```

V Ident := [seq(vars_μ = vars_μ, μ = 1..4)]; for μ from 1 to 4 do e_vars_μ := Pushforward(Transf, FbvV4_μ, Ident);
4
>

```

```

Ident := [r = r, θ = θ, φ = φ, t = t]

```

```

e_r := D_r

```


$$e_{\theta} := D_theta$$

$$e_{\phi} := D_phi$$

$$e_t := D_t \tag{21}$$

O comando a seguir seleciona vetores que, adicionados aos tangentes geram o espaço tangente total.

M6 > $TgVects := [seq(e_{vars, \mu = 1..4})]$; $Compl := ComplementaryBasis(TgVects, FbvM)$;

$$Compl := [D_y5, D_y6] \tag{22}$$

M6 > $CoDimM := DimM - 4$;

$$CoDimM := 2 \tag{23}$$

M6 > $normalVect := [seq(Compl_i, i = 1..CoDimM)]$;

$$normalVect := [D_y5, D_y6] \tag{24}$$

O próximo passo é somente para verificação da métrica do espaço maior.

M6 > $Verif := [op(TgVects), op(normalVect)]$;

M6 > **for** i **from** 1 **to** $DimM$ **do**
for j **from** 1 **to** $DimM$ **do**
 $f := (i, j) \rightarrow ContractIndices(evalDG(GM \&t Verif_i \&t Verif_j), [[1, 3], [2, 4]])$;

od:
od:

M > Matrix(DimM,f)

$$\begin{pmatrix} -\frac{ar^2 + 2arm - y\delta}{ar^2} & 0 & 0 & -\frac{2arm - y\delta}{ar^2} & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin(\theta)^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2arm - y\delta}{ar^2} & 0 & 0 & -\frac{-ar^2 + 2arm + y\delta^2 a + y\delta^2 a - y\delta}{ar^2} & -\frac{y\delta}{r} & \frac{y\delta}{r} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{y\delta}{r} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{y\delta}{r} & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Chamaremos o símbolo de Christoffel Γ^B_{AC} do espaço maior de $Y_{A,B,C}$. A quantidade $X^A_{,\mu}$ de $Z_{A,\mu}$.

M6 > for A from 1 to DimM do for μ from 1 to 4 do $Z_{A,\mu} := \frac{\partial}{\partial vars_{\mu}} X \parallel A(vars)$; od od:

M6 > for A from 1 to DimM do
for B from 1 to DimM do
for C from 1 to DimM do
 $Y_{A,B,C} := \text{simplify}(\text{subs}(\text{Transf1}, \text{convert}(CM, DGArray)_{A,B,C}))$;
od:
od:
od:

Definiremos o tensor $N^A_{i,\mu}$, onde i indica qual é a normal (escolhidas entre as codimensão normais), A indica qual é a componente deste vetor no espaço M e μ indica qual a direção (tangente) de derivação. Este objeto sera denotado por $N_{A,\mu,i}$, onde as letras A, i e μ são as indicadas anteriormente.

O objeto N^A_i será denotado por $n_{A,i}$

```
M6 > for i from 5 to DimM do
  for A from 1 to DimM do
     $n_{A,i} := \text{simplify}(\text{GetComponents}(\text{Comp}[i - 4], \text{FbvM})[A]);$ 
  od:
od:
```

```
M for i from 5 to DimM do
6 for B from 1 to DimM do
> for  $\mu$  from 1 to 4 do
 $N_{B,\mu,i} := \text{simplify}\left(\frac{\partial}{\partial \text{vars}_\mu} n_{B,i} + \text{add}(\text{add}(Y_{A,B,C} \cdot Z_{A,\mu} \cdot n_{C,i}, C = 1 \dots \text{DimM}), A = 1 \dots \text{DimM})\right);$ 
od:
od:
od:
```

Vamos obter a segunda forma fundamental,

$$k_{\mu\nu} = -X^A_{,\mu} N^B_{\alpha,\nu} G_{AB}$$

```
M6 > for i from 5 to DimM do
  for  $\mu$  from 1 to 4 do
    for  $\nu$  from 1 to 4 do
 $k_{\mu,\nu,i} := \text{simplify}(\text{add}(\text{add}(-Z_{A,\mu} \cdot N_{B,\nu,i} \cdot G_{A,B}, A = 1 \dots \text{DimM}), B = 1 \dots \text{DimM}));$ 
    od:
  od:
od:
```

A segunda forma é

```
M6 for i from 5 to DimM do  $II_i := (\mu, \nu) \rightarrow k_{\mu,\nu,i};$  od: for i from 5 to DimM do  $k[i] := \text{Matrix}(4, II_i);$  od:
>
```

```
M6 > k5
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

M6 > k6

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2\alpha r^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\alpha r^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\alpha r^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\alpha r^2} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Isto está de acordo com a segunda forma utilizada na parte A.

Agora vamos obter a terceira forma fundamental

$$A_{\mu ij} = N_{i, \mu}^A N_j^B G_{AB}$$

O objeto $N_{i, \mu}^A$ será denotado por n_{Ai}

```
M6 > for i from 5 to DimM do
  for j from 5 to DimM do
    for μ from 1 to 4 do
      Aμ,i,j := simplify( add( add( NA,μ,i · nB,j · GMA,B, A = 1 .. DimM ), B = 1 .. DimM ) );
    od:
  od:
od:
```

```
M6 > for i from 5 to DimM do for j from 5 to DimM do A||i||j := [ seq( Aμ,i,j, μ = 1 .. 4 ) ]; od: od:
```

M6 > A56

$$\left[0, 0, 0, \frac{1}{r}\right] \quad (28)$$

Esta é exatamente a terceira forma que usamos na parte A. Encerra-se aqui o cálculo das formas fundamentais.

Agora vamos à Parte C, dedicada ao cálculo das condições de integrabilidade. Como estas condições (equações de Gauss, Codazzi e Ricci) envolvem derivadas covariantes, vamos definir os tensores segunda e terceira forma fundamentais, denotados por , respectivamente.

M6 > `ChangeFrame(V4);`

$$M6 \quad (29)$$

V4 > `Theta := Tools:-DGinfo("FrameBaseForms"); Four := GenerateTensors([Theta, Theta, Theta, Theta]):`

$$\Theta := [dr, dtheta, dphi, dt] \quad (30)$$

V4 > `for i from 5 to DimM do
 si := [seq(seq(kα β i, β = 1..4), α = 1..4)];
 od;
 for i from 5 to DimM do
 IIi := DGzip(si, ss, "plus");
 od;`

V4 > `for i from 5 to DimM do
 for j from 5 to DimM do
 teri,j := [seq(Aμ i,j, μ = 1..4)];
 od;
 od;
 for i from 5 to DimM do
 for j from 5 to DimM do
 IIIi,j := DGzip(teri,j, tt, "plus");`

od:
od:

Agora vamos escrever a equação de Gauss,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \left(k_{\alpha\mu}^i k_{\beta\nu i} - k_{\alpha\nu}^i k_{\beta\mu i} \right) + \mathfrak{R}_{ABCD} X^A_{,\alpha} X^B_{,\beta} X^C_{,\mu} X^D_{,\nu}$$

o termo do lado esquerdo será denotado por TG1 e os termos do lado direito serão denotados por TG2 e TG3, respectivamente.

M6 > *CGSchw* := *Christoffel*(*GSchw*) :

V4 > *RGSchwA* := *CurvatureTensor*(*CGSchw*) :

V4 > *RGSchwB* := *RaiseLowerIndices*(*GSchw*, *RGSchwA*, [1]) :

V4 > for μ from 1 to 4 do
for ν from 1 to 4 do
for α from 1 to 4 do
for β from 1 to 4 do

$TG1_{\alpha, \beta, \mu, \nu} := \text{convert}(RGSchwB, DGArray)_{\alpha, \beta, \mu, \nu} :$

od:
od:
od:
od:

V4 > *RMB* := *RaiseLowerIndices*(*GM*, *RM*, [1]) :

M6 > for *F* from 1 to 6 do
for *B* from 1 to 6 do
for *C* from 1 to 6 do
for *E* from 1 to 6 do

$RMC_{F, B, C, E} := \text{convert}(RMB, DGArray)_{F, B, C, E}$

```

od:
od:
od:
od:

```

```

M for  $\mu$  from 1 to 4 do
6 for  $\nu$  from 1 to 4 do
> for  $\alpha$  from 1 to 4 do
    for  $\beta$  from 1 to 4 do

```

```

        TG3 $\alpha, \beta, \mu, \nu$  := add(add(add(add(RMCA, B, C, E · ZA,  $\alpha$  · ZB,  $\beta$  · ZC,  $\mu$  · ZE,  $\nu$ , A = 1 .. DimM), B = 1 .. DimM),
C = 1 .. DimM), E = 1 .. DimM) :

```

```

od:
od:
od:
od:

```

```

M6 > for  $\mu$  from 1 to 4 do
    for  $\nu$  from 1 to 4 do
    for  $\alpha$  from 1 to 4 do
    for  $\beta$  from 1 to 4 do

```

```

        TG2 $\alpha, \beta, \mu, \nu$  := add( $e_i \cdot k_{\alpha, \mu, i} \cdot k_{\beta, \nu, i} - e_i \cdot k_{\alpha, \nu, i} \cdot k_{\beta, \mu, i}$ , i = 1 .. DimM)

```

```

od:
od:
od:
od:

```

```

M Egauss := simplifi(subs([y5 = 0, y6 = 0], [seq(seq(seq(seq(TG1 $\alpha, \beta, \mu, \nu$  - TG2 $\alpha, \beta, \mu, \nu$  - TG3 $\alpha, \beta, \mu, \nu$ ,  $\nu =$ 
6
> ..4),  $\mu = 1..4$ ),  $\beta = 1..4$ ),  $\alpha = 1..4$ ]))):

```

A equação de Gauss está contida no sistema Egauss,

Agora vamos escrever a equação de Codazzi,

$$k_{\mu \nu i; \lambda} - k_{\mu \lambda i; \nu} =$$

$$\left(A^j_{\lambda i} k_{\mu \nu j} - A^j_{\nu i} k_{\lambda \mu j} \right) + \mathfrak{R}_{ABCD} X^A_{,\mu} N^B_i X^C_{,\nu} X^D_{,\lambda}$$

O tensor $k_{\mu\nu i;\lambda}$ será denotado por $dII_{\mu,\nu,i,\lambda}$

M6 > $CGSchw := Christoffel(GSchw)$:

```

V4 > for i from 5 to DimM do
    dIIa_i := CovariantDerivative(II_i, CGSchw)
    od:
    for i from 5 to DimM do
        dIIb_i := convert(dIIa_i, DGArray) :
        od:
        for i from 5 to DimM do
            dIIc || i := dIIb_i
            od:
            for i from 5 to DimM do
                for mu from 1 to 4 do
                    for nu from 1 to 4 do
                        for lambda from 1 to 4 do
                            dII_{mu,nu,i,lambda} := (dIIc || i)_{mu,nu,lambda}
                        od:
                    od:
                od:
            od:
        od:
    od:

```

Agora vamos escrever as equações de Codazzi.

```

V for mu from 1 to 4 do
4 for i from 5 to 6 do
> for alpha from 1 to 4 do
    for beta from 1 to 4 do

```

$$TC3_{\alpha, \beta, \mu, i} := add(add(add(add(RMC_{A,B,C,E} \cdot Z_{A,\alpha} \cdot Z_{C,\beta} \cdot Z_{E,\mu} \cdot n_{B,i}, A=1..DimM), B=1..DimM), E=1..DimM), i=1..DimM) :$$

```

od:
od:
od:

```



```

    od:
    od:
  for i from 5 to DimM do
  for j from 5 to DimM do
  for  $\alpha$  from 1 to 4 do
  for  $\beta$  from 1 to 4 do
     $dIII_{\alpha, i, j, \beta} := (dIII \| i \| j)_{\alpha, \beta}$ 
    od:
    od:
    od:
    od:

```

Vamos agora ao TR1

```

V for i from 5 to DimM do
4 for j from 5 to DimM do
>    $TR1a_{i,j} := [seq(seq(seq(seq(k_{\mu, \alpha, i} \cdot k_{\nu, \beta, j} - k_{\mu, \beta, i} \cdot k_{\nu, \alpha, j}, \beta = 1..4), \nu = 1..4), \alpha = 1..4), \mu = 1..4)]$ :

```

```

    od:
    od:
  for i from 5 to DimM do
  for j from 5 to DimM do
     $TR1b_{i,j} := DGzip(TR1a_{i,j}, Four, "plus")$ :
    od:
    od:
  for i from 5 to DimM do
  for j from 5 to DimM do
     $TR1c_{i,j} := evalDG(GSchwInv \&t TR1b_{i,j})$ :
    od:
    od:
  for i from 5 to DimM do
  for j from 5 to DimM do
     $TR1d_{i,j} := ContractIndices(TR1c_{i,j}, [[1, 3], [2, 5]])$ :
    od:
    od:

```

```

V4 > for i from 5 to DimM do
    for j from 5 to DimM do
       $TR1e_{i,j} := convert(TR1d_{i,j}, DGArray)$ :
      od:
      od:
    for i from 5 to DimM do
    for j from 5 to DimM do

```


Referências

- [1] A. Salam (1993) em *A unificação das Forças Fundamentais: O Grande desafio da Física Contemporânea* , Ed. Jorge Zahar.
- [2] I. Kant (1998) em *Critique of Pure Reason* , traduzido e editado por Paul Guyer e Allen W. Wood. Cambridge University Press.
- [3] H. Poincaré (1952) em *Science and Hypothesis*, Courier Dover Publications.
- [4] B. Riemann (1873) em *On the Hypotesis Whith Lie at the Basis of Geometry*, translated by W. K. Clifford. Nature 8, 114-117, 136-137 .
- [5] E. Scholz (1980) em *Erhard Geschichte des Mannigfaltikeitsbegriff von Riemann bis Poincaré*, Base: Birkha User.
- [6] C. F. Gauss (2005) em *General Investigations of Curved Surfaces* , translated by James Cadall Morehead and Adam Miller Hildebeitel, edited with an introduction and notes by Peter Pesic, Dover.
- [7] R. Torretti (1978) em *Philosophy of Geometry from Riemann to Poncaré* , Dordrecht: D. Reidel.
- [8] B. O'Neil (1996) em *Elementary Differential Geometry* , Academic, New York, NY.
- [9] M. P. Carmo (1976) em *Diferencial Geometry of Curves and Surfaces* , Prentice-Hall.
- [10] C. V. Westenholz (1981) em *Differential Forms in Mathematical Physics, capítulo 8* , North-Holland Publishing Company.
- [11] Misner, Thorne and Wheeler (1970) em *Gravitation* , Freeman and Company.

- [12] M. Schemberg (1984) em *Pensando a Física*, São Paulo: Brasiliense.
- [13] L. Schläfli (1873) em *Nota Alla memoria del Signor Beltrani Sugli Spazii di Curvatura Costante*, *Annali di Matematica Pura et Applicata* 5, 170.
- [14] E. Cartan (1928) em *Annales De La Société Polonaise De Mathématique* 6, 1.
- [15] M. Janet (1926) em *Annales De La Société Polonaise De Mathématique* 5, 38.
- [16] C. Burstin (1931) em *Rec. Math. Moscou* 38, 74.
- [17] J. Nash (1956) em *The Annals of Mathematics* 63, 20.
- [18] R. Greene (1970) em *Memoirs of Mathematical Society*, 97.
- [19] T. Keti (1988) em *Introdução à Geometria Diferencial*, editora UNB.
- [20] L. P. Eisenhart (1966) em *Riemannian Geometry* Princeton U.P., Reprint.
- [21] P. M. Morse (1965) em *Thermal Physics, second ed. pgs 28-30*, *Phys. Rev.D* 31, 262.
- [22] K. Moriyasu (1983) em *An Elementary Primer For Gauge Theory*, World Scientific Co Pte Ltd.
- [23] H. Weyl (1922) em *Space Time Matter*. Dover, New York.
- [24] H. Weyl (1929) em *Zeit.Phys.* 56, 330.
- [25] C.N. Yang e R. Mills (1954) em *Phys. Rev.* 96, 191.
- [26] H. Goldstein (2001) em *Classical Mechanics*, Terceira edição, Addison Wesley.
- [27] P. Bergmann (1979) em *Physics Today*, 44, March.
- [28] V. Fock (1927) em *Zeit. Phys.* 39, 226.
- [29] F. London (1927) em *Zeit. Phys.* 42, 375.
- [30] M. D. Maia (2011) em *Geometry of the Fundamental Interactions: On Riemann's Legacy to High Energy Physics and Cosmology*, Springer.

- [31] T. Appelquist, A. Chodos e P. Freund (1987) em *Modern Kaluza-Klein Theories*, Addison Wesley.
- [32] J. Vinet (2005) em *Aspects of Braneworld Cosmology*, PhD Thesis, McGill University.
- [33] G. Nordström (1912) em *Zur theorie der gravitation vom standpunkt des relativitätsprinzips* , Ann. Phys. 42, 533-554.
- [34] T. Kaluza (1921) em *Zum Unitätsproblem der Physik* , Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitz.ber, 966 .
- [35] H. Thirring (1918) em Phys. Zeits. 19, 204 .
- [36] O. B. Klein (1926) em *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie* , Zeit. für Phys, 37, 895-906.
- [37] O. B. Klein (1926) em *The atomicity of electricity as a quantum theory law* , Nature 118, 516.
- [38] Y. R. Thiry (1948) em *Les équations de la théorie unitaire de Kaluza* , Comptes Rendus 226, 216 .
- [39] A. Einstein e P. Bergamann (1938) em Ann. Math. 39, 683 .
- [40] B. DeWitt (1964) em *Relativity, Groups and Topology* Gordon and Breach, NY.
- [41] R. Kerner (1968) em Ann. Inst. H. Poincaré, 9, 143.
- [42] Y. M. Cho (1975) em J. Math Phys, 16, 2029.
- [43] E. Cremmer e J. Scherk (1976) em Nucl. Phys. B108, 409.
- [44] R. Coquereaux and Jadczyk (1988) em *Riemannian Geometry, Fiber Bundles, Kaluza-Klein Theories and All That...* World Scientific.
- [45] J. F. Luciani (1978) em Nucl. Phys. B135, 111.
- [46] P. Jordan (1959) em Z.F. Physik 157, 112.
- [47] A. Salam e J. Strathdee (1982) em Ann. Phys (NY) 141, 316.

- [48] A. Chodos e Detweiler (1980) em Phys. Rev. D21, 2167.
- [49] E. Witten (1985) em *Proceedings of the Shelter Island Conference* MIT Press, Cambridge. Mass.
- [50] C. Wetterich (1984) em Nucl.Phys. B242, 473.
- [51] S. Weinberg (1984) em Phys. Lett. 138B, 47
- [52] M. Planck (1907) em *Theory of Heat Radiation* 2nd edition, Blackiston's Son and Co, Philadelphia, PA.
- [53] E. M. Lifshits (1941) em *On the Theory of Second-Order Phase transition 1 and 2* Zr. Eksp. teor. Fiz 11 255- 269.
- [54] R.S. Deccaet al (2007) Eur. Phys. J. C51, 963, arXiv:0706.3283 .
- [55] J. M. Maldacena (1998) em *Advances in theoretical and Mathematical Physics 2:* 231-252.
- [56] Ashtekar (1986) em Phys. Lett. 57, 2244.
- [57] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali (1998) em Phys. Lett B 429, 263-272.
- [58] L. Randal e R. Sundrum (1999) em Phy. Rev. Lett, 83,17, 3370.
- [59] L. Randal e R. Sundrum (1999) em Phy. Rev. Lett, 83,23, 4690.
- [60] Y. Ne'eman (1965) em Rev. Mod. Phys 37, 1.
- [61] C. Fronsdal (1958) em Phys. Rev. 116, 778.
- [62] M. D. Kruskal (1960) em Phys. Rev. 119, 1743.
- [63] M. D. Maia (1984) em Phy Rev D vol31,n 2.
- [64] D. C. N. Cunha (2012) em the Sixth International School On Field Theory and Gravitation. AIP Conference Proceedings, vol 1483,pp. 429-434.
- [65] H. R. Sepangi, S. Jalalzadeh e B. Vakili (2008) em arXiv:gr-qc/0409070v3

- [66] M. D. Maia, J. S. Capistrano , J. S. Alcaniz e E. M. Monte (2011) em arXiv:1101.3941v1 gr-qc
- [67] V. A. Rubakov e Shaposhnikov (1983) in *Do We Live Inside a Domain Wall?* , Physics Letters 125B, 2,3.
- [68] N Silva (2007) em Gravitação Quântica em Branas-Mundo, Tese de Doutorado, UnB-IF.
- [69] M. D. Maia e E. M. Monte em On the stability of Black Holes at the LHC, arXiv:0808.2631 .
- [70] L. D. Landau e E. M. Lifschits (1975) in *The Classical Theory of Fields* , Pergamon, Oxford.
- [71] B. Holdon (1983) in *The Cosmological Constant and The Embedded Universe*, Stanford preprint ITP-744.
- [72] J. Rosen (1965) , Rev Mod Phys vol 37, n1.