

# Gravitação Dilatônica Em 2-D Quantização e Não-Comutatividade

Leonardo Evaristo de Sousa  
Orientador: Aleksandr Nikolaievich Pinzul

Instituto de Física - UnB  
Dissertação de Mestrado

30 de julho de 2013

## Resumo

Os modelos de gravitação em duas dimensões com adição de matéria possuem duas características interessantes: são passíveis de quantização exata via integrais de trajetória trajetória em seu setor geométrico, o que não gera problemas com a separação da geometria em um pano de fundo ao qual se adiciona flutuações, e produzem uma teoria efetiva não-local para o campo de matéria, o que permite fazer comparações com teorias não-comutativas . Desta forma, estes modelos bidimensionais se tornam laboratórios teóricos interessantes para o estudo da gravitação quântica. Após uma apresentação do modelo, é feito todo o seu tratamento clássico e sua análise Hamiltoniana. Em seguida, a teoria é quantizada com o uso de métodos perturbativos apenas em sua seção de matéria. Finalmente, é analisada a possibilidade de se obter resultados semelhantes usando não-comutatividade.

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente à minha família pelo suporte e ao meu orientador, Professor Aleksandr Pinzul, pela paciência e disponibilidade para resolver todas as questões que apareceram nestes dois anos. Também devo agradecimentos aos amigos do Saloon, por ajudarem a manter minha sanidade, e aos colegas do Instituto de Física pelas discussões e companhia nas aulas, seminários e congressos. Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Prelúdio Matemático</b>	<b>7</b>
2.1	Convenções . . . . .	8
2.2	Formas Diferenciais . . . . .	8
2.3	Equações de Estrutura de Cartan . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Teorias Dilatônicas Generalizadas</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Soluções Clássicas</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Estrutura Global</b>	<b>21</b>
5.1	Minkowski . . . . .	24
5.2	Schwarzschild . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Análise Hamiltoniana</b>	<b>28</b>
<b>7</b>	<b>Quantização</b>	<b>34</b>
7.1	O procedimento BRST . . . . .	34
7.2	A quantização via integrais de trajetória . . . . .	37
7.3	GDT sem matéria . . . . .	42
7.4	GDT com matéria . . . . .	43
7.5	Acoplamento mínimo sem autointeração local . . . . .	44
7.6	SRG com acoplamento não-mínimo . . . . .	48
7.6.1	Vértices . . . . .	48
7.6.2	Elemento de Linha Efetivo . . . . .	51
7.6.3	O Buraco Negro Virtual . . . . .	53
<b>8</b>	<b>Não-Comutatividade</b>	<b>54</b>
8.1	Quantização de Weyl . . . . .	55
8.2	O Produto Estrela de Moyal . . . . .	57
8.3	Teoria de Campo Escalar $\phi^4$ . . . . .	59
8.4	Teoria Dilatônica versus Teoria Não-Comutativa . . . . .	60
<b>9</b>	<b>Conclusão</b>	<b>61</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>64</b>
<b>A</b>	<b>A nilpotência da carga <math>\Omega</math></b>	<b>64</b>
<b>B</b>	<b>Os Termos Ambíguos</b>	<b>66</b>

# 1 Introdução

Sem dúvida, as duas teorias físicas mais importantes do século XX são a relatividade geral de Einstein, que descreve a relação entre gravitação e a geometria do espaço-tempo, e a teoria quântica de campos, que trata das outras interações fundamentais. Cada uma destas teorias coleciona sucessos e tem conseguido passar por todos os testes experimentais já realizados. Em parte, o motivo pelo qual estas duas teorias são tão bem sucedidas é a distância muito grande entre seus domínios de aplicação. Enquanto é possível ignorar efeitos de gravitação no domínio das partículas, os efeitos quânticos também podem ser desprezados em se tratando de cosmologia e gravitação. Mesmo que esta seja a situação em que nos encontramos em termos experimentais, do ponto de vista teórico é inaceitável possuir duas teorias absolutamente desconectadas para explicar os fenômenos físicos como um todo. Desta maneira, é necessário descobrir uma forma de se produzir uma teoria de gravitação em um arcabouço quântico. Este é o problema da gravitação quântica.

Seguindo o sucesso obtido com os métodos de teoria quântica de campos na quantização perturbativa do campo eletromagnético, parecia claro o caminho que deveria ser tomado para se fazer o mesmo com a gravidade. Entretanto, as tentativas de se quantizar a gravidade perturbativamente falharam, pois a teoria não é renormalizável. Na raiz deste fracasso está o fato de que as teorias que eram quantizadas com sucesso usando estes métodos perturbativos eram teorias que se desenrolavam sobre um pano de fundo fixo, o espaço-tempo de Minkowski, enquanto a gravitação de Einstein é uma teoria independente de pano de fundo, logo tentativas de descrevê-la como flutuações sobre um espaço fixo falham eventualmente.

Desde então, várias alternativas surgiram para tentar solucionar o problema da quantização da gravidade, porém nenhuma com sucesso. Entre as mais proeminentes está a teoria de cordas, que ainda não foi capaz de oferecer previsões testáveis, e a gravitação quântica em loop, que tem, por exemplo, dificuldades em recuperar a relatividade geral no limite semiclássico. Outras abordagens incluem ainda a gravitação de Horava-Lifshitz e a geometria não-comutativa.

Entre os avanços feitos neste campo de pesquisa, está a descoberta de que é possível quantizar a gravidade de forma exata em espaços com duas dimensões. Desta forma, não se torna necessária a separação da geometria entre pano de fundo e flutuações, mantendo a teoria independente de pano de fundo. Esta é a motivação principal do estudo de modelos deste tipo, já que eles podem ser utilizados como laboratórios teóricos para o estudo de gravitação quântica quando matéria é adicionada, evitando as dificuldades técnicas que aparecem em modelos quadridimensionais mas mantendo características

que se espera encontrar em uma teoria completa. Outras motivações para o estudo deste modelo além da gravitação quântica são suas relações com teoria de cordas, a possibilidade de se estudar evaporação de buracos negros e quantização por deformação, por exemplo.

Aqui, será feita a análise de um modelo de gravitação dilatônica em duas dimensões generalizado com adição de matéria escalar, que engloba uma série de outros modelos. Quando quantizado, produzirá uma ação efetiva para o campo escalar, onde só então métodos perturbativos serão utilizados. A teoria resultante é não-local, uma característica que, como será explicado no trabalho, acredita-se dever estar presente em qualquer teoria de gravitação quântica. Por não-localidade se entende a presença na Lagrangiana de termos não-polinomiais (que possuem número infinito de derivadas) ou termos que possuem dependência em mais de um ponto do espaço-tempo.

A não-localidade é característica também da já citada geometria não-comutativa. Nela, as coordenadas do espaço-tempo são substituídas por operadores hermitianos que obedecem certa relação de comutação. O resultado é o aparecimento de uma relação de incerteza entre as coordenadas, impossibilitando que se realize medições abaixo de uma determinada escala de comprimento. É possível estudar teorias quânticas de campo nestes espaços não-comutativos, o que nos leva a seguinte pergunta: seria possível reproduzir a teoria efetiva para o campo escalar obtida no contexto do modelo dilatônico em duas dimensões como uma teoria não-comutativa? Assumindo que o modelo bidimensional tenha características que permaneçam no caso quadridimensional, um estudo neste sentido pode fornecer insights sobre o tipo de não-comutatividade que poderia ser encontrado no caso da gravitação quântica em quatro dimensões, quem sabe fornecendo pistas importantes sobre seja lá o que for que até agora impediu que se obtivesse uma teoria consistente de gravitação quântica.

Este trabalho se divide da seguinte maneira:

- Primeiramente, a seção 2 traz uma breve revisão sobre a matemática que será utilizada no decorrer da dissertação, mais especificamente as formas diferenciais e as variáveis de Cartan. Também serão fixadas as convenções.
- Na seção 3, é apresentado o modelo de teorias dilatônicas generalizadas e demonstrada a sua equivalência ao formalismo de primeira ordem, essencial ao processo de quantização.
- Parte-se então para o tratamento clássico da teoria na seção 4, mos-

trando algumas possibilidades interessantes de escolhas de calibre.

- A estrutura global do modelo é estudada na seção 5, usando os espaços-tempo de Minkowski e Schwarzschild como exemplo.
- A seção 6 traz toda a análise Hamiltoniana do modelo, seguindo o procedimento de Dirac.
- Na seção 7 é realizado todo o processo de quantização da teoria. Começando pelo procedimento BRST e fazendo a quantização via integrais de trajetória. Alguns casos específicos são analisados, como o caso sem matéria, o caso de acoplamento mínimo e o caso de gravitação com redução esférica.
- Em seguida, a seção 8 traz uma visão geral sobre teoria quântica de campos em espaços não-comutativos e sua comparação com o modelo dilatônico.
- As conclusões são apresentadas na seção 9.
- O apêndice A traz uma prova da nilpotência do operador gerador de transformações BRST.
- Finalmente, o apêndice B trata da origem dos termos ambíguos que surgem durante a quantização da teoria.

## 2 Prelúdio Matemático

Para começar, é importante fixar as notações e convenções usadas assim como fazer uma breve revisão sobre formas diferenciais e sobre as variáveis de Cartan, que terão grande importância no que se segue.

## 2.1 Convenções

Algumas das convenções utilizadas são:

- Unidades de Planck serão utilizadas por todo o texto, ou seja, considere-se  $8\pi G = c = \hbar = 1$ .
- Índices repetidos são somados.
- Índices gregos denotam coordenadas holonômicas (base coordenada) e índices latinos denotam coordenadas não-holonômicas (base não-coordenada).
- A métrica de Minkowski é dada por  $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  no caso  $4D$  e  $\eta = \text{diag}(1, -1)$  no caso  $2D$ .
- O símbolo de Levi-Civita será denotado por  $\tilde{\epsilon}^{\mu\nu}$ , com  $\tilde{\epsilon}^{01} = -\tilde{\epsilon}^{10} = 1$ , já o tensor correspondente será identificado por  $\epsilon^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\tilde{\epsilon}^{\mu\nu}$ .

## 2.2 Formas Diferenciais

Formas diferenciais serão muito usadas neste trabalho, então comecemos com algumas definições relacionadas. Uma forma diferencial de ordem  $p$ , ou uma  $p$ -forma, é dada por

$$\xi_p = \frac{1}{p!} \xi_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (2.1)$$

No caso de espaços bidimensionais, temos apenas 0, 1 e 2 formas, dado que o produto wedge ( $\wedge$ ) é antissimétrico, dado por

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu = -dx^\nu \wedge dx^\mu, \quad (2.2)$$

portanto, índices repetidos no produto wedge o anulam.

Definindo também a derivada exterior, que mapeia  $p$ -formas em  $(p+1)$ -formas, atuando da seguinte maneira

$$d\xi_p = \frac{1}{p!} \partial_\nu \xi_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (2.3)$$

Esta derivada possui duas propriedades importantes que decorrem da antissimetria do produto wedge

$$d(\xi_p \wedge \xi_q) = d\xi_p \wedge \xi_q + (-1)^q \xi_p \wedge d\xi_q, \quad (2.4)$$

$$d^2 \xi_p = 0. \quad (2.5)$$

Note que, no caso bidimensional, derivadas exteriores aplicadas em 2-formas se anulam, também em razão da antissimetria.

Outra operação importante é a chamada operação estrela de Hodge, denotada por  $*$ , que mapeia  $p$ -formas em  $(d-p)$ -formas, onde  $d$  é a dimensão do espaço em consideração. Ela é dada por

$$* \xi_p = \frac{\sqrt{-g}}{p!(d-p)!} \xi_{\mu_1 \dots \mu_p} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_{p+1} \dots \nu_d} dx^{\nu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_d}. \quad (2.6)$$

Uma segunda aplicação da estrela de Hodge produz

$$* * \xi_p = (-1)^{1+p(d-p)} \xi_p. \quad (2.7)$$

Pode-se definir também um produto escalar entre  $p$ -formas, dado por

$$(\xi, \eta) \equiv \int \omega \wedge * \eta = \frac{1}{p!} \int \xi_{\mu_1 \dots \mu_p} \eta^{\mu_1 \dots \mu_p} \sqrt{-g} dx^1 \dots dx^d. \quad (2.8)$$

Este produto interno é simétrico, e se pode notar que o integrando  $\omega \wedge * \eta$  é uma  $d$ -forma.

## 2.3 Equações de Estrutura de Cartan

Sabe-se que dada uma variedade  $M$ , a base coordenada do espaço tangente  $T_P M$  é dada pelos vetores  $\{\partial_\mu\}$  e do espaço dual  $T_P^* M$  por  $\{dx^\mu\}$ . Com a ajuda da métrica, é possível definir bases não-coordenadas que serão muito úteis, dadas por

$$e_a = e_a^\mu \partial_\mu, \quad (2.9)$$

$$e^a = e_\mu^a dx^\mu. \quad (2.10)$$

Os objetos  $e_a^\mu$  e  $e_\mu^a$  são inversos um ao outro, ou seja,

$$e_a^\mu e_\nu^a = \delta_\nu^\mu, \quad (2.11)$$

$$e_a^\mu e_\mu^b = \delta_a^b, \quad (2.12)$$

e recebem o nome de zweibeine no caso de espaços bidimensionais. Exigimos ainda que os zweibeine satisfaçam as seguintes propriedades

$$e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{ab}, \quad (2.13)$$

$$e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} = g_{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

$$\det e_\mu^a > 0. \quad (2.15)$$

Isto permite que escrevamos o elemento de linha da seguinte maneira

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.16)$$

o que faz com que o elemento de volume invariante seja dado por

$$\sqrt{-g} d^2x = \sqrt{-(\det e_\mu^a)^2 \det \eta} d^2x = (\det e_\mu^a) d^2x \equiv (e) d^2x, \quad (2.17)$$

com a notação  $(e) \equiv \det e_\mu^a$ , que será usada com frequência.

Note que em duas dimensões, a métrica possui três componentes independentes enquanto os zweibeine possuem quatro. Desta maneira, há mais de uma base não-coordenada que produz a mesma métrica. Estas bases equivalentes se relacionam por rotações locais  $\Lambda_b^a(x) \in SO(1, 1)$ .

$$e_\mu^a \rightarrow \Lambda_b^a(x) e_\mu^b. \quad (2.18)$$

Este grupo possui número de geradores exatamente igual a diferença de graus de liberdade entre o zweibein e a métrica, ou seja, apenas um.

Definamos agora a 1-forma de conexão <sup>1</sup>, chamada daqui em diante simplesmente de conexão, por

$$\omega_b^a \equiv \Gamma_{cb}^a e^c. \quad (2.19)$$

A condição de compatibilidade com a métrica, ou seja, a exigência de que a derivada covariante da métrica se anule, implica que  $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$ , o que por sua vez implica na existência de apenas um termo independente na conexão, que passa, portanto, a ser escrita como  $\omega_b^a = \epsilon_b^a \omega$ . Além disto, esta conexão satisfaz as chamadas equações de estrutura de Cartan

$$de^a + \epsilon_b^a \omega \wedge e^b = T^a, \quad (2.20)$$

$$\epsilon_b^a d\omega + \epsilon_c^a \omega \wedge \epsilon_b^c \omega = R_b^a \Rightarrow \epsilon_b^a d\omega = R_b^a, \quad (2.21)$$

em que o termo quadrático em  $\omega$  se anula pela antissimetria do produto wedge e  $T^a$  e  $R_b^a$  são respectivamente a 2-forma de torção e a 2-forma de curvatura definidas como

$$T^a \equiv \frac{1}{2} T_{bc}^a e^b \wedge e^c, \quad (2.22)$$

$$R_b^a \equiv \frac{1}{2} R_{bcd}^a e^b \wedge e^c. \quad (2.23)$$

---

<sup>1</sup>Também chamada de conexão de spin por ser usada para se tomar derivadas covariantes de espinores.

Estas equações de Cartan também são escritas de forma mais compacta como

$$(De)^a \equiv D_b^a e^b = T^a, \quad (2.24)$$

$$(D\omega)_b^a \equiv D_c^a \omega_b^c = R_b^a, \quad (2.25)$$

com  $D_b^a = \delta_b^a d + \omega_b^a$ .

O cálculo do escalar de Ricci é simples graças a existência de apenas um termo independente na curvatura, podendo ser obtido aplicando-se o operador estrela de Hodge a este termo e multiplicando-o por dois, o que resulta em

$$R = \frac{2}{(e)} \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} \partial_\mu \omega_\nu \quad (2.26)$$

Define-se também coordenadas de cone de luz, que serão muito utilizadas adiante

$$x^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm x^1). \quad (2.27)$$

Assim, como  $x^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 = 2x^+x^- = \eta_{ab}x^ax^b$ , quando coordenadas do cone de luz são usadas, os índices são erguidos e baixados com a seguinte métrica

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

e temos  $\epsilon_b^a = \eta^{ac}\epsilon_{cb}$ , com  $\epsilon_\pm^\pm = \pm 1$

Finalmente, uma última definição a ser usada também

$$\epsilon = \frac{1}{2}\epsilon_{ab}e^a \wedge e^b = e^- \wedge e^+ = (e) dx^0 \wedge dx^1, \quad (2.29)$$

que é, portanto, o elemento de volume invariante.

As componentes da torção em coordenadas do cone de luz são dadas então por

$$T^\pm = (d \pm \omega)e^\pm \quad (2.30)$$

Isto é tudo que será necessário em termos de variáveis de Cartan. Mais detalhes tanto sobre as equações de estrutura de Cartan quanto sobre formas diferenciais podem ser encontrados em [2] ou [3].

### 3 Teorias Dilatônicas Generalizadas

Entre as teorias dilatônicas, a que possui maior apelo físico é a da gravitação com redução esférica (SRG, na sigla em inglês), que consiste na imposição de simetria esférica em duas dimensões da métrica quadridimensional original, que passa a ser dada por  $\mathcal{M}_2 \times S^2$  e promovendo o raio da esfera a um campo  $X$ , o dilaton. Pode-se tratar também teorias com maior número de dimensões, mas a discussão aqui será restringida ao caso quadridimensional. Neste caso, o elemento de linha será dado por

$$(ds)_{4D}^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu - \lambda^2 X (d\Omega)^2, \quad (3.1)$$

onde  $x^\mu = \{x^0, x^1\}$  são as coordenadas em  $\mathcal{M}_2$ ,  $(d\Omega)^2$  é o elemento de superfície de  $S^2$ ,  $\lambda$  é um parâmetro com dimensão de massa e  $X$  é o campo dilaton.

A ação de Einstein-Hilbert,

$$L = \int d^4x \sqrt{-g_{(4D)}} R_{(4D)}, \quad (3.2)$$

escrita aqui sem o fator de  $1/8\pi G$  por conta da escolha de unidades naturais, se reduz a uma ação efetiva para o setor  $\mathcal{M}_2$  após integração nas variáveis angulares. Esta ação efetiva toma a seguinte forma

$$L^{(SRG)} = \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g} \left[ XR + \frac{(\nabla X)^2}{2X} - 2\lambda^2 \right], \quad (3.3)$$

na qual  $(\nabla X)^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu X \partial_\nu X$  enquanto  $R$  e  $g$  são, respectivamente, o escalar de Ricci e o determinante da métrica bidimensional  $g_{\mu\nu}$ .

O formato da ação efetiva, se tomado como caso específico de um tipo mais genérico de ação, sugere a consideração de teorias dilatônicas generalizadas, GDTs na sigla em inglês, definidas pela seguinte ação

$$L = \int d^2x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{2} X + U(X) \frac{(\nabla X)^2}{2} - V(X) \right]. \quad (3.4)$$

Esta ação engloba uma série de modelos, como os modelos de Callan, Giddings, Harvey, Strominger (CGHS), de Jackiw-Teitelboim, de Katanaev-Volovich além do caso de redução esférica, cada qual obtido com uma escolha particular para os potenciais  $U(X)$  e  $V(X)$  (veja [13] para uma tabela com a escolha de potenciais que gera cada um dos modelos citados). Estes modelos específicos não serão tratados em detalhe, exceto o SRG, que possui maior apelo físico.

Estas GDTs é que serão objeto de estudo neste trabalho. Para tanto, não

será usada a ação dada pela expressão anterior, mas sim uma ação equivalente escrita em termos de variáveis de Cartan, que facilitará todo o processo de análise das soluções clássicas, do formalismo Hamiltoniano e da quantização. Assim, nos beneficiaremos da equivalência entre a geometria Riemanniana e a geometria de Cartan.

Esta nova ação, que é uma formulação bastante genérica de teorias de gravitação de primeira ordem (FOG, na sigla em inglês), é dada por

$$L^{(FOG)} = \int [X_a (De)^a + X d\omega + \epsilon \mathcal{V}(X^a X_a, X)]. \quad (3.5)$$

Usando coordenadas do cone de luz, temos

$$X_a (De)^a = X^+ (d - \omega) e^- + X^- (d + \omega) e^+ \quad (3.6)$$

$$X^a X_a = 2X^+ X^- \quad (3.7)$$

Note que foram adicionados campos auxiliares  $X^a$  à ação, que dão origem a termos de torção. Desta forma, substituímos uma teoria de torção nula por uma com aparentemente mais graus de liberdade e torção não nula que possui a vantagem de ter uma dinâmica mais simples. Como então as duas ações podem ser equivalentes? É necessário eliminar os campos auxiliares e a contribuição da torção à conexão  $\omega$ . Para isto, usemos as equações de movimento obtidas primeiramente com a variação  $\delta\omega$

$$dX - X^+ e^- + X^- e^+ = 0. \quad (3.8)$$

Esta equação permite escrever os campos  $X^a$  em termos do dilaton  $X$  da seguinte forma

$$X^a = -\frac{1}{(e)} \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} e_\mu^a \partial_\nu X, \quad (3.9)$$

o que faz com que a combinação  $X^a X_a$  seja escrita como

$$\begin{aligned} X^a X_a &= \frac{1}{(e)^2} \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} \tilde{\epsilon}^{\sigma\rho} e_\mu^a e_\sigma^b \eta_{ab} \partial_\nu X \partial_\rho X \\ &= \epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\sigma\rho} g_{\mu\sigma} \partial_\nu X \partial_\rho X \\ &= -g^{\nu\rho} \partial_\nu X \partial_\rho X \equiv -(\nabla X)^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

O próximo passo seria analisar a equação de movimento obtida com a variação  $\delta X^a$ , mas primeiro, aplicando o operador estrela de Hodge na primeira equação de Cartan usando as seguintes identidades

$$e^a \wedge e^b = -\epsilon^{ab} \epsilon, \quad (3.11)$$

$$*\epsilon = 1, \quad (3.12)$$

produz

$$\begin{aligned} de^a + \epsilon_b^a \omega_c e^c \wedge e^b &= T^a \\ \Rightarrow *de^a + \omega^a &= *T^a \\ \Rightarrow \omega = \omega^a e^b \eta_{ab} &= (*T^a - *de^a) e^b \eta_{ab} =: (*T^a) e^b \eta_{ab} - \tilde{\omega}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde  $\tilde{\omega}$  denota a conexão obtida quando se considera torção nula na equação de Cartan.

Olhando agora a equação de movimento para  $X^a$ , temos

$$\underbrace{de^a + \epsilon_b^a \omega_c e^c \wedge e^b}_{=T^a} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial X^b} \eta^{ba} = 0, \quad (3.14)$$

implicando em

$$T^a = -\epsilon \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial X^b} \eta^{ba} \Rightarrow *T^a = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial X^b} \eta^{ba} \quad (3.15)$$

e

$$\omega = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial X^b} e^b - \tilde{\omega}. \quad (3.16)$$

Substituindo  $(De)^a$  e  $\omega$  na Lagrangiana pelas expressões anteriores resulta na seguinte ação

$$L = \int [-X d\tilde{\omega} + \epsilon \mathcal{V} (-(\nabla X)^2, X)]. \quad (3.17)$$

Escrevendo a ação em termos de componentes obtemos

$$L = \int [-X \partial_\mu \tilde{\omega}_\nu \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} + \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} e_\mu^- e_\nu^+ \mathcal{V}] d^2x, \quad (3.18)$$

o que, levando em conta a equação (2.26), produz

$$L = \int (e) \left[ X \frac{R}{2} - \mathcal{V} (-(\nabla X)^2, X) \right] d^2x, \quad (3.19)$$

onde um fator de  $-1$  foi retirado sem gerar qualquer efeito.

Para concluir, fazemos a seguinte escolha para o potencial  $\mathcal{V}$

$$\mathcal{V} = U(X) \frac{X^a X_a}{2} + V(X), \quad (3.20)$$

o que conclui a demonstração de que as ações para teorias dilatônicas generalizadas e para gravitação de primeira ordem são equivalentes.

Sigamos então com o tratamento clássico da gravitação de primeira ordem.

## 4 Soluções Clássicas

Primeiramente, vamos encontrar as equações de movimento para uma ação dada por  $L = L^{(FOG)} + L^{(m)}$ , ou seja uma ação composta respectivamente pela Lagrangiana da gravitação de primeira ordem,

$$L^{(FOG)} = \int_{\mathcal{M}_2} [X_a (De)^a + X d\omega + \epsilon \mathcal{V}(X^a X_a, X)] \quad (4.1)$$

e por uma parte de matéria não especificada, sobre a qual se postula apenas que não possua dependência na conexão ( $\omega$ ) e nos campos auxiliares  $X^\pm$ .

Usando coordenadas de cone de luz, a Lagrangiana se escreve da seguinte forma

$$L^{(FOG)} = \int_{\mathcal{M}_2} [X^+(d - \omega)e^- + X^-(d + \omega)e^+ + X d\omega + \epsilon \mathcal{V}(2X^+X^-, X)]. \quad (4.2)$$

Definindo

$$W^\pm := \frac{\delta L^m}{\delta e^\mp}, W := \frac{\delta L^m}{\delta X} \quad (4.3)$$

e realizando as variações  $\delta\omega$ ,  $\delta e^\mp$ ,  $\delta X$  e  $\delta X^\mp$ , obtém-se, respectivamente, as seguintes equações de movimento

$$dX + X^- e^+ - X^+ e^- = 0, \quad (4.4)$$

$$(d \pm \omega)X^\pm \pm e^\pm \mathcal{V} + W^\pm = 0, \quad (4.5)$$

$$d\omega + \epsilon \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial X} + W = 0, \quad (4.6)$$

$$(d \pm \omega)e^\pm + \epsilon \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial X^\mp} = 0. \quad (4.7)$$

Observe que a quarta equação de movimento equivale à condição de torção zero quando o potencial  $\mathcal{V}$  é independente dos campos auxiliares  $X^\pm$ .

Além das quatro expressões anteriores, há também as equações de movimento  $\delta L^{(m)}/\delta\phi_a = 0$  para os campos de matéria  $\phi_a$ . No momento, o interesse está em encontrar a solução para o modelo sem matéria ( $W^\pm = W = 0$ ) e sem fixar nenhum calibre. Para tanto, primeiramente multiplicamos a equação (4.5) com sinal positivo por  $X^-$  e a mesma equação com sinal negativo por  $X^+$  e somamos as duas, resultando em

$$X^- dX^+ + X^+ dX^- - \mathcal{V}(X^+e^- - X^-e^+) = 0. \quad (4.8)$$

Usando (4.4) e definindo  $Y = X^a X_a/2 = X^+ X^-$ , obtemos

$$d(X^+ X^-) - \mathcal{V} dX = 0 \Rightarrow dY - \mathcal{V} dX = 0. \quad (4.9)$$

Sabemos que para a Lagrangiana que está sendo usada ser equivalente à Lagrangiana das GDTs (expressão (3.4)), o potencial  $\mathcal{V}$  deve ter a forma  $\mathcal{V}(Y, X) = U(X)Y + V(X)$ . Usemos isto a partir de agora.

O próximo passo é multiplicar a equação anterior pelo fator integrante  $\exp Q$ , com  $Q$  definido da seguinte forma

$$Q = - \int^X U(y) dy, \quad (4.10)$$

obtendo assim

$$\exp Q dY - \exp Q(U(X)Y + V(X)) dX = 0. \quad (4.11)$$

A expressão resultante é então a diferencial exata de uma função  $\mathcal{C}(Y, X)$ , ou seja,  $d\mathcal{C} = 0 \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C}_0 = \text{constante}$ , com

$$\begin{aligned} \exp \left[ \int^X U(y) dy \right] &= \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial Y} \Rightarrow \mathcal{C} = Y \exp \left[ \int^X U(y) dy \right] + A(X) \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial X} &= -YU(X) \exp \left[ \int^X U(y) dy \right] + \frac{\partial A(X)}{\partial X} \\ \Rightarrow -YU(X) \exp Q + \frac{\partial A(X)}{\partial X} &= -\exp Q(U(X)Y + V(X)) \\ \Rightarrow A(X) &= - \int^X e^{Q(y)} V(y) dy. \end{aligned}$$

Assim, temos finalmente

$$C(Y, X) = Y e^{Q(X)} - \int^X e^{Q(y)} V(y) dy = Y e^{Q(X)} - w(X). \quad (4.12)$$

Quaisquer funções de  $\mathcal{C}$  também são conservadas. Note ainda que há duas integrais sem os limites inferiores, uma na definição de  $Q$  e outra na expressão final para  $\mathcal{C}$  denotada  $w(X)$ . A escolha de um limite inferior em  $Q$  gera uma constante multiplicativa geral em  $\mathcal{C}$  e a escolha do limite inferior em  $w(X)$  produz uma constante aditiva. A escolha deve ser feita quando da determinação da forma específica do potencial.

Seguindo com a análise da solução, assume-se agora que  $X^+ \neq 0$ . Desta maneira, é possível definir uma nova 1-forma  $Z := e^+/X^+$ , que por sua vez permite escrever a equação (4.5) de sinal positivo da seguinte forma

$$\omega = -\frac{dX^+}{X^+} - Z\mathcal{V} \quad (4.13)$$

Da mesma maneira, é possível escrever a equação (4.4) como

$$e^- = \frac{dX}{X^+} + ZX^- \quad (4.14)$$

Assim, tem-se a conexão  $\omega$  e a 1-forma  $e^-$  escritas em termos de outras variáveis.

Usando esta última equação, a 2-forma  $\epsilon$  ganha a seguinte forma

$$\epsilon = e^- \wedge e^+ = \left( \frac{dX}{X^+} + \frac{X^- e^+}{X^+} \right) \wedge e^+ = dX \wedge Z. \quad (4.15)$$

Agora, pode-se aplicar as expressões anteriores para  $\omega$ ,  $e^+$  e  $\epsilon$  na equação (4.7), obtendo

$$\begin{aligned} & \frac{de^+}{X^+} + \frac{\omega \wedge e^+}{X^+} + e^- \wedge e^+ U(X) = 0 \\ & \Rightarrow \frac{de^+}{X^+} + \left( -\frac{dX^+}{X^+} + Z\mathcal{V} \right) \wedge Z + dX \wedge ZU = 0 \\ & \Rightarrow \frac{de^+}{X^+} - \frac{dX^+}{X^+} \wedge Z + dX \wedge ZU = 0 \\ & \Rightarrow d \left( \frac{e^+}{X^+} \right) + dX \wedge ZU = 0 \Rightarrow dZ + dX \wedge ZU = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Esta última expressão é reduzida a  $d\hat{Z} = 0$  fazendo  $Z = \hat{Z} \exp Q$ , com  $Q$  definido como anteriormente. Com essa redução, é possível ainda usar o lema de Poincaré e escrever  $\hat{Z} = df$ . Finalmente, já se pode escrever a solução completa

$$e^+ = X^+ e^Q df \quad (4.17)$$

$$e^- = \frac{dX}{X^+} + X^- e^Q df \quad (4.18)$$

$$\omega = -\frac{dX^+}{X^+} - \mathcal{V} e^Q df \quad (4.19)$$

$$\mathcal{C} = e^Q X^+ X^- - \int^X e^Q(y) V(y) dy = \mathcal{C}_0 \quad (4.20)$$

onde a equação para  $e^+$  é obtida da equação (4.4).

A expressão para a constante  $\mathcal{C}_0$  pode ser utilizada para escrever  $X^-$  em termos de  $X^+$  e  $X$ . Desta forma, observa-se que há apenas três funções arbitrárias na solução completa,  $(f, X, X^+)$ , mas há também três graus de liberdade de calibre. Como veremos mais à frente quando da análise Hamiltoniana da teoria, a presença de vínculos de primeira classe neste modelo sem matéria mostra que a teoria é topológica, no sentido de que não há graus de liberdade contínuos presentes. Com isso, a única variável que determina diferentes soluções para uma dada ação é  $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{R}$ .

O papel da constante  $\mathcal{C}_0$  pode ser observado calculando-se a métrica.

$$g = \eta_{ab} e^a \otimes e^b = 2e^- \otimes e^+ = e^Q df \otimes [-2dX + 2X^+ X^- e^Q df] \quad (4.21)$$

Como  $\mathcal{C}_0 = e^Q X^+ X^- - w(X)$ , tem-se que  $X^- = (\mathcal{C}_0 + w(X))/e^Q X^+$ . Desta maneira, a métrica toma a seguinte forma,

$$g = e^{Q(X)} df \otimes [-2dX + 2(\mathcal{C}_0 - w(X)) df]. \quad (4.22)$$

Redefinindo  $X$  como  $d\tilde{X} = -dX \exp Q$ , se obtém

$$g = 2df \otimes d\tilde{X} + \xi(\tilde{X}) df \otimes df \quad (4.23)$$

$$\xi(\tilde{X}) = 2e^Q (\mathcal{C}_0 + w)_{X=X(\tilde{X})} \quad (4.24)$$

que se reduz ao calibre de Eddington-Finkelstein quando  $f$  e  $\tilde{X}$  são tomados como coordenadas. Esta expressão é exata e válida para modelos quase totalmente arbitrários de gravidade dilatônica sem matéria. Outros calibres podem ser especificados partindo da última equação. Para tanto, basta considerar (com  $x^0 = t, x^1 = r, F' = \partial F/\partial r$  e  $\tilde{F} = \partial F/\partial t$ )

$$d\tilde{X} = \tilde{X}' dr + \dot{\tilde{X}} dt, \quad df = f' dr + \dot{f} dt, \quad (4.25)$$

e fazer a substituição na métrica, que uma vez feita resulta no seguinte elemento de linha

$$(ds)^2 = (2f'\tilde{X}' + \xi f'^2) dr^2 + (2\dot{f}\dot{\tilde{X}} + \xi \dot{f}^2) dt^2 + (f'\dot{\tilde{X}} + \dot{f}\tilde{X}' + \xi f'\dot{f}) dr dt \quad (4.26)$$

Em particular, são interessantes os calibres diagonais, uma classe à qual pertencem o calibre de Schwarzschild e o calibre conforme. Para que o termo  $dr dt$  desapareça, basta considerar

$$\tilde{X} = \tilde{X}(r), \quad (4.27)$$

$$\tilde{X}' + \xi f' = 0 \quad (4.28)$$

onde se assume também que  $\dot{f} \neq 0$ .

Das duas equações anteriores decorre que

$$\frac{d\tilde{X}}{dr} + \xi \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \quad (4.29)$$

$$\Rightarrow f = - \int^r \frac{1}{\xi(\tilde{X}(x))} \frac{d\tilde{X}(x)}{dx} dx + \bar{f}(t) \quad (4.30)$$

$$\Rightarrow f = - \int^{\tilde{X}(r)} \frac{d\tilde{X}}{\xi(\tilde{X})} + \bar{f}(t) = - \frac{\mathcal{K}(\tilde{X}(r))}{2} + \bar{f}(t) \quad (4.31)$$

com  $\mathcal{K}(r)$  definido da seguinte forma

$$\mathcal{K}(r) = 2 \int_{r_0}^r dy \xi^{-1}(y). \quad (4.32)$$

Assim, o elemento de linha se torna (usando  $\tilde{X}' = -\xi f'$ )

$$(ds)^2 = \xi[(\dot{f} dt)^2 - (f' dr)^2], \quad (4.33)$$

e o calibre conforme é obtido fazendo  $\dot{f} = f' = 1$ .

Requerendo ainda que  $\det g = -1$ , como nos calibres do tipo Schwarzschild, se obtém uma relação entre  $f'$  e  $\dot{f}$ ,

$$-\xi^2 \dot{f}^2 f'^2 = -1 \Rightarrow f' = \pm \frac{1}{\xi \dot{f}}, \quad (4.34)$$

o que permite escrever o elemento de linha como

$$(ds)^2 = \xi \dot{f}^2 dt^2 - \frac{1}{\xi \dot{f}^2} dr^2. \quad (4.35)$$

Tomando como exemplo concreto a gravitação com redução esférica em quatro dimensões, para a qual  $U_{SRG} = 1/2X$  e  $V_{SRG} = \lambda^2$ , se tem que

$$Q_{SRG} = \int_1^X U_{SRG}(y) dy = - \int_1^X \frac{1}{2y} dy = -\frac{1}{2} \ln X, \quad (4.36)$$

onde o limite inferior foi assim escolhido para que a constante multiplicativa geral que deve aparecer, como explicado anteriormente, seja igual a 1.

Calcula-se também a função  $w(X)$ ,

$$w(X) = \int_0^X e^{Q(y)} V(y) dy = \int_0^X \frac{\lambda^2}{y^{\frac{1}{2}}} dy = 2\lambda^2 X^{\frac{1}{2}}. \quad (4.37)$$

Desta maneira, a quantidade conservada  $\mathcal{C}$  é

$$\mathcal{C}_{SRG} = \frac{X^+ X^-}{\sqrt{X}} - 2\lambda^2 X^{\frac{1}{2}} = \mathcal{C}_0, \quad (4.38)$$

e a função  $\xi(\tilde{X})$  ganha a seguinte forma

$$\xi_{SRG}(\tilde{X}) = 2e^Q (\mathcal{C}_0 + w)_{X=X(\tilde{X})} = \frac{2\mathcal{C}_0}{X^{\frac{1}{2}}} + 4\lambda^2, \quad (4.39)$$

que escrita em termos da nova variável  $\tilde{X}$  ( $d\tilde{X} = dX \exp Q$ ) se lê

$$d\tilde{X} = -\frac{dX}{X^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \tilde{X} = -2X^{\frac{1}{2}} \quad (4.40)$$

$$\Rightarrow \xi_{SRG}(\tilde{X}) = -\frac{4\mathcal{C}_0}{\tilde{X}} + 4\lambda^2. \quad (4.41)$$

Ainda no exemplo da SRG, fazendo algumas novas definições é possível obter outro resultado interessante. Retomando a equação (4.35), definamos  $\dot{f} = 1$ . Isto implica, pela condição de que  $\det g = -1$  (conforme a expressão (4.34)), que  $f' = \pm 1/\xi$ . Escolhamos então para  $f'$  o sinal negativo. Decorre daí, via condições de diagonalidade da métrica (equações (4.27),(4.28)), que

$$\tilde{X}' = 1 \Rightarrow \tilde{X} = r \Rightarrow \xi = 4\lambda^2 \left( 1 - \frac{\mathcal{C}_0}{\lambda^2 r} \right). \quad (4.42)$$

Assim, o elemento de linha se torna

$$(ds)^2 = 4\lambda^2 \left(1 - \frac{\mathcal{C}_0}{\lambda^2 r}\right) (dt)^2 - \frac{1}{4\lambda^2} \left(1 - \frac{\mathcal{C}_0}{\lambda^2 r}\right)^{-1} (dr)^2. \quad (4.43)$$

Uma nova mudança de variáveis,

$$\tilde{t} = 2\lambda t \Rightarrow d\tilde{t} = 2\lambda dt \quad (4.44)$$

$$\tilde{r} = \frac{r}{2\lambda} \Rightarrow d\tilde{r} = \frac{dr}{2\lambda} \quad (4.45)$$

permite escrever o elemento de linha da seguinte maneira

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{\mathcal{C}_0}{2\lambda^3 \tilde{r}}\right) (d\tilde{t})^2 - \left(1 - \frac{\mathcal{C}_0}{2\lambda^3 \tilde{r}}\right)^{-1} (d\tilde{r})^2. \quad (4.46)$$

Definindo ainda

$$M = \frac{\mathcal{C}_0}{4\lambda^3}, \quad (4.47)$$

se pode finalmente dar ao elemento de linha o aspecto mais conhecido,

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (d\tilde{t})^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (d\tilde{r})^2 \quad (4.48)$$

que é a famosa métrica de Schwarzschild.

## 5 Estrutura Global

As propriedades globais da solução para as variáveis geométricas são usualmente obtidas estudando as geodésicas do espaço. Para esta análise, é conveniente usar coordenadas de Eddington-Finkelstein "*ingoing*". Escrevendo as coordenadas como  $x^\mu = \{v, r\}$ , temos

$$(ds)_{ingoing}^2 = dv(2dr - \xi(r)dv), \quad (5.1)$$

com  $\xi_\infty = 1$ .

A métrica é dada por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\xi(r) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

e é possível encontrar as geodésicas por meio da equação de Euler-Lagrange e da função

$$F = \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{1}{2}(2\dot{v}\dot{r} - \xi(r)\dot{v}^2), \quad (5.3)$$

onde o ponto denota derivação em relação ao parâmetro afim  $\tau$ .

Obtém-se assim,

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial F}{\partial v} = 0 \Rightarrow \ddot{r} - \xi' \dot{r} \dot{v} - \xi \ddot{v} = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \Rightarrow \ddot{v} = -\frac{\xi'(r)\dot{v}^2}{2} \quad (5.5)$$

Aplicando esta última equação à anterior, finalmente se tem

$$\ddot{r} - \xi' \dot{r} \dot{v} + \frac{\xi \xi'}{2} \dot{v}^2 = 0. \quad (5.6)$$

O vetor  $k^\mu = (1, 0)$  satisfaz a equação de Killing,

$$k^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu k^\lambda g_{\lambda\nu} + \partial_\nu k^\lambda g_{\mu\lambda} = 0, \quad (5.7)$$

o que implica na existência de uma constante de movimento,

$$g_{\alpha\beta} k^\alpha \dot{x}^\beta = \dot{r} - \xi(r)\dot{v} = \sqrt{|\tilde{A}|} = \text{constante} \quad (5.8)$$

Desta maneira, pode-se escrever ainda

$$dr - \xi(r) dv = \sqrt{|\tilde{A}|} d\tau \Rightarrow d\tau = \frac{1}{\sqrt{|\tilde{A}|}} (dr - \xi(r) dv) \quad (5.9)$$

$$\Rightarrow (d\tau)^2 = \frac{1}{|\tilde{A}|} (dr - \xi(r) dv)^2 = \pm (ds)^2, \quad (5.10)$$

onde no último passo identificou-se o parâmetro  $\tau$  com o parâmetro usado no elemento de linha.

Usando esta última equação e substituindo  $(ds)^2$  pela expressão para o elemento de linha (equação (5.1)), é possível obter uma equação diferencial que descreva as geodésicas,

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{\xi} \left( 1 \pm \left( 1 + \frac{\xi}{|\tilde{A}|} \right)^{-\frac{1}{2}} \right), \quad (5.11)$$

onde cada sinal descreve um tipo de geodésica e a nova constante  $A = \pm|\tilde{A}|$  absorve os dois sinais de  $\pm(ds)^2$ . Desta maneira,  $A > 0$  corresponde à geodésica do tipo tempo e  $A < 0$  à do tipo espaço. Vale notar também que a geodésica com o sinal negativo dentro dos colchetes passa de forma contínua pelo horizonte (onde  $\xi(r_h) = 0$ ) para  $A \neq 0$ , não sendo, portanto, uma fronteira da solução. Esta é uma vantagem do calibre de Eddington-Finkelstein em relação aos calibres conforme e de Schwarzschild, por exemplo, que possuem singularidades de coordenadas. Assim, os pontos em que  $\xi(r_h) = 0$  descrevem singularidades de curvatura.

Agora, com o objetivo de analisar a estrutura global da solução por meio de diagramas de Penrose, deve-se estudar o comportamento das direções nulas neste espaço. Fazendo  $(ds)^2 = 0$  com  $(ds)_{in}^2 = dv(2dr - \xi(r)dv)$  tem-se que

$$dv = 0 \Rightarrow v^{(1)} = \text{constante}, \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} 2dr - \xi(r)dv = 0 &\Rightarrow dv = \frac{2}{\xi} dr \\ &\Rightarrow v^{(2)} = 2 \int_{r_0}^r \frac{dy}{\xi(y)} + \text{constante} \\ &\Rightarrow v^{(2)} = \mathcal{K}(r) + \text{constante}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Definindo então  $\tilde{v} = -v$  e  $\tilde{u} = v - \mathcal{K}(r)$ , as direções nulas se tornam linhas retas ( $\tilde{v} = \text{const.}$  e  $\tilde{u} = \text{const.}$ ), e com

$$d\tilde{v} = -dv, \quad (5.14)$$

$$d\tilde{u} = dv - \frac{2}{\xi(r)} dr, \quad (5.15)$$

o elemento de linha se torna

$$(ds)^2 = \xi(r) d\tilde{v} d\tilde{u}. \quad (5.16)$$

Uma transformação conforme adequada permite mapear  $(ds)^2$  em uma região finita sem alterar sua estrutura causal possibilitando a produção dos diagramas de Penrose. Uma escolha que se sabe funcionar é

$$(d\tilde{s})^2 = \Omega^2 (ds)^2 \quad \text{usando} \quad \Omega^2 = \frac{1}{(1 + \tilde{u}^2)(1 + \tilde{v}^2)} \quad (5.17)$$

$$\Rightarrow (d\tilde{s})^2 = \frac{\xi(r(\tilde{u})) d\tilde{u} d\tilde{v}}{(1 + \tilde{u}^2)(1 + \tilde{v}^2)}. \quad (5.18)$$

Analisemos agora como isto funciona para duas escolhas de  $\xi(r)$ , a primeira  $\xi(r) = 1$ , que reduz o elemento de linha ao de Minkowski, e a segunda  $\xi(r) = 1 - 2M/r$ , que é o caso do buraco negro de Schwarzschild.

## 5.1 Minkowski

Fazendo  $\xi(r) = 1$ , recuperamos o espaço de Minkowski. O elemento de linha após a transformação conforme será

$$(d\tilde{s})^2 = \frac{d\tilde{u} d\tilde{v}}{(1 + \tilde{u}^2)(1 + \tilde{v}^2)}, \quad (5.19)$$

onde as variáveis  $\tilde{u}$  e  $\tilde{v}$  são dadas por

$$\tilde{v} = -v \quad -\infty < \tilde{v} < \infty, \quad (5.20)$$

$$\tilde{u} = v - 2(r - r_0) \quad -\infty < \tilde{u} < \infty. \quad (5.21)$$

Agora, o formato do elemento de linha inspira a seguinte mudança de variáveis

$$U = \tan^{-1} \tilde{u} \quad -\frac{\pi}{2} < U < \frac{\pi}{2}, \quad (5.22)$$

$$V = \tan^{-1} \tilde{v} \quad -\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2}, \quad (5.23)$$

que resulta em

$$(d\tilde{s})^2 = dU dV. \quad (5.24)$$

Uma última mudança de variáveis devolve o elemento de linha do espaço de Minkowski ao seu formato mais conhecido com a vantagem de poder ser mapeado em uma região finita

$$R = V + U \quad -\pi < R < \pi, \quad (5.25)$$

$$T = V - U \quad -\pi < T < \pi, \quad (5.26)$$

levando finalmente a

$$(d\tilde{s})^2 = \frac{1}{4}(dR^2 - dT^2). \quad (5.27)$$

Isto já permite criar o diagrama de Penrose, como mostrado na figura abaixo, com a variável  $T$  representada verticalmente e  $R$  horizontalmente

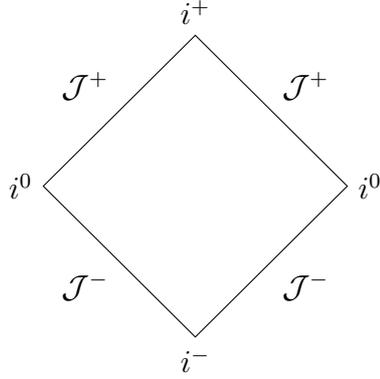


Figura 1: Diagrama de Penrose para o espaço de Minkowski

Os regiões marcadas no diagrama são:

- $i^+$  : infinito temporal futuro, corresponde a  $T = \pi, R = 0$ ,
- $i^-$  : infinito temporal passado, corresponde a  $T = -\pi, R = 0$ ,
- $i^0$  : infinito espacial, corresponde a  $R = \pm\pi, T = 0$ ,
- $\mathcal{J}^+$  : infinito nulo futuro, corresponde a  $T \pm R = \pi$ ,
- $\mathcal{J}^-$  : infinito nulo passado, corresponde a  $T \pm R = -\pi$ .

Tratemos agora de uma escolha mais interessante para a função  $\xi$

## 5.2 Schwarzschild

Fazendo a escolha  $\xi = 1 - \frac{2M}{r}$ , as coordenadas  $\tilde{v}$  e  $\tilde{u}$  se tornam

$$\tilde{v} = -v \quad -\infty < \tilde{v} < \infty, \quad (5.28)$$

$$\tilde{u} = v - 2r - 4M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \quad -\infty < \tilde{u} < \infty. \quad (5.29)$$

A seguinte combinação de variáveis permite escrever  $r$  em termos de  $\tilde{v}$  e  $\tilde{u}$

$$\frac{\tilde{v} + \tilde{u}}{2} = -r - 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \quad (5.30)$$

$$\Rightarrow r - 2M = 2M \exp \left( -\frac{(\tilde{v} + \tilde{u})}{4M} - \frac{r}{2M} \right), \quad (5.31)$$

levando o elemento de linha à seguinte forma

$$(ds)^2 = \xi(r) d\tilde{u} d\tilde{v} \Rightarrow (ds)^2 = \frac{2M}{r} e^{-\frac{r}{2M}} e^{-\frac{\tilde{v}+\tilde{u}}{4M}} d\tilde{u} d\tilde{v}. \quad (5.32)$$

Uma nova mudança de variáveis

$$U = -\exp -\frac{\tilde{u}}{4M} \quad -\infty < U < 0, \quad (5.33)$$

$$V = -\exp -\frac{\tilde{v}}{4M} \quad -\infty < V < 0, \quad (5.34)$$

modifica novamente o elemento de linha para

$$(ds)^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} dU dV. \quad (5.35)$$

Note que não há mais singularidade em  $r = 2M$ , que era uma singularidade de coordenada, porém aquela em  $r = 0$  persiste. As coordenadas  $U$  e  $V$ , no domínio definido anteriormente, correspondem à região  $r > 2M$  do espaço de Schwarzschild original, que pode agora ser estendido fazendo com que elas valham de  $-\infty$  a  $\infty$ , contanto que sejam compatíveis com  $r > 0$ . Isto é possível, pois, graças ao desaparecimento da singularidade de coordenada, não há mais proibição para os valores  $U = V = 0$ , que correspondiam a  $r = 2M$ .

Assim, dados os novos alcances de  $U$  e  $V$ , uma nova mudança de coordenadas pode ser feita, desta vez para coordenadas limitadas

$$U' = \tan^{-1} U \quad -\frac{\pi}{2} < U' < \frac{\pi}{2}, \quad (5.36)$$

$$V' = \tan^{-1} V \quad -\frac{\pi}{2} < V' < \frac{\pi}{2}. \quad (5.37)$$

que implica em

$$(ds)^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} \sec^2 U' \sec^2 V' dU' dV'. \quad (5.38)$$

Com a mesma transformação conforme utilizada anteriormente ( $\Omega^2 = (\sec^2 U' \sec^2 V')^{-1}$ ), obtemos

$$(d\tilde{s})^2 = \frac{e^{-\frac{r}{2M}}}{r} dU' dV'. \quad (5.39)$$

Uma mudança final de variáveis

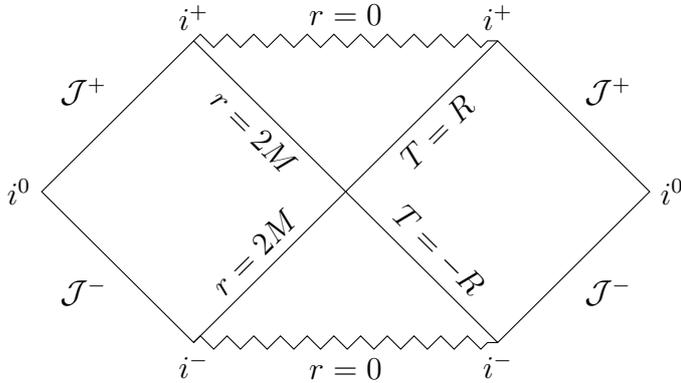


Figura 2: Diagrama de Penrose para a métrica de Schwarzschild

$$R = V' + U' \quad -\pi < R < \pi, \quad (5.40)$$

$$T = V' - U' \quad -\pi < T < \pi, \quad (5.41)$$

leva a

$$(d\tilde{s})^2 = \frac{e^{-\frac{r}{2M}}}{4r} (dR^2 - dT^2). \quad (5.42)$$

O resultado anterior é similar ao encontrado no caso de Minkowski, exceto pelo fator dependente de  $r$ , que nos lembra da singularidade presente em  $r = 0$ . Mapeando a singularidade original pelas transformações de variáveis obtemos o seguinte

$$r \rightarrow 0 \Rightarrow T = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{Singularidade}, \quad (5.43)$$

produzindo limites para a variável  $T$ , que deverá permanecer entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ .

O diagrama de Penrose é mostrado na Figura 2

As regiões marcadas no diagrama são:

$i^+$  : corresponde a  $T = \frac{\pi}{2}, R = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  
 $i^-$  : corresponde a  $T = -\frac{\pi}{2}, R = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  
 $i^0$  : corresponde a  $R = \pm \pi, T = 0$ ,  
 $\mathcal{J}^+$  : corresponde a  $T \pm R = \pi$ ,  
 $\mathcal{J}^-$  : corresponde a  $T \pm R = -\pi$ ,  
Singularidade : corresponde a  $T = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  
Horizonte : corresponde a  $T = \pm R$ .

## 6 Análise Hamiltoniana

Antes de tratar da quantização propriamente dita, é necessário fazer a análise Hamiltoniana do modelo estudado. O ponto de partida será a Lagrangiana da gravitação de primeira ordem, já vista na seção anterior, juntamente a uma Lagrangiana para o campo escalar  $\phi$  com acoplamento não mínimo ao campo dilaton. Esta Lagrangiana de matéria é necessária para adicionar graus de liberdade contínuos ao modelo possibilitando o estudo de processos de espalhamento neste contexto. Ela é dada por

$$L^{(m)} = \int F(X) \left( \frac{1}{2} d\phi \wedge * d\phi + \epsilon f(\phi) \right). \quad (6.1)$$

As duas Lagrangianas tomam a seguinte forma quando escritas em termos das componentes

$$L^{(FOG)} = \int d^2x \left[ \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} (X^+ (\partial_\mu - \omega_\mu) e_\nu^- + X^- (\partial_\mu + \omega_\mu) e_\nu^+ + X \partial_\mu \omega_\nu) + (e) \mathcal{V}(2X^+ X^-, X) \right] \quad (6.2)$$

$$L^{(m)} = \int d^2x (e) F(X) \left[ \frac{\eta_{ab}}{2(e)^2} (\tilde{\epsilon}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi e_\nu^a) (\tilde{\epsilon}^{\kappa\lambda} \partial_\lambda \phi e_\kappa^b) + f(\phi) \right] \quad (6.3)$$

Temos então as seguintes coordenadas canônicas

$$q_i = (\omega_1, e_1^-, e_1^+), \quad \bar{q}_i = (\omega_0, e_0^-, e_0^+), \quad (6.4)$$

$$X_i = (X, X^+, X^-), \quad \phi, \quad (6.5)$$

com seus respectivos momentos conjugados

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = (X, X^+, X^-), \quad (6.6)$$

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{F(X)}{(e)} [(e_1^- e_0^+ + e_0^- e_1^+) (\partial_1 \phi) - 2e_1^- e_1^+ (\partial_0 \phi)], \quad (6.7)$$

$$\bar{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_i} = 0, \quad (6.8)$$

$$K_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_i} = 0. \quad (6.9)$$

Pode-se ver que exceto no caso do momento conjugado ao campo escalar  $\phi$ , não é possível escrever as velocidades generalizadas como funções dos momentos e coordenadas canônicos, gerando então três conjuntos de três vínculos primários

$$\Phi_i = p_i - X_i = 0, \quad (6.10)$$

$$\bar{p}_i = 0, \quad (6.11)$$

$$K_i = 0. \quad (6.12)$$

Calculando os parênteses de Poisson entre esses vínculos, obtemos

$$\{\Phi_i, \Phi_j\} = 0, \quad (6.13)$$

$$\{\bar{p}_i, \bar{p}_j\} = 0, \quad (6.14)$$

$$\{K_i, K_j\} = 0, \quad (6.15)$$

$$\{\Phi_i, \bar{p}_j\} = 0, \quad (6.16)$$

$$\{\bar{p}_i, K_j\} = 0, \quad (6.17)$$

$$\{\Phi_i, K_j\} = -\delta_{ij} \delta(x - y), \quad (6.18)$$

o que mostra que  $\bar{p}_i$  são vínculos de primeira classe.

Estes vínculos primários devem ser adicionados à Hamiltoniana original com ajuda dos multiplicadores de Lagrange. Definindo por conveniência

$$\Psi_i = \begin{cases} \Phi_i & i = 1, 2, 3 \\ K_i & i = 4, 5, 6 \end{cases}, \quad (6.19)$$

é possível escrever a densidade de Hamiltoniana estendida como  $\mathcal{H}_{est} = \mathcal{H} + \lambda_i \bar{p}_i + \eta_i \Psi_i$

Seguindo o algoritmo de Dirac, por consistência, exige-se dos vínculos que estes sejam preservados no tempo, ou seja, os parênteses de Poisson entre os vínculos e a Hamiltoniana estendida devem ser zero na superfície de vínculos, isto é, devem ser fracamente zero. Aplicando a condição de consistência aos vínculos  $\Psi_i$ , tem-se

$$\{\Psi_i, H_{est}\} \approx 0 \Rightarrow \{\Psi_i, H\} + \int \eta_j \{\Psi_i, \Psi_j\} d^2y \approx 0. \quad (6.20)$$

A matriz  $\{\Psi_i, \Psi_j\}$  tem a seguinte forma

$$\{\Psi_i, \Psi_j\} = \begin{pmatrix} \{\Phi_i, \Phi_j\} & \{\Phi_i, K_j\} \\ \{K_i, \Phi_j\} & \{K_i, K_j\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij}\delta(x-y) \\ \delta_{ij}\delta(x-y) & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

e determinante não nulo ( $\det\{\Psi_i, \Psi_j\} = \delta(x-y)$ ). Isto permite que se resolva as equações de consistência para os multiplicadores de Lagrange  $\eta_j$  e, portanto, a construção de parênteses de Dirac.

Sejam  $F$  e  $G$  funções arbitrárias das variáveis canônicas. Os parênteses de Dirac dessas duas funções é dado por

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \int \{F, \Psi_i\} \{\Psi_i, \Psi_j\}^{-1} \{\Psi_j, G\} dw dz, \quad (6.22)$$

onde as integrações são feitas para recuperar a dependência do parêntese de Poisson nas variáveis das quais  $F$  e  $G$  dependem originalmente.

Abrindo esta expressão, temos

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \int \left( \frac{\delta F}{\delta X_i} \frac{\delta G}{\delta q_i} - \frac{\delta F}{\delta q_i} \frac{\delta G}{\delta X_i} + \frac{\delta F}{\delta X_i} \frac{\delta G}{\delta K_i} - \frac{\delta F}{\delta K_i} \frac{\delta G}{\delta X_i} \right). \quad (6.23)$$

Observe que igualando os vínculos a zero em todo lugar ( $K_i = 0, X_i = p_i$ ) a dependência em  $K_i$  e  $X_i$  desaparece, fazendo com que derivadas em relação a essas variáveis se anulem. Isto faz com que os parênteses de Dirac se reduzam aos parênteses de Poisson calculados em relação às variáveis  $(q, p)$ ,  $(\bar{q}, \bar{p})$  e  $(\phi, \pi)$ . Desta maneira, é possível recomeçar a análise Hamiltoniana

fazendo a identificação  $p_i \equiv (X, X^+, X^-)$  reduzindo assim o número de variáveis canônicas e de vínculos primários como mostrado abaixo.

$$\begin{aligned} q_i &= (\omega_1, e_1^-, e_1^+) & p_i &\equiv (X, X^+, X^-), \\ \bar{q}_i &= (\omega_0, e_0^-, e_0^+) & \bar{p}_i &= 0 \rightarrow \text{vínculo primário}, \\ \phi, & & \pi. & \end{aligned}$$

Com essas identificações, as densidades de Lagrangiana de gravitação e de matéria passam a ser escritas da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(FOG)} &= p_2(\partial_0 - \bar{q}_1)q_2 + p_3(\partial_0 + \bar{q}_1)q_3 + p_1\partial_0q_1 - p_2(\partial_1 - q_1)\bar{q}_2 \\ &\quad - p_3(\partial_1 + q_1)\bar{q}_3 - p_1\partial_1\bar{q}_1 + (\bar{q}_2q_3 - \bar{q}_3q_2)\mathcal{V}(2p_2p_3, p_1), \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\mathcal{L}^{(m)} = (\bar{q}_2q_3 - \bar{q}_3q_2)F(p_1) \left[ \frac{1}{4q_2q_3} \left( (\partial_1\phi)^2 - \frac{\pi^2}{F^2(p_1)} \right) + f(\phi) \right]. \quad (6.25)$$

A densidade de Hamiltoniana estendida passa a ser

$$\mathcal{H}_{est} = \underbrace{p_i\dot{q}_i - \mathcal{L}^{(FOG)}}_{\mathcal{H}^{(g)}} + \underbrace{\pi\dot{\phi} - \mathcal{L}^{(m)}}_{\mathcal{H}^{(m)}} - \lambda_i\bar{p}_i. \quad (6.26)$$

Aplicando a condição de consistência aos vínculos e usando o fato de que estes são de primeira classe, obtemos

$$\int \{\bar{p}_i(x), \mathcal{H}(y)\} dy \approx 0 \Rightarrow \int (\{\bar{p}_i, \mathcal{H}^{(g)}\} + \{\bar{p}_i, \mathcal{H}^{(m)}\}) dy = G_i^{(g)} + G_i^{(m)} \approx 0, \quad (6.27)$$

onde as variáveis  $x^0$  e  $x^1$  foram chamadas coletivamente de  $x$ , o mesmo tendo sido feito com  $y$ .

Um cálculo simples permite mostrar que

$$G_i^{(g)} = \partial_1 p_i + p_2(\delta_{i2}q_1 - \delta_{i1}q_2) - p_3(\delta_{i3}q_1 - \delta_{i1}q_3) + \mathcal{V}(\delta_{i2}q_3 - \delta_{i3}q_2) \quad (6.28)$$

e

$$\begin{aligned} G_i^{(m)} &= \left[ \frac{F(p_1)}{4q_2} \left( (\partial_1\phi) - \frac{\pi}{F(p_1)} \right)^2 + F(p_1)q_3f(\phi) \right] \delta_{i2} \\ &\quad - \left[ \frac{F(p_1)}{4q_3} \left( (\partial_1\phi) + \frac{\pi}{F(p_1)} \right)^2 + F(p_1)q_2f(\phi) \right] \delta_{i3}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Assim, observa-se a existência de vínculos secundários dados por

$$G_i := G_i^{(g)} + G_i^{(m)} \approx 0. \quad (6.30)$$

Comparando  $G_i^{(g)}$  com  $\mathcal{H}^{(g)}$  e  $G_i^{(m)}$  com  $\mathcal{H}^{(m)}$ , nota-se que é possível escrever a densidade de Hamiltoniana de uma forma mais conveniente. Para tanto, é preciso fazer uma integração por partes em  $\mathcal{H}^{(g)}$ , mais especificamente no termo  $p_i \partial_1 \bar{q}_i$ , ficando fácil mostrar que

$$\mathcal{H}^{(g)} = -\bar{q}_i G_i^{(g)}, \quad (6.31)$$

$$\mathcal{H}^{(m)} = -\bar{q}_i G_i^{(m)}. \quad (6.32)$$

Isto nos permite escrever a densidade de Hamiltoniana estendida como uma soma sobre vínculos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}^{(g)} + \mathcal{H}^{(m)} - \lambda_i \bar{p}_i \\ &\Rightarrow \mathcal{H} = -\bar{q}_i G_i^{(g)} - \bar{q}_i G_i^{(m)} - \lambda_i \bar{p}_i \\ &\Rightarrow \mathcal{H} = \bar{q}_i G_i - \lambda_i \bar{p}_i, \end{aligned} \quad (6.33)$$

o que se sabe ser uma característica de sistemas invariantes sob transformações do parâmetro de evolução temporal.

Para concluir o procedimento de Dirac, é necessário aplicar a condição de consistência aos vínculos secundários, ou seja,

$$\int \{G_i, \mathcal{H}\} dy = - \int (\underbrace{\{G_i, \bar{q}_j\}}_{=0} G_j + \{G_i, G_j\} \bar{q}_j + \lambda_j \underbrace{\{G_i, \bar{p}_j\}}_{=0}) dy \approx 0, \quad (6.34)$$

onde os termos indicados como iguais a zero o são pelo fato de que os vínculos  $G_i$  não possuem dependência em  $\bar{q}_i$  ou  $\bar{p}_i$ , reduzindo a expressão para

$$- \int (\{G_i, G_j\} \bar{q}_j) dy \approx 0. \quad (6.35)$$

Calculando os parênteses de Poisson entre estes vínculos secundários, descobre-se que eles formam uma álgebra

$$\{G_i, G_j\} = C_{ijk} G_k \delta(x - y) \quad (6.36)$$

com as seguintes funções de estrutura não nulas (lembrando que  $C_{ijk} = -C_{jik}$ , dada a antissimetria dos parênteses de Poisson),

$$\begin{aligned}
C_{122} &= -1, & C_{231} &= \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial p_1} + \frac{F'(p_1)}{(e)F(p_1)} \mathcal{L}^{(m)}, \\
C_{133} &= 1, & C_{232} &= \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial p_2}, \\
C_{232} &= \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial p_3}.
\end{aligned} \tag{6.37}$$

Com isso, a condição de consistência passa a ser dada por

$$- \int C_{ijk} G_k \bar{q}_j \delta(x - y) dy = -C_{ijk} G_k \bar{q}_j \approx 0, \tag{6.38}$$

que é fracamente zero por ser proporcional aos vínculos secundários, evidenciando a inexistência de vínculos terciários e dando fim ao procedimento de Dirac.

Vejamos a questão dos graus de liberdade. O número de graus de liberdade de uma teoria em que vale a conjectura de Dirac, como é o caso desta, é dado por

$$\begin{aligned}
2 \times (\text{N}^\circ \text{ graus de liberdade}) &= (\text{N}^\circ \text{ variáveis canônicas}) \\
&- (\text{N}^\circ \text{ de vínculos de 2}^\text{a} \text{ classe}) - 2 \times (\text{N}^\circ \text{ de vínculos de 1}^\text{a} \text{ classe}).
\end{aligned} \tag{6.39}$$

Como há 14 variáveis canônicas, 6 vínculos de primeira classe e nenhum de segunda classe, resulta que há apenas 1 grau de liberdade na teoria. Se não tivéssemos adicionado matéria à teoria, teríamos 12 variáveis canônicas e 6 vínculos de primeira classe, resultando em nenhum grau de liberdade, como foi observado anteriormente.

Finalmente, a densidade de Hamiltoniana estendida pode ser escrita adicionando os vínculos secundários (que são também de primeira classe, dado que  $\{G_i, \bar{p}_j\} \approx 0$  e  $\{G_i, G_j\} \approx 0$ ),

$$\mathcal{H}_{est} = -\bar{q}_i G_i - \lambda_i \bar{p}_i - \mu_i G_i, \tag{6.40}$$

porém a mudança de variáveis  $\bar{q}'_i = \bar{q}_i + \mu_i$  permite simplificar a Hamiltoniana para

$$\mathcal{H}_{est} = -\bar{q}'_i G_i - \lambda_i \bar{p}_i, \tag{6.41}$$

onde a nova variável  $\bar{q}'_i$  volta a ser chamada apenas de  $\bar{q}_i$  por conveniência.

Feita a análise dos vínculos, pode-se prosseguir com a quantização da teoria, cuja densidade de Hamiltoniana é dada pela equação (6.41).

## 7 Quantização

A quantização deste modelo de gravitação dilatônica em 2-D com adição de matéria será feita inicialmente por meio do procedimento BRST (Becchi-Rouet-Stora-Tyutin)(conforme [8], [6]) que permitirá a obtenção de uma Hamiltoniana com o calibre fixado, o que por sua vez tornará possível que se proceda a quantização via integrais de trajetória. Veremos que não será necessário utilizar métodos perturbativos no setor geométrico da teoria, evitando a necessidade de uma separação das variáveis geométricas em um “background” a partir do qual se adicionam flutuações. Estes métodos perturbativos ficarão restritos ao setor de matéria da teoria.

### 7.1 O procedimento BRST

O primeiro passo deste procedimento é a introdução de alguns campos extras na teoria, a começar pelos chamados campos fantasma  $b_i$  e  $c_i$ , um para cada vínculo existente. Estes são campos de Grassmann, portanto anticomutativos, que possuem número fantasma igual a 1 ( $gh(b_i) = gh(c_i) = 1$ ). Além destes, adiciona-se também seus respectivos momentos conjugados, conhecidos como antifantasmas e denotados  $p_i^b$  e  $p_i^c$ , que apesar de serem anticomutativos como os fantasmas, possuem número fantasma igual a  $-1$  ( $gh(p_i^b) = gh(p_i^c) = -1$ ). Finalmente, inclui-se também um campo comutativo, denotado  $h_i$  que servirá como momento conjugado ao multiplicador de Lagrange  $\lambda_i$ .

Desta maneira temos agora as seguintes variáveis canônicas

Coordenadas:

$$\begin{array}{ll} \text{bosônicas:} & q_i, \bar{q}_i, \phi, \lambda_i \quad \text{número fantasma} = 0 \\ \text{fermiônicas:} & b_i, c_i \quad \text{número fantasma} = 1 \end{array}$$

Momentos:

$$\begin{array}{ll} \text{bosônicos:} & p_i, \bar{p}_i, \pi, h_i \quad \text{número fantasma} = 0 \\ \text{fermiônicos:} & p_i^b, p_i^c \quad \text{número fantasma} = -1 \end{array}$$

Os parênteses de Poisson dos fantasmas são dados por

$$\{b_i(x), p_j^b(y)\} = \{c_i(x), p_j^c(y)\} = -\delta_{ij}\delta(x-y), \quad (7.1)$$

e se anulam sempre que calculados com alguma das variáveis originais.

Agora, à densidade de Hamiltoniana original, que é invariante sob transformações de calibre, é adicionado um novo termo dado pela ação da transformação BRST, denotada por  $s$ , em um férmion  $\Psi$ , que fixará o calibre (o chamado *gauge fixing fermion*). Esta nova Hamiltoniana  $H_{gf}$  (*gf* de *gauge fixed*) pode ser escrita também utilizando a carga BRST  $\Omega$ , que é geradora da transformação BRST, e será mais conveniente.

$$\mathcal{H}_{gf} = \mathcal{H}_{est} + s\Psi = \mathcal{H}_{est} + \{\Psi, \Omega\} \quad (7.2)$$

Observe que esta nova Hamiltoniana ainda possui simetria BRST, posto que  $H_{est}$  é invariante sob transformações de calibre e  $s\Psi = \{\Psi, \Omega\}$  é invariante dada a nilpotência da transformação BRST.

Para seguir adiante, é necessário encontrar a expressão para a carga  $\Omega$ . Isto será feito buscando uma expressão que possua as seguintes propriedades essenciais à carga BRST (como visto em [8]):

1.  $gh(\Omega) = 1$
2.  $\Omega$  deve ser fermiônico
3.  $\{\Omega, \Omega\} = 0$  (condição de nilpotência)
4.  $\{H_{est}, \Omega\}$  deve se reduzir a uma transformação de calibre usual

A propriedade 1 implica que cada termo que compõe  $\Omega$  deve ser um produto de  $n$  fantasmas com  $n - 1$  antifantasmas e a propriedade 2 indica que cada termo deve ser um produto de um número ímpar de variáveis fermiônicas. Estas informações já fornecem balizas para a determinação da carga.

Levando em conta agora a propriedade 4 e o fato conhecido de que vínculos de primeira classe são os geradores de transformações de calibre, é possível fazer uma primeira tentativa para o formato de  $\Omega$ ,

$$\Omega = b_i \bar{p}_i + c_i G_i. \quad (7.3)$$

Esta tentativa respeita as propriedades 1, 2 e 4, mas será nilpotente? Um cálculo simples mostra que não.

$$\{\Omega, \Omega\} = c_i c_j C_{ijk} G_k \delta(x - y) \quad (7.4)$$

Para cancelar este termo, adiciona-se um novo termo à  $\Omega$ . A equação (7.4) sugere algo do tipo  $A_{ijk} c_i c_j p_k^c$ , que satisfaz 1 e 2 contanto que  $A_{ijk}$  sejam funções comutativas de número fantasma 0. Assim,

$$\Omega = b_i \bar{p}_i + c_i G_i + A_{ijk} c_i c_j p_k^c. \quad (7.5)$$

A exigência de nilpotência implica que a carga  $\Omega$  tenha a seguinte forma,

$$\Omega = c_i G_i + b_i \bar{p}_i + \frac{1}{2} C_{ijk} c_i c_j p_k^c. \quad (7.6)$$

A prova disso é dada no Apêndice A.

Esta carga é fermiônica, tem número fantasma igual a 1 e é nilpotente por construção. Será necessário integrá-la ( $\int \Omega d^2x$ ) para que quando forem calculados os parênteses de Poisson  $\{\Psi, \Omega\}$ , a função delta resultante seja eliminada. Para checar a propriedade 4, basta calcular os parênteses de Poisson desta carga com a densidade de Hamiltoniana estendida e verificar que eles se anulam. Isto é simplificado observando que podemos escrever

$$\mathcal{H}_{est} = -\bar{q}_i G_i - \lambda_i \bar{p}_i = \{p_i^c \bar{q}_i, \Omega\} - \lambda_i \bar{p}_i. \quad (7.7)$$

Assim, temos

$$\{\mathcal{H}_{est}, \Omega\} = \{\{p_i^c \bar{q}_i, \Omega\}, \Omega\} - \lambda_i \{\bar{p}_i, \Omega\} = 0, \quad (7.8)$$

pois o primeiro termo se anula pela nilpotência de  $\Omega$  e o segundo se anula pelo fato de  $\Omega$  não depender de  $\bar{q}_i$ .

Definida a carga BRST, resta fazer a escolha do férmion que fixará o calibre na Hamiltoniana. A escolha do calibre é condicionada apenas por três exigências: que  $\Psi$  seja fermiônico e possua número fantasma igual a  $-1$  ( $gh(\Psi) = -1$ ), para garantir que a Hamiltoniana seja bosônica e tenha número fantasma igual a 0, e que  $\{\Psi, \Omega\} \neq 0$ , para que não se obtenha novamente a Hamiltoniana original. À parte destas exigências, a escolha de calibre é absolutamente arbitrária, já que o resultado final da quantização não pode depender dela. Entretanto, nem todo calibre permite que se proceda o cálculo das integrais de trajetória, fazendo com que a arbitrariedade original acabe substituída por uma especificidade muito grande. Um calibre que se sabe ser muito útil para o caso em estudo é o chamado calibre temporal, como visto em [10],

$$\bar{q}_i = a_i, \quad (7.9)$$

onde  $a_i$  é uma constante tal que não produza uma métrica singular. No caso, será escolhido  $a_i = (0, 1, 0)$  de acordo com outros trabalhos no tema.

Uma escolha de férmion que produz este calibre e possibilita o cálculo das integrais de trajetória é a seguinte,

$$\Psi = p_i^c a_i = p_2^c. \quad (7.10)$$

Escolhido o f ermion, a densidade de Hamiltoniana será dada por

$$\mathcal{H}_{gf} = \mathcal{H}_{est} + \int \{p_2^c, \Omega\} d^2y, \quad (7.11)$$

que resulta finalmente em

$$\mathcal{H}_{gf} = -\bar{q}_i G_i - \lambda_i \bar{p}_i - G_2 - C_{2jk} c_j p_k^c. \quad (7.12)$$

A densidade de Lagrangiana correspondente será

$$\mathcal{L}_{gf} = p_i \dot{q}_i + \bar{p}_i \dot{\bar{q}}_i + \pi \dot{\phi} + h_i \dot{\lambda}_i + p_i^b \dot{b}_i + p_i^c \dot{c}_i - \mathcal{H}_{gf}. \quad (7.13)$$

## 7.2 A quantiza o via integrais de trajetória

A quantiza o será feita com integrais de trajetória sobre cada variável can nica do espaço de fase estendido. Além da densidade de Lagrangiana encontrada anteriormente, serão adicionadas, por conveniência, fontes para as variáveis  $q_i$ ,  $p_i$  e  $\phi$ , resultando na expressão seguinte

$$W = \int \mathcal{D}q_i \mathcal{D}p_i \mathcal{D}\bar{q}_i \mathcal{D}\bar{p}_i \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \mathcal{D}c_i \mathcal{D}p_i^c \mathcal{D}b_i \mathcal{D}p_i^b \mathcal{D}\lambda_i \mathcal{D}h_i \quad (7.14)$$

$$\times \exp \left[ i \int (\mathcal{L}_{gf} + J_i p_i + j_i q_i + \sigma \phi) dx^2 \right], \quad (7.15)$$

A primeira integra o será feita em rela o    $\lambda_i$ , tendo seguinte forma

$$W = \int (\dots) \mathcal{D}\lambda_i \exp \left[ i \int (\bar{p}_i - \dot{h}_i) \lambda_i \right] \exp(\dots), \quad (7.16)$$

onde o termo a ser integrado foi obtido via integra o por partes no termo  $h_i \dot{\lambda}_i$  presente em  $\mathcal{L}_{gf}$ . Os pontos (...) substituem as partes da expressão que não afetam a integra o em curso, que produz o resultado a seguir

$$W = \int (\dots) \mathcal{D}\bar{p}_i \delta[(\bar{p}_i - \dot{h}_i)] \exp \left[ i \int \bar{p}_i \dot{\bar{q}} \right] \exp(\dots). \quad (7.17)$$

A segunda integra o será em rela o    $\bar{p}_i$ , que por conta do funcional delta presente resultará apenas na substitui o de  $\bar{p}_i$  por  $\dot{h}_i$  no integrando, produzindo

$$W = \int (\dots) \exp \left[ i \int (-\dot{h}_i \dot{q}_i) \right] \exp(\dots). \quad (7.18)$$

Com uma integração por partes no termo da Lagrangiana em evidência na equação anterior e agregando os termos que possuem  $\bar{q}_i$  para a terceira integração, temos

$$W = \int (\dots) \mathcal{D}\bar{q}_i \exp \left[ i \int (\partial_0^2 h_i + G_i) \bar{q}_i \right] \exp(\dots), \quad (7.19)$$

que resulta em

$$W = \int (\dots) \mathcal{D}h_i \delta[\partial_0^2 h_i + G_i] \exp(\dots). \quad (7.20)$$

A avaliação desta expressão exige o uso da generalização funcional da conhecida fórmula

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x)|} \delta(x - x_0), \quad (7.21)$$

ou seja,

$$W = \int (\dots) \mathcal{D}h_i \det(\partial_0^2)^{-1} \delta[h_i - \hat{h}_i] \exp(\dots), \quad (7.22)$$

onde  $\hat{h}_i$  são as soluções para  $\partial_0^2 h_i + G_i = 0$ . A integração em  $h_i$  agora é trivial, permitindo passar para as integrações em relação aos fantasmas  $b_i$  e  $p_i^b$

$$W = \int (\dots) \mathcal{D}b_i \mathcal{D}p_i^b \det(\partial_0^2)^{-1} \exp \left[ i \int p_i^b \partial_0 b_i \right] \exp(\dots). \quad (7.23)$$

Essa integração é feita usando o fato de que

$$\det(N) \propto \int \mathcal{D}b_j \mathcal{D}p_i^b \exp \left[ i \int p_i^b N_{ij} b_j d^2x \right], \quad (7.24)$$

sendo que no caso em questão esta matriz funcional  $N$  é dada por

$$N = \begin{pmatrix} \partial_0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_0 \end{pmatrix}, \quad (7.25)$$

tendo determinante  $\det N = \det(\partial_0)^3$ . Assim, passamos à integração dos próximos fantasmas

$$W = \int (\dots) \mathcal{D}c_i \mathcal{D}p_i^c \det(\partial_0) \exp \int [p_i^c \dot{c}_i - p_k^c C_{2jk} c_j] \exp(\dots), \quad (7.26)$$

que é feita novamente usando a expressão (7.24), levando desta vez à

$$W = \int \mathcal{D}q_i \mathcal{D}p_i \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \det(\partial_0) \det M \\ \times \exp \left[ i \int (p_i \dot{q}_i + \pi \dot{\phi} + G_2 + J_i p_i + j_i q_i + \sigma \phi) \right]. \quad (7.27)$$

Note que a Lagrangiana efetiva que aparece é justamente aquela que se obteria fazendo  $\bar{q}_i = (0, 1, 0)$  na Hamiltoniana original, justificando a afirmação de que a escolha do férmion  $\Psi = p_2^c$  produziria este calibre.

O termo  $\det M$  que aparece na expressão anterior é o determinante da matriz funcional dada por

$$M = \begin{pmatrix} \partial_0 & -1 & 0 \\ 0 & \partial_0 & 0 \\ -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial p_1} + \frac{F'(p_1)}{(e)F(p_1)} \mathcal{L}^{(m)} & -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial p_2} & \partial_0 - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial p_3} \end{pmatrix}, \quad (7.28)$$

tendo portanto o seguinte determinante

$$\det M = \det(\partial_0)^2 \det \left( \partial_0 - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial p_3} \right). \quad (7.29)$$

Lembrando que  $\mathcal{V} = U(p_1)p_2p_3 + V(p_1)$ , esse determinante passa a ser

$$\det M = \det(\partial_0)^2 \det (\partial_0 - p_2 U(p_1)). \quad (7.30)$$

Seguindo agora para a integração do momento  $\pi$ , observa-se que os termos da Lagrangiana que dele dependem vem de  $\pi \dot{\phi} + G_2^{(m)}$ , mais especificamente

$$\pi \dot{\phi} + G_2^{(m)} = \pi \dot{\phi} + \frac{F(p_1)}{4q_2} \left( \frac{\pi^2}{F^2(p_1)} - \frac{2\pi(\partial_1 \phi)}{F(p_1)} \right) \\ + \underbrace{\left[ \frac{F(p_1)}{4q_2} (\partial_1 \phi)^2 + F(p_1) q_3 f(\phi) \right]}_{\text{não depende de } \pi}, \quad (7.31)$$

levando à seguinte integral de trajetória Gaussiana

$$W = \int (\dots) \mathcal{D}\pi \exp \left\{ \left[ i \int \frac{\pi^2}{4q_2 F(p_1)} + \pi \left( (\partial_0 \phi) - \frac{(\partial_1 \phi)}{2q_2} \right) \right] \right\}, \quad (7.32)$$

que, como se sabe, produz a raiz quadrada inversa de um determinante do fator que multiplica  $\pi^2$  vezes o integrando avaliado no seu ponto estacionário, dado por

$$\pi_0 = -2q_2 F(p_1) \left( (\partial_0 \phi) - \frac{(\partial_1 \phi)}{2q_2} \right). \quad (7.33)$$

Chega-se assim à expressão seguinte (excluindo termos que não dependem dos campos, pois não afetam o propagador),

$$W = \int \mathcal{D}q_i \mathcal{D}p_i \mathcal{D}\phi \det M (\det q_2)^{\frac{1}{2}} (\det F(p_1))^{\frac{1}{2}} \exp \left[ i \int \mathcal{L}^{(1)} d^2x \right], \quad (7.34)$$

onde  $\mathcal{L}^{(1)}$  é a densidade de Lagrangiana efetiva,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)} = & p_i \dot{q}_i + \partial_1 p_2 + p_2 q_1 + q_3 (V(p_1) + U(p_1) p_2 p_3) \\ & + F(p_1) ((\partial_0 \phi)(\partial_1 \phi) - q_2 (\partial_0 \phi)^2 + q_3 f(\phi)) + J_i p_i + j_i q_i + \sigma \phi. \end{aligned} \quad (7.35)$$

É necessário agora fazer uma observação quanto à medida utilizada na integração em relação à matéria. Da forma como está, a medida  $\mathcal{D}\phi$  não é covariante, o que, como salientado em [9], pode gerar anomalias, mostrando que a medida funcional não é desprovida de significado físico. Lá é argumentado que a medida covariante correta seria  $(\mathcal{D}\phi \sqrt{(e)})$ . No caso em estudo, como foi escolhido o calibre temporal  $\bar{q}_i = (0, 1, 0)$ , essa medida passa a ser então  $\mathcal{D}\phi \sqrt{q_3}$ . Note a presença de um termo similar na equação (7.34). A solução adotada em [11] é a inserção à mão de um termo  $\sqrt{q_3/q_2}$  à medida. Essa solução um tanto artificial é justificável por não se saber qual seria a medida correta *a priori*, então ficamos com uma conveniente.

Apesar desta inserção ocorrer um tanto tarde, uma vez que várias integrações já foram feitas, graças à escolha judiciosa de calibre nenhuma interferência ocorre, já que o determinante do vielbein se reduz a  $(e) = q_3$ , uma variável que ainda não foi integrada.

Feito o ajuste na medida, o próximo passo será a integração das coordenadas  $q_i$ . Para tanto, escreve-se o fator  $\sqrt{(\det q_3)}$  como uma integral de trajetória usando as fórmulas já utilizadas neste processo de integração

$$\sqrt{\det q_3} = \int \mathcal{D}v \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \exp i \left[ \int d^2x \underbrace{(v^2 + \bar{\eta}\eta)}_h q_3 \right], \quad (7.36)$$

onde  $v$  é um campo comutativo e  $\eta$  e  $\bar{\eta}$  são campos anticomutativos.

A situação agora é a seguinte

$$W = \int \mathcal{D}q_i \mathcal{D}p_i \mathcal{D}\phi \mathcal{D}v \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \det M(\det F(p_1))^{\frac{1}{2}} \exp \left( i \int d^2x \mathcal{L}^{(2)} \right), \quad (7.37)$$

com  $\mathcal{L}^{(2)}$  diferindo de  $\mathcal{L}^{(1)}$  pela adição de  $h = v^2 + \bar{\eta}\eta$  e por uma integração por partes no termo  $p_i \dot{q}_i$ , resultando em

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} = & -\dot{p}_i q_i + \partial_1 p_2 + p_2 q_1 + q_3 (V(p_1) + U(p_1) p_2 p_3) \\ & + F(p_1) ((\partial_0 \phi)(\partial_1 \phi) - q_2 (\partial_0 \phi)^2 + q_3 f(\phi)) + J_i p_i + j_i q_i + \sigma \phi + h q_3. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Esta densidade de Lagrangiana possui apenas termos lineares em  $q_i$ , fazendo com que as integrações produzam três funcionais delta

$$\begin{aligned} W = & \int \mathcal{D}p_i \mathcal{D}\phi \mathcal{D}v \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \det M(\det F(p_1))^{\frac{1}{2}} \exp \left[ i \int d^2x \mathcal{L}^{(3)} \right] \\ & \times \delta[\partial_0 p_1 - p_2 - j_1] \delta[\partial_0 p_2 + F(p_1) (\partial_0 \phi)^2 - j_2] \\ & \times \delta[\partial_0 p_3 - V(p_1) - U(p_1) p_2 p_3 - F(p_1) f(\phi) - h - j_3], \end{aligned} \quad (7.39)$$

com

$$\mathcal{L}^{(3)} = \partial_1 p_2 + F(p_1) (\partial_0 \phi)(\partial_1 \phi) + J_i p_i + \sigma \phi. \quad (7.40)$$

Note que o termo  $\partial_1 p_2$  pode ser excluído considerando que  $p_2$  se anule nos limites da integração em  $x_1$ , o que será feito a partir de agora. Para prosseguir, é necessário resolver as equações diferenciais que servem como argumento dos funcionais delta em (7.39). Isto não pode ser feito exatamente para interações arbitrárias com a matéria. Examinemos então o caso mais simples, o caso sem matéria, que mostrará algumas características importantes para o caso mais geral.

### 7.3 GDT sem matéria

O caso sem matéria é obtido fazendo  $F(p_1) = 0$ . Esta escolha faz com que o propagador seja modificado para

$$\begin{aligned}
 W = \int \mathcal{D}p_i \det M \exp \left[ i \int d^2x (J_i p_i) \right] \\
 \times \delta[\partial_0 p_1 - p_2 - j_1] \delta[\partial_0 p_2 - j_2] \\
 \times \delta[(\partial_0 - U(p_1)p_2)p_3 - V(p_1) - j_3]. \quad (7.41)
 \end{aligned}$$

Resolvendo os argumentos dos dois primeiros funcionais delta obtemos

$$\partial_0 p_2 - j_2 = 0 \Rightarrow p_2 = B_2 = \bar{p}_2 + \partial_0^{-1} j_2, \quad (7.42)$$

$$\partial_0 p_1 - p_2 - j_1 = 0 \Rightarrow p_1 = B_1 = \bar{p}_1 + \partial_0^{-1}(p_2 + j_1). \quad (7.43)$$

A terceira equação diferencial exige um pouco mais de trabalho

$$(\partial_0 - U(p_1)p_2)p_3 = V(p_1) + j_3 \quad (7.44)$$

Multiplicando a equação anterior por um fator  $A$  tal que  $(\partial_0 - U(p_1)p_2)p_3 A = \partial_0(p_3 A)$ , temos

$$\begin{aligned}
 \partial_0 A = -U(p_1)p_2 A \Rightarrow \ln A = - \underbrace{\partial_0^{-1}(U(p_1)p_2)}_Q \\
 \Rightarrow A = e^{-Q}, \quad (7.45)
 \end{aligned}$$

produzindo portanto

$$\begin{aligned}
 \partial_0(p_3 e^{-Q}) = e^{-Q}(V(p_1) + j_3) \\
 \Rightarrow p_3 = B_3 = e^Q [\partial_0^{-1} e^{-Q}(V(p_1) + j_3) + \bar{p}_3]. \quad (7.46)
 \end{aligned}$$

Os  $\bar{p}_i$  que aparecem nas soluções das equações diferenciais são funções apenas de  $x_1$ , aparecendo como constantes de integração associadas a  $\partial_0^{-1}$ .

Com as soluções das equações e novamente utilizando a generalização funcional da fórmula (7.21), temos que

$$\begin{aligned}
 W = \int \mathcal{D}p_i \det M \exp \left[ i \int d^2x (J_i p_i) \right] \\
 \times [\det(\partial_0)^2 \det(\partial_0 - p_2 U(p_1))]^{-1} \delta(p_i - B_i). \quad (7.47)
 \end{aligned}$$

Observe que os determinantes produzidos cancelam exatamente o termo  $\det M$ . As integrações em  $p_i$  são triviais e resultam em

$$W = \exp \left[ i \int d^2x (J_i B_i) \right]. \quad (7.48)$$

A expressão anterior é exata e correta, porém possui uma característica inaceitável fisicamente: no limite  $J_i \rightarrow 0$  a Lagrangiana se anula, levando consigo toda dinâmica. Este problema é resolvido com a adição de um novo termo à densidade de Lagrangiana, cuja origem é a existência de ambiguidades por conta da presença do operador  $\partial_0^{-1}$  na solução das equações diferenciais para os momentos  $p_i$ . Isto é discutido com mais detalhes no Apêndice B, e resulta em

$$W = \exp \left[ i \int d^2x (J_i B_i - e^{-Q} (j_3 + V(B_1)) \bar{g}_3(x_1)) \right], \quad (7.49)$$

onde  $\bar{g}_3(x_1)$  é uma função arbitrária apenas de  $x_1$ , e o termo novo não desaparece quando as fontes se anulam.

## 7.4 GDT com matéria

No caso com matéria, a situação antes das integrações em  $p_i$  é a seguinte

$$\begin{aligned} W = & \int \mathcal{D}p_i \mathcal{D}\phi \mathcal{D}v \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \det M (\det F(p_1))^{\frac{1}{2}} \exp \left[ i \int d^2x \mathcal{L}^{(3)} \right] \\ & \times \delta[\partial_0 p_1 - p_2 - j_1] \delta[\partial_0 p_2 + F(p_1)(\partial_0 \phi)^2 - j_2] \\ & \times \delta[\partial_0 p_3 - V(p_1) - U(p_1)p_2 p_3 - F(p_1)f(\phi) - h - j_3], \end{aligned} \quad (7.50)$$

com

$$\mathcal{L}^{(3)} = F(p_1)(\partial_0 \phi)(\partial_1 \phi) + J_i p_i + \sigma \phi. \quad (7.51)$$

Chamando de  $\hat{B}_i$  a solução das equações diferenciais que servem de argumento aos funcionais delta neste caso com matéria, temos

$$\begin{aligned} W = & \int \mathcal{D}p_i \mathcal{D}\phi \mathcal{D}v \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \det M (\det F(p_1))^{\frac{1}{2}} \frac{\delta(p_i - \hat{B}_i)}{\det M} \\ & \times \exp \left[ i \int d^2x (F(p_1)(\partial_0 \phi)(\partial_1 \phi) + J_i p_i + \sigma \phi) \right]. \end{aligned} \quad (7.52)$$

A integração em  $p_i$  é trivial e resulta em

$$W = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}v \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta (\det F(\hat{B}_1))^{\frac{1}{2}} \exp \left[ i \int d^2x [F(\hat{B}_1)(\partial_0\phi)(\partial_1\phi) + J_i \hat{B}_i + \sigma\phi - \bar{g}_3 e^{-\hat{Q}}(V(\hat{B}_1) + F(\hat{B}_1)f(\phi) + h + j_3)] \right], \quad (7.53)$$

onde  $-\bar{g}_3 e^{-\hat{Q}}(V(\hat{B}_1) + F(\hat{B}_1)f(\phi) + h + j_3)$  é o termo ambíguo com origem em  $J_3 \hat{B}_3$ , análogo ao obtido no caso sem matéria, como explicado no apêndice. A notação  $\hat{Q}$  denota que  $Q$  possui agora dependência em  $\hat{B}_1$  e  $\hat{B}_2$ . Note que o termo  $h$  aparece não só no termo ambíguo como também diretamente em  $\hat{B}_3$ , dado explicitamente por

$$\hat{B}_3 = e^{\hat{Q}} \left[ \partial_0^{-1} e^{-\hat{Q}}(V(\hat{B}_1) + F(\hat{B}_1)f(\phi) + h + j_3) + \bar{p}_3 \right]. \quad (7.54)$$

É possível isolar os termos contendo  $h$  e integrá-los nas variáveis  $v$ ,  $\eta$  e  $\bar{\eta}$ , resultando em

$$W = \int \mathcal{D}\phi (\det F(\hat{B}_1))^{\frac{1}{2}} (\det E_1^+)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ i \int d^2x [F(\hat{B}_1)(\partial_0\phi)(\partial_1\phi) + J_i \hat{B}_i|_{h=0} + \sigma\phi - \bar{g}_3 e^{-\hat{Q}}(V(\hat{B}_1) + F(\hat{B}_1)f(\phi) + j_3)] \right\}, \quad (7.55)$$

onde  $E_1^+$  é dado por

$$E_1^+ = -[\bar{g} + (\partial_0^{-1} J_3 e^{\hat{Q}})] e^{-\hat{Q}}. \quad (7.56)$$

Observe que para  $J_i = 0$ ,  $E_1^+$  se reduz à  $q_3$  quando expresso como a derivada funcional de  $W$  em relação a  $j_3$ . Entretanto, este termo possui também dependência no campo escalar, por meio da dependência em  $\hat{B}_1$  presente em  $\hat{Q}$ , o que leva em conta a interação entre geometria e matéria.

A integração restante não pode ser resolvida exatamente, o que nos leva à utilização de métodos perturbativos. Para simplificar a discussão, reduziremos a arbitrariedade do modelo, analisando primeiramente o caso de acoplamento mínimo sem autointeração.

## 7.5 Acoplamento mínimo sem autointeração local

O caso de acoplamento mínimo sem auto interação local é caracterizado por  $F(p_1) = 1$  e  $f(\phi) = 0$ . Aplicando estas escolhas na expressão (7.55), temos o seguinte ponto de partida para os métodos perturbativos

$$W = \int \mathcal{D}\phi (\det E_1^+)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ i \int d^2x [(\partial_0\phi)(\partial_1\phi) + J_i \hat{B}_i|_{h=0} - \bar{g}_3 e^{-\hat{Q}} (V(\hat{B}_1) + j_3) + \sigma\phi] \right]. \quad (7.57)$$

O primeiro passo é obter as expressões para  $\hat{B}_i$ . Pode-se escrever estas soluções como modificações das soluções encontradas no caso sem matéria, produzindo

$$\hat{B}_1 = B_1 - \partial_0^{-2}(\partial_0\phi)^2, \quad (7.58)$$

$$\hat{B}_2 = B_2 - \partial_0^{-1}(\partial_0\phi)^2, \quad (7.59)$$

$$\hat{B}_3 = e^{\hat{Q}} \left[ \partial_0^{-1} e^{-\hat{Q}} (V(\hat{B}_1) + j_3) + \bar{p}_3 \right]. \quad (7.60)$$

Os termos  $\hat{B}_1$  e  $\hat{B}_2$  são de segunda ordem em  $\phi$ . Já em  $\hat{B}_3$ , a dependência em  $\phi$  se dá indiretamente, por meio da dependência de  $\hat{Q}$  em  $\hat{B}_1$  e  $\hat{B}_2$ . Assim, é necessário expandir todos os termos da Lagrangiana efetiva que dependam de  $\hat{B}_i$ . Começando por  $\hat{Q}$  obtemos

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \partial_0^{-1}(U(\hat{B}_1)\hat{B}_2) \\ &= \partial_0^{-1} [(U(B_1) - U'(B_1)\partial_0^{-2}(\partial_0\phi)^2)(B_2 - \partial_0^{-1}(\partial_0\phi)^2)] \\ &= \partial_0^{-1}(U(B_1)B_2) + \partial_0^{-1} [-(U'(B_1) + B_2U''(B_1)\partial_0^{-1})\partial_0^{-1}(\partial_0\phi)^2 + \mathcal{O}(\phi^4)] \\ &= Q - \underbrace{\partial_0^{-1}[(U'(B_1) + B_2U''(B_1)\partial_0^{-1})\partial_0^{-1}(\partial_0\phi)^2]}_G + \mathcal{O}(\phi^4), \end{aligned} \quad (7.61)$$

onde  $U'$  denota derivação em relação ao argumento  $B_1$ .

Expandindo também  $V(\hat{B}_1)$ , temos

$$V(\hat{B}_1) = V(B_1) - V'(B_1)\partial_0^{-2}(\partial_0\phi)^2 + \mathcal{O}(\phi^4). \quad (7.62)$$

Usando estas expansões até segunda ordem em  $\phi$  na expressão para  $\hat{B}_3$ , leva a

$$\begin{aligned} \hat{B}_3 &= B_3 - e^Q [\partial_0^{-1}(e^{-Q}V'(B_1)\partial_0^{-2}) \\ &\quad + 2(V(B_1) + j_3)(\partial_0^{-1}e^{-Q})G + \bar{p}_3 e^Q G] (\partial_0\phi)^2 + \mathcal{O}(\phi^4). \end{aligned} \quad (7.63)$$

Já o termo ambíguo presente na Lagrangiana toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} \bar{g}_3 e^{-\hat{Q}}(V(\hat{B}_1) + j_3) &= \bar{g}_3 e^{-Q}(V(B_1) + j_3) \\ &+ \bar{g}_3 e^{-Q}((V(B_1) + j_3)G - V'(B_1)\partial_0^{-2})(\partial_0\phi)^2 + \mathcal{O}(\phi^4), \end{aligned} \quad (7.64)$$

enquanto  $E_1^+$  se torna

$$\begin{aligned} E_1^+ &= -(\bar{g}_3 + (\partial_0^{-1}J_3e^Q))e^{-Q} \\ &- e^Q [\bar{g}_3 + (\partial_0^{-1}J_3e^Q)G + (\partial_0^{-1}J_3e^QG)] (\partial_0\phi)^2 + \mathcal{O}(\phi^4). \end{aligned} \quad (7.65)$$

Apesar de haver um termo de segunda ordem em  $\phi$  na expressão anterior, este será descartado, pois restituindo os fatores de  $\hbar$  se observa que este termo é de ordem  $\hbar^0$ , enquanto os outros termos que serão mantidos são de ordem  $\hbar^{-1}$ . Por simplicidade, de agora em diante o termo de ordem zero no campo escalar em  $E_1^+$  será denotado simplesmente por  $E_1^+$ . Assim, a integral de trajetória passa a ser

$$\begin{aligned} W &= \int \mathcal{D}\phi (\det E_1^+)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ i \int d^2x [J_i B_i|_{\hbar=0} - \bar{g}_3 e^{-Q}(V(B_1) + j_3)] \right\} \\ &\times \exp \left\{ i \int d^2x [(\partial_0\phi)(\partial_1\phi) + E_1^-(\partial_0\phi)^2 + \mathcal{O}(\phi^4) + \sigma\phi] \right\}, \end{aligned} \quad (7.66)$$

onde  $E_1^-$  é a soma de todos os termos quadráticos em  $\phi$  obtidos nas expansões. Note que  $E_1^-$  possui várias contribuições não-locais, graças à presença repetida do operador  $\partial_0^{-1}$ . Ele é dado explicitamente por

$$\begin{aligned} E_1^- &= -J_1\partial_0^{-2} - J_2\partial_0^{-1} - J_3e^Q [\partial_0^{-1}(e^{-Q}V'(B_1)\partial_0^{-2}) + 2(V(B_1) + j_3) \\ &\times (\partial_0^{-1}e^{-Q})G + \bar{p}_3e^QG] + \bar{g}_3e^{-Q}((V(B_1) + j_3)G - V'(B_1)\partial_0^{-2}). \end{aligned} \quad (7.67)$$

Os termos de ordem  $\phi^4$  adiante serão tomados como vértices, retirados da integral e escritos como derivadas funcionais em relação à fonte  $\sigma$ , sendo denotados genericamente por  $Z$ .

A parte da integral de trajetória com dependência em  $\phi$  pode ser escrita ainda como

$$\int \mathcal{D}\phi (\det E_1^+)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -i \int d^2x [\phi(\partial_0\partial_1 + \partial_0E_1^-\partial_0)\phi + \sigma\phi] \right\}. \quad (7.68)$$

Pelos motivos explicados anteriormente sobre a escolha de uma métrica covariante para as integrações do campo escalar, é conveniente escrever a expressão anterior com uma ligeira modificação, explicitando o papel do determinante presente na medida da integral,

$$\int \left( \mathcal{D}\phi \sqrt{\det E_1^+} \right) \exp \left\{ -i \int d^2x (\det E_1^+) \right. \\ \left. \times \left[ \underbrace{\phi (\det E_1^+)^{-1} (\partial_0 \partial_1 + \partial_0 E_1^- \partial_0)}_{\square} \phi + (\det E_1^+)^{-1} \sigma \phi \right] \right\}. \quad (7.69)$$

Isto justifica a notação  $E_1^+$  e  $E_1^-$  como sendo os fatores que fazem o papel das componentes dos zweibeine após a integração das variáveis geométricas. Com a medida covariante, a integral Gaussiana passa a ser dada por

$$\int \left( \mathcal{D}\phi (e)^{\frac{1}{2}} \right) \exp \left[ i \int d^2x (e) (\phi A \phi + B \phi) \right] \quad (7.70) \\ = (\det A)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^2x (e) (B A^{-1} B) \right].$$

Desta forma, a expressão (7.69) resulta em

$$(\det \square)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{i}{4} \int d^2x \sigma \underbrace{(\det E_1^+ \square)^{-1}}_{\Delta} \sigma \right], \quad (7.71)$$

em que  $\Delta$  é o propagador. Isto nos leva finalmente à expressão final para  $W$

$$W = \exp \left[ J_i B_i|_{h=0} - \bar{g}_3 e^{-Q} (V(B_1) + j_3) + Z \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \sigma} \right) \right] \\ \times (\det \square)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^2x \sigma \Delta \sigma \right]. \quad (7.72)$$

Assim, temos uma teoria efetiva não-exata para o campo escalar  $\phi$ . Esta teoria possui autointerações não-locais já em segunda ordem no campo escalar, como foi salientado anteriormente. Isto produz dificuldades quando se deseja reproduzir esta teoria no contexto da geometria não-comutativa mais simples (aquela com produto estrela de Moyal), pois, como será explicado mais adiante, uma teoria deste tipo é equivalente até segunda ordem nos campos à sua contrapartida comutativa. Assim, já neste caso relativamente simples de acoplamento mínimo e autointeração local nula, se mostra

necessário o desenvolvimento de outros esquemas de quantização em teorias quânticas de campos não-comutativas. Mais sobre isto adiante.

Além dos tratados aqui, casos com acoplamento não-mínimo ou autointeração local também podem ser considerados usando essencialmente o mesmo procedimento, porém com resultados certamente mais complicados.

Consideremos em mais detalhes o caso mais interessante de gravitação com redução esférica (SRG) e acoplamento não mínimo.

## 7.6 SRG com acoplamento não-mínimo

O caso de gravitação com redução esférica e acoplamento não-mínimo é caracterizado pelas seguintes escolhas

$$\begin{aligned} V(p_1) &= 2 & U(p_1) &= \frac{1}{2p_1} \\ f(\phi) &= 0 & F(p_1) &= -\frac{p_1}{2} \end{aligned}$$

onde a escolha da função  $V(p_1)$  corresponde a tomar  $\lambda = \sqrt{2}$  na ação (3.3).

Aplicando estas definições na expressão (7.55), temos

$$\begin{aligned} W = \int \mathcal{D}\phi (\det \hat{B}_1)^{\frac{1}{2}} (\det E_1^+)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ i \int d^2x \left[ -\frac{\hat{B}_1}{2} (\partial_0 \phi) (\partial_1 \phi) \right. \right. \\ \left. \left. + J_i \hat{B}_i + \sigma \phi - \bar{g}_3 e^{-\hat{Q}} (2 + j_3) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Analisemos então alguns aspectos interessantes deste modelo

### 7.6.1 Vértices

Os vértices podem ser obtidos da expressão anterior expandindo os termos  $\hat{B}_i$  presentes na ação em potências de  $(\partial_0 \phi)^2$ , da forma como foi feito no caso de acoplamento mínimo da seção anterior. Entretanto, este procedimento é complicado já nas primeiras ordens da expansão e por este motivo será usado um outro procedimento mais eficaz para se obter os vértices de  $\phi^4$ . Porém, antes de começar o cálculo direto dos vértices, já se pode observar algumas de suas características pela expressão anterior.

Primeiramente, considerando que os termos  $\hat{B}_i$  produzirão potências de  $(\partial_0 \phi)^2$  e que na Lagrangiana efetiva a contribuição do campo também é quadrática, teremos apenas vértices pares, ou seja, vértices do tipo  $\phi^{2n}$ . Além

disto, deve haver dois tipos de vértices. O primeiro, chamado simétrico, é gerado pelo termo ambíguo na Lagrangiana e possui apenas fatores de  $(\partial_0\phi)^2$

$$V_{sim}^{(2n)} = \int d^2x_1 \dots d^2x_n v_s^{(2n)}(x_1, \dots, x_n) (\partial_0\phi)_{x_1}^2 \dots (\partial_0\phi)_{x_n}^2. \quad (7.74)$$

Já o segundo tipo, assimétrico, tem origem no termo  $-(\hat{B}_1/2)(\partial_0\phi)(\partial_1\phi)$ , não estando, portanto, presente no caso de acoplamento mínimo, onde apenas os vértices simétricos aparecem. O vértice assimétrico possui a seguinte forma

$$V_{ass}^{(2n)} = \int d^2x_1 \dots d^2x_n v_{ns}^{(2n)}(x_1, \dots, x_n) (\partial_0\phi\partial_1\phi)_{x_1} (\partial_0\phi)_{x_2}^2 \dots (\partial_0\phi)_{x_n}^2. \quad (7.75)$$

Estes vértices tem caráter não-local, em decorrência da presença repetida do operador  $\partial_0^{-1}$  nos  $\hat{B}_i$ , razão pela qual a expansão dos termos de interação na Lagrangiana é tão complicada. Para contornar essas dificuldades, vamos prosseguir com o procedimento adotado em [11].

Observa-se inicialmente que as funções  $v^{(2n)}$  dos vértices são obtidas tomando as derivadas funcionais da Lagrangiana efetiva em relação aos campos. No caso dos vértices  $\phi^4$ , temos

$$v_s^{(2n)}(x_1, x_2) = \frac{\delta^2 L}{\delta((\partial_0\phi(x_1))^2)\delta((\partial_0\phi(x_2))^2)}, \quad (7.76)$$

$$v_{ns}^{(2n)}(x_1, x_2) = \frac{\delta^2 L}{\delta((\partial_0\phi(x_1))(\partial_1\phi(x_1)))\delta((\partial_0\phi(x_2))^2)}. \quad (7.77)$$

Para realizar estas derivações, é conveniente tomar os campos como localizados em  $n$  pontos, por exemplo

$$(\partial_0\phi)^2(x) = \sum_{i=1}^n c_i \delta^2(x - x_i). \quad (7.78)$$

É suficiente tomar apenas o primeiro termo desta expansão para se encontrar os vértices de quarta ordem em  $\phi$ , então define-se

$$\frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 =: \phi_0 = c_0 \delta^2(x - y), \quad (7.79)$$

$$\frac{1}{2}(\partial_0\phi)(\partial_1\phi) =: \phi_1 = c_1 \delta^2(x - y). \quad (7.80)$$

Agora, o próximo passo é resolver as equações de movimento para  $p_i$  e  $q_i$  até primeira ordem em  $c_0$  e  $c_1$ . Estas equações podem ser obtidas mais facilmente fazendo as variações  $\delta q_i$  e  $\delta p_i$  da densidade de Lagrangiana  $\mathcal{L}^{(1)}$  (expressão (7.35)), que, com as definições desta seção e a anulação das fontes, é dada por

$$L^{(1)} = \int d^2x \left[ p_i \dot{q}_i + p_2 q_1 + q_3 \left( 2 + \frac{p_2 p_3}{2p_1} \right) - p_1 (\phi_1 - q_2 \phi_0) \right], \quad (7.81)$$

levando às seguintes equações para os momentos

$$\partial_0 p_1 = p_2, \quad (7.82)$$

$$\partial_0 p_2 = p_1 \phi_0, \quad (7.83)$$

$$\partial_0 p_3 = 2 + \frac{p_2 p_3}{2p_1}, \quad (7.84)$$

e a estas equações para as coordenadas

$$\partial_0 q_1 = \frac{q_3 p_2 p_3}{2p_1^2} + \phi_1 - q_2 \phi_0, \quad (7.85)$$

$$\partial_0 q_2 = -\frac{q_3 p_3}{2p_1} - q_1, \quad (7.86)$$

$$\partial_0 q_3 = -\frac{q_3 p_2}{2p_1}. \quad (7.87)$$

O objetivo é substituir as soluções para estas equações de movimento no termo de matéria da Lagrangiana efetiva  $L^{(1)}$ , ou seja, em  $-p_1(\phi_1 - q_2 \phi_0)$ , sem alterar os termos cinéticos. Assim, este termo seria dado por

$$\mathcal{L} = -p_1(c_0) \phi_1 + p_1(c_0) q_2(c_0, c_1) \phi_0. \quad (7.88)$$

Os vértices  $\phi^4$  serão dados pelos termos de segunda ordem nos coeficientes  $c$ , e, divididos em simétrico e assimétrico, são dados por

$$v_s^{(4)}(x, y) = \left( \frac{dp_1}{dc_0} q_2 + p_1 \frac{dq_2}{dc_0} \right) \Big|_{c_i=0}, \quad (7.89)$$

$$v_{ns}^{(4)}(x, y) = \left( p_1 \frac{dq_2}{dc_1} - \frac{dp_1}{dc_0} \right) \Big|_{c_i=0}. \quad (7.90)$$

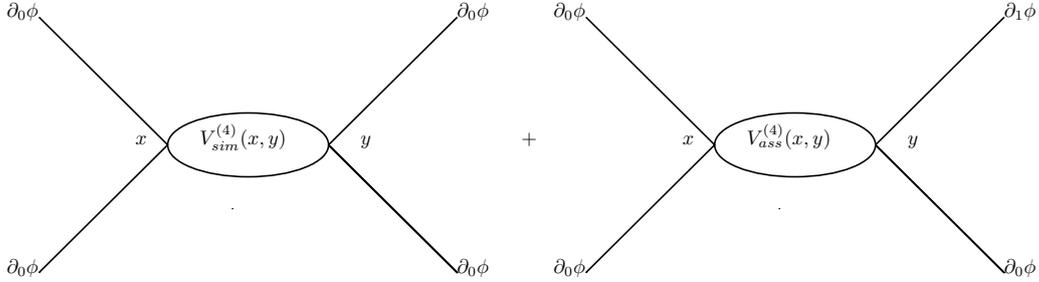


Figura 3: Vértices simétrico e assimétrico

As soluções para as equações de movimento de  $p_1$  e  $q_2$ , que devem ser usadas nas duas expressões anteriores, são, conforme [13], dadas por

$$p_1(x) = x^0 - (x^0 - y^0)c_0\theta(y^0 - x^0)\delta(x^1 - y^1), \quad (7.91)$$

$$q_2(x) = 4\sqrt{p_1} + (8c_0y_0\sqrt{p_1} - 2c_0(y^0)^{3/2} - c_1y^0 + (c_1 - 6c_0(y^0)^{1/2})p_1) \times \theta(y^0 - x^0)\delta(x^1 - y^1). \quad (7.92)$$

Assim, temos para o vértice simétrico

$$V_{sim}^{(4)} = \iint d^2x d^2y \phi_0(x)\phi_0(y) |\sqrt{y^0} - \sqrt{x^0}| \sqrt{x^0 y^0} \times (3x^0 + 3y^0 + 2\sqrt{x^0 y^0})\delta(x^1 - y^1), \quad (7.93)$$

e para o vértice assimétrico

$$V_{ass}^{(4)} = - \iint d^2x d^2y \phi_0(x)\phi_1(y) |x^0 - y^0| x^0 \delta(x^1 - y^1), \quad (7.94)$$

onde as integrações tem os seguintes limites:  $\int d^2x = \int_0^\infty dx^0 \int_{-\infty}^\infty dx^1$ .

Como antecipado, os vértices são não-locais na componente "temporal" (componente 0), e são representados na figura 3.

### 7.6.2 Elemento de Linha Efetivo

No calibre que foi adotado quando da quantização do modelo ( $\bar{q}_i = (0, 1, 0)$ ), o elemento de linha toma a seguinte forma

$$(ds)^2 = 2q_3 dx^1 (dx^0 + q_2 dx^1). \quad (7.95)$$

As soluções das equações de movimento para  $q_3$  (equação (7.87)) e  $p_2$  (equação (7.83)), dadas, em primeira ordem em  $c_0$ , por

$$p_2(x) = 1 - c_0 y^0 \theta(y^0 - x^0) \delta(x^1 - y^1), \quad (7.96)$$

$$q_3(x) = \frac{1}{\sqrt{p_1}}, \quad (7.97)$$

juntamente a uma mudança de variáveis

$$u = 2\sqrt{2}x^1 \quad r = \sqrt{\frac{p_1}{2}}, \quad (7.98)$$

permitem escrever o elemento de linha como

$$(ds)^2 = \frac{2}{p_2} du dr + K(r, u)(du)^2, \quad (7.99)$$

em que

$$K(r, u) = \frac{q_2}{4\sqrt{2}r}. \quad (7.100)$$

Note que a definição da variável  $r$  é bastante natural dado o papel que  $p_1$ , o dilaton, exerce na métrica quadridimensional com redução esférica (expressão (3.1)), que foi o ponto de partida deste trabalho.

Usando as expressões explícitas para  $q_2$  e  $p_2$ , é simples notar que na região  $x^0 > y^0$ ,  $K(r, u) = 1$  e  $p_2 = 1$ , fazendo com que o elemento de linha se reduza a

$$(ds)^2 = 2 du dr + (du)^2, \quad (7.101)$$

que é o elemento de linha do espaço de Minkowski. Isto é resultado da escolha das constantes de integração nas soluções das equações de movimento para  $q_i$  e  $p_i$ . Já na região  $x^0 < y^0$ , obtemos um resultado mais interessante, no qual  $K(u, r)$  é modificado para

$$K(u, r) = \left(1 - \frac{2m}{r} - ar + d\right) (1 + \mathcal{O}(c_0)), \quad (7.102)$$

com

$$m = \frac{1}{8\sqrt{2}}(2c_0(y^0)^{3/2} + c_1 y^0)\delta(x^1 - y^1), \quad (7.103)$$

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}}(6c_0(y^0)^{1/2} - c_1)\delta(x^1 - y^1), \quad (7.104)$$

$$d = 2c_0 y^0 \delta(x^1 - y^1). \quad (7.105)$$

A função  $K(u, r)$  possui zeros localizados aproximadamente em  $r = 1/a$ , no que seria um horizonte de Rindler, e em  $r = 2m$ , que corresponde a um horizonte de Schwarzschild, descrevendo o chamado buraco negro virtual.

### 7.6.3 O Buraco Negro Virtual

Um buraco negro virtual é um buraco negro que existe temporariamente. Observando o elemento de linha efetivo obtido na subseção anterior, vemos que, para valores de  $a$  e  $d$  desprezíveis, o que se observa é justamente a presença de um buraco negro na região  $x^0 < y^0$  que desaparece na região assintótica  $x^0 > y^0$ . Este buraco negro aparece como resultado da interação da matéria com a geometria.

Na análise clássica do modelo, foi encontrada uma quantidade que se conservava, ou mais especificamente, a parte geométrica desta quantidade, já que naquele momento ainda não havia sido adicionada matéria ao modelo. No caso SRG, esta quantidade era dada, conforme a equação (4.38), na notação atual por

$$\mathcal{C} = \frac{p_2 p_3}{\sqrt{p_1}} - 4\sqrt{p_1} \quad (7.106)$$

Com as expressões já encontradas para  $p_1$  e  $p_2$  e com a seguinte solução para  $p_3$

$$p_3 = 4c_0 x^0 + 4y^0(y^0 + \sqrt{x^0 y^0})\theta(y^0 - x^0)\delta(x^1 - y^1), \quad (7.107)$$

esta quantidade conservada passa a ser dada por

$$\mathcal{C} = 4y^0 \sqrt{y^0} c_0 \theta(y^0 - x^0)\delta(x^1 - y^1). \quad (7.108)$$

Note que  $\mathcal{C}$  se anula na região  $x^0 > y^0$ , porém sofre um salto na região do buraco negro virtual. Observe também que o valor de  $\mathcal{C}$  é proporcional à massa do buraco negro se a contribuição de  $\phi_1$  puder ser desconsiderada, como ocorreria se considerássemos, por exemplo, SRG com acoplamento mínimo ( $F(p_1) = 1$ ).

Desta maneira, é possível interpretar a não-localidade dos vértices como

resultante da aparição de um buraco negro virtual em um estágio intermediário.

## 8 Não-Comutatividade

Há razão para acreditar que em regiões da ordem do comprimento de Planck,

$$\lambda_P = \left( \frac{G\hbar}{c^3} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 1,6 \times 10^{-33} \text{cm}, \quad (8.1)$$

seja necessário abandonar o tratamento do espaço-tempo como uma variedade, pois haveria um limite para a precisão com que se poderia localizar um objeto. Esta seria uma necessidade independentemente de qual teoria de gravitação quântica que se considere, seja teoria de cordas, gravitação quântica em loop ou outra qualquer, como é argumentado em [17]. Em linhas gerais, o argumento é o seguinte: a medição de uma coordenada com precisão  $a$ , gera uma incerteza em momento da ordem de  $1/a$ . Desconsiderando energias de repouso, isto significa que deve ser transmitida ao sistema uma energia também de ordem  $1/a$ . A presença de energia gera um campo gravitacional que distorce o espaço-tempo na região em questão de acordo com a equação de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (8.2)$$

Quanto menor a incerteza, maior será o campo gravitacional produzido, até o ponto em que um buraco negro é gerado impedindo que qualquer sinal deixe a região, o que inviabiliza a medida. Desta maneira, existe um limite a partir do qual a noção de um ponto no espaço-tempo se perde, se não no sentido real, ao menos no sentido operacional, exigindo uma estrutura que a substitua.

Esta situação indica que deve haver uma relação de incerteza entre as coordenadas do espaço-tempo análoga a que existe entre posição e momento

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu \geq \frac{1}{2} |\theta^{\mu\nu}|. \quad (8.3)$$

Portanto, seguindo esta analogia, uma forma de incorporar esta característica é promover as coordenadas do espaço-tempo a operadores Hermitianos que obedecem a seguinte relação de comutação

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad (8.4)$$

na qual, no caso mais simples,  $\theta$  é uma matriz constante, antissimétrica e com dimensões de comprimento ao quadrado. Esta relação de comutação induz a relação de incerteza.

Se a não-localidade das teorias não-comutativas é um aspecto que agora nos interessa, este não era o caso quando da introdução destas teorias, que visavam inicialmente resolver problemas ligados à divergências em teorias como eletrodinâmica quântica, o que fez com que o estudo mais aprofundado da não-comutatividade se desse apenas muitos anos depois. Outra razão é a violação da invariância de Lorentz da teoria, cujos efeitos devem, por consistência, desaparecer em escalas superiores a  $\theta$ , o que não é garantido ([15]).

Vejamus então como implementar a não-comutatividade em uma teoria quântica para um campo escalar em duas dimensões, seguindo o enfoque dado em [14].

## 8.1 Quantização de Weyl

O procedimento objetiva associar um operador quântico a uma função das variáveis do espaço de fase. Considerando que se possa descrever qualquer função por meio de sua transformada de Fourier

$$\tilde{f}(k) = \int d^2x e^{-ik_\mu x^\mu} f(x), \quad (8.5)$$

definimos o símbolo de Weyl como

$$\tilde{W}[f] = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \tilde{f}(k) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu}, \quad (8.6)$$

em que  $x^\mu$  denota as coordenadas e  $\hat{x}^\mu$  os operadores que obedecem a relação de comutação (8.4). Além disso, o símbolo de Weyl é Hermitiano para funções  $f(x)$  reais e pode ser escrito da seguinte maneira

$$\tilde{W}[f] = \int d^2x f(x) \hat{\Delta}(x), \quad (8.7)$$

com

$$\hat{\Delta}(x) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{-ik_\mu x^\mu}. \quad (8.8)$$

Pode-se introduzir também derivadas de operadores com as propriedades

$$[\hat{\partial}_\mu, \hat{x}^\nu] = \delta_\mu^\nu, \quad (8.9)$$

$$[\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu] = 0. \quad (8.10)$$

Assim, é simples mostrar que

$$[\hat{\partial}_\mu, \hat{\Delta}(x)] = -\partial_\mu \hat{\Delta}(x). \quad (8.11)$$

Integrando a expressão anterior por partes e assumindo a anulação dos termos de fronteira, temos

$$[\hat{\partial}_\mu, \hat{W}[f]] = \hat{W}[\partial_\mu f]. \quad (8.12)$$

Decorre da relação (8.11), que é possível representar geradores de translação por operadores unitários  $e^{v^\mu \hat{\partial}_\mu}$ , com

$$\exp[v^\mu \hat{\partial}_\mu] \hat{\Delta}(x) \exp[-v^\mu \hat{\partial}_\mu] = \hat{\Delta}(x - v). \quad (8.13)$$

Como o traço de um operador se conserva sob transformações de similaridade como a da expressão anterior, se calcularmos o traço do operador de Weyl teremos

$$\text{Tr } \hat{W}[f] = \int d^2x f(x) \text{Tr } \hat{\Delta}(x) = \int d^2x f(x) \text{Tr } \hat{\Delta}(x - v), \quad (8.14)$$

o que implica que o traço do operador  $\hat{\Delta}(x)$  deve ser independente de  $x$ . Escolhendo a normalização  $\text{Tr } \hat{\Delta}(x) = 1$ , que corresponde a definição usual do traço, o traço do operador de Weyl se reduz a uma integração

$$\text{Tr } \hat{W}[f] = \int d^2x f(x). \quad (8.15)$$

A fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff é dada por

$$e^A e^B = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B]\right) \quad (8.16)$$

quando o comutador dos operadores  $A$  e  $B$  é um número. Com esta fórmula, temos

$$e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{ik'_\mu \hat{x}^\mu} = e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{i(k_\mu + k'_\mu)\hat{x}^\mu}, \quad (8.17)$$

o que permite calcular o produto de operadores  $\hat{\Delta}(x)$  em pontos diferentes

$$\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y) = \int \frac{d^2k d^2k'}{(2\pi)^4} e^{i(k_\mu+k'_\mu)\hat{x}^\mu} e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}k_\mu k'_\nu} e^{-i(k_\mu x^\mu+k'_\mu y^\mu)}. \quad (8.18)$$

Reescrevendo o termo  $e^{i(k_\mu+k'_\mu)\hat{x}^\mu}$  como

$$e^{i(k_\mu+k'_\mu)\hat{x}^\mu} = \int d^2z e^{i(k_\mu+k'_\mu)z^\mu} \hat{\Delta}(z), \quad (8.19)$$

as integrações em  $k_\mu$  e  $k'_\mu$  resultam em

$$\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y) = \frac{1}{\pi^2 \det \theta} \int d^2z \hat{\Delta}(z) e^{-2i(\theta^{-1})_{\mu\nu}(x-z)^\mu(y-z)^\nu}. \quad (8.20)$$

O traço da expressão anterior pode ser calculado levando em conta a normalização do traço do operador  $\hat{\Delta}(x)$  e a antissimetria de  $(\theta^{-1})^{\mu\nu}$ , que faz com que expressões como  $(\theta^{-1})_{\mu\nu}z^\mu z^\nu$  se anulem, resultando em

$$\text{Tr} \left( \hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y) \right) = \delta^2(x-y). \quad (8.21)$$

Assim, o mapa que leva funções em operadores de Weyl é inversível, com a inversa dada por

$$f(x) = \text{Tr} \left( \hat{W}[f]\hat{\Delta}(x) \right). \quad (8.22)$$

Com estas definições, podemos tratar o produto de operadores de Weyl, que serão usados para promover teorias comutativas em teorias não-comutativas. É o que será feito agora.

## 8.2 O Produto Estrela de Moyal

Consideremos o produto de dois operadores de Weyl  $\hat{W}[f]$  e  $\hat{W}[g]$

$$\hat{W}[f]\hat{W}[g] = \int \frac{d^2k d^2k'}{(2\pi)^2} \tilde{f}(k)\tilde{g}(k') e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}k_\mu k'_\nu} e^{i(k_\mu+k'_\mu)x^\mu}, \quad (8.23)$$

onde a expressão (8.17) foi utilizada. Para tomar o traço deste produto, é preciso saber o traço de  $e^{ik_\mu\hat{x}^\mu}$ . Pela normalização escolhida para o traço de  $\hat{\Delta}(x)$ , é preciso que

$$\text{Tr} e^{ik_\mu\hat{x}^\mu} = \int d^2x e^{ik_\mu x^\mu}. \quad (8.24)$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \left( \hat{W}[f] \hat{W}[g] \right) &= \int \frac{d^2k d^2k' d^2x}{(2\pi)^2} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k') e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{i(k_\mu + k'_\mu)x^\mu} \\
&= \int d^2x \underbrace{\left[ \int \frac{d^2k d^2k'}{(2\pi)^2} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k' - k) e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{ik'_\mu x^\mu} \right]}_{\equiv (f \star g)(x)}
\end{aligned} \tag{8.25}$$

Logo, o produto  $\hat{W}[f]\hat{W}[g]$  pode ser visto como  $\hat{W}[f \star g]$ , em que  $\star$  denota o produto estrela de Moyal, definido pela expressão acima entre colchetes, que pode ser escrita de forma mais conveniente como

$$f(x) \star g(x) = e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \partial_\mu^x \partial_\nu^y} f(x)g(y) \Big|_{y=x}. \tag{8.26}$$

O produto estrela de Moyal é associativo, porém não é comutativo. Ele se reduz ao produto convencional no limite  $\theta \rightarrow 0$ . De forma mais geral, temos

$$\text{Tr} \left( \hat{W}[f_1] \dots \hat{W}[f_n] \right) = \int d^2x f_1(x) \star f_2(x) \dots \star f_n(x), \tag{8.27}$$

que é invariante sob permutações cíclicas das funções  $f_i$ .

Em particular, quando  $n = 2$  na expressão anterior, usando a expansão em série do produto estrela de Moyal, obtemos

$$\begin{aligned}
\int d^2x f(x) \star g(x) &= \int d^2x f(x)g(x) \\
&+ \sum_{r=1}^{\infty} \left( \frac{i}{2} \right)^r \frac{1}{r!} \theta^{\mu_1 \nu_1} \dots \theta^{\mu_r \nu_r} \left[ \int d^2x \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} f(x) \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_r} g(x) \right]
\end{aligned} \tag{8.28}$$

A integração entre colchetes pode ser escrita ainda como

$$\begin{aligned}
&\int d^2x [\partial_{\mu_1} (\partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_r} f(x) \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_r} g(x)) \\
&- \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_r} f(x) \partial_{\mu_1} \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_r} g(x)]
\end{aligned} \tag{8.29}$$

O primeiro termo é uma derivada total, e se anula assumindo que os termos de superfície também desapareçam. Já o segundo termo vai se anular quando contraído com a matriz  $\theta^{\mu_1 \nu_1}$ , pois

$$\theta^{\mu_1\nu_1}\partial_{\mu_1}\partial_{\nu_1}g(x) = 0, \quad (8.30)$$

pela antissimetria de  $\theta^{\mu\nu}$ . Desta maneira,

$$\int d^2x f(x) \star g(x) = \int d^2x f(x)g(x). \quad (8.31)$$

Com esses elementos já é possível estudar teorias não-comutativas.

### 8.3 Teoria de Campo Escalar $\phi^4$

Por meio da quantização de Weyl, é possível transformar a teoria escalar usual em uma teoria não-comutativa substituindo os campos  $\phi$  por seu operador de Weyl correspondente. Assim, a ação da teoria passa a ser

$$S[\phi] = \text{Tr} \left( \frac{1}{2}g^{\mu\nu} [\hat{\partial}_\mu, \hat{W}[\phi]] [\hat{\partial}_\nu, \hat{W}[\phi]] + \frac{m^2}{2}\hat{W}[\phi]^2 + \frac{g}{4!}\hat{W}[\phi]^4 \right). \quad (8.32)$$

Isto é equivalente a escrever a ação como

$$S[\phi] = \int d^2x \left( \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{g}{4!}\phi \star \phi \star \phi \star \phi \right), \quad (8.33)$$

em que o produto estrela de Moyal foi suprimido nos termos quadráticos por conta da propriedade (8.31). Portanto, uma teoria não-comutativa livre é idêntica a sua contrapartida comutativa. As diferenças aparecem nos termos de interação. No caso de  $\phi^4$ , o termo de interação é dado por

$$\begin{aligned} \hat{W}[\phi]^4 &= \int \frac{d^2k_1 d^2k_2 d^2k_3 d^2k_4}{(2\pi)^8} \tilde{\phi}(k_1)\tilde{\phi}(k_2)\tilde{\phi}(k_3)\tilde{\phi}(k_4) \\ &\times e^{i(k_1+k_2+k_3+k_4)_\mu \hat{x}^\mu} \prod_{a<b} e^{-\frac{i}{2}k_a \times k_b}, \end{aligned} \quad (8.34)$$

em que

$$k_a \times k_b = k_{a\mu}\theta^{\mu\nu}k_{b\nu}. \quad (8.35)$$

Tomando o traço desta expressão obtemos

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left( \hat{W}[\phi]^4 \right) &= \int \frac{d^2 k_1 d^2 k_2 d^2 k_3 d^2 k_4}{(2\pi)^8} \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(k_3) \tilde{\phi}(k_4) \\ &\times (2\pi)^2 \delta \left( \sum_{i=1}^4 k_i \right) \prod_{a < b} e^{-\frac{i}{2} k_a \times k_b}. \end{aligned} \quad (8.36)$$

A única diferença entre este vértice e o que seria obtida na teoria comutativa usual é o termo

$$V(k_1, k_2, k_3, k_4) = \prod_{a < b} e^{-\frac{i}{2} k_a \times k_b}, \quad (8.37)$$

que desaparece no limite  $\theta \rightarrow 0$ . Como este vértice possui dependência não-polinomial nos momentos, a interação é não-local, possuindo um número infinito de derivadas quando escrito em termos das coordenadas.

## 8.4 Teoria Dilatônica versus Teoria Não-Comutativa

Com o estudo detalhado do modelo de gravitação em duas dimensões e uma visão geral sobre teoria quântica de campos em espaços não-comutativos, já é possível tirar algumas conclusões quanto à compatibilidade entre as duas teorias.

A quantização da gravitação na teoria dilatônica com adição de matéria produziu uma ação efetiva para o campo escalar. Esta teoria efetiva era não-local em decorrência da aparição repetida de operadores  $\partial_0^{-1}$ . Como visto estudando o modelo de teoria dilatônica generalizada com acoplamento mínimo e sem auto-interação local (seção 7.5), feitas as integrações sobre todas as variáveis geométricas e prosseguindo com a expansão em potências de  $\phi$ , foi mostrado que a teoria já era não-local em segunda ordem no campo. Isto não pode ser reproduzido utilizando teorias não-comutativas que façam uso do produto estrela de Moyal, por conta da propriedade (8.31). Como esta não-localidade na teoria dilatônica quântica já aparece em segunda ordem mesmo no caso mais simples de acoplamento mínimo e sem auto-interação local, está fadada a aparecer também nesta ordem em casos mais complexos e mais interessantes como SRG, o que leva a acreditar que esta incompatibilidade não se restringe a escolhas específicas dos parâmetros da teoria dilatônica, como o acoplamento com a matéria e os potenciais  $U(X)$  e  $V(X)$ .

Outra dificuldade que surge é a violação da invariância de Lorentz na teoria não-comutativa. Mesmo que se pudesse dizer que esta violação desapareça em escalas de comprimento superior a  $\theta$ , o modelo dilatônico foi quantizado de forma covariante, então é de se esperar que haja uma incompatibilidade

fundamental entre os dois modelos. Para evitar isto, seria necessário fazer com que a matriz  $\theta^{\mu\nu}$  deixasse de ser simplesmente uma matriz constante e se tornasse um tensor, recuperando a invariância sob transformações de Lorentz. É possível que pistas sobre o formato deste tensor possam ser encontradas olhando os resultados obtidos pelo modelo dilatônico quântico, mas não se sabe ao certo.

## 9 Conclusão

Vimos que o modelo de gravitação dilatônica generalizado em duas dimensões possui um subcaso de grande apelo físico, o caso de redução esférica da ação de Einstein-Hilbert em quatro dimensões. O modelo generalizado é equivalente ao formalismo de primeira ordem, apesar de este aparentemente possuir maior número de graus de liberdade e torção não nula. Esta equivalência é muito importante, pois o uso de variáveis de Cartan é essencial para se proceder a quantização.

As soluções clássicas para o caso sem matéria foram obtidas de forma exata, com ênfase no calibre de Eddington-Finkelstein, que não possui singularidades de coordenada. A teoria mostrou possuir nenhum grau de liberdade contínuo, sendo portanto topológica. Havia três graus de liberdade de calibre, que quando fixados permitiram obter a métrica de Schwarzschild, cujo diagrama de Penrose foi obtido juntamente com o diagrama do espaço de Minkowski.

A análise Hamiltoniana do modelo com matéria mostrou a existência de um grau de liberdade contínuo e a presença de seis vínculos de primeira classe, três primários e três secundários. A Hamiltoniana foi escrita então como uma soma sobre vínculos. Vínculos de segunda classe foram encontrados, mas foram resolvidos usando parênteses de Dirac.

Com o procedimento BRST, o espaço de fase foi estendido por meio da adição de campos fantasmas. A carga que serve de geradora das transformações BRST foi encontrada partindo de algumas exigências, permitindo escrever a Hamiltoniana como a soma de um termo originalmente invariante por transformações de calibre e um termo BRST exato. A escolha de um férmion fixou o calibre da Hamiltoniana, permitindo que se inserisse a Lagrangiana correspondente na integral de trajetória. Este férmion produziu o calibre temporal, que se mostrou um boa escolha pois permitiu as integrações necessárias.

Após a correção na medida de integração, todas as variáveis geométricas foram integradas de forma exata, em grande parte graças ao uso de variáveis

de Cartan. À expressão resultante foi necessário adicionar os termos ambíguos, que apareceram por conta de indefinições presentes e que se esquecidos levariam consigo parte importante da dinâmica, ou toda a dinâmica no caso sem matéria. Teoria de perturbação foi usada no setor de matéria no caso de acoplamento mínimo sem autointeração local, mostrando que o efeito da gravitação foi a criação de uma métrica efetiva. Esta métrica efetiva possui termos não-locais, mostrando que a teoria resultante é não-local já em segunda ordem nos campos.

No caso mais interessante de gravitação com redução esférica, os vértices calculados são também não-locais, dependendo de mais de um ponto no espaço-tempo. Calculando o elemento de linha efetivo, foi possível mostrar a presença de uma estrutura similar a um buraco negro que desaparecia em uma região assintótica, o chamado buraco negro virtual, e sua relação com a quantidade conservada obtida quando da análise clássica do modelo.

Finalmente, uma breve explicação sobre teoria quântica de campos em espaços não-comutativos foi feita, mostrando como a quantização de Weyl juntamente à relação de comutação entre os operadores de coordenadas leva ao produto estrela de Moyal. Com isso, para transformar uma teoria comutativa em uma não-comutativa basta promover os produtos comuns a produtos estrela de Moyal. Como uma das características desta operação é o fato de que o produto estrela de duas funções, quando integrado, é equivalente à integral do produto comum, decorre que teorias não-comutativas livres, ou seja, que só possuem termos quadráticos nos campos, são equivalentes às suas contrapartidas comutativas. Este é um dos motivos que impedem que se reproduza a teoria efetiva para o campo escalar obtida no modelo dilatônico usando uma teoria não-comutativa que faça uso do produto estrela de Moyal. Outra razão para essa impossibilidade é a violação da invariância de Lorentz, que não se observa no caso do modelo 2-D.

Fica claro então que para obter um paralelo melhor entre teorias não-comutativas e o modelo de gravitação quântica em duas dimensões é necessário tratar de tipos de não-comutatividade mais complicados, como, por exemplo, produtos estrela que difiram do produto normal já em segunda ordem e que sigam de relações de comutatividade que respeitem simetria de Lorentz. Outro ponto de interesse seria investigar a possibilidade de ser necessário um produto estrela não-associativo para reproduzir a não-localidade encontrada no modelo dilatônico.

Seguindo esta linha de pesquisa, o próximo passo seria comparar o resultado de um processo de espalhamento no modelo dilatônico com um processo usando uma teoria não-comutativa mais genérica, com  $\theta^{\mu\nu}$  não constante. É possível que um trabalho neste sentido produza resultados muito interessantes sobre a relação entre gravitação quântica e não-comutatividade.



# Apêndices

## A A nilpotência da carga $\Omega$

No texto principal, há a afirmação de que a carga BRST

$$\Omega = c_i G_i + b_i \bar{p}_i + \frac{1}{2} C_{ijk} c_i c_j p_k^c \quad (\text{A.1})$$

é obtida a partir da exigência de nilpotência aplicada a uma carga  $\Omega$  com o seguinte formato,

$$\Omega = b_i \bar{p}_i + c_i G_i + A_{ijk} c_i c_j p_k^c, \quad (\text{A.2})$$

onde  $A_{ijk}$  são funções bosônicas cujas formas explícitas ainda são desconhecidas. Calculando os parênteses de Poisson de  $\Omega$  consigo, resulta na seguinte expressão após vários cálculos simples porém longos

$$\begin{aligned} \{\Omega, \Omega\} = & 2b_i c_m c_n p_r^c \{\bar{p}_i, A_{mnr}\} + (C_{imn} + 2A_{min}) c_i c_m G_n \delta(x - y) \\ & + (A_{ijk} (A_{nkr} - A_{knr}) + A_{ink} A_{kjr} + A_{jnk} A_{jkr}) c_i c_j c_n p_r^c \\ & + 2c_i c_j c_n p_r^c \{G_i, A_{jnr}\} + c_i c_j c_m c_n p_k^c p_r^c \{A_{ijk}, A_{mnr}\}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

O último termo da expressão anterior se anula identicamente por possuir quatro campos  $c$  multiplicados enquanto os índices que eles carregam vão de 1 a 3. Isso implica que quando efetuadas as somas sobre os índices repetidos, cada termo possuirá um fator de  $c_i^2$  para algum  $i$ , o que é zero dado que os  $c_i$  anticomutam.

Olhando agora o segundo termo, é fácil ver que para que ele se anule é necessário que

$$2A_{min} + C_{imn} = 0 \Rightarrow A_{min} = -\frac{1}{2} C_{min}, \quad (\text{A.4})$$

onde a antissimetria nos dois primeiros índices de  $C_{ijk}$  foi usada.

Esta escolha para as funções  $A_{ijk}$  já é suficiente para fazer com que o primeiro termo também se anule, pois as funções de estrutura não possuem dependência em  $\bar{q}_i$ . Desta forma, após algumas manipulações, a expressão anterior se reduz a

$$\{\Omega, \Omega\} = (\{G_i, C_{jnr}\} - C_{ijk} C_{knr}) c_i c_j c_n p_r^c. \quad (\text{A.5})$$

O próximo passo é abrir as somas nos índices  $i$ ,  $j$  e  $n$ , o que produz

$$\begin{aligned} \{\Omega, \Omega\} = & 2[\{G_1, C_{23r}\} + \{G_3, C_{12r}\} + \{G_2, C_{32r}\} \\ & - C_{12k}C_{k3r} - C_{31k}C_{k2r} - C_{23k}C_{k1r}] c_1 c_2 c_3 p_r^c. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Para mostrar que esta expressão se anula, utilizemos a identidade de Jacobi da seguinte maneira

$$\{G_1, \{G_2, G_3\}\} + \{G_3, \{G_1, G_2\}\} + \{G_2, \{G_3, G_1\}\} = 0. \quad (\text{A.7})$$

Como os parênteses de Poisson dos vínculos  $G_i$  formam uma álgebra que possui funções de estrutura ao invés de constantes de estrutura, o desenvolvimento da expressão anterior leva ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} & [\{G_1, C_{23r}\} + \{G_3, C_{12r}\} + \{G_2, C_{31r}\} \\ & - C_{12k}C_{k3r} - C_{23k}C_{k1r} - C_{31k}C_{k2r}] G_r = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Observe que o termo entre colchetes é exatamente igual ao termo entre colchetes na equação (A.6).

A expressão anterior é obtida de forma muito genérica, exigindo-se apenas que  $\{G_i, G_j\} = C_{ijk}G_k$ , seja lá quais forem as funções  $G_i$  ou as funções de estrutura. Desta forma, para que a expressão anterior valha sempre, é necessário que o termo entre colchetes se anule identicamente. Isto mostra que finalmente

$$\{\Omega, \Omega\} = 0 \quad \text{para} \quad \Omega = c_i G_i + b_i \bar{p}_i + \frac{1}{2} C_{ijk} c_i c_j p_k^c. \quad (\text{A.9})$$

## B Os Termos Ambíguos

O ponto de partida para a discussão sobre os chamados termos ambíguos será o resultado da quantização do modelo no caso sem matéria. Os resultados obtidos desta forma são análogos aos que seriam obtidos tratando o modelo com matéria, mas sem as complicações extras que não trazem mais clareza à questão.

Assim, temos

$$W = \exp \left[ i \int J_i B_i d^2x \right], \quad (\text{B.1})$$

com os  $B_i$  sendo as soluções das equações diferenciais que apareçam como argumentos dos funcionais delta após a integração em relação às coordenadas  $q_i$ , dados explicitamente por

$$B_1 = \bar{p}_1 + \partial_0^{-1}(p_2 + j_1), \quad (\text{B.2})$$

$$B_2 = \bar{p}_2 + \partial_0^{-1}j_2, \quad (\text{B.3})$$

$$B_3 = e^Q[\partial_0^{-1}e^{-Q}(V(p_1) + j_3) + \bar{p}_3]. \quad (\text{B.4})$$

Começando pelo termo  $J_2 B_2$ , que é o mais simples, vemos que sua contribuição à Lagrangiana efetiva é dada por

$$\int J_2 B_2 d^2x = \int (J_2 \bar{p}_2 + J_2 \partial_0^{-1} j_2) d^2x. \quad (\text{B.5})$$

Realizando agora uma integração por partes em relação à variável  $x_0$  no segundo termo ( $J_2 \partial_0^{-1} j_2$ ) e abrindo mão dos termos de superfície obtemos

$$\int J_2 B_2 d^2x = \int (J_2 \bar{p}_2 - j_2 \partial_0^{-1} J_2). \quad (\text{B.6})$$

A operação  $\partial_0^{-1} J_2$  tem um número infinito de resultados, cada um diferindo por uma função com dependência pura em  $x_1$ . Desta maneira, explicitamos esse fato na expressão anterior com a adição de uma função arbitrária de  $x_1$ ,  $\bar{g}_2(x_1)$ , resultando em

$$\int J_2 B_2 d^2x = \int (J_2 \bar{p}_2 - j_2 (\partial_0^{-1} J_2 + \bar{g}_2(x_1))) = \int (J_2 B_2 - j_2 \bar{g}_2(x_1)) d^2x. \quad (\text{B.7})$$

Este mesmo procedimento aplicado aos outros termos gera resultados semelhantes, modificando a Lagrangiana efetiva da seguinte maneira

$$\int J_i B_i d^2x = \int [J_i B_i - (\bar{p}_2(x_1) + \partial_0^{-1} j_2 + j_1) \bar{g}_1(x_1) - j_2 \bar{g}_2(x_1) - e^{-Q} (j_3 + V(p_1)) \bar{g}_3(x_1)] d^2x. \quad (\text{B.8})$$

Olhando agora para essas novas contribuições, vemos que no caso dos termos advindos de  $J_1 B_1$  e  $J_2 B_2$ , ou seja, aqueles com  $\bar{g}_1$  e  $\bar{g}_2$  respectivamente, não há presença de nenhum dos campos originais da teoria, havendo apenas o acoplamento entre estas funções arbitrárias e componentes da fonte  $j_i$ . Assim, da mesma forma que os termos  $J_i B_i$ , esses também desaparecem no limite em que as fontes se anulam, e por esses dois motivos são considerados irrelevantes e descartados daqui em diante.

O mesmo não ocorre com o termo advindo de  $J_3 B_3$ , que não se anula quando  $J_i \rightarrow 0$  e possui dependência em  $p_1$ . Este termo e seu análogo no caso com matéria são importantes e serão mantidos.

## Referências

- [1] L. Smolin, *The Trouble With Physics*, Penguin Books, London, 2008
- [2] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*. Second edition, IOP Publishing, Bristol, 1990.
- [3] R. M. Wald, *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago and London, 1984.
- [4] S.W. Hawking & G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure Of Space-Time*. Cambridge University Press, 1973.
- [5] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*. Second edition, Cambridge University Press, 1996.
- [6] S. Weinberg, *The Quantum Theory Of Fields*. Cambridge University Press, 2005.
- [7] D.M. Gitman & I.V. Tyutin, *Quantization Of Fields With Constraints*. Springer-Verlag, 1990.
- [8] M. Henneaux & C. Teitelboim, *Quantization Of Gauge Systems*. Princeton University Press, 1994.
- [9] D. J. Toms, "The functional measure for quantum field theory in curved space-time," *Phys. Rev. D* 35 (1987) 3796.
- [10] D. Grumiller, "Quantum dilaton gravity in two dimensions with matter". PhD thesis, Technische Universität Wien, 2001. gr-qc/0105078.
- [11] W. Kummer, H. Liebl, and D. V. Vassilevich, "Integrating geometry in general 2-d dilaton gravity with matter," *Nucl. Phys. B* 544 (1999) 403-431, hep-th/9809168.
- [12] D. Grumiller, W. Kummer, and D. V. Vassilevich, "The virtual black hole in 2-d quantum gravity," *Nucl. Phys. B* 580 (2000) 438-456, gr-qc/0001038.
- [13] D. Grumiller, W. Kummer, D.V. Vassilevich, "Dilaton gravity in two dimensions," *Phys.Rept.* 369:327-430, 2002, hep-th/0204253.
- [14] R. Szabo, "Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces," *Phys.Rept.* 378 : 207-299, 2003, hep-th/0109162.

- [15] M.R. Douglas and N.A. Nekrasov, "Noncommutative Field Theory," *Rev. Mod. Phys.* 73 (2001) 977, hep-th/0106048.
- [16] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk and N. Seiberg, "Noncommutative Perturbative Dynamics," *J. High Energy Phys.* 0002 (2000) 020, hep-th/9912072.
- [17] S. Doplicher, K. Fredenhagen and J.E. Roberts, "The Quantum Structure of Spacetime at the Planck Scale and Quantum Fields," *Commun. Math. Phys.* 172 (1995) 187-220, hep-th/0303037.