



SIMULAÇÃO 2D E CONTROLE DE CONE DE ÁGUA

LUIS MIGUEL IZQUIERDO CÓRDOBA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM SISTEMAS MECATRÔNICOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

SIMULAÇÃO 2D E CONTROLE DE CONE DE ÁGUA

LUIS MIGUEL IZQUIERDO CÓRDOBA

ORIENTADOR: DR. EUGÊNIO FORTALEZA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM SISTEMAS MECATRÔNICOS

PUBLICAÇÃO: ENM.DM - 60 A/13

BRASÍLIA/DF: JULHO – 2013

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

SIMULAÇÃO 2D E CONTROLE DE CONE DE ÁGUA

LUIS MIGUEL IZQUIERDO CÓRDOBA

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM SISTEMAS MECATRÔNICOS.

APROVADA POR:

**Prof. Eugênio Fortaleza, Dr. (ENM-UnB)
(Orientador)**

**Prof. Gustavo Coelho Abade, Dr. (ENM-UnB)
(Examinador Externo)**

**Prof. Taygoara Felamingo de Oliveira, Dr. (ENM-UnB)
(Examinador Externo)**

**Prof. Éder Lima de Albuquerque, Dr. (ENM-UnB)
(Examinador Externo)**

BRASÍLIA/DF, 26 DE JULHO DE 2013

FICHA CATALOGRÁFICA

CÓRDOBA, LUIS MIGUEL IZQUIERDO

Simulação 2D e Controle de Cone de Água [Distrito Federal] 2013.

xix,113 p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Sistemas Mecatrônicos, 2013).
Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

- | | |
|-----------------------------|--------------------------------------|
| 1. Cone de Água | 2. Método dos Elementos de Contorno. |
| 3. Caracterização Dinâmica. | 4. Sistema de Controle Não Linear |

I. ENM/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

IZQUIERDO, L.M.C. (2013), Simulação 2D e Controle de Cone de Água. Dissertação de Mestrado em Sistemas Mecatrônicos, Publicação ENM.DM-60A/13, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 113p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Luis Miguel Izquierdo Córdoba.

TÍTULO: Simulação 2D e Controle de Cone de Água.

GRAU: Mestre

ANO: 2013

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Luis Miguel Izquierdo Córdoba

Dedicado aos meus pais, Jaime Izquierdo e Maria Mercedes Córdoba, aos meus irmãos, Jaime Andrés, Carlos Felipe e David Camilo, às minhas sobrinhas Isabela e Valeria, e à minha namorada Sarah Clariene.

AGRADECIMENTOS

Agradeço especialmente a Deus, pelo seu amor, proteção e por iluminar meus caminhos a cada dia.

Meu maior agradecimento é dirigido à minha família. Aos meus pais, Jaime e María Mercedes, por terem sido o contínuo apoio em todos estes anos, e por todo o amor, carinho, incentivo e educação que me proporcionam. Sem dúvida, são o motor da minha vida. Aos meus irmãos, Jaime Andrés, Carlos Felipe e David Camilo, que com seu amor, afeto e incondicional apoio me fazem ter fé em tudo que faço. Às minhas sobrinhas, Isabela e Valeria, por seu carinho e ternura.

Agradeço de forma especial à minha namorada Sarah Clariene, quem com seu apoio constante, compreensão e amor, deu-me força e coragem durante a realização desta dissertação.

Agradeço gratamente ao professor Dr. Eugênio Fortaleza, pela possibilidade oferecida de realizar um trabalho tão interessante, e pela sua disponibilidade e orientação.

Quero expressar meu agradecimento ao professor Dr. Éder Lima de Albuquerque, pela sua colaboração na compreensão do Método dos Elementos de Contorno.

Agradeço aos meus amigos e colegas, que contribuíram com sua amizade e sugestões na elaboração desta dissertação.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, pelo apoio financeiro para a realização do curso de mestrado.

Agradeço à Agência Nacional do Petróleo (ANP), ao Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação (MCTI) e à empresa Chevron Brasil Upstream Frade Ltda pelo financiamento da pesquisa através do projeto: controle de injeção de água em reservatórios de petróleo.

RESUMO

SIMULAÇÃO 2D E CONTROLE DE CONE DE ÁGUA

Autor: Luis Miguel Izquierdo Córdoba

Orientador: Eugênio Fortaleza

Programa de Pós-graduação em Sistemas Mecatrônicos

Brasília, Julho de 2013.

Neste trabalho foi desenvolvido um sistema de controle preliminar para manter estável o cone de água durante o processo de produção em um reservatório. Para compreender o fenômeno do cone de água foi considerado o modelo matemático que rege o fluxo de fluidos em meios porosos, obtido a partir da lei de Darcy, da lei da conservação da massa e da equação de estado, junto com as condições iniciais e as condições de contorno do reservatório. Analisou-se neste trabalho o escoamento monofásico bidimensional de fluidos incompressíveis em um reservatório verticalmente confinado com superfície livre. Usou-se o Método dos Elementos de Contorno (*Boundary Elements Method - BEM*) para obter uma solução numérica da equação governante do problema. Para a implementação do *BEM*, foi desenvolvida uma técnica de integração analítica para o cálculo das matrizes de influência \mathbf{H} e \mathbf{G} considerando elementos lineares contínuos de interpolação, o que contribuiu a diminuir consideravelmente o custo computacional do cálculo da solução numérica dentro do esquema iterativo utilizado. Resolvendo numericamente a equação de fluxo, são estimadas as variáveis de interesse para caracterizar o comportamento dinâmico do cone de água, que são a vazão crítica de produção, o potencial crítico de fluxo, a intensidade crítica do sumidouro e o tempo de irrupção (*breakthrough time*). Identificou-se um modelo matemático não linear no domínio do tempo para o sistema dinâmico que representa o comportamento do cone de água, através do comportamento do potencial na superfície livre. Com o modelo da planta a controlar definido, foi projetado um controlador PI não linear. Os resultados da simulação numérica sugerem que é possível extrair o fluido do reservatório à vazão crítica de produção, evitando assim que a interface de contato dos fluidos penetre no poço.

ABSTRACT

2D NUMERICAL SIMULATION AND CONTROL OF WATER CONING

Author: Luis Miguel Izquierdo Córdoba

Supervisor: Eugênio Fortaleza

Programa de Pós-graduação em Sistemas Mecatrônicos

Brasília, Julho de 2013.

In this work was developed a preliminary control system to maintain stable the water coning during the production process in a reservoir. To understand the phenomenon of water coning, is considered the mathematical model governing of fluid flow in porous media, derived from Darcy's law, the law of conservation of mass and the equation of state, together with the set of initial conditions and boundary conditions of the reservoir. It was analyzed a preliminary two-dimensional model with a single phase flow of incompressible fluids in a reservoir vertically confined with free surface. It was used the Boundary Element Method (*BEM*) to obtain a numerical solution of the governing equation of the problem. For the implementation of the BEM, was developed an innovative analytical integration technique to calculate the influence matrices \mathbf{H} and \mathbf{G} considering continuous linear interpolation elements, which contributed to reduce significantly the computational cost of calculating the numerical solution in the iterative scheme used. Solving numerically the flow equation, are estimated the variables of interest to characterize the dynamic behavior of the water coning, which are the critical production flow rate, the critical potential on the free surface, the critical sink strength and the water breakthrough time. It was identified a nonlinear mathematical model in the time domain for the dynamic system that represents the behavior of water coning, through the behavior of the potential on the free surface. It was designed the open-loop plant model and a nonlinear PI- controller. The results of the numerical solution suggest that it is possible to withdraw fluid from the reservoir at the critical production flow rate without the interface breaking through to the well.

SUMÁRIO

1- INTRODUÇÃO	1
1.1- FENÔMENO DO CONE DE ÁGUA	1
1.2- MODELO PROTÓTIPO PARA ANALISAR O FENÔMENO DO CONE DE ÁGUA	3
1.3- SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA	3
1.4- SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA	5
1.5- CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA DO CONE DE ÁGUA E PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE	5
1.6- JUSTIFICATIVA DO TRABALHO	6
1.7- OBJETIVOS	7
1.7.1- Objetivo geral	7
1.7.2- Objetivos específicos	7
1.8- ESTRUTURA DO DOCUMENTO	8
2- REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	10
2.1- ASPECTOS GERAIS SOBRE O CONE DE ÁGUA	10
2.2- ANÁLISE TEÓRICA DO CONE DE ÁGUA	11
2.2.1- Vazão crítica	13
2.2.2- Propriedades da rocha	14
2.2.2.1 - Porosidade.....	14
2.2.2.2 - Permeabilidade.....	15
2.2.3- Propriedades dos fluidos	15
2.2.3.1 - Fase.....	16
2.2.3.2 - Saturação.....	16
2.2.3.3 - Compressibilidade isotérmica.....	16

2.2.3.4 - Viscosidade dinâmica.....	17
2.2.3.5 - Condutividade hidráulica	17
2.3- TRABALHOS CORRELATOS	18
3- METODOLOGIA.....	21
4- MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A ANÁLISE DO CONE DE ÁGUA.	24
4.1- LEI DE DARCY	25
4.1.1 - Potencial de fluxo	27
4.2- EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE	29
4.3- EQUAÇÃO DE ESTADO	29
4.4- EQUAÇÃO GERAL PARA O ESCOAMENTO MONOFÁSICO.....	30
4.5- CONDIÇÕES INICIAIS	32
4.6- CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	32
4.6.1 - Dedução da condição de contorno para a superfície livre	33
4.7- FORMULAÇÃO MATEMÁTICA GOVERNANTE DO MODELO PROTÓTIPO.	37
5- MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.	40
5.1- INTRODUÇÃO AO MEC.....	40
5.2- MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS DE POTENCIAL EM 2D.....	42
5.2.1 - Solução fundamental	44
5.2.2 - Equação integral de contorno.....	46
5.2.3- Discretização da equação integral de contorno	48
5.2.3.1 - Integração analítica das matrizes H e G	53

6- SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO CONE DE ÁGUA	62
6.1- CONDIÇÕES INICIAIS	63
6.2- CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	64
6.3- ESQUEMA ITERATIVO PARA O CÁLCULO DA SOLUÇÃO NUMÉRICA... 64	
7- CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA DO CONE DE ÁGUA.....	68
7.1- VARIÁVEIS QUE DETERMINAM O COMPORTAMENTO DO CONE DE	
ÁGUA	68
7.2- CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA DO SISTEMA	72
8- DESENVOLVIMENTO DO SISTEMA DE CONTROLE	81
8.1- SISTEMA DE CONTROLE EM MALHA FECHADA.....	81
8.2- PROJETO DO CONTROLADOR PI POR ALOCAÇÃO DO POLO.....	82
8.3- REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA DE CONTROLE NO ESPAÇO DE	
ESTADOS.....	84
8.4- IMPLEMENTAÇÃO DO CONTROLADOR PI NO MODELO NUMÉRICO. ..	86
9- ANÁLISE DOS RESULTADOS	88
9.1- CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS	88
9.2- SIMULAÇÃO COM REFERÊNCIA DO CONTROLADOR NA REGIÃO	
ESTÁVEL DO POTENCIAL DE FLUXO.	88
9.3- SIMULAÇÃO COM REFERÊNCIA DO CONTROLADOR NA REGIÃO DE	
INSTABILIDADE DO POTENCIAL DE FLUXO.	92
9.4- COMPARAÇÃO DO TEMPO DE SIMULAÇÃO ENTRE O MÉTODO DE	
INTEGRAÇÃO ANALÍTICA E O MÉTODO DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.....	95
10 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	97
10.1 - CONCLUSÕES	97

10.2 - RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	99
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	101
APÊNDICES.....	104
APÊNDICE A - CONCEITOS MATEMÁTICOS PRELIMINARES	105
A 1.1 – TEOREMA DE GAUSS-GREEN	105
A 1.2 – TEOREMA DA DIVERGÊNCIA	108
A 1.3 – SEGUNDA IDENTIDADE DE GREEN.....	108
APÊNDICE B - SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DA EQUAÇÃO POTENCIAL	111

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1 - Condições de contorno.	64
Tabela 7.1 - Validação da solução numérica.....	72
Tabela 7.2 - Valores dos parâmetros para varias regiões de análise.....	76
Tabela 9.1 - Comparação do tempo de simulação com os dois métodos de integração.	96

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Formação do cone de água em um reservatório de petróleo (Thomas, 2001).....	2
Figura 2.1 - Cone de água em um reservatório de petróleo com aquífero de fundo (Rosa <i>et al.</i> , 2006)	13
Figura 2.2 - Meio poroso.....	14
Figura 3.1 - Plano metodológico da pesquisa desenvolvida.	23
Figura 4.1 - Elemento de volume no sistema de coordenadas cartesianas considerado (Heinemann, 2003).	25
Figura 4.2 - Potencial de um fluido estático (Corrêa, A.C.F.).	28
Figura 4.3 - Volume diferencial de controle (Chen <i>et al.</i> , 2006, modificado).	29
Figura 4.4 - Plano físico de referência (Zhang <i>et al.</i> , 1999, modificado).	38
Figura 5.1 - Domínio do problema com as condições de contorno (Katsikadelis 2002, modificado).....	43
Figura 5.2 - Domínio do problema com o Ponto Fonte e o Ponto Campo (Braga, 2012).	45
Figura 5.3 - Elementos de contorno lineares contínuos (Katsikadelis, 2002).	49
Figura 5.4 - Interseção de dois elementos lineares (Bregbia e Dominguez, 1992).	51
Figura 5.5 - Sistema de coordenadas local usado para o cálculo das integrais analíticas (Braga, 2012)	53
Figura 5.6 - Sistema de coordenadas local. Projeção de r_1 e r_2 na direção tangencial.	56
Figura 6.1 - Plano físico de referência de simulação do modelo protótipo (Zhang et al. 1999, modificado).....	62
Figura 6.2 - Malha de discretização do contorno do reservatório.	63
Figura 6.3 - Esquema iterativo para calcular a solução numérica.	66
Figura 7.1 - Distribuição de potencial de fluxo na malha de discretização do contorno.	69
Figura 7.2 - Vazão crítica de fluxo.	70
Figura 7.3 - Potencial ao longo do tempo nos nós de discretização da superfície livre.	70
Figura 7.4 - Potencial crítico de fluxo do nó central da superfície livre.	71
Figura 7.5 - Potencial do nó central da superfície livre dentro da região de instabilidade.	71
Figura 7.6 - Região de análise no ponto de operação.	73

Figura 7.7 - Solução da equação diferencial de um sistema linear de primeira ordem com entrada degrau (Jack, 2012).....	74
Figura 7.8 - Constante de tempo e ganho estático da região de análise.....	75
Figura 7.9 - Comportamento dos parâmetros em função do potencial do nó central. a) Ganho estático. b) Constante de tempo. c) Intensidade do sumidouro.	77
Figura 7.10 - Comportamento de $K1$ e $K2$ em função do potencial.....	78
Figura 7.11 - Ajuste linear para $K2$	79
Figura 7.12 - Ajuste linear de $K1$	80
Figura 8.1 - Diagrama de blocos do sistema de controle em malha fechada.	81
Figura 8.2 - Resposta do sistema de controle em malha fechada com os parâmetros do controlador Kp e Ti sintonizados.	84
Figura 8.3 - Algoritmo iterativo utilizado para a implementação e simulação do controlador PI no modelo numérico.....	86
Figura 9.1 - Distribuição de potencial nos nós do contorno.....	89
Figura 9.2 - Comportamento do potencial do nó central da superfície livre.....	89
Figura 9.3 - Vazão de fluxo no reservatório.....	90
Figura 9.4 - Vazão de fluxo em função da altura do cone na região estável.....	91
Figura 9.5 - Comportamento da entrada de controle.	91
Figura 9.6 - Distribuição de potencial nos nós do contorno.....	92
Figura 9.7 - Comportamento do potencial do nó central da superfície livre.....	93
Figura 9.8 - Vazão de fluxo no reservatório.....	93
Figura 9.9 - Vazão de fluxo em função da altura do cone na região instável.	94
Figura 9.10 - Comportamento da entrada de controle.	94
Figura 9.11 - Vazão de fluxo em função da altura do cone.....	95
Figura A1.1 - Integração sobre um domínio plano Ω delimitado pela curva S (Katsikadelis, 2002).	105
Figura B1.1 - Domínio circular Ω de radio ρ com fonte d (Katsikadelis 2002, modificado)..	112

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURAS E ABREVIACÕES.

h_1, h_2	Elementos da matriz $[H]$
\vec{u}	Velocidade de Darcy
Φ^*	Solução fundamental para o potencial
$\Phi_0(\vec{x})$	Condição inicial para o potencial
$\frac{D}{Dt}$	Derivada material ou Lagrangiana
K_1, K_2, K_3	Componentes da Condutividade Hidráulica no sistema de coordenadas retangulares.
K_p	Ganho proporcional do controlador PI
L_p	Ponto mais baixo da superfície livre localizado em $\left(\frac{x_l}{2}, y_p\right)$
M_{sp}	Maximo sobre-sinal
N_1, N_2	Funções de forma lineares
P_0	Pressão de referência
S_f	Saturação de um determinado fluido em um meio poroso
T_i	Tempo integral do controlador PI
V_f	Volume ocupado pelo fluido no meio poroso
V_t	Volume total do meio
V_v	Volume poroso
W_n	Frequência natural do sistema
c_f	Compressibilidade do fluido
g_1, g_2	Elementos ma matriz $[G]$
k_g	Permeabilidade efetiva ao gás

k_o	Permeabilidade efetiva ao óleo
k_w	Permeabilidade efetiva ao à água
\vec{n}	Vetor unitário normal ao contorno Γ
$q^{(i)}$	Intensidade do sumidouro específico com dimensões $[s^{-1}]$
q_c	Valor da intensidade crítica do sumidouro
t_s	Tempo de acomodação
u^*	Solução fundamental para velocidade de fluxo normal
u_1, u_2, u_3	Componentes da velocidade de Darcy no sistema de coordenadas retangulares
$x^{(i)}$	Posição do sumidouro i
$x'y'$	Coordenadas local com origem no ponto fonte
x_1, x_2, x_3	Sistema de coordenadas espaciais retangulares
x_l	Contorno de potencial constante
y_c	Valor do potencial de fluxo crítico do nó central da superfície livre
z_0	Nível de referência
∇_2	Operador gradiente horizontal
∇^2	Operador Laplaciano
$\bar{\alpha}(x)$	Fator que define a dimensão da equação da conservação da massa.
θ_{int}	Ângulo interno do contorno
$\rho^{(i)}$	Densidade do fluido injetado em $x^{(i)}$
ρ_0	Densidade do fluido a uma pressão de referência P_0
*	Índice que denota que uma variável é adimensional.
Δx_i	Comprimento na direção da coordenada x_i
2D	Duas dimensões
<i>BEM</i>	<i>Boundary Element Method</i>

MEC	Método dos Elementos de Contorno
ODE23	Função do <i>MATLAB</i> para resolver equações diferenciais ordinárias (ODE) não rígidas. Esta técnica usa um par explícito Runge-Kutta (2,3) de Bogacki e Shampine.
PI	Controlador Proporcional-Integral
Δt	Passo de tempo
Φ	Potencial de fluxo ou altura piezométrica
Ω	Domínio do problema
A	Superfície do meio poroso
D	Unidade de permeabilidade [Darcy]
H	Profundidade do reservatório
K	Condutividade hidráulica
K	Ganho estático
Kg	Quilograma
L	Escala de comprimento característica
NE	Número de elementos
P	Pressão do fluido
Pa	Pascal
Q	Vazão de fluxo (volume por unidade de tempo)
Qc	Valor da vazão crítica do reservatório
S	Contorno do domínio do problema.
T	Temperatura
V	Volume
W	Largura do reservatório

atm	Unidade de medida de pressa [Atmosfera]
c	Coefficiente geométrico
$\cos\phi$	Coseno do ângulo formado pela superfície livre com respeito à horizontal
cp	Unidade de viscosidade [Centipoise]
dP	Diferencial de pressão
dx, dy, dz	Diferencial no sistema de coordenadas espaciais retangulares.
g	Aceleração da gravidade
k	Permeabilidade
m	Metro
q	Representa as fontes externas e sumidouros
r	Distancia entre o ponto campo e o ponto fonte
r	Referência do controlador
t	Tempo
v	Velocidade real do fluido
z	Altura em relação a um nível de referência arbitrário
Γ	Denota o contorno aproximado do problema.
∇	Operador gradiente
γ	Peso específico do fluido
δ	Função delta de Dirac
ζ	Coordenada adimensional
η	Posição da superfície livre
μ	Viscosidade dinâmica
ξ	Coefficiente de amortecimento
ρ	Densidade do fluido

τ	Constante de tempo
φ	Porosidade
∂	Operador de derivada parcial

1 - INTRODUÇÃO

A produção de água é um dos problemas recorrentes de preocupação crítica na indústria do petróleo e gás. Segundo (Bailey *et al.*, 2001), no ano 2000 as empresas de petróleo produziram uma média de três barris de água por cada barril de óleo extraído dos reservatórios mais explorados. A cada ano mais de 40 bilhões de dólares são investidos para lidar com o tratamento da água produzida. Em situações extremas, a quantidade de água produzida pode inviabilizar a produção de óleo, causando uma redução significativa na produtividade dos poços, muitas vezes resultando em fatores de recuperação inferiores aos esperados. Em muitos casos, as tecnologias inovadoras para o controle da água podem contribuir a uma redução considerável de custos operacionais e um aumento na produção de óleo.

1.1 - FENÔMENO DO CONE DE ÁGUA

Quando o óleo está preso em um reservatório de rocha porosa confinado por limites de rocha impermeável, uma zona de água é frequentemente encontrada abaixo da zona de óleo. Como o óleo é retirado do reservatório através de um poço, é gerado um gradiente de pressão, que também irá puxar a água para o poço. O gradiente de pressão é contrabalançado pelas forças da gravidade devido às diferenças de densidade dos fluidos. Enquanto a taxa de fluxo para extrair o óleo não é muito elevada, a interface óleo/água pode atingir uma forma estável com formato de “cone” abaixo do poço devido à forma como a perturbação da pressão se propaga no reservatório, conforme se ilustra na figura 1.1. Contudo, se o bombeamento é feito a uma taxa muito elevada, pode conduzir à situação indesejável da interface irromper no poço (Lucas, 2004). Uma vez que a água encontra a zona de drenagem do poço, ela será produzida em preferência ao óleo devido a sua maior mobilidade. Quanto mais viscoso o óleo, maior será a produção de água desses reservatórios (Cavalcante, 1996).

Tem-se então, que uma das características mais importantes dos reservatórios de hidrocarbonetos que possuem uma zona de água em sua base é a existência de uma vazão crítica de produção, acima da qual a água penetra no poço produtor (Escobar, 2008).

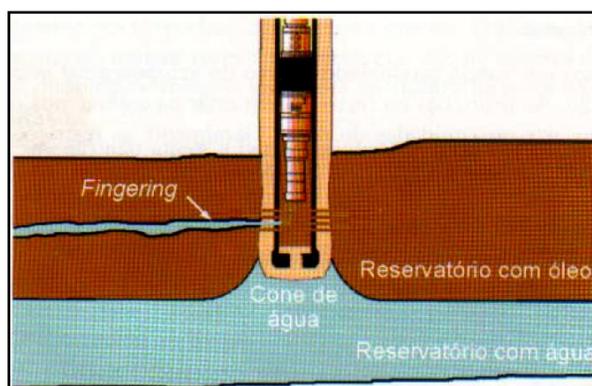


Figura 1.1 - Formação do cone de água em um reservatório de petróleo (Thomas, 2001).

Assim, a produção excessiva de água está relacionada a um fenômeno muito comum em poços produtores de petróleo conhecido como “cone” de água (*water coning*).

O objetivo de muitos estudos sobre o fenômeno do cone de água é o de prever o desempenho dos poços por meio da relação explícita que existe entre a distribuição de pressão no reservatório com o perfil da interface água/óleo. Para isto, torna-se necessário resolver o modelo matemático que governa tal fenômeno (Cavalcante, 1996). O modelo matemático é constituído por um conjunto de equações diferenciais que descrevem o movimento dos fluidos em meios porosos, acoplado com um conjunto apropriado de condições iniciais, condições de contorno e vários parâmetros do sistema poço/reservatório (Chen *et al.*, 2006). Os modelos utilizados nas simulações de reservatórios de petróleo são representações simplificadas de fenômenos extremamente complexos, que incorporam as influências mais importantes de acordo com o propósito de estudo (Saavedra, 2002). A maioria destes modelos são derivados a partir do princípio da conservação da massa, a lei de Darcy e as equações de estado.

Portanto, a solução da equação de fluxo em meio poroso considerando as condições de contorno do reservatório, permite determinar as variáveis envolvidas no comportamento do cone de água, que são: a vazão crítica, que é a máxima vazão de produção de óleo sem que ocorra produção de água no poço (Armenta, 2003), o tempo de avanço da água (*water breakthrough time*), o potencial de fluxo crítico na fronteira móvel e a posição e o formato da interface de contato dos fluidos à vazão crítica.

1.2 - MODELO PROTÓTIPO PARA ANALISAR O FENÔMENO DO CONE DE ÁGUA

Devido à natureza complexa do modelo matemático que governa o fenômeno do cone de água, foi proposto como modelo protótipo nesta dissertação a fim de compreender e prever o comportamento do cone, o fluxo monofásico bidimensional de fluidos incompressíveis com superfície livre em reservatórios verticalmente confinados. O fluido que satura o meio poroso é a água e a superfície livre do reservatório é a superfície de contato água/ar. A água é extraída do reservatório por meio de um poço que é representado como um sumidouro pontual, e o objetivo então é produzir água à vazão crítica sem que exista produção de ar.

1.3 - SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA

Em geral, as equações que governam um modelo matemático de um reservatório não podem ser resolvidas por métodos analíticos. Portanto, torna-se necessário o uso de métodos numéricos para resolver de maneira aproximada o modelo matemático (Chen *et al.*, 2006). As deficiências dos métodos analíticos são atenuadas por modelos numéricos que têm uma maior flexibilidade na resolução de problemas complexos. No caso do problema de escoamento de fluidos em reservatórios de petróleo, os métodos numéricos solucionam o sistema de equações algébricas obtido da discretização no espaço e no tempo das equações diferenciais parciais que regem o problema.

A grande vantagem da simulação numérica é a sua generalidade. Os modelos numéricos proporcionam inclusive soluções de escoamento de fluidos em reservatórios considerando regimes não permanentes, mesmo após a irrupção de água no poço produtor.

No modelo protótipo considerado para analisar o cone de água, utilizou-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC), também conhecido como *Boundary Element Method (BEM)*, para resolver numericamente a equação diferencial parcial que governa o fluxo de fluidos em

meios porosos em conjunto com as condições iniciais e as condições de contorno, considerando a superfície livre do reservatório como uma fronteira móvel.

Em geral, a base do Método dos Elementos de Contorno é a transformação das equações diferenciais parciais que regem o problema em equações integrais equivalentes aplicadas ao contorno. Este por sua vez é discretizado em elementos que podem ser constantes, lineares, quadráticos ou cúbicos.

Uma das vantagens do MEC sobre outros métodos numéricos, como por exemplo, o Método das Diferenças Finitas e o Método de Elementos Finitos, é que ele possui melhor desempenho, já que diminui em uma ordem a dimensão do problema proposto. Logo, existe uma diminuição na quantidade de dados de entrada, no tempo de processamento e no armazenamento das informações processadas, propiciando assim uma menor quantidade de operações aritméticas.

Outra característica do MEC é a obtenção das informações do domínio do problema a partir das variáveis do contorno. Este método é muito adequado para resolver alguns problemas de fluxo de fluidos em meios porosos, em especial quando são considerados contornos móveis. Mas, quando é aplicado a um domínio com um elevado número de elementos de discretização, requer a utilização de técnicas computacionais para acelerar o tempo de cálculo, dado que na sua forma original, o tempo de cálculo é proporcional ao cubo do número de elementos de discretização (Saavedra, 2002). Por conseguinte, nesta dissertação foi desenvolvida uma técnica de integração analítica para otimizar o tempo de cálculo da solução numérica do modelo protótipo analisado. Dessa forma, o custo computacional da simulação numérica feita com o MEC, medido através do tempo de processamento, é reduzido significativamente.

Os dados necessários para a simulação do sistema físico são: a geometria do reservatório, as condições iniciais, as condições de contorno e a posição e intensidade do sumidouro. Para efetuar o cálculo da solução numérica, foi implementado um esquema iterativo para se obter a posição final da superfície livre. Com a solução numérica do problema, obtém-se também o potencial e o fluxo normal nos contornos do reservatório. Conhecendo a distribuição de

potencial no contorno, é possível então caracterizar o comportamento dinâmico do cone de água.

1.4 - SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA

A validação dos resultados da simulação numérica foi feita através da solução analítica desenvolvida por Soares e Simões (2012). Eles analisaram também o caso de escoamento bidimensional de fluidos em meios porosos.

Segundo Soares e Simões (2012), para resolver analiticamente a equação diferencial parcial que rege o problema, consideraram um domínio de integração infinito com a condição de contorno de superfície livre. Consideraram também o fluxo de fluidos incompressíveis em um reservatório homogêneo e isotrópico, e um regime de fluxo permanente.

Através do Método de Mapeamento Conforme, eles obtiveram uma formulação analítica aproximada por meio da qual é possível calcular o valor da vazão crítica de produção no reservatório, e prever a posição e o formato da interface de contato dos fluidos à vazão crítica, considerando que o fluido é extraído do reservatório por ação de um sumidouro pontual.

1.5 - CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA DO CONE DE ÁGUA E PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE

A solução das equações descritivas do fenômeno permite obter de forma detalhada a distribuição espacial e a evolução temporal das variáveis do sistema estudado (Saavedra, 2002). Neste caso, com a solução numérica da equação de fluxo do modelo protótipo considerado para analisar o cone de água, obteve-se a distribuição de potencial no reservatório em função do tempo. Dessa forma, o modelo dinâmico que representa o comportamento do cone de água foi estimado a partir do comportamento do potencial (altura do cone) em sua região central.

Em geral, o processo de identificação ou caracterização dinâmica de um sistema requer que se aproxime o comportamento do sistema por um modelo simplificado, e a partir dos resultados das simulações, estimar os valores numéricos dos parâmetros do modelo. Assim, com uma estrutura de modelo definida para o comportamento do potencial na superfície livre, foi projetado um sistema de controle em malha fechada que mantém estável o cone de água durante o processo de produção no reservatório à vazão crítica.

1.6 - JUSTIFICATIVA DO TRABALHO

Esta dissertação de mestrado foi realizada com o propósito de desenvolver uma alternativa eficiente para aumentar a taxa de recuperação dos reservatórios e diminuir os custos operacionais ligados à produção/injeção de água.

A existência do fenômeno responsável pela produção de água em um reservatório de petróleo conhecido como “cone de água” limita as vazões de produção de óleo no poço, as quais não são normalmente rentáveis para um propósito prático.

Assim, para aumentar a produtividade do poço, tem de se controlar eficazmente o cone de água durante o processo de recuperação de óleo do reservatório. Devido à complexidade do modelo analítico que governa este fenômeno, torna-se fundamental a implementação de modelos numéricos para seu estudo. Contudo, surge a necessidade de determinar qual método numérico é o mais apropriado e como se pode melhorar a sua performance para fazer uma simulação numérica rápida e confiável. Visando isso, o presente trabalho faz uma contribuição importante na otimização do tempo de convergência da simulação numérica realizada com o Método dos Elementos de Contorno.

1.7 - OBJETIVOS

1.7.1 - Objetivo geral

O objetivo principal desta dissertação de mestrado centra-se no desenvolvimento de um sistema de controle não linear em malha fechada para manter estável o cone de água durante o processo de produção em um reservatório, a partir da aplicação do Método dos Elementos de Contorno para resolver numericamente a equação governante do escoamento monofásico bidimensional de fluidos incompressíveis com superfície livre em meios porosos.

1.7.2 - Objetivos específicos

Para atingir o objetivo geral desta dissertação, foram propostos os seguintes objetivos específicos:

- Propor como modelo protótipo para analisar e prever o comportamento do cone de água, o fluxo monofásico bidimensional de fluidos incompressíveis com superfície livre em reservatórios verticalmente confinados, onde o fluido é extraído do reservatório por ação de um único poço, que é representado como um sumidouro pontual.
- Construir a formulação matemática governante do modelo protótipo considerado.
- Solucionar numericamente a formulação matemática do problema pelo Método dos Elementos de Contorno.
- Determinar a partir da solução numérica obtida, as variáveis que definem o comportamento do cone de água. Estas variáveis são: a vazão crítica de produção, o potencial de fluxo crítico na superfície livre, a região de instabilidade do modelo e o tempo de irrupção (*breakthrough time*) do fluido indesejado no ponto de extração.
- Validar os resultados da simulação numérica realizada com o Método dos Elementos de Contorno, por meio da solução analítica aproximada obtida em (Soares e Simões, 2012). Estimar um modelo matemático simplificado que represente o comportamento

dinâmico do cone de água, baseado no comportamento do potencial de fluxo na superfície livre do reservatório.

- Projetar um controlador PI não linear pelo método de alocação de polos da função de transferência do sistema em malha fechada, que satisfaça as características desejadas.
- Simular o comportamento do sistema de controle na região estável e instável do modelo protótipo considerado para analisar o fenômeno do cone de água.

1.8 - ESTRUTURA DO DOCUMENTO

Esta dissertação está organizada em nove capítulos. No capítulo 2 são definidos os principais conceitos teóricos que definem o cone de água em um reservatório, e se faz uma revisão bibliográfica dos trabalhos realizados para simular numericamente o cone de água através do Método dos Elementos de Contorno.

No capítulo 3 é apresentada a metodologia geral para simular numericamente o cone de água com o Método dos Elementos de Contorno e desenvolver o sistema de controle não linear.

No capítulo 4 faz-se uma revisão das equações básicas que regem o fluxo monofásico de fluidos em meios porosos e constrói-se a formulação matemática governante do modelo protótipo selecionado neste trabalho para estudar e caracterizar o cone de água.

No capítulo 5 é apresentada a implementação do Método dos Elementos de Contorno para simular numericamente o cone de água no modelo protótipo considerado.

No capítulo 6 são definidas a geometria do reservatório, a malha de discretização do contorno, as condições iniciais e as condições de contorno, e é apresentado o esquema iterativo implementado no modelo computacional para simular numericamente o cone de água.

No capítulo 7 é desenvolvida a metodologia de identificação do modelo matemático do sistema dinâmico que representa o comportamento do cone de água, a partir da solução numérica obtida.

No capítulo 8 é projetado um sistema de controle em malha fechada, baseado em um controlador Proporcional-Integral não linear, para manter estável o cone de água durante a extração do fluido do reservatório à vazão crítica.

Para finalizar, no capítulo 9 se faz a análise e discussão dos resultados obtidos com as simulações numéricas do sistema de controle não linear, e no capítulo 10 são apresentadas as conclusões do trabalho desenvolvido e algumas sugestões para trabalhos futuros.

2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo proporciona uma introdução aos principais conceitos que definem o fenômeno cone de água em um reservatório de petróleo e apresenta uma revisão bibliográfica dos trabalhos desenvolvidos para simular numericamente o cone de água pelo Método dos Elementos de Contorno.

2.1 - ASPECTOS GERAIS SOBRE O CONE DE ÁGUA

Um dos aspectos de extrema importância a serem considerados durante a operação de poços de petróleo é a questão da formação de cones de água e/ou gás. Um cone de água, por exemplo, ocorre quando o contato água/óleo eleva-se mais das imediações de um poço produtor, provocando com isso um aumento na razão água/óleo, com conseqüente perda de produção de óleo. Por isso, ações devem ser tomadas para se minimizar ou pelo menos retardar a formação desses cones (Rosa *et al.*, 2006).

Entre os efeitos negativos pela presença do cone de água podem se destacar os seguintes (Zamonsky *et al.*, 2004):

- Diminuição da produção de óleo. Se a perfuração é feita longe do contato água/óleo uma grande quantidade de óleo fica sem drenar-se. Mas, se é realizada perto do contato, tem-se uma produção maior de água.
- Aumento dos custos operacionais das instalações de superfície. Se o volume de água contaminada produzida é alto, esta deve ser reinjetada em algum aquífero, o que envolve a perfuração de poços sumidouros, compra de equipamentos de compressão para a injeção da água e plantas de tratamento.

Embora as propriedades dos fluidos envolvidos possam acentuar a formação dos cones de água e/ou gás, é o diferencial entre a pressão do reservatório e a pressão de fluxo no poço que causa a ocorrência do cone, principalmente porque nas imediações de um poço vertical o gradiente de pressão no reservatório é máximo. Como para se alcançar um determinado nível

de produção em um reservatório de baixa permeabilidade é necessário um grande diferencial de pressão, nesse tipo de reservatório é maior a tendência de formação de cone do que em um reservatório de alta permeabilidade. No entanto, em reservatórios naturalmente fraturados, principalmente com um número relativamente grande de fraturas verticais, podem ocorrer sérios problemas de formação de cone, apesar da alta permeabilidade. Isso se deve ao fato de que a água e/ou o gás flui através das fraturas de alta condutividade. Nesse caso, a probabilidade de formação de cones pode ser reduzida através da redução da vazão de produção ou através do uso de poços horizontais. Mas, reduzir a produção do poço não é uma alternativa prática, pois estará sendo reduzida a velocidade de recuperação dos hidrocarbonetos contidos no reservatório (Rosa *et al*, 2006).

2.2 - ANÁLISE TEÓRICA DO CONE DE ÁGUA

O “cone” é principalmente o resultado do movimento dos fluidos do reservatório na direção de menor resistência, contrabalançado pela tendência dos fluidos a manter o equilíbrio gravitacional (Ahmed, 2006).

Quando o poço de petróleo é criado no reservatório, nota-se uma queda de pressão dentro do mesmo devido à extração do óleo. Essa queda de pressão no reservatório gera gradientes de pressão que são mais intensos nas regiões próximas ao poço e diminuem à medida que se afastam radialmente deste causando a deformação da superfície de contato água/óleo, que assume visualmente a forma de um “cone”, motivo pelo qual o fenômeno recebeu esta denominação. Contrabalançando tais gradientes de fluxo, encontram-se as forças gravitacionais que tendem a manter o fluido mais denso abaixo da zona do fluido menos denso. Existem basicamente três forças que podem afetar a distribuição da pressão dos fluidos em torno ao poço. Estas são:

- Forças capilares
- Força da gravidade
- Forças viscosas

As forças capilares geralmente têm efeito desprezível no cone e não serão consideradas na análise. A força da gravidade está dirigida no sentido vertical descendente e surge das diferenças de densidade dos fluidos no reservatório. O termo “forças viscosas” refere-se à relação linear entre o gradiente de pressão e o fluxo de fluidos através do reservatório, conforme descrito pela lei de Darcy. Tem-se que, a qualquer momento, deve existir um equilíbrio entre a força da gravidade e as forças viscosas em pontos próximos e afastados do intervalo de completação do poço. Contudo, quando as forças viscosas ao redor do poço excedem à força da gravidade, um "cone" acabará por invadir o ponto de extração (Ahmed, 2006).

Através do conceito de equilíbrio vertical em um sistema hidrocarboneto/água, define-se a estabilidade do cone de água, isto é, a existência de um cone estável ou instável (Ahmed, 2006). Se o poço é produzido a uma vazão constante e os gradientes de pressão no reservatório se tornam também constantes, é atingida uma condição de estado estacionário. Se nesta condição as forças dinâmicas (viscosas) no poço são menores do que a força da gravidade, o cone de água formado não irá avançar para o ponto de extração do óleo, estabelecendo-se assim um cone estável, conforme ilustrado na figura 2.1. Por outro lado, se a pressão no sistema está em uma condição de estado transiente, então, é formado um cone instável que irá avançar até que seja alcançada uma condição de estado estacionário. Se a queda de pressão gerada no poço é suficiente para que as forças devidas aos gradientes de pressão excedam à força da gravidade, o cone instável vai crescer e, finalmente, irromper no poço. É importante notar que em um sentido realista, o cone estável é, na verdade, "pseudoestável", pois a distribuição de pressão no reservatório geralmente muda.

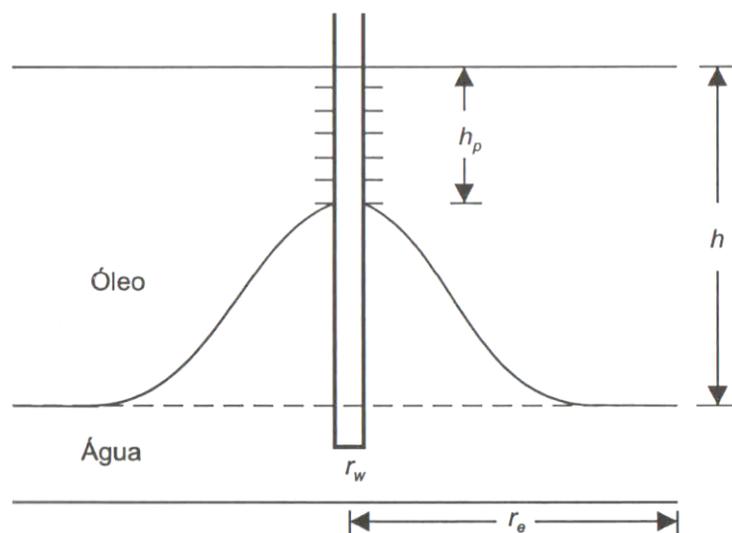


Figura 2.1 - Cone de água em um reservatório de petróleo com aquífero de fundo (Rosa *et al.*, 2006)

Tem-se como característica principal nos reservatórios de petróleo que possuem uma zona de água (aquífero) em sua base, que a invasão da água ocorre quando a vazão de produção do poço supera uma determinada vazão de equilíbrio entre as forças viscosas e a força da gravidade. Esta vazão, quando existir, recebe a denominação de vazão crítica.

A vazão crítica de produção, as propriedades da rocha e as propriedades dos fluidos presentes no reservatório, constituem-se em parâmetros fundamentais para o estudo da formação e a natureza do cone de água.

2.2.1 - Vazão crítica

A vazão crítica é definida como sendo a máxima vazão de hidrocarboneto possível de ser produzida sem que haja produção de um fluido indesejado devido à formação de cone, seja ele água e/ou gás. Por exemplo, em um reservatório de óleo com um aquífero de fundo, a vazão crítica de um poço é a máxima vazão de óleo que se pode produzir nesse poço sem que haja produção de água (Rosa *et al.*, 2006).

Em muitos casos, as vazões críticas obtidas são muito baixas, e por razões econômicas, um poço é geralmente produzido a vazões acima da vazão crítica. Contudo, essa produção acima

da vazão crítica dará como resultado uma irrupção do cone no poço após um determinado período de tempo. Esse tempo é chamado de tempo de ruptura ou *breakthrough time*.

2.2.2 - Propriedades da rocha

Um reservatório de petróleo é um meio poroso que contém hidrocarbonetos. Um meio poroso é um corpo composto por uma parte sólida persistente, chamada de matriz sólida, e a parte restante é chamada de espaço vazio (poros). Estes poros contêm uma variedade de fluidos, tais como gás, água, óleo, etc, conforme se mostra na figura 2.2.

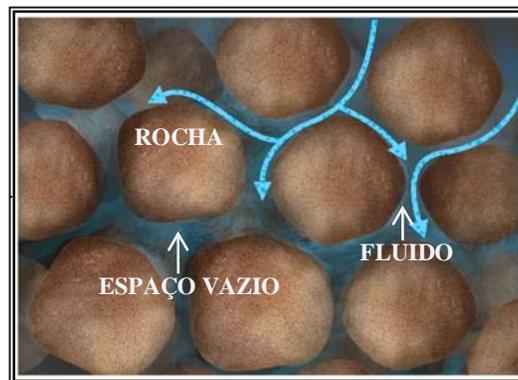


Figura 2.2 - Meio poroso.

2.2.2.1 - Porosidade

A porosidade é uma das mais importantes propriedades das rochas na engenharia de reservatórios, já que ela mede a capacidade de armazenamento dos fluidos. A porosidade é definida como sendo a relação entre o volume de vazios de uma rocha e o volume total da mesma, ou seja:

$$\phi = \frac{V_p}{V_t} \quad (2-1)$$

onde ϕ é a porosidade, V_p é o volume de vazios, também denotado como volume poroso, e V_t é o volume total. A porosidade é uma quantidade adimensional que algumas vezes se expressa como porcentagem. Do ponto de vista da engenharia de reservatórios, a porosidade efetiva é o

valor que se deseja quantificar, pois representa o espaço ocupado pelos fluidos que podem ser deslocados do meio poroso (Rosa *et al.*, 2006). A porosidade efetiva é a razão entre o volume poroso interligado e o volume total da rocha. Esta porosidade é uma indicação da capacidade da rocha para conduzir fluidos (Escobar, 2008).

2.2.2.2 - Permeabilidade

A permeabilidade absoluta, denotada por k , é uma propriedade do meio poroso, que mede a capacidade e habilidade da formação rochosa para transmitir um único fluido. Como a orientação e interligação dos poros são essenciais para o fluxo, a permeabilidade k controla o movimento direcional e a taxa de fluxo dos fluidos do reservatório na formação rochosa (Aarnes *et al.*, 2007). No Sistema Internacional, a medida para a permeabilidade é [m^2], mas é geralmente representada em Darcy [D] ou miliDarcy [mD]. Por definição, $1D$ [$1D = 0,987 \cdot 10^{-12} m^2$] é a permeabilidade de uma rocha na qual um gradiente de pressão de $1 atm/cm$ promove a vazão de $1 cm^3/s$ de um fluido de viscosidade de $1 cp$ (centipoise) através de $1 cm^2$ de área aberta ao fluxo. Traduzido para condições de reservatório, $1D$ é uma permeabilidade relativamente elevada.

Uma rocha-reservatório contém sempre dois ou mais fluidos, de modo que a permeabilidade absoluta não é suficiente para se medir a facilidade com que determinado fluido se move no meio poroso. No caso da existência de mais de um fluido, a facilidade com que cada um se move é chamada “permeabilidade efetiva” ao fluido considerado. Por exemplo, se em um meio poroso estão fluindo água e óleo, tem-se permeabilidade efetiva à água e permeabilidade efetiva ao óleo. Assim, as permeabilidades efetivas ao óleo, ao gás e à água têm por símbolos k_o , k_g , e k_w (Thomas, 2001).

2.2.3 - Propriedades dos fluidos

2.2.3.1 - Fase

Os poros no meio poroso podem ser preenchidos com diferentes fases. O termo “fase” denota a matéria que tem um estado físico e uma composição química homogênea. Podem ser distinguidas fases sólidas, líquidas, e gasosas. Embora possa haver várias fases líquidas presentes em um meio poroso, apenas uma fase gasosa pode existir (Chen *et al.*, 2006).

2.2.3.2 - Saturação

Os espaços vazios de um material poroso podem estar preenchidos por um determinado líquido e os espaços remanescentes por um gás. Ou ainda, dois ou três líquidos imiscíveis podem preencher todo o espaço vazio. Nesses casos, de grande importância é o conhecimento do conteúdo de cada fluido no meio poroso, pois as quantidades dos diferentes fluidos definem o valor econômico de um reservatório. Define-se saturação de um determinado fluido em um meio poroso como sendo a fração ou porcentagem do volume de poros ocupada pelo fluido. Assim, em termos de fração (Rosa *et al.*, 2006):

$$S_f = \frac{V_f}{V_p} \tag{2-2}$$

onde S_f é a saturação do fluido, V_f o volume do fluido e V_p o volume poroso. Em termos de porcentagem:

$$S_f(\%) = \left(\frac{V_f}{V_p} \right) \times 100\% \tag{2-3}$$

Se o meio poroso contiver um único fluido, a saturação deste será 100%.

2.2.3.3 - Compressibilidade isotérmica

Chama-se compressibilidade isotérmica de um fluido qualquer à variação fracional de volume do fluido por variação unitária de pressão. Assim, a compressibilidade isotérmica é expressa pela relação (Rosa *et al.*, 2006):

$$c_f = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (2-4)$$

ou simplesmente por:

$$c_f = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right) \quad (2-5)$$

Onde se admite que a temperatura seja constante.

2.2.3.4 - Viscosidade dinâmica

Denota-se como μ e se define como a medida da resistência do fluido ao escoamento. A unidade física de viscosidade no Sistema Internacional de Unidades é o Pascal-Segundo [$Pa \cdot s$], contudo, é geralmente medida em centipoise cp , onde $1 cp = 1 \frac{g}{cm \cdot s} = 1 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s$. A resistência do fluido ao escoamento é causada pelo atrito interno, devido basicamente a interações intermoleculares, sendo em geral função da temperatura.

2.2.3.5 - Condutividade hidráulica

A condutividade hidráulica representa o grau de facilidade com que o meio poroso deixa passar o fluido através dele por unidade de área transversal à direção do fluxo. A condutividade hidráulica Darciana ou linear é representada por K , e depende da geometria dos poros e das propriedades do fluido contido nos mesmos. As propriedades dos fluidos que afetam diretamente a condutividade hidráulica são a viscosidade dinâmica e a densidade. A condutividade hidráulica K é dada por:

$$K = \frac{k \rho g}{\mu} \quad (2-6)$$

onde K tem unidade de velocidade.

2.3 - TRABALHOS CORRELATOS

Uma variedade de trabalhos tem sido desenvolvidos ao longo dos anos para simular numericamente o cone de água com o Método dos Elementos de Contorno, analisando os casos de fluxo bidimensional e tridimensional.

Segundo Lucas *et al.*,(1991), a partir de uma formulação do problema com o Método dos Elementos de Contorno, conseguiram prever a forma da interface de contato dos fluidos no regime estacionário, aproximando o poço de petróleo por uma série de fontes e sumidouros pontuais, ou como um sumidouro distribuído, para simular a geometria real do poço. Resolvendo a equação potencial de fluxo (equação de Laplace), baseada na lei de Darcy, aplicando o MEC e considerando o movimento da interface óleo/água como uma condição de contorno móvel, encontraram que existe uma taxa de bombeamento crítica, acima da qual a água entra no poço de petróleo. A interface óleo/água tem forma de “cone” (*cusp*) estável à taxa crítica. Esforços para suprimir o cone usando combinações de fonte / sumidouro são apresentados.

Lucas e Kucera, (1996) desenvolveram uma formulação integral de contorno para resolver um modelo tridimensional de fluxo em meios porosos baseado na lei de Darcy, com o objetivo de obter a forma e a altura da interface óleo/água em estado estacionário em um reservatório de petróleo, sob a influência de uma distribuição de poços de petróleo para o bombeamento. Este trabalho é uma extensão do estudo desenvolvido em Lucas *et al* (1991), onde são analisados os casos axissimétricos considerando um único poço e uma linha vertical de poços distribuídos. São implementados esquemas de integração sofisticados com o propósito de obter resultados mais precisos, já que são utilizados *splines* bicúbicas como elementos de interpolação, o que aumenta a complexidade do problema. Em particular, a eficiência de vários métodos de integração numérica é comparada para resolver este problema, tais como rotinas *QUADPACK*, métodos adaptativos com base na regra de *IMT*, a regra *Kronrod*, o método de quadriláteros degenerados e a regra de Gauss-Rational para integrais infinitas. Os resultados são apresentados para a altura da interface óleo/água no regime estacionário, obtidos com

simulações tridimensionais que consideram distribuições multi-sumidouros sobre o reservatório.

Zhang e Hocking, (1997) consideraram a extração de óleo de um reservatório verticalmente confinado (limite de rocha impermeável no fundo do reservatório). O óleo é bombeado a partir de um poço localizado na camada acima da interface óleo/água. O poço é representado como um sumidouro pontual. O fluxo é considerado axissimétrico, e envolve uma condição de contorno cinemática não linear ao longo da superfície livre. O Método dos Elementos de Contorno foi usado para resolver o problema de fluxo bifásico axissimétrico governado pela equação de Laplace. Dessa forma, determinou-se a posição da interface para diferentes taxas de bombeamento, e calculou-se a taxa de bombeamento crítica em função da posição do sumidouro.

Zhang *et al.*, (1999) simularam numericamente o cone de água mediante o Método dos Elementos de Contorno. Nesse trabalho, foi considerado como problema protótipo para estudar e prever o comportamento do cone de água em um reservatório de petróleo, a extração de água de um aquífero freático. O objetivo foi o de prever as condições sob as quais a água podia ser retirada de forma mais eficiente a partir de um único poço, de tal modo que não ocorresse a irrupção de ar dentro do poço. Analisaram a eficiência de duas estratégias de bombeamento: contínuo e pulsado para retirar o fluido do reservatório. A taxa crítica de bombeamento foi determinada analiticamente usando uma solução já existente com base no Método Hodográfico (Método de Mapeamento Conforme), enquanto o Método dos Elementos de Contorno (MEC) foi usado para resolver numericamente a equação governante do escoamento bidimensional de fluidos incompressíveis com superfície livre em meios porosos. Com o modelo numérico obtido através do MEC, analisaram a estratégia de bombeamento pulsado como uma taxa de fluxo supercrítica, na tentativa de conseguir uma remoção de fluido rápida e estável. Foi considerada uma condição de contorno cinemática não linear dependente do tempo, para simular o movimento da superfície de contato água/ar. Um aparato experimental baseado em uma célula de *Hele-Shaw* foi desenvolvido para verificar experimentalmente as soluções analíticas e numéricas obtidas, em casos estáveis e instáveis para o bombeamento no aquífero freático.

Lucas, (2004) desenvolveu um método que, a partir de uma dada distribuição tridimensional particular de poços no reservatório, encontra as taxas de fluxo de cada poço que maximizam a taxa de fluxo total, sem que a interface óleo/água irrompa nos pontos de drenagem dos poços. Este método foi desenvolvido usando o modelo Muskat para calcular a altura de interface, e uma versão do Método Simplex Nelder-Mead para otimização.

3 - METODOLOGIA

Com o propósito de desenvolver o sistema de controle não linear em malha fechada para evitar a formação do cone de água instável em um reservatório de petróleo, e, portanto, aumentar a produção de óleo, simulando numericamente o fenômeno de escoamento de fluidos em meios porosos, e controlando a distribuição de potencial dentro do reservatório através da estratégia de bombeamento, considerou-se o seguinte plano metodológico:

Construção do modelo matemático geral que descreve o fenômeno físico de fluxo monofásico de fluidos em meios porosos, a partir da lei de Darcy, a lei da continuidade e a equação de estado.

Devido à complexidade do modelo matemático, são assumidas varias considerações para obter um modelo de simulação protótipo simplificado. Aplicando as simplificações necessárias, define-se a equação diferencial parcial governante do modelo estudado neste trabalho, que corresponde ao modelo de fluxo monofásico bidimensional de fluidos incompressíveis com superfície livre em um reservatório homogêneo, isotrópico e verticalmente confinado. O fluido que satura o meio poroso é a água e a superfície livre do reservatório é a superfície de contato água/ar. A água é extraída do reservatório por meio de um poço que é representado no modelo como um sumidouro pontual e o objetivo então, é produzir água à vazão crítica sem que exista produção de ar (cone de ar instável). Esta proposta para estudar e caracterizar o comportamento do cone de água é baseada na pesquisa desenvolvida por Zhang *et al.* (1999).

Impõem-se as condições iniciais e as condições de contorno requeridas para dar solução à equação governante do modelo protótipo considerado. Analisa-se o movimento da superfície livre durante a extração do fluido do reservatório, impondo uma condição de contorno cinemática não linear dependente do tempo na superfície.

Devido à presença da superfície livre no reservatório, a solução numérica do problema é calculada dentro de um esquema iterativo, já que o sistema de equações algébricas do modelo numérico deve ser resolvido a cada passo de tempo. Neste caso a simulação numérica é

realizada considerando um regime de fluxo semi estático, atualizando a cada passo de tempo a posição da fronteira móvel e em seguida o campo potencial.

Os resultados da simulação numérica permitem determinar a distribuição espacial e a evolução temporal das variáveis envolvidas na formação do cone de água. Essas variáveis são: a vazão crítica de produção, a distribuição de potencial na superfície livre à vazão crítica, a região de instabilidade do modelo protótipo e o tempo de irrupção (*breakthrough time*) do fluido indesejado (ar) no ponto de extração.

O contorno do reservatório é discretizado para a implementação do MEC. Define-se um sistema dinâmico para representar o comportamento do cone de água, estimado a partir do comportamento do potencial de fluxo da região central da malha de discretização da superfície livre, já que o reservatório é considerado axialmente simétrico. Este sistema dinâmico tem como entrada o potencial no sumidouro e como saída o potencial do nó central da superfície livre. Para construir o modelo matemático no domínio temporal que descreve a relação entrada/saída do sistema dinâmico, analisa-se a saída do sistema a uma excitação degrau. Como a intensidade do sumidouro pode variar de zero até um valor crítico, definem-se várias sub-regiões de análise dentro dessa região, e se identifica a forma como se comporta a saída do sistema para cada sub-região. Assim, é possível determinar o modelo matemático aproximado do sistema dinâmico que representa o comportamento do cone de água. Os valores dos parâmetros do modelo são calculados através das simulações numéricas.

Com o objetivo de encontrar um sistema simplificado para a utilização como base no projeto do sistema de controle, é proposta a identificação dinâmica do modelo simulado numericamente.

Com a função de transferência da planta, pode-se projetar um sistema de controle em malha fechada implementando-se um controlador Proporcional-Integral não linear. Os parâmetros do controlador PI são sintonizados em função da alocação dos polos da função de transferência do sistema em malha fechada, para satisfazer as características desejadas da resposta.

Realizam-se simulações numéricas com o sistema de controle em malha fechada, para validar seu funcionamento dentro da região estável e instável do modelo protótipo considerado. O plano metodológico desenvolvido nesta dissertação é ilustrado na figura 3.1.

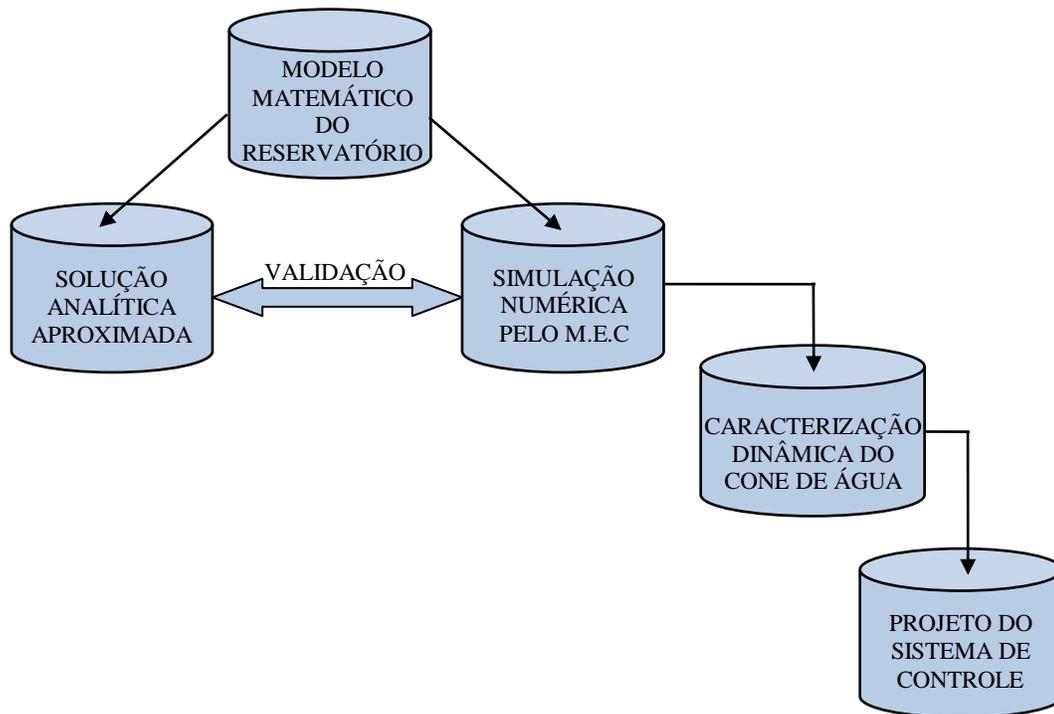


Figura 3.1 - Plano metodológico da pesquisa desenvolvida.

4 - MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A ANÁLISE DO CONE DE ÁGUA.

Neste capítulo é apresentada a formulação matemática governante do modelo protótipo considerado para analisar o fenômeno do cone de água em reservatórios.

A descrição quantitativa de um processo físico sempre requer uma formulação matemática (Heinemann, 2003). Um modelo matemático de um reservatório de petróleo é constituído por um conjunto de equações que descrevem o escoamento de fluidos em meios porosos, acoplado com um conjunto apropriado de condições iniciais e condições de contorno.

As leis que regem o movimento de fluidos em um reservatório de petróleo são a lei da conservação da massa, a lei da conservação do momento e a lei da conservação da energia. As propriedades mecânicas dos fluidos são formuladas através da equação de estado (Chen *et al.*, 2006).

A partir da associação da equação da continuidade, que é uma equação de conservação de massa, da lei de Darcy que é uma equação de transporte de massa, e da equação de estado, pode se obter a equação generalizada para o escoamento monofásico de fluidos em meios porosos, a partir da qual são desenvolvidas soluções para as diversas situações em que os reservatórios podem se encontrar (Rosa *et al.*, 2006).

Considera-se o transporte de um fluido newtoniano, que satura todo o espaço vazio em um meio poroso sob uma condição isotérmica. Considera-se também o caso particular de fluxo de uma única fase em que se admite que o fluido seja incompressível.

Usa-se um sistema de coordenadas retangulares conforme mostrado na figura 4.1. As variáveis espaciais e temporais serão representadas por $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e t respectivamente. Denota-se por φ a porosidade do meio, por ρ a densidade do fluido, por $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a velocidade de Darcy e q representa as fontes externas e sumidouros (Chen *et al.*, 2006).

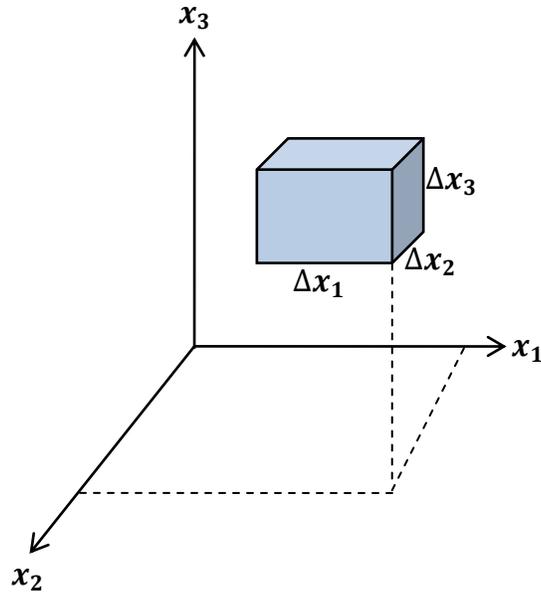


Figura 4.1 - Elemento de volume no sistema de coordenadas cartesianas considerado (Heinemann, 2003).

4.1 - LEI DE DARCY

Na simulação de escoamento monofásico de fluidos no reservatório, a equação da conservação do momento é dada na forma diferencial da lei de Darcy. Derivada empiricamente, esta lei indica uma relação linear entre a velocidade do fluido em relação ao sólido e o gradiente da altura piezométrica. A forma diferencial da lei de Darcy é dada por:

$$\mathbf{u} = -\frac{\mathbf{k}}{\mu}(\nabla P + \rho g \nabla z) \quad (4-1)$$

onde \mathbf{u} é a velocidade aparente do fluido em $[m/s]$, \mathbf{k} é o tensor de permeabilidade absoluta do meio poroso com dimensões $[m^2]$, μ é a viscosidade dinâmica do fluido dada em $[Pa \cdot s]$, g é a magnitude da aceleração gravitacional com dimensões $[m^2/s]$, ρ é a densidade do fluido em $[kg/m^3]$, z é a profundidade na direção vertical x_3 dada em $[m]$, P é a pressão do fluido em $[Pa]$ e ∇ é o operador gradiente definido por:

$$\nabla P = \frac{\partial P}{\partial x_1} \vec{i}_1 + \frac{\partial P}{\partial x_2} \vec{i}_2 + \frac{\partial P}{\partial x_3} \vec{i}_3 \quad (4-2)$$

Em alguns casos, é possível assumir que \mathbf{k} é um tensor diagonal:

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix} = \text{diag}(k_{11}, k_{22}, k_{33}). \quad (4-3)$$

Se $k_{11} = k_{22} = k_{33} = k$, o meio poroso é chamado isotrópico e a permeabilidade k é um escalar; caso contrário, a permeabilidade é um tensor e o meio poroso é anisotrópico (Chen *et al.*, 2006).

Por conveniência na análise matemática, a lei de Darcy pode se escrever da seguinte forma:

$$\mathbf{u} = -\frac{k\gamma}{\mu} \nabla \left(\frac{P}{\gamma} + z \right) \quad (4-4)$$

onde $\gamma = \rho g$ é o peso específico do fluido. Tem-se que a condutividade hidráulica está dada por:

$$\mathbf{K} = \frac{k\gamma}{\mu} \quad (4-5)$$

com dimensões [m/s], e se introduz uma função chamada potencial ou altura piezométrica dada por (Zhang *et al.*, 1999):

$$\Phi = \frac{P}{\gamma} + z \quad (4-6)$$

Portanto, a lei de Darcy se torna:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \nabla \left(\frac{P}{\gamma} + z \right) = -\mathbf{K} \nabla \Phi$$

$$u_1 = -K_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad u_2 = -K_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \quad u_3 = -K_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}. \quad (4-7)$$

Assumindo-se que o reservatório é homogêneo e isotrópico, então $K_1 = K_2 = K_3 = K$. O sinal negativo da equação de Darcy se deve ao fato que o gradiente de potencial é negativo no sentido do fluxo, e, portanto a velocidade aparente \mathbf{u} e o gradiente de potencial $\nabla\Phi$ tem sinais opostos (Rosa *et al.*, 2006).

A magnitude da velocidade aparente do fluido ou velocidade de Darcy superficial é definida como o volume de fluido por unidade de tempo Q que flui através da superfície A de um meio poroso:

$$u = \frac{Q}{A} \quad (4-8)$$

Em comparação com a velocidade real do fluxo nos canais dos poros, grandes diferenças podem ser reconhecidas. No entanto, uma média estatística é facilmente calculada para determinar a velocidade real do fluxo ao nível macroscópico (Heinemann, 2003):

$$v = \frac{Q}{A\phi} = \frac{u}{\phi} \quad (4-9)$$

onde v a velocidade real do escoamento.

4.1.1 - Potencial de fluxo

O potencial de fluxo de um fluido, também chamado de potencial ou altura piezométrica, é definido pela expressão:

$$\Phi = \int_{P_0}^P \frac{dP}{\gamma} + (z - z_0) \quad (4-10)$$

onde Φ está dado em $[m]$, z e z_0 são alturas em relação a um nível de referência arbitrário, e P e P_0 são as pressões que agem nos níveis z e z_0 respectivamente, conforme se observa na figura 4.2.

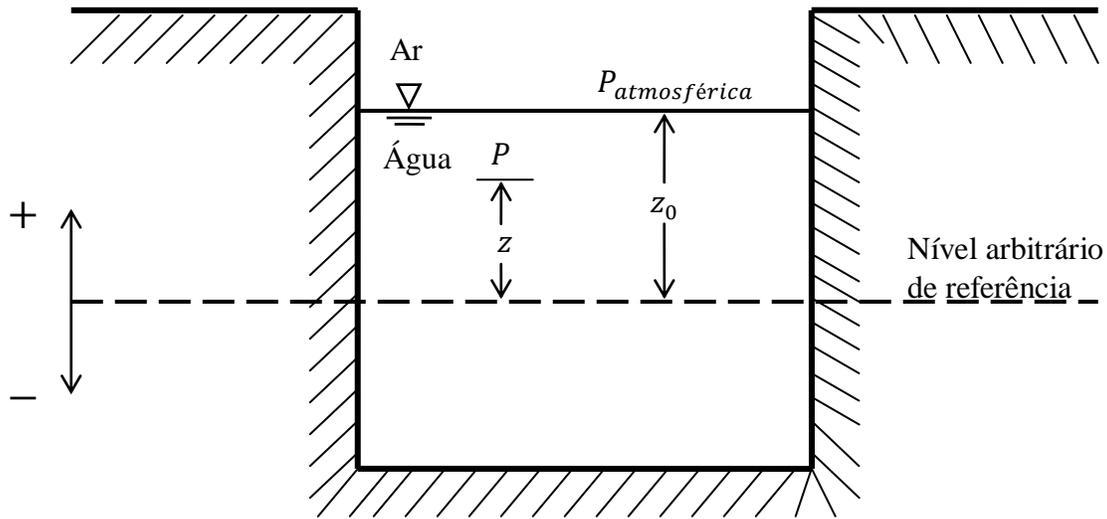


Figura 4.2 - Potencial de um fluido estático (Corrêa, A.C.F.).

Portanto, o potencial é definido em relação a um nível de referência z_0 e a uma pressão de referência P_0 . Para facilidade de cálculo, o nível de referência é escolhido de modo que $z_0 = 0$. Dessa forma, o potencial é dado por:

$$\Phi = \int_{P_0}^P \frac{dP}{\gamma} + z \quad (4-11)$$

onde normalmente a pressão de referência P_0 é a pressão atmosférica.

Quando o fluido é incompressível, não existe variação do peso específico com a pressão, e a definição de potencial se torna (Rosa *et al*, 2006):

$$\Phi = \frac{(P - P_0)}{\gamma} + z \quad (4-12)$$

Tem-se então, que o movimento lateral e vertical de um fluido em um meio poroso é devido a diferenças de pressão e elevação. A estimação do campo de velocidade do fluido dentro do meio poroso pode se expressar em função do gradiente do potencial de fluxo (Saavedra, 2002).

4.2 - EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

A equação da continuidade descreve a lei da conservação de massa. Considerando um paralelepípedo como volume de controle de tal modo que as suas faces sejam paralelas aos eixos das coordenadas, conforme se ilustra na figura 4.3, tem-se que a diferença entre a massa de entrada e a massa de saída é igual à variação de massa dentro do volume de controle (Chen *et al.*, 2006).

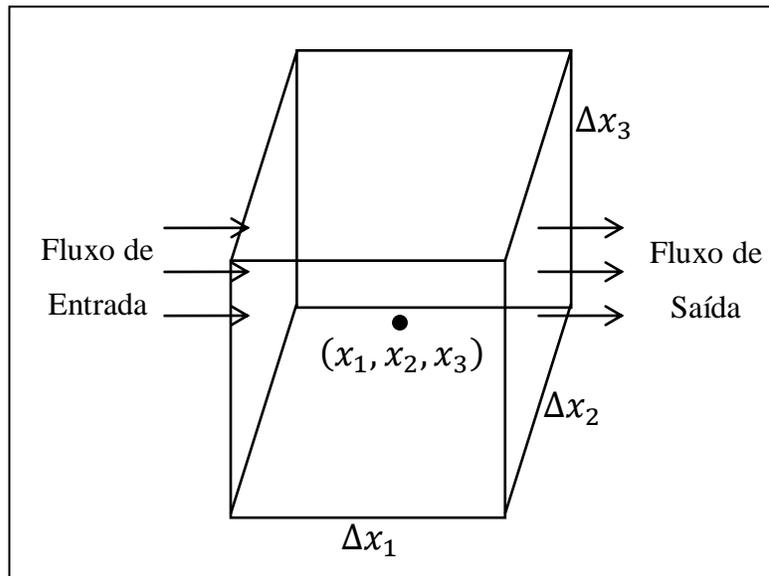


Figura 4.3 - Volume diferencial de controle (Chen *et al.*, 2006, modificado).

Assim, a equação da conservação da massa é dada por:

$$\frac{\partial(\varphi\rho)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) + q$$

(4-13)

Note-se que q é negativo para sumidouros e positivo para fontes.

4.3 - EQUAÇÃO DE ESTADO

A equação de estado se expressa em termos da compressibilidade do fluido c_f :

$$c_f = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_T \quad (4-14)$$

a uma temperatura T fixa, onde V representa o volume ocupado pelo fluido em condições de reservatório. Portanto, a densidade do fluido é uma função da pressão. Se o fluido é considerado incompressível tem-se (Chen *et al.*, 2006):

$$c_f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} = 0 \quad (4-15)$$

Ou após integração:

$$\rho = \text{constante} \quad (4-16)$$

4.4 - EQUAÇÃO GERAL PARA O ESCOAMENTO MONOFÁSICO

Tem-se que a equação da continuidade que descreve a lei da conservação da massa é dada por:

$$\frac{\partial(\varphi\rho)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) + q \quad (4-17)$$

e a lei da conservação do momento é dada pela equação de Darcy generalizada:

$$\mathbf{u} = -\frac{\mathbf{k}}{\mu} (\nabla P + \gamma \nabla z) = -\mathbf{K} \nabla \Phi \quad (4-18)$$

Associando a equação de Darcy com a equação da continuidade se obtém:

$$\frac{\partial(\varphi\rho)}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{K} \nabla \Phi) + q \quad (4-19)$$

Ou de forma detalhada:

$$\frac{\partial(\varphi\rho)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\rho K_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\rho K_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\rho K_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + q \quad (4-20)$$

Considerando que o único fluido que satura o meio poroso é incompressível e que o meio é homogêneo e isotrópico, então o termo $\frac{\partial(\varphi\rho)}{\partial t} = 0$ e a densidade, a porosidade, a viscosidade e a condutividade hidráulica são constantes. Assim, a equação geral para fluxo monofásico reduz-se a (Chen *et al.*, 2006):

$$\nabla^2\Phi = -\frac{q}{\rho K} \quad (4-21)$$

A formulação matemática dada acima é também conhecida como equação de Poisson.

De um modo geral, não há uma fonte (sumidouro) de massa distribuída no escoamento monofásico num meio tridimensional. Contudo, como uma aproximação, pode-se considerar o caso em que as fontes e sumidouros estão localizados em pontos isolados $\mathbf{x}^{(i)}$. Então, estas fontes pontuais podem ser modeladas por esferas pequenas que são excluídas do domínio do meio poroso. As superfícies dessas esferas podem ser tratadas como parte do contorno do meio, e o fluxo de massa por unidade de volume e tempo de cada fonte ou sumidouro determina o fluxo total através da superfície. Quer dizer então, que a vazão devida a uma fonte ou sumidouro pode ser tratada como uma condição de contorno, e, portanto, a equação geral que governa o escoamento monofásico de fluidos incompressíveis em meios porosos se torna (Chen *et al.*, 2006):

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (4-22)$$

conhecida também como equação de Laplace.

Outra abordagem para tratar com fontes (sumidouros) pontuais é inseri-las na equação da conservação da massa. Isto é, para sumidouros pontuais, definimos q em (4.21) como:

$$q = -\sum_i \rho q^{(i)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)}) \quad (4-23)$$

Onde $\rho q^{(i)}$ indica o fluxo de massa de fluido produzida (massa por unidade de volume e tempo) em $\mathbf{x}^{(i)}$, sendo o termo $q^{(i)}$ a intensidade do sumidouro específico com dimensões $[s^{-1}]$ e $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)})$ a função delta de Dirac (Bastian, 1999).

Para fontes pontuais, q é dado por:

$$q = \sum_i \rho^{(i)} q^{(i)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)}) \quad (4-24)$$

Onde $\rho^{(i)} q^{(i)}$ denota a massa do fluido i injetado por unidade de volume e tempo em $\mathbf{x}^{(i)}$, respectivamente (Chen *et al.*, 2006).

Para completar o modelo matemático que descreve o escoamento monofásico de fluidos incompressíveis em meios porosos é necessário especificar as condições iniciais e as condições de contorno no reservatório. Denota-se por Γ o contorno externo e por Ω o domínio do meio poroso sob consideração.

4.5 - CONDIÇÕES INICIAIS

Com o objetivo de resolver os problemas de escoamento de fluidos em meios porosos que têm soluções dependentes do tempo, é necessário saber o estado do sistema em um determinado instante. Este é geralmente o tempo inicial $t = t_0$. O estado do sistema no instante $t = t_0$ é chamado condição inicial. A condição inicial do sistema pode ser expressa em termos do potencial de fluxo ou da pressão (Heinemann, 2003).

$$\Phi(\mathbf{x}, t_0) = \Phi_0(\mathbf{x})$$

ou

$$P(\mathbf{x}, t_0) = P_0(\mathbf{x}) \quad (4-25)$$

4.6 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

O contorno do reservatório é considerado permeável ou aberto se o fluido é capaz de passar através dele, e impermeável ou fechado, no caso contrário. Considerando um contorno impermeável, as seguintes formulações matemáticas podem ser efetuadas (Heinemann, 2003):

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -K \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} = \left[-K \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]_{\Gamma} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$
(4-26)

Onde \mathbf{n} é um vetor unitário normal ao contorno Γ e $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ é o vetor posição.

No caso de um contorno permeável, o potencial ou o gradiente de potencial são prescritos no contorno Γ como uma função do tempo:

$$\Phi_{\Gamma} = \Phi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$
(4-27)

ou

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{\Gamma} = \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial n}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$
(4-28)

Nos dois casos, a velocidade do fluido através do contorno é calculada por:

$$u_n = K \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$
(4-29)

E, portanto, a vazão de fluxo volumétrica através do contorno é dada por:

$$Q_n = A u_n = K A \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$
(4-30)

Em muitos problemas de fluxo em meios porosos, pelo menos um dos contornos do domínio representa uma superfície livre do fluido (Ghimire, 2009). Neste estudo considera-se que a superfície livre do reservatório, que é a superfície de contato fluido/ar é uma fronteira móvel. Tem-se então que o movimento da superfície livre se expressa como uma condição de contorno cinemática.

4.6.1 - Dedução da condição de contorno para a superfície livre

Duas condições definem uma superfície livre:

- A pressão em cada ponto da superfície livre é a pressão atmosférica.
- Neste trabalho considera-se que a superfície livre é uma interface abrupta entre o ar e o fluido no meio poroso, ignorando-se os efeitos da capilaridade (Vélez, 2004).

As equações que governam o escoamento em meios porosos se tornam de difícil solução pela presença da superfície livre. O principal problema reside no fato de que nem a forma nem a posição da superfície livre são conhecidas, e, portanto deverão ser determinadas, mas também a posição da superfície livre define uma condição de contorno que é necessária para dar solução à equação de fluxo no reservatório. A localização da superfície livre é um problema desafiante em muitas áreas da mecânica de fluidos, e, recentemente, o cálculo para o regime permanente tem sido proposto como um problema de otimização (Saavedra, 2002).

Considera-se o referencial de pressão do sistema, que é a pressão atmosférica, como sendo zero. Portanto, a partir da definição de potencial de fluxo, a condição de contorno cinemática da superfície livre torna-se:

$$\Phi = \frac{P}{\gamma} + z = \eta(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (4-31)$$

Quer dizer então, que na superfície livre, o potencial de fluxo corresponde com a posição da mesma. Assim, a elevação da superfície livre na coordenada vertical x_3 pode ser representada por:

$$z = \eta(\mathbf{x}, t) \quad (4-32)$$

Sendo que $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ é a velocidade vertical da mesma.

Tem-se que a superfície livre é uma superfície material (em outras palavras, a superfície livre sempre é constituída pelas mesmas partículas do fluido) e a taxa de mudança da elevação da superfície livre deve ser igual à velocidade vertical, que pode ser calculada aplicando o conceito de derivada material ou Lagrangiana (Liggett e Liu, 1983). A derivada material representa a variação total por unidade de tempo de uma determinada propriedade do fluido

seguindo uma partícula no campo de fluxo. Logo, para qualquer campo vetorial (escalar) H associado a um fluxo tem-se (Shames, 1992):

$$\frac{DH}{Dt} = \left(v_{x_1} \frac{\partial H}{\partial x_1} + v_{x_2} \frac{\partial H}{\partial x_2} + v_{x_3} \frac{\partial H}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \mathbf{v} \cdot \nabla H + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (4-33)$$

Dessa forma, a taxa de variação da elevação da superfície livre com o tempo é dada por:

$$\frac{D(z - \eta)}{Dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla(z - \eta) + \frac{\partial(z - \eta)}{\partial t} = 0 \quad (4-34)$$

onde \mathbf{v} é a velocidade real do fluido definida usando a lei de Darcy:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}}{\varphi} = \frac{-K \nabla \Phi}{\varphi} \quad (4-35)$$

Substituindo a expressão para a velocidade \mathbf{v} na equação (4-34) se obtém:

$$\frac{D(z - \eta)}{Dt} = -\frac{K}{\varphi} \nabla \Phi \cdot \nabla(z - \eta) + \frac{\partial(z - \eta)}{\partial t} = 0 \quad (4-36)$$

Mudando o sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) para o sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) a equação anterior se torna:

$$-\frac{K}{\varphi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) \cdot \left(\frac{\partial(z - \eta)}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial(z - \eta)}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial(z - \eta)}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$-\frac{K}{\varphi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) \cdot \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{K}{\varphi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$$

(4-37)

A equação anterior pode se escrever:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{K}{\varphi} \left(\nabla_2 \Phi \cdot \nabla_2 \eta - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \quad (4-38)$$

onde ∇_2 denota o operador gradiente horizontal.

Definindo as grandezas da equação anterior de forma adimensional, tem-se:

$$t^* = \frac{tK}{\varphi L}, \quad (\Phi^*, \eta^*, x^*, y^*, z^*) = \frac{(\Phi, \eta, x, y, z)}{L} \quad (4-39)$$

onde L é uma escala de comprimento característica. Todas as quantidades com um asterisco são quantidades adimensionais. No entanto, por questões de brevidade todos os asteriscos serão omitidos no resto deste estudo, mas todas as grandezas serão tratadas de forma adimensional. Substituindo a relação dada em (4-39) em (4-45) e (4-46) obtêm-se as seguintes condições de contorno adimensionais de superfície livre (Liggett e Liu, 1983):

$$\begin{aligned} \Phi &= \eta \quad \text{em} \quad z = \eta \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \left(\nabla_2 \Phi \cdot \nabla_2 \eta - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4-40)$$

O vetor unitário normal à superfície livre pode ser definido como:

$$n = \frac{\nabla(z - \eta)}{|\nabla(z - \eta)|} \quad (4-41)$$

Pode-se também definir a derivada normal do potencial na superfície livre como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi = (|\nabla(z - \eta)|)^{-1} \nabla(z - \eta) \cdot \nabla \Phi \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= (1 + |\nabla_2 \eta|^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \nabla_2 \eta \cdot \nabla_2 \Phi \right) \end{aligned} \quad (4-42)$$

Substituindo em (4-42) a expressão dada em (4-40) tem-se:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -(1 + |\nabla_2 \eta|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad (4-43)$$

O cosseno do ângulo formado pela superfície livre com respeito à horizontal que é o ângulo ϕ é dado por (Liggett e Liu, 1983):

$$\cos\phi = \left(1 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = (1 + |\nabla_2\eta|^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (4-44)$$

Portanto, as condições de contorno na superfície livre são definidas por:

$$\begin{aligned} \Phi &= \eta \quad \text{em} \quad z = \eta \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} &= -\frac{1}{\cos\phi} \frac{\partial\Phi}{\partial n} \end{aligned} \quad (4-45)$$

Assim, o estudo do movimento da superfície livre durante a extração do fluido do reservatório depende da velocidade vertical, que é proporcional a dois fatores: a derivada normal do potencial e o ângulo formado pela superfície com a horizontal. Desta forma, é obtida uma condição de contorno mista na superfície livre conhecida também como condição de contorno cinemática (Saavedra, 2002). A equação dada para calcular a velocidade vertical em (4-45) é resolvida após o potencial de fluxo no contorno ser calculado porque a posição da superfície livre do líquido não pode ser conhecida a priori (Ghimire, 2009).

4.7 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA GOVERNANTE DO MODELO PROTÓTIPO.

Neste trabalho, para estudar e caracterizar o comportamento do cone de água mediante a simulação numérica pelo Método dos Elementos de Contorno foi considerado no capítulo I como modelo protótipo, o escoamento bidimensional de um único fluido incompressível em um reservatório verticalmente confinado por um contorno sólido e com superfície livre, submetido à pressão de uma bomba de sucção. Assim, formula-se o problema da seguinte forma: uma camada de água com uma profundidade H ocupa um meio poroso homogêneo e isotrópico de permeabilidade constante k , acima do limite inferior de rocha impermeável. O sumidouro está localizado no contorno impermeável e produz um fluxo total Q por unidade de tempo. Um contorno de potencial constante (contorno permeável) é assumido em $x = 0$ e em

$x = x_l$. L_p é o ponto mais baixo da superfície livre localizado em $(\frac{x_l}{2}, y_p)$. O plano físico de referência é ilustrado na figura 4.4 (Zhang *et al.*, 1999).

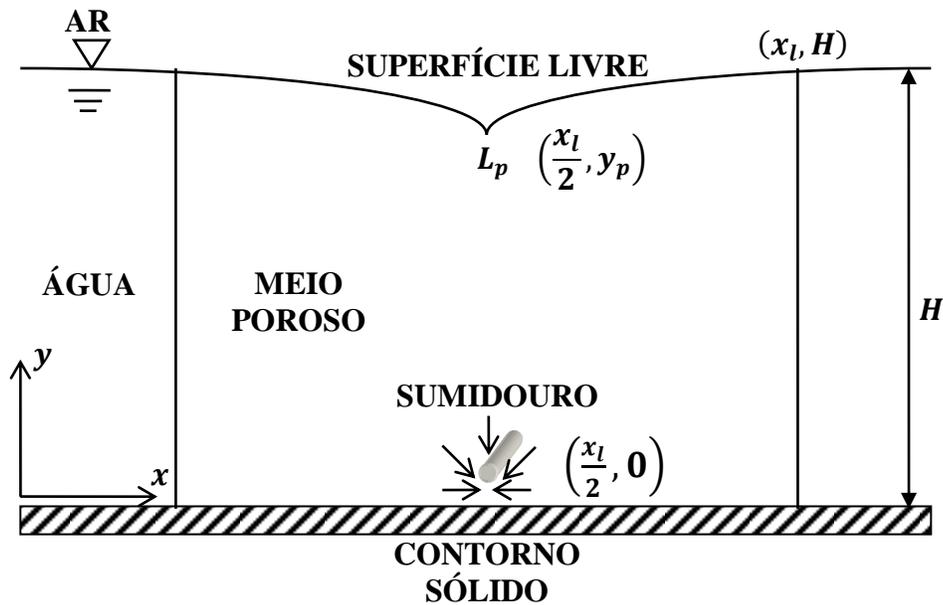


Figura 4.4 - Plano físico de referência (Zhang *et al.*, 1999, modificado).

A lei de Darcy considerando o fluxo bidimensional pode se expressar como:

$$u_x = -K \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad u_y = -K \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (4-46)$$

Onde o potencial de fluxo ou altura piezométrica é dado por:

$$\Phi = \frac{P}{\gamma} + y \quad (4-47)$$

Tem-se então que a equação geral para o fluxo neste caso é:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{q}{K} \quad (4-48)$$

Lembrando que a intensidade do sumidouro q tem unidades de $[s^{-1}]$.

A superfície livre é uma superfície de controle deformável, ou seja, seu formato varia com o tempo, devido à variação do campo de pressão. Localiza-se em:

$$y = \eta(x, t) \tag{4-49}$$

Com uma velocidade vertical dada por:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \tag{4-50}$$

Onde,

$$\cos \phi = \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4-51}$$

Vale ressaltar que para definir o modelo protótipo, assumiram-se as seguintes considerações:

- O reservatório é homogêneo e isotrópico.
- Utilizou-se um modelo de poço vertical representado como um sumidouro pontual.
- Os efeitos da pressão capilar são desprezíveis na formação do cone de água.
- O fluido que satura o meio poroso é incompressível.

5 - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.

Neste capítulo é apresentada a formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para resolver numericamente o modelo matemático governante do problema de fluxo monofásico bidimensional de fluidos incompressíveis em meios porosos, que é descrito de forma geral pela equação de Poisson. Apresenta-se também o desenvolvimento analítico das integrais para calcular os termos das matrizes de influencia \mathbf{H} e \mathbf{G} do método.

5.1 - INTRODUÇÃO AO MEC

Em geral, o modelo matemático que governa o fluxo de fluidos em reservatórios de petróleo não pode ser resolvido por métodos analíticos, já que está constituído por sistemas de equações diferenciais parciais não lineares dependentes do tempo. Portanto, torna-se necessário o uso de um método numérico eficiente para resolver o modelo matemático de forma aproximada.

Neste trabalho, implementa-se o MEC para dar solução à formulação matemática governante do modelo protótipo considerado para simular o fenômeno do cone de água.

O MEC é uma técnica computacional para a solução aproximada de problemas da mecânica do contínuo. Tais problemas podem ser descritos matematicamente através de um sistema de equações diferenciais válido em todo o domínio do problema. A esse sistema são impostas condições de contorno e/ou condições iniciais apropriadas (Alves, 2006). O problema com estas equações diferenciais governantes é que não podemos encontrar soluções analíticas, com exceção de um conjunto muito restrito de casos mais simples (geometrias e condições de contorno). Essas soluções analíticas são extremamente importantes para estudar e compreender os fenômenos físicos em consideração (Kane, 1994). Por conseguinte, as técnicas de solução numérica têm evoluído para permitir a cientistas e engenheiros obter respostas quantitativas sobre esses fenômenos físicos reais.

Entre as técnicas numéricas que têm sido aplicadas para resolver a equação potencial de fluxo em meios porosos destacam-se os métodos baseados no domínio, tais como: Diferenças Finitas, Elementos Finitos e Volumes Finitos, e os métodos baseados no contorno: Método dos Elementos de Contorno e o Método das Soluções Fundamentais (Saavedra, 2002).

No Método dos Elementos de Contorno, as equações diferenciais parciais que regem o problema são transformadas em equações integrais equivalentes. Usando as relações do cálculo dadas pelo teorema de Gauss-Green ou teorema da divergência, estas equações integrais, constituídas tanto de integrais de volume (domínio) como de superfície (contorno), são, então, transformadas em equações integrais de contorno. Esta última transformação considera certas soluções conhecidas (soluções fundamentais) da equação diferencial original para condições de contorno e geometrias muito especiais. As soluções fundamentais geralmente descrevem a resposta de um meio infinito a uma excitação pontual (Kane, 1994). O emprego dessas soluções fundamentais remove as integrais de domínio da expressão integral, produzindo assim equações integrais de contorno.

Essas equações integrais de contorno são, então, aproximadas por um conjunto similar de equações integrais discretizadas, considerando a resposta superficial desconhecida em um conjunto finito de pontos denominados nós. Entre esses nós estão os elementos de contorno, e a resposta dentro de cada elemento de contorno é dada pela resposta nodal e fórmulas de interpolação simples (Kane, 1994).

As principais vantagens do MEC são (Alves, 2006):

- Precisão dos Resultados
- Problemas infinitos ou semi-infinitos (elimina o efeito de bordas)
- Envolve somente a discretização do contorno, diminuindo a ordem do sistema final de equações e, portanto, o custo computacional.

E as principais desvantagens que podem se estabelecer do MEC são (Alves, 2006):

- Falta de programas comerciais abrangentes
- Problemas de não linearidades das equações
- Exige o cálculo de integrais singulares
- Implementação computacional mais difícil comparada com outros métodos numéricos
- Necessidade de cálculo de soluções fundamentais para cada caso
- Matrizes cheias e não simétricas

5.2 - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS DE POTENCIAL EM 2D.

O Método dos Elementos de Contorno é desenvolvido para a solução de problemas descritos pela equação potencial (Katsikadelis, 2002):

$$\nabla^2 u = f(x, y) \quad (x, y \in \Omega) \quad (5-1)$$

Esta é a equação diferencial governante da teoria do potencial, a qual para $f(x, y) = 0$ é conhecida como equação de Laplace, e para $f(x, y) \neq 0$ é conhecida como a equação de Poisson. Sua solução $u = u(x, y)$ representa o potencial produzido em um ponto (x, y) do domínio Ω devido a uma fonte $f(x, y)$ (Katsikadelis, 2002).

A equação de Poisson em duas dimensões para o fluxo monofásico de fluidos incompressíveis em meios porosos pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \nabla^2 \Phi = -\frac{q}{k} \quad (5-2)$$

Quando a fonte pontual $q = 0$, a equação de Poisson se reduz à equação de Laplace.

A solução da equação de Poisson para o problema de fluxo monofásico bidimensional de fluidos incompressíveis em meios porosos é procurada em um domínio plano fechado Ω que tem um contorno S em que a função potencial Φ ou sua derivada $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ na direção normal a S é prescrita. Isto é, a solução deve satisfazer as condições de contorno do problema prescritas sobre S (Katsikadelis, 2002).

A superfície total S do problema está composta pelo menos de duas partes denominadas S_1 e S_2 , de modo que $S_1 + S_2 = S$, como se observa na figura 5.1. Na superfície S_1 o potencial é especificado, e o componente normal da velocidade de fluxo é desconhecido. Em S_2 o componente normal da velocidade de fluxo é especificado, enquanto o potencial é desconhecido (Kane, 1994).

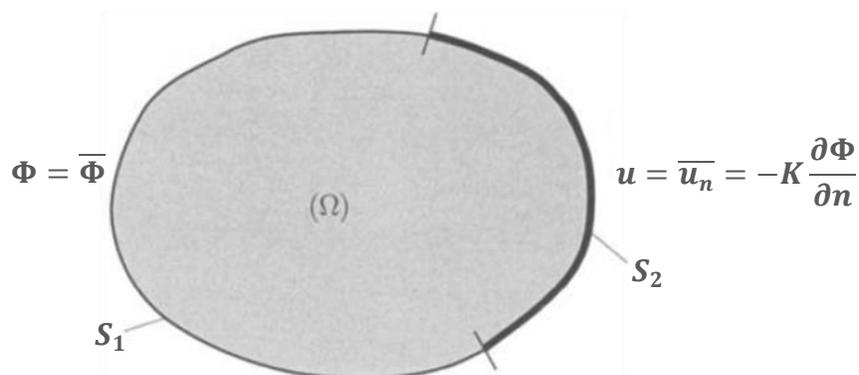


Figura 5.1 - Domínio do problema com as condições de contorno (Katsikadelis 2002, modificado).

Na terminologia matemática, as condições de contorno prescritas em S_1 são chamadas de condições essenciais ou de *Dirichlet*:

$$\Phi = \bar{\Phi}, \quad em \ S_1 \in S \quad (5-3)$$

e as condições de contorno prescritas em S_2 são denominadas condições naturais ou de *Neumann*:

$$u = \bar{u}_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -K \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} = -K \frac{\partial \Phi}{\partial n}, \quad em \ S_2 \in S \quad (5-4)$$

Na expressão dada acima, a quantidade u é denominada geralmente como a velocidade de fluxo normal e é um escalar.

5.2.1 - Solução fundamental

A solução fundamental é a base da formulação do Método dos Elementos de Contorno para a equação de Laplace, e corresponde à resposta de potencial de um meio infinito quando a fonte de geração de energia é concentrada em um ponto. Matematicamente, a solução fundamental corresponde à solução particular da equação de Poisson quando o termo não homogêneo (termo referente à fonte) é igual à função delta de Dirac. Assim, a solução fundamental deve satisfazer a seguinte equação diferencial (Katsikadelis, 2002).

$$\nabla^2 \Phi^* = \frac{-\delta(\mathbf{x} - \mathbf{d})}{K} \quad (5-5)$$

Nessa expressão, a função delta de Dirac δ se torna igual a infinito, quando o ponto \mathbf{d} onde a fonte é aplicada, denominado ponto fonte, coincide com o ponto de amostragem \mathbf{x} , chamado também de ponto campo. Uma função que satisfaz a equação diferencial (5-5) para o caso bidimensional, é dada por:

$$\Phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = -\frac{1}{2\pi K} \ln(r) \quad (5-6)$$

onde Φ^* é denominada como a solução fundamental para o potencial, e r é a distância entre o ponto campo e o ponto fonte, conforme se ilustra na figura 5.2.

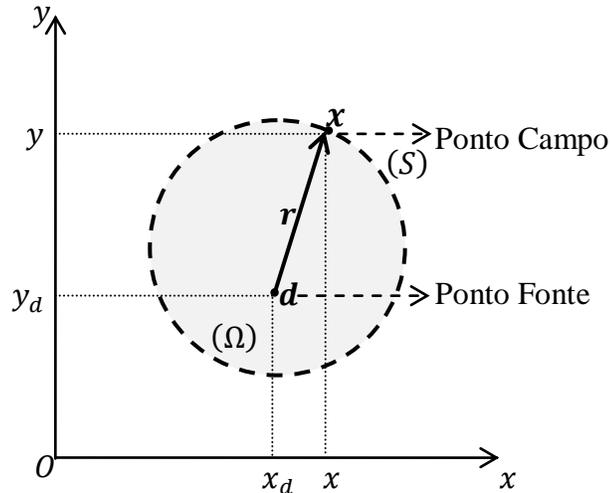


Figura 5.2 - Domínio do problema com o Ponto Fonte e o Ponto Campo (Braga, 2012).

Tem-se que a distância r entre o ponto fonte e o ponto campo está dada por:

$$r = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2} \quad (5-7)$$

onde (x_d, y_d) são as coordenadas do ponto fonte \mathbf{d} e (x, y) são as coordenadas do ponto campo \mathbf{x} .

Conhecida a solução fundamental, a velocidade de fluxo normal que corresponde à distribuição de potencial fundamental pode ser determinada usando a lei de Darcy dada na equação (4-7):

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -K \nabla \Phi^* \cdot \mathbf{n} = -K \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \quad (5-8)$$

Substituindo na equação (5-8) a expressão para Φ^* dada pela equação (5-6), segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{d}) &= -K \frac{\partial}{\partial n} \left(-\frac{1}{2\pi K} \ln(r) \right) \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{d}) &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\ln(r)) n_x + \frac{\partial}{\partial y} (\ln(r)) n_y \right] \end{aligned} \quad (5-9)$$

Após manipulações algébricas respectivas, tem-se que a solução fundamental para a velocidade de fluxo normal é dada por:

$$u^*(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2\pi r^2} [(x - x_d)n_x + (y - y_d)n_y] = \frac{1}{2\pi r^2} [r_x n_x + r_y n_y] \quad (5-10)$$

O desenvolvimento analítico completo para obter a solução fundamental em duas dimensões é apresentado no APÊNDICE B.

5.2.2 - Equação integral de contorno

Para encontrar a solução da equação de Poisson em duas dimensões:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{q}{K} \quad \text{em } \Omega \quad (5-11)$$

Com as condições de contorno prescritas:

$$\begin{aligned} \Phi &= \bar{\Phi} \quad \text{em } S_1 \\ u &= \bar{u}_n = -K \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad \text{em } S_2 \end{aligned} \quad (5-12)$$

Aplica-se a segunda identidade de Green dada na equação (A1-26) (ver apêndice A), considerando $u = \Phi$ a resposta de potencial do problema de fluxo monofásico bidimensional de fluidos incompressíveis em meios porosos, e $v = \Phi^*$ a solução fundamental. Dessa forma, obtém-se (Kane, 1994):

$$\int_{\Omega} \Phi^* \nabla^2 \Phi \, d\Omega - \int_{\Omega} \Phi \nabla^2 \Phi^* \, d\Omega = \int_S \Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, dS - \int_S \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \, dS \quad (5-13)$$

Substituindo na equação integral anterior as relações dadas nas equações (5-11) e (5-5) para o laplaciano de Φ e o laplaciano de Φ^* respectivamente, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi^* \left(-\frac{q}{K}\right) \, d\Omega - \int_{\Omega} \Phi \left(-\frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{d})}{K}\right) \, d\Omega &= \int_S \Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, dS - \int_S \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \, dS \\ \Phi(\mathbf{d}) &= \int_S \Phi^* \left(K \frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) \, dS - \int_S \Phi \left(K \frac{\partial \Phi^*}{\partial n}\right) \, dS + \int_{\Omega} \Phi^* q \, d\Omega \end{aligned} \quad (5-14)$$

Usando a lei de Darcy, as expressões do lado direito da equação dada acima podem ser escritas em termos da velocidade de fluxo normal correspondente:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{d}) &= \int_S \Phi^*(-u)dS - \int_S \Phi(-u^*)dS + \int_{\Omega} \Phi^* q d\Omega \\ \Phi(\mathbf{d}) &= \int_S \Phi u^* dS - \int_S u \Phi^* dS + \int_{\Omega} \Phi^* q d\Omega\end{aligned}\tag{5-15}$$

Considerando que a fonte concentrada q pode ser expressa por:

$$q = q_0 \delta(x_0, y_0)\tag{5-16}$$

Onde q_0 é a intensidade da fonte e (x_0, y_0) são as coordenadas de localização da fonte concentrada, a equação integral dada em (5-15) pode ser escrita como:

$$\Phi(\mathbf{d}) = \int_S \Phi u^* dS - \int_S u \Phi^* dS + \int_{\Omega} \Phi^* q_0 \delta(x_0, y_0) d\Omega\tag{5-17}$$

Pela propriedade da função delta de Dirac, tem-se:

$$\Phi(\mathbf{d}) = \int_S \Phi u^* dS - \int_S u \Phi^* dS + q_0 \Phi^*(x_d - x_0, y_d - y_0)\tag{5-18}$$

Assim, a relação dada em (5-18) é conhecida como equação integral de contorno, e representa a solução da equação de Poisson para o potencial $\Phi(\mathbf{d})$ quando o ponto fonte \mathbf{d} de coordenadas (x_d, y_d) encontra-se no interior do domínio Ω . Na equação integral de contorno, as quantidades Φ e u são as condições de contorno prescritas em um ponto \mathbf{x} com coordenadas (x, y) sobre S , e as quantidades Φ^* e u^* são as soluções fundamentais para o potencial e a velocidade de fluxo normal respectivamente (Katsikadelis, 2002).

A equação (5-18) é válida para qualquer ponto dentro do domínio Ω . Em elementos de contorno é geralmente preferível por razões computacionais aplicar a equação (5-18) no contorno do problema e, portanto, precisa-se achar o que acontece quando o ponto \mathbf{d} está sobre S (Braga, 2012). Generalizando, a equação integral de contorno pode ser escrita como:

$$c\Phi(x_d, y_d) = \int_S \Phi u^* dS - \int_S u \Phi^* dS + q_0 \Phi^*(x_d - x_0, y_d - y_0)\tag{5-19}$$

Onde c é um coeficiente que depende da posição do ponto fonte \mathbf{d} e é definido como (Braga, 2012):

$$c = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{se } (x_d, y_d) \in \text{ao dominio} \\ \frac{\theta_{int}}{2\pi}, & \text{se } (x_d, y_d) \in \text{ao contorno} \\ 0, & \text{se } (x_d, y_d) \notin \text{ao dominio ou ao contorno} \end{array} \right\} \quad (5-20)$$

Quando o ponto fonte \mathbf{d} encontra-se em um contorno suave, tem-se (Braga, 2012):

$$c = \frac{\theta_{int}}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \quad (5-21)$$

Onde o termo θ_{int} é conhecido como ângulo interno do contorno.

Tem-se então, que a expressão dada pela equação (5-19) é a representação integral da solução da equação de Poisson em um ponto fonte \mathbf{d} .

5.2.3 - Discretização da equação integral de contorno

Uma vez obtida a equação integral de contorno, o próximo passo é a discretização desta equação de forma que as integrações globais de contorno dadas na equação (5-19) podem ser realizadas sobre porções S_j do contorno global e estas contribuições podem ser posteriormente somadas. Assim, o contorno pode ser discretizado:

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n = \sum_{j=1}^n S_j \quad (5-22)$$

A essência do MEC é a discretização do contorno em um número finito de segmentos, não necessariamente iguais, que são chamados Elementos de Contorno. Duas aproximações são feitas ao longo de cada um desses elementos. Uma é sobre a geometria do contorno, enquanto a outra tem a ver com a variação da quantidade desconhecida sobre o elemento (Katsikadelis, 2002).

Na discretização por elementos lineares contínuos, a geometria do problema é aproximada por um polinômio de 1º grau, necessitando de dois nós em cada elemento, um em cada extremidade do elemento, conforme é ilustrado na figura 5.3. O potencial e a velocidade de

fluxo também são aproximadas por um polinômio de 1° grau. A formulação é isoparamétrica, ou seja, as mesmas funções de forma usadas para interpolar a geometria são também usadas para interpolar as variáveis físicas (potencial e velocidade de fluxo).

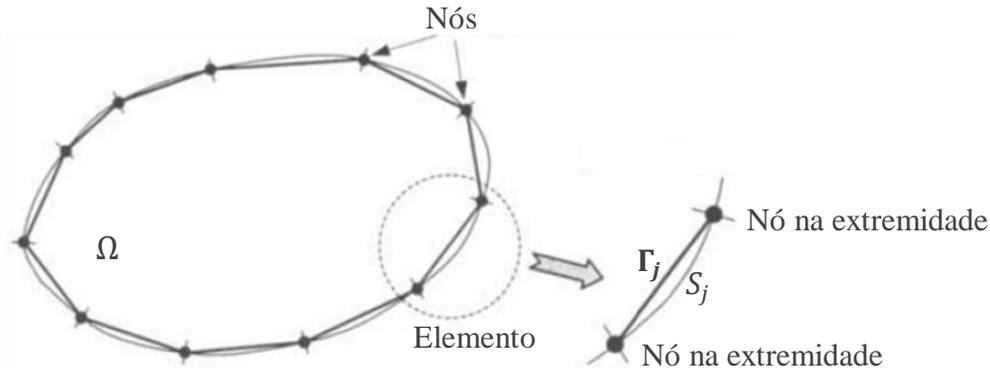


Figura 5.3 - Elementos de contorno lineares contínuos (Katsikadelis, 2002).

Neste caso, a equação integral dada por:

$$c\Phi(\mathbf{d}) = \int_S \Phi u^* dS - \int_S u \Phi^* dS + q_0 \Phi^*(x_d - x_0, y_d - y_0) \quad (5-23)$$

É discretizada em um número de elementos NE , utilizando elementos lineares contínuos, considerando como ponto fonte o nó i de coordenadas (x_i, y_i) e como ponto campo o nó j de coordenadas (x_j, y_j) . Dessa forma, tem-se:

$$c\Phi_i = \sum_{j=1}^{NE} \left[\int_{\Gamma_j} \Phi_j u_{ij}^* d\Gamma \right] - \sum_{j=1}^{NE} \left[\int_{\Gamma_j} u_j \Phi_{ij}^* d\Gamma \right] + q_0 \Phi^*(x_i - x_0, y_i - y_0) \quad (5-24)$$

Onde o contorno Γ_j é a aproximação do contorno S_j . Considera-se que Φ e u têm uma variação linear ao longo do elemento j , para o caso em que os nós são considerados nas extremidades do elemento, ou seja,

$$\begin{aligned} \Phi &= N_1 \Phi_1 + N_2 \Phi_2 = [N_1 \ N_2] \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} \\ u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 = [N_1 \ N_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-25)$$

Onde Φ_1 é o potencial no nó local 1 do elemento j , Φ_2 é o potencial no nó local 2 do elemento j , u_1 é a velocidade de fluxo no nó local 1, u_2 é a velocidade de fluxo no nó local 2, e N_1 e N_2 são as funções de forma lineares contínuas também chamadas de funções de interpolação lineares. As funções N_1 e N_2 são dadas por:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}(1 - \zeta) \\ N_2 &= \frac{1}{2}(1 + \zeta) \end{aligned} \tag{5-26}$$

Onde ζ é uma coordenada adimensional variando entre $(-1, 1)$.

Substituindo as relações lineares dadas para Φ e u em (5-25), a equação integral de contorno discretizada dada em (5-24) é então escrita:

$$\begin{aligned} c\Phi_i &= \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} [N_1 \ N_2] \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}_j u_{ij}^* d\Gamma \right\} - \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} [N_1 \ N_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_j \Phi_{ij}^* d\Gamma \right\} \dots \\ &\quad + q_0 \Phi^*(x_i - x_0, y_i - y_0) \end{aligned} \tag{5-27}$$

Como Φ_1 , Φ_2 , u_1 e u_2 são valores nodais, segue:

$$\begin{aligned} c\Phi_i &= \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} [N_1 \ N_2] u_{ij}^* d\Gamma \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}_j \right\} - \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} [N_1 \ N_2] \Phi_{ij}^* d\Gamma \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_j \right\} \dots \\ &\quad + q_0 \Phi^*(x_i - x_0, y_i - y_0) \end{aligned} \tag{5-28}$$

Que pode ser escrito da seguinte forma:

$$c\Phi_i = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ [h_1 \ h_2] \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}_j \right\} - \sum_{j=1}^{NE} \left\{ [g_1 \ g_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_j \right\} + q_0 \Phi^*(x_i - x_0, y_i - y_0) \tag{5-29}$$

onde,

$$h_1 = \int_{\Gamma_j} N_1 u_{ij}^* d\Gamma, \quad h_2 = \int_{\Gamma_j} N_2 u_{ij}^* d\Gamma$$

$$g_1 = \int_{\Gamma_j} N_1 \Phi_{ij}^* d\Gamma, \quad g_2 = \int_{\Gamma_j} N_2 \Phi_{ij}^* d\Gamma \quad (5-30)$$

Quando o contorno do domínio é discretizado utilizando elementos de contorno lineares contínuos, o nó 2 do elemento j é o mesmo ponto que o nó 1 do elemento $j + 1$, conforme se observa na figura 5.4.

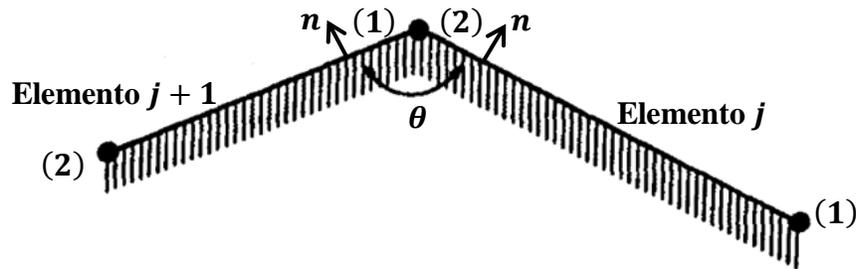


Figura 5.4 - Interseção de dois elementos lineares (Brebbia e Dominguez, 1992).

Como o potencial é único em qualquer ponto do contorno, ou seja, o potencial é contínuo no nó j , Φ_2 do elemento j e Φ_1 do elemento $j + 1$ são iguais. No entanto, este argumento não pode ser aplicado como uma regra geral para a velocidade de fluxo, pois existem pontos do contorno para os quais a velocidade não tem um valor único. Isto acontece em pontos onde o vetor unitário normal ao contorno muda (pontos de canto). Assim, a velocidade de fluxo normal u_j pode apresentar descontinuidades, ou seja, a velocidade u_j^a , antes do nó j pode ser diferente da velocidade u_j^d , depois do nó j (Braga, 2012). Para ter em conta a possibilidade de que a velocidade de fluxo no nó 2 de um elemento pode ser diferente da velocidade de fluxo no nó 1 do próximo elemento, as velocidades podem ser organizadas em um vetor de tamanho $2NE$. Logo, a equação integral de contorno para o nó i é então escrita como (Brebbia e Dominguez, 1992):

$$-c\Phi_i + [\widehat{H}_{i1} \ \widehat{H}_{i2} \ \dots \ \widehat{H}_{iNE}] \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_{NE} \end{Bmatrix} = [G_{i1} \ G_{i2} \ \dots \ G_{i2NE}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{2NE} \end{Bmatrix} + q_0 \Phi^*(x_i - x_0, y_i - y_0) \quad (5-31)$$

onde,

$$\widehat{H}_{ij} = h_1^j + h_2^{j-1} \quad (5-32)$$

Escrevendo as matrizes H e G globais, segue:

$$\sum_{j=1}^{NE} H_{ij} \Phi_j = \sum_{j=1}^{2NE} G_{ij} u_j + q_0 \begin{Bmatrix} \Phi^*(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \\ \Phi^*(x_2 - x_0, y_2 - y_0) \\ \vdots \\ \Phi^*(x_{NE} - x_0, y_{NE} - y_0) \end{Bmatrix} \quad (5-33)$$

onde o termo H_{ij} é dado por:

$$H_{ij} = \begin{cases} \widehat{H}_{ij}, & \text{se } i \neq j \\ -c + \widehat{H}_{ij}, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (5-34)$$

Tem-se que o conjunto total em forma de matriz é dado por:

$$\mathbf{H}\Phi = \mathbf{G}u + \mathbf{g} \quad (5-35)$$

Onde as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} são conhecidas como matrizes de influência do método. Assim, obtém-se um sistema de equações algébricas cuja solução fornece os valores de Φ e u sobre o contorno.

5.2.3.1 - Integração analítica das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G}

Considerando as relações dadas em (5-30), a integração analítica dos termos g_1 e g_2 da matriz \mathbf{G} , e dos termos h_1 e h_2 da matriz \mathbf{H} , pode ser feita considerando um sistema de coordenadas local $x'y'$ com origem no ponto fonte \mathbf{d} e com o eixo y' paralelo ao elemento j (Banerjee, 1994). Na figura 5.5 se apresenta o sistema de coordenadas local usado para o cálculo das integrais analíticas.

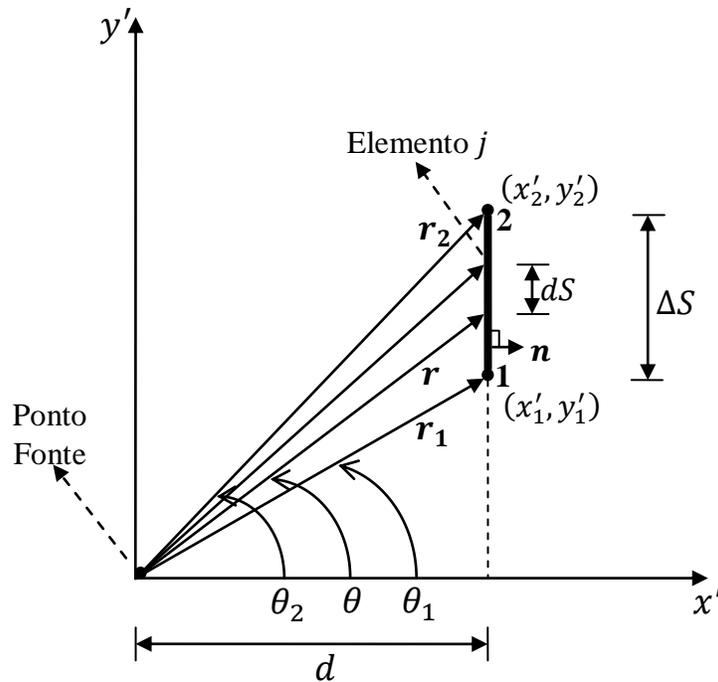


Figura 5.5 - Sistema de coordenadas local usado para o cálculo das integrais analíticas (Braga, 2012)

A partir da figura 5.5, pode-se deduzir as seguintes relações:

$$x' = r \cos \theta \quad y' = r \sin \theta$$

$$y'_1 = r_1 \sin \theta_1 \quad y'_2 = r_2 \sin \theta_2$$

(5-36)

O termo d é dado pela projeção do vetor \mathbf{r} na direção do vetor normal unitário \mathbf{n} :

$$d = \text{proj}(\mathbf{r})_{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = r \cos \theta \quad (5-37)$$

Logo, é possível obter as seguintes relações:

$$r = d \sec \theta \quad (5-38)$$

$$dS = dy' = d \sec^2 \theta d\theta \quad (5-39)$$

O comprimento al do elemento j é dado por:

$$al = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} = y'_2 - y'_1 \quad (5-40)$$

As funções de forma ou de interpolação linear N_1 e N_2 são definidas como:

$$N_1 = \frac{y'_2 - y'}{y'_2 - y'_1} = \frac{r_2 \sin \theta_2 - r \sin \theta}{al} \quad (5-41)$$

$$N_2 = \frac{y' - y'_1}{y'_2 - y'_1} = \frac{r \sin \theta - r_1 \sin \theta_1}{al} \quad (5-42)$$

Com as relações matemáticas definidas acima, podem-se tratar analiticamente as integrais para o cálculo dos termos g_1 , g_2 , h_1 e h_2 . A continuação faz-se o desenvolvimento analítico da integral para g_1 .

$$g_1 = \int_{\Gamma_j} N_1 \Phi_{ij}^* d\Gamma = \int_{\Delta S} \left(\frac{r_2 \sin \theta_2 - r \sin \theta}{al} \right) \left(-\frac{1}{2\pi K} \ln r \right) dS \quad (5-43)$$

Substituindo as relações (5-37), (5-38) e (5-39) na equação (5-43), tem-se a seguinte expressão:

$$g_1 = \left(-\frac{1}{2\pi kal} \right) \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} r_2 \sin \theta_2 \ln(d \sec \theta) d \sec^2 \theta d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} d \sec \theta \sin \theta \ln(d \sec \theta) d \sec^2 \theta d\theta \right]$$

$$g_1 = \left(-\frac{1}{2\pi k a l} \right) \left[dr_2 \sin \theta_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta - d^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan \theta \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta \right] \quad (5-44)$$

Resolvendo isoladamente as integrais de g_1 , tem-se:

$$(i) dr_2 \sin \theta_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta = dr_2 \sin \theta_2 [\tan \theta (\ln|d \sec \theta| - 1) + \theta] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$(i) dr_2 \sin \theta_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta = r_2 \sin \theta_2 [d \tan \theta (\ln|d \sec \theta| - 1) + \theta d] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

Substituindo na expressão anterior as seguintes relações:

$$ds = |d| \quad (5-45)$$

$$d \tan \theta = r \sin \theta \quad (5-46)$$

Obtém-se:

$$(i) dr_2 \sin \theta_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta = r_2 \sin \theta_2 [r \sin \theta \ln|d \sec \theta| - r \sin \theta + \theta d] \Big|_{\theta_1, r_1}^{\theta_2, r_2}$$

$$\begin{aligned} (i) dr_2 \sin \theta_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta \\ = r_2 \sin \theta_2 \ln|d \sec \theta_2| - r_2 \sin \theta_2 + \theta_2 d - r_1 \sin \theta_1 \ln|d \sec \theta_1| + r_1 \sin \theta_1 \\ - \theta_1 d \end{aligned}$$

Para expressar o resultado da integral (i) de g_1 de uma forma mais condensada, obtêm-se as projeções dos vetores \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 na direção tangencial, conforme se ilustra na figura 5.6.

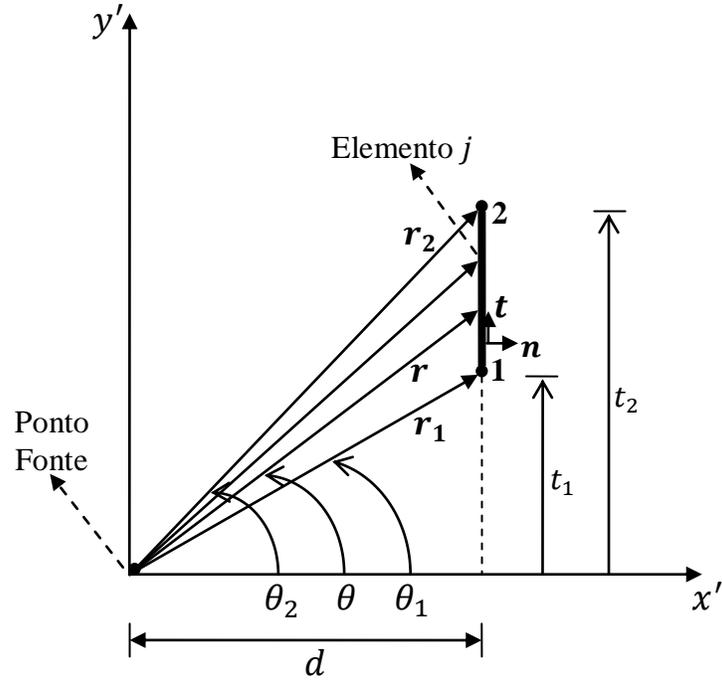


Figura 5.6 - Sistema de coordenadas local. Projeção de \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 na direção tangencial.

Segundo a figura 5.6, tem-se que t_1 é a projeção do vetor \vec{r}_1 na direção tangencial,

$$t_1 = \text{proj}(\mathbf{r}_1)_t = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{t}}{|\mathbf{t}|} = r_1 \cos(90 - \theta_1) = r_1 \sin \theta_1 \quad (5-47)$$

Onde d é a projeção do vetor \mathbf{r}_1 na direção normal,

$$d = \text{proj}(\mathbf{r}_1)_n = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = r_1 \cos \theta_1 \quad (5-48)$$

Dai, tem-se:

$$r_1 = d \sec \theta_1 \quad (5-49)$$

O vetor \mathbf{t}_2 é a projeção do vetor \mathbf{r}_2 na direção tangencial,

$$t_2 = \text{proj}(\mathbf{r}_2)_t = \frac{\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{t}}{|\mathbf{t}|} = r_2 \cos(90 - \theta_2) = r_2 \sin \theta_2 \quad (5-50)$$

d é a projeção do vetor \mathbf{r}_2 na direção normal,

$$d = \text{proj}(\mathbf{r}_2)_n = \frac{\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = r_2 \cos \theta_2 \quad (5-51)$$

Daí, tem-se:

$$r_2 = d \sec \theta_2 \quad (5-52)$$

Substituindo as relações dadas desde (5-47) até (5-52) na integral (i) de g_1 , tem-se que:

$$(i) \, dr_2 \sin \theta_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta \, d\theta = t_2 [t_2 \ln|r_2| - t_2 + \theta_2 d - t_1 \ln|r_1| + t_1 - \theta_1 d]$$

fazendo:

$$t_2 - t_1 = al \quad (5-53)$$

$$d\theta = \theta_2 - \theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{d \cdot al}{d^2 + t_1 t_2} \right) \quad (5-54)$$

e substituindo as igualdades dadas em (5-53) e (5-54), obtém-se o seguinte resultado:

$$(i) \, dr_2 \sin \theta_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta \, d\theta = t_2 [d\theta \cdot ds - al - t_1 \ln|r_1| + t_2 \ln|r_2|]$$

A segunda integral de g_1 é dada por

$$(ii) \, d^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan \theta \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta \, d\theta = d^2 \left[\frac{(-1 + 2 \ln|d \sec \theta|) \sec^2 \theta}{4} \right] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$(ii) \, d^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan \theta \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{4} [-d^2 \sec^2 \theta + 2d^2 \sec^2 \theta \ln|d \sec \theta|] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

onde:

$$r^2 = d^2 \sec^2 \theta \quad (5-55)$$

Logo,

$$(ii) d^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan \theta \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} [-r^2 + 2r^2 \ln|r|] \Big|_{r_1}^{r_2}$$

Assim, o resultado da integral (ii) de g_1 é dado por:

$$(ii) d^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan \theta \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} [-r_2^2 + 2r_2^2 \ln|r_2| + r_1^2 - 2r_1^2 \ln|r_1|]$$

Substituindo os resultados das integrais (i) e (ii) para g_1 em (5-54), tem-se:

$$g_1 = \left(-\frac{1}{2\pi k a l} \right) \left[t_2 \{ d\theta \cdot ds - a l - t_1 \ln|r_1| + t_2 \ln|r_2| \} - \frac{1}{4} \{ 2r_2^2 \ln|r_2| - 2r_1^2 \ln|r_1| - r_2^2 + r_1^2 \} \right]$$

$$g_1 = \left(\frac{1}{8\pi k a l} \right) [4t_2 \{ -d\theta \cdot ds + a l + t_1 \ln|r_1| - t_2 \ln|r_2| \} + 2r_2^2 \ln|r_2| - 2r_1^2 \ln|r_1| + r_1^2 - r_2^2] \quad (5-56)$$

Da mesma forma, faz-se o desenvolvimento analítico da integral para g_2 .

$$g_2 = \int_{\Gamma_j} N_2 \Phi_{ij}^* d\Gamma = \int_{\Delta S} \left(\frac{r \sin \theta - r_1 \sin \theta_1}{a l} \right) \left(-\frac{1}{2\pi k} \ln r \right) dS \quad (5-57)$$

Substituindo as relações (5-47), (5-48) e (5-49) na equação (5-57), tem-se a seguinte expressão:

$$g_2 = \left(-\frac{1}{2\pi k a l} \right) \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} r \sin \theta \ln(d \sec \theta) d \sec^2 \theta d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_1 \sin \theta_1 \ln(d \sec \theta) d \sec^2 \theta d\theta \right] \quad (5-58)$$

Substituindo a relação dada em (5-46) na equação anterior, obtém-se:

$$g_2 = \left(-\frac{1}{2\pi k a l} \right) \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} d \tan \theta \ln(d \sec \theta) d \sec^2 \theta d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_1 \sin \theta_1 \ln(d \sec \theta) d \sec^2 \theta d\theta \right]$$

$$g_2 = \left(-\frac{1}{2\pi kal}\right) \left[d^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan \theta \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta - dr_1 \sin \theta_1 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln(d \sec \theta) d\sec^2 \theta d\theta \right] \quad (5-59)$$

Substituindo os resultados das integrais (i) e (ii) calculadas para g_1 , na equação (5-59), obtém-se o seguinte resultado para g_2 .

$$g_2 = \left(-\frac{1}{2\pi kal}\right) \left[\frac{1}{4} \{2r_2^2 \ln|r_2| - 2r_1^2 \ln|r_1| - r_2^2 + r_1^2\} - t_1 \{d\theta \cdot ds - al - t_1 \ln|r_1| + t_2 \ln|r_2|\} \right]$$

$$g_2 = \left(\frac{1}{8\pi kal}\right) [4t_1 \{d\theta \cdot ds - al - t_1 \ln|r_1| + t_2 \ln|r_2|\} + 2r_1^2 \ln|r_1| - 2r_2^2 \ln|r_2| + r_2^2 - r_1^2] \quad (5-60)$$

A seguir, faz-se o cálculo analítico dos termos h_1 e h_2 da matriz \mathbf{H} . Tem-se que h_1 é dado por:

$$h_1 = \int_{\Gamma_j} N_1 u_{ij}^* d\Gamma = \int_{\Delta S} \left[\frac{r_2 \sin \theta_2 - r \sin \theta}{al} \right] \left[\frac{r_x n_x + r_y n_y}{2\pi r^2} \right] dS \quad (5-61)$$

Onde o produto escalar do vetor \mathbf{r} e o vetor normal unitário \mathbf{n} é dado por:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = r_x n_x + r_y n_y = r \cos \theta = d \quad (5-62)$$

Substituindo os resultados dados em (5-62) e em (5-39), na equação (5-61) obtém-se a seguinte expressão:

$$h_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\frac{r_2 \sin \theta_2 - r \sin \theta}{al} \right] \left[\frac{d^2 \sec^2 \theta}{2\pi d^2 \sec^2 \theta} \right] d\theta \quad (5-63)$$

$$h_1 = \left(\frac{1}{2\pi al}\right) \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} r_2 \sin \theta_2 d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \sin \theta d\theta \right] \quad (5-64)$$

Substituindo o resultado dado em (5-46), tem-se que:

$$h_1 = \left(\frac{1}{2\pi al}\right) \left[r_2 \sin \theta_2 (\theta_2 - \theta_1) - \int_{\theta_1}^{\theta_2} d \tan \theta d\theta \right]$$

$$h_1 = \left(\frac{1}{2\pi al}\right) \left[r_2 \sin \theta_2 (\theta_2 - \theta_1) + d \ln|\cos \theta| \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \right]$$

$$h_1 = \left(\frac{1}{2\pi al}\right) [r_2 \sin \theta_2 (\theta_2 - \theta_1) + d(\ln|\cos \theta_2| - \ln|\cos \theta_1|)] \quad (5-65)$$

Substituindo as relações dadas em (5-48), (5-50) e (5-51), obtém-se o seguinte resultado para h_1 :

$$h_1 = \left(\frac{1}{2\pi al}\right) \left[t_2 \cdot d\theta + d \left(\ln \left| \frac{d}{r_2} \right| - \ln \left| \frac{d}{r_1} \right| \right) \right]$$

$$h_1 = \left(\frac{1}{2\pi al}\right) \left[t_2 \cdot d\theta + d \ln \left| \frac{r_1}{r_2} \right| \right] \quad (5-66)$$

Repetindo o mesmo procedimento para o cálculo de h_2 , tem-se que:

$$h_2 = \int_{\Gamma_j} N_2 u_{ij}^* d\Gamma = \int_{\Delta S} \left[\frac{r \sin \theta - r_1 \sin \theta_1}{al} \right] \left[\frac{r_x n_x + r_y n_y}{2\pi r^2} \right] dS$$

$$h_2 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\frac{r \sin \theta - r_1 \sin \theta_1}{al} \right] \left[\frac{d^2 \sec^2 \theta}{2\pi d^2 \sec^2 \theta} \right] d\theta$$

$$h_2 = \left(\frac{1}{2\pi al}\right) \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} r \sin \theta d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_1 \sin \theta_1 d\theta \right] \quad (5-67)$$

Substituindo o resultado dado em (5-46), segue:

$$h_2 = \left(\frac{1}{2\pi al}\right) \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} d \tan \theta d\theta - r_1 \sin \theta_1 (\theta_2 - \theta_1) \right]$$

$$h_2 = \left(\frac{1}{2\pi al}\right) \left[-d \ln|\cos \theta| \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} - r_1 \sin \theta_1 (\theta_2 - \theta_1) \right]$$

$$h_2 = \left(\frac{1}{2\pi al}\right) [-d(\ln|\cos \theta_2| - \ln|\cos \theta_1|) - r_1 \sin \theta_1 (\theta_2 - \theta_1)] \quad (5-68)$$

Substituindo as relações dadas em (5-47), (5-48) e (5-51), obtém-se o seguinte resultado para h_2 :

$$h_2 = \left(\frac{1}{2\pi al}\right) \left[d \left(\ln \left| \frac{d}{r_1} \right| - \ln \left| \frac{d}{r_2} \right| \right) - r_1 \sin \theta_1 (\theta_2 - \theta_1) \right]$$

$$h_2 = \left(\frac{1}{2\pi a l} \right) \left[d \ln \left| \frac{r_2}{r_1} \right| - t_1 \cdot d\theta \right] \quad (5-69)$$

Dessa forma se desenvolve o cálculo analítico dos termos das matrizes **H** e **G** ao longo do elemento de contorno j , e, portanto, tem-se uma diminuição no custo computacional para dar solução à equação integral de contorno do problema considerado.

6 - SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO CONE DE ÁGUA

Neste capítulo é desenvolvido o esquema iterativo implementado no modelo computacional para simular numericamente o comportamento do cone de água no modelo protótipo considerado nesta dissertação.

A implementação computacional do MEC precisa da descrição geométrica do problema e da malha de discretização do contorno. Dessa forma, o modelo computacional é baseado em rotinas que realizam a integração dos termos h_1 , h_2 , g_1 e g_2 , para construir as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} , e a resolver o sistema de equações algébricas dado em (5-35) a cada passo de tempo, para encontrar as quantidades desconhecidas (potencial e velocidade de fluxo normal) no contorno. Na figura 6.1 é mostrado o plano físico de referência para a simulação do modelo protótipo.

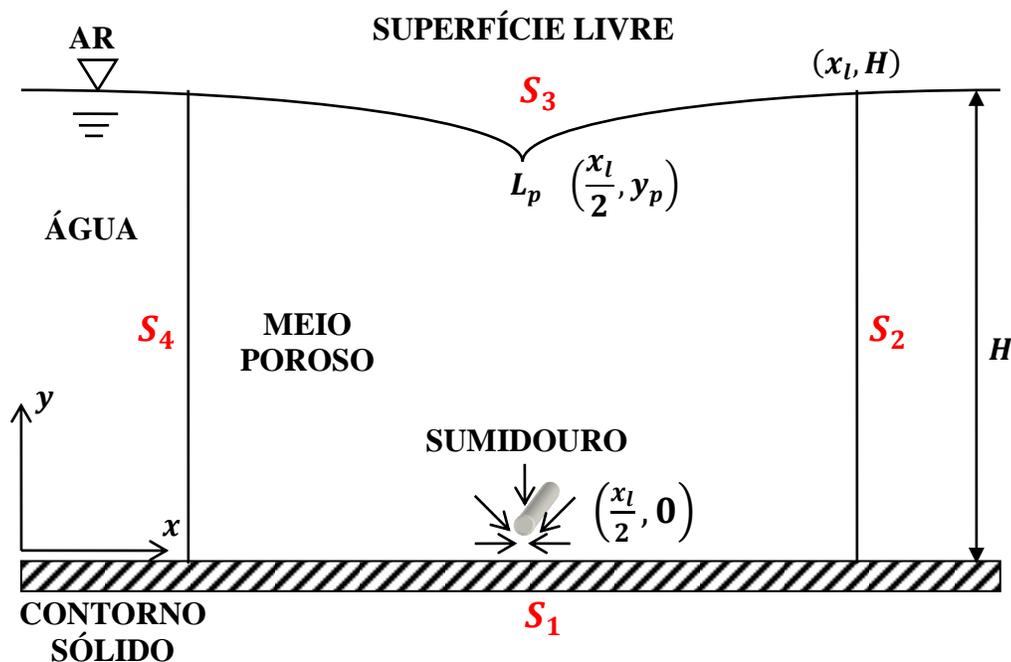


Figura 6.1 - Plano físico de referência de simulação do modelo protótipo (Zhang et al. 1999, modificado).

A malha de discretização do contorno do reservatório utilizada para resolver a equação integral de contorno dada em (5-35) é ilustrada na figura 6.2.

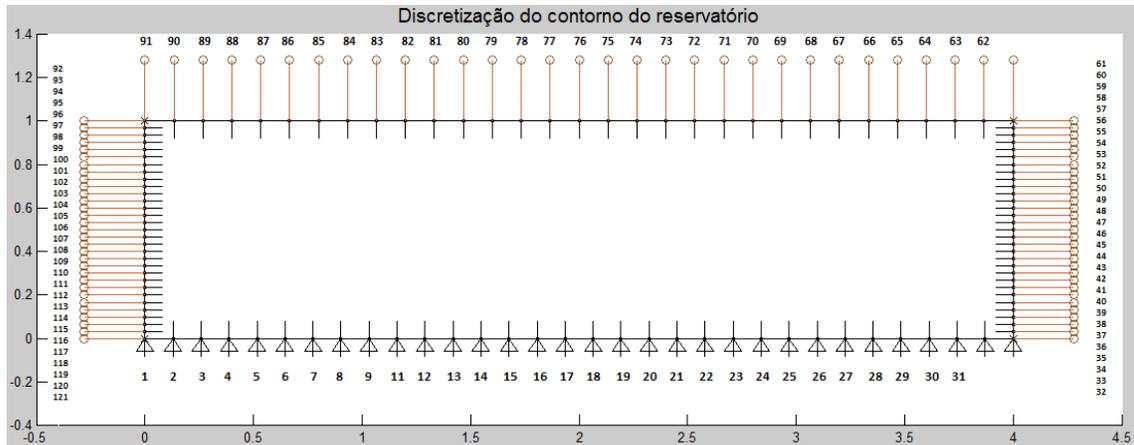


Figura 6.2 - Malha de discretização do contorno do reservatório.

O reservatório do modelo protótipo considerado tem uma profundidade de $H = 1$, uma largura de $W = 4$ e é utilizada uma malha de discretização de 121 elementos. A discretização do contorno do reservatório é feita da seguinte maneira:

- Contorno S_1 . Corresponde com o limite impermeável do reservatório, e está discretizado pelos nós numerados desde o nó 1 até o nó 31.
- Contorno S_2 . Corresponde com a lateral direita do reservatório (permeável), e está discretizado pelos nós numerados desde o nó 32 até o nó 61.
- Contorno S_3 . Corresponde com a superfície livre (contorno móvel), e está discretizado pelos nós numerados desde o nó 62 até o nó 91.
- Contorno S_4 . Corresponde com a lateral esquerda do reservatório (permeável), está discretizada pelos nós numerados desde o nó 92 até o nó 121.

6.1 - CONDIÇÕES INICIAIS

Como o modelo protótipo considera um reservatório com uma condição de contorno de superfície livre, quer dizer então, que a solução do problema é dependente do tempo, e, portanto, é necessário conhecer o estado do sistema no instante de tempo inicial. A condição inicial é especificada para a superfície livre e é expressa em termos do potencial de fluxo, conforme visto na seção 4.5. Assim, a condição inicial é dada por:

$$\Phi(t_0 = 0) = \Phi_0 = y_0 = 1 \quad \text{em } S_3 \in S \quad (6-1)$$

6.2 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

Conforme visto nas seções 4.6 e 4.7, são definidas as condições de contorno do modelo protótipo considerado para simular o comportamento do cone de água. Os respectivos valores das condições de contorno são apresentados na tabela 6.1.

Tabela 6.1 - Condições de contorno.

CONTORNO	POTENCIAL	FLUXO
S_1	Desconhecido	0
S_2	1	Desconhecido
S_3	$\Phi = \eta(x, t)$	Desconhecido
S_4	1	Desconhecido

Tem-se então, que os contornos S_2 e S_4 são permeáveis, e, portanto, o potencial é prescrito. O contorno S_1 é o limite de rocha impermeável do reservatório e o fluxo é nulo. O contorno S_3 é a superfície livre do reservatório, e, portanto, aplicam-se a condições de contorno para uma fronteira móvel, para o potencial e a velocidade vertical, conforme visto em (4-49) e (4-50) respectivamente.

6.3 - ESQUEMA ITERATIVO PARA O CÁLCULO DA SOLUÇÃO NUMÉRICA

A solução numérica do sistema de equações algébricas dado em (5-35):

$$H\Phi = Gu + g$$

É encontrada dentro de um esquema iterativo, devido à condição de contorno cinemática da superfície livre. Durante a extração do fluido do reservatório, a superfície livre experimenta constantes mudanças de nível. Portanto, o problema não pode ser resolvido sem conhecer-se a posição da superfície livre. Mas também, a posição da mesma é uma parte da solução do problema. Dessa forma, o cálculo da solução é feito mediante aproximações iterativas,

aplicando as condições de contorno e a posição inicial da superfície livre para resolver a equação (5-35), e depois calcular a nova posição da superfície livre com base nos novos valores calculados no contorno.

Como a formulação matemática do modelo protótipo considerado para simular numericamente o comportamento do cone de água é governada por uma equação diferencial parcial não linear dependente do tempo, um problema importante na simulação é a técnica de passo de tempo utilizada para resolver o sistema de equações algébricas obtido com o MEC dado em (5.35). Assim, o propósito da técnica de passo de tempo é alcançar uma precisão predeterminada na solução da equação diferencial ordinária (ODE), mantendo a estabilidade e um mínimo de esforço computacional. No modelo computacional desenvolvido para simular o cone de água, foi implementado o Método de Runge-Kuta explícito com passo adaptativo a través do algoritmo ODE23 do *Matlab*®.

O esquema iterativo para determinar a solução numérica do problema observa-se na figura 6.3, e está constituído pelos seguintes passos:

- Define-se a geometria do reservatório e constrói-se a malha de discretização do contorno.
- Assume-se uma posição inicial y_0 para os nós de discretização espacial da superfície livre e impõem-se as condições de contorno nos elementos de discretização da malha de contorno do reservatório.
- Atualiza-se a condição de contorno de potencial (posição) de cada nó de discretização da superfície livre, já que é um contorno móvel.
- Calculam-se os termos das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} , do sistema de equações algébricas dado em (5-35).
- Aplicam-se as condições de contorno para solucionar o sistema de equações algébricas e determinar as quantidades desconhecidas (potencial e velocidade de fluxo normal) no contorno do reservatório.
- Com os valores de potencial e velocidade de fluxo normal determinados na malha de discretização do contorno, calcula-se a velocidade de deslocamento na direção vertical

$\frac{\partial \eta}{\partial t}$ para cada nó da superfície livre segundo a equação (4-49). Dessa forma, obtém-se o potencial na superfície livre no tempo $(k + 1)\Delta t$ em termos dos valores no tempo $k\Delta t$, onde Δt define o passo de tempo.

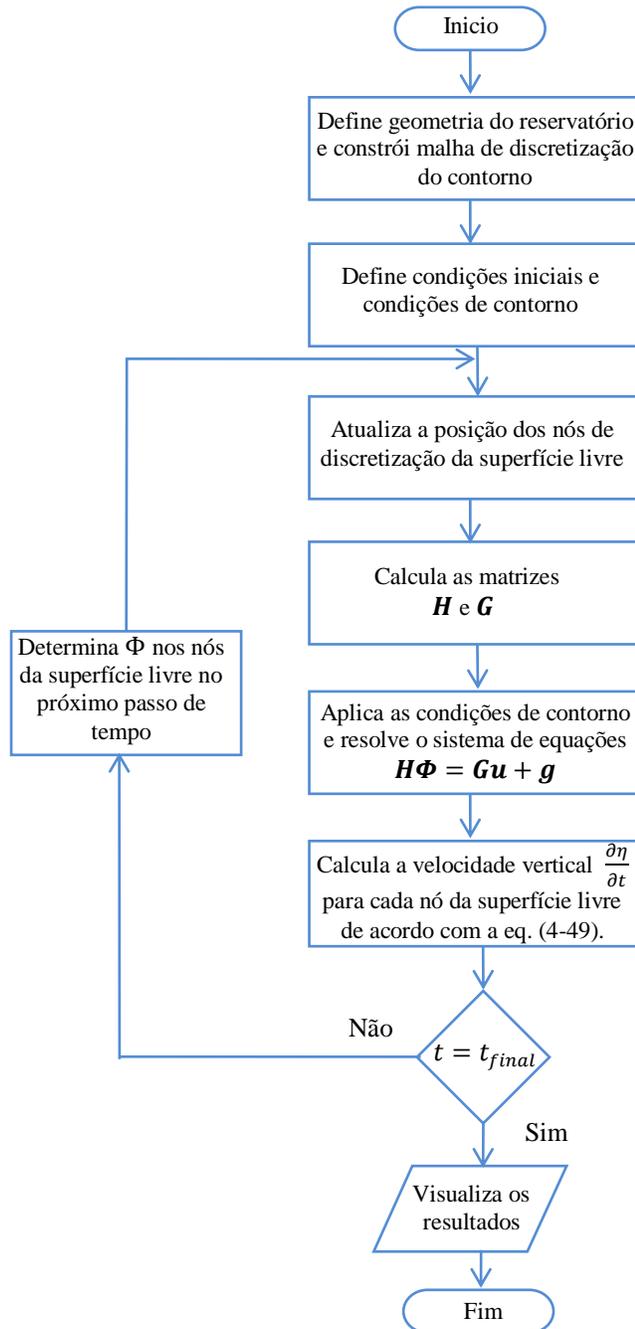


Figura 6.3 - Esquema iterativo para calcular a solução numérica.

Assim, essa iteração é repetida até alcançar o tempo de simulação definido. Este processo gera uma sequência de interfaces que representam o movimento da superfície livre, até convergir à solução de regime permanente, para os casos onde existe uma solução em regime permanente estável.

Com a solução do sistema de equações algébricas obtido com o MEC, obtém-se a distribuição de potencial e a velocidade de fluxo normal nos contornos do reservatório.

7 - CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA DO CONE DE ÁGUA

Neste capítulo é definido o sistema dinâmico para analisar e controlar o comportamento do cone de água, e é identificado o modelo matemático aproximado no domínio do tempo contínuo do sistema dinâmico, caracterizando a resposta do sistema a uma excitação degrau.

7.1 - VARIÁVEIS QUE DETERMINAM O COMPORTAMENTO DO CONE DE ÁGUA

O primeiro passo na construção do modelo matemático de um sistema dinâmico é definir as variáveis que são importantes para descrever seu comportamento (Ljung e Glad, 1994).

Com a solução numérica da formulação matemática do modelo protótipo considerado para simular o cone de água, obteve-se a distribuição de potencial e a velocidade de fluxo normal nos elementos da malha de discretização do contorno do reservatório. A partir do conhecimento da distribuição de potencial e da velocidade de fluxo normal no contorno, podem-se determinar as variáveis de interesse na análise do comportamento do cone de água que são: a intensidade crítica do sumidouro, a vazão crítica do reservatório, o potencial de fluxo crítico na superfície livre e o tempo de irrupção ou *breakthrough*. Devido a que o referencial de pressão, que é a pressão atmosférica, foi assumido igual a zero sem perda de generalidade, o potencial de fluxo na superfície livre corresponde com a posição da mesma. Conforme visto na seção 4.6.1, as variáveis físicas são definidas de forma adimensional.

O sistema dinâmico para analisar e controlar o cone de água é definido pelo comportamento do potencial (posição) do nó central da malha de discretização da superfície livre do reservatório. Este sistema tem como entrada a intensidade do sumidouro, e como saída a resposta de potencial.

A intensidade crítica do sumidouro é determinada numericamente pelo método da bissecante, a partir da resposta do sistema no regime permanente. Portanto, para uma entrada do sistema igual à intensidade crítica do sumidouro, a saída converge para um valor que define o

potencial crítico de fluxo. Para uma intensidade do sumidouro maior do que a intensidade crítica, o potencial de fluxo do nó central diverge. A partir destas duas condições de convergência e divergência da saída do sistema, é encontrado o valor crítico da entrada que corresponde com a intensidade crítica do sumidouro.

No modelo protótipo analisado, a intensidade crítica do sumidouro encontrada é de $q_c = -0,5180$. A distribuição de potencial no contorno do reservatório, considerando a condição de contorno cinemática na superfície livre e a intensidade crítica do sumidouro, observa-se na figura 7.1.

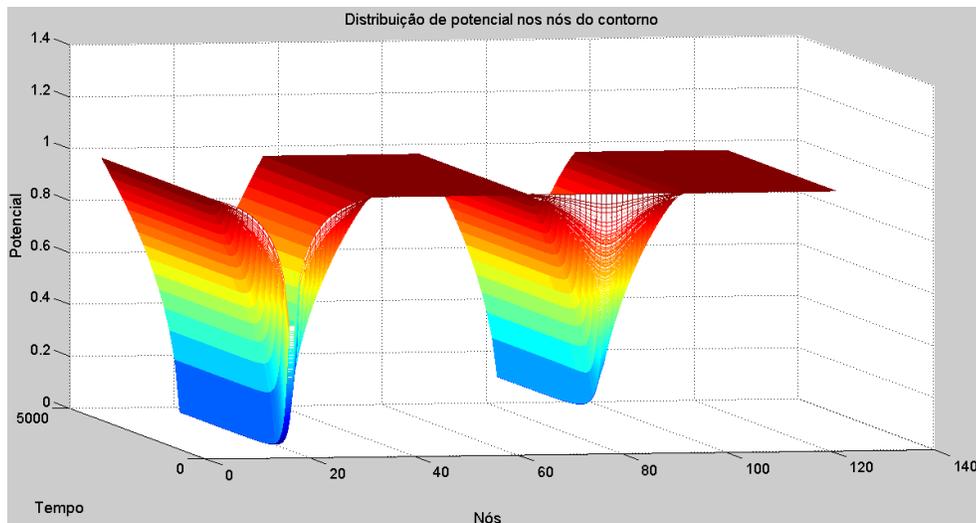


Figura 7.1 - Distribuição de potencial de fluxo na malha de discretização do contorno.

Segundo a figura 7.1, a distribuição de potencial no limite impermeável do reservatório e na superfície livre tem o formato geométrico de um cone.

A vazão crítica de fluxo é um dos tópicos mais importantes no estudo do comportamento do cone de água. A vazão crítica encontrada para o reservatório de largura $L = 4$, altura $H = 1$, condutividade hidráulica $K = 1$ e sumidouro localizado no limite impermeável em $x = 2$ e $y = 0$, é de $Q_c = -0,5213$, conforme se observa na figura 7.2.

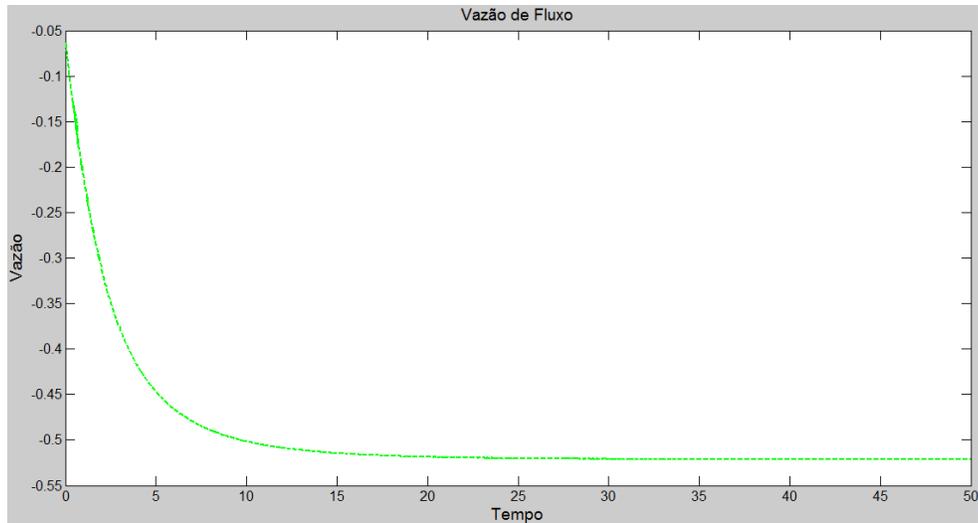


Figura 7.2 - Vazão crítica de fluxo.

A vazão crítica, portanto, produz um cone de água que se mantém estável acima do sumidouro no reservatório, como pode se observar na Figura 7.3.

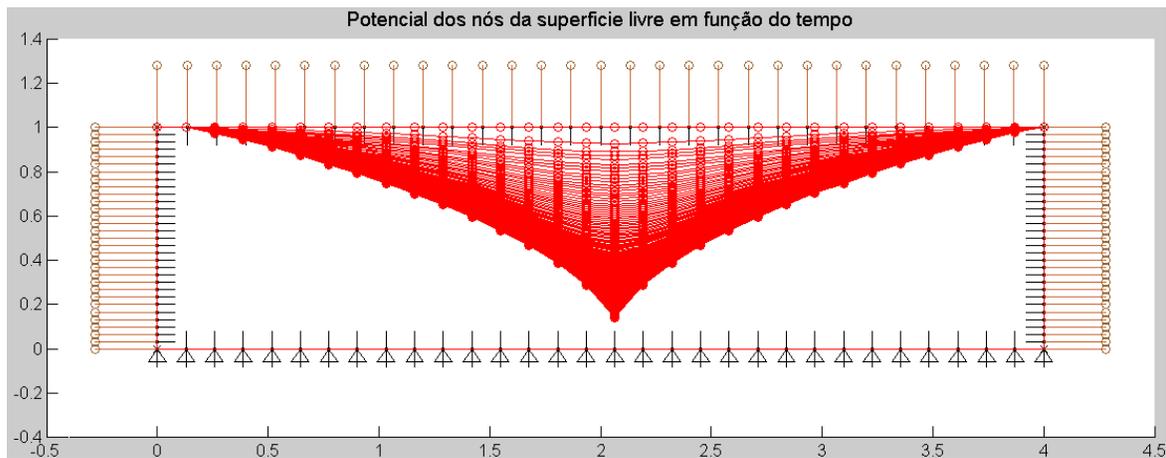


Figura 7.3 - Potencial ao longo do tempo nos nós de discretização da superfície livre.

Quando a vazão de fluxo no reservatório é a vazão crítica, o potencial (posição) do nó central da superfície livre converge à solução do regime permanente $y = 0,1402$. Nesse caso o potencial do nó central é conhecido como potencial crítico, e seu comportamento ao longo do tempo pode se observar na Figura 7.4. Quando o fluido é retirado à vazão crítica do reservatório, a superfície de contato dos fluidos está localizada muito próxima da posição do sumidouro.

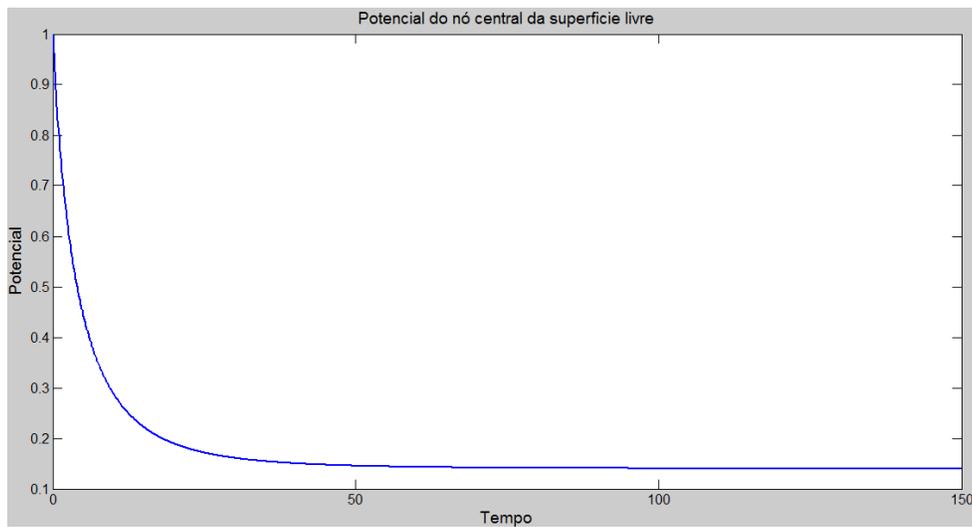


Figura 7.4 - Potencial crítico de fluxo do nó central da superfície livre.

Conseqüentemente, a região de instabilidade do sistema é definida para um potencial de fluxo menor do que o potencial crítico. Assim, a posição do nó central da superfície livre sempre diverge nessa região, conforme se ilustra na figura 7.5, já que a vazão de produção é maior do que a vazão crítica do reservatório e o cone se torna instável. É comprovado então, que a formação do cone instável está associada à existência da vazão crítica. O tempo de irrupção ou de *breakthrough* no sistema, que é o tempo em que o fluido indesejado irrompe no ponto de extração é $t = 92$, para uma vazão ligeiramente maior do que a vazão crítica.

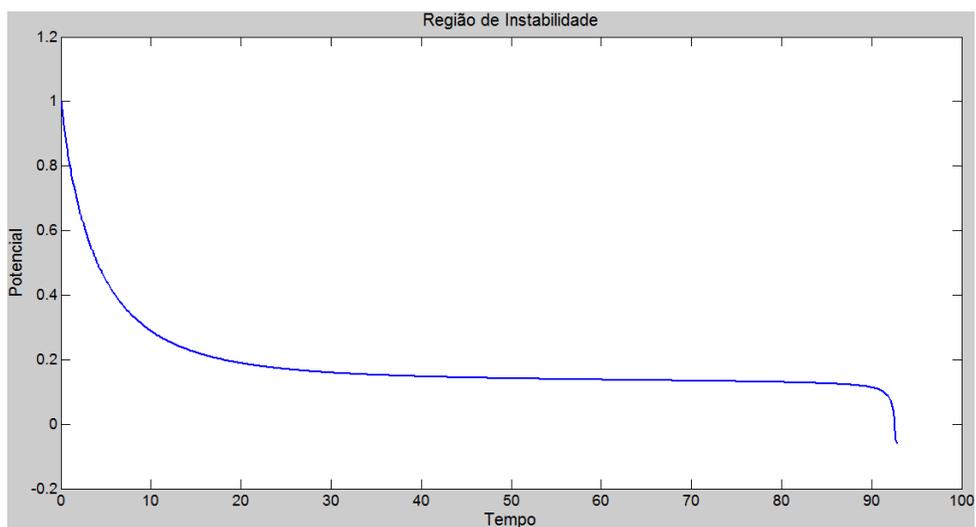


Figura 7.5 - Potencial do nó central da superfície livre dentro da região de instabilidade.

Para validar as respostas obtidas com a simulação numérica para a vazão crítica de fluxo e o potencial crítico da superfície livre, utiliza-se a formulação analítica desenvolvida em (Soares e Simões, 2012) através do Método de Mapeamento Conforme. Com essa formulação analítica pode-se determinar o valor da vazão crítica de produção no regime permanente, e prever a posição e o formato da interface de contato dos fluidos à vazão crítica, considerando que o fluido é extraído do reservatório por meio de um sumidouro pontual. Na tabela 7.1 se faz a comparação entre a solução numérica e a solução analítica obtida.

Tabela 7.1 - Validação da solução numérica.

	Solução Analítica (Método do Mapeamento Conforme)	Solução Numérica (MEC)	Erro Percentual
Vazão Crítica	0,4888	0,5180	-5,97%
Potencial Crítico	0,133	0,1402	-5,41%

A avaliação feita na tabela 7.1 dos resultados obtidos com o modelo numérico e os resultados obtidos através da formulação analítica baseada no Método de Mapeamento Conforme, permite determinar que as diferenças percentuais são aceitáveis, tendo em vista as incertezas relacionadas à aplicação final.

7.2 - CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA DO SISTEMA

O objetivo é construir um modelo matemático para o sistema dinâmico, analisando a resposta do sistema a partir de um sinal de excitação na entrada. Para caracterizar dinamicamente o comportamento do potencial da região central da fronteira móvel no domínio do tempo contínuo, é necessário como primeiro passo, definir o ponto de operação do sistema. A finalidade é caracterizar o comportamento do potencial ao redor desse ponto de operação.

Tem-se que a entrada do sistema que é a intensidade do sumidouro, varia de zero até o valor crítico determinado na simulação numérica. O ponto de operação é estabelecido para uma entrada de referência de aproximadamente igual a 50 % da intensidade crítica do sumidouro, ou seja, $q_r = 0,5 \cdot q_c \approx -0,2590$. Para essa entrada, a saída do sistema converge

exponencialmente para um valor de referência de $y_r = 0,75765$. A região de análise é definida, tomando uma entrada q_1 , 5% maior do que a entrada de referência, $q_1 = 0,95 \cdot q_r = -0,24605$, e tomando uma entrada q_2 5% menor, $q_2 = 1,05 \cdot q_r = -0,27195$. Para a entrada q_1 , o potencial (posição) do nó central da superfície livre converge para $y_1 = 0,7725$, e para a entrada q_2 converge para $y_2 = 0,74235$, como pode se observar na figura 7.6.

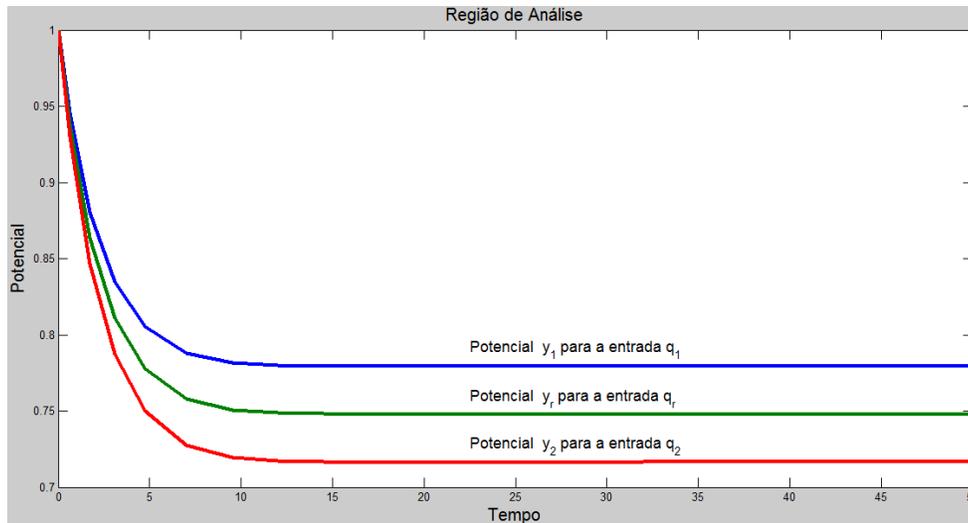


Figura 7.6 - Região de análise no ponto de operação.

O comportamento da posição do nó central da superfície livre na região de análise considerada pode se aproximar pelo modelo matemático descrito por uma equação diferencial de um sistema linear de primeira ordem (Jack, 2012):

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kf(t) \quad (7-1)$$

A solução dessa equação diferencial considerando como entrada um sinal degrau é dada por:

$$y(t) = y_1 + (y_0 - y_1)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7-2)$$

Na figura 7.7, pode se observar a resposta de um sistema linear de primeira ordem a um sinal degrau.

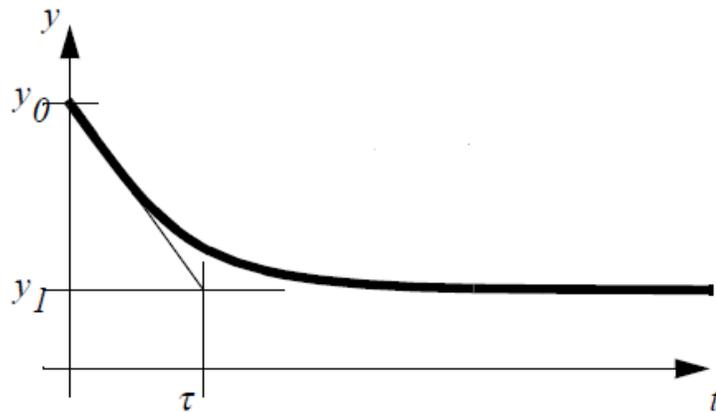


Figura 7.7 - Solução da equação diferencial de um sistema linear de primeira ordem com entrada degrau (Jack, 2012).

Dessa forma, a solução numérica obtida para a posição do nó central pode ser aproximada como a solução analítica de um sistema linear de primeira ordem. A função de transferência de um sistema de primeira ordem é dada por:

$$\frac{Y(S)}{F(S)} = \frac{K}{\tau S + 1} \quad (7-3)$$

Onde K é o ganho estático e τ é a constante de tempo do sistema, que são os parâmetros a estimar.

O ganho estático em um sistema linear estável é definido como a relação entre a variação da saída $y(t)$ e a variação da entrada $f(t)$ quando o sistema tem se estabilizado, conforme se observa na figura 7.8.

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\Delta y(t)}{\Delta f(t)} \right) \quad (7-4)$$

A constante de tempo para o sistema pode ser encontrada diretamente a partir da equação diferencial. Este parâmetro é uma medida de quão rápido o sistema responde a uma mudança na entrada. A constante de tempo τ é definida como o tempo em que a resposta $y(t)$ alcança o 63,2% de sua variação total (Ogata, 2003).

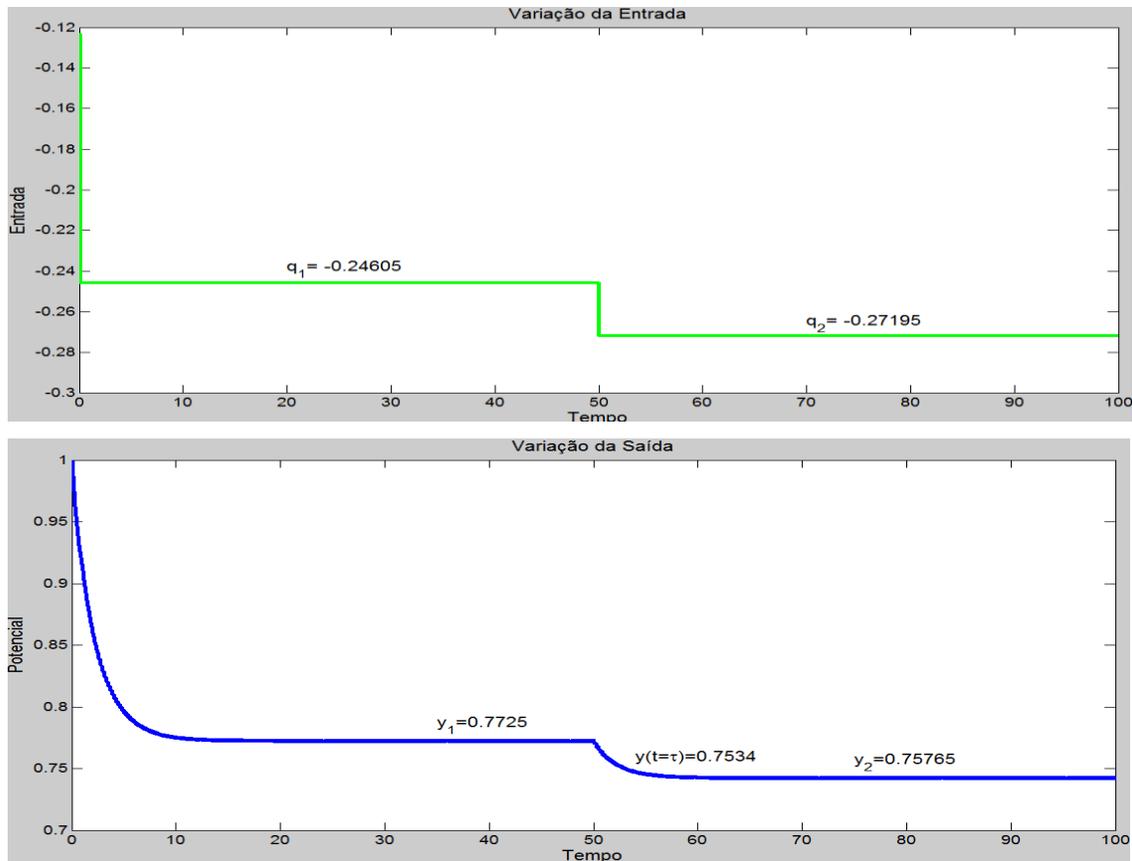


Figura 7.8 - Constante de tempo e ganho estático da região de análise.

Na região de análise considerada, que é definida pelo valor de referência de entrada $q_r = -0,2590$, e o valor de referência de saída $y_r = 0,75765$, o ganho estático é dado por:

$$K = \frac{\left(\frac{y_1 - y_r}{q_1 - q_r} + \frac{y_2 - y_r}{q_2 - q_r}\right)}{2} = 1,164 \quad (7-5)$$

A constante de tempo τ é definida como o tempo em atingir o 63,2% da variação total entre o potencial de saída y_1 , que é o valor inicial da região de análise, e o potencial de saída y_2 , que é o valor final. Segundo a figura 7.8, o potencial no tempo igual à constante de tempo τ , é igual a:

$$y(t = \tau) = 0,75344 \quad (7-6)$$

Por conseguinte, a constante de tempo da região de análise é dada por:

$$\tau = 2,1$$

(7-7)

A função de transferência da região de análise é dada por:

$$G(S) = \frac{Y}{q} = \frac{1,164}{2,1 \cdot S + 1}$$

(7-8)

O modelo matemático da região de análise pode ser descrito então como a resposta de um sistema de primeira ordem a uma entrada degrau. Para caracterizar dinamicamente o comportamento da posição (potencial) da região central da superfície livre, definem-se várias regiões de análise para acima e para abaixo da região de análise do ponto de operação estabelecido, aproximando a resposta dentro de cada região de análise como um sistema de primeira ordem, e calculando então, o valor dos parâmetros K e τ para cada região. Dessa maneira, é possível obter uma relação entre o ganho estático K , a constante de tempo τ e a intensidade do sumidouro q em função da posição do nó central da superfície livre y . Os parâmetros para cada região de análise encontram-se na tabela 7.2.

Tabela 7.2 - Valores dos parâmetros para varias regiões de análise.

Potencial (y)	Ganho estático (K)	Constante de tempo (τ)	Intensidade do sumidouro (q)
0,32055	5,3370	7,2944	-0,4933
0,3960	3,06355	3,8284	-0,4713
0,50585	2,0892	2,977	-0,4264
0,58175	1,7033	2,5607	-0,3858
0,64	1,4855	2,3414	-0,3490
0,6868	1,3418	2,2840	-0,3158
0,72485	1,2411	2,20	-0,2863
0,75765	1,164	2,1	-0,2590
0,7856	1,104	2,0	-0,23433
0,80975	1,057	1,8853	-0,2120
0,83075	1,021	1,87	-0,1918
0,84905	0,9873	1,7927	-0,1735
0,8651	0,9598	1,7926	-0,1570

O comportamento dos parâmetros K , τ e q em função da posição y do nó central da superfície livre pode ser analisado na figura 7.9.

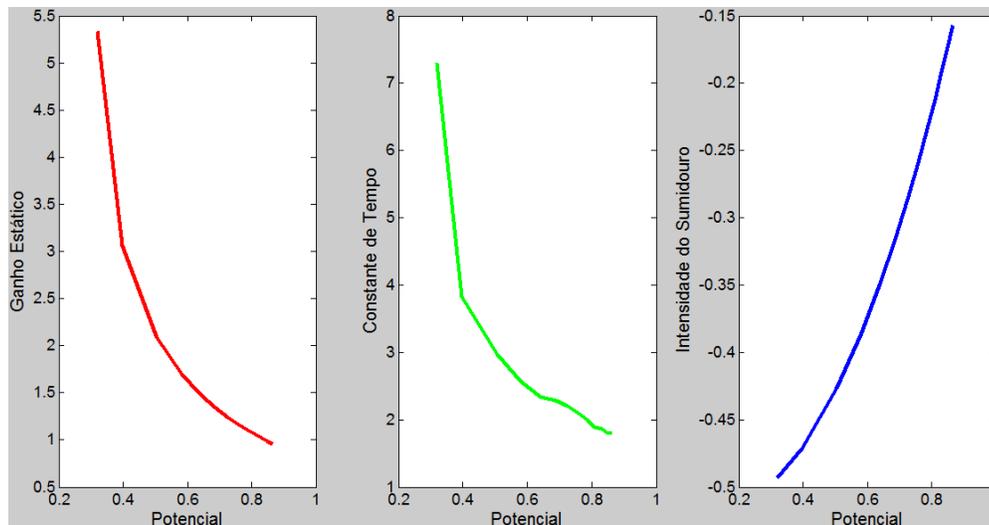


Figura 7.9 - Comportamento dos parâmetros em função do potencial do nó central. a) Ganho estático. b) Constante de tempo. c) Intensidade do sumidouro.

Segundo a figura 7.9, o ganho estático K e a constante de tempo τ divergem à medida que o potencial do nó central se aproxima ao potencial crítico determinado para o modelo protótipo. Tem-se então, um comportamento assintótico para K e para τ no potencial crítico. A intensidade do sumidouro tem um comportamento exponencial convergente até alcançar seu valor crítico, que é o limite para o cone se manter estável. Para poder visualizar de uma maneira mais adequada o comportamento dinâmico da posição do nó central da superfície livre, pode-se manipular a função de transferência de cada região de análise para deixá-la no seguinte formato:

$$G(S) = \frac{K_1}{S + K_2} \quad (7-9)$$

Onde K_1 e K_2 são definidos como o ganho e o polo da função de transferência, respectivamente. Na figura 7.10 se observa o comportamento dos parâmetros K_1 e K_2 em função da posição (potencial) do nó central da superfície livre.

$$K_1 = \frac{K}{\tau} \quad (7-10)$$

$$K_2 = \frac{1}{\tau}$$

(7-11)

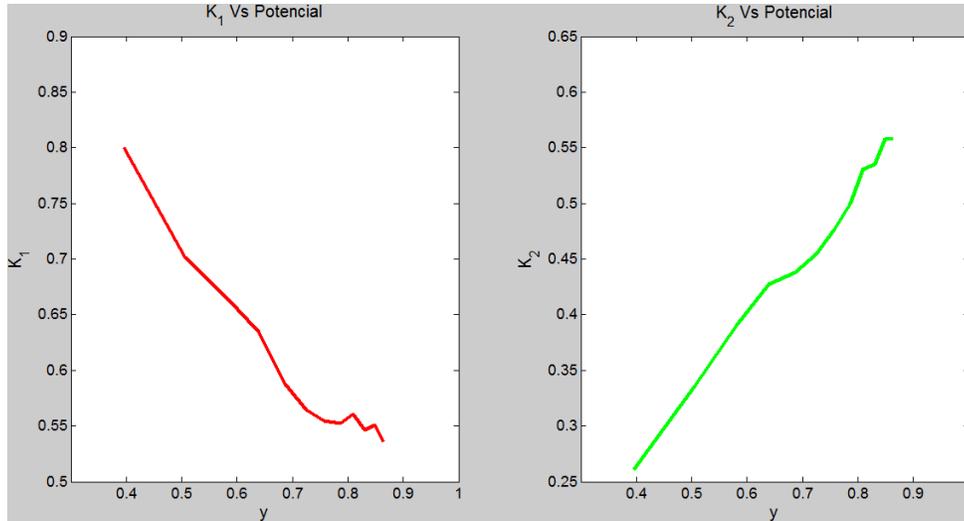


Figura 7.10 - Comportamento de K_1 e K_2 em função do potencial.

Segundo a figura 7.10, tem-se que o ganho K_1 da função de transferência diverge e o polo K_2 tende para zero à medida que o potencial se aproxima ao potencial crítico. Assim, conclui-se que quando o potencial do nó central da superfície livre atinge seu valor crítico, comporta-se como um integrador.

Pode-se ajustar o comportamento das curvas para K_1 e para K_2 fazendo uma regressão linear pelo método dos mínimos quadrados.

Como K_2 tende para zero quando o potencial tende para o potencial crítico, é apropriado que a reta que ajusta o comportamento de K_2 tenha a seguinte forma, conforme se observa na figura 7.11:

$$K_2 = c(y - y_c)$$

(7-12)

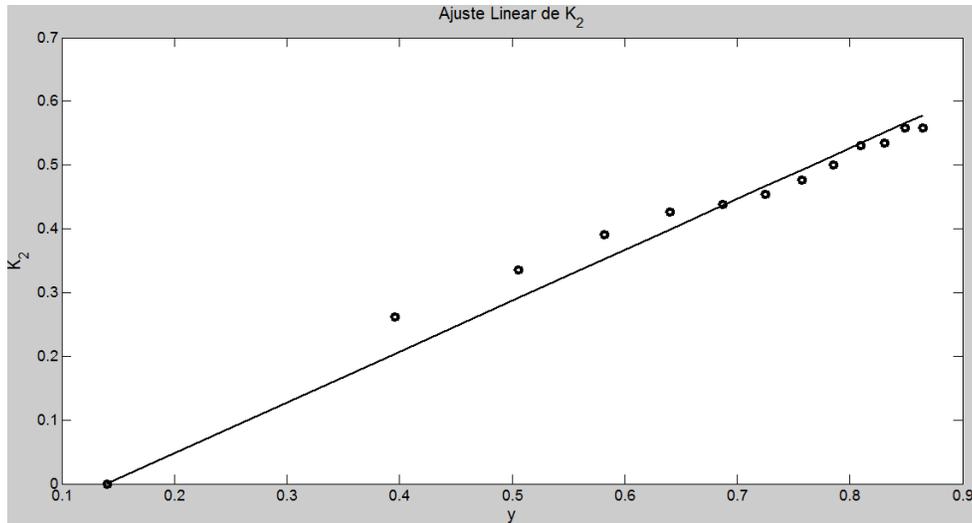


Figura 7.11 - Ajuste linear para K_2 .

Onde y_c é o valor crítico do potencial do nó central. Dessa maneira, é possível observar que quando o potencial é o potencial crítico, o polo do sistema se aloca na origem e o sistema se comporta como um integrador. Quer dizer, que o sistema é marginalmente estável. Para valores maiores que y_c o sistema é estável, e para valores menores que y_c o sistema é instável. A reta que melhor ajusta os pontos de K_2 , visualizados na figura 7.11, tendo um grau de liberdade e minimizando o somatório dos desvios quadráticos, está dada por:

$$K_2 = 0,7891(y - 0,1402) \tag{7-13}$$

Com o somatório dos desvios quadráticos igual a $SE = 8,848 \cdot 10^{-3}$.

Para ajustar K_1 , tem-se que o ganho estático da função de transferência, está dado por:

$$K = \frac{K_1}{K_2} \tag{7-14}$$

Logo, K_1 pode se expressar como:

$$K_1 = K \cdot K_2 \tag{7-15}$$

Pode-se então, ajustar os pontos de $K \cdot K_2$, observados na figura 7.12.

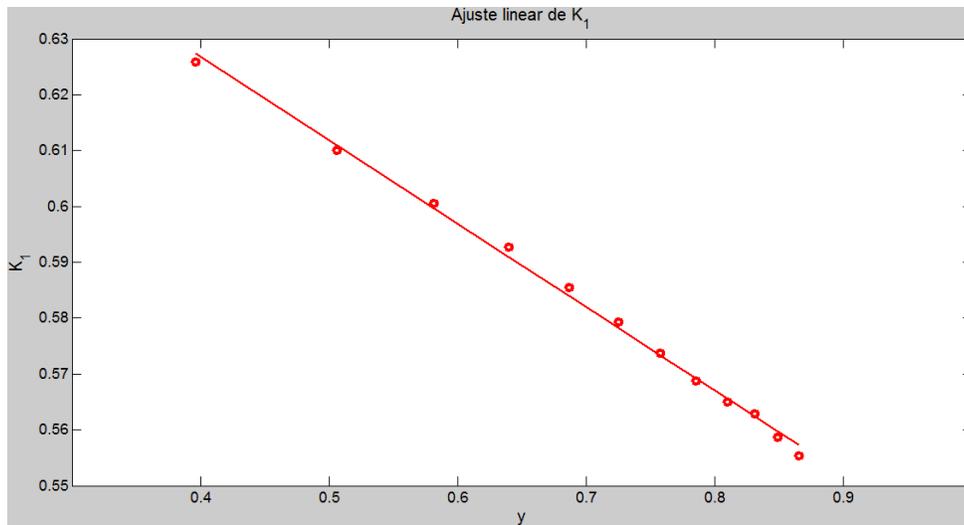


Figura 7.12 - Ajuste linear de K_1 .

A reta que melhor ajusta o comportamento de K_1 em função do potencial tendo dois graus de liberdade é dada por:

$$K_1 = -0,1496y + 0,6867$$

(7-16)

Com o somatório dos desvios quadráticos igual a $SE = 1,629 \cdot 10^{-5}$.

Dessa forma, tem-se estimado um modelo matemático do sistema dinâmico que descreve o comportamento do potencial da região central da superfície livre ao longo do tempo, tendo como sinal de entrada a intensidade do sumidouro. A partir dessa caracterização dinâmica, pode-se projetar um sistema de controle em malha fechada para minimizar os efeitos do cone de água durante a extração do fluido do reservatório considerado para a simulação numérica.

8 - DESENVOLVIMENTO DO SISTEMA DE CONTROLE

Neste capítulo é projetado o sistema de controle em malha fechada, baseado em um controlador Proporcional – Integral não linear. Faz-se a sintonização dos parâmetros do controlador PI, e projeta-se o algoritmo para implementar o sistema de controle no modelo numérico desenvolvido para simular o comportamento do cone de água.

8.1 - SISTEMA DE CONTROLE EM MALHA FECHADA

O objetivo da implementação do sistema de controle é evitar a formação do cone de água instável no modelo protótipo simulado, controlando a distribuição de potencial (pressão) na superfície de contato dos fluidos.

O diagrama de blocos do sistema de controle em malha fechada, composto pelo modelo da planta a controlar, que é o sistema dinâmico que representa o comportamento do potencial de fluxo do nó central da superfície livre, e o controlador PI, é mostrado na figura 8.1.

Implementa-se o controlador Proporcional-Integral em configuração paralela, devido a que os sistemas com funções de transferência de malha aberta do tipo 1 ou maior têm erro nulo de estado estacionário para uma entrada degrau com este tipo de controlador (Kuo, 1996).

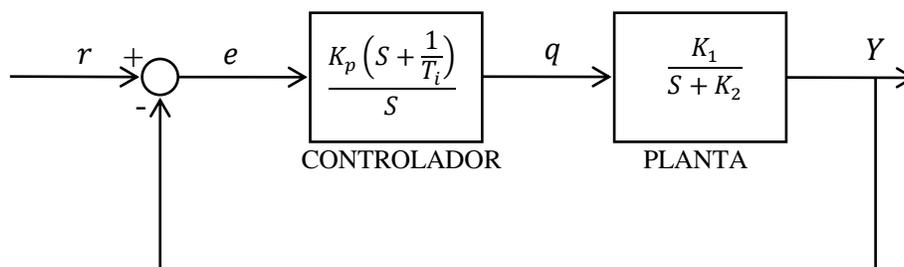


Figura 8.1 - Diagrama de blocos do sistema de controle em malha fechada.

O objetivo do sistema de controle em malha fechada é obter-se o seguimento de um valor de referência de potencial com erro nulo no regime permanente.

8.2 - PROJETO DO CONTROLADOR PI POR ALOCAÇÃO DO POLO.

Para sintonizar os parâmetros do controlador PI não linear, utiliza-se o método de alocação de polos. O método de alocação de polos consiste em alocar os polos do sistema em malha fechada em posições pré-especificadas. Os polos assim escolhidos determinam o polinômio característico de malha fechada.

Fazendo as operações algébricas respectivas no diagrama de blocos do sistema de controle em malha fechada mostrado na figura 8.1, calcula-se a função de transferência. Tem-se que a função de transferência da planta é definida por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{q(s)} = \frac{K_1}{S + K_2} = \frac{-0,1496Y + 0,6807}{S + 0,7891(Y - 0,1402)} \quad (8-1)$$

No controlador PI, a relação entre a saída $q(s)$ e a entrada que é o erro $e(s)$ é dada pela função de transferência:

$$G_{PI}(s) = \frac{q(s)}{e(s)} = \frac{K_p \left(S + \frac{1}{T_i} \right)}{S} \quad (8-2)$$

Onde o parâmetro K_p é o ganho proporcional e o parâmetro T_i é o tempo integral. Os parâmetros K_p e T_i são chamados parâmetros de ajuste do controlador, e vão depender também do potencial (posição) do nó central da superfície livre y .

A função de transferência do sistema em malha fechada, que é a relação entre a entrada de referência do sistema $r(s)$ e o potencial de saída $Y(s)$, está dada por:

$$G_{MF}(s) = \left[\frac{\frac{K_p \left(S + \frac{1}{T_i} \right)}{S} \cdot \frac{K_1}{S + K_2}}{1 + \frac{K_p \left(S + \frac{1}{T_i} \right)}{S} \cdot \frac{K_1}{S + K_2}} \right] \quad (8-3)$$

Após manipulações algébricas, a função de transferência é definida como:

$$G_{MF}(s) = \frac{(K_p K_1) \left(s + \frac{1}{T_i} \right)}{s^2 + (K_2 + K_p K_1) s + \left(\frac{K_p K_1}{T_i} \right)} \quad (8-4)$$

A função de transferência do sistema de controle em malha fechada tem um zero em:

$$s = -\frac{1}{T_i} \quad (8-5)$$

e dois polos em:

$$s_{1,2} = \frac{\left[-(K_2 + K_p K_1) \pm \sqrt{(K_2 + K_p K_1)^2 - 4 \left(\frac{K_p K_1}{T_i} \right)} \right]}{2} \quad (8-6)$$

Como o objetivo é alocar os polos do sistema em malha fechada, então se compara a equação característica do sistema, que é o denominador da função de transferência, com a equação característica de um sistema de segunda ordem na forma padrão, que é dada por:

$$s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2 = 0 \quad (8-7)$$

Igualando os coeficientes da equação característica do sistema de controle em malha fechada com os coeficientes da equação característica do sistema de segunda ordem, obtemos as seguintes relações:

$$K_p = \frac{2\xi W_n - K_2}{W_n^2}$$

$$T_i = \frac{2\xi W_n - K_2}{K_1} \quad (8-8)$$

A sintonização fina dos parâmetros do controlador PI se realiza alocando adequadamente os polos da função de transferência do sistema em malha fechada, que dependem do coeficiente de amortecimento ξ , da frequência natural do sistema W_n e do potencial y . Definindo um comportamento criticamente amortecido para a resposta do sistema, ou seja, polos reais no semiplano complexo negativo, os parâmetros ξ e W_n são dados por:

$$W_n = 1$$

$$\xi = 1$$

(8-9)

Dessa maneira se garante uma resposta ótima, de forma a manter a saída do sistema no valor de referência desejado, com um tempo de convergência pequeno $t_s = 5.15 \text{ s}$ e um sobre-sinal máximo adequado ($M_{sp} = 9,5\%$), como pode se observar na figura 8.2, que mostra a resposta do sistema em malha fechada quando o potencial de referência é igual ao potencial crítico do nó central da superfície livre.

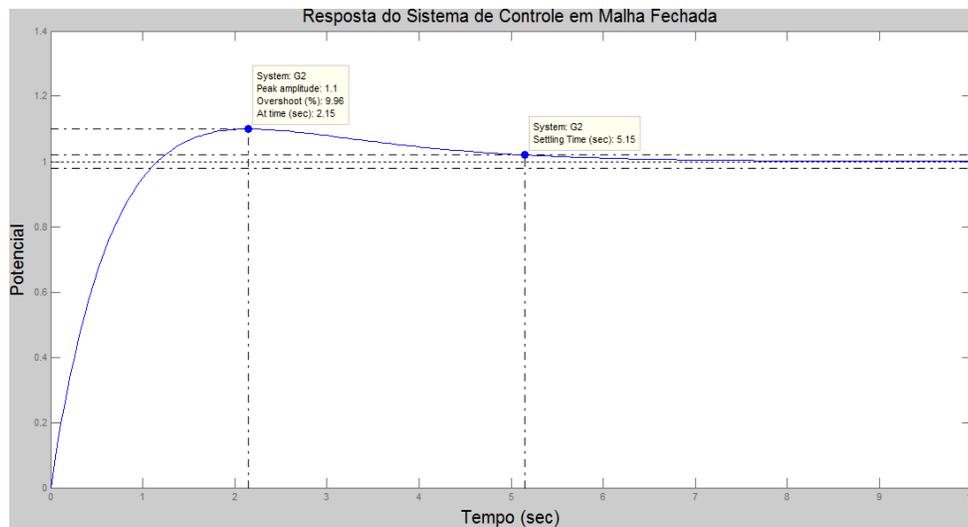


Figura 8.2 - Resposta do sistema de controle em malha fechada com os parâmetros do controlador K_p e T_i sintonizados.

8.3 - REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA DE CONTROLE NO ESPAÇO DE ESTADOS.

A representação no espaço de estados para um sistema geral de equações diferenciais de primeira ordem é dado por (Ljung e Glad, 1994):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = h(x(t), u(t))$$

(8-10)

Onde $x(t)$ é o vetor de estados, $u(t)$ é o vetor de entrada e $y(t)$ é o vetor de saída. Para esse sistema, o vetor $x(t_0)$ é o vetor de estados inicial.

A representação no espaço de estados da função de transferência da planta na forma canônica controlável é definida como:

$$\dot{y} = -[K_2] \cdot y + [K_1] \cdot q \quad (8-11)$$

A representação no espaço de estados da função de transferência do controlador PI na forma canônica é definida como:

$$\dot{\lambda} = [0] \cdot \lambda + [1] \cdot e \quad (8-12)$$

$$q = \left[\frac{K_p}{T_i} \right] \cdot \lambda + [K_p] \cdot e \quad (8-13)$$

Substituindo a expressão para q , tem-se a seguinte relação para a equação de estado \dot{y} :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -[K_2] \cdot y + [K_1] \left(\left[\frac{K_p}{T_i} \right] \cdot \lambda + [K_p] \cdot e \right) \\ \dot{y} &= -[K_2] \cdot y + \left[\frac{K_1 K_p}{T_i} \right] \cdot \lambda + [K_1 K_p] \cdot e \end{aligned} \quad (8-14)$$

Da Figura 8.1, tem-se que o erro e é dado por:

$$e = r - y \quad (8-15)$$

Escrevendo na equação de estado (8-14) a expressão dada para o erro, obtém-se:

$$\dot{y} = -[K_2] \cdot y + \left[\frac{K_1 K_p}{T_i} \right] \cdot \lambda + [K_1 K_p] \cdot (y - r) \quad (8-16)$$

Portanto, a representação no espaço de estados do sistema de controle em malha fechada é dada por:

$$\dot{y} = -[K_2 + K_1K_p] \cdot y + \left[\frac{K_1K_p}{T_i}\right] \cdot \lambda + [K_1K_p] \cdot r$$

$$\dot{\lambda} = -y + r$$

(8-17)

Com y e λ como variáveis de estado, r é a referência de entrada e y como variável de saída também.

8.4 - IMPLEMENTAÇÃO DO CONTROLADOR PI NO MODELO NUMÉRICO.

Para controlar a saída da planta, que é o potencial (posição) do nó central da superfície livre, utiliza-se o algoritmo apresentado na figura 8.3 para implementar e simular o controlador PI no modelo numérico desenvolvido através do MEC.

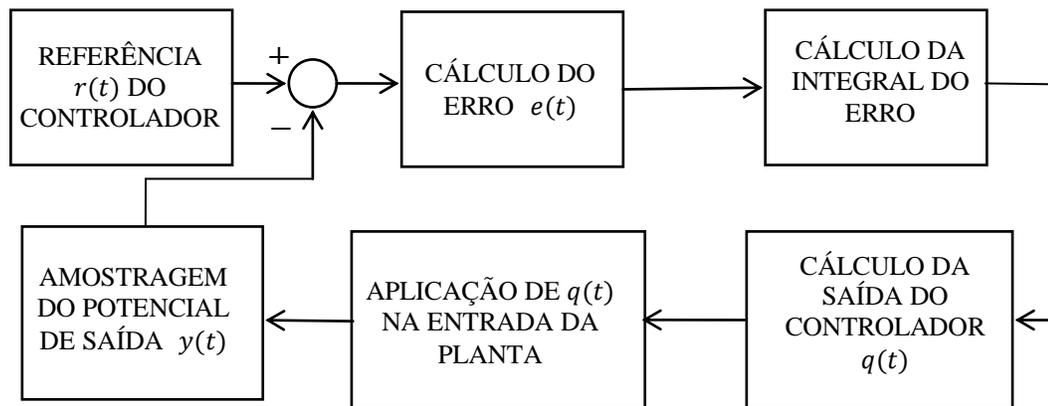


Figura 8.3 - Algoritmo iterativo utilizado para a implementação e simulação do controlador PI no modelo numérico.

A saída do controlador que é aplicada na entrada da planta é dada por:

$$q(t) = \left(\frac{K_p}{T_i}\right) \int_{t_0}^{t_{final}} e(t) dt + K_p e(t)$$

(8-18)

O erro é definido como:

$$e(t) = r(t) - y(t) \tag{8-19}$$

Onde:

- $r(t)$ é o sinal de referência do controlador.
- $y(t)$ é o potencial de saída do sistema de controle em malha fechada.

Para calcular a integral do erro, é necessário fazer uma aproximação discretizada da integral contínua. A discretização se faz a uma frequência de amostragem alta. Por tanto, a integral do erro pode se aproximar por uma somatória como se mostra a continuação:

$$q(t) = \left(\frac{K_p}{T_i}\right) \cdot \left\{ \sum_{t=t_0}^{t_{final}} (r(t) - y(t)) \cdot \Delta t \right\} + K_p \cdot (r(t) - y(t)) \tag{8-20}$$

O valor de Δt é o passo de tempo em que se faz a amostragem do valor da saída $y(t)$. A variável $q(t)$ é, portanto, a saída do controlador PI que vai ser aplicada na entrada da planta com o objetivo que a saída $y(t)$ permaneça no valor de referência desejado $r(t)$, ou seja, erro nulo, sem que existam problemas de instabilidade.

9 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo são comparados e analisados os resultados obtidos com sistema de controle em malha fechada, considerando o modelo analítico estimado para o sistema dinâmico e o modelo numérico desenvolvido com o MEC. Para isto, realizam-se simulações com o valor de referência do controlador (*setpoint*) na região estável e na região instável do potencial de fluxo do nó central da malha de discretização da superfície livre.

9.1 - CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS

O modelo computacional utilizado para simular numericamente o cone de água e o comportamento do sistema de controle em malha fechada, foi desenvolvido no *MATLAB*® versão 7.11.0.584 (R2010b). O computador utilizado para fazer as simulações é um *DELL INSPIRON 580* com processador *INTEL*® *CORE(TM) i3 CPU 550 @ 3.20 GHz*.

9.2 - SIMULAÇÃO COM REFERÊNCIA DO CONTROLADOR NA REGIÃO ESTÁVEL DO POTENCIAL DE FLUXO.

Para realizar a simulação do sistema de controle na região estável do potencial de fluxo do nó central, é definido um valor de referência (*setpoint*) para y igual a 0,5.

Dessa forma, são comparados e analisados os resultados do sistema de controle projetado com o modelo analítico estimado para a planta, conforme os procedimentos desenvolvidos nas seções 8.2 e 8.3, e o sistema de controle implementado no modelo numérico conforme o algoritmo ilustrado na figura 8.3. A figura 9.1 mostra a resposta de potencial no contorno do reservatório com o sistema de controle em malha fechada, onde o potencial de fluxo do nó central da superfície livre é a variável de saída a controlar.

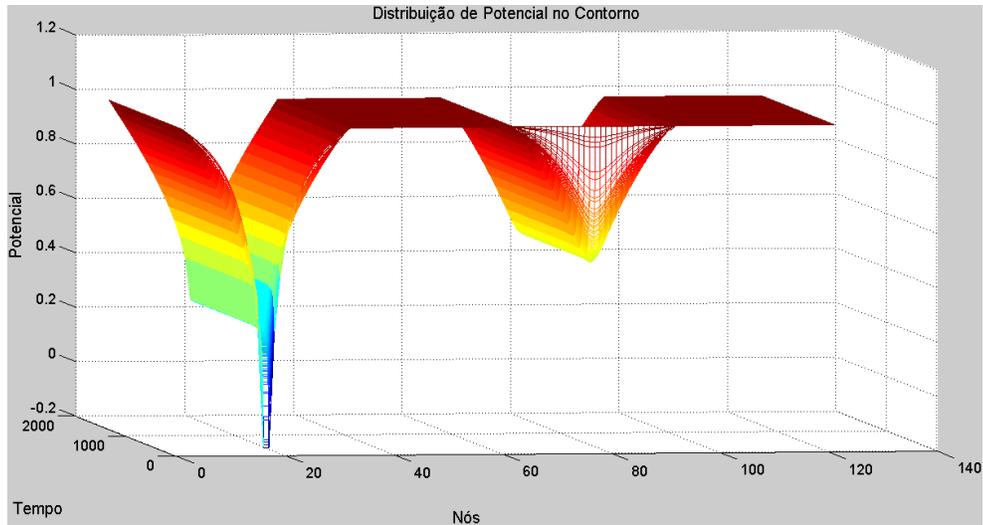


Figura 9.1 - Distribuição de potencial nos nós do contorno.

Da figura 9.1, pode-se concluir que com sistema de controle em malha fechada, o potencial no limite impermeável do reservatório aumenta temporariamente devido a que a intensidade do sumidouro aumenta para que a resposta do sistema convirja mais rápido e se mantenha estável na referência definida.

Na figura 9.2, comparam-se as respostas do modelo identificado para a planta e o modelo numérico, para uma entrada em degrau.

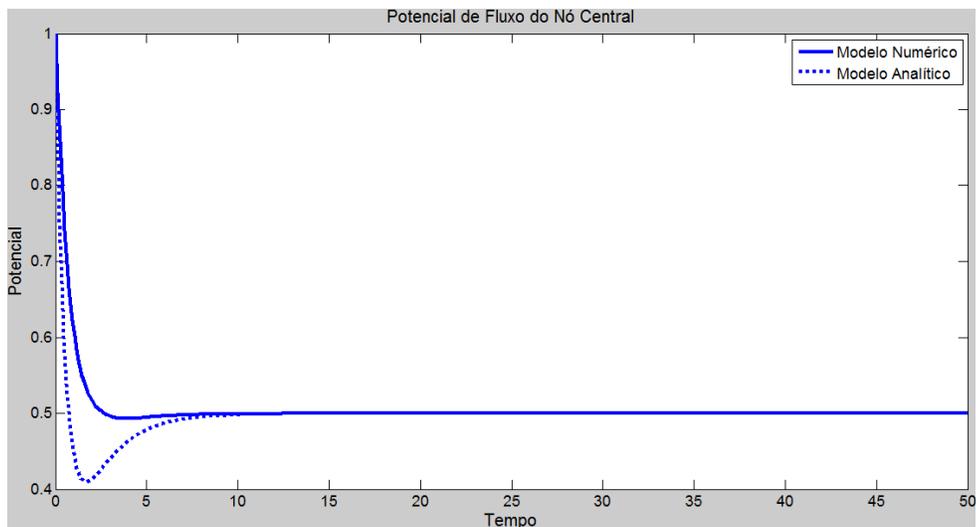


Figura 9.2 - Comportamento do potencial do nó central da superfície livre.

Pode-se observar na figura 9.2, que o potencial do nó central converge para o valor de referência estabelecido para o controlador. A resposta numérica apresenta diferenças com respeito à resposta do modelo identificado, no valor do Sobre-Sinal Máximo. O tempo de convergência das duas respostas é aproximadamente igual.

Na figura 9.3 se obtém a resposta da vazão de fluxo na simulação numérica do sistema de controle.

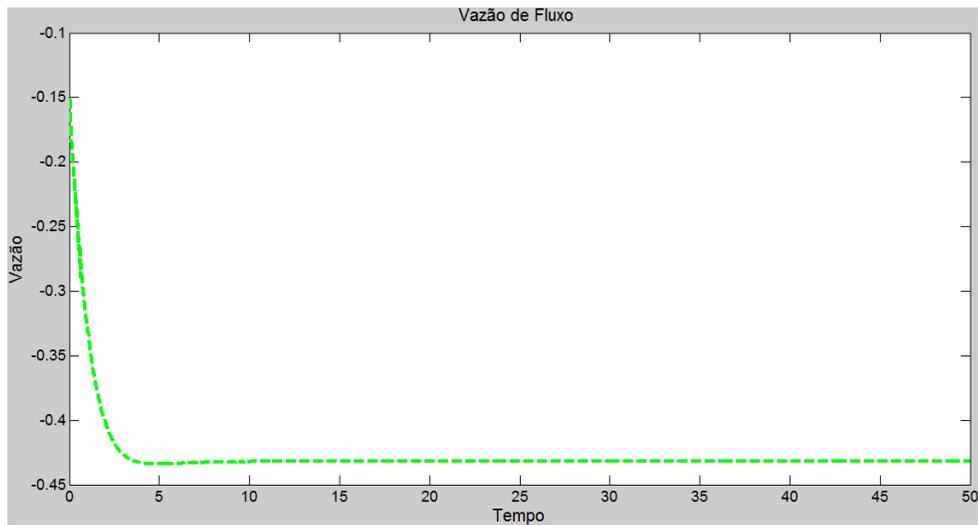


Figura 9.3 - Vazão de fluxo no reservatório.

Analisando a figura 9.3, tem-se que a resposta da vazão do reservatório apresenta uma convergência mais rápida do que o sistema em malha aberta, e tem um comportamento estável, o que quer dizer que o cone de água é estável também.

A influência da vazão de produção na variação da altura do cone pode se observar na figura 9.4.

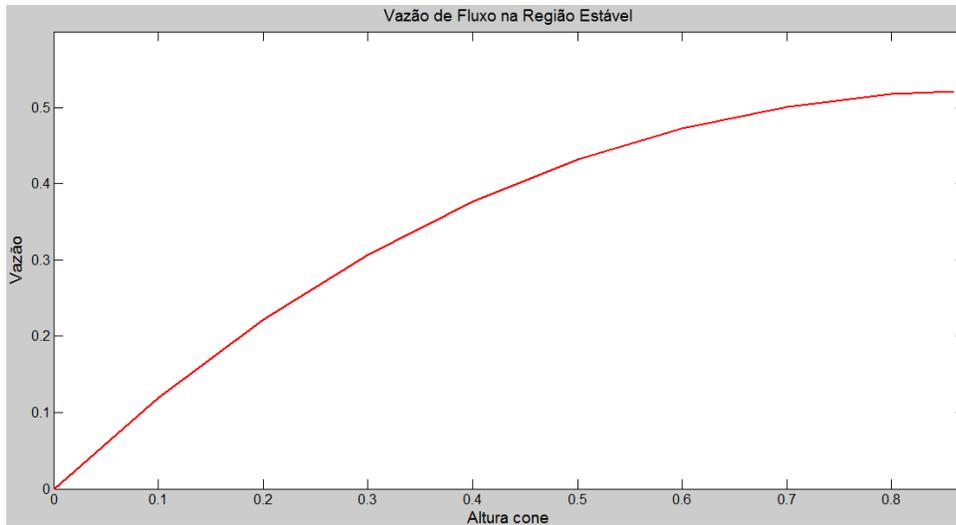


Figura 9.4 - Vazão de fluxo em função da altura do cone na região estável.

Segundo a figura 9.4, à medida que o cone se aproxima à região de instabilidade, a vazão no reservatório vai aumentando até alcançar seu valor crítico.

O comportamento da entrada de controle da planta pode se observar na figura 9.5.

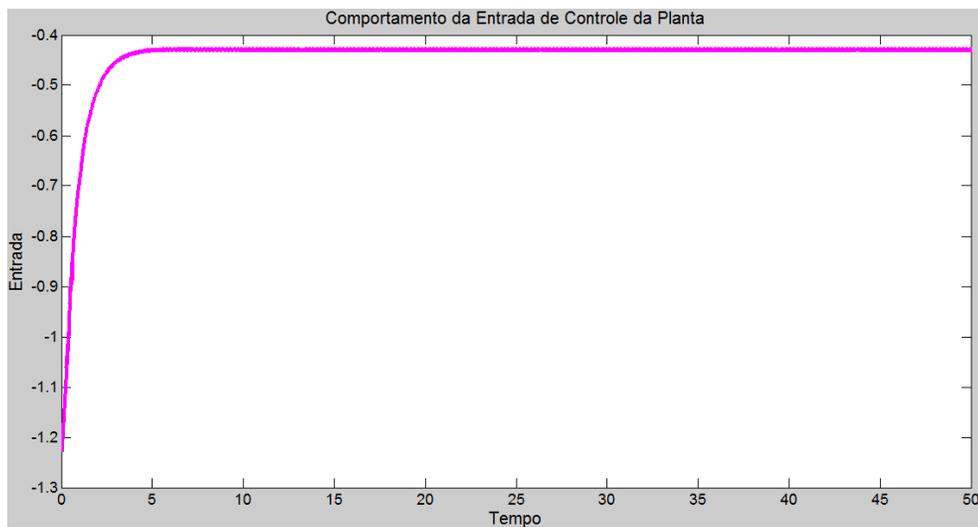


Figura 9.5 - Comportamento da entrada de controle.

A entrada de controle da planta, que é a saída do controlador PI, alcança valores superiores à intensidade crítica do sumidouro em malha aberta no regime transiente, conforme se observa

na figura 9.5, para garantir que o potencial do nó central da superfície livre convirja mais rápido no valor de referência do controlador e se mantenha estável.

9.3 - SIMULAÇÃO COM REFERÊNCIA DO CONTROLADOR NA REGIÃO DE INSTABILIDADE DO POTENCIAL DE FLUXO.

Um dos objetivos principais do sistema de controle em malha fechada é manter estável a saída, dentro da região de instabilidade definida para vazões iguais ou maiores do que a vazão de fluxo crítica. A região de instabilidade do potencial de saída segundo as simulações numéricas é definida para $y < 0,1402$. A seguir, apresentam-se os resultados do modelo numérico e do modelo identificado, mantendo a referência (*setpoint*) do potencial y igual a 0,1.

Na figura 9.6 se mostra a resposta de potencial no contorno do reservatório.

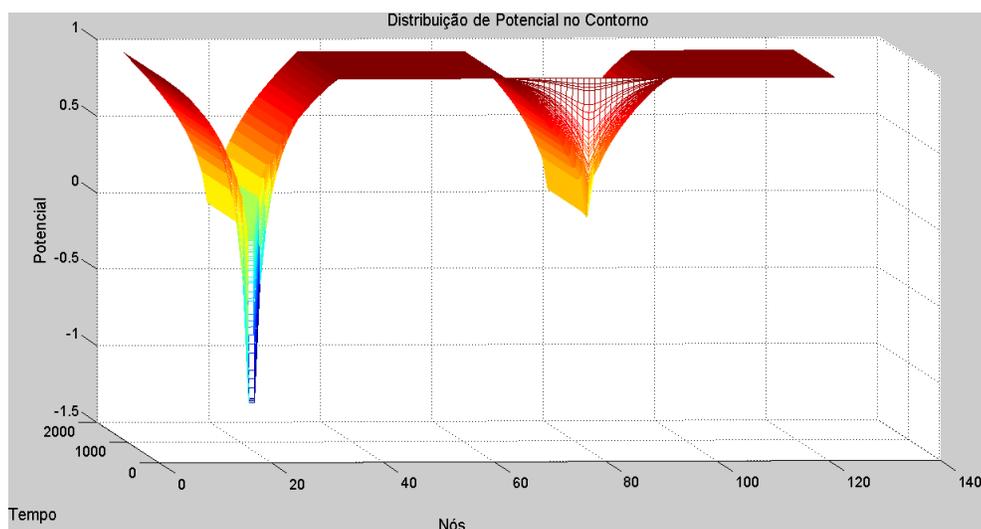


Figura 9.6 - Distribuição de potencial nos nós do contorno.

Na figura 9.6 pode se observar que o potencial no limite impermeável do reservatório aumenta temporariamente, devido a que a intensidade do sumidouro se torna elevada, para garantir que o potencial (posição) do nó central convirja de maneira mais rápida no valor de referência (*setpoint*), conforme se mostra na figura 9.7.

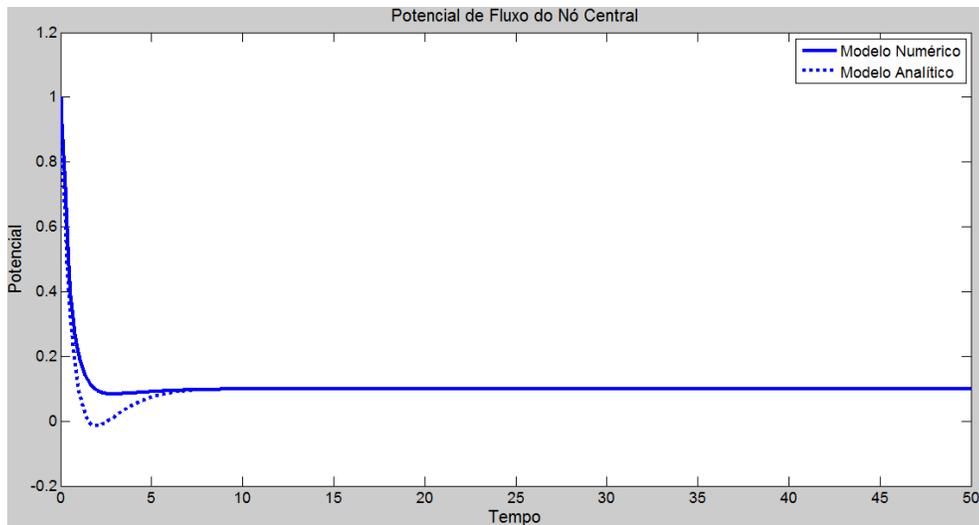


Figura 9.7 - Comportamento do potencial do nó central da superfície livre.

O comportamento da vazão de fluxo no reservatório, quando o sistema de controle tem o valor de referência na região instável, mostra-se na figura 9.8.

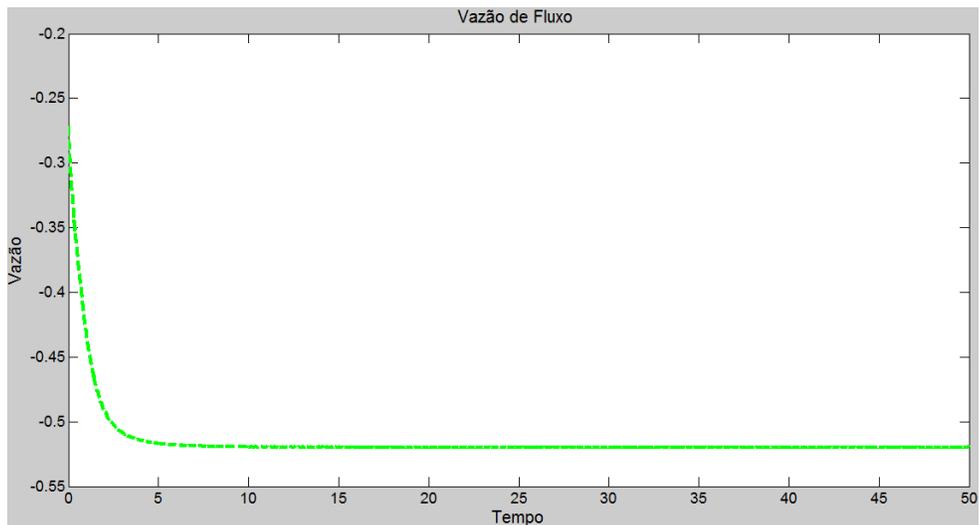


Figura 9.8 - Vazão de fluxo no reservatório.

Conclui-se a partir da figura 9.8 que controlando o potencial do nó central da superfície livre dentro da região de instabilidade, a vazão de produção no reservatório converge e se mantém estável em um valor muito próximo à vazão crítica. Por conseguinte, o comportamento do cone de água é estável.

Na figura 9.9, mostra-se a relação entre os resultados obtidos para a vazão de fluxo no reservatório em função da altura do cone dentro da região instável do potencial do nó central.

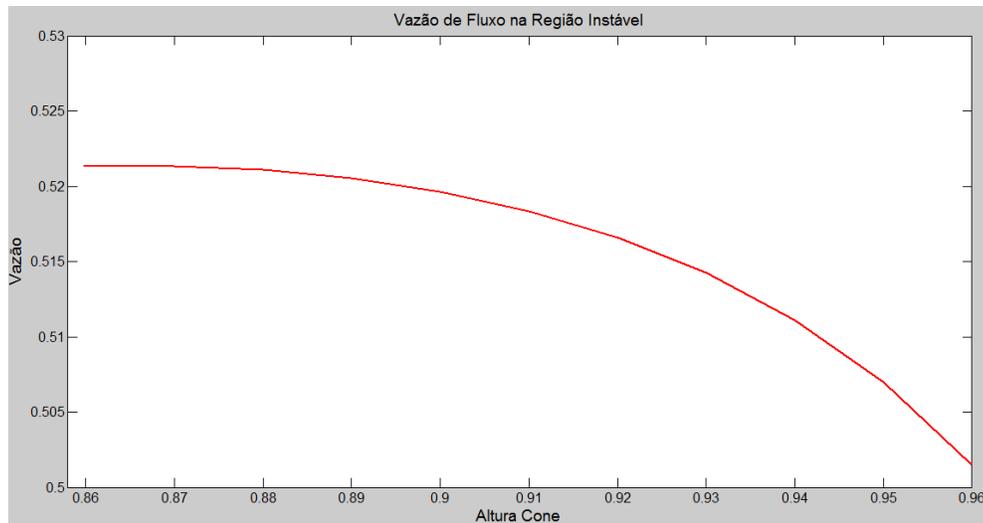


Figura 9.9 - Vazão de fluxo em função da altura do cone na região instável.

Pode-se observar na figura 9.9 que com o sistema de controle, o cone consegue manter-se estável e a vazão tende para seu valor crítico. Uma vez alcançado o valor crítico, a vazão de produção decai quando o cone de água fica muito próximo à posição do sumidouro.

O comportamento da entrada de controle da planta se mostra na figura 9.10.

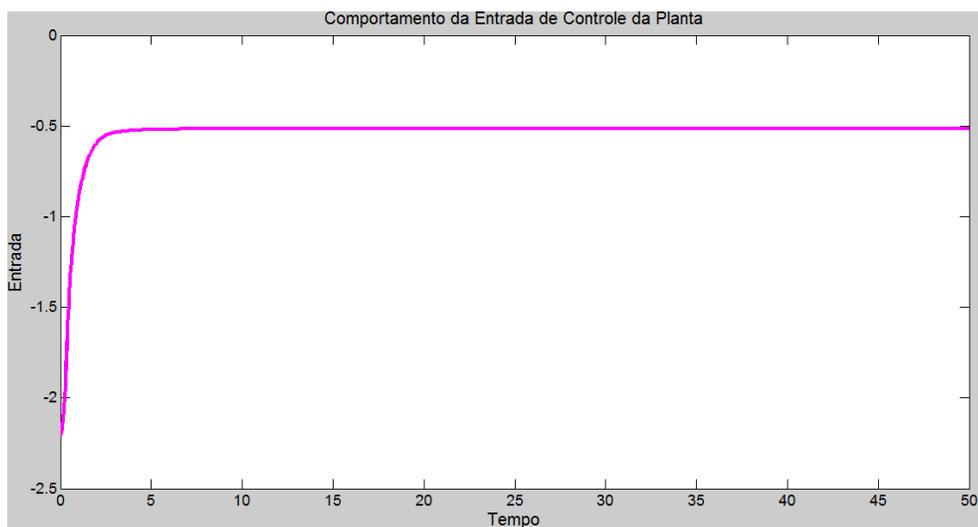


Figura 9.10 - Comportamento da entrada de controle.

A partir da resposta do sistema de controle em malha fechada, com a referência (*setpoint*) dentro da região de instabilidade do potencial do nó central da superfície livre, pode se concluir que a entrada de controle da planta converge para o valor da intensidade crítica do sumidouro.

A variação da altura da superfície de contato dos fluidos em função da vazão de fluxo no reservatório apresenta-se na figura 9.11.

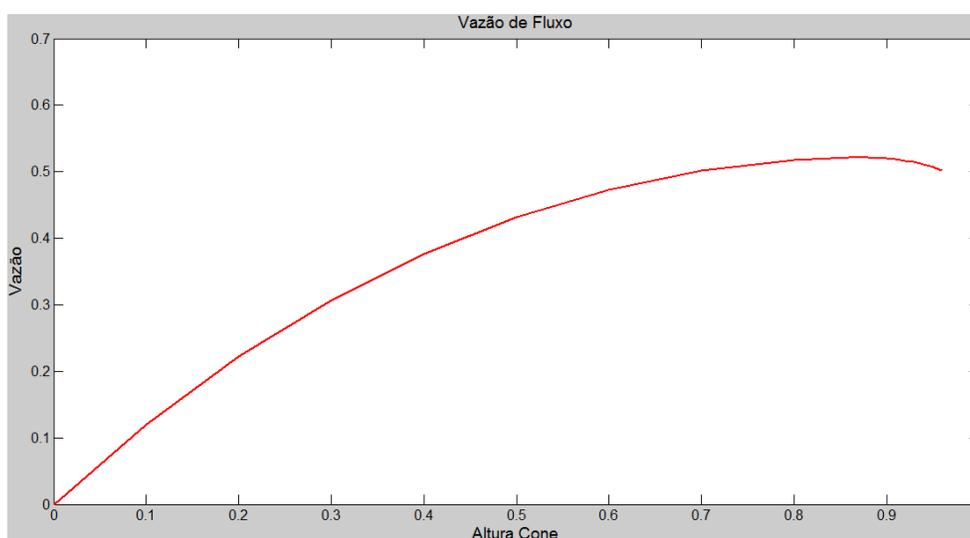


Figura 9.11 - Vazão de fluxo em função da altura do cone.

Tem-se então, que com o sistema de controle em malha fechada conseguiu-se extrair o fluido do reservatório à vazão crítica, evitando a formação do cone instável (*breaktrough*), ou seja, a irrupção do fluido indesejado no ponto de extração. Este resultado é muito importante para um propósito prático.

9.4 - COMPARAÇÃO DO TEMPO DE SIMULAÇÃO ENTRE O MÉTODO DE INTEGRAÇÃO ANALÍTICA E O MÉTODO DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.

Na tabela 9.1, faz-se a comparação e a análise do tempo de simulação (tempo de cálculo) gasto pelo modelo computacional, quando os termos das matrizes **H** e **G** são calculados com o

Método de Quadratura Gaussiana (integração numérica), e quando são calculados com a técnica de integração analítica desenvolvida neste trabalho. O spam de tempo definido para resolver o sistema de equações algébricas com o esquema iterativo dado na figura 6.3 é de $t_{final} = 50 s$. Comparam-se os resultados dos dois métodos de integração, quando o sistema de controle em malha fechada tem o valor de referência (*setpoint*) na região estável e na região instável.

Tabela 9.1 - Comparação do tempo de simulação com os dois métodos de integração.

	Tempo de Simulação (Integração Numérica)	Tempo de Simulação (Integração Analítica)
Referência do Controlador $r = 0,5$	2048,0875 s	235,8026 s
Referência do Controlador $r = 0,1$	1905,2276 s	222,3420 s

Segundo a tabela 9.1, com a técnica de integração analítica desenvolvida, o modelo computacional para simular numericamente o comportamento do cone de água, fica aproximadamente 10 vezes mais rápido do que com o Método de Quadratura de Gaussiana. Essa redução no custo computacional da simulação numérica do cone de água com Método dos Elementos de Contorno é um aporte importante do desenvolvimento deste trabalho de dissertação.

10 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

10.1 - CONCLUSÕES

Os resultados obtidos com o desenvolvimento desta dissertação permitem concluir que:

- O modelo protótipo considerado nesta dissertação para analisar o fenômeno do cone de água, foi adequado, simples e flexível para fazer uma descrição quantitativa de tal fenômeno e prever as condições sob as quais o fluido pode ser retirado de forma mais eficiente do reservatório, de tal modo que não ocorresse a irrupção do fluido indesejado no poço produtor.
- O Método dos Elementos de Contorno (MEC) constituiu-se em um método numérico eficiente para resolver a formulação matemática governante do modelo protótipo, especialmente por que permitiu modelar o movimento da superfície de contato dos fluidos como uma condição de contorno cinemática. Com o MEC foi desenvolvido um modelo numérico, por meio do qual se conseguiu simular o cone de água, e, portanto, obter a distribuição espacial e a evolução no tempo, tanto no regime transiente como no regime permanente, das variáveis que determinam o comportamento do cone. Isto foi fundamental na definição do sistema dinâmico usado para prever e controlar o comportamento do cone.
- Devido à condição de contorno cinemática não linear na superfície livre (superfície de contato dos fluidos), a simulação numérica do cone de água foi realizada em um esquema iterativo implementado no modelo computacional. Isto exige enormes recursos computacionais, dependendo da malha de discretização do contorno do reservatório, já que o tempo de cálculo é proporcional ao quadrado do número de elementos de discretização. A técnica de integração analítica desenvolvida nesta dissertação para calcular os termos das matrizes H e G quando se consideram elementos lineares contínuos de interpolação, diminuiu significativamente o custo computacional da simulação numérica do problema, já que comparando os resultados

da simulação em termos de tempo de execução, quando o modelo computacional realiza as integrações com o Método de Quadratura Gaussiana e com a técnica de integração analítica, a simulação fica aproximadamente 10 vezes mais rápida com a técnica de integração analítica.

- O sistema dinâmico definido para analisar o comportamento do cone de água, descrito em termos do potencial do nó central da malha de discretização da superfície livre do reservatório, representou razoavelmente bem a dinâmica do fenômeno.
- Com a metodologia desenvolvida para identificar o modelo matemático do sistema dinâmico, conseguiu-se representar o comportamento do cone de água, de acordo com os resultados das simulações realizadas. O modelo matemático do sistema dinâmico foi construído definindo várias regiões de análise dentro do intervalo em que a entrada do sistema (intensidade do sumidouro) pode variar para garantir a formação de um cone estável. A resposta do sistema dinâmico dentro de cada região de análise é aproximada como a resposta de um sistema linear de primeira ordem a uma excitação degrau. Como o ganho estático K e a constante de tempo τ são estimados para cada região de análise, podem-se interpolar os valores de K e τ para encontrar uma relação matemática que descreva a variação entre K e o potencial, e entre τ e o potencial. A partir do modelo matemático identificado do sistema dinâmico, foi determinado um modelo da planta no domínio de Laplace, com o qual foi projetado o sistema de controle em malha fechada, baseado em um controlador Proporcional-Integral não linear.
- O método aplicado para sintonizar os parâmetros do controlador PI em configuração paralela, que consistiu em alocar os polos da função de transferência do sistema de controle em malha fechada para certos valores de coeficiente de amortecimento ζ e frequência natural w_n definidos, permitiu que os parâmetros do controlador PI ficassem em função de potencial do nó central, que é a saída do sistema. Dessa forma, foi possível que o sistema de controle se adaptasse apropriadamente às variações da saída.

- Fizeram-se testes para verificar o comportamento do sistema de controle, quando a referência (*setpoint*) é definida na região estável e na região instável do potencial de fluxo do nó central. Demonstrou-se que a resposta do sistema de controle se comportou de forma estável, já que convergiu sempre na referência definida, satisfazendo de maneira ótima com os critérios de desempenho (tempo de acomodação e Sobre-Sinal Máximo).
- O principal resultado obtido com a simulação numérica do sistema de controle em malha fechada foi quando a referência (*setpoint*) do controlador definiu-se dentro da região de instabilidade, e demonstrou-se que garantindo a estabilidade do potencial dentro desta região, a intensidade do sumidouro converge para seu valor crítico, e, por conseguinte, a vazão de fluxo do reservatório converge e se mantém estável na vazão crítica. Quer dizer então, que se conseguiu extrair o fluido do reservatório à vazão crítica, evitando a formação do cone instável, ou seja, evitando que a superfície de contato dos fluidos irrompa no poço.

10.2 - RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A seguir, expõem-se algumas recomendações para o desenvolvimento de trabalhos futuros:

- Definir um modelo protótipo para simular o cone de água em três dimensões. Para simular o processo físico de escoamento de fluidos incompressíveis em meios porosos de forma mais real e aproximada, pode-se considerar o caso de um meio poroso anisotrópico, ou seja, a permeabilidade é descrita como um tensor dentro da formulação matemática do modelo protótipo. Também, podem-se incorporar os efeitos da capilaridade (forças capilares) na condição de contorno cinemática imposta na superfície de contato dos fluidos, para analisar como se comporta o fenômeno do cone de água sob esta condição. Seria interessante considerar o caso de uma distribuição de fontes/sumidouros na simulação numérica, para tentar maximizar a vazão de fluxo do reservatório, evitando a formação do cone instável.

- Para melhorar a resposta do modelo numérico (computacional) desenvolvido através do Método dos Elementos de Contorno, sugere-se a implementação de elementos de discretização de ordem mais elevada, utilizando funções de interpolação (funções de forma) *B-SPLINES*, com o propósito de representar de forma mais precisa a geometria do reservatório e o comportamento das variáveis físicas do problema dentro de cada elemento de contorno.
- Para obter uma maior precisão e eficiência computacional no cálculo da solução numérica do problema, sugere-se a implementação de uma técnica de refinamento adaptativo da malha de discretização do contorno no modelo numérico (computacional) desenvolvido. Sugere-se também, a implementação de uma técnica iterativa mais ótima para resolver o sistema de equações algébricas resultante, devido ao tamanho elevado das matrizes.
- A respeito da caracterização dinâmica do cone de água, sugere-se aplicar outro método de identificação, para melhorar a qualidade do modelo matemático do sistema dinâmico que descreve o comportamento do cone.
- Como recomendação final, sugere-se o projeto de um sistema de controle mais robusto, que considere os sinais de ruído e as perturbações que podem afetar a estabilidade da planta controlada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aarnes, J.E., Gimse, T. and Lie, K.-A., 2007, “An introduction to the numerics of flow in porous media using Matlab”, Geometric modelling, numerical simulation, and optimization: applied mathematics at SINTEF, Springer Verlag, pp. 307-360.
- Ahmed, T., 2006, “Reservoir Engineering Handbook”, Gulf Professional Publishing, Linacre House, Jordan Hill, Oxford, UK, third edition, 1454 p.
- Alves, L.M., 2006, “Apostila de Método dos Elementos de Contorno”, Universidade Federal do Paraná, Paraná, Brasil, 489 p.
- Armenta, M., 2003, “Mechanisms and Control of Water Inflow to Wells in Gas Reservoirs with Bottom-Water Drive”, Tese de Doutorado, Louisiana State University, Louisiana, USA.
- Bailey, B., *et al.*, 2001, “Water Control”, Oilfield Review, 6, 31.
- Banerjee, P.K., 1994, “The Boundary Element Methods in Engineering”, McGraw-Hill College, London, UK, second edition, 496 p.
- Bastian, P., 1999, “Numerical Computation of Multiphase Flows in Porous Media”, Tese de Doutorado, University of Kiel, Schleswig-Holstein, Alemanha.
- Braga, L.M., 2012, “O método dos elementos de contorno rápido com expansão em multipólos aplicado a problemas de condução de calor”, Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil.
- Brebbia, C.A. and Dominguez, J., 1992, “Boundary Elements: An Introductory Course”, WITPress Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, second edition, 325 p.
- Cavalcante, J.R., 1996, “Previsão de comportamento de cone de água”, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, Brasil.
- Chen, Z., Huan, G. and Ma Y., 2006, “Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media”, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 549 p.
- Corrêa, A.C.F., “Escoamento de Fluidos em Meios Porosos”, Petrobras/SEN-BA, Salvador, Bahia, Brasil (Apostila).

- Escobar, F.H., 2008, “Fundamentos de Ingeniería de Yacimientos”, Editorial Universidad Surcolombiana, Neiva, Colombia, 220 p.
- Ghimire, B., 2009, “Hydraulic Analysis of Free-Surface Flows into Highly Permeable Porous Media and its Applications”, Tese de Doutorado, Kyoto University, Japão.
- Heinemann, Z.E., 2003, “Fluid Flow in Porous Media”, Montanuniversität Leoben, Textbook Series, Leoben, Áustria.
- Ibelegbu, C. and Onyekonwu, M., 2010, “Analysis of Cone Formation and Water Movement in Horizontal Wells”, European Journal of Scientific Research, Vol. 39, pp. 477-488.
- Jack, H., 2012, “Dynamic System Modeling and Control”, Publisher: Hugh Jack, Michigan, USA, first edition, 688 p.
- Kane, J.H., 1994, “Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 676 p.
- Katsikadelis, J.T., 2002, “Boundary Elements: Theory and Applications”, Elsevier Science Ltd, Oxford, UK, first edition, 336 p.
- Kuo, B.C., 1996, “Sistemas de control automático”, Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., México, séptima edición, 930 p.
- Liggett, J.A. and Liu, P.L., 1983, “Boundary Integral Equation Method for Porous Media Flow”, George Allen & Unwin Ltd, London, UK, 255 p.
- Ljung, L. and Glad, T., 1994, “Modeling of Dynamic Systems”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 371 p.
- Lucas, S.K. and Kucera, A., 1996, “A boundary integral method applied to the 3D water coning problem”, Physics of Fluids, Vol. 8, pp. 3008-3022.
- Lucas, S.K., 2004, “Maximising output from oil reservoirs without water breakthrough”, The ANZIAM Journal, Vol. 45, No 03, pp. 401-422.
- Lucas, S.K., Blake, J. R. and Kucera, A., 1991, “A boundary-integral method applied to water coning in oil reservoirs”, J. Austral. Math. Soc. Ser. B, Vol. 32, pp. 261-283.
- Ogata, K., 2003, “Engenharia de Controle Moderno”, Pearson Prentice Hall, São Paulo, Brasil, quarta edição, 788 p.
- Rosa, A.J., Carvalho, R.S. e Xavier, J.A.D., 2006, “Engenharia de Reservatórios de Petróleo”, Editora Interciência, Brasil, 832 p.

- Saavedra, I.I., 2002, "Método de soluciones fundamentales mejorado para flujo tridimensional con superficie libre en medio poroso", Tese de Doutorado, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela.
- Shames, I.H., 1992, "Mechanics of Fluids", McGraw-Hill Higher Education, New York, USA, third edition, 858 p.
- Soares, M.M. e Simões, R.D.P., 2012, "Análise de escoamento bifásico em meio poroso", Projeto de Graduação, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil.
- Thomas, J.E., 2001, "Fundamentos de Engenharia de Petróleo", Editora Interciência/Petrobras, Rio de Janeiro, Brasil, 278 p.
- Vélez, M.V., 2004, "Hidráulica de Aguas Subterráneas", Editorial: Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia, tercera edición, 404 p.
- Zamonsky, G., Lacentre, P.E., Larreteguy, A.E., 2004, "Análisis de sensibilidad de la producción de agua a parámetros clave de reservorio y operacionales utilizando un modelo de simulación de pozo", *Mecánica Computacional*, Vol. 23, pp. 1861-1875.
- Zhang, H. and Hocking, G.C., 1997, "Axisymmetric Flow in an Oil Reservoir of Finite Depth Caused by a Point sink above an Oil-Water Interface", *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 32, No 4, pp. 365-376.
- Zhang, H., Baray, D.A. and Hocking, G.C., 1999, "Analysis of continuous and pulsed pumping of a phreatic aquifer", *Advances in Water Resources*, Vol. 22, No 6, pp. 623-632.

APÊNDICES

APÊNDICE A - CONCEITOS MATEMÁTICOS PRELIMINARES

Neste apêndice são desenvolvidas as relações matemáticas necessárias para a compreensão e fundamentação teórica do Método dos Elementos de Contorno (MEC).

A 1.1 – TEOREMA DE GAUSS-GREEN

O teorema de Gauss-Green é uma identidade fundamental que relaciona a integral da derivada de uma função $f(x, y)$ sobre um domínio Ω com a integral dessa função sobre o contorno S do respectivo domínio (Katsikadelis, 2002). Para obter essa relação matemática em 2-D, considera-se a figura A1.1.

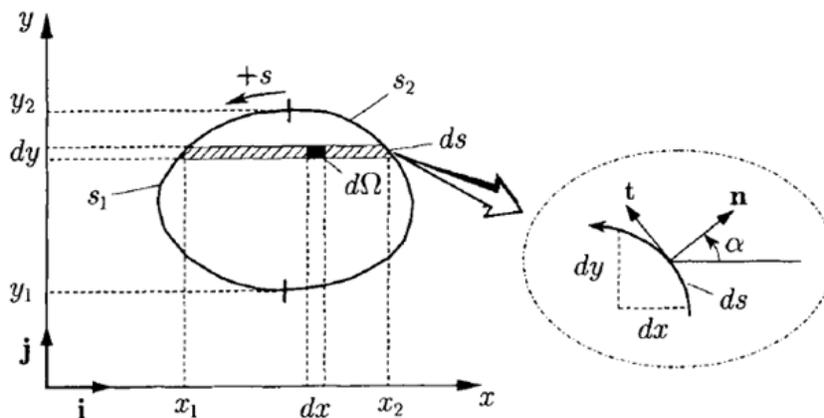


Figura A1.1 - Integração sobre um domínio plano Ω delimitado pela curva S (Katsikadelis, 2002).

A integral da função $f(x, y)$ sobre Ω pode ser escrita como uma integral dupla, para a qual a integração é realizada primeiro em relação a x e depois em relação a y . Assim, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} d\Omega = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial x} dx \right) dy = \int_{y_1}^{y_2} [f(x_2, y) - f(x_1, y)] dy \quad (\text{A1-1})$$

Onde,

$$x_1 = x_1(y) \quad x_2 = x_2(y) \quad (A1-2)$$

Segundo a geometria diferencial mostrada na figura A1.1, obtém-se a seguinte expressão para o vetor tangente unitário ao contorno S (Kane, 1994):

$$\mathbf{t} = \frac{dx}{dS} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dS} \hat{\mathbf{j}} \quad (A1-3)$$

Dessa forma, têm-se as seguintes relações:

$$t_x = \frac{dx}{dS} \quad t_y = \frac{dy}{dS} \quad (A1-4)$$

Considere que o vetor \mathbf{n} seja um vetor unitário normal ao contorno S apontando para fora do domínio. Assim, tem-se que:

$$\mathbf{n} = n_x \hat{\mathbf{i}} + n_y \hat{\mathbf{j}} \quad (A1-5)$$

Como \mathbf{t} e \mathbf{n} são perpendiculares, o produto escalar dos dois vetores unitários é zero:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0 \quad \rightarrow \quad n_x t_x + n_y t_y = 0 \quad (A1-6)$$

Para satisfazer a condição dada na equação (A1-6), têm-se duas possibilidades:

$$\begin{cases} (i) \ n_x = t_y \ e \ n_y = -t_x \\ (ii) \ n_x = -t_y \ e \ n_y = t_x \end{cases} \quad (A1-7)$$

Da figura A1.1, tem-se que $t_x < 0$ e $t_y > 0$, e, portanto, as componentes de \mathbf{n} satisfazem que: $n_x > 0$ e $n_y > 0$. Daí, conclui-se que:

$$\begin{aligned} n_y &= -t_x = -\frac{dx}{dS} \\ n_x &= t_y = \frac{dy}{dS} \end{aligned} \quad (A1-8)$$

A partir da equação (A1-8), obtêm-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
dx &= -n_y dS \\
dy &= n_x dS
\end{aligned}
\tag{A1-9}$$

Substituindo as relações dadas acima na equação (A1-1), segue:

$$\int_{y_1}^{y_2} [f(x_2, y) - f(x_1, y)] dy = \int_{S_2} f(x_2, y) n_x dS - \int_{S_1} f(x_1, y) n_x dS
\tag{A1-10}$$

Na expressão anterior, a integração sobre S_1 é realizada na direção negativa (sentido horário) quando y varia de y_1 para y_2 . Usando a direção uniforme para a integração sobre S , os termos dados na expressão (A1-10) podem ser combinados em uma única expressão (Katsikadelis, 2002):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} d\Omega = \int_S f n_x dS
\tag{A1-11}$$

Desenvolvendo a mesma relação para $\frac{\partial f}{\partial y}$, tem-se que:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} d\Omega = \int_S f n_y dS
\tag{A1-12}$$

As relações anteriores podem ser repetidas em um contexto 3D para obter resultados completamente análogos. Desta vez, o teorema de Gauss-Green relaciona a integral de volume da derivada da função à integral de superfície da própria função (Kane, 1994). Nesta equação x_i e n_i podem ser x, y, z e n_x, n_y, n_z , dependendo do valor de i .

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x} dV = \iiint_x \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx \right) dy dz = \int_S f n_x dS
\tag{A1-13}$$

Generalizando, tem-se que:

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} dV = \int_S f n_i dS
\tag{A1-14}$$

A 1.2 – TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

O teorema da divergência é uma ligeira variação do teorema de Gauss-Green. A fim de obter esta relação, considera-se $f = f_i$ como a i -ésima componente de um campo vetorial na equação (A1-14). Dessa forma, obtém-se (Kane, 1994):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} d\Omega = \int_S f_i n_i dS \quad (\text{A1-15})$$

Usando a fórmula anterior com $i = 1, 2, 3$, e somando os resultados, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) d\Omega = \int_S (f_1 n_1 + f_2 n_2 + f_3 n_3) dS \quad (\text{A1-16})$$

Logo, a divergência de um campo vetorial f em um ponto no interior do domínio Ω é dada por:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{f}) d\Omega = \int_S (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (\text{A1-17})$$

Na expressão dada acima, o operador ∇ é definido como:

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{A1-18})$$

e representa o operador diferencial que produz o gradiente de um campo escalar.

A quantidade $\nabla \cdot \mathbf{f}$ é referida como a divergência de um campo vetorial f em um ponto dentro do domínio Ω , enquanto a quantidade $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})$ é referida como o fluxo do campo vetorial em um ponto sobre o contorno S .

A 1.3 – SEGUNDA IDENTIDADE DE GREEN

Considerando as funções $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$, as quais são duas vezes continuamente diferenciáveis em Ω e uma vez em S , é definida a segunda identidade de Green a partir do Teorema da Divergência. Define-se f como (Katsikadelis, 2002):

$$\mathbf{f} = v\nabla u$$

(A1-19)

A divergência de \mathbf{f} é dada por:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{f} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) \cdot \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + v \frac{\partial u}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + v \frac{\partial u}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) \\ \nabla \cdot \mathbf{f} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \nabla u \cdot \nabla v + v \nabla^2 u$$

(A1-20)

Onde ∇^2 é conhecido como operador Laplaciano ou operador Harmônico, e é dado por (Katsikadelis, 2002):

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(A1-21)

Aplicando o Teorema da Divergência na expressão (A1-20), tem-se:

$$\int_V (\nabla u \cdot \nabla v + v \nabla^2 u) dV = \int_S (v \nabla u \cdot \mathbf{n}) dS$$

(A1-22)

A relação anterior pode ser escrita trocando u e v na expressão dada para f :

$$\int_V (\nabla v \cdot \nabla u + u \nabla^2 v) dV = \int_S (u \nabla v \cdot \mathbf{n}) dS$$

(A1-23)

Subtraindo a equação (A1-22) e a equação (A1-23) obtém-se a segunda identidade de Green (Kane, 1994):

$$\int_V (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v) dV = \int_S (v \nabla u \cdot \mathbf{n} - u \nabla v \cdot \mathbf{n}) dS$$

(A1-24)

A derivada de uma função escalar na direção normal é definida como:

$$\frac{\partial}{\partial n} \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla = (n_x \hat{\mathbf{i}} + n_y \hat{\mathbf{j}} + n_z \hat{\mathbf{k}}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} n_x + \frac{\partial}{\partial y} n_y + \frac{\partial}{\partial z} n_z$$

(A1-25)

Substituindo a definição da derivada normal na equação (A1-22), a segunda identidade de Green é expressa por:

$$\int_V (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v) dV = \int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS$$

(A1-26)

APÊNDICE B - SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DA EQUAÇÃO POTENCIAL

A característica principal do Método dos Elementos de Contorno é o uso de certas soluções conhecidas para o problema em consideração. A resposta de regime permanente de um meio infinito a uma fonte pontual unitária é uma dessas chamadas soluções fundamentais (Kane, 1994). Considera-se uma fonte pontual localizada no ponto $\mathbf{d}(x_d, y_d)$ e um ponto de amostragem $\mathbf{x}(x, y)$ chamado também de ponto campo. O potencial $\Phi^* = \Phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ produzido em um ponto \mathbf{x} satisfaz a equação:

$$\nabla^2 \Phi^* = \frac{-\delta(\mathbf{x} - \mathbf{d})}{K} \quad (\text{B1-1})$$

A solução particular singular da equação (B1-1) é chamada a solução fundamental da equação potencial dada em (5-12). Esta é determinada escrevendo a equação (B1-1) em coordenadas polares, com origem no ponto fonte \mathbf{d} . Já que esta solução é de simetria axial em relação à fonte e é independente do ângulo polar θ , a equação (B1-1) torna-se (Katsikadelis, 2002):

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi^*}{dr} \right) = \frac{-\delta(\mathbf{x} - \mathbf{d})}{K} \quad (\text{B1-2})$$

Onde,

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{d}| = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2} \quad (\text{B1-3})$$

O lado direito da equação (B1-1) se anula em todos os pontos do plano, exceto na origem $r = 0$, onde tem um valor infinito. Salvo $r = 0$, a equação (B1-2) é escrita como (Katsikadelis, 2002):

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi^*}{dr} \right) = 0 \quad (\text{B1-4})$$

Depois de integrar duas vezes, obtém-se:

$$\Phi^* = A \ln r + B \quad (\text{B1-5})$$

Onde A e B são constantes arbitrárias. Já que está se procurando uma solução particular, pode-se definir $B = 0$. A outra constante, A , pode ser determinada da seguinte forma:

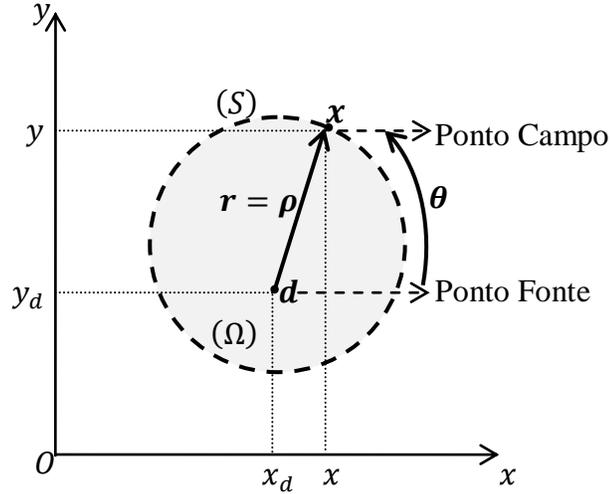


Figura B1.1 - Domínio circular Ω de radio ρ com fonte d (Katsikadelis 2002, modificado).

Devido a que o problema é de simetria axial, tem-se (Katsikadelis, 2002):

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial n} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} = A \frac{1}{r}$$

$$dS = r d\theta$$

(B1-6)

Aplicando a segunda identidade de Green para $u = 1$ e $v = A \ln r$, segue:

$$-\int_{\Omega} \nabla^2 \Phi^* d\Omega = -\int_S \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} dS$$

(B1-7)

Onde Ω é o círculo com centro no ponto d e raio $r = \rho$, conforme se mostra na figura B1.1.

Usando então a equação (B1-1), a relação dada em (B1-7) é escrita como:

$$\int_{\Omega} \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{d})}{K} d\Omega = -\int_0^{2\pi} A \frac{1}{\rho} \rho d\theta$$

$$\frac{1}{K} = -2\pi A$$

$$A = -\frac{1}{2\pi K}$$

(B1-8)

Assim, a solução fundamental torna-se:

$$\Phi^* = -\frac{1}{2\pi K} \ln r \tag{B1-9}$$

Da equação (B1-3) é evidente que a solução fundamental não muda de valor quando os pontos \mathbf{d} e \mathbf{x} trocam a sua posição. Isto significa que Φ^* é simétrica com relação a esses pontos (Katsikadelis, 2002):

$$\Phi^*(\mathbf{x} - \mathbf{d}) = \Phi^*(\mathbf{d} - \mathbf{x}) \tag{B1-10}$$

A solução fundamental (B1-9) é também conhecida na literatura como função de Green para o espaço livre.