Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Um estudo sobre problemas elípticos singulares perturbados por termos sublineares

por

Laura Cristina Lobato de Olivindo

Brasília

2013

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de matemática

Um estudo sobre problemas elípticos singulares perturbados por termos sublineares

por

Laura Cristina Lobato de Olivindo *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 09 de Agosto de 2013

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Elves Alves de Barros e Silva - UnB - Orientador

Prof. Dra. Magda Soares Xavier - Membro (UFES)

Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares - Membro (USP)

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado - Membro (UnB)

Prof. Dra. Manuela Caetano M. de Rezende - Membro (UnB)

*A autora foi bolsista do CNPQ durante a elaboração deste trabalho.

*"A única forma de chegar ao impossível,
é acreditar que é possível"*

Lewis Carroll

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelas chances concedidas, por me ajudar a superar as dificuldades e pela força ao longo do caminho. Aos meus pais, por todo o seu esforço e dedicação para que eu pudesse ter uma educação de qualidade. À minha irmã pela compreensão, amor e carinho. Obrigada por serem a minha família e por entenderem a minha ausência em alguns momentos. Amo vocês!

Ao meu marido, por me apoiar e incentivar durante todos esses anos, por acreditar em mim (mais do que eu mesma acredito), por comemorar cada vitória comigo e por entender os momentos em que precisei me ausentar do nosso lar. Pelo seu amor, carinho, força e fé. Obrigada por estar sempre ao meu lado. Te amo para sempre!

Agradeço à minha família, por todo o carinho. Aos amigos com quem tive a chance de conviver durante a pós-graduação. Obrigada pelo apoio nos momentos difíceis e pelos momentos de diversão e descontração. Em especial, agradeço aos amigos Mariana e Claudiney, por estarem sempre dispostos a me ouvir e pelos seus conselhos.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática, especialmente ao professor José Alfredo (in memorian) que sempre foi um exemplo para mim! Infelizmente não tive o tempo necessário para expressar a minha gratidão. Boa parte da minha formação devo à você, Mestre, onde quer que esteja.

Obrigada aos professores Marcelo, Manuela, Simone, Sérgio e Magda por participarem da banca. Ao professor Elves, pela orientação, pelo apoio e por estar sempre presente durante a elaboração desta tese.

Agradeço ao CNPq pelo apoio finaceiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos um problema elíptico singular sob a presença de uma perturbação sublinear em domínios suaves e limitados de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. Estabelecemos resultados de existência de soluções positivas e não negativas combinando métodos variacionais e perturbações no termo singular. A principal característica do nosso resultado sobre existência de soluções positivas é permitir que o termo singular $g(x,t)$ divirja para $+\infty$ ou $-\infty$ quando t se aproxima da origem em certos pontos do domínio. Resultados sobre multiplicidade, não existência e concentração de soluções também são abordados.

Palavras chave: *problemas singulares, métodos variacionais, argumentos de perturbação*

Abstract

In this work we study an elliptic singular problem under the presence of a sublinear perturbation in smooth and bounded domains of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. We establish existence results for positive and nonnegative solutions combining variational methods and perturbation arguments in the singular term. The main feature of our work about the existence of positive solutions is to allow the singular term $g(x,t)$ to diverge to $+\infty$ or $-\infty$ when t approaches the origin in certain points of the domain. Multiplicity, nonexistence and the concentration of the solutions are also tackled.

Key words: *singular problems, variational methods, perturbation arguments*

Sumário

Notações

- $L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } ; \int\limits_{\Omega} |f|^p dx < \infty \right\}, \ 1 \leq p < \infty$;
- $W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^1_{loc}(\Omega) \ ; \text{ para todo multiíndice } |\alpha| \leq k, \ D^\alpha u \text{ existe e } \ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \right\}, 1 \leq p \leq \infty$;
- $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$;
- $H^1_0(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com a norma de $H^1(\Omega)$;
- $L(X,Y) = \{T : X \to Y \ ; \ T \text{ é linear.}\}$;
- $|A|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto A;
- ∇ denota o operador gradiente;
- Δ denota o operador laplaciano;
- $\| \cdot \|$ denota norma de H^1_0;
- $\| \cdot \|_E$ denota a norma de E;
- $u^+ = \max\{u(x), 0\}$;
- $u^- = \max\{-u(x), 0\}$;
- $A \subset\subset B$ significa que A está compactamente imerso em B, ou seja A é compacto e $A \subset B$;
- χ_A denota a função característica do conjunto A.

Introdução

Neste trabalho estamos interessados em soluções positivas e em soluções não negativas e não triviais do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = (-g(x,u) + \lambda f(x,u))\chi_{\{u>0\}}, & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $N \geq 1$, λ é um parâmetro real, a função g pode apresentar singularidade na origem e a função f é sublinear no infinito.

Problemas singulares do tipo (P_λ) aparecem no estudo de fluídos não-Newtonianos, modelos de formação biológica, fluxos de pseudoplásticos, fluídos mecânicos, na teoria da condução do calor em materiais que conduzem eletricidade e em muitas outras áreas (veja [22] e suas referências).

Neste trabalho utilizamos métodos variacionais combinados com perturbações no termo singular e no domínio. Os métodos utilizados nos levam à obtenção de soluções, no sentido das distribuições, nos espaços $H_0^1(\Omega)$ e $H_{loc}^1(\Omega)$.

Na literatura matemática encontramos uma vasta quantidade de trabalhos voltados ao estudo de problemas singulares. Citamos, a seguir, alguns resultados obtidos nesta área, enfatizando as características das singularidades estudadas e não mencionando as perturbações que foram consideradas pelos autores, exceto aquelas que estão diretamente associadas ao nosso trabalho.

Crandall, Rabinowitz e Tartar [14] estudaram o problema de Dirichlet com uma não linearidade singular e um operador mais geral do que o laplaciano. Supondo que o termo singular satisfaz $\lim_{t\to 0^+} g(x,t) = -\infty$, estes autores estabeleceram a existência de uma solução positiva para o problema em $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$. Quando o termo não linear é monótono, eles regularizaram a função singular $g(x,t)$ tomando $g(x,t+\varepsilon)$, para $\varepsilon > 0$, e analisaram o problema resultante utilizando o método de sub-supersolução. No caso em que g não é monótona, utilizou-se o método de bifurcação. Também foi apresentado um estudo sobre o comportamento das soluções e uma estimativa para $|\nabla u|$ próximo à fronteira de Ω, $\partial\Omega$.

Sun, Wu e Long [30] e Perera e Silva [33] estudaram o Problema (P_λ) considerando os operadores laplaciano e p-laplaciano, respectivamente, no caso particular em que $g(x,t) = -a(x)t^{-\beta}$, $\beta \in (0,1)$ e $a(x) \geq 0$ em Ω. Nestes trabalhos foram apresentados resultados de existência e multiplicidade de soluções positivas obtidos via métodos variacionais, em [30], e via uma combinação de métodos variacionais, método de sub e supersolução e perturbação da singularidade, em [33]. Posteriormente, Perera e Silva [34] contemplaram o operador p-laplaciano e uma classe mais geral de singularidade, tratando o caso em que $g(x,t)$ pode mudar de sinal longe da origem e onde não se impõe qualquer restrição inferior quanto ao crescimento de g com respeito à variável t. Abordando o caso em que a singularidade se comporta como $\lim_{t\to 0^+} g(x,t) = -\infty$, podemos citar também os trabalhos [9], [13], [24], [26] e [27] envolvendo o operador laplaciano. Em se tratando do operador p-laplaciano, além dos trabalhos acima mencionados, citamos Gonçalves, Rezende e Santos [25].

Dávila e Montenegro [16] e Diaz, Morel e Oswald [19] apresentaram resultados de existência para (P_λ) quando $g(x,t) = t^{-\beta}$, com $0 < \beta < 1$, aplicando o método de sub-supersolução. Combinado a este método estão um argumento de perturbação da singularidade, em [16], e métodos variacionais, em [19]. Também citamos o trabalho de Choi, Lazer e McKenna [10] como referência para este caso específico. No caso particular em que $g(x,t) = t^{-\beta}$ e $f(x,t) = t^p$, com $0 < \beta, p < 1$, Dávila e Montenegro [18] estabeleceram a existência de soluções radiais para o Problema (P_λ) no caso em que Ω é a bola unitária centrada na origem. Problemas singulares, sob a hipótese $\lim_{t\to 0^+} g(x,t) = +\infty$, também foram abordados por [31], [32] e [41].

Nosso objetivo, neste trabalho, é estudar a existência de soluções positivas e de soluções não negativas e não triviais para (P_λ), abordando os casos em que $\lim_{t\to 0^+} g(x,t) = -\infty$ e/ou $\lim_{t\to 0^+} g(x,t) = +\infty$, e descrever o conjunto dos valores do parâmetro λ para os quais o problema admite solução quando a função f apresenta comportamento sublinear no infinito. Ao longo deste trabalho, iremos denotar por λ_1 o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ em Ω, com condição de Dirichlet na fronteira, e φ_1 denotará a autofunção associada a este autovalor.

O Capítulo 1 é dedicado ao estudo da existência de soluções positivas para (P_λ) quando $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ e $g \in C(\overline{\Omega} \times (0,\infty))$ são funções satisfazendo:

(g_1) $\displaystyle\liminf_{t\to\infty} \frac{g(x,t)}{t} > -\lambda_1$, uniformemente em $\overline{\Omega}$;

(g_2) existe $0 < \gamma < 1$ tal que $\limsup_{t\to 0^+} g(x,t)t^\gamma < \infty$, uniformemente em $\overline{\Omega}$;

(f_1) $\displaystyle\liminf_{t\to 0^+} \frac{f(x,t)}{t} > 0$, uniformemente em $\overline{\Omega}$;

(f_2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} = 0$, uniformemente em $\overline{\Omega}$.

A seguir, enunciamos o primeiro resultado do nosso trabalho.

Teorema 1.1. *Suponha (g_1), (g_2), (f_1) e (f_2) satisfeitas. Então, existe $\lambda^0 \geq 0$ tal que o problema (P_λ) possui uma solução positiva $u \in H^1_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, para cada $\lambda > \lambda^0$.*

Shi e Yao [38] estudaram (P_λ) quando $g(x,t) = a(x)t^{-\beta}$ e $f(x,t) = t^p$, com $0 < \beta, p < 1$, e apresentaram resultados de existência de solução clássica em função do parâmetro λ. Estes autores consideraram, inclusive, o caso em que a muda de sinal em Ω. Isto implica que existem pontos de Ω onde temos $\lim_{t\to 0^+} g(x,t) = -\infty$ e pontos onde $\lim_{t\to 0^+} g(x,t) = +\infty$. Ghergu e Radulescu [22] estudaram um problema similar a (P_λ), com $g(x,t) = a(x)g(t)$, diferenciando-se pela inserção de um segundo termo não linear $\mu h(x)$, com $h > 0$ e $\mu \geq 0$. Supondo que $\lim_{t\to 0^+} g(t) = +\infty$ e que f, g são funções Hölder contínuas e monótonas satisfazendo (f_2) e (g_2), os autores verificaram a existência de soluções clássicas via o método de sub-supersolução, abordando também o caso em que o potencial a muda de sinal.

Enfatizamos que, sob as condições (g_1) e (g_2), podem existir pontos distintos $x_1, x_2 \in \Omega$ tais que $\lim_{t\to 0^+} g(x_1,t) = +\infty$ e $\lim_{t\to 0^+} g(x_2,t) = -\infty$ abrangendo, neste aspecto, os casos tratados em [38] e em

[22], uma vez que não impomos restrição no decaimento de $g(x_2, t)$, quando $t \to 0^+$. Por outro lado, o Teorema 1.1 também engloba os casos tratados em [30], [33] e [34] uma vez que podemos ter $\lim_{t\to 0^+} g(x_1, t) = +\infty$. Em particular, mencionamos que o Teorema 1.1 permite estabelecer a existência de solução positiva para o Problema (P_λ) com $g(x, t) = \sin(1/t)t^{-\beta}$ ou $g(x, t) = \sin^+(1/t)t^{-\beta} - \sin^-(1/t)e^{\frac{1}{t}}$, $0 < \beta < 1$.

Definindo $\Lambda = \inf\{\lambda > 0; (P_\lambda)$ possui solução positiva em $H^1_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})\}$, como consequência da demonstração do Teorema 1.1, temos o seguinte corolário:

Corolário 1.2. *Suponha (g_1), (g_2), (f_1), (f_2) satisfeitas e $f(x, t) \geq 0$ em $\overline{\Omega} \times [0, \infty)$. Então, $0 \leq \Lambda < \infty$ e (P_λ) tem uma solução positiva $u_\lambda \in H^1_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ para todo $\lambda > \Lambda$.*

Para demonstrar o Teorema 1.1, consideramos, inicialmente, uma condição mais forte do que (g_1).

$(\tilde{g}_1)$ existem constantes $\alpha \geq 0$ e $C < \lambda_1$ tais que $g(x, t) \geq -Ct - \alpha$, para todos $x \in \overline{\Omega}$ e $t > 0$.

Quando a condição acima é satisfeita, utilizamos uma técnica de perturbação no domínio Ω e métodos variacionais para estabelecer a existência de uma solução positiva para (P_λ), sob as hipóteses $(\tilde{g}_1)$, (g_2), (f_1) e (f_2). Em seguida, supondo que g satisfaz (g_1), utilizamos este resultado e um argumento de perturbação da singularidade para estabelecer o Teorema 1.1. Destacamos que, sob a hipótese $(\tilde{g}_1)$, o Teorema 1.1 e o Corolário 1.2 podem ser enunciados para funções no espaço $H^1_0(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Nos demais capítulos de nosso trabalho, vamos direcionar o estudo de (P_λ) para o caso em que a singularidade satisfaz $\lim_{t\to 0^+} g(x, t) = +\infty$. No Capítulo 2 verificamos que, quando o parâmetro λ é suficientemente grande, existem duas soluções não negativas, não triviais e ordenadas para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = (-a(x)g(u) + \lambda f(x, u))\chi_{\{u>0\}}, & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$P_{\lambda,a}$}$$

Choi, Lazer e McKenna [10] demonstraram a existência de duas soluções positivas para $(P_{\lambda,a})$, em dimensão $N = 1$, supondo que $a \equiv 1$, $g(t) = t^{-\beta}$, com $0 < \beta < \frac{1}{3}$, e $f \equiv 1$. Montenegro e Silva [31] estudaram o problema acima via métodos variacionais quando $a(x) \equiv 1$, $g(t) = t^{-\beta}$ e $f(x, t) = t^p$, com $0 < \beta, p < 1$. Considerando uma perturbação no termo singular, $g_\varepsilon(t)$, e utilizando o Teorema do Passo da Montanha, os autores em [31] demonstraram a existência de duas soluções distintas, não negativas e não triviais $u^1_\varepsilon, u^2_\varepsilon$ para $(P_{\lambda,a})$, com $g = g_\varepsilon$. Para verificar que as soluções obtidas convergem, quando $\varepsilon \to 0$, para duas soluções distintas, não negativas e não triviais de $(P_{\lambda,a})$, é essencial uma estimativa local para o gradiente das soluções u_ε.

Em nosso estudo sobre a multiplicidade de soluções para $(P_{\lambda,a})$, supomos que $a \in C^{1,\nu}(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \nu < 1$, $f \in C(\overline{\Omega} \times [0, \infty)) \cap C^{1,\mu}(\overline{\Omega} \times (0, \infty))$, para algum $0 < \mu < 1$, e $g \in C^2((0, \infty))$ são funções satisfazendo:

$(\hat{a}_1)$ existe uma constante $a_0 > 0$ tal que $a(x) \geq a_0$ para todo $x \in \Omega$;

(f_3) existem $m_1, t_1 > 0$ e $0 < p < 1$ tais que $|f(x, t)| + |f_x(x, t)| + t|f_t(x, t)| \leq m_1 t^p$, para todo $0 < t < t_1$, uniformemente em $\overline{\Omega}$;

$(\hat{g}_1)$ existem $C < \frac{\lambda_1}{\|a\|_\infty}$ e $\alpha \geq 0$ tais que $g(t) \geq -Ct - \alpha$, para todo $t > 0$;

$(\hat{g}_2)$ existem $t_0 > 0$, $\theta \geq 0$ e $0 < \gamma < 1$ tais que $\gamma g(t) + tg'(t) > -\theta$, para todo $0 < t < t_0$;

$(\hat{g}_3)$ $\lim_{t\to 0^+} \frac{g(t)}{t^p} = \infty$, com p dado por (f_3);

(g_4) existe $t_2 > 0$ tal que $2g'(t) + tg''(t) \leq 0$ e $g'(t) \leq 0$, para todo $0 < t < t_2$.

A seguir, enunciamos um resultado de multiplicidade de soluções para $(P_{\lambda,a})$.

Teorema 2.1. *Suponha* $(\hat{a}_1)$, (f_1)-(f_3), $(\hat{g}_1)$-$(\hat{g}_3)$ *e* (g_4) *satisfeitas. Então, existe* $\tilde{\lambda} > 0$ *tal que o Problema* $(P_{\lambda,a})$ *possui duas soluções ordenadas, não negativas e não triviais em* $H_0^1(\Omega)$ *para* $\lambda \geq \tilde{\lambda}$.

Observe que o Teorema 2.1 estabelece multiplicidade de solução para o Problema $(P_{\lambda,a})$ quando $a(x) \equiv 1$ e $g(t) = t^{-\beta}$, $0 < \beta < 1$, ou $g(t) = -\log(t)$, complementando os resultados sobre a existência de soluções não triviais para $(P_{\lambda,a})$ (veja [15], [16] e [32], respectivamente), para estes casos específicos.

Na demonstração do Teorema 2.1, inspirados pelo trabalho de Montenegro e Silva [31], utilizamos a técnica de perturbação do termo singular combinada com métodos variacionais para obter duas soluções distintas, não negativas e não triviais para $(P_{\lambda,a})$. Destacamos que, na nossa demonstração do Teorema 2.1, também é essencial uma estimativa para o gradiente das soluções do problema perturbado. Outro ponto que merece ser realçado é que conseguimos estabelecer uma ordenação entre as soluções do problema $(P_{\lambda,a})$, obtendo uma informação adicional para o resultado apresentado em [31].

Também é pertinente observar que, como consequência dos Teoremas 1.1 e 2.1, sob as hipóteses do Teorema 2.1, o Problema $(P_{\lambda,a})$ possui uma solução positiva e duas soluções não negativas e não triviais, para $\lambda > \max\{\lambda^0, \tilde{\lambda}\}$. No entanto, não podemos afirmar que uma das soluções obtidas no Teorema 2.1 é a solução positiva dada pelo Teorema 1.1.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo de não existência de soluções para (P_λ) e $(P_{\lambda,a})$. Dividimos os resultados obtidos em duas classes: em função do parâmetro λ, estudada na Seção 3.1, e em função do termo singular, estudada na Seção 3.2.

Zhang e Liao [41] apresentaram um resultado de não existência para $(P_{\lambda,a})$, quando $g(t) = t^{-\beta}$, $f(x,t) = t^p$, com $0 < \beta, p < 1$, e o potencial a é localmente Hölder contínuo, não negativo e não trivial. Aplicando o método de sub-supersolução, os autores demonstraram que não existe solução positiva e clássica para $(P_{\lambda,a})$ quando λ é suficientemente pequeno. Ghergu e Radulescu [22] estudaram um problema similar a $(P_{\lambda,a})$ e estabeleceram um resultado sobre a não existência de soluções positivas quando o parâmetro λ é suficientemente pequeno. Neste caso, os autores consideraram funções, a, f e g, Hölder contínuas, a estritamente positiva, g não negativa e $f(x,t)$, $g(t)$ e $f(x,t)/t$ monótonas em relação à variável t. Diaz, Morel e Oswald [19] também apresentaram um resultado similar para $(P_{\lambda,a})$, quando $a(x) \equiv 1$, $f \in L^1(\Omega)$, $f \geq 0$ e $g(x,t) = t^{-\beta}$, com $0 < \beta < 1$.

No nosso primeiro resultado do Capítulo 3, consideramos $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ e $g \in C(\overline{\Omega} \times (0,\infty))$ satisfazendo:

$(\overline{g}_1)$ existe uma constante $C < \lambda_1$ tal que $g(x,t) \geq -Ct$, para todos $t > 0$ e $x \in \overline{\Omega}$;

(g_3) $\liminf\limits_{t\to 0^+} g(x,t) \geq h(x) \geq 0$ com $h(x) \not\equiv 0$ em Ω;

e, inspirados pelo trabalho de [22], estabelecemos o seguinte teorema

Teorema 3.1. *Suponha* $(\overline{g}_1)$, (g_3) *e* (f_2) *satisfeitas. Então, existe* $\lambda^* > 0$ *tal que o Problema* (P_λ) *não possui solução positiva em* $H_0^1(\Omega)$, *para* $0 < \lambda < \lambda^*$.

Observe que o resultado acima exige apenas que g seja limitada inferiormente por uma função linear, que f seja sublinear no infinito e que, quando $t \to 0^+$, a função g não convirja para a função identicamente nula. Dessa forma, melhoramos o resultado apresentado em [22].

Como uma consequência direta dos Teoremas 1.1 e 3.1, sob as hipóteses $(\bar{g}_1)$, (g_2), (g_3), (f_1) e (f_2), existem $0 < \lambda^* \leq \lambda^0$ tais que (P_λ) não possui solução positiva em $H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, para $0 < \lambda < \lambda^*$, e (P_λ) possui solução positiva em $H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, para $\lambda > \lambda^0$. Além disso, se $f(x,t) \geq 0$ em $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$, temos $\lambda^* = \lambda^0 = \Lambda$ (veja a Proposição 3.2).

A seguir, ainda na primeira seção do Capítulo 3, exibimos um resultado sobre a não existência de soluções não negativas e não triviais para $(P_{\lambda,a})$, permitindo que o potencial $a(x)$ se anule em conjuntos de medida nula. Para estabelecer nosso próximo resultado, consideramos $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$, $g \in C((0,\infty))$ e $a \in L^\infty(\Omega)$ satisfazendo as hipóteses a seguir:

$(\hat{f}_3)$ existe $0 < p < 1$ tal que $\displaystyle\limsup_{t \to 0^+} \frac{f(x,t)}{t^p} < \infty$, uniformemente em $\overline{\Omega}$;

$(\breve{g}_1)$ existe uma constante $C < \frac{\lambda_1}{\|a\|_\infty}$ tal que $g(t) \geq -Ct$, para todo $t > 0$;

(g_3^*) $\displaystyle\liminf_{t \to 0^+} \frac{g(t)}{t^r} > 0$, para algum $0 < r \leq p$, onde p foi dado em $(\hat{f}_3)$;

(a_1) $a(x) \geq 0$, mas $a(x) \not\equiv 0$ em Ω;

(a_3) $a(x)^{-1} \in L^\sigma(\Omega)$, onde $\sigma = \frac{1-p}{p-r}\frac{N}{2}$, se $r < p$, e $\sigma = \infty$, se $r = p$.

Observe que a condição (a_3) implica que $|A^0| = 0$, onde $A^0 = \{x \in \Omega;\ a(x) = 0\}$.

Teorema 3.3. *Suponha (a_1), (a_3), (f_2), $(\hat{f}_3)$, $(\breve{g}_1)$ e (g_3^*) satisfeitas. Então, existe $\overline{\lambda} > 0$ tal que o Problema $(P_{\lambda,a})$ não possui solução não negativa e não trivial em $H_0^1(\Omega)$, para $0 < \lambda < \overline{\lambda}$.*

Dávila e Montenegro [16] estabeleceram a existência de uma única solução maximal $u_\lambda \geq 0$ para o problema $(P_{\lambda,a})$ quando $a \equiv 1$, $g(t) = t^{-\beta}$, $\beta \in (0,1)$, e a função f é côncava, sublinear, $f \not\equiv 0$ e f_t é contínua em $\overline{\Omega} \times (0,\infty)$. Montenegro e Olivâine [32] verificaram a existência de uma solução $u_\lambda \geq 0$ para o Problema (P_λ) quando $a \equiv 1$, $g(t) = -\log(t)$ e $f \not\equiv 0$ é uma função não decrescente, sublinear e f_t é contínua em $\overline{\Omega} \times (0,\infty)$. Em ambos os trabalhos, demonstrou-se a existência de $\lambda^* > 0$ tal que $|\{x \in \Omega;\ u_\lambda(x) = 0\}| > 0$, para $0 < \lambda < \lambda^*$ (em [32] quando $\lambda_1 > e^{-1}$). Note que, quando $\lambda_1 > e^{-1}$, supondo adicionalmente a hipótese $(\hat{f}_3)$, o Teorema 3.3, implica que existe $\overline{\lambda} < \lambda^*$ tal que, para $0 < \lambda < \overline{\lambda}$, o Problema $(P_{\lambda,a})$ só admite a solução trivial (veja a Proposição 2.8 em [16], para o caso em que Ω é um intervalo em $\mathbb{R}$).

Sob as hipóteses do Teorema 2.1, como consequência deste teorema e do Teorema 3.3, deduzimos que existem $0 < \overline{\lambda} \leq \tilde{\lambda}$ tais que (P_λ) não possui solução não negativa e não trivial, para $0 < \lambda < \overline{\lambda}$, e (P_λ) possui duas soluções não negativas e não triviais, para $\lambda > \tilde{\lambda}$.

A Seção 3.2 trata de resultados de não existência de solução em função do termo singular. Nesta direção, inicialmente, mencionamos o trabalho de Choi, Lazer e McKenna [10] que estudaram (P_λ) quando $g(x,t) = t^{-\beta}$, $f(x) \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, para $0 < \alpha < 1$, e $f \not\equiv 0$. Estes autores demonstraram que, para $\beta \geq 1$, não existe solução positiva e clássica para o Problema (P_λ). Posteriormente, Ghergu e Radulescu [22], supondo que o potencial $a(x)$ é estritamente positivo, f é sublinear, g é não crescente e satisfaz $\int_0^1 g(t)dt = \infty$, verificaram que $(P_{\lambda,a})$ não possui solução clássica para qualquer valor de λ. Motivados por este resultado, consideramos $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ e $g \in C(\overline{\Omega} \times (0,\infty))$ satisfazendo (f_2) e a hipótese a seguir:

(g_1^*) $g(x,t) \geq 0$ e existem $t_0 > 0$, $a \in C(\overline{\Omega})$ e $\hat{g} \in C((0,\ \infty))$ tais que

(i) $g(x,t) \geq a(x)\hat{g}(t) > 0$ para $0 < t \leq t_0$ e $x \in \overline{\Omega}$;

(ii) $a(x) \geq 0$ em Ω;

(iii) $\hat{g}$ é não crescente para $0 < t \leq t_0$ e $\int_0^{t_0} \hat{g}(t)dt = \infty$.

Note que as condições $(\breve{g}_1)$ e (g_1^*) envolvem diferentes tipos de singularidade. Considere, por exemplo, a função $g(x,t) = t^{-\beta}$. Para qualquer valor de $\beta > 0$, a condição $(\breve{g}_1)$ é satisfeita, enquanto que a condição (g_1^*) só é satisfeita para $\beta \geq 1$. Sob a hipótese (g_1^*), obtemos um resultado que abrange o caso tratado por [22].

Teorema 3.5. *Suponha (f_2) e (g_1^*) satisfeitas. Se $a(x) \not\equiv 0$ sobre $\partial\Omega$, então o Problema (P_λ) não possui solução positiva em $H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ para qualquer valor de $\lambda > 0$.*

Note que, no Teorema 3.5, não supomos a estritamente positiva em $\overline{\Omega}$, basta que não se anule sobre a fronteira de Ω. Além disso, não supomos monotonicidade em g, mas sim na função que a limita inferiormente próximo da origem. Nossa demonstração envolve apenas métodos variacionais e um argumento de contradição. Como resultado do Teorema 3.5, verificamos que a existência de soluções não negativas e não triviais para $(P_{\lambda,a})$ está relacionada ao potencial a. Considerando o conjunto $A^+ = \{x \in \overline{\Omega};\ a(x) > 0\}$, temos o seguinte resultado

Teorema 3.9. *Suponha (f_2) e (g_1^*) satisfeitas. Então, para qualquer valor de $\lambda > 0$, o Problema (P_λ) não possui solução não negativa e não trivial $u \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\partial\{x \in \Omega;\ u(x) > 0\}$ seja suave e intercepte o conjunto A^+.*

Em particular, quando a função a é estritamente positiva em $\overline{\Omega}$, o Teorema 3.9 implica que o Problema $(P_{\lambda,a})$ não possui solução não negativa e não trivial u para qualquer valor de $\lambda > 0$, com $\partial\{x \in \Omega;\ u(x) > 0\}$ suave. A seguir, utilizando um argumento análogo ao da demonstração do Teorema 3.5, obtemos uma versão do Teorema 3.9.

Teorema 3.10. *Suponha (f_2) e (g_1^*) satisfeitas. Então, para qualquer valor de $\lambda > 0$, o Problema (P_λ) não possui solução não negativa e não trivial $u \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\partial(\Omega \cap \{x \in \Omega; u(x) > 0\})$ tenha uma parte suave Γ_u e $\Gamma_u \cap A^+ \neq \emptyset$.*

O Capítulo 4 é dedicado ao estudo de soluções não triviais de $(P_{\lambda,a})$ e apresenta também um resultado sobre a concentração destas soluções envolvendo o potencial a. Na Seção 4.1 supomos que $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\ \infty)) \cap C^{1,\mu}(\overline{\Omega} \times (0,\ \infty))$, para algum $0 < \mu < 1$, $g \in C^2((0,\ \infty))$ e $a \in C^{1,\nu}(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \nu < 1$, satisfazem:

(a_0) $int(A^0) \neq \emptyset$, onde $A^0 = \{x \in \Omega;\ a(x) = 0\}$;

(a_1^*) $a(x) \geq 0$ em Ω;

$(\hat{f}_1)$ $\displaystyle\liminf_{t \to 0^+} \frac{f(x,t)}{t} = +\infty$, uniformemente em $\overline{\Omega}$.

Inspirados pelos resultados de não existência de solução apresentados no Capítulo 3 e utilizando argumentos semelhantes aos do Capítulo 2, apresentamos o seguinte teorema:

Teorema 4.1. *Suponha* (a_0), (a_1^*), $(\hat{f}_1)$, (f_2), (f_3), $(\hat{g}_1)$-$(\hat{g}_3)$ *e* (g_4) *satisfeitas. Então, para qualquer valor de* $\lambda > 0$, *existe* $u_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ *uma solução não negativa e não trivial de* $(P_{\lambda,a})$.

Enfatizamos que, na demonstração do Teorema 4.1, é essencial supor que $int(A^0) \neq \emptyset$, tendo em vista que estabelecemos a existência de solução para o problema $(P_{\lambda,a})$ via um argumento de minimização global. Note que, sob as hipóteses do Teorema 4.1, podemos aplicar o Teorema 1.1 com $g(x,t) = a(x)g(t)$ para concluir que o Problema $(P_{\lambda,a})$ possui solução positiva em $H_0^1(\Omega)$ se $\lambda > 0$ for suficientemente grande (veja o Teorema 1.5). No entanto, não somos capazes de afirmar que esta solução é a solução não negativa e não trivial fornecida pelo Teorema 4.1.

Também, como consequência dos Teoremas 4.1, 2.1 e 3.3, sob as hipóteses $(\hat{f}_1)$, (f_2), (f_3), $(\hat{g}_1)$-$(\hat{g}_3)$ e (g_4), podemos afirmar que:

(i) se a satisfaz (a_0) e (a_1^*), existe solução não negativa e não trivial de $(P_{\lambda,a})$ em $H_0^1(\Omega)$, para todo $\lambda > 0$;

(ii) se a satisfaz (a_3), existe $\overline{\lambda} > 0$ tal que $(P_{\lambda,a})$ não possui solução não negativa e não trivial em $H_0^1(\Omega)$, para $0 < \lambda < \overline{\lambda}$;

(iii) se a satisfaz $(\hat{a}_1)$, existe $\tilde{\lambda} > 0$ tal que $(P_{\lambda,a})$ possui duas soluções não negativas e não triviais em $H_0^1(\Omega)$, para $\lambda \geq \tilde{\lambda}$.

Estes resultados nos permitem deduzir que existe uma relação entre o potencial $a(x)$ e o comportamento das soluções não negativas e não triviais para $(P_{\lambda,a})$. A Seção 4.2 é dedicada ao estudo desta relação. Supondo que $a \in C(\overline{\Omega})$, $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\ \infty))$, $g \in C((0,\ \infty))$ e que a condição

$(\tilde{g}_3)$ $\liminf_{t \to 0^+} g(t) > 0$

é satisfeita, estabelecemos a seguinte proposição:

Proposição 4.6. *Suponha* (a_1), $(\breve{g}_1)$, $(\tilde{g}_3)$ *e* (f_2) *satisfeitas. Seja* $\{u_\lambda\} \subset H_0^1(\Omega)$ *uma família de soluções não negativas e não triviais de* $(P_{\lambda,a})$. *Então,* $|\{x \in int(A^+);\ u_\lambda(x) > 0\}| \to 0$, *quando* $\lambda \to 0$.

Uma consequência imediata da Proposição 4.6 é o seguinte corolário:

Corolário 4.7. *Suponha* (a_1), $(\breve{g}_1)$, $(\tilde{g}_3)$ *e* (f_2) *satisfeitas. Seja* $\{u_\lambda\} \subset H_0^1(\Omega)$ *uma família de soluções não negativas e não triviais de* $(P_{\lambda,a})$. *Se* $|\partial A^+| = 0$, *então* $|\{x \in A^+;\ u_\lambda(x) > 0\}| \to 0$, *quando* $\lambda \to 0$.

Quando a função f satisfaz, adicionalmente, a seguinte condição:

(f_4) existe $t_1 > 0$ tal que $f(x,t) > 0$, para todos $0 < t < t_1$ e $x \in \Omega$;

obtemos um resultado que complementa a Proposição 4.6:

Proposição 4.8. *Suponha* (a_1^*), $(\breve{g}_1)$, $(\tilde{g}_3)$, (f_2) *e* (f_4) *satisfeitas. Seja* $u_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ *uma solução não negativa e não trivial de* $(P_{\lambda,a})$. *Então* $u_\lambda \not\equiv 0$ *em* A^+, *para qualquer valor de* λ.

Antes de apresentar os resultados finais deste trabalho, relembramos que $H_0^1(\Omega)$ denota o espaço de Hilbert dotado da norma $\|\cdot\|$ associada ao produto interno $\langle u,\ v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v$, para todos $u,\ v \in H_0^1(\Omega)$ e $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$.

Dizemos que uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ (ou $u \in H_{loc}^1(\Omega)$) é uma solução de (P_λ), no sentido das distribuições, se ela satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_{\{u>0\}} \big(-g(x,u) + \lambda f(x,u)\big)\varphi,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{1}$$

No último capítulo do nosso trabalho, o Capítulo 5, demonstramos que toda solução de de (P_λ), no sentido das distribuições, é, na verdade, uma solução fraca de (P_λ), i.e., a equação (1) vale para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Suponha que $g \in C((0,\infty))$ e $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ sejam funções satisfazendo $(\tilde{g}_1)$ e

(f_2^*) Existem constantes $c_1 \geq 0$ e $c_2 > 0$ tais que $|f(x,t)| \leq c_1 + c_2|t|^r$, para $1 \leq r \leq 2^* - 1$.

A seguir, enunciamos o resultado principal da Seção 5.1.

Proposição 1.6. *Suponha $(\tilde{g}_1)$ e (f_2^*) satisfeitas. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução de (P_λ) no sentido das distribuições. Então, u é solução de (P_λ) no sentido fraco.*

Na seção 5.2, estabelecemos resultados de existência e multiplicidade de soluções para problemas elípticos semilineares do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x,u), & \Omega, \\ \quad u = 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

onde $h : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory. Nosso primeiro resultado nesta seção supõe que h satisfaz a seguinte condição:

(H_1) h é localmente limitada, i.e., h é limitada em subconjuntos compactos de $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$.

Associado ao Problema (2), temos o funcional $I : H_0^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ dado por $I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega H(x,u)$. Supondo a existência de $\bar{u} \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, uma supersolução não negativa e não trivial de (2), estabelecemos o seguinte resultado:

Proposição 5.3. *Suponha que (H_1) seja satisfeita, que $h(x,0) = 0$ e que exista $\bar{u} \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, uma supersolução não negativa e não trivial de (2), tal que*

(I_1) $I(\bar{u}) \leq 0$;

(I_2) Existem $\alpha > 0$ e $0 < \rho < \|\bar{u}\|$ tal que $I(u) \geq \alpha$ para todo $u \in \partial B_\rho(0)$ e $0 \leq u \leq \bar{u}$.

Então, o Problema (2) possui duas soluções não triviais $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ tais que $0 \leq u_1, u_2 \leq \bar{u}$ e $I(u_2) \leq 0 < \alpha \leq I(u_1)$.

Ressaltamos que não encontramos na literatura resultado similar ao da Proposição 5.3.

Ainda na Seção 5.2, apresentamos mais duas versões da Proposição 5.3 (veja as Proposições 5.5 e 5.6), sem impor que $\bar{u} \in L^\infty(\Omega)$ e supondo que h satisfaz

(H_2) Existem constantes $c_1 \geq 0$, $c_2 > 0$ tais que $|h(x,t)| \leq c_1 + c_2|t|^r$, para $(x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, onde $1 \leq r < \infty$, se $N = 1, 2$, e $1 \leq r < 2^* - 1$, se $N \geq 3$,

Capítulo

1

Existência de uma solução positiva

1.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = (-g(x,u) + \lambda f(x,u))\chi_{\{u>0\}}, & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro real, Ω é um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$ e $N \geq 1$. De agora em diante sempre supomos $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\ \infty))$ e $g \in C(\overline{\Omega} \times (0,\ \infty))$, a menos que o contrário seja dito. Considere as seguintes hipóteses

(g_1) $\liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{g(x,t)}{t} > -\lambda_1$, uniformemente em $\overline{\Omega}$;

(g_2) Existe $0 < \gamma < 1$ tal que $\limsup\limits_{t\to 0^+} g(x,t)t^\gamma < \infty$, uniformemente em $\overline{\Omega}$;

(f_1) $\liminf\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(x,t)}{t} > 0$, uniformemente em $\overline{\Omega}$;

(f_2) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(x,t)}{t} = 0$, uniformemente em $\overline{\Omega}$,

onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ com condição de Dirichlet na fronteira.

Observe que as condições (g_1) e (g_2) permitem que g seja ilimitada inferiormente e superiormente numa vizinhança positiva da origem. O resultado principal do nosso trabalho, neste capítulo, estabelece a existência de uma solução de (P_λ) quando o parâmetro λ é grande o suficiente.

Inspirados pelo trabalho de [34], estabelecemos o seguinte resultado:

Teorema 1.1. *Suponha (g_1), (g_2), (f_1) e (f_2) satisfeitas. Então, existe $\lambda^0 > 0$ tal que o problema (P_λ) possui uma solução positiva $u \in H^1_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ para cada $\lambda \geq \lambda^0$.*

Observamos que, na verdade, o fato de u ser positiva em Ω e um argumento de regularidade para problemas elípticos não lineares implicam que $u \in C^{1,\theta}(\Omega)$ para algum $\theta \in (0,1)$.

Definindo $\Lambda = \inf\{\lambda > 0; (P_\lambda) \text{ possui solução positiva em } H^1_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})\}$ e supondo que, além das condições (f_1) e (f_2), a função f satisfaz $f(x,t) \geq 0$ em $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$, temos o seguinte resultado:

Corolário 1.2. *Suponha* (g_1), (g_2), (f_1), (f_2) *satisfeitas e* $f(x,t) \geq 0$ *em* $\overline{\Omega} \times [0,\ \infty)$. *Então,* $0 \leq \Lambda < \infty$ *e* (P_λ) *tem uma solução positiva* $u_\lambda \in H^1_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *para todo* $\lambda > \Lambda$.

Dividimos a apresentação de nosso resultado em três seções. A Seção 1.2 é destinada a mostrar a existência de uma subsolução de (P_λ) utilizando as condições (g_2) e (f_1). Na Seção 1.3 enunciamos e demonstramos alguns resultados preliminares supondo que a função g satisfaz uma versão mais forte da condição (g_1). Finalmente, na Seção 1.4, apresentamos a demonstração do Teorema 1.1 e do Corolário 1.2.

1.2 Existência de uma subsolução positiva para o problema

Nesta seção verificamos a existência de uma subsolução positiva de (P_λ) sob as hipóteses (f_1) e (g_2). Relembramos que φ_1 denota a autofunção positiva associada a λ_1, o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ em Ω com condição de Dirichlet na fronteira. Antes de demonstrar nosso primeiro resultado, observamos que a hipótese (g_2) é equivalente à seguinte condição: existem constantes positivas A, $\tilde{C}$ e $\gamma \in (0,1)$ tais que

$$g(x,t) < \tilde{C} t^{-\gamma},\ \text{para } 0 < t < A \text{ e } x \in \overline{\Omega}. \tag{1.1}$$

Também observamos que de acordo com a condição (f_1), existem constantes positivas c_1, t_1 tais que

$$f(x,t) \geq c_1 t,\ \text{para } 0 \leq t < t_1 \text{ e } x \in \overline{\Omega}. \tag{1.2}$$

Estamos prontos para demonstrar o seguinte resultado

Lema 1.3. *Suponha* (f_1) *e* (g_2) *satisfeitas. Então, existem* $\lambda^0 > 0$ *e uma função* $\underline{u} \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, *positiva em* Ω, *tais que* $\underline{u}$ *é uma subsolução de* (P_λ), *para todo* $\lambda > \lambda^0$.

Demonstração. Considerando γ dado por (1.1), defina $\underline{u} = c\varphi_1^{\frac{2}{1+\beta}}$, com $\beta \in (\gamma,\ 1)$ e $c > 0$. Como $1+\beta < 2$ e $\varphi_1 > 0$ em Ω, obtemos que $\underline{u} \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Além disto, escolhendo $c > 0$ suficientemente pequeno, podemos supor que $\|\underline{u}\|_\infty < \max\{A, t_1\}$, com A e t_1 dados respectivamente por (1.1) e (1.2). Então, a escolha de c nos permite escrever

$$g(x, \underline{u}(x)) \leq \tilde{C}\underline{u}(x)^{-\gamma}, \forall\, x \in \Omega, \tag{1.3}$$

e

$$f(x, \underline{u}(x)) \geq c_1 \underline{u}(x), \forall\, x \in \Omega. \tag{1.4}$$

Para demonstrar o lema é suficiente mostrar a existência de $\lambda^0 > 0$ tal que para $\lambda > \lambda^0$

$$-\Delta \underline{u} = -\frac{2(1-\beta)}{(1+\beta)^2} c^{1+\beta} \underline{u}^{-\beta} |\nabla \varphi_1|^2 + \frac{2\lambda_1}{1+\beta}\underline{u} \leq -g(x,\underline{u}) + \lambda f(x,\underline{u}). \tag{1.5}$$

Por (1.4), podemos encontrar $\overline{\lambda} > 0$ tal que, para todo $\lambda > \overline{\lambda}$,

$$\frac{\lambda}{2} f(x,\underline{u}) \geq \frac{2\lambda_1}{1+\beta}\underline{u}, \forall\, x \in \Omega. \tag{1.6}$$

A seguir, definindo o conjunto $N_\delta(\partial\Omega) = \{x \in \Omega\ ;\ dist(x,\ \partial\Omega) \leq \delta\}$, como $\varphi_1 \in C^1(\overline{\Omega})$ e $|\nabla \varphi_1| > 0$

sobre $\partial\Omega$, existem $c_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tais que

$$|\nabla\varphi_1|^2 \geq c_0 > 0, \ \forall\, x \in N_{\delta_0}(\partial\Omega). \tag{1.7}$$

Como $\beta > \gamma$, $\underline{u} \in C(\overline{\Omega})$ e $\underline{u}(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, utilizando (1.3), encontramos $\delta \in (0, \delta_0)$ tal que

$$\underline{u}(x)^{\beta} g(x, \underline{u}(x)) \leq \frac{2(1-\beta)c_0}{(1+\beta)^2} c^{1+\beta}, \ \forall\, x \in N_{\delta}(\partial\Omega).$$

Tendo em vista (1.5) - (1.7) e a desigualdade acima, concluímos que, para todo $\lambda > \overline{\lambda} > 0$,

$$-\Delta\underline{u} \leq -g(x, \underline{u}) + \frac{\lambda}{2} f(x, \underline{u}), \ \forall\, x \in N_{\delta}(\partial\Omega). \tag{1.8}$$

Por outro lado, utilizando o fato de $\underline{u}$ ser positiva e contínua em Ω, encontramos $c_2 > 0$ tal que $\underline{u}(x) \geq c_2 > 0$ para todo $x \in \Omega \setminus N_{\delta}(\partial\Omega)$. Logo, por (1.3) e (1.4), encontramos $\lambda^0 > \overline{\lambda}$ tal que, para todo $\lambda > \lambda^0$,

$$g(x, \underline{u}(x)) \leq \tilde{C} c_2^{-\gamma} = \frac{2\tilde{C} c_2^{-(\gamma+1)}}{\lambda} \frac{\lambda c_2}{2} \leq \frac{\lambda}{2} f(x, \underline{u}), \forall\, x \in \Omega \setminus N_{\delta}(\partial\Omega).$$

Esta estimativa combinada com (1.5) - (1.6) implica que, para $\lambda > \lambda^0$,

$$-\Delta\underline{u} \leq -g(x, \underline{u}) + \lambda f(x, \underline{u}), \ \forall\, x \in \Omega \setminus N_{\delta}(\partial\Omega).$$

O fato de $\underline{u}$ ser uma subsolução de (P_λ) em Ω é uma consequência direta de (1.8) e da desigualdade acima. O lema está demonstrado. $\square$

Observação 1.4. *Observamos que os valores de $\underline{u}$ e λ^0 dependem apenas da função f e das constantes $\tilde{C}, A$ e γ dadas na equação* (1.1).

1.3 Resultados preliminares e um caso particular

Nesta seção estabelecemos uma versão mais fraca do Teorema 1.1 supondo que g satisfaz a seguinte versão da condição (g_1)

$(\tilde{g}_1)$ Existem constantes $\alpha \geq 0$ e $C < \lambda_1$ tais que $g(x,t) \geq -Ct - \alpha$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $t > 0$.

Note que a condição $(\tilde{g}_1)$ é mais forte do que (g_1), uma vez que ela implica que g é limitada inferiormente por uma função linear para todo $t > 0$.

Teorema 1.5. *Suponha $(\tilde{g}_1)$, (g_2), (f_1) e (f_2) satisfeitas. Então, para todo $\lambda \geq \lambda_0$, o Problema (P_λ) possui uma solução $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u \geq \underline{u}$ em Ω, com λ_0 e $\underline{u}$ dados pelo Lema 1.3.*

Antes de demonstrar o Teorema 1.5, relembramos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução de (P_λ) no sentido das distribuições, se ela satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi = \int_{\{u>0\}} \big(- g(x,u) + \lambda f(x,u)\big)\varphi, \ \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{1.9}$$

A proposição que apresentamos a seguir estabelece que qualquer solução de (P_λ) no sentido das distribuições é uma solução de (P_λ) no sentido fraco, i.e., a equação (1.9) é válida se considerarmos $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Supondo

(f_2^*) Existem constantes $c_1 \geq 0$ e $c_2 > 0$ tais que $|f(x,t)| \leq c_1 + c_2|t|^r$, para $1 \leq r < 2^* - 1$,

onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$, se $N \geq 3$, e $2^* = +\infty$, se $N = 2$, estabelecemos o seguinte resultado

Proposição 1.6. *Suponha $(\tilde{g}_1)$ e (f_2^*) satisfeitas. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução de (P_λ) no sentido das distribuições. Então, u é solução de (P_λ) no sentido fraco.*

A demonstração da Proposição 1.6 será feita na Seção 5.1 do Capítulo 5.

Para demonstrar o Teorema 1.5 necessitamos de alguns resultados auxiliares. Observe que, sob a condição $(\tilde{g}_1)$, a função g pode ter crescimento supercrítico no infinito. Consequentemente, não podemos garantir que o funcional associado ao Problema (P_λ) está bem definido em $H_0^1(\Omega)$. Para superar esta dificuldade, consideramos $R > \max\{1, A, \|\underline{u}\|_\infty\}$ e a função

$$g_R(x,t) = \begin{cases} g(x,t), \text{se } t \leq R, \\ g(x,R), \text{se } t > R. \end{cases} \tag{1.10}$$

A partir de agora fixamos $\lambda > \lambda_0$ e consideramos o seguinte problema semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = h_R(x,u)\chi_{\{u>0\}} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$P_{\lambda,R}$}$$

onde $h_R(x,t) = -g_R(x,t) + \lambda f(x,t)$. Observe que a função g_R possui a mesma singularidade de g na origem e satisfaz $(\tilde{g}_1)$ e (1.1) com as mesmas constantes $\alpha, C, A, \tilde{C}$ e γ. Em vista disso, consideramos as soluções de $(P_{\lambda,R})$ no sentido das distribuições ou no sentido fraco, como definido na Proposição 1.6.

Nossa próxima meta é verificar que as soluções de $(P_{\lambda,R})$ são limitadas a priori em $H_0^1(\Omega)$ e em $L^\infty(\Omega)$, independentemente de R, implicando que, para R suficientemente grande, qualquer solução de $(P_{\lambda,R})$ é, na verdade, uma solução de (P_λ). Primeiro enunciamos um lema auxiliar devido a Ladyzhenskaya e Ural'tseva (veja [28]).

Lema 1.7. *Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p \leq N$ e existe $c_0 \geq 0$ tal que para $c \geq c_0$,*

$$\int_{A_c} |\nabla u|^p \leq \gamma c^\alpha |A_c|^{1-\frac{p}{N}+\bar{\varepsilon}},$$

onde $A_c = \{x \in \Omega \,;\, u(x) > c\}$, $\bar{\varepsilon} > 0$, $0 \leq \alpha \leq \bar{\varepsilon} + p$, então $u^+ = \max\{u, 0\} \in L^\infty(\Omega)$. Além disso

$$\|u^+\|_{L^\infty} \leq M < \infty,$$

com a constante M dependendo apenas de γ , α , $\bar{\varepsilon}$, c_0 , Ω e $\|u\|_{L^1(A_{c_0})}$.

Lema 1.8. *Suponha $(\tilde{g}_1)$ e (f_2) satisfeitas. Então, toda solução de $(P_{\lambda,R})$ é não negativa e pertence a $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Além disso, existe $M = M(\lambda) > 0$, independente de $R > \max\{1, A, \|\underline{u}\|_\infty\}$, tal que toda solução u de $(P_{\lambda,R})$ satisfaz*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M, \tag{1.11}$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M. \tag{1.12}$$

Demonstração. Considere $u \in H_0^1(\Omega)$ solução de $(P_{\lambda,R})$. Primeiramente, afirmamos que u é não negativa. De fato, por $(\tilde{g}_1)$, (f_2) e pela Proposição 1.6, a seguinte relação é satisfeita

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_{\{u>0\}} h_R(x,u)v, \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.13}$$

Em particular, tomando $v = u^-$ concluímos imediatamente que $u \geq 0$ em quase todo ponto de Ω. A seguir, verificaremos a limitação das soluções em $H_0^1(\Omega)$. Por $(\tilde{g}_1)$ e (1.13) temos

$$\|u\|^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_{\{u>0\}} [g_R(x,u) + Cu + \alpha]u = \lambda \int_{\{u>0\}} f(x,u)u + \int_{\{u>0\}} Cu^2 + \int_{\{u>0\}} \alpha u.$$

Note que, por (f_2), dado $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$, tal que

$$|f(x,s)| \leq \varepsilon s + C_\varepsilon, \ \forall\, s > 0, \ x \in \Omega. \tag{1.14}$$

Esta estimativa, a Desigualdade de Poincaré e o Teorema da Imersão de Sobolev nos permitem encontrar uma constante $c_3 > 0$ (independente de R) tal que

$$\left(1 - \frac{C}{\lambda_1} - \frac{\lambda\varepsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|^2 \leq c_3\|u\|.$$

Como $C < \lambda_1$ por $(\tilde{g}_1)$, tomando $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente concluímos que (1.11) vale.

A seguir, verificamos (1.12). Observe que, quando $N = 1$, a estimativa (1.12) é uma consequência direta da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. Logo, basta considerar $N \geq 2$. Dividiremos a demonstração de (1.12) em dois passos. Primeiramente, baseados em uma técnica devida a Brezis e Kato [4], estimamos $\|u\|_s$, para todo $1 \leq s < \infty$ (veja p. ex. [34]). Chamamos a atenção de que, para $N = 2$ já temos uma estimativa para $\|u\|_s$, visto que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $1 \leq s < \infty$. Resta estimar $\|u\|_s$ quando $N \geq 3$.

Como $u \geq 0$, basta mostrar que $(u-c)^+ \in L^s(\Omega)$, para algum $c \geq 1$. Por (1.10), $(\tilde{g}_1)$ e tomando $\varepsilon = 1$ em (1.14), temos

$$h_R(x,u) = -g_R(x,u) + \lambda f(x,u) \leq M_1(1+u), \text{ para } u \geq c, \tag{1.15}$$

onde $M_1 := C + \lambda + \frac{\alpha + \lambda C_1}{1+c} \in L^\infty(\Omega)$ é independente de u e R. Então, aplicando uma versão do Teorema de Brezis-Kato para problemas singulares [8, 9] (veja também [34] para um resultado relacionado), concluímos que

$$u \in L^s(\Omega), \text{ para todo } 1 \leq s < \infty \text{ e } \|u\|_s \leq M_s, \tag{1.16}$$

onde M_s é uma constante independente de u e de R. Finalmente, estabelecemos a limitação em $L^\infty(\Omega)$. Tomando $r \in (1, \frac{N}{N-2})$, por (1.13), (1.15) e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}\int_{A_c} |\nabla u|^2 &= \int_{A_c} \nabla u \nabla u = \int_\Omega \nabla u \nabla (u-c)^+ = \int_\Omega h_R(x,u)(u-c)^+ \leq \int_\Omega M_1(1+u)(u-c)^+ \\ &\leq M_1 \int_{A_c} (1+u)u \leq 2M_1 \int_{A_c} u^2 \leq 2M_1 |A_c|^{1/r} \left(\int_\Omega u^{\frac{2r}{r-1}}\right)^{\frac{r-1}{r}} \leq 2M_1 M_s^2 |A_c|^{1/r},\end{aligned}$$

onde $s = \frac{2r}{r-1}$. Tomando $c_0 = 1$, $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{r} - 1 + \frac{2}{N}$ e $\alpha = 0$ no Lema 1.7 e tomando M maior, se necessário, concluímos que a estimativa (1.12) é verdadeira. O lema está demonstrado. □

Observação 1.9. *Utilizando o mesmo argumento empregado na demonstração do lema acima, podemos verificar que as soluções $u \in H_0^1(\Omega)$ do Problema (P_λ), sob as condições $(\tilde{g}_1)$ e (f_2), são não negativas e uniformemente limitadas em $H_0^1(\Omega)$ e em $L^\infty(\Omega)$. Consequentemente, tomando $M > 0$ maior, se necessário, no Lema 1.8, podemos supor que $\|u\| \leq M$ e $\|u\|_\infty \leq M$ para cada solução u de (P_λ).*

De agora em diante fixamos $R_0 > \max\{A, M+1, \|\underline{u}\|_\infty\}$, onde M foi dada no Lema 1.8, e denotamos g_{R_0} e h_{R_0} por g_0 e h_0, respectivamente. Note que, pela nossa escolha de R_0 e pelo Lema 1.3, $\underline{u}$ é uma subsolução positiva de (P_{λ,R_0}) (veja a Observação 1.4) . A seguir, consideramos uma sequência de domínios suaves $\emptyset \neq \Omega_1 \subset\subset \Omega_2 ... \subset\subset \Omega$ tais que $\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty \Omega_k$ e estudamos a seguinte família de problemas elípticos não lineares

$$\begin{cases} -\Delta u_k = h_0(x, u_k) & \text{em } \Omega_k, \\ u_k = \underline{u}(x) & \text{sobre } \partial\Omega_k. \end{cases} \tag{1.17}$$

Nosso próximo objetivo é encontrar soluções u_k de (1.17) que são maiores ou iguais a $\underline{u}$. Posteriormente, considerando sua extensão natural (ainda denominada u_k) como sendo $\underline{u}$ em $\Omega \setminus \Omega_k$, iremos verificar que a sequência (u_k) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Portanto, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $u_k \rightharpoonup u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$. Após isso, verificamos que u é uma solução de (P_{λ,R_0}) e invocamos o Lema 1.8 e a nossa escolha de R_0 para mostrar que u é uma solução de (P_λ).

No resultado a seguir, estabelecemos a existência de uma solução $u_k \geq \underline{u}$ de (1.17).

Lema 1.10. *Suponha $(\tilde{g}_1)$, (g_2), (f_1) e (f_2) satisfeitas. Então, para todo $k \in \mathbb{N}$, o Problema (1.17) possui uma solução $u_k \geq \underline{u}$ em Ω_k para todo $\lambda > \lambda^0$, onde λ^0 foi dado pelo Lema 1.3.*

Demonstração. A fim de encontrar uma solução u_k de (1.17) tal que $u_k \geq \underline{u}$ em Ω_k, consideramos o seguinte Problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta v_k = h_0(x, v_k^+ + \underline{u}) + \Delta \underline{u}, & \text{em } \Omega_k, \\ v_k = 0, & \text{sobre } \partial\Omega_k. \end{cases} \tag{1.18}$$

Associado ao Problema (1.18) temos o funcional $\tilde{I}_k : H_0^1(\Omega_k) \to \mathbb{R}$, definido por

$$\tilde{I}_k(v) = \int_{\Omega_k} \left[\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - \tilde{H}_0(x, v) + \nabla \underline{u} \nabla v \right], \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega_k),$$

onde $\tilde{H}_0(x,t) = \displaystyle\int_0^t h_0(x, s^+ + \underline{u}(x)) ds$, para todos $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \Omega$.

Afirmamos que $\tilde{I}_k \in C^1(H_0^1(\Omega_k), \mathbb{R})$. De fato, como $\underline{u} \in C^1(\overline{\Omega})$ e é positiva em Ω, existe uma constante $b_k > 0$ tal que $\underline{u} \geq b_k$ em Ω_k. Por (1.14) e pelo fato de g_0 ser limitada em $\overline{\Omega} \times [b_k, \ \infty)$, existe uma constante $c_4 > 0$ tal que

$$|h_0(x, t^+ + \underline{u}(x))| \leq c_4 + \lambda(\varepsilon |t| + C_\varepsilon), \tag{1.19}$$

para todos $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \Omega_k$. Tendo em vista a estimativa acima concluímos que $\tilde{I}_k \in C^1(H_0^1(\Omega_k), \mathbb{R})$. Além disso, esta estimativa e as desigualdades de Poincaré e de Hölder implicam que

$$\begin{aligned}\tilde{I}_k(v) &\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega_k} |\nabla v|^2 - \frac{\lambda\varepsilon}{2}\int_{\Omega_k} v^2 - C_2\int_{\Omega_k} v - \left(\int_{\Omega_k} |\nabla \underline{u}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega_k} |\nabla v|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq (\frac{1}{2} - \frac{\lambda\varepsilon}{2\lambda_1})\|v\|^2_{H_0^1(\Omega_k)} - \tilde{C}_2\|v\|_{H_0^1(\Omega_k)}\end{aligned}$$

Em particular, tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, concluímos que $\tilde{I}_k$ é coercivo,limitado inferiormente e satisfaz a condição de Palais-Smale (PS). Consequentemente existe $v_k \in H_0^1(\Omega_k)$ (veja o Teorema 2.7 em [37]) tal que

$$\tilde{I}_k(v_k) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega_k)} \tilde{I}_k(v).$$

Afirmamos que $v_k \geq 0$ em Ω_k. De fato, visto que $v_k = v_k^+ - v_k^-$ é um ponto crítico de $\tilde{I}_k$ temos

$$\int_{\Omega_k} \nabla v_k \nabla v_k^- - \int_{\Omega_k} h_0(x, v_k^+ + \underline{u})v_k^- + \int_{\Omega_k} \nabla \underline{u} \nabla v_k^- = 0$$

A definição de h_0 e o fato de $R_0 > \|\underline{u}\|_\infty$ implicam que $h_0(x, v_k^+ + \underline{u})v_k^- = h_0(x, \underline{u})v_k^- = h(x, \underline{u})v_k^-$ para quase todo ponto de Ω_k. Logo, já que $\underline{u}$ é uma subsolução de (P_λ) para $\lambda > \lambda^0$, com λ^0 foi dado pelo Lema 1.3, e $v_k \equiv 0$ em $\Omega \setminus \Omega_k$, temos

$$-\int_{\Omega_k} |\nabla v_k^-|^2 = \int_{\Omega_k} h(x, \underline{u})v_k^- - \int_{\Omega_k} \nabla \underline{u} \nabla v_k^- \geq \int_{\Omega_k} h(x, \underline{u})v_k^- - \int_{\Omega_k} h(x, \underline{u})v_k^- = 0.$$

A afirmação está demonstrada. Esta afirmação e o fato de v_k ser uma solução de (1.18) nos mostram que $u_k = v_k + \underline{u}$ é uma solução de (1.17) satisfazendo $u_k \geq \underline{u}$ em Ω_k. O lema está demonstrado. □

Por simplicidade denotaremos por u_k, para cada k, a extensão natural da solução de (1.17) obtida ao definir $u_k = \underline{u}$ em $\Omega \setminus \Omega_k$.

Lema 1.11. *Suponha* $(\tilde{g}_1)$, (g_2), (f_1) *e* (f_2) *satisfeitas. Então, a sequência* (u_k) *encontrada no Lema 1.10 é uniformemente limitada em* $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Considerando que $u_k = v_k + \underline{u}$, com $v_k \geq 0$ solução de (1.18), é suficiente verificar que (v_k) é uniformemente limitada em $H_0^1(\Omega)$. Note que por $(\tilde{g}_1)$, pelo fato de $v_k \geq 0$, pelo Teorema da Imersão de Sobolev e pela Desigualdade de Poincaré obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v_k|^2 &= \int_{\Omega_k} -g_0(x, v_k + \underline{u})v_k + \lambda\int_{\Omega_k} f(x, v_k + \underline{u})v_k - \int_{\Omega_k} \nabla \underline{u} \nabla v_k \\ &\leq \int_{\Omega_k} [C(v_k + \underline{u}) + \alpha]v_k + \lambda\int_{\Omega_k} f(x, v_k + \underline{u})v_k - \int_{\Omega_k} \nabla \underline{u} \nabla v_k \\ &\leq \frac{C}{\lambda_1}\|v_k\|^2 + C_3\|v_k\| + \lambda\int_{\Omega_k} f(x, v_k + \underline{u})v_k - \int_{\Omega_k} \nabla \underline{u} \nabla v_k.\end{aligned}$$

Invocando (f_2) e usando o fato de $C < \lambda_1$ concluímos que v_k é uniformemente limitada em $H_0^1(\Omega)$. O lema está demonstrado. □

A seguir apresentamos a demonstração do resultado principal desta seção.

Demonstração do Teorema 1.5

Seja $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ a sequência de soluções de (1.17) dada pelo Lema 1.10. Pelo Lema 1.11, (u_k) é uniformemente limitada em $H_0^1(\Omega)$. Portanto, passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u \text{ , fracamente em } H_0^1(\Omega); \\ u_k \to u \text{ , fortemente em } L^r(\Omega),\ 1 \leq r < 2^*; \\ u_k \to u \text{ , q.t.p. em } \Omega; \\ |u_k(x)|, |u(x)| \leq l_r(x) \in L^r(\Omega) \text{ , q.t.p. em } \Omega,\ \ 1 \leq r < 2^*. \end{cases} \tag{1.20}$$

Tendo em vista o Lema 1.10 e por (1.20), é evidente que u é positiva em Ω. Afirmamos que u é solução fraca do Problema (P_{λ,R_0}). Note que, como $(\tilde{g}_1)$ e (f_2) são satisfeitas concluímos, pela Proposição 1.6, que é suficiente verificar que u é solução de (P_λ) no sentido das distribuições. Considere $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então, existem $k' \in \mathbb{N}$ e um domínio limitado Ω' tais que $supp(\varphi) \subset \Omega' \subset\subset \Omega_k$ para todo $k \geq k'$. Como u_k é solução de (1.17), obtemos

$$\int_{\Omega'} \nabla u_k \nabla \varphi = \int_{\Omega'} h_0(x, u_k)\varphi, \ \text{ para todo } k \geq k'. \tag{1.21}$$

Note que por (1.14), com $\varepsilon = 1$,

$$|f(x, u_k)| \leq |u_k| + c_1, \text{ em } \Omega'. \tag{1.22}$$

Como $\underline{u}$ é positiva em Ω, existe uma constante $c_6 > 0$ tal que $u_k \geq \underline{u} \geq c_6$ em Ω'. Adicionalmente, por (1.10), $(\tilde{g}_1)$ e (1.1), obtemos

$$|g_0(x, u_k)| \leq C|u_k| + \alpha + \tilde{C}(u_k)^{-\gamma} + C_{R_0} \leq C|u_k| + \tilde{C}c_6^{-\gamma} + \alpha + C_{R_0}, \text{ em } \Omega'. \tag{1.23}$$

Então, por (1.22), (1.23) e os fatos de $|u_k| \leq l_1 \in L^1(\Omega')$ e $h_0(x, u_k) = -g_0(x, u_k) + \lambda f(x, u_k) \to -g_0(x, u) + \lambda f(x, u) = h_0(x, u)$ em quase todo ponto de Ω', o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue nos permite concluir que

$$\int_{\Omega'} h_0(x, u_k)\varphi \to \int_{\Omega'} h_0(x, u)\varphi.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi = \int_{\Omega} h_0(x, u)\varphi, \ \forall\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

A afirmação está demonstrada.

De posse deste fato, concluímos que $u \in L^\infty(\Omega)$ e $\|u\|_\infty \leq M$, com M dado pelo Lema 1.8. Consequentemente, como $R_0 > M + 1$, obtemos que $h_0(x, u) = h(x, u)$ em Ω e, pela Proposição 1.6, segue que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi = \int_{\Omega} h_0(x, u)\varphi = \int_{\Omega} h(x, u)\varphi, \ \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, u é uma solução positiva de (P_λ) sob a condição $(\tilde{g}_1)$. O teorema está demonstrado. ■

Observação 1.12. *Dada $u \in H_0^1(\Omega)$ solução de (P_λ), encontrada no Teorema 1.5, obtemos $g(x, u) \in$*

$L^1(\Omega)$. *Efetivamente, considerando a constante* $A > 0$ *dada por* (1.1), *escrevemos*

$$\int_\Omega |g(x,u)| = \int_{\{0<u<A\}} |g(x,u)| + \int_{\{u\geq A\}} |g(x,u)|.$$

Note que a segunda integral do lado direito da expressão acima é finita pois g *é uma função contínua e, pelo Lema 1.8/Observação 1.9, as soluções de* (P_λ) *são limitadas em* $L^\infty(\Omega)$. *Por outro lado, por* $(\tilde{g}_1)$, (1.1) *e o fato de* $u \geq \underline{u} = c\varphi_1^{\frac{2}{1+\beta}}$, *obtemos constantes positivas* c_7, c_8 *tais que*

$$\int_{\{0<u<A\}} |g(x,u)| < \tilde{C}\int_{\{0<u<A\}} |u|^{-\gamma} + \int_{\{0<u<A\}} (Cu+\alpha) \leq c_7 \int_{\{0<u<A\}} \varphi_1^{\frac{-2\gamma}{1+\beta}} + c_8 \leq c_7 \int_\Omega \varphi_1^{\frac{-2\gamma}{1+\beta}} + c_8.$$

Como $2\gamma < 1+\beta$, *concluímos que* $\int_{\{0<u<A\}} |g(x,u)| < \infty$ *(veja [29]).*

.

1.4 Demonstração do Teorema 1.1

Nesta seção estudamos a existência de soluções positivas do Problema (P_λ) quando (g_1), (g_2), (f_1) e (f_2) são satisfeitas. Observe que a hipótese (g_1) permite que g seja ilimitada inferiormente próximo da origem, contrário ao que havíamos suposto na Seção 1.3, sob a hipótese $(\tilde{g}_1)$. De fato, a condição (g_1) implica que: dado $t_0 > 0$, existe $\alpha \geq 0$ tal que

$$g(x,t) \geq -Ct - \alpha, \forall\, t > t_0, \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}, \tag{1.24}$$

onde $C < \lambda_1$ é uma constante independente de t_0. Sem perda de generalidade, iremos tomar $t_0 < A$ na demonstração do Teorema 1.1, onde A foi dado em (1.1).

Nosso objetivo é mostrar que, mesmo nestas condições, é possível obter uma solução positiva u de (P_λ) quando o parâmetro λ é suficientemente grande. Salientamos que, neste caso, a solução pertence ao espaço $H^1_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e não podemos assegurar que $g(x,u) \in L^1(\Omega)$.

Demonstração do Teorema 1.1

Como g não é limitada próximo da origem, não podemos garantir que o funcional associado ao Problema (P_λ) está bem definido em $H^1_0(\Omega)$. Em vista disso, consideramos uma sequência $(\varepsilon_j) \subset (0, \infty)$ tal que $\varepsilon_j \to 0$, quando $j \to \infty$, e definimos a seguinte sequência de funções

$$g_j(x,t) = g(x,(t-\varepsilon_j)^+ + \varepsilon_j) = \begin{cases} g(x,t), & \text{se } t \geq \varepsilon_j, \\ g(x,\varepsilon_j), & \text{se } t < \varepsilon_j. \end{cases} \tag{1.25}$$

A seguir, definimos $h_j(x,t) = -g_j(x,t) + \lambda f(x,t)$ e consideramos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u_j = h_j(x,u)\chi_{\{u_j>0\}} & \text{em } \Omega, \\ \quad u_j = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$P_{\lambda,j}$}$$

Na nossa demonstração do Teorema 1.1, inicialmente aplicamos o Teorema 1.5 para obter uma sequência (u_j) de soluções positivas do Problema $(P_{\lambda,j})$. Posteriormente, verificamos que a sequência (u_j) converge, em quase todo ponto de Ω, para uma solução $u \in H^1_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de (P_λ).

Observe que, como $\varepsilon_j \to 0$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $0 < \varepsilon_j < t_0 < A$ para todo $j \in \mathbb{N}$, onde t_0 é dado por (1.24) e A é dada por (1.1). Afirmamos que g_j satisfaz a equação (1.1), para todo $j \in \mathbb{N}$, com as mesmas constantes $\tilde{C}$, A, γ, independentes de j. De fato, se $0 < t < \varepsilon_j$ temos $g_j(x,t) = g(x,\varepsilon_j) < \tilde{C}\varepsilon_j^{-\gamma} < \tilde{C}t^{-\gamma}$. Por outro lado, se $\varepsilon_j \le t \le A$ obtemos $g_j(x,t) = g(x,t) < \tilde{C}t^{-\gamma}$. A afirmação está demonstrada.

Utilizando a afirmação acima , podemos aplicar o Lema 1.3 (veja a Observação 1.4), para concluir que $\underline{u} = c\varphi_1^{\frac{2}{1+\beta}}$ é uma subsolução de $(P_{\lambda,j})$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\lambda > \lambda^0$, com λ^0 dado pelo Lema 1.3.

Note que, como $\varepsilon_j < t_0$, por (1.24) e (1.25) temos

$$g_j(x,t) \ge -Ct - \alpha, \forall\, t > t_0, \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}. \tag{1.26}$$

Também chamamos a atenção para o fato de que g_j satisfaz a condição $(\tilde{g}_1)$, para todo $j \in \mathbb{N}$. De fato, se $0 < t \le t_0$, utilizamos a continuidade de g e a definição (1.25) para concluir que existe uma constante $\alpha_j \ge 0$ tal que $g_j(x,t) \ge -\alpha_j$ para todos $0 < t \le t_0$ e $x \in \Omega$. Por outro lado, se $t > t_0$, esta estimativa, combinada com (1.26), nos fornece $(\tilde{g}_1)$.

Em vista dos fatos acima mencionados, podemos aplicar o Teorema 1.5 ao Problema $(P_{\lambda,j})$, obtendo uma solução positiva $u_j \in H_0^1(\Omega)$ para todo $\lambda > \lambda^0$, tal que $u_j \ge \underline{u} > 0$, com λ_0 e $\underline{u}$ dados pelo Lema 1.3.

Afirmamos que a sequência (u_j) é limitada em $L^2(\Omega)$. Para verificar este fato, é suficiente mostrar que $(u_j - t_0)^+$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Visto que u_j é uma solução de $(P_{\lambda,j})$ e $\varepsilon_j < t_0$, por (1.26) e escolhendo $\varepsilon < (\lambda_1 - C)/\lambda$ em (1.14), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla(u_j - t_0)^+|^2 = \int_\Omega \nabla u_j \nabla(u_j - t_0)^+ &= \int_{\{u_j > t_0\}} [-g_j(x,u_j) + \lambda f(x,u_j)](u_j - t_0)^+ \\
&\le \int_{\{u_j > t_0\}} [(Cu_j + \alpha) + \lambda(\varepsilon u_j + C_\varepsilon)](u_j - t_0) \\
&\le \int_{\{u_j > t_0\}} \{[C(u_j - t_0) + \alpha + Ct_0] + \lambda[\varepsilon(u_j - t_0) + C_\varepsilon + \varepsilon t_0]\}(u_j - t_0) \\
&= \int_{\{u_j > t_0\}} (C + \lambda\varepsilon)(u_j - t_0)^2 + \int_{\{u_j > t_0\}} c_9(u_j - t_0).
\end{aligned}$$

Portanto, utilizando o fato de que $C + \lambda\varepsilon < \lambda_1$ e aplicando o Teorema de Poincaré, concluímos que $\|(u_j - t_0)^+\|_{L^2} \le M_2$, onde M_2 é uma constante independente de j. Por este fato e observando que existe $m_3 \in L^\infty(\Omega)$ tal que $h_j(x,t) \le m_3(1+t)$, para todos $t \ge t_0$ $j \in \mathbb{N}$, podemos argumentar, como na demonstração do Lema 1.8, para encontrar $M_3 > 0$ tal que $\|u_j\|_\infty \le M_3$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

A seguir, argumentamos como em [34], para verificar que existe uma subsequência de (u_j) que converge em quase todo ponto de Ω para uma solução u de (P_λ): considere uma sequência (Ω_k) de subdomínios de Ωcom fronteiras suaves tais que $\Omega_k \subset\subset \Omega_{k+1}$, para cada k, e $\Omega = \cup_{k=1}^\infty \Omega_k$. Seja $\delta_k = \delta_{\Omega_k} = \inf_j \operatorname{ess\,inf}_{\Omega_k} u_j \ge \inf_{\Omega_k} \underline{u} > 0$. Como u_j é uma solução de $(P_{\lambda,j})$, podemos utilizar a definição de g_j e o fato de $\varepsilon_j < \delta_1$, para j suficientemente grande, para obter

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} |\nabla u_j|^2 \le \int_{\{u_j > \delta_1\}} |\nabla u_j|^2 &= \int_\Omega \nabla u_j \nabla(u_j - \delta_1)^+ = \int_\Omega (-g_j(x,u_j) + \lambda f(x,u_j))(u_j - \delta_1)^+ \\
&= \int_{\{u_j > \delta_1\}} (-g_j(x,u_j) + \lambda f(x,u_j))(u_j - \delta_1)^+ = \int_{\{u_j > \delta_1\}} (-g(x,u_j) + \lambda f(x,u_j))(u_j - \delta_1).
\end{aligned}$$

Como $\sup_j \|u_j\|_\infty \le M_3$, concluímos que (u_j) é limitada em $H^1(\Omega_1)$ e que esta sequência possui uma subsequência $(u_{j_l^1})$ que converge fracamente em $H^1(\Omega_1)$, fortemente em $L^2(\Omega_1)$ e em quase todo ponto de Ω_1. Denotamos por u_{Ω_1} o limite fraco em $H^1(\Omega_1)$ desta subsequência.

A seguir, argumentando por indução, para cada k obtemos uma subsequência $(u_{j_l^k})$ de (u_j) e uma função $u_{\Omega_k} \in H^1(\Omega_k)$ tais que $(u_{j_l^k})$ converge fracamente para u_{Ω_k} em $H^1(\Omega_k)$, $(u_{j_l^k})$ converge fortemente para u_{Ω_k} em $L^2(\Omega_k)$ e $(u_{j_l^k})$ converge para u_{Ω_k} em quase todo ponto de Ω_k. Além disso, também podemos supor que $(u_{j_l^{k+1}})$ é uma subsequência de $(u_{j_l^k})$, para todo k, e que $j_k^k \to \infty$ quando $k \to \infty$. Por construção, temos $u_{\Omega_{k+1}}\big|_{\Omega_k} = u_{\Omega_k}$ e, consequentemente, podemos definir a função

$$u(x) = \begin{cases} u_{\Omega_1}(x), \text{ se } x \in \Omega_1, \\ u_{\Omega_{k+1}}, \text{ se } x \in \Omega_{k+1} \setminus \Omega_k, \text{ para } k \geq 1. \end{cases} \tag{1.27}$$

Observe que $u \in H^1_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e que a subsequência diagonal $(u_{j_k}) := (u_{j_k^k})$ converge para u fracamente em $H^1_{loc}(\Omega)$, fortemente em $L^2_{loc}(\Omega)$ e $u_{j_k} \to u$ em quase todo ponto de Ω.

Afirmamos que u é uma solução de (P_λ). De fato, dada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, fixamos $k_1 \geq 1$ tal que $supp(\varphi) \subset \Omega_{k_1}$. Como u_{j_k} é uma solução de (P_{λ,j_k}), temos

$$\int_{\Omega_{k_1}} \nabla u_{j_k} \nabla \varphi - \int_{\Omega_{k_1}} (-g_{j_k}(x, u_{j_k}) + \lambda f(x, u_{j_k}))\varphi = 0.$$

Pelo fato de $u_{j_k} \rightharpoonup u$ fracamente em $H^1_{loc}(\Omega)$ temos

$$\int_{\Omega_{k_1}} \nabla u_{j_k} \nabla \varphi \to \int_{\Omega_{k_1}} \nabla u \nabla \varphi. \tag{1.28}$$

Observe que existe uma constante positiva c_{10} tal que $0 < c_{10} \leq \underline{u} \leq u_{j_k}$ em Ω_{k_1}. Além disso, para k grande o suficiente, temos $\varepsilon_{j_k} < c_{10}$ e, pela definição de g_j, podemos escrever $g_{j_k}(x, u_{j_k}) = g(x, u_{j_k})$. Agora, visto que $c_{10} \leq u_{j_k} \leq \sup_j \|u_j\|_\infty \leq M_3$ e a constante M_3 não depende de j, concluímos que $|[-g(x, u_{j_k}) + \lambda f(x, u_{j_k})]\varphi| \leq M_4 \in L^1(\Omega_{k_1})$. Também temos $[-g(x, u_{j_k}) + \lambda f(x, u_{j_k})]\varphi \to [-g(x, u) + \lambda f(x, u)]\varphi$ em quase todo ponto de Ω_{k_1}. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, (1.28) e o fato de φ ter sido escolhida arbitrariamente, concluímos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi - \int_\Omega (-g(x, u) + \lambda f(x, u))\varphi = 0, \ \forall\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \tag{1.29}$$

A afirmação está demonstrada.

Para concluírmos a demonstração do Teorema 1.1, resta verificar que $u \in C(\overline{\Omega})$. Como $u > 0$, resultados de regularidade implicam que $u \in C^1(\Omega)$. Então, basta demonstrar que $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Dado $0 < \varepsilon < M_3$, podemos encontrar $0 < h_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ tal que $-g(x,t) + \lambda f(x,t) \leq h_\varepsilon(x)$, para todo $0 < \varepsilon \leq t \leq M_3$, em quase todo ponto de Ω. Agora, seja $\varphi_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ a única solução positiva do problema

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_\varepsilon = h_\varepsilon(x), \text{ em } \Omega, \\ \quad \varphi_\varepsilon = 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.30}$$

Como u_{j_k} é solução fraca de (P_{λ,j_k}), $\|u_{j_k}\|_\infty \leq M_3$ e, para k grande o suficiente, $g_{j_k}(x, u_{j_k}) = g(x, u_{j_k})$, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u_{j_k}\nabla(u_{j_k}-\varepsilon-\varphi_\varepsilon)^+ &= \int_\Omega (-g_{j_k}(x,u_{j_k})+\lambda f(x,u_{j_k}))(u_{j_k}-\varepsilon-\varphi_\varepsilon)^+\\ &\le \int_\Omega h_\varepsilon(x)(u_{j_k}-\varepsilon-\varphi_\varepsilon)^+ = \int_\Omega \nabla\varphi_\varepsilon\nabla(u_{j_k}-\varepsilon-\varphi_\varepsilon)^+\\ &= \int_\Omega \nabla(\varepsilon+\varphi_\varepsilon)\nabla(u_{j_k}-\varepsilon-\varphi_\varepsilon)^+\end{aligned}$$

Portanto, $\int_\Omega |\nabla(u_{j_k}-\varepsilon-\varphi_\varepsilon)^+|^2 = \int_\Omega (\nabla u_{j_k}-\nabla(\varepsilon+\varphi_\varepsilon))\nabla(u_{j_k}-\varepsilon-\varphi_\varepsilon)^+ \le 0$. Esta desigualdade implica que $0 < u_{j_k} \le \varepsilon+\varphi_\varepsilon$, para quase todo ponto de Ω. Como $\varphi_\varepsilon \in C_0(\overline{\Omega})$, existe uma vizinhança U de $\partial\Omega$ tal que, fazendo $j_k \to \infty$, obtemos $0 < u(x) < 2\varepsilon$ em quase todo ponto de $U \cap \Omega$. O fato de $\varepsilon > 0$ poder ser escolhido arbitrariamente pequeno implica que $u(x) \to 0$ quando $x \to \partial\Omega$. O teorema está demonstrado. □

Supondo que a função f é não negativa verificamos, como consequência direta do Teorema 1.1, que o conjunto $S = \{\lambda > 0; (P_\lambda) \text{ possui solução positiva em } H_0^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})\}$ é um intervalo. Definindo $\Lambda = \inf S$, obtemos o seguinte resultado

Corolário 1.2. *Suponha (g_1), (g_2), (f_1), (f_2) satisfeitas e $f(x,t) \ge 0$ em $\overline{\Omega}\times[0,\ \infty)$. Então, $0 \le \Lambda < \infty$ e (P_λ) tem uma solução positiva $u_\lambda \in H^1_{loc}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ para todo $\lambda > \Lambda$.*

Demonstração. De acordo com o Teorema 1.1, o conjunto S é não vazio. Então, $\Lambda = \inf S$ existe e $\Lambda \ge 0$. Seja $\lambda > \Lambda$. Pela definição de ínfimo, existe $\tilde\lambda \in (\Lambda,\ \lambda)$ com $\tilde\lambda \in S$.

Seja $u_{\tilde\lambda} \in H^1_{loc}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ a solução positiva para o Problema $(P_{\tilde\lambda})$. Note que, como $f \ge 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u_{\tilde\lambda}\nabla v &= \int_\Omega [-g(x,u_{\tilde\lambda})+\tilde\lambda f(x,u_{\tilde\lambda})]v\\ &\le \int_\Omega [-g(x,u_{\tilde\lambda})+\lambda f(x,u_{\tilde\lambda})]v,\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega),\ v \ge 0\end{aligned}$$

e isto implica que $u_{\tilde\lambda}$ é subsolução de (P_λ). Pelo mesmo argumento utilizado para demonstrar o Teorema 1.1, concluímos que existe $u_\lambda \in H^1_{loc}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ solução positiva de (P_λ). Além disso, $u_\lambda \ge u_{\tilde\lambda}$. O corolário está demonstrado. □

Observação 1.13. *É importante observar que, sob a hipótese $(\tilde g_1)$, o Corolário 1.2 pode ser enunciado para funções no espaço $H_0^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$.*

Capítulo 2

Existência de duas soluções não negativas

2.1 Motivação

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = (-u^{-\beta} + \lambda u^p)\chi_{\{u>0\}}, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\beta, p \in (0,1)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e suave. Montenegro e Silva [31] estudaram a existência de duas soluções não-negativas para (2.1), para λ suficientemente grande, via métodos variacionais. Neste trabalho foi demonstrada a existência de uma solução positiva, para λ suficientemente grande, utilizando perturbações do domínio Ω. Observamos que uma solução de (2.1) é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_{\{u>0\}} (-u^{-\beta} + \lambda u^p)\varphi, \ \forall\, \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

A fim de encontrar duas soluções não negativas para (2.1), considera-se a perturbação

$$g_\varepsilon(t) := \begin{cases} \dfrac{t^q}{(t+\varepsilon)^{q+\beta}}\,, & \text{para } t \geq 0, \\ 0\,, & \text{para } t < 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $0 < q < p < 1$, e estuda-se o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = (-g_\varepsilon(u) + \lambda u^p)\chi_{\{u>0\}}, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Observe que $g_\varepsilon \geq 0$ é contínua. Mostra-se que o funcional associado ao Problema (2.3) satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha e é coercivo e limitado inferiormente. Isto permitiu que fossem encontradas duas soluções distintas e não triviais de (2.1), para λ suficientemente grande e ε suficientemente pequeno. Além disso, as estimativas para os níveis críticos associados são independentes de ε. Um ponto essencial a ser destacado é uma estimativa obtida para o gradiente das soluções de (2.3). Tal estimativa foi essencial na demonstração do Teorema. Por fim, mostra-se que, quando $\varepsilon \to 0$, as soluções de (2.3) convergem para duas funções distintas e não triviais em $H_0^1(\Omega)$, funções essas que vem a ser soluções de (2.1). Mais formalmente, foi estabelecido o seguinte resultado

Teorema 1. Existe $\lambda_0 > 0$ tal que o Problema (2.1) possui duas soluções distintas e não triviais para $\lambda > \lambda_0$.

2.2 Estudando um caso mais geral

Inspirados pelo trabalho de [31], estudamos o problema (2.1) de uma maneira mais geral. Relembramos que λ_1 e φ_1 denotam o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ em Ω com condição de Dirichlet na fronteira e a autofunção associada a este autovalor, respectivamente. Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = (-a(x)g(u) + \lambda f(x,u))\chi_{\{u>0\}}, & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P_{\lambda,a}$}$$

onde Ω é um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $a \in C^{1,\nu}(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \nu < 1$, $f(x,s) \in C(\overline{\Omega} \times [0,\ \infty)) \cap C^{1,\mu}(\overline{\Omega} \times (0,\ \infty))$, para algum $0 < \mu < 1$, e $g \in C^2((0,\ \infty))$ são funções satisfazendo:

($\hat{a}_1$) existe uma constante $a_0 > 0$ tal que $a(x) \geq a_0$, para todo $x \in \Omega$;

(f_1) $\liminf\limits_{t \to 0^+} \dfrac{f(x,t)}{t} > 0$, uniformemente em $\overline{\Omega}$;

(f_2) $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{f(x,t)}{t} = 0$, uniformemente em $\overline{\Omega}$;

(f_3) existem $m_1, t_1 > 0$ e $0 < p < 1$ tais que $|f(x,t)| + |f_x(x,t)| + t|f_t(x,t)| \leq m_1 t^p$, para todo $0 < t < t_1$, uniformemente em $\overline{\Omega}$;

($\hat{g}_1$) existem $C < \frac{\lambda_1}{\|a\|_\infty}$ e $\alpha \geq 0$ tais que $g(t) \geq -Ct - \alpha$, para todo $t > 0$;

($\hat{g}_2$) existem $t_0 > 0$, $\theta \geq 0$ e $0 < \gamma < 1$ tais que $\gamma g(t) + t g'(t) > -\theta$, para todo $0 < t < t_0$;

($\hat{g}_3$) $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{g(t)}{t^p} = \infty$, onde p foi dado em (f_3);

(g_4) existe $t_2 > 0$ tal que $2g'(t) + t g''(t) \leq 0$ e $g'(t) \leq 0$, para todo $0 < t < t_2$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $t_0 < t_2$ ao longo do texto.

Note que a hipótese (f_1) permite que f seja assintoticamente linear ou sublinear na origem, enquanto que (f_2) significa que f é sublinear no infinito. Observe que a hipótese ($\hat{g}_2$) é uma versão mais forte da condição (g_2), dada no Capítulo 1 (veja o Lema 2.2). Além disso, em (g_4) temos condições técnicas que nos permitem estabelecer uma limitação para o gradiente das soluções do problema perturbado. Nosso resultado principal neste capítulo é o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Suponha ($\hat{a}_1$), (f_1)-(f_3), ($\hat{g}_1$)-($\hat{g}_3$) e (g_4) satisfeitas. Então, existe $\tilde{\lambda} > 0$ tal que o Problema ($P_{\lambda,a}$) possui duas soluções ordenadas, não negativas e não triviais em $H_0^1(\Omega)$ para $\lambda \geq \tilde{\lambda}$.*

Note que o Teorema 2.1 generaliza o resultado correspondente em [31].

Observamos que, sob as hipóteses do Teorema 2.1 podemos aplicar o Teorema 1.1 e concluir que para $\lambda > \max\{\lambda^0, \tilde{\lambda}\}$ o Problema $(P_{\lambda,a})$ possui uma solução positiva e duas soluções não negativas e não triviais. Entretanto, não podemos afirmar que uma das soluções obtidas no Teorema 2.1 é a solução positiva dada pelo Teorema 1.1.

Estudaremos o Problema $(P_{\lambda,a})$ quando g está perturbada por dois parâmetros, de modo que a função resultante não possua nenhuma singularidade na origem e tenha crescimento subcrítico no infinito. Também estimaremos o gradiente das soluções do problema perturbado, o que será necessário para demonstrar nosso resultado principal. No decorrer deste capítulo escreveremos $u = u^+ - u^-$ onde $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ e $u^-(x) = \max\{-u(x), 0\}$.

Seja $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional associado ao Problema $(P_{\lambda,a})$

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \int_\Omega a(x)G(u^+) - \lambda \int_\Omega F(x,u),$$

onde $G(t) := \int_0^t g(s)ds$ e $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$.

Observe que não estamos supondo limitação superior para o crescimento de g no infinito. Sendo assim, o funcional associado ao Problema $(P_{\lambda,a})$ não está bem definido. Para solucionar este problema consideramos, para $R > \|\varphi_1\|_\infty$ arbitrário, a seguinte função

$$g_R(t) := \begin{cases} g(t)\ , & \text{para } 0 < t \le R, \\ g(R)\ , & \text{para } t > R. \end{cases} \tag{2.4}$$

Porém, a função g_R também apresenta singularidade na origem. Em vista disso consideramos, para $\varepsilon > 0$, a seguinte perturbação

$$g_{R,\varepsilon}(t) := \begin{cases} \dfrac{t}{(t+\varepsilon)} g_R(t+\varepsilon)\ , & \text{para } t \ge 0, \\ 0\ , & \text{para } t < 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

a qual é contínua e não singular na origem. Consideramos, também, os seguintes problemas auxiliares

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)g_R(u)\chi_{\{u>0\}} = \lambda f(x,u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P_{\lambda,a,R}$}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)g_{R,\varepsilon}(u) = \lambda f(x,u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$P^\varepsilon_{\lambda,a,R}$}$$

Definimos o funcional de classe C^1, $I_{R,\varepsilon} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, associado ao Problema $(P^\varepsilon_{\lambda,a,R})$

$$I_{R,\varepsilon}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega a(x)G_{R,\varepsilon}(u) - \lambda \int_\Omega F(x,u), \tag{2.6}$$

onde $G_{R,\varepsilon}(u) := \int_0^u g_{R,\varepsilon}(s)ds$.

Em um primeiro momento, verificamos que as soluções de $(P^\varepsilon_{\lambda,a,R})$ são limitadas em $H_0^1(\Omega)$ e em $L^\infty(\Omega)$ por uma constante M, independente de R e ε. Então, fixamos $R_0 > \max\{M+1, \|\varphi_1\|_\infty\}$ e verificamos que $I_{R_0,\varepsilon}$ é limitado inferiormente e satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha ([3]). Isto permite que encontremos duas soluções distintas e não triviais para o Problema $(P^{\varepsilon}_{\lambda,aR_0})$. Fazendo $\varepsilon \to 0$, demonstramos que estas duas soluções não tendem a zero e tão pouco convergem para o mesmo limite. Na verdade, elas convergem fracamente em $H^1_0(\Omega)$ para duas soluções distintas e não triviais de (P_{λ,aR_0}). Além disso, uma vez que as soluções são uniformemente limitadas para R_0 suficientemente grande, elas também são soluções de $(P_{\lambda,a})$. O principal ingrediente para tal resultado é uma estimativa do gradiente das soluções u_ε de $(P^{\varepsilon}_{\lambda,aR_0})$, dada na Seção 2.7, a qual nos permite concluir que u_ε tende a uma solução u de $(P_{\lambda,a})$, uniformemente, quando $\varepsilon \to 0$, em subconjuntos compactos de Ω.

É importante ressaltar que a perturbação (2.5) é distinta de (2.2) e nos permite simplificar as estimativas do gradiente das soluções u_ε de $(P^{\varepsilon}_{\lambda,aR_0})$. Entretanto, com esta perturbação, não é imediato verificar que o funcional $I_{R,\varepsilon}$ é coercivo, limitado inferiormente e satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha. Por este motivo trabalhamos com o problema auxiliar (P_{λ,aR_0}).

2.3 Resultados preliminares

Nesta seção obtemos algumas estimativas para as funções g e $g_{R,\varepsilon}$ e para o funcional $I_{R,\varepsilon}$. Tais estimativas nos permitirão concluir, futuramente, que $I_{R,\varepsilon}$ possui dois pontos críticos distintos e não triviais e que os níveis críticos associados são independentes do valor do parâmetro ε.

Agora enunciamos nosso primeiro resultado preliminar.

Lema 2.2. *Suponha $(\hat{g}_2)$ satisfeita. Então, dados $R > \|\varphi_1\|_\infty$ e $\hat{t} > 0$, existem $\varepsilon_0 > 0$ e uma constante $C(\hat{t}) > 0$, independente de R e ε, tais que*

$$g(t) < C(\hat{t})t^{-\gamma}, \ \ \forall\, 0 < t < \hat{t}; \tag{i}$$

$$|g_{R,\varepsilon}(t)| \le C(\hat{t})t^{-\gamma} + c_R, \ \forall\, t > 0, \ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \tag{ii}$$

onde $c_R > 0$ é uma constante dependendo apenas de R.

Demonstração. Inicialmente demonstramos (i). Primeiro, verificaremos a desigualdade para $\hat{t}$ suficientemente pequeno. Se $0 < t_1 < \hat{t} < t_0$, podemos utilizar $(\hat{g}_2)$ para obter

$$\int_{t_1}^{\hat{t}} (s^\gamma g(s))' ds = \int_{t_1}^{\hat{t}} (\gamma s^{\gamma-1} g(s) + s^\gamma g'(s)) ds > \frac{-\theta}{\gamma}(\hat{t}^\gamma - t_1^\gamma).$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos $g(t_1) < C(\hat{t})t_1^{-\gamma}$, para $0 < t_1 < \hat{t} < t_0$, onde $C(\hat{t}) = \frac{\theta}{\gamma}\hat{t}^\gamma + \hat{t}^\gamma g(\hat{t})$ é uma constante dependendo apenas de $\hat{t}$, e não de R nem de ε. Também ressaltamos que, como g é singular na origem, a constante $C(\hat{t})$ é positiva. Se $\hat{t} \ge t_0$, utilizamos a continuidade de g no intervalo compacto $[t_0, \ \hat{t}]$ e obtemos a limitação desejada. Logo, (i) está demonstrada.

A seguir, demonstramos (ii). Sem perda de generalidade, admitimos que $\hat{t} \le R$. Observe que, por (2.5), temos $|g_{R,\varepsilon}(t)| \le |g_R(t+\varepsilon)|$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Escolha $\varepsilon_0 := \frac{\hat{t}}{2}$. Quando $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e $0 < t < \frac{\hat{t}}{2}$, utilizamos a desigualdade (i) para obter

$$|g_R(t+\varepsilon)| = |g(t+\varepsilon)| < C(\hat{t})(t+\varepsilon)^{-\gamma} < C(\hat{t})t^{-\gamma}.$$

Por outro lado, se $\frac{\hat{t}}{2} \le t \le R$, utilizamos o fato de g_R ser uma função contínua para obter uma constante positiva c_R tal que $|g_R(t+\varepsilon)| \leq c_R$. Finalmente, quando $t > R$ temos $|g_R(t+\varepsilon)| = |g(R)| \leq c_R$, tomando c_R maior, se necessário. O lema está demonstrado. $\square$

Observação 2.3. *Suponha* $(\hat{g}_2)$ *satisfeita. Então, existe uma constante* $K_1 \geq 0$, *independente de* $R > \|\varphi_1\|_\infty$ *e de* ε, *tal que*

$$G_{R,\varepsilon}(s\varphi_1) \leq K_1, \text{ para } 0 \leq s \leq 1.$$

De fato, fixado $\hat{t} > \|\varphi_1\|_\infty$, *pelo Lema 2.2-(i), temos*

$$\begin{aligned} G_{R,\varepsilon}(s\varphi_1) &= \int_0^{s\varphi_1} [\frac{t}{t+\varepsilon} g_R(t+\varepsilon)]dt \leq \int_0^{s\varphi_1} g(t+\varepsilon)dt \\ &\leq C(\hat{t}) \int_0^{s\varphi_1} t^{-\gamma} dt \leq \frac{C(\hat{t})}{1-\gamma}(s\varphi_1)^{1-\gamma} \leq K_1 < \infty. \end{aligned}$$

Lema 2.4. *Suponha* (f_1) *e* $(\hat{g}_2)$ *satisfeitas. Então, existem constantes positivas* λ_0, b_0, b_1 *e* $s_1 < 1$ *tais que, para todo* $\varepsilon > 0$ *e* $R > \|\varphi_1\|_\infty$, *obtemos*

$$\max_{0 \leq s \leq s_1} I_{R,\varepsilon}(s\varphi_1) \leq b_0 < \infty; \tag{i}$$

$$I_{R,\varepsilon}(s_1\varphi_1) \leq -b_1 < 0, \text{ para todo } \lambda \geq \lambda_0, \tag{ii}$$

onde λ_0, b_0 *e* b_1 *são independentes de* R *e* ε.

Demonstração. Por (f_1), existem $c_2 > 0$ e $0 < \delta < 1$ tais que $\frac{f(x,s)}{s} > c_2$, para $0 < s < \delta$. Atentamos ao fato de que existe $0 < s_1 < 1$ tal que $0 < s\|\varphi_1\|_\infty < \delta$, para $0 < s \leq s_1$. Logo, $F(x, s\varphi_1) > c_2 \int_0^{s\varphi_1} t\,dt = c_2 \frac{(s\varphi_1)^2}{2} \geq 0$, para $0 < s \leq s_1$. Desta desigualdade, da Observação 2.3 e da definição (2.6), concluímos que

$$I_{R,\varepsilon}(s\varphi_1) \leq \frac{1}{2} + K_1\|a\|_\infty|\Omega| := b_0, \text{ para } 0 \leq s \leq s_1.$$

A relação (i) está verificada. Para demonstrar (ii), escrevemos

$$I_{R,\varepsilon}(s_1\varphi_1) \leq b_0 - \lambda \int_\Omega F(x, s_1\varphi_1) \leq b_0 - \lambda \frac{(s_1\|\varphi_1\|_\infty)^2}{2} \to -\infty, \text{ quando } \lambda \to \infty.$$

O lema está demonstrado. $\square$

2.4 Limitação das soluções em $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e resultados de regularidade.

Nesta seção estabelecemos uma limitação a priori em $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ para as soluções de $(P_{\lambda,a,R}^\varepsilon)$. Isto será útil ao verificar que, para R suficientemente grande, uma solução de $(P_{\lambda,a,R}^\varepsilon)$ converge para uma solução do Problema $(P_{\lambda,a})$ quando $\varepsilon \to 0$.

Primeiramente, enunciamos um lema auxiliar de Ladyzhenskaya e Ural'tseva (veja [28]).

Lema 2.5. *Se* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p \leq N$, *e existe* $c_0 \geq 0$ *tal que para* $c \geq c_0$

$$\int_{A_c} |\nabla u|^p \leq \gamma c^\alpha |A_c|^{1-\frac{p}{N}+\bar{\varepsilon}},$$

onde $A_c=\{x\in\Omega\,;\,u(x)>c\}$, $\bar\varepsilon>0$, $0\le\alpha\le\bar\varepsilon+p$, *então* $u^+=\max\{u,0\}\in L^\infty(\Omega)$. *Além disso,*

$$\|u^+\|_{L^\infty}\le M<\infty,$$

com a constante M *dependendo apenas de* γ , α , $\bar\varepsilon$, c_0 , Ω *e* $\|u\|_{L^1(A_{c_0})}$.

De agora em diante, escreveremos $h_{R,\varepsilon}(x,t)=-a(x)g_{R,\varepsilon}(t)+\lambda f(x,t)$.

Lema 2.6. *Suponha* $(\hat a_1)$, (f_2) *e* $(\hat g_1)$ *satisfeitas. Então, toda solução* u_ε *de* $(P^\varepsilon_{\lambda,a,R})$ *é não negativa e pertence a* $H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. *Além disso, existe uma constante* $M=M(\lambda)>0$, *independente de* R *e de* ε, *tal que*

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}\le M; \qquad (i)$$

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}\le M. \qquad (ii)$$

Demonstração. Considere $u_\varepsilon\in H_0^1(\Omega)$ uma solução de $(P^\varepsilon_{\lambda,a,R})$. Primeiro verificamos que u_ε é não negativa. Por simplicidade, escreveremos $u_\varepsilon=u$. De acordo com a Proposição 1.6, $u\in H_0^1(\Omega)$ é uma solução de $(P^\varepsilon_{\lambda,a,R})$ se é uma solução fraca, i.e.,

$$\int_\Omega\nabla u\nabla\varphi=\int_{\{u>0\}}h_{R,\varepsilon}(x,u)\varphi,\ \forall\,\varphi\in H_0^1(\Omega). \tag{2.7}$$

Em particular, tomando $\varphi=u^-$, concluímos imediatamente que $u\ge0$. Prosseguimos para verificar (i). Utilizando $(\hat g_1)$, $(\hat a_1)$ e a definição de $g_{R,\varepsilon}$, obtemos $a(x)(g_{R,\varepsilon}(t)+Ct+\alpha)t\ge0$, para todo $t>0$. Esta desigualdade, a condição (f_2) (veja a equação (1.14)) e o Teorema da Imersão de Sobolev implicam que, dado $\mu>0$, existe $C_\mu>0$, tal que

$$\begin{aligned}\|u\|^2&\le\int_\Omega|\nabla u|^2+\int_\Omega a(x)[g_{R,\varepsilon}(u)+Cu+\alpha]u=\lambda\int_\Omega f(x,u)u+C\int_\Omega a(x)u^2+\alpha\int_\Omega a(x)u\\&\le(\frac{\lambda\mu}{\lambda_1}+\frac{C\|a\|_\infty}{\lambda_1})\|u\|^2+(\lambda C_\mu+\alpha\|a\|_\infty)c_1\|u\|,\end{aligned}$$

para uma constante positiva c_1. Utilizando o fato de $C<\frac{\lambda_1}{\|a\|_\infty}$, escolhemos $\mu<\frac{\lambda_1}{\lambda}(1-\frac{C\|a\|_\infty}{\lambda_1})$ e concluímos que (i) vale.

A fim de estabelecer (ii), dividimos a demonstração em duas etapas. Primeiro, baseados em uma estimativa de Brezis e Kato (veja [4]), mostramos que $u\in L^s(\Omega)$, para todo $1\le s<\infty$ (veja [34]). Em seguida, aplicamos o Lema 2.5 para obter a estimativa (ii). Observe que, quando $N=1$, a estimativa (ii) é obtida imediatamente da imersão $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. Além disso, para $N=2$, também temos a imersão $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s\ge1$. Resta estimar $\|u\|_s$, quando $N\ge3$. Visto que $u\ge0$, é suficiente verificar que $(u-c)^+\in L^s(\Omega)$, para alguma constante $c>0$.

Por $(\hat a_1)$, (f_2) e $(\hat g_1)$ temos

$$h_{R,\varepsilon}(x,u)\le M_1(1+u),\ u\ge c, \tag{2.8}$$

onde $M_1:=[\|a\|_\infty(C+\frac{\alpha}{1+c})+\lambda(1+\frac{c_2}{1+c})\in L^\infty(\Omega)$ é independente de u, ε e R, e c_2 é uma constante positiva. Então, aplicando uma versão do Teorema de Brezis-Kato para problemas singulares [8, 9] (veja também [34] para um resultado relacionado), concluímos que $u\in L^s(\Omega)$, para todo $1\le s<\infty$, e $\|u\|_s\le M_s$, onde M_s é uma constante independente de u, ε e R. Finalmente, estabelecemos a limitação em $L^\infty(\Omega)$. Escolhemos $c_0 = 1$ no Lema 1.7 e utilizamos $(u-c)^+ \in H_0^1(\Omega)$ como função teste. Seja $A_c := \{x \in \Omega\ ;\ u(x) > c\}$ para $c \geq c_0$. Por (2.8) e escolhendo $r \in (1\ ,\ \frac{N}{N-2})$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{A_c} |\nabla u|^2 &= \int_{A_c} \nabla u \nabla u = \int_\Omega \nabla u \nabla (u-c)^+ = \int_\Omega h_{R,\varepsilon}(x,u)(u-c)^+ \leq \int_\Omega M_1(1+u)(u-c)^+ \\ &\leq \bar{M}\int_{A_c}(1+u)u \leq 2\bar{M}\int_{A_c} u^2 \leq 2\bar{M}|A_c|^{1/r}\left(\int_\Omega u^{\frac{2r}{r-1}}\right)^{\frac{r-1}{r}} \leq 2\bar{M}M_s^2|A_c|^{1/r},\end{aligned}$$

onde $s = \frac{2r}{r-1}$. Tomamos $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{r} - 1 + \frac{2}{N}$ e $\alpha = 0$ no Lema 1.7 para concluir que a equação (ii) vale tomando M maior, se necessário. O lema está demonstrado. $\square$

Observação 2.7. *O Lema 2.6 também é válido para as soluções de $(P_{\lambda,a,R})$ no sentido das distribuições (veja a Proposição 1.6), tomando M maior, se necessário.*

De agora em diante, fixamos $R_0 > \max\{M+1,\ \|\varphi_1\|_\infty\}$.

Lema 2.8. *Suponha $(\hat{a}_1)$, (f_2), $(\hat{g}_1)$ e $(\hat{g}_2)$ satisfeitas. Então, as soluções u_ε de $(P^\varepsilon_{\lambda,a,R})$ são positivas e pertencem a $C^1(\overline{\Omega})\cap C^3(\Omega)$.*

Demonstração. No decorrer desta demonstração iremos denotar u_ε por u. Pelo Lema 2.2-(i), o Lema 2.6, (1.14) e o fato de $R_0 > M+1$, temos

$$\begin{aligned}|-a(x)g_{R,\varepsilon}(u) + \lambda f(x,u)| &\leq \|a\|_\infty |g_R(u+\varepsilon)| + \lambda(|u| + c_1) \\ &\leq \|a\|_\infty C(M+1)\varepsilon^{-\gamma} + \lambda(M+c_1).\end{aligned}$$

A desigualdade acima implica em $h_{R,\varepsilon}(x,u) \in L^s(\Omega)$, para todo $s \geq 1$. Pela desigualdade de Calderon-Zygmund (veja [39]), temos $u \in W^{2,s}(\Omega)$, para todo $s \geq 1$ e, juntamente com o Teorema da Imersão de Sobolev, obtemos $u \in C^{1,\nu}(\overline{\Omega})$, para algum $\nu \in (0,1)$.

Prosseguimos para mostrar que $u > 0$. Consideramos o operador $Lu = -\Delta u + c(x)u$, onde

$$c(x) = \begin{cases} a(x)\frac{g_{R,\varepsilon}(u(x)) + Cu(x) + \alpha}{u(x)}, \text{ se } u(x) > 0 \\ a(x)(\frac{g_R(\varepsilon)}{\varepsilon} + \alpha), \text{ se } u(x) = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Pelas propriedades de g, concluímos que $c(x) \in L^\infty(\Omega)$, para todo $\varepsilon > 0$. Além disso, por $(\hat{g}_1)$, temos que $c(x) \geq 0$. Afirmamos que $u > 0$ em Ω. De fato, suponha que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = 0$. Por (f_1), existem $c_2, r > 0$ tais que $\frac{f(x,u(x))}{u(x)} > c_2 > 0$, para $x \in B_r(x_0)$. Visto que $Lu = \lambda f(x,u(x)) + a(x)[Cu(x)+\alpha] \geq 0$ em $B_r(x_0)$, aplicamos um resultado de [23] (Teorema 8.19) e obtemos $u > 0$ em $B_r(x_0)$, o que é uma contradição. A afirmação está demonstrada.

Finalmente, por $(\hat{g}_1)$, o fato de $f(x,s) \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega}\times(0,\ \infty))$ e $u > 0$, obtemos $h_{R,\varepsilon}(x,u) \in C^{1,\theta}(\Omega \times (0,\ \infty))$, para algum $\theta \in (0,1)$. Pelas estimativas de Schauder, obtemos $u \in C^3(\Omega)$. O lema está demonstrado. $\square$

Observação 2.9. *Observamos que a regularidade na função $a(x)$ é de extrema importância neste lema, enquanto que nos resultados anteriores basta supor que $a \in L^\infty(\Omega)$.*

2.5 Resultados auxiliares

Nesta seção, apresentamos alguns resultados envolvendo o funcional $I_{R_0} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, associado ao Problema (P_{λ,a,R_0}),

$$I_{R_0}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega a(x)G_{R_0}(u) - \lambda \int_\Omega F(x,u). \tag{2.10}$$

Observamos que, pelo Lema 2.2-(i) e a definição de g_{R_0}, o funcional I_{R_0} está bem definido e $I_{R_0} \in C(H_0^1(\Omega),\ \mathbb{R})$.

Antes de apresentarmos os resultados desta seção, recordamos que ε_0 e λ_0 foram dados pelo Lema 2.2 e pelo Lema 2.4, respectivamente.

Lema 2.10. *Suponha $(\hat{a}_1)$, (f_2), (f_3), $(\hat{g}_1)$, $(\hat{g}_2)$ e $(\hat{g}_3)$ satisfeitas. Então, o funcional I_{R_0} é coercivo, limitado inferiormente e existem $\hat{a}_2 > 0$ e $0 < \rho < 1$ tais que $I_{R_0}(u) \geq \hat{a}_2 > 0,\ \forall\ u \in \partial B_\rho(0)$.*

Demonstração. Primeiro verificamos a existência de $\hat{a}_2$ e ρ. Por $(\hat{g}_3)$, dada $K > 0$ existe $0 < \delta < R_0$ tal que $g_{R_0}(t) = g(t) \geq Kt^p$, para $0 < t < \delta$. Por estes fatos e o Lema 2.2-(i), podemos escrever

$$G_{R_0}(t) \geq \frac{K}{p+1}t^{p+1},\ \text{para } 0 < t < \delta. \tag{2.11}$$

Por outro lado, por (f_3), existem $m_1, t_1 > 0$ tais que $f(x,t) < m_1 t^p$, para $0 < t < t_1$. Logo,

$$F(x,t) < \frac{m_1}{p+1}t^{p+1},\ \text{para } 0 < t < t_1. \tag{2.12}$$

Escolhemos $\delta^* = \min\{\delta,\ t_1\}$. Então, por $(\hat{a}_1)$, (2.11), (2.12) e pelo Lema 2.6, temos

$$\begin{aligned}\int_{\{0<u<\delta^*\}} [a(x)G_{R_0}(u) - \lambda F(x,u)] &\geq \int_{\{0<u<\delta^*\}} \frac{Ka_0}{p+1}u^{p+1} - \frac{\lambda m_1}{p+1}u^{p+1} \\ &= \frac{a_0K - \lambda m_1}{p+1}\int_{\{0<u<\delta^*\}} u^{p+1}.\end{aligned}$$

Portanto, escolhendo K grande o suficiente de modo que $a_0K - \lambda m_1 > 0$, obtemos

$$\int_\Omega a(x)G_{R_0}(u) - \lambda\int_\Omega F(x,u) \geq \int_{u\geq\delta^*} a(x)G_{R_0}(u) - \lambda F(x,u). \tag{2.13}$$

Como $a \in L^\infty(\Omega)$, $g_{R_0}(t) \geq -Ct - \alpha$ e f satisfaz (1.14), existe uma constante $c_3 > 0$ tal que

$$\int_{u\geq\delta^*} a(x)G_{R_0}(u) - \lambda F(x,u) \geq -c_3\int_{\{u\geq\delta^*\}} u^2.$$

Observe que é possível encontrar uma constante $c_4 > 0$ tal que

$$t^2 \leq c_4 t^\sigma,\ \text{para } t \geq \delta^*, \tag{2.14}$$

onde $2 < \sigma < 2^*$. Sendo assim, obtemos

$$\int_\Omega a(x)G_{R_0}(u) - \lambda\int_\Omega F(x,u) \geq -c_3\int_{\{u\geq\delta^*\}} u^2 \geq -c_5\int_{\{u\geq\delta^*\}} u^\sigma \geq -c_5\|u\|_{L^\sigma}^\sigma \tag{2.15}$$

Por (2.4), (2.15) e o Teorema da Imersão de Sobolev, temos

$$\begin{aligned} I_{R_0}(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \int_\Omega a(x)G_{R_0}(u) - \lambda \int_\Omega F(x,u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - c_5 \int_\Omega u^\sigma \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - c_6\|u\|^\sigma. \end{aligned}$$

Logo, tomando $0 < \rho < 1$ suficientemente pequeno, obtemos $c_6\rho^{\sigma-2} \leq \frac{1}{4}$, e consequentemente $I_{R_0}(u) \geq \hat{a}_2 := \frac{\rho^2}{4}$, para toda $u \in \partial B_\rho(0)$.

A seguir, demonstramos que I_{R_0} é coercivo e limitado inferiormente. Por $(\hat{g}_1)$ e a definição (2.4), temos $G_{R_0}(t) \geq -C\frac{t^2}{2} - \alpha t$, para $t > 0$. Aplicando o Teorema da Imersão de Sobolev, mais uma vez, obtemos uma constante $c_7 > 0$ tal que

$$I_{R_0}(u) \geq (\frac{1}{2} - \frac{C\|a\|_\infty}{2\lambda_1})\|u\|^2 - c_7\|u\| - \lambda \int_\Omega F(x,u), \ \forall\ u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.16}$$

Por (1.14), dado $\tilde{\varepsilon} > 0$ existe $C_{\tilde{\varepsilon}} > 0$ tal que $F(x,u) \leq \tilde{\varepsilon}\frac{u^2}{2} + C_{\tilde{\varepsilon}}u$. Esta estimativa e a desigualdade (2.16) implicam em

$$I_{R_0}(u) \geq (\frac{1}{2} - \frac{C\|a\|_\infty}{2\lambda_1} - \frac{\lambda\tilde{\varepsilon}}{2\lambda_1})\|u\|^2 - c_{8,\tilde{\varepsilon}}\|u\|.$$

Escolhendo $\tilde{\varepsilon} > 0$ pequeno o suficiente e utilizando o fato de que $C < \frac{\lambda_1}{\|a\|_\infty}$, obtemos a coercividade e a limitação inferior de I_{R_0}. O lema está demonstrado. □

Lema 2.11. *Suponha $(\hat{g}_1)$ e $(\hat{g}_2)$ satisfeitas. Então, dadas sequências $(\varepsilon_n) \subset (0\ ,\ \varepsilon_0)$ e (t_n), $t_n > 0$, tais que $\varepsilon_n \to 0$ e $t_n \to t$, obtemos $G_{R_0,\varepsilon_n}(t_n) \to G_{R_0}(t)$, quando $n \to \infty$.*

Demonstração. Devemos mostrar que $\int_0^{t_n} g_{R_0,\varepsilon_n}(s)ds \to \int_0^t g_{R_0}(s)ds$. Considere $T > 0$ tal que $|t_n|, |t| < T$. Pelo Lema 2.2, existem constantes positivas $C(t)$ e c_{R_0} tais que

$$|g_{R_0,\varepsilon_n}(s)| \leq C(t)s^{-\gamma} + c_{R_0} \in L^1(0,t). \tag{2.17}$$

Analisamos dois casos. Primeiro consideramos $t = 0$. Por (2.17) e por $(\hat{g}_1)$, temos

$$-C\frac{t_n^2}{2} - \alpha t_n \leq \int_0^{t_n} g_{R_0,\varepsilon_n}(s)ds \leq \frac{C(t)}{1-\gamma}t_n^{1-\gamma} + c_{R_0}t_n.$$

Como $0 < \gamma < 1$, concluímos que $\int_0^{t_n} g_{R_0,\varepsilon_n}(s)ds \to 0 = G_{R_0}(0)$, quando $n \to \infty$. Quando $t > 0$, podemos escrever

$$\int_0^{t_n} g_{R_0,\varepsilon_n}(s)ds = \int_0^T g_{R_0,\varepsilon_n}(s)\chi_{\{0<s<t_n\}}ds. \tag{2.18}$$

Se $s < t$, temos $g_{R_0,\varepsilon_n}(s)\chi_{\{0<s<t_n\}} \to g_{R_0}(s)\chi_{\{0<s<t\}}$. Por outro lado, quando $t < s \leq T$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g_{R_0,\varepsilon_n}(s)\chi_{\{0<s<t_n\}} = 0 = g_{R_0}(s)\chi_{\{0<s<t\}}$, para $n \geq n_0$.

Logo, por (2.17) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que $\int_0^{t_n} g_{R_0,\varepsilon_n}(s)\,ds \to \int_0^t g_{R_0}(s)\,ds$. O lema está demonstrado. □

Lema 2.12. *Suponha* $(\hat{a}_1)$, (f_2), (f_3), $(\hat{g}_1)$-$(\hat{g}_3)$ *satisfeitas. Então, existem constantes positivas* ε_1 *e* b_2 *tais que, para* $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, *o funcional* $I_{R_0,\varepsilon}$ *é coercivo e satisfaz*

$$I_{R_0,\varepsilon}(u) \geq \hat{a}_2/2 > 0, \ \forall\ u \in \partial B_\rho(0), \textit{onde } \rho \textit{ e } \hat{a}_2 \textit{ foram dados pelo Lema 2.10}; \tag{i}$$

$$I_{R_0,\varepsilon}(u) \geq -b_2 > -\infty, \ \forall\ u \in H_0^1(\Omega). \tag{ii}$$

Demonstração. Para demonstrar (i), argumentamos por contradição. Suponha que existem sequências $(\varepsilon_n) \subset (0,\ \varepsilon_0)$, $\varepsilon_n \to 0$ e $(u_n) \subset \partial B_\rho(0)$ tais que $I_{R_0,\varepsilon_n}(u_n) < \hat{a}_2/2$. Escrevemos

$$|I_{R_0}(u_n) - I_{R_0,\varepsilon_n}(u_n)| = |\int_\Omega G_{R_0}(u_n) - \int_\Omega G_{R_0,\varepsilon_n}(u_n)|. \tag{2.19}$$

Como $(u_n) \subset \partial B_\rho(0)$, a menos de subsequência temos

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega); \\ u_n \to u, \text{ fortemente em } \ L^r(\Omega),\ 1 \leq r < 2^*; \\ u_n(x) \to u(x), \text{ q.t.p. em } \Omega; \\ |u_n(x)| \leq h_r(x) \in L^r(\Omega),\ 1 \leq r < 2^*, \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{cases} \tag{2.20}$$

Pelo Lema 2.11 e a continuidade de G_{R_0}, obtemos $G_{R_0}(u_n(x)) - G_{R_0,\varepsilon_n}(u_n(x)) \to 0$, quando $n \to \infty$. Utilizando o Lema 2.2-(ii), (2.20) e o fato de $a \in L^\infty(\Omega)$, concluímos que existem constantes c_9, c_{R_0} tais que

$$\begin{aligned} |a(x)||G_{R_0}(u_n(x)) - G_{R_0,\varepsilon_n}(u_n(x))| &\leq \|a\|_\infty[\frac{2c_9}{1-\gamma}|u_n(x)|^{1-\gamma} + 2c_{R_0}|u_n(x)|] \\ &\leq 2\|a\|_\infty[\frac{c_9}{1-\gamma}(1 + h_1(x)) + c_{R_0}h_1(x)] \in L^1(\Omega) \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.10, a equação (2.19), o fato de $I_{R_0,\varepsilon_n}(u_n) < a_2$ e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$0 < \frac{\hat{a}_2}{2} \leq |I_{R_0}(u_n) - I_{R_0,\varepsilon_n}(u_n)| \to 0,$$

o que é uma contradição. Logo, a equação (i) está demonstrada.

Por fim, verificamos que o funcional é coercivo e satisfaz (ii). Observando que, por $(\hat{g}_1)$, existe $\hat{\alpha} > 0$ tal que $G_{R_0,\varepsilon}(t) \geq -Ct^2/2 - \hat{\alpha}t$, argumentamos como na demonstração do Lema 2.10 e obtemos a coercividade e a limitação inferior de $I_{R_0,\varepsilon}$. O lema está demonstrado. □

2.6 Duas soluções do problema perturbado

Nesta seção verificamos a existência de duas soluções não negativas para o Problema $(P^\varepsilon_{\lambda,a,R})$. De agora em diante, denotaremos $g_{R_0,\varepsilon}$, $G_{R_0,\varepsilon}$ e $I_{R_0,\varepsilon}$ por g_ε, G_ε e I_ε, respectivamente. Nossa estratégia é encontrar duas soluções distintas e não triviais para o Problema $(P^\varepsilon_{\lambda,a,R})$ e então mostrar que, quando $\varepsilon \to 0$, estas soluções convergem para duas funções distintas e não triviais em $H_0^1(\Omega)$. Por último, verificamos que estas funções são soluções de $(P_{\lambda,a})$. De agora em diante, fixamos $\lambda \geq \lambda_0$, onde λ_0 foi dado pelo Lema 2.4.

Proposição 2.13. *Suponha* $(\hat{a}_1)$, (f_1)-(f_3), $(\hat{g}_1)$-$(\hat{g}_3)$ *satisfeitas. Considere* ε_1 *dado pelo Lema 2.12. Então, o funcional* I_ε *possui um mínimo global* u_ε^1 *e um ponto crítico do tipo passo da montanha* u_ε^2 *satisfazendo* $u_\varepsilon^2 \le u_\varepsilon^1$

$$-\infty < -b_2 \le c_\varepsilon^1 := I_\varepsilon(u_\varepsilon^1) \le -b_1 < 0; \qquad (i)$$

$$0 < a_2 \le c_\varepsilon^2 := I_\varepsilon(u_\varepsilon^2) \le a_1 < \infty, \qquad (ii)$$

para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, *onde as constantes* b_1 *e* a_2, b_2 *são dadas pelo Lema 2.4 e pelo Lema 2.12, respectivamente, e* a_1 *é uma constante que não depende de* ε.

Demonstração. Primeiro, afirmamos que o funcional I_ε satisfaz a condição de (PS). De fato, considere uma sequência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $I_\varepsilon(u_n) \to c$ e $\|I'_\varepsilon(u_n)\| \to 0$, quando $n \to \infty$. Pelo Lema 2.12, o funcional I_ε é coercivo, logo (u_n) é uma sequência limitada. A seguir, observamos que, devido à definição de $g_{R_0,\varepsilon}$ e (f_2), o termo não linear $\lambda f(x,t) - a(x) g_\varepsilon(t)$ é contínuo e apresenta crescimento subcrítico no infinito. Assim, aplicando um resultado padrão (veja [37]), inferimos que (u_n) possui uma subsequência convergente. A afirmação está demonstrada.

Pela afirmação acima e o Lema 2.12-(ii), concluímos que o funcional I_ε possui um mínimo global $u_\varepsilon^1 \ge 0$ (veja [37]). Além disso, pelo Lema 2.4-(ii) e pelo Lema 2.12-(ii), a desigualdade (i) está satisfeita.

Para verificar a existência da segunda solução u_ε^2 satisfazendo $u_\varepsilon^2 \le u_\varepsilon^1$, invocamos a Proposição 5.3/Observação 5.4. Considere $\overline{u} = u_\varepsilon^1$, $h(x,t) = h_{R_0,\varepsilon}(x,t)$ e $I = I_\varepsilon$. Note que, pela definição de $g_{R_0,\varepsilon}$ e a condição (f_3), temos $h_{R_0,\varepsilon}(x,0) = 0$, para todo $x \in \Omega$. Além disso, também temos $h_{R_0,\varepsilon}$ limitada em intervalos limitados.

Como $I_\varepsilon(u_\varepsilon^1) \le -b_1 < 0$, a condição $(I1)$ da Proposição 5.3 está satisfeita. Além disso, pelo Lema 2.12, a condição $(I2)$ também é satisfeita. Logo, existe um ponto crítico u_ε^2 of I_ε satisfazendo $0 \le u_\varepsilon^2 \le u_\varepsilon^1$ e $0 < a_2 \le c_\varepsilon^2 := I_\varepsilon(u_\varepsilon^2)$.

Finalmente, resta mostrar apenas a existência de uma constante $a_1 > 0$, independente de ε, tal que $I_\varepsilon(u_\varepsilon^2) \le a_1$. Observe que, como u_ε^1 é não negativa, podemos considerar o caminho $\gamma(t) = t u_\varepsilon^1$ conectando 0 e u_ε^1. Pela caracterização de c_ε^2 temos, em particular, $0 < c_\varepsilon^2 \le \max_{t \in [0,\,1]} I_\varepsilon(t u_\varepsilon^1)$. Pelo Lema 2.2-$(ii)$, o fato de $\|u_\varepsilon^1\|$, $\|u_\varepsilon^1\|_\infty \le M$ e (1.14), existem constantes $c_{10}, c_{11} > 0$ tais que

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(t u_\varepsilon^1) &= \frac{t^2}{2}\|u_\varepsilon^1\|^2 + \int_\Omega a(x) G_\varepsilon(t u_\varepsilon^1) - \lambda \int_\Omega F(x, t u_\varepsilon^1) \\ &\le \frac{M^2}{2} + c_{10}|\Omega|\|a\|_\infty - \lambda c_{11}|\Omega| := a_1, \end{aligned}$$

e a_1 não depende de ε. A proposição está demonstrada. □

De agora em diante, dada uma sequência $(\varepsilon_n) \subset (0, \varepsilon_1)$, onde ε_1 foi dado pelo Lema 2.12, denotamos por u_n^1 e u_n^2, respectivamente, os dois pontos críticos $u_{\varepsilon_n}^1$ e $u_{\varepsilon_n}^2$ de I_ε, dados pela Proposição 2.13. Procedemos para encontrar soluções de $(P_{\lambda,a})$.

Proposição 2.14. *Suponha* $(\hat{a}_1)$, (f_1)-(f_3), $(\hat{g}_1)$-$(\hat{g}_3)$ *satisfeitas e seja* $(\varepsilon_n) \subset (0, \varepsilon_1)$ *uma sequência tal que* $\varepsilon_n \to 0$, *quando* $n \to \infty$. *Então,* (u_n^1) *e* (u_n^2) *possuem subsequências que convergem fracamente, em* $H_0^1(\Omega)$, *para* u^1 *e* u^2, *respectivamente. Além do mais,* $0 \le u^1 \le u^2$ *são distintas e não triviais.*

Demonstração. Considerando a estimativa (i) dada pelo Lema 2.6, encontramos subsequências (ainda denotadas por (u_n^i), $i = 1, 2)$, tais que, para $i = 1, 2$,

$$\begin{cases} u_n^i \rightharpoonup u^i, \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega); \\ u_n^i \to u^i, \text{ fortemente em } L^r(\Omega), 1 \le r < 2^*; \\ u_n^i(x) \to u^i(x), \text{ q.t.p. em } \Omega; \\ |u_n^i(x)| \le l_r(x) \in L^r(\Omega), \text{ q.t.p. em } \Omega, 1 \le r < 2^*. \end{cases} \tag{2.21}$$

Como u_n^i é um ponto crítico de $I_n := I_{\varepsilon_n}$, temos $u_n^i \geq 0$ e

$$\int_\Omega |\nabla u_n^i|^2 + \int_\Omega a(x) g_{\varepsilon_n}(u_n^i) u_n^i = \lambda \int_\Omega f(x, u_n^i), \ i = 1, 2.$$

Considerando as relações acima e a Proposição 2.13, obtemos

$$I_n(u_n^1) = \int_\Omega a(x) \left[G_{\varepsilon_n}(u_n^1) - \frac{1}{2} g_{\varepsilon_n}(u_n^1) u_n^1 \right] + \lambda \int_\Omega [\frac{1}{2} f(x, u_n^1) u_n^1 - F(x, u_n^1)] \le -b_1 < 0, \tag{2.22}$$

e

$$I_n(u_n^2) = \int_\Omega a(x) \left[G_{\varepsilon_n}(u_n^2) - \frac{1}{2} g_{\varepsilon_n}(u_n^2) u_n^2 \right] + \lambda \int_\Omega [\frac{1}{2} f(x, u_n^1) u_n^1 - F(x, u_n^1)] \ge a_2 > 0. \tag{2.23}$$

Afirmamos que, para $i = 1, 2$, as seguintes equações são verdadeiras

$$\int_\Omega g_{\varepsilon_n}(u_n^i) u_n^i \to \int_\Omega g(u^i) u^i, \text{ quando } n \to \infty, \tag{2.24}$$

$$\int_\Omega G_{\varepsilon_n}(u_n^i) \to \int_\Omega G(u^i), \text{ quando } n \to \infty, \tag{2.25}$$

$$\int_\Omega f(x, u_n^i) u_n^i \to \int_\Omega f(x, u^i) u^i, \text{ quando } n \to \infty, \tag{2.26}$$

$$\int_\Omega F(x, u_n^i) \to \int_\Omega F(x, u^i) \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.27}$$

Assumindo a afirmação por um momento e considerando (2.21)-(2.23), obtemos

$$\int_\Omega a(x) [G(u^1) - \frac{1}{2} g(u^1) u^1] + \lambda \int_\Omega [\frac{1}{2} f(x, u^1) u^1 - F(x, u^1)] \le -b_1 < 0,$$

$$\int_\Omega a(x) [G(u^2) - \frac{1}{2} g(u^2) u^2] + \lambda \int_\Omega [\frac{1}{2} f(x, u^2) u^2 - F(x, u^2)] \ge a_2 > 0.$$

As desigualdades acima implicam que u^1 e u^2 são distintas e não triviais. Logo, a fim de demonstrar a Proposição 2.14, é suficiente verificar que as equações (2.24)-(2.27) são verdadeiras.

Sem perda de generalidade, assumimos que $i = 1$. Considerando o Lema 2.2, a equação (2.21) e o fato de $\|u_n^1\|_\infty \le M$, verificamos que existem constantes $C(M)$, $c_{R_0} > 0$ tais que

$$\begin{aligned} |a(x) g_{\varepsilon_n}(u_n^1(x))(u_n^1(x))| &\le \|a\|_\infty (C(M) |u_n^1(x)|^{1-\gamma} + c_{R_0} |u_n^1(x)|) \\ &\le \|a\|_\infty (C(M)(1 + h_1(x)) + c_{R_0} h_1(x)) \in L^1(\Omega), \text{ em quase todo ponto de } \Omega. \end{aligned}$$

Também temos $a(x) g_{\varepsilon_n}(u_n^1(x))(u_n^1(x)) \to a(x) g(u^1(x))(u^1(x))$, em quase todo ponto de Ω. De fato, considere $x \in \Omega$ tal que $u_n^1(x) \to u^1(x)$. Analisamos dois casos. Primeiro, se $u^1(x) = 0$, a desigualdade acima implica em

$$|a(x)g_{\varepsilon_n}(u_n^1(x))(u_n^1(x))| \leq \|a\|_\infty(C(M)|u_n^1(x)|^{1-\gamma} + c_{R_0}2|u_n^1(x)|) \to 0 = a(x)g(u^1(x))(u^1(x)),$$

em quase todo ponto de Ω. Quando $u^1(x) > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u_n^1(x) > 0$, para $n \geq n_0$ e, consequentemente,

$$a(x)g_{\varepsilon_n}(u_n^1(x))(u_n^1(x)) = a(x)\frac{u_n^1(x)}{u_n^1(x)+\varepsilon_n}g_1(u_n^1(x)+\varepsilon_n)u_n^1(x) \to a(x)g(u^1(x))(u^1(x)),$$

onde utilizamos o fato de $u_n^1(x) + \varepsilon_n \to u^1(x)$, quando $n \to \infty$, e o fato de g ser contínua em $u^1(x)$.

Portanto, a relação (2.24) é uma consequência direta destes fatos e do Teorema da Convergência Dominada.

A fim de verificar (2.25), invocamos o Lema 2.11 e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obter $\int_\Omega a(x)[G_{\varepsilon_n}(u_n^i) - G(u^i)] \to 0$, quando $n \to \infty$. A seguir, demonstramos a equação (2.26). Temos $f(x, u_n^1) \to f(x, u^1)$, em quase todo ponto de Ω. Além disso, por (1.14) existe uma constante $c_4 > 0$ tal que

$$|f(x, u_n^1)u_n^1| \leq (u_n^1)^2 + c_4|u_n^1| \leq l_2^2 + c_4 l_1 \in L^1(\Omega).$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue mais uma vez, concluímos que (2.26) vale. Finalmente demonstramos (2.27). Como $F(x, u_n^1) \to F(x, u^1)$, em quase todo ponto de Ω, utilizamos (1.14) e (2.21) novamente para obter

$$|F(x, u_n^1)| \leq \frac{1}{2}l_2^2 + c_4 l_1 \in L^1(\Omega).$$

Estes fatos e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue implicam em (2.27). A proposição está demonstrada. □

Nossa meta agora é obter estimativas para soluções de $(P^\varepsilon_{\lambda,a,R})$ e mostrar que no limite, quando $\varepsilon \to 0$, as funções u_1 e u_2, dadas pela Proposição 2.14, são soluções de $(P_{\lambda,a})$.

2.7 Estimativas do gradiente para as soluções do problema perturbado

Sem perda de generalidade, consideramos $t_0 < \min\{t_1, t_2\}$, onde t_0, t_1, t_2 foram dados por $(\hat{g}_2)$, (f_3) e (g_4), respectivamente. Relembramos que nos referimos a ε_1 como sendo o que foi dado pelo Lema 2.12 e que, sem perda de generalidade, podemos supor $\varepsilon_1 < \varepsilon_0 < t_0$. Além disso, utilizando a condição $(\hat{g}_3)$, podemos supor que $g(t) > 0$ em $(0, t_0)$.

Nesta seção obtemos uma estimativa local para o gradiente das soluções u_ε do Problema $(P^\varepsilon_{\lambda,a,R})$. Mais especificamente, nossa meta é demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 2.15. *Suponha $(\hat{a}_1)$, (f_1)-(f_3), $(\hat{g}_1)$-$(\hat{g}_3)$ e (g_4) satisfeitas e seja $K \subset \Omega$ um conjunto compacto. Então, existem constantes $\hat{M} > 0$ e C_1, independentes de ε, tais que toda solução u_ε do Problema $(P^\varepsilon_{\lambda,a,R})$ satisfaz*

$$|\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \leq \hat{M}u_\varepsilon(x)[g(u_\varepsilon(x)) + C_1], \forall\, x \in K, 0 < \varepsilon < \varepsilon_1.$$

Observação 2.16. *Observamos que a constante C_1, que aparece na estimativa acima, depende apenas dos parâmetros α, C, dados por $(\hat{g}_1)$, θ, γ, t_0, dados por $(\hat{g}_2)$, e dos valores de g, g', g'' no intervalo $[t_0, M]$, onde M foi dada pelo Lema 2.6 .*

A demonstração da Proposição 2.15 será realizada através da apresentação e demonstração de vários resultados auxiliares. Antes de prosseguir, consideramos M dada pelo Lema 2.6 e $u = u_\varepsilon$ uma solução de $(P^\varepsilon_{\lambda,a,R})$, e definimos, para $0 < t \leq M$, as seguintes funções:

$$\tilde{h}_\varepsilon(x,t) = a(x)g_\varepsilon(t) - \lambda f(x,t) = a(x)\frac{t}{t+\varepsilon}g(t+\varepsilon) - \lambda f(x,t), \tag{2.28}$$

$$Z(t) = tg(t) + C_1 t = t(g(t) + C_1) = t\bar{g}(t), \tag{2.29}$$

$$w = \frac{|\nabla u|^2}{Z(u)} \tag{2.30}$$

onde $C_1 > \max\{2\alpha,\ \frac{\theta}{\gamma},\ \frac{M}{(1-\gamma)^2} + \alpha + CM,\ \alpha + \frac{Mm'}{\gamma}, \alpha + CM + Mm',\ 4M_4(2\alpha + M_5)/(2\alpha - M_2)\}$ é uma constante independente de ε, m' é uma constante positiva tal que $g'(t) \geq -m'$ em $[t_0,\ M]$, $M_2 = Mm' + CM + \alpha$, $M_4 = M\max_{[t_0,M]}|2g'(t) + Mg''(t)|$ e $M_5 = \max_{[t_0,M]}|g(t)|$. Relembramos que α e C foram dados em $(\hat{g}_1)$ e que θ, γ e t_0 foram dados em $(\hat{g}_2)$.

Lema 2.17. *Suponha $(\hat{g}_1)$ e $(\hat{g}_2)$ satisfeitas. Então, existe uma constante $\hat{C}$ independente de ε tal que, para todo $0 < t \leq M$,*

$$Z'(t) > (1-\gamma)\bar{g}(t), \tag{i}$$

$$Z(t) \leq \hat{C}Z'(t)^2. \tag{ii}$$

Demonstração. Por $(\hat{g}_2)$, temos que $\gamma\bar{g}(t) + t\bar{g}'(t) = \gamma g(t) + tg'(t) + \gamma C_1 > -\theta + \gamma C_1 > 0$, para $0 < t < t_0$. Então, concluímos que, para $0 < t < t_0$, vale

$$\bar{g}(t) + t\bar{g}'(t) > (1-\gamma)\bar{g}(t). \tag{2.31}$$

Por outro lado, em $[t_0,\ M]$ temos que g e g' são limitadas inferiormente, logo, pela escolha de C_1,

$$\bar{g}(t) + t\bar{g}'(t) > -\alpha\gamma - Mm' + \gamma C_1 > 0. \tag{2.32}$$

As relações (2.31) e (2.32) implicam em $Z'(t) > (1-\gamma)\bar{g}(t)$. Por outro lado, $Z(t) = t\bar{g}(t) \leq M\bar{g}(t)$, para $0 < t \leq M$. Sendo assim, para demonstrar (ii) é suficiente obter a seguinte relação

$$M\bar{g}(t) \leq (1-\gamma)^2\bar{g}(t)^2,\ \forall\, 0 < t \leq M. \tag{2.33}$$

Asseguramos que a estimativa (2.33) é satisfeita, uma vez que $C_1 > \frac{M}{(1-\gamma)^2} + \alpha + CM$. De fato, esta desigualdade e $(\hat{g}_1)$ implicam em

$$M < (C_1 - \alpha - CM)(1-\gamma)^2 \leq (C_1 - \alpha - Ct)(1-\gamma)^2 \leq (C_1 + g(t))(1-\gamma)^2 = \bar{g}(t)(1-\gamma)^2$$

e, como $\bar{g}(t) > 0$, para todo $0 < t \leq M$, concluímos que (2.33) vale. O lema está demonstrado. □

Lema 2.18. *Suponha $(\hat{a}_1)$, (f_3), $(\hat{g}_1)$-$(\hat{g}_3)$ e (g_4) satisfeitas. Então, existe uma constante positiva $\tilde{C}$ tal* *que, para todo $x \in \overline{\Omega}$, as seguintes relações são satisfeitas:*

$$Z(t)|(\tilde{h}_\varepsilon)_t(x,t)| \leq \tilde{C}\tfrac{1}{2}Z'(t)^2, \qquad (i)$$

$$Z'(t)\tilde{h}_\varepsilon(x,t) \leq \tilde{C}\tfrac{1}{2}Z'(t)^2, \qquad (ii)$$

$$|\nabla u||(\tilde{h}_\varepsilon)_x(x,u)| \leq \tilde{C}w^{\frac{1}{2}}Z'(u)^2, \qquad (iii)$$

$$\frac{1}{2}Z'(t) - Z(t)Z''(t) \geq \tilde{C}Z'(t)^2, \qquad (iv)$$

uniformemente para $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ *e* $0 < t \leq M$.

Demonstração. Note que, pelo Lema 2.17-(i), para demonstrar (i) e (ii) é suficientemente mostrar que $Z(t)|(\tilde{h}_\varepsilon)_t(x,t)| \leq \hat{C}\overline{g}(t)^2$ e $\tilde{h}_\varepsilon(x,t) \leq \hat{C}\overline{g}(t)$, respectivamente, onde $\hat{C} > 0$ é uma constante.

Começamos pela demonstração de (i). Pela definição de $\tilde{h}_\varepsilon$, temos

$$(\tilde{h}_\varepsilon)_t(x,t) = a(x)\Big[\frac{\varepsilon}{(t+\varepsilon)^2}g(t+\varepsilon) + \frac{t}{t+\varepsilon}g'(t+\varepsilon)\Big] - \lambda f_t(x,t),\ \forall\, x \in \overline{\Omega}, 0 < t \leq M.$$

Utilizando o fato de $a \in L^\infty(\Omega)$, temos

$$|(\tilde{h}_\varepsilon)_t(x,t)| \leq \|a\|_\infty\Big[\frac{|g(t+\varepsilon)|}{t+\varepsilon} + |g'(t+\varepsilon)|\Big] + \lambda|f_t(x,t)|,\ \forall\, x \in \overline{\Omega}, 0 < t \leq M.$$

Afirmamos que existe $\tilde{C} > 0$ tal que $|(\tilde{h}_\varepsilon)_t(x,t)| \leq \tilde{C}\frac{\overline{g}(t)}{t}$, para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $0 < t \leq M$. De fato, em vista de (f_3) e ($\hat{g}_3$), existe $\bar{t}_1 \in (0, t_1)$ tal que $|f_t(x,t)| \leq \overline{g}(t)/t$. Utilizando esta desigualdade e a continuidade de f_t e $\overline{g}$ em $\overline{\Omega} \times [t_1, M]$, encontramos $\bar{c}_1 > 0$ tal que

$$|f_t(x,t)| \leq \bar{c}_1\frac{\overline{g}(t)}{t},\ \forall x \in \overline{\Omega}, 0 < t \leq M. \qquad (2.34)$$

Portanto, $|(\tilde{h}_\varepsilon)_t(x,t)| \leq \|a\|_\infty\Big[\frac{|g(t+\varepsilon)|}{t} + |g'(t+\varepsilon)|\Big] + \bar{c}_1\frac{\overline{g}(t)}{t}$. Para estimar $Z(t)|(\tilde{h}_\varepsilon)_t(x,t)|$, consideramos dois possíveis casos. Se $0 < t+\varepsilon < t_0$, utilizamos (g_4), ($\hat{g}_2$) e a escolha de C_1 para obter uma constante $\bar{c}_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}|(\tilde{h}_\varepsilon)_t(x,t)| &\leq \|a\|_\infty\Big[\frac{|g(t+\varepsilon)|}{t} + |g'(t+\varepsilon)|\Big] + \bar{c}_1\frac{\overline{g}(t)}{t} \leq \|a\|_\infty\Big[\frac{|g(t+\varepsilon)|}{t} - g'(t+\varepsilon)\Big] + \bar{c}_1\frac{\overline{g}(t)}{t}\\ &\leq \|a\|_\infty\Big[\frac{|g(t+\varepsilon)|}{t} + \frac{\gamma g(t+\varepsilon)+\theta}{t+\varepsilon}\Big] + \bar{c}_1\frac{\overline{g}(t)}{t} \leq \|a\|_\infty\frac{|g(t+\varepsilon)|}{t} + \bar{c}_2\frac{\overline{g}(t)}{t}.\end{aligned}$$

Por ($\hat{g}_3$) e (g_4), sem perda de generalidade, podemos supor que $|g(t+\varepsilon)| = g(t+\varepsilon) \leq g(t) + C_1 = \overline{g}(t)$, em $(0, t_0)$. Este fato e a equação acima, nos levam a concluir que existe $\bar{c}_3 > 0$ tal que

$$|(\tilde{h}_\varepsilon)_t(x,t)| \leq \bar{c}_3\frac{\overline{g}(t)}{t}.$$

Por outro lado, se $t_0 \leq t+\varepsilon \leq M$, utilizamos a continuidade de g e g' neste intervalo compacto e o fato de $\overline{g}(t) \geq \alpha > 0$ para concluir que existe uma constante $\bar{c}_4 > 0$ tal que

$$|(\tilde{h}_\varepsilon)_t(x,t)| \leq \|a\|_\infty\Big[\frac{|g(t+\varepsilon)|}{t} + |g'(t+\varepsilon)|\Big] + \bar{c}_1\frac{\overline{g}(t)}{t} \leq \bar{c}_4\frac{\overline{g}(t)}{t}$$

A afirmação está demonstrada. Utilizando esta afirmação e a definição de Z, temos $Z(t)|(\tilde{h}_\varepsilon)_t(x,t)| \leq$

$\tilde{C}\bar{g}(t)^2$, o que demonstra (i).

Prosseguimos para demonstrar (ii). Relembramos que é suficiente verificar que $\tilde{h}_\varepsilon(x,t) \leq \hat{C}\bar{g}(t)$. Pela definição (2.28), temos $|\tilde{h}_\varepsilon(x,t)| \leq \|a\|_\infty |g(t+\varepsilon)| + \lambda |f(x,t)|$. Por (f_3) e um argumento similar ao aplicado para obter a desigualdade (2.34), podemos encontrar uma constante $\bar{c}_5 > 0$ tal que

$$|\tilde{h}_\varepsilon(x,t)| \leq \|a\|_\infty |g(t+\varepsilon)| + \bar{c}_5 \bar{g}(t)$$

De maneira análoga à demonstração de (i), verificamos que existe $\bar{c}_6 > 0$ tal que $|g(t+\varepsilon)| \leq \bar{c}_6 \bar{g}(t)$, para $0 < t \leq M$. Desta maneira, encontramos $\bar{c}_7 > 0$ tal que $|\tilde{h}_\varepsilon(x,s)| \leq \bar{c}_7 \bar{g}(t)$. A equação (ii) está demonstrada.

Prosseguimos para demonstrar (iii). Temos

$$|(\tilde{h}_\varepsilon)_x(x,t)| \leq \|a_x\|_\infty |g(t+\varepsilon)| + \lambda |f_x(x,t)|, \ \forall x \in \overline{\Omega}, 0 < t \leq M.$$

Utilizando as condições (f_3), $(\hat{g}_3)$, (g_4) e a continuidade das funções g e f_x em $\overline{\Omega} \times [t_0, M]$, argumentamos como na demonstração de (i) e obtemos $\bar{c}_8 > 0$ tal que $|(\tilde{h}_\varepsilon)_x(x,t)| \leq \bar{c}_8 \bar{g}(t)$, para todos $x \in \overline{\Omega}$ e $0 < t \leq M$. Consequentemente, pela definição de w e o Lema 2.17, temos

$$\begin{aligned} |\nabla u||(\tilde{h}_\varepsilon)_x(x,t)| &= \bar{c}_8 |\nabla u| \bar{g}(t) \leq \hat{C} w^{\frac{1}{2}} Z(u)^{\frac{1}{2}} \bar{g}(t) \\ &\leq \hat{C}(1-\gamma)^{-1} w^{\frac{1}{2}} Z(u)^{\frac{1}{2}} Z'(t) \leq \tilde{C} w^{\frac{1}{2}} Z'(t)^2, \end{aligned}$$

tomando $\tilde{C}$ maior, se necessário.

Finalmente demonstraremos (iv). Note que se $0 < t < t_0$, a condição (g_4) implica que $Z(t)Z''(t) \leq 0$ e consequentemente

$$\frac{1}{2}Z'(t) - Z(t)Z''(t) \geq \frac{1}{2}Z'(t), \ \forall x \in \overline{\Omega}, \ 0 < t \leq M.$$

Por outro lado, se $t \in [t_0, M]$, utilizamos a escolha de $C_1 \geq \max\{2\alpha, \alpha + CM + Mm', \ 4M_4(2\alpha + M_5)/(2\alpha - M_2)\}$ e obtemos $Z(t)Z''(t) \leq C_1 M_4 (M_5/2\alpha + 1) \leq \frac{1}{4} Z'(t)^2$.

O lema está demonstrado. □

Lema 2.19. *Suponha* $(\hat{a}_1)$, (f_1)-(f_3), $(\hat{g}_1)$-$(\hat{g}_3)$ *e* (g_4) *satisfeitas. Então, dada uma bola* $\overline{B}_r(y) \subset \Omega$, *se* u_ε *é uma solução de* $(P^\varepsilon_{\lambda,a,R})$, *existe uma constante* $\tilde{M}_r > 0$, *independente de* ε, *tal que*

$$\psi(x)|\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \leq \tilde{M}_r u_\varepsilon(x) \bar{g}(u_\varepsilon(x)) \quad \forall x \in \overline{B}_r(y), 0 < \varepsilon < \varepsilon_1, \tag{2.35}$$

onde $\psi = \phi_{1,B}^2$ *e* $\phi_{1,B}$ *é a autofunção positiva associada ao operador* $-\Delta$ *em* $\overline{B}_r(y)$, *e* $\tilde{M}_r$ *depende apenas de* r, N, γ, ψ, $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Observação 2.20. *Pelo Lema 2.6, as soluções de* $(P^\varepsilon_{\lambda,a,R})$ *são limitadas a priori em* $L^\infty(\Omega)$. *Assim, a constante* $\tilde{M}_r$ *não depende de* ε. *Também recordamos que, devido ao Lema 2.8, temos* $u_\varepsilon > 0$ *em* Ω *e* $u_\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$.

Demonstração. No decorrer da demonstração iremos denotar u_ε apenas por u. A estratégia é demonstrar a estimativa por contradição. Supomos então que (2.35) é falsa, i.e., existem $y \in \Omega$ e $r > 0$ tais que

$$\sup_{\overline{B}_r(y)} v > \tilde{M}, \tag{2.36}$$

onde $\tilde{M} > 0$ será escolhido posteriormente, independente de ε, e $v = w\psi$, onde $w = \frac{|\nabla u|^2}{Z(u)}$ e $\psi = \phi_{1,B}^2$ e $\phi_{1,B}$ é a autofunção positiva associada ao operador $-\Delta$ em $\overline{B}_r(y)$.

Como v é contínua em $\overline{B}_r(y)$, ela atinge seu máximo em um ponto $x_0 \in \overline{B}_r(y)$. Logo, por (2.36)

$$v(x_0) = \sup_{\overline{B}_r(y)} v > \tilde{M}. \tag{2.37}$$

Além disso, $x_0 \in B_r(y)$, pois $v = 0$ sobre $\partial B_r(y)$. Consequentemente,

$$\nabla v(x_0) = 0, \tag{2.38}$$

$$\Delta v(x_0) \leq 0. \tag{2.39}$$

Procedemos para avaliar Δv. Devemos mostrar que $\Delta v(x_0) > 0$, se fixarmos $\tilde{M}$ grande o suficiente em (2.36). Assim, obtemos a contradição desejada. Temos

$$\Delta v = \psi \Delta w + w \Delta \psi + 2 \nabla w \nabla \psi. \tag{2.40}$$

As derivadas de w são (onde a convenção de somatório sobre índices repetidos é adotada)

$$\partial_i w = \frac{2\partial_j u\, \partial_{ij} u\, Z(u) - |\nabla u|^2 Z'(u) \partial_i u}{Z(u)^2}. \tag{2.41}$$

Portanto,

$$\Delta w = \frac{2(\partial_{ij} u)^2 Z(u) + 2\partial_j u\, \partial_j (\Delta u)\, Z(u) - |\nabla u|^4 Z''(u) - |\nabla u|^2 Z'(u) \Delta u}{Z(u)^2} - 2\frac{Z'(u)}{Z(u)} \partial_i u \partial_i w,$$

e utilizando a equação (2.41) e o fato de $\Delta u = \tilde{h}_\varepsilon(x, u)$, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta w = {} & \frac{2(\partial_{ij} u)^2 Z(u) + 2|\nabla u|^2 Z(u) (\tilde{h}_\varepsilon)_t(x, u) - |\nabla u|^4 Z''(u) - |\nabla u|^2 Z'(u) \tilde{h}_\varepsilon(x, u)}{Z(u)^2} \\ & + 2\frac{\partial_j u\, (\tilde{h}_\varepsilon)_x(x, u)}{Z(u)} - 2\frac{Z'(u)}{Z(u)} \partial_i u \partial_i w. \end{aligned} \tag{2.42}$$

De agora em diante, todas as funções aparecendo nas expressões abaixo são calculadas no ponto x_0. A relação (2.38) implica em $\psi \nabla w + w \nabla \psi = 0$ e, consequentemente,

$$\nabla w \nabla \psi = -w \frac{|\nabla \psi|^2}{\psi}.$$

Substituindo esta expressão na equação (2.40), temos

$$\Delta v = \psi \Delta w + w\Big(\Delta \psi - 2\frac{|\nabla \psi|^2}{\psi}\Big). \tag{2.43}$$

Inserindo (2.42) em (2.43), obtemos

$$\begin{aligned}\Delta v = \frac{1}{Z(u)}\Big[&2\psi(\partial_{ij}u)^2 + 2\psi Z(u)w(\tilde{h}_\varepsilon)_t(x,u) - \psi Z(u)Z''(u)w^2 - \psi w Z'(u)\tilde{h}_\varepsilon(x,u)\\ &+ 2\psi\partial_j u(\tilde{h}_\varepsilon)_x(x,u) - 2\psi Z'(u)\partial_i u\partial_i w\Big] + w\Big(\Delta\psi - \frac{2|\nabla\psi|^2}{\psi}\Big).\end{aligned} \tag{2.44}$$

Admitimos, sem perda de generalidade, que $\nabla u(x_0)$ é paralelo ao primeiro eixo coordenado na direção positiva. Observe que isto é possível, pois o operador Δ é invariante sob transformações ortogonais. Então, de (2.38), obtemos

$$\partial_1 v(x_0) = \psi\partial_1 w + w\partial_1\psi = 0. \tag{2.45}$$

Em vista de (2.41) e da equação acima, podemos escrever $\partial_{11}u = \frac{1}{2}w\Big(Z'(u) - \frac{\partial_1\psi}{\psi\partial_1 u}Z(u)\Big)$, que combinada com (2.44) produz

$$\begin{aligned}\Delta v \geq \frac{1}{Z(u)}\Big[&\frac{1}{2}\psi w^2\Big(Z'(u)^2 + \frac{(\partial_1\psi)^2}{\psi^2(\partial_1 u)^2}Z(u)^2 - 2Z(u)Z'(u)\frac{\partial_1\psi}{\psi\partial_1 u}\Big) + 2\psi Z(u)(\tilde{h}_\varepsilon)_t(x,u)w - \psi Z(u)Z''(u)w^2\\ &- \psi w\tilde{h}_\varepsilon(x,u)Z'(u) - 2\psi Z'(u)\partial_1 u\partial_1 w + wZ(u)\Big(\Delta\psi - 2\frac{|\nabla\psi|^2}{\psi}\Big) + 2\psi\partial_1 u(\tilde{h}_\varepsilon)_x(x,u)\Big].\end{aligned} \tag{2.46}$$

A seguir, estimamos alguns dos termos aparecendo na expressão acima. Antes disso, porém, é importante observar que os termos $\frac{|\nabla\psi|}{\psi}$ e $\frac{|\nabla\psi|}{\psi^{1/2}}$ são limitados sobre a bola $\overline{B}_r(y)$. De (2.45), a definição de w e o fato de $Z, Z', w, \psi \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned}2\psi Z'(u)\partial_1 u\partial_1 w &= -2Z'(u)|\nabla u|w\partial_1\psi\\ &\leq 2Z'(u)Z(u)^{1/2}\psi^{1/2}w^{3/2}\sup_{\overline{B}_r(y)}\frac{|\nabla\psi|}{\psi^{1/2}}.\end{aligned} \tag{2.47}$$

Também temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}w^2\frac{(\partial_1\psi)^2}{\psi(\partial_1 u)^2}Z(u)^2 &= \frac{1}{2}\frac{(\partial_1\psi)^2}{\psi}Z(u)w\\ &\geq -\frac{1}{2}\Big(\sup_{\overline{B}_r(y)}\frac{|\nabla\psi|^2}{\psi}\Big)Z(u)w,\end{aligned} \tag{2.48}$$

e

$$-w^2Z(u)Z'(u)\frac{\partial_1\psi}{\partial_1 u} \geq -\Big(\sup_{\overline{B}_r(y)}\frac{|\nabla\psi|}{\psi^{1/2}}\Big)Z'(u)Z(u)^{1/2}\psi^{1/2}w^{3/2}. \tag{2.49}$$

Finalmente, temos

$$wZ(u)\Big(\Delta\psi - 2\frac{|\nabla\psi|^2}{\psi}\Big) \geq -wZ(u)\sup_{\overline{B}_r(y)}\Big(\Delta\psi - 2\frac{|\nabla\psi|^2}{\psi}\Big) \tag{2.50}$$

e, pelo Lema 2.18 - (iii), temos

$$2\psi\partial_1 u(\tilde{h}_\varepsilon)_x(x,u) \leq 2\psi|\nabla u|\,|(\tilde{h}_\varepsilon)_x| \leq C2\psi w^{\frac{1}{2}}Z'(u)^2. \tag{2.51}$$

Combinando (2.46) com (2.47)–(2.51), obtemos a seguinte expressão, avaliada em x_0,

$$\begin{aligned}\Delta v \geq \frac{1}{Z(u)}\Big[&\psi w^2\Big(\frac{1}{2}Z'(u)^2 - Z(u)Z''(u)\Big) + w\Big(2\psi Z(u)(\tilde{h}_\varepsilon)_t(x,u) - \psi\tilde{h}_\varepsilon(x,u)Z'(u) - KZ(u)\Big)\\ &- KZ'(u)Z(u)^{1/2}\psi^{1/2}w^{3/2} - Kw^{1/2}\psi Z'(u)^2\Big],\end{aligned} \tag{2.52}$$

onde $K > 0$ é uma constante. Além disso, pelo Lema 2.18-(iv), reduzimos a desigualdade acima a

$$\begin{aligned}\Delta v \geq \frac{1}{Z(u)}\Big[&\psi w^2\frac{1}{4}Z'(u)^2 + w\Big(2\psi Z(u)(\tilde{h}_\varepsilon)_t(t,u) - \psi\tilde{h}_\varepsilon(x,u)Z'(u) - KZ(u)\Big)\\ &- KZ'(u)Z(u)^{1/2}\psi^{1/2}w^{3/2} - Kw^{1/2}\psi Z'(u)^2\Big].\end{aligned} \tag{2.53}$$

Agora, pelos Lemas 2.17 e 2.18, a desigualdade (2.53) se transforma em

$$\Delta v \geq \frac{\frac{1}{4}Z'(u)^2}{Z(u)\psi}\Big((\psi w)^2 - C(\psi w + (\psi w)^{3/2} + \psi^2\, w^{1/2})\Big) \geq \frac{\frac{1}{2}Z'(u)^2}{Z(u)\psi}\Big(v^2 - C(v + v^{3/2} + v^{1/2})\Big),$$

onde $C > 0$ é uma constante. Logo, se $v(x_0) > \tilde{M}$, para $\tilde{M}$ grande, independente de ε, obtemos uma contradição com (2.39). O lema está demonstrado. □

Prosseguimos para demonstrar nosso principal resultado nesta seção

Demonstração da Proposição 2.15

Como $K \subset \Omega$ é um conjunto compacto, é possível obter uma cobertura finita de K por bolas abertas

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_{\frac{r_j}{2}}(x_j) \tag{2.54}$$

com $\overline{B_{r_j}(x_j)} \subset \Omega$. Seja $\phi_{1,j} = \phi_1(B_{r_j}(x_j))$ a autofunção positiva associada ao autovalor λ_1 do operador $-\Delta$ em $B_{r_j}(x_j)$, com condição de Dirichlet na fronteira. Pelo Lema 2.19, para cada j existe uma constante positiva M_j, independente de ε, tal que

$$\psi_j(x)|\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \leq M_j u_\varepsilon(x)\bar{g}(u_\varepsilon(x)),\ \forall\ x \in B_{r_j}(x_j), \tag{2.55}$$

onde $\psi_j = \phi_{1,j}^2$. Sejam $e_j = \inf_{B_{\frac{r_j}{2}}(x_j)} \psi_j$, $e = \inf_{1\leq j\leq m} e_j$ e $M = \max_{1\leq j\leq m} M_j$. Então, por (2.54) e (2.55), concluímos que

$$e|\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \leq \psi_j(x)|\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \leq M u_\varepsilon(x) g(u_\varepsilon(x)),\ \forall\ x \in K.$$

A proposição está demonstrada. □

2.8 Demonstração do Teorema 2.1

Nesta seção utilizamos os resultados da Seção 2.7 para demonstrar que uma solução arbitrária u_ε de $(P^\varepsilon_{\lambda,a,R_0})$ converge para uma solução de $(P_{\lambda,a})$. Deste modo, concluímos que u^1 e u^2, dadas pela Proposição 2.14, são soluções distintas e não triviais de $(P_{\lambda,a})$.

Lema 2.21. *Suponha* $(\hat{a}_1)$, (f_1)-(f_3), $(\hat{g}_1)$-$(\hat{g}_3)$ *e* (g_4) *satisfeitas e seja* (u_{ε_n}) *a sequência de soluções do Problema* $(P^{\varepsilon}_{\lambda,a,R_0})$, *onde* $\varepsilon_n \to 0$, *quando* $n \to \infty$. *Então, passando a uma subsequência, se necessário, temos que* (u_{ε_n}) *é relativamente compacta em* $C(K;\ \mathbb{R})$, *para todo compacto* $K \subset \Omega$.

Demonstração. No decorrer desta demonstração denotaremos u_{ε_n} por u_ε. Seja $K \subset \Omega$ um subconjunto compacto e considere o conjunto $E_K = \{u_\varepsilon : K \to \mathbb{R}; \varepsilon > 0\}$. Nossa meta é mostrar que E_K é equicontínuo e, para cada $x \in K$, $E_K(x)$ é um conjunto relativamente compacto. Então, o Lema 2.21 é uma consequência direta do Teorema de Arzela-Ascoli.

Primeiramente, mostramos que E_K é equicontínuo. Procedendo como na demonstração da Proposição 2.15, cobrimos K por um número finito de bolas

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_{\frac{r_j}{4}}(x_j)\ ,$$

com $\overline{B_{\frac{r_j}{2}}(x_j)} \subset \Omega$. Seja $w \in K$. Logo, $w \in B_{\frac{r_{j_0}}{4}}(x_{j_0})$, para algum j_0. Agora, dado $z \in K$, temos duas possibilidades: se $z \in B_{\frac{r_{j_0}}{2}}(x_{j_0})$, podemos aplicar a Desigualdade do Valor Médio para obter

$$|u_\varepsilon(w) - u_\varepsilon(z)| \leq |\nabla u_\varepsilon(tw + (1-t)z)||w - z|,$$

com $0 < t < 1$. Visto que $B_{\frac{r_{j_0}}{2}}(x_{j_0})$ é um conjunto convexo, temos $tw + (1-t)z \in B_{\frac{r_{j_0}}{2}}(x_{j_0})$, para qualquer valor de $t \in (0,\ 1)$ e, pela Proposição 2.15, obtemos

$$|\nabla u_\varepsilon(tw + (1-t)z)| \leq \hat{M} u_\varepsilon(tw + (1-t)z)\bar{g}(u_\varepsilon(tw + (1-t)z)).$$

Pelos Lema 2.2 e 2.6, $u_\varepsilon \bar{g}_1(u_\varepsilon)$ é limitada e concluímos que $|u_\varepsilon(w) - u_\varepsilon(z)| \leq M_1|w - z|$, para alguma constante positiva M_1. Agora, se $z \notin B_{\frac{r_{j_0}}{2}}(x_{j_0})$, temos que $|w - z| \geq \frac{r_{j_0}}{4}$. Portanto,

$$\frac{|u_\varepsilon(w) - u_\varepsilon(z)|}{|w - z|} \leq \frac{2 \sup\limits_{y \in K} |u_\varepsilon(y)|}{|w - z|} \leq \frac{8 \sup\limits_{y \in K} |u_\varepsilon(y)|}{r_{j_0}} \leq \frac{8 \sup\limits_{y \in K} |u_\varepsilon(y)|}{\min\limits_{1 \leq j \leq m} r_j} = M_2.$$

Tomando $M_3 = \max\{M_1, M_2\}$, temos $|u_\varepsilon(w) - u_\varepsilon(z)| \leq M_3|w - z|$, para todos $w, z \in K$ e isto nos mostra que E_K é equicontínuo.

Invocando o Lema 2.6 mais uma vez, obtemos que $E_K(x)$ é um conjunto relativamente compacto, para todo $x \in K$. Então, pelo Teorema de Arzela-Ascoli e, passando a uma subsequência, se necessário, concluímos que $u_\varepsilon \to u$ uniformemente em K. O lema está demonstrado. □

Corolário 2.22. *Suponha* $(\hat{a}_1)$, (f_1)-(f_3), $(\hat{g}_1)$-$(\hat{g}_3)$ *e* (g_4) *satisfeitas. Seja* (ε_n) *uma sequência tal que* $\varepsilon_n \to 0$, *quando* $n \to \infty$, *e considere* (u_{ε_n}) *a sequência de soluções do Problema* $(P^{\varepsilon}_{\lambda,a,R})$. *Então, existe* $u \in C_{loc}(\Omega)$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} u_{\varepsilon_n} = u$ *em subconjuntos compactos de* Ω.

Demonstração. Seja (Ω_k) uma sequência de subconjuntos abertos de Ω tal que $\Omega_k \subset\subset \Omega_{k+1}$, para cada k, e $\bigcup_k \Omega_k = \Omega$. Argumentamos por indução. Seja $u_n^1 = u_{\varepsilon_n}|_{\overline{\Omega}_1}$. Pelo Lema 2.21, $(u_{\varepsilon_n^1})$ é relativamente compacta em $C(\overline{\Omega}_1)$. Logo, existem um conjunto infinito $N_1 \subset \mathbb{N}$ e uma função $u_1 \in C(\overline{\Omega}_1)$ tais que

$$u_n^1 \to u_1,\ \text{uniformemente em } \overline{\Omega}_1,\ \text{para } n \in N_1.$$

Para $k = 2$, escrevemos $u_n^2 = u^1_{n|_{\overline{\Omega}_2}}$, para $n \in N_1$. Consequentemente, existem um conjunto infinito $N_2 \subset N_1 \setminus \{1\}$ e uma função $u_2 \in C(\overline{\Omega}_2)$ tais que

$$u_n^2 \to u_2, \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}_2, \text{ para } n \in N_2.$$

Repetindo este processo sucessivamente, para cada k existem conjuntos infinitos $N_1 \subset \mathbb{N}$, $N_k \subset N_{k-1} \setminus \{1, 2, \cdots, k-1\}$ e funções $u_k \in C(\overline{\Omega}_k)$ tais que

$$u_n^k \to u_k, \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}_k, \text{ para } n \in N_k.$$

Observe que, com esta construção, obtemos $u_{k+1|_{\overline{\Omega}_k}} = u_k$. Deste modo, definimos $u(x) = u_k(x)$, para $x \in \overline{\Omega}_k$, e concluímos que a sequência diagonal (u_k^k) converge para $u \in C_{loc}(\Omega)$. O corolário está demonstrado. □

Lema 2.23. *Suponha* $(\hat{a}_1)$, (f_2) *e* $(\hat{g}_1)$ *satisfeitas. Então, dada* u *uma solução de* $(P_{\lambda,a,R})$ *temos* $g(u)\chi_{\Omega_+} \in L^1_{loc}(\Omega)$, *onde* $\Omega_+ = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$.

Demonstração. Seja $K \subset \Omega$ um conjunto compacto e considere $\zeta \in C_c^1(\Omega)$ tal que $0 \le \zeta \le 1$ e $\zeta \equiv 1$ em K. Dada u_ε solução de $(P^\varepsilon_{\lambda,a,R})$, obtemos

$$\int_\Omega a(x) g_\varepsilon(u_\varepsilon)\zeta = \int_\Omega \lambda f(x, u_\varepsilon)\zeta - \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla \zeta.$$

Observe que, pelo Lema 2.6, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$, $u_\varepsilon \to u$ fortemente em L^σ, para $1 \le \sigma < 2N/(N-2)$, $u_\varepsilon \to u$, em quase todo ponto de Ω e $|u| \le l_\sigma$, em quase todo ponto de Ω, para alguma $l_\sigma \in L^\sigma$. Portanto

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla \zeta \to \int_\Omega \nabla u \nabla \zeta, \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

Por (f_2) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos $\int_\Omega \lambda f(x, u_\varepsilon)\zeta \to \int_\Omega \lambda f(x, u)\zeta$. Podemos escrever

$$\int_\Omega a(x)[g_\varepsilon(u_\varepsilon) + Cu_\varepsilon + \alpha]\zeta \to \lambda \int_\Omega f(x, u)\zeta - \int_\Omega \nabla u \nabla \zeta + \int_\Omega a(x)[Cu + \alpha]\zeta = c_1 < \infty, \quad \text{quando } \varepsilon \to 0. \tag{2.56}$$

Definimos $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : u(x) \ge \delta\}$, para $\delta > 0$. Como $\zeta \ge 0$, $\zeta \equiv 1$ em K e $g_\varepsilon(u_\varepsilon) + Cu_\varepsilon + \alpha \ge 0$, por $(\hat{g}_1)$, temos

$$\int_{K\cap\Omega_\delta} a(x)[g_\varepsilon(u_\varepsilon) + Cu_\varepsilon + \alpha] = \int_{K\cap\Omega_\delta} a(x)[g_\varepsilon(u_\varepsilon) + Cu_\varepsilon + \alpha]\zeta \le \int_\Omega a(x)[g_\varepsilon(u_\varepsilon) + Cu_\varepsilon + \alpha]\zeta.$$

Da desigualdade acima, do Lema de Fatou e de (2.56), segue que

$$\int_{K\cap\Omega_\delta} \liminf_{\varepsilon\to 0} a(x)[g_\varepsilon(u_\varepsilon) + Cu_\varepsilon + \alpha] \le \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{K\cap\Omega_\delta} a(x)[g_\varepsilon(u_\varepsilon) + Cu_\varepsilon + \alpha] \le c_1 < \infty. \tag{2.57}$$

Temos $\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(u_\varepsilon) = g(u)$, em quase todo ponto de Ω_δ. Portanto, por (2.57),

$$\int_K a(x)[g(u) + Cu + \alpha]\chi_{\Omega_\delta} = \int_{K\cap\Omega_\delta} a(x)[g(u) + Cu + \alpha] = \int_{K\cap\Omega_\delta} \lim_{\varepsilon\to 0} a(x)[g_\varepsilon(u_\varepsilon) + Cu_\varepsilon + \alpha] \le C_6 < \infty.$$

Quando $\delta \to 0$, podemos utilizar o Lema de Fatou novamente para obter

$$\int_K \liminf_{\delta\to 0} a(x)[g(u)+Cu+\alpha]\chi_{\Omega_\delta} \le \liminf_{\delta\to 0}\int_K a(x)[g(u)+Cu+\alpha]\chi_{\Omega_\delta} \le c_1 < \infty. \tag{2.58}$$

Agora, observe que se $u(x)=0$, então $\chi_{\Omega_\delta}(x)=0$. Por outro lado, se $u(x)>0$, então $\chi_{\Omega_\delta}\to 1$, quando $\delta\to 0$. Defina $\tilde g_\delta(x) = [g(u(x))+Cu+\alpha]\chi_{\Omega_\delta}(x)$. Consequentemente, $\lim_{\delta\to 0}\tilde g_\delta(x) = [g(u(x))+Cu+\alpha]\chi_{\Omega_+}(x)$, em quase todo ponto de Ω. Desta desigualdade e do fato de K ter sido escolhido arbitrariamente, concluímos que $g(u)\chi_{\Omega_+}\in L^1_{loc}(\Omega)$. O lema está demonstrado. $\square$

Agora estamos prontos para demonstrar o principal resultado deste capítulo.

Teorema 2.1 *Suponha* $(\hat a_1)$, (f_1)-(f_3), $(\hat g_1)$-$(\hat g_3)$ *e* (g_4) *satisfeitas. Então, existe* $\tilde\lambda>0$ *tal que para* $\lambda\ge\tilde\lambda$ *o Problema* $(P_{\lambda,a})$ *possui duas soluções ordenadas, não negativas e não triviais.*

Considere u_ε solução de $(P^\varepsilon_{\lambda,a,R_0})$. Seja $\varphi\in C^1_c(\Omega)$ e tome $\tilde\Omega$ um conjunto aberto tal que $supp(\varphi)\subset\tilde\Omega\subset\subset\Omega$. Pelo Corolário 2.22, existe $u\in C_{loc}(\Omega)$ tal que $u_\varepsilon\to u$ em subconjuntos compactos de Ω quando $\varepsilon\to 0$. Defina $\Omega_+=\{x\in\Omega; u(x)>0\}$. Note que Ω_+ é aberto. Considere também o conjunto $\tilde\Omega_+=\Omega_+\cap\tilde\Omega$. Então $u_\varepsilon\to u$ em $\overline{\tilde\Omega_+}$.

Tome $\eta\in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0\le\eta\le 1$, $\eta(s)=0$ para $s\le 1/2$, $\eta(s)=1$ para $s\ge 1$ e sua derivada η' é crescente. Definimos, para $m>0$, a função $\rho=\varphi\eta(\frac{u_\varepsilon}{m})$. Então $\rho\in C^1_c(\Omega)$. Consequentemente

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon\nabla(\varphi\eta(\frac{u_\varepsilon}{m})) = \int_{\tilde\Omega}(-a(x)g_\varepsilon(u_\varepsilon)+\lambda f(x,u_\varepsilon))\varphi\eta(\frac{u_\varepsilon}{m}) := A_{\varepsilon,m}. \tag{2.59}$$

Observe que, como $u_\varepsilon\to u$ em $C(\overline{\tilde\Omega_+})$, temos $\eta(\frac{u_\varepsilon}{m})\to\eta(\frac{u}{m})$ uniformemente em $\tilde\Omega$. Prosseguimos para avaliar $A_{\varepsilon,m}$. Analisamos dois casos. Primeiro, consideramos $u>\frac{m}{4}$. Pelo Corolário 2.22, podemos encontrar $\varepsilon_1>0$ tal que $u_\varepsilon\ge\frac{m}{8}$ para $0<\varepsilon<\varepsilon_1$, e

$$(-a(x)g_\varepsilon(u_\varepsilon)+\lambda f(x,u_\varepsilon))\varphi\eta(\frac{u_\varepsilon}{m})(x)\to(-a(x)g(u)+\lambda f(x,u))\varphi\eta(\frac{u}{m})(x)$$

quando $\varepsilon\to 0$, em quase todo ponto de $\tilde\Omega\cap\{x\in\Omega;\ u(x)>\frac{m}{4}.\}$. Visto que $u_\varepsilon\ge\frac{m}{8}$, podemos utilizar o Lema 2.6 e a continuidade de g e f para obter uma constante $C_2>0$ tal que

$$|(-a(x)g_\varepsilon(u_\varepsilon)+\lambda f(x,u_\varepsilon))\varphi\eta(u_\varepsilon/m)|\le C_2|\varphi|\in L^1(\tilde\Omega_+).$$

Portanto, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluir que

$$\int_{\tilde\Omega\cap\{u>\frac{m}{4}\}}(-a(x)g_\varepsilon(u_\varepsilon)+\lambda f(x,u_\varepsilon))\varphi\eta(\frac{u_\varepsilon}{m})\to\int_{\tilde\Omega\cap\{u>\frac{m}{4}\}}(-a(x)g(u)+\lambda f(x,u))\varphi\eta(\frac{u}{m}),\ \text{quando } \varepsilon\to 0.$$

O segundo caso a analisar é quando $u\le m/4$. Neste caso, existe $\varepsilon_2>0$ tal que $u_\varepsilon\le\frac{m}{2}$, para $0<\varepsilon<\varepsilon_2$. Consequentemente, $\eta(\frac{u_\varepsilon}{m})=0$ e, neste caso, temos $\displaystyle\int_{\tilde\Omega\cap\{u\le\frac{m}{4}\}}(-a(x)g_\varepsilon(u_\varepsilon)+\lambda f(x,u_\varepsilon))\varphi\eta(\frac{u_\varepsilon}{m})=0$, para $0<\varepsilon<\varepsilon_2$. Portanto,

$$A_{\varepsilon,m}\to\int_{\tilde\Omega}(-a(x)g(u)+\lambda f(x,u))\varphi\eta(\frac{u}{m}) := A_m,\ \text{quando } \varepsilon\to 0. \tag{2.60}$$

Agora avaliamos A_m. Note que, se $x \in \tilde{\Omega} \setminus \Omega_+$, temos

$$u(x) \leq m/2, \quad \forall m > 0 \tag{2.61}$$

Por outro lado, se $x \in \tilde{\Omega}_+$ temos $\lim_{m\to 0} \eta(\frac{u(x)}{m}) = 1$. Consequentemente, pelo Lema 2.23 e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, podemos concluir que

$$A_m \to \int_{\tilde{\Omega}} (-a(x)g(u) + \lambda f(x,u))\varphi, \text{ quando } m \to 0. \tag{2.62}$$

A seguir, considerando a integral do lado esquerdo de (2.59), escrevemos

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla(\varphi\eta(\frac{u_\varepsilon}{m})) := H_{\varepsilon,m} + J_{\varepsilon,m}, \tag{2.63}$$

onde $H_{\varepsilon,m} = \int_\Omega (\nabla u_\varepsilon \nabla\varphi)\eta(\frac{u_\varepsilon}{m})$ e $J_{\varepsilon,m} = \frac{1}{m}\displaystyle\int_{\Omega\cap\{m/2\leq u\leq m\}} |\nabla u_\varepsilon|^2 \varphi\eta'(\frac{u_\varepsilon}{m})$.

Escrevemos $H_{\varepsilon,m} = \displaystyle\int_\Omega (\nabla u_\varepsilon \nabla\varphi)\left[\eta(\frac{u_\varepsilon}{m}) - \eta(\frac{u}{m})\right] + \int_\Omega (\nabla u_\varepsilon\nabla\varphi)\eta(\frac{u}{m})$. Como $\eta(\frac{u_\varepsilon}{m}) \to \eta(\frac{u}{m})$ quando $\varepsilon \to 0$, dado $\delta > 0$ existe $\varepsilon_4 > 0$ tal que $|\eta(\frac{u_\varepsilon}{m}) - \eta(\frac{u}{m})| < \delta$ para $0 < \varepsilon < \varepsilon_4$. Além disso, pelo Lema 2.6, a desigualdade de Hölder e o fato de $supp(\varphi) \subset \tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$, temos

$$\Big|\int_\Omega (\nabla u_\varepsilon \nabla\varphi)\left[\eta(\frac{u_\varepsilon}{m}) - \eta(\frac{u}{m})\right]\Big| \leq \delta\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon||\nabla\varphi| \leq C_3\delta, \text{ para } 0 < \varepsilon < \varepsilon_4,$$

para uma constante positiva C_3. Logo,

$$\int_\Omega (\nabla u_\varepsilon \nabla\varphi)\left[\eta(\frac{u_\varepsilon}{m}) - \eta(\frac{u}{m})\right] \to 0, \text{ quando } \varepsilon \to 0. \tag{2.64}$$

Por outro lado, observamos que $T(v) := \int_\Omega \nabla v\nabla\varphi(\eta(\frac{u}{m})) \leq \|\eta\|_\infty\|\varphi\|\|v\|$ e, claramente, $T(v)$ é linear. Portanto, $T(v)$ é um funcional contínuo em $H_0^1(\Omega)$. Pela convergência fraca de $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, podemos concluir que

$$T(u_\varepsilon) = \int_\Omega \nabla u_\varepsilon\nabla\varphi(\eta(\frac{u}{m})) \to \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi(\eta(\frac{u}{m})) = T(u). \tag{2.65}$$

Logo, por (2.64) e (2.65) obtemos $H_{\varepsilon,m} \to \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi(\eta(\frac{u}{m})) := H_m$. Agora, utilizando o mesmo argumento que foi aplicado ao avaliar A_m em (2.62), obtemos

$$H_m \to \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi, \text{ quando } m \to 0. \tag{2.66}$$

A seguir, avaliamos $J_{\varepsilon,m}$. Pela Proposição 2.15, podemos mostrar a existência de uma constante $\tilde{M}$ tal que $|\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \leq \tilde{M}u_\varepsilon(x)\bar{g}(u_\varepsilon(x))$, para $x \in \tilde{\Omega}$. Obtemos

$$|J_{\varepsilon,m}| \leq \int_{\tilde{\Omega}\cap\{m/2\leq u_\varepsilon\leq m\}} \hat{M}\frac{u_\varepsilon}{m}\bar{g}(u_\varepsilon)\varphi\eta'(\frac{u_\varepsilon}{m}) \leq \int_{\tilde{\Omega}} \hat{M}\bar{g}(u_\varepsilon)\eta'(\frac{u_\varepsilon}{m})\varphi\chi_{\{m/2\leq u_\varepsilon\leq m\}}.$$

Pelas propriedades de φ, η e a continuidade de g, existe $C_4 > 0$ tal que $|\hat{M}\bar{g}(u_\varepsilon)\varphi\eta'(\frac{u_\varepsilon}{m})\chi_{\{m/2\leq u_\varepsilon\leq m\}}| \leq$

$C_4 \in L^1(\Omega)$. Também temos

$$\hat{M}\bar{g}(u_\varepsilon)\varphi\eta'(u_\varepsilon/m)\chi_{\{m/2\leq u_\varepsilon\leq m\}} \to \hat{M}\bar{g}(u)\varphi\eta'(u/m)\chi_{\{m/2\leq u\leq m\}}, \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

Consequentemente pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} |J_{\varepsilon,m}| \leq \int_{\tilde{\Omega}} \hat{M}\bar{g}(u)\varphi\eta'(u/m)\chi_{\{m/2\leq u\leq m\}} := J_m$$

Finalmente avaliamos J_m. Observando que $\hat{M}\bar{g}(u)\varphi\eta'(u/m)\chi_{\{m/2\leq u\leq m\}} \to 0$ em quase todo ponto de $\tilde{\Omega}$, quando $m \to 0$, e que, pelo Lema 2.23, temos$|\hat{M}\bar{g}(u)\varphi\eta'(u/m)\chi_{\{m/2\leq u\leq m\}}| \leq C_5|\bar{g}(u)\chi_{\{u>0\}}| \in L^1(\tilde{\Omega})$, aplicamos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue mais uma vez para concluir que

$$J_m \to 0, \text{ quando } m \to 0. \tag{2.67}$$

Em vista de (2.59)-(2.63), (2.66) e (2.67), temos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_{\{u>0\}} \big(-a(x)g(u) + \lambda f(x,u)\big)\varphi, \ \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

O teorema está demonstrado. □

Capítulo

3

Resultados de não existência

Neste capítulo estudamos a não existência de soluções positivas e de soluções não negativas e não triviais para o Problema (P_λ). Dividimos a apresentação dos resultados de acordo com os valores do parâmetro λ e de acordo com o tipo de singularidade envolvida. No decorrer deste capítulo denotaremos por φ_1 a autofunção positiva associada ao primeiro autovalor λ_1 do operador $-\Delta$ em Ω com condição de Dirichlet na fronteira.

3.1 Não existência para pequenos valores do parâmetro λ

Dividimos a apresentação desta seção em duas partes. A primeira trata da não existência de solução para (P_λ), quando λ é suficientemente pequeno. A segunda analisa a não existência de soluções não negativas e não triviais para $(P_{\lambda,a})$, quando o potencial $a(x)$ pode se anular em conjuntos de medida nula.

3.1.1 Solução positiva

Consideramos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = (-g(x,u) + \lambda f(x,u))\chi_{\{u>0\}}, & \text{em } \Omega \\ \quad u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

e supomos que $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\ \infty))$ e $g \in C(\overline{\Omega} \times (0,\ \infty))$ são funções satisfazendo

(f_2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} = 0$, uniformemente em $\overline{\Omega}$;

$(\overline{g}_1)$ Existe uma constante $C < \lambda_1$ tal que $g(x,t) \geq -Ct$, para todo $t > 0$ e para todo $x \in \overline{\Omega}$;

(g_3) $\displaystyle\liminf_{t\to 0^+} g(x,t) \geq h(x) \geq 0$ e $h(x) \not\equiv 0$ em $\overline{\Omega}$.

Os resultados obtidos nesta seção foram inspirados pelo trabalho de [22].

Teorema 3.1. *Suponha (f_2), $(\overline{g}_1)$ e (g_3) satisfeitas. Então, existe $\lambda^* > 0$ tal que o Problema (P_λ) não possui solução positiva em $H_0^1(\Omega)$, para $0 < \lambda < \lambda^*$.*

Demonstração. Argumentamos por contradição. Suponha que exista uma sequência $(\lambda_n) \subset (0, \infty)$ tal que $\lambda_n \to 0$, quando $n \to \infty$, e tal que (P_{λ_n}) possui uma solução positiva $u_n \in H_0^1(\Omega)$ para cada n. Afirmamos que

$$\|u_n\| \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{3.1}$$

De fato, como $(\overline{g}_1)$ e (f_2) estão satisfeitas, podemos aplicar a Proposição 1.6 e, em seguida, o Teorema da Imersão de Sobolev e a Desigualdade de Poincaré para concluir que

$$\begin{aligned} 0 < \|u_n\|^2 &\leq \int_\Omega |\nabla u_n|^2 + \int_\Omega [g(x,u_n) + Cu_n]u_n \leq \lambda_n \int_\Omega f(x,u_n)u_n + \frac{C}{\lambda_1}\|u_n\|^2 \\ &\leq \frac{(\lambda_n + C)}{\lambda_1}\|u_n\|^2 + \lambda_n c_1 \|u_n\| \end{aligned}$$

para uma constante positiva c_1. A desigualdade acima implica em $(1 - \frac{C}{\lambda_1} - \frac{\lambda_n}{\lambda_1})\|u_n\| \leq \lambda_n c_2$, de onde concluímos que a afirmação é verdadeira.

A seguir, consideramos φ_1 a autofunção positiva associada ao primeiro autovalor λ_1 do operador $-\Delta$ em Ω com condição de Dirichlet na fronteira. Visto que u_n é solução de (P_{λ_n}) e (f_2) é satisfeita, aplicamos a desigualdade de Poincaré e o Teorema da Imersão de Sobolev mais uma vez para obter constantes positivas c_2, c_3 tais que

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_\Omega [g(x,u_n) + Cu_n]\varphi_1 &\leq \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi_1 + \int_\Omega [g(x,u_n) + Cu_n]\varphi_1 \leq \lambda_n \int_\Omega f(x,u_n)\varphi_1 + C\int_\Omega u_n\varphi_1 \\ &\leq (\lambda_n + C)\int_\Omega u_n\varphi_1 + \lambda_n c_2 \int_\Omega \varphi_1 \leq \frac{\lambda_n + C}{\lambda_1}\|u_n\|\|\varphi_1\|_{L^2} + \lambda_n c_3 \|\varphi_1\| \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade acima, o fato de $\|u_n\| \to 0$ e $\lambda_n \to 0$ quando $n \to \infty$ e o Teorema do Confronto concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega [g(x,u_n) + Cu_n]\varphi_1 = 0. \tag{3.2}$$

Por outro lado, por (g_3) e o fato de φ_1 ser positiva em Ω, obtemos uma constante positiva c_4 tal que

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} [g(x,u_n) + Cu_n]\varphi_1 \geq \int_\Omega h(x)\varphi_1 \geq c_4 > 0. \tag{3.3}$$

Pelo Lema de Fatou e as equações (3.2) e (3.3), obtemos uma contradição. O teorema está demonstrado. □

A seguir apresentamos um resultado que relaciona o Teorema 1.1 e o Teorema 3.1.

Proposição 3.2. *Suponha satisfeitas as hipóteses $(\overline{g}_1)$, (g_2), (g_3), (f_1) e (f_2). Então, existem $0 < \lambda^* \leq \lambda^0$ tais que*

(i) Se $\lambda < \lambda^*$, então (P_λ) não possui solução positiva em $H_0^1(\Omega)$;

(ii) Se $\lambda > \lambda^0$, então (P_λ) possui solução positiva em $H_0^1(\Omega)$.

Além disso, se $f(x,t) \geq 0$ em $\overline{\Omega} \times [0, \infty)$ temos $\lambda^* = \lambda^0$.

Demonstração. Por $(\overline{g}_1)$, (g_3) e (f_2), podemos aplicar o Teorema 3.1 e concluir que existe $\lambda^* > 0$ tal que (P_λ) não possui solução positiva em $H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Por outro lado, por $(\overline{g}_1)$, (g_2) e (f_2), podemos aplicar o Teorema 1.5 e obter $\lambda^0 > 0$ tal que (P_λ) possui solução positiva em $H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Destes fatos segue claramente que $\lambda^* \leq \lambda^0$. Quando $f(x,t) \geq 0$ em $\overline{\Omega}\times[0,\infty)$, aplicamos a Observação 1.13 e concluímos que, na verdade, $\lambda^* = \lambda^0 = \Lambda = \inf\{\lambda > 0; (P_\lambda)$ possui solução positiva em $H^1_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})\}$. A proposição está demonstrada. $\square$

3.1.2 Solução não negativa e não trivial

Recordemos o problema a ser estudado

$$\begin{cases} -\Delta u = (-a(x)g(u) + \lambda f(x,u))\chi_{\{u>0\}} & \text{em } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{$P_{\lambda,a}$}$$

Nesta seção, mostraremos que não existe solução não negativa e não trivial do Problema $(P_{\lambda,a})$ quando o parâmetro $\lambda > 0$ é pequeno o suficiente. Sejam $a \in L^\infty(\Omega)$, $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$, $g \in C((0,\ \infty))$ funções satisfazendo as hipóteses a seguir:

(f_2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} = 0$, uniformemente em $\overline{\Omega}$;

$(\hat{f}_3)$ existe $0 < p < 1$ tal que $\displaystyle\limsup_{t\to 0^+} \frac{f(x,t)}{t^p} < \infty$, uniformemente em $\overline{\Omega}$;

$(\check{g}_1)$ existe $C < \frac{\lambda_1}{\|a\|_\infty}$ tal que $g(t) \geq -Ct$, para todo $t > 0$;

(g_3^*) $\displaystyle\liminf_{t\to 0^+} \frac{g(t)}{t^r} > 0$, para algum $0 < r \leq p$, onde p foi dado em (f_3);

(a_1) $a(x) \geq 0$, mas $a(x) \not\equiv 0$ em Ω;

(a_3) $a(x)^{-1} \in L^\sigma(\Omega)$, onde $\sigma = \frac{1-p}{p-r}\frac{N}{2}$, se $r < p$, e $\sigma = \infty$, se $r = p$.

Observe que a condição (a_3) permite que $a(x)$ se anule em conjuntos de medida nula.

Teorema 3.3. *Suponha (a_1), (a_3), (f_2), $(\hat{f}_3)$, $(\check{g}_1)$ e (g_3^*) satisfeitas. Então, existe $\overline{\lambda} > 0$ tal que o Problema $(P_{\lambda,a})$ não possui solução não negativa e não trivial em $H_0^1(\Omega)$ para $0 < \lambda < \overline{\lambda}$.*

Demonstração. Apresentamos a demonstração para o caso em que $r < p$. Quando $r = p$, a demonstração é similar a esta. Argumentamos por contradição. Suponha que existam uma sequência (λ_n) tal que $\lambda_n \to 0$ e seja $u_n \in H_0^1(\Omega)$ uma solução não negativa e não trivial de $(P_{\lambda_n,a})$. Um argumento análogo ao utilizado na demonstração do Teorema 3.1 implica em $\|u_n\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Logo, $\|u_n\|$ é limitada. Pela Proposição 1.6 e a condição $(\check{g}_1)$, podemos escrever

$$\|u_n\|^2 + \int_{\{u_n>0\}} a(x)(g(u_n) + Cu_n)u_n \leq \lambda_n \int_\Omega f(x,u_n)u_n + \frac{C\|a\|_\infty}{\lambda_1}\|u_n\|^2. \tag{3.4}$$

Note que, por $(\hat{f}_3)$, existem $m_1, t_1 > 0$ tal que

$$f(x,t) < (m_1 + \varepsilon_1)t^p = \overline{m}_1 t^p, \text{ para } 0 < t < t_1. \tag{3.5}$$

Observe que, por (g_3^*), dado $m_2 > 0$ existe $t_2 > 0$ tal que

$$g(t) > m_2 t^r, \text{ para } 0 < t < t_2. \tag{3.6}$$

Seja $\bar{t} = \min\{t_1, t_2\}$. Por (f_2) e a continuidade de f, concluímos que existe $m_3 > 0$ tal que

$$f(x,t) \leq m_3 t, \text{ para } t \geq \bar{t}. \tag{3.7}$$

Utilizando (a_3), (3.5) - (3.7), o Teorema da Imersão de Sobolev e as Desigualdade de Poincaré e de Young, obtemos, para $s = \frac{p-1}{r-1}$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x,u_n)u_n &= \int_{\{0<u_n<\bar{t}\}} f(x,u_n)u_n + \int_{\{u_n \geq \bar{t}\}} f(x,u_n)u_n \\
&\leq \int_{\{0<u_n<\bar{t}\}} \overline{m}_1 u_n^{p+1} + \int_{\{u_n\geq\bar{t}\}} m_3 u_n^2 \\
&\leq \overline{m}_1 \int_{\{0<u_n<\bar{t}\}} \Big[a(x)^s u_n^{(1+r)s} \cdot u_n^{2(1-s)} \frac{1}{a(x)^s}\Big] + \frac{m_3}{\lambda_1}\|u_n\|^2 \\
&\leq \overline{m}_1 \int_{\{0<u_n<\bar{t}\}} a(x)u_n^{1+r} + \overline{m}_1(1-s)\int_{\{0<u_n<\bar{t}\}} u_n^2 a(x)^{\frac{-s}{1-s}} + \frac{m_3}{\lambda_1}\|u_n\|^2 \\
&\leq \frac{\overline{m}_1}{m_2}\int_{\{0<u_n<\bar{t}\}} a(x)g(u_n)u_n + \overline{m}_1(1-s)\|u_n\|_{2^*}^2 \|a^{-1}\|_\sigma^{\frac{1-p}{p-r}} + \frac{m_3}{\lambda_1}\|u_n\|^2 \\
&\leq \frac{\overline{m}_1}{m_2}\int_{\{u_n>0\}} a(x)g(u_n)u_n + m_4\|u_n\|^2
\end{aligned}$$

A desigualdade acima, juntamente com a equação (3.4), implica em

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2 + \int_{\{u_n>0\}} a(x)[g(u_n)+Cu_n]u_n &\leq \lambda_n\Big[\frac{\overline{m}_1}{m_2}\int_{\{u_n>0\}} a(x)g(u_n)u_n + m_4\|u_n\|^2\Big] + \frac{C\|a\|_\infty}{\lambda_1}\|u_n\|^2 \\
&\leq \lambda_n\Big[\frac{\overline{m}_1}{m_2}\int_{\{u_n>0\}} a(x)[g(u_n)+Cu_n]u_n\Big] + \lambda_n m_5\|u_n\|^2 \\
&\quad + \frac{C\|a\|_\infty}{\lambda_1}\|u_n\|^2,
\end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\Big(1 - \frac{C\|a\|_\infty}{\lambda_1} - \lambda_n m_5\Big)\|u_n\|^2 + \Big(1 - \frac{\lambda_n \overline{m}_1}{m_2}\Big)\int_\Omega a(x)[g(u_n)+Cu_n]u_n \leq 0$$

Por $(\breve{g}_1)$ e o fato de $\lambda_n \to 0$, a equação acima implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_n\| = 0$, para todo $n > n_0$. Esta contradição conclui a demonstração do Teorema 3.3. □

Observação 3.4. *Sob as hipóteses do Teorema 2.1, podemos aplicar o Teorema 3.3 e concluir que existem* $0 < \overline{\lambda} \leq \tilde{\lambda}$ *tais que* (P_λ) *não possui solução não negativa e não trivial para* $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ *e* (P_λ) *possui duas soluções não negativas e não triviais para* $\lambda > \tilde{\lambda}$.

3.2 Não existência em função do termo singular

Os resultados apresentados nesta seção foram motivados pelo trabalho de Ghergu e Radulescu [22] e se diferenciam dos demais resultados apresentados neste trabalho pelas condições a serem satisfeitas pelo termo singular. Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = (-g(x,u) + \lambda f(x,u))\chi_{\{u>0\}}, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_λ}$$

Nesta seção verificamos três resultados sobre a não existência de soluções para o Problema (P_λ), para qualquer valor de λ. Supomos que $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\ \infty))$, $g \in C(\overline{\Omega} \times (0,\ \infty))$ e as seguintes hipóteses são satisfeitas:

(f_2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} = 0$, uniformemente em $\overline{\Omega}$;

(g_1^*) $g(x,t) \geq 0$ e existem $t_0 > 0$, $a \in C(\overline{\Omega})$ e $\hat{g} \in C((0,\ \infty))$ tais que

(i) $g(x,t) \geq a(x)\hat{g}(t) \geq 0$ para $0 < t \leq t_0$ e $x \in \overline{\Omega}$;

(ii) $a(x) \geq 0$ em $\overline{\Omega}$;

(iii) $\hat{g}$ é não crescente para $0 < t \leq t_0$ e $\int_0^{t_0} \hat{g}(t)dt = \infty$.

Poderíamos, por exemplo, considerar $\hat{g}(t) = Ct^{-1}$. A seguir, enunciamos nosso resultado principal.

Teorema 3.5. *Suponha (f_2) e (g_1^*) satisfeitas. Se $a(x) \not\equiv 0$ sobre $\partial\Omega$, então o Problema (P_λ) não possui solução positiva em $H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, para qualquer valor de $\lambda > 0$.*

A demonstração do Teorema 3.5 será feita por contradição e envolverá vários resultados preliminares. Um resultado similar foi apresentado por Ghergu e Radulescu [22] (veja o Teorema 1.1) supondo f, g monótonas, positivas e Hölder contínuas, $\int_0^1 g(t)dt = +\infty$ e $\min_{x\in\overline{\Omega}} a(x) > 0$.

Ressaltamos que, no nosso resultado, basta que g seja limitada inferiormente por uma função singular e não crescente próximo da origem. Além disso, basta que $a(x)$ seja não negativa e não se anule na fronteira de Ω.

Antes de demonstrarmos o teorema, necessitamos de alguns resultados auxiliares. A seguir, consideramos $f^+(x,t) = \max\{f(x,t),\ 0\}$ e o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f^+(x,u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_{λ,f^+}}$$

É importante destacar que, de agora em diante, utilizaremos a definição de subsolução no sentido fraco (veja [20]).

Lema 3.6. *Suponha (g_1^*) e (f_2) satisfeitas. Então, dada $u_\lambda \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ uma solução positiva de (P_λ), existe $U_\lambda \in C^1(\overline{\Omega})$, solução de (P_{λ,f^+}), tal que $U_\lambda \geq u_\lambda > 0$ em Ω.*

Demonstração. Afirmamos que u_λ é uma subsolução de (P_{λ,f^+}). De fato, uma vez que $g(x,t) \geq 0$ e (f_2) está satisfeita, podemos aplicar a Proposição 1.6 e escrever

$$\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla v = \int_{\{u_\lambda>0\}} [-g(x,u_\lambda) + \lambda f(x,u_\lambda)]v,\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular, se tomarmos $v \geq 0$, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla v \leq \int_{\{u_\lambda>0\}} \lambda f(x,u_\lambda)v \leq \int_{\{u_\lambda>0\}} \lambda f^+(x,u_\lambda)v.$$

Como $0 \leq v \in H_0^1(\Omega)$ foi arbitrário, concluímos que a afirmação é verdadeira. Desejamos agora encontrar uma solução de (P_{λ,f^+}) que seja maior ou igual a u_λ. A fim de fazermos isto, definimos

$$\hat{f}(x,t) = \begin{cases} f^+(x,u_\lambda(x)), & \text{se } 0 < t \leq u_\lambda(x), \\ f^+(x,t), & \text{se } t > u_\lambda(x). \end{cases}$$

e estudamos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \hat{f}(x,u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\hat{P}_{\lambda,f}$}$$

Associado ao problema acima, temos o funcional $\hat{I} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por $\hat{I}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_\Omega \hat{F}(x,u)$. Devido às propriedades satisfeitas por $\hat{f}$, concluímos que $\hat{I}$ está bem definido e $\hat{I} \in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$. Também obtemos que $\hat{I}$ é coercivo, limitado inferiormente e satisfaz a condição de (PS). Consequentemente, (veja [37] e o Lema 1.10), obtemos uma solução U_λ do Problema $(\hat{P}_{\lambda,f})$ que satisfaz $U_\lambda \geq u_\lambda > 0$ em Ω. Em particular, U_λ é uma solução de (P_{λ,f^+}). Aplicando a teoria de regularidade para problemas elípticos semilineares (veja o Teorema B.2 e o Lema B.3 de [39]) e o Teorema da Imersão de Sobolev, obtemos $U_\lambda \in C^1(\overline{\Omega})$. O lema está demonstrado. $\square$

A seguir, consideramos subdomínios abertos e suaves $\Omega_i \subset \Omega$ tais que $\Omega_i \subset\subset \Omega_{i+1}$ e $\Omega = \cup_{i=1}^\infty \Omega_i$.

Dado $i \in \mathbb{N}$, nosso próximo passo é estudar a existência de soluções do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = -\eta_i(x)g(x,u) + \lambda f^+(x,u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P_{\lambda,i}^+$}$$

com $\eta_i \in C_c(\Omega)$ uma função tal que $0 \leq \eta_i \leq 1$, $\eta_i \equiv 1$ em Ω_i e $supp(\eta_i) \subset \Omega_{i+1}$. Desejamos comprovar a existência de uma solução u_i de $(P_{\lambda,i}^+)$ para cada i e, então, demonstrar que a sequência (u_i) converge fracamente para uma função de $H_0^1(\Omega)$.

Lema 3.7. *Suponha (g_1^*) e (f_2) satisfeitas. Então, dada $u_\lambda \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ uma solução positiva de (P_λ), existe $u_i \in H_0^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ solução de $(P_{\lambda,i}^+)$ tal que $0 < u_\lambda \leq u_i \leq U_\lambda$ em Ω, com U_λ dada pelo Lema 3.6.*

Demonstração. É fácil ver que u_λ e U_λ são uma subsolução e uma supersolução de $(P_{\lambda,i}^+)$, respectivamente. Por simplicidade, escrevemos $h_i(x,t) = -\eta_i(x)g(x,t) + \lambda f^+(x,t)$. Salientamos que, como $supp(\eta_i) \subset \Omega_{i+1}$, temos $h_i(x,t) = \lambda f^+(x,t)$ quando $x \in \Omega \setminus \Omega_{i+1}$. A seguir, definimos a função

$$\tilde{h}_i(x,t) = \begin{cases} h_i(x,u_\lambda), & \text{se } 0 < t < u_\lambda, \\ h_i(x,t), & \text{se } u_\lambda \leq t \leq U_\lambda, \\ h_i(x,U_\lambda), & \text{se } t > U_\lambda, \end{cases} \tag{3.8}$$

e consideramos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \tilde{h}_i(x,u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$\tilde{P}_i$}$$

Afirmamos que $\tilde{h}_i(x,t) \in L^\infty(\Omega)$. Efetivamente, como $0 \leq \eta_i \leq 1$, podemos utilizar o fato de que $0 < c_1 \leq u_\lambda \leq U_\lambda \leq c_2$ em Ω_{i+1}, para certas constantes c_1 e c_2, e a continuidade de g e f^+ para deduzir que existe $M_2 > 0$ tal que

$$|\tilde{h}_i(x,t)| \leq M_2, \text{ para todo } x \in \Omega_{i+1} \text{ e } t \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, se $x \in \Omega \setminus \Omega_{i+1}$ recorremos ao fato de que u_λ, $U_\lambda \in C(\overline{\Omega})$, $supp(\eta_i) \subset \Omega_{i+1}$ e ao fato de f^+ ser contínua para obtermos

$$|\tilde{h}_i(x,t)| \leq M_3, \text{ para todo } x \in \Omega \setminus \Omega_{i+1} \text{ e } t \in \mathbb{R}.$$

A afirmação está demonstrada. Este fato, a teoria de regularidade para problemas elípticos não lineares (veja [39]) e a imersão de Sobolev implicam na existência de uma solução $u_i \in C^1(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$ para o Problema $(\tilde{P}_i)$ tal que $u_\lambda \leq u_i \leq U_\lambda$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Em particular, u_i é uma solução de $(P^+_{\lambda,i})$. O lema está demonstrado. $\square$

Nosso objetivo agora é verificar que a sequência (u_i) converge fracamente para uma função de $H_0^1(\Omega)$. A partir daí, e utilizando a hipótese (g_1^*), chegamos a uma contradição, o que demonstra o Teorema 3.5.

Antes de apresentarmos a demonstração do Teorema 3.5, precisamos de um resultado técnico auxiliar que nos permite trabalhar com soluções fracas do problema (P_λ). Considere o problema a seguir:

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x), & \text{em } \Omega; \\ u > 0, & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.9}$$

Lema 3.8. *Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução de (3.9) com $h \in L^p(\Omega)$, $p > N$. Então, $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$. Além disso, $\int_\Omega h(x) \geq 0$.*

Demonstração. Como $h \in L^p(\Omega)$, existe uma sequência de funções $(h_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $h_n \to h$ em $L^p(\Omega)$. Considere os seguintes problemas

$$\begin{cases} -\Delta u_n = h_n(x), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

Utilizando resultados de regularidade (veja o Teorema 6.14 de [23]), obtemos $u_n \in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$ para cada n. Além disso, se considerarmos o problema

$$\begin{cases} -\Delta(u_n - u) = h_n(x) - h(x), & \text{em } \Omega, \\ u_n - u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.11}$$

pela teoria L^p para problemas elípticos (veja o Teorema 9.15 e o Lema 9.17 em [23]) para concluir que existe uma constante $M_1 = M_1(\Omega, p)$ tal que

$$\|u_n - u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq M_1 \|h_n - h\|_{L^p(\Omega)}.$$

Portanto, como $h_n \to h$ em $L^p(\Omega)$, temos que $u_n \to u$ em $W^{2,p}(\Omega)$, para $p > N$. Além disso, pelo Teorema da Imersão de Sobolev, quando $p > N$ temos $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ e, passando a uma subsequência, se necessário, obtemos $\frac{\partial u_n}{\partial \eta} \to \frac{\partial u}{\partial \eta} \leq 0$ uniformemente sobre $\partial\Omega$. A seguir, utilizando (3.10)

e o fato de $u_n \in C^2(\overline{\Omega})$, obtemos
$$-\int_\Omega \Delta u_n = \int_\Omega h_n.$$

Visto que $h_n \to h$ em $L^p(\Omega)$, para $p > N$, concluímos que $\int_\Omega h_n \to \int_\Omega h$. Finalmente, utilizando o Teorema da Divergência e a convergência de $\frac{\partial u_n}{\partial \eta}$, obtemos

$$-\int_\Omega \Delta u_n = \int_{\partial\Omega} -\frac{\partial u_n}{\partial \eta} d\sigma \to \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma \geq 0.$$

Consequentemente, $\int_\Omega h = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma \geq 0$. O lema está demonstrado. □

Demonstração do Teorema 3.5

Argumentamos por contradição. Suponha que existe $u_\lambda \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ solução positiva de (P_λ) tal que $a(x) \not\equiv 0$ sobre $\partial\Omega$. Pelo Lema 3.7, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $u_i \in H_0^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ solução positiva de $(P^+_{\lambda,i})$. Por este fato e por $\eta_i(x)g(x,t) \geq 0$, para todo $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (0,\ \infty)$, temos

$$\|u_i\|^2 = -\int_\Omega \eta_i(x)g(x,u_i)u_i + \lambda\int_\Omega f^+(x,u_i)u_i \leq \lambda\int_\Omega f^+(x,u_i)u_i.$$

Como $0 < u_i \leq U_\lambda \in C^1(\overline{\Omega})$ em quase todo ponto de Ω e f^+ é contínua, podemos afirmar que a sequência (u_i) é uniformemente limitada em $H_0^1(\Omega)$. Consequentemente, passando a uma subsequência, se necessário, concluímos que existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_i \rightharpoonup v$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$ e $u_i \to v$, em quase todo ponto de Ω, quando $i \to \infty$. Deste último fato e do fato de $u_\lambda \leq u_i \leq U_\lambda$, obtemos $u_\lambda \leq v \leq U_\lambda$, em quase todo ponto de Ω. Fixamos $j \in \mathbb{N}$ tal que $j \leq i$. Visto que u_i é uma solução de $(P^+_{\lambda,i})$ e que $0 < u_\lambda \leq u_i \leq U_\lambda$ em Ω_i, concluímos que $h_i \in L^\infty(\Omega)$. Logo, pelo Lema 3.8 e pelo fato de $g(x,t) \geq 0$ em $\overline{\Omega} \times (0,\ \infty)$, encontramos $M_4 > 0$ tal que

$$\int_{\Omega_j} g(x,u_i) \leq \int_\Omega \eta_i(x)g(x,u_i) \leq \lambda\int_\Omega f^+(x,u_i) \leq M_4.$$

Esta desigualdade, o fato de $g(x,u_i)$ ser uniformemente limitada em Ω e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue implicam em $\int_{\Omega_j} g(x,v) \leq M_4$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Aplicando o Lema de Fatou, quando $j \to \infty$, obtemos $\int_\Omega g(x,v) \leq M_4$.

Destacamos que, como $U_\lambda \in C^1(\overline{\Omega})$ e $U_\lambda = 0$ sobre $\partial\Omega$, existe $\delta_0 > 0$ tal que $u_\lambda \leq v \leq U_\lambda \leq t_0$ no conjunto $\Omega_{\delta_0} = \{x \in \Omega;\ d(x,\partial\Omega) \leq \delta_0\}$, onde t_0 foi dado por (g_1^*). Em vista disso e da hipótese $(g_1^*)-(i)$ e (iii), obtemos
$$\int_{\Omega_{\delta_0}} a(x)\hat{g}(U_\lambda) \leq \int_{\Omega_{\delta_0}} a(x)\hat{g}(v) \leq \int_{\Omega_{\delta_0}} g(x,v) \leq M_4. \tag{3.12}$$

A seguir, considere um ponto $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $a(x_0) > 0$. Então, existem um conjunto aberto $W \subset \mathbb{R}^N$, um conjunto aberto V contendo x_0 e uma constante positiva c_6 tais que $a(x) \geq c_6 > 0$ em V, e um difeomorfismo suave $\phi : W \mapsto V$ tal que $\phi(0) = x_0$, $\phi(\{y_N = 0\} \cap W) = V \cap \partial\Omega$ e $\phi^{-1}(V \cap \Omega) = W \cap H^N := W^+$, onde $H^N = \{y \in \mathbb{R}^N;\ y_N \geq 0\}$.

Ressaltamos que podemos supor que W^+ é um cilindro da forma $D \times [0,\ d] \subset \mathbb{R}^{N-1} \times [0,\ \infty)$, onde

$D \subset \mathbb{R}^{N-1}$ é um disco e $d > 0$. Também podemos supor que $V \cap \Omega = V \cap \Omega_{\delta_0}$. Sendo assim, temos

$$\int_{\Omega_{\delta_0} \cap V} a(x)\hat{g}(U_\lambda(x))dx = \int_{W^+} a(\phi(y))\hat{g}(U_\lambda(\phi(y))|J_\phi(y)|dy$$

onde $|J_\phi(y)|$ denota o determinate da matriz Jacobiana de ϕ. O fato de ϕ ser suave, nos permite encontrar uma constante $c_7 > 0$ tal que $|J_\phi(y)| \geq c_7$ para todo $y \in W_1^+$, onde $W_1^+ \subset W^+$ é um cilindro da forma $D_1 \times [0,\ d_1]$, com $0 < d_1 < d$. Utilizando esta desigualdade e o fato de $a(x) \geq c_6$ em V, obtemos uma constante positiva c_8 tal que

$$\int_{\Omega_{\delta_0}} a(x)\hat{g}(U_\lambda) \geq \int_{W_1^+} a(\phi(y))\hat{g}(U_\lambda(\phi(y))|J_\phi(y)|dy \geq c_8 \int_{W_1^+} \hat{g}(U_\lambda(\phi(y))) = c_8 \int_{D_1} \int_0^{d_1} \hat{g}(U_\lambda(\phi(y)))dy_N dy',$$

onde escrevemos $y = (y', y_N)$, com $y' \in \mathbb{R}^{N-1}$ e $y_N \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, pelo fato de $U_\lambda \in C^1(\overline{\Omega})$ e pelo fato de $U_\lambda = 0$ sobre $\partial\Omega$, obtemos

$$U_\lambda(\phi(y)) = U_\lambda(\phi(y)) - U_\lambda(\phi(y', 0)) = \int_0^{y_N} \frac{\partial E}{\partial y_N}(y', s)ds,$$

onde $E(y) = U_\lambda(\phi(y))$. Tomando o valor absoluto na relação acima, podemos encontrar uma constante $c_9 > 0$ tal que $|U_\lambda(\phi(y))| \leq c_9|y_N|$. Utilizando esta desigualdade e escolhendo $d_2 < d_1$ tal que $d_2 \leq \frac{t_0}{c_9}$, podemos utilizar $(g_1^*) - (iii)$ para concluir que

$$\int_0^{d_1} \hat{g}(U_\lambda(\phi(y', y_N)))dy_N \geq \int_0^{d_2} \hat{g}(c_9 y_N))dy_N = \infty, \text{ para todo } y' \in D_1, \tag{3.13}$$

o que contradiz (3.12). O teorema está demonstrado. □

Como consequência do Teorema 3.5 apresentamos um resultado sobre a não existência de soluções $u \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ não negativas e não triviais de (P_λ). A partir de agora, vamos utilizar a notação $A^+ = \{x \in \Omega;\ a(x) > 0\}$.

Teorema 3.9. *Suponha (f_2) e (g_1^*) satisfeitas. Então, para qualquer valor de $\lambda > 0$, o Problema (P_λ) não possui solução não negativa e não trivial $u \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\partial\{x \in \Omega;\ u(x) > 0\}$ seja suave e intercepte o conjunto A^+.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que existe $u \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ solução não negativa e não trivial de (P_λ), para algum $\lambda > 0$, tal que $\partial\{x \in \Omega;\ u(x) > 0\}$ seja suave e intercepte o conjunto A^+. Por simplicidade escreveremos $\Omega_u^+ = \{x \in \Omega;\ u(x) > 0\}$. Então $u \in H_0^1(\Omega_u^+)$. Certamente, como $\Omega_u^+ \subset \Omega$ é mensurável, $u \in H_0^1(\Omega)$, $u = 0$ em quase todo ponto de $\Omega \setminus \Omega_u^+$ e $\partial\Omega^+$ é suave, obtemos $u \in H_0^1(\Omega_u^+)$ (veja [1]).

Afirmamos que u é solução do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = -g(x, u) + \lambda f(x, u) & \text{em } \Omega_u^+, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_u^+. \end{cases} \tag{3.14}$$

Assumindo que a afirmação é verdadeira por um momento, concluímos que (3.14) possui uma solução $u \in H_0^1(\Omega^+) \cap C(\overline{\Omega}_u^+)$ satisfazendo $u > 0$ em $\partial\Omega_u^+$. Porém, um argumento similar ao da demonstração do Teorema 3.5 implica que (3.14) não possui solução positiva em $H_0^1(\Omega_u^+) \cap C(\overline{\Omega}_u^+)$ tal que $\partial\Omega_u^+$ seja suave e intercepte o conjunto A^+, o que é uma contradição.

Resta demonstrar a afirmação. Para isto, basta verificar que $u \in H_0^1(\Omega_u^+)$ satisfaz

$$\int_{\Omega^+} \nabla u \nabla w = \int_{\Omega^+} [-g(x,u) + \lambda f(x,u)]w, \ \forall\, w \in C_c^\infty(\Omega_u^+).$$

Porém, como $C_c^\infty(\Omega_u^+) \subset C_c^\infty(\Omega)$ e u é solução de (P_λ), a afirmação segue imediatamente. $\square$

A seguir, apresentamos um resultado mais geral do que o do Teorema 3.9.

Teorema 3.10. *Suponha (f_2) e (g_1^*) satisfeitas. Então, para qualquer valor de $\lambda > 0$, o Problema (P_λ) não possui solução não negativa e não trivial $u \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\partial(\Omega \cap \{x \in \Omega; u(x) > 0\})$ tenha uma parte suave Γ_u e $\Gamma_u \cap A^+ \neq \emptyset$.*

Demonstração. Argumentaremos como na demonstração do Teorema 3.5.

De início, consideramos $f^+(x,t) = \max\{f(x,t),\ 0\}$ e o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f^+(x,u), & \text{em } \Omega^+, \\ \quad u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega^+. \end{cases} \tag{$P_{\lambda,f}^+$}$$

Lema 3.11. *Suponha (g_1^*) e (f_2) satisfeitas. Então, dada $u_\lambda \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ uma solução não negativa e não trivial de (P_λ), existe $U_\lambda \in C^1(\Omega^+ \cup \Gamma_u)$, solução de $(P_{\lambda,f}^+)$, tal que $U_\lambda \geq u_\lambda > 0$ em Ω.*

Demonstração. Afirmamos que u_λ é uma subsolução de $(P_{\lambda,f}^+)$. De fato, uma vez que $g(x,t) \geq 0$ e (f_2) está satisfeita, podemos aplicar a Proposição 1.6 e escrever

$$\int_{\Omega^+} \nabla u_\lambda \nabla v = \int_{\Omega} \nabla u_\lambda \nabla v = \int_{\Omega} [-g(x,u_\lambda) + \lambda f(x,u_\lambda)]v, \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular, se tomarmos $v \geq 0$, obtemos

$$\int_{\Omega^+} \nabla u_\lambda \nabla v \leq \int_{\Omega} \lambda f(x,u_\lambda)v \leq \int_{\Omega} \lambda f^+(x,u_\lambda)v.$$

Como $0 \leq v \in H_0^1(\Omega)$ foi arbitrário, concluímos que a afirmação é verdadeira. Desejamos agora encontrar uma solução de $(P_{\lambda,f}^+)$ que seja maior ou igual a u_λ. A fim de fazermos isto, definimos

$$\hat{f}(x,t) = \begin{cases} f^+(x,u_\lambda(x)), & \text{se } 0 < t \leq u_\lambda(x), \\ f^+(x,t), & \text{se } t > u_\lambda(x), \end{cases}$$

e estudamos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \hat{f}(x,u), & \text{em } \Omega^+, \\ \quad u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega^+. \end{cases} \tag{$\hat{P}_{\lambda,f}^+$}$$

Associado ao problema acima, temos o funcional $\hat{I} : H_0^1(\Omega^+) \to \mathbb{R}$ dado por $\hat{I}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_{\Omega^+} \hat{F}(x,u)$. Devido às propriedades satisfeitas por $\hat{f}$, concluímos que $\hat{I}$ está bem definido e $\hat{I} \in C^1(H_0^1(\Omega^+), \mathbb{R})$. Também obtemos que $\hat{I}$ é coercivo, limitado inferiormente e satisfaz a condição de (PS). Consequentemente, aplicando um resultado padrão (veja [37]), obtemos uma solução U_λ do Problema $(\hat{P}_{\lambda,f}^+)$ que satisfaz $U_\lambda \geq u_\lambda > 0$ em Ω^+. Aplicando um resultado de regularidade (veja o Corolário 8.36 de [23]) e o Teorema da Imersão de Sobolev, obtemos $U_\lambda \in C^{1,\alpha}(\Omega^+ \cup \Gamma_u)$. Em particular, U_λ é uma solução de $(P_{\lambda,f}^+)$. O lema está demonstrado. $\square$

A seguir, consideramos subdomínios abertos e suaves $\Omega_i \subset \Omega^+$, tais que $\Omega_i \subset\subset \Omega_{i+1}$ e $\Omega^+ = \cup_{i=1}^{\infty}\Omega_i$. Seja $\eta_i \in C_c(\Omega)$ uma função tal que $0 \leq \eta_i \leq 1$, $\eta_i \equiv 1$ em Ω_i e $supp(\eta_i) \subset \Omega_{i+1}$.

Nosso próximo passo é estudar a existência de soluções do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = -\eta_i(x)g(x,u) + \lambda f^+(x,u), & \text{em } \Omega^+, \\ \quad u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega^+. \end{cases} \tag{$P^+_{\lambda,i}$}$$

A seguir, desejamos comprovar a existência de uma solução u_i de $(P^+_{\lambda,i})$ para cada i e, então, demonstrar que a sequência (u_i) converge fracamente para uma função de $H^1_0(\Omega^+)$.

Lema 3.12. *Suponha (g_1^*) e (f_2) satisfeitas. Então, dada $u_\lambda \in H^1_0(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ uma solução não negativa de (P_λ), existe $u_i \in H^1_0(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$ solução de $(P^+_{\lambda,i})$ tal que $0 < u_\lambda \leq u_i \leq U_\lambda$ em Ω^+, com U_λ dada pelo Lema 3.11.*

Demonstração. É fácil ver que u_λ e U_λ são uma subsolução e uma supersolução de $(P^+_{\lambda,i})$, respectivamente. Por simplicidade, escrevemos $h_i(x,t) = -\eta_i(x)g(x,t)+\lambda f^+(x,t)$. Salientamos que, como $supp(\eta_i) \subset \Omega_{i+1}$, temos $h_i(x,t) = \lambda f^+(x,t)$ quando $x \in \Omega^+ \setminus \Omega_{i+1}$.

A seguir, definimos a função

$$\tilde{h}_i(x,t) = \begin{cases} h_i(x,u_\lambda), & \text{se } 0 < t < u_\lambda, \\ h_i(x,t), & \text{se } u_\lambda \leq t \leq U_\lambda, \\ h_i(x,U_\lambda), & \text{se } t > U_\lambda, \end{cases} \tag{3.15}$$

e consideramos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \tilde{h}_i(x,u), & \text{em } \Omega^+, \\ \quad u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega^+. \end{cases} \tag{$\tilde{P}^+_i$}$$

Afirmamos que $\tilde{h}_i(x,t) \in L^\infty(\Omega^+)$. De fato, como $0 \leq \eta_i \leq 1$, temos $|h_i(x,t)| \leq |g(x,t)| + \lambda|f(x,t)|$, para todo par $(x,t) \in \overline{\Omega^+} \times (0,\ \infty)$. Sendo assim, quando $0 < t < u_\lambda$ podemos utilizar o fato de que $0 < c_1 \leq u_\lambda \leq c_2$ em $\overline{\Omega^+}$, para certas constantes c_1, c_2, e a continuidade de g e f^+ para deduzir que

$$|\tilde{h}_i(x,t)| = |h_i(x,u_\lambda)| \leq |g(x,u_\lambda)| + \lambda|f^+(x,u_\lambda)| \leq M_2,$$

onde M_2 é uma constante positiva. Quando $t \geq U_\lambda$, aplicamos o argumento utilizado acima. Finalmente, quando $u_\lambda \leq t \leq U_\lambda$ recorremos ao fato de $u_\lambda,\ U_\lambda \in C(\overline{\Omega^+})$ e de g e f^+ serem contínuas para obtermos

$$|\tilde{h}_i(x,t)| = |h_i(x,t)| \leq |g(x,t)| + \lambda|f^+(x,t)| \leq M_3,$$

para uma constante positiva M_3. A afirmação está demonstrada.

Pela afirmação acima, a Imersão de Sobolev e o Teorema 9.15 de [23], deduzimos que o Problema $(\tilde{P}^+_i)$ possui uma solução $u_i \in C^1(\overline{\Omega^+}) \cap H^1_0(\Omega^+)$ tal que $u_\lambda \leq u_i \leq U_\lambda$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Em particular, u_i é uma solução de $(P^+_{\lambda,i})$. O lema está demonstrado. □

Demonstração do Teorema 3.10

Argumentamos por contradição. Suponha que existe $u_\lambda \in H^1_0(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ solução não negativa de (P_λ). Pelo Lema 3.12, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $u_i \in H^1_0(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$ solução positiva de $(P^+_{\lambda,i})$. Por este fato e por $\eta_i(x)g(x,t) \geq 0$ para todo $(x,t) \in \overline{\Omega^+} \times (0,\ \infty)$, temos

$$\|u_i\|^2 = -\int_{\Omega^+} \eta_i(x)g(x,u_i)u_i + \lambda \int_{\Omega^+} f^+(x,u_i)u_i \leq \lambda \int_{\Omega^+} f^+(x,u_i)u_i$$

Tomando $\varepsilon = 1$ em (1.14) e utilizando o fato de $0 < u_i \leq U_\lambda \in L^2(\Omega^+)$ em quase todo ponto de Ω^+, obtemos uma constante $M_4 > 0$, independente de i, tal que $\int_{\Omega^+} f^+(x,u_i)u_i \leq \int_{\Omega^+} |U_\lambda|^2 + c_3|U_\lambda| \leq M_4 < \infty$. Consequentemente, a sequência (u_i) é uniformemente limitada em $H_0^1(\Omega^+)$.

Passando a uma subsequência se necessário, concluímos que existe $v \in H_0^1(\Omega^+)$ tal que $u_i \rightharpoonup v$ fracamente em $H_0^1(\Omega^+)$ e $u_i \to v$ em quase todo ponto de Ω^+, quando $i \to \infty$. Como resultado, obtemos $u_\lambda \leq v \leq U_\lambda$ em quase todo ponto de Ω^+. Fixamos $j \in \mathbb{N}$ tal que $j \leq i$. Visto que u_i é uma solução de $(\tilde{P}_i)$, $h_i \in L^\infty(\Omega^+)$, $u_\lambda \leq u_i \leq U_\lambda$ e o Lema 3.8, temos

$$\int_{\Omega_j} g(x,u_i) \leq \int_{\Omega^+} \eta_i(x)g(x,u_i) \leq \lambda \int_{\Omega^+} f^+(x,u_i) \leq \lambda M_4.$$

Esta desigualdade e o Lema de Fatou implicam em $\int_{\Omega_j} g(x,v) \leq M_5$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue quando $j \to \infty$, obtemos $\int_{\Omega^+} g(x,v) \leq M_5$.

Destacamos que, como $U_\lambda \in C^{1,\alpha}(\Omega^+ \cup \Gamma_u)$ e $U_\lambda = 0$ sobre Γ_u, existe $\delta_0 > 0$ tal que $u_\lambda \leq v \leq U_\lambda \leq t_0$ no conjunto $\Gamma_{u,\delta_0} = \{x \in \Omega;\ d(x,\Gamma_u) \leq \delta_0\}$, onde t_0 foi dado por (g_1^*). Em vista disso, do fato de $\hat{g}$ ser não crescente em $(0,\ t_0]$ e de termos $g(x,t) \geq a(x)\hat{g}(t) > 0$ em $(0,\ t_0]$, obtemos

$$\int_{\Gamma_{u,\delta_0}} a(x)\hat{g}(U_\lambda) \leq \int_{\Gamma_{u,\delta_0}} a(x)\hat{g}(v) \leq \int_{\Gamma_{u,\delta_0}} g(x,v) \leq M_5.$$

Afirmamos que $\int_{\Gamma_{u,\delta_0}} a(x)\hat{g}(U_\lambda) = \infty$. Decerto, considere um ponto $x_0 \in \Gamma_u$ tal que $a(x_0) \neq 0$. Então, existem um conjunto aberto $W \subset \mathbb{R}^N$, um conjunto aberto V contendo x_0 e uma constante positiva c_6 tais que $a(x) \geq c_6 > 0$ em V, e um difeomorfismo $\phi : W \mapsto V$ tal que $\phi^{-1}(V \cap \Omega^+) = W \cap H^N$, onde $H^N = \{y \in \mathbb{R}^N;\ y_N \geq 0\}$.

De agora em diante escreveremos $W_{\delta_0}^+ = \phi^{-1}(V \cap \Gamma_{u,\delta_0}) \subset W \cap H^N$ e ressaltamos que $W_{\delta_0}^+$ pode ser escolhido como um cilindro. A função ϕ também satisfaz $\phi^{-1}(x_0) = 0$ e $\phi(\{y_N = 0\} \cap W) = V \cap \partial\Omega$. Sendo assim, podemos escrever

$$\int_{\Gamma_{u,\delta_0} \cap V} a(x)\hat{g}(U_\lambda(x))dx = \int_{W_{\delta_0}^+} a(\phi(y))\hat{g}(U_\lambda(\phi(y))|J_\phi(y)|dy$$

onde $|J_\phi(y)|$ denota o determinate da matriz Jacobiana de ϕ. Sem perda de generalidade, podemos supor que existe uma constante $c_7 > 0$ tal que $|J_\phi(y)| \geq c_7$ para todo $y \in W_{\delta_0/2}^+$. Utilizando esta desigualdade e o fato de $a(x)$ ser limitada inferiormente por uma constante positiva em $\Gamma_{u,\delta_0} \cap V$ obtemos

$$\int_{W_{\delta_0/2}^+} a(\phi(y))\hat{g}(U_\lambda(\phi(y))|J_\phi(y)|dy \geq c_8 \int_{W_{\delta_0/2}^+} \hat{g}(U_\lambda(\phi(y))) = c_8 \int_D \int_0^d \hat{g}(U_\lambda(\phi(y)))dy_N dy' \qquad (3.16)$$

onde $D \subset R^{N-1}$ é um disco e $0 < d$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, pelo fato de $U_\lambda \in C^{1,\alpha}(\Omega^+ \cup \Gamma_u)$ e pelo fato de $U_\lambda = 0$ sobre Γ_u, obtemos

$$U_\lambda(\phi(y)) = U_\lambda(\phi(y)) - U_\lambda(\phi(y',0)) = \int_0^{y_N} \frac{\partial E}{\partial y_N}(y',s),$$

onde $E(y) = U_\lambda(\phi(y))$. Tomando o valor absoluto na relação acima, podemos encontrar uma constante $c_9 > 0$ tal que $|U_\lambda(\phi(y))| \leq c_9|y_N|$.

Finalmente, escolhendo $d_1 < d$ tal que $d_1 \leq \frac{t_0}{c_9}$ e utilizando a desigualdade acima, (g_1^*) e a equação (3.16) concluímos que

$$\int_0^d \hat{g}(U_\lambda(\phi(y)))dy_N \geq \int_0^{d_1} \hat{g}(c_9 y_N))dy_N = \infty \tag{3.17}$$

O teorema está demonstrado. □

Capítulo

4

Problemas parcialmente singulares

Neste capítulo estudamos a existência de soluções para o Problema $(P_{\lambda,a})$ quando o termo singular não está presente em todos os pontos do domínio. Mais especificamente, supondo que o conjunto $\{x \in \Omega; a(x) = 0\}$ tem interior não vazio e utilizando um argumento de minimização, obtemos uma solução não negativa e não trivial para $(P_{\lambda,a})$. Também estudamos a concentração das soluções de $(P_{\lambda,a})$ em função do potencial $a(x)$.

4.1 Existência de uma solução não negativa e não trivial para todo $\lambda > 0$

Relembramos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = (-a(x)g(u) + \lambda f(x,u))\chi_{\{u>0\}} & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$P_{\lambda,a}$}$$

Nesta seção, mostramos que o Problema $(P_{\lambda,a})$ possui uma solução não negativa e não trivial para todo $\lambda > 0$. Supomos que $a \in C^{1,\nu}(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \nu < 1$, $f(x,s) \in C(\overline{\Omega} \times [0,\ \infty)) \cap C^{1,\mu}(\overline{\Omega} \times (0,\ \infty))$, para algum $0 < \mu < 1$, e $g \in C^2((0,\ \infty))$ são funções satisfazendo:

(a_0) $int(A^0) \neq \emptyset$, onde $A^0 = \{x \in \Omega;\ a(x) = 0\}$;

(a_1^*) $a(x) \geq 0$ em Ω;

$(\hat{f}_1)$ $\displaystyle\liminf_{t \to 0^+} \frac{f(x,t)}{t} = +\infty$, uniformemente em $\overline{\Omega}$;

(f_2) $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \frac{f(x,t)}{t} = 0$, uniformemente em $\overline{\Omega}$;

(f_3) existem $m_1, t_1 > 0$ e $0 < p < 1$ tais que $|f(x,t)| + |f_x(x,t)| + t|f_t(x,t)| \leq m_1 t^p$, $\forall\, x \in \overline{\Omega},\ 0 < t < t_1$;

$(\hat{g}_1)$ existem $C \leq \frac{\lambda_1}{\|a\|_\infty}$ e $\alpha \geq 0$ tais que $g(t) \geq -Ct - \alpha$, para todo $t > 0$;

$(\hat{g}_2)$ existem $t_0 > 0$, $\theta \geq 0$ e $0 < \gamma < 1$ tais que $\gamma g(t) + t g'(t) > -\theta$, para todo $0 < t < t_0$;

$(\hat{g}_3)$ $\lim_{t\to 0^+} \frac{g(t)}{t^p} = \infty$, onde p foi dado em (f_3);

(g_4) $2g'(t) + tg''(t) \leq 0$ e $g'(t) \leq 0$, para todo $0 < t < t_0$, onde t_0 foi dado em $(\hat{g}_2)$.

A maioria dos resultados apresentados nesta seção são baseados nos resultados obtidos no Capítulo 2. Nossa meta é demonstrar o seguinte teorema

Teorema 4.1. *Suponha (a_0), (a_1^*), $(\hat{f}_1)$, (f_2), (f_3), $(\hat{g}_1)$-$(\hat{g}_3)$ e (g_4) satisfeitas. Então, para qualquer valor do parâmetro $\lambda > 0$, existe $u_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ uma solução não negativa e não trivial de $(P_{\lambda,a})$.*

Visto que g não possui crescimento subcrítico no infinito, definimos, para $R > 0$ arbitrário, a função

$$g_R(t) := \begin{cases} g(t)\ , & \text{para } 0 < t \leq R, \\ g(R)\ , & \text{para } t > R. \end{cases} \tag{4.1}$$

Ressaltamos que a função g_R é continua e possivelmente singular na origem. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, definimos

$$g_{R,\varepsilon}(t) := \begin{cases} 0\ , & \text{para } t < 0, \\ \dfrac{t}{(t+\varepsilon)} g_R(t+\varepsilon)\ , & \text{para } t \geq 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

que não possui singularidade na origem. Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x) g_{R,\varepsilon}(u) = \lambda f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P^{\varepsilon}_{\lambda,a,R}$}$$

onde Ω é um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^N$. Associado ao problema acima, temos o funcional $I_{R,\,\varepsilon} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_{R,\varepsilon}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega a(x) G_{R,\varepsilon}(u) - \lambda \int_\Omega F(x,u),$$

onde $G_{R,\varepsilon}(u) = \int_0^u g_{R,\varepsilon}(t)dt$ e $F(x,u) = \int_0^u f(x,t)dt$. Pela definição (4.2) e a condição (f_2), deduzimos que o funcional está bem definido e $I_{R,\varepsilon} \in C^1(H_0^1(\Omega),\ \mathbb{R})$. A seguir, relembramos um resultado que foi apresentado na Seção 2.3.

Lema 2.2. *Suponha $(\hat{g}_2)$ satisfeita. Então, dados $R > 0$ e $\hat{t} > 0$, existem $\varepsilon_0 > 0$ e uma constante $C(\hat{t}) > 0$, independente de R e ε, tais que*

$$g(t) < C(\hat{t}) t^{-\gamma},\ \ \forall\, 0 < t < \hat{t}; \tag{i}$$

$$|g_{R,\varepsilon}(t)| \leq C(\hat{t}) t^{-\gamma} + c_R,\ \forall\, t > 0,\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \tag{ii}$$

onde $c_R > 0$ é uma constante dependendo apenas de R.

Ressaltamos que, mesmo quando a função $a(x)$ é somente não negativa, o resultado do Lema 2.6 (veja o Capítulo 2) é verdadeiro. Esse é o conteúdo do próximo lema.

Lema 4.2. *Suponha* (a_1^*), (f_2) *e* $(\hat{g}_1)$ *satisfeitas. Então, toda solução* u_ε *de* $(P^\varepsilon_{\lambda,a,R})$ *é não negativa e existe* $M = M(\lambda) > 0$, *independente de* ε *e de* R, *tal que*

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M; \tag{4.3}$$

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M. \tag{4.4}$$

para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *onde* ε_0 *foi dado pelo Lema 2.2.*

Demonstração. A demonstração deste lema é similar à do Lema 2.6 e por esta razão será omitida. □

De agora em diante, fixamos $R_0 > \max\{M + 1, \|\varphi_1\|_\infty\}$.

Lema 4.3. *Suponha* (a_1^*), (f_2) *e* $(\hat{g}_1)$ *satisfeitas. Então, o funcional* $I_{R_0,\varepsilon}$ *é coercivo, limitado inferiormente e existem constantes positivas* c *e* S *tais que*

$$I_{R_0,\varepsilon}(u) \geq c > 0,\ \forall u \in \partial B_{\hat{\rho}}(0),\ \textit{com}\ \hat{\rho} \geq S.$$

Demonstração. Por $(\hat{g}_1)$ e (4.2), temos que $g_{R_0,\varepsilon}(t) \geq -Ct - \alpha$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, por (f_2) e a continuidade de f, dado $\tau > 0$ existe $c_\tau > 0$ tal que $|f(x,t)| \leq \tau|t| + c_\tau$. Estas desigualdades e (a_1^*), implicam em

$$I_{R_0,\varepsilon}(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega a(x)(\frac{Cu^2}{2} + \alpha u) - \lambda \int_\Omega (\frac{\tau u^2}{2} + c_\tau u).$$

Utilizando a desigualdade de Poincaré e o Teorema da Imersão de Sobolev na relação acima, obtemos uma constante positiva C_1 tal que

$$I_{R_0,\varepsilon}(u) \geq (\frac{1}{2} - \frac{C\|a\|_\infty}{2\lambda_1} - \frac{\lambda\tau}{2\lambda_1})\|u\|^2 - (\|a\|_\infty \alpha + c_\tau \lambda)C_1\|u\|.$$

Então, para cada $\lambda > 0$, se escolhermos $\tau < \frac{\lambda_1 - C\|a\|_\infty}{\lambda}$, concluímos que existe $C_\lambda > 0$ tal que

$$I_{R_0,\varepsilon} \geq C_\lambda \|u\|^2 - C_2\|u\|. \tag{4.5}$$

Portanto, para todos $\lambda > 0$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, o funcional $I_{R_0,\varepsilon}$ é coercivo. Da desigualdade acima, também concluímos que, dado $S > 0$, existe $c > 0$, tal que

$$I_{R_0,\varepsilon}(u) \geq c,\ \forall u \in H_0^1(\Omega) \text{ com } \|u\| \geq S.$$

Para verificar a limitação inferior do funcional, utilizamos a desigualdade acima e a equação (4.5). O lema está demonstrado. □

Agora estamos prontos para estabelecer o resultado principal desta seção.

Demonstração do Teorema 4.1

A partir de agora, fixamos $\lambda > 0$. Defina

$$m_S = \inf_{u \in B_S(0)} I_{R_0,\varepsilon}(u),$$

onde S foi dado pelo Lema 4.3. Observe que $m_S \leq I_{R_0,\varepsilon}(0) = 0$. Uma vez que, pela condição (a_0), temos $int(A^0) \neq \emptyset$, podemos escolher $x_0 \in A^0$ e $r > 0$ tais que $D_r(x_0) \subset A^0$. Seja $\varphi \in C_c^\infty(D_r(x_0))$ uma função tal que $\varphi \geq 0$ e $\varphi \not\equiv 0$. Para $t > 0$ escrevemos

$$I_{R_0,\varepsilon}(t\varphi) = \frac{t^2}{2}\|\varphi\|^2 - \lambda \int_{D_r(x_0)} F(x, t\varphi) = t^2 \left(\frac{\|\varphi\|^2}{2} - \lambda \int_{D_r(x_0)} \frac{F(x,t\varphi)}{t^2} \right)$$

Por $(\hat{f}_1)$, dado $L > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x,t) > Lt, \text{ para } 0 < t < \delta. \tag{4.6}$$

Note que existe $t_1 > 0$ pequeno o suficiente tal que $\|t\varphi\|_\infty < \delta$, para $0 < t < t_1$. Logo, por (4.6) e a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$I_{R_0,\varepsilon}(t\varphi) \leq t^2 \left(\frac{\|\varphi\|^2}{2} - \lambda \int_{D_r(x_0)} \frac{L\varphi^2}{2} \right) = t^2 \|\varphi\|^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda L}{2\lambda_1} \right), \text{ para } 0 < t < t_1.$$

Escolhendo L suficientemente grande em (4.6) obtemos $I_{R_0,\varepsilon}(t\varphi) < 0$ para $0 < t < t_1$. Além disso, sem perda de generalidade, podemos supor que existe $t_2 < t_1$ tal que $\|t_2\varphi\| < S$. Assim,

$$m_S \leq I_{R_0,\varepsilon}(t_2\varphi) = d < 0.$$

Observe que, como $I_{R_0,\varepsilon}$ é coercivo e o termo não linear possui crescimento subcrítico, o funcional satisfaz a condição de (PS). Um resultado padrão (veja [37]) nos mostra que $I_{R_0,\varepsilon}$ possui um mínimo global $u_{\lambda,\varepsilon}$. Logo, $I_{R_0,\varepsilon}(u_{\lambda,\varepsilon}) = m_S \leq d < 0$.

A seguir, consideramos uma sequência (ε_n) tal que $\varepsilon_n \to 0$. Denotamos por $u_{\lambda,n}$ a solução do Problema $(P^\varepsilon_{\lambda,a,R})$ associada a ε_n. Como as soluções do Problema $(P^\varepsilon_{\lambda,a,R})$ são uniformemente limitadas em $H^1_0(\Omega)$, existe $u_\lambda \in H^1_0(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, as convergências abaixo são verdadeiras

$$\begin{cases} u_{\lambda,n} \rightharpoonup u_\lambda \text{ fracamente em } H^1_0(\Omega); \\ u_{\lambda,n} \to u_\lambda \text{ fortemente em } L^r(\Omega), \ 1 \leq r < 2^*; \\ u_{\lambda,n} \to u_\lambda \text{ q.t.p. em } \Omega; \\ |u_{\lambda,n}| \leq h_r \in L^r(\Omega), \ 1 \leq r < 2^*. \end{cases} \tag{4.7}$$

Além disso, para cada n, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_{\lambda,n}|^2 + \int_\Omega a(x) g_{R_0,\varepsilon_n}(u_{\lambda,n}) u_{\lambda,n} = \lambda \int_\Omega f(x, u_{\lambda,n}) u_{\lambda,n},$$

o que implica em

$$I_{R_0,\varepsilon_n}(u_{\lambda,n}) = \int_\Omega a(x) \left[G_{R_0,\varepsilon_n}(u_{\lambda,n}) - \frac{1}{2} g_{R_0,\varepsilon_n}(u_{\lambda,n}) u_{\lambda,n} \right] + \lambda \int_\Omega \left[\frac{1}{2} f(x, u_{\lambda,n}) u_{\lambda,n} - F(x, u_{\lambda,n}) \right] \leq d < 0.$$

Afirmamos que, quando $n \to \infty$, as seguintes convergências são verdadeiras:

$$\int_\Omega g_{R_0,\varepsilon_n}(u_{\lambda,n}) u_{\lambda,n} \to \int_\Omega g_{R_0}(u_\lambda) u_\lambda, \tag{4.8}$$

$$\int_\Omega G_{R_0,\varepsilon_n}(u_{\lambda,n}) \to \int_\Omega G_{R_0}(u_\lambda), \tag{4.9}$$

$$\int_\Omega f(x,u_{\lambda,n})u_{\lambda,n} \to \int_\Omega f(x,u_\lambda)u_\lambda, \tag{4.10}$$

$$\int_\Omega F(x,u_{\lambda,n}) \to \int_\Omega F(x,u_\lambda). \tag{4.11}$$

Supondo, por um momento, que a afirmação foi demonstrada, obtemos

$$\int_\Omega a(x)\left[G_{R_0}(u_\lambda) - \frac{1}{2}g_{R_0}(u_\lambda)u_\lambda\right] + \lambda\int_\Omega [\frac{1}{2}f(x,u_\lambda)u_\lambda - F(x,u_\lambda)] \leq d < 0, \tag{4.12}$$

o que implica em u_λ não trivial.

A seguir, observamos que os resultados obtidos na Seção 2.7 também valem, supondo (a_1^*) ao invés de $(\hat{a}_1)$. Assim, de maneira similar ao que foi feito na Seção 2.8, concluímos que u_λ é uma solução não negativa e não trivial de $(P_{\lambda,a})$.

É importante observar que, pelo Teorema 3.1, concluímos que existe $\lambda^* > 0$ tal que, se $0 < \lambda < \lambda^*$, a solução dada pelo Teorema 4.1 não pode ser positiva.

Resta demonstrar a afirmação. Iniciamos por (4.8). Pelo Lema 2.2, o Lema 4.2 e a equação (4.7), verificamos que existem constantes positivas $C(M)$ e c_{R_0} tais que

$$\begin{aligned}|a(x)g_{R_0,\varepsilon_n}(u_{\lambda,n})u_{\lambda,n}| &\leq \|a\|_\infty(C(M)u_{\lambda,n}^{1-\gamma} + c_{R_0}u_{\lambda,n})\\ &\leq \|a\|_\infty[C(M)(1+h_1) + c_{R_0}h_1] \in L^1(\Omega).\end{aligned}$$

Além disso, também temos $a(x)g_{R_0,\varepsilon_n}(u_{\lambda,n})u_{\lambda,n} \to a(x)g_{R_0}(u_\lambda)u_\lambda$ em quase todo ponto de Ω, quando $n \to \infty$. De fato, considere $x \in \Omega$ tal que $u_{\lambda,n}(x) \to u_\lambda(x)$, quando $n \to \infty$. Analisamos dois casos. Primeiro, se $u_\lambda(x) = 0$, a desigualdade acima implica em

$$|a(x)g_{R_0,\varepsilon_n}(u_{\lambda,n}(x))(u_{\lambda,n}(x))| \leq \|a\|_\infty(C(M)|u_{\lambda,n}(x)|^{1-\gamma} + c_{R_0}|u_{\lambda,n}(x)|) \to 0 = a(x)g(u_\lambda(x))(u_\lambda(x)),$$

em quase todo ponto de Ω. Quando $u_\lambda(x) > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u_{\lambda,n}(x) > 0$, para $n \geq n_0$, e, consequentemente,

$$a(x)g_{R_0,\varepsilon_n}(u_{\lambda,n}(x))(u_{\lambda,n}(x)) = a(x)\frac{u_{\lambda,n}(x)}{u_{\lambda,n}(x)+\varepsilon_n}g_{R_0}(u_{\lambda,n}(x)+\varepsilon_n)u_{\lambda,n}(x) \to a(x)g_{R_0}(u_\lambda(x))(u_\lambda(x)),$$

onde utilizamos o fato de $u_{\lambda,n}(x) + \varepsilon_n \to u_\lambda(x)$, quando $n \to \infty$, e o fato de g ser contínua em $u_\lambda(x)$.

Portanto, a relação (4.8) é uma consequência direta destes fatos e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Para verificar (4.9), observamos que podemos aplicar o Lema 2.11, já que supomos $(\hat{g}_1)$ e $(\hat{g}_2)$ satisfeitas. Por este resultado e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos $\int_\Omega a(x)[G_{R_0,\varepsilon_n}(u_{\lambda,n}) - G_{R_0}(u_\lambda)] \to 0$, quando $n \to \infty$.

A seguir, demonstramos a equação (4.10). Temos $f(x,u_{\lambda,n}) \to f(x,u_\lambda)$, em quase todo ponto de Ω, quando $n \to \infty$. Além disso, por (1.14) existe uma constante $c_4 > 0$ tal que

$$|f(x,u_{\lambda,n})u_{\lambda,n}| \leq (u_{\lambda,n})^2 + c_4|u_{\lambda,n}| \leq h_2^2 + c_4h_1 \in L^1(\Omega).$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue mais uma vez, concluímos que (4.10) vale. Finalmente, demonstramos (4.11). Como $F(x, u_{\lambda,n}) \to F(x, u_\lambda)$ em quase todo ponto de Ω, quando $n \to \infty$, utilizamos (1.14) e (4.7) novamente para obter

$$|F(x, u_{\lambda,n})| \leq \frac{1}{2}h_2^2 + c_4 h_1 \in L^1(\Omega).$$

Estes fatos e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, implicam em (4.11). Portanto, a afirmação é verdadeira e, consequentemente, o teorema está demonstrado. □

É possível estabelecer um resultado que relaciona os Teoremas 4.1, 1.1 e 3.1. Mais especificamente temos

Observação 4.4. *Suponha* (a_0), (a_1^*), $(\hat{f}_1)$, (f_2), (f_3), $(\hat{g}_1)$-$(\hat{g}_3)$ *e* (g_4) *satisfeitas. Então, existem* $0 < \lambda^* \leq \lambda^0$ *tais que:* (P_λ) *não possui solução positiva em* $H_0^1(\Omega)$, *para* $0 < \lambda < \lambda^*$, *e* (P_λ) *possui uma solução positiva e uma solução não negativa e não trivial, ambas em* $H_0^1(\Omega)$, *para* $\lambda \geq \lambda^0$. *Não sabemos se tais soluções são distintas ou coincidem.*

Também é possível relacionar os resultados dos Teoremas 2.1, 3.3 e 4.1.

Observação 4.5. *Suponha* $(\hat{f}_1)$, (f_2), (f_3), $(\hat{g}_1)$-$(\hat{g}_3)$ *e* (g_4) *satisfeitas. Temos:*

(i) se $a(x)$ *satisfaz* (a_0) *e* (a_1^*), *existe solução não negativa e não trivial de* $(P_{\lambda,a})$ *em* $H_0^1(\Omega)$, *para todo* $\lambda > 0$;

(ii) se $a(x)$ *satisfaz* (a_3), *existe* $\overline{\lambda} > 0$ *tal que* $(P_{\lambda,a})$ *não possui solução não negativa e não trivial em* $H_0^1(\Omega)$, *para* $0 < \lambda < \overline{\lambda}$;

(iii) se $a(x)$ *satisfaz* $(\hat{a}_1)$, *existe* $\tilde{\lambda} > 0$ *tal que* $(P_{\lambda,a})$ *possui duas soluções não negativas e não triviais em* $H_0^1(\Omega)$, *para* $\lambda \geq \tilde{\lambda}$.

4.2 Concentração das soluções

Relembramos a definição do conjunto $A^+ = \{x \in \overline{\Omega};\ a(x) > 0\}$. Nosso objetivo, nesta seção, é verificar que as soluções de $(P_{\lambda,a})$ devem se anular em quase todo ponto de subconjuntos compactos de A^+.

Sejam $a \in C(\overline{\Omega})$, $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\ \infty))$ e $g \in C((0,\ \infty))$ funções que satisfazem:

(a_1) $a(x) \geq 0$, mas $a(x) \not\equiv 0$ em Ω;

$(\breve{g}_1)$ existe uma constante $C < \frac{\lambda_1}{\|a\|_\infty}$ tal que $g(t) \geq -Ct$, para todo $t > 0$;

$(\tilde{g}_3)$ $\liminf\limits_{t \to 0^+} g(t) > 0$;

(f_2) $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{f(x,t)}{t} = 0$.

Estabelecemos o nosso primeiro resultado a respeito do comportamento das soluções de $(P_{\lambda,a})$.

Proposição 4.6. *Suponha* (a_1), $(\breve{g}_1)$, $(\tilde{g}_3)$ *e* (f_2) *satisfeitas. Seja* $\{u_\lambda\} \subset H_0^1(\Omega)$ *uma família de soluções não negativas e não triviais de* $(P_{\lambda,a})$. *Então, obtemos* $|\{x \in int(A^+);\ u_\lambda(x) > 0\}| \to 0$, *quando* $\lambda \to 0$.

Demonstração. Inicialmente demonstraremos a proposição para todo $K \subset int(A^+)$ compacto e não vazio, i.e., dado $K \subset int(A^+)$ compacto e não vazio, temos $|\{x \in K;\ u_\lambda(x) > 0\}| \to 0$, quando $\lambda \to 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor $K = \overline{B_r}(x_0) \subset int(A^+)$. A seguir, argumentando por contradição, suponha que existam uma sequência $(\lambda_n) \subset (0,\ \infty)$ e $\varepsilon > 0$ tais que $\lambda_n \to 0$, quando $n \to \infty$, e

$$|\{x \in \overline{B_r}(x_0);\ u_{\lambda_n}(x) > 0\}| \geq \varepsilon > 0. \tag{4.13}$$

Por simplicidade de notação escreveremos $B_r(x_0) = B_r$ e $B_n^+ = \{x \in \overline{B_r}(x_0);\ u_{\lambda_n}(x) > 0\}$. Agora, considere $\varphi_{1,r}$ a autofunção positiva associada ao primeiro autovalor do operador $-\Delta$ em B_r com condição de Dirichlet na fronteira. Afirmamos que a seguinte igualdade é válida

$$\int_{B_r} \nabla u_n \nabla \varphi_{1,r} + \int_{B_r} u_n \Delta \varphi_{1,r} = \int_{\partial B_r} T u_n \frac{\partial \varphi_{1,r}}{\partial \nu} d\sigma,$$

onde T é o operador traço e ν é o vetor normal unitário exterior à B_r. Assumindo a afirmação verdadeira, por um momento, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_{B_n^+} a(x)[g(u_n) + Cu_n]\varphi_{1,r} &= \int_{B_n^+} a(x)[g(u_n) + Cu_n]\varphi_{1,r} + \int_{B_r} \nabla u_n \nabla \varphi_{1,r} - \int_{B_r} \nabla u_n \nabla \varphi_{1,r} \\
&= \lambda_n \int_{B_r} f(x, u_n)\varphi_{1,r} + C \int_{B_n^+} a(x) u_n \varphi_{1,r} - \int_{B_r} \nabla u_n \nabla \varphi_{1,r} \\
&= \lambda_n \int_{B_r} f(x, u_n)\varphi_{1,r} + C \int_{B_r} a(x) u_n \varphi_{1,r} + \int_{B_r} u_n \Delta \varphi_{1,r} - \int_{\partial B_r} T u_n \frac{\partial \varphi_{1,r}}{\partial \nu} d\sigma \\
&= \lambda_n \int_{B_r} f(x, u_n)\varphi_{1,r} + C \int_{B_r} a(x) u_n \varphi_{1,r} - \lambda_1 \int_{B_r} u_n \varphi_{1,r} - \int_{\partial B_r} T u_n \frac{\partial \varphi_{1,r}}{\partial \nu} d\sigma \\
&\leq \lambda_n \int_{B_r} f(x, u_n)\varphi_{1,r} + (C\|a\|_\infty - \lambda_1) \int_{B_r} u_n \varphi_{1,r} - \int_{\partial B_r} T u_n \frac{\partial \varphi_{1,r}}{\partial \nu} d\sigma
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Note que, por (f_2), pelo fato de $\|u_n\|$ ser limitada e $\lambda_n \to 0$, temos

$$\left| \lambda_n \int_{B_r} f(x, u_n)\varphi_{1,r} \right| \leq \lambda_n (c_5 \|u_n\| \|\varphi_{1,r}\|_{L^2(B_r)} + c_1 \|\varphi_{1,r}\|_{L^1(B_r)}) \to 0. \tag{4.15}$$

Pelo fato de $\|u_n\| \to 0$, quando $n \to 0$, obtemos uma constante $c_6 > 0$ tal que

$$\left| \int_{B_r} u_n \varphi_{1,r} \right| \leq c_6 \|u_n\| \|\varphi_{1,r}\|_{L^2(B_r)} \to 0. \tag{4.16}$$

Finalmente, pelo Teorema do Traço e pelo fato de $\|u_n\| \to 0$, concluímos que

$$\left| \int_{\partial B_r} T u_n \frac{\partial \varphi_{1,r}}{\partial \nu} d\sigma \right| \leq c_7 \|T(u_n)\|_{L^2(\partial B_r)} \leq c_8 \|u_n\| \to 0. \tag{4.17}$$

As equações (4.14) - (4.17) implicam que, quando $n \to infty$,

$$\int_{B_n^+} a(x)[g(u_n) + Cu_n]\varphi_{1,r} \leq \lambda_n \int_{B_r} f(x, u_n)\varphi_{1,r} + (C\|a\|_\infty - \lambda_1) \int_{B_r} u_n \varphi_{1,r} - \int_{\partial B_r} T u_n \frac{\partial \varphi_{1,r}}{\partial \mu} d\sigma \to 0. \tag{4.18}$$

Por outro lado, como $\|u_n\| \to 0$, temos que $u_n \to 0$ em quase todo ponto de B_r. Pelo Teorema de

Egorov, dado $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{4}$ existe um conjunto mensurável $E \subset B_r$, com $|E| < \delta$, tal que, quando $n \to \infty$,

$$u_n \to 0, \text{ uniformemente em } B_r \setminus E. \tag{4.19}$$

Seja $N_d(\partial B_r) = \{x \in B_r;\ dist(x, \partial B_r) \leq d\}$ e tome $d^* > 0$ tal que

$$|B_n^+ \setminus N_{d^*}(\partial B_r)| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por simplicidade, escreveremos $Q = B_n^+ \setminus N_{d^*}(\partial B_r)$. Existe uma constante $C_3 > 0$ tal que $\varphi_{1,r}(x) \geq C_3$, para todo $x \in Q$. Note também que a é uma função contínua e positiva no compacto K. Logo, existe $c_9 > 0$ tal que $a(x) \geq c_9$, para todo $x \in K$. Estes fatos implicam em

$$\int_{B_n^+} a(x)[g(u_n) + Cu_n]\varphi_{1,r} \geq \int_{Q \setminus E} a(x)[g(u_n) + Cu_n]\varphi_{1,r} \geq c_9 C_3 \int_{Q \setminus E} [g(u_n) + Cu_n]. \tag{4.20}$$

Observe que, por $(\tilde{g}_3)$, dado $\overline{C} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $g(t) > \overline{C}$, se $0 < t < \delta$. Utilizando este fato, $(\breve{g}_1)$, a equação (4.20) e o Lema de Fatou, temos

$$\liminf_{n \to \infty} \int_{B_n^+} a(x)[g(u_n) + Cu_n]\varphi_{1,r} \geq c_9 C_3 \overline{C} \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.21}$$

o que contradiz a equação (4.18). A seguir, demonstramos a afirmação. Para qualquer $v \in H^1(B_r)$, podemos utilizar um argumento de densidade e mostrar que existe uma sequência $(v_n) \subset C^1(\overline{B}_r)$ tal que $v_n \to v$ em $H^1(B_r)$, quando $n \to \infty$. Pelo Teorema da Divergência,

$$\int_{B_r} \nabla v_n \nabla \varphi_{1,r} + \int_{B_r} v_n \Delta \varphi_{1,r} = \int_{\partial B_r} v_n \frac{\partial \varphi_{1,r}}{\partial \nu} d\sigma.$$

Como $v_n \to v$ em $H^1(B_r)$, quando $n \to \infty$, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue pode ser aplicado aqui, resultando em

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\partial B_r} v_n \frac{\partial \varphi_{1,r}}{\partial \nu} d\sigma = \int_{B_r} \nabla v \nabla \varphi_{1,r} + \int_{B_r} v \Delta \varphi_{1,r}.$$

Pelo Teorema do Traço, podemos escrever

$$\int_{\partial B_r} v_n \frac{\partial \varphi_{1,r}}{\partial \nu} d\sigma = \int_{\partial B_r} T(v_n - v) \frac{\partial \varphi_{1,r}}{\partial \nu} d\sigma + \int_{\partial B_r} Tv \frac{\partial \varphi_{1,r}}{\partial \nu} d\sigma$$

e $\|T(v_n - v)\|_{L^2(\partial B_r)} \leq \|v_n - v\|_{H^1(B_r)}$. Como $v_n \to v$ in $H^1(B_r)$, temos $|\int_{\partial B_r} T(v_n - u) \frac{\partial \varphi_{1,r}}{\partial \nu} d\sigma| \leq C\|v_n - u\|_{H^1(B_r)} \to 0$. Portanto,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\partial B_r} v_n \frac{\partial \varphi_{1,r}}{\partial \nu} d\sigma = \int_{\partial B_r} Tv \frac{\partial \varphi_{1,r}}{\partial \nu} d\sigma,$$

e isto conclui a demonstração da afirmação. Resta verificar que $|\{x \in int(A^+); u_\lambda(x) > 0\}| \to 0$, quando $\lambda \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $K \subset int(A^+)$ compacto não vazio tal que

$$|int(A^+) \setminus K| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.22}$$

Por outro lado, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\lambda(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|\{x \in K; u_\lambda(x) > 0\}| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para } 0 < \lambda < \lambda(\varepsilon). \tag{4.23}$$

Como consequência de (4.22) e (4.23), obtemos

$$\begin{aligned}|\{x \in int(A^+); u_\lambda(x) > 0\}| &= |\{x \in K; u_\lambda(x) > 0\}| + |\{x \in int(A^+) \setminus K; u_\lambda(x) > 0| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ para } 0 < \lambda < \lambda(\varepsilon).\end{aligned}$$

O lema está demonstrado. □

Como consequência direta desta proposição, temos o seguinte resultado:

Corolário 4.7. *Suponha (a_1^*), $(\breve{g}_1)$, $(\tilde{g}_3)$ e (f_2) satisfeitas. Seja $\{u_\lambda\} \subset H_0^1(\Omega)$ uma família de soluções não negativas e não triviais de (P_λ). Se $|\partial A^+| = 0$, então $|\{x \in A^+;\ u_\lambda(x) > 0\}| \to 0$ quando $\lambda \to 0$.*

Demonstração. Podemos escrever $\{x \in A^+;\ u_\lambda(x) > 0\} = \{x \in int(A^+);\ u_\lambda(x) > 0\} \cup \{x \in \partial A^+;\ u_\lambda(x) > 0\}$. Como $|\partial A^+| = 0$, o resultado segue como uma consequência direta da Proposição 4.6. □

Considere a seguinte hipótese

(f_4) Existe $t_1 > 0$ tal que $f(x,t) > 0$, para todos $0 < t < t_1$ e $x \in \Omega$.

O seguinte resultado complementa o resultado obtido na Proposição 4.6

Proposição 4.8. *Suponha (a_1^*), $(\breve{g}_1)$, $(\tilde{g}_3)$, (f_2) e (f_4) satisfeitas. Seja $u_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ uma solução não negativa e não trivial de $(P_{\lambda,a})$. Então $u_\lambda \not\equiv 0$ em A^+, para qualquer valor de λ.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que para algum valor de $\lambda > 0$ existe uma solução não negativa e não trivial de $(P_{\lambda,a})$ tal que $u_\lambda \equiv 0$ em A^+. Então temos $\Omega^+ \subsetneqq A^0$ e, consequentemente, existem $x_0 \in A^0$ e $r > 0$ tais que $\overline{B_r(x_0)} \subset A^0$, $u(x_0) = 0$ e $u \not\equiv 0$ em $B_r(x_0)$. Então, obtemos a seguinte igualdade

$$-\Delta u = \lambda f(x,u), \text{ em } B_r(x_0).$$

Consequentemente, $u \in C(B_r(x_0))$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\|u\|_{L^\infty(B_r)} < t_1$. Então a condição (f_4), juntamente com o Princípio do Máximo Forte para soluções fracas (veja [23]), implicam em u_λ constante em $B_r(x_0)$, o que é um absurdo. O corolário está demonstrado. □

Capítulo
5

Apêndice

Este capítulo apresenta dois resultados que foram utilizados ao longo do nosso trabalho. A primeira seção trata do conceito de solução que utilizamos, enquanto que, a segunda seção apresenta um resultado de existência de solução baseado no Teorema do Passo da Montanha.

5.1 Formulação fraca

Relembremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = (-g(x,u) + \lambda f(x,u))\chi_{\{u>0\}}, & \text{in } \Omega \\ \quad u = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_λ}$$

Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução de (P_λ) no sentido das distribuições se ela satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_{\{u>0\}} \big(- g(x,u) + \lambda f(x,u)\big)v, \ \forall\, v \in C_c^\infty(\Omega). \tag{5.1}$$

Nossa meta, nesta seção, é mostrar que qualquer solução de (P_λ), no sentido das distribuições, é uma solução fraca de (P_λ), i.e., a definição de solução, dada acima, ainda vale quando consideramos $v \in H_0^1(\Omega)$. A fim de obter tal resultado, consideramos as seguintes hipóteses:

$(\tilde{g}_1)$ existem constantes $\alpha \geq 0$ e $C < \lambda_1$ tais que $g(x,t) > -Ct - \alpha$, para todos $x \in \overline{\Omega}$ e $t > 0$;

(f_2^*) existem constantes $c_1 \geq 0$ e $c_2 > 0$ tais que $|f(x,t)| \leq c_1 + c_2|t|^r$, para $1 \leq r < 2^* - 1$,

onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador $-\Delta$, com condição de Dirichlet na fronteira. Nosso resultado principal, nesta seção, é o seguinte

Proposição 1.6. *Suponha $(\tilde{g}_1)$ e (f_2^*) satisfeitas. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução de (P_λ) no sentido das distribuições. Então, u é solução de (P_λ) no sentido fraco.*

Antes de apresentarmos a demonstração da proposição acima, enunciamos e demonstramos alguns resultados auxiliares.

Lema 5.1. *Suponha* $(\tilde{g}_1)$ *e* (f_2^*) *satisfeitas. Seja* $u \in H_0^1(\Omega)$ *uma solução de* (P_λ) *no sentido das distribuições . Então, a equação (1.9) vale, para toda* $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *tal que supp*$(v) \subset \Omega$.

Demonstração. Seja $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ a função definida por

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp^{\frac{1}{|x|^2-1}}, \text{se } |x| < 1; \\ 0, \text{se } |x| \geq 1. \end{cases} \tag{5.2}$$

onde c é uma constante positiva escolhida de modo que $\int_{\mathbb{R}^N} \eta(x)dx = 1$. Dado $\varepsilon > 0$, defina $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$. Então, $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x)dx = 1$ e $supp(\eta_\varepsilon) \subset \overline{B_\varepsilon(0)}$.

Seja $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, com $supp(v) = K \subset \Omega$, e admita que $v = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Visto que v é localmente integrável, definimos $v^\varepsilon = \eta_\varepsilon * v$ em $N_\varepsilon(K) = \{x \in \Omega\ ;\ dist(x, K) \leq \varepsilon\}$ e

$$v^\varepsilon(x) = (\eta_\varepsilon * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y)v(y)dy.$$

Tome $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}dist(K, \Omega)$. Assim, v^ε satisfaz $supp(v^\varepsilon) \subset N_\varepsilon(K) \subset \hat{K} \subset\subset \Omega$, para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, onde $\hat{K} = N_{\varepsilon_0}(K)$. Também temos $v^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $v^\varepsilon \to v$, em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$, e $v^\varepsilon \to v$ fortemente em $H_0^1(\Omega)$, quando $\varepsilon \to 0$ (veja [20]). Observe que

$$|v^\varepsilon(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y)v(y)dy\right| = \left|\int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)v(y)dy\right| \leq \|v\|_\infty \left|\int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)dy\right| = \|v\|_\infty,$$

logo $\|v^\varepsilon\|_\infty \leq \|v\|_\infty$ e, consequentemente, v^ε é uniformemente limitada em $L^\infty(\Omega)$. Como $v^\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$, por (5.1) temos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v^\varepsilon + \int_{\{u>0\}} g(x,u)v^\varepsilon = \lambda \int_{\{u>0\}} f(x,u)v^\varepsilon. \tag{5.3}$$

Afirmamos que o funcional definido por $J(w) = \int_{\{u>0\}} f(x,u)w$, para $w \in H_0^1(\Omega)$, é contínuo. De fato, é fácil ver que J é linear, assim, temos apenas que mostrar que J é limitado. Quando $N = 1$, temos a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. Para $N = 2$, temos a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $1 \leq s < \infty$. Estes fatos e a Desigualdade de Hölder implicam que existe uma constante positiva c_3 tal que

$$|J(w)| \leq \int_{\{u>0\}} c_1|w| + \int_{\{u>0\}} c_2|u|^r|w| \leq c_3\|w\|, \text{ para } N = 1, 2.$$

Para $N \geq 3$, a Desigualdade de Holder e o Teorema da Imersão de Sobolev, implicam que existe uma constante $c_4 > 0$ tal que

$$|J(w)| \leq \int_{\{u>0\}} c_1|w| + c_2|w||u|^{2^*-1} \leq c_1 \int_\Omega |w| + c_2(\int_\Omega |w|^{2^*})^{\frac{1}{2^*}}(\int_\Omega |u|^{2^*})^{\frac{2^*-1}{2^*}} \leq c_4\|w\|.$$

A afirmação está demonstrada. Como $v^\varepsilon \to v$, quando $\varepsilon \to 0$, fortemente em $H_0^1(\Omega)$ podemos utilizar a afirmação acima para obter

$$\lambda \int_{\{u>0\}} f(x,u)v^\varepsilon \to \lambda \int_{\{u>0\}} f(x,u)v, \text{ quando } \varepsilon \to 0. \tag{5.4}$$

Afirmamos que $g(x,u)\chi_{\{u>0\}} \in L^1_{loc}(\Omega)$. Admitindo a afirmação, por um momento, prosseguimos para a última etapa da demonstração. Como $supp(v^\varepsilon) \subset \hat{K} \subset\subset \Omega$ e v^ε é uniformemente limitada em $L^\infty(\Omega)$, podemos aplicar o Teorema da Convergência Limitada de Lebesgue, mais uma vez, para concluir que

$$\int_{\{u>0\}} g(x,u)v^\varepsilon \to \int_{\{u>0\}} g(x,u)v, \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

Da relação acima, (5.3), (5.4) e do fato de $v^\varepsilon \to v$ fortemente em $H_0^1(\Omega)$, quando $\varepsilon \to 0$, temos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_{\{u>0\}} g(x,u)v = \lambda \int_{\{u>0\}} f(x,u)v. \tag{5.5}$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $supp(v) \subset \Omega$, visto que v foi escolhida arbitrariamente.

Resta demonstrar a afirmação. Seja $\tilde{K} \subset \Omega$ um conjunto compacto e tome $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \le \zeta \le 1$ e $\zeta \equiv 1$ em $\tilde{K}$. De (1.9) temos $\int_\Omega g(x,u)\zeta = \int_\Omega \lambda f(x,u)\zeta - \int_\Omega \nabla u \nabla \zeta$. Portanto,

$$\int_\Omega [g(x,u) + Cu + \alpha]\zeta = \lambda \int_\Omega f(x,u)\zeta - \int_\Omega \nabla u \nabla \zeta + \int_\Omega (Cu+\alpha)\zeta = C_6 < \infty. \tag{5.6}$$

Dado $\delta > 0$, definimos o conjunto $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : u(x) \ge \delta\}$. Utilizando $(\tilde{g}_1)$ e o fato de $\zeta \ge 0$ e $\zeta \equiv 1$ em $\tilde{K}$ temos

$$\int_{\tilde{K}\cap\Omega_\delta} [g(x,u) + Cu + \alpha] = \int_{\tilde{K}\cap\Omega_\delta} [g(x,u) + Cu + \alpha]\zeta \le \int_\Omega [g(x,u) + Cu + \alpha]\zeta = C_6 < \infty.$$

Observe que se $u(x) = 0$, então $\chi_{\Omega_\delta}(x) = 0$, para todo $\delta > 0$. Por outro lado se $u(x) > 0$, então $\chi_{\Omega_\delta} \to 1$ quando $\delta \to 0$. Consequentemente

$$\lim_{\delta\to 0} [g(x,u(x)) + Cu(x) + \alpha]\chi_{\Omega_\delta} = [g(x,u(x)) + Cu(x) + \alpha]\chi_{\{u>0\}}(x), \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{5.7}$$

Fazendo $\delta \to 0$ e aplicando o Lema de Fatou obtemos

$$\int_{\tilde{K}} \liminf_{\delta\to 0} [g(x,u) + Cu + \alpha]\chi_{\Omega_\delta} \le \liminf_{\delta\to 0} \int_{\tilde{K}} [g(x,u) + Cu + \alpha]\chi_{\Omega_\delta} \le C_6 < \infty. \tag{5.8}$$

De (5.7) e (5.8) concluímos que $[g(x,u)+Cu+\alpha]\chi_{\{u>0\}} \in L^1(\tilde{K})$. Como $u \in L^1(\Omega)$ e $\tilde{K}$ foi escolhido arbitrariamente concluímos que a afirmação é verdadeira. O lema está demonstrado. □

Por uma questão de simplicidade, apresentamos agora algumas notações que serão utilizadas no próximo lema. Dada uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ escrevemos

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega;\ u(x) > 0\},\ \Omega^- = \{x \in \Omega;\ u(x) < 0\} \text{ e } \Omega^0 = \{x \in \Omega;\ u(x) = 0\}.$$

De maneira similar, dada uma sequência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ denotaremos por

$$\Omega_n^+ = \{x \in \Omega;\ u_n(x) > 0\},\ \Omega_n^- = \{x \in \Omega;\ u_n(x) < 0\} \text{ e } \Omega_n^0 = \{x \in \Omega;\ u_n(x) = 0\}.$$

Lema 5.2. *A função* $\varphi^+ : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ *definida por* $\varphi^+(u) = u^+ = \max\{u, 0\}$ *é contínua.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência tal que $u_n \to u$ fortemente em $H_0^1(\Omega)$. Para demonstrar este lema, é suficiente mostrar que $\nabla u_n^+ \to \nabla u^+$ em $[L^2(\Omega)]^N$. Considere o conjunto $D \subset \Omega$ tal que $|D| = 0$ e, sempre que $x \in D^c$, temos $u_n(x) \to u(x)$ e $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$.

Definimos $P^+ \subset \Omega$ como sendo um conjunto tal que $|P^+| = 0$ e $\nabla u^+(x) = \nabla u(x) \not\equiv 0$ para $x \in \Omega^+ \setminus P^+$. De maneira similar, $P^- \subset \Omega$ representa um conjunto com $|P^-| = 0$ e $\nabla u^+(x) = 0$ para $x \in \Omega^- \setminus P^-$. Finalmente, P^0 denota um conjunto com medida zero e tal que $\nabla u(x) = 0 = \nabla u^+(x) = \nabla u^-(x)$ para $x \in \Omega^0 \setminus P^0$.

Analogamente, P_n^+, P_n^- e P_n^0 indicam subconjuntos de Ω quando u é substituído pela sequência u_n na definição acima.

Considere o conjunto

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P_n^+ \cup P_n^- \cup P_n^0) \cup D \cup P^+ \cup P^- \cup P^0.$$

A demonstração do lema está dividida em três etapas. Primeiro, consideramos $x \in \Omega^+ \setminus E$. Neste caso temos $u(x) > 0$ e $\nabla u^+(x) = \nabla u(x) \not\equiv 0$. Como $x \in D^c$, segue que $u_n(x) \to u(x)$ e $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) = \nabla u^+(x)$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, temos $u_n(x) > 0$. Pela definição de P_n^+ temos que $\nabla u_n^+(x) = \nabla u_n(x) \not\equiv 0$, para $n \geq n_0$. Consequentemente $\nabla u_n^+(x) = \nabla u_n(x) \to \nabla u(x) = \nabla u^+(x)$.

De modo similar, consideramos $x \in \Omega^- \setminus E$. Segue que $u(x) < 0$ e $\nabla u^+(x) = 0$. Visto que $x \in D^c$, temos $u_n(x) \to u(x)$ e $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$. Logo, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_1$, temos $u_n(x) < 0$. Consequentemente $x \in \Omega_n^- \setminus P_n^-$. A definição de P_n^- implica que $\nabla u_n^+(x) = 0$ para $n \geq n_1$. Portanto $\nabla u_n^+(x) \to \nabla u^+(x)$.

Finalmente, seja $x \in \Omega^0 \setminus E$. Então, $u(x) = 0$ e $\nabla u(x) = \nabla u^+(x) = \nabla u^-(x) = 0$. Visto que $x \in D^c$, temos $u_n(x) \to 0$ e $\nabla u_n(x) \to 0$. Agora, se $u_n(x) < 0$ para algum n temos $\nabla u_n^+ = 0 = \nabla u^+(x)$. Por outro lado, se $u_n(x) > 0$ para algum n então $\nabla u_n^+(x) = \nabla u_n(x) \to 0$. Finalmente, se para algum x temos $u_n(x) = 0$ então $\nabla u_n^+(x) = 0 = \nabla u^+(x)$. O lema está demonstrado. □

Agora demonstraremos nosso resultado principal

Demonstração da Proposição 1.6

Considere $v \in H_0^1(\Omega)$ e suponha $v \geq 0$. Então, existe uma sequência $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to v$ fortemente em $H_0^1(\Omega)$ e $\varphi_n \to v$ em quase todo ponto de Ω. Defina $\phi_n = \min\{\varphi_n^+ \, , \, v\}$. Observe que $\phi_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e $supp(\phi_n) \subset \Omega$. Assim, pelo Lema 5.1 temos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi_n + \int_{\{u>0\}} g(x,u)\phi_n = \lambda \int_{\{u>0\}} f(x,u)\phi_n. \tag{5.9}$$

Como $\phi_n = v - (v - \varphi_n^+)^+$, podemos aplicar o Lema 5.2 para obter $\phi_n \to v$ fortemente em $H_0^1(\Omega)$. Então

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi_n \to \int_\Omega \nabla u \nabla v. \tag{5.10}$$

O mesmo argumento utilizado para obter a equação (5.4) pode ser aplicado aqui para obter

$$\int_{\{u>0\}} f(x,u)\phi_n \to \int_{\{u>0\}} f(x,u)v. \tag{5.11}$$

As equações (5.9)-(5.11), o fato de $\phi_n \to v$ em quase todo ponto de Ω e o Lema de Fatou implicam em

$$\int_{\{u>0\}} [g(x,u) + Cu + \alpha]v \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\{u>0\}} [g(x,u) + Cu + \alpha]\phi_n$$
$$= \lambda \int_{\{u>0\}} f(x,u)v - \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_{\{u>0\}} [Cu + \alpha]v.$$

Portanto, $[g(x,u) + Cu + \alpha]v\chi_{\{u>0\}} \in L^1(\Omega)$ e, consequentemente, $g(x,u)v\chi_{\{u>0\}} \in L^1(\Omega)$. Observe que $0 \leq [g(x,u) + Cu + \alpha]\phi_n\chi_{\{u>0\}} \leq [g(x,u) + Cu + \alpha]v\chi_{\{u>0\}}$ e, passando a uma subsequência se necessário, concluímos que $[g(x,u)+Cu+\alpha]\phi_n\chi_{\{u>0\}} \to [g(x,u)+Cu+\alpha]v\chi_{\{u>0\}}$. Portanto, aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\int_{\{u>0\}} [g(x,u) + Cu + \alpha]\phi_n \to \int_{\{u>0\}} [g(x,u) + Cu + \alpha]v. \tag{5.12}$$

Combinando as equações (5.9)-(5.12) e utilizando o fato de v ter sido escolhida arbitrariamente, concluímos que (1.9) vale para toda $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $v \geq 0$. No caso em que $v \leq 0$, tomamos $w = -v \geq 0$ e aplicamos o resultado obtido acima. Também iremos obter $g(x,u)v\chi_{\{u>0\}} \in L^1(\Omega)$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \leq 0$.

Finalmente, dado $v \in H_0^1(\Omega)$ arbitrário e escrevendo $v = v^+ - v^-$ temos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_{\{u>0\}} a(x)g(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v^+ + \int_{\{u>0\}} a(x)g(u)v^+ - \int_\Omega \nabla u \nabla v^- - \int_{\{u>0\}} a(x)g(u)v^-$$
$$= \lambda \int_{\{u>0\}} f(x,u)v^+ - \lambda \int_{\{u>0\}} f(x,u)v^- = \lambda \int_{\{u>0\}} f(x,u)v.$$

A proposição está demonstrada. $\square$

5.2 Existência de soluções para problemas elípticos semilineares

Nosso objetivo nesta seção é estabelecer a existência de soluções para problemas elípticos semilineares supondo a existência de uma supersolução para o problema. Seja Ω um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. Consideramos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x,u) & \text{, em } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{, sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.13}$$

onde $h : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é uma função de Caratheodory.

Nossos dois primeiros resultados estabelecem a existência de soluções não negativas e não triviais para o Problema 5.13. Seja $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional associado ao Problema (5.13) dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega H(x,u)dx,$$

onde $H(x,u) = \int_0^u h(x,t)dt$.

Observe que o funcional I não está bem definido em $H_0^1(\Omega)$, pois a função h não apresenta restrição de crescimento no infinito. No entanto, é fácil verificar que $I(v) \in \mathbb{R}$ para todo $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Diremos que $z \in H_0^1(\Omega)$ é uma supersolução do Problema (5.13) se satisfaz

$$\int_\Omega \nabla z \nabla w \geq \int_\Omega h(x,z)w, \ \forall\, w \in H_0^1(\Omega), \ w \geq 0. \tag{5.14}$$

Antes de enunciar nosso primeiro resultado nesta seção consideramos a seguinte hipótese

(H_1) h é localmente limitada, i.e., h é limitada em subconjuntos compactos de $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$.

Nosso resultado principal é o seguinte

Proposição 5.3. *Suponha que (H_1) seja satisfeita, que $h(x,0) = 0$ e que exista $\bar{u} \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, uma supersolução não negativa e não trivial de (5.13), tal que*

(I_1) *$I(\bar{u}) \leq 0$;*

(I_2) *Existem $\alpha > 0$ e $0 < \rho < \|\bar{u}\|$ tal que $I(u) \geq \alpha$ para todo $u \in \partial B_\rho(0)$ e $0 \leq u \leq \bar{u}$.*

Então, o Problema (5.13) possui duas soluções não triviais $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ tais que $0 \leq u_1, u_2 \leq \bar{u}$ e $I(u_2) \leq 0 < \alpha \leq I(u_1)$.

Demonstração. Como observado acima, o funcional I não está bem definido em $H_0^1(\Omega)$. Para contornar este problema e encontrar as soluções anunciadas, consideramos o seguinte truncamento da função h

$$\bar{h}(x,t) = \begin{cases} 0, \text{ para } t < 0, \\ h(x,t), \text{ para } 0 \leq t \leq \bar{u}(x), \\ h(x,\bar{u}(x)), \text{para } t > \bar{u}(x). \end{cases} \tag{5.15}$$

Consideramos também o problema de Dirichlet semilinear associado à função h

$$\begin{cases} -\Delta u = \bar{h}(x,u), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.16}$$

Nossa meta é encontrar duas soluções do problema (5.16) e verificar que tais soluções satisfazem $0 \leq u_1, u_2 \leq \overline{u}$, sendo então duas soluções do problema original (5.13).

Associado ao Problema (5.16), temos o funcional $\overline{I} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\bar{I}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega \bar{H}(x,u), \forall\, u \in H_0^1(\Omega), \tag{5.17}$$

onde $\bar{H}(x,u) = \int_0^u \bar{h}(x,t)dt$. Observe que, por (H_1) e o fato de $\overline{u} \in L^\infty(\Omega)$, obtemos uma constante positiva C_1 tal que

$$|\overline{h}(x,t)| \leq C_1, \ \forall\, t \in \mathbb{R} \text{ e q.t.p. em } \Omega. \tag{5.18}$$

Isto implica que o funcional $\bar{I}$ é de classe C^1 e que os pontos críticos de $\bar{I}$ são soluções fracas de (5.16). Portanto, nosso próximo objetivo é verificar que $\bar{I}$ possui dois pontos críticos $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ tais que $0 \leq u_1, u_2 \leq \bar{u}$ e $\bar{I}(u_2) \leq 0 < \alpha \leq \bar{I}(u_1)$.

A seguir, reescrevemos a função $\bar{H}$ em termos de h e H: se $t \leq \bar{u}(x)$, temos $\bar{H}(x,t) = H(x,t)$. Por outro lado, para $t > \bar{u}(x)$, obtemos $\bar{H}(x,t) = H(x,\bar{u}) + h(x,\bar{u})(t - \bar{u}(x)) = H(x,\bar{u}) + h(x,\bar{u})(t - \bar{u}(x))^+$.

Logo $\bar{H}(x,t) = H(x, \bar{u} - (\bar{u} - t)^+) + h(x, \bar{u})(t - \bar{u})^+$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e em quase todo ponto de Ω e, consequentemente,

$$\bar{I}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega H(x, \bar{u} - (\bar{u} - u)^+) - \int_\Omega h(x, \bar{u})(u - \bar{u})^+. \tag{5.19}$$

Considerando $v = \bar{u} - (\bar{u} - u)^+$, afirmamos que

$$\bar{I}(u) \geq I(v) + \frac{1}{2}\|(u - \bar{u})^+\|^2, \ \forall\, u \in H_0^1(\Omega). \tag{5.20}$$

De fato, pela equação (5.19) e utilizando o fato de que $\bar{u}$ é uma supersolução de (5.13), obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{I}(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega H(x, \bar{u} - (\bar{u} - u)^+) - \int_\Omega h(x, \bar{u})(u - \bar{u})^+ \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega H(x, \bar{u} - (\bar{u} - u)^+) - \int_\Omega \nabla\bar{u}\nabla(u - \bar{u})^+ \\
&+ \frac{1}{2}\|\bar{u} - (\bar{u} - u)^+\|^2 - \frac{1}{2}\|\bar{u} - (\bar{u} - u)^+\|^2 \\
&= I(\bar{u} - (\bar{u} - u)^+) + \frac{1}{2}(\|u\|^2 - \|\bar{u} - (\bar{u} - u)^+\|^2) - \left\langle \bar{u}, (u - \bar{u})^+ \right\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, observando que $u = v + (u - \bar{u})^+$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\bar{I}(u) &\geq I(v) + \frac{1}{2}(\|u\|^2 - \|v\|^2) - \left\langle \bar{u}, (u - \bar{u})^+ \right\rangle \\
&= I(v) + \frac{1}{2}(\|v\|^2 + 2\left\langle (u - \bar{u})^+, v \right\rangle + \|(u - \bar{u})^+\|^2 - \|v\|^2) - \left\langle \bar{u}, (u - \bar{u})^+ \right\rangle \\
&= I(v) + \left\langle v - \bar{u}, (u - \bar{u})^+ \right\rangle + \frac{1}{2}\|(u - \bar{u})^+\|^2 \\
&= I(v) - \left\langle (\bar{u} - u)^+, (u - \bar{u})^+ \right\rangle + \frac{1}{2}\|(u - \bar{u})^+\|^2 \\
&= I(v) - \int_\Omega \nabla(\bar{u} - u)^+\nabla(u - \bar{u})^+ + \frac{1}{2}\|(u - \bar{u})^+\|^2 = I(v) + \frac{1}{2}\|(u - \bar{u})^+\|^2
\end{aligned}$$

A afirmação está demonstrada.

Observe que o funcional $\bar{I}$ é coercivo e limitado inferiormente. Efetivamente, por (5.18), obtemos

$$\bar{I}(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - c_1\|u\|.$$

A partir desta desigualdade, obtemos a limitação inferior e a coercividade. Vale a pena ressaltar que a coercividade do funcional $\bar{I}$, o Teorema da Imersão de Sobolev e a estimativa (5.18) implicam que $\bar{I}$ satisfaz a condição de (PS) (veja [37]).

A seguir consideramos o conjunto $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1];\ H_0^1(\Omega));\ \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = \overline{u}\}$ e definimos

$$c_1 = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \bar{I}(\gamma(t)).$$

Dado $\gamma \in \Gamma$, definimos $\tilde{\gamma} : [0,1] \to H_0^1(\Omega)$ por $\tilde{\gamma}(t) = \bar{u} - (\bar{u} - \gamma(t))^+$. De imediato temos que $\tilde{\gamma}(0) = 0$

e $\tilde{\gamma}(1) = \overline{u}$. Consequentemente, tendo em vista a Proposição 5.2, $\tilde{\gamma} \in \Gamma$. Além disso, por (5.20), obtemos

$$\bar{I}(\gamma(t)) \geq I(\tilde{\gamma}(t)) + \frac{1}{2}\|(\gamma(t) - \overline{u})^{+}\|^{2}, \ \forall\, t \in [0,1]. \tag{5.21}$$

Considerando $0 < \rho < \|\overline{u}\|$, dado por $(I2)$, tomamos $t_0 \in (0,1)$ tal que $\|\tilde{\gamma}(t_0)\| = \rho$. Observando que $0 \leq \tilde{\gamma}(t_0) \leq \overline{u}$, por $(I2)$ e (5.21), obtemos

$$\max_{t\in[0,1]} \bar{I}(\gamma(t)) \geq \bar{I}(\gamma(t_0)) \geq I(\tilde{\gamma}(t_0)) \geq \alpha > 0, \ \forall\, \gamma \in \Gamma.$$

A estimativa acima, $(I1)$ e o fato de $\bar{I}(0) = 0$ nos permitem aplicar o Teorema do Passo da Montanha para concluir que $\bar{I}$ possui um ponto crítico $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo $\bar{I}(u_1) = c_1 \geq \alpha > 0$. Por outro lado, podemos concluir (veja [37]) que o funcional $\bar{I}$ possui um mínimo global $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo

$$\bar{I}(u_2) = c_2 := \inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \bar{I}(u) \leq \bar{I}(\overline{u}) = I(\overline{u}) \leq 0 = \bar{I}(0).$$

Note que podemos supor $u_2 \not\equiv 0$ uma veq que, se $c_2 = 0$, então $\bar{u}$ é ponto crítico de $\bar{I}$.

A seguir verificamos que $0 \leq u_1, u_2 \leq \bar{u}$. Temos, para $i = 1, 2$,

$$\left\langle \bar{I}'(u_i), w \right\rangle = \int_\Omega \nabla u_i \nabla w - \int_\Omega \bar{h}(x,u_i) w = 0, \ \forall\, w \in H_0^1(\Omega).$$

Tomando $w = (u_i - \bar{u})^{+}$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u_i \nabla (u_i - \bar{u})^{+} &= \int_\Omega \bar{h}(x,u_i)(u_i - \bar{u})^{+} = \int_{\{u_i > \bar{u}\}} \bar{h}(x,u_i)(u_i - \bar{u})^{+} = \int_{\{u_i > \bar{u}\}} h(x,\bar{u})(u_i - \bar{u})^{+}\\ &= \int_\Omega h(x,\bar{u})(u_i - \bar{u})^{+} \leq \int_\Omega \nabla \bar{u} \nabla (u_i - \bar{u})^{+}.\end{aligned}$$

Deduzimos que $\int_\Omega |\nabla (u_i - \bar{u})^{+}|^2 = 0$ i.e. $u_i \leq \bar{u}$ em quase todo ponto de Ω para $i = 1, 2$. Por outro lado, a definição de $\bar{h}$ implica que

$$-\|u_i\|^2 = \int_\Omega \nabla u_i \nabla u_i^{-} = \int_\Omega \bar{h}(x,u_i) u_i^{-} = \int_{\{u_i \leq 0\}} \bar{h}(x,u_i) u_i^{-} = 0$$

Concluímos que $0 \leq u_1, u_2 \leq \bar{u}$. Este fato e a definição de $\bar{h}$ nos permitem afirmar que u_1 e u_2 são soluções de (5.13) e satisfazem $I(u_2) \leq 0 < \alpha \leq I(u_1)$. A proposição está demonstrada. □

Observação 5.4. *Observamos que, em particular, tomando $\gamma(t) = t\bar{u}$ e utilizando o fato de que $\bar{u}$ é não negativa temos $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$. Portanto o nível minimax c_1, associado à solução u_1 obtida na proposição acima satisfaz $c_1 \leq \max_{t\in[0,\,1]} \bar{I}(t\bar{u}) = \max_{t\in[0,\,1]} I(t\bar{u})$.*

A seguir, por uma questão de completude, estabelecemos versões da Proposição 5.3 que não supõem que a supersolução $\overline{u}$ pertença ao espaço $L^{\infty}(\Omega)$. Para estabelecer esses resultados consideramos a seguinte hipótese

(H_2) Existem constantes $c_1 \geq 0$, $c_2 > 0$ tais que $|h(x,t)| \leq c_1 + c_2|t|^r$ para $(x,t) \in \overline{\Omega}\times\mathbb{R}$, onde $1 \leq r < \infty$ se $N = 1, 2$, e $1 \leq r < 2^* - 1$ se $N \geq 3$.

Observe que a condição (H_2) implica que o funcional I, associado ao problema (5.13), está bem definido e é de classe C^1.

Proposição 5.5. *Suponha que* (H_2) *seja satisfeita, que* $h(x,0) = 0$ *e que exista* $\bar{u} \in H_0^1(\Omega))$*, uma supersolução não negativa e não trivial de (5.13), tal que*

(I1) $I(\bar{u}) \leq 0$*;*

(I2) Existem $\alpha > 0$ *e* $0 < \rho < \|\bar{u}\|$ *tal que* $I(u) \geq \alpha$ *para todo* $u \in \partial B_\rho(0)$ *e* $0 \leq u \leq \bar{u}$*.*

Então, o Problema (5.13) possui duas soluções não triviais $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ *tais que* $0 \leq u_1, u_2 \leq \bar{u}$ *e* $I(u_2) \leq 0 < \alpha \leq I(u_1)$*.*

Demonstração. Procedemos de maneira análoga ao que foi feito na demonstração da Proposição 5.3. Consideramos o truncamento $\bar{h}$ como em (5.15) e o funcional $\bar{I}$ dado por (5.17). Observe que pela condição (H_2) e o fato de $h(x,0) = 0$ obtemos

$$|\bar{h}(x,t)| \leq c_1 + c_2|\overline{u}|^r, \forall\, t \in \mathbb{R} \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{5.22}$$

Isto implica que o funcional $\bar{I}$ está bem definido e é de classe C^1. Além disso, reescrevendo a função $\bar{H}$ em termos das funções h e H, concluímos que as equações (5.19) e (5.20) permanecem válidas.

Afirmamos que $\bar{I}$ satisfaz a condição (PS) e é limitado inferiormente. De fato, por (H_2), (5.22) e o fato de $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$, existe uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$\bar{I}(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - C_3\|u\|.$$

Esta desigualdade implica que o funcional $\bar{I}$ é coercivo, limitado inferiormente e satisfaz a condição (PS) (veja [37]).

A conclusão da existência das soluções $0 \leq u_1, u_2 \leq \overline{u}$ tais que $I(u_2) \leq 0 < \alpha \leq I(u_1)$ segue do argumento utilizado na demonstração da Proposição 5.3. A proposição está demonstrada. □

A seguir apresentamos uma versão da Proposição 5.3 sem impor que $\overline{u} \in L^\infty(\Omega)$ e que $h(x,0) = 0$. Neste caso, diferentemente das Proposições 5.3 e 5.5, não podemos garantir que a solução obtida é não negativa. Considerando a hipótese

(H_4) Existem $R > 0$ e $\theta > 2$ tais que $\frac{1}{\theta}h(x,t)t - H(x,t) > 0$ para $t \leq -R$.

estabelecemos o seguinte resultado

Proposição 5.6. *Suponha que* (H_2) *e* (H_4) *sejam satisfeitas e que exista* $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$*, uma supersolução não negativa e não trivial de (5.13), tal que*

(I1) $I(\bar{u}) \leq 0$*;*

(I2) Existem $\alpha > 0$ *e* $0 < \rho < \|\bar{u}\|$ *tal que* $I(u) \geq \alpha$ *para todo* $u \in \partial B_\rho(0)$ *e* $0 \leq u \leq \bar{u}$*.*

Então, o Problema (5.13) possui uma solução não trivial $u \in H_0^1(\Omega)$ *tal que* $u \leq \bar{u}$ *e* $I(u) \geq \alpha > 0$*.*

Demonstração. Considere a seguinte versão do truncamento $\bar{h}$ considerado na demonstração da Proposição 5.3

$$\bar{h}(x,t) = \begin{cases} h(x,t), \text{ para } t \leq \bar{u}(x), \\ h(x,\bar{u}(x)), \text{para } t > \bar{u}(x). \end{cases}$$

Como na demonstração da Proposição 5.3, iremos encontrar uma solução $u \in H_0^1(\Omega)$ não trivial para o Problema (5.16). Seja $\bar{I} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional associado ao Problema (5.16), definido por

$$\bar{I}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega \bar{H}(x,u), \forall\, u \in H_0^1(\Omega)$$

onde $\bar{H}(x,u) = \int_0^u \bar{h}(x,t)dt$. Observe que pela condição (H_2) obtemos

$$|\bar{h}(x,t)| \le c_1 + c_2|t^-|^r + c_2|\overline{u}|^r, \forall\, t \in \mathbb{R} \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{5.23}$$

onde $t^- = \max\{0,-t\}$. Esta estimativa implica que o funcional $\bar{I}$ está bem definido e é de classe C^1. Além disso, as equações (5.19) e (5.20) permanecem válidas.

Afirmamos que $\bar{I}$ satisfaz (PS). Assumindo a afirmação por um momento e utilizando um argumento similar ao da demonstração da Proposição 5.3, encontramos, via o Teorema do Passo da Montanha, um ponto crítico do funcional $\bar{I}$ satisfazendo $u \le \overline{u}$ e

$$\bar{I}(u) = c_1 = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \bar{I}(\gamma(t)) \ge \alpha > 0.$$

Pela definição de $\bar{h}$, concluímos que u é uma solução do Problema (5.13). Observe que, como o funcional não é limitado inferiormente, não podemos garantir a existência de um mínimo global para $\bar{I}$ como foi feito nas Proposições 5.3 e 5.5.

A seguir demonstramos a afirmação. Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência tal que $\bar{I}(u_n) \to c$ e $\bar{I}'(u_n) \to 0$. Note que, para verificar a condição (PS), é suficiente demonstrar que a sequência de (PS) possui uma subsequência limitada (veja [37]). Inicialmente iremos comprovar que $(u_n - \overline{u})^+$ é limitada. Temos

$$\begin{aligned}\left\langle \bar{I}'(u_n), (u_n-\overline{u})^+\right\rangle &= \left\langle u_n, (u_n-\overline{u})^+\right\rangle - \int_\Omega \bar{h}(x,u_n)(u_n-\overline{u})^+ \\ &= \|(u_n-\overline{u})^+\|^2 + \left\langle \overline{u}, (u_n-\overline{u})^+\right\rangle - \int_{\{u_n>\overline{u}\}} \bar{h}(x,u_n)(u_n-\overline{u})^+.\end{aligned} \tag{5.24}$$

Observe que, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\left\langle \bar{I}'(u_n), (u_n-\overline{u})^+\right\rangle \le \|\bar{I}'(u_n)\| \cdot \|(u_n-\overline{u})^+\|. \tag{5.25}$$

Por outro lado, pela equação (5.23) e o Teorema da Imersão de Sobolev, existe uma constante positiva c_5 tal que

$$\int_{\{u_n>\overline{u}\}} \overline{h}(x,u_n)(u_n-\overline{u})^+ \le c_5\|(u_n-\overline{u})^+\| \tag{5.26}$$

Mais uma vez, a desigualdade de Cauchy-Schwarz implica que

$$|\left\langle \overline{u}, (u_n-\overline{u})^+\right\rangle| \le \|\overline{u}\| \cdot \|(u_n-\overline{u})^+\|. \tag{5.27}$$

Portanto, por (5.24)-(5.27) obtemos

$$\|(u_n-\overline{u})^+\|^2 - c_7\|(u_n-\overline{u})^+\| \le \|\bar{I}'(u_n)\| \cdot \|(u_n-\overline{u})^+\|.$$

Isto implica que $(u_n - \overline{u})^+$ é limitado. Prosseguimos para demonstrar que u_n é limitada. Pela definição de $\bar{h}$ podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\bar{I}(u_n) - \frac{1}{\theta} < \bar{I}'(u_n), u_n > &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_n\|^2 - \int_\Omega \bar{H}(x, u_n) + \frac{1}{\theta}\int_\Omega \bar{h}(x, u_n)u_n \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_n\|^2 - \int_{\{u_n<\bar{u}\}} H(x, u_n) - \int_{\{u_n\geq\bar{u}\}} [H(x, \bar{u}) + h(x, \bar{u})(u_n - \bar{u})] \\
&+ \frac{1}{\theta}\int_{\{u_n<\bar{u}\}} h(x, u_n)u_n + \frac{1}{\theta}\int_{\{u_n\geq\bar{u}\}} h(x, \bar{u})u_n
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

Por (H_2), o Teorema da Imersão de Sobolev e o fato de $(u_n - \overline{u})^+$ ser limitada em $H_0^1(\Omega)$ obtemos

$$
\int_{\{u_n\geq\bar{u}\}} [H(x, \bar{u}) + h(x, \bar{u})(u_n - \bar{u})] \leq \bar{c}_1\|\overline{u}\| + \bar{c}_2\|\overline{u}\|^{r+1} + c_5\|(u_n - \overline{u})^+\| \leq c_6 < \infty. \tag{5.29}
$$

Utilizando (H_2) e o Teorema da Imersão de Sobolev mais uma vez obtemos

$$
\frac{1}{\theta}\int_{\{u_n\geq\bar{u}\}} h(x, \bar{u})u_n \geq -\frac{1}{\theta}\int_{\{u_n\geq\bar{u}\}} (c_1 + c_2|\overline{u}|^r)u_n \geq -c_7\|u_n\|. \tag{5.30}
$$

Por outro lado, (H_2) e o Teorema da Imersão de Sobolev também implicam nas seguintes desigualdades

$$
\int_{\{0<u_n\leq\overline{u}\}} H(x, u_n) \leq \bar{c}_1\|\overline{u}\| + \bar{c}_2\|\overline{u}\|^{1+r} < \infty, \tag{5.31}
$$

$$
\int_{\{0<u_n\leq\overline{u}\}} h(x, u_n)u_n \geq -\bar{c}_1\|\overline{u}\| - \bar{c}_2\|\overline{u}\|^{1+r} > -\infty. \tag{5.32}
$$

As equações (5.29) - (5.32) aplicadas em (5.28) implicam em

$$
\bar{I}(u_n) - \frac{1}{\theta} < \bar{I}'(u_n), u_n > \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_n\|^2 - c_6\|u_n\| - c_9 - \int_{\{u_n\leq 0\}} H(x, u_n) + \frac{1}{\theta}\int_{\{u_n\leq 0\}} h(x, u_n)u_n \tag{5.33}
$$

Finalmente, por (H_4) e (H_2) obtemos

$$
\bar{I}(u_n) - \frac{1}{\theta}\left\langle \bar{I}'(u_n), u_n \right\rangle \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_n\|^2 - c_6\|u_n\| - c_{10}.
$$

de onde concluímos que (u_n) é limitada. Portanto a afirmação está demonstrada e isto conclui a demonstração da proposição $\square$

Referências Bibliográficas

[1] S. Alama, M. Del Pino, *Solutions of elliptic equations with indefinite nonlinearities via Morse theory and linking.* Ann. Inst. Henri Poincaré **13**, 1, (1996), 95 - 115.

[2] H. W. Alt e D. Phillips, *A free boundary problem for semilinear elliptic equations.* J. Reine Angew. Math. **368** (1986), 63 - 107.

[3] A. Ambrosetti e P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications.* J. Funct. Anal. **14** (1973), 349–381.

[4] H. Brezis e T. Kato. *Remarks on the Shrödinger operator with singular complex potentials.* J. Math. Pures Appl. **58** (1979), 137-151.

[5] H. Brezis e M. Marcus, *Hardy's inequalities revisited*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **25** (1997), 217 - 237.

[6] A. Callegari e A. Nashman, *Some singular nonlinear equation arising in boundary layer theory.* J. Math. Anal. Appl. **64** (1978), 96-105.

[7] A. Callegari e A. Nashman, *A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudo-plastic fluids.* SIAM J. Appl. Math. **38** (1980), 275-281

[8] A. Canino, *Minimax methods for singular elliptic equations with an application to a jumping problem.* J. Differential Equations **221** (2006), 210 - 223.

[9] A. Canino e M. Degiovanni, *A variational approach to a class of singular semilinear elliptic equations.* J. Convex Anal. **11** (2004), 147-162.

[10] Y. S. Choi, A. C. Lazer, e P. J. McKenna, *Some remarks on a singular elliptic boundary value problem.* Nonlinear Anal. **32** (1998), 305-314.

[11] Y. S. Choi e P. J. McKenna, *A singular Gierer-Meinhardt system of elliptic equations.* Ann. Inst. Henri Poincaré Analyse Non linéare **4** (2000), 503-522.

[12] Y. S. Choi e P. J. McKenna, *A singular Gierer-Meinhardt system of elliptic equations: The classical case.* Nonlinear Analysis **55** (2003), 521-541.

[13] F. Cîrstea, M. Ghergu e V. Radulescu, *Combined effects of asymptotically linear and singular nonlinearities in bifurcation problem of Lane-Emden-Fowler type.* J. Math. Pures Appl. **84** (2005), 493-508.

[14] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz e L. Tartar, *On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity.* Comm. Partial Differential Equations **2** (1977), 193 - 222.

[15] J. Dávila, *Global regularity for a singular equation and local H^1 minimizers of a nondifferentiable functional.* Commun. Contemp. Math. **6** (2004), 165- 193.

[16] J. Dávila e M. Montenegro, *Positive versus free boundary solutions to a singular elliptic equation.* J. Anal. Math. **90** (2003), 303 - 335.

[17] J. Dávila e M. Montenegro, *Existence and asymptotic behavior for a singular parabolic equation.* Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 1801-1828.

[18] J. Dávila e M. Montenegro, *Radial solutions of an elliptic equation with singular nonlinearity.* J. Math. Anal. Appl. **352** (2009), 360 - 379.

[19] J. I. Diaz, J. M. Morel, e L. Oswald, *An elliptic equation with singular nonlinearity.* Comm. Partial Differential Equations **12** (1987), 1333 - 1344.

[20] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Second edition, American Mathematical Society, (2002).

[21] W. Fulks e J. S. Maybee, *A singular nonlinear equation.* Osaka Math. J. **12** (1960), 1-19.

[22] M. Ghergu e V. Radulescu, *Sublinear singular elliptic problems with two paremeters*, Journal of differential equations **195** (2003) 520 - 536.

[23] D. Gilbarg e N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Second edition, Springer-Verlag, Berlin, (1983).

[24] J. V. A. Gonçalves, C. A. Santos, *Singular elliptic problems: Existence, nonexistence and boundary behavior.*, Nonlinear Analysis **74**, (2011), 132 - 140.

[25] J. V. A. Gonçalves, M. C. Rezende, C. A. Santos, *Positive solutions for a mixed and singular quasilinear problem*, Nonlinear Analysis **66** (2007), 2078 - 2090.

[26] N. Hirano, C. Saccon e N. Shioji, *Existence of multiple positive solutions for singular elliptic problems with concave and convex nonlinearities.* Adv. Differential Equations **9** (2004), 197–220.

[27] A. V. Lair e A. W. Shaker, *Classical and Weak Solutions of a Singular Semilinear Elliptic Problem.* Journal of Mathematical Analysis and Applications **211**, (1997), 371-385.

[28] O. Ladyzhenskaya e N. Ural'tseva. *Linear e quasilinear elliptic equations.* Izdat. îNaukaî, Moscow (1964) (in Russian). English translation: Academic Press, New York (1968). 2nd Russian edition (1973).

[29] A.C. Lazer e P.J. McKenna, *On a singular nonlinear elliptic boundary-value problem*, Proceedings of the American Mathematical Society **111**, no.3 (1991), 721-730.

[30] Y. M. Long, Y. J. Sun e S. P. Wu, *Combined effects to singular and superlinear nonlinearities in some singular boundary value problems.* J. Diff. Equations **176** (2003), 511- 531.

[31] M. S. Montenegro e E. A. B. Silva, *Two solutions for a singular elliptic equation by variational methods.* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze (Testo Stampato) **11**, (2012), 143-165.

[32] M. Montenegro e O. S. de Queiroz, *Existence and regularity to an elliptic equation with logarithmic nonlinearity.* Journal of Differential Equations **246**, (2009), 482 - 511.

[33] K. Perera e E. A. B. Silva, *Existence and multiplicity of positive solutions for singular quasilinear problems.* J. Math. Anal. Appl. **323** (2006), 1238 - 1252.

[34] K. Perera e E. A. B. Silva, *On singular p-Laplacian problems.* Differential Integral Equations **20** (2007), 105 - 120.

[35] D. Phillips, *A minimization problem and the regularity of solutions in the presence of a free boundary.* Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), 1 - 17.

[36] D. Phillips, *Hausdorff measure estimates of a free boundary for a minimum problem.* Comm. Partial Differential Equations **8** (1983), 1409 - 1454.

[37] P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Regional Conference Series Math **65**, Amer. Math. Soc., Providence (1986).

[38] J. Shi e M. Yao, *On a singular nonlinear semilinear elliptic problem.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **128** (1998), 1389 - 1401.

[39] M. Struwe , *Variational methods: applications to nonlinear PDEs and Hamiltonian systems*, Second Edition, Springer - Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1996.

[40] N. S. Trudinger, *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations.* Comm. Pure Appl. Math. **20**,(1967), 721 - 747.

[41] P. Zhang and J. F. Liao, *Existence and Nonexistence results for classes of singular elliptic problem.*Abstract and Applied Analysis (2010).