Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre no espaço Euclidiano

por

Miguel Júnior Cezana

Brasília

2013

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Hipersuperfícies isopamétricas de Laguerre no espaço Euclidiano

Por

Miguel Junior Cezana*

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 01 de março de 2013.

Comissão Examinadora:

Profª. Drª. Keti Tenenblat - UnB (Orientadora)

Prof. Dr. Carlos Maber Carrión Riveros - UnB (Membro)

Prof. Drª. Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues - UnB (Membro)

Prof. Dr. Detang Zhou - UFF (Membro)

Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa - UFC (Membro)

*Este trabalho contou com apoio financeiro parcial da Capes.

Resumo

Mostramos que hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre com duas curvaturas principais distintas em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, são hipersuperfícies com segunda forma fundamental de Laguerre paralela. Classificamos tais hipersuperfícies. Exibimos, a menos de transformação de Laguerre, as únicas hipersuperfícies no espaço Euclidiano com segunda forma fundamental paralela, que admitem uma parametrização por linhas de curvatura. Provamos que hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre em $\mathbb{R}^{n+1}$ são cíclides de Dupin ou hipersuperfícies de Dupin com curvaturas de Laguerre constante. Caracterizamos as hipersuperfícies de Dupin em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, parametrizadas por linhas de curvatura e com curvaturas principais distintas que não se anulam e cujas curvaturas de Laguerre são constantes.

Palavras-chaves: isoparamétrica de Laguerre, curvatura de Laguerre, linhas de curvatura, hipersuperfície de Dupin.

Abstract

We show that Laguerre isoparametric hypersurfaces with two distinct principal curvatures in $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, are hypersurfaces with parallel Laguerre second fundamental form. We classify such hypersurfaces. Up to Laguerre transformations, we exhibit the only hypersurfaces in Euclidean space with parallel second fundamental form, which admit a parametrization by lines of curvature. We prove that Laguerre isoparametric hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$ are cyclides of Dupin or Dupin hypersurfaces with constant Laguerre curvature. For $n \geq 3$, we characterize the Dupin hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$ parametrized by lines of curvature with distinct principal curvatures and that do not vanish and whose Laguerre curvatures are constant.

Keywords: Laguerre isoparametric, Laguerre curvature, line of curvature, Dupin hypersurface.

Agradecimentos

Agradeço:

- À Deus que é supremo;

- À professora Keti, pela orientação;

- Aos membros da banca, em especial, a Luciana e ao Carrión;

- Aos meus pais, Miguel e Zeli, que me conduziram desde sempre com muito amor, carinho e responsabilidade;

- Aos meus queridos irmãos, Michelle, Dayanne e Lourenço e, aos pequeninos, Emanuelle, Maria Vitória e Antônio;

- Ao meu amigo querido, Magno, que sempre esteve ao meu lado, com grande apoio, amizade, paciência, sinceridade e carinho.

- À minha família, em particular, à tia Regina que fez parte de toda minha trajetória;

- À família do Magno, em especial, Dona Dalva, Nilsa, Marilde e Cléia;

- Aos meus amigos e irmãos, Magno, Vagner e Léo;

- À tia Júlia, que sempre foi uma mãe pra mim em Brasília;

- À família do Vagner, que me acolheu com muito carinho;

- Aos amigos companheiros Anyelle, Claudiano, Tarcísio e João Paulo;

- Aos amigos, Jorge, Manuela, Elves, Karise, Flávia, Théo, Wênis, Francisca, Monique, Luciana Lima, Taynara, Joab, Kaliana, Kéllem, Helmar, Eunice, Emerson, Silas, Tertu, Vanessa, Adriana, Simone, Bel, Pera, Bianca, Marcelo Ferro, Marcelo Furtado, Célio, Walter, Anyelle, Newton, Benedito, Sérgio, Elenilson, Flávio, Aline Pinto, entre outros;

- À CAPES pelo apoio financeiro.

Sumário

Introdução

Uma hipersuperfície M^n imersa no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ ou no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ é chamada isoparamétrica se ela possui curvaturas principais constantes. Uma hipersuperfície isoparamétrica em $\mathbb{R}^{n+1}$ pode ter no máximo duas curvaturas principais distintas, e ela deve ser um subconjunto aberto de um hiperplano, hiperesfera ou um cilindro esférico $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Um resultado similar vale em $\mathbb{H}^{n+1}$. Entretanto, Cartan ([2], [3], [4] e [5]) mostrou em uma série de quatro artigos publicados no período 1938-1940 que a teoria de hipersuperfícies isoparamétricas na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ é muito mais interessante e complicada.

Cartan produziu exemplos de hipersuperfícies isoparamétricas na esfera com $g = 1, 2, 3$ ou 4 curvaturas principais distintas e classificou todas com $g \leq 3$. Aproximadamente quarenta anos depois, Münzner, [27] e [28], escreveu dois artigos que estendem o trabalho de Cartan, provando que todas hipersuperfícies isoparamétricas são algébricas e que o número g de curvaturas principais distintas pode ser $g = 1, 2, 3, 4$ ou 6. O problema de classificação nos casos $g = 4$ e 6 permanece aberto até o momento, porém muitos progressos têm sido feitos.

Uma hipersuperfície M^{n-1} numa forma espacial $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{S}^{n+1}$ ou $\mathbb{H}^{n+1}$ é de Dupin se cada curvatura principal é constante ao longo das correspondentes linhas de curvatura. Isto é claramente uma generalização da condição isoparamétrica. Uma hipersuperfície de Dupin M é dita ser própria se o número g de curvaturas principais é constante em M. Além das hipersuperfícies isoparamétricas em $\mathbb{R}^3$, os primeiros exemplos de superfícies de Dupin são as cíclides de Dupin em $\mathbb{R}^3$, obtidas por Dupin em 1822.

Um passo importante na teoria de hipersuperfícies de Dupin próprias foram os trabalhos de Pinkall ([37], [38], [39] e [40]) que situou o estudo das hipersuperfícies de Dupin no cenário das esferas de Lie. Dentre outras coisas, Pinkall provou que a propriedade de uma hipersuperfície ser de Dupin própria é invariante pela ação do grupo de trasformações de

Lie. A classificação de hipersuperfícies de Dupin é realizado a menos dessas transformações. O grupo das transformações de Lie pode ser visto como a união de dois importantes subgrupos, o subgrupo das transformações de Möbius e o subgrupo das transformações de Laguerre. Neste sentido, iremos caracterizar uma classe especial de hipersuperfícies de Dupin invariantes pelo grupo das transformações de Laguerre.

Thorbergsson [42] provou que se M é uma hipersuperfície de Dupin compacta própria então $g = 1, 2, 3, 4$ ou 6. Pinkall [40] mostrou que não existem restrições em g se M é não compacta. Usando invariantes básicos, mais precisamente, tubos, cilindros e subvariedades rotacionais, ele encontrou hipersuperfícies do espaço Euclidiano para qualquer g. Uma hipersuperfície própria é dita redutível se ela é equivalente por transformações de Lie a uma hipersuperfície de Dupin própria obtida por estas construções básicas.

A classificação local de superfícies de Dupin em $\mathbb{R}^3$ diz que uma tal superfície é totalmente umbílica ou uma cíclide de Dupin. Pinkall [40] provou que se M^n é uma hipersuperfície de Dupin em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $g = 2$, então M é conformemente equivalente a uma hipersuperfície isoparamétrica em $\mathbb{S}^{n+1}$. Pinkall [39] deu também uma classificação completa, a menos de equivalência de Lie, para hipersuperfícies de Dupin $M^3 \subset \mathbb{R}^4$ com três curvaturas principais distintas. Em particular, ele mostrou que se M é irredutível, então ela é localmente Lie equivalente a uma hipersuperfície isoparamétrica de $\mathbb{S}^4$.

Niebergall em [31] e [32] e mais recentemente Cecil e Jensen [11] (veja também Cecil el al. 2007 [12],[13] e [14]) estudaram hipersuperfícies de Dupin próprias irredutíveis em $\mathbb{R}^5$ com quatro curvaturas principais distintas. Pinkall [37] provou que hipersuperfícies de Dupin próprias M^n com $g \geq 3$ que são Lie equivalentes a hipersuperfícies isoparamétricas não podem ser parametrizadas por linhas de curvatura.

A interseção do grupo das transformações de Möbius com o grupo das transformações de Laguerre é o grupo das transformações de similaridade de $\mathbb{R}^{n+1}$, que são as transformações de $\mathbb{R}^{n+1}$ geradas por uma dilatação seguida por uma isometria de $\mathbb{R}^{n+1}$ (ver [10], pag. 35-36). Um importante invariante de Möbius é a curvatura de Möbius. Por analogia às já conhecidas curvaturas de Möbius, neste trabalho iremos definir as curvaturas de Laguerre que são invariantes por transformação de Laguerre.

Em [45], [43] e [44], Wang estudou a geometria de Möbius de subvariedades em $\mathbb{S}^{n+1}$ numa série de artigos. Usando o método do referencial móvel de Cartan, Wang encontrou um sistema completo de invariantes de Möbius para superfícies em $\mathbb{S}^3$ sem pontos umbílicos (veja [43]) e para hipersuperfícies em $\mathbb{S}^4$ com três curvaturas principais distintas em cada ponto (veja [44]). Em [45], Wang definiu uma métrica invariante de Möbius g e segunda forma fundamental de Möbius para subvariedade em $\mathbb{S}^{n+1}$. Wang então provou que para hipersuperfícies em $\mathbb{S}^{n+1}$ com $n \geq 3$, o par (g, B) forma um sistema invariante completo que determina a hipersuperfície a menos de transformações de Möbius.

Num resultado relacionado, Riveros, Rodrigues e Tenenblat [34] provaram que uma hipersuperfície de Dupin $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, com n curvaturas principais distintas e curvatura de Möbius constante não pode ser parametrizada por linhas de curvatura. Eles também mostraram que a menos de transformação de Möbius, existe uma única hipersuperfície de Dupin $M^3 \subset \mathbb{R}^4$ com três curvaturas principais distintas que é parametrizada por linhas de curvatura e curvatura de Möbius constante. Esta hipersuperfície M^3 é um cone em $\mathbb{R}^4$ sobre o toro plano na esfera unitária $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$.

Em [16], Hu, Li, Wang e Zhao introduziram o conceito de uma hipersuperfície isoparamétrica de Möbius na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$. Eles mostraram que uma hipersuperfície isoparamétrica (Euclidiana) é automaticamente isoparamétrica de Möbius, bem como uma hipersuperfície isoparamétrica de Möbius deve ser de Dupin própria. Depois, Rodrigues e Tenenblat [35] mostraram que se $M \subset \mathbb{S}^{n+1}$ é uma hipersuperfície com um número g de curvaturas principais distintas em cada ponto, onde $g \geq 3$, então M é uma hipersuperfície isoparamétrica de Möbius se, e somente se, M é Dupin com curvatura de Möbius constante.

Recentemente, progressos significativos têm sido feitos na classificação das hipersuperfícies isoparamétricas de Möbius. Primeiro, Hu, Li, Wang e Zhao [16] obtiveram a classificação das hipersuperfícies isoparamétricas de Möbius com duas curvaturas principais distintas a menos de equivalência de Möbius. Depois, Hu e Li [17] classificaram todas hipersuperfícies isoparamétricas em $\mathbb{S}^4$, e Hu, Li e Wang [20] classificaram todas as hipersuperfícies isoparamétricas em $\mathbb{S}^5$. Então Hu e Li [19] estudaram as hipersuperfícies isoparamétricas de Möbius com três curvaturas principais distintas em $\mathbb{S}^n$ encontraram uma classificação completa de tais hipersuperfícies em $\mathbb{S}^6$.

A geometria de Laguerre para superfícies em $\mathbb{R}^3$ é encontrada no livro de Blaschke [1], e tem sido estudada por Musso e Nicolodi ([29], [30]) e outros autores. Em [21], os autores Li e Wang estudaram a geometria diferencial de Laguerre para hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$ usando o método do referencial móvel de Cartan. Para qualquer hipersuperfície sem pontos umbílicos $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ com curvaturas principais que não se anulam, definiram uma métrica invariante de Laguerre g, segunda forma fundamental de Laguerre $\mathbb{B}$, forma de Laguerre $\mathbb{C}$ e tensor de Laguerre $\mathbb{L}$ em M, e mostraram que $\{g, \mathbb{B}\}$ é um sistema invariante completo para hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$ para $n \geq 3$. No caso $n = 2$, um sistema invariante completo para superfícies em $\mathbb{R}^3$ é dado por $\{g, \mathbb{B}, \mathbb{L}\}$(ver Hu-Li [18]).

Usando o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, o espaço semi-Euclidiano $\mathbb{R}_1^{n+1}$ e o espaço degenerado $\mathbb{R}_0^{n+1}$ correspondendo ao hiperplano tipo-espaço, hiperplano semi-Euclidiano e hiperplano degenerado em $\mathbb{R}_1^{n+2}$, Li e Wang [21] definiram as três formas espaciais de Laguerre $U\mathbb{R}^{n+1}$, $U\mathbb{R}_1^{n+1}$ e $U\mathbb{R}_0^{n+1}$ os fibrados sobre $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{R}_1^{n+1}$ e $\mathbb{R}_0^{n+1}$, respectivamente, e as imersões de Laguerre $U\mathbb{R}_1^{n+1} \to U\mathbb{R}^{n+1}$ e $U\mathbb{R}_0^{n+1} \to U\mathbb{R}^{n+1}$, analogamente com o que acontece para a geometria de Möbius onde temos três formas espaciais de Möbius (espaços de curvatura constante) e imersões conformes $\mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{S}^{n+1}$ e $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{S}^{n+1}$. Usando estas imersões de Laguerre, podemos unificar as geometrias de Laguerre de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{R}_1^{n+1}$ e $\mathbb{R}_0^{n+1}$.

Em [22], os autores Li, Li H. e Wang introduziram o conceito de hipersuperfície com segunda forma fundamental de Laguerre paralela que são hipersuperfícies com forma de Laguerre nula e segunda forma fundamental de Laguerre $\mathbb{B}$ paralela, isto é, satisfazendo $\nabla\mathbb{B} = 0$, onde ∇ é a derivada covariante em relação à métrica de Laguerre g. Além disso, eles obtiveram a classificação completa dessas hipersuperfícies. Um autovalor do tensor de Laguerre $\mathbb{L}$ é chamado um autovalor de Laguerre. Se os autovalores de Laguerre são iguais, isto é, $\mathbb{L} = \sum_{ij} \lambda\delta_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$, e a forma de Laguerre $\mathbb{C} = \sum_i C_i\omega_i$ é identicamente nula, então a hipersuperfície é chamada hipersuperfície isotrópica de Laguerre (veja detalhes em [24]). Em [24] foram classificadas todas as hipersuperfícies com autovalores de Laguerre constantes.

Li-Sun [23] introduziram o conceito de hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre como segue: Uma hipersuperfície $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é chamada de hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre se os autovalores da segunda forma fundamental de Laguerre são constantes e se a forma de Laguerre é nula. Além disso, os autores Li e Sun [23] provaram que uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre é uma hipersuperfície de Dupin e reciprocamente se uma hipersuperfície de Dupin em $\mathbb{R}^n$ tem forma de Laguerre nula, então ela é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre. Li e Sun classificaram as hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre $M^3 \subset \mathbb{R}^4$. As superfícies isoparamétricas de Laguerre satisfazem $\nabla\mathbb{B} = 0$, isto é, a segunda forma fundamental de Laguerre é paralela.

Neste trabalho, obtemos a classificação das hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com duas curvaturas principais distintas usando a classificação obtida por [22]. Provamos o seguinte teorema

Teorema 2.13. *Seja $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície com duas curvaturas principais* *distintas que não se anulam. Então, x é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre se, e somente se, sua segunda forma fundamental de Laguerre é paralela.*

Como consequência da classificação de Li, T.-Li, H.-Wang [22] das hipersuperfícies que tem segunda forma fundamental de Laguerre paralela, obtemos a classificação completa das hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre com duas curvaturas principais distintas em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Para cada três curvaturas principais distintas, k_i, k_j e k_l, a curvatura de Moebius é definida por

$$\mathcal{C}^{ijl} = \frac{k_i - k_j}{k_l - k_j}.$$

Rodrigues e Tenenblat [35] provaram que se $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície própria sem pontos umbílicos, então x é uma hipersuperfície isoparamétrica de Moebius se, e somente se, é uma cíclide de Dupin ou uma hipersuperfície de Dupin cujas curvaturas de Moebius são constantes.

Motivados pelo teorema anterior, provamos um resultado similar para hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre no espaço Euclidiano.

Para cada três curvaturas principais distintas que não se anulam, k_i, k_j e k_l, dizemos que os invariantes de Laguerre

$$\mathcal{L}^{ijl} = \frac{(k_i - k_j)k_l}{(k_l - k_j)k_i}$$

são as curvaturas de Laguerre de M. Mostramos o seguinte teorema de caracterização.

Teorema 3.4. *Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície própria, sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Então, x é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre se, e somente se, é uma cíclide de Dupin ou uma hipersuperfície de Dupin cujas curvaturas de Laguerre são constantes.*

Em seguida, considerando as hipersuperfícies de Dupin $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, parametrizadas por linhas de curvatura e cujas curvaturas principais são todas distintas, provamos no Teorema 4.2 que as curvaturas de Laguerre são constantes se, e só se, as curvaturas principais são dadas em termos de n funções diferenciáveis de uma variável. Além disso, estabelecemos relações que essas funções devem satisfazer que determinam tais hipersuperfícies unicamente de acordo com o seguinte teorema.

Teorema 4.7: *Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de Dupin própria com curvaturas principais distintas que não se anulam, k_i, e com curvaturas de Laguerre constantes. Se x admitir uma parametrização por linhas de curvatura com coordenadas*

$u_1, \cdots, u_n$, *então os raios de curvatura de* x *são dadas por*

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{1}{k_1} = -(D-1)h_2 + h_3 + \sum_{s\geq 4}\left(1 - \frac{1}{D_s}\right)h_s,\\
r_2 &= \frac{1}{k_2} = \left(1 - \frac{1}{D}\right)h_1 + \frac{1}{D}h_3 + \sum_{s\geq 4} h_s,\\
r_3 &= \frac{1}{k_3} = h_1 + h_2 + \sum_{s\geq 4}\left(1 + \frac{1}{D_s(D-1)}\right)h_s,\\
r_s &= \frac{1}{k_s} = D_s r_1 + (1-D_s)r_2 \ \text{ para } \ s \geq 4,
\end{aligned} \tag{1}$$

onde

$$\begin{aligned}
h_1 &= \frac{AD^2F_1^2}{2(D-1)^2} + b_1F_1 + d_1, \qquad h_2 = \frac{ADF_2^2}{2(D-1)^2} + b_2F_2 + d_2,\\
h_3 &= -\frac{A}{2}F_3^2 + b_3F_3 + d_3, \qquad h_s = \frac{ADD_sF_s^2}{2(D-1)(D_s-1)^2} + b_sF_s + d_s,
\end{aligned} \tag{2}$$

com $D = \mathcal{L}^{132}$ *e* $D_s = \mathcal{L}^{s21}$, $s \geq 4$, $F_1^{'}(u_1) = G_{21}(u_1) \neq 0$ *e* $F_j^{'}(u_j) = G_{1j}(u_j) \neq 0$, *para* $j \geq 2$ *e,* G_{21} *e* G_{1s}, $s \geq 2$, *são funções diferenciáveis determinadas pela primeira forma quadrática*

$$g_{11} = \frac{(G_{21})^2 r_1^2}{(r_1 - r_2)^2}, \quad g_{jj} = \frac{(G_{1j})^2 r_j^2}{(r_j - r_1)^2}, \ \ j \geq 2.$$

Além disso, $h_l^{'} \neq 0$ *e* $A, b_l, d_l, 1 \leq l \leq n$, *são constantes reais satisfazendo*

$$\begin{aligned}
1 - 2A&\left(d_1 + Dd_2 - d_3 + \sum_{s\geq 4}\frac{D}{D_s(D-1)}d_s\right) + \frac{(D-1)^2}{D^2}b_1^2 +\\
&+(D-1)^2b_2^2 + b_3^2 + \sum_{s\geq 4}\frac{(D_s-1)^2}{D_s^2}b_s^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Reciprocamente, dadas funções diferenciáveis $F_1 = F_1(u_1), ..., F_n = F_n(u_n)$ *tais que* $F_1^{'}, ..., F_n^{'}$ *nunca se anulam e, constantes* D, $D_s \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$, $s \geq 4$, *tais que* $D_s \neq 1/(1-D)$, $D_s \neq D_t$ *para* $s \neq t$. *Definimos* $h_i(u_i)$ *pelas expressões* (2), *onde as constantes* A, b_i *e* d_i, $1 \leq i \leq n$, *satisfazem a relação algébrica* (3). *Considere* r_i *dados por* (1) *e* g_{ii} *dada por*

$$g_{11} = \frac{(F_1^{'})^2 r_1^2}{(r_1 - r_2)^2}, \quad g_{jj} = \frac{(F_j^{'})^2 r_j^2}{(r_j - r_1)^2}, \ \ j \geq 2.$$

Então, a menos de movimento rígido, existe uma única hipersuperfície parametrizada por linhas de curvatura, cuja métrica é dada por g_{ii} e as curvaturas principais são dadas por $1/r_i$. Além disso, as curvaturas de Laguerre dessa hipersuperfície são constantes e são dadas por $D = \mathcal{L}^{132}$ e $D_s = \mathcal{L}^{s21}, s \geq 4$.

Concluímos nosso trabalho com um exemplo de uma família de hipersuperfícies de Dupin em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, parametrizada por linhas de curvatura com n curvaturas principais distintas e cujas curvaturas de Laguerre são constantes. Estas hipersuperfícies foram encontradas por Corro-Ferreira-Tenenblat [15] por aplicações de transformações de Ribaucour a um hiperplano. Observamos que a existência dessas hipersuperfícies contrasta com o resultado de [Riveros-Rodrigues-Tenenblat][34] onde foi provado que não existem hipersuperfícies parametrizadas por linhas de curvatura cuja curvatura de Moebius é constante para $n \geq 4$.

Organizamos o trabalho da seguinte forma:

No Capítulo 1, revisamos a geometria de esferas orientadas em $\mathbb{R}^{n+1}$ tendo como base os trabalhos de Cecil [10] e Cecil e Chern [9]. Estudamos o grupo das transformações de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$. Apresentamos as formas espaciais de Laguerre $U\mathbb{R}^{n+1}$, $U\mathbb{R}_1^{n+1}$ e $U\mathbb{R}_0^{n+1}$ e as imersões de Laguerre $\sigma : U\mathbb{R}_1^{n+1} \to U\mathbb{R}^{n+1}$ e $\tau : U\mathbb{R}_0^{n+1} \to U\mathbb{R}^{n+1}$. Identificamos as hipersuperfícies orientadas $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ com as subvariedades $(x, \xi) : M \to U\mathbb{R}^{n+1}$ onde ξ é a normal unitária de x. Definimos a métrica de Laguerre g e usando o método do referencial móvel de Cartan com base em [21], reescrevemos as equações de estrutura de x para g, onde determinamos três invariantes básicos de Laguerre, a segunda forma fundamental de Laguerre, a forma de Laguerre e o tensor de Laguerre. Usando as imersões de Laguerre, relacionamos hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$ com hipersuperfícies tipo-espaço em $\mathbb{R}_1^{n+1}$ ou $\mathbb{R}_0^{n+1}$.

No Capítulo 2, definimos as hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre e mostramos que tais hipersuperfícies são de Dupin (veja também [23]). Inversamente, se M é uma hipersuperfície de Dupin em $\mathbb{R}^{n+1}$ cujos autovalores do operador segunda forma fundamental de Laguerre são constantes, então M é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre em $\mathbb{R}^{n+1}$. Mostramos também que hipersuperfícies de Dupin em $\mathbb{R}^{n+1}$ com duas curvaturas principais distintas são isoparamétricas de Laguerre. Apresentamos a classificação de hipersuperfícies de Laguerre com segunda forma fundamental de Laguerre paralela em $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por [22]. Demonstramos o Teorema 2.14 que fornece a classificação das hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$ com duas curvaturas principais distintas que são isoparamétricas de Laguerre.

No capítulo 3, provamos o Teorema 3.4 que caracteriza as hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ como cíclides de Dupin ou hipersuperfícies de Dupin com curvaturas de Laguerre constantes.

No Capítulo 4, listamos alguns resultados básicos sobre hipersuperfícies de Dupin em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, que são parametrizadas por linhas de curvatura e com curvaturas principais distintas. Estes resultados também podem ser encontrados em [34]. Consideramos M^n, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de Dupin no espaço Euclidiano, parametrizada por linha de curvatura, com curvaturas principais distintas que não se anulam e curvaturas de Laguerre constante. Obtemos no Teorema 4.2 uma caracterização para que as curvaturas de Laguerre sejam constantes em termos de seus raios de curvatura. No Lema 4.3 obtemos uma tal caracterização em termos de seus símbolos de Christoffel. No Lema 4.4 reescrevemos as equações de Gauss (obtidas em (4.41)) de tais hipersuperfícies. Usando o Lema 4.4 provamos o Teorema 4.7 que caracteriza essas hipersuperfícies em termos da primeira e segunda forma quadrática.

Capítulo 1

Geometria de Laguerre para hipersuperfícies no espaço Euclidiano

A geometria das esferas de Lie para superfícies foi estudada por W. Blaschke, veja o livro [1]. Em 1985, Chern estudou a geometria diferencial das esferas de Lie de hipersuperfícies de Dupin e publicou dois importantes artigos neste tema junto com Cecil. Os trabalhos de Pinkall ([40]), Chern e Cecil ([9],[8]) motivaram uma série de artigos no estudo de hipersuperfícies de Dupin sob o grupo das esferas de Lie.

Na primeira parte deste capítulo incluimos uma breve revisão sobre o estudo da geometria das esferas de Lie. A teoria pode ser vista com mais detalhes em [9]. Estudamos o grupo das transformações de Laguerre, que é um importante subgrupo do grupo das transformações da esfera de Lie. Mostramos que o grupo das transformações de Laguerre é isomorfo ao grupo das transformações de Lorentz de $\mathbb{R}^{n+1}_1$ e é gerado por isometrias, transformações parabólicas e transformações hiperbólicas de $\mathbb{R}^{n+1}$ (ver [21]).

Por analogia ao caso da geometria de Möbius, no qual existem três espaços de curvatura constante $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\mathbb{H}^{n+1}$ e as imersões de Möbius (conformes) $\sigma : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{S}^{n+1}$ e $\tau : \mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{S}^{n+1}$, introduzimos as três formas espaciais de Laguerre $U\mathbb{R}^{n+1}$, $U\mathbb{R}^{n+1}_1$ e $U\mathbb{R}^{n+1}_0$ e também as imersões de Laguerre $\sigma : U\mathbb{R}^{n+1}_1 \to U\mathbb{R}^{n+1}$ e $\tau : U\mathbb{R}^{n+1}_0 \to U\mathbb{R}^{n+1}$. Usando as imersões de Laguerre podemos nos restringir ao estudo de propriedades invariantes, pela ação do grupo das transformações de Laguerre, de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$ (veja [21]).

Concluímos o capítulo apresentando alguns invariantes básicos de Laguerre para hipersuperfícies de Laguerre em $\mathbb{R}^{n+1}$, tais como a métrica de Laguerre g, a segunda forma fundamental de Laguerre, a forma de Laguerre e o tensor de Laguerre, estudados por Li e Wang em 2007 (veja [21]), que serão usados nos capítulos seguintes. Para maiores detalhes indicamos também [22], entre outros.

1.1 Geometria de esferas orientadas em $\mathbb{R}^{n+1}$

Nesta seção revisamos a geometria de esferas orientadas em $\mathbb{R}^{n+1}$. Para maiores detalhes sobre esferas orientadas na geometria de Lie referimos aos livros de Cecil [10] e Cecil e Chern [9].

Seja $U\mathbb{R}^{n+1}$ o fibrado tangente unitário sobre $\mathbb{R}^{n+1}$, que é uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{2n+2}$, definida por:

$$U\mathbb{R}^{n+1} = \{(x, \xi)/x \in \mathbb{R}^{n+1}, \xi \in \mathbb{S}^n\} = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{2n+2}. \tag{1.1}$$

Definição 1.1. Uma *esfera orientada* em $U\mathbb{R}^{n+1}$ centrada em p com raio r é uma subvariedade n-dimensional em $U\mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$S(p, r) = \{(x, \xi) \in U\mathbb{R}^{n+1}/x - p = r\xi\}. \tag{1.2}$$

Geometricamente, $S(p, r)$ com $r \neq 0$ corresponde a uma esfera orientada em $\mathbb{R}^{n+1}$ centrada em $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ com raio $|r|$. Se $r > 0$, então o vetor normal unitário ξ de $S(p, r)$ é exterior; se $r < 0$, o vetor normal unitário ξ de $S(p, r)$ é interior. Se $r = 0$, então $S(p, r) \subset U\mathbb{R}^{n+1}$ consiste de todos os vetores tangentes em p. Chamamos $S(p, 0)$ o *ponto esférico* em $p \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Definição 1.2. Fixados $\xi \in \mathbb{S}^n$ e uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$, um *hiperplano orientado* em $U\mathbb{R}^{n+1}$ é uma subvariedade n-dimensional de $U\mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$\Pi(\xi, \lambda) = \{(x, \xi) \in U\mathbb{R}^{n+1}/x.\xi = \lambda\}. \tag{1.3}$$

Geometricamente, $\Pi(\xi, \lambda)$ é o hiperplano $\{x \in \mathbb{R}^{n+1}/x.\xi = \lambda\}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ ortogonal ao vetor ξ.

Denotamos por Σ o conjunto constituído por todas as esferas orientadas e hiperplanos orientados em $U\mathbb{R}^{n+1}$.

Definição 1.3. Sejam γ_1, $\gamma_2 \in \Sigma$. Dizemos que γ_1 e γ_2 têm *contacto orientado* se a interseção $\gamma_1 \cap \gamma_2$ é um único ponto $(x, \xi) \in U\mathbb{R}^{n+1}$.

Geometricamente, γ_1 e γ_2 têm contacto orientado em (x, ξ) se , e somente se, elas são esferas orientadas (ou hiperplanos) em $\mathbb{R}^{n+1}$ tangentes em x com o mesmo campo normal unitário ξ. Notemos que qualquer ponto $(x, \xi) \in U\mathbb{R}^{n+1}$ determina unicamente um pente de esferas que tem contacto orientado em $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ com campo normal unitário comum ξ. Notemos também que existe um único ponto esférico e um único hiperplano $\Pi(\xi, x.\xi)$ neste pente.

Seja $\mathbb{R}_2^{n+4}$ o espaço $\mathbb{R}^{n+4}$, munido com o produto interno

$$\langle X, Y\rangle = -X_1Y_1 + X_2Y_2 + ... + X_{n+3}Y_{n+3} - X_{n+4}Y_{n+4}. \tag{1.4}$$

Seja $\mathbb{C}^{n+3}$ o *cone de luz* em $\mathbb{R}_2^{n+4}$ dado por

$$\mathbb{C}^{n+3} = \{X \in \mathbb{R}^{n+4} / \langle X, X\rangle = 0\}. \tag{1.5}$$

Denotamos por $\mathbb{Q}^{n+2}$ a quádrica no espaço projetivo real $\mathbb{R}P^{n+3}$, definida por

$$\mathbb{Q}^{n+2} = \{[X] \in \mathbb{R}P^{n+3} / \langle X, X\rangle = 0\}. \tag{1.6}$$

Então, podemos associar uma esfera orientada $S(p, r) \in \Sigma$ a um ponto $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2}$ por

$$S(p, r) \longleftrightarrow [\gamma], \ \text{ onde } \ \gamma = \left(\frac{1}{2}(1 + |p|^2 - r^2), \frac{1}{2}(1 - |p|^2 + r^2), p, -r\right), \tag{1.7}$$

e associar um hiperplano orientado $\Pi(\xi, \lambda) \in \Sigma$ a um ponto $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2}$ por

$$\Pi(\xi, \lambda) \longleftrightarrow [\gamma], \ \text{ onde } \ \gamma = (\lambda, -\lambda, \xi, 1). \tag{1.8}$$

Chamamos $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2}$ a *coordenada da esfera orientada* $S(p, r)$ ou $\Pi(\xi, \lambda)$.

Para qualquer $\gamma \in \Sigma$, denotamos por $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2}$ sua coordenada dada em (1.7) e (1.8). Temos que a correspondência $\gamma \in \Sigma \longleftrightarrow [\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2}$ define uma bijeção de Σ em $\mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$, onde

$$P = (1, -1, \mathbf{0}, 0), \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{1.9}$$

Geometricamente, o ponto

$$[P] = \lim_{|p|\to\infty} \frac{1}{|p|^2}\left[\left(\frac{1}{2}(1+|p|^2), \frac{1}{2}(1-|p|^2), p, 0\right)\right]$$

em $\mathbb{Q}^{n+2}$ é a *coordenada do ponto esférico* no ∞ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Segue de (1.7) e (1.8) que $\gamma_1, \gamma_2 \in \Sigma$ têm contacto orientado se, e somente se, suas coordenadas esféricas satisfazem

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = 0. \tag{1.10}$$

De (1.7), (1.8) e (1.9) obtemos que $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2} - [P]$ é uma esfera orientada $U\mathbb{R}^{n+1}$ se, e somente se, $\langle \gamma, P \rangle \neq 0$ e $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$ é um hiperplano $\Pi(\xi, \lambda)$ em $U\mathbb{R}^{n+1}$ se, e somente se, $\langle \gamma, P \rangle = 0$.

Um ponto $(x, \xi) \in U\mathbb{R}^{n+1}$ determina um único pente de esferas orientadas que tem contacto em $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ com mesma normal ξ. O ponto esférico $\gamma_1 = S(x, 0)$ e o hiperplano orientado $\gamma_2 = P(\xi, x.\xi)$ no pente possuem coordenadas $[\gamma_1]$ e $[\gamma_2]$, onde

$$\gamma_1 = \left(\frac{1}{2}(1+|x|^2), \frac{1}{2}(1-|x|^2), x, 0\right), \qquad \gamma_2 = (x.\xi, -x.\xi, \xi, 1)\,. \tag{1.11}$$

Então, qualquer esfera $[\gamma]$ no pente pode ser escrita como

$$[\gamma] = [\lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2] \in \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}, \tag{1.12}$$

para algum $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Assim, um ponto $(x, \xi) \in U\mathbb{R}^{n+1}$ determina uma única reta projetiva

$$\left\{[\lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2]/(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}\right\}$$

contida em $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$.

Seja Λ^{2n+1} o conjunto de todas as retas projetivas contidas em $\mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$. Então a aplicação $L : U\mathbb{R}^{n+1} \to \Lambda^{2n+1}$ definida por

$$L((x, \xi)) = \left\{[\lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2] \in \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}/(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}\right\}, \tag{1.13}$$

é um difeomorfismo.

1.2 O grupo das transformações de Laguerre

Nesta seção estudamos o grupo das transformações de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$, que é um importante subgrupo do grupo das transformações de Lie (cf. [10], Seção 2.5). Na geometria diferencial de Laguerre são estudadas propriedades invariantes sob a ação do grupo das transformações de Laguerre.

Nossa definição de transformação de Laguerre é a mesma apresentada por Blaschke em seu livro [1]. O grupo das transformações de Laguerre definido por Cecil [10] é mais geral, e é chamado, por Blaschke [1], o grupo das transformações de Laguerre afins.

Seja $L\mathbb{G}$ o subgrupo do grupo ortogonal $\mathbb{O}(n+2,2)$ em $\mathbb{R}^{n+4}_2$ dado por $T : U\mathbb{R}^{n+1} \to \Lambda^{2n+1}$ definida por

$$L\mathbb{G} = \{T \in O(n+2,2)/PT = P\}, \tag{1.14}$$

onde P é o vetor tipo-luz em $\mathbb{R}^{n+4}_2$ definido por (1.9) e $\mathbb{O}(n+2,2)$ é formado pelo grupo ortogonal que deixa o produto interno (1.4) invariante.

Então qualquer $T \in L\mathbb{G}$ induz uma transformação em $\mathbb{Q}^{n+2}$ definida por

$$T([X]) = [XT], \;\; T \in \mathbb{Q}^{n+2}. \tag{1.15}$$

Chamamos ambas, $T \in L\mathbb{G}$ e $T : \mathbb{Q}^{n+2} \to \mathbb{Q}^{n+2}$, de *transformações de Laguerre* e $L\mathbb{G}$ o *grupo das transformações de Laguerre*.

Sejam $\gamma_1, \gamma_2 \in \Sigma$ duas diferentes esferas ou hiperplanos em contacto orientado. Então, $[\gamma_1]$ e $[\gamma_2]$ definem uma reta projetiva contida em $\mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$ por

$$span\{[\gamma_1], [\gamma_2]\} = \{[\lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2]/(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}\} \in \Lambda^{2n+1}.$$

Então, qualquer $T \in LG$ define uma transformação $T : \Lambda^{2n+1} \to \Lambda^{2n+1}$ por

$$T(span\{[\gamma_1], [\gamma_2]\}) = span\{[\gamma_1 T], [\gamma_2 T]\}.$$

Seja $L : U\mathbb{R}^{n+1} \to \Lambda^{2n+1}$ um difeomorfismo dado em (1.13). Então, qualquer $T \in L\mathbb{G}$

induz uma transformação

$$\sigma = L^{-1} \circ T \circ L : U\mathbb{R}^{n+1} \to U\mathbb{R}^{n+1},$$

chamada de *transformação de Laguerre em* $U\mathbb{R}^{n+1}$. Assim, o grupo das transformações de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$ é dado por

$$L\mathbb{G} = \{\sigma : U\mathbb{R}^{n+1} \to U\mathbb{R}^{n+1} / \sigma = L^{-1} \circ T \circ L, T \in O(n+2,2), PT = P\}.$$

A dimensão de $L\mathbb{G}$ é $(n+2)(n+3)/2$, conforme [21].

Seja $T \in L\mathbb{G}$ uma transformação de Laguerre. Então, temos que $PT = P$ e $T : \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\} \to \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$. Como qualquer esfera orientada $\gamma \in U\mathbb{R}^{n+1}$ determina um ponto $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$ tal que $\langle \gamma, P \rangle \neq 0$, então $\langle \gamma T, P \rangle = \langle \gamma T, PT \rangle = \langle \gamma, P \rangle \neq 0$, obtemos que $T([\gamma])$ é também uma esfera orientada. Como qualquer hiperplano orientado $\gamma \in U\mathbb{R}^{n+1}$ determina um ponto $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2} - \{[P]\}$ tal que $\langle \gamma, P \rangle = 0$, então $\langle \gamma T, P \rangle = \langle \gamma T, PT \rangle = \langle \gamma, P \rangle = 0$, obtemos que $T([\gamma])$ é também um hiperplano orientado. Desta forma, qualquer transformação de Laguerre $\sigma : U\mathbb{R}^{n+1} \to U\mathbb{R}^{n+1}$ leva esferas orientadas em esferas orientadas, leva hiperplanos orientados em hiperplanos orientados.

A seguir apresentamos três exemplos de transformações de Laguerre dados por Li-Wang em [21] que geram todas as transformações de Laguerre, como veremos mais adiante.

Exemplo 1.4. ([21]) Qualquer isometria em $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$\mu(x) = xA + c, \qquad A \in \mathbb{O}(n+1), \;\; c \in \mathbb{R}^{n+1}$$

induz uma *transformação isométrica* $\mu : U\mathbb{R}^{n+1} \to U\mathbb{R}^{n+1}$ definida por

$$\mu(x,\xi) = (xA + c\xi, \xi A). \tag{1.16}$$

Temos que ν é uma transformação de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$ e que

$$T(\mu) = L \circ \mu \circ L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + |c|^2/2 & -|c|^2/2 & c & 0 \\ |c|^2/2 & 1 - |c|^2/2 & c & 0 \\ Ac' & -Ac' & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in L\mathbb{G}, \tag{1.17}$$

onde c' é o transposto do vetor $c \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Exemplo 1.5. ([21]) As *transformações parabólicas* a 1-parâmetro(ou *transformações paralelas*) definidas por

$$\phi_t(x,\xi) = (x + t\xi, \xi), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.18}$$

são transformações de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$. Neste caso, temos

$$T(\phi_t) = L \circ \phi_t \circ L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - t^2/2 & t^2/2 & 0 & -t \\ -t^2/2 & 1 + t^2/2 & 0 & -t \\ 0 & 0 & I_n & 0 \\ t & -t & 0 & 1 \end{pmatrix} \in LG. \tag{1.19}$$

Como $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$, chamamos ϕ_t de *fluxo parabólico* em $U\mathbb{R}^{n+1}$.

Exemplo 1.6. ([21]) O terceiro exemplo de transformações de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$ é o *fluxo das transformações hiperbólicas a 1-parâmetro*. Para cada $(x,\xi) \in U\mathbb{R}^{n+1}$ escreva

$$x = (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad \xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

então a transformação hiperbólica

$$\psi_t(x,\xi) = (x(t), \xi(t)) \in U\mathbb{R}^{n+1}, t \in \mathbb{R},$$

é definida por

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\sinh t x_1}{\sinh t\xi_1 + \cosh t}\xi_0, \ \ \frac{x_1}{\sinh t\xi_1 + \cosh t} \right), \tag{1.20}$$

$$\xi(t) = \left(\frac{1}{\sinh t\xi_1 + \cosh t}\xi_0, \ \ \frac{\cosh t\xi_1 + \sinh t}{\sinh t\xi_1 + \cosh t} \right). \tag{1.21}$$

Neste caso, temos

$$T(\psi_t) = L \circ \psi_t \circ L^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \in LG. \tag{1.22}$$

Como $\psi_s \circ \psi_t = \psi_{s+t}$, chamamos ψ_t de *fluxo hiperbólico* em $U\mathbb{R}^{n+1}$.

Seja $\{e_1, e_2, ...e_{n+4}\}$ a base canônica para $\mathbb{R}_2^{n+4}$, $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$. Para qualquer $T \in LG$ temos

$$PT = P, \ \langle e_i T, P\rangle = \langle e_i T, PT\rangle = \langle e_i, P\rangle\,, \ \ 1 \leq i \leq n+4.$$

Usando estas informações e o fato de que $T \in O(n+2, 2)$ podemos escrever

$$T(\sigma) = L \circ \sigma \circ L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + |c|^2/2 - \rho^2/2 & -|c|^2/2 + \rho^2/2 & c & \rho \\ |c|^2/2 - \rho^2/2 & 1 - |c|^2/2 + \rho^2/2 & c & \rho \\ Ac' - \rho u & -Ac' + \rho u & A & u \\ vc' - \rho w & -vc' + \rho w & v & w \end{pmatrix}, \tag{1.23}$$

para algum

$$\begin{pmatrix} A & u \\ v & w \end{pmatrix} \in O(n+1, 1), \ \ (c, \rho) \in \mathbb{R}^{n+1}, \ \ w \in \mathbb{R}.$$

A aplicação

$$T \to \begin{pmatrix} A & u & 0 \\ v & w & 0 \\ c & \rho & 1 \end{pmatrix},$$

define um isomorfismo de $L\mathbb{G}$ sobre o grupo das transformações de Lorentz em $\mathbb{R}_1^{n+2}$ (veja [21]).

Agora, sejam $\gamma_1 = S(p, r)$, $\gamma_2 = S(p^*, r^*)$ esferas orientadas em $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja T uma transformação de Laguerre dada por (1.23). Como

$$\gamma_1 = \left(\tfrac{1}{2}(1 + |p|^2 + r^2), \tfrac{1}{2}(1 - |p|^2 + r^2), p, -r\right),$$

$$\gamma_2 = \left(\tfrac{1}{2}(1 + |p^*|^2 + (r^*)^2), \tfrac{1}{2}(1 - |p^*|^2 + (r^*)^2), p^*, -r^*\right),$$

obtemos que as esferas orientadas $\gamma_1 T = S(\tilde{p}, \tilde{r})$ e $\gamma_2 T = S(\tilde{p}^*, \tilde{r}^*)$ são dadas por

$$(\tilde{p}, -\tilde{r}) = (pA - rv + c, pu + rw + \rho)\,,$$

$$(\tilde{p}^*, -\tilde{r}^*) = (p^*A - r^*v + c, p^*u + r^*w + \rho)\,.$$

Assim, temos que

$$(\tilde{p}^* - \tilde{p}, -\tilde{r}^* + \tilde{r}) = (p^* - p, -r^* + r)\begin{pmatrix} A & u & 0 \\ v & w & 0 \\ c & \rho & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Segue que

$$F = |p^* - p|^2 - (r^* - r)^2 \tag{1.25}$$

é uma invariante de Laguerre. Geometricamente, se uma esfera não está contida na outra, então F é exatamente o quadrado do comprimento do segmento tangente comum das duas esferas $S(p, r)$ e $S(p^*, r^*)$.

A demonstração do teorema seguinte pode ser encontrada em [21].

Teorema 1.7. *([21]) Para qualquer $T \in \mathbb{O}(n+2, 2)$ com $PT = P$ existem, duas isometrias μ_1, μ_2 em $U\mathbb{R}^{n+1}$ e constantes $s, t \in \mathbb{R}$, tal que*

$$T = \epsilon T(\mu_2)T(\psi_t)T(\phi_s)T(\mu_1),$$

onde $\epsilon = \pm 1$, ϕ_s é uma transformação paralela em $U\mathbb{R}^{n+1}$ e ψ_t é um fluxo hiperbólico em $U\mathbb{R}^{n+1}$.

Corolário 1.8. *([21]) Qualquer transformação de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$ é gerada por isometrias, transformações paralelas e transformações hiperbólicas.*

1.3 Formas espaciais de Laguerre e imersões de Laguerre

Na geometria de Möbius temos três espaços de curvatura constante $\mathbb{S}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbb{H}^{n+1}$ e imersões conformes $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{S}^{n+1}$ e $\mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{S}^{n+1}$. Similarmente, introduzimos nessa seção três formas espaciais de Laguerre $U\mathbb{R}^{n+1}$, $U\mathbb{R}^{n+1}_1$ e $U\mathbb{R}^{n+1}_0$ e as imersões de Laguerre $\sigma : U\mathbb{R}^{n+1}_1 \to U\mathbb{R}^{n+1}$ e $\tau : U\mathbb{R}^{n+1}_0 \to U\mathbb{R}^{n+1}$ (ver [21]).

Seja $\mathbb{R}^{n+1}_1$ o espaço de Lorentz com o produto interno

$$\langle X, Y \rangle = X_1Y_1 + ... + X_nY_n - X_{n+1}Y_{n+1}. \tag{1.26}$$

Seja $U\mathbb{R}_1^{n+1}$ o fibrado unitário de $\mathbb{R}_1^{n+1}$ definido por

$$U\mathbb{R}_1^{n+1} = \left\{(x, \xi) \in \mathbb{R}_1^{n+1} \times \mathbb{R}_1^{n+1} / \langle \xi, \xi \rangle = -1\right\}. \tag{1.27}$$

Uma *esfera orientada (hiperbólica)* $H(p, r)$ centrada em $p \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ com raio r pode ser imersa em $U\mathbb{R}_1^{n+1}$ como subvariedade n-dimensional

$$H(p, r) = \{(x, \xi) \in U\mathbb{R}_1^{n+1} / x - p = r\xi\}. \tag{1.28}$$

Aqui, r é um número real. Se $r = 0$, então $H(p, r)$ consiste de todos os vetores tipo-tempo em p, chamado *ponto esférico* em p. Associamos $\gamma = H(p, r)$ ao vetor $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2}$ dado por

$$\gamma = \left(\frac{1}{2}(1 + \langle p, p \rangle + r^2), \frac{1}{2}(1 - \langle p, p \rangle - r^2), -r, p\right). \tag{1.29}$$

Um *hiperplano orientado tipo-espaço* $\Pi(\xi, \lambda)$ em $\mathbb{R}_1^{n+1}$ com vetor normal unitário pode ser imerso em $U\mathbb{R}_1^{n+1}$ como subvariedade n-dimensional

$$\Pi(\xi, \lambda) = \{(x, \xi) \in U\mathbb{R}_1^{n} / \langle x, \xi \rangle = \lambda\}. \tag{1.30}$$

Associamos $\gamma = \Pi(\xi, \lambda)$ ao vetor $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2}$ dado por

$$\gamma = (\lambda, -\lambda, 1, \xi). \tag{1.31}$$

Definição 1.9. Duas esferas (ou hiperplanos) orientadas γ_1 e γ_2 têm *contacto orientado* em $\mathbb{R}_1^{n+1}$ se, e somente se, seus vetores correspondentes $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Q}^{n+2}$ satisfazem $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = 0$.

Qualquer ponto $(x, \xi) \in U\mathbb{R}_1^{n+1}$ determina um pente de esferas(hiperplanos) em $\mathbb{R}_1^{n+1}$ com contacto orientado em x e com vetor normal ξ, ao qual corresponde uma reta projetiva pelo difeomorfismo $L_1 : U\mathbb{R}_1^{n+1} \to \Lambda^{2n+1}$ dado por

$$L_1(x, \xi) = \{[\ \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2]/(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}\}, \tag{1.32}$$

onde

$$\gamma_1 = \left(\frac{1}{2}(1 + \langle x, x\rangle^2), \frac{1}{2}(1 - \langle x, x\rangle^2), 0, x\right), \tag{1.33}$$

$$\gamma_2 = (\langle x, \xi\rangle, -\langle x, \xi\rangle, 1, \xi). \tag{1.34}$$

Seja $L : U\mathbb{R}^{n+1} \to \Lambda^{2n+1}$ o difeomorfismo definido por (1.13). Desta forma, temos a aplicação $\sigma = L^{-1} \circ L_1 : U\mathbb{R}_1^{n+1} \to U\mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$\sigma(x, \xi) = (x', \xi') \in U\mathbb{R}^{n+1}, \tag{1.35}$$

onde $(x, \xi) \in U\mathbb{R}_1^{n+1}$, com $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e

$$x' = \left(-\frac{x_1}{\xi_1}, x_0 - \frac{x_1}{\xi_1}\xi_0\right), \xi' = \left(\frac{1}{\xi_1}, \frac{\xi_0}{\xi_1}\right). \tag{1.36}$$

Temos que σ leva o hiperplano $\Pi(\xi, \lambda)$ em $U\mathbb{R}_1^{n+1}$ no hiperplano $P(\xi', \lambda/\xi_1)$ em $U\mathbb{R}^{n+1}$, e leva a esfera orientada $H(p, r)$ em $U\mathbb{R}_1^{n+1}$ na esfera orientada $S(p', r')$ em $U\mathbb{R}^{n+1}$, onde $p = (p_0, p_1)$, $p' = (-r, p_0)$ e $r' = -p_1$. Assim, $\sigma : U\mathbb{R}_1^{n+1} \to U\mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão de Laguerre.

Analogamente vamos descrever a forma espacial de Laguerre $U\mathbb{R}_0^{n+1}$.

Seja $\mathbb{R}_1^{n+2}$ o espaço semi-Euclidiano com produto interno

$$\langle X, Y\rangle = X_1Y_1 + ... + X_{n+1}Y_{n+1} - X_{n+2}Y_{n+2}. \tag{1.37}$$

Seja $\nu = (1, \mathbf{0}, 1)$ o vetor tipo-luz em $\mathbb{R}_1^{n+2}$ com $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Seja $\mathbb{R}_0^{n+1}$ o hiperplano degenerado em $\mathbb{R}_1^{n+2}$ definido por

$$\mathbb{R}_0^{n+1} = \left\{x \in \mathbb{R}_1^{n+2} / \langle x, \nu\rangle = 0\right\}. \tag{1.38}$$

Definimos

$$U\mathbb{R}_0^{n+1} = \left\{(x, \xi) \in \mathbb{R}_1^{n+2} \times \mathbb{R}_1^{n+2} / \langle x, \nu\rangle = 0, \langle \xi, \xi\rangle = 0, \langle \xi, \nu\rangle = 1\right\}. \tag{1.39}$$

Uma *esfera orientada* $C(p)$ em $\mathbb{R}_0^{n+1}$, com $p \in \mathbb{R}_1^{n+2}$, é uma subvariedade n-dimensional em $U\mathbb{R}_0^{n+1}$ dada por

$$C(p) = \left\{(x,\xi) \in U\mathbb{R}_0^{n+1} / x - p = -\langle p, \nu \rangle \xi \right\}. \tag{1.40}$$

Geometricamente, se $\langle p, \nu \rangle \neq 0$, então $C(p)$ é um paraboloide em $\mathbb{R}_0^{n+1}$ obtido pela interseção do cone de luz $\langle x-p, x-p \rangle = 0$ em $\mathbb{R}_1^{n+2}$ com o hiperplano $\langle x, \nu \rangle = 0$. O paraboloide $C(p)$ está centrado em $p^* = p + r(1, \mathbf{0}, 0) \in \mathbb{R}_0^{n+1} (r = -\langle p, \nu \rangle)$ com eixo de simetria $l = \{p^* + t\nu / t \in \mathbb{R}\}$. Se $r = 0$ então $C(p)$ consiste de todos $(p, \xi) \in U\mathbb{R}_0^{n+1}$ com ξ contido no paraboloide $\left\{\xi \in \mathbb{R}_1^{n+2} / \langle \xi, \xi \rangle = 0, \langle \xi, \nu \rangle = 1\right\}$ em $\mathbb{R}_1^{n+2}$. Associamos $\gamma = C(p)$ a um vetor $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2}$ onde

$$\gamma = \left(\frac{1}{2}(1 + \langle p, p \rangle), \frac{1}{2}\left(1 - \langle p, p \rangle\right), p\right). \tag{1.41}$$

Um hiperplano tipo-espaço $\Pi(\xi, \lambda)$ em $\mathbb{R}_0^{n+1}$ com normal unitária ξ pode ser imerso em $U\mathbb{R}_0^{n+1}$ como subvariedade n-dimensional

$$\Pi(\xi, \lambda) = \left\{(x, \xi) \in U\mathbb{R}_0^{n+1} / \langle x, \xi \rangle = \lambda \right\}. \tag{1.42}$$

Associamos $\gamma = \Pi(\xi, \lambda)$ ao vetor $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2}$ onde

$$\gamma = (\lambda, -\lambda, \xi). \tag{1.43}$$

Definição 1.10. Duas esferas orientadas(ou hiperplanos) γ_1 e γ_2 têm contacto orientado em $\mathbb{R}_0^{n+1}$ se, e somente se, seus vetores correspondentes $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Q}^{n+2}$ satisfazem $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = 0$.

Qualquer ponto $(x, \xi) \in U\mathbb{R}_0^{n+1}$ determina um pente de esferas(hiperplanos) em $\mathbb{R}_0^{n+1}$ com contacto orientado em x e com normal unitária comum ξ, com correspondente reta projetiva pelo difeomorfismo $L_0 : U\mathbb{R}_0^{n+1} \to \Lambda^{2n+1}$

$$L_0(x, \xi) = \left\{[\lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2] / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}\right\}, \tag{1.44}$$

onde

$$\gamma_1 = \left(\frac{1}{2}(1 + \langle x, x \rangle), \frac{1}{2}(1 - \langle x, x \rangle), x\right), \tag{1.45}$$

$$\gamma_2 = (\langle x, \xi \rangle, -\langle x, \xi \rangle, \xi). \tag{1.46}$$

Seja $L : U\mathbb{R}^{n+1} \to \Lambda^{2n+1}$ o difeomorfismo definido por (1.13). Segue que $\tau = L^{-1} \circ L_0 : U\mathbb{R}_0^{n+1} \to U\mathbb{R}^{n+1}$ é dado por

$$\tau(x, \xi) = (x^{'}, \xi^{'}) \in U\mathbb{R}^{n+1}, \tag{1.47}$$

onde $x = (x_1, x_0, x_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $\xi = (\xi_1 + 1, \xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e

$$x^{'} = \left(-\frac{x_1}{\xi_1}, x_0 - \frac{x_1}{\xi_1}\xi_0 \right), \quad \xi^{'} = \left(1 + \frac{1}{\xi_1}, \frac{\xi_0}{\xi_1} \right). \tag{1.48}$$

Temos que τ leva o hiperplano $\Pi(\xi, \lambda)$ em $U\mathbb{R}_0^{n+1}$ no hiperplano $\Pi(\xi^{'}, \lambda/\xi_1)$ em $U\mathbb{R}^{n+1}$, leva a esfera orientada $C(p)$ em $U\mathbb{R}_0^{n+1}$ na esfera orientada $S(p^{'}, r^{'})$ em $U\mathbb{R}^{n+1}$, onde $p = (p_1 - r, p_0, p_1)$, $p^{'} = (p_1 - r, p_0)$, $r = -\langle p, \nu \rangle$ e $r^{'} = -p_1$. Assim, $\tau : U\mathbb{R}_0^{n+1} \to U\mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão de Laguerre.

1.4 Hipersuperfícies de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$

A geometria de superfícies de Laguerre em $\mathbb{R}^3$ foi introduzida no livro de Blaschke. Nesta seção apresentamos as hipersuperfícies de Laguerre em $\mathbb{R}^{n+1}$. Para maiores detalhes indicamos [21].

Consideremos $(x, \xi) : U\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{2n+2}$ a imersão canônica e $\gamma_1, \gamma_2 : U\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}_2^{n+4}$ dados em (1.11). Seja $T \in L\mathbb{G}$ uma transformação de Laguerre e

$$(\tilde{x}, \tilde{\xi}) = \phi \circ (x, \xi), \qquad \phi = L^{-1} \circ T \circ L : U\mathbb{R}^{n+1} \to U\mathbb{R}^{n+1}.$$

Denotamos por a e b as últimas coordenadas de $\gamma_1 T$ e $\gamma_2 T$, respectivamente. Então, por (1.11) e (1.23) podemos escrever

$$\tilde{\gamma}_1 = \left(\frac{1}{2}(1 + |\tilde{x}|^2), \frac{1}{2}(1 - |\tilde{x}|^2), \tilde{x}, 0 \right) = \gamma_1 T - \frac{a}{b}\gamma_2 T, \tag{1.49}$$

$$\tilde{\gamma}_2 = \left(\tilde{x}.\tilde{\xi}, -\tilde{x}.\tilde{\xi}, \tilde{\xi}, 1 \right) = \frac{1}{b}\gamma_2 T, \tag{1.50}$$

onde $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$ são dados em (1.11) e estão associados a $(\tilde{x}, \tilde{\xi})$.

São satisfeitas as seguintes relações de ortogonalidade

$$\begin{aligned} \langle \gamma_1, \gamma_1 \rangle = \langle \gamma_2, \gamma_2 \rangle = 0, \quad & \langle d\gamma_1, d\gamma_1 \rangle = dx.dx, \\ \langle d\gamma_1, d\gamma_2 \rangle = dx.d\xi, \qquad & \langle d\gamma_2, d\gamma_2 \rangle = d\xi.d\xi. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Segue de (1.51) que

$$d\tilde{x}.\tilde{\xi} = \langle d\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \rangle = \left\langle d(\gamma_1 T - \frac{a}{b}\gamma_2 T), \frac{1}{b}\gamma_2 T \right\rangle = \frac{1}{b} \langle d\gamma_1, \gamma_2 \rangle = \frac{1}{b} dx.\xi, \tag{1.52}$$

$$d\tilde{\xi}.d\tilde{\xi} = \langle d\tilde{\gamma}_2, d\tilde{\gamma}_2 \rangle = \frac{1}{b^2} \langle d\gamma_2, d\gamma_2 \rangle = \frac{1}{b^2} d\xi.d\xi. \tag{1.53}$$

Definição 1.11. Chamamos $f = (x, \xi) : M^n \to U\mathbb{R}^{n+1}$ uma *hipersuperfície de Laguerre*, se $\xi : M^n \to \mathbb{S}^n$ é uma imersão e $dx.\xi = 0$.

Segue de (1.52) e (1.53) que qualquer transformação de Laguerre leva hipersuperfícies de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$ em hipersuperfícies de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$. Por (1.2) e (1.3) obtemos que hiperplanos e esferas orientadas são hipersuperfícies de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$.

Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada com curvaturas principais que não se anulam. Então, a aplicação normal $\xi : M^n \to \mathbb{S}^n$ é uma imersão. Assim, $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ induz unicamente uma hipersuperfície de Laguerre $f = (x, \xi) : M^n \to U\mathbb{R}^{n+1}$. Note que, para qualquer hipersuperfície de Laguerre $f = (x, \xi) : M^n \to U\mathbb{R}^{n+1}$, $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ pode não ser uma imersão. Por outro lado, por um Teorema de Pinkall [40] temos que a transformação paralela $f_t = (x + t\xi, \xi)$ de f é uma imersão em qualquer ponto $p \in M^n$ para quase todo $t \in \mathbb{R}$. Neste sentido, podemos assumir que $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ seja uma imersão. Por exemplo,

Exemplo 1.12. (ver [41]) Considere a família de superfícies em $\mathbb{R}^3$ parametrizadas por

$$\begin{aligned} x_t(u_1, u_2) = \ & \left(u_1 - \tfrac{u_1^3}{3} + u_1 u_2^2, u_2 - \tfrac{u_2^3}{3} + u_2 u_1^2, u_1^2 - u_2^2\right) \\ & + t\left(-2u_1, 2u_2, 1 - u_1^2 - u_2^2\right) / \left(1 + u_1^2 + u_2^2\right), \end{aligned}$$

onde t é uma constante real não nula. A aplicação $\xi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{S}^2$ dada por $\xi(u_1, u_2) = \left(-2u_1, 2u_2, 1 - u_1^2 - u_2^2\right) / \left(1 + u_1^2 + u_2^2\right)$ é o campo normal unitário de x_t.

Cada superfície x_t possui singularidades no seguinte conjunto

$$U_t = \left\{(u_1, u_2)/(1 + u_1^2 + u_2^2)^4 = 4t^2\right\}.$$

A primeira forma fundamental da superfície x_t é dada por

$$I = \left(l - \frac{2t}{l}\right)^2 du_1^2 + \left(l + \frac{2a}{t}\right)^2 du_2^2,$$

onde $l = 1 + u_1^2 + u_2^2$. Fixados $t_0 \in \mathbb{R}$ e $p \in U_{t_0}$, temos que x_{t_0} não é uma imersão numa vizinhança de p. Porém, para cada $t = t_0 + l$, onde l é uma constante real, temos que $x_t = x_{t_0} + l\xi$. Então, existe uma vizinhança V de p tal que x_t é uma imersão em V, já que p não é ponto singular de $x_t, t \neq t_0$.

Definição 1.13. Sejam $x, \tilde{x} : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ duas hipersuperfícies orientadas com curvaturas principais que não se anulam. Dizemos que x e $\tilde{x}$ são *equivalentes por transformações de Laguerre*, se as hipersuperfícies correspondentes $f = (x, \xi), \tilde{f} = (\tilde{x}, \tilde{\xi}) : M^n \to U\mathbb{R}^{n+1}$ são diferentes apenas por uma transformação de Laguerre, isto é, $\tilde{f} = \phi \circ f, \phi = L \circ T \circ L^{-1}$, $T \in L\mathbb{G}$.

Na geometria diferencial de Laguerre são estudadas as propriedades de hipersuperfícies de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$ que são invariantes pelo grupo da transformações de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$.

1.5 Geometria de Laguerre para hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$

Nesta seção, estudamos a geometria diferencial de Laguerre para hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$. Para qualquer hipersuperfície orientável $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam, obtemos uma métrica invariante de Laguerre $\rho^2 d\xi.d\xi$, onde $\xi : M \to \mathbb{S}^n$ é o campo normal unitário de x. Vamos obter as equações de estrutura de x para a métrica $\rho^2 d\xi.d\xi$. Para maiores detalhes veja [21].

Seja $\mathbb{R}_2^{n+4}$ o espaço $\mathbb{R}^{n+4}$, munido com o produto interno

$$\langle X, Y\rangle = -X_1Y_1 + X_2Y_2 + ... + X_{n+3}Y_{n+3} - X_{n+4}Y_{n+4}. \tag{1.54}$$

Seja $\mathbb{C}^{n+3}$ o cone de luz de $\mathbb{R}^{n+4}_2$ dado por $\mathbb{C}^{n+3} = \left\{X \in \mathbb{R}^{n+4}_2 | \langle X, X\rangle = 0\right\}$. Seja $L\mathbb{G}$ o subgrupo do grupo ortogonal $O(n+2,2)$ em $\mathbb{R}^{n+4}_2$ dado por

$$L\mathbb{G} = \{T \in O(n+2,2) | PT = P\}, \tag{1.55}$$

o grupo das transformações de Laguerre de $\mathbb{R}^{n+1}$, onde $P = (1, -1, \mathbf{0}, 0)$, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$, é um vetor tipo-luz em $\mathbb{R}^{n+4}_2$.

Considere $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Seja $\xi : M \to \mathbb{S}^n$ o campo normal unitário. Seja $e_i, 1 \leq i \leq n$, uma base ortonormal para TM com relação a $dx.dx$ formada por vetores principais, isto é, $e_i(\xi) = -k_i e_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, onde $-k_i$ é o autovalor correspondente a e_i. Definimos

$$r_i = \frac{1}{k_i}, \quad r = \frac{r_1 + r_2 + ... + r_n}{n} \quad \text{e} \quad \rho = \sqrt{\sum_i (r_i - r)^2}, \tag{1.56}$$

onde r_i é o *raio de curvatura* (ou *raio principal*), r é o *raio de curvatura média* de x e ρ é uma função suave em M. Observamos que ρ nunca se anula, já que x não tem pontos umbílicos. Definimos

$$Y = \rho\,(x.\xi, -x.\xi, \xi, 1) : M \to C^{n+3} \subset \mathbb{R}^{n+4}_2$$

o *vetor posição de Laguerre* da imersão x.

O teorema seguinte apresentado por Li-Wang(2007) nos fornece a equivalência entre hipersuperfícies de Laguerre em termos dos seus respectivos vetores posição.

Teorema 1.14. *([21]) Sejam $x, \tilde{x} : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ duas hipersuperfícies sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Então, x e $\tilde{x}$ são equivalentes por uma transformação de Laguerre se, e somente se, existe $T \in L\mathbb{G}$ tal que $\tilde{Y} = YT$.*

A partir do Teorema 1.14, os autores Li-Wang em [21] mostraram que

$$g = \langle dY, dY\rangle = \rho^2 d\xi.d\xi \tag{1.57}$$

é uma métrica invariante por transformações de Laguerre, que é conforme à terceira forma fundamental da imersão $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$. Chamamos g a *métrica de Laguerre* de x.

Seja Δ o operador Laplaciano de g, definimos

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{n}\Delta Y + \frac{1}{2n^2}\langle \Delta Y, \Delta Y\rangle Y, \\ \eta &= \left(\tfrac{1+|x|^2}{2}, \tfrac{1-|x|^2}{2}, x, 0\right) + r(x.\xi, -x.\xi, \xi, 1), \end{aligned} \tag{1.58}$$

onde r é o raio de curvatura média de x. A aplicação $\eta : M \to C^{n+3} \subset \mathbb{R}_2^{n+4}$ é conhecida como a *aplicação normal de Laguerre*. O significado geométrico de $\eta(p)$, $p \in M$, é a esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$ centrada em $x(p)+r(p)\xi(p)$ com raio $r(p)$, a qual é tangente à hipersuperfície no ponto $x(p)$. Sejam $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ em $\mathbb{R}_2^{n+4}$ campos tangentes a Y, consistindo de uma base ortonormal na métrica g com base dual $\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. São satisfeitas as seguintes relações de ortogonalidade na métrica (1.54)

$$\begin{aligned} &\langle Y, E_i(Y)\rangle = \langle \Delta Y, E_i(Y)\rangle = 0, \quad \langle Y, \Delta Y\rangle = -n, \quad \langle E_i(Y), E_j(Y)\rangle = \delta_{ij}, \\ &\langle N, N\rangle = \langle Y, Y\rangle = \langle \eta, \eta\rangle = 0, \quad \langle Y, N\rangle = -1, \quad \langle \eta, P\rangle = -1. \end{aligned} \tag{1.59}$$

Então, temos a seguinte decomposição ortogonal

$$\mathbb{R}_2^{n+4} = span\,\{Y, N\} \oplus span\,\{E_1(Y), E_2(Y), ..., E_n(Y)\} \oplus \{\eta, P\}.$$

Chamamos $\{Y, N, E_1(Y), E_2(Y), ..., E_n(Y), \eta, P\}$ de *referencial móvel de Laguerre* em $\mathbb{R}_2^{n+4}$ de x. As equações de estrutura para este referencial são dadas por

$$\begin{aligned} E_i(N) &= \sum_j L_{ij}E_j(Y) + C_iP, \\ E_j(E_i(Y)) &= L_{ij}Y + \delta_{ij}N + \sum_k \Gamma_{ij}^k E_k(Y) + B_{ij}(Y)P, \\ E_i(\eta) &= -C_iY + \sum_j B_{ij}E_j(Y). \end{aligned} \tag{1.60}$$

onde $C_i, L_{ij} = L_{ji}, B_{ij} = B_{ji}, \Gamma_{ij}^k$ são funções suaves definidas em M. Destas equações obtemos os seguintes invariantes:

$$\begin{aligned}
&\text{(i) A métrica de Laguerre } \; g = \langle dY, dY \rangle . \\
&\text{(ii) O tensor segunda forma fundamental de Laguerre } \; \mathbb{B} = \sum_{ij} B_{ij}\omega_i \otimes \omega_j . \\
&\text{(iii) O tensor simétrico de segunda ordem } \; \mathbb{L} = \sum_{ij} L_{ij}\omega_i \otimes \omega_j . \\
&\text{(iv) A forma de Laguerre } \; \mathbb{C} = \sum_{i} C_i\omega_i .
\end{aligned} \tag{1.61}$$

As derivadas covariantes dos tensores $\mathbb{C}$, $\mathbb{L}$ e $\mathbb{B}$ com relação à métrica g são dadas por

$$\begin{aligned}
&dC_i + \sum_j C_j\omega_{ji} = \sum_j C_{i,j}\omega_j, \\
&dL_{ij} + \sum_k L_{ik}\omega_{kj} + \sum_k L_{kj}\omega_{ki} = \sum_k L_{ij,k}\omega_k, \\
&dB_{ij} + \sum_k B_{ik}\omega_{kj} + \sum_k B_{kj}\omega_{ki} = \sum_k B_{ij,k}\omega_k,
\end{aligned} \tag{1.62}$$

onde $w_{ik} = \langle dE_k(Y), E_j(Y) \rangle$ são 1-formas diferenciáveis em M.

Tomando a derivada exterior das equações dadas em (1.60), obtemos as seguintes relações entre estes invariantes (veja Apêndice A)

$$\begin{aligned}
&L_{ij,k} = L_{ik,j}, \\
&C_{i,j} - C_{j,i} = \sum_k (B_{ik}L_{kj} - B_{jk}L_{ki}), \\
&B_{ij,k} - B_{ik,j} = C_j\delta_{ik} - C_k\delta_{ij}, \\
&R_{ijkl} = L_{jk}\delta_{il} + L_{il}\delta_{jk} - L_{ik}\delta_{jl} - L_{jl}\delta_{ik},
\end{aligned} \tag{1.63}$$

onde R_{ijkl} é o tensor curvatura da métrica g. Além disso, temos as seguintes identidades (veja Apêndice A)

$$\begin{aligned}
&\sum_{ij} B_{ij}^2 = 1, \qquad \sum_i B_{ii} = 0, \qquad \sum_i B_{ij,i} = (n-1)C_j; \\
&\sum_i L_{ii} = -\frac{1}{2n}\langle \Delta Y, \Delta Y \rangle; \\
&R_{ik} = -(n-2)L_{ik} - \left(\sum_i L_{ii} \right) \delta_{ik}; \\
&R = -2(n-1)\sum_i L_{ii} = \frac{n-1}{n}\langle \Delta Y, \Delta Y \rangle .
\end{aligned} \tag{1.64}$$

No caso $n \geq 3$, temos da primeira e da terceira equação de (1.64) que C_i e L_{ij} são completamente determinados pelos invariantes $\{g, \mathbb{B}\}$. Portanto, obtemos o

Teorema 1.15. *([21]) Duas hipersuperfícies orientadas sem pontos umbílicos em $\mathbb{R}^{n+1}(n > 2)$ com curvaturas principais que não se anulam são equivalentes por transformações de Laguerre se, e somente se, elas possuem a mesma métrica de Laguerre g e a mesma segunda forma fundamental $\mathbb{B}$.*

No caso $n = 2$, um sistema invariante de Laguerre completo para superfícies em $\mathbb{R}^3$ é dado por $\{g, \mathbb{L}, \mathbb{B}\}$ obtido por Hu-Li em [18].

A seguir daremos relações entre os invariantes de Laguerre, dados em (1.60), e os invariantes Euclidianos de $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Proposição 1.16. *([22]) Considere $e_i, 1 \leq i \leq n$, uma base ortonormal com relação a métrica $dx.dx$ para TM, consistindo de vetores principais, isto é, $e_i(\xi) = -k_i e_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, onde k_i é o autovalor correspondente a e_i. Então, considerando as definições (1.56), temos que $r_i e_i, 1 \leq i \leq n$, forma uma base ortonormal para $d\xi.d\xi$ com base dual $\theta_i, 1 \leq i \leq n$. Além disso, os campos $E_i = \rho^{-1} r_i e_i, 1 \leq i \leq n$ formam uma base ortonormal na métrica de Laguerre $g = \rho^2 d\xi.d\xi$ com base dual $\omega_i = \rho k_i \theta_i$. Então, as seguintes igualdades se verificam*

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \rho^{-1}(r - r_i)\delta_{ij}, \\ C_i &= -\rho^{-2} r_i \left\{ e_i(r) - (r - r_i) e_i(\log \rho) \right\}. \end{aligned} \tag{1.65}$$

Demonstração: Vamos deduzir as duas primeiras equações de (1.65). Temos de (1.59) e (1.60) que

$$B_{ij} = \langle E_i(\eta), E_j(Y) \rangle, \qquad C_i = \langle E_i(\eta), N \rangle. \tag{1.66}$$

Definindo $y = (x.\xi, -x.\xi, \xi, 1)$, podemos escrever o vetor posição de x como $Y = \rho y$ e $\langle dy, dy \rangle = d\xi.d\xi$. Diferenciando, obtemos $e_i(y) = (e_i(\xi).x, -e_i(\xi).x, e_i(\xi), 0)$. Como $e_i(\xi) = -k_i e_i(x)$, temos

$$e_i(y) = -k_i \left(e_i(x).x, -e_i(x).x, e_i(x), 0 \right). \tag{1.67}$$

Diferenciando (1.58), temos que $e_i(\eta) = (e_i(x).x, -e_i(x).x, e_i(x), 0) + e_i(r)y + r e_i(y)$. Logo, de (1.67) obtemos

$$e_i(\eta) = (r - r_i) e_i(y) + e_i(r) y. \tag{1.68}$$

Por outro lado, diferenciando $Y = \rho y$, obtemos

$$e_i(Y) = e_i(\rho)y + \rho e_i(y). \tag{1.69}$$

De (1.66), (1.68) e (1.69), obtemos

$$\begin{aligned}
B_{ij} &= \rho^{-2} r_i r_j \langle e_i(\eta), e_j(Y)\rangle \\
&= \rho^{-1} r_i r_j (r - r_i) \langle e_i(y), e_j(y)\rangle \\
&= \rho^{-1} r_i r_j (r - r_j) e_i(\xi).e_j(\xi) \\
&= \rho^{-1}(r - r_j) e_i(x).e_j(x).
\end{aligned}$$

Portanto, $B_{ij} = \rho^{-1}(r - r_j)\delta_{ij}$, como havíamos afirmado.

Como $E_i = \rho^{-1} r_i e_i$, temos de (1.69) que

$$e_i(y) = \frac{1}{r_i} E_i(Y) - \rho^{-1} e_i(\log \rho) Y. \tag{1.70}$$

Substituindo (1.70) em (1.68), obtemos

$$e_i(\eta) = \frac{1}{r_i}(r - r_i) E_i(Y) + \rho^{-1}(e_i(r) - e_i(\log \rho)(r - r_i))Y. \tag{1.71}$$

Segue de (1.66), (1.69), (1.71) e (1.59) que

$$\begin{aligned}
C_i &= \langle E_i(\eta), N\rangle \\
&= \rho^{-1} r_i \left\langle \tfrac{1}{r_i}(r - r_i)E_i(Y), \tfrac{1}{n}\Delta Y + \tfrac{1}{2n^2}\langle \Delta Y, \Delta Y\rangle Y \right\rangle + \\
&\quad \rho^{-1} r_i \left\langle (\rho^{-1} e_i(r) - \rho^{-1} e_i(\log \rho)(r - r_i))Y, \tfrac{1}{n}\Delta Y + \tfrac{1}{2n^2}\langle \Delta Y, \Delta Y\rangle Y \right\rangle \\
&= \frac{\rho^{-2} r_i e_i(r) - \rho^{-2} r_i e_i(\log \rho)(r - r_i))Y}{n} \langle Y, \Delta Y\rangle .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$C_i = -\rho^{-2} r_i \{e_i(r) - e_i(\log \rho)(r - r_i)\}$$

como queríamos mostrar. □

Observação 1.17. Nas condições dadas na Proposição 1.16 pode-se provar também (ver

[22]) que

$$L_{ij} = \rho^{-2}\left\{Hess_{ij}(\log\rho) - r_i r_j e_i(\log\rho)(e_j\log\rho) + \frac{1}{2}(|\nabla\log\rho|^2 - 1)\delta_{ij}\right\}, \tag{1.72}$$

onde $\{Hess_{ij}\}$ é a matriz hessiana de $d\xi.d\xi$ e ∇ é seu operador gradiente.

Seja $\mathbb{S} : TM \to TM$ o operador auto-adjunto associado à segunda forma quadrática da imersão x, com relação a métrica $dx \cdot dx$, com raio principal r_i definido em (1.56). Por (1.65) temos que o operador segunda forma fundamental de Laguerre $\mathbb{B}$ é dado por $B_{ij} = \rho^{-1}(r - r_i)\delta_{ij}$. Então, o *operador auto-adjunto de Laguerre*, associado a $\mathbb{B}$, é definido por

$$\tilde{\mathbb{S}} = -\rho^{-1}(\mathbb{S}^{-1} - r\ Id) : TM \to TM. \tag{1.73}$$

Denotando por $\tilde{k_i}$ os autovalores para o operador $\tilde{\mathbb{S}}$, de (1.73), obtemos

$$\tilde{k_i} = \rho^{-1}(r - r_i). \tag{1.74}$$

O operador auto-adjunto de Laguerre é outro invariante de Laguerre, o qual, junto com a métrica de Laguerre, determina a hipersuperfície x de $\mathbb{R}^{n+1}$, a menos de equivalência de Laguerre, conforme Teorema 1.15.

1.6 Hipersuperfícies em formas espaciais de Laguerre

Usando as imersões de Laguerre σ e τ definidas em (1.35)-(1.36) e (1.47)-(1.48), respectivamente, cada hipersuperfície $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}_1$ ou $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}_0$ corresponde a uma hipersuperfície $x' : M \to \mathbb{R}^{n+1}$. Nesta seção estudamos as relações entre x e x', conforme [21].

Seja $\mathbb{R}^{n+1}_1$ o espaço semi-Euclidiano com produto interno $\langle,\rangle$ dado em (1.26). Seja $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}_1$ uma hipersuperfície orientada tipo-espaço no espaço semi-Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}_1$. Seja ξ o campo normal unitário de x com $\langle\xi,\xi\rangle = -1$. Definimos o operador auto-adjunto $S : TM \to TM$ por $d\xi = -dx \circ S$. Como S é auto-adjunto, todos os autovalores k_i são reais. Supondo que $k_i \neq 0$, definimos $r_i = 1/k_i$ o raio de curvatura de x e $r = (r_1 + r_2 + ... + r_n)/n$ como o raio de curvatura média de x. Seja $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ uma base ortonormal para TM com relação a métrica $\langle dx, dx\rangle$, consistindo de autovalores de

S, isto é,

$$e_i(\xi) = -k_i e_i(x), \;\; 1 \leq i \leq n. \tag{1.75}$$

Em particular, temos que $e_i(\xi_1) = -k_i e_i(x_1)$, com $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Definimos

$$\begin{aligned}
&Y = \rho(\langle x, \xi\rangle, -\langle x, \xi\rangle, 1, \xi), \\
&\eta = \left(\tfrac{1}{2}\left(1 + \langle x, x\rangle\right), \tfrac{1}{2}\left(1 - \langle x, x\rangle\right), 0, x\right) + r\left(\langle x, \xi\rangle, -\langle x, \xi\rangle, 1, \xi\right), \\
&g = \rho^2 \langle d\xi, d\xi\rangle = \textstyle\sum_i \left(r_i - r\right)^2 \langle d\xi, d\xi\rangle,
\end{aligned} \tag{1.76}$$

o *vetor posição de Laguerre*, a *aplicação normal de Laguerre* e g a *métrica de Laguerre* da imersão x, respectivamente.

Definimos $\sigma(x, \xi) = (x', \xi') \in U\mathbb{R}^{n+1}$, onde $\sigma : U\mathbb{R}^{n+1}_1 \to U\mathbb{R}^{n+1}$ é a imersão de Laguerre dada por (1.35). Obtemos de (1.36) e (1.75) que

$$e_i(x') = -(r_i\xi_1 + x_1)e_i(\xi'), \;\; 1 \leq i \leq n. \tag{1.77}$$

Segue que e_i é um vetor principal para a hipersuperfície de Laguerre $(x', \xi') : M \to U\mathbb{R}^{n+1}$ correspondente ao raio de curvatura

$$r_i' = r_i\xi_1 + x_1, \tag{1.78}$$

o que implica nas seguintes relações entre os raios de curvatura média r' e r:

$$r' = r\xi_1 + x_1, \quad (\rho')^2 = \sum_i (r_i' - r')^2 = \xi_1^2 \sum_i (r_i - r)^2 = \xi_1^2 \rho^2. \tag{1.79}$$

Temos que o vetor posição de Laguerre e a aplicação normal de Laguerre de x e x' são dados por

$$\begin{aligned}
Y &= \rho(\langle x, \xi\rangle, -\langle x, \xi\rangle, 1, \xi) = \rho'(x'.\xi', -x'.\xi', \xi', 1) = Y', \\
\eta &= \left(\tfrac{1}{2}\left(1 + \langle x, x\rangle\right), \tfrac{1}{2}\left(1 - \langle x, x\rangle\right), 0, x\right) + r\left(\langle x, \xi\rangle, -\langle x, \xi\rangle, 1, \xi\right) \\
&= \left(\tfrac{1}{2}(1 + |x'|^2), \tfrac{1}{2}(1 - |x'|^2), x', 0\right) + r'(x'.\xi', -x'.\xi', \xi', 1) = \eta'.
\end{aligned}$$

Assim, as métricas de Laguerre são dadas por

$$g = \rho^2 \langle d\xi, d\xi \rangle = (\rho^{'})^2 d\xi^{'}.d\xi^{'} = g^{'}.$$

De (1.75) temos que $r_i e_i, 1 \leq i \leq n$, forma uma base ortonormal na terceira forma fundamental $\langle d\xi, d\xi \rangle$. Como a métrica de Laguerre de x é dada por $g = \rho^2 \langle d\xi, d\xi \rangle$ segue que $E_i = \rho^{-1} r_i e_i, 1 \leq i \leq n$ forma uma base ortonormal na métrica g com base dual $\omega_i = \rho k_i \theta_i$, onde θ_i é a base dual de e_i. Obtemos que os invariantes de Laguerre para $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}_1$ são dados pelas seguintes expressões:

$$\mathbb{B} = \sum_{ij} B_{ij} \omega_i \otimes \omega_j, \qquad \mathbb{L} = \sum_{ij} = L_{ij} \omega_i \otimes \omega_j \qquad \mathbb{C} = \sum_i C_i \omega_i,$$

onde

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \rho^{-1}(r - r_i)\delta_{ij}, \qquad C_i = -\rho^{-2} r_i \left\{ e_i(r) - (r - r_i) e_i(\log \rho) \right\}, \\ L_{ij} &= \rho^{-2} \{ \mathrm{Hess}_{ij}(\log \rho) - r_i r_j e_i(\log \rho) e_j(\log \rho) - \tfrac{1}{2} \left(|\nabla \log \rho|^2 - 1 \right) \delta_{ij} \}, \end{aligned} \tag{1.80}$$

onde Hess_{ij} e ∇ são, respectivamente, a matriz hessiana e o gradiente com relação à terceira forma fundamental $\langle d\xi, d\xi \rangle$ de x. A demonstração das equações dadas em (1.80) é análoga à demonstração das equações dadas em (1.65) e (1.72).

De modo análogo, vamos relacionar uma imersão $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}_0$ com a correspondente hipersuperfície $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Sejam $\mathbb{R}^{n+2}_1$ o espaço semi-Euclidiano com produto interno dado em (1.37) e $\mathbb{R}^{n+1}_0$ o espaço degenerado em $\mathbb{R}^{n+2}_1$ definido em (1.38). Sejam $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}_0$ uma hipersuperfície orientada tipo-espaço no espaço degenerado $\mathbb{R}^{n+1}_0$ e ξ o único vetor em $\mathbb{R}^{n+2}_1$ satisfazendo

$$\langle \xi, dx \rangle = 0, \;\; \langle \xi, \xi \rangle = 0, \;\; \langle \xi, \nu \rangle = 1,$$

onde $\nu = (1, \mathbf{0}, 1) \in \mathbb{R}^{n+2}_1$ é o vetor tipo-luz com $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

Definimos o *operador auto-adjunto* $S : TM \to TM$ por $d\xi = -dx \circ S$. Como S é auto-adjunto, todos os autovalores k_i são reais. Seja $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ uma base ortonormal para TM com relação a $\langle dx, dx \rangle$, consistindo de autovalores de S, isto é,

$$e_i(\xi) = -k_i e_i(x), \;\; 1 \leq i \leq n. \tag{1.81}$$

Supondo que $k_i \neq 0$, definimos $r_i = 1/k_i$ o raio de curvatura de x e $r = (r_1 + r_2 + ... + r_n)/n$ como o raio de curvatura média de x. Definimos

$$\begin{aligned} &Y = \rho(\langle x, \xi \rangle, -\langle x, \xi \rangle, \xi), \\ &\eta = \left(\tfrac{1}{2}(1 + \langle x, x \rangle), \tfrac{1}{2}(1 - \langle x, x \rangle), x\right) + r(\langle x, \xi \rangle, -\langle x, \xi \rangle, \xi), \\ &g = \rho^2 \langle d\xi, d\xi \rangle = \textstyle\sum_i (r_i - r)^2 \langle d\xi, d\xi \rangle, \end{aligned} \tag{1.82}$$

o *vetor posição de Laguerre*, a *aplicação normal de Laguerre* e g a *métrica de Laguerre* da imersão x, respectivamente.

De $\tau(x, \xi) = (x', \xi') \in U\mathbb{R}^{n+1}$, obtemos uma hipersuperfície $x' : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, onde x' e ξ' são dados em (1.48). Obtemos de (1.48) e (1.81) que

$$e_i(x') = -(r_i \xi_1 + x_1) e_i(\xi'), \;\; 1 \leq i \leq n, \tag{1.83}$$

onde $x = (x_1, x_0, x_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $\xi = (\xi_1 + 1, \xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Segue que e_i é uma vetor principal para a hipersuperfície de Laguerre $(x', \xi') : M \to U\mathbb{R}^{n+1}$ correspondente ao raio de curvatura

$$r_i' = r_i \xi_1 + x_1, \tag{1.84}$$

o que implica nas seguintes relações entre os raios de curvatura média r' e r:

$$r' = r\xi_1 + x_1, \quad (\rho')^2 = \sum_i (r_i' - r')^2 = \xi_1^2 \sum_i (r_i - r)^2 = \xi_1^2 \rho^2. \tag{1.85}$$

Temos que o vetor posição de Laguerre e a aplicação normal de Laguerre de x e x' são dados por

$$\begin{aligned} Y &= \rho(\langle x, \xi \rangle, -\langle x, \xi \rangle, \xi) = \rho'(x'.\xi', \xi', \xi', 1) = Y', \\ \eta &= \left(\tfrac{1}{2}(1 + \langle x, x \rangle), \tfrac{1}{2}(1 - \langle x, x \rangle), x\right) + r(\langle x, \xi \rangle, -\langle x, \xi \rangle, \xi) \\ &= \left(\tfrac{1}{2}(1 + |x'|^2), \tfrac{1}{2}(1 - |x'|^2), x', 0\right) + r'(x'.\xi', -x'.\xi', \xi', 1) = \eta', \end{aligned}$$

onde $\rho' = \sum_i (r_i' - r')^2$ e $\rho = \sum_i (r_i - r)^2$. Assim, as métricas de Laguerre são dadas por

$$g = \left\langle \rho^2 d\xi, d\xi \right\rangle = (\rho')^2 d\xi'.d\xi' = g'.$$

De (1.81) temos que $r_i e_i, 1 \leq i \leq n$, forma uma base ortonormal para a terceira forma fundamental $\langle d\xi, d\xi\rangle$. Como a métrica de Laguerre de x é dada por $g = \rho^2 d\xi.d\xi$ segue que $E_i = \rho^{-1} r_i e_i, 1 \leq i \leq n$ forma uma base ortonormal para g com base dual $\omega_i = \rho k_i \theta_i$, onde θ_i é a base dual de e_i. Obtemos que os invariantes de Laguerre para $x : M \to \mathbb{R}_0^{n+1}$ são dados por

$$\mathbb{B} = \sum_{ij} B_{ij}\omega_i \otimes \omega_j, \qquad \mathbb{L} = \sum_{ij} L_{ij}\omega_i \otimes \omega_j \qquad \mathbb{C} = \sum_{i} C_i \omega_i,$$

onde

$$\begin{aligned} &B_{ij} = \rho^{-1}(r - r_i)\delta_{ij}, \qquad C_i = -\rho^{-2} r_i \left\{e_i(r) - (r - r_i)e_i(\log \rho)\right\}, \\ &L_{ij} = \rho^{-2}\{\mathrm{Hess}_{ij}(\log \rho) - r_i r_j e_i(\log \rho) e_j(\log \rho) + \tfrac{1}{2}|\nabla \log \rho|^2 \delta_{ij}\}, \end{aligned} \tag{1.86}$$

onde Hess_{ij} e ∇ são, respectivamente, a matriz hessiana e o gradiente com relação à terceira forma fundamental $\langle d\xi, d\xi\rangle$. A demonstração das equações dadas em (1.86) é análoga à demonstração das equações dadas em (1.65) e (1.72).

Capítulo 2

Sobre hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre em $\mathbb{R}^{n+1}$

Em [23], Li-Sun consideraram uma hipersuperfície $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam e introduziram o conceito de hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre em $\mathbb{R}^{n+1}$. Eles mostraram que elas são hipersuperfícies de Dupin e classificaram as hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre em $\mathbb{R}^4$ (ver Teorema 2.12).

Em [22], foram classificadas as hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$ com segunda forma fundamental de Laguerre paralela. Estas hipersuperfícies, a menos de transformação de Laguerre, são abertos de duas hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre. Estes resultados foram revistos na Seção 2.1, pois serão úteis ao desenvolvimento dos principais resultados das seções seguintes (para mais detalhes veja [22]).

As hipersuperfícies de Dupin no espaço Euclidiano com duas curvaturas principais distintas são conhecidas como cíclides de Dupin. Na seção 2.2, mostramos que hipersuperfícies de Dupin com duas curvaturas principais distintas e que não se anulam em $\mathbb{R}^{n+1}$ são hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre.

Na seção 2.3 mostramos que hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre em $\mathbb{R}^{n+1}$ com duas curvaturas principais distintas são as hipersuperfícies com segunda forma fundamental de Laguerre paralela em $\mathbb{R}^{n+1}$. Então, obtemos a classificação das hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre com duas curvaturas principais distintas em $\mathbb{R}^{n+1}$.

2.1 Hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre em $\mathbb{R}^{n+1}$

Nesta seção introduzimos as hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre em $\mathbb{R}^{n+1}$ definidas em [23]. Mostramos que estas hipersuperfícies são, em particular, hipersuperfícies de Dupin (veja também [23]).

Consideremos $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam tal que os autovalores do operador auto-adjunto de Laguerre são constantes. Então, x é Dupin se, e somente se, x é isoparamétrica de Laguerre. Concluímos que as cíclides de Dupin em $\mathbb{R}^{n+1}$ são isoparamétricas de Laguerre.

Definição 2.1. Uma hipersuperfície $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ é *Dupin* se suas curvaturas principais forem constantes ao longo de suas correspondentes linhas de curvatura. Neste caso, x é dita própria se o número de curvaturas principais distintas for constante.

Definição 2.2. ([22]) Seja $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Considere a métrica de Laguerre e a segunda forma fundamental de Laguerre de x dadas em (1.61). Dizemos que x possui *segunda forma fundamental de Laguerre paralela* se $\nabla\mathbb{B} = 0$, onde ∇ é a conexão de Levi-Civita da métrica g.

Definição 2.3. ([23]) Uma hipersuperfície $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam é chamada *hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre* se a forma de Laguerre $\mathbb{C} \equiv 0$ e os autovalores do operador auto-adjunto de Laguerre $\tilde{S}$, dados em (1.74), são todos constantes.

Na próxima seção apresentamos exemplos e, também, a classificação geral das hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$ com segunda forma fundamental de Laguerre paralela dada por [22]. Da Definição 2.3 segue o seguinte teorema (veja também [23]).

Teorema 2.4. *([23]) Seja $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfícies isoparamétrica de Laguerre. Então $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície de Dupin.*

Demonstração: Para cada curvatura principal k_i de x, temos $r_i = \frac{1}{k_i}$ seu raio de curvatura. Seja $\{e_1, ..., e_i, ...e_n\}$ uma base para TM consistindo de autovetores do operador auto-adjunto S de x, com relação a métrica $dx.dx$. Como $C_i = 0, \ \forall i$, obtemos de (1.65) que

$$e_i(r) - e_i(\log\rho)(r - r_i) = 0. \tag{2.1}$$

Por outro lado, temos que as funções $\tilde{k}_i = \rho^{-1}(r - r_i)$ dadas em (1.74) são todas constantes. Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= e_i(\tilde{k}_i) \\ &= e_i(\rho^{-1}(r - r_i)) \\ &= -\rho^{-2}e_i(\rho)(r - r_i) + \rho^{-1}e_i(r - r_i) \\ &= -\rho^{-1}\{e_i(\log\rho)(r - r_i) - e_i(r - r_i)\} \\ &= -\rho^{-1}\{e_i(\log\rho)(r - r_i) - e_i(r) + e_i(r_i)\}, \end{aligned}$$

Concluímos que

$$e_i(r_i) = e_i(r) - e_i(\log\rho)(r - r_i). \tag{2.2}$$

De (2.1) e (2.2) segue que $e_i(r_i) = 0$. Portanto $e_i(k_i) = 0$, ou seja, x é uma hipersuperfície de Dupin. □

Como consequência do Teorema 2.4 temos o seguinte corolário.

Corolário 2.5. *Seja $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam, tal que os autovalores do operador auto-adjunto de Laguerre são contantes. Então, x é uma hipersuperfície de Dupin se, e somente se, x é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre.*

Demonstração: Uma parte da prova é consequência imediata do Teorema 2.4. Reciprocamente, se x é uma hipersuperfície de Dupin tal que as funções $\tilde{k}_i$ dadas em (1.74) são contantes, segue que a equação (2.2) vale, o que implica que $C_i = 0, \forall i$. Portanto, x é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre. □

Proposição 2.6. *Seja $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície com duas curvaturas principais distintas e que não se anulam k_1 e k_2 ($\frac{1}{k_1} = r_1 < r_2 = \frac{1}{k_2}$) de multiplicidade $n+1-m$ e $m-1$, respectivamente. Então, os autovalores do operador auto-adjunto de Laguerre $\tilde{\mathbb{S}}$ são constantes, e são dados por*

$$\tilde{k}_1 = \sqrt{\frac{m-1}{(n+1-m)n}} \qquad \text{e} \qquad \tilde{k}_2 = -\sqrt{\frac{n+1-m}{(m-1)n}}.$$

Demonstração: Sejam $r_1 = \frac{1}{k_1}$ e $r_2 = \frac{1}{k_2}$ os raios de curvatura de x de multiplicidade $n+1-m$ e $m-1$, respectivamente, satisfazendo $r_2 - r_1 > 0$ já que $r_1 < r_2$. Por (1.56) e (1.74) temos

$$\tilde{k}_1 = \rho^{-1}(r - r_1), \qquad \tilde{k}_2 = \rho^{-1}(r - r_2), \qquad r = \frac{(n+1-m)r_1 + (m-1)r_2}{n}. \tag{2.3}$$

Como $\rho^2 = \sum_i (r - r_i)^2$, temos que

$$\rho^2 = (n+1-m)(r-r_1)^2 + (m-1)(r-r_2)^2, \tag{2.4}$$

onde, de (2.3), temos que

$$r - r_1 = \frac{m-1}{n}(r_2 - r_1), \quad r - r_2 = \frac{-(n+1-m)}{n}(r_2 - r_1). \tag{2.5}$$

Portanto, substituindo (2.5) e (2.5) em (2.4) obtemos

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{(n+1-m)(m-1)^2 + (m-1)(n+1-m)^2}{n^2}(r_2 - r_1)^2 \\ &= \frac{(m-1)(n+1-m)}{n}(r_2 - r_1)^2, \end{aligned}$$

implicando que

$$\rho^{-1} = \frac{1}{r_2 - r_1}\sqrt{\frac{n}{(m-1)(n+1-m)}}. \tag{2.6}$$

Logo, substituindo (2.6) em (2.3), obtemos

$$\tilde{k}_1 = \sqrt{\frac{m-1}{n(n+1-m)}}, \quad \tilde{k}_2 = -\sqrt{\frac{n+1-m}{n(m-1)}} \tag{2.7}$$

como queríamos provar. □

Segue da Proposição 2.6 e do Corolário 2.5 o seguinte corolário.

Corolário 2.7. *Seja $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de Dupin com duas curvaturas principais distintas e que não se anulam. Então, x é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre.*

2.2 Classificação de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$ com segunda forma fundamental de Laguerre paralela

Nesta seção apresentamos a classificação das hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$ com segunda forma fundamental de Laguerre paralela dada por [22]. A menos de transformação de Laguerre, mostramos que as únicas hipersuperfícies com segunda forma fundamental de Laguerre paralela em $\mathbb{R}^{n+1}$, parametrizadas por linhas de curvatura, são dadas no Exemplo 2.8 e no Exemplo 2.9.

Conforme (1.62), a derivada covariante do tensor $\mathbb{B}$, em relação a g, é dada por

$$dB_{ij} + \sum_{k=1}^{n} B_{ik}\omega_{kj} + \sum_{k=1}^{n} B_{kj}\omega_{ki} = \sum_{k=1}^{n} B_{ij,k}\omega_k. \tag{2.8}$$

Primeiro daremos exemplos de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $\nabla\mathbb{B} = 0$. Para maiores detalhes veja [22].

Exemplo 2.8. Para qualquer inteiro m com $1 \leq m-1 \leq n$ denotamos $H^{m-1} = \{(v,w) \in \mathbb{R}^m_1 / v.v - w^2 = -1, w > 0\}$ o espaço hiperbólico imerso no espaço de Minkowski $\mathbb{R}^m_1$. Definimos $x : \mathbb{S}^{n+1-m} \times H^{m-1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ por

$$x(u,v,w) = \left(\frac{u}{w}(1+w), \frac{v}{w}\right).$$

Então, x é uma hipersuperfície com normal unitária $\xi = \left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right)$, e a primeira e segunda formas fundamentais são, respectivamente, dadas por

$$\begin{aligned} I &= dx.dx &&= \frac{1}{w^2}\{(1+w)^2 du.du + dv.dv - dw^2\}, \\ II &= -dx.d\xi &&= -\frac{1}{w^2}\{(1+w)du.du + dv.dv - dw^2\}. \end{aligned}$$

Portanto, x está parametrizada por linhas de curvatura e possui duas curvaturas principais distintas $-\frac{1}{w+1}$ e -1 com multiplicidade $n+1-m$ e $m-1$, respectivamente. A métrica de Laguerre g de x é dada por

$$g = \rho^2 d\xi \cdot d\xi = \frac{(m-1)(n+1-m)}{n}(du.du + dv.dv - dw^2),$$

e a segunda forma fundamental de Laguerre $\mathbb{B} = \sum_{ij} B_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$, onde

$$
\begin{aligned}
B_{ij} &= \sqrt{\frac{m-1}{(n+1-m)n}}\delta_{ij}, \quad 1 \le i, j \le n+1-m, \\
B_{ij} &= -\sqrt{\frac{n+1-m}{(m-1)n}}\delta_{ij}, \quad n+2-m \le i, j \le n.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

De (1.65), obtemos

$$C_i = 0, \quad 1 \le i \le n.$$

Segue de (2.8) e (2.9) que a segunda forma fundamental de Laguerre x é paralela e, da Definição 2.2 segue que x é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre.

Exemplo 2.9. Para quaisquer inteiros $m_1, m_2, ..., m_s$ com $m_1+m_2+...+m_s = n$, com $s \ge 2$, e constantes distintas não nulas $\lambda_1, ..., \lambda_s$ definimos $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}_0$ uma hipersuperfície orientada tipo-espaço em $\mathbb{R}^{n+1}_0$ dada por

$$x = \left(\frac{\lambda_1|u_1|^2 + \lambda_2|u_2|^2 + ... + \lambda_s|u_s|^2}{2}, u_1, u_2, ..., u_s, \frac{\lambda_1|u_1|^2 + \lambda_2|u_2|^2 + ... + \lambda_s|u_s|^2}{2} \right),$$

onde $(u_1, u_2, ..., u_s) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times ...\mathbb{R}^{m_s} = \mathbb{R}^n$ e $|u_i|^2 = u_i.u_i$, $i = 1, ..., s$. Neste caso, temos que o campo normal unitário ξ de x é dado por

$$\xi = \left(-\frac{|\lambda_1 u_1|^2 + ... + |\lambda_s u_s|^2 - 1}{2}, -\lambda_1 u_1, -\lambda_2 u_2, ..., -\lambda_s u_s, -\frac{|\lambda_1 u_1|^2 + ... + |\lambda_s u_s|^2 + 1}{2} \right).$$

Temos que ξ satisfaz as condições

$$\langle \xi, dx \rangle = 0, \quad \langle \xi, \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi, \nu \rangle = 1.$$

A primeira e segunda formas fundamentais de x são, respectivamente, dadas por

$$I = du_1.du_1 + ... + du_s.du_s$$

e

$$II = \lambda_1 du_1.du_1 + ... + \lambda_s du_s.du_s.$$

Note que x está parametrizada por linhas de curvatura e suas curvaturas principais são $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ com multiplicidade $m_1, m_2, ..., m_s$, respectivamente. Obtemos

$$r_i = \frac{1}{\lambda_i}, \qquad r = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + ... + m_s r_s}{n}.$$

De (1.86), obtemos que os invariantes de x são dados por

$$\rho^2 = \sum_{i=1}^{s} m_i (r_i - r)^2 = \text{constante}, \ \ C_i = 0, \ \ L_{ij} = 0, \ \ 1 \leq i, j \leq n,$$
$$B_{ij} = \tilde{k}_i \delta_{ij}, \ \ 1 \leq i, j \leq n,$$

onde

$$\tilde{k}_i = \frac{r - r_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{s} m_j (r_j - r)^2}} \tag{2.10}$$

e cada $\tilde{k}_i$ possui multiplicidade m_i.

Assim, obtemos de (1.64) que x é plana com relação à métrica g, isto é,

$$R_{ijkl} = 0, 1 \leq i, j, k, l \leq n,$$

a segunda forma fundamental $\mathbb{B} = \sum_{ij} B_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$ é paralela, e x é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre.

Consideremos a imersão de Laguerre τ de $U\mathbb{R}_0^{n+1}$ em $U\mathbb{R}^{n+1}$. Então, de (1.47) e (1.48) temos $\tau(x, \xi) = (x', \xi') : U\mathbb{R}_0^{n+1} \to U\mathbb{R}^{n+1}$, e obtemos a hipersuperfície $x' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, que por (1.48) é dada por:

$$x' = (0, u_1, ..., u_s) + \frac{\sum_{i=1}^{s} \lambda_i |u_i|^2}{\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^2 |u_i|^2 + 1} (1, -\lambda_1 u_1, ..., -\lambda_s u_s) \tag{2.11}$$

e sua normal unitária $\xi' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$ é dada por

$$\xi' = \frac{1}{\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^2 |u_i|^2 + 1} \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^2 |u_i|^2 - 1, 2\lambda_1 u_1, ..., 2\lambda_s u_s \right)$$

Então, x' é uma hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura e, de

(1.84), segue que suas curvaturas principais são dadas por

$$\lambda_i^{'} = \frac{2\lambda_i}{-\sum_{j=1}^{s}\lambda_j^2\left|u_j\right|^2 + \lambda_i\sum_{j=1}^{s}\lambda_j\left|u_j\right|^2 - 1}, 1 \leq i \leq s. \tag{2.12}$$

Segue de (1.65), (1.83), (1.84) e (1.86) que $x^{'}$ é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre cuja métrica de Laguerre $g^{'} = g$ e autovalores do operador auto-adjunto de Laguerre $k_i^{'} = k_i$, dados por (2.10).

Exemplo 2.10. Corro-Ferreira-Tenenblat [15], aplicando transformações de Ribaucour ao plano, obtiveram uma família de hipersuperfícies de Dupin em $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$x(u_1,...,u_n) = (u_1,...,u_n,0) - \frac{2\sum_{j=1}^{n} f_j}{\sum_{j=1}^{n}(f_j^{'})^2 + b^2}(f_1^{'},...,f_n^{'},-b), \tag{2.13}$$

onde $(u_1,...,u_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$ e

$$f_j = b_{j2}u_j^2 + b_{j1}u_j + b_{j0} \ \text{ para } \ b \neq 0, b_{j2}, b_{j1}, b_{j0} \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ 1 \leq j \leq n, \tag{2.14}$$

e b_{j2} são contantes não nulas e todas distintas. Fazendo mudança de coordenadas $u_j = v_j - \frac{b_{j1}}{2b_{j2}}$, obtemos de (2.13) que

$$\begin{aligned} x(v_1,...,v_n) = \quad & (v_1,...,v_n,0) + \frac{2\sum_{j=1}^{n} b_{j2}v_j^2 - L}{\sum_{j=1}^{n} b_{j2}^2 v_j^2 + \frac{b^2}{4}}(-b_{12}v_1,\cdots,-b_{n2},\frac{b}{2}) - \\ & -(\frac{b_{11}}{2b_{12}},\cdots,\frac{b_{n1}}{2b_{n2}},0), \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde $L = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{j1}^2}{4b_{12}} - \sum_{j} b_{j0}$. Note que, quando $L = 0$ e $b = 2$, a família dada em (2.15) dá exatamente a família dada em (2.11), a menos de uma translação em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Em [22] foi obtido o seguinte teorema de classificação:

Teorema 2.11 ([22]). *Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável sem pontos umbílicos com curvaturas principais que não se anulam. Se sua segunda forma fundamental de Laguerre é paralela então x é Laguerre equivalente a um subconjunto de uma das seguintes hipersuperfícies:*

1. *a hipersuperfície orientada dada pelo Exemplo 2.8;*

2. *a imagem pela isometria de Laguerre* τ *da hipersuperfície orientada* $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^{n+1}$ *dada no Exemplo 2.9.*

Em [23], os autores Li e Sun mostraram que hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre em $\mathbb{R}^4$ têm segunda forma fundamental de Laguerre paralela. Então, do Teorema 2.11 eles encontraram a seguinte classificação:

Teorema 2.12 ([23])**.** *Seja* $x : M^3 \to \mathbb{R}^4$ *uma hipersuperfície orientável sem pontos umbílicos com curvaturas principais que não se anulam. Se* x *é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre, então* x *é Laguerre equivalente a uma parte aberta de uma das seguintes hipersuperfícies:*

1. *a hipersuperfície orientada* $x : \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{H}^{4-k} \to \mathbb{R}^4$, $2 \leq k \leq 3$, *dada pelo Exemplo 2.8;*

2. *a imagem pela isometria de Laguerre* τ *da hipersuperfície orientada* $x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_0^4$ *dada no Exemplo 2.9.*

2.3 Classificação de hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre em $\mathbb{R}^{n+1}$ com duas curvaturas principais distintas

Em [23] os autores Li-Sun classificaram as hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre em $\mathbb{R}^4$. Eles mostraram que todas as hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre em $\mathbb{R}^4$ possuem segunda forma fundamental de Laguerre paralela.

A classificação das hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, ainda não foi obtida. Nesta seção classificamos todas hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre em $\mathbb{R}^{n+1}$ com duas curvaturas principais distintas, mostrando que sua segunda forma fundamental de Laguerre é paralela.

Teorema 2.13. *Seja* $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ *uma hipersuperfície orientável com duas curvaturas principais distintas e que não se anulam. Então,* x *é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre se, e somente se, sua segunda forma fundamental de Laguerre é paralela.*

Demonstração: Considere $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície com duas curvaturas principais distintas e que não se anulam, k_1 e k_2, com multiplicidades m e $n-m$, respectivamente. Faremos a seguinte convenção de índices:

$$1 \leq i,j \leq m, \;\; m+1 \leq \alpha,\beta \leq n, \;\; 1 \leq a,b,c \leq n.$$

Seja $\{E_1,...,E_n\}$ uma base ortonormal para TM com relação à métrica de Laguerre g formada por autovetores com base dual $\{\omega_1,...,\omega_n\}$. Então, a segunda forma fundamental de Laguerre de x é dada por

$$B_{ij} = \tilde{k}_1\delta_{ij}, \quad B_{\alpha\beta} = \tilde{k}_2\delta_{\alpha\beta}, \quad B_{\alpha i} = 0. \tag{2.16}$$

Suponha que x possui segunda forma fundamental de Laguerre paralela. Então da fórmula

$$dB_{ab} + \sum_{c=1}^{n} B_{ac}\omega_{cb} + \sum_{c=1}^{n} B_{cb}\omega_{ca} = \sum_{c=1}^{n} B_{ab,c}\omega_c, \tag{2.17}$$

obtemos que as funções $\tilde{k}_1$ e $\tilde{k}_2$ são constantes. Por outro lado, segue de (1.64) que

$$B_{ba,b} = (n-1)C_a, \tag{2.18}$$

o que implica que $C_a = 0, \forall a$. Portanto, x é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre.

Reciprocamente, suponha que x seja uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre. Então, $\tilde{k}_1$ e $\tilde{k}_2$ são constantes e $C_a = 0, \forall a$. É suficiente demonstrarmos que $B_{ab,c} = 0$, para $1 \leq a,b,c \leq n$. Desta forma, obtemos que a segunda forma fundamental de Laguerre de x é paralela e o resultado segue do Teorema 2.11.

Da fórmula

$$dB_{ij} + \sum_{a=1}^{n} B_{ia}\omega_{aj} + \sum_{a=1}^{n} B_{aj}\omega_{ai} = \sum_{a=1}^{n} B_{ij,a}\omega_a$$

e de (2.16), segue que

$$\tilde{k}_1\omega_{ij} + \tilde{k}_1\omega_{ji} = \sum_{a=1}^{n} B_{ij,a}\omega_a.$$

Portanto, obtemos

$$B_{ij,a} = 0, 1 \leq i,j \leq m, 1 \leq a \leq n, \tag{2.19}$$

pois $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$.

Também, de (2.8) temos

$$dB_{\alpha\beta} + \sum_{a=1}^{n} B_{\alpha a}\omega_{a\beta} + \sum_{a=1}^{n} B_{a\beta}\omega_{a\alpha} = \sum_{a=1}^{n} B_{\alpha\beta,a}\omega_a$$

e de (2.16), segue que

$$\tilde{k}_2\omega_{\alpha\beta} + \tilde{k}_2\omega_{\beta\alpha} = \sum_{a=1}^{n} B_{\alpha\beta,a}\omega_a.$$

Portanto, obtemos

$$B_{\alpha\beta,a} = 0, m+1 \leq \alpha, \beta \leq n, 1 \leq a \leq n, \tag{2.20}$$

pois $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$.

Logo, de (2.19) e (2.20) e da simetria de $B_{ab,c}$, concluímos que

$$B_{ab,c} = 0, 1 \leq a, b, c \leq n,$$

isto é, a segunda forma fundamental de Laguerre de x é paralela, como queríamos demonstrar. □

Como consequência imediata do Teorema 2.11 e do Teorema 2.13 obtemos a seguinte classificação.

Corolário 2.14. *Seja $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável sem pontos umbílicos com duas curvaturas principais distintas e que não se anulam. Se x é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre, então x é Laguerre equivalente a um subconjunto de uma das seguintes hipersuperfícies:*

1. *a hipersuperfície orientada dada pelo Exemplo 2.8;*

2. *a imagem de τ da hipersuperfície orientada $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^{n+1}$ dada no Exemplo 2.9, com $s = 2$.*

Capítulo 3

Caracterização de Hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre em $\mathbb{R}^{n+1}$

Considere $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície sem pontos umbílicos com curvaturas principais k_i. Para quaisquer três curvaturas principais distintas k_i, k_j, k_l, em um ponto, definimos as curvaturas de Möbius (veja [10]) como

$$\mathcal{C}^{ijl} = \frac{k_i - k_j}{k_l - k_j} \qquad \text{para } \ i, j, l \ \text{ distintos.}$$

As curvaturas de Möbius são invariantes sob transformações de Möbius. Por analogia, para quaisquer três curvaturas principais distintas e que não se anulam, k_i, k_j, k_l, em um ponto, definimos as curvaturas de Laguerre (veja seção 3.1) como

$$\mathcal{L}^{ijl} = \frac{(k_i - k_j)k_l}{(k_l - k_j)k_i} \qquad \text{para } \ i, j, l \ \text{ distintos,}$$

e mostramos que elas são invariantes sob transformações de Laguerre.

Em [35], Rodrigues e Tenenblat mostraram que uma hipersuperfície isoparamétrica de Möbius na esfera é uma cíclide de Dupin ou uma hipersuperfície de Dupin com curvatura de Möbius constante. Motivados por este resultado, mostramos no Teorema 3.4 que as hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre em $\mathbb{R}^{n+1}$ são as cíclides de Dupin ou as hipersuperfícies de Dupin com curvatura de Laguerre constante.

3.1 Curvaturas de Laguerre para hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$

Nesta seção, introduzimos a curvatura de Laguerre para hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$ e mostramos que ela é invariante por transformações de Laguerre. Este invariante já era conhecido, estamos introduzindo esta nomenclatura (veja [21]).

Seja $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam k_i. Seja $\xi : M \to \mathbb{S}^n$ seu campo normal unitário. Seja $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ uma base ortonormal para TM com relação à métrica $dx.dx$ formada por vetores principais unitários, isto é, $e_i(x).e_j(x) = \delta_{ij}$ e $e_i(\xi) = -k_i e_i(x)$.

Sejam $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{S}^n \to C^{n+3} \subset \mathbb{R}^{n+4}_2$ dados por (1.11), ou seja,

$$\gamma_1 = \left(\frac{1+|x|^2}{2}, \frac{1-|x|^2}{2}, x, 0\right), \qquad \gamma_2 = (x.\xi, -x.\xi, \xi, 1). \tag{3.1}$$

Definição 3.1. Seja $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Para quaisquer três curvaturas principais k_i, k_j e k_l, distintas, definimos

$$\mathcal{L}^{ijl} = \frac{(k_i - k_j)k_l}{(k_l - k_j)k_i} \tag{3.2}$$

a *curvatura de Laguerre* de x.

Para cada curvatura principal que não se anula, seja $r_i = \frac{1}{k_i}$ o raio de curvatura de x. Desta forma, podemos escrever as curvaturas de Laguerre de x como:

$$\mathcal{L}^{ijl} = \frac{r_i - r_j}{r_l - r_j}. \tag{3.3}$$

Em alguns cálculos, por conveniência, vamos utilizar essa fórmula para calcular as curvaturas de Laguerre.

Teorema 3.2. *Sejam $x, \bar{x} : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ duas hipersuperfícies orientáveis sem pontos umbílicos e cujas curvaturas principais não se anulam. Sejam $\xi, \bar{\xi} : M^n \to \mathbb{S}^n$, k_i e $\bar{k}_i$ os campos normais unitários e as curvaturas principais de x e $\bar{x}$, respectivamente. Se x e $\bar{x}$ são associadas por uma transformação de Laguerre, então*

$$\frac{(k_i - k_j)k_l}{(k_l - k_j)k_i} = \frac{(\bar{k}_i - \bar{k}_j)\bar{k}_l}{(\bar{k}_l - \bar{k}_j)\bar{k}_i}.$$

Isto é, as curvaturas de Laguerre são invariantes por transformações de Laguerre.

Demonstração: Sejam $x, \bar{x} : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ duas hipersuperfícies sem pontos umbílicos cujas curvaturas principais não se anulam associadas por uma transformação de Laguerre $T \in L\mathbb{G}$. Sejam $\xi, \bar{\xi} : M^n \to \mathbb{S}^n$ as normais unitárias de x e $\bar{x}$, respectivamente. Sejam k_i e $\bar{k}_i$ as curvaturas principais de x e $\bar{x}$, respectivamente. Sejam γ_1, γ_2 as imersões dadas por (3.1) para x e $\bar{\gamma}_1$, $\bar{\gamma}_2$ as imersões dadas por (3.1) para $\bar{x}$. Denotando por a e b as últimas coordenadas de $\gamma_1 T$ e $\gamma_2 T$, respectivamente, podemos escrever(veja [1])

$$\bar{\gamma}_1 = \left(\frac{1 + |\bar{x}|^2}{2}, \frac{1 - |\bar{x}^2|}{2}, \bar{x}, 0 \right) = \gamma_1 T - \frac{a}{b} \gamma_2 T, \tag{3.4}$$

$$\bar{\gamma}_2 = \left(\bar{x}.\bar{\xi}, -\bar{x}.\bar{\xi}, \bar{\xi}, 1 \right) = \frac{1}{b} \gamma_2 T. \tag{3.5}$$

Diferenciando (3.4) e (3.5), obtemos

$$d\bar{\gamma}_1 = d(\gamma_1 T) - d\left(\frac{a}{b}\right) \gamma_2 T - \frac{a}{b} d(\gamma_2 T), \qquad d\bar{\gamma}_2 = d\left(\frac{1}{b}\right) \gamma_2 T + \frac{1}{b} d\left(\gamma_2 T\right). \tag{3.6}$$

São satisfeitas as seguintes relações de ortogonalidade

$$\begin{aligned} \langle \gamma_1, \gamma_1 \rangle = \langle \gamma_2, \gamma_2 \rangle = \langle d\gamma_1, \gamma_2 \rangle = 0, \quad & \langle d\gamma_1, d\gamma_1 \rangle = dx.dx, \\ \langle d\gamma_1, d\gamma_2 \rangle = dx.d\xi, \qquad\qquad & \langle d\gamma_2, d\gamma_2 \rangle = d\xi.d\xi. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Analogamente, essas mesmas relações se verificam para $\bar{x}$, $\bar{\xi}$, $\bar{\gamma}_1$ e $\bar{\gamma}_2$. De (3.7), (3.6) e como $T \in O(n+2,2)$, obtemos

$$\begin{aligned} d\bar{x}.d\bar{x} &= \langle d\bar{\gamma}_1, d\bar{\gamma}_1 \rangle \\ &= \langle d(\gamma_1 T), d(\gamma_1 T) \rangle + \left(\tfrac{a}{b}\right)^2 \langle d(\gamma_2 T), d(\gamma_2 T) \rangle - 2\frac{a}{b} \left\langle d\left(\gamma_1 T\right), d\left(\gamma_2 T\right) \right\rangle \\ &= \langle d\gamma_1, d\gamma_1 \rangle + \left(\tfrac{a}{b}\right)^2 \langle d\gamma_2, d\gamma_2 \rangle - 2\frac{a}{b} \langle d\gamma_1, d\gamma_2 \rangle . \end{aligned}$$

Portanto

$$d\bar{x}.d\bar{x} = dx.dx + \left(\frac{a}{b}\right)^2 d\xi.d\xi - 2\frac{a}{b} dx.d\xi. \tag{3.8}$$

Seja $e_i, 1 \leq i \leq n$, uma base ortonormal para TM com relação a $dx.dx$, formada por vetores principais de x, isto é, $e_i(\xi) = -k_i e_i(x)$, onde k_i é o autovalor correspondente a e_i. Temos de (3.8) que,

$$
\begin{aligned}
d\bar{x}.d\bar{x}\,(e_i,e_j) &= \Big(dx.dx + \left(\tfrac{a}{b}\right)^2 d\xi.d\xi - 2\left(\tfrac{a}{b}\right) dx.d\xi\Big)\,(e_i,e_j)\\
&= \delta_{ij} + \left(\tfrac{a}{b}\right)^2 k_i k_j \delta_{ij} + 2\left(\tfrac{a}{b}\right) k_j \delta_{ij}.
\end{aligned}
$$

Concluímos que

$$
d\bar{x}(e_i).d\bar{x}(e_j) = \left(1 + \frac{a}{b}k_i\right)^2 \delta_{ij}. \tag{3.9}
$$

De (3.9) temos que $\bar{e}_i = \left(\frac{1}{1+\frac{a}{b}k_i}\right) e_i, 1 \leq i \leq n$ formam uma base ortonormal para TM com relação a $d\bar{x}.d\bar{x}$, formada por vetores principais de $\bar{x}$, isto é, $\bar{e}_i(\bar{\xi}) = -\bar{k}_i\bar{e}_i(\bar{x}), 1 \leq i \leq n$, onde $\bar{k}_i$ é o autovalor associado a $\bar{e}_i$ dado por

$$
\bar{k}_i = \frac{k_i}{b + ak_i}.
$$

De fato, temos que

$$
k_i\delta_{ij} = -dx(e_i).d\xi(e_j), \qquad\qquad \bar{k}_i\delta_{ij} = -d\bar{x}(\bar{e}_i).d\bar{\xi}(\bar{e}_j). \tag{3.10}
$$

Segue de (3.6) e (3.7) que,

$$
\begin{aligned}
-d\bar{x}.d\bar{\xi} &= -\left\langle d\bar{\gamma}_1, d\bar{\gamma}_2 \right\rangle\\
&= -\frac{1}{b}\left\langle d\gamma_1, d\gamma_2 \right\rangle + \frac{a}{b^2}\left\langle d\gamma_2, d\gamma_2 \right\rangle\\
&= -\frac{1}{b}dx.d\xi + \frac{a}{b^2}d\xi.d\xi.
\end{aligned}
$$

Logo, obtemos

$$
-d\bar{x}.d\bar{\xi} = -\frac{1}{b}\left(dx.d\xi - \frac{a}{b}d\xi.d\xi\right). \tag{3.11}
$$

Portanto, de (3.10) e (3.11) temos

$$
\begin{aligned}
\bar{k}_j\delta_{ij} &= -\frac{1}{b}\left(\bar{e}_i(x)\cdot\bar{e}_j(\xi) - \frac{a}{b}\bar{e}_i(\xi)\cdot\bar{e}_j(\xi)\right)\\
&= -\frac{1}{b}\left(\frac{-k_j}{\left(1+\frac{a}{b}k_i\right)\left(1+\frac{a}{b}k_j\right)}\delta_{ij} - \frac{a}{b}\frac{k_ik_j}{\left(1+\frac{a}{b}k_i\right)\left(1+\frac{a}{b}k_j\right)}\delta_{ij}\right)\\
&= \frac{k_jb(1+\frac{a}{b}k_i)}{b\left(1+\frac{a}{b}k_i\right)\left(1+\frac{a}{b}k_j\right)}\delta_{ij}.
\end{aligned}
$$

Concluímos que $\bar{k}_j = \dfrac{k_j}{b + ak_j}$. Assim, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{(\bar{k}_i - \bar{k}_j)\bar{k}_l}{(\bar{k}_l - \bar{k}_j)\bar{k}_i} &= \frac{\left(\dfrac{k_i}{b+ak_i} - \dfrac{k_j}{b+ak_j}\right)\dfrac{k_l}{b+ak_l}}{\left(\dfrac{k_l}{b+ak_l} - \dfrac{k_j}{b+ak_j}\right)\dfrac{k_i}{b+ak_i}} \\
&= \frac{\left(\dfrac{k_i(b+ak_j) - k_j(b+ak_i)}{(b+ak_i)(b+ak_j)}\right)\dfrac{k_l}{b+ak_l}}{\left(\dfrac{k_l(b+ak_j) - k_j(b+ak_l)}{(b+ak_l)(b+ak_j)}\right)\dfrac{k_i}{b+ak_i}} \\
&= \frac{(k_i - k_j)k_l}{(k_l - k_j)k_i},
\end{aligned}
$$

ou seja, as curvaturas de Laguerre de x e $\bar{x}$ coincidem, como queríamos demonstrar. □

3.2 Teorema de caracterização para hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre em $\mathbb{R}^{n+1}$

Nesta seção mostramos que hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre em $\mathbb{R}^{n+1}$ são as cíclides de Dupin ou as hipersuperfícies de Dupin com curvaturas de Laguerre constantes. Neste sentido, apresentamos a seguinte proposição que será útil para demonstrarmos este resultado.

Proposição 3.3. *Seja $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Então, x é um hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre se, e somente se,*

$$
\begin{gathered}
e_i(r) - \tilde{k}_i e_i(\rho) = 0, \forall i \\
e_i(r_i) = 0, \forall i, \\
e_i(r_j) = e_i(r) - \tilde{k}_j e_i(\rho), \forall i, j, i \neq j,
\end{gathered} \tag{3.12}
$$

onde r_i, r e ρ são dadas em (1.56), $\{e_i\}$ é uma base formada por autovetores de x com relação à métrica $dx.dx$ e as funções $\tilde{k}_i = \rho^{-1}(r - r_i)$ são dadas em (1.74).

Demonstração: Suponha que $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ seja uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre. Desta forma, a segunda equação é consequência imediata do Teorema 2.4. Por outro lado, como as funções C_i dadas em (1.65) são todas nulas, obtemos

$$e_i(r) - \rho^{-1}(r - r_i)e_i(\rho) = 0, \forall i.$$

Por (1.74), como $\tilde{k}_i$ é constante, então $e_i(\tilde{k}_j) = 0, \forall i, j$. Quando $i = j$ obtemos

$$e_i(r) - \tilde{k}_i e_i(\rho) = 0, \forall i. \tag{3.13}$$

Portanto, temos que a primeira equação de (3.12) se verifica. Considerando $e_i(\tilde{k}_j) = 0$ para $i \neq j$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= e_i(\tilde{k}_j) \\ &= e_i(\rho^{-1}(r - r_j)) \\ &= -\rho^{-2}e_i(\rho)(r - r_j) + \rho^{-1}e_i(r) - \rho^{-1}e_i(r_j) \\ &= -\rho^{-1}\{\tilde{k}_j e_i(\rho) - e_i(r) + e_i(r_j)\}. \end{aligned}$$

Portanto, da última igualdade e de (3.13), segue a terceira equação de (3.12).

Reciprocamente, se x é uma hipersuperfície satisfazendo (3.12), da primeira equação de (3.12) segue que $C_i = 0, \forall i$ e das últimas equações de (3.12) segue que $e_i(\tilde{k}_j) = 0, \forall i, j$. Portanto, x é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre. □

No teorema seguinte assumimos que x seja uma imersão própria, significando que o número de curvaturas principais distintas é constante.

Teorema 3.4. *Seja $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável própria, sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Então, x é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre se, e somente se, é uma cíclide de Dupin ou uma hipersuperfície de Dupin cujas curvaturas de Laguerre são constantes.*

Demonstração: Assuma que $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ seja uma hipersuperfície própria, sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Se x é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre, segue do Teorema 2.4 que x é uma hipersuperfície de Dupin. Como x não possui pontos umbílicos, então x possui pelo menos duas curvaturas principais distintas. Se x possui duas curvaturas principais distintas, então x é uma cíclide de Dupin.

Agora, assumiremos que x possua pelo menos três curvaturas principais distintas. De (1.74), temos que $r_i = -\rho\tilde{k}_i + r$ e para quaisquer par de curvaturas principais distintas temos

$$r_i - r_j = -\rho(\tilde{k}_i - \tilde{k}_j).$$

Sejam r_i, r_j e r_l quaisquer três raios de curvaturas distintos. Então, a curvatura de Laguerre

$$\frac{r_i - r_j}{r_l - r_j} = \frac{\tilde{k}_i - \tilde{k}_j}{\tilde{k}_l - \tilde{k}_j}$$

é constante, já que cada $\tilde{k}_i$ é constante.

Reciprocamente, assumimos que x seja uma cíclide de Dupin ou uma hipersuperfície de Dupin cujas curvaturas de Laguerre são constantes. Se existirem apenas duas curvaturas principais distintas, temos pelo Corolário 2.7 que x é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre. Caso contrário, seja $m \geq 3$ o número de curvaturas principais distintas de x. Consideremos $k_1, ..., k_n$ as curvaturas principais tal que cada k_i tem multiplicidade m_i, isto é, as curvaturas principais

$$k_{i_1} = ... = k_{i_{m_i}} = k_i. \tag{3.14}$$

Denotaremos o conjunto de índices por

$$I_i = \left\{ i_1, ..., i_{m_i}; k_{i_1} = ... = k_{i_{m_i}} = k_i \right\}. \tag{3.15}$$

Como x é uma hipersuperfície de Dupin, para mostrarmos que x é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre, é suficiente mostrarmos que as funções $\tilde{k}_i$ dadas em (1.74) são constantes, isto é, $e_i(\tilde{k}_j) = 0, \forall i, j$, conforme Corolário 2.5. Como $\rho^2 = \sum_i (r_i - r)^2 > 0$, podemos escrever

$$\rho = \sqrt{Q}, \quad \text{onde} \quad Q = \sum_i r_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i,j} r_i r_j.$$

Segue que

$$\begin{aligned} e_l(Q) &= e_l \left(\sum_i r_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i,j} r_i r_j \right) \\ &= 2 \sum_i e_l(r_i) r_i - \frac{2}{n} \sum_{i,j} e_l(r_i) r_j \\ &= 2 \sum_i e_l(r_i) \left(r_i - \frac{1}{n} \sum_j r_j \right) \\ &= 2 \sum_{i \notin I_l} e_l(r_i) \left(r_i - \sum_j \frac{r_j}{n} \right), \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de (3.14) e do fato de que para hipersuperfície de Dupin vale $e_i(r_i) = 0$.

Como as curvaturas de Laguerre são constantes, para cada k_i, k_j e k_l, curvaturas principais distintas, temos de (3.3) que $e_l(\mathcal{L}^{ilj}) = 0$, isto é,

$$\frac{e_l(r_j)}{r_l - r_j} = \frac{e_l(r_i)}{r_l - r_i}.$$

Desta forma, para cada l fixado, denotamos

$$L_l = \frac{e_l(r_i)}{r_l - r_i}, \forall i \notin I_l. \tag{3.16}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
e_l(Q) &= 2\sum_{i\notin I_l} e_l(r_i)\left(r_i - \sum_j \frac{r_j}{n}\right)\\
&= 2\sum_{i\notin I_l} L_l(r_l - r_i)\left(r_i - \sum_j \frac{r_j}{n}\right)\\
&= 2L_l\sum_{i\notin I_l}\left(r_l r_i - \sum_j \frac{r_l r_j}{n} - r_i^2 + \sum_j \frac{r_i r_j}{n}\right)\\
&= 2L_l\left(\sum_{i\notin I_l} r_i r_l - (n - m_l)\sum_j \frac{r_l r_j}{n} - \sum_i r_i^2 + m_l r_l^2 + \right.\\
&\quad \left.\sum_{i,j}\frac{r_i r_j}{n} - m_l\sum_j \frac{r_l r_j}{n}\right)\\
&= 2L_l\left(\sum_i r_i r_l - \sum_j r_l r_j - \sum_i r_i^2 + \sum_{i,j}\frac{r_i r_j}{n}\right)\\
&= -2L_l Q.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos que $e_i(Q) = -2L_iQ$. Portanto, concluímos que

$$e_i(\rho) = -L_i\rho. \tag{3.17}$$

Agora, provaremos que cada $\tilde{k}_j$ é constante. Segue de (1.74), (3.14) e (3.16) que

$$\begin{aligned}
e_i(\tilde{k}_i) &= e_i(\rho^{-1}(r - r_i)) \\
&= -\rho^{-2}e_i(\rho)(r - r_i) + \rho^{-1}e_i(r) - \rho^{-1}e_i(r_i) \\
&= -\rho^{-2}e_i(\rho)(r - r_i) + \frac{\rho^{-1}}{n}\sum_j e_i(r_j) \\
&= -\rho^{-2}(-L_i\rho)(r - r_i) + \frac{\rho^{-1}}{n}\sum_{j\notin I_i} L_i(r_i - r_j) \\
&= \rho^{-1}L_i\left(r - r_i + \frac{1}{n}\sum_{j\notin I_i} r_i - \frac{1}{n}\sum_{j\notin I_i} r_j\right) \\
&= \rho^{-1}L_i\left(r - r_i + \frac{n - m_i}{n} r_i - \frac{1}{n}\sum_{j\notin I_i} r_j\right) \\
&= \rho^{-1}L_i\left(r - \frac{m_i}{n} r_i - \frac{1}{n}\sum_{j\notin I_i} r_j\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Se $j \in I_i$, então $k_j = k_i$, assim $\tilde{k}_j = \tilde{k}_i$ e pelo cálculo anterior, obtemos $e_i(\tilde{k}_j) = 0$. Portanto, necessitamos apenas mostrar que para $j \notin I_i$, obtemos $e_i(\tilde{k}_j) = 0$. De fato, segue de (1.74), (3.14) e (3.16) que

$$
\begin{aligned}
e_i(\tilde{k}_j) &= e_i(\rho^{-1}(r - r_j)) \\
&= -\rho^{-2} e_i(\rho)(r - r_j) - \rho^{-1} e_i(r_j) + \rho^{-1} e_i(r) \\
&= -\rho^{-2}(-L_i\rho)(r - r_j) - \rho^{-1}(L_i(r_i - r_j)) + \rho^{-1} e_i(r) \\
&= \rho^{-1} L_i (r - r_j) - \rho^{-1} L_i (r_i - r_j) + \frac{\rho^{-1}}{n} \sum_j e_i(r_j) \\
&= -\rho^{-1} L_i r_j + \frac{\rho^{-1} L_i}{n} \sum_j r_j - \rho^{-1} L_i r_i + \rho^{-1} L_i r_j + \frac{\rho^{-1}}{n} \sum_{j \notin I_i} e_i(r_j) \\
&= \frac{\rho^{-1} L_i}{n} \sum_j r_j + \frac{\rho^{-1}}{n} \sum_{j \notin I_i} L_i (r_i - r_j) - \rho^{-1} L_i r_i \\
&= \rho^{-1} L_i \left(\frac{1}{n} \sum_j r_j + \frac{1}{n} \sum_{j \notin I_i} r_i - \frac{1}{n} \sum_{j \notin I_i} r_j - r_i \right) \\
&= \rho^{-1} L_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j \notin I_i} r_j + \frac{m_i r_i}{n} + \frac{(n - m_i) r_i}{n} - \frac{1}{n} \sum_{j \notin I_i} r_j - r_i \right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $e_i(\tilde{k}_j) = 0, \forall i, j$, como queríamos demonstrar. $\square$

Observação 3.5. As hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre com duas curvaturas principais distintas, que são cíclides de Dupin pelo Teorema 3.4, foram classificadas no Corolário 2.14. Além disso, essas hipersuperfícies são, a menos de transformação de Laguerre, dadas no Exemplo 2.8 e no Exemplo 2.9, com $s = 2$.

Capítulo 4

Sobre hipersuperfícies de Dupin em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura de Laguerre constante

Pinkall [37] provou que hipersuperfícies próprias de Dupin $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com $g \geq 3$ que são Lie equivalentes a hipersuperfícies isoparamétricas não podem ser parametrizadas por linhas de curvatura. Em [34], Riveros-Rodrigues-Tenenblat mostraram que hipersuperfícies próprias de Dupin em $\mathbb{R}^{n+1}$ para $n \geq 4$ com n curvaturas principais distintas e curvaturas de Möbius constante não podem ser parametrizadas por linha de curvatura.

Para $n = 3$, a menos de transformações de Möbius, existe uma única hipersuperfície própria de Dupin em $\mathbb{R}^4$, parametrizada por linhas de curvatura, com três curvaturas principais distintas e curvatura de Möbius constante, conforme [34]. Além disso, em [34] foram obtidas todas as hipersuperfícies de Dupin conformemente planas em $\mathbb{R}^4$, com curvatura de Möbius constante.

Neste capítulo, consideramos as hipersuperfícies próprias de Dupin no espaço Euclidiano possuindo todas as curvaturas principais distintas que não se anulam, e cujas curvaturas de Laguerre são constantes. Na seção 4.1, incluímos resultados básicos sobre hipersuperfícies de Dupin parametrizadas por linhas de curvatura e curvaturas principais distintas, dentre eles, apresentamos as equações de Gauss de tais hipersuperfícies.

A Seção 4.2 contém os resultados principais deste capítulo. Obtemos que, para hipersuperfícies de Dupin parametrizadas por linhas de curvatura, a condição adicional de possuir todas as curvaturas de Laguerre constantes se caracteriza pelo fato das curvaturas principais serem dadas em termos de n funções diferenciáveis de uma variável. Obtemos também que, para hipersuperfícies de Dupin parametrizadas por linhas de curvatura, esta condição adicional implica em ter, em dimensões maiores, os invariantes de Laplace iguais a zero, veja Observação 4.8. Estes invariantes foram introduzidos por Kamram e Tenenblat [25], e eles foram usados para estudar um classe de hipersuperfícies de Dupin de $\mathbb{R}^5$ em [33].

No Lema 4.4, seção 4.2, encontramos as equações de Gauss para tais hipersuperfícies. Usando estas equações, demonstramos o Teorema 4.7, no qual foram caracterizadas essas hipersuperfícies em termos da primeira e segunda forma quadrática.

Na seção 4.3, concluímos o capítulo mostrando que uma família de hipersuperfícies de Dupin, obtida por Corro-Ferreira-Tenenblat [15], fornece exemplos de hipersuperfícies parametrizadas por linhas de curvatura, com n curvaturas principais distintas que não se anulam e cujas curvaturas de Laguerre são constantes. Observamos que as curvaturas de Lie de tais hipersuperfíces são constantes, mas as curvaturas de Möbius não são constantes.

4.1 Hipersuperfícies de Dupin com curvaturas principais distintas

Nesta seção apresentamos resultados básicos sobre hipersuperfícies de Dupin com curvaturas principais distintas no espaço Euclidiano. Estes resultados também podem ser encontrados em [34].

Seja M um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $p = (u_1, u_2, ..., u_n) \in M$. Seja $x : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de Dupin própria parametrizada por linhas de curvatura com curvaturas principais distintas que não se anulam k_i para $1 \leq i \leq n$ e seja $\xi : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ o campo normal unitário de x. Então

$$\langle x_{,i}, x_{,j} \rangle = \delta_{ij} g_{ii}, \tag{4.1}$$

$$\xi_{,i} = -k_i x_{,i}, \tag{4.2}$$

$$k_{i,i} = 0, \tag{4.3}$$

onde $1 \leq i, j \leq n$ e o subscrito ", i" denota a derivada com relação a u_i. Além disso,

$$x_{,ij} - \Gamma^i_{ij} x_{,i} - \Gamma^j_{ij} x_{,j} = 0 \ \text{ para } \ 1 \leq i \neq j \leq n, \tag{4.4}$$

onde Γ^k_{ij} são os símbolos de Christoffel. Considerando as derivadas de (4.2) com relação a u_j para $i \neq j$, obtemos $\xi_{,ij} = -k_{i,j} x_{,i} - k_i x_{,ij}$. Similarmente, $\xi_{,ji} = -k_{j,i} x_{,j} - k_j x_{,ji}$. Subtraindo essas equações e substituindo $x_{,ij}$ dado por (4.4), segue que

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{k_{i,j}}{k_j - k_i} \ \text{ para } \ 1 \leq i \neq j \leq n. \tag{4.5}$$

Como o raio de curvatura $r_i = \frac{1}{k_i}$, $k_i \neq 0$, diferenciando em u_j obtemos que $r_{i,j} = -\frac{k_{i,j}}{k_i^2} = -k_{i,j} r_i^2$. Logo,

$$k_{i,j} = -\frac{r_{i,j}}{r_i^2}, \qquad i \neq j. \tag{4.6}$$

Substituindo (4.6) em (4.5), segue que

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{r_{i,j} r_j}{(r_j - r_i) r_i} \ \text{ para } \ 1 \leq i \neq j \leq n. \tag{4.7}$$

Os símbolos de Christoffel em termos da métrica (4.1) são dados por

$$\Gamma^k_{ij} = 0, \ \ \Gamma^i_{ii} = \frac{g_{ii,i}}{2g_{ii}}, \ \ \Gamma^j_{ii} = \frac{-g_{ii,j}}{2g_{jj}}, \ \ \Gamma^i_{ij} = \frac{g_{ii,j}}{2g_{ii}}, \tag{4.8}$$

onde i, j, k são distintos.

Para hipersuperfícies de Dupin com curvaturas principais distintas e que não se anulam, as curvaturas de Laguerre são definidas por

$$\mathcal{L}^{ijl} = \frac{(k_i - k_j) k_l}{(k_l - k_j) k_i} = \frac{r_i - r_j}{r_l - r_j} \ \text{ para } \ i, j, l \ \text{ distintos.} \tag{4.9}$$

Assim, para todos i, j, l distintos, temos

$$\mathcal{L}^{ijl} = 1 - \mathcal{L}^{ilj}, \ \ \mathcal{L}^{jil} = 1 - \frac{1}{\mathcal{L}^{ilj}}, \ \ \mathcal{L}^{ijl} = \frac{1}{\mathcal{L}^{lji}}. \tag{4.10}$$

Quando $n \geq 4$, temos também

$$\mathcal{L}^{ilj} = \mathcal{L}^{ils} \mathcal{L}^{slj} \ \text{ para } \ i, j, l, s \ \text{ distintos.} \tag{4.11}$$

A *curvatura de Lie* de M^n é dada pela razão cruzada das curvaturas principais. Ela é o produto de curvaturas de Laguerre definida em [26] por

$$\Psi_{ijsl} = \frac{(k_i - k_s)(k_j - k_l)}{(k_i - k_l)(k_j - k_s)} \text{ para } i, j, s, l \text{ distintos.} \tag{4.12}$$

Para uso posterior, obteremos algumas propriedades dos símbolos de Christoffel e suas derivadas e as equações de Gauss para uma hipersuperfície própria de Dupin parametrizada por linhas de curvatura e com curvaturas principais distintas.

Segue de (4.8) que

$$g_{ii,j} = 2\Gamma^i_{ij} g_{ii}, \tag{4.13}$$

$$\Gamma^j_{ii} = -\Gamma^i_{ij} \frac{g_{ii}}{g_{jj}}, \tag{4.14}$$

para $1 \leq i \neq j \leq n$. De (4.5) e (4.3), obtemos

$$\Gamma^i_{ij,i} = \Gamma^j_{ij,j} = \Gamma^i_{ij} \Gamma^j_{ij} \text{ para } 1 \leq i \neq j \leq n. \tag{4.15}$$

De (4.2) e (4.14), obtemos

$$x_{,ii} = \Gamma^i_{ii} x_{,i} - \sum_{k \neq i} \Gamma^i_{ik} \frac{g_{ii}}{g_{kk}} x_{,k} + k_i g_{ii} \xi. \tag{4.16}$$

Usando as expressões (4.8) e (4.13)-(4.15), obtemos para $1 \leq i \neq j \leq n$ que

$$\Gamma^j_{ii,j} = \frac{g_{ii}}{g_{jj}} \left(-\Gamma^i_{ij,j} + 2\Gamma^i_{ij} \Gamma^j_{jj} - 2(\Gamma^i_{ij})^2 \right). \tag{4.17}$$

Além disso, comparando as equações (4.7) e (4.8), obtemos a equação de Codazzi

$$\frac{r_{i,j} r_j}{(r_j - r_i) r_i} = \frac{g_{ii,j}}{2 g_{ii}} \text{ para } 1 \leq i \neq j \leq n. \tag{4.18}$$

As equações de Gauss dessas hipersuperfícies são dadas a seguir.

Proposição 4.1. *([34]) Seja $x : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ para $n \geq 4$ uma hipersuperfície própria de Dupin parametrizada por linhas de curvaturas cujas curvaturas principais k_i para $1 \leq i \leq n$ são distintas. Então a equação de Gauss para a imersão x é dada por*

$$k_i k_j + \frac{A_{ji}}{g_{ii}} + \frac{A_{ij}}{g_{jj}} + \sum_{k \neq i \neq j} \frac{\Gamma^i_{ik} \Gamma^j_{jk}}{g_{kk}} = 0, \tag{4.19}$$

onde $i \neq j$ e

$$A_{ji} = \Gamma^j_{ji,i} + \Gamma^j_{ji}(\Gamma^j_{ji} - \Gamma^i_{ii}). \tag{4.20}$$

4.2 Caracterização de hipersuperfícies de Dupin em $\mathbb{R}^{n+1}$ parametrizadas por linhas de curvatura e com curvatura de Laguerre constante

Considere M^n uma hipersuperfície de Dupin imersa no espaço Euclidiano, parametrizada por linhas de curvatura, com n curvaturas principais distintas que não se anulam. Nesta seção, no Teorema 4.2 provamos que tais hipersuperfícies tem todas as curvaturas de Laguerre constantes se, e somente se, suas curvaturas principais são dadas em termos de n funções diferenciáveis $h_i(u_i), i = 1, \cdots, n$, de uma variável. Em seguida, no Lema 4.3 obtemos uma caracterização em termos dos símbolos de Christoffel e dos raios de curvatura. No Teorema 4.7, caracterizamos tais hipersuperfícies em termos de funções diferenciáveis $h_i = h_i(u_i)$.

Recordamos que no Capítulo 2 (veja Teorema 3.4) mostramos que hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre no espaço Euclidiano $(n+1)$-dimensional, $n \geq 3$, com mais que duas curvaturas principais distintas são as hipersuperfícies de Dupin com curvaturas de Laguerre constantes. Desta forma, as hipersuperfícies consideradas nessa seção são, em particular, hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre.

Começamos provando o seguinte teorema.

Teorema 4.2. *Suponha que $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ para $n \geq 3$ seja uma hipersuperfície própria de Dupin parametrizada por linhas de curvatura e que possua n curvaturas principais distintas e que não se anulam k_i. As curvaturas de Laguerre são constantes se, e somente se, a menos de reordenação dos índices, os raios de curvatura de x são dados por*

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{1}{k_1} = -(D-1)h_2 + h_3 + \sum_{s\geq 4}\left(1 - \frac{1}{D_s}\right)h_s,\\
r_2 &= \frac{1}{k_2} = \left(1 - \frac{1}{D}\right)h_1 + \frac{1}{D}h_3 + \sum_{s\geq 4} h_s,\\
r_3 &= \frac{1}{k_3} = h_1 + h_2 + \sum_{s\geq 4}\left(1 + \frac{1}{D_s(D-1)}\right)h_s,\\
r_s &= \frac{1}{k_s} = D_s r_1 + (1 - D_s) r_2 \ \text{ para } \ s \geq 4,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

onde $D, D_s \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ para $s \geq 4$ são constantes tais que $D_s \neq 1/(1-D)$, $D_s \neq D_t$ para $s \neq t$, e $h_i(u_i)$ para $i = 1, ..., n$ são funções diferenciáveis satisfazendo $h_i \neq 0$ para algum i. Nestas condições, temos que

$$
\begin{aligned}
&r_1 - r_2 = -\frac{D-1}{D}H, \qquad && r_1 - r_s = \frac{(D_s-1)(D-1)}{D}H \\
&r_1 - r_3 = -H, && r_2 - r_s = \frac{D_s(D-1)}{D}H, \\
&r_2 - r_3 = -\frac{1}{D}H, && r_3 - r_s = \frac{1 + D_s D - D_s}{D}H, \\
&r_s - r_t = -((D_s - D_t)(D-1)/D)H \ \ \textit{para} \ \ s,t \geq 4, s \neq t, \ \ \textit{onde} \\
&H = h_1 + Dh_2 - h_3 + \sum_{s \geq 4} \frac{D}{D_s(D-1)} h_s \neq 0,
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

e

$$D = \mathcal{L}^{132} \qquad e \qquad D_s = \mathcal{L}^{s21}, \ \ s \geq 4. \tag{4.23}$$

Demonstração: Para cada $i = 1, ..., n$, definimos o raio de curvatura de x por $r_i = 1/k_i$. Mostraremos primeiro que cada r_i é a soma de funções de variáveis separáveis. Por hipótese, todas as curvaturas de Laguerre são constantes, e de (4.9), temos

$$r_i + (\mathcal{L}^{ikj} - 1)r_k - \mathcal{L}^{ikj} r_j = 0 \ \text{ para todos } \ i,j,k \ \text{ distintos.} \tag{4.24}$$

Diferenciando essa equação com relação a u_k, u_j, obtemos $r_{i,kj} = 0$. Portanto,

$$r_i = \sum_{k \neq i} f_{ik}(u_k) \ \text{ para } \ i = 1, ..., n. \tag{4.25}$$

Fixamos os índices $i = 1, j = 2$ e $k = 3$, e tomando $D = \mathcal{L}^{132}$. Então, segue de (4.24) e (4.25) que

$$\sum_{l \neq 1} f_{1l}(u_l) + (D-1) \sum_{s \neq 3} f_{3s}(u_s) - D \sum_{t \neq 2} f_{2t}(u_t) = 0$$

Considerando estas expressões como uma soma de funções de variáveis distintas, temos

$$\begin{aligned}
a_1 &= (D-1)f_{31}(u_1) - Df_{21}(u_1),\\
a_2 &= f_{12} + (D-1),\\
a_3 &= f_{13} - Df_{23},\\
a_s &= f_{1s} + (D-1)f_{3s} - Df_{2s} \text{ para } s \geq 4
\end{aligned}$$

e $\sum_{s=1}^{n} a_s = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}
f_{12} &= a_2 - (D-1)f_{32},\\
f_{13} &= a_3 + Df_{23},\\
f_{1s} &= a_s - (D-1)f_{31} + Df_{2s} \text{ para } s \geq 4,\\
f_{21} &= [(D-1)f_{31} - a_1]/D.
\end{aligned}$$

Seja $a = a_1$ na expressão acima, segue de (4.24) e (4.25) que

$$\begin{aligned}
r_1 &= -(D-1)r_3 + Dr_2\\
&= -(D-1)\sum_{s\neq 3} f_{3s} + D\sum_{s\neq 2} f_{2s}\\
&= -(D-1)f_{31} - (D-1)f_{32} - (D-1)\sum_{s\geq 4} f_{3s} + Df_{21} + Df_{23} + D\sum_{s\geq 4} f_{2s}.
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$r_1 = -(D-1)f_{32} + Df_{23} - a + D\sum_{s\geq 4} f_{2s} - (D-1)\sum_{s\geq 4} f_{3s}. \tag{4.26}$$

De (4.10), (4.24) e (4.25), obtemos

$$\begin{aligned}
r_2 &= \frac{1}{D}r_1 + \frac{D-1}{D}r_3\\
&= -\frac{D-1}{D}f_{32} + \frac{1}{D}(Df_{23} - a) + \sum_{s\geq 4} f_{2s} - \frac{D-1}{D}\sum_{s\geq 4} f_{3s} + \frac{D-1}{D}\sum_{s\neq 3} f_{3s}\\
&= -\frac{D-1}{D}f_{32} + \frac{1}{D}(Df_{23} - a) + \sum_{s\geq 4} f_{2s} - \frac{D-1}{C}\sum_{s\geq 4} f_{3s} + \frac{D-1}{D}f_{31} +\\
&\quad \frac{D-1}{D}f_{32} + \frac{D-1}{D}\sum_{s\geq 4} f_{3s}.
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$r_2 = \frac{D-1}{D} f_{31} + \frac{1}{D}(Df_{23} - a) + \sum_{s\geq 4} f_{2s}. \tag{4.27}$$

Analogamente, de (4.10), (4.24) e (4.25), segue que

$$\begin{aligned}
r_3 &= -\frac{1}{D-1} r_1 + \frac{D}{D-1} r_2 \\
&= -\frac{1}{D-1}\left(-(D-1)f_{32} + Df_{23} - a + D\sum_{s\geq 4} f_{2s} - (D-1)\sum_{s\geq 4} f_{3s}\right) + \\
&\quad \frac{D}{D-1}\left(\frac{D-1}{D} f_{31} + \frac{1}{D}(Df_{23} - a) + \sum_{s\geq 4} f_{2s}\right) \\
&= f_{32} - \frac{1}{D-1}(f_{23} - a) - \frac{D}{D-1}\sum_{s\geq 4} f_{2s} + \sum_{s\geq 4} f_{3s} + f_{31} + \frac{1}{D-1}(Df_{23} - a) + \\
&\quad \frac{D}{D-1}\sum_{s\geq 4} f_{2s}.
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$r_3 = f_{31} + f_{32} + \sum_{s\geq 4} f_{3s}. \tag{4.28}$$

Finalmente, tomando $D_s = \mathcal{L}^{s21}$, segue de (4.24) que

$$r_s = D_s r_1 + (1 - D_s) r_2, \qquad s \geq 4. \tag{4.29}$$

Como os raios de curvatura são todos distintos temos que $D, D_s \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ e para todo $s \geq 4$ temos que $D_s \neq \frac{1}{1-D}$, caso contrário, teríamos $r_s = r_3$, para todo $s \geq 4$, o que não ocorre. Temos também $D_s \neq D_l$ para $l \geq 4$ com $l \neq s$, já que $r_s \neq r_l,\ \ l \neq s$.

Temos de (4.26) e (4.27), para $s \geq 4$, que

$$\begin{aligned}
r_{1,s} &= Df_{2s,s} - (D-1) f_{3s,s}, \\
r_{2,s} &= f_{2s,s}.
\end{aligned}$$

Logo, como r_s não depende de u_s, para $s \geq 4$, segue de (4.29) que

$$\begin{aligned} 0 &= r_{s,s} \\ &= D_s r_{1,s} + (1 - D_s) r_{2,s} \\ &= D_s C f_{2s,s} - D_s (C-1) f_{3s,s} + (1-D_s) f_{2s,s} \\ &= (D_s D + 1 - D_s) f_{2s,s} - D_s (D-1) f_{3s,s} \\ &= D_s \left\{ \left(D - 1 + \tfrac{1}{D_s} \right) f_{2s,s} - (D-1) f_{3s,s} \right\} \end{aligned}$$

Logo,

$$\left(D - 1 + \frac{1}{D_s} \right) f_{2s,s} - (D-1) f_{3s,s} = 0,$$

donde segue que

$$(D-1) f_{3s} = (D - 1 + \frac{1}{D_s}) f_{2s} - b_s,$$

isto é,

$$f_{3s} = (1 + \frac{1}{D_s(D-1)}) f_{2s} - \frac{b_s}{D-1}, \tag{4.30}$$

onde b_s é uma constante.

Introduzimos as seguintes funções

$$\begin{array}{ll} h_1(u_1) = f_{31}(u_1), & h_3(u_3) = D f_{23}(u_3) - a, \\ h_2(u_2) = f_{32}(u_2) - \displaystyle\sum_{s \geq 4} \frac{b_s}{D-1}, & h_s(u_s) = f_{2s}(u_s), \quad \text{para} \;\; s \geq 4. \end{array} \tag{4.31}$$

Substituindo (4.30) e (4.31) em (4.26), obtemos

$$\begin{aligned} r_1 &= -(D-1) f_{32}(u_2) + D f_{23}(u_3) - a + D \sum_{s \geq 4} f_{2s} - (D-1) \sum_{s \geq 4} f_{3s} \\ &= -(D-1) \left(h_2 + \sum_{s \geq 4} \frac{b_s}{D-1} \right) + h_3 + D \sum_{s \geq 4} h_s(u_s) - D \sum_{s \geq 4} h_s(u_s) + \\ & \quad \sum_{s \geq 4} \left(1 - \frac{1}{D_s} \right) h_s(u_s) + \sum_{s \geq 4} b_s. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$r_1 = -(D-1) h_2(u_2) + h_3(u_3) + \sum_{s \geq 4} \left(1 - \frac{1}{D_s} \right) h_s(u_s). \tag{4.32}$$

Substituindo (4.31) em (4.27), obtemos:

$$r_2 = \frac{D-1}{D}h_1(u_1) + \frac{1}{D}h_3(u_3) + \sum_{s\geq 4} h_s(u_s). \tag{4.33}$$

Substituindo (4.30) e (4.31) em (4.28), obtemos:

$$\begin{aligned} r_3 &= f_{31} + f_{32} + \sum_{s\geq 4} f_{3s} \\ &= h_1(u_1) + h_2(u_2) + \sum_{s\geq 4} \frac{b_s}{D-1} + \frac{1}{D-1}\left\{\sum_{s\geq 4}\left(D-1+\frac{1}{D_s}\right)h_s \; - \sum_{s\geq 4} b_s\right\}. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$r_3 = h_1(u_1) + h_2(u_2) + \sum_{s\geq 4}\left(1 + \frac{1}{(D-1)D_s}\right)h_s(u_s). \tag{4.34}$$

Das equações (4.32), (4.33), (4.34) e (4.29) segue que (4.21) vale. Reciprocamente, se os raios de curvatura são dados por (4.21), então

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 &= -\frac{D-1}{D}H, & r_1 - r_s &= \frac{(D_s-1)(D-1)}{D}H \\ r_1 - r_3 &= -H, & r_2 - r_s &= \frac{D_s(D-1)}{D}H, \\ r_2 - r_3 &= -\frac{1}{D}H, & r_3 - r_s &= \frac{1 + D_sD - D_s}{D}H \end{aligned}$$

e $r_s - r_t = -(D_s - D_t)(D-1)H/D$ para $s, t \geq 4, s \neq t$, onde

$$H = h_1 + Dh_2 - h_3 + \sum_{s\geq 4} \frac{D}{D_s(D-1)}h_s.$$

Nas condições do Teorema 4.2 concluímos que a função H dada em (4.22) nunca se anula, já que todas as curvaturas principais de M são distintas. Além disso, como $\frac{r_1-r_3}{r_2-r_3} = D$ e $\frac{r_s-r_2}{r_1-r_2} = D_s$, concluímos de (4.9) que $D = \mathcal{L}^{132}$ e $D_s = \mathcal{L}^{s21}$. Concluímos que todas as curvaturas de Laguerre são constantes. $\square$

A proposição seguinte caracteriza as hipersuperfícies de Dupin com curvatura de Laguerre constante em termos dos símbolos de Christoffel.

Proposição 4.3. *Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ para $n \geq 3$ uma hipersuperfície de Dupin própria que é parametrizada por linhas de curvatura e que possui n curvaturas principais distintas e que não se anulam k_i. As curvaturas de Laguerre são constantes se, e somente se,*

$$r_i\Gamma^i_{ik} = r_j\Gamma^j_{jk} \text{ para } i, j, k \text{ distintos,} \tag{4.35}$$

onde $r_i = 1/k_i$ é o raio de curvatura de M. Além disso, as curvaturas de Laguerre são distintas de 0 *e* 1.

Demonstração: Seja $r_i = \frac{1}{k_i}$ o raio de curvatura de x. De (4.7) segue que

$$r_j\Gamma^j_{jk} - r_i\Gamma^i_{ik} = \frac{r_j r_{j,k} r_k}{(r_k - r_j)r_j} - \frac{r_i r_{i,k} r_k}{(r_k - r_i)r_i} = \left\{\frac{r_{j,k}}{r_k - r_j} - \frac{r_{i,k}}{r_k - r_i}\right\} r_k. \tag{4.36}$$

Por outro lado, temos de (4.9) que

$$(\mathcal{L}^{ikj})_{,k} = \left(\frac{r_i - r_k}{r_j - r_k}\right)_{,k} = \frac{r_{i,k}}{r_j - r_k} - \frac{(r_i - r_k)r_{j,k}}{(r_j - r_k)^2}. \tag{4.37}$$

Logo, segue de (4.9), (4.37) e (4.36) que

$$(\log \mathcal{L}^{ikj})_{,k} = \frac{r_j - r_k}{r_i - r_k}\left(\frac{r_{i,k}}{r_j - r_k} - \frac{(r_i - r_k)r_{j,k}}{(r_j - r_k)^2}\right) = \frac{r_{i,k}}{r_i - r_k} - \frac{r_{j,k}}{r_j - r_k} = \frac{1}{r_k}(r_j\Gamma^j_{jk} - r_i\Gamma^i_{ik}). \tag{4.38}$$

Como as curvaturas de Laguerre são constantes, concluímos de (4.38) que $r_j\Gamma^j_{jk} = r_i\Gamma^i_{ik}$, para i, j, k distintos.

Reciprocamente, se (4.35) vale, então para todos i, j, k distintos, temos de (4.38) que

$$(\mathcal{L}^{ijk})_{,j} = 0, \quad (\mathcal{L}^{ikj})_{,k} = 0 \quad \text{e} \quad (\mathcal{L}^{jik})_{,i} = 0.$$

Segue de (4.10) que $\mathcal{L}^{ikj}$ não depende de u_i, u_k e u_j. Se $n = 3$, o teorema esta provado. Se $n \geq 4$, seja s qualquer índice distinto de i, j, k; então segue de (4.11) que $\mathcal{L}^{ikj} = \mathcal{L}^{iks}\mathcal{L}^{skj}$. Já que $\mathcal{L}^{iks}$ e $\mathcal{L}^{skj}$ não dependem de u_s, concluímos que $\mathcal{L}^{ikj}$ não depende de u_s para todo s distinto de i, j, k. Portanto, $\mathcal{L}^{ikj}$ é constante. Como todos os k_i são distintos, concluímos que $\mathcal{L}^{ikj} \neq 0$ e $\mathcal{L}^{ikj} \neq 1$. □

O lema seguinte será usado para provar o resultado principal desta seção.

Lema 4.4. *Seja $x : M^n \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ para $n \geq 3$ uma hipersuperfície própria de Dupin parametrizada por linha de curvatura e com curvaturas principais k_i, distintas e que não* *se anulam. Se todas as curvaturas de Laguerre são constantes então*

$$\sqrt{g_{ii}}\left(1-\frac{r_j}{r_i}\right)=G_{ji}(u_i)=\mathcal{L}^{jik}G_{ki}(u_i) \;\text{ para }\; i,j,k \;\text{ distintos,} \tag{4.39}$$

onde $G_{ji}(u_i)$ *é uma função diferenciável de* u_i *que nunca se anula,* $r_i=\frac{1}{k_i}$ *é o raio de curvatura de* x *e* $\mathcal{L}^{jik}$ *é a curvatura de Laguerre de* x *dada em* (4.9)*. Além disso,*

$$\Gamma^i_{ii}=(r_j/r_i)\Gamma^j_{ji}+G'_{ji}/G_{ji} \;\text{ para }\; i\neq j, \tag{4.40}$$

e as equações de Gauss para $i\neq j$ *são dadas por*

$$1+\frac{r_i-r_j}{G_{ji}^2}\tilde{A}_{ji}+\frac{r_j-r_i}{G_{ij}^2}\tilde{A}_{ij}+\sum_{k\neq i\neq j}\frac{(r_{i,k})^2}{G_{ik}^2}=0, \tag{4.41}$$

onde

$$\tilde{A}_{ji}=r_{j,ii}+\frac{(r_{j,i})^2}{r_i-r_j}-r_{j,i}\frac{G'_{ji}}{G_{ji}}. \tag{4.42}$$

Demonstração: Segue da última equação de (4.8) e (4.5) que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u_j}\log(\sqrt{g_{ii}}\,|k_i-k_j|) &= \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}(k_i-k_j)}\left(\frac{g_{ii,j}}{2\sqrt{g_{ii}}}(k_i-k_j)+\sqrt{g_{ii}}(k_{i,j})\right)\\ &= \frac{g_{ii,j}}{2g_{ii}}+\frac{k_{i,j}}{k_i-k_j}\\ &= 0, \;\text{ para todo }\; i\neq j.\end{aligned}$$

Assim $\sqrt{g_{ii}}(k_j-k_i)=F_{ji}(\hat{u}_j)$, onde $F_{ji}(\hat{u}_j)$ é independente de u_j. Como $k_j=\dfrac{1}{r_j}$, obtemos da última equação

$$\sqrt{g_{ii}}\left(\frac{r_i-r_j}{r_ir_j}\right)=F_{ji}(\hat{u}_j),\;\; \sqrt{g_{ii}}\left(\frac{r_i-r_k}{r_ir_k}\right)=F_{ki}(\hat{u}_k), \;\text{ para todo }\; i,j,k \;\text{ distintos.} \tag{4.43}$$

De (4.43) segue que

$$\frac{r_ir_j}{r_i-r_j}F_{ji}(\hat{u}_j)=\frac{r_ir_k}{r_i-r_k}F_{ki}(\hat{u}_k),$$

ou seja,

$$r_jF_{ji}(\hat{u}_j)=\frac{r_i-r_j}{r_i-r_k}r_kF_{ki}(\hat{u}_k). \tag{4.44}$$

De (4.44) obtemos $r_jF_{ji} = \mathcal{L}^{jik} r_k F_{ki}$. Como todas as curvaturas de Laguerre são constantes segue da última igualdade que $(r_jF_{ji})(\hat{u_j})$, que já não dependia de u_j, também não depende de u_k, onde k é distinto de i e j. Logo, segue que r_jF_{ji} depende apenas de u_i. Definindo $G_{ji} = r_jF_{ji}$, obtemos (4.39). Como $r_i = \frac{1}{k_i}$, diferenciando (4.39) em u_i e usando (4.8) e (4.39), temos que

$$\begin{aligned}
G'_{ji} &= \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\sqrt{g_{ii}}(1-\frac{r_j}{r_i})\right) \\
&= \frac{g_{ii,i}}{2\sqrt{g_{ii}}}\left(1-\frac{r_j}{r_i}\right) - \sqrt{g_{ii}}\frac{r_{j,i}}{r_i} \\
&= \frac{g_{ii,i}}{2\sqrt{g_{ii}}}\left(\frac{G_{ji}}{\sqrt{g_{ii}}}\right) - \left(\frac{G_{ji}}{(1-\frac{r_j}{r_i})}\right)\left(\frac{r_{j,i}}{r_i}\right) \\
&= \frac{g_{ii,i}}{2g_{ii}}G_{ji} - G_{ji}\frac{r_{j,i}}{r_i - r_j}.
\end{aligned}$$

Logo, temos de (4.7) e (4.8) que

$$G'_{ji} = \Gamma^i_{ii}G_{ji} - \left(\frac{r_j}{r_i}\right)G_{ji}\Gamma^j_{ji}. \tag{4.45}$$

Portanto, obtemos de (4.45) que $\Gamma^{ii}_i = \dfrac{r_j}{r_i}\Gamma^j_{ji} + \dfrac{G'_{ji}}{G_{ji}}$. Logo, a equação (4.40) é satisfeita. Segue de (4.7) que

$$\Gamma^j_{ji,i} = \frac{r_{j,ii}r_i}{(r_i-r_j)r_j} + \frac{(r_{j,i})^2 r_i}{(r_i-r_j)^2 r_j} - \frac{(r_{j,i})^2 r_i}{(r_i-r_j)r_j^2}. \tag{4.46}$$

Substituindo (4.40) em (4.20), obtemos

$$A_{ji} = \Gamma^j_{ji,i} + \Gamma^j_{ji}(\Gamma^j_{ji} - \Gamma^i_{ii}) = \Gamma^j_{ji,i} + \Gamma^j_{ji}\left(\Gamma^j_{ji} - \frac{r_j}{r_i}\Gamma^j_{ji} - \frac{G'_{ji}}{G_{ji}}\right). \tag{4.47}$$

Substituindo (4.7) e (4.46) em (4.47) segue que

$$\begin{aligned}
A_{ji} &= \frac{r_i}{r_j}\left(\frac{r_{j,ii}}{r_i - r_j} + \frac{(r_{j,i})^2}{(r_i - r_j)^2} - \frac{(r_{j,i})^2}{(r_i - r_j)r_j}\right) + \\
&+ \frac{r_{j,i}r_i}{(r_i - r_j)r_j}\left(\frac{r_{j,i}r_i}{(r_i - r_j)r_j} - \frac{r_{j,i}r_ir_j}{(r_i - r_j)r_ir_j} - \frac{G'_{ji}}{G_{ji}}\right) \\
&= \frac{r_i}{r_j(r_i - r_j)}\left(r_{j,ii} + \frac{(r_{j,i})^2}{r_i - r_j} - \frac{(r_{j,i})^2}{r_j}\right) + \\
&+ \frac{r_i}{r_j(r_i - r_j)}\left(\frac{(r_{j,i})^2 r_i}{(r_i - r_j)r_j} - \frac{(r_{j,i})^2}{r_i - r_j} - r_{j,i}\frac{G'_{ji}}{G_{ji}}\right) \\
&= \frac{r_i}{r_j(r_i - r_j)}\left(r_{j,ii} + \frac{(r_{j,i})^2}{r_i - r_j} - \frac{(r_{j,i})^2}{r_j}\right) + \\
&+ \frac{r_i}{r_j(r_i - r_j)}\left(\frac{(r_{j,i})^2}{r_j} - r_{j,i}\frac{G'_{ji}}{G_{ji}}\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$A_{ji} = \frac{r_i}{r_j(r_i - r_j)}\left\{r_{j,ii} + \frac{(r_{j,i})^2}{r_i - r_j} - r_{j,i}\frac{G'_{ji}}{G_{ji}}\right\}. \tag{4.48}$$

Logo, substituindo (4.7), (4.48) e (4.35) em (4.19), temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{r_ir_j} + \frac{\frac{r_i}{r_j(r_i-r_j)}\left\{r_{j,ii} + \frac{(r_{j,i})^2}{r_i-r_j} - r_{j,i}\frac{G'_{ji}}{G_{ji}}\right\}}{\frac{(r_i)^2}{(r_i-r_j)^2}G_{ji}^2} + \frac{\frac{r_j}{r_i(r_j-r_i)}\left\{r_{i,jj} + \frac{(r_{i,j})^2}{r_j-r_i} - r_{i,j}\frac{G'_{ij}}{G_{ij}}\right\}}{\frac{(r_j)^2}{(r_j-r_i)^2}G_{ij}^2} + \\
&+ \sum_{k\neq i\neq j}\frac{(r_{i,k})^2 r_k^2 r_i(r_k - r_i)^2}{(r_k - r_i)^2 r_i^2 r_j r_k^2 G_{ik}^2} \\
&= \frac{1}{r_ir_j} + \frac{\frac{r_i-r_j}{r_ir_j}\left\{r_{j,ii} + \frac{(r_{j,i})^2}{r_i-r_j} - r_{j,i}\frac{G'_{ji}}{G_{ji}}\right\}}{G_{ji}^2} + \frac{\frac{r_j-r_i}{r_ir_j}\left\{r_{i,jj} + \frac{(r_{i,j})^2}{r_j-r_i} - r_{i,j}\frac{G'_{ij}}{G_{ij}}\right\}}{G_{ij}^2} + \\
&+ \sum_{k\neq i\neq j}\frac{(r_{i,k})^2}{r_ir_jG_{ik}^2}.
\end{aligned}$$

Ovservamos que segue de (4.7), (4.35) e (4.39) que $\frac{r_{i,k}}{G_{ik}} = \frac{r_{j,k}}{G_{jk}}$, quando i, j, k são distintos. Portanto, concluímos que

$$\frac{1}{r_i r_j} + \frac{r_i - r_j}{r_i r_j G_{ji}^2} \tilde{A}_{ji} + \frac{r_j - r_i}{r_i r_j G_{ij}^2} \tilde{A}_{ij} + \frac{1}{r_i r_j} \sum_{k \neq i \neq j} \frac{(r_{i,k})^2}{G_{ik}^2} = 0,$$

onde $\tilde{A}_{ji}$ é dada por (4.42). Multiplicando a última expressão por $r_i r_j$, segue que (4.41) vale. $\square$

Dentre as equações dadas em (4.41) vamos destacar algumas que serão úteis para demonstrar o teorema seguinte.

Corolário 4.5. *Seja $x : M^n \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície própria de Dupin parametrizada por linha de curvatura e com curvaturas principais k_i, distintas e que não se anulam. Se todas as curvaturas de Laguerre são constantes então as equações de Gauss dadas em* (4.41) *para os índices $i \neq j, \ \ i, j \in \{1, 2, 3\}$ e $i = 1, \ \ j \geq 4$, são dadas por:*

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(D-1)^2}{D^2 G_{21}} \left(\frac{h_1'}{G_{21}} \right)' H - \frac{(D-1)^2}{D G_{12}} \left(\frac{h_2'}{G_{12}} \right)' H + \frac{(D-1)^2}{D^2 G_{21}^2} (h_1')^2 + \\ + \frac{(D-1)^2}{G_{12}^2} (h_2')^2 + \frac{(h_3')^2}{G_{13}^2} + \sum_{k \geq 4} \frac{(D_k - 1)^2}{D_k^2 G_{1k}^2} (h_k')^2 = 0, \end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(D-1)^2}{D^2 G_{21}} \left(\frac{h_1'}{G_{21}} \right)' H + \frac{1}{G_{13}} \left(\frac{h_3'}{G_{13}} \right)' H + \frac{(D-1)^2}{D^2 G_{21}^2} (h_1')^2 + \\ + \frac{(D-1)^2}{G_{12}^2} (h_2')^2 + \frac{(h_3')^2}{G_{13}^2} + \sum_{k \geq 4} \frac{(D_k - 1)^2}{D_k^2 G_{1k}^2} (h_k')^2 = 0, \end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(D-1)^2}{D G_{12}} \left(\frac{h_2'}{G_{12}} \right)' H + \frac{1}{G_{13}} \left(\frac{h_3'}{G_{13}} \right)' H + \frac{(D-1)^2}{D^2 G_{21}^2} (h_1')^2 + \\ + \frac{(D-1)^2}{G_{12}^2} (h_2')^2 + \frac{(h_3')^2}{G_{13}^2} + \sum_{k \geq 4} \frac{(D_k - 1)^2}{D_k^2 G_{1k}^2} (h_k')^2 = 0, \end{aligned} \tag{4.51}$$

$$
\begin{aligned}
&1-\frac{(D-1)^2}{D^2G_{21}}\left(\frac{h_1'}{G_{21}}\right)'H-\frac{(D_s-1)^2(D-1)}{DG_{1s}}\left(\frac{h_s'}{G_{1s}}\right)'H+\\
&+\frac{(D-1)^2}{D^2G_{21}^2}(h_1')^2+\frac{(D-1)^2}{G_{12}^2}(h_2')^2+\frac{(h_3')^2}{G_{13}^2}+\sum_{k\geq 4}\frac{(D_k-1)^2}{D_k^2G_{1k}^2}(h_k')^2=0,
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

onde H é dada em (4.22), $D=\mathcal{L}^{132}$ *e* $D_s=\mathcal{L}^{s21}$, $s\geq 4$, *e* $h_i(u_i)$ *para* $i=1,...,n$ *são funções diferenciáveis dadas em* (4.21).

Demonstração: Nas condições do Corolário 4.5, temos que as equações de Gauss de x são dadas em (4.41). A seguir, vamos primeiro calcular as equações de Gauss para os seguintes pares de índices: $i=1$ e $j=2$; $i=1$ e $j=3$; $i=2$ e $j=3$; $i=1$ e $j=s\geq 4$.

Segue de (4.21) que

$$
\begin{array}{lll}
r_{1,2}=-(D-1)h_2', & r_{1,3}=h_3', & r_{1,s}=(1-1/D_s)h_s',\\
r_{2,1}=(1-1/D)h_1', & r_{2,3}=(1/D)h_3', & r_{2,s}=h_s',\\
r_{3,1}=h_1', & r_{3,2}=h_2', & r_{3,s}=\left(1+1/(D_s(D-1))\right)h_s',\\
r_{s,1}=(1-D_s)(1-1/D)h_1', \quad s\geq 4. & &
\end{array}
\tag{4.53}
$$

Por outro lado, segue de (4.39) que $G_{ji}=\mathcal{L}^{jik}G_{ki}$ para i,j,k distintos. Logo, usando (4.10) temos que

$$
\frac{G_{ji}'}{G_{ji}}=\frac{G_{ki}'}{G_{ki}},\quad \text{para } \ i,j,k \ \text{ distintos.} \tag{4.54}
$$

De (4.10) e (4.39), obtemos

$$
\begin{array}{rr}
G_{13}=\mathcal{L}^{132}G_{23}=DG_{23}, & G_{32}=\mathcal{L}^{321}G_{12}=\dfrac{1}{1-D}G_{12},\\
G_{31}=\mathcal{L}^{312}G_{21}=\dfrac{D}{D-1}G_{21}, & G_{2k}=\mathcal{L}^{2k1}G_{1k}=\dfrac{D_k}{D_k-1}G_{1k},\\
G_{k1}=\mathcal{L}^{k12}G_{21}=(1-D_k)G_{21},\quad k\geq 4. &
\end{array}
\tag{4.55}
$$

Fazendo $i=1$ e $j=2$ em (4.41), tem-se que

$$
1+\frac{(r_1-r_2)\tilde{A}_{21}}{G_{21}^2}+\frac{(r_2-r_1)\tilde{A}_{12}}{G_{12}^2}+\frac{(r_{1,3})^2}{G_{13}^2}+\sum_{k\geq 4}\frac{(r_{1,k})^2}{G_{1k}^2}=0. \tag{4.56}
$$

Por (4.42), (4.22) e (4.53), temos

$$\begin{aligned}(r_1 - r_2)\tilde{A}_{21} &= (r_1 - r_2)r_{2,11} + (r_{2,1})^2 - r_{2,1}(r_1 - r_2)\frac{G_{21}^{'}}{G_{21}}\\ &= -\frac{(D-1)^2}{D^2}Hh_1^{''} + \frac{(D-1)^2}{D^2}(h_1^{'})^2 + \frac{(D-1)^2}{D^2}Hh_1^{'}\frac{G_{21}^{'}}{G_{21}}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$(r_1 - r_2)\tilde{A}_{21} = \frac{(D-1)^2}{D^2}\left(-h_1^{''} + h_1^{'}\frac{G_{21}^{'}}{G_{21}}\right)H + \frac{(D-1)^2}{D^2}(h_1^{'})^2. \tag{4.57}$$

Também, por (4.42), (4.22) e (4.53) segue-se que

$$\begin{aligned}(r_2 - r_1)\tilde{A}_{12} &= (r_2 - r_1)r_{1,22} + (r_{1,2})^2 - r_{1,2}(r_2 - r_1)\tfrac{G_{12}^{'}}{G_{12}}\\ &= -\frac{(D-1)^2}{D}Hh_2^{''} + (D-1)^2(h_2^{'})^2 + \frac{(D-1)^2}{D}Hh_2^{'}\frac{G_{12}^{'}}{G_{12}}.\end{aligned}$$

Logo,

$$(r_2 - r_1)\tilde{A}_{12} = \frac{(D-1)^2}{D}\left(-h_2^{''} + h_2^{'}\frac{G_{12}^{'}}{G_{12}}\right)H + (D-1)^2(h_2^{'})^2. \tag{4.58}$$

Substituindo (4.57) e (4.58) em (4.56), obtemos

$$\begin{aligned}&1 - \frac{(D-1)^2}{D^2G_{21}^2}\left(h_1^{''} - h_1^{'}\frac{G_{21}^{'}}{G_{21}}\right)H - \frac{(D-1)^2}{DG_{12}^2}\left(h_2^{''} - h_2^{'}\frac{G_{12}^{'}}{G_{12}}\right)H+\\ &+\frac{(D-1)^2}{D^2G_{21}^2}(h_1^{'})^2 + \frac{(D-1)^2}{G_{21}^2}(h_2^{'})^2 + \frac{(h_3^{'})^2}{G_{13}^2} + \sum_{k\geq 4}\frac{(D_k-1)^2}{D_k^2G_{1k}^2}(h_k^{'})^2 = 0.\end{aligned} \tag{4.59}$$

Portanto, de (4.59) segue a equação (4.49).

Fazendo $i = 1$ e $j = 3$ em (4.41), obtemos que

$$1 + \frac{(r_1 - r_3)\tilde{A}_{31}}{G_{31}^2} + \frac{(r_3 - r_1)\tilde{A}_{13}}{G_{13}^2} + \frac{(r_{1,2})^2}{G_{12}^2} + \sum_{k\geq 4}\left(\frac{r_{1,k}}{G_{1k}}\right)^2 = 0. \tag{4.60}$$

Por (4.42), (4.22) e (4.53) temos

$$\begin{aligned}(r_1 - r_3)\tilde{A}_{31} &= (r_1 - r_3)r_{3,11} + (r_{3,1})^2 - r_{3,1}(r_1 - r_3)\frac{G_{31}^{'}}{G_{31}} \\ &= -Hh_1^{''} + (h_1^{'})^2 + Hh_1^{'}\frac{G_{31}^{'}}{G_{31}}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$(r_1 - r_3)\tilde{A}_{31} = -\left(h_1^{''} - h_1^{'}\frac{G_{31}^{'}}{G_{31}}\right)H + (h_1^{'})^2. \tag{4.61}$$

Temos também por (4.42), (4.22) e (4.53) que

$$\begin{aligned}(r_3 - r_1)\tilde{A}_{13} &= (r_3 - r_1)r_{1,33} + (r_{1,3})^2 - r_{1,3}(r_3 - r_1)\frac{G_{13}^{'}}{G_{13}} \\ &= Hh_3^{''} + (h_3^{'})^2 - Hh_3^{'}\frac{G_{13}^{'}}{G_{13}}.\end{aligned}$$

Logo,

$$(r_3 - r_1)\tilde{A}_{13} = \left(h_3^{''} - h_3^{'}\frac{G_{13}^{'}}{G_{13}}\right)H + (h_3^{'})^2. \tag{4.62}$$

Substituindo (4.61) e (4.62) em (4.60), obtemos

$$\begin{gathered}1 - \frac{1}{G_{31}^2}\left(h_1^{''} - h_1^{'}\frac{G_{31}^{'}}{G_{31}}\right)H + \frac{1}{G_{13}^2}\left(h_3^{''} - h_3^{'}\frac{G_{13}^{'}}{G_{13}}\right)H + \frac{1}{G_{31}^2}(h_1^{'})^2 + \\ + \frac{(D-1)^2}{G_{12}^2}(h_2^{'})^2 + \frac{1}{G_{13}^2}(h_3^{'})^2 + \sum_{k\geq 4}\frac{(D_k-1)^2}{D_k^2 G_{1k}^2}(h_k^{'})^2 = 0.\end{gathered} \tag{4.63}$$

Substituindo (4.54) e (4.55) em (4.63), segue que

$$\begin{gathered}1 - \frac{(D-1)^2}{D^2G_{21}^2}\left(h_1^{''} - h_1^{'}\frac{G_{21}^{'}}{G_{21}}\right)H + \frac{1}{G_{13}^2}\left(h_3^{''} - h_3^{'}\frac{G_{13}^{'}}{G_{13}}\right)H + \frac{(D-1)^2}{D^2G_{21}^2}(h_1^{'})^2 + \\ + \frac{(D-1)^2}{G_{12}^2}(h_2^{'})^2 + \frac{1}{G_{13}^2}(h_3^{'})^2 + \sum_{k\geq 4}\frac{(D_k-1)^2}{D_k^2 G_{1k}^2}(h_k^{'})^2 = 0.\end{gathered} \tag{4.64}$$

Portanto, segue de (4.64) que a equação (4.50) é satisfeita.

Fazendo $i = 2$ e $j = 3$ em (4.41), tem-se que

$$1 + \frac{(r_2 - r_3)\tilde{A}_{32}}{G_{32}^2} + \frac{(r_3 - r_2)\tilde{A}_{23}}{G_{23}^2} + \frac{(r_{2,1})^2}{G_{21}^2} + \sum_{k \geq 4} \frac{(r_{2,k})^2}{G_{2k}^2} = 0. \tag{4.65}$$

Por (4.42), (4.22) e (4.53) temos

$$\begin{aligned} (r_2 - r_3)\tilde{A}_{32} &= (r_2 - r_3)r_{3,22} + (r_{3,2})^2 - r_{3,2}(r_2 - r_3)\frac{G_{32}^{'}}{G_{32}} \\ &= -\frac{1}{D}Hh_2^{''} + (h_2^{'})^2 + \frac{1}{D}Hh_2^{'}\frac{G_{32}^{'}}{G_{32}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (r_3 - r_2)\tilde{A}_{23} &= (r_3 - r_2)r_{2,33} + (r_{2,3})^2 - r_{2,3}(r_3 - r_2)\frac{G_{23}^{'}}{G_{23}} \\ &= \frac{1}{D^2}Hh_3^{''} + \frac{1}{D^2}(h_3^{'})^2 - \frac{1}{D^2}Hh_3^{'}\frac{G_{23}^{'}}{G_{23}}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} (r_2 - r_3)\tilde{A}_{32} &= -\frac{1}{D}\left(h_2^{''} - h_2^{'}\frac{G_{32}^{'}}{G_{32}}\right)H + (h_2^{'})^2, \\ (r_3 - r_2)\tilde{A}_{23} &= \frac{1}{D^2}\left(h_3^{''} - h_3^{'}\frac{G_{23}^{'}}{G_{23}}\right)H + \frac{1}{D^2}(h_3^{'})^2. \end{aligned} \tag{4.66}$$

Substituindo (4.66) em (4.65), temos que

$$\begin{aligned} &1 - \frac{1}{DG_{32}^2}\left(h_2^{''} - h_2^{'}\frac{G_{32}^{'}}{G_{32}}\right)H + \frac{1}{D^2G_{23}^2}\left(h_3^{''} - h_3^{'}\frac{G_{23}^{'}}{G_{23}}\right)H + \\ &+ \frac{(D-1)^2}{D^2G_{21}^2}(h_1^{'})^2 + \frac{(h_2^{'})^2}{G_{32}^2} + \frac{(h_3^{'})^2}{D^2G_{23}^2} + \sum_{k \geq 4}\frac{(h_k^{'})^2}{G_{2k}^2} = 0. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Substituindo (4.54) e (4.55) em (4.67), segue que

$$\begin{aligned} &1 - \frac{(D-1)^2}{DG_{12}^2}\left(h_2^{''} - h_2^{'}\frac{G_{12}^{'}}{G_{12}}\right)H + \frac{1}{G_{13}^2}\left(h_3^{''} - h_3^{'}\frac{G_{13}^{'}}{G_{13}}\right)H + \\ &+ \frac{(D-1)^2}{D^2G_{21}^2}(h_1^{'})^2 + \frac{(D-1)^2}{G_{12}^2}(h_2^{'})^2 + \frac{1}{G_{13}^2}(h_3^{'})^2 + \sum_{k \geq 4}\frac{(D_k-1)^2}{D_k^2G_{1k}^2}(h_k^{'})^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.68}$$

Portanto, segue de (4.68) que a equação (4.51) é satisfeita.

Fazendo $i = 1$ e $j = s$, $s \geq 4$, em (4.41), obtemos

$$1 + \frac{(r_1 - r_s)\tilde{A}_{s1}}{G_{s1}^2} + \frac{(r_s - r_1)\tilde{A}_{1s}}{G_{1s}^2} + \frac{(r_{1,2)^2}}{G_{12}^2} + \frac{(r_{1,3})^2}{G_{13}^2} + \sum_{k\geq 4, k\neq s} \frac{(r_{1,k})^2}{G_{1k}^2} = 0. \tag{4.69}$$

Por (4.42), (4.22) e (4.53) temos

$$\begin{aligned} (r_1 - r_s)\tilde{A}_{s1} &= (r_1 - r_s)r_{s,11} + (r_{s,1})^2 - r_{s,1}(r_1 - r_s)\frac{G_{s1}'}{G_{s1}} \\ &= -\frac{(D_s - 1)^2(D-1)^2}{D^2}h_1^{''}H + \frac{(D_s - 1)^2(D - 1^2)}{D^2}(h_1^{'})^2 + \\ &\quad + \frac{(D_s - 1)^2(D-1)^2}{D^2}h_1^{'}\frac{G_{s1}'}{G_{s1}}H. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(r_1 - r_s)\tilde{A}_{s1} = -\frac{(D_s - 1)^2(D - 1^2)}{D^2}\left\{\left(h_1^{''} - h_1^{'}\frac{G_{s1}'}{G_{s1}}\right)H - (h_1^{'})^2\right\}. \tag{4.70}$$

Temos também por (4.42), (4.22) e (4.53) que

$$\begin{aligned} (r_s - r_1)\tilde{A}_{1s} &= (r_s - r_1)r_{1,ss} + (r_{1,s})^2 - r_{1,s}(r_s - r_1)\frac{G_{1s}'}{G_{1s}} \\ &= -\frac{(D_s - 1)^2(D-1)}{D_s D}h_s^{''}H + \frac{(D_s - 1)^2}{D_s^2}(h_s^{'})^2 + \\ &\quad + \frac{(D_s - 1)^2(D-1)}{D_s D}h_s^{'}\frac{G_{1s}'}{G_{1s}}H. \end{aligned}$$

Logo,

$$(r_s - r_1)\tilde{A}_{1s} = -\frac{(D_s - 1)^2(D-1)}{D_s D}\left(h_s^{''} - h_s^{'}\frac{G_{1s}'}{G_{1s}}\right)H + \frac{(D_s - 1)^2}{D_s^2}(h_s^{'})^2. \tag{4.71}$$

Substituindo (4.70) e (4.71) em (4.69), temos que

$$\begin{aligned} 1 &- \frac{(D_s-1)^2(D-1)^2}{D^2G_{s1}^2}\left(h_1'' - h_1'\frac{G_{s1}'}{G_{s1}}\right)H - \frac{(D_s-1)^2(D-1)}{D_sDG_{1s}^2}\left(h_s'' - h_s'\frac{G_{1s}'}{G_{1s}}\right)H + \\ &+ \frac{(D-1)^2(D_s-1)^2}{D^2G_{s1}^2}(h_1')^2 + \frac{(D-1)^2}{G_{12}^2}(h_2')^2 + \frac{(h_3')^2}{G_{13}^2} + \frac{(D_s-1)^2}{D_s^2G_{1s}^2}(h_s')^2 + \\ &+ \sum_{k\geq 4, k\neq s}\frac{(D_k-1)^2}{D_k^2G_{1k}^2}(h_k')^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.72}$$

Substituindo (4.54) e (4.55) em (4.72), concluímos que

$$\begin{aligned} 1 &- \frac{(D-1)^2}{D^2G_{21}^2}\left(h_1'' - h_1'\frac{G_{21}'}{G_{21}}\right)H - \frac{(D_s-1)^2(D-1)}{D_sDG_{1s}^2}\left(h_s'' - h_s'\frac{G_{1s}'}{G_{1s}}\right)H + \\ &+ \frac{(D-1)^2}{D^2G_{21}^2}(h_1')^2 + \frac{(D-1)^2}{G_{12}^2}(h_2')^2 + \frac{(h_3')^2}{G_{13}^2} + \sum_{k\geq 4}\frac{(D_k-1)^2}{D_k^2G_{1k}^2}(h_k')^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.73}$$

Portanto, da equação (4.73) segue a equação (4.52). □

Observação 4.6. Por meio de cálculos inteiramente análogos aos feitos na demonstração do Corolário 4.5, as demais equações de (4.19), para $t \neq s$ e $t, s \geq 4$, são dadas por

$$\begin{aligned} 1 &- \frac{(D-1)^2}{DG_{12}}\left(\frac{h_2'}{G_{12}}\right)' H - \frac{(D_s-1)^2(D-1)}{DG_{1s}}\left(\frac{h_s'}{G_{1s}}\right)' H + \frac{(D-1)^2}{D^2G_{21}^2}(h_1')^2 + \\ &+ \frac{(D-1)^2}{G_{12}^2}(h_2')^2 + \frac{(h_3')^2}{G_{13}^2} + \sum_{k\geq 4}\frac{(D_k-1)^2}{D_k^2G_{1k}^2}(h_k')^2 = 0, \end{aligned} \tag{4.74}$$

$$\begin{aligned} 1 &+ \frac{1}{G_{13}}\left(\frac{h_3'}{G_{13}}\right)' H - \frac{(D_s-1)^2(D-1)}{DG_{1s}}\left(\frac{h_s'}{G_{1s}}\right)' H + \frac{(D-1)^2}{D^2G_{21}^2}(h_1')^2 + \\ &+ \frac{(D-1)^2}{G_{12}^2}(h_2')^2 + \frac{(h_3')^2}{G_{13}^2} + \sum_{k\geq 4}\frac{(D_k-1)^2}{D_k^2G_{1k}^2}(h_k')^2 = 0, \end{aligned} \tag{4.75}$$

$$
\begin{aligned}
&1-\frac{(D_t-1)^2(D-1)}{DD_tG_{1t}}\left(\frac{h_t^{'}}{G_{1t}}\right)^{'}H-\frac{(D_s-1)^2(D-1)}{DD_sG_{1s}}\left(\frac{h_s^{'}}{G_{1s}}\right)^{'}H+\\
&+\frac{(D-1)^2}{D^2G_{21}^2}(h_1^{'})^2+\frac{(D-1)^2}{G_{12}^2}(h_2^{'})^2+\frac{(h_3^{'})^2}{G_{13}^2}+\sum_{k\geq 4}\frac{(D_k-1)^2}{D_k^2G_{1k}^2}(h_k^{'})^2=0.
\end{aligned}
\tag{4.76}
$$

O teorema seguinte caracteriza as hipersuperfícies de Dupin em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n\geq 3$, com todas curvaturas principais distintas e curvatura de Laguerre constante, que admitem uma parametrização por linhas de curvatura, em termos de seus raios de curvatura e de sua primeira forma fundamental.

Teorema 4.7. *Seja $x: M^n\to\mathbb{R}^{n+1}$, $n\geq 3$, uma hipersuperfície de Dupin própria com curvaturas principais distintas que não se anulam, k_i, e com curvaturas de Laguerre constantes. Se x admitir uma parametrização por linha de curvatura então os raios de curvatura de x são dadas por*

$$
\begin{aligned}
r_1&=\frac{1}{k_1}=-(D-1)h_2+h_3+\sum_{s\geq 4}\left(1-\frac{1}{D_s}\right)h_s,\\
r_2&=\frac{1}{k_2}=\left(1-\frac{1}{D}\right)h_1+\frac{1}{D}h_3+\sum_{s\geq 4}h_s,\\
r_3&=\frac{1}{k_3}=h_1+h_2+\sum_{s\geq 4}\left(1+\frac{1}{D_s(D-1)}\right)h_s,\\
r_s&=\frac{1}{k_s}=D_sr_1+(1-D_s)r_2\ \text{ para }\ s\geq 4,
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
h_1&=\frac{AD^2F_1^2}{2(D-1)^2}+b_1F_1+d_1, \qquad h_2=\frac{ADF_2^2}{2(D-1)^2}+b_2F_2+d_2,\\
h_3&=-\frac{A}{2}F_3^2+b_3F_3+d_3, \qquad h_s=\frac{ADD_sF_s^2}{2(D-1)(D_s-1)^2}+b_sF_s+d_s,
\end{aligned}
\tag{4.78}
$$

com $D=\mathcal{L}^{132}$ e $D_s=\mathcal{L}^{s21}$, $s\geq 4$, $F_1^{'}=G_{21}\neq 0$ e $F_j^{'}=G_{1j}\neq 0$, para $j\neq 1$ e, G_{21} e G_{1j}, $j\geq 2$, são funções diferenciáveis dadas em (4.39)*, $h_l^{'}\neq 0$, e $A,b_l,d_l,1\leq l\leq n$ são* *constantes reais satisfazendo*

$$\begin{gathered}1-2A\left(d_1+Dd_2-d_3+\sum_{s\geq 4}\frac{D}{D_s(D-1)}d_s\right)+\frac{(D-1)^2}{D^2}b_1^2+\\+(D-1)^2b_2^2+b_3^2+\sum_{s\geq 4}\frac{(D_s-1)^2}{D_s^2}b_s^2=0.\end{gathered}\tag{4.79}$$

Reciprocamente, dadas funções diferenciáveis $F_1=F_1(u_1),...,F_n=F_n(u_n)$ *tais que* $F_1',...,F_n'$ *nunca se anulam e, constantes* D, $D_s\in\mathbb{R}-\{0,1\}$, $s\geq 4$, *tais que* $D_s\neq 1/(1-D)$, $D_s\neq D_t$ *para* $s\neq t$. *Definimos* $h_i(u_i)$ *pelas expressões* (4.78), *onde as constantes* A, b_i *e* d_i, $1\leq i\leq n$, *satisfazem a relação algébrica* (4.79). *Considere* r_i *dados por* (4.77) *e um aberto* $U\subset\mathbb{R}^{n+1}$, *onde* r_l *não se anula para todo* l. *Definimos* g_{ii} *em* U *por*

$$g_{11}=\frac{(F_1')^2r_1^2}{(r_1-r_2)^2},\ \ g_{jj}=\frac{(F_j')^2r_j^2}{(r_j-r_1)^2},\ \ j\geq 2\ \ .\tag{4.80}$$

Então, a menos de movimento rígido, existe uma única hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura, cuja métrica é dada por g_{ii} *e as curvaturas principais são dadas por* $1/r_i$. *Além disso, as curvaturas de Laguerre dessa hipersuperfície são constantes e são dadas por* $D=\mathcal{L}^{132}$ *e* $D_s=\mathcal{L}^{s21}, s\geq 4$.

Demonstração: A fim de obter as funções h_i, calculamos as diferenças entre as equações (4.50) e (4.49), (4.51) e (4.49), (4.49) e (4.52), respectivamente. Obtemos:

$$\frac{(D-1)^2}{DG_{12}}\left(\frac{h_2'}{G_{12}}\right)'H+\frac{1}{G_{13}}\left(\frac{h_3'}{G_{13}}\right)'H=0,\tag{4.81}$$

$$\frac{(D-1)^2}{D^2G_{21}}\left(\frac{h_1'}{G_{21}}\right)'H+\frac{1}{G_{13}}\left(\frac{h_3'}{G_{13}}\right)'H=0,\tag{4.82}$$

$$-\frac{(D-1)^2}{DG_{12}}\left(\frac{h_2'}{G_{12}}\right)'H+\frac{(D_s-1)^2(D-1)^2}{DG_{1s}}\left(\frac{h_s'}{G_{1s}}\right)'H=0,\ \ s\geq 4.\tag{4.83}$$

Como $H\neq 0$, obtemos das equações (4.81), (4.82) e (4.83) que

$$\frac{(D-1)^2}{D^2G_{21}}\left(\frac{h_1'}{G_{21}}\right)'=A,\tag{4.84}$$

$$\frac{(D-1)^2}{DG_{12}}\left(\frac{h_2'}{G_{12}}\right)' = A, \tag{4.85}$$

$$\frac{1}{G_{13}}\left(\frac{h_3'}{G_{13}}\right)' = -A, \tag{4.86}$$

$$\frac{(D_s-1)^2(D-1)}{DD_sG_{1s}}\left(\frac{h_s'}{G_{1s}}\right)' = A. \tag{4.87}$$

onde A é uma constante real.

Definimos as funções $F_1' = G_{21}$, $F_j' = G_{1j}, j \geq 2$. Integrando (4.84) em relação a u_1, temos que

$$\frac{h_1'}{F_1'} = \frac{D^2 A}{(D-1)^2}F_1 + b_1, \tag{4.88}$$

onde b_1 é uma constante real. De (4.88) obtemos

$$h_1' = \frac{AD^2}{2(D-1)^2}[F_1^2]' + b_1 F_1'. \tag{4.89}$$

Integrando (4.89) em u_1, tem-se

$$h_1 = \frac{AD^2}{2(D-1)^2}F_1^2 + b_1F_1 + d_1, \tag{4.90}$$

onde d_1 é uma constante real. Integrando (4.85) em relação a u_2, concluímos que

$$\frac{h_2'}{F_2'} = \frac{AD}{(D-1)^2}F_2 + b_2, \tag{4.91}$$

onde b_2 é uma constante real. De (4.91) temos que

$$h_2' = \frac{AD}{2(D-1)^2}[F_2^2]' + b_2F_2'. \tag{4.92}$$

Integrando (4.92) em u_2, segue que

$$h_2 = \frac{AD}{2(D-1)^2}F_2^2 + b_2F_2 + d_2, \tag{4.93}$$

onde d_2 é uma constante real. Integrando (4.86) em relação a u_3, obtemos

$$\frac{h_3'}{F_3'} = -AF_3 + b_3, \tag{4.94}$$

onde b_3 é uma constante real. De (4.94) concluímos que

$$h_3^{'} = -\frac{A}{2}[F_3^2]^{'} + b_3 F_3^{'}. \tag{4.95}$$

Integrando (4.95) em u_3, segue que

$$h_3 = -\frac{A}{2}F_3^2 + b_3 F_3 + d_3, \tag{4.96}$$

onde d_3 é uma constante real. Integrando (4.87) em relação a u_s, $s \geq 4$, obtemos

$$\frac{h_s^{'}}{F_s^{'}} = \frac{ADD_s}{(D-1)(D_s-1)^2}F_s + b_s, \tag{4.97}$$

onde b_s, $s \geq 4$, é uma constante real. De (4.97) temos que

$$h_s^{'} = \frac{ADD_s}{2(D-1)(D_s-1)^2}[F_s^2]^{'} + b_s F_s^{'}. \tag{4.98}$$

Integrando (4.98) em u_s, segue que

$$h_s = \frac{ADD_s}{2(D-1)(D_s-1)^2}F_s^2 + b_s F_s + d_s, \tag{4.99}$$

onde d_s, $s \geq 4$, é uma constante real.

De (4.49), (4.84) e (4.85) temos

$$\begin{aligned} & 1 - 2AH + \frac{(D-1)^2}{D^2}\left(\frac{h_1^{'}}{F_1^{'}}\right)^2 + (D-1)^2\left(\frac{h_2^{'}}{F_2^{'}}\right)^2 + \left(\frac{h_3^{'}}{F_3^{'}}\right)^2 + \\ & + \sum_{k\geq 4}\frac{(D_k-1)^2}{D_k^2}\left(\frac{h_k^{'}}{F_k^{'}}\right)^2 = 0, \end{aligned} \tag{4.100}$$

onde as funções h_i são dadas por (4.90), (4.93), (4.96) e (4.99). Temos por (4.22) que

$$\begin{aligned} H &= \frac{AD^2}{2(D-1)^2}\left(F_1^2 + F_2^2 + \frac{(D-1)^2}{D^2}F_3^2 + \sum_{k\geq 4}\frac{F_k^2}{(D_k-1)^2}\right) + b_1F_1 + \\ & + Db_2F_2 - b_3F_3 + d_1 + Dd_2 - d_3 + \sum_{k\geq 4}\frac{D}{D_k(D-1)}\left(b_kF_k + d_k\right). \end{aligned} \tag{4.101}$$

Substituindo (4.101) em (4.100), concluímos usando as expressões (4.88), (4.91), (4.94) e (4.97) que

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & 1-\frac{A^2D^2}{(D-1)^2}\left(F_1^2+F_2^2+\frac{(D-1)^2}{D^2}F_3^2+\sum_{k\geq 4}\frac{F_k^2}{(D_k-1)^2}\right)-2Ab_1F_1+ \\
& -2A(Db_2F_2-b_3F_3+d_1+Dd_2-d_3)-2A\sum_{k\geq 4}\frac{D}{D_k(D-1)}\left(b_kF_k+d_k\right)+ \\
& +\frac{(D-1)^2}{D^2}\left(\frac{AD^2}{(D-1)^2}F_1+b_1\right)^2+(D-1)^2\left(\frac{AD}{(D-1)^2}F_2+b_2\right)^2+ \\
& +\left(-AF_3+b_3\right)^2+\sum_{k\neq 4}\frac{(D_k-1)^2}{D_k^2}\left(\frac{ADD_k}{(D-1)(D_k-1)^2}F_k+b_k\right)^2= \\
=\; & 1-\frac{A^2D^2}{(D-1)^2}\left(F_1^2+F_2^2+\frac{(D-1)^2}{D^2}F_3^2+\sum_{k\geq 4}\frac{F_k^2}{(D_k-1)^2}\right)-2Ab_1F_1+ \\
& -2A(Db_2F_2-b_3F_3+d_1+Dd_2-d_3)-2A\sum_{k\geq 4}\frac{D}{D_k(D-1)}\left(b_kF_k+d_k\right)+ \\
& +\frac{A^2D^2}{(D-1)^2}F_1^2+2Ab_1F_1+\frac{(D-1)^2}{D^2}b_1^2+\frac{A^2D^2}{(D-1)^2}F_2+2ADb_2F_2+ \\
& +(D-1)^2b_2^2+A^2F_3^2-2Ab_3F_3+b_3^2+\sum_{k\geq 4}\frac{A^2D^2}{(D-1)^2(D_k-1)^2}F_k^2+ \\
& +\sum_{k\geq 4}\frac{2ADb_k}{D_k(D-1)}F_k+\sum_{k\geq 4}\frac{(D_k-1)^2}{D_k^2}b_k^2= \\
=\; & 1-2A\left(d_1+Dd_2-d_3+\sum_{k\geq 4}\frac{Dd_k}{D_k(D-1)}\right)+\frac{(D-1)^2}{D^2}b_1^2+(D-1)^2b_2^2+b_3^2+ \\
& +\sum_{k\geq 4}\frac{(D_k-1)^2}{D_k^2}b_k^2,
\end{aligned}
$$

da última igualdade segue a equação (4.79), como queríamos provar. Analogamente com

(4.50) a (4.52) obtemos a mesma equação que relaciona as constantes.

Reciprocamente, dadas funções diferenciáveis $F_1 = F_1(u_1), ..., F_n = F_n(u_n)$ tais que $F_1', ..., F_n'$ nunca se anulam e, constantes D, $D_s \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$, $s \geq 4$, tais que $D_s \neq 1/(1-D)$, $D_s \neq D_t$ para $s \neq t$. Considere r_i dados por (4.77) e g_{ii} dada por (4.80). Vamos verificar que a equação de Gauss, dada em (4.19) e equação de Codazzi, dada em (4.18), são satisfeitas. Nestas condições, temos de (4.80) que

$$g_{11} = \frac{(F_1')^2 r_1^2}{(r_1 - r_2)^2}. \tag{4.102}$$

Diferenciando a equação (4.102) em relação a u_j, $j \neq 1$, obtemos

$$g_{11,j} = \frac{2(F_1')^2 r_1 [r_{1,j}(r_1 - r_2) - r_1(r_{1,j} - r_{2,j})]}{(r_1 - r_2)^3}. \tag{4.103}$$

Dividindo $g_{11,j}$ por $2g_{11}$, segue de (4.102) e (4.103) que

$$\frac{g_{11,j}}{2g_{11}} = \frac{r_{1,j}(r_1 - r_2) - r_1(r_{1,j} - r_{2,j})}{r_1(r_1 - r_2)}. \tag{4.104}$$

Por outro lado, segue de (4.77) que $\frac{r_2 - r_1}{r_j - r_1}$ é constante. Diferenciando em u_j e usando que $r_{j,j} = 0$, obtemos

$$r_{1,j} - r_{2,j} = \frac{r_2 - r_1}{r_j - r_1} r_{1,j}. \tag{4.105}$$

Substituindo (4.105) em (4.104), segue que

$$\frac{g_{11,j}}{2g_{11}} = \frac{r_{1,j}\left[r_1 - r_2 - r_1 \dfrac{r_2 - r_1}{r_j - r_1}\right]}{r_1(r_1 - r_2)} = \frac{r_{1,j}[(r_1 - r_2)(r_j - r_1) - r_1(r_2 - r_1)]}{r_1(r_1 - r_2)(r_j - r_1)}. \tag{4.106}$$

Logo, de (4.106), segue que

$$\frac{g_{11,j}}{2g_{11}} = \frac{r_{1,j} r_j}{r_1(r_j - r_1)}. \tag{4.107}$$

Portanto, segue de (4.107) que a equação (4.18) é verificada para $i = 1$. Para $i \geq 2$, temos de (4.80) que

$$g_{ii} = \frac{(F_i')^2 r_i^2}{(r_i - r_1)^2}. \tag{4.108}$$

Diferenciando a equação (4.108) em relação a u_j, $j \neq i$, obtemos

$$g_{ii,j} = \frac{2(F_i^{'})^2 r_1[r_{i,j}(r_i - r_1) - r_i(r_{i,j} - r_{1,j})]}{(r_i - r_1)^3}. \tag{4.109}$$

Dividindo $g_{ii,j}$ por $2g_{ii}$, segue de (4.108) e (4.109) que

$$\frac{g_{ii,j}}{2g_{ii}} = \frac{r_{i,j}(r_i - r_1) - r_i(r_{i,j} - r_{1,j})}{r_i(r_i - r_1)}. \tag{4.110}$$

Por outro lado, segue de (4.77) que $\frac{r_1 - r_i}{r_j - r_i}$ é constante. Diferenciando essa expressão em u_j e usando que $r_{j,j} = 0$, obtemos

$$r_{i,j} - r_{1,j} = \frac{r_1 - r_i}{r_j - r_i} r_{i,j}. \tag{4.111}$$

Substituindo (4.111) em (4.110), segue que

$$\frac{g_{ii,j}}{2g_{ii}} = \frac{r_{i,j}\left[r_i - r_1 - r_i \dfrac{r_1 - r_i}{r_j - r_i}\right]}{r_i(r_i - r_1)} = \frac{r_{i,j}[(r_i - r_1)(r_j - r_i) - r_i(r_1 - r_i)]}{r_i(r_i - r_1)(r_j - r_i)}. \tag{4.112}$$

Logo, de (4.112), segue que

$$\frac{g_{ii,j}}{2g_{ii}} = \frac{r_{i,j} r_j}{r_i(r_j - r_i)}. \tag{4.113}$$

Portanto, segue de (4.113) que a equação (4.18) é verificada para $i \neq 1$. Logo, de (4.107) e (4.113), temos que a equação de Codazzi esta verificada.

Considere $h_i(u_i), 1 \leq i \leq n$, dadas pelas expressões (4.78), onde as constantes A, b_i e d_i, $1 \leq i \leq n$, satisfazem a relação algébrica (4.79). Queremos mostrar que a seguinte identidade se verifica:

$$\frac{1}{r_i r_j} + \frac{A_{ji}}{g_{ii}} + \frac{A_{ij}}{g_{jj}} + \sum_{k \neq i \neq j} \frac{\Gamma_{ik}^i \Gamma_{jk}^j}{g_{kk}} = 0, \tag{4.114}$$

onde $i \neq j$ e

$$A_{ji} = \Gamma_{ji,i}^j + \Gamma_{ji}^j(\Gamma_{ji}^j - \Gamma_{ii}^i). \tag{4.115}$$

Para tanto, vamos calcular as funções Γ_{ij}^k. Por definição, temos

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{lk} \left\{ g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l} \right\}. \tag{4.116}$$

Segue de (4.80) e (4.116) que

$$\Gamma_{ij}^{k}=0,\ \ \Gamma_{ii}^{i}=\frac{g_{ii,i}}{2g_{ii}},\ \ \Gamma_{ii}^{j}=\frac{-g_{ii,j}}{2g_{jj}},\ \ \Gamma_{ij}^{i}=\frac{g_{ii,j}}{2g_{ii}}, \tag{4.117}$$

onde i,j,k são distintos.
Além disso, de (4.80) e da última equação de (4.117), obtemos que

$$\Gamma_{ji}^{j}=\frac{r_{j,i}r_i}{(r_i-r_j)r_j}. \tag{4.118}$$

A fim de verificar as equações dadas em (4.19), para cada $i\neq j$, vamos calcular as funções A_{ji} dadas em (4.20). Diferenciando (4.118) em u_i, obtemos

$$\Gamma_{ji,i}^{j}=\frac{r_{j,ii}r_i}{(r_i-r_j)r_j}+\frac{(r_{j,i})^2r_i}{(r_i-r_j)^2r_j}-\frac{(r_{j,i})^2r_i}{(r_i-r_j)r_j^2}, \tag{4.119}$$

cujos cálculos serão omitidos, pois são os mesmos da equação (4.46). Segue de (4.77) que, para i,j,k distintos, temos que $\frac{r_i-r_j}{r_k-r_j}$ é constante. Desta forma, usando (4.80) e a segunda equação de (4.117), obtemos que

$$\Gamma_{ii}^{i}=\frac{r_{j,i}}{r_i-r_j}+\frac{F_i''}{F_i'}. \tag{4.120}$$

Por cálculos inteiramente análogos aos feitos para deduzirmos a equação (4.48), obtemos de (4.20), (4.119) e (4.120) que

$$A_{ji}=\frac{r_i}{r_j(r_i-r_j)}\left\{r_{j,ii}+\frac{(r_{j,i})^2}{r_i-r_j}-r_{j,i}\frac{F_i''}{F_i'}\right\}. \tag{4.121}$$

Como as funções r_i são todas distintas e satisfazem $r_{i,i}=0$, e também, para i,j,k distintos, temos que $\frac{r_i-r_j}{r_k-r_j}$ é contante, obtemos que equação (4.35) é verificada, isto é,

$$r_i\Gamma_{ik}^{i}=r_j\Gamma_{jk}^{j}\ \ \text{para}\ \ i,j,k\ \ \text{distintos}. \tag{4.122}$$

Concluímos de (4.121) e (4.122) que verificar a equação (4.19) é equivalente a verificar, para $i\neq j$, as seguintes equações

$$\frac{1}{r_1r_j}\left[1+\frac{r_1-r_2}{(F_1')^2}\tilde{A}_{21}+\frac{r_j-r_1}{(F_j')^2}\tilde{A}_{1j}+\sum_{k\neq j\neq 1}\frac{(r_{1,k})^2}{(F_k')^2}\right]=0,\ \ se\ \ i=1 \tag{4.123}$$

e

$$\frac{1}{r_1 r_j}\left[1+\frac{r_i-r_1}{(F_1')^2}\tilde{A}_{1i}+\frac{r_j-r_1}{(F_j')^2}\tilde{A}_{1j}+\frac{(r_{2,1})^2}{(F_1')^2}+\sum_{k\neq i\neq j\neq 1}\frac{(r_{1,k})^2}{(F_k')^2}\right]=0,\quad se\ \ i\neq j\neq 1, \tag{4.124}$$

onde

$$\tilde{A}_{ji}=r_{j,ii}+\frac{(r_{j,i})^2}{r_i-r_j}-r_{j,i}\frac{F_i''}{F_i'}. \tag{4.125}$$

De fato, como $\frac{r_1-r_j}{r_1-r_2}, j\neq 1$, é constante, tomando a derivada em u_1, obtemos que

$$r_{j,1}=\frac{r_1-r_j}{r_1-r_2}r_{2,1},\quad r_{j,11}=\frac{r_1-r_j}{r_1-r_2}r_{2,1}. \tag{4.126}$$

Substituindo (4.126) em (4.121), para $i=1$, temos que

$$A_{j1}=\frac{r_1}{r_j(r_1-r_2)}\left\{r_{2,11}+\frac{(r_{2,1})^2}{r_1-r_2}-r_{2,1}\frac{F_1''}{F_1'}\right\}=\frac{g_{11}(r_1-r_2)}{r_1r_j}\tilde{A}_{21}, \tag{4.127}$$

onde g_{11} é dada em (4.80) e $\tilde{A}_{21}$ é dada em (4.125). Usando (4.80), (4.118), (4.122) e (4.127), temos para $j\neq k\neq 1$ que

$$\frac{\Gamma^1_{1k}\Gamma^j_{jk}}{g_{kk}}=\frac{r_1(\Gamma^1_{1k})^2}{r_jg_{kk}}=\frac{r_1(r_{1,k})^2r_k^2(r_k-r_1)^2}{r_jr_1^2r_k^2(r_k-r_1)^2(F_k')^2}=\frac{(r_{1,k})^2}{r_1r_j(F_k')^2}. \tag{4.128}$$

Usando (4.80), (4.127) e (4.128) na identidade (4.114), para $i=1$, obtemos a equação (4.123).
Como $\frac{r_i-r_j}{r_i-r_1}, i\neq j\neq 1$, também é constante, derivando em u_i, obtemos que

$$r_{j,i}=\frac{r_i-r_j}{r_i-r_1}r_{1,i},\quad r_{j,ii}=\frac{r_i-r_j}{r_i-r_1}r_{1,ii}. \tag{4.129}$$

Consideremos agora $i\neq 1$ e $j\neq 1$. De (4.114) e (4.129), segue que

$$A_{ji}=\frac{r_i}{r_j(r_i-r_1)}\left\{r_{1,ii}+\frac{(r_{1,i})^2}{r_i-r_1}-r_{1,i}\frac{F_i''}{F_i'}\right\}=\frac{g_{ii}(r_i-r_1)}{r_ir_j}\tilde{A}_{1i}, \tag{4.130}$$

onde $\tilde{A}_{1i}$ e dado por (4.125) e g_{ii} é dada em (4.80). Usando (4.80), (4.118), (4.122) e

(4.126), temos para $i \neq j \neq 1$ que

$$\frac{\Gamma_{i1}^{i}\Gamma_{j1}^{j}}{g_{11}} = \frac{r_i(\Gamma_{i1}^{i})^2}{r_j g_{11}} = \frac{r_i(r_{i,1})^2 r_1^2(r_1 - r_2)^2}{r_j r_i^2 r_1^2 (r_1 - r_i)^2 (F_1^{'})^2} = \frac{(r_{2,1})^2}{r_i r_j (F_1^{'})^2}. \tag{4.131}$$

Substituindo (4.128), (4.130) e (4.131) em (4.114) obtemos a identidade (4.124). Logo, segue de (4.123) e (4.124) que verificar a equação (4.114) é equivalente a verificarmos as seguintes equações

$$1 + \frac{r_1 - r_2}{(F_1^{'})^2}\tilde{A}_{21} + \frac{r_j - r_1}{(F_j^{'})^2}\tilde{A}_{1j} + \sum_{k\neq j\neq 1} \frac{(r_{1,k})^2}{(F_k^{'})^2} = 0, \quad se \ \ i = 1 \tag{4.132}$$

e

$$1 + \frac{r_i - r_1}{(F_1^{'})^2}\tilde{A}_{1i} + \frac{r_j - r_1}{(F_j^{'})^2}\tilde{A}_{1j} + \frac{(r_{2,1})^2}{(F_1^{'})^2} + \sum_{k\neq i\neq j\neq 1} \frac{(r_{1,k})^2}{(F_k^{'})^2} = 0, \quad se \ \ i \neq j \neq 1, \tag{4.133}$$

onde $\tilde{A}_{ji}$ é dado em (4.125).
Identificamos $F_1^{'} = G_{21}$ e $F_i^{'} = G_{1i}, i \geq 2$ nas equações dadas em (4.49), (4.50), (4.51), (4.52), (4.74), (4.75) e (4.76). Note que, por cálculos inteiramente análogos, obtemos, fazendo $j = 2, j = 3$ e $j = s \geq 4$ na equação (4.132) as equações dadas em (4.49), (4.50) e (4.52), respectivamente. Também, tomando os índices $i = 2, j = 3$; $i = 2, j = s \geq 4$; $i = 3, j = s \geq 4$ e $i = s \geq 4, j = t \geq 4$ na equação (4.133) obtemos as equações (4.51), (4.74), (4.75) e (4.76), respectivamente. Mas essas equações são verificadas, já que, substituindo as funções h_i, dadas em (4.78), elas se reduzem a relação algébrica (4.79) que é verificada pelas constantes A, b_i e d_i. Portanto, a equação de Gauss também é verificada como queríamos mostrar.

□

Observação 4.8. Seja M^n uma hipersuperfície de Dupin com curvaturas principais distintas e parametrizadas por linhas de curvaturas. Então dizer que x possui curvatura de Möbius constante equivale a dizer que ela possui, em dimensões maiores, todos os invariantes de Laplace nulos (para detalhes veja [34]). Entretanto, segue da Proposição 4.3, que se M^n é uma hipersuperfície de Dupin com curvaturas principais distintas e que não se anulam, parametrizada por linhas de curvaturas, que possui todas as curvaturas de Laguerre constantes, então, em dimensões maiores, isso implica que todos os invariantes de Laplace são não nulos. Para a definição destes invariantes veja [25]. Para i, j, k distintos, os invariantes de Laplace, associados ao sistema de equações (4.4), são dados por

$$m_{ikj} = \Gamma^i_{ik} - \Gamma^j_{jk}, \;\; j \neq i \neq k, \;\; 1 \leq j \leq n.$$

Da Proposição 4.3 obtemos que $m_{ikj} = \left(\frac{r_j}{r_i} - 1\right)\Gamma^j_{jk}$ são não nulos, para i, j, k distintos, já que todos os raios de curvatura r_i de M são distintos e Γ^j_{jk}, dado por (4.7), nunca se anula, já que $r_{i,l} = h_l^{'} \neq 0$, para todo l, $i \neq l$, conforme Teorema 4.7 .

Na seção seguinte apresentamos uma família de hipersuperfícies de Dupin $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com curvaturas principais distintas que não se anulam, cujas curvaturas de Laguerre são constantes, que admitem uma parametrização por linhas de curvatura.

4.3 Exemplo

Nesta seção vamos verificar que a família de hipersuperfícies de Dupin em $\mathbb{R}^{n+1}$ dadas no Exemplo 2.10 satisfaz as condições do Teorema 4.7. Calculamos também as curvaturas de Lie dessas hipersuperfícies. Em [34], os autores Riveros-Rodrigues-Tenenblat provaram um resultado de não existência de hipersuperfícies parametrizadas por linha de curvatura e curvaturas de Möbius constantes quando a dimensão $n \geq 4$. Se $n \geq 3$, a hipersuperfície apresentada no Exemplo 2.10 é parametrizada por linhas de curvatura e têm curvaturas de Laguerre constantes.

Consideremos a hipersuperfície no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ parametrizada por (veja também [34])

$$x(u_1, ..., u_n) = (u_1, ..., u_n, 0) - \frac{2\sum_{j=1}^n f_j}{\sum_{j=1}^n (f_j^{'})^2 + b^2}(f_1^{'}, ..., f_n^{'}, -b). \tag{4.134}$$

Então x é uma hipersuperfície de Dupin parametrizada, onde $(u_1, ..., u_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$ e

$$f_j = b_{j2}u_j^2 + b_{j1}u_j + b_{j0} \;\; \text{para} \;\; b \neq 0, b_{j2}, b_{j1}, b_{j0} \in \mathbb{R} \;\; \text{e} \;\; 1 \leq j \leq n, \tag{4.135}$$

e b_{j2} são contantes não nulas e todas distintas.

As curvaturas principais de x são dadas por (ver [15])

$$k_l = \frac{4bb_{l2}}{B_l} \;\; \text{para} \;\; 1 \leq l \leq n, \tag{4.136}$$

onde

$$B_l = \sum_{j\neq l}^{n} (f_j')^2 - 4b_{l2}\sum_{j\neq l}^{n} f_j + a_l, \tag{4.137}$$

$$a_l = b^2 + b_{l1}^2 - 4b_{l2}b_{l0}. \tag{4.138}$$

Introduzindo a notação

$$S_1 = \sum_{j=1}^{n} (f_j')^2 \ \text{ e } \ S = \sum_{j=1}^{n} f_j, \tag{4.139}$$

a equação (4.137) reduz-se a $B_l = S_1 - (f_l')^2 - 4b_{l2}(S - f_l) + a_l$. Usando (4.135) e (4.138), temos que $-(f_l')^2 + 4b_{l2}f_l + a_l = b^2$. Desta maneira, para cada l temos

$$B_l = S_1 - 4b_{l2}S + b^2. \tag{4.140}$$

Segue de (4.136) que

$$\begin{aligned} k_l - k_i &= \frac{4bb_{l2}}{B_l} - \frac{4bb_{i2}}{B_i} \\ &= \frac{4bb_{l2}B_i - 4bb_{i2}B_l}{B_iB_l} \\ &= \frac{4bb_{l2}(S_1 - 4b_{i2}S + b^2) - 4bb_{i2}(S_1 - 4b_{l2}S + b^2)}{B_iB_l}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$k_l - k_i = \frac{-4b(b_{i2} - b_{l2})(S_1 + b^2)}{B_iB_l}. \tag{4.141}$$

Se os coeficientes b_{j2} são distintos e não-nulos, para todo j, as curvaturas principais não se anularão e terão multiplicidade um. Segue de (4.141) que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{ijl} &= \frac{(k_i - k_j)k_l}{(k_l - k_j)k_i} \\ &= \frac{-4b(b_{j2} - b_{i2})(S_1 + b^2)(B_lB_j)(-4bb_{l2})B_i}{B_iB_j(-4b)(b_{j2} - b_{l2})(S_1 + b^2)(-4bb_{i2})B_l}. \end{aligned}$$

Portanto, as curvaturas de Laguerre

$$\mathcal{L}^{ijl} = \frac{(b_{j2} - b_{i2})b_{l2}}{(b_{j2} - b_{l2})b_{i2}} \tag{4.142}$$

são todas constantes. Além disso, as curvaturas de Lie dadas por (4.12) são constantes dadas por

$$\Psi^{ijsl} = \frac{(b_{i2} - b_{s2})(b_{j2} - b_{l2})}{(b_{i2} - b_{l2})(b_{j2} - b_{s2})}.$$

Portanto, segue do Teorema 4.7 que a hipersuperfície x dada em (4.134), é uma hipersuperfície de Dupin em $\mathbb{R}^{n+1}$ parametrizada por linhas de curvatura e, com curvaturas principais distintas que não se anulam, que é uma hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre.

Os autovalores do operador autoadjunto de Laguerre $\tilde{S}$ dessa hipersuperfície são dados por

$$\tilde{k_i} = \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_j \frac{1}{b_{j2}} - \frac{1}{b_{i2}}}{\sqrt{\displaystyle\sum_i \left(\frac{1}{n}\sum_j \frac{1}{b_{j2}} - \frac{1}{b_{i2}}\right)^2}}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

As hipersuperfícies dadas por (4.134) satisfazem as condições do Teorema 4.7. De fato, pode-se verificar que os raios de curvatura r_i dessa hipersuperfície são dados por (4.77) onde de (4.142) temos (veja os cálculos no Apêndice B)

$$D = \frac{(b_{32} - b_{12})b_{22}}{(b_{32} - b_{22})b_{12}}, \qquad D_s = \frac{(b_{22} - b_{s2})b_{12}}{(b_{22} - b_{12})b_{s2}}, \quad s \geq 4, \tag{4.143}$$

e as funções $h_i(u_i)$ são dadas por (4.78) onde

$$F_1 = \left(1 - \frac{b_{12}}{b_{22}}\right)u_1, \quad F_j = \left(1 - \frac{b_{j2}}{b_{12}}\right)u_j, \quad j \geq 2,$$

$$A = \frac{-2b_{12}b_{22}(D-1)}{b(b_{22} - b_{12})D},$$

$$b_1 = -\frac{(D-1)b_{11}}{Db}, \qquad b_2 = \frac{b_{21}}{(D-1)b},$$

$$b_3 = -\frac{b_{31}}{b}, \qquad b_j = -\frac{D_j b_{j1}}{(D_j - 1)b}, \quad j \geq 4.$$

No caso $n \geq 4$, temos

$$d_1 = \frac{1}{8b(1-D)(n-3)} \sum_{j\geq 4} \left\{ \frac{1+D_j(1-D)}{b_{12}} + \frac{2-D(1+D_j(1-D))}{b_{22}} \right\} W$$

$$+\frac{1}{8b(n-3)} \sum_{j\geq 4} \frac{1-D_j(1-D)}{b_{32}} W + \frac{D}{1-D} W_0 + \sum_{j\geq 4} \frac{1}{D_j},$$

$$d_2 = \frac{1}{4bb_{22}(D-1)} W + \frac{1}{D-1} W_0,$$

$$d_3 = \frac{1}{8b(n-3)} \sum_{j\geq 4} \left(\frac{1+D_j}{b_{12}} + \frac{2+D(1-D_j)}{b_{22}} + \frac{(D_j-1)(D-1)}{b_{32}} \right)$$

e

$$d_j = \frac{1}{8(n-3)b} \left(-\frac{1}{b_{12}} + \frac{D}{b_{22}} - \frac{D-1}{b_{32}} \right) W.$$

No caso $n = 3$ as constantes d_1, d_2 e d_3 são dadas por

$$d_1 = \frac{1}{4b} \left(\frac{1}{b_{32}} - \frac{1}{b_{22}} \right) W,$$

$$d_2 = \frac{1}{4bb_{22}} W - W_0,$$

$$d_3 = \frac{1}{4b} \left(\frac{1}{b_{12}} + \frac{D-1}{b_{22}} \right) W - DW_0,$$

onde $W = \sum_{j=1}^{n} b_{j1}^2 + b^2$, $W_0 = \sum_{j=1}^{n} b_{jo}$ e, D e D_j são dados por (4.143).

Apêndices

Apêndice A

Considere $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável, sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Apresentamos com um pouco mais de detalhes, as equações de estrutura para o referencial móvel de Laguerre da imersão x, dadas em (1.60) (veja também [21]). Seja $\{Y, N, E_1(Y), E_2(Y), ..., E_n(Y), \eta, P\}$ um referencial móvel de Laguerre em $\mathbb{R}^{n+4}_2$ da imersão x. Então, são satisfeitas as seguintes relações de ortogonalidade com relação à métrica de Laguerre g

$$\begin{gathered} \langle Y, E_i(Y)\rangle = \langle \Delta Y, E_i(Y)\rangle = 0, \quad \langle Y, \Delta Y\rangle = -n, \quad \langle E_i(Y), E_j(Y)\rangle = \delta_{ij}, \\ \langle N, N\rangle = \langle Y, Y\rangle = \langle \eta, \eta\rangle = 0, \qquad \langle Y, N\rangle = -1, \qquad\qquad \langle \eta, P\rangle = -1. \end{gathered} \tag{4.144}$$

As equações de estrutura para este referencial são dadas por

$$\begin{aligned} dY &= \sum_i \omega_i E_i(Y), \\ dN &= \sum_i \psi_i E_i(Y) + \phi P, \\ dE_i(Y) &= \psi_i Y + \omega_i N + \sum_j \omega_{ij} E_j(Y) + \beta_i P, \\ d\eta &= -\phi Y + \sum_i \beta_i E_i(Y). \end{aligned} \tag{4.145}$$

onde $\{\psi_i, \omega_{ij}, \phi, \beta_i\}$ são 1-formas diferenciáveis em M com $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$.

Proposição 4.9. *Seja $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável, sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Então as equações de estrutura de x, com relação à métrica de Laguerre g, são dadas por* (4.145)*. Tomando a derivada* *exterior das equações dadas em* (4.145)*, obtemos:*

$$\begin{aligned}
&\sum_i \omega_i \wedge \psi_i = 0,\\
&\sum_i \omega_i \wedge \beta_i = 0,\\
&d\omega_i - \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j = 0,\\
&d\psi_i - \sum_i \omega_{ij} \wedge \psi_j = 0,\\
&d\phi - \sum_i \psi_i \wedge \beta_i = 0,\\
&d\beta_i - \sum_j \omega_{ij} \wedge \beta_j - \omega_i \wedge \phi = 0,\\
&d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = \psi_i \wedge \omega_j + \omega_i \wedge \psi_j.
\end{aligned} \tag{4.146}$$

Demonstração: Tomando a derivada exterior de primeira equação de (4.145), obtemos

$$\sum_i d\omega_i E_i(Y) - \sum_i \omega_i \wedge dE_i(Y) = 0. \tag{4.147}$$

Usando a terceira equação de (4.145), segue que

$$\sum_i d\omega_i E_i(Y) - \sum_i \omega_i \wedge \psi_i Y - \sum_{ij} \omega_i \wedge \omega_{ij} E_j(Y) - \sum_i \omega_i \wedge \beta_i P = 0. \tag{4.148}$$

Tomando o produto interno em (4.148), por Y, η e $E_i(Y)$ e usando as relações dadas em (4.144), segue que as três primeiras equações de (4.146) valem. Tomando a derivada exterior da segunda equação de (4.145), obtemos que

$$\sum_i d\psi_i E_i(Y) - \sum_i \psi_i \wedge dE_i(Y) + d\phi P = 0. \tag{4.149}$$

Usando a terceira equação de (4.145) em (4.149), segue que

$$\sum_i d\psi_i E_i(Y) - \sum_i \psi_i \wedge \omega_i N - \sum_{ij} \psi_i \wedge \omega_{ij} E_j(Y) - \sum_i \psi_i \wedge \beta_i P + d\phi P = 0. \tag{4.150}$$

Tomando o produto interno em (4.150), por η e $E_i(Y)$ e usando as relações dadas em (4.144), segue que a quarta e a quinta equação de (4.146) são satisfeitas. Tomando a derivada exterior da terceira equação de (4.145), obtemos que

$$d\psi_i Y - \psi_i \wedge dY + d\omega_i N - \omega_i \wedge dN + \sum_i d\omega_{ij} E_j(Y) - \sum_j \omega_{ij} \wedge dE_j(Y) + d\beta_i P = 0. \quad (4.151)$$

De maneira análoga, substituindo as equações dadas em (4.145) e usando as relações dadas em (4.144), seguem as duas últimas equações de (4.146). □

Como o conjunto $\{w_i\}$ é LI, e de (4.146) temos $\sum_i \omega_i \wedge \psi_i = 0$ e $\sum_i \omega_i \wedge \beta_i = 0$, pelo Lema de Cartan, podemos escrever

$$\psi_i = \sum_j L_{ij}\omega_j, \quad L_{ij} = L_{ji}; \quad \beta_i = \sum_j B_{ij}\omega_j \quad B_{ij} = B_{ji}; \quad \phi = \sum_i C_i\omega_i, \qquad (4.152)$$

onde L_{ij}, B_{ij} e C_i são funções diferenciáveis em M. Temos os seguintes invariantes de Laguerre, dados também em (1.61).

$$\begin{aligned} &\text{(i) O tensor segunda forma fundamental de Laguerre } \mathbb{B} = \sum_{ij} B_{ij}\omega_i \otimes \omega_j. \\ &\text{(iii) O tensor simétrico de segunda ordem } \mathbb{L} = \sum_{ij} L_{ij}\omega_i \otimes \omega_j. \\ &\text{(iii) A forma de Laguerre } \mathbb{C} = \sum_i C_i\omega_i. \end{aligned} \qquad (4.153)$$

Definição 4.10. Seja $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável, sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Então as equações de estrutura de x, com relação à métrica de Laguerre g, são dadas por (4.145). As derivadas covariantes dos tensores $\mathbb{C}$, $\mathbb{L}$ e $\mathbb{B}$, dados em (4.153), e o tensor curvatura, com relação à métrica g, são dadas por

$$\begin{aligned} &dC_i + \sum_j C_j\omega_{ji} = \sum_j C_{i,j}\omega_j, \\ &dL_{ij} + \sum_k L_{ik}\omega_{kj} + \sum_k L_{kj}\omega_{ki} = \sum_k L_{ij,k}\omega_k, \\ &dB_{ij} + \sum_k B_{ik}\omega_{kj} + \sum_k B_{kj}\omega_{ki} = \sum_k B_{ij,k}\omega_k, \\ &d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = R_{ijkl}. \end{aligned} \qquad (4.154)$$

Proposição 4.11. *Seja $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável, sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Então as equações de estrutura de x,* *com relação à métrica de Laguerre g, são dadas por* (4.145). *Tomando a derivada exterior das equações dadas em* (4.154), *obtemos as seguintes relações entre estes invariantes:*

$$\begin{aligned} &L_{ij,k} = L_{ik,j}, \\ &C_{i,j} - C_{j,i} = \sum_k (B_{ik}L_{kj} - B_{jk}L_{ki}), \\ &B_{ij,k} - B_{ik,j} = C_j\delta_{ik} - C_k\delta_{ij}, \\ &R_{ijkl} = L_{jk}\delta_{il} + L_{il}\delta_{jk} - L_{ik}\delta_{jl} + L_{jl}\delta_{ik}, \end{aligned} \tag{4.155}$$

onde R_{ijkl} é o tensor curvatura da métrica g.

Demonstração: Tomando a derivada exterior da primeira equação de (4.152) e usando (4.145), obtemos

$$d\psi_i = \sum_j dL_{ij} \wedge \omega_j + \sum_{jk} L_{ik}\omega_{kj} \wedge \omega_j. \tag{4.156}$$

Substituindo a primeira equação de (4.152) na quinta equação de (4.146), temos que

$$d\psi_i = \sum_{jk} L_{ij}\omega_{ik} \wedge \omega_j. \tag{4.157}$$

Comparando as equações (4.156) e (4.157) e usando (4.154), obtemos

$$\sum_{jk} L_{ij,k}\omega_k \wedge \omega_j = 0. \tag{4.158}$$

Portanto, de (4.158) segue que

$$\sum_{j<k} L_{ij,k}\omega_k \wedge \omega_j + \sum_{j>k} L_{ij,k}\omega_k \wedge \omega_j = 0. \tag{4.159}$$

Trocando j por k na segundo somatório de (4.159) e usando que $\omega_k \wedge \omega_j = -\omega_j \wedge \omega_k$, obtemos

$$\sum_{j<k} L_{ij,k}\omega_k \wedge \omega_j - \sum_{k>j} L_{ik,j}\omega_k \wedge \omega_j = 0. \tag{4.160}$$

Como o conjunto $\{\omega_k \wedge \omega_j\}_{j<k}$ é LI, de (4.160) segue a primeira identidade de (4.155). Tomando a derivada exterior da terceira equação de (4.152) e usando (4.155), segue que

$$d\phi = \sum_i dC_i \wedge \omega_i + \sum_{ij} C_j\omega_{ji} \wedge \omega_i = \sum_{ij} C_{i,j}\omega_j \wedge \omega_i. \tag{4.161}$$

Usando (4.152) na quinta equação de (4.146), obtemos

$$d\phi = \sum_{ijk} B_{kj} L_{ki} \omega_j \wedge \omega_i. \tag{4.162}$$

Comparando as equações (4.161) e (4.162), segue que

$$\sum_{ij} \left(C_{i,j} + \sum_k B_{kj} L_{ki} \right) \omega_j \wedge \omega_i = 0. \tag{4.163}$$

Usando um argumento similar em (4.163), ao usado em (4.160), segue que segunda equação de (4.155) é satisfeita. Tomando a derivada exterior da segunda equação de (4.152) e usando (4.155), segue que

$$d\beta_i = \sum_j dB_{ij} \wedge \omega_j + \sum_{jk} B_{ij} \omega_{jk} \wedge \omega_k. \tag{4.164}$$

Usando (4.152) na sexta equação de (4.146), obtemos

$$d\beta_i = \sum_{jk} B_{jk} \omega_{ij} \wedge \omega_k + \sum_k C_k \omega_i \wedge \omega_k. \tag{4.165}$$

Comparando as equações (4.164) com (4.165) e usando (4.154), segue que

$$\sum_{jk} \left(B_{ij,k} - C_k \delta_{ij} \right) \omega_j \wedge \omega_k = 0. \tag{4.166}$$

Usando um argumento similar em (4.166), ao usado em (4.160), segue que a terceira equação de (4.155) é satisfeita. Substituindo a expressão de ψ_i dada em (4.146) no segundo membro da última equação de (4.154), obtemos

$$\begin{aligned} \psi_i \wedge \omega_j + \omega_i \wedge \psi_j &= \sum_k L_{ik} \omega_k \wedge \omega_j + \sum_k L_{jk} \omega_i \wedge \omega_k \\ &= \sum_{kl} L_{ik} \delta_{jl} \omega_k \wedge \omega_l + \sum_{kl} L_{jk} \delta_{il} \omega_l \wedge \omega_k \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{kl} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{kl} L_{ik} \delta_{jl} \omega_k \wedge \omega_l - \sum_{kl} L_{jk} \delta_{il} \omega_k \wedge \omega_l = -\frac{1}{2} \sum_{kl} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l. \tag{4.167}$$

Usando um argumento similar em (4.167), ao usado em (4.160), segue que a última equação de (4.155) vale. $\square$

Na proposição seguinte são dadas algumas identidades satisfeitas pelos invariantes de Laguerre da imersão x.

Proposição 4.12. *Seja $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável, sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. As derivadas covariantes dos tensores $\mathbb{C}$, $\mathbb{L}$ e $\mathbb{B}$, com relação à métrica g, dados em* (4.153)*, são dadas em* (4.154)*. Além disso, são satisfeitas as identidades*

$$\begin{aligned}
&\sum_{ij} B_{ij}^2 = 1, \quad \sum_i B_{ii} = 0, \qquad \sum_i B_{ij,i} = (n-1)C_j;\\
&\sum_i L_{ii} = -\frac{1}{2n}\left\langle \Delta Y, \Delta Y\right\rangle;\\
&R_{ik} = -(n-2)L_{ik} - \left(\sum_j L_{jj}\right)\delta_{ik};\\
&R = -2(n-1)\sum_i L_{ii} = \frac{n-1}{n}\left\langle \Delta Y, \Delta Y\right\rangle,
\end{aligned} \tag{4.168}$$

onde $R_{ik} = \sum_j R_{ijkj}$ e $R = \sum_i R_{ii}$ são, respectivamente, a curvatura de Ricci e a curvatura escalar de M na métrica g.

Demonstração: Temos de (4.145) que

$$\left\langle E_i(\eta), E_i(\eta)\right\rangle = \sum_{jk} B_{ik}B_{ij}\delta_{ik} = \sum_j \left(B_{ij}\right)^2. \tag{4.169}$$

Como $B_{ij} = \rho^{-1}(r - r_i)\delta_{ij}$ e $\rho^2 = \sum_i (r - r_i)^2$, segue de (4.169) que

$$\sum_j \left(B_{ij}\right)^2 = \rho^{-2}\sum_{ij}(r - r_i)^2\delta_{ij}^2 = 1.$$

Logo, a primeira identidade de (4.168) é satisfeita. Além disso, da terceira equação de (4.145), temos que o operador Laplaciano Δ do vetor posição Y de x, com relação à métrica g, é dado por

$$\Delta Y = \sum_i E_i(E_i(Y)) = \sum_i L_{ii} + nN + \sum_{ik}\Gamma_{ii}^k E_k(Y) + \sum_i B_{ii}P. \tag{4.170}$$

Como $\langle \Delta Y, E_k(Y)\rangle = 0$, segue de (4.170) que

$$\Delta Y = \sum_i L_{ii} + nN + \sum_i B_{ii} P. \tag{4.171}$$

Tomando o produto interno em (4.171) com η e usando que $\langle \Delta Y, \eta\rangle = 0$, segue que

$$\sum_i B_{ii} = 0,$$

como queríamos mostrar. Tomando o produto interno em (4.171) com ΔY e usando (4.144), obtemos que

$$\sum_i L_{ii} = -\frac{1}{2n} \langle \Delta Y, \Delta Y\rangle .$$

Como $B_{ij,k} - B_{ik,j} = C_j\delta_{ik} - C_k\delta_{ij}$, temos que

$$\sum_{ik} (B_{ij,k} - B_{ik,j}) = \sum_{ik} (C_j\delta_{ik} - C_k\delta_{ij}) . \tag{4.172}$$

De (4.172) segue que

$$\sum_i (B_{ij,i} - B_{ii,j}) = nC_j - C_j, \tag{4.173}$$

mas $\sum_i B_{ii} = 0$, logo, de (4.173) segue que a terceira equação de (4.168) vale.
De (4.155) segue que

$$\begin{aligned} R_{ik} &= \sum_j R_{ijkj} \\ &= \sum_j L_{jk}\delta_{ij} + \sum_j L_{ij}\delta_{jk} - \sum_j L_{ik}\delta_{jj} - \sum_j L_{jj}\delta_{ik} \\ &= L_{ik} + L_{ik} - nL_{ik} - \left(\sum_j L_{jj}\right)\delta_{ik} \end{aligned}$$

Portanto,

$$R_{ik} = -(n-2)L_{ik} - \left(\sum_j L_{jj}\right)\delta_{ik} \tag{4.174}$$

como queríamos mostrar. Tomando o traço de R_{ik} dado em (4.174), obtemos

$$\begin{aligned}
R &= \sum_i R_{ii} \\
&= -(n-2)\sum_i L_{ii} - -(n-2)L_{ik} - \sum_i \left(\sum_j L_{jj}\right)\delta_{ii} \\
&= -(n-2)\sum_i L_{ii} - n\sum_i L_{ii} \\
&= -2(n-2)\sum_i L_{ii}.
\end{aligned}$$

Portanto, usando (4.168), obtemos

$$R = -2(n-2)\sum_i L_{ii} = \frac{n-2}{n-1}\left\langle \Delta Y, \Delta Y\right\rangle,$$

o encerra a demonstração da proposição. $\square$

Apêndice B

A fim de provar que a hipersuperfície de Dupin dada em (4.134) satisfaz as condições do Teorema 4.7 iremos calcular as funções h_i e $F_1, \cdots, F_n$ dadas em (4.78). Para tanto, recalculamos a primeira e segunda formas fundamentais de x para reobtê-las em termos das notações introduzidas no Teorema 4.7.

De (4.134) segue que

$$x_{,i} = \left[1 - \frac{2f_i''S}{S_1+b^2}\right]\left\{e_i - \frac{2f_i'}{S_1+b^2}\left(f_1', \cdots, f_n', -b\right)\right\},$$

onde S e S_1 são dados por (4.139) e $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
g_{ii} &= \langle x_{,i}, x_{,i} \rangle \\
&= \left[1 - \frac{2Sf_i''}{S_1 + b^2}\right]^2 \left(1 - \frac{4(f_i')^2}{S_1 + b^2} + \frac{4(f_i')^2}{S_1 + b^2}\right) \\
&= \left(1 - \frac{2Sf_i''}{S_1 + b^2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{S_1 - 4Sb_{i2} + b^2}{S_1 + b^2}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Usando B_i definido por (4.140) segue que

$$g_{ii} = \left(\frac{B_i}{S_1 + b^2}\right)^2. \tag{4.175}$$

Substituindo (4.175) em (4.39), obtemos usando (4.136)

$$G_{21} = \sqrt{g_{11}}\left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) = \frac{B_1}{S_1 + b^2}\left(1 - \frac{4bb_{12}B_2}{4bb_{22}B_1}\right).$$

Portanto

$$G_{21} = \frac{B_1}{S_1 + b^2}\left(\frac{b_{22}B_1 - b_{12}B_2}{b_{22}B_1}\right). \tag{4.176}$$

Logo, substituindo (4.140) em (4.176), temos que

$$
\begin{aligned}
G_{21} &= \left(\frac{1}{S_1 + b^2}\right)\left(\frac{b_{22}(S_1 - 4b_{12}S + b^2) - b_{12}(S_1 - 4b_{22}S + b^2)}{b_{22}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{S_1 + b^2}\right)\left(\frac{(b_{22} - b_{12})(S_1 + b^2)}{b_{22}}\right) \\
&= \frac{b_{22} - b_{12}}{b_{22}}.
\end{aligned}
$$

Concluímos que

$$G_{21} = 1 - \frac{b_{12}}{b_{22}}. \tag{4.177}$$

Como $F_1^{'} = G_{21}$, integrando (4.177) em u_1, obtemos

$$F_1 = \left(1 - \frac{b_{12}}{b_{22}}\right) u_1 + \alpha_1, \quad \text{onde } \ \alpha_1 \ \text{ é uma constante real.} \tag{4.178}$$

Para $i \neq 1$, segue de (4.39) que

$$\begin{aligned} G_{1i} &= \sqrt{g_{ii}} \left(1 - \frac{k_i}{k_1}\right) \\ &= \frac{B_i}{S_1 + b^2} \left(1 - \frac{4bb_{i2}B_1}{4bb_{12}B_i}\right) \\ &= \frac{B_i}{S_1 + b^2} \left(\frac{b_{12}(S_1 - 4b_{i2}S + b^2) - b_{i2}(S_1 - 4b_{22}S + b^2)}{b_{12}B_i}\right) \\ &= \frac{b_{12} - b_{i2}}{b_{12}}. \end{aligned}$$

Logo

$$G_{1i} = 1 - \frac{b_{i2}}{b_{12}}. \tag{4.179}$$

Como $F_i^{'} = G_{1i}$, para $i \neq 1$, integrando (4.179) em u_i, obtemos

$$F_i = \left(1 - \frac{b_{i2}}{b_{12}}\right) u_i + \alpha_i,$$

onde α_i, $\ 2 \leq i \leq n$ são constantes reais. Por uma translação no sistema de coordenadas, se for necessário, podemos supor sem perda de generalidade que $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. Logo, em geral, temos que

$$F_i = \left(1 - \frac{b_{i2}}{b_{j2}}\right) u_i, \tag{4.180}$$

onde $j = 2$ se $i = 1$ e, $j = 1$ se $2 \leq i \leq n$.

De (4.135), (4.139) e (4.140) segue que

$$\begin{aligned}
B_l &= S_1 - 4b_{l2}S + b^2\\
&= \textstyle\sum_{j=1}^n (f_j')^2 - 4b_{l2}\sum_{j=1}^n f_j + b^2\\
&= \textstyle\sum_{j=1}^n (2b_{j2}u_j + b_{j1})^2 - 4b_{l2}\sum_{j=1}^n (b_{j2}u_j^2 + b_{j1}u_j + b_{j0}) + b^2\\
&= \textstyle\sum_{j=1}^n (4b_{j2}^2u_j^2 + 4b_{j2}b_{j1}u_j + b_{j1}^2) - 4b_{l2}\sum_{j=1}^n (b_{j2}u_j^2 + b_{j1}u_j + b_{j0}) + b^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$B_l = \sum_{j=1}^n 4b_{j2}(b_{j2} - b_{l2})u_j^2 + \sum_{j=1}^n 4b_{j1}(b_{j2} - b_{l2})u_j + \sum_{j=1}^n (b_{j1}^2 - 4b_{l2}b_{j0}) + b^2. \tag{4.181}$$

Substituindo (4.181) em (4.136), obtemos

$$r_l = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^n b_{j2}\left(\frac{b_{j2}}{b_{l2}} - 1\right)u_j^2 + \frac{1}{b}\sum_{j=1}^n b_{j1}\left(\frac{b_{j2}}{b_{l2}} - 1\right)u_j + \frac{1}{b}\sum_{j=1}^n \left(\frac{b_{j1}^2}{4b_{l2}} - b_{j0}\right) + \frac{b}{4b_{l2}}. \tag{4.182}$$

Por outro lado, segue de (4.77), (4.78) e (4.180) que

$$\begin{aligned}
r_1 = \;& \frac{-AD}{2(D-1)}\left\{\left(1 - \frac{b_{22}}{b_{12}}\right)^2 u_2^2 + \frac{D-1}{D}\left(1 - \frac{b_{32}}{b_{12}}\right)^2 u_3^2 + \right.\\
& \left. - \sum_{j\geq 4}\frac{1}{(D_j - 1)}\left(1 - \frac{b_{j2}}{b_{12}}\right)^2 u_j^2\right\} - (D-1)\left(1 - \frac{b_{22}}{b_{12}}\right)b_2u_2 + \\
& + \left(1 - \frac{b_{32}}{b_{12}}\right)b_3u_3 + \sum\left(1 - \frac{1}{D_j}\right)\left(1 - \frac{b_{j2}}{b_{12}}\right)b_ju_j + \\
& -(D-1)d_2 + d_3 + \sum_{j\geq 4}\frac{D_j - 1}{D_j}d_j,
\end{aligned} \tag{4.183}$$

$$
\begin{aligned}
r_2 = \quad & \frac{AD}{2(D-1)}\left\{\left(1-\frac{b_{12}}{b_{22}}\right)^2 u_1^2 - \frac{D-1}{D^2}\left(1-\frac{b_{32}}{b_{22}}\right)^2 u_3^2 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{D_j-1}\left(1-\frac{b_{j2}}{b_{22}}\right)^2 u_j^2\right\} + \frac{D-1}{D}\left(1-\frac{b_{12}}{b_{22}}\right) b_1u_1 + \\
& + \frac{1}{D}\left(1-\frac{b_{32}}{b_{22}}\right) b_3u_3 + \sum_{j\geq 4}\frac{D_j-1}{D_j}\left(1-\frac{b_{j2}}{b_{22}}\right) b_ju_j + \\
& + \frac{D-1}{D}d_1 + d_3 + \sum_{j\geq 4} d_j.
\end{aligned} \tag{4.184}
$$

De (4.10) e igualando os coeficientes de u_2^2 das equações (4.182) e (4.183), obtemos

$$
\frac{b_{22}}{b}\left(\frac{b_{22}}{b_{12}}-1\right) = \frac{-AD}{2(D-1)}\left(1-\frac{b_{22}}{b_{12}}\right).
$$

Logo, temos que

$$
A = \frac{-2b_{12}b_{22}(D-1)}{b(b_{22}-b_{12})D}. \tag{4.185}
$$

De (4.10) e igualando os coeficientes de u_2, u_3, u_j, respectivamente, das equações (4.182) e (4.183), temos também

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{b}\left(\frac{b_{22}}{b_{12}}-1\right) b_{21} = -b_2(D-1)\left(1-\frac{b_{22}}{b_{12}}\right), \\
& \frac{1}{b}\left(\frac{b_{32}}{b_{12}}-1\right) b_{31} = b_3\left(1-\frac{b_{32}}{b_{12}}\right), \\
& \frac{1}{b}\left(\frac{b_{j2}}{b_{12}}-1\right) b_{j1} = b_j\frac{D_j-1}{D_j}\left(1-\frac{b_{j2}}{b_{12}}\right), j \geq 4.
\end{aligned} \tag{4.186}
$$

Isolando os coeficientes b_2, b_3 e $b_j, j \geq 4$ dados em (4.186), obtemos

$$
b_2 = \frac{b_{22}}{(D-1)b}, \tag{4.187}
$$

$$
b_3 = -\frac{b_{31}}{b}, \tag{4.188}
$$

$$b_j = -\frac{D_j b_{j1}}{(D_j-1)b}. \tag{4.189}$$

De (4.10) e igualando os coeficientes de u_1 das equações (4.182) e (4.184), temos

$$\frac{b_{11}}{b}\left(\frac{b_{12}}{b_{22}}-1\right) = b_1 \frac{D}{D-1}\left(1-\frac{b_{12}}{b_{22}}\right),$$

logo, concluímos que

$$b_1 = -\frac{(D-1)b_{11}}{Db}. \tag{4.190}$$

Resta determinarmos as constantes $d_1, ..., d_n$. Comparando os termos independentes das equações (4.182), (4.183) e (4.184), segue que

$$-(D-1)d_2 + d_3 + \sum_{j\geq 4} \frac{D_j-1}{D_j} d_j = \frac{1}{4bb_{12}}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{j1}^2 + b^2\right) - \sum_{j=1}^{n} b_{jo}, \tag{4.191}$$

$$\frac{D-1}{D} d_1 + \frac{1}{D} d_3 + \sum_{j\geq 4} d_j = \frac{1}{4bb_{22}}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{j1}^2 + b^2\right) - \sum_{j=1}^{n} b_{jo}, \tag{4.192}$$

$$d_1 + d_2 + \sum_{j\geq 4}\left(1 - \frac{1}{D_j(D-1)}\right) d_j = \frac{1}{4bb_{32}}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{j1}^2 + b^2\right) - \sum_{j=1}^{n} b_{jo}. \tag{4.193}$$

Seja $W = \sum_{j=1}^{n} b_{j1}^2 + b^2$ e $W_0 = \sum_{j=1}^{n} b_{jo}$. No caso $n = 3$, as equações acima são dadas por

$$\begin{aligned} &-(D-1)d_2 + d_3 = \frac{1}{4bb_{12}} W - W_0, \\ &(1-1/D)d_1 + 1/D d_3 = \frac{1}{4bb_{22}} W - W_0, \\ &d_1 + d_2 = \frac{1}{4bb_{32}} W - W_0. \end{aligned} \tag{4.194}$$

Suponha $d_2 = \frac{1}{4bb_{22}} W - W_0$. Desta forma, segue da segunda e da terceira equação de (4.194) que

$$d_1 = \frac{1}{4b}\left(\frac{1}{b_{32}} - \frac{1}{b_{22}}\right) W, \qquad d_3 = \frac{1}{4b}\left(\frac{1}{b_{12}} + \frac{D-1}{b_{22}}\right) W - DW_0.$$

Para $n \geq 4$, subtraindo a equação (4.191) pela equação (4.192) multiplicada por $\frac{1}{D}$, obtemos

$$\frac{D-1}{D}(d_1+d_2)+\sum_{j\geq 4}\frac{1+D_j(D-1)}{DD_j}d_j=\frac{1}{4b}\left(\frac{1}{b_{22}}-\frac{1}{Db_{12}}\right)W-\frac{D-1}{D}W_0.$$

Multiplicando a equação acima por $\frac{D}{D-1}$ e subtraindo pela equação (4.193), segue que

$$\sum_{j\geq 4}\left(\frac{1+D_j(D-1)}{D_j(D-1)}+\frac{1-D_j(D-1)}{D_j(D-1)}\right)d_j=\frac{1}{4b}\left(-\frac{1}{(D-1)b_{12}}+\frac{D}{(D-1)b_{22}}-\frac{1}{b_{32}}\right)W,$$

daí, segue que

$$\sum_{j\geq 4}\frac{1}{D_j}d_j=\frac{1}{8b}\left(-\frac{1}{b_{12}}+\frac{D}{b_{22}}-\frac{D-1}{b_{32}}\right)W.$$

Vamos supor, para cada $j\geq 4$, que

$$d_j=\frac{D_j}{8(n-3)b}\left(\frac{-1}{b_{12}}+\frac{D}{b_{22}}-\frac{D-1}{b_{32}}\right)W. \tag{4.195}$$

Desta forma, subtraindo a equação (4.193) da equação (4.192), obtemos

$$\frac{1}{D}d_1+d_2-\frac{1}{D}d_3-\frac{1}{D-1}\sum_{j\geq 4}\frac{1}{D_j}d_j=\frac{1}{4b}\left(\frac{-1}{b_{22}}+\frac{1}{b_{32}}\right)W.$$

Portanto, substituindo (4.195) na última igualdade concluímos que

$$d_1+Dd_2-d_3 \;=\; \frac{D}{8b(D-1)}\left\{\frac{-1}{b_{12}}+\frac{2-D}{b_{22}}+\frac{D-1}{b_{32}}\right\}W.$$

Seja

$$d_2=\frac{1}{4bb_{22}(D-1)}W+\frac{1}{D-1}W_0. \tag{4.196}$$

Então, substituindo (4.196) em (4.191) temos que

$$-\frac{1}{4bb_{22}}W-W_0+d_3+\sum_{j\geq 4}\frac{D_j-1}{D_j}d_j=\frac{1}{4bb_{12}}W-W_0,$$

logo, da última igualdade obtemos

$$d_3 = \frac{1}{4b}\left(\frac{1}{b_{12}} + \frac{1}{b_{22}}\right)W - \frac{1}{8(n-3)b}\sum_{j\geq 4}(D_j - 1)\left(-\frac{1}{b_{12}} + \frac{D}{b_{22}} - \frac{D-1}{b_{32}}\right)W.$$

Portanto

$$d_3 = \frac{1}{8b(n-3)}\sum_{j\geq 4}\left(\frac{1+D_j}{b_{12}} + \frac{2+D(1-D_j)}{b_{22}} + \frac{(D_j-1)(D-1)}{b_{32}}\right)W. \tag{4.197}$$

Substituindo a equação (4.195) e (4.197) em (4.192), obtemos

$$\begin{aligned} d_1 &= -\frac{1}{D-1}d_3 - \frac{D}{D-1}\sum_{j\geq 4} d_j + \frac{D}{4(D-1)bb_{22}}W - \frac{D}{D-1}W_0 \\ &= \frac{-1}{8(D-1)(n-3)b}\sum_{j\geq 4}\left(\frac{1+D_j}{b_{12}} + \frac{2+D(1-D_j)}{b_{22}} + \frac{(D_j-1)(D-1)}{b_{32}}\right)W + \\ &\quad + \frac{1}{8(D-1)(n-3)b}\sum_{j\geq 4}\left(\frac{DD_j}{b_{12}} + \frac{-D^2D_j}{b_{22}} + \frac{(D-1)DD_j}{b_{32}}\right)W + \\ &\quad + \frac{D}{4(D-1)bb_{22}}W - \frac{D}{D-1}W_0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} d_1 = {} & \frac{1}{8b(1-D)(n-3)}\sum_{j\geq 4}\left\{\frac{1+D_j(1-D)}{b_{12}} + \frac{2-D(1+D_j(1-D))}{b_{22}}\right\}W \\ & + \frac{1}{8b(n-3)}\sum_{j\geq 4}\frac{1-D_j(1-D)}{b_{32}}W + \frac{D}{1-D}W_0. \end{aligned} \tag{4.198}$$

De (4.195), (4.196), (4.197) e (4.198) obtemos as constantes d_1, d_2,..., d_n.

Referências Bibliográficas

[1] Blaschke, W.: *Vorlesunger über Differencial Geometrie*, vol. 3. Berlin Heidelberg New York (1929).

[2] Cartan É.: *Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante*, Annali J. Math. 17 (1938), 177-191 (see also in Oeuvres Complètes, Partie III, Vol. 2, 1431-1445).

[3] Cartan É.: *Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques*, Math. Z 45 (1939), 335-367 (see also in Oeuvres Complètes, Partie III, Vol. 2, 1447-1479).

[4] Cartan É.: *Sur quelque familles remarquables d'hypersurfaces*, in C.R Congrèss Math. Liège (1939), 30-41 (see also in Oeuvres Complètes, Partie III, Vol. 2, 1481-1492).

[5] Cartan É.: *Sur des familles d'hypersurfaces isoparamétriques des espaces sphériques à 5 et à 9 dimensions*, Revista Univ. Tucaman, Serie A, 1 (1940), 5-22 (see also in Oeuvres Complètes, Partie III, Vol. 2, 1513-1530).

[6] Cecil, T.E.; Ryan: *Taut embeddings and cyclides of Dupin*, Math. Ann. 236 (1978), 177-190.

[7] Cecil T., Ryan P.J.: *Conformal geometry and the cyclides of Dupin*, Canad. J. Math. 32 (1980), 767-782.

[8] Cecil, T.E.; Chern, S.S.: *Tautness and Lie sphere geometry*, Math. Ann., 278 (1987), 381-399.

[9] Cecil, T.E.; Chern, S.S.: *Dupin submanifolds in Lie sphere geometry.* In: Lectures Notes in Mathematics, vol. 1369, pp. 1-48. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York (1989).

[10] Cecil, T.E.: *Lie Sphere Geometry: with applications to submanifolds*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York (1992).

[11] Cecil, T.; Jensen, G.: *Dupin hypersurfaces with four principal curvatures*, Geometry Dedicata., 79 (2000), 1-49.

[12] Cecil, T.; Chi, Q.-S.; Jensen G.: *Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures*, Ann. of Math., (2) 166 (2007), 1-76.

[13] Cecil, T.; Chi, Q.-S.; Jensen, G.: *Dupin hypersurfaces with four principal curvatures. II*, Geom. Dedicata, 128 (2007), 55-95.

[14] Cecil, T.; Chi, Q.-S.; Jensen, G.: *Classification of Dupin hypersurfaces, in Pure and Applied Differential Geometry*, Shaker Verlag, Aachen, (2007), 48-56.

[15] Corro, A.V.; Ferreira, W.;Tenenblat K.: *On Ribaucour transformations for hypersurfaces* , Mat. Contemp., 17 (1999), 137-160.

[16] Hu, Z.; Li, H.; Wang C.; Zhao, G.: *Möbius isoparametric hypersurfaces in S^{n+1} with two distinct principal curvatures*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 18 (2002), 437-446.

[17] Hu, Z.; Li, H.: *Classification of Möbius isoparametric hypersurfaces in S^4*, Nagoya Math. J., 179 (2005), 147-162.

[18] Hu, Z.; Li, H.: *Laguerre geometry of surfaces in $\mathbb{R}^3$*, Acta Mathematica Sinica, English Series 21 (2005), 1525-1534.

[19] Hu Z., Li D.: *Möbius isoparametric hypersurfaces with three distinct principal curvatures*, Nagoya Math. 139 (2007), 1-20.

[20] Hu, Z.; Li, H., Wang, C.P.: *Classification of Möbius isoparametric hypersurfaces in S^5*, Monatsh. Math., 153 (2007), 201-222.

[21] Li, T.Z.; Wang C.P.: *Laguerre geometry of hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$*, Manuscripta Math., 122 (2007), 73-95.

[22] Li, T.Z.; Li, H.; Wang, C.P.: *Classification of hypersurfaces with parallel Laguerre second fundamental form in $\mathbb{R}^n$*, Differencial Geom. Appl., 28 (2010), 148-157.

[23] Li T.Z. e Sun H.F.: *Laguerre isoparametric hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$*, Acta Math. Sinica, English Series 28 (2011), 1179-1186.

[24] Li T.Z., Li H. Z. e Wang C.-P.: *Classification of hypersurfaces with constant Laguerre eigenvalues in* $\mathbb{R}^n$, Science China Mathematics 54 (2011), 1129-1144.

[25] Kamran, N.; Tenenblat, K.: *Laplace transformation in higher dimensions*, Duke math. J., 84 (1996), 237-266.

[26] Miyaoka, R.: *Dupin hypersurfaces and a Lie invariant*, Kodai math. J., 12 (1989), 228-256.

[27] Münzner H.-F.: *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären*, Math. Ann., 251 (1980), 57-71.

[28] Münzner H.-F.: *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären II*, Über die Zerlegung der Sphäre in Ballbündel, Math. Ann. 256 (1981), 215-232.

[29] Musso, E.; Nicolodi, L.: *A variational problem for surfaces in Laguerre geometry*, Trans. Am. Math. Soc. 348 (1996), 4321-4337.

[30] Musso, E.; Nicolodi, L.: *Laguerre geometry of surfaces with plane lines of curvature*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 69 (1999), 123-138.

[31] Niebergall, R.: *Dupin hypersurfaces in* $\mathbb{R}^5$*, I*, Geom. Dedicata, 41 (1991), 1-22.

[32] Niebergall, R.: *Dupin hypersurfaces in* $\mathbb{R}^5$*, II*, Geom. Dedicata, 41 (1992), 5-38.

[33] Riveros, C.M.C.; Tenenblat, K.: *Dupin hypersurfaces in* $\mathbb{R}^5$, Canad. J. Math., 57 (2005), 1291-1313.

[34] Riveros, C.M.C.; Rodrigues, L.A.; Tenenblat, K.: *On Dupin hypersurfaces with constant Möbius curvature*, Pacific Journal of Mathematics, 236, nº 1 (2008), 89-103.

[35] Rodrigues, L.A.;, Tenenblat, K.: *A characterization of Möbius isoparametric hypersurfaces on the sphere*, Monatshefte fur Mathematic, 158 (2009), 321-327.

[36] Palmer, B.: *Remarks on a variation problem in Laguerre geometry*, Rendiconti di mathematica, Serie VII, Roma, vol. 19 (1999), 281-293.

[37] Pinkall, U.: *Dupin'sche Hyperflächen*, Dissertation, Univ. Freiburg, 1981.

[38] Pinkall, U.: *Letter to T. Cecil*, December 5, 1984.

[39] Pinkall, U.: *Dupin'sche Hyperflächen in* E^4, Manuscripta Math. 51 (1985), 89-119.

[40] Pinkall, U.: *Dupin hypersurfaces*, Math. Ann. 270 (1985), 427-440.

[41] Teneblat, K.: *Transformations of manifolds and applications to differential equations*, Addison Wesley Longman, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 93, 1998.

[42] Thorbergsson, G.: *Dupin hypersurfaces*, Bull. London Math. Soc. 15 (1983), 493-498.

[43] Wang, C.P.: *Surfaces in Möbius Geometry*, Nagoya Math. 125 (1992), 53-72.

[44] Wang, C.P.: *Möbius geometry for hypersurfaces in* $\mathbb{S}^4$, Nagoya Math. 139 (1995), 1-20.

[45] Wang, C.P..: *Möbius geometry of submanifolds in* S^n, Manuscr. Math. 96 (1998), 517-534.