

**ESTUDO COMPARATIVO ANALÍTICO-NUMÉRICO DE
ASPECTOS DA INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA EM
CASCAS COM APLICAÇÕES A BARRAGENS EM ARCO**

NEANDER BERTO MENDES

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS
E CONSTRUÇÃO CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**ESTUDO COMPARATIVO ANALÍTICO-NUMÉRICO DE
ASPECTOS DA INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA EM
CASCAS COM APLICAÇÕES A BARRAGENS EM ARCO**

NEANDER BERTO MENDES

ORIENTADOR: LINEU JOSÉ PEDROSO

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E
CONSTRUÇÃO CIVIL**

PUBLICAÇÃO: E.DM-12A/13

BRASÍLIA/DF: JULHO - 2013

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ESTUDO COMPARATIVO ANALÍTICO-NUMÉRICO DE ASPECTOS
DA INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA EM CASCAS COM
APLICAÇÕES A BARRAGENS EM ARCO**

NEANDER BERTO MENDES

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:

Prof. Lineu José Pedroso, Dr. Ing. (UnB)
(Orientador)

Prof. Luciano Mendes Bezerra, PhD (UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro, DSc (UFPE)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 11 DE JULHO DE 2013

FICHA CATALOGRÁFICA

MENDES, NEANDER BERTO

Estudo comparativo analítico-numérico de aspectos da interação fluido-estrutura em cascas com aplicações a barragens em arco [Distrito Federal] 2013.

xxv, 318p. 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2013).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1.Cascas cilíndricas

2.Fluido-estrutura

3.Método dos elementos finitos

4.Barragens em arco

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MENDES, N. B. (2013). Estudo comparativo analítico-numérico de aspectos da interação fluido-estrutura em cascas com aplicações a barragens em arco. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.DM-12A/13, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 318p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Neander Berto Mendes

TÍTULO: Estudo comparativo analítico-numérico de aspectos da interação fluido-estrutura em cascas com aplicações a barragens em arco

GRAU: Mestre ANO: 2013

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Neander Berto Mendes
Rua Dr. Olavo Batista. N° 250. Bairro Batista
75.123-480 Anápolis - GO - Brasil
e-mail: neanderberto@unb.br

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Ivo Berto Mendes e Adalgiza Timóteo de Araújo Mendes, pelo apoio incondicional e exemplo de vida.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) da Universidade de Brasília pelos conhecimentos transmitidos.

Aos colegas da UnB: Henrique, Soraya, Iuri, Sebastião e Marília pelas contribuições fundamentais para a realização deste trabalho.

À minha amiga Ana Cláudia, pela leitura e revisão desta dissertação.

Em especial, ao professor Lineu José Pedroso, pela amizade, paciência, dedicação e valiosos ensinamentos.

“Só sei que nada sei”
Sócrates

RESUMO

ESTUDO COMPARATIVO ANALÍTICO-NUMÉRICO DE ASPECTOS DA INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA EM CASCAS COM APLICAÇÕES A BARRAGENS EM ARCO

Autor: Neander Berto Mendes

Orientador: Lineu José Pedroso, Dr. Ing.

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, Julho de 2013

Uma barragem segura é aquela cujo desempenho satisfaça as exigências de comportamento necessárias para evitar incidentes e acidentes que se referem a aspectos estruturais, econômicos, ambientais e sociais. A barragem deve possuir estabilidade adequada para suportar com segurança os carregamentos (normais e extremos) de projeto. Dentre os eventos extremos a que uma barragem deve resistir, há o sismo. Quando a barragem vibra, a água também participa do movimento, portanto, durante a ação de um sismo, é de fundamental importância a consideração da interação dinâmica entre a estrutura e o fluido. Este trabalho apresenta respostas (deslocamentos e tensões) de uma barragem em arco com dupla curvatura (barragem *Morrow Point*) submetida às componentes montante, vertical e transversal, simultaneamente, de um movimento do solo (terremoto de *Taft Lincoln School Tunnel*) para os casos de reservatório vazio e completamente cheio. Diante da complexidade do problema, adotou-se uma metodologia progressiva, através de estudos de casos que contemplassem aspectos de interação fluido-estrutura que fossem aplicados a barragens em arco. Em todas as análises realizadas, utilizou-se o software ANSYS 11.0, baseado no método numérico dos elementos finitos. Partiu-se da geometria cilíndrica (que apresenta soluções analíticas fechadas que puderam ser comparadas com as soluções numéricas), daí para um cilindro cortado por um plano paralelo ao seu eixo (com intuito de se aproximar da geometria de uma barragem em arco), passando pelas barragens em arco cilíndrica e com simples curvatura e culminando com a barragem em arco com dupla curvatura. Respostas dinâmicas foram obtidas e validadas (ou por soluções analíticas, quando disponíveis, ou por exemplos da literatura técnica) para cada caso estudado, e os resultados obtidos, mostraram-se bem adequados (dentro das abrangência e limitações consideradas) evidenciando a validade dos procedimentos adotados.

ABSTRACT

ANALYTICAL-NUMERICAL COMPARATIVE STUDY OF FLUID-STRUCTURE INTERACTION ASPECTS IN SHELLS WITH APPLICATIONS IN ARCH DAMS

Author: Neander Berto Mendes

Supervisor: Lineu José Pedroso, Dr. Ing.

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, July of 2013

A safe dam is one which performance meets the requirements of behavior necessary to avoid incidents and accidents that refer to structural, economical, environmental and social aspects. The dam must have adequate stability to safely support the (normal and extreme) project loads. Among the extreme events that a dam must withstand, there is the earthquake. When the dam vibrates, water also participates in the movement, therefore, during the action of an earthquake, it is basically important to consider the dynamic interaction between the structure and the fluid. This work presents responses (displacements and stresses) of an arch dam with double curvature (*Morrow Point Dam*) submitted to upstream, vertical and transverse components, simultaneously, of a ground motion (*Taft Lincoln School Tunnel earthquake*) for the cases of empty and completely full reservoir. Given the complexity of the problem, it was adopted a progressive methodology, through case studies that contemplated aspects of fluid-structure interaction that were applied to arch dams. In all analyzes performed, it was used the software ANSYS 11.0, based on the numerical method of finite elements. It was started from the cylindrical geometry (which has closed analytical solutions that could be compared with the numerical solutions), then to a cylinder cut by a plane parallel to its axis (in order to approach the geometry of an arch dam), passing by cylindrical and simple curvature arch dams and culminating with the arch dam with double curvature. Dynamic responses were obtained and validated (or by analytical solutions, where available, or by technical literature examples) for each case studied, and the results showed to be well suited (within the scope and limitations taken into account) indicating the validity of procedures adopted.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	GENERALIDADES	1
1.2	JUSTIFICATIVA	4
1.3	COLOCAÇÃO DO PROBLEMA.....	5
1.4	OBJETIVOS	6
1.4.1	Objetivos gerais.....	6
1.4.2	Objetivos específicos.....	6
1.5	METODOLOGIA.....	7
1.6	ABRANGÊNCIA E LIMITAÇÕES	10
1.7	DESCRIÇÃO E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	11
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
2.1	INTRODUÇÃO.....	15
2.2	PRINCIPAIS ESTUDOS	15
2.3	BARRAGENS EM ARCO	22
3	FORMULAÇÕES ANALÍTICAS PARA CILINDROS DE REVOLUÇÃO E PAINÉIS CILÍNDRICOS.....	27
3.1	INTRODUÇÃO.....	27
3.2	CILINDROS DE REVOLUÇÃO	27
3.2.1	Estrutura	27
3.2.1.1	Vibração livre	33
3.2.1.2	Vibração forçada.....	43
3.2.2	Fluido	66
3.2.2.1	Vibração livre	71
3.2.3	Fluido-Estrutura	73
3.2.3.1	Vibração livre	75
3.2.3.2	Vibração forçada.....	81
3.3	PAINÉIS CILÍNDRICOS	86
4	MODELOS E PARÂMETROS DE ANÁLISE.....	91
4.1	INTRODUÇÃO.....	91
4.2	MODELOS.....	91
4.2.1	Caso 1 - Cilindro de revolução	91
4.2.2	Caso 2 - Painel cilíndrico.....	96

4.2.3	Casos 3 a 5 - Barragens e reservatórios	98
4.2.4	Caso 3 - Barragem em arco cilíndrica	100
4.2.5	Caso 4 - Barragem em arco com simples curvatura.....	101
4.2.6	Caso 5 - Barragem em arco com dupla curvatura.....	103
4.3	ABORDAGEM ANALÍTICA.....	109
4.4	ABORDAGEM NUMÉRICA	110
4.5	CONVERGÊNCIA E VALIDAÇÃO DOS MODELOS NUMÉRICOS	140
4.5.1	Casos 1 e 2 - Cilindro de revolução e painel cilíndrico.....	143
4.5.2	Caso 3 - Barragem em arco cilíndrica	146
4.5.3	Caso 4 - Barragem em arco com simples curvatura.....	149
4.5.4	Caso 5 - Barragem em arco com dupla curvatura.....	155
4.6	ANÁLISES APROXIMADAS	157
5	RESULTADOS	163
5.1	INTRODUÇÃO.....	163
5.2	ANÁLISE DE RESULTADOS	163
5.2.1	Caso 1 - Cilindro de revolução	163
5.2.2	Caso 2 - Painel cilíndrico.....	203
5.2.3	Caso 3 - Barragem em arco cilíndrica	212
5.2.4	Caso 4 - Barragem em arco com simples curvatura.....	225
5.2.5	Caso 5 - Barragem em arco com dupla curvatura.....	237
5.3	ANÁLISE DE ESTABILIDADE SÍSMICA.....	249
6	CONCLUSÕES, PERSPECTIVAS E RECOMENDAÇÕES	260
6.1	SÍNTESE DA DISSERTAÇÃO E CONCLUSÕES GERAIS	260
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	262
	REFERÊNCIAS	264
	APÊNDICES	271
	APÊNDICE A - EQUAÇÕES DAS CASCAS CILÍNDRICAS CIRCULARES RETAS DELGADAS.....	272
	APÊNDICE B - VIBRAÇÃO DE CASCAS, ARCOS E ANÉIS CIRCULARES.....	294
	APÊNDICE C - ORTOGONALIDADE DOS MODOS DE VIBRAÇÃO VIBRAÇÃO E SELEÇÃO DO ÂNGULO DE FASE MODAL PARA CASCAS DE REVOLUÇÃO	311
	APÊNDICE D - FUNÇÕES DE BESSEL	317

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 - Metodologia empregada nesta dissertação	9
Tabela 1.2 - Os casos analisados neste trabalho e suas principais particularidades ..	13
Tabela 3.1 - Constantes X_k , Y_k e Z_k para o Caso 1	66
Tabela 3.2 - Coeficientes das Equações 3.346 e 3.347 (Blevins, 1980)	89
Tabela 3.3 - Parâmetros λ_m e σ_m para o modo engastado-livre (Blevins, 1995)	90
Tabela 3.4 - Parâmetros λ_m e σ_m para o modo engastado-engastado (Blevins, 1995) ..	90
Tabela 4.1 - Dimensões da barragem <i>Morrow Point</i> (Hall e Chopra, 1983)	104
Tabela 4.2 - Dados gerais dos níveis de refinamento para o Caso 1	142
Tabela 4.3 - Dados gerais dos níveis de refinamento para os Casos 1 a 5	143
Tabela 4.4 - Propriedades dos modos fundamentais da barragem <i>Morrow Point</i>	157
Tabela 5.1 - Frequências naturais da estrutura desacoplada (Caso 1)	164
Tabela 5.2 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura obtidos via ANSYS (Caso 1)	166
Tabela 5.3 - Frequências naturais da estrutura para $n = 0$ (Caso 1)	173
Tabela 5.4 - Frequências naturais e modos de vibração $n = 0$ numéricos da estrutura para $m = 1$, obtidos via ANSYS (Caso 1)	173
Tabela 5.5 - Frequências naturais e modos de vibração de flexão ($n = 1$) numéricos da estrutura para $m = 1$, obtidos via ANSYS (Caso 1)	174
Tabela 5.6 - Frequências naturais do fluido desacoplado (Caso 1)	181
Tabela 5.7 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos do fluido obtidos via ANSYS (Caso 1)	183
Tabela 5.8 - Frequências naturais acopladas (Caso 1)	184
Tabela 5.9 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 1)	187
Tabela 5.10 - Frequências numéricas acopladas e análise dos modos (Caso 1)	191
Tabela 5.11 - Frequências naturais acopladas $n = 0$ (Caso 1)	194
Tabela 5.12 - Frequências naturais da estrutura desacoplada (Caso 2)	203
Tabela 5.13 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura obtidos via ANSYS (Caso 2)	206
Tabela 5.14 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos do fluido obtidos via ANSYS (Caso 2)	208
Tabela 5.15 - Frequências naturais do fluido desacoplado com geometria aproximada (Caso 2)	209
Tabela 5.16 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 2)	210
Tabela 5.17 - Frequências numéricas acopladas e análise dos modos (Caso 2)	212

Tabela 5.18 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura desacoplada obtidos via ANSYS (Caso 3)	213
Tabela 5.19 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos do fluido desacoplado obtidos via ANSYS (Caso 3)	217
Tabela 5.20 - Frequências naturais do fluido desacoplado com geometria aproximada (Caso 3)	218
Tabela 5.21 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 3)	219
Tabela 5.22 - Frequências numéricas acopladas e análise dos modos (Caso 3)	224
Tabela 5.23 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura obtidos via ANSYS (Caso 4)	226
Tabela 5.24 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos do fluido obtidos via ANSYS (Caso 4)	230
Tabela 5.25 - Frequências naturais do fluido desacoplado com geometria aproximada (Caso 4)	231
Tabela 5.26 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 4)	232
Tabela 5.27 - Frequências numéricas acoplados e análise do modo (Caso 4)	237
Tabela 5.28 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura obtidos via ANSYS (Caso 5)	238
Tabela 5.29 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos do fluido obtidos via ANSYS (Caso 5)	242
Tabela 5.30 - Frequências naturais do fluido desacoplado com geometria aproximada (Caso 5)	243
Tabela 5.31 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 5)	244
Tabela 5.32 - Frequências numéricas acoplados e análise do modo (Caso 5)	249
Tabela 5.33 - Amortecimentos α e β considerados	250
Tabela 5.34 - Resposta da barragem <i>Morrow Point</i>	251
Tabela 5.35 – Tensões máximas	253

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Barragens: (a) de Itaipu; (b) do Funil [(a) http://www.escolasanti.com.br/santinews/2011/06/03/a-grande-beleza/ ; (b) http://www.furnas.com.br/hotsites/sistemafurnas/magnify.asp?p=imagens/UsinaFunil16.jpg]	3
Figura 2.1 - Barragem em arco: (a) planta; (b) seção A-A; (c) seção ao longo do eixo da barragem O-O (Grishin <i>et al.</i> , 1979, modificado)	23
Figura 2.2 - Esboço típico de barragem em arco: (a) seção transversal; (b) vista em planta	23
Figura 2.3 - Seção horizontal de barragem em arco (arco) (Grishin <i>et al.</i> , 1979)	24
Figura 3.1 - Casca cilíndrica: (a) denominações principais; (b) elemento diferencial de casca cilíndrica e carregamento distribuído na superfície de referência [(a) Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959; (b) Flügge, 1973, modificado]	28
Figura 3.2 - Deslocamentos e definições das coordenadas para uma casca cilíndrica circular (Soedel, 2005, modificado)	29
Figura 3.3 - Sistemas de coordenadas (a) cartesianas e (b) cilíndricas (ANSYS)	29
Figura 3.4 - Função de excitação durante o intervalo de tempo $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ (Chopra, 1995, modificado)	59
Figura 3.5 - Carga harmônica pontual adotada (Soedel, 2005, modificado)	63
Figura 3.6 - Região de acoplamento do deslocamento radial da casca e da pressão acústica	73
Figura 3.7 - Painel curvo cilíndricamente (Blevins, 1980, modificado)	86
Figura 4.1 - Modelo do Caso 1A: perspectiva, vista lateral e vista superior dos sistemas (a) estrutural desacoplado, (b) fluido desacoplado e (c) fluido-estrutura acoplado	92
Figura 4.2 - Componente S0E do terremoto de El Centro: (a) registro aceleração x tempo e (b) espectro de frequências da excitação (http://nisee.berkeley.edu/data/strong_motion/caltech/volume1.d/el_centro_1940_s00e)	95
Figura 4.3 - Componente S90E do terremoto de El Centro: (a) registro aceleração x tempo e (b) espectro de frequências da excitação (http://nisee.berkeley.edu/data/strong_motion/caltech/volume1.d/el_centro_1940_s90w)	95
Figura 4.4 - Modelo do Caso 2: perspectiva dos sistemas (a) estrutural desacoplado, (b) fluido desacoplado e (c) fluido-estrutura acoplado	98
Figura 4.5 - Condições de contorno dos reservatórios (Seyedpoor <i>et al.</i> , 2009)	99
Figura 4.6 - Modelo do Caso 3: perspectiva dos sistemas (a) estrutural desacoplado, (b) fluido desacoplado e (c) fluido-estrutura acoplado	100
Figura 4.7 - Modelo do Caso 4: perspectiva dos sistemas (a) estrutural desacoplado, (b) fluido desacoplado e (c) fluido-estrutura acoplado	102

Figura 4.8 - Barragem *Morrow Point*

(http://www.usbr.gov/projects/facility.jsp?fac_Name=Morrow+Point+Dam&groupName=General)..... 104

Figura 4.9 - (a) Seção transversal central, (b) planta superior da barragem *Morrow Point* e modelo completo do Caso 5: perspectiva dos sistemas (c) estrutural desacoplado, (d) fluido desacoplado e (e) fluido-estrutura acoplado 106

Figura 4.10 - Componente S69E do terremoto de Taft: (a) registro aceleração x tempo e (b) espectro de frequências da excitação

(http://nisee.berkeley.edu/data/strong_motion/caltech/volume1.d/taft_1952_s69e) 107

Figura 4.11 - Componente S21W do terremoto de Taft: (a) registro aceleração x tempo e (b) espectro de frequências da excitação

(http://nisee.berkeley.edu/data/strong_motion/caltech/volume1.d/taft_1952_n21e) 108

Figura 4.12 - Componente vertical do terremoto de Taft: (a) registro aceleração x tempo e (b) espectro de frequências da excitação

(http://nisee.berkeley.edu/data/strong_motion/caltech/volume1.d/taft_1952_vert) 108

Figura 4.13 - Exemplo de planilha de cálculo analítico: determinação das frequências naturais do sistema estrutural desacoplado do Caso 2 109

Figura 4.14 - Geometria do elemento SHELL63 (Biblioteca ANSYS) 111

Figura 4.15 - Geometria do elemento SOLID95 (Biblioteca ANSYS) 112

Figura 4.16 - Geometria do elemento FLUID30 (Biblioteca ANSYS) 113

Figura 4.17 - Definição do vetor de tensão (ANSYS) 114

Figura 4.18 - Elemento de casca de 4 nós (ANSYS) 133

Figura 4.19 - Elemento *brick* de 20 nós (ANSYS) 134

Figura 4.20 - Elemento *brick* de 8 nós (ANSYS) 135

Figura 4.21 - Relação entre razão de amortecimento e frequência (para amortecimento de Rayleigh) (Clough e Penzien, 2003) 138

Figura 4.22 - Designações de cores para os *Contour Dispalys* 140

Figura 4.23 – Casca cilíndrica desenvolvida 141

Figura 4.24 - Estudo de convergência e validação (Caso 1 - Estrutura) 144

Figura 4.25 - Estudo de convergência e validação (Caso 1 - Fluido) 144

Figura 4.26 - Estudo de convergência e validação (Caso 1 - Fluido-estrutura) 144

Figura 4.27 - Estudo de convergência e validação (Caso 2 - Estrutura) 145

Figura 4.28 - Estudo de convergência (Caso 2 - Fluido) 145

Figura 4.29 - Estudo de convergência (Caso 2 - Fluido-estrutura) 145

Figura 4.30 - Estudo de convergência e validação (Caso 3 - Estrutura) 146

Figura 4.31 - Estudo de convergência (Caso 3 - Fluido)	147
Figura 4.32 - Estudo de convergência (Caso 3 - Fluido-estrutura)	147
Figura 4.33 - Distribuição de pressão nas seções central ($\theta_0 = 0^\circ$), $\frac{1}{4}$ ($\theta_0 = 25^\circ$) e lateral ($\theta_0 = 50^\circ$) da barragem em arco cilíndrica (Caso 3 - Fluido-estrutura) (ANSYS).....	148
Figura 4.34 - Distribuição de pressão em θ_0 igual 0° (seção central), $12,5^\circ$, 25° (seção $\frac{1}{4}$), $37,5^\circ$ e $37,5^\circ$ (seção lateral) na barragem em arco cilíndrica (Caso 3 - Fluido-estrutural) (Tsai e Li, 1987, modificado)	148
Figura 4.35 - Estudo de convergência (Caso 4 - Estrutura)	149
Figura 4.36 - Estudo de convergência (Caso 4 - Fluido)	149
Figura 4.37 - Estudo de convergência (Caso 4 - Fluido-estrutura)	149
Figura 4.38 - Resposta devido ao movimento montante-jusante do solo (Caso 4): (a) estrutura e (b) fluido-estrutura (ANSYS)	150
Figura 4.39 - Resposta devido ao movimento montante-jusante do solo (Caso 4) (Porter e Chopra, 1981, modificado)	151
Figura 4.40 - Resposta devido ao movimento transversal do solo (Caso 4): (a) estrutura e (b) fluido-estrutura (ANSYS)	151
Figura 4.41 - Resposta devido ao movimento transversal do solo (Caso 4) (Porter e Chopra, 1981, modificado)	152
Figura 4.42 - Modelo adaptado do Caso 4	155
Figura 4.43 - Resposta devido ao movimento (a) montante-jusante e (b) transversal do solo (Caso 4 - Fluido-estrutura) (ANSYS)	155
Figura 4.44 - Estudo de convergência e validação (Caso 5 - Estrutura)	155
Figura 4.45 - Estudo de convergência e validação (Caso 5 - Fluido)	156
Figura 4.46 - Estudo de convergência e validação (Caso 5 - Fluido-estrutura)	156
Figura 4.47 - Modos acústicos desacoplados para condição de contorno aberta-aberta: (a) 1° , (b) 2° , (c) 3° e (d) 4° modos	159
Figura 4.48 - Modos acústicos desacoplados para condição de contorno fechada-fechada: (a) 1° , (b) 2° , (c) 3° e (d) 4° modos	160
Figura 4.49 - Modos acústicos desacoplados para condição de contorno fechada-aberta: (a) 1° , (b) 2° , (c) 3° e (d) 4° modos	161
Figura 5.1 - Modos de deformação: [(a) e (b)] axial, [(c) e (d)] circunferencial e [(e) e (f)] radial ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\theta = 30^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $z = L/3$ (Caso 1 - Estrutura)	165
Figura 5.2 - Frequências naturais analíticas da estrutura (Caso 1)	170
Figura 5.3 - Energia de deformação e suas componentes flexional e extensional (Caso 1)	170
Figura 5.4 - Frequências naturais analíticas da estrutura (Caso 1)	171
Figura 5.5 - Constantes dos modos de vibração: (a) $i = 1, m = 1, n$, (b) $i = 2, m = 1, n$ e (c) $i = 3, m = 1, n$ (Caso 1 - Estrutura)	172

Figura 5.6 - Curvas da amplitude do deslocamento: (a) axial, (b) circunferencial e (c) radial no ponto de coordenada $z = L/3$, $\theta = 30^\circ$ em função da frequência aplicada	175
Figura 5.7 - Deslocamentos: [(a) e (b)] axial, [(c) e (d)] circunferencial e [(e) e (f)] radial ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\theta = 30^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $z = L/3$	176
Figura 5.8 - (a) Deformada e deslocamentos (b) axial, (c) circunferencial e (d) radial, em m	177
Figura 5.9 - Curvas dos deslocamentos (a) axial, (b) circunferencial e (c) radial no ponto de coordenada $z = L/3$, $\theta = 30^\circ$ em função do tempo	178
Figura 5.10 - Deslocamentos: [(a) e (b)] axial, [(c) e (d)] circunferencial e [(e) e (f)] radial ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\theta = 30^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $z = L/3$	179
Figura 5.11 - a) Deformada e deslocamentos (b) axial, (c) circunferencial e (d) radial, em m	180
Figura 5.12 - Modos de vibração de pressão ao longo de três curvas: (a) uma reta ($0 \leq r \leq a$) em $\theta = 30^\circ$, $z = L/3$, (b) uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $r = a/2$, $z = L/3$ e (c) uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $r = a/2$, $\theta = 30^\circ$ (Caso 1 - Fluido)	182
Figura 5.13 - Modos de deformação: [(a) e (b)] axial, [(c) e (d)] circunferencial e [(e) e (f)] radial ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\theta = 30^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $z = L/3$ (Caso 1 - Fluido-estrutura)	185
Figura 5.14 - Modos de vibração de pressão ao longo de três curvas: (a) uma reta ($0 \leq r \leq a$) em $\theta = 30^\circ$, $z = L/3$, (b) uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $r = a/2$, $z = L/3$ e (c) uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $r = a/2$, $\theta = 30^\circ$ (Caso 1 - Fluido-estrutura).....	186
Figura 5.15 - Frequências naturais analíticas acopladas (Caso 1)	192
Figura 5.16 - Frequências naturais analíticas acopladas (Caso 1)	192
Figura 5.17 - Frequências naturais teóricas (linha contínua) e experimentais (símbolos) versus o número de onda circunferencial n , para $m = 1$ e 2 , para uma casca vazia (<i>empty</i>) e preenchida com água (<i>full</i>) com extremidades “abertas” simplesmente apoiadas (Amabili e Dalpiaz, 1995)	193
Figura 5.18 - Curvas da amplitude dos deslocamentos (a) axial, (b) circunferencial e (c) radial no ponto de coordenada $z = L/3$, $\theta = 30^\circ$ e (d) da pressão no ponto de coordenada $r \cong a/2$, $\theta \cong 32,3^\circ$, $z = L/3$ em função da frequência aplicada	195
Figura 5.19 - Deslocamentos: [(a) e (b)] axial, [(c) e (d)] circunferencial e [(e) e (f)] radial ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\theta = 30^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $z = L/3$	196
Figura 5.20 - Pressão ao longo de três curvas: (a) uma reta ($0 \leq r \leq a$) em $\theta = 30^\circ$, $z = L/3$, (b) uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $r = a/2$, $z = L/3$ e (c) uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $r = a/2$, $\theta = 30^\circ$	197
Figura 5.21 - (a) Deformada, deslocamentos (b) axial, (c) circunferencial e (d) radial, em m e (e) pressão, em Pa	198

Figura 5.22 - Curvas dos deslocamentos (a) axial, (b) circunferencial e (c) radial no ponto de coordenada $z = L/3$, $\theta = 30^\circ$ e (d) da pressão no ponto de coordenada, $r \cong a/2$, $\theta \cong 70,7^\circ$, $z = 5L/16$ em função do tempo	199
Figura 5.23 - Deslocamentos: [(a) e (b)] axial, [(c) e (d)] circunferencial e [(e) e (f)] radial ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\theta = 30^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $z = L/3$	200
Figura 5.24 - Pressão ao longo de três curvas: (a) uma reta ($0 \leq r \leq a$) em $\theta = 30^\circ$, $z = L/3$, (b) uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $r = a/2$, $z = L/3$ e (c) uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $r = a/2$, $\theta = 30^\circ$	201
Figura 5.25 - (a) Deformada, deslocamentos (b) axial, (c) circunferencial e (d) radial, em m e (e) pressão, em Pa	202
Figura 5.26 - Modos de deformação: [(a) e (b)] axial, [(c) e (d)] circunferencial e [(e) e (f)] radial ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\theta = 7,5^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$) em $z = L/3$ (Caso 2 - Estrutura)	204
Figura 5.27 - Modelos em elementos finitos: (a) sistema barragem-reservatório simplificado adotado no presente trabalho e (b) sistema barragem-reservatório-fundação adotado em Chopra (1988) (Seyedpoor, <i>et.al.</i> , 2009, modificado)	252
Figura 5.28 - Deslocamento radial no tempo no ponto de deslocamento radial máximo: (a) estrutura e (b) fluido-estrutura	254
Figura 5.29 - Tensões na face montante: (a) arco e (b) viga em balanço para o caso de reservatório vazio e (c) arco e (d) viga em balanço para o caso de reservatório cheio, em lbf/ft^2 ($\cong 4,78802 \cdot 10^{-5} MPa$)	255
Figura 5.30 - Tensões na face jusante: (a) arco e (b) viga em balanço para o caso de reservatório vazio e (c) arco e (d) viga em balanço para o caso de reservatório cheio, em lbf/ft^2 ($\cong 4,78802 \cdot 10^{-5} MPa$)	256
Figura 5.31 - Envelope dos valores de tensão de tração máxima na face montante: (a) arco e (b) viga em balanço para o caso de reservatório vazio e (c) arco e (d) viga em balanço para o caso de reservatório cheio, em lbf/ft^2 ($\cong 4,78802 \cdot 10^{-5} MPa$)	257
Figura 5.32 - Envelope dos valores de tensão de tração máxima na face jusante: (a) arco e (b) viga em balanço para o caso de reservatório vazio e (c) arco e (d) viga em balanço para o caso de reservatório cheio, em lbf/ft^2 ($\cong 4,78802 \cdot 10^{-5} MPa$)	258
Figura A.1 - Casca cilíndrica: (a) denominações principais; (b) elemento diferencial de casca cilíndrica e carregamento distribuído na superfície de referência (Timoshenko e Woinowsky - Krieger, 1959, Flügge, 1973)	273
Figura A.2 - Seção de casca cilíndrica circular com forças cortantes transversais (Baker <i>et al.</i> , 1972, modificado)	274
Figura A.3 - Seção de casca cilíndrica circular com forças normais (Baker <i>et al.</i> , 1972, modificado)	275
Figura A.4 - Seção de casca cilíndrica circular com momentos torçores (Baker <i>et al.</i> , 1972, modificado)	276
Figura A.5 - Dois elementos adjacentes da borda de uma casca (Flügge, 1973, adaptado)	279

Figura A.6 - Deslocamentos dos pontos A_0 e A (Flügge, 1973, modificado)	280
Figura A.7 - Elemento de linha antes e depois da deformação (Flügge, 1973, adaptado)	283
Figura A.8 - Deformação de cisalhamento de um elemento de casca (Flügge, 1973)	283
Figura B1 - Superfície de referência (Soedel, 2005)	294
Figura B.2 - Definições das coordenadas para um arco (Soedel, 2005)	301
Figura B.3 - Anel circular (Soedel, 2005)	305
Figura B.4 - Explicação da fase entre movimento transversal e movimento circunferencial usando o exemplo de um anel (Soedel, 2005)	306
Figura B.5 - Modos naturais de um anel fechado (Soedel, 2005)	310

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURAS E ABREVIACÕES

2D	- Duas dimensões
3D	- Três dimensões
A	- Analítica
A	- Área de seção transversal
a	- Aceleração
a	- Raio médio da casca cilíndrica
AB	- Aberto
$\acute{a}rea_f$	- Área da resistência distribuída
$\acute{a}rea_p$	- Área sobre a qual a pressão age
AP	- Apoiado, sem restrição axial
A_1 e A_2	- Parâmetros de forma fundamental ou parâmetros de Lamé
A , B e C	- Constantes que descrevem a amplitude das deformações axial, circunferencial e radial
\mathbf{a}_r , \mathbf{a}_θ e \mathbf{a}_z	- Vetores unitários de um sistema de coordenadas cilíndricas
a_x , a_y e a_z	- Acelerações do solo nas direções x , y e z
B	- Largura da barragem
b	- Base
B_1	- Largura da crista da barragem medida na seção transversal central
B_2	- Largura da base da barragem medida na seção transversal central
\mathcal{B}	- Função de Bessel
$[B_u]$	- Matriz deslocamento-deformação
$[C]$	- Matriz de amortecimento
c	- Velocidade do som no fluido
CC	- Condição de contorno
$[C_e]$	- Matriz de amortecimento estrutural
$[C_e^p]$	- Matriz de amortecimento do fluido
CHP	- Carga harmônica pontual
CS	- Carga sísmica
D	- Dissipação
D	- Rigidez flexional

$[D]$	- Elasticidade, ou matriz de rigidez elástica ou matriz tensão-deformação
$[D]^{-1}$	- Matriz de flexibilidade
DC	- Domínio da cavidade
DE	- Domínio da estrutura
dV	- Volume infinitesimal
D e E	- Coeficientes que especificam a amplitude de vibração da pressão
E	- Engastado
E	- Leste
E	- Módulo de Young (ou módulo de elasticidade longitudinal)
e	- Base dos logaritmos neperianos
e	- Estrutura
E_b	- Energia aplicada por possíveis resultantes de forças e momentos de contorno aplicados
EST	- Estrutura
F	- Fechado
F	- Força
$\{F^a\}$	- Vetor de carga aplicada
$\{F^{accel}\}$	- Vetor força aceleração
F-E	- Fluido-Estrutura
fe	- Fluido-estrutura acoplado
$\{F_e^{nd}\}$	- Forças nodais aplicadas ao elemento
$\{F_e^{pr}\}$	- vetor de pressão do elemento estrutural
$\{F_e^{th}\}$	- Vetor de carga térmica do elemento estrutural
f_i	- Força inercial
FL	- Fluido
ft	- Pé (0,3048 m)
FOR	- Vibração forçada
G	- Módulo de cisalhamento
g	- Aceleração da gravidade
G, H e J	- Fatores modais adimensionais
g_x, g_y e g_z	- Componentes da aceleração devido à gravidade
H	- Altura do fluido

h	- Altura
h	- Espessura da casca cilíndrica
H_b	- Altura da barragem medida na seção transversal central
I	- Momento de inércia
i	- i -ésima raiz
i	- Número de círculos nodais
IFE	- Interação Fluido-Estrutura
i, j e k	- Índices segundo as direções x, y e z
I_n e K_n	- Funções de Bessel modificadas de primeira e segunda classes de ordem n
I'_n	- Derivada da função de Bessel modificada de primeira classe de n -ésima ordem
j	- Jusante
j	- Unidade imaginária
J_n e Y_n	- Funções de Bessel de primeira e segunda classes de ordem n
J'_n	- Derivada da função de Bessel de primeira classe de n -ésima ordem
K	- Energia cinética
K	- Rigidez de membrana
$[K]$	- Matriz de rigidez
k	- Índice igual a $imn()$
k	- Rigidez da fundação em unidades de força por comprimento por unidade de área
$[K_e]$	- Matriz de rigidez do elemento estrutural
$[K_e^f]$	- Matriz de rigidez da fundação do elemento estrutural
$[K_e^p]$	- Matriz de rigidez do fluido
$[K^{fs}]$	- Matriz de rigidez acoplada
k_z e k_θ	- Mudanças de curvatura
$k_{z\theta}$	- Deformação torsional
L	- Comprimento da barragem ao longo da crista
L	- Comprimento da casca cilíndrica
L	- Livre
L	- Operador
lb_f/ft^3	- Libra-força por pé-cúbico ($4,78802 \cdot 10^{-5} MPa$)
LIV	- Vibração livre

M	-	Momento
M	-	Montante
$[M]$	-	Matriz de massa
m	-	Massa
m	-	Montante
m	-	Número de meias-ondas longitudinais no modo de vibração
\bar{m}	-	Número de nós axiais
MA	-	Massa adicional
MEF	-	Método dos Elementos Finitos
$[M_e]$	-	Matriz de massa do elemento estrutural
$[M_e^p]$	-	Matriz de massa do fluido
$[M^{fs}]$	-	Matriz de massa acoplada
MM	-	Modo misto
M_z e M_θ	-	Momentos fletores por unidade de comprimento
$M_{z\theta}$ e $M_{\theta z}$	-	Momentos torçores por unidade de comprimento
N	-	Numérica
N	-	Ordem da frequência natural
n	-	Número de diâmetros nodais
n	-	Número de ondas circunferenciais no modo de vibração
$\{n\}$	-	Normal unitária à interface S
$\{N_e\}$	-	Função de forma do elemento estrutural para os deslocamentos
$\{N_p\}$	-	Função de forma do elemento fluido para a pressão
$[N_u]$	-	Matriz das funções de forma
$[N_{u_n}]$	-	Matriz das funções de forma para movimentos normais à superfície
N_z e N_θ	-	Forças de membrana normais no plano por unidade de comprimento
$N_{z\theta}$ e $N_{\theta z}$	-	Forças de membrana cortantes no plano por unidade de comprimento
P	-	Carga pontual variando harmonicamente
$\{P\}$	-	Vetor pressão aplicada
p	-	Pressão
PAC	-	Programa de Aceleração do Crescimento
p_{cr}	-	Pressão atribuída ao movimento de corpo rígido

$\{P_e\}$	- Vetor de pressão nodal
PRES	- Pressão
$p(\tau)$	- Função de excitação
Q_z e Q_θ	- Forças cortantes transversais por unidade de comprimento
q_z , q_θ e q_r	- Componentes do carregamento distribuído por unidade de área
r	- Absorção no contorno
RA	- Rigidez adicional
R	- Constante do gás
R_0	- Raio central do arco
ROTX	- Rotação em torno do eixo x nodal
ROTY	- Rotação em torno do eixo y nodal
ROTZ	- Rotação em torno do eixo z nodal
R_x , R_y e R_z	- Resistências distribuídas
r'_i	- i -ésima raiz de J'_n
S	- Energia de deformação
S	- Sul
s	- Coordenada ao longo do eixo neutro do arco
s	- Largura da casca abatida medida circunferencialmente
S_a	- Pseudo-aceleração
<i>slug</i>	- 14,59390 kg
T	- Períodos de vibração
T	- Temperatura
T	- Transversal
\bar{T}	- Período de vibração aplicado
t	- Tempo
T_{ref}	- Temperatura de referência
T_x , T_y e T_z	- Termos de perdas viscosas
$\{u_e\}$	- Vetor de deslocamento nodal
$\{\dot{u}_e\}$	- Vetor de velocidade nodal
$\{\ddot{u}_e\}$	- Vetor aceleração nodal
UX	- Translação na direção x nodal

UY	- Translação na direção y nodal
UZ	- Translação na direção z nodal
U, V e W	- Componentes dos modos naturais nas direções axial, circunferencial e radial
u, v e w	- Deslocamentos nas direções axial, circunferencial e radial
\dot{u}, \dot{v} e \dot{w}	- Velocidades nas direções axial, circunferencial e radial
u_0, v_0 e w_0	- Deslocamentos na base da casca cilíndrica nas direções axial, circunferencial e radial
u^t, v^t e w^t	- Deslocamentos totais, a partir de um eixo de referência, nas direções axial, circunferencial e radial
\tilde{u}_x, \tilde{u}_y e \tilde{u}_z	- Deslocamentos da fundação nas direções x, y e z
V	- Vertical
\mathbf{v}	- Campo de velocidades
vol	- Volume do elemento
v_r, v_θ e v_z	- Componentes do campo de velocidade nas direções radial, circunferencial e axial
v_x, v_y e v_z	- Componentes do vetor de velocidade nas direções x, y e z
V_z e T_z	- Resultantes das tensões de cisalhamento efetivas de Kirchhoff do primeiro e segundo tipo
$\{w\}$	- Vetor de deslocamentos de um ponto geral
W	- Oeste
W	- Trabalho externo
W_{in}	- Energia de entrada total
x, y e z	- Coordenadas cartesianas
y	- Coordenada perpendicular ao eixo neutro do arco
z, θ e r	- Coordenadas cilíndricas nas direções axial, circunferencial e radial
z^* e θ^*	- Coordenadas do ponto onde se situa a força pontual
α	- Constante
α_1 e α_2	- Coordenadas de superfícies curvilíneas bidimensionais
α e β	- Amortecimento de Rayleigh (alfa e beta)
α_{mn}	- Parâmetro adimensional
α^{se}	- Coeficiente secante de expansão térmica
β	- <i>Bulk modulus</i>
β	- Coeficiente de absorção no contorno

β	- Fator
β	- Razão entre a frequência da carga aplicada e a frequência de vibração livre natural
δ	- Função delta de Dirac
δ	- Operador virtual
$\{\delta\}$	- Vetor de deslocamentos e pressões
δP	- Variação virtual na pressão
$\{\varepsilon\}$	- Vetor de deformação total
ε_z^0 e ε_θ^0	- Deformações extensionais
$\varepsilon_{z\theta}^0$	- Deformação cisalhante
$\{\varepsilon^{el}\}$	- Vetor de deformação elástica
$\{\varepsilon^{th}\}$	- Vetor de deformação térmica
η	- Fatores de participação modal
φ	- Ângulo de fase arbitrário
ϕ	- Diferença de fase
ϕ	- Potencial de velocidade
Φ	- Modo de vibração da função potencial de velocidade
$\phi_m(z)$	- Função modal axial
λ	- Comprimento de onda dominante das ondas de pressão
λ	- Fator de amortecimento viscoso equivalente
λ	- Parâmetro adimensional
λ_a	- Amortecimento viscoso adicional do fluido
μ	- Conjunto de parâmetros de viscosidade
μ_e	- Viscosidade efetiva
ω	- Frequência natural circular de vibração
$\bar{\omega}$	- Frequência circular aplicada
ρ_e	- Massa específica (ou densidade absoluta) da estrutura
ρ_f	- Massa específica do fluido
σ	- Parâmetro adimensional
$\{\sigma\}$	- Vetor de tensão
ξ	- Densidade virtual ou adicional do fluido
ζ	- Fator de amortecimento modal

1 INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

A água é essencial à vida e todos os organismos vivos no planeta Terra dependem da água para sua sobrevivência. Além disso, sempre houve grande dependência dos recursos hídricos para o desenvolvimento econômico. A água funciona como fator de desenvolvimento, pois ela é utilizada para inúmeros usos diretamente relacionados com a economia. Os usos mais comuns e freqüentes dos recursos hídricos são: água para uso doméstico, irrigação, uso industrial e hidreletricidade (Tundisit, 2003).

Segundo ANEEL (2008), a água é uma das poucas fontes para produção de energia que não contribui para o aquecimento global, e ainda, é renovável: pelos efeitos da energia solar e da força da gravidade, de líquido transforma-se em vapor que se condensa em nuvens, que retornam à superfície terrestre sob a forma de chuva.

A energia hidrelétrica é gerada pelo aproveitamento do fluxo das águas em uma usina na qual as obras civis - que envolvem tanto a construção quanto o desvio do rio e a formação do reservatório - são tão ou mais importantes que os equipamentos instalados. Por isso para a construção de uma hidrelétrica é imprescindível a contratação da chamada indústria da construção pesada.

Para produzir a energia hidrelétrica é necessário integrar a vazão do rio, a quantidade de água disponível em determinado período de tempo e os desníveis do relevo, sejam eles naturais, como as quedas d'água, ou criados artificialmente.

A estrutura da usina é composta, basicamente, por barragem, sistema de captação e adução de água, casa de força e vertedouro, que funcionam em conjunto e de maneira integrada. A barragem tem por objetivo interromper o curso normal do rio e permitir a formação do reservatório. Além de “estocar” a água, esses reservatórios têm outras funções: permitem a formação do desnível necessário para a configuração da energia hidráulica, a captação da água em volume adequado e a regularização da vazão dos rios em períodos de chuva ou estiagem.

As barragens podem ser classificadas em: a gravidade, a arco e a arco-gravidade.

Segundo Souza *et al.* (1983), barragens a gravidade são aquelas em que o equilíbrio estático da construção, sob a ação das forças externas, realiza-se pelo próprio peso da estrutura, com o auxílio eventual da componente vertical do empuxo que atua sobre seus paramentos. A resultante de todas as forças atuantes é transmitida, através da sua base, ao solo do leito do rio sobre o qual se apóia. Os seguintes tipos podem ser considerados nesse grupo: barragens maciças, barragens aliviadas a contrafortes ocos ou a placas planas ou em arco. Podem ser executadas com os seguintes materiais: alvenaria de pedra, concreto ciclópico e concreto armado. Incluem-se nesse grupo também as barragens de terra e enrocamento. Para qualquer situação encontrada na natureza haverá sempre uma solução adequada de barragem a gravidade a ser utilizada.

As barragens a arco tiram proveito da propriedade de as estruturas em arco resistirem com facilidade a cargas uniformemente distribuídas sobre seu dorso, transmitindo-as para suas ombreiras. Nessas condições, as forças decorrentes do empuxo hidrostático são transferidas para as margens e o fundo do rio. Daí, para seu emprego, ser necessário haver condições naturais especialíssimas como margens altas constituídas de rocha resistente e sã. Dadas às suas pequenas seções transversais, empregam pouco material de forma que seu peso desempenha papel secundário no equilíbrio estático. Podem ser construídas em concreto e concreto armado. No Brasil, por exemplo, em regiões ao longo do rio Pelotas, que faz a divisa natural entre os estados do Rio Grande do Sul e Santa Catarina, esse tipo de barragem poderia ser empregado. O rio atravessa diversos cânions com corredeiras e morros muito íngremes, alguns com altura de mais de 500 m em relação ao nível do rio, em terrenos de rochas basálticas, gerando interesse do governo em utilizar o potencial hidrelétrico na região.

Barragens a arco-gravidade são barragens que têm sua planimetria em forma de arco, mas que, por outro lado, funcionam parcialmente como barragens a arco e parcialmente a gravidade. Suas seções transversais apresentam-se bem mais espessas que as das barragens em arco, porém mais esbeltas que as das barragens a gravidade. São menos exigentes quanto ao material do local de sua construção e construídas em concreto ciclópico.

A Figura 1.1 ilustra exemplos de barragens a gravidade e arco. Em (a) tem-se a Usina Hidrelétrica de Itaipu, usina binacional localizada no rio Paraná na fronteira entre o Brasil e o Paraguai, cuja barragem principal é de concreto, do tipo gravidade aliviada a contrafortes. Em (b) tem-se a Usina Hidrelétrica de Funil, com uma barragem em arco de concreto, com dupla curvatura, única no Brasil, construída no rio Paraíba do Sul, no local conhecido como “Salto do Funil”, em Resende, no estado do Rio de Janeiro.



(a)

(b)

Figura 1.1 - Barragens: (a) de Itaipu; (b) do Funil

[(a) <http://www.escolasanti.com.br/santinews/2011/06/03/a-grande-beleza/>; (b) <http://www.furnas.com.br/hotsites/sistemafurnas/magnify.asp?p=imagens/UsinaFunil16.jpg>]

Segundo o Ministério da Integração Nacional (2002), as barragens são obras geralmente associadas a um elevado potencial de risco devido à possibilidade de um eventual colapso, com conseqüências catastróficas para as estruturas das próprias barragens, ao meio ambiente, com destruição da fauna e flora, e, principalmente, pela perda de vidas humanas. Uma barragem segura é aquela cujo desempenho satisfaça as exigências de comportamento necessárias para evitar incidentes e acidentes que se referem a aspectos estruturais, econômicos, ambientais e sociais.

A barragem, ao longo de suas fundações e ombreiras, deve possuir estabilidade adequada para suportar com segurança os carregamentos extremos, como cheias e sismos, bem como as cargas normais do projeto.

Durante a ação de um sismo, é de fundamental importância a consideração da interação dinâmica entre a estrutura e o fluido do reservatório. De uma maneira simplificada, o reservatório pode induzir esforços devido às pressões hidrodinâmicas no paramento da barragem, que produzem uma nova configuração de tensões e estabilidade na mesma. Além disso, o movimento da superfície livre induz um diagrama de pressões adicional na barragem e pode provocar o transbordamento da água do reservatório (*overtopping*), levando ao surgimento de novas forças dinâmicas sobre a barragem e suas estruturas auxiliares. A análise completa do problema envolve o estudo da resposta dinâmica acoplada, com os dois meios (estrutura e fluido) interagindo entre si (Souza Junior, 2006).

1.2 JUSTIFICATIVA

Assim como é o caso de todas as grandes estruturas públicas ou privadas, as barragens são construídas para um fim específico. Dentre as barragens de uso único, 17,4% têm a função de produzir energia elétrica, a hidreletricidade. Sendo a eletricidade a única forma de energia cujo controle, utilização e conversão em outras formas é relativamente fácil, ela é, e provavelmente continuará a ser, a forma principal de energia utilizada pelo homem. Considerada a importância estratégica da energia elétrica, tanto para a economia como para a qualidade de vida da população, o estudo de barragens (um dos componentes da estrutura da usina hidrelétrica) é inteiramente legitimado, sendo a hidreletricidade uma fonte de energia limpa (sua operação não provoca a emissão de gases causadores do efeito estufa) e renovável. O Brasil tem um dos maiores potenciais tecnicamente aproveitáveis de energia hidráulica no mundo (10% do total), atrás somente de China (13%) e Rússia (12%) (ANEEL, 2008).

Dentre os diferentes tipos de barragens, as barragens em arco são mais econômicas em comparação às barragens gravidade de mesma altura, além de serem extremamente confiáveis, apresentando poucos casos de ruptura comparativamente aos outros tipos.

Nos mais diferentes países do mundo, a exemplo do Brasil, têm sido freqüentes as polêmicas e os conflitos em torno dos impactos provocados pelo planejamento, implantação e operação de barragens. As barragens são criticadas por seus impactos socioambientais, como, entre outros, a inundação de terras férteis, a destruição de florestas e de patrimônio genético, o alagamento de cidades e infra-estruturas, o deslocamento

compulsório de pessoas, a degradação das condições de reprodução sociocultural de populações tradicionais. Neste sentido, as barragens em arco costumam gerar impactos bastante reduzidos, por serem geralmente construídas em vales estreitos e encaixados, em rios cujos acidentes naturais como saltos e quedas, favorecem a geração hidrelétrica e exigem pequenos reservatórios.

Em engenharia de barragens, é indispensável a observância de condições rigorosas de segurança pois, dependendo do porte, seu rompimento causa graves prejuízos, diretos (como perdas de vidas humanas, danos materiais na barragem e nas zonas inundadas) e indiretos (como paralisação das atividades econômicas no local e a jusante, perda de energia elétrica que seria gerada na barragem rompida e em outras e danos físicos e/ou psicológicos aos sobreviventes).

Dentre os eventos extremos a que uma barragem deve resistir há o sismo. Quando a barragem vibra, a água também participa do movimento, sendo que a análise deve levar em conta a interação da barragem com o reservatório, o que justifica o estudo de aspectos da interação fluido-estrutura aplicados a barragens em arco. Em particular porque essas barragens são praticamente inexistentes no Brasil, e a falta de conhecimento sobre as mesmas tem sido um dos maiores obstáculos à sua difusão e utilização. Nesse sentido, este trabalho vem para dar uma pequena contribuição na construção desse conhecimento.

1.3 COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

No Brasil, a grande maioria das estruturas de barramento é do tipo gravidade, e até o presente momento apenas uma barragem em arco fora construída no Rio de Janeiro (Barragem do Funil). Entretanto, ressalta-se que estas barragens estão envelhecendo e os cuidados com a manutenção devem ser tomados, além disto, novas construções para atender a demanda de energia em nosso país visam alternativas a este tipo de estrutura e com isto as barragens em arco para pequenas centrais hidrelétricas - PCHs - podem e devem ser consideradas como alternativas mais viáveis do ponto de vista estrutural, econômico e ambiental, sendo este último, o fator principal que vem estimulando cada vez mais pesquisas de novas soluções que sejam menos agressivas (Campos Junior, 2011).

A iniciativa do governo brasileiro com o Programa de Aceleração do Crescimento - PAC (envolvendo a construção de novas usinas hidrelétricas), a participação crescente de empreiteiras nacionais construindo obras deste tipo em zonas sísmicas (região norte em direção aos Andes, por exemplo, ou mesmo em outros países localizados nesta cordilheira), a crescente conscientização da necessidade do projeto sismo-resistente (com a primeira norma aprovada em 2006), e a carência de estudos desta natureza em território nacional fortalecem a importância deste estudo (Ribeiro, 2006).

Este trabalho vem contribuir na criação de meios de aprofundar investigações que permitam conhecer como os vários fatores que afetam o comportamento dinâmico barragem em arco-reservatório interferem no sistema por ocasião de um sismo. Não se tratando de um problema específico, a verdadeira problemática do estudo em questão está intimamente ligada à geração de conhecimento a respeito desse assunto e não da solução pontual de um problema real.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 Objetivos gerais

Este trabalho tem por objetivo o estudo da influência de aspectos da interação fluido-estrutura no comportamento dinâmico de um sistema barragem em arco-reservatório de água submetido a um sismo, evoluindo numa abordagem progressiva (da mais simples a mais complexa) analítico-numérica dos sistemas envolvidos, o estrutural e o fluido, desacoplados e acoplados, contribuindo assim para uma ampliação da rara bibliografia disponível em nosso meio a respeito do tema, e o desenvolvimento de uma metodologia adequada que forneça o suporte técnico para a prática de projetos seguros e confiáveis, preocupação importante na engenharia de barragens.

1.4.2 Objetivos específicos

Os objetivos mais específicos se caracterizam por tarefas gradativas na abordagem do problema:

- Implementar estudos e aplicações na análise de vibrações livres e forçadas, de cascas cilíndricas, analiticamente e numericamente pelo método dos elementos finitos (MEF);
- Efetuar a análise de vibração em fluidos acústicos, analiticamente e numericamente (MEF);
- Investigar os efeitos da interação fluido-estrutura (IFE) em sistemas casca cilíndrica-cavidade acústica, analiticamente e numericamente (MEF)
- Analisar o comportamento dinâmico de barragens de concreto em arco, numericamente (MEF);
- Validar os resultados via o software comercial ANSYS 11.0;
- Apresentar uma metodologia progressiva e consistente para o tratamento dessa classe de problema, e que permita uma aplicação “amigável” na prática da engenharia de barragens.

1.5 METODOLOGIA

Sob o ponto de vista da construção de um conhecimento, a análise de um sistema complexo, como é o sistema barragem em arco-reservatório de água submetido a forças sísmicas, e depois a verificação da integridade da estrutura exigem uma metodologia muito especial.

A abordagem direta do problema final, não permite a construção gradativa desse conhecimento, reservado a especialistas e grupos fechados (*bureau* de projeto, empresas, etc.), além de não assegurar que os resultados obtidos sejam confiáveis.

Assim neste trabalho, a abordagem progressiva seguiu duas trajetórias independentes (sistemas desacoplados) e uma inter-relacionada (sistemas acoplados).

A geometria cilíndrica com cortes particulares se caracteriza pela pedra angular da base desse conhecimento. Para o sistema estrutural, a formulação dinâmica de cascas cilíndricas forneceu os fundamentos teóricos para esse sistema. Para a cavidade (reservatório), a equação de onda em coordenadas cilíndricas se constituiu na base teórica para o fluido. O problema do acoplamento na fronteira comum dos dois meios se deu pela inter-relação

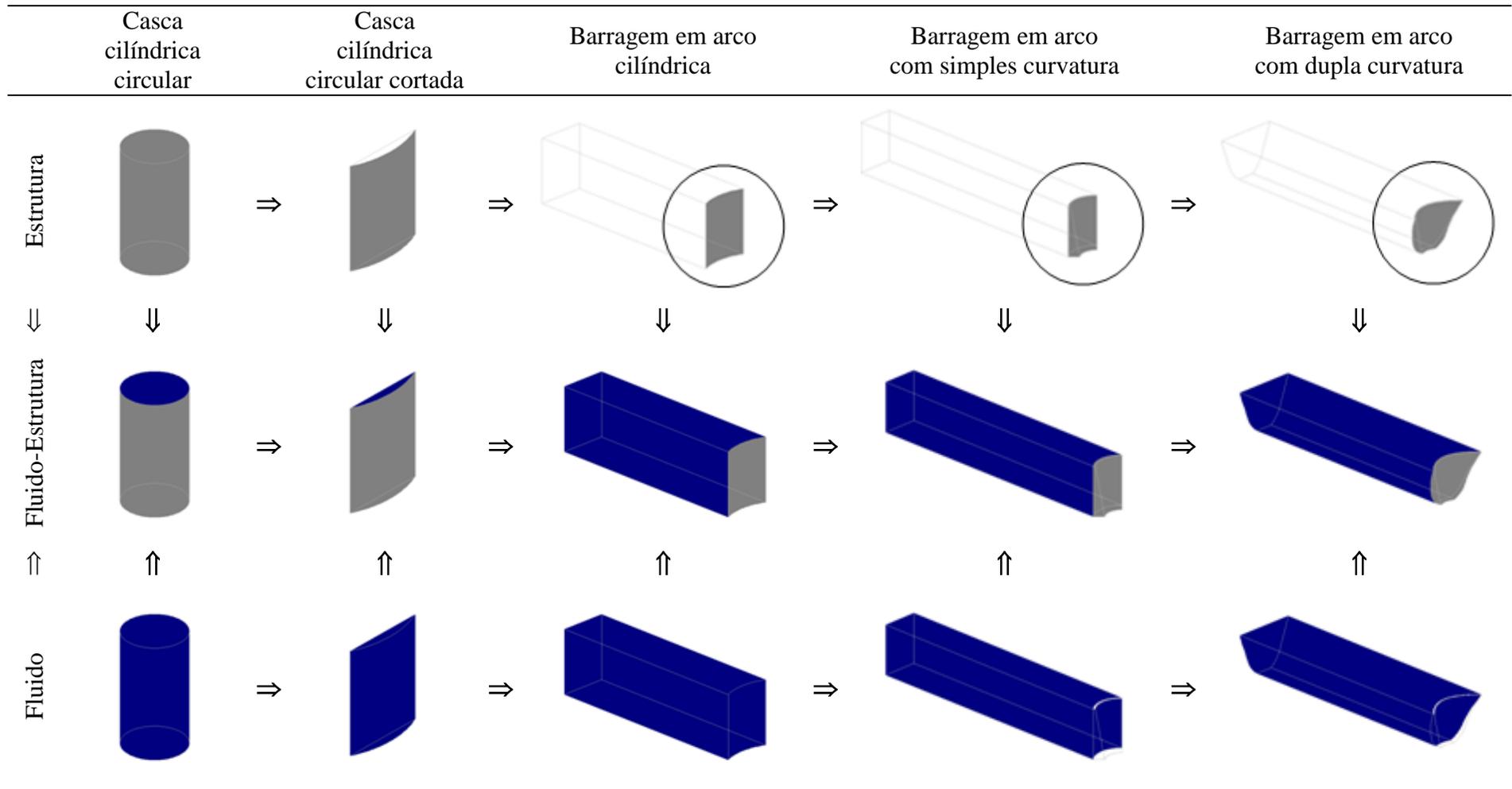
entre as pressões do fluido e o deslocamento da estrutura, pela associação das duas formulações anteriores, interpenetradas na fronteira comum.

A ilustração da Tabela 1.1 mostra esquematicamente a evolução progressiva da abordagem, que se apoia em abordagens anteriores perfeitamente dominadas.

Para o sistema estrutural, realizaram-se estudos de vibrações livres e forçadas, enquanto que para o fluido só vibrações livres. Com o sistema acoplado foram feitas análises de vibrações livres e forçadas.

Uma vez testada e verificada cada etapa, em particular nas fases em que se dispõe de soluções analíticas existentes ou construídas, passou-se para os casos mais complexos, onde os resultados, não necessariamente tinham mais referências comparativas; todavia se alicerçaram nas etapas anteriores validadas, que serviram neste caso como referenciais para a qualificação dos casos mais complexos.

Tabela 1.1 - Metodologia empregada nesta dissertação



Mais especificamente a metodologia da Tabela 1.1 pode ser descrita assim:

Inicialmente considerou-se estrutura e fluido desacoplados.

Para a análise estrutural fez-se um estudo dinâmico de cascas, com ênfase nas cascas cilíndricas circulares retas de revolução e cortadas por um plano paralelo ao seu eixo, por poder representar o modelo de barragens em arco cilíndricas. Esses passos são importantes, porque casos simplificados apresentam soluções analíticas fechadas que podem ser comparadas com soluções numéricas, consolidando conceitos fundamentais e habilitando o analista a passar para casos mais complexos, como as barragens em simples e em dupla curvaturas, que apresentam apenas soluções numéricas.

Quanto à análise do fluido, o reservatório foi modelado como uma cavidade acústica. Mais uma vez, parte-se da geometria cilíndrica, comparando resultados analíticos e numéricos e daí, para outras geometrias mais complexas (cilindro cortado e reservatórios com paredes curvas) analisadas numericamente.

Finalmente analisaram-se casos acoplados fluido-estrutura. Parte-se de um cilindro, analisado analiticamente e numericamente e daí para um cilindro cortado, uma barragem em arco cilíndrica, uma barragem em arco com simples curvatura, culminado com uma barragem em arco com dupla curvatura, sendo que esses últimos casos são feitos exclusivamente por métodos numéricos, já que não se dispõem de soluções analíticas.

A formulação analítica foi obtida da literatura especializada, os cálculos foram realizados computacionalmente e os resultados tabulados em planilhas eletrônicas. O método numérico utilizado foi o dos elementos finitos, por meio do software ANSYS 11.0.

1.6 ABRANGÊNCIA E LIMITAÇÕES

Em geral, este trabalho consiste no estudo analítico-numérico de sistemas casca cilíndrica circular reta - cavidade acústica objetivando a efetivação deste conhecimento com vistas à sua aplicação na análise de vibrações induzidas em barragens em arco devido a cargas sísmicas. Todavia, em função da vastidão do assunto, algumas limitações foram consideradas:

- As estruturas são constituídas de material linear, elástico, homogêneo e isotrópico;
- As cascas cilíndricas circulares retas têm espessura constante, paredes delgadas e pequenas deflexões, analisadas pela teoria de cascas com aproximação de primeira ordem. As formulações analíticas são baseadas nas relações simplificadas apresentadas em Flügge (1934);
- O desenvolvimento analítico limitou-se aos cilindros de revolução e ao sistema estrutural desacoplado do painel cilíndrico;
- O fluido é considerado quiescente (estagnado), invíscido (não-viscoso) e linearmente compressível. Não há escoamento, somente vibração em torno de um ponto de equilíbrio (meio acústico);
- A formulação numérica adotada na análise de problemas acoplados em interação fluido-estrutura é a U-P (deslocamento U para a estrutura, pressão P para o fluido);
- Nos casos barragem-reservatório, as fundações são consideradas rígidas (através do engastamento dos apoios das barragens e da imputação de contorno fechado nas margens e fundo dos reservatórios; não há discretização da fundação), o reservatório é finito e as fronteiras dos domínios fluidos são consideradas não-absorventes acústicas;
- Nas análises fluido desacoplado e fluido-estrutura, o cilindro (inteiro ou cortado) ou o reservatório estão completamente preenchidos com o fluido e os efeitos de onda de superfície são desconsiderados.

1.7 DESCRIÇÃO E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Este trabalho é composto de seis capítulos, descritos a seguir.

O primeiro capítulo, introdutório, apresenta algumas generalidades relativas a barragens e sua segurança ressaltando a estabilidade sísmica, as motivações que levaram a este estudo, os objetivos, a abrangência, as limitações e a metodologia empregada.

O segundo capítulo expõe a revisão bibliográfica e o estado da arte, através de alguns dos principais estudos na área de interação fluido-estrutura aplicada a problemas de sistemas casca cilíndrica-cavidade acústica e barragem em arco-reservatório de água. O capítulo finaliza com algumas considerações gerais sobre barragens em arco.

No terceiro capítulo são apresentados fundamentos teóricos através de formulação matemática dos casos que possuem soluções analíticas fechadas.

O quarto capítulo consta, inicialmente, da geometria dos modelos, das condições de contorno adotadas, das características físicas e mecânicas dos materiais que compõem as estruturas e os fluidos e dos dados completos dos carregamentos dinâmicos a que os sistemas foram submetidos quando das análises de vibração forçada. Em seguida, são descritas como foram levadas a efeito as soluções analíticas para os casos em que se dispõem delas e apresentados a formulação numérica, os elementos finitos utilizados e aspectos computacionais relativos ao ANSYS 11.0. Finalmente, são apresentadas as malhas, a convergência e a validação das soluções numéricas.

Os resultados obtidos, as análises e as discussões são apresentados no capítulo cinco.

O capítulo seis traz as conclusões desta dissertação e as sugestões para trabalhos futuros.

No Apêndice A são exibidas as formulações das cascas cilíndricas circulares retas delgadas sob a teoria flexional.

No Apêndice B são apresentadas as teorias de vibração livre de cascas em geral, arcos e anéis circulares.

O Apêndice C traz a prova da propriedade de ortogonalidade dos modos de vibração e define a seleção do ângulo de fase modal para cascas de revolução.

As funções de Bessel são apresentadas no Apêndice D.

A Tabela 1.2 sintetiza os casos analisados neste trabalho, apresentando os esquemas dos modelos, as condições de contorno, os sistemas, as análises realizadas, os carregamentos aplicados, as abordagens e os objetivos de cada caso.

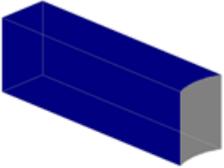
Na Tabela 1.2, na coluna **Condições de Contorno**, a primeira linha apresenta as condições de contorno da estrutura e a segunda linha, as condições de contorno do fluido. A legenda das condições é a seguinte: AP, apoiado, sem restrição axial, E, engastado, L, livre, AB, aberto e F, fechado. O símbolo F* representa a condição de interação fluido-estrutura (IFE), quando da

análise de sistemas fluido-estrutura acoplados. As posições dos contornos da estrutura foram separadas pelo símbolo \perp na seguinte sequência: inferior-superior \perp posterior-anterior (ou inferior-superior, no Caso 1). Para os contornos do fluido, a sequência é: inferior-superior \perp direita-esquerda \perp posterior-anterior (ou inferior-superior \perp lateral, no Caso 1 e inferior-superior \perp direita-esquerda, no Caso 2). Na coluna **Sistema**, EST representa estrutura desacoplada, FL, fluido desacoplado e F-E, fluido-estrutura acoplado. Na coluna **Análise**, LIV significa vibração livre e FOR, vibração forçada. Em **Cargas**, HP é carga harmônica pontual e S, carga sísmica. Na coluna **Abordagem**, A denota analítica e N, numérica.

Adicionalmente ao apresentado na Tabela 1.2, foram realizadas análises de vibração forçada para os Casos 3 (aceleração uniforme unitária) e 4 (aceleração harmônica unitária) com vistas a validação dos modelos numéricos. Os resultados são apresentados no Capítulo 4.

Tabela 1.2 - Os casos analisados neste trabalho e suas principais particularidades

Caso	Esquema	Condições de Contorno	Sistema	Análise	Carga	Abordagem	Objetivos	
1		AP-AP AB-AB \perp F*	EST	LIV	-	A N	<ul style="list-style-type: none"> - Aplicar a metodologia apresentada; - Comparar os resultados numéricos (ANSYS) com os analíticos; - Consolidar habilidades e competências para as análises posteriores. 	
				FOR	HP			S
			F-E	FL	LIV			-
				FOR	LIV			-
2		E-L \perp E-E F-AB \perp F*-AB	EST	LIV	-	A	<ul style="list-style-type: none"> - Aplicar a metodologia apresentada; - Comparar os resultados numéricos (ANSYS) com os analíticos (quando for o caso); - Analisar criticamente os resultados numéricos que não podem ser validados por resultados analíticos. 	
			FL			N		
			F-E			N		

Caso	Esquema	Condições de Contorno	Sistema	Análise	Carga	Abordagem	Objetivos
3		E-L ⊥ E-E F-AB ⊥ F*-AB ⊥ F-F	EST FL F-E	LIV	-	N	<ul style="list-style-type: none"> - Aplicar a metodologia apresentada; - Comparar os resultados numéricos (ANSYS) com os apresentados na literatura (Tsai e Li, 1987).
4		E-L ⊥ E-E F-AB ⊥ F*-AB ⊥ F-F	EST FL F-E	LIV	-	N	<ul style="list-style-type: none"> - Aplicar a metodologia apresentada; - Comparar os resultados numéricos (ANSYS) com os apresentados na literatura (Porter e Chopra, 1981).
5		E-L ⊥ E-E F-AB ⊥ F*-AB ⊥ F-F	EST FL F-E	LIV FOR LIV FOR	- S - S	N	<ul style="list-style-type: none"> - Aplicar a metodologia apresentada; - Comparar os resultados numéricos (ANSYS) com os apresentados na literatura (Chopra, 1988 e Tan e Chopra, 1996); - Aplicar todo o conhecimento adquirido nas análises anteriores; - Analisar a estabilidade sísmica da barragem.

Legenda:

AP = apoiado, sem restrição axial; E = engastado; L = livre; AB = aberto; F = fechado; EST = estrutura; FL = fluido; F-E = fluido-estrutura; LIV = vibração livre; FOR = vibração forçada; HP = carga harmônica pontual; S = carga sísmica; A = analítica; N = numérica.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados alguns dos principais estudos referentes à vibração de cascas, com ênfase em cascas cilíndricas desacopladas e acopladas a fluidos, e à vibração de barragens, com ênfase em vibração de barragens em arco devido a cargas sísmicas. Ao final são apontadas generalidades sobre barragens em arco.

2.2 PRINCIPAIS ESTUDOS

Cascas cilíndricas:

Não há consenso geral na literatura sobre as equações diferenciais lineares que descrevem a deformação, para análises estáticas e dinâmicas, de uma casca. Uma série de teorias foi suscitada e é utilizada. Proeminentes entre estas são as teorias de A. E. Love (1888), W. Flügge (1934), L. H. Donnell (1933), K. M. Mushtari (1938), E. Reissner (1941) e J. L. Sanders (1959). As diferenças entre as teorias devem-se às várias hipóteses adotadas sobre a conformação de termos pequenos e a ordem dos termos mantidos na análise. As teorias de cascas de Donnell e Mushtari são as mais simples destas teorias. As teorias de cascas de Flügge e Sanders são geralmente encaradas como sendo as mais precisas. Em alguns casos as várias teorias de casca predizem resultados significativamente diferentes. Contudo, sobre uma ampla gama de parâmetros de importância na engenharia, estas teorias produzem resultados similares (Blevins, 1995).

Lakis e Paidoussis (1971) apresentaram uma teoria para a determinação das características de vibração livre de cascas cilíndricas circulares, verticais, delgadas, parcialmente ou completamente preenchidas com líquido estacionário. A casca poderia ser uniforme ou não-uniforme, desde que fosse axialmente simétrica. Utilizou-se o método dos elementos finitos (elementos finitos cilíndricos), porém, as funções de deslocamento foram determinadas usando teoria clássica de casca. A carga inercial do fluido foi considerada através da incorporação de sua massa virtual na matriz de massa daqueles elementos finitos que se encontravam abaixo da superfície livre do líquido. Cálculos das frequências naturais

e de autovetores foram conduzidos para uma casca cujos dados experimentais estavam disponíveis. A concordância entre teoria e experiência verificou-se ser muito boa.

Sharma e Johns (1971) desenvolveram uma análise teórica para a vibração livre de cascas cilíndricas engastada-livre e engastada-anel rígido. O problema foi formulado usando a técnica de Rayleigh-Ritz, obtendo uma solução aproximada. Foi usada a teoria de casca de Flügge e feita uma comparação com os resultados da teoria de Timoshenko-Love. Em ambos os casos, assumiu-se deformação circunferencial e de cisalhamento nulas na casca. Várias opções de formas modais foram examinadas.

Kalnins e Godfrey (1973) consideraram uma casca axissimétrica, apumada, sobre uma fundação horizontal. A fundação foi submetida a um movimento dependente do tempo em ambas as direções, vertical e horizontal. Segundo os autores, o movimento pode ser produzido por um evento tal como um terremoto ou uma explosão. Uma estimativa da resposta da casca a tal excitação pode ser obtida da solução para condições de contorno tempo-dependentes. Esta solução foi adaptada para uma análise com o espectro de resposta de terremotos, que foi iniciada por Biot (1943) e Housner (1953). Os modos de vibração livre foram calculados pelo método multissegmento de integração numérica direta usando teoria clássica de casca. Um caso de projeto real de um vaso de contenção de uma usina de energia nuclear construída nos EUA foi apresentado. Uma estimativa da resposta dinâmica da casca a um terremoto foi obtida para todas as variáveis relevantes, tais como tensões e deslocamentos. Como exemplo, uma estimativa para a resposta da tensão axial foi dada em várias elevações da casca.

Sharma (1984) analisou o problema de vibrações livres de cilindros circulares engastado-livres em detalhes usando a teoria de cascas delgadas de primeira ordem de Budiansky e Sanders. Duas relações lineares simples para o parâmetro da frequência foram dadas pela incorporação de uma inter-relação entre componentes do deslocamento de duas maneiras diferentes. Para variações de números de onda, razão raio-espessura, razão comprimento-raio, a comparação com as frequências exatas e as frequências devido a várias fórmulas aproximadas foi extensivamente estudada. Considerações sobre deformação e energia cinética foram apresentadas para explicar a diferença aparente entre as aproximações da frequência linear e cúbica. No caso de dois cilindros típicos, os resultados teóricos

mostraram-se em razoável acordo com as frequências observadas e também com os resultados calculados usando equações da teoria de casca de Flügge.

Segundo Tedesco *et al.* (1985), a determinação da resposta sísmica de tanques cilíndricos circulares quando submetidos à excitação de base horizontal requer esforço computacional extensivo. Para simplificar a computação do fator de participação modal de tanques, um procedimento analítico foi desenvolvido. A excitação da base foi definida via técnica espectral. As cascas consideradas no estudo tinham uma razão altura-diâmetro entre 0,1 e 1,5, inclusive. As derivações produziram polinômios cúbicos simples que puderam ser usados na definição dos fatores de participação modal. Coeficientes polinomiais diferentes foram apresentados para tanques abertos no topo e com telhados com várias massas. Foi incluído um procedimento para o uso dos fatores de participação modal desenvolvidos, na determinação de forças sísmicas, da cortante na base, do momento de tombamento, etc. agindo no tanque.

Gonçalves e Batista (1986) desenvolveram uma análise teórica para a vibração livre de cascas cilíndricas verticais simplesmente apoiadas preenchidas parcialmente com ou submersas em um fluido. A técnica de Rayleigh-Ritz foi usada para obter uma solução aproximada que coincide com a solução exata para os casos de uma casca vazia ou uma casca completamente em contato com o fluido. As vibrações da casca foram examinadas usando a teoria de casca de Sanders. O fluido foi considerado como não-viscoso e compressível e o acoplamento entre a casca deformável e seu meio acústico foram levados em consideração. As soluções foram apresentadas para mostrar o efeito de uma altura variável de fluido nas frequências naturais da casca. Os efeitos dos parâmetros da geometria da casca nas frequências foram também investigados. A solução analítica foi comparada com resultados de testes disponíveis. Boa concordância foi exibida entre os resultados dos testes encontrados na literatura e as frequências naturais previstas. O procedimento pareceu bem adaptado a estudos de otimização preliminares de cascas parcialmente submersas ou preenchidas e pôde fornecer soluções rápidas para problemas onde condições ressonantes são preocupantes.

Kim *et al.* (2003) desenvolveram um método teórico para investigar as características de vibração acoplada de cascas cilíndricas enrijecidas por anéis parcialmente preenchidas com um fluido invíscido, incompressível e irrotacional tendo uma superfície livre. Como o

efeito das ondas de superfície livre foi levado em conta na análise, os modos de *bulging* e *sloshing* foram estudados. O método de Rayleigh-Ritz foi usado para derivar a equação de frequência de cascas enrijecidas por anéis e parcialmente preenchidas com fluido baseado na teoria de casca delgada de Love. A solução para o potencial de velocidade do movimento do fluido foi assumida como uma soma de dois conjuntos de combinações lineares de funções harmônicas que satisfizeram a equação de Laplace e as condições de contorno relevantes. O efeito do nível do fluido, o número e a posição dos enrijecedores sobre as características de vibração acoplada foi investigado. Para demonstrar a validade do método teórico apresentado, os resultados publicados foram comparados com casos de cascas simplesmente apoiadas e a análise de elementos finitos foi realizada para cascas não-enrijecidas/enrijecidas, parcialmente preenchidas de fluido com condição de contorno engastada-livre.

Xu (2003) estudou a vibração forçada de uma casca cilíndrica circular elástica infinita preenchida com líquido. Três métodos foram empregados para analisar o problema de vibração forçada deste sistema acoplado casca-fluido: abordagem de propagação de onda (superposição de modos de onda), teorema de resíduos e um método integral numérico. A fim de explicar esses métodos de forma mais explícita, antes de ser utilizada para investigar a vibração de uma casca cilíndrica circular elástica preenchida de fluido infinita, todos esses três métodos foram empregados primeiramente para analisar um problema de vibração forçada de uma viga infinita e de uma casca cilíndrica circular elástica infinita no vácuo. Vantagens e desvantagens destes três métodos foram discutidas.

Silva *et al.* (2010) investigaram o comportamento dinâmico não-linear e instabilidades de uma casca cilíndrica parcialmente preenchida com fluido submetida à carga axial. Um modelo *low-dimensional* discreto para a análise de vibração não-linear foi derivado para estudar as vibrações de casca. A influência exercida pela altura do fluido interno na resposta não-linear da casca foi examinada.

Painéis cilíndricos:

As frequências naturais de painéis curvos cilíndricamente estão disponíveis na forma fechada para somente dois conjuntos de condições de contorno. Blevins (1980) demonstrou como o arranjo de casca abatida de Sewall (1967) pode ser reformulado de uma forma

relativamente simples para permitir o cálculo direto de frequências naturais e modos de vibração de painéis cilíndricos com uma ampla gama de condições de contorno.

Barragens:

No estudo da resposta ao terremoto de barragens retangulares rígidas com faces a montante verticais, Westergaard (1933) primeiro derivou uma expressão para a pressão hidrodinâmica exercida sobre uma barragem por um fluido incompressível no reservatório como resultado de um movimento harmônico horizontal do solo na direção perpendicular à barragem. Ele descobriu que a pressão hidrodinâmica era a mesma que se um determinado corpo de fluido fosse forçado para frente e para trás com a barragem e que essa "massa adicional" estivesse confinada num volume delimitado por uma superfície bidimensional parabólica no lado a montante da barragem. Com base no princípio do equilíbrio da quantidade de movimento linear simples, von Kármán (1933) obteve distribuições da força de pressão hidrodinâmica e da carga total de uma barragem rígida com uma face vertical a montante que eram muito próximas dos resultados de Westergaard. Para uma barragem, cuja face à montante não é vertical, Zangar (1953) e Zangar e Haefeli (1952) determinaram as pressões hidrodinâmicas experimentalmente usando um análogo elétrico (Chwang e Housner, 1978).

Porter e Chopra (1981) analisaram as respostas dinâmicas de barragens em arco simples, com diferentes razões raio-altura para três condições: a barragem sozinha sem água e a barragem com reservatório cheio, considerando a água compressível em um caso e desconsiderando a compressibilidade da água em outro caso. As funções de resposta de frequência complexa para acelerações na crista da barragem devido às três componentes da aceleração do solo - componente montante-jusante, componente transversal e componente vertical - foram apresentadas. Baseados nesses resultados, os efeitos da interação barragem-água, da compressibilidade e do movimento das margens na resposta da barragem foram investigados.

Hall e Chopra (1983) desenvolveram um procedimento para analisar, sob a hipótese de comportamento linear, a resposta ao terremoto de barragens em arco incluindo efeitos hidrodinâmicos. A barragem e o domínio fluido foram tratados como subestruturas e modelados com elementos finitos. A única restrição geométrica foi que um domínio fluido

infinito teve de manter uma seção transversal constante além de algum ponto na direção montante. Para tal região uniforme, infinita, uma discretização de elemento finito ao longo da seção transversal foi combinada com uma representação contínua na direção montante. Respostas computadas de uma barragem a movimento harmônico do solo foram apresentadas.

Segundo Tsai e Lee (1987), as barragens em arco podem ser convenientemente analisadas pelo método dos elementos finitos. Para problemas de interação barragem-fluido, o domínio do fluido pode ser mais convenientemente tratado pelo método dos elementos de contorno primeiro como uma subestrutura antes de se conectar a subestrutura da barragem. Condições de contorno infinitas a montante do reservatório puderam ser razoavelmente aproximadas, a partir da solução fundamental, com resultados precisos, desprezando a distribuição da pressão interior do domínio do fluido. Soluções numéricas da distribuição de pressão hidrodinâmica e as frequências naturais do sistema barragem-reservatório com vários níveis de água foram obtidos e comparados com resultados analíticos e experimentais disponíveis.

Tan e Chopra (1996) apresentaram a resposta dinâmica da barragem *Morrow Point* ao movimento do solo de *Taft* para uma vasta gama de propriedades da barragem, rocha de fundação, água represada e materiais das fronteiras do reservatório. Baseado nesses resultados de resposta, os efeitos da interação barragem-rocha de fundação (considerando amortecimento, inércia e flexibilidade da rocha de fundação) com reservatório vazio foram investigados. A importância dos efeitos da interação barragem-rocha de fundação ignorados em análises padrão que consideram a flexibilidade da rocha de fundação, mas não seus efeitos inerciais ou de amortecimento - material e de radiação - foi identificada. Finalmente, os efeitos combinados da interação barragem-rocha de fundação, interação barragem-água e absorção da fronteira do reservatório foram estudados.

Chopra (2008) identificou os fatores que influenciam significativamente as análises tridimensionais de barragens em arco: a dimensão semi-ilimitada do reservatório e os domínios da rocha de fundação, a interação barragem-água, absorção de onda na fronteira do reservatório, a compressibilidade da água, a interação barragem-rocha de fundação e a variação espacial no movimento do solo na interface barragem-rocha. Através de uma série de análises de exemplos de várias barragens reais, a significância dos fatores acima

referidos foi demonstrada, levando à conclusão de que eles devem todos ser incluídos no cálculo de demandas sísmicas em barragens em arco. No entanto, a maioria das análises em elementos finitos de barragens realizada na prática profissional é baseada em softwares comerciais que ignoram estes fatores.

Salajegheh *et al.* (2008) propuseram encontrar o projeto ótimo de barragens em arco, com base nas frequências naturais limitadas, utilizando algoritmo evolutivo contínuo. Para extrair as frequências naturais da barragem em arco considerando interação fluido-estrutura é necessário resolver um problema de autovetor assimétrico amortecido. Isto significa que o processo de extração de frequências naturais impõe muito esforço computacional. Esta deficiência pode ser acentuada quando um grande número de análises estruturais são necessárias durante o processo de otimização. A fim de reduzir o custo computacional do problema de otimização, as frequências naturais da barragem em arco foram previstas por redes neurais *back propagation* (BP) e *wavelet back propagation* (WBP) devidamente treinadas. A rede WBP apresentou desempenho generalizado melhor que a rede BP. Os resultados numéricos revelaram as vantagens computacionais dos métodos propostos para o projeto ótimo de barragens em arco.

Sevim *et al.* (2010) determinaram as características dinâmicas de um protótipo de sistema barragem em arco-reservatório-fundação usando o método de análise modal operacional. A concretização deste objetivo envolveu a construção de um protótipo de sistema barragem em arco-reservatório-fundação sob condições de laboratório. Testes de vibração ambiente no modelo da barragem em arco identificaram suas frequências naturais, forma dos modos, e as razões de amortecimento. Excitações naturais, tais como cargas de impacto pequenas vibraram com a barragem em arco. As medições foram registradas para os reservatórios vazio e cheio. O software de análise modal operacional processou sinais os quais foram recolhidos a partir dos ensaios de vibrações ambiente. A técnica de decomposição no domínio da frequência aproximada estimou características dinâmicas da barragem. Os resultados mostraram que havia uma diferença aproximada de 20-25% entre as frequências naturais relacionadas com os reservatórios vazio e cheio.

Dentro dos estudos mencionados nas seções acima, os de Blevins (1980), Porter e Chopra (1981), Tsai e Lee (1987) e Tan e Chopra (1996) foram empregados no presente trabalho.

No âmbito do Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura (GDFE) da UnB, há uma significativa bibliografia a respeito de cascas, barragens, interação dinâmica fluido-estrutura e estudos afins, como por exemplo, Oliveira (2002), Ribeiro (2006), Souza Junior (2006), Silva (2007), Souza (2007), Melo (2009), Ribeiro (2010) e Lustosa (2011).

Especificamente sobre barragens em arco dentro do GDFE - UnB, Campos Junior (2011) realizou um estudo comparativo analítico e numérico utilizando-se de processos progressivos de análise estática vislumbrando o desenvolvimento de uma metodologia para o tratamento de barragens em arco de concreto com simples curvatura, utilizando os métodos clássicos de análise de cascas e técnicas numéricas baseadas no método dos elementos finitos com auxílio do programa ANSYS 11.0. Os esforços e deslocamentos ao longo da estrutura foram obtidos e validados para cada caso estudado, e os resultados obtidos, mostraram um bom acordo entre si, evidenciando a validade dos procedimentos adotados, e a confiabilidade destes. O presente trabalho fará uso de alguns desses procedimentos.

2.3 BARRAGENS EM ARCO

Segundo Grishin *et al.* (1979), as estruturas de retenção de água, curvilíneas no plano, trabalhando como domo ou casca e resistindo a cargas horizontais principalmente devido a seus apoios nas margens da garganta são conhecidas como barragens em arco. A Figura 2.1 apresenta uma barragem em arco em diferentes sistemas de representação, em que, H_b é a altura, B_1 é a largura da crista, B_2 é a largura da base medidos na seção transversal central da barragem e L é o comprimento da barragem ao longo da crista. Na sequência, a Figura 2.2 mostra os principais elementos de uma barragem em arco.

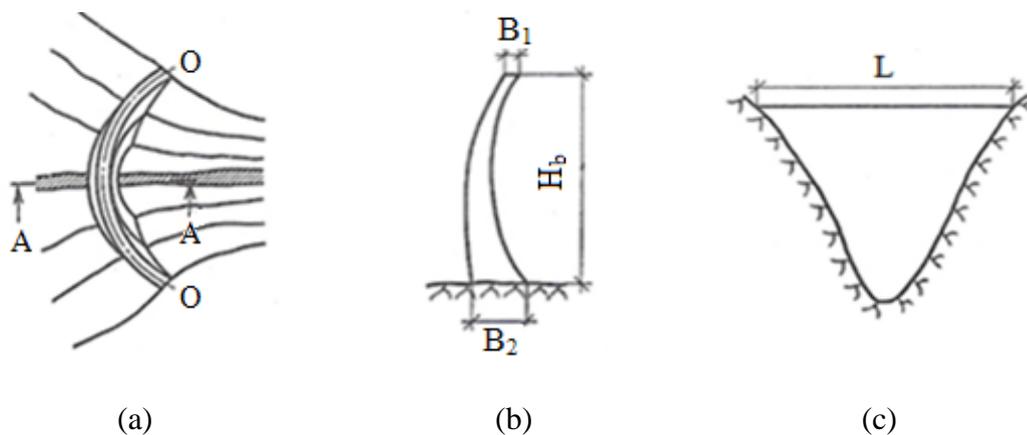


Figura 2.1 - Barragem em arco: (a) planta; (b) seção A-A; (c) seção ao longo do eixo da barragem O-O (Grishin *et al.*, 1979, modificado)

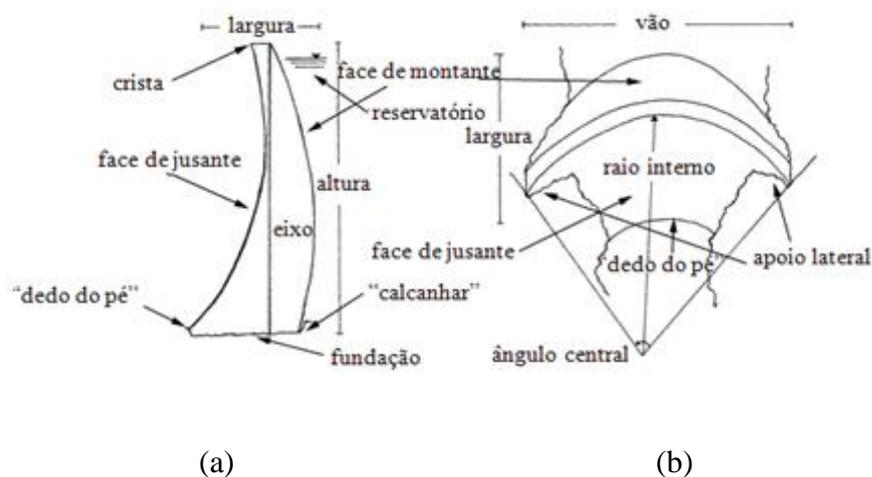


Figura 2.2 - Esboço típico de barragem em arco: (a) seção transversal; (b) vista em planta

As seções transversais horizontais de barragens em arco (chamadas de arcos) são geralmente circulares na forma, com os apoios laterais dos arcos normais às margens, como visto na Figura 2.3, em que R é a reação de apoio, R_0 é o raio central e θ_0 é o semi-ângulo central do arco. As seções transversais verticais de barragens em arco (chamadas de vigas em balanço) têm diferentes formas, e em alguns casos são curvilíneas na vertical.

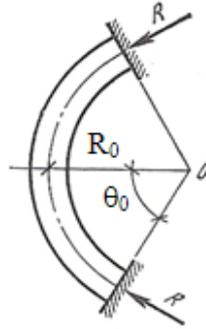


Figura 2.3 - Seção horizontal de barragem em arco (arco) (Grishin *et al.*, 1979)

Em barragens em arco, as forças de resistência ao longo da base da estrutura, dependendo de seu peso, não oferecem grande resistência ao deslizamento. A estabilidade de tais barragens é garantida principalmente pelos apoios da estrutura nas margens. Portanto barragens em arco podem ser projetadas com arcos delgados, sendo a espessura determinada apenas pela resistência de seu material.

Os perfis das barragens em arco são mais achatados comparados às das barragens gravidade e são caracterizados pelo chamado coeficiente de boa conformação (a espessura relativa da barragem), dado pela relação entre a largura (em sua fundação) e a altura medidas na seção transversal central da barragem. Para barragens em arco delgadas, o coeficiente de boa conformação é menor que 0,2; para barragens gravidade, entre 0,6 a 0,8.

Assim, vê-se que a espessura das barragens em arco delgadas (e daí o volume de concreto para 1 m) é de 3 a 4 vezes menor (às vezes de 6 a 8 vezes ou mais) que a das barragens gravidade.

Na determinação do custo, é preciso levar em consideração que exigências maiores são aplicadas ao concreto usado em barragens em arco. O aumento no custo por m^3 não excede, entretanto, 10 - 15%, em comparação a barragens gravidade.

Com base na espessura relativa do perfil, i.e., o coeficiente de boa conformação, as barragens em arco podem ser divididas em três tipos: delgadas (coeficiente de boa conformação menor que 0,2), espessas (coeficiente de boa conformação entre 0,2 e 0,35) e barragens arco gravidade (coeficiente de boa conformação maior que 0,35). Em relação à altura, as barragens em arco são divididas em três categorias: baixas (até 40 m), médias

(entre 40 e 100 m), e altas (mais que 100 m). Quanto às suas formas, as barragens em arco são divididas em: simples curvatura (a superfície curva-se apenas na direção horizontal) e dupla curvatura (a superfície curva-se nos dois planos). De acordo com o contato com a fundação, as barragens em arco podem ser divididas nos seguintes tipos: elástica apoiada em suportes laterais; com junta perimétrica ou com juntas; ou juntas em entalhes, dispostas na parte inferior do apoio da barragem.

Condições geológicas devem fornecer um meio para transmissão de uma grande parte das forças da barragem para as margens. Por receber tais cargas, as margens no sítio da barragem devem ser compostas de rocha firme, monolítica e de pequena deformação. Além disso, a rocha deve ser impermeável e resistente à água.

Condições topográficas da seção têm efeito significativo no perfil das barragens em arco. O fator determinante neste caso é o coeficiente de sítio (a largura relativa do vale), que é a relação entre o comprimento da barragem em arco ao longo da crista e a altura medida na seção transversal central da barragem. Em sítios estreitos, com comprimentos pequenos a barrar, os arcos das barragens podem ser suficientemente delgados. Em sítios alargados, a barragem em arco pode nem sempre ser econômica. Acreditava-se que barragens em arco poderiam ser construídas para coeficientes de sítio entre 3 e 3,5, sendo que para barragens em arco delgadas esses valores seriam menores que 1,5 - 2. Hoje, várias barragens têm sido construídas e outras tantas projetadas, que são muito econômicas, com coeficientes de sítio até 10. O alcance de aplicação de barragens em arco tem sido ampliado pela disposição de juntas estruturais que aumentam a eficácia do arco.

Para um mesmo valor de coeficiente de sítio, a eficácia de uma barragem em arco depende da forma da seção transversal do sítio, que pode ser quase retangular, trapezoidal, triangular, ou ser de um contorno assimétrico complicado. A forma quase triangular é considerada a melhor forma, com o que as seções de arco inferiores da barragem, sujeitas a grande pressão hidrostática, são menores no comprimento. Portanto elas podem ser mais econômicas em comparação a seção transversal trapezoidal ou retangular do sítio da barragem.

Para a construção de barragens em arco, a preferência é dada a sítios localizados onde o vale se contrai em planta, como visto na Figura 2.1. Tais sítios dispõem de apoios naturais para os suportes laterais do arco nas encostas convergentes do vale.

Segundo Grishin *et al.* (1979), as cargas sísmicas induzem vibrações em barragens em arco. Neste caso, os deslocamentos máximos são observados na zona superior da barragem próximos de sua crista; as acelerações máximas podem ser medidas aí.

Com base no estudo de modelos pôde-se concluir que o mais típico dano que ocorre em barragens em arco sob cargas sísmicas é a destruição da parte superior da barragem com abertura de juntas estruturais verticais, esmagamento de suas bordas, aparecimento de fendas horizontais que podem resultar em tombamento e desabamento de colunas independentes, etc. Entretanto, os terremotos ocorridos até agora não danificaram ou destruíram seriamente barragens em arco. Isto prova mais uma vez que as barragens em arco são capazes de resistir não apenas a cargas estáticas, mas também dinâmicas (sísmicas).

O efeito de cargas sísmicas em barragens em arco pode ser avaliado com base em sua análise dinâmica levando devidamente em conta a característica espacial de seu trabalho, interação com fundação e água, aparecimento de fendas e abertura de juntas estruturais ou construtivas, etc.

Quanto às cargas sísmicas, além dos terremotos tectônicos, que ocorrem como resultado de deformações dos estratos no manto da Terra, há ainda as avalanches vulcânicas e os terremotos induzidos cujas manifestações são observadas durante o primeiro enchimento e flutuações periódicas do nível do reservatório.

O uso de barragens em arco é explicado, portanto, por sua economia e confiabilidade.

3 FORMULAÇÕES ANALÍTICAS PARA CILINDROS DE REVOLUÇÃO E PAINÉIS CILÍNDRICOS

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentadas as formulações teóricas referentes à vibração de cascas cilíndricas circulares retas (livre e forçada), cavidades acústicas cilíndricas (livre) e sistemas acoplados casca cilíndrica circular reta - cavidade acústica cilíndrica (livre e forçada). Em cada caso, será exposta a teoria geral que posteriormente é desenvolvida especificamente para as condições de contorno abordadas nesta dissertação. No final do capítulo, a teoria de vibração livre de cascas cilíndricas circulares retas cortadas por um plano paralelo ao seu eixo é exibida.

3.2 CILINDROS DE REVOLUÇÃO

3.2.1 Estrutura

Para a análise de uma casca cilíndrica circular reta é preciso especificar propriedades físicas e mecânicas do material que a compõe e suas propriedades geométricas, a saber:

- Massa específica (ou densidade absoluta) ρ_e ;
- Módulo de Young (ou módulo de elasticidade longitudinal) E ;
- Relação (ou coeficiente) de Poisson ν ;
- Raio médio a ;
- Espessura h e
- Comprimento L .

Segundo Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), ao discutir uma casca cilíndrica, Figura 3.1 (a), assume-se que a geratriz da casca é paralela ao eixo z . Um elemento é cortado da casca por duas geratrizes adjacentes e duas seções transversais perpendiculares

ao eixo z , e sua posição é definida pela coordenada z e o ângulo θ . As forças e momentos, nos sentidos considerados positivos, que atuam sobre os lados do elemento são mostrados na Figura 3.1 (b), em que, a é o raio (médio) de curvatura, N_z e N_θ são forças de membrana normais no plano por unidade de comprimento, $N_{z\theta}$ e $N_{\theta z}$ são forças de membrana cortantes no plano por unidade de comprimento, M_z e M_θ são momentos fletores por unidade de comprimento, $M_{z\theta}$ e $M_{\theta z}$ são momentos torçores por unidade de comprimento, Q_z e Q_θ são forças cortantes transversais por unidade de comprimento, $(\cdot)' = a\partial(\cdot)/\partial z$ e $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial\theta$. Todas as cargas atuantes são supostas agindo na superfície média da casca (a meio caminho entre a parede exterior e a interior, independentemente da espessura), como mostrado na Figura 1 (b), em que, q_z , q_θ e q_r são componentes do carregamento distribuído por unidade de área, nas direções z (axial), θ (circunferencial) e r (radial), respectivamente.

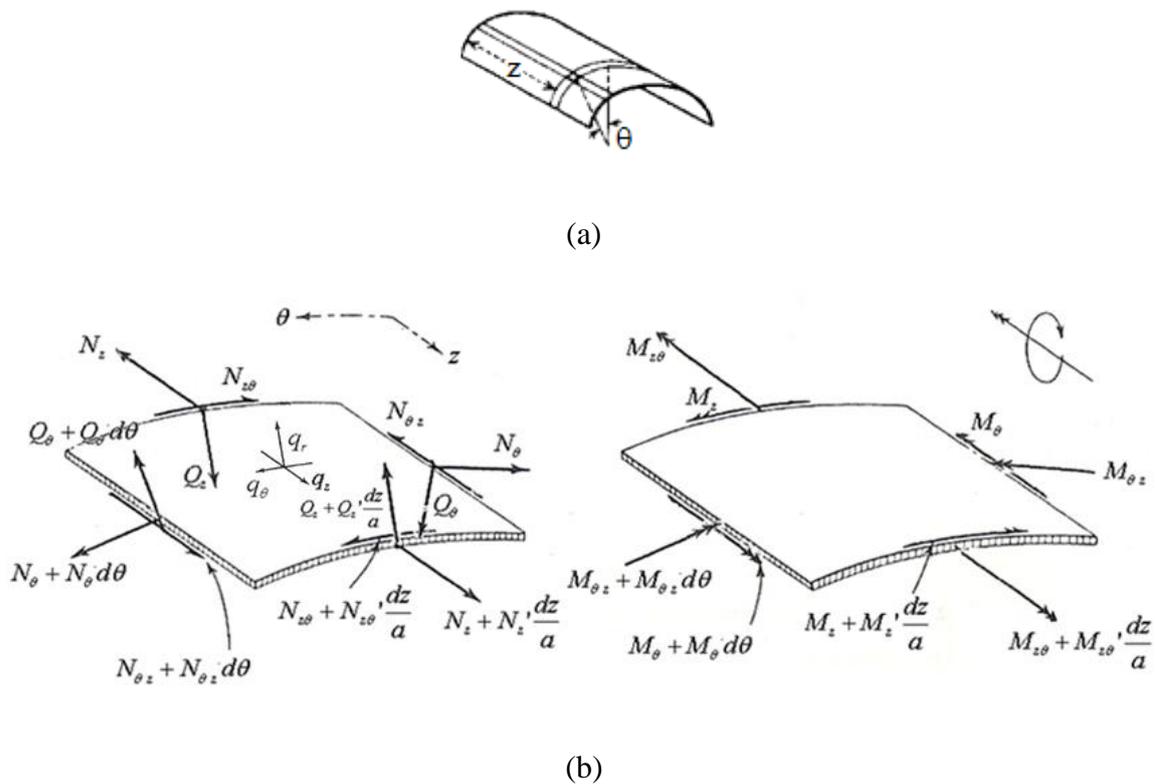


Figura 3.1 - Casca cilíndrica: (a) denominações principais; (b) elemento diferencial de casca cilíndrica e carregamento distribuído na superfície de referência [(a) Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959; (b) Flügge, 1973, modificados]

A deformação de uma casca cilíndrica circular pode ser descrita pelos deslocamentos da superfície média: u , v e w , nas direções axial, circunferencial (ambas no plano) e radial

(fora do plano), em um sistema de coordenadas cilíndricas polares (z, θ, r) , de acordo com a Figura 3.2. Os sentidos considerados positivos dos deslocamentos são os mostrados na Figura 3.2.

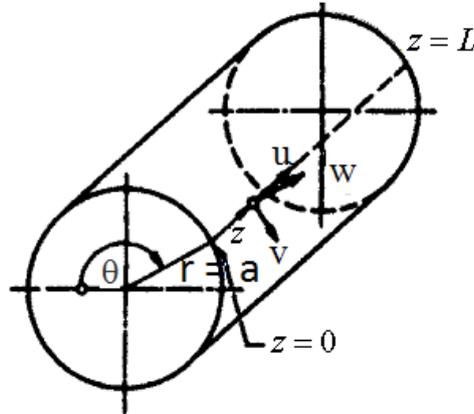


Figura 3.2 - Deslocamentos e definições das coordenadas para uma casca cilíndrica circular (Soedel, 2005, modificado)

A Figura 3.3 mostra os sistemas de coordenadas cartesianas (x, y, z) e cilíndricas (r, θ, z) adotados neste trabalho.

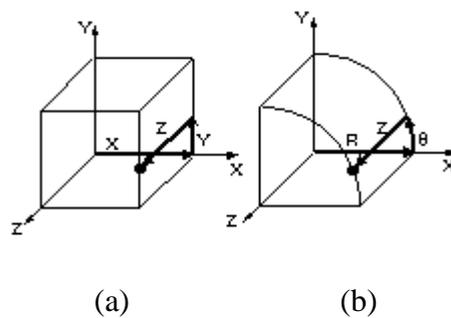


Figura 3.3 - Sistemas de coordenadas (a) cartesianas e (b) cilíndricas (ANSYS)

A seguir, são apresentadas as equações, que definem o movimento devido a qualquer tipo de carregamento distribuído.

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} + q_z - \rho_e h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial N_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{Q_\theta}{a} + q_\theta - \rho_e h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{N_\theta}{a} + q_r - \rho_e h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.3)$$

em que, u , v e w são os deslocamentos axial, circunferencial e radial, respectivamente, em função de z , θ e t (tempo),

$$Q_z = \frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial \theta} \quad (3.4)$$

$$Q_\theta = \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \quad (3.5)$$

As relações deformação-deslocamento (aproximadas) são dadas por

$$\varepsilon_z^0 = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_{z\theta}^0 = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (3.8)$$

$$k_z = \frac{\partial \beta_z}{\partial z} \quad (3.9)$$

$$k_\theta = \frac{1}{a} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} \quad (3.10)$$

$$k_{z\theta} = \frac{\partial \beta_\theta}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial \beta_z}{\partial \theta} \quad (3.11)$$

em que, ε^0 é deformação de membrana (ε_z^0 e ε_θ^0 são deformações extensionais e $\varepsilon_{z\theta}^0$ é deformação cisalhante), k é deformação flexional (k_z e k_θ são mudanças de curvatura e $k_{z\theta}$ é deformação torsional),

$$\beta_z = -\frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.12)$$

$$\beta_\theta = \frac{1}{a} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (3.13)$$

As relações entre as forças e momentos e as deformações são dadas por

$$N_z = K(\varepsilon_z^0 + \nu \varepsilon_\theta^0) \quad (3.14)$$

$$N_\theta = K(\varepsilon_\theta^0 + \nu \varepsilon_z^0) \quad (3.15)$$

$$N_{z\theta} = \frac{K(1-\nu)}{2} \varepsilon_{z\theta}^0 \quad (3.16)$$

$$M_z = D(k_z + \nu k_\theta) \quad (3.17)$$

$$M_\theta = D(k_\theta + \nu k_z) \quad (3.18)$$

$$M_{z\theta} = \frac{D(1-\nu)}{2} k_{z\theta} \quad (3.19)$$

em que K é a rigidez de membrana e D é a rigidez flexional, onde

$$K = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad (3.20)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.21)$$

As condições de contorno associadas à extremidade apoiada de uma casca são

$$v = 0 \quad (3.22)$$

$$w = 0 \quad (3.23)$$

$$N_z = 0 \quad (3.24)$$

$$M_z = 0 \quad (3.25)$$

Para extremidade engastada,

$$u = 0 \quad (3.26)$$

$$v = 0 \quad (3.27)$$

$$w = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.29)$$

Para extremidade livre,

$$N_z = 0 \quad (3.30)$$

$$M_z = 0 \quad (3.31)$$

$$V_z = 0 \quad (3.32)$$

$$T_z = 0 \quad (3.33)$$

em que

$$V_z = Q_z + \frac{1}{a} \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial \theta} \quad (3.34)$$

$$T_z = N_{z\theta} + \frac{M_{z\theta}}{a} \quad (3.35)$$

são as resultantes das tensões de cisalhamento efetivas de Kirchhoff do primeiro e segundo tipo, respectivamente.

As deduções das equações apresentadas neste tópico estão desenvolvidas no Apêndice A.

3.2.1.1 Vibração livre

O conhecimento das frequências e modos naturais de vibração é importante não apenas do ponto de vista de projetos (a fim de evitar condições de ressonância, por exemplo), mas é também o fundamento para os cálculos de respostas forçadas.

Definindo q_z , q_θ e q_r iguais a zero por serem, as vibrações livres, movimentos que ocorrem sem força aplicada, e admitindo que em uma frequência natural cada ponto de um sistema elástico move-se harmonicamente, usando uma notação complexa, assume-se que:

$$u(z, \theta, t) = U(z, \theta) e^{j\omega t} \quad (3.36)$$

$$v(z, \theta, t) = V(z, \theta) e^{j\omega t} \quad (3.37)$$

$$w(z, \theta, t) = W(z, \theta) e^{j\omega t} \quad (3.38)$$

em que as funções $U(z, \theta)$, $V(z, \theta)$ e $W(z, \theta)$ em conjunto, constituem um modo natural, e é a base dos logaritmos neperianos, j é a unidade imaginária, sendo $j = \sqrt{-1}$, ω é a frequência natural circular de vibração, em radianos por segundo e

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \operatorname{sen}(\omega t) \quad (3.39)$$

é a fórmula de Euler.

Representando, simplificadamente, $U(z, \theta)$, $V(z, \theta)$ e $W(z, \theta)$ por U , V e W , substituindo as Equações 3.36 a 3.38 nas Equações 3.1 a 3.3, resulta

$$\frac{\partial N^*_{z}}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial N^*_{z\theta}}{\partial \theta} + \rho_e h \omega^2 U = 0 \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial N^*_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial N^*_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{Q^*_{\theta}}{a} + \rho_e h \omega^2 V = 0 \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial Q^*_{z}}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial Q^*_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{N^*_{\theta}}{a} + \rho_e h \omega^2 W = 0 \quad (3.42)$$

onde,

$$Q^*_{z} = \frac{\partial M^*_{z}}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial M^*_{\theta z}}{\partial \theta} \quad (3.43)$$

$$Q^*_{\theta} = \frac{\partial M^*_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial M^*_{\theta}}{\partial \theta} \quad (3.44)$$

$$N^*_{z} = K(\varepsilon^*_{z} + \nu \varepsilon^*_{\theta}) \quad (3.45)$$

$$N^*_{\theta} = K(\varepsilon^*_{\theta} + \nu \varepsilon^*_{z}) \quad (3.46)$$

$$N^*_{z\theta} = \frac{K(1-\nu)}{2} \varepsilon^*_{z\theta} \quad (3.47)$$

$$M^*_{z} = D(k^*_{z} + \nu k^*_{\theta}) \quad (3.48)$$

$$M^*_{\theta} = D(k^*_{\theta} + \nu k^*_{z}) \quad (3.49)$$

$$M^*_{z\theta} = \frac{D(1-\nu)}{2} k^*_{z\theta} \quad (3.50)$$

em que,

$$\varepsilon^{0*}_z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (3.51)$$

$$\varepsilon^{0*}_\theta = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} + W \right) \quad (3.52)$$

$$\varepsilon^{0*}_{z\theta} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad (3.53)$$

$$k^*_z = \frac{\partial \beta^*_x}{\partial z} \quad (3.54)$$

$$k^*_\theta = \frac{1}{a} \frac{\partial \beta^*_\theta}{\partial \theta} \quad (3.55)$$

$$k^*_{z\theta} = \frac{\partial \beta^*_\theta}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial \beta^*_z}{\partial \theta} \quad (3.56)$$

$$\beta^*_z = -\frac{\partial W}{\partial z} \quad (3.57)$$

$$\beta^*_\theta = \frac{1}{a} \left(V - \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \quad (3.58)$$

Através da separação das variáveis z e θ das funções U , V e W , segundo Paidoussis (2004) Soedel (2005), e Kim, *et al.* (2003), pode-se, em geral assumir

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A \left(\frac{\partial}{\alpha_m \partial z} \right) \cos[n(\theta - \varphi)] \\ B \operatorname{sen}[n(\theta - \varphi)] \\ C \cos[n(\theta - \varphi)] \end{Bmatrix} \phi_m(z) \quad (3.59)$$

em que A , B e C são constantes, com unidade de comprimento, que descrevem a amplitude das deformações axial, circunferencial e radial da superfície média da casca, respectivamente; A e B são resolvidas em termos de C , que é uma constante arbitrária. $\phi_m(z)$ são as funções modais axiais com as condições de contorno apropriadas em $z = 0$ e $z = L$; as autofunções de viga são geralmente empregadas. α_m é um parâmetro que depende da condição de contorno. m é o número de meias-ondas longitudinais no modo de vibração, $m = 1, 2, 3, \dots$ e n é o número de ondas circunferenciais no modo de vibração, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$; cada modo de vibração de casca é associado com um m e um n ; a vibração resultante envolve, portanto, determinada combinação de m e n . φ é um ângulo de fase arbitrário que deve ser incluído caso o anel não apresente uma anteposição para a orientação de seus modos. A seleção dos ângulos de fase modais φ é apresentada no Apêndice C.

A substituição destas soluções nas equações de movimento ou utilizando técnicas analíticas aproximadas, como o método de Rayleigh-Ritz, resultará em um sistema de equações homogêneas. Este sistema tem uma solução não trivial se e somente se o determinante de sua matriz dos coeficientes for igual a zero. Esta equação resultante chama-se equação característica. As raízes desta equação são as frequências naturais.

O caso específico abordado nesta dissertação foi o de uma casca cilíndrica circular reta simplesmente biapoiada sem restrição axial, cujo modelo está representado na Figura 4.1 (a).

Para um cilindro simplesmente apoiado sem restrição axial, usa-se o modo de vibração de viga biapoiada, segundo Blevins (1995),

$$\phi_m = \text{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \quad (3.60)$$

O coeficiente α_m é igual a $(m\pi)/L$ para o caso biapoiado.

Caso 1:

Para este caso, casca cilíndrica circular reta biapoiada sem restrição axial, de acordo com as Equações 3.22 a 3.25, as condições de contorno são

$$V(0, \theta) = 0 \quad (3.61)$$

$$W(0, \theta) = 0 \quad (3.62)$$

$$N_z^*(0, \theta) = 0 \quad (3.63)$$

$$M_z^*(0, \theta) = 0 \quad (3.64)$$

$$V(L, \theta) = 0 \quad (3.65)$$

$$W(L, \theta) = 0 \quad (3.66)$$

$$N_z^*(L, \theta) = 0 \quad (3.67)$$

$$M_z^*(L, \theta) = 0 \quad (3.68)$$

Com base nas Equações 3.59 e 3.60, assume-se a seguinte solução

$$U = A \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos[n(\theta - \varphi)] \quad (3.69)$$

$$V = B \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \operatorname{sen}[n(\theta - \varphi)] \quad (3.70)$$

$$W = C \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos[n(\theta - \varphi)] \quad (3.71)$$

Em seguida, substituem-se as soluções assumidas nas Equações 3.69 a 3.71, nas Equações 3.57 e 3.58, 3.51 a 3.56, 3.45 a 3.50, 3.43 e 3.44 e 3.40 a 3.42, nessa ordem. Substituindo as soluções nas condições de contorno, nota-se que todas são satisfeitas. As Equações 3.40 a 3.42 tornam-se

$$\left\{ \rho_e h \omega^2 - K \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right] \right\} A + \left(K \frac{1+\nu}{2} \frac{m\pi}{L} \frac{n}{a} \right) B + \left(K \frac{\nu}{a} \frac{m\pi}{L} \right) C = 0 \quad (3.72)$$

$$\left(K \frac{1+\nu}{2} \frac{m\pi}{L} \frac{n}{a} \right) A + \left\{ \rho_e h \omega^2 - \left(K + \frac{D}{a^2} \right) \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right] \right\} B + \left(-\frac{n}{a^2} \left\{ K + D \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right] \right\} \right) C = 0 \quad (3.73)$$

$$\left(K \frac{\nu}{a} \frac{m\pi}{L} \right) A + \left(-\frac{n}{a^2} \left\{ K + D \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right] \right\} \right) B + \left\{ \rho_e h \omega^2 - \frac{K}{a^2} - D \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right] \right\} C = 0 \quad (3.74)$$

ou, em forma matricial

$$\begin{bmatrix} \rho_e h \omega^2 - k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & \rho_e h \omega^2 - k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & \rho_e h \omega^2 - k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.75)$$

onde

$$k_{11} = K \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right] \quad (3.76)$$

$$k_{12} = k_{21} = K \frac{1+\nu}{2} \frac{m\pi}{L} \frac{n}{a} \quad (3.77)$$

$$k_{13} = k_{31} = K \frac{\nu}{a} \frac{m\pi}{L} \quad (3.78)$$

$$k_{22} = \left(K + \frac{D}{a^2} \right) \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right] \quad (3.79)$$

$$k_{23} = k_{32} = -\frac{n}{a^2} \left\{ K + D \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.80)$$

$$k_{33} = \frac{K}{a^2} + D \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right]^2 \quad (3.81)$$

Para uma solução não trivial, o determinante da Equação 3.75 tem que ser zero. Expandindo o determinante resulta

$$\omega^6 + a_1\omega^4 + a_2\omega^2 + a_3 = 0 \quad (3.82)$$

onde

$$a_1 = -\frac{1}{\rho_e h} (k_{11} + k_{22} + k_{33}) \quad (3.83)$$

$$a_2 = \frac{1}{(\rho_e h)^2} (k_{11}k_{22} + k_{11}k_{33} + k_{22}k_{33} - k_{12}^2 - k_{13}^2 - k_{23}^2) \quad (3.84)$$

$$a_3 = \frac{1}{(\rho_e h)^3} (k_{11}k_{23}^2 + k_{22}k_{13}^2 + k_{33}k_{12}^2 + 2k_{12}k_{13}k_{23} - k_{11}k_{22}k_{33}) \quad (3.85)$$

As soluções da Equação 3.82 são

$$\omega_{1mn} = \left[-\frac{2}{3} \sqrt{a_1^2 - 3a_2} \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) - \frac{a_1}{3} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.86)$$

$$\omega_{2mn} = \left[-\frac{2}{3} \sqrt{a_1^2 - 3a_2} \cos\left(\frac{\alpha + 4\pi}{3}\right) - \frac{a_1}{3} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.87)$$

$$\omega_{3mn} = \left[-\frac{2}{3} \sqrt{a_1^2 - 3a_2} \cos\left(\frac{\alpha + 2\pi}{3}\right) - \frac{a_1}{3} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.88)$$

onde

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{27a_3 + 2a_1^3 - 9a_1a_2}{2\sqrt{(a_1^2 - 3a_2)^3}} \quad (3.89)$$

Para cada combinação m ($m = 1,2,3,\dots$), n ($n = 1,2,3,\dots$), tem-se, assim, três frequências i ($i = 1,2,3$). A mais baixa está associada com o modo em que a componente transversal (w) domina, enquanto as outras duas são geralmente maiores e associadas com o modo em que os deslocamentos no plano tangente (u e v) dominam (Soedel, 2005). Segundo Blevins (1995), normalmente, apenas a menor destas três soluções é de importância prática, para $n = 1,2,3,\dots$. Para cada combinação m, n , tem-se, portanto, três diferentes combinações de A, B e C .

Da Equação 3.75, resolvendo A e B , em termos de C , tem-se

$$\begin{bmatrix} \rho_e h \omega_{imn}^2 - k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & \rho_e h \omega_{imn}^2 - k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{imn} \\ B_{imn} \end{Bmatrix} = -C_{imn} \begin{Bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.90)$$

Assim

$$\frac{A_{imn}}{C_{imn}} = - \left[\frac{k_{13}(\rho_e h \omega_{imn}^2 - k_{22}) - k_{12}k_{23}}{(\rho_e h \omega_{imn}^2 - k_{11})(\rho_e h \omega_{imn}^2 - k_{22}) - k_{12}^2} \right] \quad (3.91)$$

$$\frac{B_{imn}}{C_{imn}} = - \left[\frac{k_{23}(\rho_e h \omega_{imn}^2 - k_{11}) - k_{21}k_{13}}{(\rho_e h \omega_{imn}^2 - k_{11})(\rho_e h \omega_{imn}^2 - k_{22}) - k_{12}^2} \right] \quad (3.92)$$

Em resumo, os três modos naturais que estão associados com as três frequências naturais ω_{imn} em cada combinação m, n são

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix}_{imn} = C_{imn} \begin{Bmatrix} \frac{A_{imn}}{C_{imn}} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos[n(\theta - \varphi)] \\ \frac{B_{imn}}{C_{imn}} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \operatorname{sen}[n(\theta - \varphi)] \\ \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos[n(\theta - \varphi)] \end{Bmatrix} \quad (3.93)$$

Têm-se, assim, dois conjuntos de modos naturais a considerar. Para o primeiro conjunto de modos naturais, $\varphi = 0$, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix}_{imn(1)} = C_{imn} \begin{Bmatrix} \frac{A_{imn}}{C_{imn}} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos(n\theta) \\ \frac{B_{imn}}{C_{imn}} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \operatorname{sen}(n\theta) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos(n\theta) \end{Bmatrix} \quad (3.94)$$

e para o segundo conjunto de modos naturais, $\varphi = \pi/(2n)$, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix}_{imn(2)} = C_{imn} \begin{Bmatrix} \frac{A_{imn}}{C_{imn}} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \operatorname{sen}(n\theta) \\ -\frac{B_{imn}}{C_{imn}} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos(n\theta) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \operatorname{sen}(n\theta) \end{Bmatrix} \quad (3.95)$$

O índice $imn()$ representa raiz i , número de meias-ondas longitudinais m , número de ondas circunferenciais n e conjunto de modos naturais (1) ou (2).

Para o caso $n = 0$, que corresponde a modos independentes do ângulo circunferencial θ , as equações de movimento, em cada combinação $m0$, têm as seguintes soluções:

- Dois modos acoplados axial-radiais, $i = 1, 2$, para $\varphi = 0$:

A Equação 3.75, reduz-se a

$$\begin{bmatrix} \rho_e h \omega^2 - k_{11} & k_{13} \\ k_{31} & \rho_e h \omega^2 - k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.96)$$

onde

$$k_{11} = K \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \quad (3.97)$$

$$k_{13} = k_{31} = K \frac{v}{a} \frac{m\pi}{L} \quad (3.98)$$

$$k_{33} = \frac{K}{a^2} + D \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \quad (3.99)$$

A equação característica é dada por

$$\omega^4 + a_1 \omega^2 + a_2 = 0 \quad (3.100)$$

onde

$$a_1 = -\frac{1}{\rho_e h} (k_{11} + k_{33}) \quad (3.101)$$

$$a_2 = \frac{1}{(\rho_e h)^2} (k_{11} k_{33} - k_{13}^2) \quad (3.102)$$

Resolvendo a Equação 3.100, têm-se as frequências naturais

$$\omega_{1m0(1)} = \left(\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.103)$$

$$\omega_{2m0(1)} = \left(\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.104)$$

Da Equação 3.96, resolvendo A em termos de C , tem-se

$$\frac{A_{im0}}{C_{im0}} = - \left[\frac{k_{13}}{\rho_e h \omega_{im0}^2 - k_{11}} \right] \quad (3.105)$$

Os dois modos naturais que estão associados com as duas frequências naturais ω_{im0} em cada combinação $m0$ são

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix}_{im0(1)} = C_{im0} \begin{Bmatrix} \frac{A_{im0}}{C_{im0}} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \\ 0 \\ \text{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \end{Bmatrix} \quad (3.106)$$

- Um modo circunferencial, $i = 1$, para $\varphi = \pi/(2n)$:

A Equação 3.75, reduz-se a

$$\left\{ \rho_e h \omega^2 - \left(K + \frac{D}{a^2} \right) \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] \right\} (B) = 0 \quad (3.107)$$

A equação característica é dada por

$$\rho_e h \omega^2 - \left(K + \frac{D}{a^2} \right) \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.108)$$

que resulta

$$\omega_{1m0(2)} = \left[\frac{1}{\rho_E h} \left(K + \frac{D}{a^2} \right) \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.109)$$

O modo natural que está associado com a frequência natural ω_{1m0} em cada combinação $m0$ é dado por

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix}_{1m0(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -B_{1m0} \text{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.110)$$

Como visto, a generalidade de equações de cascas permite uma larga variedade de modos de vibração com características vastamente diferentes.

3.2.1.2 Vibração forçada

Para o engenheiro, a razão última para o estudo das frequências naturais é fundamentada no estudo da resposta forçada. Conhecendo os autovalores é possível obter a solução forçada em termos destes autovalores. Esta aproximação é chamada representação espectral ou expansão modal e remonta ao trabalho de Bernoulli, 1755.

Uma perturbação excitará os vários modos naturais de uma casca em várias quantias. A quantia de participação de cada modo na resposta dinâmica total é definida pelo fator de participação modal. Este fator pode ser zero para certos modos ou conduzir a valores elevados para outros, dependendo da natureza da excitação.

Matematicamente, os modos naturais de uma estrutura de casca representam vetores ortogonais que satisfazem suas condições de contorno. Este espaço vetorial pode ser usado para representar qualquer resposta da estrutura. Em casos de sistemas de graus de liberdade finitos, o espaço vetorial é de dimensão finita e o número de vetores ou modos naturais é igual ao número de graus de liberdade. Para sistemas contínuos, tais como as cascas, o número de graus de liberdade é infinito. Isto significa que a solução geral será uma série infinita. Para cascas cilíndricas circulares retas:

$$u(z, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) U_k(z, \theta) \quad (3.111)$$

$$v(z, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) V_k(z, \theta) \quad (3.112)$$

$$w(z, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) W_k(z, \theta) \quad (3.113)$$

em que $U_k(z, \theta)$, $V_k(z, \theta)$ e $W_k(z, \theta)$ são as componentes dos modos naturais nas três direções principais, $\eta_k(t)$ são os fatores de participação modal e o índice k é igual a $imn()$.

Introduzindo um termo de amortecimento viscoso através do termo de força, substituindo o original q_i ($i = z, \theta, r$) por $q_i - \lambda \dot{u}_i$, onde λ é um fator de amortecimento viscoso equivalente, as Equações 3.1 a 3.3 podem ser escritas na forma

$$L_1\{u, v, w\} - \lambda \dot{u} - \rho_e h \ddot{u} = -q_z \quad (3.114)$$

$$L_2\{u, v, w\} - \lambda \dot{v} - \rho_e h \ddot{v} = -q_\theta \quad (3.115)$$

$$L_3\{u, v, w\} - \lambda \dot{w} - \rho_e h \ddot{w} = -q_r \quad (3.116)$$

onde $\dot{(\)}$ e $\ddot{(\)}$ são, respectivamente, as derivadas primeira e segunda temporais de $(\)$: $\partial(\)/\partial t$ e $\partial^2(\)/\partial t^2$.

Os operadores L são definidos como

$$L_1\{u, v, w\} = \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_{z\theta}}{\partial \theta} \quad (3.117)$$

$$L_2\{u, v, w\} = \frac{\partial N_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{Q_\theta}{a} \quad (3.118)$$

$$L_3\{u, v, w\} = \frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{N_\theta}{a} \quad (3.119)$$

Substituindo as Equações 3.111 a 3.113 nas Equações 3.114 a 3.116, têm-se

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\eta_k L_1\{U_k, V_k, W_k\} - \lambda \dot{\eta}_k U_k - \rho_e h \ddot{\eta}_k U_k \right] = -q_z \quad (3.120)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\eta_k L_2\{U_k, V_k, W_k\} - \lambda \dot{\eta}_k V_k - \rho_e h \ddot{\eta}_k V_k \right] = -q_\theta \quad (3.121)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\eta_k L_3\{U_k, V_k, W_k\} - \lambda \dot{\eta}_k W_k - \rho_e h \ddot{\eta}_k W_k \right] = -q_r \quad (3.122)$$

Da análise de autovalores, sabe-se que

$$L_1\{U_k, V_k, W_k\} = -\rho_e h \omega_k^2 U_k \quad (3.123)$$

$$L_2\{U_k, V_k, W_k\} = -\rho_e h \omega_k^2 V_k \quad (3.124)$$

$$L_3\{U_k, V_k, W_k\} = -\rho_e h \omega_k^2 W_k \quad (3.125)$$

Substituindo as Equações 3.123 a 3.125 nas Equações 3.120 a 3.122

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\rho_e h \ddot{\eta}_k + \lambda \dot{\eta}_k + \rho_e h \omega_k^2 \eta_k \right] U_k = q_z \quad (3.126)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\rho_e h \ddot{\eta}_k + \lambda \dot{\eta}_k + \rho_e h \omega_k^2 \eta_k \right] V_k = q_\theta \quad (3.127)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\rho_e h \ddot{\eta}_k + \lambda \dot{\eta}_k + \rho_e h \omega_k^2 \eta_k \right] W_k = q_r \quad (3.128)$$

Uma vez que os modos naturais são ortogonais, procede-se aproveitando a ortogonalidade das funções seno e cosseno. Multiplicando ambos os lados das Equações 3.126, 3.127 e 3.128 por um modo U_p , V_p e W_p , respectivamente, onde p , em geral, é ou igual a ou diferente de k , resulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\rho_e h \ddot{\eta}_k + \lambda \dot{\eta}_k + \rho_e h \omega_k^2 \eta_k \right] U_k U_p = q_z U_p \quad (3.129)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\rho_e h \ddot{\eta}_k + \lambda \dot{\eta}_k + \rho_e h \omega_k^2 \eta_k \right] V_k V_p = q_\theta V_p \quad (3.130)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\rho_e h \ddot{\eta}_k + \lambda \dot{\eta}_k + \rho_e h \omega_k^2 \eta_k \right] W_k W_p = q_r W_p \quad (3.131)$$

Adicionando as Equações 3.129, 3.130 e 3.131 e integrando sobre a superfície da casca

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\rho_e h \ddot{\eta}_k + \lambda \dot{\eta}_k + \rho_e h \omega_k^2 \eta_k \right] \int_0^{2\pi L} \int_0^0 (U_k U_p + V_k V_p + W_k W_p) dz ad\theta = \int_0^{2\pi L} \int_0^0 (q_z U_p + q_\theta V_p + q_r W_p) dz ad\theta \quad (3.132)$$

Usando as condições de ortogonalidade, é possível remover o somatório pelo fato de que todos os termos, exceto o termo em que $p = k$, desaparecem. A propriedade de ortogonalidade de modos naturais é demonstrada no Apêndice C. Tem-se

$$\ddot{\eta}_k + \frac{\lambda}{\rho_e h} \dot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = F_k \quad (3.133)$$

onde

$$F_k = \frac{a}{\rho_e h N_k} \int_0^{2\pi L} \int_0^0 (q_z U_k + q_\theta V_k + q_r W_k) dz d\theta \quad (3.134)$$

sendo

$$N_k = a \int_0^{2\pi L} \int_0^0 (U_k^2 + V_k^2 + W_k^2) dz d\theta \quad (3.135)$$

Assim, considerando k termos das séries de expansão modal como aproximação de um número infinito, resolve-se a Equação 3.133, definindo os fatores de participação nodal k vezes.

Para a solução completa da Equação 3.133, duas condições iniciais para cada fator de participação modal são necessárias: os deslocamentos iniciais $u(z, \theta, 0)$, $v(z, \theta, 0)$ e $w(z, \theta, 0)$ e as velocidades iniciais $\dot{u}(z, \theta, 0)$, $\dot{v}(z, \theta, 0)$ e $\dot{w}(z, \theta, 0)$. Elas devem ser especificadas para cada ponto da casca. As velocidades iniciais são, em muitos casos práticos, zero, exceto em problemas onde uma mudança periódica de condições de contorno ocorre. Respostas transientes às condições iniciais extinguem-se conforme o tempo progride devido ao amortecimento. Quando as condições de estado estacionário por si só são importantes, as condições iniciais são definidas como zero.

Quando se requer o conhecimento da resposta transitória e as condições iniciais são especificadas, convertem-se estas condições em condições iniciais do fator de participação modal que são η_k e $\dot{\eta}_k$ em $t = 0$. Devido às Equações 3.111 a 3.113, pode-se escrever

$$u(z, \theta, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(0) U_k(z, \theta) \quad (3.136)$$

$$v(z, \theta, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(0) V_k(z, \theta) \quad (3.137)$$

$$w(z, \theta, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(0) W_k(z, \theta) \quad (3.138)$$

$$\dot{u}(z, \theta, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{\eta}_k(0) U_k(z, \theta) \quad (3.139)$$

$$\dot{v}(z, \theta, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{\eta}_k(0) V_k(z, \theta) \quad (3.140)$$

$$\dot{w}(z, \theta, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{\eta}_k(0) W_k(z, \theta) \quad (3.141)$$

Estas equações devem ser resolvidas para $\eta_k(0)$ e $\dot{\eta}_k(0)$. Assim, multiplicam-se as Equações 3.136 a 3.138 por U_p , V_p e W_p , respectivamente, onde $p \neq k$ ou $p = k$. Têm-se

$$u(z, \theta, 0) U_p = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(0) U_k U_p \quad (3.142)$$

$$v(z, \theta, 0) V_p = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(0) V_k V_p \quad (3.143)$$

$$w(z, \theta, 0) W_p = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(0) W_k W_p \quad (3.144)$$

Somando as Equações 3.142, 3.143 e 3.144 e integrando sobre a superfície da casca tem-se

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi L} \int_0^a [u(z, \theta, 0)U_p + v(z, \theta, 0)V_p + w(z, \theta, 0)W_p] dz d\theta \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(0) \int_0^{2\pi L} \int_0^a (U_k U_p + V_k V_p + W_k W_p) dz d\theta \end{aligned} \quad (3.145)$$

Evocando a condição de ortogonalidade, elimina-se o somatório uma vez que o lado direito da Equação 3.145 é zero para qualquer p , exceto $p = k$. Obtém-se

$$\eta_k(0) = \frac{a}{N_k} \int_0^{2\pi L} \int_0^a [u(z, \theta, 0)U_k + v(z, \theta, 0)V_k + w(z, \theta, 0)W_k] dz d\theta \quad (3.146)$$

onde N_k é dado pela Equação 3.135.

Seguindo o mesmo procedimento, resolvem-se as Equações 3.139 a 3.141 para a segunda condição inicial

$$\dot{\eta}_k(0) = \frac{a}{N_k} \int_0^{2\pi L} \int_0^a [\dot{u}(z, \theta, 0)U_k + \dot{v}(z, \theta, 0)V_k + \dot{w}(z, \theta, 0)W_k] dz d\theta \quad (3.147)$$

A equação do fator de participação modal é uma equação de um oscilador simples, que é resolvida pela técnica da transformação de Laplace.

A equação do fator de participação modal (Equação 3.133) pode ser reescrita como

$$\ddot{\eta}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = F_k(t) \quad (3.148)$$

onde ζ_k é o fator de amortecimento modal, análogo ao coeficiente de amortecimento no problema do oscilador simples,

$$\zeta_k = \frac{\lambda}{2\rho_e h \omega_k} \quad (3.149)$$

Tomando a transformação de Laplace da Equação 3.133, determina-se o fator de participação modal no domínio de Laplace:

$$\eta_k(s) = \frac{F_k(s) + \eta_k(0)(s + 2\zeta_k \omega_k) + \dot{\eta}_k(0)}{(s + \zeta_k \omega_k)^2 + \omega_k^2(1 - \zeta_k^2)} \quad (3.150)$$

A transformação inversa depende se o termo $1 - \zeta_k^2$ é positivo, zero ou negativo. O caso positivo, quando $\zeta_k < 1$, é o mais comum uma vez que é muito difícil amortecer cascas mais do que isto. É o chamado caso subcrítico. O caso crítico ocorre quando $\zeta_k = 1$ e não tem significado prático, exceto que ele define o amortecimento que faz com que um deslocamento modal inicial decaia no tempo mais rápido possível, sem uma oscilação. O amortecimento supercrítico ($\zeta_k > 1$) ocorre apenas se uma casca tem um amortecimento elevado que a leva de volta a um deslocamento modal inicial sem ultrapassar a posição de equilíbrio.

Para o caso subcrítico ($\zeta_k < 1$), define-se um número real e positivo γ_k :

$$\gamma_k = \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} \quad (3.151)$$

A transformada inversa de Laplace da Equação 3.150 dá

$$\eta_k(t) = e^{-\zeta_k \omega_k t} \left\{ \eta_k(0) \cos(\gamma_k t) + \left[\eta_k(0) \zeta_k \omega_k + \dot{\eta}_k(0) \right] \frac{\text{sen}(\gamma_k t)}{\gamma_k} \right\} + \frac{1}{\gamma_k} \int_0^t F_k(\tau) e^{-\zeta_k \omega_k (t-\tau)} \text{sen}[\gamma_k (t-\tau)] d\tau \quad (3.152)$$

A solução é dada na forma de integral de convolução uma vez que a função de força $F_k(t)$ é, neste momento, arbitrária. Uma vez conhecida a função de força, a integral de convolução pode ser calculada. É também possível calcular a transformação inversa de Laplace da Equação 3.150 diretamente com uma função de força conhecida.

Nota-se que as vibrações causadas pelas condições iniciais serão oscilatórias, mas decairão exponencialmente com o tempo. A integral de convolução, quando calculada para uma força específica, se dividirá em uma parte transiente e, possivelmente, em uma parte de

estado estacionário se a força for periódica. A parte transiente decairá exponencialmente com o tempo.

Um caso especial de considerável interesse técnico é quando o amortecimento é zero. A Equação 3.152 reduz-se para

$$\eta_k(t) = \eta_k(0) \cos(\omega_k t) + \dot{\eta}_k(0) \frac{\text{sen}(\omega_k t)}{\omega_k} + \frac{1}{\omega_k} \int_0^t F_k(\tau) \text{sen}[\omega_k(t - \tau)] d\tau \quad (3.153)$$

Uma vez que a maioria das estruturas são levemente amortecidas, a Equação 3.153 é muitas vezes utilizada para se obter uma resposta aproximada uma vez que é muito mais simples.

No caso supercrítico ($\zeta_k > 1$), o valor de $1 - \zeta_k^2$ é negativo. Definindo um número real e positivo ε_k :

$$\varepsilon_k = \omega_k \sqrt{\zeta_k^2 - 1} \quad (3.154)$$

obtem-se, calculando a transformação inversa de Laplace,

$$\eta_k(t) = e^{-\zeta_k \omega_k t} \left\{ \begin{array}{l} \eta_k(0) \cosh(\varepsilon_k t) \\ + [\eta_k(0) \zeta_k \omega_k + \dot{\eta}_k(0)] \frac{\text{senh}(\varepsilon_k t)}{\varepsilon_k} \end{array} \right\} + \frac{1}{\varepsilon_k} \int_0^t F_k(\tau) e^{-\zeta_k \omega_k(t-\tau)} \text{senh}[\varepsilon_k(t-\tau)] d\tau \quad (3.155)$$

As vibrações causadas pelas condições iniciais são não-oscilatórias, entretanto, se a força é periódica, ainda resultará uma solução oscilatória de estado estacionário.

Como um caso especial, obtém-se a solução de amortecimento crítico ($\zeta_k = 1$), por redução:

$$\eta_k(t) = e^{-\omega_k t} \left\{ \eta_k(0) + [\eta_k(0) \omega_k + \dot{\eta}_k(0)] t \right\} + \int_0^t F_k(\tau) e^{-\omega_k(t-\tau)} (t-\tau) d\tau \quad (3.156)$$

Um caso importante ocorre quando a carga na casca varia harmonicamente com o tempo tendo uma frequência circular $\bar{\omega}$ e quando o início das vibrações (a parte transiente) não é de interesse. Usando uma notação complexa para obter a resposta para ambos os carregamentos, seno e cosseno, pode-se definir a carga como

$$q_i(z, \theta, t) = q_i^*(z, \theta) e^{j\bar{\omega}t} \quad (3.157)$$

Pode-se utilizar a integral de convolução, mas neste caso é mais simples usar a Equação 3.148, que se torna

$$\ddot{\eta}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = F_k^* e^{j\bar{\omega}t} \quad (3.158)$$

onde

$$F_k^* = \frac{a}{\rho_e h N_k} \int_0^{2\pi L} (q_z^* U_k + q_\theta^* V_k + q_r^* W_k) dz d\theta \quad (3.159)$$

No estado estacionário, a resposta também será harmônica, mas atrasada por um ângulo de fase ϕ_k :

$$\eta_k = \Lambda_k e^{j(\bar{\omega}t - \phi_k)} \quad (3.160)$$

Substituindo a Equação 3.160 na Equação 3.158, tem-se

$$\Lambda_k e^{-j\phi_k} = \frac{F_k^*}{(\omega_k^2 - \bar{\omega}^2) + 2j\zeta_k \omega_k \bar{\omega}} \quad (3.161)$$

A magnitude da resposta é, portanto,

$$\Lambda_k = \frac{F_k^*}{\omega_k^2 \sqrt{(1 - \beta_k^2)^2 + 4\zeta_k^2 \beta_k^2}} \quad (3.162)$$

E a diferença de fase é

$$\phi_k = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta_k \beta_k}{1 - \beta_k^2} \right) \quad (3.163)$$

em que β_k é definido como a razão entre a frequência da carga aplicada e a frequência de vibração livre natural k

$$\beta_k = \frac{\omega}{\omega_k} \quad (3.164)$$

Como esperado, uma casca se comportará similarmente a um conjunto de osciladores simples. Sempre que a frequência de excitação coincidir com uma das frequências naturais, ocorrerá um pico na curva de resposta.

Nota-se que a solução da resposta harmônica é a mesma para os amortecimentos subcrítico e supercrítico, exceto que, para forças iguais, as amplitudes de resposta na ressonância tornam-se cada vez menos pronunciadas conforme o amortecimento é ampliado até que eles sejam indistinguíveis da resposta fora da ressonância.

É importante destacar que há um corolário que diz que distribuições de cargas simétricas não excitam modos anti-simétricos e vice-versa.

Neste trabalho, as cargas adotadas para análise foram:

- Uma carga pontual variando harmonicamente, normal à superfície da casca;
- Uma carga sísmica.

Carga harmônica pontual:

Um tipo de carga que é muito comum, em aplicações de engenharia, é a carga pontual. Na vizinhança imediata da carga pontual, algumas das hipóteses básicas da teoria de cascas delgadas são violadas (por exemplo, que $\sigma_r = 0$). Contudo, fora da vizinhança imediata da carga pontual, as hipóteses não são afetadas e as respostas à vibração global podem ser calculadas com excelente precisão.

Uma vez que não se espera obter resultados exatos diretamente sob a carga pontual, em todo caso, tendo em mente que estes resultados exigiriam análises de elasticidade tridimensional e possivelmente de plasticidade e um conhecimento detalhado do mecanismo de aplicação da carga, é razoável utilizar a função Delta de Dirac para definir a carga pontual. Esta função situa a carga no ponto e assegura a magnitude desejados, mas não define os mecanismo e microdistribuição reais da aplicação.

A carga pontual variando harmonicamente $P_i e^{j\bar{\omega}t}$, em unidades de força, pode ser expressa como uma carga distribuída q_i , em unidades de força por unidade de área por

$$q_i = \frac{P_i}{a} \delta(z - z^*) \delta(\theta - \theta^*) e^{j\bar{\omega}t} \quad (3.165)$$

onde z^* e θ^* definem as coordenadas do ponto onde se situa a força pontual.

Comparando a Equação 3.165 com a Equação 3.157 conclui-se

$$q_i^* = \frac{P_i}{a} \delta(z - z^*) \delta(\theta - \theta^*) \quad (3.166)$$

Substituindo a Equação 3.166 na Equação 3.159, considerando as três componentes da força,

$$F_k^* = \frac{1}{\rho_e h N_k} \int_0^{2\pi L} \int_0^0 [P_z U_k(z, \theta) + P_\theta V_k(z, \theta) + P_r W_k(z, \theta)] \delta(z - z^*) \delta(\theta - \theta^*) dz d\theta \quad (3.167)$$

e aplicando a propriedade de integração da função delta de Dirac

$$\left[\int_0^\xi f(\xi) \delta(\xi - \xi^*) d\xi = f(\xi^*) \right]:$$

$$F_k^* = \frac{1}{\rho_e h N_k} [P_z U_k(z^*, \theta^*) + P_\theta V_k(z^*, \theta^*) + P_r W_k(z^*, \theta^*)] \quad (3.168)$$

Carga sísmica:

Tensões e deflexões dinâmicas podem ser induzidas em uma estrutura não só por uma carga aplicada variando no tempo, mas também por movimentos em seus pontos de apoio. Um importante exemplo de tais excitações são os movimentos da fundação de uma estrutura causados por um terremoto.

Admitindo que, a fundação está sujeita a deslocamentos dependentes do tempo dados por

$$\tilde{u}_x = U_x f_x(t) \quad (3.169)$$

$$\tilde{u}_y = U_y f_y(t) \quad (3.170)$$

$$\tilde{u}_z = U_z f_z(t) \quad (3.171)$$

onde U_x e U_y são os fatores de amplitude para os deslocamentos horizontais da fundação, U_z é o fator de amplitude para o deslocamento vertical da fundação, $f_x(t)$ e $f_y(t)$ são as variações no tempo dos deslocamentos horizontais e $f_z(t)$ é a variação no tempo do deslocamento vertical. Os deslocamentos da fundação são transferidos para a casca pelas seguintes condições em sua base (supõe-se que os deslocamentos da fundação são iguais aos movimentos do solo):

$$u_0 = U_z f_z(t) \quad (3.172)$$

$$v_0 = -U_x f_x(t) \operatorname{sen} \theta + U_y f_y(t) \cos \theta \quad (3.173)$$

$$w_0 = U_x f_x(t) \cos \theta + U_y f_y(t) \operatorname{sen} \theta \quad (3.174)$$

O deslocamento total de um ponto da estrutura, a partir de um eixo de referência, pode ser expresso como a soma do movimento do solo e aquele devido à deformação desse ponto:

$$u^t = u + u_0 \quad (3.175)$$

$$v^t = v + v_0 \quad (3.176)$$

$$w^t = w + w_0 \quad (3.177)$$

Expressando a força inercial em termos das duas componentes de aceleração obtidas pela dupla diferenciação das Equações 3.175 a 3.177 e substituindo os resultados nas Equações 3.114 a 3.116, têm-se:

$$L_1\{u, v, w\} - \lambda \dot{u} - \rho_e h \left(\ddot{u} + \ddot{u}_0 \right) = 0 \quad (3.178)$$

$$L_2\{u, v, w\} - \lambda \dot{v} - \rho_e h \left(\ddot{v} + \ddot{v}_0 \right) = 0 \quad (3.179)$$

$$L_3\{u, v, w\} - \lambda \dot{w} - \rho_e h \left(\ddot{w} + \ddot{w}_0 \right) = 0 \quad (3.180)$$

Uma vez que a aceleração do solo representa a entrada dinâmica especificada para a estrutura, as mesmas equações de movimento podem mais convenientemente serem reescritas como:

$$L_1\{u, v, w\} - \lambda \dot{u} - \rho_e h \ddot{u} = - \left(- \rho_e h \ddot{u}_0 \right) \quad (3.181)$$

$$L_2\{u, v, w\} - \lambda \dot{v} - \rho_e h \ddot{v} = - \left(- \rho_e h \ddot{v}_0 \right) \quad (3.182)$$

$$L_3\{u, v, w\} - \lambda \dot{w} - \rho_e h \ddot{w} = - \left(- \rho_e h \ddot{w}_0 \right) \quad (3.183)$$

Portanto, as deformações na estrutura causadas por aceleração do solo são exatamente as mesmas que aquelas que seriam produzidas por cargas externas iguais a

$$q_z = - \rho_e h \ddot{u}_0 \quad (3.184)$$

$$q_{\theta} = -\rho_e h \ddot{v}_0 \quad (3.185)$$

$$q_r = -\rho_e h \ddot{w}_0 \quad (3.186)$$

Das Equações 3.172 a 3.174:

$$\ddot{u}_0 = U_z \ddot{f}_z(t) \quad (3.187)$$

$$\ddot{v}_0 = -U_x \ddot{f}_x(t) \text{sen} \theta + U_y \ddot{f}_y(t) \text{cos} \theta \quad (3.188)$$

$$\ddot{w}_0 = U_x \ddot{f}_x(t) \text{cos} \theta + U_y \ddot{f}_y(t) \text{sen} \theta \quad (3.189)$$

onde

$$U_x \ddot{f}_x(t) = a_x(t) \quad (3.190)$$

$$U_y \ddot{f}_y(t) = a_y(t) \quad (3.191)$$

$$U_z \ddot{f}_z(t) = a_z(t) \quad (3.192)$$

são as acelerações do solo nas direções horizontais (a_x e a_y) e vertical (a_z). Portanto,

$$\ddot{u}_0 = a_z(t) \quad (3.193)$$

$$\ddot{v}_0 = -a_x(t) \text{sen} \theta + a_y(t) \text{cos} \theta \quad (3.194)$$

$$\ddot{w}_0 = a_x(t) \text{cos} \theta + a_y(t) \text{sen} \theta \quad (3.195)$$

Substituindo as Equações 3.193 a 3.195 nas Equações 3.184 a 3.186 e as Equações 3.184 a 3.186 na Equação 3.134, tem-se

$$F_k = X_k a_x(t) + Y_k a_y(t) + Z_k a_z(t) \quad (3.196)$$

onde

$$X_k = -\frac{a}{N_k} \int_0^{2\pi L} \int_0^{2\pi L} (-V_k \text{sen} \theta + W_k \cos \theta) dz d\theta \quad (3.197)$$

$$Y_k = -\frac{a}{N_k} \int_0^{2\pi L} \int_0^{2\pi L} (V_k \cos \theta + W_k \text{sen} \theta) dz d\theta \quad (3.198)$$

$$Z_k = -\frac{a}{N_k} \int_0^{2\pi L} \int_0^{2\pi L} U_k dz d\theta \quad (3.199)$$

Substituindo a Equação 3.196 na Equação 3.152, tem-se

$$\eta_k(t) = e^{-\zeta_k \omega_k t} \left[\begin{array}{l} \eta_{ki} \cos(\gamma_k t) \\ + (\eta_{ki} \zeta_k \omega_k + \dot{\eta}_{ki}) \frac{\text{sen}(\gamma_k t)}{\gamma_k} \end{array} \right] + \frac{1}{\gamma_k} \int_0^t [X_k a_x(\tau) + Y_k a_y(\tau) + Z_k a_z(\tau)] e^{-\zeta_k \omega_k (t-\tau)} \text{sen}[\gamma_k (t-\tau)] d\tau \quad (3.200)$$

A aceleração do solo durante um terremoto varia irregularmente, de tal modo que uma solução analítica da equação de movimento deve ser descartada. Assim, métodos numéricos são necessários para determinar a resposta estrutural.

Um procedimento numérico altamente eficiente pode ser desenvolvido para sistemas lineares pela interpolação da excitação ao longo de cada intervalo de tempo. Se os intervalos de tempo são pequenos, a interpolação linear é satisfatória. A Figura 3.4 mostra que durante o intervalo de tempo $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, a função de excitação é dada por

$$p(\tau) = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \quad (3.201)$$

onde

$$\Delta p_i = p_{i+1} - p_i \quad (3.202)$$

e a variável de tempo τ varia de 0 a Δt_i .

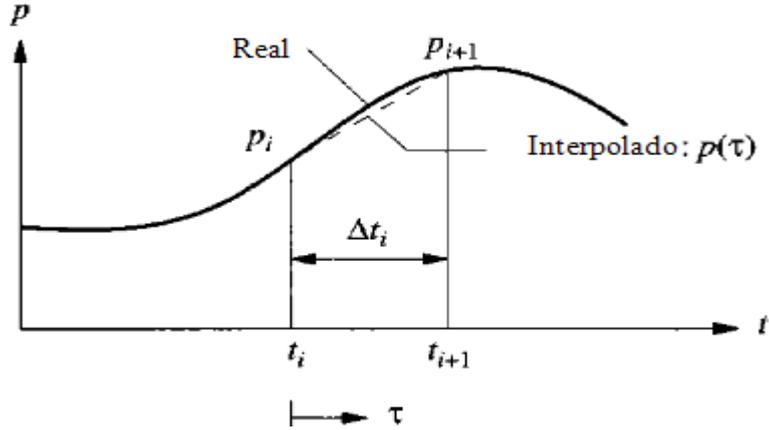


Figura 3.4 - Função de excitação durante o intervalo de tempo $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ (Chopra, 1995, modificado)

A resposta $\eta_k(t)$ durante o intervalo de tempo $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ é a soma de três partes: (1) vibração livre devido a $\eta_k(t)$ e $\dot{\eta}_k(0)$ em $t = 0$, (2) resposta a força degrau p_i com condições iniciais zero e (3) resposta à força rampa $(\Delta p_i/\Delta t_i)\tau$ com condições iniciais zero. Adaptando as soluções avaliadas para estes três casos, obtêm-se para sistemas com amortecimento subcrítico, substituindo a Equação 3.201 na Equação 3.152

$$\eta_k(t) = e^{-\zeta_k \omega_k t} \left[\begin{array}{l} \eta_{ki} \cos(\gamma_k t) \\ + (\eta_{ki} \zeta_k \omega_k + \dot{\eta}_{ki}) \frac{\text{sen}(\gamma_k t)}{\gamma_k} \end{array} \right] + \frac{1}{\gamma_k} \int_0^t \left(p_{ki} + \frac{\Delta p_{ki}}{\Delta t_i} \tau \right) e^{-\zeta_k \omega_k (t-\tau)} \text{sen}[\gamma_k (t-\tau)] d\tau \quad (3.203)$$

e

$$\dot{\eta}_k(t) = \frac{d}{dt} \left\{ e^{-\zeta_k \omega_k t} \left[\begin{array}{l} \eta_{ki} \cos(\gamma_k t) \\ + (\eta_{ki} \zeta_k \omega_k + \dot{\eta}_{ki}) \frac{\text{sen}(\gamma_k t)}{\gamma_k} \end{array} \right] + \frac{1}{\gamma_k} \int_0^t \left(p_{ki} + \frac{\Delta p_{ki}}{\Delta t_i} \tau \right) e^{-\zeta_k \omega_k (1-\tau)} \text{sen}[\gamma_k (t-\tau)] d\tau \right\} \quad (3.204)$$

Calculando estas equações em $\tau = \Delta t_i$ obtêm-se $\eta_{k\ i+1}$ e $\dot{\eta}_{k\ i+1}$ no tempo $i + 1$:

$$\eta_{k\ i+1} = e^{-\zeta_k \omega_k t} \left[\eta_{ki} \cos(\gamma_k \Delta t_i) + (\eta_{ki} \zeta_k \omega_k + \dot{\eta}_{ki}) \frac{\text{sen}(\gamma_k \Delta t_i)}{\gamma_k} \right] + \frac{1}{\gamma_k} \int_0^{\Delta t_i} \left(p_{ki} + \frac{\Delta p_{ki}}{\Delta t_i} \tau \right) e^{-\zeta_k \omega_k (1-\tau)} \text{sen}[\gamma_k (\Delta t_i - \tau)] d\tau \quad (3.205)$$

$$\dot{\eta}_{k\ i+1} = \frac{d}{d\Delta t_i} \left\{ e^{-\zeta_k \omega_k t} \left[\eta_{ki} \cos(\gamma_k \Delta t_i) + (\eta_{ki} \zeta_k \omega_k + \dot{\eta}_{ki}) \frac{\text{sen}(\gamma_k \Delta t_i)}{\gamma_k} \right] + \frac{1}{\gamma_k} \int_0^{\Delta t_i} \left(p_{ki} + \frac{\Delta p_{ki}}{\Delta t_i} \tau \right) e^{-\zeta_k \omega_k (1-\tau)} \text{sen}[\gamma_k (\Delta t_i - \tau)] d\tau \right\} \quad (3.206)$$

Estas equações podem ser reescritas, após a substituição da Equação 3.202, como fórmulas de recorrência:

$$\eta_{i+1} = A \eta_i + B \dot{\eta}_i + C p_i + D p_{i+1} \quad (3.207)$$

$$\dot{\eta}_{i+1} = A' \eta_i + B' \dot{\eta}_i + C' p_i + D' p_{i+1} \quad (3.208)$$

em que

$$A = e^{-\zeta \omega \Delta t} \left[\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}(\gamma \Delta t) + \cos(\gamma \Delta t) \right] \quad (3.209)$$

$$B = e^{-\zeta \omega \Delta t} \left[\frac{1}{\gamma} \text{sen}(\gamma \Delta t) \right] \quad (3.210)$$

$$C = \frac{1}{\omega^2} \left\{ \frac{2\zeta}{\Delta t \omega} + e^{-\zeta \omega \Delta t} \left[\left(\frac{1-2\zeta^2}{\gamma \Delta t} - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \text{sen}(\gamma \Delta t) - \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega \Delta t} \right) \cos(\gamma \Delta t) \right] \right\} \quad (3.211)$$

$$D = \frac{1}{\omega^2} \left\{ 1 - \frac{2\zeta}{\omega\Delta t} + e^{-\zeta\omega\Delta t} \left[\frac{2\zeta^2 - 1}{\gamma\Delta t} \text{sen}(\gamma\Delta t) + \frac{2\zeta}{\omega\Delta t} \cos(\gamma\Delta t) \right] \right\} \quad (3.212)$$

$$A' = -e^{-\zeta\omega\Delta t} \left[\frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}(\gamma\Delta t) \right] \quad (3.213)$$

$$B' = e^{-\zeta\omega\Delta t} \left[\cos(\gamma\Delta t) - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}(\gamma\Delta t) \right] \quad (3.214)$$

$$C' = \frac{1}{\omega^2} \left\{ -\frac{1}{\Delta t} + e^{-\zeta\omega\Delta t} \left[\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{\zeta}{\Delta t\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \text{sen}(\gamma\Delta t) + \frac{1}{\Delta t} \cos(\gamma\Delta t) \right] \right\} \quad (3.215)$$

$$D' = \frac{1}{\omega^2\Delta t} \left\{ 1 - e^{-\zeta\omega\Delta t} \left[\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}(\gamma\Delta t) + \cos(\gamma\Delta t) \right] \right\} \quad (3.216)$$

Uma vez que as Equações 3.207 e 3.208 são derivadas da solução exata da Equação 3.148, a única restrição sobre o tamanho do passo de tempo Δt é que ele permita uma estreita aproximação à função de excitação e que forneça resultados de resposta em intervalos de tempo espaçados de modo que o pico de resposta não seja perdido. Este procedimento numérico é especialmente útil quando a excitação é definida em intervalos de tempo estreitamente espaçados, como para a aceleração do solo por terremoto, de modo que a interpolação linear é essencialmente perfeita (Chopra, 1995).

Para o caso em questão, a força de excitação é dada por

$$p_{ki} = X_k a_{xi} + Y_k a_{yi} + Z_k a_{zi} \quad (3.217)$$

onde X_k , Y_k e Z_k são dados pelas Equações 3.197, 3.198 e 3.199 e a_{xi} , a_{yi} e a_{zi} são as acelerações do solo respectivamente nas direções x , y e z no tempo t_i .

A seguir serão desenvolvidas as formulações especificamente para o Caso 1 submetido aos carregamentos supracitados.

Caso 1:

Para condições de contorno simplesmente apoiadas sem restrição axial, como visto na seção Vibração Livre, têm-se dois conjuntos de modos naturais a considerar:

$$\left\{ \begin{array}{l} U \\ V \\ W \end{array} \right\}_{imm(1)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_{imn}}{C_{imn}} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos(n\theta) \\ \frac{B_{imn}}{C_{imn}} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \operatorname{sen}(n\theta) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos(n\theta) \end{array} \right\} \quad (3.218)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} U \\ V \\ W \end{array} \right\}_{imm(2)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_{imn}}{C_{imn}} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \operatorname{sen}(n\theta) \\ -\frac{B_{imn}}{C_{imn}} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos(n\theta) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \operatorname{sen}(n\theta) \end{array} \right\} \quad (3.219)$$

Para o primeiro conjunto de modos, a Equação 3.135 torna-se,

$$N_{imm(1)} = \left[\left(\frac{A_{imn}}{C_{imn}} \right)^2 + \left(\frac{B_{imn}}{C_{imn}} \right)^2 + 1 \right] \frac{La\pi}{2} \quad (3.220)$$

para $n \neq 0$ e

$$N_{im0(1)} = \left[\left(\frac{A_{imn}}{C_{imn}} \right)^2 + 1 \right] La\pi \quad (3.221)$$

para $n = 0$.

E para o segundo conjunto de modos

$$N_{imn(2)} = \left[\left(\frac{A_{imn}}{C_{imn}} \right)^2 + \left(\frac{B_{imn}}{C_{imn}} \right)^2 + 1 \right] \frac{La\pi}{2} \quad (3.222)$$

para $n \neq 0$ e

$$N_{im0(2)} = \left(\frac{B_{imn}}{C_{imn}} \right)^2 La\pi \quad (3.223)$$

para $n = 0$.

Carga harmônica pontual:

A força mostrada na Figura 3.5 descreve a carga harmônica pontual adotada neste trabalho:

$$q_z(z, \theta, t) = 0 \quad (3.224)$$

$$q_\theta(z, \theta, t) = 0 \quad (3.225)$$

$$q_r(z, \theta, t) = \frac{P_r}{a} \delta(z - z^*) \delta(\theta - \theta^*) e^{j\bar{\omega}t} \quad (3.226)$$

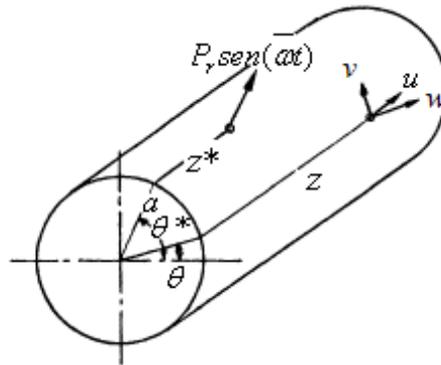


Figura 3.5 - Carga harmônica pontual adotada (Soedel, 2005, modificado)

Para o primeiro conjunto de modos, a Equação 3.159 torna-se

$$F_{imn(1)}^* = \frac{P_r}{\rho_e h N_{imn(1)}} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z^*}{L}\right) \cos(n\theta^*) \quad (3.227)$$

para $n \neq 0$ e

$$F_{im0(1)}^* = \frac{P_r}{\rho_e h N_{im0(1)}} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z^*}{L}\right) \quad (3.228)$$

para $n = 0$.

E para o segundo conjunto de modos

$$F_{imn(2)}^* = \frac{P_r}{\rho_e h N_{imn(2)}} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z^*}{L}\right) \operatorname{sen}(n\theta^*) \quad (3.229)$$

para $n \neq 0$ e

$$F_{imn(2)}^* = 0 \quad (3.230)$$

para $n = 0$.

A solução total é a adição dos dois conjuntos de soluções:

$$u(z, \theta, t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{imn}}{C_{imn}} \frac{1}{f(\omega)} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \left[\begin{array}{l} F_{imn(1)}^* \cos(n\theta) \\ + F_{imn(2)}^* \operatorname{sen}(n\theta) \end{array} \right] \operatorname{sen}(\bar{\omega}t - \phi_{imn}) \quad (3.231)$$

$$v(z, \theta, t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{imn}}{C_{imn}} \frac{1}{f(\omega)} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \left[\begin{array}{l} F_{imn(1)}^* \operatorname{sen}(n\theta) \\ - F_{imn(2)}^* \cos(n\theta) \end{array} \right] \operatorname{sen}(\bar{\omega}t - \phi_{imn}) \quad (3.232)$$

$$w(z, \theta, t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f(\omega)} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \left[\begin{array}{l} F_{imn(1)}^* \cos(n\theta) \\ + F_{imn(2)}^* \operatorname{sen}(n\theta) \end{array} \right] \operatorname{sen}(\bar{\omega}t - \phi_{imn}) \quad (3.233)$$

onde

$$f(\bar{\omega}) = \omega_{imn}^2 \sqrt{(1 - \beta_{imn}^2)^2 + 4\zeta_{imn}^2 \beta_{imn}^2} \quad (3.234)$$

No caso de carga harmônica, é razoável assumir que o movimento correspondente é harmônico e em fase com a carga. Assim, assumido que a carga seja senoidal, a solução apresenta somente a parcela senoidal.

Para somar os sinusóides de mesma frequência aplicam-se fasores. Um fasor é um número complexo associado a uma onda senoidal defasada, de modo que, se o fasor estiver na forma polar, seu módulo será o valor de pico e seu ângulo será o ângulo de fase da onda senoidal defasada. Se cada sinusóide for transformado num fasor e os fasores somados e depois reduzidos a um número complexo simples, este será o fasor para a soma senoidal.

Carga sísmica:

Substituindo a Equação 3.203 nas Equações 3.111 a 3.113, para os dois conjuntos de modos somados, tem-se a resposta ao terremoto

$$u(z, \theta, t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{im1}}{C_{im1}} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) [\eta_{im1(1)}(t) \cos(\theta) + \eta_{im1(2)}(t) \text{sen}(\theta)] \quad (3.235)$$

$$v(z, \theta, t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{im1}}{C_{im1}} \text{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) [\eta_{im1(1)}(t) \text{sen}(\theta) - \eta_{im1(2)}(t) \cos(\theta)] \quad (3.236)$$

$$w(z, \theta, t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) [\eta_{im1(1)}(t) \cos(\theta) + \eta_{im1(2)}(t) \text{sen}(\theta)] \quad (3.237)$$

O desenvolvimento das Equações 3.235 a 3.237 é feito através do procedimento numérico de interpolação da excitação ao longo de cada intervalo de tempo exposto na seção Estrutura, Vibração Forçada, Carga Sísmica.

A Tabela 3.1 apresenta as Equações 3.179 a 3.199 desenvolvidas para o Caso 1.

Tabela 3.1 - Constantes X_k , Y_k e Z_k para o Caso 1

i	m	n	$()$	$X_{inn}()$	$Y_{inn}()$	$Z_{inn}()$
1,2,3	1,2,3,...	2,3,...	1,2	0	0	0
1,2,3	1,2,3,...	1	1	$\frac{\left(\frac{B_{im1}}{C_{im1}} - 1\right) La[1 - \cos(m\pi)]}{N_{im1(1)} m}$	0	0
1,2,3	1,2,3,...	1	2	0	$\frac{\left(\frac{B_{im1}}{C_{im1}} - 1\right) La[1 - \cos(m\pi)]}{N_{im1(2)} m}$	0
1,2	1,2,3,...	0	1	0	0	0
1	1,2,3,...	0	2	0	0	0

3.2.2. Fluido

Modos acústicos em cavidades preenchidas com fluido surgem de ondas de pressão que as atravessam na velocidade do som e refletem em suas fronteiras. A velocidade do som em um fluido (i.e., um gás ou um líquido) é em geral uma função da natureza do fluido, de sua temperatura e de sua pressão (Blevins, 1995).

Como uma onda sonora se move através de um fluido, as partículas do fluido são deslocadas ciclicamente de suas posições de equilíbrio e a pressão no fluido aumenta e diminui. Se um fluido homogêneo e invíscido (não viscoso) em uma cavidade acústica oscila livremente em um dos modos normais da cavidade, o movimento do fluido pode ser expresso em termos do potencial de velocidade

$$\phi(r, \theta, z, t) = \Phi(r, \theta, z) \dot{f}(t) \quad (3.238)$$

onde

$\Phi(r, \theta, z)$ é o modo de vibração da função potencial e

$$\dot{f}(t) = \frac{df(t)}{dt} = j\omega e^{j\omega t} \quad (3.239)$$

em que

$$f(t) = e^{j\omega t} \quad (3.240)$$

é uma função harmônica de tempo t , de frequência de vibração circular natural ω .

A variação dinâmica em pressão na cavidade pode ser expressa em termos do potencial de velocidade por

$$p(r, \theta, z, t) = -\rho_f \frac{d\phi(r, \theta, z, t)}{dt} \quad (3.241)$$

Substituindo a Equação 3.238 na Equação 3.241, tem-se

$$p(r, \theta, z, t) = P(r, \theta, z) e^{j\omega t} \quad (3.242)$$

onde

$$P(r, \theta, z) = \rho_f \omega^2 \Phi(r, \theta, z) \quad (3.243)$$

em que ρ_f é a massa específica do fluido.

A forma de $\Phi(r, \theta, z)$ para uma solução por separação de variáveis deve ser

$$\Phi(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z) \quad (3.244)$$

A função $Z(z)$ depende das condições nas extremidades da cavidade:

- Para extremidade aberta:

$$\Phi = 0 \quad (3.245)$$

- Para extremidade fechada:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (3.246)$$

Têm-se:

- Para ambas as extremidades abertas:

$$Z(z) = \text{sen} \left(\frac{\bar{m}\pi z}{L} \right) \quad (3.247)$$

- Para ambas as extremidades fechadas:

$$Z(z) = \cos \left(\frac{\bar{m}\pi z}{L} \right) \quad (3.248)$$

- Para extremidade fechada em $z = 0$ e extremidade aberta em $z = L$:

$$Z(z) = \cos \left[\frac{(2\bar{m} - 1)\pi z}{2L} \right] \quad (3.249)$$

em que

$\bar{m} = 1, 2, 3, \dots$ é o número de nós axiais. Para ambas as extremidades fechadas, $\bar{m} = 0, 1, 2, \dots$

A função $\Theta(\theta)$ é igual a

$$\Theta(\theta) = \cos[n(\theta - \varphi)] \quad (3.250)$$

em que $n = 0, 1, 2, \dots$ é o número de diâmetros nodais e φ é o ângulo de fase modal. Para $\varphi = 0$, $\Theta(\theta) = \cos(n\theta)$ e para $\varphi = \pi/(2n)$, $\Theta(\theta) = \sin(n\theta)$.

Movimentos irrotacionais de fluidos devem satisfazer a equação de Helmholtz,

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (3.251)$$

em que ϕ é o potencial de velocidade, c é a velocidade do som no fluido e $\nabla^2 \phi$ é o laplaciano de ϕ .

Em coordenadas cilíndricas, o operador laplaciano é definido como

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (3.252)$$

Inserindo a Equação 3.238 na Equação 3.252 e a Equação 3.252 na Equação 3.251 leva a

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} - \left\{ \left[\lambda^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right] r^2 + n^2 \right\} R(r) = 0 \quad (3.253)$$

A Equação 3.253 é conhecida como equação de Bessel e admite, para $\omega/c \leq \lambda$, soluções da forma

$$R(r) = DI_n \left\{ \left[\lambda^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} r \right\} + EK_n \left\{ \left[\lambda^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} r \right\} \quad (3.254)$$

e, para $\omega/c \geq \lambda$,

$$R(r) = DJ_n \left\{ \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \lambda^2 \right]^{\frac{1}{2}} r \right\} + EY_n \left\{ \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \lambda^2 \right]^{\frac{1}{2}} r \right\} \quad (3.255)$$

onde D e E são coeficientes a serem determinados que especificam a amplitude de vibração, J_n e Y_n são as funções de Bessel de primeira e segunda classes de ordem n , I_n e K_n são as funções de Bessel modificadas de primeira e segunda classes de ordem n e

$$\lambda = \left(-\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.256)$$

As funções de Bessel de segunda classe devem ser eliminadas, uma vez que elas violam a exigência de que Φ seja regular (finito) em $r = 0$,

$$|\Phi(0, \theta, z)| < \infty \quad (3.257)$$

Portanto, para $\omega/c \leq \lambda$,

$$R(r) = DI_n \left\{ \left[\lambda^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} r \right\} \quad (3.258)$$

e para $\omega/c \geq \lambda$,

$$R(r) = DJ_n \left\{ \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \lambda^2 \right]^{\frac{1}{2}} r \right\} \quad (3.259)$$

As definições das funções de Bessel são apresentadas no Apêndice D.

Substituindo as Equações 3.247 a 3.249 na Equação 3.256, têm-se:

- Para um volume cilíndrico circular reto aberto em ambas as extremidades:

$$\lambda = \frac{m\pi}{L} \quad (3.260)$$

- Para um volume cilíndrico circular reto fechado em ambas as extremidades:

$$\lambda = \frac{\bar{m}\pi}{L} \quad (3.261)$$

- Para um volume cilíndrico circular reto fechado em $z = 0$ e aberto em $z = L$:

$$\lambda = \frac{(2\bar{m}-1)\pi}{2L} \quad (3.262)$$

3.2.2.1 Vibração livre

Caso 1:

Neste caso, considerando ambas as extremidades abertas e a lateral fechada, cujo modelo está representado na Figura 4.1 (b), a Equação 3.238 torna-se

$$\phi(r, \theta, z, t) = j\omega R(r) \operatorname{sen}\left(\frac{\bar{m}\pi z}{L}\right) \cos[n(\theta - \varphi)] e^{j\omega t} \quad (3.263)$$

Devido ao fato da lateral ser fechada, tem-se:

$$\left. \frac{\partial \phi(r, \theta, z, t)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (3.264)$$

Substituindo a Equação 3.263 na Equação 3.264, tem-se que

$$\left. \frac{dR(r)}{dr} \right|_{r=a} = 0 \quad (3.265)$$

Para $\omega/c \geq \lambda$,

$$\left. \frac{dR(r)}{dr} \right|_{r=a} = DJ_n'(\alpha r) \Big|_{r=a} \quad (3.266)$$

sendo

$$\alpha = \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.267)$$

e J'_n , a derivada da função de Bessel de primeira classe de n -ésima ordem.

Substituindo a Equação 3.266 na Equação 3.265, tem-se

$$J'_n(\alpha r) \Big|_{r=a} = 0 \quad (3.268)$$

Assumindo

$$\alpha a = r'_i \quad (3.269)$$

obtêm-se as freqüências naturais circulares

$$\omega_{im} = c \sqrt{\left(\frac{r'_i}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2} \quad (3.270)$$

onde $i = 0, 1, 2, \dots$ é o número de círculos nodais e r'_i é a i -ésima raiz de J'_n .

J'_n é dado pela fórmula

$$J'_n(\alpha r) = \frac{n}{r} J_n(\alpha r) - \alpha J_{n+1}(\alpha r) \quad (3.271)$$

A Equação 3.243 torna-se

$$P_{im} = D_{im} \rho_f \omega_{im}^{-2} J_n \left(\frac{r'_i r}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{m\pi z}{L} \right) \cos[n(\theta - \varphi)] \quad (3.272)$$

Têm-se, assim, para cada $i = 0, 1, 2, \dots$, $\bar{m} = 1, 2, 3, \dots$, $n = 1, 2, 3, \dots$, dois modos naturais a considerar. Para $\varphi = 0$ tem-se:

$$P_{imn(1)}^- = D_{imn(1)}^- \rho_f \omega_{imn}^{-2} J_n \left(\frac{r'_i r}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{m\pi z}{L} \right) \cos(n\theta) \quad (3.273)$$

e para $\varphi = \pi/(2n)$, tem-se:

$$P_{imn(2)}^- = D_{imn(2)}^- \rho_f \omega_{imn}^{-2} J_n \left(\frac{r'_i r}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{m\pi z}{L} \right) \text{sen}(n\theta) \quad (3.274)$$

Para $n = 0$, um modo a considerar:

$$P_{im0(1)}^- = D_{im0(1)}^- \rho_f \omega_{imn}^{-2} J_n \left(\frac{r'_i r}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{m\pi z}{L} \right) \quad (3.275)$$

Se o fluido oscila livremente em mais do que um modo, então a componente dinâmica da pressão do fluido, as velocidades do fluido e os deslocamentos do fluido são a soma das contribuições dos modos individuais. Portanto, a função de pressão total do fluido é dada por

$$p(r, \theta, z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \rho_f \omega_{imn}^{-2} J_n \left(\frac{r'_i r}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{m\pi z}{L} \right) \left[D_{imn(1)}^- \cos(n\theta) + D_{imn(2)}^- \text{sen}(n\theta) \right] e^{j\omega_{imn} t} \quad (3.276)$$

3.2.3 Fluido-Estrutura

A interação fluido-estrutura na interface provoca na estrutura uma força causada pela pressão acústica, como também um carregamento no fluido devido ao movimento estrutural (Figura 3.6).

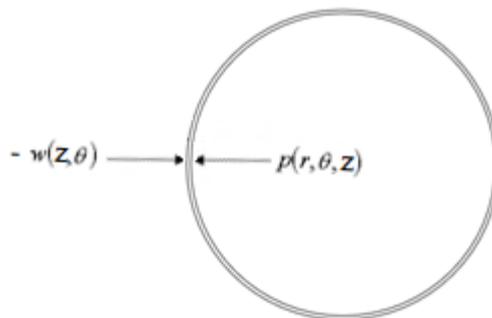


Figura 3.6 - Região de acoplamento do deslocamento radial da casca e da pressão acústica

As condições de interface para uma casca unida a um meio acústico são: (1) que a carga de pressão normal na casca tem que ser igual à pressão de contorno do meio acústico e (2) que a velocidade normal da superfície da casca, tem que ser igual à componente da velocidade normal do contorno do meio acústico (Soedel, 2005).

Para uma casca cilíndrica preenchida com água, usando coordenadas cilíndricas,

$$q_r(z, \theta, t) = p(a, \theta, z, t) \quad (3.277)$$

$$\frac{\partial w(z, \theta, t)}{\partial t} = v_r(a, \theta, z, t) \quad (3.278)$$

Para que o campo de velocidades \mathbf{v} seja irrotacional, é condição necessária e suficiente que exista uma função ϕ (a função potencial escalar das velocidades) tal que

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \quad (3.279)$$

Em coordenadas cilíndricas,

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{a}_r + v_\theta \mathbf{a}_\theta + v_z \mathbf{a}_z \quad (3.280)$$

onde

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (3.281)$$

$$v_\theta = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \quad (3.282)$$

$$v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (3.283)$$

e \mathbf{a}_r , \mathbf{a}_θ e \mathbf{a}_z são os vetores unitários de um sistema de coordenadas cilíndricas.

Substituindo a Equação 3.281 na Equação 3.278, tem-se

$$\left. \frac{\partial \phi(r, \theta, z, t)}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{\partial w(z, \theta, t)}{\partial t} \quad (3.284)$$

que é a condição de contorno de impermeabilidade ou impenetrabilidade na interface casca-fluido, assumindo que não haja cavitação.

3.2.3.1 Vibração livre

Caso 1:

Neste caso, a casca cilíndrica circular reta é simplesmente biapoada sem restrição axial e, uma vez que o fluido está envolvido, aberta nas extremidades. O modelo está representado na Figura 4.1 (c).

Substituindo a Equação 3.71 na Equação 3.38, a Equação 3.258 ou 3.259 na Equação 3.263 e as Equações 3.38 e 3.263 na Equação 3.284, tem-se

$$D B'_n(\alpha r) \Big|_{r=a} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi z}{L} \right) = C \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi z}{L} \right) \quad (3.285)$$

Sendo que, para $\omega/c \leq \lambda$,

$$B = I \quad (3.286)$$

$$\alpha = \left[\lambda^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.287)$$

$$I'_n(\alpha r) \Big|_{r=a} = \frac{n}{a} I_n(\alpha a) + \alpha I_{n+1}(\alpha a) \quad (3.288)$$

e para $\omega/c \geq \lambda$,

$$B = J \quad (3.289)$$

$$\alpha = \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \lambda^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.290)$$

$$J'_n(\alpha r)|_{r=a} = \frac{n}{a} J_n(\alpha a) - \alpha J_{n+1}(\alpha a) \quad (3.291)$$

onde

$$\lambda = \frac{\bar{m}\pi}{L} \quad (3.292)$$

A Equação 3.285 deve satisfazer todos os valores $0 \leq z \leq L$. Multiplicando esta equação por $\overline{\text{sen}(m\pi z/L)}$, que satisfaz a condição de contorno aberta-aberta, e integrando entre 0 e L (Kim *et al.*, 2003), a seguinte relação é obtida

$$D = \frac{C}{\mathbf{B}'_n(\alpha r)|_{r=a}} \quad (3.293)$$

sendo

$$m = \bar{m} = 1, 2, 3, \dots \quad (3.294)$$

Este caso oferece uma simplificação particularmente atrativa, uma vez que $Z(z)$ (Equação 3.247) tem a mesma forma que a variação axial de w no vácuo $\phi_m(z)$ (Equação 3.60): os modos de vibração do fluido são iguais aos modos de vibração da estrutura.

A Equação 3.238 torna-se

$$\phi(r, \theta, z, t) = j \frac{C\omega}{\mathbf{B}'_n(\alpha r)|_{r=a}} \mathbf{B}_n(\alpha r) \overline{\text{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right)} \cos[n(\theta - \varphi)] e^{j\omega t} \quad (3.295)$$

e substituindo a Equação 3.295 na Equação 3.241 resulta em

$$p(r, \theta, z, t) = \frac{C\rho_f \omega^2}{\mathbf{B}'_n(\alpha r)|_{r=a}} \mathbf{B}_n(\alpha r) \text{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos[n(\theta - \varphi)] e^{j\omega t} \quad (3.296)$$

A pressão acústica no contorno, $r = a$, é dada por

$$p(a, \theta, z, t) = \frac{C\rho_f \omega^2}{\mathbf{B}'_n(\alpha r)|_{r=a}} \mathbf{B}_n(\alpha a) \text{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos[n(\theta - \varphi)] e^{j\omega t} \quad (3.297)$$

Substituindo a Equação 3.297 na Equação 3.277,

$$q_r(z, \theta, t) = \frac{C\rho_f \omega^2}{\mathbf{B}'_n(\alpha r)|_{r=a}} \mathbf{B}_n(\alpha a) \text{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos[n(\theta - \varphi)] e^{j\omega t} \quad (3.298)$$

A Equação 3.298 pode ser reescrita da seguinte forma

$$q_r(z, \theta, t) = Q_r(z, \theta) e^{j\omega t} \quad (3.299)$$

onde

$$Q_r(z, \theta) = \frac{C\rho_f \omega^2}{\mathbf{B}'_n(\alpha r)|_{r=a}} \mathbf{B}_n(\alpha a) \text{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos[n(\theta - \varphi)] \quad (3.300)$$

A combinação entre a solução analítica de pressões do fluido e a equação de movimento da estrutura, em um dado modo de vibração pré-estabelecido, permite o desenvolvimento de uma solução pseudo-acoplada, que incorpora os efeitos do fluido na estrutura e permite a solução das frequências acopladas do problema (Ribeiro, 2010).

Uma solução simplificada pode ser obtida com a hipótese de modo de vibração no vácuo idêntico ao modo de vibração acoplado. Assim, assume-se que a presença do fluido não irá alterar os modos do problema desacoplado (Ribeiro, 2010).

Segundo Ribeiro (2010), os resultados encontrados indicam que a presença do fluido pode alterar as deformadas modais da estrutura no vácuo. Esta modificação é prejudicial para a qualidade da solução pseudo-acoplada, tendo em vista que são utilizadas as deformadas

desacopladas da estrutura nas formulações. Verifica-se que, geralmente, os efeitos são pequenos nos modos iniciais e a solução analítica aproximada produz bons resultados.

Considerando na Equação 3.42 a parcela da carga radial $Q_r(z, \theta)$, tem-se

$$\frac{\partial Q_z^*}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial Q_\theta^*}{\partial \theta} - \frac{N_\theta^*}{a} + Q_r + \rho_e h \omega^2 W = 0 \quad (3.301)$$

Substituindo as Equações 3.74 e 3.300 na Equação 3.301, tem-se

$$\frac{\partial Q_z^*}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial Q_\theta^*}{\partial \theta} - \frac{N_\theta^*}{a} + \rho_e h(1 + \xi) \omega^2 W = 0 \quad (3.302)$$

onde

$$\xi = \left(\frac{\rho_f a}{\rho_e h} \right) \left[\frac{B_n(\alpha a)}{a B_n'(\alpha r)|_{r=a}} \right] \quad (3.303)$$

é a densidade virtual ou adicional do fluido, adimensional.

Nota-se que a massa efetiva é uma função do modo considerado, das geometrias da casca e do líquido, mais parâmetros físicos e, quando o líquido é considerado compressível, da velocidade do som no líquido e da frequência de vibração (Gonçalves e Batista, 1986).

Determina-se a matriz característica, usando procedimento análogo ao adotado na seção Estrutura, Vibração livre, Caso 1. A Equação 3.75 torna-se

$$\begin{bmatrix} \rho_e h \omega^2 - k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & \rho_e h \omega^2 - k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & \rho_e h(1 + \xi) \omega^2 - k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.304)$$

Fisicamente, a Equação 3.304 indica que o fluido contido afeta os movimentos livres da casca aumentando a carga inercial na direção radial; as componentes u e v do movimento são afetadas apenas através do acoplamento com as componentes w do movimento pela Equação 3.304 (Paidoussis, 2004).

Para uma solução não trivial, o determinante da matriz dos coeficientes da Equação 3.304 tem que ser zero. Expandindo o determinante resulta

$$a_0\omega^6 + a_1\omega^4 + a_2\omega^2 + a_3 = 0 \quad (3.305)$$

onde

$$a_0 = 1 + \xi \quad (3.306)$$

$$a_1 = -\frac{1}{(\rho_e h)} [(1 + \xi)(k_{11} + k_{22}) + k_{33}] \quad (3.307)$$

$$a_2 = \frac{1}{(\rho_e h)^2} [(1 + \xi)(k_{11}k_{22} - k_{12}^2) + (k_{11}k_{33} + k_{22}k_{33} - k_{13}^2 - k_{23}^2)] \quad (3.308)$$

$$a_3 = \frac{1}{(\rho_e h)^3} (k_{11}k_{23}^2 + k_{22}k_{13}^2 + k_{33}k_{12}^2 + 2k_{12}k_{13}k_{23} - k_{11}k_{22}k_{33}) \quad (3.309)$$

onde k_{11} , k_{12} , k_{13} , k_{22} , k_{23} e k_{33} são definidos nas Equações 3.76 a 3.81.

A equação da frequência natural, Equação 3.305, é transcendental uma vez que ξ é uma função transcendental de ω (Gonçalves e Batista, 1986).

Relevante acrescentar que, segundo Gonçalves e Batista (1986), para uma casca parcialmente preenchida por fluido, o parâmetro ξ é dado por

$$\xi = \left(\frac{\rho_f a}{\rho_e h} \right) \left[\frac{H}{L} - \frac{\text{sen}\left(\frac{2m\pi H}{L}\right)}{2m\pi} \right] \left[\frac{B_n(\alpha a)}{a B'_n(\alpha r)|_{r=a}} \right] \quad (3.310)$$

em que H é a altura do fluido. Para uma casca vazia ($H = 0$), $\xi = 0$, a Equação 3.304 reduz-se à equação clássica de frequência para uma casca no vácuo, Equação 3.75. Se $H = L$,

obtém-se a equação exata para uma casca completamente preenchida e o parâmetro ξ é dado pela Equação 3.303.

Sendo a solução adotada, pseudo-acoplada, os dois conjuntos de modos de vibração dos deslocamentos da estrutura que estão associados com as frequências naturais acopladas ω_{imn} ($i = 1,2,3,\dots$) em cada combinação mn são dados pelas Equações 3.94 e 3.95. As razões A_{imn}/C_{imn} e B_{imn}/C_{imn} são apresentadas nas Equações 3.91 e 3.92. O modo de vibração da pressão do fluido é dado por

$$P_{imn} = \frac{C_{imn} \rho_f \omega_{imn}^2}{\mathbf{B}'_n(\alpha_{imn} r)|_{r=a}} \mathbf{B}_n(\alpha_{imn} r) \text{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos[n(\theta - \varphi)] \quad (3.311)$$

Têm-se dois conjuntos de modos naturais a considerar. Para $\varphi = 0$,

$$P_{imn(1)} = \frac{C_{imn} \rho_f \omega_{imn}^2}{\mathbf{B}'_n(\alpha_{imn} r)|_{r=a}} \mathbf{B}_n(\alpha_{imn} r) \text{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos(n\theta) \quad (3.312)$$

e para $\varphi = \pi/(2n)$,

$$P_{imn(1)} = \frac{C_{imn} \rho_f \omega_{imn}^2}{\mathbf{B}'_n(\alpha_{imn} r)|_{r=a}} \mathbf{B}_n(\alpha_{imn} r) \text{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \text{sen}(n\theta) \quad (3.313)$$

Para $n = 0$, $\varphi = 0$, a Equação 3.305, torna-se

$$a_0 \omega^4 + a_1 \omega^2 + a_2 = 0 \quad (3.314)$$

onde

$$a_0 = 1 + \xi \quad (3.315)$$

$$a_1 = -\frac{1}{(\rho_e h)} [(1 + \xi) k_{11} + k_{33}] \quad (3.316)$$

$$a_2 = \frac{1}{(\rho_e h)^2} (k_{11} k_{33} - k_{13}^2) \quad (3.317)$$

Os modos de vibração dos deslocamentos da estrutura são dados pela Equação 3.106, sendo a razão A_{im0}/C_{im0} dada pela Equação 3.105. O modo de vibração da pressão do fluido é dado por

$$P_{im0(1)} = \frac{C_{im0} \rho_f \omega_{im0}^2}{\mathbf{B}'_0(\alpha_{im0} r)|_{r=a}} \mathbf{B}_0(\alpha_{im0} r) \text{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \quad (3.318)$$

Para $n = 0$, $\varphi = \pi/(2n)$, a frequência natural é dada por

$$\omega_{1m0(2)} = \left(\frac{k_{22}}{\rho_E h}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.319)$$

Os modos de vibração dos deslocamentos da estrutura são dados pela Equação 3.110. O modo de vibração da pressão do fluido é dado por

$$P_{1m0(2)} = 0 \quad (3.320)$$

3.2.3.2 Vibração forçada

Nesta seção, investigar-se-á a vibração forçada do sistema acoplado.

De acordo com Silva *et al.* (2010), a função potencial de velocidade, adaptada à formulação apresentada neste trabalho, é dada por

$$\phi(r, \theta, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k(t) \mathbf{B}_n(ar) Z_m^-(z) \cos[n(\theta - \varphi)] \quad (3.321)$$

Onde $D_k(t)$ é amplitude modal determinada pela aplicação da condição de impermeabilidade.

Substituindo as Equações 3.113 e 3.321 na Equação 3.284, para um dado k , tem-se

$$D_k(t) \mathbf{B}_n(\alpha r) \Big|_{r=a} Z_m^-(z) = \dot{\eta}_k(t) \phi_m(z) \quad (3.322)$$

Multiplicando a Equação 3.322 por $Z_m^-(z)$ e integrando entre 0 e L (Kim *et al.*, 2003), a seguinte relação é obtida

$$D_k(t) = \frac{1}{\mathbf{B}'_n(\alpha r) \Big|_{r=a}} \left\{ \frac{\int_0^L [\phi_m(z) Z_m^-(z)] dz}{\int_0^L [Z_m^-(z)]^2 dz} \right\} \dot{\eta}_k(t) \quad (3.323)$$

O valor da relação entre as integrais dentro das chaves na Equação 3.323 é igual a 1, sendo $m = \bar{m}$, no Caso 1.

Substituindo a Equação 3.323 na Equação 3.321 e a Equação 3.321 na Equação 3.241, tem-se

$$p(r, \theta, z, t) = - \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{\eta}_k(t) P_k(r, \theta, z) \quad (3.324)$$

sendo

$$P_k(r, \theta, z) = P_{immm}^-(r, \theta, z) = \frac{\rho_f}{\mathbf{B}'_n(\alpha r) \Big|_{r=a}} \left\{ \frac{\int_0^L [\phi_m(z) Z_m^-(z)] dz}{\int_0^L [Z_m^-(z)]^2 dz} \right\} \mathbf{B}_n(\alpha r) Z_m^-(z) \cos[n(\theta - \varphi)] \quad (3.325)$$

Substituindo a Equação 3.324 na Equação 3.277, para um dado k , tem-se

$$q_r(z, \theta, t) = - \ddot{\eta}_k(t) P_k(a, \theta, z) \quad (3.326)$$

Substituindo a Equação 3.326 na Equação 3.134, a Equação 3.134 na Equação 3.133 e multiplicando a Equação 3.133 por $\rho_e h$, a equação de movimento torna-se (baseado em Morais, *et al.*, 2007)

$$\rho_e h(1 + \xi^*) \ddot{\eta}_k + (\lambda_e + \lambda_a) \dot{\eta}_k + \rho_e h \omega_{k,e}^2 \eta_k = \rho_e h F_{k,e} \quad (3.327)$$

onde

$$\xi^* = \frac{a}{\rho_e h N_k} \int_0^{2\pi L} P_k W_k dz d\theta \quad (3.328)$$

é a densidade virtual ou adicional do fluido, adimensional, o índice e refere-se à estrutura desacoplada e λ_a é o amortecimento viscoso adicional do fluido. Para o Caso 1,

$$\xi^* = \frac{La\pi}{2N_k} \xi, \text{ sendo } \xi \text{ dado pela Equação 3.303.}$$

Dividindo a Equação 3.327 por $\rho_e h (1 + \xi^*)$, resulta

$$\ddot{\eta}_k + 2\zeta_{k,fe} \omega_{k,fe} \dot{\eta}_k + \omega_{k,fe}^2 \eta_k = F_{k,fe} \quad (3.329)$$

onde o índice fe refere-se à fluido-estrutura acoplado,

$$\omega_{k,fe} = \left(\sqrt{\frac{1}{1 + \xi^*}} \right) \omega_{k,e} \quad (3.330)$$

$$\zeta_{k,fe} = \left[\left(\frac{\lambda_a}{\lambda_e} + 1 \right) \frac{\omega_{k,fe}}{\omega_{k,e}} \right] \zeta_e \quad (3.331)$$

$$F_{k,fe} = \left(\frac{1}{1 + \xi^*} \right) F_{k,e} \quad (3.332)$$

(Vu *et al.*, s.d., adaptado).

Carga harmônica:

A análise de vibração forçada da estrutura em um sistema casca cilíndrica circular retacavidade acústica cilíndrica acoplado submetido à carga harmônica segue os mesmos procedimentos descritos na seção Estrutura, Vibração Forçada, Caso 1, Carga harmônica pontual, multiplicando $\rho_e h$ por $(1 + \xi^*)$ em todas as fórmulas F_k^* apresentadas.

Na análise do fluido, substituindo a Equação 3.160 na Equação 3.324, assumindo que a carga seja senoidal tem-se

$$p(r, \theta, z, t) = \bar{\omega}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k P_k(r, \theta, z) \text{sen}(\bar{\omega}t - \phi_k) \quad (3.333)$$

considerando a substituição de ζ_k por $\zeta_{k,fe}$ nas Equações 3.162 e 3.163.

Carga sísmica:

Na análise sísmica, quando o problema envolve dois domínios (fluido e estrutura) considerações especiais devem ser feitas, pois o movimento translacional produz um campo de pressões diferente do produzido pelo movimento relativo. Assim, é comum encontrar na literatura a divisão em: pressão de movimento de corpo rígido e pressão associada à deformada modal (FERC, 2002 *apud* Ribeiro, 2010). Uma interpretação simples para este fenômeno pode ser estabelecida definindo forças inerciais produzidas pelo fluido, proporcionais às acelerações relativa e do solo (Ribeiro, 2010).

Segundo Ribeiro (2010), para o cálculo da pressão de movimento de corpo rígido considera-se uma fronteira rígida e uma frequência acoplada nula, resultando no campo de pressões de um fluido incompressível. Baseado em Fischer e Rammerstorfer (s.d.), a distribuição de pressão atribuída ao movimento de corpo rígido (p_{cr}), adaptada à condição de contorno do Caso 1, pode ser calculada por

$$p_{cr} = -\ddot{w}_0 \rho_f \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{2[1 - \cos(\bar{m}\pi)]}{\bar{m}\pi} \right\} \frac{I_n(\alpha r)}{I'_n(\alpha r)|_{r=a}} \text{sen}\left(\frac{\bar{m}\pi z}{L}\right) \quad (3.334)$$

sendo \ddot{w}_0 dado pela Equação 3.269 e $\alpha = \bar{m} \pi / L$.

Sendo a pressão de movimento de corpo rígido em $r = a$, uma carga radial q_r , substituindo a Equação 3.334 para $r = a$ na Equação 3.134, para um dado k , tem-se

$$F_{k(cr)} = -\frac{La[1 - \cos(m\pi)]}{N_k m} \left[\frac{\rho_f a}{\rho_E h} \frac{I_n(\alpha a)}{a I'_n(\alpha r)} \right]_{r=a} \begin{bmatrix} a_x(t)_{\text{para } \text{imn}() = \text{iml}(1)} \\ + \\ a_y(t)_{\text{para } \text{imn}() = \text{iml}(2)} \end{bmatrix} \quad (3.335)$$

A Equação 3.335 é adicionada ao segundo membro da igualdade da Equação 3.196. Substituindo a equação resultante na Equação 3.332 e daí na Equação 3.329, tem-se a equação de movimento para o caso.

A análise da estrutura é análoga à da seção Estrutura, Vibração forçada, Caso 1, Carga sísmica. Quanto à análise do fluido, a pressão associada à deformada modal é dada pela Equação 3.324. Seguindo o procedimento numérico apresentado na seção Estrutura, Vibração Forçada, Carga sísmica, determina-se $\ddot{\eta}_k(t)$, através da derivada segunda da Equação 3.203,

$$\ddot{\eta}_k(t) = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ e^{-\zeta_k \omega_k t} \left[\begin{array}{l} \eta_{ki} \cos(\gamma_k t) \\ + (\eta_{ki} \zeta_k \omega_k + \dot{\eta}_{ki}) \frac{\text{sen}(\gamma_k t)}{\gamma_k} \end{array} \right] + \frac{1}{\gamma_k} \int_0^t \left(p_{ki} + \frac{\Delta p_{ki}}{\Delta t_i} \tau \right) e^{-\zeta_k \omega_k (1-\tau)} \text{sen}[\gamma_k (t-\tau)] d\tau \right\} \quad (3.336)$$

Calculando esta equação em $\tau = \Delta t_i$ obtêm-se $\ddot{\eta}_{k,i+1}$ no tempo $i + 1$, que pode ser reescrita como fórmula de recorrência:

$$\ddot{\eta}_{i+1} = A'' \eta_i + B'' \dot{\eta}_i + C'' p_i + D'' p_{i+1} \quad (3.337)$$

em que

$$A'' = e^{-\zeta \omega \Delta t} \omega^2 \left[\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}(\gamma \Delta t) - \cos(\gamma \Delta t) \right] \quad (3.338)$$

$$B'' = e^{-\zeta\omega\Delta t} \gamma \left[\left(\frac{\zeta^2}{1-\zeta^2} - 1 \right) \text{sen}(\gamma\Delta t) - 2 \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(\gamma\Delta t) \right] \quad (3.339)$$

$$C'' = -\frac{e^{-\zeta\omega\Delta t}}{\gamma} \left[\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \gamma \right) \text{sen}(\gamma\Delta t) - \gamma \cos(\gamma\Delta t) \right] \quad (3.340)$$

$$D'' = \frac{e^{-\zeta\omega\Delta t} \text{sen}(\gamma\Delta t)}{\gamma\Delta t} \quad (3.341)$$

A pressão resultante é dada pelas parcelas apresentadas nas Equações 3.324 e 3.334.

3.3 PAINÉIS CILÍNDRICOS

O Caso 2 caracterizou-se pelo estudo de uma casca cilíndrica circular reta cortada por um plano paralelo ao seu eixo, mostrada na Figura 3.7. Realizou-se a análise de vibração livre da estrutura (casca desacoplada) baseada em Blevins (1980), que apresentou fórmula derivada da análise de Sewall (1967).

A casca foi considerada engastada-engastada na largura e engastada-livre no comprimento, cujo modelo está representado na Figura 4.4 (a).

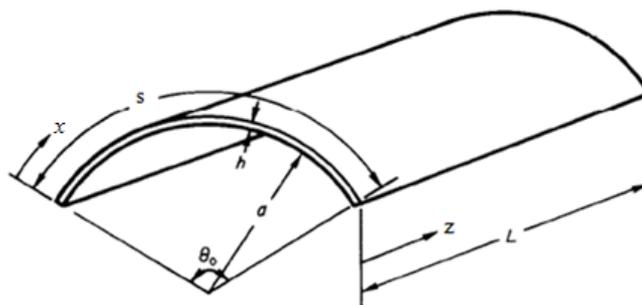


Figura 3.7 - Painel curvo cilíndricamente (Blevins, 1980, modificado)

Os pressupostos básicos na análise de Sewall são que: (1) apenas a inércia do movimento fora do plano é incluída, (2) o painel é abatido e delgado, (3) a flecha do painel é uma pequena fração de sua dimensão característica e (4) o modo de vibração pode ser aproximado na forma de separação de variáveis usando os seguintes modos de vibração de viga:

$$U = A \left[\frac{\partial}{\alpha_m \partial z} Z(z) \right] X(x) \quad (3.342)$$

$$V = BZ(z) \left[\frac{\partial}{\alpha_n \partial x} X(x) \right] \quad (3.343)$$

$$W = CZ(z)X(x) \quad (3.344)$$

onde U , V e W são os modos associados com os movimentos axial (u), tangencial (v) e radial (w), respectivamente; z é a coordenada axial e x é a coordenada tangencial. Os parâmetros A , B e C são determinados pelo procedimento de Rayleigh-Ritz usando as equações de energia para casca cilíndrica. α_m e α_n são parâmetros que dependem das condições de contorno. Z e X são escolhidos como sendo os modos de vibração de vigas de vão simples que satisfazem as condições de contorno em $z = (0, L)$ e $x = (0, s)$.

A frequência natural de um painel em radianos por segundo é a soma da frequência de uma placa plana mais um termo de curvatura: i.e.,

$$\omega_{mn}|_{\text{painel curvo}} = \left[\omega_{mn}^2|_{\text{placa plana de largura } s \text{ e comprimento } L} + \frac{\alpha_{mn} E h}{a^2 \rho_e h (1 - \nu^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.345)$$

sendo $m, n = 1, 2, 3, \dots$

A frequência da placa plana criada pelo “desenrolamento” do painel curvo, em radianos por segundo, é

$$\omega_{mn}|_{\text{placa plana}} = \pi^2 \left[\frac{G_1^4}{L^4} + \frac{G_2^4}{s^4} + \frac{2J_1 J_2 + 2\nu(H_1 H_2 - J_1 J_2)}{s^2 L^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{E h^3}{12 \rho_e h (1 - \nu^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.346)$$

onde E é o módulo de elasticidade, ν é a razão de Poisson, h é a espessura, ρ_e é a massa específica, a é o raio de curvatura, L é o comprimento da placa e s é a largura do painel medido circunferencialmente. Para um raio de curvatura infinito, $1/a = 0$, a frequência do painel reduz para a frequência da placa plana associada. O parâmetro adimensional α_{mn} é

$$\alpha_{mn} = \frac{\left\{ (G_1^4 - \nu^2 H_1^4)(G_2^4 - H_2^2) + \frac{1}{2}(1-\nu)J_1J_2 \left[G_1^4 \left(\frac{s}{L} \right)^2 - \nu^2 H_1^2 \left(\frac{s}{L} \right)^2 \right] + G_2^4 \left(\frac{L}{s} \right)^2 - H_2^2 \left(\frac{L}{s} \right)^2 \right\}}{\left\{ G_1^4 G_2^4 + \frac{1}{2}(1-\nu)J_1J_2 \left[G_1^4 \left(\frac{s}{L} \right)^2 + G_2^4 \left(\frac{L}{s} \right)^2 \right] - \nu^2 H_1^2 H_2^2 - \nu(1-\nu)J_1J_2 H_1 H_2 \right\}} \quad (3.347)$$

Os fatores modais adimensionais G , H e J são definidos em termos de integrais dos modos de vibração de viga

$$J_1 = \frac{L}{\pi^2} \int_0^L (Z')^2 dz \quad (3.348)$$

$$G_1^4 = \frac{L^3}{\pi^4} \int_0^L (Z'')^2 dz \quad (3.349)$$

$$H_1 = -\frac{L}{\pi^2} \int_0^L ZZ' dz \quad (3.350)$$

onde o apóstrofo denota diferenciação por z e os modos foram normalizados como:

$$\int_0^L (Z)^2 dx = L \quad (3.351)$$

Os fatores J_2 , G_2 e H_2 são dados pelas Equações 3.348 a 3.350, com o termo s substituindo L , o subscrito 2 substituindo o subscrito 1 e x substituindo z . A Tabela 3.2 apresenta G , H e J para os modos de vibração de vigas uniformes de vão simples utilizados.

Tabela 3.2 - Coeficientes das Equações 3.346 e 3.347 (Blevins, 1980)

Condições de contorno em bordas opostas	Índice do modo (m)	G	H	J
Engastada-Livre	1	0,597	-0,087	0,471
	2	1,494	1,347	3,284
	3	2,500	4,658	7,842
	>3	$m - \frac{1}{2}$	$\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 - \frac{2}{\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$	$\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 + \frac{2}{\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$
Engastada-Engastada	1	1,506	1,248	1,248
	2	2,500	4,658	4,658
	3	3,500	10,02	10,02
	>3	$m + \frac{1}{2}$	$\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 - \frac{2}{\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$	$\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 - \frac{2}{\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$

O modo de vibração de viga engastada-livre, segundo Blevins (1995), é dado por

$$\phi_m = \cosh\left(\frac{\lambda_m z}{L}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_m z}{L}\right) - \sigma_m \left[\sinh\left(\frac{\lambda_m z}{L}\right) - \sin\left(\frac{\lambda_m z}{L}\right) \right] \quad (3.352)$$

em que λ é um parâmetro adimensional, cuja equação transcendental é dada por

$$\cos(\lambda) \cosh(\lambda) + 1 = 0 \quad (3.353)$$

e σ_m é um parâmetro adimensional dado pela fórmula

$$\sigma_m = \frac{\sinh \lambda_m - \sin \lambda_m}{\cosh \lambda_m + \cos \lambda_m} \quad (3.354)$$

Os valores de λ_m e σ_m para o caso engastada-livre são computados na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 - Parâmetros λ_m e σ_m para o modo engastado-livre (Blevins, 1995)

m	λ_m	σ_m
1	1,87510407	0,734095515
2	4,69409113	1,018467319
3	7,85475744	0,999224497
4	10,99554073	1,000033553
5	14,13716839	0,999998550
> 5	$(2m-1)\frac{\pi}{2}$	$\frac{\sinh(\lambda_m) - \text{sen}(\lambda_m)}{\cosh(\lambda_m) + \cos(\lambda_m)}$

O modo de vibração de viga engastada-engastada, segundo Blevins (1995), é dado por

$$\phi_m = \cosh\left(\frac{\lambda_m z}{L}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_m z}{L}\right) - \sigma_m \left[\sinh\left(\frac{\lambda_m z}{L}\right) - \text{sen}\left(\frac{\lambda_m z}{L}\right) \right] \quad (3.355)$$

em que λ é um parâmetro adimensional, cuja equação transcendental é dada por

$$\cos(\lambda) \cosh(\lambda) = 1 \quad (3.356)$$

e σ_m é um parâmetro adimensional dado pela fórmula

$$\sigma_m = \frac{\cosh \lambda_m - \cos \lambda_m}{\sinh \lambda_m - \text{sen} \lambda_m} \quad (3.357)$$

Os valores de λ_m e σ_m para o caso engastado-engastado são computados na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 - Parâmetros λ_m e σ_m para o modo engastado-engastado (Blevins, 1995)

m	λ_m	σ_m
1	4,73004074	0,982502215
2	7,85320462	1,000777312
3	10,9956079	0,999966450
4	14,1371655	1,000001450
5	17,2787597	0,999999937
> 5	$(2m+1)(\pi/2)$	$\frac{\cosh(\lambda_m) - \cos(\lambda_m)}{\sinh(\lambda_m) - \text{sen}(\lambda_m)}$

O coeficiente α_m é igual a λ_m/L para os casos engastado livre e engastado-engastado.

4 MODELOS E PARÂMETROS DE ANÁLISE

4.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo é dedicado, inicialmente, a apresentar os dados completos dos casos analisados: geometrias, materiais, condições de contorno e cargas. A seguir é descrito o *modus operandi* das abordagens analítica e numérica e expostos os elementos utilizados, a formulação numérica e aspectos computacionais relativos à análise numérica utilizando o ANSYS 11.0. Finalmente, são mostradas a convergência e validação dos modelos numéricos e apresentadas técnicas de análise aproximadas que corroborem alguns resultados exclusivamente numéricos.

4.2 MODELOS

Sistemas de Coordenadas:

Sistemas de coordenadas são utilizados para localizar itens geométricos. Neste trabalho, no sistema de coordenadas cartesianas, os eixos x e y definem o plano horizontal (xOy) e o eixo z é o eixo vertical. As variáveis cartesianas podem ser relacionadas com as coordenadas cilíndricas por $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ ou, de outro modo, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta = \text{tg}^{-1}(y/x)$. A variável z é a mesma para os dois sistemas (ver Figura 3.3).

Nos cinco casos analisados, tanto os sistemas estruturais (cilindro de revolução, cilindro cortado e barragens em arco) quanto os fluidos (cavidades acústicas e reservatórios) apresentam simetria geométrica. O plano de simetria adotado foi o plano yOz . O eixo z foi definido como o eixo dos modelos cilíndricos.

4.2.1 Caso 1 - Cilindro de revolução

Os estudos iniciaram-se pela análise de vibrações (livres e forçadas) de cascas cilíndricas circulares retas (vazias e completamente preenchidas com água), pelo fato de estas apresentarem soluções analíticas fechadas que podem ser comparadas com soluções numéricas.

A estrutura (desacoplada) é uma casca cilíndrica circular reta biapoiada, sem restrição axial, a cavidade acústica (desacoplada) é cilíndrica com extremidades abertas e lateral fechada, e o sistema fluido-estrutura consiste de um cilindro biapoiado com as extremidades da cavidade acústica abertas (Figura 4.1);

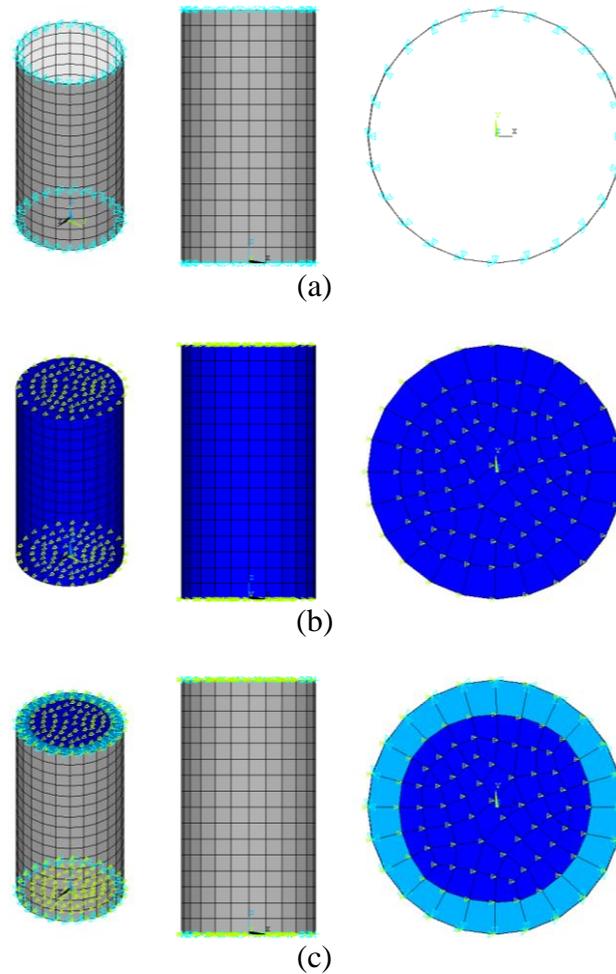


Figura 4.1 - Modelo do Caso 1: perspectiva, vista lateral e vista superior dos sistemas (a) estrutural desacoplado, (b) fluido desacoplado e (c) fluido-estrutura acoplado

O Caso 1 é um caso particularmente importante por ser simples o suficiente para resultar em soluções especialmente descomplicadas, além de constarem vários destes exemplos na literatura especializada.

A geometria e os dados dos materiais adotados no Caso 1 foram transcritos de Amabili e Dalpiaz (1995) *apud* Paidoussis (2004), que realizaram, dentre outros, um ensaio em um tanque com o eixo na posição vertical, cheio de água. As condições de contorno impostas à casca cilíndrica por placas delgadas nas extremidades foram consideradas muito próximas

do caso de uma casca simplesmente apoiada, aberta nas extremidades e, em função das condições de contorno similares, alguns resultados do Caso 1 foram comparados com seus resultados.

A casca cilíndrica circular reta analisada é de aço, com as seguintes propriedades físicas e geométricas:

- Massa específica $\rho_e = 7.680 \text{ kg/m}^3$;
- Módulo de Young $E = 206 \text{ GPa}$;
- Relação de Poisson $\nu = 0,3$;
- Raio médio $a = 175 \text{ mm}$;
- Espessura $h = 1,00 \text{ mm}$;
- Comprimento $L = 664 \text{ mm}$.

Os valores de rigidez resultaram:

- Rigidez de membrana $K = 2,26 \cdot 10^8 \text{ N/m}$;
- Rigidez flexional $D = 18,86 \text{ Nm}$.

Segundo Campos Junior (2011), relações geométricas devem ser observadas nas cascas, de modo a identificar quando uma casca cilíndrica é delgada ou espessa e quando é longa ou curta. Uma casca é dita delgada quando a razão $h/a \leq 0,05$, do contrário é dita espessa. Uma casca é dita longa quando a condição $\beta L \geq 5$, do contrário é dita curta, sendo

$$\beta = \left(\frac{Eh}{4a^2D} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.1)$$

Substituindo a Equação 3.21 na Equação 4.1, o fator β pode ser reescrito como:

$$\beta = \frac{[3(1-\nu^2)]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{ah}} \quad (4.2)$$

Sendo $h/a \cong 0,006$ e $\beta L \cong 64,57$, a casca analisada é classificada como delgada e longa.

O fluido considerado foi água, com as seguintes propriedades físicas adotadas:

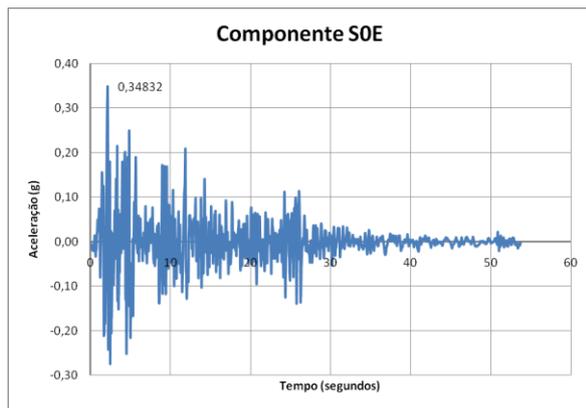
- Velocidade do som na água $c \approx 1.500 \text{ m/s}$;
- Massa específica $\rho_f = 1.000 \text{ kg/m}^3$.

Na análise de vibração forçada, a estrutura foi submetida a duas cargas:

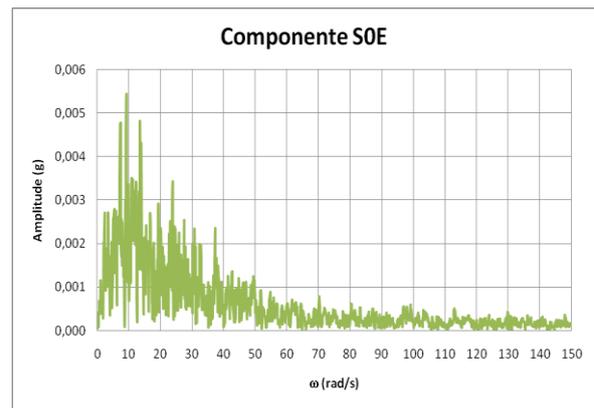
- I. carregamento harmônico pontual na direção radial em $z^* = L/2$, $\theta^* = 0^\circ$:

$$Q_r(z^*, \theta^*, t) = 1.000 \text{sen}(\bar{\omega} t) \text{ N} \quad (4.3)$$

- II. movimento (horizontal) do solo registrado em El Centro, Califórnia, EUA, durante o terremoto ocorrido no distrito de irrigação *Imperial Valley*, Califórnia, EUA de 18 de maio de 1940. O movimento do solo agindo nas direções x e y é decomposto, respectivamente, nas componentes S0E e S90E do movimento do solo registrado. Essas duas componentes do movimento do solo, suas acelerações de pico e seu espectro de frequências são mostradas nas Figuras 4.2 e 4.3. As acelerações são dadas em g , sendo $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$.



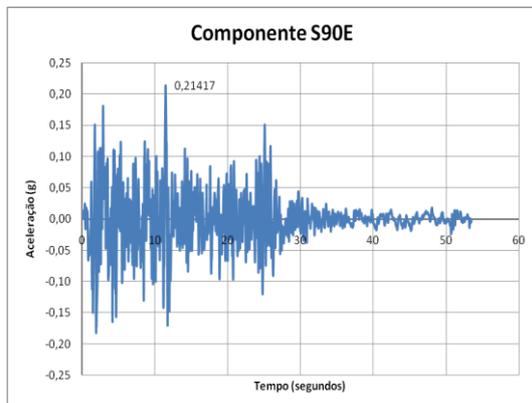
(a)



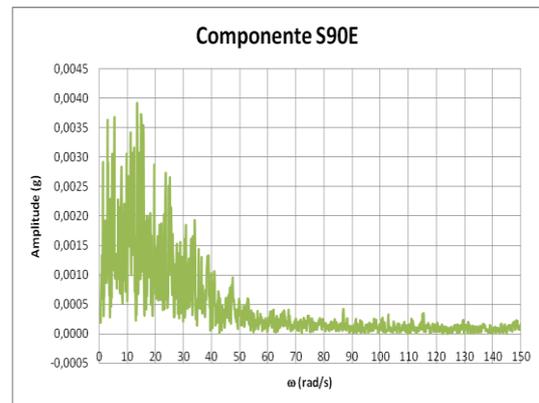
(b)

Figura 4.2 - Componente S0E do terremoto de El Centro: (a) registro aceleração x tempo e (b) espectro de frequências da excitação

(http://nisee.berkeley.edu/data/strong_motion/caltech/volume1.d/el_centro_1940_s00e)



(a)



(b)

Figura 4.3 - Componente S90E do terremoto de El Centro: (a) registro aceleração x tempo e (b) espectro de frequências da excitação

(http://nisee.berkeley.edu/data/strong_motion/caltech/volume1.d/el_centro_1940_s90w)

As curvas de resposta *amplitude do deslocamento x frequência aplicada* no caso (I) e *deslocamento x tempo* no caso (II), são analisadas no ponto de coordenada ($z = L/3$, $\theta = 30^\circ$). Além disso, são apresentados os deslocamentos axial (u), circunferencial (v) e radial (w) ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$, em $\theta = 30^\circ$) e uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ em $z = L/3$) para uma frequência de excitação $\bar{\omega} \approx 0,8\omega_1$, sendo ω_1 a primeira frequência natural em que a estrutura é excitada, no instante $t = \bar{T}/4$, sendo $\bar{T} = 2\pi/\bar{\omega}$, no caso (I) e para o instante $t = 5$ s no caso (II).

Nas análises fluido-estrutura, acrescentaram-se a esses resultados, as curvas de resposta *amplitude da pressão x frequência aplicada* no caso (I) e *pressão x tempo* no caso (II), no ponto de coordenada ($r \cong a/2$, $\theta \cong 30^\circ$, $z = L/3$) e a pressão (p) ao longo de três curvas: uma reta ($0 \leq r \leq a$, em $\theta = 30^\circ$, $z = L/3$), uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, em $r = a/2$, $z = L/3$) e em outra reta ($0 \leq z \leq L$, em $r = a/2$, $\theta = 30^\circ$). Essas respostas foram obtidas pelas abordagens analítica e numérica.

Amortecimento:

Segundo Ribeiro (2010), a estimativa da taxa de amortecimento (ζ) representa um problema envolvente, uma vez que os mecanismos de dissipação de energia presentes em sistemas estruturais não são totalmente compreendidos (Clough, 1993). Em muitas situações práticas são utilizadas análises experimentais, com um amortecimento viscoso equivalente estimado por meio de um decaimento de amplitudes entre um determinado número de ciclos (método de decaimento em vibração livre). Boa parte dos códigos normativos direcionados ao projeto sísmico adota valores de ζ em torno de 5%, independente da natureza do material envolvido (Chopra, 2001). É evidente que a presença do fluido adjacente exerce influência direta neste parâmetro. Neste caso surge o conceito de amortecimento adicional, proporcionado pelos efeitos de interação com o fluido (Chopra, 1988).

Para o Caso 1, nas análises harmônicas, o sistema estrutural foi considerado não-amortecido ($\zeta = 0\%$) e nas análises sísmicas, a razão de amortecimento foi adotada igual a 5%.

4.2.2 Caso 2 - Painel cilíndrico

No Caso 2 foi feita a análise de vibração livre de uma casca cilíndrica circular reta cortada por um plano paralelo ao seu eixo, sob as abordagens analítica e numérica para o sistema estrutural desacoplado e apenas sob a abordagem numérica para os sistemas fluido desacoplado e fluido-estrutura acoplado.

A casca analisada possui as seguintes propriedades físicas e geométricas:

- Massa específica $\rho_e = 7.920 \text{ kg/m}^3$;
- Módulo de Young $E = 177 \text{ GPa}$;
- Relação de Poisson $\nu = 0,3$;
- Raio médio $a = 1,016 \text{ m}$;
- Espessura $h = 1,905 \text{ cm}$;
- Comprimento $L = 50,8 \text{ cm}$.

Os dados utilizados foram transcritos de Blevins (1980), para uma relação $L/a = 0,5$.

A equação do plano de corte é $y \cong 0,981 \text{ m}$ uma vez que o ângulo adotado θ_0 foi igual a 30° (ver Figura 3.7). O arco s é, portanto, aproximadamente igual a $0,532 \text{ m}$. As condições de contorno adotadas são engastada em $z = 0$, livre em $z = L$ e engastada em $x = 0$, engastada em $x = s$ [ver Figura 3.7 e 4.4(a)]. Quanto às bordas engastadas, todos os movimentos translacionais e rotacionais foram impedidos.

Segundo Sewall (1967), a Equação 3.345 pode ser considerada como sendo satisfatória para o cálculo de frequências de painéis curvos desde que a curvatura do painel ($1/a$) não seja muito grande. Uma medida do limite real da curvatura é fornecida por um critério de casca abatida em que um elemento de casca é considerado abatido (uma placa ligeiramente curva) se a flecha não é maior que um quinto do menor lado da placa situado no plano de seus suportes. Berry e Reissner (1958) sugerem um valor de um oitavo para esta razão, mas indicam que ela pode ser maior.

Sendo $1/a \cong 0,984$ e a razão entre a flecha e o menor vão, aproximadamente igual a $0,068$ (menor que $1/8 = 0,125$), a casca analisada é classificada como abatida e a teoria apresentada pode ser utilizada.

Uma vez que $h/a \cong 0,019$ e $\beta L \cong 4,69$, a casca analisada é classificada como delgada e curta.

O fluido adotado é água, com os mesmos dados apresentados no Caso 1. As condições de contorno adotadas para a cavidade acústica são fechada no “fundo”, aberta no “topo” e fechada na lateral curva, aberta na lateral plana.

O modelo completo do Caso 2 é mostrado na Figura 4.4.

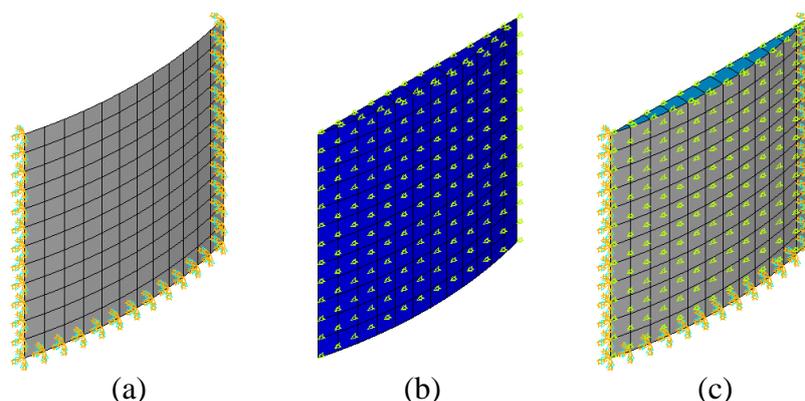


Figura 4.4 - Modelo do Caso 2: perspectiva dos sistemas (a) estrutural desacoplado, (b) fluido desacoplado e (c) fluido-estrutura acoplado

4.2.3 Casos 3 a 5 - Barragens e reservatórios

Nas análises dos Casos 3, 4 e 5, as barragens de concreto foram consideradas linearmente elásticas e suas deformações, pequenas, resultando em relações força-deformação lineares.

A rocha de fundação foi considerada infinitamente rígida na base das barragens e nas margens dos *canyons*, assumindo que as barragens são engastadas ao longo dos contornos que as servem de apoio (interfaces barragem-fundação). A crista das barragens foi considerada livre. A fundação não foi modelada.

A água foi considerada compressível e invíscida nos três casos e apenas efeitos lineares foram incluídos.

Na análise numérica da resposta dinâmica da interação barragem-reservatório (por exemplo, pelo método dos elementos finitos) aparecem dificuldades em consequência da grande extensão do domínio fluido a considerar (Zienkiewicz & Bettess, 1978). Em tal caso, o domínio infinito deve ser truncado em uma determinada distância da estrutura ao longo do reservatório, já que não se pode discretizar o domínio infinito (Silva, 2007).

Os reservatórios dos Casos 3, 4 e 5 foram modelados com comprimentos centrais horizontais respectivamente iguais a três, cinco e cinco vezes a altura máxima de água (H), considerada para fins didáticos, sempre igual à altura da barragem (H_b), medida em sua seção transversal central.

A Figura 4.5 mostra as condições de contorno adotadas nos reservatórios.

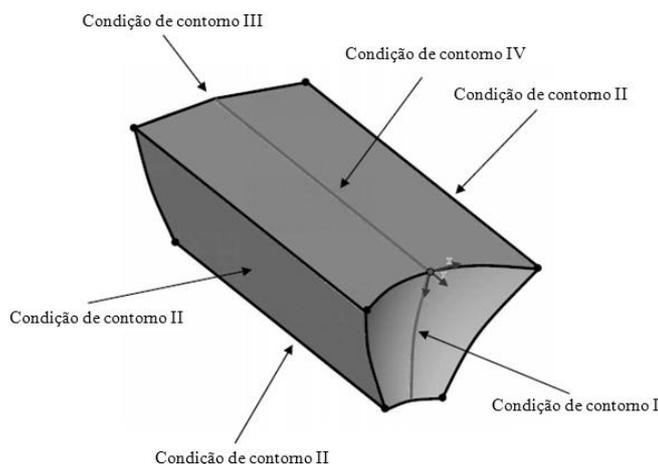


Figura 4.5 - Condições de contorno dos reservatórios (Seyedpoor *et al.*, 2009)

O contorno da interface barragem-reservatório (I) foi considerado fechado quando da análise do fluido desacoplado e quando da análise do sistema acoplado, foi introduzida a condição fluido-estrutura.

Na parte inferior e nas laterais (II) dos reservatórios, os contornos foram considerados fechados e constituídos de materiais não-absorventes acústicos (coeficiente de absorção igual a zero).

A condição de contorno na extremidade dos reservatórios oposta à barragem (III) - fronteira longínqua - é de pressão nula (Souza Junior, 2006).

Na superfície livre (IV), as ondas de superfície foram desprezadas e a condição de contorno foi considerada aberta.

Segundo Porter e Chopra (1981), geometrias simples assumidas para a barragem em arco e o domínio do fluido não seriam apropriadas para análises de problemas práticos, mas são

úteis no desenvolvimento da compreensão básica dos efeitos hidrodinâmicos na resposta dinâmica de barragens em arco reais.

As simplificações utilizadas na modelagem e nas condições de contorno dos reservatórios têm como consequência a não reprodução fidedigna dos resultados dos sistemas fluido-estrutura dos artigos, que adotam, em geral, interação fluido-fundação e material constituinte do leito com absorção acústica no contorno II e fronteira longínqua infinita no contorno III, o que caracteriza modelos mais realistas. Os resultados deste trabalho, para esses casos, devem ser encarados, portanto, como didáticos. Em se tratando de situações práticas, essas simplificações devem ser evitadas. Nos casos em que as diferenças nos resultados se mostraram excessivas, foram realizadas análises extras, sempre que possível, com geometrias mais simples ou com aproximações das condições de contorno não-simplificadas, garantindo a validação dos modelos e confirmando que as diferenças apresentadas se devem às simplificações adotadas.

4.2.4 Caso 3 - Barragem em arco cilíndrica

Baseado em Tsai e Li (1987), a barragem em arco cilíndrica analisada possui um raio igual a 83,33% da altura d'água do reservatório, com um ângulo de 50° entre as seções central e lateral. O modelo do Caso 3 é mostrado na Figura 4.6.

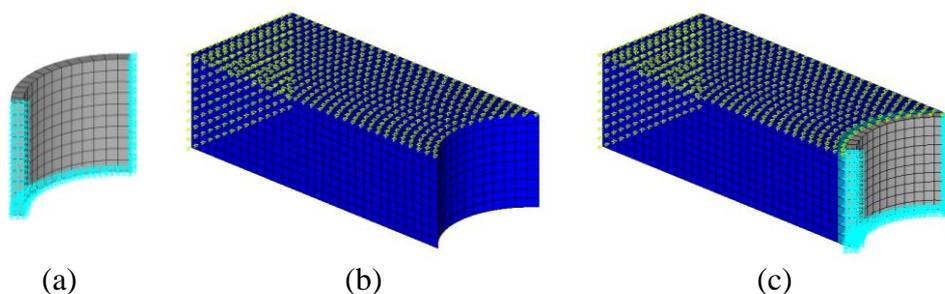


Figura 4.6 - Modelo do Caso 3: perspectiva dos sistemas (a) estrutural desacoplado, (b) fluido desacoplado e (c) fluido-estrutura acoplado

A barragem em arco cilíndrica analisada é de concreto, com as seguintes propriedades físicas e geométricas adotadas:

- Massa específica $\rho_e = 2.400 \text{ kg/m}^3$;

- Módulo de Young $E = 34 \text{ GPa}$;
- Relação de Poisson $\nu = 0,17$;
- Raio médio $R_0 = 25 \text{ m}$;
- Largura $B = 3,0 \text{ m}$;
- Altura $H_b = 30 \text{ m}$.

As seguintes propriedades físicas foram adotadas para o fluido:

- Velocidade do som na água $c = 1.440 \text{ m/s}$;
- Massa específica $\rho_f = 1.000 \text{ kg/m}^3$.

A análise de vibração livre é apresentada para os sistemas estrutural e fluido desacoplados e fluido-estrutura acoplado.

Para fins de validação do modelo acoplado, as distribuições de pressão hidrodinâmica na face montante da barragem quando o sistema é submetido a uma aceleração uniforme unitária na direção montante-jusante, desconsiderando a compressibilidade da água (substituindo o valor de c por 10^5 m/s), foram obtidas numericamente via ANSYS e comparadas aos resultados apresentados em Tsai e Li (1987). Considerou-se a razão de amortecimento igual a 0%. Diferentemente da simplificação utilizada no presente trabalho, em Tsai e Li (1987), a condição de contorno infinita é adotada na extremidade do reservatório oposta à barragem.

4.2.5 Caso 4 - Barragem em arco com simples curvatura

O sistema barragem em arco-água investigado no Caso 4 é mostrado na Figura 4.7. A face montante da barragem em arco é um segmento de cilindro circular, raio externo R , altura H , contido em margens que se estendem radialmente encerrando um ângulo central de 90° . A seção transversal radial da barragem é uniforme em torno do arco de circunferência. Esta

seção transversal é de formato trapezoidal, com a espessura radial variando linearmente de B_1 na crista até B_2 na base.

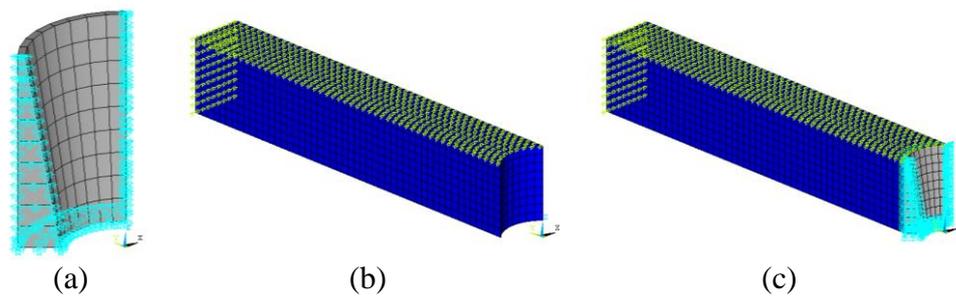


Figura 4.7 - Modelo do Caso 4: perspectiva dos sistemas (a) estrutural desacoplado, (b) fluido desacoplado e (c) fluido-estrutura acoplado

A barragem em arco com simples curvatura analisada é de concreto, com as seguintes propriedades físicas e geométricas:

- Massa específica $\rho_e = 2.400 \text{ kg/m}^3$;
- Módulo de Young $E = 34 \text{ GPa}$;
- Relação de Poisson $\nu = 0,17$;
- Raio externo $R = 15,0 \text{ m}$;
- Largura da crista $B_1 = 1,05 \text{ m}$;
- Largura da base $B_2 = 6,00 \text{ m}$;
- Altura $H_b = 30,0 \text{ m}$.

As seguintes propriedades físicas da água foram adotadas:

- Velocidade do som na água $c = 1.440 \text{ m/s}$;
- Massa específica $\rho_f = 1.000 \text{ kg/m}^3$.

Para fins de validação, as respostas dinâmicas da barragem em arco com simples curvatura, com relação entre o raio (externo) e a altura igual a 0,5, foram analisadas para duas condições: a barragem sem água, e a barragem com reservatório cheio considerando a água compressível. As funções de resposta à frequência aplicada - as acelerações na face montante da crista da barragem, à quarta seção do arco, devido às componentes montante-jusante e transversal do movimento do solo - foram comparadas aos resultados de Porter e Chopra (1981). Em Porter e Chopra (1981), há diferenças quanto ao modelo e às condições de contorno do reservatório em relação a este trabalho: as margens laterais do reservatório são perpendiculares às ombreiras da barragem ($\theta_0 = \pm 45^\circ$), considera-se condição fluido-estrutura nas margens laterais, mas não no fundo, e a condição de contorno de radiação no infinito é adotada na extremidade montante do reservatório. O terremoto é definido pelas componentes translacionais horizontais montante-jusante e transversal do movimento do solo. As respostas apresentadas foram devidas à aceleração harmônica unitária do solo. Considerou-se a razão de amortecimento igual a 5%.

A análise de vibração livre é apresentada para os sistemas estrutural e fluido desacoplados e fluido-estrutura acoplado.

4.2.6 Caso 5 - Barragem em arco com dupla curvatura

Baseado em Tan e Chopra (1996), foi analisada a resposta dinâmica da barragem *Morrow Point*, barragem em arco com dupla curvatura de concreto localizada no rio *Gunnison*, Colorado, EUA, mostrada na Figura 4.8, às três componentes do movimento do solo registrado em *Taft Lincoln School Tunnel*, *Kern County*, Califórnia, EUA, em 21 de julho de 1952, para duas condições: a barragem isolada com reservatório vazio ($H/H_b = 0$) e a barragem com água a uma profundidade igual à altura da barragem ($H/H_b = 1$), considerando a água compressível.



Figura 4.8 - Barragem *Morrow Point*

(http://www.usbr.gov/projects/Facility.jsp?fac_Name=Morrow+Point+Dam&groupName=General)

As dimensões da barragem *Morrow Point*, segundo Hall e Chopra (1983), são apresentadas na Tabela 4.1 e na Figura 4.9, que trás também o modelo analisado, em que y é a altura, B é a largura da seção transversal a partir do eixo (ver Figura 2.2), R é o raio, dados em pés (ft), medidos na seção transversal central, o índice m significa montante, o índice j , jusante e θ_0 é o semi-ângulo central dos arcos, em graus. A coluna cor indica a cor de plotagem dos arcos e medidas nas Figuras 4.9 (a) e (b).

Tabela 4.1 - Dimensões da barragem *Morrow Point* (Hall e Chopra, 1983)

y (ft^*)	B_m (ft^*)	B_j (ft^*)	R_m (ft^*)	R_j (ft^*)	θ_0 °	Cor
465	0,0	12,0	375,0	363,0	56,20	Vermelho
372	28,9	6,4	352,8	316,1	47,85	Laranja
279	46,3	0,8	324,9	258,0	39,50	Verde
186	52,9	-2,6	296,5	210,8	33,00	Cyan
93	49,0	2,7	266,7	171,3	26,50	Azul
0	34,4	17,2	234,8	136,6	13,25	Magenta

* $1ft = 0,3048 m$

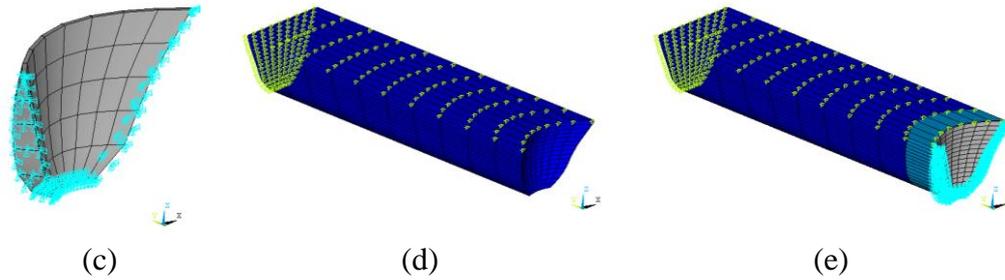


Figura 4.9 - (a) Seção transversal central, (b) planta superior da barragem *Morrow Point* e modelo completo do Caso 5: perspectiva dos sistemas (c) estrutural desacoplado, (d) fluido desacoplado e (e) fluido-estrutura acoplado

Sendo a largura da base (B_2) igual a 51,60 *ft* e a altura (H_B) igual a 465 *ft* na seção transversal central da barragem, o coeficiente de boa conformação (B_2/H_B) é igual a 0,111. A barragem é caracterizada como delgada ($B_2/H_B < 0,2$), alta ($H_B > 100\text{ m} = 30,48\text{ ft}$), em dupla curvatura e elástica apoiada em suportes laterais. Sendo o comprimento da barragem em arco ao longo da crista (L) igual a 723,37 *ft*, o coeficiente de sítio (L/H_B) é igual a 1,556, caracterizando um vale estreito.

O concreto da barragem *Morrow Point* apresenta as seguintes propriedades físicas:

- Massa específica $\rho_e = 2.483\text{ kg/m}^3$ ($\cong 4,82\text{ slug/ft}^3$);
- Módulo de Young $E = 27,58\text{ GPa}$ ($\cong 576 \cdot 10^6\text{ lbf/ft}^3$);
- Relação de Poisson $\nu = 0,2$;

As propriedades físicas da água são:

- Velocidade do som na água $c = 1.440\text{ m/s}$ ($\cong 4.724,41\text{ ft/s}$);
- Massa específica $\rho_f = 1.000\text{ kg/m}^3$ ($\cong 1,94\text{ slug/ft}^3$).

As unidades de medida entre parênteses foram utilizadas no programa de elementos finitos ANSYS 11.0, em função da modelagem da barragem ter sido feita em *ft*, sendo 1 *ft* = 0,3048 *m*, 1 *slug* $\cong 14,59390\text{ kg}$ e 1 *lbf/ft}^3 $\cong 4,78802 \cdot 10^{-5}\text{ MPa}$.*

Considerou-se a razão de amortecimento igual a 5%.

O movimento do solo registrado em *Taft Lincoln School Tunnel* durante o terremoto em *Kern County*, California, EUA de 21 de julho de 1952, foi selecionado como campo de aceleração livre do solo para a análise da barragem *Morrow Point*. Os movimentos do solo agindo nas direções montante (y), transversal (x) e vertical (z) são definidos, respectivamente, como componentes S69E, S21W e vertical do movimento do solo registrado. Os picos de aceleração são $0,18g$, $0,16g$ e $0,10g$ para as três componentes, respectivamente. Os registros e os espectros de frequência, dados em g , são apresentados nas Figuras 4.10, 4.11 e 4.12.

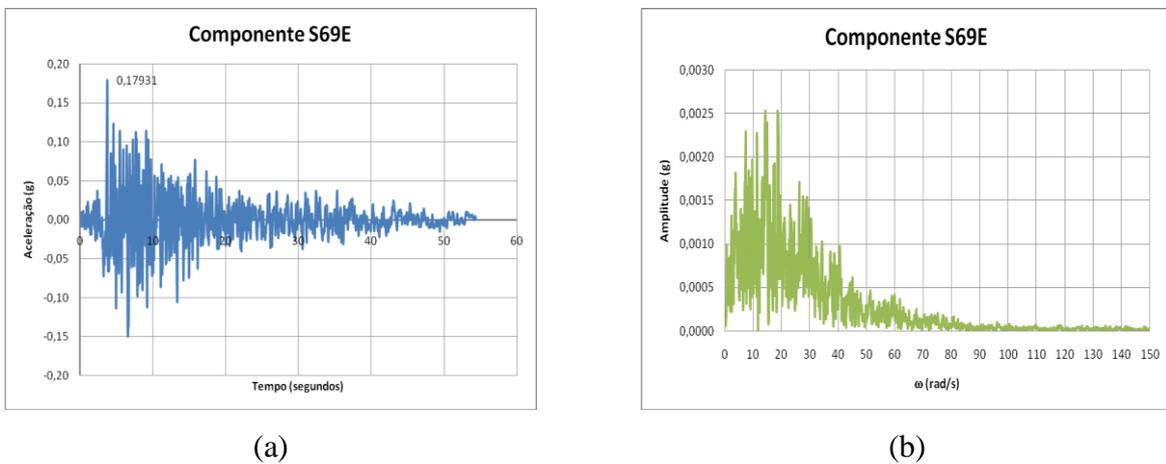
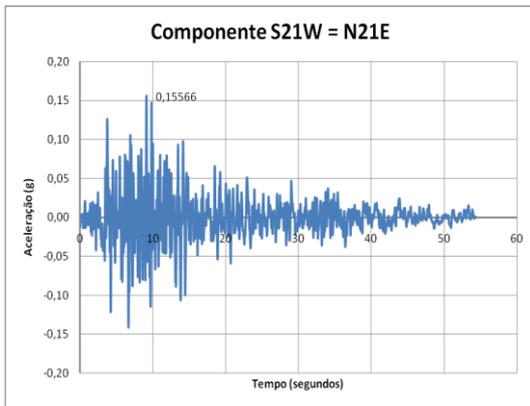
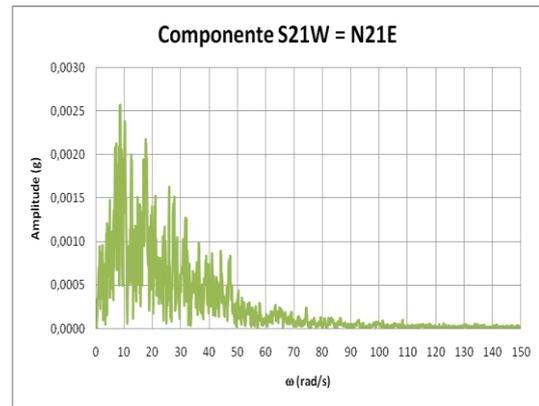


Figura 4.10 - Componente S69E do terremoto de Taft: (a) registro aceleração x tempo e (b) espectro de frequências da excitação

(http://nisee.berkeley.edu/data/strong_motion/caltech/volume1.d/taft_1952_s69e)



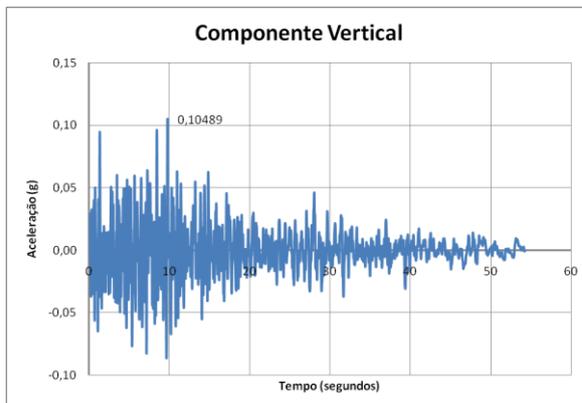
(a)



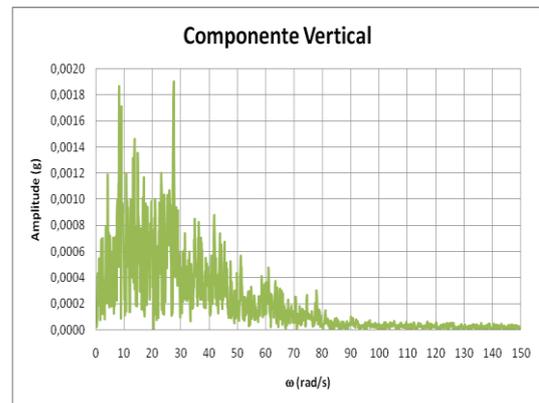
(b)

Figura 4.11 - Componente S21W do terremoto de Taft: (a) registro aceleração x tempo e (b) espectro de frequências da excitação

(http://nisee.berkeley.edu/data/strong_motion/caltech/volume1.d/taft_1952_n21e)



(a)



(b)

Figura 4.12 - Componente vertical do terremoto de Taft: (a) registro aceleração x tempo e (b) espectro de frequências da excitação

(http://nisee.berkeley.edu/data/strong_motion/caltech/volume1.d/taft_1952_vert)

Os resultados da resposta apresentados são: as variações no tempo do deslocamento radial no ponto da crista da barragem onde ocorreu o deslocamento radial máximo, as tensões nas faces montante e jusante da barragem nos instantes de tempo em que ocorreram as tensões de tração máximas e os envelopes de tensões de tração máximas, devido às três componentes simultaneamente, para os casos de reservatório vazio e completamente cheio.

A análise de vibração livre é apresentada para os sistemas estrutural e fluido desacoplados e fluido-estrutura acoplado.

A validação do modelo estrutural do Caso 5 foi feita pela comparação de propriedades dos modos fundamentais obtidas através do ANSYS e as apresentadas por Tan e Chopra (1996).

4.3 ABORDAGEM ANALÍTICA

Foram elaboradas planilhas de cálculo em Excel® para automatizar as abordagens analíticas em todos os casos que contam com essas soluções. A Figura 4.13 mostra um exemplo, onde os valores em vermelho são referentes aos dados de entrada, que podem ser alterados pelo usuário de forma a se adaptar a outras geometrias e materiais do modelo; os demais valores são obtidos de forma automática.

Nas séries das formulações analíticas de vibração forçada, foram considerados: $i = 1,2,3$; $m = 1$ a 10 e $n = 0$ a 20, em problemas do sistema estrutural, e $i = 1$ a 5; $m = 1$ a 10 e $n = 0$ a 10, em problemas do sistema fluido-estrutura. Para a pressão atribuída ao movimento de corpo rígido (Equação 3.334), $\bar{m} = 1$ a 10.

Caso 2		m (C.C. engastada-livre)				
<i>Estrutura</i>		1	0,597	-0,087	0,471	
		2	1,494	1,347	3,284	
		3	2,500	4,658	7,842	
<i>Propriedades Físicas</i>		n (C.C. engastada-engastada)				
ρ_e (kg/m ³)	7,920	1	1,506	1,248	1,248	
E (Pa)	1,77E+11	2	2,500	4,658	4,658	
ν	0,3	3	3,500	10,020	10,020	
<i>Geometria</i>		$\omega_{placa\ plana}$ (rad/s)				
a (m)	1,01600	n	m	1	2	3
h (m)	0,01905	1		2,352,74	4,091,68	8,006,83
L (m)	0,50800	2		6,182,72	8,101,98	11,885,95
θ_0 °	30	3		11,904,65	13,950,82	17,739,95
Arco (m)	0,532	α				
Vão (m)	0,526	n	m	1	2	3
Flecha (m)	0,035	1		0,69716	0,75540	0,39783
<i>Tipo</i>		2		0,44402	0,49746	0,28676
Casca abatida		3		0,33049	0,35800	0,22369
		$\omega_{psinel\ curvo}$ (rad/s)				
		n	m	1	2	3
		1		4,703,37	5,891,84	8,577,55
		2		6,984,97	8,802,12	12,169,57
		3		12,230,44	14,252,81	17,889,32

Figura 4.13 - Exemplo de planilha de cálculo analítico: determinação das frequências naturais do sistema estrutural desacoplado do Caso 2

4.4 ABORDAGEM NUMÉRICA

A modelagem numérica de todos os casos foi feita no software ANSYS 11.0 que é baseado no método dos elementos finitos (MEF) com o qual foi possível determinar as respostas dos modelos e assim comparar estes resultados com os valores obtidos pelas formulações analíticas e/ou comparativos numéricos disponíveis na literatura.

Em geral, uma solução de elementos finitos pode ser dividida nas três fases seguintes:

- *Pré-processamento*: definição do problema. As principais etapas do pré-processamento são: (1) definir *keypoints*, linhas, áreas, volumes, (2) definir o tipo de elemento e as propriedades dos materiais e geométricas e (3) malhar as linhas, áreas, volumes, conforme necessário;
- *Solução*: atribuição de cargas, restrições e solução do conjunto de equações resultante; e
- *Pós-processamento*: processamento posterior e visualização dos resultados.

Elementos Utilizados:

Os modelos foram simulados com elementos finitos da biblioteca do programa ANSYS 11.0, a saber: SHELL63 para as cascas (Casos 1 e 2), SOLID95 para as barragens em arco (Casos 3 a 5) e FLUID30 para o fluido (Casos 1 a 5). Alguns aspectos desses elementos obtidos a partir da biblioteca do programa são apresentados a seguir.

SHELL63:

Elementos de casca pertencem a uma classe especial de elementos projetados para modelar eficientemente estruturas delgadas. O elemento SHELL63 é definido por quatro nós (I, J, K, L). Tem ambas as capacidades de flexão e de membrana. Ambas as cargas no plano e normais são permitidas. O elemento tem seis graus de liberdade em cada nó: translações nas direções x , y e z nodais (UX, UY, UZ) e rotações em torno dos eixos x , y e z nodais (ROTX, ROTY, ROTZ).

A geometria, localização dos nós e o sistema de coordenadas para esse elemento são mostrados na Figura 4.14. As faces do elemento são apresentadas pelos números

circulados: face 1 (I-J-K-L) (fundo, na direção +Z), face 2 (I-J-K-L) (topo, na direção -Z), face 3 (J-I), face 4 (K-J), face 5 (L-K), face 6 (I-L). Um elemento em forma de triângulo pode ser formado, definindo o mesmo número de nó para os nós K e L.

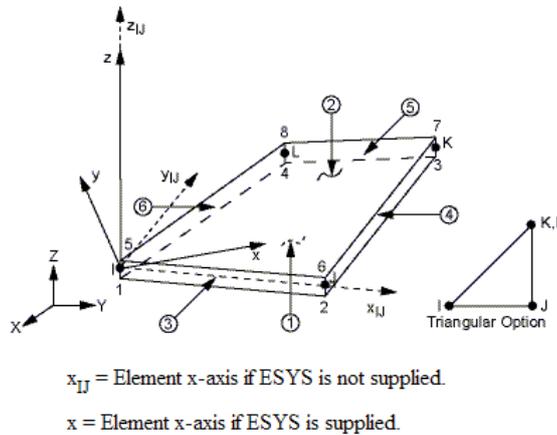
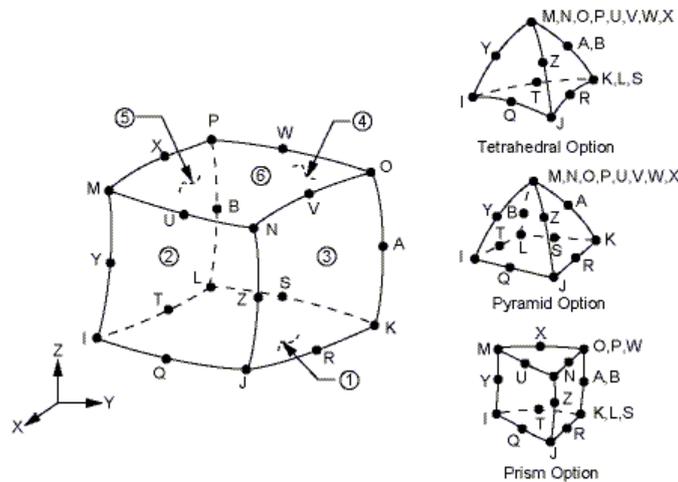


Figura 4.14 - Geometria do elemento SHELL63
(Biblioteca ANSYS)

SOLID95:

O elemento SOLID95 é utilizado para modelagem 3D de estruturas sólidas. Pode suportar formas irregulares sem grande perda de precisão. Elementos SOLID95 têm formas de deslocamento compatíveis e são bem adequados para modelar limites curvos. O elemento é definido por 20 nós (I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, A, B) com três graus de liberdade por nó: translações nas direções x , y e z nodais (UX, UY, UZ). O elemento pode ter qualquer orientação espacial.

A geometria, localizações dos nós e o sistema de coordenadas para esse elemento são mostrados na Figura 4.15. As faces do elemento são apresentadas pelos números circulados: face 1 (J-I-L-K), face 2 (I-J-N-M), face 3 (J-K-O-N), face 4 (K-L-P-O), face 5 (L-I-M-P) e face 6 (M-N-O-P). Um elemento em forma de prisma pode ser formado, definindo os mesmos números de nó para os nós K, L e S, nós A e B e nós O, P e W. Um elemento em forma tetraédrica e um elemento em forma piramidal podem também ser formados.



Geometria do elemento SOLID95
(Biblioteca ANSYS)

FLUID30:

O elemento FLUID30 é utilizado para modelar o meio fluido e a interface em problemas de interação fluido-estrutura. A equação que rege problemas acústicos, a equação de onda 3D, foi discretizada levando em conta o acoplamento da pressão acústica e do movimento estrutural na interface. O elemento tem oito nós de canto (I, J, K, L, M, N, O, P) com quatro graus de liberdade por nó: translações nas direções x , y e z nodais e pressão (UX, UY, UZ, PRES). As translações, no entanto, são aplicáveis apenas nos nós que se encontram na interface. Efeitos de aceleração, como em problemas de *sloshing*, podem ser incluídos. O elemento possui a capacidade de incluir amortecimento de material absorvente de som na interface.

A geometria, localização dos nós e o sistema de coordenadas para este elemento são mostrados na Figura 4.16. As faces do elemento são apresentadas pelos números circulos: face 1 (J-I-L-K), face 2 (I-J-N-M), face 3 (J-K-O-N), face 4 (K-L-P-O), face 5 (L-I-M-P) e face 6 (M-N-O-P) Um elemento em forma de prisma pode ser formado, definindo os mesmos números de nó para os nós K e L e nós O e P. Um elemento em forma tetraédrica pode também ser formado.

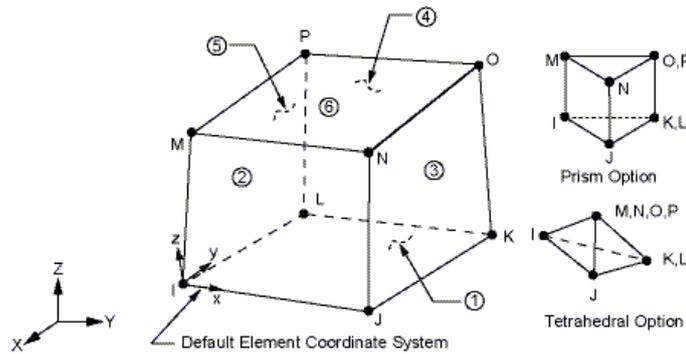


Figura 4.16 - Geometria do elemento FLUID30
(Biblioteca ANSYS)

Formulação Numérica:

A formulação numérica apresentada a seguir foi transcrita, em grande parte, da referência teórica do ANSYS 11.0. As formulações apresentadas são baseadas no sistema de coordenadas cartesianas.

Estrutura:

A tensão, quantidade de força que atua em uma unidade de área de material, está relacionada com a deformação desse material por:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^{el}\} \quad (4.4)$$

onde $\{\sigma\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{xz}]^T$ é o vetor de tensão, $[D]$ é a elasticidade, ou matriz de rigidez elástica ou matriz tensão-deformação, $\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon^{th}\}$ é o vetor de deformação elástica, $\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \varepsilon_{xy} \ \varepsilon_{yz} \ \varepsilon_{xz}]^T$ é o vetor de deformação total, $\{\varepsilon^{th}\} = \Delta T [\alpha_x^{se} \ \alpha_y^{se} \ \alpha_z^{se} \ 0 \ 0 \ 0]^T$ é o vetor de deformação térmica, α_x^{se} é o coeficiente secante de expansão térmica na direção x , $\Delta T = T - T_{ref}$, T é a temperatura corrente no ponto em questão e T_{ref} é a temperatura de referência (deformação livre).

O vetor de tensão é mostrado na Figura 4.17. A convenção de sinais para tensões e deformações diretas usadas no programa ANSYS é que a tração é positiva e a compressão

negativa. Para cisalhamento, positivo é quando os dois eixos positivos aplicáveis giram um em direção ao outro.

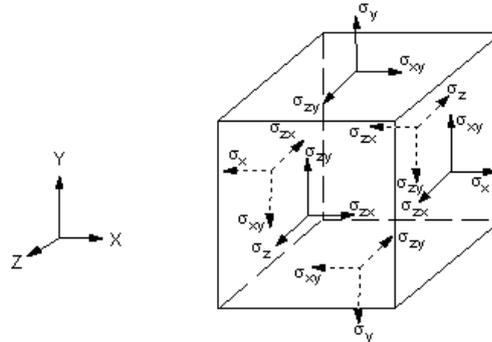


Figura 4.17 - Definição do vetor de tensão (ANSYS)

A Equação 4.4 pode também ser reescrita como:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^{th}\} + [D]^{-1} \{\sigma\} \quad (4.5)$$

A matriz de flexibilidade, $[D]^{-1}$, é

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_x & -\nu_{xz}/E_x & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{yx}/E_y & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_y & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{zx}/E_z & -\nu_{zy}/E_z & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xz} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

onde os termos típicos são: E_x é o módulo de Young na direção x , ν_{xy} é a razão de Poisson maior, ν_{yx} é a razão de Poisson menor, G_{xy} é módulo de cisalhamento no plano xy .

Também, a matriz $[D]^{-1}$ se presume ser simétrica, de modo que:

$$\frac{\nu_{yx}}{E_y} = \frac{\nu_{xy}}{E_x} \quad (4.7)$$

$$\frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x} \quad (4.8)$$

$$\frac{\nu_{zy}}{E_z} = \frac{\nu_{yz}}{E_y} \quad (4.9)$$

Para materiais isotrópicos $E_x = E_y = E_z$ e $\nu_{xy} = \nu_{yz} = \nu_{xz} = \nu_{yx} = \nu_{zy} = \nu_{zx}$.

Expandindo a Equação 4.5 com as Equações 4.6 a 4.9 e escrevendo as seis equações explicitamente,

$$\varepsilon_x = \alpha_x \Delta T + \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{xy} \sigma_y}{E_x} - \frac{\nu_{xz} \sigma_z}{E_z} \quad (4.10)$$

$$\varepsilon_y = \alpha_y \Delta T - \frac{\nu_{xy} \sigma_x}{E_x} + \frac{\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{yz} \sigma_z}{E_z} \quad (4.11)$$

$$\varepsilon_z = \alpha_z \Delta T - \frac{\nu_{xz} \sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yz} \sigma_y}{E_y} + \frac{\sigma_z}{E_z} \quad (4.12)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G_{xy}} \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G_{yz}} \quad (4.14)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G_{xz}} \quad (4.15)$$

onde os termos típicos são: ε_x é a deformação direta na direção x , σ_x é a tensão direta na direção x , ε_{xy} é a deformação de cisalhamento no plano xy e σ_{xy} é a tensão de cisalhamento no plano xy .

Alternativamente, a Equação 4.4 pode ser expandida pela Equação 4.6, para se obter seis equações explícitas:

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{E_x}{h} \left[1 - (\nu_{yz})^2 \frac{E_z}{E_y} \right] (\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + \frac{E_y}{h} \left[\nu_{xy} + \nu_{xz} \nu_{yz} \frac{E_z}{E_y} \right] (\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) \\ & + \frac{E_z}{h} (\nu_{xz} + \nu_{yz} \nu_{xy}) (\varepsilon_z - \alpha_z \Delta T) \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = & \frac{E_y}{h} \left[\nu_{xy} + \nu_{xz} \nu_{yz} \frac{E_z}{E_y} \right] (\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + \frac{E_y}{h} \left[1 - (\nu_{xz})^2 \frac{E_z}{E_x} \right] (\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) \\ & + \frac{E_z}{h} \left(\nu_{yz} + \nu_{xz} \nu_{xy} \frac{E_y}{E_x} \right) (\varepsilon_z - \alpha_z \Delta T) \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = & \frac{E_z}{h} (\nu_{xz} + \nu_{yz} \nu_{xy}) (\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + \frac{E_y}{h} \left[\nu_{yz} + \nu_{xz} \nu_{xy} \frac{E_y}{E_x} \right] (\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) \\ & + \frac{E_z}{h} \left[1 - (\nu_{xy})^2 \frac{E_y}{E_x} \right] (\varepsilon_z - \alpha_z \Delta T) \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\sigma_{xy} = G_{xy} \varepsilon_{xy} \quad (4.19)$$

$$\sigma_{yz} = G_{yz} \varepsilon_{yz} \quad (4.20)$$

$$\sigma_{xz} = G_{xz} \varepsilon_{xz} \quad (4.21)$$

onde:

$$h = 1 - (\nu_{xy})^2 \frac{E_y}{E_x} - (\nu_{yz})^2 \frac{E_z}{E_y} - (\nu_{xz})^2 \frac{E_z}{E_x} - 2\nu_{xy} \nu_{yz} \nu_{xz} \frac{E_z}{E_x} \quad (4.22)$$

Os módulos de cisalhamento G_{xy} , G_{yz} e G_{xz} , para materiais isotrópicos, são computados como:

$$G_{xy} = G_{yz} = G_{xz} = \frac{E_x}{2(1 + \nu_{xy})} \quad (4.23)$$

O princípio dos trabalhos virtuais declara que uma variação virtual (muito pequena) da energia de deformação interna deve ser compensada por uma variação idêntica no trabalho externo devido às cargas aplicadas, ou:

$$\delta S = \delta W \quad (4.24)$$

onde $S = S_1 + S_2$ é a energia de deformação, $W = W_1 + W_2 + W_3$ é o trabalho externo e δ é o operador virtual.

A energia de deformação virtual é

$$\delta S_1 = \int_{vol} \{\delta \varepsilon\} \{\sigma\} d(vol)^T \quad (4.25)$$

onde $\{\varepsilon\}$ é o vetor de deformação, $\{\sigma\}$ é o vetor de tensão e vol é o volume do elemento.

Continuando a formulação, assumido materiais e geometria lineares, as Equações 4.4 e 4.25 são combinadas para fornecer:

$$\delta S_1 = \int_{vol} (\{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} - \{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon^{th}\}) d(vol) \quad (4.26)$$

As deformações podem ser relacionadas aos deslocamentos nodais por:

$$\{\varepsilon\} = [B_u] \{u_e\} \quad (4.27)$$

onde $[B_u]$ é a matriz deslocamento-deformação, baseada nas funções de forma do elemento e $\{u_e\}$ é o vetor de deslocamento nodal.

A matriz deslocamento-deformação tridimensional é dada por

$$[B_u] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N_u] \quad (4.28)$$

onde $[N_u]$ é a matriz das funções de forma.

Será assumido que todos os efeitos estão no sistema cartesiano global. Combinando a Equações 4.27 com a Equação 4.26, e notando que $\{u\}$ não varia sobre o volume:

$$\delta S_1 = \{\delta u_e\}^T \int_{vol} [B_u]^T [D] [B_u] d(vol) \{u_e\} - \{\delta u_e\}^T \int_{vol} [B_u]^T [D] \{\varepsilon^{th}\} d(vol) \quad (4.29)$$

Outra forma de energia de deformação virtual ocorre quando uma superfície se move contra uma resistência distribuída, como em um apoio elástico contínuo. Isso pode ser escrito como:

$$\delta S_2 = \int_{\acute{a}rea_f} \{\delta w_n\}^T \{\sigma\} d(\acute{a}rea_f) \quad (4.30)$$

onde $\{\delta w_n\}$ é o movimento normal à superfície, $\{\sigma\}$ é o esforço (tensão) realizado pela superfície e $\acute{a}rea_f$ é a área da resistência distribuída.

Ambos $\{w_n\}$ e $\{\sigma\}$ geralmente terão apenas uma componente não-nula. O deslocamento normal ao *point-wise* está relacionado ao deslocamento nodal por:

$$\{w_n\} = [N_{u_n}] \{u_e\} \quad (4.31)$$

onde $[N_{u_n}]$ é a matriz das funções de forma para movimentos normais à superfície.

A tensão $\{\sigma\}$, é

$$\{\sigma\} = k\{w_n\} \quad (4.32)$$

onde k é a rigidez da fundação em unidades de força por comprimento por unidade de área.

Combinando a Equação 4.30 a 4.32, e assumindo que k é constante sobre a área,

$$\delta S_2 = \{\delta u\}^T k \int_{\text{área}_f} [N_{u_n}]^T [N_{u_n}] d(\text{área}_f) \{u\} \quad (4.33)$$

Em seguida, o trabalho virtual será considerado. Os efeitos inerciais serão estudados primeiro:

$$\delta W_1 = - \int_{\text{vol}} \{\delta w\}^T \frac{\{F^{accel}\}}{\text{vol}} d(\text{vol}) \quad (4.34)$$

onde $\{w\}$ é o vetor de deslocamentos de um ponto geral e $\{F^{accel}\}$ é o vetor força aceleração (D'Alembert).

De acordo com a segunda lei de Newton:

$$\frac{\{F^{accel}\}}{\text{vol}} = \rho_e \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{w\} \quad (4.35)$$

onde ρ_e é a densidade da estrutura e t é o tempo.

Os deslocamentos no elemento estão relacionados com os deslocamentos nodais por:

$$\{w\} = [N_u] \{u_e\} \quad (4.36)$$

onde $[N_u]$ é a matriz das funções de forma. Combinando as Equações 4.34, 4.35 e 4.36 e assumindo que ρ_e é constante sobre o volume,

$$\delta W_1 = -\{\delta u\}^T \rho_e \int_{vol} [N_u]^T [N_u] d(vol) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u_e\} \quad (4.37)$$

A formulação do vetor força de pressão começa com:

$$\delta W_2 = \int_{\acute{a}rea_p} \{\delta w_n\}^T P d(\acute{a}rea_p) \quad (4.38)$$

onde $\{P\}$ é o vetor pressão aplicada (normalmente contém apenas uma componente não-nula) e $\acute{a}rea_p$ é a área sobre a qual a pressão age.

Combinando as Equações 4.36 e 4.38

$$\delta W_2 = \{\delta u_e\}^T \int_{\acute{a}rea_p} [N_{u_n}]^T \{P\} d(\acute{a}rea_p) \quad (4.39)$$

Salvo indicação em contrário, as pressões são aplicadas à superfície exterior de cada elemento e são normais em superfícies curvas, se aplicável.

Forças nodais aplicadas ao elemento podem ser representadas por:

$$\delta W_3 = \{\delta u_e\}^T \{F_e^{nd}\} \quad (4.40)$$

onde $\{F_e^{nd}\}$ são forças nodais aplicadas ao elemento.

Finalmente, as Equações 4.24, 4.29, 4.33, 4.37, 4.39 e 4.40 podem ser combinadas para se obter:

$$\begin{aligned} & \{\delta u_e\}^T \int_{vol} [B_u]^T [D] [B_u] d(vol) \{u_e\} - \{\delta u_e\}^T \int_{vol} [B_u]^T [D] \{\varepsilon^{th}\} d(vol) \\ & + \{\delta u_e\}^T k \int_{\acute{a}rea_f} [N_{u_n}]^T [N_{u_n}] d(\acute{a}rea_f) \{u_e\} = -\{\delta u_e\}^T \rho_e \int_{vol} [N_u]^T [N_u] d(vol) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u_e\} \quad (4.41) \\ & + \{\delta u_e\}^T \int_{\acute{a}rea_p} [N_{u_n}]^T \{P\} d(\acute{a}rea_p) + \{\delta u_e\}^T \{F_e^{nd}\} \end{aligned}$$

Notando que o vetor $\{\delta u_e\}^T$ é um conjunto de deslocamentos virtuais arbitrários comum em todos os termos acima, a Equação 4.41 reduz-se a:

$$([K_e] + [K_e^f])\{u_e\} - \{F_e^{th}\} = -[M_e]\{\ddot{u}_e\} + \{F_e^{pr}\} + \{F_e^{nd}\} \quad (4.42)$$

onde

$$[K_e] = \int_{vol} [B_u]^T [D] [B_u] d(vol) \quad (4.43)$$

é matriz de rigidez do elemento,

$$[K_e^f] = k \int_{\acute{a}rea_f} [N_{u_n}]^T [N_{u_n}] d(\acute{a}rea_f) \quad (4.44)$$

é a matriz de rigidez da fundação do elemento,

$$\{F_e^{th}\} = \int_{vol} [B_u]^T [D] \{\varepsilon^{th}\} d(vol) \quad (4.45)$$

é o vetor de carga térmica do elemento,

$$[M_e] = \rho_e \int_{vol} [N_u]^T [N_u] d(vol) \quad (4.46)$$

é a matriz de massa do elemento,

$$\{\ddot{u}_e\} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u_e\} \quad (4.47)$$

é o vetor aceleração e

$$\{F_e^{pr}\} = \int_{\acute{a}rea_p} [N_{u_n}]^T \{P\} d(\acute{a}rea_p) \quad (4.48)$$

é o vetor de pressão do elemento.

A Equação 4.42 representa a equação de equilíbrio em um elemento base.

Desconsiderando $[K_e^f]$, agrupando os vetores de carga e considerando uma força devido a resistências (friccionais) opostas ao movimento, na Equação 4.42, a equação dinâmica estrutural discretizada pode ser formulada como mostrado na Equação 4.49.

$$[M_e]\{\ddot{u}_e\} + [C_e]\{\dot{u}_e\} + [K_e]\{u_e\} = \{F^a\} \quad (4.49)$$

onde $[M_e]$ é a matriz de massa estrutural, $[C_e]$ é a matriz de amortecimento estrutural, $[K_e]$ é a matriz de rigidez estrutural, $\{\ddot{u}_e\}$ é o vetor de aceleração nodal, $\{\dot{u}_e\}$ é o vetor de velocidade nodal, $\{u_e\}$ é o vetor de deslocamento nodal e $\{F^a\}$ é o vetor de carga aplicada.

Segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), as resistências opostas ao movimento podem ser devido a movimentos microestruturais, resistência do ar, etc e são frequentemente relacionadas de forma não-linear à velocidade $\{\dot{u}_e\}$. Por simplicidade de tratamento, entretanto, apenas uma resistência do tipo viscosa linear será considerada, resultando em forças de volume unitárias em um problema estático equivalente de magnitude $-\mu\{\dot{u}_e\}$, onde μ é um conjunto de parâmetros de viscosidade que pode presumivelmente ser dado em valores numéricos. A matriz $[C_e]$ é montada pela regra usual de submatrizes do elemento, dada por

$$[C_e] = \int_{vol} [N_u]^T \mu [N_u] d(vol) \quad (4.50)$$

Acústica:

Em problemas de interação fluido acústico-estrutura, a equação dinâmica estrutural precisa ser considerada em conjunto com as equações de Navier-Stokes de quantidade de movimento do fluido e a equação de continuidade do fluxo.

As equações de Navier-Stokes são como se segue:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho_f v_x}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_f v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_f v_y v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_f v_z v_x)}{\partial z} \\
& = \rho_f g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + R_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_e \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + T_x
\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho_f v_y}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_f v_x v_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_f v_y v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_f v_z v_y)}{\partial z} \\
& = \rho_f g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + R_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_e \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + T_y
\end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho_f v_z}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_f v_x v_z)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_f v_y v_z)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_f v_z v_z)}{\partial z} \\
& = \rho_f g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + R_z + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_e \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + T_z
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Onde g_x , g_y e g_z são as componentes da aceleração devido à gravidade, P é a pressão, ρ_f é a densidade do fluido, μ_e é a viscosidade efetiva, R_x , R_y e R_z são resistências distribuídas e T_x , T_y e T_z são termos de perdas viscosas.

Da lei de conservação de massa vem a equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_f v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_f v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_f v_z)}{\partial z} = 0 \tag{4.54}$$

onde v_x , v_y e v_z são as componentes do vetor de velocidade nas direções x , y e z , respectivamente.

A taxa de variação da densidade pode ser substituída pela taxa de variação da pressão e a taxa na qual a densidade varia com a pressão:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \frac{\partial \rho_f}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} \tag{4.55}$$

A avaliação da derivada da densidade em relação à pressão vem a partir da equação de estado. Se o algoritmo compressível é utilizado, um gás ideal é assumido:

$$\rho_f = \frac{P}{RT} \rightarrow \frac{\partial \rho_f}{\partial P} = \frac{1}{RT} \quad (4.56)$$

onde R é uma constante do gás e T é a temperatura. Se o algoritmo da solução incompressível é utilizado

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial P} = \frac{1}{\beta} \quad (4.57)$$

onde β é o *bulk modulus* (módulo de compressibilidade).

As equações da quantidade de movimento do fluido (Navier-Stokes) e da continuidade são simplificadas para obter a equação de onda acústica usando as seguintes premissas: (1) o fluido é compressível (mudanças de densidade devido às variações de pressão), (2) o fluido é invíscido (sem dissipação viscosa), (3) não há fluxo médio do fluido e (4) a densidade média e a pressão são uniformes em todo o fluido. A equação de onda acústica é dada por

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \nabla^2 P = 0 \quad (4.58)$$

onde

$$c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_f}} \quad (4.59)$$

é a velocidade do som em meio fluido, β é o *bulk modulus* (módulo de compressibilidade) do fluido, ρ_f é a densidade do fluido e $P = P(x, y, z, t)$ é a pressão acústica.

Uma vez que a dissipação viscosa foi desconsiderada, a Equação 4.58 é chamada de equação de onda sem perdas para propagação do som em fluidos.

A equação estrutural discretizada (Equação 4.49) e a equação de onda sem perda (Equação 4.58) têm que ser consideradas simultaneamente em problemas de interação fluido-estrutura.

Introduzindo os seguintes operadores matriciais (gradiente e divergente)

$$\nabla \cdot (\cdot) = \{L(\cdot)\}^T = \left[\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} \right] \quad (4.60)$$

$$\nabla(\cdot) = \{L\} \quad (4.61)$$

a equação 4.58 torna-se em notação matricial

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \{L\}^T (\{L\}P) = 0 \quad (4.62)$$

As matrizes do elemento são obtidas pela discretização da onda usando o procedimento de Galerkin. Multiplicando a Equação 4.62 por uma variação virtual na pressão e integrando sobre o volume do domínio com algumas manipulações produz

$$\int_{vol} \frac{1}{c^2} \delta P \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} d(vol) + \int_{vol} (\{L\}^T \delta P)(\{L\}P) d(vol) = \int_S \{n\}^T \delta P (\{L\}P) d(S) \quad (4.63)$$

onde vol é o volume do domínio, δP é uma variação virtual na pressão $[\delta P(x, y, z, t)]$, S é superfície onde a derivada da pressão normal à superfície é aplicada (uma condição de contorno natural) e $\{n\}$ é a normal unitária à interface S .

Em problema de interação fluido-estrutura, a superfície S é tratada como uma interface. Para as hipóteses simplificadoras feitas, as equações de quantidade de movimento do fluido produzem a seguinte relação entre o gradiente de pressão normal do fluido e a aceleração normal da estrutura na interface fluido-estrutura S

$$\{n\} \cdot \{\nabla P\} = -\rho_f \{n\} \cdot \frac{\partial^2 \{u\}}{\partial t^2} \quad (4.64)$$

onde $\{u\}$ é o vetor de deslocamento da estrutura na interface.

Na notação matricial, a Equação 4.64 é dada por

$$\{n\}(\{L\}P) = -\rho_f \{n\}^T \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} \right) \quad (4.65)$$

Substituindo a Equação 4.65 na Equação 4.63, a integral é dada por

$$\int_{vol} \frac{1}{c^2} \delta P \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} d(vol) + \int_{vol} (\{L\}^T \delta P)(\{L\}P) d(vol) = - \int_S \rho_f \delta P \{n\}^T \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} \right) d(S) \quad (4.66)$$

A Equação 4.66 contém a pressão do fluido P e os componentes do deslocamento estrutural u_x , u_y e u_z como as variáveis dependentes a resolver. As funções de forma na aproximação em elementos finitos para a variação espacial da pressão e dos componentes de deslocamento são dadas por

$$P = \{N_p\}^T \{P_e\} \quad (4.67)$$

$$u = \{N_u\}^T \{u_e\} \quad (4.68)$$

onde $\{N_p\}$ é a função de forma do elemento fluido para a pressão, $\{N_e\}$ é a função de forma do elemento estrutural para os deslocamentos, $\{P_e\}$ é o vetor de pressão nodal e $\{u_e\} = \{u_{xe}\}, \{u_{ye}\}, \{u_{ze}\}$ são os vetores das componentes do deslocamento nodal.

Das Equações 4.67 e 4.68, a derivada segunda das variáveis e a variação virtual na pressão podem ser escritas como

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \{N_p\}^T \{\ddot{P}_e\} \quad (4.69)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} = \{N_e\}^T \{\ddot{u}_e\} \quad (4.70)$$

$$\delta p = \{N_p\}^T \{\delta p_e\} \quad (4.71)$$

O operador matricial $\{L\}$ aplicado às funções de forma do elemento $\{N_p\}$ é denotado por

$$[B_p] = \{L\} \{N_p\}^T \quad (4.72)$$

Substituindo as Equações 4.67 a 4.72 na Equação 4.66, a declaração do elemento finito de onda é dada por

$$\begin{aligned} & \int_{Vol} \frac{1}{c^2} \{\delta P_e\}^T \{N\} \{N\}^T d(vol) \{\ddot{P}_e\} + \int_{Vol} \{\delta P_e\}^T [B]^T [B] d(Vol) \{P_e\} \\ & + \int_S \rho_f \{\delta P_e\}^T \{N\} \{n\}^T \{N_e\}^T d(S) \{\ddot{u}_e\} = \{0\} \end{aligned} \quad (4.73)$$

Termos que não variam sobre o elemento são retirados do sinal de integração. $\{\delta P_e\}$ é uma variação virtual introduzida arbitrariamente na pressão nodal, e pode ser fatorada na Equação 4.73. Uma vez que $\{\delta P_e\}$ não é nula, a Equação 4.73 torna-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c^2} \int_{Vol} \{N_p\} \{N_p\}^T d(vol) \{\ddot{P}_e\} + \int_{Vol} [B_p]^T [B_p] d(vol) \{P_e\} \\ & + \rho_f \int_S \{N_p\} \{n\}^T \{N_u\}^T d(S) \{\ddot{u}_e\} = \{0\} \end{aligned} \quad (4.74)$$

A Equação 4.74 pode ser escrita em notação matricial para se obter a equação de onda discretizada:

$$[M_e^p] \{\ddot{P}_e\} + [K_e^p] \{P_e\} + \rho_f [R_e]^T \{\ddot{u}_e\} = \{0\} \quad (4.75)$$

onde

$$[M_e^p] = \frac{1}{c^2} \int_{Vol} \{N_p\} \{N_p\}^T d(vol) \quad (4.76)$$

é a matriz de massa do fluido (fluido),

$$[K_e^p] = \int_{Vol} [B_p]^T [B_p] d(vol) \quad (4.77)$$

é a matriz de rigidez do fluido (fluido) e

$$\rho_f [R_e]^T = \rho_f \int_S \{N_p\} \{n\}^T \{N_u\}^T d(S) \quad (4.78)$$

é a matriz de massa acoplada (interface fluido-estrutura).

A fim de explicar a dissipação de energia devido ao amortecimento, se algum, presente no contorno do fluido, um termo de dissipação é adicionado à Equação 4.58 sem perdas, resultando

$$\int_{vol} \delta P \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} d(vol) - \int_{vol} \delta P \{L\}^T (\{L\}P) d(vol) + \int_S \delta P \left(\frac{r}{\rho_f c} \right) \frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial t} d(S) = \{0\} \quad (4.79)$$

onde r é a absorção no contorno.

Uma vez que se assume que a dissipação ocorre apenas na superfície de contorno S , o termo de dissipação na Equação 4.79 é integrado sobre a superfície S :

$$D = \int_S \delta P \left(\frac{r}{\rho_f c} \right) \frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial t} d(S) \quad (4.80)$$

onde D é o termo de dissipação.

Usando a aproximação de elemento finito para P dada na Equação 4.67:

$$D = \int_S \{\delta P_e\}^T \{N_p\} \left(\frac{r}{\rho_f c} \right) \frac{1}{c} \{N_p\}^T d(S) \left\{ \frac{\partial P_e}{\partial t} \right\} \quad (4.81)$$

Usando as seguintes notações:

$$\beta = \frac{r}{\rho_f c} \quad (4.82)$$

$$\left\{ \dot{P}_e \right\} = \left\{ \frac{\partial P_e}{\partial t} \right\} \quad (4.83)$$

onde β é o coeficiente de absorção no contorno.

$\frac{\beta}{c}$ e $\{\delta P_e\}$ são constantes sobre a superfície do elemento e podem ser retirados da integração. A Equação 4.81 é reescrita como:

$$D = \{\delta P_e\}^T \frac{\beta}{c} \int_S \{N_p\} \{N_p\}^T d(S) \{\dot{P}_e\} \quad (4.84)$$

O termo de dissipação dado pela Equação 4.84 é adicionado à Equação 4.73 representando a perda de energia na superfície de contorno absorvente.

$$[C_e^p] \{\dot{P}_e\} = \frac{\beta}{c} \int_S \{N_p\} \{N_p\}^T d(S) \{\dot{P}_e\} \quad (4.85)$$

onde

$$[C_e^p] = \frac{\beta}{c} \int_S \{N_p\} \{N_p\}^T d(S) \quad (4.86)$$

é a matriz de amortecimento do fluido.

Finalmente, combinando as Equações 4.75 e 4.86, a equação de onda discretizada considerando perdas na interface é dada por:

$$[M_e^p] \{\ddot{P}_e\} + [C_e^p] \{\dot{P}_e\} + [K_e^p] \{P_e\} + \rho_f [R_e]^T \{\ddot{u}_e\} = \{0\} \quad (4.87)$$

A fim de descrever completamente o problema de interação fluido-estrutura, a carga de pressão do fluido que atua na interface é agora adicionada à Equação 4.49. Então, a equação estrutural é reescrita como

$$[M_e]\{\ddot{u}_e\} + [C_e]\{\dot{u}_e\} + [K_e]\{u_e\} = \{F_e\} + \{F_e^{pr}\} \quad (4.88)$$

O vetor carga de pressão do fluido $\{F_e^{pr}\}$ na interface S é obtido pela integração da pressão sobre a área da superfície:

$$\{F_e^{pr}\} = \int_S \{N_e\} P \{n\} d(S) \quad (4.89)$$

Substituindo a função aproximada em elemento finito para a pressão dada pela Equação 4.67 na Equação 4.89

$$\{F_e^{pr}\} = \int_S \{N_e\} \{N_p\}^T \{n\} d(S) \{P_e\} \quad (4.90)$$

Pela comparação da integral na Equação 4.90 com a definição da matriz de $\rho_f [R_e]^T$ na Equação 4.78, torna-se claro que

$$\{F_e^{pr}\} = [R_e] \{P_e\} \quad (4.91)$$

onde

$$[R_e]^T = \int_S \{N_u\} \{N_p\}^T \{n\} d(S) \quad (4.92)$$

A substituição da Equação 4.92 na Equação 4.88 resulta na equação elementar dinâmica da estrutura:

$$[M_e]\{\ddot{u}_e\} + [C_e]\{\dot{u}_e\} + [K_e]\{u_e\} - [R_e]\{P_e\} = \{F_e\} \quad (4.93)$$

As Equações 4.75 e 4.93 descrevem as equações discretizadas de elementos finitos completas para problema de interação fluido-estrutura e são escritas de forma reunida como:

$$\begin{bmatrix} [M_e] & [0] \\ [M^{fs}] & [M_e^p] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_e\} \\ \{\ddot{P}_e\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_e] & [0] \\ [0] & [C_e^p] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}_e\} \\ \{\dot{P}_e\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_e] & [K^{fs}] \\ [0] & [K_e^p] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_e\} \\ \{P_e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_e\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (4.94)$$

onde

$$[M^{fs}] = \rho_f [R_e]^T \quad (4.95)$$

$$[K^{fs}] = -[R_e] \quad (4.96)$$

Para um problema envolvendo interação fluido-estrutura, portanto, o elemento fluido acústico irá gerar todas as matrizes com sobrescrito p em adição às submatrizes de acoplamento $\rho_f [R_e]^T$ e $[R_e]$. Submatrizes sem um sobrescrito irão ser geradas pelo elemento estrutural compatível utilizado no modelo.

A Equação 4.94 pode ser reescrita como

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F\} \quad (4.97)$$

onde as matrizes $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são matrizes genéricas que são análogas as matrizes de massa, amortecimento e rigidez de um sistema não-acoplado, com diferença na configuração da matriz. O vetor $\{\delta\}$ envolve todos os graus de liberdade do sistema (deslocamentos e pressões). $\{\ddot{\delta}\}$ e $\{\dot{\delta}\}$ são, respectivamente, as derivadas primeira e segunda temporais de $\{\delta\}$. $\{F\}$ é o vetor de força.

A Equação 4.97 representa o caso mais completo para o problema fluido-estrutura. No entanto, para simplificar o problema de vibrações livres, pode-se eliminar a matriz $[C]$ que envolve o amortecimento estrutural e a condição de radiação no infinito, ao mesmo tempo fazer $\{F\} = \{0\}$.

Além disso, os deslocamentos na estrutura e as pressões no fluido variam harmonicamente no tempo, com uma mesma frequência circular ω . Dessa maneira, é possível,

transformando por Fourier, escrever a derivada segunda temporal $\{\ddot{\delta}\}$ em função de $\{\delta\}$, ou seja,

$$\{\ddot{\delta}\} = -\omega^2\{\delta\} \quad (4.98)$$

Então, a Equação 4.97 fica,

$$([K] - \omega^2[M])\{\delta\} = \{0\} \quad (4.99)$$

A Equação 4.99 está na forma clássica do problema de autovalores e autovetores. A solução dessa equação fornece as frequências naturais de vibração do sistema e as respectivas deformadas modais.

Em um problema de acústica pura, a Equação 4.99 é simplificada para

$$([K^p] - \omega^2[M^p])\{P\} = \{0\} \quad (4.100)$$

Em vibração forçada, $\{F\}$ está em função do tempo.

Funções de Forma:

As funções dadas estão relacionadas com as quantidades nodais por: u (translação na direção x ou s), v (translação na direção y ou t), w (translação na direção z ou r) e P (pressão).

As correspondências vetoriais não são exatas, uma vez que, por exemplo u , v e w estão no sistema de coordenadas do elemento, ao passo que UX , UY e UZ representam movimentos no sistema de coordenadas nodal. Geralmente, o sistema de coordenada do elemento é o mesmo que o sistema cartesiano global, exceto em elementos de linha, onde movimentos u são movimentos axiais, e v e w são movimentos transversais e em elementos de casca, onde u e v são movimentos no plano e w é o movimento fora do plano.

Variáveis subscritas tais como u_j referem-se ao movimento u no nó J . Quando essas mesmas variáveis têm números como subscritos (por exemplo, u_1) referem-se a variáveis sem nó para funções de forma extra. As coordenadas s , t e r são normalizadas, indo de $-1,0$ em um lado do elemento à $+1,0$ no outro, e não são necessariamente ortogonais uma a outra.

SHELL63:

As funções de forma a seguir são para elementos de casca quadrilaterais, 4 nós, 3D com graus de liberdade rotacionais mas sem deflexão de cisalhamento e com funções de forma extras, tais como SHELL63 com KEYOPT(3) = 0 quando usado como quadrilateral (Figura 4.18):

$$u = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} u_I(1-s)(1-t) + u_J(1-s)(1-t) \\ + u_K(1-s)(1-t) + u_L(1-s)(1-t) \end{bmatrix} + u_1(1-s^2) + u_2(1-t^2) \quad (4.101)$$

$$v = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} v_I(1-s)(1-t) + v_J(1-s)(1-t) \\ + v_K(1-s)(1-t) + v_L(1-s)(1-t) \end{bmatrix} + v_1(1-s^2) + v_2(1-t^2) \quad (4.102)$$

w não é explicitamente definido. Quatro triângulos sobrepostos.

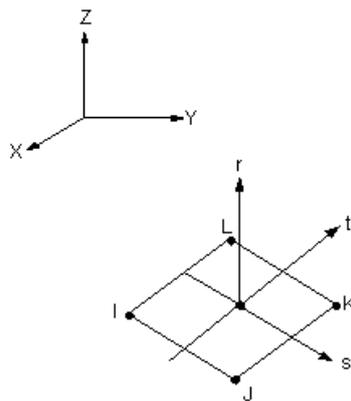


Figura 4.18 - Elemento de casca de 4 nós (ANSYS)

SOLID95:

As funções de forma a seguir são usadas para elementos sólidos de 20 nós tal como SOLID95 (Figura 4.19):

$$u = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} u_I(1-s)(1-t)(1-r)(-s-t-r-2) + \\ u_J(1+s)(1-t)(1-r)(s-t-r-2) + \\ u_K(1+s)(1+t)(1-r)(s+t-r-2) + \\ u_L(1-s)(1+t)(1-r)(-s+t-r-2) + \\ u_M(1-s)(1-t)(1+r)(-s-t+r-2) + \\ u_N(1+s)(1-t)(1+r)(s-t+r-2) + \\ u_O(1+s)(1+t)(1+r)(s+t+r-2) + \\ u_P(1-s)(1+t)(1+r)(-s+t+r-2) \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} u_Q(1-s^2)(1-t)(1-r) + \\ u_R(1+s)(1-t^2)(1-r) + \\ u_S(1-s^2)(1+t)(1-r) + \\ u_T(1-s)(1-t^2)(1-r) + \\ u_U(1-s^2)(1-t)(1+r) + \\ u_V(1+s)(1-t^2)(1+r) + \\ u_W(1-s^2)(1+t)(1+r) + \\ u_X(1-s)(1-t^2)(1+r) + \\ u_Y(1-s)(1-t)(1-r^2) + \\ u_Z(1+s)(1-t)(1-r^2) + \\ u_A(1+s)(1+t)(1-r^2) + \\ u_B(1-s)(1+t)(1-r^2) \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

$$v = \frac{1}{8} [v_I(1-s)... \text{(análogo a } u)] \quad (4.104)$$

$$w = \frac{1}{8} [w_I(1-s)... \text{(análogo a } u)] \quad (4.105)$$

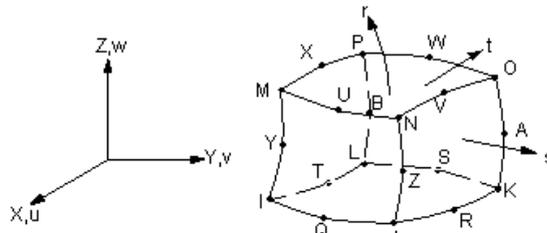


Figura 4.19 - Elemento *brick* de 20 nós (ANSYS)

FLUID30:

As funções de forma a seguir são para elementos *bricks* de 8 nós sem funções de forma extras tal como FLUID30, opção hexaédrica (Figura 4.20):

$$u = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} u_I(1-s)(1-t)(1-r) + \\ u_J(1+s)(1-t)(1-r) + \\ u_K(1+s)(1+t)(1-r) + \\ u_L(1-s)(1+t)(1-r) + \\ u_M(1-s)(1-t)(1+r) + \\ u_N(1+s)(1-t)(1+r) + \\ u_O(1+s)(1+t)(1+r) + \\ u_P(1-s)(1+t)(1+r) \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

$$v = \frac{1}{8} [v_I(1-s)... \text{(análogo a } u)] \quad (4.107)$$

$$w = \frac{1}{8} [w_I(1-s)... \text{(análogo a } u)] \quad (4.108)$$

$$P = \frac{1}{8} [P_I(1-s)... \text{(análogo a } u)] \quad (4.109)$$

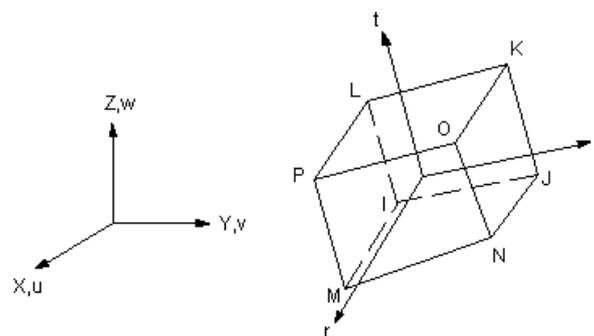


Figura 4.20 - Elemento *brick* de 8 nós (ANSYS)

Aspectos computacionais:

Análises modal, harmônica e transiente:

A análise modal é utilizada para determinar frequências naturais e modos de vibração. Há muitos métodos numéricos para extração de modos. O ANSYS oferece estes métodos: *Block Lanczos*, *PCG Lanczos*, *Subspace* (subespaço), *Reduced* (reduzido), *Unsymmetric* (não-simétrico), *Damped* (amortecido) e *QR Damped* (QR amortecido).

Os métodos utilizados neste trabalho foram: *Subspace* e *Unsymmetric*.

O método *Subspace* é utilizado para a determinação de autovalores e autovetores associados a matrizes simétricas, como nos casos das análises modais da estrutura e do fluido desacoplados. O método *Subspace* utiliza a técnica de interação do subespaço, que internamente utiliza o algoritmo de interação de Jacobi generalizado. É altamente preciso porque utiliza as matrizes de rigidez e massa completas.

O método *Unsymmetric*, que também utiliza as matrizes de rigidez e massa completas, destina-se a problemas onde essas matrizes são assimétricas, como em problemas de acoplamento acústico-estrutural. Utiliza o algoritmo de *Lanczos* que calcula autovalores e autovetores complexos se o sistema é não-conservativo. A parte real do autovalor representa a frequência natural e a parte imaginária é uma medida da estabilidade do sistema - um valor negativo significa que o sistema é estável, enquanto que um valor positivo significa que o sistema é instável.

A análise da resposta harmônica é uma técnica utilizada para determinar a resposta de estado estacionário de uma estrutura linear a cargas que variam sinusoidalmente (harmonicamente) com o tempo. A análise dinâmica transiente é uma técnica utilizada para determinar a resposta dinâmica de uma estrutura sob a ação de quaisquer cargas gerais tempo-dependentes. Neste trabalho, é utilizada nas análises com carga sísmica.

Três métodos de análise da resposta harmônica ou transiente estão disponíveis no ANSYS: *full* (completo), *reduced* (reduzido) e *mode superposition* (superposição modal).

O método utilizado neste trabalho é o *full method*. Esse método utiliza as matrizes completas do sistema para calcular a resposta harmônica ou transiente (sem redução de matrizes).

Amortecimento:

O amortecimento está presente na maioria dos sistemas e deve ser especificado em uma análise dinâmica. As formas de amortecimento disponíveis no programa ANSYS são: amortecimento de Rayleigh (alfa e beta), amortecimento material-dependente, coeficiente de amortecimento constante do material, razão de amortecimento constante, amortecimento modal e amortecimento do elemento. O tipo de amortecimento disponível

depende do tipo de análise. Neste trabalho foram utilizados: amortecimentos alfa e beta nas análises transientes de sistemas estruturais e coeficiente de amortecimento constante do material nas análises transientes para as estruturas de sistemas fluido-estrutura acoplados.

A razão de amortecimento constante é a maneira mais simples de especificar o amortecimento da estrutura. Representa a razão entre o amortecimento real e o amortecimento crítico e é especificada por um número decimal. Disponível apenas para análises dinâmicas espectrais, harmônicas e transientes pelo método da superposição modal.

O amortecimento alfa e o amortecimento beta são utilizados para definir as constantes de amortecimento de Rayleigh α e β , respectivamente, como números decimais. A matriz de amortecimento $[C]$ é calculada usando essas constantes para multiplicar a matriz de massa $[M]$ e a matriz de rigidez $[K]$:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (4.110)$$

Os valores de α e β não são geralmente conhecidos diretamente, mas são calculados das razões de amortecimento modal, ζ_i . ζ_i é a razão entre o amortecimento real e o amortecimento crítico para um modo de vibração particular, i . Se ω_i é uma frequência circular natural do modo i , α e β satisfazem a relação:

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \quad (4.111)$$

A relação entre razão de amortecimento e frequência expressa pela Equação 4.111 é mostrada graficamente na Figura 4.21.

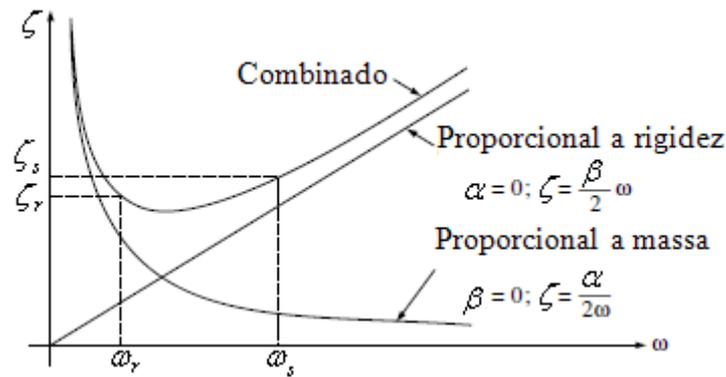


Figura 4.21 - Relação entre razão de amortecimento e frequência (para amortecimento de Rayleigh) (Clough e Penzien, 2003)

Fica aparente, da Figura 4.21, que os dois fatores de amortecimento de Rayleigh, α e β , podem ser especificados pela solução de um par de equações simultâneas se as razões de amortecimento ζ_r e ζ_s associadas com duas frequências (modos) específicas ω_r e ω_s são conhecidas. Escrevendo a Equação 4.11 para cada um desses dois casos leva a

$$\alpha = \frac{2\omega_r\omega_s(\omega_r\zeta_s - \omega_s\zeta_r)}{\omega_r^2 - \omega_s^2} \quad (4.112)$$

$$\beta = \frac{2(\omega_r\zeta_r - \omega_s\zeta_s)}{\omega_r^2 - \omega_s^2} \quad (4.113)$$

Como informações detalhadas da razão de amortecimento com a frequência raramente estão disponíveis, normalmente se assume que a mesma razão de amortecimento se aplica a ambas frequências de controle; i.e., $\zeta_r = \zeta_s = \zeta$. Neste caso, os fatores de proporcionalidade são dados pela versão simplificada das Equações 4.112 e 4.113:

$$\alpha = \frac{2\omega_r\omega_s\zeta}{\omega_r + \omega_s} \quad (4.114)$$

$$\beta = \frac{2\zeta}{\omega_r + \omega_s} \quad (4.115)$$

Dada uma razão de amortecimento constante, é conveniente tomar ω_r e ω_s como as frequências correspondentes ao primeiro modo e ao último dos modos superiores, que contribuem significativamente para a resposta. Desta forma os modos r e s terão exatamente o mesmo amortecimento, todos os modos entre eles terão valores similares um tanto menores e os modos com frequências menores que ω_r e maiores que ω_s terão valores de amortecimento maiores reduzindo assim sua contribuição para a resposta.

A hipótese de amortecimento proporcional é válida em muitas análises, como por exemplo, em sistemas estruturais desacoplados. Mas em casos como interação fluido-estrutura, o amortecimento é não-proporcional e devem-se utilizar técnicas diferentes para analisar tais sistemas. No ANSYS, especificou-se o amortecimento β como uma propriedade do material da estrutura (amortecimento material-dependente) nesses casos, dado por:

$$\beta = \frac{2\zeta_i}{\omega_i} \quad (4.116)$$

onde ω_i deve ser escolhida como a frequência ativa mais dominante. Para o fluido, o amortecimento foi considerado igual a zero.

Análise Sísmica:

Quanto à carga de terremoto, os registros temporais da aceleração foram aplicados a todo o modelo usando o comando ACEL, que é um processo tradicional usado na análise transiente para a excitação sísmica de acordo com o *Korea Institute of Nuclear Safety* (2009).

Análise de resultados:

Segundo Campos Junior (2011), quanto ao pós-processamento e análise de resultados devem ser observados os seguintes pontos:

- As respostas numéricas podem ser explicitadas por nós ou por elementos;

- No degradê de cores para ilustrações das respostas nodais e de elementos em 2D e 3D é utilizado um plotador gráfico cujas faixas estão no default do programa, consistindo na divisão de nove zonas de cores;
- Para os nós, o plotador gráfico utiliza a média entre estes para exposição da solução numérica. Para o elemento, pode-se optar por utilizar a média entre os nós do elemento ou não.

As designações de cores para os *Contour Dispalys* (linhas de contorno) apresentam a seguinte ordem:



Figura 4.22 - Designações de cores para os *Contour Dispalys*

A interpretação dos resultados gráficos requer o conhecimento prévio da sequência de cores e de dados como condições de contorno ou simetria do caso analisado. Por exemplo, nas figuras da Tabela 5.2, os valores dos deslocamentos axial (U), circunferencial (V) e radial (W) iguais a zero estão contidos na faixa verde (o modelo apresenta simetria axial e movimentos circunferencial e radial impedidos nas bases). As cores das faixas à esquerda representam deslocamentos convencionados negativos (no sentido negativo dos eixos) e à direita, positivos (no sentido positivo dos eixos) (ver Figura 3.3).

4.5 CONVERGÊNCIA E VALIDAÇÃO DOS MODELOS NUMÉRICOS

Quanto ao *meshing* (malhamento), para o domínio estrutural, nos Casos 1 e 2, o elemento utilizado foi SHELL63 de forma quadrilateral com malha de área mapeada e nos Casos 3 a 5, SOLID95 de forma hexaédrica com malha de volume mapeada. Para o domínio fluido, nos Casos 1 e 2, o elemento utilizado foi FLUID30 de forma hexaédrica com malha de volume “varrida” (*sweep*) e nos Casos 3 a 5, FLUID30 de forma hexaédrica com malha de volume mapeado.

A escolha dos tipos de elementos foi definida pelas suas características e pelos bons resultados apresentados em testes de validação efetuados por Lustosa (2011) e Campos Junior (2011).

O quão pequeno é preciso dimensionar os elementos para se confirmar a solução é definido por testes de convergência.

De modo a obter soluções MEF adequadas, para o Caso 1, sistemas estrutural desacoplado, fluido desacoplado e fluido-estrutura acoplado e Caso 2, sistema estrutural desacoplado, estudos de convergência foram conduzidos para as cinco primeiras frequências naturais, sendo a validação efetuada comparando os resultados analíticos e numéricos através da equação

$$Erro(\%) = \frac{|\omega_{analítico} - \omega_{numérico}|}{\omega_{analítico}} \cdot 100 \quad (4.117)$$

Para o Caso 2, sistemas fluido desacoplado e fluido-estrutura acoplado, os estudos de convergência foram realizados apenas com as soluções numéricas em função da ausência de soluções comparativas, através da relação $\omega_{numérico}/\omega_{numérico}$ para o nível de refinamento máximo.

Nos Casos 3, 4 e 5, os testes de convergência foram realizados para três níveis de refinamento e a validação obtida por resultados apresentados nos artigos nos quais os casos foram baseados. Os estudos de convergência foram realizados apenas com as soluções numéricas.

No Caso 1, os testes de convergência foram realizados para três níveis de refinamento em função da relação entre a “altura” do elemento e o raio médio da casca cilíndrica (ou cavidade cilíndrica).

A Figura 4.23 mostra uma casca cilíndrica desenvolvida e a Tabela 4.2 traz as informações sobre os níveis de refinamento.

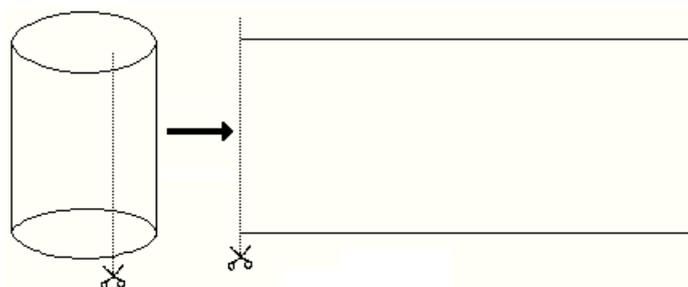


Figura 4.23 - Casca cilíndrica desenvolvida

Tabela 4.2 - Dados gerais dos níveis de refinamento para o Caso 1

Nível de refinamento		1	2	3
Medidas do elemento desenvolvido	Comprimento (m)	0,046	0,023	0,011
	Altura (m)	0,042	0,022	0,011
Relações	Altura / Comprimento	0,906	0,966	0,966
	Altura / Raio (cilindro)	0,237	0,126	0,063

A Tabela 4.3 traz o número de nós e elementos para o caso acoplado para os três níveis de refinamento dos Casos 1 a 5. Nos casos de estrutura desacoplada, o número de elementos é o que consta na Tabela 4.3 e nos casos de fluido desacoplado o número de elementos é igual à soma das duas opções de elementos fluidos (sendo todos os elementos lançados no programa com estrutura ausente).

Tabela 4.3 - Dados gerais dos níveis de refinamento para os Casos 1 a 5

Nível de refinamento		1	2	3	
Caso 1	Número de divisões	Circunferência	24	48	96
		Altura	16	30	60
		Diâmetro (aproximado)	8	16	32
	Nós	1.728	10.987	55.144	
	Elementos	Estrutura	384	1.440	5.760
		Fluido (estrutura presente)	384	1.440	5.760
Fluido (estrutura ausente)		928	7.950	45.540	
Caso 2	Número de divisões	Arco	12	24	48
		Altura	12	24	48
		Flecha	1	1	1
	Nós	312	1.200	4.704	
	Elementos	Estrutura	144	576	2.304
		Fluido (estrutura presente)	144	576	2.304
Fluido (estrutura ausente)		-	-	-	
Caso 3	Número de divisões	Arco	14	28	42
		Altura	10	20	30
		Largura	1	2	3
		Comprimento (reservatório)	30	60	90
	Nós	5.749	41.912	137.077	
	Elementos	Estrutura	140	1.120	3.780
Fluido (estrutura presente)		140	560	1.260	
Fluido (estrutura ausente)		4.060	33.040	112.140	
Caso 4	Número de divisões	Arco	8	12	24
		Altura	9	15	30
		Largura	1	3	6
		Comprimento (reservatório)	50	75	150
	Nós	4.931	18.604	136.783	
	Elementos	Estrutura	72	540	4.320
Fluido (estrutura presente)		72	180	720	
Fluido (estrutura ausente)		3.528	13.320	107.280	
Caso 5	Número de divisões	Arco	8	24	48
		Viga em balanço	15*	15	30
		Largura	1	2	4
		Comprimento (reservatório)	10	20	45
	Nós	2.135	11.518	93.358	
	Elementos	Estrutura	120*	720	5.760
Fluido (estrutura presente)		120	360	1.440	
Fluido (estrutura ausente)		1.080	6.840	63.360	

* No sistema estrutural desacoplado o número de divisões das vigas em balanço é igual a 5 e o número de elementos é igual a 40. O número de divisões das vigas em balanço no sistema fluido-estrutura foi ajustado para 15 automaticamente pelo ANSYS quando do malhamento.

4.5.1 Casos 1 e 2 - Cilindro de revolução e painel cilíndrico

As Figuras 4.24 a 4.29 apresentam os gráficos dos testes de convergência para os três níveis de refinamento definidos para os Casos 1 e 2, sistemas estrutural desacoplado, fluido desacoplado e fluido-estrutura acoplado, para as cinco primeiras frequências naturais indicadas nas legendas.

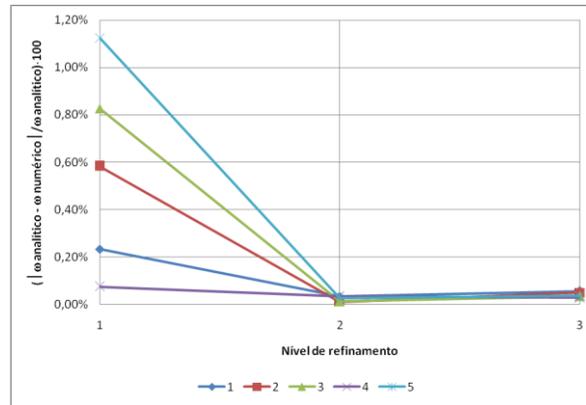


Figura 4.24 - Estudo de convergência e validação (Caso 1 - Estrutura)

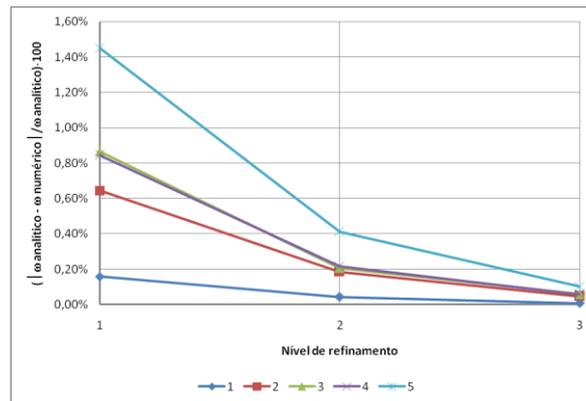


Figura 4.25 - Estudo de convergência e validação (Caso 1 - Fluido)

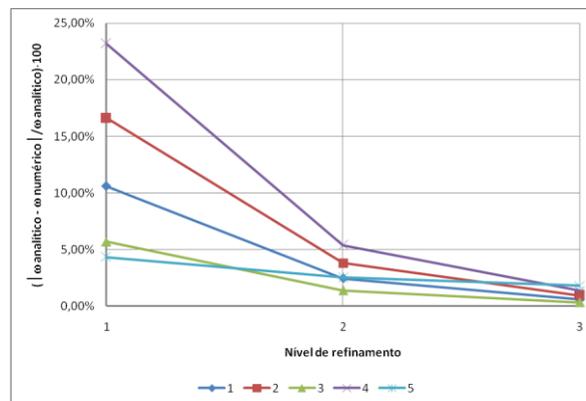


Figura 4.26 - Estudo de convergência e validação (Caso 1 - Fluido-estrutura)

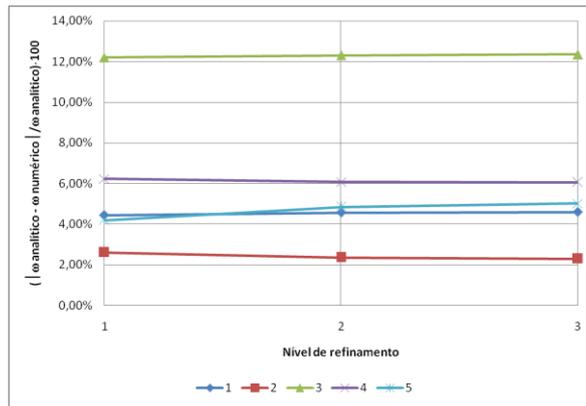


Figura 4.27 - Estudo de convergência e validação (Caso 2 - Estrutura)

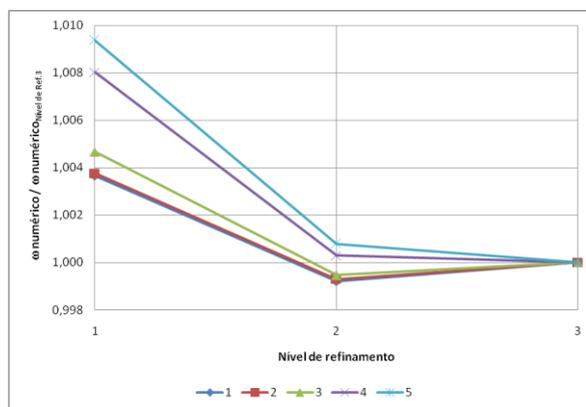


Figura 4.28 - Estudo de convergência (Caso 2 - Fluido)

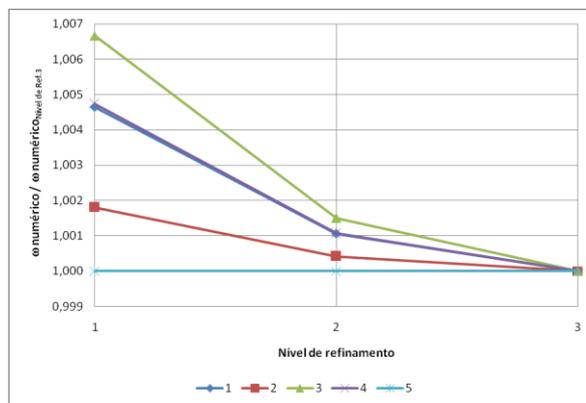


Figura 4.29 - Estudo de convergência (Caso 2 - Fluido-estrutura)

Analisando os gráficos das Figuras 4.24 a 4.27, observa-se que a partir do segundo refinamento todos os erros são menores que 10-15%, o que caracteriza resultados satisfatórios. No terceiro refinamento os testes exibem erros menores que 5% na maior parte dos casos (exceção ao sistema estrutural do Caso 2, que apresenta borda livre) o que caracteriza bons resultados.

Segundo Leissa (1973), condições de contorno de placa engastada e simplesmente apoiada são exatamente satisfeitas pelo uso de funções de viga, mas condições de borda livre são apenas aproximadamente, tornando a aproximação usualmente menos precisa quando uma borda livre está envolvida. Erros surgem porque modos de viga não são adequados para modelar modos de placa com bordas livres (Blevins, 1980).

Em todas as análises dos Casos 1 e 2 foi utilizado o nível de refinamento 3, com exceção das análises de vibração forçada do sistema fluido-estrutura do Caso 1, onde foi utilizado o nível de refinamento 2, em função do menor tempo de processamento.

4.5.2 Caso 3 - Barragem em arco cilíndrica

O estudo de convergência foi realizado apenas com as soluções numéricas.

As Figuras 4.30 e 4.32 apresentam os gráficos dos testes de convergência para os três níveis de refinamento definidos para o Caso 3, para os sistemas estrutural e fluido desacoplados e fluido-estrutura acoplado.

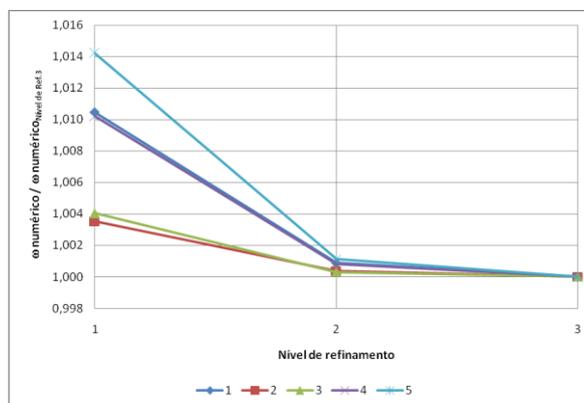


Figura 4.30 - Estudo de convergência e validação (Caso 3 - Estrutura)

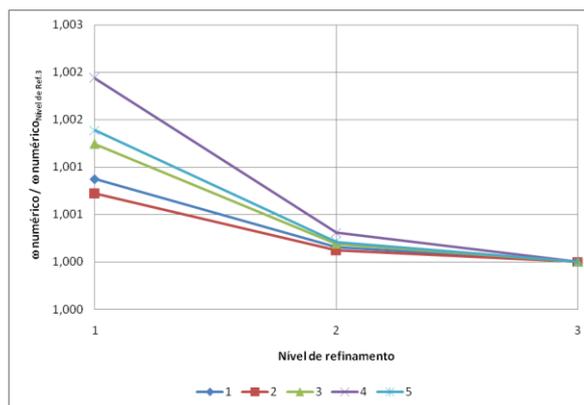


Figura 4.31 - Estudo de convergência (Caso 3 - Fluido)

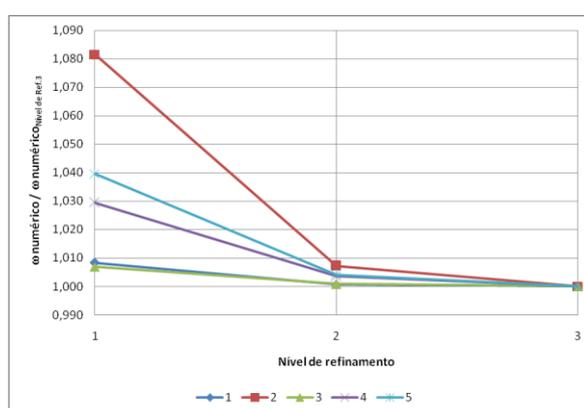


Figura 4.32 - Estudo de convergência (Caso 3 - Fluido-estrutura)

Observando os gráficos, constata-se que os modelos convergem. Nas análises de vibração livre dos três sistemas foi utilizado o nível de refinamento 3.

O sistema fluido-estrutura foi validado através da comparação com os resultados das distribuições de pressão hidrodinâmica na face montante da barragem nas seções central, $\frac{1}{4}$ e lateral quando o sistema é submetido a uma aceleração uniforme unitária na direção montante-jusante, obtidos por Tsai e Li (1987), considerando a estrutura não-amortecida e o fluido incompressível.

A Figura 4.33 mostra os resultados da distribuição de pressão nas seções central, $\frac{1}{4}$ e lateral da barragem, representada pela relação entre a pressão p e o produto $\rho_f a H_b$ (sendo a , a aceleração), em função da relação entre a altura d'água e a altura da barragem z / H_b obtidas através do ANSYS e a Figura 4.34 apresenta esses resultados em Tsai e Li (1987).

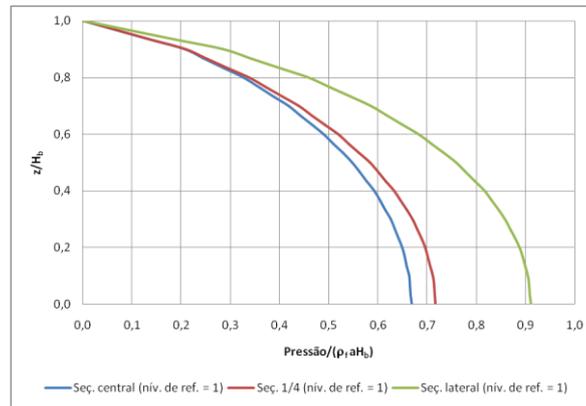


Figura 4.33 - Distribuição de pressão nas seções central ($\theta_0 = 0^\circ$), $1/4$ ($\theta_0 = 25^\circ$) e lateral ($\theta_0 = 50^\circ$) da barragem em arco cilíndrica (Caso 3 - Fluido-estrutura) (ANSYS)

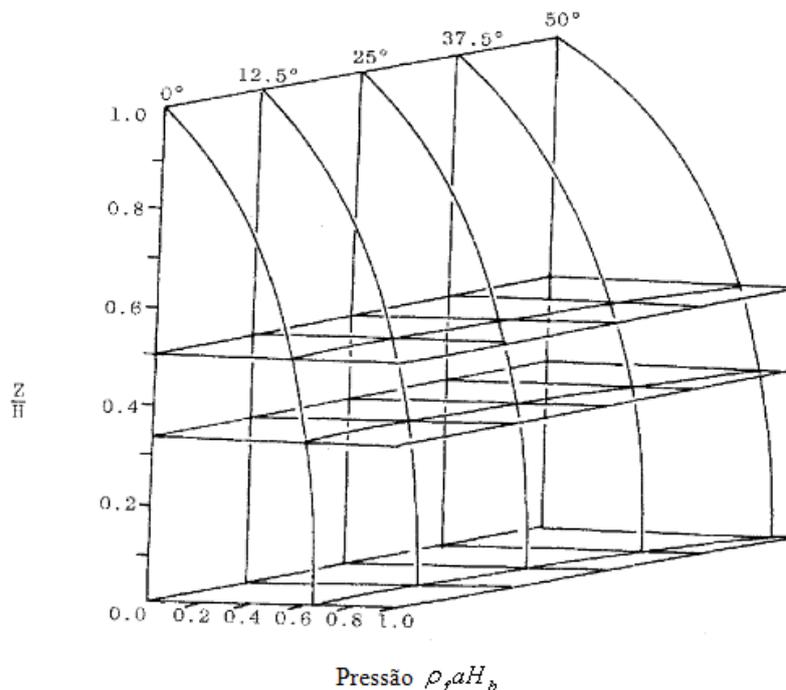


Figura 4.34 - Distribuição de pressão em θ_0 igual 0° (seção central), $12,5^\circ$, 25° (seção $1/4$), $37,5^\circ$ e $37,5^\circ$ (seção lateral) na barragem em arco cilíndrica (Caso 3 - Fluido-estrutural) (Tsai e Li, 1987, modificado)

Comparando os gráficos, verifica-se a validação dos resultados numéricos já no primeiro nível de refinamento o que caracteriza a concisão do modelo. Apesar da condição do contorno longínquo do reservatório ser de radiação no infinito em Tsai e Li (1987), a consideração de água incompressível (além do perfil do carregamento) não gerou diferenças nos resultados, o que será discutido em maiores detalhes na próxima seção.

4.5.3. Caso 4 - Barragem em arco com simples curvatura

O estudo de convergência foi realizado com as soluções numéricas de acordo com as Figuras 4.35 a 4.37.

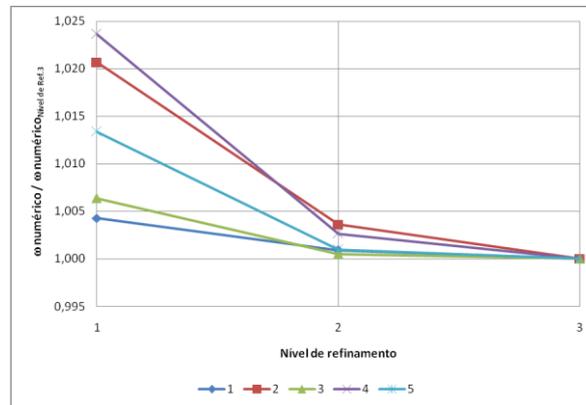


Figura 4.35 - Estudo de convergência (Caso 4 - Estrutura)

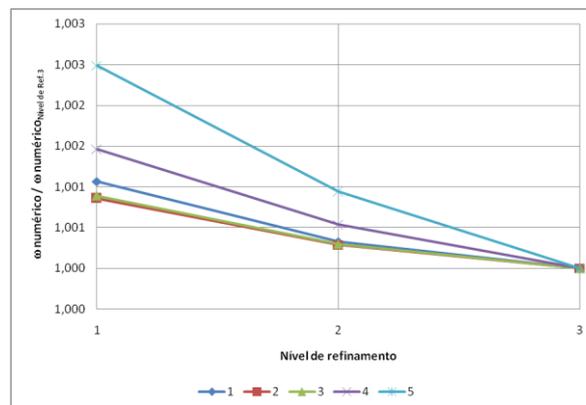


Figura 4.36 - Estudo de convergência (Caso 4 - Fluido)

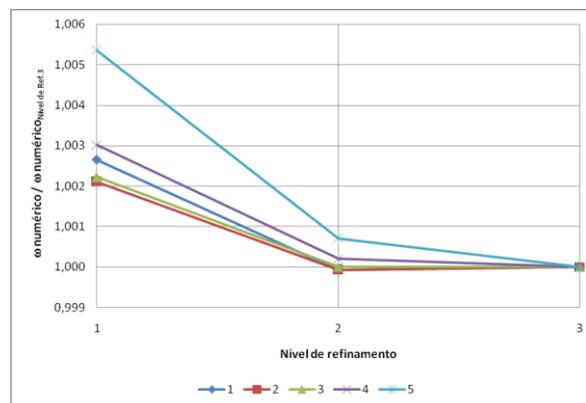
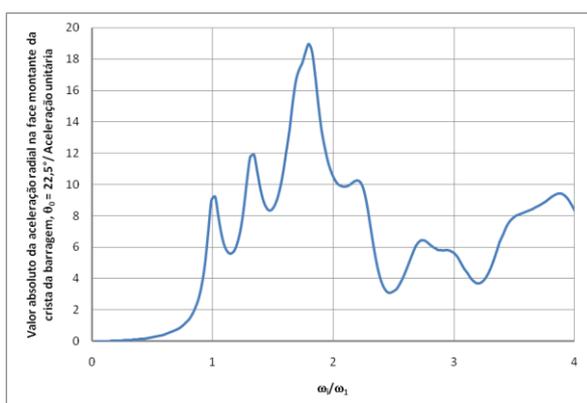


Figura 4.37 - Estudo de convergência (Caso 4 - Fluido-estrutura)

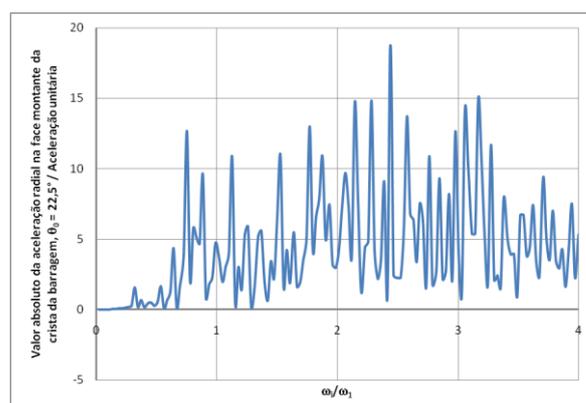
Observando os gráficos, constata-se que os resultados convergem bem. Nas análises de vibração livre desse caso foi utilizado o nível de refinamento 3.

Também, para a validação dos sistemas estrutural desacoplado e fluido-estrutura acoplado, as curvas *aceleração radial x frequência aplicada* obtidas, foram comparadas com as funções de resposta na face montante da crista da barragem, à quarta seção do arco ($\theta = 22,5^\circ$) devido às componentes montante-jusante e transversal do movimento resultante da aceleração harmônica unitária do solo em Porter e Chopra (1981). A razão de amortecimento adotada foi igual a 5%.

As Figuras 4.38 e 4.40 mostram as funções de resposta à frequência complexa obtidas através do ANSYS para o primeiro nível de refinamento e as Figuras 4.39 e 4.41 apresentam esses resultados em Porter e Chopra (1981). O valor absoluto das acelerações radiais na face montante da crista em $\theta_0 = 22,5^\circ$ pela aceleração unitária em função da relação entre as frequências aplicadas e a frequência fundamental da estrutura desacoplada (simétrica, no caso de movimento do solo montante-jusante e anti-simétrica, no caso de movimento do solo transversal) são as funções de resposta apresentadas. Os casos a serem comparados são a resposta da barragem sem água e com água incluindo a compressibilidade da água.



(a)



(b)

Figura 4.38 - Resposta devido ao movimento harmônico montante-jusante do solo: (a) estrutura e (b) fluido-estrutura (ANSYS)

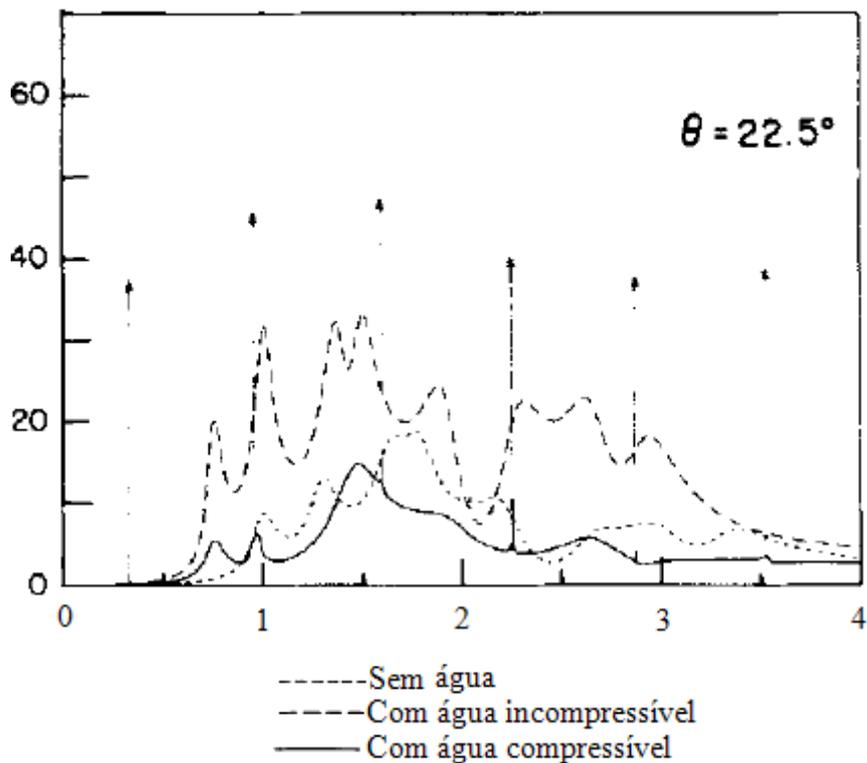
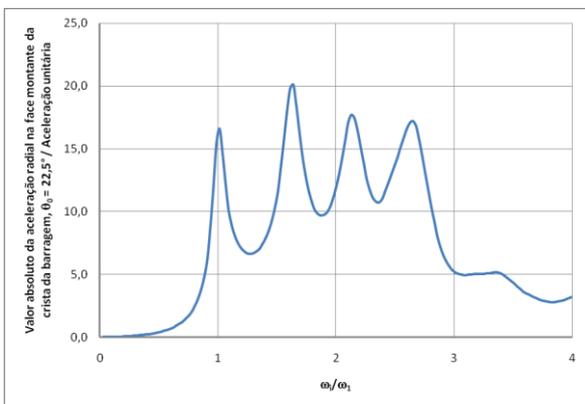
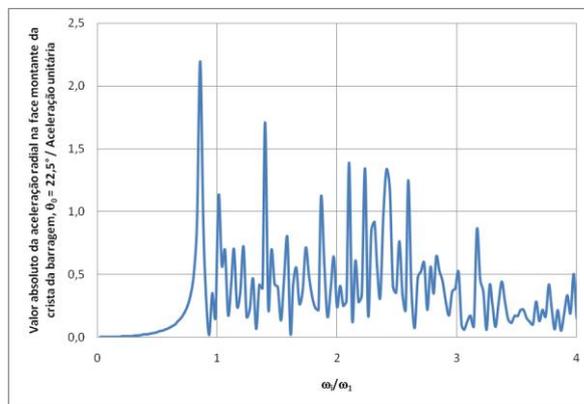


Figura 4.39 - Resposta devido ao movimento montante-jusante do solo (Caso 4) (Porter e Chopra, 1981, modificado)



(a)



(b)

Figura 4.40 - Resposta devido ao movimento transversal do solo (Caso 4): (a) estrutura e (b) fluido-estrutura (ANSYS)

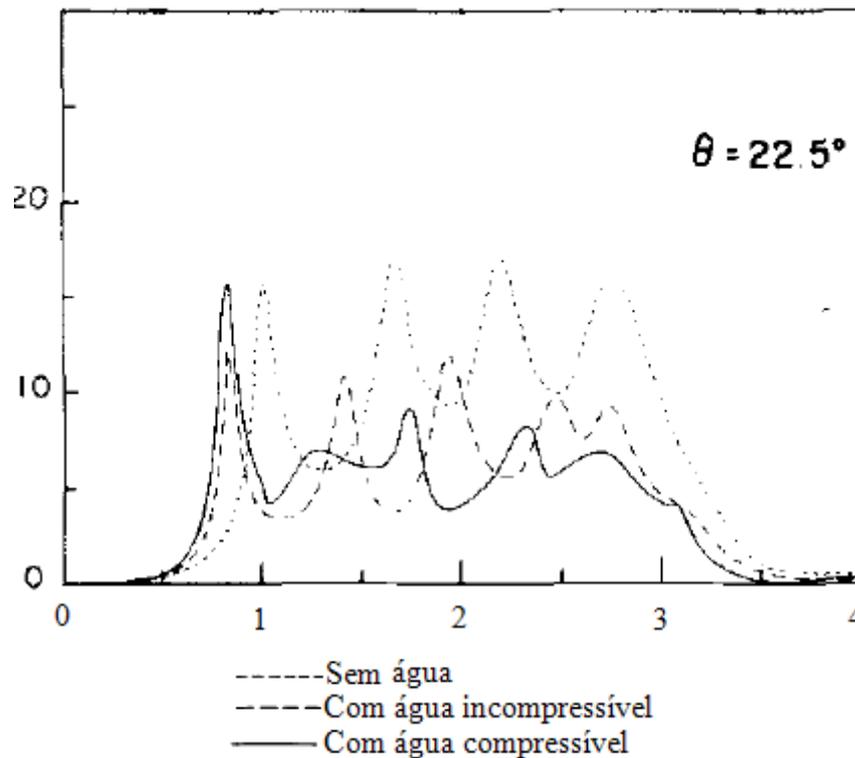


Figura 4.41 - Resposta devido ao movimento transversal do solo (Caso 4) (Porter e Chopra, 1981, modificado)

Segundo Hall e Chopra (1983), quando apresentados dessa forma, os resultados plotados aplicam-se a sistemas de formatos similares de qualquer altura. Portanto, comparando os gráficos constata-se perfeita coerência para o sistema estrutural desacoplado.

No sistema fluido-estrutura, o resultado numérico apresenta frequências ressonantes que não constam em Porter e Chopra (1983), sendo necessária uma discussão mais detalhada. As diferenças existentes devem-se essencialmente às diferenças entre as soluções com comprimento finito (adotada neste trabalho) e infinito (adotada em Porter e Chopra, 1981) do reservatório na direção longitudinal. Além disso, em Porter e Chopra (1981), o movimento do fluido normal às margens é o mesmo que a componente normal do movimento das margens, o que não foi considerado.

Segundo Ribeiro (2010), até a primeira ressonância da cavidade as soluções com comprimento finito e infinito são idênticas. Entretanto, deste ponto em diante os resultados passam a diferir. Para a cavidade com comprimento finito passam a surgir modos com características da cavidade, com perturbações na interface. Estes modos incluem repetições de modos da estrutura, podendo ser modificados pelo fluido. Para a cavidade com

comprimento infinito as soluções são de natureza exponencial, com um decaimento na direção longitudinal. Cada modo é associado a uma determinada deformada da estrutura no vácuo, que pode ser alterada pela presença do fluido. Não existe repetição de deformadas. Assim, a quantidade de modos acoplados será igual à quantidade de modos da estrutura. Todas estas configurações são típicas de massa adicional, com decaimento exponencial na direção longitudinal.

A solução de uma cavidade infinita define uma particularidade matemática que não pode ser representada pelo modelo de cavidade finita. Ainda que se adote um comprimento infinitamente grande, esta última solução continuará apresentando variações dos modos da cavidade. No modelo infinito estes modos são eliminados, pois apenas soluções que atendem a condição de decaimento exponencial são válidas. Assim, cria-se uma incompatibilidade de modelos, pois para um comprimento finito (por maior que seja) irão existir soluções típicas da cavidade, enquanto para um comprimento infinito o mesmo não irá ocorrer (Ribeiro, 2010).

Ainda de acordo com Ribeiro (2010), na prática pode surgir o questionamento sobre qual dos dois modelos (cavidade finita ou infinita) seria o mais correto para representação do sistema barragem-reservatório. Sabe-se que por maior que seja a extensão de um reservatório, esta ainda terá um comprimento finito. Por outro lado, a introdução de uma fronteira finita onde a pressão é nula também implica em limitações, já que não se sabe a priori o valor deste comprimento. Além disso, a imposição desta condição em um reservatório finito é incompatível com o contorno apresentado na fronteira, que não terá pressão nula. Adicionalmente, deve-se lembrar que existem outras incertezas presentes no problema, tais como os efeitos tridimensionais da geometria e mecanismos dissipativos do reservatório. Apesar destas limitações, pode-se concluir que as duas abordagens apresentam soluções idênticas para frequências localizadas abaixo da primeira ressonância da cavidade.

Já em um modelo de elementos finitos com fluido incompressível deve-se adotar um valor de c grande o suficiente para permitir a faixa de modos desejada antes da primeira ressonância. É interessante notar que a principal vantagem deste modelo é a possibilidade de representação de uma seqüência de modos que não poderiam ser analisados no caso compressível, devido à limitação da frequência de corte da cavidade (Ribeiro, 2010). A

consideração de água incompressível foi adotada na validação do sistema acoplado do Caso 3, na seção 4.5.2.

Os gráficos das Figuras 4.38 (b) e 4.40 (b) apresentaram, portanto, uma série de frequências ressonantes acopladas típicas da cavidade em função da simplificação do reservatório com comprimento finito e extremidade oposta à barragem, aberta.

O elemento acústico infinito FLUID130, utilizado para modelar o contorno de regiões de fluidos 3D, da biblioteca do ANSYS, absorve ondas de pressão, simulando os efeitos cessantes de um domínio que se estende ao infinito além do elemento FLUID30. FLUID130 proporciona uma condição de contorno absorvente de segunda ordem de modo que uma onda de pressão que se afasta, atingindo o contorno do modelo é absorvida com reflexões mínimas de volta para o domínio fluido. Segundo o tutorial do ANSYS 11.0, os elementos infinitos funcionam bem tanto para excitações de baixa, bem como de alta, frequência. Experimentos numéricos determinaram que a localização dos elementos de absorção a uma distância de aproximadamente $0,2\lambda$ além da região ocupada pela estrutura ou pela fonte de vibração pode produzir soluções precisas, onde $\lambda = c/f$ é o comprimento de onda dominante das ondas de pressão, c é a velocidade do som no fluido e f é a frequência dominante da onda de pressão.

Adaptando o modelo do sistema fluido-estrutura de forma a se aproximar do modelo de Porter e Chopra (1981), o reservatório foi remodelado (Figura 4.42) com um comprimento central igual a $0,2 \cdot H_b$ (resultando em f igual a 48 Hz - a título de comparação, aproximadamente, a primeira frequência de ressonância da cavidade, pela Equação 4.120, para $L_x = 21,21 \text{ m}$ - a medida da corda do arco externo da barragem -, $L_y = \infty$ e $L_z = 30 \text{ m}$, seria igual a 36 Hz) com suas margens perpendiculares aos apoios da barragem; o elemento acústico infinito foi incluído na extremidade oposta à barragem e a componente normal da aceleração de campo livre das margens do reservatório foi incluída através do envolvimento das margens por um elemento de casca com alto módulo de elasticidade interagindo com o fluido. Adotando $c = 10^5 \text{ m/s}$ para água incompressível e $c = 1.440 \text{ m/s}$ para água compressível, os gráficos da Figura 4.43 foram obtidos, mostrando a filtragem de frequências acopladas típicas da cavidade e uma relação maior com os resultados de Porter e Chopra (1981).



Figura 4.42 - Modelo adaptado do Caso 4

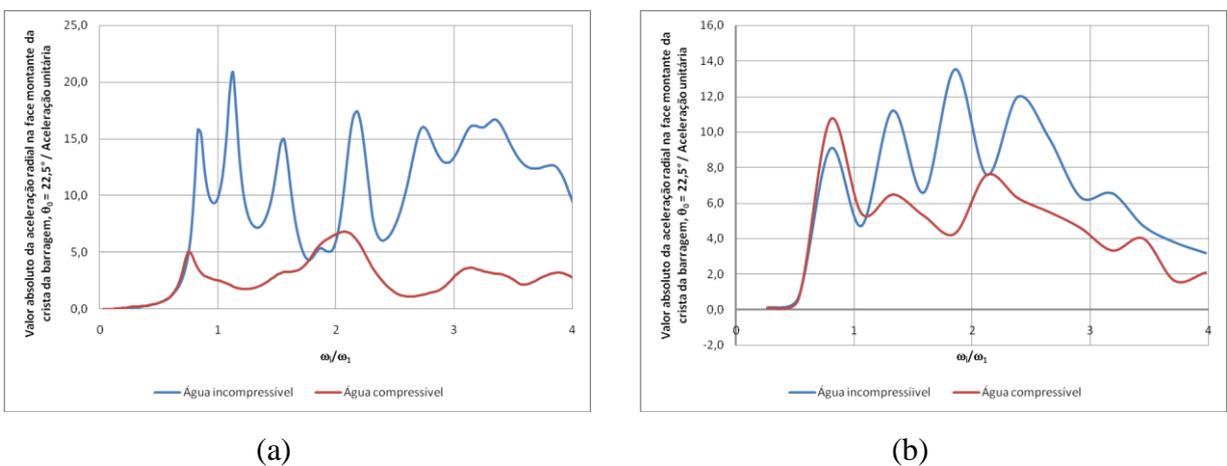


Figura 4.43 - Resposta devido ao movimento (a) montante-jusante e (b) transversal do solo (Caso 4 - Fluido-estrutura) (ANSYS)

4.5.4 Caso 5 - Barragem em arco com dupla curvatura

As Figuras 4.44 e 4.46 apresentam os testes de convergência realizados.

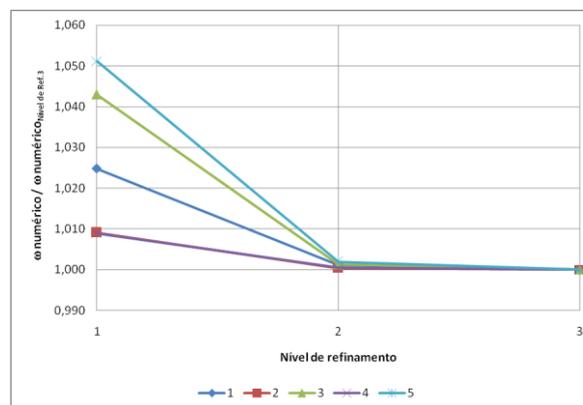


Figura 4.44 - Estudo de convergência e validação (Caso 5 - Estrutura)

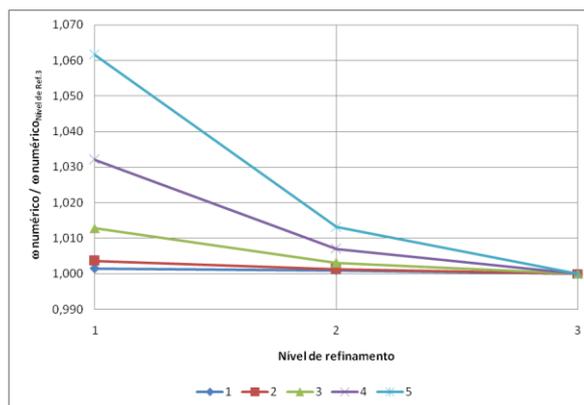


Figura 4.45 - Estudo de convergência e validação (Caso 5 - Fluido)

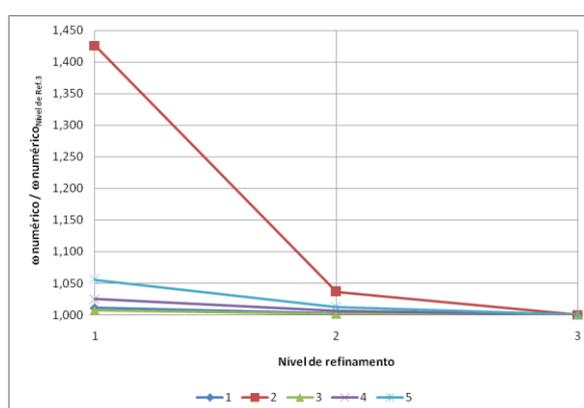


Figura 4.46 - Estudo de convergência e validação (Caso 5 - Fluido-estrutura)

Observando os gráficos, constata-se a boa convergência, sendo que já no primeiro nível de refinamento os valores das frequências naturais são satisfatórios. Nesse caso foi utilizado o nível de refinamento 3 na análise de vibração livre e 1 na análise sísmica, em função do menor tempo de processamento.

O sistema estrutural foi também validado através da comparação de propriedades do modo fundamental obtidos por Tan e Chopra (1996) em sua análise da barragem *Morrow Point*.

A Tabela 4.4 apresenta os casos da barragem analisada (*Morrow Point Dam*), os períodos de vibração ressonantes fundamentais (T_1) e as ordenadas do espectro de resposta (pseudo-aceleração) $[S_a(T_1^y, \zeta_1^y)]$ ao terremoto de *Taft*, obtidos numericamente, segundo Tan e Chopra (1996) e a diferença dos resultados em relação ao artigo de referência.

Tabela 4.4 - Propriedades dos modos fundamentais da barragem *Morrow Point*

Caso		Estrutura		
Componente	Resposta	Numérico	Tan e Chopra (1996)	Diferença (%)
Montante (M)	T_I^y (s)	0,213	0,234	9,1%
	ζ_I^y (%)	5,0		-
	$S_a(T_I^y, \zeta_I^y)$ (g)	0,432	0,433	0,3%
Vertical (V)	T_I^z (s)	0,213	0,234	9,1%
	ζ_I^z (%)	5,0		-
	$S_a(T_I^z, \zeta_I^z)$ (g)	0,283	0,299	5,4%
Transversal (T)	T_I^x (s)	0,267	0,263	1,7%
	ζ_I^x (%)	5,0		-
	$S_a(T_I^x, \zeta_I^x)$ (g)	0,290	0,370	21,6%

Segundo Tan e Chopra (1996), os períodos ressonantes fundamentais T_I^y e T_I^z obtidos da resposta ao movimento montante ou vertical do solo são os mesmos; é o período do modo simétrico fundamental de vibração. O período ressonante fundamental T_I^x e a razão de amortecimento ζ_I^x , obtidos da resposta ao movimento transversal do solo, são o período e a razão de amortecimento do modo anti-simétrico fundamental de vibração. A pseudo-aceleração S_a correspondente ao período de vibração fundamental e razão de amortecimento, determinada da resposta a cada componente de movimento do solo, é obtida do espectro de resposta para aquele componente particular. Apesar de algumas diferenças nos resultados, essas são aceitáveis e o modelo estrutural é assim válido.

Não foi realizada comparação com o modelo acoplado porque em Tan e Chopra (1996), há diferenças quanto ao modelo e às condições de contorno do reservatório: o domínio fluido é dividido em um finito de geometria irregular e um infinito de seção transversal uniforme, considera-se condição fluido-fundação (margens laterais e fundo), com a modelagem da rocha de fundação, e a condição de contorno de radiação no infinito é adotada na extremidade montante do reservatório.

4.6 ANÁLISES APROXIMADAS

Apesar de não se ter uma formulação analítica correta para as freqüências e deformadas modais, torna-se possível, “como uma aproximação”, representar as geometrias dos domínios fluidos dos casos 2 a 5 por geometrias paralelepípedicas, que apresentam soluções analíticas. Não há problema se existem diferenças significativas, o importante é compará-los e interpretar as discrepâncias. Essa estratégia será adotada na discussão dos resultados dos sistemas fluidos desacoplados dos casos 2 a 5.

Para o Caso 2, as condições de contorno são: aberta-aberta na direção x (transversal) e fechada-aberta nas direções y (longitudinal) e z (vertical). Para os Casos 3, 4 e 5, as condições de contorno são: fechada-fechada na direção x (transversal) e fechada-aberta nas direções y (longitudinal) e z (vertical).

A freqüência resultante desacoplada para essas condições de contorno é obtida pela combinação das freqüências naturais desacopladas em x , y e z .

Para se obter os modos de vibração da cavidade desacoplada, usa-se o método da matriz de transferência, Pedroso (2003). Aplicando-se as condições de contorno e substituindo-se a freqüência correspondente na direção x , y e z , chega-se às deformadas modais normalizadas.

Para o Caso 2, a freqüência natural e a deformada modal do domínio fluido aproximado são dadas por:

$$\omega = \pi c \left[\left(\frac{i}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{j}{2L_y} \right)^2 + \left(\frac{k}{2L_z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} i = 1,2,3,\dots \\ j = 1,3,5,\dots \\ k = 1,3,5,\dots \end{cases} \quad (4.118)$$

$$p(x, y, z) = \text{sen} \left(\frac{i\pi x}{L_x} \right) \cos \left(\frac{j\pi y}{2L_y} \right) \cos \left(\frac{k\pi z}{2L_z} \right) \Rightarrow \begin{cases} i = 1,2,3,\dots \\ j = 1,3,5,\dots \\ k = 1,3,5,\dots \end{cases} \quad (4.119)$$

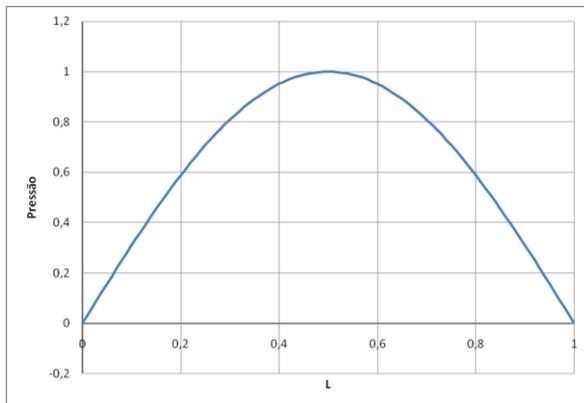
onde L_x , L_y e L_z são os comprimentos associados com as coordenadas x , y e z e i , j , k são os índices modais da cavidade nas direções x , y e z .

Para os Casos 3, 4 e 5:

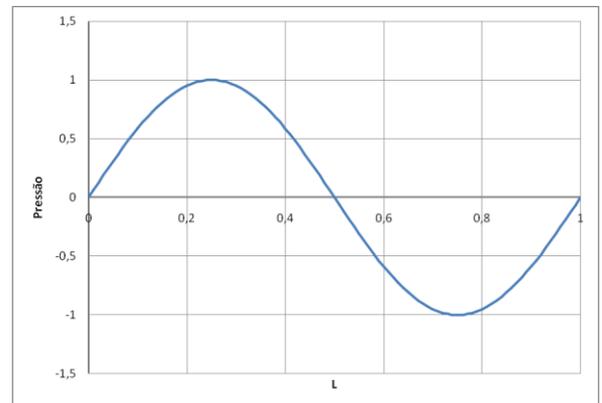
$$\omega = \pi c \left[\left(\frac{i}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{j}{2L_y} \right)^2 + \left(\frac{k}{2L_z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} i = 0,1,2,\dots \\ j = 1,3,5,\dots \\ k = 1,3,5,\dots \end{cases} \quad (4.120)$$

$$p(x, y, z) = \cos\left(\frac{i\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{j\pi y}{2L_y}\right) \cos\left(\frac{k\pi z}{2L_z}\right) \Rightarrow \begin{cases} i = 0,1,2,\dots \\ j = 1,3,5,\dots \\ k = 1,3,5,\dots \end{cases} \quad (4.121)$$

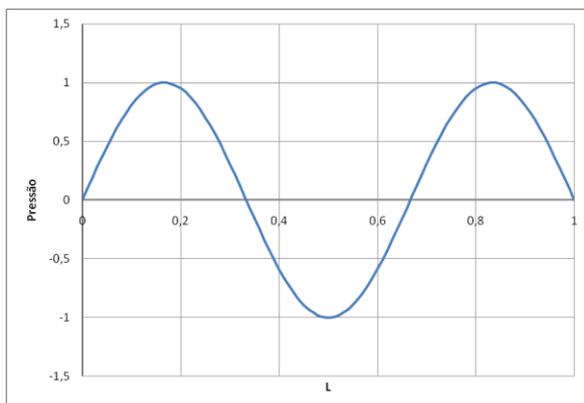
As Figuras 4.47, 4.48 e 4.49 apresentam os quatro primeiros modos acústicos desacoplados para cavidades aberta-aberta, fechada-fechada e fechada-aberta.



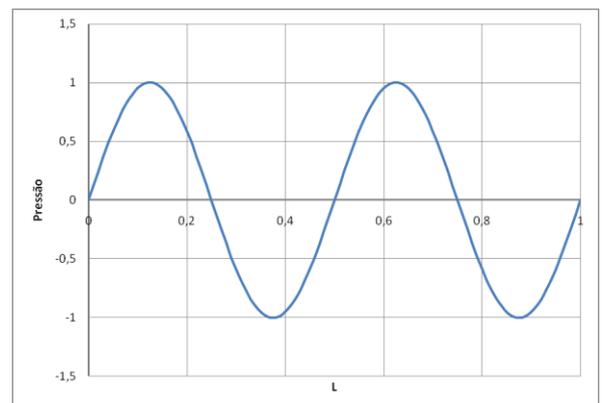
(a) $i = 1$



(b) $i = 2$

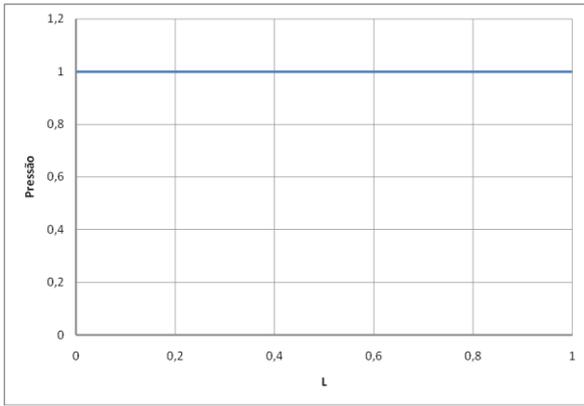


(c) $i = 3$

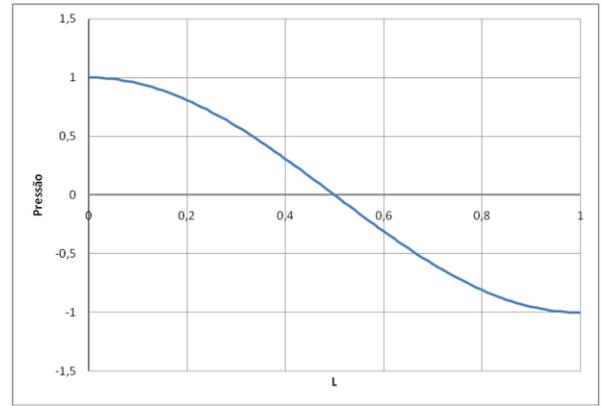


(d) $i = 4$

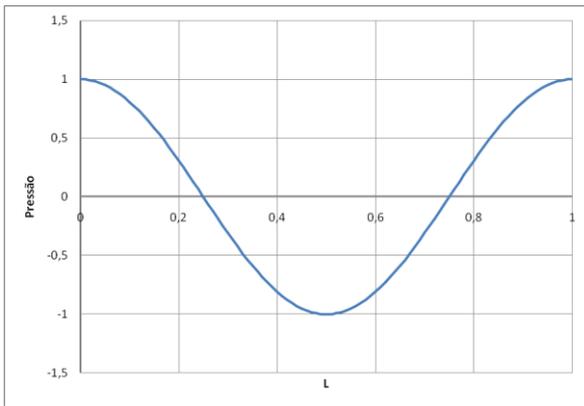
Figura 4.47 - Modos acústicos desacoplados para condição de contorno aberta-aberta: (a) 1º, (b) 2º, (c) 3º e (d) 4º modos



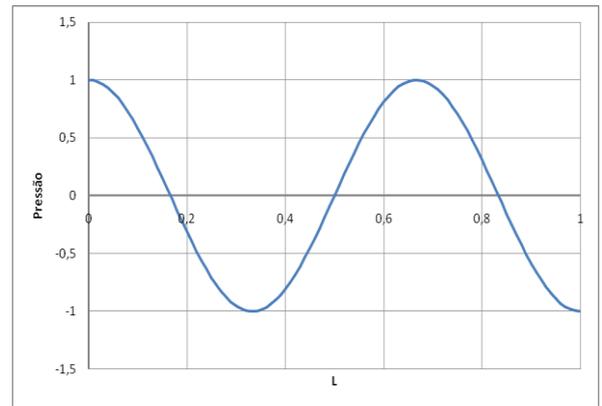
(a) $i = 0$



(b) $i = 1$



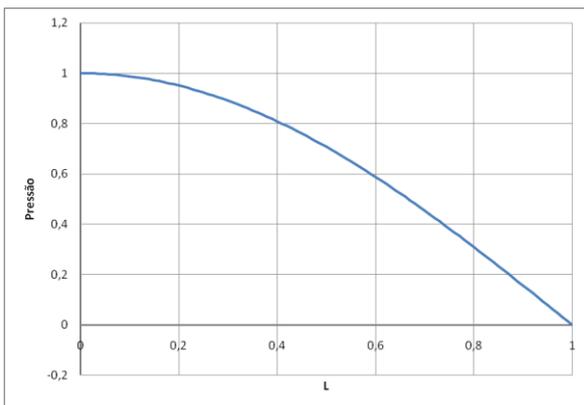
(c) $i = 2$



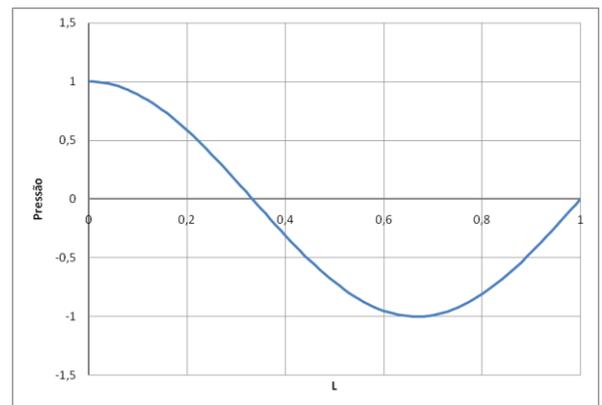
(d) $i = 3$

Figura 4.48 - Modos acústicos desacoplados para condição de contorno fechada-fechada:

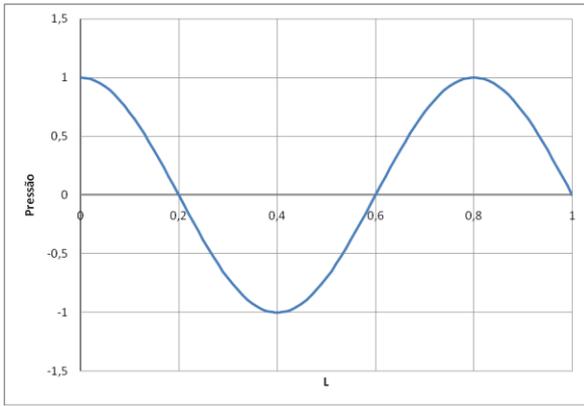
(a) 1º, (b) 2º, (c) 3º e (d) 4º modos



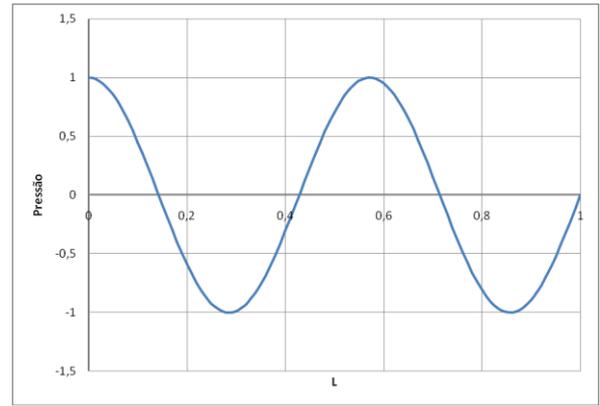
(a) $i = 1$



(b) $i = 3$



(c) $i = 5$



(d) $i = 7$

Figura 4.49 - Modos acústicos desacoplados para condição de contorno fechada-aberta: (a) 1°, (b) 2°, (c) 3° e (d) 4° modos

Os índices i , j e k foram indicados também nos domínios fluidos exatos para efeito de comparação com os aproximados.

A análise dos sistemas fluido-estrutura acoplados é feita segundo a metodologia apresentada em Souza (2007) e transcrita a seguir.

Os modos de vibração do problema acoplado fluido-estrutura apresentam uma certa dificuldade na análise e interpretação, pois surgem modos com características típicas da estrutura, da cavidade e misto (cavidade+estrutura).

Para conseguir identificá-los, faz-se necessário observar que modo (estrutura ou fluido) é dominante no sistema. As formas modais para o problema acoplado podem ser classificadas em três tipos, de acordo com o meio que controla a configuração do fenômeno fluido-estrutura: 1) Modo da estrutura (DE), 2) Modo do fluido (DC) e 3) Modo “misto” (MM).

O primeiro se caracteriza pelo controle do modo por parte da estrutura, ou seja, o modo é dominado pelo sólido e a cavidade se adapta (segue) a deformada da estrutura, enquanto que no modo dominado pelo fluido, a estrutura se ajusta (acompanha) a configuração do campo de pressão do fluido. Por último, o modo misto apresenta características dos dois domínios (a estrutura e o fluido), reproduzindo as mesmas formas modais da estrutura e da cavidade.

Na análise e interpretação das formas modais associadas ao problema acoplado fluido-estrutura para as cavidades em questão, observa-se a seguinte assinatura modal (padrão):

a) Modos dominantes da estrutura (deformadas modais típicas da estrutura) com massa adicional (DE/MA). As frequências apresentam valores menores do que as frequências desacopladas da estrutura. O fluido acompanha a deformada da estrutura. Não há excitação das formas modais da cavidade. Como o fluido é perturbado, ele age com um efeito de massa adicional sobre a estrutura.

b) Modos dominantes da cavidade com rigidez adicional (DC/RA). Reproduzem as formas modais 3D da cavidade desacoplada com frequências superiores às frequências destas. A estrutura acompanha as formas modais de pressão da cavidade, ajusta-se a essa e segue alguma de suas deformadas típicas e bem definidas. A cavidade se comporta como se adquirisse rigidez adicional induzida pela rigidez da estrutura.

c) Os modos mistos ou misturados (MM) reproduzem aspectos típicos da estrutura e da cavidade, mas sem característica dominante, ou seja, nem de um nem de outro.

Os modos misturados são de difícil interpretação e surgem com frequências, que equivalem a soma das frequências esperadas para cada um dos sistemas independentes. Classifica-se o modo misto em duas categorias distintas: modos mistos com massa adicional (MM/MA) e modo misto com rigidez adicional (MM/RA).

A frequência acoplada do modo misto com massa adicional (MM/MA) é menor que as frequências isoladas, ou seja, os valores desacoplados da cavidade e da estrutura.

O modo misto com rigidez adicional (MM/RA) apresenta característica com influência recíproca das duas deformadas e nem uma dominância específica, mas surgem com frequência nitidamente superior em relação às duas frequências do sistema desacoplado (estrutura e cavidade). A cavidade não sofre uma perturbação com o aumento da rigidez do sistema, ou seja, com o aumento da rigidez do fluido.

5 RESULTADOS

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos de todos os casos propostos sob as abordagens analíticas, baseadas nas teorias desenvolvidas no capítulo 3, e numéricas obtidas com o programa ANSYS 11.0, baseadas nas formulações apresentadas no capítulo 4, tomando-se as malhas validadas no capítulo 4 e ditas como de referência para a análise de resultados.

O Caso 1 é um caso básico no estudo comparativo analítico-numérico de aspectos da interação fluido-estrutura quando se trata de casca cilíndrica circular reta preenchida com fluido em função da vasta literatura disponível e das formulações relativamente simples. Por este motivo, será apresentada e discutida em maiores detalhes. Posteriormente, as análises dos Casos 2, 3 e 4 serão apresentadas.

O Caso 5, baseado em Tan e Chopra (1996), é analisado e a análise de estabilidade sísmica de uma barragem em arco com dupla curvatura (a barragem *Morrow Point*) é apresentada em seus pormenores.

5.2 ANÁLISE DE RESULTADOS

5.2.1 Caso 1 - Cilindro de revolução

Estrutura:

Vibração livre:

O Caso 1A, do ponto de vista da estrutura, refere-se a uma casca cilíndrica circular reta biapoiada, sem restrição axial.

Os resultados das dez primeiras frequências circulares naturais (ω) analíticas e numéricas, sua ordem (N), seu índice (imn) e os respectivos erros estão apresentados na Tabela 5.1.

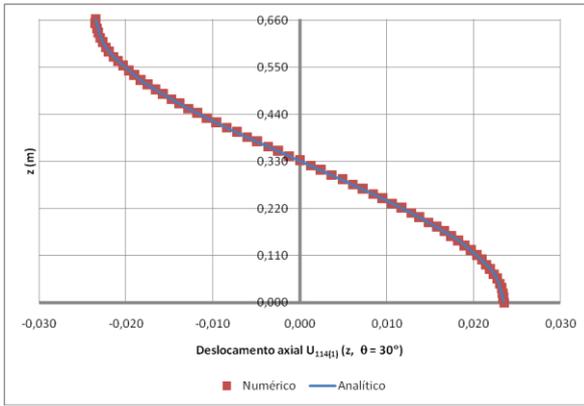
Tabela 5.1 - Frequências naturais da estrutura desacoplada (Caso 1)

N	i	m	n	ω_{imn} analítico (rad/s)	ω_{imn} numérico (rad/s)	Erro (%)
1	1	1	4	1.410,93	1.410,14	0,06%
2	1	1	5	1.459,61	1.458,89	0,05%
3	1	1	6	1.881,22	1.880,56	0,04%
4	1	1	3	2.022,82	2.022,24	0,03%
5	1	1	7	2.498,66	2.497,75	0,04%
6	1	2	6	2.806,85	2.805,76	0,04%
7	1	2	7	3.000,61	2.998,40	0,07%
8	1	2	5	3.160,33	3.160,51	0,01%
9	1	1	8	3.248,36	3.246,96	0,04%
10	1	2	8	3.547,76	3.544,47	0,09%

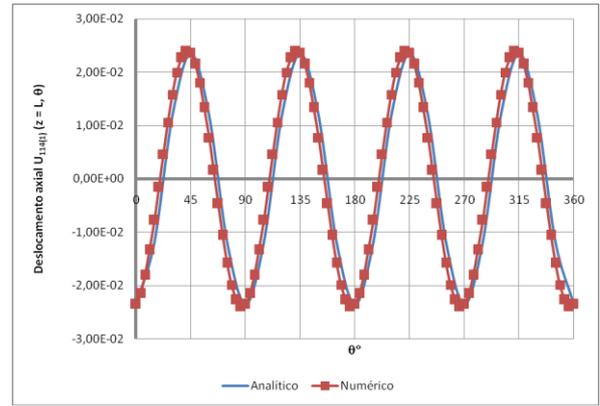
A comparação entre os resultados analítico e numérico dos modos de vibração axial, circunferencial e radial correspondentes à frequência natural ω_{114} é apresentada a seguir. O índice $i = 1$ indica que a menor entre as três frequências naturais $m = 1$, $n = 4$ é considerada, o que para a geometria do Caso 1A, corresponde a um modo predominantemente radial; o índice $m = 1$ denota uma meia-onda longitudinal no modo de vibração e o índice $n = 4$ indica quatro ondas circunferenciais no modo de vibração. Para cada deslocamento, são mostrados os modos de vibração ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\theta = 30^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $z = L/3$. A Figura 5.1 reúne o primeiro conjunto de modos, $114(1)$, cujo ângulo de fase $\varphi = 0$.

Como observado, na Tabela 5.1 e Figura 5.1, os resultados analítico e numérico coincidem muito bem tanto nas frequências naturais quanto nos modos de vibração. As soluções analítica e numérica mostradas nas Figuras 5.1 (b), (d) e (f) apresentam uma pequena defasagem, o que não invalida o resultado uma vez que o ângulo de fase φ , para o primeiro conjunto de modos naturais, é arbitrário (ver Apêndice C), considerado igual a 0 neste trabalho. Caso φ fosse considerado igual a $[-\pi/(48n)]$, os resultados seriam coincidentes.

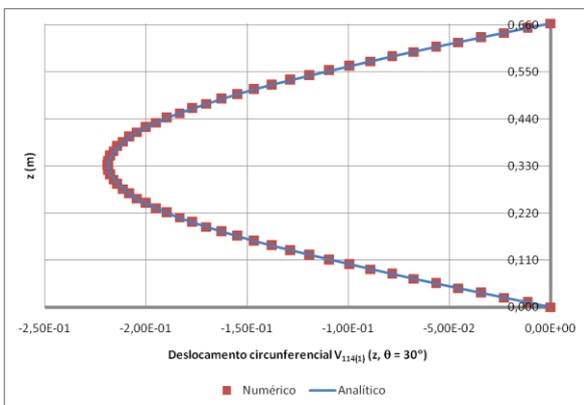
A Tabela 5.2 apresenta os modos de vibração numéricos da casca do Caso 1. São apresentados, para os 20 primeiros modos associados às 10 primeiras frequências naturais numéricas, as deformadas 3D (perspectiva) e 2D (vistas lateral e superior) e os deslocamentos axial (U), circunferencial (V) e radial (W). Adicionalmente, é apresentado o modo de corpo livre extraído dos resultados do programa.



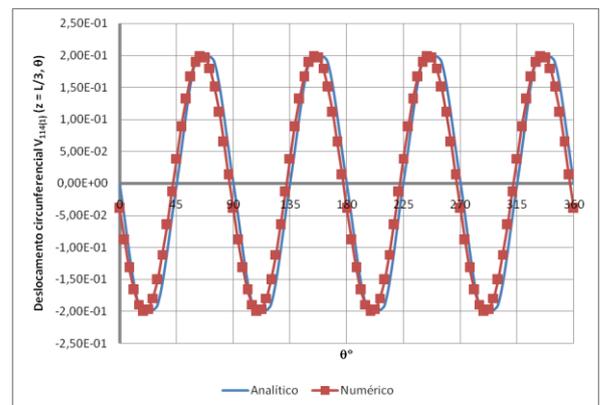
(a)



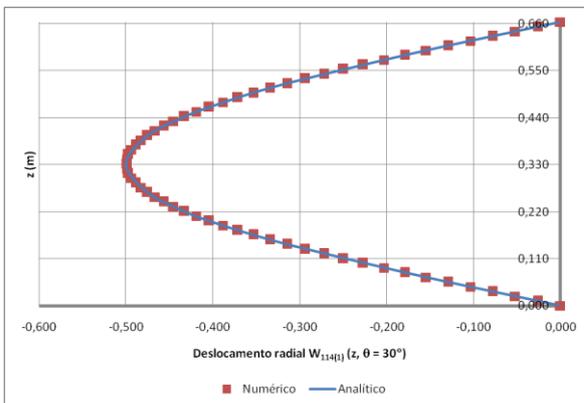
(b)



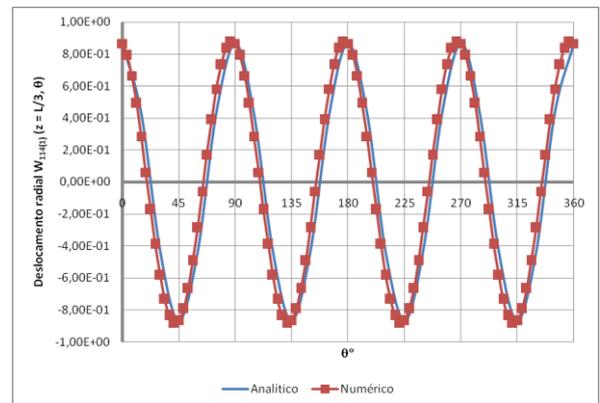
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 5.1 - Modos de deformação: [(a) e (b)] axial, [(c) e (d)] circunferencial e [(e) e (f)] radial ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\theta = 30^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $z = L/3$ (Caso 1 - Estrutura)

Os modos de vibração numéricos, neste e em todos os demais casos, foram ajustados pelos modos de vibração analíticos.

Tabela 5.2 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura obtidos via ANSYS (Caso 1)

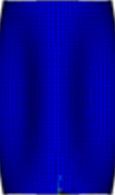
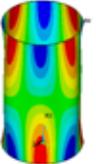
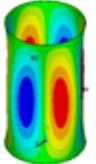
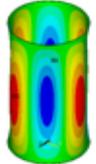
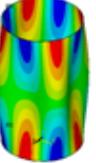
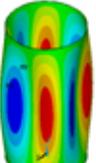
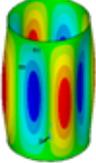
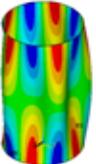
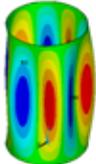
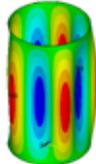
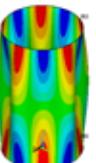
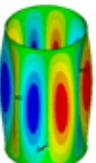
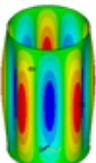
N	ω (rad/s)	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W
Corpo livre	0				-	-	-
1 [114(1)]	1.410,14						
1 [114(2)]							
2 [115(1)]	1.458,89						
2 [115(2)]							

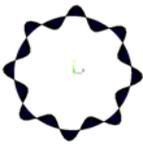
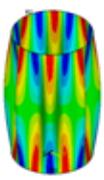
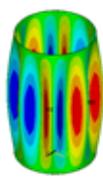
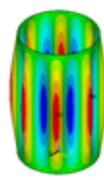
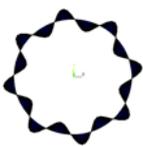
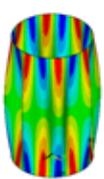
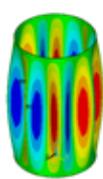
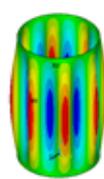
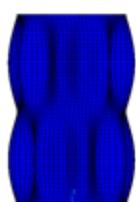
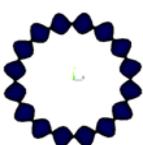
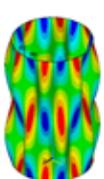
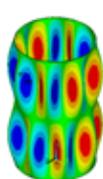
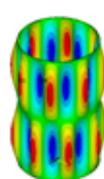
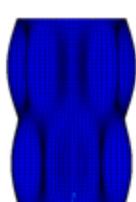
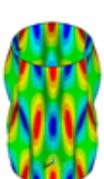
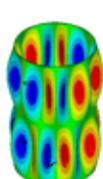
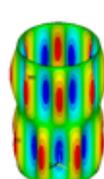
Tabela 5.2 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura obtidos via ANSYS (Caso 1), cont.

N	ω (rad/s)	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W
3 [116(1)]	1.880,56						
3 [116(2)]							
4 [113(1)]	2.022,24						
4 [113(2)]							
5 [117(1)]	2.497,75						
5 [117(2)]							

Tabela 5.2 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura obtidos via ANSYS (Caso 1), cont.

N	ω (rad/s)	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W
6 [126(1)]	2.805,76						
6 [126(2)]							
7 [127(1)]	2.998,40						
7 [127(2)]							
8 [125(1)]	3.160,51						
8 [125(2)]							

Tabela 5.2 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura obtidos via ANSYS (Caso 1), cont.

N [$i m n$ (l)]	ω (rad/s)	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W
9 [118(1)]	3.246,96						
9 [118(2)]							
10 [128(1)]	3.544,47						
10 [128(2)]							

As frequências naturais ω_{imn} analíticas, $i = 1$, m de 1 a 5, e $n = 1$ a 20, são mostradas na Figura 5.2. Nesta e em similares figuras, convencionalmente, linhas contínuas são desenhadas conectando os pontos discretos correspondentes à única possibilidade: valores inteiros de n .

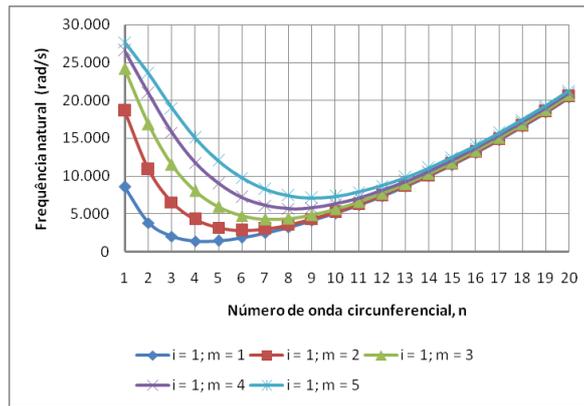


Figura 5.2 - Frequências naturais analíticas da estrutura (Caso 1)

Segundo Paidoussis (2004), as menores frequências naturais não necessariamente estão associadas com os menores n , i.e. $n = 0, 1$ ou 2 (como visto na Figura 5.2); a menor frequência depende da proporção da energia de deformação total associada à flexão e à membrana (extensão da circunferência), como primeiramente elucidado por Arnold e Warburton (1949). O valor de n associado com a frequência natural mínima depende principalmente de h/a e L/a .

A Figura 5.3 apresenta a energia de deformação e suas componentes flexional e extensional (ver Apêndice A) para as frequências $i = 1, m = 1, n = 2$ a 9 , mostrando que a energia potencial mínima ocorre para $n = 4$, que é o valor de n associado com a frequência natural mínima, como observado na Figura 5.2.

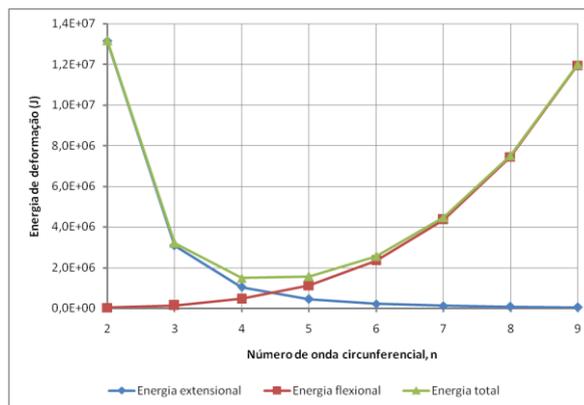


Figura 5.3 - Energia de deformação e suas componentes flexional e extensional (Caso 1)

A influência do número de semi-ondas longitudinais, m , nas frequências naturais da casca com extremos simplesmente apoiados, pode ser verificada através da Figura 5.2. Observa-se que a menor frequência natural da casca ocorre para $m = 1$, ou seja, para uma semi-onda

longitudinal, e que à medida que n cresce, os valores das frequências tendem a um valor comum para qualquer m , já que para modos de vibração altos (n alto), o comportamento dinâmico da casca é dominado por energia de flexão (Gasser, 1987).

Quando ao índice i , três modos diferentes surgem para cada par m,n : todos os três têm o mesmo número de linhas nodais, mas um é predominantemente radial (geralmente o menor), um é predominantemente circunferencial e um predominantemente axial (Paidoussis, 2004). Segundo Blevins (1995), apenas a menor das três soluções é de importância prática. Para exemplificar, a Figura 5.4 reproduz novamente os gráficos plotados na Figura 5.2, acrescidos das frequências naturais $i = 2$ e 3 , $m = 1$ e $n = 1$ a 5 .

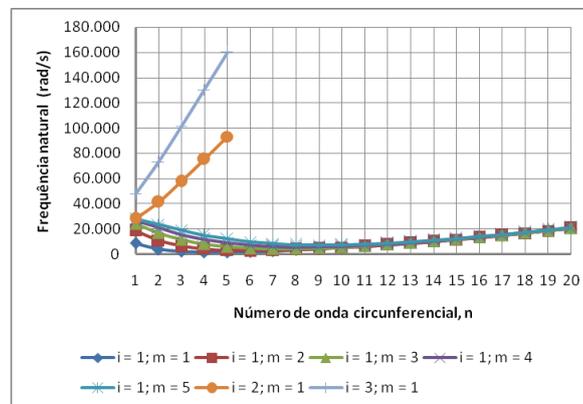
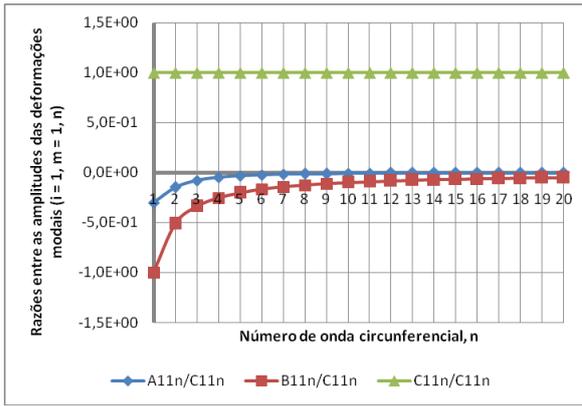
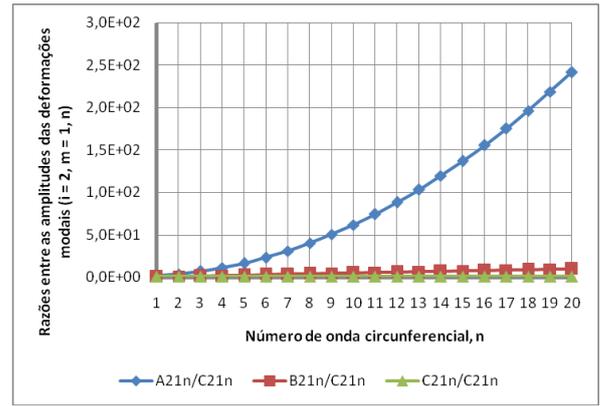


Figura 5.4 - Frequências naturais analíticas da estrutura (Caso 1)

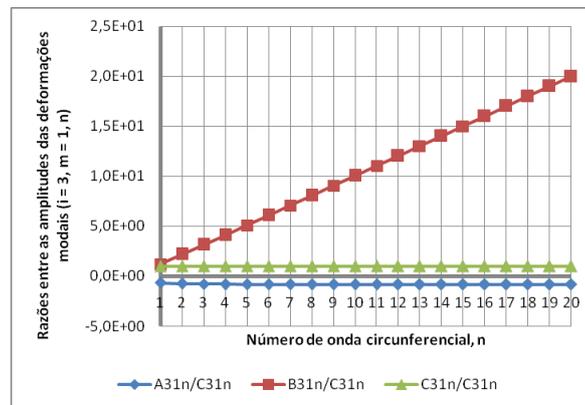
Para cada combinação m,n , têm-se três diferentes combinações de A , B e C (Soedel, 2005). Gráficos das razões entre as amplitudes das deformações modais (as constantes dos modos de vibração) foram desenvolvidos para os casos $i = 1,2,3$, $m = 1$, $n = 1$ a 20 , mostrados na Figura 5.5.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.5 - Constantes dos modos de vibração: (a) $i = 1, m = 1, n$, (b) $i = 2, m = 1, n$ e (c) $i = 3, m = 1, n$ (Caso 1 - Estrutura)

Dois casos merecem particular discussão. Para $n = 0$, têm-se os modos independentes do ângulo circunferencial θ e para $n = 1$, têm-se os chamados, segundo Blevins (1995), modos de flexão. Segundo Fernholz e Robinson (1990), os modos onde a combinação m, n é igual a $1, 0$ são chamados de modos de respiração.

A Tabela 5.3 apresenta as frequências naturais analíticas dos modos de vibração $n = 0$, para $m = 1$ a 5.

Tabela 5.3 - Frequências naturais da estrutura para $n = 0$ (Caso 1)

m	$\omega_{1m0(1)}$ (rad/s)	$\omega_{2m0(1)}$ (rad/s)	$\omega_{1m0(2)}$ (rad/s)
1	22.982,81	33.077,01	15.196,68
2	28.909,01	52.593,33	30.393,36
3	29.347,16	77.715,72	45.590,04
4	29.468,65	103.206,46	60.786,72
5	29.526,03	128.790,76	75.983,40

A Tabela 5.4 traz exemplos dos modos de vibração $n = 0$ numéricos para $m = 1$. A Tabela 5.5 traz exemplos dos dois conjuntos de modos de vibração de flexão numéricos para $m = 1$.

Tabela 5.4 - Frequências naturais e modos de vibração $n = 0$ numéricos da estrutura para $m = 1$, obtidos via ANSYS (Caso 1)

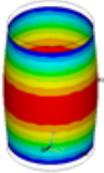
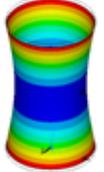
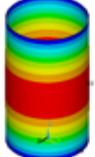
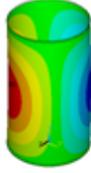
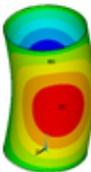
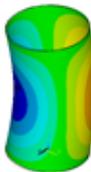
Modo $i_{mn}()$	ω (rad/s)	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W
110(1)	22.983,89					-	
210(1)	33.080,97					-	
110(2)	15.192,74				-		-

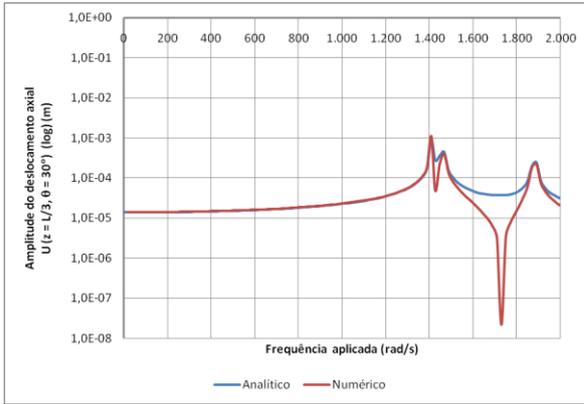
Tabela 5.5 - Frequências naturais e modos de vibração de flexão ($n = 1$) numéricos da estrutura para $m = 1$, obtidos via ANSYS (Caso 1)

Modo imm()	ω (rad/s)	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W
111(1)	8.563,98						
111(2)							

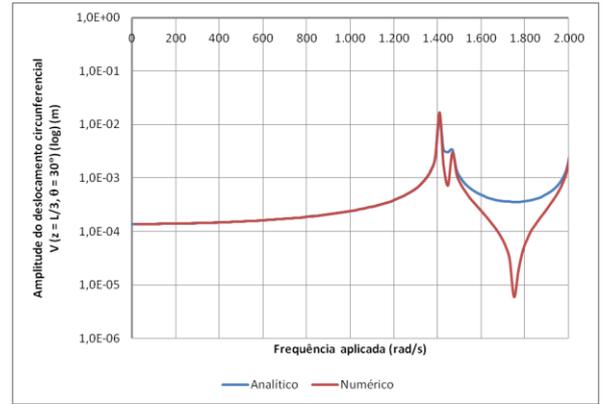
Vibração Forçada:

Carga harmônica pontual (CHP):

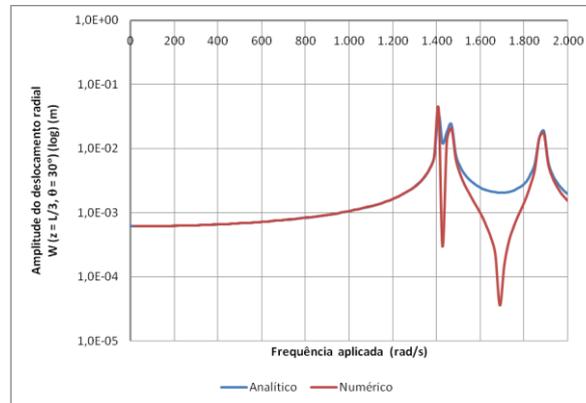
As curvas de amplitude dos deslocamentos axial, circunferencial e radial em função da frequência de excitação aplicada, variando de 0 a 2.000 rad/s, no ponto de coordenada $z = L/3$, $\theta = 30^\circ$ são apresentadas na Figura 5.6 para uma razão de amortecimento $\zeta = 0\%$. Para obter uma melhor visualização da resposta, nesta e em similares figuras, as amplitudes dos deslocamentos foram plotadas em escala logarítmica.



(a)



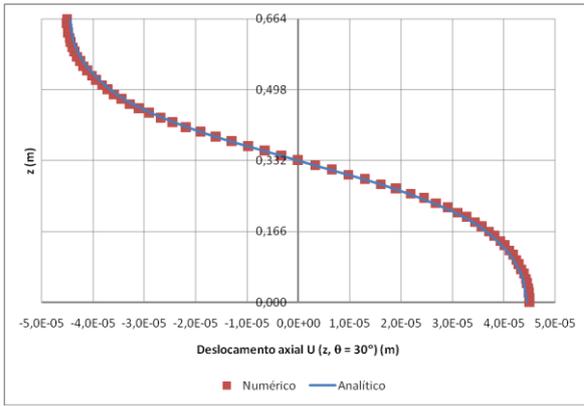
(b)



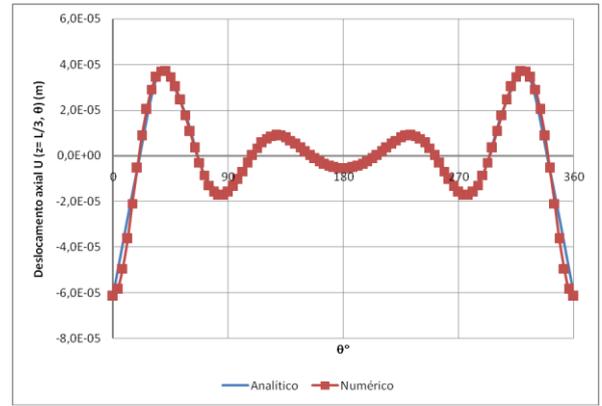
(c)

Figura 5.6 - Curvas da amplitude do deslocamento: (a) axial, (b) circunferencial e (c) radial no ponto de coordenada $z = L/3$, $\theta = 30^\circ$ em função da frequência aplicada

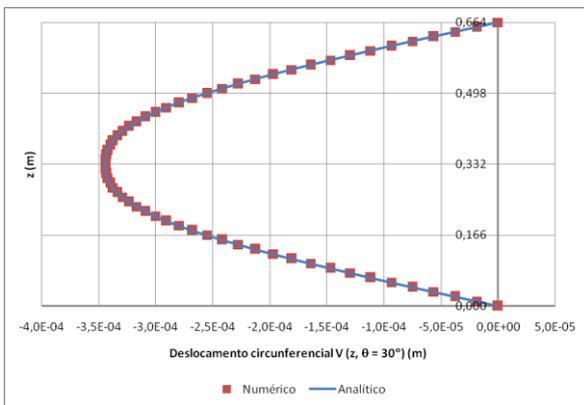
Nota-se que os picos das curvas ocorrem nas frequências aplicadas aproximadamente iguais às primeiras frequências naturais em que a estrutura é excitada. Adotando uma frequência aplicada $\bar{\omega} = 1.125,95 \text{ rad/s}$, no instante $t = \bar{T}/4$, isto é, $t = 5,58 \cdot 10^{-3} \text{ s}$, os deslocamentos axial, circunferencial e radial ao longo da reta $0 \leq z \leq L$, em $\theta = 30^\circ$ e da circunferência $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, em $z = L/3$ são apresentados na Figura 5.7.



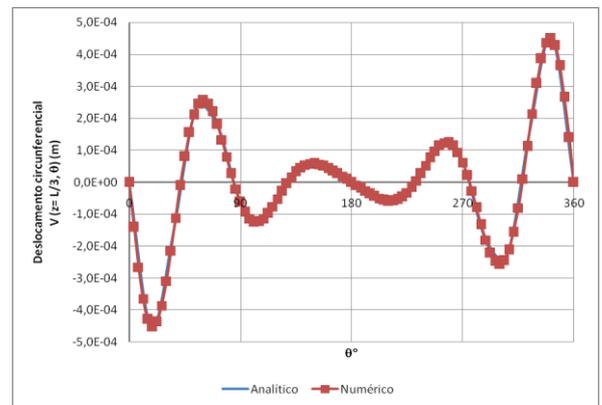
(a)



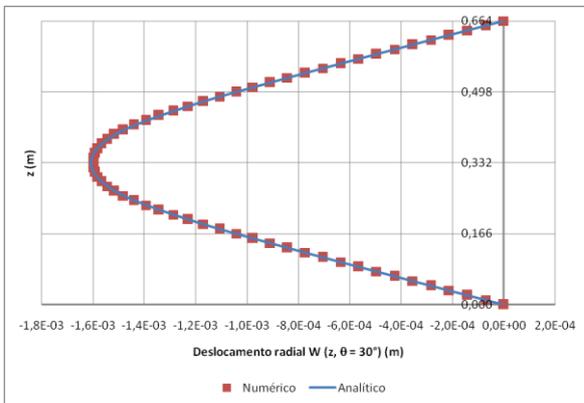
(b)



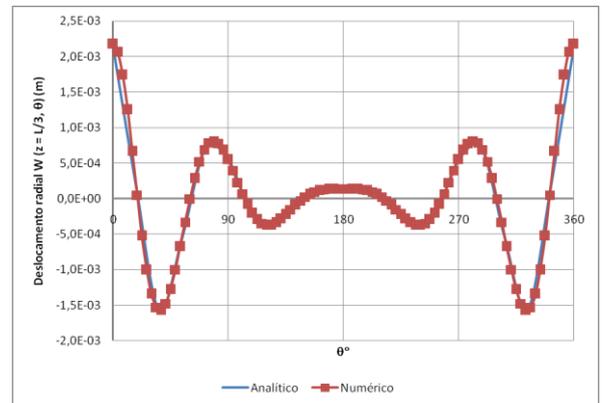
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 5.7 - Deslocamentos: [(a) e (b)] axial, [(c) e (d)] circunferencial e [(e) e (f)] radial ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\theta = 30^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $z = L/3$

Analisando os resultados, constata-se a conformidade das abordagens analítica e numérica.

A Figura 5.8 mostra a deformada e os deslocamentos axial, circunferencial e radial obtidos via ANSYS.

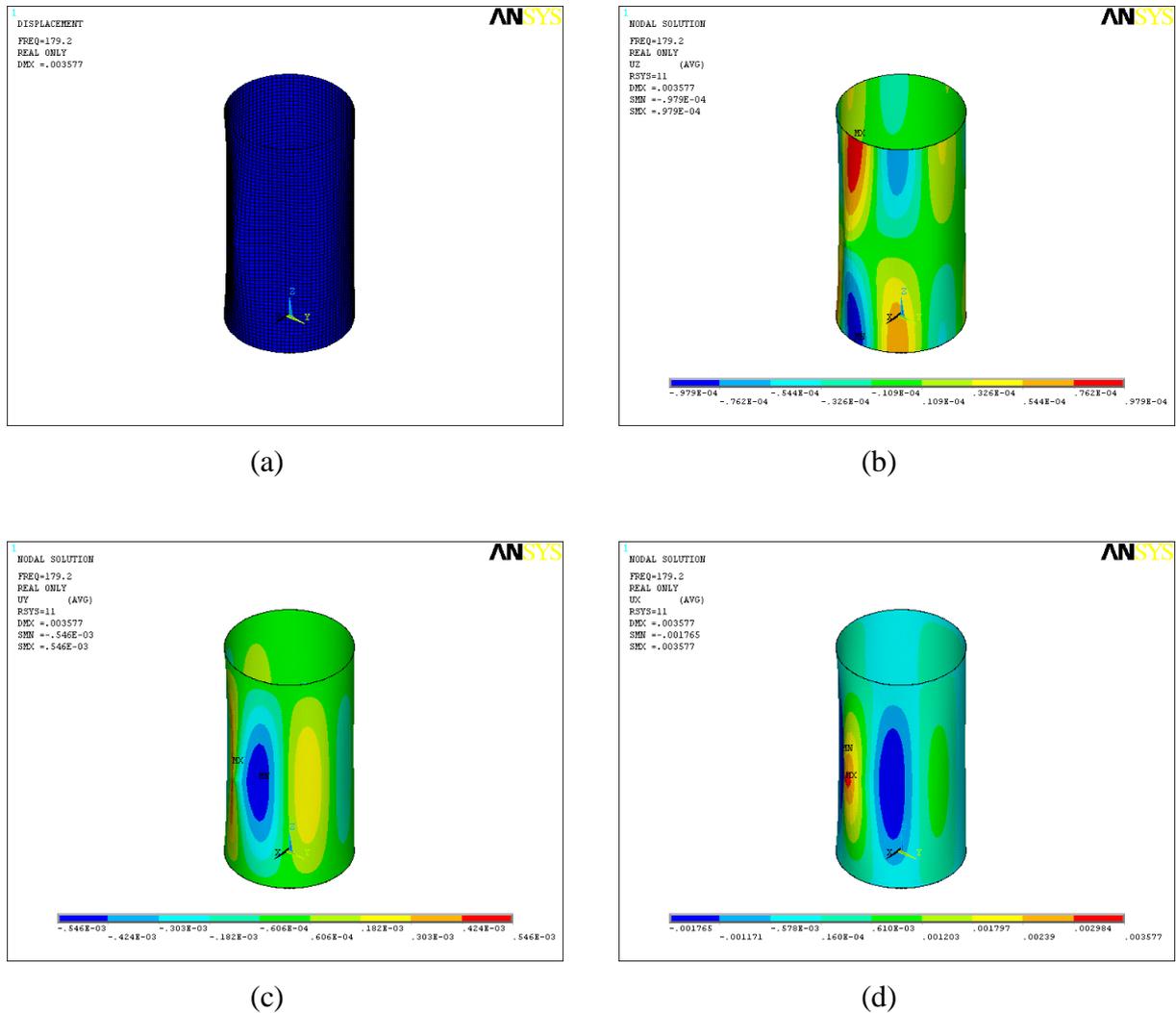


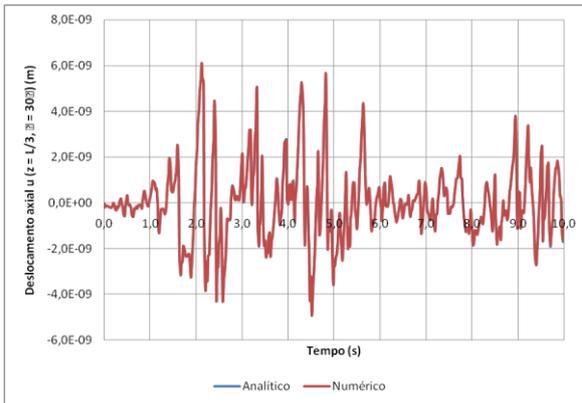
Figura 5.8 - (a) Deformada e deslocamentos (b) axial, (c) circunferencial e (d) radial, em m

Carga sísmica (CS):

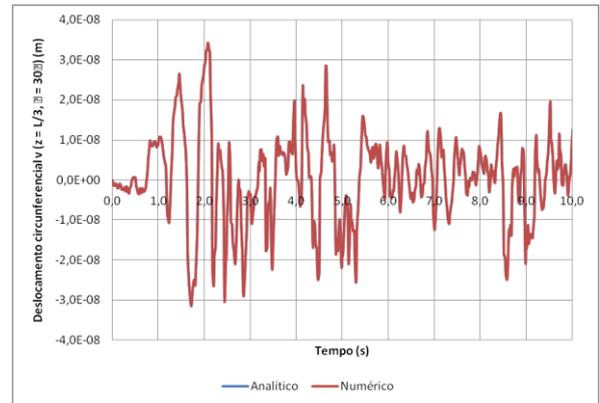
As curvas de deslocamento em função do tempo, variando de 0 a 10 segundos, no ponto de coordenada $z = L/3$, $\theta = 30^\circ$ são apresentadas na Figura 5.9.

Em análises transientes (*full method*), o ANSYS não dispõe de razão de amortecimento constante sendo necessário definir os amortecimentos α e β . Sendo $\omega_{111} = 8.564,05$ rad/s e $\omega_{131} = 24.149,01$ rad/s, as frequências analíticas correspondentes aos dois primeiros modos que contribuem para a resposta, têm-se $\alpha = 632,20$ e $\beta = 3,06 \cdot 10^{-6}$.

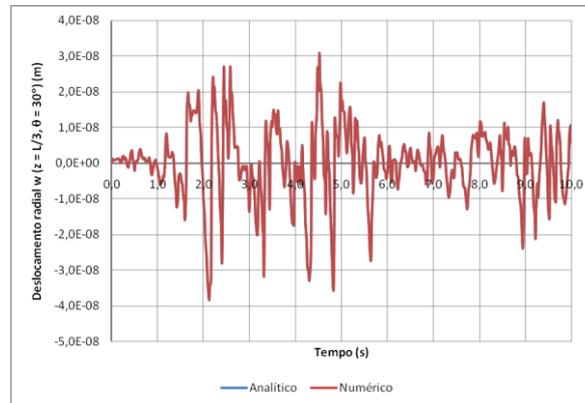
Deve-se ressaltar que, como mencionado no Capítulo 3, a aceleração do solo durante um terremoto varia irregularmente, de tal modo que uma solução analítica da equação de movimento deve ser descartada. O termo “analítico” nas legendas refere-se ao procedimento numérico de interpolação da excitação ao longo de cada intervalo de tempo (derivado da solução exata), em oposição ao termo “numérico” que se refere ao MEF, obtido via ANSYS.



(a)



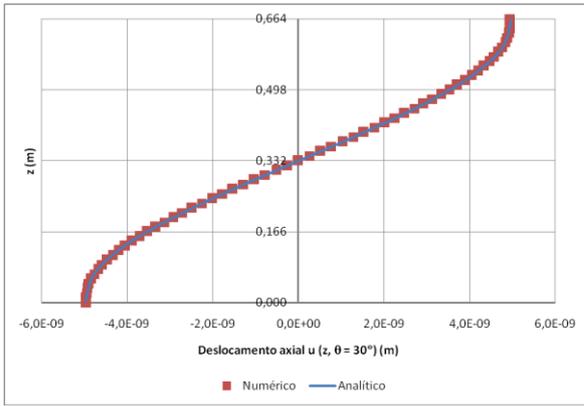
(b)



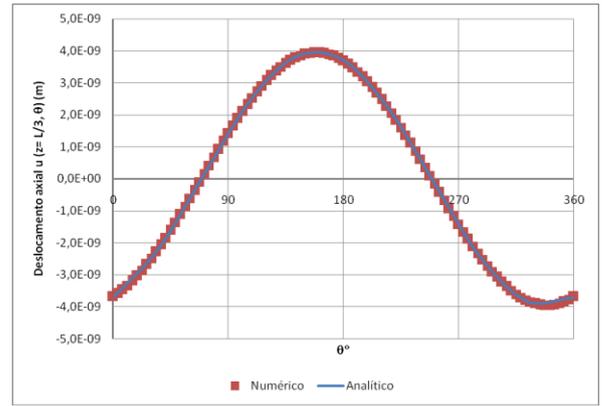
(c)

Figura 5.9 - Curvas dos deslocamentos (a) axial, (b) circunferencial e (c) radial no ponto de coordenada $z = L/3$, $\theta = 30^\circ$ em função do tempo

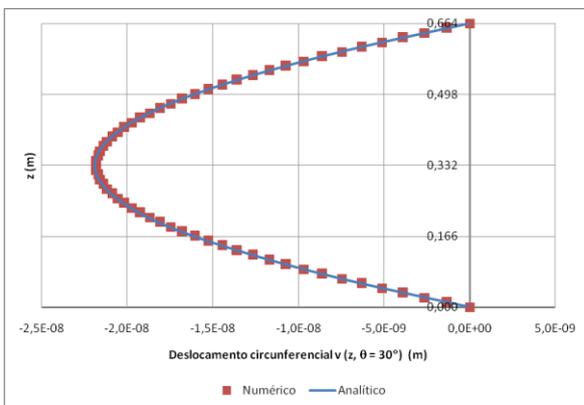
Os deslocamentos axial, circunferencial e radial ao longo da reta $0 \leq z \leq L$, em $\theta = 30^\circ$ e da circunferência $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, em $z = L/3$ no instante $t = 5s$, são apresentados na Figura 5.10.



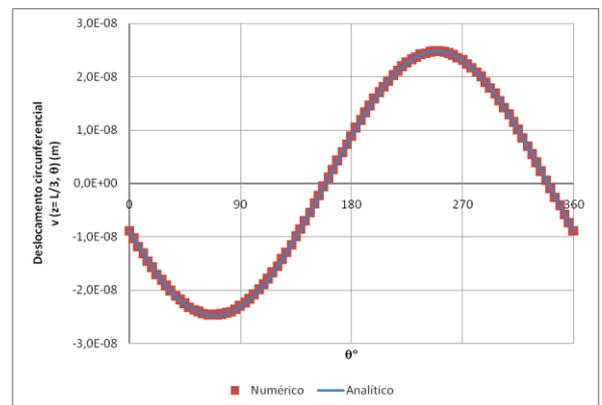
(a)



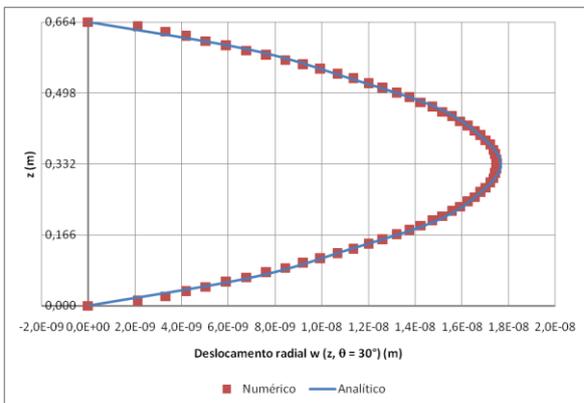
(b)



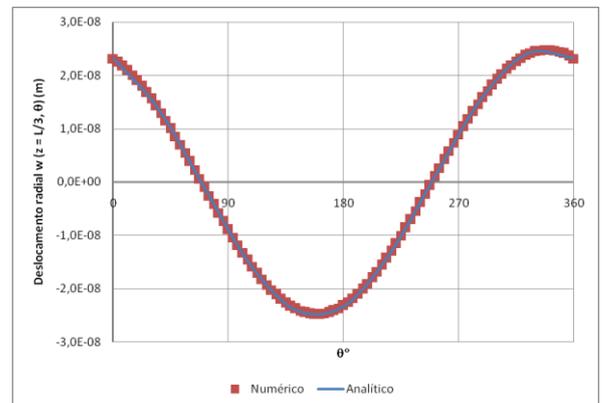
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 5.10 - Deslocamentos: [(a) e (b)] axial, [(c) e (d)] circunferencial e [(e) e (f)] radial ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\theta = 30^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $z = L/3$

Analisando os resultados, constata-se a conformidade das abordagens analítica e numérica.

A Figura 5.11 mostra a deformada e os deslocamentos axial, circunferencial e radial obtidos via ANSYS.

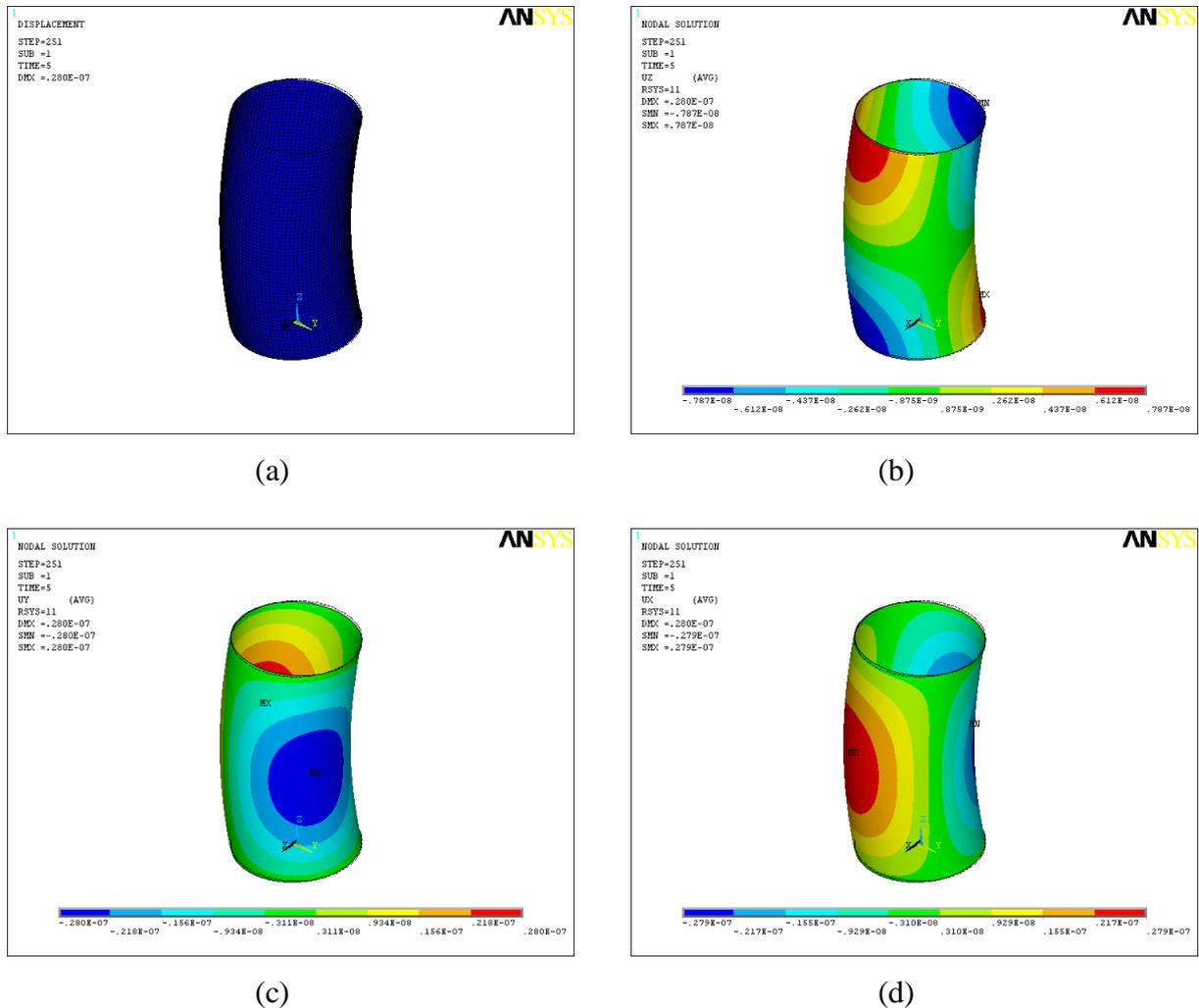


Figura 5.11 - a) Deformada e deslocamentos (b) axial, (c) circunferencial e (d) radial, em m

Considerou-se que durante a aceleração do solo em cascas cilíndricas circulares perfeitas apenas modos de vibração com número de onda circunferencial $n = 1$ estão sendo ativadas. Algumas investigações experimentais mostram, entretanto, que em tanques reais devido a imperfeições inevitáveis, modos de vibração com $n > 1$ também contribuem para o movimento (Fischer e Rammerstorfer, s.d).

Fluido:

Vibração Livre:

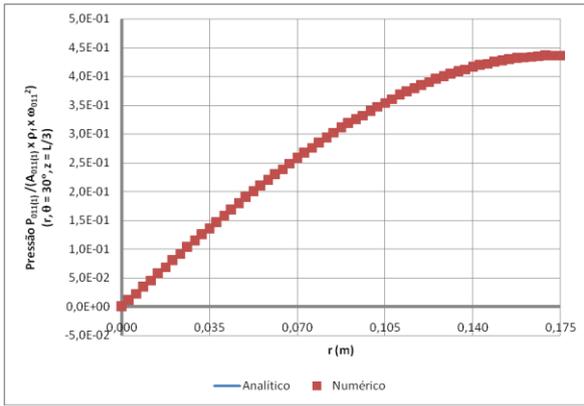
O Caso 1, do ponto de vista do fluido, refere-se a uma cavidade acústica cilíndrica circular reta, aberta nas bases e fechada na lateral.

Os resultados das dez primeiras frequências circulares naturais (ω) analíticas e numéricas, sua ordem (N), seu índice (\bar{imn}) e os respectivos erros estão apresentados na Tabela 5.6.

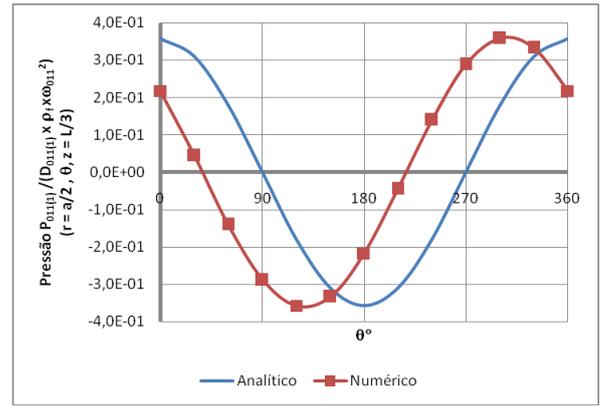
Tabela 5.6 - Frequências naturais do fluido desacoplado (Caso 1)

N	i	\bar{m}	n	$\omega_{\bar{imn}}$ analítico (rad/s)	$\omega_{\bar{imn}}$ numérico (rad/s)	Erro (%)
1	0	1	0	7.096,97	7.097,49	0,01%
2	0	2	0	14.193,94	14.200,63	0,05%
3	0	1	1	17.303,90	17.313,95	0,06%
4	0	2	1	21.225,60	21.237,79	0,06%
5	0	3	0	21.290,91	21.312,56	0,10%
6	0	3	1	26.502,10	26.526,35	0,09%
7	0	1	2	27.124,09	27.159,70	0,13%
8	0	4	0	28.387,89	28.439,58	0,18%
9	0	2	2	29.779,48	29.814,97	0,12%
10	0	4	1	32.479,69	32.530,56	0,16%

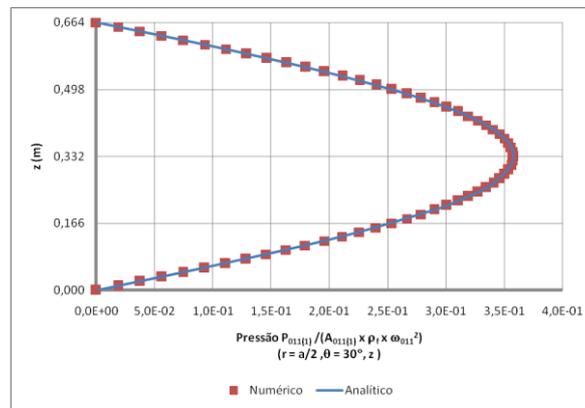
A comparação entre os resultados analítico e numérico do modo de vibração da pressão correspondente à frequência natural ω_{011} com $\varphi_1 = 0$ é apresentada na Figura 5.12. O índice $i = 0$ indica nenhum círculo nodal, o índice $\bar{m} = 1$ denota um nó axial e o índice $n = 1$ indica um diâmetro nodal no modo de vibração. São mostrados os modos de vibração de pressão ao longo de três curvas: uma reta ($0 \leq r \leq a$) em $\theta = 30^\circ$, $z = L/3$, uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $r = a/2$, $z = L/3$ e uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $r = a/2$, $\theta = 30^\circ$.



(a)



(b)



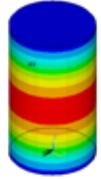
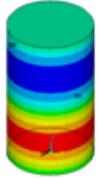
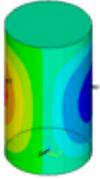
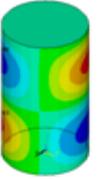
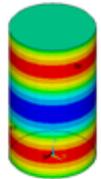
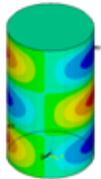
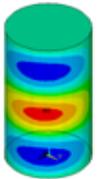
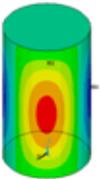
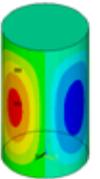
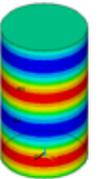
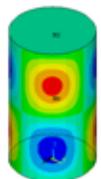
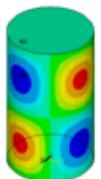
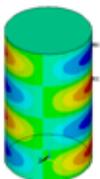
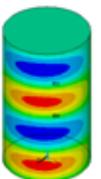
(c)

Figura 5.12 - Modos de vibração de pressão ao longo de três curvas: (a) uma reta ($0 \leq r \leq a$) em $\theta = 30^\circ$, $z = L/3$, (b) uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $r = a/2$, $z = L/3$ e (c) uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $r = a/2$, $\theta = 30^\circ$ (Caso 1 - Fluido)

Como observado, na Tabela 5.6 e Figura 5.12, os resultados analítico e numérico coincidem muito bem tanto nas frequências naturais quanto nos modos de vibração. As soluções analítica e numérica mostradas na Figura 5.12 (b) apresentam uma defasagem de aproximadamente $52,5^\circ$, o que não invalida o resultado uma vez que o ângulo de fase φ , para o primeiro modo natural, é arbitrário, considerado igual a 0° neste trabalho. Caso φ fosse considerado igual a $[-(52,5^\circ/180^\circ)\pi/n]$, os resultados seriam coincidentes.

A Tabela 5.7 apresenta os modos de vibração numéricos da cavidade acústica do Caso 1. São apresentadas as pressões para os 16 primeiros modos associados às 10 primeiras frequências naturais numéricas.

Tabela 5.7 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos do fluido obtidos via ANSYS (Caso 1)

Pressão	ω (rad/s)	N [imn()]	1 [010(1)]	2 [020(1)]	3 [011(1)]	3 [011(2)]	4 [021(1)]	4 [021(2)]
			7.097,49	14.200,63	17.313,95	17.313,95	21.237,79	21.237,79
								
			5 [030(1)]	6 [031(1)]	6 [031(2)]	7 [012(1)]	7 [012(2)]	8 [040(1)]
			21.312,56	26.526,35	26.526,35	27.159,70	27.159,70	28.439,58
								
Pressão	ω (rad/s)	N [imn()]	9 [022(1)]	9 [022(2)]	10 [041(1)]	10 [041(2)]		
			29.814,97	29.814,97	32.530,56	32.530,56		
								

Fluido-estrutura:

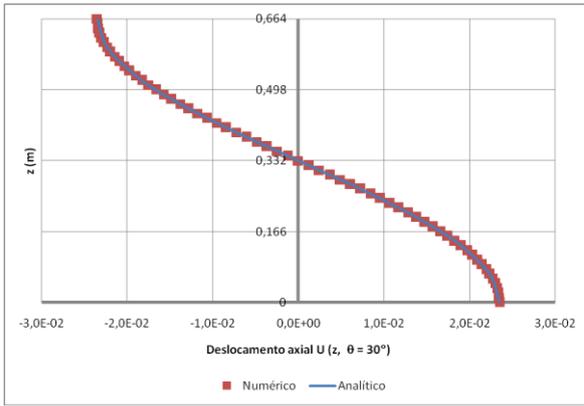
Vibração livre:

Os resultados das dez primeiras frequências circulares naturais (ω) analíticas e numéricas, sua ordem (N), seu índice (imn) e os respectivos erros estão apresentados na Tabela 5.8.

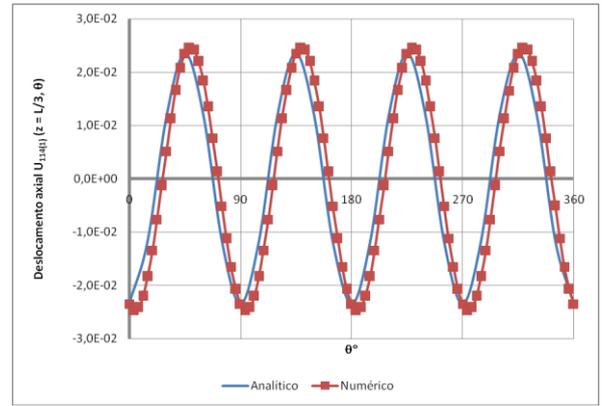
Tabela 5.8 - Frequências naturais acopladas (Caso 1)

N	i	m	n	ω_{imn} analítico (rad/s)	ω_{imn} numérico (rad/s)	Erro (%)
1	1	1	4	564,15	567,42	0,58%
2	1	1	5	632,43	638,31	0,93%
3	1	1	3	734,06	736,45	0,33%
4	1	1	6	871,18	882,91	1,35%
5	1	1	7	1.223,61	1.245,70	1,81%
6	1	1	2	1.246,91	1.248,59	0,14%
7	1	2	6	1.312,64	1.330,65	1,37%
8	1	2	5	1.388,76	1.402,85	1,01%
9	1	2	7	1.479,90	1.506,52	1,80%
10	1	1	8	1.668,30	1.706,70	2,30%

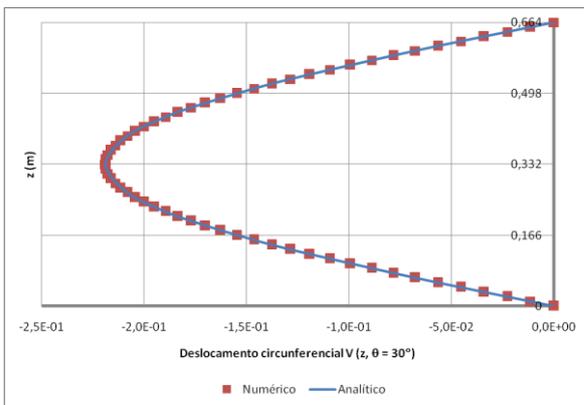
A comparação entre os resultados analítico e numérico dos modos de vibração dos deslocamentos axial, circunferencial, radial e da pressão correspondentes à frequência natural ω_{114} , $\varphi = 0$, é apresentada nas Figuras 5.13 e 5.14. O índice $i = 1$ indica que a menor das frequências naturais $m = 1$, $n = 4$ é considerada, o índice $m = 1$ denota uma meia-onda longitudinal no modo de vibração e o índice $n = 4$ indica quatro ondas circunferenciais no modo de vibração. Para cada deslocamento, são mostrados os modos de vibração ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\theta = 30^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $z = L/3$. Para a pressão, são mostrados os modos de vibração ao longo de três curvas: uma reta ($0 \leq r \leq a$) em $\theta = 30^\circ$, $z = L/3$, uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $r = a/2$, $z = L/3$ e uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $r = a/2$, $\theta = 30^\circ$.



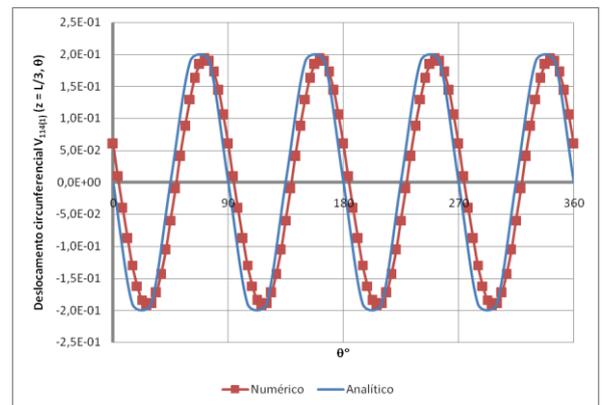
(a)



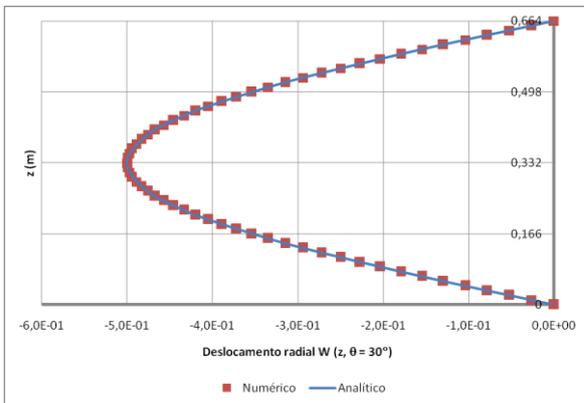
(b)



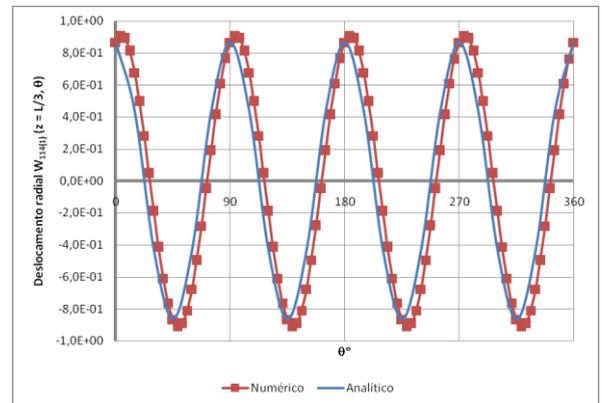
(c)



(d)

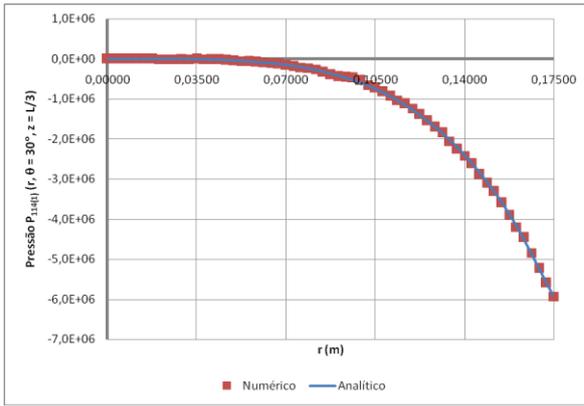


(e)

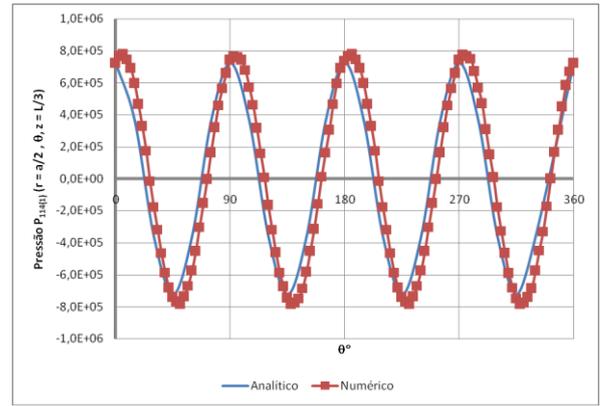


(f)

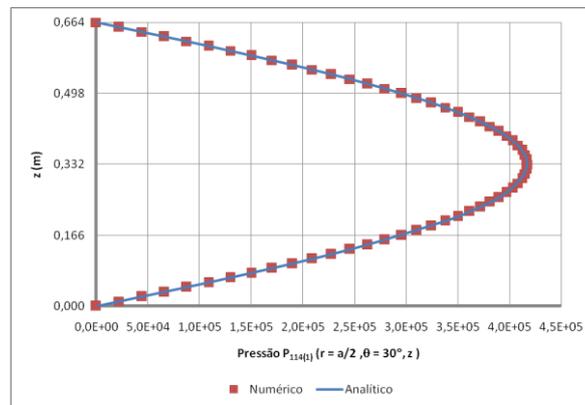
Figura 5.13 - Modos de deformação: [(a) e (b)] axial, [(c) e (d)] circunferencial e [(e) e (f)] radial ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\theta = 30^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $z = L/3$ (Caso 1 - Fluido-estrutura)



(a)



(b)



(c)

Figura 5.14 - Modos de vibração de pressão ao longo de três curvas: (a) uma reta ($0 \leq r \leq a$) em $\theta = 30^\circ$, $z = L/3$, (b) uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $r = a/2$, $z = L/3$ e (c) uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $r = a/2$, $\theta = 30^\circ$ (Caso 1 - Fluido-estrutura)

Como observado, na Tabela 5.8 e Figuras 5.13 e 5.14, os resultados analítico e numérico coincidem muito bem tanto nas frequências naturais quanto nos modos de vibração. As observações quanto às pequenas defasagens entre as soluções analítica e numérica nos casos dos sistemas estrutural e fluido desacoplados são validas também para o caso acoplado.

A Tabela 5.9 apresenta os modos de vibração numéricos do sistema fluido-estrutura do Caso 1. São apresentados, para os 20 primeiros modos associados às 10 primeiras frequências naturais numéricas, as deformadas 3D (perspectiva) e 2D (vistas lateral e superior) e os deslocamentos axial (U), circunferencial (V) e radial (W) e a pressão (P). Adicionalmente, é apresentado o modo de corpo livre extraído dos resultados do programa.

Tabela 5.9 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 1)

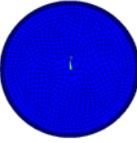
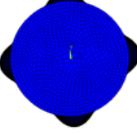
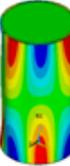
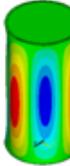
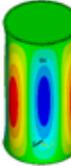
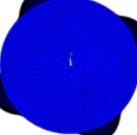
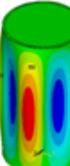
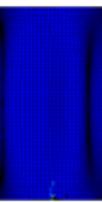
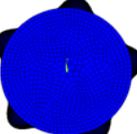
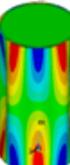
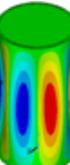
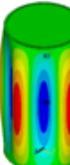
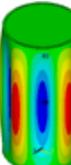
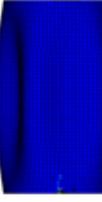
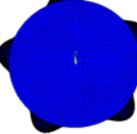
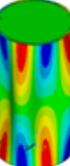
N	ω (rad/s)	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W	P
Corpo livre	0				-	-	-	-
1 [114(1)]	567,42							
1 [114(2)]								
2 [115(1)]	638,31							
2 [115(2)]								

Tabela 5.9 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 1), cont.

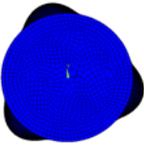
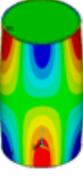
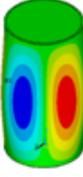
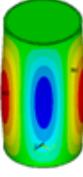
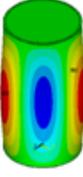
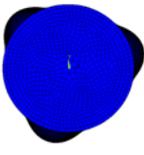
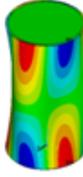
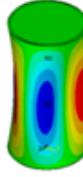
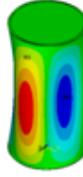
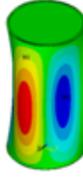
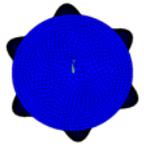
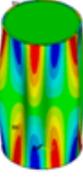
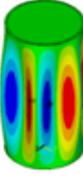
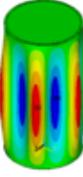
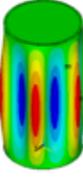
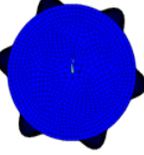
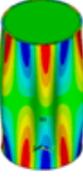
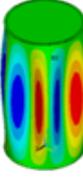
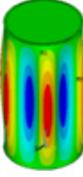
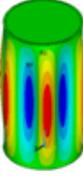
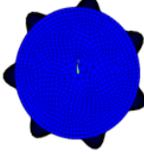
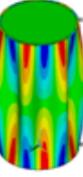
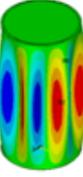
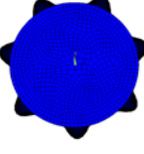
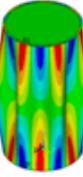
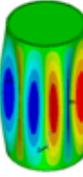
N	ω (rad/s)	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W	P
3 [113(1)]	736,45							
3 [113(2)]								
4 [116(1)]	882,91							
4 [116(2)]								
5 [117(1)]	1.245,70							
5 [117(2)]								

Tabela 5.9 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 1), cont.

N	ω (rad/s)	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W	P
6 [112(1)]	1.248,59							
6 [112(2)]								
7 [126(1)]	1.330,65							
7 [126(2)]								
8 [125(1)]	1.402,85							
8 [125(2)]								

Tabela 5.9 - Freqüências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 1), cont.

N [imm()]	ω (rad/s)	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W	P
9 [127(1)]	1.506,52							
9 [127(2)]								
10 [118(1)]	1.706,70							
10 [118(2)]								

A Tabela 5.10 apresenta as dez primeiras freqüências numéricas do sistema fluido-estrutura com a análise do modo, incluindo os modos da estrutura e/ou fluido desacoplados associados ao modo acoplado.

Tabela 5.10 - Frequências numéricas acopladas e análise dos modos (Caso 1)

Estrutura		Fluido		Fluido-estrutura		Análise do modo
Ordem do modo (imn)	ω (rad/s)	Ordem do modo (ijk)	ω (rad/s)	Ordem do modo (imn)	ω (rad/s)	
1 (114)	1.410,93	-	-	1 (114)	567,42	DE/MA
2 (115)	1.459,61	-	-	2 (115)	638,31	DE/MA
4 (113)	2.022,24	-	-	3 (113)	736,45	DE/MA
3 (116)	1.880,56	-	-	4 (116)	882,91	DE/MA
5 (117)	2.497,75	-	-	5 (117)	1.245,70	DE/MA
11 (112)	3.830,29	-	-	6 (112)	1.248,59	DE/MA
6 (126)	2.805,76	-	-	7 (126)	1.330,65	DE/MA
8 (125)	3.160,51	-	-	8 (125)	1.402,85	DE/MA
7 (127)	2.998,40	-	-	9 (127)	1.506,52	DE/MA
9 (118)	3.246,96	-	-	10 (118)	1.706,70	DE/MA

Verifica-se que as formas modais acopladas das dez primeiras frequências, como mostra a Tabela 5.10, se caracterizam pelo modo controlado pela estrutura.

Isso ocorre devido ao fato de que o sólido provoca uma perturbação na cavidade o que força o fluido a acompanhar a sua deformada, como observado nas colunas W e P da Tabela 5.9. Como o modo da estrutura é dominante, pode-se comparar esse resultado com a frequência correspondente para o caso desacoplado.

Observa-se que esse valor é maior que o resultado obtido no caso acoplado, devido à existência de massa adicional incorporada ao sistema fluido-estrutura.

Além disso, os modos da estrutura não apresentam excitação de formas modais típicas da cavidade, mas adicionam massa de fluido à estrutura, como se pode observar pela perturbação da região de fluido em contato com a parede da estrutura.

As frequências naturais ω_{imn} analíticas, $i = 1$, $m = 1$ a 5 e $n = 1$ a 10, são mostradas na Figura 5.15.

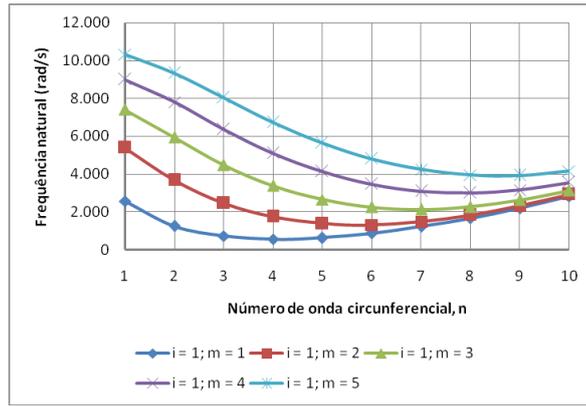


Figura 5.15 - Frequências naturais analíticas acopladas (Caso 1)

A Figura 5.16 apresenta as frequências naturais analíticas, $i = 1$, $m = 1$ e 2 e $n = 3$ a 7 , em Hz, para a estrutura desacoplada (casca cilíndrica vazia) e para o sistema fluido-estrutura acoplado (casca cilíndrica cheia de água). A Figura 5.17 traz o mesmo, de acordo com Amabili e Dalpiaz (1995).

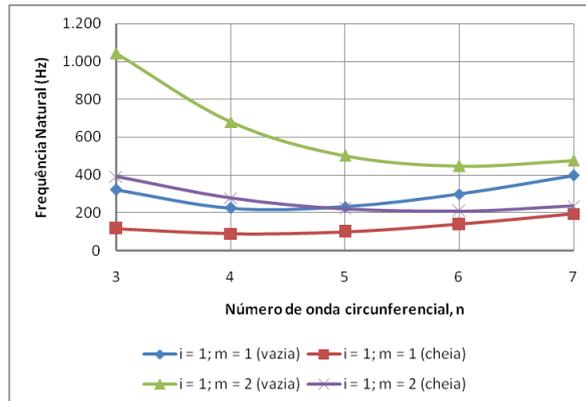


Figura 5.16 - Frequências naturais analíticas acopladas (Caso 1)

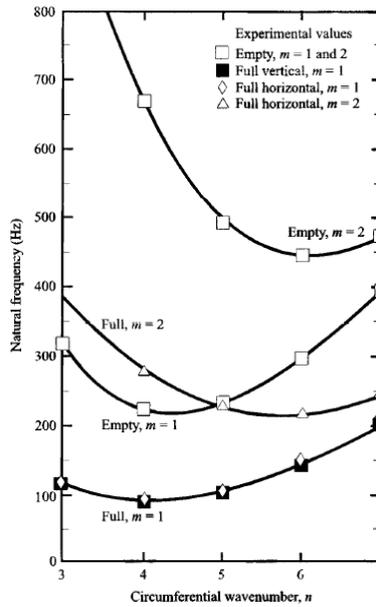


Figura 5.17 - Frequências naturais teóricas (linha contínua) e experimentais (símbolos) versus o número de onda circunferencial n , para $m = 1$ e 2 , para uma casca vazia (*empty*) e preenchida com água (*full*) com extremidades “abertas” simplesmente apoiadas (Amabili e Dalpiaz, 1995)

Comparando as Figuras 5.16 e 5.17, constata-se, mais uma vez, a consistência do método empregado.

Observa-se na Figura 5.16, que tanto para a casca no ar quanto para aquela contendo fluido, as frequências naturais atingem um valor mínimo para o mesmo valor de n ($n = 4$). Isto indica que a energia interna de deformação elástica é praticamente idêntica nos dois casos. Pode-se concluir que o decréscimo acentuado das frequências nos casos “cheia” em relação aos casos “vazia” é explicado pelo aumento acentuado da energia cinética do sistema fluido-estrutura, que é traduzido pelo acréscimo do parâmetro ξ (ver Equação 3.303) de massa de fluido adicionada, sem um aumento correspondente da energia potencial do sistema. Sempre que isto ocorre em um sistema dinâmico conservativo há um decréscimo nas frequências naturais.

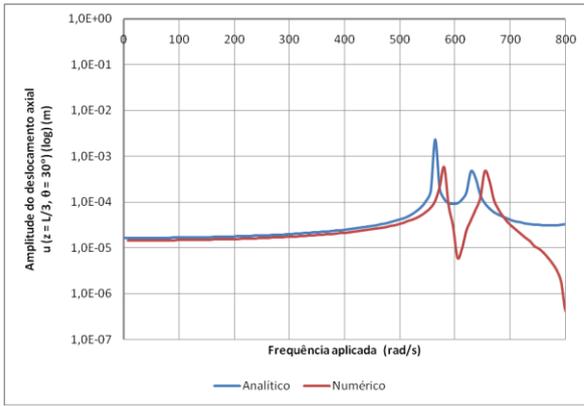
A Tabela 5.11 apresenta as [duas primeiras para $\varphi = 0$ e única para $\varphi = \pi/(2n)$] frequências naturais analíticas dos modos de vibração $n = 0$, modos independentes do ângulo circunferencial θ , para $m = 1$ a 5 .

Tabela 5.11 - Frequências naturais acopladas $n = 0$ (Caso 1)

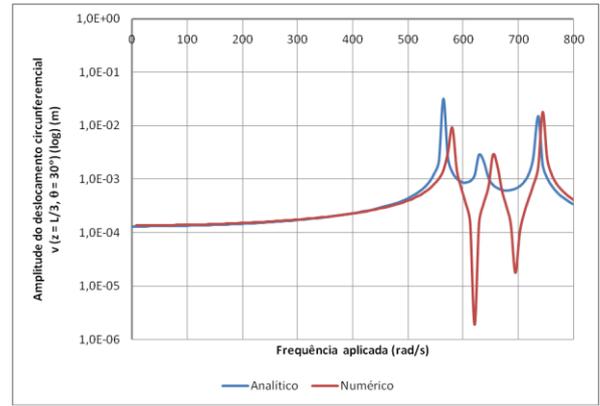
m	$\omega_{1m0(1)}$ (rad/s)	$\omega_{2m0(1)}$ (rad/s)	$\omega_{1m0(2)}$ (rad/s)
1	3.132,41	22.058,69	15.196,68
2	5.783,82	25.273,63	30.393,36
3	7.827,30	29.622,41	45.590,04
4	9.401,22	34.929,11	60.786,72
5	10.667,10	40.823,44	75.983,40

Vibração Forçada:Carga harmônica pontual (CHP):

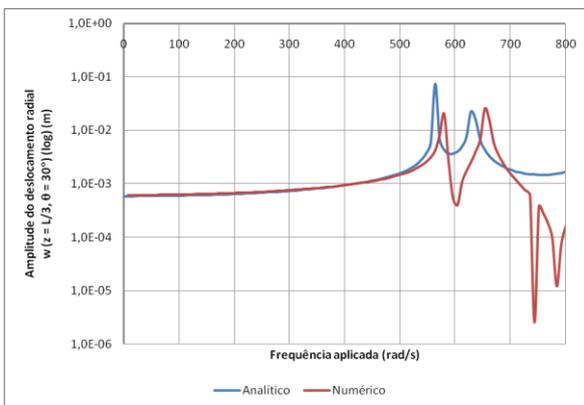
As curvas de amplitude dos deslocamentos axial, circunferencial e radial em função da frequência de excitação aplicada no ponto de coordenada $z = L/3$, $\theta = 30^\circ$ e a curva da amplitude da pressão em função da frequência de excitação aplicada no ponto de coordenada, $r \cong a/2$, $\theta \cong 30^\circ$, $z = L/3$ variando de 0 a 800 rad/s, são apresentadas na Figura 5.18 para uma razão de amortecimento $\zeta = 0\%$.



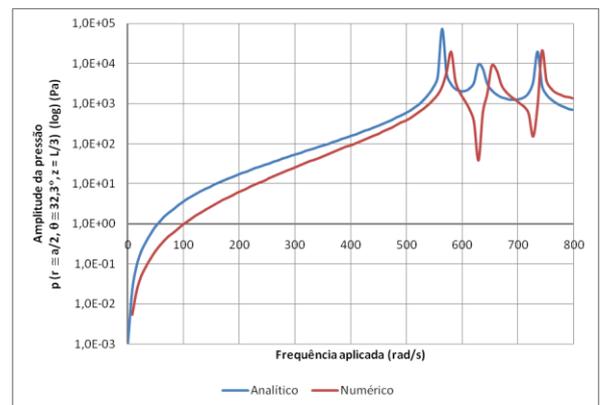
(a)



(b)



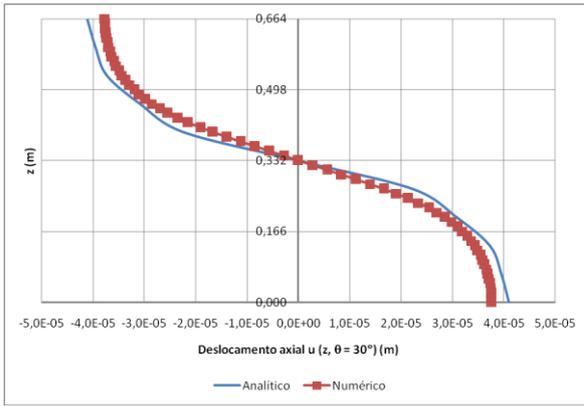
(c)



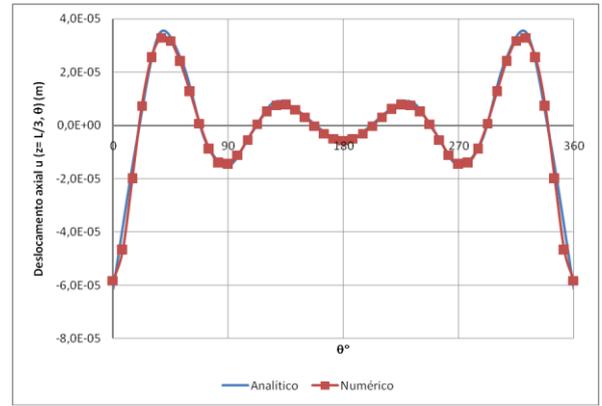
(d)

Figura 5.18 - Curvas da amplitude dos deslocamentos (a) axial, (b) circunferencial e (c) radial no ponto de coordenada $z = L/3$, $\theta = 30^\circ$ e (d) da pressão no ponto de coordenada $r \cong a/2$, $\theta \cong 30^\circ$, $z = L/3$ em função da frequência aplicada

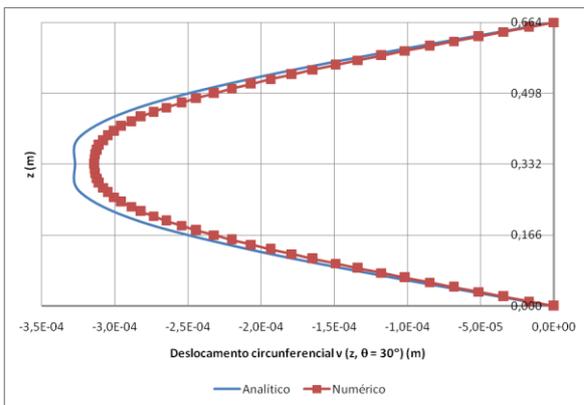
Nota-se que os picos das curvas ocorrem nas frequências aplicadas aproximadamente iguais às primeiras frequências naturais em que a estrutura é excitada. As pequenas diferenças (menores que 5%) nas frequências quando da ocorrência dos picos são causadas pelo uso do nível de refinamento 2 na análise numérica (ver Figura 4.26). Adotando uma frequência aplicada $\bar{\omega} = 449,25 \text{ rad/s}$, no instante $t = \bar{T}/4$, isto é, $t = 1,40 \times 10^{-2} \text{ s}$, os deslocamentos axial, circunferencial e radial ao longo da reta $0 \leq z \leq L$, em $\theta = 30^\circ$ e da circunferência $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, em $z = L/3$ e a pressão ao longo da reta $0 \leq r \leq a$ em $\theta = 30^\circ$, $z = L/3$, da circunferência $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ em $r = a/2$, $z = L/3$ e da reta $0 \leq z \leq L$ em $r = a/2$, $\theta = 30^\circ$, são apresentados nas Figuras 5.19 e 5.20.



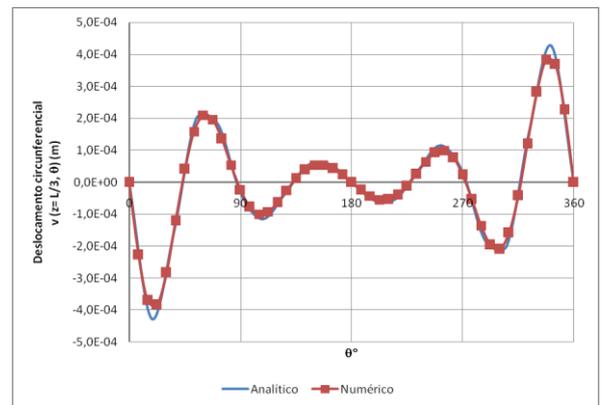
(a)



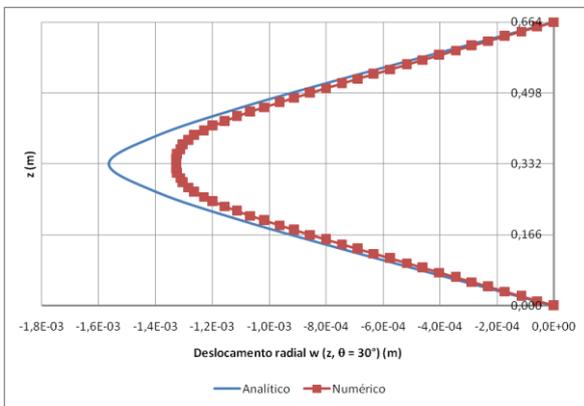
(b)



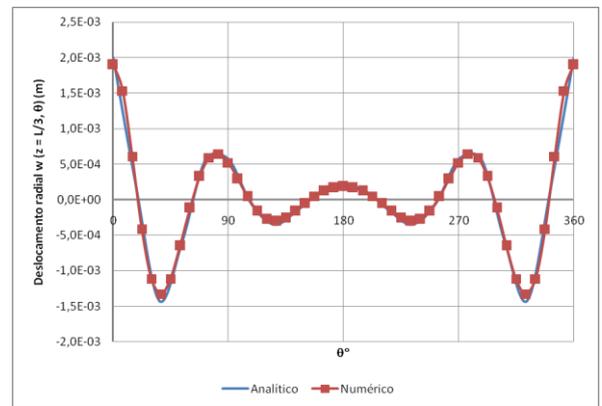
(c)



(d)

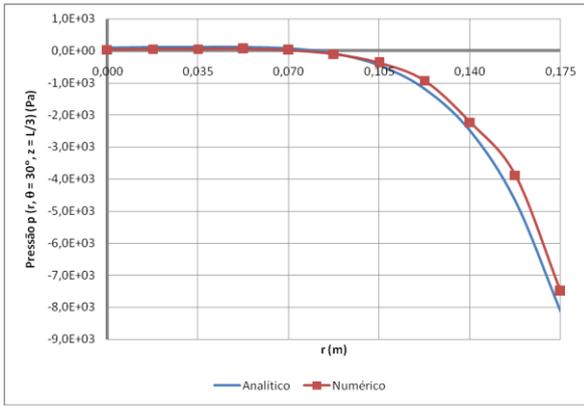


(e)

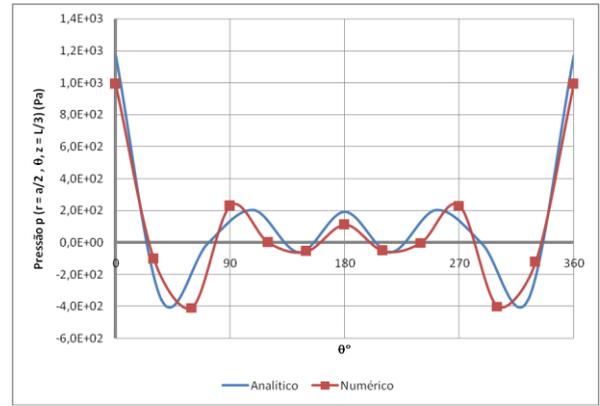


(f)

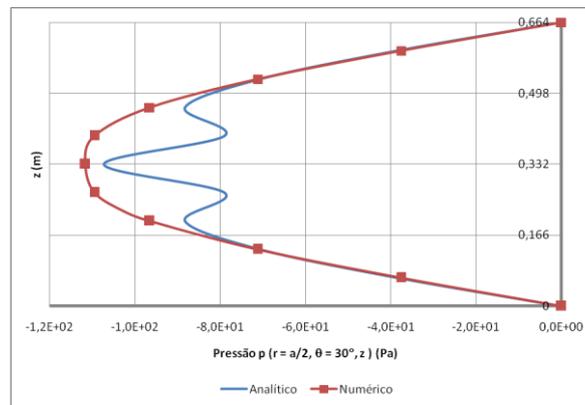
Figura 5.19 - Deslocamentos: [(a) e (b)] axial, [(c) e (d)] circunferencial e [(e) e (f)] radial ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\theta = 30^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $z = L/3$



(a)



(b)

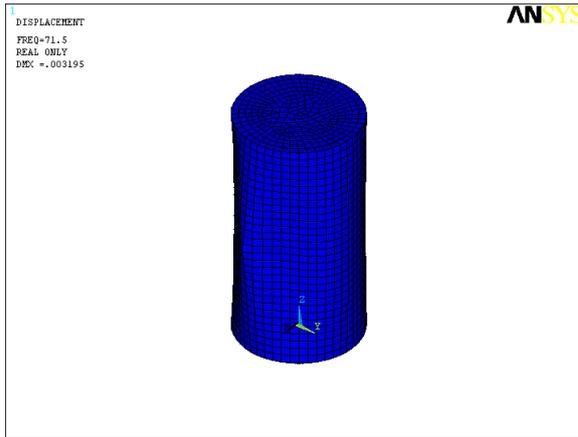


(c)

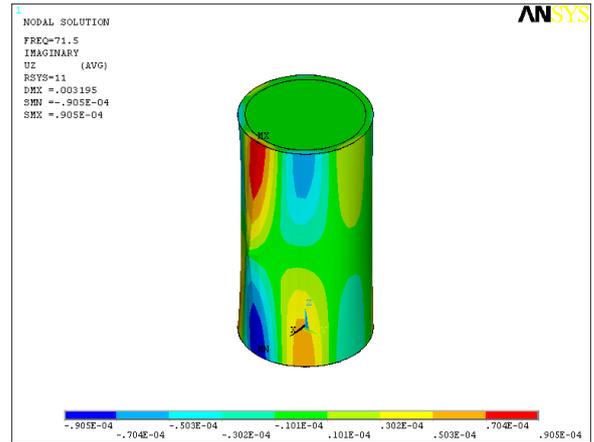
Figura 5.20 - Pressão ao longo de três curvas: (a) uma reta ($0 \leq r \leq a$) em $\theta = 30^\circ$, $z = L/3$, (b) uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $r = a/2$, $z = L/3$ e (c) uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $r = a/2$, $\theta = 30^\circ$

Analisando os gráficos, constata-se a conformidade das abordagens analítica e numérica, sendo que os resultados podem ser aperfeiçoados e as diferenças minimizadas com a consideração de um número maior ou mais bem representativo de parcelas nas séries das soluções gerais, a utilização de uma formulação exata na abordagem analítica e malhas mais refinadas na abordagem numérica. Testes efetuados demonstraram que o controle dos efeitos mencionados redundam em uma sensível melhora dos resultados que infelizmente não puderam ser implementadas a contento neste momento.

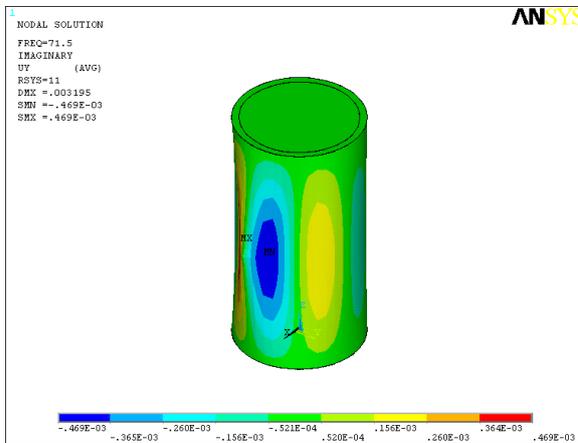
A Figura 5.21 mostra a deformada, os deslocamentos axial, circunferencial e radial e a pressão obtidos via ANSYS.



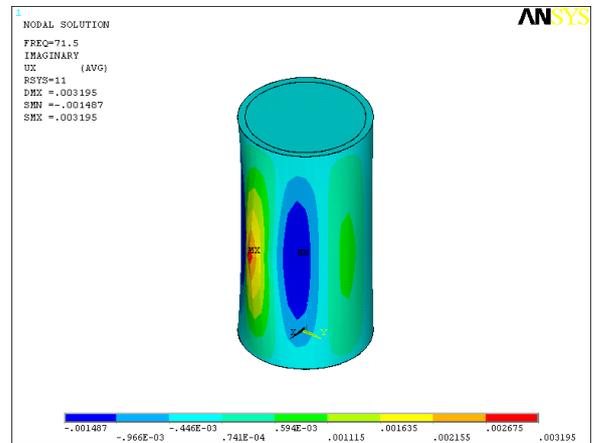
(a)



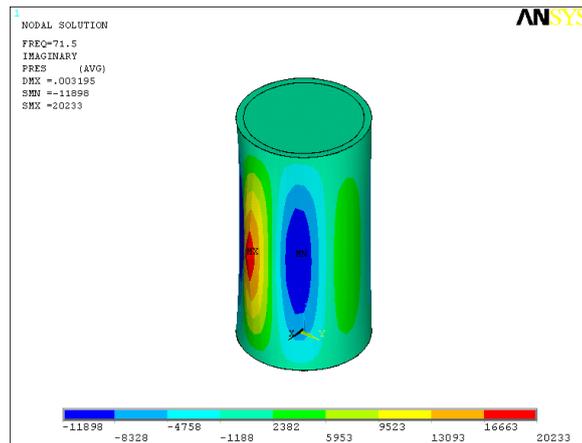
(b)



(c)



(d)



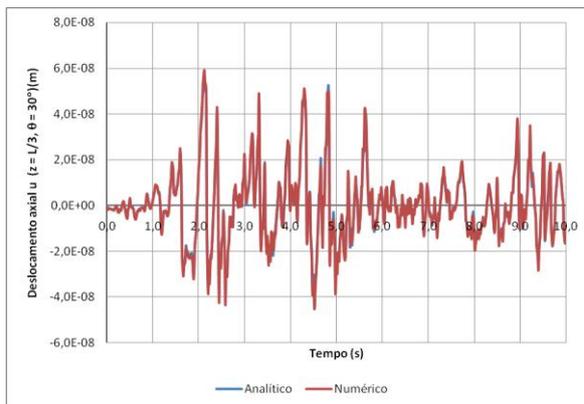
(e)

Figura 5.21 - (a) Deformada, deslocamentos (b) axial, (c) circunferencial e (d) radial, em m e (e) pressão, em Pa

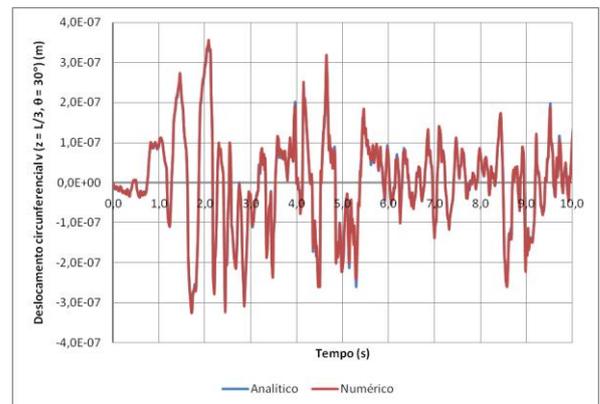
Carga sísmica:

As curvas de deslocamento em função do tempo no ponto de coordenada $z = L/3$, $\theta = 30^\circ$ e a curva de pressão em função do tempo, no ponto de coordenada, $r \cong a/2$, $\theta \cong 30^\circ$, $z = L/3$, variando de 0 a 10 segundos, são apresentadas na Figura 5.22.

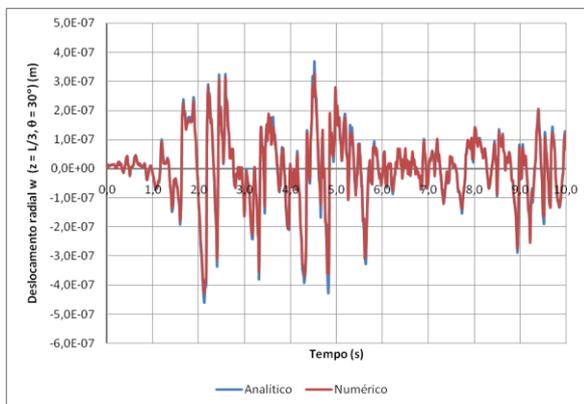
Em análises transientes (*full method*), o ANSYS 11.0 não dispõe de razão de amortecimento constante sendo necessário definir o amortecimento material-dependente β para a estrutura. Sendo $\omega_{111} = 2.579,12$ rad/s, a frequência ativa mais dominante, tem-se $\beta = 3,88 \cdot 10^{-5}$.



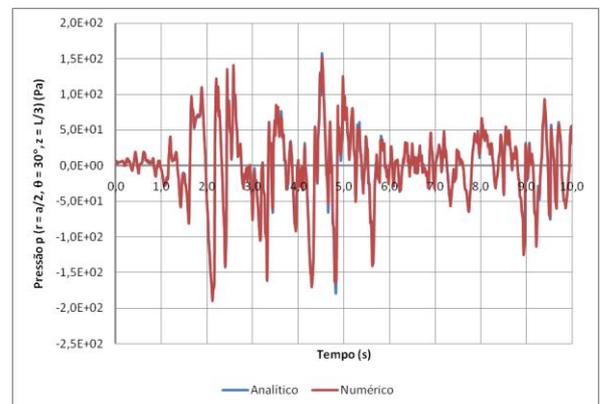
(a)



(b)



(c)

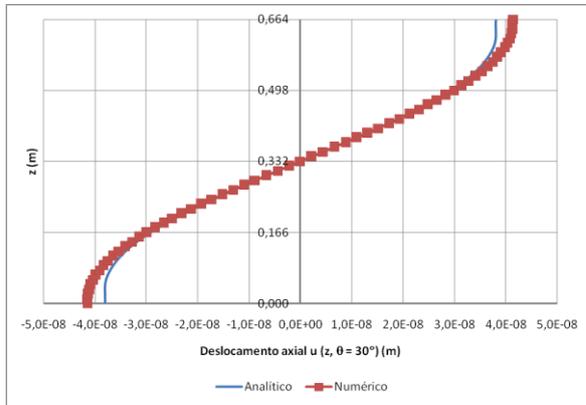


(d)

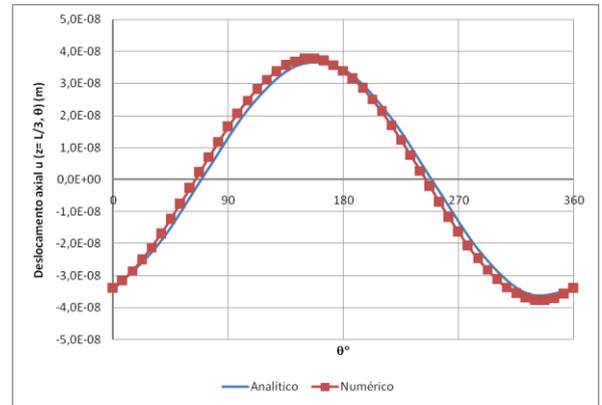
Figura 5.22 - Curvas dos deslocamentos (a) axial, (b) circunferencial e (c) radial no ponto de coordenada $z = L/3$, $\theta = 30^\circ$ e (d) da pressão no ponto de coordenada, $r \cong a/2$, $\theta \cong 30^\circ$, $z = L/3$ em função do tempo

Os deslocamentos axial, circunferencial e radial ao longo da reta $0 \leq z \leq L$, em $\theta = 30^\circ$ e da circunferência $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, em $z = L/3$ e a pressão ao longo da reta $0 \leq r \leq a$ em $\theta = 30^\circ$,

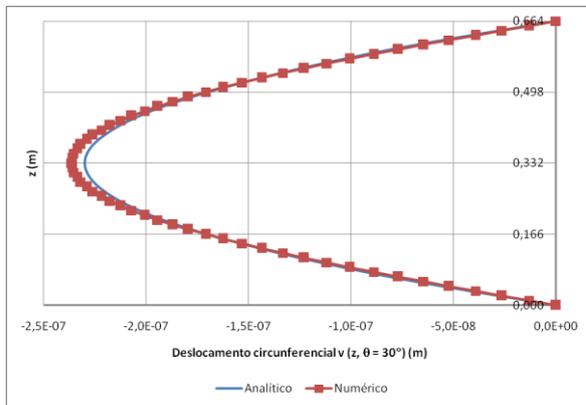
$z = L/3$, da circunferência $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ em $r = a/2$, $z = L/3$ e da reta $0 \leq z \leq L$ em $r = a/2$, $\theta = 30^\circ$, no instante $t = 5s$, são apresentados nas Figuras 5.23 e 5.24.



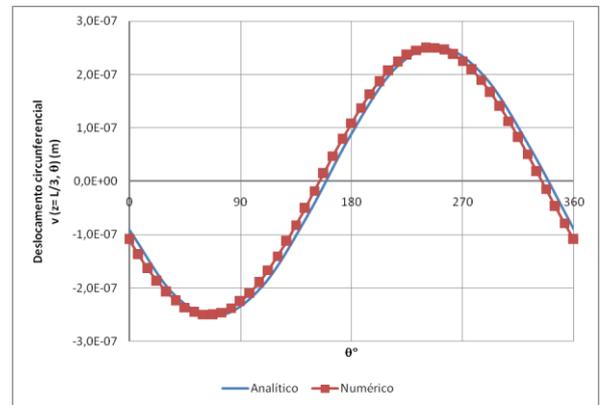
(a)



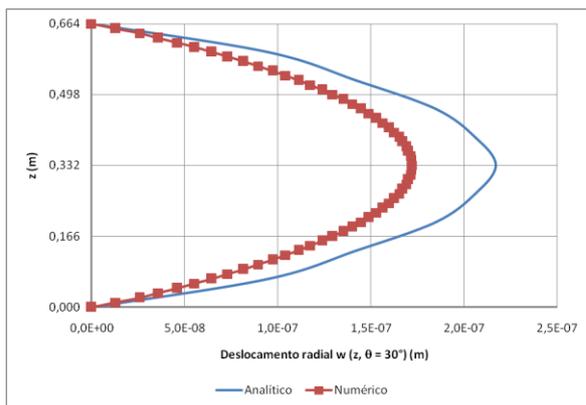
(b)



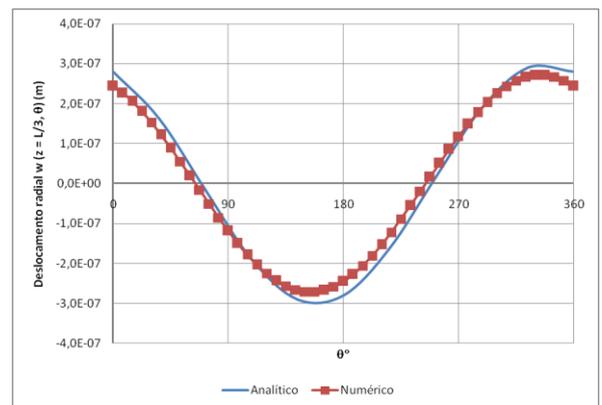
(c)



(d)

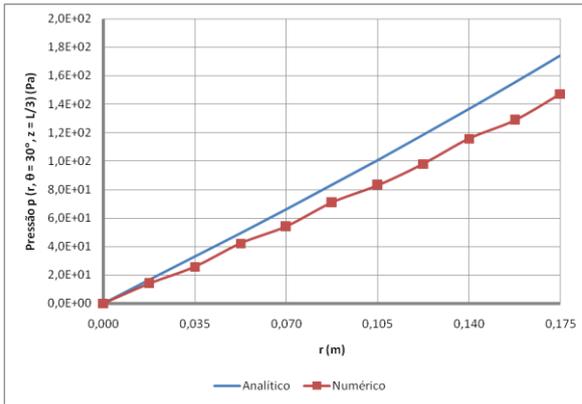


(e)

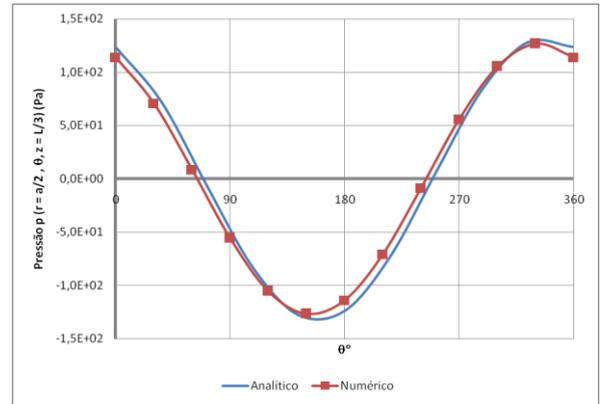


(f)

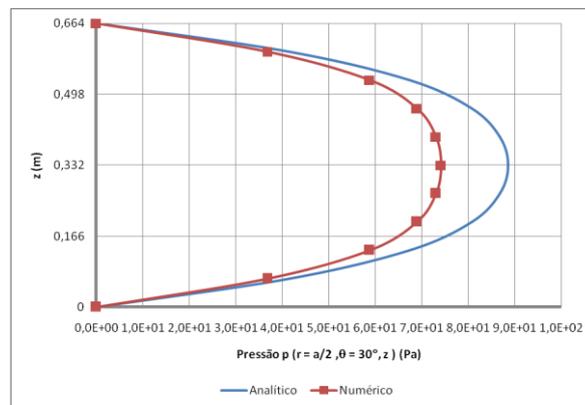
Figura 5.23 - Deslocamentos: [(a) e (b)] axial, [(c) e (d)] circunferencial e [(e) e (f)] radial ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\theta = 30^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $z = L/3$



(a)



(b)

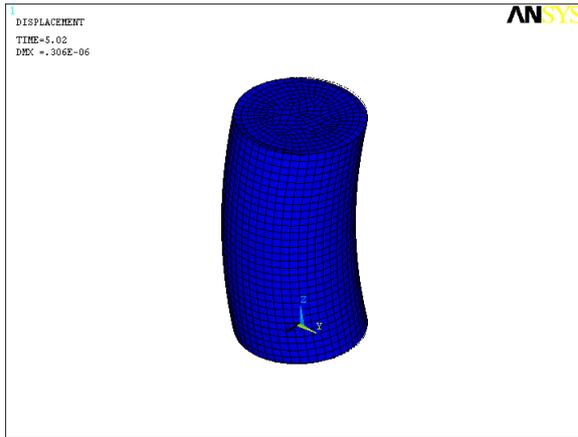


(c)

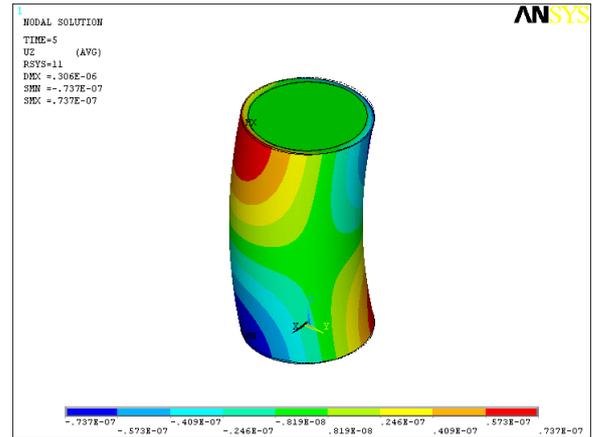
Figura 5.24 - Pressão ao longo de três curvas: (a) uma reta ($0 \leq r \leq a$) em $\theta = 30^\circ$, $z = L/3$, (b) uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) em $r = a/2$, $z = L/3$ e (c) uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $r = a/2$, $\theta = 30^\circ$

Analisando os resultados, constata-se a conformidade das abordagens analítica e numérica, sendo que os resultados podem ser melhorados adotando as mesmas sugestões da seção anterior.

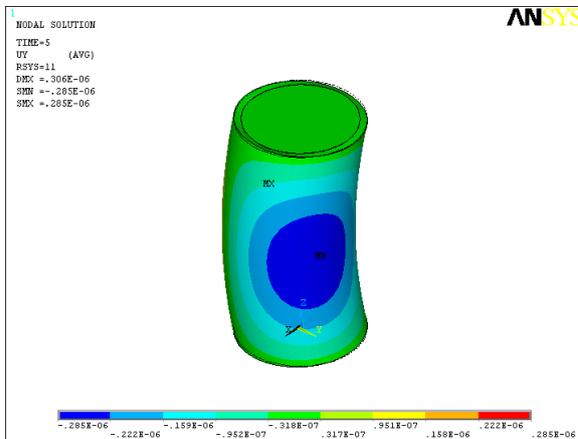
A Figura 5.25 mostra a deformada, os deslocamentos axial, circunferencial e radial e a pressão obtidos via ANSYS.



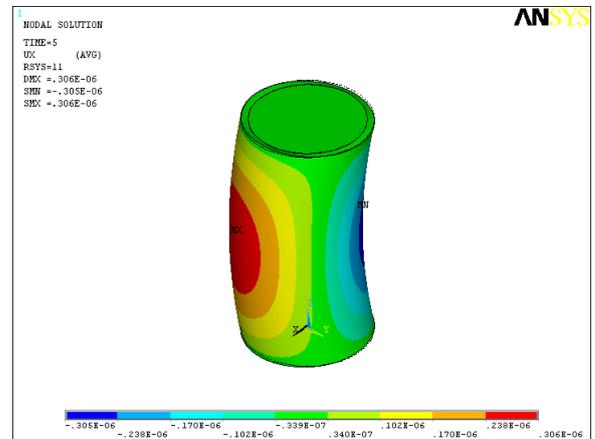
(a)



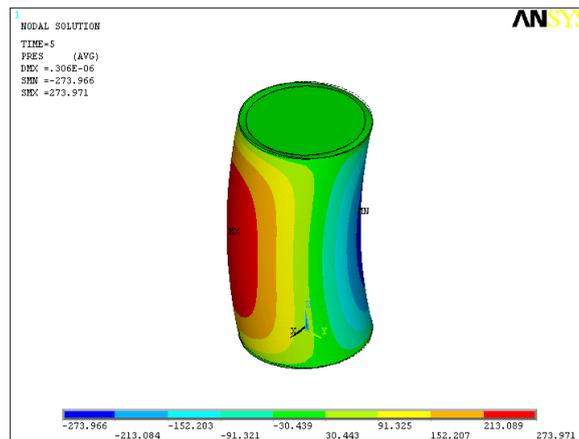
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 5.25 - (a) Deformada, deslocamentos (b) axial, (c) circunferencial e (d) radial, em m e (e) pressão, em Pa

5.2.2 Caso 2 - Painel cilíndrico

Estrutura:

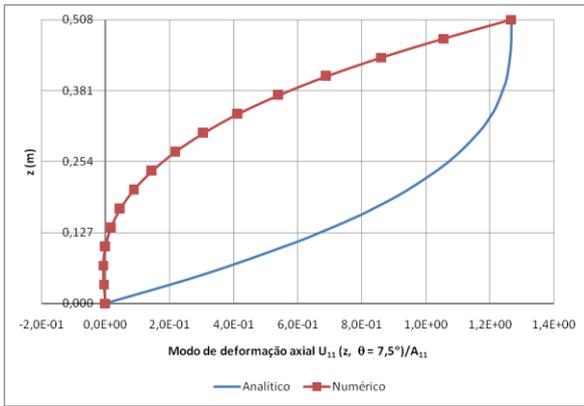
Vibração livre:

Os resultados das dez primeiras frequências circulares naturais (ω) analíticas e numéricas, sua ordem (N), seu índice (mn) e os respectivos erros estão apresentados na Tabela 5.12.

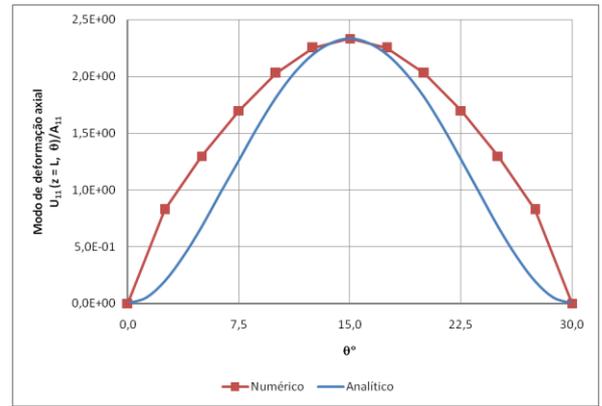
Tabela 5.12 - Frequências naturais da estrutura desacoplada (Caso 2)

N	m	n	ω_{mn} analítico (rad/s)	ω_{mn} numérico (rad/s)	Erro (%)
1	1	1	4.703,37	4.487,51	4,59%
2	2	1	5.891,84	5.757,03	2,29%
3	1	2	6.984,97	6.122,84	12,34%
4	2	2	8.802,12	8.269,93	6,05%
5	3	1	8.577,55	9.007,57	5,01%
6	1	3	12.230,44	11.892,81	2,76%
7	3	2	12.169,57	12.201,95	0,27%
8	2	3	14.252,81	13.776,51	3,34%
9	4	1	13.311,15	14.713,34	10,53%
10	3	3	17.889,32	17.692,19	1,10%

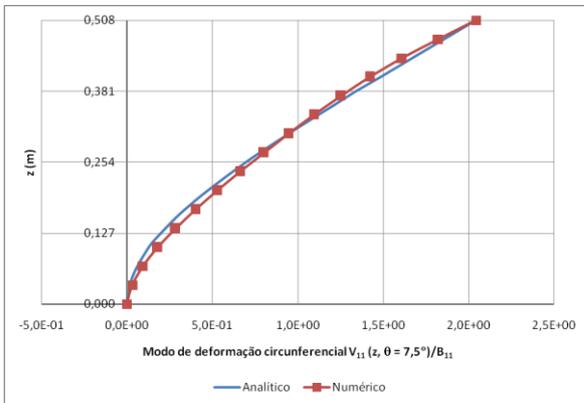
A comparação entre os resultados analítico e numérico dos modos de vibração axial, circunferencial e radial correspondentes à frequência natural ω_{11} é apresentada na Figura 5.26. O índice $m = 1$ denota uma meia-onda longitudinal no modo de vibração e o índice $n = 1$ indica uma meia-onda arco-circunferencial no modo de vibração. Para cada deslocamento, são mostrados os modos de vibração ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\theta = 7,5^\circ$ e um arco de circunferência ($0 \leq \theta \leq 30^\circ$) em $z = L$.



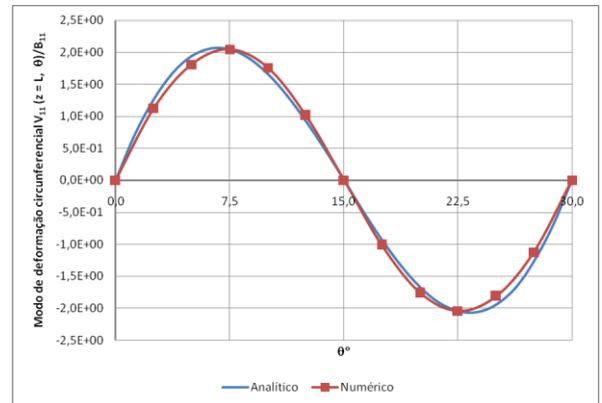
(a)



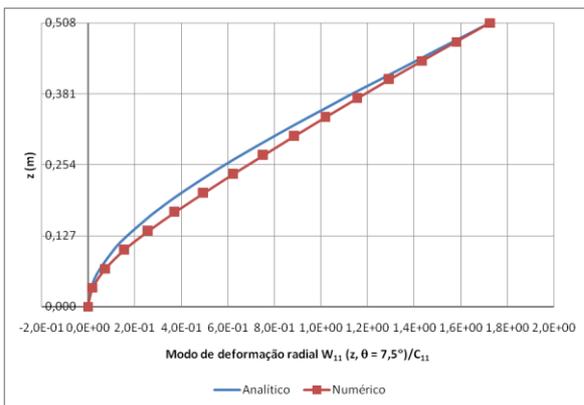
(b)



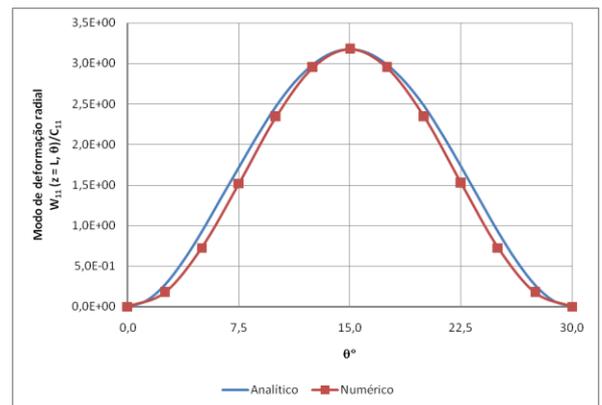
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 5.26 - Modos de deformação: [(a) e (b)] axial, [(c) e (d)] circunferencial e [(e) e (f)] radial ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\theta = 7,5^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$) em $z = L/3$ (Caso 2 - Estrutura)

Como observado na Tabela 5.12, os resultados analítico e numérico coincidem satisfatoriamente quanto às frequências naturais, sendo que, como já mencionado, a presença de borda livre torna a aproximação menos precisa. A ordem (N) adotada foi a dos resultados numéricos.

Em relação aos modos de vibração, de acordo com a Figura 5.26, as deformações circunferencial e radial, $m = 1$, $n = 1$, analíticas e numéricas são equivalentes. Já o modo de deformação axial não respondeu satisfatoriamente à teoria.

A Tabela 5.13 apresenta os modos de vibração numéricos da estrutura. São apresentados, para os 10 primeiros modos associados às 10 primeiras frequências naturais numéricas, as deformadas 3D (perspectiva) e 2D (vistas lateral e superior) e os deslocamentos axial (U), circunferencial (V) e radial (W).

Tabela 5.13 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura obtidos via ANSYS (Caso 2)

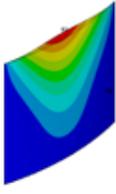
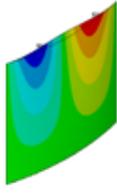
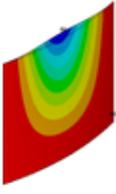
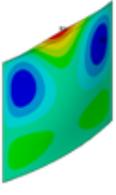
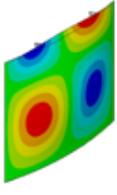
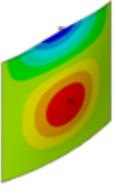
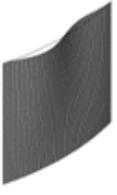
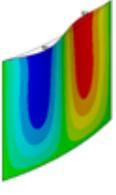
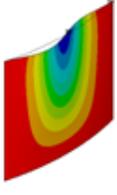
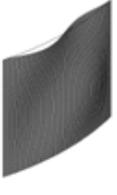
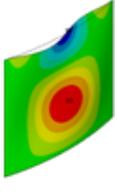
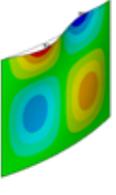
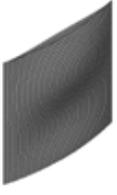
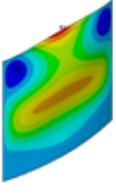
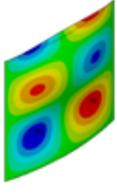
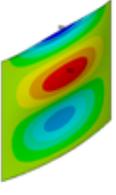
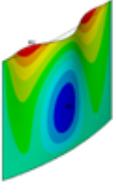
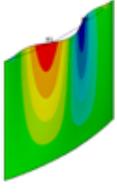
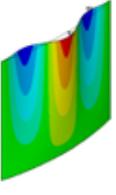
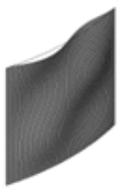
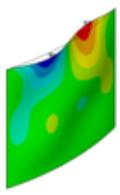
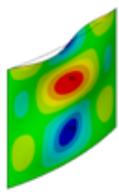
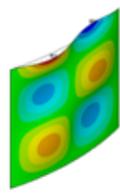
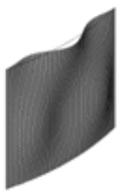
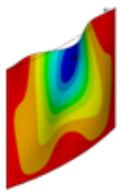
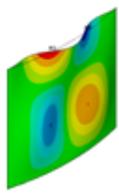
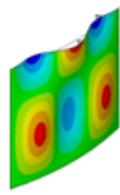
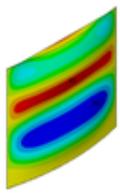
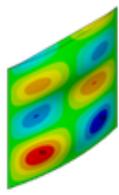
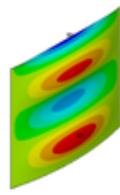
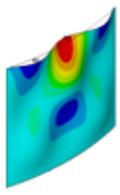
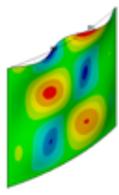
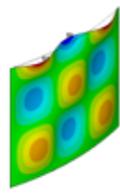
N (m,n)	ω (rad/s)	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W
1 (1,1)	4.487,51						
2 (2,1)	5.757,03						
3 (1,2)	6.122,84						
4 (2,2)	8.269,93						
5 (3,1)	9.007,57						
6 (1,3)	11.892,81						

Tabela 5.13 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura obtidos via ANSYS (Caso 2), cont.

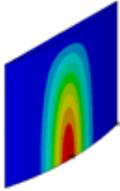
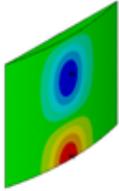
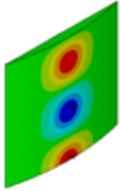
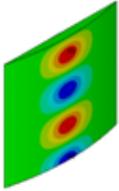
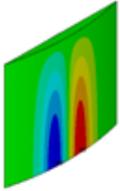
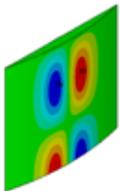
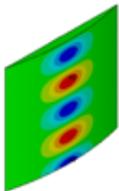
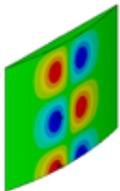
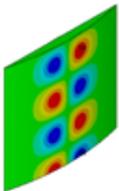
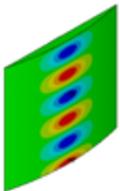
N (m,n)	ω (rad/s)	Def.	Vista lateral	Vista Superior	U	V	W
7 (3,2)	12.201,95						
8 (2,3)	13.776,51						
9 (4,1)	14.713,34						
10 (3,3)	17.692,19						

Fluido:

Vibração livre:

A Tabela 5.14 apresenta os modos de vibração numéricos da cavidade acústica. São apresentadas as pressões para os 10 primeiros modos associados às 10 primeiras frequências naturais numéricas.

Tabela 5.14 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos do fluido obtidos via ANSYS (Caso 2)

Pressão	1 (1,1,1)	2 (1,1,3)	3 (1,1,5)	4 (1,1,7)	5 (2,1,1)
	78.985,92	80.066,63	82.196,63	85.294,24	87.122,65
					
Pressão	6 (2,1,3)	7 (1,1,9)	8 (2,1,5)	9 (2,1,7)	10 (1,1,11)
	88.102,82	89.284,06	90.044,33	92.884,33	94.065,57
					

A Tabela 5.15 apresenta as frequências analíticas e numéricas da geometria aproximada, sendo $L_x = 52,59$ cm, $L_y = 3,462$ cm e $L_z = 50,80$ cm.

Tabela 5.15 - Frequências naturais do fluido desacoplado com geometria aproximada
(Caso 2)

Geometria aproximada						
Ordem do modo						
	i	j	k	ω analítico (rad/s)	ω numérico (rad/s)	Erro
1	1	1	1	68.802,58	69.573,71	1,12%
2	1	1	3	70.042,11	70.805,22	1,09%
3	2	1	1	70.531,23	71.289,02	1,07%
4	2	1	3	71.740,90	72.489,11	1,04%
5	1	1	5	72.457,57	73.199,11	1,02%
6	3	1	1	73.321,81	74.066,19	1,02%
7	2	1	5	74.101,01	74.832,74	0,99%
8	3	1	3	74.486,17	75.216,01	0,98%
9	1	1	7	75.936,84	76.667,43	0,96%
10	3	1	5	76.761,92	77.477,96	0,93%

Observando os valores das Tabela 5.14 e 5.15 constata-se que as frequências apresentam a mesma ordem de grandeza indicando que os resultados obtidos são adequados. A ordem dos índices é coincidente para os dois primeiros modos. As diferenças devem-se às características distintas das geometrias.

Fluido-estrutura:

Vibração livre:

A Tabela 5.16 apresenta os modos de vibração numéricos do sistema fluido-estrutura acoplado. São apresentados, para os 10 primeiros modos associados às 10 primeiras frequências naturais numéricas, as deformadas 3D (perspectiva) e 2D (vistas lateral e superior) e os deslocamentos axial (U), circunferencial (V) e radial (W) e a pressão (P).

Tabela 5.16 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 2)

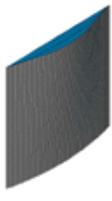
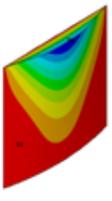
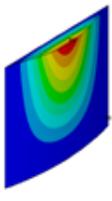
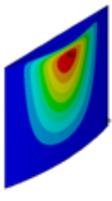
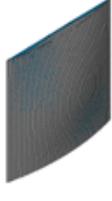
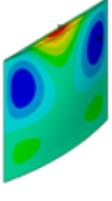
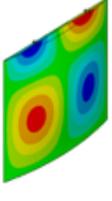
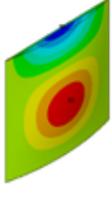
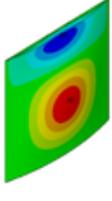
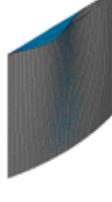
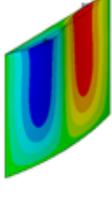
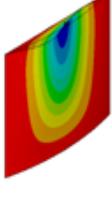
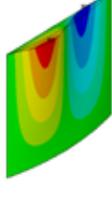
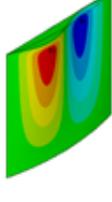
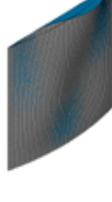
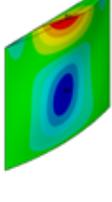
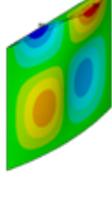
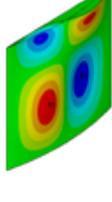
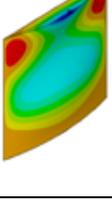
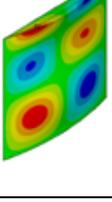
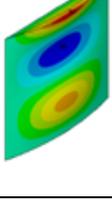
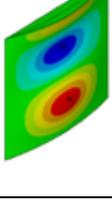
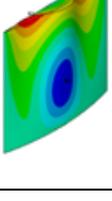
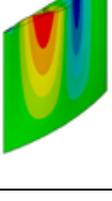
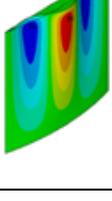
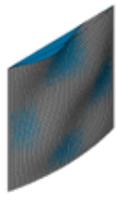
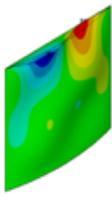
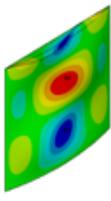
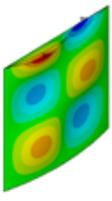
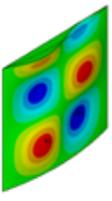
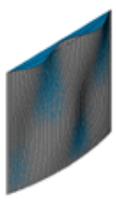
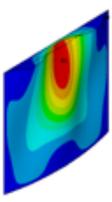
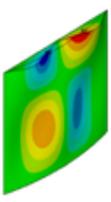
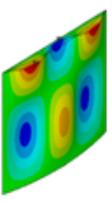
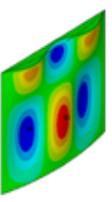
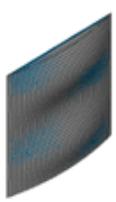
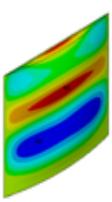
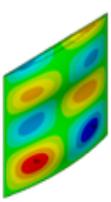
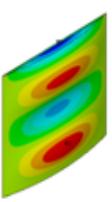
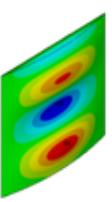
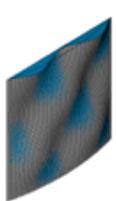
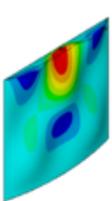
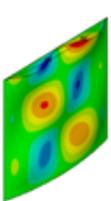
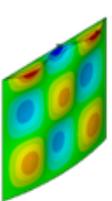
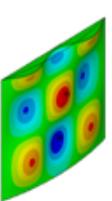
N	ω (rad/s)	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W	P
1	4.123,78							
2	5.300,24							
3	5.698,03							
4	7.705,07							
5	8.318,94							
6	11.147,00							

Tabela 5.16 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 2), cont.

N	ω (rad/s)	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W	P
7	11.392,04							
8	12.918,23							
9	13.630,11							
10	16.608,97							

A Tabela 5.17 apresenta as dez primeiras frequências do sistema fluido-estrutura com a análise do modo, incluindo os modos da estrutura e/ou fluido desacoplados associados ao modo acoplado.

Tabela 5.17 - Frequências numéricas acopladas e análise dos modos (Caso 2)

Estrutura		Fluido		Fluido-estrutura		Análise do modo
Ordem do modo (mn)	ω (rad/s)	Ordem do modo (ijk)	ω (rad/s)	Ordem do modo	ω (rad/s)	
1 (11)	4.487,51	-	-	1	4.123,78	DE/MA
2 (21)	5.757,03	-	-	2	5.300,24	DE/MA
3 (12)	6.122,84	-	-	3	5.698,03	DE/MA
4 (22)	8.269,93	-	-	4	7.705,07	DE/MA
5 (31)	9.007,57	-	-	5	8.318,94	DE/MA
6 (13)	11.892,81	-	-	6	11.147,00	DE/MA
7 (32)	12.201,95	-	-	7	11.392,04	DE/MA
8 (23)	13.776,51	-	-	8	12.918,23	DE/MA
9 (41)	14.713,34	-	-	9	13.630,11	DE/MA
10 (33)	17.692,19	-	-	10	16.608,97	DE/MA

Verifica-se que as formas modais acopladas das dez primeiras frequências, como mostra a Tabela 5.17, se caracterizam pelo modo controlado pela estrutura.

5.2.3 Caso 3 - Barragem em arco cilíndrica

Estrutura:

Vibração livre:

A Tabela 5.18 apresenta os modos de vibração numéricos da estrutura. São apresentados, para os 10 primeiros modos associados às 10 primeiras frequências naturais numéricas, as deformadas 3D (perspectiva) e 2D (vistas lateral e superior) e os deslocamentos axial (U), circunferencial (V) e radial (W) nas faces montante e jusante da barragem.

Tabela 5.18 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura desacoplada obtidos via ANSYS (Caso 3)

N (m,n)	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W
1 (1,2)	105,71	Montante						
		Jusante						
2 (1,1)	122,77	Montante						
		Jusante						
3 (2,1)	165,07	Montante						
		Jusante						

Tabela 5.18 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura desacoplada obtidos via ANSYS (Caso 3), cont.

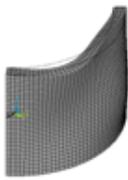
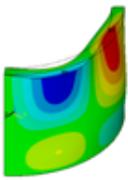
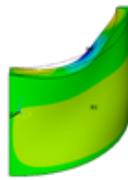
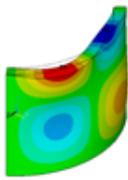
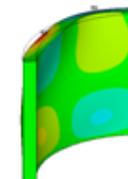
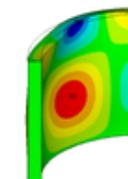
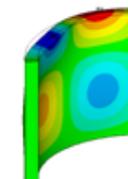
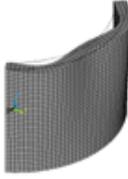
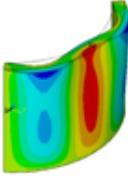
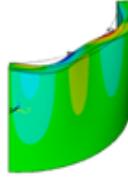
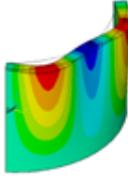
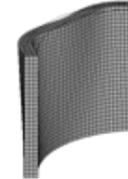
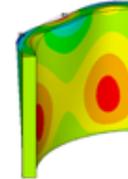
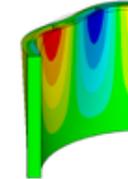
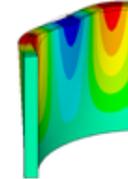
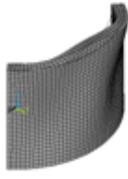
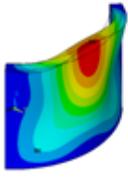
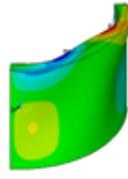
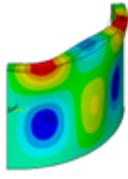
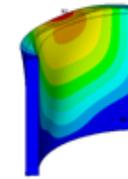
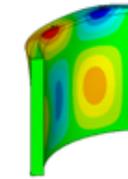
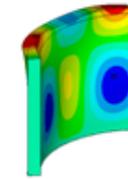
N (m,n)	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W
4 (2,2)	182,28	Montante						
		Jusante						
5 (1,3)	202,35	Montante						
		Jusante						
6 (2,3)	241,36	Montante						
		Jusante						

Tabela 5.18 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura desacoplada obtidos via ANSYS (Caso 3), cont.

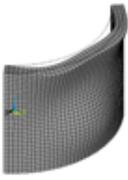
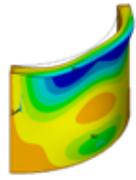
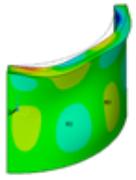
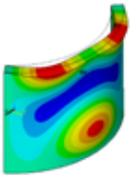
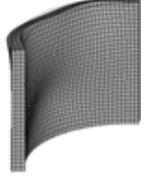
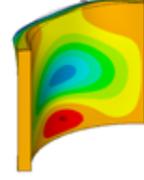
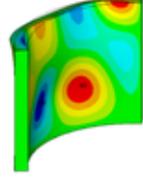
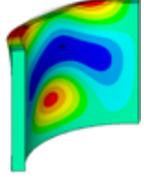
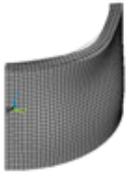
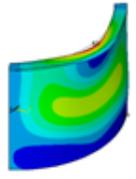
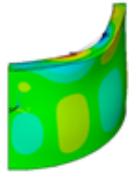
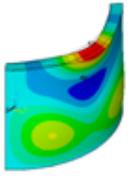
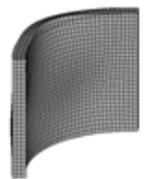
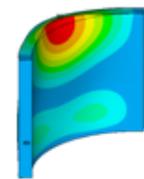
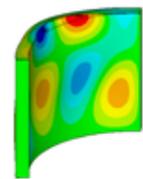
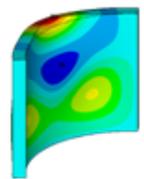
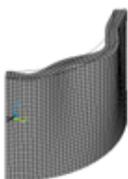
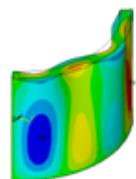
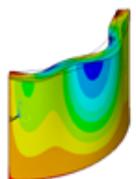
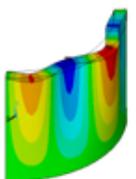
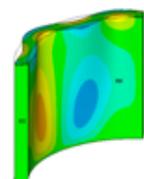
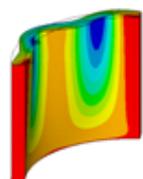
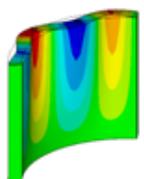
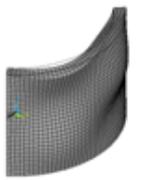
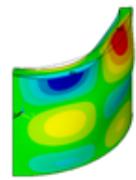
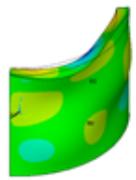
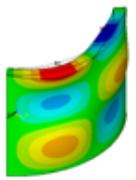
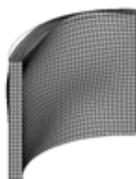
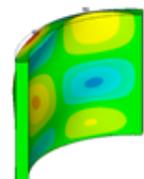
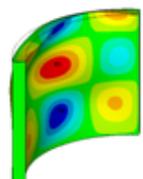
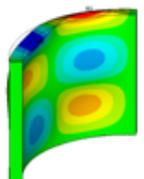
N (m,n)	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W
7 (3,3)	255,86	Montante						
		Jusante						
8 (3,1)	265,69	Montante						
		Jusante						
9 (1,4)	278,63	Montante						
		Jusante						

Tabela 5.18 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura desacoplada obtidos via ANSYS (Caso 3), cont.

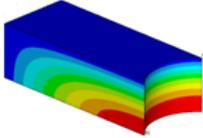
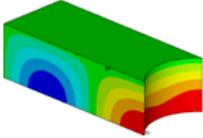
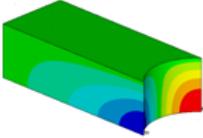
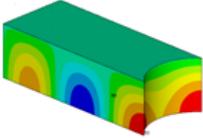
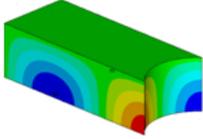
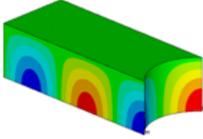
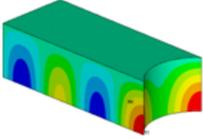
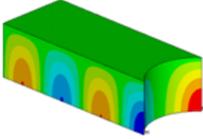
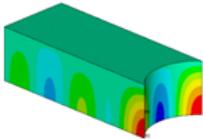
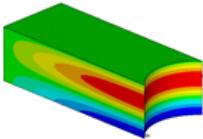
N (m,n)	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W
10 (3,2)	294,68	Montante						
		Jusante						

Fluido:

Vibração livre:

A Tabela 5.19 apresenta os modos de vibração numéricos da cavidade acústica. São apresentadas as pressões para os 10 primeiros modos associados às 10 primeiras frequências naturais numéricas.

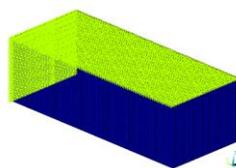
Tabela 5.19 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos do fluido desacoplado obtidos via ANSYS (Caso 3)

Pressão	N (i,j,k)	1 (0,1,1)	2 (0,3,1)	3 (1,1,1)	4 (0,5,1)
	ω (rad/s)	79,24	104,92	131,32	142,75
					
Pressão	N (i,j,k)	5 (1,3,1)	6 (1,5,1)	7 (0,7,1)	8 (1,7,1)
	ω (rad/s)	149,44	177,25	184,40	211,98
					
Pressão	N (i,j,k)	9 (2,9,1)	10 (0,1,3)		
	ω (rad/s)	221,59	227,73		
					

A Tabela 5.20 apresenta as frequências analíticas e numéricas da geometria aproximada, sendo $L_x = 40,6$ m, $L_y = 99,47$ m e $L_z = 30$ m.

Tabela 5.20 - Frequências naturais do fluido desacoplado com geometria aproximada (Caso 3)

Ordem do modo	Geometria aproximada					
	i	j	k	ω analítico (rad/s)	ω numérico (rad/s)	Erro
1	0	1	1	78,75	78,76	0,01%
2	0	3	1	101,68	101,69	0,01%
3	0	5	1	136,43	136,46	0,03%
4	1	1	1	136,45	136,47	0,02%
5	1	3	1	150,85	150,87	0,02%
6	1	5	1	176,15	176,19	0,03%
7	0	7	1	176,13	176,23	0,06%
8	1	7	1	208,42	208,51	0,05%
9	0	9	1	218,11	218,32	0,10%
10	0	1	3	227,33	227,56	0,10%



Comparando as Tabelas 5.19 e 5.20, nota-se a similaridade dos valores, além da maior parte dos índices apresentarem a mesma natureza (exceto a inversão dos modos 3 e 4 e o modo 9) o que confere adequação aos resultados apresentados.

Fluido-estrutura:

Vibração livre:

A Tabela 5.21 apresenta os modos de vibração numéricos do sistema fluido-estrutura acoplado. São apresentados, para os 10 primeiros modos associados às 10 primeiras frequências naturais numéricas, as deformadas 3D (perspectiva) e 2D (vistas lateral e superior) e os deslocamentos axial (U), circunferencial (V) e radial (W) e a pressão (P).

Tabela 5.21 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 3)

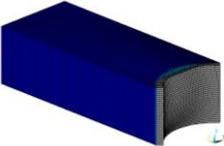
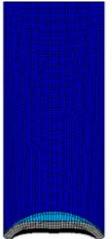
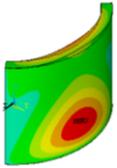
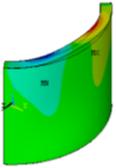
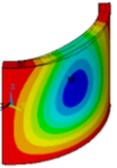
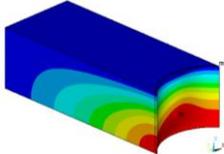
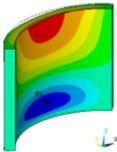
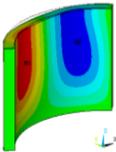
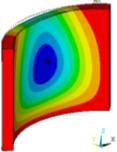
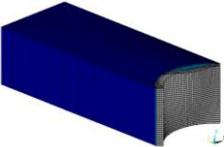
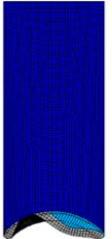
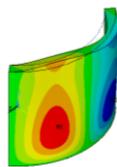
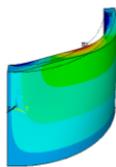
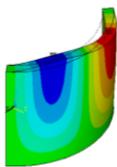
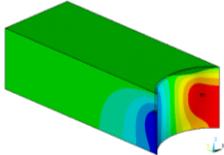
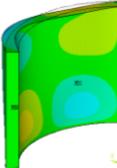
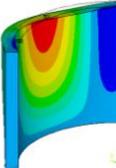
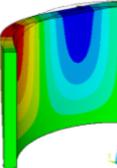
N	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W	P
1	68,59	Montante							
		Jusante							
2	76,93	Montante							
		Jusante							

Tabela 5.21 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 3), cont.

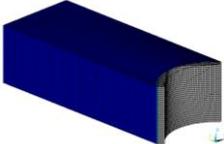
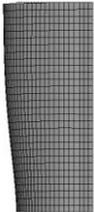
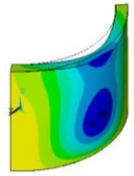
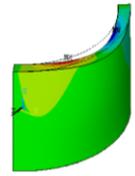
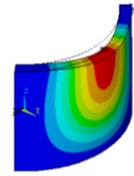
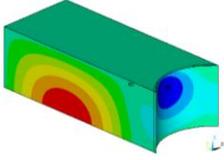
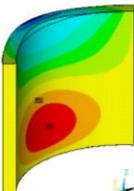
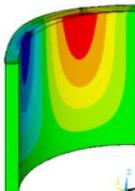
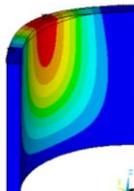
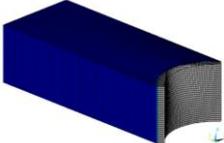
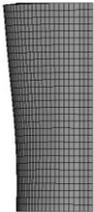
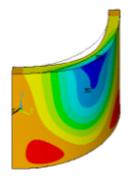
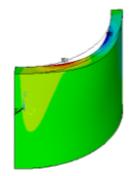
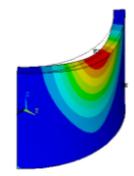
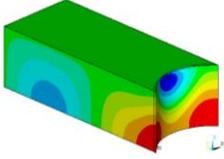
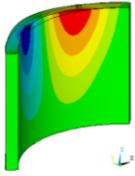
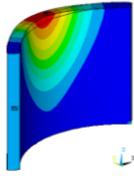
N	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W	P
3	93,44	Montante							
		Jusante							
4	107,95	Montante							
		Jusante							

Tabela 5.21 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 3), cont.

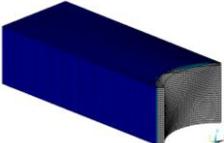
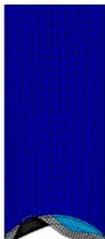
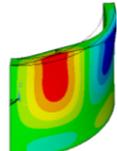
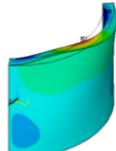
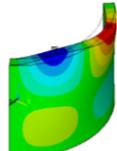
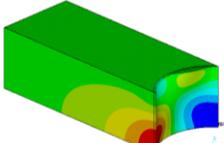
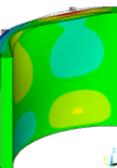
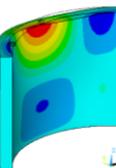
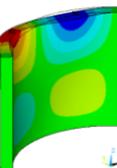
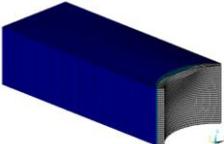
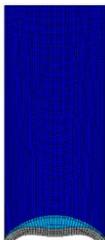
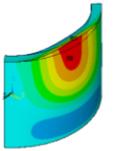
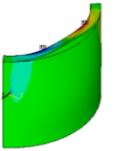
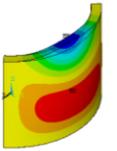
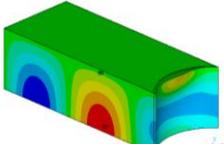
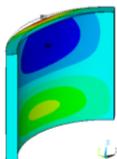
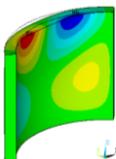
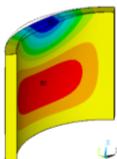
N	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W	P
5	124,07	Montante							
		Jusante							
6	131,33	Montante							
		Jusante							

Tabela 5.21 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 3), cont.

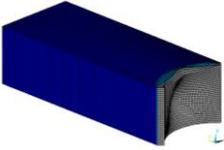
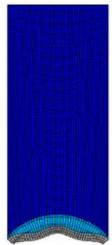
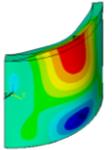
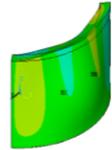
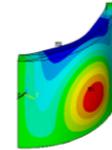
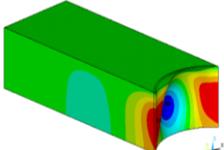
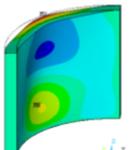
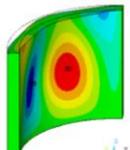
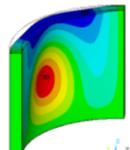
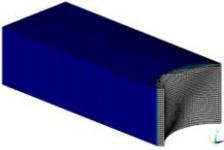
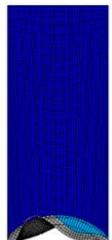
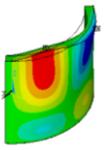
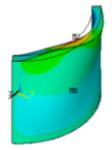
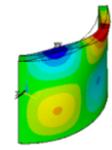
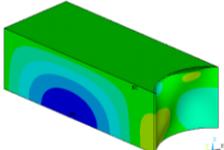
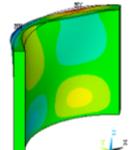
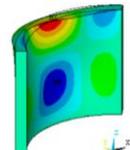
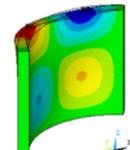
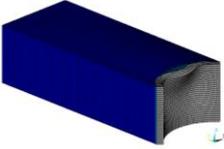
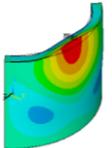
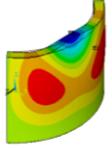
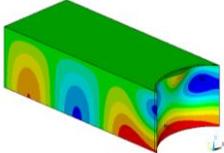
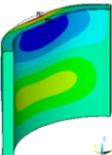
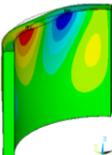
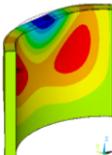
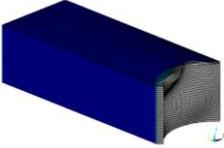
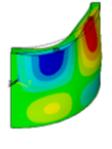
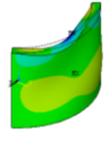
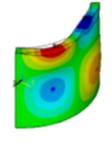
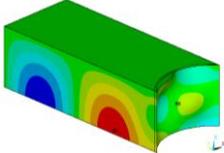
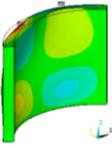
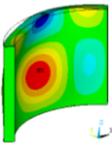
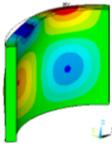
N	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W	P
7	141,55	Montante							
		Jusante							
8	144,67	Montante							
		Jusante							

Tabela 5.21 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 3), cont.

N	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W	P
9	161,73	Montante							
		Jusante							
10	165,46	Montante							
		Jusante							

A Tabela 5.22 apresenta as dez primeiras frequências numéricas do sistema fluido-estrutura com a análise do modo, incluindo os modos da estrutura e/ou fluido desacoplados associados ao modo acoplado.

Tabela 5.22 - Frequências numéricas acopladas e análise dos modos (Caso 3)

Estrutura		Fluido		Fluido-estrutura		Análise do modo
Ordem do modo (mn)	ω (rad/s)	Ordem do modo (ijk)	ω (rad/s)	Ordem do modo	ω (rad/s)	
2 (1,1)	122,77	1 (0,1,1)	79,24	1	68,59	MM/MA
1 (1,2)	105,71	-	-	2	76,93	DE/MA
2 (1,1)	122,77	2 (0,3,1)	104,92	3	93,44	MM/MA
-	-	2 (0,3,1)	104,92	4	107,95	DC/RA
4 (2,2)	182,28	3 (1,1,1)	131,32	5	124,07	MM/MA
3 (2,1)	165,07	4 (0,5,1)	142,75	6	131,33	MM/MA
3 (2,1)	165,07	-	-	7	141,55	DE/MA
4 (2,2)	182,28	5 (1,3,1)	149,44	8	144,67	MM/MA
-	-	4 (0,5,1)	142,75	9	161,73	DC/RA
4 (2,2)	182,28	6 (1,5,1)	177,25	10	165,46	MM/MA

A frequência acoplada do modo misto com massa adicional (MM/MA) é menor que as frequências isoladas, ou seja, os valores desacoplados da cavidade e da estrutura. Então, isso sugeriria o efeito de massa adicional na estrutura. Observa-se que nos modos 1, 3, 5, 6, 8 e 10 aparecem os dois modos desacoplados típicos, ou seja, mostram as formas modais da cavidade e da estrutura.

Os modos 2 e 7 são modos dominantes da estrutura (deformadas modais típicas da estrutura) com massa adicional (DE/MA). As frequências apresentam valores menores do que as frequências desacopladas da estrutura. O fluido acompanha a deformada da estrutura. Não há excitação das formas modais da cavidade. Como o fluido é perturbado, ele age com um efeito de massa adicional sobre a estrutura.

Os modos 4 e 9 são modos dominantes da cavidade com rigidez adicional (DC/RA). Reproduzem as formas modais 3D da cavidade desacoplada com frequências superiores às frequências destas. A estrutura acompanha as formas modais de pressão da cavidade, ajusta-se a essa e segue alguma de suas deformadas típicas e bem definidas. A cavidade se comporta como se adquirisse rigidez adicional induzida pela rigidez da estrutura.

5.2.4 Caso 4 - Barragem em arco com simples curvatura

Estrutura:

Vibração livre:

A Tabela 5.23 apresenta os modos de vibração numéricos da barragem. São apresentados, para os 10 primeiros modos associados às 10 primeiras frequências naturais numéricas, as deformadas 3D (perspectiva) e 2D (vistas lateral e superior) e os deslocamentos axial (U), circunferencial (V) e radial (W).

Tabela 5.23 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura obtidos via ANSYS (Caso 4)

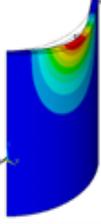
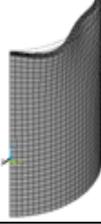
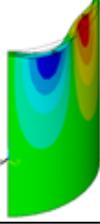
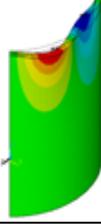
N (m,n)	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W
1 (1,1)	233,03	Montante						
		Jusante						
2 (1,2)	236,98	Montante						
		Jusante						
3 (2,1)	307,27	Montante						
		Jusante						

Tabela 5.23 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura obtidos via ANSYS (Caso 4), cont.

N (m,n)	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W
4 (2,2)	383,53	Montante						
		Jusante						
5 (3,1)	392,51	Montante						
		Jusante						
6 (1,3)	407,63	Montante						
		Jusante						

Tabela 5.23 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura obtidos via ANSYS (Caso 4), cont.

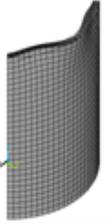
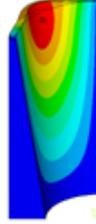
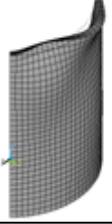
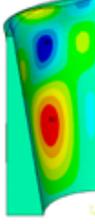
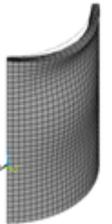
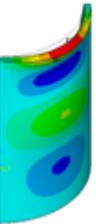
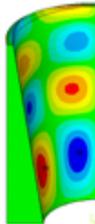
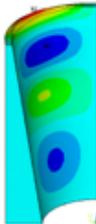
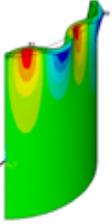
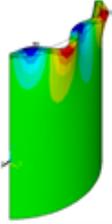
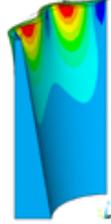
N (m,n)	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W
7 (2,3)	434,86	Montante						
		Jusante						
8 (3,2)	501,72	Montante						
		Jusante						
9 (4,1)	517,46	Montante						
		Jusante						

Tabela 5.23 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura obtidos via ANSYS (Caso 4), cont.

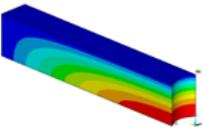
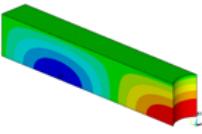
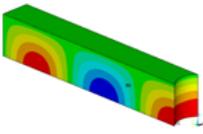
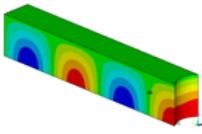
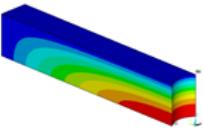
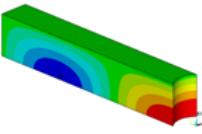
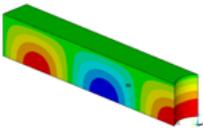
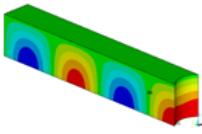
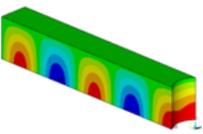
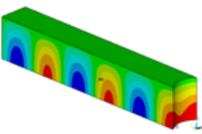
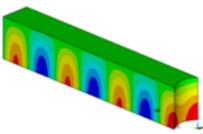
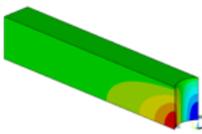
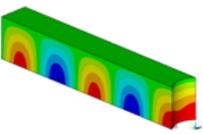
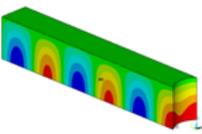
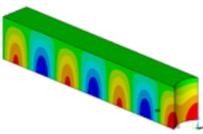
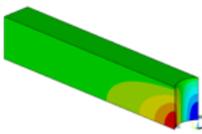
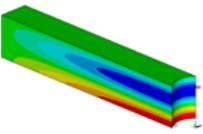
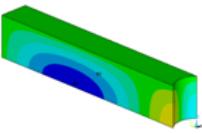
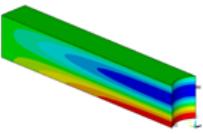
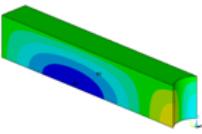
N (m,n)	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W
10 (1,4)	565,19	Montante						
		Jusante						

Fluido:

Vibração livre:

A Tabela 5.24 apresenta os modos de vibração numéricos da cavidade acústica. São apresentadas as pressões para os 10 primeiros modos associados às 10 primeiras frequências naturais numéricas.

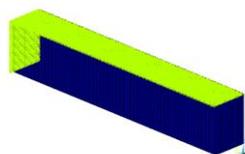
Tabela 5.24 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos do fluido obtidos via ANSYS (Caso 4)

Pressão	1 (0,1,1)	2 (0,3,1)	3 (0,5,1)	4 (0,7,1)
	76,87	87,73	106,15	128,95
				
				
Pressão	5 (0,9,1)	6 (0,11,1)	7 (0,13,1)	8 (1,1,1)
	154,19	180,86	208,39	220,01
				
				
Pressão	9 (0,1,3)	10 (1,3,1)		
	226,92	229,07		
				
				

A Tabela 5.25 apresenta as frequências analíticas e numéricas da geometria aproximada, sendo $L_x = 21,21$ m, $L_y = 154$ m e $L_z = 30$ m.

Tabela 5.25 - Frequências naturais do fluido desacoplado com geometria aproximada (Caso 4)

Ordem do modo	Geometria aproximada					
	i	j	k	ω analítico (rad/s)	ω numérico (rad/s)	Erro
1	0	1	1	76,81	76,82	0,01%
2	0	3	1	87,27	87,28	0,01%
3	0	5	1	105,12	105,14	0,01%
4	0	7	1	127,28	127,31	0,02%
5	0	9	1	151,89	151,93	0,03%
6	0	11	1	177,92	178,01	0,05%
7	0	13	1	204,83	204,98	0,07%
8	1	1	1	226,67	226,82	0,07%
9	0	1	3	226,67	226,90	0,10%
10	1	3	1	230,42	230,57	0,06%



Comparando as Tabelas 5.24 e 5.25, nota-se a similaridade dos resultados, o que confere adequação aos valores apresentados.

Fluido-estrutura:

Vibração livre:

A Tabela 5.26 apresenta os modos de vibração numéricos do sistema fluido-estrutura acoplado. São apresentados, para os 10 primeiros modos associados às 10 primeiras frequências naturais numéricas, as deformadas 3D (perspectiva) e 2D (vistas lateral e superior) e os deslocamentos axial (U), circunferencial (V) e radial (W) e a pressão (P).

Tabela 5.26 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 4)

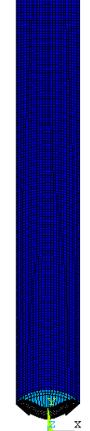
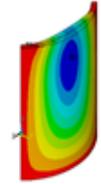
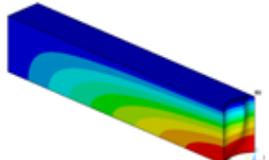
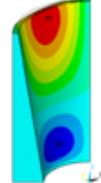
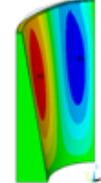
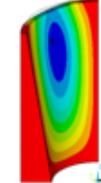
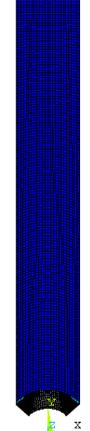
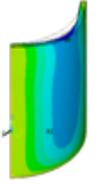
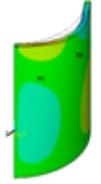
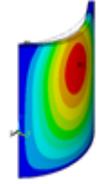
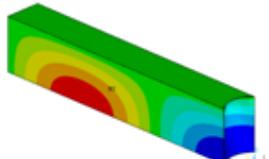
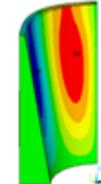
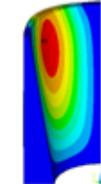
N	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W	P
1	75,86	Montante							
		Jusante							
2	86,70	Montante							
		Jusante							

Tabela 5.26 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 4), cont.

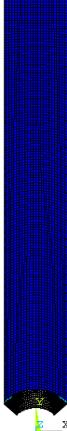
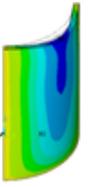
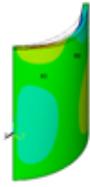
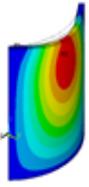
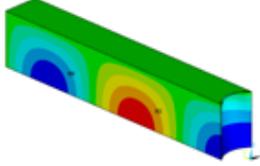
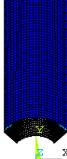
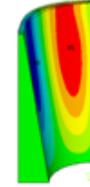
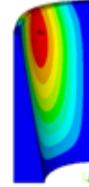
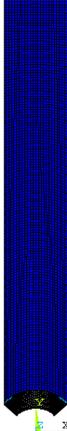
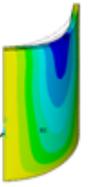
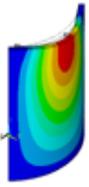
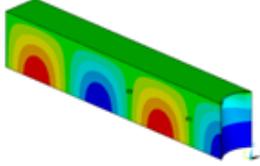
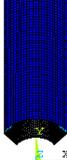
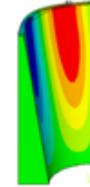
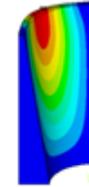
N	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W	P
3	104,85	Montante							
		Jusante							
4	127,18	Montante							
		Jusante							

Tabela 5.26 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 4), cont.

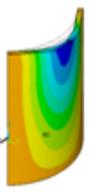
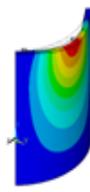
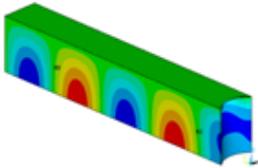
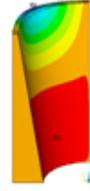
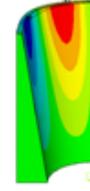
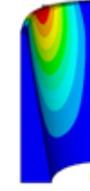
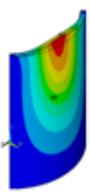
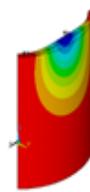
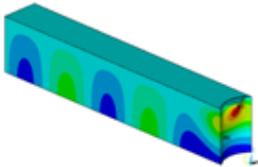
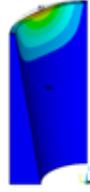
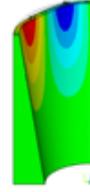
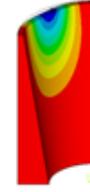
N	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W	P
5	151,46	Montante							
		Jusante							
6	171,37	Montante							
		Jusante							

Tabela 5.26 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 4), cont.

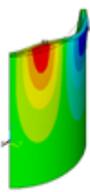
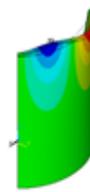
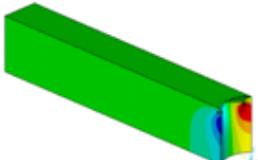
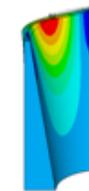
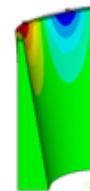
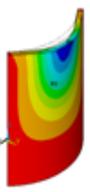
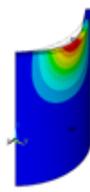
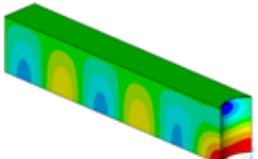
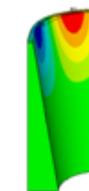
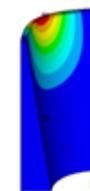
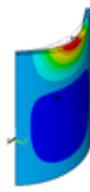
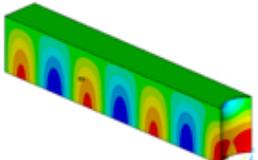
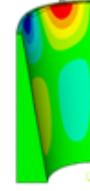
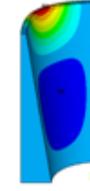
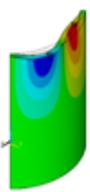
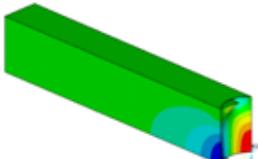
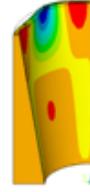
N	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W	P
7	180,94	Montante							
		Jusante							
8	182,08	Montante							
		Jusante							

Tabela 5.26 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 4), cont.

N	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W	P
9	206,53	Montante							
		Jusante							
10	217,13	Montante							
		Jusante							

A Tabela 5.27 apresenta as frequências numéricas do sistema fluido-estrutura com a análise do modo, incluindo os modos da estrutura e/ou fluido desacoplados associados ao modo acoplado.

Tabela 5.27 - Frequências numéricas acopladas e análise dos modos (Caso 4)

Estrutura		Fluido		Fluido-estrutura		Análise do modo
Ordem do modo (mn)	ω (rad/s)	Ordem do modo (ijk)	ω (rad/s)	Ordem do modo	ω (rad/s)	
1 (1,1)	233,03	1 (0,1,1)	76,87	1	75,86	MM/MA
1 (1,1)	233,03	2 (0,3,1)	87,73	2	86,70	MM/MA
1 (1,1)	233,03	3 (0,5,1)	106,15	3	104,85	MM/MA
1 (1,1)	233,03	4 (0,7,1)	128,95	4	127,18	MM/MA
1 (1,1)	233,03	5 (0,9,1)	154,19	5	151,46	MM/MA
1 (1,1)	233,03	6 (0,11,1)	180,86	6	171,37	MM/MA
2 (1,2)	236,98	-	-	7	180,94	DE/MA
-	-	6 (0,11,1)	180,86	8	182,08	DC/RA
1 (1,1)	233,03	7 (0,13,1)	208,39	9	206,53	MM/MA
2 (1,2)	236,98	8 (1,1,1)	220,01	10	217,13	MM/MA

Das Tabelas 5.23, 5.24 e 5.26, observa-se que, os modos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9 e 10 são modos mistos com massa adicional (MM/MA), o modo 7 é um modo dominante da estrutura com massa adicional (DE/MA) e o modo 8 é um modo dominante da cavidade com rigidez adicional (DC/RA).

5.2.5 Caso 5 - Barragem em arco com dupla curvatura

Estrutura:

Vibração livre:

A Tabela 5.28 apresenta os modos de vibração numéricos da barragem. São apresentados, para os 10 primeiros modos associados às 10 primeiras frequências naturais numéricas, as deformadas 3D (perspectiva) e 2D (vistas lateral e superior) e os deslocamentos axial (U), circunferencial (V) e radial (W).

Tabela 5.28 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura obtidos via ANSYS (Caso 5)

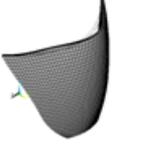
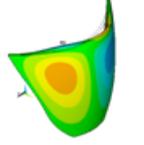
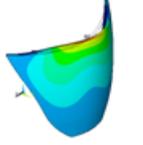
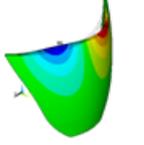
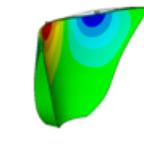
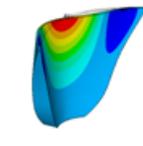
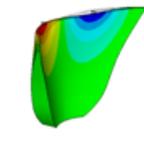
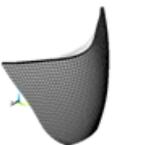
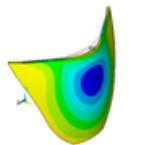
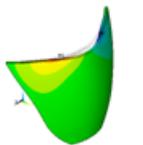
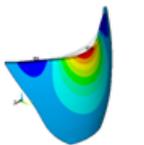
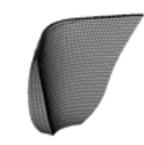
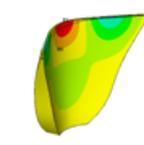
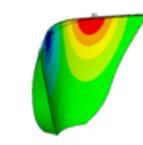
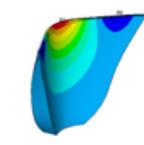
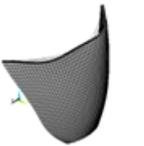
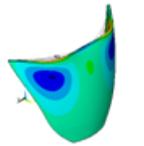
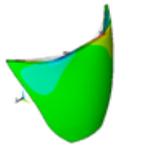
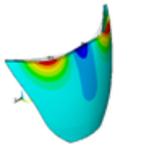
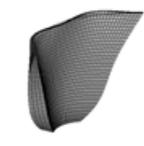
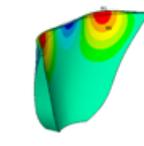
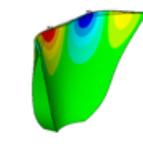
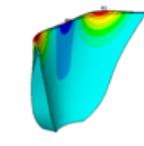
N	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W
1	23,49	Montante						
		Jusante						
2	29,55	Montante						
		Jusante						
3	35,24	Montante						
		Jusante						

Tabela 5.28 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura obtidos via ANSYS (Caso 5), cont.

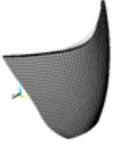
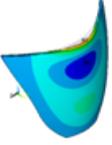
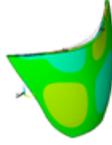
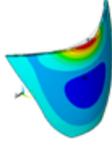
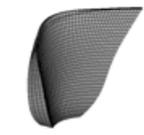
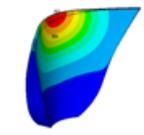
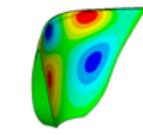
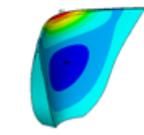
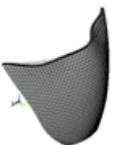
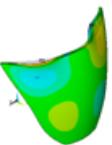
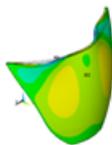
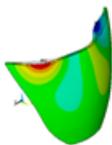
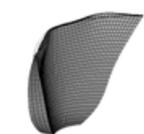
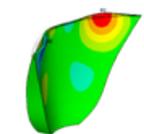
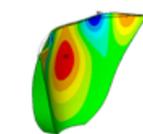
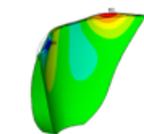
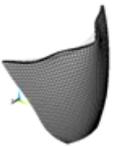
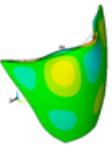
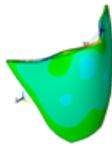
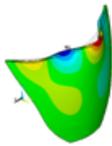
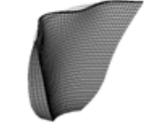
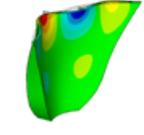
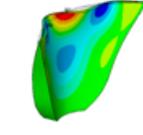
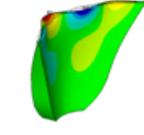
N	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W
4	44,87	Montante						
		Jusante						
5	45,13	Montante						
		Jusante						
6	49,93	Montante						
		Jusante						

Tabela 5.28 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura obtidos via ANSYS (Caso 5), cont.

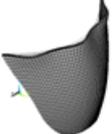
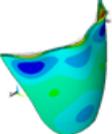
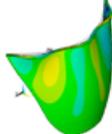
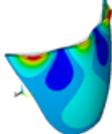
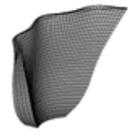
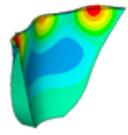
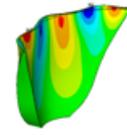
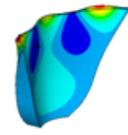
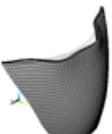
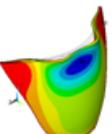
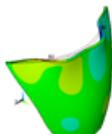
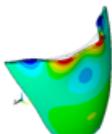
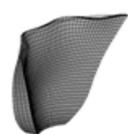
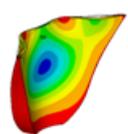
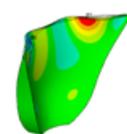
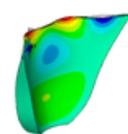
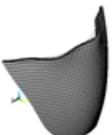
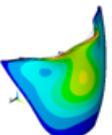
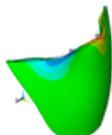
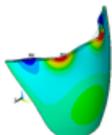
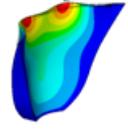
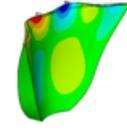
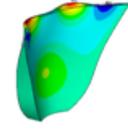
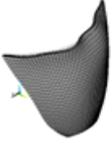
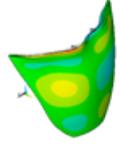
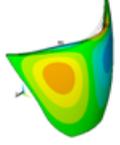
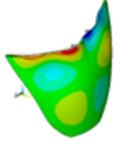
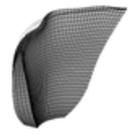
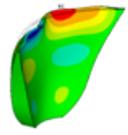
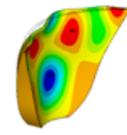
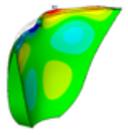
N	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W
7	58,48	Montante						
		Jusante						
8	59,86	Montante						
		Jusante						
9	64,64	Montante						
		Jusante						

Tabela 5.28 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura obtidos via ANSYS (Caso 5), cont.

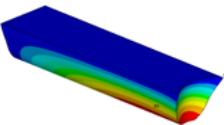
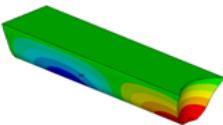
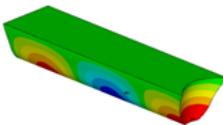
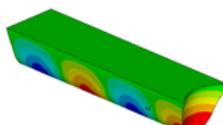
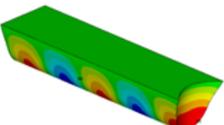
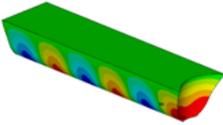
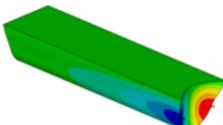
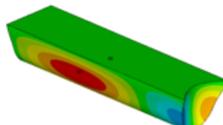
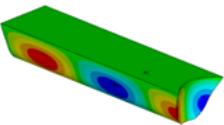
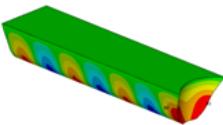
N	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W
10	69,42	Montante						
		Jusante						

Fluido:

Vibração livre:

A Tabela 5.29 apresenta os modos de vibração numéricos da cavidade acústica. São apresentadas as pressões para os 10 primeiros modos associados às 10 primeiras frequências naturais numéricas.

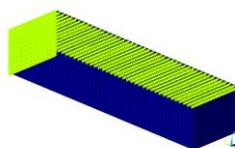
Tabela 5.29 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos do fluido obtidos via ANSYS (Caso 5)

N (i,j,k)	1 (0,1,1)	2 (0,3,1)	3 (0,5,1)	4 (0,7,1)
	19,08	21,17	24,80	29,43
	Pressão	Pressão	Pressão	Pressão
				
N (i,j,k)	5 (0,9,1)	6 (0,11,1)	7 (1,1,1)	8 (1,3,1)
	34,68	40,32	41,90	43,20
	Pressão	Pressão	Pressão	Pressão
				
N (i,j,k)	9 (1,5,1)	10 (0,13,1)		
	45,03	46,22		
	Pressão	Pressão		
				

A Tabela 5.30 apresenta as frequências analíticas e numéricas da geometria aproximada, sendo $L_x = 623,24 \text{ ft}$, $L_y = 2.491 \text{ ft}$ e $L_z = 465 \text{ ft}$.

Tabela 5.30 - Frequências naturais do fluido desacoplado com geometria aproximada (Caso 5)

Ordem do modo	Geometria aproximada					
	i	j	k	ω analítico (rad/s)	ω numérico (rad/s)	Erro
1	0	1	1	16,24	16,24	0,01%
2	0	3	1	18,29	18,29	0,01%
3	0	5	1	21,83	21,84	0,06%
4	0	7	1	26,26	26,30	0,15%
5	1	1	1	28,82	28,83	0,02%
6	1	3	1	30,03	30,03	0,02%
7	1	5	1	31,20	31,29	0,29%
8	0	9	1	32,31	32,32	0,04%
9	1	7	1	35,45	35,48	0,09%
10	0	11	1	36,45	36,63	0,49%



Comparando as Tabelas 5.29 e 5.30, nota-se a similaridade dos resultados, além da ordem dos índices ser coincidente nos quatro primeiros modos, o que confere adequação aos valores apresentados.

Fluido-estrutura:

Vibração livre:

A Tabela 5.31 apresenta os modos de vibração numéricos do sistema fluido-estrutura acoplado. São apresentados, para os 10 primeiros modos associados às 10 primeiras frequências naturais numéricas, as deformadas 3D (perspectiva) e 2D (vistas lateral e superior) e os deslocamentos axial (U), circunferencial (V) e radial (W) nas faces montante e jusante da barragem e a pressão (P).

Tabela 5.31 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 5)

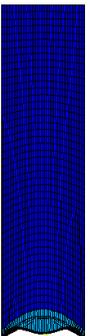
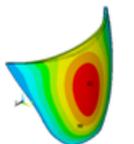
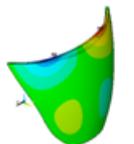
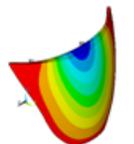
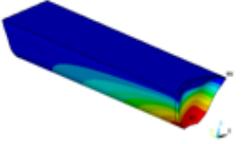
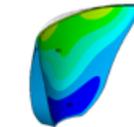
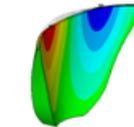
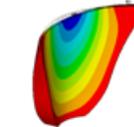
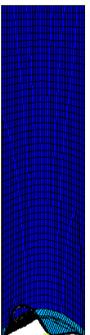
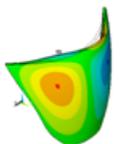
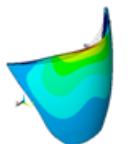
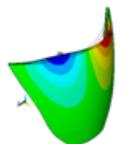
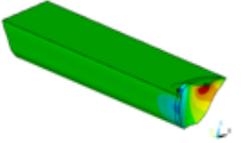
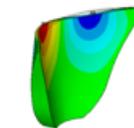
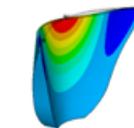
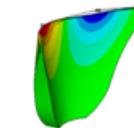
N	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W	P
1	17,99	Montante							
		Jusante							
2	18,38	Montante							
		Jusante							

Tabela 5.31 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 5), cont.

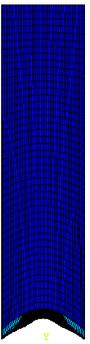
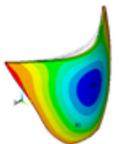
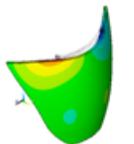
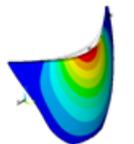
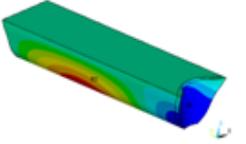
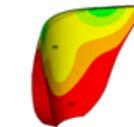
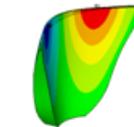
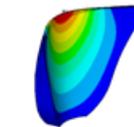
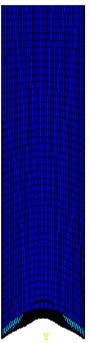
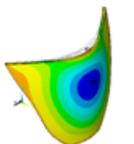
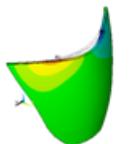
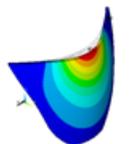
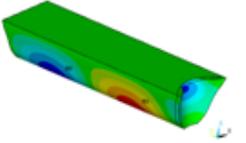
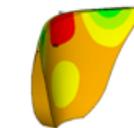
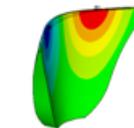
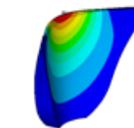
N	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W	P
3	20,26	Montante							
		Jusante							
4	23,11	Montante							
		Jusante							

Tabela 5.31 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 5), cont.

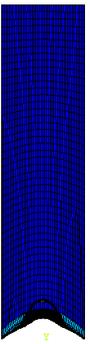
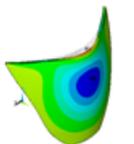
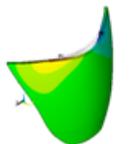
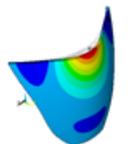
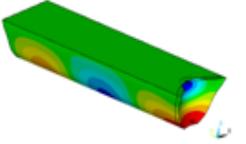
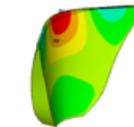
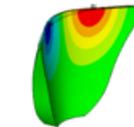
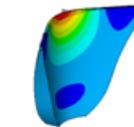
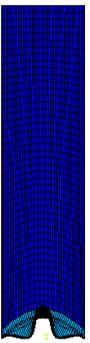
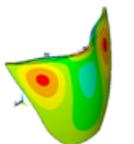
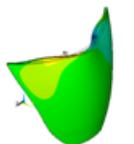
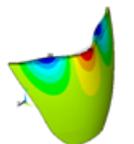
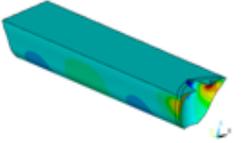
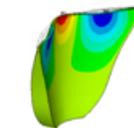
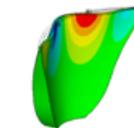
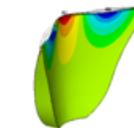
N	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W	P
5	25,55	Montante							
		Jusante							
6	28,18	Montante							
		Jusante							

Tabela 5.31 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 5), cont.

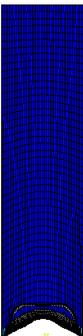
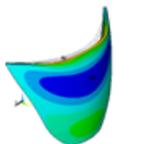
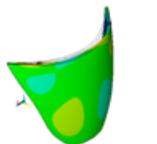
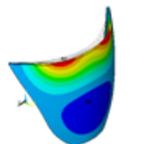
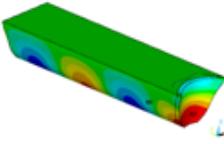
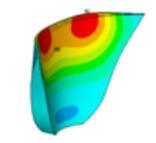
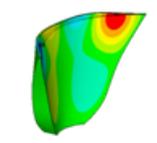
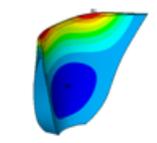
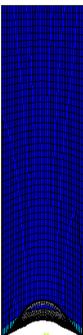
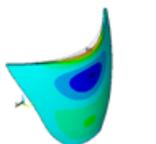
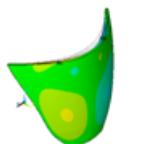
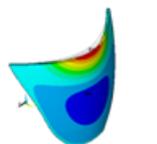
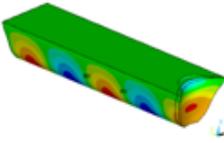
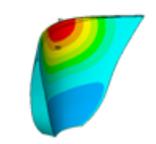
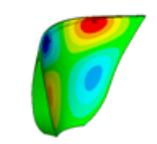
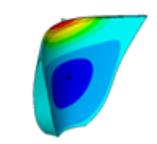
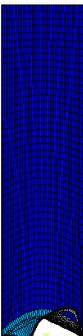
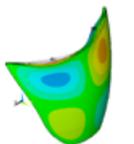
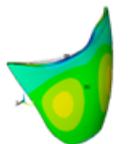
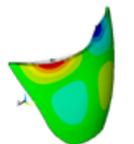
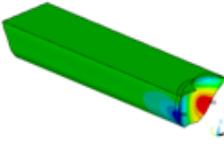
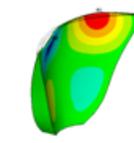
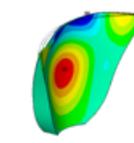
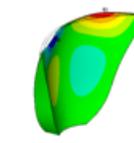
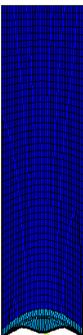
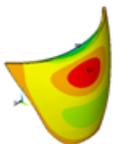
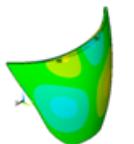
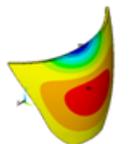
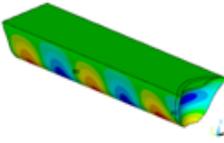
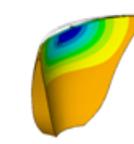
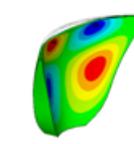
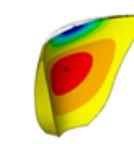
N	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W	P
7	29,11	Montante							
		Jusante							
8	33,60	Montante							
		Jusante							

Tabela 5.31 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados obtidos via ANSYS (Caso 5), cont.

N	ω (rad/s)	Face	Def.	Vista lateral	Vista superior	U	V	W	P
9	35,22	Montante							
		Jusante							
10	38,02	Montante							
		Jusante							

A Tabela 5.32 apresenta as frequências numéricas do sistema fluido-estrutura com a análise do modo, incluindo os modos da estrutura e/ou fluido desacoplados associados ao modo acoplado.

Tabela 5.32 - Frequências numéricas acopladas e análise dos modos (Caso 5)

Estrutura		Fluido		Fluido-estrutura		Análise do modo
Ordem do modo	ω (rad/s)	Ordem do modo (ijk)	ω (rad/s)	Ordem do modo	ω (rad/s)	
2	29,55	1 (0,1,1)	19,08	1	17,99	MM/MA
1	23,49	-	-	2	18,38	DE/MA
2	29,55	2 (0,3,1)	21,17	3	20,26	MM/MA
-	-	2 (0,3,1)	21,17	4	23,11	DC/RA
-	-	3 (0,5,1)	24,80	5	25,55	DC/RA
3	35,24	4 (0,7,1)	29,43	6	28,18	MM/MA
4	44,87	4 (0,7,1)	29,43	7	29,11	MM/MA
4	44,87	5 (0,9,1)	34,68	8	33,60	MM/MA
5	45,13	-	-	9	35,22	DE/MA
4	44,87	6 (0,11,1)	40,32	10	38,02	MM/MA

Das Tabelas 5.28, 5.29 e 5.31, observa-se que, os modos 1, 3, 6, 7, 8 e 10 são modos mistos com massa adicional (MM/MA), os modos 2 e 9 são modos dominantes da estrutura com massa adicional (DE/MA) e os modos 4 e 5 são modos dominantes da cavidade com rigidez adicional (DC/RA).

5.3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE SÍSMICA

O desempenho de barragens em arco sob terremoto é avaliado utilizando os resultados numéricos obtidos a partir de uma análise linear-dinâmica. Os resultados da análise linear proporcionam uma estimativa satisfatória da resposta dinâmica a terremotos nas quais as deformações resultantes da barragem estão dentro da faixa linear-elástica. Neste caso a avaliação do desempenho é baseada em simples verificações de tensões em que as tensões elásticas calculadas são comparadas com a resistência do concreto especificada.

A análise do histórico de tempo computa a resposta dinâmica tempo-dependente do modelo da barragem para a duração da excitação do terremoto. Os resultados de tais análises constituem não só dos valores máximos da resposta, mas também incluem

informações tempo-dependentes que devem ser examinadas e interpretadas sistematicamente.

O exame dos resultados em uma análise de histórico de tempo deve começar com a apresentação das tensões de arco e viga em balanço máximas e mínimas. Essas tensões devem ser exibidas na forma de gráficos de contorno para as faces montante e jusante da barragem. Os gráficos de contorno das tensões de arco e viga em balanço máximas representam a maior tensão de tração (positiva) computada em todos os pontos da barragem durante o tremor de terra. Similarmente, os gráficos de contorno das tensões mínimas representam as maiores tensões de arco e viga em balanço de compressão (negativa) na barragem. As tensões máxima e mínima em diferentes pontos são geralmente atingidas em diferentes instantes de tempo. Gráficos de contorno de tensões de arco e viga em balanço máximas proporcionam um meio conveniente para a identificação de áreas sobrecarregadas onde as tensões máximas se aproximam ou excedem da resistência a tração do concreto. Com base nessas informações, a extensão e a gravidade das tensões de tração são determinadas, e se necessário, uma avaliação adicional que represente a natureza tempo-dependente das tensões deve ser feita. Gráficos de contorno de tensões mínimas mostram as tensões de compressão extremas que a barragem experimentaria durante o sismo. As tensões de compressão devem ser examinadas para assegurar que cumpram os fatores de segurança especificados para o carregamento dinâmico.

Como se sabe, em análises transientes (*full method*), o ANSYS não dispõe de razão de amortecimento constante sendo necessário definir os amortecimentos α e β . A Tabela 5.33 indica para cada análise, as componentes do terremoto [M (montante), V (vertical), T (transversal)], a razão de amortecimento, os modos que contribuem para a resposta e os valores de α e β utilizados. Na análise fluido-estrutura, a razão de amortecimento da estrutura foi considerada igual a 5%. O nível de refinamento adotado foi o 1.

Tabela 5.33 - Amortecimentos α e β considerados

Sistema	Componentes	ζ (%)	ω_r (rad/s)	ω_s (rad/s)	α	β
Estrutura	M, V e T	5	$\omega_1 = 23,51$	$\omega_2 = 29,56$	1,310	$1,884 \cdot 10^{-3}$
Fluido-estrutura*		5	$\omega_1 = 18,19$	-	-	$5,497 \cdot 10^{-3}$

* O amortecimento indicado é o estrutural.

O deslocamento radial máximo no eixo da crista da barragem em $\theta_0 = 13,25^\circ$ e os valores de tração máxima das tensões de arco e viga em balanço sobre as faces montante e jusante obtidos via ANSYS e em Chopra (1998) são agrupados na Tabela 5.34. A diferença entre os resultados em relação ao artigo de referência é apresentada. Os valores numéricos do deslocamento radial foram obtidos em $\theta_0 = 13,89^\circ$, ponto mais próximo do considerado em Chopra (1988).

Tabela 5.34 - Resposta da barragem *Morrow Point*

Componente	Resposta	Caso		Estrutura			Fluido-estrutura		
		Face	Tensão	Número	Chopra (1988)	Diferença (%)	Número	Chopra (1988)	Diferença (%)
M, V e T	Deslocamento radial máx. (cm)	-	-	1,21	1,27	4,7	1,74	6,22	72,0
	Tensão de tração máx. (MPa)	Montante	Arco	2,09	2,24	6,8	2,49	13,63	81,8
			Viga em balanço	0,72	0,80	10,3	3,01	4,91	38,8
		Jusante	Arco	1,73	1,90	8,8	3,48	12,08	71,2
			Viga em balanço	0,86	0,85	1,4	2,14	3,59	40,5

Como observado na Tabela 5.34, os resultados numéricos obtidos para a estrutura desacoplada, se mostraram compatíveis com os de Chopra (1988). Para o caso acoplado, as diferenças excederam limites razoáveis, sendo preciso esclarecimentos pormenorizados. Por um lado, há as simplificações adotadas na modelagem do reservatório: em Chopra (1988) o reservatório é dividido em um domínio fluido finito de geometria irregular e um infinito de seção transversal uniforme, utilizando uma condição de radiação no infinito no contorno longínquo enquanto neste trabalho o reservatório foi modelado como um canal uniforme, com comprimento igual a cinco vezes a altura da água (igual a altura da barragem) com contorno longínquo considerado aberto, repercutindo nas frequências de vibração natural ressonantes e assim na resposta ao sismo. Outro ponto de dissimilitude refere-se à condição de contorno das margens e leito do reservatório: em Chopra (1988), há a consideração da aceleração dos lados e fundo através de interação fluido-fundação, enquanto no presente trabalho, essas fronteiras foram consideradas contornos fechados, não sendo aceleradas. Testes com modelos mais simples, como por exemplo, uma parede

rígido-móvel simulando a barragem e um fundo rívido-móvel simulando a fundação (pistões sobre base elástica) e uma cavidade acústica retangular 2D, mostraram aumentos significativos nos valores dos deslocamentos horizontais no topo do pistão-barragem no caso em que o pistão-fundação é considerado em relação à condição de contorno fechada no fundo, o que também pode ser observado na comparação dos resultados dos deslocamentos radiais máximos para o caso fluido-estrutura. É importante mencionar também o fato de que, em Chopra (1988), a razão de amortecimento viscoso ζ é igual a 5% em todos os modos de vibração da barragem apoiada em fundação rívida com reservatório vazio e quando o reservatório está cheio, a razão de amortecimento difere de quando o reservatório está vazio por causa da força hidrodinâmica adicional frequência-dependente. Neste trabalho, ζ foi adotada como 5% no caso acoplado e como o método empregado no ANSYS 11.0 não dispõe de razão de amortecimento constante, utilizou-se o amortecimento β , como uma propriedade do concreto; estas considerações vão se afastando do caso original, o que também influencia na resposta dinâmica da barragem. Os fatores mencionados efetivamente influenciam nos resultados obtidos, no entanto, torna-se difícil quantificá-los porque se desconhecem muitos parâmetros e considerações adotados pelo autor em referência. Testes extras, com condição de radiação no infinito e interação fluido-fundação envolvendo as margens e fundo do reservatório com elemento de casca ou considerando a água incompressível não alteraram significativamente os resultados, para esse caso. Conclui-se que os resultados do caso acoplado, aqui obtidos, devem ser encarados com prudência uma vez que eles são limitados por uma série de considerações desprezadas em relação a um caso real. A Figura 5.27 apresenta a comparação dos modelos acoplados numérico e adotado em Chopra (1988).

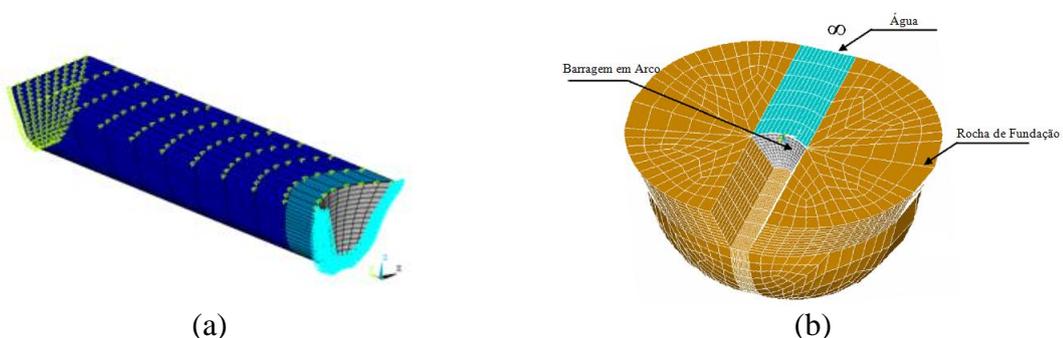


Figura 5.27 - Modelos em elementos finitos: (a) sistema barragem-reservatório simplificado adotado no presente trabalho e (b) sistema barragem-reservatório-fundação adotado em Chopra (1988) (Seyedpoor, *et.al.*, 2009, modificado)

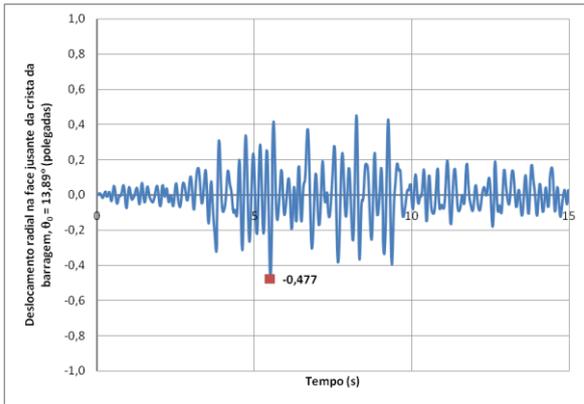
Apesar das diferenças, é patente dos resultados numéricos da Tabela 5.34 que as respostas da barragem ao terremoto sofrem aumentos devido à interação barragem-água (a aceleração da interface fluido-estrutura é, evidentemente, considerada), do mesmo modo que em Chopra (1988).

As tensões de tração e compressão máximas nas faces montante e jusante da barragem e os instantes de tempo em que ocorrem, para os casos de reservatório vazio e completamente cheio, são apresentadas na Tabela 5.35.

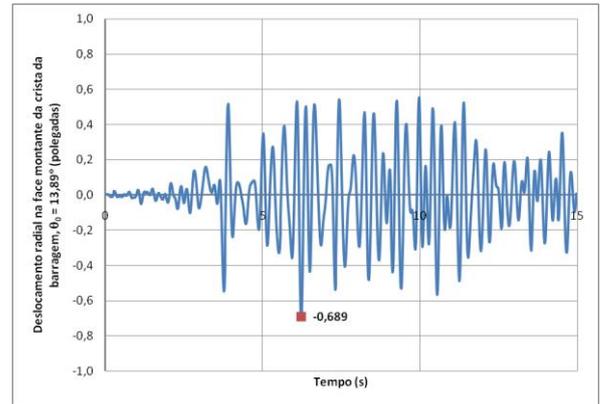
Tabela 5.35 - Tensões máximas

Componente	Caso		Estrutura		Fluido-estrutura			
	Face	Tensão	Tensão máxima (MPa)	Tempo (s)	Tensão máxima (MPa)	Tempo (s)		
M, V e T	Montante	Arco	Tração	2,09	5,18	2,49	6,08	
		Viga em balanço		0,72	5,50	3,01	5,90	
	Jusante	Arco		1,73	6,54	3,48	7,46	
		Viga em balanço		0,86	8,56	2,14	6,06	
	Montante	Arco		Compressão	2,00	5,08	2,54	6,22
		Viga em balanço			0,81	4,96	2,92	6,06
Jusante	Arco	1,55	5,08		3,86	6,22		
	Viga em balanço	0,67	7,22		2,36	5,90		

A Figura 5.28 apresenta os deslocamentos radiais relativos no tempo do ponto da barragem que apresenta o maior deslocamento radial durante o terremoto (marcado nos gráficos), devido às componentes montante, vertical e transversal, simultaneamente, para os casos de reservatório vazio (estrutura desacoplada) e completamente cheio (sistema fluido-estrutura acoplado).



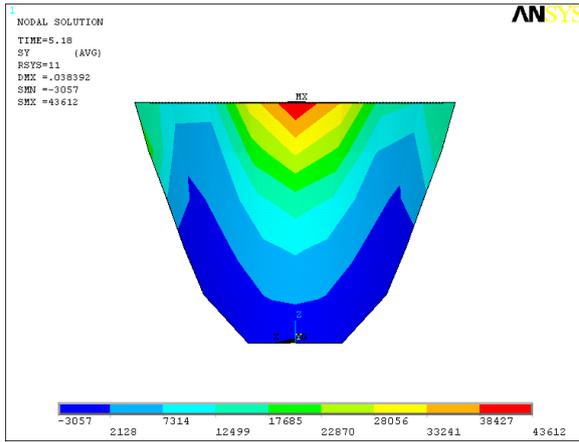
(a)



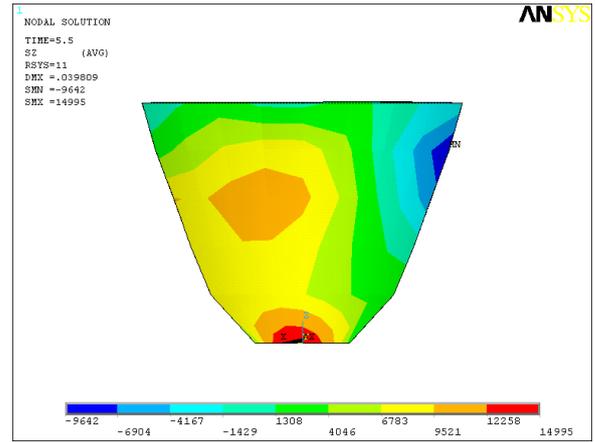
(b)

Figura 5.28 - Deslocamento radial no tempo no ponto de deslocamento radial máximo, em polegadas (= 2,54 cm): (a) estrutura e (b) fluido-estrutura

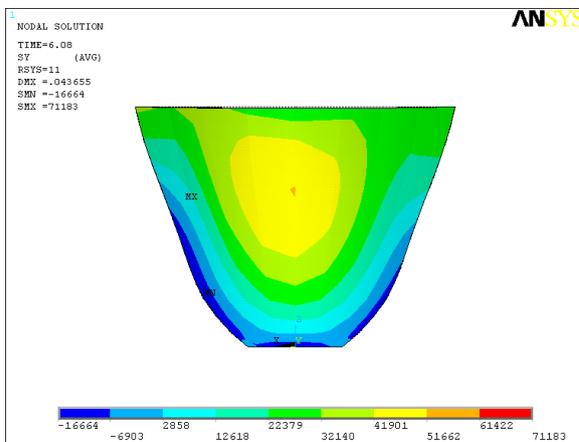
As Figuras 5.29 e 5.30 mostram as tensões de arco e viga em balanço computadas nas faces montante e jusante, respectivamente, nos instantâneos de tempo em que as tensões de tração de arco e viga em balanço são máximas nessas faces (estado de tensões concorrentes ou simultâneas).



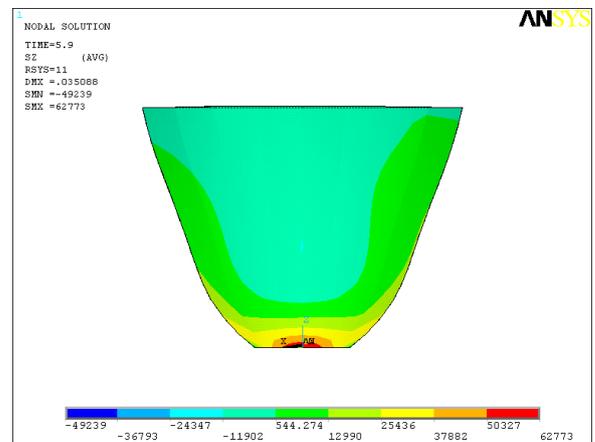
(a)



(b)

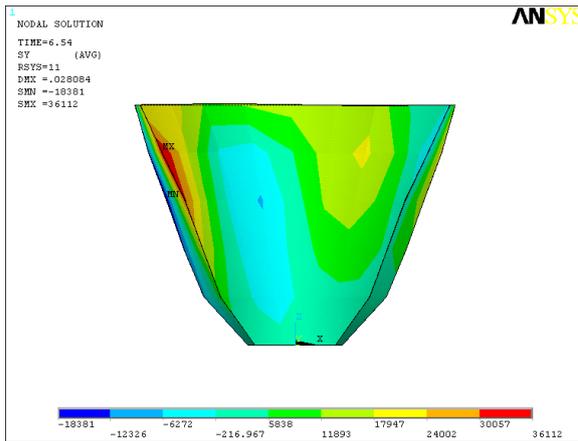


(c)

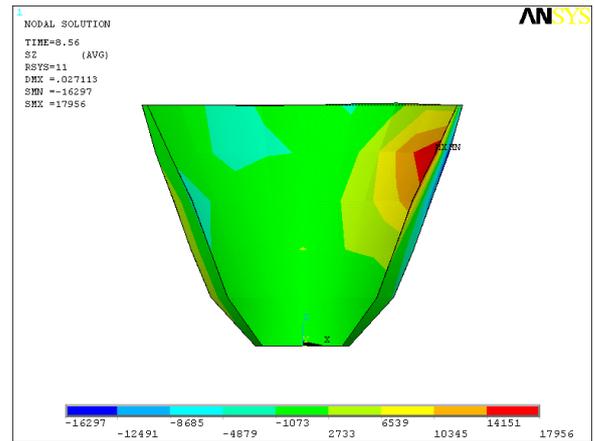


(d)

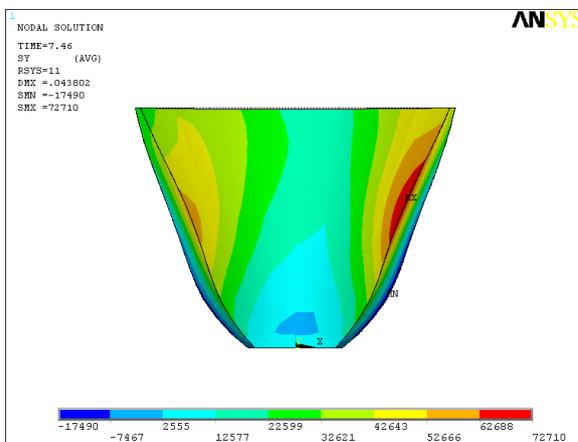
Figura 5.29 - Tensões na face montante: (a) arco e (b) viga em balanço para o caso de reservatório vazio e (c) arco e (d) viga em balanço para o caso de reservatório cheio, em lbf/ft^2 ($\cong 4,78802 \cdot 10^{-5} MPa$)



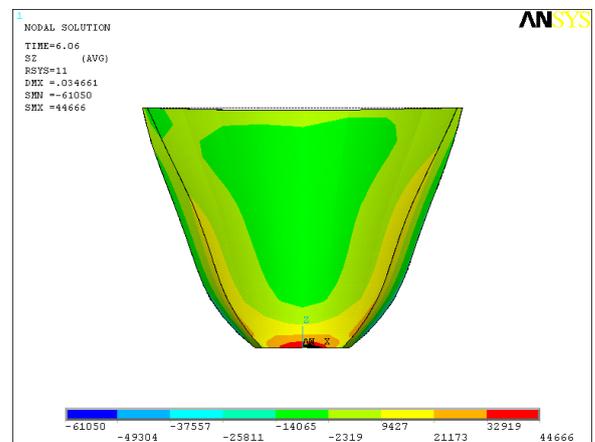
(a)



(b)



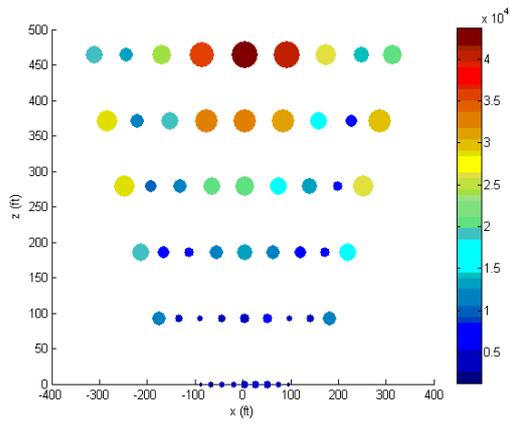
(c)



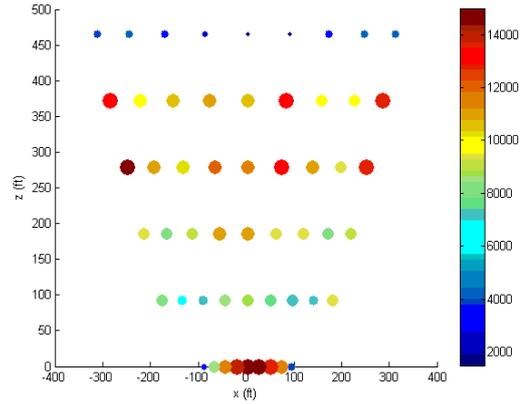
(d)

Figura 5.30 - Tensões na face jusante: (a) arco e (b) viga em balanço para o caso de reservatório vazio e (c) arco e (d) viga em balanço para o caso de reservatório cheio, em $lbf/ft^2 (\cong 4,78802 \cdot 10^{-5} MPa)$

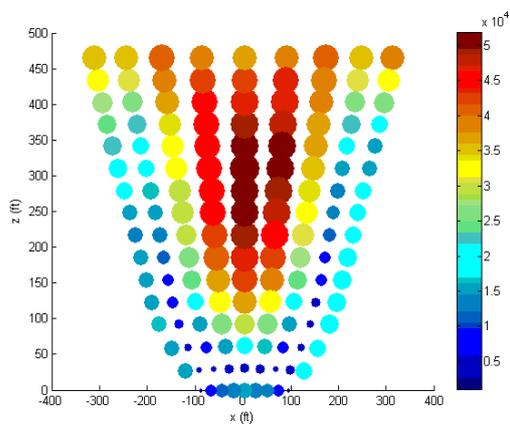
As Figuras 5.31 e 5.32 mostram os envelopes (gráficos de contorno) das tensões de tração máximas nas faces montante e jusante, respectivamente. Esses valores foram obtidos via ANSYS e plotados em MATLAB.



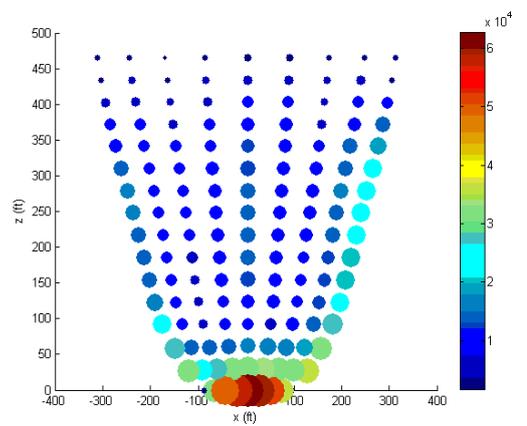
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.31 - Envelope dos valores de tensão de tração máxima na face montante: (a) arco e (b) viga em balanço para o caso de reservatório vazio e (c) arco e (d) viga em balanço para o caso de reservatório cheio, em lbf/ft^2 ($\cong 4,78802 \cdot 10^{-5} MPa$)

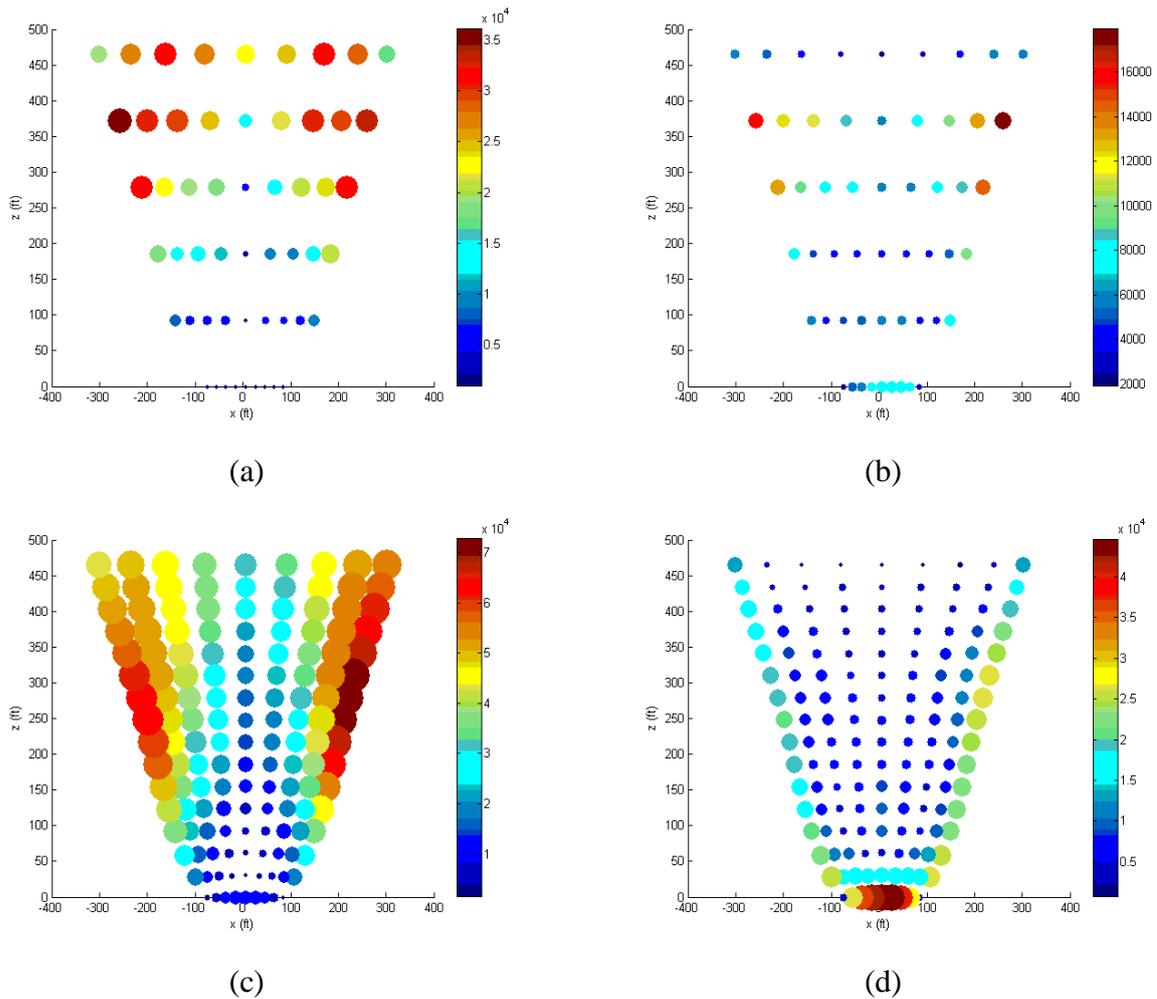


Figura 5.32 - Envelope dos valores de tensão de tração máxima na face jusante: (a) arco e (b) viga em balanço para o caso de reservatório vazio e (c) arco e (d) viga em balanço para o caso de reservatório cheio, em lb/ft^2 ($\cong 4,78802 \cdot 10^{-5} MPa$)

Segundo USACE (1994), dependendo da intensidade dos movimentos do solo e outros parâmetros de projeto pertinentes, uma barragem em arco tipicamente exibiria altas tensões na direção de arco (horizontal), na parte superior da barragem e na direção vertical, na base das vigas em balanço, quando analisadas usando o método dos elementos finitos (MEF). Para o caso analisado isso pode ser atestado, de forma geral, nas Figuras 5.31 e 5.32.

Segundo Seyedpoor, *et.al.* (2009), para o corpo da barragem *Morrow Point*, têm-se:

Resistência à compressão uniaxial do concreto: 30 MPa;

Resistência à tração uniaxial do concreto: 1,5 MPa.

De acordo com a Tabela 5.35, as tensões de compressão máximas são menores que as tensões admissíveis de 21,4 MPa (adotando um coeficiente de minoração igual a 1,4), garantindo a resistência necessária à compressão. As tensões de tração máximas são maiores que as tensões admissíveis de 1,07 MPa.

Segundo USACE (1994), quando as tensões máxima e concorrente mostram que as tensões computadas excedem o valor admissível, os históricos de tempo de tensões críticas devem ser apresentados para uma avaliação mais detalhada, analisando a frequência e duração das tensões excedentes.

É relevante mencionar que o sismo é apenas um dos carregamentos atuantes na barragem, sendo necessário em análises práticas considerar a combinação de cargas atuantes na estrutura.

A resistência extraordinária de barragens em arco tem sido reconhecida há séculos, fato atestado por algumas das mais antigas estruturas de alvenaria ainda de pé no Oriente Médio. De acordo com registros de dados, não houve nenhuma falha estrutural de uma barragem em arco devido a um terremoto (USACE, 1994).

6 CONCLUSÕES, PERSPECTIVAS E RECOMENDAÇÕES

Este último capítulo destaca as conclusões relevantes dos estudos desenvolvidos e as perspectivas para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

6.1 SÍNTESE DA DISSERTAÇÃO E CONCLUSÕES GERAIS

Obras civis de grande porte, como barragens, podem estar sujeitas a carregamentos dinâmicos que induzem movimentos vibratórios tanto na estrutura quanto no fluido do reservatório. O tratamento adequado do fenômeno de interação entre os dois meios contínuos é imprescindível na análise da segurança estrutural dessas construções (Sousa Junior, 2006)

A fim de analisar a estabilidade sísmica de uma barragem em arco, e uma vez que um problema dessa natureza não pode ser abordado de forma direta, sem uma experiência consolidada anteriormente através de estudos e análises evolutivas, decidiu-se por uma metodologia progressiva (do mais simples ao mais complexo) através do exame de cinco casos: (1) casca cilíndrica circular reta, (2) casca cilíndrica circular reta cortada por um plano paralelo ao seu eixo, (3) barragem em arco cilíndrica, (4) barragem em arco com simples curvatura e (5) barragem em arco com dupla curvatura. Foram realizados estudos de vibração livre da estrutura desacoplada, do fluido desacoplado e do sistema fluido-estrutura acoplado (Casos 1 a 5) e de vibração forçada por carregamento harmônico (Caso 1) e sísmico (Casos 1 e 5, além de validação dos Casos 3 e 4). Todos os casos foram analisados pelo método dos elementos finitos por meio do programa ANSYS 11.0 e sua validação obtida por abordagem analítica (quando haviam formulações disponíveis) ou exemplos da literatura técnica.

No Caso 1, analisou-se uma casca cilíndrica circular reta biapoiada sem restrição axial, aberta nas bases. Esse caso foi integralmente desenvolvido pelas abordagens analítica e numérica através de estudo comparativo. As respostas obtidas mostraram-se bastante coerentes pela similaridade dos resultados das duas abordagens e pela compatibilidade com teorias e resultados experimentais disponíveis. A teoria de casca utilizada foi baseada nas formulações aproximadas apresentadas em Flügge (1973). Analiticamente, as frequências naturais e os modos de vibração foram obtidos pelas equações de movimento para o

sistema estrutural desacoplado, pela equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas para o sistema fluido desacoplado, e pela condição de impermeabilidade (condição fluido-estrutura) e método pseudo-acoplado para o sistema fluido-estrutura acoplado. Nas análises de vibração forçada o método utilizado foi o da superposição modal. Na análise sísmica utilizou-se o método numérico da interpolação da excitação ao longo do tempo. Numericamente, a estrutura foi modelada com elementos SHELL63 e o fluido, com elementos FLUID30, ambos da biblioteca do ANSYS 11.0. Nas análises modais os métodos utilizados foram *Subspace* para os sistemas estrutural e fluido desacoplados e *Unsymmetric*, para o fluido-estrutura acoplado. Nas análises de vibração forçada, harmônica e transiente, utilizou-se o *full method*. A formulação fluido-estrutura é a U-P. Este caso foi fundamental para a compreensão dos aspectos da interação dinâmica fluido-estrutura e estabeleceu bases sólidas para as análises posteriores.

No Caso 2, cortou-se um cilindro por um plano paralelo ao eixo com condições de contorno engastado-livre (direção axial), engastado-engastado (direção circunferencial) e fechado-aberto (direção axial), fechado-aberto (direção radial). Foram desenvolvidas análises em vibração livre dos sistemas estrutural desacoplado (abordagens analítica e numérica), fluido e fluido-estrutura acoplado (abordagens numéricas). O corte foi executado com intuito de se aproximar progressivamente da geometria de uma barragem em arco.

Os Casos 3 e 4 foram casos intermediários em que se simularam uma barragem em arco cilíndrica e uma barragem em arco com simples curvatura. Apesar da geometria simples assumida para as barragens em arco e os domínios do fluido nestes casos, não serem apropriados para análises de problemas práticos, é útil no desenvolvimento da compreensão básica dos efeitos hidrodinâmicos na resposta dinâmica de barragens em arco. Os resultados apresentados foram de vibração livre, obtidos numericamente via ANSYS 11.0. Em todos os casos barragem-reservatório, a fundação foi considerada rígida, o reservatório, finito, suas margens e seu leito, considerados como contornos fechados e não-absorventes acústicos, o efeito de *sloshing* ignorado e a fronteira longínqua considerada como contorno aberto. Foram discutidas as implicações dessas simplificações nas respostas obtidas. Buscou-se, sempre que possível, re-analisar os casos de modo a se aproximar de condições mais próximas de problemas práticos (situações reais de interesse da engenharia).

Finalmente, pôde-se passar para a análise de uma barragem real, a barragem *Morrow Point* submetida a um sismo real, o terremoto de *Taft Lincoln School Tunnel*, desenvolvida no Caso 5. Apresentaram-se as vibrações livres e determinaram-se os deslocamentos radiais e as tensões máximas, com as simplificações mencionadas no parágrafo anterior. Concluiu-se o caso com a análise desses resultados.

Numericamente, os elementos utilizados foram SOLID95 para as estruturas e FLUID30 para os reservatórios, em todos os casos de análise de sistemas de barragens.

Em se tratando de um problema altamente complexo, com muitos fatores intervenientes, cujo comportamento, no estágio atual das pesquisas, não se permite quantificar o grau de participação de cada um, fica difícil, com as hipóteses adotadas nos modelos simplificados, se obter um bom acordo com os resultados de referência da literatura. Na verdade, as discrepâncias obtidas só aparecem nos resultados acoplados, em que o modelo completo 3D do reservatório aparece, uma vez que os resultados desacoplados foram coerentes e muito próximos. Os problemas do reservatório infinito e interação fluido-fundação surgem como dificuldades a serem investigadas.

As conseqüências da ruína de uma barragem, dependendo de seu porte, podem ser desastrosas, portanto o projeto sísmico de barragens é uma parte importante da engenharia de terremotos. Este trabalho teve como objetivo geral ampliar a bibliografia sobre o tema e desenvolver uma metodologia progressiva (através de estudos comparativos analítico-numéricos ou do exame de exemplos da literatura, de aspectos da interação fluido-estrutura) que fornecesse subsídios ao analista para a prática de projetos seguros, preocupação importante na engenharia de barragens. Conclui-se assim que esse objetivo foi satisfatoriamente cumprido.

Por fim, todos os resultados apresentados neste trabalho podem ser ditos como adequados dentro das limitações e abrangência consideradas.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Pesquisas futuras que podem contribuir no desenvolvimento deste trabalho em direção a situações mais complexas ou ao aprimoramento das soluções apresentadas são citadas como propostas de sugestões para novos trabalhos:

- Considerar outras geometrias de cascas e cavidades acústicas;
- Considerar outras geometrias de cascas e cavidades acústicas cilíndricas, como por exemplo, cilindros circulares oblíquos e cilindros elípticos, parabólicos, hiperbólicos, etc retos e oblíquos;
- Estender a análise a outras condições de contorno e considerar a ligação da casca a uma placa de fundo ou a um anel de borda;
- Proceder à análise da casca cilíndrica preenchida parcialmente por fluido em diferentes níveis;
- Analisar a vibração forçada de cascas submetidas a outras configurações de carregamentos harmônicos e a carregamentos impulsivos;
- Utilizar outros métodos numéricos para a avaliação das respostas dinâmicas de sistemas sob excitação sísmica, como o método das diferenças finitas e o método de Newmark;
- Examinar nas análises barragem-reservatório, a interação barragem-fundação, considerando a inércia, o amortecimento e a flexibilidade da rocha e a absorção acústica do material constituinte do leito do reservatório. Considerar, no domínio da fronteira longínqua do reservatório, uma condição de contorno de radiação do tipo Sommerfeld e na superfície livre, ondas de gravidade. Realizar análise não-linear física;
- Utilizar essa metodologia na análise de outras barragens submetidas a outros sismos, de preferência brasileiros.

REFERÊNCIAS

- AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA BRASIL (2008). Atlas de energia elétrica do Brasil. 3. ed. - Aneel. Brasília.
- Amabili, M., Dalpiaz, G. (1995). Breathing Vibrations of a Horizontal Circular Cylindrical Tank Shell, Partially Filled With Liquid. In: *Journal of Vibration and Acoustics*.
- Baker, E. H., Kovalevsky, L.; Rish, F. L. (1972). Structural Analysis of Shells. California, United States, McGraw-Hill.
- Berry, J. G. e Reissner, E. (1958). The Effect of an Internal Compressible Fluid Column on the Breathing Vibrations of a Thin Pressurized Shell. In: *J. Aeron. Sci.*, vol. 25, N° 5, pp. 288-294.
- Biot, M. A. (1943). Analytical and experimental methods in engineering seismology. In: *Trans. Amer. Soc. Civ. Eng.* 108. 365-408.
- Blevins, R. D. (1980). Natural Frequencies of Shallow Cylindrically Curved Panels. General Atomic Company, San Diego, California, U.S.A.
- Blevins, R. D. (1995). Formulas for Natural Frequency and Mode Shape. 1.st, United States, Krieger Publishing.
- Campos Junior, H. S. (2011). Procedimentos progressivos analíticos e numéricos para análise de barragens em arco. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.DM-007A/11, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 183p.
- Chopra, A. K. (1995). Dynamics of Structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering. University of California at Berkeley. Prentice Hall.
- Chopra, A. K. (1988). Earthquake Response Analysis of Concrete Dams. In: Advanced Dam Engineering for Design, Construction and Rehabilitation. Edited by Robert B. Jansen. Van Nostrand Reinhold, New York.
- Chopra, A. K. (2008). Earthquake Analysis of Arch Dams: Factors to be Considered. In: *The 14th World Conference on Earthquake Engineering*. Outubro 12-17, 2008, Beijing, China.
- Chwang, A.T., Housner, G.W. (1978). Hydrodynamic Pressures on Sloping Dams during Earthquakes. Part 1. Momentum method. In: *J. Fluid Mech.* (1978), vol. 87, parte 2, pp. 335 - 341.
- Clough, R. W., Penzien, J. (2003). Dynamics of Structures. Third Edition. Berkeley, CA, USA. Computers & Structures, Inc.

- Curtis, D., Feng, F., Hart, S. e Orbison, D. (2011). Stress Analysis of Proposed Raising of the Blue Lake Arch Dam. In: 21st Century Dam Design - Advances and Adaptations. 31st Annual USSD Conference San Diego, California, April 11-15, 2011.
- Donnell, L.H. (1933). Stability of Thin Walled Tubes under Torsion. In: *NACA Report*. N° 479.
- Fernholz, C. M., Robinson, J. H. (1990). Fully-Coupled Fluid/Structure Vibration Analysis Using MSC/NASTRAN, NASA. Technical memorandum 102857, 1990.
- Fischer, D.F. e Rammerstrofer, F.G. (s.d.). Stability of Liquid Storage Tanks under Earthquake Excitation.
- Flügge, W. (1934). *Statik und Dynamic der Schalen*, Julius Springer, Berlin.
- Flügge, W. (1973). *Stresses in shells*. New York. Springer.
- Gasser, F. L. F. (1987). *Vibrações de Cascas Cilíndricas Delgadas contendo Fluido*. Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.
- Grishin, M. M., Slissky, S. M., Rasskanov, L. N., Antipov, A. I., Orekhov, V. G., Ivanishchev, V. F., Pospelov, V. N., Pashkov, N. N. e Vorobyev, G. A. (1979). *Hydraulic Structures, Vol.1*. Moscou, Rússia, Mir Publishers.
- Gonçalves, P. B. e Batista, R. C. (1986). Frequency Response of Cylindrical Shells Partially Submerge dor Filled with Liquid. In: *Journal of Sound and Vibration*. DOI 0022-460X/87/040059+12.
- Hall, J. F. e Chopra, A. K. (1983). Dynamic Analysis of Arch Dams Including Hydrodynamic Effects. In: *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 109, N°.1, February, 1983. DOI: 0733-9399/83/0001-0149.
- Housner, G. W., Martel, R. R. e Alford, J. L. (1953). Spectrum analysis of strong-motion earthquakes, In: *Bull. Seismol. Soc. Amer.* 43 (1953) 97-119.
- Kalnins, A., Goffrey, D. A. (1973). *Seismic Analysis of Thin Shell Structures*. Nuclear Engineering and Design. North-Holland Publishing Company.
- Kármán, T. V. (1933). Discussion of water pressures on dams during earthquakes. *Tram.A.S.C.E.* 98, 434-436.
- Kim, Y. W., Lee, Y. S. e Ko, S. H. (2003). Coupled vibration of partially fluid-filled cylindrical shells with ring stiffeners. In: *Journal of Sound and Vibration*, 276 (2004) 869-897. DOI: 10.1016/j.jsv.2003.08.008.
- Korea Institute of Nuclear Safety (2009). KINS/RR-685. *Seismic Analysis of Mechanical Components by ANSYS*.

- Lakis, A. A. e Paidoussis, M. P. (1971). Free Vibration of Cylindrical Shells Partially Filled with Liquid. In: *Journal of Sound and Vibration* (1971) 19 (1) 1-15.
- Leissa, A. W. (1973). The free vibration of rectangular plates. In: *Journal of Sound and Vibration* 31, 257-293.
- Love, A.E.H. (1888). The Small Free Vibrations of a Thin Elastic Shell. (1888). In: *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)*, Ser. A. 179, 491-549.
- Lustosa, I. A. A. (2011). Um estudo comparativo analítico-numérico de esforços e deslocamentos em cascas cilíndricas abertas ou com conexões de borda. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-003A/11, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 168p.
- Melo, C. A. E. (2009). Estudo do Acoplamento Comporta-Reservatório Sob Ações Sísmicas. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, E.DM 012A/09, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 107p.
- Ministério da Integração Nacional. Manual de Segurança e Inspeção de Barragens - Ministério da Integração Nacional - Secretaria de Infra - Estrutura Hídrica. Brasília, DF, julho 2002.
- Morais, M.V.G. de, Baj, F., Gibert, R. J. e Magnaud, J. P. (2007) Numerical inertia and damping coefficients determination of a tube-bundle in incompressible viscous laminar fluid. In: *Latin American Journal of Solids and Structures*. 4 (2007) 179-202.
- Mushtari, K.M. (1938). On the Stability of Cylindrical Shells Subject to Torsion. *Trudy Kaz. Avais, in-ta 2* (in Russian).
- Naeem, M. N., Kanwal, S., Shah, A. G., Arshad, S. H. e Mahmood, T. (2012). Vibration Characteristics of Ring-Stiffened Functionally Graded Circular Cylindrical Shells. In: *ISRN Mechanical Engineering*. Volume 2012 (2012), Artigo ID 232498, 13 p. DOI: 10.5402/2012/232498.
- Oliveira, F.F. (2002). Análise de Tensões e Estabilidade Global de Barragens de Gravidade de Concreto. Dissertação de Mestrado, Publicação E.DM-015A/02, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, DF, 169p.
- Paidoussis, M. P. (2004). Fluid-Structure Interactions - Slender Structures and Axial Flow - Volume 2. McGill University, Montreal, Québec, Canada. Elsevier Academic Press.
- Pedroso, L.J. (2003). "Interação Fluido-Estrutura." In: *Notas de Curso e Apostila Didática*, UnB-FT/ENC, Vs.3 - Brasília, DF.

- Porter, C. S. e Chopra, A. K. (1981). Hydrodynamic Effects in Dynamic Response of Simple Arch Dams. In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10. 417431.
- Reissner, E. (1941). A New Derivation of the Equations of the Deformation of Elastic Shells. In: *Am. J. Math.* 63, 177-184.
- Ribeiro, P. M. V. (2006). Uma Metodologia Analítica para a Avaliação do Campo de Tensões em Barragens Gravidade de Concreto Durante Terremotos. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM - 003A/06, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 140p.
- Ribeiro, P. M. V. (2010). Soluções Analíticas para Cavidades Acústicas Bidimensionais com Aplicação ao Estudo de Problemas de Interação Dinâmica Barragem-Reservatório. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD-004A/10, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 306p.
- Salajegheh, J., Salajegheh, E., Seyedpoor, S. M. e Gholizadeh, S. (2008). Arch Dam Optimization Considering Fluid-Structure Interaction with Frequency Constraints using Artificial Intelligence Methods. In: *The 14th World Conference on Earthquake Engineering*. Outubro 12-17, 2008, Beijing, China.
- Sanders, J.L. (1959). An Improved First Approximation Theory of Thin Shells. NASA Report NASA-TR-R24.
- Sevim, B., Bayraktar, A., Altunışık, A.C., Adanur, S., Akköse, M. (2010). Dynamic Characteristics of a Prototype Arch Dam. In: *Experimental Mechanics*. DOI 10.1007/s11340-010-9392-9.
- Sewall, J. L. (1967). Vibrations Analysis of Cylindrically Curved Panels with Simply Supported or Clamped Edges and Comparasion with some Experiments. National Aeronautics ans Space Administration, Wahington, D.C., U.S.A.
- Seyedpoor, S.M., Salajegheh, J., Salajegheh, E. (2009). Shape optimal design of arch dams including dam-water-foundation rock interaction using a grading strategy and approximation concepts. In: *Applied Mathematical Modelling*. DOI: 10.1016/j.apm.2009.08.005.
- Sharma, C. B. e Johns, D. J. (1971). Vibration Characteristics of a Clamped-Free and Clamped-Ring-Stiffened Circular Cylindrical Shell. In: *J. Sound Vib.* 14.

- Sharma, C. B. (1984). Free Vibrations of Clamped-Free Circular Cylinders. Thin-Walled Structures. Elsevier Applied Science Publishers Ltd, England, 1984, Grã-Bretanha. DOI: 0263-8231/84/\$03-00.
- Silva, S. F. (2007). Interação dinâmica barragem-reservatório: modelos analíticos e numéricos. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD-05A/07, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 220p.
- Silva, F. M. A., Gonçalves, P. B., Prado, Z. J. G. N. del (2010). Nonlinear Vibrations of Axially Loaded Cylindrical Shells Partially Filled with Fluid. In: Proceedings of the 9th Brazilian Conference on Dynamics Control and their Applications. Serra Negra, SP - ISSN 2178-3667
- Soedel, W. (2005). Vibrations of Shells and Plates. Third Edition. New York, United States, Marcel Dekker, Inc.
- Souza, S. M. (2007). Contribuição para uma Metodologia de Análise Acoplada Fluido-Estrutura em Cavidades Acústicas com Paredes Flexíveis. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-004A/07, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 177p.
- Souza Junior, L. C. (2006). Uma Aplicação dos Métodos dos Elementos Finitos e Diferenças Finitas à Interação Fluido-Estrutura. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-008A/06, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 197p.
- Souza, Z. de, Fuchs, R. D., Santos, A. H. M. (1983). Centrais Hidro e Termelétricas. São Paulo: E. Blücher: Centrais Elétricas Brasileiras S/A - ELETROBRÁS: Escola Federal de Engenharia de Itajubá.
- Tan, H. e Chopra, A.K. (1996). Dam-Foundation Rock Interaction Effects in Earthquake Response on Arch Dams. In: *Journal of Structural Engineering*, Vol. 122, N° 5. 0733-9445/06/0005-0528.
- Tedesco, J. W., Kostem, C. N. e Kalnins, A. (1985). Rapid Calculation of Mode Participation Factors for Circular Cylindrical Shells. In: *Computers and Structures*, Vol 20, N° 1-3, pp. 509-515.
- Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S. (1959). Theory of plates and shells. 2.nd. United States, McGraw-Hill.

- Tsai, H.S, Lee, G.C. (1987). Arch Dam-Fluid Interactions: by FEM-BEM and Substructure Concept. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, VOL. 24. 2367-2388 (1987).
- USACE (1994). Engineering and Design – ARCH DAM DESIGN. Department of the Army. U. S. Army Corps of Engineers. EM 1110-2-2201. Washington.
- Vu, V. H., Thomas, M., Lakis, A.A. e Marcouiller, L. (s.d.). Effects of Added Mass on Submerged Vibrated Plates.
- Westergaard, M. (1933). Water pressures on dams during earthquakes. *Trans. A.S.C.E.*98, 418-433.
- Xu, M. B. (2003). Three methods for analyzing forced vibration of a fluid-filled cylindrical shell. In: *Applied Acoustics*. DOI:10.1016/S0003-682X(03)00004-5.
- Zangar, C. N. (1953). Hydrodynamic pressures on dams due to horizontal earthquakes. In: *Proc. SOCE. xp. Stress Anal.* 10, 93-102.
- Zangar, C. N. e Haefelri, J. (1952). Electric analog indicates effect of horizontal earthquake shock on dams. In: *Civil Engng* 22, 278-279.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R. L. (2000). *The Finite Element Method. Volume 1: The Basis*. Fifth edition. Butterworth-Heinemann.

Sites:

- http://nisee.berkeley.edu/data/strong_motion/caltech/volume1.d/el_centro_1940_vert
Acesso em: 07/abr/2013.
- <http://nisee.berkeley.edu/data/strong_motion/caltech/volume1.d/el_centro_1940_s00e>
Acesso em: 07/abr/2013.
- <http://nisee.berkeley.edu/data/strong_motion/caltech/volume1.d/el_centro_1940_s90w>
Acesso em: 07/abr/2013.
- <http://nisee.berkeley.edu/data/strong_motion/caltech/volume1.d/taft_1952_vert> Acesso em: 07/abr/2013.
- <http://nisee.berkeley.edu/data/strong_motion/caltech/volume1.d/taft_1952_n21e> Acesso em: 07/abr/2013.
- <http://nisee.berkeley.edu/data/strong_motion/caltech/volume1.d/taft_1952_s69e> Acesso em: 07/abr/2013.
- <<http://www.escolasanti.com.br/santinews/2011/06/03/a-grande-beleza/>> Acesso em: 07/abr/2013.

<<http://www.furnas.com.br/hotsites/sistemafurnas/magnify.asp?p=imagens/UsinaFunil1.jpg>> Acesso em: 07/abr/2013.

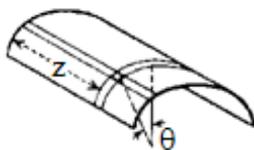
<http://www.usbr.gov/projects/Facility.jsp?fac_Name=Morrow+Point+Dam&groupName=General> Acesso em: 07/abr/2013.

APÊNDICES

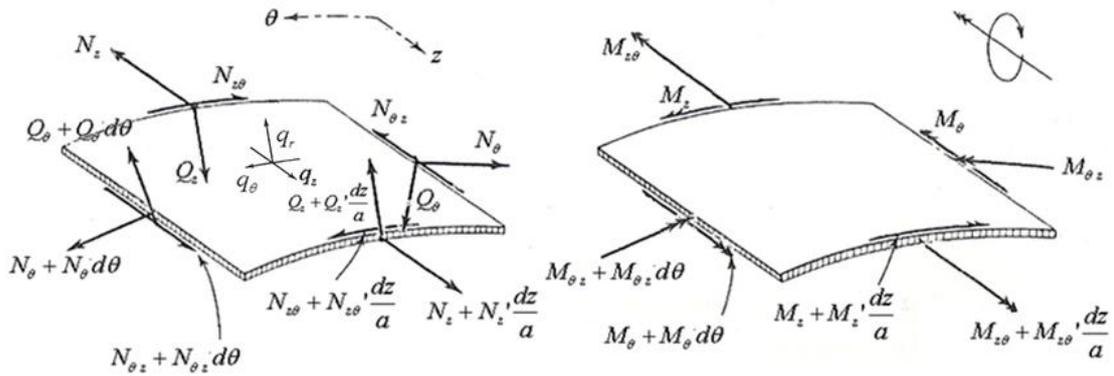
APÊNDICE A - FORMULAÇÕES DAS CASCAS CILÍNDRICAS CIRCULARES RETAS DELGADAS

A.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO

Segundo Timoshenko e Woinowsky - Krieger (1959), ao discutir uma casca cilíndrica, Figura 1 (a), assume-se que a geratriz da casca é paralela ao eixo z . Um elemento é cortado da casca por duas geratrizes adjacentes e duas seções transversais perpendiculares ao eixo z , e sua posição é definida pela coordenada z e o ângulo θ . As forças e momentos, considerados positivos, que atuam sobre os lados do elemento são mostradas na Figura 1 (b), em que, a é o raio (médio) de curvatura, N_z e N_θ são forças de membrana normais no plano por unidade de comprimento, $N_{z\theta}$ e $N_{\theta z}$ são forças de membrana cortantes no plano por unidade de comprimento, M_z e M_θ são momentos fletores por unidade de comprimento, $M_{z\theta}$ e $M_{\theta z}$ são momentos torçores por unidade de comprimento, Q_z e Q_θ são forças cortantes transversais por unidade de comprimento, $(\cdot)' = a\partial(\cdot)/\partial z$ e $(\cdot)^\cdot = \partial(\cdot)/\partial\theta$. Todas as cargas atuantes são supostas agindo na superfície média da casca (a meio caminho entre a parede exterior e a interior, independentemente da espessura), como mostrado na Figura 1 (b), em que, q_z , q_θ e q_r são componentes do carregamento distribuído por unidade de área, nas direções z (axial), θ (circunferencial) e r (radial), respectivamente.



(a)



(b)

Figura A.1 - Casca cilíndrica: (a) denominações principais; (b) elemento diferencial de casca cilíndrica e carregamento distribuído na superfície de referência (Timoshenko e Woinowsky - Krieger, 1959, Flügge, 1973)

Estas forças e momentos têm que satisfazer seis condições de equilíbrio, três delas relativas às componentes de força e as outras três, às de momento.

No desenvolvimento das equações de equilíbrio os termos de ordem superior foram desprezados e, sendo os ângulos, infinitesimais, seu seno foi aproximado pelo ângulo.

A condição de equilíbrio para as forças na direção z produz a Equação A.3:

$$\sum F_z = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$-N_z ad\theta + N_z ad\theta + \frac{\partial}{\partial z}(N_z ad\theta) dz - N_{\theta z} dz + N_{\theta z} dz + \frac{\partial}{\partial \theta}(N_{\theta z} dz) d\theta + q_z dz ad\theta = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} + q_z = 0 \quad (\text{A.3})$$

A Equação A.6 trata das forças na direção θ . Aqui um termo deve ser adicionado representando a contribuição da força cortante transversal Q_{θ} . As duas forças $Q_{\theta} dz$

formam um ângulo $d\theta$ uma com a outra e têm a resultante tangencial $Q_\theta dz d\theta$ que aponta na direção crescente de θ (Figura A.2). A condição de equilíbrio é, portanto

$$\sum F_\theta = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} -N_\theta dz + N_\theta dz + \frac{\partial}{\partial \theta}(N_\theta dz)d\theta - N_{z\theta} ad\theta + N_{z\theta} ad\theta + \frac{\partial}{\partial z}(N_{z\theta} ad\theta)dz \\ + Q_\theta dz d\theta + q_\theta dz ad\theta = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial N_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{Q_\theta}{a} + q_\theta = 0 \quad (\text{A.6})$$

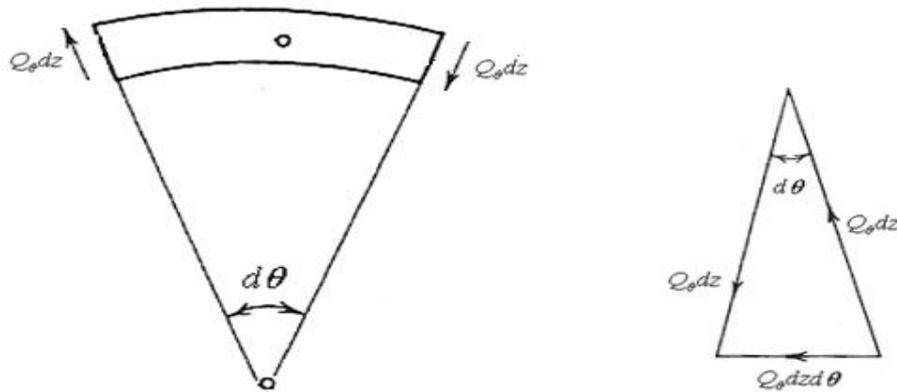


Figura A.2 - Seção de casca cilíndrica circular com forças cortantes transversais (Baker *et al.*, 1972, modificado)

A terceira equação refere-se às componentes radiais das forças. Ela contém contribuições de ambas as forças cortantes transversais, viz. seus incrementos $(\partial Q_\theta / \partial \theta) d\theta dz$ e $(\partial Q_z / \partial z) dz ad\theta$. As duas forças $N_\theta dz$ formam um ângulo $d\theta$ uma com a outra e têm a resultante radial $N_\theta dz$ que aponta na direção do eixo da casca (Figura A.3). Tem-se, portanto, a Equação

$$\sum F_r = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$-Q_z ad\theta + Q_z ad\theta + \frac{\partial}{\partial z}(Q_z ad\theta)dz - Q_\theta dz + Q_\theta dz + \frac{\partial}{\partial \theta}(Q_\theta dz)d\theta - N_\theta dzd\theta + q_r dzad\theta = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{N_\theta}{a} + q_r = 0 \quad (\text{A.9})$$

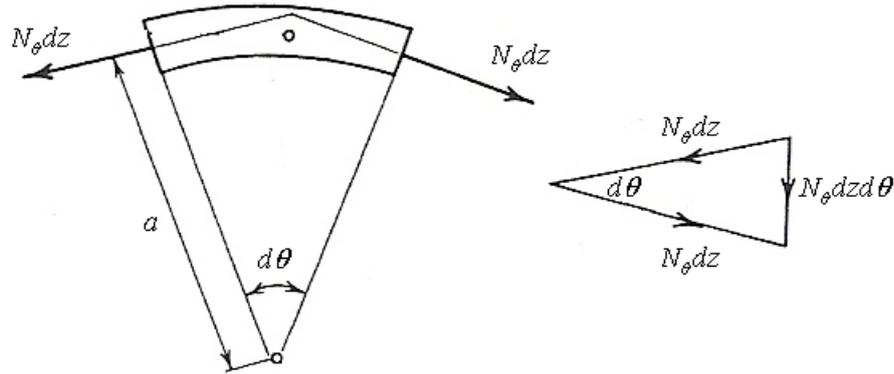


Figura A.3 - Seção de casca cilíndrica circular com forças normais (Baker *et al.*, 1972, modificado)

As equações para o equilíbrio dos momentos são facilmente explicadas. Para um eixo de referência, coincidindo com o vetor q_z , têm-se as parcelas do momento fletor M_θ , do momento torçor $M_{z\theta}$ e do binário formado pelas duas forças $Q_\theta dz$:

$$\sum M_z = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$+ M_\theta dz - M_\theta dz - \frac{\partial}{\partial \theta}(M_\theta dz)d\theta + M_{z\theta} ad\theta - M_{z\theta} ad\theta - \frac{\partial}{\partial z}(M_{z\theta} ad\theta)dz + Q_\theta dzad\theta = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$-\frac{1}{a} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} + Q_\theta = 0 \quad (\text{A.12})$$

Bastante semelhante é a condição para os momentos tendo o vetor q_θ como eixo:

$$\sum M_{\theta} = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$-M_z ad\theta + M_z ad\theta + \frac{\partial}{\partial z}(M_z ad\theta)dz - M_{\theta z} dz + M_{\theta z} dz + \frac{\partial}{\partial \theta}(M_{\theta z} dz)d\theta - Q_z ad\theta dz = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial \theta} - Q_z = 0 \quad (\text{A.15})$$

A sexta condição de equilíbrio contém os momentos em relação ao raio do cilindro. Têm-se os dois binários formados pelas forças $N_{z\theta}ad\theta$ e $N_{\theta z}dz$, respectivamente, e a resultante dos dois momentos fletores $M_{\theta z}dz$ incluindo o ângulo $d\theta$:

$$\sum M_r = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$+ N_{z\theta}ad\theta dz - N_{\theta z}dzad\theta - M_{\theta z}dzd\theta = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$aN_{z\theta} - aN_{\theta z} - M_{\theta z} = 0 \quad (\text{A.18})$$

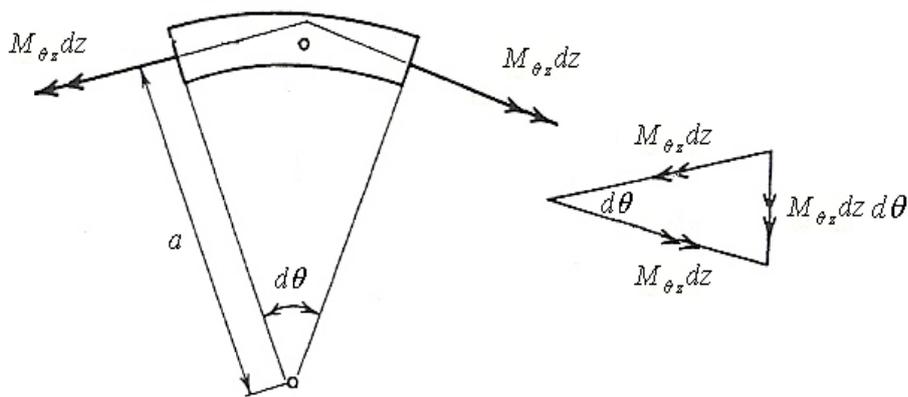


Figura A.4 - Seção de casca cilíndrica circular com momentos torçores (Baker *et al.*, 1972, modificado)

Pode-se facilmente eliminar as forças cortantes transversais Q_z e Q_θ das Equações A.6 e A.9 por meio das Equações A.12 e A.15, sendo

$$Q_z = \frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial \theta} \quad (\text{A.19})$$

$$Q_\theta = \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \quad (\text{A.20})$$

Desta forma obtém-se o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} + q_z = 0 \\ \frac{\partial N_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + q_\theta = 0 \\ \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial z \partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 M_{z\theta}}{\partial \theta \partial z} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{N_\theta}{a} + q_r = 0 \\ aN_{z\theta} - aN_{\theta z} - M_{\theta z} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Uma vez que este conjunto de quatro equações ainda contém 8 resultantes de tensão desconhecidas, o problema não é estaticamente determinado, e é necessário estudar a deformação da casca.

A Figura A.5 (a) é uma vista lateral da borda $z = \text{constante}$. Mostra dois elementos adjacentes de comprimento $ds = a d\theta$ cada. No esquerdo, um momento torçor $M_{z\theta}$ atua, no direito, um momento $M_{z\theta} + (\partial M_{z\theta} / \partial \theta) d\theta$. Na Figura A.5 (b) cada momento foi substituído por um grupo equivalente de três forças. As duas forças F_n no elemento esquerdo são quase paralelas uma a outra e devem ter um momento igual a $M_{z\theta} ds$, conseqüentemente

$$F_n ds = M_{z\theta} ds \quad (\text{A.22})$$

Porém, uma vez que elas são levemente divergentes, elas têm uma resultante horizontal $F_n d\theta$, apontando para a esquerda, que é compensada pela terceira força $F_t = F_n d\theta$, de

modo que as três forças F_n , F_n , F_t são estaticamente equivalentes às tensões de cisalhamento distribuídas que produzem o momento torçor $M_{z\theta}$. Portanto, seu efeito na casca não pode ser muito diferente daquele de $M_{z\theta}$, aparecendo diferenças apreciáveis apenas em zonas onde a largura é da mesma ordem da espessura da casca. Se forem desconsideradas, já não se pode distinguir entre F_t e uma força cortante genuína e pode-se combinar ambas em uma força resultante por unidade de comprimento, a cortante efetiva

$$T_z = N_{z\theta} + \frac{F_t}{ds} = N_{z\theta} + \frac{M_{z\theta}}{a} \quad (\text{A.23})$$

Um raciocínio semelhante pode ser aplicado às forças F_n . Na extremidade direita do elemento esquerdo na Figura A.5 (a), tem-se a força F_n apontando em direção ao interior, e adjacente a ela, na extremidade esquerda do elemento direito a força $F_n + (\partial F_n / \partial \theta)d\theta$ apontando em direção ao exterior. Sua diferença, $(\partial F_n / \partial \theta)d\theta = (\partial M_{z\theta} / \partial \theta)d\theta$, pode ser combinada com a força cortante transversal $Q_z ds$. Isto conduz à força transversal efetiva

$$V_z = Q_z + \frac{1}{a} \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial \theta} \quad (\text{A.24})$$

Estas forças são conhecidas como forças de Kirchhoff.

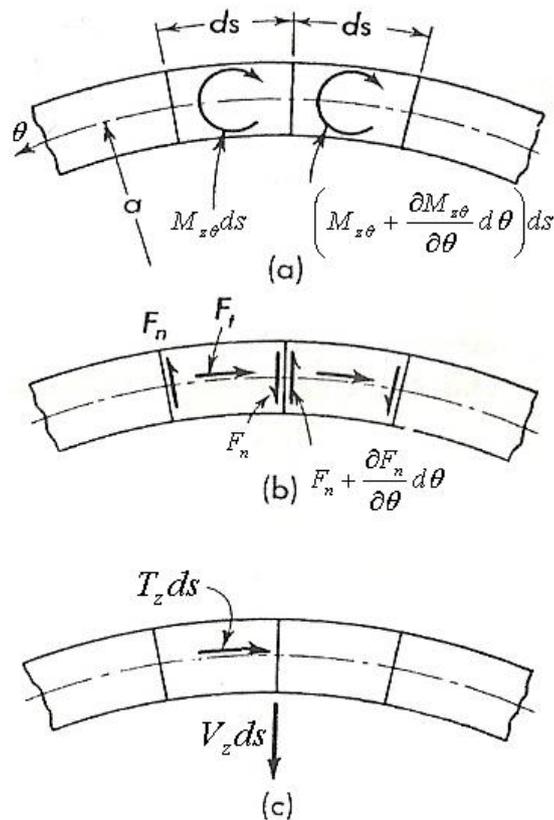


Figura A.5 - Dois elementos adjacentes da borda de uma casca (Flügge, 1973, adaptado)

A.2. DEFORMAÇÃO

A.2.1. Relações Exatas

A deformação do cilindro pode ser descrita por três componentes do deslocamento de um ponto arbitrário A da casca (Figura A.6), tendo as coordenadas z , θ e a distância r da superfície média (positiva de modo que $a+r$ é a distância do ponto a partir do eixo do cilindro). Para estas componentes usa-se a seguinte notação:

u_A = deslocamento ao longo da geratriz, positivo na direção crescente de z ,

v_A = deslocamento ao longo da circunferência de raio $a+r$, positivo na direção crescente de θ ,

w_A = deslocamento radial, positivo em direção ao exterior.

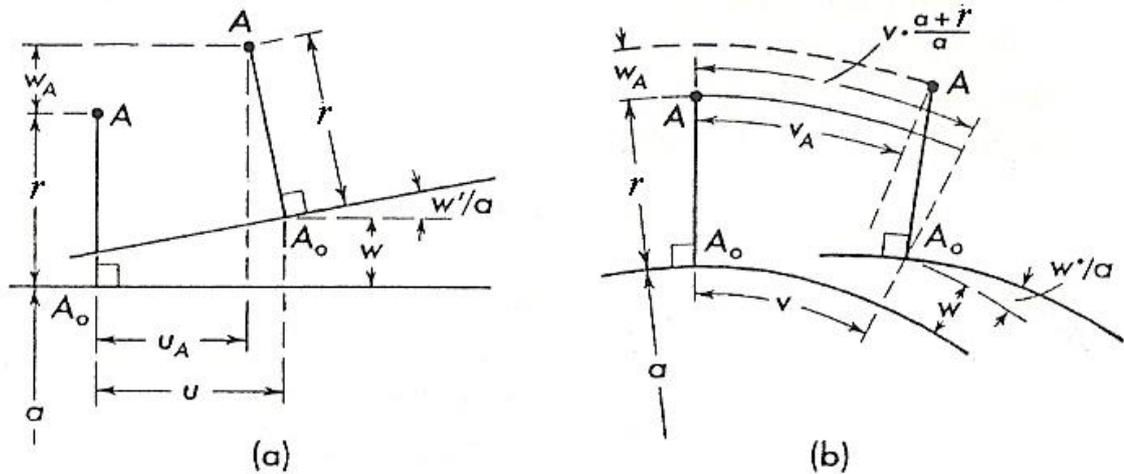


Figura A.6 - Deslocamentos dos pontos A_0 e A (Flügge, 1973, modificado)

A solução de um problema de tensão tridimensional requer a determinação de u_A , v_A e w_A como funções das três coordenadas z , θ , r . Torna-se um problema de casca quando se estabelece relações cinemáticas simples entre os deslocamentos u_A , v_A e w_A de um ponto arbitrário e os valores correspondentes u , v e w para aquele ponto da superfície média que tem as mesmas coordenadas z , θ . Tais relações devem ser derivadas a partir do fato de que a casca é delgada.

Assumindo:

- 1) que todos os pontos situados em uma normal à superfície média antes da deformação, continuam situados nessa normal à superfície média depois da deformação;
- 2) que para todas as relações cinemáticas, a distância r de um ponto a partir da superfície média pode ser considerada não-afetada pela deformação da casca, mas que para todas as considerações do sistema de tensão, a tensão σ_r na direção r pode ser considerada desprezível comparada com as tensões σ_z e σ_θ .

Aplicada a uma casca real, a primeira hipótese significa que as deformações devidas às forças cortantes transversais Q_z e Q_θ são desprezadas. A segunda hipótese significa que seja o que for que aconteça na direção r , tensão ou deformação, é sem importância. Isto é obviamente adequado se a casca é delgada.

Às duas hipóteses básicas, deve-se acrescentar uma terceira, que é necessária para manter as equações lineares.

- 3) que todos os deslocamentos são pequenos, i.e. que eles são desprezíveis comparados com o raio de curvatura da superfície média e que suas derivadas primeiras, as declividades, são desprezíveis comparadas com a unidade.

Destas três hipóteses, são estabelecidas as relações cinemáticas da casca cilíndrica. A Figura A.6 mostra uma seção ao longo de uma geratriz. A linha horizontal grossa é a superfície média antes da deformação. Posteriormente, ela tem a declividade $\partial w / \partial z$. No ponto A_0 a normal A_0A é erigida tendo um comprimento $r < h/2$. Da hipótese 1, segue-se que esta linha rotaciona, durante a deformação, do mesmo ângulo $\partial w / \partial z$. O deslocamento u_A do ponto A é, portanto, igual ao deslocamento u do ponto A_0 menos a distância de A recuado por esta rotação de A_0A

$$u_A = u - r \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A.25})$$

Para encontrar uma fórmula similar para v_A , usa-se a Figura A.6 (b), que mostra uma seção transversal através da casca. O ponto A_0 é deslocado de v ao longo da superfície média. Uma vez que a normal A_0A à superfície média, permanece normal à esta superfície, o ponto A é deslocado de $[(a+r)/a]v$. A rotação da normal, que é agora $(1/a)(\partial w / \partial \theta)$, produz um deslocamento adicional $-(r/a)(\partial w / \partial \theta)$. Juntos, estes produzem o deslocamento

$$v_A = \frac{a+r}{a}v - \frac{r}{a} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (\text{A.26})$$

Por causa da primeira hipótese, o comprimento A_0A não muda. A diferença dos deslocamentos normais w e w_A deve-se apenas às rotações $\partial w / \partial z$ e $(1/a)(\partial w / \partial \theta)$ e proporcionais a $1 - \cos$ destes ângulos. Por causa da terceira hipótese, esta diferença é desprezível, e tem-se

$$w_A = w \quad (\text{A.27})$$

O próximo passo é encontrar as deformações específicas ε_z , ε_θ e $\gamma_{z\theta}$ no ponto A . Elas descrevem a deformação de um elemento sobre a superfície cilíndrica passando através de A .

A deformação ε_z representa o alongamento do elemento de linha reta dz causado pela diferença entre os deslocamentos u e $u + (\partial u / \partial z)dz$ de ambas as suas extremidades:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{A.28})$$

Para encontrar a deformação circunferencial ε_θ , procede-se da seguinte maneira. A Figura A.7 mostra um elemento de linha $AC = ds_\theta$. Ele sofre os deslocamentos tangenciais v e $v + (\partial v / \partial \theta)d\theta$, respectivamente. Sua diferença $(\partial v / \partial \theta)d\theta$ é o alongamento correspondente do elemento de linha. Se há um deslocamento normal adicional w dos pontos A e C , que têm direções ligeiramente diferentes nos dois pontos, produz-se um alongamento adicional de AC . Uma vez que a distância a do centro de curvatura aumenta para $a + w$ o comprimento do arco aumenta proporcionalmente para

$$\left(ds_\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta \right) \frac{a + w}{a} \quad (\text{A.29})$$

Um deslocamento radial adicional $(\partial w / \partial \theta)d\theta$ do ponto C' produz um pequeno alongamento de segunda ordem e, portanto, sem importância. Pela mesma razão eliminam-se todos os produtos de dois deslocamentos quando se calcula o alongamento

$$\Delta ds_\theta = \left(ds_\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta \right) \left(1 + \frac{w}{a} \right) - ds_\theta = \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta + w \frac{ds_\theta}{a} \quad (\text{A.30})$$

Dividindo por $ds_\theta = a d\theta$, encontra-se a deformação circunferencial

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \quad (\text{A.31})$$

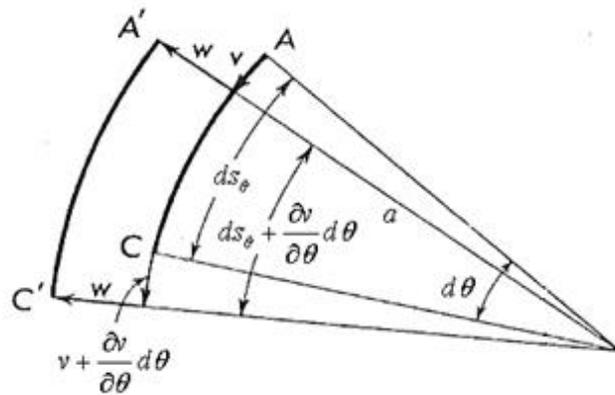


Figura A.7 - Elemento de linha antes e depois da deformação (Flügge, 1973, adaptado)

A deformação de cisalhamento é a soma das rotações dos dois elementos de linha dz e $ad\theta$ (Figura A.8):

$$\varepsilon_{z,\theta} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (\text{A.32})$$

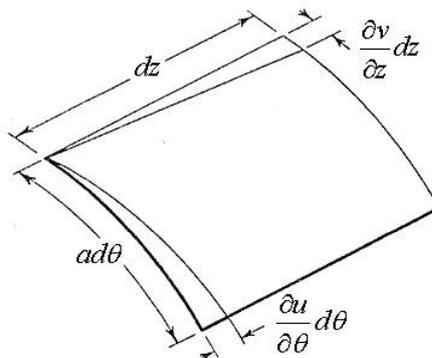


Figura A.8 - Deformação de cisalhamento de um elemento de casca (Flügge, 1973)

Pode-se, portanto, aplicar as fórmulas das Equações A.28, A.31 e A.32, substituindo o raio a por $a+r$, e os deslocamentos u , v e w por u_A , v_A e w_A , respectivamente:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_A}{\partial z} \quad (\text{A.33})$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{a+r} \left(\frac{\partial v_A}{\partial \theta} + w_A \right) \quad (\text{A.34})$$

$$\varepsilon_{z\theta} = \frac{\partial v_A}{\partial z} + \frac{1}{a+r} \frac{\partial u_A}{\partial \theta} \quad (\text{A.35})$$

Introduzindo as Equações A.25, A.26 e A.27 nas Equações A.33, A.34 e A.35, obtêm-se as deformações em A como funções dos deslocamentos de A_0 :

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} - r \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (\text{A.36})$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{r}{a} \frac{1}{a+r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{w}{a+r} \quad (\text{A.37})$$

$$\varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{a+r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{a+r}{a} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \theta} \left(\frac{r}{a} + \frac{r}{a+r} \right) \quad (\text{A.38})$$

O terceiro passo é encontrar as tensões σ_z , σ_{θ} e $\sigma_{z\theta}$ introduzindo essas equações na Lei de Hooke. Uma vez que a segunda parte da segunda hipótese requer que σ_r seja desprezível, têm-se as seguintes fórmulas:

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_{\theta}) \quad (\text{A.39})$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta} + \nu \varepsilon_z) \quad (\text{A.40})$$

$$\sigma_{z\theta} = G \varepsilon_{z\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{z\theta} \quad (\text{A.41})$$

onde E é o módulo de elasticidade, ν é a relação de Poisson e G é o módulo de elasticidade transversal.

Quando se introduz as deformações das Equações A.36 a A.38, têm-se as tensões em A como funções dos deslocamentos do ponto A_0 sobre a superfície média e suas derivadas.

O último passo é introduzir as Equações A.39 a A.41 nas definições das resultantes de tensão N e M .

$$N_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_z \left(1 + \frac{r}{a}\right) dr \quad (\text{A.42})$$

$$N_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_\theta dr \quad (\text{A.43})$$

$$N_{z\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{z\theta} \left(1 + \frac{r}{a}\right) dr \quad (\text{A.44})$$

$$N_{\theta z} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{\theta z} dr \quad (\text{A.45})$$

$$M_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_z \left(1 + \frac{r}{a}\right) r dr \quad (\text{A.46})$$

$$M_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_\theta r dr \quad (\text{A.47})$$

$$M_{z\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{z\theta} \left(1 + \frac{r}{a}\right) r dr \quad (\text{A.48})$$

$$M_{\theta z} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{\theta z} r dr \quad (\text{A.49})$$

Quando as tensões das Equações A.39 a A.41 expressas pelas deformações das Equações A.36 a A.38 são introduzidas nas Equações A.42 a A.49, as integrações em relação à r podem ser realizadas.

A.2.2. Relações Aproximadas

As fórmulas A.42 a A.49 são um alicerce seguro para a teoria flexional de cascas cilíndricas, uma vez que elas são derivadas de um conjunto claro de hipóteses sem desconsiderar nada pelo caminho. Portanto, deve-se utilizá-las em todos os casos em que podem ocorrer dúvidas quanto à possibilidade ou não de desprezar algum termo.

Entretanto, elas contêm um número de termos que em muitos casos são sem importância para um resultado numérico. É, portanto, útil considerar também uma versão simplificada destas equações. Há duas fontes de onde termos pequenos surgem. Uma é a forma trapezoidal das faces $z = \text{constante}$ do elemento de casca expressa pelo fator $1+r/a$ nas Equações A.42 a A.49. Se a casca é delgada suficiente pode-se desprezar r/a , comparado à unidade, e simplesmente eliminar o fator. Por outro lado, têm-se em muitos locais nas relações cinéticas A.33 a A.35 o denominador $a+r$ que representa o fato de as fibras circunferenciais em diferentes níveis r terem diferentes comprimentos. Aqui também deve-se, conseqüentemente, desprezar r e então simplificar as relações $1/(a+r) \approx 1/a$. Quando isso é feito, as seguintes, muito mais simples, leis elásticas são obtidas:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_A}{\partial z} \quad (\text{A.50})$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v_A}{\partial \theta} + w_A \right) \quad (\text{A.51})$$

$$\varepsilon_{z\theta} = \frac{\partial v_A}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial u_A}{\partial \theta} \quad (\text{A.52})$$

Resultando

$$\varepsilon_z = \frac{\partial}{\partial z} \left(u - r \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (\text{A.53})$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{a} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{a+r}{a} v - \frac{r}{a} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + w \right] \quad (\text{A.54})$$

$$\varepsilon_{z\theta} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{a+r}{a} v - \frac{r}{a} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(u - r \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (\text{A.55})$$

As deformações específicas podem ser expressas em uma forma onde as deformações de membrana (independentes de r) e as deformações flexionais (dependentes de r) são separadas:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z^0 + rk_z \quad (\text{A.56})$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^0 + rk_\theta \quad (\text{A.57})$$

$$\varepsilon_{z\theta} = \varepsilon_{z\theta}^0 + rk_{z\theta} \quad (\text{A.58})$$

onde

$$\varepsilon_z^0 = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{A.59})$$

$$\varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \quad (\text{A.60})$$

$$\varepsilon_{z\theta}^0 = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (\text{A.61})$$

$$k_z = \frac{\partial \beta_z}{\partial z} \quad (\text{A.62})$$

$$k_\theta = \frac{1}{a} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} \quad (\text{A.63})$$

$$k_{z\theta} = \frac{\partial \beta_\theta}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial \beta_z}{\partial \theta} \quad (\text{A.64})$$

em que

$$\beta_z = -\frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A.65})$$

$$\beta_\theta = \frac{v}{a} - \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (\text{A.66})$$

As resultantes de tensão N e M tornam-se:

$$N_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_z dr \quad (\text{A.67})$$

$$N_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_\theta dr \quad (\text{A.68})$$

$$N_{z\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{z\theta} dr \quad (\text{A.69})$$

$$N_{\theta z} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{\theta z} dr \quad (\text{A.70})$$

$$M_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_z r dr \quad (\text{A.71})$$

$$M_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_\theta r dr \quad (\text{A.72})$$

$$M_{z\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{z\theta} r dr \quad (\text{A.73})$$

$$M_{\theta z} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{\theta z} r dr \quad (\text{A.74})$$

Uma vez que $\sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta z}$, resultam as seguintes Equações

$$N_z = K(\varepsilon^0_z + \nu \varepsilon^0_\theta) \quad (\text{A.75})$$

$$N_\theta = K(\varepsilon^0_\theta + \nu \varepsilon^0_z) \quad (\text{A.76})$$

$$N_{z\theta} = N_{\theta z} = \frac{K(1-\nu)}{2} \varepsilon^0_{z\theta} \quad (\text{A.77})$$

$$M_z = D(k_z + \nu k_\theta) \quad (\text{A.78})$$

$$M_\theta = D(k_\theta + \nu k_z) \quad (\text{A.79})$$

$$M_{z\theta} = M_{\theta z} = \frac{D(1-\nu)}{2} k_{z\theta} \quad (\text{A.80})$$

em que K é a rigidez de membrana e D é a rigidez flexional, onde

$$K = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad (\text{A.81})$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{A.82})$$

Em termos dos deslocamentos, têm-se:

$$N_z = \frac{K}{a} \left(a \frac{\partial u}{\partial z} + \nu \frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu w \right) \quad (\text{A.83})$$

$$N_\theta = \frac{K}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w + \nu \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (\text{A.84})$$

$$N_{z\theta} = N_{\theta z} = \frac{K(1-\nu)}{2a} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + a \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (\text{A.85})$$

$$M_z = -\frac{D}{a^2} \left[a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right] \quad (\text{A.86})$$

$$M_\theta = -\frac{D}{a^2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \nu a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \quad (\text{A.87})$$

$$M_{z\theta} = M_{\theta z} = -\frac{D(1-\nu)}{a} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (\text{A.88})$$

Há um ponto de fundamental interesse que deve ser discutido. Nas fórmulas simplificadas as diferenças entre as forças cortantes longitudinais $N_{z\theta}$ e $N_{\theta z}$ desaparecem. A sexta condição de equilíbrio (Equação A.18), portanto, não é mais satisfeita se $M_{z\theta} \neq 0$, que é geralmente o caso. Esta violação a um dos princípios fundamentais da mecânica que é inseparável das equações simplificadas é um sério inconveniente para toda teoria nelas fundamentada. Na maioria dos casos, pequenas, ou de outro modo, insignificantes mudanças de $N_{z\theta}$ e $N_{\theta z}$ serão suficientes para ajustar o equilíbrio; entretanto durante a manipulação matemática das equações pode acontecer que termos grandes sejam cancelados e os pequenos se tornem decisivos.

A.3 FORMULAÇÕES DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

De acordo com Clough e Penzien (2003), o objetivo principal de uma análise dinâmica estrutural determinista é a avaliação dos históricos no tempo do deslocamento de uma dada estrutura submetida a um dado carregamento variável no tempo. As expressões matemáticas que definem os deslocamentos dinâmicos são chamadas de equações de movimento da estrutura, e a solução destas equações de movimento fornece os históricos no tempo do deslocamento necessários.

As equações de movimento de qualquer sistema dinâmico representam expressões da segunda lei do movimento de Newton, que indica que a taxa de variação do momento de qualquer partícula mássica m é igual à força que atua sobre ela. Essa relação pode ser expressa matematicamente pela equação diferencial

$$\mathbf{p}(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \quad (\text{A.89})$$

onde $\mathbf{p}(t)$ é o vetor força aplicada e $\mathbf{v}(t)$ é o vetor posição da partícula mássica m . Para a maioria dos problemas de dinâmica estrutural pode-se supor que a massa não varia com o tempo. Neste caso a Equação A.89 pode ser escrita

$$\mathbf{p}(t) = m \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \quad (\text{A.90})$$

A Equação A.90, indicando que a força é igual ao produto da massa pela aceleração, pode também ser escrita na forma

$$\mathbf{p}(t) - m \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} = 0 \quad (\text{A.91})$$

nesse caso, o segundo termo $m(d^2\mathbf{v}/dt^2)$ é chamado força inercial, resistindo à aceleração da massa.

O conceito de que uma massa desenvolve uma força inercial proporcional à sua aceleração e opondo-se, é conhecido como princípio de d'Alembert. É um dispositivo muito conveniente em problemas de dinâmica estrutural, porque permite que as equações de movimento sejam expressas como equações de equilíbrio dinâmico. A força $\mathbf{p}(t)$ pode ser considerada para incluir vários tipos de força que agem sobre a massa: restrições elásticas que se opõem a deslocamentos, forças viscosas que resistem a velocidades, e cargas externas definidas independentemente. Assim, se uma força inercial, que resiste à aceleração é introduzida, a equação de movimento é meramente uma expressão de equilíbrio de todas as forças que atuam sobre a massa.

Portanto introduzindo força inercial (f_i), por unidade de área (Equação A.92), às três primeiras equações A.21, têm-se

$$f_i = \frac{m}{dA} \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} = \frac{\rho_e dV}{dA} \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} = \frac{\rho_e h dA}{dA} \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} = \rho_e h \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \quad (\text{A.92})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} + q_z - \rho_e h \frac{d^2 u}{dt^2} = 0 \\ \frac{\partial N_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{Q_\theta}{a} + q_\theta - \rho_e h \frac{d^2 v}{dt^2} = 0 \\ \frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{N_\theta}{a} + q_r - \rho_e h \frac{d^2 w}{dt^2} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.93})$$

onde ρ_e é a massa específica do material que compõe a casca cilíndrica.

A.4 EXPRESSÕES DE ENERGIA

As expressões de energia foram desenvolvidas baseadas nas relações deformação-deslocamento aproximadas.

A expressão para a energia potencial de deformação na casca cilíndrica, S , é dada por

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi L} \int_0^a (\sigma_z \varepsilon_z + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_{z\theta} \varepsilon_{z\theta}) dV \quad (\text{A.94})$$

onde

$$dV = dz \, a d\theta \, dr \quad (\text{A.95})$$

é o volume infinitesimal de um elemento de casca cilíndrica.

Substituindo as Equações A.39 a A.41 e A.56 a A.58 na Equação A.94, tem-se a expressão para a energia de deformação na casca cilíndrica:

$$S = \frac{Eah}{2(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi L} \int_0^0 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right)^2 + \frac{2\nu}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \frac{1}{2a^2} (1-\nu) \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + a \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{h^2}{12a^2} \left[a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} dz d\theta$$

(A.96)

As parcelas não-multiplicadas pelo fator $h^2/(12a^2)$ formam a componente extensional e as multiplicadas pelo fator $h^2/(12a^2)$ formam a componente flexional da energia de deformação.

No tempo t , a expressão para a energia cinética de uma casca cilíndrica vibrante é dada na forma:

$$K = \frac{\rho_E h}{2} \int_0^{2\pi L} \int_0^0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dz ad\theta \quad (A.97)$$

APÊNDICE B - VIBRAÇÃO DE CASCAS, ARCOS E ANÉIS CIRCULARES

Baseado em Soedel (2005), na discussão a seguir, os anéis são tratados como casos especiais de arcos e a equação do arco é derivada pela redução das Equações de Love para cascas em geral.

B.1. CASCAS

Assume-se que cascas delgadas, isotrópicas e homogêneas de espessura constante tenham superfícies neutras, assim como vigas em deflexão transversal tenham fibras neutras. Tensões em tal superfície neutra podem ser do tipo membrana, mas não podem ser tensões de flexão. Localizações na superfície neutra, definidas em um sistema de coordenadas cartesianas, podem também ser definidas por coordenadas de superfícies curvilíneas bidimensionais α_1 e α_2 . A localização do ponto P sobre a superfície neutra (Figura B.1) em coordenadas cartesianas é relacionada à localização do ponto em coordenadas de superfície por

$$x_1 = f_1(\alpha_1, \alpha_2), x_2 = f_2(\alpha_1, \alpha_2), x_3 = f_3(\alpha_1, \alpha_2) \quad (\text{B.1})$$

A localização de P na superfície neutra pode também ser expressa por um vetor

$$\mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2) = f_1(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{e}_1 + f_2(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{e}_2 + f_3(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{e}_3 \quad (\text{B.2})$$

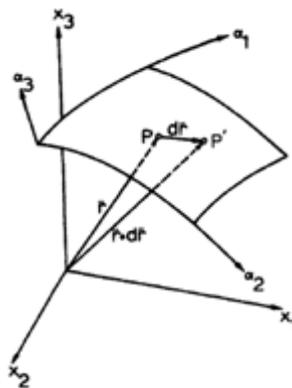


Figura B.1 - Superfície de referência (Soedel, 2005)

Define-se a distância infinitesimal entre os pontos P e P' na superfície neutra. O diferencial $d\mathbf{r}$ do vetor \mathbf{r} à medida que move-se de P para P' é

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \quad (\text{B.3})$$

A magnitude ds de $d\mathbf{r}$ é obtida por

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{B.4})$$

ou

$$(ds)^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} (d\alpha_1)^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} (d\alpha_2)^2 + 2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (\text{B.5})$$

A seguir, limita-se a coordenadas curvilíneas ortogonais o que coincide com a linha da curvatura principal da superfície neutra.

O terceiro termo na Equação B.5 torna-se assim

$$2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 = 2 \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} \right| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) d\alpha_1 d\alpha_2 = 0 \quad (\text{B.6})$$

Quando define-se

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} \right|^2 = A_1^2 \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} \right|^2 = A_2^2 \quad (\text{B.8})$$

A Equação B.6 torna-se

$$(ds)^2 = A_1^2 (d\alpha_1)^2 + A_2^2 (d\alpha_2)^2 \quad (\text{B.9})$$

Esta equação é chamada de forma fundamental e A_1 e A_2 são os parâmetros de forma fundamental ou parâmetros de Lamé.

Para cada ponto da superfície da casca há um raio de curvatura (R) máximo e um mínimo, cujas direções estão em um ângulo de $\pi/2$.

As fórmulas para cascas em geral são apresentadas a seguir. As deflexões de cisalhamento transversais ε_{13} e ε_{23} e a tensão normal σ_{33} foram desprezadas. Contudo, os efeitos integrados das tensões de cisalhamento σ_{13} e σ_{23} não foram desprezados. As relações α_3/R_1 e α_3/R_2 são muito menores que um.

As relações deformação-deslocamento ($\varepsilon - u$), são dadas por:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0 + \alpha_3 k_{11} \quad (\text{B.10})$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^0 + \alpha_3 k_{22} \quad (\text{B.11})$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 + \alpha_3 k_{12} \quad (\text{B.12})$$

onde

$$\varepsilon_{11}^0 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{u_3}{R_1} \quad (\text{B.13})$$

$$\varepsilon_{22}^0 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{u_3}{R_2} \quad (\text{B.14})$$

$$\varepsilon_{12}^0 = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) \quad (\text{B.15})$$

$$k_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\beta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \quad (\text{B.16})$$

$$k_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\beta_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \quad (\text{B.17})$$

$$k_{12} = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\beta_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\beta_1}{A_1} \right) \quad (\text{B.18})$$

onde

$$\beta_1 = \frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \quad (\text{B.19})$$

$$\beta_2 = \frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} \quad (\text{B.20})$$

As relações tensão-deformação ($\sigma - \varepsilon$) são dadas por

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{11}^0 + \nu \varepsilon_{22}^0 + \alpha_3 (k_{11} + \nu k_{22})] \quad (\text{B.21})$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{22}^0 + \nu \varepsilon_{11}^0 + \alpha_3 (k_{22} + \nu k_{11})] \quad (\text{B.22})$$

$$\sigma_{12} = G(\varepsilon_{12}^0 + \alpha_3 k_{12}) \quad (\text{B.23})$$

As resultantes das tensões (N e M), são dadas por

$$N_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} d\alpha_3 \quad (\text{B.24})$$

$$N_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} d\alpha_3 \quad (\text{B.25})$$

$$N_{12} = N_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} d\alpha_3 \quad (\text{B.26})$$

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} \alpha_3 d\alpha_3 \quad (\text{B.27})$$

$$M_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} \alpha_3 d\alpha_3 \quad (\text{B.28})$$

$$M_{12} = M_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} \alpha_3 d\alpha_3 \quad (\text{B.29})$$

Substituindo as Equações B.21 a B.23 nas Equações B.24 a B.29, obtém-se

$$N_{11} = K(\varepsilon_{11}^0 + \nu \varepsilon_{22}^0) \quad (\text{B.30})$$

$$N_{22} = K(\varepsilon_{22}^0 + \nu \varepsilon_{11}^0) \quad (\text{B.31})$$

$$N_{12} = N_{21} = \frac{K(1-\nu)}{2} \varepsilon_{12}^0 \quad (\text{B.32})$$

$$M_{11} = D(k_{11} + \nu k_{22}) \quad (\text{B.33})$$

$$M_{22} = D(k_{22} + \nu k_{11}) \quad (\text{B.34})$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{D(1-\nu)}{2} k_{12} \quad (\text{B.35})$$

onde K e D são dados nas Equações A.81 e A.82.

As expressões de energia (S e K) são

$$S = \int \int \int_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \frac{1}{2} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{13} \varepsilon_{13} + \sigma_{23} \varepsilon_{23}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \quad (\text{B.36})$$

$$K = \frac{\rho h}{2} \int \int_{\alpha_1 \alpha_2} \left[\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 + \frac{h^2}{12} \left(\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \right) \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (\text{B.37})$$

O princípio de Hamilton é dado por

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (S - K - W_{in}) dt = 0 \quad (\text{B.38})$$

em que

$$W_{in} = E_B + E_L \quad (\text{B.39})$$

onde W_{in} é a energia de entrada total, E_B é a energia aplicada na casca por possíveis resultantes de forças e momentos de contorno aplicados e E_L é a energia introduzida na casca pela carga distribuída.

Através das relações deformação-deslocamento, tensão-deformação, das simplificações de *Love*, das resultantes de tensão, das expressões de energia e do princípio de Hamilton, tem-se

$$-\frac{\partial(N_{11}A_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(N_{21}A_1)}{\partial\alpha_2} - N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} + N_{22} \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} - A_1 A_2 \frac{Q_{13}}{R_1} + A_1 A_2 \rho h \ddot{u}_1 = A_1 A_2 q_1 \quad (\text{B.40})$$

$$-\frac{\partial(N_{12}A_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(N_{22}A_1)}{\partial\alpha_2} - N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} + N_{11} \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} - A_1 A_2 \frac{Q_{23}}{R_2} + A_1 A_2 \rho h \ddot{u}_2 = A_1 A_2 q_2 \quad (\text{B.41})$$

$$-\frac{\partial(Q_{13}A_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(Q_{23}A_1)}{\partial\alpha_2} + A_1 A_2 \left(\frac{N_{11}}{R_1} + \frac{N_{22}}{R_2} \right) + A_1 A_2 \rho h \ddot{u}_3 = A_1 A_2 q_3 \quad (\text{B.42})$$

onde Q_{13} e Q_{23} são definidas por

$$\frac{\partial(M_{11}A_2)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(M_{21}A_1)}{\partial\alpha_2} + M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} - M_{22} \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} - Q_{13} A_1 A_2 = 0 \quad (\text{B.43})$$

$$\frac{\partial(M_{12}A_2)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(M_{22}A_1)}{\partial\alpha_2} + M_{21}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} - M_{11}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} - Q_{23}A_1A_2 = 0 \quad (\text{B.44})$$

onde N é força normal, Q é força cortante, M é momento, q é carga distribuída, \ddot{u} a aceleração, R é raio de curvatura, ρ é massa específica do material e h é espessura da casca. Quando há dois números subscritos, o primeiro indica a direção da normal à superfície sob consideração, e o segundo a direção da componente de tensão. Dois números subscritos iguais podem ser representados por um único número subscrito ($11 = 1, 22=2$).

Essas cinco equações são conhecidas como equações de *Love*.

Examinado as equações de Love, as relações tensão-deformação e deformação-deslocamento, observa-se que as equações são equações diferenciais parciais de oitava ordem no espaço. Isso significa que pode acomodar no máximo quatro condições de contorno em cada extremidade.

Por exemplo, para a casca cilíndrica circular reta têm-se: índice $1 = z$, índice $2 = \theta$, índice $3 = r$, $\alpha_1 = z$, $\alpha_2 = \theta$, $\alpha_3 = r$, $A_1 = 1$, $A_2 = a$, $R_1 = R_z = \infty$ e $R_2 = R_\theta = a$, que substituídos nas equações apresentadas no Apêndice B resultam nas equações deduzidas no Apêndice A.

B.2 ARCOS

O arco é uma viga curva onde toda curvatura está em apenas um plano, como mostrado na Figura B.2. É assumido que o movimento vibratório ocorre apenas nesse plano. Designando s como a coordenada ao longo do eixo neutro do arco e y como a coordenada perpendicular ao eixo neutro, a forma fundamental torna-se

$$(ds')^2 = (ds)^2 + (dy)^2 \quad (\text{B.45})$$

onde ds' é a forma diagonal fundamental.

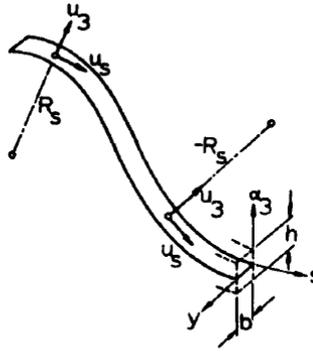


Figura B.2 - Definições das coordenadas para um arco (Soedel, 2005)

Assim, $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $d\alpha_1 = ds$ e $d\alpha_2 = dy$. Além disso,

$$R_1 = R_s \quad (\text{B.46})$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_y} = 0 \quad (\text{B.47})$$

e

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial\alpha_2} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.48})$$

Também, tensões no arco na direção y podem ser consideradas como sendo zero. Do fato que não há deflexões na direção y , tensões de cisalhamento são zero.

$$N_{yy} = 0, M_{yy} = 0, N_{ys} = N_{sy} = 0, M_{ys} = M_{sy} = 0 \quad (\text{B.49})$$

As equações de Love tornam-se

$$\frac{\partial N_{ss}}{\partial s} + \frac{Q_{s3}}{R_s} + q_s = \rho h \ddot{u}_s \quad (\text{B.50})$$

$$\frac{\partial Q_{s3}}{\partial s} - \frac{N_{ss}}{R_s} + q_3 = \rho h \ddot{u}_3 \quad (\text{B.51})$$

onde

$$Q_{s3} = \frac{\partial M_{ss}}{\partial s} \quad (\text{B.52})$$

As equações de deformação-deslocamento tornam-se

$$\varepsilon_{ss}^0 = \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_3}{R_s} \quad (\text{B.53})$$

$$k_{ss} = \frac{\partial \beta_s}{\partial s} \quad (\text{B.54})$$

onde

$$\beta_s = \frac{u_s}{R_s} - \frac{\partial u_3}{\partial s} \quad (\text{B.55})$$

A partir do fato que $\sigma_{yy} = 0$,

$$\varepsilon_{ss} = \frac{1}{E} (\sigma_{ss} - \nu \sigma_{yy}) = \frac{\sigma_{ss}}{E} \quad (\text{B.56})$$

e

$$\varepsilon_{ss} = \frac{\sigma_{ss}}{E} = \frac{N_{ss}}{Eh} + \frac{12}{Eh^3} M_{ss} \alpha_3 \quad (\text{B.57})$$

Portanto,

$$N_{ss} = Eh \varepsilon_{ss}^0 \quad (\text{B.58})$$

e

$$M_{ss} = \frac{Eh^3}{12} k_{ss} \quad (\text{B.59})$$

A rigidez de membrana $K = Eh/(1-\nu^2)$ reduz, portanto, para Eh e a rigidez de flexão $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ reduz para $Eh^3/12$. A razão é que retirar uma tira de arco do material adjacente de uma casca cilíndrica remove-se o efeito de restrição causado pela relação de Poisson.

Prosseguindo com a definição de N_{ss} e M_{ss} , obtém-se

$$N_{ss} = Eh \left(\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_3}{R_s} \right) \quad (\text{B.60})$$

$$M_{ss} = \frac{Eh^3}{12} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u_s}{R_s} - \frac{\partial u_3}{\partial s} \right) \quad (\text{B.61})$$

Inserindo as Equações B.60 e B.61 nas Equações B.50 a B.52 e multiplicando pela largura b dá

$$\frac{EI}{R_s} \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{u_s}{R_s} \right) - \frac{\partial^3 u_3}{\partial s^3} \right] + EA \left[\frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u_3}{R_s} \right) \right] + q_s' = \rho A \ddot{u}_s \quad (\text{B.62})$$

$$EI \left[\frac{\partial^3}{\partial s^3} \left(\frac{u_s}{R_s} \right) - \frac{\partial^4 u_3}{\partial s^4} \right] - \frac{EA}{R_s} \left(\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_3}{R_s} \right) + q_3' = \rho A \ddot{u}_3 \quad (\text{B.63})$$

onde, estritamente falando, o momento de inércia $I = bh^3/12$ e a área de seção transversal $A = bh$, aplicam-se a seção transversal retangular. Pelo menos, esta é a seção transversal obtida quando se isola uma faixa de arco de uma casca cilíndrica da mesma forma que o arco. Pode ser mostrado, entretanto, que qualquer forma seccional transversal, onde o centro de cisalhamento coincide com o centro da área, é descrita por essas duas equações contanto que os valores de I e A apropriados sejam introduzidos. Os valores de $q_s' = q_s b$ e $q_3' = q_3 b$ são forças por unidade de comprimento.

Em vez de quatro condições de contorno, precisa-se agora de apenas três em cada borda. Obtêm-se as seguintes condições de contorno necessárias a serem especificadas em cada extremidade do arco:

$$N_{ss} = N_{ss}^* \text{ ou } u_s = u_s^* \quad (\text{B.64})$$

$$M_{ss} = M_{ss}^* \text{ ou } \beta_s = \beta_s^* \quad (\text{B.65})$$

$$Q_{s3} = Q_{s3}^* \text{ ou } u_3 = u_3^* \quad (\text{B.66})$$

B.3 ANÉIS CIRCULARES

Para um anel circular o raio de curvatura do arco é constante

$$R_s = a \quad (\text{B.67})$$

e a coordenada s é comumente expressa como $s = a\theta$

Portanto as Equações B.62 e B.63 reduzem a

$$\frac{EI}{a^3} \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^3 u_3}{\partial \theta^3} \right) + \frac{EA}{a^2} \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right) + q_\theta' = \rho A \ddot{u}_\theta \quad (\text{B.68})$$

$$\frac{EI}{a^4} \left(\frac{\partial^3 u_\theta}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^4 u_3}{\partial \theta^4} \right) - \frac{EA}{a^2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_3 \right) + q_3' = \rho A \ddot{u}_3 \quad (\text{B.69})$$

Se não houver nenhuma força circunferencial e se o termo de inércia circunferencial puder ser assumido como sendo insignificante, é possível eliminar u_θ e obter a equação de Prescott (1924):

$$\frac{EI}{a^4} \left(\frac{\partial^4 u_3}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} + u_3 \right) + \rho A \ddot{u}_3 = q_3' \quad (\text{B.70})$$

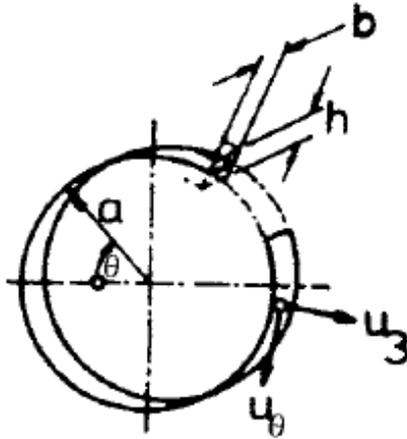


Figura B.3 - Anel circular (Soedel, 2005)

Frequências naturais e modos:

As equações que governam a vibração de um anel circular em seu plano de curvatura são dadas nas Equações B.71 e B.72. Para nenhuma carga, substituindo

$$u_{\theta}(\theta, t) = U_{\theta n}(\theta)e^{j\omega_n t} \quad (\text{B.71})$$

$$u_3(\theta, t) = U_{3n}(\theta)e^{j\omega_n t} \quad (\text{B.72})$$

nas Equações B.68 e B.69, dá

$$\frac{D}{a^4} \left(\frac{d^2 U_{\theta n}}{d\theta^2} - \frac{d^3 U_{3n}}{d\theta^3} \right) + \frac{K}{a^2} \left(\frac{d^2 U_{\theta n}}{d\theta^2} + \frac{dU_{3n}}{d\theta} \right) + \rho h \omega_n^2 U_{\theta n} = 0 \quad (\text{B.73})$$

$$\frac{D}{a^4} \left(\frac{\partial^3 U_{\theta n}}{\partial \theta^3} - \frac{d^4 U_{3n}}{d\theta^4} \right) - \frac{K}{a^2} \left(\frac{dU_{\theta n}}{d\theta} + u_{3n} \right) + \rho h \omega_n^2 U_{3n} = 0 \quad (\text{B.74})$$

É possível aproximar a solução usando a transformação de Laplace. No entanto, em certos casos, é possível tomar um atalho. A abordagem nesses casos é um achado inspirado. Tomando, por exemplo, o anel fechado flutuando livremente:

$$U_{3n}(\theta) = A_n \cos[n(\theta - \varphi)] \quad (\text{B.75})$$

$$U_{\theta n}(\theta) = B_n \text{sen}[n(\theta - \varphi)] \quad (\text{B.76})$$

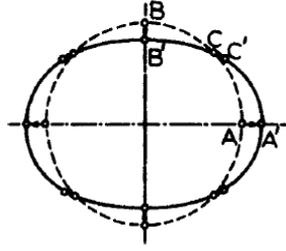


Figura B.4 - Explicação da fase entre movimento transversal e movimento circunferencial usando o exemplo de um anel (Soedel, 2005)

Assume-se que φ é um ângulo de fase arbitrário que deve ser incluído uma vez que o anel não mostra uma preferência para a orientação de seus modos; em vez disso, a orientação é determinada posteriormente pela distribuição das forças externas. Na Figura B.4, esboçou-se o modo $n = 2$, definindo $\varphi = 0$. Nota-se que a intuição física confirma as Equações B.75 e B.76 uma vez que obviamente o ponto A se moverá ao longo do eixo x para o ponto A' [$U_{32}(0) = A_2; U_{\theta 2}(0) = 0$], o ponto B se moverá ao longo do eixo y para o ponto B' [$U_{32}(\pi/2) = -A_2; U_{\theta 2}(\pi/2) = 0$], e o ponto C não se moverá na direção normal, mas sim na direção circunferencial [$U_{32}(\pi/4) = -\theta; U_{\theta 2}(\pi/4) = B_2$]. Substituindo as Equações B.75 e B.76 nas Equações B.73 e B.74

$$\begin{bmatrix} \rho h \omega_n^2 - \frac{n^4 D}{a^4} - \frac{K}{a^2} & -\frac{n^3 D}{a^4} - \frac{nK}{a^2} \\ -\frac{n^3 D}{a^4} - \frac{nK}{a^2} & \rho h \omega_n^2 - \frac{n^4 D}{a^4} - \frac{n^2 K}{a^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{B.77})$$

Uma vez que, em geral,

$$\begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \end{Bmatrix} \neq 0 \quad (\text{B.78})$$

o determinante deve ser 0. Assim

$$\omega_n^4 - K_1 \omega_n^2 + K_2 = 0 \quad (\text{B.79})$$

onde

$$K_1 = \frac{n^2 + 1}{a^2 \rho h} \left(\frac{n^2 D}{a^2} + K \right) \quad (\text{B.80})$$

$$K_2 = \frac{n^2(n^2 - 1)}{a^6 (\rho h)^2} DK \quad (\text{B.81})$$

então

$$\omega_n^2 = \frac{K_1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{K_2}{K_1^2}} \right) \quad (\text{B.82})$$

Portanto, para cada valor de n , encontra-se uma frequência

$$\omega_{n1}^2 = \frac{K_1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4 \frac{K_2}{K_1^2}} \right) \quad (\text{B.83})$$

e uma frequência

$$\omega_{n2}^2 = \frac{K_1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4 \frac{K_2}{K_1^2}} \right) \quad (\text{B.84})$$

Como se vê, para anéis típicos,

$$\omega_{n2} \gg \omega_{n1} \quad (\text{B.85})$$

Da Equação B.77, tem-se

$$\frac{A_{ni}}{B_{ni}} = \frac{\left(\frac{n}{a^2} \right) \left[\left(\frac{n^2}{a^2} \right) D + K \right]}{\rho h \omega_{ni}^2 - \left(\frac{1}{a^2} \right) \left[\left(\frac{n^4 D}{a^2} \right) + K \right]} = \frac{\rho h \omega_{ni}^2 - \left(\frac{n^2}{a^2} \right) \left[\left(\frac{D}{a^2} \right) + K \right]}{\left(\frac{n}{a^2} \right) \left[\left(\frac{n^2 D}{a^2} \right) + K \right]} \quad (\text{B.86})$$

onde $i = 1, 2$. Para se obter uma noção intuitiva desta razão, observam-se n menores, onde

$$\frac{n^2 D}{a^2} \ll K \quad (\text{B.87})$$

Obtém-se

$$\rho h \omega_{n1}^2 \ll \frac{K}{a^2} \quad (\text{B.88})$$

$$\omega_{n2}^2 \cong K_1 \cong \frac{n^2 + 1}{a^2 \rho h} K \quad (\text{B.89})$$

Assim,

$$\frac{A_{n1}}{B_{n1}} \cong -n \quad (\text{B.90})$$

e

$$\frac{A_{n2}}{B_{n2}} \cong \frac{1}{n} \quad (\text{B.91})$$

A conclusão é que nas frequências ω_{n1} , as deflexões transversais dominam: o anel está essencialmente vibrando em flexão, análogo à vibração de flexão transversal de uma viga. Em frequências ω_{n2} , deflexões circunferenciais dominam, análogo a vibrações longitudinais de uma viga.

Para $n = 1$,

$$K_1 = \frac{K}{a^2 \rho h} \quad (\text{B.92})$$

$$K_2 = 0 \quad (\text{B.93})$$

e portanto

$$\omega_{01}^2 = 0 \quad (\text{B.94})$$

$$\omega_{02}^2 = K_1 = \frac{K}{a^2 \rho h} \quad (\text{B.95})$$

e

$$\frac{A_{01}}{B_{01}} = 0, \quad \frac{B_{02}}{A_{02}} = 0 \quad (\text{B.96})$$

O modo de vibração é mostrado na Figura B.5 e é às vezes chamado de modo de respiração do anel.

Em $n = 1$, tem-se

$$K_1 = \frac{2}{a^2 \rho h} \left(\frac{D}{a^2} + K \right) \quad (\text{B.97})$$

$$K_2 = 0 \quad (\text{B.98})$$

e portanto

$$\omega_{11}^2 = 0 \quad (\text{B.99})$$

Assim, uma vibração de flexão ainda não existe e tem-se que pensar no anel como sendo simplesmente deslocado em um movimento de corpo rígido. Portanto, uma frequência ω_{n2} não ocorre e o modo é uma região de compressão e uma de tração em torno do anel.

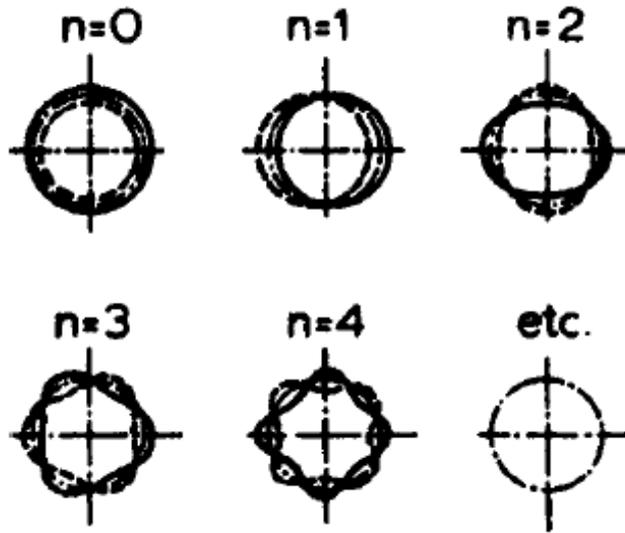


Figura B.5 - Modos naturais de um anel fechado (Soedel, 2005)

APÊNDICE C - ORTOGONALIDADE DOS MODOS DE VIBRAÇÃO E SELEÇÃO DO ÂNGULO DE FASE MODAL PARA CASCAS DE REVOLUÇÃO

C.1 PROPRIEDADE DE ORTOGONALIDADE DOS MODOS DE VIBRAÇÃO

Modos naturais possuem a propriedade de ortogonalidade. O princípio de Hamilton é dado por

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (E_{potencial} - K) dt = 0 \quad (C.1)$$

Porque os modos naturais satisfazem todas as condições de contorno, a energia posta em uma casca por resultantes de forças e momentos de contorno é zero.

$$E_B = 0 \quad (C.2)$$

Porque em problema de autovalor, força não é considerada,

$$E_L = 0 \quad (C.3)$$

Portanto, como a casca vibra em uma frequência natural, a energia potencial é igual à energia de deformação

$$E_{potencial} = S \quad (C.4)$$

O princípio de Hamilton torna-se, para esse caso

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta S dt - \int_{t_0}^{t_1} \delta K dt = 0 \quad (C.5)$$

onde, da Equação B.36

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta S dt = \int_{t_0}^{t_1} \int \int \int (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + \sigma_{13} \delta \varepsilon_{13} + \sigma_{23} \delta \varepsilon_{23}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 dt \quad (C.6)$$

e onde, da Equação B.37,

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta K dt = -\rho h \int_{t_0}^{t_1} \int \int (\dot{u}_1 \delta u_1 + \dot{u}_2 \delta u_2 + \dot{u}_3 \delta u_3) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dt \quad (C.7)$$

Os deslocamentos quando a casca está vibrando com o modo k são

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2, t) = U_{ik}(\alpha_1, \alpha_2) e^{j\omega_k t} \quad (C.8)$$

Substitui-se a Equação C.8 nas Equações C.6 e C.7. Uma vez que os deslocamentos virtuais devem satisfazer as condições de contorno também, sendo arbitrários em qualquer outro aspecto, selecciona-se o modo p para representar o deslocamento virtual

$$\delta u_i(\alpha_1, \alpha_2, t) = U_{ip} e^{j\omega_p t} \quad (C.9)$$

Substituindo as Equações C.8 e C.9 na Equação C.5

$$\begin{aligned} & \int \int \int \left(\sigma_{11}^{(k)} \delta \varepsilon_{11}^{(p)} + \sigma_{22}^{(k)} \delta \varepsilon_{22}^{(p)} + \sigma_{12}^{(k)} \delta \varepsilon_{12}^{(p)} \right. \\ & \left. + \sigma_{13}^{(k)} \delta \varepsilon_{13}^{(p)} + \sigma_{23}^{(k)} \delta \varepsilon_{23}^{(p)} \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \\ & = \omega_k^2 \rho h \int \int_{\alpha_1 \alpha_2} (U_{1k} U_{1p} + U_{2k} U_{2p} + U_{3k} U_{3p}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \end{aligned} \quad (C.10)$$

Nota-se que as integrais de tempo foram canceladas. Os sobrescritos nas tensões e variações da deformação significam os modos a que elas estão associadas.

Passando pelo mesmo procedimento, só que atribuindo o modo p à descrição da deflexão

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2, t) = U_{ip}(\alpha_1, \alpha_2) e^{j\omega_p t} \quad (C.11)$$

e o modo k aos deslocamentos virtuais

$$\delta u_i = U_{ik} e^{j\omega_k t} \quad (C.12)$$

obtem-se

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \int_{\alpha_3} \left(\sigma_{11}^{(p)} \delta \varepsilon_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(p)} \delta \varepsilon_{22}^{(k)} + \sigma_{12}^{(p)} \delta \varepsilon_{12}^{(k)} \right. \\ & \left. + \sigma_{13}^{(p)} \delta \varepsilon_{13}^{(k)} + \sigma_{23}^{(p)} \delta \varepsilon_{23}^{(k)} \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \\ & = \omega_k^2 \rho h \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} (U_{1p} U_{1k} + U_{2p} U_{2k} + U_{3p} U_{3k}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \end{aligned} \quad (C.13)$$

Examinando os dois primeiros termos da integral espacial da esquerda da Equação C.10, uma vez que

$$\varepsilon_{11}^{(p)} = \frac{1}{E} (\sigma_{11}^{(p)} - \nu \sigma_{22}^{(p)}) \quad (C.14)$$

$$\varepsilon_{22}^{(p)} = \frac{1}{E} (\sigma_{22}^{(p)} - \nu \sigma_{11}^{(p)}) \quad (C.15)$$

obtem-se

$$\sigma_{11}^{(k)} \delta \varepsilon_{11}^{(p)} + \sigma_{22}^{(k)} \delta \varepsilon_{22}^{(p)} = \frac{1}{E} \delta (\sigma_{11}^{(k)} \sigma_{11}^{(p)} + \sigma_{22}^{(k)} \sigma_{22}^{(p)} - \nu \sigma_{11}^{(k)} \sigma_{22}^{(p)} - \nu \sigma_{22}^{(k)} \sigma_{11}^{(p)}) \quad (C.16)$$

Similarmente, examinando os primeiros dois termos da Equação C.13, obtém-se

$$\sigma_{11}^{(p)} \delta \varepsilon_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(p)} \delta \varepsilon_{22}^{(k)} = \frac{1}{E} \delta (\sigma_{11}^{(p)} \sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(p)} \sigma_{22}^{(k)} - \nu \sigma_{11}^{(p)} \sigma_{22}^{(k)} - \nu \sigma_{22}^{(p)} \sigma_{11}^{(k)}) \quad (C.17)$$

Portanto, subtraindo a Equação C.17 da Equação C.16 dá

$$\sigma_{11}^{(k)} \delta \varepsilon_{11}^{(p)} - \sigma_{11}^{(p)} \delta \varepsilon_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} \delta \varepsilon_{22}^{(p)} - \sigma_{22}^{(p)} \delta \varepsilon_{22}^{(k)} = 0 \quad (C.18)$$

Uma vez que os termos de cisalhamento subtraem a zero também, subtraindo a Equação C.13 da Equação C.10 obtém-se

$$\rho h(\omega_k^2 - \omega_p^2) \int \int_{\alpha_1 \alpha_2} (U_{1k}U_{1p} + U_{2k}U_{2p} + U_{3k}U_{3p}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0 \quad (\text{C.19})$$

Esta equação é satisfeita quando $p = k$ uma vez que

$$\omega_k^2 - \omega_p^2 = 0 \quad (\text{C.20})$$

Nesse caso, a integral tem um valor numérico, designado por

$$N_k = \int \int_{\alpha_1 \alpha_2} (U_{1k}U_{1p} + U_{2k}U_{2p} + U_{3k}U_{3p}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (\text{C.21})$$

Quando $k \neq p$, a única maneira da Equação C.19 ser satisfeita é quando

$$\int \int_{\alpha_1 \alpha_2} (U_{1k}U_{1p} + U_{2k}U_{2p} + U_{3k}U_{3p}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0 \quad (\text{C.22})$$

Sumariando, usando o símbolo do delta de Kronecker

$$\int \int_{\alpha_1 \alpha_2} (U_{1k}U_{1p} + U_{2k}U_{2p} + U_{3k}U_{3p}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \delta_{pk} N_k \quad (\text{C.23})$$

onde

$$\delta_{pk} = \begin{cases} 1, & p = k \\ 0, & p \neq k \end{cases} \quad (\text{C.24})$$

É importante reconhecer a generalidade desta relação. Quaisquer dois modos de qualquer sistema de espessura uniforme, quando multiplicados um pelo outro na forma prescrita, integrará a zero. Esse fato pode, por exemplo, ser utilizado para verificar a precisão de modos determinados experimentalmente. Mas o mais importante, é que permite expressar uma solução geral da equação forçada em termos de uma série infinita de modos. Para

casca e placas de espessura não-uniforme e densidade de massa não-homogênea, ρh tem que ser levada para dentro da integral C.19. Isso modificará as Equações C.21 a C.23.

C.2 SELEÇÃO DO ÂNGULO DE FASE MODAL PARA CASCAS DE REVOLUÇÃO

A seleção racional é ilustrada pelo exemplo de um anel fechado. Os modos naturais são dados pelas Equações B.75 e B.76 como

$$\begin{Bmatrix} U_{3n} \\ U_{\theta n} \end{Bmatrix} = A_{ni} \begin{Bmatrix} \cos[n(\theta - \varphi)] \\ \frac{B_{ni}}{A_{ni}} \text{sen}[n(\theta - \varphi)] \end{Bmatrix} \quad (\text{C.25})$$

Uma vez que $i = 1, 2$, tem-se dois conjuntos de modos de vibração. É preciso selecionar dois ângulos de fase φ de tal forma que os modos de vibração sejam ortogonais um ao outro. A exigência é que

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \cos[n(\theta - \varphi_1)] \cos[n(\theta - \varphi_2)] + \left(\frac{B_{ni}}{A_{ni}} \right)^2 \text{sen}[n(\theta - \varphi_1)] \text{sen}[n(\theta - \varphi_2)] \right\} d\theta = 0 \quad (\text{C.26})$$

A partir disso, vê-se que a escolha de φ_1 , φ_2 deve ser tal que a integral seja satisfeita. Assim, tem-se que

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2n} \quad (\text{C.27})$$

Isso fará

$$\cos[n(\theta - \varphi_2)] = \cos \left\{ [n(\theta - \varphi_1)] - \frac{\pi}{2} \right\} = \text{sen}[n(\theta - \varphi_1)] \quad (\text{C.28})$$

e

$$\text{sen}[n(\theta - \varphi_2)] = \left\{ \text{sen}[n(\theta - \varphi_1)] - \frac{\pi}{2} \right\} = -\cos[n(\theta - \varphi_1)] \quad (\text{C.29})$$

A integral de ortogonalidade então torna-se

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \cos[n(\theta - \varphi_1)] \text{sen}[n(\theta - \varphi_1)] - \left(\frac{B_{ni}}{A_{ni}} \right)^2 \text{sen}[n(\theta - \varphi_1)] \cos[n(\theta - \varphi_1)] \right\} d\theta = 0 \quad (\text{C.30})$$

Que é de fato satisfeita por causa das propriedades de ortogonalidade das funções seno e cosseno.

Nota-se que φ_1 , pode ainda ser arbitrariamente selecionado, mas φ_2 deve satisfazer a Equação C.27. É vantajoso usar

$$\varphi_1 = 0 \quad (\text{C.31})$$

de modo que

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2n} \quad (\text{C.32})$$

Para esse exemplo, devem-se considerar todos os quatro conjuntos de modos juntos quando da formulação da solução em séries modais:

$$\left\{ \begin{array}{c} \cos(n\theta) \\ \frac{B_{n1}}{A_{n1}} \text{sen}(n\theta) \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \cos(n\theta) \\ \frac{B_{n2}}{A_{n2}} \text{sen}(n\theta) \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{sen}(n\theta) \\ -\frac{B_{n1}}{A_{n1}} \cos(n\theta) \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{sen}(n\theta) \\ -\frac{B_{n2}}{A_{n2}} \cos(n\theta) \end{array} \right\} \quad (\text{C.33})$$

O exemplo do anel pode facilmente ser generalizado para qualquer casca de revolução fechada.

APÊNDICE D - FUNÇÕES DE BESSEL

D.1 FUNÇÕES DE BESSEL

As soluções $y = y(x)$ da equação diferencial

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + (x^2 - n^2)y = 0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{D.1})$$

são conhecidas como funções de Bessel de ordem n .

A solução geral da Equação D.1 pode ser tomada na forma

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x) \quad (\text{D.2})$$

onde C_1 e C_2 são constantes,

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \quad (\text{D.3})$$

é a função de Bessel de primeira classe de ordem n e

$$Y_n(x) = \lim_{p \rightarrow n} \frac{J_p(x) \cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\text{sen}(p\pi)} \quad (\text{D.4})$$

é a função de Bessel de segunda classe de ordem n .

As soluções $y = y(x)$ da equação diferencial

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} - (x^2 + n^2)y = 0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{D.5})$$

são conhecidas como funções modificadas de Bessel de ordem n .

A solução geral da Equação D.5 pode ser tomada na forma

$$y = C_1 I_n(x) + C_2 K_n(x) \quad (\text{D.6})$$

onde

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \quad (\text{D.7})$$

é a função modificada de Bessel de primeira classe de ordem n e

$$K_n(x) = \lim_{p \rightarrow n} \frac{\pi}{2 \operatorname{sen}(p\pi)} [I_{-p}(x) - I_p(x)] \quad (\text{D.8})$$

é a função modificada de Bessel de segunda classe de ordem n .

D.2 DERIVADAS DAS FUNÇÕES DE BESSEL

As derivadas das funções de Bessel são dadas por

$$\frac{d}{dx} [Z_n(\alpha x)] = \frac{n}{x} Z_n(\alpha x) - \alpha Z_{n+1}(\alpha x), Z = J, Y, K \quad (\text{D.9})$$

e

$$\frac{d}{dx} [I_n(\alpha x)] = \frac{n}{x} I_n(\alpha x) + \alpha I_{n+1}(\alpha x) \quad (\text{D.10})$$

O argumento das funções de Bessel é composto de α (uma constante) e x .