Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Problemas Elípticos Semilineares com Dependência do Gradiente

por

Pedro Manuel Sánchez Aguilar

Brasília

2013

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Problemas Elípticos Semilineares com Dependência do Gradiente

por

Pedro Manuel Sánchez Aguilar *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 23 de agosto de 2013

Comissão Examinadora:

Prof$^{\underline{a}}$. Dra. Manuela Caetano Martins de Rezende (UnB)–Orientadora

Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo (UFPB)

Prof. Dr. Ricardo Ruviaro (UnB)

*O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Agradecimentos

Obrigado, meu Deus, por dar-me forças para lidar com as adversidades e assim cumprir com mais um objetivo em minha vida.

À professora Manuela Caetano Martins de Rezende, pela paciência e apoio neste trabalho, pelos conselhos e, sobretudo, por sua amizade.

Aos membros da banca examinadora, professores Uberlândio Batista Severo, Ricardo Ruviaro, Carlos Alberto Pereira dos Santos, pelas oportunas correções e sugestoẽs.

Aos meus pais, Gladys Teodonila Aguilar Viteri e Hermenegildo Sánchez Vega, pelas palavras de alento e por terem fomentado em mim o desejo de superação na vida.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro durante todo o período.

Resumo

Neste trabalho, ilustramos a utilização de dois métodos diferentes – sub e supersolução e variacional – na obtenção de existência de solução para uma classe de problemas elípticos semilineares cuja não-linearidade apresenta dependência do termo gradiente.

Palavras-chave: sub e supersolução, Passo da Montanha, termo gradiente, problemas singulares, solução ground state.

Abstract

In this work we illustrate the application of two different methods – lower and upper solution and variational – to obtain the existence of a solution for a class of semilinear elliptic problems whose nonlinearity presents dependence on the gradient term.

Key words: lower and upper solution, Mountain Pass, gradient term, singular problems, ground state solution.

Sumário

Notações

Neste trabalho, fazemos uso das seguintes notações:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave;
- $|\cdot|$ representa a norma euclidiana em $\mathbb{R}^N,\ N \geq 1$;
- $B_r = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < r\},\ r > 0$;
- Dados abertos $\Omega_0,\ \Omega \subset \mathbb{R}^N$, escrevemos $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ quando Ω_0 está compactamente contido em Ω, isto é, $\overline{\Omega}_0$ é um compacto contido Ω;
- λ_1 é o primeiro autovalor do problema

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda\varphi & \text{em } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{AV}$$

  e φ_1 é uma λ_1-autofunção positiva de (AV);
- Um vetor da forma $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, onde cada componente $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, é chamado um multi-índice de ordem

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N;$$

- Dado um multi-índice α, definimos

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_N} x_N},$$

  quando a derivada mista do lado direito existe;
- $C(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \ \text{ é contínua }\}$;

- $C(\overline{\Omega}) = \left\{ \begin{array}{c} u \in C(\Omega) : u \;\; \text{é uniformemente contínua em subconjuntos} \\ \text{limitados de } \Omega \end{array} \right\}$,

  cuja norma é $\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup\limits_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|$;

- $C_0(\Omega)$ são as funções contínuas de suporte compacto em Ω;

- $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \;\; \text{é } k \text{ vezes continuamente diferenciável } \}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

- $C^k(\overline{\Omega}) = \left\{ \begin{array}{l} u \in C^k(\Omega) : D^\alpha u \;\; \text{uniformemente contínua sobre subconjuntos} \\ \text{limitados de } \Omega, \;\; \text{para todo } |\alpha| \leq k \end{array} \right\}$.

  Assim se $u \in C^k(\overline{\Omega})$, então $D^\alpha u$ estende-se continuamente até $\overline{\Omega}$ para cada multi-índice α, $|\alpha| \leq k$.

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{\Omega})};$$

- $C^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega) \qquad \text{e} \qquad C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{\Omega})$;

- $C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$;

- Seja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 < \gamma \leq 1$. $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ denota o espaço de Hölder dado por

$$C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\overline{\Omega}) : [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} < \infty, \;\; \text{para todo multi-índice } |\alpha| \leq k\},$$

  onde $[D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \sup\limits_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \dfrac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\gamma}$, cuja norma é

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha| = k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}, \;\; \text{para todo } u \in C^{k,\gamma}(\overline{\Omega});$$

- Uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada Lipschitz se satisfaz $|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|$, para alguma constante C e para todos $x, y \in \Omega$. Neste caso, escrevemos $u \in Lip(\Omega)$;

- $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$, $u^-(x) = \max\{-u(x), 0\}$;

- O espaço $L^p(\Omega)$ é denotado por

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } \int_\Omega |f|^p \, dx < \infty\},$$

em que $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto conexo, munido com a norma dada por

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}};$$

- $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções mensuráveis que são limitadas quase sempre em Ω, com norma dada por

$$\|u\|_\infty := \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \ \text{ quase sempre em } \Omega\};$$

- Para $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, denotamos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como sendo

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq k\},$$

com norma dada por

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_\infty, & \text{se } p = \infty; \end{cases}$$

- Denotamos por X^* o espaço dual de X, com norma dada por

$$\|I\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} |I(x)|.$$

Introdução

Nas últimas décadas, os problemas elípticos têm chamado atenção dos pesquisadores em Equações Diferenciais Parciais pelas aplicações em diversas áreas do conhecimento. Em várias destas aplicações, é de fundamental importância saber se a equação que modela certo fenômeno possui solução. Com esta finalidade, foram desenvolvidas técnicas que determinam a existência de soluções de problemas elípticos. Neste trabalho, por exemplo, nos concentramos em duas técnicas que mostram a existência de solução de um tipo específico de problemas.

O **Método de Sub e Supersolução** é um dos métodos mais usados para estudar problemas elípticos e requer certa habilidade em cada caso. Sabemos que se uma função contínua muda de sinal em um intervalo fechado, então ela há de ter um zero. Até certo ponto, o método de sub e supersolução pode ser visto como uma extensão deste fato. A ideia deste método consiste em determinar uma subsolução $\underline{u}$ e uma supersolução $\overline{u}$ do problema em questão e aplicar um teorema de comparação para verificar que $\underline{u} \leq \overline{u}$, o que nos permite determinar uma solução u tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.

Os **Métodos Variacionais** surgiram no século XVIII e foram Euler e Lagrange que o transformaram em uma teoria matemática rigorosa. O método variacional foi aplicado, após a sua descoberta, sobretudo na física, especialmente em mecânica, e tornou-se uma disciplina matemática independente, com seus próprios métodos de pesquisa. Para mais detalhes, veja [40]. Um método variacional importante na solução de problemas elípticos semilineares é a Teoria do Ponto Crítico, que a grosso modo consiste em ver cada solução fraca de uma equação diferencial parcial como um ponto crítico de um determinado funcional. Por sua vez, um dos principais resultados da teoria do Ponto Crítico, e que será usado neste trabalho, é o Teorema do Passo da Montanha, devido a Ambrosetti e Rabinowitz [7]. Este teorema garante, sob hipóteses adequadas, a existência de pontos críticos de minimax para o funcional associado ao problema estudado.

Nosso objetivo, neste trabalho, é ilustrar como estes dois métodos podem ser utilizados para estudar existência de solução para um problema elíptico semilinear cuja não-linearidade apresenta um termo gradiente, também chamado de termo de convecção.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

No **Capítulo 1**, apresentamos algumas definições e noções que compõem o meio sobre o qual desenvolveremos o nosso trabalho. Nos limitamos a apresentar, de maneira resumida, as noções fundamentais que foram utilizadas, de alguma forma, no decorrer deste texto. Enunciamos, também, alguns teoremas clássicos que nos auxiliarão na obtenção dos resultados principais.

Os próximos dois capítulos deste trabalho abordam, de forma detalhada, como os métodos de sub e supersolução e variacional, respectivamente, podem ser utilizados para obter uma solução para um determinado problema elíptico semilinear.

No **Capítulo 2**, estudamos o resultado de Marius Ghergu e Vicentiu Rădulescu [32], que em 2007 determinaram existência de solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = p(x)(g(u) + f(u) + |\nabla u|^a) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \quad u > 0 & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u(x) \longrightarrow 0 & \text{quando } |x| \to \infty, \end{cases} \tag{1}$$

onde $N \geq 3,\ 0 < a < 1$, e $p : \mathbb{R}^N \longrightarrow (0, \infty)$ é uma função Hölder contínua de expoente $0 < \gamma < 1$ tal que

(p_1) $\displaystyle\int_1^\infty t\ \phi(t)\ dt < \infty$, onde $\displaystyle\phi(r) = \max_{|x|=r} p(x)$.

Assumiremos também que $g \in C^1((0, \infty))$ é uma função decrescente e positiva tal que

(g_1) $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t) = +\infty$,

e a função $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ é $C^1((0, \infty))$, não-decrescente e positiva em $(0, \infty)$ e satisfaz

(f_1) a função $t \longmapsto \dfrac{f(t)}{t}$ é não-crescente, para todo $t \in (0, \infty)$;

(f_2) $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t} = +\infty$ e $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = 0$.

A ideia desenvolvida em [32] consiste em aplicar o método de sub e supersolução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = p(x)(g(u) + f(u) + |\nabla u|^a) & \text{em } \Omega, \\ \quad u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

o que nos permite gerar uma sequência monótona de soluções (u_n) para a família de problemas do tipo (2), sobre B_n, limitada tanto superior quanto inferiormente. Assim, por um procedimento padrão, podemos concluir que (u_n) possui uma subsequência que converge uniformemente a uma função em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Posteriormente, por um processo diagonal, segue que (u_n) possui uma subsequência que converge uniformemente sobre subconjuntos abertos limitados de $\mathbb{R}^N$ a uma função $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, que é solução do problema (1). Tal procedimento será utilizado para demonstrarmos o resultado principal do Capítulo 2, a saber:

Teorema 0.1. *Suponha que (f_1), (f_2), (g_1) e (p_1) sejam satisfeitas. Então o problema (1) tem pelo menos uma solução em $C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.*

É importante mencionar que a equação (1) é do tipo Lane-Emden-Fowler. Equações deste tipo se originaram a partir de teorias sobre a dinâmica de gases em astrofísica (veja [22]), surgindo também no estudo da mecânica dos fluidos, mecânica relativística, física nuclear e no estudo da química. Para uma abordagem mais detalhada deste tipo de equações, referimos ao leitor o trabalho de Wong [49]. A equação de Lane-Emden- Fowler tem sido estudada por muitos autores que utilizam vários métodos e técnicas. Entre elas, citamos a teoria do ponto crítico, a teoria do ponto fixo e a teoria do grau topológico. Para maiores detalhes, veja [2, 5, 33, 37, 39].

Funções que satisfazem uma condição como (g_1) são ditas singulares. Problemas envolvendo não-linearidades singulares surgem em várias situações físicas, presentes na condutividade elétrica (Fulks e Maybee, 1960 [23]), na teoria dos fluidos pseudoplásticos (Callegari e Nashman, 1980 [10]), em superfícies mínimas singulares (Caffarelli, Hardt e Simon, 1984 [9]), em processos de reação-difusão, na obtenção de diversos índices geofísicos e em processos industriais, entre outros.

Em relação a soluções ground state para equações elípticas singulares, isto é, soluções positivas definidas em todo o espaço e tendendo a zero no infinito, existem muitos trabalhos, principalmente quando a não-linearidade não apresenta dependência do gradiente da solução. Entre eles, iniciamos citando os que determinaram a existência de pelo menos uma solução $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = p(x)g(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u(x) \longrightarrow 0 & \textit{quando } |x| \to \infty, \end{cases} \tag{3}$$

onde $p : \mathbb{R}^N \longrightarrow (0, \infty)$ é uma função localmente Hölder contínua que satisfaz

$$\int_0^\infty t\psi(t)dt < \infty, \quad \text{sendo} \quad \psi(t) = \max\{p(x) : |x| = t\}, \ t > 0,$$

e $g \in C^1((0,\infty),(0,\infty))$ satisfaz pelo menos duas das seguintes condições:

(g_1) g é não-crescente,

(g_2) $\lim_{t\to 0^+} g(t) = \infty$,

(g_3) g é limitada para t suficientemente grande,

(g_4) $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{g(t)}{t} = \infty$,

(g_5) $\dfrac{g(t)}{t+c}$ é decrescente para alguma constante $c \geq 0$,

(g_6) $\lim_{t\to\infty} \dfrac{g(t)}{t} = 0$.

Por exemplo, Lair e Shaker [35] em 1996 e Zhang [55] em 1997 mostraram que o problema (3) admite solução se g satisfaz (g_1) e (g_2). Em 1999, Cîrstea e Rădulescu [11] mostraram que o problema (3) admite solução quando g não é necessariamente monótona, porém satisfaz as condições (g_3), (g_4) e (g_5), com $c > 0$. Em [21], Feng e Liu estabeleceram, em 2004, a existência de uma solução ground state para o problema (3) quando g satisfaz as condições (g_2) e (g_3). Em 2006, Gonçalves e Santos [28] estabeleceram a existência de uma solução para (3) sob a hipótese que g satisfaz (g_4), (g_5) e (g_6), com $c = 0$. Finalmente Zhang [56] mostrou, em 2007, que (3) tem solução sob a condição que g satisfaça somente (g_4) e (g_6). Para maiores detalhes, referimos ao leitor os trabalhos [38, 30, 42].

Problemas em que a não-linearidade tem um termo gradiente (ou convectivo) surgem em teoria de controle estocástico (Lasry e Lions, 1989 [36]), no estudo de um campo eletromagnético (Stuart, 1991 [44], Stuart e Zhou, 1996 [45]), em um meio não-linear, entre outros.

Com relação a problemas envolvendo termo de convecção, podemos citar Dinu [15], que em 2003 garantiu a existência de uma única solução clássica para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)|\nabla u|^a = p(x)u^{-\gamma} & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u(x) \longrightarrow 0 & \text{quando } |x| \to \infty, \end{cases} \tag{4}$$

onde $N \geq 3$, a, $\gamma > 0$ e p, $q \in C^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ são tais que $p > 0$, $q \geq 0$ e

$$\int_0^\infty r\Phi(r)dr < \infty, \quad \text{onde} \quad \Phi(r) = \max_{|x|=r} p(x).$$

Considerando a ordem cronólogica deste pequeno relato, inserimos aqui o objeto de estudo do Capítulo 2, o trabalho de Ghergu e Rădulescu [32], que em 2007 determinaram existência de solução para o problema (1), relatado anteriormente. Ainda em 2007, este trabalho foi melhorado por Xue e Zhang [51], que consideraram (1) sem exigir qualquer monotonicidade sobre g e f , mas supondo

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{g(s)}{s}=\infty,\quad \lim_{s\to\infty}\frac{g(s)}{s}=0,\quad \lim_{s\to 0^+}\frac{f(s)}{s}=\infty \ \ e \ \ \lim_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s}=0.$$

Posteriormente, Xue e Shao [52, 53] melhoraram o trabalho de Dinu considerando $p(x)g(u)$ e $f(x,u)$, respectivamente, em vez de $p(x)u^{-\gamma}$ em (4), sob condições adequadas para g e f.

Gonçalves e Silva, [29] em 2010, trabalharam resultados de existência e não existência de solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u=\lambda p(x)(g(u)+|\nabla u|^a) & \text{em } \mathbb{R}^N,\\ \quad u>0 & \text{em } \mathbb{R}^N,\\ u(x)\longrightarrow 0 & \text{quando } |x|\to\infty, \end{cases} \qquad (P+)$$

onde $N\geq 3,\ 0<a<1$ e $\lambda>0$ é um parâmetro, $p:\mathbb{R}^N\longrightarrow(0,\infty)$ é localmente Hölder contínua e satisfaz

$$\int_0^\infty t\phi(t)dt<\infty \quad \text{ou} \quad \int_0^\infty t\phi(t)dt=\infty,$$

onde $\phi(r)=\max_{|x|=r}p(x),\ r\geq 0$. Além disso, $g:(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$ é C^1 e satisfaz

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{g(s)}{s}=\rho_0,\quad \lim_{s\to\infty}\frac{g(s)}{s}=\rho_\infty,\quad \text{onde } \rho_0\in(0,\infty] \ \ e\ \rho_\infty\in[0,\infty].$$

Para o caso em que $r\neq 2$, Wu e Yang [50], em 2010, mostraram a não existência de uma solução radialmente simétrica para o problema

$$\begin{cases} -div(|\nabla u|^{r-2}\nabla u)=p(x)(g(u)+f(u)+|\nabla u|^a) & \text{em } \mathbb{R}^N,\\ \qquad u>0 & \text{em } \mathbb{R}^N,\\ \qquad u(x)\longrightarrow 0 & \text{quando } |x|\to\infty, \end{cases}$$

onde p e f são funções radiais, $f\in C^{0,\alpha}_{loc}((0,\infty),(0,\infty))$, $N\geq 3$, $a\geq 0$, $g\in C^1((0,\infty),(0,\infty))$ e sublinear na origem e no infinito.

Finalmente, queremos terminar as citações do Capítulo 2 mencionando o trabalho de Covei [14], que em 2011 utilizou o método de shooting para mostrar a existência de uma solução $u \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ radialmente simétrica para o problema

$$\begin{cases} -div(|\nabla u|^{r-2}\nabla u) + b(x)|\nabla u|^{p-1} = a(u)f(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u(x) \longrightarrow 0 & \text{quando } |x| \to \infty, \end{cases}$$

onde $N \geq 3$, $1 < r < N$, a, $b : \mathbb{R}^N \longrightarrow (0, \infty)$ são funções radiais contínuas e a satisfaz

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty s^{\frac{1}{r-1}} a(s)^{\frac{1}{r-1}} ds < \infty, & \text{se } 1 < r \leq 2, \\ \displaystyle\int_0^\infty s^{\frac{(r-2)N+1}{r-1}} a(s) ds < \infty, & \text{se } 2 \leq r < N, \end{cases}$$

sendo $f : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ de classe C^1, singular no zero, $\lim\limits_{s \to \infty} f(s)/s^{r-1} = 0$ e a função $s \longmapsto f(s)/s^{r-1}$ é não crescente em $(0, \infty)$.

No **Capítulo 3** deste trabalho apresentamos um resultado pioneiro devido a Djairo de Figueiredo, Mario Girardi e Michele Matzeu [16], que em 2004 consideraram a solubilidade do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, \nabla u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

onde Ω é um domínio suave limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Este tipo de equações não tem sido extensivamente estudado por métodos variacionais como no caso em que não existe a presença do gradiente. A razão é que, contrariamente ao último caso, a equação em (5) não é variacional. Assim, a teoria do ponto crítico não é adequada para um ataque direito ao problema. A técnica usada neste trabalho consiste em associar, ao problema (5), o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, \nabla \omega) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

onde $\omega \in H_0^1(\Omega)$ não depende de u.

Agora o problema (6) é variacional e podemos tratá-lo por métodos variacionais. Especificamente, utilizaremos a técnica do Passo da Montanha para abordar o problema (6). Para este fim, atribuiremos hipóteses sobre f de tal forma que o problema (6) possa ser tratado pelo Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti e Rabinowitz [7]. Nosso primeiro conjunto de hipóteses sobre a não linearidade f é o seguinte:

(f_0) $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz contínua;

(f_1) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(x,t,\xi)}{t}=0$ uniformemente, para $x\in\overline{\Omega},\ \xi\in\mathbb{R}^N$;

(f_2) existem constantes $a_1>0$ e $p\in(1,\frac{N+2}{N-2})$ tais que

$$|f(x,t,\xi)|\leq a_1(1+|t|^p),\quad \text{para todos } x\in\overline{\Omega},\ t\in\mathbb{R},\ \xi\in\mathbb{R}^N;$$

(f_3) existem constantes $\theta>2$ e $t_0>0$ tais que

$$0<\theta F(x,t,\xi)\leq tf(x,t,\xi),\quad \text{para todos } x\in\overline{\Omega},\ |t|\geq t_0,\ \xi\in\mathbb{R}^N,$$

onde

$$F(x,t,\xi)=\int_0^t f(x,s,\xi)ds;$$

(f_4) existem constantes $a_2,\ a_3>0$ tais que

$$F(x,t,\xi)\geq a_2|t|^\theta-a_3,\quad \text{para todos } x\in\overline{\Omega},\ t\in\mathbb{R},\ \xi\in\mathbb{R}^N.$$

Sob este conjunto de hipóteses, podemos utilizar o Teorema do Passo da Montanha para mostrar o seguinte resultado:

Teorema 0.2. *Suponha que* $(f_0)-(f_4)$ *sejam satisfeitas. Então existem constantes positivas* c_1 *e* c_2 *tais que, para cada* $\omega\in H_0^1(\Omega)$*, o problema* (6) *tem uma solução fraca* u_ω *tal que*

$$c_1\leq\|u_\omega\|\leq c_2.$$

Além disso, (6) *possui pelo menos uma solução positiva e uma solução negativa.*

Para obter uma solução para o problema (5), é necessário adicionar a seguinte hipótese:
(f_5) a função f satisfaz as seguintes condições Lipschitz locais:

(i) $|f(x,t',\xi)-f(x,t'',\xi)|\leq L_1\,|t'-t''|,$ para todos $x\in\overline{\Omega},\ t',\ t''\in[0,\rho_1],\ |\xi|\leq\rho_2,$

(ii) $|f(x,t,\xi')-f(x,t,\xi'')|\leq L_2|\xi'-\xi''|,$ para todos $x\in\overline{\Omega},\ t\in[0,\rho_1],\ |\xi'|,\ |\xi''|\leq\rho_2,$

onde ρ_1 e ρ_2 dependem explicitamente de p, N, θ, a_1, a_2, a_3 dados nas hipóteses anteriores.
O Teorema 0.2 nos garante a existência de uma sequência $(u_n)\subset H_0^1(\Omega)$ de soluções para a família de problemas

$$\begin{cases}-\Delta u_n=f(x,u_n,\nabla u_{n-1}) & \text{em } \Omega,\\ u_n=0 & \text{sobre } \partial\Omega,\end{cases}$$

o que nos permite, mediante um procedimento padrão, mostrar que existe $u \in H_0^1(\Omega)$ positiva satisfazendo o problema (5). Mediante um argumento bootstrap, mostramos que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, isto é, mostramos o resultado principal do Capítulo 3, a saber:

Teorema 0.3. *Suponha que as condições $(f_0)-(f_5)$ sejam válidas. Então o problema (5) tem uma solução positiva e uma solução negativa, desde que*

$$\lambda_1^{-1} L_1 + \lambda_1^{-\frac{1}{2}} L_2 < 1,$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Além disso, a solução obtida é de classe C^2.

Vários trabalhos tratam o problema (5) usando sub e supersolução, o grau topológico, teoremas de ponto fixo e método de Galerkin. Veja, por exemplo, [3, 4, 18, 41, 54]. Em [16] os autores desenvolveram um método completamente diferente de tipo variacional. Com base na suposição que f tem um crescimento subcrítico com um comportamento superlinear na origem e no infinito com respeito à segunda variável, obtiveram a existência de uma solução positiva e uma solução negativa para o problema (5), usando o Teorema do Passo da Montanha e uma técnica iterativa.

A mesma ideia de [16] foi utilizada, ainda no ano 2004, por Girardi e Matzeu [26], que estudaram o mesmo problema (5) supondo que f satisfaz $(f_0), (f_1)$, $(f_3)-(f_5)$ com a hipótese adicional:

$(\tilde{f}_2)$ existem constantes $a_1 > 0$ e $p \in (1, \frac{N+2}{N-2})$, $r \in (0,1)$ tais que

$$|f(x,t,\xi)| \leq a_1(1+|t|^p)(1+|\xi|^r), \quad \text{para todos } x \in \overline{\Omega},\ t \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Na aplicação da técnica, a novidade deste trabalho consiste em considerar um conveniente truncamento da função f, para o qual não há dependência do gradiente no infinito. Referimos ainda, ao leitor, os trabalhos [25, 27] dos mesmos autores.

Em 2008, Giovany Figueiredo [19] utilizou este mesmo método para equações elípticas quasilineares e mostrou a existência de uma solução para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(u, |\nabla u|^{p-2}\nabla u), \\ \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N),\ u(x) > 0,\ \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $1 < p < N$ e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua que verifica condições análogas a (f_1), $(f_3)-(f_5)$ e satisfaz:

- $f(s, |\xi|^{p-2}\xi) = 0$ para todos $s < 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^N$;

- existe $q \in (p, p^*)$ tal que $\displaystyle\lim_{|s|\to+\infty} \frac{|f(s, |\xi|^{p-2}\xi)|}{|s|^{q-1}} = 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$;

- $s \longmapsto \dfrac{f(s, |\xi|^{p-2}\xi)}{s^{p-1}}$ é crescente para cada $s > 0$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Em 2010, este mesmo método foi aplicado por Teng e Zhang [46] para investigar a existência de soluções para um problema envolvendo equações diferenciais impulsivas. Em 2012, Liu, Shi e Wei [31] mostraram, mediante a teoria de Morse e uma técnica iterativa, que o problema (5) possui pelo menos uma solução sob a suposição de que f tem um crescimento assintoticamente linear no zero e no infinito com relação à segunda variável.

No Capítulo 4 deste trabalho encontram-se a verificação de algumas das afirmações feitas nos Capítulos 2 e 3 e as demonstrações de alguns resultados técnicos.

Com a intenção de facilitar a leitura desta dissertação, repetimos, em seus respectivos capítulos, os enunciados e as hipóteses dos resultados principais.

Capítulo

1

Noções preliminares e resultados auxiliares

Neste capítulo enunciamos as principais definições e teoremas utilizados no decorrer deste trabalho.

Definição 1.1. *[1] Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N}$. O espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ é definido como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma $\| \cdot \|_{W^{k,p}}$, isto é,*

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}}}.$$

Observação 1.2. *O espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$ será denotado por $H_0^1(\Omega)$ e sua norma dada por*

$$\|u\| := \|u\|_{W_0^{1,2}} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \textit{para todo } u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Definição 1.3. *[48] Seja X um espaço de Banach. Uma aplicação $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada um funcional. Acerca de um funcional $I : U \longrightarrow \mathbb{R}$, onde U é um subconjunto aberto de X, dizemos que:*

(i) tem derivada de Gateaux $T \in X^*$ em $u \in U$ se, para todo $h \in X$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[I(u + th) - I(u) - \langle T, th \rangle] = 0.$$

A derivada de Gateaux em u é denotada por $I'(u)$;

(*ii*) *tem derivada de Fréchet* $T \in X^*$ *em* $u \in U$ *se*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\|h\|}[I(u+h) - I(u) - \langle T, h\rangle] = 0;$$

(*iii*) *pertence a* $C^1(U,\mathbb{R})$ *se a derivada de Fréchet de* I *existe e é contínua em* U*;*

(*iv*) *um ponto crítico* u *de* I *é um ponto em que* $I^{'}(u) = 0$*, isto é,*

$$\langle I^{'}(u), \varphi\rangle = 0, \quad \textit{para todo } \varphi \in X.$$

No Capítulo 3, são utilizados o Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue e algumas desigualdades auxiliares, que seguem enunciadas abaixo.

Teorema 1.4. (***Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue***)*[47]* *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um subconjunto mensurável. Suponha que* (f_n) *é uma sequência de funções mensuráveis sobre* Ω *tais que* $f_n \longrightarrow f$*, q.t.p. em* Ω*, quando* $n \to \infty$*. Se existe* $\phi \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|f_n| \leq \phi$ *q.t.p. em* Ω*, para todo* n*, então*

$$\int_\Omega f_n \longrightarrow \int_\Omega f, \quad \textit{quando } n \to \infty.$$

Teorema 1.5. *[8] Sejam* (f_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$*, tais que* $\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$*, quando* $n \to \infty$*. Então existe uma subsequência* (f_{n_k}) *tal que*

1. $f_{n_k} \longrightarrow f$ *q.t.p. em* Ω*, quando* $n_k \to \infty$*;*

2. $|f_{n_k}| \leq \phi(x)$ *q.t.p. em* Ω*, para todo* k*, com* $\phi \in L^p(\Omega)$*.*

Teorema 1.6. *[1] Se* $1 \leq p < \infty$ *e* $a,\ b \geq 0$*, então*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Teorema 1.7. (***Desigualdade de Young***)*[20] Sejam* $1 < p,\ q < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\ , \quad \textit{para todos } a,\ b > 0.$$

Teorema 1.8. (***Desigualdade de Hölder***)*[20] Suponha que* $1 \leq p,\ q \leq \infty,\ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Então, se* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^q(\Omega)$*, temos que*

$$\int_\Omega |uv|\ dx \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Para o desenvolvimento do processo diagonal e o argumento bootstrap, feitos nos Capítulos 2 e 3, respectivamente, necessitamos das imersões de Sobolev e Hölder.

Definição 1.9. *[20] Sejam X e Y espaços de Banach tais que $X \subset Y$. Dizemos que X está imerso continuamente em Y, e escrevemos $X \hookrightarrow Y$, desde que*

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \text{para todo } x \in X \quad \text{e para alguma constante } C > 0.$$

Dizemos que X está imerso compactamente em Y, e escrevemos $X \overset{cpct}{\hookrightarrow} Y$, desde que $X \hookrightarrow Y$ e cada sequência limitada em X é precompacta em Y.

Teorema 1.10. (***Imersão de Hölder***)*[1] Sejam $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 < \nu < \gamma \leq 1$, então*

1. $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \overset{cpct}{\hookrightarrow} C^k(\overline{\Omega})$;
2. $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \overset{cpct}{\hookrightarrow} C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$.

Teorema 1.11. (***Imersão de Sobolev***)*[17] Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado satisfazendo a propriedade do cone, $m > 0$, $j \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$. Então,*

1. *Se $m < \frac{N}{p}$,*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad \text{para todo } p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp};$$

2. *Se $m = \frac{N}{p}$,*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad \text{para todo } p \leq q < \infty;$$

3. *Se $m > \frac{N}{p} > m-1$ e Ω tem a propriedade Lipschitz local,*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}), \quad \text{para } 0 < \lambda \leq m - \frac{N}{p}.$$

Observação 1.12. *Um domínio Ω satisfaz a propriedade do cone se existe um cone limitado K tal que qualquer $x \in \Omega$ é o vértice de um cone K_x congruente a K e inteiramente contido em Ω.*

Teorema 1.13. (***Imersão compacta***)*[17] Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado satisfazendo a propriedade do cone, $m \geq 1$, $j \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$. Então*

1. *Se $m < \frac{N}{p}$,*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \overset{cpct}{\hookrightarrow} W^{j,q}(\Omega), \quad \text{para todo } 1 \leq q < \frac{Np}{N-mp};$$

2. Se $m = \frac{N}{p}$,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \overset{cpct}{\hookrightarrow} W^{j,q}(\Omega), \quad \textit{para todo } 1 \leq q < \infty;$$

3. Se $m > \frac{N}{p} > m - 1$ *e* Ω *tem a propriedade Lipschitz local,*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \overset{cpct}{\hookrightarrow} C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}), \quad \text{para } 0 < \lambda < m - \frac{N}{p}.$$

Neste trabalho, consideramos o operador diferencial parcial linear de segunda ordem L, tendo uma das seguintes formas:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \tag{1.1}$$

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} (a^{i,j}(x)u_{x_i} + b^i(x)u) + \sum_{i=1}^{N} c^i(x)u_{x_i} + d(x)u, \tag{1.2}$$

onde os coeficientes $a^{ij}, \ b^i, \ c : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas.

Definição 1.14. *[24] O operador L será dito na forma não divergente se é dado por* (1.1) *e na forma divergente se é dado por* (1.2).

Observação 1.15. *Se não for indicado o contrário, L estará na forma não divergente.*

Definição 1.16. *[24] Dizemos que o operador* L *é elíptico no ponto* $x \in \Omega$ *se a forma quadrática associada à matriz* $A(x) = [(a^{ij}(x))]$ *é positiva definida, isto é, se* $\lambda(x)$ *denota o menor autovalor de* A*, então*

$$\sum_{ij=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda(x)|\xi|^2 > 0,$$

para todo $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$*. O operador* L *é elíptico em* Ω *se for elíptico em cada ponto de* Ω*. Finalmente, dizemos que* L *é uniformemente elíptico em* Ω *se existe* $\theta_0 > 0$ *tal que* $\lambda(x) \geq \theta_0$ *para todo* $x \in \Omega$*.*

Agora, podemos apresentar alguns teoremas clássicos que nos auxiliarão na obtenção dos resultados principais deste trabalho.

Lema 1.17. (***Lema de Hopf***)*[24] Suponha que* $B \subset \mathbb{R}^N$ *é uma bola aberta,* L *é um operador uniformemente elíptico em* B*,* $u \in C^2(B)$ *e* $Lu \geq 0$ *em* B *. Suponha ainda que existe* $x_0 \in \partial B$ *tal que* u *é contínua em* x_0 *e* $u(x) < u(x_0)$ *para todo* $x \in B$*. Então,* (*i*) *se* $c = 0$ *em* B *e existe a derivada normal* $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0)$, *então* $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0$.

(*ii*) *se* $c \leq 0$ *em* B *e* $u(x_0) \geq 0$ *então vale o mesmo resultado do item acima.*

Teorema 1.18. *[24] Suponha que* $u \in C^2(\Omega)$, $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ *satisfazem* $\Delta u = f$ *em* Ω. *Então* $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Teorema 1.19. (***Agmon, Douglis, Nirenberg***)*[6] Suponha que* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é um domínio de classe* C^2 *com* $\partial\Omega$ *limitada,* $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ *e* $u \in H_0^1(\Omega)$ *é solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0 & em\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Então $u \in W^{2,p}(\Omega)$ *e existe uma constante* $C = C(\Omega, p) > 0$ *tal que*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Teorema 1.20. (***Schauder***)*[17] Suponha que* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é um domínio limitado de classe* $C^{2,\gamma}$, $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, $0 < \gamma < 1$ *e* $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ *é solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0 & em\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Então $u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ *e existe uma constante* $C = C(\Omega, \gamma) > 0$ *tal que*

$$\|u\|_{C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C\|f\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}.$$

Teorema 1.21. (***Estimativa interior de Schauder***)*[17] Seja* L *um operador uniformemente elíptico com*

$$\max\{\|a^{ij}\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})},\ \|b^i\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})},\ \|c\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} : i, j = 1, \ldots, n\} \leq \alpha.$$

Então para Ω_0, Ω_1, *com* $\Omega_0 \subset\subset \Omega_1$, *existe uma constante* $C = C(N, \gamma, \theta_0, \alpha) > 0$ *tal que*

$$\|u\|_{C^{2,\gamma}(\Omega_0)} \leq C\{\|Lu\|_{C^{0,\gamma}(\Omega_1)} + \|u\|_{C(\Omega_1)}\}, \quad \textit{para todo } u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Lema 1.22. (***Estimativa interior*** L^p) *[1] Sejam* Ω_0, Ω *domínios limitados de* $\mathbb{R}^N$ *com* $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$. *Suponha que* L *é um operador diferencial parcial linear de segunda ordem uniformemente elíptico com coeficientes contínuos em* $\overline{\Omega}$ *e* $q > N$. *Então, existe uma* *constante K tal que*

$$\|w\|_{W^{2,q}(\Omega_0)} \leq K(\|Lw\|_{L^q(\Omega)} + \|w\|_{L^q(\Omega)}),$$

para todo $w \in W^{2,q}(\Omega)$.

O teorema enunciado a seguir encontra-se em Gilbarg e Trudinger [24] (Teorema 8.19) e será utilizado para demonstrar que a solução obtida no Teorema 0.2 é estritamente positiva (ou estritamente negativa).

Teorema 1.23. *[24] Seja L um operador diferencial na forma divergente satisfazendo:*

1. *Existem constantes Λ e ν tais que*

$$\sum_{i,j=1}^{N} |a^{ij}(x)|^2 \leq \Lambda^2, \quad \lambda^{-2}\sum_{i=1}^{N}(|b^i(x)|^2 + |c^i(x)|^2) + \lambda^{-1}|d(x)|^2 \leq \nu^2,$$

2.

$$\int (d(x)v(x) - b^i v_{x_i})\ dx \leq 0, \quad \text{para todo } v \geq 0, v \in C_0^1(\Omega),$$

e $u \in W^{1,2}(\Omega)$ satisfazendo $Lu \geq 0$ em Ω. Então, se para alguma bola $B \subset\subset \Omega$ temos que $\sup\limits_B u(x) = \sup\limits_\Omega u(x) \geq 0$, a função u é constante em Ω.

Nosso próximo objetivo é enunciar o Teorema da estimativa interior gradiente de Ladyzenskaya e Ural'tseva [34] que nos permite obter, no Capítulo 2 deste texto, uma cota superior independente de n para a sequência $(|\nabla u_n|)$, onde cada u_n é solução do problema (2) sobre B_n, $n \geq 1$. Para isto, considere a seguinte equação na forma divergente:

$$\frac{d}{dx_i} a_i(x, u, \nabla u) + a(x, u, \nabla u) = 0, \tag{1.3}$$

onde $a(x, s, p) = a(x_1, \ldots, x_N, s, p_1, \ldots, p_N)$ e $a_i(x, s, p) = a_i(x_1, \ldots, x_N, s, p_1, \ldots, p_N)$, $i = 1, \ldots, N$, são funções dadas.

Definição 1.24. *[34] Uma função $u \in W^{m,p}(\Omega)$ é chamada solução limitada generalizada da equação (1.3), desde que $\max\limits_{\overline{\Omega}} |u| < \infty$ e*

$$\int_\Omega [a_i(x, u, \nabla u)\eta_{x_i} - a(x, u, \nabla u)\eta]\ dx = 0,$$

para toda função arbitrária limitada $\eta \in W_0^{m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.25. (***Estimativa interior gradiente de Ladyzenskaya e Ural'tseva***) *[34] Considere* (1.3)*, onde as funções* $a(x,u,\nabla u)$ *e* $a_i(x,u,\nabla u)$*,* $i = 1,\ldots,N$ *são mensuráveis para* $x \in \overline{\Omega}$*,* u *e* p *arbitrários, e* $a_i(x,u,\nabla u)$ *são diferenciáveis com respeito a* x*,* u*,* p*. Além disso, satisfazem*

1. $\upsilon(|u|)(1+|p|)^{m-2}|\xi|^2 \leq \dfrac{\partial a_i(x,u,p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \leq \mu(|u|)(1+|p|)^{m-2}|\xi|^2$*, para* $\xi \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$*.*

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(|\frac{\partial a_i}{\partial u}| + |a_i|\right)(1+|p|) + \sum_{i,j+1}^{N}\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right| \leq \mu(|u|)(1+|p|)^m,$

onde $m \geq 1$ *e* υ*,* μ *são funções contínuas definidas para* $t \geq 0$ *tais que* υ *é positiva não crescente e* μ *não decrescente. Sejam* u *uma solução generalizada limitada da equação* (1.3) *em* $W^{1,2}(\Omega)$ *e* $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ *tais que*

3. $\displaystyle\int_{\Omega_0}(1+|\nabla u|)^{m-2}\sum_{i,j=1}^{N}u_{x_ix_j}^2\, dx < \infty,$

4. $\displaystyle\int_{\Omega_0}|\nabla u|^{m+2}dx < \infty.$

Então, o $\max\limits_{\Omega_0}|\nabla u|$ *é limitado por uma expressão em termos de* $\max\limits_{\Omega}|u|$*,* m*,* $\upsilon(\max\limits_{\Omega}|u|)$*,* $\mu(\max\limits_{\Omega}|u|)$ *e a distância de* Ω_0 *a* $\partial\Omega$*.*

Enunciaremos, agora, alguns resultados para o problema de autovalor do laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet.

Teorema 1.26. *[20] Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *com fronteira de classe* C^∞ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Se* $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ *é uma solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda\varphi & \text{em } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

então $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$*.*

Teorema 1.27. *[20].*

(i) O problema (1.4) *possui uma sequência de autovalores*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \cdots, \quad \textit{tal que } \lambda_k \longrightarrow \infty \textit{ quando } k \to \infty.$$

Além disso, $\lambda_1 = \inf\limits_{\substack{v\neq 0\\ v\in H_0^1(\Omega)}} \dfrac{\|v\|^2}{\|v\|_2^2}$*.*

(*ii*) *Se* φ_1 *é uma autofunção associada ao primeiro autovalor* λ_1 *do problema* (1.4)*, então* $\varphi_1 > 0$ *em* Ω.

Apresentamos, agora, alguns resultados sobre funcionais lineares e o Teorema do Passo da Montanha, devido a Ambrosetti-Rabinowitz [7], que é a ferramenta essencial do Capítulo 3 deste trabalho.

Proposição 1.28. *[48] Se* I *tem derivada de Gateaux contínua em* U*, então* $I \in C^1(U, \mathbb{R})$.

Definição 1.29. *[7] Seja* X *um espaço de Banach. Dizemos que* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ *satisfaz a condição de Palais-Smale no nível* c ($(PS)_c$)*, se toda sequência* $(u_n) \subset X$ *satisfazendo*

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = c \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \|I'(u_n)\|_{X^*} = 0$$

possui uma subsequência convergente.

Teorema 1.30. (***Teorema do Passo da Montanha***)*[7] Seja* X *um espaço de Banach e* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ *tal que* $I(0) = 0$ *e*

(I_1) *existem* ρ, $\alpha > 0$ *tais que* $I(v) \geq \alpha$*, para todo* $v \in \partial B_\rho(0)$;

(I_2) *existe* $\boldsymbol{e} \in X$ *tal que* $\|\boldsymbol{e}\|_X > \rho$ *e* $I(\boldsymbol{e}) \leq 0$.

Suponha que I *satisfaça* $(PS)_c$*, com*

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \ \text{ e } \ \gamma(1) = \boldsymbol{e}\}$*. Então existe* $u \neq 0$ *tal que* $I(u) = c$ *e* $I'(u) = 0$.

Proposição 1.31. *[8] Seja* X *um espaço de Banach. Se* $x_n \rightharpoonup x$ *fracamente em* X *e se* $I_n \longrightarrow I$ *fortemente em* X^**, quando* $n \to \infty$*, então* $\langle I_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle I, x\rangle$*, quando* $n \to \infty$.

Finalmente, terminamos este capítulo enunciando algumas definições e resultados técnicos necessários para o Capítulo 2 deste trabalho.

Lema 1.32. (***Existence, Gonçalves e Santos***)*[28] Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado com fronteira suave. Suponha que* $b \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *com* $b(x) > 0$*, para todo* $x \in \overline{\Omega}$*, e* $g \in C^1((0,\infty),(0,\infty))$ *satisfaz*

1. $\displaystyle\lim_{s\to 0^+} \frac{g(s)}{s} = \infty \quad e \quad \lim_{s\to\infty} \frac{g(s)}{s} = 0;$

2. $\dfrac{g(s)}{s}$ *é decrescente em* $(0, \infty)$.

Então, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = b(x)g(u) & em\ \Omega, \\ u > 0 & em\ \Omega, \\ u = 0 & em\ \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma única solução $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

A seguir, enunciamos as definições de subsolução e supersolução para o seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta u + f(x,u,Du) = 0 & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

onde a função f satisfaz

(i) $f(x,u,\xi)$ é localmente Hölder contínua em $\Omega \times (0,\infty) \times \mathbb{R}^N$ e continuamente diferenciável em u e ξ.

(i) Para todo $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ e quaisquer $a, b \in (0,\infty)$ $(a < b)$, existe uma constante C tal que

$$|f(x,u,\xi)| \leq C(1 + |\xi|^2), \quad \text{para todos } x \in \overline{\Omega},\ u \in [a,b],\ \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Definição 1.33. *Uma função* $\underline{u}$ *é chamada uma subsolução do problema* (1.5) *se*

$$\begin{cases} \triangle\underline{u} + f(x,u,Du) \geq 0 & em\ \Omega, \\ \underline{u} > 0 & em\ \Omega, \\ \underline{u} = 0 & em\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Definição 1.34. *Uma função* $\overline{u}$ *é chamada uma supersolução do problema* (1.5) *se*

$$\begin{cases} \triangle\overline{u} + f(x,u,Du) \leq 0 & em\ \Omega, \\ \overline{u} > 0 & em\ \Omega, \\ \overline{u} = 0 & em\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Podemos, agora, enunciar o Teorema de sub e supersolução devido a Cui e que será utilizado no Capítulo 2 deste trabalho.

Teorema 1.35. *[12] Suponha que o problema* (1.5) *tenha uma supersolução* $\overline{u}$ *e uma subsolução* $\underline{u}$ *satisfazendo as seguintes condições :*

- $\overline{u},\ \underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$;
- $0 < \underline{u} \leq \overline{u}$ *em* Ω;
- $\underline{u} = \overline{u} = 0$ *em* $\partial\Omega$.

Então, o problema (1.5) *tem pelo menos uma solução* $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$, *com* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ *em* Ω.

Para obtermos uma supersolução para o problema (2), necessitamos dos seguintes resultados:

Teorema 1.36. *[2] Considere o seguinte problema:*

$$\begin{cases} y''(t) + f(t,y) = 0 \quad em \ \ 0 < t < 1, \\ y(0) = a, \ \ y(1) = b, \end{cases} \tag{1.6}$$

e suponha que as seguintes condições são satisfeitas:

1. $y \longmapsto f(t,y)$ *é contínua, para quase todo* $t \in [0,1]$;
2. $t \longmapsto f(t,y)$ *é mensurável, para todo* $y \in (0,\infty)$;
3. *para cada* $r > 0$, *existe* $h_r \in L^1_{loc}(0,1)$ *com* $\displaystyle\int_0^1 t(1-t)h_r dt < \infty$ *tal que* $|y| \leq r$ *implica* $|f(t,y)| \leq h_r(t)$, *para quase todo* $t \in (0,1)$;
4. *para toda solução* $y \in AC[0,1]$ (*com* $y' \in AC_{loc}(0,1)$) *de*

$$\begin{cases} y''(t) + \lambda f(t,y) = 0 \quad em \ \ 0 < t < 1, \\ y(0) = a, \ \ y(1) = b, \end{cases}$$

onde $\lambda \in (0,1)$, *existe* $M > |a| + |b|$, *independente de* λ, *com* $\|y\|_{C([0,1])} \neq M$.

Então o problema (1.6) *tem uma solução* y *com* $\|y\|_{C([0,1])} \leq M$.

Observação 1.37. $AC[0,1]$ *denota o espaço das funções absolutamente contínuas em* $[0,1]$.

Teorema 1.38. *Seja*

$$\begin{cases} y''(t) + g(y(t)) = 0 \quad \text{em } 0 < t < 1, \\ \quad y(0) = y(1) = 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

onde $g \in C^1((0,\infty))$ *é positiva e decrescente . Então o problema* (1.7) *tem uma solução* $y \in C([0,1]) \cap C^2((0,1))$, *com* $y > 0$ *em* $(0,1)$.

Este teorema é uma particularização de um teorema mais geral, devido a Agarwal e O'Regan [2]. Dada à importância deste resultado, sua demonstração encontra-se no Apêndice deste trabalho.

Capítulo

2

Soluções ground state para a equação de Lane-Emden-Fowler singular com termo de convecção sublinear

Introdução

Neste capítulo, estamos interessados no seguinte tipo de problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = p(x)(g(u) + f(u) + |\nabla u|^a) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u(x) \longrightarrow 0 & \text{quando } |x| \to \infty, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $N \geq 3$, $0 < a < 1$ e $p : \mathbb{R}^N \longrightarrow (0, \infty)$ é uma função Hölder contínua de expoente $0 < \gamma < 1$ tal que

(p_1) $\displaystyle\int_1^\infty t\ \phi(t)\ dt < \infty$, onde $\phi(r) = \max_{|x|=r} p(x)$.

Assumiremos também que $g \in C^1((0, \infty))$ é uma função decrescente e positiva tal que

(g_1) $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} g(t) = +\infty$,

e a função $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ é não-decrescente e positiva em $(0, \infty)$, $f \in C^1((0, \infty))$ e satisfaz

(f_1) a função $t \longmapsto \dfrac{f(t)}{t}$ é não-crescente, para todo $t \in (0, \infty)$.

(f_2) $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t} = +\infty$ e $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = 0.$

Observação 2.1. *Exemplos de funções g e f que satisfazem as hipóteses anteriores são :*
$g : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty),\ g(s) = s^{-\beta}$, *onde* $0 < \beta < \infty$;
$f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty),\ f(s) = s^{\gamma}$, *onde* $0 < \gamma < 1$.

O principal resultado deste capítulo deve-se a Ghergu e Rădulescu [32] e segue enunciado abaixo.

Teorema 2.2. *Suponha que (f_1), (f_2), (g_1) e (p_1) sejam satisfeitas. Então, o problema* (2.1) *tem pelo menos uma solução $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.*

2.1 Existência de uma solução positiva em domínios limitados

Iniciamos esta seção mostrando a existência de uma solução positiva para o problema (2.1), em domínios limitados, usando o método de sub e supersolução.

Lema 2.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave limitado. Suponha que f e g satisfaçam $(f_1), (f_2)$ e (g_1), respectivamente. Então, o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = p(x)(g(u) + f(u) + |\nabla u|^a) & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

tem pelo menos uma solução $u \in C^{2,\gamma}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Demonstração. As hipóteses sobre f e g implicam que $m = \inf_{t>0}\{f(t) + g(t)\} > 0$. Logo, pelo Lema 1.32, existe $\underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} = mp(x) & \text{em } \Omega, \\ \underline{u} > 0 & \text{em } \Omega, \\ \underline{u} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim, $\underline{u}$ é uma subsolução de (2.2), visto que

$$-\Delta \underline{u} = mp(x) \leq p(x)(g(\underline{u}) + f(\underline{u})) \leq p(x)(g(\underline{u}) + f(\underline{u}) + |\nabla \underline{u}|^a).$$

Por outro lado, considere $h : [0,1] \longrightarrow [0,\infty)$, $h \in C([0,1]) \cap C^2((0,1))$ solução do problema

$$\begin{cases} h^{''}(t) = -g(h(t)) & \text{em } 0 < t < 1, \\ h > 0 & \text{em } 0 < t < 1, \\ h(0) = h(1) = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

A existência de h é garantida pelo Teorema 1.38 de Argarwal and O'Regan [2]. Como $h^{''}(t) = -g(h(t)) < 0$, segue que h é côncava. Assim,

(h_1) $h^{'}(0^+) \in (0,\infty]$.

Além disso, como $h \in C([0,1]) \cap C^2((0,1))$ podemos supor, tomando $\eta \in (0,1)$ suficientemente pequeno, que

(h_2) $h^{'} > 0$ em $(0,\eta]$, isto é, h é crescente em $(0,\eta]$;

(h_3) $g(h(t)) \geq 1$ em $(0,\eta]$, o que segue de (h_2), do fato de termos $h(0) = 0$ e da hipótese (g_1).

Logo, multiplicando a equação em (2.3) por $h^{'}$ e integrando de $t(t < \eta)$ a η, obtemos

$$\int_t^\eta h^{''}(\xi)h^{'}(\xi)\ d\xi = -\int_t^\eta g(h(\xi))h^{'}(\xi)\ d\xi,$$

o que nos dá

$$\frac{(h^{'}(t))^2}{2} = \int_t^\eta g(h(\xi))h^{'}(\xi)\ d\xi + \frac{(h^{'}(\eta))^2}{2}.$$

Assim, para $t \in (0,\eta)$ podemos utilizar (h_2), o fato de serem g decrescente e h positiva em $t \in (0,1)$, para obter

$$\begin{aligned} (h^{'}(t))^2 &= 2\int_t^\eta g(h(\xi))h^{'}(\xi)d\xi + (h^{'}(\eta))^2 = 2\int_{h(t)}^{h(\eta)} g(\tau)d\tau + (h^{'}(\eta))^2 \\ &\leq 2\int_{h(t)}^{h(\eta)} g(h(t))d\tau + (h^{'}(\eta))^2 = 2g(h(t))(h(\eta) - h(t)) + (h^{'}(\eta))^2 \\ &\leq 2g(h(t))h(\eta) + (h^{'}(\eta))^2, \ \text{ onde } \tau = h(\xi). \end{aligned}$$

Posto que $s^a \leq s^2 + 1$ para todo $s \geq 0$ e $0 < a < 1$, da desigualdade anterior e de (h_3) obtemos

$$\begin{aligned} (h^{'}(t))^a &\leq (h^{'}(t))^2 + 1 \leq 2g(h(t))h(\eta) + (h^{'}(\eta))^2 + 1 \\ &\leq 2g(h(t))h(\eta) + ((h^{'}(\eta))^2 + 1)g(h(t)) \\ &\leq C_1 g(h(t)), \ \text{para todo } t \in (0,\eta), \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde $C_1 = \max\{2h(\eta), (h'(\eta))^2 + 1\}$.
Seja φ_1 a autofunção positiva normalizada correspondente ao primeiro autovalor λ_1 de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$. Pelo Teorema 1.26, podemos concluir que $\varphi_1 \in L^\infty(\Omega)$, o que nos permite fixar $C_2 > 0$ tal que

$$C_2\|\varphi_1\|_\infty \leq \eta. \tag{2.5}$$

Pelo Lema 1.17, existe $W \subset\subset \Omega$ e $\delta > 0$ (veja apêndice) tal que

$$\begin{cases} |\nabla\varphi_1| > \delta & \text{em } \Omega \setminus W, \\ \varphi_1 > \delta & \text{em } W. \end{cases} \tag{2.6}$$

Usando (g_1) obtemos

$$\lim_{t\to 0^+}((C_2\delta)^2 g(h(t)) - 3\max_{x\in\overline{\Omega}} p(x)f(h(t))) = (C_2\delta)^2 \lim_{t\to 0^+} g(h(t)) - 3\max_{x\in\overline{\Omega}} p(x)f(h(0))) = +\infty.$$

Disto segue que existe $t_0 > 0$ tal que

$$(C_2\delta)^2 g(h(t)) > 3\max_{x\in\overline{\Omega}} p(x)f(h(t)), \quad \text{para todo } t \in (0, t_0). \tag{2.7}$$

Tomando δ em (2.6) menor, se necessário, obtemos que

$$0 < C_2\varphi_1 \leq C_2\delta < t_0, \ \text{em } \Omega \setminus W.$$

Assim, de (2.7) temos

$$(C_2\delta)^2 g(h(C_2\varphi_1)) > 3\max_{x\in\overline{\Omega}} p(x)f(h(C_2\varphi_1)), \ \text{em } \Omega \setminus W. \tag{2.8}$$

Usando (f_2), segue que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(th(C_2\|\varphi_1\|_\infty))}{t} = h(C_2\|\varphi_1\|_\infty) \lim_{t\to\infty} \frac{f(th(C_2\|\varphi_1\|_\infty))}{th(C_2\|\varphi_1\|_\infty)} = 0.$$

Logo, existe $M_1 > 1$ tal que

$$\frac{f(th(C_2\|\varphi_1\|_\infty))}{t} < \frac{C_2\lambda_1 \inf\limits_{\overline{W}} \varphi_1(x)h'(\eta)}{3\max\limits_{\overline{\Omega}} p(x)}, \ \ \text{para todo } t \geq M_1. \tag{2.9}$$

Fixemos $M \geq M_1 > 1$ tal que as três desigualdades seguintes sejam satisfeitas :

$$\inf_{\overline{W}} \varphi_1(x)(MC_2)^{1-a}\lambda_1(h^{'}(\eta))^{1-a} > 3\max_{\overline{\Omega}} p(x)\|\nabla\varphi_1\|_\infty^a, \tag{2.10}$$

$$\inf_{\overline{A}} \varphi_1(x)MC_2\lambda_1 h^{'}(\eta) > 3\max_{\overline{\Omega}} p(x)g(h(C_2\inf_{\overline{W}}\varphi_1(x))) \tag{2.11}$$

$$\text{e} \quad \min\{M(C_2\delta)^2, M^{1-a}C_1^{-1}(C_2\delta)^{2-a}\} > 3\max_{\overline{\Omega}} p(x). \tag{2.12}$$

Além disso, de (2.9) obtemos

$$C_2\lambda_1 \inf_{\overline{W}} \varphi_1(x)h^{'}(\eta) > 3\max_{\overline{\Omega}} p(x)\frac{f(Mh(C_2\|\varphi_1\|_\infty))}{M}. \tag{2.13}$$

Como f é não decrescente e $h^{'}$ é decrescente, de (2.5), (h_2) e de (2.13) segue que

$$\begin{aligned} MC_2\lambda_1\varphi_1 h^{'}(C_2\varphi_1) &\geq MC_2\lambda_1 \inf_{\overline{W}} \varphi_1(x)h^{'}(C_2\varphi_1) \geq MC_2\lambda_1 \inf_{\overline{W}} \varphi_1(x)h^{'}(\eta) \\ &> 3M\max_{\overline{\Omega}} p(x)\frac{f(Mh(C_2\|\varphi_1\|_\infty))}{M} \\ &\geq 3\max_{\overline{\Omega}} p(x)f(Mh(C_2\varphi_1)) \quad \text{em } W. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Vamos mostrar que a função

$$\overline{u}(x) := Mh(C_2\varphi_1(x)), \quad \text{para todo } x \in \Omega,$$

é uma supersolução para o problema (2.2). Observando que

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} = Mh^{'}(C_2\varphi_1)C_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_i^2} = Mh^{''}(C_2\varphi_1)C_2^2(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i})^2 + Mh^{'}(C_2\varphi_1)C_2\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_i^2},$$

desde que $h^{''}(t) = -g(h(t))$ e de (1.4) obtemos que

$$\begin{aligned} -\Delta\overline{u} &= -Mh^{''}(C_2\varphi_1)C_2^2|\nabla\varphi_1| - Mh^{'}(C_2\varphi_1)C_2\Delta\varphi_1 \\ &= Mg(h(C_2\varphi_1))C_2^2|\nabla\varphi_1|^2 + Mh^{'}(C_2\varphi_1)C_2\lambda_1\varphi_1, \end{aligned} \tag{2.15}$$

para todo $x \in \Omega$.

Afirmação 1: $-\Delta\overline{u} \geq p(x)(g(\overline{u}) + f(\overline{u}) + |\nabla\overline{u}|^a)$, em $\Omega \setminus W$.

De fato, de (2.12), (2.6), g decrescente e $M > 1$ segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}MC_2^2 g(h(C_2\varphi_1))|\nabla\varphi_1|^2 &> \frac{1}{\delta^2}\max_{\overline{\Omega}} p(x)g(h(C_2\varphi_1))|\nabla\varphi_1|^2 \geq \frac{1}{\delta^2}p(x)g(h(C_2\varphi_1))|\nabla\varphi_1|^2 \\
&> \frac{1}{\delta^2}p(x)g(h(C_2\varphi_1))\delta^2 = p(x)g(h(C_2\varphi_1)) \\
&\geq p(x)g(Mh(C_2\varphi_1)) = p(x)g(\overline{u}), \text{para todo } x \in \Omega \setminus W. \quad (2.16)
\end{aligned}$$

De (2.8), (2.6), (f_1) e $M > 1$ obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}MC_2^2 g(h(C_2\varphi_1))|\nabla\varphi_1|^2 &> M\frac{1}{\delta^2}\max_{\overline{\Omega}} p(x)f(h(C_2\varphi_1))|\nabla\varphi_1|^2 \\
&> M\frac{1}{\delta^2}\max_{\overline{\Omega}} p(x)f(h(C_2\varphi_1))\delta^2 \\
&\geq Mp(x)f(h(C_2\varphi_1)) \geq p(x)f(Mh(C_2\varphi_1)) \\
&= p(x)f(\overline{u}), \text{ para todo } x \in \Omega \setminus W. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

De (2.4), (2.6) e (2.12) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}MC_2^2 g(h(C_2\varphi_1))|\nabla\varphi_1|^2 &> \frac{1}{3}MC_2^2\frac{1}{C_1}(h^{'}(C_2\varphi_1))^a|\nabla\varphi_1|^2 \\
&> M^aC_2^a|\nabla\varphi_1|^a(h^{'}(C_2\varphi_1))^a \max_{\overline{\Omega}} p(x) \\
&\geq (MC_2h^{'}(C_2\varphi_1)|\nabla\varphi_1|)^a p(x) \\
&= p(x)|\nabla\overline{u}|^a, \quad \text{para todo } x \in \Omega \setminus W. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Logo, como $h^{'} > 0$, de (2.15) – (2.18) obtemos que

$$-\Delta\overline{u} \geq MC_2^2 g(h(C_2\varphi_1))|\nabla\varphi_1|^2 \geq p(x)(g(\overline{u}) + f(\overline{u}) + |\nabla\overline{u}|^a), \quad \text{para todo } x \in \Omega \setminus W.$$

Afirmação 2: $-\Delta\overline{u} \geq p(x)(g(\overline{u}) + f(\overline{u}) + |\nabla\overline{u}|^a)$, em W.
De fato, como $h^{'}$ e g são decrescentes, de (2.5), (2.11) e (h_2) segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}MC_2\lambda_1\varphi_1 h^{'}(C_2\varphi_1) &\geq \frac{1}{3}MC_2\lambda_1 \inf_{\overline{W}} \varphi_1(x)h^{'}(\eta) \geq \max_{\overline{\Omega}} p(x)g(h(C_2 \inf_{\overline{W}} \varphi_1(x))) \\
&\geq \max_{\overline{\Omega}} p(x)g(Mh(C_2\varphi_1)) \\
&\geq p(x)g(\overline{u}), \quad \text{para todo } x \in W. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

De (2.14) obtemos

$$\frac{1}{3}MC_2\lambda_1\varphi_1 h^{'}(C_2\varphi_1) \geq \max_{\overline{\Omega}} p(x)f(Mh(C_2\varphi_1)) \geq p(x)f(\overline{u}), \quad \text{para todo } x \in W. \qquad (2.20)$$

De (2.10) segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}MC_2\lambda_1\varphi_1 h'(C_2\varphi_1) &\geq \frac{1}{3}MC_2\lambda_1 \inf_{\overline{W}} \varphi_1(x)h'(C_2\varphi_1) > (MC_2)^a(h'(C_2\varphi_1))^a \max_{\overline{\Omega}} p(x)\|\nabla\varphi_1\|_\infty^a \\ &\geq [MC_2h'(C_2\varphi_1)|\nabla\varphi_1|]^a p(x) \\ &= |\nabla\overline{u}|^a p(x), \quad \text{para todo } x \in W. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Assim, de $(2.15), (2.19) - (2.21)$ obtemos

$$-\Delta\overline{u} \geq MC_2\lambda_1\varphi_1 h'(C_2\varphi_1) \geq p(x)(g(\overline{u}) + f(\overline{u}) + |\nabla\overline{u}|^a), \quad \text{para todo } x \in W,$$

o que verifica a Afirmação 2.
Logo, das Afirmações 1 e 2 e do fato de termos $\overline{u} > 0$ em Ω e $\overline{u} = 0$ em $\partial\Omega$, temos que $\overline{u}$ é uma supersolução de (2.2). Além disso, como $\overline{u}$ e $\underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $\overline{u} = \underline{u} = 0$ sobre Ω, segue do Princípio do Máximo que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω. Então, pelo Teorema 1.35, o problema (2.2) tem uma solução $u \in C^{2,\gamma}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ com $\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. □

2.2 Existência de uma solução ground state

Se tomamos $\Omega = B_n,\ n \geq 1$, no lema anterior, obtemos uma sequência de soluções $(u_n)_{n\geq 1}$ do problema (2.2). Um fato importante na demonstração do Teorema 2.2 é que a sequência $(u_n)_{n\geq 1}$ é limitada superiormente por uma função v. Esta função v é obtida no seguinte lema:

Lema 2.4. *O problema*

$$\begin{cases} -\Delta v \geq p(x)(g(v) + f(v) + |\nabla v|^a) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ v > 0 & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ v(x) \longrightarrow 0, & \text{quando } |x| \to \infty, \end{cases} \tag{2.22}$$

tem pelo menos uma solução em $C^2(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Considere

$$\Phi(r) = r^{1-N}\int_0^r t^{N-1}\phi(t)dt, \quad \text{para todo } r > 0, \quad \phi(r) = \max_{|x|=r} p(x). \tag{2.23}$$

Pela condição (p_1) e pela regra de L'Hôpital (veja apêndice) obtemos que

$$\lim_{r\to\infty}\Phi(r) = \lim_{r\to 0^+}\Phi(r) = 0. \tag{2.24}$$

Assim, Φ é limitada em $(0,\infty)$ e pode ser estendida até a origem tomando $\Phi(0)=0$. Além disso,

$$\begin{aligned}\int_0^r \Phi(t)dt &= \int_0^r t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}\phi(s)\ ds\ dt = \frac{r^{2-N}}{2-N}\int_0^r s^{N-1}\phi(s)\ ds - \frac{1}{2-N}\int_0^r t\phi(t)\ dt\\ &= -\frac{r^{2-N}}{N-2}\int_0^r s^{N-1}\phi(s)\ ds + \frac{1}{N-2}\int_0^r t\phi(t)\ dt < \frac{1}{N-2}\int_0^r t\phi(t)dt.\end{aligned}$$

De (p_1) e da desigualdade anterior, concluímos que

$$\int_0^\infty \Phi(t)dt < \frac{1}{N-2}\int_0^\infty t\phi(t)dt = \frac{1}{N-2}\left(\int_0^1 t\phi(t)dt + \int_1^\infty t\phi(t)dt\right) < \infty.$$

Posto que Φ é limitada, podemos fixar $K>2$ tal que

$$K^{1-a} \geq 2\max_{r\geq 0}(\Phi(r))^a. \tag{2.25}$$

Definamos

$$\xi(x) = K\int_{|x|}^\infty \Phi(t)dt, \quad \text{para todo } x\in\mathbb{R}^N.$$

Assim,

$$\frac{\partial\xi}{\partial x_i} = -K\Phi(|x|)\frac{x_i}{|x|}, \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial x_i^2} = -K\Phi^{'}(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} - K\Phi(|x|)\left(\frac{|x|^2-x_i^2}{|x|^3}\right). \tag{2.26}$$

$$\Phi^{'}(r) = (1-N)r^{-N}\int_0^r t^{N-1}\phi(t)dt + r^{1-N}r^{N-1}\phi(r) = \frac{1-N}{r}\Phi(r)+\phi(r).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\Delta\xi(x) &= -K\Phi^{'}(|x|) - K\Phi(|x|)\frac{N-1}{|x|} = -K\frac{1-N}{|x|}\Phi(|x|) - K\phi(|x|) - K\Phi(|x|)\frac{N-1}{|x|}\\ &= -K\phi(|x|).\end{aligned}$$

Da definição de ξ e da igualdade anterior, temos que ξ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta\xi = K\phi(|x|) & \text{em } \mathbb{R}^N,\\ \xi > 0 & \text{em } \mathbb{R}^N,\\ \xi(x)\longrightarrow 0 & \text{quando } |x|\to\infty.\end{cases}$$

Definamos

$$\nu(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \frac{1}{g(s)+1}, & se\ t \in (0,\infty) \\ 0, & se\ t = 0 \end{cases}$$

Como $\nu \in C([0,\infty))$ é crescente, existe $\mu := \nu^{-1} : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ e $\mu \in C([0,\infty))$. Assim, $\nu(\mu(t)) = t$ implica em

$$\int_0^{\mu(t)} \frac{1}{g(s)+1}\, ds = t, \quad \text{para todo } t \in (0,\infty).$$

Definindo

$$w(x) = \mu(\xi(x)),\ \ x \in \mathbb{R}^N,$$

temos que w satisfaz as seguintes propriedades:

(w_1) $w > 0$ em $\mathbb{R}^N$ e $w \in C^2(\mathbb{R}^N)$, pois $p \in C(\mathbb{R}^N)$ e $g \in C^1((0,\infty))$.

(w_2) $\lim\limits_{|x|\to\infty} w(x) = 0$ pois, como $\mu(\nu(0)) = 0$, segue que $\mu(0) = 0$ e, da continuidade de μ, obtemos que $\lim\limits_{|x|\to\infty} \mu(\xi(x)) = \mu(\lim\limits_{|x|\to\infty} \xi(x)) = \mu(0) = 0$.

(w_3) $-\Delta w(x) \geq p(x)(g(w(x)) + 1 + |\nabla w(x)|^a)$ em $\mathbb{R}^N$.

De fato, da definição de w e de (2.26) segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x_i} &= \mu'(\xi)\frac{\partial \xi}{\partial x_i} = \frac{1}{\nu'(\mu(\xi))}\frac{\partial \xi}{\partial x_i} = (g(\mu(\xi))+1)\frac{\partial \xi}{\partial x_i} = (g(w)+1)\frac{\partial \xi}{\partial x_i} \\ &= -K(g(w)+1)\Phi(|x|)\frac{x_i}{|x|}. \end{aligned}$$

Note também que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} = (g(w)+1)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i^2} + g'(w)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial \xi}{\partial x_i} = (g(w)+1)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i^2} + g'(w)(g(w)+1)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\right)^2.$$

Assim,

$$|\nabla w| = (g(w)+1)|\nabla \xi| = K\Phi(|x|)(g(w)+1) \ \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso, como g é decrescente segue que

$$\begin{aligned} -\Delta w &= -(g(w)+1)\Delta\xi - g'(w)(g(w)+1)|\nabla\xi|^2 \\ &= K\phi(|x|)(g(w)+1) - g'(w)(g(w)+1)|\nabla\xi|^2 \geq K\phi(|x|)(g(w)+1) \\ &= \frac{K}{2}\phi(|x|)(g(w)+1) + \frac{K}{2}\phi(|x|)(g(w)+1). \end{aligned}$$

Logo, usando (2.25) e o fato de ser $K > 2$, podemos obter que

$$\begin{aligned} -\Delta w &\geq \phi(|x|)(g(w)+1) + K^a(\Phi(|x|))^a\phi(|x|)(g(w)+1) \\ &\geq \phi(|x|)(g(w)+1) + K^a(\Phi(|x|))^a(g(w)+1)^a\phi(|x|) \\ &= \phi(|x|)(g(w)+1) + |\nabla w|^a\phi(|x|) \geq p(x)(g(w)+1+|\nabla w|^a). \end{aligned}$$

Desta forma, de $(w_1) - (w_3)$ obtemos

$$\begin{cases} -\Delta w \geq p(x)(g(w)+1+|\nabla w|^a) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \quad w > 0 & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ w(x) \longrightarrow 0 & \text{quando } |x| \to \infty. \end{cases}$$

Afirmação 3: Existe $M > 1$ tal que

$$M > f(Mw) \text{ em } \mathbb{R}^N \quad e \quad g(w) \geq g(Mw) \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

A verificação desta afirmação é dada no Apêndice. Finalmente, fazendo $v(x) = Mw(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, obtemos

$$\begin{aligned} -\Delta v &\geq p(x)(Mg(w) + M + M|\nabla w|^a) > p(x)(Mg(w) + M + M^a|\nabla w|^a) \\ &\geq p(x)(g(Mw) + f(Mw) + |\nabla(Mw)|^a) = p(x)(g(v) + f(v) + |\nabla v|^a). \end{aligned}$$

Assim, do anterior e de (w_1)-(w_2), segue que existe $v \in C^2(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo (2.22). □

Como já foi mencionado na Introdução deste trabalho, a ideia da demonstração do Teorema 2.2 consiste em considerar soluções (u_n) do problema (2.2) sobre B_n e, mediante um procedimento padrão, concluir que (u_n) possui uma subsequência que converge a uma função $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ que é solução de (2.1).

Demonstração do Teorema 2.2

Pelo Lema 2.3, para cada $n \geq 1$, existe $u_n \in C^{2,\gamma}(B_n) \cap C(\overline{B}_n)$ solução da família de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u_n = p(x)(g(u_n) + f(u_n) + |\nabla u_n|^a) & \text{em } B_n, \\ \quad u_n > 0 & \text{em } B_n, \\ \quad u_n = 0 & \text{em } \partial B_n. \end{cases} \tag{2.27}$$

Afirmação 1: $u_n \leq u_{n+1}$ em B_n, $n \geq 1$.

Suponha, por contradição, que existe $\tilde{x} \in B_n$ tal que $u_n(\tilde{x}) > u_{n+1}(\tilde{x})$. Então, definindo a função

$$\Upsilon(x) = \frac{u_n(x)}{u_{n+1}(x)},\ x \in B_n,$$

temos que $\Upsilon(\tilde{x}) > 1$. Logo, pela continuidade de Υ, existe $\delta > 0$ tal que

$$\Upsilon(x) > 1, \quad \text{para todo} \quad x \in \overline{B_\delta(\tilde{x})}.$$

Como $\Upsilon \in C(\overline{B}_n)$, existe $x_0 \in \overline{B_\delta(\tilde{x})}$ tal que $\Upsilon(x_0) = \max\limits_{\overline{B_\delta(\tilde{x})}} \Upsilon(x) > 1$, o que nos garante que

$$\nabla\Upsilon(x_0) = 0 \ \ e \ \ \Delta\Upsilon(x_0) \leq 0. \tag{2.28}$$

Desde que

$$\begin{aligned} -div(u_{n+1}^2 \nabla\Upsilon) &= -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{n+1}^2 \frac{\partial\Upsilon}{\partial x_i}\right) = -\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u_{n+1}^2 \frac{\partial\Upsilon}{\partial x_i} + u_{n+1}^2 \frac{\partial^2\Upsilon}{\partial x_i^2}\right) \\ &= -(\nabla u_{n+1}^2 . \nabla\Upsilon + u_{n+1}^2 \Delta\Upsilon), \end{aligned}$$

de (2.28) segue que $-div(u_{n+1}^2 \nabla\Upsilon)(x_0) \geq 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} -div(u_{n+1}^2 \nabla\Upsilon) &= -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{n+1}^2 \frac{\partial\Upsilon}{\partial x_i}\right) = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{n+1}^2 \frac{\frac{\partial u_n}{\partial x_i} u_{n+1} - u_n \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_i}}{u_{n+1}^2}\right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i^2} u_{n+1} + \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_i} + u_n \frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial x_i^2}\right) \\ &= u_n \Delta u_{n+1} - u_{n+1}\Delta u_n \\ &= u_{n+1} p(x)(g(u_n) + f(u_n) + |\nabla u_n|^a) \\ &\quad -u_n p(x)(g(u_{n+1}) + f(u_{n+1}) + |\nabla u_{n+1}|^a). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &\leq -div(u_{n+1}^2 \nabla\Upsilon)(x_0) \\ &= u_{n+1}(x) u_n(x) p(x) \left(\frac{g(u_n) + f(u_n) + |\nabla u_n|^a}{u_n} - \frac{g(u_{n+1}) + f(u_{n+1}) + |\nabla u_{n+1}|^a}{u_{n+1}}\right)\Bigg|_{x=x_0}. \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\left(\frac{g(u_n) + f(u_n) + |\nabla u_n|^a}{u_n} - \frac{g(u_{n+1}) + f(u_{n+1}) + |\nabla u_{n+1}|^a}{u_{n+1}}\right)\Bigg|_{x=x_0} \geq 0,$$

o que é equivalente a

$$\left(\frac{g(u_n)+f(u_n)}{u_n}-\frac{g(u_{n+1})+f(u_{n+1})}{u_{n+1}}\right)\Bigg|_{x=x_0}+\left(\frac{|\nabla u_n|^a}{u_n}-\frac{|\nabla u_{n+1}|^a}{u_{n+1}}\right)\Bigg|_{x=x_0}\geq 0.$$

Posto que $t\longmapsto\dfrac{g(t)+f(t)}{t}$ é decrescente em $(0,\infty)$, e como $u_n(x_0)>u_{n+1}(x_0)$ obtemos que

$$\left[\frac{g(u_n(x_0))+f(u_n(x_0))}{u_n(x_0)}-\frac{g(u_{n+1}(x_0))+f(u_{n+1}(x_0))}{u_{n+1}(x_0)}\right]<0.$$

Das duas últimas desigualdades, segue que

$$\left(\frac{|\nabla u_n(x_0)|^a}{u_n(x_0)}-\frac{|\nabla u_{n+1}(x_0)|^a}{u_{n+1}(x_0)}\right)>0. \tag{2.29}$$

Por outro lado, de (2.28) temos que

$$0=\frac{\partial\Upsilon(x_0)}{\partial x_i}=\frac{1}{u_{n+1}^2(x_0)}\left[\frac{\partial u_n(x_0)}{\partial x_i}u_{n+1}(x_0)-u_n(x_0)\frac{\partial u_{n+1}(x_0)}{\partial x_i}\right],$$

o que acarreta em $\dfrac{\partial u_n(x_0)}{\partial x_i}u_{n+1}(x_0)=u_n(x_0)\dfrac{\partial u_{n+1}(x_0)}{\partial x_i}$, donde segue que

$$u_{n+1}(x_0)\nabla u_n(x_0)=u_n(x_0)\nabla u_{n+1}(x_0).$$

Do anterior e de (2.29) obtemos que

$$\begin{aligned}0 &< \frac{1}{u_n(x_0)}\left|\frac{u_n(x_0)}{u_{n+1}(x_0)}\nabla u_{n+1}(x_0)\right|^a-\frac{|\nabla u_{n+1}(x_0)|^a}{u_{n+1}(x_0)}\\ &= \frac{u_n^{a-1}(x_0)}{u_{n+1}^a(x_0)}|\nabla u_{n+1}(x_0)|^a-\frac{|\nabla u_{n+1}(x_0)|^a}{u_{n+1}(x_0)}\\ &= \frac{|\nabla u_{n+1}(x_0)|^a}{u_{n+1}^a(x_0)}(u_n^{a-1}(x_0)-u_{n+1}^{a-1}(x_0)).\end{aligned}$$

Assim, $(u_n^{a-1}(x_0)-u_{n+1}^{a-1}(x_0))>0$ e, como $a\in(0,1)$ temos que $u_{n+1}(x_0)>u_n(x_0)$, o que é um absurdo.

Afirmação 2: $u_n\leq v$ em B_n, para todo $n\geq 1$.
De fato, suponha que existe $\tilde{x}\in B_n$ tal que $u_n(\tilde{x})>v(\tilde{x})$. Desde que ln é uma função crescente, isto implica em $ln(u_n(\tilde{x}))-ln(v(\tilde{x}))>0$. Assim, pela continuidade da função

$ln(u_n(x)) - ln(v(x))$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$ln(u_n(x)) - ln(v(x)) > 0, \text{ para todo } x \in \overline{B_\varepsilon(\tilde{x})} \subset\subset B_n.$$

Além disso, existe $x_0 \in \overline{B_\varepsilon(\tilde{x})} \subset B_n$ tal que

$$ln(u_n(x_0)) - ln(v(x_0)) = \max_{\overline{B}_\varepsilon}\{ln(u_n(x)) - ln(v(x))\} > 0.$$

Então, podemos concluir que

$$\nabla(ln(u_n(x_0)) - ln(v(x_0))) = 0, \qquad \Delta(ln(u_n(x_0)) - ln(v(x_0))) \leq 0. \tag{2.30}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(ln(u_n(x)) - ln(v(x))) = \frac{1}{u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(ln(u_n(x)) - ln(v(x))) = \frac{1}{u_n^2}\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i^2}u_n - \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)^2\right) - \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}v - \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2\right).$$

Assim, de (2.30) e da primeira derivada da função $ln(u_n(x)) - ln(v(x))$, obtemos que

$$\frac{1}{u_n(x_0)}\ \nabla u_n(x_0) = \frac{1}{v(x_0)}\ \nabla v(x_0), \tag{2.31}$$

o que acarreta em

$$\begin{aligned}
\Delta(ln(u_n(x_0)) - ln(v(x_0))) &= \frac{1}{u_n(x_0)}\Delta u_n(x_0) - \frac{1}{u_n^2(x_0)}|\nabla u_n(x_0)|^2 \\
&\quad -\frac{1}{v(x_0)}\Delta v(x_0) + \frac{1}{v^2(x_0)}|\nabla v(x_0)|^2 \\
&= \frac{1}{u_n(x_0)}\Delta u_n(x_0) - \frac{1}{v(x_0)}\Delta v(x_0).
\end{aligned}$$

Da desigualdade anterior, de (2.27) e (2.22) segue que

$$\begin{aligned}
\Delta(ln(u_n(x_0)) - ln(v(x_0))) &\geq -p(x_0)\ \frac{g(u_n(x_0)) + f(u_n(x_0)) + |\nabla u_n(x_0)|^a}{u_n(x_0)} \\
&\quad +p(x_0)\ \frac{g(v(x_0)) + f(v(x_0)) + |\nabla v(x_0)|^a}{v(x_0)} \\
&= p(x_0)\left(\frac{g(v(x_0)) + f(v(x_0))}{v(x_0)} - \frac{g(u_n(x_0)) + f(u_n(x_0))}{u_n(x_0)}\right) \\
&\quad +p(x_0)\left(\frac{|\nabla v(x_0)|^a}{v(x_0)} - \frac{|\nabla u_n(x_0)|^a}{u_n(x_0)}\right).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Por outro lado, como a função $t \longmapsto \dfrac{g(t)+f(t)}{t}$ é decrescente em $(0,\infty)$ e $v(x_0) < u_n(x_0)$, segue que $\dfrac{g(v(x_0))+f(v(x_0))}{v(x_0)} - \dfrac{g(u_n(x_0))+f(u_n(x_0))}{u_n(x_0)} > 0$. De (2.32) e (2.31), concluímos que

$$\begin{aligned}\Delta(ln(u_n(x_0)) - ln(v(x_0))) &> p(x_0)\left(\frac{|\nabla v(x_0)|^a}{v(x_0)} - \frac{|\nabla u_n(x_0)|^a}{u_n(x_0)}\right)\\ &= p(x_0)\left(\frac{v^{a-1}(x_0)}{u_n^a(x_0)}|\nabla u_n(x_0)|^a - \frac{|\nabla u_n(x_0)|^a}{u_n(x_0)}\right)\\ &= p(x_0)\frac{|\nabla u_n(x_0)|^a}{u_n^a(x_0)}\ (v^{a-1}(x_0) - u_n^{a-1}(x_0)).\end{aligned}$$

Assim, como $v^{a-1}(x_0) - u_n^{a-1}(x_0) > 0$, pois $a \in (0,1)$, segue da desigualdade acima que $\Delta(ln(u_n(x_0)) - ln(v(x_0))) > 0$, o que é um absurdo. Isto conclui a verificação da Afirmação 2.

Nosso próximo objetivo é mostrar que (u_n) converge, em $C^{2,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, para uma função u. Para isto consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave e tomamos Ω_1, Ω_2 conjuntos abertos com fronteira suave tais que

$$\Omega \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset B_l, \tag{2.33}$$

para algum inteiro positivo l.
Definindo

$$c_0 := \min_{\overline{B}_l} u_l(x) \qquad e \qquad c_1 := \max_{\overline{B}_l} v(x)$$

obtemos, da positividade de u_l e das Afirmações 1 e 2, que

$$0 < c_0 \leq u_l(x) \leq u_n(x) \leq v(x) \leq c_1, \text{ para todos } x \in \overline{B}_l,\ n \geq l. \tag{2.34}$$

Definamos, para $n \geq l$,

$$f_n(x) = p(x)(g(u_n) + f(u_n) + |\nabla u_n|^a),\ x \in \overline{B}_l.$$

Posto que $-\Delta u_n(x) = f_n(x)$, para todo $x \in B_l$, segue pelo Teorema 1.25 que existe $K_0 > 0$, independente de n, tal que

$$\max_{\overline{\Omega}_2} |\nabla u_n(x)| \leq K_0 \max_{\overline{B}_l} u_n(x).$$

Assim, segue do anterior que

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &= p(x)(g(u_n)+f(u_n)+|\nabla u_n|^a)\\
&\le \max_{\overline{\Omega}_2} p(x)(\max_{[c_0,c_1]} g(s)+\max_{[c_0,c_1]} f(s)+\max_{\overline{\Omega}_2}|\nabla u_n(x)|^a)\\
&\le \max_{\overline{\Omega}_2} p(x)(\max_{[c_0,c_1]} g(s)+\max_{[c_0,c_1]} f(s)+K_0^a(\max_{\overline{B}_l} u_n(x))^a)\\
&\le \max_{\overline{\Omega}_2} p(x)(\max_{[c_0,c_1]} g(s)+\max_{[c_0,c_1]} f(s)+K_0^a c_1^a) := K_1, \quad \text{para todo } x\in\overline{\Omega}_2,
\end{aligned}$$

onde K_1 é independente de n. Logo, para todo $n \ge l$, temos que $f_n \in L^p(\overline{\Omega}_2)$, para todo $p \ge 1$. No que segue, considere $p > N$ suficientemente grande tal que $\alpha < 1 - \frac{N}{p} = \gamma \in (0,1)$. Como $u_n \in W^{2,p}(\overline{\Omega}_2)$, então de (2.27), (2.33) e do Lema 1.22, obtemos

$$\|u_n\|_{W^{2,p}(\Omega_1)} \le K_2(\|f_n\|_{L^p(\Omega_2)}+\|u_n\|_{L^p(\Omega_2)}) \le K_2(K_1|\Omega_2|^{\frac{1}{p}}+c_1|\Omega_2|^{\frac{1}{p}}) := K_3,$$

para todo $n \ge l$, onde K_3 não depende de n.
Logo, dos Teoremas 1.10 e 1.11 segue que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}_1)} &\le M_1\|u_n\|_{C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}_1)} \le M_1M_2\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega_1)} \le M_1M_2\|u_n\|_{W^{2,p}(\Omega_1)}\\
&\le M_1M_2K_3 := K_4, \quad \text{para todo } n\ge l,\ 0<\alpha<\gamma\le 1, \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

onde K_4 não depende de n. Isto implica que $f_n \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_1)$ (veja apêndice) e

$$\|f_n\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_1)} \le K_5, \quad \text{para todo } n \ge l, \qquad (2.36)$$

onde K_5 não depende de n. Logo, pelo Teorema 1.21, (2.35) e (2.36) obtemos,

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} &\le K_6(\|-\Delta u_n\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_1)}+\|u_n\|_{C(\overline{\Omega}_1)}) = K_6(\|f_n\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_1)}+\|u_n\|_{C(\overline{\Omega}_1)})\\
&\le K_6(K_5+K_4) := K_7, \quad \text{para todo } n \ge l. \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

Lembrando que $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \overset{cpct}{\hookrightarrow} C^2(\overline{\Omega})$, segue da desigualdade anterior que existe $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $u_n \longrightarrow u$ *em* $C^2(\overline{\Omega})$, *quando* $n \to \infty$, a menos de subsequências. Assim,

$$\begin{aligned}
|\Delta u_n(x)-\Delta u(x)| &\le \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(u_n-u)\right| \le \sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(u_n-u)\right\|_{C(\overline{\Omega})} \le \sum_{|\gamma|\le 2}\|D^\gamma(u_n-u)\|_{C(\overline{\Omega})}\\
&= \|u_n-u\|_{C^2(\overline{\Omega})} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n\longrightarrow\infty.
\end{aligned}$$

De forma análoga,

$$|\nabla u_n(x) - \nabla u(x)| \longrightarrow 0 \ \ e \ \ |u_n(x) - u(x)| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

E, como $-\Delta u_n = p(x)(g(u_n) + f(u_n) + |\nabla u_n|^a)$ em $\overline{\Omega}$, fazendo $n \to \infty$ e usando a continuidade de g e f, segue que

$$-\Delta u = p(x)(g(u) + f(u) + |\nabla u|^a) \text{ em } \overline{\Omega}.$$

No apêndice deste trabalho mostramos que $p(x)(g(u) + f(u) + |\nabla u|^a) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então, pelo Teorema 1.18, obtemos que

$$u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}). \tag{2.38}$$

Assim, $(u_n)_{n=l}^{\infty}$ possui uma subsequência que converge uniformemente para a função $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

No que segue, tomaremos domínios apropriados em (2.33) e usaremos a estimativa obtida em (2.37) para construirmos, através de um processo diagonal, uma solução ground state para (2.1). Para isto, dado $i \in \mathbb{Z}^+$ tome, em (2.33),

$$\Omega = B_i \subset\subset \Omega_1 = B_{i+1} \subset\subset \Omega_2 = B_{i+2} \subset\subset B_{l_i} = B_{i+3}.$$

Logo, de (2.37),

$$\|u_n\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_i})} \leq N_i, \quad \text{para todo } \ n \geq i+3 = l_i, \ N_i = N_i(B_i),$$

isto é, para cada $i = 1, 2, 3, \cdots$, encontramos $N_1, \ N_2, \ N_3, \cdots$, tais que

$$\begin{aligned} &\|u_n\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_1})} \leq N_1 \ \text{ para todo } n \geq 4 = l_1; \\ &\|u_n\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_2})} \leq N_2 \ \text{ para todo } n \geq 5 = l_2; \\ &\|u_n\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_3})} \leq N_3 \ \text{ para todo } n \geq 6 = l_3; \\ &\qquad\qquad\vdots \end{aligned} \tag{2.39}$$

Definamos, para cada $i \geq 1$,

$$u_i^n := u_n, \quad \text{para todo } x \in B_i, \ n \geq i+3 = l_i.$$

Lembrando que $C^{2,\alpha}(\overline{B_i}) \overset{cpct}{\hookrightarrow} C^2(\overline{B_i})$, por (2.39) existem, para cada $i = 1, 2, 3 \cdots$, subsequências $(u_i^{n_{ij}})_{j=1}^{\infty}$ de $(u_i^n)_{n=l_i}^{\infty}$ e $u_i \in C^2(B_i)$ tais que

$$u_i^{n_{ij}} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u_i \in C^2(\overline{B_i}),$$

onde $n_{ij} \geq i+3 = l_i$, para todo j e $n_{i1} < n_{i2} < n_{i3}, \cdots$, para todo i. Mais especificamente,

$$\begin{aligned} &u_1^{n_{11}}, u_1^{n_{12}}, u_1^{n_{13}}, \cdots\cdots \longrightarrow u_1 \in C^2(\overline{B_1});\\ &u_2^{n_{21}}, u_2^{n_{22}}, u_2^{n_{23}}, \cdots\cdots \longrightarrow u_2 \in C^2(\overline{B_2});\\ &u_3^{n_{31}}, u_3^{n_{32}}, u_3^{n_{33}}, \cdots\cdots \longrightarrow u_3 \in C^2(\overline{B_3});\\ &\qquad\qquad\vdots \end{aligned} \tag{2.40}$$

Note que a sequência $(u_{i+1}^{n_{(i+1)j}})$ foi tomada como uma subsequência de $(u_i^{n_{ij}})$, onde cada $u_i^{n_{ij}}$ foi estendida à bola B_{i+1}. Logo,

$$u_{i+1} = u_i, \quad \text{para todo } x \in B_i.$$

Defina $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, \infty)$ tal que

$$u(x) = u_i(x), \quad \text{para todo } x \in B_i \;\; \text{e para cada } i = 1, 2, 3 \cdots$$

De (2.34), temos que

$$0 < u_{l_i} \leq u_i^{n_{ij}} \leq v, \quad \text{para todo } x \in B_i \text{ e para cada } i = 1, 2, 3 \cdots$$

Fazendo $j \to \infty$, obtemos

$$0 < u_{l_i} \leq u_i \leq v \;\; \text{em } B_i.$$

Assim, do anterior e de (2.40), segue que

$$u > 0 \;\; \text{em } \mathbb{R}^N \;\; \text{e} \;\; u \in C^2(\mathbb{R}^N). \tag{2.41}$$

Por outro lado, definamos

$$w_k := u_k^{n_{kk}}, \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \cdots$$

Então (w_k) é uma subsequência de $(u_i^{n_{ik}})_{k=1}^{\infty}$, para todo $i \geq 1$ e para cada $k \geq i$.

Logo, de (2.40) segue que

$$w_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_i, \quad \text{para todo} \quad x \in B_i \quad \text{e para cada } i \geq 1,$$

isto é,

$$w_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u, \ \text{em } C^2(\overline{B_i}),$$

para todo $x \in B_i$ e para cada $i \geq 1$.
De (2.27) e (2.34), temos que

$$\begin{cases} -\Delta w_k = p(x)(g(w_k) + f(w_k) + |\nabla w_k|^a), & \text{para todo } x \in B_k, \\ \quad w_k \leq v & \text{para todo } x \in B_k. \end{cases}$$

Fazendo $k \to \infty$, obtemos

$$\begin{cases} -\Delta u = p(x)(g(u) + f(u) + |\nabla u|^a) & \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N, \\ \quad u \leq \lim\limits_{|x|\to\infty} v & \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Assim, do Lema 2.4 e (2.41), segue que

$$\begin{cases} -\Delta u = p(x)(g(u) + f(u) + |\nabla u|^a) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \quad u > 0 & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \ u(x) \longrightarrow 0 & \text{quando } |x| \to \infty. \end{cases}$$

Portanto, u é uma solução ground state do Problema (2.1). Além disso, como $u \in C^2(B_n)$ e $f \in C^{0,\alpha}(B_n)$, então pelo Teorema 1.18 obtemos que $u \in C^{2,\alpha}(B_n)$ e, como B_n é arbitrária, obtemos que $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

$\square$

Capítulo 3

Equações elípticas semilineares com dependência do gradiente via técnica do Passo da Montanha

Introdução

Neste capítulo, estudamos a solubilidade do problema de Dirichlet para equações elípticas semilineares com a não-linearidade dependendo do gradiente da solução, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u,\nabla u) \text{ em } \Omega, \\ \quad u = 0 \qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde Ω é um domínio suave limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$.
Dizemos que uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (3.1), se satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx = \int_\Omega f(x,u,\nabla u)v \, dx, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Quanto à não-linearidade f, as seguintes condições serão exigidas:

(f_0) $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz contínua;

(f_1) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t,\xi)}{t} = 0$ uniformemente, para $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$;

(f_2) existem constantes $a_1 > 0$ e $p \in (1, \frac{N+2}{N-2})$ tais que

$$|f(x,t,\xi)| \leq a_1(1+|t|^p), \quad \text{para todos } x \in \overline{\Omega},\ t \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^N;$$

(f_3) existem constantes $\theta > 2$ e $t_0 > 0$ tais que

$$0 < \theta F(x,t,\xi) \leq t f(x,t,\xi), \quad \text{para todos } x \in \overline{\Omega},\ |t| \geq t_0,\ \xi \in \mathbb{R}^N,$$

onde $F(x,t,\xi) = \displaystyle\int_0^t f(x,s,\xi)ds$;

(f_4) existem constantes $a_2,\ a_3 > 0$ tais que

$$F(x,t,\xi) \geq a_2|t|^\theta - a_3, \quad \text{para todos } x \in \overline{\Omega},\ t \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Observação 3.1. *A condição (f_1) implica em $f(x,0,\xi) = 0$.*

Observação 3.2. *Devido à presença do termo gradiente, a condição (f_3) não implica na condição (f_4).*

Observação 3.3. *De (f_2) e (f_3) (ou (f_4)), segue que $\theta \leq p+1$.*

De fato, tome $x_0 \in \overline{\Omega},\ \xi_0 \in \mathbb{R}^N$. Para qualquer $t \geq \max\{t_0, 1\}$, de (f_3) segue que

$$\int_{t_0}^t \frac{\theta}{s} ds \leq \int_{t_0}^t \frac{f(x_0,s,\xi_0)}{F(x_0,s,\xi_0)} ds,$$

isto é,

$$\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)^\theta \leq \ln\left(\frac{F(x_0,t,\xi_0)}{F(x_0,t_0,\xi_0)}\right),$$

o que nos leva a

$$t^\theta \leq \frac{t_0^\theta}{F(x_0,t_0,\xi_0)} F(x_0,t,\xi_0) = CF(x_0,t_0,\xi_0),$$

onde $C = \dfrac{t_0^\theta}{F(x_0,t_0,\xi_0)} > 0$.
Usando a definição de F, a hipótese (f_2) e o fato de termos $t \geq 1$, obtemos

$$\begin{aligned} t^\theta &\leq C\int_0^t f(x_0,s,\xi_0)ds \leq C\int_0^t a_1(1+|s|^p)ds \\ &= Ca_1 t + Ca_1\frac{t^{p+1}}{p+1} \leq Ca_1 t^{p+1} + \frac{Ca_1}{p+1}t^{p+1} = At^{p+1}, \end{aligned}$$

onde $A = Ca_1\left(1 + \frac{1}{p+1}\right)$.
Finalmente, observe que $At^{p+1} - t^\theta \geq 0$ implica em $\theta \leq p+1$, pois, caso contrário, quando

$t \to \infty$ teríamos $At^{p+1} - t^{\theta} < 0$, o que é um absurdo.
Por outro lado, se usássemos as condições (f_2) e (f_4) teríamos

$$a_2 t^{\theta} - a_3 \leq |F(x,t,\xi)| \leq a_1 \left(1 + \frac{1}{p+1}\right) t^{p+1}.$$

Assim, $\theta \leq p+1$ pois, caso contrário, quando $t \to \infty$ a desigualdade acima não seria válida.

Observação 3.4. *Um exemplo de função que satisfaz as hipóteses anteriores é*

$$f(x,t,\xi) = b_1 |t|^{p-1} t g(\xi),$$

onde $b_1 > 0$ *e* $g \in Lip_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $0 < b_2 \leq g(\xi)$, *para alguma constante* b_2.

A verificação de que f satisfaz $(f_0) - (f_4)$ encontra-se no apêndice deste trabalho.

Devido à presença do termo gradiente, sabemos que o problema (3.1) não é variacional, o que não nos permite tratá-lo diretamente pela teoria de ponto crítico. Por este motivo, vamos associar , ao problema (3.1), uma família de problemas elípticos semilineares que não dependem do gradiente da solução. Isto é, para cada $\omega \in H_0^1(\Omega)$, consideramos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u,\nabla\omega) \text{ em } \Omega, \\ \quad u = 0 \qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Agora, o problema (3.2) é variacional e podemos utilizar o Teorema do Passo da Montanha para obter o seguinte resultado:

Teorema 3.5. *Suponha que* $(f_0) - (f_4)$ *sejam válidas. Então existem constantes positivas* C_1 *e* C_2 *tais que, para cada* $w \in H_0^1(\Omega)$, *o problema* (3.2) *tem uma solução* u_w *tal que*

$$C_1 \leq \|u_w\| \leq C_2.$$

Além disso, (3.2) *possui pelo menos uma solução positiva e uma solução negativa.*

Nosso principal resultado trata da solubilidade do problema (3.1). Para este fim, precisamos de uma hipótese adicional:

(f_5) a função f satisfaz as seguintes condições Lipschitz locais:

(i) $|f(x,t',\xi) - f(x,t'',\xi)| \leq L_1 |t' - t''|$, para todos $x \in \overline{\Omega}, t', t'' \in [0,\rho_1], |\xi| \leq \rho_2$,

(ii) $|f(x,t,\xi') - f(x,t,\xi'')| \leq L_2 |\xi' - \xi''|$, para todos $x \in \overline{\Omega}, t \in [0,\rho_1], |\xi'|, |\xi''| \leq \rho_2$, onde ρ_1 e ρ_2 dependem explicitamente de p, N, θ, a_1, a_2, a_3 dados nas hipóteses anteriores.

Teorema 3.6. *Suponha que as condições* $(f_0) - (f_5)$ *sejam válidas. Então o problema* (3.1) *tem uma solução positiva e uma solução negativa desde que*

$$\lambda_1^{-1} L_1 + \lambda_1^{-\frac{1}{2}} L_2 < 1,$$

onde λ_1 *é o primeiro autovalor de* $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$*. Além disso, a solução obtida é de classe* C^2*.*

3.1 Solução para o problema variacional via técnica do Passo da Montanha

Como de costume, uma solução fraca de um problema como (3.2), que é variacional, é obtida como um ponto crítico de um funcional associado $I_w : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$I_w(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega F(x, v, \nabla w) dx. \tag{3.3}$$

Note que o funcional anterior está bem definido. De fato, desde que $v \in H_0^1(\Omega)$, temos que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx = \frac{1}{2}\|v\|^2 < \infty. \tag{3.4}$$

Supondo $t \geq 0$, de (f_2) obtemos

$$\left|\int_0^t f(x,s,\xi) ds\right| \leq \int_0^t |f(x,s,\xi)| ds \leq a_1 \int_0^t (1 + |s|^p) ds = a_1 \left(|t| + \frac{|t|^{p+1}}{p+1}\right).$$

Se $t < 0$, novamente de (f_2) segue que

$$\begin{aligned} \left|\int_0^t f(x,s,\xi) ds\right| &= \left|-\int_t^0 f(x,s,\xi) ds\right| \leq \int_t^0 |f(x,s,\xi)| ds \leq a_1 \int_t^0 (1 + |s|^p) ds \\ &= a_1(-t) + a_1 \int_t^0 (-s)^p ds = a_1(-t) - a_1 \int_{-t}^0 z^p dz = a_1(|t| + \frac{|t|^{p+1}}{p+1}). \end{aligned}$$

Tal análise nos leva a

$$\left|\int_0^t f(x,s,\xi) ds\right| \leq a_1(|t| + \frac{|t|^{p+1}}{p+1}), \quad \text{para todos } x \in \overline{\Omega},\ t \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Logo,

$$\left|\int_\Omega F(x,v,\nabla w)dx\right| \leq \int_\Omega \left|\int_0^v f(x,s,\nabla w)ds\right| dx \leq a_1 \int_\Omega \left(|v| + \frac{|v|^{p+1}}{p+1}\right) dx$$

$$= a_1\|v\|_1 + \frac{a_1}{p+1}\|v\|_{p+1}^{p+1} < \infty,$$

desde que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ e, sendo $N \geq 3$ e $p \in (1 + \frac{N+2}{N-2})$, então $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$. Assim, de (3.4) segue que I_w está bem definido.

A demonstração do Teorema 3.5 é dividida em vários lemas. Provaremos inicialmente que o funcional I_w tem a geometria do Teorema do Passo da Montanha e satisfaz a condição de Palais-Smale.

Lema 3.7. *Seja $\omega \in H_0^1(\Omega)$. Então, existem números positivos ρ e α, ambos independentes de ω, tais que*

$$I_\omega(v) \geq \alpha, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega) \text{ com } \|v\| = \rho. \tag{3.5}$$

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar a seguinte afirmação:

Afirmação 1 : Dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante $K_\varepsilon > 0$, independente de ω, tal que

$$|F(x,t,\xi)| \leq \varepsilon\frac{t^2}{2} + K_\varepsilon|t|^{p+1}, \text{ para todos } x \in \overline{\Omega},\ t \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{3.6}$$

De fato, de (f_1) temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|f(x,t,\xi)| \leq \varepsilon|t|, \quad \text{desde que } \ |t| < \delta, \quad \text{para quaisquer } x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Logo,

$$|F(x,t,\xi)| \leq \int_0^t |f(x,s,\xi)|ds \leq \varepsilon \int_0^t |s|ds = \varepsilon\frac{t^2}{2}, \quad \text{para todos } x \in \overline{\Omega},\ |t| < \delta,\ \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{3.7}$$

Por outro lado, se $|t| \geq \delta$, de (f_2) temos que

$$\begin{aligned} |F(x,t,\xi)| &\leq \int_0^t |f(x,s,\xi)|ds \leq \int_0^t a_1(1+|s|^p)ds = a_1|t| + \frac{a_1}{p+1}|t|^{p+1} \\ &= \frac{a_1}{\delta^p}|t|\delta^p + \frac{a_1}{p+1}|t|^{p+1} \leq \frac{a_1}{\delta^p}|t|^{p+1} + \frac{a_1}{p+1}|t|^{p+1} \\ &= \left(\frac{a_1}{\delta^p} + \frac{a_1}{p+1}\right)|t|^{p+1}, \end{aligned}$$

isto é,

$$|F(x,t,\xi)| \leq K_\varepsilon |t|^{p+1}, \text{ para todos } x \in \overline{\Omega},\ |t| \geq \delta,\ \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{3.8}$$

onde $K_\varepsilon = \dfrac{a_1}{\delta^p} + \dfrac{a_1}{p+1}$.

De (3.7) e (3.8) obtemos (3.6), o que conclui a verificação da Afirmação 1.

Disto e do Teorema 1.27 segue que

$$\begin{aligned} I_\omega(v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega F(x,v,\nabla\omega)dx \geq \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega v^2 dx - K_\varepsilon \int_\Omega |v|^{p+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|v\|_2^2 - K_\varepsilon\|v\|_{p+1}^{p+1} \geq \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{\varepsilon}{2\lambda_1}\|v\|^2 - K_\varepsilon C\|v\|^{p+1}, \end{aligned}$$

onde C é a constante da imersão de Sobolev de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, 2^*]$.

Tomando $\varepsilon = \dfrac{\lambda_1}{2} > 0$ na desigualdade anterior e $\rho = \rho(\varepsilon) = \sqrt[p-1]{\dfrac{1}{8K_\varepsilon C}} > 0$, obtemos

$$I_\omega(v) \geq \|v\|^2\left(\frac{1}{4} - K_\varepsilon C\|v\|^{p-1}\right) \geq \frac{1}{8}\rho^2 := \alpha, \tag{3.9}$$

para qualquer $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|v\| = \rho$. □

Lema 3.8. *Seja $\omega \in H_0^1(\Omega)$. Tome $v_0 \in H_0^1(\Omega)$, com $\|v_0\| = 1$. Então existe $T > 0$, independente de w, tal que*

$$I_\omega(tv_0) \leq 0, \quad \textit{para todo } t \geq T. \tag{3.10}$$

Demonstração. Desde que $\|v_0\| = 1$, de (f_4) temos que

$$\begin{aligned} I_\omega(tv_0) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(tv_0)|^2 dx - \int_\Omega F(x,tv_0,\nabla\omega)dx \\ &\leq \frac{1}{2}t^2\int_\Omega |\nabla v_0|^2 dx - a_2|t|^\theta\int_\Omega |v_0|^\theta dx + a_3|\Omega| \\ &= \frac{1}{2}t^2 - a_2|t|^\theta\|v_0\|_\theta^\theta + a_3|\Omega| \end{aligned}$$

e, sendo $\theta > 2$, quando $t \to \infty$ obtemos que $I_\omega(tv_0) \longrightarrow -\infty$. Logo, existe um $T > 0$, independente de ω, tal que

$$I_\omega(tv_0) \leq 0, \quad \text{para todos } t \geq T,\ \omega \in H_0^1(\Omega).$$

□

Lema 3.9. *Suponha $(f_0) - (f_4)$. Então o problema (3.2) tem pelo menos uma solução $u_\omega \neq 0$, para todo $\omega \in H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração. Verificaremos as hipóteses do Teorema de Passo da Montanha. Sabemos que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Banach. Além disso verificamos, no apêndice deste trabalho, que $I_\omega \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e $I_\omega(0) = 0$. Do Lema 3.7 existem $\rho,\ \alpha > 0$, independentes de ω, tais que $I_\omega(v) \geq \alpha$, para todo $v \in \partial B_\rho(0)$.

Do Lema 3.8, existe $T > 0$, independente de ω, tal que

$$I_\omega(tv_0) \leq 0, \quad \text{para todos } t \geq T \ e \ v_0 \in H_0^1(\Omega),\ \|v_0\| = 1.$$

Tomando $e = Tv_0$, afirmamos que $\|e\| = T > \rho$. De fato, seja $u = \rho v_0 \in B_\rho(0)$. Pelo Lema 3.7, $I_\omega(u) \geq \alpha > 0$. Se $T \leq \rho$, pelo Lema 3.8 segue que $I_\omega(u) = I_\omega(\rho v_0) \leq 0$, o que é um absurdo. Logo, $\|e\| > \rho$ e $I_\omega(e) \leq 0$.

Para aplicar o Teorema do Passo da Montanha, só nos resta verificar que I_ω satisfaz a condição $(PS)_c$. De fato, seja $c \in \mathbb{R}$ e $(v_n)_{n=1}^\infty \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale no nível c, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} I_\omega(v_n) = c \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \|I_\omega^{'}(v_n)\|_{(H_0^1)^*} = 0.$$

Disto segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$|I_\omega(v_n)| \leq 1 + c \quad e \quad \|I_\omega^{'}(v_n)\|_{(H_0^1)^*} \leq 1.$$

Vamos verificar que $(v_n)_{n=1}^\infty \subset H_0^1(\Omega)$ é limitada. Temos que

$$\begin{aligned} I_\omega(v_n) - \frac{1}{\theta}\langle I_w^{'}(v_n), v_n\rangle &\leq |I_\omega(v_n)| + \frac{1}{\theta}\|I_\omega^{'}(v_n)\|_{(H_0^1)^*}\|v_n\| \\ &\leq c + 1 + \frac{1}{\theta}\|v_n\|, \text{ para todo } n \geq n_0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} I_\omega(v_n) - \frac{1}{\theta}I_\omega^{'}(v_n)v_n &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \int_\Omega F(x, v_n, \nabla\omega)\ dx \\ &\quad -\frac{1}{\theta}\int_\Omega |\nabla v_n|^2\ dx + \frac{1}{\theta}\int_\Omega f(x, v_n, \nabla\omega)v_n\ dx \\ &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})\|v_n\|^2 + \int_{\{|v_n| \geq t_0\}} \left[\frac{1}{\theta}f(x, v_n, \nabla\omega)v_n - F(x, v_n, \nabla\omega)\right] dx \\ &\quad + \int_{\{|v_n| < t_0\}} \left[\frac{1}{\theta}f(x, v_n, \nabla\omega)v_n - F(x, v_n, \nabla\omega)\right] dx. \end{aligned} \tag{3.12}$$

De (f_3), note que

$$\int_{\{|v_n|\geq t_0\}} \left[\frac{1}{\theta} f(x, v_n, \nabla\omega) v_n - F(x, v_n, \nabla\omega)\right] dx \geq 0. \tag{3.13}$$

Por outro lado, de (f_2) segue que

$$\begin{aligned}
\Big| \int_{\{|v_n|<t_0\}} &[\frac{1}{\theta} f(x, v_n, \nabla\omega) v_n - F(x, v_n, \nabla\omega)]\ dx\Big| \\
&\leq \int_{\{|v_n|<t_0\}} \frac{1}{\theta} |f(x, v_n, \nabla\omega)|\ |v_n|\ dx + \int_{\{|v_n|<t_0\}} |F(x, v_n, \nabla\omega)|\ dx \\
&\leq \frac{a_1}{\theta} \int_{\{|v_n|<t_0\}} (1 + |v_n|^p)|v_n|\ dx + a_1 \int_{\{|v_n|<t_0\}} \left(|v_n| + \frac{|v_n|^{p+1}}{p+1}\right) dx \\
&\leq \frac{a_1}{\theta}(1 + t_0^p)\ t_0\ |\Omega| + a_1(t_0^2 + \frac{t_0^{p+1}}{p+1})|\Omega| := \widehat{c}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Retomando (3.12), de (3.13) e (3.14) obtemos que

$$I_\omega(v_n) - \frac{1}{\theta}\langle I_\omega'(v_n), v_n\rangle \geq (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})\|v_n\|^2 - \widehat{c}. \tag{3.15}$$

Segue de (3.11) e (3.15) que

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})\|v_n\|^2 - \widehat{c} \leq c + 1 + \frac{1}{\theta}\|v_n\|, \text{ para todo } n \geq n_0. \tag{3.16}$$

De (3.16) veja que, se $(v_n)_{n=1}^\infty \subset H_0^1(\Omega)$ não for limitada, então $\theta \leq 2$, o que é um absurdo. Mostraremos, agora, que a limitação de $(v_n)_{n=1}^\infty$ implica na existência de uma subsequência convergente. Como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo, existem $(v_{n_k})_{k=1}^\infty$ subsequência de $(v_n)_{n=1}^\infty$ e $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que, quando $k \to \infty$,

$$v_{n_k} \rightharpoonup v, \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega). \tag{3.17}$$

Por outro lado, como $(v_{n_k})_{k=1}^\infty \subset H_0^1(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega) \overset{cpct}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, 2^*)$, segue da limitação de $(v_n)_{n=1}^\infty$ que, quando $k \to \infty$,

$$v_{n_k} \longrightarrow v, \text{ em } \ L^{p+1}(\Omega).$$

Então, a menos de subsequências,

$$\begin{cases} v_{n_k} \longrightarrow v \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ quando } n \to \infty, \\ \qquad |v_{n_k}| \leq h(x) \in L^{p+1}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega). \end{cases}$$

Logo, pelo Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\|f(x, v_{n_k}, \nabla\omega) - f(x, v_{n_k}, \nabla\omega)\|_{\frac{p+1}{p}} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } k \to \infty. \tag{3.18}$$

Como $I'_w(v_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ fortemente, segue de (3.17) e da Proposição 1.31, que

$$\langle I'_\omega(v_{n_k}) - I'_\omega(v), v_{n_k} - v\rangle \longrightarrow 0, \quad \text{quando } k \to \infty. \tag{3.19}$$

Por (3.18) e (3.19) segue que

$$\begin{aligned}
\|v_{n_k} - v\|^2 &= \int_\Omega |\nabla(v_{n_k} - v)|^2 \, dx \\
&= \langle I'_\omega(v_{n_k}) - I'_\omega(v), v_{n_k} - v\rangle + \int_\Omega [f(x, v_{n_k}, \nabla\omega) - f(x, v_{n_k}, \nabla\omega)](v_{n_k} - v) \, dx \\
&= \langle I'_w(v_{n_k}) - I'_w(v), v_{n_k} - v\rangle \\
&\quad + \|f(x, v_{n_k}, \nabla\omega) - f(x, v_{n_k}, \nabla\omega)\|_{\frac{p+1}{p}} \|(v_{n_k} - v)\|_{p+1} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $k \to \infty$. Portanto, I_ω satisfaz a condição $(PS)_c$.
Assim, pelo Teorema do Passo da Montanha, podemos concluir que para cada $\omega \in H^1_0(\Omega)$, o problema (3.2) tem uma solução fraca $u_\omega \in H^1_0(\Omega)$ não nula, que é obtida como um ponto crítico de I_ω, a saber

$$I'_\omega(u_\omega) = 0, \quad I_\omega(u_\omega) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_\omega(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H^1_0(\Omega)) : \gamma(0) = 0, \ \gamma(1) = Tv_0 = \mathbf{e}\}$. □

Lema 3.10. *Seja $\omega \in H^1_0(\Omega)$. Existe uma constante positiva C_1, independente de ω, tal que*

$$\|u_\omega\| \geq C_1, \tag{3.20}$$

para toda solução u_ω obtida no Lema 3.9.

Demonstração. Como u_ω é solução fraca de (3.2), então

$$\int_\Omega |\nabla u_\omega|^2 \, dx = \int_\Omega f(x, u_\omega, \nabla\omega) u_\omega \, dx.$$

Seja $0 < \varepsilon < \lambda_1$. Existe uma constante $C_\varepsilon > 0$, independente de ω (veja (4.19)), tal que

$$|f(x, t, \xi)| \leq \varepsilon|t| + C_\varepsilon|t|^p, \quad \text{para todos } x \in \overline{\Omega}, \ t \in \mathbb{R}, \ \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Desde que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, segue que

$$\|u_\omega\|^2 \leq \int_\Omega (\varepsilon|u_\omega| + C_\varepsilon|u_\omega|^p)|u_\omega|\ dx = \varepsilon\|u_w\|_2^2 + C_\varepsilon\|u_\omega\|_{p+1}^{p+1} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda_1}\|u_\omega\|^2 + C_\varepsilon K\|u_\omega\|^{p+1},$$

o que nos leva a

$$(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_1})\|u_\omega\|^2 \leq C_\varepsilon K\|u_\omega\|^{p+1}.$$

Como $\varepsilon < \lambda_1$, podemos concluir que

$$\|u_\omega\| \geq \left((1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_1})\frac{1}{C_\varepsilon K}\right)^{\frac{1}{p-1}} := C_1,$$

onde C_1 é uma constante positiva independente de ω. □

Lema 3.11. *Seja $\omega \in H_0^1(\Omega)$. Existe uma constante positiva C_2, independente de ω, tal que*

$$\|u_\omega\| \leq C_2, \tag{3.21}$$

para toda solução u_ω obtida no Lema 3.9.

Demonstração. Definindo $\overline{\gamma}(s) = sTv_0 := tv_0,\ s \in [0,1]$, temos que $\overline{\gamma} \in \Gamma$. Logo

$$I_\omega(u_\omega) \leq \max_{t\in[0,1]} I_w(\overline{\gamma}(t)) \leq \max_{t\geq 0} I_\omega(\overline{\gamma}(t)) = \max_{t\geq 0} I_\omega(tv_0). \tag{3.22}$$

Por outro lado, relembrando que $\|v_0\| = 1$, de (f_4) segue que

$$\begin{aligned} I_\omega(tv_0) &= \frac{1}{2}t^2\int_\Omega |\nabla v_0|^2\ dx - \int_\Omega F(x, tv_0, \nabla\omega)\ dx \leq \frac{1}{2}t^2\|v_0\|^2 - a_2|t|^\theta\int_\Omega |v_0|^\theta dx + a_3|\Omega| \\ &= \frac{1}{2}t^2 - a_2|t|^\theta\|v_0\|_\theta^\theta + a_3|\Omega| := h(t),\ t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Note que $h(0) = a_3|\Omega| > 0$ e $h(t) \longrightarrow -\infty$, quando $t \to \infty$. Logo, existe $\bar{t}_0$, independente de ω, tal que $h(\bar{t}_0) = \max_{t\geq 0} h(t) > 0$. Assim, por (3.22) e (3.23) obtemos

$$\frac{1}{2}\|u_\omega\|^2 - \int_\Omega F(x, u_\omega, \nabla\omega)\ dx = I_\omega(u_\omega) \leq \max_{t\geq 0} I_\omega(tv_0) \leq \max_{t\geq 0} h(t) = h(\bar{t}_0),$$

e de (3.6) e (f_3) segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u_\omega\|^2 &\leq h(\bar{t}_0) + \int_\Omega F(x, u_\omega, \nabla\omega)\ dx \\
&= h(\bar{t}_0) + \int_{\{|u_\omega|<t_0\}} F(x, u_\omega, \nabla\omega)\ dx + \int_{\{|u_\omega|\geq t_0\}} F(x, u_\omega, \nabla\omega)\ dx \\
&\leq h(\bar{t}_0) + \int_{\{|u_\omega|<t_0\}} \frac{\varepsilon}{2}|u_\omega|^2 + k_\varepsilon|u_\omega|^{p+1}\ dx + \int_{\{|u_\omega|\geq t_0\}} \frac{u_\omega}{\theta} f(x, u_\omega, \nabla\omega)\ dx \\
&\leq h(\bar{t}_0) + (\frac{\varepsilon}{2}t_0^2 + k_\varepsilon t_0^{p+1})|\Omega| + \frac{1}{\theta}\|u_w\|^2.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_\omega\|^2 \leq h(\bar{t}_0) + (\frac{\varepsilon}{2}t_0^2 + k_\varepsilon t_0^{p+1})|\Omega|,$$

o que nos leva a

$$\|u_\omega\| \leq C_2,$$

onde $C_2 = \left(\frac{2\theta}{\theta-2}(h(\bar{t}_0) + (\frac{\varepsilon}{2}t_0^2 + k_\varepsilon t_0^{p+1})|\Omega|)\right)^{\frac{1}{2}} > 0$ é uma constante independente de ω. □

Lema 3.12. *Suponha* $(f_0) - (f_4)$ *válidos. Então o problema* (3.2) *possui uma solução positiva e uma solução negativa.*

Demonstração. Definamos

$$\tilde{f}(x, t, \xi) = \begin{cases} f(x, t, \xi), & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Note que $\tilde{f}$ satisfaz (f_0), (f_1), (f_2), para todo $t \in \mathbb{R}$ e (f_3), (f_4), somente para $t \geq 0$. Em vista disso, escolhemos $v_0 > 0$ em Ω, no Lema 3.8. Então, aplicando o Teorema do Passo da Montanha, como no Lema 3.9, obtemos $u_\omega \neq 0$ solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_\omega = \tilde{f}(x, u_\omega, \nabla\omega) & \text{em } \Omega, \\ u_\omega = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.24}$$

Multiplicando a equação acima por u_ω^- e integrando por partes, obtemos que

$$\int_\Omega \nabla u_\omega . \nabla u_\omega^-\ dx = \int_\Omega \tilde{f}(x, u_\omega, \nabla\omega) u_\omega^-\ dx,$$

o que pode ser reescrito como

$$\int_{\{u_\omega \geq 0\}} \nabla u_\omega . \nabla u_\omega^- \, dx + \int_{\{u_\omega < 0\}} \nabla u_\omega . \nabla u_\omega^- \, dx$$
$$= \int_{\{u_\omega \geq 0\}} \tilde{f}(x, u_\omega, \nabla\omega) u_\omega^- \, dx + \int_{\{u_\omega < 0\}} \tilde{f}(x, u_\omega, \nabla\omega) u_\omega^- \, dx.$$

Lembrando que $u_\omega^- := \max\{-u_\omega, 0\}$, segue da definição de $\tilde{f}$ que

$$-\int_{\{u_\omega < 0\}} |\nabla u_\omega^-|^2 \, dx = 0,$$

isto é, $\|u_w^-\| = 0$, o que só pode ocorrer se $u_w^- = 0$, o que nos mostra que $u_w \geq 0$.
Por outro lado, lembrando que $f(x, 0, \xi) = 0$, podemos rescrever (3.24) da seguinte forma

$$\begin{cases} \Delta(-u_\omega) - d(x)(-u_\omega) = \tilde{f}^+(x, u_\omega, \nabla\omega) & \text{em } \Omega, \\ u_\omega = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.25}$$

onde

$$d(x) = \begin{cases} \dfrac{\tilde{f}^-(x, u_\omega, \nabla\omega)}{u_\omega}, & \text{se } u_\omega > 0 \\ 0, & \text{se } u_\omega = 0. \end{cases}$$

Como $u_w \in H_0^1(\Omega)$, usando o argumento de bootstrap pode-se mostrar que $u_\omega \in C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$, $0 < \lambda < 1$, o que será feito no Lema 3.13. Além disso, de (4.19) segue que

$$|f(x, t, \xi)| \leq \varepsilon|t| + C_\varepsilon |t|^p, \text{ para todos } x \in \overline{\Omega}, \ t \in \mathbb{R}, \ \xi \in \mathbb{R}^N,$$

o que implica em

$$\left| -\frac{\tilde{f}^-(x, u_\omega, \nabla\omega)}{u_\omega} \right| \leq \varepsilon + C_\varepsilon |u_\omega|^{p-1} \leq \varepsilon + C_\varepsilon \|u_\omega\|_\infty^{p-1}.$$

Assim, $-d(x) \in L^\infty(\Omega)$. Note também que de (3.25), segue que $\Delta(-u_w) - d(x)(-u_\omega) \geq 0$ e que

$$-\int_\Omega d(x) v(x) dx \leq 0, \quad \text{para todo } v \geq 0, \ v \in C_0^1(\Omega).$$

Além disso, se existe $x_0 \in \Omega$ tal que $-u_\omega(x_0) = 0$, então podemos encontrar $B_\delta(x_0) \subset\subset \Omega$ tal que $\sup_{B_\delta(x_0)} (-u_\omega(x)) = \sup_\Omega (-u_\omega(x))$. Logo, aplicando o Teorema 1.23, podemos concluir que $u_\omega = 0$, o que contradiz o Lema 3.9 e nos mostra que $u_\omega > 0$ em Ω.
A demonstração da existência de uma solução negativa é análoga. $\square$

No resultado seguinte, utilizaremos uma técnica conhecida como bootstrap para regularizar a solução fraca do problema (3.2).

Lema 3.13. *Se $\omega \in H_0^1(\Omega)$, então $u_w \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, onde u_w é a solução do problema (3.2). Além disso, existem constantes positivas ρ_1 e ρ_2, ambas independentes de ω, tais que*

$$\|u_\omega\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq \rho_1 \quad e \quad \|\nabla u_\omega\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq \rho_2.$$

Demonstração. Sabemos que $u_\omega \in H_0^1(\Omega)$. Da hipótese (f_2) e do fato que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, segue que $f \in L^s(\Omega)$, $s = \dfrac{2^*}{p}$, pois

$$\int_\Omega |f(x, u_\omega, \nabla\omega)|^{\frac{2^*}{p}}\, dx \leq \int_\Omega [a_1(1 + |u_\omega|^p)]^{\frac{2^*}{p}}\, dx \leq K\left(\int_\Omega dx + \int_\Omega |u_\omega|^{2^*}\, dx\right)$$

$$\leq K(|\Omega| + K_1\|u_\omega\|^{2*}) \leq K(|\Omega| + K_1 C_2^{2*}) := K_2 = const > 0,$$

onde C_2 é como o Lema 3.11.
Como $u_\omega \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do problema (3.2), podemos aplicar o Teorema 1.19 para concluir que $u_\omega \in W^{2,s}(\Omega)$, $s = \frac{2^*}{p}$, além disso

$$\|u_\omega\|_{W^{2,s}} \leq C\|f\|_s \leq CK_2^{\frac{p}{2^*}}, \quad C > 0 \text{ constante.}$$

Caso 1: Se $\frac{N}{s} < 1$, pelo Teorema 1.11 temos que $u_\omega \in W^{2,s}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha \leq 1 - \frac{N}{s}$, o que nos dá

$$\|u_w\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq K_3\|u_w\|_{W^{2,s}} \leq K_3 C K_2^{\frac{p}{2^*}} := K_4.$$

Caso 2: Se $\frac{N}{s} \geq 1$, pelo Teorema 1.11 temos que $u_\omega \in W^{2,s}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p_1}(\Omega)$, $p_1 = \frac{Ns}{N-2s}$. Por outro lado, note que

$$s = \frac{2^*}{p} = \frac{2N}{N-2}\frac{1}{p} > \frac{2N}{N-2}\frac{N-2}{N+2} = \frac{2N}{N+2} \quad e \quad N - 2s < N - \frac{4N}{N+2} = \frac{N(N-2)}{N+2}.$$

Logo

$$s_1 := \frac{p_1}{p} > \frac{Ns}{N-2s}\frac{N-2}{N+2} > N\frac{2N}{N+2}\frac{N+2}{N(N-2)}\frac{N-2}{N+2} = \frac{2N}{N+2} > 1.$$

Além disso, da hipótese (f_2), $L^{p_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ e do fato que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, segue que

$f \in L^{s_1}(\Omega)$, pois

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x,u_\omega,\nabla\omega)|^{s_1}\,dx &\leq \int_\Omega [a_1(1+|u_\omega|^p)]^{s_1}\,dx \leq K_5\left(\int_\Omega dx + \int_\Omega |u_\omega|^{p_1}\,dx\right)\\ &\leq K_5(|\Omega| + K_5\|u_\omega\|_{2*}^{p_1}) \leq K_5(|\Omega| + K_6K_7\|u_\omega\|^{p_1})\\ &\leq K_5(|\Omega| + K_6K_7C_2^{p_1}) := K_8 > 0,\end{aligned}$$

onde C_2 é como no Lema 3.11.
Pelo Teorema 1.19, concluímos que $u_w \in W^{2,s_1}(\Omega)$, $s_1 = \frac{p_1}{p}$ e

$$\|u_\omega\|_{W^{2,s_1}} \leq C\|f\|_{s_1} \leq CK_8^{\frac{1}{s_1}}.$$

É importante notar que

$$\frac{s_1}{s} = \frac{p_1}{2^*} = \frac{Ns}{N-2s}\,\frac{N-2}{2N} > N\frac{2N}{N+2}\,\frac{N+2}{N(N-2)}\,\frac{N-2}{2N} = 1.$$

Se $\frac{N}{s_1} < 1$, então podemos argumentar como no caso 1 e provar que $u_\omega \in W^{2,s_1}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\quad 0 < \alpha \leq 1 - \frac{N}{s_1}$, e

$$\|u_w\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq K_9\|u_w\|_{W^{2,s_1}} \leq K_9CK_8^{\frac{1}{s_1}}.$$

Caso contrário, podemos repetir o argumento anterior para concluir que $u_\omega \in W^{2,s_k}(\Omega)$, para algum s_k com $\frac{N}{s_k} < 1$ e $\|u_\omega\|_{W^{2,s_k}} \leq K = K(C_2)$. Então, pelo Teorema 1.11, $u_\omega \in W^{2,s_k}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. $0 < \alpha \leq 1 - \frac{N}{s_k}$. Assim,

$$\|u_w\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|u_w\|_{W^{2,s_k}} \leq CK.$$

Isto implica que existem $\rho_1, \rho_2 > 0$ tais que

$$\|u_\omega\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq \rho_1 \quad \text{e} \quad \|\nabla u_\omega\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq \rho_2.$$

□

Observação 3.14. *Note que se $\omega \in H_0^1(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, então $u_\omega \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.*

De fato, desde que $u_\omega \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, se $\omega \in H_0^1(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, então $f(x,u_\omega(x),\nabla\omega) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Segue do Teorema 1.20 que $u_\omega \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

3.2 Solução para o problema não variacional através de um método iterativo

Observe que as constantes ρ_1 e ρ_2, enunciadas na hipótese (f_5), são dadas pelo Lema 3.13.

Demonstração do teorema 3.6

Tome $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Pelo Lema 3.9, existe $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = f(x, u_1, \nabla u_0) & \text{em } \Omega, \\ u_1 = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

De forma análoga, o Lema 3.9 também nos garante a existência de $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_2 = f(x, u_2, \nabla u_1) & \text{em } \Omega, \\ u_2 = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Agindo recursivamente, podemos obter uma sequência $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ de tal forma que cada u_n é solução fraca da seguinte família de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u_n = f(x, u_n, \nabla u_{n-1}) & \text{em } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.26}$$

Além disso, o Lema 3.13 nos garante que

$$\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq \rho_1 \qquad e \qquad \|\nabla u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq \rho_2.$$

Por outro lado, como u_{n+1} é solução fraca de (3.26), tomando u_{n+1} e u_n como funções teste obtemos, respectivamente,

$$\int_\Omega \nabla u_{n+1} \nabla u_{n+1} \, dx = \int_\Omega f(x, u_{n+1}, \nabla u_n) u_{n+1} \, dx,$$

e

$$\int_\Omega \nabla u_{n+1} \nabla u_n \, dx = \int_\Omega f(x, u_{n+1}, \nabla u_n) u_n \, dx.$$

Subtraindo as igualdades anteriores, segue que

$$\int_\Omega \nabla u_{n+1} (\nabla u_{n+1} - \nabla u_n) \, dx = \int_\Omega f(x, u_{n+1}, \nabla u_n)(u_{n+1} - u_n) \, dx.$$

Agindo de forma análoga para u_n, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u_n(\nabla u_{n+1} - \nabla u_n)\ dx = \int_\Omega f(x, u_n, \nabla u_{n-1})(u_{n+1} - u_n)\ dx.$$

Destas relações e da hipóteses (f_5), temos

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - u_n\|^2 &= \int_\Omega |\nabla(u_{n+1} - u_n)|^2\ dx = \int_\Omega [|\nabla u_{n+1}|^2 - 2\nabla u_{n+1}\nabla u_n + |\nabla u_n|^2]\ dx \\
&= \int_\Omega \nabla u_{n+1}(\nabla u_{n+1} - \nabla u_n)\ dx - \int_\Omega \nabla u_n(\nabla u_{n+1} - \nabla u_n)\ dx \\
&= \int_\Omega f(x, u_{n+1}, \nabla u_n)(u_{n+1} - u_n)\ dx - \int_\Omega f(x, u_n, \nabla u_{n-1})(u_{n+1} - u_n)\ dx \\
&= \int_\Omega [f(x, u_{n+1}, \nabla u_n) - f(x, u_n, \nabla u_n)](u_{n+1} - u_n)\ dx \\
&\quad + \int_\Omega [f(x, u_n, \nabla u_n) - f(x, u_n, \nabla u_{n-1})](u_{n+1} - u_n)\ dx \\
&\leq L_1 \int_\Omega |u_{n+1} - u_n|^2\ dx + L_2 \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_{n-1}|\ |u_{n+1} - u_n|\ dx.
\end{aligned}$$

Usando o Teorema 1.8, reescrevemos a desigualdade acima como

$$\|u_{n+1} - u_n\|^2 \leq L_1\lambda_1^{-1}\|u_{n+1} - u_n\|^2 + L_2\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\|u_{n+1} - u_n\|\|u_n - u_{n-1}\|.$$

Assim,

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \frac{L_2\lambda_1^{-\frac{1}{2}}}{1 - L_1\lambda_1^{-1}}\|u_n - u_{n-1}\| := k\|u_n - u_{n-1}\|, \tag{3.27}$$

onde $k < 1$, pois $L_1\lambda_1^{-1} + L_2\lambda_1^{-\frac{1}{2}} < 1$.
De (3.27), segue que (u_n) é uma sequência de Cauchy. De fato, considere $n,\ m \in \mathbb{N},\ n < m$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $m = n + s$, onde $s \in \mathbb{N}$. Então

$$\|u_m - u_n\| \leq \|u_{n+s} - u_{n+s-1}\| + \cdots + \|u_{n+1} - u_n\| \leq k^n(k^{s-1} + \cdots + 1)\|u_1 - u_0\|$$

$$= k^n\frac{k^s - 1}{k - 1}\|u_1 - u_0\| < k^n\|u_1 - u_0\| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } m,\ n \to \infty.$$

Logo, como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Banach, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$, quando $n \to \infty$. Lembrando que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $p \in (1, \frac{N+2}{N-2})$, então $u_n \longrightarrow u$ em $L^p(\Omega)$, quando $n \to \infty$. Do Teorema 1.5, a menos de subsequências temos que

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u & \text{q.t.p. em } \Omega, \quad \text{quando } n \to \infty, \\ |u_n| \leq h \in L^p(\Omega). \end{cases}$$

Logo, de (f_5) segue que

$$\begin{aligned} |f(x,u_n,\nabla u_{n-1}) - f(x,u,\nabla u)|\,|v| &\leq |f(x,u_n,\nabla u_{n-1}) - f(x,u,\nabla u_{n-1})|\,|v| \\ &\quad +|f(x,u,\nabla u_{n-1}) - f(x,u,\nabla u)|\,|v| \\ &\leq L_1|u_n - u|\,|v| + L_2|\nabla u_n - \nabla u|\,|v| \\ &\quad \longrightarrow 0,\ \text{q.t.p. em } \Omega,\ \text{quando } n \to \infty, \end{aligned}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, de (f_2) temos que

$$\begin{aligned} |f(x,u_n,\nabla u_{n-1}) - f(x,u,\nabla u)|\,|v| &\leq |f(x,u_n,\nabla u_{n-1})|\,|v| + |f(x,u,\nabla u)|\,|v| \\ &\leq a_1|v|(2 + |u_n|^p + |u|^p) \\ &\leq a_1|v|(2 + |h|^p + |u|^p) \in L^1(\Omega), \end{aligned}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Portanto, de (3.26) e do Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue, podemos concluir que

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} \nabla u_n.\nabla v\ dx = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f(x,u_n,\nabla u_{n-1})v\ dx,$$

o que nos dá

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\ dx = \int_\Omega f(x,u,\nabla u)v\ dx.$$

Assim, u é uma solução fraca do problema (3.1). Argumentando de maneira análoga ao Lema 3.13, segue que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, o que implica em $f(x,u,\nabla u) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e, pelo Teorema 1.20, $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Posto que $\|u_n\| \geq C_1 > 0$ para todo n (veja Lema 3.10), segue que $u \neq 0$. Desta maneira obtemos uma solução clássica não trivial para o problema (3.1). Para a positividade de u, pode-se utilizar o Princípio do Máximo Forte (ou argumentar como no Lema 3.13).

$\square$

Capítulo

4

Apêndice

Neste apêndice apresentamos as demonstrações que foram omitidas nos Capítulos 2 e 3 deste trabalho. Primeiro justificamos algumas afirmações feitas no Capítulo 2. O teorema seguinte é devido a Agarwal e O'Regan [2] e foi utilizado para construir uma supersolução para o problema (2.2).

Teorema 4.1. *[2] Seja*

$$\begin{cases} y''(t) + g(y(t)) = 0 & \text{em } 0 < t < 1, \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $g \in C^1((0,\infty))$ *é positiva e decrescente. Então, o problema* (4.1) *tem uma solução* $y \in C([0,1]) \cap C^2((0,1))$*, com* $y > 0$ *em* $(0,1)$.

Demonstração. Tome $r > \dfrac{1}{6} + g\left(\dfrac{1}{6}\right) > 0$. Como $\dfrac{1}{g}$ é crescente, segue que

$$\int_0^r \frac{1}{g(u)}\,du > \int_{\frac{1}{6}}^r \frac{1}{g(u)}\,du > \frac{1}{g(\frac{1}{6})}(r - \frac{1}{6}) > \frac{1}{6}.$$

Logo, podemos tomar $r > \varepsilon > 0$ tal que

$$\int_\varepsilon^r \frac{1}{g(u)}\,du > \frac{1}{6}. \tag{4.2}$$

Seja $n_0 \in \{1,2,3\ldots\}$ tal que $\dfrac{1}{n_0} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e defina $N_0 \in \{n_0, n_0+1, \ldots\}$. Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} y^{''}(t) + G(y(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ y(0) = y(1) = \frac{1}{m}, & m \in N_0, \end{cases} \tag{4.3}$$

onde

$$G(u) = \begin{cases} g(u), & \text{se } u \geq \frac{1}{m}, \\ g(\frac{1}{m}), & \text{se } u \leq \frac{1}{m}. \end{cases}$$

Afirmação 1: O problema (4.3) possui uma solução y_m tal que $\|y_m\|_{C([0,1])} \leq r$.
De fato, será suficiente mostrar que o problema (4.3) satisfaz as hipóteses do Teorema 1.36.

(i) Fazendo $f : [0,1] \times (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$, $f(t,y) = G(y)$, segue que $y \longmapsto f(t,y)$ é contínua, para todo $t \in [0,1]$ e $t \longmapsto f(t,y)$ é mensurável, para todo $y \in (0,\infty)$.

(ii) Para cada $s > 0$, existe $h_s(t)$, para todo $t \in (0,1)$ tal que $h_s \in L^1_{loc}(0,1)$, $\displaystyle\int_0^1 t(1-t)h_s(t)dt < \infty$ e $|f(t,y)| \leq h_s(t)$, para todo $t \in (0,1)$. Para ver isto, basta tomar $h_s(t) = g(\frac{1}{m})$.

(iii) Suponha que exista uma função y satisfazendo

$$\begin{cases} y^{''}(t) + \lambda G(y(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ y(0) = y(1) = \frac{1}{m}, & m \in N_0, \end{cases} \tag{4.4}$$

onde $\lambda \in (0,1)$. Logo $y^{''} < 0$, $y \in C([0,1])$, o que implica em $y \geq \frac{1}{m}$ em $[0,1]$. Além disso, existe $t_m \in (0,1)$ tal que

$$\begin{cases} y^{'} \geq 0 & \text{em } (0, t_m), \\ y^{'} < 0 & \text{em } (t_m, 1), \end{cases} \tag{4.5}$$

o que nos diz que t_m é um ponto de máximo de y, isto é, $y^{'}(t_m) = 0$.
Para $t \in (0,1)$, segue de (4.3) que $-y^{''} < g(y(t))$, já que $y \geq \frac{1}{m}$ em $[0,1]$. Integrando esta desigualdade de $t (t \leq t_m)$ a t_m obtemos

$$-\int_t^{t_m} y^{''}(x)dx < \int_t^{t_m} g(y(x))dx,$$

o que implica em

$$y^{'}(t) - y^{'}(t_m) < \int_t^{t_m} g(y(x))dx.$$

Usando o fato de g ser decrescente, positiva e $y^{'}(t_m) = 0$, segue do anterior que

$$\frac{y^{'}(t)}{g(y(t))} < \int_t^{t_m} dx.$$

Integrando tal desigualdade de 0 a t_m, fazendo $u = y(t)$ e usando Fubini, obtemos

$$\int_{y(0)=\frac{1}{m}}^{y(t_m)} \frac{1}{g(u)} dx < \int_0^{t_m} x dx. \tag{4.6}$$

Como $0 < x < t_m$, temos que $(1-t_m)\displaystyle\int_0^{t_m} x dx < \int_0^{t_m} x(1-x)dx$. Disto e de (4.6) segue que

$$\int_{\varepsilon}^{y(t_m)} \frac{1}{g(u)} du \leq \int_{\frac{1}{m}}^{y(t_m)} \frac{1}{g(u)} du \leq \frac{1}{1-t_m} \int_0^{y(t_m)} x(1-x)dx, \tag{4.7}$$

onde ε é como em (4.2).
De forma análoga, integrando a equação em (4.4) de t_m a $t(t_m < t)$ e observando que $G(y(t)) = g(y(t))$, obtemos

$$\int_{\varepsilon}^{y(t_m)} \frac{1}{g(u)} du \leq \frac{1}{t_m} \int_{t_m}^{1} x(1-x)dx. \tag{4.8}$$

Logo, de (4.7) e (4.8), segue que

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{y(t_m)} \frac{1}{g(u)} du &= (1-t_m)\int_{\varepsilon}^{y(t_m)} \frac{1}{g(u)} du + t_m \int_{\varepsilon}^{y(t_m)} \frac{1}{g(u)} du \leq \int_0^1 x(1-x)dx \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Assim, se $r = \|y\|_{C([0,1])} = y(t_m)$, segue do anterior que $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{r} \frac{1}{g(u)} \leq \frac{1}{6}$, o que contradiz (4.2). Então, $\|y\|_{C([0,1])} \neq r$.

Logo de $(i)-(iii)$, podemos aplicar o Teorema 1.36 para garantir a existência de y_m solução de (4.3), com $\|y_m\|_{C([0,1])} \leq r$, o que conclui a prova da afirmação.

Afirmação 2: Existe $K > 0$, independente de m, tal que $y_m(t) \geq K(1-t)t$, para todo $t \in [0,1]$.

De fato, se $t = 0$ ou $t = 1$, o resultado é trivial. Suponha que $t \in (0,1)$, de (4.3) usando a representação de Green, desde que $y_m(t) \leq r$ em $[0,1]$ e g é decrescente obtemos que

$$\begin{aligned} y_m(t) &= \frac{1}{m} + t\int_t^1 (1-x)g(y_m(x))dx + (1-t)\int_0^t xg(y_m(x))dx \\ &\leq t\int_t^1 (1-x)g(r)dx + (1-t)\int_0^t xg(r)dx := \Phi_r(t). \end{aligned}$$

Note que, $\Phi_r(0) = \Phi_r(1) = 0$ e $k_1 := \Phi_r'(0) = g(r)/2 > 0$, onde k_1 não depende de m. Tomando $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\displaystyle\int_{\varepsilon_1}^1 (1-x)g(r)dx \geq \frac{k_1}{2}$ segue, para todo $t \in [0, \varepsilon_1]$ que

$$\Phi_r(t) \geq t\int_t^1 (1-x)g(r)dx \geq t\int_{\varepsilon_1}^1 (1-x)g(r)dx \geq \frac{tk_1}{2} \geq \frac{1}{2}k_1 t(1-t). \tag{4.10}$$

De forma análoga, existe $k_2 = -\Phi'(1) > 0$, independente de m e $\delta > 0$ tal que

$$\Phi_r(t) \geq \frac{1}{2}k_2(1-t) \geq \frac{1}{2}k_2(1-t)t, \quad \text{para todo } t \in [1-\delta, 1]. \tag{4.11}$$

Além disso, $\dfrac{\Phi_r(t)}{t(1-t)} \geq A$, para todo $t \in [\varepsilon_1, 1-\delta]$, onde $A > 0$ é uma constante. Assim, de (4.10) e (4.11) obtemos

$$\frac{\Phi_r(t)}{t(1-t)} \geq K > 0, \quad \text{onde } K = \min\{\frac{1}{2}k_1, \frac{1}{2}k_2, A\},\ t \in [0,1],$$

o que mostra a Afirmação 2.
Como y_m é solução de (4.3), podemos trabalhar como na Afirmação 1 para concluir que

$$\frac{y_m'(t)}{g(y_m(t))} \leq \int_t^{t_m} dx. \tag{4.12}$$

Por outro lado, como $\frac{1}{m} \leq y_m(t) \leq r$ em $[0,1]$, podemos usar a definição de G em (4.6) para obter $-y_m''(x) = g(y_m(x))$, e integrando de t_m a t, segue que

$$-\frac{y_m'(t)}{g(y_m(t))} \leq \int_{t_m}^t dx. \tag{4.13}$$

Afirmação 3: Existem $a_0,\ a_1$, com

$$0 < a_0 < \inf\{t_m : m \in N_0\} \leq \sup\{t_m : m \in N_0\} < a_1 < 1.$$

De fato, será suficiente mostrar que $\inf\{t_m : m \in N_0\} > 0$ e $\sup\{t_m : m \in N_0\} < 1$. Note

que $\inf\{t_m : m \in N_0\} \geq 0$. Se $\inf\{t_m : m \in N_0\} = 0$, então existiria uma subsequência S de N_0 com $t_m \longrightarrow 0$, quando $m \to \infty,\ m \in S$.
Integrando (4.12) de 0 a t_m fazendo $u = y_m(t)$ e usando Fubini obtemos

$$\int_0^{y_m(t_m)} \frac{1}{g(u)} du \leq \int_0^{t_m} x dx + \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{1}{g(u)} du.$$

Fazendo $m \to \infty$, obtemos que $\lim\limits_{m\to\infty} y_m(t_m) = 0$ e, como $\frac{1}{m} \leq y_m(t) \leq y_m(t_m)($ *pois* $y_m' \geq 0$ *em* $t \in (0, t_m))$, segue que $\lim\limits_{m\to\infty} y_m(t) = 0$, para todo $t \in [0,1]$. Assim, da Afirmação 2, temos que $0 \geq Kt(1-t)$, para todo $t \in [0,1]$, o que é um absurdo, pois $0 < K(1-t_1)t_1$, para todo $t_1 \in (0,1)$. A prova de $\sup\{t_m : m \in N_0\} < 1$ é análoga. Isto conclui a verificação da Afirmação 3.

Afirmação 4: $(y_m)_{m\in N_0}$ é limitada e equicontínua em $[0,1]$.
De fato, tome a_0 e a_1 como na afirmação anterior. Se $t \in [0, t_m]$, então de (4.12) obtemos

$$\frac{y_m'(t)}{g(y_m(t))} \leq \int_{\min\{t,a_0\}}^{\max\{a_1,t\}} dx.$$

Se $t \in [t_m, 1]$, então usando (4.13) temos

$$-\frac{y_m'(t)}{g(y_m(t))} \leq \int_{\min\{t,a_0\}}^{\max\{a_1,t\}} dx.$$

Assim,

$$\frac{|y_m'(t)|}{g(y_m(t))} \leq \int_{\min\{t,a_0\}}^{\max\{a_1,t\}} dx := v(t), \quad \text{para todo } t \in [0,1]. \tag{4.14}$$

Note que $v \in C([0,1]),\ v > 0,\ v \in L^1([0,1])$. Definamos

$$I : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty),\ I(z) = \int_0^z \frac{1}{g(u)} du.$$

Veja que I é crescente, sobrejetora ($\lim\limits_{z\to\infty} I(z) = \infty$) e contínua em $[0, A]$, para todo $A > 0$. Além disso, $(I(y_m))_{m\in N_0}$ é limitada e equicontínua em $[0,1]$. De fato, a limitação segue da continuidade de I em $[0, r]$. Para verificar a equicontinuidade, tome $t,\ s \in [0,1]$ e observe que

$$|I(y_m(t)) - I(y_m(s))| = \left| \int_s^t \frac{y'(x)}{g(y_m(x))} dx \right| \leq \int_s^t v(x) dx \leq \|v\|_{C([0,1])}(t-s).$$

Assim, dado $\varepsilon_2 > 0$, existe $\delta_2 = \frac{\varepsilon_2}{\|v\|_{C([0,1])}} > 0$ tal que

$$|I(y_m(t)) - I(y_m(s))| < \varepsilon_2, \quad \text{desde que} \quad |t-s| < \delta_2,$$

o que mostra que $(I(y_m))$ é equicontínua.
Como $I^{-1} : [0, I(r)] \longrightarrow [0, r]$ é contínua, então I^{-1} é uniformemente contínua em $[0, I(r)]$. Logo, dado $\varepsilon_3 > 0$, existe $\delta_3 > 0$ tal que

$$|y_m(t) - y_m(s)| = |I^{-1}(I(y_m(t))) - I^{-1}(I(y_m(s)))| < \varepsilon_3, \quad \text{desde que } |s-t| < \delta_3,$$

o que nos garante que $(y_m)_{m\in N_0}$ é equicontínua. Além disso, como $\|y_m\|_{C([0,1])} \leq r$, segue que $(y_m)_{m\in N_0}$ é equilimitada, e isto conclui a prova da Afirmação 4.

Esta última afirmação nos permite aplicar o Teorema de Arzelá-Ascoli para garantir a existência de uma subsequência N de N_0 e de uma função $y \in C([0,1])$ com $y_m \longrightarrow y$, quando $m \to \infty$, $m \in N$, uniformemente em $[0,1]$. Assim, de (4.3) e da Afirmação 2, obtemos

$$y(0) = y(1) = 0, \; y > 0, \quad \text{em } (0,1).$$

Por outro lado, para $m \in N$, y_m satisfaz

$$\int_{\frac{1}{2}}^{x} (s-x)g(y_m(s))ds - \int_{\frac{1}{2}}^{x} (s-x)y_m''(s)ds = (\frac{1}{2} - x)y_m'(\frac{1}{2}) + y_m(x) - y_m(\frac{1}{2}).$$

Assim,

$$y_m(x) = y_m(\frac{1}{2}) + (x - \frac{1}{2})y_m'(\frac{1}{2}) + \int_{\frac{1}{2}}^{x} (s-x)g(y_m(s))ds, \quad \text{para todo } x \in (0,1). \tag{4.15}$$

Tomando $x = \frac{2}{3}$, obtemos

$$\begin{aligned} y_m'(\frac{1}{2}) &= \frac{1}{2}\left(y_m(\frac{2}{3}) - y_m(\frac{1}{2}) - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} (s - \frac{2}{3})g(y_m(s))ds\right) \\ &< \frac{1}{2}y_m(\frac{2}{3}) - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} (s - \frac{2}{3})g(y_m(s))ds \\ &\leq \frac{r}{2} + \frac{\|g\|_0}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} (\frac{2}{3} - s)ds := C, \end{aligned}$$

onde C é uma constante. Assim $(y_m'(\frac{1}{2}))_m$ converge a r_0, quando $m \to \infty$, a menos de subsequências.

Tome $x \neq \frac{1}{2}$ em (4.15). Quando $m \to \infty$, obtemos que

$$y(x) = y(\frac{1}{2}) + r_0(x - \frac{1}{2}) + \int_{\frac{1}{2}}^{x} (s - x)g(y(s))ds.$$

Como tal argumento pode ser repetido para qualquer $x \in (0,1)$, temos que $y''(x) = -g(y(x))$, para $x \in (0,1)$. O Teorema 4.1 está demonstrado. $\square$

Na continuação mostramos uma propriedade da função h dada no Lema 2.3. A existência de h é garantida pelo Teorema 4.1.

Demonstração da propriedade (h_1): $h'(0^+) \in (0, +\infty]$.

De fato, sejam $t_1,\ t_2 \in (0,1)$ tais que $t_1 < t_2$. Como h é côncava, temos

$$h(t_1) \geq h(0) + \frac{h(t_2) - h(0)}{t_2} t_1 = \frac{h(t_2)}{t_2} t_1.$$

Assim, $h(t_1)/t_1 \geq h(t_2)/t_2$, o que implica que a função $t \longmapsto h(t)/t$ é não-crescente em $(0,1)$. Definamos

$$B := \left\{ \frac{h(t)}{t} : t > 0 \right\}.$$

Se B é limitado superiormente, existe $\alpha = \sup B$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $t_\varepsilon > 0$ tal que $h(t_\varepsilon)/t_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$. Logo, para todo $t < t_\varepsilon$ temos que

$$\alpha - \varepsilon < \frac{h(t_\varepsilon)}{t_\varepsilon} \leq \frac{h(t)}{t} < \alpha < \alpha + \varepsilon,$$

o que implica que $h'(0^+) = \lim_{t \to 0^+} h(t)/t = \alpha$.
Se B não é limitado superiormente, dado $M > 0$, podemos tomar $t_M > 0$ tal que $h(t_M)/t_M > M$. Logo,

$$\frac{h(t)}{t} > \frac{h(t_M)}{t_M} > M, \quad \text{para todo } t < t_M,$$

o que nos diz que $h'(0^+) = \lim_{t \to 0^+} h(t)/t = \infty$.

$\square$

Agora, usando o Lema 1.17 (Lema de Hopf), verificamos a equação (2.6).

Verificação das desigualdades dadas em (2.6):

Considerando $v = -\varphi_1$, temos que

$$\begin{cases} v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\ -\Delta v < 0, & \text{em } \Omega; \\ \text{existe } x_0 \in \partial\Omega \text{ tal que } v(x_0) > v(x), & \text{para todo } x \in \Omega. \end{cases}$$

E desde que Ω é um domínio limitado suave, podemos aplicar o Lema de Hopf para obter $\dfrac{\partial v(x_0)}{\partial \eta} > 0$, o que implica em $\dfrac{\partial \varphi_1(x_0)}{\partial \eta} < 0$. Da continuidade de φ_1, segue que existe $\delta_{x_0} > 0$ tal que

$$\frac{\partial \varphi_1(x_0)}{\partial \eta} < 0, \quad \text{para todo } x \in B_{\delta_{x_0}}(x_0) \cap \Omega.$$

Logo,

$$|\nabla \varphi_1(x)|\ |\eta| \geq |\langle \nabla \varphi_1(x), \eta \rangle| = \left| \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial \eta} \right| > 0, \quad \text{para todo } x \in B_{\delta_{x_0}}(x_0) \cap \Omega.$$

Assim, $|\nabla \varphi_1(x)| > 0$ em $B_{\delta_{x_0}}(x_0) \cap \Omega$. Como $\overline{\Omega}$ é compacto, podemos repetir o argumento anterior para um número finito de pontos $x_i \in \partial\Omega,\ 1 \leq i \leq n$, e obter $B_{\delta_{x_i}}(x_i)$ tal que

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{n} (B_{\delta_{x_i}}(x_i) \cap \Omega).$$

Definindo

$$\tilde{\delta} := \min_{x_i \in \partial\Omega} \{\delta_{x_i}\} \;\; e \;\; \Omega_{\tilde{\delta}} = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) < \tilde{\delta}\},$$

concluímos que $|\nabla \varphi_1| > 0$, para qualquer $x \in \Omega_{\tilde{\delta}}$. Isto nos garante que existe $\delta_1 > 0$ tal que $|\nabla \varphi_1| > \delta_1$ em $\Omega_{\tilde{\delta}}$.

Por outro lado, como $\varphi_1 > 0$ em Ω e $\varphi_1 = 0$ em $\partial\Omega$, podemos tomar $\delta_2 > 0$, suficientemente pequeno, de tal forma que $\varphi_1 > \delta_2 > 0$, em $(\Omega \setminus \Omega_{\tilde{\delta}})$ e $\varphi_1 \leq \delta_2$, em $\Omega_{\tilde{\delta}}$. Assim, definindo $W = (\Omega \setminus \Omega_{\tilde{\delta}})$ e tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, segue que

$$\begin{cases} |\nabla \varphi_1| > \delta & \text{em } \Omega \setminus W = \Omega_{\tilde{\delta}}, \\ \varphi_1 > \delta & \text{em } W. \end{cases}$$

□

Os limites dados na equação (2.24) foram usados para garantir a limitação da função Φ dada no Lema 2.4.

<u>Verificação da equação (2.24):</u>

Das hipóteses do Lema 2.4, da regra de L'Hôpital e do fato de ter $\phi(0) = 0$, segue que

$$\lim_{r\to 0^+} \Phi(r) = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r t^{N-1}\phi(t)\, dt = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^{N-1}\phi(r)}{(N-1)r^{N-2}} = 0.$$

Por outro lado, de (p_1) temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} \Phi(r) &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r t^{N-1}\phi(t)\, dt = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r t^{N-2} t\, \phi(t)\, dt \\
&\leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int_0^r t\, \phi(t)\, dt \leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \left(\int_0^1 t\, \phi(t)\, dt + \int_1^\infty t\, \phi(t)\, dt \right) \\
&\leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \left(\max_{[0,1]} \phi(r) \int_0^1 t\, dt + \int_1^\infty t\, \phi(t)\, dt \right) = 0.
\end{aligned}$$

□

Verificação da Afirmação 3 do Capítulo 2:

Como w satisfaz (w_1) e (w_2), temos que w é limitada em $\mathbb{R}^N$. Assim, de (f_2), dado $\varepsilon = \frac{1}{\|w\|_\infty} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{f(t)}{t} < \frac{1}{\|w\|_\infty}, \quad \text{para todo} \;\; t \geq \delta.$$

Tomando $M > 1$ tal que $M\|w\|_\infty > \delta$, segue que

$$\frac{f(M\|w\|_\infty)}{M\|w\|_\infty} < \frac{1}{\|w\|_\infty},$$

e como f é crescente, segue do anterior que

$$f(Mw) \leq f(M\|w\|_\infty) < M.$$

Além disso, da monotonicidade de g obtemos que $g(w) > g(Mw)$, o que verifica a afirmação.

□

Os próximos resultados nos garantem que a função f_n, dada na demonstração do Teorema 2.2, é Hölder contínua, o que foi usado em (2.36).

Teorema 4.2. *Sejam $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma função positiva e $g : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ de classe C^1. Então $g(u) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.*

Demonstração. Como u é contínua em $\overline{\Omega}$, existem $v_0 = \min\limits_{\overline{\Omega}} u(x)$ e $v_\infty = \max\limits_{\overline{\Omega}} u(x)$ tais que $0 < v_0 \leq u \leq v_\infty$ em $\overline{\Omega}$. Por outro lado, usando o fato de $g \in C^1(0,\infty)$, podemos usar o Teorema do Valor Médio para garantir a existência de $K > 0$ tal que

$$|g(t_1) - g(t_2)| \leq K|t_1 - t_2|, \quad \text{para todos } t_1,\ t_2 \in (v_0, v_\infty).$$

Logo, dados $x, y \in \overline{\Omega}$, com $x \neq y$, obtemos

$$\frac{|g(u(x)) - g(u(y))|}{|x-y|^\alpha} \leq K\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq K[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty,$$

o que nos diz que $g(u) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. □

Teorema 4.3. *Se $f, g \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, então o produto $fg \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.*

Demonstração. Sejam $x, y \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, com $x \neq y$. Então,

$$\begin{aligned}\frac{|f(x)g(x) - f(y)g(y)|}{|x-y|^\alpha} &\leq \frac{|f(x)g(x) - f(x)g(y)|}{|x-y|^\alpha} + \frac{|f(x)g(y) - f(y)g(y)|}{|x-y|^\alpha} \\ &\leq \max_{\overline{\Omega}} f(x)\frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|^\alpha} + \max_{\overline{\Omega}} g(y)\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \\ &\leq \max_{\overline{\Omega}} f(x)\ [g]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} + \max_{\overline{\Omega}} g(x)\ [f]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty,\end{aligned}$$

o que implica que $fg \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. □

Observação 4.4. *Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e satisfaz*

$$\begin{cases} -\Delta u = p(x)(g(u) + f(u) + |\nabla u|^a) & em\ \Omega, \\ u > 0 & em\ \Omega, \\ u = 0 & sobre\ \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $p : \mathbb{R}^N \longrightarrow (0,\infty)$, $g : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ e f é positiva em $(0,\infty)$, então $\nabla u \neq 0$ em Ω.

Suponhamos, por absurdo, que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\nabla u(x_0) = 0$. Então, pela continuidade de ∇u, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\nabla u(x) = 0$, para todo $x \in B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$, o que implica que u é constante em $B_\varepsilon(x_0)$. Assim, $\Delta u = 0$ em $B_\varepsilon(x_0)$. Por outro lado, como $u > 0$ em Ω, segue que $f(u) > 0$ em Ω. Portanto, para $x \in B_\varepsilon(x_0)$, temos que

$$0 = -\Delta u(x) = p(x)(g(u) + f(u) + |\nabla u|^a) = p(x)(g(u) + f(u)) > 0,$$

o que é um absurdo. A observação 4.4 está verificada.

Note que, se $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, então pelo Teorema 4.2 e da Observação 4.4 segue que, $|\nabla u|^a \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

No Lema 2.3 usamos o Teorema de sub e supersolução de Cui. No que segue, verificamos a validade de suas hipóteses.

Verificação das hipóteses do Teorema de Cui:

(i) Que a função $p(x)(g(u) + f(u) + |\nabla u|^a)$ é localmente Hölder contínua em $\Omega \times (0,\infty) \times \mathbb{R}^N$, segue dos Teoremas 4.2, 4.3 e da Observação 4.4. Para verificar que $p(x)(g(u)+f(u)+|\nabla u|^a)$ é de classe C^1 com respeito a u e ∇u, basta observar que f e g são de classe $C^1((0,\infty))$.

(ii) Sejam $x \in \Omega \subset\subset \Omega$ e $u(x) \in [a,b] \subset (0,\infty)$. Observe que

$$\begin{aligned} |p(x)(g(u)+f(u)+|\nabla u|^a| &\leq \max_{\overline{\Omega}_1} p(x)(\max_{[a,b]} g(s) + \max_{[a,b]} f(s) + |\nabla u|^a) \\ &\leq C(1+|\nabla u|^a), \end{aligned} \tag{4.16}$$

onde $C = \max_{\overline{\Omega}_1} p(x) \max\{\max_{[a,b]} g(s), \max_{[a,b]} f(s), 1\}$.
Lembrando que $s^a \leq s^2+1$, para todo $s \geq 0$ e $0 < a < 1$, segue de (4.16) que

$$|p(x)(g(u)+f(u)+|\nabla u|^a| \leq C(1+|\nabla u|^2+1) \leq 2C(1+|\nabla u|^2).$$

□

A seguir verificamos que a função $f(x,t,\xi) = b_1|t|^{p-1}tg(\xi)$, dada na Observação 3.4, satisfaz as hipóteses $(f_0)-(f_4)$ do Capítulo 3.

Verificação da Observação 3.4:

(f_0) f é contínua e localmente Lipschitz.

De fato, f é contínua em $\mathbb{R}^N$ desde que $g \in Lip_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, seja $K \subset \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ compacto e $(x_1,t_1,\xi_1),(x_2,t_2,\xi_2) \in K$. Temos que

$$\begin{aligned} |f(x_1,t_1,\xi_1) - f(x_2,t_2,\xi_2)| &= b_1||t_1|^{p-1}t_1 g(\xi_1) - |t_2|^{p-1}t_2 g(\xi_2)| \\ &\leq b_1|t_1|^p|g(\xi_1)-g(\xi_2)| + b_1|g(\xi_2)||t_1|t_1|^{p-1} - t_2|t_2|^{p-1}|. \end{aligned}$$

Note que, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$|t_1|t_1|^{p-1} - t_2|t_2|^{p-1}| = p|t_1 + \alpha(t_2-t_1)|^{p-1}|t_2-t_1|.$$

Por outro lado, como K é compacto, existem constantes $c_1,\ c_2 > 0$ tais que

$$|t|^p \leq c_1, \quad |t_1 + \alpha(t_2 - t_1)| \leq c_2.$$

Logo, desde que $g \in Lip_{loc}(\mathbb{R}^N)$, temos do anterior que

$$\begin{aligned} |f(x_1, t_1, \xi_1) - f(x_2, t_2, \xi_2)| &\leq b_1 c_1 |\xi_1 - \xi_2| + \|g\|_\infty b_1 c_2 p |t_1 - t_2| \\ &\leq c_3(|\xi_1 - \xi_2| - |t_1 - t_2|) \\ &\leq 2c_3 |(x_1, t_1, \xi_1) - (x_2, t_2, \xi_2)|, \end{aligned}$$

onde $c_3 = \max\{b_1 c_1, \|g\|_\infty b_1 c_2 p\}$.

(f_1) $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f(x,t,\xi)}{t} = 0$ uniformemente, para $x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbb{R}^N$. Em outras palavras, isto significa que dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\frac{|f(x,t,\xi)|}{|t|} < \varepsilon, \quad \text{para quaisquer } x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \text{desde que } 0 < |t| < \delta.$$

De fato, como

$$\frac{|f(x,t,\xi)|}{|t|} = b_1 |g(\xi)| |t|^{p-1} \leq b_1 \|g\|_\infty |t|^{p-1},$$

séra suficiente tomar $\delta = \sqrt[p-1]{\frac{\varepsilon}{b_1\|g\|_\infty}} > 0$.

(f_2) Existem constantes $a_1 > 0$ e $p \in (1, \frac{N+2}{N-2})$ tais que

$$|f(x,t,\xi)| \leq a_1(1 + |t|^p), \text{ para todos } x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Para verificar tal relação, basta tomar $a_1 = b_1 \|g\|_\infty > 0$, pois

$$|f(x,t,\xi)| = b_1 |g(\xi)| |t|^p \leq b_1 \|g\|_\infty (1 + |t|^p).$$

(f_3) Existem constantes $\theta > 2$ e $t_0 > 0$ tais que

$$0 < \theta F(x,t,\xi) \leq t f(x,t,\xi), \quad \text{para todos } x \in \overline{\Omega},\ |t| \geq t_0,\ \xi \in \mathbb{R}^N.$$

De fato, tome $t_0 > 0$ fixado arbitrariamente e $\theta = p + 1 > 2$.
Se $t \geq t_0$,

$$0 < \theta F(x,t,\xi) = \theta \int_0^t b_1 |s|^{p-1} s g(\xi) ds = \theta b_1 g(\xi) \frac{t^{p+1}}{p+1} = b_1 g(\xi) t^{p+1} = t f(x,t,\xi).$$

Se $t \leq -t_0$, fazendo $z = -s$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &< \theta F(x,t,\xi) = \theta \int_0^t b_1 |s|^{p-1} s g(\xi) ds = -\theta b_1 g(\xi) \int_t^0 (-s)^{p-1} s ds \\ &= -\theta b_1 g(\xi) \int_{-t}^0 z^p dz = \theta b_1 g(\xi) \frac{|t|^{p+1}}{p+1} = t f(x,t,\xi). \end{aligned}$$

(f_4) Existem constantes $a_2, a_3 > 0$ tais que

$$F(x,t,\xi) \geq a_2 |t|^\theta - a_3, \quad \text{para todos } x \in \overline{\Omega},\ t \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^N.$$

De fato, tome $a_2 = \dfrac{b_1 b_2}{p+1} > 0$ e $a_3 > 0$ fixado arbitrariamente.
Se $t \geq 0$, $F(x,t,\xi) = b_1 g(\xi) \displaystyle\int_0^t s^p ds = b_1 g(\xi) \frac{t^{p+1}}{p+1} \geq \frac{b_1 b_2}{p+1} |t|^\theta$, desde que $g(\xi) \geq b_2$ e $\theta = p+1$.

$$\begin{aligned} \text{Se } t &< 0,\ F(x,t,\xi) = -b_1 g(\xi) \int_t^0 (-s)^{p-1} s ds = -b_1 g(\xi) \int_{-t}^0 z^p ds \geq \frac{b_1 b_2}{p+1} (-t)^{p+1} \\ &= \frac{b_1 b_2}{p+1} |t|^\theta. \end{aligned}$$

Do anterior, segue que $F(x,t,\xi) \geq a_2 |t|^\theta - a_3$.

□

O objetivo da parte a seguir é provar a regularidade $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ do funcional

$$I_\omega(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega F(x, v, \nabla w) dx,$$

e f satisfaz as hipóteses dadas no Capítulo 3 deste trabalho.

Teorema 4.5. *Definamos*

$$I(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Então $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração. De fato, primeiro garantiremos a existência da derivada de Gateux de I.

Sejam $|t| < \delta$ e $h \in H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{I(v+th)-I(v)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{|\nabla(v+th)|^2-|\nabla v|^2}{t}dx\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{|\nabla v|^2+2t\nabla v\nabla h+t^2|\nabla h|^2-|\nabla v|^2}{t}dx\\ &= \int_\Omega \nabla v.\nabla h\ dx.\end{aligned}$$

Logo, fazendo

$$I^{'}(v)h = \int_\Omega \nabla v.\nabla h\ dx, \text{ para todo } h \in H_0^1(\Omega),$$

é fácil ver que $I^{'}(v) \in (H_0^1(\Omega))^*$.

Continuidade de $I^{'}$.
Considere uma sequência $(v_n)_{n=1}^\infty \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $v_n \longrightarrow v$ em $H_0^1(\Omega)$, quando $n \to \infty$. Como

$$|[I^{'}(v_n) - I^{'}(v)]h| = |\int_\Omega (\nabla v_n - \nabla v).\nabla h\ dx| \leq \|v_n - v\|\|h\|,$$

segue que, quando $n \to \infty$,

$$\|I^{'}(v_n) - I^{'}(v)\|_{(H_0^1)^*} = \sup_{\|h\|=1} |[I^{'}(v_n) - I^{'}(v)]h| \leq \|v_n - v\| \longrightarrow 0.$$

Logo $I^{'}$ é contínua. Assim, pela Proposição 1.28, segue que $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. $\square$

Os dois teoremas seguintes nos permitem mostrar que o funcional

$$J(v) = \int_\Omega F(x, v, \nabla w)dx, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega),$$

é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Teorema 4.6. *[48] Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz*

(g_1)

$$\begin{cases} \textit{para todo } t \in \mathbb{R}, & \textit{a função } g(\cdot, t) \textit{ é mensurável em } \overline{\Omega}.\\ \textit{para todo } x \in \Omega, & \textit{a função } g(x, \cdot) \textit{ é contínua em } \mathbb{R}.\end{cases}$$

(g_2) $g(x,t) \leq a + b|t|^{\frac{r}{q}}$, *para todos* $x \in \overline{\Omega}, t \in \mathbb{R}$, *onde* $r, q \geq 1,\ \ a, b > 0$.

Então a aplicação $B : L^r(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$, definida por $B(u) = g(x, u(x))$, é contínua.

Demonstração. Primeiro note que B está bem definida. De fato, se $u \in L^r(\Omega)$, então de (g_2) segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |g(x,u)|^q dx &\leq \int_\Omega (a+b|u|^{\frac{r}{q}})^q dx \\ &\leq C\int_\Omega (1+|u|^r)dx < \infty,\end{aligned}$$

onde C é constante.

Continuidade de B.
Seja $(u_n)_{n=1}^\infty \subset L^r(\Omega)$ tal que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ em $L^r(\Omega)$. Então, a menos de subsequências, temos que

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u, \quad \text{quando } n \to \infty, \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \\ |u_n| \leq h(x) \in L^r(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega). \end{cases}$$

Logo, segue da condição (g_1) que

$$|g(x,u_n) - g(x,u)|^q \longrightarrow 0, \text{ quando } \; n \to \infty, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Por outro lado, usando (g_2) obtemos que

$$\begin{aligned}|g(x,u_n)-g(x,u)|^q &\leq (|g(x,u_n)|+|g(x,u)|)^q \leq C_1(|g(x,u_n)|^q + |g(x,u)|^q) \\ &\leq C_1[(a+b|u_n|^{\frac{r}{q}})^q + (a+b|u|^{\frac{r}{q}})^q] \\ &\leq C_2 + C_3(|u_n|^r + |u|^r) \in L^1(\Omega),\end{aligned}$$

desde que $u_n,\ u \in L^r(\Omega)$, onde $C_1,\ C_2,\ C_3$ são constantes positivas.
Logo, do Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \|B(u_n)-B(u)\|_q^q = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |B(u_n)-B(u)|^q dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |g(x,u_n)-g(x,u)|^q dx = 0.$$

□

Antes de mostrar o seguinte teorema, lembremos que, dados $r_1, r_2, q_1, q_2 \geq 1$, os espaços $L^{r_1}(\Omega) \cap L^{r_2}(\Omega)$ e $L^{q_1}(\Omega) + L^{q_2}(\Omega)$, munidos com as normas

$$\|u\|_{L^{r_1}(\Omega)\cap L^{r_2}(\Omega)} = \|u\|_{r_1} + \|u\|_{r_2},$$

$$\|u\|_{L^{q_1}(\Omega)+L^{q_2}(\Omega)} = \inf\{\|v\|_{q_1} + \|w\|_{q_2} : v \in L^{q_1}(\Omega), w \in L^{q_2}(\Omega), u = v + w\}$$

são espaços vetoriais normados (veja [1]).

Teorema 4.7. *Sejam Ω um domínio limitado e $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz a condição (g_1) do teorema anterior e*

(g_3) $|g(x,t)| \leq a|t|^{\frac{r_1}{q_1}} + b|t|^{\frac{r_2}{q_2}}$, *para todos* $x \in \overline{\Omega},\ t \in \mathbb{R}$, *onde* $a,\ b > 0$.

Defina a aplicação $B : L^{r_1}(\Omega) \cap L^{r_2}(\Omega) \longrightarrow L^{q_1}(\Omega) + L^{q_2}(\Omega)$ dada por $B(u) = g(x,u)$, onde $r_1,\ r_2,\ q_1,\ q_2 \geq 1$. Então $B = B_1 + B_2$, onde B_i é uma aplicação contínua de $L^{r_i}(\Omega)$ em $L^{q_i}(\Omega)$, para todo $i = 1, 2$.

Demonstração. Pelo Lema de Urysohn, existe $\xi \in C(\mathbb{R}, [0,1])$ tal que

$$\xi(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t \in [-1,1], \\ 0 & \text{se} \quad t \in \mathbb{R} \setminus (-2,2). \end{cases}$$

Definamos $\lambda : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\lambda(x,t) = \xi(t)g(x,t)$ e $\mu : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\mu(x,t) = (1 - \xi(t))g(x,t)$.

Se $|t| < 2$, de (g_3) obtemos

$$|\lambda(x,t)| \leq |g(x,t)| \leq a|t|^{\frac{r_1}{q_1}} + b|t|^{\frac{r_2}{q_2}} < a|t|^{\frac{r_1}{q_1}} + b\ 2^{\frac{r_2}{q_2}}.$$

Se $|t| \geq 2$,

$$|\lambda(x,t)| = |\xi(t)\lambda(x,t)| = 0,$$

desde que $\xi(t) = 0$ em $\mathbb{R} \setminus [-2,2]$.

Da análise anterior, obtemos

$$|\lambda(x,t)| \leq a|t|^{\frac{r_1}{q_1}} + b\ 2^{\frac{r_2}{q_2}}, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega},\ t \in \mathbb{R}. \tag{4.17}$$

Se $|t| \leq 1$,

$$|\mu(x,t)| = |(1 - \xi(t))g(x,t)| = 0,$$

desde que $\xi(t) = 1$ em $[-1,1]$.

Se $|t| > 1$ podemos supor, sem perda de generalidade, que $\dfrac{r_1}{q_1} \leq \dfrac{r_2}{q_2}$, para obter

$$|\mu(x,t)| \leq |g(x,t)| \leq a|t|^{\frac{r_1}{q_1}} + b|t|^{\frac{r_2}{q_2}} \leq a|t|^{\frac{r_2}{q_2}} + b|t|^{\frac{r_2}{q_2}} \leq \max\{a,b\}|t|^{\frac{r_2}{q_2}}.$$

Assim,

$$|\mu(x,t)| \leq \max\{a,b\}|t|^{\frac{r_2}{q_2}}, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega},\ t \in \mathbb{R}. \tag{4.18}$$

Definindo $B_1 : L^{r_1}(\Omega) \longrightarrow L^{q_1}(\Omega)$ e $B_2 : L^{r_2}(\Omega) \longrightarrow L^{q_2}(\Omega)$ por $B_1(u) = \lambda(x,u)$ e $B_2(u) = \mu(x,u)$, respectivamente, a condição (g_1), (4.17) e (4.18) nos permite aplicar o

Teorema 4.6 para concluir que $B_i \in C(L^{r_i}(\Omega), L^{q_i}(\Omega))$, *para todo* $i = 1, 2$. Além disso, se $|u| \leq 1$, então $B_1(u) + B_2(u) = g(x, u) = B(u)$.
Caso tenhamos $1 < |u| < 2$, ocorre que

$$B_1(u) + B_2(u) = \xi(u)g(x, u) + (1 - \xi(u))g(x, u) = g(x, u) = B(u).$$

Finalmente, se $|u| \geq 2$, então $B_1(u) + B_2(u) = g(x, u) = B(u)$. $\square$

Agora, utilizando os dois teoremas mostrados anteriormente, podemos mostrar o resultado abaixo, que é de fundamental importância para garantir que o funcional $I_\omega \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Teorema 4.8. *Definindo*

$$J(v) = \int_\Omega F(x, v, \nabla w)dx, \ \textit{para todo } v \in H_0^1(\Omega),$$

temos que $J \in C(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração. De fato, primeiro garantiremos a existência da derivada de Gateux de J. Segue, de (f_1), que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|f(x, t, \xi)| \leq \varepsilon|t|, \quad \text{para todos } x \in \overline{\Omega}, \ |t| < \delta, \ \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Para o caso $|t| \geq \delta$, podemos usar (f_2) para obter

$$|f(x, t, \xi)| \leq a_1(1 + |t|^p) = \frac{a_1}{\delta^p}\delta^p + a_1|t|^p \leq \frac{a_1}{\delta^p}|t|^p + a_1|t|^p = C_\varepsilon|t|^p,$$

onde $C_\varepsilon := \frac{a_1}{\delta^p} + a_1$.
Assim, das desigualdades anteriores, segue que

$$|f(x, t, \xi)| \leq \varepsilon|t| + C_\varepsilon|t|^p, \ \text{para todos } x \in \overline{\Omega}, \ t \in \mathbb{R}, \ \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{4.19}$$

Definamos

$$g(x, t) := f(x, t, \nabla w(x)) \quad \text{e} \quad G(x, t) := \int_0^t g(x, s)ds = F(x, t, \nabla w(x)).$$

Note que g satisfaz (g_1).
Fixando $x \in \Omega$, podemos supor que $u(x) < u(x) + tv(x)$, onde $u, \ v \in H_0^1(\Omega)$ e $|t| < 1$. Assim, podemos definir $\xi : [u, u + tv] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\xi(s) = G(x, s)$. Note que ξ é contínua em

$[u, u+tv]$ e derivável em $(u, u+tv)$, com $\xi^{'}(s) = g(x,s)$. Logo, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\gamma \in (0,1)$ tal que

$$\frac{\xi(u+tv)-\xi(u)}{t} = \xi^{'}(u+t\gamma v)v,$$

ou seja

$$\frac{G(x,u+tv)-G(x,u)}{t} = g(x,u+t\gamma v)v.$$

Então

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{F(x,u+tv,\nabla w)-F(x,u,\nabla w)}{t}dx \\ &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{G(x,u+tv)-G(x,u)}{t}dx \\ &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega g(x,u+t\gamma v)v\ dx. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Segue de (4.19) e a Desigualdade de Young que

$$\begin{aligned} |g(x,u+t\gamma v)v| &\leq (\varepsilon|u+t\gamma v| + C_\varepsilon|u+t\gamma v|^p)|v| \leq \varepsilon|u+t\gamma v||v| + C_\varepsilon|u+t\gamma v|^p|v| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}(|u+t\gamma v|^2+|v|^2) + \frac{C_\varepsilon}{p+1}(p|u+t\gamma v|^{p+1}+|v|^{p+1}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}(C_1(|u|^2+|t|\gamma|v|^2)+|v|^2) + \frac{C_\varepsilon}{p+1}(pC_2(|u|^{p+1}+|t|\gamma|v|^{p+1})+|v|^{p+1}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}(C_1(|u|^2+|v|^2)+|v|^2) + \frac{C_\varepsilon}{p+1}(pC_2(|u|^{p+1}+|v|^{p+1})+|v|^{p+1}) \\ &\leq C_4(|u|^2+|v|^2+|u|^{p+1}+|v|^{p+1}) \in L^1(\Omega), \end{aligned}$$

desde que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$. Além disso,

$$g(x,u+t\gamma v)v \longrightarrow g(x,u)v \ \text{ q.t.p. em } \Omega, \quad \text{quando } t\to 0.$$

Logo, podemos aplicar o Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue em (4.20), para obter

$$\lim_{t\to 0}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} = \int_\Omega g(x,u)vdx = \int_\Omega f(x,u,\nabla w)v\ dx.$$

Consideremos o funcional $T_u : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$T_u(v) = \int_\Omega f(x,u,\nabla w)vdx.$$

Note que $T_u(v_1+v_2) = T_u(v_1) + T_u(v_2)$. Além disso, da Desigualdade de Hölder, (f_2), $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{P+1}(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned}
|T_u(v)| &\leq \int_\Omega |f(x,u,\nabla w)||v|\ dx \leq \int_\Omega a_1(1+|u|^P)|v|\ dx\\
&= a_1\|v\|_{L^1} + a_1\int_\Omega |u|^p|v|dx \leq a_1\|v\|_1 + a_1\|u\|_{p+1}^p\|v\|_{p+1}\\
&\leq a_1K_1\|v\| + a_1\|u\|_{p+1}^pK_2\|v\|\\
&= (a_1K_1 + a_1\|u\|_{p+1}^pK_2)\|v\|.
\end{aligned}$$

Logo, $T_u \in (H_0^1(\Omega))^*$. Então a derivada de Gateux de J existe e é dada por $J'(u) = T_u$.

Para mostrar a continuidade de J', consideramos a sequência $(u_n)_{n=1}^\infty \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)\cap L^{p+1}(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$, quando $n \to \infty$. Definamos $B : L^2(\Omega)\cap L^{p+1}(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) + L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ por $B(u) = g(x,u)$. Segue de (4.19) e do Teorema 4.7 que $B = B_1 + B_2$, onde

$$B_1 \in C(L^2(\Omega), L^2(\Omega)), \quad B_2 \in C(L^{p+1}(\Omega), L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)). \tag{4.21}$$

Note que

$$\begin{aligned}
|(J(u_n)-J(u))v| &= |\int_\Omega [f(x,u_n,\nabla\omega) - f(x,u,\nabla\omega)]vdx| = |\int_\Omega [g(x,u_n)-g(x,u)]vdx|\\
&= |\int_\Omega [B(u_n)-B(u)]vdx|\\
&\leq \int_\Omega |B_1(u_n)-B_1(u)||v|dx + \int_\Omega |B_2(u_n)-B_2(u)||v|dx.
\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
|(J(u_n)-J(u))v| &\leq \|B_1(u_n)-B_1(u)\|_2\|v\|_2 + \|B_2(u_n)-B_2(u)\|_{\frac{p+1}{p}}\|v\|_{p+1}\\
&\leq \|B_1(u_n)-B_1(u)\|_2K_1\|v\| + \|B_2(u_n)-B_2(u)\|_{\frac{p+1}{p}}K_2\|v\|\\
&\leq \max\{K_1,K_2\}\|v\|(\|B_1(u_n)-B_1(u)\|_2 + \|B_2(u_n)-B_2(u)\|_{\frac{p+1}{p}}),
\end{aligned}$$

onde $K_1,\ K_2$ são constantes positivas obtidas pelas Imersões de Sobolev. Logo

$$\begin{aligned}
\|J'(u_n)-J'(u)\|_{(H_0^1)^*} &= \sup_{\|v\|=1} |[J'(u_n)-J'(u)]v|\\
&\leq \max\{K_1,K_2\}(\|B_1(u_n)-B_1(u)\|_2 + \|B_2(u_n)-B_2(u)\|_{\frac{p+1}{p}}).
\end{aligned}$$

Assim, de (4.21) segue que $J'(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} J'(u)$ em $(H_0^1)^*$, o que mostra que J' é contínua.

Logo, segue da Proposição 1.28, que $J^{'}(u) \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. □

Finalmente, os Teoremas 4.5 e 4.8 nos permitem justificar a afirmação feita no Lema 3.9, a qual enunciamos como um teorema.

Teorema 4.9. *O funcional I_ω, dado em* (3.3)*, é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.*

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] Agarwal R., O'Regan D., *Existence theory for single and multiple solutions to singular positone boundary value problems*, J. Differential Equations 175 (2001) 393-414.

[3] Alves C. O., Carrião P. C. and Faria L. F. O., *Existence of solutions to singular elliptic equations with convection terms via the Galerkin method*, Electronic Journal of Differential Equations 12 (2010) 1-12.

[4] Amann H. and Crandall M., *On some existence theorems for semilinear elliptic equations*, Indiana Univ. Math. J. 27 (1978) 779-790.

[5] Arcoya D., *Positive solutions for semilinear Dirichlet problems in an annulus*, J. Differential Equations 94 (1991) 217-227.

[6] Agmon S., Douglis A., Nirenberg L., *Estimatives near the boundary for solutions of elliptic P. D. E. satisfying a general boundary value condition I^**, Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959) 623-727.

[7] Ambrosetti A., Rabinowitz P. H., *Dual variational methods in critical point theory and applications,* J. Funct. Anal. 14 (1973) 349-381.

[8] Brézis H., *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, París, 1984.

[9] Caffarelli L. A., Hardt R. and Simon L., *Minimal surfaces with isolated singularities*, Manuscripta Math. 48 (1984) 1-18.

[10] Callegari A. and Nashman A., *A nonlinear singular boundary-value problem in the theory of pseudoplastic fluids*, SIAM J. Appl. Math. 38 (1980) 275-281.

[11] Cîrstea F., Rădulescu V., *Existence and uniqueness of positive solutions to a semilinear elliptic problem in* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. 229 (1999) 417-425.

[12] Cui S., *Existence and nonexistence of positive solutions for singular semilinear elliptic boundary value problems*, Nonlinear Anal. 41 (2000) 149-176.

[13] Covei D.-P., *Existence and uniqueness of solutions for the Lane, Emden and Fowler type problem*, Nonlinear Anal. 72 (2010) 2684-2693.

[14] Covei D.-P., *Existence for a quasilinear elliptic problem with a gradient term via shooting method*, Appl. Math. 218 (2011) 4161-4168.

[15] Dinu T.-L., *Entire positive solutions of the singular Emder-Fowler equation with nonlinear gradient term*, Results Math. 43 (2003) 96-100.

[16] De Figueiredo D. G., Girardi M., Matzeu M., *Semilinear elliptic equations with dependence on the gradient via mountain-pass techniques*, Differential and Integral Equations 17 (2004) 119-126.

[17] De Figueiredo D. G., *Equações elípticas não-lineares*, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[18] De Figueiredo D. G., Sánchez J., Ubilla P., *Quasilinear equations with dependence on the gradient*, Nonlinear Anal. TMA 71 (2009) 4862-4868.

[19] Figueiredo G. M., *Quasilinear equations with dependence on the gradient via Mountain Pass techniques in* $\mathbb{R}^N$, Applied Mathematics and Computation 203 (2008) 14-18.

[20] Evans L. C., *Partial Differential Equations*, American Math. Soc (1998).

[21] Feng W., Liu X., *Existence of entire solutions of a singular semilinear elliptic problem*, Acta Math. Sinica 20 (2004) 983-988.

[22] Fowler R., *The solution of Emden's and similar differential equations*, Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. 91 (1930) 63-91.

[23] Fulks W. and Maybee L. S., *A singular nonlinear equation*, Osaka J. Math. 12 (1960) 1-19.

[24] Gilbarg D., Trudinger N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York 1983.

[25] Girardi M., Matzeu M., *A compactness result for quasilinear elliptic equations by mountain pass techniques*, Rend. Math. Appl. 29 (2009) 83-95.

[26] Girardi M., Matzeu M., *Positive and negative solutions of a quasi-linear elliptic equation by a Mountain Pass method and truncature techniques,* Nonlinear Analysis 59 (2004) 199-210.

[27] Girardi M., Matzeu M., *Existence of periodic solutions for some second order quasilinear Hamiltonian systems,* Rend. Lincei. Mat. Appl. 18 (2007) 1-9.

[28] Gonçalves J. V., Santos C. A., *Existence and asymptotic behavior of non-radially symmetric ground states of semilinear singular elliptic equations*, Nonlinear Anal. 65 (2006) 719-727.

[29] Gonçalves J. V. and Silva F. K., *Existence and nonexistence of ground state solutions for elliptic equations with a convection term*, Nonlinear Anal. 72 (2010) 904-915.

[30] Gonçalves J. V., Rezende M. C., Santos C. A., *Positive solutions for a mixed and singular quasilinear problem*, Nonlinear Anal. 74 (2011) 132-140.

[31] Liu G., Shi S. and Wei Y., *Semilinear elliptic equations with dependence on the gradient*, Electronic Journal of Differential Equations 139 (2012)1-9.

[32] Ghergu M,. Rădulescu V., *Ground state solutions for the singular Lane-Emden-Fowler equation with sublinear convection term*, J. Math. Anal. App. 333 (2007) 265-273.

[33] Hale J. K. and Mawhin J., *Coincidence degree and periodic solutions of neutral equations*, J. Differential Equations 15 (1974) 295-307.

[34] Ladyzenskaya O. A., Ural'tseva N. N., *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, New York, London, 1968.

[35] Lair A. V., Shaker A. W., *Entire solutions of a singular semilinear elliptic problem*, J. Math. Anal. Appl. 200 (1996) 498-505.

[36] Lasry J. M. and Lions P. L., *Nonlinear elliptic equations with singular boundary conditions and stochastic control with state constraints*, Math. Ann. 283 (1989) 583-630.

[37] Mawhin J. and Willem M., *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Springer Verlag, New York, 1989.

[38] Mohammed A., *Ground state solutions for singular semi-linear elliptic equations*, Nonlinear Anal. 71 (2009) 1276-1280.

[39] Naito Y., Tanaka S., *On the existence of multiple solutions of the boundary value problems for nonlinear second order differential equations*, Nonlinear Anal. TMA 56 (2004) 919-935.

[40] Ortiz A., *Tópicos Sobre Ecuaciones en Derivadas Parciales,* Impreso por la UNT (2004).

[41] Pohozaev S., *On equations of the type* $\Delta u = f(x, u, Du)$, Mat. Sb. 113 (1980) 324-338.

[42] Santos C. A., *On ground state solutions for singular and semi-linear problems including super-linear terms at infinity*, Nonlinear Anal. 71 (2009) 6038-6043.

[43] Servadei R., *A semilinear elliptic PDE not in divergence form via variational methods*, j. Math. Anal. Appl. 383 (2011) 190-199.

[44] Stuart C. A., *Self-trapping of an electromagnetic field and bifurcation from the essential spectrum*, Arch. Rational Mech. Anal. 113 (1991) 65-96.

[45] Stuart C. A. and Zhou H.-S., *A variational problem related to self-trapping of an electromagnetic field*, Math. Methods Appl. Sci. 19 (1996) 1397-1407.

[46] Teng K., Zhang C., *Existence of solution to boundary value problem for impulsive differential equations*, Nonlinear Anal. R.W.A. 11 (2010) 4431-4441.

[47] Wheeden R., Zygmund A., *Measure and Integral, An Introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker, New York, (1977).

[48] Willem M., *Minimax Theorem*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, 24 Birkhäuser Boston, Inc., MA 1996.

[49] Wong J. S. W., *On the generalized Emden-Fowler equation*, SIAM Rev. 17 (1975) 339-360.

[50] Wu M. and Yang Z., *Existence and Non-Existence Result for Singular Quasilinear Elliptic Equations*, Applied Mathematics 1 (2010) 351-356.

[51] Xue H., Zhang Z., *A remark on ground state solutions for Lane-Emden-Fowler equations with a convection term*, Electron. J. Differential Equations 53 (2007) 1-10.

[52] Xue H. T., Shao X. G., *Existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic problem with a gradient term*, Nonlinear Anal. 71 (2009) 3113-3118.

[53] Xue H., *Ground state solutions for a semilinear elliptic problem with a convection term*, J. Math Anal. Appl. 384 (2011) 439-443.

[54] Yan Z., *A note on the solvability in $W^{2,p}(\Omega)$ for the equation $-\Delta u = f(x, u, Du)$*, Nonlinear Anal. TMA 24 (1995) 1413-1416.

[55] Zhang Z., *A remark on the existence of entire solutions of a singular semilinear elliptic problem*, J. Math. Anal. Appl. 215 (1997) 579-582.

[56] Zhang Z., *A remark on the existence of positive entire solutions of a sublinear elliptic problem*, Nonlinear Anal. 67 (2007) 147-153.