

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Identidades Polinomiais Graduadas de Algumas
Álgebras sobre um Domínio de Integridade

Luís Felipe Gonçalves Fonseca

Brasília, 16 de dezembro

Luís Felipe Gonçalves Fonseca

Identidades Polinomiais Graduadas de Algumas Álgebras sobre um Domínio
de Integridade

Tese apresentada ao corpo docente de
Pós-Graduação em Matemática da Uni-
versidade de Brasília (UnB) como parte
dos requisitos para obtenção do título
de Doutor em Matemática.

Brasília

16 de dezembro de 2013

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Identidades Polinomiais Graduados de Algumas Álgebras sobre um Domínio de Integridade.

por

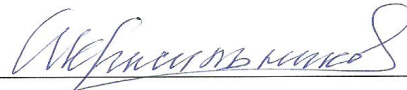
Luís Felipe Gonçalves Fonseca*

*Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em
Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de*

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 16 de dezembro de 2013.

Comissão Examinadora:



Prof. Dr. Alexei Krassilnikov – MAT/UnB (Orientador)



Prof. Dr. Plamen Emilov Koshlukov – UNICAMP/SP



Profa. Dra. Viviane Ribeiro Tomaz da Silva – UFMG/MG



Prof. Dr. José Antônio Oliveira de Freitas – MAT/UnB



Prof. Dr. Victor Petrogradskiy - MAT/UnB

* O autor foi bolsista CAPES e CNPq durante a elaboração desta tese.

Sumário

Abstract	iv
Resumo	v
Agradecimentos	vi
Introdução	vii
1 Preliminares	1
1.1 K -módulos e K -álgebras	1
1.2 Álgebras graduadas	4
1.2.1 Álgebra de matrizes e graduações elementares	5
1.2.2 Álgebra de Grassmann e \mathbb{Z}_2 -graduações	5
1.3 Identidades polinomiais e polinômios centrais	6
1.4 Identidades polinomiais graduadas e polinômios centrais graduados	7
1.5 Matrizes genéricas	9
2 Identidades de matrizes	11
2.1 O modelo genérico de Silva	11
2.2 Algumas identidades graduadas de $M_n(K)$ e monômios do Tipo 1	13
2.3 Dois lemas técnicos	15
2.4 Identidades \mathbb{Z} -graduadas de $M_n(K)$	17
2.5 Identidades \mathbb{Z}_n -graduadas de $M_n(K)$	19
2.6 Caracterização das identidades monomiais do Tipo 1 de $M_n(K)$.	20
2.7 Identidades ME_n -graduadas de $M_n(K)$	23
2.8 Polinômios Centrais \mathbb{Z}_p -graduados de $M_p(K)$	24
2.9 Polinômios Centrais \mathbb{Z} -graduados de $M_n(K)$	31
3 Identidades da álgebra de Grassmann	33
3.1 Escolhendo uma base para $K\langle X \rangle$	33
3.2 Identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas para a álgebra de Grassmann	33
3.3 SS e a Ordem Total de SS	35
3.4 p -polinômios	36
3.5 Polinômios de teste	37
3.6 Termos líderes	40
3.7 Caso 1: E_{can}	43
3.8 Caso 2: E_∞	44
3.9 Caso 3: E_{k^*}	45
3.10 Caso 4: E_k	47

<i>SUMÁRIO</i>	iii
3.10.1 Resultado Principal	54
Referências Bibliográficas	56

Abstract

Let K be an infinite integral domain and $M_n(K)$ be the algebra of all $n \times n$ matrices over K . This thesis aims for the following goals:

- Find a basis for the \mathbb{Z} -graded identities of $M_n(K)$;
- Find a basis for the \mathbb{Z}_n -graded identities of $M_n(K)$;
- Find a basis for the graded identities for elementary grading in $M_n(K)$ when the neutral component and diagonal components coincide;
- Describe the matrix units-graded identities of $M_n(K)$;
- Describe the \mathbb{Z}_p -graded central polynomials of $M_p(K)$ when p is a prime number;
- Describe the \mathbb{Z} -graded central polynomials of $M_n(K)$.

Except for the fourth item, all results listed above have known version when K is an infinite field; see [2],[3],[8], and [38].

Let K be a finite field of characteristic $p > 2$ and let E be the unitary Grassmann algebra generated by an infinite dimensional vector space V over K . In the second part of this thesis, we found a basis of the \mathbb{Z}_2 -graded polynomial identities for any non-trivial \mathbb{Z}_2 -grading such that a basis of V is homogeneous in this grading.

Resumo

Sejam K um domínio de integridade infinito e $M_n(K)$ a álgebra das matrizes $n \times n$ sobre K . Os objetivos da primeira parte desta tese serão:

- Encontrar uma base para as identidades \mathbb{Z} -graduadas de $M_n(K)$;
- Encontrar uma base para as identidades \mathbb{Z}_n -graduadas de $M_n(K)$;
- Encontrar uma base para as identidades graduadas de $M_n(K)$ com uma graduação elementar cuja componente neutra coincide com a subálgebra das matrizes diagonais;
- Descrever as identidades graduadas de $M_n(K)$ equipada com uma graduação induzida das matrizes elementares;
- Descrever os polinômios centrais \mathbb{Z}_p -graduados de $M_p(K)$ quando p é um número primo;
- Descrever os polinômios centrais \mathbb{Z} -graduados de $M_n(K)$.

Com exceção do quarto item, todos os resultados listados acima têm versões conhecidas quando K é um corpo infinito; veja: [2],[3],[8] e [38].

Sejam K um corpo finito de característica $p > 2$ e E a álgebra de Grassmann unitária gerada por um espaço vetorial de dimensão infinita V sobre K . Na segunda parte desta tese, nós descreveremos as identidades polinomiais \mathbb{Z}_2 -graduadas de E para qualquer graduação em que uma base de V é homogênea com relação a essa graduação.

Agradecimentos

Aos meus pais e aos meus irmãos por darem afeto e atenção durante o processo de desenvolvimento desta tese. Aos amigos Samuel Cardoso, Júlio Cesar, Sérgio da UFOPA e Aline Cristina Rodrigues. À minha namorada Gleice Desidério. À minha psicóloga Sônia Eustáquia e ao meu médico Cléber Mário.

Aos colegas que participaram da minha formação: Eudes Antônio, Paulo Ângelo, Bruno Sousa, Ênio Lima, Wembesom Mendes, Joaby Jucá, Simone Vasconcelos, Tarcísio Castro, Reinaldo de Marchi, Raimundo Bastos, Ismael Lins, Jorge Brito, Evander Resende, Claudy Vagner, Edimilson Silva, Sílvio Sandro, Keidna Oliveira, Ilana Zuila, Renata Alves e Saieny. Aos professores Diogo Marques, José Antônio, Dimas Gonçalves, Carlos Alberto, Liliane Almeida, Lucas Secco, Ana Cristina Vieira, Viviane Ribeiro da Silva e Sandra Jorge pelo a.

Aos professores Alexei Krassilnikov, Victor Petrogradskiy, Plamen Koshlukov e José Antônio (membros da minha banca) pelas sugestões de escrita, pelas correções bibliográficas e pelas sugestões de formatação do texto. À professora Viviane Ribeiro da Silva (membro da minha banca) pelas inúmeras sugestões, pela leitura cuidadosa, pelas sugestões de escrita, por apontar vários pontos obscuros no texto e por apontar um problema técnico na prova do Teorema 3.34..

À equipe do Rendiconti Circolo de Palermo pela atenção dada ao meu primeiro artigo. À editora Mirian Cohen por ter recusado o meu primeiro artigo no Communications in Algebra e cuja sugestão me ajudou com o segundo trabalho. Ao editor Ivan Shestakov pelo bom conselho dado após a submissão do meu segundo manuscrito. Ao editores Gary Mullen e Xiang-dong Hou do FFA e aos revisores desta revista pelos conselhos para melhorar o nível da minha exposição científica.

À equipe de tradutores e revisores de textos que me auxiliou ao longo destes últimos dois anos: Anderson Hander e Arthur Andrade- revisão da tese; Newton Rocha, Anderson Hander e Leonardo Castro- revisão de artigos - língua inglesa; Anton Shemenchenko- tradução- língua russa. À Enago pelo suporte dado às versões finais dos artigos que compõem esta tese de doutorado.

Ao professor Gilson Volpato por seus vídeos postados no Youtube. Ao site posgraduando.com pelas ótimas reportagens.

Ao CNPq, à minha família e à Capes pelo apoio financeiro.

Introdução

Ao longo deste texto, K denotará um domínio de integridade de característica $\text{char}K$ e cardinalidade $|K|$.

Os K -módulos serão K -módulos à esquerda e as álgebras (associativas) serão sobre K (K -álgebras). G indicará um grupo arbitrário e e o seu elemento neutro. O grupo de permutações de $\{1, \dots, n\}$ será denotado por S_n e $H_n \subset S_n$ o subgrupo gerado pelo ciclo $(1 \dots n)$. O sinal de uma permutação $\sigma \in S_n$ será denotado por $\text{sgn}(\sigma)$.

A álgebra das matrizes $n \times n$ sobre K será denotada por $M_n(K)$ e $E_{ij} \in M_n(K)$ denotará a matriz elementar que possui 1 na posição (ij) e 0 nas demais. A álgebra de Grassmann unitária gerada por $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ será atribuída por E e a álgebra livre unitária livremente gerada por $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ será denotada por $K\langle X \rangle$.

O comutador de x_1 com x_2 será denotado por $[x_1, x_2] := x_1x_2 - x_2x_1$. Indutivamente, o comutador de $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ é definido por $[x_1, \dots, x_n] := [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n]$.

Um ideal bilateral (respectivamente um K -submódulo) $I \subset K\langle X \rangle$ é dito um T -ideal (respectivamente um T -espaço) quando este é fechado sob todos os endomorfismos de $K\langle X \rangle$.

Seja $S = \{f_i(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle \mid i \in I\}$ um conjunto de polinômios. O T -ideal gerado por S , o qual denota-se por $\langle S \rangle_T$, é o K -módulo gerado pelos seguintes elementos:

$$g(\phi(f_i))h,$$

em que $f_i \in S$; $g, h \in K\langle X \rangle$ e ϕ é um endomorfismo de $K\langle X \rangle$. O T -espaço gerado por S , o qual denota-se por $\langle S \rangle^T$, é o K -módulo gerado pelos seguintes elementos:

$$\phi(f_i),$$

em que $f_i \in S$ e ϕ é um endomorfismo de $K\langle X \rangle$.

Um polinômio $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ é dito uma identidade polinomial ordinária de uma K -álgebra A quando $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$. Um polinômio $f(x_1, \dots, x_n)$ é dito um polinômio central ordinário de A quando o termo independente de f é nulo e $[f, x_{n+1}]$ é uma identidade polinomial ordinária desta álgebra; quando f não é uma identidade polinomial de A , diz-se que f é um polinômio central ordinário não trivial de A .

O polinômio $x_1x_2 - x_2x_1$ é uma identidade de uma K -álgebra comutativa; o polinômio $x_1^q - x_1$ é uma identidade de um corpo finito com q elementos; o polinômio $[x_1, x_2]^2$ é um polinômio central de $M_2(K)$.

Dada uma K -álgebra A , não é difícil ver que o conjunto das identidades polinomiais (respectivamente polinômios centrais) dela, $T(A)$ (respectivamente $C(A)$), é um T -ideal (respectivamente um T -espaço). Reciprocamente, pode-se provar que se I é um T -ideal, então $I = T(\frac{K\langle X \rangle}{I})$. Um conjunto $S \subset K\langle X \rangle$ é uma base para as identidades (respectivamente polinômios centrais) de A quando $T(A) = \langle S \rangle_T$ (respectivamente $C(A) = \langle S \rangle^T$). Quando uma álgebra A admite um conjunto finito S , tal que $T(A) = \langle S \rangle_T$, dizemos que as identidades de A têm a propriedade de base finita. Caso contrário, dizemos que elas não têm a propriedade de base finita.

Specht (1950,[39]) conjecturou que as identidades de toda K -álgebra, em que K é um corpo de característica zero, têm a propriedade de base finita.

A conjectura de Specht foi um dos propulsores da teoria das álgebras com identidades polinomiais. Na tentativa de resolvê-la, a base de identidades de algumas álgebras sobre um corpo de característica zero foi determinada, com destaque para a álgebra de Grassmann unitária de dimensão infinita e a álgebra de matrizes 2×2 . Razmyslov (1972, [34]) descreveu uma base para as identidades de $M_2(K)$ com nove polinômios e no ano seguinte, Regev e Krakowski (1973, [31]) mostraram que:

$$T(E) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T.$$

Já no início da década de 1980, Drensky (1981,[15]) obteve uma base minimal para as identidades de $M_2(K)$, a saber:

$$T(M_2(K)) = \langle [x_1, x_2]^2, x_1, \sum_{\sigma \in S_4} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(4)} \rangle_T.$$

Quase 40 anos depois da pergunta feita por Specht, A. Kemer (1987,[29]) respondeu afirmativamente a conjectura desse autor. Uma ferramenta importante usada por Kemer foi as álgebras graduadas. Após o trabalho de Kemer, as atenções se voltaram para uma outra questão: seria a conjectura de Specht verdadeira para corpos de característica positiva? Em 1999 apareceram os primeiros contra-exemplos para esta pergunta (veja [6], [24] e [37]).

Mesmo após o trabalho de Kemer, o interesse pelo estudo das identidades de matrizes e da álgebra de Grassmann continuou.

Giamb Bruno e Koshlukov (2001,[22]) apresentaram uma base para as identidades da álgebra de Grassmann sobre um corpo infinito de $\text{char}K = p > 2$. A base obtida por estes dois algebristas foi a mesma descrita por Regev e Krakowski. Bekh-Ochir e S. Rankin (2011, [5]) descreveram uma base para as identidades da álgebra de Grassmann sobre um corpo K de $\text{char}K = p > 2$ e com $|K| = q$ elementos. Essa base é composta de dois polinômios, um deles era o polinômio $[x_1, x_2, x_3]$ e o outro estava relacionado com o fato do corpo ser finito: $x_1^{pq} - x_1^p$.

Koshlukov (2001,[30]) descreveu uma base para as identidades (base composta de quatro identidades) de $M_2(K)$ quando K é um corpo infinito de $\text{char}K > 2$. Quando K é um corpo infinito de $\text{char}K = 2$, a descrição de $T(M_2(K))$ ainda é uma questão não resolvida. Ainda não se sabe, se $T(M_2(K))$ admite, ou não, uma base finita.

Outro fato que merece consideração é sobre $T(M_n(K))$ quando $n \geq 3$. Pelo resultado de Kemer, que demonstrou a conjectura de Specht, sabe-se que $T(M_n(K))$ admite uma base finita quando K é um corpo de $\text{char}K = 0$. Entretanto, mesmo com as técnicas atuais, ainda não é possível descrever completamente as identidades de $M_n(K)$.

Uma K -álgebra A é dita G -graduada quando existem K -submódulos $\{A_g\}_{g \in G}$, tais que:

- 1) Cada A_g é um K -módulo com as operações induzidas de A ;
- 2) $A = \sum_{g \in G} A_g$;
- 3) Se $|G| > 1$, $A_h \cap (\sum_{g \in G - \{h\}} A_g) = \{0\}$ para todo $h \in G$;
- 4) $A_g \cdot A_h \subset A_{g \cdot h}$ para quaisquer $g, h \in G$.

Quando as propriedades 1), 2) e 3) são satisfeitas, escrevemos $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$. A decomposição $(A_g)_{g \in G}$ é dita uma G -gradação em A . Esta gradação é chamada trivial quando $A_e = A$. Um elemento $a \in A$ é dito homogêneo quando $a \in \bigcup_{g \in G} A_g$. Quando $a \neq 0 \in A_g$, dizemos que a é um elemento homogêneo de G -grau g ; notaremos o G -grau de a por $\alpha(a) = g$. Um ideal bilateral (respectivamente K -submódulo) I é chamado um ideal bilateral G -graduado (respectivamente K -módulo G -graduado) quando $I = \bigoplus_{g \in G} (I \cap A_g)$.

O suporte de A , com respeito a G -gradação $\{A_g\}_{g \in G}$, é o seguinte subconjunto de G :

$$Supp_G(A) = \{g \in G \mid A_g \neq \{0\}\}.$$

Consideremos uma família $\{X_g \mid g \in G\}$ de conjuntos enumeráveis dois a dois disjuntos e $X = \bigcup_{g \in G} X_g$. Uma variável $x \in X_g$ é definida como tendo G -grau g , o G -grau de 1 é definido por e e o G -grau de um monômio $m = x_{i_1} \dots x_{i_l}$ é definido por $\alpha(m) = \alpha(x_{i_1}) \dots \alpha(x_{i_l})$. Deste modo, $K\langle X \rangle$ é uma álgebra G -graduada. Um endomorfismo ϕ de $K\langle X \rangle$ é chamado G -graduado (ou simplesmente graduado) quando $\phi(K\langle X \rangle_g) \subset K\langle X \rangle_g$ para todo $g \in G$. Um ideal bilateral graduado (respectivamente um K -submódulo) $I \subset K\langle X \rangle$ é chamado um T_G -ideal (respectivamente um T_G -espaço) quando $\phi(I) \subset I$ para todo endomorfismo G -graduado ϕ de $K\langle X \rangle$. Um polinômio $f(x_1, \dots, x_m)$ é dito uma identidade G -graduada de A quando $f(a_1, \dots, a_m) = 0$ para todo $a_i \in A_{\alpha(x_i)}$, $i = 1, \dots, m$. Um polinômio $f(x_1, \dots, x_m)$ é dito um polinômio central de A quando o seu termo independente é nulo e $[f, x_{n+1}]$ ($x_{n+1} \in X$) é uma identidade G -graduada dessa.

O conjunto das identidades (respectivamente polinômios centrais) de A será denotado por $T_G(A)$ (respectivamente $C_G(A)$). Como no caso ordinário, não é difícil ver que $T_G(A)$ (respectivamente $C_G(A)$) é um T_G -ideal (respectivamente um T_G -espaço).

Sejam G um grupo e $\bar{g} = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$ uma n -upla de elementos de G . Uma gradação em $M_n(K)$ é dita elementar quando existe uma n -upla \bar{g} , tal que para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$, a matriz $E_{ij} \in (M_n(K))_{g_i^{-1} g_j}$ (neste caso, dizemos que $M_n(K)$ está equipada com a gradação elementar induzida por \bar{g}). Além disto, nesta situação, $M_n(K)_e$ coincide com a subálgebra das matrizes diagonais se, e somente se, os elementos de \bar{g} são distintos.

Dois exemplos importantes deste tipo de gradação são:

- \mathbb{Z}_n -gradação canônica de $M_n(K)$: $G = \mathbb{Z}_n$ e $\bar{g} = (\bar{1}, \dots, \bar{n})$;
- \mathbb{Z} -gradação canônica de $M_n(K)$: $G = \mathbb{Z}$ e $\bar{g} = (1, \dots, n)$.

Nesta introdução, $M_n(K)$ estará graduada por \mathbb{Z} , ou \mathbb{Z}_n , apenas de modo canônico.

Di Vincenzo (1992,[14]) descreveu as identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas das matrizes $M_2(K)$ quando K é um corpo de característica zero. Anos mais tarde, no final da década de 1990, Vasilovsky descreveu as identidades \mathbb{Z} -graduadas (1998,[41]) e \mathbb{Z}_n -graduadas (1999,[40]) de $M_n(K)$. Drensky e Bahturin (2002,[4]) estenderam o resultado de Vasilovsky para o caso em que $M_n(K)$ está munida de uma graduação elementar induzida por \bar{g} (na situação em que os seus termos são distintos). Esses três últimos trabalhos são inovadores, pois são válidos para matrizes quadradas de ordem arbitrária e não simplesmente para matrizes dois por dois.

Sérgio Azevedo (2003,[2],[3]) apresentou dois trabalhos estendendo os resultados de Vasilovsky ([40],[41]) e Diogo Silva (2013,[38]) os resultados de Drensky e Bahturin quando K é corpo infinito. Uma ferramenta importante, utilizada por Sérgio e Diogo nos seus trabalhos, foi a álgebra das matrizes genéricas. O modelo genérico proposto por Diogo será visto na primeira metade deste trabalho.

Em 1957, Kaplansky ([27]) apresentou uma série de problemas em teoria dos anéis. Um desses problemas era sobre a existência de polinômios centrais não triviais para $M_n(K)$ quando $n \geq 3$ e K é um corpo. As duas primeiras respostas afirmativas a esta pergunta foram dadas por Formanek (1972, [21]) e Razmyslov (1973, [35]).

Outro problema interessante é a descrição dos polinômios centrais de $M_n(K)$. Okhitin (1988, [33]) descreveu os polinômios centrais de $M_2(K)$ quando K é um corpo de característica zero. Colombo e Koshlukov (2004, [12]) estenderam, parcialmente, o resultado de Okhitin [33] para corpos infinitos de $\text{char}K \neq 2$.

Com relação aos polinômios centrais graduados de $M_n(K)$, a principal contribuição foi dada por Brandão Júnior (2008, [8]), que descreveu os polinômios centrais \mathbb{Z} -graduados de $M_n(K)$ quando K é um corpo infinito, os polinômios centrais \mathbb{Z}_p -graduados de $M_p(K)$, quando $\text{char}K = p > 2$ e os polinômios centrais \mathbb{Z}_n -graduados de $M_n(K)$ quando $\text{char}K \nmid n$.

Recentemente, Aljadeff e Karasik (2013, [1]) descreveram os polinômios centrais G -graduados de $M_n(K)$ (G um grupo de ordem n e K um corpo de característica zero) quando ela está munida de uma graduação elementar cuja componente neutra coincide com a subálgebra das matrizes diagonais. De forma independente, Fonseca (2013, [20]) descreveu os polinômios centrais G -graduados de $M_n(K)$ (K um corpo de característica zero) na mesma situação anterior, mas com G arbitrário.

Brandão Júnior e et alli (2009, [7]) seguiram outra análise no trabalho deles; lá foram descritos as identidades e os polinômios centrais \mathbb{Z}_2 -graduados de $M_2(K)$ quando K é um domínio de integridade infinito. Este trabalho motivou uma pergunta interessante: seria possível estender os resultados de Vasilovsky, Drensky, Bahturin e Brandão Júnior para um domínio de integridade infinito?

Seja K um corpo de $\text{char}K \neq 2$. É conhecido que uma K -álgebra A admite uma \mathbb{Z}_2 -graduação não trivial se, e somente se, existe um automorfismo de A de ordem 2.

Consideremos os seguintes automorfismos de E de ordem 2:

$$\begin{cases} \phi_0 : E \rightarrow E \\ e_i \mapsto -e_i, i = 1, 2, \dots, n, \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_\infty : E \rightarrow E \\ e_i \mapsto e_i, \text{ se } i \text{ é par} \\ e_i \mapsto -e_i, \text{ se } i \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_{k^*} : E \rightarrow E \\ e_i \mapsto -e_i, i = 1, \dots, k \\ e_i \mapsto e_i, i = k + 1, \dots, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_k : E \rightarrow E \\ e_i \mapsto e_i, i = 1, \dots, k \\ e_i \mapsto -e_i, i = k + 1, \dots, \end{cases}$$

Cada um desses quatro automorfismos induz uma \mathbb{Z}_2 -gradação não trivial em E :

- Induzida por $\phi_0: E_{can}$. Nessa graduação, $\{e_1, \dots, e_n, \dots\} \subset (E_{can})_1$;
- Induzida por $\phi_\infty: E_\infty$. Nessa graduação, $\{e_2, \dots, e_{2n}, \dots\} \subset (E_\infty)_0$ e $\{e_1, e_3, \dots, e_{2n+1}, \dots\} \subset (E_\infty)_1$;
- Induzida por $\phi_{k^*}: E_{k^*}$. Nessa graduação, $\{e_1, \dots, e_k\} \subset (E_{k^*})_1$ e $\{e_{k+1}, e_{k+2}, \dots\} \subset (E_{k^*})_0$;
- Induzida por $\phi_k: E_k$. Nessa graduação, $\{e_1, \dots, e_k\} \subset (E_k)_0$ e $\{e_{k+1}, e_{k+2}, \dots\} \subset (E_k)_1$.

Nos últimos quinze anos, houve importantes trabalhos descrevendo as identidades graduadas da álgebra de Grassmann.

Giambruno, Mishchenko e Zaicev (2001,[22]) descreveram as identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas de E (sobre um corpo de característica zero) munida da graduação induzida por ϕ_0 . Anos mais tarde, Di Vincenzo e da Silva (2009,[13]) descreveram as identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas de E (sobre um corpo de característica zero) quando ela está munida de uma graduação induzida por ϕ_k , ou por ϕ_∞ , ou por ϕ_{k^*} .

Centrone (2011,[10]) descreveu as identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas de E , sobre um corpo infinito K de $char K = p > 2$, com uma graduação induzida por ϕ_0 , ou ϕ_∞ , ou ϕ_{k^*} , ou ϕ_k .

Até o trabalho de Centrone, nada foi feito no sentido de descrever as identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas de E quando ela está sobre um corpo finito K de $char K = p > 2$.

Nos trabalhos de Centrone [10] e da Silva-Di Vincenzo [13], a hipótese do corpo ser infinito é importante. Quando K é infinito, é conhecido o seguinte resultado: se A é uma álgebra unitária \mathbb{Z}_2 -graduada sobre K , então $T_2(A)$ é consequência de seus polinômios Y -próprios. Esses polinômios foram usados nos trabalhos deles para descrever as identidades graduadas da álgebra de Grassmann.

Esta tese está dividida em duas partes: a primeira parte é formada pelos resultados sobre álgebras matriciais e a segunda parte pelo resultado sobre a álgebra de Grassmann. O artigo com os resultados da primeira parte foi submetido à revista Communications in Algebra [18] e da segunda parte à revista Finite Fields and their Applications [19].

Abaixo, será listado os resultados referentes à primeira parte.

Teorema 2.27. *Seja K um domínio de integridade infinito. As identidades \mathbb{Z} -graduadas de $M_n(K)$ ($M_n(K)$ equipada com sua \mathbb{Z} -gradação canônica) seguem de:*

- $x_1x_2 - x_2x_1$ quando $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0$;
- $x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1$ quando $\alpha(x_1) = \alpha(x_3) = -\alpha(x_2) \neq 0$;
- x_1 quando $|\alpha(x_1)| \geq n$.

Teorema 2.29. *Seja K um domínio de integridade infinito. As identidades polinomiais \mathbb{Z}_n -graduadas de $M_n(K)$ ($M_n(K)$ equipada com sua \mathbb{Z}_n -gradação canônica) seguem de:*

- $x_1x_2 - x_2x_1$ quando $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0$;
- $x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1$ quando $\alpha(x_1) = \alpha(x_3) = -\alpha(x_2) \neq 0$.

Definição. *Sejam K um domínio de integridade infinito, G um grupo e $\bar{g} = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$ uma n -upla de elementos distintos de G . Consideremos $M_n(K)$ munida da gradação elementar induzida por \bar{g} . Um monômio $m = x_{i_1} \dots x_{i_l} \in K\langle X \rangle$ é dito do Tipo 1 quando o G -grau de qualquer uma das suas subpalavras é um elemento de $\text{Supp}_G(M_n(K))$.*

No próximo teorema, tem-se: $s = |\text{Supp}_G(M_n(K))|$. λ representa o número $[s + 1][s + 1](\sum_{i=1}^s (s - 1)^i + 1)$.

Teorema 2.38. *Sejam K um domínio de integridade infinito, G um grupo arbitrário e $\bar{g} = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$ uma n -upla de elementos distintos de G . Consideremos $M_n(K)$ equipada da gradação elementar induzida por \bar{g} . As identidades graduadas de $M_n(K)$ seguem de:*

- $x_1x_2 - x_2x_1$ quando $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = e$;
- $x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1$ quando $\alpha(x_1) = \alpha(x_3) = (\alpha(x_2))^{-1} \neq e$;
- x_1 quando $M_n(K)_{\alpha(x_1)} = \{0\}$;

- *Identidades monomiais multilineares do Tipo 1 cujo grau é menor ou igual a λ .*

Veja, agora, algumas informações técnicas.

Definição. *Uma sequência $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ de elementos de \mathbb{Z}_n é chamada uma sequência completa quando as seguintes condições são satisfeitas:*

$$\gamma_1 + \dots + \gamma_n = 0;$$

$$\{\gamma_1, \gamma_1 + \gamma_2, \dots, \gamma_1 + \dots + \gamma_n\} = \mathbb{Z}_n.$$

O conceito de sequência completa foi introduzido por Brandão Júnior em sua tese de doutorado (definição 3.2, página 40, de [9]).

Definição. *Sejam $p > 2$ um número primo e $l \in \widehat{p-1}$. Denotamos por V_1 o conjunto formado pelos seguintes monômios:*

$$x_1^p \dots x_l^p, \text{ em que } \{\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_l)\} \subset \mathbb{Z}_p - \{0\}.$$

Seja $p = 2$. Denotamos por V_1 o conjunto formado pelos monômios x_1^2 e $x_1^2 x_2^2$, em que $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 1$.

Teorema 2.64. *Sejam K um domínio de integridade infinito e p um número primo. Os polinômios centrais \mathbb{Z}_p -graduados de $M_p(K)$ ($M_p(K)$ equipada com sua \mathbb{Z}_p -graduação canônica) seguem de:*

- $z_1(x_1 x_2 - x_2 x_1) z_2$ quando $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0$;
- $z_1(x_1 x_2 x_3 - x_3 x_2 x_1) z_2$ quando $\alpha(x_1) = \alpha(x_3) = -\alpha(x_2) \neq 0$;
- Os monômios do conjunto V_1 ;
- $\sum_{\sigma \in H_p} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p)}$, em que $(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_p))$ é uma sequência completa de \mathbb{Z}_p .

Além disso, $z_1, z_2 \in \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_p} X_i$.

Teorema 2.68. *Seja K um domínio de integridade infinito. Os polinômios centrais \mathbb{Z} -graduados de $M_n(K)$ ($M_n(K)$ equipada com sua \mathbb{Z} -graduação canônica) seguem de:*

- $z_1(x_1 x_2 - x_2 x_1) z_2$ quando $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0$;
- $z_1(x_1 x_2 x_3 - x_3 x_2 x_1) z_2$ quando $\alpha(x_1) = \alpha(x_3) = -\alpha(x_2) \neq 0$;
- $z_1(x_1) z_2$ quando $|\alpha(x_1)| \geq n$;
- $\sum_{\sigma \in H_n} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$, em que $(\overline{\alpha(x_1)}, \dots, \overline{\alpha(x_n)})$ é uma sequência completa de \mathbb{Z}_n .

Além disso, $z_1, z_2 \in \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} X_i$. No último polinômio listado acima, assumimos que $|\alpha(x_i)| < n$ para todo $i \in \widehat{n}$.

Na segunda parte desta tese, serão apresentados os seguintes teoremas referentes à álgebra de Grassmann.

Para simplificar, $Y = \{y_1, \dots, y_n, \dots\}$ denotará as variáveis pares e $Z = \{z_1, \dots, z_n, \dots\}$ denotará as variáveis ímpares.

Teorema 3.34. *Seja K um corpo finito de $\text{char} K = p > 2$ com $|K| = q$ elementos. As identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas de E (com graduação induzida por ϕ_0) seguem de:*

$$[y_1, y_2], [y_1, z_2], z_1 z_2 + z_2 z_1 \text{ e } y_1^{pq} - y_1^p.$$

Teorema 3.35. *Seja K um corpo finito de $\text{char}K = p > 2$ com $|K| = q$ elementos. As identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas de E (com graduação induzida por ϕ_∞) seguem de:*

$$[x_1, x_2, x_3], z_1^p \text{ e } y_1^{pq} - y_1^p.$$

Teorema 3.41. *Seja K um corpo de $\text{char}K = p > 2$ e com $|K| = q$ elementos. As identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas de E (com graduação induzida por ϕ_{k^*}) seguem de:*

$$[x_1, x_2, x_3], z_1 \dots z_{k+1}, z_1^p \text{ e } y_1^{pq} - y_1^p.$$

Sejam $T = (i_1, \dots, i_l)$ e $T' = (j_1, \dots, j_t)$ duas sequências estritamente crescentes, tais que t é par, $l + t = m$, e $\hat{m} = \{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_t\}$. Considere os polinômios: $f_T(z_1, \dots, z_m) = z_{i_1} \dots z_{i_l} [z_{j_1}, z_{j_2}] \dots [z_{j_{t-1}}, z_{j_t}]$; $g_m(z_1, \dots, z_m) = \sum_{|T| \text{ é par}} (-2)^{\frac{-|T|}{2}} f_T(z_1, \dots, z_m)$ para $m \geq 2$ e $g_1(z) = z$.

Teorema 3.59. *Seja K um corpo de $\text{char}K = p > 2$ com $|K| = q$ elementos. As identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas de E (com graduação induzida por ϕ_k) seguem de:*

- $[y_1, y_2] \dots [y_k, y_{k+1}]$ quando k é ímpar;
- $[y_1, y_2] \dots [y_{k-1}, y_k] [y_{k+1}, x]$ quando k é par e $x \in X - \{y_1, \dots, y_{k+1}\}$;
- $[x_1, x_2, x_3]$;
- $g_{k-l+2}(z_1, \dots, z_{k-l+2}) [y_1, y_2] \dots [y_{l-1}, y_l]$ quando $0 \leq l \leq k$ e l é um número par;
- $g_{k-l+2}(z_1, \dots, z_{k-l+2}) [z_{k-l+3}, y_1] [y_2, y_3] \dots [y_{l-1}, y_l]$ quando $1 \leq l \leq k$ e l é um número ímpar;
- $[g_{k-l+2}(z_1, \dots, z_{k-l+2}), y_1] \dots [y_{l-1}, y_l]$ quando $1 \leq l \leq k$ e l é um número ímpar;
- z_1^p ;
- $y_1^{pq} - y_1^p$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns fatos conhecidos de módulos e álgebras, identidades e identidades graduadas.

Assumiremos que são conhecidos fatos básicos de álgebra linear (definição de espaço vetorial, definição de base de um espaço vetorial e dimensão de espaço vetorial; veja por exemplo [25] e [26]); de teoria dos anéis (definição e propriedades básicas de um anel, subanel, domínio de integridade e corpo, anel de polinômios em uma indeterminada e com coeficientes em um anel, ideal de um anel e anel quociente, corpo de frações de um domínio de integridade e corpos finitos); teoria dos grupos (definição e propriedades básicas de um grupo, subgrupo, grupo abeliano, conceito de grupo simétrico e de grupo abeliano livre) [veja por exemplo [25] e [26]].

Ao longo deste texto, K será um domínio de integridade e 1_K (ou 1) o seu elemento neutro multiplicativo, G um grupo e e o seu elemento neutro. A cardinalidade de um conjunto S será simbolizada por $|S|$. Denotaremos a álgebra das matrizes $n \times n$ sobre K por $M_n(K)$ e por $E_{ij} \in M_n(K)$ a matriz básica cuja entrada na posição (ij) é 1 e as entradas nas demais são nulas. Denotaremos o conjunto dos inteiros não negativos por \mathbb{N} , $\hat{n} = \{1, \dots, n\}$ e o anel dos polinômios (com coeficientes em K) nas indeterminadas x_1, \dots, x_m por $K[x_1, \dots, x_m]$.

1.1 K -módulos e K -álgebras

Definição 1.1. Um grupo abeliano M é dito um K -módulo à esquerda quando existe uma aplicação:

$$\begin{aligned} \mu : K \times M &\rightarrow M \\ (k, m) &\mapsto k.m \end{aligned}$$

que goza das seguintes propriedades para todos $k_1, k_2 \in K$ e $m, m_1, m_2 \in M$:

- $(k_1 + k_2).m = k_1.m + k_2.m$;
- $k_1.(m_1 + m_2) = k_1.m_1 + k_1.m_2$;
- $k_1.k_2(m_1) = k_1.(k_2.m_1)$;
- $1_K.m = m$.

Daqui para frente, o termo K -módulo denominará um K -módulo à esquerda.

Definição 1.2. *Sejam M um K -módulo e $S \subset M$ um conjunto não vazio. O K -módulo gerado por S é definido como:*

$$\text{span}_K\{S\} := \{k_1m_1 + \cdots + k_nm_n \mid k_1, \dots, k_n \in K; m_1, \dots, m_n \in S\}$$

Definição 1.3. *Uma K -álgebra (linear) A é um K -módulo provido de uma multiplicação $\cdot : A \times A \rightarrow A$ com as seguintes propriedades:*

- A terna $(A, +, \cdot)$ é um anel;
- $\alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y)$ para quaisquer $\alpha \in K$ e $x, y \in A$.

Dizemos que um K -módulo $S \subset A$ é uma subálgebra quando $(S, +, \cdot)$ é uma K -álgebra. Um K -módulo $I \subset A$ é dito um ideal (bilateral) quando I é uma subálgebra e $a \cdot x, x \cdot a \in I$ para quaisquer $a \in A$ e $x \in I$. A é dita unitária (respectivamente comutativa ou associativa) quando $(A, +, \cdot)$ é um anel unitário (respectivamente um anel comutativo ou um anel associativo).

Definição 1.4. *Seja A uma K -álgebra. Dizemos que $B = \{b_l \mid l \in I\} \subset A$ é uma base linear para A (como K -módulo) quando as seguintes condições são satisfeitas:*

- 1) $A = \text{span}_K\{B\}$;
- 2) Para qualquer $\{b_{i_1}, \dots, b_{i_n}\} \subset B$, $\sum_{j=1}^n \lambda_{i_j} b_{i_j} = 0$ implicar que $\lambda_{i_1} = \dots = \lambda_{i_n} = 0$.

Tais K -módulos são denominados K -módulos livres.

Definição 1.5. *Sejam A e B duas K -álgebras. Uma aplicação $\phi : A \rightarrow B$ é dita um homomorfismo (de K -álgebras) quando:*

- $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ para quaisquer $x, y \in A$;
- $\phi(r \cdot x) = r\phi(x)$ para quaisquer $r \in K$ e $x \in A$;
- $\phi(x \cdot y) = \phi(x)\phi(y)$ para quaisquer $x, y \in A$;
- Caso A e B sejam K -álgebras unitárias, adicionamos a condição $\phi(1_{A_1}) = 1_{A_2}$.

Observação 1.6. *Quando $A = B$, dizemos que ϕ é um endomorfismo de A . Um endomorfismo bijetivo de A é chamado automorfismo de A . Dizemos que A e B são isomorfas quando existe um homomorfismo $\rho : A \rightarrow B$ bijetivo.*

Um exemplo de homomorfismo é a projeção canônica de \mathbb{Z} em \mathbb{Z}_n :

$$\begin{cases} \pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n \\ a \mapsto \bar{a}, \text{ em que } \bar{a} \text{ é o resto da divisão de } a \text{ por } n \end{cases}$$

Nesta tese, a menos que se diga algo ao contrário, todas as álgebras associativas serão unitárias.

Exemplo 1.7 (Álgebra associativa livre e comutadores).

Seja $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ um conjunto enumerável de variáveis. A álgebra de polinômios nas variáveis associativas (não comutativas) de X (a qual denotamos por $K\langle X \rangle$) é denominada de álgebra associativa livre (livremente gerada por X). Esta álgebra possui a seguinte propriedade universal: para toda K -álgebra associativa B , qualquer aplicação $\alpha : X \rightarrow B$ pode ser estendida a um único homomorfismo $\bar{\alpha} : K\langle X \rangle \rightarrow B$.

Denotaremos por $\text{Comut}(X) := \{[x_{i_1}, \dots, x_{i_n}] : n \geq 2, x_{i_j} \in X\}$.

Dizemos que $f \in K\langle X \rangle$ é um polinômio com termo independente nulo quando $f(0) = 0$.

Definição 1.8. Um polinômio $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ (com termo independente nulo) é dito multi-homogêneo quando cada uma das suas variáveis aparece o mesmo número de vezes em todos os seus monômios. Dizemos que f (com termo independente nulo) é um polinômio multilinear quando cada uma das suas variáveis aparece uma única vez em todos os seus monômios.

Definição 1.9. Sejam A um K -álgebra e $S \subset A$ um subconjunto não vazio. A subálgebra gerada por S (denotamos por $\langle S \rangle$) é o K -módulo gerado pelos elementos da forma:

$$((((a_{i_1}.a_{i_2}).a_{i_3}).\dots).a_{i_n}), \text{ em que } a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \in S \text{ e } n \geq 1.$$

Exemplo 1.10 (Álgebra de Grassmann de dimensão infinita). Sejam K um corpo de $\text{char}K \neq 2$ e V um K -espaço vetorial com base $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$. A álgebra de Grassmann de dimensão infinita (unitária) gerada por $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ é definida por:

$$E := \langle 1_E, e_1, \dots, e_n, \dots \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle.$$

O conjunto $\mathcal{B} = \{e_{i_1} \dots e_{i_k} \mid i_1 < \dots < i_k; k \geq 0\}$ é uma base linear para E .

A álgebra de Grassmann de dimensão infinita (não unitária) é definida por:

$$E^* := \langle e_1, \dots, e_n, \dots \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle.$$

Definição 1.11. Seja K um corpo. Uma K -álgebra linear $(A, +, \cdot)$ é dita uma álgebra de Lie quando as seguintes propriedades são satisfeitas para quaisquer $a, b, c \in A$:

- (Anticomutatividade) $a.a = 0$;
- (Identidade de Jacobi) $(a.b).c + (b.c).a + (c.a).b = 0$.

Exemplo 1.12. Sejam K um corpo e $(A, +, \cdot)$ uma K -álgebra associativa. A álgebra linear $(A^{(-)}, +, [,])$ com a operação:

$$[a, b] := a.b - b.a \text{ para todos } a, b \in A$$

é uma álgebra de Lie. Denominamo-la como álgebra de Lie associada à A .

Exemplo 1.13. Sejam K um corpo e $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ um conjunto enumerável de variáveis. A álgebra de Lie $L_K(X) \supset X$ chama-se álgebra de Lie livre, com conjunto de geradores livres X , se para cada álgebra de Lie L , qualquer aplicação $\alpha : X \rightarrow L$ pode ser estendida a um único homomorfismo $\bar{\alpha} : L_K(X) \rightarrow L$.

Definição 1.14. *Sejam K um corpo e L uma K -álgebra de Lie. Dizemos que $A^{(-)}$ é uma envolvente de L quando existe um homomorfismo injetivo $\phi : L \rightarrow A^{(-)}$. Uma álgebra associativa $U(L)$ é chamada uma envolvente universal de L quando $U(L)^{(-)}$ é uma álgebra envolvente de L e a seguinte propriedade universal é satisfeita: para toda álgebra associativa B , qualquer homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : L \rightarrow B^{(-)}$ pode ser estendido a um único homomorfismo de álgebras associativas $\bar{\phi} : U(L) \rightarrow B$.*

Teorema 1.15 (Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt). *Seja K um corpo. Toda K -álgebra de Lie $(L, +, *)$ com uma base ordenada $\{e_i | i \in I\}$ possui uma envolvente universal (a qual é única a menos de isomorfismo). Além disso, $\mathcal{B} := \{e_{i_1} \dots e_{i_k} | i_1 \leq \dots \leq i_k, i_k \in I, k = 0, 1, 2, \dots\}$ é uma base para $U(L)$.*

Demonstração. Para uma demonstração, citamos, por exemplo, Teorema 1.3.2, páginas 11-14, de [16]. \square

Teorema 1.16 (Teorema de Witt). *Seja K um corpo. A subálgebra $L(X)$ gerada por $X \subset K\langle X \rangle^{(-)}$ é isomorfa a $L_K(X)$. Além disso, $U(L(X)) = K\langle X \rangle$.*

Demonstração. Para uma demonstração, citamos, por exemplo, Teorema 1.3.5, página 14, de [16]. \square

1.2 Álgebras graduadas

Dizemos que uma K -álgebra A é G -graduada quando existem subconjuntos $\{A_g\}_{g \in G}$, tais que:

- 1) Cada A_g é um K -módulo com as operações induzidas de A ;
- 2) $A = \sum_{g \in G} A_g$;
- 3) Se $|G| > 1$, $A_h \cap (\sum_{g \in G - \{h\}} A_g) = \{0\}$ para todo $h \in G$;
- 4) $A_g \cdot A_h \subset A_{g \cdot h}$ para quaisquer $g, h \in G$.

Quando as condições 1), 2) e 3) são satisfeitas, escrevemos $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$. Dizemos que $\{A_g\}_{g \in G}$ forma uma G -gradação em A . A G -gradação $\{A_g\}_{g \in G}$ é trivial quando $A_e = A$. Um elemento $a \in \cup_{g \in G} A_g$ é chamado de homogêneo. Quando $a \neq 0 \in A_g$, dizemos que ele é um elemento homogêneo de G -grau g e denotamos o seu G -grau por $\alpha(a) = g$. Uma subálgebra (respectivamente um ideal) $B \subset A$ é G -graduada quando $B = \bigoplus_{g \in G} (A_g \cap B)$.

Um homomorfismo entre duas álgebras G -graduadas $\phi : A \rightarrow B$ é chamado G -graduado quando $\phi(A_g) \subset B_g$ para todo $g \in G$.

Fixemos uma G -gradação em A . O suporte de A , com respeito a esta G -gradação, e o qual denotamos por $Supp_G(A)$, é o seguinte subconjunto de G :

$$Supp_G(A) := \{g \in G | A_g \neq \{0\}\}.$$

1.2.1 Álgebra de matrizes e graduações elementares

A álgebra de matrizes $M_n(K)$ pode ser graduada por \mathbb{Z}_n (\mathbb{Z}_n -graduação canônica) e por \mathbb{Z} (\mathbb{Z} -graduação canônica) como segue:

$$(M_n(K))_{\bar{l}} := \text{span}_K\{E_{ij} \mid \overline{j-i} = \bar{l}\}.$$

$$(M_n(K))_l =: \text{span}_K\{E_{ij} \mid j-i = l\} \text{ quando } |l| < n;$$

$$(M_n(K))_l := \{0\} \text{ quando } |l| \geq n.$$

Definição 1.17. *Uma G -graduação em $M_n(K)$ é dita elementar quando existe uma n -upla $\bar{g} = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$, tal que para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$, a matriz $E_{ij} \in (M_n(K))_{g_i^{-1}g_j}$. Neste caso, dizemos que $M_n(K)$ está equipada com a graduação elementar induzida por \bar{g} .*

Quando $M_n(K)$ está equipada com a graduação induzida por uma n -upla $\bar{g} = (g_1, \dots, g_n)$, $M_n(K)_e = \text{span}_K\{E_{11}, \dots, E_{nn}\}$ ($M_n(K)_e$ coincide a subálgebra das matrizes diagonais) se, e somente se, \bar{g} tem elementos distintos.

Notemos que a \mathbb{Z} -graduação canônica (respectivamente a \mathbb{Z}_n -graduação canônica) é a graduação elementar induzida por $(1, \dots, n)$ (respectivamente a graduação elementar induzida por $(\bar{1}, \dots, \bar{n})$).

Nesta tese, consideraremos (apenas) $M_n(K)$ equipada com a graduação elementar induzida por $\bar{g} = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$, em que \bar{g} é uma n -upla de elementos distintos de G . Além disto, $M_n(K)$ será graduada por \mathbb{Z} e por \mathbb{Z}_n somente do modo canônico.

1.2.2 Álgebra de Grassmann e \mathbb{Z}_2 -graduações

Nesta seção, descreveremos as \mathbb{Z}_2 -graduações (não trivial) de E (a menos de isomorfismo \mathbb{Z}_2 -graduado) na situação em que $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ é homogêneo com relação a ela.

Lema 1.18. *Seja K um corpo de $\text{char}K \neq 2$. Uma álgebra A possui uma \mathbb{Z}_2 -graduação não trivial se, e só se, existe um automorfismo de A de ordem 2.*

Demonstração. Inicialmente, suponhamos que exista um automorfismo de A de ordem 2. Consideremos, então, um automorfismo $\phi : A \rightarrow A$ de ordem 2. Percebamos que $a = 2^{-1}(a + \phi(a)) + 2^{-1}(a - \phi(a))$ e $\{a \in A \mid 2^{-1}(a + \phi(a)) = 2^{-1}(a - \phi(a))\} = \{0\}$. Sendo assim, não é difícil verificarmos que $(\{2^{-1}(a + \phi(a)) \mid a \in A\}, \{2^{-1}(a - \phi(a)) \mid a \in A\})$ é uma \mathbb{Z}_2 -graduação não trivial em A .

Por outro lado, suponhamos que A possua uma \mathbb{Z}_2 -graduação não trivial (A_0, A_1) . Afirmamos, então, que a aplicação:

$$\begin{aligned} \phi : A &\rightarrow A \\ a_0 + a_1 &\mapsto a_0 - a_1 \end{aligned}$$

é um automorfismo de A de ordem 2. De fato, notemos que ϕ tem ordem 2. Além disso, ϕ é bijetiva, pois $\phi(a_0 - a_1) = a_0 + a_1$ e $A_0 \cap A_1 = \{0\}$. \square

Apresentaremos, agora, quatro automorfismos de ordem 2 de E :

$$\begin{cases} \phi_0 : E \rightarrow E \\ e_i \mapsto -e_i, i = 1, 2, \dots, n, \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_\infty : E \rightarrow E \\ e_i \mapsto e_i, \text{ se } i \text{ é par} \\ e_i \mapsto -e_i, \text{ se } i \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_{k^*} : E \rightarrow E \\ e_i \mapsto -e_i, i = 1, \dots, k \\ e_i \mapsto e_i, i = k + 1, \dots, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_k : E \rightarrow E \\ e_i \mapsto e_i, i = 1, \dots, k \\ e_i \mapsto -e_i, i = k + 1, \dots, \end{cases}$$

Cada um desses quatro automorfismos induz uma \mathbb{Z}_2 -gradação não trivial em E :

- Induzida por ϕ_0 : E_{can} ou (E_0) . Nessa graduação, $V \subset (E_{can})_1$;
- Induzida por ϕ_∞ : E_∞ . Nessa graduação, $\{e_2, \dots, e_{2n}, \dots\} \subset (E_\infty)_0$ e $\{e_1, e_3, \dots, e_{2n+1}, \dots\} \subset (E_\infty)_1$;
- Induzida por ϕ_{k^*} : E_{k^*} . Nessa graduação, $\{e_1, \dots, e_k\} \subset (E_{k^*})_1$ e $\{e_{k+1}, e_{k+2}, \dots\} \subset (E_{k^*})_0$;
- Induzida por ϕ_k : E_k . Nessa graduação, $\{e_1, \dots, e_k\} \subset (E_k)_0$ e $\{e_{k+1}, e_{k+2}, \dots\} \subset (E_k)_1$.

Nesta tese, a álgebra de Grassmann estará munida de uma \mathbb{Z}_2 -gradação induzida por um dos quatro automorfismos citados.

1.3 Identidades polinomiais e polinômios centrais

Definição 1.19. Um polinômio $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ é chamado uma identidade polinomial (ordinária) de uma K -álgebra A quando:

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ para quaisquer } a_1, \dots, a_n \in A.$$

São exemplos de álgebras com identidades polinomiais:

- Uma K -álgebra comutativa, pois satisfaz a identidade $x_1x_2 - x_2x_1$;
- Um corpo finito K com q elementos, pois satisfaz a identidade $x_1^q - x_1$;
- A álgebra de Grassmann, pois satisfaz o polinômio $[x_1, x_2, x_3]$;
- A álgebra $M_2(K)$, pois satisfaz o polinômio $[[x_1, x_2]^2, x_3]$.

Definição 1.20. Um ideal $I \subset K\langle X \rangle$ é dito um T -ideal quando $\phi(I) \subset I$ para todo $\phi \in \text{End}(K\langle X \rangle)$.

Definição 1.21. Seja $S = \{f_i, i \in J\} \subset K\langle X \rangle$ (J é um conjunto de índices) não vazio. O T -ideal gerado por S é definido por:

$$\langle S \rangle_T := \text{span}_K \{g\phi(f_i)h \mid \phi \in \text{End}(K\langle X \rangle); f_i \in S; g, h \in K\langle X \rangle\}.$$

Dizemos que g é uma consequência (ou que segue) de S quando $g \in \langle S \rangle_T$.

Denotamos o conjunto das identidades de uma K -álgebra A por $T(A)$. Notemos que $T(A)$ é um T -ideal.

Definição 1.22. Um polinômio $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ (com termo independente nulo) é chamado um polinômio central (ordinário) de uma K -álgebra A quando:

$$fx_{n+1} - x_{n+1}f \in T(A).$$

O conjunto formado pelos polinômios centrais de A é denotado por $C(A)$. Dizemos que $f \in C(A)$ é um polinômio central não trivial de A quando $f \notin T(A)$.

Vejamos alguns exemplos.

- x_1 é um polinômio central de uma álgebra comutativa;
- $[x_1, x_2]^2$ é um polinômio central não trivial de $M_2(K)$;
- $[x_1, x_2]$ é um polinômio central não trivial de E .

Dada uma K -álgebra A , não é difícil ver que $C(A)$ é um K -módulo fechado sob todos os endomorfismos de $K\langle X \rangle$.

Definição 1.23. Os K -módulos de $K\langle X \rangle$ fechados sob todos os endomorfismos são denominados de T -espaços. O T -espaço gerado por $S = \{f_i, i \in J\} \subset K\langle X \rangle$ (J é um conjunto de índices) é definido por:

$$\langle S \rangle^T := \text{span}_K \{ \phi(f_i) \mid \phi \in \text{End}(K\langle X \rangle); f_i \in S \}.$$

Dizemos que g é uma consequência (ou que segue) de S quando $g \in \langle S \rangle^T$.

Como podemos notar, se A é uma K -álgebra, então $C(A)$ é T -espaço. Além disso, não é difícil verificarmos que $C(A)$ é uma subálgebra.

Existam exemplos de T -espaços que não subálgebras (veja Exemplo 1.45, de [9]).

1.4 Identidades polinomiais graduadas e polinômios centrais graduados

Sejam G um grupo, $X_g = \{x_1^g, \dots, x_n^g, \dots\}$ ($g \in G$) e $X = \bigcup_{g \in G} X_g$ uma coleção de variáveis associativas, tais que $X_g \cap X_h = \{\}$ quando $g \neq h$. Dizemos que $x \in X$ tem G -grau g quando $x \in X_g$. Definimos o G -grau de 1 por e e de um monômio $m = x_{i_1} \dots x_{i_n}$ por $\alpha(m) := \alpha(x_{i_1}) \dots \alpha(x_{i_n})$. Com isto, temos que $K\langle X \rangle$ é uma K -álgebra G -graduada cujas componentes homogêneas são:

$$K\langle X \rangle_g := \text{span}_K \{ m \text{ é um monômio de } K\langle X \rangle; \alpha(m) = g \} \text{ se } g \neq e$$

$$K\langle X \rangle_e := \text{span}_K \{ m \text{ é um monômio de } K\langle X \rangle; \alpha(m) = e \} + \text{span}_K \{ 1 \}.$$

Um endomorfismo ϕ de $K\langle X \rangle$ é chamado G -graduado quando $\phi(K\langle X \rangle_g)$ está contido em $K\langle X \rangle_g$ para todo $g \in G$.

Definição 1.24. *Seja A uma K -álgebra G -graduada. Um polinômio G -graduado $f(x_1, \dots, x_n)$ é dito uma identidade G -graduada de A quando:*

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ para quaisquer } a_1 \in A_{\alpha(x_1)}, \dots, a_n \in A_{\alpha(x_n)}.$$

Notemos que se A é uma álgebra G -graduada, então o conjunto das identidades polinomiais graduadas de A (respectivamente polinômios centrais G -graduados de A), o qual denotamos por $T_G(A)$ (respectivamente $C_G(A)$), é um ideal graduado (respectivamente K -submódulo) fechado sob todos os endomorfismos graduados de $K\langle X \rangle$. Ideais graduados de $K\langle X \rangle$ (respectivamente K -submódulos de $K\langle X \rangle$) fechado sob todos os endomorfismos graduados de $K\langle X \rangle$ são denominados de T_G -ideais (respectivamente T_G -espaços). T_G -ideais ou T_G -espaços gerados por um conjunto de polinômios graduados $S = \{f_i, i \in J\} \subset K\langle X \rangle$, em que J é um conjunto de índices são definidos de modo análogo àqueles apresentados na última seção. A única alteração é que, neste caso, iremos substituir endomorfismos por endomorfismos graduados.

Definição 1.25. *Seja A uma K -álgebra G -graduada. Um polinômio G -graduado $f(x_1, \dots, x_n)$ (com termo independente nulo) é dito um polinômio central G -graduado de A quando:*

$$fx_{n+1} - x_{n+1}f \in T_G(A), \quad x_{n+1} \in X.$$

Exemplo 1.26. *São exemplos de identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas de $M_2(K)$:*

$$x_1x_2 - x_2x_1 \text{ quando } \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0;$$

$$x_1x_2x_3 = x_3x_2x_1 \text{ quando } \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \alpha(x_3) = 1.$$

Já os polinômios $x_1^2, x_1^2x_2^2$, com $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 1$, são polinômios centrais \mathbb{Z}_2 -graduados (não triviais) de $M_2(K)$.

Exemplo 1.27. *São exemplos de identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas da álgebra de Grassmann (com graduação induzida por ϕ_0):*

$$x_1x_2 - x_2x_1 \text{ quando } \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0;$$

$$x_1x_2 - x_2x_1 \text{ quando } \alpha(x_1) = 1, \alpha(x_2) = 0;$$

$$x_1x_2 + x_2x_1 \text{ quando } \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 1.$$

O polinômio x_1 , com $\alpha(x_1) = 0$, é um polinômio central não trivial para E_{can} .

Por último, enunciaremos dois fatos bem conhecidos:

Proposição 1.28. *Sejam A uma K -álgebra G -graduada com uma base linear B (formada por elementos homogêneos) e $f(x_1, \dots, x_n)$ um polinômio multilinear. Então $f \in T_G(A)$ se, e somente se,*

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ para quaisquer } a_1 \in A_{\alpha(x_1)} \cap B, \dots, a_n \in A_{\alpha(x_n)} \cap B.$$

Proposição 1.29. *Sejam A uma álgebra G -graduada com uma base linear B (formada por elementos homogêneos) e $f(x_1, \dots, x_n)$ um polinômio multilinear. Então $f \in C_G(A)$ se, e somente se,*

$$f(a_1, \dots, a_n).a_{n+1} - a_{n+1}.f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ para quaisquer } a_1 \in A_{\alpha(x_1)} \cap B, \dots, a_n \in A_{\alpha(x_n)} \cap B \text{ e } a_{n+1} \in (\bigcup_g A_g) \cap B.$$

1.5 Matrizes genéricas

Nesta seção, K será um domínio de integridade infinito fixo e $\text{Frac}(K)$ o seu corpo de frações.

Sejam $Y_{(p,q)} = \{y_{1,(p,q)}, y_{2,(p,q)}, \dots, y_{n,(p,q)}, \dots\}$ um conjunto enumerável de variáveis comutativas, $Y = \bigcup_{(p,q) \in \hat{n} \times \hat{n}} Y_{(p,q)}$ e $M_n(\Omega)$ a álgebra de matrizes sobre $\Omega = K[Y]$.

Definição 1.30. *Uma matriz genérica de $M_n(\Omega)$ é um elemento do seguinte tipo:*

$$A_i := \sum_{(p,q) \in \hat{n} \times \hat{n}} y_{i,(p,q)} E_{pq}, \quad i \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

A subálgebra de $M_n(\Omega)$ (a qual denotamos por R) gerada pelas matrizes genéricas é denominada de álgebra das matrizes genéricas.

Observação 1.31. *A álgebra das matrizes genéricas goza da seguinte propriedade universal: qualquer aplicação $\phi : \bigcup_{i=1}^{\infty} \{A_i\} \rightarrow M_n(K)$ pode ser estendida a um único homomorfismo $\bar{\phi} : R \rightarrow M_n(K)$.*

Proposição 1.32. *Se $f(x_1, \dots, x_m) \in T(R)$, então $f \in T(M_n(K))$.*

Demonstração. Sejam $B_1, \dots, B_m \in M_n(K)$. Provaremos que $f(B_1, \dots, B_m) = 0$. Para isto, consideremos a seguinte aplicação:

$$\begin{cases} \phi : \bigcup_{i=1}^{\infty} \{A_i\} \rightarrow M_n(K) \\ A_i \mapsto B_i, i = 1, \dots, m \\ A_i \mapsto 0, i = m+1, \dots \end{cases}$$

Pela propriedade universal da álgebra das matrizes genéricas, ϕ pode ser estendida a um único homomorfismo $\bar{\phi} : R \rightarrow M_n(K)$. Daí, segue que $0 = \bar{\phi}(f(x_1, \dots, x_m)) = f(B_1, \dots, B_m)$ como desejado. \square

Lema 1.33. *Se $f(x_1) \in K[x_1]$ um polinômio não nulo, então existe $\alpha_1 \in K$, tal que $f(\alpha_1) \neq 0$.*

Demonstração. Por hipótese, K é um domínio de integridade infinito. Suponhamos, por absurdo, que $f(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in K$. Sendo assim, existe uma sequência $\{\alpha_i\}$ elementos de K distintos, tal que f se anula nela. Ora, vendo f como um polinômio com coeficientes em $\text{Frac}(K)$, teríamos que $(x - \alpha_i) \mid f$ para todo elemento da sequência $\{\alpha_i\}$, o que implica que $f = 0$; contradição. \square

Mais geralmente, por um argumento indutivo no número de variáveis de f , temos:

Lema 1.34. *Seja $f(x_1, \dots, x_m) \in K[x_1, \dots, x_m]$ um polinômio não nulo. Existem $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$, tais que $f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \neq 0$.*

Exemplo 1.35. *Notemos que, se K é um anel infinito arbitrário, podem existir polinômios em uma indeterminada com infinitas raízes. Tomemos, por exemplo, o anel infinito $\mathbb{Z}_4[x]$ e o anel de polinômios $\mathbb{Z}_4[x][y]$. O polinômio y^2 tem uma infinidade de raízes, das quais citamos: $2x, 2x^2, \dots, 2x^n, \dots$*

Proposição 1.36. *Se $f \in T(M_n(K))$, então $f \in T(R)$. Consequentemente $T(M_n(K)) = T(R)$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que exista um polinômio nas variáveis x_1, \dots, x_m $f(x_1, \dots, x_m) \in T(M_n(K)) - T(R)$. Desta forma, existirão matrizes genéricas $A_1, \dots, A_m \in R$, tais que $f(A_1, \dots, A_m) \neq 0$.

Isto implica que a matriz $f(A_1, \dots, A_m)$ tem uma posição (ij) cuja entrada é não nula. Para simplificar, suponhamos que essa entrada seja $g(y_1, \dots, y_r)$. Com base no Lema 1.34, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$, tais que $g(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \neq 0$. Desta forma, a partir de uma aplicação conveniente $\phi : \bigcup_{i=1}^{\infty} \{A_i\} \mapsto M_n(K)$, temos que $E_{ii}\bar{\phi}(f(A_1, \dots, A_m))E_{jj} = g(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \cdot E_{ij} \neq \{0\}$.

Ora, mas isto é uma contradição, pois $f \in T(M_n(K))$. □

Corolário 1.37. $C(R) = C(M_n(K))$.

As Proposições 1.32 e 1.36 são bem conhecidas. Um dos matemáticos responsáveis pela divulgação da álgebra das matrizes genéricas e de suas aplicações foi o matemático italiano Claudio Procesi. Em seu livro intitulado Rings with Polynomial Identities [32], podemos encontrar a demonstração dessas duas proposições e de outros fatos relacionados à PI-teoria.

Capítulo 2

Identidades Graduadas da Álgebra de Matrizes

2.1 O modelo genérico de Silva

Neste capítulo, K denotará um domínio de integridade infinito fixo. O nosso propósito nesta seção será apresentar o modelo genérico de Silva que foi descrito em [38].

Para cada $h \in G$, seja $Y_h = \{y_{h,i}^k | 1 \leq k \leq n; i \geq 1\}$ uma família enumerável de variáveis comutativas e seja $M_n(\Omega)$ a álgebra formada pelas matrizes $n \times n$ sobre $\Omega = K[Y]$, em que $Y = \bigcup_{h \in G} Y_h$. Esta álgebra pode, de modo similar à $M_n(K)$, ser equipada a graduação elementar induzida por $\bar{g} = (g_1, \dots, g_n)$. Em outras palavras, $M_n(\Omega)$ (Ω é um domínio de integridade infinito) está equipada com a graduação elementar induzida por \bar{g} quando $E_{ij} \in M_n(\Omega)_{g_i^{-1}g_j}$. Denotaremos por G_n o conjunto $\{g_1, \dots, g_n\}$.

Definição 2.1. *Seja h um elemento de G . O conjunto de todos os índices $k \in \hat{n}$, tais que $g_k h \in G_n$ é denotado por L_h . O índice determinado por $g_{s_2^k} := g_k h$ é definido como s_2^k .*

Definição 2.2. *Seja $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_m) \in G^m$. Definimos por $L_{\mathbf{h}}$ (o conjunto de todos índices associados com a m -upla (h_1, \dots, h_m)) o subconjunto de \hat{n} cujos elementos satisfazem a propriedade:*

$$g_k h_1 \dots h_i \in G_n, \text{ para todo } i \in \hat{n}.$$

Associada a \mathbf{h} , definimos, de forma indutiva, a sequência $(s_1^k, \dots, s_{m+1}^k)$ (sequência associada a \mathbf{h} determinada por k) por:

- 1) $s_1^k = k$;
- 2) $s_l^k : g_{s_l^k} = g_k h_1 \dots h_{l-1} \quad \forall l \in \{2, \dots, m+1\}$.

Uma matriz genérica de G -grau h é um elemento homogêneo de $M_n(\Omega)$ do seguinte tipo:

$$A_i^h = \sum_{k \in L_h} y_{h,i}^k E_{k, s_2^k}.$$

A subálgebra G -graduada de $M_n(\Omega)$ gerada pelas matrizes genéricas é chamada de álgebra das matrizes genéricas. Denotaremos esta álgebra por R .

Definição 2.3. *Seja $m = x_{i_1} \dots x_{i_l} \in K\langle X \rangle$. Denotamos por $h(m)$ a l -upla $(\alpha(x_{i_1}), \dots, \alpha(x_{i_l})) \in G^l$.*

O próximo lema é um importante resultado computacional. Sua prova é uma consequência imediata da tábua de multiplicação das matrizes elementares.

Lema 2.4. *(Silva. Lema 3.5, de [38]) Se L é o conjunto dos índices associados a q -upla (h_1, \dots, h_q) de G^q e $s_k = (s_1^k, \dots, s_{q+1}^k)$ denota a sequência associada a L determinada por $k \in L$, então:*

$$A_{i_1}^{h_1} \dots A_{i_q}^{h_q} = \sum_{k \in L} w_k E_{s_1^k, s_{q+1}^k},$$

em que $w_k = y_{h_1, i_1}^{s_1^k} y_{h_2, i_2}^{s_2^k} \dots y_{h_q, i_q}^{s_q^k}$.

Definição 2.5. *Sejam $f(x_1, \dots, x_n)$ um polinômio e as matrizes genéricas $A_1 \in R_{\alpha(x_1)}, \dots, A_n \in R_{\alpha(x_n)}$. Denotaremos por $f(A_1, \dots, A_n)$ o resultado da substituição pelas matrizes genéricas correspondentes.*

A prova do próximo lema é similar à da Proposição 1.36.

Lema 2.6. *Seja K um domínio de integridade infinito. Então:*

$$T_G(M_n(K)) = T_G(R).$$

Corolário 2.7. *(Silva. Corolário 3.7, de [38]) Sejam $m_1, m_2 \in K\langle X \rangle$ dois monômios, tais que $h(m_1) = h(m_2)$. Então $m_1 \in T_G(M_n(K))$ se, e só se, $m_2 \in T_G(M_n(K))$.*

Demonstração. Por hipótese, $h(m_1) = h(m_2)$. Logo, pelo Lema 2.4, segue que $m_1 \in T_G(R)$ se, e somente se, $m_2 \in T_G(R)$.

Aplicando o Lema 2.6, obtemos o resultado. \square

Outra consequência imediata do Lema 2.6 é o seguinte lema:

Lema 2.8. *Seja K um domínio de integridade infinito. Então $C_G(M_n(K))$ é igual a $C_G(R)$.*

Lema 2.9. *Seja K um domínio de integridade infinito. Se $f \in T_G(M_n(K))$, então todas as componentes multi-homogêneas de f pertencem a $T_G(M_n(K))$.*

Demonstração. Seja $f(x_1, \dots, x_m)$ uma identidade G -graduada de $M_n(K)$. Escrevamos f como a soma de suas diferentes componentes multi-homogêneas:

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^l f_i(x_1, \dots, x_m). \quad (2.1)$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que os monômios de cada polinômio $f_i (i = 1, \dots, l)$ não são identidades graduadas de $M_n(K)$.

Se $l = 1$, a prova é óbvia. Suponhamos que $l \geq 2$ e consideremos $k_1, k_2 \in \hat{l}$.

Suponhamos que, na posição $(p, q) \in \hat{n} \times \hat{n}$, as matrizes $f_{k_1}(A_1, \dots, A_m)$ e $f_{k_2}(A_1, \dots, A_m)$ tenham uma entrada não nula.

Sejam $f_{k_1}^{(p,q)} = \sum_{i=1}^{l_1} \lambda_i M_i$, $f_{k_2}^{(p,q)} = \sum_{i=1}^{l_2} \gamma_i N_i$ os polinômios que aparecem na posição (p, q) de f_{k_1} e f_{k_2} , respectivamente. As letras gregas denotam elementos de $K - \{0\}$ e as letras latinas são monômios. Notemos que $M_i \neq N_j$ para todos $i \in \widehat{l}_1$ e $j \in \widehat{l}_2$. Deste fato, segue que $f \in T_G(R)$ se, e só se, $f_i \in T_G(R)$ para todo $i \in \widehat{l}$. Logo, todas as componentes multi-homogêneas de f são identidades de $M_n(K)$. \square

Adaptando a prova do Lema 2.9, podemos demonstrar o seguinte resultado:

Lema 2.10. *Seja f um polinômio central G -graduado de $M_n(K)$. Então todas as componentes multi-homogêneas de f são elementos de $C_G(M_n(K))$.*

Uma importante consequência da prova do Lema 2.9 é a seguinte:

Lema 2.11. *Sejam $m(x_1, \dots, x_q) = x_{i_1} \dots x_{i_r}$ e $n(x_1, \dots, x_q)$ dois monômios, tais que as matrizes $n(A_1, \dots, A_q)$ e $m(A_1, \dots, A_q)$ têm, em alguma posição, a mesma entrada não nula. Então:*

$$m - n$$

é um polinômio multi-homogêneo.

2.2 Algumas identidades graduadas de $M_n(K)$ e monômios do Tipo 1

Algumas identidades graduadas de $M_n(K)$ serão descritas no próximo lema.

Lema 2.12. *Sejam K um domínio de integridade infinito, G um grupo e $\bar{g} = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$ uma n -upla de elementos distintos. São identidades G -graduadas de $M_n(K)$:*

$$x_1 x_2 - x_2 x_1 \text{ quando } \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = e; \quad (2.2)$$

$$x_1 x_2 x_3 - x_3 x_2 x_1 \text{ quando } \alpha(x_1) = \alpha(x_3) = (\alpha(x_2))^{-1} \neq e; \quad (2.3)$$

$$x_1 \text{ quando } M_n(K)_{\alpha(x_1)} = \{0\}. \quad (2.4)$$

Demonstração. De acordo com a hipótese, $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$ é uma n -upla de elementos distintos. Dessa forma, a componente neutra de $M_n(K)$ corresponde à subálgebra das matrizes diagonais. Daí, concluímos que o polinômio $x_1 x_2 - x_2 x_1$, em que $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = e$, é uma identidade polinomial graduada de $M_n(K)$.

Notemos que o segundo polinômio é multilinear. Assim, basta avaliá-lo em matrizes elementares. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $M_n(K)_{\alpha(x_1)}, M_n(K)_{\alpha(x_2)} \neq \{0\}$. Sejam $E_{i_1 j_1} \in M_n(K)_{\alpha(x_1)}, E_{i_2 j_2} \in M_n(K)_{\alpha(x_2)}, E_{i_3 j_3} \in M_n(K)_{\alpha(x_3)}$ e consideremos o produto $E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} E_{i_3 j_3}$. Se $E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} E_{i_3 j_3} \neq 0$, então $j_1 = i_2$ e $j_2 = i_3$. Além disso, $E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} E_{i_3 j_3} = E_{i_1 j_3} \in M_n(K)_{\alpha(x_1)}$. Por hipótese, $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)^{-1} = \alpha(x_3)$. Logo $j_2 = i_1 = i_3$ e $i_2 = j_3$ porque $M_n(K)_e$ é a subálgebra das matrizes diagonais. Logo $E_{i_3 j_3} E_{i_2 j_2} E_{i_1 j_1} = E_{i_1 j_3} = E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} E_{i_3 j_3}$. Suponhamos, agora, que $E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} E_{i_3 j_3}$ é a matriz nula. Provaremos que $E_{i_3 j_3} E_{i_2 j_2} E_{i_1 j_1}$ também é a matriz nula. Suponhamos, por contradição, que o último produto de matrizes elementares é não nulo. Repetindo as ideias do último caso, teríamos que $E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} E_{i_3 j_3} = E_{i_3 j_1}$ o que é uma contradição.

A terceira identidade é imediata. \square

Notemos que a identidade $x_3x_2x_1 = x_1x_2x_3$, $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \alpha(x_3) = e$, é uma consequência de (2.2). Além disso, quando $M_n(K)_{\alpha(x_1)}$ ou $M_n(K)_{\alpha(x_2)} = \{0\}$, temos que essa identidade é consequência da terceira identidade listada acima.

Definição 2.13. Denotaremos o T_G -ideal gerado pelas identidades (1), (2), (3) por J e o T_G -ideal gerado pelas identidades (1), (2) por J_1 .

Quando $n = 1$, temos que as identidades de $M_1(K) \cong K$ seguem de $x_1x_2 = x_2x_1$ ($\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = e$) e $x_1 = 0$, $M_1(K)_{\alpha(x_1)} = \{0\}$. Desta forma, daqui para frente, suporemos que $n \geq 2$.

Definição 2.14. Seja $m = x_{i_1} \dots x_{i_q}$. Um monômio G -graduado $n \in K\langle X \rangle$ é chamado uma subpalavra de m quando existem $j \in \{0, 1, \dots, q\}$ e $l \in \mathbb{N}$, tais que $j + l \leq q$ e:

$$n = x_{i_j} \dots x_{i_{j+l}}.$$

Além disso, o monômio n é chamado uma subpalavra própria de m quando n é uma subpalavra de m e $n \neq m$.

Definição 2.15. Seja $m = x_{i_1} \dots x_{i_l}$. Este monômio é dito do Tipo 1 quando o G -grau de cada uma das suas subpalavras é um elemento de $\text{Supp}_G(M_n(K))$.

Exemplo 2.16 (Exemplo 4.7, de [4]). Consideremos o grupo abeliano livre G gerado por g_1, \dots, g_6 e $\bar{g} = (g_1, g_1g_4, g_1g_4g_5, g_2, g_2g_5, g_2g_5g_6, g_3, g_3g_4g_5g_6) \in G^8$. A álgebra $M_8(K)$, munida de uma graduação elementar induzida por \bar{g} , possui uma identidade monomial do Tipo 1, a saber x_1x_2 , em que $\alpha(x_1) = g_4$ e $\alpha(x_2) = g_5g_6$. De fato, notemos que $M_8(K)_{g_4} = \text{span}_K\{E_{12}\}$, $M_8(K)_{g_5g_6} = \text{span}_K\{E_{46}\}$ e $M_8(K)_{g_4g_5g_6} = \text{span}_K\{E_{78}\}$. Com isto, temos que $\alpha(x_1), \alpha(x_2), \alpha(x_1x_2) \in \text{Supp}_G(M_8(K))$. Por outro lado, $x_1x_2 \in T_G(M_8(K))$, pois $E_{12}.E_{46} = 0$.

Lema 2.17. Sejam m um monômio multilinear do Tipo 1 e \bar{m} o monômio obtido de m pelo descarte das suas variáveis de G -grau e . Então $m \in T_G(M_n(K))$ se, e somente se, $\bar{m} \in T_G(M_n(K))$.

Demonstração. De início, notemos que $\sum_{i=1}^n E_{ii} \in M_n(K)_e$. Sendo assim, é claro que se $m \in T_G(M_n(K))$, então $\bar{m} \in T_G(M_n(K))$. Reciprocamente, notemos que existe um homomorfismo G -graduado ϕ de $K\langle X \rangle$, tal que $\phi(\bar{m}) = m$. Assim, se $\bar{m} \in T_G(M_n(K))$, temos que $m \in T_G(M_n(K))$. \square

Lema 2.18. Seja $m = x_{i_1} \dots x_{i_l} \in T_G(M_n(K))$. Se m não é um monômio do Tipo 1, então m é consequência de uma identidade do seguinte tipo:

$$x_1 = 0 \quad \text{em que} \quad M_n(K)_{\alpha(x_1)} = \{0\}.$$

Como m não é um monômio do Tipo 1, existe uma subpalavra n de m , tal que $\alpha(n) \notin \text{Supp}_G(M_n(K))$. Assim, $M_n(K)_{\alpha(n)} = 0$ e n é consequência de uma identidade do tipo x_1 com $M_n(K)_{\alpha(x_1)} = \{0\}$; daí, concluímos que m também o é.

Definição 2.19. Sejam $m = x_{i_1} \dots x_{i_q}$ e $k, l \in \mathbb{Z}$, tais que $1 \leq k \leq l \leq q$. Definimos o monômio obtido de m pelo descarte das $k - 1$ primeiras variáveis e pelas últimas $q - l$ variáveis por $m^{[k, l]}$.

O lema a seguir será usado para demonstrar o primeiro lema da próxima seção.

Lema 2.20. *(Silva. Lema 4.5, de [38])* Sejam $M(x_1, \dots, x_q)$ e $N(x_1, \dots, x_q)$ dois monômios de $K\langle X \rangle$ que começam com a mesma variável. Sejam $m(x_1, \dots, x_q)$ e $n(x_1, \dots, x_q)$ dois monômios obtidos de M e N (respectivamente) pelo descarte da primeira variável. Se existem matrizes A_1, \dots, A_q , tais que as matrizes $M(A_1, \dots, A_q)$ e $N(A_1, \dots, A_q)$ têm, na mesma posição, a mesma entrada não nula, então as matrizes $m(A_1, \dots, A_q)$ e $n(A_1, \dots, A_q)$ também têm, na mesma posição, a mesma entrada não nula.

Demonstração. É uma consequência imediata do Lema 2.4. \square

2.3 Dois lemas técnicos

O próximo lema segue algumas ideias de (Lema 6, [2]), (Lema 5, [3]) e (Lema 4, [40]). Em (Lema 4.6, [38]), há uma prova do lema abaixo. Contudo, a próxima prova é original.

Lema 2.21. *Sejam $m(x_1, \dots, x_q)$ e $n(x_1, \dots, x_q)$ dois monômios, tais que as matrizes $n(A_1, \dots, A_q)$ e $m(A_1, \dots, A_q)$ têm, em alguma posição, a mesma entrada não nula. Então:*

$$m(x_1, x_2, \dots, x_q) \equiv n(x_1, x_2, \dots, x_q) \pmod{J_1} \quad (\text{respectivamente mod } J).$$

Demonstração. Seja $m = x_{i_1} \dots x_{i_r}$. De acordo com o Lema 2.11, $m - n$ é um polinômio multi-homogêneo. Sejam m_1 e n_1 dois monômios multilineares com as mesmas variáveis, tais que $h(m_1) = h(m)$ e $h(n_1) = h(n)$. Para provarmos o Lema, é suficiente verificarmos que:

$$m_1 \equiv n_1 \pmod{J_1}.$$

Suponhamos que $m_1 = x_1 \dots x_r$. Sendo assim, existe $\sigma \in S_r$, tal que $n_1 = x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(r)}$.

Por hipótese, existe uma posição $(i, j) \in \hat{n} \times \hat{n}$, tal que:

$$E_{1i} m_1(A_1, \dots, A_q) E_{j1} = E_{1i} n_1(A_1, \dots, A_q) E_{j1} \neq 0.$$

Suponhamos que, na posição (i, j) , a entrada de $m_1(A_1, \dots, A_q)$ seja o monômio $y_{\alpha(x_1), 1}^{q_1} \dots y_{\alpha(x_r), r}^{q_r}$, em que $q_2, \dots, q_r \in \hat{n}$ e $q_1 = i$. Logo:

$$E_{q_1 s_{\alpha(x_1)}}^{q_1} \dots E_{q_r s_{\alpha(x_r)}}^{q_r} = E_{q_{\sigma(1)} s_{\alpha(x_{\sigma(1)})}}^{q_{\sigma(1)}} \dots E_{q_{\sigma(r)} s_{\alpha(x_{\sigma(r)})}}^{q_{\sigma(r)}} = E_{ij}.$$

Dessa forma, existem matrizes elementares $E_{i_1 j_1} \in M_n(K)_{\alpha(x_1), \dots}$, $E_{i_r j_r} \in M_n(K)_{\alpha(x_r)}$ com a seguinte propriedade:

$$E_{i_1 j_1} \dots E_{i_r j_r} = E_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} \dots E_{i_{\sigma(r)} j_{\sigma(r)}} \neq 0.$$

Daí, segue que: $i_1 = i_{\sigma(1)}$, $j_r = j_{\sigma(r)}$ e $\alpha(m_1) = \alpha(n_1) = g_i^{-1} g_j$.

Nos próximos passos, nós usaremos indução em r , o grau dos monômios n_1 e m_1 .

Se $r = 1$, a prova é óbvia. A prova será feita por indução em r .

Caso 1: Suponhamos que $\sigma(1) = 1$. Neste caso, os monômios m_1 e n_1 começam com a mesma variável. Sejam m_2 e n_2 dois monômios obtidos de m_1 e n_1 , respectivamente, pelo descarte da primeira variável. Pelo Lema 2.20, segue-se que $m_2(A_1, \dots, A_q)$ e $n_2(A_1, \dots, A_q)$ têm na mesma posição a mesma entrada não nula. Por hipótese de indução, temos que $m_2 \equiv n_2$ módulo J_1 . Consequentemente, $m_1 \equiv n_1$ módulo J_1 .

Caso 2: Suponhamos que $\sigma(1) > 1$ e seja t o menor inteiro positivo, tal que $\sigma^{-1}(t+1) < \sigma^{-1}(1) \leq \sigma^{-1}(t)$. Definamos por $k_1 := \sigma^{-1}(t+1)$, $k_2 := \sigma^{-1}(1)$ e $k_3 = \sigma^{-1}(t)$. Notemos que $\sigma(k_1) = t+1$, $\sigma(k_2) = 1$, $\sigma(k_3) = t$, $i_{\sigma(c+1)} = j_{\sigma(c)}$ e $i_{c+1} = j_c$ para todo $c \in \widehat{r-1}$. É claro que:

$$n_1 = x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(r)} = n_1^{[1, k_1-1]} n_1^{[k_1, k_2-1]} n_1^{[k_2, k_3]} n_1^{[k_3+1, r]}.$$

Além disso:

$$\begin{aligned} \alpha(n_1^{[1, k_1-1]}) &= g_{i_{\sigma(1)}}^{-1} g_{j_{\sigma(k_1-1)}} = g_{i_1}^{-1} g_{i_{\sigma(k_1)}} = g_{i_1}^{-1} g_{i_{t+1}}; \\ \alpha(n_1^{[k_1, k_2-1]}) &= g_{i_{\sigma(k_1)}}^{-1} g_{j_{\sigma(k_2-1)}} = g_{i_{t+1}}^{-1} g_{i_{\sigma(k_2)}} = g_{i_{t+1}}^{-1} g_{i_1}; \\ \alpha(n_1^{[k_2, k_3]}) &= g_{i_{\sigma(k_2)}}^{-1} g_{j_{\sigma(k_3)}} = g_{i_1}^{-1} g_{j_t} = g_{i_1}^{-1} g_{i_{t+1}}. \end{aligned}$$

Desta forma, pelas identidades (2.2) e (2.3), concluímos que:

$$n_1 \equiv n_1^{[k_2, k_3]} n_1^{[k_1, k_2-1]} n_1^{[1, k_1-1]} n_1^{[k_3+1, r]} \pmod{J_1}.$$

Portanto n_1 é congruente com um monômio m_2 que começa com a mesma variável de m_1 . Assim:

$$E_{1i} m_2(A_1, \dots, A_q) E_{j1} = E_{1i} n_1(A_1, \dots, A_q) E_{j1} \neq 0.$$

Com base no primeiro caso, temos que $m_2 \equiv m_1 \pmod{J_1}$. Assim, $m_1 \equiv n_1 \pmod{J_1}$. □

O próximo lema usará um argumento que foi aplicado nos artigos (Último teorema, [40]), (Último teorema, [2]), (Último teorema, [3]) e (Teorema 5.3, [38]).

Lema 2.22. *Seja K um domínio de integridade infinito. Sejam G um grupo e $\bar{g} = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$ uma n -upla de elementos distintos de G . Consideremos $M_n(K)$ equipada da graduação elemental induzida por \bar{g} . Se $M_n(K)$ não satisfaz uma identidade monomial do Tipo 1, então:*

$$T_G(M_n(K)) = J.$$

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que exista um polinômio nas variáveis x_1, \dots, x_t $f(x_1, \dots, x_t) = \sum_{i=1}^l \lambda_i m_i \in T_G(M_n(K)) - J$, em que $\lambda_i \in K - \{0\}$ e m_i é um monômio. De acordo com o Lema 2.9, nós podemos supor que f é um polinômio multi-homogêneo. Além disso, podemos admitir que cada m_i não é consequência de (2.4), isto porque, se $g + m \in T_G(M_n(K)) - J$ é um polinômio multi-homogêneo, em que m é uma identidade monomial que é consequência de (2.4), então $g \in T_G(M_n(K)) - J$. O inteiro l pode ser escolhido como o menor inteiro do seguinte conjunto:

$$B = \{q \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^q \gamma_i n_i(x_1, \dots, x_t) \in T_G(M_n(K)) - J; \gamma_i \in K - \{0\} \text{ para todo } i \in \widehat{q}\}.$$

Como $f \in T_G(M_n(K))$, então:

$$f(A_1, \dots, A_t) = 0.$$

Notemos que $m_i(A_1, \dots, A_t) \neq 0$ $i \in \{1, \dots, l\}$, porque $M_n(K)$ não satisfaz uma identidade monomial do Tipo 1. Assim, concluímos que $l \geq 2$.

Como $f(A_1, \dots, A_t) = 0$, temos que:

$$-\lambda_1 m_1(A_1, \dots, A_t) = \sum_{i=2}^l \lambda_i m_i(A_1, \dots, A_t).$$

Assim, existe $k \in \{2, \dots, l\}$, tal que $m_1(A_1, \dots, A_t)$ e $m_k(A_1, \dots, A_t)$ têm, em alguma posição, a mesma entrada não nula. Assim, pelo Lema 2.21, segue que $m_1 \equiv m_k \pmod{J}$. Não é difícil vermos que $h = f + \lambda_k(m_1 - m_k) = (\lambda_1 + \lambda_k)m_1 + \dots + \lambda_{k-1}m_{k-1} + \lambda_{k+1}m_{k+1} + \dots + \lambda_l m_l \in T_G(M_n(K)) - J$.

Ora, mas l é o menor inteiro positivo do conjunto B ; contradição. \square

2.4 Identidades \mathbb{Z} -graduadas de $M_n(K)$

Nesta seção, iremos descrever as identidades \mathbb{Z} -graduadas de $M_n(K)$ equipada com sua \mathbb{Z} -gradação canônica. Como já foi comentado no capítulo anterior, esta é a gradação elementar induzida pela n -upla $(1, 2, \dots, n) \in \mathbb{Z}^n$. O suporte dessa gradação é o conjunto $\{a \in \mathbb{Z} \mid |a| < n\}$.

Na prova dos cinco próximos lemas, usaremos algumas ideias de [41].

Lema 2.23. *Seja $m = x_1 \dots x_l$ um monômio multilinear do Tipo 1, tal que $|\alpha(m)| = n - 1$. Então $m \notin T_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$.*

Demonstração. A prova será dividida em dois casos.

Caso 1: Suponhamos que $\alpha(m) = n - 1$. Notemos que $\alpha(x_1) + \dots + \alpha(x_l) = n - 1$.

Como m é um monômio do Tipo 1, segue que $0 \leq \alpha(x_1) + \dots + \alpha(x_r)$ é menor ou igual a $n - 1$, $r = 1, \dots, l$. Consideremos as seguintes matrizes elementares: $E_{1, \alpha(x_1)+1} \in M_n(K)_{\alpha(x_1)}$, $E_{\alpha(x_1)+1, \alpha(x_1)+\alpha(x_2)+1} \in M_n(K)_{\alpha(x_2)}$, \dots , $E_{1+\alpha(x_1)+\dots+\alpha(x_{l-1}), n} \in M_n(K)_{\alpha(x_l)}$. Portanto, o produto dessas matrizes elementares $E_{1, \alpha(x_1)+1} \dots E_{1+\alpha(x_1)+\dots+\alpha(x_{l-1}), n} = E_{1n}$.

Caso 2: Suponhamos que $\alpha(m) = -n + 1$. Notemos que $\alpha(x_1) + \dots + \alpha(x_l) = -n + 1$. Como m é um monômio do Tipo 1, segue que $-n + 1$ é menor ou igual $\alpha(x_1) + \dots + \alpha(x_r) \leq 0$, $r = 1, \dots, l$. Consideremos as seguintes matrizes elementares: $E_{n, \alpha(x_1)+n} \in M_n(K)_{\alpha(x_1)}$, $E_{\alpha(x_1)+n, \alpha(x_1)+\alpha(x_2)+n} \in M_n(K)_{\alpha(x_2)}$, \dots , $E_{n+\alpha(x_1)+\dots+\alpha(x_{l-1}), 1} \in M_n(K)_{\alpha(x_l)}$. Portanto,

$$E_{n, \alpha(x_1)+n} \dots E_{n+\alpha(x_1)+\dots+\alpha(x_{l-1}), 1} = E_{n1}.$$

\square

Lema 2.24. *Seja $m = x_1 \dots x_i x_{i+1} \dots x_l$ um monômio multilinear do Tipo 1 que contém uma subpalavra própria de \mathbb{Z} -grau $-n + 1$ ou $n - 1$. Então m não pertence a $T_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$.*

Demonstração. Com efeito, suporemos, sem perda de generalidade, que $\alpha(x_1 \dots x_i) = n - 1$. De acordo com o Lema 2.23, existem matrizes elementares $E_{l_1 k_1} \in M_n(K)_{\alpha(x_1)}, \dots, E_{l_i k_i} \in M_n(K)_{\alpha(x_i)}$, tais que:

$$E_{l_1 k_1} \dots E_{l_i k_i} = E_{1n}.$$

Visto que m é um monômio do Tipo 1, temos que $-n + 1 \leq \alpha(x_{i+r} \dots x_{i+r}) \leq 0$ para $r = 1, \dots, l - i$. Além disto:

$$\begin{aligned} E_{1k_1} \dots E_{l_i n} E_{n, \alpha(x_{i+1})+n} \cdot E_{n+\alpha(x_{i+1}), n+\alpha(x_{i+1})+\alpha(x_{i+2})} \cdot \dots \cdot \\ E_{n+\alpha(x_{i+1})+\dots+\alpha(x_{l-1}), n+\alpha(x_{i+1})+\dots+\alpha(x_{l-1})+\alpha(x_l)} \neq 0. \end{aligned}$$

□

Lema 2.25. *Seja $E_{kl} \in M_n(K)$ uma matriz elementar de \mathbb{Z} -grau j . Então $E_{kl} \in M_{n+1}(K)$ também tem \mathbb{Z} -grau j .*

Lema 2.26. *Se $m = x_1 \dots x_l$ é um monômio multilinear do Tipo 1, então $m \notin T_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$.*

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que m não tem variáveis de \mathbb{Z} -grau 0.

Se $|\alpha(m)| = n - 1$ ou m tem uma subpalavra própria de \mathbb{Z} -grau $n - 1$ ou $-n + 1$, a prova segue dos Lemas 2.23 e 2.24. Suponhamos, por indução, que o resultado seja válido para $M_l(K)$ com $l = n - 1$ e m não possua uma subpalavra \hat{m} , tal que $|\alpha(\hat{m})| = n - 1$.

Pela hipótese de indução, existem matrizes elementares $E_{i_1 j_1} \in M_{n-1}(K)_{\alpha(x_1)}, \dots, E_{i_l j_l} \in M_{n-1}(K)_{\alpha(x_l)}$ ($1 \leq i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_l \leq n - 1$), tais que:

$$E_{i_1 j_1} \dots E_{i_l j_l} = E_{i_1 j_1}.$$

Aplicando o Lema 2.25, segue o resultado. □

Teorema 2.27. *Seja K um domínio de integridade infinito. As identidades \mathbb{Z} -graduadas de $M_n(K)$ ($M_n(K)$ equipada com sua \mathbb{Z} -gradação canônica) seguem de:*

- $x_1 x_2 - x_2 x_1$ quando $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0$;
- $x_1 x_2 x_3 - x_3 x_2 x_1$ quando $\alpha(x_1) = \alpha(x_3) = -\alpha(x_2) \neq 0$;
- x_1 quando $|\alpha(x_1)| \geq n$.

Demonstração. A princípio, lembremos que:

$$\text{Supp}_{\mathbb{Z}}(M_n(K)) = \{-n + 1, \dots, 0, \dots, n - 1\}.$$

De acordo com o Lema 2.22, é suficiente provarmos que $M_n(K)$ não satisfaz uma identidade monomial do Tipo 1. Suponhamos, por absurdo, que exista uma identidade monomial do Tipo 1 $m = x_{i_1} \dots x_{i_l} \in T_G(M_n(K))$. Seja m_1 um monômio multilinear tal que $h(m_1) = h(m)$. Pelo Corolário 2.7, temos que $m \in T_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$ se, e só se, $m_1 \in T_G(M_n(K))$.

Por outro lado, com base no Lema 2.26, $M_n(K)$ não satisfaz uma identidade (monomial) multilinear do Tipo 1 o que é um absurdo. □

2.5 Identidades \mathbb{Z}_n -graduadas de $M_n(K)$

Nesta seção, descreveremos as identidades \mathbb{Z}_n -graduadas de $M_n(K)$ quando esta álgebra está munida de sua \mathbb{Z}_n -gradação canônica. Lembremos que essa é a gradação elementar induzida pela n -upla $(\bar{1}, \dots, \bar{n}) \in (\mathbb{Z}_n)^n$ e que $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ denota a projeção canônica de \mathbb{Z} em \mathbb{Z}_n . Observemos que o suporte dessa gradação é o conjunto \mathbb{Z}_n .

Lema 2.28. *Se $m = x_1 \dots x_l$ é um monômio multilinear, então $m \notin T_{\mathbb{Z}_n}(M_n(K))$.*

Demonstração. Seja $m = x_1 \dots x_l$ um monômio multilinear. Se $l = 1$, a prova é óbvia, porque existe uma matriz elementar $E_{i_1 j_1} \in (M_n(K))_{\alpha(x_1)}$.

Suponhamos, por indução, que o resultado seja válido para $k = l - 1$. Logo, existem matrizes elementares $E_{i_2 j_2} \in (M_n(K))_{\alpha(x_2)}, \dots, E_{i_l j_l} \in (M_n(K))_{\alpha(x_l)}$ e:

$$E_{i_2 j_2} \dots E_{i_l j_l} = E_{i_2 j_l}.$$

Para finalizar, notemos que $E_{\pi^{-1}(\bar{i}_2 - \alpha(x_1)) \cap \hat{n}, i_2} \in M_n(K)_{\alpha(x_1)}$ e:

$$E_{\pi^{-1}(\bar{i}_2 - \alpha(x_1)) \cap \hat{n}, i_2} E_{i_2 j_2} \dots E_{i_l j_l} = E_{\pi^{-1}(\bar{i}_2 - \alpha(x_1)) \cap \hat{n}, j_l}.$$

□

Teorema 2.29. *Seja K um domínio de integridade infinito. As identidades \mathbb{Z}_n -graduadas de $M_n(K)$ ($M_n(K)$ equipada com sua \mathbb{Z}_n -gradação canônica) seguem de:*

- $x_1 x_2 - x_2 x_1$ quando $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0$;
- $x_1 x_2 x_3 - x_3 x_2 x_1$ quando $\alpha(x_1) = \alpha(x_3) = -\alpha(x_2) \neq 0$.

Demonstração. Sabemos que $M_n(K)$ não possui uma identidade monomial multilinear (Lema 2.28). Pelo Corolário 2.7, temos que m não possui uma identidade monomial.

É claro que $J_1 \subset T_{\mathbb{Z}_n}(M_n(K))$. Suponhamos, por contradição, que $J_1 \subsetneq T_{\mathbb{Z}_n}(M_n(K))$. Desta forma, existe um polinômio multi-homogêneo $f(x_1, \dots, x_t) = \sum_{i=1}^l \lambda_i m_i \in T_{\mathbb{Z}_n}(M_n(K)) - J_1$ (em que $l \geq 2$). Podemos supor que l é o menor elemento do conjunto definido abaixo:

$$B = \{q \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^q \gamma_i n_i(x_1, \dots, x_t) \in T_{\mathbb{Z}_n}(M_n(K)) - J_1; \gamma_i \in K - \{0\} \text{ para todo } i \in \hat{q}\}.$$

Já que $f \in T_{\mathbb{Z}_n}(M_n(K))$, temos que $f(A_1, \dots, A_t) = 0$, e assim, existe um monômio m_i ($i > 1$), tal que $m_i(A_1, \dots, A_t)$ e $m_1(A_1, \dots, A_t)$ têm numa mesma posição, a mesma entrada não nula. Logo, pelo Lema 2.21, $m_i \equiv m_1 \pmod{J_1}$.

Notemos que $g = f - \lambda_i(m_i - m_1) \in T_{\mathbb{Z}_n}(M_n(K)) - J_1$. Mas g tem menos de l somandos, o que é uma contradição. □

2.6 Caracterização das identidades monomiais do Tipo 1 de $M_n(K)$

Nesta seção, $M_n(K)$ estará munida de uma graduação elementar em que a componente neutra coincide com a subálgebra das matrizes diagonais.

Denotaremos por $s = |\text{Supp}_G(M_n(K))|$ e $\lambda = [s+1][(s+1)(\sum_{i=1}^s (s-1)^i) + 1]$.

Definição 2.30. Denotamos por \mathcal{S} o conjunto das sequências de elementos de $\text{Supp}_G(M_n(K))$ cujo comprimento é menor ou igual a s . Denotamos por $\mathcal{A} = \{(g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{S} | g_1 \dots g_n = e\}$.

Notemos que $|\mathcal{S}| = \sum_{i=1}^s s^i$.

Definição 2.31. Dizemos que um monômio $m = x_{i_1} \dots x_{i_l}$ é do Tipo 2 quando existem $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, $p_1, p_2 \in \widehat{l}$, tais que $1 \leq p_1 < p_1 + k < p_2 < p_2 + k \leq l$ e:

- $\alpha(x_{i_{p_1}} \dots x_{i_{p_1+k}}) = \alpha(x_{i_{p_1+k+1}} \dots x_{i_{p_2-1}}) = \alpha(x_{i_{p_2}} \dots x_{i_{p_2+k}}) = e$;
- $h(x_{i_{p_1}} \dots x_{i_{p_1+k}}) = h(x_{i_{p_2}} \dots x_{i_{p_2+k}})$.

Definição 2.32. Um monômio $m = x_{i_1} \dots x_{i_l}$ é chamado do Tipo-3 quando este não tem uma subpalavra própria (não vazia) de G -grau e . Caso contrário, dizemos que m é um monômio de Tipo-4.

Corolário 2.33. Seja $m = x_{i_1} \dots x_{i_l}$ um monômio do Tipo 1 sem variáveis de G -grau e . Se $l > s$, então m é um monômio do Tipo 4.

Demonstração. Seja $\beta(t) := \alpha(m^{[1,t]})$ uma função definida em \widehat{l} . Por hipótese, $l > s$. Consequentemente, pelo Princípio da Casa dos Pombos, existem $1 \leq t_1 < t_2 \leq l$, tais que $\beta(t_1) = \beta(t_2)$. Notemos que $t_1 + 1 < t_2$, porque m não tem variáveis de G -grau e . Assim $m^{[t_1+1, t_2]}$ satisfaz a tese do corolário. \square

Lema 2.34. Seja S um multiconjunto formado por elementos de $(\sum_{i=1}^s (s-1)^i)$. Se $|S| \geq (s+1)(\sum_{i=1}^s (s-1)^i) + 1$, então existe $i \in (\sum_{i=1}^s (s-1)^i)$ que ocorre, pelo menos, $s+2$ vezes em S .

Demonstração. Este lema é uma consequência imediata do Princípio da Casa dos Pombos. \square

Lema 2.35. Seja m um monômio multilinear do Tipo 1 sem variáveis de G -grau e . Se o grau de m é maior ou igual a $[s+1][(s+1)(\sum_{i=1}^s (s-1)^i) + 1]$, então este monômio é do Tipo 2.

Demonstração. Seja m um monômio multilinear do Tipo 1 sem variáveis de G -grau e e cujo grau ordinário é maior ou igual a $(s+1)^2(\sum_{i=1}^s s^i) + (s+1)$. Denotemos por a o número $(s+1)(\sum_{i=1}^s s^i) + 1$.

Sejam:

$$m_1 = m^{[1, s+1]}, m_2 = m^{[s+2, 2(s+1)]}, \dots, m_a = m^{[(a-1)(s+1)+1, a(s+1)]}.$$

De acordo com o Corolário 2.33, para cada m_i , existe pelo menos uma subpalavra (não vazia) de G -grau e e com grau menor ou igual a s .

Seja $\gamma : \{m_1, \dots, m_a\} \rightarrow \mathcal{A}$ uma relação com a seguinte regra:

$(g_1, \dots, g_n) \in \gamma(m_i)$ se, e só se, existe uma subpalavra de m_i de grau n , $m_{i,1}$, tal que $h(m_{i,1}) = (g_1, \dots, g_n)$.

Pelo Lema 2.34, existem subpalavras (não vazias) $m_{i_1,1}, \dots, m_{i_{s+2},1}$ pertencentes a $\{\gamma(m_{i_1}), \dots, \gamma(m_{i_a})\}$ de $m_{i_1}, \dots, m_{i_{s+2}}$ respectivamente, tais que:

$$i_1 < \dots < i_{s+2} \text{ e } h(m_{i_1,1}) = \dots = h(m_{i_{s+2},1}).$$

Por uma aplicação conveniente do princípio da casa dos pombos, existem $j, k \in \{1, \dots, s+2\}$ com $j < k$, tais que a subpalavra de m ($m_{i_j, i_k, 1}$), entre $m_{i_j, 1}$ e $m_{i_k, 1}$, tem G -grau e . Isto demonstra que $m_{i_j, 1} m_{i_j, i_k, 1} m_{i_k, 1}$ é um monômio do Tipo 2. Logo, m também é um monômio do Tipo 2. \square

Definição 2.36. *Sejam G um grupo e $\bar{g} = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$ uma n -upla de elementos distintos de G . Consideremos $M_n(K)$ equipada com a graduação elementar induzida por \bar{g} . Denotamos por U o T_G -ideal gerado pelas seguintes identidades de $M_n(K)$:*

$$\begin{aligned} & \bullet x_1 x_2 - x_2 x_1 & \text{quando} & \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = e; \\ & \bullet x_1 x_2 x_3 - x_3 x_2 x_1 & \text{quando} & \alpha(x_1) = \alpha(x_3) = (\alpha(x_2))^{-1} \neq e; \\ & \bullet x_1 & \text{quando} & M_n(K)_{\alpha(x_1)} = \{0\}; \end{aligned}$$

- Identidades monomiais multilineares do Tipo 1 cujo grau é menor ou igual a λ (4).

O próximo lema usará alguns argumentos de (Proposição 4.2, [4]).

Lema 2.37. *Seja $m = x_1 \dots x_q$ um monômio multilinear de $K\langle X \rangle$, em que $q \geq \lambda + 1$. Se m é uma identidade monomial do Tipo 1 de $M_n(K)$, então m é consequência das identidades multilineares do Tipo 1 cujo grau é menor ou igual a λ .*

Demonstração. Seja $m = x_1 \dots x_q$ uma identidade multilinear do Tipo 1 de $M_n(K)$, tal que $q \geq \lambda + 1$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\alpha(x_i) \neq e$ para todo $i \in \hat{q}$ (pelo Lema 2.17). Suponhamos que $q = \lambda + 1$. De acordo com o Lema 2.35, existem $p_1, p_2, a \in \mathbb{N}$, tais que:

$$\begin{aligned} 1 &\leq p_1 < p_1 + a < p_2 < p_2 + a \leq q; \\ \alpha(x_{p_1} \dots x_{p_1+a}) &= \alpha(x_{p_1+a+1} \dots x_{p_2-1}) = \alpha(x_{p_2} \dots x_{p_2+a}) = e; \\ h(x_{p_1} \dots x_{p_1+a}) &= h(x_{p_2} \dots x_{p_2+a}). \end{aligned}$$

Se $x_{p_1} \dots x_{p_2+a}$ é uma identidade monomial graduada de $M_n(K)$, então m pertence a $\langle x_{p_1} \dots x_{p_2+a} \rangle_{T_G}$. Sendo assim, podemos supor que $x_{p_1} \dots x_{p_2+a}$ não pertence a $T_G(M_n(K))$.

Consideremos o monômio $\hat{m} = m^{[1, p_1-1]} m^{[p_1+a+1, q]}$. Se \hat{m} é uma identidade monomial de $M_n(K)$, então m é consequência de \hat{m} que é um monômio do Tipo 1.

Suponhamos, por contradição, que \hat{m} não é uma identidade polinomial graduada de $M_n(K)$. Assumamos, sem perda de generalidade, que $p_1 + a + 1$ é menor que p_2 e $q \geq p_2 + a + 1$. Dessa forma, existirão matrizes elementares $E_{l_1 k_1} \in M_n(K)_{\alpha(x_1)}, \dots, E_{l_{p_1-1} k_{p_1-1}} \in M_n(K)_{\alpha(x_{p_1-1})}, E_{l_{p_1+a+1} k_{p_1+a+1}} \in M_n(K)_{\alpha(x_{p_1+a+1})}, \dots, E_{l_{p_2+a} k_{p_2+a}} \in M_n(K)_{\alpha(x_{p_2})}, \dots, E_{l_q k_q} \in M_n(K)_{\alpha(x_q)}$, tais que:

$$E_{l_1 k_1} \cdots E_{l_{p_1-1} k_{p_1-1}} E_{l_{p_1+a+1} k_{p_1+a+1}} \cdots E_{l_q k_q} \neq 0.$$

Notemos que $k_{p_1-1} = l_{p_1+a+1} = k_{p_2-1} = l_{p_2} = k_{p_2+a}$.

Consideremos a seguinte substituição em m :

$$x_i = E_{l_i k_i} \quad \forall i \in \widehat{q} - \{p_1, \dots, p_1 + a\};$$

$$x_{l_{p_1+j} k_{p_1+j}} = E_{l_{p_2+j} k_{p_2+j}} \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, a\}.$$

É claro que $(E_{l_{p_2} k_{p_2}} \cdots E_{l_{p_2+a} k_{p_2+a}})^2 = (E_{l_{p_2} k_{p_2}} \cdots E_{l_{p_2+a} k_{p_2+a}}) = E_{l_{p_2} l_{p_2}}$.
Sendo assim, temos que

$$(E_{l_1 k_{p_1-1}}) \cdot (E_{l_{p_2} l_{p_2}}) \cdot (E_{l_{p_1+a+1} k_{p_1+a+1}} \cdots E_{l_{p_2-1} k_{p_2-1}}) \cdot (E_{l_{p_2} l_{p_2}}) \cdot (E_{l_{p_2+a+1} k_q}) = E_{l_1 k_1} \cdots E_{l_{p_1-1} k_{p_1-1}} E_{l_{p_1+a+1} k_{p_1+a+1}} \cdots E_{l_q k_q}.$$

Contudo, pela última igualdade recaímos em uma contradição, porque que $m \in T_G(M_n(K))$.

Por indução em q , concluímos o resultado. \square

Lema 2.38. *Sejam G um grupo e $\bar{g} = (g_1, \dots, g_n)$ uma n -upla de elementos distintos de G . Consideremos $M_n(K)$ munida da graduação elemental induzida por \bar{g} . Se m é uma identidade monomial do Tipo 1 para $M_n(K)$, então m é consequência de (4).*

Demonstração. Este fato é consequência imediata do Corolário 2.7 e do Lema 2.37. \square

Teorema 2.39. *Sejam K um domínio de integridade infinito, G um grupo e $\bar{g} = (g_1, \dots, g_n)$ uma n -upla de elementos distintos de G . Consideremos $M_n(K)$ equipada com a graduação elemental induzida por \bar{g} . As identidades graduadas de $M_n(K)$ seguem de:*

- $x_1 x_2 - x_2 x_1$ quando $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = e$;
- $x_1 x_2 x_3 - x_3 x_2 x_1$ quando $\alpha(x_1) = \alpha(x_3) = (\alpha(x_2))^{-1} \neq e$;
- x_1 quando $M_n(K)_{\alpha(x_1)} = \{0\}$.

• *Identidades monomiais multilineares do Tipo 1 cujo grau é menor ou igual a λ .*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que $T_G(M_n(K)) \not\supseteq U$, em que U foi apresentado na Definição 2.36. Desta forma, existe um polinômio multihomogêneo $f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^l \lambda_i m_i \in T_G(M_n(K)) - U$. Pelo Lema 2.38, temos que todas as identidades monomiais de $M_n(K)$ estão contidas em U . Desta forma, podemos assumir que cada m_i não é uma identidade monomial. Podemos supor que $l \geq 2$ é o menor inteiro do análogo do conjunto B que foi definido na demonstração do Lema 2.22.

Mimetizando os argumentos da parte final da prova do Lema 2.22, segue o resultado. \square

2.7 Identidades ME_n -graduadas de $M_n(K)$

Lembremos que um semigrupo (SG, \cdot) é um conjunto não vazio munido de uma operação “ \cdot ” associativa.

A álgebra $M_n(K)$ é graduada naturalmente por ME_n , o semigrupo das matrizes elementares de classe n .

Definição 2.40. *O semigrupo das matrizes elementares de classe n , $ME_n = \{(i, j) \in \hat{n} \times \hat{n}\} \cup \{0\}$, é definido pela seguinte tábua de multiplicação:*

- $0 \cdot (i, j) = (i, j) \cdot 0 = 0$;
- $(i, j) \cdot (k, l) = (i, l)$ quando $j = k$;
- $(i, j) \cdot (k, l) = 0$ quando $j \neq k$.

Definição 2.41. *Denotaremos por $K\langle X \rangle^+$ a álgebra associativa livre ME_n -graduada não unitária gerada livremente por X . Denotaremos as variáveis de ME_n -grau 0 e (i, j) dadas por $x_0, x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}$, respectivamente.*

O próximo lema é uma consequência imediata da tabela de multiplicação de matrizes elementares:

Lema 2.42. *Os seguintes polinômios são identidades ME_n -graduadas de $M_n(K)$:*

$$x_{jj}y_{jj} - y_{jj}x_{jj} \quad \text{em que} \quad j \in \hat{n}; \quad (2.5)$$

$$x_{ij}y_{ji}z_{ij} - z_{ij}y_{ji}x_{ij} \quad \text{em que} \quad 1 \leq i, j \leq n \quad i \neq j; \quad (2.6)$$

$$x_0. \quad (2.7)$$

O próximo teorema foi uma contribuição de Bahturin e Drensky.

Teorema 2.43. *(Bahturin e Drensky. Teorema 4.9, de [4]) Seja K um corpo de característica zero. Então as identidades ME_n -graduadas de $M_n(K)$ seguem de:*

$$x_{jj}y_{jj} - y_{jj}x_{jj} \quad \text{em que} \quad j \in \hat{n};$$

$$x_{ij}y_{ji}z_{ij} - z_{ij}y_{ji}x_{ij} \quad \text{em que} \quad 1 \leq i, j \leq n; \quad i \neq j$$

$$x_0.$$

Nesta seção, nós estenderemos este resultado para domínios de integridade infinitos. Denotaremos por J_{ME_n} o T_{ME_n} -ideal gerado por (2.5), (2.6) e (2.7).

Sejam $h \in ME_n - \{0\}$ e $W_h = \{w_h^{(1)}, \dots, w_h^{(n)}, \dots\}$ um conjunto infinito de variáveis comutativas. Sejam $W = \bigcup_{h \in ME_n - \{0\}} W_h$ e $\Omega = K[W]$ o anel de polinômios nas indeterminadas de W . A álgebra $M_n(\Omega)$, assim como $M_n(K)$, pode ser graduada por ME_n de forma natural.

Definição 2.44. *Uma matriz genérica de $M_n(\Omega)$ de ME_n -grau (i, j) é um elemento homogêneo do seguinte tipo:*

$$A_{(i,j)}^{(k)} := w_{(i,j)}^{(k)} E_{ij}, \quad \text{em que} \quad 1 \leq i, j \leq n \quad \text{e} \quad k \in \{1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

A subálgebra ME_n -graduada gerada pelas matrizes genéricas de $M_n(\Omega)$ é chamada de álgebra das matrizes genéricas e a denotamos por R .

A seguir, listaremos alguns resultados que são, respectivamente, versões similares dos Lemas 2.6, 2.9, 2.20 e 2.21.

- Seja K um domínio de integridade infinito. Então $T_{ME_n}(M_n(K)) = T_{ME_n}(R)$.
- $T_{ME_n}(M_n(K))$ é um T_{ME_n} -ideal multi-homogêneo.
- Sejam $M(x_1, \dots, x_q)$ e $N(x_1, \dots, x_q)$ dois monômios de $K\langle X \rangle^+$ que comecem com a mesma variável e sejam $m(x_1, \dots, x_q)$, $n(x_1, \dots, x_q)$ dois monômios obtidos de M e N (respectivamente) pelo descarte da primeira variável. Se existem matrizes genéricas $A_{(i_1 j_1)}^{(1)}, \dots, A_{(i_q j_q)}^{(q)}$, tais que $M(A_{(i_1 j_1)}^{(1)}, \dots, A_{(i_q j_q)}^{(q)})$ e $N(A_{(i_1 j_1)}^{(1)}, \dots, A_{(i_q j_q)}^{(q)})$ têm, em uma mesma posição, a mesma entrada não nula, então as matrizes $m(A_{(i_1 j_1)}^{(1)}, \dots, A_{(i_q j_q)}^{(q)})$ e $n(A_{(i_1 j_1)}^{(1)}, \dots, A_{(i_q j_q)}^{(q)})$ também têm, na mesma posição, a mesma entrada não nula.
- Sejam M_1, M_2 monômios de $K\langle X \rangle^+$. Se $M_1(A_{(i_1 j_1)}^{(k_1)}, \dots, A_{(i_q j_q)}^{(k_q)})$ e $M_2(A_{(i_1 j_1)}^{(k_1)}, \dots, A_{(i_q j_q)}^{(k_q)})$ têm, em alguma posição, uma mesma entrada não nula, então $M_1 \equiv M_2 \pmod{J_{ME_n}}$.

A prova do próximo lema é imediata.

Lema 2.45. *Seja $m \in K\langle X \rangle^+$ uma identidade monomial ME_n -graduada de $M_n(K)$. Então m é consequência da identidade x_0 .*

Teorema 2.46. *Seja K um domínio de integridade infinito. Então as identidades ME_n -graduadas de $M_n(K)$ seguem de:*

- $x_{jj}y_{jj} - y_{jj}x_{jj}$ em que $j \in \hat{n}$;
- $x_{ij}y_{ji}z_{ij} - z_{ij}y_{ji}x_{ij}$ em que $1 \leq i, j \leq n$ $i \neq j$;
- x_0 .

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que $J_{ME_n} \subsetneq T_{ME_n}(M_n(K))$. Assim, existe um polinômio multi-homogêneo $f(x_1, \dots, x_t) =$

$\sum_{i=1}^l \lambda_i m_i \in T_{ME_n}(M_n(K)) - J_{ME_n}$. Podemos supor que cada m_i não é consequência de (2.8) e, além disso, escolher l o menor possível. Haja vista que $f \in T_{ME_n}(M_n(K))$, temos que $f(A_1, \dots, A_t) = 0$. Portanto $-\lambda_1 m_1(A_1, \dots, A_t) = \sum_{i=2}^l \lambda_i m_i(A_1, \dots, A_t)$.

Daí, concluímos que existe um monômio m_j , com $j \in \{2, \dots, l\}$, tal que $m_1(A_1, \dots, A_t)$ e $m_j(A_1, \dots, A_t)$ têm, em uma mesma posição, a mesma entrada não nula.

Mimetizando os argumentos da parte final da prova do Lema 2.22, segue o resultado. \square

2.8 Polinômios Centrais \mathbb{Z}_p -graduados de $M_p(K)$

Nesta seção, p denotará um número primo. O nosso objetivo será descrever os polinômios centrais \mathbb{Z}_p -graduados de $M_p(K)$ equipada com sua \mathbb{Z}_p -gradação canônica. Nesta seção, usaremos algumas ideias dos artigos [8] e [18].

Relembremos que H_n é o subgrupo gerado pelo ciclo $(1 \dots n) \in S_n$.

Definição 2.47. Uma seqüência $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ de elementos de \mathbb{Z}_n é chamada uma seqüência completa quando as seguintes condições são satisfeitas:

$$\gamma_1 + \dots + \gamma_n = 0;$$

$$\{\gamma_1, \gamma_1 + \gamma_2, \dots, \gamma_1 + \dots + \gamma_n\} = \mathbb{Z}_n.$$

Lema 2.48. Uma seqüência $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \subset (\mathbb{Z}_n)^n$ é uma seqüência completa de \mathbb{Z}_n se, e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

$$1. \gamma_1 + \dots + \gamma_n = 0;$$

2. Existem matrizes elementares $E_{i_1 j_1} \in M_n(K)_{\gamma_1}, \dots, E_{i_n j_n} \in M_n(K)_{\gamma_n}$, tais que

$$i_{l+1} = j_l \text{ para todo } l \in \widehat{n-1} \text{ e } \widehat{n} = \{i_1, \dots, i_n\}.$$

Demonstração. Basta provarmos que a condição 2) é equivalente a $\{\gamma_1, \gamma_1 + \gamma_2, \dots, \gamma_1 + \dots + \gamma_n\} = \mathbb{Z}_n$.

Inicialmente, notemos que $i_1 = j_n$. Consequentemente:

$$\{\overline{-i_1 + j_1}, \overline{-i_1 + j_2}, \dots, \overline{-i_1 + j_n}\} = \mathbb{Z}_n.$$

Por outro lado, seja (h_1, \dots, h_n) uma seqüência completa de \mathbb{Z}_n . Notemos que $h_i \neq e$ para todo $i \in \widehat{n}$. Além disso, se $1 \leq i < j \leq n$, então $h_i + \dots + h_j \neq e$. Sejam $E_{i_1 j_1} \in h_1, \dots, E_{i_n j_n} \in h_n$ matrizes elementares de $M_n(K)$. Então $E_{i_1 j_1} \dots E_{i_n j_n} \in M_n(K)_e - \{0\}$ se, e só se, $i_1 = j_n, j_l = i_{l+1} \forall l \in \widehat{n-1}$ e $\widehat{n} = \{i_1, \dots, i_n\}$. \square

Lema 2.49. (Brandão Júnior. Proposição 1, de [8]) O polinômio \mathbb{Z}_n -graduado

$$\sum_{\sigma \in H_n} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)},$$

em que $(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n))$ é uma seqüência completa, é um polinômio central não trivial de $M_n(K)$.

Demonstração. Como f é um polinômio multilinear, basta calculá-lo em matrizes elementares. De acordo com a hipótese, $(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n))$ é uma seqüência completa de \mathbb{Z}_n . Assim, pelo Lema 2.48, existem $E_{i_1 j_1} \in M_n(K)_{\alpha(x_1)}, \dots, E_{i_n j_n} \in M_n(K)_{\alpha(x_n)}$, tais que:

$$f(E_{i_1 j_1}, \dots, E_{i_n j_n}) = \sum_{i=1}^n E_{ii}.$$

Por outro lado, se $E_{i_1 j_1} \dots E_{i_n j_n} = 0$, em que $E_{i_1 j_1} \in M_n(K)_{\alpha(x_1)}, \dots, E_{i_n j_n} \in M_n(K)_{\alpha(x_n)}$, então $E_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} \dots E_{i_{\sigma(n)} j_{\sigma(n)}} = 0$ para todo $\sigma \in H_n$.

Sendo assim, $f(E_{i_1 j_1}, \dots, E_{i_n j_n}) = \sum_{i=1}^n E_{ii}$ ou $f(E_{i_1 j_1}, \dots, E_{i_n j_n}) = 0$. \square

O resultado abaixo foi provado por Brandão Júnior (veja Lema 7, de [8]) Contudo, a prova a seguir é original.

Lema 2.50. Seja $m = x_1 \dots x_q \in K\langle X \rangle$, tal que $\alpha(m) = 0$ e $\alpha(x_i) = h_i$ para todo i pertencente a \widehat{q} . Seja $y_{h_1,1}^{s_1^k} \dots y_{h_q,q}^{s_q^k}$ uma entrada não nula de $m(A_1, \dots, A_q)$. Se existe uma subsequência $(s_{i_1}^k, \dots, s_{i_n}^k) \subset (s_1^k, \dots, s_q^k)$, em que $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq q$ e $\{s_{i_1}^k, \dots, s_{i_n}^k\} = \widehat{n}$, então existem monômios $m_1, \dots, m_n \in K\langle X \rangle$, tais que $(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_n))$ é uma seqüência completa de \mathbb{Z}_n e $m = m_1 m_2 \dots m_n$.

Demonstração. De fato, existem matrizes elementares $E_{j_1 l_1} \in M_n(K)_{\alpha(x_1)}, \dots, E_{j_q l_q} \in M_n(K)_{\alpha(x_q)}$, tais que:

$$E_{j_1 l_1} \dots E_{j_q l_q} = E_{j_1 l_q},$$

em que $j_t = s_{i_t}^k$ para todo $t \in \widehat{q}$. Notemos que $j_1 = l_q$, porque $m \in K\langle X \rangle_0$. É claro que $q \geq n$, pois $\widehat{n} = \{s_{i_1}^k, \dots, s_{i_n}^k\}$.

Nós podemos supor, sem perda de generalidade, que $j_t = s_{i_t}^k$ para todo $t \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Consideremos:

$$m_i = x_i, \quad i = 1, \dots, n-1;$$

$$m_n = x_n \dots x_q.$$

Notemos que:

$$E_{j_1 l_1} E_{j_2 l_2} \dots E_{j_n l_q} = E_{j_1 l_q}.$$

Logo, $\{j_1, \dots, j_n\} = \widehat{n}$, $l_t = j_{t+1}$ para todo $t \in \widehat{n-1}$ e $j_1 = l_q$.

Consequentemente, pelo Lema 2.48, segue que m_1, \dots, m_n satisfazem a tese desse lema. \square

Observação 2.51. No enunciado do Lema 2.50, m é um monômio multilinear. Se m fosse um monômio arbitrário, bastaria tomar um monômio multilinear \overline{m} , tal que $h(m) = h(\overline{m})$ e aplicarmos o Lema 2.50 a esse monômio multilinear.

Pelo Lema 2.50, existem monômios $\overline{m}_1, \dots, \overline{m}_n$, tais que $\overline{m} = \overline{m}_1 \dots \overline{m}_n$ e $(\alpha(\overline{m}_1), \dots, \alpha(\overline{m}_n))$ é uma seqüência completa de \mathbb{Z}_n . Desse fato, concluímos que existem monômios m_1, \dots, m_n , tais que $m = m_1 \dots m_n$ e $(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_n))$ é uma seqüência completa de \mathbb{Z}_n .

Definição 2.52. Sejam $G = \mathbb{Z}_n, j \in \mathbb{Z}_n, \overline{g} = (1, 2, \dots, n)$ e $y_{h,i}^k \in Y_h$. Daqui para frente, convencionaremos que:

$$y_{h,i}^j := y_{h,i}^k \text{ quando } k = \pi^{-1}(j) \cap \widehat{n}.$$

Lema 2.53. Sejam $p > 2$ um primo e $x_1 \in K\langle X \rangle$, tais que $\alpha(x_1) \neq 0$. Então $x_1^p \in C_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K))$.

Demonstração. De acordo com o Lema 2.4:

$$(A_1^{\alpha(x_1)})^p = \sum_{i=1}^p y_{\alpha(x_1),1}^i y_{\alpha(x_1),1}^{i+\alpha(x_1)} \dots y_{\alpha(x_1),1}^{i+(p-1)\alpha(x_1)} E_{ii}.$$

Assim:

$$\begin{aligned} y_{\alpha(x_1),1}^i y_{\alpha(x_1),1}^{i+\alpha(x_1)} \dots y_{\alpha(x_1),1}^{i+(p-1)\alpha(x_1)} = \\ y_{\alpha(x_1),1}^j y_{\alpha(x_1),1}^{j+\alpha(x_1)} \dots y_{\alpha(x_1),1}^{j+(p-1)\alpha(x_1)} \end{aligned}$$

para todo $i, j \in \widehat{p}$, porque o grupo gerado por $\alpha(x_1)$ é \mathbb{Z}_p . Portanto x_1^p é um polinômio central não trivial de $M_p(K)$. \square

Definição 2.54. Sejam $p > 2$ um número primo e $l \in \widehat{p-1}$. Denotamos por V_1 o conjunto formado pelos seguintes monômios:

$$x_1^p \dots x_l^p, \text{ em que } \{\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_l)\} \subset \mathbb{Z}_p - \{0\}.$$

Seja $p = 2$. Denotamos por V_1 o conjunto formado pelos monômios x_1^2 e $x_1^2 x_2^2$, em que $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 1$.

O resultado abaixo foi provado por Brandão Júnior (veja Lema 8, de [8]). Entretanto, a próxima prova é original.

Lema 2.55. *Sejam $p > 2$ um número primo e $l \in \widehat{p-1}$. Se $m = x_1^p \dots x_l^p \in V_1$, então $m \in C_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K))$.*

Demonstração. Inicialmente, notemos que $C_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K))$ é uma subálgebra de $K\langle X \rangle$. Sendo assim, pelo Lema 2.53, temos que os monômios citados na hipótese são monômios centrais \mathbb{Z}_p -graduados de $M_p(K)$. \square

No Exemplo 1.26, vimos que monômios x_1^2 e $x_1^2 x_2^2$, em que $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 1$, são monômios centrais (não triviais) \mathbb{Z}_2 -graduados de $M_2(K)$.

Definição 2.56. *Sejam $B_1 = \{a_1, \dots, a_i\} \subset \mathbb{Z}_n$ e $j \in \mathbb{Z}_n$. Definimos:*

$$B_1 + j := \{a_1 + j, \dots, a_i + j\}.$$

Lema 2.57. *Sejam p um número primo e $A = \{a_1, \dots, a_l\} \subsetneq \mathbb{Z}_p$. Então:*

$$A + i \neq A + j$$

para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}_p$ distintos.

Demonstração. Suponhamos que existam $i, j \in \mathbb{Z}_p$ distintos, tais que:

$$A = A + (j - i).$$

Desta maneira, existe uma permutação $\sigma \in S_l$, tal que:

$$(a_1 + (j - i), \dots, a_l + (j - i)) = (a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(l)}).$$

Concluimos assim que $a_{\sigma(t)} - a_t = j - i \quad \forall t \in \widehat{l}$.

Consequentemente, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \in \{1, \dots, l\}$, temos que $a_{\sigma^{n+1}(t)} - a_{\sigma^n(t)} = j - i$, o que implica que $a_{\sigma^n(t)} = a_t + n(j - i)$.

Sendo assim, para todo $t \in \widehat{l}$, temos que $a_{\sigma^p(t)} = a_t$.

Desta forma, a ordem de σ é p . Isto é uma contradição, porque $p \nmid l!$. \square

Lema 2.58. *Sejam $z_1, z_2, z_3 \in K\langle X \rangle_1$. Então*

$$\bullet z_1^2 z_2^2 z_3^2 = (z_1 z_3 z_2)^2 \text{ mod } T_{\mathbb{Z}_2}(M_2(K)).$$

Demonstração. De fato, notemos que $z_1^2 z_2^2 z_3^2 \equiv z_1^2 z_3^2 z_2^2 \text{ mod } T_{\mathbb{Z}_2}(M_2(K))$ devido à identidade $x_1 x_2 = x_2 x_1$, $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0$. Aplicando a identidade $x_1 x_2 x_3 = x_3 x_2 x_1$, $\alpha(x_1) = -\alpha(x_2) = \alpha(x_3) \neq 0$, temos que $z_1^2 z_2^2 z_3^2 \equiv (z_1 z_3 z_2)^2 \text{ mod } T_{\mathbb{Z}_2}(M_2(K))$. \square

Lema 2.59. *Sejam $p > 2$ um número primo e $x_1, x_2 \in K\langle X \rangle_i$, em que $i \neq 0$. Então $(x_1 x_2)^p \equiv x_2^p x_1^p \text{ mod } T_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K))$.*

Demonstração. Sejam $A_1 \in R_{\alpha(x_1)}$ e $A_2 \in R_{\alpha(x_2)}$ duas matrizes genéricas. Pelo Lema 2.4, é claro que todas as posições na diagonal principal de $(A_1 A_2)^p$ (respectivamente $A_2^p A_1^p$) têm entradas não nulas.

De acordo com o Lema 2.21, basta provarmos que $E_{11}(A_1 A_2)^p = E_{11}(A_2^p A_1^p)$. De fato:

$$\begin{aligned} E_{11}(A_1 A_2)^p &= E_{11}(\sum_{i=1}^p y_{\alpha(x_1),1}^i y_{\alpha(x_1),2}^{i+\alpha(x_1)} E_{i\pi^{-1}(\overline{i+2\alpha(x_1)})\cap\widehat{p}})^p = \\ &= (\prod_{i=1}^p (y_{\alpha(x_1),1}^i y_{\alpha(x_1),2}^{i+\alpha(x_1)})) E_{11} = (\prod_{i=1}^p y_{\alpha(x_1),2}^{i+\alpha(x_1)}) (\prod_{i=1}^p y_{\alpha(x_1),1}^i) E_{11} = \\ &= (\prod_{i=1}^p y_{\alpha(x_1),2}^i) (\prod_{i=1}^p y_{\alpha(x_1),1}^i) E_{11} = (A_2)^p (A_1)^p E_{11} = A_2^p A_1^p E_{11}. \end{aligned}$$

Logo, $(x_1 x_2)^p \equiv x_2^p x_1^p \pmod{T_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K))}$ como requerido. \square

Lema 2.60. *Sejam $x_1, \dots, x_n \in K\langle X \rangle_1$ e $m = x_1^{2.k_1} \dots x_n^{2.k_n}$, tal que k_1, \dots, k_n pertencentes a $\mathbb{N} - \{0\}$. Existe $m_1 \in \langle V_1 \rangle^{T_{\mathbb{Z}_2}}$, tal que $m - m_1 \equiv 0 \pmod{T_{\mathbb{Z}_2}(M_2(K))}$.*

Demonstração. Basta aplicarmos o Lema 2.58. \square

Lema 2.61. *Sejam $p > 2$ um número primo e $x_1, \dots, x_n \in K\langle X \rangle_i$, $i \neq 0$. Consideremos $m = x_1^{p.k_1} \dots x_n^{p.k_n}$, em que $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Então existe $m_1 \in \langle V_1 \rangle^{T_{\mathbb{Z}_p}}$, tal que $m - m_1 \equiv 0 \pmod{T_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K))}$.*

Demonstração. Basta aplicarmos o Lema 2.59. \square

Lema 2.62. *Seja $m = x_{i_1} \dots x_{i_r} \in C_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K))$. Então existe $m_1 \in \langle V_1 \rangle^{T_{\mathbb{Z}_p}}$, tal que $m - m_1 \equiv 0 \pmod{T_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K))}$.*

Demonstração. Notemos que pelo menos uma variável de m tem \mathbb{Z}_p -grau diferente de 0. Por hipótese, $m \in C_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K))$. Logo pelo Lema 2.4, temos que:

$$\begin{aligned} y_{\alpha(x_{i_1}),i_1}^i y_{\alpha(x_{i_2}),i_2}^{i+\alpha(x_{i_1})} \dots y_{\alpha(x_{i_r}),i_r}^{i+\alpha(x_{i_1}+\dots+x_{i_{r-1}})} &= \\ y_{\alpha(x_{i_1}),i_1}^j y_{\alpha(x_{i_2}),i_2}^{j+\alpha(x_{i_1})} \dots y_{\alpha(x_{i_r}),i_r}^{j+\alpha(x_{i_1}+\dots+x_{i_{r-1}})} &, \end{aligned} \quad (2.8)$$

para quaisquer $i, j \in \widehat{p}$.

Sejam x_{l_1}, \dots, x_{l_q} todas as variáveis distintas de m e k_i o grau de m com respeito à variável x_{l_i} . Notemos que, para cada $i \in \widehat{q}$, k_i é um múltiplo de p . Para obtermos esta conclusão, basta analisarmos a Equação 2.8 e os índices das variáveis comutativas que aparecem nessa equação. Além disso, notemos que:

$$\begin{aligned} y_{\alpha(x_{i_1}),i_1}^i y_{\alpha(x_{i_2}),i_2}^{i+\alpha(x_{i_1})} \dots y_{\alpha(x_{i_r}),i_r}^{i+\alpha(x_{i_1}+\dots+x_{i_{r-1}})} &= \\ (\prod_{i=1}^p y_{\alpha(x_{l_1}),l_1}^i)^{\frac{k_1}{p}} \dots (\prod_{i=1}^p y_{\alpha(x_{l_q}),l_q}^i)^{\frac{k_q}{p}}. \end{aligned}$$

Há dois casos a considerar:

Caso 1: $\alpha(x_{l_i}) \neq 0$ para todo $i \in \widehat{q}$. Consideremos o monômio $x_{l_1}^{k_1} \dots x_{l_q}^{k_q}$ e as matrizes genéricas $A_{l_1} \in R_{\alpha(x_{l_1})}, \dots, A_{l_q} \in R_{\alpha(x_{l_q})}$. Notemos que $A_{l_1}^{k_1} \dots A_{l_q}^{k_q}$ e $m(A_{l_1}, \dots, A_{l_q})$ têm, na posição $(1, 1)$, a mesma entrada não nula. Sendo assim, pelo Lema 2.21, $m \equiv x_{l_1}^{k_1} \dots x_{l_q}^{k_q} \pmod{T_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K))}$. Aplicando o Lema 2.60 ou o Lema 2.61, concluímos o resultado.

Caso 2: Existe $i \in \widehat{q}$, tal que $\alpha(x_{l_i}) = 0$. Suponhamos que todas as variáveis de G -grau 0 sejam $\{x_{l_1}, \dots, x_{l_s}\}$. Consideremos o monômio

$$m_1 = (x_{l_{s+1}}^{k_{l_1}} \dots x_{l_s}^{k_s})^p x_{l_{s+1}}^{k_{s+1}-p} x_{l_{s+2}}^{k_{s+2}} \dots x_{l_q}^{k_{l_q}}.$$

Notemos que $m_1(A_{l_1}, \dots, A_{l_q})$ e $m(A_{l_1}, \dots, A_{l_q})$ têm na posição $(1, 1)$ a mesma entrada não nula. Mimetizando os argumentos do último caso, concluímos o resultado. \square

Lema 2.63. *Seja $m = x_{i_1} \dots x_{i_q} \in K\langle X \rangle_0 - (C_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K))) \cap (K\langle X \rangle_0)$. Então todas as entradas (na diagonal) da matriz $m(A_1, \dots, A_q)$ são não nulas e distintas.*

Demonstração. De acordo com o Lema 2.4:

$$A_{i_1} \dots A_{i_q} = \sum_{i=1}^p y_{\alpha(x_{i_1}), i_1}^i \dots y_{\alpha(x_{i_q}), i_q}^{i+\alpha(x_{i_1})+\dots+\alpha(x_{i_{q-1}})} E_{ii}.$$

Isto demonstra que $(A_1 \dots A_q)e_{ii} \neq 0 \quad \forall i \in \widehat{p}$.

A análise do caso $p = 2$ é imediata. Daqui em diante, suporemos que $p > 2$.

Pela hipótese, $x_{i_1} \dots x_{i_q} \in K\langle X \rangle_0 - C_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K)) \cap K\langle X \rangle_0$. Sendo assim, existem $1 \leq k < j \leq p$, tais que:

$$y_{\alpha(x_{i_1}), 1}^k \dots y_{\alpha(x_{i_q}), q}^{k+\alpha(x_{i_1})+\dots+\alpha(x_{i_{q-1}})} \neq y_{\alpha(x_{i_1}), 1}^j \dots y_{\alpha(x_{i_q}), q}^{j+\alpha(x_{i_1})+\dots+\alpha(x_{i_{q-1}})}.$$

Desta forma, a seguinte condição é satisfeita:

Existem $j_1 < \dots < j_l \in \widehat{q}$, em que $x_{i_{j_1}} = \dots = x_{i_{j_l}}$ e $x_{i_t} \neq x_{i_{j_1}}$

para todo $t \in \widehat{q} - \{j_1, \dots, j_l\}$, tais que

$$\begin{aligned} & y_{\alpha(x_{i_{j_1}), i_{j_1}}}^{k_1+\alpha(x_{i_1})+\dots+\alpha(x_{i_{j_1-1}})} \dots y_{\alpha(x_{i_{j_l}), i_{j_l}}}^{k_1+\alpha(x_{i_1})+\dots+\alpha(x_{i_{j_l-1}})} \neq \\ & y_{\alpha(x_{i_{j_1}), i_{j_1}}}^{k_2+\alpha(x_{i_1})+\dots+\alpha(x_{i_{j_1-1}})} \dots y_{\alpha(x_{i_{j_l}), i_{j_l}}}^{k_2+\alpha(x_{i_1})+\dots+\alpha(x_{i_{j_l-1}})} \end{aligned} \quad (\text{E.1}).$$

Sendo assim, os multiconjuntos:

$$A_1 := \{\alpha(x_{i_1}) + \dots + \alpha(x_{i_{j_1-1}}), \dots, \alpha(x_{i_1}) + \dots + \alpha(x_{i_{j_l-1}})\};$$

$$A_2 := \{k_2 - k_1 + \alpha(x_{i_1}) + \dots + \alpha(x_{i_{j_1-1}}), \dots, k_2 - k_1 + \alpha(x_{i_1}) + \dots + \alpha(x_{i_{j_l-1}})\}$$

são distintos.

Definamos:

$$a_1 = \alpha(x_{i_1}) + \dots + \alpha(x_{i_{j_1-1}}) \text{ e } b_1 = k_2 - k_1 + \alpha(x_{i_1}) + \dots + \alpha(x_{i_{j_1-1}});$$

Para $r > 1$:

$$a_r = a_{r-1} + \alpha(x_{i_{j_{r-1}}}) + \dots + \alpha(x_{i_{j_r-1}}) \text{ para todo } r \in \{2, \dots, l\};$$

$$b_r = b_{r-1} + \alpha(x_{i_{j_{r-1}}}) + \dots + \alpha(x_{i_{j_r-1}}) \text{ para todo } r \in \{2, \dots, l\}.$$

Sejam $a_{\lambda_1}, \dots, a_{\lambda_s}$ todos os elementos distintos de $\{a_1, \dots, a_l\}$. Claramente, $\{b_{\lambda_1}, \dots, b_{\lambda_s}\}$ são os elementos distintos de $\{b_1, \dots, b_l\}$. Denotemos por $n(a_i)$ (respectivamente $n(b_i)$) o número de vezes que o elemento a_i aparece no multiconjunto $\{a_1, \dots, a_l\}$ (respectivamente no multiconjunto $\{b_1, \dots, b_l\}$).

Provaremos que:

$$\begin{aligned} & y_{\alpha(x_{i_1}), i_1}^{q_1+\alpha(x_{i_1})+\dots+\alpha(x_{i_{j_1-1}})} \dots y_{\alpha(x_{i_{j_l}), i_{j_l}}}^{q_1+\alpha(x_{i_1})+\dots+\alpha(x_{i_{j_l-1}})} \neq \\ & y_{\alpha(x_{i_1}), i_1}^{q_2+\alpha(x_{i_1})+\dots+\alpha(x_{i_{j_1-1}})} \dots y_{\alpha(x_{i_{j_l}), i_{j_l}}}^{q_2+\alpha(x_{i_1})+\dots+\alpha(x_{i_{j_l-1}})} \end{aligned}$$

para quaisquer $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}_p$ distintos.

Caso 1: $s = 1$.

Neste caso, a prova é imediata.

Caso 2: $s > 1$ e $n(a_{\lambda_1}) = \cdots = n(a_{\lambda_s})$.

De acordo com a expressão (E.1), é claro que $s < p$. Por outro lado, segue do Lema 2.57 que $\{a_{\lambda_1} + i, \dots, a_{\lambda_s} + i\} \neq \{a_{\lambda_1} + j, \dots, a_{\lambda_s} + j\}$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}_p$ distintos.

Caso 3: $s > 1$ e existem dois inteiros positivos $l_1, l_2 \in \widehat{s}$, tais que $n(a_{\lambda_{l_1}}) \neq n(a_{\lambda_{l_2}})$.

Sejam $a_{\lambda_{k_1}}, \dots, a_{\lambda_{k_r}}$ todos os elementos distintos de $\{a_{\lambda_1}, \dots, a_{\lambda_s}\}$, tais que $n(a_{\lambda_{k_1}}) = \cdots = n(a_{\lambda_{k_r}}) = n(a_{\lambda_{l_1}})$. Pelo Lema 2.57, é claro que os conjuntos $\{a_{\lambda_{k_1}} + i, \dots, a_{\lambda_{k_r}} + i\}$ e $\{a_{\lambda_{k_1}} + j, \dots, a_{\lambda_{k_r}} + j\}$ são distintos para quaisquer $i, j \in \widehat{p}$ distintos.

Desses três passos, segue que:

$$E_{kk}(A_{i_1} \dots A_{i_q}) \neq E_{ll}(A_1 \dots A_q)$$

para quaisquer $k, l \in \widehat{p}$ distintos. \square

O próximo teorema usará substancialmente a ideia da prova do Teorema 6 de [8].

Teorema 2.64. *Sejam K um domínio de integridade infinito e p um número primo. Os polinômios centrais \mathbb{Z}_p -graduados de $M_p(K)$ ($M_p(K)$ equipada com sua \mathbb{Z}_p -gradação canônica) seguem de:*

- $z_1(x_1x_2 - x_2x_1)z_2$ quando $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0$;
- $z_1(x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1)z_2$ quando $\alpha(x_1) = \alpha(x_3) = -\alpha(x_2) \neq 0$;
- Os monômios do conjunto V_1 ;
- $\sum_{\sigma \in H_p} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p)}$, em que $(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_p))$ é uma sequência completa de \mathbb{Z}_p .

Além disso, $z_1, z_2 \in \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_p} X_i$.

Demonstração. Seja W o $T_{\mathbb{Z}_p}$ -espaço gerado pelos quatro tipo de polinômios centrais supracitados. Notemos que $T_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K)) \subseteq W \subseteq C_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K))$. Provaremos que $C_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K)) \subset W$.

Seja $f(x_1, \dots, x_q) = \sum_{i=1}^l \lambda_i m_i \in C_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K)) - T_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K))$. Pelo Lema 2.10, nós podemos assumir que f é um polinômio multi-homogêneo. Além disso, podemos supor que $m_i - m_j \notin T_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K))$ e cada $m_i \notin C_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K))$ (vide Lema 2.62).

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\alpha(m_1) = \cdots = \alpha(m_l) = 0$.

Sejam $A_1 \in R_{\alpha(x_1)}, \dots, A_q \in R_{\alpha(x_q)}$ matrizes genéricas. De acordo com a hipótese:

$$f(A_1, \dots, A_q) = \text{diag}(F_1, \dots, F_p)$$

em que $F_1 = \cdots = F_p \neq 0$.

Com base no Lema 2.63, temos que todas as entradas da diagonal da matriz $m_j(A_1, \dots, A_q)$ são não nulas e distintas. Pelo Lema 2.21, sempre que $i \neq j$, as matrizes $m_i(A_1, \dots, A_q)$ e $m_j(A_1, \dots, A_q)$ não têm, numa mesma posição, a mesma entrada não nula.

Reordenando os índices, se necessário, concluímos que existem $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq l$, tais que $\lambda_{i_1} = \dots = \lambda_{i_p} \neq 0$ e $E_{11}m_{i_1}(A_1, \dots, A_q)E_{11} = E_{1l_2}m_{i_2}(A_1, \dots, A_q)E_{l_21}$ para todo $l_2 \in \widehat{p} - \{1\}$.

Suponhamos que $m_{i_1} = x_{j_1} \dots x_{j_s}$ e a entrada na posição $(1, 1)$ da matriz $m_{i_1}(A_1, \dots, A_q)$ seja $y_{\alpha(x_{j_1}), j_1}^{\alpha_1} \dots y_{\alpha(x_{j_s}), j_s}^{\alpha_s}$. Notemos que $\{a_1, \dots, a_s\} \supset \widehat{p}$. Deste modo, de acordo com o Lema 2.50, existem monômios $r_1, \dots, r_p \in K\langle X \rangle$, tais que $m_{i_1} = r_1 \dots r_p$, em que $(\alpha(r_1), \dots, \alpha(r_p))$ é uma sequência completa de \mathbb{Z}_p .

Para cada $j \in \widehat{p}$, existe uma única permutação $\sigma \in H_p$, tal que as matrizes:

$$m_{i_j}(A_1, \dots, A_q) \text{ e } r_{\sigma(1)} \dots r_{\sigma(p)}(A_1, \dots, A_q)$$

têm, na posição $(1, 1)$, a mesma entrada não nula. Logo, pelo Lema 2.21:

$$m_{i_j} \equiv r_{\sigma(1)} \dots r_{\sigma(p)} \pmod{T_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K))}.$$

Ademais, pelo Lema 2.49, temos que:

$$g(x_1, \dots, x_r) = \lambda_{i_1} (\sum_{\sigma \in H_p} r_{\sigma(1)} \dots r_{\sigma(p)}) \in W.$$

É claro que $f - g \in C_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K))$. Além disso, módulo $T_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K))$, temos que $f - g \equiv f - \lambda_{i_1}(m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_p})$.

Se $l - p = 0$, temos que $f \in W$. Caso $1 \leq l - p \leq p - 1$, repetimos o argumento para $f - g$. Concluiremos que $f - g$ é um polinômio central trivial, isto é, $f - g \in T_{\mathbb{Z}_p}(M_p(K))$.

Por outro lado, quando $l - p \geq p$, repetimos mais uma vez o argumento para $f - g$. Por um processo indutivo em l , obtemos o resultado. \square

2.9 Polinômios Centrais \mathbb{Z} -graduados de $M_n(K)$

Nesta seção, descreveremos os polinômios centrais \mathbb{Z} -graduados de $M_n(K)$ ($M_n(K)$ equipada com sua \mathbb{Z} -gradação canônica). Adotaremos um roteiro parecido com o da seção anterior. Ao lado do enunciado de cada um dos resultados abaixo, inseriremos o título do resultado equivalente.

Lema 2.65 (Similar ao Lema 2.63). *Seja $x_{i_1} \dots x_{i_m} \in K\langle X \rangle_0$.*

Se $A_{i_1}^{\alpha(x_{i_1})} \dots A_{i_m}^{\alpha(x_{i_m})}$ é uma matriz não nula, então todas as expressões polinômiais não nulas dessa matriz (na diagonal) são distintas.

Demonstração. Se apenas uma posição em $A_{i_1} \dots A_{i_m}$ tem uma entrada não nula, a prova é óbvia. Suponhamos que existam, pelo menos, duas posições $(k_1, k_1), (k_2, k_2) \in \widehat{n} \times \widehat{n}$, tais que:

$$E_{1k_1}(A_{i_1} \dots A_{i_m})E_{k_11}, E_{1k_2}(A_{i_1} \dots A_{i_m})E_{k_21} \neq 0.$$

Provaremos que:

$$E_{1k_1}(A_{i_1} \dots A_{i_m})E_{k_11} \neq E_{1k_2}(A_{i_1} \dots A_{i_m})E_{k_21}.$$

Suponhamos por contradição que:

$$E_{1k_1}(A_{i_1} \dots A_{i_m})E_{k_11} = E_{1k_2}(A_{i_1} \dots A_{i_m})E_{k_21}.$$

Dessa forma, existem $j_1 < \dots < j_l$ no conjunto \widehat{m} , tais que $x_{i_{j_1}} = \dots = x_{i_{j_l}}$, $x_{i_k} \neq x_{j_1}$ quando $k \notin \{j_1, \dots, j_l\}$ e:

$$\begin{array}{ccc} y_{\alpha(x_{i_{j_1}}), i_{j_1}}^{k_1+\dots+\alpha(x_{i_{j_1-1}})} & \cdots & y_{\alpha(x_{i_{j_l}}), i_{j_l}}^{k_1+\dots+\alpha(x_{i_{j_1-1}})+\dots+\alpha(x_{i_{j_l-1}})} \\ y_{\alpha(x_{i_{j_1}}), i_{j_1}}^{k_2+\dots+\alpha(x_{i_{j_1-1}})} & \cdots & y_{\alpha(x_{i_{j_l}}), i_{j_l}}^{k_2+\dots+\alpha(x_{i_{j_1-1}})+\dots+\alpha(x_{i_{j_l-1}})}. \end{array} =$$

Consideremos os multiconjuntos:

- $A = \{0 + \dots + \alpha(x_{i_{j_1-1}}), \dots, 0 + \dots + \alpha(x_{i_{j_1-1}}) + \dots + \alpha(x_{i_{j_l-1}})\};$
- $B = \{k_1 + \dots + \alpha(x_{i_{j_1-1}}), \dots, k_1 + \dots + \alpha(x_{i_{j_1-1}}) + \dots + \alpha(x_{i_{j_l-1}})\};$
- $C = \{k_2 + \dots + \alpha(x_{i_{j_1-1}}), \dots, k_2 + \dots + \alpha(x_{i_{j_1-1}}) + \dots + \alpha(x_{i_{j_l-1}})\}.$

Seja a o menor elemento do multiconjunto A . De acordo com a hipótese, $B = C$. Entretanto, o mínimo de B é $a + k_1$ e o mínimo de C é $a + k_2$; absurdo. \square

Os dois próximos lemas são provados de forma similar aos Lemas 2.49 e 2.50 respectivamente.

Lema 2.66 (Similar ao Lema 2.49). *O polinômio*

$$\sum_{\sigma \in H_n} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

em que $(\overline{\alpha(x_1)}, \dots, \overline{\alpha(x_n)})$ é uma seqüência completa de \mathbb{Z}_n e $|\alpha(x_i)| < n$ para todo $i \in \hat{n}$, é um polinômio central \mathbb{Z} -graduado (não trivial) de $M_n(K)$.

Lema 2.67 (Similar ao Lema 2.50). *Seja $m = x_1 \dots x_q \in K\langle X \rangle - T_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$, tal que $\alpha(m) = 0$ e $\alpha(x_i) = h_i$, para todo $i \in \hat{q}$. Seja $y_{h_1,1}^{s_1^k} \dots y_{h_q,q}^{s_q^k}$ uma entrada não nula de $m(A_1, \dots, A_q)$. Se existe uma subsequência $(s_{i_1}^k, \dots, s_{i_n}^k)$ de (s_1^k, \dots, s_q^k) (em que $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq q$ e $\{s_{i_1}^k, \dots, s_{i_n}^k\} = \hat{n}$), então existem monômios $m_1, \dots, m_n \in K\langle X \rangle$, tais que $(\overline{\alpha(m_1)}, \dots, \overline{\alpha(m_n)})$ é uma seqüência completa de \mathbb{Z}_n e $m = m_1 m_2 \dots m_n$.*

Teorema 2.68. *Seja K um domínio de integridade infinito. Os polinômios centrais \mathbb{Z} -graduados de $M_n(K)$ ($M_n(K)$ equipada com sua \mathbb{Z} -graduação canônica) seguem de:*

- $z_1(x_1 x_2 - x_2 x_1) z_2$ quando $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0$;
- $z_1(x_1 x_2 x_3 - x_3 x_2 x_1) z_2$ quando $\alpha(x_1) = \alpha(x_3) = -\alpha(x_2) \neq 0$;
- $z_1(x_1) z_2$ quando $|\alpha(x_1)| \geq n$;

- $\sum_{\sigma \in H_n} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$, em que $(\overline{\alpha(x_1)}, \dots, \overline{\alpha(x_n)})$ é uma seqüência completa de \mathbb{Z}_n .

Além disso, $z_1, z_2 \in \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} X_i$. No último polinômio listado acima, assumimos que $|\alpha(x_i)| < n$ para todo $i \in \hat{n}$.

Demonstração. Seja W o $T_{\mathbb{Z}}$ -espaço gerado pelos quatro tipos de polinômios centrais supracitados. Não é difícil vermos que $T_{\mathbb{Z}}(M_n(K)) \subset W \subset C_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$.

Por outro lado, seja $f(x_1, \dots, x_t) = \sum_{i=1}^t \lambda_i m_i \in C_{\mathbb{Z}}(M_n(K)) - T_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$ um polinômio multi-homogêneo. Podemos admitir que cada $m_i \notin T_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$ e $m_i - m_j \notin T_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$ para $i \neq j$. Além disso, podemos assumir que $\alpha(m_1) = \dots = \alpha(m_l) = 0$.

Pelo Lema 2.65, temos que as entradas não nulas da diagonal de cada $m_i(A_1, \dots, A_m)$ são distintas.

Mimetizando a prova do Teorema 2.64, segue o resultado. \square

Capítulo 3

Identidades \mathbb{Z}_2 -Graduadas da Álgebra de Grassmann

Ao longo deste capítulo, K denotará um corpo de $\text{char}K \neq 2$. Além disso, $Y = \{y_1, \dots, y_n, \dots\}$ denotará as variáveis pares, $Z = \{z_1, \dots, z_n, \dots\}$ as variáveis ímpares e $X = Y \cup Z$. A álgebra de Grassmann estará equipada com uma \mathbb{Z}_2 -gradação induzida por ϕ_0 , ou ϕ_k , ou ϕ_∞ , ou ϕ_k^* .

Usaremos alguns resultados de Regev [36] e Ochir-Rankin [5] no início do capítulo. Os trabalhos de Centrone [10] e Ochir-Rankin [5] contribuíram para a estratégia usada nos principais teoremas. O artigo de Siderov e Chiripov [11] motivou a construção da Ordem Total de SS . O artigo de da Silva e Di Vincenzo [13] contribuiu com a maioria dos resultados técnicos da seção Caso 4: E_k .

3.1 Escolhendo uma base para $K\langle X \rangle$

Pelo Teorema de Witt (Teorema 1.16), sabemos que $L_K(X)$ é isomorfa à subálgebra $L(X)$ de $(K\langle X \rangle)^{(-)}$ gerada por X . Desta forma, cada elemento de $L(X)$ pode ser escrito como combinação linear de termos de $X \cup \text{Comut}(X)$.

Seja $B = \{y_1, \dots, y_n, \dots, z_1, \dots, z_n, \dots, \dots, [x_1, x_2], [x_1, x_3], \dots, [x_2, x_3], [x_2, x_4], \dots, [x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}], \dots, \dots, [x_{j_1}, \dots, x_{j_n}], \dots\}$ uma base ordenada de $L(X)$. Com base no Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (Teorema 1.15), temos que os elementos abaixo formam uma base linear para $K\langle X \rangle$ (esta base será denotada por $Pr(X)$):

$$x_{i_1}^{a_1} \dots x_{i_{n_1}}^{a_{n_1}} [x_{j_1}, \dots, x_{j_l}]^{b_1} \dots [x_{r_1}, \dots, x_{r_t}]^{b_{n_2}},$$

$a_1, \dots, a_{n_1}, b_1, \dots, b_{n_2}$ são inteiros não negativos, $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_1}}, [x_{j_1}, \dots, x_{j_l}], \dots, [x_{r_1}, \dots, x_{r_t}] \in B$, $x_{i_1} < \dots < x_{i_{n_1}} < [x_{j_1}, \dots, x_{j_l}] < \dots < [x_{r_1}, \dots, x_{r_t}]$.

3.2 Identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas para a álgebra de Grassmann

Nesta seção, apresentaremos algumas identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas da álgebra de Grassmann sobre um corpo finito.

O próximo lema é uma seqüência de fatos bem conhecidos. A prova dos três itens pode ser encontrado no livro de Drensky e Formanek (veja o Exemplo 1.1.6 e o Lema 1.4.2, [17]).

Lema 3.1. *Seja K um corpo de $\text{char}K \neq 2$. Então:*

$$[x_1, x_2, x_3] \in T_{\mathbb{Z}_2}(E);$$

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \equiv -[x_1, x_3][x_2, x_4] \pmod{\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_{T_{\mathbb{Z}_2}}};$$

$$[x_1, x_2][x_2, x_3] \equiv 0 \pmod{\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_{T_{\mathbb{Z}_2}}};$$

Além disso, se K é um corpo de $\text{char}K = p > 2$, então:

$$[x_1^p, x_2] \equiv 0 \pmod{\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_{T_{\mathbb{Z}_2}}}.$$

Demonstração. Para verificarmos o quarto item, basta notarmos que $[x_1^p, x_2] = -[x_2, x_1, x_1, \dots, x_1]$ (neste comutador, a variável x_1 ocorre p vezes após a variável x_2). \square

Lema 3.2. *(Regev. Lema 1.2, item b, de [36]) Seja K um corpo de $\text{char}K = p > 2$. O polinômio z_1^p é uma identidade \mathbb{Z}_2 -graduada de E .*

Demonstração. Para provarmos este lema, basta verificarmos que x_1^p é uma identidade (ordinária) de E^* . Tomemos $a_1 + a_2 \in E^*$, com $a_1 \in (E_{can})_0 \cap E^*$ e $a_2 \in (E_{can})_1$. Com um cálculo simples, obtemos:

$$(a_1 + a_2)^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} a_1^i a_2^{p-i} = a_1^p + a_2^p.$$

A partir da decomposição de a_1 como combinação linear de elementos de $\mathcal{B} \cap (E_{can})_0$, temos que $(a_1)^p = 0$.

Por outro lado, seja $a_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i$ a decomposição de a_2 como combinação linear de elementos de $\mathcal{B} \cap (E_{can})_1$. Observemos que se $n < p$, então $a_2^p = 0$.

Agora, suponhamos que $n \geq p$. Temos:

$$a_2^p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \sum_{\sigma \in S_p} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_p} g_{i_{\sigma(1)}} \dots g_{i_{\sigma(p)}}.$$

Contudo:

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in S_p} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_p} g_{i_{\sigma(1)}} \dots g_{i_{\sigma(p)}} = \\ & \frac{p!}{2} \cdot \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_p} \cdot g_{i_1} \dots g_{i_p} - \frac{p!}{2} \cdot \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_p} \cdot g_{i_1} \dots g_{i_p} = 0. \end{aligned}$$

Segue-se então que $(a_1 + a_2)^p = 0$. \square

Lema 3.3 (Função de Frobenius para a álgebra de Grassmann sobre um corpo finito). *Consideremos a aplicação:*

$$\begin{aligned} \Psi : E &\rightarrow E \\ \alpha \cdot 1_E + c_1 + c_2 &\mapsto (\alpha \cdot 1_E + c_1 + c_2)^p, \end{aligned}$$

em que $\alpha \in K$, $c_1 \in (E_{can})_0 \cap E^*$ e $c_2 \in (E_{can})_1$. Então $\Psi(\alpha \cdot 1_E + c_1 + c_2) = \alpha^p \cdot 1_E$.

Demonstração. Sejam $\alpha \in K$, $c_1 \in (E_{can})_0 \cap E^*$ e $c_2 \in (E_{can})_1$.

Com efeito, para verificarmos esse resultado, basta aplicarmos o argumento inicial da demonstração do Lema 3.2:

$$(\alpha \cdot 1_E + c_1 + c_2)^p = (\alpha \cdot 1_E + c_1)^p + c_2^p = (\alpha \cdot 1_E + c_1)^p = \alpha^p \cdot 1_E + c_1^p = \alpha^p \cdot 1_E.$$

□

Corolário 3.4. *Se K é um corpo de $\text{char}K = p > 2$ com $|K| = q$ elementos, então a função de Frobenius, restrito a K , é bijetivo.*

Corolário 3.5. *Seja K um corpo de $\text{char}K = p > 2$ com $|K| = q$ elementos. O polinômio $y_1^{pq} - y_1^p$ é uma identidade polinomial \mathbb{Z}_2 -graduada de E .*

Daqui para frente, K denotará um corpo de $\text{char}K = p > 2$ e com $|K| = q$ elementos. Além disso, os polinômios de $K\langle X \rangle$ serão escrito como combinação linear de elementos de $Pr(X)$.

3.3 SS e a Ordem Total de SS

Como foi discutido no início do capítulo, os polinômios z_1^p e $[x_1, x_2, x_3]$ são identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas para E .

Notemos que se $u = z_{i_1}^{a_1} \cdots z_{i_{n_1}}^{a_{n_1}} [x_{j_1}, \dots, x_{j_l}]^{c_1} \cdots [x_{r_1}, \dots, x_{r_t}]^{c_{n_2}} \in Pr(X)$, então:

$$u \equiv \left(\prod_{r=1}^{n_1} z_{i_r}^{b_{i_r}} \right) [x_{t_1}, x_{t_2}] \cdots [x_{t_{2l-1}}, x_{t_{2l}}] \pmod{\langle [x_1, x_2, x_3], z_1^p \rangle_{T_{\mathbb{Z}_2}}},$$

em que $0 \leq b_{i_1}, \dots, b_{i_m} < p - 1$; $x_{t_1} < \dots < x_{t_{2l}}$; $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$.

Essa equivalência motiva a próxima definição.

Definição 3.6. *Um elemento $f \in Pr(X)$ é chamado do Tipo SS (ou $f \in SS$) quando:*

$$f = (y_{l_1}^{a_1} \cdots y_{l_s}^{a_s}) (z_{i_1}^{b_1} \cdots z_{i_t}^{b_t}) [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2n-1}}, x_{j_{2n}}], \text{ em que}$$

$$s, t, 2n \geq 0; x_{j_1} < \cdots < x_{j_{2n}}, 1 \leq a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t \leq p - 1.$$

Definição 3.7. *Seja $a = \left(\prod_{r=1}^n y_{j_r}^{a_{j_r}} \right) \left(\prod_{r=1}^m z_{i_r}^{b_{i_r}} \right) [x_{t_1}, x_{t_2}] \cdots [x_{t_{2l-1}}, x_{t_{2l}}] \in SS$. Definimos:*

- $\text{beg}(a) := \left(\prod_{r=1}^n y_{j_r}^{a_{j_r}} \right) \left(\prod_{r=1}^m z_{i_r}^{b_{i_r}} \right)$ e $\psi(a) := x_{t_1} \cdots x_{t_{2l}}$;
- $\Pi(Y)(a) := \left(\prod_{r=1}^n y_{j_r}^{a_{j_r}} \right)$ e $\Pi(Z)(a) := \left(\prod_{r=1}^m z_{i_r}^{b_{i_r}} \right)$;
- Se $b_{i_1} \geq 1$, $\text{pr}(z)(a) = z_{i_1}$ e $\Pi_1(Z)(a) := (z_{i_1}^{b_{i_1}-1} \prod_{r=2}^m z_{i_r}^{b_{i_r}})$;
- $\text{Deg}_{x_i} a$: o número de ocorrências da letra x_i em $\text{beg}(a)\psi(a)$;
- $\text{deg}_Y a := \sum_{y \in Y} \text{Deg}_y(a)$, $\text{deg}_Z a := \sum_{z \in Z} \text{Deg}_z(a)$ e $\text{deg} a := \text{deg}_Z a + \text{deg}_Y a$.

Definição 3.8. *Sejam $u, v \in SS$, tais que $\psi(u) = \psi(v) = 1$. Dizemos que $u <_{\text{lex-rig}} v$ quando $\text{Deg}_{x_1} u < \text{Deg}_{x_1} v$ para algum $x_1 \in X$. Além disso, $\text{Deg}_x u = \text{Deg}_x v$ para todo $x > x_1$ ($x > x_1$ com relação à ordenação da base de $L(X)$ adotada no início do capítulo).*

O nosso próximo passo será definir a Ordem Total de SS . Ela será uma extensão da ordem da base de $L(X)$ para SS .

Definição 3.9 (Ordem Total de SS). Dados dois elementos $u, v \in SS$, dizemos que $u < v$ quando:

- $degu < degv$ ou;
- $degu = degv$, mas $beg(u) <_{lex-rig} beg(v)$ ou;
- $degu = degv, beg(u) = beg(v)$, mas $\psi(u) <_{lex-rig} \psi(v)$.

Daqui para frente, os elementos de SS serão comparados pela **Ordem Total de SS**. Notemos que se $u \in SS - \{1\}$, então $1 < u$.

3.4 p -polinômios

Nesta seção, definiremos os p -polinômios. Esses polinômios e os polinômios do Tipo- SS serão usados na definição dos polinômios de teste.

Lema 3.10. (Regev. Lema 1.5, letra b, de [36]) *Seja K um corpo finito de $\text{char}K = p > 2$ e com $|K| = q$ elementos. Se $f(y_1)$ é uma identidade polinomial de E , então $y_1^{pq} - y_1^p | f(y_1)$.*

Demonstração. Para exemplificarmos, provaremos este resultado para E_k . Observemos que $f(\alpha.1_K) = f(\alpha.1_E) = 0$, em que $\alpha \in K$. Portanto, $y_1^q - y_1 | f(y_1)$ e $f(y_1) = (y_1^q - y_1)f_1(y_1)$. Seja $a = (\alpha.1_E + b) \in (E_k)_0$, em que $b = \sum_{l=1}^2 e_{k+2l-1}e_{k+2l}$.

Notemos que $f_1(a) = f_1(\alpha.1_E) + (b).h(a)$ para algum polinômio $h(y_1) \in K\langle X \rangle$. Além disso, $a^q - a = -b$ e $(-b)f_1(a) = 0$, porque $f(a) = 0$.

Desta maneira:

$$-(b)f_1(\alpha.1_E) = b^2.h(a) \text{ e, conseqüentemente, } f_1(\alpha.1_E) = 0.$$

Sendo assim, $(y_1^q - y_1)^2 | f(y_1)$.

Com um argumento indutivo no expoente de $(y_1^q - y_1)^r$, concluímos o resultado. \square

Definição 3.11. *Seja $f = \sum_{j=1}^l \lambda_j m_j \in K\langle y_1, \dots, y_n \rangle$ uma combinação linear de elementos de $Pr(X)$, em que $\psi(m_1) = \dots = \psi(m_l) = 1$. Este polinômio é chamado de um p -polinômio quando:*

- $Deg_{y_i} m_j \equiv 0 \pmod p$ e $Deg_{y_i} m_j < qp$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, l\}$.

O espaço vetorial dos p -polinômios de $K\langle X \rangle$ será denotado por $pPol(Y)$.

Proposição 3.12. (Ochir-Rankin. Corolário 3.1, de [5]) *Seja $f(y_1, \dots, y_n)$ um p -polinômio. Se $f \in T_{\mathbb{Z}_2}(E)$, então f é o polinômio identicamente nulo.*

Demonstração. Inicialmente, suponhamos que $n = 1$. Por hipótese, $f \in T_{\mathbb{Z}_2}(E)$.

Por outro lado, pelo Lema 3.10, $y_1^{pq} - y_1^p | f(y_1)$. Haja vista que $y_1^{pq} - y_1^p$ tem grau pq e $f(y_1) \in pPol(Y)$, segue que $f = 0$.

Suponhamos, por indução, que esse resultado seja válido para para p -polinômios em $1, \dots, n-1$ variáveis.

Escrevamos $f = \sum_{i=0}^{q-1} f_i(y_1, \dots, y_{n-1}).y_n^{p.i}$, em que $f_0(y_1, \dots, y_{n-1}), \dots, f_{q-1}(y_1, \dots, y_{n-1})$ são p -polinômios. Suponhamos, por absurdo, que f seja

um polinômio não nulo. Sendo assim, algum f_i é um polinômio não nulo. Por hipótese de indução, existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in K$, tais que o polinômio $f_i(\alpha_1.1_E, \dots, \alpha_{n-1}.1_E) \neq 0$. Teremos assim que $f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, y_n)$ é um p -polinômio não nulo. Ora, mas isto é uma contradição, pois o polinômio $f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, y_n) \in T_{\mathbb{Z}_2}(E)$. \square

Corolário 3.13. *Se $f(y_1, \dots, y_n) \in pPol(Y) - \{0\}$, então existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, tais que $f(\alpha_1.1_E, \dots, \alpha_n.1_E) \neq 0$.*

Demonstração. De acordo com a Proposição 3.12, $f \notin T_{\mathbb{Z}_2}(E)$. Assim, existem $a_1, \dots, a_n \in E_0$, tais que $f(a_1, \dots, a_n) \neq 0$. Por outro lado, podemos tomar $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, tais que $\alpha_1^p = a_1^p, \dots, \alpha_n^p = a_n^p$ e os quais satisfarão a seguinte desigualdade:

$$f(\alpha_1.1_E, \dots, \alpha_n.1_E) \neq 0.$$

Esse fato completa a prova. \square

3.5 Polinômios de teste

Nesta seção, definiremos os polinômios de teste. Esses polinômios serão usados na prova dos principais teoremas deste capítulo.

Definição 3.14. *Para qualquer $a = e_{i_1} \dots e_{i_n} \in \mathcal{B} - \{1_E\}$, definimos: $\text{supp}(a) = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\}$ como o suporte de a e $\text{wt}(a) := |\text{supp}(a)|$ o comprimento-de-suporte de a . Definimos o suporte e o comprimento-de-suporte de 1_E por $\text{supp}(1_E) = \emptyset$ e $\text{wt}(1_E) = 0$, respectivamente. Para qualquer $g = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \in E - \{0\}$, em que $a_i \in \mathcal{B}$ e $\lambda_i \in K - \{0\}$, definimos: $\text{supp}(g) := \cup_{i=1}^n \text{supp}(a_i)$ como o suporte de g e $\text{wt}(g) := \max\{\text{wt}(a_i) | i = 1, \dots, n\}$ o comprimento-de-suporte de g . Definimos $\text{dom}(g) := \sum_{\text{wt}(a_i)=\text{wt}(g)} \lambda_i a_i$ como a parte dominante de g . Além disso, definimos o suporte e o comprimento-de-suporte de 0 por $\text{supp}(0) = \emptyset$ e $|\text{supp}(0)| = 0$, respectivamente.*

A próxima proposição é uma consequência dos Lemas 3.1, 3.2 e Corolário 3.5.

Proposição 3.15. *Seja $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ uma combinação linear de elementos de $\text{Pr}(X)$. Então:*

$$f \equiv \sum_{i=1}^l f_i u_i \pmod{\langle [x_1, x_2, x_3], z_1^p, y_1^{pq} - y_1^p \rangle_{T_{\mathbb{Z}_2}}},$$

em que f_1, \dots, f_l são p -polinômios e $u_1, \dots, u_l \in SS$ é (são) distinto(s). Além disso, $\langle [x_1, x_2, x_3], z_1^p, y_1^{pq} - y_1^p \rangle_{T_{\mathbb{Z}_2}} \subset T_{\mathbb{Z}_2}(E)$.

Definição 3.16. *Um polinômio de teste é uma expressão da forma:*

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i u_i,$$

em que f_0 é um p -polinômio, f_1, \dots, f_n são p -polinômios não nulos. Além disso, os termos $u_1, \dots, u_n \in SS - \{1\}$ é (são) distinto(s). O termo líder de f ($LT(f)$) é o maior elemento de $\{u_1, \dots, u_n\}$.

Definição 3.17. *Seja $f = f_0 + \sum_{t=1}^n f_t u_t$ um polinômio de teste, em que $n \geq 2$ e $\text{deg}_{\mathbb{Z}} \text{beg}(LT(f)) > 0$. Um elemento $u_i \in \{u_1, \dots, u_n\}$ é chamado um termo-ruim de f quando:*

1. $Deg_x(u_i) = Deg_x(LT(f))$ para qualquer $x \in X$. Isto é, u_i e $LT(f)$ têm o mesmo multigrado;
2. Se $z \neq pr(z)(LT(f))$, então $Deg_z beg(LT(f)) = Deg_z beg(u_i)$;
3. Se $z = pr(z)(LT(f))$, então $Deg_z beg(u_i) + 1 = Deg_z beg(LT(f))$;
4. Se $x \in Y$, então $Deg_x beg(LT(f)) \leq Deg_x beg(u_i)$.

Denotamos o maior termo-ruim de f (termo-ruim líder de f) por $LBT(f)$.

Lema 3.18. Na notação da Definição 3.17, se u_i é um termo-ruim de f , temos que:

1. $\Pi_1(Z)(LT(f)) = \Pi(Z)(u_i)$;
2. Se $z_1 = pr(z)(LT(f))$, então $Deg_{z_1}(\psi(u_i)) = 1$;
3. Existe uma variável $x \in Y$, tal que $Deg_x beg(LT(f)) < Deg_x beg(u_i)$;
4. $deg_Z(beg(u_i)) + deg_Y(\psi(u_i)) < deg_Z(beg(LT(f))) + deg_Y(\psi(LT(f)))$;
5. $\Pi(Y)(LT(f)) <_{lex-riq} \Pi(Y)(LBT(f))$.

Demonstração. As duas primeiras afirmações são consequências da definição de termo-ruim.

Terceira afirmação: suponhamos por contradição que $Deg_y beg(LT(f)) = Deg_y beg(u_i)$ para todo $y \in Y$. Portanto $deg_Y \psi(u_i) = deg_Y \psi(LT(f))$. Além disso, notemos que $deg_Z \psi(u_i) = deg_Z \psi(LT(f)) + 1$. Contudo, $deg(\psi(LT(f))) - deg(\psi(u_i))$ é um inteiro par o que é uma contradição.

As afirmações 4 e 5 são consequência da afirmação 3 e da definição de termo-ruim. \square

Definição 3.19. Sejam $f(x_1, \dots, x_m) = f_0 + \sum_{t=1}^n f_t u_t$ um polinômio de teste e $u_i \in \{u_1, \dots, u_n\}$. Uma T_{u_i} -sequência é uma m -upla $(a_1, \dots, a_j, \dots, a_m) \in E^m$ cujo elemento a_j é definido por:

- 1) Se $Deg_{x_j} u_i = 0$, $a_j = 0$;
- 2) Se $Deg_{x_j} u_i > 0$, a_j é uma soma de elementos homogêneos (cada termo homogêneo tem coeficiente 1) de \mathbb{Z}_2 -grau $\alpha(x_j)$. Além disso:
 - 2.1) O número de parcelas de a_j é $Deg_{x_j} u_i$;
 - 2.2) Se a_{j1} e a_{j2} são parcelas de a_j , então $supp(a_{j1}) \cap supp(a_{j2}) = \emptyset$;
 - 2.3) Se $Deg_{x_j}(\psi(u_i)) = 0$, a parcela (as parcelas) de a_j tem (têm) comprimento-de-suporte 2;
 - 2.4) Se $Deg_{x_j}(\psi(u_i)) = 1$ e $Deg_{x_j} u_i \geq 2$, apenas uma parcela de a_j tem comprimento-de-suporte 1, mas a outra (as outras) parcela (parcelas) de a_j tem (têm) comprimento-de-suporte 2;
 - 2.5) Se $Deg_{x_j}(\psi(u_i)) = 1$ e $Deg_{x_j} u_i = 1$, a_j tem comprimento-de-suporte 1.

Adicionalmente, se $r \neq l$, $supp(a_r) \cap supp(a_l) = \emptyset$.

Definição 3.20. *Seja $f(x_1, \dots, x_m) = f_0 + \sum_{t=1}^n f_t u_t$ um polinômio de teste, em que $\deg_Z(\text{beg}(u_i)) > 0$ para algum $u_i \in \{u_1, \dots, u_n\}$. Uma sequência Quase-Tipo- u_i é uma m -upla $AT_{u_i} = (a_1, \dots, a_j, \dots, a_m) \in E^m$ que é definida como uma sequência do Tipo- u_i , com exceção da propriedade 2.3. No lugar dessa propriedade, as seguintes propriedades são satisfeitas:*

1. I) *Se $x_j \neq \text{pr}(z)(u_i)$ e $\text{Deg}_{x_j}(\psi(u_i)) = 0$, a parcela (as parcelas) de a_j tem (têm) comprimento-de-suporte 2;*
2. II) *Se $x_j = \text{pr}(z)(u_i)$, $\text{Deg}_{x_j}(\psi(u_i)) = 0$ e $\text{Deg}_{x_j}(u_i) \geq 2$, apenas uma parcela de a_j tem comprimento-de-suporte 1, mas a outra (as outras) tem (têm) comprimento-de-suporte 2;*
3. III) *Se $x_j = \text{pr}(z)(u_i)$, $\text{Deg}_{x_j}(\psi(u_i)) = 0$ e $\text{Deg}_{x_j}(u_i) = 1$, então a_j tem comprimento-de-suporte 1.*

Na notação da definição 3.19 (respectivamente definição 3.20), dizemos que um elemento $g \in \mathcal{B}$ é completo com relação à T_{u_i} (respectivamente AT_{u_i}) quando:

$$\text{supp}(g) = (\bigcup_{i=1}^m \text{supp}(a_i)).$$

Definição 3.21. *Seja $f(x_1, \dots, x_m) = f_0 + \sum_{t=1}^n f_t u_t$ um polinômio de teste. Uma sequência Escalar- f é uma m -upla $(\lambda_1 \cdot 1_E, \dots, \lambda_m \cdot 1_E) \in (K \cdot 1_E)^m$, em que $\lambda_i = 0$ se $x_i \in Z$.*

Os dois próximos lemas podem ser deduzidos do teorema binomial.

Lema 3.22. *Seja $u(x_1) = x_1^m$ um polinômio de teste. Se $(\sum_{i=1}^m a_i)$ é uma sequência do Tipo- u e $(\lambda_1 \cdot 1_E)$ é uma sequência Escalar- f , então:*

- *dom $u(\sum_{i=1}^m a_i) = m! a_1 \dots a_m$;*
- *dom $u(\lambda_1 \cdot 1_E + \sum_{i=1}^m a_i) = m! a_1 \dots a_m$.*

Lema 3.23. *Seja $u(z_1) = z_1^m$ um polinômio de teste. Se $(\sum_{i=1}^m a_i)$ é uma sequência Quase-Tipo- u , então:*

- *dom $u(\sum_{i=1}^m a_i) = m! a_1 \dots a_m$.*

Lema 3.24. *Seja $f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{t=1}^n f_t u_t$ um polinômio de teste. Consideremos $u_i \in \{u_1, \dots, u_n\}$. Se há uma sequência do Tipo- u_i (A_1, \dots, A_m) , então:*

- *dom($u_i(A_1, \dots, A_m)$) = $\lambda \cdot g$, em que $\lambda \in K - \{0\}$ e $g \in \mathcal{B}$ é completo com relação a T_{u_i} ;*
- *Se $(\lambda_1 \cdot 1_E, \dots, \lambda_m \cdot 1_E) \in E^m$ é uma sequência Escalar- f , então $\text{dom}(u_i(\lambda_1 \cdot 1_E + A_1, \dots, \lambda_m \cdot 1_E + A_m)) = \text{dom}(u_i(A_1, \dots, A_m))$.*

Demonstração. Primeiramente, definamos $A_j = \sum_{k=1}^{\text{Deg}_{x_j} u_i} a_{j,k}$.

De acordo com a hipótese, existe uma sequência do Tipo- u_i T_{u_i} . Além disso, pelo Lema 3.22:

$$\begin{aligned} \text{dom}(u_i(A_1, \dots, A_m)) &= \text{dom}(u_i(\lambda_1 \cdot 1_E + A_1, \dots, \lambda_m \cdot 1_E + A_m)) = \\ &= \pm 2^l (\prod_{r=1}^m n_r!) \left(\prod_{(j,k(j)) \in \mathcal{X}} a_{j,k(j)} \right), \end{aligned}$$

em que

$$2l = \deg(\Psi(u_i)), n_r = \text{Deg}_{x_r} \text{beg}(u_i);$$

$$\mathcal{X}(j) := \{(j, k(j)) | k(j) = 1, \dots, \text{Deg}_{x_j} u_i\};$$

$$\mathcal{X} := \bigcup_{j=1}^m \mathcal{X}(j).$$

□

Repetindo a prova do Lema 3.24, é possível verificarmos que:

Lema 3.25. *Seja $f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{t=1}^n f_t u_t$ um polinômio de teste, em que $\deg_z \text{beg}(u_i) > 0$ para algum $u_i \in \{u_1, \dots, u_n\}$. Se existe uma sequência Quase-Tipo- u_i (A_1, \dots, A_m) , então:*

- $\text{dom}(u_i(A_1, \dots, A_m)) = \lambda.g$, em que $\lambda \in K - \{0\}$ e $g \in \mathcal{B}$ é completo com relação a AT_{u_i} ;
- Se $(\lambda_1.1_E, \dots, \lambda_m.1_E) \in E^m$ é uma sequência Escalar- f , então $\text{dom}(u_i(\lambda_1.1_E + A_1, \dots, \lambda_m.1_E + A_m)) = \text{dom}(u_i(A_1, \dots, A_m))$.

3.6 Termos líderes

Nesta seção, provaremos alguns resultados que serão usados nas próximas quatro seções.

Lema 3.26. *Sejam $f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{t=1}^n u_t$ um polinômio de teste e $(\lambda_1.1_E, \dots, \lambda_m.1_E)$ uma sequência Escalar- f . Se existe uma sequência do Tipo- $LT(f)$ (A_1, \dots, A_m) , então:*

- $\text{dom}(f(\lambda_1.1_E + A_1, \dots, \lambda_m.1_E + A_m)) = \text{dom}(LT(f)(A_1, \dots, A_m))$.

Além disso, se $n > 1$ e $u_i < LT(f)$, então:

- $wt(u_i(\lambda_1.1_E + A_1, \dots, \lambda_m.1_E + A_m)) < wt(LT(f)(A_1, \dots, A_m))$.

Demonstração. Se $n = 1$, a prova é uma consequência imediata do Lema 3.24. Suponhamos que $n > 1$ e consideremos $u_i < LT(f)$.

Para provarmos este lema, basta verificarmos que nenhuma parcela de $\text{dom}(u_i(\lambda_1.1_E + A_1, \dots, \lambda_m.1_E + A_m))$ é completa com relação a (A_1, \dots, A_m) .

- Caso 1: $\text{deg} u_i < \text{deg} LT(f)$. Neste caso, há uma variável x_j que aparece mais vezes em $LT(f)$ do que u_i . De acordo com o enunciado, (A_1, \dots, A_m) é uma sequência do Tipo- $LT(f)$. Desta forma, se $\text{Deg}_{x_j} \text{beg}(LT(f))$ é maior que $\text{Deg}_{x_j} \text{beg}(u_i)$, então a parcela (as parcelas) de $u_i(\lambda_1.1_E + A_1, \dots, \lambda_m.1_E + A_m)$ tem (têm), no máximo, $|supp(A_j)| - 2$ elementos de $supp(A_j)$. Se $\text{Deg}_{x_j}(\text{beg}(LT(f))) = \text{Deg}_{x_j}(\text{beg}(u_i))$, então a parcela (as parcelas) de $u_i(\lambda_1.1_E + A_1, \dots, \lambda_m.1_E + A_m)$ tem (têm), no máximo, $|supp(A_j)| - 1$ elementos de $supp(A_j)$.
- Caso 2: $\text{deg} u_i = \text{deg} LT(f)$ e $\text{beg}(u_i) <_{lex-rig} \text{beg}(LT(f))$. Nesta situação, há uma variável x_j que aparece mais vezes em $\text{beg}(LT(f))$ do que $\text{beg}(u_i)$. Sendo assim, a parcela (as parcelas) de $u_i(\lambda_1.1_E + A_1, \dots, \lambda_m.1_E + A_m)$ tem (têm), no máximo, $|supp(A_j)| - 2$ elementos de $supp(A_j)$.

- Caso 3: $\deg u_i = \deg LT(f)$, $\text{beg}(LT(f)) = \text{beg}(u_i)$, mas $\psi(u_i) <_{\text{lex-rig}} \psi(LT(f))$. Neste caso, há uma variável x_j que aparece em $\psi(LT(f))$, mas não aparece em $\psi(u_i)$. Portanto, a parcela (as parcelas) de $u_i(\lambda_1 \cdot 1_E + A_1, \dots, \lambda_m \cdot 1_E + A_m)$ tem (têm), no máximo, $|supp(A_j)| - 1$ elementos de $supp(A_j)$.

□

Lema 3.27. *Sejam $f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{t=1}^n u_t$ um polinômio de teste ($\deg_Z \text{beg}(LT(f)) > 0$) e $(\lambda_1 \cdot 1_E, \dots, \lambda_m \cdot 1_E)$ uma sequência Escalar- f . Se f não admite um termo-ruim e existe uma sequência Quase-Tipo- $LT(f)$ $AT_{LT(f)} = (A_1, \dots, A_m)$, então:*

- $\text{dom}(f(\lambda_1 1_E + A_1, \dots, \lambda_m 1_E + A_m)) = \text{dom}(LT(f)(A_1, \dots, A_m))$.

Além disso, se $n > 1$, e $u_i < LT(f)$:

$$\text{wt}(u_i(\lambda_1 \cdot 1_E + A_1, \dots, \lambda_m \cdot 1_E + A_m)) < \text{wt}(LT(f)(A_1, \dots, A_m)).$$

Demonstração. Se $n = 1$, a prova é imediata.

Notemos que $\text{Deg}_{pr(z)(LT(f))} \psi(LT(f)) = 0$. Suponhamos que $n > 1$ e consideremos $u_i < LT(f)$. Basta provarmos que nenhuma parcela de $\text{dom}(u_i(\lambda_1 \cdot 1_E + A_1, \dots, \lambda_m \cdot 1_E + A_m))$ é completa com relação a (A_1, \dots, A_m) .

- Caso 1: $\deg(u_i) < \deg(LT(f))$. A análise deste caso é similar ao Caso 1 do Lema 3.26.
- Caso 2: $\deg(u_i) = \deg(LT(f))$, mas $\text{beg}(u_i) <_{\text{lex-rig}} \text{beg}(LT(f))$.

Subcaso 2.1: Existe uma variável $x_j \in X - \{pr(z)(LT(f))\}$, tal que $\text{Deg}_{x_j} \text{beg}(u_i) < \text{Deg}_{x_j} \text{beg}(LT(f))$. Neste caso, não é difícil ver que nenhuma parcela de $u_i(\lambda_1 \cdot 1_E + A_1, \dots, \lambda_m \cdot 1_E + A_m)$ contém mais de $|supp(A_j)| - 2$ elementos de $supp(A_j)$.

Subcaso 2.2: $\text{Deg}_{pr(z)(LT(f))} \text{beg}(u_i) < \text{Deg}_{pr(z)(LT(f))} LT(f)$ e $\text{Deg}_x \text{beg}(LT(f)) \leq \text{Deg}_x \text{beg}(u_i)$ para qualquer $x \in X - \{pr(z)(LT(f))\}$.

Notemos que se $\text{Deg}_{pr(z)(LT(f))} \text{beg}(LT(f)) - \text{Deg}_{pr(z)(LT(f))} \text{beg}(u_i) = 1$, u_i e $LT(f)$ têm o mesmo multigrado, existe uma variável $x \in Y$, tal que $\text{Deg}_x \text{beg}(u_i) < \text{Deg}_x \text{beg}(LT(f))$, já que u_i não é um termo-ruim. Se $\text{Deg}_{pr(z)(LT(f))} \text{beg}(LT(f)) - \text{Deg}_{pr(z)(LT(f))} \text{beg}(u_i) = 1$, u_i e $LT(f)$ não têm o mesmo multigrado ($\text{Deg}_{pr(z)(LT(f))} \psi(u_i) = 1$), existe uma variável $x \in X - \{pr(z)(LT(f))\}$, tal que $\text{Deg}_x u_i < \text{Deg}_x LT(f)$. A parte restante da prova é similar ao Caso 1 do Lema 3.26.

Subcaso 2.2.1: $\text{Deg}_{pr(z)(LT(f))} \text{beg}(LT(f)) - \text{Deg}_{pr(z)(LT(f))} \text{beg}(u_i) > 1$. A análise e a conclusão deste caso são similares ao Subcaso 2.1.

Subcaso 2.2.2: $\text{Deg}_{pr(z)(LT(f))} \text{beg}(LT(f)) - \text{Deg}_{pr(z)(LT(f))} \text{beg}(u_i) = 1$, u_i e $LT(f)$ não têm o mesmo multigrado. Se $\text{Deg}_{pr(z)(LT(f))} \psi(u_i) = 0$, a análise é similar ao Caso 2 do Lema 3.26.

- Caso 3: $\deg u_i = \deg LT(f)$, $\text{beg}(u_i) = \text{beg}(LT(f))$, mas $\psi(u_i) <_{\text{lex-rig}} \psi(LT(f))$. A análise deste caso é similar ao Caso 3 do Lema 3.26.

□

Lema 3.28. *Sejam $f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{t=1}^t u_t$ um polinômio de teste ($\deg_Z \text{beg}(LT(f)) > 0$) e $(\lambda_1 \cdot 1_E, \dots, \lambda_m \cdot 1_E)$ uma sequência Escalar- f . Se f admite um termo-ruim e existe uma sequência Tipo-LBT(f) (A_1, \dots, A_m) , então:*

- $\text{dom}(f(\lambda_1 \cdot 1_E + A_1, \dots, \lambda_m \cdot 1_E + A_m)) = \text{dom}(LBT(f)(A_1, \dots, A_m))$.

Além disso, se $u_i \neq LBT(f)$:

$$\text{wt}(u_i(\lambda_1 \cdot 1_E + A_1, \dots, \lambda_m \cdot 1_E + A_m)) < \text{wt}(LBT(f)(A_1, \dots, A_m)).$$

Demonstração. Basta provarmos que se (A_1, \dots, A_m) é uma sequência Tipo-LBT(f) e $u_i \neq LBT(f)$, então nenhuma parcela de $\text{dom}(u_i(\lambda_1 \cdot 1_E + A_1, \dots, \lambda_m \cdot 1_E + A_m))$ é completa com relação a (A_1, \dots, A_m) .

- Caso 1: $u_i < LBT(f)$. Basta repetirmos a prova do Lema 3.26.
- Caso 2: $LBT(f) < u_i \leq LT(f)$, mas u_i e $LBT(f)$ não têm o mesmo multigrado. Primeiramente, notemos que $\deg(LBT(f)) = \deg(u_i)$. Nesta situação, deverá existir $x_i \in X$, tal que $\text{Deg}_{x_i} u_i < \text{Deg}_{x_i} LBT(f)$. A parte remanescente da prova é similar ao Caso 1 do Lema 3.26.
- Caso 3: $LBT(f) < u_i \leq LT(f)$, u_i e $LBT(f)$ têm o mesmo multigrado. Pela definição de termo ruim: $\deg(LT(f)) = \deg(u_i) = \deg(LBT(f))$ e $\Pi_1(Z)(LT(f)) = \Pi(Z)(LBT(f))$. Assim $\Pi(Z)(LBT(f)) \leq_{\text{lex-rig}} \Pi(Z)(u_i) \leq_{\text{lex-rig}} \Pi(Z)(LT(f))$.

Subcaso 3.1: $\Pi(Z)(u_i) = \Pi(Z)(LT(f))$. Neste caso, $\Pi(Y)(u_i) \leq_{\text{lex-rig}} \Pi(Y)(LT(f))$, porque $\text{beg}(u_i) \leq_{\text{lex-rig}} \text{beg}(LT(f))$. Por outro lado, $\Pi(Y)(LT(f)) <_{\text{lex-rig}} \Pi(Y)(LBT(f))$. Sendo assim, deverá existir $x_i \in Y$, tal que $\text{Deg}_{x_i} \text{beg}(u_i) < \text{Deg}_{x_i} \text{beg}(LBT(f))$. A conclusão da prova é similar à conclusão do Caso 2 do Lema 3.26.

Subcaso 3.2: $\Pi(Z)(u_i) <_{\text{lex-rig}} \Pi(Z)(LT(f))$. Nesse caso, $\Pi(Z)(LBT(f)) = \Pi(Z)(u_i)$. Pelas definições de termo ruim e termo ruim líder, deverá existir $x_i \in Y$, tal que $\text{Deg}_{x_i} \text{beg}(u_i) < \text{Deg}_{x_i} \text{beg}(LBT(f))$. A conclusão é similar à prova do Caso 2 do Lema 3.26.

□

Proposição 3.29. *Seja $f(x_1, \dots, x_m) = f_0 + \sum_{t=1}^n f_t u_t$ um polinômio de teste. Se existe uma sequência do Tipo-LT(f) $T_{LT(f)} = (A_1, \dots, A_m)$, então existe uma sequência Escalar- f $(\lambda_1 \cdot 1_E, \dots, \lambda_m \cdot 1_E)$, tal que:*

$$\text{dom}(f(\lambda_1 \cdot 1_E + A_1, \dots, \lambda_m \cdot 1_E + A_m)) = \lambda \cdot g,$$

em que $\lambda \in K - \{0\}$ e $g \in \mathcal{B}$ é completo com relação a $T_{LT(f)}$.

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $LT(f) = u_1$. De acordo com o Corolário 3.13, existe uma sequência Escalar- u_1 $(\lambda_1 \cdot 1_E, \dots, \lambda_m \cdot 1_E)$, tal que $f_1(\lambda_1 \cdot 1_E, \dots, \lambda_m \cdot 1_E) = \alpha \cdot 1_E \neq 0$.

Consideremos o polinômio $g = \sum_{t=1}^n u_t$. De acordo com a hipótese, existe uma sequência do Tipo- u_1 (A_1, \dots, A_m) . Desta forma, pelos Lemas 3.24 3.26, temos que

$$\text{dom}(g(\lambda_1 \cdot 1_E + A_1, \dots, \lambda_m \cdot 1_E + A_m)) = \text{dom}(u_1(A_1, \dots, A_m)) = \lambda \cdot g \neq 0,$$

em que $g \in \mathcal{B}$ é completo com relação a T_{u_1} . Além disso, se $n \geq 2$ e $u_i < u_1$:

$$wt(u_i(\lambda_1 \cdot 1_E + A_1, \dots, \lambda_m \cdot 1_E + A_m)) < wt(u_1(A_1, \dots, A_m)).$$

Por outro lado, pelo Lema 3.24:

$dom(u_1(A_1, \dots, A_m)) = dom(u_1(\lambda_1 \cdot 1_E + A_1, \dots, \lambda_m \cdot 1_E + A_m))$ e consequentemente:

$$\begin{aligned} dom(f(\lambda_1 \cdot 1_E + A_1, \dots, \lambda_m \cdot 1_E + A_m)) &= \\ f_1(\lambda_1 \cdot 1_E, \dots, \lambda_m \cdot 1_E) \cdot dom(u_1(A_1, \dots, A_m)) &= \alpha \cdot \lambda \cdot g. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.30. *Seja $f(x_1, \dots, x_m) = f_0 + \sum_{t=1}^n f_t u_t$ um polinômio de teste ($deg_{Zbeg}(LT(f)) > 0$) que não admite um termo ruim. Se existe uma sequência Quase-Tipo-LT(f) $AT_{LT(f)} = (A_1, \dots, A_m)$, então existe uma sequência Escalar- f $(\lambda_1 \cdot 1_E, \dots, \lambda_m \cdot 1_E)$, tal que:*

$$dom(f(\lambda_1 \cdot 1_E + A_1, \dots, \lambda_m \cdot 1_E + A_m)) = \lambda \cdot g,$$

em que $\lambda \in K - \{0\}$ e $g \in \mathcal{B}$ é completo com relação a $AT_{LT(f)}$.

Demonstração. Basta repetirmos a prova da Proposição 3.29, mas com duas ressalvas: no lugar do Lema 3.24, nós aplicaremos o Lema 3.25; no lugar do Lema 3.26, nós aplicaremos o Lema 3.27. □

Proposição 3.31. *Seja $f(x_1, \dots, x_m) = f_0 + \sum_{t=1}^n f_t u_t$ um polinômio de teste ($deg_{Zbeg}(LT(f)) > 0$). Se f admite um termo-ruim e existe uma sequência do Tipo-LBT(f) $T_{LBT(f)} = (A_1, \dots, A_m)$, então existe uma sequência Escalar- f $(\lambda_1 \cdot 1_E, \dots, \lambda_m \cdot 1_E)$, tal que:*

$$dom(f(\lambda_1 \cdot 1_E + A_1, \dots, \lambda_m \cdot 1_E + A_m)) = \lambda \cdot g,$$

em $\lambda \in K - \{0\}$ e $g \in \mathcal{B}$ é completo com relação a $T_{LBT(f)}$.

Demonstração. Basta repetirmos a prova da Proposição 3.29, mas com duas ressalvas: no lugar do Lema 3.26, nós aplicaremos o Lema 3.28; assumimos que $LBT(f) = u_1$. □

3.7 Caso 1: E_{can}

Nesta seção, descreveremos as identidades para a álgebra de Grassmann munida de sua graduação canônica.

Como sabemos, $(E_{can})_0 = Z(E) = \{a \in E \mid ab = ba \ \forall \ b \in E\}$ e $ab = -ba$ para todo $a, b \in (E_{can})_1$. O próximo Lema já foi discutido no Exemplo 1.27.

Lema 3.32. *Os polinômios*

$$[y_1, y_2], [y_1, z_2] \text{ e } z_1 z_2 + z_2 z_1$$

são identidades polinomiais para E_{can} .

Uma consequência do fato que $f(z_1, z_2) = z_1 z_2 + z_2 z_1 \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_{can})$ é a seguinte resultado:

Corolário 3.33. *O polinômio z_1^k é uma identidade polinomial para E_{can} quando $k > 1$.*

Demonstração. É suficiente notarmos que $2^{-1}f(z_1, z_1) \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_{can})$. \square

O próximo teorema é o resultado principal desta seção.

Teorema 3.34. *Seja K um corpo de $\text{char}K = p > 2$ com $|K| = q$ elementos. As identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas de E (com graduação induzida por ϕ_0) seguem de:*

$$[y_1, y_2], [y_1, z_2], z_1 z_2 + z_2 z_1 \text{ e } y_1^{pq} - y_1^p.$$

Demonstração. Seja I o $T_{\mathbb{Z}_2}$ -ideal gerado por $[y_1, y_2], [y_1, z_2], z_1 z_2 + z_2 z_1$ e $y_1^{pq} - y_1^p$. Pelos Lemas 3.32 and 3.33, não é difícil vermos que $I \subset T_{\mathbb{Z}_2}(E_{can})$.

Suponhamos, por contradição, que exista $f = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_{can}) - I$, em que $v_1, \dots, v_n \in Pr(X)$ é (são) distinto(s). Notemos que f não é um p -polinômio.

De acordo com o Corolário 3.33, o polinômio $z_1^k \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_{can})$ sempre que $k > 1$. Notemos que $[z_1, z_2] \equiv 2z_1 z_2 \pmod{I}$.

Sendo assim, f pode ser um polinômio de teste dos seguintes tipos:

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \sum_{i=1}^l f_i y_1^{A_{i,1}} \cdots y_m^{A_{i,m}} [z_1, z_2] \cdots [z_{n-1}, z_n] \text{ se } n \text{ é par ou,} \\ & f = f_0 + \sum_{i=1}^l f_i y_1^{A_{i,1}} \cdots y_m^{A_{i,m}} z_1 \text{ ou,} \\ f &= f_0 + \sum_{i=1}^l f_i y_1^{A_{i,1}} \cdots y_m^{A_{i,m}} z_1 [z_2, z_3] \cdots [z_{n-1}, z_n] \text{ se } n \text{ é ímpar maior que 1.} \end{aligned}$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $LT(f) = y_1^{A_{1,1}} \cdots y_m^{A_{1,m}}$; $A_{1,1}, \dots, A_{1,m} > 0$ e $f = f(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n)$.

Notemos que f não admite um termo ruim. Quando n é par, esta conclusão segue da definição de termo ruim. Quando n é ímpar, a conclusão segue da definição de termo ruim e da quarta propriedade de termo ruim enunciada no Lema 3.18.

O restante da prova será feita em casos.

Para n par. Nesta situação, $(e_1 e_2 + \cdots + e_{2(b_1)-1} e_{2(b_1)}, \dots,$

$$e_{2(\sum_{j=1}^{m-1} b_j)+1} e_{2(\sum_{j=1}^{m-1} b_j+1)} + \cdots + e_{2(\sum_{j=1}^m b_j)-1} e_{2(\sum_{j=1}^m b_j)}, e_{M+1}, \dots, e_{M+n}),$$

em que $b_j = A_{1,j}$ e $M = 2(b_1 + \cdots + b_m)$, é uma sequência do Tipo- $LT(f)$.

Por outro lado, pela Proposição 3.29, nós temos que $f \notin T_{\mathbb{Z}_2}(E_{can})$. Isto é uma contradição.

Para n ímpar. Nesta situação, a sequência acima é uma sequência Quase-Tipo- $LT(f)$. Entretanto, pela Proposição 3.30, nós temos que $f \notin T_{\mathbb{Z}_2}(E_{can})$. Novamente uma contradição.

\square

3.8 Caso 2: E_∞

Nesta seção, nós descreveremos as identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas para E_∞ .

Teorema 3.35. *Seja K um corpo de $\text{char}K = p > 2$ com $|K| = q$ elementos. As identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas de E (com graduação induzida por ϕ_∞) seguem de:*

$$[x_1, x_2, x_3], z_1^p \text{ e } y_1^{pq} - y_1^p.$$

Demonstração. Seja I o $T_{\mathbb{Z}_2}$ -ideal gerado pelas três identidades acima. É claro que $I \subset T_{\mathbb{Z}_2}(E_\infty)$. Suponhamos, por absurdo, que $I \subsetneq T_{\mathbb{Z}_2}(E_\infty)$. Sendo assim, pela Proposição 3.15, há um polinômio de teste $f = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i u_i \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_\infty) - I$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que:

$$LT(f) = y_1^{a_1} \cdots y_{n_1}^{a_{n_1}} y_{n_1+1}^{a_{n_1+1}} \cdots y_{n_2}^{a_{n_2}} z_1^{b_1} \cdots z_{m_1}^{b_{m_1}} z_{m_1+1}^{b_{m_1+1}} \cdots z_{m_2}^{b_{m_2}} \\ [y_{n_1+1}, y_{n_1+2}] \cdots [y_{n_2}, y_{n_2+1}] \cdots [y_{l_1}, z_{m_1+1}] \cdots [z_{m_2-1}, z_{m_2}] \cdots [z_{l_2-1}, z_{l_2}]$$

em que $n_1 < n_2 < l_1, m_1 < m_2 < l_2$; $a_1, \dots, a_{n_2}, b_1, \dots, b_{m_2} > 0$ e $f = f(y_1, \dots, y_{l_1}, z_1, \dots, z_{l_2})$.

Consideremos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \phi : \{y_1, \dots, y_{l_1}, z_1, \dots, z_{l_2}\} &\rightarrow E \\ y_1 &\mapsto \sum_{l=1}^{a_1} e_{4l-2} e_{4l} \\ &\vdots \\ y_{n_1} &\mapsto \sum_{l=a_1+\dots+a_{n_1-1}+1}^{a_1+\dots+a_{n_1}} e_{4l-2} e_{4l} \\ y_{n_1+1} &\mapsto e_{4(\sum_{i=1}^{n_1} a_i)+2} + \sum_{l=1}^{a_{n_1+1}} e_{4(\sum_{i=1}^{n_1} a_i)+4l} e_{4(\sum_{i=1}^{n_1} a_i)+4l+2} \\ &\dots \\ y_{n_2} &\mapsto e_{4(\sum_{i=1}^{n_2-1} a_i)+2(n_2-n_1)} + \sum_{l=1}^{a_{n_2}} e_{4(\sum_{i=1}^{n_2-1} a_i)+2(n_2-n_1)+4l-2} e_{4(\sum_{i=1}^{n_2-1} a_i)+2(n_2-n_1)+4l} \\ y_{n_2+1} &\mapsto e_{4(\sum_{i=1}^{n_2} a_i)+2(n_2-n_1+1)} \\ &\dots \\ y_{l_1} &\mapsto e_{4(\sum_{i=1}^{n_2} a_i)+2(l_1-n_1)} \\ z_1 &\mapsto \sum_{l=1}^{b_1} e_{2l-1} e_{M+2l} \\ &\vdots \\ z_{m_1} &\mapsto \sum_{l=b_1+\dots+b_{m_1-1}+1}^{b_1+\dots+b_{m_1}} e_{2l-1} e_{M+2l} \\ z_{m_1+1} &\mapsto e_{2(\sum_{i=1}^{m_1} b_i)+1} + \sum_{l=b_1+\dots+b_{m_1}+1}^{b_1+\dots+b_{m_1+1}} e_{2l+1} e_{M+2l} \\ &\dots \\ z_{m_2} &\mapsto e_{2(\sum_{i=1}^{m_2-1} b_i)+2(m_2-m_1)-1} + \sum_{l=b_1+\dots+b_{m_2-1}+1}^{b_1+\dots+b_{m_2}} e_{2(l+m_2-m_1)-1} e_{M+2l} \\ z_{m_2+1} &\mapsto e_{2(\sum_{i=1}^{m_2} b_i)+m_2-m_1+1} \\ &\dots \\ z_{l_2} &\mapsto e_{2(\sum_{i=1}^{m_2} b_i)+2(l_2-m_1)-1}, \end{aligned}$$

em que $M = 4(\sum_{i=1}^{n_2} a_i) + 2(l_1 - n_1)$.

Notemos que $(\phi(y_1), \dots, \phi(y_{l_1}), \phi(z_1), \dots, \phi(z_{l_2}))$ é uma sequência do Tipo- $LT(f)$. De acordo com a Proposição 3.29, temos que $f \notin T_{\mathbb{Z}_2}(E_\infty)$ o que é uma contradição. \square

3.9 Caso 3: E_{k^*}

Nesta seção, descreveremos as identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas de E_{k^*} .

Lema 3.36. *O polinômio*

$$z_1 \cdots z_{k+1} \tag{3.1}$$

é uma identidade para E_{k^*} .

Demonstração. Notemos que $z_1 \dots z_{k+1}$ é um polinômio multilinear. Assim basta avaliá-lo em \mathcal{B} .

Com efeito, seja $S = \{a_1, \dots, a_{k+1}\} \subset \mathcal{B} \cap (E_{k^*})_1$ um multiconjunto. Note-mos que há dois elementos $a_1, a_2 \in S$, tais que $\text{supp}(a_1) \cap \text{supp}(a_2) \neq \emptyset$. Logo, $a_1 \dots a_{k+1} = 0$ o que mostra o resultado. \square

Corolário 3.37. Quando $p > k$, a identidade z_1^p é consequência de $z_1 \dots z_{k+1}$.

Corolário 3.38. O polinômio

$$z_1^{a_1} \dots z_n^{a_n} [y_1, y_2] \dots [y_{2l-1}, y_{2l}] [z_{q_1}, z_{q_2}] \dots [z_{q_{2m-1}}, z_{q_{2m}}],$$

em que $l \geq 0; a_1, \dots, a_n > 0; q_1 < \dots < q_{2m}$ e $2m + \sum_{i=1}^n a_i \geq k + 1$ é consequência de $z_1 \dots z_{k+1}$. Além disso, o polinômio

$$z_1^{a_1} \dots z_n^{a_n} [y_1, y_2] \dots [y_{2l-1}, z_{q_1}] [z_{q_2}, z_{q_3}] \dots [z_{q_{2m}}, z_{q_{2m+1}}],$$

em que $l \geq 1; a_1, \dots, a_n > 0; q_1 < \dots < q_{2m+1}$ e $2m + 1 + \sum_{i=1}^n a_i \geq k + 1$ também é consequência de $z_1 \dots z_{k+1}$.

Definição 3.39. Um elemento $a \in SS$ é chamado do Tipo-1 (ou $u \in SS1$) quando:

- $\text{deg}_Z(\text{beg}(a)) + \text{deg}_Z(\psi(a)) \leq k$.

A próxima proposição é uma versão da Proposição 3.15 para E_{k^*} .

Proposição 3.40. Seja $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ uma combinação linear de elementos de $\text{Pr}(X)$. Então:

$$f \equiv \sum_{i=1}^n f_i u_i \pmod{\langle [x_1, x_2, x_3], z_1^p, y_1^{pq} - y_1^p, z_1 \dots z_{k+1} \rangle_{T_{\mathbb{Z}_2}}},$$

em que f_1, \dots, f_n são p -**polinômios** e $u_1, \dots, u_n \in SS1$ é (são) distinto(s). Além disso, $\langle [x_1, x_2, x_3], z_1^p, y_1^{pq} - y_1^p, z_1 \dots z_{k+1} \rangle_{T_{\mathbb{Z}_2}} \subset T_{\mathbb{Z}_2}(E_{k^*})$.

Teorema 3.41. Seja K um corpo finito de $\text{char}K = p > 2$ com $|K| = q$ elementos. As identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas de E (com graduação induzida por ϕ_{k^*}) seguem de:

$$[x_1, x_2, x_3], z_1^p, z_1 \dots z_{k+1} \text{ e } y_1^{pq} - y_1^p.$$

Demonstração. Seja I o $T_{\mathbb{Z}_2}$ -ideal gerado pelas quatro identidades acima. Suponhamos, por contradição, que $I \subsetneq T_{\mathbb{Z}_2}(E_{k^*})$. De acordo com a Proposição 3.40, existe um polinômio de teste $f = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i u_i \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_{k^*}) - I$, em que $u_1, \dots, u_n \in SS1 - \{1\}$ é (são) distinto(s).

Nós podemos supor, sem perda de generalidade, que:

$$LT(f) = y_1^{a_1} \dots y_{n_1}^{a_{n_1}} y_{n_1+1}^{a_{n_1+1}} \dots y_{n_2}^{a_{n_2}} z_1^{b_1} \dots z_{m_1}^{b_{m_1}} z_{m_1+1}^{b_{m_1+1}} \dots z_{m_2}^{b_{m_2}} \\ [y_{n_1+1}, y_{n_1+2}] \dots [y_{n_2}, y_{n_2+1}] \dots [y_{l_1}, z_{m_1+1}] \dots [z_{m_2-1}, z_{m_2}] \dots [z_{l_2-1}, z_{l_2}],$$

em que $n_1 < n_2 < l_1, m_1 < m_2 < l_2; a_1, \dots, a_{n_2}, b_1, \dots, b_{m_2} > 0$ e $f = f(y_1, \dots, y_{l_1}, z_1, \dots, z_{l_2})$.

Consideremos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned}
\phi : \{y_1, \dots, y_{l_1}, z_1, \dots, z_{l_1}\} &\rightarrow E \\
y_1 &\mapsto \sum_{l=1}^{a_1} e_{k+2l-1} e_{k+2l} \\
y_{n_1} &\mapsto \sum_{l=a_1+\dots+a_{n_1-1}+1}^{\dots+a_{n_1}} e_{k+2l-1} e_{k+2l} \\
y_{n_1+1} &\mapsto e_{k+2(a_1+\dots+a_{n_1})+1} + \sum_{l=1}^{a_{n_1+1}} e_{k+2(a_1+\dots+a_{n_1})+2l} e_{k+2(a_1+\dots+a_{n_1})+2l+1} \\
&\dots \\
y_{n_2} &\mapsto e_{k+2(a_1+\dots+a_{n_2-1})+(n_2-n_1)} + \\
\sum_{l=1}^{a_{n_2}} e_{k+2(a_1+\dots+a_{n_2-1})+(n_2-n_1)+2l-1} e_{k+2(a_1+\dots+a_{n_2-1})+(n_2-n_1)+2l} \\
y_{n_2+1} &\mapsto e_{k+2(a_1+\dots+a_{n_2-1}+a_{n_2})+(n_2-n_1)+1} \\
&\dots \\
y_{l_1} &\mapsto e_{k+2(a_1+\dots+a_{n_2-1}+a_{n_2})+(l_1-n_1)} \\
z_1 &\mapsto \sum_{l=1}^{b_1} e_l e_{Q+l} \\
z_{m_1} &\mapsto \sum_{l=b_1+\dots+b_{m_1-1}+1}^{\dots+b_{m_1}} e_l e_{Q+l} \\
z_{m_1+1} &\mapsto e_{b_1+\dots+b_{m_1}+1} + \sum_{l=b_1+\dots+b_{m_1}+1}^{b_1+\dots+b_{m_1}+1} e_{l+1} e_{Q+l} \\
&\dots \\
z_{m_2} &\mapsto e_{b_1+\dots+b_{m_2-1}+(m_2-m_1)} + \sum_{l=1}^{b_{m_2}} e_{l+b_1+\dots+b_{m_2-1}+(m_2-m_1)} e_{Q+b_1+\dots+b_{m_2-1}+l} \\
z_{m_2+1} &\mapsto e_{T+1} \\
&\dots \\
z_{l_2} &\mapsto e_{T+l_2-m_2},
\end{aligned}$$

em que $Q = k + 2(a_1 + \dots + a_{n_2-1} + a_{n_2}) + (l_1 - n_1)$ e $T = b_1 + \dots + b_{m_2-1} + b_{m_2} + (m_2 - m_1)$.

Notemos que $(\phi(y_1), \dots, \phi(y_{l_1}), \phi(z_1), \dots, \phi(z_{l_2}))$ é uma sequência do Tipo- $LT(f)$. Pela Proposição 3.29, temos que $f \notin T_{\mathbb{Z}_2}(E_{k^*})$; absurdo. \square

3.10 Caso 4: E_k

Nesta seção, descreveremos as identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas de E_k . Inicialmente, apresentaremos algumas identidades.

Lema 3.42. *Os seguintes polinômios*

1. a) $h_1(y_1, \dots, y_{k+1}, x) = [y_1, y_2] \dots [y_{k+1}, x]$, em que k é par e $x \in X - \{y_1, \dots, y_k, y_{k+1}\}$ (1);
2. b) $h_2(y_1, \dots, y_{k+1}) = [y_1, y_2] \dots [y_k, y_{k+1}]$, em que k é ímpar (2),

são identidades polinomiais para E_k .

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $k > 0$ seja um número par. Notemos que o polinômio h_1 é multilinear. Assim, é suficiente avaliá-lo em \mathcal{B} . Sejam $S = \{a_1, \dots, a_{k+1}\} \subset \mathcal{B} \cap (E_k)_0$ um multiconjunto e $S' = \{b_1\} \subset \mathcal{B} \cap (E_k)_{\alpha(x)}$. Se algum elemento de $S \cup S'$ têm comprimento-de-suporte par, é claro que $h_1(a_1, \dots, a_{k+1}, b_1) = 0$. Por outro lado, se todos os elementos de S têm comprimento-de-suporte ímpar, não é difícil vermos que existem $a_i, a_j \in S$, tais que $\text{supp}(a_i) \cap \text{supp}(a_j) \neq \{\}$. Portanto, $h_1(a_1, \dots, a_{k+1}, b_1) = 0$. \square

Sejam $T' = (i_1, \dots, i_l)$ e $T = (j_1, \dots, j_t)$ duas seqüências de inteiros positivos (estritamente crescentes), tais que t é par, $l + t = m$ e $\widehat{m} = \{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_t\}$. Definimos:

$$f_T(z_1, \dots, z_m) = z_{i_1} \dots z_{i_l} [z_{j_1}, z_{j_2}] \dots [z_{j_{t-1}}, z_{j_t}].$$

Do mesmo modo, sejam $T' = (i_1, \dots, i_l)$ e $T = (j_1, \dots, j_t)$ duas seqüências de inteiros positivos (estritamente crescentes), tais que t é ímpar, $l + t = m$ e $\widehat{m} = \{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_t\}$. Definimos:

$$h_T(y_1, z_1, \dots, z_m) = z_{i_1} \dots z_{i_l} [y_1, z_{j_1}] \dots [z_{j_{t-1}}, z_{j_t}].$$

Definição 3.43. *Seja $m \geq 2$. Definimos:*

$$g_m(z_1, \dots, z_m) = \sum_{|T| \text{ é par}} (-2)^{\frac{-|T|}{2}} f_T(z_1, \dots, z_m).$$

Além disso, definimos: $g_1(z) = z$.

Lema 3.44. *(da Silva e Di Vincenzo. Lema 17, de [13]) Seja I o $T_{\mathbb{Z}_2}$ -ideal gerado por $[x_1, x_2, x_3]$. As seguintes equivalências (módulo I) são válidas:*

- a) $g_{m+1}(z_1, \dots, z_{m+1}) \equiv z_1 g_m(z_2, \dots, z_{m+1}) + (-2)^{-1} [z_1, z_2] g_{m-1}(z_3, \dots, z_{m+1}) + (-2)^{-1} (\sum_{i=3}^m z_2 \dots z_{i-1} [z_1, z_i] g_{m-i+1}(z_{i+1}, \dots, z_{m+1})) + (-2)^{-1} z_2 \dots z_m [z_1, z_{m+1}];$
- b) $g_{m+1}(z_1, \dots, z_{m+1}) \equiv g_m(z_2, \dots, z_m) z_{m+1} + (-2)^{-1} [z_m, z_{m+1}] g_{m-1}(z_1, \dots, z_{m-1}) + (-2)^{-1} (\sum_{i=2}^{m-1} z_1 \dots z_{i-1} [z_i, z_{m+1}] g_{m-i}(z_{i+1}, \dots, z_m)) + (-2)^{-1} z_2 \dots z_m [z_1, z_{m+1}].$

Seja $S \subset \mathbb{N} - \{0\}$. Consideremos a seguinte aplicação:

$$\begin{cases} \phi_S : F\langle X \rangle \rightarrow F\langle X \rangle \\ y_i \mapsto y_{i+|S|} \\ z_i \mapsto y_i \quad \text{quando } i \in S \\ z_i \mapsto z_i \quad \text{quando } i \notin S \end{cases}$$

Notemos que a aplicação ϕ_S pode ser estendida a um endomorfismo (ordinário) de $K\langle X \rangle$. Denotaremos este endomorfismo também por ϕ_S . Apesar do endomorfismo ϕ_S ser ordinário, notemos que $\phi_S(\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_{T_{\mathbb{Z}_2}}) \subset \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_{T_{\mathbb{Z}_2}}$.

Lema 3.45. *Um polinômio multilinear $f(z_1, \dots, z_m)$ é uma identidade graduada para E_k se, e somente se, $\phi_S(f)$ é uma identidade para E_{can} para todo $S \subset \{1, \dots, m\}$ com $|S| \leq k$ elemento(s).*

Demonstração. O caso em que $k = 0$ é imediato.

Daqui para frente, suporemos que $k > 0$. Seja $f(z_1, \dots, z_m)$ uma identidade para E_k . Para fixarmos as ideias, suponhamos que $S = \widehat{n} \subset \widehat{m}$. Sendo assim, $(\phi_S(f)) = f(y_1, \dots, y_n, z_{n+1}, \dots, z_m)$.

Não é difícil vermos que $\phi_S(f)$ é um polinômio multilinear, e assim, basta verificarmos, a menos de endomorfismo \mathbb{Z}_2 -graduado de E_{can} , que:

$$(\phi_S(f))(e_1 e_{k+1}, \dots, e_n e_{k+n}, e_{k+n+1}, \dots, e_{k+m}) = 0.$$

Haja vista que $f(z_1, \dots, z_m) \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_k)$, temos:

$$\begin{aligned} (\phi_S(f))(e_1 e_{k+1}, \dots, e_n e_{k+n}, e_{k+n+1}, \dots, e_{k+m}) &= \\ f(e_1 e_{k+1}, \dots, e_n e_{k+n}, e_{k+n+1}, \dots, e_{k+m}) &= 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que $\phi_S(f(z_1, \dots, z_m)) \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_{can})$ para todo $S \subset \{1, \dots, m\}$ com $|S| \leq k$. Suponhamos, por absurdo, que $f(z_1, \dots, z_m)$ não seja uma identidade para E_k . Visto que f é um polinômio multilinear, existem elementos $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{B} \cap (E_k)_1$, tais que $f(a_1, \dots, a_m) \neq 0$. É claro que $supp(a_i) \cap supp(a_j) = \emptyset$ quando i e j são distintos.

Definamos o seguinte subconjunto de \widehat{m} : $B = \{i \in \widehat{m}; |supp(a_i)| \text{ é par}\}$ e façamos $S = B$. Conforme a hipótese, temos que $(\phi_S(f)) \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_{can})$. Ora, mas $(\phi_S(f))(a_1, \dots, a_m) = f(a_1, \dots, a_m) \neq 0$ o que é uma contradição. \square

Notemos que $g_2(z_1, z_2) = z_1 z_2 + (-2)^{-1}[z_1, z_2] = 2^{-1}(z_1 z_2 + z_2 z_1) \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_0)$. Mais geralmente, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.46. *(da Silva e Di Vincenzo. Proposição 18, de [13]) O polinômio $g_{k+2}(z_1, \dots, z_{k+2})$ é uma identidade para E_k .*

Demonstração. Com base no Lema 3.45, para demonstrarmos esta proposição, basta provarmos que $\phi_S(g(z_1, \dots, z_{k+2})) \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_{can})$ para todo $S \subset \{1, \dots, k+2\}$ com $|S| \leq k$.

Suponhamos que $k+2 = 3$. Por definição, temos:

$$g_3(z_1, z_2, z_3) = z_1 z_2 z_3 + (-2)^{-1} z_1 [z_2, z_3] + (-2)^{-1} z_2 [z_1, z_3] + (-2)^{-1} z_3 [z_1, z_2].$$

Seja $S \subset \{1, 2, 3\}$ um subconjunto com um elemento. Suponhamos que $S = \{1\}$. Sendo assim:

$$\begin{aligned} \phi_S(g_3(z_1, z_2, z_3)) &= y_1 z_2 z_3 + (-2)^{-1} y_1 [z_2, z_3] + (-2)^{-1} z_2 [y_1, z_3] + \\ &(-2)^{-1} z_3 [y_1, z_2] \equiv 0 \pmod{T_{\mathbb{Z}_2}(E_{can})}. \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 3.45, temos que $g_3(z_1, z_2, z_3) \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_1)$. Suponhamos, por indução forte, que a proposição seja válida para $g_4 \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_2), \dots, g_{k+1} \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_{k-1})$.

Consideremos $S \subset \{1, \dots, k+2\}$ um conjunto com $|S| \leq k$ elementos.

Caso 1: Suponhamos que $k+2 \in S$. Pelo item b do Lema 3.44, temos que $\phi_S(g_{k+2}(z_1, \dots, z_{k+2})) \equiv \phi_S(g_{k+1}(z_2, \dots, z_{k+1})) y_{k+2} \pmod{T_{\mathbb{Z}_2}(E_{can})}$, pois $[z, y_{k+2}], [y, y_{k+2}] \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_{can})$. Por outro lado, pela hipótese de indução e o Lema 3.45, temos que $\phi_S(g_{k+1}(z_1, \dots, z_{k+1})) = \phi_{S-\{k+2\}}(g_{k+1}(z_1, \dots, z_{k+1})) \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_{can})$.

Caso 2: Suponhamos que $1 \in S$. Este caso é análogo ao Caso 1, mas com uma exceção: o item b do Lema 3.44 será substituído pelo item a do Lema 3.44.

Caso 3: Suponhamos que $1, k+2 \notin S$.

Subcaso 3.1: $S = \{2, 3, \dots, k+1\}$. Este item é uma aplicação imediata do item a do Lema 3.44. Ao efetuarmos os cálculos, recairemos na seguinte equivalência: $\phi_S(g_{k+2}) = z_1 y_2 \dots y_{k+1} z_{k+2} - y_2 \dots y_{k+1} z_1 z_{k+2} \equiv 0 \pmod{T_{\mathbb{Z}_2}(E_{can})}$.

Subcaso 3.2: $S \subsetneq \{2, \dots, k+1\}$ e $|S| \leq k$. Consideremos $j \in \{2, \dots, k+1\} - S$ o maior possível. Aplicando de forma conveniente o Lema 3.44, concluiremos que $\phi_S(g_{k+2}(z_1, \dots, z_{k+2})) \equiv 0 \pmod{T_{\mathbb{Z}_2}(E_{can})}$. Isto completa a demonstração.

□

Corolário 3.47. *Os polinômios multilineares $[g_{k+1}, y]$ e $g_{k+1}[z_{k+2}, y]$ são identidades graduadas para E_k .*

Demonstração. Os polinômios citados acima são multilineares. Por isto, é suficiente avaliá-los em elementos de \mathcal{B} . Se $k = 0$, é claro que $[z_1, y], z_1[z_2, y] \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_0)$.

Suponhamos que $k = 1$. Observemos que $g_2 = z_1 z_2 + (-2)^{-1}[z_1, z_2] \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_0)$. Notemos que se $a \in \mathcal{B} \cap (E_1)_0$ (respectivamente $a \in \mathcal{B} \cap (E_1)_1$) e $|supp(a)|$ é ímpar (respectivamente $|supp(a)|$ é par), então $supp(a) \cap \{e_1\} = \{e_1\}$. Com isto, temos que se $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{B} \cap (E_1)_1$ e $a_4 \in \mathcal{B} \cap (E_1)_0$, então $[g_2(a_1, a_2), a_4] = g_2(a_1, a_2)[a_3, a_4] = 0$.

Suponhamos que $k \geq 2$. Seja E' a álgebra de Grassmann unitária gerada por $V' = \{e_1, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n, \dots\}$ (\widehat{e}_i significa que $e_i \notin V$). Notemos que $E' = (E' \cap (E_k)_0) \oplus (E' \cap (E_k)_1)$. Por outro lado, E' e E_{k-1} são superálgebras isomorfas e portanto $g_{k+1} \in T_{\mathbb{Z}_2}(E')$. Repetindo o argumento feito para E_1 , segue-se que $[g_{k+1}, y], g_{k+1}[z_{k+2}, y] \in T_{\mathbb{Z}_2}(E)$, como desejado. □

Corolário 3.48. *Se $p > k + 1$, a identidade z^p é consequência da identidade g_{k+2} .*

Demonstração. De fato, notemos que $g_{k+2}(z_1, \dots, z_1, z_2) = z_1^{k+1} z_2 + (k+1)(-2)^{-1} z_1^k [z_1, z_2]$. Logo, $g_{k+2}(z_1, \dots, z_1) = z_1^{k+2}$. Sendo assim, quando $p \geq k + 2$, concluímos que o polinômio z^p é uma consequência da identidade graduada g_{k+2} . □

Corolário 3.49. *Os seguintes polinômios são identidades para E_k :*

- $h_3 = g_{k-l+2}(z_1, \dots, z_{k-l+2})[y_1, y_2] \dots [y_{l-1}, y_l]$, em que $0 \leq l \leq k$ e l é um número par (3);
- $h_4 = g_{k-l+2}(z_1, \dots, z_{k-l+2})[z_{k-l+3}, y_1][y_2, y_3] \dots [y_{l-1}, y_l]$, em que $1 \leq l \leq k$ e l é um número ímpar (4);
- $h_5 = [g_{k-l+2}(z_1, \dots, z_{k-l+2}), y_1] \dots [y_{l-1}, y_l]$, em que $1 \leq l \leq k$ e l é um número ímpar (5).

Demonstração. Há dois casos a considerar:

- Se l é ímpar. De acordo com o Corolário 3.47, $g_{k-l+2}[y, z_{k-l+3}], [g_{k-l+2}, y] \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_{k-l+1})$. Por outro lado, não é difícil vermos que $g_{k-l+2}[y, z_{k-l+3}] \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_{k-l+1})$ (respectivamente $[g_{k-l+2}, y] \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_{k-l+1})$) se, e só se, $h_4 \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_k)$ (respectivamente $h_5 \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_k)$).
- Se l é par. Com base na Proposição 3.46, $g_{k-l+2} \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_{k-l})$. Por um raciocínio análogo ao caso anterior, temos que $g_{k-l+2} \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_{k-l})$ se, e só se, $h_3 \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_k)$.

Analisado estes dois casos, segue-se o resultado. □

Corolário 3.50. *Seja I o $T_{\mathbb{Z}_2}$ -ideal gerado pelas identidades graduadas do tipo (3). Na superálgebra $K\langle X \rangle$, vale a seguinte equivalência:*

$$z_1 z_2 \dots z_{k-l+2} [y_1, y_2] \dots [y_{l-1}, y_l] \equiv a.b \text{ mod } I,$$

em que $0 \leq l \leq k$, l é um número par e

- $a(z_1, \dots, z_{k-l+2}) = (\sum_{|T| \text{ é par e não-vazio}} (-2)^{-\frac{|T|}{2}} f_T(z_1, \dots, z_{k-l+2}));$
- $b(y_1, \dots, y_l) = [y_1, y_2] \dots [y_{l-1}, y_l].$

Corolário 3.51. *Seja I o $T_{\mathbb{Z}_2}$ -ideal gerado pelas identidades graduadas do tipo (4). Na superálgebra $K\langle X \rangle$, vale a seguinte equivalência:*

$$z_1 z_2 \dots z_{k-l+2} [z_{k-l+3}, y_1] \dots [y_{l-1}, y_l] \equiv a.b \text{ mod } I,$$

em que $1 \leq l \leq k$, l é um número ímpar e

- $a(z_1, \dots, z_{k-l+2}) = (\sum_{|T| \text{ é par e não-vazio}} (-2)^{-\frac{|T|}{2}} f_T(z_1, \dots, z_{k-l+2}));$
- $b(z_{k-l+3}, y_1, \dots, y_l) = [z_{k-l+3}, y_1] \dots [y_{l-1}, y_l].$

Definição 3.52. *Um elemento $a \in SS$ é chamado do tipo-2 (ou $u \in SS2$) quando:*

- $deg_Y(\psi(a)) \leq k$ e $deg_Z(beg(a)) + deg_Y(\psi(a)) \leq k + 1.$

Uma consequência do Lema 3.42 e dos Corolários 3.50 e 3.51 é o seguinte resultado.

Lema 3.53. *Seja u um elemento de SS com a seguinte propriedade:*

$$deg_Z(beg(u)) + deg_Y(\psi(u)) \geq k + 2 \text{ ou } deg_Y(\psi(u)) = k + 1.$$

Seja I o $T_{\mathbb{Z}_2}$ -ideal gerado pelas identidades $[x_1, x_2, x_3]$, (1), (2), as identidades graduadas dos tipos (3) e (4). Então, módulo I , u é uma combinação linear de elementos de $SS2$.

Demonstração. Primeiramente, notemos que se $deg_Y(\psi(u)) \geq k + 1$, então u é consequência de (1) ou (2). Logo, $u \equiv 0 \text{ mod } I$.

Daqui para frente, assumiremos que $deg_Y(\psi(u)) < k + 1$.

Para simplificar, suponhamos que:

$$u = y_1^{a_1} \dots y_{n_1}^{a_{n_1}} y_{n_1+1}^{a_{n_1+1}} \dots y_{n_2}^{a_{n_2}} z_1^{b_1} \dots z_{m_1}^{b_{m_1}} z_{m_1+1}^{b_{m_1+1}} \dots z_{m_2}^{b_{m_2}} [y_{n_1+1}, y_{n_1+2}] \dots [y_{n_1+l}, z_{m_1+1}] \dots [z_{m_2-1}, z_{m_2}] [z_{m_2+1}, z_{m_2+2}] \dots [z_{l_2-1}, z_{l_2}],$$

em que $m_1 < m_2 < l_2$, $n_1 < n_2 < n_1 + l$, $deg_Z(beg(u)) + deg_Y(\psi(u)) = k + 2$ e $a_1, \dots, a_{n_1}, b_1, \dots, b_{m_2} > 0$.

Sendo assim, pelo Corolário 3.51:

$$u \equiv a.b.c \text{ mod } I,$$

em que

- $a(y_1, \dots, y_{n_2}) = y_1^{a_1} \dots y_{n_1}^{a_{n_1}} y_{n_1+1}^{a_{n_1+1}} \dots y_{n_2}^{a_{n_2}};$
- $b(z_1, \dots, z_{m_2}) = (\sum_{|T| \text{ é par e não vazio}} (-2)^{-\frac{|T|}{2}} f_T(z_1, \dots, z_{m_2}));$
- $c(y_{n_1+1}, \dots, y_{n_1+l}, z_{m_1+1}, \dots, z_{l_2}) = [y_{n_1+1}, y_{n_1+2}] \dots [y_{n_1+l}, z_{m_1+1}] \dots [z_{m_2-1}, z_{m_2}] [z_{m_2+1}, z_{m_2+2}] \dots [z_{l_2-1}, z_{l_2}].$

Aplicando a identidade $[x_1, x_2, x_3]$ em b, c , se necessário, obtemos o resultado desejado.

Quando $\deg_Z(\text{beg}(u)) + \deg_Y(\psi(u)) > k + 2$, a prova é similar e recorre a um processo indutivo. Nesse processo indutivo, devemos substituir a por:

$$y_1^{a_1} \cdots y_{n_1}^{a_{n_1}} y_{n_1+1}^{a_{n_1+1}} \cdots y_{n_2}^{a_{n_2}} z_1^{b_1} \cdots z_{k_1}^{b_{k_1}-c},$$

em que $k_1 \leq m_2, b_{k_1} - c \geq 0$ e $b_1 + \cdots + b_{k_1} - c = \deg_Z(\text{beg}(u)) - (k - l + 2)$. \square

Definição 3.54. Um elemento $u_i \in SS$ é chamado do Tipo-3 ($u_i \in SS3$) quando as seguintes condições são satisfeitas:

- $u_i \in SS2$;
- Se $\deg_Z \text{beg}(u_i) + \deg_Y \psi(u_i) = k + 1$, então $\text{Deg}_{\text{pr}(z)(u_i)} \psi(u_i) = 0$.

É bem conhecida a relação de derivação de comutadores:

$$[uv, w] = u[v, w] + [u, w]v \text{ para } u, v, w \in F\langle X \rangle.$$

Nos Lemas 3.55 e 3.56, usaremos alguns argumentos do Lema 20-b de [13] e a relação de derivação de comutadores.

Lema 3.55. Seja I o $T_{\mathbb{Z}_2}$ -ideal gerado por $[x_1, x_2, x_3]$ e as identidades graduadas do tipo (3). Na superálgebra $K\langle X \rangle$, vale a seguinte equivalência:

$$\begin{aligned} & z_2 \cdots z_{k-l+2} [z_1, z_{k-l+3}] [y_1, y_2] \cdots [y_{l-1}, y_l] \equiv \\ & (\sum_J \beta_J f_J) [y_1, y_2] \cdots [y_{l-1}, y_l] \text{ mod } I \text{ (se } l \leq k \text{ e } l \text{ é par)}, \end{aligned}$$

$\beta_J \in K, J \subset \{1, \dots, k-l+3\}$. Além disso, se $|J| = 2$, então $1 \notin J$ e $\beta_J = -1$.

Demonstração. Primeiramente, notemos que

$$[g_{k-l+2}(z_1, \dots, z_{k-l+2}) [y_1, y_2] \cdots [y_{l-1}, y_l], z_{k-l+3}] \in T_{\mathbb{Z}_2}(E_k).$$

Deste modo, módulo I , temos:

$$[z_1 \cdots z_{k-l+2} [y_1, y_2] \cdots [y_{l-1}, y_l], z_{k-l+3}] + [a[y_1, y_2] \cdots [y_{l-1}, y_l], z_{k-l+3}] \equiv 0,$$

em que $a = \sum_{|T| \text{ é par e não vazio}} (-2)^{-\frac{|T|}{2}} f_T(z_1, \dots, z_{k-l+2})$.

Pela propriedade de derivação de comutadores, temos:

$$\begin{aligned} & [z_1 \cdots z_{k-l+2} [y_1, y_2] \cdots [y_{l-1}, y_l], z_{k-l+3}] \equiv \\ & z_1 [z_2 \cdots z_{k-l+2} [y_1, y_2] \cdots [y_{l-1}, y_l], z_{k-l+3}] + \\ & z_2 \cdots z_{k-l+2} [y_1, y_2] \cdots [y_{l-1}, y_l] [z_1, z_{k-l+3}] \text{ mod } I. \end{aligned}$$

Sendo assim:

$$\begin{aligned} & z_2 \cdots z_{k-l+2} [z_1, z_{k-l+3}] [y_1, y_2] \cdots [y_{l-1}, y_l] \equiv \\ & -z_1 [z_2 \cdots z_{k-l+2} [y_1, y_2] \cdots [y_{l-1}, y_l], z_{k-l+3}] + \\ & [a[y_1, y_2] \cdots [y_{l-1}, y_l], z_{k-l+3}]. \end{aligned}$$

Aplicando sucessivamente a identidade $[x_1, x_2, x_3]$ e a propriedade de derivação de comutadores, obtemos o resultado desejado. \square

Lema 3.56. Seja I o $T_{\mathbb{Z}_2}$ -ideal gerado por $[x_1, x_2, x_3]$ e as identidades graduadas do tipo (5). Na superálgebra $K\langle X \rangle$, vale a seguinte equivalência:

$$\begin{aligned} & z_2 \dots z_{k-l+2} [z_1, y_1] [y_2, y_3] \dots [y_{l-1}, y_l] \equiv \\ & (\sum_J \beta_J h_J(z_1, \dots, z_{k-l+2}, y_1)) [y_2, y_3] \dots [y_{l-1}, y_l] \pmod{I} \\ & \text{(se } l \leq k \text{ e } l \text{ é ímpar),} \end{aligned}$$

$\beta_J \in K$, $J \subset \{1, \dots, k-l+2\}$. Além disso, se $|J| = 1$, então $1 \notin J$ e $\beta_J = 1$.

Demonstração. A prova é similar àquela do Lema 3.55. Neste caso, devido às identidades do tipo (5), vale a seguinte equivalência:

$$[z_1 \dots z_{k-l+2}, y_1] \dots [y_{l-1}, y_l] \equiv a.b \pmod{I}, \text{ em que}$$

- $a = [(\sum_{|T| \text{ é par e não vazio}} (-2)^{-\frac{|T|}{2}} f_T(z_1, \dots, z_{k-l+2})), y_1]$;
- $b = [y_2, y_3] \dots [y_{l-1}, y_l]$ se $l \geq 3$, ou $b = 1$ se $l = 1$.

□

Corolário 3.57. *Seja I o $T_{\mathbb{Z}_2}$ -ideal gerado pelas identidades $[x_1, x_2, x_3]$, z_1^p e as identidades dos tipos (3) e (5). Se $u \in SS2$, $\deg_Z \text{begu} + \deg_Y \psi(u) = k+1$ e $\text{Deg}_{pr(z)} \psi(u) = 1$, então:*

$$u \equiv \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \pmod{I},$$

em que $u - \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ é um polinômio multi-homogêneo e $u_1, \dots, u_n \in SS3$.

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $2 \mid \deg_Y \psi(u)$.

Inicialmente, consideremos o seguinte caso:

$$u = z_1^{a_1} \dots z_n^{a_n} [z_1, z_{n+1}] [y_1, y_2] \dots [y_{l-1}, y_l], \quad a_1 + \dots + a_n = k-l+1, a_1, \dots, a_n > 0.$$

Tomemos um endomorfismo graduado ϕ , tal que:

$$\phi(z_1) = z_1, \dots, \phi(z_{k-l+2}) = z_n \text{ e } \phi(z_{k-l+3}) = z_{n+1}.$$

Módulo I , temos que:

$$\begin{aligned} & z_1 [\phi(z_1 \dots z_{k-l+2}) [y_1, y_2] \dots [y_{l-1}, y_l], \phi(z_{k-l+3})] + \\ & z_1 [a [y_1, y_2] \dots [y_{l-1}, y_l], \phi(z_{k-l+3})] \equiv 0, \end{aligned}$$

em que $a = \sum_{|T| \text{ is even and non-empty}} (-2)^{-\frac{|T|}{2}} \phi(f_T(z_1, \dots, z_{k-l+2}))$.

Por outro lado, mimetizando a demonstração do Lema 3.55, temos que:

$$\begin{aligned} & (a_1)u \equiv z_1 (\sum_J \beta_J \phi(f_J)) [y_1, y_2] \dots [y_{l-1}, y_l] \pmod{I}, \\ & \beta_J \in K, J \subset \{1, \dots, k-l+3\}. \text{ Além disso, se } |J| = 2, \text{ então} \\ & \text{Deg}_{z_1}(\psi(\phi(f_J))) = 0. \end{aligned}$$

Em geral, se $u \in SS2$, $\deg_Z \text{begu} + \deg_Y \psi(u) = k+1$ e $\text{Deg}_{pr(z)} \psi(u) = 1$, concluímos, a partir de manipulações algébricas convenientes, que:

$$u \equiv \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \pmod{I},$$

em que $u - \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ é um polinômio multi-homogêneo e $u_1, \dots, u_n \in SS3$. □

Proposição 3.58. *Seja I o $T_{\mathbb{Z}_2}$ -ideal gerado por $[x_1, x_2, x_3]$, z_1^p , $y_1^{pq} - y_1^p$, (1), (2) e pelas identidades dos tipos (3), (4), (5). Seja $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ uma combinação linear de elementos de $Pr(X)$. Então:*

$$f \equiv \sum_{i=1}^n f_i u_i \pmod{I},$$

em que f_1, \dots, f_n são p -polinômios e $u_1, \dots, u_n \in SS3$ é (são) distinto(s). Além disso, $I \subset T_{\mathbb{Z}_2}(E_k)$.

Demonstração. Inicialmente, notemos que:

$$f \equiv \sum_{i=1}^n f_i u_i \pmod{\langle [x_1, x_2, x_3], z_1^p, y_1^{pq} - y_1^p \rangle_{T_{\mathbb{Z}_2}}}, \quad (3.2)$$

em que f_1, \dots, f_n são p -polinômios e $u_1, \dots, u_n \in SS$.

Com base no Lema 3.53, podemos admitir que cada u_i , no somatório 3.2, módulo $\langle [x_1, x_2, x_3], (1), (2), (3), (4) \rangle_{T_{\mathbb{Z}_2}}$ é uma combinação linear de elementos de $SS2$.

Desta forma, podemos assumir sem perda de generalidade, que $u_1, \dots, u_u \in SS2$.

Por outro lado, caso algum u_i satisfaça as condições:

$$\deg_Z \text{beg}(u_i) + \deg_Y(\psi(u_i)) = k + 1 \text{ e } \text{Deg}_{pr(z)(u_i)}(\psi(u_i)) = 1,$$

temos pelo Corolário 3.57 que cada u_i , módulo $\langle [x_1, x_2, x_3], z_1^p, (3), (5) \rangle_{T_{\mathbb{Z}_2}}$, é uma combinação linear de elementos de $SS3$. \square

3.10.1 Resultado Principal

Nosso próximo passo é descrever as identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas de E_k .

Teorema 3.59. *Seja K um corpo finito de $\text{char}K = p > 2$ com $|K| = q$ elementos. As identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas de E (com graduação induzida por ϕ_k) seguem de:*

- $[y_1, y_2] \dots [y_k, y_{k+1}]$ quando k é ímpar (1);
- $[y_1, y_2] \dots [y_{k-1}, y_k][y_{k+1}, x]$ quando k é par e $x \in X - \{y_1, \dots, y_{k+1}\}$ (2);
- $[x_1, x_2, x_3]$ (3);
- $g_{k-l+2}(z_1, \dots, z_{k-l+2})[y_1, y_2] \dots [y_{l-1}, y_l]$ quando $0 \leq l \leq k$ e l é um número par (4);
- $g_{k-l+2}(z_1, \dots, z_{k-l+2})[z_{k-l+3}, y_1][y_2, y_3] \dots [y_{l-1}, y_l]$ quando $1 \leq l \leq k$ e l é um número ímpar (5);
- $[g_{k-l+2}(z_1, \dots, z_{k-l+2}), y_1] \dots [y_{l-1}, y_l]$ quando $1 \leq l \leq k$ e l é um número ímpar (6);
- z_1^p (7);
- $y_1^{pq} - y_1^p$ (8).

Demonstração. Seja I o $T_{\mathbb{Z}_2}$ -ideal gerado pelas oito identidades acima. Suponha por contradição que $I \subsetneq T_{\mathbb{Z}_2}(E_k)$. De acordo com a Proposição 3.58, existe um polinômio de teste $f = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i u_i$, em que $u_1, \dots, u_n \in SS3 - \{1\}$.

Sendo assim, um dos três fatos abaixo pode ocorrer:

$$\text{Caso 1: } \deg_Z(\text{beg}(LT(f))) + \deg_Y(\psi(LT(f))) \leq k;$$

Caso 2: $\deg_Z(\text{beg}(LT(f))) + \deg_Y(\psi(LT(f))) = k + 1$ e f não admite um termo-ruim;

Caso 3: $\deg_Z(\text{beg}(LT(f))) + \deg_Y(\psi(LT(f))) = k + 1$ e f admite um termo-ruim.

Caso 1. Suponhamos, sem perda de generalidade, que:

$$LT(f) = y_1^{a_1} \cdots y_{n_1}^{a_{n_1}} y_{n_1+1}^{a_{n_1+1}} \cdots y_{n_2}^{a_{n_2}} z_1^{b_1} \cdots z_{m_1}^{b_{m_1}} z_{m_1+1}^{b_{m_1+1}} \cdots z_{m_2}^{b_{m_2}} \\ [y_{n_1+1}, y_{n_1+2}] \cdots [y_{n_2}, y_{n_2+1}] \cdots [y_{l_1}, z_{m_1+1}] \cdots [z_{m_2-1}, z_{m_2}] \cdots [z_{l_2-1}, z_{l_2}]$$

em que $n_1 < n_2 < l_1, m_1 < m_2 < l_2$; $a_1, \dots, a_{n_2}, b_1, \dots, b_{m_2} > 0$ e $f = f(y_1, \dots, y_{l_1}, z_1, \dots, z_{l_2})$.

Consideremos a aplicação:

$$\begin{aligned} \phi : \{y_1, \dots, y_{l_1}, z_1, \dots, z_{l_2}\} &\rightarrow E \\ y_1 &\mapsto \sum_{l=1}^{a_1} e_{k+2l-1} e_{k+2l} \\ y_{n_1} &\mapsto \sum_{l=a_1+\dots+a_{n_1-1}+1}^{a_1+\dots+a_{n_1}} e_{k+2l-1} e_{k+2l} \\ y_{n_1+1} &\mapsto e_1 + \sum_{l=a_1+\dots+a_{n_1}+1}^{a_1+\dots+a_{n_1+1}} e_{k+2l-1} e_{k+2l} \\ &\dots \\ y_{n_2} &\mapsto e_{n_2-n_1} + \sum_{l=a_1+\dots+a_{n_2-1}+1}^{a_1+\dots+a_{n_2}} e_{k+2l-1} e_{k+2l} \\ y_{n_2+1} &\mapsto e_{n_2-n_1+1} \\ &\dots \\ y_{l_1} &\mapsto e_{l_1-n_1} \\ z_1 &\mapsto \sum_{l=1}^{b_1} e_{R+l} e_{l_1-n_1+l} \\ z_{m_1} &\mapsto \sum_{l=b_1+\dots+b_{m_1-1}+1}^{b_1+\dots+b_{m_1}} e_{R+l} e_{l_1-n_1+l} \\ z_{m_1+1} &\mapsto e_{R+b_1+\dots+b_{m_1}+1} + \sum_{l=b_1+\dots+b_{m_1}+1}^{b_1+\dots+b_{m_1+1}} e_{R+l+1} e_{l_1-n_1+l} \\ &\dots \\ z_{m_2} &\mapsto e_{R+b_1+\dots+b_{m_2-1}+m_2-m_1} + \sum_{l=b_1+\dots+b_{m_2-1}+1}^{b_1+\dots+b_{m_2}} e_{R+m_2-m_1+l} e_{l_1-n_1+l} \\ z_{m_2+1} &\mapsto e_{S+1} \\ &\dots \\ z_{l_2} &\mapsto e_{S+(l_2-m_2)}, \end{aligned}$$

em que $R = k + 2(a_1 + \dots + a_{n_2})$ e $S = R + (b_1 + \dots + b_{m_2}) + m_2 - m_1$.

Não é difícil vermos que $(\phi(y_1), \dots, \phi(y_{l_1}), \phi(z_1), \dots, \phi(z_{l_2}))$ é uma seqüência do Tipo- $LT(f)$. Contudo, pela Proposição 3.29, temos que $f \notin T_{\mathbb{Z}_2}(E_k)$ o que é uma contradição.

Caso 2. Consideremos $\phi : \{y_1, \dots, y_{l_1}, z_1, \dots, z_{l_2}\} \rightarrow E$ (na aplicação abaixo, cometeremos um pequeno abuso de linguagem: $\sum_{l=1}^{b_1-1} e_{k+l+1} e_l = 0$, na situação em que $b_1 = 1$):

$$\begin{aligned} z_1 &\mapsto e_{k+1} + \sum_{l=1}^{b_1-1} e_{k+l+1} e_l \\ z_{m_1} &\mapsto \sum_{l=b_1+\dots+b_{m_1-1}}^{\dot{b}_1+\dots+b_{m_1}-1} e_{k+l+1} e_l \\ z_{m_1+1} &\mapsto e_{k+b_1+\dots+b_{m_1}+1} + \sum_{l=1}^{b_{m_1+1}} e_{k+b_1+\dots+b_{m_1}+l+1} e_{l+b_1+\dots+b_{m_1}-1} \\ &\dots \\ z_{m_2} &\mapsto \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e_{k+b_1+\dots+b_{m_2-1}+(m_2-m_1)} + \sum_{l=1}^{b_{m_2}} e_{k+b_1+\dots+b_{m_2-1}+(m_2-m_1)+l} e_{l+b_1+\dots+b_{m_2-1}-1} \\
& z_{m_2+1} \mapsto e_{k+b_1+\dots+b_{m_2}+m_2-m_1+1}, \dots, z_{l_2} \mapsto e_{k+b_1+\dots+b_{m_2}+l_2-m_1} \\
& y_1 \mapsto \sum_{l=1}^{a_1} e_{M+2l-1} e_{M+2l} \\
& y_{n_1} \mapsto \sum_{l=a_1+\dots+a_{n_1-1}+1}^{a_1+\dots+a_{n_1}} e_{M+2l-1} e_{M+2l} \\
& y_{n_1+1} \mapsto e_{b_1+\dots+b_{m_2}} + \sum_{l=a_1+\dots+a_{n_1}+1}^{a_1+\dots+a_{n_1+1}} e_{M+2l-1} e_{M+2l} \\
& y_{n_2} \mapsto e_{b_1+\dots+b_{m_2}+(n_2-n_1-1)} + \sum_{l=a_1+\dots+a_{n_2-1}+1}^{a_1+\dots+a_{n_2}} e_{M+2l-1} e_{M+2l} \\
& y_{n_2+1} \mapsto e_{b_1+\dots+b_{m_2}+n_2-n_1} \\
& \dots \\
& y_{l_1} \mapsto e_{b_1+\dots+b_{m_2}+l_1-n_1-1},
\end{aligned}$$

em que $M = k + b_1 + \dots + b_{m_2} + l_2 - m_1$.

Notemos que $(\phi(y_1), \dots, \phi(y_{l_1}), \phi(z_1), \dots, \phi(z_{l_2}))$ é uma sequência Quase-Tipo- $L_T(f)$. Pela Proposição 3.30, segue que $f \notin T_{\mathbb{Z}_2}(E_k)$. Novamente uma contradição.

Caso 3. Notemos que $\deg_Z(\text{beg}(LBT(f))) + \deg_Y(\psi(LBT(f))) \leq k$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que:

$$\begin{aligned}
LBT(f) &= y_1^{a_1} \dots y_{n_1}^{a_{n_1}} y_{n_1+1}^{a_{n_1+1}} \dots y_{n_2}^{a_{n_2}} z_1^{b_1} \dots z_{m_1}^{b_{m_1}} z_{m_1+1}^{b_{m_1+1}} \dots z_{m_2}^{b_{m_2}} \\
& [y_{n_1+1}, y_{n_1+2}] \dots [y_{n_2}, y_{n_2+1}] \dots [y_{l_1}, z_{m_1+1}] \dots [z_{m_2-1}, z_{m_2}] \dots [z_{l_2-1}, z_{l_2}],
\end{aligned}$$

em que $n_1 < n_2 < l_1, m_1 < m_2 < l_2$; $a_1, \dots, a_{l_1}, b_1, \dots, b_{l_2} > 0$ e $f = f(y_1, \dots, y_{l_1}, z_1, \dots, z_{l_2})$. Consideremos $\phi : \{y_1, \dots, y_{l_1}, z_1, \dots, z_{l_2}\} \rightarrow E$ como no Caso 1.

É claro que $(\phi(y_1), \dots, \phi(y_{l_1}), \phi(z_1), \dots, \phi(z_{l_2}))$ é uma sequência do Tipo- $LBT(f)$. Contudo, de acordo com a Proposição 3.31, temos que $f \notin T_{\mathbb{Z}_2}(E_k)$. Isto é um absurdo.

Com a verificação dos três casos, temos que $I = T_{\mathbb{Z}_2}(E_k)$, como desejado. \square

Referências Bibliográficas

- [1] Aljadeff, E. e Karasik, Y. *Crossed product and their central polynomials*. Journal of Pure and Applied Algebra **217**, 1634-1641 (2013).
- [2] Azevedo, S.S. *Graded identities for the matrix algebra of order n over an infinite field*. Communications in Algebra **30** (12), 5849-5860 (2002).
- [3] Azevedo, S.S. *A basis for \mathbb{Z} -graded identities of matrices over infinite fields*. Serdica Mathematical Journal **29** (2), 149-158 (2003).
- [4] Bahturin, Y. e Drensky, V. *Graded polynomial identities of matrices*. Linear Algebra and its Applications **357** (1-3), 15-34 (2002).
- [5] Bekh-Ochir, C. e Rankin, S.A. *The identities and the central polynomials of the infinite dimensional unitary Grassmann algebra over a finite field*. Communications in Algebra **39** (3), 819-829 (2011).
- [6] Belov, A. Ya. *On non-Specht varieties*. Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika **5**, 47-66 (1999).
- [7] Brandão Júnior, A.P., Krasilnikov, A.N. e Koshlukov, P.E. *Graded central polynomials for the matrix algebra of order two*. Monatshefte für Mathematik **157**, 247-256 (2009).
- [8] Brandão Júnior, A.P. *Graded central polynomials for the algebra $M_n(K)$* . Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **57**, 265-278 (2008).
- [9] Brandão Júnior, A.P. *Polinômios centrais para álgebras graduadas*. Tese de doutorado. Universidade de Campinas (2006).
- [10] Centrone, L. *\mathbb{Z}_2 -graded identities of the Grassmann algebra in positive characteristic*. Linear Algebra and its Applications **435** (12), 3297-3313 (2011).
- [11] Chiripov, P.Z. e Siderov, P.N. *On bases for identities of some varieties of associative algebras*. Pliska Studia Mathematica Bulgarica **2**, 103-115 (1981).
- [12] Colombo, J. e Koshlukov, P.E. *Central polynomials in the matrix algebra of order two*. Linear Algebra and its Applications **377**, 53-67 (2004).
- [13] Da Silva, V.R.T. e Di Vincenzo, O.M. *On \mathbb{Z}_2 -graded polynomial identities of the Grassmann algebra*. Linear Algebra and its Applications **431** (1-2), 56-72 (2009).
- [14] Di Vincenzo, O. M. *On the graded identities of $M_{1,1}(E)$* . Israel Journal of Mathematics **80** (3), 323-335 (1992).
- [15] Drensky, V. *A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*. Algebra and Logic **20** (3), 188-194 (1981).
- [16] Drensky, V. *Free algebras and PI algebras*. Graduate Course in Algebra, Springer-Verlag, Singapore (1999).
- [17] Drensky, V. e Formanek, E. *Polynomial identity rings*. Courses in Mathematics, Birkhauser, Basel (2004).

- [18] Fonseca, L.F.G. *Graded polynomial identities of matrices over an infinite integral domains*. Submetido para publicação à revista Communications in Algebra.
- [19] Fonseca, L.F.G. *\mathbb{Z}_2 -graded identities of the Grassmann algebra over a finite field*. Submetido para publicação à revista Finite Fields and their Applications.
- [20] Fonseca, L.F.G. *On the graded central polynomials for elementary gradings in matrix algebras*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **62** (2), 237-244 (2013).
- [21] Formanek, E. *Central polynomials for matrix rings*. Journal of Algebra **23**, 129-132 (1972).
- [22] Giambruno, A. e Koshlukov, P.E. *On the identities of the Grassmann algebra in characteristic $p > 0$* . Israel Journal of Mathematics **122**, 305-316 (2001).
- [23] Giambruno, A., Mishchenko, S. e Zaicev, M.V. *Polynomial identities on superalgebras and almost polynomial growth*. Communications in Algebra **29** (9), 3787-3800 (2001).
- [24] Grishin, A.V. *Examples of T -spaces and T -ideals of characteristic 2 without the finite basis property*. Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika **5**, 101-118 (1999).
- [25] Hungerford, T.W. *Abstract Algebra: An Introduction, Third Edition*. Brooks Cole (2012).
- [26] Hungerford, T.W. *Algebra. Graduate Texts in Mathematics 73*. Springer (2006).
- [27] Kaplansky, I. *Problems in the theory of rings, Report of a conference on linear algebras, June, 1956, in National Academy of Science*. National Research Council, National Research Council Publication **502**, 1-3 (1956).
- [28] Kemer, A.R. *Varieties and \mathbb{Z}_2 -graded algebras*. Mathematics of the USSR Izvestiya **25**, 359-374 (1985).
- [29] Kemer, A.R. *Finite basis property of identities of associative algebras*. Algebra and Logic **87** (5), 362-397 (1987).
- [30] Koshlukov, P.E. *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic $\neq 2$* . Journal of Algebra **241** (1), 410-434 (2001).
- [31] Krakovski, D. e Regev, A. *The polynomial identities of the Grassmann algebra*. Transactions of the American Mathematical Society **81**, 429-438 (1973).
- [32] Procesi, C. *Ring with polynomial identities*. M. Dekker (1973).
- [33] Okhitin, S. *Central polynomials of the algebra of second order matrices*. Moscow University Mathematics Bulletin **43** (4), 49-51 (1988).
- [34] Razmyslov, Yu. P. *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*. Algebra and Logic **12**, 47-63 (1973).
- [35] Razmyslov, Yu. P. *On a problem of Kaplansky*. Mathematics of the USSR-Izvestiya **7** (3), 479-496 (1973).
- [36] Regev, A. *Grassmann algebra over finite fields*. Communications in Algebra **19** (6), 1829-1849 (1991).
- [37] Shchigolev, V.V. *Examples of infinitely based T -ideals*. Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika **5**, 307-312 (1999).
- [38] Silva, D.D.P.S. *On the graded identities for elementary gradings in matrix algebras over infinite fields*. Linear Algebra and its Applications **439** (5), 1530-1537 (2013).
- [39] Specht, W. *Gesetze in Ringen*. Mathematische Zeitschrift **52**, 557-589 (1950).
- [40] Vasilovsky, S. Yu. *\mathbb{Z}_n -graded polynomial identities of the full matrix algebra of order n* . Proceedings of the American Mathematical Society **127** (12), 3517-3524 (1999).
- [41] Vasilovsky, S. Yu. *\mathbb{Z} -graded polynomial identities of the full matrix algebra*. Communications in Algebra **26** (2), 601-612 (1998).