Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Soluções positivas para sistemas elípticos quasilineares fracamente acoplados com parâmetros

por

Mariana Ramos Reis Gaete

2013

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Soluções positivas para sistemas elípticos quasilineares fracamente acoplados com parâmetros

por

Mariana Ramos Reis Gaete [1]

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 2013.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Alberto P. dos Santos - Orientador (UnB)

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros (UFPB)

Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves (UFG)

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado (UnB)

Prof. Dr. Simone Mazzini Bruschi (UnB)

[1] A autora foi bolsista do CNPQ durante a elaboração deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a Deus por sempre iluminar meu caminho e me abençoar colocando oportunidades e pessoas maravilhosas em minha vida.

Sou muito grata a meus pais, Nicácio e Marina, pelo apoio incondicional, incentivo e força. Sem eles eu não teria chegado até aqui. Obrigada a toda a minha família e amigos de Araguari que oram e torcem por mim.

Gostaria de agradecer à minha querida irmã que está sempre presente, me escutando, aconselhando e tranquilizando. Ao meu Rodrigo, por ser meu companheiro, compartilhando os momentos bons e os tensos também, sempre com sua paciência e tranquilidade. Além de sempre me incentivar e apoiar em minhas decisões. À minha Luna, que está por vir e já ilumina minha vida.

Obrigada aos amigos queridos, que sempre me ajudaram falando uma palavra de carinho, de incentivo, de conforto, me chamando a atenção, me ensinando, me apoiando: Adriana Flores, Bruno Nunes, Claudiney, Daniele, João Paulo, Kaliana, Kelém, Laura, Luciene, Manuela, Simone, Taynara e outros.

Muito obrigada ao meu orientador, Carlos Alberto, pela atenção, paciência e dedicação com que trabalhou comigo, me orientando da melhor maneira possível. Agradeço ainda a confiança que depositou em mim.

Fico grata aos professores participantes da banca examinadora, Everaldo Souto de Medeiros, José Valdo Abreu Gonçalves, Marcelo Furtado e Simone Mazzini Bruschi por terem aceitado o convite e também pelas sugestões e correções em relação ao meu trabalho.

Agradeço muito a todos que contribuiram de alguma forma para a conclusão deste trabalho, pode não parecer, mas todos são muito importantes.

Resumo

Neste trabalho abordamos duas classes de sistemas elípticos quasilineares fracamente acoplados com multi-parâmetros. Provamos a não-existência de soluções explorando o método das funções testes e subdomínios adequados, também conhecido como método de Mitidieri, e também combinamos alguns resultados relacionados a um autovalor principal de um problema de autovalor com peso indefinido.

Demonstramos também a existência e multiplicidade de soluções para uma das classes de problemas usando os Métodos de Sub-supersolução e Variacional, demonstrando que as soluções têm energias distintas. Além disso, para contornarmos a impossibilidade do uso de Princípios de Máximo advinda da presença de pesos indefinidos, obtivemos a positividade de soluções utilizando o método de iteração de Moser. Para a outra classe de problemas recorremos a técnicas de monotonização-regularização e um teorema de sub-supersolução.

Palavras-chave: Sistemas quasilineares, fracamente acoplado, método de sub-supersolução, não-linearidades singulares e superlineares, teorema do passo da montanha, método da iteração de Moser para sistemas.

Abstract

In this work we discuss two classes of quasilinear weakly coupled elliptic systems with multi-parameters. We prove the non-existence of solutions exploring the method of appropriate functions test and subdomains, also known as Mitidieri method, and also combine some results related to a main eigenvalue of an eigenvalue problem with indefinite weight.

We have also demonstrated the existence and multiplicity of solutions of one of the classes of problems using Sub-supersolution and Variational methods, demonstrating that the solutions have different energies. Furthermore, to overcome the impossibility of using Maximum principles due to the presence indefinite weights obtained positivity solutions using the Moser iteration method. For another class of problems we resort to a regularization and monotonicity technique and a sub-supersolution theorem.

Keywords: Quasilinear system, weakly coupled, sub-supersolution method, singular and super linear nonlinearities, mountain pass theorem, Moser iteration method for systems.

Sumário

Notações

- $C, C_0, C_1, \ldots$ denotam constantes positivas (possivelmente diferentes);
- $B_R(x)$: bola aberta de centro x e raio R, $(B_R = B_R(0))$;
- $int(\Omega)$ designa conjunto interior de Ω.
- $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $1 < p < \infty$, é o p-Laplaciano da função u;
- $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx$ é representada por $\displaystyle\int_\Omega f$;
- $supp(\varphi)$ denota o suporte da função φ;
- $\|\cdot\|_E$ denota a norma do espaço E;
- Para $1 \leqslant p < N$, $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$ é o expoente crítico de Sobolev,
- $f_0^1 := \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f_1(t)}{t^{p-1}}, \quad f_\infty^1 := \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f_1(t)}{t^{p-1}}, \quad f_0^2 := \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f_2(t)}{t^{q-1}}, \quad f_\infty^2 := \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f_2(t)}{t^{q-1}},$

$$(gh)_0^1 := \lim_{t\to 0} \frac{g_1(t)h_1(t)}{t^{p-1}}, \quad (gh)_\infty^1 := \lim_{t\to\infty} \frac{g_1(t)h_1(t)}{t^{p-1}},$$

$$(gh)_0^2 := \lim_{t\to 0} \frac{g_2(t)h_2(t)}{t^{q-1}}, \quad (gh)_\infty^2 := \lim_{t\to\infty} \frac{g_2(t)h_2(t)}{t^{q-1}}.$$

- Ao escrevermos $(\underline{u}, \underline{v}) \leq (\overline{u}, \overline{v})$, queremos dizer, $\underline{u} \leq \overline{u}$ e $\underline{v} \leq \overline{v}$ q.t.p. em Ω.
- $V^+(x) = \max\{0, V(x)\}$ e $V^-(x) = \max\{0, -V(x)\}$
-

$$(P_h^i)\begin{cases} -\Delta_p u + m_i(x)u^{p-1} & = h(x), \quad \Omega, \\ u \geqslant 0, \quad \Omega; \quad u & = 0, \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

- $C(\Omega)$ denota o espaço das funções contínuas em Ω e $C_0(\Omega)$ são as funções contínuas de suporte compacto em Ω;

- $C^k(\Omega)$, $k \geqslant 1$ inteiro, denota o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω e $C^\infty(\Omega) \cap_{k\geqslant 1} C^k(\Omega)$;

- $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$;

- $C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\Omega) : \sup\limits_{x,y\in\Omega} \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\beta} < \infty \right\}$ com $0 < \beta < 1$, e $C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$ são as funções em $C^k(\Omega)$ tais que todas as derivadas parciais até a ordem k estão em $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$;

- $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \displaystyle\int_\Omega |u|^p dx < \infty \right\}$, em que $1 \leqslant p < \infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um aberto conexo, com norma dada por

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{1/p};$$

- $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções mensuráveis que são limitadas quase sempre em Ω com norma dada por

$$\|u\|_\infty = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leqslant C \text{ quase sempre em } \Omega\};$$

- Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto,

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : Du \in L^p(\Omega)\},$$

com norma dada por

$$\|u\|_{1,p} = \begin{cases} \left[\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p) dx \right]^{1/p}, & \text{se } 1 \leqslant p < \infty, \\ \max\limits_{0\leqslant|\alpha|\leqslant 1} \|D^\alpha(u)\|_\infty, & \text{se } p = \infty; \end{cases}$$

- Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, designamos por $W_0^{1,p}(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma $\|\cdot\|_{1,p}$ com a norma

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \right)^{1/p};$$

- Quando estivermos trabalhando com as normas citadas em conjuntos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitados usaremos as notações mencionadas e ao abordarmos essas normas em $\mathbb{R}^N$ especificaremos da seguinte forma $\|u\|_{p,\mathbb{R}^N}$, $\|u\|_{\infty,\mathbb{R}^N}$, $\|u\|_{1,p,\mathbb{R}^N}$.

Introdução

Neste trabalho é apresentado um estudo sobre questões relacionadas à não-existência, existência e multiplicidade de soluções não-negativas e não-nulas para a seguinte classe de sistemas elípticos quasilineares,

$$\begin{cases} -\Delta_p u + m_1(x)u^{p-1} = F_\lambda(x,u,v), & \Omega, \\ -\Delta_q v + m_2(x)v^{q-1} = G_\mu(x,u,v), & \Omega, \\ u, v \ngeq 0,\ \Omega \quad u = v = 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde Δ_r é o operador r-Laplaciano com $1 < r = p, q < N$; $m_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $F_\lambda, G_\mu : \Omega \times [0,\infty)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções satisfazendo hipóteses adequadas, λ, μ são parâmetros positivos e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado regular ou $\Omega = \mathbb{R}^N$. Quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, a condição $u(x) = 0$ quando $x \in \partial\Omega$ significa que $u(x) \longrightarrow 0$ quando $|x| \to \infty$.

A motivação para estudar sistemas elípticos resulta do grande número de aplicações além das já conhecidas para o caso escalar, por exemplo, na teoria dos fluidos [26], elasticidade não linear [5], problemas de reação-difusão [37] entre outros, como extração de petróleo, astronomia. Os sistemas também podem modelar problemas relacionados com dinâmica populacional, onde a solução do sistema (u, v), com cada componente não trivial e não negativa, é dita "estado de coexistência", ver [10], [11], [12] e suas referências.

Ademais, problemas desse tipo aparecem no estudo de fluidos não-Newtonianos, onde o par (p, q) é uma característica do meio. Quando $(p, q) > (2, 2)$ os fluidos são chamados dilatantes e aqueles com $(p, q) < (2, 2)$ são chamados pseudoplásticos. Se $(p, q) = (2, 2)$, eles são fluidos Newtonianos, veja [56] e suas referências.

Nosso objetivo neste trabalho é estudar duas subclasses do sistema (1), sendo a primeira com as funções F_λ e G_μ definidas como

$$F_\lambda(x,u,v) = a(x)u^{\beta_1} + b(x)u^{\gamma_1}v^{\delta_1} + \lambda f(x) \ \text{ e } \ G_\mu(x,u,v) = c(x)v^{\beta_2} + d(x)v^{\gamma_2}u^{\delta_2} + \mu g(x)$$

em Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ limitado com f e g podendo mudar de sinal. E na segunda subclasse, consideramos para $x \in \mathbb{R}^N$,

$$F_\lambda(x,u,v) = a(x)f_1(u) + \lambda b(x)g_1(u)h_1(v) \quad \text{e} \quad G_\mu(x,u,v) = c(x)f_2(v) + \mu d(x)g_2(v)h_2(u).$$

Em ambas as classes, os sistemas são cooperativos ou fracamente acoplados conforme a definição dada por Damascelli, Gladiali e Pacella em [19], ou seja, para u fixo, o termo da direita da primeira equação de (1) é crescente em v, assim como o termo da direita da segunda equação é crescente em u considerando v fixo.

Em todo esse trabalho, designaremos por solução positiva um par de funções (u, v) não-negativas e não-nulas tais que $u > 0$ ou $v > 0$ e estritamente positiva desde que $u > 0$ e $v > 0$. Além disso, referiremos às não-linearidades como sublinear no 0 quando $(z)_0^i = \infty$, sublinear no ∞ se $(z)_\infty^i = 0$; e superlinear no 0 e ∞ se $(z)_0^i = 0$ e $(z)_\infty^i = \infty$, respectivamente, para $i = 1, 2$, onde

$$(z)_0^1 = \lim_{s\to 0} \frac{z(s)}{s^{p-1}} \qquad (z)_\infty^1 = \lim_{s\to \infty} \frac{z(s)}{s^{p-1}}$$
$$(z)_0^2 = \lim_{s\to 0} \frac{z(s)}{s^{q-1}} \qquad (z)_\infty^2 = \lim_{s\to \infty} \frac{z(s)}{s^{q-1}}.$$

Assim na primeira subclasse de problemas o termo misto é considerado superlinear e subcrítico, já que $p-1 < \gamma_1 + \delta_1 < p^* - 1$ e $q - 1 < \gamma_2 + \delta_2 < q^* - 1$. E na outra, o termo correspondente pode ser superlinear ou sublinear tanto no 0 quanto no ∞, ou seja, $(gh)_0^i = 0$ ou $(gh)_0^i = \infty$ e $(gh)_\infty^i = 0$ ou $(gh)_\infty^i = \infty$, para $i = 1, 2$.

Desde 1980s muitos resultados têm sido obtidos para sistemas elípticos semilineares e quasilineares em domínios limitados ou ilimitados (veja, por exemplo, [13], [32], [8], [20]). A existência, não-existência e multiplicidade de soluções para sistemas elípticos quasilineares têm ganhado muito atenção recentemente.

Em 2004 Pigong Han e Cao em [9] e, Han e Liu em [36] usaram métodos de sub-supersolução e variacional para mostrar existência e multiplicidade de soluções para o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda v + v^{\beta_1} + \epsilon f(x), & \Omega, \\ -\Delta v = \mu u + u^{\beta_2} + \delta g(x), & \Omega, \\ u, v > 0, \quad \Omega; \quad u = v = 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

onde $\beta_1, \beta_2 > 1$ e satisfazem $1/(\beta_1 + 1) + 1/(\beta_2 + 1) = (N - 2)/N$, $f, g \in L^\infty(\Omega)$ com $f, g \geqslant 0$ e $f, g \neq 0$ em [9], e em [36] $1/(\beta_1 + 1) + 1/(\beta_2 + 1) \geqslant (N - 2)/N$, $\lambda = \mu$, $f(x), g(x) \not\equiv 0$, $x \in \Omega$ são tais que existem soluções para os problemas de Dirichlet,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x), & \Omega \\ u \geqslant 0, \ u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta_q v = g(x), & \Omega \\ v \geqslant 0, \ v = 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

com $p = q = 2$.

Posteriormente, em 2006 Guo [35] demonstrou a existência de duas soluções para o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{2\alpha}{\alpha+\gamma} u^{\alpha-1} v^{\gamma} + \lambda f(x), & \Omega, \\ -\Delta v = \dfrac{2\gamma}{\alpha+\gamma} u^{\alpha} v^{\gamma-1} + \lambda g(x), & \Omega, \\ u, v > 0, \quad \Omega; \quad u = v = 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

onde $\alpha, \gamma > 1$, $\alpha + \gamma \leqslant 2^*$, $f, g \geqslant 0$ e $f(x), g(x) \not\equiv 0$.

No mesmo ano Bouchekif e Nasri em [7] complementaram o trabalho anterior mostrando a multiplicidade de soluções para o seguinte problema,

$$\begin{cases} -\Delta u = au + (\alpha+1)|u|^{\alpha-2}u|v|^{\gamma} + \lambda f(x), & \Omega, \\ -\Delta v = bu + (\gamma+1)|u|^{\alpha}|v|^{\gamma-2}v + \mu g(x), & \Omega, \\ u, v > 0, \quad \Omega; \quad u = v = 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

com $0 < \alpha + \gamma \leqslant 2^* - 1$, $a, b \geqslant 0$, os parâmetros $\lambda, \mu > 0$, suficientemente pequenos e $f, g \in C^1(\overline{\Omega}) \setminus \{0\}$.

Uma outra técnica bastante utilizada para a demonstração de multiplicidade de soluções para essa classe de problemas é a minimização do funcional associado ao problema restrito a variedades de Nehari. Usando essa técnica, Tsung-Fang Wu [57] em 2008 e Huei-Lin [46] em 2012 trabalharam com o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x)|u|^{\beta-2}u + \dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma} h(x)|u|^{\alpha-2}u|v|^{\gamma}, & \Omega, \\ -\Delta v = \mu g(x)|v|^{\beta-2}v + \dfrac{\gamma}{\alpha+\gamma} h(x)|u|^{\alpha}|v|^{\gamma-2}v, & \Omega, \\ u = v = 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

para λ, μ suficientemente pequenos em módulo, com $2 < \alpha + \gamma < 2^*$ e $1 < \beta < 2$ no primeiro e $2 < \beta < 2^*$ no segundo.

Afrouzi e Rasouli [1] em 2009 estudaram um sistema semelhante ao (6), porém o operador é mais geral,

$$\begin{cases} -\Delta_p u + m(x)|u|^{p-2}u = \lambda |u|^{\beta-2}u + \dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma} h(x)|u|^{\alpha-2}u|v|^{\gamma}, & \Omega, \\ -\Delta_p v + m(x)|v|^{p-2}v = \mu |v|^{\beta-2}v + \dfrac{\gamma}{\alpha+\gamma} h(x)|u|^{\alpha}|v|^{\gamma-2}v, & \Omega, \\ u = v = 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

com $2 < \alpha + \gamma < p < \gamma < p^*$, $p > 2$, $\alpha, \beta > 1$, o peso $m(x)$ é uma função limitada com $\|m\|_\infty > 0$ e λ, μ são suficientemente pequenos.

Em relação à não-existência, associado ao problema (1), Mitidieri [48] (para $\beta_1 > 1$, $\beta_2 > 1$) e Serrin e Zou [27] (para $\beta_1, \beta_2 > 0$) mostraram que o problema,

$$\begin{cases} -\Delta u = & u^{\beta_1}, \quad \mathbb{R}^N \\ -\Delta v = & v^{\beta_2}, \quad \mathbb{R}^N \\ u, v > 0, \quad \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{8}$$

não tem solução radial, se $1/(\beta_1+1)+1/(\beta_2+1) > (N-2)/N$. Além disso, eles mostraram em [28] que (8) admite infinitas soluções radiais desde que $1/(\beta_1 + 1) + 1/(\beta_2 + 1) \leqslant (N-2)/N$.

A relação $1/(\beta_1 + 1) + 1/(\beta_2 + 1) = (N - 2)/N$ define uma curva em $\mathbb{R}^2_+$, para as variáveis β_1 e β_2. Esta curva é chamada Hipérbole Crítica de Sobolev e substitui a noção de expoente crítico que aparece no caso escalar. Esta hipérbole apareceu primeiro independentemente em [13] e [50] e depois em [39] e [31].

Nesses artigos, os autores mostraram que para o sistema (8) ter solução a condição

$$\beta_1 < \frac{N+2}{N-2} \quad \text{e} \quad \beta_2 < \frac{N+2}{N-2},$$

é restritiva e uma afirmação natural sobre β_1 e β_2 é estarem abaixo da hipérbole crítica. E isso está concordando com a generalização da Identidade de Pohozaev devido a Mitidieri, onde prova que em domínios estrelados não existe solução radial se estivermos acima da hipérbole.

Ainda em [48], foi mostrado que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = & au^{\beta_1} + bv^{\delta_1}, \quad \mathbb{R}^N \\ -\Delta v = & cv^{\beta_2} + du^{\delta_2}, \quad \mathbb{R}^N \\ u, v > 0, \quad \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{9}$$

não tem solução clássica, se a, b, c, d são constantes positivas, $\beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2 > 1$ e

$$\max\{\frac{1}{\beta_1 - 1}, \frac{\delta_1 + 1}{\delta_1\delta_2 - 1}, \frac{1}{\beta_2 - 1}, \frac{\delta_2 + 1}{\delta_1\delta_2 - 1}\} \geqslant \frac{N-2}{N}.$$

Mais tarde em 2004, De Figueiredo e Sirakov [21] provaram que o sistema (9) não tem solução clássica limitada, se

$$\delta_1 = \beta_1\frac{\beta_2 - 1}{\beta_1 - 1} \ \text{ e } \ \delta_2 = \beta_2\frac{\beta_1 - 1}{\beta_2 - 1}, \ \text{ onde } \ 1 < \beta_1, \beta_2 < \frac{N+2}{N-2}.$$

Em 2007, Dai e Peng [17], e em 2010, Santos [51] mostraram a existência e não-existência de soluções dependendo do tamanho dos parâmetros para os seguintes problemas respectivamente,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^{\beta_1} + \lambda f(x), & \Omega \\ u \geqslant 0, \ \Omega, \quad u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = a(x)u^{\beta_1} + \lambda b(x)u^{\gamma_1}, & \mathbb{R}^N \\ v > 0, \ \mathbb{R}^N, \quad v \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases}$$

onde $\beta_1 > p-1$ em [17] e $\beta_1 < p-1 < \gamma_1$ em [51].

Também em 2010, Yin e Yang [60] complementaram [51] provando existência e não-existência de soluções para o sistema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = & a(x)u^{\beta_1} + \lambda b(x)v^{\delta}, \quad \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v = & c(x)v^{\beta_2} + \mu b(x)u^{\delta}, \quad \mathbb{R}^N \\ u, v > 0, \ \mathbb{R}^N, & u(x), v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases} \tag{10}$$

com $\beta_1 < p-1$, $\beta_2 < q-1$ e $\max\{p-1, q-1\} < \delta$, $\lambda, \mu > 0$.

E relacionado à segunda classe de sistemas abordadas nesta tese, além dos trabalhos já mencionados, temos também Hai [34], que em 2007, mostrou existência de solução positiva para o problema,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda b(x) f(u,v), \quad \Omega, \\ -\Delta_q v = \mu d(x) g(u,v), \quad \Omega, \\ u, v > 0, \ u = v = 0 \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{11}$$

com f e g são não-decrescentes em u e v, e superlineares no zero, desde que as funções b e d sejam tais que os problemas (3) com a e b no lugar de f e g tenham soluções positivas.

Em 2009, Toan e Ngo [54] demonstraram que o seguinte sistema tem solução para λ, $\mu > 0$ suficientemente pequenos,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda f(x,u,v), \quad \Omega, \\ -\Delta_q v = \mu g(x,u,v), \quad \Omega, \\ u, v > 0, \ u = v = 0 \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{12}$$

onde f e g também são monótonas nas duas variáveis e definindo $F(u,v) = \max_{\overline{\Omega}} f(x,u,v)$ e $G(u,v) = \max_{\overline{\Omega}} g(x,u,v)$ e $h(u,v) = \min_{\overline{\Omega}} f(x,u,v)$ e $k(u,v) = \min_{\overline{\Omega}} g(x,u,v)$, assume que F e G sejam sublineares no infinito e h e k superlineares no zero.

Para o caso em que $\Omega = \mathbb{R}^N$, Khalil, Manouni e Ouanan em 2008 [24] mostraram a existência de solução para o seguinte problema,

$$\begin{cases} -\Delta_p u + m(x)u^{p-1} = a(x)u^{\beta_1}, \quad \mathbb{R}^N, \\ \\ u > 0, \ \mathbb{R}^N, \quad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases}$$

onde $0 < \beta_1 < p^* - 1$, m é uma função contínua coerciva, ou seja, $m(x) \xrightarrow{|x|\to+\infty} +\infty$ e existe m_0 tal que $m(x) \geqslant m_0 > 0$, $\mathbb{R}^N$ e a função a é não-negativa.

E em 2011, Tsing-San Hsu [38] provou a existência de duas soluções para

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \ a(x)u^{\beta_1} + \lambda b(x)u^{\gamma_1}, \quad \mathbb{R}^N, \\ \\ u > 0, \ \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

com $0 < \gamma_1 < 1 < \beta_1 < 2^* - 1$, $0 < a \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $b^+ \neq 0$ e b^- é limitada, com suporte compacto e o parâmetro λ suficientemente pequeno.

Associado a sistemas, David Costa em 1994 [14] considerou

$$\begin{cases} -\Delta u + m_1(x)u = \ f(x,u,v), \quad \mathbb{R}^N, \\ \\ -\Delta v + m_2(x)v = \ g(x,u,v), \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

mostrando a existência de solução com m_i são funções contínuas, coercivas e $m_i \geqslant m_0 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, f e g são funções contínuas com $f(x,0,0) = g(x,0,0) = 0$ e satisfazendo hipóteses adequadas.

Manouni e Touzani em 2003 [25] demonstraram a existência de solução para

$$\begin{cases} -\Delta_p u + m_1(x)u^{p-1} = \ b(x)u^{\gamma}v^{\delta+1}, \quad \mathbb{R}^N, \\ \\ -\Delta_q v + m_2(x)v^{q-1} = \ b(x)v^{\delta}u^{\delta+1}, \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde m_i se comportam como no trabalho citado anteriormente, b é uma função não-negativa e $0 < \gamma \leqslant p-1$, $0 < \delta \leqslant q-1$ e $\max\{(N-p)/N, (N_q)/N\} < (\gamma+1)/p^* + (\delta+1)/q^* < 1$.

Ainda em 2003, Yang em [58] e Ying e Yang [59], em 2007 mostraram a existência de solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \ a(x)g(v), \quad \mathbb{R}^N, \\ \\ -\Delta_q v = \ c(x)f(u), \quad \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{13}$$

onde g e f são sublineares no infinito e no zero e a e c são contínuas não-negativas em $\mathbb{R}^N$ em [59] e radiais em [58].

Nosso trabalho está dividido em três capítulos. No **Capítulo 1**, apresentamos alguns resultados que servirão aos demais, principalmente, algumas propriedades de autovalor do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p w + V(x)w^{p-1} = \lambda_1 \rho(x) w^{p-1}, & \Omega, \\ w > 0, \quad \Omega; \quad w = 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{14}$$

onde V e ρ satisfazem hipóteses adequadas e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e também uma situação limite de autovalores quando $\Omega = \mathbb{R}^N$. E, além disso, Princípios de Sub-Supersolução para sistemas em $\mathbb{R}^N$ e em domínios limitados. Ressaltando que, esses resultados são ferramentas fundamentais nas demonstrações posteriores.

No **Capítulo 2** demonstramos a não-existência, existência e multiplicidade de soluções para uma subclasse do problema (1), mais especificamente,

$$(P_{\lambda,\mu}) \begin{cases} -\Delta_p u + m_1(x)u^{p-1} = & a(x)u^{\beta_1} + b(x)u^{\gamma_1}v^{\delta_1} + \lambda f(x), \quad \Omega, \\ -\Delta_q v + m_2(x)v^{q-1} = & c(x)v^{\beta_2} + d(x)v^{\gamma_2}u^{\delta_2} + \mu g(x), \quad \Omega, \\ u, v \geqslant 0, \quad \Omega; \quad u = v = 0, \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

para Ω limitado, $0 \leqslant m_i \in L^\infty(\Omega)$ e f e g podendo mudar de sinal.

Neste capítulo, consideraremos como solução do problema $(P_{\lambda,\mu})$ um par de funções não-nulas $(u,v) \in E$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi + m_1 u^{p-1}\varphi\right) dx &= \int_\Omega \left(a u^{\beta_1}\varphi + b u^{\gamma_1} v^{\delta_1}\varphi + \lambda f \varphi\right) dx, \\ \int_\Omega \left(|\nabla v|^{q-2}\nabla v \nabla\psi + m_2 v^{q-1}\psi\right) dx &= \int_\Omega \left(c v^{\beta_2}\psi + b u^{\delta_2} v^{\gamma_2}\psi + \mu g \psi\right) dx, \end{aligned} \tag{15}$$

para todo $(\varphi, \psi) \in E$, onde $E = E_1 \times E_2$ é um espaço de Banach e

$$E_1 = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega); \int_\Omega (|\nabla u|^p + m_1|u|^p)dx < \infty \right\} \text{ e}$$

$$E_2 = \left\{ v \in W_0^{1,q}(\Omega); \int_\Omega (|\nabla v|^q + m_2|v|^q)dx < \infty \right\},$$

munido da norma $\|(u,v)\|_E = \|u\|_{E_1} + \|v\|_{E_2}$, com

$$\|u\|_{E_1} = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^p + m_1|u|^p)dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ e } \|v\|_{E_2} = \left(\int_\Omega (|\nabla v|^q + m_2|v|^q)dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Primeiramente, abordaremos a não-existência, supondo as seguintes condições,

(NE)$_1$ **(a)** $\beta_i < p-1 < \gamma_i + \delta_i \leqslant p^* - 1$ ou **(b)** $\gamma_i + \delta_i < p - 1 < \beta_i \leqslant p^* - 1$,

(NE)$_2$ $p - 1 < \beta_i$, $\gamma_i + \delta_i \leqslant p^* - 1$, para $i = 1, 2$.

Além disso, em ambos os casos não é necessário que as funções a, b, c, d sejam positivas em todo Ω, pedimos que estas funções juntamente com f e g satisfaçam,

(NE) Existe $\Omega_0 \subset \Omega$ aberto tal que $m^+|_{\Omega_0} \neq 0$, onde $m(x) = \min\{a(x), b(x), c(x), d(x), f(x), g(x)\}$, $x \in \Omega$.

(NE)^1 $a \in L^{p^*/(p^*-\beta_1-1)}(\Omega)$, $b \in L^{p^*/(p^*-\gamma_1-\delta_1-1)}(\Omega)$, $c \in L^{p^*/(p^*-\beta_2-1)}(\Omega)$, $d \in L^{p^*/(p^*-\gamma_2-\delta_2-1)}(\Omega)$, $m_1, m_2 \in L^{p^*/(p^*-p)}(\Omega)$, e para $i = 1, 2$

$$m_i^+ \in L^\infty(\Omega) \text{ e } \|m_i^+\|_\infty < \left(\frac{p-1-\beta_i}{\gamma_i+\delta_i-p+1}\right)^{\frac{\beta_i-p+1}{\gamma_i+\delta_i-\beta_i}} + \left(\frac{p-1-\beta_i}{\gamma_i+\delta_i-p+1}\right)^{\frac{\gamma_i+\delta_i-p+1}{\gamma_i+\delta_i-\beta_i}}.$$

(NE)^2 $m_1, m_2, a, b, c, d, f, g \in L^r(\Omega)$, onde $\begin{cases} r > \dfrac{N}{p}, & \text{se } 1 < p \leqslant N \\ r = 1, & \text{se } p > N. \end{cases}$

Nossa contribuição, neste contexto, são os seguintes resultados. O primeiro trata de problemas do tipo sublinear e superlinear.

Teorema 0.1. *Suponha que, (NE), (NE)$_1$ e (NE)^1 sejam satisfeitas. Então, existe $\Lambda^* > 0$ tal que o problema $(P_{\lambda,\mu})$ não tem solução não-negativa se $\lambda, \mu > \Lambda^*$.*

Enquanto o próximo considera problemas do tipo superlinear.

Teorema 0.2. *Suponha que, (NE), (NE)$_2$ e (NE)^2 sejam satisfeitas e $1 < p < N$. Então, existe $\Lambda^* > 0$ tal que o problema $(P_{\lambda,\mu})$ não tem solução não-negativa se $\lambda, \mu > \Lambda^*$.*

Os Teoremas 0.1 e 0.2 estendem os resultados de não-existência de Santos [51] e Qiuyi e Lihui [17] para sistemas e melhora os de Yin e Yang [60], pois inclui termos mistos ao sistema, além de dar mais liberdade na variação aos expoentes. Em nosso caso, desenvolvemos duas técnicas distintas para não-existência onde em uma delas usando propriedades do operador p-laplaciano em conjunto com as características das funções testes cuidadosamente tomadas fomos capazes de obter estimativas a priori nos parâmetros λ e μ. No segundo caso, também chegamos a uma estimativa para os parâmetros empregando os resultados de autovalor demonstrados no Capítulo1 e também considerando funções testes e subdomínios adequados.

Em ambos os casos, uma das dificuldades superadas foi a presença dos termos mistos. A estratégia foi unificar as equações, e para isso exploramos o método das funções testes e subconjuntos de Ω apropriados, também conhecido como Método de Mitidieri, que nos permitiu a comparação que precisávamos.

Ainda associado ao mesmo sistema também estudamos a existência e multiplicidade de soluções para o caso superlinear. Sendo que, para trabalharmos com o sistema variacionalmente admitimos que $\gamma_1 = \alpha$, $\delta_1 = \gamma + 1$, $\gamma_2 = \gamma$, $\delta_2 = \alpha + 1$ e $b \equiv d$, com $\alpha, \gamma > -1$, $\beta_1 > p - 1$, $\beta_2 > q - 1$ e $\alpha + \gamma + 1 > \max\{p-1, q-1\}$.

Inspirados nos artigos de Santos [51] e Yin e Yang [60], ambos de 2010, demonstramos a existência da primeira solução via Método de Sub-supersolução, considerando as seguintes hipóteses,

(E_1) $a, b, c \in L^\infty(\Omega)$ são funções contínuas não-negativas,

(E_2) $\beta_1 < p^* - 1$, $\beta_2 < q^* - 1$ e $\alpha + \gamma + 1 < \min\{p^* - 1, q^* - 1\}$.

Além disso, sendo $0 < \delta_i < 1$, para $i = 1, 2$ e $\mathcal{F} := C^{\delta_1}(\overline{\Omega}) \times C^{\delta_2}(\overline{\Omega}) \setminus \{(0,0)\}$ denote

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \;=\; & \{(f,g) \in \mathcal{F}/(P_f) \text{ têm solução em } W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \text{ e} \\ & (Q_g) \text{ têm solução em } W_0^{1,q}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})\}, \end{aligned}$$

onde

$$(P_f)\begin{cases} -\Delta_p u + m_1(x)u^{p-1} &= f(x), \quad \Omega, \\ u \geqslant 0, \quad \Omega; \quad u &= 0, \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

$$(Q_g)\begin{cases} -\Delta_q v + m_2(x)v^{q-1} = & g(x), \quad \Omega, \\ v \geqslant 0, \quad \Omega; \quad v = & 0, \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

No Capítulo 1, temos exemplos de funções onde os problemas acima têm solução.

Então,

Teorema 0.3. *Suponha que a hipótese (E_1) seja satisfeita e $(f,g) \in \mathcal{H}$. Então, existem $\lambda^*, \mu^* > 0$ tais que o problema $(P_{\lambda,\mu})$ tem uma solução não-nula $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$, para todo $(\lambda, \mu) \in (0, \lambda^*) \times (0, \mu^*)$, satisfazendo $\lim_{\lambda,\mu \to 0} \|u_{\lambda,\mu}\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{\lambda,\mu \to 0} \|v_{\lambda,\mu}\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$. Adicionalmente, se assumirmos (E_2), temos $I(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu}) < 0$, para (λ, μ) suficientemente pequenos, sendo I o funcional energia associado ao sistema $(P_{\lambda,\mu})$.*

Agora, seja $N(\partial\Omega)$ como sendo uma vizinhança de $\partial\Omega$ que intercepta Ω, e denote

$$\mathcal{H}^+ = \{(f,g) \in \mathcal{F} \;/\; \exists\; N(\partial\Omega) \text{ tal que } f(x), g(x) \geqslant 0, \text{ para } x \in N(\partial\Omega)\}.$$

Observe que, $C_0^\infty(\Omega)^2 \subset \mathcal{H}^+$.

Para demonstrarmos a existência da segunda solução, vamos supor as seguintes hipóteses,

(E_3) $a \in L^{\sigma_1}(\Omega)$, com $\sigma_1 = \max\{p^*/(p^* - \beta_1 - 1), q^*/(q^* - \gamma - 1)\}$, $c \in L^{\sigma_2}(\Omega)$, com $\sigma_2 = \max\{q^*/(q^* - \beta_2 - 1), p^*/(p^* - \alpha - 1)\}$, $b \in L^\infty(\Omega)$ funções não-negativas;

(E_4) $\gamma, \alpha > 0$ e $\dfrac{p^*}{p}\left(1 - \dfrac{\gamma+1}{q^*}\right) > 1$, $\dfrac{q^*}{q}\left(1 - \dfrac{\alpha+1}{p^*}\right) > 1$

(E_5) $\beta_1 \leqslant p^*\dfrac{\gamma+1}{q^*} + \alpha$, $\beta_2 \leqslant q^*\dfrac{\alpha+1}{p^*} + \gamma$ e $\dfrac{\alpha+1}{p^*} + \dfrac{\gamma+1}{q^*} < 1$.

Assim, temos

Teorema 0.4. *Suponha que (E_3) seja válida e $(f, g) \in \mathcal{H} \cap \mathcal{H}^+$. Então, existe pelo menos uma solução $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$ não-negativa e não-nula para o sistema $(P_{\lambda,\mu})$, desde que $(\lambda, \mu) > (0, 0)$ sejam suficientemente pequenos. Se adicionalmente, assumirmos (E_4) e (E_5), temos que a solução é positiva. Além disso, $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$ converge uniformemente para uma solução positiva (u_0, v_0) do problema $(P_{0,0})$ quando $(\lambda, \mu) \to (0, 0)$, sendo*

$$(P_{0,0}) \begin{cases} \Delta_p u + m_1(x)u^{p-1} = a(x)u^{\beta_1} + b(x)u^\alpha v^{\gamma+1}, & \Omega \\ \Delta_q v + m_2(x)v^{q-1} = c(x)v^{\beta_2} + b(x)v^\gamma u^{\alpha+1}, & \Omega \\ u, v \geqslant 0, \quad u = v = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Como consequência dos teoremas anteriores, obtemos

Corolário 0.5. *Assuma que $m_1 = m_2 = 0$, $(f, g) \in \mathcal{H} \cap \mathcal{H}^+$ e as hipóteses $(E_1) - (E_5)$ sejam satisfeitas . Então, existem números positivos λ_* e μ_* tais que o problema $(P_{\lambda,\mu})$ tem pelo menos duas soluções sendo uma positiva e outra estritamente positiva, desde que $(\lambda, \mu) \in (0, \lambda_*) \times (0, \mu_*)$. Além disso, a solução estritamente positiva bifurca da solução nula e a solução positiva bifurca da solução positiva do problema $(P_{0,0})$, com $m_1 = m_2 = 0$.*

Se considerarmos $p = q = 2$, esses resultados melhoram os artigos de Cao e Han [9], o qual trabalharam com o problema (2) e pediram que as funções f e g sejam não-negativas, Pigong Han em [35] e Bouchekif e Nasri em [7] provaram a existência de soluções para os sistemas (4) e (5), respectivamente, mostrando a positividade dessas usando a linearidade do operador laplaciano. Em nosso trabalho, apresentamos uma estrutura do sistema mais complexa do que os anteriores e mostramos também propriedades adicionais das soluções encontradas.

Nossa estratégia para a multiplicidade foi encontrar a primeira solução via sub-supersolução e o método variacional para a existência de mais uma solução. Por isso, pedimos que os termos envolvendo β_i e $\gamma_i + \delta_i$ sejam superlineares e subcríticos e $b \equiv d$. Seguindo essa estratégia temos os trabalhos [9], [36], [35], [7], [6] que aproveitaram a solução já existente (sub-supersolução) e geraram outra, trabalhando variacionalmente com um sistema auxiliar de tal forma que a soma das soluções dos sistemas auxiliar e $(P_{\lambda,\mu})$ é uma outra solução para $(P_{\lambda,\mu})$. Porém, essa técnica falha em nosso caso pela falta de linearidade do operador p-laplaciano.

Deste modo, motivados pelo trabalho de Qiuyi e Lihui em [17] para um problema escalar, provamos que o funcional associado ao problema $(P_{\lambda,\mu})$ assume valor negativo na solução encontrada via sub-supersolução. Assim, usando o Teorema do Passo da Montanha encontramos outra solução para o sistema. E, para a positividade das soluções trabalhamos em subdomínios adequados e utilizamos o método de iteração de Moser contornando a impossibilidade do uso de Princípios de Máximo diretamente em nosso problema advinda da presença de pesos indefinidos.

No **Capítulo 3** demonstramos a existência e não-existência de solução para o sistema (1) no segundo caso, mais especificamente,

$$(Q_{\lambda,\mu})\begin{cases} -\Delta_p u + m_1(x)u^{p-1} = & a(x)f_1(u) + \lambda b(x)g_1(u)h_1(v), \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta_q v + m_2(x)u^{q-1} = & c(x)f_2(v) + \mu d(x)g_2(v)h_2(u), \quad \mathbb{R}^N, \\ \quad u, v > 0, \quad \mathbb{R}^N; & u(x), v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases}$$

onde $f_0^1 > \lambda_1(m_1, a)$ e $f_0^2 > \lambda_1(m_2, c)$ e, ou $f_0^1 < \|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{1-p}$, $f_0^2 < \|w_2\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{1-q}$ ou $f_\infty^1 < \|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{1-p}$, $f_\infty^2 < \|w_2\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{1-q}$ e temos total liberdade com o termo misto.

Assim, iniciando pelo resultado de não-existência precisaremos das seguintes hipóteses

(NE)$'$ Existe $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^N$ aberto tal que $m^+|_{\Omega_0} \neq 0$, onde $m(x) = \min\{a(x), b(x), c(x), d(x)\}$, $x \in \Omega$.

Note que, desta hipótese, podemos tomar $B_R(x_0) \subset \Omega_0$ tal que

$$a(x), b(x), c(x), d(x) > 0, \quad \forall x \in B_R(x_0).$$

Para trabalharmos com o autovalor $\lambda_{1,B_R(x_0)}(M^+, m)$, referente ao problema (14) com $\Omega = B_R(x_0)$ e suas propriedades, assumiremos que as funções m_i, a, b, c, d satisfaçam a hipótese (AV_2) do primeiro capítulo, ou seja,

(NE)$'_1$ $m_1, m_2, a, b, c, d \in L^r_{loc}(\mathbb{R}^N)$, onde $\begin{cases} r > \dfrac{N}{p}, & \text{se } 1 < p \leqslant N, \\ r = 1, & \text{se } p > N, \end{cases}$

Logo, considerando

$(1)_i$ $0 < (gh)_0^i, (gh)_\infty^i \leqslant \infty$,

$(2)_i$ $0 < (gh)_0^i \leqslant \infty$ e $\lambda_{1,B_R(x_0)}(M,m) < f_\infty^i \leqslant \infty$,

$(3)_i$ $\lambda_{1,B_R(x_0)}(M,m) < f_0^i \leqslant \infty$ e $0 < (gh)_\infty^i \leqslant \infty$,

$(4)_i$ $\lambda_{1,B_R(x_0)}(M,m) < f_0^i, f_\infty^i \leqslant \infty$,

temos

Teorema 0.6. *Assuma $p = q$, $(NE)'$ e $(NE)_1'$. E suponha que $(m)_i$ e $(n)_j$ sejam satisfeitas para $i \neq j$ e $m, n = 1, 2, 3, 4$. Então, existem $\lambda^*, \mu^* > 0$ tais que o problema $(Q_{\lambda,\mu})$ não tem solução não-negativa desde que $\lambda > \lambda^*$ e $\mu > \mu^*$.*

Para a existência de soluções precisaremos das seguintes condições,

(M) Os problemas (P_{M_1}) e (Q_{M_2}) têm soluções, onde

$$(P_{M_1}) \begin{cases} -\Delta_p w + m_1(x) w^{p-1} = M_1(x), & \mathbb{R}^N, \\ w > 0, \quad \mathbb{R}^N; & w(x) \xrightarrow{|x|\to\infty} 0, \end{cases}$$

e

$$(Q_{M_2}) \begin{cases} -\Delta_q w + m_2(x) w^{q-1} = M_2(x), & \mathbb{R}^N, \\ w > 0, \quad \mathbb{R}^N; & w(x) \xrightarrow{|x|\to\infty} 0, \end{cases}$$

com $M_1(x) = \max\{a(x), b(x)\}$ e $M_2(x) = \max\{c(x), d(x)\}$, $x \in \mathbb{R}^N$.

(M′) $m_1, m_2, a, b, c, d \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

(F) $f_0^1 > \lambda_1(m_1, a)$ e $f_0^2 > \lambda_1(m_2, c)$,

e uma das seguintes hipóteses,

$\mathbf{(F)_0}$ $f_0^1 < \|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{1-p}$, $f_0^2 < \|w_2\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{1-q}$,

$\mathbf{(F)_\infty}$ $f_\infty^1 < \|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{1-p}$, $f_\infty^2 < \|w_2\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{1-q}$,

sendo $w_1, w_2 \in C^1(\mathbb{R}^N)$ soluções dos problemas (P_{M_1}) e (Q_{M_2}), respectivamente.

Teorema 0.7. *Assuma (M), (M′), (F) e suponha que $(F)_0$ ou $(F)_\infty$ sejam satisfeitas. Então, existem $\lambda^*, \mu^* > 0$ e $(u, v) \in C^1(\mathbb{R}^N)^2$ solução estritamente positiva de $(Q_{\lambda,\mu})$ desde que $(0,0) < (\lambda, \mu) < (\lambda^*, \mu^*)$. Além disso, temos as seguintes estimativas para λ^* e μ^*:*

$$\lambda^* = \frac{1}{(gh)_0^1}\left[\|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{1-p} - f_0^1\right] \text{ e } \mu^* = \frac{1}{(gh)_0^2}\left[\|w_2\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{1-q} - f_0^2\right], \text{ se } (F)_0 \text{ vale.}$$

$$\lambda^* = \frac{1}{(gh)_\infty^1}\left[\|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{1-p} - f_\infty^1\right] \text{ e } \mu^* = \frac{1}{(gh)_\infty^2}\left[\|w_2\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{1-q} - f_\infty^2\right], \text{ se } (F)_\infty \text{ vale.}$$

E, em particular, se em $(F)_0$, $(gh)_0^1 = (gh)_0^2 = 0$, ou em $(F)_\infty$, $(gh)_\infty^1 = (gh)_\infty^2 = 0$ então $\lambda^* = \mu^* = \infty$, ou seja, o problema $(Q_{\lambda,\mu})$ tem solução para todo $(\lambda, \mu) > (0, 0)$.

Os teoremas 0.7 e 0.6 generalizam o trabalho de Yin e Yang [60] que mostraram existência e não-existência de solução para o sistema (10) dependendo dos parâmetros. Além de completar os artigos de Hai [34] e Toan e Ngo [54] que provaram a existência de solução para (11) e (12), respectivamente, solicitando a monotonicidade da funções f e g nas duas variáveis. Ademais o Teorema 0.7 estende o artigo de Gonçalves, Rezende e Santos [29] para sistemas e o Teorema 0.6 apresenta casos de não-existência não abordados pelo anteriores.

Para a demonstração do resultado de não-existência 0.6 generalizamos a técnica utilizada no Teorema 0.2, usando estimativas envolvendo autovalor e os parâmetros. E para a existência usamos técnicas de regularização-monotonização para obtermos uma supersolução do sistema $(Q_{\lambda,\mu})$ e usando um teorema de sub-supersolução demonstrado no capítulo 1 para $\mathbb{R}^N$ chegamos a uma solução concluindo o Teorema 0.7.

Para facilitar a leitura deste trabalho, repetiremos, em seus respectivos capítulos, os enunciados dos resultados principais. Assim sendo, os capítulos foram elaborados de forma a possibilitar, o quanto possível, uma leitura independente dos mesmos.

Capítulo 1

O operador p-Laplaciano com potencial adicional $-\Delta_p + V$

1.1 Existência de soluções inteiras e em domínio limitado

Nesta seção abordaremos problemas que servirão como base em toda tese tanto para não-existência, como também na existência para a construção das supersoluções. Mostraremos exemplos de funções onde o seguinte problema com Ω limitado ou $\Omega = \mathbb{R}^N$ tenha solução,

$$\begin{cases} -\Delta_p w + V(x)w^{p-1} = \rho(x), & \Omega, \\ \\ w > 0, \quad \Omega; \quad w = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, a condição de fronteira $w(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$ se torna $w(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$.

Antes porém, enunciaremos a seguinte estimativa para as soluções do problema (1.1) dada por Gueda e Veron em [30].

Lema 1.1. *Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ uma solução para (1.1), com $V, \rho \in L^q(\Omega)$, $q > N/p$, $p < N$. Então, u é limitada. Além disso, existe uma constante $C = C(N, p, |\Omega|)$ tal que $\|u\|_\infty \leqslant C\|f\|_q^{1/(p-1)}$.*

Assim, usando também resultados de minimização provamos o seguinte teorema.

Teorema 1.2. *Suponha que $\rho, V \in L^\infty(\Omega)$ com V não-negativa e $\rho \neq 0$ e $1 < p < N$. Então, existe uma única $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, para algum $\beta \in (0,1)$, solução de (1.1).*

Demonstração. A prova deste resultado foi motivada por [22, Teorema 2.2].

Considere o seguinte funcional associado ao problema (1.1), $\phi : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\phi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{1}{p}\int_\Omega V(x)|u|^p dx - \int_\Omega \rho(x) u dx.$$

Afirmação 1.1.1. *ϕ é limitado por baixo; coercivo e sequencialmente fracamente semi-contínua inferiormente.*

De fato, pelas desigualdades de Holder e Young e a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega \rho u \leqslant \frac{C_1^{p'}\|\rho\|_{p'}^{p'}}{p'} + \frac{\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}}{p}, \tag{1.2}$$

então $\phi(u) \geqslant -\frac{C_1^{p'}}{p'}\|\rho\|_{p'}^{p'}$, o que acarreta a limitação de ϕ por baixo.

Analogamente ao que foi feito em (1.2), apenas multiplicando e dividindo por 2 antes de aplicarmos a desigualdade de Young com p e p',

$$\int_\Omega \rho u \leqslant \frac{(C_2^{\frac{1}{p}})^{p'}\|\rho\|_{p'}^{p'}}{p'} + \frac{\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}}{2p},$$

consequentemente como $V \geqslant 0$ obtemos

$$\phi(u) \geqslant \frac{\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}}{2p} - \frac{(C_2^{\frac{1}{p}})^{p'}\|\rho\|_{p'}^{p'}}{p'}.$$

Logo, fazendo $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to \infty$, temos $\phi(u) \longrightarrow \infty$, isto é, ϕ é coercivo.

Além disso, temos que ϕ é contínuo. Portanto pelo Teorema 5.5 (pag. 81, [3]), ϕ tem um ponto crítico $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Por sua vez, pelo Lema 1.1, u é limitada, logo $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant M_0$, onde $M_0 = M_0(N, p, \Omega, \rho)$. Além disso, como V e ρ são limitadas em Ω, temos

$$|f(x,s)| \leqslant |\rho(x)| + |V(x)||s|^{p-1} \leqslant C_1 + C_2 M_0^{p-1}$$

para todo $(x,s) \in \overline{\Omega} \times [-M_0, M_0]$ e constantes $C_1, C_2 > 0$.

Então, pelo Resultado de Regularidade de Lieberman, a saber Lema A.5, temos que existe $\beta > 0$ tal que $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$. ∎

Observação 1.2.1. *Note que, basta pedirmos $\rho \in L^{p'}(\Omega)$ e $V \in L^q(\Omega)$, $q > N/p$ não-negativa, para obtermos solução em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Agora, para a completicidade do trabalho demonstraremos uma situação em que o problema (1.1) com $\Omega = \mathbb{R}^N$ tenha solução.

Teorema 1.3. *Suponha que $1 < p < N$ e as seguintes hipóteses sejam satisfeitas,*

(H_1) *$V, \rho \geqslant 0$ são contínuas,*

(H_2) $\displaystyle\int_0^\infty \left[s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}\widehat{\rho}(t)dt\right]^{\frac{1}{p-1}} ds < \infty$, *com* $\widehat{\rho}(t) = \sup_{|x|=t} \rho(x)$, $t > 0$.

Então, existe pelo menos uma $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ solução de (1.1) com $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Demonstração. Observe que, definindo

$$v(r) = \int_r^\infty \left[s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}\widehat{\rho}(t)dt\right]^{\frac{1}{p-1}} ds$$

mostra-se que v é uma solução do problema,

$$\left\{\begin{array}{rl} -(r^{N-1}|v'(r)|^{p-2}v'(r))' = & r^{N-1}\widehat{\rho}(r), \quad r > 0, \\ \\ v > 0, \quad \mathbb{R}^N, & v(r) \xrightarrow{r\to\infty} 0. \end{array}\right. \tag{1.3}$$

Daí, considerando $w(x) = v(|x|)$, segue de $V \geqslant 0$ que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2}\nabla w \nabla\varphi + V(x)w^{p-1}\varphi \geqslant \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

isto é, w é uma supersolução para (1.1).

Agora, considerando o problema (1.1) com $\Omega = B_k$, usando o teorema anterior, temos que existe $u_k \in C^{1,\beta}(\overline{B_k})$ solução deste problema.

Considere uma extensão de u_k definida por

$$\underline{u}_k(x) = \left\{\begin{array}{ll} u_k(x), & x \in B_k, \\ \\ 0, & |x| > k. \end{array}\right. \tag{1.4}$$

Afirmamos que,

$$\underline{u}_1(x) \leqslant \underline{u}_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \underline{u}_k(x) \leqslant \underline{u}_{k+1}(x) \leqslant \ldots \leqslant w(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

De fato, para mostrar $\underline{u}_k(x) \leqslant \underline{u}_{k+1}(x)$, $\mathbb{R}^N$, apenas precisamos analisar na bola B_{k+1}, já que fora dela as funções se anulam.

Então, note que

$$-\Delta_p \underline{u}_k = \rho(x) - V(x)\underline{u}_k^{p-1}, \quad B_k$$

$$-\Delta_p \underline{u}_{k+1} = \rho(x) - V(x)\underline{u}_{k+1}^{p-1}, \quad B_k,$$

e $\underline{u}_k(x) = 0 < \underline{u}_{k+1}(x)$, para $x \in \partial B_k$. Então, pelo Princípio de Comparação A.3, obtemos

$$\underline{u}_k \leqslant \underline{u}_{k+1}, \qquad B_k.$$

Além disso, $\underline{u}_k = 0 < \underline{u}_{k+1}$, $B_{k+1} \backslash B_k$ pela definição (1.4).

Observe também que

$$-\Delta_p \underline{u}_k = \rho(x) - V(x)\underline{u}_k^{p-1}, \ B_k,$$

$$-\Delta_p w \geqslant \rho(x) - V(x)w^{p-1}, \ B_k,$$

e $\underline{u}_k(x) = 0 < w(x)$. Então, novamente pelo mesmo Princípio $\underline{u}_k \leqslant w, \ B_k$. Consequentemente $\underline{u}_k \leqslant w$, B_k, para todo $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Isto completa a prova da afirmação.

Portanto, fazendo $u = \lim\limits_{k\to\infty} \underline{u}_k(x)$ temos que $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaz (1.1).

1.2 Uma estimativa para o autovalor principal em domínio limitado e $\mathbb{R}^N$

Nesta seção abordaremos alguns resultados relacionados ao seguinte problema de autovalor,

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)u^{p-1} = \lambda\rho(x)u^{p-1}, & \Omega, \\ \\ u > 0, \quad \Omega; \qquad u = 0, & \Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

onde Ω é um domínio limitado regular e $\rho, V : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções adequadas.

Nosso objetivo é trabalhar com o primeiro autovalor do problema (1.5) com a função V podendo mudar de sinal. Muitos trabalhos têm se dedicado à existência de autovalores nos últimos anos. O caso $V \equiv 0$ foi estudado por vários autores, tais como [15], [27] e [28], supondo diferentes hipóteses sob ρ. Eles provaram que existe um primeiro autovalor, denotado por $\lambda_1(\rho)$ e definido por

$$\lambda_1(\rho) := \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p dx \ / \ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ e } \int_\Omega \rho|u|^p dx = 1\right\}$$

no caso de domínios limitados e ilimitados. E, usando a Identidade de Picone, Allegretto e Huang em [2] e Santos em [51] mostraram propriedades envolvendo o primeiro autovalor do problema (1.5) com $V \equiv 0$ para domínios limitados e $\mathbb{R}^N$.

Nossa abordagem caminhará no sentido de provar essas propriedades, que serão especificadas posteriormente, para o caso em que V possa mudar de sinal. Para isso, precisaremos do primeiro autovalor nesta situação. Problemas desse tipo têm sido estudados recentemente por Leadi e Yechoui [42], Cuesta e Quoirin [16], Pezzo e Bonder [23], entre outros. Eles mostraram a existência de autovalor para (1.5), definindo-o por

$$\lambda_{1,\Omega}(V, \rho) := \inf\left\{\int_\Omega (|\nabla u|^p + V|u|^p)dx/u \in W_0^{1,p}(\Omega), \int_\Omega \rho|u|^p dx = 1\right\} \in (-\infty, \infty),$$

sob hipóteses apropriadas.

Considere a seguinte condição,

$$(AV_1) \ \ \rho, V \in L^r(\Omega), \text{ onde } \begin{cases} r > \dfrac{N}{p}, & \text{se } 1 < p \leqslant N, \\ r = 1, & \text{se } p > N. \end{cases}$$

Além disso, vamos denotar por $\Omega_+(\rho) = \{x \in \Omega / \rho(x) > 0\}$ e definir

$$\alpha_\Omega(V, \rho) = \inf \left\{ \int_\Omega (|\nabla u|^p + V|u|^p) dx / u \in W_0^{1,p}(\Omega), \int_\Omega |u|^p dx = 1, \int_\Omega \rho |u|^p dx = 0 \right\}.$$

Então, temos $-\infty < \alpha_\Omega(V, \rho) \leqslant \infty$, pois $\alpha_\Omega(V, \rho) \geqslant \lambda_{1,\Omega}(V, 1) > -\infty$ e $\alpha_\Omega(V, \rho) < \infty$ se, e somente se, $|\Omega_+(\rho)| < |\Omega|$ (veja [16, Teo.1 e Prop.7]).

Segue de Cuesta e Quoirin, em [16, Teorema 7] que

Lema 1.4. *Suponha que ρ, V satisfazem (AV_1) e $\rho \geqslant 0$ com $|\Omega_+(\rho)| > 0$. Então, existe um autovalor principal de* (1.5) *se, e somente se, $\alpha_\Omega(V, \rho) > 0$. Neste caso, o autovalor principal é único e caracterizado por $\lambda_{1,\Omega}(V, \rho)$.*

Por um autovalor principal queremos dizer que ele é associado a uma autofunção positiva. Agora, provaremos uma versão do [51, Lema 2.3] para nossa classe de problemas.

Lema 1.5. *Assuma (AV_1), $\rho \geqslant 0$ com $|\Omega_+(\rho)| > 0$, $\alpha_\Omega(V, \rho) > 0$ e que dado $\lambda \in \mathbb{R}$ existe $0 < v = v_\lambda \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \varphi dx + \int_\Omega V v^{p-1} \varphi dx \geqslant \int_\Omega \lambda \rho v^{p-1} \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \varphi \geqslant 0.$$

Então, $\lambda \leqslant \lambda_{1,\Omega}(V, \rho)$.

Demonstração. Por hipótese, temos

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \varphi + \int_\Omega V(x) v^{p-1} \varphi \geqslant \lambda \int_\Omega \rho(x) v^{p-1} \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 0.$$

Então, como $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}}$ e usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, provamos que

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \psi + \int_\Omega V(x) v^{p-1} \psi \geqslant \lambda \int_\Omega \rho(x) v^{p-1} \psi, \quad \forall \psi \in W_0^{1,p}(\Omega), \psi \geq 0. \tag{1.6}$$

Além disso, dado $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $v \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, $v > 0$, Ω temos $\varphi^p / v^{p-1} \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Portanto, por (1.6) obtemos

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \left(\frac{\varphi^p}{v^{p-1}} \right) + \int_\Omega V(x) v^{p-1} \left(\frac{\varphi^p}{v^{p-1}} \right) \geqslant \lambda \int_\Omega \rho(x) v^{p-1} \left(\frac{\varphi^p}{v^{p-1}} \right). \tag{1.7}$$

Agora, seja $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ uma sequência de funções não-negativas convergindo para ϕ_1, onde ϕ_1 é a primeira autofunção associada ao autovalor $\lambda_{1,\Omega}(V,\rho)$.

Então, aplicando a Identidade de Picone (Lema A.9) para as funções φ_n e v, e por (1.7), chegamos que

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_\Omega |\nabla\varphi_n|^p - \int_\Omega \nabla\left(\frac{\varphi_n^p}{v^{p-1}}\right)|\nabla v|^{p-2}\nabla v \\ &\leqslant \int_\Omega |\nabla\varphi_n|^p - \lambda\int_\Omega \rho(x)v^{p-1}\left(\frac{\varphi_n^p}{v^{p-1}}\right) + \int_\Omega V(x)v^{p-1}\left(\frac{\varphi_n^p}{v^{p-1}}\right) \\ &= \int_\Omega |\nabla\varphi_n|^p - \lambda\int_\Omega \rho(x)\varphi_n^p + \int_\Omega V(x)\varphi_n^p. \end{aligned}$$

Agora, fazendo $n \to \infty$ obtemos

$$\int_\Omega |\nabla\phi_1|^p + \int_\Omega V(x)\phi_1^p \geqslant \lambda\int_\Omega \rho\phi_1^p. \tag{1.8}$$

Por outro lado,

$$\int_\Omega |\nabla\phi_1|^p + \int_\Omega V(x)\phi_1^p = \lambda_{1,\Omega}(V,\rho)\int_\Omega \rho\phi_1^p. \tag{1.9}$$

Então de (1.8) e (1.9) segue que

$$\lambda_{1,\Omega}(V,\rho) \geqslant \lambda.$$

completando a prova do Lema 1.5.

■

Como uma consequência dos Lemas anteriores, temos

Lema 1.6. *Suponha que existe* $0 < w \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ *satisfazendo*

$$\int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\nabla w\nabla\varphi dx + \int_\Omega Vw^{p-1}\varphi dx \geqslant \int_\Omega \rho\varphi dx, \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geqslant 0.$$

Então $\lambda_{1,\Omega}(V,\rho) \geqslant \|w\|_{L^\infty(\Omega)}^{1-p}$.

Demonstração. Como em [51], começamos definindo $v = v_{\lambda,\tau}$ por $v(x) = \tau\lambda^{\frac{1}{p-1}}w(x)$, $x\in\Omega$, onde $\tau > 0$ e $0 < \lambda \leq \dfrac{1}{\|w\|_{L^\infty}^{p-1}}$.

Então, $v > 0$, Ω e

$$v(x) \leq \tau\lambda^{\frac{1}{p-1}}\|w\|_\infty \leq \tau, \quad x\in\Omega. \tag{1.10}$$

Assim, por (1.10)

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\varphi + \int_\Omega V(x)v^{p-1}\varphi &= \lambda\tau^{p-1}\left(\int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\nabla w\nabla\varphi + \int_\Omega V(x)w^{p-1}\varphi\right)\\ &\geqslant \lambda\tau^{p-1}\int_\Omega \rho(x)\varphi \geqslant \lambda\int_\Omega \rho(x)v^{p-1}\varphi.\end{aligned}$$

Consequentemente, pelo Lema 1.5, $\lambda \leqslant \lambda_{1,\Omega}(V,\rho)$.

Em particular, tomando $\lambda = \dfrac{1}{\|w\|_\infty^{p-1}}$ temos $\lambda_{1,\Omega}(V,\rho) \geq \dfrac{1}{\|w\|_\infty^{p-1}}$, completando a prova. ∎

Agora, considere funções $\rho, V : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

(AV_2) $\rho, V \in L^r_{loc}(\mathbb{R}^N)$, onde $\begin{cases} r > \dfrac{N}{p}, & \text{se } 1 < p \leqslant N,\\ r = 1, & \text{se } p > N.\end{cases}$

Se $\alpha_{B_k}(V,\rho) > 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots$ e as hipóteses dos Lemas 1.6 - 1.4 forem satisfeitas, então podemos considerar,

$$\lambda_1(V,\rho) = \lim_{k\to\infty} \lambda_{1,B_k(0)}(V,\rho) \in [0,\infty)$$

já que $\lambda_{1,B_{k+1}}(V,\rho) \leqslant \lambda_{1,B_k}(V,\rho)$.

Observação 1.6.1. *A monotonicidade dos autovalores usada anteriormente pode ser demonstrada de forma análoga ao Teorema 2.3 em [2].*

Observação 1.6.2. *Segue dos Lemas 1.5 - 1.6 que $\lambda_1(V,\rho) \geqslant 0$ para $\rho, V \in C(\mathbb{R}^N)$ com $\rho, V \geqslant 0$, $\rho \neq 0$ e $1 < p < N$. De fato, neste caso, notemos que $\alpha_{B_k}(V,\rho) \geqslant \lambda_{1,B_k}(0,1) > \|w_k\|^{1-p}_{L^\infty(B_k)} > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, onde w_k é solução de (1.1) com $\Omega = B_k$ e $V \equiv 0$ e $\rho \equiv 1$. Logo, existe $\lambda_{1,B_k}(V,\rho)$ e satisfaz $\lambda_{1,B_k}(V,\rho) \geqslant \|w_k\|_{L^\infty(B_k)}$, onde w_k é a solução de (1.1) dado pelo Lema 1.2.*

Sob hipóteses adicionais, podemos refinar a observação anterior.

Lema 1.7. *Assuma (AV_2) com $\rho \geqslant 0$ e $|\{x \in \mathbb{R}^N/\rho > 0\}| > 0$, $\alpha_{B_k}(V,\rho) > 0$ para todo $k \geqslant 1$ e que dado $0 < \lambda < \infty$, existe $v = v_\lambda \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $v > 0$, $\mathbb{R}^N$, satisfazendo*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} Vv^{p-1}\varphi dx \geqslant \lambda\int_{\mathbb{R}^N} \rho v^{p-1}dx, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ com } \varphi \geqslant 0.$$

Então, $\lambda \leqslant \lambda_1(V,\rho)$.

Em particular, se existe uma função $0 < w \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2}\nabla w\nabla\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} Vw^{p-1}\varphi dx \geqslant \int_{\mathbb{R}^N} \rho\varphi dx, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ com } \varphi \geqslant 0,$$

então $\lambda_1(V,\rho) \geqslant \|w\|^{1-p}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$.

Demonstração. Observe que, a desigualdade acima é satisfeita para todo $\mathbb{R}^N$, em particular na bola B_k. Assim, pelo Lema 1.5 temos $\lambda_{1,B_k}(V,\rho) \geqslant \lambda$, para todo $k > 1$. Logo

$$\lambda_1(V,\rho) \geqslant \lambda.$$

∎

1.3 Teoremas de Sub-supersolução para um sistema elíptico quasilinear fracamente acoplado no $\mathbb{R}^N$

Nesta seção, demonstraremos um Teorema de Sub-Supersolução para sistemas em $\mathbb{R}^N$. Como uma consequência desta prova, podemos adaptá-la para domínios limitados. Antes porém, salientamos que há outros resultados existentes desta natureza, tais como o trabalho de Cañada, Drábek e Gámez [10], Pao em [49], Leon em [44], Yang e Miao em [47], Lee, Shivaji e Ye em [43], entre outros. Em nossos resultados consideramos as sub e supersoluções no espaço $(C^1(\mathbb{R}^N))^2$, diferentemente da maioria dos anteriores que tomaram essas funções em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ e também permitimos singularidades nas não-linearidades envolvidas.

A característica essencial aqui é trabalhar com a condição de crescimento local, o que nos possibilitou estender o Teorema de Sub-Supersolução para sitemas em domínios limitados apresentado por Lee, Shivaji e Ye em [43] para $\mathbb{R}^N$. Além disso, não exigimos que as sub e supersoluções sejam positivas como os autores citados.

Para a demonstração precisaremos de um Teorema de Sub-Supersolução para sistemas em domínios limitados com a fronteira sendo funções, o qual provamos no Apêndice B.

Considere o sistema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + m_1(x)u^{p-1} = h(x,u,v), & \mathbb{R}^N, \\ -\Delta_q v + m_2(x)v^{q-1} = g(x,u,v), & \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1.11}$$

Definição 1.8. *Um par de funções $(u,v) \in C^1(\mathbb{R}^N)^2$ é chamada uma **solução (subsolução, supersolução)** de* (1.11)*, se*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi + m_1 u^{p-1}\phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x,u,v)\phi dx \quad (\leq, \geq)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{q-2}\nabla v \nabla\psi + m_2 v^{q-1}\psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u,v)\psi dx \quad (\leq, \geq)$$

$\forall \phi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\phi, \psi \geq 0$.

Na maioria dos trabalhos citados anteriormente, as hipóteses de crescimento das não-linearidades são solicitadas em $[\underline{u}, \underline{v}] \times [\overline{u}, \overline{v}]$ ou em $(0,\infty)\times(0,\infty)$ como o artigo de Shivaji, Ye e Lee. Assim, para podermos incluir casos de singularidades, trabalharemos com os seguintes conjuntos, que são mais gerais.

Definição 1.9. *O intervalo I_1 será caracterizado da seguinte forma:*

- $I_1 = (\inf_{\mathbb{R}^N} \underline{u}, \sup_{\mathbb{R}^N} \overline{u})$, *se* $\underline{u}(x) > \inf_{\mathbb{R}^N} \underline{u}$ *e* $\overline{u}(x) < \sup_{\mathbb{R}^N} \overline{u}$, $x \in \mathbb{R}^N$,
- $I_1 = (\inf_{\mathbb{R}^N} \underline{u}, \sup_{\mathbb{R}^N} \overline{u}]$, *se* $\underline{u}(x) > \inf_{\mathbb{R}^N} \underline{u}$, $x \in \mathbb{R}^N$ *e* $\overline{u}(x_0) = \sup_{\mathbb{R}^N} \overline{u}$, *para algum* $x_0 \in \mathbb{R}^N$,
- $I_1 = [\inf_{\mathbb{R}^N} \underline{u}, \sup_{\mathbb{R}^N} \overline{u})$, *se* $\underline{u}(y_0) = \inf_{\mathbb{R}^N} \underline{u}$, *para algum* $y_0 \in \mathbb{R}^N$ *e* $\overline{u}(x) < \sup_{\mathbb{R}^N} \overline{u}$, $x \in \mathbb{R}^N$,
- $I_1 = [\inf_{\mathbb{R}^N} \underline{u}, \sup_{\mathbb{R}^N} \overline{u}]$, *se* $\underline{u}(y_0) = \inf_{\mathbb{R}^N} \underline{u}$ *e* $\overline{u}(x_0) = \sup_{\mathbb{R}^N} \overline{u}$, *para alguns* $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^N$,

Temos também o intervalo I_2 representado de forma semelhante substituindo $\underline{u}$ e $\overline{u}$ por $\underline{v}$ e $\overline{v}$, respectivamente.

Assim, temos

Teorema 1.10. *Sejam $m_i \in L^\infty(\Omega)$, $i = 1,2$ funções não-negativas e $h, g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $h(x,s,t)$ e $g(x,s,t)$ são não-decrescentes em t e em s, respectivamente. Suponha que, para todo $a_1, a_2 \in I_1$ e $b_1, b_2 \in I_2$ com $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, existem funções $K_1 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $K_2 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ tais que*

$$|h(x,s,t)| \le K_1(x) + r_1(|s|), \qquad |g(x,s,t)| \le K_2(x) + r_2(|t|), \tag{1.12}$$

q.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$, $\forall (s,t) \in [a_1,a_2] \times [b_1,b_2]$, onde $r_1, r_2 : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ são funções não-decrescentes tais que $r_1(|\varphi|) \in L^{p'}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $\forall \varphi \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $r_2(|\psi|) \in L^{q'}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $\forall \psi \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Assuma que existam uma subsolução $(\underline{u}, \underline{v})$ e uma supersolução $(\overline{u}, \overline{v})$ de (1.11) tais que $(\underline{u}, \underline{v}) \le (\overline{u}, \overline{v})$, $\mathbb{R}^N$. Então, o problema (1.11) tem pelo menos uma solução $(u,v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$.

Demonstração. Para cada $j = 1, 2, \ldots$ considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + m_1(x) u^{p-1} = h(x,u,v), & B_j, \\ -\Delta_q v + m_2(x) v^{q-1} = g(x,u,v), & B_j, \\ u = \underline{u}_j, \quad v = \underline{v}_j, & \partial B_j, \end{cases} \tag{1.13}$$

onde $\underline{u}_j = \underline{u}\big|_{B_j}$ e $\underline{v}_j = \underline{v}\big|_{B_j}$.

Nosso objetivo é usar o Teorema B.5, para mostrar a existência de solução do problema (1.13).

Afirmação 1.3.1. *Os pares de funções* $(\underline{u}, \underline{v})$ *e* $(\overline{u}, \overline{v})$ *restritas a* B_j *são sub e supersoluções de* (1.13), *respectivamente.*

Observe primeiramente que funções em $C^1(\mathbb{R}^N)$ estão em $W^{1,\infty}(B_j)$ para todo j, já que $\overline{B}_j \subset B_{j+1} \subset \mathbb{R}^N$. Então, considerando

$$\underline{u}|_{B_j} = \underline{u}_j \qquad\qquad \underline{v}|_{B_j} = \underline{v}_j$$

$$\overline{u}|_{B_j} = \overline{u}_j \qquad\qquad \overline{v}|_{B_j} = \overline{v}_j$$

temos que $(\underline{u}_j, \underline{v}_j), (\overline{u}_j, \overline{v}_j) \in W^{1,p}(B_j) \times W^{1,q}(B_j)$.

Além disso, como esses pares de funções são sub e supersoluções de (1.11), então para todas $\varphi, \phi \in C_0^\infty(B_j)$, com $\varphi, \phi \geqslant 0$ segue que

$$\int_{B_j} |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \nabla \varphi + m_1(x) \underline{u}^{p-1} \varphi \leq \int_{B_j} h(x, \underline{u}, \underline{v}) \varphi$$

$$\int_{B_j} |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \nabla \phi + m_1(x) \overline{u}^{p-1} \phi \leq \int_{B_j} h(x, \overline{u}, \overline{v}) \phi$$

e do fato de $\underline{u} \leq \overline{u}$, em $\mathbb{R}^N$; se $x \in \partial B_j$ então

$$\underline{u}(x) = \underline{u}_j(x) \leqslant \overline{u}(x).$$

Assim, concluímos a prova da Afirmação 1.3.1.

Note ainda que, denotando por

$$\overline{a}_j = \max_{\overline{B}_j} \overline{u} \qquad\qquad \overline{b}_j = \max_{\overline{B}_j} \overline{v}$$

$$\underline{a}_j = \min_{\overline{B}_j} \underline{u} \qquad\qquad \underline{b}_j = \min_{\overline{B}_j} \underline{v},$$

segue em todos os casos que $\overline{a}_j, \underline{a}_j \in I_1$ e $\overline{b}_j, \underline{b}_j \in I_2$, pois

$$\min_{\overline{B}_j} \underline{u} \geqslant \inf_{\mathbb{R}^N} \underline{u} \qquad \max_{\overline{B}_j} \overline{u} \leqslant \sup_{\mathbb{R}^N} \overline{u},$$

analogamente temos para $\underline{v}$ e $\overline{v}$. Note que, mesmo se ocorrer a igualdade para algum j, ainda teremos $\overline{a}_j, \underline{a}_j \in I_1$, já que neste caso o ínfimo ou supremo é atingido então o intervalo é fechado neste extremo. Além disso, $[\underline{u}_j, \overline{u}_j] \times [\underline{v}_j, \overline{v}_j] \subset [\underline{a}_j, \overline{a}_j] \times [\underline{b}_j, \overline{b}_j]$, então por (1.15) temos que existem $K_1 \in L^\infty(B_j)$ e $K_2 \in L^\infty(B_j)$ tais que

$$|h(x,s,t)| \leqslant K_1(x) + r_1(|s|), \qquad\qquad |g(x,s,t)| \leqslant K_2(x) + r_2(|t|),$$

q.t.p. $x \in B_R$, $\forall (s,t) \in [\underline{u}_j, \overline{u}_j] \times [\underline{v}_j, \overline{v}_j]$ e $r_1(|\varphi|) \in L^{p'}(B_j)$, $\forall \varphi \in L^p(B_j)$ e $r_2(|\psi|) \in L^{q'}(B_j)$, $\forall \psi \in L^q(B_j)$, ou seja, a hipótese (B.4) é satisfeita.

Portanto pelo Teorema B.5 existe $(u_j, v_j) \in W^{1,p}(B_j) \times W^{1,q}(B_j)$ solução de (1.13) com

$$(\underline{u}_j, \underline{v}_j) \leq (u_j, v_j) \leq (\overline{u}_j, \overline{v}_j), \quad B_j.$$

Observe que,

$$|h(x, s, t)| \leqslant K_1(x) + r_1(|s|) \leqslant \|K_1\|_\infty + r_1(\|\overline{u}_j\|_\infty),$$

$\forall (x, s, t) \in B_k \times [\underline{a}_k, \overline{a}_k] \times [\underline{b}_k, \overline{b}_k]$.

Assim, pelo Lema A.5, existe $\beta = \beta(C, N, p) > 0$, tal que

$$u_j \in C^{1,\beta}(\overline{B}_k) \text{ e}$$

$$\|u_j\|_{1,\beta} \leq C_k = C_k(p, \underline{a}_k, \overline{a}_k, N, B_k),$$

$\forall j \geq k + 1$.

Agora, da imersão compacta $C^{1,\beta}(\overline{B}_k) \hookrightarrow C^1(\overline{B}_k)$, definindo

$$u_k^j := u_j|_{B_k}, \quad j \geq k + 1,$$

segue que, existem para cada $k = 1, 2, \ldots$, subsequências $\{u_k^{j_{kn}}\}_{j \geq k+1}$ de $\{u_k^j\}_{j \geq k+1}$ e $u^k \in C^1(\overline{B}_k)$ tais que

$$u_k^{j_{kn}} \longrightarrow u^k \text{ em } C^1(\overline{B}_k).$$

Mais especificamente,

$$u_1^{j_{11}}, u_1^{j_{12}}, u_1^{j_{13}}, \ldots \longrightarrow u^1 \text{ em } C^1(\overline{B}_1).$$

$$u_2^{j_{21}}, u_2^{j_{22}}, u_2^{j_{23}}, \ldots \longrightarrow u^2 \text{ em } C^1(\overline{B}_2).$$

$$u_3^{j_{31}}, u_3^{j_{32}}, u_3^{j_{33}}, \ldots \longrightarrow u^k \text{ em } C^1(\overline{B}_3).$$

$$\vdots$$

Defina, $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, \infty)$ tal que

$$u(x)|_{B_k} = u^k(x), \text{ para cada } k = 1, 2, \ldots.$$

Segue da regularidade das $(u^k)'s$ que $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$.

Temos ainda que, $u_r^{j_{rr}}$, $r = 1, 2, \ldots$ é tal que

$$u_r^{j_{rr}} \longrightarrow u^k \text{ em } C^1(\overline{B}_k), \text{ para cada } k \geq 1.$$

De fato, isso ocorre pois a sequência $\{u_r^{j_{rr}}\}_{r \geqslant 1}$ restrita à B_k é uma subsequência de $\{u_k^{j_{kr}}\}_{j \geq k+1}$ e

$$u_k^{j_{kr}} \stackrel{r \to \infty}{\longrightarrow} u^k := u, \quad \forall x \in B_k.$$

Assim, fazendo $r \to \infty$,

$$u_r^{j_{rr}} \longrightarrow u \text{ em } C^1(\mathbb{R}^N).$$

De forma semelhante, mostra-se que existe uma subsequência $\{v_r^{j_{rr}}\}$ de $\{v_j\}$ e define-se v tal que

$$v_r^{j_{rr}} \longrightarrow v \text{ em } C^1(\mathbb{R}^N).$$

Afirmação 1.3.2.

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi + m_1(x)u^{p-1}\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x,u,v)\varphi,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{q-2}\nabla v \nabla \phi + m_2(x)v^{q-1}\phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u,v)\phi,$$

$\forall \varphi, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

De fato, dado $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $supp\varphi \subset B_i$, de forma que $\varphi \in C_0^\infty(B_i)$. Logo, temos

$$\int_{B_i} |\nabla u_r^{j_{rr}}|^{p-2}\nabla u_r^{j_{rr}} \nabla \varphi + m_1(x)(u_r^{j_{rr}})^{p-1}\varphi = \int_{B_i} h(x, u_r^{j_{rr}}, v_r^{j_{rr}})\varphi, \quad \forall r > i,$$

pois $\{u_r^{j_{rr}}, v_r^{j_{rr}}\}_{r>i}$ restrita à B_i é uma subsequência de $\{u_i^j, v_i^j\}_{j>i}$, que é solução para (1.13) em B_i com $(\underline{u}_i, \underline{v}_i) \leqslant (u_i^j, v_i^j) \leqslant (\overline{u}_i, \overline{v}_i)$, B_i.

Então, $(\underline{u}_i, \underline{v}_i) \leqslant (u_r^{j_{rr}}, v_r^{j_{rr}}) \leqslant (\overline{u}_i, \overline{v}_i)$, B_i, consequentemente por (1.15), segue

$$|h(x, u_r^{j_{rr}}, v_r^{j_{rr}})| \leqslant K_1(x) + r_1(|u_r^{j_{rr}}|) \leqslant \|K_1\|_\infty + r_1(|\overline{u}_i|).$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue mostra-se que,

$$\int_{B_i} |\nabla u_r^{j_{rr}}|^{p-2}\nabla u_r^{j_{rr}} \nabla \varphi \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \int_{B_i} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi,$$

$$\int_{B_i} h(x, u_r^{j_{rr}}, v_r^{j_{rr}})\varphi \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \int_{B_i} h(x,u,v)\varphi,$$

$$\int_{B_i} m_1(x)(u_r^{j_{rr}})^{p-1}\varphi \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \int_{B_i} m_1(x)u^{p-1}\varphi.$$

Logo,

$$\int_{B_i} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi + m_1(x)u^{p-1}\varphi dx = \int_{B_i} h(x,u,v)\varphi,$$

consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi + m_1(x)u^{p-1}\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x,u,v)\varphi.$$

Analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{q-2}\nabla v \nabla \phi + m_2(x)v^{q-1}\phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u,v)\phi, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

concluindo a prova do Teorema. ∎

Fazendo uma demonstração semelhante à que foi feita, conseguimos enunciar um resultado correspondente para domínio limitado Ω. Apenas observando que, pelo Lema A.6, podemos tomar uma sequência de subdomínios de Ω com fronteiras C^∞, $\{\Omega_j\}_{j=1}^\infty$ tais que

$$\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \ldots \subset\subset \Omega_j \subset\subset \Omega_{j+1} \subset\subset \ldots$$

$$\text{e } \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j = \Omega.$$

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado, temos os seguintes conceitos e Teorema. Primeiramente, considere

$$\begin{cases} -\Delta_p u + m_1(x)u^{p-1} = h(x,u,v), & \Omega, \\ -\Delta_q v + m_2(x)v^{q-1} = g(x,u,v), & \Omega, \\ u = 0, \quad v = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.14}$$

Definição 1.11. *Um par de funções $(u,v) \in (C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}))^2$ é chamada uma **solução** (**subsolução**, **supersolução**) de (1.14), se*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi + m_1(x)u^{p-1}\phi dx = \int_\Omega h(x,u,v)\phi dx \quad (\leq, \geq)$$
$$\int_\Omega |\nabla v|^{q-2}\nabla v \nabla \psi + m_2(x)v^{q-1}\psi dx = \int_\Omega g(x,u,v)\psi dx \quad (\leq, \geq)$$

$\forall \phi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi, \psi \geq 0$ e $u = v = 0, \partial\Omega$.

E correspondentemente ao significado dos intervalos I_1 e I_2, definição 1.9, temos $\overline{I}_1$ e $\overline{I}_2$ substituindo o conjunto $\mathbb{R}^N$ pelo domínio Ω.

Teorema 1.12. *Sejam $m_i \in L^\infty(\Omega)$, $i = 1, 2$ funções não-negativas e $h, g : \Omega \times (0,\infty) \times (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $h(x,s,t)$ e $g(x,s,t)$ são não-decrescente em t e em s, respectivamente. E, para todo $a_1, a_2 \in \overline{I}_1$ e $b_1, b_2 \in \overline{I}_2$ com $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, existem funções $K_1 \in L^\infty_{loc}(\Omega)$, $K_2 \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ tais que*

$$|h(x,s,t)| \leq K_1(x) + r_1(|s|), \qquad |g(x,s,t)| \leq K_2(x) + r_2(|t|), \tag{1.15}$$

q.t.p. $x \in \Omega$, $\forall (s,t) \in [a_1,a_2] \times [b_1,b_2]$, onde $r_1, r_2 : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ são funções não-decrescentes tais que $r_1(|\varphi|) \in L^{p'}_{loc}(\Omega)$, $\forall \varphi \in L^p_{loc}(\Omega)$ e $r_2(|\psi|) \in L^{q'}_{loc}(\Omega)$, $\forall \psi \in L^q_{loc}(\Omega)$. Suponha que, existam uma subsolução $(\underline{u}, \underline{v})$ e uma supersolução $(\overline{u}, \overline{v})$ de (1.11) tais que $(\underline{u}, \underline{v}) \leq (\overline{u}, \overline{v})$, Ω. Então, o problema (1.14) tem pelo menos uma solução

$$(u,v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}].$$

Capítulo 2

Sistemas não-homogêneos com pesos indefinidos em domínio limitado

Provaremos resultados de não-existência, existência e multiplicidade de soluções para o seguinte sistema,

$$
(P_{\lambda,\mu})\begin{cases} -\Delta_p u + m_1(x)u^{p-1} = a(x)u^{\beta_1} + b(x)u^{\gamma_1}v^{\delta_1} + \lambda f(x), & \Omega \\ -\Delta_q v + m_2(x)v^{q-1} = c(x)v^{\beta_2} + d(x)v^{\gamma_2}u^{\delta_2} + \mu g(x), & \Omega \\ u, v \geqslant 0, \quad \Omega \qquad u = v = 0, & \partial\Omega, \end{cases}
$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $\lambda, \mu > 0$ são parâmetros reais, $0 \leqslant m_i \in L^\infty(\Omega)$, $\delta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$ e as funções e expoentes envolvidos serão especificados posteriormente.

Organizamos este capítulo em duas partes, onde a primeira trata da não-existência e a segunda da existência e multiplicidade de soluções.

Uma solução do problema $(P_{\lambda,\mu})$ é um par de funções não-nulas $(0,0) \leqslant (u, v) \in E$ tal que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi + m_1 u^{p-1}\varphi\right) dx &= \int_\Omega \left(au^{\beta_1} + bu^{\gamma_1}v^{\delta_1} + \lambda f\right)\varphi dx, \\
\int_\Omega \left(|\nabla v|^{q-2}\nabla v \nabla \psi + m_2 v^{q-1}\psi\right) dx &= \int_\Omega \left(cv^{\beta_2} + bu^{\delta_2}v^{\gamma_2} + \mu g\right)\psi dx,
\end{aligned}
$$

para todo $(\varphi, \psi) \in E$, onde $E = E_1 \times E_2$ e

$$
E_1 = \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega); \int_\Omega (|\nabla u|^p + m_1|u|^p)dx < \infty\right\} \text{ e}
$$

$$
E_2 = \left\{v \in W_0^{1,q}(\Omega); \int_\Omega (|\nabla v|^q + m_2|v|^q)dx < \infty\right\},
$$

munido da norma $\|(u,v)\|_E = \|u\|_{E_1} + \|v\|_{E_2}$, com

$$
\|u\|_{E_1} = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^p + m_1|u|^p)dx\right)^{\frac{1}{p}} \text{ e } \|v\|_{E_2} = \left(\int_\Omega (|\nabla v|^q + m_2|v|^q)dx\right)^{\frac{1}{q}}.
$$

2.1 Não-Existência de soluções

Nesta seção trabalharemos com o sistema $(P_{\lambda,\mu})$, com $p=q$ e as funções a, b, c, d, f, $g:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ podendo mudar de sinal. Em relação a essas funções, consideraremos

(NE) Existe $\Omega_0 \subset \Omega$ aberto tal que $m^+|_{\Omega_0} \neq 0$, onde $m(x) = \min\{a(x),b(x),c(x),d(x),f(x),g(x)\}$, $x\in\Omega$.

Referente ao comportamento dos expoentes, estudaremos os seguintes casos,

(NE)$_1$ **(a)** $\beta_i < p-1 < \gamma_i+\delta_i \leqslant p^*-1$ ou **(b)** $\gamma_i+\delta_i < p-1 < \beta_i \leqslant p^*-1$,

(NE)$_2$ $p-1<\beta_i$, $\gamma_i+\delta_i \leqslant p^*-1$,

para $i=1,2$.

Para o primeiro caso, precisaremos da condição,

(NE)^1 $a\in L^{p^*/(p^*-\beta_1-1)}(\Omega)$, $\quad b\in L^{p^*/(p^*-\gamma_1-\delta_1-1)}(\Omega)$, $\quad c\in L^{p^*/(p^*-\beta_2-1)}(\Omega)$, $d\in L^{p^*/(p^*-\gamma_2-\delta_2-1)}(\Omega)$, $\quad m_1,m_2\in L^{p^*/(p^*-p)}(\Omega)$, e para $i=1,2$

$$m_i^+\in L^\infty(\Omega) \text{ e } \|m_i^+\|_\infty < \left(\frac{p-1-\beta_i}{\gamma_i+\delta_i-p+1}\right)^{\frac{\beta_i-p+1}{\gamma_i+\delta_i-\beta_i}} + \left(\frac{p-1-\beta_i}{\gamma_i+\delta_i-p+1}\right)^{\frac{\gamma_i+\delta_i-p+1}{\gamma_i+\delta_i-\beta_i}}.$$

E demonstraremos o seguinte resultado.

Teorema 2.1. *Suponha que, (NE), (NE)$_1$ e (NE)^1 sejam satisfeitas. Então, existe $\Lambda^*>0$ tal que o problema $(P_{\lambda,\mu})$ não tem solução se $\lambda,\mu>\Lambda^*$.*

No outro caso, usaremos o Lema 1.5 referente ao problema de autovalor (1.5) com $V(x) = M^+(x)$, $\rho(x)=m(x)$ onde $M(x)=\max\limits_{x\in\Omega}\{m_1(x),m_2(x)\}$ e Ω determinaremos posteriormente.

Então, precisaremos da condição

$$\textbf{(NE)}^2\ \ m_1,m_2,a,b,c,d,f,g\in L^r(\Omega), \text{ onde } \begin{cases} r>\dfrac{N}{p}, & \text{se } 1<p\leqslant N\\ r=1, & \text{se } p>N,\end{cases}$$

para provarmos o seguinte teorema,

Teorema 2.2. *Suponha que, (NE), (NE)$_2$ e (NE)^2 sejam satisfeitas e $1<p<N$. Então, existe $\Lambda^*>0$ tal que o problema $(P_{\lambda,\mu})$ não tem solução se $\lambda,\mu>\Lambda^*$.*

Nos resultados enunciados demonstraremos que o problema $(P_{\lambda,\mu})$ não tem solução em $W_0^{1,p}(\Omega)^2$, consequentemente como $E\subset W_0^{1,p}(\Omega)$, segue que não existe solução em E.

2.1.1 Não-linearidades mistas do tipo sublinear e superlinear

Nesta subseção demonstraremos o Teorema 2.1, o qual aborda a não-existência de soluções para sistemas que incluem não-linearidades do tipo sublinear e superlinear

Demonstração. Seja $\delta \in (-1,0)$ tal que $|\delta| < \min\left\{\dfrac{\alpha-p+1}{p}, p-1, p^*-\alpha\right\}$ e $s>0$ satisfaz $s>\max\{pk', p\sigma'\}$, onde k', σ' são conjugados de $k=\dfrac{\delta+\alpha}{\delta+p-1}$ e $\sigma=\dfrac{\delta+\alpha}{(1-\delta)(p-1)}$, e α tomado da seguinte forma

$$\begin{cases} p-1<\alpha<\gamma_i+\delta_i, & \text{se } (\mathrm{NE})_1(a) \text{ vale },\\ p-1<\alpha<\beta_i, & \text{se } (\mathrm{NE})_1(b) \text{ ocorre }.\end{cases}$$

Além disso, observe que pela hipótese (NE), podemos tomar $B_R(x_0)\subset\Omega_0$ tal que

$$a(x), b(x), c(x), d(x), f(x), g(x) > 0, \quad \forall x\in B_R(x_0). \tag{2.1}$$

Considere $\xi\in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ como sendo

$$\xi(t)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 0, & t\geqslant 2,\end{cases}$$

$0\leqslant\xi(t)\leqslant 1$, $\forall t\in(0,+\infty)$ e $|\xi'(t)|\leqslant 2$. Assim, tomando $\xi_R(x)=\xi\left(2|x-x_0|/R\right)$, temos que $\xi_R\in C_0^\infty(\Omega)$ e $|\nabla\xi_R(x)|\leqslant C/R$, $\forall x\in\Omega$, para algum $C>0$.

Denotando $j=\sigma(p-1)+1/p\sigma$, $\varphi=\xi_R^s$, $h(x)=\min\limits_{\Omega}\{f(x),g(x)\}$, $\tilde{m}_0=\tilde{m}\big|_{B_R(x_0)}$ com $\tilde{m}(x)=\min\limits_{\Omega}\{a(x),b(x),c(x),d(x),1\}$ e w_N o volume da bola $B_R(x_0)$, seja

$$\Lambda^*=\left(\frac{2}{|\delta|}\right)^j\frac{\left(\tilde{m}_0^{\frac{-k'}{k}}(Cs)^{pk'}R^{N-pk'}w_N\right)^j\left(\tilde{m}_0^{\frac{-\sigma'}{\sigma}}(Cs)^{p\sigma'}R^{N-pk'}w_N\right)^{\frac{1}{p\sigma'}}}{\displaystyle\int_\Omega h\varphi}>0.$$

Suponha, por contradição, que exista uma solução $(u,v)=(u_{\lambda,\mu},v_{\lambda,\mu})$ para $\lambda,\mu>\Lambda^*$, e defina $\Lambda=\min\{\lambda,\mu\}>\Lambda^*$.

Considere as seguintes funções

$$h_i(t)=t^{\beta_i-\alpha}+t^{\gamma_i+\delta_i-\alpha}-\|m_i^+\|_\infty t^{p-1-\alpha}, \quad i=1,2$$

Se $(NE)_1$, (a) ocorre, ou seja, $\beta_i<p-1<\alpha<\gamma_i+\delta_i$, temos

$$h_i(t)\longrightarrow\begin{cases}\infty, & t\to 0,\\ \infty, & t\to\infty.\end{cases}$$

Nosso objetivo é mostrar que, $h_i(t)>0$, $\forall\ t>0$. Para isso, observe

$$h_i(t)>0\Leftrightarrow t^{\beta_i-p+1}+t^{\gamma_i+\delta_i-p+1}>\|m_i^+\|_\infty,$$

ou seja,

$$h_i(t) > 0, \forall t > 0 \text{ se, e somente se, } \|m_i^+\|_\infty < \min_{t>0} K_i(t),$$

onde $K_i(t) = t^{\beta_i - p+1} + t^{\gamma_i+\delta_i-p+1}$.

Vamos estudar o comportamento da função K_i. Note que, novamente

$$K_i(t) \longrightarrow \begin{cases} \infty, & t \to 0, \\ \infty, & t \to \infty, \end{cases}$$

e $K_i^{'}(t) = (\beta_i - p + 1)t^{\beta_i - p} + (\gamma_i + \delta_i - p + 1)t^{\gamma_i+\delta_i-p}$, assim

$$K_i^{'}(t) > 0 \Leftrightarrow t > t_0 = \left(\frac{p-1-\beta_i}{\gamma_i+\delta_i-p+1}\right)^{\frac{1}{\gamma_i+\delta_i-\beta_i}}.$$

Consequentemente, por $(NE)^1$,

$$\min_{t>0} K_i(t) = K_i(t_0) = \left(\tfrac{p-1-\beta_i}{\gamma_i+\delta_i-p+1}\right)^{\frac{\beta_i-p+1}{\gamma_i+\delta_i-\beta_i}} + \left(\tfrac{p-1-\beta_i}{\gamma_i+\delta_i-p+1}\right)^{\frac{\gamma_i+\delta_i-p+1}{\gamma_i+\delta_i-\beta_i}} > \|m_i\|_\infty,$$

donde segue que $h_i(t) > 0$, $\forall\ t > 0$.

Agora, se $(NE)_1$, (b) ocorre, temos

(ii) $\gamma_i + \delta_i < p - 1 < \alpha < \beta_i$

De forma análoga,

$$h_i(t) > 0, \forall\ t > 0 \text{ se, e somente se, } \|m_i^+\|_\infty < \min_{t>0} K_i(t),$$

onde $K_i(t) = t^{\beta_i - p+1} + t^{\gamma_i+\delta_i-p+1}$.

Logo, como $\|m_i^+\|_\infty < K_i(t_0)$ com $t_0 = [(p-1-\beta_i)/(\gamma_i+\delta_i-p+1)]^{\frac{1}{\gamma_i+\delta_i-\beta_i}}$, segue que, $h_i(t) > 0$, $\forall t > 0$. Portanto, em ambos os casos $\min_{t>0} h_i(t) > 0$, para $i = 1, 2$. Assim, denotando $\theta = \min\{\min_{t>0} h_1(t), \min_{t>0} h_2(t)\}$, temos que $\theta > 0$.

Dado $\epsilon > 0$, defina $u_\epsilon = u + \epsilon$ e $v_\epsilon = v + \epsilon$. Denote também $U = \min\{u, v\}$, $U_\epsilon = \min\{u_\epsilon, v_\epsilon\}$ e os conjuntos

$$\Omega_1 := \{x \in \Omega / u(x) < v(x)\} \qquad \Omega_2 := \{x \in \Omega / v(x) \leqslant u(x)\}.$$

Vamos considerar inicialmente $(u_\epsilon^\delta \varphi)$ e $(v_\epsilon^\delta \varphi)$ como funções testes, sendo $\varphi = \xi_R^s$.

Assim relembrando que

$$\tilde{m}(x) = \min_\Omega \{a(x), b(x), c(x), d(x), 1\}, \quad h(x) = \min_\Omega \{f(x), g(x)\},$$

temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} \tilde{m}(x)\theta U^{\alpha} U_{\epsilon}^{\delta}\varphi + \int_{\Omega} \Lambda h(x) U_{\epsilon}^{\delta}\varphi &= \int_{\Omega_1} \tilde{m}(x)\theta u^{\alpha} u_{\epsilon}^{\delta}\varphi + \int_{\Omega_1} \Lambda h(x) u_{\epsilon}^{\delta}\varphi + \\
&+ \int_{\Omega_2} \tilde{m}(x)\theta v^{\alpha} v_{\epsilon}^{\delta}\varphi + \int_{\Omega_2} \Lambda h(x) v_{\epsilon}^{\delta}\varphi \leqslant \\
&\leqslant \int_{\Omega_1} \tilde{m} h_1(u) u^{\alpha} u_{\epsilon}^{\delta}\varphi + \int_{\Omega_1} \lambda f u_{\epsilon}^{\delta}\varphi + \int_{\Omega_2} \tilde{m} h_2(v) v^{\alpha} v_{\epsilon}^{\delta}\varphi + \int_{\Omega_2} \mu g v_{\epsilon}^{\delta}\varphi \qquad (2.2) \\
&= \int_{\Omega_1} \tilde{m}(u^{\beta_1-\alpha} + u^{\gamma_1+\delta_1-\alpha} - \|m_1^+\|_{\infty} u^{p-1-\alpha}) u^{\alpha} u_{\epsilon}^{\delta}\varphi + \int_{\Omega_1} \lambda f u_{\epsilon}^{\delta}\varphi + \\
&+ \int_{\Omega_2} \tilde{m}(v^{\beta_2-\alpha} + v^{\gamma_2+\delta_2-\alpha} - \|m_2^+\|_{\infty} v^{p-1-\alpha}) v^{\alpha} v_{\epsilon}^{\delta}\varphi + \int_{\Omega_2} \mu g v_{\epsilon}^{\delta}\varphi.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} \tilde{m}(x)\theta U^{\alpha} U_{\epsilon}^{\delta}\varphi + \int_{\Omega} \Lambda h(x) U_{\epsilon}^{\delta}\varphi &\leqslant \int_{\Omega_1} (au^{\beta_1} + bu^{\gamma_1+\delta_1} - m_1^+ u^{p-1} + \lambda f)(u_{\epsilon}^{\delta}\varphi) + \\
&+ \int_{\Omega_2} (cv^{\beta_2} + dv^{\gamma_2+\delta_2} - m_2^+ v^{p-1} + \mu g)(v_{\epsilon}^{\delta}\varphi).
\end{aligned} \qquad (2.3)
$$

Por outro lado, considere $\rho_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como sendo $\rho_n \in C^1(\mathbb{R})$,

$$
\rho_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \geqslant \dfrac{1}{n}, \\ 1, & \text{se } t \leqslant 0, \end{cases}
$$

e $\rho_n' < 0$ sobre $\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$.

Para cada $x \in \Omega$, defina $q_n(x) = \rho_n((u-v)(x))$. Assim,

$$
q_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } u \geqslant v + \dfrac{1}{n}, \\ 1, & \text{se } u < v, \end{cases}
$$

e $\rho_n'(u-v) < 0$ sobre $\Omega_n := \{x \in \Omega; v(x) \leqslant u(x) < v(x) + \dfrac{1}{n}\}$.

Observe que, $q_n \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$
q_n(x) \longrightarrow \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \Omega_2, \\ 1, & \text{se } x \in \Omega_1, \end{cases}
$$

$\|q_n\|_{\infty} \leqslant 1$ e $\nabla q_n(x) = \rho_n'((u-v)(x))\nabla(u-v)$, $x \in \Omega$.

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (TCDL) e usando que

(u,v) é solução de $(P_{\lambda,\mu})$, temos por (2.3) que

$$\int_\Omega \tilde{m}(x)\theta U^\alpha U_\epsilon^\delta\varphi + \int_\Omega \Lambda h(x)U_\epsilon^\delta\varphi \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_\Omega (au^{\beta_1}+bu^{\gamma_1}v^{\delta_1}+\lambda f - m_1u^{p-1})(u_\epsilon^\delta\varphi q_n)+$$

$$+\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (cv^{\beta_2}+dv^{\gamma_2}u^{\delta_2}+\mu g - m_2v^{p-1})((1-q_n)v_\epsilon^\delta\varphi)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(q_nu_\epsilon^\delta\varphi) + \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla((1-q_n)v_\epsilon^\delta\varphi). \tag{2.4}$$

Assim, de $\nabla(q_n\varphi) = q_n\nabla\varphi + \varphi\nabla q_n$ e (2.4), segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \tilde{m}(x)\theta U^\alpha U_\epsilon^\delta\varphi + \int_\Omega \Lambda h(x)U_\epsilon^\delta\varphi &\leqslant \lim_{n\to\infty}\Bigg[\int_\Omega q_n|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(u_\epsilon^\delta\varphi)+\\ &+\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u(u_\epsilon^\delta\varphi)\nabla q_n + \int_\Omega (1-q_n)|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla(v_\epsilon^\delta\varphi)+\\ &+\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v(v_\epsilon^\delta\varphi)\nabla(1-q_n)\Bigg] = \\ &= \lim_{n\to\infty}\Bigg[\int_\Omega q_n|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(u_\epsilon^\delta\varphi) + \int_\Omega (1-q_n)|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla(v_\epsilon^\delta\varphi)\Bigg]+\\ &+\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_n}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u(u_\epsilon^\delta) - |\nabla v|^{p-2}\nabla v(v_\epsilon^\delta))\nabla(u-v)\rho_n^{'}(u-v)\varphi\end{aligned} \tag{2.5}$$

Agora, observe que, usando $v \geqslant u$ em Ω_n mostra-se que

$$(|\nabla u|^{p-2}\nabla u(u_\epsilon^\delta) - |\nabla v|^{p-2}\nabla v(v_\epsilon^\delta))\nabla(u-v) \geqslant V_\epsilon^\delta(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\nabla(u-v),\ \Omega_n$$

com $V_\epsilon = u_\epsilon$ ou $V_\epsilon = v_\epsilon$ dependendo do sinal de $\langle\nabla u,\nabla v\rangle$. Então, pela desigualdade de Simon, Lema A.7, segue que

$$\int_\Omega \tilde{m}(x)\theta U^\alpha U_\epsilon^\delta\varphi + \int_\Omega \Lambda h(x)U_\epsilon^\delta\varphi \leqslant \int_{\Omega_1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(u_\epsilon^\delta\varphi) + \int_{\Omega_2}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla(v_\epsilon^\delta\varphi)$$

$$= \int_\Omega |\nabla U|^{p-2}\nabla U\nabla(U_\epsilon^\delta\varphi). \tag{2.6}$$

Logo,

$$\int_\Omega \tilde{m}(x)\theta U^\alpha U_\epsilon^\delta\varphi + \int_\Omega \Lambda h(x)U_\epsilon^\delta\varphi \leqslant \int_\Omega |\nabla U|^{p-2}\nabla U\nabla(U_\epsilon^\delta\varphi)$$

$$\leqslant \delta\int_\Omega |\nabla U|^pU_\epsilon^{\delta-1}\varphi + \int_\Omega |\nabla U|^{p-1}U_\epsilon^\delta|\nabla\varphi|,$$

consequentemente,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \tilde{m}(x)\theta U^\alpha U_\epsilon^\delta \varphi + \quad & \Lambda \int_\Omega h(x) U_\epsilon^\delta \varphi + |\delta| \int_\Omega |\nabla U|^p U_\epsilon^{\delta-1}\varphi \leqslant \\ & \leqslant \int_\Omega |\nabla U|^{p-1}|\nabla \varphi| U_\epsilon^\delta.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Seja $\eta > 0$ um parâmetro que tomaremos adequadamente. Assim, usando a desigualdade de Young com p e p', obtemos

$$\begin{aligned}|\nabla U|^{p-1}|\nabla\varphi| = & \left[\eta|\nabla U|^{p-1}\left(\frac{\varphi}{U_\epsilon}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]\left[|\nabla\varphi|\frac{1}{\eta}\left(\frac{U_\epsilon}{\varphi}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right] \\ \leqslant & \frac{1}{p'}\left[\eta|\nabla U|^{p-1}\left(\frac{\varphi}{U_\epsilon}\right)^{\frac{1}{p'}}\right]^{p'} + \frac{1}{p}\left[|\nabla\varphi|\frac{1}{\eta}\left(\frac{U_\epsilon}{\varphi}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]^{p}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_\Omega |\nabla U|^{p-1}|\nabla\varphi| U_\epsilon^\delta \leqslant \frac{\eta^{p'}}{p'}\int_\Omega |\nabla U|^p U_\epsilon^{\delta-1}\varphi + \frac{1}{p\eta^p}\int_\Omega U_\epsilon^{\delta+p-1}\frac{|\nabla\varphi|^p}{\varphi^{p-1}}. \tag{2.8}$$

Então, tomando $\eta > 0$ suficientemente pequeno tal que $\eta \leqslant \dfrac{|\delta|p}{2(p-1)}$ e substituindo (2.8) em (2.7), chegamos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \tilde{m}(x)\theta U^\alpha U_\epsilon^\delta \varphi + \quad & \Lambda \int_\Omega h(x) U_\epsilon^\delta \varphi + \frac{|\delta|}{2} \int_\Omega |\nabla U|^p U_\epsilon^{\delta-1}\varphi \leqslant \\ & \leqslant \frac{1}{p\eta^p}\int_\Omega U_\epsilon^{\delta+p-1}\frac{|\nabla\varphi|^p}{\varphi^{p-1}}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Agora, considere $k = (\delta+\alpha)/(\delta+p-1) > 1$ ($|\delta| < p-1$, $\alpha > p-1$). Para tal k, temos $k' = k/(k-1)$. Logo, pela desigualdade de Young com k e k',

$$\begin{aligned}\frac{1}{p\eta^p}U_\epsilon^{\delta+p-1}\frac{|\nabla\varphi|^p}{\varphi^{p-1}} = & \left[\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{k}}\tilde{m}^{\frac{1}{k}}\theta^{\frac{1}{k}}U_\epsilon^{\frac{\delta+\alpha}{k}}\varphi^{\frac{1}{k}}\right]\left[\frac{1}{p\eta^p}k^{\frac{-1}{k}}\tilde{m}^{\frac{-1}{k}}\theta^{\frac{-1}{k}}\frac{|\nabla\varphi|^p}{\varphi^{p-1+\frac{1}{k}}}\right] \\ \leqslant & \frac{1}{2}\tilde{m}\theta U_\epsilon^{\delta+\alpha}\varphi + \left(\frac{2^{\frac{k'}{k}}}{p\eta^p k' k^{\frac{k'}{k}}\theta^{\frac{k'}{k}}}\right)\frac{|\nabla\varphi|^p k'}{\varphi^{(p-1+\frac{1}{k})k'}}\tilde{m}^{\frac{-k'}{k}}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Assim, substituindo (2.10) em (2.9) temos que,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega \tilde{m}(x)\theta U_\epsilon^{\alpha+\delta}\varphi + \quad & \Lambda \int_\Omega h(x) U_\epsilon^\delta \varphi + \frac{|\delta|}{2} \int_\Omega |\nabla U|^p U_\epsilon^{\delta-1}\varphi \leqslant \\ & \leqslant C_1\int_\Omega \frac{|\nabla\varphi|^{pk'}}{\varphi^{(p-1+\frac{1}{k})k'}}\tilde{m}^{\frac{-k'}{k}} - R_\epsilon,\end{aligned} \tag{2.11}$$

onde $C_1 = \dfrac{2^{\frac{k'}{k}}}{p\eta^p k' k^{\frac{k'}{k}} \theta^{\frac{k'}{k}}}$ e $R_\epsilon = \int_\Omega \tilde{m}\theta U^\alpha U_\epsilon^\delta \varphi - \int_\Omega \tilde{m}\theta U_\epsilon^{\alpha+\delta}\varphi \to 0$, quando $\epsilon \to 0$, pelo Teorema da Convergência Dominada.

Por outro lado, procedendo com em (2.2) – (2.6) com φ sendo a função teste ao invés de $U_\epsilon^\delta \varphi$ segue que

$$\int_\Omega \tilde{m}(x)\theta U^\alpha \varphi + \int_\Omega \Lambda h(x)\varphi \leqslant \int_\Omega |\nabla U|^{p-1}|\nabla \varphi|.$$

Assim, usando a desigualdade de Holder com p e p' obtemos,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \tilde{m}(x)\theta U^\alpha \varphi + \int_\Omega \Lambda h(x)\varphi &\leqslant \int_\Omega |\nabla U|^{p-1} U_\epsilon^{\frac{(\delta-1)(p-1)}{p}} U_\epsilon^{\frac{(1-\delta)(p-1)}{p}} \varphi^{\frac{p-1}{p}} \varphi^{\frac{1-p}{p}} |\nabla \varphi| \\ &\leqslant \left(\int_\Omega |\nabla U|^p U_\epsilon^{\delta-1}\varphi\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega U_\epsilon^{(1-\delta)(p-1)} \frac{|\nabla\varphi|^p}{\varphi^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Escolhendo $\sigma = (\delta+\alpha)/[(1-\delta)(p-1)] > 1$ $\left(|\delta| < \dfrac{\alpha - p + 1}{p}, \alpha > p-1\right)$, pela desigualdade de Holder com σ e σ',

$$\begin{aligned}\int_\Omega U_\epsilon^{(1-\delta)(p-1)} \frac{|\nabla\varphi|^p}{\varphi^{p-1}} &\leqslant \left(\int_\Omega \left(\tilde{m}^{\frac{1}{\sigma}} \theta^{\frac{1}{\sigma}} U_\epsilon^{\frac{\delta+\alpha}{\sigma}} \varphi^{\frac{1}{\sigma}}\right)^\sigma\right)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\int_\Omega \left(\tilde{m}^{\frac{-1}{\sigma}} \theta^{\frac{-1}{\sigma}} \varphi^{\frac{-1}{\sigma}} \frac{|\nabla\varphi|^p}{\varphi^{p-1}}\right)^{\sigma'}\right)^{\frac{1}{\sigma'}} \\ &= \left(\int_\Omega \tilde{m}(x)\theta U_\epsilon^{\delta+\alpha}\varphi\right)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\int_\Omega \tilde{m}^{\frac{-\sigma'}{\sigma}} \theta^{\frac{-\sigma'}{\sigma}} \frac{|\nabla\varphi|^{p\sigma'}}{\varphi^{\sigma'(p-1+\frac{1}{\sigma})}}\right)^{\frac{1}{\sigma'}}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Então, substituindo (2.13) em (2.12) temos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \tilde{m}(x)\theta U^\alpha \varphi + \Lambda \int_\Omega h(x)\varphi \leqslant \\ &\leqslant \left(\int_\Omega |\nabla U|^p U_\epsilon^{\delta-1}\varphi\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega \tilde{m}(x)\theta U_\epsilon^{\delta+\alpha}\varphi\right)^{\frac{1}{p\sigma}} \left(\int_\Omega \tilde{m}^{\frac{-\sigma'}{\sigma}} \theta^{\frac{-\sigma'}{\sigma}} \frac{|\nabla\varphi|^{p\sigma'}}{\varphi^{\sigma'(p-1+\frac{1}{\sigma})}}\right)^{\frac{1}{p\sigma'}}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Assim, como a função teste foi escolhida de tal forma que

$$\int_\Omega \tilde{m}\theta U^\alpha \varphi \geqslant 0, \quad \int_\Omega \tilde{m}\theta U_\epsilon^{\delta+\alpha}\varphi, \int_\Omega \Lambda h \varphi, \int_\Omega \Lambda h U_\epsilon^\delta \varphi > 0,$$

então de (2.11) e (2.14) obtemos

$$\Lambda \int_\Omega h\varphi \leqslant \left(\frac{2}{|\delta|} C_1 \int_\Omega \frac{|\nabla\varphi|^{pk'}}{\varphi^{(p-1+\frac{1}{k})k'}} \tilde{m}^{\frac{-k'}{k}} - R_\epsilon\right)^{\frac{\sigma(p-1)+1}{p\sigma}} \left(C_2 \int_\Omega \tilde{m}^{\frac{-\sigma'}{\sigma}} \frac{|\nabla\varphi|^{p\sigma'}}{\varphi^{\sigma'(p-1+\frac{1}{\sigma})}}\right)^{\frac{1}{p\sigma'}}. \tag{2.15}$$

Relembrando que $\varphi = \xi_R^s$, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{|\nabla\varphi|^{pk'}}{\varphi^{\left(p-1+\frac{1}{k}\right)k'}}\tilde{m}^{\frac{-k'}{k}} &= \int_{B_R(x_0)} \frac{s^{pk'}\xi^{(s-1)pk'}|\nabla\xi|^{pk'}}{\xi^{s\left(p-1+\frac{1}{k}\right)k'}}\tilde{m}^{\frac{-k'}{k}} \\ &\leqslant \tilde{m}_0^{\frac{-k'}{k}} \int_{B_R(x_0)} s^{pk'}\xi^{(s-1)pk'-\left(p-1+\frac{1}{k}\right)sk'}|\nabla\xi|^{pk'} \\ &= \tilde{m}_0^{\frac{-k'}{k}} \int_{B_R(x_0)} s^{pk'}\xi^{s-pk'}|\nabla\xi|^{pk'} \\ &\leqslant \tilde{m}_0^{\frac{-k'}{k}} (Cs)^{pk'} R^{N-pk'} w_N, \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde $|\nabla\xi| \leqslant CR^{-1}$, $\tilde{m}_0 = \min\limits_{B_R(x_0)} \tilde{m}(x) > 0$ e w_N é o volume da bola $B_R(x_0)$.

Analogamente, mostra-se que

$$\int_\Omega \frac{|\nabla\varphi|^{p\sigma'}}{\varphi^{\left(p-1+\frac{1}{\sigma}\right)\sigma'}}\tilde{m}^{\frac{-\sigma'}{\sigma}} \leqslant \tilde{m}_0^{\frac{-\sigma'}{\sigma}} (Cs)^{p\sigma'} R^{N-p\sigma'} w_N. \tag{2.17}$$

Portanto fazendo $\epsilon \to 0$ em (2.15) e usando (2.16), (2.17) segue que

$$\Lambda \leqslant \left(\frac{2}{|\delta|}\right)^{\frac{\sigma(p-1)+1}{p\sigma}} \frac{\left(\tilde{m}_0^{\frac{-k'}{k}}(Cs)^{pk'}R^{N-pk'}w_N\right)^{\frac{\sigma(p-1)+1}{p\sigma}} \left(\tilde{m}_0^{\frac{-\sigma'}{\sigma}}(Cs)^{p\sigma'}R^{N-pk'}w_N\right)^{\frac{1}{p\sigma'}}}{\displaystyle\int_\Omega h\varphi} = \Lambda^*, \tag{2.18}$$

contradizendo a suposição inicial de existência de solução para $\Lambda > \Lambda^*$.

■

Observação 2.2.1. *Se no problema $(P_{\lambda,\mu})$ consideramos $\Omega = \mathbb{R}^N$ e as funções a, b, c, d, f e g forem positivas em todo $\mathbb{R}^N$, então em (2.18) podemos fazer $R \to \infty$. Assim, como $(N - pk')[(\sigma(p-1)+1)/p\sigma + 1/p\sigma'] < 0$ se $N/2 < p < N$, então neste caso não existe solução para todo $\lambda, \mu > 0$.*

2.1.2 Não-linearidades superlineares

Agora demonstraremos o Teorema 2.2 que trata de sistemas com não-linearidades superlineares.

Demonstração.

Trabalharemos com as seguintes funções,

$$h_\lambda(t) = t^{\beta_1-p+1} + t^{\gamma_1+\delta_1-p+1} + \lambda t^{-p+1},$$

$$h_\mu(t) = t^{\beta_2-p+1} + t^{\gamma_2+\delta_2-p+1} + \mu t^{-p+1}.$$

Observe que,

$$h_\lambda(t), h_\mu(t) \longrightarrow \begin{cases} \infty, & t \to 0, \\ \infty, & t \to \infty, \end{cases}$$

e além disso, $h_\lambda^{'}(t) = (\beta_1 - p + 1)t^{\beta_1 - p} + (\gamma_1 + \delta_1 - p + 1)t^{\gamma_1+\delta_1-p} + \lambda(-p+1)t^{-p}$, com

$$h_\lambda^{'}(t_\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta_1 - p + 1}{p-1}\right) t_\lambda^{\beta_1} + \left(\frac{\gamma_1 + \delta_1 - p + 1}{p-1}\right) t_\lambda^{\gamma_1+\delta_1} = \lambda.$$

Assim, como $\beta_1, \gamma_1 + \delta_1 > p - 1$ então

$$t_\lambda \xrightarrow{\lambda\to\infty} \infty. \tag{2.19}$$

Observe que, por (2.19),

$$\begin{aligned} h_\lambda(t_\lambda) &= \left(\frac{\gamma_1 + \delta_1 - p + 1}{p-1}\right) t_\lambda^{\gamma_1+\delta_1-p+1} + \left(\frac{\beta_1 - p + 1}{p-1}\right) t_\lambda^{\beta_1-p+1} + t_\lambda^{\beta_1-p+1} + t_\lambda^{\gamma_1+\delta_1-p+1} \\ &= \left(\frac{\delta_1 + \gamma_1}{p-1}\right) t_\lambda^{\gamma_1+\delta_1-p+1} + \left(\frac{\beta_1}{p-1}\right) t_\lambda^{\beta_1-p+1} \xrightarrow{\lambda\to\infty} \infty, \end{aligned}$$

ou seja,

$$h_\lambda(t_\lambda) \xrightarrow{\lambda\to\infty} \infty, \quad \text{onde } h_\lambda(t_\lambda) \leqslant h_\lambda(t), \quad \forall t > 0. \tag{2.20}$$

Analogamente, $\exists\ (t_\mu)_{\mu>0}$ tal que

$$h_\mu(t_\mu) \xrightarrow{\mu\to\infty} \infty \quad \text{onde } h_\mu(t_\mu) \leqslant h_\mu(t), \quad \forall t > 0. \tag{2.21}$$

Logo, por (2.20) e (2.21), podemos tomar $(\lambda^*, \mu^*) > (0,0)$ suficientemente grande tal que

$$h_\lambda(t_\lambda), h_\mu(t_\mu) > \lambda_{1,B_R(x_0)}(M^+, m), \quad \forall \lambda, \mu > \Lambda^* = \max\{\lambda^*, \mu^*\}.$$

onde $B_R(x_0)$ é obtida como em (2.1).

Seja $\lambda_0, \mu_0 > \Lambda^*$ e suponha, por contradição, que o sistema $(P_{\lambda,\mu})$ tenha solução com $(\lambda, \mu) = (\lambda_0, \mu_0)$, digamos $(u, v) = (u_{\lambda_0,\mu_0}, v_{\lambda_0,\mu_0})$. Considerando

$$\alpha = \min\{h_{\lambda_0}(t_{\lambda_0}), h_{\mu_0}(t_{\mu_0})\} > \lambda_{1,B_R(x_0)}(M^+, m), \tag{2.22}$$

temos

Afirmação 2.1.1. *Dada $\varphi \in C_0^\infty(B_R(x_0))$, $\varphi > 0$,*

$$\int_{B_R(x_0)} |\nabla U|^{p-2}\nabla U \nabla\varphi + \int_{B_R(x_0)} M^+(x)U^{p-1}\varphi \geqslant \int_{B_R(x_0)} \alpha m(x) U^{p-1}\varphi,$$

onde $U = \min\{u, v\}$, $M^+(x) = \max\{0, M(x)\}$ com $M(x) = \max\{m_1(x), m_2(x)\}$ e $m(x) = \min\{a(x), b(x), c(x), d(x), f(x), g(x)\}$.

De fato, usando os mesmos conjuntos Ω_1, Ω_2, e a mesma função q_n da demonstração anterior, temos pelo TCDL, que

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R(x_0)} |\nabla U|^{p-2}\nabla U\nabla\varphi + \int_{B_R(x_0)} M^+(x)U^{p-1}\varphi \geqslant \int_{\Omega_1} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi + \\
+ \int_{\Omega_1} m_1(x)u^{p-1}\varphi + \int_{\Omega_2} |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\varphi + \int_{\Omega_2} m_2(x)v^{p-1}\varphi \\
= \lim_{n\to\infty}\int_{B_R(x_0)} q_n(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi + m_1(x)u^{p-1}\varphi) + \\
+ \lim_{n\to\infty}\int_{B_R(x_0)} (1-q_n)(|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\varphi + m_2(x)v^{p-1}\varphi) \\
= \lim_{n\to\infty}\int_{B_R(x_0)} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(q_n\varphi) + m_1(x)u^{p-1}(q_n\varphi)) + \\
+ \lim_{n\to\infty}\int_{B_R(x_0)} (|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla((1-q_n)\varphi) + m_2(x)v^{p-1}((1-q_n)\varphi)) - \\
- \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_n} \rho'(u-v)(|\nabla v|^{p-2}\nabla v - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla(v-u)\varphi,
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

onde $\Omega_n := \left\{x \in \Omega; v(x) \leqslant u(x) < v(x) + \dfrac{1}{n}\right\}$.

Assim, usando que (u, v) é solução do sistema $(P_{\lambda,\mu})$, Lema A.7 e $\rho'(u-v) < 0$, em Ω_n, segue de (2.23),

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R(x_0)} |\nabla U|^{p-2}\nabla U\nabla\varphi + \int_{B_R(x_0)} M^+(x)U^{p-1}\varphi \geqslant \\
\geqslant \int_{\Omega_1} (au^{\beta_1} + bu^{\gamma_1}v^{\delta_1} + \lambda_0 f)\varphi + \int_{\Omega_2} (cv^{\beta_2} + dv^{\gamma_2}u^{\delta_2} + \mu_0 g)\varphi \\
\geqslant \int_{\Omega_1} m(x)(u^{\beta_1} + u^{\gamma_1+\delta_1} + \lambda_0)\varphi + \int_{\Omega_2} m(x)(v^{\beta_2} + v^{\gamma_2+\delta_2} + \mu_0)\varphi.
\end{aligned}
$$

Então, pela definição das funções h_λ e h_μ obtemos,

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R(x_0)} |\nabla U|^{p-2}\nabla U\nabla\varphi + \int_{B_R(x_0)} M^+(x)U^{p-1}\varphi \geqslant \\
\geqslant \int_{\Omega_1} m(x)h_{\lambda_0}(t_{\lambda_0})u^{p-1}\varphi + \int_{\Omega_2} m(x)h_{\mu_0}(t_{\mu_0})v^{p-1}\varphi \\
\geqslant \int_{\Omega_1} \alpha m(x)U^{p-1}\varphi + \int_{\Omega_2} \alpha m(x)U^{p-1}\varphi = \int_{B_R(x_0)} \alpha m(x)U^{p-1}\varphi.
\end{aligned}
$$

Logo, pelo Lema 1.5, $\alpha \leqslant \lambda_{1,B_R(x_0)}(M^+, \tilde{m})$, contradizendo (2.22). Portanto, não existe solução para $\lambda, \mu > \Lambda^*$.

■

2.2 Existência e Multiplicidade de soluções

Vamos estudar a multiplicidade de soluções do problema $(P_{\lambda,\mu})$ para o caso em que $\gamma_1 = \alpha$, $\delta_1 = \gamma + 1$, $\gamma_2 = \gamma$, $\delta_2 = \alpha + 1$ e as funções b e d são iguais, a fim de que possamos trabalhar também variacionalmente o sistema. Desta forma, temos

$$(P'_{\lambda,\mu}) \begin{cases} -\Delta_p u + m_1(x)u^{p-1} &= a(x)u^{\beta_1} + b(x)u^{\alpha}v^{\gamma+1} + \lambda f(x), \quad \Omega \\ -\Delta_q v + m_2(x)v^{q-1} &= c(x)v^{\beta_2} + b(x)v^{\gamma}u^{\alpha+1} + \mu g(x), \quad \Omega \\ u, v \geqslant 0, \quad \Omega \qquad u &= v = 0, \qquad \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado, regular em $\mathbb{R}^N$; λ, μ são parâmetros positivos, $m_i \in L^\infty(\Omega)$, para $i = 1, 2$ são funções não-negativas, $\alpha, \gamma > -1$, $\beta_1 > p - 1$, $\beta_2 > q - 1$ e $\alpha + \gamma + 1 > \max\{p - 1, q - 1\}$ e f e g são funções não identicamente nulas que podem mudar de sinal.

O objetivo nesta seção é provarmos a existência de pelo menos duas soluções, uma pelo Método de sub-supersolução e outra variacionalmente. E para distinguí-las usaremos o funcional associado ao problema mostrando que ele assume valores diferentes quando aplicado às soluções.

Para isso, trabalharemos com o funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ definido por

$$I(z) = \frac{(\alpha+1)}{p}\|u\|_{E_1}^p + \frac{(\gamma+1)}{q}\|v\|_{E_2}^q - \frac{\alpha+1}{\beta_1+1}\int_\Omega a(x)(u^+)^{\beta_1+1} - \frac{\gamma+1}{\beta_2+1}\int_\Omega c(x)(v^+)^{\beta_2+1} -$$
$$- \int_\Omega b(x)(u^+)^{\alpha+1}(v^+)^{\gamma+1} - (\alpha+1)\int_\Omega \lambda f(x)u - (\gamma+1)\int_\Omega \mu g(x)v. \tag{2.24}$$

$\forall z = (u, v) \in E$.

Observação 2.2.2. *Assumindo $m_i(x) \geq 0$, para $x \in \Omega$ e $m_i \in L^\infty(\Omega)$, com $i = 1, 2$ temos que as normas de $W_0^{1,p}(\Omega)$ e E_1 são equivalentes, assim como as normas de $W_0^{1,q}(\Omega)$ e E_2.*

Para demonstrarmos nosso primeiro resultado de existência precisaremos das seguintes condições,

(E_1) $a, b, c \in L^\infty(\Omega)$ são funções contínuas não-negativas,

(E_2) $\beta_1 < p^* - 1$, $\beta_2 < q^* - 1$ e $\alpha + \gamma + 1 < \min\{p^* - 1, q^* - 1\}$.

E sendo $0 < \delta_i < 1$, para $i = 1, 2$ e $\mathcal{F} := C^{\delta_1}(\overline{\Omega}) \times C^{\delta_2}(\overline{\Omega}) \setminus \{(0,0)\}$ denote $\mathcal{H} = \{(f,g) \in \mathcal{F}/(P_f)$ e (Q_g) têm soluções em $W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $W_0^{1,q}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, respectivamente$\}$, onde

$$(P_f)\begin{cases} -\Delta_p u + m_1(x)u^{p-1} = f(x), & \Omega, \\ u \geqslant 0, \quad \Omega; \quad u = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

$$(Q_g)\begin{cases} -\Delta_q v + m_2(x)v^{q-1} = g(x), & \Omega, \\ v \geqslant 0, \quad \Omega; \quad v = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

Observação 2.2.3. *Pelo Lema 1.2, os problemas acima têm soluções.*

Observação 2.2.4. *Denotaremos por $(P^1_{M_f})$ e $(Q^2_{M_g})$ problemas com $M_f(x) := \max\{a(x), b(x), f(x)\}$ e $M_g(x) := \max\{c(x), b(x), g(x)\}$. Note que, como $m_i \geqslant 0$, para $i = 1, 2$ e pela hipótese (E_1), $M_f, M_g \in L^\infty(\Omega)$ também são não-negativas, então pelo Lema 1.2, os problemas (P_{M_f}) e (Q_{M_g}) têm soluções em $W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $W_0^{1,q}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, respectivamente.*

Então,

Teorema 2.3. *Suponha que a hipótese (E_1) seja satisfeita e $(f,g) \in \mathcal{H}$. Então, existem $\lambda^*, \mu^* > 0$ tais que o problema $(P_{\lambda,\mu})$ tem uma solução não-nula $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$, para todo $(\lambda,\mu) \in (0,\lambda^*) \times (0,\mu^*)$, satisfazendo $\lim\limits_{\lambda,\mu\to 0} \|u_{\lambda,\mu}\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim\limits_{\lambda,\mu\to 0} \|v_{\lambda,\mu}\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$. Adicionalmente, se assumirmos (E_2), temos $I(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu}) < 0$, para (λ,μ) suficientemente pequenos.*

Observação 2.3.1. *Neste caso de existência podemos considerar $\beta_1 = p^* - 1$, $\beta_2 = q^* - 1$ e $\alpha + \gamma + 1 = \min\{p^* - 1, q^* - 1\}$, pois não utilizamos imersão compacta.*

Agora a estratégia é encontrarmos um ponto crítico de I usando o Teorema do Passo da Montanha, Teorema A.11, e posteriormente mostrar que esse ponto crítico é uma solução não-negativa do problema $(P'_{\lambda,\mu})$.

Antes de enunciarmos as condições que precisaremos para a existência da segunda solução, denote $N(\partial\Omega)$ como sendo uma vizinhança de $\partial\Omega$ que intercepta Ω. E seja,

$$\mathcal{H}^+ = \{(f,g) \in \mathcal{F} \ / \ \exists N(\partial\Omega) \text{ tal que } f(x), g(x) \geqslant 0, \text{ para } x \in N(\partial\Omega)\}.$$

Assim, considere as seguintes hipóteses,

(E_3) $a \in L^{\sigma_1}(\Omega)$, com $\sigma_1 = \max\{p^*/(p^* - \beta_1 - 1), q^*/(q^* - \gamma - 1)\}$, $c \in L^{\sigma_2}(\Omega)$, com $\sigma_2 = \max\{q^*/(q^* - \beta_2 - 1), p^*/(p^* - \alpha - 1)\}$, $b \in L^\infty(\Omega)$ funções não-negativas;

(E_4) $\gamma, \alpha > 0$ e $\dfrac{p^*}{p}\left(1 - \dfrac{\gamma+1}{q^*}\right) > 1$, $\dfrac{q^*}{q}\left(1 - \dfrac{\alpha+1}{p^*}\right) > 1$

(E_5) $\beta_1 \leqslant p^*\dfrac{\gamma+1}{q^*} + \alpha$, $\beta_2 \leqslant q^*\dfrac{\alpha+1}{p^*} + \gamma$ e $\dfrac{\alpha+1}{p^*} + \dfrac{\gamma+1}{q^*} < 1$.

Assim, temos

Teorema 2.4. *Suponha que a hipótese (E_3) seja válida e $(f,g) \in \mathcal{H} \cap \mathcal{H}^+$. Então, existe pelo menos uma solução $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$ não-negativa não-nula para o sistema $(P_{\lambda,\mu})$, desde que $(\lambda,\mu) > (0,0)$ sejam suficientemente pequenos. Se adicionalmente, assumirmos (E_4) e (E_5), temos que a solução é positiva. Além disso, $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$ converge uniformemente para uma solução positiva (u_0, v_0) do problema $(P_{0,0})$ quando $(\lambda,\mu) \to (0,0)$, sendo*

$$(P_{0,0})\begin{cases} \Delta_p u + m_1(x)u^{p-1} = a(x)u^{\beta_1} + b(x)u^\alpha v^{\gamma+1}, & \Omega \\ \Delta_q v + m_2(x)v^{q-1} = c(x)v^{\beta_2} + b(x)v^\gamma u^{\alpha+1}, & \Omega \\ u, v \geqslant 0, \quad u = v = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Como consequência dos teoremas anteriores, obtemos

Corolário 2.5. *Assuma que, $m_1 = m_2 = 0$, $(f,g) \in \mathcal{H} \cap \mathcal{H}^+$ e as hipóteses $(E_1) - (E_5)$ sejam satisfeitas . Então, existem números positivos λ_* e μ_* tais que o problema $(P_{\lambda,\mu})$ tem pelo menos duas soluções sendo uma positiva e outra estritamente positiva, desde que $(\lambda,\mu) \in (0,\lambda_*) \times (0,\mu_*)$. Além disso, as soluções obtidas bifurcam da solução nula e da solução positiva do problema $(P_{0,0})$.*

Observação 2.5.1. *Se $p = q$ então (E_4) e (E_5) se reduzem a*

(E_7) $\gamma, \alpha > 0$, $\alpha + \gamma + 1 < p^* - 1$ e $\beta_i \leqslant \alpha + \gamma + 1$, $i = 1, 2$.

2.2.1 Solução Sub-Supersolução bifurcando da solução nula

Nesta seção utilizaremos o Princípio de Sub-Supersolução B.5.

Demonstração do Teorema 2.3. Primeiramente construiremos uma supersolução do problema $(P'_{\lambda,\mu})$. Para isso, defina as funções $h_1, h_2 : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$h_1(t) = t^{p-1} - \|w_1\|^{\beta_1} t^{\beta_1} - \|w_1\|^\alpha \|w_2\|^{\gamma+1} t^{\alpha+\gamma+1},$$

$$h_2(t) = t^{q-1} - \|w_2\|^{\beta_2} t^{\beta_2} - \|w_1\|^{\alpha+1} \|w_2\|^\gamma t^{\alpha+\gamma+1},$$

onde w_1 e w_2 são soluções dos problemas $(P^1_{M_f})$ e $(Q^2_{M_g})$, respectivamente.

Observe que, como $\beta_1, \alpha+\gamma+1 > p-1$ temos que $h_1(t) \xrightarrow{t\to 0} 0$ e

$$h_1(t) \leqslant t^{p-1} - \|w_1\|^{\beta_1} t^{\beta_1} = t^{\beta_1}(t^{p-1-\beta_1} - \|w_1\|^{\beta_1}) \xrightarrow{t\to\infty} -\infty,$$

consequentemente, $h_1(t) \xrightarrow{t\to\infty} -\infty$.

Além disso,

$$h_1'(t) \;\; = \;\; t^{p-2}[(p-1) - \beta_1\|w_1\|^{\beta_1} t^{\beta_1-p+1} - \|w_1\|^{\alpha}\|w_2\|^{\gamma+1}(\alpha+\gamma+1)t^{\alpha+\gamma+1-p+1}].$$

Assim, considerando

$$\overline{h}_1(t) = (p-1) - \beta_1\|w_1\|^{\beta_1} t^{\beta_1-p+1} - \|w_1\|^{\alpha}\|w_2\|^{\gamma+1}(\alpha+\gamma+1)t^{\alpha+\gamma+1-p+1},$$

temos que,

$$h_1(t) \text{ é crescente se, e somente se, } \overline{h}_1(t) > 0. \tag{2.25}$$

Note que,

$$\overline{h}_1(t) \longrightarrow \begin{cases} (p-1), & \text{quando } t \to 0, \\ \\ -\infty, & \text{quando } t \to \infty, \end{cases}$$

e sendo $A_1 = (\alpha+\gamma+1)(\alpha+\gamma+2-p)\|w_1\|^{\alpha}\|w_2\|^{\gamma+1} > 0$, obtemos

$$\overline{h}_1'(t) > 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad t < \left[\frac{\beta_1(p-1-\beta_1)}{A_1}\right]^{\frac{1}{\alpha+\gamma+1-\beta_1}} < 0,$$

consequentemente, $\overline{h}_1(t)$ é decrescente $\forall t > 0$.

Então, pelo comportamento da função $\overline{h}_1$ no limite e sua monotonicidade, temos que existe $\bar{t}_1 > 0$ tal que

$$\begin{cases} \overline{h}_1(\bar{t}_1) = 0 \\ \\ \overline{h}_1(t) > 0 \text{ para } 0 < t < \bar{t}_1 \\ \\ \overline{h}_1(t) < 0 \text{ para } t > \bar{t}_1. \end{cases}$$

Logo, por (2.25),

$$\begin{cases} h_1(t) \text{ é crescente para } 0 < t < \bar{t}_1 \\ \\ h_1(t) \text{ é decrescente para } t > \bar{t}_1. \end{cases} \tag{2.26}$$

Concluímos então que, $\max\limits_{t>0} h_1(t) = h_1(\bar{t}_1) > 0$.

Analogamente, mostra-se que existe $\bar{t}_2 > 0$ tal que

$$\begin{cases} h_2(t) \text{ é crescente } \forall 0 < t < \bar{t}_2 \\ \\ h_2(t) \text{ é decrescente } \forall t > \bar{t}_2, \end{cases} \tag{2.27}$$

o que implica que $\max\limits_{t>0} h_2(t) = h_2(\bar{t}_2) > 0$.

Agora, denotando por

$$Im^+(h_1, h_2) = \{t > 0/h_1(t) = h_2(t) > 0\}$$

temos dois casos a considerar.

Caso1: $Im^+(h_1, h_2) \neq \emptyset$.

Neste caso, considere

$$\lambda^* = \mu^* = \max\{h_1(t) \ / \ t \in Im^+(h_1, h_2)\} > 0.$$

Assim, dados $(0,0) < (\lambda, \mu) \leqslant (\lambda^*, \mu^*)$, por (2.26) e (2.27), existem $t_{\lambda_1}, t_{\lambda_2}, t_{\mu_1}, t_{\mu_2} > 0$ tais que

$$t_{\lambda_1} \leqslant \bar{t}_1 \leqslant t_{\lambda_2} \qquad \text{e} \qquad h_1(t_{\lambda_1}) = \lambda = h_1(t_{\lambda_2})$$
$$t_{\mu_1} \leqslant \bar{t}_2 \leqslant t_{\mu_2} \qquad \text{e} \qquad h_2(t_{\mu_1}) = \mu = h_2(t_{\mu_2}).$$

Então considerando $t_\lambda = \min\{t_{\lambda_1}, t_{\lambda_2}\}$ e $t_\mu = \min\{t_{\mu_1}, t_{\mu_2}\}$, temos que $t_\lambda \in (0, \bar{t}_1)$ e $t_\mu \in (0, \bar{t}_2)$, ou seja, estaremos trabalhando com a parte crescente das funções h_1 e h_2. Logo, fazendo $\lambda, \mu \to 0$ obtemos $t_\lambda, t_\mu \to 0$.

Agora, tome $t_{\lambda,\mu} = \max\{t_\lambda, t_\mu\}$ e defina $\overline{u} := t_{\lambda,\mu} w_1$ e $\overline{v} := t_{\lambda,\mu} w_2$. Observe que, pelo comportamento das funções h_1 e h_2, temos que

$$h_1(t_{\lambda,\mu}) \geqslant h_1(t_\lambda) = \lambda \text{ e } h_2(t_{\lambda,\mu}) \geqslant h_2(t_\mu) = \mu.$$

Assim, segue

$$\begin{aligned}
-\Delta_p \overline{u} + m_1(x)\overline{u}^{p-1} &= t_{\lambda,\mu}^{p-1} M_f(x) \\
&= M_f(x)[\|w_1\|^{\beta_1} t_{\lambda,\mu}^{\beta_1} + \|w_1\|^{\alpha}\|w_2\|^{\gamma+1} t_{\lambda,\mu}^{\alpha+\gamma+1} + h_1(t_{\lambda,\mu})] \\
&\geqslant M_f(x)[(t_{\lambda,\mu} w_1)^{\beta_1} + (t_{\lambda,\mu} w_1)^{\alpha}(t_{\lambda,\mu} w_2)^{\gamma+1} + \lambda] \\
&\geqslant a(x)\overline{u}^{\beta_1} + b(x)\overline{u}^{\alpha}\overline{v}^{\gamma+1} + \lambda f(x),
\end{aligned} \tag{2.28}$$

e analogamente,

$$-\Delta_q \overline{v} + m_2(x)\overline{v}^{q-1} \geqslant c(x)\overline{v}^{\beta_2} + b(x)\overline{v}^{\gamma}\overline{u}^{\alpha+1} + \mu g(x). \tag{2.29}$$

Portanto, $(\overline{u}, \overline{v})$ é uma supersolução de $(P'_{\lambda,\mu})$.

Além disso, fazendo $\lambda, \mu \to 0$ temos $t_{\lambda,\mu} \to 0$, consequentemente

$$\lim_{\lambda,\mu\to 0} \|\overline{u}\|_\infty = \lim_{\lambda,\mu \to 0} \|\overline{v}\|_\infty = 0$$

Caso2: $Im^+(h_1, h_2) = \emptyset$.

Seja $t_0 := \min\{\bar{t}_1, \bar{t}_2\}$. E, considere $\lambda^* = h_1(t_0)$ e $\mu^* = h_2(t_0)$.

Note que, por (2.26) e (2.27), ao trabalharmos com $t \in (0, t_0)$, estamos lidando com a parte crescente das funções $h_1(t)$ e $h_2(t)$. Assim, dado $(0,0) < (\lambda, \mu) \leqslant (\lambda^*, \mu^*)$, existem $t_\lambda, t_\mu \in (0, t_0)$ tais que

$$h_1(t_\lambda) = \lambda \quad \text{e} \quad h_2(t_\mu) = \mu.$$

Então, tome $t_{\lambda,\mu} = \max\{t_\lambda, t_\mu\}$ e defina $\overline{u} := t_{\lambda,\mu} w_1$ e $\overline{v} := t_{\lambda,\mu} w_2$. Procedendo como em (2.28) e (2.29), segue que $(\overline{u}, \overline{v})$ é uma supersolução de $(P'_{\lambda,\mu})$ e também

$$\|\overline{u}\|_\infty, \|\overline{v}\|_\infty \xrightarrow{\lambda,\mu \to 0} 0.$$

Agora, considere $\underline{u} := \lambda^{\frac{1}{p-1}} w_f$ e $\underline{v} := \mu^{\frac{1}{q-1}} w_g$, onde w_f e w_g são soluções de (P_f) e (Q_g), respectivamente.

Então, temos

$$\begin{aligned} -\Delta_p \underline{u} + m_1(x)\underline{u}^{p-1} &= \lambda(-\Delta_p w_f + m_1(x) w_f^{p-1}) \\ &= \lambda f(x) \leqslant a(x)\underline{u}^{\beta_1} + b(x)\underline{u}^{\alpha}\underline{v}^{\gamma+1} + \lambda f(x), \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$-\Delta_q \underline{v} + m_2(x)\underline{v}^{q-1} = \mu g(x) \leqslant c(x)\underline{v}^{\beta_2} + b(x)\underline{u}^{\alpha+1}\underline{v}^{\gamma} + \mu g(x). \tag{2.31}$$

Logo, $(\underline{u}, \underline{v})$ é uma subsolução de $(P'_{\lambda,\mu})$.

Note que, pela construção das sub e supersoluções, temos que

$$(\overline{u}, \overline{v}), (\underline{u}, \underline{v}) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \times W_0^{1,q}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),$$

e além disso, as desigualdades (2.28), (2.29), (2.30) e (2.31) são satisfeitas no sentido distribucional, consequentemente

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \nabla \varphi + \int_\Omega m_1(x)\underline{u}^{p-1}\varphi \leqslant \int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \nabla \varphi + \int_\Omega m_1(x)\overline{u}^{p-1}\varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \leqslant 0.$$

Logo, pelo Princípio de Comparação A.1, $\underline{u} \leqslant \overline{u}$, Ω. Analogamente, mostra-se que $\underline{v} \leqslant \overline{v}$, Ω. Portanto, pelo Princípio de Sub-Supersolução (Teorema B.5), existe $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu}) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \times W_0^{1,q}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ solução de $(P'_{\lambda,\mu})$ tal que

$$(0,0) \leqslant (\underline{u}, \underline{v}) \leqslant (u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu}) \leqslant (\overline{u}, \overline{v}), \quad \overline{\Omega}.$$

Temos ainda pelo comportamento das sub e supersoluções que

$$\|u_{\lambda,\mu}\|_\infty, \|v_{\lambda,\mu}\|_\infty \xrightarrow{\lambda,\mu \to 0} 0.$$

Agora mostraremos mais uma propriedade da solução.

Afirmação 2.2.1. $I(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu}) < 0$

Agora provaremos que o funcional (2.24) assume valor negativo na solução encontrada $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$. Antes porém, observe que $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu}) \in E$ e pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_\Omega |\nabla u_{\lambda,\mu}|^{p-2}\nabla u_{\lambda,\mu}\nabla\varphi + \int_\Omega m_1 u_{\lambda,\mu}^{p-1}\varphi = \int_\Omega (a(x)u_{\lambda,\mu}^{\beta_1} + b(x)u_{\lambda,\mu}^{\alpha}v_{\lambda,\mu}^{\gamma+1} + \lambda f(x))\varphi$$

$$\int_\Omega |\nabla v_{\lambda,\mu}|^{q-2}\nabla v_{\lambda,\mu}\nabla\psi + \int_\Omega m_2 v_{\lambda,\mu}^{q-1}\psi = \int_\Omega (c(x)v_{\lambda,\mu}^{\beta_2} + b(x)u_{\lambda,\mu}^{\alpha+1}v_{\lambda,\mu}^{\gamma} + \mu g(x))\psi,$$

$\forall(\varphi,\psi) \in E$, já que $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}}$ e $W_0^{1,q}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,q}}$ e as normas de E_1 e $W_0^{1,p}(\Omega)$, e E_2 e $W_0^{1,q}(\Omega)$ são equivalentes.

Assim, de (u,v) ser solução de $(P'_{\lambda,\mu})$ e considerando a própria solução como função teste, segue que

$$\int_\Omega \lambda f(x)udx = \|u\|_{E_1}^p - \int_\Omega au^{\beta_1+1} - \int_\Omega bu^{\alpha+1}v^{\gamma+1}, \tag{2.32}$$

$$\int_\Omega \mu g(x)vdx = \|v\|_{E_2}^q - \int_\Omega cv^{\beta_2+1} - \int_\Omega bu^{\alpha+1}v^{\gamma+1}. \tag{2.33}$$

Logo, substituindo (2.32) e (2.33) em (2.24), temos

$$I(u,v) = (\alpha+1)\left(\frac{1}{p}-1\right)\|u\|_{E_1}^p + (\gamma+1)\left(\frac{1}{q}-1\right)\|v\|_{E_2}^q -$$

$$-(\alpha+1)\left(1-\frac{1}{\beta_1+1}\right)\int_\Omega a(x)u^{\beta_1+1} - (\gamma+1)\left(1-\frac{1}{\beta_2+1}\right)\int_\Omega c(x)v^{\beta_2+1} +$$

$$+[(\alpha+1)+(\gamma+1)-1]\int_\Omega b(x)u^{\alpha+1}v^{\gamma+1}.$$

Daí, pela imersão contínua $E_i \hookrightarrow L^{r_i}(\Omega)$, $1 \leqslant r_i \leqslant p^*$, para $i = 1,2$ e desigualdade de Young segue

$$I(u,v) \leqslant (\alpha+1)\left(\frac{1}{p}-1\right)C_1\|u\|_{L^{\beta_1+1}}^p + (\gamma+1)\left(\frac{1}{q}-1\right)C_2\|v\|_{L^{\beta_2+1}}^q +$$

$$+(\alpha+1)\left(1-\frac{1}{\beta_1+1}\right)\|a\|_\infty\|u\|_{L^{\beta_1+1}}^{\beta_1+1} + (\gamma+1)\left(1-\frac{1}{\beta_2+1}\right)\|c\|_\infty\|v\|_{L^{\beta_2+1}}^{\beta_2+1} +$$

$$+(\alpha+\gamma+1)\|b\|_\infty\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+\gamma+2}\right)\|u\|_{L^{\alpha+\gamma+2}}^{\alpha+\gamma+2} + (\alpha+\gamma+1)\|b\|_\infty\left(\frac{\gamma+1}{\alpha+\gamma+2}\right)\|v\|_{L^{\alpha+\gamma+2}}^{\alpha+\gamma+2}. \tag{2.34}$$

Agora, suponha sem perda de generalidade que $\beta_i > \alpha+\gamma+1$, para $i=1,2$, então temos a imersão $L^{\beta_i+1} \hookrightarrow L^{\alpha+\gamma+2}$. Assim, de (2.34) segue

$$I(u,v) < (\alpha+1)\|u\|^p_{L^{\beta_1+1}}\left[\left(\frac{1}{p}-1\right)C_1 + \left(1-\frac{1}{\beta_1+1}\right)\|a\|_\infty \|u\|^{\beta_1+1-p}_{L^{\beta_1+1}} + \right.$$

$$\left. + \|b\|_\infty\|u\|^{\alpha+\gamma+2-p}_{L^{\beta_1+1}}\right] + (\gamma+1)\|v\|^q_{L^{\beta_2+1}}\left[\left(\frac{1}{q}-1\right)C_2 + \right.$$

$$\left. + \left(1-\frac{1}{\beta_2+1}\right)\|c\|_\infty\|v\|_{L^{\beta_2+1-q}} + \|b\|_\infty\|v\|^{\alpha+\gamma+2-q}_{L^{\beta_2+1}}\right].$$

Observe que, se $\beta_i \leqslant \alpha+\gamma+1$, para $i=1$ ou $i=2$, em (2.34) trabalharíamos com $r_i = \alpha+\gamma+2$ e posteriormente com a imersão $L^{\alpha+\gamma+2} \hookrightarrow L^{\beta_i+1}$.

Logo, como $\|u_{\lambda,\mu}\|_\infty, \|v_{\lambda,\mu}\|_\infty \xrightarrow{\lambda,\mu\to 0} 0$, podemos escolher λ_0, μ_0 suficientemente pequenos.

Portanto, de $p,q>1$ temos que $I(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu}) < 0$, para $(\lambda,\mu) \in (0,\lambda_0)\times(0,\mu_0)$.

■

2.2.2 Solução Passo da Montanha bifurcando de uma solução não-nula

Nesta seção, dividiremos a demonstração do Teorema 2.10 em lemas. Primeiramente, mostraremos que o funcional I, definido em (2.24) satisfaz a geometria do Passo da Montanha.

Lema 2.6. *Assuma* (E_3), $(f,g) \in \mathcal{H}$ *e*

$$0 < \beta_1 \leqslant p^* - 1, \qquad 0 < \beta_2 \leqslant q^* - 1, \qquad 0 < \alpha+\gamma+1 < \min\{p^*-1, q^*-1\}.$$

Então, existe $(\lambda_f, \mu_g) > (0,0)$ *tais que*

$$I(u,v) \geqslant \alpha, \text{ com } \|(u,v)\|_E = \overline{R}, \text{ para algumas constantes } \overline{R}, \alpha > 0,$$

desde que $(0,0) < (\lambda,\mu) < (\lambda_f, \mu_g)$.

Demonstração. Observe inicialmente que, usando as desigualdades de Holder e Young, e as imersões $E_1 \hookrightarrow L^p$ e $E_2 \hookrightarrow L^q$ temos

$$\begin{aligned}
\lambda\int_\Omega f u dx &\leqslant \lambda\|f\|_{L^{p'}(\Omega)}\|u\|_{L^p(\Omega)}\\
&\leqslant \lambda\|f\|_{L^{p'}(\Omega)}C_1\frac{\|u\|_{E_1}}{2^{\frac{1}{p}}}2^{\frac{1}{p}} \qquad (2.35)\\
&\leqslant \frac{\|u\|^p_{E_1}}{2p}+(C_1\lambda)^{p'}\frac{\|f\|^{p'}_{L^{p'}}}{p'}(2^{\frac{1}{p}})^{p'},
\end{aligned}$$

e

$$\mu\int_\Omega g v dx \leqslant \frac{\|v\|^q_{E_2}}{2q}+(C_2\mu)^{q'}\frac{\|g\|^{q'}_{L^{q'}}}{q'}(2^{\frac{1}{q}})^{q'}. \qquad (2.36)$$

Além disso, novamente pelas desigualdades de Holder e Young e imersões $E_1 \hookrightarrow L^{\beta_1+1}$, $E_2 \hookrightarrow L^{\beta_2+1}$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a(x)u^{\beta_1+1} &\leqslant \left(\int_\Omega (u^{\beta_1+1})^{\frac{p^*}{\beta_1+1}}\right)^{\frac{\beta_1+1}{p^*}}\|a\|_{L\left(\frac{p^*}{\beta_1+1}\right)'}\\
&\leqslant \|u\|^{\beta_1+1}_{L^{p^*}}\|a\|_{L\left(\frac{p^*}{\beta_1+1}\right)'} \qquad (2.37)\\
&\leqslant C_3\|u\|^{\beta_1+1}_{E_1}\|a\|_{L\left(\frac{p^*}{\beta_1+1}\right)'};
\end{aligned}$$

$$\int_\Omega c(x)v^{\beta_2+1} \leqslant C_4\|v\|^{\beta_2+1}_{E_2}\|c\|_{L\left(\frac{q^*}{\beta_2+1}\right)'}; \qquad (2.38)$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega b(x)u^{\alpha+1}v^{\gamma+1} &\leqslant \int_\Omega b(x)\left[\frac{(u^{\alpha+1})^{\frac{\alpha+\gamma+2}{\alpha+1}}}{\left(\frac{\alpha+\gamma+2}{\alpha+1}\right)}+\frac{(v^{\gamma+1})^{\frac{\alpha+\gamma+2}{\gamma+1}}}{\left(\frac{\alpha+\gamma+2}{\gamma+1}\right)}\right]dx\\
&= \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+\gamma+2}\right)\int_\Omega b(x)u^{\alpha+\gamma+2}dx+\left(\frac{\gamma+1}{\alpha+\gamma+2}\right)\int_\Omega b(x)v^{\alpha+\gamma+2}dx \qquad (2.39)\\
&\leqslant \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+\gamma+2}\right)C_5\|b\|_{L\left(\frac{p^*}{\alpha+\gamma+2}\right)'}\|u\|^{\alpha+\gamma+2}_{E_1}+\left(\frac{\gamma+1}{\alpha+\gamma+2}\right)C_6\|b\|_{L\left(\frac{q^*}{\alpha+\gamma+2}\right)'}\|v\|^{\alpha+\gamma+2}_{E_2}.
\end{aligned}$$

Então, substituindo as estimativas encontradas, (2.35) - (2.39), no funcional (2.24), temos que

$$
\begin{aligned}
I(u,v) \geqslant\ & \frac{(\alpha+1)}{p}\|u\|_{E_1}^p + \frac{(\gamma+1)}{q}\|v\|_{E_2}^q - \frac{\alpha+1}{\beta_1+1}C_3\|a\|_{L\left(\frac{p^*}{\beta_1+1}\right)'}\|u\|_{E_1}^{\beta_1+1} - \\
- \ & \frac{\gamma+1}{\beta_2+1}C_4\|c\|_{L\left(\frac{q^*}{\beta_2+1}\right)'}\|v\|_{E_2}^{\beta_2+1} - \frac{(\alpha+1)}{\alpha+\gamma+2}C_5\|b\|_{L\left(\frac{p^*}{\alpha+\gamma+2}\right)'}\|u\|_{E_1}^{\alpha+\gamma+2} - \\
- \ & \frac{(\gamma+1)}{\alpha+\gamma+2}C_6\|b\|_{L\left(\frac{q^*}{\alpha+\gamma+2}\right)'}\|v\|_{E_2}^{\alpha+\gamma+2} - \frac{(\alpha+1)}{2p}\|u\|_{E_1}^p - \\
- \ & (C_1\lambda)^{p'}(\alpha+1)\frac{2^{\frac{1}{p-1}}}{p'}\|f\|_{L^{p'}}^{p'} - \frac{(\gamma+1)}{2q}\|v\|_{E_2}^q + (C_2\mu)^{q'}(\gamma+1)\frac{2^{\frac{1}{q-1}}}{q'}\|g\|_{L^{q'}}^{q'}.
\end{aligned}
$$

Agora para simplificar a notação não especificaremos os espaços referentes às funções a, b e c. Assim,

$$
\begin{aligned}
I(u,v) \geqslant (\alpha+1) & \left[\left(\frac{1}{2p}\right)\|u\|_{E_1}^p - \left(\frac{C_3\|a\|}{\beta_1+1}\right)\|u\|_{E_1}^{\beta_1+1} - \left(\frac{C_5\|b\|}{\alpha+\gamma+2}\right)\|u\|_{E_1}^{\alpha+\gamma+2} - \right. \\
& \left. - \frac{(C_1\lambda)^{p'}2^{\frac{1}{p-1}}}{p'}\|f\|_{L^{p'}}^{p'}\right] + (\gamma+1)\left[\left(\frac{1}{2q}\right)\|v\|_{E_2}^q - \left(\frac{C_4\|c\|}{\beta_2+1}\right)\|v\|_{E_2}^{\beta_2+1} - \right. \\
& \left. - \left(\frac{C_6\|b\|}{\alpha+\gamma+2}\right)\|v\|_{E_2}^{\alpha+\gamma+2} - \frac{(C_2\mu)^{q'}2^{\frac{1}{q-1}}}{q'}\|g\|_{L^{q'}}^{q'}\right].
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

Logo, quando $\|u\|_{E_1} = R_1$ e $\|v\|_{E_2} = R_2$ em (2.40), isto é, $\|(u,v)\|_E = \|u\|_{E_1} + \|v\|_{E_2} = R = R_1 + R_2$, segue que

$$
\begin{aligned}
I(u,v)|_{\partial B_R} \geqslant (\alpha+1) & \left[\frac{1}{2p}R_1^p - \left(\frac{C_3\|a\|}{\beta_1+1}\right)R_1^{\beta_1+1} - \left(\frac{C_5\|b\|}{\alpha+\gamma+2}\right)R_1^{\alpha+\gamma+2} - \right. \\
& \left. \frac{(C_1\lambda)^{p'}2^{\frac{1}{p-1}}}{p'}\|f\|_{L^{p'}}^{p'}\right] + (\gamma+1)\left[\frac{1}{2q}R_2^q - \left(\frac{C_4\|c\|}{\beta_2+1}\right)R_2^{\beta_2+1} - \left(\frac{C_6\|b\|}{\alpha+\gamma+2}\right)R_2^{\alpha+\gamma+2} \right. \\
& \left. - \frac{(C_2\mu)^{q'}2^{\frac{1}{q-1}}}{q'}\|g\|_{L^{q'}}^{q'}\right].
\end{aligned}
$$

Então, tomando $\overline{R} = \overline{R}_1 + \overline{R}_2$, onde

$$
\overline{R}_1 = \max\left\{\left(\frac{C_3\|a\|8p}{\beta_1+1}\right)^{\frac{1}{p-\beta_1-1}}, \left(\frac{C_5\|b\|8p}{\alpha+\gamma+2}\right)^{\frac{1}{p-\alpha-\gamma-2}}\right\},
$$

$$
\overline{R}_2 = \max\left\{\left(\frac{C_4\|c\|8q}{\beta_2+1}\right)^{\frac{1}{q-\beta_2-1}}, \left(\frac{C_6\|b\|8q}{\alpha+\gamma+2}\right)^{\frac{1}{q-\alpha-\gamma-2}}\right\},
$$

obtemos

$$\begin{aligned} I(u,v)|_{\partial B_{\overline{R}}} &\geqslant (\alpha+1)\left[\frac{1}{4p}\overline{R}_1^p - \frac{(C_1\lambda)^{p'}2^{\frac{1}{p-1}}}{p'}\|f\|_{L^{p'}}^{p'}\right]+ \\ &+(\gamma+1)\left[\frac{1}{4q}\overline{R}_2^q - \frac{(C_2\mu)^{q'}2^{\frac{1}{q-1}}}{q'}\|g\|_{L^{q'}}^{q'}\right]. \end{aligned}$$

Agora, escolha $\lambda_f, \mu_g > 0$ tais que

$$\frac{1}{4p}\overline{R}_1^p - \frac{(C_1\lambda_f)^{p'}2^{\frac{1}{p-1}}}{p'}\|f\|_{L^{p'}}^{p'} = \frac{\overline{R}_1^p}{8p}, \qquad \frac{1}{4q}\overline{R}_2^q - \frac{(C_2\mu_g)^{q'}2^{\frac{1}{q-1}}}{q'}\|g\|_{L^{q'}}^{q'} = \frac{\overline{R}_2^q}{8q},$$

ou seja, $\lambda_f = \left(\frac{\overline{R}_1^p}{4p}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{p'}{2^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{1}{p'}}\frac{1}{C_1\|f\|_{L^{p'}}}$ e $\mu_g = \left(\frac{\overline{R}_2^q}{4q}\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\frac{q'}{2^{\frac{1}{q}}}\right)^{\frac{1}{q'}}\frac{1}{C_2\|g\|_{L^{q'}}}$.

Portanto,

$$I(u,v)|_{\partial B_{\overline{R}}} \geqslant \frac{1}{8}\left(\frac{\overline{R}_1^p}{p}+\frac{\overline{R}_2^q}{q}\right) = \alpha > 0,$$

para $(\lambda,\mu) \in (0,\lambda_f)\times(0,\mu_g)$.

∎

Denote $\Omega_a = \{x \in \Omega \;/\; a(x) > 0\}$ e considere a seguinte condição,

(E_7) $int(\Omega_a) \neq \emptyset$ ou $int(\Omega_c) \neq \emptyset$.

Lema 2.7. *Assuma (E_7) e suponha que*

$$0 < \beta_1 \leqslant p^*-1, \qquad 0 < \beta_2 \leqslant q^*-1, \qquad \max\{p-1,q-1\} < \alpha+\gamma+1 \leqslant \min\{p^*-1,q^*-1\}.$$

Então,

$$I(u_0,v_0) \leqslant 0, \text{ para algum } (u_0,v_0) \in E \text{ com } \|(u_0,v_0)\|_E > \overline{R},$$

onde $\overline{R} > 0$ é dado pelo Lema anterior.

Demonstração.

Temos dois casos a considerar.

Caso1: $int(\Omega_a) \neq \emptyset$.

Neste caso, existe uma bola $B_a \subset \Omega_a$ tal que $a > 0$, B_a.

Tome $\varphi \in C_0^\infty(B_a)$ com $\varphi \geqslant 0$. Assim, como $\beta_1 > p-1$ temos

$$I(t\varphi,0) = \frac{(\alpha+1)}{p}t^p\|\varphi\|_{E_1}^p - \frac{\alpha+1}{\beta_1+1}t^{\beta_1+1}\int_\Omega a(x)(\varphi)^{\beta_1+1} \xrightarrow{t\to\infty} -\infty. \tag{2.41}$$

Caso2: $int(\Omega_c) \neq \emptyset$.

Neste caso, existe uma bola $B_c \subset \Omega_c$ tal que $c > 0$, B_c.

Tome $\varphi \in C_0^\infty(B_c)$ com $\varphi \geqslant 0$. Assim, como $\beta_2 > q - 1$ temos

$$I(0,\varphi) = \frac{(\gamma+1)}{q} t^q \|\varphi\|_{E_2}^q - \frac{\gamma+1}{\beta_2+1} t^{\beta_2+1} \int_\Omega c(x)(\varphi)^{\beta_2+1} \xrightarrow{t\to\infty} -\infty. \tag{2.42}$$

Portanto, podemos escolher $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que

$$I(\bar{t}\varphi_1, \bar{t}\varphi_2) < 0 \quad \text{para} \quad \bar{t} \geqslant t_0 \quad \text{e} \quad \|(t_0\varphi_1, t_0\varphi_2)\|_E > \overline{R}.$$

■

Agora, mostraremos que toda sequência $(PS)_c$, para todo $c > 0$ em I é limitada.

Lema 2.8. *Suponha (E_3) satisfeita, $(f,g) \in \mathcal{H}$ e*

$$0 \leqslant \beta_1 \leqslant p^* - 1, \qquad 0 \leqslant \beta_2 \leqslant q^* - 1, \qquad \max\{p-1, q-1\} < \alpha + \gamma + 1.$$

Seja $\{(u_n, v_n)\}_{n\geqslant 1} \subset E$ uma sequência $(PS)_c$, para todo $c > 0$. Então, $\{(u_n, v_n)\}_{n\geqslant 1}$ é limitada em E.

Demonstração. Como, por hipótese, $\{(u_n, v_n)\}_{n\geqslant 1}$ é uma sequência $(PS)_c$, $c > 0$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$,

$$|I(u_n, v_n)| \leqslant c \qquad \|I'(u_n, v_n)\| < \varepsilon. \tag{2.43}$$

Assim, de (2.43) segue que

$$\begin{aligned}
c + & \frac{\varepsilon}{\alpha+\gamma+1}\|(u_n, v_n)\|_E \geqslant I(u_n, v_n) - \frac{1}{\alpha+\gamma+2} < I'(u_n, v_n), (u_n, v_n) >= \\
& = (\alpha+1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha+\gamma+2}\right)\|u_n\|_{E_1}^p + (\gamma+1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\alpha+\gamma+2}\right)\|v_n\|_{E_2}^q + \\
& +(\alpha+1)\left(\frac{1}{\alpha+\gamma+2} - \frac{1}{\beta_1+1}\right)\int_\Omega a(u_n^+)^{\beta_1+1} + (\gamma+1)\left(\frac{1}{\alpha+\gamma+2} - \frac{1}{\beta_2+1}\right)\int_\Omega c(v_n^+)^{\beta_2+1} + \\
& +(\alpha+1)\left(\frac{1}{\alpha+\gamma+2} - 1\right)\int_\Omega \lambda f u_n + (\gamma+1)\left(\frac{1}{\alpha+\gamma+2} - 1\right)\int_\Omega \mu g v_n + \\
& + \left(\frac{\alpha+\gamma+2}{\alpha+\gamma+2} - 1\right)\int_\Omega b(u_n^+)^{\alpha+1}(v_n^+)^{\gamma+1},
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Para simplificar usaremos a seguinte notação $A(t) = 1/t - 1/(\alpha+\gamma+2)$. Logo (2.44) fica

$$
\begin{aligned}
c+ \quad & \frac{\varepsilon}{\alpha+\gamma+1}\|(u_n,v_n)\|_E \geqslant (\alpha+1)A(p)\|u_n\|_{E_1}^p + (\gamma+1)A(q)\|v_n\|_{E_2}^q - \\
& -(\alpha+1)A(\beta_1+1)\int_\Omega a(u_n^+)^{\beta_1+1} - (\gamma+1)A(\beta_2+1)\int_\Omega c(v_n^+)^{\beta_2+1} - \qquad (2.45)\\
& -(\alpha+1)A(1)\int_\Omega \lambda f u_n + (\gamma+1)A(1)\int_\Omega \mu g v_n.
\end{aligned}
$$

Observe que, pelas desigualdades de Holder e Young, e pelas imersões $E_1 \hookrightarrow L^p$, $E_2 \hookrightarrow L^q$ temos que

$$\int_\Omega f u_n \leqslant \|f\|_{L^{p'}}\|u_n\|_{L^p} \leqslant \frac{\|f\|_{L^{p'}}^{p'}}{p'} + \frac{\|u_n\|_{L^p}^p}{p} \leqslant \frac{\|f\|_{L^{p'}}^{p'}}{p'} + C_1\frac{\|u_n\|_{E_1}^p}{p}, \tag{2.46}$$

$$\int_\Omega g v_n \leqslant \frac{\|g\|_{L^{q'}}^{q'}}{q'} + C_2\frac{\|v_n\|_{E_2}^q}{q}. \tag{2.47}$$

Além disso, suponha sem perda de generalidade que, $A(\beta_1+1) > 0$ e $A(\beta_2+1) < 0$, (os outros casos seguem de forma análogos) logo novamente por Young e $E_i \hookrightarrow L^{\beta_i+1}$,

$$
\begin{aligned}
(\alpha+1)A(\beta_1+1)\int_\Omega a(u_n^+)^{\beta_1+1} &= (\alpha+1)A(\beta_1+1)\int_\Omega a^+(u_n^+)^{\beta_1+1} - (\alpha+1)A(\beta_1+1)\int_\Omega a^-(u_n^+)^{\beta_1+1}\\
&\leqslant (\alpha+1)A(\beta_1+1)\int_\Omega a^+(u_n^+)^{\beta_1+1}\\
&\leqslant (\alpha+1)A(\beta_1+1)\|a^+\|_{L^{\left(\frac{p^*}{\beta_1+1}\right)'}(\Omega)}\|u_n\|_{L^{\beta_1+1}(\Omega)}\\
&\leqslant (\alpha+1)A(\beta_1+1)\|a^+\|_{L^{\left(\frac{p^*}{\beta_1+1}\right)'}(\Omega)} C_3\|u_n\|_{E_1},
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

$$
\begin{aligned}
(\gamma+1)A(\beta_2+1)\int_\Omega c(v_n^+)^{\beta_2+1} &= (\gamma+1)A(\beta_2+1)\int_\Omega c^+(v_n^+)^{\beta_2+1} - (\gamma+1)A(\beta_2+1)\int_\Omega c^-(v_n^+)^{\beta_2+1}\\
&\leqslant -(\gamma+1)A(\beta_2+1)\int_\Omega c^-(v_n^+)^{\beta_2+1}\\
&\leqslant -(\gamma+1)A(\beta_2+1)\|c^-\|_{L^{\left(\frac{q^*}{\beta_2+1}\right)'}(\Omega)} C_4\|v_n\|_{E_2}.
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

Logo, substituindo (2.46) - (2.49) em (2.45), obtemos

$$c+\frac{\varepsilon}{\alpha+\gamma+2}\|(u_n,v_n)\|_E \geqslant (\alpha+1)A(p)\|u_n\|^p_{E_1}+(\gamma+1)A(q)\|v_n\|^q_{E_2}-$$

$$-(\alpha+1)A(\beta_1+1)\|a^+\|_{L^{\left(\frac{p^*}{\beta_1+1}\right)'}(\Omega)}C_3\|u_n\|_{E_1}+(\gamma+1)A(\beta_2+1)\|c^-\|_{L^{\left(\frac{q^*}{\beta_2+1}\right)'}(\Omega)}C_4\|v_n\|_{E_2}-$$

$$-(\alpha+1)A(1)\lambda\left(\frac{\|f\|^{p'}_{L^{p'}}}{p'}+C_1\frac{\|u_n\|^p_{E_1}}{p}\right)-(\gamma+1)A(1)\mu\left(\frac{\|g\|^{q'}_{L^{q'}}}{q'}+C_2\frac{\|v_n\|^q_{E_2}}{q}\right),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&c+\frac{\varepsilon}{\alpha+\gamma+2}\|(u_n,v_n)\|_E+\left((\alpha+1)A(\beta_1+1)\|a^+\|_{L^{\left(\frac{p^*}{\beta_1+1}\right)'}(\Omega)}C_3\right)\|u_n\|_{E_1}+\\
&+\left((\gamma+1)(-A(\beta_2+1))\|c^-\|_{L^{\left(\frac{q^*}{\beta_2+1}\right)'}(\Omega)}C_4\right)\|v_n\|_{E_2}+\\
&+(\alpha+1)A(1)\lambda\frac{\|f\|^{p'}_{L^{p'}}}{p'}+(\gamma+1)A(1)\mu\frac{\|g\|^{q'}_{L^{q'}}}{q'}\geqslant\\
&\geqslant(\alpha+1)\left(A(p)-\frac{A(1)}{p}C_1\lambda\right)\|u_n\|^p_{E_1}+(\gamma+1)\left(A(q)-\frac{A(1)}{q}C_2\mu\right)\|v_n\|^q_{E_2}.
\end{aligned}\tag{2.50}$$

Então, considerando

$$\begin{aligned}
\overline{B}&=(\alpha+1)A(\beta_1+1)\|a^+\|_{L^{\beta_1'}(\Omega)}C_3,\\
\overline{C}&=(\gamma+1)(-A(\beta_2+1))\|c^-\|_{L^{\beta_2'}(\Omega)}C_4,\\
\overline{D}&=\max\{\overline{B},\overline{C}\}>0,
\end{aligned}$$

temos de (2.50) que

$$\begin{aligned}
&c+\left(\frac{\varepsilon}{\alpha+\gamma+2}+\overline{D}\right)\|(u_n,v_n)\|_E+(\alpha+1)A(1)\lambda\frac{\|f\|^{p'}_{L^{p'}}}{p'}+\\
&+(\gamma+1)A(1)\mu\frac{\|g\|^{q'}_{L^{q'}}}{q'}\geqslant B_\lambda\|u_n\|^p_{E_1}+C_\mu\|v_n\|^q_{E_2},
\end{aligned}\tag{2.51}$$

onde $B_\lambda=(\alpha+1)\left(A(p)-\frac{A(1)}{p}C_1\lambda\right)$ e $C_\mu=(\gamma+1)\left(A(q)-\frac{A(1)}{q}C_2\mu\right)$.

Assim, tomando

$$\lambda_0=\frac{pA(p)}{C_1A(1)}>0 \quad \text{e} \quad \mu_0=\frac{qA(q)}{C_2A(1)}>0$$

temos que $B_\lambda, C_\mu>0$ desde que $(0,0)<(\lambda,\mu)<(\lambda_0,\mu_0)$. Consequentemente, sendo

$D_{\lambda,\mu} = \min\{B_\lambda, C_\mu\} > 0$, segue de (2.51),

$$c + \left(\frac{\varepsilon}{\alpha+\gamma+2} + \overline{D}\right) \|(u_n, v_n)\|_E + (\alpha+1)A(1)\lambda\frac{\|f\|^{p'}_{L^{p'}}}{p'} +$$

$$+(\gamma+1)A(1)\mu\frac{\|g\|^{q'}_{L^{q'}}}{q'} \geqslant D_{\lambda,\mu}\left(\|u_n\|^p_{E_1} + \|v_n\|^q_{E_2}\right).$$

Suponha, por contradição, que $\{(u_n, v_n)\}_{n\geqslant 1}$ não seja limitada. Então, existe uma subsequência de $\{(u_n, v_n)\}_{n\geqslant 1}$, que ainda denotaremos por $\{(u_n, v_n)\}_{n\geqslant 1}$, tal que $\|(u_n, v_n)\|_E \longrightarrow \infty$. Então, ou $\|u_n\|_{E_1}, \|v_n\|_{E_2} \to \infty$, ou $\|u_n\|_{E_1}$ é limitada e $\|v_n\|_{E_2} \to \infty$, ou $\|v_n\|_{E_2}$ é limitada e $\|u_n\|_{E_1} \to \infty$.

Considere, s.p.g., que $\|u_n\|_{E_1}$ é limitada e $\|v_n\|_{E_2} \to \infty$. Logo, segue que

$$\begin{aligned} c + \left(\frac{\varepsilon}{\alpha+\gamma+2} + \overline{D}\right) (\|u_n\|_{E_1} + \|v_n)\|_{E_2}) + (\alpha+1)A(1)\lambda\frac{\|f\|^{p'}_{L^{p'}}}{p'} + \\ +(\gamma+1)A(1)\mu\frac{\|g\|^{q'}_{L^{q'}}}{q'} \geqslant D_{\lambda,\mu}\left(\|u_n\|^p_{E_1} + \|v_n\|^q_{E_2}\right) \end{aligned} \tag{2.52}$$

Agora, dividindo ambos os lados da desigualdade (2.52) por $\|v_n\|_{E_2}$ temos que,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha+\gamma+2} + \overline{D}\right)\left(\frac{\|u_n\|_{E_1}}{\|v_n\|_{E_2}} + 1\right) + \frac{1}{\|v_n\|_{E_2}}\Big[C + (\alpha+1)A(1)\lambda\frac{\|f\|^{p'}_{L^{p'}}}{p'} + \\ +(\gamma+1)A(1)\mu\frac{\|g\|^{q'}_{L^{q'}}}{q'}\Big] \geqslant \frac{D_{\lambda,\mu}}{2^{p-1}}\left(\frac{\|u_n\|^p_{E_1}}{\|v_n\|_{E_2}} + \|v_n\|^{q-1}_{E_2}\right). \end{aligned} \tag{2.53}$$

Assim, fazendo $n \to \infty$ em (2.53), obtemos a seguinte contradição

$$\frac{\varepsilon}{\alpha+\gamma+2} + \overline{D} \geqslant +\infty.$$

Portanto, $\{(u_n, v_n)\}_{n\geqslant 1}$ é limitada em E.

■

Agora, provaremos que toda sequência (PS) limitada em E tem uma subsequência convergente, ou seja, satisfazem a condição (PS). Assim temos,

Lema 2.9. *Assuma (E_3). Seja $\{(u_n, v_n)\}_{n\geqslant 1}$ uma sequência (PS) limitada em E. Então, $\{(u_n, v_n)\}_{n\geqslant 1}$ tem uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $\{(u_n, v_n)\}_{n\geqslant 1}$ uma sequência (PS) e limitada em E. Logo, existe uma subsequência, a qual denotaremos por $\{(u_n, v_n)\}_{n\geqslant 1}$, que converge fraco em E, já que E é um espaço de Banach reflexivo.

Assim, pelas imersões compactas $E_1 \hookrightarrow L^p(\Omega)$ e $E_2 \hookrightarrow L^q(\Omega)$ segue que $\{(u_n, v_n)\}_{n\geqslant 1}$ converge forte em $L^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$, consequentemente é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$.

Queremos mostrar que, a menos de subsequências, $\{(u_n, v_n)\}_{n\geqslant 1}$ é de Cauchy em E. Então, como E é um espaço de Banach, $\{(u_n, v_n)\}_{n\geqslant 1}$ convergirá forte em E.

Observe que, apenas aplicando o funcional derivada em $(u_n - u_m, v_n - v_m)$, temos que

$$\begin{aligned}
&\langle I'(u_n, v_n), (u_n - u_m, v_n - v_m)\rangle - \langle I'(u_m, v_m), (u_n - u_m, v_n - v_m)\rangle = \\
&= (\alpha+1)\int_\Omega (|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m)(\nabla u_n - \nabla u_m) + \\
&+(\gamma+1)\int_\Omega (|\nabla v_n|^{q-2}\nabla v_n - |\nabla v_m|^{q-2}\nabla v_m)(\nabla v_n - \nabla v_m) + \\
&+(\alpha+1)\int_\Omega m_1(x)(|u_n|^{p-2}u_n - |u_m|^{p-2}u_m)(u_n - u_m) + \\
&+(\gamma+1)\int_\Omega m_2(x)(|v_n|^{q-2}v_n - |v_m|^{q-2}v_m)(v_n - v_m) - \\
&\quad -(\alpha+1)\int_\Omega a(x)(|u_n|^{\beta_1-1}u_n - |u_m|^{\beta_1-1}u_m)(u_n - u_m) - \\
&\quad -(\gamma+1)\int_\Omega c(x)(|v_n|^{\beta_2-1}v_n - |v_m|^{\beta_2-1}v_m)(v_n - v_m) - \\
&\quad -(\alpha+1)\int_\Omega b(x)(|u_n|^{\alpha-1}|v_n|^{\gamma+1}u_n - |u_m|^{\alpha-1}|v_m|^{\gamma+1}u_m)(u_n - u_m) - \\
&\quad -(\gamma+1)\int_\Omega b(x)(|u_n|^{\alpha+1}|v_n|^{\gamma-1}v_n - |u_m|^{\alpha+1}|v_m|^{\gamma-1}v_m)(v_n - v_m).
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Agora aplicando a desigualdade de Holder e usando que a sequência $\{u_n\}_{n\geqslant 1}$ é de Cauchy em $L^\sigma(\Omega)$, $p < \sigma < p^*$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega m_1|u_n|^{p-2} \quad u_n(u_n - u_m)\right| &\leqslant \int_\Omega |m_1||u_n|^{p-1}|u_n - u_m| \\
&\leqslant \|m_1\|_\infty \left[\int_\Omega (|u_n|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}dx\right]^{\frac{p-1}{p}} \|u_n - u_m\|_p \\
&= \|m_1\|_\infty \|u_n\|_p^{p-1}\|u_n - u_m\|_p \xrightarrow{n,m\to\infty} 0,
\end{aligned} \tag{2.55}$$

analogamente

$$\left|\int_\Omega m_2(x)\left(|v_n|^{q-2}v_n - |v_m|^{q-2}v_m\right)(v_n - v_m)\right| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0, \tag{2.56}$$

novamente por Holder,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_\Omega a|u_n|^{\beta_1-1} \quad u_n(u_n-u_m)\right| &\leqslant \int_\Omega |a||u_n|^{\beta_1}|u_n-u_m| \\
&\leqslant \|a\|_{\left(\frac{p^*-1}{\beta_1+1}\right)'}\left[\int_\Omega \left(|u_n|^{\beta_1}\right)^{\frac{p^*-1}{\beta_1}}\right]^{\frac{\beta_1}{p^*-1}} dx\|u_n-u_m\|_{p^*-1} \\
&= \|u_n\|_{p^*-1}^{\beta_1}\|u_n-u_m\|_{p^*-1}\|a\|_{\left(\frac{p^*-1}{\beta_1+1}\right)'} \xrightarrow{n,m\to\infty} 0;
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

similarmente,

$$
\int_\Omega c(x)\left(|v_n|^{\beta_2-1}v_n-|v_m|^{\beta_2-1}v_m\right)(v_n-v_m) \xrightarrow{n,m\to\infty} 0; \tag{2.58}
$$

$$
\int_\Omega b(x)(|u_n|^{\alpha+1}|v_n|^{\gamma-1}v_n \quad -|u_m|^{\alpha+1}|v_m|^{\gamma-1}v_m)(v_n-v_m) \xrightarrow{n,m\to\infty} 0. \tag{2.59}
$$

Então, por (2.54) - (2.59) e $I'(u_n,v_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, pois $\{(u_n,v_n)\}_{n\geqslant 1}$ é uma sequência (PS) em relação ao funcinal I, temos que

$$
\begin{aligned}
&(\alpha+1)\int_\Omega(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n-|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m)(\nabla u_n-\nabla u_m)+ \\
&(\gamma+1)\int_\Omega(|\nabla v_n|^{q-2}\nabla v_n-|\nabla v_m|^{q-2}\nabla v_m)(\nabla v_n-\nabla v_m) \xrightarrow{n,m\to\infty} 0,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n,m\to\infty}\int_\Omega(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n-|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m)(\nabla u_n-\nabla u_m)=0, \\
&\lim_{n,m\to\infty}\int_\Omega(|\nabla v_n|^{q-2}\nabla v_n-|\nabla v_m|^{q-2}\nabla v_m)(\nabla v_n-\nabla v_m)=0.
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

A fim de concluirmos a prova de que a sequência $\{(u_n,v_n)\}_{n\geqslant 1}$ é de Cauchy, usaremos o Lema A.7. Se $p \geqslant 2$, a desigualdade acima e (2.60) implicam que

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n,m\to\infty} M_p\int_\Omega |\nabla u_n-\nabla u_m|^p dx=0, \\
&\lim_{n,m\to\infty} M_p\int_\Omega |\nabla v_n-\nabla v_m|^q dx=0.
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

Se $1<p<2$ temos

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n,m\to\infty} M_p\int_\Omega \frac{|\nabla u_n-\nabla u_m|^2}{(|\nabla u_n|+|\nabla u_m|)^{2-p}}dx=0, \\
&\lim_{n,m\to\infty} M_p\int_\Omega \frac{|\nabla v_n-\nabla v_m|^2}{(|\nabla v_n|+|\nabla v_m|)^{2-q}}dx=0.
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

Portanto, usando Holder, concluímos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_m|^p dx = & \int_\Omega \frac{|\nabla(u_n-u_m)|^p}{(|\nabla u_n|+|\nabla u_m|)^{\frac{p(2-p)}{2}}}(|\nabla u_n|+|\nabla u_m|)^{\frac{p(2-p)}{2}}dx \\ \leqslant & \left(\int_\Omega \frac{|\nabla(u_n-u_m)|^2}{(|\nabla u_n|+|\nabla u_m|)^{2-p}}dx\right)^{\frac{p}{2}}\left(\int_\Omega (|\nabla u_n|+|\nabla u_m|)^p dx\right)^{\frac{2-p}{2}}\end{aligned}$$

e

$$\int_\Omega |\nabla v_n - \nabla v_m|^q dx \leqslant \left(\int_\Omega \frac{|\nabla(v_n-v_m)|^2}{(|\nabla v_n|+|\nabla v_m|)^{2-q}}dx\right)^{\frac{q}{2}}\left(\int_\Omega (|\nabla v_n|+|\nabla v_m|)^q dx\right)^{\frac{2-q}{2}}.$$

As desigualdades acima, a limitação da sequência $\{(u_n, v_n)\}_{n\geqslant 1}$ e (2.62) acarretam

$$\begin{aligned}&\lim_{n,m\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_m|^p dx = 0,\\ &\lim_{n,m\to\infty}\int_\Omega |\nabla v_n - \nabla v_m|^q dx = 0.\end{aligned} \tag{2.63}$$

Portanto, de (2.55), (2.56), (2.61) e (2.63), temos que $\{(u_n, v_n)\}_{n\geqslant 1}$ é uma sequência de Cauchy em E, consequentemente, $\{(u_n, v_n)\}_{n\geqslant 1}$ converge em E.

■

Agora, vamos à demonstração do resultado principal desta seção,

Teorema 2.10. *Suponha que a hipótese* (E_3) *seja válida e* $(f, g) \in \mathcal{H}\cap\mathcal{H}^+$. *Então, existe pelo menos uma solução* $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$ *não-negativa não-nula para o sistema* $(P_{\lambda,\mu})$, *desde que* $(\lambda,\mu) > (0,0)$ *sejam suficientemente pequenos. Se adicionalmente, assumirmos* (E_4) *e* (E_5), *temos que a solução é positiva. Além disso,* $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$ *converge uniformemente para uma solução positiva* (u_0, v_0) *do problema* $(P_{0,0})$ *quando* $(\lambda,\mu)\to(0,0)$, *sendo*

$$(P_{0,0})\begin{cases}\Delta_p u + m_1(x)u^{p-1} = a(x)u^{\beta_1} + b(x)u^\alpha v^{\gamma+1}, & \Omega\\ \Delta_q v + m_2(x)v^{q-1} = c(x)v^{\beta_2} + b(x)v^\gamma u^{\alpha+1}, & \Omega\\ u, v \geqslant 0, \quad u = v = 0, & \partial\Omega.\end{cases}$$

Demonstração. Observe que, a derivada de Fréchet do funcional I é dada por

$$\begin{aligned}< I'(u,v),(\varphi,\psi) >= (\alpha+1)\left[\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi - \int_\Omega a(x)(u^+)^{\beta_1}\varphi - \right.\\ \left.\int_\Omega b(x)(u^+)^\alpha(v^+)^{\gamma+1}\varphi - \int_\Omega \lambda f(x)\varphi\right] + (\gamma+1)\left[\int_\Omega |\nabla v|^{q-2}\nabla v\nabla\psi - \right.\\ \left. - \int_\Omega c(x)(v^+)^{\beta_2}\psi - \int_\Omega b(x)(u^+)^{\alpha+1}(v^+)^\gamma\psi - \int_\Omega \mu g(x)\psi\right],\end{aligned}$$

$\forall(u,v),(\varphi,\psi)\in E$.

Pelos Lemas 2.6 e 2.7, temos que o funcional I satisfaz a geometria do passo da montanha. Então, pelo Teorema do Passo da Montanha sem a condição de (PS), a saber Teorema A.11, existe uma sequência $\{(u_n,v_n)\}_{n\geqslant 1}$ (PS).

Logo, pelo Lema 2.8, $\{(u_n,v_n)\}_{n\geqslant 1}$ é limitada. Consequentemente, existe $(u_{\lambda,\mu},v_{\lambda,\mu})\in E$ tal que

$$(u_n,v_n)\xrightarrow{n\to\infty}(u_{\lambda,\mu},v_{\lambda,\mu})\quad \text{em } E,\quad \text{(a menos de subsequência)}$$

usando o Lema 2.9.

Assim, como o funcional $I\in C^1(E,\mathbb{R})$ temos que

$$<I'(u_{\lambda,\mu},v_{\lambda,\mu}),(\varphi,\psi)>=0,\quad \forall(\varphi,\psi)\in E.$$

Agora mostraremos a positividade desta solução. Denote $(u_{\lambda,\mu},v_{\lambda,\mu})=(u,v)$.

Temos que,

$$(P')\begin{cases} -\Delta_p u+m_1(x)u^{p-1}= & a(x)(u^+)^{\beta_1}+b(x)(u^+)^{\alpha}(v^+)^{\gamma+1}+\lambda f(x),\quad \Omega\\ -\Delta_q v+m_2(x)v^{q-1}= & c(x)(v^+)^{\beta_2}+b(x)(v^+)^{\gamma}(u^+)^{\alpha+1}+\mu g(x),\quad \Omega\\ u \;=\; v=0, & \partial\Omega,\end{cases}$$

e

$$\begin{gathered} I(u,v)=C_{\lambda,\mu}\geqslant\delta>0,\\ I'(u,v)=0.\end{gathered}\tag{2.64}$$

Afirmamos que, $(u,v)\geqslant(0,0)$.

De fato, como $(f,g)\in\mathcal{H}$ então os problemas (P_f) e (Q_g) têm soluções, as quais denotamos por w_f e w_g, respectivamente.

Assim, como (u,v) satifaz o sistema (P') temos que

$$\begin{aligned} -\Delta_p(\lambda^{\frac{1}{p-1}}w_f)+ \quad m_1(x)(\lambda^{\frac{1}{p-1}}w_f)^{p-1} &= \lambda(-\Delta_p w_f+m_1(x)w_f^{p-1})\\ &= \lambda f(x)\leqslant -\Delta_p u+m_1(x)u^{p-1},\end{aligned}$$

logo pelo Princípio de Comparação A.1, $u(x)\geqslant\lambda^{\frac{1}{p-1}}w_f(x)\geqslant 0$, Ω.

Analogamente, mostra-se que $v\geqslant 0$, Ω. Portanto, (u,v) é solução não-negativa do problema $(P'_{\lambda,\mu})$.

Agora, mostraremos que (u,v) é uma solução positiva de $(P'_{\lambda,\mu})$.

Observe que, pelo Lema 2.7, temos que existem $\varphi_1, \varphi_2 \geqslant 0$ e $t_0 > 0$ suficientemente grande tais que

$$I(t\varphi_1, t\varphi_2) < 0, \qquad \text{para} \qquad t > t_0.$$

Assim, $sup_{t \geqslant 0} I(t\varphi_1, t\varphi_2) = max_{t \in [0,t_0]} I(t\varphi_1, t\varphi_2)$. Além disso, existe $C > 0$ tal que

$$\max_{t \in [0,t_0]} I(t\varphi_1, t\varphi_2) \leqslant C,$$

com C independente de λ e μ, (veja Apêndice C). Logo, por (2.64), segue que

$$C_{\lambda,\mu} \leqslant \sup_{t \geqslant 0} I(t\varphi_1, t\varphi_2) = \max_{t \in [0,t_0]} I(t\varphi_1, t\varphi_2) \leqslant C, \tag{2.65}$$

para $(0,0) < (\lambda, \mu) < (\lambda_f, \mu_g)$. Ou seja, $C_{\lambda,\mu} \leqslant C$.

De (2.64) e (2.65) segue que

$$I((u,v)) = \frac{(\alpha+1)}{p}\|u\|_{E_1}^p + \frac{(\gamma+1)}{q}\|v\|_{E_2}^q - \frac{\alpha+1}{\beta_1+1}\int_\Omega a(x)u^{\beta_1+1} - \frac{\gamma+1}{\beta_2+1}\int_\Omega c(x)v^{\beta_2+1} - $$
$$- \int_\Omega b(x)u^{\alpha+1}v^{\gamma+1} - (\alpha+1)\lambda\int_\Omega f(x)u - (\gamma+1)\mu\int_\Omega g(x)v \leqslant C \tag{2.66}$$

e

$$I'((u,v),(u,v)) = (\alpha+1)\|u\|_{E_1}^p + (\gamma+1)\|v\|_{E_2}^q - (\alpha+1)\int_\Omega a(x)u^{\beta_1+1} - (\gamma+1)\int_\Omega c(x)v^{\beta_2+1} - $$
$$-(\alpha+\gamma+2)\int_\Omega b(x)u^{\alpha+1}v^{\gamma+1} - (\alpha+1)\lambda\int_\Omega f(x)u - (\gamma+1)\mu\int_\Omega g(x)v = 0. \tag{2.67}$$

Logo, isolando o termo $\displaystyle\int_\Omega b(x)u^{\alpha+1}v^{\gamma+1}$ em (2.67) e substituindo em (2.66), obtemos

$$(\alpha+1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha+\gamma+2}\right)\|u\|_{E_1}^p + (\gamma+1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\alpha+\gamma+2}\right)\|v\|_{E_2}^q +$$
$$+(\alpha+1)\left(\frac{1}{\alpha+\gamma+2} - \frac{1}{\beta_1+1}\right)\int_\Omega a(x)u^{\beta_1+1} + (\gamma+1)\left(\frac{1}{\alpha+\gamma+2} - \frac{1}{\beta_2+1}\right)\int_\Omega c(x)v^{\beta_2+1} +$$
$$+(\alpha+1)\left(\frac{1}{\alpha+\gamma+2} - 1\right)\lambda\int_\Omega f(x)u + (\gamma+1)\left(\frac{1}{\alpha+\gamma+2} - 1\right)\mu\int_\Omega g(x)v \leqslant C.$$

Observe que, por hipótese, $a(x), c(x) \geqslant 0$, Ω e como mostramos que $u, v \geqslant 0$, Ω segue,

$$(\alpha+1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha+\gamma+2}\right)\|u\|_{E_1}^p + (\gamma+1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\alpha+\gamma+2}\right)\|v\|_{E_2}^q \leqslant$$
$$\leqslant C + (\alpha+1)\left(1 - \frac{1}{\alpha+\gamma+2}\right)\lambda\int_\Omega f(x)u + (\gamma+1)\left(1 - \frac{1}{\alpha+\gamma+2}\right)\mu\int_\Omega g(x)v. \tag{2.68}$$

Note ainda que, pelas desigualdades de Holder e Young, temos que $\exists \epsilon_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\left|\left(1-\frac{1}{\alpha+\gamma+2}\right)\lambda\int_\Omega f(x)u\right| &\leqslant \lambda_f\left(1-\frac{1}{\alpha+\gamma+2}\right)\|f\|_{L^{p'}(\Omega)}\|u\|_{L^p(\Omega)}\\ &\leqslant \lambda_f\left(1-\frac{1}{\alpha+\gamma+2}\right)(\epsilon_1\|u\|^p_{L^p(\Omega)}+C(\epsilon_1)\|f\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}),\end{aligned}$$

além disso, pela imersão $E_1 \hookrightarrow L^p(\Omega)$, existe $C_3 > 0$ tal que

$$\left|\left(1-\frac{1}{\alpha+\gamma+2}\right)\lambda\int_\Omega f(x)u\right| \leqslant \lambda_f\left(1-\frac{1}{\alpha+\gamma+2}\right)(\epsilon_1 C_3\|u\|^p_{E_1}+C(\epsilon_1)\|f\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}). \tag{2.69}$$

Analogamente, existe $\epsilon_2 > 0$ e pela imersão $E_2 \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\exists C_4 > 0$ tais que

$$\left|\left(1-\frac{1}{\alpha+\gamma+2}\right)\mu\int_\Omega g(x)v\right| \leqslant \mu_g\left(1-\frac{1}{\alpha+\gamma+2}\right)(\epsilon_2 C_4\|v\|^q_{E_2}+C(\epsilon_2)\|g\|^{q'}_{L^{q'}(\Omega)}). \tag{2.70}$$

Assim, substituindo (2.69) e (2.70) em (2.68) temos que

$$\begin{aligned}&(\alpha+1)\left[\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\alpha+\gamma+2}\right)-\lambda_f\left(1-\frac{1}{\alpha+\gamma+2}\right)\epsilon_1 C_3\right]\|u\|^p_{E_1}+\\ &+(\gamma+1)\left[\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\alpha+\gamma+2}\right)-\mu_g\left(1-\frac{1}{\alpha+\gamma+2}\right)\epsilon_2 C_4\right]\|v\|^q_{E_2}\leqslant\\ &\leqslant C+(\alpha+1)\left(1-\frac{1}{\alpha+\gamma+2}\right)\lambda_f C(\epsilon_1)\|f\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}+(\gamma+1)\left(1-\frac{1}{\alpha+\gamma+2}\right)\mu_g C(\epsilon_2)\|g\|^{q'}_{L^{q'}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Logo, escolhendo $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ suficientemente pequenos temos

$$\|u\|^p_{E_1}+\|v\|^q_{E_2}\leqslant \overline{C},$$

para $(\lambda,\mu)\in(0,\lambda_f)\times(0,\mu_g)$, onde $\overline{C}$ é independente de λ e μ.

Consequentemente, $\|u\|_{E_1}\leqslant C_5$ e $\|v\|_{E_2}\leqslant C_6$, onde C_5 e C_6 são independentes de λ e μ.

Afirmação 2.2.2. *Existem constantes $\overline{C}_5, \overline{C}_6 > 0$ independentes de λ e μ tais que*

$$\|u\|_{L^\infty}\leqslant \overline{C}_5 \quad e \quad \|v\|_{L^\infty}\leqslant \overline{C}_6, \quad para\ (\lambda,\mu)\in(0,\lambda_f)\times(0,\mu_g).$$

Provaremos esta afirmação usando o Método Iterativo de Moser adaptada do artigo [53] de Stavrakakis e Zographopoulos.

Para $k\in\mathbb{N}$, introduzimos as sequências

$$\begin{aligned}&\eta_1 = p^*, \qquad \eta_{k+1} = \eta_k^*\frac{p^*}{p}, \qquad \eta_k^* = \eta_k-\widetilde{\eta}_k+p, \qquad \widetilde{\eta}_k = \eta_k\frac{\gamma+1}{q^*}+(\alpha+1),\\ &\chi_k = \frac{\eta_k}{\widetilde{\eta}_k-(\beta_1+1)}, \qquad \sigma_k = \frac{\eta_k}{\widetilde{\eta}_k-1}, \qquad M_1 = \|v\|_{q^*},\end{aligned}$$

$$L_{k+1} = L^{\frac{1}{\eta_k^*}}(\eta_k - \widetilde{\eta}_k + 1)^{\frac{-1}{\eta_k^*}} \left(\frac{\eta_k^*}{p}\right)^{\frac{p}{\eta_k^*}} \max\{\|a\|_{\chi_k}^{\frac{\chi_k}{\eta_k^*}}, L_k^{\frac{\eta_k}{\eta_k^*}}, \|f\|_{\sigma_k}^{\frac{\sigma_k}{\eta_k^*}}, M_1^{\frac{q^*}{\eta_k^*}}\}$$

$$\theta_1 = q^*, \qquad \theta_{k+1} = \theta_k^* \frac{q^*}{q}, \qquad \theta_k^* = \theta_k - \widetilde{\theta}_k + q, \qquad \widetilde{\theta}_k = \theta_k \frac{\alpha+1}{p^*} + (\gamma+1),$$

$$\psi_k = \frac{\theta_k}{\widetilde{\theta}_k - (\beta_2+1)}, \qquad \delta_k = \frac{\theta_k}{\widetilde{\theta}_k - 1}, \qquad L_1 = \|u\|_{p^*},$$

$$M_{k+1} = L^{\frac{1}{\theta_k^*}}(\theta_k - \widetilde{\theta}_k + 1)^{\frac{-1}{\theta_k^*}} \left(\frac{\theta_k^*}{q}\right)^{\frac{q}{\theta_k^*}} \max\{\|d\|_{\psi_k}^{\frac{\psi_k}{\theta_k^*}}, M_k^{\frac{\theta_k}{\theta_k^*}}, \|g\|_{\delta_k}^{\frac{\delta_k}{\theta_k^*}}, L_1^{\frac{p^*}{\theta_k^*}}\},$$

onde $L = C(\max\{1, \lambda_0, \mu_0, \|b\|_\infty\})$, $C > 0$ constante.

Em relação a essas sequências, temos as seguintes propriedades:

Afirmação 2.2.3. *1. η_k e θ_k são crescentes,*

2. $\eta_k, \theta_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$,

3. $\eta_k - \widetilde{\eta}_k > 0$ e $\theta_k - \widetilde{\theta}_k > 0$.

Para a demonstração desta afirmação veja Apêndice C.

Afirmação 2.2.4. *Seja (u, v) solução do sistema (P'). Então, $\forall k \in \mathbb{N}$, $u \in L^{\eta_k}(\Omega)$, $v \in L^{\theta_k}(\Omega)$ e satisfazem $\|u\|_{\eta_k} \leqslant L_k$ e $\|v\|_{\theta_k} \leqslant M_k$.*

Faremos a prova por indução. Então, observe que, para $k = 1$, $\|u\|_{\eta_1} = \|u\|_{p*} = L_1$.

Suponha agora que, $\|u\|_{\eta_k} \leqslant L_k$.

Seja $\Psi_n \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $\Psi_n(t) = \begin{cases} t, & |t| \leqslant n, \\ n+1, & |t| \geqslant n+2, \end{cases}$ e $0 \leqslant \Psi_n'(t) \leqslant 1$. Defina,

$$u_n := \Psi_n(u) = \begin{cases} u, & |u| \leqslant n, \\ n+1, & |u| \geqslant n+2. \end{cases}$$

Relembremos que, $u, v \geqslant 0$, Ω. E considere $u_n^{\eta_k - \widetilde{\eta}_k + 1}$ como função teste, assim

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \quad \nabla(u_n^{\eta_k - \widetilde{\eta}_k+1})dx + \int_\Omega m_1(x)u^{p-1}u_n^{\eta_k - \widetilde{\eta}_k+1} =$$

$$= \int_\Omega a(x)u^{\beta_1}u_n^{\eta_k-\widetilde{\eta}_k+1} + \int_\Omega b(x)u^\alpha v^{\gamma+1}u_n^{\eta_k-\widetilde{\eta}_k+1} + \lambda\int_\Omega f(x)u_n^{\eta_k-\widetilde{\eta}_k+1}. \tag{2.71}$$

Observe que,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \quad \nabla(u_n^{\eta_k - \widetilde{\eta}_k+1})dx + \int_\Omega m_1(x)u^{p-1}u_n^{\eta_k - \widetilde{\eta}_k+1}dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(u^{\eta_k-\widetilde{\eta}_k+1})dx = (\eta_k - \widetilde{\eta}_k + 1)\int_\Omega |\nabla u|^p \Psi_n'(u)u_n^{\eta_k-\widetilde{\eta}_k}. \tag{2.72}$$

E, de $0 \leqslant \Psi_n'(u) \leqslant 1$ segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^p \Psi_n'(u) u_n^{\eta_k - \widetilde{\eta}_k} &\geqslant \int_\Omega \Big[|\nabla u| \Psi_n'(u)\Big]^p u_n^{\eta_k - \widetilde{\eta}_k} \\ &= \int_\Omega |\nabla u_n|^p u_n^{\eta_k - \widetilde{\eta}_k} = \left(\frac{p}{\eta_k^*}\right)^p \int_\Omega |\nabla u_n^{\frac{\eta_k^*}{p}}|^p.\end{aligned} \tag{2.73}$$

Além disso, usando a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p*}(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega |\nabla u_n^{\frac{\eta_k^*}{p}}|^p \geqslant C \|u_n^{\frac{\eta_k^*}{p}}\|_{p*}^p = \|u_n\|_{\eta_{k+1}}^{\eta_k^*}. \tag{2.74}$$

Logo, por (2.72) - (2.74), chegamos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla (u_n^{\eta_k - \widetilde{\eta}_k + 1}) dx + & \int_\Omega m_1(x) u^{p-1} u_n^{\eta_k - \widetilde{\eta}_k + 1} dx \geqslant \\ &= C(\eta_k - \widetilde{\eta}_k + 1) \left(\frac{p}{\eta_k^*}\right)^p \|u_n\|_{\eta_{k+1}}^{\eta_k^*}.\end{aligned} \tag{2.75}$$

Por outro lado, aplicando a desigualdade de Holder com os expontes conjugados, $\dfrac{\eta_k}{\eta_k - \widetilde{\eta}_k + \alpha + 1}$ e $\dfrac{q*}{\gamma + 1}$, e usando que $u_n \leqslant u$ e $b \in L^\infty(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega b(x) u^\alpha v^{\gamma+1} u_n^{\eta_k - \widetilde{\eta}_k + 1} dx &\leqslant \|b\|_\infty \int_\Omega u^{\eta_k - \widetilde{\eta}_k + \alpha + 1} v^{\gamma+1} dx \\ &= \|b\|_\infty \|u\|_{\eta_k}^{\eta_k - \widetilde{\eta}_k + \alpha + 1} \|v\|_{q*}^{\gamma+1} \\ &\leqslant \|b\|_\infty \max\{\|u\|_{\eta_k}^{\eta_k}, \|v\|_{q*}^{q*}\},\end{aligned} \tag{2.76}$$

onde a última desigualdade é justificada observando que, se considerarmos $\max\{\|u\|_{\eta_k}^{\eta_k}, \|v\|_{q*}^{q*}\} = \|u\|_{\eta_k}^{\eta_k}$ então

$$\|u\|_{\eta_k}^{\eta_k - \widetilde{\eta}_k + \alpha + 1} \|v\|_{q*}^{\gamma+1} \leqslant \|u\|_{\eta_k}^{\eta_k - \widetilde{\eta}_k + \alpha + 1 + (\gamma+1)\frac{\eta_k}{q*}} = \|u\|_{\eta_k}^{\eta_k}, \tag{2.77}$$

caso contrário, se $\max\{\|u\|_{\eta_k}^{\eta_k}, \|v\|_{q*}^{q*}\} = \|v\|_{q*}^{q*}$, segue que

$$\|u\|_{\eta_k}^{\eta_k - \widetilde{\eta}_k + \alpha + 1} \|v\|_{q*}^{\gamma+1} \leqslant \|v\|_{q*}^{\frac{q*}{\eta_k}(\eta_k - \widetilde{\eta}_k + \alpha + 1) + \gamma + 1} = \|v\|_{q*}^{q*}. \tag{2.78}$$

Novamente pela desigualdade de Holder, agora com os expoentes χ_k e $\dfrac{\eta_k}{\eta_k - \widetilde{\eta}_k + \beta_1 + 1}$ obtemos

$$\int_\Omega a(x) u^{\beta_1} u_n^{\eta_k - \widetilde{\eta}_k + 1} \leqslant \|a\|_{\chi_k} \|u\|_{\eta_k}^{\eta_k - \widetilde{\eta}_k + \beta_1 + 1} \leqslant \max\{\|a\|_{\chi_k}^{\chi_k}, \|u\|_{\eta_k}^{\eta_k}\}, \tag{2.79}$$

sendo a última passagem comprovada de forma análoga como em (2.77) e (2.78).

E por fim, mais uma vez usando Holder com σ_k e $\dfrac{\eta_k}{\eta_k - \widetilde{\eta}_k + 1}$, segue que

$$\lambda \int_\Omega f(x) u_n^{\eta_k - \widetilde{\eta}_k + 1} \leqslant \lambda \|f\|_{\sigma_k} \|u\|_{\eta_k}^{\eta_k - \widetilde{\eta}_k + 1} \leqslant \lambda_0 \max\{\|f\|_{\sigma_k}^{\sigma_k}, \|u\|_{\eta_k}^{\eta_k}\}. \tag{2.80}$$

Portanto, substituindo (2.75), (2.76), (2.79) e (2.80) em (2.71) temos

$$\begin{aligned} C(\eta_k - \widetilde{\eta}_k + 1)\left(\frac{p}{\eta_k^*}\right)^p \|u_n\|_{\eta_{k+1}}^{\eta_k^*} &\leqslant \|b\|_\infty \max\{\|u\|_{\eta_k}^{\eta_k}, \|v\|_{q*}^{q*}\} + \max\{\|a\|_{\chi_k}^{\chi_k}, \|u\|_{\eta_k}^{\eta_k}\} + \\ &\quad + \lambda_0 \max\{\|f\|_{\sigma_k}^{\sigma_k}, \|u\|_{\eta_k}^{\eta_k}\} \\ &\leqslant \max\{1, \|b\|_\infty, \lambda_0\} \max\{\|a\|_{\chi_k}^{\chi_k}, \|f\|_{\sigma_k}^{\sigma_k}, \|u\|_{\eta_k}^{\eta_k}, \|v\|_{q*}^{q*}\}, \end{aligned}$$

assim, empregando a hipótese de indução, concluímos que

$$\|u_n\|_{\eta_{k+1}} \leqslant L^{\frac{1}{\eta_k^*}} (\eta_k - \widetilde{\eta}_k + 1)^{\frac{-1}{\eta_k^*}} \left(\frac{\eta_k^*}{p}\right)^{\frac{p}{\eta_k^*}} \max\{\|a\|_{\chi_k}^{\frac{\chi_k}{\eta_k^*}}, L_k^{\frac{\eta_k}{\eta_k^*}}, \|f\|_{\sigma_k}^{\frac{\sigma_k}{\eta_k^*}}, M_1^{\frac{\theta_1}{\eta_k^*}}\},$$

onde $L = C(\max\{1, \lambda_0, \mu_0, \|b\|_\infty\})$; ou seja,

$$\|u_n\|_{\eta_{k+1}} \leqslant L_{k+1}.$$

Analogamente, mostra-se que $\|v_n\|_{\theta_k} \leqslant M_k$.

Finalmente, fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\|u\|_{\eta_k} \leqslant L_k \qquad \text{e} \qquad \|v\|_{\theta_k} \leqslant M_k,$$

finalizando a prova da afirmação 2.2.4.

Agora, usaremos essa afirmação para demonstrar 2.2.2. Para isso, trabalharemos com o $\max\{\|a\|_{\chi_k}^{\frac{\chi_k}{\eta_k^*}}, L_k^{\frac{\eta_k}{\eta_k^*}}, \|f\|_{\sigma_k}^{\frac{\sigma_k}{\eta_k^*}}, M_1^{\frac{\theta_1}{\eta_k^*}}\}$ que aparece em L_k.

<u>1° **Caso:**</u> $\max\{\|a\|_{\chi_k}^{\chi_k}, L_k^{\eta_k}, \|f\|_{\sigma_k}^{\sigma_k}, M_1^{\theta_1}\} = L_k^{\eta_k}$.

Sejam $E_k = \eta_k \ln(L_k)$ e $a = \dfrac{p^*}{p}$. Pela afirmação 2.2.3, temos que

$$E_{k+1} \leqslant r_k + aE_k, \tag{2.81}$$

onde $r_k = p^* \ln(L\widetilde{\eta}_k)$. (Para a prova veja Apêndice C)

Assim,

$$\begin{aligned} E_k &\leqslant r_{k-1} + aE_{k-1} \leqslant r_{k-1} + a(r_{k-2} + aE_{k-2}) \\ &\vdots \\ &\leqslant r_{k-1} + ar_{k-2} + a^2 r_{k-3} + \ldots + a^{k-2} r_1 + a^{k-1} E_1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$E_k \leqslant a^{k-1} E_1 + \sum_{i=1}^{k-1} a^{i-1} r_{k-i}. \tag{2.82}$$

Para demonstrarmos a afirmação 2.2.3, consideramos $\varepsilon = \dfrac{p^*}{p}\left(1 - \dfrac{\gamma+1}{q^*}\right)$ e $\xi = \dfrac{p^*}{p}(p-(\alpha+1))$, e mostramos que

$$\eta_k = \varepsilon^{k-1}\eta_1 + \xi\frac{\varepsilon^{k-2}-1}{\varepsilon-1}.$$

Então, como $\widetilde{\eta}_k < \eta_k$ e $a > 1$, temos

$$\begin{aligned} \widetilde{\eta}_k &< \varepsilon^{k-1}\eta_1 + \xi^+\frac{\varepsilon^{k-2}-1}{\varepsilon-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow L\widetilde{\eta}_k &< aL\varepsilon^{k-1}\left(\eta_1 + \xi^+\frac{\varepsilon^{k-2}-1}{\varepsilon^{k-1}(\varepsilon-1)}\right), \end{aligned}$$

assim, aplicando o logarítmo natural segue que

$$p^*\ln(L\widetilde{\eta}_k) < p^*(k-1)\ln\varepsilon + p^*\ln\left(aL\left(\eta_1 + \xi^+\frac{\varepsilon^{k-2}-1}{\varepsilon^{k-1}(\varepsilon-1)}\right)\right).$$

Logo, como $\dfrac{\gamma+1}{q^*} > 0$ temos $\varepsilon < a$, consequentemente

$$r_k < p^*(k-1)\ln a + p^*\ln\left(aL\left(\eta_1 + \xi^+\frac{\varepsilon^{k-2}-1}{\varepsilon^{k-1}(\varepsilon-1)}\right)\right). \tag{2.83}$$

Observe que, $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{\varepsilon^{k-2}-1}{\varepsilon^{k-1}(\varepsilon-1)} = \lim_{k\to\infty}\frac{1-\frac{1}{\varepsilon^{k-2}}}{\varepsilon(\varepsilon-1)} = \frac{1}{\varepsilon(\varepsilon-1)}$. Dessa forma, para k suficientemente grande e denotando $b = p^*\ln\left(aL\left(\eta_1 + \dfrac{\xi^+}{\varepsilon(\varepsilon-1)}\right)\right)$, segue de (2.83) que

$$r_k \leqslant p^*(k-1)\ln a + b. \tag{2.84}$$

Então, substituindo (2.84) em (2.82) obtemos

$$\begin{aligned} E_k &\leqslant a^{k-1}E_1 + \sum_{i=1}^{k-1} a^{i-1}p^*(k-i-1)\ln a + a^{i-1}b \\ &\leqslant a^{k-1}E_1 + [b(a-1) + p^*\ln a]\frac{(a^{k-1}-1)}{(a-1)^2}. \end{aligned}$$

Além disso, $\eta_k > a^{k-1}(p^*-a)$, consequentemente,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{E_k}{\eta_k} < \lim_{k\to\infty}\frac{E_1 + \frac{b(a-1)+p^*\ln a}{(a-1)^2}\left(1-\frac{1}{a^{k-1}}\right)}{(p^*-a)} = d,$$

onde $d = \dfrac{E_1 + \frac{b(a-1)+p^*\ln a}{(a-1)^2}}{p^*-a}$.

Portanto, como $L_k = e^{\frac{E_k}{\eta_k}}$ e $\eta_k \to \infty$ (2.2.3), temos que

$$\|u\|_\infty = \limsup_{k\to\infty} \|u\|_{\eta_k} \leqslant \limsup_{k\to\infty} L_k < e^d,$$

ou seja,

$$\|u\|_\infty < e^d. \tag{2.85}$$

<u>2° **Caso:**</u> $\max\{\|a\|_{\chi_k}^{\chi_k}, L_k^{\eta_k}, \|f\|_{\sigma_k}^{\sigma_k}, M_1^{\theta_1}\} = M_1^{\theta_1}$.

Neste caso, observe primeiramente que, de $\eta_k \to \infty$ segue que para k suficientemente grande $\dfrac{1}{\eta_k} < 1$, logo

$$\text{se} \quad \|v\|_{q^*}^{q^*} < 1 \quad \text{então} \quad \|v\|_{q^*}^{\frac{q^*}{\eta_k}} < 1 = \max\{1, \|v\|_{q^*}^{q^*}\},$$

$$\text{se} \quad \|v\|_{q^*}^{q^*} > 1 \quad \text{então} \quad \|v\|_{q^*}^{\frac{q^*}{\eta_k}} < \|v\|_{q^*}^{q^*} = \max\{1, \|v\|_{q^*}^{q^*}\},$$

isto é, $\|v\|_{q^*}^{\frac{q^*}{\eta_k}} < \max\{1, \|v\|_{q^*}^{q^*}\}$.

Assim, para k suficientemente grande,

$$\|u\|_{\eta_k} \leqslant L_k \leqslant M_1^{\frac{\theta_1}{\eta_k}} = \|v\|_{q^*}^{\frac{q^*}{\eta_k}} < \max\{1, \|v\|_{q^*}^{q^*}\}.$$

Concluímos que,

$$\|u\|_\infty \leqslant \max\{1, M_1^{\theta_1}\}. \tag{2.86}$$

<u>3° **Caso:**</u> $\max\{\|a\|_{\chi_k}^{\chi_k}, L_k^{\eta_k}, \|f\|_{\sigma_k}^{\sigma_k}, M_1^{\theta_1}\} = \|a\|_{\chi_k}^{\chi_k}$.

Temos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que,

$$\|u\|_\infty \leqslant \limsup_{k\to\infty} \|u\|_{\eta_k} \leqslant \limsup_{k\to\infty} L_k \leqslant \limsup_{k\to\infty} \|a\|_{\chi_k}^{\frac{\chi_k}{\eta_k}} \leqslant \|a\|_{\frac{q^*}{\gamma+1}}^{\frac{\chi_k}{\eta_k}} \leqslant \max\{1, \|a\|_{\frac{q^*}{\gamma+1}}^{\widetilde{\gamma}}\},$$

onde $\widetilde{\gamma} = \dfrac{q^*}{p^*(\gamma+1) + q^*(\alpha+1) - q^*(\beta_1+1)}$ e as últimas passagens são justificadas pelos cálculos:

$$\chi_k = \frac{\eta_k}{\widetilde{\eta_k} - (\beta_1+1)} = \frac{1}{\frac{(\gamma+1)}{q^*} + \frac{(\alpha+1)}{\eta_k} - \frac{(\beta_1+1)}{\eta_k}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{q^*}{\gamma+1},$$

$$\frac{\chi_k}{\eta_k} = \frac{\frac{\eta_k}{\widetilde{\eta_k} - (\beta_1+1)}}{\eta_k} = \frac{1}{\widetilde{\eta_k} - (\beta_1+1)} = \frac{q^*}{\eta_k(\gamma+1) + q^*(\alpha+1) - q^*(\beta_1+1)} < \widetilde{\gamma},$$

pois $\eta_k > p^*$.

Então,

$$\|u\|_\infty \leqslant \max\{1, \|a\|_{\frac{q^*}{\gamma+1}}^{\widetilde{\gamma}}\}. \tag{2.87}$$

<u>4° **Caso:**</u> $\max\{\|a\|_{\chi_k}^{\chi_k}, L_k^{\eta_k}, \|f\|_{\sigma_k}^{\sigma_k}, M_1^{\theta_1}\} = \|f\|_{\sigma_k}^{\sigma_k}$.

Novamente pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\|u\|_\infty \leqslant \limsup_{k\to\infty}\|u\|_{\eta_k} \leqslant \limsup_{k\to\infty} L_k \leqslant \limsup_{k\to\infty}\|f\|_{\sigma_k}^{\frac{\sigma_k}{\eta_k}} \leqslant \|f\|_{\frac{q^*}{\gamma+1}}^{\frac{\sigma_k}{\eta_k}} \leqslant \max\{1, \|f\|_{\frac{q^*}{\gamma+1}}^{\widetilde{\sigma}}\},$$

onde $\widetilde{\sigma} = \dfrac{q^*}{p^*(\gamma+1)+q^*\alpha}$ e

$$\sigma_k = \frac{\eta_k}{\widetilde{\eta_k}-1} = \frac{1}{\frac{(\gamma+1)}{q^*}+\frac{\alpha}{\eta_k}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{q^*}{\gamma+1},$$

$$\frac{\sigma_k}{\eta_k} = \frac{1}{\eta_k\frac{(\gamma+1)}{q^*}+(\alpha+1)-1} < \frac{q^*}{p^*(\gamma+1)+q^*\alpha} = \widetilde{\sigma}.$$

Logo,

$$\|u\|_\infty \leqslant \max\{1, \|f\|_{\frac{q^*}{\gamma+1}}^{\widetilde{\sigma}}\}. \tag{2.88}$$

Portanto, de (2.85) - (2.88) segue que

$$\|u\|_\infty \leqslant \max\{1, \|f\|_{\frac{q^*}{\gamma+1}}^{\widetilde{\sigma}}, \|a\|_{\frac{q^*}{\gamma+1}}^{\widetilde{\gamma}}, M_1^{\theta_1}, e^d\},$$

concluindo a prova da afirmação 2.2.2.

Assim, usando esta declaração, Af. 2.2.2, e o resultado de regularidade de Lieberman A.5, existem $C_7, C_8 > 0$ tais que

$$\|u\|_{C^{1,\sigma}} \leqslant C_7 \quad \text{e} \quad \|v\|_{C^{1,\delta}} \leqslant C_8, \quad \text{para } (\lambda,\mu)\in(0,\lambda_f)\times(0,\mu_g). \tag{2.89}$$

Observe que, como $(f,g)\in\mathcal{H}^+$, existe uma vizinhança $N(\partial\Omega)$ de $\partial\Omega$ tal que $f(x), g(x) \geqslant 0$, para $x\in N(\partial\Omega)$. Considere $\Omega_0 = \overline{\Omega\setminus N(\partial\Omega)}$.

Afirmação 2.2.5. *Existem $\lambda_0, \mu_0 > 0$ tais que $u_{\lambda,\mu} > 0$ ou $v_{\lambda,\mu} > 0$, em Ω_0 sempre que $(0,0) < (\lambda,\mu) < (\lambda_0,\mu_0)$.*

Podemos reescrever a afirmação da seguinte forma:

Existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $u_{\lambda,\mu} > 0$ ou $v_{\lambda,\mu} > 0$, em Ω_0 desde que $(0,0) < (\lambda,\mu) < (\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0})$.

Suponha, por contradição, que esta afirmação não seja verdadeira. Então, para $\left[0,\frac{1}{n}\right]\times\left[0,\frac{1}{n}\right]$, existe $(\lambda_n,\mu_n)\in\left[0,\frac{1}{n}\right]^2$ tal que

$$u_n(x_n)=0 \quad \text{e} \quad v_n(y_n)=0 \quad \text{para} \quad n\geqslant 1 \ \text{ e } \ x_n, y_n\in\Omega_0, \tag{2.90}$$

sendo $(u_n,v_n) = (u_{\lambda_n,\mu_n}, v_{\lambda_n,\mu_n})$.

Observe que, pela estimativa (2.89), temos que

$$(u_n,v_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (u_0,v_0), \quad \text{uniformemente em} \quad \Omega,$$

donde $(u_0, v_0) \geqslant (0,0)$, Ω, pois $(u_n, v_n) \geqslant (0,0)$, Ω. Além disso, notando que $\lambda_n, \mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, (u_0, v_0) satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta_p u_0 + m_1(x)u_0^{p-1} = & a(x)u_0^{\beta_1} + b(x)u_0^{\alpha}v_0^{\gamma+1}, \quad \Omega \\ -\Delta_q v_0 + m_2(x)v_0^{q-1} = & c(x)v_0^{\beta_2} + b(x)v_0^{\gamma}u_0^{\alpha+1}, \quad \Omega \\ u_0 \quad = & v_0 = 0, \qquad \partial\Omega, \end{cases}$$

Assim, como $I(u_n, v_n) = C_n = C_{\lambda_n,\mu_n} \geqslant \delta > 0$, segue que

$$\frac{(\alpha+1)}{p}\|u_0\|_{E_1}^p + \frac{(\gamma+1)}{q}\|v_0\|_{E_2}^q - \frac{\alpha+1}{\beta_1+1}\int_\Omega a(x)u_0^{\beta_1+1} - \frac{\gamma+1}{\beta_2+1}\int_\Omega c(x)v_0^{\beta_2+1} -$$

$$-\int_\Omega b(x)u_0^{\alpha+1}v_0^{\gamma+1} = \lim_{n\to\infty} C_n \geqslant \delta > 0,$$

o que implica que não se pode ter u_0 e v_0 simultaneamente nulas.

Suponha, sem perda de generalidade, que $u_0 \neq 0$. Logo, pelo Princípio do Máximo Forte de Garcia e Melian, a saber Teorema A.2, temos que $u_0(x) > 0$, $x \in \Omega$. Em particular,

$$u_0(x) > 0, \qquad x \in \Omega_0. \tag{2.91}$$

Note que, como $x_n \in \Omega_0$ e Ω_0 é fechado então $\exists x_0 \in \Omega_0$ tal que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. Assim,

$$u_n(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_0(x_0).$$

Logo, de (2.90) segue $u_0(x_0) = 0$, contradizendo (2.91).

Portanto, a afirmação é verdadeira, ou seja, existem $\lambda_0, \mu_0 > 0$ tais que $u_{\lambda,\mu} > 0$ ou $v_{\lambda,\mu} > 0$, Ω_0 desde que $(0,0) < (\lambda, \mu) < (\lambda_0, \mu_0)$.

Resta mostrar a positividade da solução no conjunto $N(\partial\Omega)$.

Afirmação 2.2.6. *$u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu} > 0$, $x \in N(\partial\Omega)$, para $(0,0) < (\lambda,\mu) < (\lambda_0, \mu_0)$.*

De fato, como $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$ satisfaz (P') e $f(x), g(x) \geqslant 0$, $\forall x \in N(\partial\Omega)$, segue que

$$F_\lambda(x) = a(x)u^{\beta_1} + b(x)u^{\alpha}v^{\gamma+1} + \lambda f(x) \geqslant 0,$$

$$G_\mu(x) = c(x)v^{\beta_2} + b(x)v^{\gamma}u^{\alpha+1} + \mu g(x) \geqslant 0.$$

Além disso, $u(x), v(x) \geqslant 0$, $x \in \partial N(\partial\Omega) \setminus \partial\Omega$. Então, novamente pelo Princípio do Máximo Forte A.2, $u(x), v(x) > 0$, $x \in N(\partial\Omega)$.

Portanto, $u(x), v(x) > 0$, $x \in \Omega$ para $(\lambda, \mu) \in (0, \lambda_0) \times (0, \mu_0)$.

■

No que segue, demonstraremos o Corolário 2.5.

Demonstração. Note que, para a prova deste resultado resta mostrarmos que a solução obtida pelo Método de Sub-Supersolução é estritamente positiva.

De fato, denotando (u, v) como sendo a solução encontrada no Teorema 2.3, segue que

$$u \geqslant \lambda^{\frac{1}{p-1}} w_f \geqslant 0, \quad v \geqslant \mu^{\frac{1}{q-1}} w_g \geqslant 0, \quad \Omega, \tag{2.92}$$

onde w_f e w_g são soluções dos problemas (P_f) e (Q_g), respectivamente.

Além disso, considerando $m_1 = m_2 = 0$,

$$-\Delta_p u \geqslant -\Delta_p(\lambda^{\frac{1}{p-1}} w_f), \quad \Omega. \tag{2.93}$$

Assim, definindo $S = \{x \in \Omega \ / \ u(x) = \lambda^{\frac{1}{p-1}} w_f(x)\}$ temos que S é um subconjunto compacto de Ω, pois u e w_f são funções contínuas e portanto S é fechado e limitado já que Ω também o é. Portanto, de (2.92) e 2.93, chegamos que

$$u > \lambda^{\frac{1}{p-1}} w_f \geqslant 0, \quad \Omega,$$

usando o Teorema A.4.

Analogamente, mostra-se que $v > \mu^{\frac{1}{q-1}} w_g \geqslant 0$, Ω, concluindo assim a prova do Corolário.

■

Capítulo 3

Soluções inteiras e positivas de sistema do tipo singular e superlinear

Considere o seguinte problema,

$$(Q_{\lambda,\mu})\begin{cases} -\Delta_p u + m_1(x)u^{p-1} = & a(x)f_1(u) + \lambda b(x)g_1(u)h_1(v), \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta_q v + m_2(x)u^{q-1} = & c(x)f_2(v) + \mu d(x)g_2(v)h_2(u), \quad \mathbb{R}^N, \\ \qquad u, v > 0, \quad \mathbb{R}^N; & u(x), v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases}$$

onde $\lambda, \mu > 0$ são parâmetros reais; $m_i, a, b, c, d : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_i, g_i, h_i : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ são funções contínuas e h_i, $i = 1, 2$ são funções não-decrescentes.

Abordaremos a existência de solução para esse sistema usando o Teorema de Sub-Supersolução para $\mathbb{R}^N$ demonstrado no primeiro capítulo, o qual garante a existência de soluções em $C^1(\mathbb{R}^N)^2$ e as funções testes no espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)^2$. Logo, definiremos a solução desse sistema como sendo um par de funções $(u, v) \in C^1(\mathbb{R}^N)^2$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi + m_1 u^{p-1}\varphi\right) dx &= \int_\Omega \left(a(x)f_1(u) + \lambda b(x)g_1(u)h_1(v)\right)\varphi dx, \\ \int_\Omega \left(|\nabla v|^{q-2}\nabla v \nabla \psi + m_2 v^{q-1}\psi\right) dx &= \int_\Omega \left(c(x)f_2(v) + \mu d(x)g_2(v)h_2(u)\right)\psi dx, \end{aligned}$$

para todo $(\varphi, \psi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)^2$.

Demonstramos na existência de solução que se tivermos o acoplamento superlinear no 0 ($(gh)_0^i = 0$) ou sublinear no ∞ ($(gh)_\infty^i = 0$) tem-se solução para todo $(\lambda, \mu) > (0, 0)$, desde que acrescentemos uma limitação em f_0^i caso $(gh)_0^i = 0$, e hipóteses semelhantes para f_∞^i se $(gh)_\infty^i = 0$ ocorrer.

Ressaltamos também que, nas próximas seções, utilizaremos problemas de autovalor do tipo (1.5), ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta_p w + V(x)w^{p-1} = & \lambda\rho(x)w^{p-1}, \Omega, \\ \\ w > 0, \quad \Omega; \quad w(x) = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde seu primeiro autovalor e autofunção associada são denotados por $\lambda_{1,\Omega}(V,\rho)$ e $\Phi_{1,R}$, respectivamente. Sendo que, para a não-existência consideraremos $\Omega = B_R(x_0)$, $V(x) = M^+(x)|_{B_R(x_0)}$, $\rho(x) = m(x)|_{B_R(x_0)}$, onde $M(x) = \max\{m_1(x), m_2(x)\}$, $M^+(x) = \max\{0, M(x)\}$, $m(x) = \min\{a(x), b(x), c(x), d(x)\}$, $x \in \mathbb{R}^N$ e a bola $B_R(x_0)$ será tomada posteriormente.

Além disso, faremos uso do limite,

$$\lambda_1(V,\rho) = \lim_{k\to\infty} \lambda_{1,B_k(0)}(V,\rho) \in [0,\infty),$$

juntamente com algumas propriedades demonstradas no Capítulo 1.

3.1 Não-Existência de soluções via estimativa do autovalor principal no $\mathbb{R}^N$

Nesta seção, trabalharemos com o sistema $(Q_{\lambda,\mu})$ onde as funções a, b, c, d, m_1, m_2 podem mudar de sinal e admitiremos uma condição análoga à **(NE)** do capítulo anterior, mas agora com $\Omega = \mathbb{R}^N$, ou seja,

(NE)$'$ Existe $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^N$ aberto tal que $m^+|_{\Omega_0} \neq 0$, onde $m(x) = \min\{a(x), b(x), c(x), d(x)\}$.

Note que, desta hipótese, podemos tomar $B_R(x_0) \subset \Omega_0$ tal que

$$a(x), b(x), c(x), d(x) > 0, \quad \forall x \in B_R(x_0).$$

Para trabalharmos com o autovalor $\lambda_{1,B_R(x_0)}(M^+, m)$ e suas propriedades, assumiremos que as funções m_i, a, b, c, d satisfaçam a hipótese (AV_2) do primeiro capítulo, ou seja,

(NE)$'_1$ $m_1, m_2, a, b, c, d \in L^r_{loc}(\mathbb{R}^N)$, onde $\begin{cases} r > \dfrac{N}{p}, & \text{se } 1 < p \leqslant N, \\ r = 1, & \text{se } p > N, \end{cases}$

Logo, considerando

$(1)_i$ $0 < (gh)^i_0, (gh)^i_\infty \leqslant \infty$,

$(2)_i$ $0 < (gh)_0^i \leqslant \infty$ e $\lambda_{1,B_R(x_0)}(M,m) < f_\infty^i \leqslant \infty$,

$(3)_i$ $\lambda_{1,B_R(x_0)}(M,m) < f_0^i \leqslant \infty$ e $0 < (gh)_\infty^i \leqslant \infty$,

$(4)_i$ $\lambda_{1,B_R(x_0)}(M,m) < f_0^i, f_\infty^i \leqslant \infty$,

temos

Teorema 3.1. *Assuma $p = q$, $(NE)'$ e $(NE)_1'$. E suponha que $(m)_i$ e $(n)_j$ sejam satisfeitas para $i \neq j$ e $m, n = 1, 2, 3, 4$. Então, existem $\lambda^*, \mu^* > 0$ tais que o problema $(Q_{\lambda,\mu})$ não tem solução não-negativa desde que $\lambda > \lambda^*$ e $\mu > \mu^*$.*

Observação 3.1.1. *Note que, se as funções a, b, c, d forem positivas em todo $\mathbb{R}^N$, podemos fazer a demonstração usando $\lambda_1(M^+, m)$ ao invés de $\lambda_{1,B_R(x_0)}(M^+, m)$ e o Lema 1.7. Assim, se $\lambda_1(M^+, m) = 0$, então o problema $(Q_{\lambda,\mu})$ não tem solução para todo $(\lambda, \mu) > (0, 0)$, pois $H_\lambda^1(t), H_\mu^2(t) > 0$, para todo $t > 0$.*

Observação 3.1.2. *Exemplo de funções que satisfazem o problema $(Q_{\lambda,\mu})$ e as hipóteses do teorema 3.1:*

$$f_i(s) = s^\gamma + s^{-\alpha}, \quad g_i(s) = s^{-\delta}, \quad h_i(s) = s^\beta,$$

com $\alpha, \delta, \beta > 0$, $\gamma > 1$, $p = q = 2$ e $i = 1, 2$. Neste caso, temos $(4)_1$ e $(4)_2$ sendo satisfeitas.

Demonstração do Teorema 3.1.

Dados $\lambda, \mu > 0$ defina

$$H_\lambda^1(t) = \frac{f_1(t)}{t^{p-1}} + \lambda \frac{g_1(t)h_1(t)}{t^{p-1}}, \quad t > 0,$$

$$H_\mu^2(t) = \frac{f_2(t)}{t^{p-1}} + \mu \frac{g_2(t)h_2(t)}{t^{p-1}}, \quad t > 0.$$

Nosso objetivo é mostrar que existem $\lambda^*, \mu^* > 0$ tais que $H_\lambda^1(t), H_\mu^2(t) > \lambda_{1,B_R(x_0)}(M^+, m)$, $\forall t > 0$, $\forall (\lambda, \mu) > (\lambda^*, \mu^*)$, e depois usarmos o Lema 1.5.

Abordaremos primeiramente H_λ^1. Considere uma sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$ tal que $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$. Então, podem acontecer duas situações, ou H_λ^1 assume mínimo para uma quantidade infinita de λ_n's ou assume mínimo para um número finito de λ_n's. Observe que, o segundo caso inclui a possibilidade de H_λ^1 não assumir mínimo.

Vamos analisar cada uma dessas condições.

1) **Se H_λ^1 assume mínimo para uma quantidade infinita de λ_n's**, então existe uma subsequência $(\lambda_{n_j}) \subseteq (\lambda_n)$ tal que $\lambda_{n_j} \xrightarrow{n_j\to\infty} +\infty$ e $H_{\lambda_{n_j}}^1$ toma um mínimo $t_{n_j} = t_{\lambda_{n_j}}$ para cada n_j.

Dessa forma, temos

$$H^1_{\lambda_{n_j}}(t_{n_j}) \leqslant H^1_{\lambda_{n_j}}(t), \quad \forall t > 0. \tag{3.1}$$

Observe que, fazendo $n_j \to \infty$, podemos ter três casos, a menos de subsequência.

(i) $t_{n_j} \xrightarrow{n_j \to \infty} \infty$.

Neste caso,

$$\lim_{n_j \to \infty} H^1_{\lambda_{n_j}}(t_{n_j}) = f^1_\infty + (\lim_{n_j \to \infty} \lambda_{n_j})(kh)^1_\infty.$$

Assim, se qualquer uma das combinações de hipóteses $(m)_i$, $(n)_j$ for satisfeita, obteremos

$$\lim_{n_j \to \infty} H^1_{\lambda_{n_j}}(t_{n_j}) > \lambda_{1,B_R(x_0)}(M^+, m).$$

(ii) $t_{n_j} \xrightarrow{n_j \to \infty} 0$.

Então, segue que

$$\lim_{n_j \to \infty} H^1_{\lambda_{n_j}}(t_{n_j}) = f^1_0 + (\lim_{n_j \to \infty} \lambda_{n_j})(kh)^1_0.$$

Logo, novamente pelas hipóteses temos,

$$\lim_{n_j \to \infty} H^1_{\lambda_{n_j}}(t_{n_j}) > \lambda_{1,B_R(x_0)}(M^+, m).$$

(iii) $t_{n_j} \xrightarrow{n_j \to \infty} t_0$, onde $0 < t_0 < \infty$.

Neste caso, a mesma conclusão é imediata, já que $\lambda_{n_j} \xrightarrow{n_j \to \infty} +\infty$ e

$$\lim_{n_j \to \infty} H^1_{\lambda_{n_j}}(t_{n_j}) = \frac{f_1(t_0)}{t_0^{p-1}} + (\lim_{n_j \to \infty} \lambda_{n_j})\frac{g_1(t_0)h_1(t_0)}{t_0^{p-1}},$$

consequentemente,

$$\lim_{n_j \to \infty} H^1_{\lambda_{n_j}}(t_{n_j}) > \lambda_{1,B_R(x_0)}(M, m).$$

Portanto, nos três casos, temos

$$\lim_{n_j \to \infty} H^1_{\lambda_{n_j}}(t_{n_j}) = \lim_{\lambda_{n_j} \to \infty} H^1_{\lambda_{n_j}}(t_{n_j}) > \lambda_{1,B_R(x_0)}(M^+, m). \tag{3.2}$$

Concluindo assim, por (3.1) e (3.2), que

$$\lim_{\lambda_{n_j} \to \infty} H^1_{\lambda_{n_j}}(t) > \lambda_{1,B_R(x_0)}(M^+, m), \quad \forall t > 0.$$

2) Se H^1_λ assume mínimo t_λ para uma quantidade finita de λ_n's, então existe $n_0 > 0$ tal que $H^1_{\lambda_n}$ não assume mínimo para $n > n_0$.

Neste caso, temos que

Afirmação 3.1.1. *$H^1_{\lambda_n}(t) \geqslant f^1_\infty + \lambda_n (gh)^1_\infty$, $\forall t > 0$ e $n > n_0$.*

De fato, tome $n_1 > n_0$ arbitrário e considere $H^1_{\lambda_{n_1}}(t)$ para $t \in \left[\frac{1}{j}, j\right]$. Assim, como estamos trabalhando em um conjunto compacto, $H^1_{\lambda_{n_1}}(t)$ assume mínimo nesse conjunto, ou seja, existe $t_j \in \left[\frac{1}{j}, j\right]$ tal que

$$H^1_{\lambda_{n_1}}(t_j) \leqslant H^1_{\lambda_{n_1}}(t), \quad \forall t \in \left[\frac{1}{j}, j\right]. \tag{3.3}$$

Observe que, fazendo $j \to \infty$, temos que $t_j \to \infty$, pois caso contrário, se $t_j \xrightarrow{j\to\infty} t_0^{n_1}$, com $t_0^{n_1} \in [0, \infty)$, então por (3.3) teríamos

$$H^1_{\lambda_{n_1}}(t_0) \leqslant H^1_{\lambda_{n_1}}(t), \quad \forall t \in (0, \infty),$$

ou seja, $H^1_{\lambda_{n_1}}$ possuiria um mínimo global.

Portanto, fazendo $j \to \infty$ em (3.3), chegamos que

$$H^1_{\lambda_{n_1}}(t) \geqslant f^1_\infty + \lambda_{n_1}(gh)^1_\infty, \quad \forall t \in (0, \infty),$$

concluindo assim a prova da afirmação 3.1.1.

Então, temos que

$$\lim_{n\to\infty} H^1_{\lambda_n}(t) \geqslant f^1_\infty + (\lim_{n_j\to\infty} \lambda_{n_j})(gh)^1_\infty \quad t > 0. \tag{3.4}$$

Consequentemente, por (3.4) e pelas hipóteses $(m)_i$, $(n)_j$ satisfeita, segue

$$\lim_{\lambda_n\to+\infty} H^1_{\lambda_n}(t) > \lambda_{1,B_R(x_0)}(M^+, m) \quad \forall t > 0.$$

Observe que em ambas as situações, existe $\lambda^* > 0$ suficientemente grande tal que

$$H^1_\lambda(t) > \lambda_{1,B_R(x_0)}(M^+, m), \quad \forall t > 0, \ \text{ e } \ \lambda > \lambda^*.$$

Analogamente, mostra-se que existe $\mu^* > 0$ tal que

$$H^2_\mu(t) > \lambda_{1,B_R(x_0)}(M^+, m), \quad \forall t > 0, \ \text{ e } \ \mu > \mu^*.$$

Suponha, por contradição, que o sistema $(Q_{\lambda,\mu})$ tenha solução não-negativa (u, v) com $\lambda = \lambda_0 > \lambda^*$ e $\mu = \mu_0 > \mu^*$.

Note que, considerando $\alpha = \min\{H^1_{\lambda_0}(u), H^2_{\mu_0}(v)\}$ obtemos que

$$\alpha > \lambda_{1,B_R(x_0)}(M^+, m). \tag{3.5}$$

Por outro lado, relembrando que $M(x) = \max\{m_1(x), m_2(x)\}$ e $m(x) = \min\{a(x), b(x), c(x), d(x)\}$ temos que

Afirmação 3.1.2. *Dada* $\varphi \in C_0^\infty(B_R(x_0))$, $\varphi \geqslant 0$,

$$\int_{B_R(x_0)} |\nabla U|^{p-2}\nabla U \nabla\varphi + \int_{B_R(x_0)} M^+(x)U^{p-1}\varphi \geqslant \int_{B_R(x_0)} \alpha m(x)U^{p-1}\varphi,$$

onde $U = \min\{u, v\}$.

De fato, seja

$$\Omega_1 = \{x \in B_R(x_0); u < v\}, \qquad \Omega_2 = \{x \in B_R(x_0); u \geq v\}.$$

Assim, dada $\varphi \in C_0^\infty(B_R(x_0))$, $\varphi \geqslant 0$

$$\begin{aligned} I &= \int_{B_R(x_0)} |\nabla U|^{p-2}\nabla U \nabla\varphi + \int_{B_R(x_0)} M^+(x)U^{p-1}\varphi \\ &\geq \underbrace{\int_{\Omega_1} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi + \int_{\Omega_1} m_1(x)u^{p-1}\varphi}_{I_1} + \underbrace{\int_{\Omega_2} |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla\varphi + \int_{\Omega_2} m_2(x)v^{p-1}\varphi}_{I_2} \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Defina $\rho_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como sendo $\rho_n \in C^1(\mathbb{R})$,

$$\rho_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad t \geq \dfrac{1}{n} \\ 1, & \text{se} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

e $\rho_n^{'} < 0$ sobre $\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$.

Para cada $x \in \mathbb{R}^N$, defina

$$q_n(x) = \rho_n((u-v)(x)) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad u \geq v + \dfrac{1}{n}, \\ 1, & \text{se} \quad u \leq v \end{cases}$$

e $\rho_n^{'}(u-v) < 0$ sobre $v \leqslant u < v + \dfrac{1}{n}$.

Observe que, $q_n \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$,

$$q_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \in \Omega_2, \\ 1, & \text{se} \quad x \in \Omega_1, \end{cases}$$

$\|q_n\|_\infty \leqslant 1$ e $\nabla q_n(x) = \rho_n^{'}((u-v)(x))\nabla(u-v)$.

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que,

$$I_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{B_R(x_0)} q_n(|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi + m_1(x)u^{p-1}\varphi),$$
$$I_2 = \lim_{n\to\infty} \int_{B_R(x_0)} (1-q_n)(|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla\varphi + m_2(x)v^{p-1}\varphi).$$

De $\nabla(q_n\varphi) = q_n\nabla\varphi + \varphi\nabla q_n$ segue que

$$\begin{aligned}\int_{B_R(x_0)} q_n|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi + \int_{B_R(x_0)} m_1(x)u^{p-1}(q_n\varphi) = \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(q_n\varphi) - \\ - \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\varphi\nabla q_n + \int_{B_R(x_0)} m_1(x)u^{p-1}(q_n\varphi) = \\ = \int_{B_R(x_0)} (a(x)f_1(u) + \lambda_0 b(x)g_1(u)h_1(v)(q_n\varphi) - \\ - \int_{\Omega_n} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\varphi\nabla q_n,\end{aligned} \tag{3.6}$$

onde $\Omega_n\{x \in B_R(x_0), v(x) \leqslant u(x) < v(x) + \dfrac{1}{n}\}$.

Analogamente, chegamos que

$$\begin{aligned}&\int_{B_R(x_0)} (1-q_n)|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\varphi + \int_{B_R(x_0)} m_2(x)v^{p-1}(1-q_n)\varphi = \\ &= \int_{B_R(x_0)} (c(x)f_2(v) + \mu_0 d(x)g_2(v)h_2(u))(1-q_n)\varphi + \int_{\Omega_n} |\nabla v|^{p-2}\nabla v\varphi\nabla q_n.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Assim, sendo

$$I_n = \int_{B_R(x_0)} q_n(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi + m_1(x)u^{p-1}\varphi),$$

$$J_n = \int_{B_R(x_0)} (1-q_n)(|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\varphi + m_2(x)v^{p-1}\varphi)$$

e somando (3.6) e (3.7), temos

$$\begin{aligned}I_n + J_n \;=\; &\int_{B_R(x_0)} (a(x)f_1(u) + \lambda_0 b(x)g_1(u)h_1(v))(q_n\varphi) + \\ &+ \int_{B_R(x_0)} (c(x)f_2(v) + \mu_0 d(x)g_2(v)h_2(u))(1-q_n)\varphi - \\ &- \int_{\Omega_n} \rho'(u-v)(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\nabla(u-v)\varphi.\end{aligned}$$

Então, como $\rho'(u-v) < 0$ e $(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\nabla(u-v) \geqslant 0$ obtemos,

$$\begin{aligned}I_n + J_n \;\geqslant\; &\int_{B_R(x_0)} (a(x)f_1(u) + \lambda_0 b(x)g_1(u)h_1(v))(q_n\varphi) + \\ &\int_{B_R(x_0)} (c(x)f_2(v) + \mu_0 d(x)g_2(v)h_2(u))(1-q_n)\varphi.\end{aligned}$$

Passando ao limite com $n \to \infty$, temos pela monotonicidade das funções h_i, $i = 1, 2$, que

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 &\geqslant \int_{\Omega_1} (a(x)f_1(u) + \lambda_0 b(x)g_1(u)h_1(v))\varphi + \int_{\Omega_2} (c(x)f_2(v) + \mu_0 d(x)g_2(v)h_2(u))\varphi \\
&\geqslant \int_{\Omega_1} m(x)(f_1(u) + \lambda_0 g_1(u)h_1(u))\varphi + \int_{\Omega_2} m(x)(f_2(v) + \mu_0 g_2(v)h_2(v))\varphi \\
&= \int_{\Omega_1} m(x)H^1_{\lambda_0}(u)u^{p-1}\varphi + \int_{\Omega_2} m(x)H^2_{\mu_0}(v)v^{p-1}\varphi \geqslant \int_{\Omega_1} \alpha m(x)U^{p-1}\varphi + \\
&+ \int_{\Omega_2} \alpha m(x)U^{p-1}\varphi = \int_{B_R(x_0)} \alpha m(x)U^{p-1}\varphi,
\end{aligned}$$

concluindo a prova da afirmação. Logo, pelo Lema 1.5, $\alpha \leqslant \lambda_{1,B_R(x_0)}(M^+, m)$, contradizendo (3.5).

Portanto, não existe solução não-negativa para o sistema $(Q_{\lambda,\mu})$ quando $(\lambda, \mu) > (\lambda^*, \mu^*)$.

■

3.2 Existência de solução limitada que se anula no infinito

Agora abordaremos a existência de solução positiva para o sistema $(Q_{\lambda,\mu})$, com $1 < p, q < N$ e $m_1, m_2, a, b, c, d : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$ não indenticamente nulas.

Denotaremos por w_1 e w_2 as soluções dos problemas,

$$(P_{M_1}) \begin{cases} -\Delta_p w + m_1(x)w^{p-1} = M_1(x), & \mathbb{R}^N, \\ w > 0, \quad \mathbb{R}^N; & w(x) \xrightarrow{|x| \to \infty} 0, \end{cases}$$

e

$$(Q_{M_2}) \begin{cases} -\Delta_q w + m_2(x)w^{q-1} = M_2(x), & \mathbb{R}^N, \\ w > 0, \quad \mathbb{R}^N; & w(x) \xrightarrow{|x| \to \infty} 0, \end{cases}$$

respectivamente, onde $M_1(x) = \max\{a(x), b(x)\}$ e $M_2(x) = \max\{c(x), d(x)\}$, $x \in \mathbb{R}^N$.

Para demonstrarmos os resultados desta seção considere as seguintes hipóteses,

(M) Os problemas (P_{M_1}) e (Q_{M_2}) têm soluções em $C^1(\mathbb{R}^N)$,

(M′) $m_1, m_2, a, b, c, d \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$,

(F) $f_0^1 > \lambda_1(m_1, a)$ e $f_0^2 > \lambda_1(m_2, c)$,

e ainda uma das seguintes condições,

(F)$_0$ $f_0^1 < \|w_1\|_\infty^{1-p}$, $f_0^2 < \|w_2\|_\infty^{1-q}$,

(F)$_\infty$ $f_\infty^1 < \|w_1\|_\infty^{1-p}$, $f_\infty^2 < \|w_2\|_\infty^{1-q}$.

Observação 3.1.3. *Assumindo a hipótese (M') temos a afirmação (AV_2) (ver Capítulo 1, Seção 1.2), referente ao primeiro autovalor satisfeita.*

Observação 3.1.4. *Note que, podemos supor que* **(F)** *e* **(F)$_0$** *sejam válidas simultaneamente se tivermos $\lambda_1(m_1, a) < \|w_1\|_\infty^{1-p}$ e $\lambda_1(m_2, c) < \|w_2\|_\infty^{1-q}$. Caso contrário, admita* **(F)** *e* **(F)$_\infty$**.

Assim, temos o resultado,

Teorema 3.2. *Assuma (M), (M'), (F) e suponha que $(F)_0$ ou $(F)_\infty$ seja satisfeita. Então, existem $\lambda^*, \mu^* > 0$ e $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu}) \in C^1(\mathbb{R}^N)^2$ solução de $(Q_{\lambda,\mu})$ desde que $(0,0) < (\lambda, \mu) < (\lambda^*, \mu^*)$. Além disso, temos as seguintes estimativas para λ^* e μ^*:*

- $\lambda^* = \dfrac{1}{(gh)_0^1}\left[\|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{1-p} - f_0^1\right]$ *e* $\mu^* = \dfrac{1}{(gh)_0^2}\left[\|w_2\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{1-q} - f_0^2\right]$, *se $(F)_0$ vale.*
- $\lambda^* = \dfrac{1}{(gh)_\infty^1}\left[\|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{1-p} - f_\infty^1\right]$ *e* $\mu^* = \dfrac{1}{(gh)_\infty^2}\left[\|w_2\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{1-q} - f_\infty^2\right]$, *se $(F)_\infty$ vale.*

E, em particular se em $(F)_0$, $(gh)_0^1 = (gh)_0^2 = 0$, ou em $(F)_\infty$, $(gh)_\infty^1 = (gh)_\infty^2 = 0$ então $\lambda^* = \mu^* = \infty$, ou seja, o problema $(Q_{\lambda,\mu})$ tem solução para todo $(\lambda, \mu) > (0,0)$.

Observação 3.2.1. *Exemplo de funções que satisfazem o problema $(Q_{\lambda,\mu})$ e as hipóteses do teorema 3.2:*

$$f_i(s) = s^{-\alpha_i}, \quad g_i(s) = s^{-\delta}, \quad h_i(s) = s^{\beta},$$

com $-(p-1) < \alpha_1 < \infty$, $-(q-1) < \alpha_2 < \infty$, $\delta, \beta > 0$ e $i = 1, 2$. Neste caso, temos (F) e $(F)_\infty$ sendo satisfeitas.

Demonstração. Para cada $\tau > 0$, defina

$$F_\tau^1(s) = \begin{cases} f_1(s), & 0 < s \le \tau, \\ \dfrac{f_1(\tau)}{\tau^{p-1}} s^{p-1}, & s \ge \tau, \end{cases} \qquad F_\tau^2(s) = \begin{cases} f_2(s), & 0 < s \le \tau, \\ \dfrac{f_2(\tau)}{\tau^{q-1}} s^{q-1}, & s \ge \tau, \end{cases}$$

$$\zeta^1_\tau(s)=\begin{cases} g_1(s)h_1(\tau), & 0<s\le\tau,\\ \dfrac{g_1(\tau)h_1(\tau)}{\tau^{p-1}}s^{p-1}, & s\ge\tau,\end{cases}\qquad \zeta^2_\tau(s)=\begin{cases} g_2(s)h_2(\tau), & 0<s\le\tau,\\ \dfrac{g_2(\tau)h_2(\tau)}{\tau^{q-1}}s^{q-1}, & s\ge\tau.\end{cases}$$

Para cada $s,\tau>0$, considere

$$\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s)=s^{p-1}\widehat{F}^1_\tau(s)+\lambda s^{p-1}\widehat{\zeta}^1_\tau(s);\quad \lambda\ge 0, \tag{3.8}$$

$$\Gamma^2_{\mu,\tau}(s)=s^{q-1}\widehat{F}^2_\tau(s)+\mu s^{q-1}\widehat{\zeta}^2_\tau(s);\quad \mu\ge 0,$$

sendo $\widehat{F}^1_\tau(s)=\sup\limits_{t>s}\dfrac{F^1_\tau(t)}{t^{p-1}}$, $\widehat{F}^2_\tau(s)=\sup\limits_{t>s}\dfrac{F^2_\tau(t)}{t^{q-1}}$, $\widehat{\zeta}^1_\tau(s)=\sup\limits_{t>s}\dfrac{\zeta^1_\tau(t)}{t^{p-1}}$ e $\widehat{\zeta}^1_\tau(s)=\sup\limits_{t>s}\dfrac{\zeta^1_\tau(t)}{t^{p-1}}$.

Veremos agora algumas propriedades das funções $\Gamma^1_{\lambda,\tau}$ e $\Gamma^2_{\mu,\tau}$, usando suas definições. Ressaltamos que as afirmações que se seguem estão demonstradas no Apêndice D.

Afirmação 3.2.1. *1.* $\dfrac{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s)}{s^{p-1}}$, $\dfrac{\Gamma^2_{\mu,\tau}(s)}{s^{q-1}}$ *são não-crescentes em* $s>0$.

2. Se $0<s\le\tau$ *então* $\begin{cases}\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s)\ge f_1(s)+\lambda g_1(s)h_1(\tau),\\ \Gamma^2_{\mu,\tau}(s)\ge f_2(s)+\mu g_2(s)h_2(\tau).\end{cases}$

3. *(a)* $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s)}{s^{p-1}}=\sup\limits_{0<t\le\tau}\dfrac{f_1(t)}{t^{p-1}}+\lambda\sup\limits_{0<t\le\tau}\dfrac{g_1(t)h_1(\tau)}{t^{p-1}}$,

(b) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\Gamma^2_{\mu,\tau}(s)}{s^{q-1}}=\sup\limits_{0<t\le\tau}\dfrac{f_2(t)}{t^{q-1}}+\mu\sup\limits_{0<t\le\tau}\dfrac{g_2(t)h_2(\tau)}{t^{q-1}}$.

4. *(a)* $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s)}{s^{p-1}}=\dfrac{f_1(\tau)}{\tau^{p-1}}+\lambda\dfrac{g_1(\tau)h_1(\tau)}{\tau^{p-1}}$,

(b) $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\Gamma^2_{\mu,\tau}(s)}{s^{q-1}}=\dfrac{f_2(\tau)}{\tau^{q-1}}+\mu\dfrac{g_2(\tau)h_2(\tau)}{\tau^{q-1}}$.

Considere

$$J^1_{\lambda,\tau}(s)=\frac{s^2}{\displaystyle\int_0^s\frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt},\qquad J^2_{\mu,\tau}(s)=\frac{s^2}{\displaystyle\int_0^s\frac{t}{\Gamma^1_{\mu,\tau}(t)^{\frac{1}{q-1}}}dt}. \tag{3.9}$$

Assim, usando a hipótese (M') e a Afirmação 3.2.1, temos

Afirmação 3.2.2. *1.* $J^1_{\lambda,\tau},J^2_{\mu,\tau}\in C^1((0,\infty))$.

2. $J^1_{\lambda,\tau}(s)\ge\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s)^{\frac{1}{p-1}}$, $J^2_{\mu,\tau}(s)\ge\Gamma^2_{\mu,\tau}(s)^{\frac{1}{q-1}}$, $s>0$.

3. $\dfrac{J^1_{\lambda,\tau}(s)}{s}$, $\dfrac{J^2_{\mu,\tau}(s)}{s}$ *são não-crescentes em* $s>0$.

4. (a) $\displaystyle\lim_{s\to 0}\frac{J^1_{\lambda,\tau}(s)}{s} = \left[\sup_{0<t\leq\tau}\frac{f_1(t)}{t^{p-1}} + \lambda\sup_{0<t\leq\tau}\frac{g_1(t)h_1(\tau)}{t^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p-1}}$,

(b) $\displaystyle\lim_{s\to 0}\frac{J^2_{\mu,\tau}(s)}{s} = \left[\sup_{0<t\leq\tau}\frac{f_2(t)}{t^{q-1}} + \mu\sup_{0<t\leq\tau}\frac{g_2(t)h_2(\tau)}{t^{q-1}}\right]^{\frac{1}{q-1}}$.

5. (a) $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\frac{J^1_{\lambda,\tau}(s)}{s} = \left[\frac{f_1(\tau)}{\tau^{p-1}} + \lambda\frac{g_1(\tau)h_1(\tau)}{\tau^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p-1}}$,

(b) $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\frac{J^2_{\mu,\tau}(s)}{s} = \left[\frac{f_2(\tau)}{\tau^{q-1}} + \mu\frac{g_2(\tau)h_2(\tau)}{\tau^{q-1}}\right]^{\frac{1}{q-1}}$.

Defina agora,

$$H^1_\lambda(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{t}{J^1_{\lambda,\tau}(t)}dt, \qquad H^2_\mu(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{t}{J^2_{\mu,\tau}(t)}dt.$$

Pelo comportamento das funções $J^1_{\lambda,\tau}$ e $J^2_{\mu,\tau}$ obtemos,

Afirmação 3.2.3. *1. (a)* $\displaystyle\lim_{\tau\to\infty} H^1_\lambda(\tau) = \frac{1}{[f^1_\infty + \lambda(gh)^1_\infty]^{\frac{1}{p-1}}}$, *para cada* $\lambda > 0$,

(b) $\displaystyle\lim_{\tau\to\infty} H^2_\mu(\tau) = \frac{1}{[f^2_\infty + \mu(gh)^2_\infty]^{\frac{1}{q-1}}}$, *para cada* $\mu > 0$.

2. (a) $\displaystyle\lim_{\tau\to 0} H^1_\lambda(\tau) = \frac{1}{[f^1_0 + \lambda(gh)^1_0]^{\frac{1}{p-1}}}$, *para cada* $\lambda > 0$,

(b) $\displaystyle\lim_{\tau\to 0} H^2_\mu(\tau) = \frac{1}{[f^2_0 + \mu(gh)^2_0]^{\frac{1}{q-1}}}$, *para cada* $\mu > 0$.

3. (a) H^1_λ *é decrescente em* $\lambda \geqslant 0$,

(b) H^2_μ *é decrescente em* $\mu \geqslant 0$.

4. (a) $H^1_\lambda(\tau) \overset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} H^1_0(\tau)$, *para cada* $\tau > 0$,

(b) $H^2_\mu(\tau) \overset{\mu\to 0}{\longrightarrow} H^2_0(\tau)$, *para cada* $\tau > 0$.

Dados $\lambda, \mu > 0$ defina

$$A_{\lambda,\mu} = \{\tau \in (0,\infty) / H^1_\lambda(\tau) > \|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N} \text{ e } H^2_\mu(\tau) > \|w_2\|_{\infty,\mathbb{R}^N}\}.$$

Agora, vamos mostrar que para $\lambda, \mu > 0$ suficientemente pequenos $A_{\lambda,\mu} \neq \emptyset$. Para isso, analisaremos quando $(F)_0$ ou $(F)_\infty$ for satisfeita, divindo em casos onde examinaremos as variações do comportamento dos limites $(gh)^i_0$, $(gh)^i_\infty$, $i = 1, 2$. Observe que, ao considerarmos a hipótese $(F)_0$ estaremos interessados em $(gh)^i_0$, e respectivamente se $(F)_\infty$ for assumida, trabalharemos com $(gh)^i_\infty$.

Primeiramente, suponha $(F)_0$.

<u>**Caso 1:**</u> $0 \leqslant (gh)_0^i < \infty$, $i = 1, 2$.

Sejam $\lambda^* = 1/(gh)_0^1(\|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{1-p} - f_0^1)$ e $\mu^* = 1/(gh)_0^2(\|w_2\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{1-q} - f_0^2)$. Assim, dados $(0,0) < (\lambda, \mu) < (\lambda^*, \mu^*)$, observe que de Af.3.2.3.2 segue,

$$\lim_{\tau \to 0} H_\lambda^1(\tau) = \frac{1}{[f_0^1 + \lambda (gh)_0^1]^{\frac{1}{p-1}}} > \|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N} \quad \text{e} \quad \lim_{\tau \to 0} H_\mu^2(\tau) > \|w_2\|_{\infty,\mathbb{R}^N}.$$

Consequentemente existem $\tau_1, \tau_2 > 0$ suficientemente pequenos tais que

$$H_\lambda^1(\tau) > \|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N} \qquad \forall 0 < \tau < \tau_1$$

$$H_\mu^1(\tau) > \|w_2\|_{\infty,\mathbb{R}^N} \qquad \forall 0 < \tau < \tau_2.$$

Logo, tomando $\overline{\tau} = \min\{\tau_1, \tau_2\}$, temos que,

$$H_\lambda^1(\tau) > \|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N} \qquad H_\mu^1(\tau) > \|w_2\|_{\infty,\mathbb{R}^N}, \quad \forall 0 < \tau < \overline{\tau},$$

ou seja, $A_{\lambda,\mu} \neq \emptyset$, para $(0,0) \leqslant (\lambda, \mu) < (\lambda^*, \mu^*)$.

<u>**Caso 2:**</u> $(gh)_0^i = \infty$, $i = 1, 2$.

Note que, $A_{0,0} \neq \emptyset$, pois de Af.3.2.3.2,

$$\lim_{\tau \to 0} H_0^1(\tau) = \frac{1}{(f_0^1)^{\frac{1}{p-1}}} > \|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N} \quad \text{e} \quad \lim_{\tau \to 0} H_0^2(\tau) = \frac{1}{(f_0^2)^{\frac{1}{q-1}}} > \|w_2\|_{\infty,\mathbb{R}^N}.$$

Assim, tomando $\tau_\infty \in A_{0,0}$ como $\lim_{\lambda \to 0} H_\lambda^1(\tau_\infty) = H_0^1(\tau_\infty)$ e $\lim_{\mu \to 0} H_\mu^2(\tau_\infty) = H_0^2(\tau_\infty)$, da Af.3.2.3.4, então existem $\lambda^*, \mu^* > 0$ tais que

$$H_{\lambda^*}^1(\tau_\infty) > \|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N} \quad \text{e} \quad H_{\mu^*}^2(\tau_\infty) > \|w_2\|_{\infty,\mathbb{R}^N}.$$

Consequentemente, $A_{\lambda^*,\mu^*} \neq \emptyset$.

Logo, como H_λ^1 e H_μ^2 são decrescentes em relação a $\lambda \geqslant 0$ e $\mu \geqslant 0$, respectivamente, segue que $A_{\lambda,\mu} \neq \emptyset$, para $(0,0) \leqslant (\lambda, \mu) < (\lambda^*, \mu^*)$.

<u>**Caso 3:**</u> $0 \leqslant (gh)_0^1 < \infty$ e $(gh)_0^2 = \infty$. (Para o caso em que $0 \leqslant (gh)_0^2 < \infty$ e $(gh)_0^1 = \infty$, a análise é semelhante.)

Seja $\lambda^* = 1/(gh)_0^1(\|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{1-p} - f_0^1)$. Então, dado $0 \leqslant \lambda < \lambda^*$ temos que

$$\lim_{\tau \to 0} H_\lambda^1(\tau) = \frac{1}{[f_0^1 + \lambda (gh)_0^1]^{\frac{1}{p-1}}} > \|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N},$$

donde existe $\tau_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que $H_\lambda^1(\tau) > \|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N}$, para todo $0 < \tau < \tau_1$.

Observe que, $\lim_{\mu \to 0} H_\mu^2(\tau) = H_0^2(\tau) > \|w_2\|_{\infty,\mathbb{R}^N}$, para cada $\tau > 0$. Logo, existe $\mu^* > 0$ tal que $H_{\mu^*}^2(\tau) > \|w_2\|_{\infty,\mathbb{R}^N}$ para algum $\tau_\infty \in (0, \tau_1)$, donde $H_\mu^2(\tau_\infty) > \|w_2\|_{\infty,\mathbb{R}^N}$ para $0 \leqslant \mu < \mu^*$. Portanto, $A_{\lambda,\mu} \neq \emptyset$, para $(0,0) < (\lambda, \mu) < (\lambda^*, \mu^*)$.

Se supormos que $(F)_\infty$ seja satisfeita, devemos proceder de forma análoga ao que foi feito nos três casos anteriores, por sua vez, trabalhando com τ suficientemente grande.

Assim, dados $(0,0) \leqslant (\lambda,\mu) < (\lambda^*,\mu^*)$, defina

$$P^1_\lambda(s) = \frac{1}{\overline{\tau}}\int_0^s \frac{t}{J^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)}dt, \qquad P^2_{\mu,}(s) = \frac{1}{\overline{\tau}}\int_0^s \frac{t}{J^2_{\mu,\overline{\tau}}(t)}dt, s>0, \tag{3.10}$$

para algum $\overline{\tau} \in A_{\lambda,\mu}$.

Observe que,

$$P^1_\lambda(\overline{\tau}) = H^1_\lambda(\overline{\tau}) > \|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N} \qquad P^2_\mu(\overline{\tau}) = H^2_\mu(\overline{\tau}) > \|w_2\|_{\infty,\mathbb{R}^N}. \tag{3.11}$$

Afirmação 3.2.4. *1. P^1_λ; P^2_μ são não-crescentes em λ e μ, respectivamente.*

2. $[0,\|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N}] \subset Im(P^1_\lambda)$; $\quad [0,\|w_2\|_{\infty,\mathbb{R}^N}] \subset Im(P^2_\mu)$.

3. P^1_λ, $\quad P^2_\mu \in C^2((0,\infty))$ são não-decrescentes em $s>0$.

4. $(P^1_\lambda)^{-1} = \psi_1 \in C^2(Im(P^1_\lambda)\setminus\{0\},(0,\infty))$ é não-decrescente em $s>0$,
$(P^2_\mu)^{-1} = \psi_2 \in C^2(Im(P^2_\mu)\setminus\{0\},(0,\infty))$ é não-decrescente em $s>0$.

5. $\psi_1'(s) = \dfrac{\overline{\tau}J^1_{\lambda,\overline{\tau}}(\psi_1(s))}{\psi_1(s)} \qquad \psi_2'(s) = \dfrac{\overline{\tau}J^2_{\mu,\overline{\tau}}(\psi_2(s))}{\psi_2(s)}$.

6. $\psi_1''(s) \leq 0$, $\psi_2''(s) \leq 0$ para $s>0$.

Para cada $(0,0) \leqslant (\lambda,\mu) < (\lambda^*,\mu^*)$ defina

$$\overline{u}(x) := \psi_1(w_1(x)), \qquad \overline{v}(x) := \psi_2(w_2(x)), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

De $w_1, w_2 \in C^1(\overline{\mathbb{R}^N})$ e da Afirmação 3.2.4 (2) e (4), temos que $\overline{u},\overline{v} \in C^1(\mathbb{R}^N)$.

Note que,

$$w_1(x) \leqslant \|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N} < P^1_\lambda(\overline{\tau}).$$

Logo,

$$\overline{u}(x) = \psi_1(w_1(x)) < \psi_1(P^1_\lambda(\overline{\tau})) = \overline{\tau}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Analogamente, $\overline{v}(x) < \overline{\tau}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$.

Para mostrar que $(\overline{u},\overline{v})$ é uma supersolução de (P_2) precisaremos das seguintes desigualdades.

Afirmação 3.2.5. $w_1\psi_1'(w_1) \leq \psi_1(w_1)$, $\qquad w_2\psi_2'(w_2) \leq \psi_2(w_2)$, *$\forall x \in \mathbb{R}^N$.*

Além disso, dada $\phi,\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\phi,\psi \geq 0$, temos que

Afirmação 3.2.6. $(\psi_1'(w_1))^{p-1}\phi \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ $\quad e \quad$ $(\psi_2'(w_2))^{q-1}\phi \in W_0^{1,q}(\mathbb{R}^N)$.

Então, sabendo que $\nabla(\psi_1'(w_1)^{p-1}\phi) = (p-1)\psi_1'(w_1)^{p-2}\psi_1''(w_1)\nabla w_1\phi + [\psi_1'(w_1)]^{p-1}\nabla\phi$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}\nabla\phi + \int_{\mathbb{R}^N} m_1(x)\overline{u}^{p-1}\phi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} [\psi_1'(w_1)]^{p-1}|\nabla w_1|^{p-2}\nabla w_1\nabla\phi + \int_{\mathbb{R}^N} m_1(x)\psi_1(w_1)^{p-1}\phi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_1|^{p-2}\nabla w_1\nabla(\psi_1'(w_1)^{p-1}\phi) - \int_{\mathbb{R}^N} (p-1)\psi_1'(w_1)^{p-2}\psi_1''(w_1)|\nabla w_1|^p\phi +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^N} m_1(x)\psi_1(w_1)^{p-1}\phi.$$

Segue da afirmação 3.2.4 itens (4) e (6), que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\overline{u}|^{p-2}\nabla \quad \overline{u}\nabla\phi + \int_{\mathbb{R}^N} m_1(x)\overline{u}^{p-1}\phi \geq$$

$$\geqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_1|^{p-2}\nabla w_1\nabla(\psi_1'(w_1)^{p-1}\phi) + \int_{\mathbb{R}^N} m_1(x)w_1^{p-1}\psi_1'(w_1)^{p-1}\phi$$

Assim, usando que w_1 é solução do problema $(PA)_1$ e a definição de ψ_1', dada em 3.2.4 (5) obtemos,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}\nabla\phi + \int_{\mathbb{R}^N} m_1(x)\overline{u}^{p-1}\phi \geqslant \int_{\mathbb{R}^N} M_1(x)\psi_1'(w_1)^{p-1}\phi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} M_1(x)\left[\frac{\overline{\tau}J^1_{\lambda,\overline{\tau}}(\psi_1(w_1))}{\psi_1(w_1)}\right]^{p-1}\phi.$$

Logo, pela afirmação 3.2.2 (2), por $\underline{u} < \overline{\tau}$, $\mathbb{R}^N$ e afirmação 3.2.1 (2) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}\nabla\phi + \int_{\mathbb{R}^N} m_1(x)\overline{u}^{p-1}\phi \geqslant \int_{\mathbb{R}^N} M_1(x)\overline{\tau}^{p-1}\frac{\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(\psi_1(w_1))}{\psi_1(w_1)^{p-1}}\phi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} M_1(x)\overline{\tau}^{p-1}\frac{\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(\overline{u})}{\overline{u}^{p-1}}\phi > \int_{\mathbb{R}^N} M_1(x)\overline{\tau}^{p-1}\frac{\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(\overline{u})}{\overline{\tau}^{p-1}}\phi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} M_1(x)\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(\overline{u})\phi \geqslant \int_{\mathbb{R}^N} M_1(x)[f_1(\overline{u}) + \lambda g_1(\overline{u})h_1(\overline{\tau})]\phi.$$

Portanto da definição de M_1, $\overline{v} < \overline{\tau}$, $\mathbb{R}^N$ e monotonicidade de h_1, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}\nabla\phi + m_1(x)\overline{u}^{p-1}\phi \geqslant \int_{\mathbb{R}^N} [af_1(\overline{u}) + \lambda bg_1(\overline{u})h_1(\overline{v})]\phi, \quad \forall\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),\ \phi \geq 0.$$

De forma semelhante, mostra-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{v}|^{q-2}\nabla \overline{v}\nabla \phi + m_2(x)\overline{v}^{q-1}\phi \ \geqslant \ \int_{\mathbb{R}^N} [cf_2(\overline{v}) + \mu d g_2(\overline{v})h_2(\overline{u})]\phi, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),\ \phi \geq 0.$$

Além disso,

$$\overline{u}(x) = \psi_2(w_2(x)) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

e analogamente $\overline{v}(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \psi_1(0) = 0$

Portanto, $(\overline{u}, \overline{v})$ é supersolução de $(Q_{\lambda,\mu})$.

No que segue, vamos construir uma subsolução para $(Q_{\lambda,\mu})$ mostrando que os seguintes problemas têm soluções,

$$(P_a)\begin{cases} -\Delta_p u + m_1(x)u^{p-1} = a(x)f_1(u), & \mathbb{R}^N, \\ \\ 0 < u \leqslant \overline{u}, \quad \mathbb{R}^N; \quad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases}$$

$$(P_c)\begin{cases} -\Delta_q v + m_2(x)v^{q-1} = c(x)f_2(v), & \mathbb{R}^N, \\ \\ 0 < v \leqslant \overline{v}, \quad \mathbb{R}^N; \quad v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases}$$

onde $\overline{u}$ e $\overline{v}$ são as supersoluções de $(Q_{\lambda,\mu})$ encontradas anteriormente.

Nossa estratégia é usar o método de sub-supersolução para garantir a existência das funções $\underline{u}_R$ e $\underline{v}_R$, soluções dos problemas,

$$(P_{a,R})\begin{cases} -\Delta_p u + m_1(x)u^{p-1} = a(x)f_1(u), & B_R, \\ \\ u > 0, \quad B_R; \quad u(x) = 0, \partial B_R \end{cases}$$

$$(P_{c,R})\begin{cases} -\Delta_q v + m_2(x)v^{q-1} = c(x)f_2(v), & B_R, \\ \\ v > 0, \quad B_R; \quad v(x) = 0, \partial B_R. \end{cases}$$

E posteriormente, ao fazermos $R \to \infty$, teremos essas funções convergindo para as soluções de (P_a) e (P_c). Observe que, de $\lambda_1(m_1, a) = \lim_{R\to\infty} \lambda_{1,B_R}(m_1, a)$ e $f_0^1 > \lambda_1(m_1, a)$, segue que existe $R_1 > 0$ suficientemente grande tal que $\lambda_{1,B_{R_1}}(m_1, a) < f_0^1$. Ou seja, existe $\epsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\lambda_{1,B_{R_1}}(m_1, a) < \frac{f_1(s)}{s^{p-1}}, \quad \forall s \in (0, \epsilon_1).$$

Assim, como $\lambda_{1,B_{R_1}}(m_1, a) \geqslant \lambda_{1,B_R}(m_1, a)$, $\forall R \geqslant R_1$ temos

$$f_1(s) > \lambda_{1,B_R}(m_1, a)s^{p-1}, \quad \forall s \in (0, \epsilon_1) \ \text{ e } \ R \geqslant R_1.$$

Tome $C_R = C_R(B_R, \epsilon_1) > 0$ tal que $C_R\|\Phi_{1,R}\|_{\infty,B_R} < \min\{\epsilon_1, \overline{\tau}\}$, para $R \geqslant R_1$, sendo $\Phi_{1,R}$ a autofunção associada ao autovalor principal do problema (1.5) com $V = m_1$, $\rho = a$ e $\Omega = B_R$. Assim, dado $\phi \in C_0^\infty(B_R)$, $\phi \geqslant 0$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |\nabla(C_R\Phi_{1,R})|^{p-2}\nabla(C_R\Phi_{1,R})\nabla\phi \quad & +m_1(x)(C_R\Phi_{1,R})^{p-1}\phi dx = \\ &= \int_{B_R} \lambda_{1,B_R}(m_1, a)a(x)(C_R\Phi_{1,R})^{p-1}\phi dx, \\ &< \int_{B_R} a(x)f_1(C_R\Phi_{1,R})\phi dx.\end{aligned}$$

Então, $C_R\Phi_{1,R}$ é uma subsolução de $(P_{a,R})$ para $R \geqslant R_1$. Analogamente, existem $\epsilon_2, R_2 > 0$ e $D_R = D_R(B_R, \epsilon_2) > 0$ tal que $D_R\|\Phi_{2,R}\|_{\infty,B_R} < \min\{\epsilon_2, \overline{\tau}\}$, para $R \geqslant R_2$, sendo $\Phi_{2,R}$ a autofunção associada ao autovalor principal do problema (1.5) com $V = m_2$, $\rho = c$ e $\Omega = B_R$. Assim, analogamente mostra-se que $D_R\Phi_{2,R}$ é uma subsolução de $(P_{c,R})$ para $R \geqslant R_2$.

Além disso, $C_R\Phi_{1,R}$ satisfaz

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |\nabla(C_R\Phi_{1,R})|^{p-2}\nabla(C_R\Phi_{1,R})\nabla\phi \quad & +m_1(C_R\Phi_{1,R})^{p-1}\phi dx \leqslant \\ &\leqslant \int_{B_R} [af_1(C_R\Phi_{1,R}) + \lambda b g_1(C_R\Phi_{1,R})h_1(D_R\Phi_{2,R})]\phi \\ &= \int_{B_R} \left[a\frac{f_1(C_R\Phi_{1,R})}{\overline{\tau}^{p-1}}\tau^{p-1} + \lambda b\frac{g_1(C_R\Phi_{1,R})h_1(D_R\Phi_{2,R})}{\overline{\tau}^{p-1}}\overline{\tau}^{p-1}\right]\phi.\end{aligned}$$

Assim, de $C_R\Phi_{1,R}, D_R\Phi_{2,R} < \overline{\tau}$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |\nabla(C_R\Phi_{1,R})|^{p-2}\nabla(C_R\Phi_{1,R})\nabla\phi \quad & +m_1(C_R\Phi_{1,R})^{p-1}\phi dx \leqslant \\ &\leqslant \int_{B_R} \left[a\frac{f_1(C_R\Phi_{1,R})}{(C_R\Phi_{1,R})^{p-1}}\tau^{p-1} + \lambda b\frac{g_1(C_R\Phi_{1,R})h_1(\overline{\tau})}{(C_R\Phi_{1,R})^{p-1}}\overline{\tau}^{p-1}\right]\phi \\ &\leqslant \int_{B_R} \left[a\widehat{F}^1_\tau(C_R\Phi_{1,R})\overline{\tau}^{p-1} + \lambda b\widehat{\zeta}^1_\tau(C_R\Phi_{1,R})\overline{\tau}^{p-1}\right]\phi \\ &\leqslant \int_{B_R} \left[M_1(x)\overline{\tau}^{p-1}\frac{\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(C_R\Phi_{1,R})}{(C_R\Phi_{1,R})^{p-1}}\right]\phi.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_{B_R} |\nabla(C_R\Phi_{1,R})|^{p-2}\nabla(C_R\Phi_{1,R})\nabla\phi + m_1(C_R\Phi_{1,R})^{p-1}\phi dx \leqslant \int_{B_R} \left[M_1(x)\overline{\tau}^{p-1}\frac{\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(C_R\Phi_{1,R})}{(C_R\Phi_{1,R})^{p-1}}\right]\phi. \tag{3.12}$$

Agora, note que, pelo Lema 1.2 e a condição (M'), os seguintes problemas têm soluções,

$$(P_a^1)_R \begin{cases} -\Delta_p w + m_1(x)w^{p-1} = a(x), & B_R, \\ w > 0, \quad B_R; \quad w(x) = 0, & \partial B_R, \end{cases}$$

e

$$(Q_c^2)_R \begin{cases} -\Delta_q w + m_2(x)w^{q-1} = c(x), & B_R, \\ w > 0, \quad B_R; \quad w(x) = 0, & \partial B_R, \end{cases}$$

onde as funções envolvidas estão restritas a bola B_R. Denotemos por $w_{1,R}$ e $w_{2,R}$ as soluções dos problemas $(P_a^1)_R$ e $(Q_c^2)_R$, respectivamente.

Logo, estendendo essas funções como sendo zero fora da bola, mostra-se usando o Teorema A.1 que,

$$w_{1,R} \leqslant w_{1,R+1} \leqslant \ldots \leqslant w_1, \quad \mathbb{R}^N. \tag{3.13}$$

Assim, em decorrência de (3.13) obtemos

$$\|w_{1,R}\|_{\infty,B_R} \leqslant \|w_{1,R}\|_{\infty,\mathbb{R}^N} \leqslant \|w_1\|_{\infty,\mathbb{R}^N}. \tag{3.14}$$

Logo, para $(0,0) < (\lambda,\mu) < (\lambda^*,\mu^*)$, de (3.11) e (3.14) segue que P_λ^1 e P_μ^2 satisfazem

$$P_\lambda^1(\overline{\tau}) > \|w_{1,R}\|_{\infty,B_R}, \qquad P_\mu^2(\overline{\tau}) > \|w_{2,R}\|_{\infty,B_R},$$

para o mesmo $\overline{\tau}$ tomado anteriormente.

Assim, definindo

$$\overline{u}_R(x) = \psi_1(w_{1,R}(x)) \quad \text{e} \quad \overline{v}_R(x) = \psi_2(w_{2,R}(x)), \quad x \in B_R,$$

analogamente à análise feita anteriormente mostra-se que

$$\overline{u}_R(x) < \overline{\tau} \qquad \text{e} \qquad \overline{v}_R(x) < \overline{\tau}, \quad x \in B_R,$$

e satisfazem

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |\nabla \overline{u}_R|^{p-2}\nabla \overline{u}_R \nabla\phi + \int_{B_R} m_1(x)\overline{u}_R^{p-1}\phi &\geqslant \int_{B_R} a(x)\overline{\tau}^{p-1}\frac{\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(\overline{u}_R)}{\overline{u}_R^{p-1}}\phi \\ &\geqslant \int_{B_R} a(x)[f_1(\overline{u}_R) + \lambda g_1(\overline{u}_R)h_1(\overline{\tau})]\phi \\ &\geqslant \int_{B_R} a(x)f_1(\overline{u}_R)\phi, \end{aligned} \tag{3.15}$$

$\forall \phi \in C_0^\infty(B_R)$, $\phi \geqslant 0$. De forma semelhante, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |\nabla \overline{v}_R|^{q-2}\nabla \overline{v}_R \nabla \psi + \int_{B_R} m_2(x)\overline{v}_R^{q-1}\psi &\geqslant \int_{B_R} c(x)\overline{\tau}^{q-1}\frac{\Gamma^2_{\mu,\overline{\tau}}(\overline{v}_R)}{\overline{v}_R^{q-1}}\psi \\ &\geqslant \int_{B_R} c(x) f_2(\overline{v}_R)\psi,\end{aligned}$$

$\forall \psi \in C_0^\infty(B_R)$, $\psi \geqslant 0$.

Além disso, dado $x \in \partial B_R$, temos

$$\overline{u}_R(x) = \psi_1(w_{1,R}(x)) = \psi_1(0) = 0, \quad \text{e} \quad \overline{v}_R(x) = \psi_2(0) = 0, \quad x \in B_R.$$

Portanto, $\overline{u}_R$ e $\overline{v}_R$ são supersoluções dos problemas $(P_{a,R})$ e $(P_{c,R})$, respectivamente.

Agora, para compararmos as subsoluções com as supersoluções, observe primeiramente que a função $s \longmapsto M_1(x)\overline{\tau}^{p-1}\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(s)/s^{p-1} - m_1(x)s^{p-1}$ é não-crescente. Assim, de (3.12) e (3.15), temos pelo Princípio de Comparação de Tolksdorf, a saber Teorema A.3,

$$C_R\Phi_{1,R} \leq \overline{u}_R, \quad \overline{B}_R. \tag{3.16}$$

Da mesma forma, mostra-se que $D_R\Phi_{2,R} \leq \overline{v}_R, \quad \overline{B}_R$.

Observe que, definindo $\overline{F}_i : B_R \times [0,\infty) \times [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ por

$$\overline{F}_1(x,s,t) = a(x)f_1(s) + \lambda b(x)g_1(s)h_1(t),$$

$$\overline{F}_2(x,s,t) = c(x)f_2(t) + \mu d(x)g_2(t)h_2(s),$$

temos que, $\overline{F}_i(\cdot,s,t) \in L^\infty(B_R)$, $\forall (s,t) \in [a_1,a_2]\times[b_1,b_2]$, quaisquer que sejam $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$, com $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, já que as funções envolvidas são contínuas, e portanto limitadas em compactos. Além disso, como h_i, $i = 1,2$ são funções não-decrescentes, segue que $\overline{F}_1(x,s,t)$ e $\overline{F}_2(x,s,t)$ são não-decrescentes em $t > 0$ e em $s > 0$ respectivamente.

Logo, pelo Princípio de Sub-Supersolução 1.12, existem soluções $\underline{u}_R, \underline{v}_R \in C^1(B_R)$ de $(P_{a,R})$ e $(P_{c,R})$, respectivamente, tais que

$$C_R\Phi_{1,R} \leqslant \underline{u}_R \leqslant \overline{u}_R \quad \text{e} \quad D_R\Phi_{2,R} \leqslant \underline{v}_R \leqslant \overline{v}_R, \quad B_R, \quad \forall R \geqslant R_0,$$

com $R_0 = \max\{R_1, R_2\}$. Além disso, de (3.13) e da monotonicidade das funções ψ_1 e ψ_2 segue que

$$C_R\Phi_{1,R} \leqslant \underline{u}_R \leqslant \overline{u} \quad \text{e} \quad D_R\Phi_{2,R} \leqslant \underline{v}_R \leqslant \overline{v}, \quad \forall\ R \geqslant R_0.$$

Afirmação 3.2.7. *Existe $L_0 > 0$ tal que $(C\Phi_{1,L_0}, C\Phi_{2,L_0}) \leqslant (\underline{u}_R, \underline{v}_R)$, $x \in B_{L_0}$, $\forall R > L_0$, para alguma constante $C > 0$.*

De fato, novamente pela hipótese **(F)**, existem $L_1 > 0$ e $\delta_1 > 0$ tais que $\lambda_{1,B_{L_1}}(m_1, a) < f_1(s)/s^{p-1}$, para $s \in (0, \delta_1)$. Logo, pela monotonicidade do autovalor principal temos que

$$\lambda_{1,B_R}(m_1, a)s^{p-1} < f_1(s), \quad \forall s \in (0, \delta_1) \text{ e } R \geqslant L_1.$$

Analogamente, existem $L_2, \delta_2 > 0$ tais que

$$\lambda_{1,B_R}(m_2, c)s^{q-1} < f_2(s), \quad \forall s \in (0, \delta_2) \text{ e } R \geqslant L_2.$$

Assim, considerando $L_0 = \max\{L_1, L_2\}$ e $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, escolhemos $C > 0$ tal que

$$0 < C\|\Phi_{1,L_0}\|_{\infty,B_{L_0}}, C\|\Phi_{2,L_0}\|_{\infty,B_{L_0}} < \min\{\delta, \overline{\tau}\}.$$

E da mesma forma que mostramos (3.16), concluímos que

$$(0,0) < (C\Phi_{1,L_0}, C\Phi_{2,L_0}) \leqslant (\underline{u}_R, \underline{v}_R) \leqslant (\overline{u}, \overline{v}), \quad \forall x \in B_{L_0},\ R > L_0.$$

Pelo Teorema de regularidade de Tolksdorf, dada $B_{L_0-1} \subset\subset B_{L_0}$, existem $\alpha_{L_0-1} \in (0,1)$ e $C_{L_0-1} > 0$, ambos independentes de R, tais que

$$|\nabla \underline{u}_R(x)| \leq C_{L_0-1}$$

e

$$|\nabla \underline{u}_R(x) - \nabla \underline{u}_R(y)| \leqslant C_{L_0-1}|x-y|^{\alpha_{L_0-1}}, x, y \in B_{L_0-1},$$

e segue, da compacidade da imersão $C^{1,\alpha_{L_0-1}}(\overline{B}_{L_0-1}) \hookrightarrow C^1(\overline{B}_{L_0-1})$, que existe uma subsequência $\{\underline{u}_{R_{L_0-1}}\} \subseteq \{\underline{u}_R\}$ em $C^{1,\alpha_{L_0-1}}(B_{L_0-1})$ tal que $u_{R_{L_0-1}} \to \underline{u}^{L_0-1}$ em $C^1(B_{L_0-1})$, quando $R_{L_0-1} \to \infty$.

Observe que, para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(B_{L_0-1})$, temos

$$\int_{B_{L_0-1}} |\nabla \underline{u}_{R_{L_0-1}}|^{p-2}\underline{u}_{R_{L_0-1}}\varphi + m_1(x)\underline{u}_{R_{L_0-1}}^{p-1}\varphi dx = \int_{B_{L_0-1}} a(x)f_1(\underline{u}_{R_{L_0-1}})\varphi dx$$

e pelas convergências, quando $R_{L_0-1} \to \infty$,

$$\int_{B_{L_0-1}} |\nabla \underline{u}_{R_{L_0-1}}|^{p-2}\underline{u}_{R_{L_0-1}}\varphi dx \to \int_{B_{L_0-1}} |\nabla \underline{u}^{L_0-1}|^{p-2}\underline{u}^{L_0-1}\varphi dx,$$

$$\int_{B_{L_0-1}} m_1(x)\underline{u}_{R_{L_0-1}}^{p-1}\varphi dx \to \int_{B_{L_0-1}} m_1(x)(\underline{u}^{L_0-1})^{p-1}\varphi dx$$

e

$$\int_{B_{L_0-1}} a(x)f_1(\underline{u}_{R_{L_0-1}})\varphi dx \to \int_{B_{L_0-1}} a(x)f_1(\underline{u}^{L_0-1})\varphi dx$$

logo,

$$\int_{B_{L_0-1}} |\nabla \underline{u}^{L_0-1}|^{p-2}\underline{u}^{L_0-1}\varphi + m_1(x)(\underline{u}^{L_0-1})^{p-1}\varphi dx = \int_{B_{L_0-1}} a(x)f_1(\underline{u}^{L_0-1})\varphi dx,$$

$\forall\varphi \in C_0^\infty(B_{L_0-1})$. Repetindo este argumento para as bolas $B_{L_0+k} \subset\subset B_{L_0+k+1}$, $k \geqslant 1$ e $R > L_0 + k + 1$, obtemos uma subsequência $\{\underline{u}_{R_{L_0+k}}\} \subseteq \{\underline{u}_{R_{L_0+k-1}}\}$ em $C^{1,\alpha_{L_0+k}}(\overline{B}_{L_0+k})$ tal que $\underline{u}_{R_{L_0+k}} \to \underline{u}^{L_0+k}$ em $C^1(B_{L_0+k})$, quando $R_{L_0+k} \to \infty$ e

$$\int_{B_{L_0+k}} |\nabla \underline{u}^{L_0+k}|^{p-2}\underline{u}^{L_0+k} + m_1(x)(\underline{u}^{L_0+k})^{p-1}\varphi\varphi dx = \int_{B_{L_0+k}} a(x)f_1(\underline{u}^{L_0+k})\varphi dx,$$

$\forall\varphi \in C_0^\infty(B_{L_0+k})$. Isto é, para cada L_0 , $k \geqslant 1$ e $R > L_0 + k + 1$, obtemos

$$\begin{array}{ccccccc}
\underline{u}_{R_{L_0-1}} & \underline{u}_{(R+1)_{L_0-1}} & \underline{u}_{(R+2)_{L_0-1}} & \underline{u}_{(R+3)_{L_0-1}}\cdots & \to & \underline{u}^{L_0-1} & \text{em } C^1(\overline{B}_{L_0-1}) \\
\underline{u}_{R_{L_0}} & \underline{u}_{(R+1)_{L_0}} & \underline{u}_{(R+2)_{L_0}} & \underline{u}_{(R+3)_{L_0}}\cdots & \to & \underline{u}^{L_0} & \text{em } C^1(\overline{B}_{L_0}) \\
\underline{u}_{R_{L_0+1}} & \underline{u}_{(R+1)_{L_0+1}} & \underline{u}_{(R+2)_{L_0+1}} & \underline{u}_{(R+3)_{L_0+1}}\cdots & \to & \underline{u}^{L_0+1} & \text{em } C^1(\overline{B}_{L_0+1}) \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & \\
\underline{u}_{R_{L_0+k}} & \underline{u}_{(R+1)_{L_0+k}} & \underline{u}_{(R+2)_{L_0+k}} & \underline{u}_{(R+3)_{L_0+k}}\cdots & \to & \underline{u}^{L_0+k} & \text{em } C^1(\overline{B}_{L_0+k}) \\
\vdots & & & \vdots & & \ddots &
\end{array}$$

com

$$\{\underline{u}_{R_{L_0+k+1}}\} \subseteq \{u_{R_{L_0+k}}\} \text{ e } \underline{u}_{L_0+k+1}\big|_{B_{L_0+k}} = \underline{u}^{L_0+k}, \quad \text{para qualquer } k \geqslant 1.$$

Defina $u_k : \mathbb{R}^N \to (0,\infty)$ para cada $k \geqslant 1$, por

$$\underline{u}_k(x) = \underline{u}_{(R+k)_(L_0+k)}(x),\ x \in B_(L0+k) \ \text{ e } \ \underline{u}_k(x) = 0, x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{L_0+k},$$

e $\underline{u} : \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$ por

$$\underline{u}(x) = \lim_{k\to\infty} \underline{u}_k(x),\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Disto segue que $\underline{u} \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $0 < C\Phi_L(x) \leqslant \underline{u}(x) \leqslant \overline{u}(x)$, para $x \in B_L$, para cada $L > 0$, isto é, $\underline{u} > 0$ em $\mathbb{R}^N$, $\underline{u}(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$ e, para cada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\underline{u}|^{p-2}\underline{u}\varphi + m_1(x)\underline{u}^{p-1}dx = \int_{\mathbb{R}^N} a(x)f_1(\underline{u})\varphi dx. \tag{3.17}$$

De fato, dada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, existe $K > 0$ tal que $supp(\varphi) \subset B_K$. Daí, para qualquer $j \geqslant K$,

$$\int_{B_k} |\underline{u}_j|^{p-2}\underline{u}_j\varphi + m_1(x)\underline{u}_j^{p-1}dx = \int_{B_k} a(x)f_1(\underline{u}_j)\varphi dx.$$

Mostrando-se as convergências necessárias, temos que

$$\int_{B_k} |\underline{u}|^{p-2}\underline{u}\varphi + m_1(x)\underline{u}^{p-1}dx = \int_{B_k} a(x)f_1(\underline{u})\varphi dx.$$

donde se obtém (3.17).

Assim, mostra-se que $\underline{u}$ e $\underline{v}$ são soluções de (P_a) e (P_c), respectivamente, ou seja, $(\underline{u},\underline{v})$ é uma subsolução de (P_2) e,

$$(0,0) < (\underline{u},\underline{v}) \leqslant (\overline{u},\overline{v}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Portanto, pelo Teorema 1.10, existe $(u, v) \in (\underline{u}, \overline{u}) \times (\underline{v}, \overline{v})$ solução estritamente positiva de (P_2). Observe ainda que, do comportamento de $\overline{u}$ e $\overline{v}$ no infinito segue que,

$$u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{e} \quad v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\blacksquare$

Apêndice A

Resultados Auxiliares

Enunciaremos agora alguns lemas e teoremas que nos auxiliaram em provas de resultados apresentados na tese.

Para mostrarmos a positividade das soluções no Capítulo 2 trabalhamos com um anel apropriado apartir da fronteira, gerando novos problemas nos quais foram possíveis o uso de princípios de comparação e máximo, além de resultados de regularidade. Sendo o último usado em outros momentos na tese.

Antes de apresentá-los observem que os autores, Melián e Lis em [33] denotam o operador $L_p u = -\Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u$ e consideram que L_p satisfaz o Princípio de Comparação Fraco **se** $L_p u_1 \leqslant L_p u_2$ **em** Ω **e** $u_1 \leqslant u_2$ **sobre** $\partial\Omega$**, com** $u_i \in W^{1,p}(\Omega)$**,** $i = 1, 2$ **implicar que** $u_1 \leqslant u_2$ **em** Ω. E L_p satisfaz o Princípio do Máximo Forte, se toda solução fraca $u \in W^{1,p}(\Omega)$ de $L_p u = h(x)$, Ω, $u \geqslant 0$, $\partial\Omega$ com $h \geqslant 0$ não identicamente nula, verifica-se $u(x) > 0$, Ω.

Teorema A.1. *[33, p. 63] Uma condição necessária e suficiente para L_p, com $a \in L^\infty(\Omega)$, satisfazer o princípio de comparação fraco é que $a = a(x)$ seja não-negativo em Ω.*

Teorema A.2. *[33, p. 52] Assuma que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado regular e $a \in L^\infty(\Omega)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *L_p satisfaz o Princípio do Máximo Forte.*

2. *$\lambda_{1,\Omega}(a, 1) > 0$.*

Sendo que, $\lambda_{1,\Omega}(a, 1)$ é o primeiro autovalor de L_p, definido variacionalmente como

$$\lambda_{1,\Omega}(a,1) = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p + a|u|^p dx \;/\; u \in W_0^{1,p}(\Omega), \int_\Omega |u|^p dx = 1\right\},$$

o qual é positivo se a é uma função não-negativa.

Enunciaremos também o Princípio de Comparação de Tolksdorf, o qual pede monotonicidade na função.

Teorema A.3. *[55, Lema 3.1] Sejam Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função Caratheodory tal que $\dfrac{\partial f}{\partial s}(x,s)$ existe e é não-negativa para cada $s \in \mathbb{R}$, q.t.p. em Ω. Se $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ satisfaz*

$$-\Delta_p u + f(x,u) \leqslant -\Delta_q v + f(x,v), \qquad em\ \Omega,$$

$$u \leqslant v, \qquad em\ \partial\Omega,$$

então $u \leqslant v$ em Ω.

E também o Princípio de Comparação Forte de Damascelli,

Teorema A.4. *[18, Corolário 1.1] Suponha que $u, v \in C^1(\Omega)$ satisfaz*

$$-\Delta_p u \leqslant -\Delta_q v, \qquad u \leqslant v, \qquad em\ \ \Omega.$$

Defina $S = \{x \in \Omega / u(x) = v(x)\}$. Se S é discreto ou compacto em Ω, então S é vazio.

Considere o seguinte problema,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u,\nabla u), & \Omega, \\ u = \phi, & \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.1}$$

Lema A.5. *(Lieberman [45, Teorema 1]) Sejam $\alpha, \lambda, \Lambda, M_0$ constantes positivas, com $\alpha \leq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, conexo, limitado e regular, sejam k e Φ contantes não-negativas. Suponha que a função f, definida em $\overline{\Omega} \times [-M_0, M_0] \times \mathbb{R}^N$, satisfaça a seguinte condição,*

$$|f(x,z,\eta)| \leq \Lambda(1+|\eta|)^{m+2}, \quad \forall (x,z,\eta) \in \overline{\Omega} \times [-M_0, M_0] \times \mathbb{R}^N.$$

Assuma que, $\phi \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ com $\|\phi\|_{1,\alpha} \leq \Phi$ e u uma solução fraca do problema (A.1), com $\|u\|_\infty \leq M_0$. Então, existe $\beta = \beta(\alpha, \Lambda/\lambda, m, N) > 0$ tal que

(a) $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$,

(b) $\|u\|_{1,\beta} \leq C = C(\alpha, \Lambda/\lambda, m, M_0, N, \Phi, \Omega)$.

Para demonstrarmos os teoremas de sub-supersolução do primeiro capítulo foi preciso o seguinte resultado. Relembremos que Ω satisfaz a condição uniforme externa da esfera se para todo $z \in \partial\Omega$ existe um número $r_z > 0$ tal que $\overline{B_{r_z}} \cap \overline{\Omega} = \{z\}$.

Lema A.6. *(Lazer and McKenna [41, Teorema 4.2]) Seja Ω um domínio aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ que satisfaz a condição uniforme externa da esfera, então existe uma sequência $\{\Omega_m\}_{m=1}^{\infty}$ de conjuntos abertos tais que $\overline{\Omega}_m \subset \Omega_{m+1} \subset \Omega$, $\bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m = \Omega$, e a fronteira $\partial\Omega_m$ é uma subvariedade regular (C^∞) de dimensão $N-1$ para $m \geq 1$.*

Nos resultados de não existência usamos fortemente a desigualdade,

Lema A.7. *(Simon [52], pg 210) Dados $a, b \in \mathbb{R}^N$, existe $M_p > 0$ tal que*

$$\langle |a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b, a-b\rangle \geqslant \begin{cases} M_p|a-b|^p, & \text{se } p \geqslant 2, \\ M_p \dfrac{|a-b|^2}{(|a|+|b|)^{2-p}}, & \text{se } 1 < p < 2. \end{cases}$$

E, uma consequência direta desse lema é o seguinte resultado,

Lema A.8. *[Lema 2.1, [40]] Sejam $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $W^{1,p}(\Omega)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tais que*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{fracamente em } W^{1,p}(\Omega),$$

$$u_n \to u \quad \text{fortemente em } L^p(\Omega).$$

Se,

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\nabla(u_n - u)dx \to 0, \qquad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

então u_n converge fortemente para u em $W^{1,p}(\Omega)$.

Usaremos também a versão da Identidade de Picone,

Teorema A.9. *(Allegretto e Huang [2, Teorema 1.1]) Sejam $v > 0$, $u \geqslant 0$ diferenciáveis. Denote por*

$$L(u,v) = |\nabla u|^p + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla u|\nabla v|^{p-2}\nabla v,$$

$$R(u,v) = |\nabla u|^p - \nabla\left(\frac{u^p}{v^{p-1}}\right)|\nabla v|^{p-2}\nabla v.$$

Então, $L(u,v) = R(u,v)$. Além disso, $L(u,v) \geqslant 0$ e $L(u,v) = 0$ q.t.p. em Ω se, e somente se, $\nabla(u/v) = 0$ q.t.p. em Ω, isto é, $u = kv$ para alguma constante k em cada componente de Ω.

Ademais, daremos o enunciado de uma das versões do famoso Teorema do Passo da Montanha. Antes, porém precisamos introduzir uma condição de compacidade que é fundamental para garantirmos a existência de pontos críticos.

Definição A.10. *Seja E um espaço de Banach. Denotemos por $C^1(E,\mathbb{R})$ o conjunto dos funcionais que são Fréchet diferenciáveis com derivada contínua sobre E.*

1. *Dizemos que* $(z_n) \in E$ *é uma* **sequência de Palais-Smale no nível** $c \in \mathbb{R}$, $(PS)_c$, *se* (z_n) *satisfaz: (i)* $I(z_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$ *e (ii)* $I'(z_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. I *satisfaz a condição* $(PS)_c$ *se toda sequência* $(PS)_c$, *tem uma subsequência convergente.*

Notemos que esta definição nos dá uma espécie de compacidade sobre o funcional I. De fato, a condição de Palais-Smale implica que $K_c = \{u \in E : I(u) = c \text{ e } I'(u) = 0\}$, isto é, o conjunto de pontos críticos de I, tendo c como valor crítico, é compacto para qualquer $c \in \mathbb{R}$. De posse desta definição temos o seguinte resultado, devido a Ambrosetti e Rabinowitz [4]:

Lema A.11 (Teorema do Passo da Montanha)**.** *Seja* $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ *sobre um espaço de Banach* E. *Assuma que existem constantes* $\delta, \varrho > 0$ *tais que*

$$I(u) \geqslant \delta \quad \text{para todo } u \in E \text{ com } \|u\|_E = \varrho,$$

e

$$I(0) = 0 \quad \text{e} \quad I(v_0) \leqslant 0 \text{ para algum } v_0 \in E \text{ com } \|v_0\|_E > \varrho.$$

Sejam $\Gamma := \{g \in C([0,1], E); g(0) = 0, g(1) = v_0\}$ *e* $c := \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I[g(t)] \geqslant \delta$. *Então, existe uma sequência* $(PS)_c$ *associada ao funcional* I.

Apêndice B

Teoremas de Sub-supersolução em domínio limitado

Reservamos este apêndice para tratarmos de um Teorema de Sub-Supersolução para sistemas em domínio limitado com o operador L_p e a fronteira sendo funções, o qual foi utilizado em dois pontos importantes desta tese. Primeiramente como um Teorema auxiliar em uma demonstração apresentada no Capítulo 1, a saber Teorema 1.10; e posteriormente na prova de existência da primeira solução, que foi obtida via sub-supersolução no Capítulo 2, Teorema 2.3.

Para isso, devemos introduzir algumas definições e resultados que embasarão esta abordagem. Considere o seguinte problema,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u), & \Omega, \\ \\ u = g, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{B.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $g \in W^{1,p}(\Omega)$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Carathéodory.

Definição B.1. *Uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é uma* ***solução (subsolução, supersolução)*** *de $(B.1)$, se $f(.,u) \in L^1_{loc}(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi = \int_\Omega f(x,u)\varphi \qquad (\leq, \geq)$$

$$u = g, \quad \partial\Omega \qquad (\leq, \geq),$$

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$, em Ω.

Observação B.1.1. *A condição de fronteira é no sentido do traço, por exemplo,*

$$u \leq \sigma, \quad \partial\Omega \Longleftrightarrow (u-\sigma)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Assuma daqui para frente que as condições de fronteira são no sentido do traço. Assim, em relação a essa definição, temos o seguinte resultado devido a Takeshi Kura [40].

Lema B.2. *[Teorema 3.1, pag. 8, [40]] Suponha que exista uma função $K \in L^{p'}(\Omega)$ tal que*

$$|f(x,t)| \leq |K(x)| + r(|t|), \tag{B.2}$$

q.t.p. $x \in \Omega$, $\forall t \in \mathbb{R}$, onde $r : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ é uma função não-decrescente tal que $r(|\varphi|) \in L^{p'}(\Omega)$ para toda $\varphi \in L^p(\Omega)$. Sejam $\underline{u}$ e $\overline{u}$ uma subsolução e uma supersolução de $(B.1)$, respectivamente, tal que $\underline{u} \leq \overline{u}$ q.t.p. em Ω.

Então, o problema $(B.1)$ tem uma solução u tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$, q.t.p. Ω.

Ainda seguem de [40], que,

Lema B.3. *[Lema 3.3, pag.12, [40]] Suponha que as hipóteses do Lema B.2 sejam satisfeitas. Se u é uma solução de $(B.1)$ tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ q.t.p. Ω, então temos a estimativa,*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C,$$

onde C é uma constante independente de u.

Agora, considere o sistema,

$$\begin{cases} -\Delta_p u + m_1(x)u^{p-1} = h(x,u,v), & \Omega, \\ -\Delta_q v + m_2(x)v^{q-1} = g(x,u,v), & \Omega, \\ u(x) = \sigma(x), v(x) = \gamma(x), & \partial\Omega, \end{cases} \tag{B.3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado; $g, h : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazem a condição de Carathéodory e $\gamma \in W^{1,q}(\Omega)$, $\sigma \in W^{1,p}(\Omega)$.

Neste caso, admitiremos as definições.

Definição B.4. *O par $(\underline{u}, \underline{v}) \in W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ é chamado **subsolução** de $(B.3)$ se $h(x,\underline{u},\underline{v}) \in L^{p'}(\Omega)$, $g(x,\underline{u},\underline{v}) \in L^{q'}(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u} \nabla \varphi + \int_\Omega m_1(x)\underline{u}^{p-1}\varphi \leq \int_\Omega h(x,\underline{u},\underline{v})\varphi$$

$$\int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{q-2}\nabla \underline{v} \nabla \varphi + \int_\Omega m_2(x)\underline{v}^{q-1}\varphi \leq \int_\Omega g(x,\underline{u},\underline{v})\varphi$$

$$\underline{u} \leq \sigma, \quad \underline{v} \leq \gamma, \quad \partial\Omega,$$

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$, em Ω.

*Similarmente, definiremos **supersolução** de $(B.3)$ revertendo todas as desigualdades acima.*

Teorema B.5. *Sejam* $m_i \in L^\infty(\Omega)$, $i = 1, 2$ *funções não-negativas e* $h, g \in L^1_{loc}(\Omega)$, *satisfazendo* $h(x, s, t)$ *e* $g(x, s, t)$ *são não-decrescentes em* t *e em* s, *respectivamente. Assuma que, existem funções* $K_1 \in L^{p'}(\Omega)$, $K_2 \in L^{q'}(\Omega)$ *tais que*

$$|h(x, s, t)| \leq K_1(x) + r_1(|s|), \qquad |g(x, s, t)| \leq K_2(x) + r_2(|t|), \tag{B.4}$$

q.t.p. $x \in \Omega$, $\forall (s, t) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$, *onde* $r_1, r_2 : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ *são funções não-decrescentes tais que* $r_1(|\varphi|) \in L^{p'}(\Omega)$, $\forall \varphi \in L^p(\Omega)$ *e* $r_2(|\psi|) \in L^{q'}(\Omega)$, $\forall \psi \in L^q(\Omega)$. *Suponha que, existam* $(\underline{u}, \underline{v})$, $(\overline{u}, \overline{v}) \in W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ *sub e supersoluções de* $(B.3)$, *respectivamente, com* $(\underline{u}, \underline{v}) \leq (\overline{u}, \overline{v})$, Ω. *Então, existe pelo menos uma solução* $(u, v) \in W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ *de* $(B.3)$ *entre* $(\underline{u}, \underline{v})$ *e* $(\overline{u}, \overline{v})$.

E, por uma questão de organização, primeiramente faremos a prova do seguinte resultado o qual se resume em redefinirmos funções e problemas que gerarão a subsolução de que trata o Lema.

Lema B.6. *Suponha que as hipóteses do Teorema B.5 sejam satisfeitas. Assuma que,* $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ *seja uma subsolução de* $(B.3)$ *satisfazendo*

$$(\underline{u}, \underline{v}) \leq (\widetilde{u}, \widetilde{v}) \leq (\overline{u}, \overline{v}), \ \Omega. \tag{B.5}$$

Então, existem uma subsolução (u^*, v^*) *de (B.3) e* $M > 0$ *independente de* (u^*, v^*), *com* (u^*, v^*) *satisfazendo*

$$(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \leq (u^*, v^*) \leq (\overline{u}, \overline{v}), \ \Omega, \qquad e \qquad \|(u^*, v^*)\|_{W^{1,p} \times W^{1,q}} \leq M. \tag{B.6}$$

Além disso, u^* *e* v^* *são tais que*

$$\begin{cases} -\Delta_p u^* + m_1(x)(u^*)^{p-1} = h(x, u^*, \widetilde{v}), & \Omega, \\ u^*(x) = \sigma(x), & \partial\Omega, \end{cases} \tag{B.7}$$

$$\begin{cases} -\Delta_q v^* + m_2(x)(v^*)^{q-1} = g(x, \widetilde{u}, v^*), & \Omega, \\ v^*(x) = \gamma(x), & \partial\Omega. \end{cases} \tag{B.8}$$

Demonstração. A demonstração deste resultado foi motivado pelo Teorema 4.1 em [44].

Seja $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ subsolução de (B.3) tal que (B.5) seja válido.

Defina as funções $\widetilde{h}, \widetilde{g} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\widetilde{h}(x,s,t) := \begin{cases} h(x,\underline{u},\overline{v}), & \text{se } s < \underline{u}, \quad t > \overline{v}, \\ h(x,\underline{u},t), & \text{se } s < \underline{u}, \quad \underline{v} \leqslant t \leqslant \overline{v}, \\ h(x,\underline{u},\underline{v}), & \text{se } s < \underline{u}, \quad t < \underline{v}, \\ h(x,s,\overline{v}), & \text{se } \underline{u} \leqslant s \leqslant \overline{u}, \quad t > \overline{v}, \\ h(x,s,t), & \text{se } \underline{u} \leqslant s \leqslant \overline{u}, \quad \underline{v} \leqslant t \leqslant \overline{v}, \\ h(x,s,\underline{v}), & \text{se } \underline{u} \leqslant s \leqslant \overline{u}, \quad t < \underline{v}, \\ h(x,\overline{u},\overline{v}), & \text{se } s > \overline{u}, \quad t > \overline{v}, \\ h(x,\overline{u},t), & \text{se } s > \overline{u}, \quad \underline{v} \leqslant t \leqslant \overline{v}, \\ h(x,\overline{u},\underline{v}), & \text{se } s > \overline{u}, \quad t < \underline{v}, \end{cases} \tag{B.9}$$

e $\widetilde{g}$ de forma semelhante.

Trabalharemos com os problemas,

$$\begin{cases} -\Delta_p u + m_1(x) u^{p-1} = \widetilde{h}(x,u,\widetilde{v}), & \Omega, \\ \\ u(x) = \sigma(x), & \partial\Omega, \end{cases} \tag{B.10}$$

$$\begin{cases} -\Delta_q v + m_2(x) v^{q-1} = \widetilde{g}(x,\widetilde{u},v), & \Omega, \\ \\ u(x) = \gamma(x), & \partial\Omega. \end{cases} \tag{B.11}$$

Nosso objetivo é usar o Lema B.2, para obter soluções dos problemas $(B.10)$ e $(B.11)$, que por sua vez, também serão soluções de $(B.7)$ e $(B.8)$, devido à definição das funções $\widetilde{h}$ e $\widetilde{g}$.

Note que, como $(\widetilde{u},\widetilde{v})$ é subsolução e $(\overline{u},\overline{v})$ supersolução de $(B.3)$, satisfazem a desigualdade $(B.5)$ e por hipótese $h(x,s,t)$ e $g(x,s,t)$ são monótonas em t e em s, respectivamente, segue que

$$\int_\Omega |\nabla \widetilde{u}|^{p-2} \nabla \widetilde{u} \nabla \varphi dx + \int_\Omega m_1(x) \widetilde{u}^{p-1} \varphi dx \leq \int_\Omega h(x,\widetilde{u},\widetilde{v})\varphi = \int_\Omega \widetilde{h}(x,\widetilde{u},\widetilde{v})\varphi,$$

$$\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \nabla \varphi dx + \int_\Omega m_1(x) \overline{u}^{p-1} \varphi dx \geq \int_\Omega h(x,\overline{u},\overline{v})\varphi \geq \int_\Omega h(x,\overline{u},\widetilde{v})\varphi = \int_\Omega \widetilde{h}(x,\overline{u},\widetilde{v})\varphi,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Além disso,

$$\widetilde{u} \leqslant \sigma \leqslant \overline{u}, \quad \partial\Omega,$$

consequentemente, $\widetilde{u}$ e $\overline{u}$ são sub e supersoluções de $(B.10)$. Analogamente, mostra-se que $\widetilde{v}$ e $\overline{v}$ são sub e supersoluções de $(B.11)$.

Agora, vamos verificar a hipótese $(B.2)$. Observe que,

$$|\widetilde{h}(x,s,\widetilde{v})| \leqslant k_1(x) + r_1(|s|), \qquad \text{q.t.p. } \Omega, \forall s \in \mathbb{R},$$

pois se $s \in [\underline{u}, \overline{u}]$ usamos a hipótese (B.4) e nos casos em que $s \notin [\underline{u}, \overline{u}]$ temos

$$\widetilde{h}(x, s, \widetilde{v}) = h(x, \overline{s}, \overline{t}),$$

onde $\overline{s} = \underline{u}(x)$ ou $\overline{s} = \overline{u}(x)$ e $\overline{t} = \underline{v}(x)$ ou $\overline{t} = \underline{v}(x)$, ou seja, novamente podemos usar (B.4). Assim, $\forall s \in \mathbb{R}$,

$$|\widetilde{h}(x, s, \widetilde{v}) - m_1(x)s^{p-1}| \leqslant k_1(x) + r_1(|s|) + \|m_1\|_\infty |s|^{p-1},$$

onde para $\varphi \in L^p(\Omega)$, temos $r_1(|\varphi|) + \|m_1\|_\infty |\varphi|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$. Analogamente, mostra-se para a função $\widetilde{g}(x, \widetilde{u}, t)$, q.t.p. $x \in \Omega$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Logo, pelo Lema B.2, existem $u^* \in W^{1,p}(\Omega)$ solução de $(B.10)$ e $v^* \in W^{1,q}(\Omega)$ solução de $(B.11)$, com

$$\widetilde{u} \leq u^* \leq \overline{u}, \qquad \widetilde{v} \leq v^* \leq \overline{v}, \quad \Omega,$$

ou seja,

$$(\underline{u}, \underline{v}) \leq (\widetilde{u}, \widetilde{v}) \leq (u^*, v^*) \leq (\overline{u}, \overline{v}), \Omega.$$

Então, novamente pela definição de $\widetilde{h}$ e $\widetilde{g}$, e pelas desigualdades anteriores, temos que u^* e v^* satisfazem também $(B.7)$ e $(B.8)$, respectivamente. Portanto (u^*, v^*) é uma subsolução de (B.3), usando a monotonicidade das funções h e g.

Além disso, pelo Lema B.3, existem $C_1, C_2 > 0$ independentes de u^* e v^*, tais que

$$\|u^*\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_1, \qquad \|v^*\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C_2,$$

consequentemente

$$\|(u^*, v^*)\|_{W^{1,p} \times W^{1,q}} = \|u^*\|_{W^{1,p}} + \|v^*\|_{W^{1,q}} \leq C_1 + C_2 = C_3.$$

■

Agora, vamos à demonstração do Teorema B.5.

Demonstração. Usaremos o Lema de Zorn para a demonstração deste teorema, para isso devemos considerar um conjunto parcialmente ordenado com a relação de ordem usual. Seja

$$\begin{aligned} N = \ & \{(u, v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}] \text{ subsolução de } (B.3) \ / \ \exists\ (\widetilde{u}, \widetilde{v}) \text{ subsolução de } (B.3) \text{ satisfazendo} \\ & (\underline{u}, \overline{v}) \leqslant (\widetilde{u}, \widetilde{v}) \leqslant (u, v) \leqslant (\overline{u}, \overline{v})\}. \end{aligned}$$

Agora, nosso objetivo é mostrar que todo subconjunto totalmente ordenado de N tenha cota superior. Seja $S \subset N$ totalmente ordenado. Observe que, se tomarmos $(u_1, v_1) \in N$, pelo Lema B.6, existe (u_2, v_2) subsolução de $(B.3)$ tal que

$$(\underline{u}, \underline{v}) \leq (u_1, v_1) \leq (u_2, v_2) \leq (\overline{u}, \overline{v}), \quad \Omega,$$

consequentemente, $(u_2, v_2) \in N$.

Assim, podemos considerar $S = \{(u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de modo que,

$$(\underline{u}, \underline{v}) \leq (u_1, v_1) \leq (u_2, v_2) \leq \ldots \leq (u_j, v_j) \leq (u_{j+1}, v_{j+1}) \leq \ldots \leq (\overline{u}, \overline{v}), \quad \Omega.$$

Dessa forma, temos que

$$(u_n(x), v_n(x)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (u(x), v(x)), \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Pelo Lema B.6, como $(u_n, v_n) \in N$, então existe $M > 0$ tal que

$$\|(u_n, v_n)\|_{W^{1,p}\times W^{1,p}} \leq M,$$

onde M independe de n.

Portanto, como $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ é um espaço reflexivo, existe uma subsequência, que ainda denotaremos por $\{(u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v) \text{ em } W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega).$$

Pelas imersões compactas $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ temos também,

$$(u_n, v_n) \longrightarrow (u, v) \text{ em } L^p(\Omega) \times L^q(\Omega).$$

Note que, (u_n, v_n) foi obtido pelo Lema B.6, como sendo u_n solução do problema $(B.7)$ com $\widetilde{u} = u_{n-1}$ e v_n solução de $(P3)$ com $\widetilde{v} = v_{n-1}$, assim

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\nabla(u_n - u) =$$

$$= \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u) - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(u_n - u)$$

$$= \int_\Omega h(x, u_n, u_{n-1})(u_n - u) - \int_\Omega m_1(x) u_n^{p-1}(u_n - u) - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(u_n - u).$$

Então, pela hipótese de crescimento da função h, segue que

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\nabla(u_n - u) =$$

$$\leq \int_\Omega |K_1(x)||u_n - u| + r_1(|u_n|)|u_n - u| + \int_\Omega |m_1(x)||u_n|^{p-1}|u_n - u| +$$

$$+ \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(u_n - u)$$

$$\leq \|K_1\|_{L^{p'}}\|u_n - u\|_{L^p} + \|r_1(|u_n|)\|_{L^{p'}}\|u_n - u\|_{L^p} + \|m_1\|_\infty \|\overline{u}\|_{L^p}^{p'}\|u_n - u\|_{L^p} +$$

$$+ \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(u_n - u) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Sendo que, $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(u_n - u) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pela convergência fraca $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\Omega)$.

Então, pelo Lema A.8, temos $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Analogamente, mostra-se que $v_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} v$ em $W^{1,q}(\Omega)$.

Observe que, como (u_n, v_n) é subsolução de $(B.3)$, da continuidade e limitação das funções h e g, e da convergência forte da sequência $\{(u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que (u, v) é também subsolução de $(B.3)$, com

$$(\underline{u}, \underline{v}) \leq (u, v) \leq (\overline{u}, \overline{v}), \quad \Omega,$$

já que $\{(u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz essa desigualdade, ou seja, (u, v) é uma cota superior de S em N.

Portanto, pelo Lema de Zorn, N tem um elemento maximal (U, V). Afirmamos que (U, V) é uma solução de $(B.3)$.

De fato, análogo ao que foi feito anteriormente, como $(U, V) \in N$, então (U, V) é subsolução de $(B.3)$ entre $(\underline{u}, \underline{v})$ e $(\overline{u}, \overline{v})$. Então, pelo Lema B.6, existe (u^*, v^*) subsolução de $(B.3)$ satisfazendo

$$(\underline{u}, \underline{v}) \leq (U, V) \leq (u^*, v^*) \leq (\overline{u}, \overline{v}) \tag{B.12}$$

e solução dos problemas $(B.7)$ e $(B.8)$ com $(\widetilde{u}, \widetilde{v}) = (U, V)$, ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta_p u^* + m_1(x)(u^*)^{p-1} = h(x, u^*, V), & \Omega, \\ u^*(x) = \sigma(x), & \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta_q v^* + m_2(x)(v^*)^{q-1} = g(x, U, v^*), & \Omega, \\ v^*(x) = \gamma(x), & \partial\Omega. \end{cases}$$

Note que, $(u^*, v^*) \in N$, assim, como (U, V) é maximal em N, segue por $(B.12)$ que $(U, V) = (u^*, v^*)$. Portanto, (U, V) é solução de $(B.3)$.

$\blacksquare$

Apêndice C

Resultados técnicos para a positividade de soluções

Afirmação C.0.8. $\max\limits_{t>0} I(t\varphi_1, t\varphi_2) \leqslant C$, *com* C *independente de* λ *e* μ.

Demonstração. Observe que,

$$I(t\varphi_1, t\varphi_2) = \underbrace{\left(\frac{(\alpha+1)}{p}\|\varphi_1\|^p_{E_1}\right)}_{A_1} t^p - \underbrace{\left(\frac{\alpha+1}{\beta_1+1}\int_\Omega a(x)(\varphi_1)^{\beta_1+1}\right)}_{B_1} t^{\beta_1+1} -$$

$$\underbrace{\left(\int_\Omega b(x)(\varphi_1)^{\alpha+1}(\varphi_2)^{\gamma+1}\right)}_{C_1} t^{\alpha+\gamma+2} - \underbrace{\left((\alpha+1)\lambda\int_\Omega f(x)\varphi_1\right)}_{D_1} t +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{(\gamma+1)}{q}\|\varphi_2\|^q_{E_2}\right)}_{A_2} t^q - \underbrace{\left(\frac{\gamma+1}{\beta_2+1}\int_\Omega c(x)(\varphi_2)^{\beta_2+1}\right)}_{B_2} t^{\beta_2+1} - \underbrace{\left((\gamma+1)\mu\int_\Omega g(x)\varphi_2\right)}_{D_2} t, \tag{C.1}$$

então $I(t\varphi_1, t\varphi_2) = h_\lambda(t) + h_\mu(t)$, onde

$$h_\lambda(t) = A_1 t^p - B_1 t^{\beta_1+1} - C_1 t^{\alpha+\gamma+2} - \lambda D_1 t,$$

$$h_\mu(t) = A_2 t^q - B_2 t^{\beta_2+1} - \mu D_2 t.$$

Temos que, $A_i, B_i, C_1 \geqslant 0$ e não sabemos o sinal de D_i, para $i = 1, 2$. Assim,

$$h_\lambda(t), h_\mu(t) \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

$$\begin{aligned} h_\lambda(t) &\leqslant A_1 t^p - B_1 t^{\beta_1+1} - \lambda D_1 t \\ &= t^{\beta_1+1}[A_1 t^{p-1-\beta_1} - B_1 - \lambda D_1 t^{-\beta_1}] \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\infty, \end{aligned}$$

e

$$h_{\mu}(t) = t^{\beta_2+1}[A_2 t^{q-1-\beta_2} - B_2 - \mu D_2 t^{-\beta_2}] \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

pois $\beta_1 > p-1$ e $\beta_2 > q-1$.

Então,

$$h_{\lambda}(t), h_{\mu}(t) \longrightarrow \begin{cases} 0, & \text{quando } t \to 0, \\ -\infty, & \text{quando } t \to \infty. \end{cases}$$

Afirmação C.0.9. $\max\limits_{t>0} h_{\lambda}(t) \leqslant \overline{C}_1$ *e* $\max\limits_{t\in[0,t_0]} h_{\mu}(t) \leqslant \overline{C}_2$ *para todo* $\lambda \in (0, \lambda_0)$ *e* $\mu \in (0, \mu_0)$, *onde* $\overline{C}_1, \overline{C}_2 > 0$ *são constantes independentes de* λ *e* μ *e* (λ_0, μ_0) *foi tomado no Capítulo 2.*

De fato, por $\lambda < \lambda_0$ note que

$$\begin{aligned} h_{\lambda}(t) &\leqslant A_1 t^p - B_1 t^{\beta_1+1} - C_1 t^{\alpha+\gamma+2} + \lambda_0 \|D_1\| t \\ &\leqslant A_1 t^p - B_1 t^{\beta_1+1} + \lambda_0 \|D_1\| t. \end{aligned}$$

Assim,

$$\max_{t>0} h_{\lambda}(t) \leqslant \max_{t>0} k_0(t), \tag{C.2}$$

onde $k_0(t) = A_1 t^p - B_1 t^{\beta_1+1} + \lambda_0 \|D_1\| t$.

Observe,

$$k_0(t) \longrightarrow \begin{cases} 0, & \text{quando } t \to 0, \\ -\infty, & \text{quando } t \to \infty. \end{cases}$$

Além disso,

$$k_0'(t) = A_1 p t^{p-1} - B_1(\beta_1+1) t^{\beta_1} + \lambda_0 \|D_1\|.$$

Vamos analisar a monotonicidade de $k_0(t)$. Observe que,

$$k_0'(t) > 0 \Longleftrightarrow f_0(t) > 0,$$

onde $f_0(t) = A_1 p t^{p-1} - B_1(\beta_1+1) t^{\beta_1} + \lambda_0 \|D_1\|$ e

$$f_0(t) \longrightarrow \begin{cases} \lambda_0 \|D_1\|, & \text{quando } t \to 0, \\ -\infty, & \text{quando } t \to \infty. \end{cases}$$

E mais,

$$f_0'(t) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t < \left[\frac{A_1 p(p-1)}{B_1(\beta_1+1)\beta_1} \right]^{\frac{1}{\beta_1-p+1}} = \bar{t},$$

logo, $f_0(t)$ é crescente para todo $0 < t < \bar{t}$.

Portanto, $\exists t_* > \bar{t} > 0$ tal que $f_0(t_*) = 0$, e $f_0(t) > 0$, $\forall 0 < t < t_*$. Consequentemente, $k_0(t)$ é crescente $\forall 0 < t < t_*$ e t_* é ponto de máximo de k_0.

Observe, primeiramente que de $f_0(t_*) = 0$, então $A_1 p t_*^{p-1} - B_1(\beta_1+1)t_*^{\beta_1} + \lambda_0\|D_1\| = 0$, donde

$$A_1 t_*^p = B_1\left(\frac{\beta_1+1}{p}\right)t_*^{\beta_1+1} - \frac{1}{p}\lambda_0\|D_1\|t_*,$$

e assim, substituindo em (C.2), temos que

$$\max_{t>0} h_\lambda(t) \leqslant \max_{t>0} k_0(t) = k_0(t_*) = B_1\left(\frac{\beta_1+1-p}{p}\right)t_*^{\beta_1+1} + \lambda_0\left(\frac{p-1}{p}\right)\|D_1\|t_*,$$

e repetindo os mesmos argumentos para a função h_μ concluimos a prova da Afirmação C.0.9. Consequentemente, como

$$I(t\varphi_1, t\varphi_2) = h_\lambda(t) + h_\mu(t),$$

então a declaração inicial C.0.8 está satisfeita.

■

A seguir demonstraremos propriedades (Afirmação 2.2.3) relacionadas às seguintes sequências,

$$\eta_1 = p^*, \qquad \eta_{k+1} = \eta_k^*\frac{p^*}{p}, \qquad \eta_k^* = \eta_k - \widetilde{\eta}_k + p, \qquad \widetilde{\eta}_k = \eta_k\frac{\gamma+1}{q^*} + (\alpha+1),$$

$$\theta_1 = q^*, \qquad \theta_{k+1} = \theta_k^*\frac{q^*}{q}, \qquad \theta_k^* = \theta_k - \widetilde{\theta}_k + q, \qquad \widetilde{\theta}_k = \theta_k\frac{\alpha+1}{p^*} + (\gamma+1),$$

Afirmação C.0.10. **(i)** *η_k e θ_k são crescentes,*

(ii) $\eta_k, \theta_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$,

(iii) $\eta_k - \widetilde{\eta}_k > 0$ *e* $\theta_k - \widetilde{\theta}_k > 0$.

Demonstração. **(i)** Provaremos por indução. Observe que,

$$\begin{aligned}\eta_1^* &= \eta_1 - \widetilde{\eta}_1 + p = p^* - \left[\eta_1\frac{\gamma+1}{q^*} + (\alpha+1)\right] + p \\ &= p^*\left(1 - \frac{\gamma+1}{q^*}\right) - (\alpha+1) + p.\end{aligned}$$

Assim, por (H_{12}), $\eta_1^* > p$. Consequentemente,

$$\eta_2 = \eta_1^*\frac{p^*}{p} > p\frac{p^*}{p} = p^* = \eta_1 \Longrightarrow \eta_2 > \eta_1.$$

Agora, suponha que, $\eta_k > \eta_{k-1}$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\eta_{k+1} &= \eta_k^* \frac{p^*}{p} = (\eta_k - \widetilde{\eta}_k + p) \frac{p^*}{p} \\
&= \left[\eta_k - \left(\eta_k \frac{\gamma+1}{q^*} + (\alpha+1)\right) + p\right] \frac{p^*}{p} \\
&> \left[\eta_{k-1}\left(1 - \frac{\gamma+1}{q^*}\right) - (\alpha+1) + p\right] \frac{p^*}{p} = \eta_k.
\end{aligned}$$

Portanto, por indução, η_k é uma sequência crescente.

(ii) Na prova do item anterior mostramos que,

$$\eta_k = \left[\eta_{k-1}\left(1 - \frac{\gamma+1}{q^*}\right) - (\alpha+1) + p\right] \frac{p^*}{p}.$$

Assim, continuando recursivamente a substituir os valores de η_k, chegamos que

$$\eta_k = \eta_1 \left(1 - \frac{\gamma+1}{q^*}\right)^{k-1} \left(\frac{p^*}{p}\right)^{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} \left(\frac{p^*}{p}(p - (\alpha+1))\right) \left(1 - \frac{\gamma+1}{q^*}\right)^i \left(\frac{p^*}{p}\right)^i,$$

e podemos escrever da seguinte forma,

$$\eta_k = \eta_1 \varepsilon^{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} \xi \varepsilon^i, \tag{C.3}$$

onde $\varepsilon = \dfrac{p^*}{p}\left(1 - \dfrac{\gamma+1}{q^*}\right)$ e $\xi = \dfrac{p^*}{p}(p - (\alpha+1))$.

Logo, por (H_{11}),

$$\eta_k = \varepsilon^{k-1}\eta_1 + \xi \frac{\varepsilon^{k-2} - 1}{\varepsilon - 1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

(iii) Novamente pelo item (i), temos que η_k é uma sequência crescente, então

$$\eta_k < \eta_{k+1} = \frac{p^*}{p}(\eta_k - \widetilde{\eta}_k + p),$$

donde,

$$\eta_k - \widetilde{\eta}_k > \frac{p}{p^*}\eta_k - p. \tag{C.4}$$

Além disso, também no primeiro item da afirmação, mostramos que $\eta_2 > p^*$. Assim, da monotonicidade da sequência temos $\eta_k > p^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Logo $\dfrac{p}{p^*}\eta_k - p > 0$, consequentemente, $\eta_k - \widetilde{\eta}_k > 0$.

∎

Agora, mostraremos que a desigualdade (2.81), usada na prova da positividade de soluções é satisfeita.

Relembremos que $E_k = \eta_k \ln(L_k)$ e $a = \dfrac{p^*}{p}$ e a desigualdade em questão é a seguinte,

$$E_{k+1} \leqslant r_k + aE_k,$$

onde $r_k = p^* \ln(L\widetilde{\eta}_k)$.

De fato, estamos no caso em que $\max\{\|a\|_{\chi_k}^{\chi_k}, L_k^{\eta_k}, \|f\|_{\sigma_k}^{\sigma_k}, M_1^{\theta_1}\} = L_k^{\eta_k}$. Assim,

$$\begin{aligned}
L_{k+1}^{\eta_{k+1}} &= \left[L^{\frac{p}{\eta_k^*}} (\eta_k - \widetilde{\eta}_k + 1)^{\frac{-1}{\eta_k^*}} \left(\frac{\eta_k^*}{p}\right)^{\frac{p}{\eta_k^*}} \max\{\|a\|_{\chi_k}^{\frac{\chi_k}{\eta_k^*}}, L_k^{\frac{\eta_k}{\eta_k^*}}, \|f\|_{\sigma_k}^{\frac{\sigma_k}{\eta_k^*}}, M_1^{\frac{\theta_1}{\eta_k^*}}\} \right]^{\eta_{k+1}} \\
&= \left[L^{\frac{p}{\eta_k^*}} (\eta_k - \widetilde{\eta}_k + 1)^{\frac{-1}{\eta_k^*}} \left(\frac{\eta_k^*}{p}\right)^{\frac{p}{\eta_k^*}} L_k^{\frac{\eta_k}{\eta_k^*}} \right]^{\eta_{k+1}} \qquad (C.5) \\
&= L^{\frac{p}{\eta_k^*}\eta_{k+1}} \left[(\eta_k - \widetilde{\eta}_k + 1)^{\frac{-1}{\eta_k^*}} \left(\frac{\eta_k^*}{p}\right)^{\frac{p}{\eta_k^*}} \right]^{\eta_{k+1}} L_k^{\frac{\eta_k}{\eta_k^*}\eta_{k+1}}.
\end{aligned}$$

Note que, $\dfrac{p}{\eta_k^*}\eta_{k+1} = p^*$ e $\dfrac{\eta_k}{\eta_k^*}\eta_{k+1} = \eta_k \dfrac{p^*}{p}$. E além disso, pela Afirmação 2.2.3, **(iii)**, segue

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\eta_k - \widetilde{\eta}_k + 1} < 1 &\Longrightarrow \frac{1}{(\eta_k - \widetilde{\eta}_k + 1)^{\frac{p^*}{p}}} \frac{1}{p^{p^*}} < 1 \\
&\Longrightarrow (\eta_k - \widetilde{\eta}_k + 1)^{-\frac{p^*}{p}} \left(\frac{\widetilde{\eta}_k}{p}\right)^{p^*} < \widetilde{\eta}_k^{p^*} \\
&\Longrightarrow \left[(\eta_k - \widetilde{\eta}_k + 1)^{\frac{-1}{\eta_k^*}} \left(\frac{\eta_k^*}{p}\right)^{\frac{p}{\eta_k^*}} \right]^{\eta_{k+1}} < \widetilde{\eta}_k^{p^*}.
\end{aligned}$$

Logo, substituindo em (C.5), temos que

$$L_{k+1}^{\eta_{k+1}} \leqslant L^{p^*} \widetilde{\eta}_k^{p^*} L_k^{\eta_k \frac{p^*}{p}} = (L\widetilde{\eta}_k)^{p^*} (L_k^{\eta_k})^{\frac{p^*}{p}},$$

donde

$$\eta_{k+1} \ln(L_{k+1}) \leqslant p^* \ln(L\widetilde{\eta}_k) + \frac{p^*}{p} \eta_k \ln(L_k),$$

ou seja,

$$E_{k+1} \leqslant r_k + aE_k.$$

Apêndice D

Afirmações do Lema 3.2

Na demonstração do Lema 3.2 foram introduzidas várias funções que nos auxiliaram na obtenção de uma certa monotonicidade.

Note que essas funções foram definidas aos pares, uma vez que estão relacionadas às equações do sistema, logo têm comportamentos semelhantes. Neste apêndice, provaremos as afirmações feitas no Teorema 3.2, referentes a uma dessas funções.

Demonstração da Afirmação 3.2.1

1) $\dfrac{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s)}{s^{p-1}}$**,** $\dfrac{\Gamma^2_{\mu,\tau}(s)}{s^{q-1}}$ **são não-crescentes em** $s > 0$**.**

Pela definição (3.8), temos que,

$$\frac{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s)}{s^{p-1}} = \widehat{F}^1_\tau(s) + \lambda\widehat{\zeta}^1_\tau(s), \tag{D.1}$$

onde $\widehat{\gamma}^1_\tau(s) = \sup\limits_{t>s} \dfrac{\gamma^1_\tau(t)}{t^{p-1}}$, com $\gamma = F, \zeta$.

Logo, como $\widehat{\gamma}^1_\tau(s_2) \leqslant \widehat{\gamma}^1_\tau(s_1)$, para $s_1 < s_2$, segue que $\dfrac{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s)}{s^{p-1}}$ é não-crescente em $s > 0$.

2) $\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s) \geq f_1(s) + \lambda g_1(s)h_1(\tau)$**, desde que** $0 < s \leqslant \tau$**.**

De fato, observe que de (3.8) segue

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s) &= s^{p-1}\widehat{F}^1_\tau(s) + \lambda s^{p-1}\widehat{\zeta}^1_\tau(s) \\ \\ &\geqslant s^{p-1}\frac{F^1_\tau(s)}{s^{p-1}} + \lambda s^{p-1}\frac{\zeta^1_\tau(s)}{s^{p-1}}.\end{aligned}$$

Assim, se $0 < s \leqslant \tau$ então pelas definições de F^1_τ e ζ^1_τ, temos

$$\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s) \geqslant f_1(s) + \lambda g_1(s)h_1(\tau).$$

3) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s)}{s^{p-1}} = \sup_{0<t\leq\tau}\frac{f_1(t)}{t^{p-1}} + \lambda\sup_{0<t\leq\tau}\frac{g_1(t)h_1(\tau)}{t^{p-1}}$.

Note que, por (D.1), temos

$$\lim_{s\to 0}\frac{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s)}{s^{p-1}} = \sup_{t>0}\frac{F^1_\tau(t)}{t^{p-1}} + \lambda\sup_{t>0}\frac{\zeta^1_\tau(t)}{t^{p-1}}.$$

Assim, como

$$\frac{F^1_\tau(t)}{t^{p-1}} = \begin{cases} \dfrac{f_1(t)}{t^{p-1}}, & 0<t\leqslant\tau, \\ \\ \dfrac{f_1(\tau)}{\tau^{p-1}}, & t\geqslant\tau, \end{cases} \qquad \frac{\zeta^1_\tau(t)}{t^{p-1}} = \begin{cases} \dfrac{g_1(t)h_1(\tau)}{t^{p-1}}, & 0<t\leqslant\tau, \\ \\ \dfrac{f_1(\tau)h_1(\tau)}{\tau^{p-1}}, & t\geqslant\tau, \end{cases} \tag{D.2}$$

segue,

$$\lim_{s\to 0}\frac{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s)}{s^{p-1}} = \sup_{0<t\leqslant\tau}\frac{f_1(t)}{t^{p-1}} + \lambda\sup_{0<t\leqslant\tau}\frac{g_1(t)h_1(\tau)}{t^{p-1}}.$$

4) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s)}{s^{p-1}} = \frac{f_1(\tau)}{\tau^{p-1}} + \lambda\frac{g_1(\tau)h_1(\tau)}{\tau^{p-1}}$.

Observe que,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty}\frac{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s)}{s^{p-1}} &= \lim_{s\to\infty}(\widehat{F}^1_\tau(s) + \lambda\widehat{\zeta}^1_\tau(s)) \\ &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{F^1_\tau(t)}{t^{p-1}} + \lambda\frac{\zeta^1_\tau(t)}{t^{p-1}}\right). \end{aligned}$$

Logo, por (D.2), concluímos a afirmação.

Demonstração da Afirmação 3.2.2

1)$J^1_{\lambda,\tau} \in C^1((0,\infty))$**.**

Pela definição (3.9), temos que,

$$\frac{d}{ds}J^1_{\lambda,\tau}(s) = \frac{d}{ds}\left[\frac{s^2}{\displaystyle\int_0^s \frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)^{\frac{1}{p-1}}}}\right] = \frac{2s\displaystyle\int_0^s\frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt - s^2\frac{s}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s)^{\frac{1}{p-1}}}}{\left[\displaystyle\int_0^s\frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt\right]^2}.$$

Assim, como as funções incluídas na derivada são contínuas, segue que $J^1_{\lambda,\tau} \in C^1((0,\infty))$.

2) $J^1_{\lambda,\tau}(s) \geqslant [\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s)]^{\frac{1}{p-1}}$**,** $s>0$**.**

Observe que, da Afirmação 3.2.1 (1), obtemos que $\dfrac{t^{p-1}}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)}$ é não-decrescente, o que implica que $\dfrac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)^{\frac{1}{p-1}}}$ também é não-decrescente.

Portanto,

$$J^1_{\lambda,\tau}(s) = \frac{s^2}{\displaystyle\int_0^s \frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)^{p-1}}dt} \geqslant \frac{s^2}{\dfrac{s}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)^{p-1}}s} = \Gamma^1_{\lambda,\tau}(s)^{\frac{1}{p-1}}.$$

3) $\dfrac{J^1_{\lambda,\tau}(s)}{s}$ é não-crescente em $s > 0$.

Temos que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(\frac{J^1_{\lambda,\tau}(s)}{s}\right) &= \left[\frac{s\displaystyle\int_0^s \frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt - \frac{s^3}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)^{\frac{1}{p-1}}}}{\left(\displaystyle\int_0^s \frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt\right)^2}\right]\frac{1}{s} \\ &\leqslant \frac{\dfrac{s^2}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)^{\frac{1}{p-1}}} - \dfrac{s^2}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)^{\frac{1}{p-1}}}}{\left(\displaystyle\int_0^s \frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)}^{\frac{1}{p-1}}dt\right)^2} = 0, \end{aligned}$$

consequentemente, $\dfrac{J^1_{\lambda,\tau}(s)}{s}$ é não-crescente para $s > 0$.

4) $\displaystyle\lim_{s\to 0}\frac{J^1_{\lambda,\tau}(s)}{s} = \left[\sup_{0<t\leq\tau}\frac{f_1(t)}{t^{p-1}} + \lambda\sup_{0<t\leq\tau}\frac{g_1(t)h_1(\tau)}{t^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p-1}}$,

Note que, da Afirmação 3.2.1 (3), segue que

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0}\frac{J^1_{\lambda,\tau}(s)}{s} &= \lim_{s\to 0}\frac{s}{\displaystyle\int_0^s \frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{\dfrac{s}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s)^{\frac{1}{p-1}}}} \\ &= \left[\sup_{0<t\leq\tau}\frac{f_1(t)}{t^{p-1}} + \lambda\sup_{0<t\leq\tau}\frac{g_1(t)h_1(\tau)}{t^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p-1}} \end{aligned}$$

5) $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\frac{J^1_{\lambda,\tau}(s)}{s} = \left[\frac{f_1(\tau)}{\tau^{p-1}} + \lambda\frac{g_1(\tau)h_1(\tau)}{\tau^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p-1}}$.

De fato, pela Afirmação 3.2.2 (2), temos que

$$\frac{J^1_{\lambda,\tau}(s)}{s} \geqslant \frac{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s)^{\frac{1}{p-1}}}{s} = \left[\frac{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(s)}{s^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p-1}}. \tag{D.3}$$

Por outro lado, dado $\beta \in (0,1)$ arbitrariamente, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{J^1_{\lambda,\tau}(s)}{s} &= \frac{s}{\displaystyle\int_0^s \frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt} \leqslant \frac{s}{\displaystyle\int_{\beta s}^s \frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt} \\
&\leqslant \frac{s}{\dfrac{\beta s}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(\beta s)^{\frac{1}{p-1}}}(s-\beta s)} = \frac{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(\beta s)^{\frac{1}{p-1}}}{\beta s}\frac{1}{1-\beta}
\end{aligned} \tag{D.4}$$

Assim, passando (D.3) e (D.4) ao limite com $s \to \infty$, temos pela Afirmação 3.2.1 (3) que,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{f_1(\tau)}{\tau^{p-1}} + \lambda\frac{g_1(\tau)h_1(\tau)}{\tau^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p-1}} &\leqslant \lim_{s\to\infty}\frac{J^1_{\lambda,\tau}(s)}{s} \leqslant \\
&\leqslant \left[\frac{f_1(\tau)}{\tau^{p-1}} + \lambda\frac{g_1(\tau)h_1(\tau)}{\tau^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p-1}}\frac{1}{1-\beta}.
\end{aligned} \tag{D.5}$$

Portanto, fazendo $\beta \to 0$ em (D.5), temos o resultado.

Demonstração da Afirmação 3.2.3

1) $\displaystyle\lim_{\tau\to\infty} H^1_\lambda(\tau) = \frac{1}{[f^1_\infty + \lambda(gh)^1_\infty]^{\frac{1}{p-1}}}$

Dado $\beta \in (0,1)$ arbitrariamente, pela Afirmação 3.2.2 (3) temos

$$\begin{aligned}
H^1_\lambda(\tau) &= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{t}{J^1_{\lambda,\tau}(t)}dt \geqslant \frac{1}{\tau}\int_{\beta\tau}^\tau \frac{t}{J^1_{\lambda,\tau}(t)}dt \\
&\geqslant \frac{1}{\tau}\frac{\beta\tau}{J^1_{\lambda,\tau}(\beta\tau)}(\tau-\beta\tau) = \frac{(1-\beta)}{\beta\tau}\int_0^{\beta\tau}\frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt.
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Agora, usando a Afirmação 3.2.1 (1) em (D.6), segue que

$$\begin{aligned}
H^1_\lambda(\tau) &\geqslant \frac{(1-\beta)}{\beta\tau}\int_{\beta^2\tau}^{\beta\tau}\frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt \\
&\geqslant \frac{(1-\beta)}{\beta\tau}\frac{\beta^2\tau}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(\beta^2\tau)^{\frac{1}{p-1}}}(\beta\tau-\beta^2\tau) \\
&= \frac{(1-\beta)^2\beta^2\tau}{\left[(\beta^2\tau)^{p-1}\widehat{F}^1_\tau(\beta^2\tau) + \lambda(\beta^2\tau)^{p-1}\widehat{\zeta}^1_\tau(\beta^2\tau)\right]^{\frac{1}{p-1}}}
\end{aligned} \tag{D.7}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} H^1_\lambda(\tau) &= \frac{(1-\beta)^2}{\left[\widehat{F}^1_\tau(\beta^2\tau)+\lambda\widehat{\zeta}^1_\tau(\beta^2\tau)\right]^{\frac{1}{p-1}}} \\ &= \frac{(1-\beta)^2}{\left[\sup\limits_{t>\beta^2\tau}\dfrac{F^1_\tau(t)}{t^{p-1}}+\lambda\sup\limits_{t>\beta^2\tau}\dfrac{\zeta^1_\tau(t)}{t^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p-1}}} \end{aligned} \tag{D.8}$$

Assim, passando (D.7) ao limite com $\tau\to\infty$, e relembrando (D.2), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\tau\to\infty} H^1_\lambda(\tau) &\geqslant \frac{(1-\beta)^2}{\left[\lim\limits_{\tau\to\infty}\dfrac{f_1(\tau)}{\tau^{p-1}}+\lambda\lim\limits_{\tau\to\infty}\dfrac{g_1(\tau)h_1(\tau)}{\tau^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p-1}}} \\ &= \frac{(1-\beta)^2}{[f^1_\infty+\lambda(gh)^1_\infty]^{\frac{1}{p-1}}}. \end{aligned} \tag{D.9}$$

Por outro lado, novamente pelas Afirmações 3.2.2 (3) e 3.2.1 (1), ou seja, pela monotonicidade dos quocientes $\dfrac{t}{J^1_{\lambda,\tau}(t)}$ e $\dfrac{t}{[\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)]^{\frac{1}{p-1}}}$, temos que

$$\begin{aligned} H^1_\lambda(\tau) &\leqslant \frac{1}{\tau}\frac{\tau}{J^1_{\lambda,\tau}(\tau)}\tau = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt \\ &\leqslant \frac{1}{\tau}\frac{\tau}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(\tau)^{\frac{1}{p-1}}}\tau \\ &= \frac{\tau}{\tau\left[\sup\limits_{t>\tau}\dfrac{F^1_\tau(t)}{t^{p-1}}+\lambda\sup\limits_{t>\tau}\dfrac{\zeta^1_\tau(t)}{t^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p-1}}} \end{aligned} \tag{D.10}$$

Assim, passando (D.10) ao limite com $\tau\to\infty$, segue

$$\lim_{\tau\to\infty} H^1_\lambda(\tau)\leqslant \frac{1}{[f^1_\infty+\lambda(gh)^1_\infty]^{\frac{1}{p-1}}}. \tag{D.11}$$

Portanto, por (D.9) e (D.11), fazendo $\beta\to 0$, concluímos

$$\lim_{\tau\to\infty} H^1_\lambda(\tau)= \frac{1}{[f^1_\infty+\lambda(gh)^1_\infty]^{\frac{1}{p-1}}}.$$

2) $\lim\limits_{\tau\to 0} H^1_\lambda(\tau)=\dfrac{1}{[f^1_0+\lambda(gh)^1_0]^{\frac{1}{p-1}}}$

De fato, dado $\beta \in (0,1)$, por (D.7), temos que

$$
\begin{aligned}
H^1_\lambda(\tau) &\geqslant \frac{(1-\beta)^2}{\left[\sup\limits_{t>\beta^2\tau} \frac{F^1_\tau(t)}{t^{p-1}} + \lambda \sup\limits_{t>\beta^2\tau} \frac{\zeta^1_\tau(t)}{t^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p-1}}} \\
&= \frac{(1-\beta)^2}{\left[\sup\limits_{\beta^2\tau<t\leqslant\tau} \frac{f_1(t)}{t^{p-1}} + \lambda \sup\limits_{\beta^2\tau<t\leqslant\tau} \frac{g_1(t)h_1(\tau)}{t^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p-1}}}.
\end{aligned} \tag{D.12}
$$

Assim, passando (D.12) ao limite com $\tau \to 0$, obtemos

$$
\lim_{\tau\to 0} \geqslant \frac{(1-\beta)^2}{[f^1_0 + \lambda(gh)^1_0]^{\frac{1}{p-1}}}. \tag{D.13}
$$

Novamente usando a demonstração anterior, desigualdade (D.10),

$$
\begin{aligned}
H^1_\lambda(\tau) &\leqslant \frac{1}{\left[\sup\limits_{t>\tau} \frac{f_1(t)}{t^{p-1}} + \lambda \sup\limits_{t>\tau} \frac{g_1(t)h_1(\tau)}{t^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p-1}}} \\
&= \frac{1}{\left[\sup\limits_{\tau<t\leqslant\tau} \frac{f_1(t)}{t^{p-1}} + \lambda \sup\limits_{\tau<t\leqslant\tau} \frac{g_1(t)h_1(\tau)}{t^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p-1}}},
\end{aligned} \tag{D.14}
$$

consequentemente, fazendo $\tau \to 0$, obtemos,

$$
\lim_{\tau\to 0} H^1_\lambda(\tau) \leqslant \frac{(1-\beta)^2}{[f^1_0 + \lambda(gh)^1_0]^{\frac{1}{p-1}}}. \tag{D.15}
$$

Portanto, fazendo $\beta \to 0$, o resultado segue de (D.14) e (D.15).

3) $H^1_\lambda(\tau)$ é decrescente em $\lambda \geqslant 0$, para cada $\tau > 0$.

De fato, dado $\lambda_1 < \lambda_2$, da definição de $\Gamma^1_{\lambda,\tau}$, a saber (3.8), temos que

$$
\Gamma^1_{\lambda_1,\tau}(t) < \Gamma^1_{\lambda_2,\tau}(t), \qquad \text{para cada } t > 0,
$$

consequentemente,

$$
J^1_{\lambda_1,\tau}(s) = \frac{s^2}{\displaystyle\int_0^s \frac{t}{\Gamma^1_{\lambda_1,\tau}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt} < \frac{s^2}{\displaystyle\int_0^s \frac{t}{\Gamma^1_{\lambda_2,\tau}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt} = J^1_{\lambda_2,\tau}(s),
$$

assim,

$$
H^1_{\lambda_1}(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{t}{J^1_{\lambda_1,\tau}(t)}dt > \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{t}{J^1_{\lambda_2,\tau}(t)}dt = H^1_{\lambda_2}(\tau), \qquad \text{para cada } \tau > 0.
$$

4) $H_\lambda^1(\tau) \xrightarrow{\lambda\to 0} H_0^1(\tau)$, para cada $\tau > 0$.

Observe que,

$$\frac{t}{[\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)]^{\frac{1}{p-1}}} = \left[\frac{1}{\widehat{F}^1_\tau(t) + \lambda\widehat{\zeta}^1_\tau(t)}\right]^{\frac{1}{p-1}} \xrightarrow{\lambda\to 0} \left[\frac{1}{\widehat{F}^1_\tau(t)}\right]^{\frac{1}{p-1}} = \frac{t}{[\Gamma^1_{0,0,\tau}(t)]^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Logo,

$$J^1_{\lambda,\tau}(t) \xrightarrow{\lambda\to 0} J^1_{0,0,\tau}(t),$$

consequentemente pela definição de H_λ^1 temos,

$$H_\lambda^1(\tau) \xrightarrow{\lambda\to 0} H_0^1(\tau).$$

Demonstração da Afirmação 3.2.4

1) P_λ^1 é não-crescente em λ.

Seja $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$. Então, pela denifição das funções $\Gamma^1_{\lambda,\tau}$, $J^1_{\lambda,\tau}$ e P^1_λ, dadas em (3.8), (3.9) e (3.10), respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} \frac{t}{\Gamma^1_{\lambda_1,\overline{\tau}}(t)^{\frac{1}{p-1}}} &= \left[\frac{1}{\widehat{F}^1_{\overline{\tau}}(t) + \lambda_1\widehat{\zeta}^1_{\overline{\tau}}(t)}\right]^{\frac{1}{p-1}} \\ &\geqslant \left[\frac{1}{\widehat{F}^1_{\overline{\tau}}(t) + \lambda_2\widehat{\zeta}^1_{\overline{\tau}}(t)}\right]^{\frac{1}{p-1}} = \frac{t}{\Gamma^1_{\lambda_2,\overline{\tau}}(t)}, \end{aligned}$$

assim,

$$\int_0^s \frac{t}{\Gamma^1_{\lambda_1,\overline{\tau}}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt \geqslant \int_0^s \frac{t}{\Gamma^1_{\lambda_2,\overline{\tau}}(t)}dt,$$

ou seja,

$$J^1_{\lambda_1,\overline{\tau}}(s) \leqslant J^1_{\lambda_2,\overline{\tau}}(s).$$

Portanto,

$$P^1_{\lambda_1}(s) \geqslant P^1_{\lambda_2}(s).$$

2) e 3) $[0, \|w_1\|_{L^\infty(\Omega)}] \subset Im(P_\lambda^1)$ e $P^1_\lambda \in C^2((0,\infty))$ é não-decrescente em $s > 0$.

Observe que, para $s > 0$,

$$(P^1_\lambda)'(s) = \frac{s}{\overline{\tau}J^1_{\lambda,\overline{\tau}}(s)} > 0,$$

logo, $P^1_\lambda(s)$ é não-decrescente em $s > 0$.

Além disso, temos que

$$(P_\lambda^1)''(s)=\frac{\overline{\tau}J^1_{\lambda,\overline{\tau}}(s)-s\overline{\tau}(J^1_{\lambda,\overline{\tau}}(s))'}{(\overline{\tau}J^1_{\lambda,\overline{\tau}}(s))^2}, \tag{D.16}$$

consequentemente, da Afirmação 3.2.2 (1), segue que $P_\lambda^1\in C^2((0,\infty))$.

Note ainda que,

$$P_\lambda^1(0)=0 \quad \text{e} \quad P_\lambda^1(\overline{\tau})>\|w_1\|_\infty,$$

daí, como P_λ^1 é contínua, temos que $[0,\|w_1\|_\infty]\subset Im(P_\lambda^1)$.

4), 5) e 6) $\psi_1\in C^2(Im(P_\lambda^1)\ \{0\},(0,\infty))$ é não-decrescente em $s>0$ e satisfaz $\psi_1^{'}(s)=\dfrac{\overline{\tau}J^1_{\lambda,\overline{\tau}}(\psi_1(s))}{\psi_1(s)}$, $\psi_1^{''}(s)\le 0$.

Temos que,

$$s=P_\lambda^1(\psi_1(s))=\frac{1}{\overline{\tau}}\int_0^{\psi_1(s)}\frac{t}{J^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)}dt. \tag{D.17}$$

Assim, derivando (D.17) obtemos

$$1=\frac{1}{\overline{\tau}}\frac{\psi_1(s)}{J^1_{\lambda,\overline{\tau}}(\psi_1(s))}\psi_1^{'}(s),$$

ou seja,

$$\psi_1^{'}(s)=\frac{\overline{\tau}J^1_{\lambda,\overline{\tau}}(\psi_1(s))}{\psi_1(s)}. \tag{D.18}$$

E derivando (D.18) temos,

$$\begin{aligned}
\psi_1^{''}(s) &= \frac{\overline{\tau}(J^1_{\lambda,\overline{\tau}})'(\psi_1(s))\psi_1^{'}s\psi_1(s)-\overline{\tau}J^1_{\lambda,\overline{\tau}}(\psi_1(s))\psi_1^{'}s}{(\psi_1(s))^2}\\
&= \frac{\overline{\tau}\psi_1^{'}s}{(\psi_1(s))^2}\left[(J^1_{\lambda,\overline{\tau}})'(\psi_1(s))\psi_1(s)-J^1_{\lambda,\overline{\tau}}(\psi_1(s))\right]\\
&= \frac{\overline{\tau}\psi_1^{'}s}{(\psi_1(s))^2}\left[\frac{2(\psi_1(s))^2\displaystyle\int_0^{\psi_1(s)}\frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt-\frac{(\psi_1(s))^4}{\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(\psi_1(s))^{\frac{1}{p-1}}}}{\left(\displaystyle\int_0^{\psi_1(s)}\frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt\right)^2}-\right.\\
&\qquad \left.-\frac{(\psi_1(s))^2}{\displaystyle\int_0^{\psi_1(s)}\frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt}\right]
\end{aligned}$$

consequentemente,

$$\psi_1''(s) = \left[\frac{\overline{\tau}\psi_1' s}{(\psi_1(s))^2}\right]\left[\frac{\psi_1(s)}{\displaystyle\int_0^{\psi_1(s)} \frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt}\right]^2 \left[2\int_0^{\psi_1(s)} \frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt - \right.$$

$$\left. -\frac{(\psi_1(s))^2}{\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(\psi_1(s))^{\frac{1}{p-1}}} - \int_0^{\psi_1(s)} \frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt\right].$$

Logo,

$$\psi_1''(s) = \frac{\overline{\tau}\psi_1' s}{\left(\displaystyle\int_0^{\psi_1(s)} \frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt\right)^2}\left[\int_0^{\psi_1(s)} \frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt - \frac{(\psi_1(s))^2}{\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(\psi_1(s))^{\frac{1}{p-1}}}\right]. \tag{D.19}$$

Assim, como $\dfrac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\tau}(t)^{\frac{1}{p-1}}}$ é não-decrescente, temos que

$$\psi_1''(s) \leqslant \frac{\overline{\tau}\psi_1' s}{\left(\displaystyle\int_0^{\psi_1(s)} \frac{t}{\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)^{\frac{1}{p-1}}}dt\right)^2}\left[\frac{(\psi_1(s))^2}{\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(\psi_1(s))^{\frac{1}{p-1}}} - \frac{(\psi_1(s))^2}{\Gamma^1_{\lambda,\overline{\tau}}(\psi_1(s))^{\frac{1}{p-1}}}\right] = 0,$$

ou seja,

$$\psi_1''(s) \leqslant 0.$$

Além disso, desde que as funções envolvidas em (D.18) e (D.19) sejam contínuas, temos que $\psi_1 \in C^2(Im(P^1_\lambda) \setminus \{0\}, (0, \infty))$.

E, por (D.18), $\psi_1'(s) > 0$, consequentemente, ψ_1 é não-decrescente.

Demonstração da Afirmação 3.2.5

$$w_1\psi_1'(w_1) \leqslant \psi_1(w_1)$$

Mostraremos primeiramente que,

$$\overline{\tau}P^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)\frac{J^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)}{t} \leqslant t, \quad \forall t > 0. \tag{D.20}$$

De fato, usando a Afirmação 3.2.2-(3), temos

$$
\begin{aligned}
\overline{\tau} P^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)\frac{J^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)}{t} &= \overline{\tau}\left(\frac{1}{\overline{\tau}}\int_0^t \frac{J^1_{\lambda,\overline{\tau}}(s)}{s}ds\right)\frac{J^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)}{t} \\
&\leqslant \frac{t}{J^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)} t \frac{J^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)}{t} = t.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\psi_1'(P^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)) = \frac{\overline{\tau} J^1_{\lambda,\overline{\tau}}(\psi_1(P^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)))}{\psi_1(P^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t))} = \frac{\overline{\tau} J^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)}{t}. \tag{D.21}
$$

Logo, multiplicando (D.21) por $P^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)$ e usando (D.20) temos

$$
P^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)\psi_1'(P^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)) \leqslant t = \psi_1(P^1_{\lambda,\overline{\tau}}(t)), \qquad \forall t > 0. \tag{D.22}
$$

Pela Afirmação 3.2.4 - (2), $w_1(x) \in Im(P^1_\lambda)$, $\forall x \in \overline{\omega}$, ou seja, dado $x \in \overline{\Omega}$, $\exists t_x > 0$ tal que $P^1_\lambda(t_x) = w_1(x)$.

Logo, por (D.22),

$$
w_1\psi_1'(w_1) \leqslant \psi_1(w_1), \quad \overline{\Omega}.
$$

Demonstração da Afirmação 3.2.6

$$
[\psi_1(w_1)]^{p-1}\,\phi \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)
$$

De fato, como $w_1 \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $w_1 > 0$, Ω e $w_1 = 0$, $\partial\Omega$ segue que

$$
0 \leqslant w_1(x) \leqslant \|w_1\|_\infty, \qquad \text{para cada } x \in \overline{\Omega}. \tag{D.23}
$$

Além disso, como $\psi_1 \in C^2(Im(P^1_\lambda)\setminus\{0\})$ e $[0, \|w_1\|] \subset Im(P^1_\lambda$, segue que ψ_1' é contínua no compacto $[0, \|w_1\|]$, logo existe $C_1 > 0$ constante tal que

$$
|\psi_1'(t)| \leqslant C_1, \quad \forall t \in [0, \|w_1\|]\,. \tag{D.24}
$$

Assim, dado $x \in \overline{\Omega}$, por (D.23) e (D.24) temos que

$$
|\psi_1'(t)|^{p-1} \leqslant C_1^{p-1},
$$

consequentemente,

$$
[\psi_1'(w_1)]^{p-1}\phi \in L^\infty(\Omega).
$$

Além disso,

$$\bigtriangledown(\psi_1'(w_1)^{p-1}\phi) = \bigtriangledown(\psi_1'(w_1)^{p-1})\phi + [\psi_1'(w_1)^{p-1}] \bigtriangledown \phi.$$

Observe que usando o raciocínio anterior, para concluirmos a afirmação resta mostrar que $\bigtriangledown(\psi_1'(w_1)^{p-1})\phi \in L^p(\Omega)$. Assim, note que

$$\phi \bigtriangledown (\psi_1'(w_1)^{p-1}) = \phi(p-1)\psi_1'(w_1)^{p-2}\psi_1''(w_1)\nabla w_1. \tag{D.25}$$

Temos duas situações a considerar,

1°) $p \geqslant 2$

Pelo argumento anterior, temos que $\phi(p-1)\psi_1'(w_1)^{p-2}\psi_1''(w_1) \in L^\infty(\Omega)$.

Assim, como $\nabla w_1 \in L^p(\Omega)$ segue que

$$\phi(p-1)\psi_1'(w_1)^{p-2}\psi_1''(w_1)\nabla w_1 \in L^p(\Omega).$$

2°) $1 < p < 2$

Pela continuidade de ψ_1' em $[0, \|w_1\|]$ temos que, $\exists C_2 > 0$ tal que

$$|\psi_1'(t)| > C_2, \quad \text{em } t \in [0, \|w_1\|]\,,$$

consequentemente,

$$|\psi_1'(w_1)| > C_2, \qquad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

De forma análoga, como $\psi_1''(t)$ é contínua em $[0, \|w_1\|]$, existe $C_3 > 0$ tal que

$$|\psi_1''(t)| > C_3, \quad \text{em } t \in [0, \|w_1\|]\,,$$

donde

$$|\psi_1''(w_1)| > C_2, \qquad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Logo, $\phi \bigtriangledown (\psi_1'(w_1)^{p-1}) \in L^p(\Omega)$.

Referências Bibliográficas

[1] G.A. Afrouzi and S.H. Rasouli. A remark on the existence of multiple solutions to a multiparameter nonlinear elliptic system. *Nonlinear Anal.*, 71(1-2):445–455, 2009.

[2] W. Allegretto and Y. Huang. A Picone's identity for the p-Laplacian and applications. *Nonlinear Anal.*, 32(7):819–830, 1998.

[3] A. Ambrosetti and A. Malchiodi. *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems.* Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[4] A Ambrosetti and P. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal Funct. Anal.*, 14:349–381, 1973.

[5] S. S. Antman. *Nonlinear problems of elasticity*, volume Applied Mathematical Sciences, 107. New York, second edition, 2005.

[6] M. Bouchekif and Y. Nasri. On nonhomogeneous elliptic system with changing sign data. *Dynamical Systems and Applications, Proceedings*, 5:166–177, 2004.

[7] M. Bouchekif and Y. Nasri. On a nonhomogeneous elliptic system with changing sign data. *Nonlinear Anal.*, 65(7):1476–1487, 2006.

[8] M. Bouchekif, H. Serag, and F. de Thélin. On maximum principle and existence of solutions for some nonlinear elliptic systems. *Rev. Mat. Apl.*, 16(1), 1995.

[9] D. Cao and P. Han. Multiple positive solutions of nonhomogeneous elliptic systems with strongly indefinite structure and critical Sobolev exponents. *J. Math. Anal. Appl.*, 289(1), 2004.

[10] A. Cañada, P. Drábek, and J.L. Gámez. Existence of positive solutions for some problems with nonlinear diffusion. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(10):4231–4249, 1997.

[11] A. Cañada and J.L. Gámez. Some new applications of the method of lower and upper solutions to elliptic problems. *Appl. Math. Lett.*, 6(6), 1993.

[12] A. Cañada, P. Magal, and J.A. Montero. Optimal control of harvesting in a nonlinear elliptic system arising from population dynamics. *J. Math. Anal. Appl.*, 254(2), 2001.

[13] Ph. Clément, D.G. de Figueiredo, and E. Mitidieri. Positive solutions of semilinear elliptic systems. *Comm. Partial Differential Equations*, 17(5-6):923–940, 1992.

[14] D.G. Costa. On a class of elliptic systems in RN. *Electron. J. of Differential Equations*, 1994(07):1–14, 1994.

[15] M. Cuesta. Eigenvalue problems for the p-Laplacian with indefinite weight. *Electron. J. Differential Equations*, 33:1–9, 2001.

[16] M. Cuesta and H. Ramos Quoirin. A weighted eigenvalue problem for the p-Laplacian plus a potential. *Nonlinear Differential Equations Appl.*, 16(4):469–491, 2009.

[17] Q. Dai and L. Peng. Necessary and sufficient conditions for the existence of nonnegative solutions of inhomogeneous p-Laplace equation. *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.*, 27(1):34–56, 2007.

[18] L. Damascelli. Comparison theorems for some quasilinear degenerate elliptic operators and applications to symmetry and monotonicity results. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 15(4):493–516, 1998.

[19] L. Damascelli, F. Gladiali, and F. Pacella. Symmetry results for cooperative elliptic systems in unbounded domains. *Preprint arXiv:1212.4647*, pages 1–28, 2012.

[20] D.G. de Figueiredo. Nonlinear elliptic systems. *An. Acad. Brasil. Ciênc.*, 16:1–16, 1995.

[21] D.G. de Figueiredo and B. Sirakov. Liouville type theorems, monotonicity results and a priori bounds for positive solutions of elliptic systems. *Math. Ann.*, 333(2), 2005.

[22] L. del Pezzo and J. Bonder. An optimization problem for the first eigenvalue of the p-Laplacian plus a potencial. *Commun. Partial Differential Equations*, 5(4):675–690, 2006.

[23] L. del Pezzo and J. Bonder. An optimization problem for the first weighted eigenvalue problem plus a potencial. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 138(10):3551–3567, 2010.

[24] A. El Khalil, S. El Manouni, and M. Ouanan. On some nonlinear elliptic problems for p-Laplacian in RN. *Nonlinear Differential Equations Appl.*, 15(3):295–308, 2008.

[25] S. El Manouni and A. Touzani. On some nonlinear elliptic systems with coercive perturbations in RN. *Rev. Mat. Complut.*, 16(2):483–494, 2003.

[26] J.R. Esteban and J.L. Vázquez. On the equation of turbulent filtration in one-dimensional porous media. *Nonlinear Anal.*, 10(11):1303–1325, 1986.

[27] J. Fleckinger-Pellé, J.P. Gossez, and F. de Thélin. Antimaximum principle in RN: local versus global. *J. Differential Equations*, 196(1), 2004.

[28] J. Fleckinger-Pellé, J.P. Gossez, and F. de Thélin. Principal eigenvalue in an unbounded domain and a weighted Poincaré inequality. *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, 66:283–296, 2006.

[29] J.V. Gonçalves, M.C. Rezende, and C.A. Santos. Positive solutions for a mixed and singular quasilinear problem. *Nonlinear Anal.*, 74(1):132–140, 2011.

[30] M. Guedda and L. Véron. Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Nonlinear Anal.*, 13(8):879–902, 1989.

[31] I.A. Guerra. Solutions of an elliptic system with a nearly critical exponent. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 25(1):181–200, 2008.

[32] Z. Guo. Existence of the positive radial solutions for certain of quasilinear elliptic systems. *Chin. Ann. Math.*, 17(5):573–582, 1996.

[33] J. Gárcia-Melián and J. Sabina de Lis. Maximum and comparison principles for operators involving the p-Laplacian. *J. Math. Anal. Appl.*, 218(1), 1998.

[34] D.D. Hai. On a class of quasilinear systems with sign-changing nonlinearities. *J. Math. Anal. Appl.*, 334(2):965–976, 2007.

[35] P. Han. Multiple positive solutions of nonhomogeneous elliptic systems involving critical Sobolev exponents. *Nonlinear Anal.*, 64(4), 2006.

[36] P. Han and Z. Liu. Multiple positive solutions of strongly indefinite systems with critical Sobolev exponents and data that change sign. *Nonlinear Anal.*, 58(1-2):229–243, 2004.

[37] M.A. Herrero and J.L. Vázquez. On the propagation properties of a nonlinear degenerate parabolic equation. *Comm. Partial Differential Equations*, 7(12):1381–1402, 1982.

[38] Tsing-San Hsu. Multiple positive solutions for semilinear elliptic equations with sign-changing weight functions in RN. *Abstr. Appl. Anal.*, 2011:1–16, 2011.

[39] J. Hulshof and R. van der Vorst. Differential systems with strongly indefinite variational structure. *J. Funct. Anal.*, 114(1), 1993.

[40] T. Kura. The weak supersolution-subsolution method for second order quasilinear elliptic equations. *Hiroshima Math. J.*, 19(1), 1989.

[41] A.C. Lazer and P.J. McKenna. On a problem of Bieberbach and Rademacher. *Nonlinear Anal.*, 21(5):327–335, 1993.

[42] L. Leadi and A. Yechoui. Principal eigenvalue in an unbounded domain with indefinite potential. *Nonlinear Differential Equations Appl.*, 17(4), 2010.

[43] E.K. Lee, R. Shivaji, and J. Ye. Classes of infinite semipositone systems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.*, A 139(4):853–865, 2009.

[44] M. C. Leon. Existence results for quasilinear problems via ordered sub- and supersolutions. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math*, 6(4):591–608, 1997.

[45] G.M. Lieberman. Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations. *Nonlinear Anal.*, 12(11):1203–1219, 1988.

[46] Huei-li Lin. Multiple positive solutions for semilinear elliptic systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 391(1):107–118, 2012.

[47] Q. Miao and Z. Yang. On the existence of multiple positive entire solutions for a quasilinear elliptic systems. *Appl. Math. Comput.*, 198(1):12–23, 2008.

[48] E. Mitidieri. Non-existence of positive solutions of semilinear systems in RN. *Differential Integral Equations*, 9:465–480, 1996.

[49] C.V. Pao. On nonlinear reaction-diffusion systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 87(1):165–198, 1982.

[50] L.A. Peletier and R.C. Van der Vorst. Existence and nonexistence of positive solutions of nonlinear elliptic systems and the biharmonic equation. *Differential Integral Equations*, 5(4):747–767, 1992.

[51] C.A. Santos. Non-existence and existence of entire solutions for a quasi-linear problem with singular and super-linear terms. *Nonlinear Anal.*, 72(9-10), 2010.

[52] J. Simon. Régularité de la solution d'une équation non linéaire dans RN. In Springer, editor, *Lecture Notes in Math. 665*, Berlin, 1978.

[53] N.M. Stavrakakis and N.B. Zographopoulos. Multiplicity and regularity results for some quasilinear elliptic systems on RN. *Nonlinear Anal.*, 50(1):55–69, 2002.

[54] H. Toan and Q. Ngo. Existence of positive solution for system of quasilinear elliptic systems on a bounded domain. *World Journal of Modelling and Simulation*, 5(3):211–215, 2009.

[55] P. Tolksdorf. On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points. *Comm. Partial Differential Equations*, 8(7):773–817, 1983.

[56] M. Wu and Z. Yang. Existence of boundary blow-up solutions for a class of quasilinear elliptic systems with critical case. *Appl. Math. Comput.*, 198(2), 2008.

[57] Tsung-Fang Wu. The Nehari manifold for a semilinear elliptic system involving sign-changing weight functions. *Nonlinear Anal.*, 68(6):1733–1745, 2008.

[58] Z Yang. Existence of entire explosive positive radial solutions for a class of quasilinear elliptic systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 288(2):768–783, 2003.

[59] H. Yin and Z. Yang. New results on the existence of bounded positive entire solutions for quasilinear elliptic systems. *Appl. Math. Comput.*, 190(1):441–448, 2007.

[60] H. Yin and Z. Yang. Existence and non-existence of entire positive solutions for quasilinear systems with singular and super-linear terms. *Differ. Equ. Appl.*, 2(2):241–249, 2010.