

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**MODELOS ELASTO-PLÁSTICOS E SUA INFLUÊNCIA
NO PROCESSO DE DIMENSIONAMENTO DE
COMPONENTES MECÂNICOS**

CAROLINA FERNANDA BURBANO SANDOVAL

ORIENTADOR: LUCIVAL MALCHER

MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO: ENM.DM - 211/2014

BRASÍLIA/DF: FEVEREIRO – 2014

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**MODELOS ELASTO-PLÁSTICOS E SUA INFLUÊNCIA NO
PROCESSO DE DIMENSIONAMENTO DE COMPONENTES
MECÂNICOS**

CAROLINA FERNANDA BURBANO SANDOVAL

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA
FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE
BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
MECÂNICAS.**

APROVADA POR:

Prof. Lucival Malcher, Dr. (ENM – UnB)
(Orientador)

Prof. Francisco Evangelista Junior, Dr. (ENC-UnB)
(Examinador Externo ao Programa)

Prof. Jorge Luiz Almeida Ferreira, Dr. (ENM – UnB)
(Examinador Interno ao Programa)

BRASÍLIA/DF, FEVEREIRO DE 2014.

FICHA CATALOGRÁFICA

CAROLINA FERNANDA BURBANO SANDOVAL

Modelos Elasto- Plásticos e a sua Influência no Processo de Dimensionamento de Componentes Mecânicos.

xvi. 90p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2014).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Critérios de Projeto 2. Dimensionamento de Componentes Mecânicos

3. Influencia do Ângulo de Lode 4. Influencia da Pressão Hidrostática

5. Estrutura de Proteção Contra Capotagem

I. ENM/FT(ENM)

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

B. Sandoval, C. (2013). Modelos Elasto-plásticos e a sua Influência no Processo de Dimensionamento de Componentes Mecânicos. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM.DM - 211/2014, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 88p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Carolina Fernanda Burbano Sandoval.

TÍTULO: Modelos Elasto-plásticos e a sua Influencia no Processo de Dimensionamento de Componentes Mecânicos.

GRAU: Mestre ANO: 2014

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópis somente para propósito acadêmico e científico. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor

Carolina Fernanda Burbano Sandoval
Quadra 4 Lt 7 Conjunto C, Setor Sul.
72.415-203. Gama / DF
caroburbano2010@gmail.com

Dedico este trabalho a meus Pais, Irmãs e Avó.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior ‘CAPES’ pelo apoio recebido para o desenvolvimento do trabalho.

Agradeço ao Prof. Dr. Lucival Malcher pela ajuda na aprendizagem de conhecimentos e pela orientação dadas no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço especialmente a minha avó e meus pais por me apoiar na realização dos meus sonhos, por sua confiança e amor incondicional. A minhas irmãs por ser o impulso para avançar na vida. A meu noivo por seu apoio, compreensão e amor.

RESUMO

Neste trabalho serão analisados os critérios tradicionais de projeto, bem como, critérios mais recentes, com intuito de se verificar a influência dos mesmos no processo de dimensionamento de componentes mecânicos, como uma estrutura de proteção veicular do tipo Roll Over Protection Structure-ROPS. Como primeira parte do trabalho, será feita uma revisão bibliográfica dos critérios de projeto de von Mises, Tresca, Mohr-Coulomb e Bai & Wierzbichi, bem como, uma análise dos principais tipos de estrutura de proteção veicular do tipo ROPS, existentes no mercado. Em uma segunda etapa, serão então implementados numericamente os quatro modelos constitutivos destacados acima em um programa acadêmico de elementos finitos desenvolvido em linguagem FORTRAN 90, onde o método da decomposição do operador e a integração implícita de Euler serão aplicados. Posteriormente, será escolhido um protótipo de estrutura ROPS com o intuito de se estudar a influencia dos modelos constitutivos no dimensionamento da estrutura, a modelagem em CAD do componente é realizada em ferramenta comercial GID-11 onde são também geradas as malhas de elemento finitos e bem como a análise do pos-procesado de resultados. Como etapa final, serão analisados dados como a distribuição da tensão equivalente ao longo da estrutura, bem como, o nível de deformação plástica equivalente e dados elasto-plásticos como o nível de triaxialidade e o ângulo de Lode normalizado. Possíveis mudanças de forma, dimensões físicas e mudanças de materiais estruturais serão também alvo de análise.

Palavras chave: critérios de projeto, dimensionamento de componentes mecânicos, estrutura de proteção contra capotagem, influencia da pressão hidrostática, influencia do ângulo de Lode.

ABSTRACT

In this work, it is analyzed the traditional and advanced criteria of project, in order to check their influence on the process of design of mechanical components, such as, the roll over protection structure-ROPS. In the first part of the work, a bibliographic review of the project criteria of von Mises, Tresca, Mohr-Coulomb and Bai & Wierzbicki is done, as well as, on the main types of ROPS, developed in the market. In a second step, numerical algorithms are suggested for the constitutive models under study and implemented in an academic finite element framework developed in FORTRAN 90 language, where the operator split methodology and the backward Euler scheme are applied. Furthermore, a roll over protection structure is taken, in order to performing the numerical simulations and analyzing the influence of important elasto-plastic parameters on the mechanical behavior of materials and the design of the structure. The CAD modeling component is held in GID-11 commercial tool which are also generated finite element meshes as well as the analysis and the post-processed results. With a final step, the distribution data as of the equivalent stress along the structure will be analyzed as well the level of equivalent plastic strain and elastic-plastic parameters, such as the level of triaxiality and the normalized Lode angle. Possible changes in the form, physical dimensions and changes in structural materials are also being analyzed.

Key Words: Project Criterion, Design of Mechanical Components, Rollover Protection Structure, Influence of Hydrostatic Pressure, Influence of Lode Angle.

SUMÁRIO

1.	<i>INTRODUÇÃO</i>	1
1.1	<i>CONTEXTUALIZAÇÃO DO ASSUNTO</i>	1
1.2	<i>OBJETIVO DO TRABALHO</i>	4
1.3	<i>ESCOPO DO TRABALHO</i>	5
2.	<i>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</i>	7
2.1	<i>INTRODUÇÃO</i>	7
2.2	<i>MODELOS CONSTITUTIVOS</i>	8
2.3	<i>MODELO ELASTO-PLÁSTICO</i>	8
2.3.1	<i>DEFINIÇÕES PRELIMINARES</i>	8
2.3.2	<i>CRITÉRIO DE ESCOAMENTO</i>	11
2.3.2.1	<i>CRITÉRIO DE VON MISES</i>	12
2.3.2.2	<i>CRITÉRIO DE TRESCA</i>	13
2.3.2.3	<i>CRITÉRIO DE MORH COULOMB</i>	14
2.3.2.4	<i>CRITÉRIO DE BAI E WIERZBICKY</i>	16
2.3.3	<i>LEI DE ENCRUAMENTO DO MATERIAL</i>	18
2.3.3.1	<i>ENDURECIMENTO ISOTRÓPICO</i>	19
2.3.3.2	<i>ENDURECIMENTO CINEMÁTICO</i>	20
2.3.3.3	<i>ENDURECIMENTO MISTO</i>	20
2.3.4	<i>LEI DO FLUXO PLÁSTICO</i>	20
2.4	<i>ESTRUTURAS PROTEÇÃO VEICULAR CONTRA CAPOTAGEM ROPS</i>	22
2.4.1	<i>NÍVEL DE CARGA APLICADA E PONTO DE APLICAÇÃO</i>	24
3.	<i>ESTRATEGIA NUMÉRICA</i>	26

3.1	<i>ALGORITMO DE ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES E VARIÁVEIS INTERNAS.....</i>	27
3.2	<i>OPERADOR TANGENTE CONSISTENTE.....</i>	33
3.3	<i>EQUAÇÕES RESIDUAIS PARA O MODELO DE TRESCA.....</i>	35
3.4	<i>EQUAÇÕES RESIDUAIS PARA O MODELO DE MOHR-COULOMB.....</i>	40
3.5	<i>EQUAÇÕES RESIDUAIS PARA O MODELO DE BAI & WIERZBICKY.....</i>	48
4.	<i>MATERIAIS E METODOS.....</i>	50
4.1	<i>GEOMETRIA E MALHA DE ELEMENTOS FINITOS.....</i>	50
	4.1.1 <i>ESTRUTURA ROPS.....</i>	50
	4.1.2 <i>CORPO CILINDRICO LISO E BORBOLETA.....</i>	52
4.2	<i>PROPRIEDADES MATERIAIS PARA P AÇO FB 70 E AÇO 1045.....</i>	53
4.3	<i>CONDIÇÕES GERAIS PARA SIMULAÇÃO.....</i>	54
5.	<i>RESULTADOS NUMERICOS.....</i>	57
5.1	<i>TESTES INICIAIS.</i>	57
5.2	<i>ESTRUTURA ROPS.....</i>	57
	5.2.1 <i>CARGA VERTICAL.....</i>	58
	5.2.2 <i>CARGA LATERAL</i>	63
	5.2.3 <i>CARGA FRONTAL/LONGITUDINAL</i>	67
5.3	<i>DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....</i>	71
6.	<i>CONCLUSÕES E PROPOSTA DO TRABALHO FUTURO.....</i>	74
6.1	<i>CONCLUSÕES.....</i>	74
6.2	<i>PROPOSTA DO TRABALHO FUTURO.....</i>	75
	<i>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</i>	76
	<i>ANEXOS.....</i>	79

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1. Modelo constitutivo elasto-plástico.....	22
Quadro 3.1. Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas associado ao modelo de von Mises.....	25
Quadro 3.2. Algoritmo para resolução do sistema linear através do método de Newton-Raphson.....	30
Quadro 3.3. Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas associadas ao modelo de Tresca.....	36
Quadro 3.4. Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas associadas ao modelo de Tresca para os cantos esquerdo e direito.....	37
Quadro 3.5. Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas associadas ao modelo de Mohr-Coulomb.....	42
Quadro 3.6 Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas associadas ao modelo de Mohr Coulomb para os cantos esquerdo e direito.....	43
Quadro 3.7. Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas associado ao modelo de Bai & Wierzbicki.....	48

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1. Níveis de carga para dimensionamento de teste de um ROPS.....	25
Tabela 4.1 Propriedades materiais para o aço FB 70.....	53
Tabela 4.2. Composição química aço FB 70. Fonte: catálogo V&M, 2012.....	53
Tabela 4.3. Propriedades materiais para o aço 1045. Fonte: Malcher, 2011.....	53
Tabela 5.1 Resumo dos níveis máximos de Deformação Plástica Equivalente, Triaxialidade e Tensão equivalente.....	71
Tabela 5.2 Resumo das Caraterísticas dos quatro Modelos Constitutivos Usados.....	73

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Exemplos de aplicação sobre o uso de modelos constitutivos para descrever o comportamento de estruturas.....	2
Figura 2.1. Definição do ângulo de Lode, dentro do espaço π (Xue, 2007).....	10
Figura 2.2. (a) Superfície de escoamento de von Mises. (b) Representação através do plano desviatório ou plano π . Fonte: Souza Neto et al (2008).....	13
Figura 2.3. (a) Superfície de escoamento de Tresca. (b) Representação através do plano desviatório ou plano π . Fonte: Souza Neto et al(2008).....	14
Figura 2.4. Representação no círculo de Mohr do critério de Mohr-Coulomb. Fonte: Souza Neto et al (2008).....	15
Figura 2.5. (a) Superfície de escoamento para o critério de Mohr-Coulomb.(b) Representação através do plano desviatório ou plano π . Fonte: Souza Neto et al (2008).....	16
Figura 2.6. Superfície de escoamento para o modelo de Bai. Fonte: Bai (2008).....	18
Figura 2.7. Comparação entre as superfícies de von Mises, Tresca e Bai. Fonte: Bai (2008).....	17
Figura 2.8. Representação do comportamento perfeitamente plástico de um material. Fonte: Souza Neto et al (2008).....	19
Figura 2.9. Representação do endurecimento isotrópico do material. Fonte: Souza Neto et al (2008).....	19
Figura 2.10. Representação do endurecimento cinemático do material. Fonte: Souza Neto et al (2008).....	20
Figura 2.11. Exemplos de estruturas de proteção veicular contra capotagem. (a) ROPS interno e (b) ROPS externo. Fonte: Vale, 2012.....	23

Figura 2.12. ROPS interno à cabine e seus respectivos pontos de fixação sobre a caminhonete. Fonte: Vale, 2012.....	24
Figura 2.13. Pontos de aplicação das cargas de projeto. Fonte: Vale, 201.....	25
Figura 4.1. Geometria do ROPS interno usado no análises. Fonte: Vale, 2012.....	51
Figura 4.2. Malha de elementos finitos para a estrutura ROPS interna tipo gaiola.....	51
Figura 4.3. (a) Corpo de prova cilíndrico liso e (b) corpo de prova do tipo borboleta....	52
Figura 5.1. Curva de reação para o corpo de prova cilíndrico liso sujeito a tração pura (a) e para o corpo de prova do tipo borboleta sujeito a cisalhamento simples (b).....	56
Figura 5.2. Desenho esquemático do ROPS interno.....	58
Figura 5.3. Contorno da deformação plástica equivalente, considerando uma carga vertical.....	59
Figura 5.4. Contorno do ângulo de Lode, considerando uma carga vertical.....	60
Figura 5.5. Contorno do nível de triaxialidade, considerando uma carga vertical.....	61
Figura 5.6. Contorno do nível de tensão equivalente, considerando uma carga vertical.....	62
Figura 5.7. Contorno da deformação plástica equivalente, considerando uma carga lateral.....	63
Figura 5.8. Contorno do ângulo de Lode, considerando uma carga lateral.....	64
Figura 5.9. Contorno do nível de triaxialidade, considerando uma carga lateral.....	65
Figura 5.10. Contorno do nível de tensão equivalente, considerando uma carga lateral.....	66
Figura 5.11. Contorno do nível de deformação plástica equivalente, considerando uma carga longitudinal.....	67
Figura 5.12. Contorno do ângulo de Lode, considerando uma carga longitudinal.....	67
Figura 5.13. Contorno do nível de triaxialidade, considerando uma carga longitudinal.....	69

Figura 5.14. Contorno do nível de tensão equivalente, considerando uma carga longitudinal.....70

LISTA DE SÍMBOLOS

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$	Taxa de evolução da deformação plástica equivalente
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$.Lei de fluxo plástico
A	Forças termodinâmicas
p_{n+1}	Pressão hidrostática no pseudo-tempo t_{n+1}
p_{n+1}^{trial}	Pressão hidrostática tentativa
\mathbf{S}_{n+1}	Tensor das tensões desviadoras no pseudo-tempo t_{n+1}
\mathbf{S}_{n+1}^{trial}	Tensor das tensões desviadoras tentativa
\mathbb{D}^{ep}	Operador tangente elasto-plástico consistente
\mathbb{D}^e	Matrix de deformação elástica Isotropica
$\dot{\gamma}$	Taxa de evolução do multiplicador plástico
$\bar{\theta}$	Ângulo de Lode normalizado
σ_y	Lei de encruamento do material
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Tensor das deformações elásticas
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}$	Tensor das deformações elásticas tentativa
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$	Tensor das deformações elásticas no pseudo-tempo t_{n+1}
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial}$	Tensor das deformações plásticas tentativa
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$	Tensor das deformações plásticas no pseudo-tempo t_{n+1}
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Tensor das deformações plásticas
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$	Tensor das tensões no pseudo-tempo t_{n+1}
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$	Tensor das tensões tentativo
$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Incremento de deformação Plástica
$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$	Incremento de deformação
$\Delta\boldsymbol{\gamma}$	Incremento de multiplicador plastico

H	Modulo de endurecimento isotrópico
Φ	Função de escoamento do material
E	Modulo de elasticidade
G	Modulo de cisalhamento
K	Modulo Volumétrico
p	Pressão hidrostática
r	Terceiro invariante
I	Tensor identidade de segundo ordem
N	Vetor de Fluxo Plastico
γ	Multiplicador plastico
θ	Ângulo de Lode
ξ	Terceiro invariante normalizado
σ	Tensor das tensões
$J_{2,3}$	Segundo e terceiro invariante do tensor desviador
$I_{1,2,3}$	Primeiro, Segundo e terceiro invariante do tensor de tensões
σ_0	Tensão de escoamento inicial do material
η	Razão de triaxialidade
$\bar{\epsilon}^p$	Variável interna associada ao endurecimento isotrópico
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensões principais
σ_{max}	Tensão principal máxima
σ_{min}	Tensão principal mínima
τ	Tensão cisalhante
c	Tensão de coesão
σ_n	Tensão normal
ϕ	Ângulo de atrito interno

$C_\eta, \eta_0, c_\theta^{ax}, c_\theta^s, m$ Parâmetros materiais.

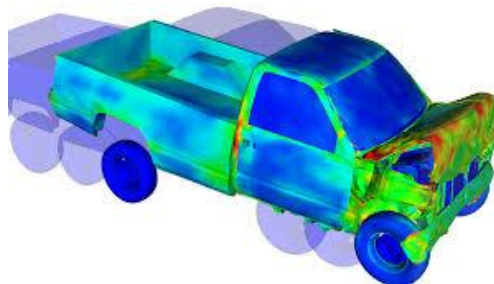
1. INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DO ASSUNTO

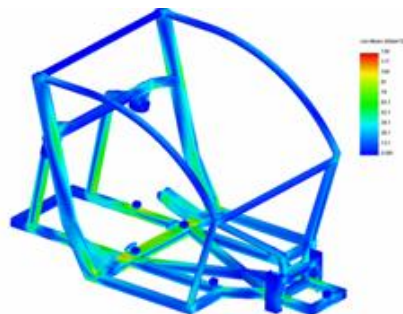
Nas últimas décadas, inúmeros estudos foram desenvolvidos com o objetivo de se determinar da maneira mais realista possível, o comportamento mecânico de materiais aplicado na engenharia (Driemeier, 1999; Bao, 2003; Teng, 2005; Xue, 2007; Bai, 2008, Malcher, 2011, Andrade, 2012, Malcher, 2013). Com a popularização e o aumento da capacidade de processamento dos computadores, a utilização de métodos numéricos para se descrever tal comportamento dos materiais, também ganhou grande espaço tanto no meio acadêmico, como na indústria de uma forma geral (Simo & Hughes, 1998; Souza Neto et al, 2008, Vaz Jr. et al, 2010) . Os métodos dos elementos finitos, dos elementos de contorno, entre outros, são exemplos de abordagens numéricas que aliados ao desenvolvimento de modelos constitutivos, buscam ajudar os engenheiros no desenvolvimento de projetos mecânicos otimizados, com baixo custo e elevada confiabilidade.

Na Figura 1.1 observam-se exemplos de aplicação de métodos numéricos na análise de tensões sobre componentes mecânicos: choque de um automóvel (Figura 1.1.(a)), estrutura Rops (Figura 1.1.(b)), Chassi de pneu de automóvel (Figura 1.1.(c)), pontes temporárias para uso público, industrial e militar (Figura 1.1.(d))

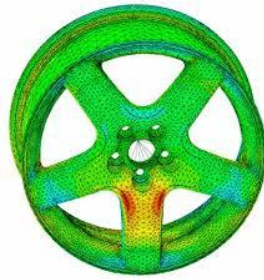
(a)



(b)



(c)



(d)

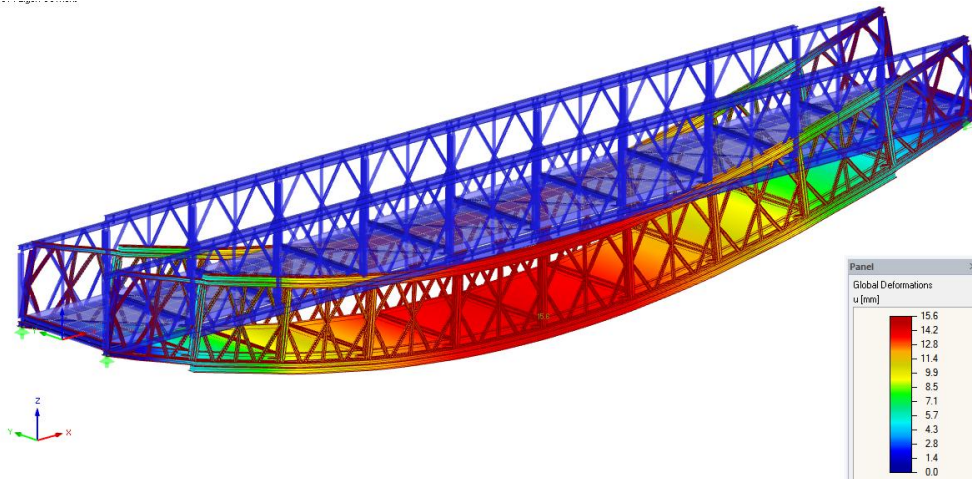


Figura 1.1: Exemplos de aplicação sobre o uso de modelos constitutivos para descrever o comportamento de estruturas. Fonte: Dlubal Engineering Software (2013) e MSC Software Solutions (2013).

No entanto, para se descrever de maneira correta o comportamento mecânico de materiais, é necessário se tomar mão de um conjunto de medidas que irão influenciar diretamente na precisão e qualidade dos resultados numéricos encontrados. A correta seleção do modelo constitutivo é uma das etapas mais importantes deste processo (Souza Neto et al, 2008; De Borst et al, 2012, Malcher et al 2012). Escolher um modelo constitutivo que tenha a capacidade de capturar os efeitos mais importantes e necessários para a descrição do comportamento do material é fundamental, principalmente quando se utiliza o regime plástico do mesmo, dentro dos critérios de projeto. O efeito da velocidade de aplicação da carga, o tipo de encruamento considerado para o material, o efeito da pressão hidrostática, a forma da superfície de escoamento, são alguns dos parâmetros que podem influenciar na escolha do modelo constitutivo. Outro fator de extrema importância, principalmente quando se utilizam os chamados métodos numéricos, é o nível de discretização espacial do sólido (Andrade, 2012). O refinamento da malha, por exemplo, de elementos finitos, tem uma grande influência quantitativa nos resultados numéricos, principalmente quando se adotam modelos locais para o comportamento do material e também quando há a necessidade

de se utilizar a região de amolecimento do material (softening), onde tal influência é mais acentuada.

Outro dado importante é a chamada curva de endurecimento ou encruamento do material, onde sua obtenção está diretamente ligada a ensaios experimentais confiáveis, e a adoção de uma boa estratégia numérica para identificação dos parâmetros materiais que irão descrever seu formato (Stahlschidt, 2010; Vaz Jr. et al, 2010). Nos dias atuais, são utilizadas equações com dois, três quatro ou até mais de dez parâmetros, para se descrever a curva de encruamento de um material metálico. São adotadas também as mais diversas estratégias numéricas para identificação e a otimização de tais parâmetros materiais. Os métodos de identificação de parâmetros mais conhecidos e utilizados são baseados na abordagem do gradiente, como: os métodos univariáveis da seção áurea e o da bissecção, e os métodos multivariáveis como o da máxima descida, o de Newton, o quase-Newton, entre outros. As abordagens evolucionárias, como o método dos algoritmos genéticos, são também bastante aplicadas nas estratégias de identificação de parâmetros elastoplásticos (Stahlschidt, 2010).

Durante o processo de descrição do comportamento mecânico dos materiais, três informações são de vital importância para se obter o correto dimensionamento da estrutura ou componente mecânico: a primeira é a determinação da correta relação entre o campo de tensão e o campo de deformação, a segunda é o deslocamento aplicado necessário para o início da falha do material e a terceira e última é a previsão do potencial local onde a falha irá iniciar (Malcher, 2011:2013). Desta forma, da teoria de modelos constitutivos, nos últimos anos, foram desenvolvidas formulações puramente elastoplásticas como o modelo de de Tresca (1868), o de von Mises (1913), o de Drucker-Prager (1952), o de Mohr-Coulomb (1900), o de Hosford (1972), o de Bai & Wierzbicki (2008), o de Gao (2011) entre outros, e foram desenvolvidas, também, formulações com uma variável interna de dano acoplada ao comportamento do material. Dentro desta segunda abordagem, foram propostos modelos baseados na micromecânica de defeitos, como o modelo de Gurson (1977), o de Gurson-Teevergard-Needleman (1984), o de Xue (2007), o de Nahshon & Hutchinson (2008), o de Malcher et al (2013), entre outros. Baseados na Mecânica do Dano Contínuo, os modelos propostos mais discutidos na literatura são o de Lemaitre (1985:1990), o de Rousselier (2001), o de Andrade Pires (2005), o de Chaboche (2006), o de Malcher (2011), entre outros.

Quando são utilizados modelos com dano para se descrever o comportamento do material e assim obter as três informações vitais para um projeto mecânico, como as

citadas acima, a própria variável interna de dano é responsável por indicar tanto o momento da fratura (nível de dano crítico) e o local potencial onde a mesma irá ocorrer (local de máximo dano), onde esta abordagem é conhecida como “abordagem do dano crítico” (Lemaitre, 1996). Porém, quando se toma mão de modelos puramente elasto-plásticos, a própria formulação constitutiva não possui um parâmetro evidente do nível de degradação do material. Desta forma, nestes casos, pode-se adotar a estratégia de incorporar ao modelo elasto-plástico, os chamados indicadores de dano, que acabam por fornecer informações da falha do material, através de combinações de parâmetros após o processamento do modelo constitutivo (Andrade Pires, 2001; Bao, 2003; Brunig, 2008). Tais indicadores são formulados com base em inúmeras estratégias como: a da deformação plástica equivalente, o do trabalho plástico, o da máxima tensão principal, o da geometria do defeito, entre outros (Andrade Pires, 2001).

1.2 OBJETIVO DO TRABALHO

Com base no contexto dado acima, neste trabalho, busca-se avaliar os principais modelos constitutivos existentes na literatura, que possuem na sua formulação uma evolução da quantidade de efeitos acoplados para se garantir a melhor capacidade preditiva do comportamento mecânico do material e assim, verificar a sua influência no processo de dimensionamento de estruturas e componentes mecânicos. Para isto, procura-se primeiramente fazer uma revisão bibliográfica sobre o assunto, estudando principalmente as características físicas e matemáticas dos diversos modelos constitutivos existentes na literatura, como: o de von Mises (1913) que é baseado na máxima energia de distorção e assim propõe a chamada tensão equivalente determinada de acordo com o segundo invariante do tensor desviador, o de Tresca (1868) que é baseado na máxima tensão cisalhante, o de Mohr Coulomb (1900) que é uma evolução do modelo de Tresca levando em consideração o acoplamento do efeito da pressão hidrostática, e o de Bai & Wierzbicki (2008) que é uma evolução do modelo de von Mises levando em consideração o acoplamento tanto da pressão hidrostática quanto a do terceiro invariante do tensor desviador. Após esta etapa, propõe-se a implementação numérica dos modelos estudados, em uma ferramenta acadêmica de elementos finitos, utilizando para isto, a chamada metodologia da decomposição do operador e o método de integração implícita de Euler (Simo et al, 1999; Souza Neto et al, 2008). As implementações numéricas serão feitas em linguagem FORTRAN 90.

Com a implementação dos diversos modelos em estudo, será feita então, a seleção de uma estrutura mecânica que será utilizada como base para o estudo da influência dos diferentes critérios no dimensionamento estrutural. A estrutura selecionada é uma estrutura de proteção veicular contra capotamento, tecnicamente chamada de Roll Over Protection Structure-ROPS. Para a modelagem em CAD do componente estrutural selecionado, será utilizada a ferramenta comercial GID na sua versão 11. Este mesmo programa será também utilizado para geração de malhas de elementos finitos, bem como, para a análise pós-processada dos resultados numéricos.

Com a análise em pós-processamento dos resultados obtidos através das simulações em elementos finitos, procura-se então observar para cada modelo constitutivo e componente mecânico: a evolução da deformação plástica equivalente em um ponto crítico da estrutura, distribuição e níveis de tensão e deformação ao longo da estrutura, evolução de outros parâmetros elasto-plásticos como o nível de triaxialidade e o ângulo de Lode. Possíveis mudanças de forma, dimensões físicas e mudanças de materiais estruturais serão também objeto de discussão.

1.3 ESCOPO DO TRABALHO

Para se chegar ao objetivo estipulado, este trabalho estará estruturado da seguinte forma: No Capítulo 1 é descrita a contextualização do assunto, mostrando a importância de se selecionar um correto modelo constitutivo para se descrever o comportamento do material da forma mais realística possível e assim dimensionar corretamente uma estrutura mecânica. Já no Capítulo 2, são apresentadas as bases teóricas para o correto entendimento da definição de um modelo constitutivo, descrevendo assim, os principais critérios de falhas existentes e aplicados na engenharia, o conceito de lei de endurecimento ou encruamento do material, o conceito de lei de fluxo plástico, entre outros. São discutidos também, os principais aspectos relacionados à estrutura de proteção veicular contra capotagem (ROPS), como: funcionamento, níveis de carga aplicáveis, níveis de deflexão aceitáveis, forma, entre outras. No Capítulo 3 são mostradas as estratégias de implementação dos modelos de integração implícita de von Mises, Tresca, Mohr Coulomb e Bai & Wierzbicki. No Capítulo 4 serão apresentadas a geometria da estrutura ROPS usada como exemplo de dimensionamento, a malha de elementos finitos construída para realização das simulações numéricas, as propriedades materiais necessárias para execução dos modelos elasto-plásticos selecionados, bem

como uma discussão dos resultados encontrados considerando as diferentes condições iniciais de aplicação de carga. Como última etapa deste trabalho, no Capítulo 5 são discutidos os resultados numéricos encontrados com base nos parâmetros: curvas de reação, evolução da deformação plástica equivalente, distribuição e níveis de tensão e deformação ao longo da estrutura, evolução de outros parâmetros elasto-plásticos como a triaxialidade e o ângulo de Lode e também abordadas as considerações finais sobre a correta seleção do modelo constitutivo e sua influência no processo de dimensionamento de componentes e estruturas mecânicas. No capítulo 6 são feitas as conclusões finais, com base nos diferentes resultados numéricos encontrados. Uma proposta de trabalho futuro também é objeto de discussão ao final do capítulo seis.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 INTRODUÇÃO

Em mecânica dos sólidos, a não-linearidade em problemas está diretamente associada as características do próprio comportamento mecânico do material utilizado, bem como da existencia de fatores geométricos relacionados a forma e a deformação da estrutura (Lemaitre & Chaboche, 1990; Holzapfel, 2000). A degradação microestrutura interna do material é um exemplo clássico de não-linearidade relacionada ao comportamento mecânico do mesmo, e sua evolução está diretamente associada as grandes deformações plásticas (Lemaitre & Chaboche, 1990; Lemaitre, 1996). Desta forma, é de fundamental importância, associar técnicas numéricas avançadas para solucionar tais problemas, e assim descrever, da maneira mais correta possível, o comportamento do material.

Por exemplo, para se modelar a degradação interna em metais dúcteis, à temperatura ambiente, podem-se utilizar modelos elasto-plásticos clássicos como modelo constitutivo de von Mises, Tresca, Drucker-Prager, Mohr-Coulomb, entre outros (Souza Neto et al, 2008). Outra forma de se mensurar a degradação interna, causado por esforços externos aplicados, é por meio dos chamados "*indicadores de dano*" (Andrade Pires, 2001; Bao, 2003; Brunig, 2008). Tais indicadores tomam mão de diversos parâmetros para se avaliar a possibilidade de falha do material, indicando assim o possível ponto de início da falha, bem como o nível de deslocamento necessário para início da mesma. Este tipo de análise estrutural possui uma relevância considerável, pois através da mesma, pode-se prever o início de uma falha de um determinado componente ou estrutura mecânica, antes da mesma apresentar indicações visuais (Lemaitre, 1996), podendo assim se programar manutenções preventivas e preditivas periódicas em determinados equipamentos (Dowling, 1998).

O desempenho e precisão dos chamados "*indicadores de dano*" é extremamente dependente da qualidade dos parâmetros materiais obtidos (Brunig, 2008). A correta determinação dos parâmetros materiais é chamada de "calibração do modelo constitutivo", e é então baseada tanto em informações experimentais, que são utilizadas como referência, quanto de uma adequada técnica numérica de identificação/otimização de parâmetros, que pode ser univariável ou multivariável (Stahlschidt, 2010; Vaz Jr. et al, 2010). Neste sentido, nos itens a seguir, serão discutidos os aspectos teóricos relacionados a teoria de modelos constitutivos.

2.2 MODELOS CONSTITUTIVOS

Da teoria de modelos constitutivos, podem-se utilizar diversos tipos de formulações para se descrever o comportamento de um material dúctil (Souza Neto et al, 2008), como por exemplo: um modelo elasto-plástico, que leva em consideração tanto o comportamento elástico quanto o plástico do material; modelo elasto-viscoplástico, que leva em consideração o comportamento elástico do material e o efeito da taxa de aplicação da carga no comportamento plástico do mesmo; modelo rígido plástico ou visco-plástico, que despreza a contribuição elástica no comportamento do material, modelo com dano acoplado, que incorpora a lei de evolução de uma variável interna de dano para se descrever de maneira explícita, o nível de degradação do material; entre outros (Lemaitre & Chaboche, 1990; Souza Neto et al, 2008).

A correta escolha de um modelo constitutivo está associada a fatores como: tipo e nível de carga aplicada a estrutura, níveis de deformação, tipo de material utilizado para fabricação do componente, gradiente de temperatura ao qual a peça foi submetida, entre outros (Souza Neto et al, 2008; Malcher et al, 2012). De acordo com Souza Neto (2008), em geral, para materiais dúcteis à temperatura ambiente de trabalho, modela-se o comportamento do material através de um modelo elasto-plástico. Contudo, quando submetido a temperaturas elevadas, um modelo elasto-viscoplástico ou mesmo rígido-viscoplástico é mais indicado para análise de materiais dúcteis. Durante o presente estudo, serão então adotados modelos elasto-plásticos como formulação base para se descrever o comportamento de tais materiais.

2.3 MODELO ELASTO-PLÁSTICO

Ao longo deste item serão definidos os principais conceitos que caracterizam um modelo elasto-plástico. Em uma primeira fase, serão abordados: a definição de critério de escoamento, o conceito de lei de encruamento e o conceito de lei de fluxo plástico do material.

Os modelos matemáticos usados na descrição dos modelos elastoplásticos podem ser observadas dentro do anexo desta dissertação.

2.3.1 DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Para se entender os conceitos relativos a definição de um modelo constitutivo, é necessário inicialmente se apresentar algumas definições preliminares. Considerando

que $\boldsymbol{\sigma}$ representa o chamado tensor das tensões, pode se escrever que o mesmo apresenta uma chamada contribuição desviadora e outra volumétrica (Lemaitre & Chaboche, 1990), na forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S} + p\boldsymbol{I} , \quad (2.1)$$

onde \boldsymbol{S} representa o tensor das tensões desviadoras, p é a chamada pressão hidrostática/volumétrica e \boldsymbol{I} é um tensor identidade de segunda ordem. A pressão hidrostática pode ser então definida como sendo:

$$p = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) , \quad (2.2)$$

onde $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ é o traço do tensor tensão. Pode-se também definir os chamados invariantes do tensor tensão, como sendo:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \\ I_2 &= \frac{1}{2} \{ [\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})]^2 - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2) \} , \\ I_3 &= \det(\boldsymbol{\sigma}), \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde I_1 , I_2 e I_3 representam, respectivamente, o primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor tensão (ver Holzapfel, 2000). Desta forma, a pressão hidrostática também pode ser definida em função do primeiro invariante do tensor tensão. Para o chamado tensor desviador, \boldsymbol{S} , os seus invariantes podem ser determinados como:

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} \boldsymbol{S} : \boldsymbol{S} \\ J_3 &= \det(\boldsymbol{S}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde J_2 e J_3 representam o segundo e terceiro invariantes do tensor desviador, respectivamente, e o operador $(:)$ representa a dupla contração em tre dois tensores de segunda ordem. Como o tensor desviador, pela sua própria definição, não possui parte volumétrica, seu primeiro invariante é igual a zero (ver Holzapfel, 2000).

Alguns parametros elasto-plásticos importantes para análise da teoria relacionada aos modelos constitutivos, podem ser definidos, como por exemplo: a chamada tensão equivalente de von Mises, que é uma função do segundo invariante do tensor de desvio:

$$q = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{S} : \boldsymbol{S}} , \quad (2.5)$$

onde q representa a tensão equivalente de von Mises (Souza Neto et al, 2008). O terceiro invariante do tensor de desvio, também pode ser escrito na forma:

$$r = \sqrt[3]{\frac{27}{2}J_3} = \sqrt[3]{\frac{27}{2}\det(\mathbf{S})} , \quad (2.6)$$

onde r representa o terceiro invariante do tensor de desvio (Bai, 2008; Malcher et al, 2012). O terceiro invariante também pode ser escrito na forma normalizada como sendo:

$$\xi = \left(\frac{r}{q}\right)^3 = \frac{\frac{27}{2}J_3}{q^3} , \quad (2.7)$$

onde ξ representa o terceiro invariante normalizado. O chamado ângulo de Lode é um parâmetro elasto-plástico de extrema importancia que, segundo alguns pesquisadores (Xue, 2007; Bai, 2008; Gao, 2011), dá a forma da superfície de escoamento do material. Este parâmetro é definido como sendo o menor ângulo formado entre a projeção do tensor tensões e os eixos das tensões principais dentro do espaço desviador (ver Figura 2.1).

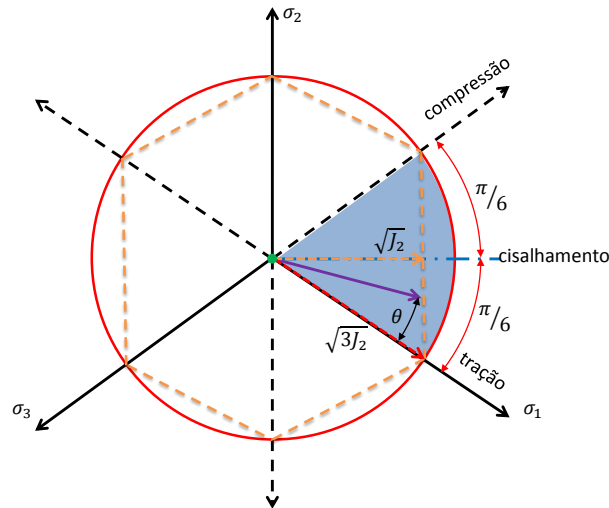


Figura 2.1. Definição do ângulo de Lode, dentro do espaço π . Fonte: Xue (2007).

Matematicamente, este ângulo pode ser definido como:

$$\theta = \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \left[2 \left(\frac{S_2 - S_3}{S_1 - S_3} \right) - 1 \right] \right\} , \quad (2.8)$$

onde θ representa o ângulo de Lode e S_1 , S_2 e S_3 são componentes do tensor desviador. A relação entre o ângulo de Lode e o terceiro invariante normalizado pode ser escrita como sendo:

$$\xi = \cos(3\theta) , \quad (2.9)$$

o ângulo de Lode também pode ser normalizado na forma:

$$\bar{\theta} = 1 - \frac{6\theta}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos(\xi) , \quad (2.10)$$

onde $\bar{\theta}$ é o ângulo de Lode normalizado. É importante ressaltar que θ varia entre 0 e $(\pi/2)$, ξ entre -1 e 1, e $\bar{\theta}$ entre -1 e 1 (ver Bai, 2008).

2.3.2 CRITÉRIO DE ESCOAMENTO

Um critério de escoamento pode ser genericamente representado na forma:

$$\Phi = \Phi(\boldsymbol{\sigma}, A) , \quad (2.11)$$

onde o termo A representa um conjunto de variáveis internas ao processo e $\boldsymbol{\sigma}$ representa o tensor das tensões. De acordo com Khan (1995), para um material isotrópico, verifica-se que a tensão de escoamento depende exclusivamente da magnitude das tensões principais e não das suas orientações no espaço das tensões. Logo, o conjunto de variáveis associadas ao endurecimento, resume-se apenas a um escalar, denominado de parâmetro de encruamento, k . Desta forma, a função de escoamento Φ passa a ser definida também como um escalar, podendo ser escrita da seguinte forma:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, k) = F(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_y(k) = 0, \quad (2.12)$$

onde $F(\boldsymbol{\sigma})$ é o chamado critério de escoamento, que depende do estado de tensão e $\sigma_y(k)$ representa a lei de encruamento do material que é, neste caso, uma função da variável interna de encruamento, k .

De acordo com a função de escoamento do material, $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, k)$, pode-se concluir que: caso, em um determinado ponto de um corpo material deformável, se verifique a condição de:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, k) \leq 0, \quad (2.13)$$

o ponto apresenta um comportamento elástico. Porém, caso:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, k) > 0, \quad (2.14)$$

o comportamento será definido como elasto-plástico (ver Lemaitre & Chaboche, 1990; Souza Neto et al, 2008). Ao ser atingido o regime plástico, o comportamento subsequente nesse ponto será condicionado pela variação de $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, k)$ em relação ao estado de tensão, $\boldsymbol{\sigma}$, ou seja:

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\sigma}, k)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} , \quad (2.15)$$

onde \mathbf{N} representa o chamado vetor de fluxo plástico que é normal à superfície de escoamento, considerando a chamada plasticidade associativa (Souza Neto et al, 2008). Caso $\mathbf{N} < 0$, o material encontra-se perante uma situação de descarregamento elástico.

Neste caso, o estado de tensão encontra-se no interior da chamada superfície de escoamento, retomando ao material um comportamento elástico. No caso de $N = 0$, isto significa que não há alterações na superfície de escoamento do material, o que pode ser uma consideração válida para materiais modelados como perfeitamente plásticos. Porém, caso $N > 0$, o estado de tensão mantém-se sobre a superfície de escoamento e a mesma é então alterada. Neste caso, modela-se o material como apresentando um grau de encruamento, fazendo com que o limite de escoamento do mesmo seja uma função do nível de deformação plástica, que passa a ser uma variável interna de encruamento do material (Khan, 1995; Souza Neto et al, 2008).

2.3.2.1 CRITÉRIO DE VON MISES

Em 1913, von Mises formulou um critério de escoamento, tendo por base que o início do escoamento irá ocorrer quando o segundo invariante das tensões de desvio, J_2 , atinge um valor crítico. Assim, a função de escoamento que representa a formulação de von Mises pode ser matematicamente representada por:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\epsilon}^p) = q - \sigma_y(\bar{\epsilon}^p) , \quad (2.1)$$

6)

onde q representa a tensão equivalente de von Mises (ver Equação 2.5) e $\bar{\epsilon}^p$ é a deformação plástica equivalente, que para este critério representa a variável interna de endurecimento isotrópico. A superfície de escoamento que representa a Equação 2.16 proposta por von Mises é mostrada na Figura 2.2, onde dado um estado de tensões, se o mesmo se encontra dentro da superfície(ou envelope de falha) o comportamento é dito como elástico e caso contrário o comportamento é dito como elasto-plástico.

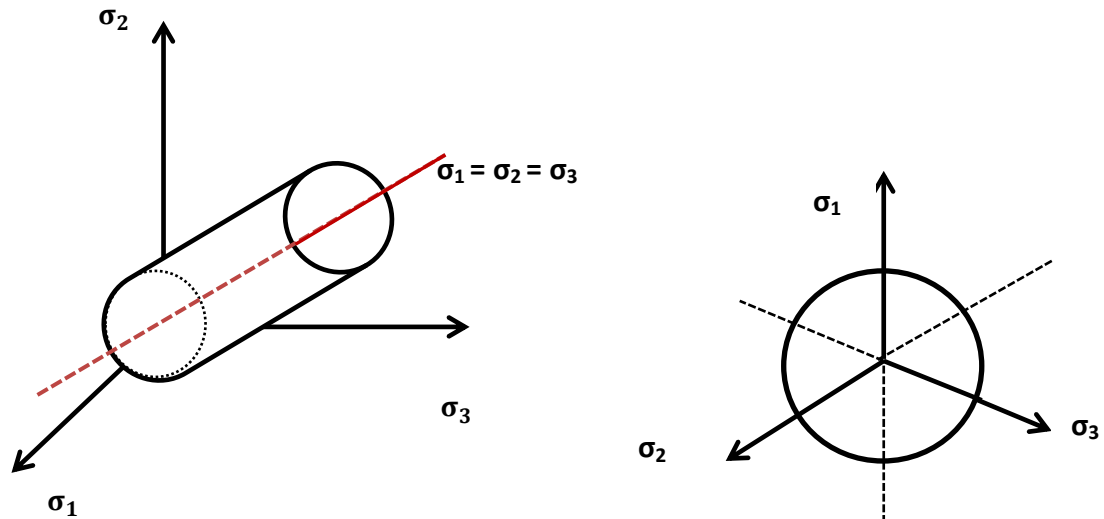


Figura 2.: (a) Superfície de escoamento de von Mises. (b) Representação através do plano desviatório ou plano π . Fonte: Souza Neto et al (2008).

É importante destacar que este critério não contempla a influência da pressão hidrostática dentro do processo de fluxo plástico do material. Desta forma, a formulação de von Mises pode ser classificada como sendo insensível à pressão hidrostática (ver Souza Neto et al, 2008).

2.3.2.2 CRITÉRIO DE TRESCA

Este critério, postulado por Tresca em 1864, é baseado em resultados experimentais, e admite por hipótese, que a deformação plástica em um ponto material, ocorre sempre que a tensão cisalhante máxima atinge um determinado valor limite. Esta condição pode ser representada matematicamente como:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p) = \tau_{max} - \frac{\sigma_y(\bar{\varepsilon}^p)}{2}, \quad (2.17)$$

onde τ_{max} representa o máximo valor da tensão cisalhante. Este parâmetro pode ser determinado como:

$$\begin{aligned} \tau_{max} &= \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, & \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \\ \tau_{max} &= \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, & \sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2 \\ \tau_{max} &= \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, & \sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3 \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde σ_1 , σ_2 e σ_3 representam as tensões principais. A superfície de escoamento de Tresca que representa a Equação 2.17 é mostrada na Figura 2.3, onde dado um estado de

tensões, se o mesmo se encontra dentro da superfície (ou envelope de falha) o comportamento é dito como elástico e caso contrario o comportamento é dito como elasto-plástico.

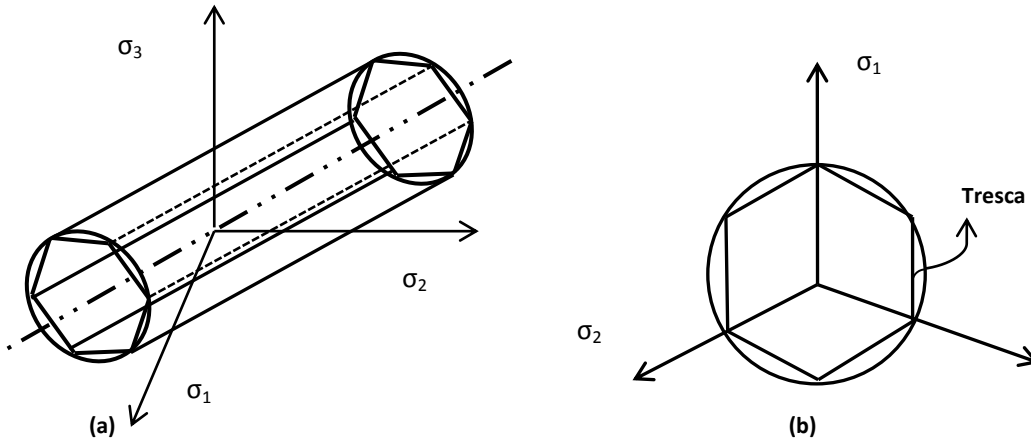


Figura 2.3. (a) Superfície de escoamento de Tresca. (b) Representação através do plano desviatório ou plano π . Fonte: Souza Neto et al(2008).

Como se pode observar da Figura 2.3, a projeção da superfície de escoamento do critério de Tresca, no plano desviador é um hexágono regular. O critério de Tresca apresenta a dificuldade no cálculo de $\partial\Phi(\boldsymbol{\sigma}, k)/\partial\boldsymbol{\sigma}$ (ver Equação 2.15), nas regiões de singularidade (faces no modelo 3D e pontos no modelo 2D) existentes na respectiva superfície. É importante destacar que a formulação de Tresca também é insensível a pressão e possui uma dependência linear com relação ao chamado ângulo de Lode (ver Souza Neto et al, 2008; Bardet, 1990).

2.3.2.3 CRITÉRIO DE MOHR COULOMB

Formulado no ano de 1900, este critério estabelece que o escoamento plástico do material se inicia quando, em um determinado plano de um corpo, a chamada tensão cisalhante, τ , e a chamada tensão normal, σ_n , atingem a seguinte combinação crítica:

$$\tau = c - \sigma_n \tan \phi \quad (2.18)$$

onde c é a chamada tensão de coesão e ϕ representa o ângulo de fricção interna. Neste modelo, o valor da tensão normal, σ_n , é assumido como positivo.

Através de uma análise do círculo de Mohr, pode-se definir a tensão cisalhante e a tensão normal em função dos valores máximos e mínimos das tensões principais. A Figura 2.4 representa o critério de Mohr-Coulomb dentro do chamado círculo de Mohr.

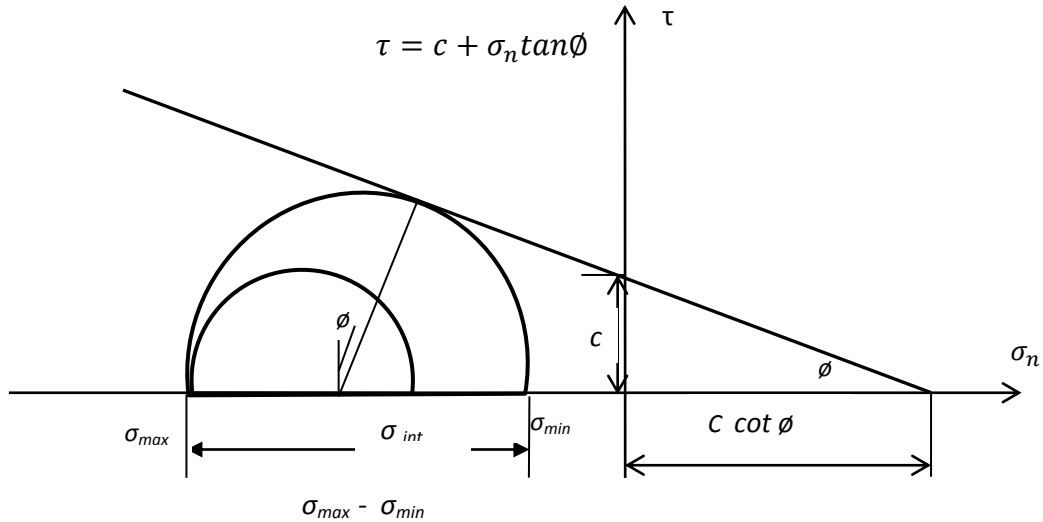


Figura 2.4. Representação no círculo de Mohr do critério de Mohr-Coulomb.

Fonte: Souza Neto et al (2008).

Assim, o critério de Mohr-Coulomb escrito em função das tensões principais máximas e mínimas:

$$\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \cos \phi = c - \left(\frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} + \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \right) \tan \phi \quad (2.19)$$

onde σ_{max} e σ_{min} representam, respectivamente, a máxima e a mínima tensão principal.

A Equação 2.19 pode ser re-escrita na forma:

$$(\sigma_{max} - \sigma_{min}) + (\sigma_{max} + \sigma_{min}) \sin \phi = 2c \cos \phi \quad (2.20)$$

Assim, a função de escoamento de Mohr-Coulomb escrita em função das tensões principais pode ser representada por:

$$\Phi(\sigma, c) = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) + (\sigma_{max} + \sigma_{min}) \sin \phi - 2c \cos \phi \quad (2.21)$$

onde a tensão de coesão $c = \sigma_y(\bar{\epsilon}^p)/2$. A superfície de escoamento que representa o critério de Mohr-Coulomb é definida como sendo uma pirâmide com base hexagonal (ver Figura 2.5), onde dado um estado de tensões, se o mesmo se encontra dentro da superfície (ou envelope de falha) o comportamento é dito como elástico e caso contrario

o comportamento é dito como elasto-plástico.

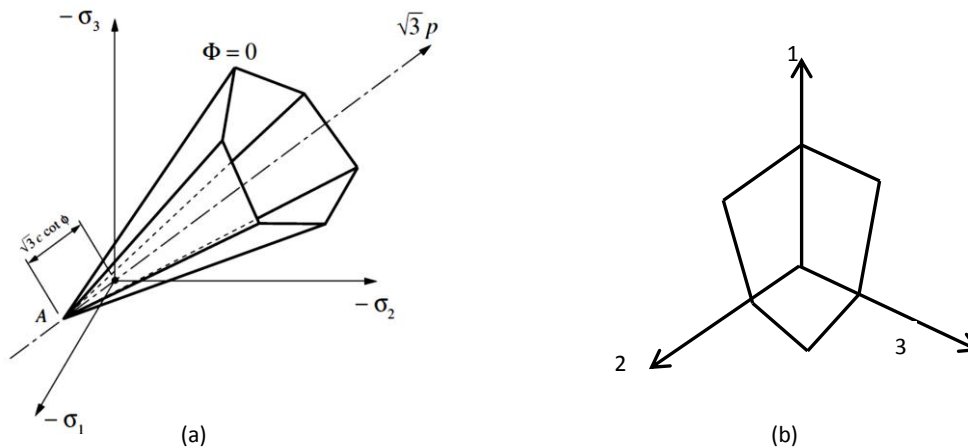


Figura 2.5. (a) Superfície de escoamento para o critério de Mohr-Coulomb.(b) Representação através do plano desviatório ou plano π . Fonte: Souza Neto et al (2008).

O critério de Mohr-Coulomb foi inicialmente formulado para representar o comportamento de materiais porosos dotados de atrito interno, tendo, no entanto, verificado que estes materiais atingem, em geral, um estado de escoamento plástico à tração antes de se ter atingido a superfície de Mohr-Coulomb (Souza Neto et al 2008).

2.3.2.4 CRITÉRIO DE BAI & WIERZBICKI

Seguindo os preceitos estabelecidos pelo critério de Mohr-Coulomb, Bai et al (2008) propôs um critério de falha que além de incluir o efeito da pressão hidrostática na lei de fluxo plástico do materiais, o mesmo introduziu o efeito do chamado ângulo de Lode (ver definição no item 2.3.1). Bai & Wierzbicki relata que o efeito da pressão hidrostática é responsável pelo controle do tamanho da superfície de escoamento, em quanto o ângulo de Lode controla a forma da mesma. O critério de Bai & Wierzbicki pode ser matematicamente representado pela equação:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\epsilon}^p) = q - \sigma_y(\bar{\epsilon}^p) \left[1 - C_\eta(\eta - \eta_0) \right] \left[c_\theta^s + (c_\theta^{ax} - c_\theta^s) \left(\gamma - \frac{\gamma^{m+1}}{m+1} \right) \right] \quad (2.25)$$

onde q representa a tensão equivalente de von Mises, η é o nível de triaxialidade definido pela razão entre a pressão hidrostática e a tensão equivalente de von Mises, γ é

uma função do ângulo de Lode e $\{C_\eta, \eta_0, c_\theta^{ax}, c_\theta^s, m\}$ são parâmetros materiais, identificados através de quatro ensaios experimentais. Bai & Wierzbicki introduz o efeito da pressão hidrostática através da triaxialidade e o efeito do ângulo de Lode através do parâmetro γ , que matematicamente é definido como sendo:

$$\gamma = \frac{\cos(\pi/6)}{1 - \cos(\pi/6)} \left[\frac{1}{\cos(\theta - \pi/6)} - 1 \right] = 6.4641 [\sec(\theta - \pi/6) - 1] \quad (2.26)$$

onde θ representa o ângulo de Lode. A superfície de escoamento que representa o critério de Bai é mostrada através da Figura 2.6, onde dado um estado de tensões, se o mesmo se encontra dentro da superfície (ou envelope de falha) o comportamento é dito como elástico e caso contrario o comportamento é dito como elasto-plástico.

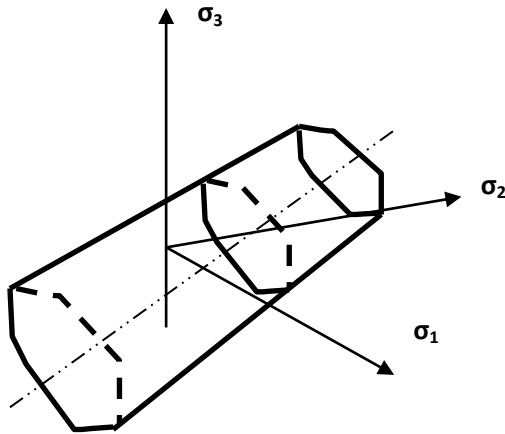


Figura 2.6. Superfície de escoamento para o modelo de Bai & Wierzbicki. Fonte: Bai (2008).

A Figura 2.7 representa uma comparação entre as superfícies de escoamento de von Mises, Tresca e Bai & Wierzbicki, dentro do chamado plano desviador.

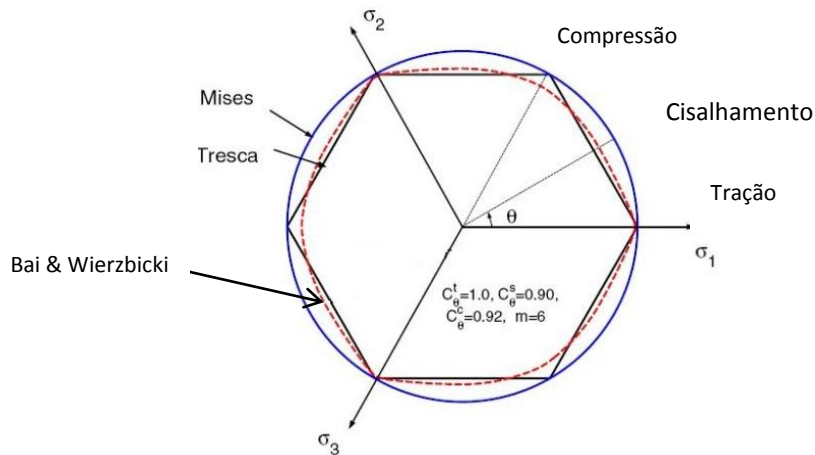


Figura 2.7. Comparação entre as superfícies de von Mises, Tresca e Bai & Wierzbicki. Fonte: Bai (2008).

2.3.3 LEI DE ENCRUAMENTO DO MATERIAL

A lei de encruamento estabelece as condições materiais para que um novo escoamento plástico ocorra, após se ter atingido o regime plástico do mesmo (Souza Neto et al, 2008). Esta regra resulta do fato de que a superfície de escoamento sofre constantes alterações à medida que o regime plástico é desenvolvido. A regra de endurecimento, também chamada de endurecimento por deformação, pode ser modelada de acordo com a definição dos parâmetros de endurecimento. Em geral, modela-se tal fenômeno como: perfeitamente plástico, com endurecimento isotrópico, com endurecimento cinemático e com endurecimento isotrópico e cinemático.

Quando se estabelece que não há endurecimento material a medida em que a deformação plástica evolui, ou seja, o parâmetro de endurecimento do material é igual a zero ($k = 0$), diz-se então que o material é perfeitamente plástico. Nesta condição, o limite de escoamento do material bem como sua superfície de escoamento ficam inalterados. A Figura 2.8 mostra o comportamento perfeitamente plástico de um material.

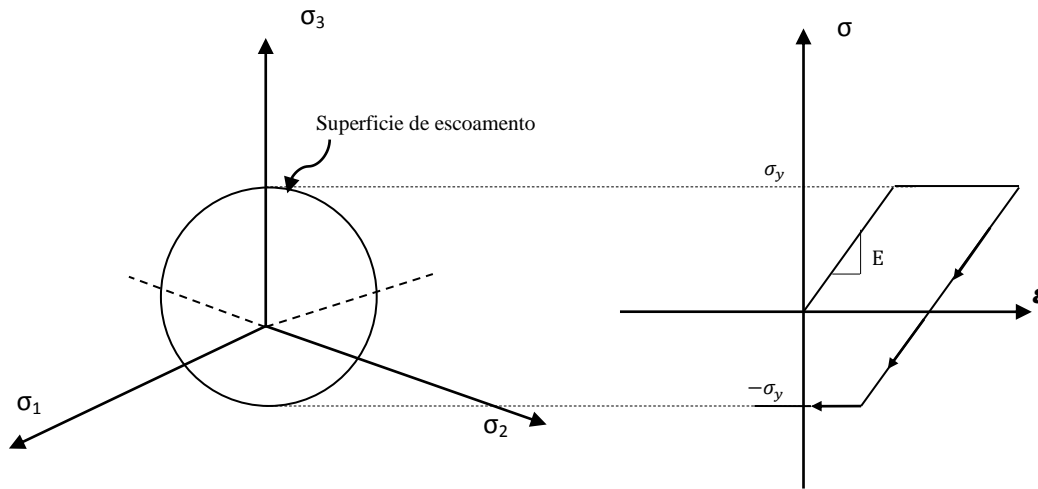


Figura 2.8. Representação do comportamento perfeitamente plástico de um material. Fonte: Souza Neto et al (2008).

2.3.3.1. ENDURECIMENTO ISOTRÓPICO.

Na condição de se modelar o endurecimento do material como isotrópico, considera-se que a superfície de escoamento do material aumenta durante o escoamento plástico, porém a sua forma e localização ficam inalteradas. Pode-se considerar neste caso, uma relação isotrópica linear ou isotrópica não-linear entre o limite de escoamento do material e o nível de plastificação. A Figura 2.9 representa o endurecimento isotrópico não-linear de um material.

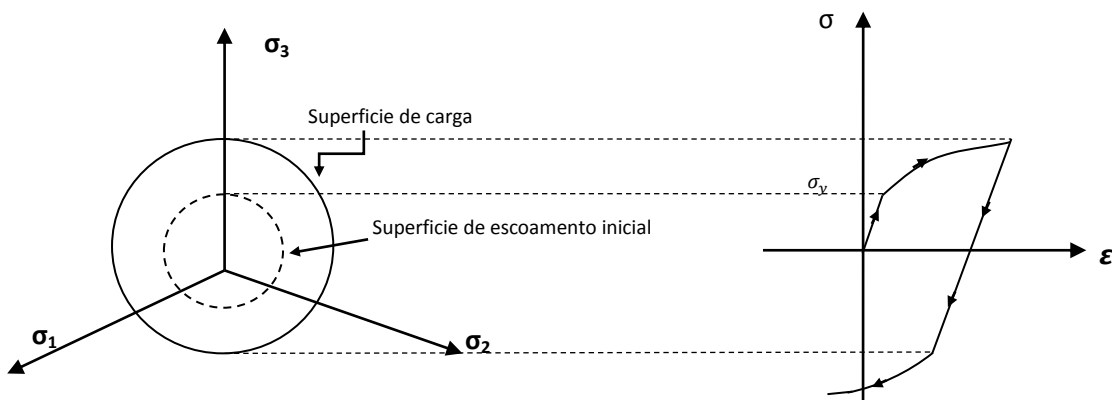


Figura 2.9. Representação do endurecimento isotrópico do material. Fonte: Souza Neto et al (2008).

2.3.3.2. ENDURECIMENTO CINEMÁTICO.

No caso de se modelar o endurecimento do material como cinemático, considera-se que a superfície de escoamento mantém a mesma forma para um dado incremento de deformação plástica, no entanto, translada como um corpo rígido. Este modelo, foi inicialmente proposto por Prager (1955:1956), que assim, permitiu modelar o chamado efeito de Bauschinger, bastante visível em materiais sujeitos a regimes de carregamento cíclico. Este efeito estabelece que o tamanho do regime elástico do material muda a medida em que se atinge o regime plástico em uma determinada direção e posteriormente se inverte a direção de carregamento (ver Lemaitre &Chaboche, 1990). Para a introdução deste efeito de encruamento é necessário introduzir o chamado tensor tensão de retorno, β (*back-stress tensor*). A Figura 2.10 representa o efeito do endurecimento cinemático de um material

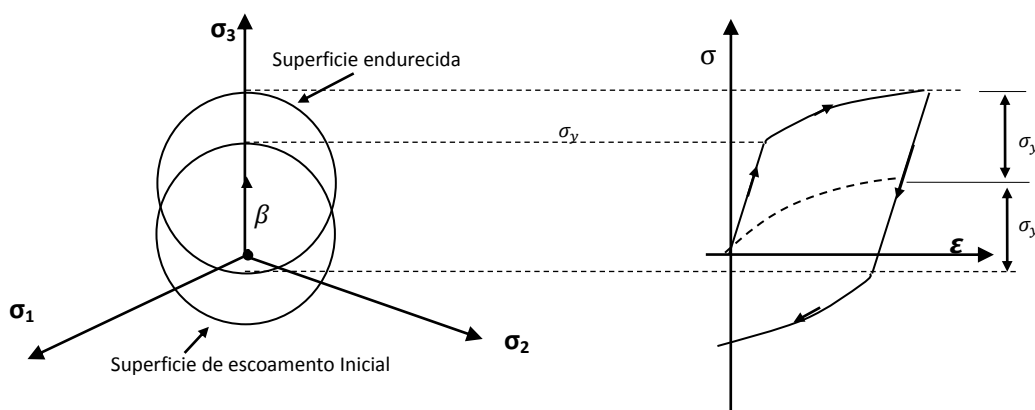


Figura 2.10. Representação do endurecimento cinemático do material. Fonte: Souza Neto et al (2008).

2.3.3.3. ENDURECIMENTO MISTO: ISOTRÓPICO E CINEMÁTICO.

Em uma condição real de carga, o material endurece através de uma combinação de efeitos: isotrópico e cinemático. Neste caso, o endurecimento resulta da combinação dos modelos anteriores, admitindo a expansão, a translação e rotação da superfície de escoamento, ou inclusive a mudança de forma.

2.3.4 LEI DO FLUXO PLÁSTICO

A lei de fluxo plástico de um material estabelece a direção e a taxa de evolução da deformação plástica. A direção do escoamento é dada pela derivada direcional da chamada função de escoamento, $\Phi(\sigma, \bar{\epsilon}^p)$, com relação ao tensor das tensões. Esta

direção de escoamento é também conhecida como sendo o vetor de fluxo plástico:

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (2.27)$$

onde \mathbf{N} representa o vetor de fluxo plástico. Assim, a lei associativa de fluxo plástico adotada para os modelos constitutivos aqui estudados é definida como sendo:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \equiv \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (2.28)$$

onde $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ representa o tensor da taxa de evolução da deformação plástica e $\dot{\gamma}$ é o chamado multiplicador plástico. A Equação 2.28 estabelece a regra de escoamento da deformação plástica que usualmente é utilizada em modelos constitutivos para caracterização do comportamento de metais. A lei associativa, para além de evitar a definição de uma função de potencial de escoamento, $\psi(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$ que cumpra requisitos termodinâmicos, garante a condição de normalidade, ou seja, o vetor de fluxo, \mathbf{N} , é normal a superfície de escoamento em qualquer ponto do espaço das tensões (Dunne & Petrinic, 2005; Souza neto et al, 2008).

A Lei de evolução da deformação plastica equivalente, que para os modelos apresentados fez o papel e variavel interna de endurecimento isotropico, pode ser descrita de acordo com a seguinte equação:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \quad (2.29)$$

O Quadro 2.1, a seguir, representa resumidamente um modelo elasto-plástico (Simo & Hughes, 1998; Dunne & Petrinic, 2005; Souza Neto et al, 2008), de acordo com a teoria das pequenas deformações.

Quadro 2.1. - Modelo constitutivo elasto-plástico.

i) Decomposição aditiva do tensor das deformações:		
$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$		
ii) Lei elástica do material: Lei de Hooke		
$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$		
iii) Critério de escoamento		
$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p) = 0$		
iv) Lei de fluxo plástico (associativo)		
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \equiv \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$		
v) Regra de encruamento: evolução da variável interna		
$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} H(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p) = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p)}{\partial \bar{\varepsilon}^p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$		
vi) Critério de carga/descarga		
$\Phi \leq 0$	$\dot{\gamma} \geq 0$	$\Phi \dot{\gamma} = 0$

2.4 ESTRUTURAS PROTEÇÃO VEICULAR CONTRA CAPOTAGEM – ROPS

Uma estrutura de proteção veicular contra capotagem, tecnicamente conhecida como ROPS (Roll Over Protection Structure) (ver Vale, 2012), é um tipo de estrutura mecânica largamente utilizado em veículos de competição, bem como em veículos utilitário que possam trafegar em regiões de alto potencial de capotamento, como em regiões de mineração, regiões montanhosas e com terrenos bastante acidentados. O ROPS, quando presente em um veículo acidentado, pode proporcionar um maior potencial de sobrevivência aos ocupantes do mesmo, pois mantém o volume do habitáculo (ou cabine de passageiros) preservado. Para o exemplo estrutural aqui adotado, serão então usadas as dimensões básicas de uma caminhonete 4x4 MITSUBISHI L200 GL, comercializada no mercado brasileiro.

De acordo com Vale (2012), os principais tipos de ROPS utilizados mundialmente podem ser classificados como: Estrutura de proteção externa à cabine e Estrutura de proteção interna à cabine. A Figura 2.11 mostra os tipos de ROPS aqui citados.

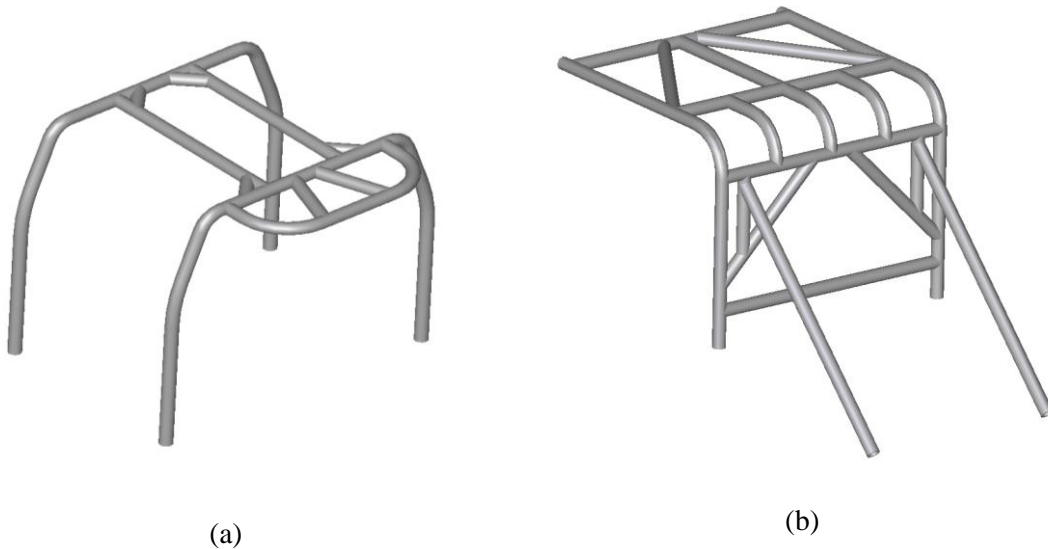


Figura 2.11: Exemplos de estruturas de proteção veicular contra capotagem. (a) ROPS interno e (b) ROPS externo. Fonte: Vale, 2012

A concepção de um ROPS passa pelas etapas de determinação e elaboração da forma global do mesmo, baseado nos preceitos de utilização/aplicação, resistência e segurança. Primeiramente, realiza-se a definição da forma da estrutura (externo ou interno a cabine). Em seguida, tem-se a determinação das dimensões como altura, largura e comprimento das diversas partes da estrutura mecânica. Assim, a segurança e qualidade do projeto estrutural estão intimamente ligados a correta definição de tais dimensões. Como terceira etapa se faz um análise preliminar dos pontos de fixação do ROPS sobre o veículo, estabelecendo assim um das condições de contorno do problema. A escolha de pontos de ancoragem da estrutura, deverá obedecer o requisito de: utilizar pontos de elevada rigidez (ver Vale, 2012). A Figura 2.14 ilustra os pontos de fixação desejados para fixação de uma estrutura ROPS interna à cabine, de acordo com Vale (2012).

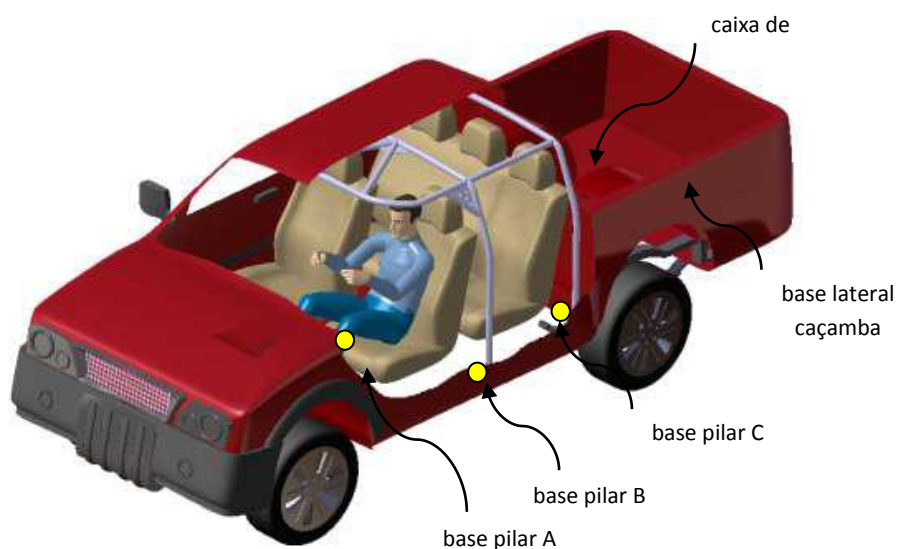


Figura 2.12: ROPS interno à cabine e seus respectivos pontos de fixação sobre a caminhonete. Fonte: Vale, 2012.

2.4.1 NÍVEL DE CARGA APLICADA E PONTO DE APLICAÇÃO

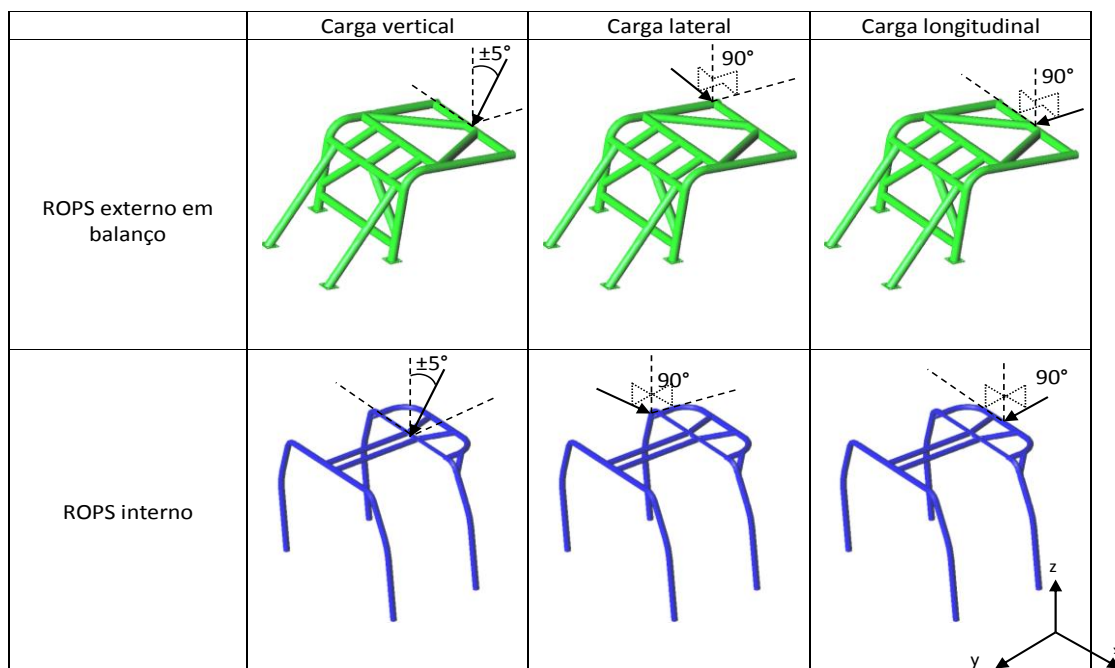
Para se avaliar as condições estruturais de um ROPS, há a necessidade de se verificar o comportamento da estrutura quando sujeita a cargas verticais, laterais e frontais que simulem um possível capotamento. De acordo com o sugerido pelo protocolo Australiano e Norma FIA para veículos de competição (Vale, 2012; ADR59), os níveis de carga nas direções vertical, lateral e frontal estão especificados na Tabela 2.1. Considera-se, de acordo com informações do fabricante, que a massa da caminhonete em estudo (MITSUBISHI L200 GL) atinge valores de aproximadamente $M=1.800$ kg. De acordo com as normas Australianas e da FIA, para cálculo das cargas aplicadas para dimensionamento estrutural, há a necessidade de se somar ainda a massa própria do ROPS, bem como a massa dos ocupantes. Desta forma, seguindo as orientações de Vale (2012), considera-se um valor de aproximadamente 500 kg adicionais a massa da caminhonete, o que perfaz um valor total de projeto igual a $M=2.300$ kg.

Tabela 2.1: Níveis de carga para dimensionamento de teste de um ROPS. Fonte: Vale, 2012

<i>Tipo de carregamento</i>	<i>Carga vertical</i>	<i>Carga lateral</i>	<i>Carga longitudinal/frontal</i>
<i>Carga de projeto</i>	$4 \times g \times M$	$1.5 \times g \times M$	$1 \times g \times M$
	90.1 kN	33.8 kN	22.5 kN
	9.2 ton	3.4 ton	2.3 ton

De acordo com as normas citadas (ver Vale, 2012; ADR59), na aplicação de cargas verticais, laterais e frontais, simula-se uma condição real de cargas que agem sob a cabine durante um capotamento. Os respectivos pontos de aplicação são mostrados de acordo com a Figura 2.13 (Vale, 2012). Condições de carregamento concentrado e distribuído podem ser aplicados, de acordo com a interpretação do projetista (Vale, 2012).

Figura 2.13. Pontos de aplicação das cargas de projeto. Fonte: Vale, 2012



Desta forma, assumindo como estrutura base para as simulações dos modelos elasto-plásticos aqui em estudo, uma estrutura ROPS interna a cabine, como mostrado nas Figuras 2.11 a e 2.12, será assumida. Os níveis de carga da Tabela 2.1, bem como os seus respectivos pontos de aplicação mostrados na Figura 2.13 serão tomados como condições de contorno inicial para simulação do problema.

3. ESTRATÉGIA NUMÉRICA

Neste capítulo, serão propostos modelos de integração numérica para os modelos de von Mises, Tresca, Mohr-Coulomb e Bai & Wierzbicki, descritos anteriormente. Tais modelos serão então implementados em uma ferramenta acadêmica de elementos finitos, desenvolvida em linguagem FORTRAN 90, que será então utilizada para simulação da estrutura ROPS.

Na descrição e determinação dos modelos numéricos, será então adotada uma metodologia para formulação de algoritmos para integração numérica das equações de evolução das variáveis de estado associadas aos modelos constitutivos em estudo. O problema então consiste em formular procedimentos de integração numérica que sejam capazes de atualizar as variáveis internas conhecidas, geralmente denominadas por α_n , no tempo t_n , para obter as variáveis internas α_{n+1} no tempo t_{n+1} , onde o incremento de deformação $\Delta \epsilon$ se assume conhecido (Souza Neto et al, 2008). Além disso, a discretização das equações constitutivas dentro do chamado pseudo-tempo $[t_n, t_{n+1}]$ é aplicada ao modelo, baseado no esquema de Euler implícito (Simo e Hughes, 1998). Desde que o modelo seja implementado em programa acadêmico de elementos finitos para um carregamento quase-estático, é necessário também se derivar a matriz tangente consistente com o algoritmo de integração.

O procedimento de atualização das tensões, no qual é baseado na chamada metodologia da *decomposição do operador* (Simo e Hughes, 1998; Souza Neto et al., 2008), é especialmente adequado para a integração numérica do problema de evolução e têm sido amplamente utilizados na plasticidade computacional. Esse método consiste em dividir o problema em duas partes: um preditor elástico, onde o problema é assumido ser completamente elástico e um corretor plástico, no qual um sistema de equações residuais formado pela lei elástica, a função de escoamento e as equações de evolução é resolvido, tomando os valores obtidos na construção do preditor elástico como valores iniciais do problema (Souza Neto et al, 2008). No caso da função de escoamento ser violada, o chamado corretor plástico é então inicializado e o método de Newton-Raphson é usado para se resolver o conjunto de equações não lineares discretizado. O método de Newton-Raphson é escolhido para solucionar o problema devido ao fato de se atingir uma taxa quadrática de convergência para a solução (Rao, 2009).

3.1 ALGORITMO DE ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES E VARIÁVEIS INTERNAS

Na plasticidade computacional, o algoritmo de atualização é também comumente chamado de algoritmo de mapeamento de retorno e a sua construção requer os seguintes passos: conhecidos os valores da deformação elástica, $\boldsymbol{\varepsilon}_n^e$ e do conjunto das variáveis internas α_n , no início do intervalo do pseudo-tempo $[t_n, t_{n+1}]$, e dado também o incremento de deformação prescrito, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, para este intervalo, o chamado estado tentativa elástico pode ser então construído, como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} &= \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} & \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \\ \alpha_{n+1}^{trial} &= \alpha_n & \sigma_y &= \sigma_y(\alpha_n) \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$ representa o tensor das tensões tentativa, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial}$ é o tensor das deformações plásticas tentativa, α_{n+1}^{trial} é a variável interna associada ao endurecimento isotrópico tentativa e σ_y é o limite de escoamento do material, que passa a ser uma função da variável interna associada ao endurecimento isotrópico, $\sigma_y(\alpha_n)$. No caso do modelo de von Mises, a chamada deformação plástica equivalente, $\bar{\varepsilon}^p$, será tomada como variável interna associada ao endurecimento isotrópico. Desta forma, o limite de escoamento do material será então uma função de $\bar{\varepsilon}_n^p$.

O tensor das tensões tentativas pode ser então decomposto em uma parte desviadora e outra hidrostática:

$$\boldsymbol{s}_{n+1}^{trial} = 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial}, \quad p_{n+1}^{trial} = K \boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ trial}, \quad (3.2)$$

onde $\boldsymbol{s}_{n+1}^{trial}$ e p_{n+1}^{trial} representam, respectivamente a componente desviadora e a hidrostática do tensor das tensões tentativas. As constantes G e K representam as constantes de Lamé e são denominadas de módulo de cisalhamento e módulo volumétrico, respectivamente. Os termos $\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ trial}$ representam as componentes desviadora e volumétrica do tensor das deformações elásticas tentativa.

De acordo com a metodologia de decomposição do operador (Souza Neto et al, 2008), o próximo passo então está em verificar se o estado tentativa construído acima, se encontra dentro ou fora do limite elástico do material. Para isto, a função de escoamento

é determinada com base nos termos tentativa já definidos. Para o modelo de von Mises, a função de escoamento é então determinada como sendo:

$$\Phi^{trial} = q^{trial} - \sigma_y(\bar{\epsilon}_n^p) , \quad (3.3)$$

onde o termo q^{trial} representa a tensão equivalente de von Mises que é definida em função da contribuição desviadora do tensor das tensões tentativa $q^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}_{n+1}^{trial} \cdot \mathbf{S}_{n+1}^{trial}}$. A lei de encruamento do material é aqui representada pelo termo $\sigma_y(\bar{\epsilon}_n^p)$ que passa a ser uma função da variável de endurecimento isotrópico, $\bar{\epsilon}_n^p$. A expressão que defini a evolução do limite de escoamento do material em função de $\bar{\epsilon}_n^p$ é escrita como:

$$\sigma_y(\bar{\epsilon}_n^p) = \sigma_0 + H \bar{\epsilon}_n^p , \quad (3.4)$$

onde H representa o módulo de endurecimento isotrópico, que é uma propriedade material e σ_0 é o limite de escoamento inicial do material.

Caso Φ^{trial} seja menor ou igual a zero, isto significa que o incremento de deformação prescrito inicialmente é realmente totalmente elástico e o estado tentativa construído passa então a ser considerado o estado real do material, $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$. Porém, caso Φ^{trial} seja maior que zero então é possível constatar que o material se encontra dentro do regime plástico e que o incremento de deformação prescrito, que inicialmente foi considerado elástico, possui uma parcela plástica. Desta forma, há a necessidade de se corrigir o estado tentativa construído acima.

A correção do estado tentativa é feita a partir da remoção do incremento de deformação plástica de dentro da deformação elástica tentativa, que pode ser então expresso por:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \Delta \boldsymbol{\epsilon}^p . \quad (3.5)$$

Para o modelo original de von Mises, o incremento de deformação plástica é então definido através da Lei de Fluxo Plástico, Equação 2.28 e na Quadro 2.1 do anexo. Assim, substituindo esta expressão na equação acima, temos:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} - \Delta\gamma \frac{3\mathbf{S}_{n+1}}{2q_{n+1}}, \quad (3.6)$$

onde $\Delta\gamma$ representa o multiplicador plástico.

A atualização das variáveis de estado pode ser obtida através das equações a seguir:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \frac{3\mathbf{S}_{n+1}}{2q_{n+1}}, \quad (3.7)$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma, \quad (3.8)$$

Por fim, a função de escoamento atualizada é então determinada através do estado real, no pseudo-tempo t_{n+1} , de acordo com a expressão:

$$\phi_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{S}_{n+1}:\mathbf{S}_{n+1}} - \sigma_0 - H\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = 0. \quad (3.9)$$

Verifica-se então, analisando as Equações 3.6, 3.8 e 3.9 que para se determinar o estado real do material, há a necessidade de se resolver um sistema não-linear de equações, onde se tem como variáveis $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$, $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ e $\Delta\gamma$.

O sistema não-linear formado pelas Equações 3.6, 3.8 e 3.9 pode ser considerado, para um estado geral de tensão (problema tridimensional), como um sistema com oito variáveis e oito equações. Pode-se também reescrever a Equação (3.6) em termos do campo de tensão, como se segue:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} - 2G\Delta\gamma \frac{3\mathbf{S}_{n+1}}{2q_{n+1}}. \quad (3.10)$$

Desta forma, o sistema de equações não-lineares a ser resolvido passa a ter como variáveis $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ e $\Delta\gamma$ e pode ser representado na forma de equações residuais:

$$\begin{aligned}
R_{\sigma_{n+1}} &= \sigma_{n+1} - \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} + 2G\Delta\gamma \frac{3\mathbf{S}_{n+1}}{2q_{n+1}} \\
R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta\gamma \\
R_{\Delta\gamma} &= \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} - \sigma_0 - H\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} .
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Assim, o quadro a seguir mostra de forma resumida, o modelo numérico desenvolvido para o modelo matemático de von Mises.

Quadro 3.1. Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas associado ao modelo de von Mises.

i)	<p>Determinar o estado tentativo: Dado um incremento de deformação, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$.</p> $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial}$ $\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\,trial} = \bar{\varepsilon}_n^p \qquad q^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{S}_{n+1}^{trial} : \mathbf{S}_{n+1}^{trial}}$
ii)	<p>Verificar a admissibilidade Plástica:</p> $\Phi^{trial} = q^{trial} - \sigma_{y0} - H^l \bar{\varepsilon}_n^p$ <p>Se $\Phi^{trial} \leq 0$, então (passo elástico): $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$;</p> <p>Caso contrário, então (passo plástico): Algoritmo de retorno:</p>
iii)	<p>Algoritmo de retorno: resolver o sistema de equações não-lineares (Newton-Raphson), tendo como variáveis: σ_{n+1}, $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ e $\Delta\gamma$.</p> $\begin{cases} R_{\sigma_{n+1}} = \sigma_{n+1} - \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} + 2G\Delta\gamma \frac{3\mathbf{S}_{n+1}}{2q_{n+1}} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta\gamma \\ R_{\Delta\gamma} = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} - \sigma_0 - H\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \end{cases}$
iv)	Atualizar outras variáveis internas:
v)	Fim.

Na resolução do sistema não-linear descrito na Quadro 3.1, o método de Newton-Raphson é adotado. Como ponto de partida, tal sistema necessita ser escrito na forma linearizada de acordo com a expressão a seguir (ver Holzapfel, 2000; Souza Neto, 2008):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} \delta\sigma_{n+1} \\ \delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta\Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix}^k. \quad (3.12)$$

Assim, a Quadro 3.2 mostra de forma resumo a aplicação do método de Newton-Raphson para resolução do sistema linear (Equação 3.12), onde o estado tentativo é tomado como parâmetro inicial do problema (Rao, 2009).

Quadro 3.2. Algoritmo para resolução do sistema linear através do método de Newton-Raphson.

i) Dado o estado tentativo como parâmetros iniciais:

$$\sigma_{n+1}^{(0)} = \sigma_{n+1}^{trial} \quad \Delta\gamma^{(0)} = \Delta\gamma \quad \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(0)} = \bar{\varepsilon}_n^p$$

ii) Resolver o sistema de equações para: σ_{n+1} , $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ e $\Delta\gamma$.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} \delta\sigma_{n+1} \\ \delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta\Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix}^k$$

iii) Calcular:

$$\sigma_{n+1}^{(k+1)} = \sigma_{n+1}^{(k)} + \delta\sigma_{n+1}^{(k+1)} \quad \Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} + \delta\Delta\gamma^{(k+1)}$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} + \delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)}$$

iv) Verificar convergência:

$$\Phi^{(k+1)} = q^{(k+1)} - \sigma_{y0} - H^I \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)}$$

$$erro = \frac{\Phi^{(k+1)}}{[\sigma_{y0} + H^I \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)}]} \leq tolerância$$

v) Fim.

onde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \mathbb{I} + 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} &= 2GN_{n+1} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} &= \mathbf{0} \\
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= 1 \\
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} &= -1
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} &= \mathbf{N}_{n+1} \\
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= -H \\
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} &= 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \frac{3}{2q_{n+1}} \left[\left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) - \frac{3}{2(q_{n+1})^2} \mathbf{S}_{n+1} \otimes \mathbf{S}_{n+1} \right] \tag{3.16}$$

3.2 OPERADOR TANGENTE CONSISTENTE

Tomando como base a implementação implícita do modelo descrito na seção 3.1 em um desenvolvimento de elementos finitos, o operador tangente consistente com o algoritmo de integração é requerido para se construir a chamada matriz de rigidez (Souza Neto, 2008; Malcher, 2011). Considerando um caso elástico, ou seja, quando o fluxo plástico é igual a zero dentro de um passo específico, o operador tangente no tempo t_{n+1} passa a ser simplesmente o operador elástico ou matriz de elasticidade do material (Lemaitre & Chaboche, 1990), descrito por:

$$\mathbb{D}^e = \mathbb{D} . \tag{3.17}$$

Por outro lado, em um caso elasto-plástico, ou seja, quando se assume a existência do fluxo plástico, o operador tangente, descrito por \mathbb{D}^{ep} é definido como:

$$\mathbb{D}^{ep} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}, \quad (3.18)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ representa o tensor das tensões obtido através do algoritmo de atualização das tensões, descrito acima (Souza Neto et al, 2008). Para o modelo de von Mises, a metodologia aplicada para determinação do operador tangente consistente com o algoritmo de atualização de tensões é escrito a partir da Equação (3.12) escrita na forma inversa:

$$\begin{bmatrix} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ d\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ d\Delta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{C}_{21} & C_{22} & C_{23} \\ \mathbf{C}_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{D}^e : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

onde:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{C}_{21} & C_{22} & C_{23} \\ \mathbf{C}_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (3.20)$$

Os termos C_{22} , C_{23} , C_{32} e C_{33} representam escalares. \mathbf{C}_{12} , \mathbf{C}_{21} , \mathbf{C}_{13} e \mathbf{C}_{31} representam tensores de segunda ordem e \mathbf{C}_{11} representa um tensor de quarta ordem. Assim, a partir da Equação 3.18, pode-se escrever que:

$$\mathbb{D}^{ep} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}} = \mathbf{C}_{11} : \mathbb{D}^e, \quad (3.21)$$

onde a operação $(\mathbf{C}_{11} : \mathbb{D})$ representa a composição entre o tensor de quarta ordem \mathbf{C}_{11} e o tensor de quarta ordem \mathbb{D} , dado pela matriz de elasticidade (Itskov, 2007).

A metodologia descrita nas seções 3.1 e 3.2 e aplicada ao modelo de von Mises, para determinação do algoritmo de atualização das tensões e matriz tangente consistente, será então aplicada a fora aos modelos de Tresca, Mohr-Coulomb e Bai & Wierzbicki. Desta forma, a diferença básica na aplicação da metodologia a outros modelos constitutivos está na formação do chamado sistema de equações residuais. A seguir, tais sistemas serão particularizados para cada modelo em estudo.

3.3 EQUAÇÕES RESIDUAIS PARA O MODELO DE TRESCA.

Para o modelo de Tresca, descrito no Capítulo 2 e matematicamente detalhado nos Quadros a.2 e a.3, em anexo, o sistema de equações residuais é então formado como se segue, em termos das tensões principais ordenadas como $S_1^{trial} \geq S_2^{trial} \geq S_3^{trial}$.

- i. Para N^a normal ao plano central:

$$\begin{aligned} R_{S_{n+1}} &= \mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{S}_{n+1}^{trial} + 2G\Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1}^a \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta\gamma^a \\ R_{\Delta\gamma} &= S_{1\ n+1} - S_{3\ n+1} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) \end{aligned} \quad (3.22)$$

- ii. Para N^a e $N^b \equiv N^6$ normais ao plano central e ao plano direito:

$$\begin{aligned} R_{S_{n+1}} &= \mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{S}_{n+1}^{trial} + 2G\Delta\gamma(\mathbf{N}_{n+1}^a + \mathbf{N}_{n+1}^b) \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - (\Delta\gamma^a + \Delta\gamma^b) \\ \begin{cases} R_{\Delta\gamma}^a = S_{1\ n+1} - S_{3\ n+1} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) \\ R_{\Delta\gamma}^b = S_{1\ n+1} - S_{2\ n+1} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.23)$$

- iii. Para N^a e $N^b \equiv N^6$ normais aos planos central e esquerdo:

$$\begin{aligned} R_{S_{n+1}} &= \mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{S}_{n+1}^{trial} + 2G\Delta\gamma(\mathbf{N}_{n+1}^a + \mathbf{N}_{n+1}^b) \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - (\Delta\gamma^a + \Delta\gamma^b) \\ \begin{cases} R_{\Delta\gamma}^a = S_{1\ n+1} - S_{3\ n+1} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) \\ R_{\Delta\gamma}^b = S_{2\ n+1} - S_{3\ n+1} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Assim, o quadro a seguir mostra de forma resumida o modelo numérico desenvolvido para o modelo matemático de Tresca.

Quadro 3.3. Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas associadas ao modelo de Tresca.

i)	Determinar o estado tentativo: Dado um incremento de deformação, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$.
	$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \mathbf{S}_{n+1}^{trial} = 2G\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}$ $\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial} = \bar{\varepsilon}_n^p \qquad p_{n+1}^{trial} = K\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}$
ii)	Decomposição de \mathbf{S}^{trial} : $S_1^{trial} \geq S_2^{trial} \geq S_3^{trial}$.
iii)	Verificar a admissibilidade Plástica:
	$\Phi^{trial} = S_1^{trial} - S_3^{trial} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial})$ <p>Se $\Phi^{trial} \leq 0$, então (passo elástico): $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$;</p> <p>Caso contrário, então (passo plástico):</p>
iv)	Algoritmo de retorno:
	Se $S_1^{trial} \geq S_2^{trial} \geq S_3^{trial}$; então para o plano central resolver o seguinte sistema de equações não lineares (Newton- Raphson) tendo como variáveis internas \mathbf{S}_{n+1} , $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ e $\Delta\gamma$.
	$\begin{cases} R_{S_{n+1}} = \mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{S}_{n+1}^{trial} + 2G\Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1}^a \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta\gamma^a \\ R_{\Delta\gamma} = S_{1\ n+1} - S_{3\ n+1} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) \end{cases}$
v)	Atualizar outras variáveis internas
vi)	Fim.

Quadro 3.4. Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas associadas ao modelo de Tresca para os cantos esquerdo e direito.

Após o item *iii*). da Tabela 3.3, tem-se:

vii) Voltamos para os cantos

Se $S_1^{trial} + S_3^{trial} - 2S_2^{trial} > 0$ então resolver as equações não lineares para o canto direito:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{S_{n+1}} = S_{n+1} - S_{n+1}^{trial} + 2G(\Delta\gamma^a N_{n+1}^a + \Delta\gamma^b N_{n+1}^b) \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - (\Delta\gamma^a + \Delta\gamma^b) \\ \left\{ \begin{array}{l} R_{\Delta\gamma}^a = S_{1n+1} - S_{3n+1} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) \\ R_{\Delta\gamma}^b = S_{1n+1} - S_{2n+1} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Caso contrario, resolver as equações para o canto esquerdo:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{S_{n+1}} = S_{n+1} - S_{n+1}^{trial} + 2G(\Delta\gamma^a N_{n+1}^a + \Delta\gamma^b N_{n+1}^b) \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - (\Delta\gamma^a + \Delta\gamma^b) \\ \left\{ \begin{array}{l} R_{\Delta\gamma}^a = S_{1n+1} - S_{3n+1} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) \\ R_{\Delta\gamma}^b = S_{2n+1} - S_{3n+1} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

viii) Atualizar outras variáveis internas

ix) Fim.

onde as derivadas das equações residuais são:

i. Para o plano central:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \mathbb{I}^4 - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{n+1}^a}{\partial \sigma_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} &= 2GN_{n+1}^a \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= 1\end{aligned}\tag{3.26}$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} = -1$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} &= N_{n+1}^a \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= -H\end{aligned}\tag{3.27}$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial N_{n+1}^a}{\partial \sigma_{n+1}} = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \sigma_{n+1}^2}\tag{3.28}$$

ii. Para os planos central e direito:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \mathbb{I}^4 - \frac{1}{3}I \otimes I + 2G \left(\Delta\gamma^a \frac{\partial N_{n+1}^a}{\partial \sigma_{n+1}} + \Delta\gamma^b \frac{\partial N_{n+1}^b}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \\ \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} &= 2G(N_{n+1}^a + N_{n+1}^b)\end{aligned}\tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \mathbf{0} \\
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= 1 \\
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta \gamma^a} &= \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta \gamma^b} = -1
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\Delta \gamma}^a}{\partial \sigma_{n+1}} &= N_{n+1}^a \\
\frac{\partial R_{\Delta \gamma}^b}{\partial \sigma_{n+1}} &= N_{n+1}^b \equiv N_{n+1}^6 \\
\frac{\partial R_{\Delta \gamma}^a}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \frac{\partial R_{\Delta \gamma}^b}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = -H \\
\frac{\partial R_{\Delta \gamma}^a}{\partial \Delta \gamma} &= \frac{\partial R_{\Delta \gamma}^b}{\partial \Delta \gamma} = 0
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial N_{n+1}^b}{\partial \sigma_{n+1}} = \frac{\partial^2 \phi_6}{\partial \sigma_{n+1}^2} \tag{3.32}$$

iii. Para os planos central e esquerdo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \mathbb{I}^4 - \frac{1}{3} I \otimes I + 2G \left(\Delta \gamma^a \frac{\partial N_{n+1}^a}{\partial \sigma_{n+1}} + \Delta \gamma^b \frac{\partial N_{n+1}^b}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \\
\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \mathbf{0} \\
\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \Delta \gamma} &= 2G(N_{n+1}^a + N_{n+1}^b)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \mathbf{0} \\
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= 1 \\
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma^a} &= \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma^b} = -1
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}^a}{\partial \sigma_{n+1}} &= N_{n+1}^a \\
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}^b}{\partial \sigma_{n+1}} &= N_{n+1}^b \equiv N_{n+1}^2 \\
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}^a}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \frac{\partial R_{\Delta\gamma}^b}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = -H
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}^a}{\partial \Delta\gamma} &= \frac{\partial R_{\Delta\gamma}^b}{\partial \Delta\gamma} = 0 \\
\frac{\partial N_{n+1}^b}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \sigma_{n+1}^2}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

3.4 EQUAÇÕES RESIDUAIS PARA O MODELO DE MOHR-COULOMB.

Para o modelo de Mohr-Coulomb, também descrito no Capítulo 2 e matematicamente detalhado nas Quadros a.4 e a.5, em anexo, o sistema de equações residuais é então formado como se segue, em termos das tensões principais ordenadas como: $\sigma_1^{trial} \geq \sigma_2^{trial} \geq \sigma_3^{trial}$.

i. Para N^a normal ao plano central:

$$\begin{aligned}
R_{\sigma_{n+1}} &= \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^{trial} + \Delta\gamma^a (2G[N_d^a]_{n+1} - KN_v^a) \\
R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - 2\Delta\gamma^a \cos\phi
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$R_{\Delta\gamma} = (\sigma_{1\ n+1} - \sigma_{3\ n+1}) + (\sigma_{1\ n+1} + \sigma_{3\ n+1})\sin\phi - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p)\cos\phi$$

Na fórmula anterior, $\mathbf{N}_v^a \equiv tr[\mathbf{N}^a]$ é a componente de fluxo volumétrico do vetor \mathbf{N}^a no estado atualizado e \mathbf{N}_d^a representa o estado atualizado do autovalor da sua projeção desviatoria.

ii. Para \mathbf{N}^a e $\mathbf{N}^b \equiv \mathbf{N}^6$ normais aos planos central e direito:

$$R_{\sigma_{n+1}} = \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^{trial} + \Delta\gamma^a (2G[\mathbf{N}_d^a]_{n+1} - K\mathbf{N}_v^a) + \Delta\gamma^b (2G[\mathbf{N}_d^b]_{n+1} - K\mathbf{N}_v^b)$$

$$R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - 2(\Delta\gamma^a + \Delta\gamma^b)\cos\phi \quad (3.38)$$

$$\begin{cases} R_{\Delta\gamma}^a = (\sigma_{1\ n+1} - \sigma_{3\ n+1}) + (\sigma_{1\ n+1} + \sigma_{3\ n+1})\sin\phi - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p)\cos\phi \\ R_{\Delta\gamma}^b = (\sigma_{1\ n+1} - \sigma_{2\ n+1}) + (\sigma_{1\ n+1} + \sigma_{2\ n+1})\sin\phi - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p)\cos\phi \end{cases}$$

iii. Para \mathbf{N}^a e $\mathbf{N}^b \equiv \mathbf{N}^6$ normais aos planos central e esquerdo:

$$R_{\sigma_{n+1}} = \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^{trial} + \Delta\gamma^a (2G[\mathbf{N}_d^a]_{n+1} - K\mathbf{N}_v^a) + \Delta\gamma^b (2G[\mathbf{N}_d^b]_{n+1} - K\mathbf{N}_v^b)$$

$$R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - 2(\Delta\gamma^a + \Delta\gamma^b)\cos\phi \quad (3.39)$$

$$\begin{cases} R_{\Delta\gamma}^a = (\sigma_{1\ n+1} - \sigma_{3\ n+1}) + (\sigma_{1\ n+1} + \sigma_{3\ n+1})\sin\phi - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p)\cos\phi \\ R_{\Delta\gamma}^b = (\sigma_{2\ n+1} - \sigma_{3\ n+1}) + (\sigma_{2\ n+1} + \sigma_{3\ n+1})\sin\phi - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p)\cos\phi \end{cases}$$

Quadro 3.5. Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas associadas ao modelo de Mohr-Coulomb.

i) Determinar o estado tentativo: Dado um incremento de deformação, $\Delta\epsilon$.

$$\epsilon_{n+1}^{e\ trial} = \epsilon_n^e + \Delta\epsilon \qquad \sigma_{n+1}^{trial} = 2G\epsilon_{d\ n+1}^{e\ trial} + K\epsilon_{v\ n+1}^{e\ trial}\mathbf{I}$$

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^{p\ trial} = \bar{\epsilon}_n^p$$

ii) Decomposição de σ^{trial} : $\sigma_1^{trial} \geq \sigma_2^{trial} \geq \sigma_3^{trial}$.

iii) Verificar a admissibilidade Plástica:

$$\Phi^{trial} = (\sigma_1^{trial} - \sigma_3^{trial}) + (\sigma_1^{trial} + \sigma_3^{trial})\sin\phi - \sigma_y(\bar{\epsilon}_{n+1}^{p\ trial})\cos\phi$$

Se $\Phi^{trial} \leq 0$, então (passo elástico): $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$;

Caso contrário, então (passo plástico):

iv) Algoritmo de retorno:
 Se $\sigma_1^{trial} \geq \sigma_2^{trial} \geq \sigma_3^{trial}$; então para o plano central resolver o seguinte sistema de equações não lineares (Newton- Raphson) tendo como variáveis internas σ_{n+1} , $\bar{\epsilon}_{n+1}^p$ e $\Delta\gamma$.

$$\begin{cases} R_{\sigma_{n+1}} = \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^{trial} + \Delta\gamma^a(2G[N_d^a]_{n+1} - KN_v^a) \\ R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p} = \bar{\epsilon}_{n+1}^p - \bar{\epsilon}_n^p - 2\Delta\gamma^a\cos\phi \\ R_{\Delta\gamma} = (\sigma_{1\ n+1} - \sigma_{3\ n+1}) + (\sigma_{1\ n+1} + \sigma_{3\ n+1})\sin\phi - \sigma_y(\bar{\epsilon}_{n+1}^p)\cos\phi \end{cases}$$

v) Atualizar outras variáveis internas

vi) Fim.

Quadro 3.6 Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas associadas ao modelo de Mohr Coulomb para os cantos esquerdo e direito.

Apos do ponto *iii*). da Tabela 3.5

vii) Voltamos para os cantos

Se $(1 - \sin\phi)\sigma_1^{trial} - 2\sigma_3^{trial} + (1 + \sin\phi)\sigma_2^{trial} > 0$ então resolver as equações não lineares para o canto direito:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\sigma_{n+1}} = \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^{trial} + \Delta\gamma^a (2G[N_d^a]_{n+1} - KN_v^a) + \Delta\gamma^b (2G[N_d^b]_{n+1} - KN_v^b) \\ R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p} = \bar{\epsilon}_{n+1}^p - \bar{\epsilon}_n^p - 2(\Delta\gamma^a + \Delta\gamma^b)\cos\phi \\ \left\{ \begin{array}{l} R_{\Delta\gamma}^a = (\sigma_{1n+1} - \sigma_{3n+1}) + (\sigma_{1n+1} + \sigma_{3n+1})\sin\phi - \sigma_y(\bar{\epsilon}_{n+1}^p)\cos\phi \\ R_{\Delta\gamma}^b = (\sigma_{1n+1} - \sigma_{2n+1}) + (\sigma_{1n+1} + \sigma_{2n+1})\sin\phi - \sigma_y(\bar{\epsilon}_{n+1}^p)\cos\phi \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Caso contrario, resolver as equações para o canto esquerdo:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\sigma_{n+1}} = \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^{trial} + \Delta\gamma^a (2G[N_d^a]_{n+1} - KN_v^a) + \Delta\gamma^b (2G[N_d^b]_{n+1} - KN_v^b) \\ R_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p} = \bar{\epsilon}_{n+1}^p - \bar{\epsilon}_n^p - 2(\Delta\gamma^a + \Delta\gamma^b)\cos\phi \\ \left\{ \begin{array}{l} R_{\Delta\gamma}^a = (\sigma_{1n+1} - \sigma_{3n+1}) + (\sigma_{1n+1} + \sigma_{3n+1})\sin\phi - \sigma_y(\bar{\epsilon}_{n+1}^p)\cos\phi \\ R_{\Delta\gamma}^b = (\sigma_{2n+1} - \sigma_{3n+1}) + (\sigma_{2n+1} + \sigma_{3n+1})\sin\phi - \sigma_y(\bar{\epsilon}_{n+1}^p)\cos\phi \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Onde,

$$N_d = \frac{\partial\phi}{\partial\sigma} - tr \left[\frac{\partial\phi}{\partial\sigma} \right] \mathbf{I}$$

$$N_v = tr \left[\frac{\partial\phi}{\partial\sigma} \right] \mathbf{I}$$

x) Atualizar outras variáveis internas

xi) Fim.

onde as derivadas das equações residuais são:

i. Para o plano central:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \mathbb{I} + 2G\Delta\gamma^a \frac{\partial [N_d^a]_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} - \Delta\gamma^a K \frac{\partial [N_v^a]_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \varepsilon_{n+1}^p} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma^a} &= 2G[N_d^a]_{n+1} - K[N_v^a]_{n+1}\end{aligned}\tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{\varepsilon_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial R_{\varepsilon_{n+1}^p}}{\partial \varepsilon_{n+1}^p} &= 1 \\ \frac{\partial R_{\varepsilon_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma^a} &= -2c\cos\phi\end{aligned}\tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} &= N_{n+1}^a \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \varepsilon_{n+1}^p} &= -Hc\cos\phi \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma^a} &= 0\end{aligned}\tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial [N_d^a]_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{n+1}} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial \sigma_{n+1}} - \text{tr} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \mathbf{I} \right] \\ \frac{\partial [N_v^a]_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{n+1}} \left[\text{tr} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \mathbf{I} \right]\end{aligned}\tag{3.42}$$

ii. Para os planos central e direito:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \mathbb{I} + 2G \left(\Delta\gamma^a \frac{\partial [N_d^a]_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} + \Delta\gamma^b \frac{\partial [N_d^b]_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \\ &\quad - K \left(\Delta\gamma^a \frac{\partial [N_v^a]_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} + \Delta\gamma^b \frac{\partial [N_v^b]_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \\ \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma^a} = 2G([N_d^a]_{n+1} - K[N_v^a]_{n+1})$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma^b} = 2G([N_d^b]_{n+1} - K[N_v^b]_{n+1})$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = 1 \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma^a} = \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma^b} = -2\cos\phi$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}^a}{\partial \sigma_{n+1}} = N_{n+1}^a$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}^b}{\partial \sigma_{n+1}} = N_{n+1}^b \equiv N_{n+1}^6$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}^a}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \frac{\partial R_{\Delta\gamma}^b}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = -H\cos\phi \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}^a}{\partial \Delta\gamma} = \frac{\partial R_{\Delta\gamma}^b}{\partial \Delta\gamma} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial [N_d^a]_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{n+1}} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial \sigma_{n+1}} - \text{tr} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \mathbf{I} \right] \\
\frac{\partial [N_d^b]_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{n+1}} \left[\frac{\partial \phi_6}{\partial \sigma_{n+1}} - \text{tr} \left(\frac{\partial \phi_6}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \mathbf{I} \right] \\
\frac{\partial [N_v^a]_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{n+1}} \left[\text{tr} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \mathbf{I} \right] \\
\frac{\partial [N_v^b]_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{n+1}} \left[\text{tr} \left(\frac{\partial \phi_6}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \mathbf{I} \right]
\end{aligned} \tag{3.46}$$

iii. Para os planos central e esquerdo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \mathbb{I} + 2G \left(\Delta \gamma^a \frac{\partial [N_d^a]_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} + \Delta \gamma^b \frac{\partial [N_d^b]_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \\
&\quad - K \left(\Delta \gamma^a \frac{\partial [N_v^a]_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} + \Delta \gamma^b \frac{\partial [N_v^b]_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \\
\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \varepsilon_{n+1}^p} &= \mathbf{0} \\
\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta \gamma^a} &= 2G([N_d^a]_{n+1} - K[N_v^a]_{n+1}) \\
\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta \gamma^b} &= 2G([N_d^b]_{n+1} - K[N_v^b]_{n+1})
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \mathbf{0} \\
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= 1 \\
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta \gamma^a} &= \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta \gamma^b} = -2c \cos \phi
\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\Delta \gamma}^a}{\partial \sigma_{n+1}} &= N_{n+1}^a \\
\frac{\partial R_{\Delta \gamma}^b}{\partial \sigma_{n+1}} &= N_{n+1}^b \equiv N_{n+1}^2 \\
\frac{\partial R_{\Delta \gamma}^a}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \frac{\partial R_{\Delta \gamma}^b}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = -H \cos \phi \\
\frac{\partial R_{\Delta \gamma}^a}{\partial \Delta \gamma} &= \frac{\partial R_{\Delta \gamma}^b}{\partial \Delta \gamma} = 0
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial [N_d^a]_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{n+1}} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial \sigma_{n+1}} - \text{tr} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \mathbf{I} \right] \\
\frac{\partial [N_d^b]_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{n+1}} \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial \sigma_{n+1}} - \text{tr} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \mathbf{I} \right] \\
\frac{\partial [N_v^a]_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{n+1}} \left[\text{tr} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \mathbf{I} \right] \\
\frac{\partial [N_v^b]_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{n+1}} \left[\text{tr} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \mathbf{I} \right]
\end{aligned} \tag{3.50}$$

3.5 EQUAÇÕES RESIDUAIS PARA O MODELO DE BAI & WIERZBICKY

Para o modelo de Bai & Wierzbicki, também descrito no Capítulo 2 e matematicamente detalhado na Quadro a.6, em anexo, o sistema de equações residuais é então formado como se segue:

$$\begin{aligned}
 R_{\sigma_{n+1}} &= \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^{e\,trial} + \Delta\gamma \mathbb{D}^e : \mathbf{N}_{n+1} \\
 R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta\gamma \sqrt{\alpha^2 + \frac{2}{9}\beta^2 + \lambda^2 \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} + 2 \alpha \lambda \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{S}} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}}} \\
 R_{\Delta\gamma} &= \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) A(\eta) B(\gamma)}
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Quadro 3.7. Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas associado ao modelo de Bai & Wierzbicki.

i)	Determinar o estado tentativo: Dado um incremento de deformação, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$.
	$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \mathbf{S}_{n+1}^{trial} = 2G\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial}$ $\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\,trial} = \bar{\varepsilon}_n^p \qquad p_{n+1}^{trial} = K\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial}$
ii)	Verificar a admissibilidade Plástica:
	$\Phi^{trial} = q_{n+1}^{trial} - \sigma_{y0}(\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\,trial}) A_{n+1}^{trial} B_{n+1}^{trial}$ <p>Se $\Phi^{trial} \leq 0$, então (passo elástico): $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$;</p> <p>Caso contrário, então (passo plástico): Algoritmo de retorno:</p>
iii)	Algoritmo de retorno: resolver o sistema de equações não-lineares (Newton-Raphson), tendo como variáveis: σ_{n+1} , $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ e $\Delta\gamma$.
	$\left\{ \begin{array}{l} R_{\sigma_{n+1}} = \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^{e\,trial} + \Delta\gamma \mathbb{D}^e : \mathbf{N}_{n+1} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta\gamma \sqrt{\alpha^2 + \frac{2}{9}\beta^2 + \lambda^2 \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} + 2 \alpha \lambda \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{S}} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}}} \\ R_{\Delta\gamma} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) A(\eta) B(\gamma)} \end{array} \right.$
iv)	Atualizar outras variáveis internas:
v)	Fim.

onde as derivadas das equações residuais são:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \mathbb{I} + \Delta\gamma \mathbb{D}^e : \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \Delta\gamma \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}\end{aligned}\tag{3.52}$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} = \mathbb{D}^e : \mathbf{N}_{n+1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} &= -\Delta\gamma \frac{\partial \sqrt{\alpha^2 + \frac{2}{9}\beta^2 + \lambda^2 \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} + 2 \alpha \lambda \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{S}} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}}}}{\partial \sigma_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= 1 - \Delta\gamma \frac{\partial \sqrt{\alpha^2 + \frac{2}{9}\beta^2 + \lambda^2 \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} + 2 \alpha \lambda \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{S}} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}\end{aligned}\tag{3.53}$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} = -\sqrt{\alpha^2 + \frac{2}{9}\beta^2 + \lambda^2 \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} + 2 \alpha \lambda \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{S}} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}}}$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} = \mathbf{N}_{n+1}$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = -A_{n+1} B_{n+1} H\tag{3.54}$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} = \frac{\partial \left[\frac{3}{2q_{n+1}} \alpha_{n+1} S_{n+1} \right]}{\partial \sigma_{n+1}} + \frac{\partial \left[\frac{3}{2q_{n+1}} \lambda_{n+1} M_{n+1} \right]}{\partial \sigma_{n+1}} + \frac{\partial \left[\frac{1}{3} \beta_{n+1} I \right]}{\partial \sigma_{n+1}}\tag{3.55}$$

As outras derivadas necessárias para construção do modelo numérico de Bai, podem ser observadas dentro do anexo desta dissertação.

4. MATERIAIS E METODOS

Neste capítulo será apresentada a geometria da estrutura ROPS usada como exemplo de dimensionamento, a malha de elementos finitos construída para realização das simulações numéricas, as propriedades materiais necessárias para execução dos modelos elasto-plásticos selecionados, bem como as geometrias e malhas de dois corpos de prova que serão usados para teste de convergência iniciais dos modelos.

Para se testar a robustez dos modelos estudados, inicialmente serão realizados testes com um corpo de prova cilíndrico liso sujeito a tração pura e um corpo de prova tipo borboleta sujeito a cisalhamento simples.

Estes resultados experimentais são tirados da literatura, onde os corpos são fabricados de aço 1045.

Em seguida, a estrutura ROPS fabricada em aço FB 70, serão então usadas, e seus resultados discutidos com base em parâmetros elasto-plásticos como: O ângulo de Lode, O nível de triaxialidade, Deformação Plástica Equivalente e Tensão Equivalente.

4.1 GEOMETRIA E MALHA DE ELEMENTOS FINITOS.

4.1.1 ESTRUTURA ROPS

De acordo com Vale (2012), a estrutura ROPS interna, usada nas análises deste trabalho, é então fabricada de aço FB 70, que possui módulo de elasticidade de 206 GPa, limite de escoamento inicial de 490 MPa e coeficiente de Poisson igual a 0.3. Também como condição inicial de projeto, adota-se uma seção transversal tubular com diâmetro externo de 56 mm e espessura de parede de 10 mm para a estrutura ROPS. Para realização das simulações numéricas, constrói-se uma malha de elementos finitos tridimensional, com elementos hexagonais de 8 nós. A malha é então construída tendo 25440 elementos e 38402 nós, utilizando integração reduzida com quatro pontos de Gauss.

A Figura 4.1 mostra as dimensões globais da estrutura ROPS aqui utilizada (Vale, 2012). Já na Figura 4.2, tem-se a malha de elementos finitos descrita acima.

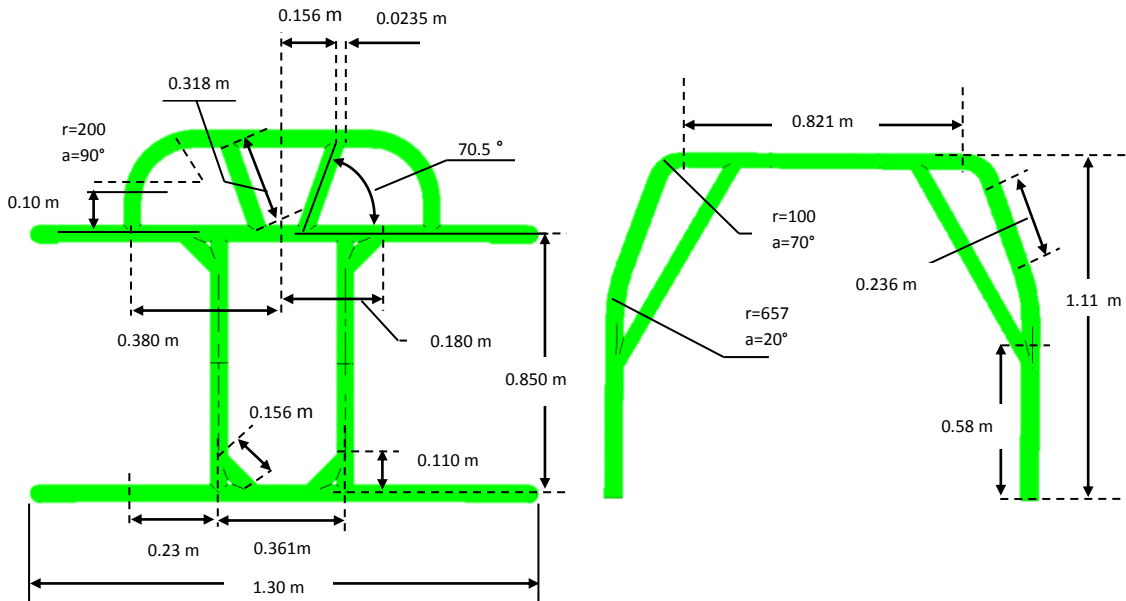


Figura 4.1. Geometria do ROPS interno usado no analises. Fonte: Vale, 2012.

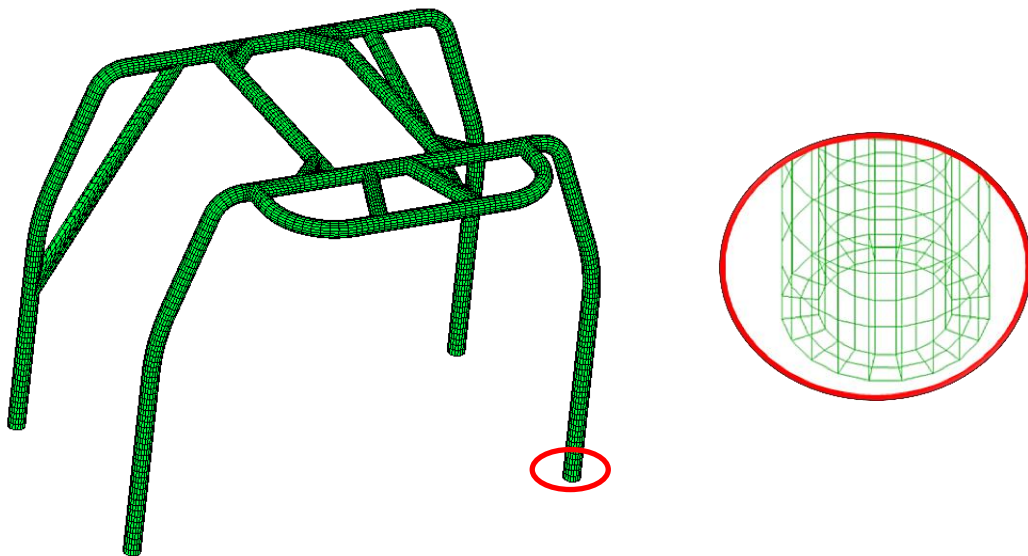


Figura 4.2. Malha de elementos finitos para a estrutura ROPS interna tipo gaiola.

É importante destacar que o nível de discretização espacial escolhido, foi baseado em testes numéricos preliminares, onde malhas com diferentes níveis de refinamento foram testadas. A malha final com 38402 nós foi resultado da convergência dos resultados numéricos, minimizando assim, o efeito da dependência de malha, já que os modelos numéricos aqui construídos são classificados como modelos locais (ver Andrade, 2012).

4.1.2 CORPO CILINDRICO LISO E BORBOLETA.

Para se proceder a realização de testes numéricos iniciais e assim descrever o comportamento dos modelos elasto-plásticos estudados, um corpo de prova cilíndrico liso sob carregamento de tração e outro corpo de prova chamado de “borboleta” sujeito a cisalhamento puro serão usados (ver Bai, 2008; Malcher 2011). Ambos os corpos de prova foram fabricados de aço 1045 (ver Malcher et al, 2012).

A Figura 4.3 mostra a geometria dos corpos de prova, bem como a malha de elementos finitos usada.

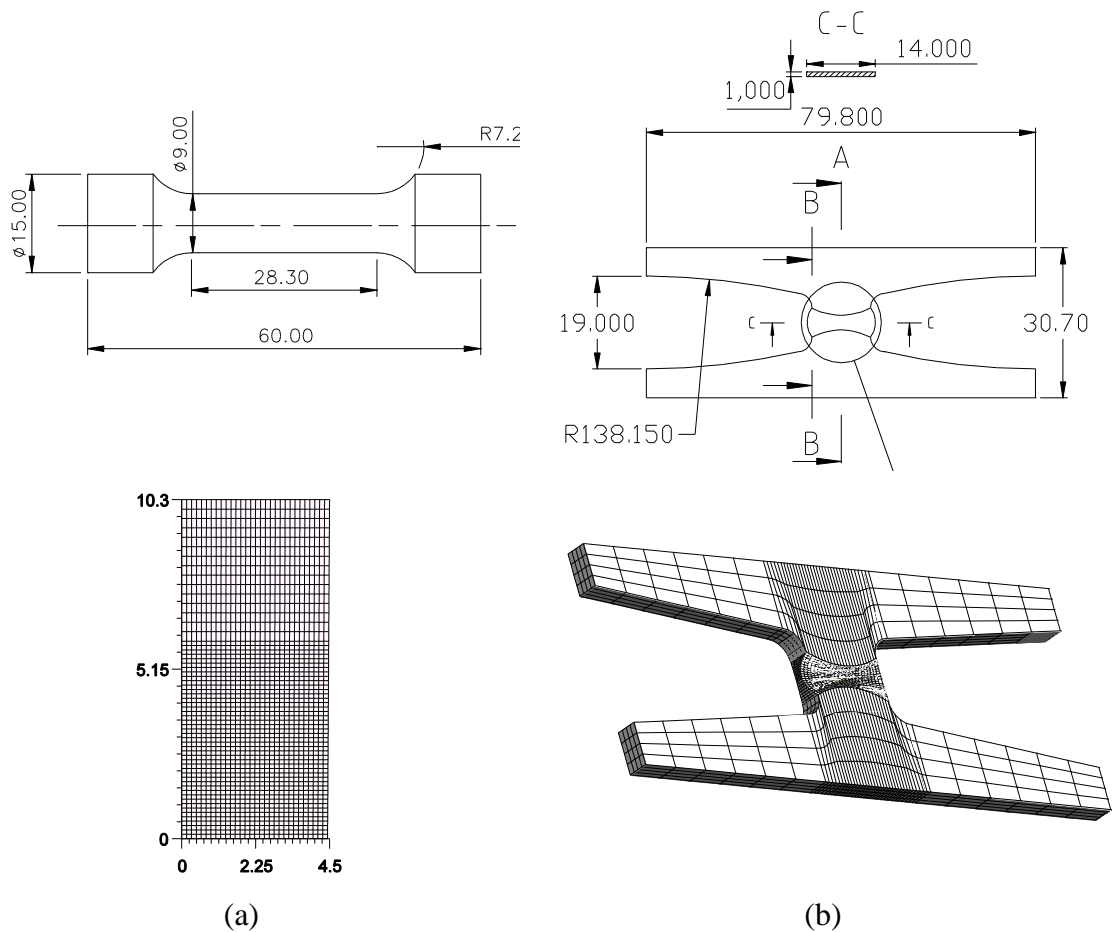


Figura 4.3. (a) Corpo de prova cilíndrico liso e (b) corpo de prova do tipo borboleta.

O corpo de prova cilíndrico liso foi discretizado com elementos quadrilaterais de oito nós, com quatro pontos de Gauss. Um total de 1800 elementos foram usados, seguido de 5581 nós. O tamanho da área de ensaio para o corpo de prova é igual a 20.5 mm. Devido à simetria do problema, somente 1/4 do corpo foi discretizado e resolvido como um problema bidimensional. Já para o corpo de prova do tipo “borboleta” uma malha tridimensional de elementos finitos foi utilizada, com 2432 elementos de vinte nós, seguido de 12681 nós.

4.2 PROPRIEDADES MATERIAIS PARA O AÇO FB 70 E AÇO 1045

Para utilização dos modelos elasto-plásticos descritos nos capítulos anteriores, as seguintes propriedades materiais foram adotadas, como base em informações disponíveis em catálogos de fabricantes (ver catálogo V&M, 2012) e na literatura (Bai, 2008).

Tabela 4.1 Propriedades materiais para o aço FB 70.

<i>Descrição</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Valor</i>
<i>Modulo de elasticidade</i>	E	206 GPa
<i>Tensão de escoamento inicial</i>	σ_0	490 MPa
<i>Ângulo de atrito interno</i>	ϕ	0.1
<i>Triaxialidade referência</i>	η_0	0.33
<i>Parâmetro de pressão (Bai)</i>	C_η	0.09
<i>Parâmetro de tração (Bai)</i>	c_θ^t	1.00
<i>Parâmetro de compressão (Bai)</i>	c_θ^c	0.90
<i>Parâmetro de cisalhamento (Bai)</i>	c_θ^s	0.855
<i>Expoente de Bai</i>	m	6

A composição química do aço FB70 é mostrada na Tabela 4.2.

Tabela 4.2. Composição química aço FB 70. Fonte: catálogo V&M, 2012.

%	C	Mn	P	S	Si	Cr	Al	Mo
Mínim	0.00	1.40	0.00	0.00	0.20	-	0.020	-
Máxim	0.22	1.80	0.05	0.05	0.50	-	-	-

A Tabela 4.3 mostra as propriedades materiais utilizadas na simulação.

Tabela 4.3. Propriedades materiais para o aço 1045. Fonte: Malcher, 2011

<i>Descrição</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Valor</i>
<i>Módulo de Elasticidade</i>	E	220 [GPa]
<i>Coefficiente de Poisson</i>	ν	0.33
<i>Tensão de escoamento inicial</i>	σ_{y_0}	830 [MPa]
<i>Curva de encruamento</i>	$\sigma_y(R)$	$500(1 - e^{-0.4R})$

4.3 CONDIÇÕES GERAIS PARA SIMULAÇÃO

De acordo com as normas citadas (Vale, 2012; ADR59), para se manter o volume seguro dentro da cabine dos ocupantes, a estrutura de proteção pode apresentar uma

deflexão máxima nas três dimensões (lateral/vertical/longitudinal) de até 100 milímetros, quando sujeita as cargas destacadas na Tabela 2.1 e dados os pontos de aplicação mostrados na Figura 2.13. Obedecida esta condição de contorno, a estrutura possuirá então um nível de rigidez adequado. Além disso, segundo requisitos aqui estabelecidos e baseado em normas existentes, o material escolhido para fabricação deste tipo de estrutura de proteção tem que possuir um limite de escoamento na faixa de 345 à 610 MPa, (Vale, 2012; ADR59). É importante ressaltar que a seleção de materiais com limite de escoamento na faixa inferior (345 MPa) vai resultar em uma seção transversal mais robusta para a estrutura, ou seja, maior diâmetro externo e espessura da seção tubular. Isto poderá acarretar em uma estrutura com elevado peso próprio. Desta forma, de acordo com Vale (2012), recomenda-se uma ponderação entre as propriedades materiais e as dimensões estruturais de maneira a se obter uma estrutura adequado.

Como mencionado, a escolha dos quatro modelos constitutivos já descrito é justificada pela evolução no acoplamento de efeitos atualmente largamente estudados, como: efeito da pressão hidrostática e nível de triaxialidade, e efeito do terceiro invariante do tensor desviador ou efeito do ângulo de Lode.

4. MATERIAIS E METODOS

Neste capítulo será apresentada a geometria da estrutura ROPS usada como exemplo de dimensionamento, a malha de elementos finitos construída para realização das simulações numéricas, as propriedades materiais necessárias para execução dos modelos elasto-plásticos selecionados, bem como as geometrias e malhas de dois corpos de prova que serão usados para teste de convergência iniciais dos modelos.

Para se testar a robustez dos modelos estudados, inicialmente serão realizados testes com um corpo de prova cilíndrico liso sujeito a tração pura e um corpo de prova tipo borboleta sujeito a cisalhamento simples.

Estes resultados experimentais são tirados da literatura, onde os corpos são fabricados de aço 1045.

Em seguida, a estrutura ROPS fabricada em aço FB 70, serão então usadas, e seus resultados discutidos com base em parâmetros elasto-plásticos como: O ângulo de Lode, O nível de triaxialidade, Deformação Plástica Equivalente e Tensão Equivalente.

4.1 GEOMETRIA E MALHA DE ELEMENTOS FINITOS.

4.1.1 ESTRUTURA ROPS

De acordo com Vale (2012), a estrutura ROPS interna, usada nas análises deste trabalho, é então fabricada de aço FB 70, que possui módulo de elasticidade de 206 GPa, limite de escoamento inicial de 490 MPa e coeficiente de Poisson igual a 0.3. Também como condição inicial de projeto, adota-se uma seção transversal tubular com diâmetro externo de 56 mm e espessura de parede de 10 mm para a estrutura ROPS. Para realização das simulações numéricas, constrói-se uma malha de elementos finitos tridimensional, com elementos hexagonais de 8 nós. A malha é então construída tendo 25440 elementos e 38402 nós, utilizando integração reduzida com quatro pontos de Gauss.

A Figura 4.1 mostra as dimensões globais da estrutura ROPS aqui utilizada (Vale, 2012). Já na Figura 4.2, tem-se a malha de elementos finitos descrita acima.

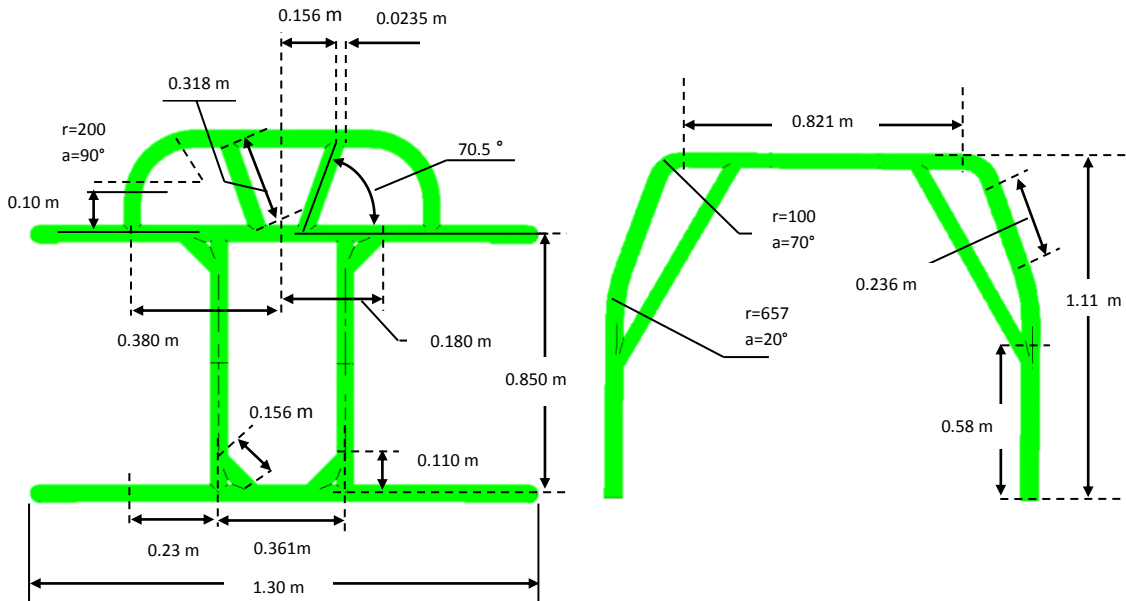


Figura 4.1. Geometria do ROPS interno usado no analises. Fonte: Vale, 2012.

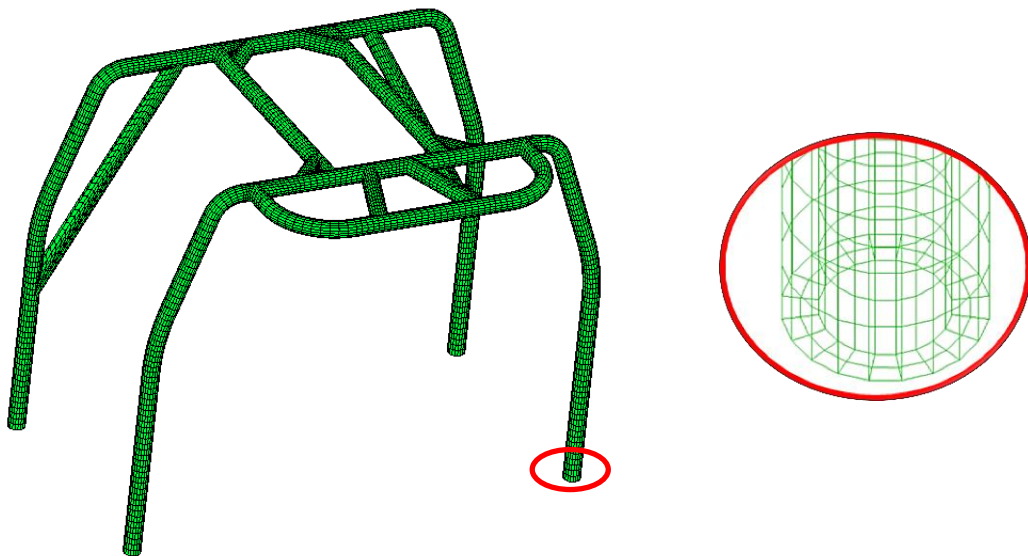


Figura 4.2. Malha de elementos finitos para a estrutura ROPS interna tipo gaiola.

É importante destacar que o nível de discretização espacial escolhido, foi baseado em testes numéricos preliminares, onde malhas com diferentes níveis de refinamento foram testadas. A malha final com 38402 nós foi resultado da convergência dos resultados numéricos, minimizando assim, o efeito da dependência de malha, já que os modelos numéricos aqui construídos são classificados como modelos locais (ver Andrade, 2012).

4.1.2 CORPO CILINDRICO LISO E BORBOLETA.

Para se proceder a realização de testes numéricos iniciais e assim descrever o comportamento dos modelos elasto-plásticos estudados, um corpo de prova cilíndrico liso sob carregamento de tração e outro corpo de prova chamado de “borboleta” sujeito a cisalhamento puro serão usados (ver Bai, 2008; Malcher 2011). Ambos os corpos de prova foram fabricados de aço 1045 (ver Malcher et al, 2012).

A Figura 4.3 mostra a geometria dos corpos de prova, bem como a malha de elementos finitos usada.

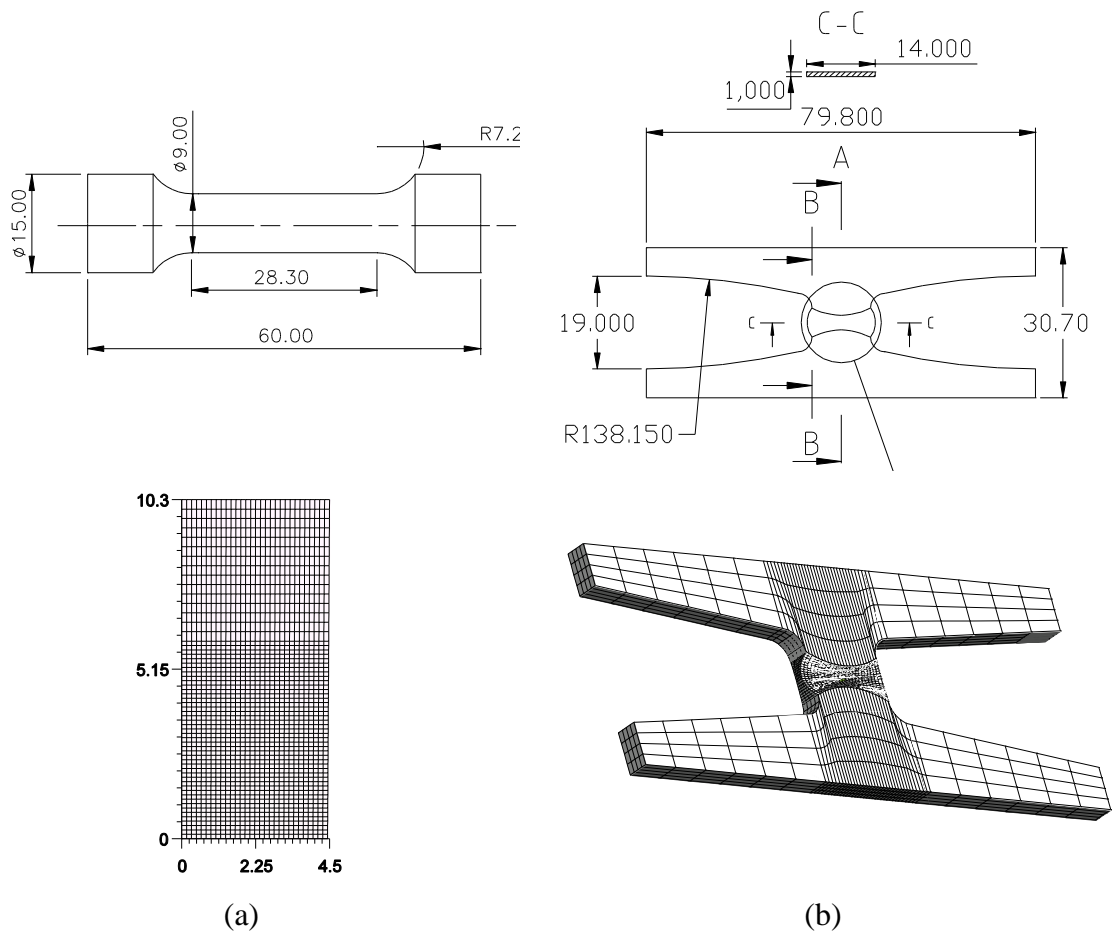


Figura 4.3. (a) Corpo de prova cilíndrico liso e (b) corpo de prova do tipo borboleta.

O corpo de prova cilíndrico liso foi discretizado com elementos quadriláteros de oito nós, com quatro pontos de Gauss. Um total de 1800 elementos foram usados, seguido de 5581 nós. O tamanho da área de ensaio para o corpo de prova é igual a 20.5 mm. Devido à simetria do problema, somente 1/4 do corpo foi discretizado e resolvido como um problema bidimensional. Já para o corpo de prova do tipo “borboleta” uma malha tridimensional de elementos finitos foi utilizada, com 2432 elementos de vinte nós, seguido de 12681 nós.

4.2 PROPRIEDADES MATERIAIS PARA O AÇO FB 70 E AÇO 1045

Para utilização dos modelos elasto-plásticos descritos nos capítulos anteriores, as seguintes propriedades materiais foram adotadas, como base em informações disponíveis em catálogos de fabricantes (ver catálogo V&M, 2012) e na literatura (Bai, 2008).

Tabela 4.1 Propriedades materiais para o aço FB 70.

<i>Descrição</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Valor</i>
<i>Módulo de elasticidade</i>	E	206 GPa
<i>Tensão de escoamento inicial</i>	σ_0	490 MPa
<i>Ângulo de atrito interno</i>	ϕ	0.1
<i>Triaxialidade referência</i>	η_0	0.33
<i>Parâmetro de pressão (Bai)</i>	C_η	0.09
<i>Parâmetro de tração (Bai)</i>	c_θ^t	1.00
<i>Parâmetro de compressão (Bai)</i>	c_θ^c	0.90
<i>Parâmetro de cisalhamento (Bai)</i>	c_θ^s	0.855
<i>Expoente de Bai</i>	m	6

A composição química do aço FB70 é mostrada na Tabela 4.2.

Tabela 4.2. Composição química aço FB 70. Fonte: catálogo V&M, 2012.

%	C	Mn	P	S	Si	Cr	Al	Mo
Mínim	0.00	1.40	0.00	0.00	0.20	-	0.020	-
Máxim	0.22	1.80	0.05	0.05	0.50	-	-	-

A Tabela 4.3 mostra as propriedades materiais utilizadas na simulação.

Tabela 4.3. Propriedades materiais para o aço 1045. Fonte: Malcher, 2011

<i>Descrição</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Valor</i>
<i>Módulo de Elasticidade</i>	E	220 [GPa]
<i>Coefficiente de Poisson</i>	ν	0.33
<i>Tensão de escoamento inicial</i>	σ_{y_0}	830 [MPa]
<i>Curva de encruamento</i>	$\sigma_y(R)$	$500(1 - e^{-0.4R})$

4.3 CONDIÇÕES GERAIS PARA SIMULAÇÃO

De acordo com as normas citadas (Vale, 2012; ADR59), para se manter o volume seguro dentro da cabine dos ocupantes, a estrutura de proteção pode apresentar uma

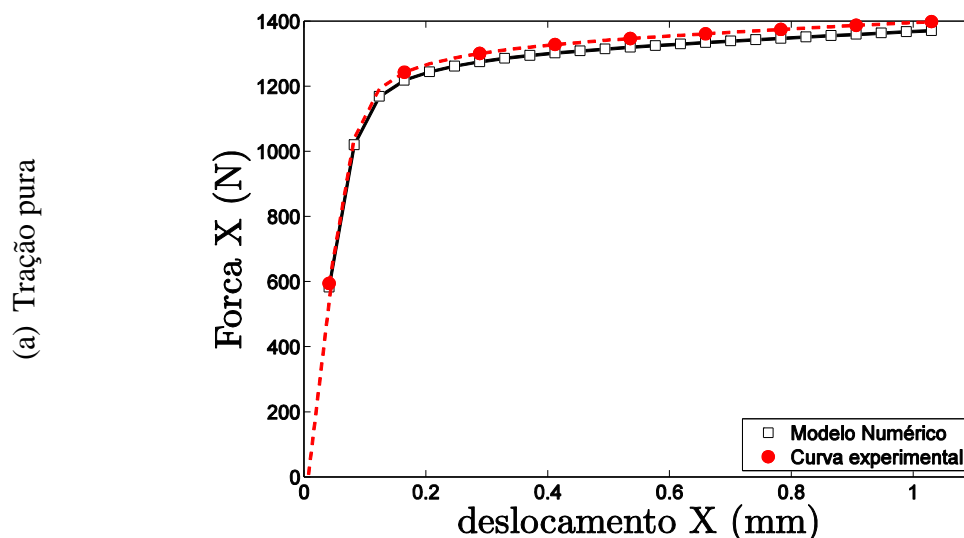
deflexão máxima nas três dimensões (lateral/vertical/longitudinal) de até 100 milímetros, quando sujeita as cargas destacadas na Tabela 2.1 e dados os pontos de aplicação mostrados na Figura 2.13. Obedecida esta condição de contorno, a estrutura possuirá então um nível de rigidez adequado. Além disso, segundo requisitos aqui estabelecidos e baseado em normas existentes, o material escolhido para fabricação deste tipo de estrutura de proteção tem que possuir um limite de escoamento na faixa de 345 à 610 MPa, (Vale, 2012; ADR59). É importante ressaltar que a seleção de materiais com limite de escoamento na faixa inferior (345 MPa) vai resultar em uma seção transversal mais robusta para a estrutura, ou seja, maior diâmetro externo e espessura da seção tubular. Isto poderá acarretar em uma estrutura com elevado peso próprio. Desta forma, de acordo com Vale (2012), recomenda-se uma ponderação entre as propriedades materiais e as dimensões estruturais de maneira a se obter uma estrutura adequado.

Como mencionado, a escolha dos quatro modelos constitutivos já descrito é justificada pela evolução no acoplamento de efeitos atualmente largamente estudados, como: efeito da pressão hidrostática e nível de triaxialidade, e efeito do terceiro invariante do tensor desviador ou efeito do ângulo de Lode.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

5.1 TESTES INICIAIS

Após as simulações numéricas realizadas para cada modelo, verifica-se através da Figura 5.1, as curvas de reação obtidas através de ensaios experimentais (ver Bai, 2008; Malcher et al, 2012) e através das simulações numéricas. Observa-se que em tração pura (Figura 5.1a), todos os resultados numéricos são coincidentes. Este estado de tensão é tradicionalmente utilizado para calibração dos modelos constitutivos. Contudo, na Figura 5.1(b), observa-se que o modelo de Bai & Wierzbicki apresenta os resultados mais coerentes com relação aos dados experimentais. Constata-se que o modelo de von Mises e de Mohr-Coulomb apresentam níveis de reação maiores que os observados experimentalmente, ou seja, demonstram que numericamente um corpo de prova sujeito a cisalhamento puro suporta níveis de carga acima do observado experimentalmente. Por outro lado, o modelo de Tresca, apresenta níveis de carga abaixo do observado experimentalmente, o que implica em um resultado conservativo.



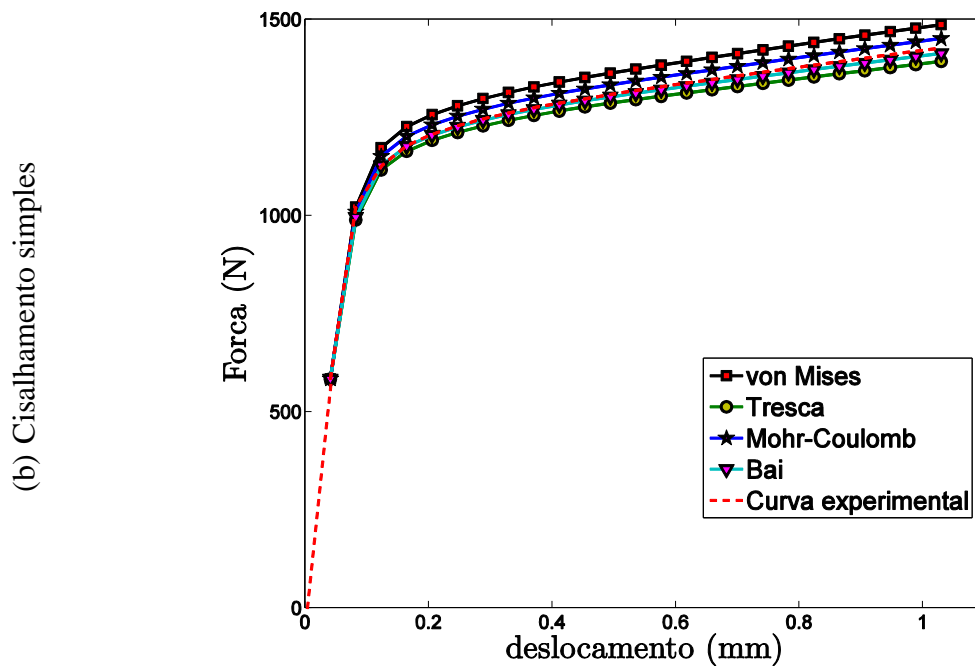


Figura 5.1. Curva de reação para o corpo de prova cilíndrico liso sujeito a tração pura (a) e para o corpo de prova do tipo borboleta sujeito a cisalhamento simples (b).

Por fim, os resultados iniciais mostrados nesta seção levam a confirmar que, para alguns materiais dúcteis, há a necessidade de se utilizar modelos matemáticos com efeitos adicionais, como o da pressão hidrostática e a do terceiro invariante. No capítulo a seguir, serão discutidos os resultados obtidos através das simulações numéricas feitas para a estrutura ROPS. Neste trabalho, com base nas conclusões obtidas através das simulações iniciais feitas e com base nos resultados obtidos por pesquisadores e disponíveis na literatura (ver Driemeier, 1999; Bao, 2003; Teng, 2005; Xue, 2007; Bai, 2008, Malcher, 2012), discussões serão abertas tendo como proposta, a idéia de que os modelos de von Mises e Mohr-Coulomb apresentam resultados otimistas para o comportamento mecânico do materiais, o modelo de Tresca apresenta resultados conservativos e por fim, o modelo de Bai & Wierzbicki apresenta resultados numéricos mais próximos aos resultados experimentais. Este comportamento, traz a tona a discussão de possíveis mudanças de forma, dimensões físicas e mudanças de materiais estruturais na utilização destes modelos durante o processo de dimensionamento mecânico.

Com intuito de se proceder a testes iniciais com os modelos elasto-plásticos de von Mises, Tresca, Mohr-Coulomb e Bai & Wierzbicki, descritos nos capítulos 2 e 3,

nesta seção serão feitas simulações sob condição de carregamento em tração pura e cisalhamento simples. Utilizando corpos de prova com carregamentos conhecidos: De acordo com a literatura (Driemeier, 1999; Bao, 2003; Teng, 2005; Xue, 2007; Bai, 2008, Malcher, 2012), para alguns materiais dúcteis, como ligas de alumínio, magnésio, titânio, entre outras, os modelos tradicionais, não são capazes de descrever com precisão o seu comportamento mecânica, tendo para isto, que se incorporar modelos mais elaborados, como por exemplo, os que incorporam o efeito da pressão hidrostática e o efeito do terceiro invariante, para se realizar tal tarefa. Desta forma, de acordo com Malcher et al (2012), os materiais dúcteis podem ser classificados como fortemente ou fracamente dependentes do efeito da pressão hidrostática e do terceiro invariante. Tais pesquisadores demonstram também, que a grande diferença entre o comportamento real do material e o obtido através de simulações numéricas, está em condições predominantemente cisalhantes.

5.2 ESTRUTURA ROPS

Neste capítulo serão apresentados os resultados numéricos obtidos através da utilização dos quatro modelos constitutivos descritos anteriormente. As simulações foram realizadas utilizando as condições de contorno descritas na Tabela 2.1 e Figura 2.13, bem como as propriedades materiais da Tabela 4.1 e malha de elementos finitos da Figura 4.2. Para melhor se descrever os resultados obtidos, os diversos elementos da estrutura ROPS serão denominados de acordo com a Figura 5.1, onde se tem: A – anel frontal, B – anel traseiro, C – barras longitudinais e D – aba de proteção.

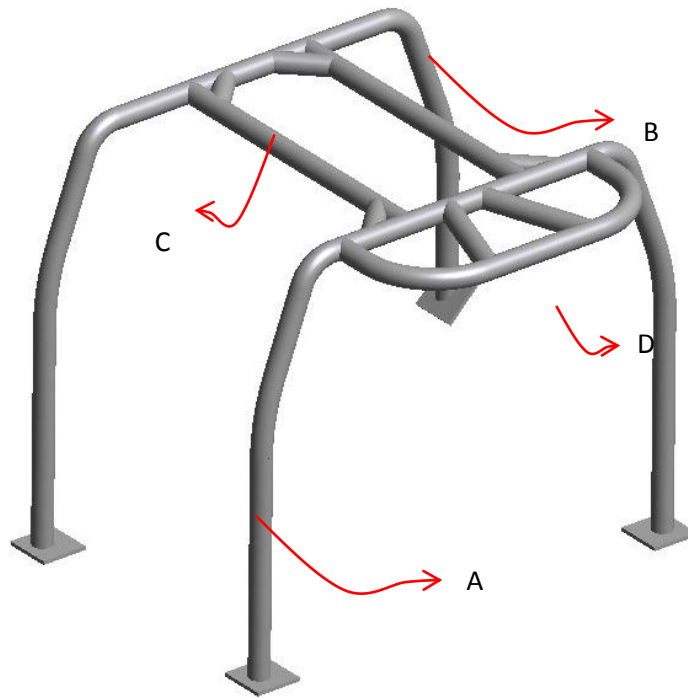


Figura 5.2. Desenho esquemático do ROPS interno.

Os resultados obtidos serão agrupados de acordo com a orientação da carga aplicada, sendo apresentados os contornos da deformação plástica equivalente, ângulo de Lode, nível de triaxialidade e tensão equivalente.

5.2.1 CARGA VERTICAL

A Figura 5.3 apresenta o contorno da deformação plástica equivalente obtida através da simulação em elementos finitos da estrutura ROPS, tendo como base os quatro modelos já descritos e com a aplicação de uma carga vertical máxima de 9,2 toneladas. Observa-se nas quatro simulações, que o ponto de máxima deformação plástica equivalente está no chamado anel central da estrutura.

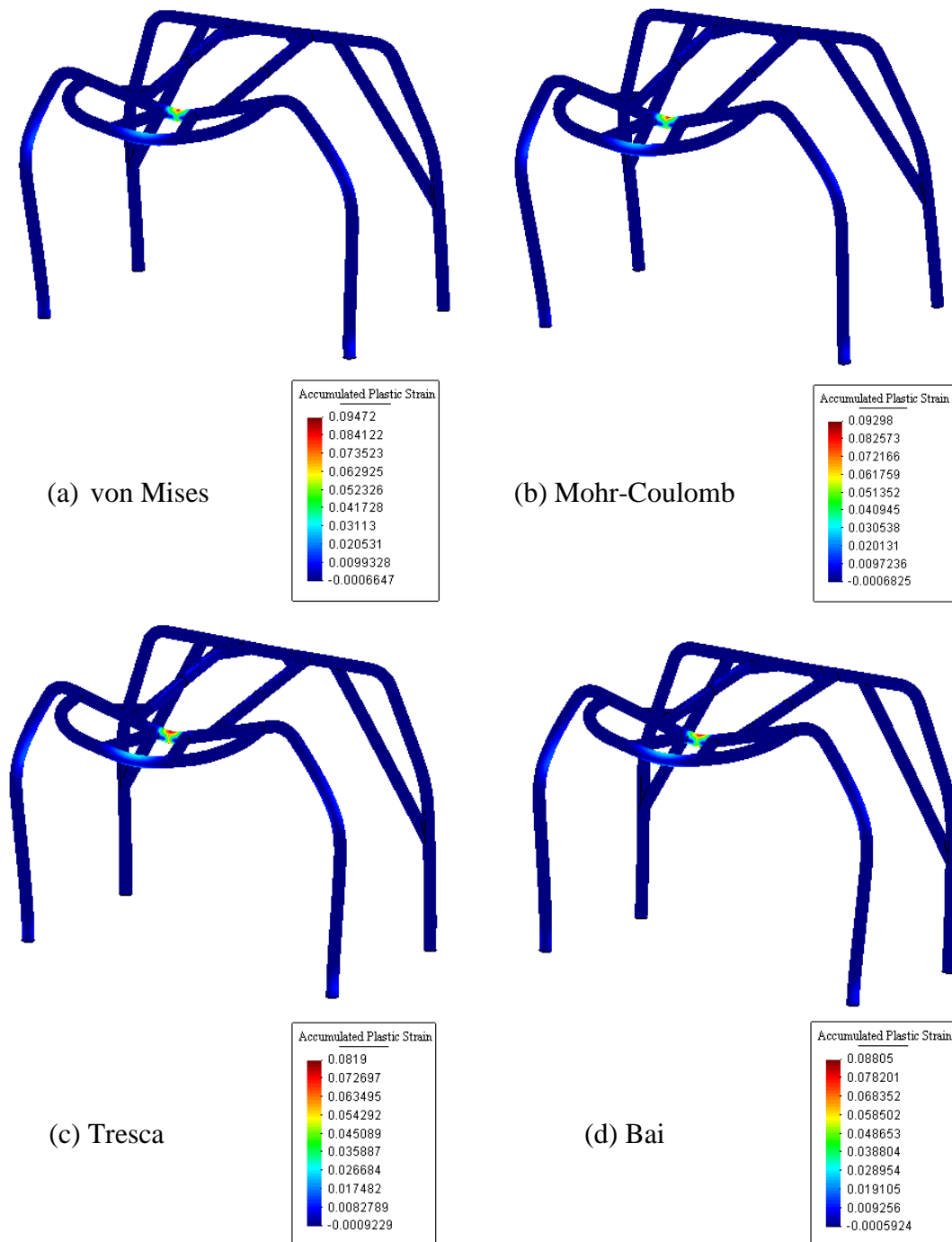


Figura 5.3. Contorno da deformação plástica equivalente, considerando uma carga vertical.

Além disso, na Figura 5.3, observa-se que segundo o modelo de von Mises, a máxima deformação plástica equivalente se apresenta em $\bar{\epsilon}^P = 0.09472$, enquanto para Mohr-Coulomb se tem $\bar{\epsilon}^P = 0.09298$, Tresca $\bar{\epsilon}^P = 0.08919$ e Bai $\bar{\epsilon}^P = 0.08805$.

Contudo, na Figura 5.4, tem-se o contorno do chamado ângulo de Lode, onde valores iguais a 1 representam regiões com carregamentos trativos predominantes, -1

regiões com carregamentos compressivos predominante, 0 regiões com cisalhamento predominante. Valores intermediários representam combinações de carregamento sejam eles trativos/cisalhantes ou compressivos/cisalhantes.

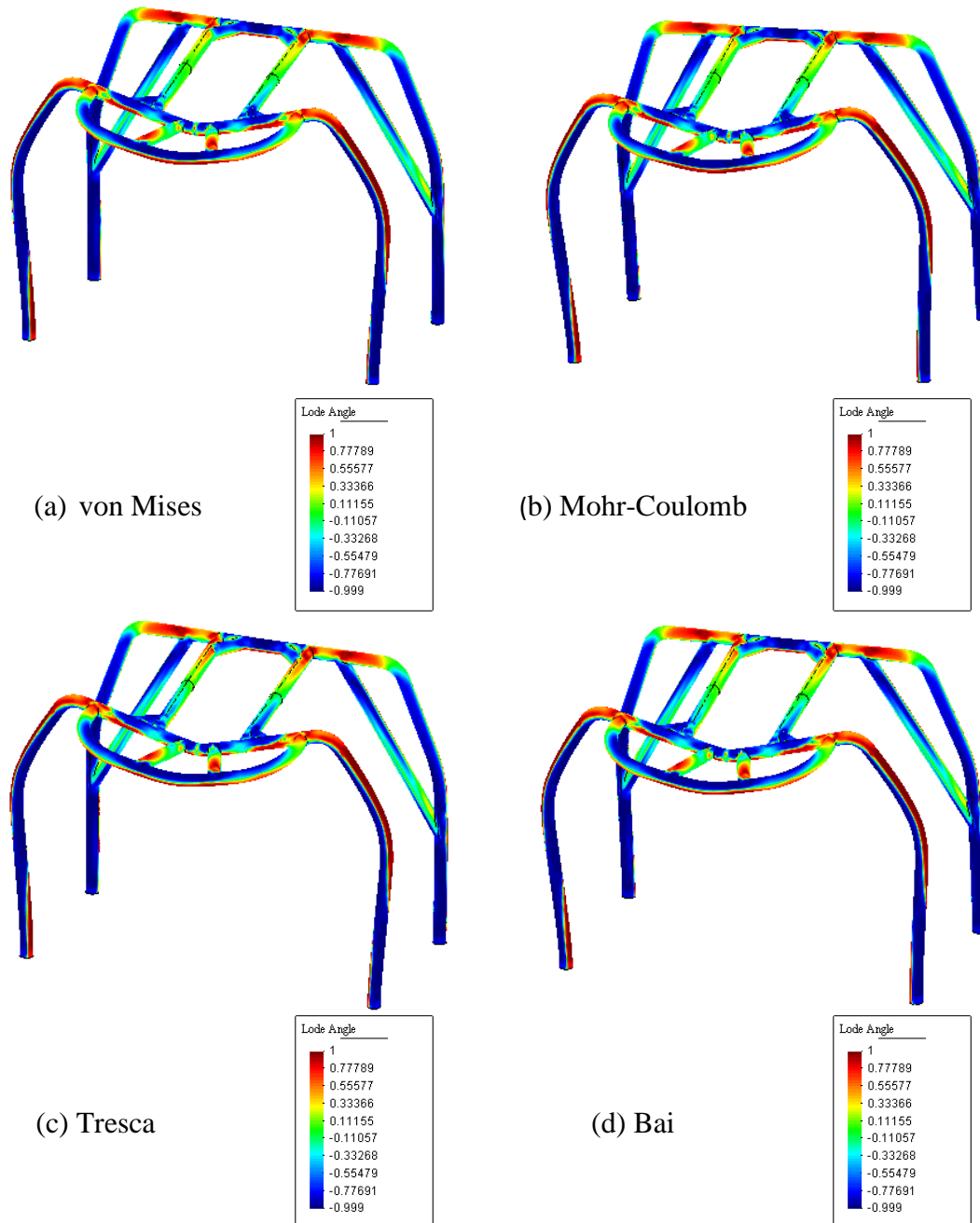


Figura 5.4. Contorno do ângulo de Lode, considerando uma carga vertical.

Para a Figura 5.5, tem-se então o contorno do nível de triaxialidade, para os diversos modelos analisados.

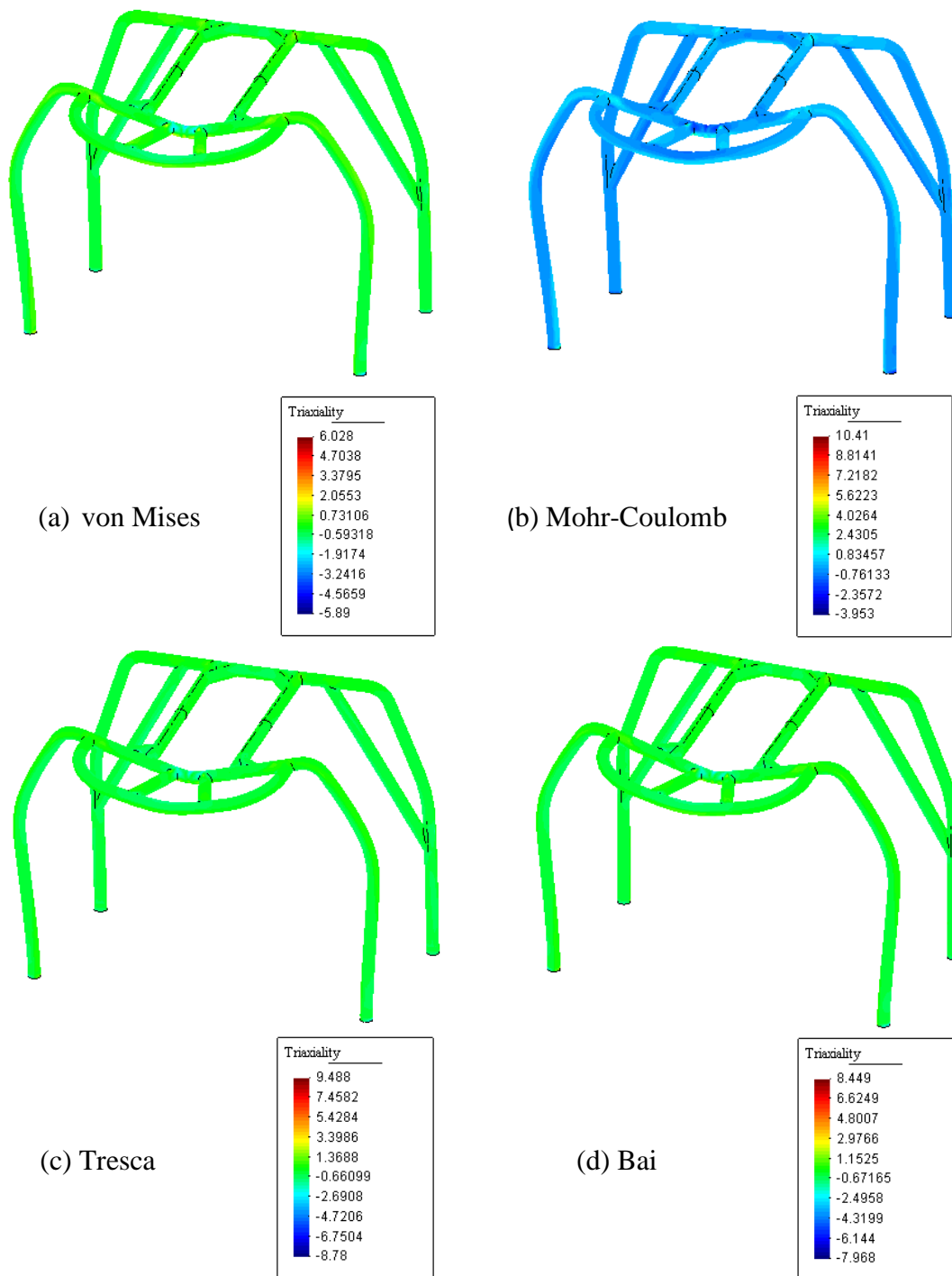


Figura 5.5. Contorno do nível de triaxialidade, considerando uma carga vertical.

Neste caso, observa-se um comportamento diferente apresentado pelos modelos, onde para Mises o nível de triaxialidade máximo está em $\eta = 6,028$, para Mohr-Coulomb $\eta = 10,41$, Tresca $\eta = 9,488$ e Bai $\eta = 8,449$. Este níveis diferentes de triaxialidade podem representar níveis de degradação diferentes interpretados pelos modelos, ou seja, diferentes interpretações para a perda de ductilidade do material.

Na Figura 5.6, apresenta-se o contorno da tensão equivalente, obtida através dos quatro modelos. Observa-se que ambos os modelos apresentam valores diferentes para o nível de tensão equivalente, ou seja, apresentam respostas diferentes para o comportamento da estrutura, após a aplicação da carga vertical máxima, onde para Mises $\sigma_{eq} = 645,3 MPa$, para Mohr-Coulomb $\sigma_{eq} = 672,3 MPa$, para Tresca $\sigma_{eq} = 678,9 MPa$ e para Bai $\sigma_{eq} = 680,8 MPa$. Estes níveis diferentes de tensão equivalente podem representar instantes diferentes para o início da plastificação ou falha do material/estrutura.

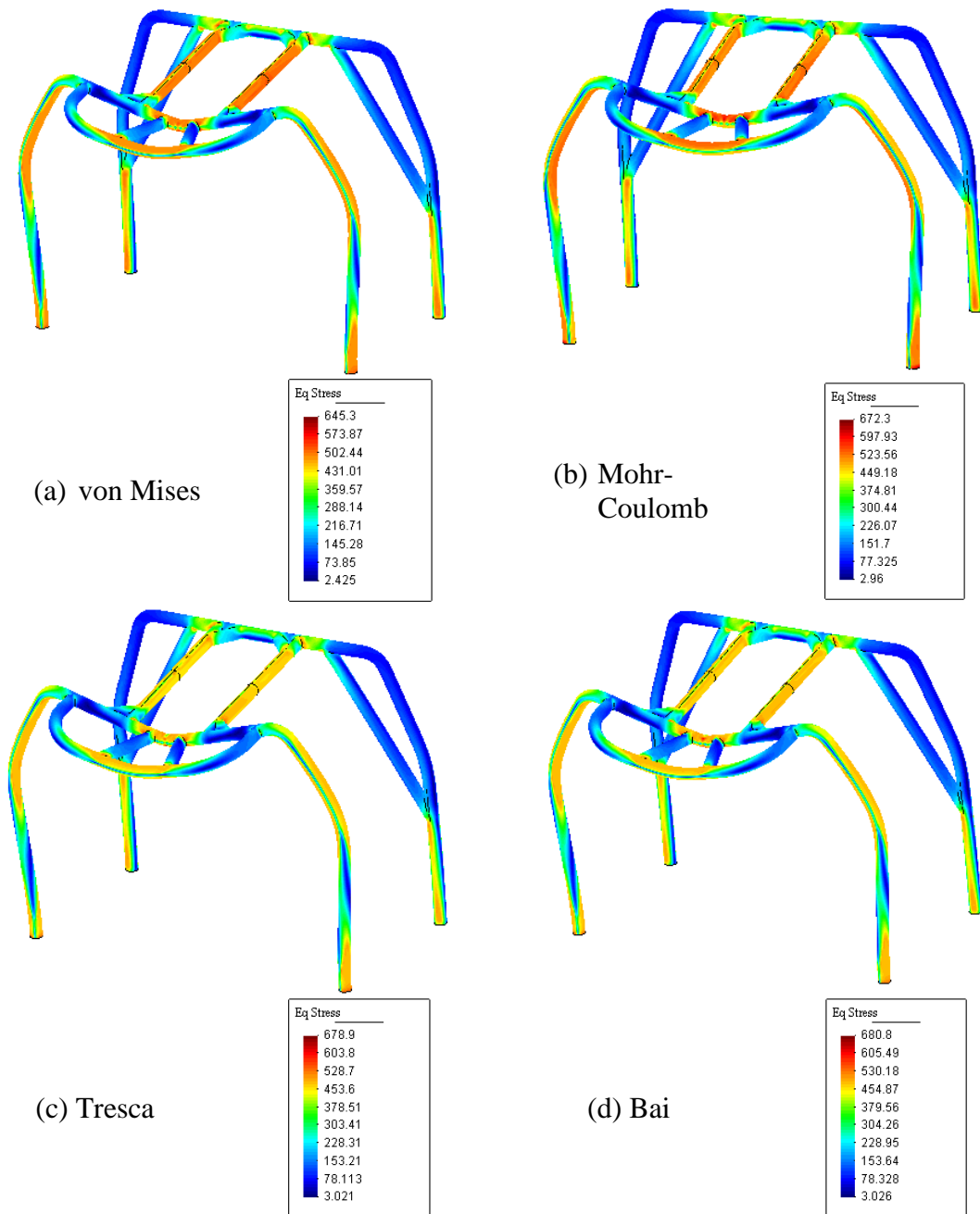


Figura 5.6. Contorno do nível de tensão equivalente, considerando uma carga vertical.

5.2.2 CARGA LATERAL

Na Figura 5.7, apresenta-se o contorno da deformação plástica equivalente obtida através da simulação em elementos finitos da estrutura ROPS, tendo como base os quatro modelos já descritos e com a aplicação de uma carga lateral máxima de 3,4 toneladas. Observa-se que segundo o modelo de von Mises, a máxima deformação plástica equivalente se apresenta em $\bar{\epsilon}^P = 0.03406$, enquanto para Mohr-Coulomb tem-se $\bar{\epsilon}^P = 0.03838$, Tresca $\bar{\epsilon}^P = 0.03362$ e Bai $\bar{\epsilon}^P = 0.03386$.

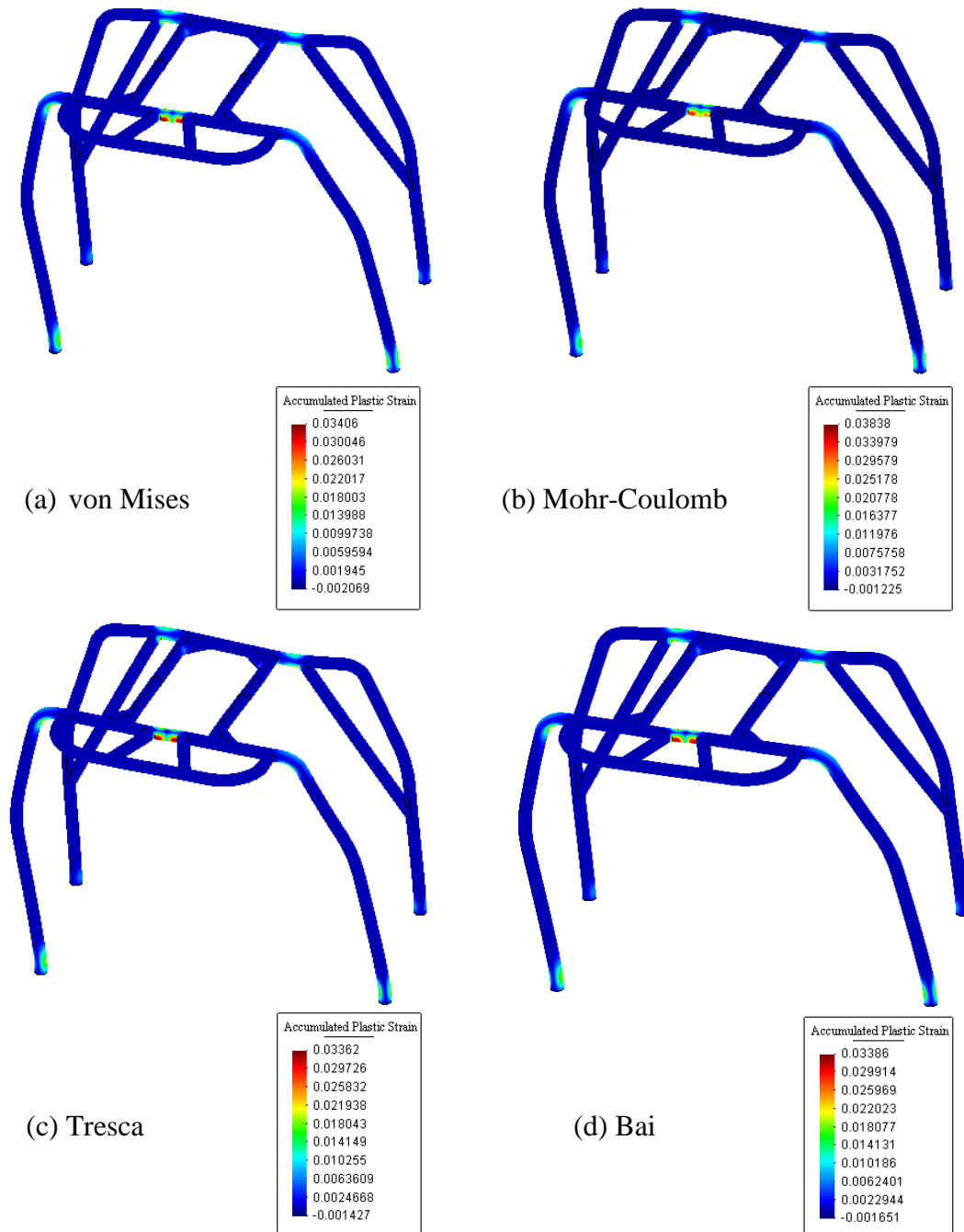


Figura 5.7. Contorno da deformação plástica equivalente, considerando uma carga lateral.

Já na Figura 5.8, tem-se o contorno do ângulo de Lode determinado através dos diferentes modelos. O comportamento do nível do ângulo de Lode, descrito da item 5.2, é também válido para esta condição de carregamento.

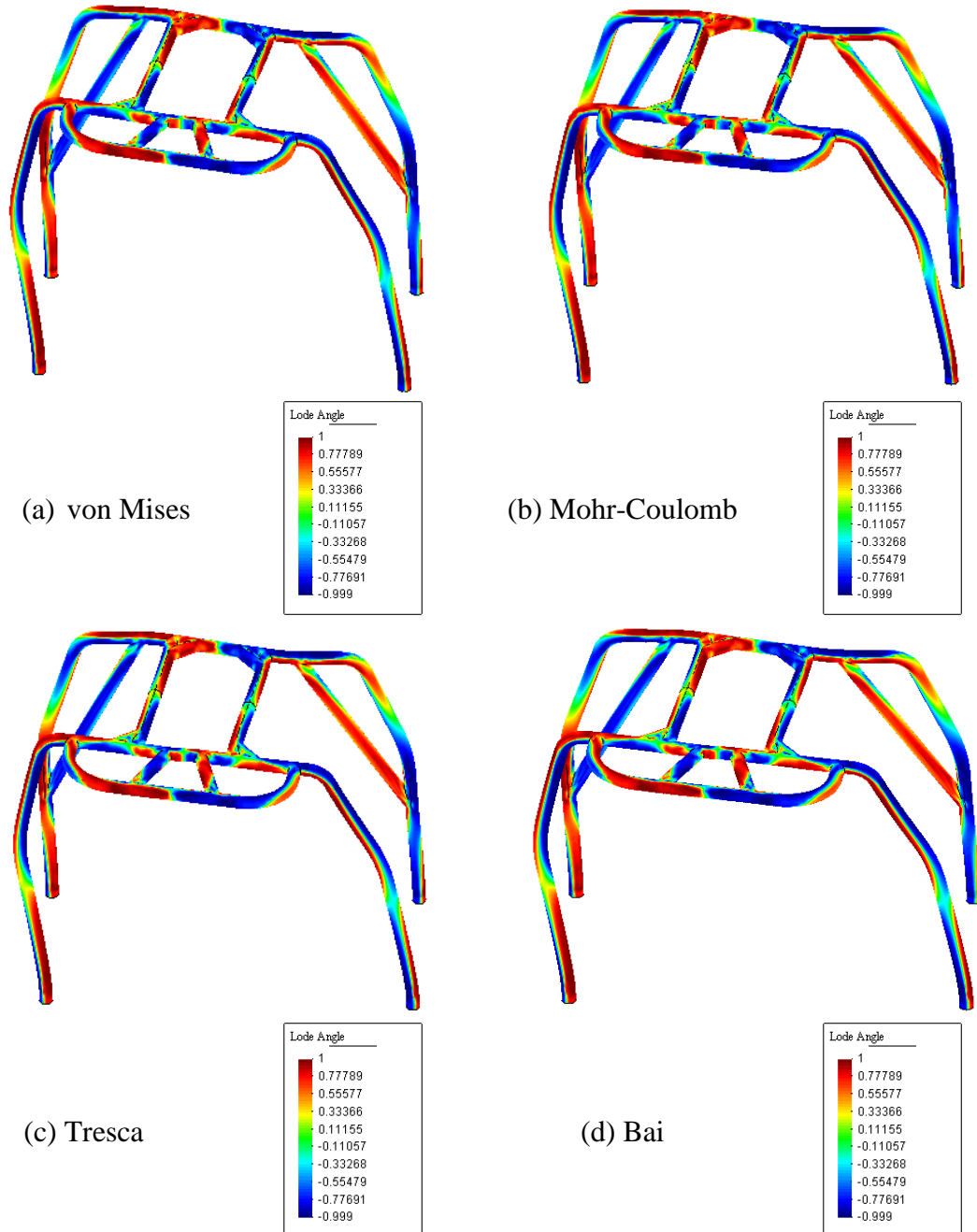


Figura 5.8. Contorno do ângulo de Lode, considerando uma carga lateral.

Na Figura 5.9, apresenta-se o contorno do nível de triaxialidade obtido através das quatro formulações descritas. Para Mises o nível de triaxialidade máximo está em $\eta = 4,339$, para Mohr-Coulomb $\eta = 11,91$, Tresca $\eta = 4,274$ e Bai $\eta = 4,32$.

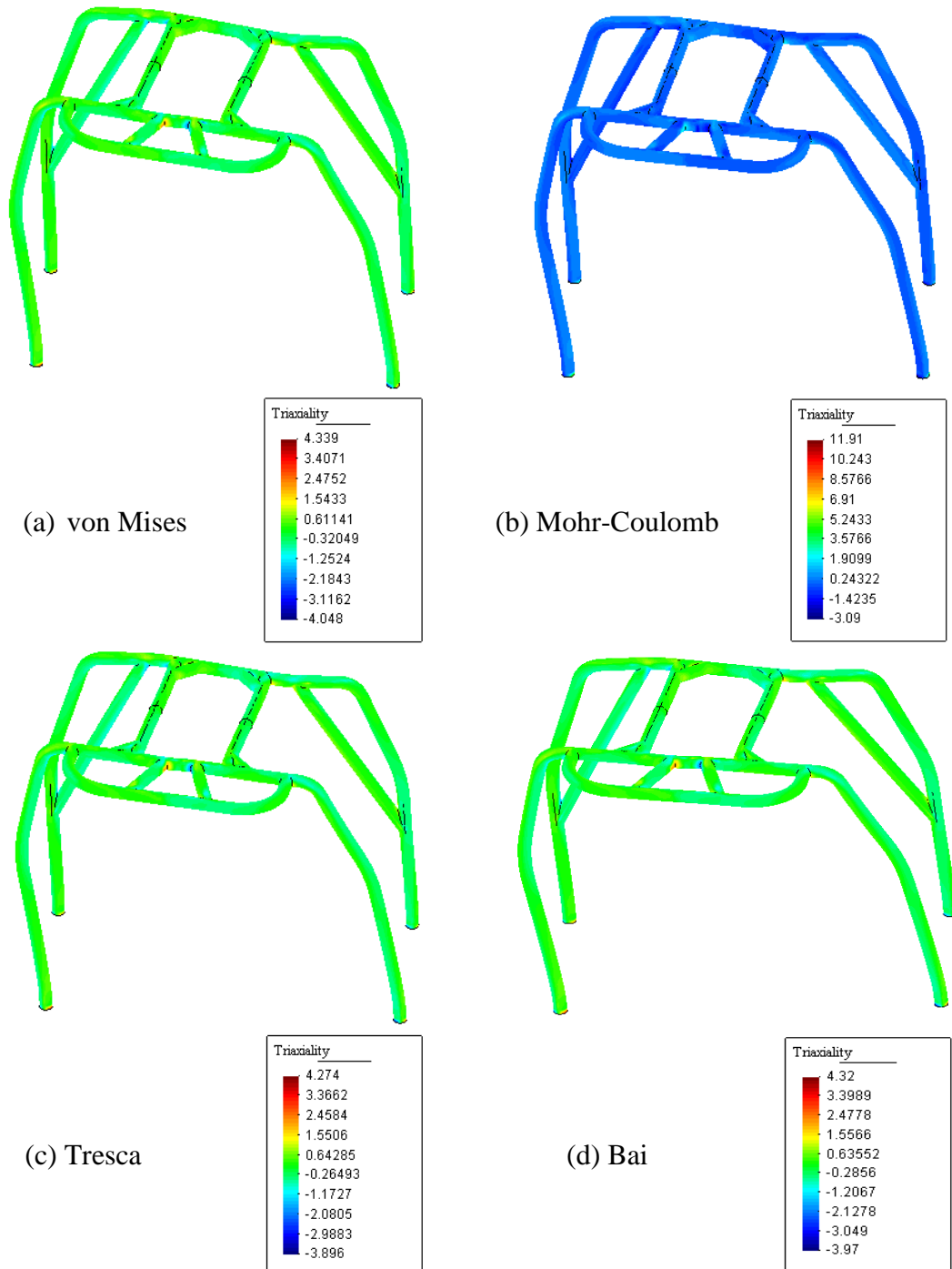


Figura 5.9. Contorno do nível de triaxialidade, considerando uma carga lateral.

Por fim, na Figura 5.10, apresenta-se o contorno da tensão equivalente, obtida novamente através dos quatros modelos. Observa-se também, que ambos os modelos

apresentam valores diferentes para o nível de tensão equivalente, onde para Mises $\sigma_{eq} = 875,43 \text{ MPa}$, para Mohr-Coulomb $\sigma_{eq} = 810,9 \text{ MPa}$, para Tresca $\sigma_{eq} = 749,4 \text{ MPa}$ e para Bai $\sigma_{eq} = 773,2 \text{ MPa}$.

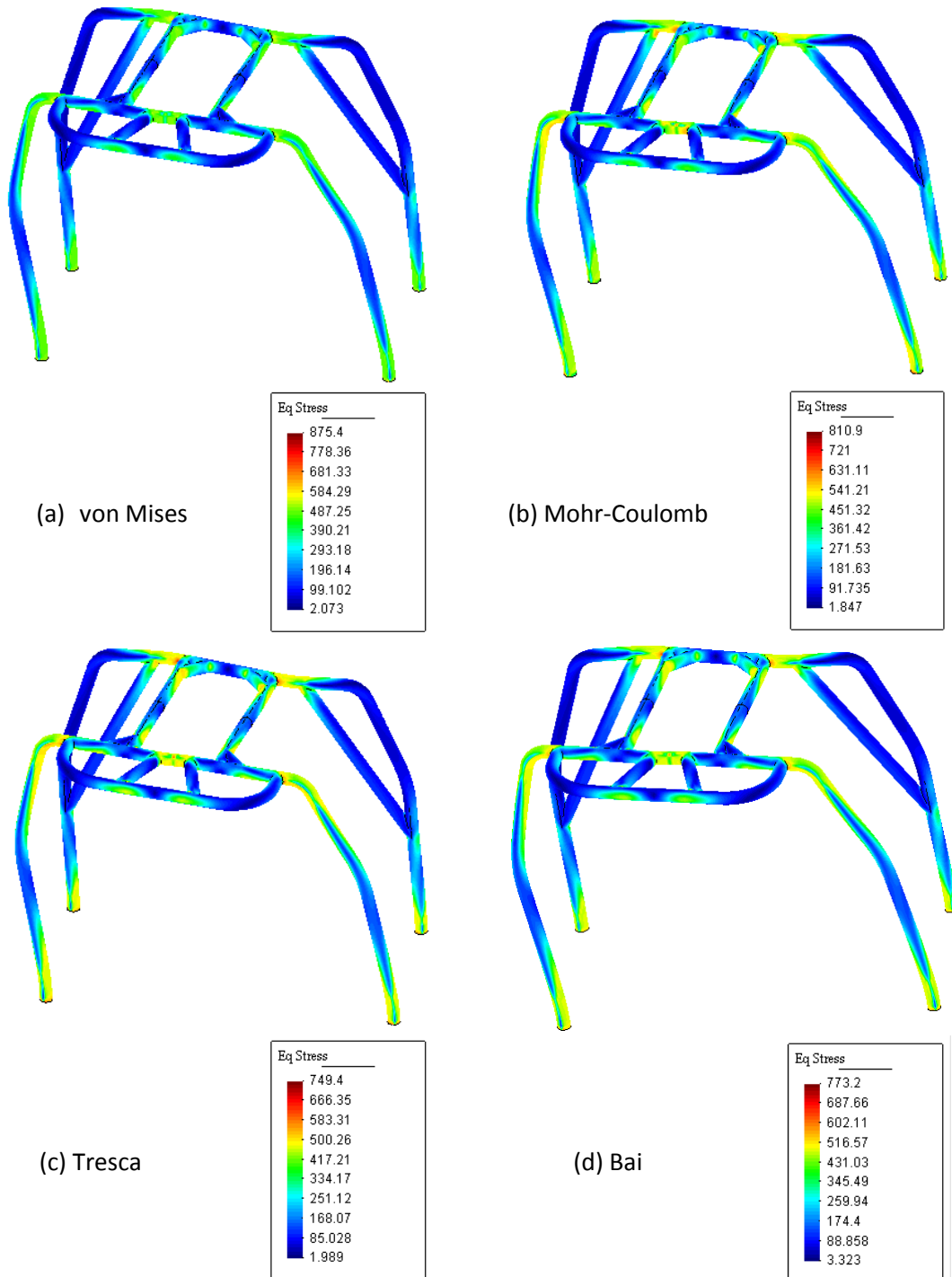


Figura 5.10. Contorno do nível de tensão equivalente, considerando uma carga lateral.

5.2.3 CARGA LONGITUDINAL/FRONTAL

Na Figura 5.11, apresenta-se o contorno da deformação plástica equivalente obtida através da simulação em elementos finitos da estrutura ROPS, tendo como base os quatro modelos já descritos e com a aplicação de uma carga longitudinal máxima de 2,3 toneladas.

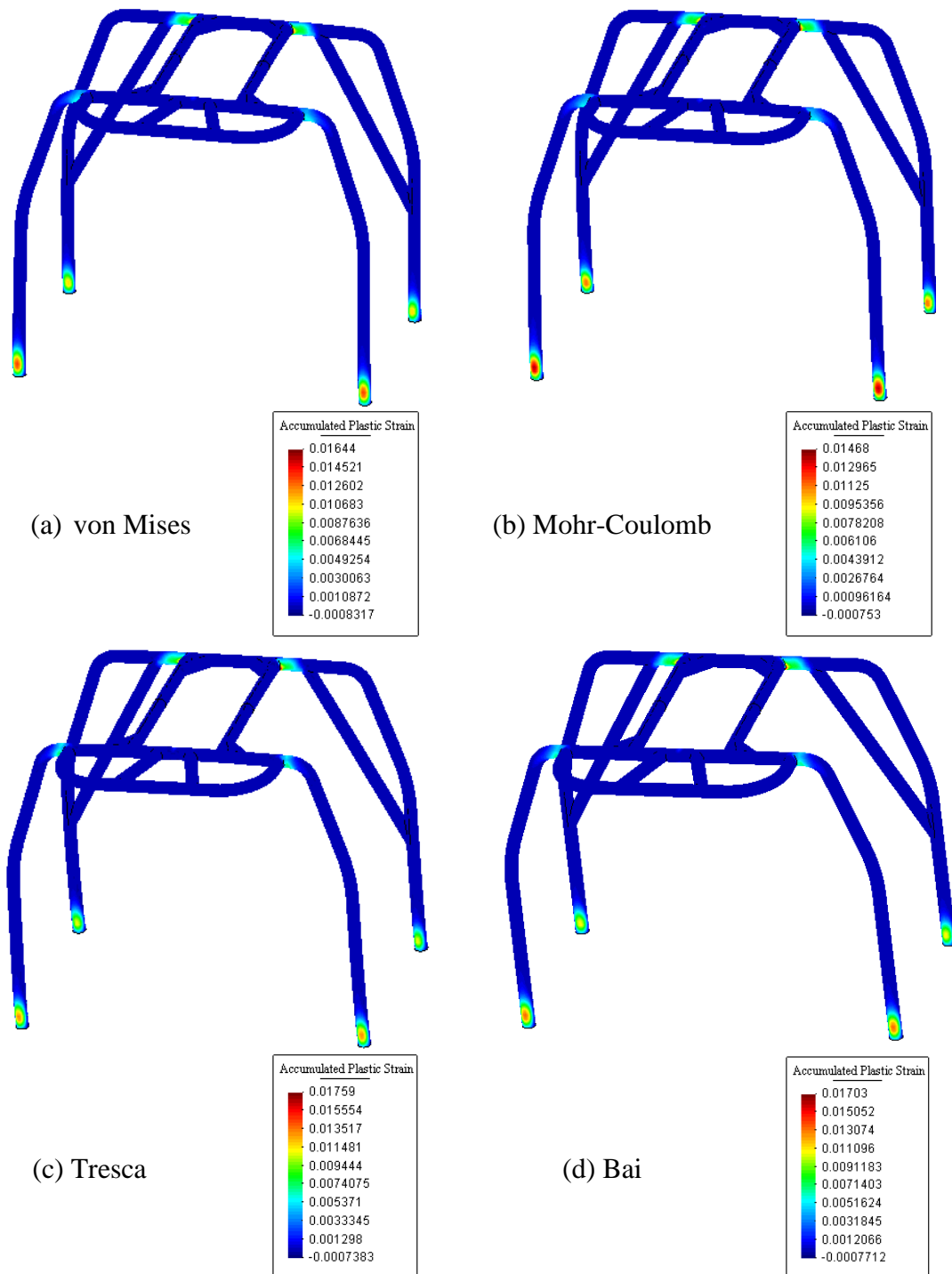


Figura 5.11. Contorno do nível de deformação plástica equivalente, considerando uma carga longitudinal.

Observa-se através da Figura 5.11 que segundo o modelo de von Mises, a máxima deformação plástica equivalente se apresenta em $\bar{\epsilon}^P = 0.01644$, enquanto para Mohr-Coulomb tem-se $\bar{\epsilon}^P = 0.01468$, Tresca $\bar{\epsilon}^P = 0.01759$ e Bai $\bar{\epsilon}^P = 0.01703$.

Já na Figura 5.12, apresenta-se o contorno do ângulo de Lode, determinado através dos diferentes modelos. O comportamento do nível do ângulo de Lode, descrito da item 5.2, é também válido para este caso.

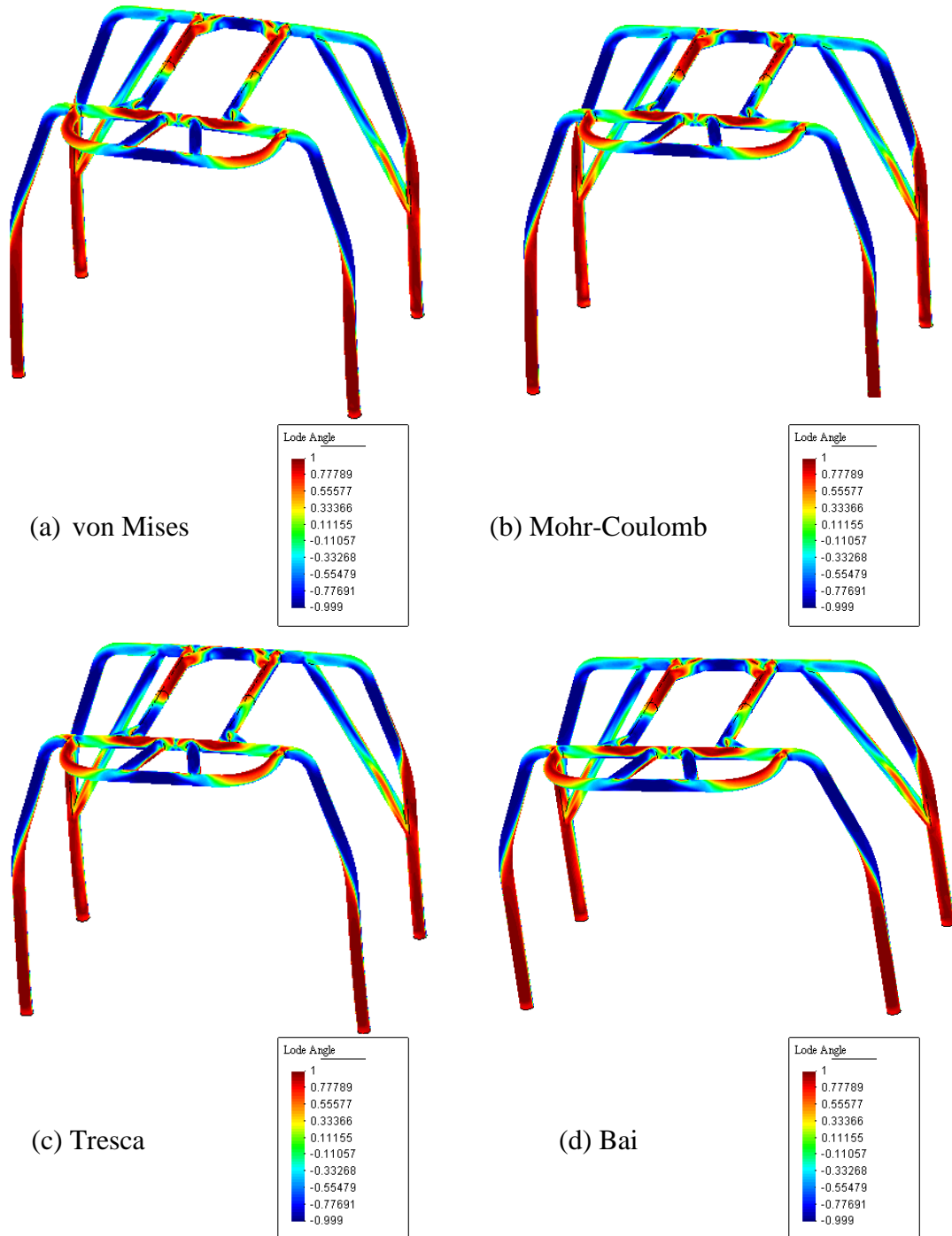


Figura 5.12. Contorno do ângulo de Lode, considerando uma carga longitudinal.

Na Figura 5.13, observa-se o contorno do nível de triaxialidade obtido através das quatro formulações descritas. Para Mises o nível de triaxialidade máximo está em $\eta = 3,084$, para Mohr-Coulomb $\eta = 4,625$, Tresca $\eta = 3,019$ e Bai $\eta = 3,043$.

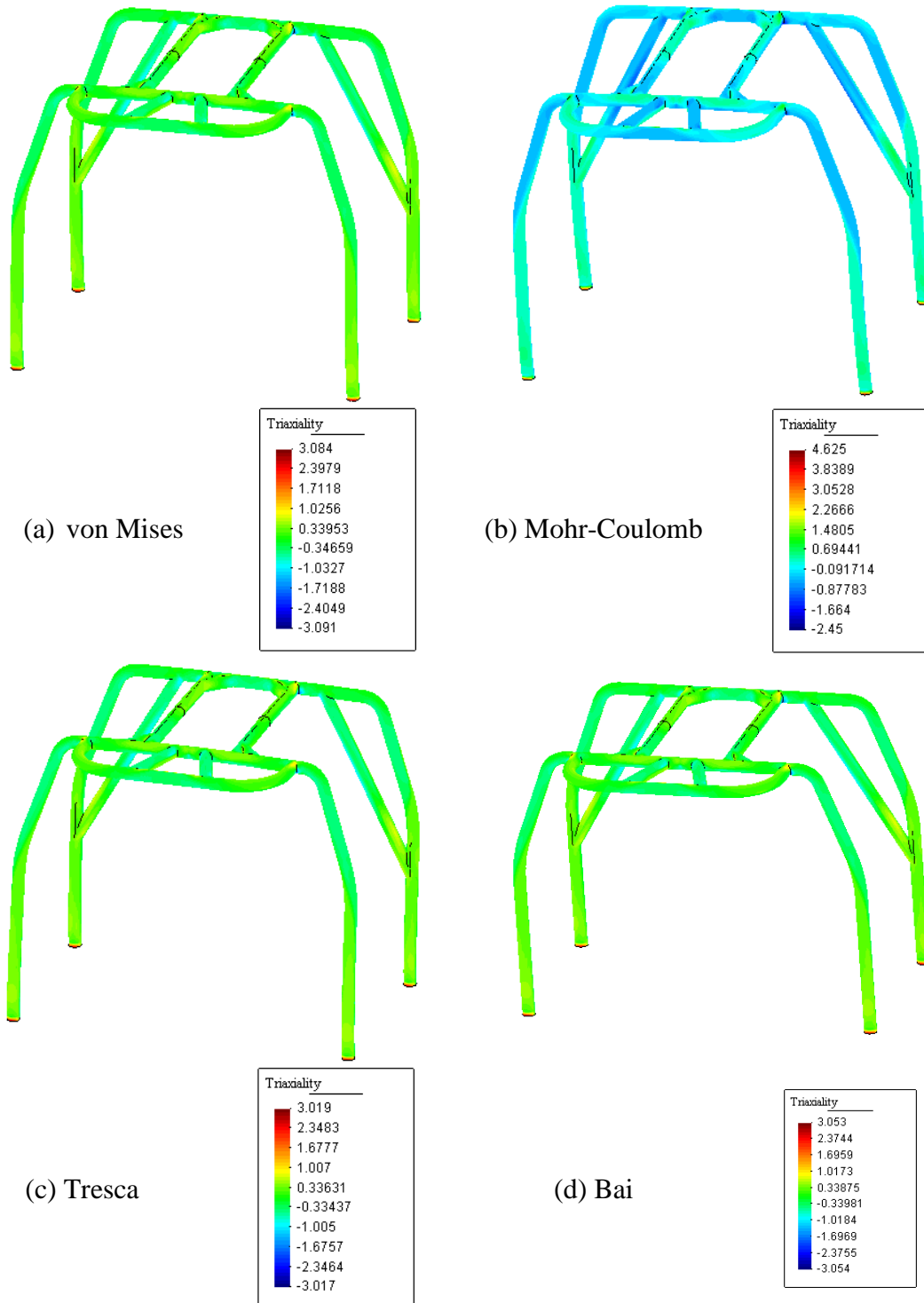


Figura 5.13. Contorno do nível de triaxialidade, considerando uma carga longitudinal.

Por fim, na Figura 5.14, apresenta-se o contorno da tensão equivalente, obtida novamente através dos quatros modelos. Observa-se também, que ambos os modelos apresentam valores diferentes para o nível de tensão equivalente, onde para Mises $\sigma_{eq} = 628,1 MPa$, para Mohr-Coulomb $\sigma_{eq} = 679 MPa$, para Tresca $\sigma_{eq} = 639,8 MPa$ e para Bai $\sigma_{eq} = 623,6 MPa$.

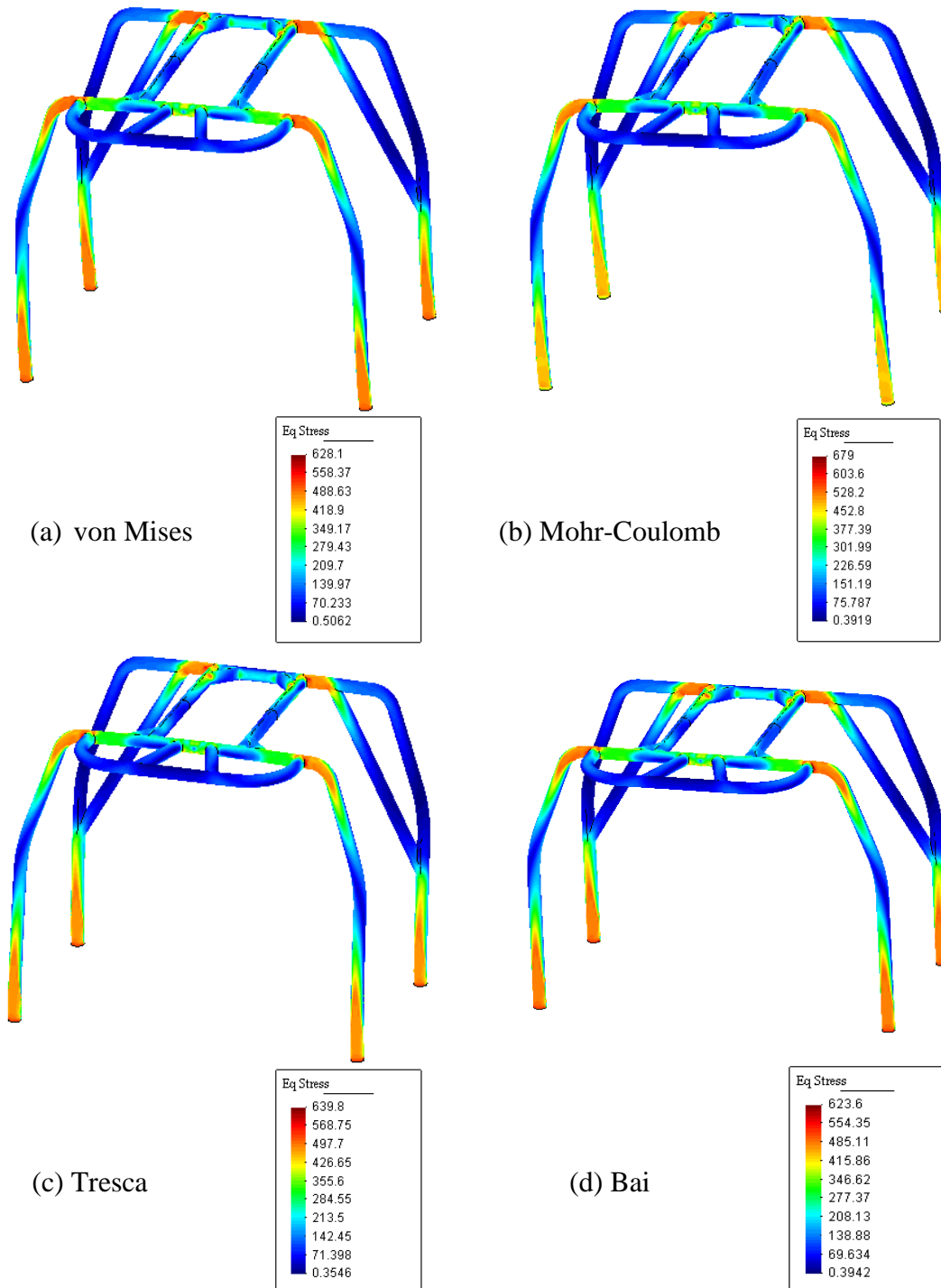


Figura 5.14. Contorno do nível de tensão equivalente, considerando uma carga longitudinal.

5.3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.

A Tabela 5.1 apresenta um resumo, dos níveis máximos de deformação plástica equivalente, triaxialidade e tensão equivalente, após a aplicação das cargas usadas como condição de contorno.

Tipo de carga	Modelo	$\bar{\epsilon}^P (10^5)$	η	σ_{eq} [MPa]
Carga vertical	von Mises	9472	6,028	645,3
	Mohr-Coulomb	9298	10,410	672,3
	Tresca	8919	9,488	678,9
	Bai	8805	8,449	680,8
Carga lateral	von Mises	3406	4,339	875,43
	Mohr-Coulomb	3838	11,910	810,9
	Tresca	3362	4,274	749,4
	Bai	3386	4,320	773,2
Carga longitudinal	von Mises	1644	3,084	628,1
	Mohr-Coulomb	1468	4,625	679,0
	Tresca	1759	3,019	639,8
	Bai	1703	3,043	623,6

Tabela 5.1 Resumo dos níveis máximos de Deformação Plástica Equivalente, Triaxialidade e Tensão equivalente.

Com base nos resultados encontrados é possível concluir que cada modelo constitutivo oferece determinado comportamento mecânico para a estrutura ROPS, pois os níveis diferentes para a deformação plástica equivalente, triaxialidade e ângulo de Lode são estabelecidos. Para a deformação plástica equivalente, verifica-se que, para um mesmo tipo e nível de carga aplicado, diferentes níveis de deformação são atingidos (ver Tabela 5.1).

Para a carga vertical, o modelo de von Mises sempre previu níveis maiores de deformação, comparado aos valores estabelecidos pelos outros modelos. Por outro lado, os modelos de Tresca e Bai & Wierzbicki são os que estabelecem os menores níveis de deformação plástica. Este comportamento pode ser justificado pelo fato das duas formulações serem dependentes do efeito do terceiro invariante do tensor desviador ou ângulo de Lode. Lembrando que para Bardet (1990) o modelo de Tresca possui uma dependência linear do mesmo, e o modelo de Bai possui esta dependência, através da função γ (ver equação 2.26). Da literatura (ver Bai 2008, Bruning 2008, Gao 2001, Malcher et al 2011), os modelos que possuem a influencia do ângulo de Lode acoplado

a sua formulação, oferecem melhor desempenho na predição do comportamento mecânico de materiais dúcteis.

Ao considerar o nível de triaxialidade estabelecido pelos modelos, para as cargas verticais e laterais, o modelo de Mohr previu os maiores valores. Este comportamento pode ser justificado pelo fato do modelo de Mohr ser somente sensível à pressão hidrostática. De acordo com a literatura (ver Bai, 2008; Malcher et al, 2011), como o modelo de Bai & Wierzbicki segundo sua formulação tem a melhor capacidade preditiva, acredita-se que os níveis máximos de triaxialidade encontrados de: $\eta = 8,4498$ para carga vertical, $\eta = 4,320$ para carga lateral, $\eta = 3,043$ para carga longitudinal, sejam os mais realistas. É importante destacar que o nível de triaxialidade é o parâmetro que influencia mais diretamente na perda de ductilidade do material, que dizer na capacidade de se deformar sem sofrer dano.

Para os níveis de tensão equivalente determinados com os modelos, observa-se uma dispersão considerável entre os resultados. Estes resultados retratam a previsão de momentos diferentes para o início do escoamento plástico do material ou estrutura. Para a carga vertical, observa-se que as barras longitudinais apresentam maiores valores de tensão equivalente (ver Figura 5.6), onde tais elementos estão sujeitos a carregamentos cisalhantes (ângulo de Lode igual a zero) (ver Figura 5.5) e então o modelo do Bai & Wierzbicki pode estabelecer a melhor capacidade preditiva. Nas cargas laterais e longitudinais a estrutura se encontra sujeita a tração e compressão (ver Figura 5.8 e 5.12). Visto a que para estas cargas se apresenta predominantemente tração/compressão então os níveis de tensão equivalente previstos pelo modelo von Mises são considerados aceitáveis (ver Tabela 5.1), para as duas cargas aplicadas.

Finalmente no desenvolvimento de um projeto mecânico pode-se adotar para condições a tração predominantemente o modelo de von Mises pode ser então seguido. E para condições com carregamentos cisalhantes o modelo de Bai & Wierzbicki garante respostas mais próximas ao comportamento real da estrutura, o que pode acarrear a um dimensionamento mais otimizado da estrutura levando a consideração o peso, custo e dimensões estruturais.

Quando for preciso decidir entre o Modelo de Tresca e von Mises, em condições predominantemente cisalhantes, o modelo de Tresca pode ser o mais aconselhável, baseando-se na segurança da estrutura, pela razão que este é mais conservador que von Mises, acarreando assim o maior peso da estrutura, custos e dimensões estruturais do componente.

Na Tabela 5.2, encontram-se as características de cada modelo estudado no trabalho.

Tabela 5.2 Resumo das Características dos quatro Modelos Constitutivos Usados.

Modelo	Influência da Pressão Hidrostática	Influência do Ângulo de Lode	Numero de Pontos de Calibração	Quantidade de Propriedades Materiais:
von Mises	Não	Não	1	3
Tresca	Não	Sim	1	3
Mohr Coulomb	Sim	Não	1	4
Bai & Wierzbicki	Sim	Sim	4	9

6. CONCLUSÕES E PROPOSTA DO TRABALHO FUTURO

6.1 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi proposto um estudo teórico e numérico de quatro modelos constitutivos elasto-plásticos largamente difundidos na literatura, como: os modelos de von Mises, Tresca, Mohr- Coulomb e Bai & Wierzbicki. Tais Modelos foram relacionados devido ao fato dos mesmos apresentam uma evolução natural no acoplamento de efeitos que atualmente são considerados no estudo do comportamento mecânico de materiais dúcteis, como: o efeito da pressão hidrostática, através do nível de triaxialidade e efeito do terceiro invariante do tensor de desvio, através do ângulo de Lode normalizado. Foram sugeridos modelos de integração implícita, com base na metodologia de decomposição do operador e o método de integração implícita de Euler. Tais modelos numéricos foram então implementados em uma ferramenta acadêmica de elementos finitos, onde as simulações numéricas propostas foram realizadas.

Para a realização das simulações numéricas e evolução do desempenho dos modelos elasto-plásticos estudados, uma estrutura ROPS foi escolhida, sendo a mesma fabricada de aço FB 70 com dimensões de 56 mm de diâmetro externo por 10 mm de espessura de parede para a seção transversal. Nas simulações foi analisada uma estrutura ROPS interna com cargas aplicadas de forma vertical, lateral e frontal (ver Figura 2.13) onde suas magnitudes foram determinadas de acordo com normas internacionais (ADR59). Na discretização da estrutura, elementos finitos tridimensionais foram utilizados, onde o nível de discretização usada foi calibrado com base na convergência dos resultados numéricos, visto que a teoria de modelos constitutivos utilizados é baseada em modelos locais.

Um teste inicial nos modelos estudados foi realizado, tendo um corpo de prova tipo borboleta sujeita a cisalhamento predominante, simulando níveis de baixa triaxialidade. Com estes testes iniciais, fez-se uma análises das curvas de reação experimental e numérica, onde se constata que em condições de carregamento predominantemente cisalhante, o modelo proposto por Bai & Wierzbicki, apresente resultados numéricos mais próximos aos resultados experimentais. É possível concluir também, que o modelo de von Mises apresenta um comportamento otimista, visto que prevê forças admissíveis maiores que os observados experimentalmente. Um comportamento oposto é observado ao modelo de Tresca, visto que apresenta níveis de força inferiores ao experimental comportando-se assim como um modelo conservador.

Com a utilização da estrutura ROPS nas simulações numéricas, observa-se que os modelos constitutivos apresentam comportamentos diferentes para a estrutura, tendo como base, os níveis de triaxialidade, tensão equivalente e deformação plástica. Através do contorno do ângulo de Lode, foi possível verificar o comportamento das diversas partes que compõem a estrutura ROPS. Dependendo do tipo de carregamento e resposta de estrutura, é possível então se observar uma melhor previsão do comportamento mecânico do material de acordo com uma modelagem proposto por Bai & Wierbicki, visto sua melhor atuação em região de cisalhamento predominante.

Nestas regiões, um dimensionamento mais otimizado pode ser então realizado utilizando tal modelo constitutivo. Assim, a aplicação de materiais com menor resistência mecânica do que o atualmente utilizado, pode ser possível, visto aos menores níveis de carga previstos e que estão de acordo com as informações experimentais.

6.2 PROPOSTA DO TRABALHO FUTURO

Em concordância com os estudos feitos, observou-se que os desenvolvimentos de modelos constitutivos e numéricos, com uma maior simplicidade na sua implementação e aplicação sobre os componentes mecânicos, é um objetivo a ser alcançado pela indústria de forma geral, devido a que isto facilita sua utilização.

Então desta forma, propõe-se como um trabalho futuro, a idealização de uma formulação que possua os efeitos mais importantes na representação do comportamento real do material, apresentando um exemplo na simplicidade da implementação do modelo, na identificação de parâmetros materiais.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andrade Pires, F.M., (2001). Medição por Elementos Finitos de Iniciação de Fratura Dúctil nos Processos de Informação Plásticos, Dissertação de Mestrado, FEUP.

Andrade, F. X. C., (2012). Non-Local Modelling of Ductile Damage, Formulation and Numerical Issues. Ph.D Thesis, FEUP.

Australian Desing Rule ADR59, Omnibuses Rollover Protective Structures.

Bai, Y., (2008). Effect of Loading History on Necking and Fracture. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology.

Bao, Y., (2003). Prediction od Ductile Crack Formulation in Uncracked Bodies, Ph.D Thesis, Massachusetts Institute of Technology.

Bardet, J. P. (1990). Lode Dependence for Isotropic Pressure-Sensitive Elastoplastic materials. *Jornal of Applied Mechanics*, 57:498-506.

Brunig, M., et al (2008). A ductile Damage Criterion at Various Stress Triaxialities, *International Journal of Plasticity* v. 24 p 1731-1755.

De Borst et al, (2012). Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Wiley.

De Souza Neto, E.A., Peri'c, Owen, D.R.J. (2008). Computational methods for plasticity: theory and applications. John Wiley & Sons Ltd.

Dowling, N. E., (1998). Mechanical Behavior of Material, Prentice Hall.

Dunne & Petrinic, (2005). Introduction to Computational Plasticity, Oxford University Press, Incorporated.

Driemeier, L., (1999). Contribuição ao Estudo de Localização de Deformações com Modelos Constitutivos de Dano e Plasticidade, Tese de Doutorado, USP.

Gao, X., Zhang, T., Zhou J., Graham S. M. , Hayden M., Roe C. (2011) On stress-state dependent plasticity modeling: Significance of the hydrostatic stress, the third invariant of stress deviator and the non-associated flow rule. *International Journal of Plasticity* 27 (2011) 217–231.

Holzapfel, G.A. (2000). Non-linear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering. London: John Wiley & Sons.

Itskov, M., (2007). Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers, Springer.

Joamilton Stahlschidt, (2010). Estudos de Identificação de Parâmetros Elasto-plásticos Utilizando Métodos de Otimização. Dissertação de Mestrado, Universidade do Estado de Santa Catarina.

Khan, A., and Huang, S., (1995). Continuum Theory of Plasticity.

Lemaitre, J., Chaboche, J.L. (1990). Mechanics of Solid Materials. Cambridge Univ Press.

Lemaitre, J., (1996). A Course on Damage Mechanics, Springer.

Malcher, L., (2011). Da Mecânica do Dano Contínuo: Uma evolução do Modelo de Lemaitre para Redução da Dependência do Ponto de Calibração. Tese de Doutorado em Ciências Mecânicas Publicação ENMTD-09/2011. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília.

Malcher, L.; Andrade Pires, F.M. ; César de Sá, J.M.A., (2012). An Assessment of Isotropic Damage Constitutive Models under High and Low Stress Triaxialities. *International Journal of Plasticity*.

Malcher, L., (2013). Continuum Modelling and Numerical Simulation of Damage for Ductile Materials. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica. Universidade de Porto.

Simo, J.C., & Hughes, T.J.R. (1998). Computational Inelasticity. New York, Springer-Verlag.

Rao, S.S.,(2009). Engineering Optimization, Theory and Practice, John Wiley.

Teng, X., (2005). High Velocity Impact Fracture Ph.D Thesis, Massachusetts Institute of Technology.

Xue, L., (2007). Damage Accumulation and Fracture Initiation in Uncracked Ductile Solids Subject to Triaxial Loading. International Journal of Solids and Structures 44 (16), 5163–5181.

Vale, (2012). Projeto Estrutural de um sistema de proteção contra impactos e capotagem (ROPS) para veículos 4x4 volume1.

Vaz Jr. et al, (2010). Advanced Computational Materials Modeling, Wiley.

V&M, (2012). Catálogo de Produtos Trefilados V&M do Brasil.

ANEXOS

Quadro a.1 Modelo Matemático de von Mises.

i) Decomposição Aditiva da deformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

ii) Definição Lei Elástica (lei de Hooke):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

iii) Definição da Função de escoamento para Von Mises:

$$\Phi = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} - \sigma_{y0} - H \bar{\varepsilon}^p$$

iv) Lei de Fluxo plástico:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{3}{2q} \mathbf{S}$$

e lei de evolução para $\bar{\varepsilon}^p$:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}$$

v) Regra de Complementaridade:

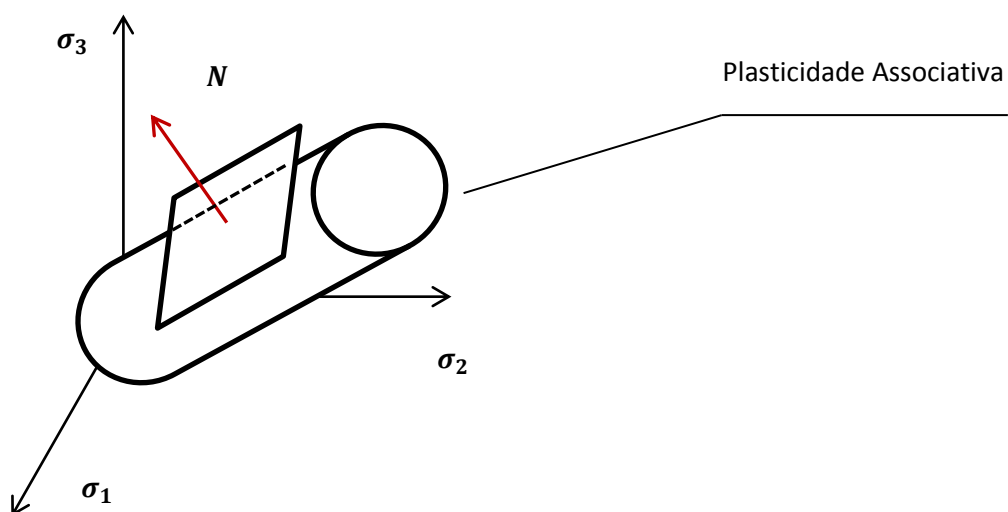
$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad \Phi \leq 0 \quad \dot{\gamma} \Phi = 0$$


Figura a.1 Lei de Associativa para o Modelo de von Mises.

Quadro a.2. Modelo Matemático de Tresca.

i) Decomposição Aditiva da deformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

ii) Definição Lei Elástica (lei de Hooke):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

iii) Definição da Função de escoamento:

$$\Phi = (S_{max} - S_{min}) - \sigma_{y0} - H\bar{\varepsilon}^p$$

iv) Lei de Fluxo plástico:

Caso I: para o plano central:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}^a \mathbf{N}^a$$

Onde:

$$\mathbf{N}^a \equiv \mathbf{N}^1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left((S_1 - S_3) - \sigma_{y0} - H\bar{\varepsilon}^p \right) = e_1 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_3$$

Caso II: para os plano central e direito:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}^a \mathbf{N}^a + \dot{\gamma}^b \mathbf{N}^b$$

Onde \mathbf{N}^a se encontra descrito no Caso 1 e \mathbf{N}^b como segue:

$$\mathbf{N}^b \equiv \mathbf{N}^6 = \frac{\partial \Phi_6}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left((S_1 - S_2) - \sigma_{y0} - H\bar{\varepsilon}^p \right) = e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2$$

Caso III: para os plano central e esquerdo:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}^a \mathbf{N}^a + \dot{\gamma}^b \mathbf{N}^b$$

Onde \mathbf{N}^a se encontra descrito no Caso 1 e \mathbf{N}^b como segue:

$$\mathbf{N}^b \equiv \mathbf{N}^2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left((S_2 - S_3) - \sigma_{y0} - H\bar{\varepsilon}^p \right) = e_2 \otimes e_2 - e_3 \otimes e_3$$

e lei de evolução para $\bar{\varepsilon}^p$:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}$$

Para os três casos temos:

$$\text{Caso I: } \dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}^a$$

$$\text{Caso II: } \dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}^a + \dot{\gamma}^b$$

$$\text{Caso III: } \dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}^a + \dot{\gamma}^b$$

v) Regra de Complementaridade:

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad \Phi \leq 0 \quad \dot{\gamma} \Phi = 0$$

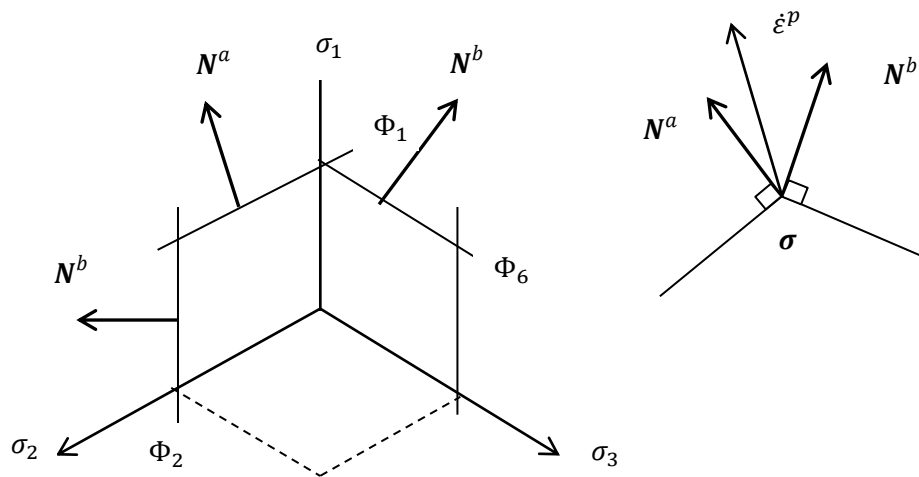


Figura a.2. Lei de Associativa para o Modelo de Tresca Fonte: De Souza Neto (2008).

Quadro a.3 Equações do Modelo de Tresca para descrever o tensor das tensões Atualizadas em cada um dos planos atuantes.

i) Neste caso o tensor das tensões atualizado encontra-se no plano central para o vetor de fluxo N^a , como:

$$S_1 = S_1^{trial} - 2G\Delta\gamma$$

$$S_2 = S_2^{trial}$$

$$S_3 = S_3^{trial} - 2G\Delta\gamma$$

ii) Neste caso o tensor das tensões atualizado encontra-se nos planos central e direito para os vetores de fluxo N^a e $N^b \equiv N^6$, como:

$$S_1 = S_1^{trial} - 2G(\Delta\gamma^a + \Delta\gamma^b)$$

$$S_2 = S_2^{trial} + 2G\Delta\gamma^b$$

$$S_3 = S_3^{trial} + 2G\Delta\gamma^a$$

iii) Neste caso o tensor das tensões atualizado encontra-se nos planos central esquerdo para os vetores de fluxo N^a e $N^b \equiv N^2$, como:

$$S_1 = S_1^{trial} - 2G\Delta\gamma^a$$

$$S_2 = S_2^{trial} - 2G\Delta\gamma^b$$

$$S_3 = S_3^{trial} + 2G(\Delta\gamma^a + \Delta\gamma^b)$$

i) Decomposição Aditiva da deformação: $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$

ii) Definição Lei Elástica (lei de Hooke): $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e: \boldsymbol{\varepsilon}^e$

iii) Definição da Função de escoamento:

$$\Phi = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) + (\sigma_{max} + \sigma_{min})\sin\phi - (\sigma_{y0} + H\bar{\varepsilon}^p)\cos\phi$$

iv) Lei de Fluxo plástico:

Caso I: para o plano central: $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma}^a \mathbf{N}^a$

Onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^a &\equiv \mathbf{N}^1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left((\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3)\sin\phi - (\sigma_{y0} + H\bar{\varepsilon}^p)\sin\phi \right) \\ &= (1 + \sin\phi)e_1 \otimes e_1 - (1 - \sin\phi)e_3 \otimes e_3 \end{aligned}$$

Caso II: para os plano central e direito: $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma}^a \mathbf{N}^a + \dot{\gamma}^b \mathbf{N}^b$

Onde, \mathbf{N}^a se encontra descrito no Caso 1 e \mathbf{N}^b como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^b &\equiv \mathbf{N}^6 = \frac{\partial \Phi_6}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left((\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 + \sigma_2)\sin\phi - (\sigma_{y0} + H\bar{\varepsilon}^p)\sin\phi \right) \\ &= (1 + \sin\phi)e_1 \otimes e_1 - (1 - \sin\phi)e_2 \otimes e_2 \end{aligned}$$

Caso III: para os plano central e esquerdo: $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma}^a \mathbf{N}^a + \dot{\gamma}^b \mathbf{N}^b$

Onde, \mathbf{N}^a se encontra descrito no Caso 1 e \mathbf{N}^b como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^b &\equiv \mathbf{N}^2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left((\sigma_2 - \sigma_3) + (\sigma_2 + \sigma_3)\sin\phi - (\sigma_{y0} + H\bar{\varepsilon}^p)\sin\phi \right) \\ &= (1 + \sin\phi)e_2 \otimes e_2 - (1 - \sin\phi)e_3 \otimes e_3 \end{aligned}$$

e lei de evolução para $\bar{\varepsilon}^p$: $\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\varepsilon}^p$: $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma}$, para os três casos temos:

Caso I: $\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}^a$

Caso II: $\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}^a + \dot{\gamma}^b$

Caso III: $\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}^a + \dot{\gamma}^b$

v) Regra de Complementaridade:

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad \Phi \leq 0 \quad \Phi \dot{\gamma} = 0$$

Quadro a.5 Equações do Modelo de Mohr para descrever o tensor das tensões
Atualizadas em cada um dos planos atuantes.

i) Neste caso o tensor das tensões atualizado encontra-se no plano central para o vetor de fluxo N^a , como:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_1^{trial} - \Delta\gamma \left[2G \left(1 + \frac{1}{3} \sin\phi \right) + 2K \sin\phi \right] \\ \sigma_2 &= \sigma_2^{trial} + \Delta\gamma \left[\frac{4}{3} G - 2 \right] K \sin\phi \\ \sigma_3 &= \sigma_3^{trial} + \Delta\gamma \left[2G \left(1 - \frac{1}{3} \sin\phi \right) - 2K \sin\phi \right]\end{aligned}$$

ii) Neste caso o tensor das tensões atualizado encontra-se nos planos central e direito para os vetores de fluxo N^a e $N^b \equiv N^6$, como:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_1^{trial} - \left[2G \left(1 + \frac{1}{3} \sin\phi \right) + 2K \sin\phi \right] (\Delta\gamma^a + \Delta\gamma^b) \\ \sigma_2 &= \sigma_2^{trial} + \left[\frac{4}{3} G - 2K \right] \sin\phi \Delta\gamma^a + \left[2G \left(1 - \frac{1}{3} \sin\phi \right) - 2K \sin\phi \right] \Delta\gamma^b \\ \sigma_3 &= \sigma_3^{trial} + \left[2G \left(1 - \frac{1}{3} \sin\phi \right) - 2K \sin\phi \right] \Delta\gamma^a + \left[\frac{4}{3} G - 2K \right] \sin\phi \Delta\gamma^b\end{aligned}$$

iii) Neste caso o tensor das tensões atualizado encontra-se nos planos central esquerdo para os vetores de fluxo N^a e $N^b \equiv N^2$, como:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_1^{trial} - \left[2G \left(1 + \frac{1}{3} \sin\phi \right) + 2K \sin\phi \right] \Delta\gamma^a + \left(\frac{4}{3} G - 2K \right) \sin\phi \Delta\gamma^b \\ \sigma_2 &= \sigma_2^{trial} + \left[\frac{4}{3} G - 2K \right] \sin\phi \Delta\gamma^a + \left[2G \left(1 + \frac{1}{3} \sin\phi \right) + 2K \sin\phi \right] \Delta\gamma^b \\ \sigma_3 &= \sigma_3^{trial} + \left[2G \left(1 - \frac{1}{3} \sin\phi \right) - 2K \sin\phi \right] (\Delta\gamma^a + \Delta\gamma^b)\end{aligned}$$

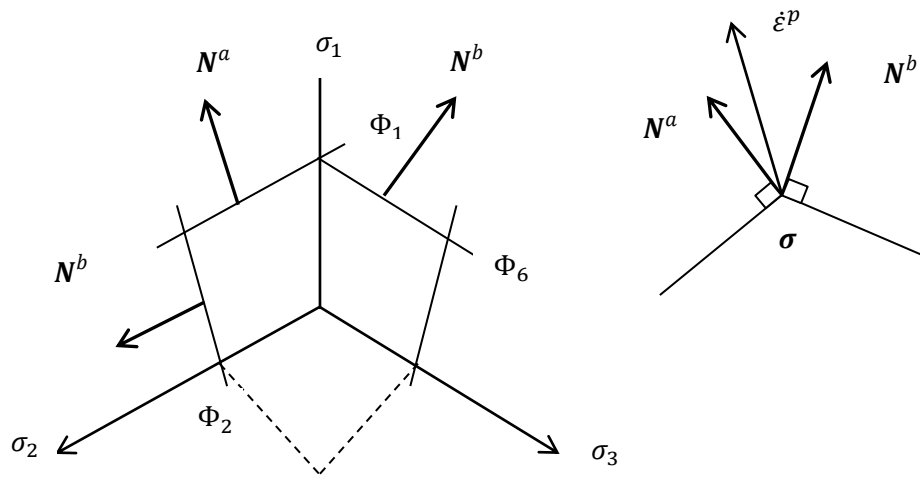


Figura a.3 Lei de Associativa para o Modelo de Mohr Fonte: De Souza Neto (2008).

Quadro a.6 Modelo Matemático de Bai & Wierzbicky.

i) Decomposição Aditiva da deformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

ii) Definição Lei Elástica (lei de Hooke):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

iii) Definição da Função de escoamento :

$$\Phi = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} - \sigma_y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \cdot A(\eta) \cdot B(\gamma)}$$

Onde :

$$A(\eta) = [1 - C_\eta (\eta - \eta_0)]$$

$$B(\gamma) = C_\theta^S + (C_\theta^{ax} - C_\theta^S) \cdot \left(\gamma - \frac{\gamma^{m+1}}{m+1} \right)$$

iv) Lei de Fluxo plástico:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \left[\frac{3}{2q} \alpha \mathbf{S} + \frac{3}{2q} \lambda \mathbf{M} + \frac{1}{3} \beta \mathbf{I} \right]$$

e lei de evolução para $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \dot{\gamma} \sqrt{\alpha^2 + \frac{2}{9} \beta^2 + \lambda^2 \frac{\mathbf{M} : \mathbf{M}}{\mathbf{S} : \mathbf{S}} + 2 \alpha \lambda \frac{\mathbf{S} : \mathbf{M}}{\mathbf{S} : \mathbf{S}}}$$

v) Regra de Complementaridade:

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad \Phi \leq 0 \quad \dot{\gamma} \Phi = 0$$

Conjunto de Equações a.1 para obter o vetor de fluxo do modelo de Bai & Wierzbicky

$$N = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \sigma_y \left[B(\gamma) \frac{\partial A(\eta)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + A(\eta) \frac{\partial B(\gamma)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]$$

Agora derivamos $A(\eta)$:

$$\frac{\partial A(\eta)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -C_\eta \frac{\partial(\eta)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$\frac{\partial(\eta)}{\partial\sigma} = \frac{\partial(p)}{\partial\sigma} \frac{1}{q} - \frac{\eta}{q} \frac{\partial(q)}{\partial\sigma} = \frac{I}{3q} - \frac{3\eta}{2q^2} \mathbf{S}$$

$$\frac{\partial A(\eta)}{\partial\sigma} = -C_\eta \left[\frac{I}{3q} - \frac{3\eta}{2q^2} \mathbf{S} \right]$$

Depois a derivada de $B(\gamma)$:

$$\frac{\partial B(\gamma)}{\partial\sigma} = (C_\theta^{ax} - C_\theta^S) \cdot (1 - \gamma^m) \frac{\partial(\gamma)}{\partial\sigma}$$

$$\frac{\partial(\gamma)}{\partial\sigma} = \frac{\cos(\pi/6) \tan(\theta - \pi/6) \partial(\theta)}{1 - \cos(\pi/6) \cos(\theta - \pi/6) \partial\sigma}$$

$$\frac{\partial(\gamma)}{\partial\sigma} = 6,4641 \frac{\tan(\theta - \pi/6) \partial(\theta)}{\cos(\theta - \pi/6) \partial\sigma}$$

Agora a derivada do ângulo de lode θ :

$$\frac{\partial(\theta)}{\partial\sigma} = \frac{\partial \left[\frac{1}{3} \arccos \xi \right]}{\partial\sigma} = - \frac{1}{3\sqrt{1-\xi^2}} \frac{\partial(\xi)}{\partial\sigma}$$

$$\frac{\partial(\theta)}{\partial\sigma} = - \frac{1}{3\sin 3\theta} \frac{\partial(\xi)}{\partial\sigma}$$

A derivada de ξ :

$$\frac{\partial(\xi)}{\partial\sigma} = \frac{\partial \left[\left(\frac{r}{q} \right)^3 \right]}{\partial\sigma} = 3\xi \left(\frac{\partial(r)}{\partial\sigma} \frac{1}{r} - \frac{\partial(q)}{\partial\sigma} \frac{1}{q} \right)$$

$$\frac{\partial(r)}{\partial\sigma} = \frac{\partial \left[\sqrt[3]{\frac{27}{2} \det \mathbf{S}} \right]}{\partial\sigma} = \frac{9}{2r^2} \frac{\partial(\det \mathbf{S})}{\partial\sigma}$$

$$\frac{\partial(\det \mathbf{S})}{\partial\sigma} = \frac{\partial(\det \mathbf{S})}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial(\mathbf{S})}{\partial\sigma} = \mathbf{S}^2 - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{S}^2) \mathbf{I} - I_1 \mathbf{S}$$

$$\frac{\partial(r)}{\partial\sigma} = \frac{\partial \left[\sqrt[3]{\frac{27}{2} \det \mathbf{S}} \right]}{\partial\sigma} = \frac{9}{2r^2} (\mathbf{M} - I_1 \mathbf{S})$$

Agora defina-se a o tensor \mathbf{M} assim:

$$\mathbf{M} = \mathbf{S}^2 - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{S}^2) \mathbf{I}$$

$$\frac{\partial(\det \mathbf{S})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M} - I_1 \mathbf{S}$$

$$\frac{\partial(\xi)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 3\xi \left(\frac{9}{2r^3} (\mathbf{M} - I_1 \mathbf{S}) - \frac{3}{2q^2} \mathbf{S} \right)$$

Então finalmente :

$$\frac{\partial B(\gamma)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = D\xi \left[\left(\frac{3}{2q^2} + \frac{9I_1}{2r^3} \right) \mathbf{S} - \frac{9}{2r^3} \mathbf{M} \right]$$

$$D = (C_\theta^{ax} - C_\theta^S)(1 - \gamma^m)6,4641 \frac{\tan(\theta - \pi/6)}{\cos(\theta - \pi/6)} \frac{1}{\sin 3\theta}$$

$$\mathbf{N} = \frac{3\mathbf{S}}{2q} - \sigma_y \left[C_\eta \left(\frac{3\eta}{2q^2} \mathbf{S} - \frac{\mathbf{I}}{3q} \right) B(\gamma) + A(\eta) D\xi \left[\left(\frac{3}{2q^2} + \frac{9I_1}{2r^3} \right) \mathbf{S} - \frac{9}{2r^3} \mathbf{M} \right] \right]$$

Agora temos:

$$\alpha = 1 - \frac{\sigma_y}{q} \left[C_\eta B\eta + AD\xi \left(1 + 3I_1 \frac{q^2}{r^3} \right) \right]$$

$$\beta = \frac{\sigma_y C_\eta B}{q} \quad \lambda = \frac{3\sigma_y AD}{q^2}$$

Logo o vetor de fluxo é:

$$\mathbf{N} = \frac{3\mathbf{S}}{2q} \alpha + \frac{3}{2q} \lambda \mathbf{M} + \frac{1}{3} \beta \mathbf{I}$$

Conjunto de Equações a.2 Derivadas das equações Residuais de Bai & Wierzbicky

as derivadas para a primeira equacao residual:

$$\frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \frac{\partial \left[\frac{3}{2q_{n+1}} \alpha_{n+1} \mathbf{S}_{n+1} \right]}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} + \frac{\partial \left[\frac{3}{2q_{n+1}} \lambda_{n+1} \mathbf{M}_{n+1} \right]}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} + \frac{\partial \left[\frac{1}{3} \beta_{n+1} \mathbf{I} \right]}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}$$

onde:

$$\frac{\partial \left[\frac{3}{2q} \alpha \mathbf{S} \right]}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{q} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \otimes \mathbf{S} + \frac{\alpha}{q} \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) - \frac{\alpha}{q^2} \left(\frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \otimes \mathbf{S} \right]$$

$$\frac{\partial \left[\frac{3}{2q} \lambda \mathbf{M} \right]}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{q} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \otimes \mathbf{M} + \frac{\lambda}{q} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) - \frac{\lambda}{q^2} \left(\frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \otimes \mathbf{M} \right]$$

$$\frac{\partial \left[\frac{1}{3} \beta \mathbf{I} \right]}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \otimes \mathbf{I}$$

Logo para a segunda equacao residual:

$$\frac{\partial N_{n+1}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \frac{\partial \left[\frac{3}{2q_{n+1}} \alpha_{n+1} \mathbf{S}_{n+1} \right]}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} + \frac{\partial \left[\frac{3}{2q_{n+1}} \lambda_{n+1} \mathbf{M}_{n+1} \right]}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} + \frac{\partial \left[\frac{1}{3} \beta_{n+1} \mathbf{I} \right]}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}$$

Onde:

$$\frac{\partial \left[\frac{3}{2q} \alpha \mathbf{S} \right]}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \frac{3}{2} \frac{1}{q} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \right) \mathbf{S}$$

$$\frac{\partial \left[\frac{3}{2q} \lambda \mathbf{M} \right]}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \frac{3}{2} \frac{1}{q} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \right) \mathbf{M}$$

$$\frac{\partial \left[\frac{1}{3} \beta \mathbf{I} \right]}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \right)$$

Determinar a derivda de $\sqrt{(*)}$ em relacao ao tensor de tensoes e à deformacao plastica equivalente, temos:

$$\frac{\partial \sqrt{(*)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2\sqrt{(*)}} \left[2 \alpha \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + \frac{4}{9} \beta \left(\frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\lambda^2 \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\alpha \lambda \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{S}} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} \right) \right]$$

Onde:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\lambda^2 \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} \right) = 2\lambda \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} + \left[\mathbf{M} : \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right] \frac{\lambda^2}{\mathbf{S} : \mathbf{S}} - 2 \left[\mathbf{S} : \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right] \left(\lambda^2 \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} \right)$$

$$= 2 \left[\lambda \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{S}} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} + \alpha \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{S}} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} + \frac{\alpha \lambda}{\mathbf{S} : \mathbf{S}} \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{M} + \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) - 2 \alpha \lambda \frac{\mathbf{S} : \mathbf{M}}{(\mathbf{S} : \mathbf{S})^2} \left(\mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right]$$

$$\frac{\partial \sqrt{(*)}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \frac{1}{2\sqrt{(*)}} \left[2 \alpha \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \right) + \frac{4}{9} \beta \left(\frac{\partial \beta}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \right) + 2\lambda \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \right) \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} + 2\lambda \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \right) \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{S}} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} + 2 \alpha \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \right) \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{S}} : \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} \right]$$

Outras derivadas:

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma} = \frac{3}{2q} \mathbf{S}$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \sigma} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \sigma} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{S}^2}{\partial \sigma} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \text{tr} \mathbf{S}^2}{\partial \sigma} \right) \otimes \mathbf{I} \right] : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \sigma}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{S}^2}{\partial \sigma} \right) = \left(\frac{\partial \mathbf{S}^2}{\partial \mathbf{S}} \right) : \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \sigma} \right)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{S}^2}{\partial \mathbf{S}} \right) = 2\mathbf{S}$$

$$\frac{\partial \text{tr} \mathbf{S}^2}{\partial \mathbf{S}} = 2\mathbf{S}^T : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \sigma}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} = & \sigma_o \frac{1}{q^2} \left[C_\eta B_\eta + AD\xi \left(1 + 3I_1 \frac{q^2}{r^3} \right) \right] \left(\frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) \\ & - \frac{\sigma_o}{q} \left[C_\eta \left(\frac{\partial B}{\partial \sigma} \eta + B \frac{\partial \eta}{\partial \sigma} \right) + \left(\frac{\partial A}{\partial \sigma} D\xi + A \frac{\partial D}{\partial \sigma} \xi + AD \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} \right) \left(1 + 3I_1 \frac{q^2}{r^3} \right) \right. \\ & \left. + 3AD\xi \left(\frac{\partial I_1}{\partial \sigma} \frac{q^2}{r^2} + \frac{2I_{1q}}{r^2} \frac{\partial q}{\partial \sigma} - \frac{3I_1}{r^4} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma} = \sigma_o C_\eta \left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial \sigma} \right) \frac{1}{q} - \frac{\beta}{q^2} \left(\frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) \right]$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} = 3\sigma_o \left[\left(\frac{\partial A}{\partial \sigma} \right) \frac{D}{q^2} + \left(\frac{\partial D}{\partial \sigma} \right) \frac{A}{q^2} - \frac{2AD}{q^2} \left(\frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) \right]$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \frac{-H}{q^2} \left[C_\eta B_\eta + AD\xi \left(1 + 3I_1 \frac{q^2}{r^3} \right) \right]$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \frac{HC_\eta B}{q}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \frac{3HAD}{q^2}$$

$$\frac{\partial A(\eta)}{\partial \sigma} = -C_\eta \left[\frac{1}{3q} \mathbf{I} - \frac{3\eta}{2q^2} \mathbf{S} \right] = C_\eta \left[\frac{3\eta}{2q^2} \mathbf{S} - \frac{1}{3q} \mathbf{I} \right]$$

$$\frac{\partial B(\gamma)}{\partial \sigma} = D\xi \left[\left(\frac{3}{2q^2} + \frac{9I_1}{2r^2} \right) \mathbf{S} - \frac{9}{2r^2} \mathbf{M} \right]$$

Onde D é definido assim:

$$D = (C_\theta^{ax} - C_\theta^S)(1 - \gamma^m)6,4641 \frac{\tan(\theta - \pi/6)}{\cos(\theta - \pi/6)} \frac{1}{\sin 3\theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial \sigma} = & (C_\theta^{ax} - C_\theta^S) \frac{1}{3\sin^2 3\theta} 6,4641 \left[(m\gamma^{m+1})6,4641 \frac{\tan^2(\theta - \pi/6)}{\cos^2(\theta - \pi/6)} \right. \\ & \left. - (1 - \gamma^m) \frac{(1 - 2\tan^2(\theta - \pi/6))}{\cos(\theta - \pi/6)} + (1 - \gamma^m) \frac{\tan(\theta - \pi/6) \cos 3\theta}{\cos(\theta - \pi/6) \sin 3\theta} \right] \left(\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} \right) \end{aligned}$$