

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

Dissertação de Mestrado

Estudos de Fidelidade Quântica de Estados Não-Clássicos

Matheus Barbosa Horovits

Orientador:

Prof. Dr. Viktor V. Dodonov

Brasília, Dezembro de 2013

“O maior inimigo do conhecimento não é a ignorância, mas a ilusão do conhecimento.”

Stephen Hawking

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me colocou no caminho que estou e me permitiu, dando-me força e determinação, desenvolver esse trabalho.

Aos meus pais Michel e Sônia pelo apoio e dedicação constantes, me motivando sempre a continuar seguindo em frente.

Ao Prof. Dr. Viktor Dodonov por seus esforços, disponibilidade, extrema paciência e humanidade ao me orientar, respeitando sempre minhas limitações e apresentando-me sempre formas de obter os resultados que não conseguia obter.

À minha irmã Michelle pela torcida e por acreditar em mim mais do que eu mesmo poderei acreditar um dia.

À minha companheira Raianne Alcântara pelo carinho, parceria, motivação e por compreender e me apoiar nos momentos em que me fiz ausente para desenvolver este trabalho.

Aos grandes amigos Leonardo Velozo, Diego Raphael, Alexandre Santos, Victor Henrique e Hellson Resende pelos momentos de descontração e pela amizade que me proporcionaram.

Ao amigo Leander Michels que foi o maior motivador do meu ingresso no desafio de desenvolver este trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro deste trabalho.

Resumo

A ‘proximidade’ entre dois estados quânticos tornou-se especialmente importante durante as duas últimas décadas para todas as aplicações da mecânica quântica. Hoje a grandeza mais utilizada para estabelecer essa ‘proximidade’ é dada pelo valor absoluto do produto escalar entre dois estados quânticos chamada *fidelidade*. Neste trabalho questiona-se o uso apenas da fidelidade para garantir que dois estados sejam considerados ‘próximos’ propondo que além da fidelidade outra grandeza também seja levada em consideração, no caso a energia. Estabeleceu-se e estudou-se os limites superiores do desvio relativo de energia entre dois estados quânticos com uma fidelidade fixa entre eles ou os limites superiores da fidelidade com um desvio relativo de energia fixo, para estados coerentes, comprimidos e superposições de dois estados coerentes (estados de ‘gato’). Os resultados mostraram que, por exemplo, para garantir um desvio relativo de energia inferior a 10% entre dois estados coerentes arbitrários (desconhecidos), a fidelidade deve exceder o nível 0,995. Para outros tipos de estados, as restrições podem ser muito mais intensas.

Abstract

The ‘closeness’ between two quantum states became especially important during the last two decades for all applications of quantum mechanics. Today quantity more used to establish this ‘closeness’ is given by the absolute value of the inner product between two quantum states called *fidelity*. This work wants to question whether the use of fidelity alone is sufficient to conclude that the two states are truly ‘close’, or some additional quantities should be taken into account as well. We propose to use the relative energy difference as one of reasonable additional parameters. In this connection, we study the upper bounds of the relative energy difference between two quantum states with a fixed fidelity between them or the upper bounds of fidelity with a fixed relative energy difference. This is done for coherent states, squeezed states and superpositions of two coherent states (‘cat’ states). The results showed that, for example, to guarantee a relative energy difference of less than 10% for quite arbitrary (unknown) coherent states, the fidelity must exceed the level 0.995. For other kinds of states, the restrictions can be much stronger.

Sumário

1	Introdução	1
2	Estados Coerentes	3
2.1	Fidelidade (\mathcal{F})	4
2.2	Desvio relativo de energia (\mathcal{E})	4
2.3	Maximizando a fidelidade	5
3	Estados Gaussianos Puros	7
3.1	Estados comprimidos	7
3.2	Fidelidade (\mathcal{F})	8
3.3	Desvio relativo de energia (\mathcal{E})	9
3.4	Maximizações exatas da fidelidade	11
3.4.1	Estados Coerentes	12
3.4.2	Estados fortemente comprimidos	13
3.4.3	Estados comprimidos não deslocados	13
3.4.4	Discussão sobre as limitações	14
3.5	Relações entre \mathcal{E} e a fidelidade quando a diferença $1 - \mathcal{F}$ é pequena	15
4	Superposições entre dois Estados Coerentes	19
4.1	Fórmulas gerais e limites analíticos exatos	20
4.1.1	Estados de Yurke-Stoler	21
4.1.2	Estados com $\alpha_1 = \alpha_2$ mas diferentes ϕ_k	21
4.1.3	Estados com $\alpha_1 = \alpha_2$ mas $ z_1 \neq z_2 $	23
4.2	Caso em que a diferença $1 - \mathcal{F}$ é pequena	25
4.2.1	Fixando α e variando ϕ_j	25
4.2.2	Estados coerentes pares	27

4.2.3	Estados coerentes ímpares	28
4.3	Estados de gato real/imaginário	31
4.3.1	Pequena variação de fase	32
4.3.2	Pequena variação na amplitude	33
4.4	Estados Semi-coerentes	35
4.4.1	Estados ortogonais ao vácuo	35
4.4.2	Dois estados próximos com mesmo β	36
4.4.3	Dois estados próximos com mesmo α	38
4.4.4	Estados ‘auto-ortogonais’	39
5	Conclusões	41

Lista de Figuras

3.1	Esquerda: $\alpha = 0.1, \beta = 0.1, \delta x = 0.1, \delta p = 0.1, c = 0, x = 0.25$ e $p = 0.25$. Direita: $\alpha = 0.1, \beta = 0.1, \delta x = 0.1, \delta p = 0.1, c = 0, x = 0.5$ e $p = 0.5$	17
3.2	Esquerda: $\alpha = 2, \beta = 0.1, \delta x = -1.5, \delta p = 0.1, c = 0, x = 0.15$ e $p = 0.25$. Direita: $\alpha = 5, \beta = 0.1, \delta x = -1.5, \delta p = 0.1, c = 0, x = 0.5$ e $p = 0.1$	17
3.3	Esquerda: $\alpha = 8, \beta = 0.1, \delta x = 0.1, \delta p = 0.3, c = 0, x = 0.01$ e $p = 0.01$. Direita: $\alpha = 0.1, \beta = 6, \delta x = 0.1, \delta p = 0.1, c = 0, x = 1.5$ e $p = 0.25$	17
4.1	Fidelidade entre estados de gato com mesmos valores de $\alpha, \mathcal{F}(\phi_2)$ definida pela Eq. (4.11) e sua fidelidade máxima $\mathcal{F}_{max}(\phi_2)$ definida pela Eq. (4.16) com \mathcal{E} dado pela Eq. (4.12). Esquerda: para $\phi_2 = \pi/2$. Direita: para $\phi_2 = \pi/4$	22
4.2	Fidelidade entre estados de gato com mesmos valores de $\alpha, \mathcal{F}(\phi_2)$ definida pela Eq. (4.11) e sua fidelidade máxima $\mathcal{F}_{max}(\phi_2)$ definida pela Eq. (4.20) com \mathcal{E} dado pela Eq. (4.12). Esquerda: para $\phi_2 = \pi/2$. Direita: para $\phi_2 = \pi/4$	23
4.3	Esquerda: Desvio relativo de energia \mathcal{E} [dado pela Eq. (4.21)] para $\sigma = +1$. Direita: função $R(b) = 1/f^\sigma(b)$ [com $f^\sigma(b)$ dado pela Eq. (4.23)] para $\sigma = +1$	24
4.4	Fidelidade entre estados de gato com mesmos valores de $\alpha, \mathcal{F}(y)$ definida pela Eq. (4.21) e sua fidelidade máxima $\mathcal{F}_{max}(y)$ definida pela Eq. (4.24) com \mathcal{E} dado pela Eq. (4.21). Esquerda: para $y = 0.5$. Direita: para $y = 1$	24
4.5	Esquerda: Desvio relativo de energia \mathcal{E} [dado pela Eq. (4.21)] para $\sigma = -1$. Direita: função $ R(b) = 1/ f^\sigma(b) $ [com $f^\sigma(b)$ dado pela Eq. (4.23)] para $\sigma = -1$	25
4.6	Fidelidade entre estados de gato com mesmos valores de $\alpha, \mathcal{F}(y)$ definida pela Eq. (4.21) e sua fidelidade máxima $\mathcal{F}_{max}(y)$ definida pela Eq. (4.25) com \mathcal{E} dado pela Eq. (4.21). Esquerda: para $y = 0.5$. Direita: para $y = 1$	25
4.7	Fidelidade entre estados coerentes pares, $\mathcal{F}(\omega)$ definida pela Eq. (4.41) e sua fidelidade máxima $\mathcal{F}_{max}(\omega)$ definida pela Eq. (4.50) com \mathcal{E} dado pela Eq. (4.44). Esquerda: para $\omega = 0.1$. Direita: para $\omega = 0.3$	28

- 4.8 Fidelidade entre estados coerentes ímpares, $\mathcal{F}(\omega)$ definida pela Eq. (4.51) e sua fidelidade máxima $\mathcal{F}_{max}(\omega)$ definida pela Eq. (4.60) com \mathcal{E} dado pela Eq. (4.54).
Esquerda: para $\omega = 0.1$. Direita: para $\omega = 0.3$ 30
- 4.9 Gráficos da função $R(b) = \mathcal{E}^2/\tilde{\mathcal{F}}$. Esquerda: Para os estados coerentes pares. Direita: Para os estados coerentes ímpares. 30
- 4.10 Gráficos da função $\mathcal{F}(a, \mathcal{E})$ com valores fixos do desvio relativo de energia \mathcal{E} para estados pares, ímpares e estados de Yurke-Sstoler. Esquerda: para $\mathcal{E} = 0.2$ Direita: para $\mathcal{E} = 1.0$ 30
- 4.11 Gráficos da função $R(\theta, b) = 1/f_\sigma^{(\theta)}(\theta, b)$ com valores fixos do parâmetro $b = a^2$.
Esquerda: para $\sigma = +1$. Direita: para $\sigma = -1$ 33
- 4.12 Gráficos da função $f_\sigma^a(\theta, b)$ com diferentes valores do parâmentro b . Esquerda: para $\sigma = 1$. Direita: para $\sigma = -1$ 34
- 4.13 Fidelidade entre estados real/imaginário, $\mathcal{F}(da)$ definida pela Eq. (4.62) e sua fidelidade máxima $\mathcal{F}_{max}(da)$ definida pela Eq. (4.75) com \mathcal{E} dado pela Eq. (4.64), para $\theta = \pi/4$. Esquerda: para $da = 0.01$. Direita: para $da = 0.03$ 34
- 4.14 Fidelidade entre estados real/imaginário, $\mathcal{F}(da)$ definida pela Eq. (4.62) e sua fidelidade máxima $\mathcal{F}_{max}(da)$ definida pela Eq. (4.76) com \mathcal{E} dado pela Eq. (4.64), para $\theta = \pi/4$. Esquerda: para $da = 0.03$. Direita: para $da = 0.05$ 35
- 4.15 Esquerda: função $R(b) = 1/f(b)$ [with $f(b)$ defined by formula (4.84) para estados semi-coerentes ortogonais ao estado de vácuo próximos. Direita: funções $R_\pm(\delta) = 1/f_\pm(\delta)$ [com $f_\pm(\delta)$ definido pela fórmula (4.90). 37
- 4.16 Fidelidade entre estados semi-coerentes ortogonais ao vácuo, $\mathcal{F}(da)$ definida pela Eq. (4.81) e sua fidelidade máxima $\mathcal{F}_{max}(da)$ definida pela Eq. (4.85) com $\mathcal{E} = \mathcal{A}da$, Eq. (4.83). Esquerda: para $da = 0.1$. Direita: para $da = 0.3$ 37
- 4.17 Esquerda: função $R(b) = 1/f(b)$ [com $f(b)$ definida pela fórmula (4.95) projeções ortogonais do estado de vácuo sobre dois diferentes estados coerentes próximos. Direita: função $R(a) = 1/f(a)$ [com $f(a)$ definida pela fórmula (4.101)]. 39
- 4.18 Fidelidade entre estados semi-coerentes com mesmos valores de a , $\mathcal{F}(d\beta)$ definida pela Eq. (4.92) e sua fidelidade máxima $\mathcal{F}_{max}(d\beta)$ definida pela Eq. (4.96) com \mathcal{E} dada pela Eq. (4.93). Esquerda: para $d\beta = 0.1$. Direita: para $d\beta = 0.5$ 39
- 5.1 Funções de onda reais e positivas de dois pares de estados de vácuo comprimidos com $b_j = x_j = p_j = 0$ mas diferentes parâmetros a_j . As fidelidades entre os estados dos pares 1-2 e 3-4 são iguais: $\mathcal{F} = \sqrt{8/9} \approx 0.94$. Entretanto, enquanto que as energias médias E_1 e E_2 coincidem, $E_4 = 2E_3$ 43

Capítulo 1

Introdução

A quantificação da proximidade entre diferentes estados quânticos é importante para todas as aplicações da mecânica quântica desde a teoria da informação quântica, como na tomografia quântica, teletransporte quântico, engenharia de estados quânticos, e assim por diante. Uma grandeza muito popular, que pode ser encontrada em quase todos os artigos contemporâneos sobre informação quântica, é a chamada *fidelidade* introduzida em [1]. Essa grandeza foi definida como o valor absoluto do produto escalar entre dois estados $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$:

$$\mathcal{F} = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2 \quad (1.1)$$

Claro que essa grandeza é bem conhecida e foi usada muito antes de receber o nome *fidelidade* [2–4]. A fidelidade entre varias superposições de estados coerentes e comprimidos foram calculadas recentemente, por exemplo em [5–7]. No entanto, a fidelidade sozinha não descreve todos os aspectos do problema, porque os estados com a mesma fidelidade podem possuir diferentes valores de outras quantidades importantes, tais como a energia, por exemplo [8].

A pergunta a ser respondida é: quão diferentes podem ser dois estados quânticos com uma determinada fidelidade entre eles? Por exemplo, pode-se encontrar na literatura vários valores críticos para a fidelidade, correspondentes a diferentes protocolos de teletransporte de algumas classes específicas de estados quânticos. Em particular, o valor $\mathcal{F} = 1/2$ foi estabelecido como limite entre os domínios clássico e quântico no teletransporte de estados coerentes do campo eletromagnético [9]. Outro valor crítico $\mathcal{F} = 2/3$ foi encontrado em [10,11]. O significado desses valores foram elucidados em [12,13]. Os primeiros valores relatados experimentalmente foram bastante baixos: entre 0.56 e 0.66 [14–16]. Só recentemente os níveis superiores a 90% foram alcançados [17,18].

Mas é suficiente ter uma fidelidade de, digamos, 95% ou até 99% para ter certeza que dois estados estão realmente próximos um ao outro? Claro que a resposta depende de uma situação concreta e de informações adicionais ou suposições sobre os estados, em particular, o significado exato da palavra ‘próximo’. Se é sabido que os parâmetros de dois estados podem variar apenas em

alguns intervalos restritos, então mesmo um valor não muito alto da fidelidade pode ser suficiente em alguns casos. Mas, no caso geral, isso definitivamente não é assim.

A essência do problema e a motivação do estudo podem ser elucidados no seguinte exemplo simples. Considere dois estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$. Sua fidelidade fica $\mathcal{F} = |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \exp(-|\alpha - \beta|^2)$, que depende apenas da diferença $|\alpha - \beta|$. A questão é: os dois pares, $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle\}$ e $\{|\alpha + A\rangle, |\beta + A\rangle\}$, são igualmente ‘próximos’ (ou igualmente ‘distantes’)? Do ponto de vista puramente geométrico, a resposta definitivamente é positiva, uma vez que o segundo par pode ser obtido a partir do primeiro, por meio de uma transformação unitária ou por um simples deslocamento no plano complexo dos parâmetros α . Desse ponto de vista, o espaço dos parâmetros é homogêneo. Mas certamente é não-homogêneo do ponto de vista físico, uma vez que o estado de vácuo $|0\rangle$ é, obviamente, distinto (nessa conexão, a ‘*energia-sensível*’ a distância entre os estados quânticos foi proposta em [8]). Considerando $|\alpha - \beta| = 1$. Então $\mathcal{F} = 0.37$, que certamente pode ser considerado um valor baixo. Assim, os estados com $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ parecem ser muito diferentes. Mas o que se pode dizer sobre os estados com $\alpha = 1000$ e $\beta = 1001$? A sua fidelidade é baixa, mas, em muitos (claro, não todos) casos, a substituição de um desses dois estados pelo outro dificilmente provocaria uma alteração significativa nos resultados experimentais ou na sua interpretação. Por outro lado, o valor $\mathcal{F} = 0.9$ corresponde à diferença $|\alpha - \beta| = 0.325$, e não é tão óbvio agora, se o estado coerente $|\alpha\rangle = 0.325$ pode ser considerado uma boa aproximação do estado de vácuo? Esses exemplos mostram que a fidelidade sozinha nem sempre pode ser usada como uma grandeza adequada na caracterização do grau de ‘similaridade’ (‘proximidade’) entre estados quânticos. Em muitos casos alguma outra grandeza deve ser levada em consideração junto com a fidelidade.

Um dos parâmetros mais importantes na física é a energia. Portanto, parece interessante responder a seguinte questão: quão grande é a diferença de energia entre dois estados quânticos com uma determinada fidelidade? Se ela é pequena e a fidelidade é alta, podemos ter mais razões para dizer que os dois estados são ‘próximos’. Ou do contrário, se a diferença de energia torna-se grande, então dificilmente dois estados podem ser considerados ‘próximos’, mesmo que tenham uma fidelidade bastante elevada.

O principal objetivo deste trabalho é estabelecer relações entre a fidelidade e a diferença de energia para dois estados quânticos de algumas famílias de estados não clássicos e analisar os limites superiores dessas relações.

Capítulo 2

Estados Coerentes

Estados coerentes foram primeiramente estudados por Schrödinger em 1926 [19] e foram redescobertos por Klauder [20–22], Glauber [23–25] e Sudarshan [26] no início dos anos 1960. O termo ‘coerente’ em si tem origem na terminologia usada em óptica clássica (por exemplo, a radiação coerente, fontes emissoras de forma coerente). Desde então, os estados coerentes e suas várias generalizações foram disseminadas por toda a física quântica.

Eles são autoestados do operador de aniquilação, isto é:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (2.1)$$

onde α é um número complexo arbitrário. Os estados $\langle\alpha|$ são autoestados "pela direita" do operador de criação a^\dagger com autovalor α^* :

$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \langle\alpha|\alpha^*. \quad (2.2)$$

Uma vez que o estado de número $|n\rangle$ forma uma base completa se pode expandir $|\alpha\rangle$ de acordo com

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle. \quad (2.3)$$

Atuando \hat{a} em cada termo da expansão, a Eq. (2.1) se torna

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle. \quad (2.4)$$

Igualando os coeficientes de $|n\rangle$ dos dois lados leva a

$$C_n \sqrt{n} = \alpha C_{n-1} \quad (2.5)$$

ou

$$C_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} C_{n-1} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{n(n-1)}} C_{n-2} = \dots = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0, \quad (2.6)$$

e assim

$$|\alpha\rangle = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.7)$$

Da exigência de normalização obtém-se C_0 :

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 = |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n} \alpha^{n'}}{\sqrt{n!n'}} \langle n|n'\rangle \quad (2.8)$$

$$= |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |C_0|^2 e^{|\alpha|^2}, \quad (2.9)$$

o que implica que $C_0 = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)$. Então os estados coerentes normalizados tem a forma

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.10)$$

2.1 Fidelidade (\mathcal{F})

Considerando estados coerentes segundo a Eq. (2.10)

$$|\alpha_j\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha_j|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_j^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.11)$$

onde $j = 1, 2$, a fidelidade Eq. (1.1) se torna

$$\mathcal{F} = |\langle\alpha_1|\alpha_2\rangle|^2 = \left| e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1|^2} e^{-\frac{1}{2}|\alpha_2|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^{*n'}}{\sqrt{n'!}} \frac{\alpha_2^n}{\sqrt{n!}} \langle n'|n\rangle \right|^2 \quad (2.12)$$

$$= e^{-|\alpha_1|^2} e^{-|\alpha_2|^2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1^* \alpha_2)^n}{n!} \right|^2 = e^{-(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 - \alpha_1^* \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2^*)}, \quad (2.13)$$

ou

$$\mathcal{F} = e^{-|\alpha_2 - \alpha_1|^2}. \quad (2.14)$$

2.2 Desvio relativo de energia (\mathcal{E})

A energia de um estado quântico é dada por

$$E_j = \langle\psi_j|\hat{H}|\psi_j\rangle, \quad (2.15)$$

onde $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$, considerando estados com frequência unitária e $\hbar = 1$, temos $\hat{H} = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}$.

Aplicando (2.15) para os estados α_j

$$E_j = \langle\alpha_j|\hat{H}|\alpha_j\rangle = \langle\alpha_j|\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}|\alpha_j\rangle = |\alpha_j|^2 + \frac{1}{2}. \quad (2.16)$$

Então a diferença de energia entre dois estados $|\alpha_1\rangle$ e $|\alpha_2\rangle$ assume a forma

$$\Delta E = E_2 - E_1 = |\alpha_2|^2 - |\alpha_1|^2. \quad (2.17)$$

Uma vez que as energias dependem apenas dos valores absolutos de α_j , a fidelidade máxima para um valor fixo de ΔE é alcançada se as fases dos números complexos α_1 e α_2 coincidirem. Portanto a seguir deve-se assumir que cada α_j é real e $\alpha_1 > 0$. É fácil notar que fixando a fidelidade \mathcal{F} a variação de energia ΔE pode assumir valores arbitrariamente grandes. Portanto, parece razoável estudar os limites de variações possíveis do *desvio relativo de energia*

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta E}{E_1} = \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{1/2 + \alpha_1^2}, \quad (2.18)$$

que certamente é uma grandeza limitada (a contribuição da energia do estado fundamental $1/2$ é essencial, pois dividindo ΔE pelo número de fótons $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ não podemos eliminar valores muito grandes para estados próximos ao estado de vácuo).

2.3 Maximizando a fidelidade

Resolvendo a Eq. (2.18) com respeito a α_2 e colocando a raiz positiva em (2.14) leva a

$$\mathcal{F} = e^{-\left| \sqrt{\alpha_1^2(1+\mathcal{E}) + \frac{\mathcal{E}}{2}} - \alpha_1 \right|^2}. \quad (2.19)$$

Para se encontrar o valor extremo de (2.19), chega-se ao problema de encontrar o valor extremo da função

$$f(\alpha_1) = \sqrt{\alpha_1^2(1+\mathcal{E}) + \frac{\mathcal{E}}{2}} - \alpha_1, \quad (2.20)$$

para um valor fixo de \mathcal{E} , ou seja, o problema se resume a resolver a seguinte equação:

$$f'(\alpha_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\alpha_1(1+\mathcal{E})}{\sqrt{4\alpha_1^2(1+\mathcal{E}) + 2\mathcal{E}}} - 1 = 0, \quad (2.21)$$

isolando α_1 em (2.21) obtém-se que os valores extremos da função $f(\alpha_1)$ para

$$\alpha_1^2 = \frac{1}{2 + 2\mathcal{E}}, \quad (2.22)$$

que implica em

$$f = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2(1+\mathcal{E})}} \quad \Rightarrow \quad f(f - \sqrt{f^2 + 2}) \leq \mathcal{E} \leq f(f + \sqrt{f^2 + 2}). \quad (2.23)$$

A assimetria da desigualdade na Eq. (2.23) pode ser resolvida introduzindo o *desvio relativo simétrico de energia*

$$\mathcal{Y} = \frac{|\mathcal{E}|}{\sqrt{1+\mathcal{E}}}, \quad (2.24)$$

é fácil notar que a desigualdade (2.23) se torna

$$\mathcal{Y} \leq \sqrt{2}f, \quad (2.25)$$

substituindo esse resultado na Eq. (2.19), a fidelidade máxima entre dois estados coerentes com um valor fixo de \mathcal{Y} é

$$\mathcal{F}_{max}^{(coh)} = e^{-\mathcal{Y}^2/2}. \quad (2.26)$$

Note que \mathcal{Y} é uma função monótona crescente de \mathcal{E} . A desigualdade $1 + \mathcal{E} > 0$ é sempre satisfeita devido a definição (2.18). Para pequenas diferenças de energia, ou seja, $\mathcal{E} \ll 1$ a formula (2.26) se torna

$$\mathcal{F}_{max}^{(coh)} \approx 1 - \frac{\mathcal{Y}^2}{2} \approx 1 - \frac{\mathcal{E}^2}{2}. \quad (2.27)$$

O resultado obtido na Eq. (2.26) mostra que, para garantir um desvio relativo de energia, \mathcal{E} , menor que 10% é necessário que a fidelidade entre os estados seja superior a 0.9955. Claro que podem existir situações em que o desvio relativo de energia de 10% ocorra para fidelidades menores, porém se não houver nem uma informação adicional sobre os estados, a fidelidade de 99.55% é a mínima necessária para se ter certeza que o desvio relativo de energia não será maior. Pensando em dois estados coerentes com uma fidelidade de, digamos, 90%, a Eq. (2.26) mostra que, nesse caso, o desvio relativo de energia pode atingir o valor 57.63%, e estados com energias tão diferentes dificilmente podem ser considerados ‘próximos’. Logo para os estados coerentes uma fidelidade de 90% não é suficiente, no caso geral, para garantir que os estados coerentes sejam realmente ‘próximos’. O interesse agora é ver o que acontece para outras famílias de estados quânticos.

Capítulo 3

Estados Gaussianos Puros

3.1 Estados comprimidos

Estados comprimidos são estados de mínima incerteza, onde a variação de uma das quadraturas é menor que aquela observada no estado de vácuo. Os estados comprimidos foram primeiramente estudados pelos teóricos interessados em suas propriedades de mínima incerteza [27–32]. Essas propriedades foram descobertas independentemente em vários trabalhos sob diferentes terminologias: ‘pacotes de onda pulsante’ [27], ‘novos estados coerente’ [28, 29], ‘estados coerentes de dois fótons’ [30] e ‘estado comprimido ideal’ [31]. A primeira realização experimental de luz comprimida foi obtida por Slusher e colaboradores com quatro ondas misturadas em átomos de sódio [33].

Eles são autoestados do operador $\hat{b} = \mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger$ [34], ou seja,

$$\hat{b}|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle, \quad (3.1)$$

sendo que o operador \hat{b} é canônico: $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$, o que implica em $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$. O estado $|\beta\rangle$ é obtido aplicando o operador de compressão $\hat{S}(z)$ sobre o estado coerente $|\alpha\rangle$, ou seja,

$$|\beta\rangle = \hat{S}(z)|\alpha\rangle, \quad (3.2)$$

onde

$$\hat{S}(z) = \exp\left(\frac{z^*\hat{a}^2 - z\hat{a}^{\dagger 2}}{2}\right), \quad (3.3)$$

e $z = \varepsilon e^{i\phi}$ é um parâmetro complexo, cujo módulo ε é o parâmetro de compressão e o ângulo ϕ fornece a direção de compressão. O primeiro exemplo de estados não-clássicos comprimidos foi apresentado em 1927 por Kennard [35] que considerou a evolução no tempo de pacotes de ondas gaussianas genéricas do oscilador harmônico

$$\psi(x) = \exp(-ax^2 + bx + c). \quad (3.4)$$

Nesse caso, as variações de quadratura podem ser arbitrárias (determinadas pelas partes reais e imaginárias do parâmetro a), mas satisfazem a desigualdade de Heisenberg $\sigma_x \sigma_p \geq 1/4$.

3.2 Fidelidade (\mathcal{F})

Considere dois estados comprimidos descritos pela função de onda

$$\psi_j(x) = N_j \exp\left(\frac{-(a_j + ib_j)}{2}(x - x_j)^2 + ip_j x\right), \quad (3.5)$$

onde N_j é o fator de normalização e $j = 1, 2$, lembrando da condição de normalização

$$\int |\psi_j(x)|^2 dx = 1 \implies \int \psi_j^*(x) \psi_j(x) dx = 1, \quad (3.6)$$

obtem-se $N_j = \left(\frac{a_j}{\pi}\right)^{1/4}$ que fornece a função de onda (3.5) na forma:

$$\psi_j(x) = \left(\frac{a_j}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(\frac{-(a_j + ib_j)}{2}(x - x_j)^2 + ip_j x\right), \quad (3.7)$$

onde $a_j > 0$, enquanto b_j são parâmetros reais e x_j e p_j podem assumir valores arbitrários. A fidelidade entre esses dois estados é definida como

$$\mathcal{F} = |\langle \psi_1(x) | \psi_2(x) \rangle|^2 \implies \mathcal{F} = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x) \psi_2(x) dx \right|^2. \quad (3.8)$$

Substituindo (3.7) em (3.8) para $j=(1, 2)$ vem

$$\mathcal{F} = \left(\frac{a_1 a_2}{\pi^2}\right)^{1/2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(a_1 - ib_1)}{2}(x-x_1)^2 - ip_1 x} e^{\frac{-(a_2 + ib_2)}{2}(x-x_2)^2 + ip_2 x} dx \right|^2, \quad (3.9)$$

a integral da Eq. (3.9) é do tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-kx^2 + lx + m) dx = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{4mk + l^2}{4k}\right), \quad (3.10)$$

com

$$k = \frac{1}{2} [a_1 + a_2 + i(b_2 - b_1)], \quad l = (a_1 - ib_1)x_1 + (a_2 - ib_2)x_2 + 2i(p_2 - p_1)$$

e

$$m = -\frac{1}{2} [(a_1 - ib_1)x_1^2 + (a_2 + ib_2)x_2^2].$$

Resolvendo a integral de acordo com a fórmula (3.10) e calculando o quadrado de seu módulo a fidelidade toma a forma

$$\mathcal{F} = \frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{\sqrt{G}} \exp\left(-\frac{\Phi}{G}\right). \quad (3.11)$$

onde o fator Φ é dado por

$$\Phi = (a_1 + a_2)(\delta p)^2 + [a_1 a_2 (a_1 + a_2) + a_1 b_2^2 + a_2 b_1^2] (\delta x)^2 + 2(a_1 b_2 + a_2 b_1)(\delta p)(\delta x), \quad (3.12)$$

adotando a notação:

$$\delta x = x_2 - x_1 \quad e \quad \delta p = p_2 - p_1, \quad (3.13)$$

e considerando

$$G = (a_1 + a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2. \quad (3.14)$$

A fidelidade obtida da Eq. (3.11) deve ser realacionada com a diferença de energia entre os estados.

3.3 Desvio relativo de energia (\mathcal{E})

A energia de um estado quântico pode ser obtida pela relação

$$E_j = \frac{\langle x_j^2 \rangle + \langle p_j^2 \rangle}{2}, \quad (3.15)$$

onde $\langle x^2 \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$ são os operadores quadráticos da posição e do momento, respectivamente, e são obtidos pelas relações

$$\langle x_j^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j^*(x) x^2 \psi_j(x) dx, \quad (3.16)$$

$$\langle p_j^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j^*(x) (-\hbar^2) \frac{d^2}{dx^2} \psi_j(x) dx. \quad (3.17)$$

Resolvendo $\langle x_j^2 \rangle$ para os estados $\psi_j(x)$, vem

$$\langle x_j^2 \rangle = \left(\frac{a_j}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{(a_j - ib_j)}{2}(x-x_j)^2 - ip_j x} e^{-\frac{(a_j + ib_j)}{2}(x-x_j)^2 + ip_j x} dx, \quad (3.18)$$

simplificando a Eq. (3.18) obtém-se

$$\langle x_j^2 \rangle = \left(\frac{a_j}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-a_j(x-x_j)^2} = \left(\frac{a_j}{\pi}\right)^{1/2} \left[x_j^2 \left(\frac{\pi}{a_j}\right)^{1/2} + \frac{1}{2a_j} \left(\frac{\pi}{a_j}\right)^{1/2} \right], \quad (3.19)$$

ou

$$\langle x_j^2 \rangle = x_j^2 + \frac{1}{2a_j}. \quad (3.20)$$

Resolvendo $\langle p_j^2 \rangle$ para os estados $\psi_j(x)$, vem

$$\langle p_j^2 \rangle = \left(\frac{a_j}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(a_j - ib_j)}{2}(x-x_j)^2 - ip_j x} (-\hbar^2) \frac{d^2}{dx^2} e^{-\frac{(a_j + ib_j)}{2}(x-x_j)^2 + ip_j x} dx. \quad (3.21)$$

Supondo que os estados $\psi_j(x)$ descrevem um oscilador quântico com massa e frequência unitária (assumindo $\hbar = 1$), a Eq. (3.21) se torna

$$\langle p_j^2 \rangle = - \left(\frac{a_j}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} -(a_j + ib_j) e^{-a_j(x-x_j)^2} + [-(a_j + ib_j)(x - x_j) + ip_j x]^2 e^{-a_j(x-x_j)^2} dx, \quad (3.22)$$

e resolvendo essa integral, obtemos

$$\langle p_j^2 \rangle = - \left(\frac{a_j}{\pi}\right)^{1/2} \left[-(a_j + ib_j) \left(\frac{\pi}{a_j}\right)^{1/2} - p_j^2 \left(\frac{\pi}{a_j}\right)^{1/2} + \frac{(a_j + ib_j)^2}{2a_j^2} \left(\frac{\pi}{a_j}\right)^{1/2} \right], \quad (3.23)$$

simplificando a Eq. (3.23) obtem-se

$$\langle p_j^2 \rangle = \frac{a_j}{2} + \frac{b_j^2}{2a_j} + p_j^2. \quad (3.24)$$

Então a energia média de cada estado assume a forma

$$E_j = \frac{1}{2} (p_j^2 + x_j^2) + \frac{1 + a_j^2 + b_j^2}{4a_j}. \quad (3.25)$$

Suprimindo o subscrito '1' nos coeficientes relacionados ao estado ψ_1 e introduzindo notação

$$a_2 - a_1 = a\alpha, \quad \alpha > -1, \quad b_1 = ac, \quad b_2 - b_1 = a\beta, \quad (3.26)$$

(A diferença $b_2 - b_1$ é normalizada pelo parâmetro a , porque b_1 pode ser igual a zero, enquanto que $a > 0$ para todos os estados considerados nesse trabalho). Então a equação (3.11) pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{F} = \sqrt{\frac{4(1+\alpha)}{4(1+\alpha) + \alpha^2 + \beta^2}} \exp\left(-\frac{u}{g}\right), \quad (3.27)$$

onde

$$g = a \left[(2 + \alpha)^2 + \beta^2 \right], \quad (3.28)$$

e

$$\begin{aligned} u &= (2 + \alpha) (\delta p)^2 + 2a(2c + \beta + c\alpha) (\delta x)(\delta p) \\ &+ a^2 \left[(1 + \alpha) (2 + \alpha + c^2) + (c + \beta)^2 \right] (\delta x)^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

A diferença de energia entre os estados ψ_1 e ψ_2 $\Delta E = E_2 - E_1$, está dada na forma

$$\Delta E = p(\delta p) + x(\delta x) + \frac{1}{2} [(\delta x)^2 + (\delta p)^2] + B, \quad (3.30)$$

com B dado por

$$B(a, c, \alpha, \beta) = \frac{a^2 [\alpha (1 + \alpha - c^2) + \beta (2c + \beta)] - \alpha}{4a(1 + \alpha)}. \quad (3.31)$$

É fácil notar que fixando a fidelidade \mathcal{F} , os parâmetros α , β , δx e δp são limitados, mas a variação de energia δE pode assumir valores arbitrariamente grandes, se os valores iniciais de x e p forem muito grandes. O mesmo pode acontecer se o parâmetro a for muito grande ou muito pequeno. Então novamente o problema deve ser analisado através do *desvio relativo de energia* Eq.(2.18)

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta E}{E_1} = \frac{E_2}{E_1} - 1. \quad (3.32)$$

Fixando os valores de δp , δx e E_1 , a soma $p(\delta p) + x(\delta x)$ é máxima, se os vetores $(\delta x, \delta p)$ e (x, p) forem paralelos e é mínima se esses vetores forem antiparalelos. Portanto, se deve encontrar os valores máximo (positivo) e mínimo (negativo) das funções

$$\mathcal{E}_{\pm} = \frac{\delta/2 \pm R\delta + B}{R^2/2 + A}, \quad (3.33)$$

onde

$$A(a, c) = \frac{1 + a^2(1 + c^2)}{4a}, \quad (3.34)$$

$$R = \sqrt{x^2 + p^2} \quad e \quad \delta = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta p)^2}. \quad (3.35)$$

Calculando os valores extremos de \mathcal{E}_\pm com respeito ao parâmetro R , chega-se ao problema de encontrar os valores extremos das funções

$$\mathcal{E}_\pm = \pm \frac{1}{4} \left[\sqrt{(\Delta + 2K)^2 + 8\Delta} \pm (\Delta + 2K) \right], \quad (3.36)$$

sendo

$$\Delta = \delta^2/A, \quad e \quad K = B/A. \quad (3.37)$$

Por outro lado considerando um novo parâmetro φ como sendo o ângulo entre o vetor $(\delta x, \delta p)$ e o eixo horizontal, a fidelidade \mathcal{F} pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{F} = \sqrt{\frac{4(1 + \alpha)}{4(1 + \alpha) + \alpha^2 + \beta^2}} \exp\left(-\frac{u'(\varphi, a, c, \alpha, \beta)}{g(a, \alpha, \beta)} \delta^2\right), \quad (3.38)$$

onde

$$u'(\varphi, a, c, \alpha, \beta) = (2 + \alpha) \sin^2(\varphi) + 2a(2c + \beta + c\alpha) \sin(\varphi) \cos \varphi + a^2 [(1 + \alpha)(2 + \alpha + c^2) + (c + \beta)^2] \cos^2(\varphi). \quad (3.39)$$

3.4 Maximizações exatas da fidelidade

O problema pode ser resolvido exatamente em dois casos especiais. O primeiro é para $\alpha = \beta = 0$ (dois estados comprimidos com parâmetros de deslocamento diferentes, mas variações idênticas de quadraturas). Então $B = K = 0$ e

$$\mathcal{E}_\pm = \pm \frac{1}{4} \left(\sqrt{\Delta^2 + 8\Delta} \pm \Delta \right), \quad (3.40)$$

nesse caso a fidelidade \mathcal{F} se torna

$$\mathcal{F} = \exp\left(-\frac{\delta^2}{2a} [\sin^2(\varphi) + a^2(1 + c^2) \cos^2(\varphi) + 2ac \sin(\varphi) \cos(\varphi)]\right), \quad (3.41)$$

sendo $f = \ln(1/\mathcal{F})$ então

$$f = \frac{\delta^2}{2a} [\sin^2(\varphi) + a^2(1 + c^2) \cos^2(\varphi) + 2ac \sin(\varphi) \cos(\varphi)], \quad (3.42)$$

que fornece

$$\delta^2 = \frac{2af}{\sin^2(\varphi) + a^2(1 + c^2) \cos^2(\varphi) + 2ac \sin(\varphi) \cos(\varphi)}, \quad (3.43)$$

substituindo δ^2 e A na Eq. (3.37), Δ toma a forma

$$\Delta = \frac{8a^2 f / [1 + a^2(1 + c^2)]}{\sin^2(\varphi) + a^2(1 + c^2) \cos^2(\varphi) + 2ac \sin(\varphi) \cos(\varphi)}. \quad (3.44)$$

Fixando os parâmetros a e c , o valor máximo positivo de \mathcal{E}_\pm e seu valor mínimo negativo (no caso do sinal "menos"), são obtidos quando o coeficiente Δ é máximo. Procurando pelos extremos de Δ em função do parâmetro φ obtem-se a equação

$$\tan(2\varphi) = \frac{2ac}{a^2(1+c^2) - 1}, \quad (3.45)$$

que leva aos seguintes valores máximos de Δ :

$$\Delta_{max \rightarrow \varphi} = 4f(1 + \sqrt{1 - \varepsilon}), \quad (3.46)$$

onde

$$\varepsilon = \frac{4a^2}{[a^2(1+c^2) + 1]^2}. \quad (3.47)$$

Considerando

$$k = 1 + \sqrt{1 - \varepsilon}, \quad (3.48)$$

a Eq. (3.46) se torna

$$\Delta_{max \rightarrow \varphi} = 4fk. \quad (3.49)$$

Substituindo esse resultado em \mathcal{E}_\pm chega-se as seguintes limitações no *desvio relativo de energia* entre dois estados com valores fixos dos parâmetros a e c mas com parâmetros de deslocamento arbitrários para uma dada fidelidade

$$-\frac{2\sqrt{fk}}{\sqrt{fk} + 2 + \sqrt{fk}} \leq \mathcal{E} \leq \frac{2\sqrt{fk}}{\sqrt{fk} + 2 - \sqrt{fk}}, \quad (3.50)$$

a assimetria entre os lados esquerdo e direito da desigualdade (3.50) se dá devido à restrição $\mathcal{E} > -1$. No entanto, essa assimetria desaparece para o *desvio relativo simétrico de energia*, definido na Eq.(2.24)

$$\mathcal{Y} = \frac{|E_2 - E_1|}{\sqrt{E_1 E_2}} = \frac{|\mathcal{E}|}{\sqrt{1 + \mathcal{E}}}. \quad (3.51)$$

Pode-se verificar que as desigualdades em (3.50) levam à desigualdade única

$$\mathcal{Y} \leq \sqrt{2fk}. \quad (3.52)$$

3.4.1 Estados Coerentes

No caso especial em que $a = 1$ e $c = 0$ o fator da Eq. (3.48) se torna $k = 1$, nesse caso os estados ψ_j tomam a forma de estados coerentes, então obtem-se a relação *exata* entre o *desvio relativo simétrico de energia máximo* e a fidelidade fixa entre dois *estados coerentes*

$$\mathcal{Y}_m^{(coh)} = \sqrt{2 \ln(1/\mathcal{F})}. \quad (3.53)$$

A relação inversa fornece a *fidelidade máxima* possível entre dois estados coerentes que pode ser alcançada para um dado valor de \mathcal{Y} , que já foi encontrada no capítulo 2, a Eq. (2.26)

$$\mathcal{F}_{max}^{(coh)} = e^{-\mathcal{Y}^2/2}. \quad (3.54)$$

3.4.2 Estados fortemente comprimidos

O valor máximo $k = 2$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, é obtido para estados fortemente comprimidos: quando $a \gg 1$ (coordenadas fortemente comprimidas) ou $a \ll 1$ (momento fortemente comprimido) ou $|c| \rightarrow \infty$ fixando a (estado fortemente correlacionado). Conseqüentemente, para dois estados comprimidos arbitrários com mesmos coeficientes de compressão, mas com diferentes parâmetros de deslocamento (designados pelo sobre escrito (δ)), a Eq. (3.52) leva a

$$\mathcal{Y}_m^{(\delta)} = 2\sqrt{\ln(1/\mathcal{F})}, \quad (3.55)$$

o inverso da Eq. (3.55) fornece a *fidelidade máxima* possível entre dois estados são fortemente comprimidos para um dado valor de \mathcal{Y}

$$\mathcal{F}_{max}^{(\delta)} = e^{-(\mathcal{Y}^2/4)}. \quad (3.56)$$

3.4.3 Estados comprimidos não deslocados

Outra solução exata pode ser encontrada para o caso onde $\delta = 0$, nesse caso a Eq. (3.38) toma a forma

$$\mathcal{F} = \sqrt{\frac{4(1+\alpha)}{4(1+\alpha) + \alpha^2 + \beta^2}}. \quad (3.57)$$

O problema agora se resume a uma relação com apenas duas variáveis, α e β , que obedecem a restrição

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{1 + \alpha} = 4D, \quad D = \frac{1 - \mathcal{F}^2}{\mathcal{F}^2}, \quad (3.58)$$

reescrevendo a função $\mathcal{E} = B/A$ obtem-se

$$\mathcal{E} = -\frac{\alpha}{1 + \alpha} + 2z \left(2D + \frac{\alpha + c\beta}{1 + \alpha} \right), \quad (3.59)$$

onde

$$z = \frac{a^2}{1 + a^2(1 + c^2)}. \quad (3.60)$$

Fixando o parâmetro c , o coeficiente z pode variar de 0 até $(1 + c^2)^{-1}$, conseqüentemente, \mathcal{E} pode variar entre

$$\mathcal{E}_\alpha = -\alpha/(1 + \alpha) \quad e \quad \mathcal{E}_c = -\frac{\alpha}{1 + \alpha} + \frac{2}{1 + c^2} \left(2D + \frac{\alpha + c\beta}{1 + \alpha} \right). \quad (3.61)$$

Os pontos extremos de \mathcal{E}_c em função da variável c são encontrados através da equação $\frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial c} = 0$, ou seja, basta resolver a equação

$$4cD + 4cD\alpha + 2c\alpha + c^2\beta - \beta = 0, \quad (3.62)$$

as raízes da Eq. (3.62) são

$$\beta c_{\pm} = -\alpha - 2D(1 + \alpha) \pm \sqrt{[\alpha + 2D(1 + \alpha)]^2 + \beta^2}, \quad (3.63)$$

substituindo essas raízes em \mathcal{E}_c obtemos as seguintes expressões para os valores extremos da função $\mathcal{E}_c(c)$

$$\mathcal{E}_{c\pm} = 2D \pm \sqrt{D(1 + D)}. \quad (3.64)$$

Surpreendentemente, esses valores não dependem nem de α nem de β . Eles devem ser comparados com os valores máximos e mínimos possíveis de \mathcal{E}_α , onde α é dado pela solução da Eq. (3.58)

$$\alpha_{\pm}(\beta) = 2D \pm \sqrt{4D(1 + D) - \beta^2}. \quad (3.65)$$

É claro que o valor mínimo (negativo) de $\alpha_{-}(\beta)$ (alcançado para $\beta = 0$) dá o valor máximo (positivo) de \mathcal{E}_α , enquanto o valor máximo (positivo) de $\alpha_{+}(\beta)$ (também alcançado para $\beta = 0$) produz o valor mínimo (negativo) de \mathcal{E}_α . Pode-se verificar que esses dois valores extremos coincidem exatamente com $\mathcal{E}_{c\pm}$ dado pela Eq. (3.64). Utilizando a relação entre D e \mathcal{F} dada na Eq. (3.58), chega-se as desigualdades

$$-\frac{2\sqrt{1 - \mathcal{F}^2}}{\sqrt{1 - \mathcal{F}^2} + 1} < \mathcal{E} < \frac{2\sqrt{1 - \mathcal{F}^2}}{1 - \sqrt{1 - \mathcal{F}^2}}, \quad (3.66)$$

que são equivalentes a seguinte relação entre o *desvio relativo simétrico de energia* máximo \mathcal{Y}_m e uma dada fidelidade \mathcal{F}

$$\mathcal{Y}_m = \frac{2\sqrt{1 - \mathcal{F}^2}}{\mathcal{F}}. \quad (3.67)$$

Claro que o inverso da Eq. (3.67) fornece a fidelidade máxima possível \mathcal{F}_{max} para um dado valor de \mathcal{Y} quando $\delta = 0$

$$\mathcal{F}_{max} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathcal{Y}^2/4}}. \quad (3.68)$$

No limite $\mathcal{Y}_m \ll 1$ ou $1 - \mathcal{F} \ll 1$ as Eqs. (3.67) e (3.68) se tornam

$$\mathcal{Y}_m \approx \sqrt{8(1 - \mathcal{F})} \quad e \quad \mathcal{F}_{max} \approx 1 - \frac{\mathcal{Y}^2}{8}. \quad (3.69)$$

3.4.4 Discussão sobre as limitações

As limitações impostas pela equação (3.68) são significativamente mais restritivas que aquelas dadas pelas equações (3.54) ou (3.56). Isso pode ser claramente visto na tabela 3.1, onde a fidelidade máxima entre dois estados coerentes (terceira coluna), dois estados fortemente comprimidos (quarta coluna) e dois estados comprimidos não deslocados (quinta coluna) são dadas para alguns valores da razão entre as energias E_2/E_1 .

Tabela 3.1: Tabela da fidelidade máxima dos estados gaussianos para diferentes valores de \mathcal{E} .

E_2/E_1	\mathcal{Y}	$\mathcal{F}_{max}^{(coh)}$	$\mathcal{F}_{max}^{(\delta)}$	\mathcal{F}_{max}
2	0.707	0.778	0.883	0.943
1.5	0.408	0.920	0.959	0.980
1.1	0.095	0.995	0.998	0.999

3.5 Relações entre \mathcal{E} e a fidelidade quando a diferença $1 - \mathcal{F}$ é pequena

Não foi possível obter as desigualdades exatas para valores arbitrários da fidelidade quando as três variáveis, α , β e δ , assumem valores diferentes de zero. Mas o tratamento analítico do caso geral é possível se a diferença $1 - \mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$ for considerada muito pequena. (Na verdade, a saber, esta situação parece ser a mais importante do ponto de vista prático, uma vez que os dados da tabela acima mostraram que mesmo para $\tilde{\mathcal{F}} = 0.1$ a diferença de energia entre os estados pode ultrapassar 100%). Supondo que todas as variáveis, α , β , δx e δp , são pequenas, e levando em conta apenas os termos de liderança com relação a essas variáveis (ou seja, negligenciando seus quadrados e produtos), a fórmula exata do *desvio relativo de energia* se torna

$$\mathcal{E} = \frac{1}{E_1} \left\{ p(\delta p) + x(\delta x) + \frac{1}{4a} (\alpha [a^2(1 - c^2) - 1] + 2ca^2\beta) \right\}, \quad (3.70)$$

expandindo a fidelidade Eq. (3.27) em série de Taylor para α , β , δx e δp chega-se a

$$\tilde{\mathcal{F}}(\alpha, \beta, \delta x, \delta p) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{8} + \frac{1}{2a} [(\delta p)^2 + a^2(1 + c^2)(\delta x)^2 + 2ac(\delta p)(\delta x)]. \quad (3.71)$$

Agora o problema a ser resolvido é a maximização da Eq. (3.70) sob a restrição

$$\mathcal{G} \equiv \frac{\alpha^2 + \beta^2}{8} + \frac{1}{2a} [(\delta p)^2 + a^2(1 + c^2)(\delta x)^2 + 2ac(\delta p)(\delta x)] - \tilde{\mathcal{F}} = 0. \quad (3.72)$$

Introduzindo o multiplicador de Lagrange λ encontra-se imediatamente as coordenadas do ponto extremo da diferença $\mathcal{E} - \lambda\mathcal{G}$

$$\alpha_* = \frac{a^2(1 - c^2) - 1}{a\lambda E_1}, \quad \beta_* = \frac{2ca}{\lambda E_1}, \quad (3.73)$$

$$(\delta x)_* = \frac{x - pca}{a\lambda E_1}, \quad e \quad (\delta p)_* = \frac{pa(1 - c^2) - cx}{\lambda E_1}. \quad (3.74)$$

Substituindo os valores (3.73) e (3.74) em (3.72), chega-se à equação que determina os valores do fator λ

$$8\tilde{\mathcal{F}}\lambda^2 = \frac{\Omega}{a^2 E_1^2} + \frac{4}{a E_1^2} [x^2 + a^2(1 + c^2)p^2 - 2acpx], \quad (3.75)$$

onde

$$\Omega = [a^2(1 + c^2) - 1]^2 + 4(ac)^2 \quad e \quad E_1 = A + (x^2 + p^2)/2, \quad (3.76)$$

claro que E_1 é a energia do estado $|\psi_1\rangle$. O parâmetro A é definido na Eq. (3.34). Após alguma álgebra verifica-se que a inserção dos coeficientes dados pelas Eqs. (3.73) e (3.74) na Eq. (3.70) quando comparada à Eq. (3.75) resulta na simples relação

$$\mathcal{E} = 2\lambda\tilde{\mathcal{F}}. \quad (3.77)$$

Consequentemente o lado direito da Eq. (3.75) deve ser maximizado com respeito aos parâmetros do estado inicial a , c , x e p . O primeiro passo é escrever $x = R \cos(\varphi)$, $p = R \sin(\varphi)$, e olhar para o máximo da Eq. (3.72) em função de φ , onde os ângulos extremos são dados pela Eq. (3.45), eles fornecem a seguinte expressão

$$2\tilde{\mathcal{F}}\lambda_{max}^2 = \frac{\omega + 2R^2(4A + \sqrt{\omega})}{(R^2 + 2A)^2}, \quad \omega = \frac{\Omega}{a^2}. \quad (3.78)$$

Maximizando essa equação com respeito ao parâmetro R resulta em

$$2\tilde{\mathcal{F}}\lambda_{max}^2 = \frac{(\mathcal{X} + \sqrt{\Omega})^2}{\mathcal{X}(\mathcal{X} + \sqrt{\Omega}) - \Omega} = 4 - \frac{(\mathcal{X} - \sqrt{\Omega})(3\mathcal{X} + 5\sqrt{\Omega})}{4a^2 + \mathcal{X}\sqrt{\Omega}}, \quad (3.79)$$

onde

$$\mathcal{X} = 4aA, \quad \mathcal{X}^2 - \Omega = 4a^2. \quad (3.80)$$

Sendo $\mathcal{X} > 1$, $\Omega \geq 0$ e $\mathcal{X} > \Omega$ para qualquer valor de c e qualquer valor positivo de a , o valor máximo possível para λ não pode ser superior à $\sqrt{2/\tilde{\mathcal{F}}}$ (e ele pode ser o mais próximo a esse valor quanto necessário). Então através da Eq.(3.77) chegamos imediatamente à Eq. (3.69)

$$\mathcal{F}_{max} \approx 1 - \frac{\mathcal{Y}^2}{8}, \quad (3.81)$$

identificando \mathcal{E} com \mathcal{Y} , o que deve ser feito para $\mathcal{E} \sim \sqrt{\tilde{\mathcal{F}}} \ll 1$

$$\mathcal{F}_{max} \approx 1 - \frac{\mathcal{E}^2}{8}. \quad (3.82)$$

Assim fica comprovado que as fórmulas (3.69) são válidas para estados gaussianos puros *arbitrários*, nas condições $\mathcal{Y}_m \ll 1$ ou $1 - \mathcal{F} \ll 1$. Pode-se supor que a fórmula (3.68) também seja válida para estados gaussianos puros arbitrários. Fizemos muitos testes numéricos para vários conjuntos dos parâmetros variáveis, e todos eles confirmam nossa conjectura. Alguns dos resultados são mostrados nas figuras 3.1, 3.2 e 3.3, que mostram a fidelidade entre estados gaussianos com as fidelidades $\mathcal{F}(a)$, $\mathcal{F}_{max}^{(coh)}(a)$, $\mathcal{F}_{max}^{(\delta)}(a)$ e $\mathcal{F}_{max}(a)$ definidas pelas Eqs. (3.27), (3.54), (3.56) e (3.68) respectivamente. Onde os parâmetros α , β , δx , δp , c , x e p são fixados. As linhas $\mathcal{F}(a)$, $\mathcal{F}_{max}^{(coh)}(a)$ e $\mathcal{F}_{max}^{(\delta)}(a)$ estão sempre limitadas pela linha $\mathcal{F}_{max}(a)$ calculada de acordo com a Eq. (3.68).

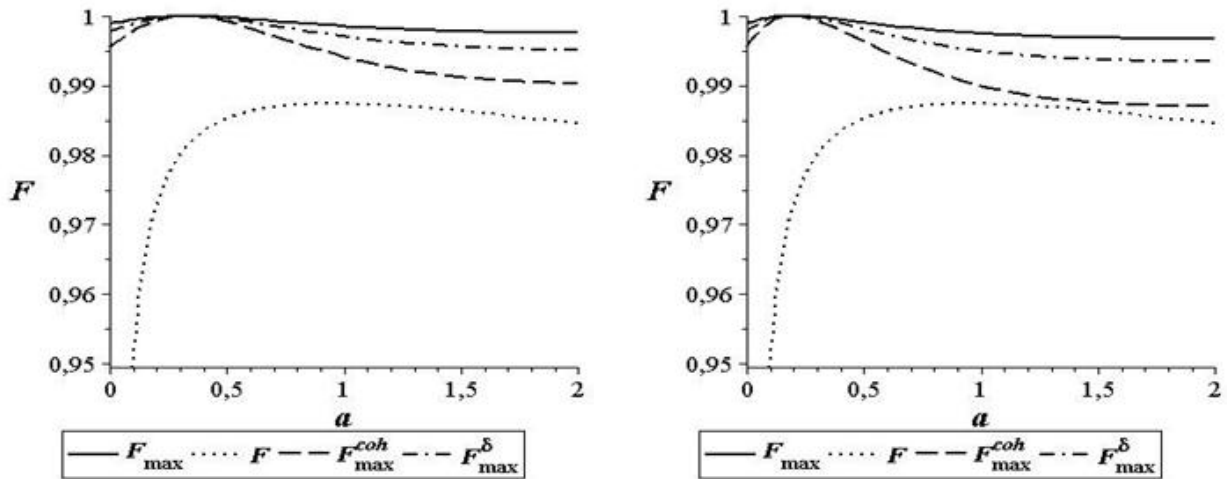


Figura 3.1: Esquerda: $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\delta x = 0.1$, $\delta p = 0.1$, $c = 0$, $x = 0.25$ e $p = 0.25$. Direita: $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\delta x = 0.1$, $\delta p = 0.1$, $c = 0$, $x = 0.5$ e $p = 0.5$.

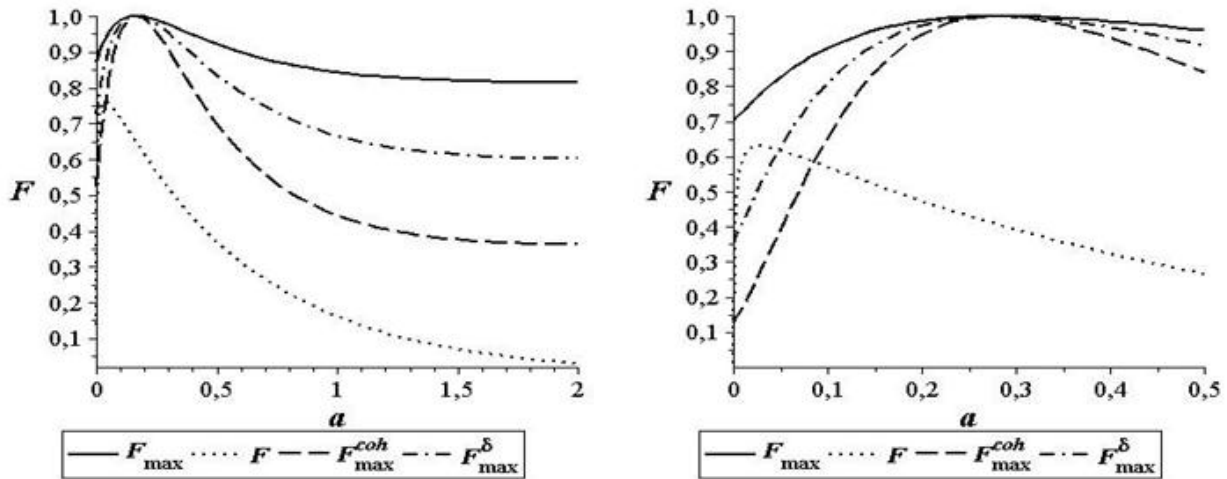


Figura 3.2: Esquerda: $\alpha = 2$, $\beta = 0.1$, $\delta x = -1.5$, $\delta p = 0.1$, $c = 0$, $x = 0.15$ e $p = 0.25$. Direita: $\alpha = 5$, $\beta = 0.1$, $\delta x = -1.5$, $\delta p = 0.1$, $c = 0$, $x = 0.5$ e $p = 0.1$.

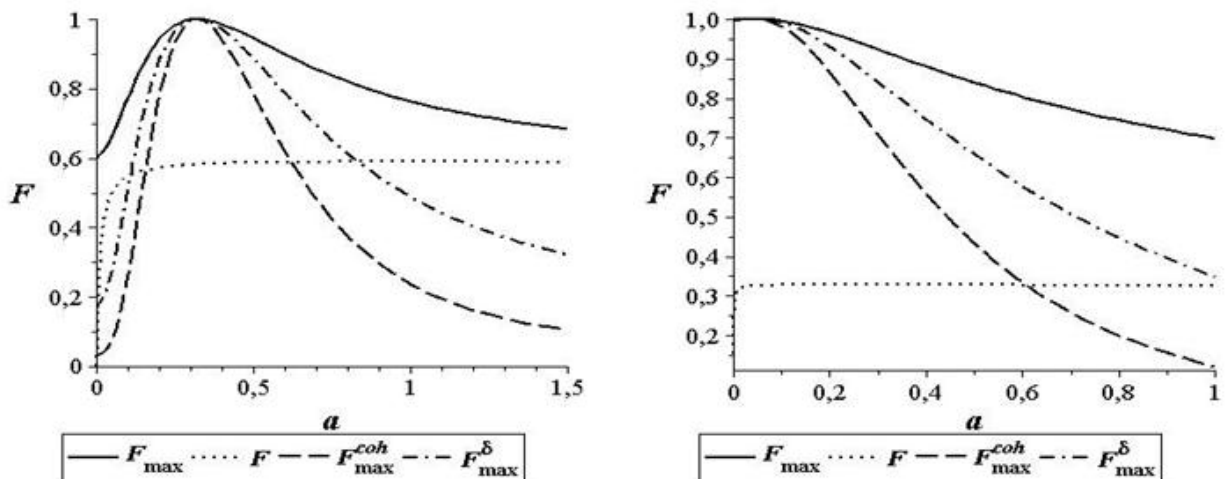


Figura 3.3: Esquerda: $\alpha = 8$, $\beta = 0.1$, $\delta x = 0.1$, $\delta p = 0.3$, $c = 0$, $x = 0.01$ e $p = 0.01$. Direita: $\alpha = 0.1$, $\beta = 6$, $\delta x = 0.1$, $\delta p = 0.1$, $c = 0$, $x = 1.5$ e $p = 0.25$.

Capítulo 4

Superposições entre dois Estados Coerentes

Entre um número infinito de possíveis superposições quânticas, superposições entre dois estados coerentes desempenham um papel de destaque. Elas pertencem as primeiras famílias de estados ‘não-clássicos’ introduzidos no final dos anos 60 - começo dos anos 70 [36–40]. Eventualmente tais estados se tornaram muito populares, uma vez que são considerados frequentemente como os modelos mais simples dos chamados estados de ‘gato de Schrödinger’ [41]. Além disso, eles foram criados experimentalmente em diferentes sistemas quânticos [42–48].

Nesse capítulo, são comparados dois estados de superposição na forma ($j = 1, 2$)

$$|\psi_j\rangle = \mathcal{N}_j (|\alpha_j\rangle + z_j |\beta_j\rangle), \quad (4.1)$$

onde $|\alpha_j\rangle$ e $|\beta_j\rangle$ são estados coerentes normalizados rotulados por parâmetros complexos, $z_j \equiv r_j \exp(i\phi_j)$ são números complexos que descrevem a amplitude relativa entre dois componentes da superposição e

$$\mathcal{N}_j = \left[1 + |z_j|^2 + 2\text{Re} \left(z_j e^{\alpha_j^* \beta_j} \right) e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_j|^2 + |\beta_j|^2)} \right]^{-1/2}, \quad (4.2)$$

é o fator de normalização. Os seguintes casos especiais da fórmula geral (4.1) foram introduzidas explicitamente na ordem cronológica. Pela primeira vez, superposições explícitas (4.1) com $z = 1$ e n números complexos arbitrários α e β foram consideradas brevemente, talvez, por Cahill e Glauber [37]. As primeiras superposições com a amplitude z independente de α e β foram introduzidas sob os nomes ‘estados coerentes pares e ímpares’ em [40]. Para esses estados $z = \pm 1$ mas $\beta = -\alpha$. Mais tarde as propriedades não-clássicas desses estados foram estudadas em [49]. Possíveis métodos de sua geração em meios não-lineares foram propostas em [50]. Mostrou-se em [51] que em tais meios iniciais os estados coerentes podem evoluir sob certas condições em estados (4.1) com $\beta = -\alpha$ e $z = i$. Superposições de estados coerentes com amplitudes iguais mas fases opostas, $|\alpha e^{i\theta}\rangle$ e $|\alpha e^{-i\theta}\rangle$ (α real), foram consideradas em [52,53] para $z = 1$ e em [54] para um complexo arbitrário z . Em [55] tais estados com $z = \pm 1$ foram chamados de ‘estados de gato reais/imaginários’ Os estados com

$\beta = -\alpha^*$ e $z = \pm 1$ foram introduzidos e estudados em [56] sob os nomes estados de gato ‘neutros’ e ‘carregados’.

Várias famílias de estados com $|\alpha| = |\beta|$ (mas fases arbitrárias) e um parâmetro arbitrário z foram discutidas em contextos de diferentes problemas em [41, 57–61]. As superposições de estados com fases iguais mas amplitudes diferentes $|\alpha + \delta\alpha\rangle$ and $|\alpha - \delta\alpha\rangle$ (a razão $\delta\alpha/\alpha$ é real) foram introduzidas em [62] com o nome ‘estados de gato de fase’.

Uma subfamília interessante dos estados (4.1) com $z = -\langle\beta|\alpha\rangle$, α e β sendo números complexos arbitrários foram introduzidos em [39] sob o nome estados ‘semi-coerentes’. Recentemente esses estados foram estudados a partir do ponto de vista de suas propriedades ‘não-clássicas’ em [63, 64].

4.1 Fórmulas gerais e limites analíticos exatos

A fidelidade definida na Eq. (1.1)

$$\mathcal{F} = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2, \quad (4.3)$$

entre dois estados (4.1) considerando $j = 1$ e $j = 2$ e $\beta_j = -\alpha_j$ pode ser escrita como

$$\mathcal{F} = \frac{(U + W)}{M_{1+}M_{2+}} e^{-(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2)}, \quad (4.4)$$

onde

$$U = [1 + |z_1|^2|z_2|^2 + 2\text{Re}(z_1^*z_2)] e^{2\text{Re}(\alpha_1^*\alpha_2)} + [|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\text{Re}(z_1z_2)] e^{-2\text{Re}(\alpha_1^*\alpha_2)},$$

$$W = \mathcal{Z} e^{2i\text{Im}(\alpha_1^*\alpha_2)} + \mathcal{Z}^* e^{-2i\text{Im}(\alpha_1^*\alpha_2)}, \quad \mathcal{Z} = z_1 + z_2^* + |z_1|^2z_2 + |z_2|^2z_1^*,$$

e

$$M_{j\pm} = \left(\frac{1 + |z_j|^2}{2} \right) \pm \text{Re}(z_j) e^{-2|a_j|^2}.$$

Supondo que os estados $\psi_j(x)$ descrevem um oscilador quântico com massa e frequência unitárias. Então a energia média de cada estado é igual (assumindo $\hbar = 1$)

$$E_j = \frac{1}{2} + |\alpha_j|^2 \frac{M_{j-}}{M_{j+}}. \quad (4.5)$$

Novamente, é fácil ver que a diferença de energia pode ser muito alta para um dado valor da fidelidade \mathcal{F} se o parâmetro a for muito grande. Portanto deve-se estudar novamente os limites das possíveis variações do *desvio relativo de energia* definido pela Eq. (2.18) $\mathcal{E} = E_2/E_1 - 1$ para um dado valor da fidelidade. Ele assume a seguinte forma

$$\mathcal{E} = \frac{2|\alpha_2|^2 M_{1+} M_{2-} - 2|\alpha_1|^2 M_{1-} M_{2+}}{M_{2+} (M_{1+} + 2|\alpha_1|^2 M_{1-})}. \quad (4.6)$$

O objetivo agora é encontrar os limites superiores do *desvio relativo de energia* Eq. (4.6) quando a fidelidade Eq. (4.4) for fixa. Em alguns casos especiais isso pode ser feito analiticamente.

4.1.1 Estados de Yurke-Stoler

O caso mais simples corresponde a uma subfamília dos estados de Yurke-Stoler, estados com $\phi_1 = \phi_2 = \pi/2$, $r_j = 1$ e diferentes valores de α_1 e α_2 . Nesse caso $M_{j\pm} \equiv 1$, de modo que a fidelidade e o *desvio relativo de energia* tem exatamente as mesmas expressões que foram encontradas para os estados coerentes Eqs. (2.14) e (2.18) (embora algumas outras propriedades estatísticas, tais como as variações de quadratura, são diferentes)

$$\mathcal{F} = \exp(-|\alpha_1 - \alpha_2|^2), \quad \mathcal{E} = \frac{2(|\alpha_2|^2 - |\alpha_1|^2)}{1 + 2|\alpha_1|^2}. \quad (4.7)$$

Conseqüentemente, o valor máximo do *desvio relativo de energia* para uma fidelidade \mathcal{F} fixa também tem a mesma forma que os resultados obtidos para os estados coerentes do Capítulo 2 que também foram estudados em [65–67]. Claro que os resultados encontrados se tornam mais simples quando se considera o *desvio relativo simétrico de energia* \mathcal{Y} dado pela Eq. (2.24)

$$\mathcal{Y} \equiv \frac{|E_2 - E_1|}{\sqrt{E_2 E_1}} = \frac{|\mathcal{E}|}{\sqrt{1 + \mathcal{E}}}. \quad (4.8)$$

A saber, nesse caso

$$\mathcal{Y}_m^{(YS)} = \sqrt{2 \ln(1/\mathcal{F})}. \quad (4.9)$$

A relação inversa fornece *fidelidade máxima* entre dois estados de Yurke–Stoler para um dado valor de \mathcal{Y} :

$$\mathcal{F}_m^{(YS)} = \exp(-\mathcal{Y}^2/2). \quad (4.10)$$

4.1.2 Estados com $\alpha_1 = \alpha_2$ mas diferentes ϕ_k

Interessantes limites analíticos podem ser obtidos se $\alpha_1 = \alpha_2$ mas $\phi_2 \neq \phi_1$. Então pode-se simplificar as fórmulas (4.4) e (4.6) como segue:

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{\sin^2(\phi_-)}{M_{1+} M_{2+}} (1 - e^{-4b}), \quad (4.11)$$

e

$$\mathcal{E} = \frac{8be^{-2b} \sin(\phi_+) \sin(\phi_-)}{M_{2+} (M_{1+} + 2bM_{1-})}, \quad (4.12)$$

onde

$$b \equiv |\alpha_1|^2 \quad e \quad \phi_{\pm} = \frac{\phi_2 \pm \phi_1}{2}.$$

Considerando o estado $|\psi_1\rangle$ como sendo um estado coerente par, que implica $\phi_1 = 0$, nota-se que a Eq. (4.12) toma a forma

$$\mathcal{E} = \frac{4be^{-2b} (1 - \cos(\phi_2))}{(M_{1+} + 2bM_{1-}) (1 + \cos(\phi_2)e^{-2b})}, \quad (4.13)$$

e isolando $\cos(\phi_2)$ na Eq. (4.13), chega-se a

$$\cos(\phi_2) = \frac{4be^{-2b} - \mathcal{E}(M_{1+} + 2bM_{1-})}{4be^{-2b} + \mathcal{E}(M_{1+} + 2bM_{1-})e^{-2b}}. \quad (4.14)$$

Substituindo o resultado da Eq. (4.14) na Eq. (4.11), para $\phi_1 = 0$, obtem-se a função

$$\tilde{\mathcal{F}}(b, \mathcal{E}) = \mathcal{E} \left[\frac{\sinh(2b)}{4b} + \sinh^2(b) \right], \quad (4.15)$$

nesse caso $\mathcal{E} > 0$. Obviamente, para um valor fixo de \mathcal{E} a Eq. (4.15) tem seu mínimo quando $b = 0$. Consequentemente, nesse caso especial, os limites são dados pelas equações

$$\tilde{\mathcal{F}}_{min}^{(0)} = \mathcal{E}/2 \quad e \quad \mathcal{E}_{max}^{(0)} = 2\tilde{\mathcal{F}}. \quad (4.16)$$

Os gráficos da figura 4.1 mostram esse resultado para alguns valores de ϕ_2 .

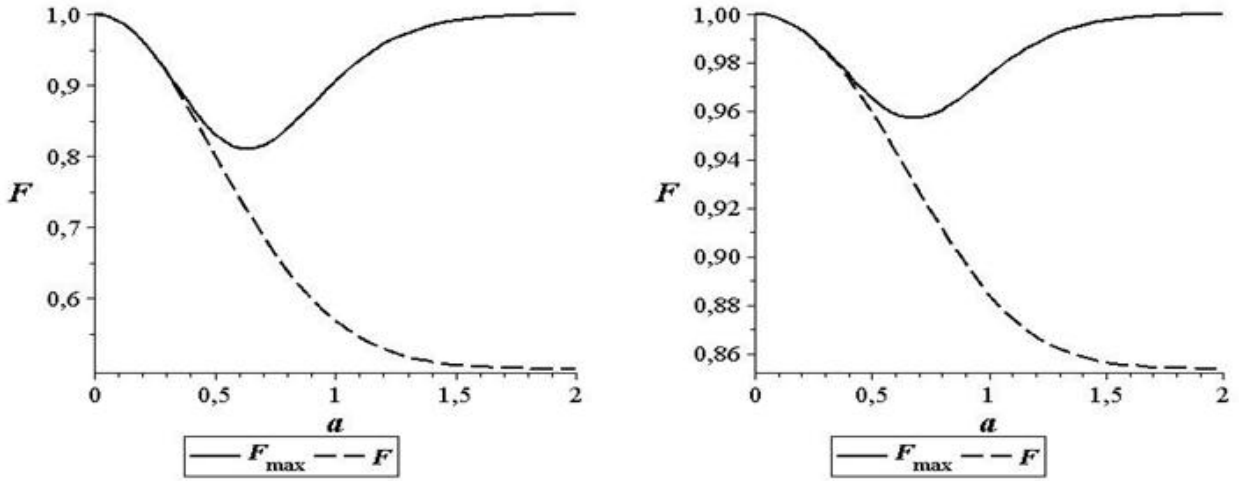


Figura 4.1: Fidelidade entre estados de gato com mesmos valores de α , $\mathcal{F}(\phi_2)$ definida pela Eq. (4.11) e sua fidelidade máxima $\mathcal{F}_{max}(\phi_2)$ definida pela Eq. (4.16) com \mathcal{E} dado pela Eq. (4.12). Esquerda: para $\phi_2 = \pi/2$. Direita: para $\phi_2 = \pi/4$.

Considerando o estado $|\psi_1\rangle$ como sendo um estado coerente ímpar, que implica $\phi_1 = \pi$ e $\mathcal{E} < 0$, nota-se que a Eq. (4.12) toma a forma

$$\mathcal{E} = -\frac{4be^{-2b}(1 + \cos(\phi_2))}{(M_{1+} + 2bM_{1-})(1 + \cos(\phi_2)e^{-2b})}, \quad (4.17)$$

isolando $\cos(\phi_2)$ na Eq. (4.17) chega-se a

$$\cos(\phi_2) = -\frac{4be^{-2b} + \mathcal{E}(M_{1+} + 2bM_{1-})}{4be^{-2b} + \mathcal{E}(M_{1+} + 2bM_{1-})e^{-2b}}. \quad (4.18)$$

Substituindo o resultado da Eq. (4.18) na Eq. (4.11), para $\phi_1 = \pi$, obtem-se a função

$$\tilde{\mathcal{F}}(b, \mathcal{E}) = |\mathcal{E}| \left[\frac{\sinh(2b)}{4b} + \cosh^2(b) \right]. \quad (4.19)$$

Claro, para um valor fixo de \mathcal{E} a Eq. (4.19) também tem seu mínimo quando $b = 0$. Consequentemente, nesse caso especial, os limites são dados pelas equações

$$\tilde{\mathcal{F}}_{min}^{(\pi)} = 3|\mathcal{E}|/2 \quad e \quad |\mathcal{E}|_{max}^{(\pi)} = \frac{2}{3}\tilde{\mathcal{F}}. \quad (4.20)$$

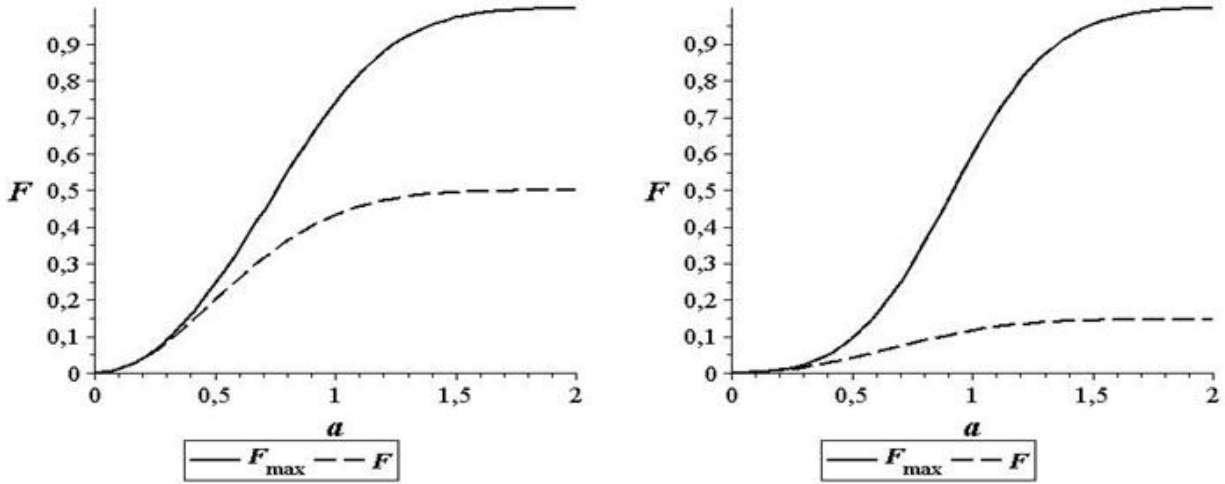


Figura 4.2: Fidelidade entre estados de gato com mesmos valores de α , $\mathcal{F}(\phi_2)$ definida pela Eq. (4.11) e sua fidelidade máxima $\mathcal{F}_{max}(\phi_2)$ definida pela Eq. (4.20) com \mathcal{E} dado pela Eq. (4.12). Esquerda: para $\phi_2 = \pi/2$. Direita: para $\phi_2 = \pi/4$.

Os gráficos da figura 4.2 mostram esse resultado para alguns valores de ϕ_2 . Claro que o lado direito das Eqs. (4.16) e (4.20) não podem ser negativos, pois $|\mathcal{E}|$ é limitado se o único parâmetro variável for ϕ_2 . Esses dois casos são excepcionais, em algum sentido, porque a expansão em série de Taylor da função $\mathcal{F}_m(|\mathcal{E}|)$ começa a partir de termos lineares e não de termos quadráticas, como era esperado e como ocorre nos outros casos.

4.1.3 Estados com $\alpha_1 = \alpha_2$ mas $|z_1| \neq |z_2|$

Considere um estado inicial par/ímpar com $z_1 = \sigma = \pm 1$ e um estado com o mesmo valor de $\alpha_1 = \alpha_2$ mas um coeficiente real diferente $z_2 = \sigma(1 + y)$, onde y é um número real. Nesse caso as Eqs. (4.4) e (4.6) fornecem a exata dependência de $\tilde{\mathcal{F}}$ e \mathcal{E} em relação ao parâmetro y :

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{\xi y^2}{1 + y + \kappa y^2}, \quad \mathcal{E} = \frac{\zeta y^2}{1 + y + \kappa y^2}, \quad (4.21)$$

$$\kappa = \left[2 \left(1 + \sigma e^{-2b} \right) \right]^{-1}, \quad \xi = \kappa - 1/4, \quad \zeta = \frac{4b\kappa(1 - 2\kappa)}{1 + 2b(4\kappa - 1)}.$$

Consequentemente, $\tilde{\mathcal{F}}$ é proporcional a \mathcal{E} na forma

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{\xi(b)}{\zeta(b)} \mathcal{E} = f^\sigma(b) \mathcal{E}, \quad (4.22)$$

onde

$$f^\sigma(b) = \frac{[1 + 2b - \sigma(1 - 2b)e^{-2b}] (1 - \sigma e^{-2b})}{8b\sigma e^{-2b}}. \quad (4.23)$$

Para $\sigma = +1$, a figura 4.3 (esquerda) mostra que nesse caso $\mathcal{E} > 0$.

O gráfico da função $R(b) = 1/f^\sigma(b)$, figura 4.3 (direita), mostra que $R(b)$ é máximo para $b \rightarrow 0$, resultado que fornece $f_{min}^+ = \lim_{b \rightarrow 0} f^+(b) = \frac{1}{2}$, ou seja,

$$\tilde{\mathcal{F}}_{min}^+ = \mathcal{E}/2 \quad e \quad \mathcal{E}_{max}^+ = 2\tilde{\mathcal{F}}. \quad (4.24)$$

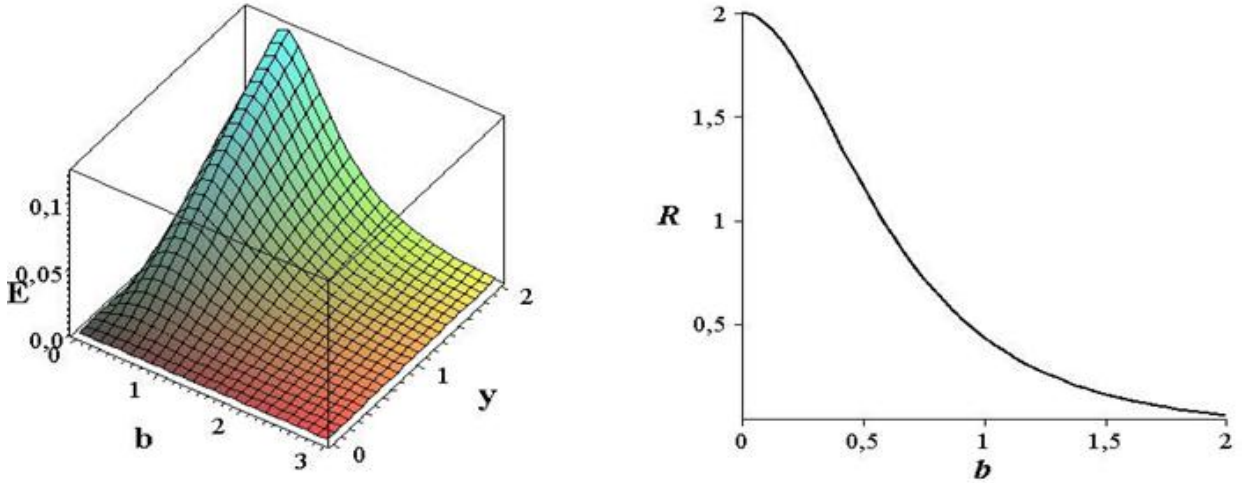


Figura 4.3: Esquerda: Desvio relativo de energia \mathcal{E} [dado pela Eq. (4.21)] para $\sigma = +1$. Direita: função $R(b) = 1/f^\sigma(b)$ [com $f^\sigma(b)$ dado pela Eq. (4.23)] para $\sigma = +1$.

Os gráficos da figura 4.4 mostram esse resultado para alguns valores de y .

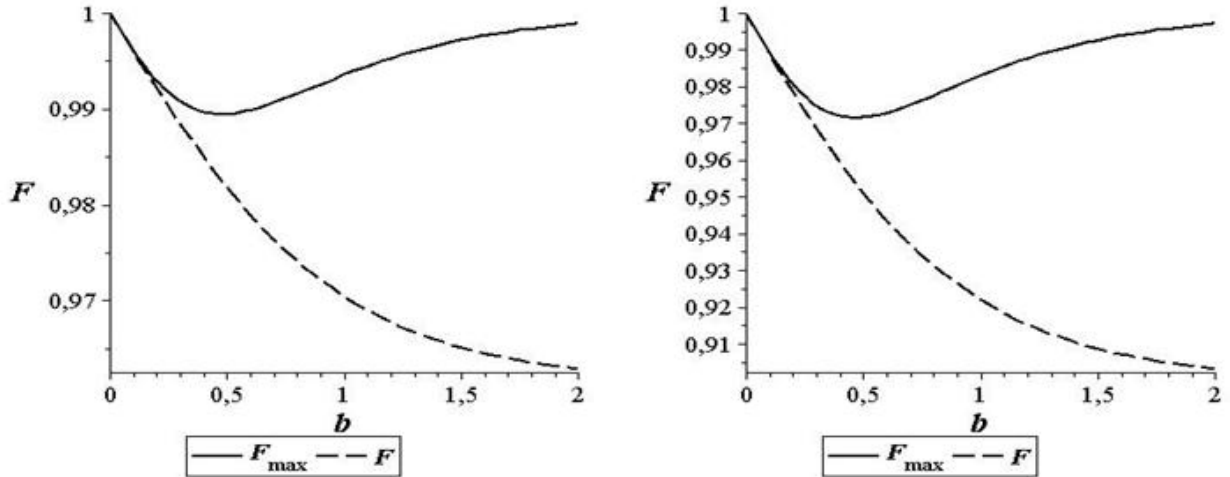


Figura 4.4: Fidelidade entre estados de gato com mesmos valores de α , $\mathcal{F}(y)$ definida pela Eq. (4.21) e sua fidelidade máxima $\mathcal{F}_{max}(y)$ definida pela Eq. (4.24) com \mathcal{E} dado pela Eq. (4.21). Esquerda: para $y = 0.5$. Direita: para $y = 1$.

Para $\sigma = -1$, a figura 4.5 (esquerda) mostra que nesse caso $\mathcal{E} < 0$.

O gráfico da função $|R(b)| = 1/|f^\sigma(b)|$, figura 4.5 (direita), mostra que $|R(b)|$ é máximo para $b \rightarrow 0$, resultado que fornece $|f_{min}^-| = |\lim_{b \rightarrow 0} f^-(b)| = \frac{3}{2}$, ou seja,

$$\tilde{\mathcal{F}}_{min}^- = 3|\mathcal{E}|/2 \quad e \quad |\mathcal{E}|_{max}^- = \frac{2}{3}\tilde{\mathcal{F}}. \quad (4.25)$$

Os gráficos da figura 4.6 mostram esse resultado para alguns valores de y .

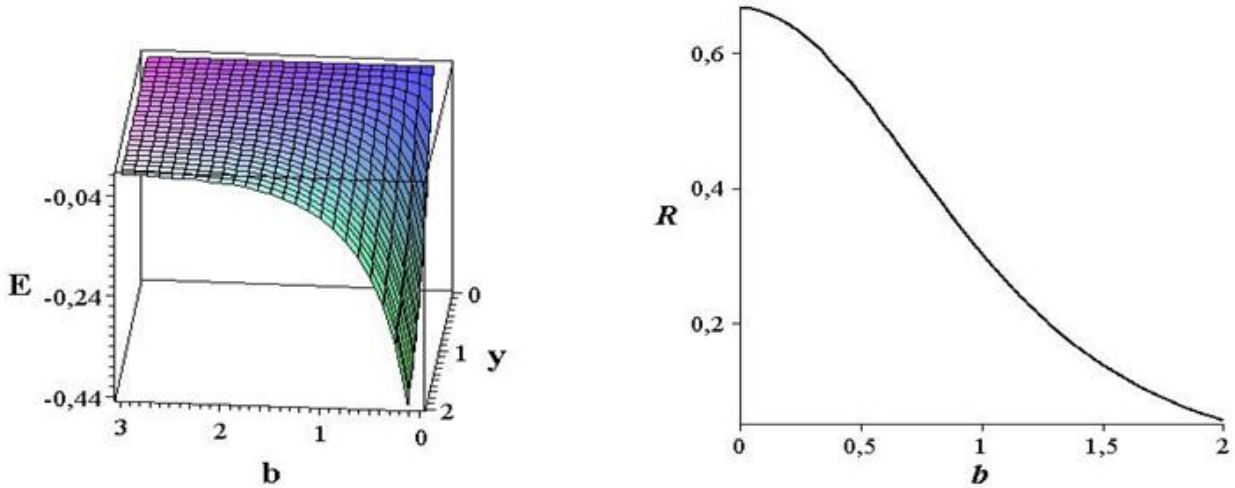


Figura 4.5: Esquerda: Desvio relativo de energia \mathcal{E} [dado pela Eq. (4.21)] para $\sigma = -1$. Direita: função $|R(b)| = 1/|f^\sigma(b)|$ [com $f^\sigma(b)$ dado pela Eq. (4.23)] para $\sigma = -1$.

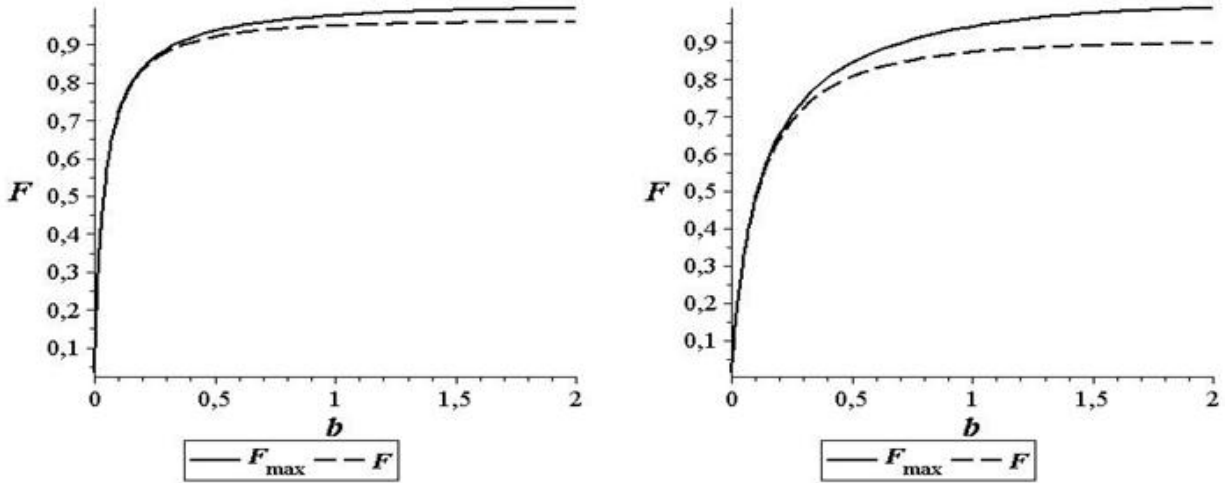


Figura 4.6: Fidelidade entre estados de gato com mesmos valores de α , $\mathcal{F}(y)$ definida pela Eq. (4.21) e sua fidelidade máxima $\mathcal{F}_{max}(y)$ definida pela Eq. (4.25) com \mathcal{E} dado pela Eq. (4.21). Esquerda: para $y = 0.5$. Direita: para $y = 1$.

4.2 Caso em que a diferença $1 - \mathcal{F}$ é pequena

4.2.1 Fixando α e variando ϕ_j

Considerando $\phi_2 = \phi_1 + \delta\phi$ as Eqs. (4.11) e (4.12) tomam se tornam

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{\sin^2\left(\frac{\delta\phi}{2}\right)(1 - e^{-4a^2})}{M_{1+} [1 + \cos(\phi_1 + \delta\phi)e^{-2b}]}, \quad (4.26)$$

e

$$\mathcal{E} = \frac{8be^{-2b} \sin\left(\frac{\delta\phi}{2} + \phi_1\right) \sin\left(\frac{\delta\phi}{2}\right)}{[1 + \cos(\phi_1 + \delta\phi)e^{-2b}] [M_{1+} + 2bM_{1-}]}, \quad (4.27)$$

considerando a condição $\delta\phi \ll 1$ pode-se expandir as Eqs (4.26) e (4.27) em série de Taylor em relação à $\delta\phi$, que fornece

$$\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{K}(\delta\phi)^2, \quad (4.28)$$

onde

$$\mathcal{K} = \frac{1}{4M_{1+} (1 + \cos(\phi_1)e^{-2b})}, \quad (4.29)$$

e

$$\mathcal{E} = \mathcal{W}\delta\phi, \quad (4.30)$$

onde

$$\mathcal{W} = \frac{4be^{-2b} \sin(\phi_1)}{(1 + \cos(\phi_1)e^{-2b})(M_{1+} + 2bM_{1-})}. \quad (4.31)$$

O problema agora é maximizar \mathcal{E} sob a condição

$$\mathcal{G} = \mathcal{K}(\delta\phi)^2 - \tilde{\mathcal{F}} = 0.$$

Introduzindo o multiplicador de Lagrange λ o problema se resume a maximizar a diferença $L = \mathcal{E} - \lambda\mathcal{G}$ em relação a $\delta\phi$ e em relação ao multiplicador de Lagrange λ . Maximizando em relação à $\delta\phi$:

$$\frac{\partial L}{\partial \delta\phi} = \mathcal{W} - 2\lambda\mathcal{K}\delta\phi = 0, \quad (4.32)$$

resolvendo a Eq. (4.32) obtem-se a coordenada $\delta\phi$ referente ao valor extremo de L , que toma seguinte forma

$$\delta\phi^* = \frac{\mathcal{W}}{2\lambda\mathcal{K}}. \quad (4.33)$$

Maximizando em relação a λ :

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\mathcal{K}(\delta\phi)^2 + \tilde{\mathcal{F}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\mathcal{W}^2}{4\lambda^2\mathcal{K}} + \tilde{\mathcal{F}} = 0, \quad (4.34)$$

que fornece

$$\lambda^{2*} = \frac{\mathcal{W}^2}{2\tilde{\mathcal{F}}\mathcal{K}}. \quad (4.35)$$

Substituindo as coordenadas (4.33) e (4.35) na Eq. (4.30), chega-se a relação

$$\mathcal{E}^2 = \frac{\mathcal{W}^2}{\mathcal{K}}\tilde{\mathcal{F}} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\mathcal{F}} = \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{W}^2}\mathcal{E}^2, \quad (4.36)$$

ou utilizando as Eqs. (4.29) e (4.31) e simplificando os termos, obtem-se a Eq. (4.36) em termos de b e ϕ_1 na forma

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{(e^{4b} - 1) [1 + \cos \phi_1 e^{-2b} + 2b(1 - \cos \phi_1 e^{-2b})]^2}{64b^2 \sin^2(\phi_1)} \mathcal{E}^2. \quad (4.37)$$

Para um valor fixo do parâmetro b o lado direito da Eq. (4.37) tem seu mínimo em relação a fase ϕ_1 quando

$$\cos \phi_1 = \frac{2b - 1}{2b + 1} e^{-2b}, \quad (4.38)$$

de modo que

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\min \phi_1} = \mathcal{E}^2 \left[(1 + 4b^2) \frac{\sinh^2(2b)}{16b^2} + \frac{\sinh(4b)}{8b} \right]. \quad (4.39)$$

O lado direito de (4.39) tem seu mínimo para $b \rightarrow 0$. Consequentemente

$$\tilde{\mathcal{F}}_{min} = \frac{3}{4}\mathcal{E}^2 \quad e \quad \mathcal{E}_{max} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\tilde{\mathcal{F}}}. \quad (4.40)$$

Estes limites são mais restritivos do que (4.16) ou (4.20) para pequenos valores de $\tilde{\mathcal{F}}$ e \mathcal{E} , porque nessa seção os valores extremos de $\tilde{\mathcal{F}}$ com \mathcal{E} fixo foram obtidos levando em conta todos os valores possíveis para o argumento ϕ_1 , enquanto que na subseção anterior esse argumento era fixo.

4.2.2 Estados coerentes pares

Consirerando o caso em que os estados $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ são estados coerentes pares, ou seja, $\phi_1 = 0$ e $\phi_2 = 0$, a comparação das fórmulas (4.4) e (4.5) mostra que as variações máximas da energia para uma fidelidade fixa são obtidas quando as fases dos números complexos α_1 e α_2 coincidem. Consequentemente, deve-se assumir que α_1 e α_2 são reais. Então sob essas condições

$$\mathcal{F} = \frac{\cosh^2 [a(a + \omega)]}{\cosh(a^2) \cosh [(a + \omega)^2]}, \quad (4.41)$$

e

$$\mathcal{E} = \frac{\{\cosh [(a + \omega)^2] + 2(a + \omega)^2 \sinh [(a + \omega)^2]\} \cosh(a^2)}{\{\cosh(a^2) + 2(a^2) \sinh(a^2)\} \cosh [(a + \omega)^2]} - 1, \quad (4.42)$$

onde $\alpha_1 = a$, $\omega = \alpha_2 - \alpha_1$.

É interessante ver como essas grandezas se relacionam quando a variação entre os parâmetros dos estados é pequena, ou seja, quando $\omega \ll 1$ e a diferença $1 - \mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}} \ll 1$, nessas condições pode-se expandir as Eqs. (4.41) e (4.42) em série de Taylor em torno de ω

$$\mathcal{F} = 1 - \frac{\sinh(2a^2) + 2a^2}{2 \cosh^2(a^2)} \omega^2 \quad \implies \quad \tilde{\mathcal{F}} = \frac{\sinh(2a^2) + 2a^2}{2 \cosh^2(a^2)} \omega^2, \quad (4.43)$$

e

$$\mathcal{E} = \frac{2a [\sinh(2a^2) + 2a^2]}{\cosh^2(a^2) [1 + 2a^2 \tanh(a^2)]} \omega. \quad (4.44)$$

O problema aqui é maximizar \mathcal{E} sob a restrição

$$\mathcal{G} \equiv \frac{\sinh(2a^2) + 2a^2}{2 \cosh^2(a^2)} \omega^2 - \tilde{\mathcal{F}} = 0. \quad (4.45)$$

Introduzindo o multiplicador de Lagrange λ , encontra-se imediatamente as coordenadas do ponto extremo da diferença $\mathcal{E} - \lambda\mathcal{G}$:

$$\omega^* = \frac{2a}{[1 + 2a^2 \tanh(a^2)] \lambda}. \quad (4.46)$$

Substituindo o valor da Eq. (4.46) na Eq. (4.44) obtém-se a relação entre o fator λ e o desvio relativo de energia na forma

$$\lambda^2 = \left[\frac{4a^2 [\sinh(2a^2) + 2a^2]}{\cosh^2(a^2) [1 + 2a^2 \tanh(a^2)]^2 \mathcal{E}} \right]^2, \quad (4.47)$$

substituindo o valor da Eq. (4.46) na Eq. (4.45) a fidelidade toma a forma

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{2a^2 [\sinh(2a^2) + 2a^2]}{\cosh^2(a^2) [1 + 2a^2 \tanh(a^2)]^2 \lambda^2}, \quad (4.48)$$

utilizando agora o resultado da Eq. (4.47) na Eq. (4.48) obtem-se a relação entre $\tilde{\mathcal{F}}$ e \mathcal{E}

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{\cosh^2(a^2) [1 + 2a^2 \tanh(a^2)]^2}{8a^2 [\sinh(2a^2) + 2a^2]} \mathcal{E}^2. \quad (4.49)$$

A função da Eq. (4.49) tende ao infinito para $a \rightarrow 0$ e $a \rightarrow \infty$. Consequentemente, ela tem um mínimo para algum valor finito do parâmetro a . Calculando numericamente esse valor obtem-se

$$\tilde{\mathcal{F}}_{min}^{(even)} \approx 0.29\mathcal{E}^2 \quad e \quad \mathcal{E}_{max}^{(even)} \approx 1.86\sqrt{\tilde{\mathcal{F}}}. \quad (4.50)$$

Esses valores são encontrados para $a \approx 0.81$. Os gráficos da figura 4.7 mostram esse resultado para alguns valores de ω .

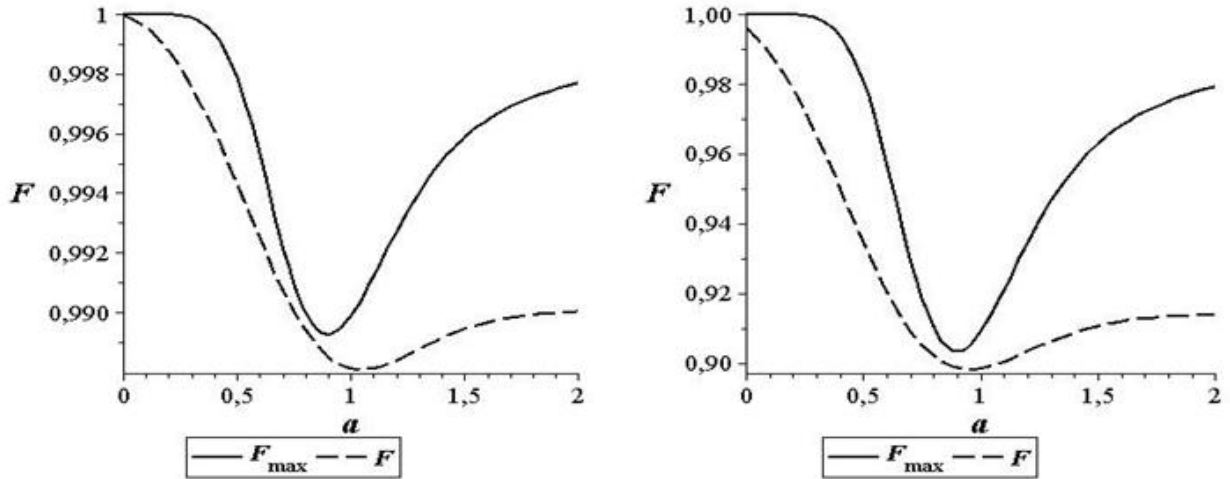


Figura 4.7: Fidelidade entre estados coerentes pares, $\mathcal{F}(\omega)$ definida pela Eq. (4.41) e sua fidelidade máxima $\mathcal{F}_{max}(\omega)$ definida pela Eq. (4.50) com \mathcal{E} dado pela Eq. (4.44). Esquerda: para $\omega = 0.1$. Direita: para $\omega = 0.3$.

4.2.3 Estados coerentes ímpares

Consirerando o caso em que os estados $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ são estados coerentes ímpares, ou seja, $\phi_1 = \pi$ e $\phi_2 = \pi$, a comparação das fórmulas (4.4) e (4.5) mostra que as variações máximas da energia para uma fidelidade fixa são obtidas quando as fases dos números complexos α_1 e α_2 coincidem. Consequentemente, deve-se assumir que α_1 e α_2 são reais. Então sob essas condições

$$\mathcal{F} = \frac{\sinh^2[a(a + \omega)]}{\sinh(a^2) \sinh[(a + \omega)^2]}, \quad (4.51)$$

e

$$\mathcal{E} = \frac{\{\sinh[(a + \omega)^2] + 2(a + \omega)^2 \cosh[(a + \omega)^2]\} \sinh(a^2)}{\{\sinh(a^2) + 2(a^2) \cosh(a^2)\} \sinh[(a + \omega)^2]} - 1. \quad (4.52)$$

Expandindo as Eqs. (4.51) e (4.52) em série de Taylor em torno de ω , para $\omega \ll 1$

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{\sinh(2a^2) + 2a^2}{2 \cosh^2(a^2)} \omega^2, \quad (4.53)$$

e

$$\mathcal{E} = \frac{2a [\sinh(2a^2) - 2a^2]}{\sinh^2(a^2) [1 + 2a^2 \coth(a^2)]} \omega. \quad (4.54)$$

O problema aqui é maximizar \mathcal{E} sob a restrição

$$\mathcal{G} \equiv \frac{\sinh(2a^2) + 2a^2}{2 \cosh^2(a^2)} \omega^2 - \tilde{\mathcal{F}} = 0. \quad (4.55)$$

Introduzindo o multiplicador de Lagrange λ , encontra-se imediatamente as coordenadas do ponto extremo da diferença $\mathcal{E} - \lambda \mathcal{G}$:

$$\omega^* = \frac{2a}{[1 + 2a^2 \coth(a^2)] \lambda}, \quad (4.56)$$

substituindo o valor da Eq. (4.56) na Eq. (4.54) obtém-se a relação entre o fator λ e o desvio relativo de energia na forma

$$\lambda^2 = \left[\frac{4a^2 [\sinh(2a^2) - 2a^2]}{\sinh^2(a^2) [1 + 2a^2 \coth(a^2)]^2 \mathcal{E}} \right]^2. \quad (4.57)$$

Substituindo o valor da Eq. (4.56) na Eq. (4.55) a fidelidade toma a forma

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{2a^2 [\sinh(2a^2) - 2a^2]}{\sinh^2(a^2) [1 + 2a^2 \coth(a^2)]^2 \lambda^2}, \quad (4.58)$$

utilizando agora o resultado da Eq. (4.57) na Eq. (4.58) obtém-se a relação entre $\tilde{\mathcal{F}}$ e \mathcal{E}

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{\sinh^2(a^2) [1 + 2a^2 \coth(a^2)]^2}{8a^2 [\sinh(2a^2) - 2a^2]} \mathcal{E}^2. \quad (4.59)$$

A função da Eq. (4.59) tende ao infinito para $a \rightarrow 0$ e $a \rightarrow \infty$. Consequentemente, ela tem um mínimo para algum valor finito do parâmetro a . Calculando numericamente esse valor obtém-se

$$\tilde{\mathcal{F}}_{min}^{(odd)} \approx 0.936 \mathcal{E}^2 \quad e \quad \mathcal{E}_{max}^{(odd)} \approx 1.03 \sqrt{\tilde{\mathcal{F}}}. \quad (4.60)$$

Esses valores são encontrados para $a \approx 1.41$. Os gráficos da figura 4.8 mostram esse resultado para alguns valores de ω .

Os gráficos da razão $R(b) = \mathcal{E}^2 / \tilde{\mathcal{F}}$ feita a partir das fórmulas (4.49) e (4.59) estão indicadas na figura 4.9.

O comportamento da função $\mathcal{F}(a, \mathcal{E})$ com diferentes valores fixos (não muito pequenos) do desvio relativo de energia \mathcal{E} é mostrado na figura 4.10. Para fazer esses gráficos, resolvemos numericamente a equação $\mathcal{E}(a, \omega) = E$ com respeito a variável ω para um valor fixo de a e E . Depois disso a solução $\omega(a, E)$ foi inserida na função exata $\mathcal{F}(a, \omega)$, tal como (4.41) ou (4.51). Desta forma, foram calculados os valores máximos possíveis da fidelidade \mathcal{F} para alguns valores do desvio relativo de energia $\mathcal{E} > 0$. Os resultados são mostrados na tabela 4.1.

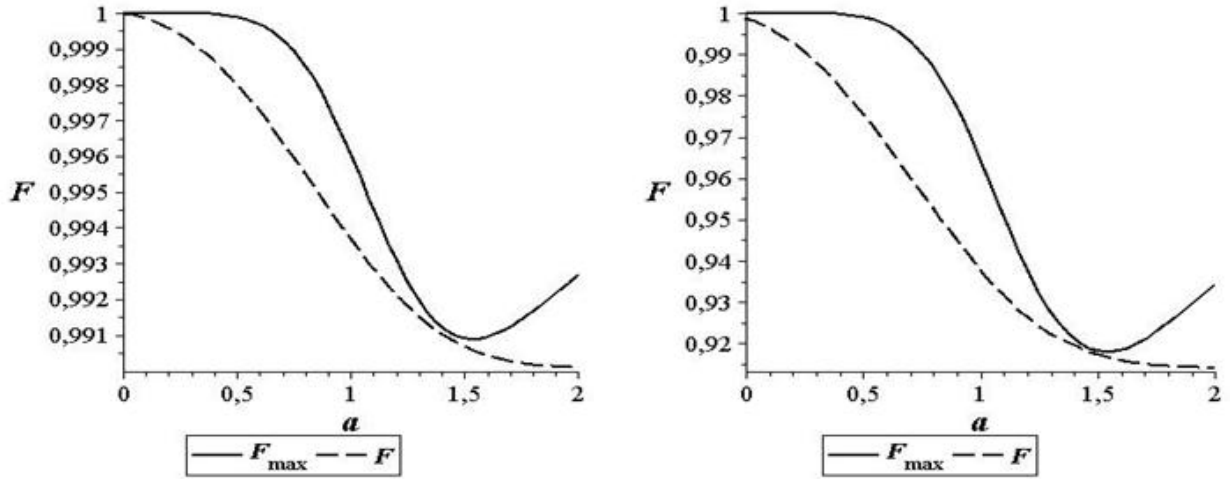


Figura 4.8: Fidelidade entre estados coerentes ímpares, $\mathcal{F}(\omega)$ definida pela Eq. (4.51) e sua fidelidade máxima $\mathcal{F}_{max}(\omega)$ definida pela Eq. (4.60) com \mathcal{E} dado pela Eq. (4.54). Esquerda: para $\omega = 0.1$. Direita: para $\omega = 0.3$.

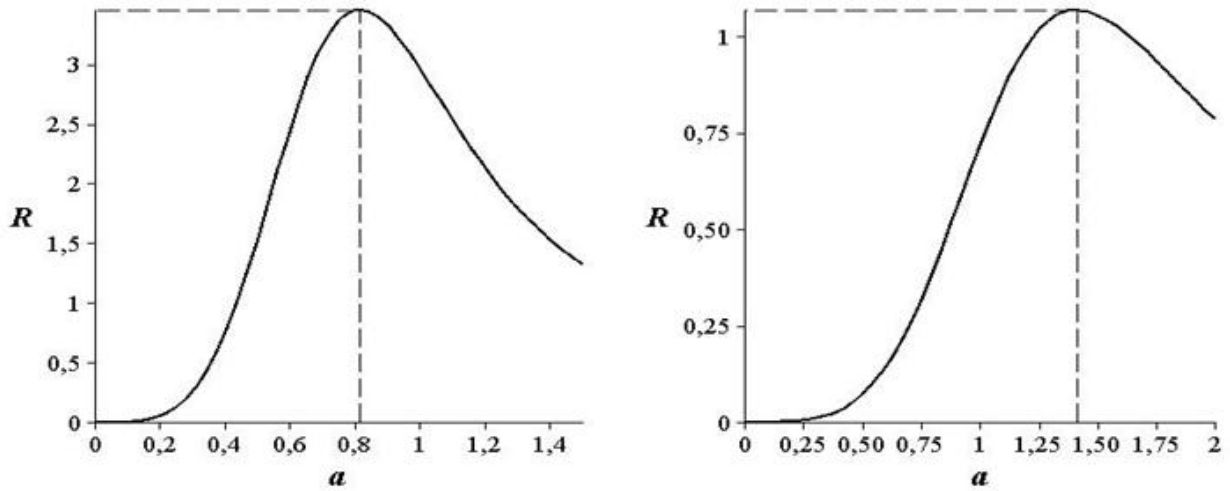


Figura 4.9: Gráficos da função $R(b) = \mathcal{E}^2/\tilde{\mathcal{F}}$. Esquerda: Para os estados coerentes pares. Direita: Para os estados coerentes ímpares.

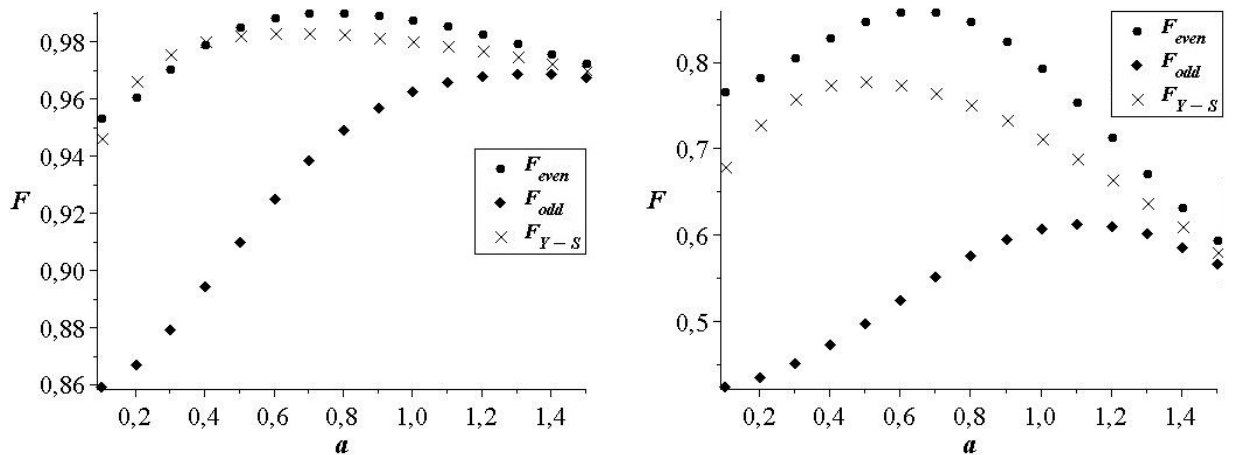


Figura 4.10: Gráficos da função $\mathcal{F}(a, \mathcal{E})$ com valores fixos do desvio relativo de energia \mathcal{E} para estados pares, ímpares e estados de Yurke-Sstoler. Esquerda: para $\mathcal{E} = 0.2$ Direita: para $\mathcal{E} = 1.0$.

Tabela 4.1: Tabela da fidelidade máxima para diferentes valores de \mathcal{E} .

\mathcal{E}	$\mathcal{F}^{(even)}$			$\mathcal{F}^{(Y-S)}$			$\mathcal{F}^{(odd)}$		
	\mathcal{F}_{max}	a	ω	\mathcal{F}_{max}	a	ω	\mathcal{F}_{max}	a	ω
0.2	0.99	0.8	0.10	0.98	0.6	0.13	0.97	1.3	0.19
0.4	0.97	0.7	0.18	0.94	0.6	0.24	0.90	1.3	0.35
0.6	0.94	0.7	0.25	0.89	0.6	0.34	0.81	1.2	0.49
0.8	0.90	0.7	0.32	0.83	0.5	0.42	0.71	1.2	0.61
1	0.86	0.7	0.37	0.78	0.5	0.50	0.61	1.1	0.74

4.3 Estados de gato real/imaginário

Considerando estados com $\beta_j = \alpha_j^*$ e $z_j = \sigma = \pm 1$. Onde $\alpha_j = a_j \exp(i\theta_j)$ com $a_j > 0$. Sob tais condições os estados (4.1) tomam a forma

$$|\psi_j\rangle = \mathcal{N}_j \left(\left| a_j e^{i\theta_j} \right\rangle + \sigma \left| a_j e^{-i\theta_j} \right\rangle \right), \quad (4.61)$$

com

$$\mathcal{N}_j = \left(2 + 2\sigma \cos(a_j^2 \sin(2\theta_j)) e^{-2a_j^2 \sin^2(\theta_j)} \right)^{-1/2}.$$

As equações de fidelidade e desvio relativo de energia (4.4) e (4.6) não são válidas para esses estados, já que $\beta_j \neq \alpha_j$. Então é preciso encontrar essas equações para a situação em questão. Usando a definição (4.3), obtem-se a fidelidade

$$\mathcal{F} = \frac{(\cos[a_1 a_2 \sin(\theta_-)] e^{a_1 a_2 \cos(\theta_-)} + \sigma \cos[a_1 a_2 \sin(\theta_+)] e^{a_1 a_2 \cos(\theta_+)})^2 e^{-(a_1^2 + a_2^2)}}{\left(1 + \sigma \cos[a_1^2 \sin(2\theta_1)] e^{-2a_1^2 \sin^2(\theta_1)} \right) \left(1 + \sigma \cos[a_2^2 \sin(2\theta_2)] e^{-2a_2^2 \sin^2(\theta_2)} \right)}, \quad (4.62)$$

onde

$$\theta_- = \theta_2 - \theta_1 \quad e \quad \theta_+ = \theta_2 + \theta_1.$$

E da definição (2.15) obtem-se a energia de cada estado

$$E_j = \frac{1}{2} + a_j^2 \frac{\mathcal{X}_j}{\mathcal{H}_j}, \quad (4.63)$$

onde

$$\mathcal{X}_j = 1 + \sigma \cos(a_j^2 \sin(2\theta_j) + 2\theta_j) e^{-2a_j^2 \sin^2(\theta_j)},$$

e

$$\mathcal{H}_j = 1 + \sigma \cos(a_j^2 \sin(2\theta_j)) e^{-2a_j^2 \sin^2(\theta_j)}.$$

Claro que a diferença de energia desses estados também pode ser ilimitada, então é necessário obter o desvio relativo de energia (3.32), que se torna

$$\mathcal{E} = \frac{2a_2^2 \mathcal{X}_2 \mathcal{H}_1 - 2a_1^2 \mathcal{X}_1 \mathcal{H}_2}{\mathcal{H}_2 (\mathcal{H}_1 + 2a_1^2 \mathcal{X}_1)}. \quad (4.64)$$

Aqui foi possível obter resultados apenas quando $\tilde{\mathcal{F}} \ll 1$, para os casos onde os estados possuem, mesmas amplitudes $a_1 = a_2 = a$ mas uma pequena variação de fase $d\theta = \theta_2 - \theta_1 \ll 1$, ou uma pequena variação na amplitude $da = a_2 - a_1 \ll 1$ com fases iguais $\theta_1 = \theta_2 = \theta$.

4.3.1 Pequena variação de fase

Quando os estados possuem mesmas amplitudes $a_1 = a_2 = a$ mas pequenas variações de fase $d\theta = \theta_2 - \theta_1 \ll 1$, as equações (4.62) e (4.64) podem ser expandidas em serie de Taylor em torno de $d\theta$, de tal maneira que

$$\mathcal{F} = 1 - \mathcal{B}^2(\theta, b)d\theta^2 \implies \tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{B}^2(\theta, b)d\theta^2, \quad (4.65)$$

e

$$\mathcal{E} = \mathcal{A}(\theta, b)d\theta, \quad (4.66)$$

onde $\theta \equiv \theta_1$ e $b = a^2$. As formas explicitas das funções $\mathcal{B}(\theta, b)$ e $\mathcal{A}(\theta, b)$ são

$$\mathcal{B} = \frac{b + b^2 - \sigma\Gamma(bc_2 + b^2c_4)}{1 + \sigma\Gamma c_0} - \frac{b^2\Gamma^2 s_2^2}{(1 + \sigma\Gamma c_0)^2}, \quad (4.67)$$

$$\mathcal{A} = \frac{4b\sigma\Gamma [bs_2(1 + \sigma\Gamma c_2) - (1 + \sigma\Gamma c_0)(s_2 + bs_4)]}{(1 + \sigma\Gamma c_0)[1 + \sigma\Gamma c_0 + 2b(1 + \sigma\Gamma c_2)]}, \quad (4.68)$$

onde $\Gamma = \exp[-2b \sin^2(\theta)]$, $c_n = \cos[b \sin(2\theta) + n\theta]$ e $s_n = \sin[b \sin(2\theta) + n\theta]$. Através das Eqs. (4.65) e (4.66) é fácil notar que

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}^2} \mathcal{E}^2 = f_\sigma^{(\theta)}(\theta, b) \mathcal{E}^2, \quad (4.69)$$

o que resume o problema à minimização da função $f_\sigma^{(\theta)}(\theta, b)$, que possui a seguinte forma explicita

$$f_\sigma^{(\theta)} = \frac{[1 + \sigma\Gamma c_0 + 2b(1 + \sigma\Gamma c_2)]^2 \{ (1 + \sigma\Gamma c_0)[1 + b - \sigma\Gamma(c_2 + bc_4)] - b\Gamma^2 s_2^2 \}}{16b\Gamma^2 [bs_2(1 + \sigma\Gamma c_2) - (1 + \sigma\Gamma c_0)(s_2 + bs_4)]^2}. \quad (4.70)$$

As figuras 4.11 mostram que a função $R(\theta, b) = 1/f_\sigma^{(\theta)}$ é máxima quando $\theta = k\pi$ (com $k = 0, 1, 2, 3, \dots$) para valores fixos da variável b , então fica claro que a função $f_\sigma^{(\theta)}$ tem seus mínimos para esses valores de θ . Assim, é preciso encontrar os valores mínimos da função $g_\sigma^{(\theta)}(b) \equiv \lim_{\theta \rightarrow 0} f_\sigma^{(\theta)}(\theta \rightarrow 0, b)$. Uma simples expressão é encontrada para $\sigma = +1$:

$$g_+^{(\theta)}(b) = \frac{1}{16} (6 + 4b + 1/b).$$

Essa função tem o mínimo $g_{min+}^{(\theta)} = 5/8 = 0.625$ em $b_{min} = 1/2$ (ou $a_{min} = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$), figura 4.11 (esquerda). Conseqüentemente, para esse tipo de variações dos parâmetros obtemos as relações

$$\tilde{\mathcal{F}}_{min+}^{\theta} = 0.625\mathcal{E}^2, \quad \mathcal{E}_{max} \approx 1.265\sqrt{\tilde{\mathcal{F}}}. \quad (4.71)$$

Para $\sigma = -1$, obtem-se

$$g_-^{(\theta)}(b) = \frac{1}{16} \frac{(4b^4 + 30b^3 + 69b^2 + 60b + 18)(2b^2 + 7b + 3)^2}{b(2b^3 + 9b^2 + 12b + 6)^2}.$$

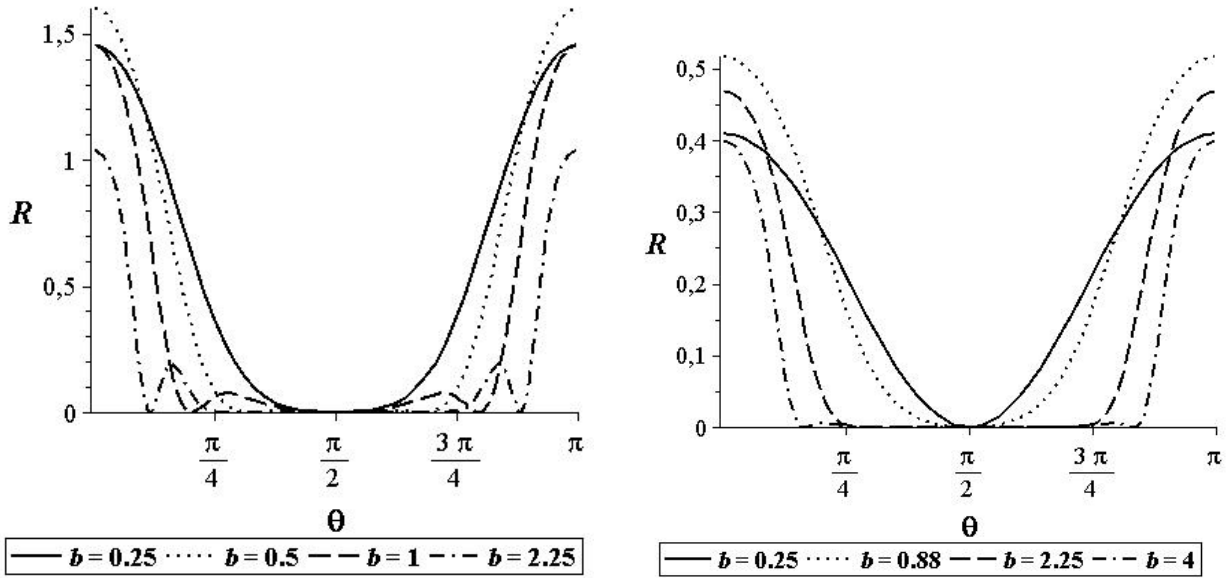


Figura 4.11: Gráficos da função $R(\theta, b) = 1/f_{\sigma}^{(\theta)}(\theta, b)$ com valores fixos do parâmetro $b = a^2$. Esquerda: para $\sigma = +1$. Direita: para $\sigma = -1$.

Que tem o mínimo $g_{min-}^{(\theta)}(b) = 1.933$ em $b_{min} \approx 0.884$ (ou $a_{min} \approx 0.94$), figura 4.11 (direita), que resulta nas relações

$$\tilde{\mathcal{F}}_{min}^{\theta-} \approx 1.933\mathcal{E}^2, \quad \mathcal{E}_{max} \approx 0.72\sqrt{\tilde{\mathcal{F}}}. \quad (4.72)$$

4.3.2 Pequena variação na amplitude

Quando os estados possuem fases iguais $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ mas uma pequena e arbitrária variação da amplitude $da = a_2 - a_1 \ll 1$, as equações (4.62) e (4.64) podem ser expandidas em serie de Taylor em torno de da de forma similar ao feito na seção 4.3.1, que resulta na relação

$$\tilde{\mathcal{F}} = f_{\sigma}^{(a)}(\theta, b)\mathcal{E}^2, \quad (4.73)$$

com o coeficiente

$$f_{\sigma}^{(a)}(\theta, b) = \frac{[\mathcal{S}_0 + 2b\mathcal{S}_2]^2 [([\sigma\Gamma c_4 + 1]b + \mathcal{S}_2)\mathcal{S}_0 - b\mathcal{S}_2^2]}{16b[\sigma([\Gamma c_4 + \sigma]b + \sigma + \Gamma c_2)\mathcal{S}_0 - b\mathcal{S}_2^2]^2}, \quad (4.74)$$

onde

$$\mathcal{S}_n = 1 + \sigma\Gamma c_n.$$

Essa função atinge seus valores mínimos (para valores fixos de b) em $\theta = \frac{i\pi}{2}$ com $i = 1, 3, 5, 7, \dots$ (veja as figuras 4.12). Mas isso significa que seus estados extremos são nada mais que os estados pares e ímpares (girados pelo ângulo $\pi/2$ no plano de fase). Conseqüentemente, nesse caso, chegamos novamente às restrições (4.50) e (4.60), que neste caso são obtidas nos seguintes casos:

para $\sigma = +1$ a função $g_+^{(a)}(b) \equiv \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} f_+^{(a)}(\theta, b)$ explicita é

$$g_+^{(a)}(b) = \frac{[(1 + 2b)e^{2b} + 1 - 2b]^2}{16b(4be^{2b} + e^{4b} - 1)},$$

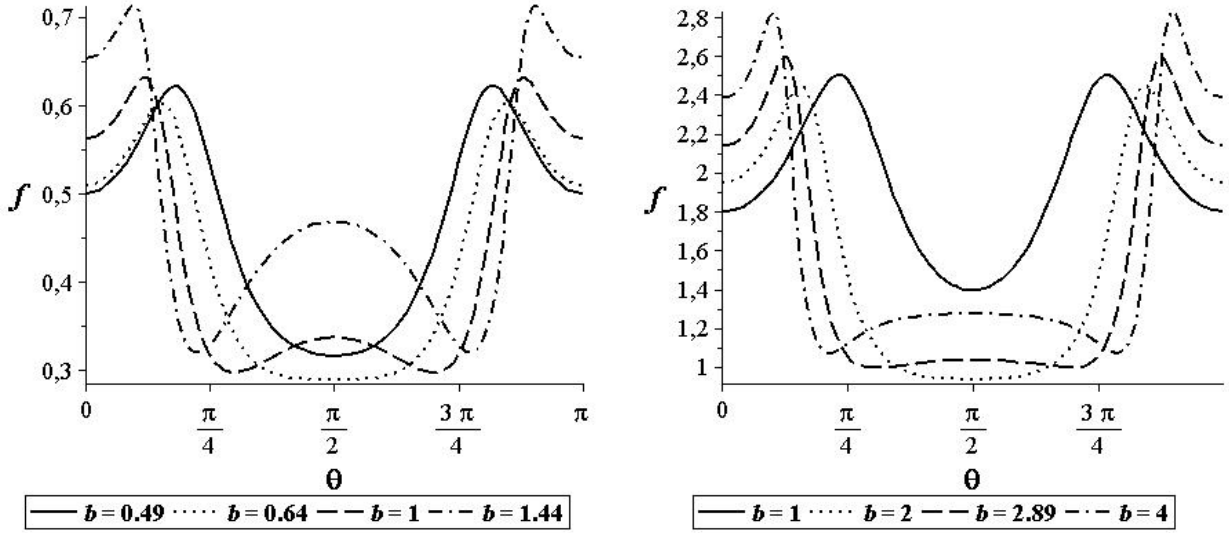


Figura 4.12: Gráficos da função $f^a(\theta, b)$ com diferentes valores do parâmetro b . Esquerda: para $\sigma = 1$. Direita: para $\sigma = -1$.

que tem o mínimo $g_{min+}^{(a)}(b) = 0.289$ em $b_{min} \approx 0.66$, figura 4.12 (esquerda), que fornece relações idênticas às (4.50)

$$\tilde{\mathcal{F}}_{min}^{a+} \approx 0.289\mathcal{E}^2 \quad e \quad \mathcal{E}_{max}^{a+} \approx 1.86\sqrt{\tilde{\mathcal{F}}}. \quad (4.75)$$

O gráfico da figura 4.13 (para $\theta = \pi/4$) mostra esse resultado, para alguns valores da .

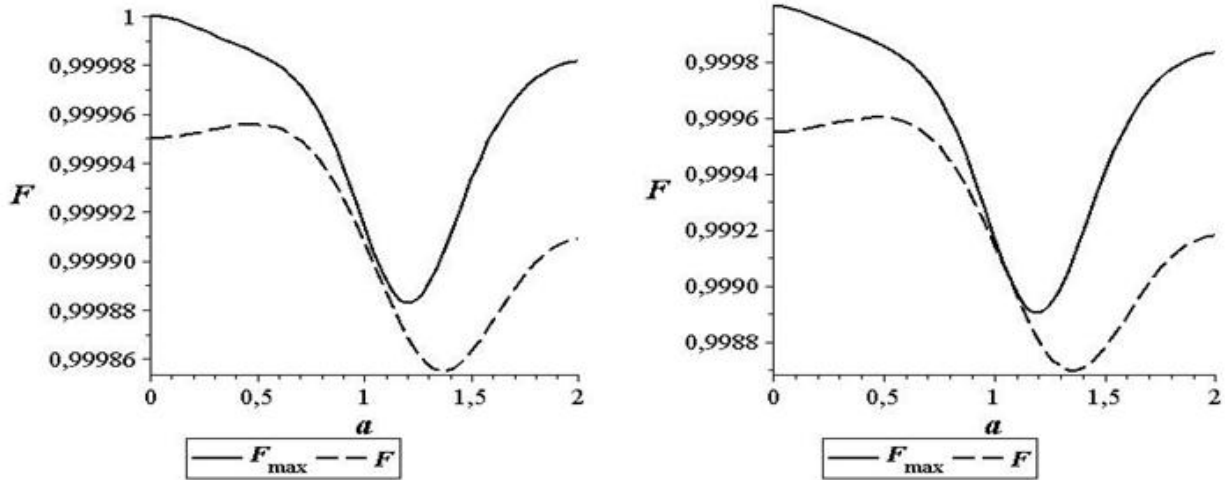


Figura 4.13: Fidelidade entre estados real/imaginário, $\mathcal{F}(da)$ definida pela Eq. (4.62) e sua fidelidade máxima $\mathcal{F}_{max}(da)$ definida pela Eq. (4.75) com \mathcal{E} dado pela Eq. (4.64), para $\theta = \pi/4$. Esquerda: para $da = 0.01$. Direita: para $da = 0.03$.

Para $\sigma = -1$ a função $g_-^{(a)}(b) \equiv \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} f_-^{(a)}(\theta, b)$ explícita é

$$g_-^{(a)}(b) = -\frac{[(1+2b)e^{2b} - 1 + 2b]^2}{16b(4be^{2b} - e^{4b} + 1)},$$

que tem o mínimo $g_{min-}^{(a)}(b) = 0.936$ em $b_{min} \approx 1.99$, figura 4.12 (direita), que fornece relações idênticas às (4.60)

$$\tilde{\mathcal{F}}_{min}^{a-} \approx 0.936\mathcal{E}^2 \quad e \quad \mathcal{E}_{max}^{a-} \approx 1.03\sqrt{\tilde{\mathcal{F}}}. \quad (4.76)$$

O gráfico da figura 4.14 (para $\theta = \pi/4$) mostra esse resultado, para alguns valores da .

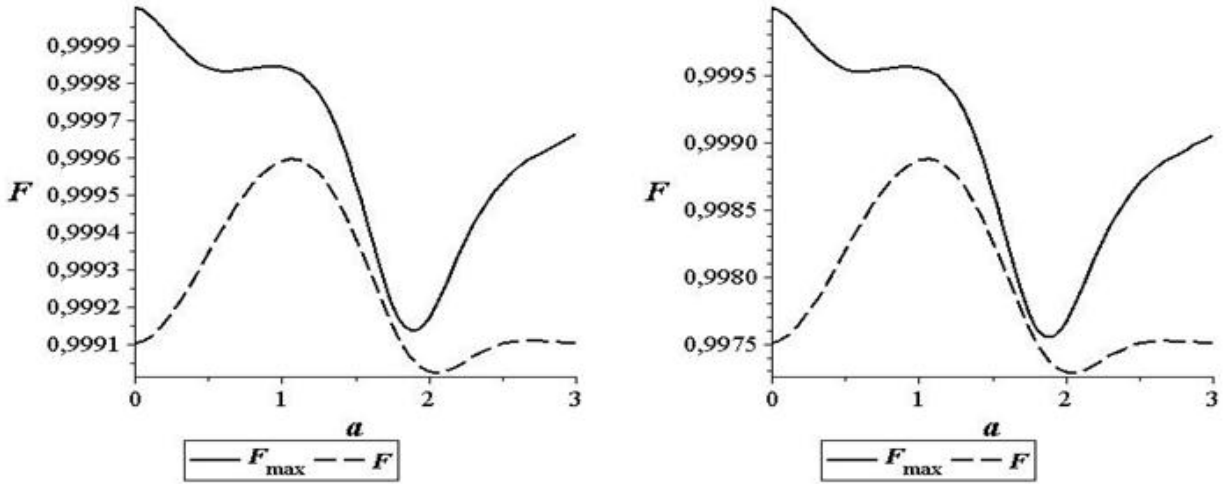


Figura 4.14: Fidelidade entre estados real/imaginário, $\mathcal{F}(da)$ definida pela Eq. (4.62) e sua fidelidade máxima $\mathcal{F}_{max}(da)$ definida pela Eq. (4.76) com \mathcal{E} dado pela Eq. (4.64), para $\theta = \pi/4$. Esquerda: para $da = 0.03$. Direita: para $da = 0.05$.

4.4 Estados Semi-coerentes

A noção de estados semi-coerentes foi introduzida por Mathews e Eswaran em [39]. Eles definiram tais estados como estados de um oscilador harmônico com variações das coordenadas e do momento independentes do tempo. Mostraram que essa definição é equivalente à condição $\langle \hat{a}^2 \rangle = \langle \hat{a} \rangle^2$, onde \hat{a} é o operador aniquilação. Exemplos triviais desses estados são o estado coerente $|\alpha\rangle$ e o estado de Fock $|n\rangle$. Mas Mathews e Eswaran acharam um exemplo não trivial com a forma [63]

$$|\alpha_j \perp \beta_j\rangle = \frac{|\alpha_j\rangle - |\beta_j\rangle \langle \beta_j | \alpha_j \rangle}{\left(1 - |\langle \beta_j | \alpha_j \rangle|^2\right)^{1/2}}, \quad (4.77)$$

onde $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ são dois estados coerentes. Pode-se ver que o estado $|\alpha \perp \beta\rangle_j$ é ortogonal ao estado $|\beta\rangle$, e essa propriedade explica a notação introduzida em [63]. A energia média do estado (4.77) é igual a

$$E_j = |\alpha_j|^2 + \frac{c}{1-c} |\beta_j - \alpha_j|^2, \quad (4.78)$$

onde

$$c_j \equiv |\langle \beta_j | \alpha_j \rangle|^2 = e^{-|\alpha_j - \beta_j|^2}.$$

4.4.1 Estados ortogonais ao vácuo

Considerando primeiramente o caso especial com $\beta = 0$, isto é, projeções ortogonais dos estados coerentes sobre o estado de vácuo. A expansão dos estados $|\alpha \perp 0\rangle$ na base de Fock não contém contribuições do vácuo, esses estados, às vezes, são considerados os ‘mais não-clássicos’ [68]. A fidelidade entre dois estados $|\alpha_1 \perp 0\rangle$ e $|\alpha_2 \perp 0\rangle$ é

$$\mathcal{F} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} |\exp(\alpha_1^* \alpha_2) - 1|^2, \quad (4.79)$$

e as energias médias são dadas pela fórmula

$$E_j = \frac{1}{2} + \frac{|a_j|^2}{1 - \varepsilon_j}, \quad (4.80)$$

onde

$$\varepsilon_j = \exp\left(-|\alpha_j|^2\right).$$

Os estados com os valores absolutos iguais $|\alpha_1| = |\alpha_2|$ tem a mesma energia, mas a fidelidade entre eles pode ser baixa se as fases dos números complexos α_1 e α_2 forem diferentes. Então a máxima fidelidade para um valor fixo do desvio relativo de energia é obtida para estados com as mesmas fases de α_1 e α_2 mas com valores absolutos diferentes. Então deve-se assumir que α_1 e α_2 são números reais. Então para dois estados próximos com $\alpha_1 = a = \sqrt{b}$ e $\alpha_2 = a + da$ a fidelidade e o desvio relativo de energia são explicitamente

$$\mathcal{F} = \frac{\left[e^{-\frac{1}{2}da^2} - e^{-\frac{1}{2}[a^2+(a+da)^2]} \right]^2}{(1 - e^{-a^2})(1 - e^{-(a+da)^2})}, \quad (4.81)$$

e

$$\mathcal{E} = \frac{4ada + 2da^2 + 2a^2e^{-(a+da)^2} - 2(a + da)^2e^{-a^2}}{(1 - e^{-(a+da)^2})(2a^2 + 1 - e^{-a^2})}. \quad (4.82)$$

Expandindo as Eqs. (4.81) e (4.82) em série de Taylor em torno de da , obtêm-se novamente relações similares à Eq. (4.69) com

$$\mathcal{A} = \frac{4a[1 - (1+b)e^{-b}]}{(1+2b - e^{-b})(1 - e^{-b})} \quad e \quad \mathcal{B} = \frac{1 - (1+b)e^{-b}}{(1 - e^{-b})^2}. \quad (4.83)$$

Nesse caso a função $f^{(sc-0)}(b) = \mathcal{B}/\mathcal{A}^2$ se torna

$$f^{(sc-0)}(b) = \frac{(1 - e^{-b} + 2b)^2}{16b[1 - e^{-b}(1+b)]}. \quad (4.84)$$

A função $R^{(sc-0)}(b) = 1/f^{(sc-0)}(b)$ é mostrada na figura 4.15 (esquerda). Ela tem seu máximo para $b \approx 2.39$ (ou $a \approx 1.547$), resultado que fornece $f_{min}^{(sc-0)} \approx 1.227$, ou seja,

$$\tilde{\mathcal{F}}_{min}^{sc-0} = 1.227\mathcal{E}^2 \quad e \quad \mathcal{E}_{max} \approx 0.903\sqrt{\tilde{\mathcal{F}}}. \quad (4.85)$$

Os gráficos da figura 4.16 mostram esse resultado, para alguns valores da .

4.4.2 Dois estados próximos com mesmo β

Agora comparando dois estados próximos com $\alpha_1 = a = \sqrt{b}$, $\alpha_2 = a + da$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, assumindo que todos esses parâmetros são reais. Obtem-se para a fidelidade e para o desvio relativo de energia as seguinte equações

$$\mathcal{F} = \frac{\left[e^{-\frac{1}{2}(da)^2} - e^{-\left(\frac{1}{2}da^2 + \delta^2 - \delta da\right)} \right]^2}{(1 - e^{-\delta^2})[1 - e^{-(da+\delta)^2}]}, \quad (4.86)$$

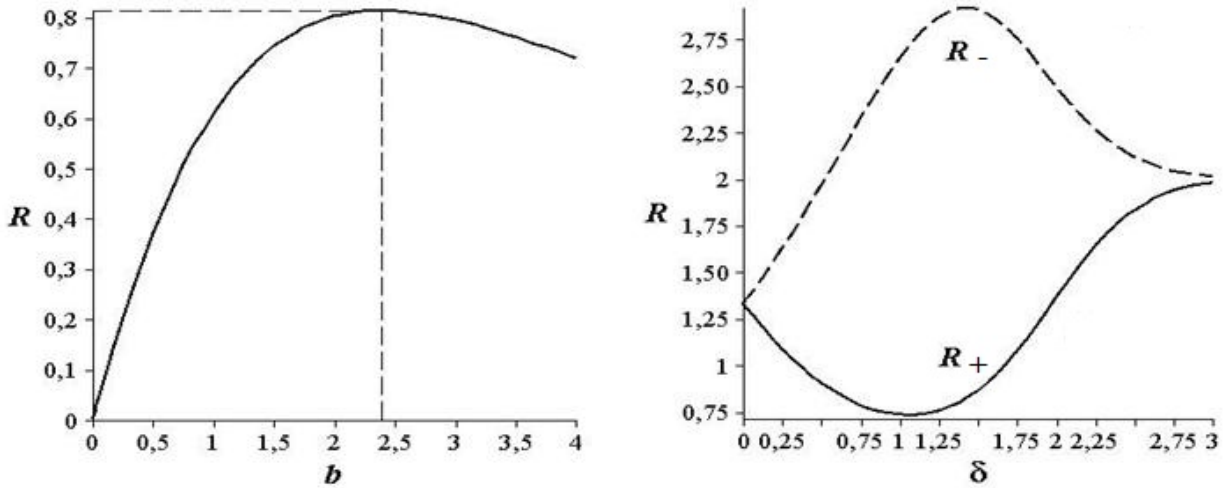


Figura 4.15: Esquerda: função $R(b) = 1/f(b)$ [with $f(b)$ defined by formula (4.84) para estados semi-coerentes ortogonais ao estado de vácuo próximos. Direita: funções $R_{\pm}(\delta) = 1/f_{\pm}(\delta)$ [com $f_{\pm}(\delta)$ definido pela fórmula (4.90).

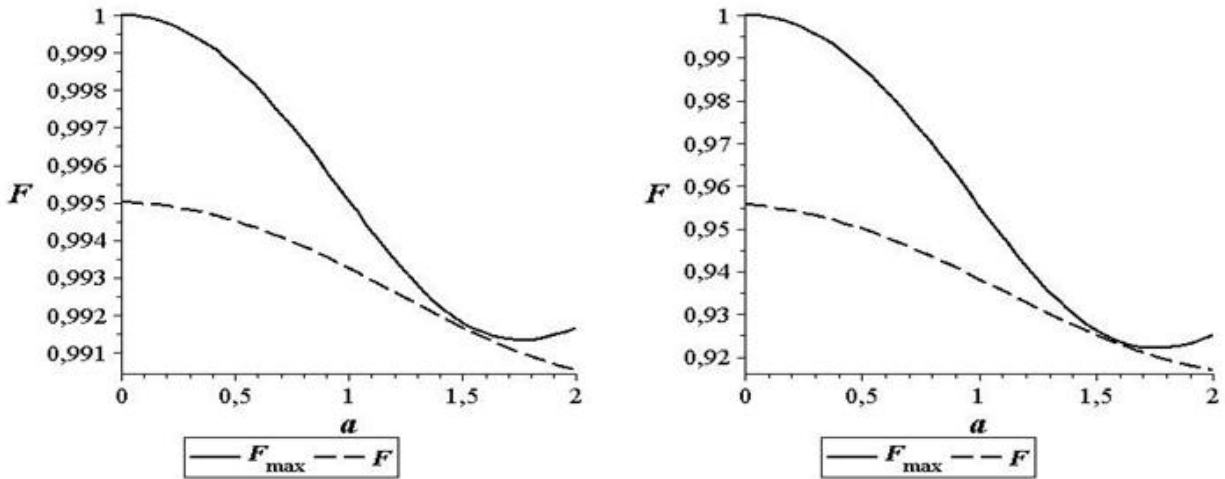


Figura 4.16: Fidelidade entre estados semi-coerentes ortogonais ao vácuo, $\mathcal{F}(da)$ definida pela Eq. (4.81) e sua fidelidade máxima $\mathcal{F}_{max}(da)$ definida pela Eq. (4.85) com $\mathcal{E} = \mathcal{A}da$, Eq. (4.83). Esquerda: para $da = 0.1$. Direita: para $da = 0.3$.

$$\mathcal{E} = \frac{\left[\left(1 - e^{-(da+\delta)^2}\right) + 2(da+\delta)^2 e^{-(da+\delta)^2} \left(1 - e^{-\delta^2}\right) - 2 \left(1 - e^{-(da+\delta)^2}\right) \delta^2 e^{-\delta^2} \right]}{(4ada + 2da^2)^{-1} \left[2a^2 (1 - e^{-\delta^2}) + 2\delta^2 e^{-\delta^2} + (1 - e^{-\delta^2}) \right] (1 - e^{-(da+\delta)^2})}. \quad (4.87)$$

Nesse caso para $da \ll 1$, obtém-se

$$\mathcal{A} = 2 \frac{a + G}{a^2 + N}, \quad \mathcal{B} = \frac{1 - c - c\delta^2}{(1 - c)^2}, \quad (4.88)$$

onde $\delta = a - \beta$, $c = \exp(-\delta^2)$ e

$$G(\delta) = \frac{c\delta(1 - c - \delta^2)}{(1 - c)^2}, \quad N(\delta) = \frac{1 - c + 2c\delta^2}{2(1 - c)}.$$

A função \mathcal{B} (que determina pequenas variações da fidelidade) depende apenas da variável δ , enquanto a função \mathcal{A} depende de δ e a . Conseqüentemente, olhando para o valor máximo do desvio relativo de energia para um valor fixo de $\tilde{\mathcal{F}}$ e valores arbitrários das variáveis independentes a e β (que podem variar de $-\infty$ até $+\infty$), pode-se assumir que os parâmetros independentes são a e δ .

Então o primeiro máximo da função $\mathcal{A}(a)$ para valores fixos das funções $G(\delta)$ e $N(\delta)$, é obtido para

$$a_{\pm}(\delta) = -G(\delta) \pm \sqrt{G^2(\delta) + N(\delta)}. \quad (4.89)$$

Calculando a função $\mathcal{A}(a, \delta)$ nesses dois pontos extremos, chega-se a duas possibilidades para a função $f_{\pm}(\delta)$

$$f_{\pm}(\delta) = \frac{\mathcal{B}(\delta)}{\mathcal{A}^2(a_{\pm}, \delta)} = \frac{1 - c - c\delta^2}{(1 - c)^2} \left(\sqrt{G^2 + N} \mp G \right)^2. \quad (4.90)$$

Os gráficos dessas funções são mostrados na figura 4.15 (direita). O mínimo absoluto é encontrado para $\delta \approx 1.421$ e $a \approx -0.656$, resultado que fornece $f_{min} \approx 0.34$, ou seja,

$$\tilde{\mathcal{F}}_{min}^{sc-a} \approx 0.34\mathcal{E}^2 \quad e \quad \mathcal{E}_{max} \approx 1.71\sqrt{\tilde{\mathcal{F}}}. \quad (4.91)$$

4.4.3 Dois estados próximos com mesmo α

Mantendo os valores $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, e para pequenas variações $d\beta = \beta_2 - \beta_1$. A diferença de energia $E_2 - E_1$ é proporcional ao produto de $d\beta$ por alguma função que depende de $\alpha - \beta_1$. Mas o desvio relativo de energia contém no denominador um termo adicional $|\alpha|^2$, veja Eq. (4.78). Considerando α e $\alpha - \beta_1$ como variáveis independentes, chega-se a conclusão que o desvio relativo de energia máximo de dois estados próximos com uma fidelidade fixa pode ser obtido para $\alpha = 0$ (projeções ortogonais do estado de vácuo sobre dois diferentes estados coerentes próximos). Novamente, a máxima diferença de energia é obtida para valores reais de $\beta_1 = \beta$ e β_2 . Sob essas condições, obtém-se a fidelidade e o desvio relativo de energia nas formas

$$\mathcal{F} = \frac{\left[1 - e^{-\beta^2} - (1 - e^{\beta d\beta}) e^{-(\beta+d\beta)^2} \right]^2}{(1 - e^{-\beta^2}) (1 - e^{-(\beta+d\beta)^2})}, \quad (4.92)$$

e

$$\mathcal{E} = \frac{2 \left[(2\beta d\beta + d\beta^2) e^{-\beta^2} - (\beta + d\beta)^2 \right] e^{-(\beta+d\beta)^2} + 2\beta^2 e^{-\beta^2}}{(1 - e^{-(\beta+d\beta)^2}) (1 + 2\beta^2 e^{-\beta^2} - e^{-2\beta^2})}. \quad (4.93)$$

Nesse caso para $d\beta \ll 1$, obtém-se

$$\mathcal{A} = \frac{4\beta\varepsilon(1 - b - \varepsilon)}{(1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon + 2b\varepsilon)}, \quad \mathcal{B} = \frac{\varepsilon[1 - \varepsilon + b(1 - 2\varepsilon)]}{(1 - \varepsilon)^2}, \quad (4.94)$$

$$f(b) = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}^2} = \frac{[1 - \varepsilon + b(1 - 2\varepsilon)](1 - \varepsilon + 2b\varepsilon)^2}{16b\varepsilon(1 - b - \varepsilon)^2}, \quad (4.95)$$

onde $b = \beta^2$ e $\varepsilon = \exp(-b)$. O gráfico da função $R(b) = 1/f(b)$ é mostrado na figura 4.17 (esquerda). O máximo de $R(b)$ é obtido para $b \approx 3.437$, resultado que fornece $f_{min} \approx 0.55$, ou seja,

$$\tilde{\mathcal{F}}_{min}^{sc-b} \approx 0.55\mathcal{E}^2 \quad e \quad \mathcal{E}_{max} \approx 1.35\sqrt{\tilde{\mathcal{F}}}. \quad (4.96)$$

Os gráficos da figura 4.18 mostram esse resultado, para alguns valores $d\beta$.

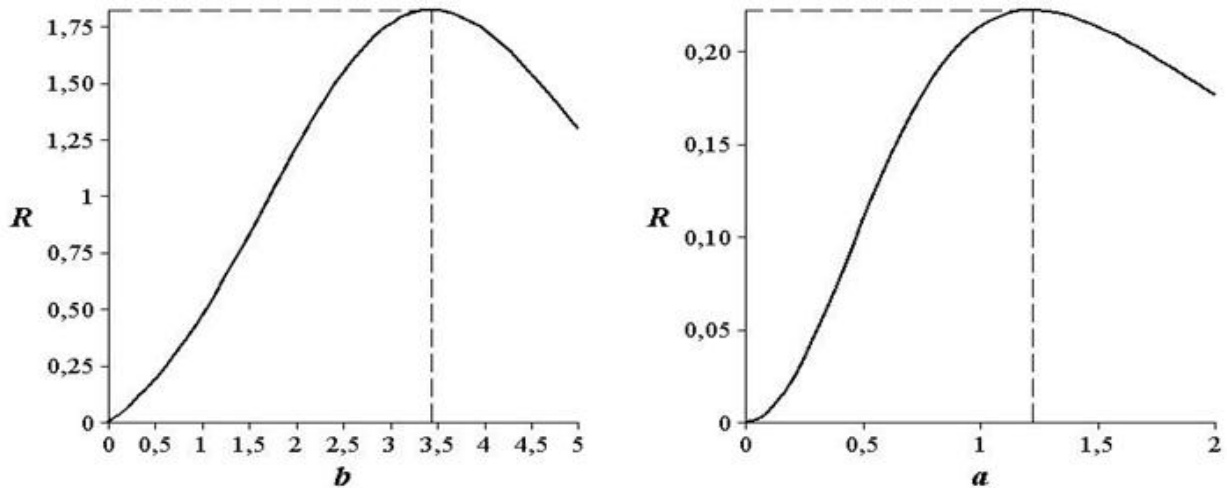


Figura 4.17: Esquerda: função $R(b) = 1/f(b)$ [com $f(b)$ definida pela fórmula (4.95) projeções ortogonais do estado de vácuo sobre dois diferentes estados coerentes próximos. Direita: função $R(a) = 1/f(a)$ [com $f(a)$ definida pela fórmula (4.101)].

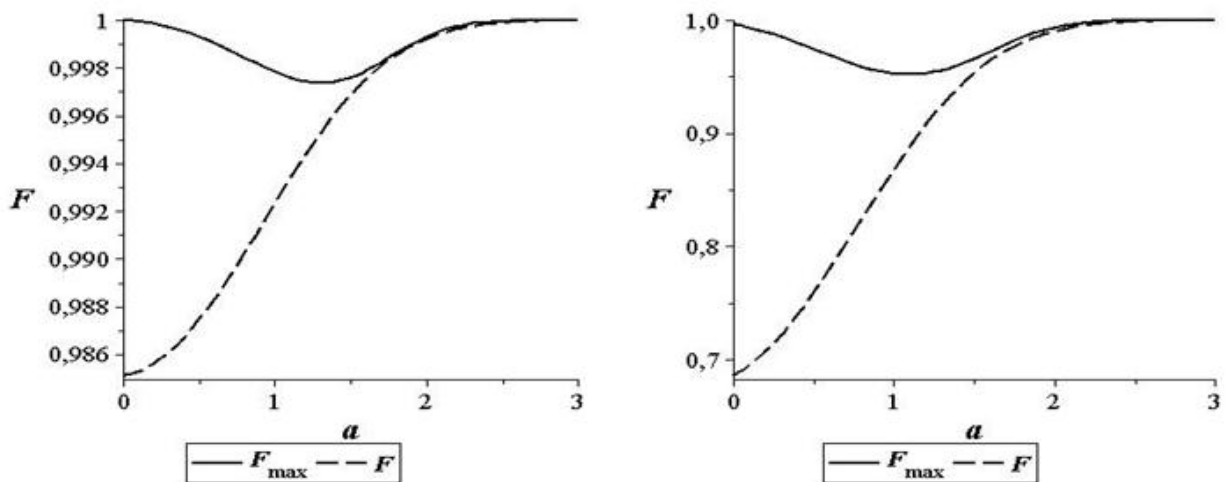


Figura 4.18: Fidelidade entre estados semi-coerentes com mesmos valores de a , $\mathcal{F}(d\beta)$ definida pela Eq. (4.92) e sua fidelidade máxima $\mathcal{F}_{\max}(d\beta)$ definida pela Eq. (4.96) com \mathcal{E} dada pela Eq. (4.93). Esquerda: para $d\beta = 0.1$. Direita: para $d\beta = 0.5$.

4.4.4 Estados ‘auto-ortogonais’

Considerando agora o limite $\beta \rightarrow \alpha$ do estado (4.77) [63]:

$$|\alpha_{\perp}\alpha\rangle = e^{(-|\alpha|^2/2)} \left[\alpha^*|0\rangle + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^{m-1}}{\sqrt{m!}} (|\alpha|^2 - m) |m\rangle \right]. \quad (4.97)$$

O estado (4.97) pode ser chamado de estado semi-coerente ‘auto-ortogonal’ devido à sua ortogonalidade ao estado coerente $|\alpha\rangle$. Foi mostrado em [63] que o estado (4.97) coincide com o primeiro estado de Fock deslocado $|\alpha_{\perp}\alpha\rangle = -\hat{D}(\alpha)|1\rangle$, onde $\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^{\dagger} - \alpha^*\hat{a})$ é o operador deslocamento usual.

A fidelidade e o desvio relativo de energia entre dois estados (4.97) com os rótulos α_1 e α_2 são

$$\mathcal{F} = (1 - |\alpha_2 - \alpha_1|^2)^2 e^{(-|\alpha_2 - \alpha_1|^2)}, \quad \mathcal{E} = \frac{|\alpha_2|^2 - |\alpha_1|^2}{|\alpha_1|^2 + 3/2}. \quad (4.98)$$

Uma fidelidade fixa implica num valor fixo da diferença $|\alpha_2 - \alpha_1|$. O desvio relativo de energia \mathcal{E} máximo é obtido para os dois números complexos α_1 e α_2 pertencentes ao mesmo raio no plano complexo. Então, deve-se assumir que α_1 e α_2 são números reais. Dessa forma

$$\mathcal{E} = \frac{\delta(2a + \delta)}{a^2 + 3/2}, \quad \delta = \alpha_2 - \alpha_1, \quad a = \alpha_1. \quad (4.99)$$

Para um valor fixo de δ a função (4.99) tem seu extremo para $2a = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 + 6}$. os dois valores extremos

$$\mathcal{E}_{\pm} = \pm \delta \left(\sqrt{\delta^2 + 6} \pm \delta \right) / 3,$$

podem ser substituídos pela fórmula única para o desvio relativo simétrico de energia (4.8) entre dois estados (4.97) para valores fixos de δ (ou \mathcal{F})

$$\mathcal{Y}_{max} = \sqrt{2/3} |\delta|. \quad (4.100)$$

Para pequenos valores de $\tilde{\mathcal{F}} \ll 1$ e $|\mathcal{E}| \approx \mathcal{Y} \ll 1$ obtém-se das Eqs. (4.98)

$$\mathcal{A} = \frac{4a}{2a^2 + 3}, \quad \mathcal{B} = 3 \quad e \quad f(a) = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}^2} = \frac{3(2a^2 + 3)^2}{16a^2}. \quad (4.101)$$

O gráfico da função $R(a) = 1/f(a)$ é mostrada na figura 4.17 (direita). O máximo de $R(a)$ é obtido para $a \approx 1.225$, resultado que fornece $f_{min} \approx 4.50$, ou seja,

$$\tilde{\mathcal{F}}_{min}^{sc-ort} \approx 4.50 \mathcal{E}^2 \quad e \quad \mathcal{E}_{max} \approx 0.47 \sqrt{\tilde{\mathcal{F}}}. \quad (4.102)$$

O exemplo considerado nessa subseção é interessante porque a fidelidade é uma função não-monótona do seu argumento $u = |\alpha_2 - \alpha_1|^2 = |\delta|^2$. $F(u)$ diminui monotonamente do valor 1 até zero no intervalo $0 \leq u \leq 1$, mas cresce para $u > 1$, atingindo seu segundo máximo $F_3 = 4e^{-3} \approx 0.2$ para $u = 3$ e, em seguida, cai novamente à zero para $u > 3$. Note, por exemplo, que esse valor F_3 é maior que o valor $F_{1/2} \approx 0.15$ correspondente a $u = 1/2$. O máximo desvio relativo simétrico de energia para dois estados ortogonais com $\delta = 1$ pode atingir o valor $\sqrt{2/3}$, enquanto que $\mathcal{Y}_{max} = \sqrt{2}$ para estados ‘mais próximos’ (do ponto de vista da fidelidade) com $|\delta| = \sqrt{3}$.

Capítulo 5

Conclusões

Comparou-se fidelidades e desvios relativos de energia entre estados quânticos próximos pertencentes a várias famílias diferentes. Para pequenas variações ds de alguns parâmetros s caracterizados pelos estados quânticos pertencentes a uma dada família, obteve-se um pequeno desvio da fidelidade com a quantia $\tilde{\mathcal{F}}$ proporcional a ds^2 . Por outro lado, pequenos desvios relativos de energia \mathcal{E} são proporcionais a ds (embora possa acontecer em alguns casos excepcionais que $\mathcal{E} \sim ds^2$, casos vistos nas seções 4.1.3 e 4.1.2). Portanto, para valores pequenos de $|\mathcal{E}| \rightarrow 0$ ou $\tilde{\mathcal{F}} \rightarrow 0$ obteve-se para muitas famílias de estados quânticos as relações

$$\mathcal{E} = \mathcal{A}(\{\gamma\})ds, \quad \tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{B}(\{\gamma\})ds^2, \quad (5.1)$$

$$\tilde{\mathcal{F}} = f^{(s)}(\{\gamma\})\mathcal{E}^2, \quad f^{(s)}(\{\gamma\}) = \mathcal{B}(\{\gamma\})/\mathcal{A}^2(\{\gamma\}), \quad (5.2)$$

onde o símbolo $\{\gamma\}$ significa um conjunto de parâmetros que a família de estados escolhida depende e s representa o parâmetro que é variável. Minimizando as funções $f^{(s)}(\{\gamma\})$ sobre os seus argumentos, chegou-se as relações

$$|\mathcal{E}|_{max} = \gamma_s \sqrt{\tilde{\mathcal{F}}}, \quad \tilde{\mathcal{F}}_{min} = \mathcal{E}^2/\gamma_s^2, \quad (5.3)$$

onde γ_s foi um valor constante específico para cada família. Então, se $\gamma^{(A)} > \gamma^{(B)}$ para duas famílias de estados rotuladas pelos superescritos A e B , pode-se dizer que a família B é menos sensível a variações de parâmetros do que a família A . Nesse sentido B pode ser considerada ‘mais robusta’ do que a família A . A tabela 5.1 mostra todos os ‘coeficiente de robustez da energia’ obtidos neste trabalho.

Os resultados mostraram que a fidelidade por si só não pode ser usada como uma medida única (universal) de proximidade entre dois estados quânticos, na ausência de qualquer informação adicional sobre os estados, a menos que seu valor seja muito próximo a 100%. Para os estados gaussianos essa afirmação pode ser ilustrada, por exemplo, considerando diferentes conjuntos de

Tabela 5.1: Tabela do ‘coeficiente de robustez da energia’ γ para todas famílias e sub-famílias de estados considerados neste trabalho.

Estados Gaussianos		Estados de ‘gato’ real/imaginário	
Coerentes	$\gamma \approx 1.41$	Variação de fase	$\gamma^{(+)} \approx 1.27$ e $\gamma^{(-)} \approx 0.72$
Fortemente comprimidos	$\gamma = 2.00$	Variação na amplitude	$\gamma^{(+)} \approx 1.86$ e $\gamma^{(-)} \approx 1.03$
Gaussianos	$\gamma \approx 2.83$	Estados semi-coerentes	
Estados de ‘gato’		Ortogonais ao vácuo	$\gamma \approx 0.903$
Yurke-Stoler	$\gamma \approx 1.41$	Mesmo β	$\gamma \approx 1.71$
Fixando α	$\gamma \approx 1.15$	Mesmo α	$\gamma \approx 1.35$
Coerentes pares	$\gamma \approx 1.86$	‘Auto-ortogonais’	$\gamma \approx 0.47$
Coerentes ímpares	$\gamma \approx 1.03$		

estados com uma fidelidade fixa $\mathcal{F} \approx 0.94$. Se o primeiro estado for coerente com $x_1 = 100$ e $p_1 = 0$, e o segundo estado também for coerente com $p_2 = 0$ (isto é, $a = 1$ e $\alpha = \beta = 0$), então $\mathcal{F} = 0.94$ significa que $x_2 = 100.35$ ou $x_2 = 99.65$. Nesse caso $\mathcal{Y} = 0.007$, que pode ser aceito como uma pequena quantidade, o que significa que estes dois estados concretos são de fato ‘próximos’.

Mas a situação pode ser completamente diferente para estados de vácuo comprimidos com $b_j = x_j = p_j = 0$. Então a fidelidade $\mathcal{F} = \sqrt{8/9} \approx 0.94$ pode ser obtida para $\alpha = 1$ (ou seja, $a_2 = 2a_1$) ou $\alpha = -1/2$ (quando $a_2 = a_1/2$). Considerando $a_1 = 1$ (o estado fundamental do oscilador) obtém-se as energias médias $E_1 = 1/2$ e $E_2 = 5/8$, que não são tão diferentes ($\mathcal{Y} = 1/\sqrt{20} \approx 0.22$). Além disso, é fácil de encontrar dois estados com $E_2 = E_1$ e $\mathcal{F} = \sqrt{8/9}$: os valores correspondentes dos parâmetros são $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_2 = 1/\sqrt{2}$. No entanto, considerando estados fortemente comprimidos com $a_1 = 0.1$ e $a_2 = 0.05$, as energias se tornam $E_1 = 2.525$ e $E_2 = 5.0125$, de modo a que estes dois estados com $\mathcal{Y} \approx 0.7$ dificilmente podem ser considerados próximos. Para pequenos valores de a_1 pode-se chegar o próximo quanto se queira da relação máxima $E_2 = 2E_1$ (ou $E_1 = 2E_2$) permitida pelas fórmulas (3.51) e (3.67). Para $E_2 = 1.5E_1$ a máxima fidelidade possível é igual a $\mathcal{F}_m = \sqrt{24/25} \approx 0.98$. Mesmo no nível de $\mathcal{F} = 0.99$ pode-se obter dois estados com um desvio relativo de energia entre eles de cerca de 28%. A figura (5.1) mostra dois pares de funções de onda reais que descrevem estados de vácuo comprimidos com a mesma fidelidade $\mathcal{F} = \sqrt{8/9} \approx 0.94$. Essa figura comprova que não é fácil dizer se dois estados são próximos ou não olhando apenas para seus gráficos ou calculando apenas a fidelidade entre eles. Critérios adicionais são necessários se a fidelidade não estiver muito próxima a 100%. O problema é que o valor necessário da fidelidade, na ausência de informação adicional pode ser tão alta que dificilmente pode ser alcançado ou mensurado de forma confiável em experimentos. Por exemplo, para garantir que a diferença de energia entre dois estados comprimidos arbitrários não ultrapasse os 10% (isto é, $E_2 \leq 1.1E_1$), sua fidelidade deve ser maior que $\sqrt{440/441} \approx 0.998866$.

Para as diferentes famílias de superposições de estados coerentes, comparando os resultados

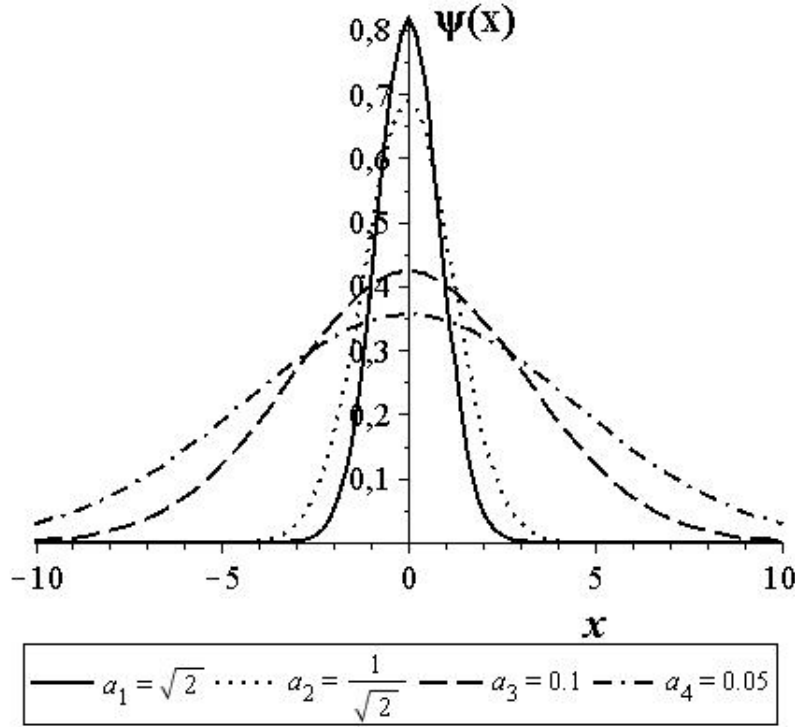


Figura 5.1: Funções de onda reais e positivas de dois pares de estados de vácuo comprimidos com $b_j = x_j = p_j = 0$ mas diferentes parâmetros a_j . As fidelidades entre os estados dos pares 1-2 e 3-4 são iguais: $\mathcal{F} = \sqrt{8/9} \approx 0.94$. Entretanto, enquanto que as energias médias E_1 e E_2 coincidem, $E_4 = 2E_3$.

obtidos nas seções 4.1, 4.2 e 4.3 pode-se concluir que entre superposições de estados coerentes ‘opostos’ $|\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle$ com parâmetros de amplitude e deslocamento (z_j e α_j) independentes, os estados mais robustos com relação a variações relativas de energia são os estados coerentes ímpares. Para alguns tipos de variações dos parâmetros o desvio relativo de energia máximo entre estes estados é proporcional a ‘infidelidade’ $\tilde{\mathcal{F}} = 1 - \mathcal{F}$, então a razão $|\mathcal{E}|/\sqrt{\tilde{\mathcal{F}}} \sim \sqrt{\tilde{\mathcal{F}}}$ tende a zero quando $\tilde{\mathcal{F}} \rightarrow 0$. Isso significa que o ‘coeficiente de robustez da energia’ γ introduzido na Eq. (5.1) é igual a zero para estados iniciais ímpares com respeito a pequenas variações dos valores do fator complexo z . Para pequenas variações do parâmetro complexo de deslocamento α o coeficiente γ é finito para estados ímpares. No entanto, é menor para estados ímpares do que para estados pares. O valor $\gamma_{odd} \approx 1.03$ dado pela Eq. (4.60) é quase duas vezes menor do que o valor $\gamma_{even} \approx 1.86$ da fórmula (4.50). Os estados de ‘gato’ $\mathcal{N}(|ae^{i\theta}\rangle - |ae^{-i\theta}\rangle)$ apresentam um coeficiente ainda menor $\gamma_{im} \approx 0.72$ para pequenas variações apenas da fase θ : veja a fórmula (4.72). No entanto, para variações mais gerais (por exemplo, da amplitude) eles tem o mesmo coeficiente γ que os estados coerentes ímpares. Os estados coerentes pares e ‘estados de gato reais’ parecem ser os estados ‘menos robustos’ com relação às variações de energia. Isto pode ser explicado pela contribuição significativa do estado de vácuo, diminuindo a energia inicial, em comparação com a energia dos estados ímpares.

Lembrando que para estados coerentes $\gamma_{coh} = \sqrt{2} \approx 1.41$ Eq. (2.27). Percebe-se que

para algumas superposições de estados coerentes específicas, pode-se obter valores menores de γ para variações restritas dos parâmetros, embora que no caso mais geral, obtiêm-se $\gamma > \gamma_{coh}$. O mesmo ocorre para estados ‘semi-coerentes’ considerados na seção 4.4: embora tenha se encontrado os valores $\gamma = 0.90$ para as projeções ortogonais sobre o estado de vácuo e um valor até duas vezes menor $\gamma = 0.47$ para estados ‘auto-ortogonais’, para os estado mais gerais o valor $\gamma = 1.71 > \gamma_{coh}$ foi obtido. Este último valor, por sua vez, é menor do que o valor máximo $\gamma = 1.86$ encontrado para os estados coerentes pares. Esse resultado parece natural, porque superposições genéricas tem parâmetros de amplitude e deslocamento z_j e α_j independentes, considerando que esses parâmetros estão ligados, no caso dos estados ‘semi-coerentes’.

Percebe-se então que $\gamma_{max} = 2\sqrt{2} \approx 2.83$ para as pequenas variações mais gerais dos parâmetros dos estados comprimidos puros, Eq. (3.82). Como quase todos os valores do ‘coeficiente de robustez da energia’ γ calculados neste trabalho são da ordem de uma unidade, apenas valores muito altos da fidelidade $\mathcal{F} > 0.99$ pode garantir uma real proximidade entre dois estados (com $\mathcal{E} < 0.1$) *na ausência de qualquer informação adicional* sobre os dois estados. No entanto, as restrições podem ser amenizadas (as vezes significativamente) se alguma informação adicional existir. Por exemplo, se é sabido que o estado inicial é um estado coerente ímpar, e que o único parâmetro variável é o coeficiente complexo de amplitude $z \approx -1$, então as variações de energia não passarão de 10% para uma fidelidade da ordem de 90%. Mas no caso geral pode-se obter dois estados com uma fidelidade de 90%, cujas energias diferem em duas vezes (ou até mais).

Referências Bibliográficas

- [1] Richard Jozsa. Fidelity for mixed quantum states. *Journal of Modern Optics*, 41(12):2315–2323, 1994. 1
- [2] William K Wootters. Statistical distance and hilbert space. *Physical Review D*, 23(2):357, 1981. 1
- [3] Valentine Bargmann. On unitary ray representations of continuous groups. *The Annals of Mathematics*, 59(1):1–46, 1954. 1
- [4] Samuel L Braunstein and Carlton M Caves. Statistical distance and the geometry of quantum states. *Physical Review Letters*, 72(22):3439–3443, 1994. 1
- [5] P Marek, H Jeong, and MS Kim. Generating “squeezed” superpositions of coherent states using photon addition and subtraction. *Physical Review A*, 78(6):063811, 2008. 1
- [6] SA Podoshvedov. Generation of displaced squeezed superpositions of coherent states. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 114(3):451–464, 2012. 1
- [7] Amine Laghaout, Jonas S Neergaard-Nielsen, Ioannes Rigas, Christian Kragh, Anders Tipsmark, and Ulrik L Andersen. Amplification of realistic schrödinger-cat-state-like states by homodyne heralding. *Physical Review A*, 87(4):043826, 2013. 1
- [8] VV Dodonov, OV Man’ko, VI Man’ko, and A Wünsche. Energy-sensitive and “classical-like” distances between quantum states. *Physica Scripta*, 59(2):81, 1999. 1, 2
- [9] Samuel L Braunstein, Christopher A Fuchs, and H Jeff Kimble. Criteria for continuous-variable quantum teleportation. *Journal of Modern Optics*, 47(2-3):267–278, 2000. 1
- [10] N. J. Cerf, A. Ipe, and X. Rottenberg. Cloning of continuous quantum variables. *Phys. Rev. Lett.*, 85:1754–1757, Aug 2000. 1
- [11] Frédéric Grosshans and Philippe Grangier. Quantum cloning and teleportation criteria for continuous quantum variables. *Physical Review A*, 64(1):010301, 2001. 1
- [12] Masashi Ban. Phase-space approach to continuous variable quantum teleportation. *Phys. Rev. A*, 69:054304, May 2004. 1
- [13] Carlton M Caves and Krzysztof Wódkiewicz. Classical phase-space descriptions of continuous-variable teleportation. *Physical review letters*, 93(4):040506, 2004. 1
- [14] Akira Furusawa, Jens Lykke Sørensen, Samuel L Braunstein, Christopher A Fuchs, H Jeff Kimble, and Eugene S Polzik. Unconditional quantum teleportation. *Science*, 282(5389):706–709, 1998. 1
- [15] Warwick P Bowen, Nicolas Treps, Ben C Buchler, Roman Schnabel, Timothy C Ralph, Hans-A Bachor, Thomas Symul, and Ping Koy Lam. Experimental investigation of continuous-variable quantum teleportation. *Physical Review A*, 67(3):032302, 2003. 1
- [16] Tian Cai Zhang, KW Goh, CW Chou, P Lodahl, and H Jeff Kimble. Quantum teleportation of light beams. *Physical Review A*, 67(3):033802, 2003. 1
- [17] A Zavatta, V Parigi, MS Kim, and M Bellini. Subtracting photons from arbitrary light fields: experimental test of coherent state invariance by single-photon annihilation. *New Journal of Physics*, 10(12):123006, 2008. 1

-
- [18] Holger P Specht, Christian Nölleke, Andreas Reiserer, Manuel Uphoff, Eden Figueroa, Stephan Ritter, and Gerhard Rempe. A single-atom quantum memory. *Nature*, 473(7346):190–193, 2011. 1
- [19] Erwin Schrödinger. Der stetige übergang von der mikro-zur makromechanik. *Naturwissenschaften*, 14(28):664–666, 1926. 3
- [20] John R Klauder. The action option and a feynman quantization of spinor fields in terms of ordinary c-numbers. *Annals of Physics*, 11(2):123–168, 1960. 3
- [21] John R Klauder. Continuous-representation theory. i. postulates of continuous-representation theory. *Journal of Mathematical Physics*, 4:1055, 1963. 3
- [22] John R Klauder. Continuous-representation theory. ii. generalized relation between quantum and classical dynamics. *Journal of Mathematical Physics*, 4:1058, 1963. 3
- [23] Roy J. Glauber. Photon correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 10:84–86, Feb 1963. 3
- [24] Roy J Glauber. The quantum theory of optical coherence. *Physical Review*, 130(6):2529, 1963. 3
- [25] Roy J Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Physical Review*, 131(6):2766, 1963. 3
- [26] E. C. G. Sudarshan. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. *Phys. Rev. Lett.*, 10:277–279, Apr 1963. 3
- [27] H Takahasi. Information theory of quantum-mechanical channels. *Advances in Communication Systems*, 1:227–310, 1965. 7
- [28] E YC Lu. Quantum correlations in two-photon amplification. *Lettere Al Nuovo Cimento (1971–1985)*, 3(14):585–589, 1972. 7
- [29] E YC Lu. New coherent states of the electromagnetic field. *Lettere Al Nuovo Cimento (1971–1985)*, 2(24):1241–1244, 1971. 7
- [30] Horace P Yuen. Two-photon coherent states of the radiation field. *Physical Review A*, 13(6):2226, 1976. 7
- [31] Carlton M Caves. Quantum-mechanical noise in an interferometer. *Physical Review D*, 23(8):1693, 1981. 7
- [32] James N Hollenhorst. Quantum limits on resonant-mass gravitational-radiation detectors. *Physical Review D*, 19(6):1669, 1979. 7
- [33] R_E Slusher, LW Hollberg, Bernard Yurke, JC Mertz, and JF Valley. Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in an optical cavity. *Physical Review Letters*, 55(22):2409, 1985. 7
- [34] MM Miller and EA Mishkin. Characteristic states of the electromagnetic radiation field. *Physical Review*, 152(4):1110, 1966. 7
- [35] EH Kennard. Zur quantenmechanik einfacher bewegungstypen. *Zeitschrift für Physik*, 44(4–5):326–352, 1927. 7
- [36] Z Bialynicka—Birula. Properties of the generalized coherent state. *Physical Review*, 173(5):1207, 1968. 19
- [37] KE Cahill and RJ Glauber. Density operators and quasiprobability distributions. *Physical Review*, 177(5):1882, 1969. 19
- [38] David Stoler. Generalized coherent states. *Physical Review D*, 4(8):2309, 1971. 19
- [39] PM Mathews and K Eswaran. Semi-coherent states of the quantum harmonic oscillator. *Il Nuovo Cimento B*, 17(2):332–335, 1973. 19, 20, 35

-
- [40] VV Dodonov, IA Malkin, and VI Man'Ko. Even and odd coherent states and excitations of a singular oscillator. *Physica*, 72(3):597–615, 1974. 19
- [41] Vladimír Bužek and Peter L Knight. I: Quantum interference, superposition states of light, and nonclassical effects. *Progress in optics*, 34:1–158, 1995. 19, 20
- [42] C Monroe, DM Meekhof, BE King, and DJ Wineland. A “schrödinger cat” superposition state of an atom. *Science*, 272(5265):1131–1136, 1996. 19
- [43] Serge Haroche. Entanglement, mesoscopic superpositions and decoherence studies with atoms and photons in a cavity. *Physica Scripta*, 1998(T76):159, 1998. 19
- [44] Jonas S Neergaard-Nielsen, B Melholt Nielsen, C Hettich, Klaus Mølmer, and Eugene S Polzik. Generation of a superposition of odd photon number states for quantum information networks. *Physical review letters*, 97(8):083604, 2006. 19
- [45] Alexei Ourjoumtsev, Hyunseok Jeong, Rosa Tualle-Brouiri, and Philippe Grangier. Generation of optical ‘schrödinger cats’ from photon number states. *Nature*, 448(7155):784–786, 2007. 19
- [46] Hiroki Takahashi, Kentaro Wakui, Shigenari Suzuki, Masahiro Takeoka, Kazuhiro Hayasaka, Akira Furusawa, and Masahide Sasaki. Generation of large-amplitude coherent-state superposition via ancilla-assisted photon subtraction. *Physical review letters*, 101(23):233605, 2008. 19
- [47] Amine Laghaout, Jonas S Neergaard-Nielsen, Ioannes Rigas, Christian Kragh, Anders Tipsmark, and Ulrik L Andersen. Amplification of realistic schrödinger-cat-state-like states by homodyne heralding. *Physical Review A*, 87(4):043826, 2013. 19
- [48] Brian Vlastakis, Gerhard Kirchmair, Zaki Leghtas, Simon E Nigg, Luigi Frunzio, SM Girvin, Mazyar Mirrahimi, MH Devoret, and RJ Schoelkopf. Deterministically encoding quantum information using 100-photon schrödinger cat states. *Science*, 342(6158):607–610, 2013. 19
- [49] Christopher C Gerry. Non-classical properties of even and odd coherent states. *Journal of Modern Optics*, 40(6):1053–1071, 1993. 19
- [50] Antonio Mecozzi and Paolo Tombesi. Distinguishable quantum states generated via nonlinear birefringence. *Physical review letters*, 58:1055–1058, 1987. 19
- [51] B Yurke and D Stoler. Generating quantum mechanical superpositions of macroscopically distinguishable states via amplitude dispersion. *Physical review letters*, 57(1):13, 1986. 19
- [52] K Vogel and H Risken. Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase. *Physical Review A*, 40(5):2847–2849, 1989. 19
- [53] W Schleich, M Pernigo, and Fam Le Kien. Nonclassical state from two pseudoclassical states. *Physical Review A*, 44:2172–2187, 1991. 19
- [54] B Sherman and G Kurizki. Preparation and detection of macroscopic quantum superpositions by two-photon field-atom interactions. *Physical Review A*, 45(11):R7674, 1992. 19
- [55] Victor V Dodonov, S Yu Kalmykov, and Vladimir I Man'ko. Statistical properties of schrödinger real and imaginary cat states. *Physics Letters A*, 199(3):123–130, 1995. 19
- [56] O Castanos, R López-Pena, and VI Man'ko. Crystallized schrödinger cat states. *Journal of Russian Laser Research*, 16(6):477–525, 1995. 20
- [57] B Baseia, MHY Moussa, and VS Bagnato. Hole burning in fock space. *Physics Letters A*, 240(6):277–281, 1998. 20
- [58] R Ragi, B Baseia, and VS Bagnato. Generalized superposition of two coherent states and interference effects. *International Journal of Modern Physics B*, 12(14):1495–1529, 1998. 20
- [59] A Napoli and A Messina. An application of the arithmetic euler function to the construction of nonclassical states of a quantum harmonic oscillator. *Reports on Mathematical Physics*, 48(1):159–166, 2001. 20

- [60] Christopher C Gerry and Adil Benmoussa. Hole burning in the fock space of optical fields. *Physics Letters A*, 303(1):30–36, 2002. 20
- [61] JMC Malbouisson and B Baseia. On the measure of nonclassicality of field states. *Physica Scripta*, 67(2):93, 2003. 20
- [62] S Schaufler, M Freyberger, and WP Schleich. The birth of a phase-cat. *Journal of Modern Optics*, 41(9):1765–1779, 1994. 20
- [63] VV Dodonov and MB Reno. Nonclassical properties of 'semi-coherent' quantum states. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(23):7411, 2006. 20, 35, 39
- [64] E Piroozi and MK Tavassoly. Nonlinear semi-coherent states, their nonclassical features and phase properties. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(13):135301, 2012. 20
- [65] Victor V Dodonov. Comparing energy difference and fidelity of quantum states. *Journal of Russian Laser Research*, 32(5):412–421, 2011. 21
- [66] VV Dodonov. Upper bounds on the relative energy difference of pure and mixed gaussian states with a fixed fidelity. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(3):032002, 2012. 21
- [67] VV Dodonov and MB Horovits. How different can pure squeezed states with a given fidelity be? *Physica Scripta*, 2012(T147):014009, 2012. 21
- [68] Ching Tsung Lee. Theorem on nonclassical states. *Physical Review A*, 52:3374–3376, 1995. 35