REFERÊNCIA

CAMARGO, Ivan. **Noções básicas de engenharia econômica aplicações ao setor elétrico**. Brasília: Finatec, 1998.

NOÇÕES BÁSICAS DE

Engenharia Econômica

$F = P\,(1+i)^n$

APLICAÇÕES AO SETOR ELÉTRICO

Prof. Ivan Camargo

FinaTec Fundação de Empreendimentos Científicos e Tecnológicos

Noções Básicas de

ENGENHARIA ECONÔMICA

Aplicações ao Setor Elétrico

Prof. Ivan Camargo

Brasília, 1998

CAMARGO, Ivan Marques de Toledo
C172n Noções básicas de engenharia econômica: aplicações ao setor elétrico. Brasília: FINATEC, 1998
160 p.: il.

1. Engenharia econômica. 2. Matemática financeira. 3. Energia elétrica. I. Título

CDU 330.322.212

Capa, diagramação e Editoração
Heonir Soares Valentim

Impressão e acabamento
Gráfica e Editora Itamarati Ltda.

Sobre o autor
Ivan Marques de Toledo Camargo é engenheiro eletricista formado pela Universidade de Brasília, em 1982. Concluiu seu doutorado em Grenoble, França, em 1988 e é Professor Adjunto do Departamento de Engenharia Elétrica da UnB desde 1989. Atualmente ocupa o cargo de Vice-Diretor da Faculdade de Tecnologia.

Para Natalie, Laura e Felipe

PREFÁCIO

Este livro nasceu com o plano Real. No instante em que o país definiu uma unidade monetária estável passou a ser possível planejar investimentos de longa duração em moeda nacional. Nestes estudos, o conceito de valor temporal do dinheiro é fundamental.

As empresas concessionárias de energia elétrica sentiram a necessidade de difundir estes conceitos entre os seus engenheiros. Inicialmente, em 1995, a Companhia Energética de Brasília solicitou à Universidade de Brasília um curso de Noções Básicas Engenharia Econômica. Entre os anos de 1996 e 1997, este curso foi ministrado dezenas de vezes e, para 1998, já estão programadas várias reedições, o que endossa a oportunidade desta publicação.

Este livro foi elaborado na forma de um estudo dirigido para engenheiros que necessitem dos conceitos básicos de matemática financeira e métodos de comparação de alternativas de investimento. Cada novo conceito apresentado é seguido de um exemplo. Não se pretende abordar tópicos mais complexos de engenharia econômica como risco, decisão em ambiente de incerteza ou financiamento do capital de uma empresa. Para estes tópicos uma extensa bibliografia é sugerida no final do livro.

Gostaria de agradecer a todos os alunos que leram os manuscritos deste livro e colaboraram com suas correções e sugestões. Vários professores também leram os originais e suas críticas e sugestões enriqueceram bastante o texto. Entre eles, o meu professor e orientador José Galib Tannuri que, desde os meus tempos de aluno, ensinou que o fluxo de caixa era mais importante do que o fluxo de carga. Destaco ainda a participação dos professores Marco Aurélio Gonçalves de Oliveira e Fernando Figueiredo que, além de estruturarem o curso comigo, também leram com muito cuidado o texto e contribuiram de forma inestimável para conclusão deste projeto. Finalmente, agradeço à FINATEC, nas pessoas dos professores Antônio Manuel Dias Henriques e Lúcio Rennó Salomon, que viabilizou financeiramente esta edição.

ÍNDICE

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1) Objetivos

O objetivo deste livro de Engenharia Econômica é introduzir os conceitos de valor temporal do dinheiro e, baseado nestes conceitos, analisar alternativas de investimentos.

Para se incorporar o conceito de valor temporal do dinheiro em uma, ou várias alternativas de investimento, é fundamental conhecer os princípios de matemática financeira.

Estes princípios são extremamente simples. A grande dificuldade da engenharia econômica está na formulação correta e lógica das diversas alternativas (tecnicamente viáveis) de solução de um determinado problema.

Este livro, então, além de apresentar os conceitos de matemática financeira, pretende formular um grande número de problemas, preferencialmente relacionados com o setor elétrico, e propor uma solução. Propõe-se, então, um estudo dirigido no qual cada novo conceito vem acompanhado de um exemplo.

1.2) Exemplos

Dando início aos exemplos, ainda na introdução, vai-se explorar uma das maiores dificuldades dos problemas de engenharia econômica: a obtenção dos dados.

Exemplo 1.1
Qual a forma mais econômica de se viajar de Brasília para o Rio de Janeiro? Carro, ônibus ou avião?

Solução
Como se vê, a primeira dificuldade em um problema de engenharia econômica é a obtenção dos dados. Quanto custa a passagem de ônibus? Quanto custa a passagem de avião?

Em contato com as empresas, obtem-se:

Passagem de ônibus leito: R$ 85,00; e
Passagem de avião: R$ 165,00.

E o custo da viagem de carro? Para se determinar este custo, mais uma vez, os dados são fundamentais. Qual é a distância? Qual é o carro? Qual é o consumo deste carro? Qual é o preço do litro da gasolina?

Considerando, neste exemplo:

> distância entre Rio - Brasília: 1200 km;
> preço da gasolina: 0,80 R$ por litro; e
> consumo do carro: 16 km por litro.

Teria-se como primeira solução:

> Custo = distância * preço da gasolina / consumo, ou

$$C = 1200\text{km} * 0{,}8\frac{\text{R\$}}{\text{litro}} * \frac{1}{16}\frac{\text{litro}}{\text{km}} = \text{R\$ } 60{,}00$$

Note que escrever as unidades neste tipo de problema é fundamental para se ter noção da coerência dos dados.

Esta solução indicaria que viajar de carro seria a alternativa mais barata. No entanto, esta solução pode está errada já que ela não avaliou todos os custos envolvidos na viagem de carro. Na verdade, para se avaliar o custo de uma viagem de carro é necessário conhecer qual foi o investimento feito na compra do carro, qual é o custo da sua manutenção, qual o é custo do seguro do carro, qual é o valor de revenda do carro, quanto tempo se pretende ficar com o carro, etc....Quanto maior for o detalhamento da alternativa analisada, menor será a probabilidade de erro na análise.

Mais uma vez aparece o problema dos dados. É muito difícil prever todas estas variáveis. Considerando, neste exemplo, que:

valor do carro: R$ 10.000,00;
tempo de permanência com o carro: 4 anos;
quilômetros rodados por ano: 25.000 km
valor de revenda após 4 anos: R$ 6.000,00;
valor da manutenção a cada 10.000km: R$ 400,00; e
valor do seguro: 10% do valor do carro por ano.

Além destes dados, é fundamental considerar também o custo da gasolina. Para rodar os 25.000 km por ano previstos, o custo será:

$$C = 25.000\frac{km}{ano} * 0,8\frac{R\$}{litro} * \frac{1}{16}\frac{litro}{km} = 1.250,00\,R\$ / ano$$

A manutenção anual será dada por:

$$M = \frac{400}{10.000}\frac{R\$}{km} * 100.000km * \frac{1}{4anos} = 1.000,00\,R\$ / ano$$

Pode-se então construir a tabela 1.1 de gastos anuais sem, por enquanto, tratar do problema do valor temporal do dinheiro. O custo total do carro nos 4 anos de uso será portanto de:

Custo total = R$ 16.400,00

Considerando que, neste exemplo, por hipótese, vai-se rodar 100.000 km, adicionando-se, na mesma tabela, o custo por quilômetro do carro, tem-se:

Tabela 1.1 - Avaliação dos custos de um carro

PERÍODO	0	1	2	3	4	TOTAL	R$ / Km
gasolina	0	1250	1250	1250	1250	**5000**	0,050
manutenção	0	1000	1000	1000	1000	**4000**	0,040
seguro	1000	900	800	700	0	**3400**	0,034
investimento	10000	0	0	0	-6000	**4000**	0,040
TOTAL	**11000**	**3150**	**3050**	**2950**	**-3750**	**16400**	**0,164**

Portanto:

C = 0,164 R$/km

A viagem de 1200 km de carro custará, então: R$ 196,80.

Observa-se que a decisão de viajar de carro, avião ou ônibus muda completamente dependendo da forma com que o problema é abordado. A viagem mais cara acaba sendo a viagem de carro! Outros fatores podem influenciar a decisão de ir de carro, por exemplo, a necessidade de um carro no Rio de Janeiro, o número de passageiros que vão viajar, etc...

Exemplo 1.2
Quanto se deve cobrar de um carona para ir de Brasília para o Rio de Janeiro no seu carro?

Solução
Mais uma vez a solução depende de uma série de fatores, muitos deles dificilmente transformáveis em números. Por exemplo, quanto vale a companhia de um amigo em uma viagem longa? Uma primeira solução, portanto, seria não cobrar nada. Mesmo desconsiderando estes aspectos de difícil quantificação o problema econômico pode ter várias soluções.

Para exemplificar, repete-se a tabela 1.1 considerando, agora, o preço da viagem por item:

Tabela 1.2 - Custo da viagem de carro

PERÍODO	0	1	2	3	4	TOTAL	R$ / Km	Custo da Viagem (R$)
gasolina	0	1250	1250	1250	1250	**5000**	0,050	60,00
manutenção	0	1000	1000	1000	1000	**4000**	0,040	48,00
seguro	1000	900	800	700	0	**3400**	0,034	40,80
investimento	10000	0	0	0	-6000	**4000**	0,040	48,00
TOTAL	**11000**	**3150**	**3050**	**2950**	**-3750**	**16400**	0,164	196,80

Outra solução seria dividir igualmente entre os dois ocupantes do carro o custo total da viagem. Como foi visto no problema anterior, a viagem de carro custaria R$ 196,80, portanto cada passageiro deve pagar R$ 98,40.

Uma terceira solução seria "rachar" o preço da gasolina. Neste caso, o carona deveria pagar R$ 30,00.

Qualquer solução entre estes dois limites pode ser justificada. Talvez a solução mais razoável seja considerar apenas o valor da gasolina e da manutenção. Neste caso,

Gasolina = 60,00 R$;
Manutenção = 1200 km*400,00 R$/10.000km = 48,00 R$; portanto
Custo total = 108,00 R$ e o custo por passageiro será R$ 54,00.

Todos os ítens listados na tabela 1.2 podem, ou não, ser incluídos no preço. Este exemplo mostra que em um problema de engenharia econômica a formulação correta do problema é, muitas vezes, mais difícil que a sua própria solução.

Exemplo 1.3

Deseja-se passar um mês de férias na Europa fazendo uma viagem por vários países de aproximadamente 2.000 km. Esta viagem será realizada por duas pessoas que precisam optar por viajar de carro (alugado) ou de trem. Qual a solução mais barata?

Solução

Mais uma vez tem-se o problema dos dados. Muitos dados foram fornecidos no enunciado do problema. Formular corretamente o problema já é um bom começo para uma boa solução em termos de engenharia econômica.

A primeira parte da solução consiste em buscar os dados. Quanto custa alugar um carro na Europa? Quanto custa o bilhete de trem? Estas respostas estão cada vez mais acessíveis. A quantidade de informação que se pode acessar através de um micro conectado à rede internet é impressionante.

O aluguel de um carro incluindo o seguro fica por R$ 950,00 por mês. O passe do trem, com direito a um mês, sem limitação de viagens fica por R$ 850,00. Uma solução apressada seria considerar que, como são dois passageiros, o custo do trem (R$ 1.700,00) é muito superior ao do carro que, portanto, é a melhor solução.

Neste ponto é bom que se mostre a importância da consideração do maior número possível de fatores que influem em cada alternativa. A alternativa do carro, evidentemente, tem que levar em consideração o preço da gasolina. No caso, para uma viagem de 2.000 km, fazendo as mesmas considerações de consumo e de preço da gasolina do exemplo anterior, daria um gasto de aproximadamente R$ 100,00. Além disto, é preciso considerar os gastos com pedágio e estacionamento referentes à alternativa carro. Considerando que entre pedágio e estacionamento se gaste em um mês aproximadamente R$ 250,00, tem-se que a alternativa "carro" poderia ser esquematizada pela tabela 1.3.

Tabela 1.3 - Alternativa "carro"

ALTERNATIVA "CARRO"	PREÇO (R$)
aluguel e seguro	950
gasolina	100
pedágio e estacionamento	250
TOTAL	**1300**

Para complementar a alternativa "trem" é necessário saber que a compra do segundo passe tem um desconto de 40%, ou seja, o valor dos passes ficaria em R$ 1.360,00, fazendo com que esta alternativa volte a ser comparável com a alternativa "carro". No entanto, não se pode esquecer do custo do transporte na cidades. Considerando que se gaste R$ 20,00 por dia em transporte, a alternativa "trem" também fica completa.

Tabela 1.4 - Alternativa "trem"

ALTERNATIVA "TREM"	PREÇO (R$)
passe de um mês (1ª classe)	850
segundo passe (desconto de 40%)	510
transporte nas cidades	600
TOTAL	**1960**

A alternativa mais barata é, sem dúvida, a do carro. A decisão de viajar de carro ou de trem pode ainda ser influenciada por inúmeros fatores "não-econômicos" do tipo "eu gosto (ou eu não gosto) de dirigir". O engenheiro não pode, no entanto, tomar uma decisão economicamente razoável baseado, exclusivamente, nestes outros fatores.

Estes exemplos introdutórios mostraram a dificuldade de se formular corretamente um problema de engenharia econômica. Os problemas de engenharia econômica devem sempre ser encarados como uma comparação de alternativas. Cada alternativa deve ser analisada cuidadosamente. Uma alternativa mal formulada pode distorcer completamente o resultado. Nos próximos capítulos vai-se definir os conceitos de matemática financeira para, em seguida, examinar as formas usuais de comparação de alternativas levando-se em consideração o valor temporal do dinheiro.

Capítulo 2

MATEMÁTICA FINANCEIRA

2.1) Definições Básicas

JUROS: "É o valor em dinheiro pago pelo uso de um empréstimo", ou, "É o valor em dinheiro recebido pelo valor emprestado".

TAXA DE JUROS: "É a relação entre o dinheiro recebido pelo empréstimo e o dinheiro emprestado".

Vai-se usar a letra "i" para denominar a taxa de juros ao longo deste texto.

Os juros e a taxa de juros estão sempre relacionados a um determinado intervalo de tempo.

Exemplo 2.1
Emprestando a um banco R$ 100,00, espera-se receber ao final de um ano R$ 12,00 referentes aos juros. Qual a taxa de juros?

Solução

$$i = \frac{12}{100} = 0{,}12$$

ou i = 12% ao ano.

Existem vários fatores que justificam o pagamento de juros em transações financeiras, entre eles pode-se citar:

Inflação - Não se deve confundir inflação com taxa de juros. Evidentemente, se existe uma desvalorização da moeda, todo investimento razoável deve levar em consideração a correção monetária ou seja a preservação do poder de compra do dinheiro investido. Esta correção, no entanto, não está remunerando o capital investido. Desta forma, além da correção monetária, um investimento deve ser remunerado pela taxa de juros. Em todos os exemplos que se seguem, a inflação não é considerada, ou seja, considera-se que a moeda tenha um valor constante: R$ 1,00 = US$ 1,00.

Utilidade - Investir significa deixar de consumir. Esta restrição ao consumo deve ter alguma compensação financeira.

Risco - Existe um risco inerente a qualquer investimento. Normalmente, a taxa de juros deve compensar o risco que se assume em um investimento. Quanto maior o risco, maior deve ser a taxa de juros.

Oportunidade - Como os recursos na sociedade são sempre limitados, a rentabilidade de um determinado investimento deve refletir a necessidade de captação de dinheiro do projeto.

JUROS COMPOSTOS: "É a incidência de juros sobre os juros de um determinado período de tempo".

Exemplo 2.2
Qual seria o valor recebido de juros ao final de um ano se os R$ 100,00 do exemplo anterior fosse aplicado a uma taxa de 1% ao mês?

Solução
Chamando de "P" o valor investido, ao final de um mês o valor depositado no banco será "P" mais os juros referentes a P, ou seja:

$$P_1 = P + iP = P(1+i)$$

Ao final do segundo mês, o valor no banco será dado por:

$$P_2 = P_1 + iP_1 = P(1+i) + iP(1+i) = P(1 + 2i + i^2) = P(1+i)^2$$

Por consequência, ao final do n-ésimo período, tem-se:

$$P_n = P(1+i)^n \qquad \textbf{(2.1)}$$

O valor recebido ao final de um ano (12 meses) neste exemplo será, portanto:

$$P_{12} = 100(1+0{,}01)^{12} = R\$\ 112{,}68$$

PERÍODO DE CAPITALIZAÇÃO: "É o intervalo de tempo considerado para a aplicação da taxa de juros".

TAXA EFETIVA DE JUROS: "É a consideração dos juros compostos em uma determinada quantia investida quando o tempo de aplicação é maior que o período de capitalização".

Em todos os problemas de engenharia econômica devem ser considerados os juros compostos e, portanto, a taxa efetiva de juros.

TAXA NOMINAL DE JUROS: "É um valor que se refere aos juros de uma determinada aplicação desprezando o efeito dos juros compostos quando o período de capitalização é menor que o período de aplicação do dinheiro".

Exemplo 2.3

Um banco empresta dinheiro a uma taxa nominal de 12% ao ano capitalizado mensalmente. Calcular a taxa efetiva de juros ao ano.

Solução

Chamando de "r" a taxa nominal de juros em um período p_1 ; "m" o número de vezes que esta taxa é capitalizada neste período. Pela definição de período de capitalização, tem-se que:

$$p_2 = \frac{p_1}{m}$$

Neste período (p_2) a taxa efetiva de juros será:

$$i(p_2) = \frac{r}{m}$$

Para considerá-la no período de capitalização p_1 é preciso levar em consideração os juros compostos, eq. (2.1)

$$(1 + (i (p_1)) = (1 + i (p_2))^m \qquad \textbf{(2.2)}$$

ou seja

$$i = (1 + \frac{r}{m})^m - 1 \qquad \textbf{(2.3)}$$

Portanto, neste exemplo:

$r = 0,12$

$m = 12$

$i = 12,68$ % aa.

Exemplo 2.4
Qual seria a taxa de juros efetiva se a taxa nominal fosse de 12% ao ano capitalizada a cada segundo.

Solução
Definindo $k = m/r$, do exemplo anterior, eq (2.3), tem-se

$$i = \{(1 + \frac{1}{k})^k\}^r - 1$$

Fazendo "m" (ou "k") tender ao infinito, lembrando que:

$$\lim_{k\to\infty} (1 + \frac{1}{k})^k = e \qquad \textbf{(2.4)}$$

vem:

$$i = e^r - 1$$

Neste exemplo, então:

$$i = e^{0,12} - 1 = 12,75\%$$

É interessante notar que a taxa efetiva é sempre maior que a taxa nominal. Para valores pequenos de "r" a diferença da taxa efetiva para a taxa nominal não é muito grande. Neste exemplo a diferença é da ordem de 6% ou seja 12,75%/12%=1,062. Quando a taxa de juros nominal aumenta muito a diferença entre as duas taxas fica muito grande.

Exemplo 2.5

Na época da inflação de 80% ao mês, alguns bancos usavam a taxa nominal da inflação (0,8) capitalizada diariamente. Qual a taxa efetiva de juros?

Solução

Da definição de taxa efetiva e nominal eq. (2.3) vem:

$$i = (1 - \frac{0,80}{30})^{30} - 1 = 120,2\%$$

Observa-se que, neste caso, a diferença entre a taxa nominal e taxa efetiva é enorme.

Além disto, estes exemplos mostram que, levando em consideração o valor temporal do dinheiro, para uma determinada taxa de juros, dois valores diferentes em tempos diferentes podem ser equivalentes. Define-se então:

EQUIVALÊNCIA: Fluxos de caixas diferentes que, para uma determinada taxa de juros, em tempos diferentes têm o mesmo valor.

Exemplo 2.6
Determinar 3 formas equivalentes de se pagar R$ 100,00, a uma taxa de 6% aa, em dez anos.

Solução
Pode-se determinar infinitas soluções para este problema. Vai-se considerar, arbitrariamente, três formas de pagar esta dívida:

a) Pagamento completo ao final do período. Diretamente do exemplo anterior, eq. (2.1) tem-se:

$Sa = 100*(1+0,06)^{10} = 179,08$ R$

b) Pagamento dos juros ao final de cada ano e pagamento do principal da dívida ao final do período.

Pode-se imaginar o seguinte fluxo de caixa:

Tabela 2.1 - Fluxo de caixa "b"

PERÍODO	JUROS	DÍVIDA ANTES	PAGAMENTO	DÍVIDA
0	0,00	0,00	0,00	100,00
1	6,00	106,00	6,00	100,00
2	6,00	106,00	6,00	100,00
3	6,00	106,00	6,00	100,00
4	6,00	106,00	6,00	100,00
5	6,00	106,00	6,00	100,00
6	6,00	106,00	6,00	100,00
7	6,00	106,00	6,00	100,00
8	6,00	106,00	6,00	100,00
9	6,00	106,00	6,00	100,00
10	6,00	106,00	106,00	0,00
	SOMATÓRIO:		160,00	

na tabela foram computados os juros do período, a dívida antes do pagamento anual, o pagamento efetuado ao final do período e a dívida depois de efetuado o pagamento anual. Observa-se que o somatório dos pagamentos efetuados neste item "b" é diferente do somatório do pagamento efetuado no item "a", mas as duas alternativas são absolutamente equivalentes.

c) Pagamento dos juros do período mais um décimo da dívida:

Pode-se fazer uma tabela semelhante àquela do item "b" com o seguinte fluxo de caixa:

Tabela 2.2 - Fluxo de caixa "c"

PERÍODO	JUROS	DÍVIDA ANTES	PAGAMENTO	DÍVIDA DEPOIS
0	0,00	0,00	0,00	100,00
1	6,00	106,00	16,00	90,00
2	5,40	95,40	15,40	80,00
3	4,80	84,80	14,80	70,00
4	4,20	74,20	14,20	60,00
5	3,60	63,60	13,60	50,00
6	3,00	53,00	13,00	40,00
7	2,40	42,40	12,40	30,00
8	1,80	31,80	11,80	20,00
9	1,20	21,60	11,20	10,00
10	0,60	10,60	10,60	0,00
	SOMATÓRIO:		133,00	

Como foi dito, pode-se imaginar infinitas formas de pagar R$ 100,00 em dez anos com uma taxa de juros de 6% aa. Em todas elas o somatório final poderá ser diferente mas, fazendo-se corretamente a aplicação dos juros sobre a dívida, todas elas serão equivalentes. Estas formas de pagamento são equivalentes porque, ao final do período considerado, a dívida é igual a zero.

Em algumas situações é conveniente representar graficamente o fluxo de caixa. Para isto define-se um *DIAGRAMA DE FLUXO DE CAIXA*. Este diagrama consiste de um eixo onde se considera os períodos de capitalização e setas para cima ou para baixo, representando respectivamente os fluxos de caixa positivos ou negativos, conforme a convenção adotada. Esta convenção pode ser, por exemplo, setas para cima para entrada de dinheiro em caixa e para baixo para saída de dinheiro. É conveniente em cada problema estipular uma convenção, uma vez que, em certas situações, o que se deseja é o dinheiro gasto e em outras o dinheiro recebido. É fundamental, entretanto, que, seja qual for a convenção adotada no problema, ela se mantenha coerente.

Exemplo 2.7

Representar o fluxo de caixa das três formas de pagamento do exemplo anterior.

Solução

a) Usando o resultado do exemplo anterior:

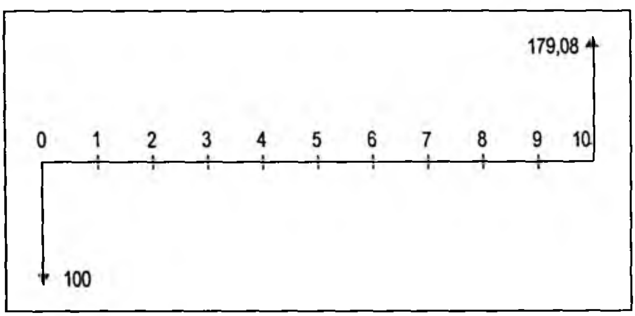

Figura 2.1 - Diagrama do fluxo de caixa do exemplo 2.6 "a".

b) Baseado na tabela 2.1, obtem-se, aproximadamente:

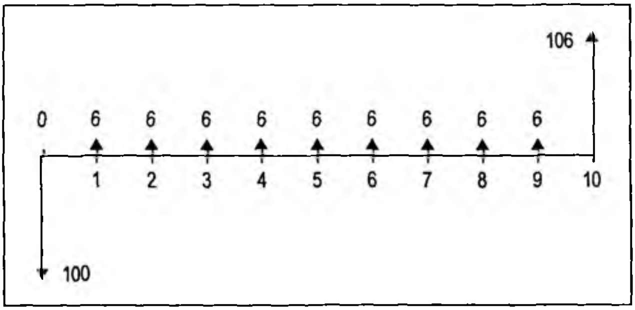

Figura 2.2 - Diagrama de fluxo de caixa do exemplo 2.6 "b"

c) Finalmente, baseado na tabela 2.2 tem-se:

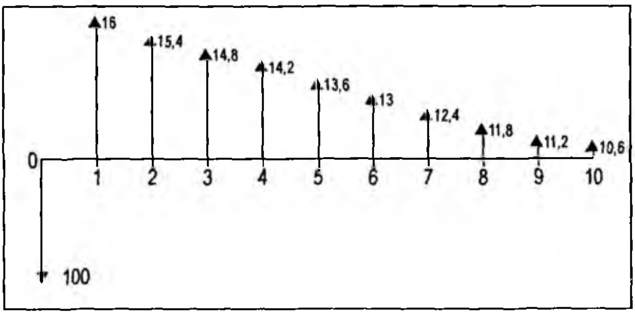

Figura 2.3 - Diagrama de fluxo de caixa do exemplo 2.6 "c"

Para se comparar alternativas em engenharia econômica, é fundamental que estas alternativas sejam comparáveis. Para isto, é preciso que todos os valores sejam referidos a uma mesma referência de tempo. Define-se então:

***VALOR PRESENTE* (P)**: Quantia equivalente no momento inicial de uma série de pagamentos efetuados (ou recebidos).

***VALOR FUTURO* (F)**: Quantia equivalente no momento final de uma série de pagamentos efetuados (ou recebidos).

Exemplo 2.8
Calcular o valor presente das três séries de pagamentos do exemplo anterior.

Solução
Do exemplo 2.2 tem-se:

$$F = P(1+i)^n$$

Portanto, dado o valor pago ao final do período, tem-se o valor presente através de:

$$P = \frac{F}{(1+i)^n} \qquad \textbf{(2.5)}$$

Neste exemplo:

$$P = \frac{179{,}08}{(1{,}06)^{10}} = 100$$

Para se calcular o valor presente dos desembolsos anuais da alternativa b, convém tabelar cada pagamento. Copiando a quarta coluna da tabela 2.1 e calculando o seu valor presente (VP) tem-se:

Tabela 2.3 - Valor presente exemplo 2.6 "b"

PERÍODO	PAGAMENTO	FATOR DE VP	VALOR PRESENTE
0	0,00		
1	6,00	0,94	5,66
2	6,00	0,89	5,34
3	6,00	0,84	5,04
4	6,00	0,79	4,75
5	6,00	0,75	4,48
6	6,00	0,70	4,23
7	6,00	0,67	3,99
8	6,00	0,63	3,76
9	6,00	0,59	3,55
10	106,00	0,56	59,19
SOMATÓRIO	**160,00**	**VP TOTAL**	**100,00**

Evidentemente, o valor presente de alternativas equivalentes tem que ser o mesmo.

Para a terceira série, da mesma forma, tem-se:

Tabela 2.4 - Valor presente exemplo 2.6 "c"

PERÍODO	PAGAMENTO	FATOR DE VP	VALOR PRESENTE
0	0,00		
1	16,00	0,94	15,09
2	15,40	0,89	13,71
3	14,80	0,84	12,43
4	14,20	0,79	11,25
5	13,60	0,75	10,16
6	13,00	0,70	9,16
7	12,40	0,67	8,25
8	11,80	0,63	7,40
9	11,20	0,59	6,63
10	10,60	0,56	5,92
SOMATÓRIO	133,00	VP TOTAL	100,00

Como foi visto, pode-se pagar uma dívida de diferentes formas equivalentes. Uma forma interessante de se pagar uma dívida é através de prestações constantes. Define-se, então:

<u>SÉRIE UNIFORME</u> <u>(U)</u>: Uma série de pagamentos constantes (ou uniformes) ao longo de "n" períodos de capitalização que, a uma determinada taxa de juros "i", equivale a um determinado valor presente "P" (ou, a um determinado valor futuro "F").

É importante observar que uma série uniforme pode começar no instante inicial (período "0" do fluxo de caixa) ou ao final do primeiro período de capitalização. As equações deduzidas para cada uma destas situações são diferentes. Como todo pagamento ou receita efetuada no instante inicial pode ser considerado um valor presente (P), neste livro considera-se que na série uniforme os pagamentos são efetuados ao final dos períodos de capitalização.

Exemplo 2.9

Calcular o valor da série uniforme equivalente às séries de pagamentos do exemplo anterior.

Solução

Em cada período de capitalização deve-se aplicar "U" a uma taxa de juros "i". Calculando o valor futuro da primeira destas aplicações tem-se:

$$F_1 = U(1+i)^{n-1}$$

Da mesma forma, para a segunda aplicação:

$$F_2 = U(1+i)^{n-2}$$

Para a n-ésima aplicação:

$$F_n = U(1+i)^{n-n} = U(1+i)^0 = U$$

O valor futuro total será o somatório de todas estas parcelas:

$$F = \sum F_n = U\{1+(1+i)+(1+i)^2 + ... + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\}$$

Multiplicando os dois lados desta expressão por (1+ i) tem-se:

$$(1+i)F = U\{(1+i)+(1+i)^2 + ... + (1+i)^n\}$$

Fazendo a diferença entre as duas expressões acima, vem:

$$iF = U\{(1+i)^n - 1\}$$

ou

$$F = U\frac{\{(1+i)^n - 1\}}{i} \qquad \textbf{(2.6)}$$

Evidentemente, de forma análoga:

$$U = F\frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad \textbf{(2.7)}$$

Neste problema, então, se F = R$ 179,08, i = 6% aa, e n = 10, diretamente da aplicação da fórmula deduzida:

U = R$ 13,59

Exemplo 2.10
Achar o valor presente da série uniforme definida no exemplo anterior.

Solução
Combinando as duas equações (2.1) e (2.7) previamente deduzidas:

$$U = F\frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

e $$F = P(1+i)^n$$

vem: $$U = P(1+i)^n \frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad \textbf{(2.8)}$$

Esta expressão pode ainda ser expressa de outra forma. Somando e diminuindo a taxa de juros "i", obtem-se:

$$U = P\{\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - i + i\}$$

ou $$U = P\{\frac{i}{(1+i)^n - 1} + i\} \qquad \textbf{(2.9)}$$

Esta expressão mostra que a diferença entre o fator que calcula U dado F e o fator que calcula U dado P é a taxa de juros "i". A expressão inversa é obtida diretamente:

$$P = U\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \qquad \textbf{(2.10)}$$

Neste exemplo, com U = R\$ 13,59, i = 6% aa, n = 10, vem:

P = R\$ 100,00

como não podia deixar de ser.

Resumindo, as expressões principais para a consideração do valor temporal do dinheiro são:

$$F = P(1+i)^n \qquad \textbf{(2.1)}$$

$$P = F\frac{1}{(1+i)^n} \qquad \textbf{(2.5)}$$

$$F = U\frac{\{(1+i)^n - 1\}}{i} \qquad \textbf{(2.6)}$$

$$U = F\frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad \textbf{(2.7)}$$

$$P = U\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \qquad \textbf{(2.10)}$$

$$U = P\{\frac{i}{(1+i)^n - 1} + i\} \tag{2.9}$$

Todos os fatores definidos nestas equações são funções de duas variáveis: a taxa de juros "i" e o número de períodos de capitalização "n". Dado, portanto, estes dois parâmetros, é muito fácil fazer qualquer tipo de operação de equivalência. Estes fatores são facilmente programáveis em qualquer calculadora. Nas calculadoras financeiras eles já vêm previamente programados. Existem também tabelas em livros para vários valores de "i" e de "n". Com os recursos dos microcomputadores a utilização destas tabelas é apenas marginal.

Para não reescrever cada uma destas expressões a cada exemplo define-se os fatores como funções de duas variáveis da seguinte forma:

F/P é chamado fator de acumulação de capital e é dado por FAC'(n,i);

P/F é chamado fator de valor presente (ou atual) e é dado por FVA'(n,i);

F/U é também chamado fator de acumulação de capital e é dado por FAC(n,i);

U/F é chamado fator de formação de capital e é dado por FFC(n,i);

P/U é também chamado fator de valor atual (ou presente) e é dado por FVA(n,i); e

U/P é chamado fator de recuperação de capital e é dado por FRC(n,i).

As expressões deduzidas são extremamente simples. A única dificuldade é a sua correta aplicação. Alguns exemplos resolvidos são mostrados a seguir.

Exemplo 2.11
Calcular a série uniforme equivalente (U) de uma aplicação (P) quando o número de períodos de capitalização tende a infinito.

Solução

$$U = P\{\frac{i}{(1+i)^n - 1} + i\}$$

como $\lim_{n\to\infty} \frac{i}{(1+i)^n - 1} = 0$

vem $U = Pi$ **(2.11)**

A relação inversa é, evidentemente, verdadeira:

$P = U/i$ **(2.12)**

Convém, então, definir:

CUSTO CAPITALIZADO: É o valor presente de uma determinada alternativa de investimento quando o número de períodos de capitalização tende a infinito.

Exemplo 2.12
Qual o valor futuro de uma série uniforme supondo que a taxa de juros tenda a zero?

Solução

$$F = U\frac{\{(1+i)^n - 1\}}{i}$$

Fazendo "i" tender a zero obtem-se uma indeterminação do tipo 0/0. Usando a regra de l'Hôpital tem-se:

$$\lim_{i\to 0} F = \lim_{i\to 0} U \frac{\frac{\partial}{\partial i}\{(1+i)^n - 1\}}{\frac{\partial}{\partial i} i} = \lim_{i\to 0} U \frac{n(1+i)^{n-1}}{1} = nU \qquad \textbf{(2.13)}$$

Pode-se fazer o mesmo para o valor presente e, como era de se esperar, o valor presente e o valor futuro são iguais quando a taxa de juros considerada é igual a zero.

Exemplo 2.13

Qual o valor presente do salário de um engenheiro ao longo da sua vida?

Solução

Considerando:

Salário líquido mensal médio: R$ 2.000,00;
Vida útil de um engenheiro: 35 anos;
Taxa de juros: 3% ao mês.

Vem:

$U = 2.000$
$n = 35*12 = 420$
$i = 3\%$ am
$P = U*FVA(420, 3\%) \approx U/i = R\$\ 66.666,67$

Considerando uma taxa de juros mensal bancária (8% am) tem-se:

$P = U*FVA(420, 8\%) \approx U/i = R\$\ 25.000,00$

É interessante notar que com esta taxa de juros um engenheiro vale menos que um apartamento de quarto e sala em Brasília!

Exemplo 2.14
Supondo uma taxa de juros de 3% am, vale mais a pena alugar ou comprar um apartamento?

Solução
Trata-se de um problema de comparação de um investimento inicial (P) com uma série uniforme (U). Supondo um período de 10 anos (ou 120 meses), vem:

$$P = U^{*}FVA(120{,}3\%) = \frac{U}{(3\%)} \Rightarrow U = 3\%\,P$$

Esta expressão mostra que se o aluguel for igual a 3% do valor do apartamento, então as duas alternativas de investimento são equivalentes. Caso o valor do aluguel seja menor que 3% do investimento, então é melhor manter o dinheiro aplicado (a esta taxa), pagar o aluguel e lucrar a diferença.

Na prática o valor do aluguel é sempre da ordem de 1% do valor do imóvel, portanto, não vale a pena comprar o apartamento. Aliás, é muito difícil justificar economicamente qualquer tipo de investimento quando a taxa de juros é de 3% a.m.

Exemplo 2.15
Calcular o valor futuro (F) de uma aplicação (P), a uma taxa nominal de juros "r", por "n" períodos de capitalização, considerando que os juros sejam computados continuamente.

Solução
Como

$$F = P(1+i)^n$$

e $$i = e^r - 1$$

vem: $F = Pe^{m}$

Em algumas situações é difícil determinar uma série uniforme de prestações que represente corretamente os desembolsos (ou os ganhos) de um determinado investimento. Para se analisar prestações crescentes ao longo do tempo define-se o *GRADIENTE UNIFORME* (G). O gradiente uniforme é uma série de pagamentos ou reembolsos que crescem uniformemente a partir do segundo período de capitalização.

Exemplo 2.16

Calcular o valor futuro (F) de um gradiente uniforme definido pelo diagrama de fluxo de caixa representado na figura a seguir:

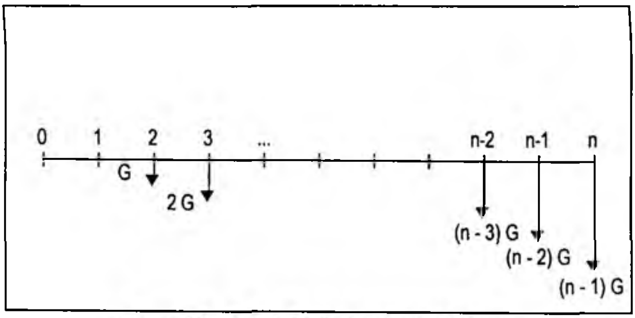

Figura 2.4 - Definição de Gradiente Uniforme

Solução

Observa-se na figura na página seguinte que, por definição, o gradiente começa no segundo período de capitalização. Pode-se decompor o gradiente em (n-1) séries uniformes, calcular o valor futuro de cada série uniforme e somar o resultado.

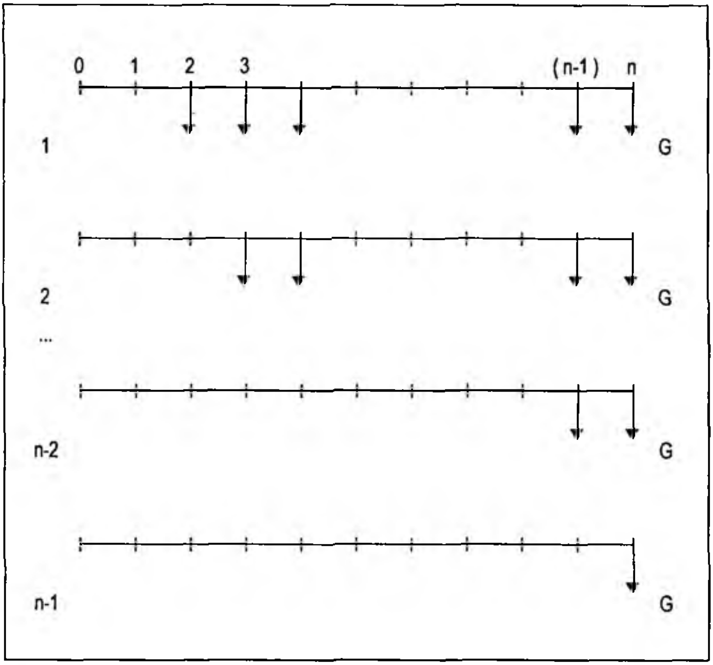

Figura 2.5 - Decomposição do gradiente em séries uniformes.

$$F_1 = G\{\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i}\}$$

A segunda série uniforme (também de amplitude "G") começaria no terceiro período de capitalização e o seu valor final será dado por:

$$F_2 = G\{\frac{(1+i)^{n-2}-1}{i}\}$$

Nesta sequência, a penúltima série (n-2), é dada por:

$$F_{n-2} = G\{\frac{(1+i)^{2}-1}{i}\}$$

e a última é dada por:

$$F_{n-1} = G\{\frac{(1+i)^1 - 1}{i}\}$$

O somatório destas diversas séries uniformes com durações diferentes dá o resultado futuro de um gradiente.

$$F = \sum_{k=1}^{n-1} F_k = G\{\frac{(1+i)^{n-1} - 1}{i} + \frac{(1+i)^{n-2} - 1}{i} + ... + \frac{(1+i)^2 - 1}{i} + \frac{(1+i) - 1}{i}\}$$

$$F = \frac{G}{i}\{(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + ... + (1+i)^2 + (1+i) - (n-1)\}$$

$$F = \frac{G}{i}\{(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + ... + (1+i)^2 + (1+i) + 1\} - \frac{nG}{i}$$

O termo entre chaves já foi calculado, no exemplo 2.9, portanto:

$$F = \frac{G}{i}\{\frac{(1+i)^n - 1}{i}\} - \frac{nG}{i}$$

ou:

$$F = G\{\frac{(1+i)^n - 1}{i^2} - \frac{n}{i}\} \qquad \textbf{(2.14)}$$

Exemplo 2.17

Calcular o valor presente e o valor da série uniforme equivalentes ao gradiente uniforme G.

Solução

Tendo sido definida a relação entre F e P, e F e U, pode-se derivar a expressão acima deduzida para o cálculo do valor presente e da série uniforme.

$$P = G\left\{\frac{\dfrac{(1+i)^n - 1}{i^2} - \dfrac{n}{i}}{(1+i)^n}\right\} \qquad \textbf{(2.15)}$$

Da mesma forma:

$$U = G\left\{\frac{(1+i)^n - 1 - ni}{i[(1+i)^n - 1]}\right\} \qquad \textbf{(2.16)}$$

As relações inversas são, evidentemente, válidas. No entanto, elas são de pouco uso prático, uma vez que, para simplificar a análise de uma alternativa de investimento, não tem sentido transformá-la em um gradiente uniforme.

Exemplo 2.18
Calcular o valor presente de um gradiente uniforme quando o número de períodos de capitalização tende a infinito.

Solução
Usando a expressão deduzida anteriormente observa-se que, quando "n" tende a infinito, a relação entre P e G fica indetermidada.

$$P = G\left\{\frac{\dfrac{(1+i)^n - 1}{i^2} - \dfrac{n}{i}}{(1+i)^n}\right\}$$

Usando a regra de l'Hôpital e lembrando que:

$$A^x = \exp(x \ln A)$$

Portanto:

$$\frac{\partial}{\partial x} A^x = \frac{\partial}{\partial x}\exp(x \ln A) = \ln A \exp(x \ln A)$$

A derivada do numerador e do denominador ficam, respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial n}\{\frac{(1+i)^n - 1}{i^2} - \frac{n}{i}\} = \frac{\ln(1+i)\exp(n\ln(1+i))}{i^2} - \frac{1}{i}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(1+i)^n = \ln(1+i)\exp(n\ln(1+i))$$

A relação continua indeterminada. Aplicando-se mais uma vez a mesma regra obtem-se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P}{G} = \frac{1}{i^2} \quad \textbf{(2.17)}$$

Exemplo 2.19

Calcular o valor presente do salário de um engenheiro considerando que o salário inicial seja de R\$ 1.000,00, que o salário final seja de R\$ 5.000,00 e que a vida útil de um engenheiro seja 35 anos. Considerar uma taxa de juros de 10% aa.

Solução

O salário anual deste engenheiro ao final do primeiro ano será: R\$ 12.000,00. Ao final do último ano será de R\$ 60.000,00. Pode-se supor que o aumento salarial seja linear ao longo da vida. Desta forma, é necessário definir duas séries. A primeira, uniforme, a partir do final do primeiro ano, de R$ 12.000,00. A segunda, a partir do final do segundo ano, dada pela variação anual do salário (G). O valor de G é calculado como a diferença entre o valor final e o valor inicial dividida pelo número de períodos considerados:

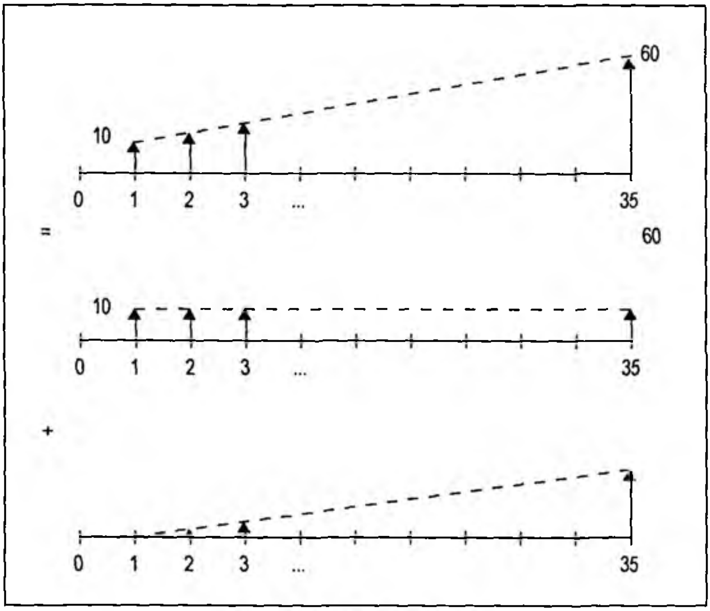

Figura 2.6 - Exemplo 2.19

$$(n-1)G = 60 - 12 \tag{2.18}$$

$$G = \frac{60-12}{34} = R\$1.411,76 \text{ por ano}$$

O valor presente da série uniforme é dado por:

$U = 12.000$
$n = 35$
$i = 10\ \%\ aa$

P_1=12.000*FVA(35,10%) = R$ 115.729,91

O valor presente do gradiente uniforme é dado por:

$$P_2 = 1.411,76\left\{\frac{\dfrac{(1,1)^{35}-1}{0,1^2}-\dfrac{35}{0,1}}{1,1^{35}}\right\} = \text{R\$}118.570,00$$

Portanto:

$P = P_1 + P_2 =$ R$ 234,3 mil

Resolvendo o mesmo problema considerando uma taxa anual de juros de 6%, vem:

U = 12.000
n = 35
i = 6% aa

P_1=12.000*FVA(35,6%) = R$ 173.978,00

G = 1.411,76
n = 35
i = 6% aa

P_2= R$ 233.862,99

$P = P_1 + P_2 =$ R$ 407,8 mil

Exemplo 2.20
Repetir o exemplo anterior considerando uma taxa de juros de 3% am e comparar o resultado com aquele do exemplo 2.13.

Solução

O período de capitalização, neste caso, tem que ser mensal. Tem-se, então:

$$n = 12 * 35 = 420$$

Da mesma forma que no exemplo anterior, o problema deve ser dividido em duas séries. A primeira, uniforme, com o valor do salário mensal inicial: R$ 1.000,00. A segunda, um gradiente uniforme cujo o valor G é calculado exatamente da mesma forma. Como o número de períodos de capitalização é muito grande tem-se:

$$P_1 = U / i = 1.000 / 0{,}03 = R\$ \ 33.333{,}33$$

$$G = 4.000 / 419 = R\$ \ 9{,}54$$

$$P_2 = G / i^2 = 9{,}54 / 0{,}0009 = R\$ \ 10.600{,}00$$

O valor presente total será: P = R$ 43.933,33. Observa-se que, mesmo com um salário médio maior que o do exemplo 2.13, o valor presente ficou muito menor porque, com grandes taxas de juros, os valores do final do ciclo, mesmo que muito grandes, quando descontados para o valor presente, tornam-se desprezíveis.

2.2) Exercícios Resolvidos

1. Investiu-se R$ 1.000,00 em janeiro de 1981 a uma taxa de 10% aa. Qual o valor acumulado em janeiro de 1991?

Solução

$P = 1000$
$i = 10\ \%$ aa
$n = 10$

$$F = P * FVA'(10{,}10\%) = 1000 * (1{,}10)^{10} = R\$ \ 2.593{,}74$$

(2) Quanto se deve investir em janeiro para que em dezembro tenha-se R$ 1.000,00 acumulado, a uma taxa de 1% am?

Solução

$F = 1.000$
$i = 1\%$ am
$n = 12$

$$P = F*FAC'(12,1\%) = 1.000*(1,01)^{-12} = R\$\ 887,45$$

Obs.: É importante notar que a noção de valor presente não precisa estar relacionada ao dia de hoje mas a qualquer instante que se defina como instante inicial.

---

(3) Quanto se pode retirar por ano de um depósito de R$ 1.000,00 feito em janeiro de 1981 para que, ao final de 1991 não se tenha mais nada na conta? (considere, ainda, uma taxa de 10% aa).

Solução

$P = 1.000$
$i = 10\%$ aa
$n = 10$

$$U = P * FRC\ (10,10\%) = R\$\ 162,75$$

Obs.: Os exercícios 2.21 e 2.23 mostram que, a uma taxa de 10% aa, R$ 1.000,00 em 1981 é equivalente a R$ 2.593,74 em 1991 ou a dez prestações anuais de R$ 162,75.

---

(4) Investindo-se na caderneta de poupança (a uma taxa de 6% aa), R$ 2.000,00 hoje, R$ 1.500,00 depois de dois anos, e mais R$ 1.000,00 depois de 4 anos, qual será a quantia poupada ao final de 10 anos?

Solução

Neste caso, não existe nenhuma fórmula simples de cálculo. A forma mais fácil de resolver este problema é calcular o valor futuro das três aplicações fazendo variar o instante da aplicação em cada caso.

$P_1 = 2.000$
$n_1 = 10$
$i = 6\%$ aa

$F_1 = 2.000\,(1{,}06)^{10} = R\$\ 3.581{,}69$

$P_2 = 1.500$
$n_2 = 8$
$i = 6\%$ aa

$F_2 = 1.500(1{,}06)^{8} = R\$\ 2.390{,}77$

$P_3 = 1.000$
$n_3 = 6$
$i = 6\%$ aa

$F_3 = 1.000(1{,}06)^{6} = R\$\ 1.418{,}52$

$F = F_1 + F_2 + F_3 = R\$\ 7.390{,}99$

Obs.: Este problema também pode ser resolvido fazendo o valor presente de cada aplicação e, depois, calculando o valor futuro da soma.

---

5 Qual o valor presente de 10 aplicações trimestrais iguais de R$ 1.000,00 com juros mensais de 4%?

Solução

Uma primeira solução seria fazer o valor presente de cada aplicação, desconsiderando o fato de que elas sejam iguais:

$$P_n = F_n\,(1{,}04)^{-3n}$$

$$P = \sum_{n=1}^{10} P_n = R\$5.539{,}48$$

Outra solução, mais rápida, seria o cálculo dos juros trimestrais efetivos, considerando o período de capitalização igual a 3 meses. Neste caso:

$r = 12\%$ ao trimestre
$m = 3$

$$i = (1 + \frac{0{,}12}{3})^3 - 1 = 12{,}48\% \text{ ao trimestre}$$

$U = 1.000$
$n = 10$

$$P = U * FVA\,(10,\ 12{,}48\%) = R\$\ 5.539{,}48$$

Obs.: Os resultados têm que ser os mesmos! O segundo método é muito mais simples, no entanto, alguns livros usam o primeiro por que só têm tabuladas as taxas de juros inteiras. Mais uma vez convém lembrar que qualquer calculadora programável fornece o fator de conversão diretamente.

---

(6) Quanto tempo demora para uma determinada quantia aplicada dobrar de valor se aplicada a uma taxa de 3 % am?

Solução
A incógnita agora é o número de períodos de capitalização.

$F = 2P$
$F = P.(1+i)^n$

$$n\ln(1 + i) = \ln\frac{F}{P}$$

$$n = \frac{\ln \frac{F}{P}}{\ln(1+i)} \qquad \textbf{(2.19)}$$

$$n = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}03)} = 23{,}45 \quad \text{meses}$$

Portanto, são necessários quase dois anos para dobrar um valor aplicado a uma taxa de 3% am.

---

7. Uma determinada aplicação paga R$ 100,00, ao final de 5 anos, para um investimento de R$ 80. Qual a taxa anual de juros?

Solução
A incógnita é a taxa de juros:

$F = 100$
$P = 80$
$n = 5$

$F = P\,(1+i)^n$

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1 \qquad \textbf{(2.20)}$$

$i = 4{,}56\,\%$ a.a.

---

8. Quanto se deve aplicar mensalmente em uma caderneta de poupança (i = 6% aa) para, ao final de 20 anos, comprar um apartamento de R$ 100.000,00 para o filho?

Solução

Pode-se considerar um período anual de capitalização, supondo que a aplicação anual seja igual a 12 vezes a aplicação mensal. Então:

F = 100.000
n = 20 anos
i = 6 % aa

U = F*FFC(20, 6%) = R$ 2.710,00 por ano

Portanto equivalente a uma aplicação mensal de R$ 225,83.

---

(9) Num passado recente a taxa de juros da poupança estava em 3% am. Supondo que esta taxa se mantivesse por vinte anos, recalcular o depósito mensal para a compra do apartamento.

Solução

F = 100.000
n = 20 * 12 = 240
i = 3% am

U = F * FFC(240,3%) = R$ 2,49 por mês!

Estas contas são interessantes para mostrar o absurdo destas taxas de juros.

---

(10) O condomínio de um prédio cobra de aluguel de vaga na garagem R$ 50,00 por mês (ao final do mês). Se um morador preferir fazer um único pagamento trimestral de R$ 150,00 em que dia ele deve pagar o aluguel (considerando uma taxa de juros de 1% am) para que nem o morador, nem o condomínio sejam prejudicados?

Solução
O valor presente do custo da vaga por trimestre é dado por:

$U = 50$
$n = 3$
$i = 1\%$

$P = U * FVA\ (3,1\%) = 50 * \ 2,94 = R\$\ 147,04$

Se o morador quer pagar com um cheque de R$ 150,00, então o problema é calcular o número de períodos de capitalização que, com esta taxa de juros, seja equivalente ao valor presente calculado.

$P = 147,04$
$F = 150$
$i = 1\%$

$$n = \frac{\ln \frac{F}{P}}{\ln(1+i)} = 2$$

O aluguel deve ser pago ao final do segundo mês de utilização.

---

(11) Um apartamento custa R$ 160.000,00 mas pode ser quitado à vista por R$ 120.000,00. O valor do apartamento pode também ser financiado em 36 meses com uma taxa de 1,5% am. Qual a taxa real de juros do financiamento?

Solução
O cálculo das prestações mensais é direto:

$P = 160.000$
$n = 36$
$i = 1,5\%$

$$U = P * FRC(36, 1{,}5\%) = 160.000 * 0{,}0362 = R\$ \ 5.784{,}38$$

Para o cálculo dos juros reais deve-se calcular para qual taxa de juros o valor à vista corresponde à prestação paga. Neste caso:

$U = 5.784{,}38$
$P = 120.000$
$n = 36$

$$FRC\ (36, i) = U/P = 0{,}0482$$

Infelizmente, não existe nenhum método direto de cálculo da taxa de juros. Uma solução possível é a consulta das tabela de juros para n = 36. Desta consulta obtem-se que a taxa de juros está entre 3,3 e 3,4 % ao mês.

$i = 3{,}4 \rightarrow FRC = 0{,}0485$
$i = 3{,}3 \rightarrow FRC = 0{,}0478$

$$i \approx 3{,}35\ \%\ am$$

Outra forma, mais inteligente, é partir da definição do fator de recuperação de capital e derivar uma expressão para o cálculo iterativo da taxa de juros.

$$FRC(n,i) = \frac{U}{P} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Explicitando a taxa de juros em função dela própria, vem:

$$(1+i)^n = \frac{U}{P}\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

A qual pode ser resolvida iterativamente por:

$$i^{(j+1)} = \sqrt[n]{\frac{U}{P}\{\frac{(1+i^{(j)})^n - 1}{i^{(j)}}\}} - 1 \qquad \textbf{(2.21)}$$

Partindo de um valor inicial, por exemplo, de 3%, em uma dúzia de iterações obtem-se

i = 3,346 % ao mês (!!!)

---

(12) Se a entrega do apartamento está prevista para o final dos 36 meses, qual o valor pago pelo apartamento?

Solução

Se o comprador pagou à vista e só vai receber o imóvel 36 meses depois, as alternativas que ele deve formular são: será que não vale a pena colocar o dinheiro na poupança e só comprar ao final do período? Ou, colocar mensalmente a prestação na poupança para saber quanto se teria ao final do período? É importante observar que a taxa de juros que vai remunerar a poupança não tem relação com aquela contratada pela construtora. Não tem sentido, portanto, neste problema, usar a taxa de 1,5% am e sim a taxa de juros da poupança de 0,5 % am, tem-se:

P = 120.000
n = 36
i = 0,5 % am

F = P * FAC'(36, 0,5%) = 120.000 * 1,196 = R$ 143.601,66

ou

U = 5.784,38
n = 36
i = 0,5 % am

F = U * FAC(36, 0,5%) = 5.784,38 * 39,336 = R$ 227.534,98

Obs.: Observe que a prestação e o valor à vista só são equivalentes na taxa real de juros da construtora calculada no exercício 11. Em qualquer taxa inferior o valor futuro da série uniforme será maior que o valor futuro do investimento P.

---

(13) Um investimento de R$ 50.000,00 paga anualmente R$ 7.000,00 por quinze anos. Qual a taxa de juros?

Solução

O problema é idêntico ao 11. Não é possível explicitar "i", no entanto, o seu cálculo iterativo não apresenta nenhuma dificuldade. Usando a equação deduzida anteriormente (2.21), com:

U = 7.000
P = 50.000
n = 15

$$i^{(j+1)} = \sqrt[n]{\frac{U}{P}\{\frac{(1+i^{(j)})^n - 1}{i^{(j)}}\}} - 1$$

i = 11,12 % aa

---

(14) Um título de capitalização devolve ao investidor (ou cliente) metade do dinheiro aplicado, corrigido monetariamente, dois anos depois da aplicação. Supondo que a taxa mínima de atratividade da empresa seja de 10 % aa, qual o lucro bruto para o dono desta aplicação?

Solução

Em todos os problemas resolvidos não foi levado em conta a inflação. Supõe-se que o dinheiro considerado mantenha o seu valor de compra com o tempo.

Considerando o valor temporal do dinheiro só é possível comparar investimentos numa mesma base de tempo, então, ou se calcula o valor presente do montante devolvido, ou o valor futuro da aplicação. A diferença entre os dois será o lucro bruto. No primeiro caso será o lucro atual no segundo, o lucro futuro. Supondo que o valor aplicado seja 100. Então:

$F = P/2$
$Lucro = P - (P/2)(1 + i)^{-n}$

$P = 100$
$n = 2$
$i = 10\ \%$ aa

$Lucro = 100 - 41,3 = 58,7.$

De cada R$ 100,00 pagos, R$ 58,70 ficam na conta do dono da empresa de capitalização!

---

15 O Baú da Felicidade funciona mais ou menos da mesma forma. O cliente paga mensalmente um carnê para, ao final de dois anos, retirar um produto de valor igual ao somatório das parcelas em uma das lojas do Baú. Qual o lucro do processo supondo uma taxa de juros de 1% am?

Solução
Mais uma vez, tem que se comparar os valores em uma determinada referência temporal. Esta referência pode ser atual ou futura (daqui a dois anos). Considerando o valor presente, de uma mensalidade de, digamos, 100, tem-se:

$P1 = U * FVA\ (n, i\%)$
$P2 = nU * FVA'(n, i\%)$
$Lucro = P1 - P2 = U * \{ FVA\ (n, i\%) - n*FVA'(n, i\%)\}$

$U = 100$
$n = 24$
$i = 1\ \%$

Lucro = 2,34 U = R$ 234,18

Nestes cálculos aproximados não foram considerados inadimplência nem a diferença entre o preço da mercadoria das lojas do Baú e outra loja qualquer.

---

(16) Repetir o problema anterior considerando uma taxa de juros de 3 % am.

Solução

U = 100
n = 24
i = 3 %

Lucro = P1 - P2 = U * { FVA (n, i%) - n*FVA'(n, i%)}

Lucro = 1.693,55 - 1.180,64 = R$ 512,91

---

(17) Quanto se deve depositar anualmente em uma caderneta de poupança (6 % aa) para pagar os 4 anos de estudo na Universidade do filho (aproximadamente R$ 25.000,00 por ano)?

Solução

Pode-se fazer o seguinte diagrama de fluxo de caixa, supondo que o filho entre na Universidade com 18 anos, e que, a partir deste momento não se faça mais poupança.

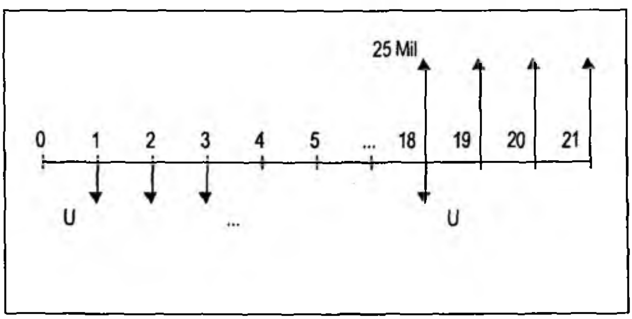

Figura 2.7 - Fluxo de caixa do exercício 17

É preciso que as duas séries (de poupança e desembolso) tenham uma mesma referência de tempo. Esta referência pode ser o instante inicial ou o instante 18 anos. Em qualquer solução é importante lembrar que todas as expressões deduzidas levaram em consideração que o depósito (ou aplicação) foi feito ao final do período. Trazendo o desembolso (que é conhecido) para o instante inicial tem-se:

$U_1 = 25.000$
$n = 4$
$i = 6\ \%\ aa$

$P_1 = U_1 * FVA(4, 6\%) = 25.000 * 3{,}4651 = 86.627{,}64$

Este valor, pela definição da série uniforme, está relacionado ao instante 17. Para se ter o valor presente então:

$F = P_1 = 86.627{,}64$
$n = 17$
$i = 6\ \%\ aa$

$P_2 = F * FVA'(17, 6\%) = 86.627{,}64 * 0{,}3714 = 32.170{,}42$

O que se quer é o depósito anual. Portanto, ao longo de dezoito anos de preparação para Universidade:

$P = 32.170{,}42$
$n = 18$
$i = 6\ \%\ aa$

$U = P * FRC\ (18, 6\%) = 32.170{,}42 * 0{,}09236 = R\$\ 2.971{,}15$

---

(18) Um equipamento que custa R$ 10.000,00 tem uma vida útil de 6 anos. O custo anual de manutenção no primeiro ano é de R$ 1.500,00. Este custo aumenta linearmente com o tempo a uma taxa de R$ 300,00 por ano. Qual o custo anual equivalente deste equipamento? (Supor uma taxa de juros de 10 % aa).

Solução

Trata-se de um problema de gradiente uniforme. Neste exemplo o custo do equipamento pode ser dividido em três partes: o investimento, a manutenção constante e a manutenção variável. Calculando o custo anual equivalente de cada uma das parcelas tem-se:

$P_1 = 10.000$
$n = 6$
$i = 10\ \%\ aa$

$U_1 = P_1 * FRC(6, 10\%) = 10.000 * 0{,}2296 = 2.296{,}07$
$U_2 = 1.500$

$G_3 = 300$
$n = 6$
$i = 10\ \%\ aa$

$$U_3 = G_3\{\frac{(1+i)^n - 1 - ni}{i[(1+i)^n - 1]}\} = 300 * 2{,}22 = 667{,}07$$

$U = U_1 + U_2 + U_3 = R\$\ 4.463{,}14$

---

(19) Um agiota empresta dinheiro dizendo cobrar uma taxa de 20% ao ano. Na verdade ele acrescenta vinte por cento ao valor emprestado e divide o resultado em doze prestações. Qual a taxa de juros real cobrada pelo agiota?

Solução

Pela fórmula do agiota, para R$ 100,00 tomados de empréstimo a prestação seria dada por:

$\text{Prestação} = (100 * 1{,}2)/\ 12 = 10$

Então:

$U = 10$
$P = 100$
$n = 12$

A incógnita é, mais uma vez, a taxa de juros. Ela deve ser obtida pelo processo iterativo descrito anteriormente, eq (2.21)

$$i^{(j+1)} = \sqrt[n]{\frac{U}{P}\frac{(1+i^{(j)})^n - 1}{i^{(j)}}} - 1$$

Resolvendo este processo iterativo, tem-se:

$i = 2{,}92\ \%\ \text{am}$

A taxa anual de juros é então dada por:

$i\ (\text{aa}) = (1 + i\ (\text{am}))^{12} - 1 = 41{,}25\ \%\ \text{aa}$

Na maior parte das situações é mais importante calcular os juros reais do que saber se este juro real é nominal ou efetivo.

---

(20) A forma mais comum de atuação do agiota é pré descontar os juros cobrados, ou seja, para um empréstimo de R$ 100,00, a uma taxa que o agiota diz ser 20% ao mês, ele entrega R$ 80,00 e cobra R$ 100,00 ao final do mês. Qual a taxa real de juros?

Solução

$P = 80$
$F = 100$
$n = 1$

$F = P\ (1 + i)^n$

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1$$

$$i = 25\ \%\ \text{am}\ (!)$$

(21) Deseja-se comprar um carro de R$ 20.000,00. A concessionária propõe um financiamento em 36 meses com juros de 3% ao mês. Em quanto tempo é possível adquirir este automóvel se em vez de pagar a prestação à concessionária, o consumidor aplicar o mesmo valor em um investimento que renda 1% ao mês?

Solução

$P = 20.000$
$n = 36$
$i = 3\%$ am

$U = P * FRC\ (36, 3\%) = 20.000 * 0,0458 = R\$\ 916,07$

$F = 20.000$
$i = 1\%$ am
$U = 916,07$

Usando a fórmula do fator de acumulação de capital:

$$F = U\frac{\{(1+i)^n - 1\}}{i}$$

vem

$$n = \frac{\ln(\frac{Fi}{U} + 1)}{\ln(1+i)} \qquad \textbf{(2.22)}$$

Portanto

$n = 19,8$ meses

Capítulo 3

MÉTODOS DE COMPARAÇÃO DE ALTERNATIVAS DE INVESTIMENTO

3.1) Introdução

Para comparar alternativas, como foi visto nos exercícios resolvidos, é fundamental que se escolha uma referência comum de tempo. As formas mais comuns de comparação de alternativas são:

"Payback";
Custo Anual Equivalente;
Valor Presente; e
Taxa de Retorno.

Na sequência, serão discutidas estas quatro formas, analisando as vantagens e desvantagens associadas a cada uma delas.

3.2) Payback

A técnica de comparação de alternativas de investimento pelo método chamado "Payback" é a mais simples e, por esta razão, é muito usada. Ela consiste em avaliar o tempo que um determinado investimento levaria para que o retorno ficasse maior que o valor investido. O método não leva em consideração nem os juros nem os rendimentos após a recuperação do capital investido.

Exemplo 3.1

Uma empresa estuda um determinado investimento de R$ 150.000,00 que, segundo os seus analistas, daria um retorno mensal de R$ 20.000,00 nos próximos doze meses. Se esta empresa considera que é razoável investir em projetos que recupere o capital investido em, no máximo, um ano, verificar se ela deve ou não aceitar este investimento.

Solução

P = 150.000
U = 20.000

como o retorno é constante:

n = P / U = 7,5 meses.

A empresa, portanto, deve aceitar o investimento.

Se a série de receitas não for uniforme, o cálculo do "payback" deve ser feito considerando o valor acumulado do investimento.

Exemplo 3.2
Suponha que o retorno do exemplo anterior tenha um retorno crescente conforme mostrado na tabela abaixo:

Tabela 3.1 - Exemplo 3.2

PERÍODO	CAPITAL
0	-150
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
6	30
7	35
8	40
9	45
10	50
11	55
12	60

Avaliar o "payback" deste investimento.

Solução

A melhor forma de resolver este problema é usando uma planilha de cálculo e colocar uma coluna com o valor acumulado do capital investido e do retorno:

Tabela 3.2 - Cálculo do valor acumulado.

PERÍODO	CAPITAL	VALOR ACUMULADO
0	-150	-150
1	5	-145
2	10	-135
3	15	-120
4	20	-100
5	25	-75
6	30	-45
7	35	-10
8	40	30
9	45	75
10	50	125
11	55	180
12	60	240

Fazendo uma interpolação linear entre os períodos 7 e 8, obtem-se:

$$n = 7,25$$

A informação obtida através do método do "payback" simples é muito pobre já que não considera nem o valor temporal do dinheiro nem o valor recebido após a recuperação do capital. Observe que a informação obtida pelo método nos exemplos 3.1 e 3.2 são muito parecidas mesmo com investimentos cuja a receita é bastante diferente.

Para se ter uma informação mais precisa sobre um determinado investimento pode-se usar o método chamado "payback" descontado que nada mais é que a consideração do valor presente das receitas a uma determinada taxa de juros.

Exemplo 3.3

Repetir o exemplo anterior considerando uma taxa de 1% am e em seguida uma taxa de 8% am.

Solução

Usando a mesma tabela e considerando o valor presente do retorno tem-se:

Tabela 3.3 - Cálculo do valor presente acumulado (i = 1% a.m.)

PERÍODO	CAPITAL	VP	ACUMULADO
0	-150	-150	-150,00
1	5	4,95	-145,05
2	10	9,80	-135,25
3	15	14,56	-120,69
4	20	19,22	-101,47
5	25	23,79	-77,68
6	30	28,26	-49,42
7	35	32,65	-16,77
8	40	36,94	20,16
9	45	41,15	61,31
10	50	45,26	106,57
11	55	49,30	155,87
12	60	53,25	209,12

Fazendo-se uma interpolação linear obtem-se:

$$n = 7,45$$

Considerando uma taxa de 8% a.m.

Tabela 3.4 - Cálculo do valor presente acumulado (i = 8% a.m.)

PERÍODO	CAPITAL	VP	ACUMULADO
0	-150	-150	-150,00
1	5	4,63	-145,37
2	10	8,57	-136,80
3	15	11,91	-124,89
4	20	14,70	-110,19
5	25	17,01	-93,17
6	30	18,91	-74,27
7	35	20,42	-53,85
8	40	21,61	-32,24
9	45	22,51	-9,73
10	50	23,16	13,43
11	55	23,59	37,02
12	60	23,83	60,85

Fazendo uma interpolação linear obtem-se:

$$n = 9{,}42$$

A consideração do "payback" simples ou descontado pode mudar completamente os resultados

3.3) Custo Anual Equivalente

A técnica do custo anual equivalente (ou custo mensal equivalente) ou, simplesmente, custo equivalente, consiste em transformar uma sequência de desembolsos e receitas de um determinado projeto em uma série uniforme.

Para transformar os valores ao longo do tempo em uma série uniforme é indispensável conhecer a taxa de juros. Esta é a parte mais delicada da análise. A escolha de uma taxa de juros que não corresponda à realidade inutiliza completamente o estudo.

A técnica consiste em transformar todas as alternativas em séries uniformes e escolher aquela na qual o benefício anual é o maior.

Como parte do lucro normalmente é consumido pelo Imposto de Renda (IR), a taxa de juros real da alternativa deve ser calculada descontando o IR. Muitas alternativas de investimento que parecem atrativas podem se tornar um mau negócio depois de descontado o valor do imposto de renda. Este aspecto vai ser analisado no próximo capítulo, na análise que se segue o IR não é considerado.

Exemplo 3.4

Uma empresa produz, manualmente, um determinado produto. A sua folha mensal de pagamento é de R$ 80.000,00. Propõe-se a compra de uma máquina que, a um custo de R$ 350.000,00 reduziria a folha de pagamento à metade mas teria um custo adicional de manutenção e energia de R$ 20.000,00 por mês. A máquina tem uma vida útil de 2 anos e nenhum valor é esperado na sua revenda. Considerando que é possível pegar dinheiro emprestado no sistema financeiro a uma taxa de 1% am analisar a viabilidade do investimento.

Solução

Como foi dito, engenharia econômica é a comparação de alternativas. Neste exemplo a primeira alternativa (A) é não fazer nada! Ou seja, continuar com a produção manual, gastando mensalmente a folha de pagamento.

$$U_A = 80.000$$

A segunda alternativa (B) pode ser dividida em três: o investimento, a manutenção e a diferença da folha de pagamento. Transformando em série uniforme:

$$P_1 = 350.000 \text{ (investimento)}$$
$$n = 2 * 12 = 24$$
$$i = 1 \text{ \% am}$$

$$U_1 = P_1 * FRC(24, 1\%) = 350.000 * 0,0471 = R\$ \ 16.475,72$$

As duas outras partes do investimento já são séries uniformes:

$$U_2 = 20.000 \quad \text{(manutenção)}$$
$$U_3 = 40.000 \quad \text{(folha de pagamento)}$$

$$U_B = U_1 + U_2 + U_3 = R\$ \ 76.475,72 \text{ por mês}$$

Com esta taxa de juros o investimento é viável pois $U_B < U_A$.

Exemplo 3.5
Repetir o exemplo anterior para uma taxa de juros de 3% am.

Solução

$$U_A = 80.000$$

$$U_1 = P_1 * FRC(24, 3\%) = 350.000 * 0,0590 = 20.650,00$$

$$U_B = U_1 + U_2 + U_3 = R\$ \ 80.650,00 \text{ por mês}$$

Com esta outra taxa de juros o investimento não vale a pena ($U_B > U_A$). Quanto maior a taxa de juros mais difícil fica viabilizar economicamente um investimento.

Normalmente, um dado investimento apresenta um valor residual ao final da sua vida útil. É interessante desenvolver uma expressão para cálculo da série uniforme considerando este valor residual do investimento.

Exemplo 3.6
Calcular a série uniforme de um investimento "P" que, ao final da sua vida útil de "n" anos, apresente um valor residual "F" considerando uma taxa de juros de "i" % ao ano.

Solução

$$U_1 = P\{\frac{i}{(1+i)^n - 1} + i\}$$

$$U_2 = F\{\frac{i}{(1+i)^n - 1}\}$$

$$U' = U_1 - U_2 = (P - F)\{\frac{i}{(1+i)^n - 1}\} + Pi \quad \textbf{(3.1)}$$

Exemplo 3.7
Qual o custo anual equivalente de um carro, considerando os dados do exemplo 1.1?

Solução
Inicialmente deve-se definir qual a taxa de juros. As alternativas são: ou comprar um carro para passar quatro anos com ele (e, nestes quatro anos, fazer uma viagem para o Rio), ou aplicar o dinheiro no sistema financeiro. No caso de não se ter o dinheiro para fazer o investimento, a taxa de juros a ser considerada deve ser a taxa do empréstimo solicitado para a compra do carro. Considerando uma taxa de 12 % aa e usando a tabela do exemplo 1.1, tem-se:

Tabela 3.5 - Dados do exemplo do carro

PERÍODO	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
gasolina	0	1250	1250	1250	1250
manutenção	0	1000	1000	1000	1000
seguro	1000	900	800	700	0
investimento	10000	0	0	0	-6000
TOTAL	**11000**	**3150**	**3050**	**2950**	**-3750**

Pode-se calcular o valor anual equivalente de cada componente de custo:

A) gasolina:

$$U_A = 1.250$$

B) Manutenção:

$U_B = 1.000$

C) Seguro:

$P_1 = 1.000$
$n = 4$
$i = 12\ \%\ aa$

$U_1 = P_1 * FRC(4, 12\%) = 1.000 * 0{,}3292 = 329{,}23$

$F_2 = 900$
$n = 1$
$i = 12\ \%\ aa$

$P_2 = F_2 * FVA'(1, 12\%) = 900 * 0{,}8928 = 803{,}57$

$F_3 = 800$
$n = 2$
$i = 12\ \%\ aa$

$P_3 = F_3 * FVA'(2, 12\%) = 800 * 0{,}7972 = 637{,}75$

$F_4 = 700$
$n = 3$
$i = 12\ \%\ aa$

$P_4 = F_4 * FVA'(3, 12\%) = 700 * 0{,}7118 = 498{,}24$

$P = P_2 + P_3 + P_4 = 1.939{,}57$

$U_2 = P * FRC(4, 12\%) = 1.939{,}57 * 0{,}3292 = 638{,}57$

$U_C = U_1 + U_2 =$ R$ 967,80 por ano

D) Investimento

$P = 10.000$
$F = 6.000$
$n = 4$
$i = 12\ \%\ aa$

$$U' = (P - F)\{\frac{i}{(1+i)^n - 1}\} + Pi = R\$\ 2.036,93 \text{ por ano}$$

Repetindo a tabela 3.5 considerando, agora, cada parcela da série uniforme tem-se: .

Tabela 3.5' - Cálculo da série uniforme.

PERÍODO	0	1	2	3	4	SÉRIE UNIFORME
gasolina	0	1250	1250	1250	1250	1250
manutenção	0	1000	1000	1000	1000	1000
seguro	1000	900	800	700	0	967
investimento	10000	0	0	0	-6000	2036
TOTAL	**11000**	**3150**	**3050**	**2950**	**-3750**	**5253**

Colocando os custos em função do seu valor anual equivalente é possível comparar o valor relativo de cada um. É interessante notar que o componente mais caro do carro é exatamente o investimento. A gasolina, que normalmente é tomada como o único custo do carro, corresponde a apenas 24 % do custo total.

Mantendo a hipótese de rodar 25.000 km/ano, tem-se que o custo por quilômetro é:

$C = 0,21$ R\$/km

A famosa viagem para o Rio de Janeiro que custava R\$ 196,80 no exemplo 1.1, passa a custar R\$ 252,00 levando-se em consideração o valor temporal do dinheiro e uma taxa de juros de 12% aa.

Exemplo 3.8

O dono do carro do exemplo anterior mora a 10 km do seu trabalho. Se a passagem de ônibus custa R$ 1,00, pergunta-se: vale a pena ir para o trabalho de ônibus?

Solução

Uma solução precipitada do problema seria multiplicar o valor do custo do quilômetro rodado (C = 0,21 R$/km) pela distância da viagem (10 km) e concluir que o custo da viagem de carro é de R$ 2,10 portanto maior que a passagem. Seria economicamente mais viável fazer a viagem de ônibus. Neste ponto é interssante introduzir o conceito de custo marginal da alternativa, ou seja, supondo que o investimento no carro já tenha sido feito baseado em outras necessidades, convém analisar qual o custo incremental do carro quanto ele é utilizado para levar o dono ao trabalho. Baseado na tabela 3.5, observa-se que os custos de seguro e investimento independem do número de quilômetros rodado (são custos fixos). Por outro lado, a gasolina e a manutenção vão mudar considerando uma maior utilização do carro.

Considerando a série uniforme, por quilômetro, dos gastos com gasolina e manutenção tem-se:

$U_A = 1.250$
$u_A = 0{,}05$ R$/km

$U_B = 1.000$
$u_B = 0{,}04$ R$/km

O custo variável, por quilômetro, é, portanto, igual a 0,09 R$/km. Considerando uma viagem de 10 km, vem que o custo marginal da viagem de carro é de R$ 0,90, portanto vale a pena, neste caso, ir de carro ao trabalho!

Exemplo 3.9

Comparar as duas alternativas de investimento dos exemplos 3.1 e 3.2 usando o método do custo mensal equivalente e uma taxa de juros de 1% am.

Solução
Do exemplo 3.1 vem:

$P = -150$
$n = 12$
$i = 1\%$ am

Portanto:

$U_1 = -150 * FRC\ (12, 1\%) = -13,32$

O retorno já é uma série uniforme ($U_2 = +20$) portanto:

$U_A = U_1 + U_2 = -13,32 + 20 =$ R\$ 6,672,68

Na segunda alternativa de investimento o retorno é definido como um gradiente uniforme. Para transformá-lo em uma série uniforme ou utiliza-se a expressão relacionando U e G, definida no capítulo anterior (eq. 2.16), ou calcula-se o valor presente total e o distribui ao longo dos 12 meses. Para a taxa de juros de 1% am o valor presente total já foi calculado no exemplo 3.3, portanto:

$P = 209,12$
$n = 12$
$i = 1\%$ am

$U_B = 209,12 * FRC\ (12, 1\%) = 209,12 * 0,08885 =$ R\$ 18.580,31

Observa-se que o segundo investimento é muito melhor que o primeiro e este fato não tinha ficado claro usando o método do "payback".

Exemplo 3.10
Repetir o exemplo anterior usando uma taxa de juros de 8% am.

Solução
Da mesma forma que no exemplo anterior:

P = -150
n = 12
i = 8% am

Portanto:

$$U_1 = -150 * FRC\ (12, 8\%) = -150 * 0,1327 = -19,90$$

O retorno já é uma série uniforme (U_2 = +20) portanto:

$$U_A = U_1 + U_1 = -19,90 + 20 = R\$\ 0,10 \text{ mil.}$$

Para a segunda alternativa de investimento, usando a tabela 3.4:

Tabela 3.6 - Valor presente para uma taxa de 8%

PERÍODO	CAPITAL	VP
0	-150	-150
1	5	4,63
2	10	8,57
3	15	11,91
4	20	14,70
5	25	17,01
6	30	18,91
7	35	20,42
8	40	21,61
9	45	22,51
10	50	23,16
11	55	23,59
12	60	23,83
	TOTAL	60,85

Calculando a série uniforme:

$$U_B = 60,85 * FRC\ (12, 8\%) = 60,85 *0,1327 = R\$\ 8.074,80$$

Quanto maior a taxa de juros menor fica a diferença entre as duas alternativas. Isto pode ser visto claramente na tabela 3.6 uma vez que o valor presente das últimas parcelas, com esta taxa de juros fica quase constante.

3.3.1 Custo anual equivalente para alternativas de duração diferente.

Exemplo 3.11

Uma firma precisa decidir entre a compra de dois equipamentos:

Equipamento A:	custo: R$ 50.000,00;
	vida útil: 20 meses;
	preço de revenda: R$ 10.000,00; e
	custo da manutenção: R$ 9.000,00 por mês.
Equipamento B:	custo: R$ 120.000,00;
	vida útil: 40 meses;
	preço de revenda: R$ 20.000,00; e
	custo da manutenção: R$ 6.000,00 por mês.

Considerando uma taxa de juros mensal de 8 %, qual dos dois equipamentos deve ser comprado?

Solução

Nos problemas de engenharia econômica, é importante concentrar a atenção na diferença entre as alternativas. Se, neste exemplo, a mesma quantidade de pessoas são necessárias para manobrar os equipamentos A e B, não vale a pena considerar o custo da mão de obra na comparação das alternativas. Evidentemente, na avaliação do custo final do produto, todos os custos devem ser computados.

Para avaliar qual o melhor equipamento, calcula-se o valor anual equivalente dos dois equipamentos:

A) $P_A = 50.000$
$F_A = 10.000$
$n = 20$
$i = 8\ \%$ am;

$$U' = (P - F)\left\{\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right\} + Pi = \text{R\$ } 4.874{,}00 \text{ por mês}$$

U_1 = R\$ 9.000,00 por mês

$U_A = U' + U_1$

U_A = R\$ 13.874,00 por mês

B) $P_B = 120.000$
$F_B = 20.000$
$n = 40$
$i = 8$ % am

$$U' = (P - F)\{\frac{i}{(1+i)^n - 1}\} + Pi = \text{R\$ } 9.986{,}01 \text{ por mês}$$

U_2 = R\$ 6.000 por mês

$U_B = U' + U_2$ = R\$ 15.986,00 por mês

É melhor comprar o equipamento A. Uma análise superficial deste problema poderia levar a conclusão de que, apesar do equipamento B ser mais caro, ele é melhor porque dura mais tempo. O contra argumento desta análise é afirmar que ao final de 20 meses, quando acabar a vida útil do equipamento A, pode-se repetir o mesmo investimento.

Exemplo 3.12

Repetir o exemplo anterior considerando que se possa repetir o investimento no equipamento A depois de 20 meses.

Solução

O diagrama de fluxo de caixa desta solução encontra-se na página seguinte:

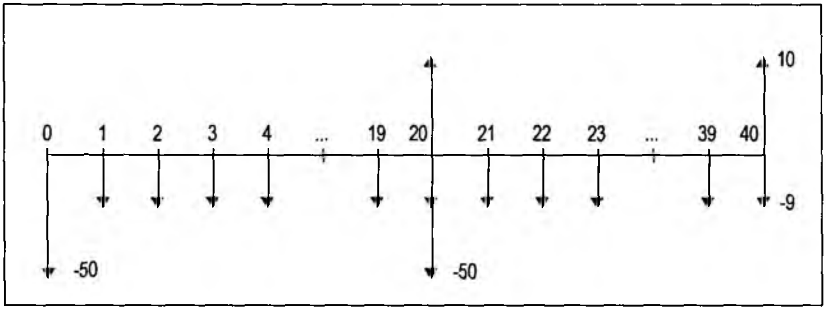

Figura 3.1 - Fluxo de caixa do exemplo 3.12

Calculando a série uniforme deste investimento composto, tem-se:

U_1 = R$ 9.000 por mês

$P_1 = 50.000$

$F_2 = 40.000$
$n = 20$
$i = 8$ % am

$P_2 = F_2 * FVA'(20, 8\%) = 8.581$

$F_3 = -10.000$
$n = 40$
$i = 8$ % am

$P_3 = F_3 * FVA'(40, 8\%) = - 460$

$P = P_1 + P_2 + P_3 = 58.121$
$n = 40$
$i = 8$ % am

$U_2 = P * FRC(40, 8\%) = 58.121 * 0,08386 =$ R$ 4.874 por mês

$U = U_1 + U_2 =$ R$ 13.873,00 por mês

O valor da série uniforme, considerando que se possa repetir o investimento, é exatamente o mesmo do primeiro investimento.

Uma das vantagens da comparação de alternativas pelo método do custo equivalente é o de poder se comparar alternativas com duração diferentes.

3.3.2) Investimento com duração muito longa.

Exemplo 3.13
Qual o custo anual equivalente de uma usina de R$ 1 bilhão, considerando uma taxa de juros de 12 % ao ano?

Solução
Na expressão que define o fator de recuperação de capital (FRC), quando o número de períodos de capitalização "n" tende a infinito, como foi visto, é dado por:

$$U_{\infty} = \lim_{n \to \infty} P\{\frac{i}{(1+i)^n - 1} + i\} = Pi$$

Neste exemplo, o custo anual equivalente do investimento será:

U = R$ 120.000.000,00 por ano

Exemplo 3.14
Repetir o exemplo anterior considerando que a vida útil da usina seja de 30 anos.

Solução

P = 1.000.000.000
n = 30
i = 12 % aa

$U = P * FRC(30, 12\%) = 10^9 * 0{,}1241 = R\$\ 124 * 10^6$ por ano

A partir de 30 anos pode-se, aproximadamente, considerar que a vida do equipamento seja infinita. Neste exemplo o erro relativo é de 3 %.

3.3.3 Transformação de gradiente uniforme em série uniforme.

Exemplo 3.15

Estima-se que um ônibus dure de 7 a 10 anos. O custo da manutenção aumenta bastante à medida que o ônibus envelhece. Sendo dados:

o custo de um ônibus: R$ 120.000,00;

a manutenção no primeiro ano: R$ 16.000,00;

a manutenção aumente R$ 3.300,00 por ano;

o valor de revenda do ônibus depois de 7 anos é de R$ 40.000,00;

e

ao final de 10 anos o valor de revenda passa a ser R$ 28.000,00.

Considerando ainda uma taxa de juros de 8 % ao ano, quando é melhor vender o ônibus?

Solução

Deve-se transformar as duas alternativas em um custo anual equivalente. Note que é necessário considerar o preço do ônibus. Mesmo sabendo que o seu valor é idêntico, a sua distribuição ao longo do tempo será diferente já que as duas alternativas têm durações diferentes.

A) sete anos:

$P = 120.000$
$F = -40.000$
$n = 7$
$i = 8\ \%\ aa$

$U_1 = (P - F) * FFC\ (7, 8\%) + Pi = (120.000 - 40.000) * 0{,}1121 + 9.600 = 18.566$

$U_2 = 16.000$

G = 3.300
n = 7
i = 8 % aa

$$U_3 = G\{\frac{(1+i)^n - 1 - ni}{i[(1+i)^n - 1]}\} = 3.300 * 2,6937 = 8.889,09$$

$U_A = U_1 + U_2 + U_3 =$ R$ 43.457,00 por ano

B) dez anos

P = 120.000
F = -28.000
n = 10
i = 8 % aa

$U_1 =$ (P - F) * FFC (10, 8%) + Pi = (120.000 - 28.000) * 0,0690 + 9.600 = 15.948

$U_2 = 16.000$

G = 3.300
n = 10
i = 8 % aa

$$U_3 = G\{\frac{(1+i)^n - 1 - ni}{i[(1+i)^n - 1]}\} = 3.300 * 3,8713 = 12.775,33$$

$U_B = U_1 + U_2 + U_3 =$ R$ 44.723,00 por ano

É melhor vender o ônibus com sete anos de uso. É interssante notar que o peso do valor de revenda, considerada a taxa de desconto, fica desprezível com o aumento do tempo.

A técnica de comparação de alternativas pelo método do custo anual equivalente é muito boa, entre outras razões, por que transforma todos os investimentos e reembolsos em séries uniformes, portanto, em valores comparáveis.

Não se deve esquecer que, em muitos problemas, vários fatores que são dificilmente colocados em forma econômica, devem ser levados em conta para uma correta tomada de decisão.

Os exemplos apresentados neste item têm como objetivo exclusivo familiarizar o leitor com a técnica do custo anual equivalente. A parte mais difícil do problema, que é exatamente a sua formulação e a obtenção dos dados, foi eliminada. O leitor não deve pensar que estes problemas são simples. Na verdade, como já foi dito, a solução é muito simples mas a formulação correta é bastante delicada.

3.4) Método do Valor Presente (ou Atual)

Outra forma comum de se comparar alternativas é através do cálculo do valor presente dos desembolsos e receitas de um determinado investimento.

O método do valor presente é muito semelhante ao método do custo anual equivalente. Todos os valores referidos ao instante inicial podem ser comparados. A comparação que era feita ano a ano passa, agora, a ser feita em função dos valores iniciais.

Exemplo 3.16

Calcular o valor presente do carro do exemplo 1.1, supondo ainda que i = 12% aa.

Solução

Tomando a tabela 3.5 como base, pode-se calcular o valor presente, diretamente, de cada uma das séries de pagamento.

Tabela 3.7 - Cálculo do valor presente

PERÍODO	0	1	2	3	4	VALOR PRESENTE
gasolina	0	1250	1250	1250	1250	3.796,69
manutenção	0	1000	1000	1000	1000	3.037,35
seguro	1000	900	800	700	0	2.939,57
investimento	10000	0	0	0	-6000	6.186,89
TOTAL	**11000**	**3150**	**3050**	**2950**	**-3750**	**15.960,50**

Da mesma forma que no cálculo da série uniforme é necessário que se defina uma convenção para gastos e receitas. Neste exemplo, como o interesse está na despesa com o carro, estipula-se como positivo os gastos e negativo a receita (no caso, a venda do carro).

Esta tabela pode ser feita usando as expressões que definem os fatores de valor atual, como tem sido feito em todos os exemplos. Mais simples e direto, no entanto, é a utilização das planilhas eletrônicas tipo Excel ou Quatro-Pro. Estas planilhas apresentam todas as funções de matemática financeira pré-programadas e o cálculo do valor presente ou da série uniforme é direto.

A última coluna da tabela 3.7 foi calculada usando as seguintes expressões no Excel versão 7.0, 1995, da Microsoft, em inglês:

a) gasolina: PV(12%.4.-1250);
b) manutenção: PV(12%.4.-1000);
c) seguro: 1.000+NPV(12%.900.800.700)
d) investimento: 10.000 + NPV(12%.0.0.0.-6000)

Onde PV é a função “present value” e NPV é a função “net present value”. Note que a convenção adotada nas funções pré-programadas é a mesma da adotada neste livro, ou seja, considera que os valores são computados ao final do período.

A interpretação deste resultado é que o investimento total na compra deste carro para uma utilização de 4 anos rodando em média 25 mil km por ano é:

P = R$ 15.960,00

Exemplo 3.17
Calcular a série uniforme deste investimento.

Solução

P = 15.960
n = 4
i = 12 % aa

U = P * FRC(4, 12%) = 15.960 * 0,3292 = R$ 5.254,00 por ano

Como não podia deixar de ser, o resultado é idêntico ao obtido no exemplo 3.7.

As duas formas de comparação de alternativas são muito parecidas. A vantagem de uma em relação à outra depende muito do problema analisado.

O maior problema (de mais difícil avaliação) é a determinação da taxa de juros a ser considerada.

Considerando que, para viabilizar uma alternativa, é necessário recorrer ao sistema financeiro para tomar um empréstimo, a taxa mínima de atratividade é o valor dos juros cobrados pelo banco. Se, no investimento analisado, o valor presente das receitas menos os desembolsos for positiva considerando a taxa do banco, então, o investimento é viável. Se for negativa, não vale a pena pegar o dinheiro emprestado.

Uma outra hipótese, para viabilizar o mesmo investimento, é usar o próprio dinheiro do investidor. Neste caso, a taxa mínima de atratividade é o juros que o investidor conseguiria aplicando o dinheiro no mercado financeiro. No Brasil, não tem sentido nenhum investimento que pague, por exemplo, menos que o rendimento da caderneta de poupança.

3.4.1) Comparação de Alternativas com duração diferente.

Exemplo 3.18

Comparar os investimentos em dois equipamentos de vidas úteis diferentes com os seguintes dados:

Equipamento A: custo: R$ 50.000,00;
vida útil : 20 meses;
preço de revenda: R$ 10.000,00; e
custo da manutenção: R$ 9.000,00 por mês.

Equipamento B: custo: R$ 90.000,00;
vida útil: 40 meses;
preço de revenda: R$ 20.000,00; e
custo da manutenção: R$ 6.000,00 por mês.

O valor do equipamento B foi modificado em relação ao exemplo 3.11 para facilitar a análise. Considere uma taxa de juros de 8 % ao mês.

Solução

Fazendo-se o valor presente dos dois investimento tem-se:

A) $P_1 = 50.000$

$U = 9.000$
$n = 20$
$i = 8$ % am

$P_2 = U * FVA(20, 8\%) = 9.000 * 9,8181 = 88.363,32$

$F = -10.000$
$n = 20$
$i = 8$ % am

$P_3 = F * FVA'(20, 8\%) = -10.000 * 0,2145 = -2.145,48$

$P_A = P_1 + P_2 + P_3 = R\$\ 136.217,84$

B) $P_1 = 90.000$

$U = 6.000$
$n = 40$
$i = 8\ \%\ am$

$P_2 = U * FVA(40, 8\%) = 6.000 * 11,9246 = 71.547,68$

$F = -20.000$
$n = 40$
$i = 8\ \%\ am$

$P_3 = F * FVA'(40, 8\%) = -20.000 * 0,0460 = -920,62$

$P_B = P_1 + P_2 + P_3 = R\$\ 160.627,06$

Uma análise precipitada poderia induzir à escolha da alternativa A ($P_A < P_B$). No entanto, o método do valor presente não serve para comparar alternativas de duração diferentes. Para compará-las é necessário que a base de tempo seja a mesma. Neste caso, deve-se supor que seja possível repetir a compra do equipamento A após o final da sua primeira vida útil.

Exemplo 3.19
Repetir o exemplo anterior supondo que se possa comprar novamente o equipamento A ao final da sua primeira vida útil.

Solução
O fluxo de caixa é idêntico ao do exemplo 3.12. O cálculo do valor presente da alternativa A completa fica então:

$P_1 = 50.000$

$U = 9.000$
$n = 40$
$i = 8\ \%\ am$

$P_2 = U * FVA(40, 8\%) = 9.000 * 11,9246 = 107.321,52$

$F_3 = 40.000$
$n = 20$
$i = 8\%\ am$

$P_3 = F_3 * FVA'(20, 8\%) = 40.000 * 0,2145 = 8.581,93$

$F_4 = -10.000$
$n = 40$
$i = 8\%\ am$

$P_4 = F_4 * FVA'(40, 8\%) = -10.000 * 0,0460 = -460,31$

$P_A = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = R\$\ 165.443,14$

Conclui-se que a alternativa B é melhor, já que ($P_A > P_B$).

Exemplo 3.20
Calcular a série uniforme dos dois investimentos.

Solução

A) $P = 136.217,84$
$n = 20$
$i = 8\%\ am$

$U_A = P * FRC(20, 8\%) = 136.217,84 * 0,10185 = R\$\ 13.874,09$ por mês

B) $P = 160.627,06$
$n = 40$
$i = 8\ \%\ am$

$$U_B = P * FRC(40, 8\%) = 160.627,06 * 0,08386 = R\$\ 13.470,21 \text{ por mês}$$

Observa-se que usando o método do custo anual equivalente em alternativas de tempo diferentes obtem-se diretamente que o equipamento B é o melhor. Neste tipo de problema recomenda-se, então, a utilização do custo anual equivalente.

Por outro lado, a comparação de alternativas compostas por séries de desembolsos e receitas não uniformes é mais fácil pelo método do valor presente.

O importante é que, para se comparar alternativas de investimento, as alternativas estejam em uma mesma base de tempo.

3.4.2) Erros comuns na análise de alternativas.

Inclusão da taxa de juros no fluxo de caixa como despesa.

Exemplo 3.21
Tomou-se R$ 1.000,00 emprestado de um banco a uma taxa de 3% ao mês. No final do ano deve-se pagar R$ 1.425,76. Verificar quanto seria o desembolso mensal constante para quitar esta dívida ao final de 12 meses.

Solução
Evidentemente, a dívida final já leva em consideração os juros compostos do empréstimo, por isto não tem sentido além do desembolso final imaginar um desembolso mensal de R$ 30,00! A série uniforme que paga esta dívida é dada por:

$P = 1.000$
$n = 12$
$i = 3\ \%\ am$

$$U = P * FRC(12, 3\%) = 1.000 * 0,10046 = R\$\ 100,46 \text{ por mês}$$

Não tem sentido somar a esta série os R$ 30,00 dos juros uma vez que eles já foram computados.

Considerar a depreciação como despesa anual.

Exemplo 3.22
Analisar a depreciação do carro do exemplo 1.1.

Solução
O investimento inicial no carro foi de R$ 10.000,00. Ao final de 4 anos considera-se que ele valha R$ 6.000,00, portanto, pode-se considerar que em cada ano o carro se desvaloriza em aproximadamente R$ 1.000,00. Não tem sentido colocar estes R$ 1.000,00 no fluxo de caixa uma vez que ele já está computado no valor presente do investimento. Considerá-lo como despesa corresponde a contar duas vezes a depreciação no fluxo de caixa.

No próximo capítulo uma discussão mais detalhada da depreciação será vista.

Erro de avaliação no tempo de duração de um projeto.

Exemplo 3.23
Uma pizzaria fatura R$ 70.000,00 por mês. O lucro líquido da loja é de 10%. Um investidor se propõe a comprar a loja por R$ 300.000,00. O dono da pizzaria deve vendê-la?

Solução
A primeira dificuldade neste tipo de problema é avaliar a taxa de juros. Do ponto de vista do dono da pizzaria ele deve pensar aonde ele poderia aplicar os R$ 300 mil que lhe proporcionasse uma renda equivalente aos seus R$ 7.000,00 por mês. Digamos que ele tenha uma aplicação financeira que lhe renda 1% ao mês. Neste caso, supondo que a loja vai continuar dando o mesmo lucro por vários anos, não vale a pena vender a loja!

Supondo, no entanto, que a loja tenha uma vida útil de apenas um ano. Se, ao final deste ano, o seu valor de revenda fosse de apenas R$ 100.000,00. A análise do fluxo de caixa muda completamente e o rendimento equivalente mensal será então:

$U_1 = 7.000$
$n = 12$
$i = 1\ \%$ am

$P_1 = U_1 * FVA(12, 1\%) = 7.000 * 11{,}2551 = 78.785{,}54$

$F_2 = 100.000$
$n = 12$
$i = 1\ \%$ am

$P_2 = F_2 * FVA'(12, 1\%) = 100.000 * 0{,}8874 = 88.744{,}92$

$P = P_1 + P_2 =$ R$ 167.530,46

Neste caso, é fortemente recomendável a venda da loja.

3.5) Taxa Interna de Retorno (TIR)

Viu-se que nos três métodos de análise de alternativas econômicas apresentados: "payback" descontado, da série uniforme e do valor presente, deve-se estipular a taxa de juros. Pressupõe-se que a alternativa que se está analisando possa ser comparada com a aplicação do dinheiro em um sistema financeiro onde a taxa de juros é conhecida. Portanto, um determinado investimento é razoável se o seu valor presente (ou a sua série uniforme) for positiva. Se, ao contrário, o valor presente for negativo então é melhor aplicar o dinheiro no sistema financeiro.

A mudança da taxa de juros modifica completamente as conclusões da viabilidade de um determinado investimento. Vários exemplos, ao longo do texto, mostraram este fato.

Para se analisar um investimento, para uma faixa maior de taxas de juros, é conveniente o método da taxa de retorno. Define-se então:

TAXA INTERNA DE RETORNO (TIR): É a taxa de juros que torna nulo o valor presente líquido de um determinado investimento. É também chamada taxa de retorno.

VALOR PRESENTE LÍQUIDO (VPL): É a soma dos desembolsos e receitas de um investimento referidos ao instante inicial.

3.5.1) Taxa interna de retorno de uma série uniforme infinita

---

Exemplo 3.24

Qual é a taxa de retorno do restaurante do exemplo anterior, supondo que ele tenha um valor de venda de R$ 300.000,00 e um rendimento de R$ 7.000,00 por mês.

Solução

Este é o único tipo de problema de taxa de retorno que tem uma solução analítica. Como, por definição, a taxa de retorno é a taxa de juros que zera o valor presente líquido, tem-se:

$P_1 = -300.000$ (investimento)

$U_2 = +7.000$ por mês (rendimento)

$n = \infty$

$i =$ incógnita

$P_2 = U_2/i$

$VPL = \sum P = P_1 + P_2 = 0$

$P_1 + U_2/i = 0$

$i = -U_2/P_1$

Neste exemplo:

$$i = -\ 7.000/(-300.000) = 2{,}33\ \%\ \text{am}$$

Observe que, supondo que o rendimento do restaurante vá ter uma duração muito grande, o dono só deveria vendê-lo se tivesse uma outra aplicação onde o dinheiro renderia mais que 2,33 % ao mês.

3.5.2) Taxa interna de retorno de uma série uniforme

Exemplo 3.25
Qual a taxa de retorno do restaurante do exemplo anterior supondo que o rendimento deste restaurante só vá durar 4 anos.

Solução
Da mesma forma que no exemplo anterior:

$$VPL = \sum P = P_1 + P_2 = 0$$

onde:

$$P_2 = U_2\{\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\}$$

portanto:

$$P_2 = -P_1$$

$$\{\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\} = -P_1/U_2$$

Neste exemplo -P/U = 42,857.

Não há solução analítica para este problema. Uma solução possível é por tentativa e erro. Tentando inicialmente uma taxa de juros de 0,5 % ao mês, vem:

$n = 4 * 12 = 48$
$i = 0{,}5\ \%$ am
$P/U = FVA(48,\ 0{,}5\%) = 42{,}5803$

$VPL = -300.000 + 7.000 * 42{,}5803 = -1.937{,}78$

Fazendo i = 0,4 % ao mês, vem:

$VPL = -P_1 + U_2 * FVA(48,\ 0{,}4\%) = -300.000 + 7.000 * 43{,}5942$
$= +5.159{,}74$

A taxa de retorno está, portanto, entre estes dois valores. É interessante observar que é preciso diminuir a taxa de juros para que o valor presente da série uniforme aumente. No limite, quando i = 0, o valor presente de uma série uniforme é dado pelo produto do número de período de capitalização pela série uniforme.

Dados estes dois pontos, e sabendo que o VPL nulo está entre eles, pode-se fazer uma interpolação linear para se determinar a taxa de retorno. Como o VPL é função da taxa de juros, a interpolação linear significa que, próximo da solução desejada, pode-se aproximar esta função por uma reta. A equação da reta é dada por:

$VPL(i) = m * i + b$

Os dois pontos da reta são:

$i = 0{,}5\ \%$ $\quad VPL\ (0{,}5) = -1.937{,}78$

$i = 0{,}4\ \%$ $\quad VPL\ (0{,}4) = 5.159{,}74$

A declividade da reta é dada por:

$$m = \frac{VPL(0{,}5) - VPL(0{,}4)}{0{,}5 - 0{,}4} = -70.975{,}18$$

O valor "b" é dado por:

$$b = VPL(0,5) - m * i = -1.937,78 - (-70.975,18) * 0,5 = 33.549,81$$

Então:

$$VPL = 0 = 33.549,81 - 70.975,18 * i$$

$$i = 0,4727\ \%\ am$$

Uma outra forma de resolver o mesmo problema é usando uma fórmula iterativa do cálculo de i. Da mesma forma que foi deduzida anteriormente (eq. 2.21):

$$i = \sqrt[n]{\frac{U}{P}\frac{(1+i)^n - 1}{i}} - 1 \qquad \textbf{(3.2)}$$

Partindo de um valor inicial qualquer obtem-se:

$$i = 0,4724\ \%\ am$$

O valor obtido do processo iterativo não precisa ser exatamente igual ao valor obtido pela interpolação linear. A interpolação linear é uma aproximação que será tanto mais próxima do valor real quanto menor for o intervalo interpolado.

3.5.3) Taxa de retorno de uma série não uniforme

Exemplo 3.26

Considere, ainda, o mesmo exemplo do restaurante. Supondo que rendimento nos quatro anos seja não uniforme e dado pelo fluxo de caixa mostrado a seguir. Qual a taxa de retorno?

Tabela 3.8 - Fluxo de caixa de uma série não uniforme.

PERÍODO (ANO)	0	1	2	3	4
Fluxo de caixa	-300	80	90	95	90

Solução

A única solução para este problema é calcular o valor presente líquido do fluxo de caixa para diversas taxas de juros. Quando o VPL mudar de sinal, pode-se fazer uma interpolação linear para obter a taxa de retorno onde VPL = 0. Inicialmente, para i = 10% aa, tem-se:

$P_0 = -300$

$F_1 = 80$
n = 1
i = 10 % aa

$P_1 = F_1 * FVA'(1, 10\%) = 80 * 0{,}9091 = 72{,}73$

$F_2 = 90$
n = 2
i = 10 % aa

$P_2 = F_2 * FVA'(2, 10\%) = 90 * 0{,}8264 = 74{,}38$

$F_3 = 95$
n = 3
i = 10 % aa

$P_3 = F_3 * FVA'(3, 10\%) = 95 * 0{,}7513 = 71{,}37$

$F_4 = 90$
n = 4
i = 10 % aa

$P_4 = F_4 * FVA'(4, 10\%) = 90 * 0{,}6830 = 61{,}47$

$$P = \sum P_n = -20{,}04$$

Este procedimento deve ser repetido para outras taxas de juros, por exemplo 8 e 6 % ao ano. O processo é razoavelmente trabalhoso, no entanto, qualquer planilha eletrônica faz este tipo de cálculo diretamente. Usando o Excel e a tabela 3.8, tem-se:

Tabela 3.9 - Resolução do exemplo 3.26

PERÍODO (ANO)	0	1	2	3	4
Fluxo de caixa	-300,00	80,00	90,00	95,00	90,00
Taxa de Juros	10,00	9,00	8,00	7,00	6,00
VPL (i)	-20,05	-13,74	-7,20	-0,42	6,62

É possível, portanto, obter-se facilmente uma curva relacionando o valor presente líquido com a taxa de juros. Interpolando entre 7 e 6 % tem-se:

i = 6,96 % ao ano.

Este método, um pouco mais trabalhoso, tem a vantagem de não necessitar, a princípio, do valor da taxa de juros. No entanto, para saber se o investimento é ou não razoável, é fundamental que se conheça a taxa de juros do mercado. Neste exemplo, se a taxa de juros disponível no mercado é de 6% ao ano, vale a pena comprar o restaurante. Por outro lado, se for possível aplicar o dinheiro a uma taxa de 7 % ao ano, a compra do restaurante (supondo esta série anual de lucros) não é um bom negócio.

3.5.4) Seleção entre duas alternativas com a mesma duração (usando a taxa de retorno)

Exemplo 3.27

Dado um investimento (A) de R$ 100.000,00 que dará um retorno uniforme de R$ 30.000,00 nos próximos 5 anos. Comparar com outro investimento (B) de R$ 70.000,00 que, durante os mesmos cinco anos dará um rendimento uniforme de R$ 20.000,00.

Solução

Investimento A:

$P_A = 100.000$
$U_A = 30.000$
$n = 5$

$$i = \sqrt[n]{\frac{U}{P}\frac{(1+i)^n - 1}{i}} - 1$$

resolvendo esta equação iterativamente:

$i_A = 15{,}24\ \%$ ao ano

investimento B:

$P_B = 70.000$
$U_B = 20.000$
$n = 5$

$i_B = 13{,}20\ \%$ ao ano

Como o investimento A tem maior taxa de retorno, e os dois investimentos tem a mesma duração, pode se concluir que o investimento A é melhor que o B. De fato, se a taxa de juros do mercado for, por exemplo 14 % ao ano, o investimento A continua viável, ou seja, com um valor presente líquido maior que zero enquanto o investimento B passa a ser inviável.

Exemplo 3.28

Comparar as duas alternativas de investimento usando o método do valor presente. Supor uma taxa de juros de 10 % ao ano.

Solução

Investimento A:

$U = 30.000$
$n = 5$
$i = 10\ \%$

$$P = U * FVA\ (5,\ 10\%) = 30.000 * 3{,}7908 = 113.723{,}60$$

$$VPL = P_0 + P = -100.000 + 113.723{,}60 = 13.723{,}60$$

Investimento B:

$U = 20.000$
$n = 5$
$i = 10\ \%$

$$P = U * FVA\ (5,\ 10\%) = 20.000 * 3{,}7908 = 75.816{,}00$$

$$VPL = P_0 + P = -70.000 + 75.816{,}00 = 5.816{,}00$$

Com o método do valor presente obtem-se, portanto, o mesmo resultado de uma forma muito mais simples.

Exemplo 3.29

Traçar a curva do valor presente líquido (VPL) em função da taxa de juros para as duas alternativas do exemplo anterior.

Solução

Nos dois exemplos anteriores obteve-se dois pontos da curva. O primeiro correspondendo ao VPL nulo (a própria definição de taxa de retorno) e o segundo para uma taxa de juros de 10%. O cálculo é muito simples porém exige trabalho. Usando uma planilha eletrônica e fazendo a taxa de juros variar de 0 a 20 % ao ano obtem-se a seguinte tabela:

Tabela 3.10 - Resolução do exemplo 3.29

INVESTIMENTO A	INVESTIMENTO B	TAXA DE JUROS	0	5	10	15	20
P0 = -100	P0 = -70	VPL (A)	50,00	29,88	13,72	0,56	-10,28
U = 30	U = 20	VPL (B)	30,00	16,59	5,82	-2,96	-10,19

As duas curvas de VPL x i são dadas então por:

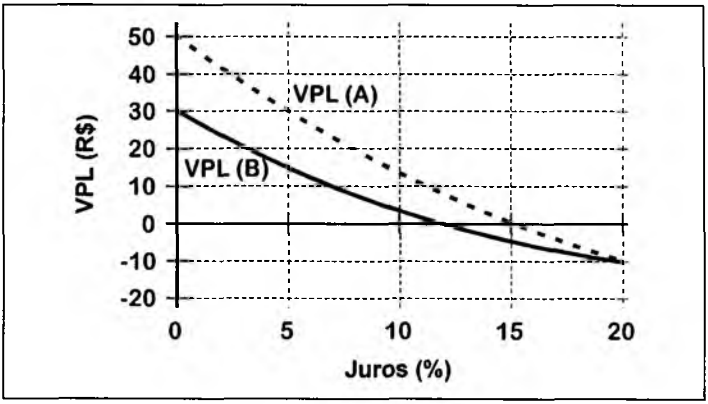

Figura 3.2 - Valor presente líquido em função da taxa de juros, exemplo 3.29.

A informação contida na curva VPL x i é muito importante para a análise de investimentos. Observa-se, por exemplo, que para qualquer taxa de juros menor que 20 % ao ano, o investimento A é melhor que o B.

3.5.5) Escolha entre alternativas de mesma duração em que o método da TIR indica escolha diferente do método do valor presente líquido (VPL).

Exemplo 3.30

Uma empresa tem que decidir entre os dois projetos (mutuamente excludentes) A e B descritos a seguir:

$P_A = -100$
$U_A = +30$
n = 5 anos

$P_B = -10$
$U_B = +4$
n = 5 anos

Se esta empresa utiliza uma taxa de juros de referência de 10% aa, qual dos dois projetos deve ser escolhido?

Solução
Calculando-se a TIR dos dois projetos obtem-se:

TIR(A) = 15,2 % aa

TIR (B) = 28,6 % aa

Calculando-se o VPL dos dois projetos obtem-se:

VPL(A) (i = 10%) = 13,7

VPL (B) (i = 10%) = 5,16

A princípio existe uma incoerência nos resultados, pois pelo método da taxa interna de retorno o investimento B é melhor do que o A mas pelo método valor presente o investimento A é melhor do que o B. Mudando a taxa de juros a escolha pode ficar mais clara.

Exemplo 3.31
Repetir o exemplo anterior considerando uma taxa de juros de referência de 15 % aa.

Solução
A TIR, evidentemente, não se altera mas o VLP é agora dado por:

VPL(A) (i = 15%) = 0,5

VPL (B) (i = 15%) = 3,4

Neste caso é óbvio que o investimento B é melhor que o A.

A curva VPL em função da taxa de juros mostra claramente o ponto em que B passa a ser melhor que A.

Exemplo 3.32

Calcular a curva VPL x i dos dois investimentos descritos nos exemplos anteriores.

Solução

Usando uma planilha de cálculo obtem-se diretamente:

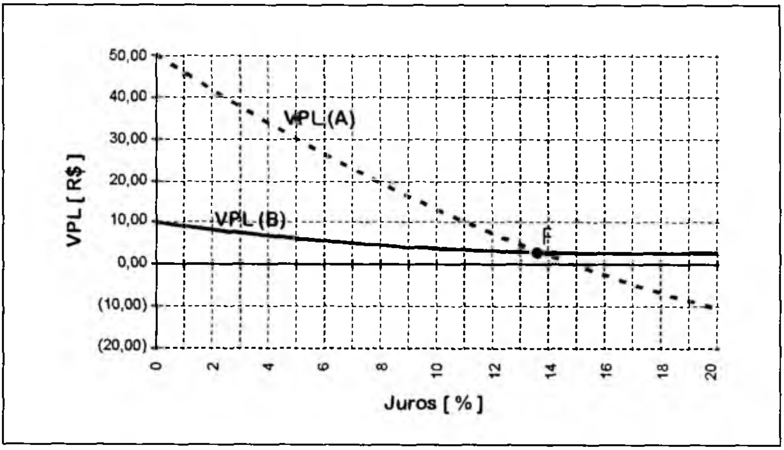

Figura 3.3 - VPL em função da taxa de juros

A curva de VPL x i mostra claramente o limite onde um projeto passa a ser melhor que o outro, pelo método da TIR.

A forma correta de avaliar estes projetos mutuamente excludentes, ou seja, sem que haja incoerência entre o resultado do VPL e da taxa interna de retorno (TIR) é fazendo a análise incremental, ou seja, avaliar o que poderia ser feito com a sobra do dinheiro não investido no projeto mais caro.

Exemplo 3.33
Fazer a análise incremental dos dois projetos vistos no exemplo anterior.

Solução

Projeto C = A - B

$P_C = -90$
$U_C = 26$
$n = 5$

Portanto:

VPL(C) (i = 10%) = 8,56

TIR (C) = 13,6 % aa

Como o VPL deste projeto incremental é maior que zero, pode-se concluir que o projeto A é melhor que o projeto B. Da mesma forma, a taxa interna de retorno também é maior que 10 % o que leva a um resultado coerente entre os dois métodos de avaliação de investimento.

É interessante notar que a TIR do projeto incremental é exatamente o valor de juros onde o projeto B passa a ser melhor que o projeto A. Este ponto é chamado ponto de Fischer (ponto “F” na figura 3.3).

Evidentemente, se esta análise fosse feita com uma taxa de juros de referência de 15% a escolha recairia sobre o projeto B.

3.5.6) Taxa de retorno para investimentos com valor residual.

Exemplo 3.34
Calcular a taxa de retorno de um investimento (A) de R$ 50.000,00 que dê um retorno mensal de R$ 9.000,00 e, ao final de vinte meses de utilização, tenha um valor de revenda de R$ 10.000,00.

Solução

Deve-se acrescentar aos cálculos passados mais um termo, referente ao valor residual F. Então:

$$VPL = P_0 + U * FVA(n, i) + F * FVA'(n, i) = 0 \qquad \textbf{(3.3)}$$

Da mesma forma que nos problemas anteriores, não é possível explicitar "i" nesta equação. Pode-se, no entanto, achar uma expressão iterativa para o cálculo da taxa de juros. Desenvolvendo a equação anterior tem-se:

$$-P_0 = U\{\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\} + F(1+i)^{-n}$$

$$(1+i)^n = \frac{U}{(-P_0)}\{\frac{(1+i)^n - 1}{i}\} + \frac{F}{(-P_0)}$$

Então:

$$i^{(j+1)} = \sqrt[n]{\frac{U}{(-P_0)}\{\frac{(1+i^{(j)})^n - 1}{i^{(j)}}\} + \frac{F}{(-P_0)}} - 1 \qquad \textbf{(3.4)}$$

Neste exemplo:

P_0 = -50.000
U = 9.000
F = 10.000
n = 20

i(A) = 17,42 % am

3.5.7) Taxa de retorno para de investimentos com durações diferentes.

Exemplo 3.35
Calcular a taxa de retorno de um outro investimento (B). Dados: investimento inicial R$ 90.000,00, receita mensal R$ 6.000,00, valor residual R$ 20.000,00, e vida útil 40 meses.

Solução
Usando a mesma equação desenvolvida anteriormente (3.4) com os dados:

$P_0 = -90.000$
$U = 6.000$
$F = 20.000$
$n = 40$

$i(B) = 6$ % am

O investimento "A" (exemplo 3.34), com maior taxa de retorno parece melhor. No entanto, como não é correto comparar valor presente de alternativas de duração diferentes, a taxa de retorno também não tem sentido neste caso. Ela nada mais é que a taxa de juros que zera o valor presente líquido das alternativas. Só teria algum sentido esta comparação se não houvesse a possibilidade de refazer o investimento A ao final de vinte anos.

Exemplo 3.36
Traçar as curvas de VPL x i para as duas alternativas de investimento apresentadas nos exemplos anteriores.

Tabela 3.11 - Exemplo 3.36

DADO	A	B	JUROS	0	5	10	15	20
Investimento	-50,00	-90,00	VPL (A)	140,00	65,93	28,11	6,94	-5,91
Retorno uniforme	9,00	6,00	VPL (B)	170,00	15,80	-30,88	-50,07	-60,01
Valor residual	10,00	20,00						
Duração	20,00	40,00						

Solução

Usando uma planilha Excel, tem-se:

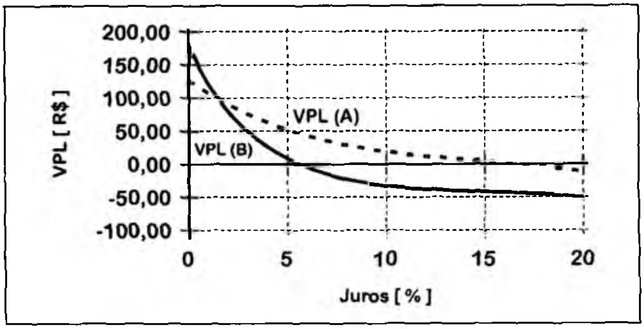

Figura 3.4 - VPL * i, exemplo 3.36

Pode-se então traçar as seguintes curvas:

Observa-se que as curvas VPL x i se cruzam. Para taxas de juros pequenas (até 2% aproximadamente) o VPL da alternativa B é maior que o da alternativa A. Para taxas de juros maiores, o VPL da alternativa A seria maior.

Exemplo 3.37

Calcular a série uniforme dos investimentos anteriores para uma taxa de juros de 1% e 5% ao mês.

Solução

Investimento A:

$P = -50$

$F = 10$

$n = 20$

$i = 1\%$ am

$U_0 = 9$

$U_1 = P * FRC(20, 1\%) = -50 * 0{,}05542 = -2{,}77$

$U_2 = F * FFC(20, 1\%) = 10 * 0{,}04542 = 0{,}45$

$U(1\%) = U_0 + U_1 + U_2 = 6,68$ mil R$/mês

$i = 5\%$ am

$U_0 = 9$

$U_1 = P * FRC(20, 5\%) = -50 * 0,08024 = -4,01$

$U_2 = F * FFC(20, 5\%) = 10 * 0,03024 = 0,30$

$U(5\%) = U_0 + U_1 + U_2 = 5,29$ mil R$/mês

Investimento B

$P = -90$
$F = 20$
$n = 40$

$i = 1\%$ am

$U_0 = 6$

$U_1 = P * FRC(40, 1\%) = -90 * 0,03046 = -2,74$

$U_2 = F * FFC(40, 1\%) = 20 * 0,02046 = 0,41$

$U(1\%) = U_0 + U_1 + U_2 = 3,67$ mil R$/mês

$i = 5\%$ am

$U_0 = 6$

$U_1 = P * FRC(40, 5\%) = -90 * 0,05828 = -5,24$

$U_2 = F * FFC(40, 5\%) = 20 * 0,00828 = 0,17$

$U(5\%) = U_0 + U_1 + U_2 = 0,92$ mil R$/mês

Portanto, a alternativa A é melhor para qualquer taxa de juros. Para alternativas de duração diferente ou equivalenta-se no tempo as alternativas ou usa-se o método da série uniforme.

3.5.8) Cálculo da taxa de retorno de um gradiente uniforme

Exemplo 3.38
Comparar, pelo método da taxa de retorno, as duas alternativas abaixo:

alternativa A: investimento: R$ 500.000,00
retorno anual: R$ R$ 200.000,00
duração: 10 anos

alternativa B: investimento: R$ 500.000,00
retorno começa a crescer, a partir do segundo ano, a uma taxa de R$ 60.000,00 por ano
duração: 10 anos

Solução
A taxa de juros que anula o VPL das duas alternativas pode ser calculada iterativamente. A expressão para a série uniforme já foi deduzida:

$$i = \sqrt[n]{\frac{U}{P}\{\frac{(1+i)^n - 1}{i}\}} - 1$$

$$i_A = 38{,}47\ \%\ \text{ao ano}$$

Da mesma forma para a alternativa B:

$$VPL = P_0 + G(P/G, 10, i) = 0$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{G}{P}\{\frac{(1+i)^n - 1}{i^2} - \frac{n}{i}\}} - 1$$

$$i_B = 28{,}80\ \%\ \text{ao ano}$$

Mais uma vez, apesar da taxa de retorno da alternativa B ser menor do que a da alternativa A, não se pode afirmar que a alternativa A seja melhor do que a B. Pode-se afirmar que, para uma taxa de juros de 30%, a alternativa A é melhor do que a B. Para se fazer uma melhor análise destas alternativas é necessário traçar a curva VPL x i das duas.

Exemplo 3.39
Traçar a curva VPL x i das duas alternativas do exemplo anterior.

Solução
Mais uma vez usando o Excel:

Tabela 3.12 - Cálculo do VPL para diversas taxas de juros

JUROS	VPL (A)	VPL (B)
0	1.500,00	2.200,00
5	1.044,35	1.399,12
10	728,91	873,48
15	503,75	518,77
20	338,49	273,22
25	214,10	99,22
30	118,31	-26,77
35	43,01	-119,82
40	-17,29	-189,82

Pode-se, então, traçar as seguintes curvas:

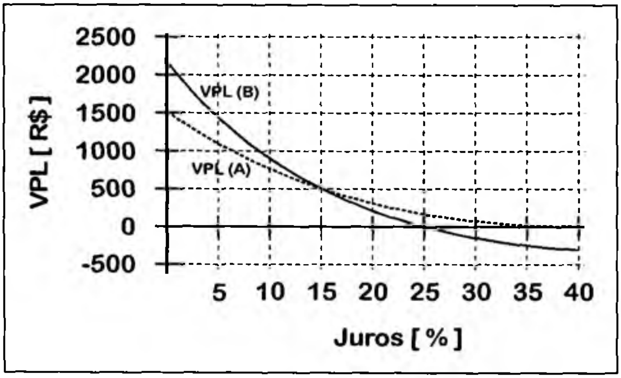

Figura 3.5 - Exemplo 3.39

Observa-se que, para uma taxa de juros menor que 15%, a alternativa B é melhor que a alternativa A. Para comparar alternativas, mesmo usando o método da taxa interna de retorno, é fundamental se ter uma taxa de juros de referência.

3.5.8) Taxa de retorno múltipla

Os investimentos ditos "convencionais" com uma despesa seguida de uma sequência (uniforme ou não) de receitas têm sempre uma única taxa de retorno.

Os investimentos ditos "não convencionais" onde as despesas e receitas se alternam ao longo do tempo, pode fazer com que a curva VPL x i cruze mais de uma vez o eixo horizontal, ou seja, pode provocar uma taxa de retorno múltipla.

Exemplo 3.40

Considere o investimento representado pelo seguinte fluxo de caixa:

Tabela 3.13 - Exemplo 3.40

Período (anos)	0	1	2
Investimento (R$)	-50	+150	-100

Analisar este investimento considerando uma taxa de juros de 5%.

Solução

Para resolver este problema é melhor traçar a curva do VPL em função da taxa de juros:

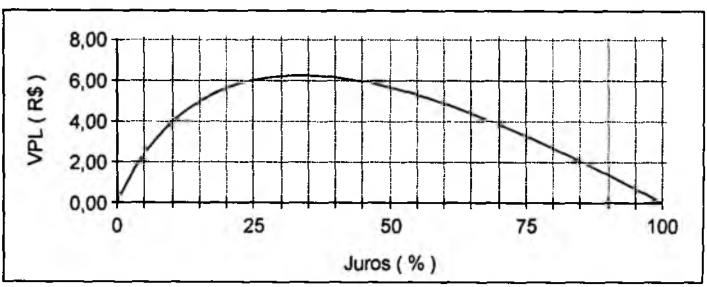

Figura 3.6 - Exemplo 3.40

Esta curva pode ser traçada diretamente com o auxílio de qualquer planilha eletrônica. Este exemplo particular pode ser resolvido analiticamente, uma vez que a série de investimentos é muito simples.

$$VPL = P_1 + F_2(1+i)^{-1} + F_3(1+i)^{-2}$$

Substituindo os valores obtem-se uma equação do segundo grau:

$$i^2 - i = 0$$

Cujas raízes são:

$$i_1 = 0$$
$$i_2 = 1$$

Evidentemente as raízes são os pontos no qual o gráfico VPL(i) cruza o eixo dos "i". Neste exemplo, com uma alteração de sinal na série de investimento, tem-se duas raízes.

O VPL máximo pode ser obtido derivando a função em relação a "i".

$$\frac{\partial VPL}{\partial i} = -F_2(1+i)^{-2} + -2F_3(1+i)^{-3} = 0$$

Substituindo os valores:

$$i = \frac{-2F_3}{F_2} - 1 = 0{,}333$$

Neste exemplo, então, é possível traçar a curva VLP(i). Normalmente, no entanto, com uma sequência um pouco mais complexa de desembolsos, a única solução possível é numérica.

Capítulo 4

DEPRECIAÇÃO E IMPOSTO DE RENDA

4.1) Introdução

Definição: *DEPRECIAÇÃO* é um meio contábil de distribuição do custo de um determinado bem de capital ao longo de sua vida útil de maneira sistemática e racional.

A depreciação é, portanto, um meio contábil de se distribuir ao longo do tempo uma grande despesa efetuada por uma determinada empresa. O tempo considerado não precisa ser o tempo real de duração do bem mas um tempo contábil, normalmente regulamentado pela receita federal.

A vida útil contábil é definida pela receita federal porque a depreciação de um equipamento está intimamente ligada ao pagamento de imposto de renda da empresa.

De fato, o IR de uma empresa é calculado sobre o lucro da empresa e o lucro é definido como sendo a diferença entre a receita e as despesas da empresa. Neste contexto, o conceito de depreciação fica bastante claro. Se uma empresa se propõe a comprar um determinado equipamento que só vai dar lucro a partir de sua utilização efetiva (ou seja, durante a sua vida útil), não tem sentido que no ano do investimento a empresa apresente um déficit contábil enorme e ao longo da vida apresente um lucro também enorme. Para evitar isto, é legal distribuir ao longo da sua vida útil contábil, o custo do investimento.

Os valores máximos de vida útil aceito pela receita federal são dados em tabelas fornecidas pela própria receita. Segue alguns exemplos:

Veículo: 5 anos
Máquinas: 10 anos
Construções: 25 anos.

Ao final da vida útil contábil do equipamento, ele pode ou não ter um determinado valor residual. Não se pode esquecer que, em algumas situações, o valor residual do bem é menor que o preço da remoção. Portanto, o valor residual final pode ser negativo. Em todo caso, a diferença entre o valor residual e o preço de venda é passível de cobrança de impostos.

A depreciação, sendo uma ferramenta contábil, vai ser considerada neste livro de engenharia econômica somente nos aspectos em que interfira na decisão de escolha entre alternativas.

Existem diversas formas sistemáticas de considerar a depreciação de um investimento. As três mais importantes são: a linear, da soma dos dígitos e por fundo de amortização, que serão analisadas a seguir.

4.2) Depreciação Linear.

É a mais simples e aceita pela receita federal. Chamando de

P - Valor do Investimento;
n - vida útil; e
D - Depreciação periódica,

Tem-se:

$$D = P/n \qquad \textbf{(4.1)}$$

Exemplo 4.1

Dado um determinado equipamento que custe R$ 100,00, tenha uma vida útil contábil de 5 anos e um valor residual nulo, calcular a depreciação e o valor contábil do equipamento ao longo da sua vida.

Solução

Tabela 4.1 - Depreciação linear

PERÍODO	VALOR CONTÁBIL	DEPRECIAÇÃO
0	100	0
1	80	20
2	60	20
3	40	20
4	20	20
5	0	20

A depreciação é facilmente calculada a partir da definição da eq. (4.1).

Exemplo 4.2

Supondo que o valor contábil do equipamento do exemplo anterior seja equivalente ao seu valor real, calcular qual deve ser a remuneração mínima que este equipamento deve dar à empresa. Usar uma taxa de juros de 10% aa.

Solução

A remuneração do equipamento pode ser dividida em duas parcelas: a primeira corresponde a depreciação real do equipamento de forma que a empresa possa repor o equipamento após sua utilização. A segunda corresponde à remuneração do capital aplicado. Usando a tabela 4.1 pode-se construir uma nova tabela colocando uma coluna com a remuneração do capital (10% do valor do equipamento) e outra coluna com a remuneração total, ou seja, capital mais depreciação.

Tabela 4.2 - Remuneração do equipamento do exemplo 4.1

PERÍODO	VALOR CONTÁBIL	DEPRECIAÇÃO	REM. CAPITAL	REM. TOTAL	VALOR PRESENTE
0	100	0	0	0	0,00
1	80	20	10	30	27,27
2	60	20	8	28	23,14
3	40	20	6	26	19,53
4	20	20	4	24	16,39
5	0	20	2	22	13,66
				TOTAL	100,00

É interessante notar que a remuneração total, neste exemplo, é uma série não uniforme. No entanto, o somatório do seu valor presente é igual ao investimento inicial.

4.3) Método da Soma dos Dígitos (ou método de Cole)

Neste método, o fator de depreciação decresce com o tempo e é calculado da seguinte forma:

FD - fator de depreciação
n - vida útil do equipamento
S - somatório dos dígitos da vida útil

$$S = \sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \textbf{(4.2)}$$

$$FD(j) = (n - j + 1) / S \qquad \textbf{(4.3)}$$

Exemplo 4.3

Repetir os exemplos 4.1 e 4.2 considerando a depreciação pelo método da soma dos dígitos.

Solução

n = 5

S = 5* 6 / 2 = 15

Pode-se construir, então, a seguinte tabela:

Tabela 4.3 - Depreciação pelo método da soma dos dígitos

PERÍODO	VLR. CONTÁBIL	FATOR DE DEPR.	DEPR.	REM. CAPITAL	REM. TOTAL	VLR. PRESENTE
0	10,00	0,0000	0	0,00	0,00	0,00
1	66,67	0,3333	33,33	10,00	43,33	39,39
2	40,00	0,2667	26,67	6,67	33,33	27,55
3	20,00	0,2000	20,00	4,00	24,00	18,03
4	6,67	0,1333	13,33	2,00	15,33	10,47
5	0,00	0,0667	6,67	0,67	7,33	4,55
					TOTAL	100,00

O valor contábil do equipamento ao final do primeiro período é menor neste método do que no método de depreciação linear. O valor contábil final é, evidentemente, sempre o mesmo. Neste exemplo, este valor é igual a zero mas pode ser qualquer valor residual estipulado pela receita.

A série de remuneração total mínima se a depreciação real considerada for a da soma de dígitos é uma série não uniforme com os maiores valores nos primeiros períodos. No entanto como se pode observar na coluna do cálculo do valor presente, esta série é equivalente àquela do exemplo 4.2 (considerando a mesma taxa de juros de 10% aa.).

Como a depreciação é maior nos primeiros anos da vida útil do equipamento, as despesas contábeis serão maiores neste período, portanto, este método empurra o pagamento do imposto sobre o lucro para frente o que, como foi visto, é vantagem para o investidor.

Nestes dois exemplos a preocupação foi o cálculo da depreciação. É importante notar a simplicidade deste cálculo e considerar que em qualquer planilha eletrônica ele é feito diretamente por uma função pré-programada.

4.4) Método de Depreciação por Fundo de Amortização (DFA)

Neste *método a remuneração total* (depreciação mais capital) é considerada constante. O fator de depreciação é calculado da seguinte forma:

UDFA - é o fator de formação do capital (FFC) considerando a taxa de juros (i) e o número de períodos de capitalização igual à vida útil contábil do equipamento;

$$UDFA = FFC\,(n,i) \qquad \textbf{(4.4)}$$

n = vida útil contábil
i = taxa de juros

O fator de depreciação do período (j) é dado por:

$$FD\,(j) = UDFA * (1+i)^{j-1} \qquad \textbf{(4.5)}$$

Exemplo 4.4
Repetir os exemplos anteriores considerando o método de depreciação por fundo de amortização.

Solução

n = 5
i = 10 % aa

UFDA = FFC(5,10%) = 0,1638
FD(1) = 0,1638
FD(2) = 0,1638 * 1,1 = 0,1802 ...
... FD(5) = 0,1638 * 1,14 = 0,2398

Pode-se construir a seguinte tabela:

Tabela 4.4 - Depreciação por Fundo de Amortização Constante

PERÍODO	VLR. CONTÁBIL	FATOR DE DEPR.	DEPR.	REM. CAPITAL	REM. TOTAL	VLR. PRESENTE
0	100,00	0,0000	0	0,00	0,00	0,00
1	83,62	0,1638	16,38	10,00	26,38	23,98
2	65,60	0,1802	18,02	8,36	26,38	21,80
3	45,78	0,1982	19,82	6,56	26,38	19,82
4	23,98	0,2180	21,80	4,58	26,38	18,02
5	0,00	0,2398	23,98	2,40	26,38	16,38
					TOTAL	**100,00**

A série de remuneração total é equivalente às outras. O valor presente total equivale ao investimento. O cálculo do fator de depreciação e do valor contábil é um pouco mais difícil neste método. Este método é muito prático para a comparação de alternativas, no entanto é pouco usado em contabilidade.

Exemplo 4.5

Comparar o valor contábil do equipamento em função do tempo para os três métodos de depreciação considerados.

Solução

O gráfico comparando os três métodos é mostrado na figura 4.1:

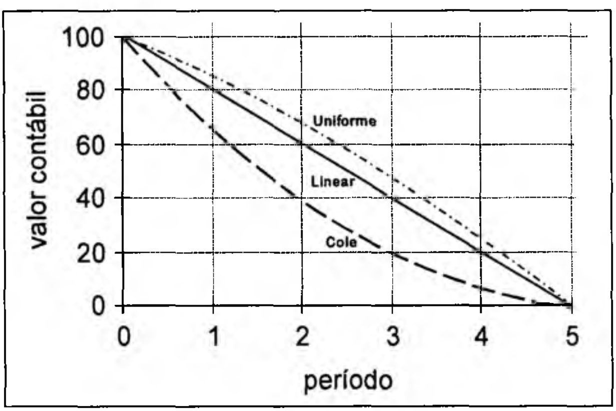

Figura 4.1 - Comparação entre os três métodos de depreciação

Ao final do último período todos os métodos são equivalentes.

Exemplo 4.6

Supondo que este equipamento dê uma receita anual de R$ 100,00, calcular o imposto de renda (IR) pago para cada uma das três formas de depreciação.

Solução

Considerando que o imposto de renda corresponda a 25% do lucro e que a única despesa relativa a este equipamento fosse a depreciação, tem-se:

LUCRO = RECEITA - DEPRECIAÇÃO
IR = 25% (LUCRO)

Fazendo este cálculo para cada um dos três métodos e calculando o seu valor presente, aquele que der o menor IR será o mais vantajoso para empresa. Estes cálculos estão mostrados na tabela 4.5.

Tabela 4.5 - Comparação entre os três métodos de depreciação

PERÍODO	LINEAR	SOMA DOS DÍGITOS	AMORTIZAÇÃO CONSTANTE
0	0,00	0,00	0,00
1	20,00	16,67	20,90
2	20,00	18,33	20,49
3	20,00	20,00	20,04
4	20,00	21,66	19,55
5	20,00	23,33	19,00
VP	75,82	74,61	76,14

Para a contabilidade da empresa, quanto maior a depreciação inicial, melhor, já que menor será o imposto de renda pago.

Por razões óbvias, quando é possível negociar a forma de depreciação, do ponto de vista do empresário, o método da soma dos dígitos é o mais vantajoso.

Exemplo 4.7

Uma empresa deseja adquirir um equipamento e tem que optar entre a compra e o aluguel deste equipamento. O equipamento custa, à vista, R$ 100 mil e espera-se que ao final de 10 anos ele tenha um valor de revenda de R$ 10 mil. Além disto, é previsto um gasto anual com a manutenção da ordem de R$ 4 mil. O aluguel do equipamento, com o preço da manutenção incluido, é de R$ 20 mil por ano.

Considerando que o IR é de 30% sobre o lucro da empresa e que a taxa mínima de atratividade da empresa é de 10% ao ano, analisar qual é a melhor alternativa.

Solução

Desprezando-se, inicialmente, o efeito do imposto de renda, para comparar as alternativas, usando o método do valor presente, tem-se:

A) Compra

$U = 4.000$
$n = 10$
$i = 10\%$ aa

$P_1 = U * FVA(10, 10\%) = 4.000 * 6{,}1445 = R\$ \ 24.578{,}00$

$F = -10.000$
$n = 10$
$i = 10\%$ aa

$P_2 = F * FVA'(10, 10\%) = -10.000 * 0{,}3855 = - R\$ \ 3.855{,}00$

$P_A = P_0 + P_1 + P_2 = 100.000 + 24.578 - 3.855 = R\$ \ 120.723{,}00$

B) Aluguel

$U = 20.000$
$n = 10$
$i = 10\%$ aa

$$P_B = U * FVA(10, 10\%) = 20.000 * 6,1445 = R\$ 122.890,00$$

A análise feita, desprezando-se o efeito do IR, mostra que a alternativa da compra do equipamento é a melhor.

Agora, levando-se em conta o efeito do IR, como 30% do lucro é considerado uma outra despesa da empresa, e que este lucro é dado pela diferença entre a receita e as despesas contábeis, quanto maior for a despesa contábil, menor será o IR. Desta forma, é razoável pensar que 30% das despesas contábeis podem ser considerdas como uma "renda aparente" da empresa. Considerando a depreciação linear (aceita pela Receita Federal), a alternativa A, conta com uma despesa contábil composta pela depreciação e pela manutenção do equipamento.

D = R$ 10.000 por ano
M = R$ 4.000 por ano.

Além disto, se, ao final da vida útil contábil do equipamento, a empresa realmente conseguir vender o equipamento pelos R$ 10.000 previstos, 30% deste valor terá que ser pago como IR, desta forma, este valor também tem que ser considerado como uma "despesa aparente".

O fluxo de caixa (considerando o IR) desta alternativa fica então:

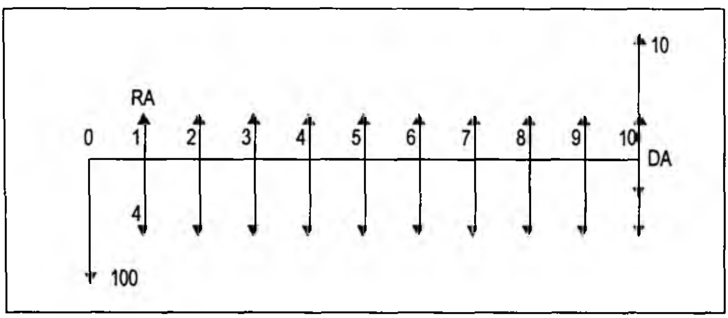

Figura 4.2 - Fluxo de caixa do exemplo 4.7

Onde RA é a receita aparente e DA é a despesa aparente. Calculando o valor presente deste novo fluxo de caixa:

$RA = 30\% * 14.000 = 4.200$
$DA = 30\% * 10.000 = 3.000$

$U = 4.000 - 4.200 = - 200$
$n = 10$
$i = 10\%$ aa

$P_1 = U * FVA\ (10, 10\%) = -200 * 6{,}1445 = - 1.228{,}90$

$F = -10.000 + 3.000 = -7.000$
$n = 10$
$i = 10\%$ aa

$P_2 = F * FVA'(10, 10\%) = - 7.000 * 0{,}3855 = - 2.698{,}80$

$P_A = P_0 + P_1 + P_2 =$ R\$ 96.072,30

Para a alternativa B (aluguel) a receita aparente é dada por:

$RA = 30\% * 20.000 =$ R\$ 6.000

Portanto

$U = 20.000 - 6.000 = 14.000$
$n = 10$
$i = 10\%$ aa

$P_B = U * FVA\ (10, 10\%) = 14.000 * 6{,}1445 =$ R\$ 86.023,00

Então, levando-se em consideração o IR, é melhor alugar o equipamento.

Exemplo 4.8
Calcular o aluguel de um apartamento de R$ 100.000,00, considerando que a vida útil do apartamento seja de 25 anos e que a taxa de remuneração do capital seja de 10% ao ano.

Solução
Ao final dos 25 anos o investidor deve estar apto para comprar uma apartamento novo, tem-se:

$$F = 100.000$$
$$n = 25$$
$$i = 10\ \%\ a.a.$$

$$U = F * FFC(25, 6\%) = 100.000 * 0{,}0102 = 1.016{,}81\ R\$/ano$$

Além de comprar o apartamento novo, é importante remunerar o capital investido. A taxa de remuneração do capital, considerada neste exemplo é de 10% aa. Então como o investimento foi de R$ 100.000,00, deve-se poder fazer uma retirada de R$ 10.000,00 por ano! Considerando a depreciação e a remuneração do capital o aluguel anual (AA) será dado por:

$$AA = 1.016{,}81 + 10.000{,}00 = 11.016{,}81\ R\$/ano$$

É interessante observar que esta anuidade corresponde exatamente à série uniforme de um investimento P a uma taxa de 10% ao ano (com uma vida útil de 25 anos):

$$U = P * FRC(n, i\%) = P * \{ FFC(n, i\%) + i\}$$

$$U = P * FFC(n, i\%) + Pi$$

Portanto o aluguel mensal (AM) cobrado deve ser:

$$AM = AA/12 = 918{,}07\ R\$\ por\ mês.$$

Exemplo 4.9
Repetir o exemplo anterior levando em consideração que o Imposto de Renda cobra 25% do lucro sobre o aluguel de uma pessoa física.

Solução
Foi visto no exemplo anterior que para considerar a desvalorização do imóvel e a remuneração do capital era necessário uma Receita Líquida (RL) anual de R$ 11.016,81. O Imposto de Renda (IR) é uma despesa anual para este investidor que deve ser repassada ao locatário. O novo aluguel será dado então por:

$$AA = RL + IR$$

onde $IR = 0{,}25\%\ AA$ e

$$RL = R\$\ 11.016{,}81$$

portanto:

$$AA = \frac{RL}{0{,}75} = 14.689{,}08\ R\$ \text{ por ano}$$

ou,

$$AM = 1.224{,}09\ R\$ \text{ por mês}$$

Exemplo 4.10
Repetir o exemplo anterior supondo que se possa abater a depreciação do imóvel do seu lucro.

Solução
Neste caso o Imposto de Renda (IR) passa a ser dado por:

$$IR = 0{,}25\ (\ AA - D\ )$$

Onde D é depreciação do imóvel que para fins da Receita Federal é considerada pelo método da depreciação linear, portanto, apartir da eq. (4.1), tem-se:

$$D = \frac{100.000}{25} = R\$\ 4.000,00$$

A Receita Líquida (RL) anual deve ser a mesma do exemplo 4.8 e o aluguel anual será, então, dado por:

$$AA = RL + IR = RL + 0,25\ (AA - D)$$

$$AA = \frac{RL - 0,25}{0,75} = 13.355,75 \text{ R\$ por ano}$$

ou

$$AM = 1.112,98 \text{ R\$ por mês.}$$

É importante notar que a consideração da depreciação no cálculo do IR permite ao dono do imóvel dar um desconto ao locatário mantendo a sua receita líquida.

Exemplo 4.11

Calcular a taxa interna de retorno de um investimento de R$ 100.000,00 que dá por ano, durante 25 anos, um rendimento anual de R$ 14.689,08.

Solução

$P = -100.000$

$U = 14.689,08$

$n = 25$

i = incógnita

Usando a fórmula iterativa ou uma planilha de cálculo obtem-se:

$i = 14,15\ \%$ ao ano

Este exemplo é interessante para mostrar a importância da consideração do imposto de renda na análise dos investimentos. Uma taxa de retorno de 14,15% ao ano, sem considerar o efeito do IR passa a 10% ao ano considerando este efeito.

Exemplo 4.12

Em um acordo entre empresários e o governo sobre a tarifa dos ônibus, ficou acertado que na planilha de custos da empresa o valor residual do ônibus, ao final da sua vida útil contábil, passasse de 25 para 15%. O método de amortização usado é o de Cole (ou, da soma dos dígitos). A taxa de remuneração do capital é de 12% ao ano. Calcular o lucro do empresário com esta mudança na sua planilha de custo, considerando que o IR seja igual a 30 % do lucro.

Solução

Tem que se considerar que a diferença entre o imposto de renda pago nas duas planilhas é o lucro do empresário. Quanto maior o valor da depreciação, menor será o imposto de renda pago. Calculando então a depreciação para um valor residual de 25% e para um valor residual de 15% e fazendo a diferença entre os dois resultados obtem-se a diferença de IR ao ano. Em seguida, fazendo o valor presente desta série obtém-se o lucro total. A tabela abaixo mostra estes cálculos:

Tabela 4.6 - Depreciação com um valor residual diferente

PERÍODO	DEPRECIAÇÃO 25%	DEPRECIAÇÃO 15%	DIFERENÇA	VALOR PRESENTE
0				6,59
1	13,64	15,45	1,82	
2	12,27	13,91	1,64	
3	10,91	12,36	1,45	
4	9,55	10,82	1,27	
5	8,18	9,27	1,09	
6	6,82	7,73	0,91	
7	5,45	6,18	0,73	
8	4,09	4,64	0,55	
9	2,73	3,09	0,36	
10	1,36	1,55	0,18	

Capítulo 5

APLICAÇÕES A SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA

5.1) Exemplos de Custos

Baseado nos conceitos de matemática financeira, pretende-se analisar qual seria a tarifa que uma usina geradora de energia elétrica teria que cobrar para ser um investimento razoável. A partir de um exemplo acadêmico e muito simplificado vai-se tentar introduzir algumas dificuldades inerentes ao cálculo dos custos de um sistema de energia elétrica.

Exemplo 5.1

Supondo que um gerador de 1kW instalado custe R$ 1.000,00 e tenha uma vida útil de 30 anos, qual a tarifa que deve ser cobrada para que este investimento seja razoável? Considerar que a taxa de remuneração do capital razoável para este investimento seja de 10% aa e que o gerador atenda a apenas uma carga conforme figura 5.1.

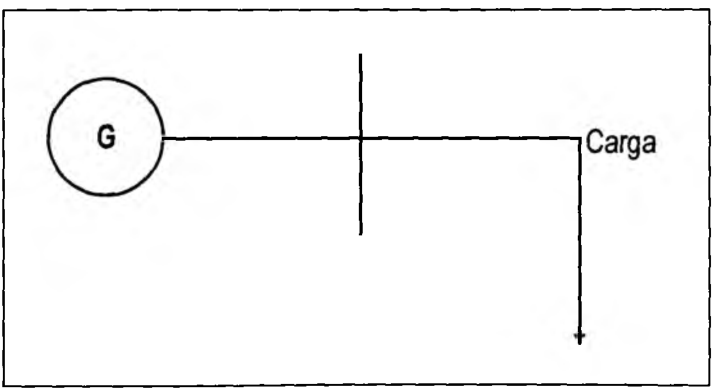

Figura 5.1 - Gerador alimentando uma carga.

Solução

A primeira dúvida que surge é como se comporta a carga?

A carga sendo constante e igual a 1kW, é evidente que o cálculo da tarifa se reduz a transformar o investimento em uma série constante com a duração de 30 anos.

$$P = 1.000$$
$$n = 30$$
$$i = 10\ \%$$

$$U = P * FRC\ (30,\ 10\%) = 1.000 * 0{,}1061 = 106{,}08 \text{ R\$ por ano (por 1kW)}$$

Exemplo 5.2

Qual seria o valor mensal da tarifa?

Solução

Uma solução aproximada seria dividir o valor anual por doze.

$$U(m) \approx 8{,}84 \text{ R\$ por mês (por kW)}$$

Para ser mais preciso, calcula-se o valor efetivo da taxa de juros mensal e considera-se o número de períodos de capitalização igual a 12 vezes 30.

$$i = \sqrt[12]{1{,}10} - 1 = 0{,}797\%\text{am}$$
$$n = 30 \text{ x } 12 = 360 \text{ meses}$$
$$P = 1.000$$

$$U(m) = P * FRC\ (360,\ 0{,}797\%) = 1.000 * 0{,}0085 = 8{,}46 \text{ R\$ por mês}$$

Exemplo 5.3

No sistema brasileiro, os investidores consideram que a taxa de remuneração do capital razoável é de 18% aa devido aos risco inerentes a este processo de privatização. Qual seria o valor anual do quilowatt instalado nestas condições?

Solução

$P = 1.000$
$n = 30$
$i = 18\%$ aa

$U = P * FRC\ (30,\ 18\%) = 1.000 * 0{,}1813 = 181{,}26$ R$ por ano

É interessante notar que como a menor taxa de remuneração de capital que um mercado competitivo pode oferecer é a taxa do governo (basicamente por que o investimento no governo seria o de menor risco) é de se esperar que a privatização de uma usina geradora de energia provoque um aumento na tarifa.

Exemplo 5.4

Supondo que se queira cobrar pelo consumo de energia e não pela potência instalada. Qual seria a tarifa?

Solução

Neste caso, é necessário calcular a energia consumida. Por definição, a energia (E) é dada por:

$$E = \int P(t)dt \tag{5.1}$$

Onde P(t) é a potência instântanea.

A potência varia ao longo do dia de acordo com uma *CURVA DE CARGA* que, por exemplo, pode ser dada pela figura 5.2 abaixo:

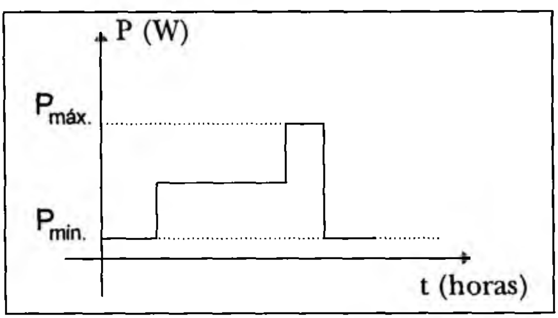

Figura 5.2 - Curva de carga

Evidentemente a potência máxima não pode (neste exemplo) ser superior aos 1.000 W. A potência média ($\overline{P}$) é definida por:

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt \qquad \textbf{(5.2)}$$

Define-se então *FATOR DE CARGA* como sendo a relação entre a potência média e a potência máxima da carga.

$$fc = \overline{P} / P_{máx} \qquad \textbf{(5.3)}$$

Supondo que o fator de carga neste problema seja de 0,65, então:

$$\overline{P} = 650\ W$$

Substituindo-se o valor da potência média na expressão da energia tem-se:

$$E = \overline{P}\int dt = \overline{P} * t \qquad \textbf{(5.4)}$$

A energia sendo função do tempo, deve ser taxada na mesma base, ou seja, considerando o consumo de energia diário, mensal ou anual. Considerando um consumo anual tem-se:

$$E = \overline{P} * 1\ ano = \overline{P} * (365\ dias/\ 1\ ano) * (24\ horas/\ 1\ dia) * 1\ ano$$

$$E = \overline{P} * 8.760\ horas$$

Chamando de conta anual de energia (CAE) e conta anual de potência (CAP) e considerando que elas têm que ser iguais, tem-se:

$$CAE = P_{máx} * fc * \text{horas do ano} * \text{tarifa de energia}$$
$$CAP = P_{máx} * \text{tarifa de potência}$$

Igualando as duas expressões e chamando tarifa de energia de (TE) e tarifa de potência de (TP), tem-se:

$$TE = \frac{TP}{fc * 8760} \tag{5.5}$$

Neste exemplo,

TP = 106,08 R$/ kW por ano

Então:

TE = 18,63 R$/MWh

A tarifa de energia pode ser aplicada por mês ou por ano já que o tempo é considerado no cálculo da integral da potência.

Várias observações podem ser feitas com relação a estes exemplos simples:

Os quatro valores calculados (investimento em R$/kW, demanda por ano R$/kW/ano, demanda por mês R$/kW/mês ou tarifa de energia R$/kWh) são equivalentes (considerando o fator de carga dado).

O conhecimento da carga é fundamental.

Outros fatores são também importantes para o cálculo do custo da energia. A usina não funciona sozinha, então é preciso considerar uma mensalidade (ou anualidade) referente à operação e manutenção da usina.

Exemplo 5.5
Calcular a tarifa supondo que a operação e a manutenção corresponda a 5% do investimento ao ano e que seja constante ao longo do período.

Solução
O investimento nesta usina hipotética continua de R$ 1.000,00, portanto, considerando que a manutenção anual corresponda a 5% do investimento, tem-se uma série uniforme de R$ 50,00 por ano correspondente à manutenção. A tarifa será dada, então, por:

P = 1.000
n = 30
i = 10 % aa
$U_1 = P * FRC(30, 10\%) = 106{,}08$ R$ por ano
$U_2 = 50$ R$ por ano (manutenção)

$U = U_1 + U_2 = 156{,}08$ R$ por ano

$$TE = \frac{U}{fc * 8{,}76} = 27{,}41 \text{ R\$/MWh}$$

O investimento em uma usina normalmente não é feito em um único ano. Tipicamente, uma usina hidroelétrica de 1000 MW tem a seguinte distribuição de desembolsos ao longo da obra (ref. [7]):

Tabela 5.1 - Distribuição ao longo da obra do investimento em uma usina.

PERÍODO	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
Porcentagem	2	7	17	21	21	20	9	3

Exemplo 5.6
Supondo que a usina dos exemplos anteriores tenha tido a sequência típica de desembolsos mostrada na tabela 5.1. Calcular os Juros Durante a Construção (JDC) desta obra. Calcular também o efeito destes juros no valor final da tarifa.

Solução
É necessário referenciar todos os desembolsos ao instante 0, ou seja, o instante onde a usina começa a dar retorno financeiro. Usando uma planilha Excel, tem-se:

Tabela 5.2 - Valor presente da tabela 5.1

PERÍODO	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	TOTAL
Porcentagem	2	7	17	21	21	20	9	3	100
Valor presente	3,54	11,27	24,89	27,95	25,41	22,0	9,00	2,73	126,79

Os juros durante a construção, neste exemplo, são iguais a 26,79%. A usina dos exemplos anteriores derão um acréscimo no investimento de 26,79%, portanto, a tarifa terá que ser calculada da seguinte forma:

$P = 1.267,90$
$n = 30$
$i = 10\%$ aa

$U_1 = P * FRC\,(30, 10\%) = 1.267,90 * 0,1061 = 134,50$ R$ por ano

$U_2 = 50$ R$ por ano (referentes à manutenção)

$U = 184,50$ R$ por ano, ou

$TE = 32,40$ R$/MWh

Exemplo 5.7

Calcular o efeito do atraso em uma obra nos JDC. Suponha que no quinto período a obra sofra um atraso de cinco anos. Despreze o custo da obra parada.

Solução

A única alteração que deve ser feita na planilha é o atraso no período. Portanto, tem-se:

Tabela 5.3 - Valor presente da tabela 5.1, considerando atraso.

PERÍODO	-11	-10	-9	-8	-7	-1	0	1	TOTAL
Porcentagem	2	7	17	21	21	20	9	3	100
Valor presente	5,71	18,16	40,09	45,02	40,09	22,00	9,00	2,73	183,61

O efeito do atraso da obra no valor final da tarifa é evidente.

Finalmente, levando-se em consideração que 90% do custo (aproximadamente) de uma usina hidráulica se refere à barragem. Acrescentar uma máquina a uma usina custa, portanto, relativamente pouco o que faria baixar em muito o preço da tarifa.

Exemplo 5.8

Calcular a tarifa supondo que na usina dos exemplos anteriores seja adicionada uma máquina idêntica à primeira.

Solução

O investimento neste caso não é mais P e sim 1,1 P (baseado na hipótese do custo relativo das máquinas). A potência máxima neste caso passa para 2kW. Considerando o investimento concentrado no instante inicial, tem-se:

$P = 1.100$
$n = 30$
$i = 10\,\%$

$U_1 = P * FRC\,(30, 10\%) = 1.100 * 0{,}1061 = 116{,}69$ R$ por ano (por 2 kW)

$U_2 = 55$ R$ por ano (devido à manutenção)

$U = 171{,}69$ R$ por ano (por 2 kW) ou 85,84 R$ por ano por kW.

$TE = 15{,}08$ R$/ MWh

Evidentemente não adianta encher de máquinas uma usina se não houver energia mecânica para ser convertida em elétrica, em outras palavras, se não houver água para rodar a turbina. Normalmente, a otimização dos projetos das usinas levam a uma supermotorização das mesmas, ou seja, a energia firme das usinas é sempre menor que a capacidade instalada.

Deste fato surge mais um uma característica do setor elétrico brasileiro. Os maiores aproveitamentos hidroelétricos no Brasil são feitos em cascata, ou seja, ao longo de um rio estão instaladas diversas usinas hidroelétricas. É fundamental que haja um órgão regulador de estoque de água (energia) para que estas usinas possam operar em conjunto harmonicamente.

Sofisticando um pouco mais o exemplo, lembrando que as cargas, normalmente, estão situadas a uma certa distância da geração, é necessário se acrescentar a transmissão no custo do sistema. O sistema elétrico, naturalmente, pode ser esquematizado pela figura 5.3.

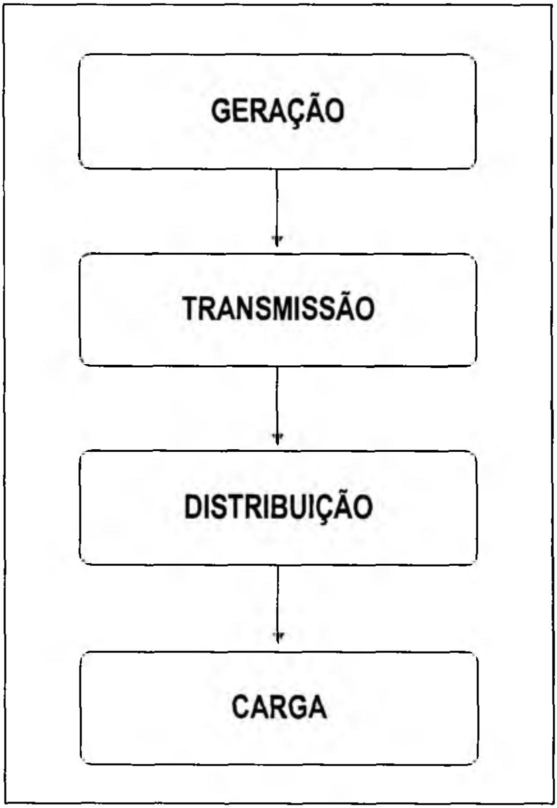

Figura 5.3 - Distribuição física de um sistema elétrico

O custo de cada parte do sistema depende de inúmeros fatores. A transmissão em particular depende da distância entre a geração e a carga. Além disto, depende do grau de *CONFIABILIDADE* que se deseja dar à carga. É claro que uma linha de transmissão dá menor confiabilidade à carga do que duas, por exemplo.

De acordo com o Plano Decenal de Expansão 1997-2006, ref. [10], os gastos no setor elétrico nos próximos cinco anos podem ser estimados de acordo com a tabela 5.4 (em bilhões de reais).

Tabela 5.4 - Gastos do Setor Elétrico

ITEM	1997	1998	1999	2000	2001	TOTAL
Geração	3,3	3,4	3,9	3,8	4,5	18,9
Transmissão	2,2	3,1	1,7	1,6	1,4	10,0
Distribuição	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	7,0
Outros	0,5	0,5	0,5	0,6	0,6	2,8

Baseado nestes dados é possível estimar que a transmissão é responsável por cerca de 25% do investimento. A geração, por 50% e a distribuição por outros 25%.

Exemplo 5.9
Calcular a tarifa levando em consideração a transmissão.

Solução
Levando em consideração a hipótese anterior e refazendo o cálculo aproximado do exemplo 5.1 tem-se:

G = 1.000 R$ / kW
T = 500 R$ / kW

P(G) = 1.000
n = 30
i = 10 %

U(G) = P(G) * FRC (30, 10%) = 1.000 * 0,1061 = 106,08 R$ por ano (por 1kW)

P(T) = 500
n = 30
i = 10%
U(T) = P(T) * FRC (30, 10%) = 500 * 0,1061 = 53,04 R$ por ano (por kW)

Transformando este valor para energia considerando o mesmo fator de carga dos exemplos anteriores tem-se: TE (transmissão) = 9,31 R$/MWh.

Considerando que a manutenção da geração e da transmissão correspondam aproximadamente a 5% do investimento, tem-se:

U(M) = 0,05 * 1500 = 75 R$ por ano

U = 234,12 R$ por ano (por kW)

portanto

TE = 41,12 R$ / MWh

Exemplo 5.10

Mantendo a suposição de que 50% do investimento se refere à geração, 25% à transmissão e 25% à distribuição, calcular o valor médio da tarifa que deve ser cobrada pela concessionária distribuidora.

Solução

Os custos de uma empresa distribuidora são bem diferentes daqueles de uma empresa geradora. Em primeiro lugar a empresa distribuidora tem que comprar a energia que está vendendo. Além disto, a manutenção da distribuição é bem mais cara que a da geração (dados de algumas concessionárias apontam para algo em torno de 40% do valor do investimento), desta forma tem-se:

P(I) = 500 R$/kW (investimento)
n = 30
i = 10%

U(I) = P(I) * FRC (30, 10%) = 500 * 0,1061 = 53,04 R$ por ano

U(M) = 0,40 * 500 = 200,00 R$ por ano

$U(E) = TE * 1kW * fc * 8760$ horas $= 41,12$ (R$/MWh) $* 0,65 *$ 8,76 MWh

$U(E) = 234,14$ R$ por ano

$U = U(I) + U(M) + U(E) = 53,04 + 200,00 + 234,14 = 487,18$ R$ por ano

ou

TE = 85,56 R$/MWh

É interessante notar que a tarifa média no Brasil, no momento em que este livro foi escrito (1997) é de 86 R$/MWh o que mostra que os dados aproximados usados neste exemplo refletem razoavelmente bem os valores reais.

Como foi visto no exemplo anterior, existe um um contrato de compra de energia entre a empresa de distribuição de energia e a empresa que gera e transmite. A tarifa entre estas empresas concessionárias é chamada de tarifa de *SUPRIMENTO*. Neste contrato normalmente é calculado um preço para a demanda e outro para energia.

A título de exemplo a tabela 5.5 mostra o contrato de duas empresas geradoras "A" e "B" com uma empresa distribuidora "C".

Tabela 5.5 - Exemplo de contrato de suprimento.

EMPRESA	A	B
Demanda	1,54 R$ / kW	17,00 R$ / kW
Consumo	19,97 R$ / MWh	----
Contrato	367 MW	136 MW
Transmissão	3,00 R$/kW	3,00 R$/kW

Exemplo 5.11
Calcular a conta mensal de energia que a empresa distribuidora "C" paga para "A" e "B" usando os dados da tabela 5.5.

Solução
A tarifa de "A" é monômia portanto o cálculo do custo mensal é direto.

$$C(A) = 17\ (R\$/kW) * 136\ MW = R\$\ 2{,}31 * 10^6 \text{ por mês.}$$

A tarifa de "B" é binômia portanto para se calcular o valor da conta mensal é necessário calcular a parcela de energia e a parcela da demanda. Além disto, para o cálculo da parcela de energia é necessário conhecer o fator de carga. Neste exemplo vai-se usar fc = 0,65.

$$CE(B) = 367\ MW * 0{,}65 * 1\text{ mês} * 19{,}97\ R\$/MWh * 720\ (\text{horas/mês})$$

$$CE(B) = R\$\ 3{,}43 * 10^6 \text{ por mês}$$

O custo da demanda é (CD) é dado por:

$$CD(B) = 1{,}54\ (R\$/kW) * 367\ MW = R\$\ 0{,}56 * 10^6 \text{ por mês}$$

Finalmente, considerando a tarifa de transmissão (que é a mesma para as empresas "A" e "B") tem-se que o custo da transmissão (CT) é dado por:

$$CT(AB) = 3\ (R\$/kW) * (367 + 136)\ MW = R\$\ 1{,}54 * 10^6 \text{ por mês}$$

Somando-se todas as parcelas calculadas obtem-se a conta mensal de energia da empresa de distribuição "C".

$$\text{Conta }(C) = (2{,}31 + 3{,}43 + 0{,}56 + 1{,}54)*10^6 = R\$\ 7{,}84 * 10^6 \text{ por mês}$$

Exemplo 5.12
Supondo que o valor médio da energia vendida pela empresa "C" é aquele dado pelo exemplo 5.10, ou seja, 85,56 R$/MWh, qual o faturamento mensal desta empresa?

Solução:
O faturamento desta empresa será dado pela energia vendida (potência máxima vezes o fator de carga vezes o número de horas por mês) vezes o valor da tarifa média. A potência máxima é dada pelo contrato somado com a geração própria que, neste caso, será considerada igual a 12 MW.

$$F(C) = Pmax * fc * 720 \text{ horas} * TE$$

$$F(C) = 515 \text{ MW} * 0{,}65 * 720 \text{ horas} * 85{,}56 \text{ R\$/MWh}$$

$$F(C) = \text{R\$ } 20{,}6 * 10^6 \text{ por mês}$$

Exemplo 5.13
Supondo que os dados dos exemplos anteriores sejam razoáveis, qual valor um investidor estaria disposto a pagar pela empresa "C"?

Solução
A potência instalada de "C" é, por hipótese, igual a 515 MW. O faturamento mensal foi calculado no exemplo 5.12

$$F(C) = \text{R\$ } 20{,}6 * 10^6$$

Os gastos mensais com energia foram calculados no exemplo 5.11

$$Conta(C) = \text{R\$ } 7{,}84 * 10^6$$

Os gastos anuais com manutenção (MA), usando as hipóteses do exemplo 5.10, seriam de 40% do investimento, ou seja:

$$MA(C) = 0{,}40 * 515 \text{ MW} * 0{,}5 \text{ M R\$/MW}$$

$$MA(C) = \text{R\$ } 103 * 10^6 \text{ por ano}$$

Dividindo por 12 para que a manutenção também fique em base mensal tem-se:

$$M(C) = \text{R\$ } 8{,}58 * 10^6$$

O lucro da empresa será dado por:

$$\text{LUCRO (C)} = 20{,}6 - 7{,}84 - 8{,}58$$

$$\text{LUCRO (C)} = \text{R\$ } 4{,}18 * 10^6 \text{ por mês}$$

Supondo que o investidor considere razoável uma taxa de retorno de 18% aa (ou 1,39% am) e que este investimento seja considerado por um tempo muito grande tem-se:

$$\text{Preço} = U / i = 4{,}18 / 0{,}0139 = \text{R\$ } 300{,}97 * 10^6$$

Obeserve que este valor é da mesma ordem de grandeza que o investimento na distribuição tomando como hipótese no exemplo 5.10, ou seja, de 500 R$/kW.

$$\text{Investimento Distribuição} = 0{,}5 \frac{\text{M R\$}}{\text{MW}} * 515 \text{ MW} = \text{R\$ } 257 * 10^6$$

No momento em que foi feito este exemplo houve um leilão de privatização de uma empresa de distribuição com características semelhantes à empresa fictícia "C". O preço do lote de ações vendidas ficou entre os dois valores calculados acima. Isto mostra que os investidores do setor estão fazendo contas semelhantes a estas mostradas nestes exemplos teóricos.

5.2) Considerações Finais

Uma característica importante do setor elétrico, que o difere de outras indústrias de rede (como distribuição de água ou gás), é a impossibilidade de armazenamento da energia em sua forma elétrica. Esta característica faz com que a geração tenha que ser, a todo instante, igual à carga somada às perdas inerentes ao processo de transmissão. Esta íntima relação entre a geração e a carga fez com que as empresas do setor elétrico se estruturassem de forma vertical, ou seja, com a geração, a transmissão e a distribuição pertencendo a um mesmo dono ou com um elevado grau de cooperação entre estas empresas. Além disto, todo o mercado era atendido por uma única empresa caracterizando assim um monopólio.

A teoria microeconômica mostra que empresas que detêm o monopólio de um mercado apresentam uma tendência natural de produzir menos do que o mercado gostaria e a um preço mais alto. Para corrigir esta distorção inerente ao monopólio, é fundamental a presença de um órgão regulador que atue no sentido de minimizar estes problemas.

Uma das formas de se regular um monopólio é definindo o preço ou a tarifa. Ainda de acordo com a mesma teoria, é interessante que o órgão regulador defina o preço da energia igual ao seu custo marginal de produção. Desta forma o regulador impõe à empresa o mesmo preço ao qual ela seria submetida se houvesse uma concorrência perfeita. Para se entender o porquê da tarifa refletir os seus custos marginais é necessário uma revisão de conceitos de microeconomia. Uma boa revisão destes conceitos pode ser encontrada na referência [4]. Para o leitor interessado em uma abordagem mais profunda recomenda-se a referência [12].

O transporte da energia, ou seja, a transmissão e a distribuição são monopólios naturais. Não é possível promover a concorrência entre duas linhas de transmissão em paralelo. Da mesma forma, não tem sentido mais de uma entrada de energia elétrica em uma residência, nem mesmo em uma indústria.

A geração e a comercialização da energia não são, necessariamente, monopólios. Se todos os agentes tiverem o direito de acesso livre e não discriminatório ao sistema de transporte, ou seja, aos cabos de transmissão e distribuição, é possível promover a concorrência entre diversas empresas geradoras e até entre empresas de comercialização de energia.

Em 1978, os EUA mostraram que era possível a concorrência entre as empresas geradoras. O governo obrigou as empresas concessionárias a comprar energia de novos produtores independentes (chamados de Produtores Independentes de Energia - PIE, no Brasil, e de Independent Power Producer - IPP, nos Estados Unidos). Estes contratos eram remunerados pelos custos a serem evitados pelas empresas concessionárias.

Na Inglaterra, em 1990, a reestruturação do setor elétrico ocorreu de forma mais profunda. O governo inglês, além de impor a competição na geração, impôs também a competição na comercialização da energia. Para que isto fosse possível, uma série de medidas foram tomadas como a criação de um mercado "spot" de energia, a subdivisão das empresas verticalmente integradas e o livre acesso ao sistema de transporte de energia entre outras. Uma excelente análise da reestruturação do setor elétrico mundial pode ser encontrada na referência [13].

A reestruturação do setor elétrico inglês provocou uma verdadeira revolução conceitual no setor elétrico de todos os países do mundo. Transformar uma indústria, que durante um século foi considerada um monopólio, em uma estrutura econômica baseada na competição, parecia impossível mas agora é uma realidade. Alguns resultados da reestruturação do setor elétrico inglês já são conhecidos e o mais impressionante é a triplicação, em cinco anos, do valor das ações das empresas do setor.

No Brasil, este processo de reestruturação também está ocorrendo. Além da privatização dos ativos das empresas de energia elétrica, está havendo uma completa mudança nas relações comerciais entre os agentes produtores e distribuidores de energia.

A reestruturação do setor elétrico brasileiro tem características muito particulares. Trata-se de um enorme sistema interligado de usinas hidroelétricas. Cerca de 95% da energia elétrica gerada no país é de origem hidráulica. Os rios onde estão localizadas estas usinas têm uma grande variação de vazão ao longo do ano. Além disto, existem diversas usinas em um mesmo rio, o que faz que as decisões de despacho de cada usina estejam intimamente ligadas. Um problema importante, neste novo contexto, diz respeito ao cálculo do custo da água. De fato, considerando uma sequência de usinas em cascata em um mesmo rio e cada uma com um dono diferente, o operador do sistema tem que ter um conhecimento muito grande do rio (e do custo da água) para decidir qual usina deve ser despachada.

O preço da transmissão também é fundamental. A importância da transmissão no sistema brasileiro é evidente. Além da extensa área territorial, a característica de geração hidráulica impõe ao sistema a transmissão de grandes blocos de energia das usinas até os centros de carga.

A distribuição e a comercialização também precisam de um eficiente sistema de regulação. Se as empresas distribuidora e comercializadora forem de donos diferentes, o agente regulador tem que garantir que a empresa distribuidora forneça serviço de qualidade para os seus consumidores e para aqueles que usam o seu sistema de distribuição.

O papel do agente regulador aumenta muito nesta nova estrutura do setor. Ao contrário do que a teoria econômica preconiza, ou seja, que aumentando a competição diminui a necessidade do agente regulador, no setor elétrico, quanto maior a competição mais eficiente precisa ser o trabalho do agente regulador.

O planejamento do setor elétrico brasileiro que historicamente vem sendo feito de forma centralizada, está sofrendo também uma enorme mudança. A característica hidroelétrica do setor faz com que um planejamento indicativo seja necessário.

A estrutura tarifária das empresas concessionárias também deve mudar bastante. De fato, o sistema centralizado de cálculo da estrutura tarifária acabou. Cada empresa deve ser capaz de calcular os seus próprios custos em cada ponto do seu sistema e elaborar uma divisão dos custos entre os seus consumidores. O papel do agente regulador, neste ponto também, é fundamental.

Para finalizar, todas estas mudanças que estão ocorrendo no setor elétrico fazem com que o profissional da área tenha que ter uma noção muito clara de custos e do valor temporal do dinheiro para analisar corretamente as diversas possibilidades de investimento da empresa.

É dentro deste novo contexto que este livro se insere.

BIBLIOGRAFIA

[1] GRANT, E. L. e IRESON, W. G., "Principles of Engineering Economy", The Ronald Press Company, New York, 1964.

[2] HIRSCHFELD, H., "Engenharia Econômica e Análise de Custos", Editora Atlas S.A., São Paulo, 1992.

[3] HESS, G., MARQUES, J. L., PAES, L. C. R. e PUCCINI, A., "Engenharia Econômica", Editora Bertrand do Brasil S.A., Rio de Janeiro, 1992.

[4] BITU, R. e BORN, P., "Tarifas de Energia Elétrica - Aspectos Conceituais e Metodológicos", MM Editora, São Paulo, 1993.

[5] "Nova Tarifa de Energia Elétrica - Metodologia e Aplicação", DNAEE, Brasília, 1985.

[6] BIERMAN, H. e SMIDT, S. "As Decisões de Orçamento de Capital", Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1978.

[7] FORTUNATO, L.A.M., ARARIPE NETO, T.A., ALBUQUERQUE, J.C.R., PEREIRA, M.V.F., "Introdução ao Planejamento da Expansão e Operação de Sistemas de Produção de Energia Elétrica", Ed. Universitária, EDUFF, Niterói, 1990.

[8] RODRIGUES, A.P., DIAS, D.S., "Estado e Energia Elétrica", Instituto Liberal, Rio de Janeiro, 1994.

[9] LAPPONI, J.C., "Avaliação de Projetos de Investimento", Lapponi Treinamento e Editora Ltda, São Paulo, 1996.

[10] GCPS, "Plano Decenal de Expansão 1997-2000", Eletrobrás, Rio de Janeiro, 1996.

[11] GCOI, "Relatório 1996", Eletrobrás, Rio de Janeiro, 1997.

[12] MAS-COLELL, A., WHINSTON, M. D e GREEN, I. R., "Microeconomic Theory", Oxford Unversity Press, New york, 1995.

[13] HUNT, S. e SHUTTLEWORTH, G., "Competition and Choice in Electricity", John Wiley Z. & Sons, Inglaterra, 1996.

Apêndice 1

RESUMO DAS FÓRMULAS PRINCIPAIS

$$F = P(1+i)^n$$

F/P= fator de acumulação de capital = FAC'(n,i)

$$P = F\frac{1}{(1+i)^n}$$

P/F = fator de valor presente = FVA'(n,i);

$$F = U\frac{\{(1+i)^n - 1\}}{i}$$

F/U = fator de acumulação de capital = FAC(n,i);

$$U = F\frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

U/F = fator de formação de capital = FFC(n,i);

$$P = U\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

P/U = fator de valor atual = FVA(n,i);

$$U = P\{\frac{i}{(1+i)^n - 1} + i\}$$

U/P fator de recuperação de capital = FRC(n,i)

$$F = G\{\frac{(1+i)^n - 1}{i^2} - \frac{n}{i}\}$$

$$P = G\left\{\frac{\frac{(1+i)^n - 1}{i^2} - \frac{n}{i}}{(1+i)^n}\right\}$$

$$U = G\left\{\frac{(1+i)^n - 1 - ni}{i[(1+i)^n - 1]}\right\}$$

Apêndice 2

LISTA DE EXERCÍCIOS

1ª QUESTÃO

Para que um funcionário público se aposente ganhando o seu salário integral, após uma contribuição de 35 anos, calcular o desconto no salário.

2ª QUESTÃO

Uma lâmpada convencional de 60W custa R$ 2,00 e dura aproximadamente 1.000 horas. Uma lâmpada fluorescente com reator eletrônico embutido custa R$ 50,00, tem uma potência de 15W, a mesma quantidade de iluminação que a lâmpada convencional e dura aproximadamente 10.000 horas. Determinar a partir de qual utilização diária vale a pena substituir a lâmpada convencional pela fluorescente.

3ª QUESTÃO

Repetir o exemplo 5.10 considerando que a taxa de remuneração do capital passe de 10 para 11% ao ano.

4ª QUESTÃO

Faça uma avaliação da depreciação anual do seu carro e dos custos relativos a seguro e manutenção. Avalie, para uma taxa de juros de 6% aa, qual a melhor época para vender este carro.

5ª QUESTÃO

Um apartamento custa R$ 200 mil. A vista ele pode ser adquirido por R$ 160 mil. Este apartamento pode também ser financiado em 36 meses com uma taxa de 2% am. Qual a taxa real de juros do financiamento?

6ª QUESTÃO

Faça uma análise paramétrica dos custos de uma usina hidroelétrica (UHE) e de uma usina termoelétrica (UTE) para avaliar a partir de qual taxa de juros anual a UTE passa a fornecer uma energia mais barata que a UHE. Considere as seguintes hipóteses:

Investimento (UHE) = 1.500 R$ / kW;
Manutenção (UHE) = 10 R$ / MWh;
Investimento (UTE) = 300 R$ / kW;
Manutenção (UTE) = 5 R$ / MWh;
Combustível (UTE) = 80 R$ / MWh;
Fator de Carga = 0,65

SOLUÇÃO

1ª QUESTÃO

Para que um funcionário público se aposente ganhando o seu salário integral, após uma contribuição de 35 anos, calcular o desconto no salário.

Solução
Considerando um salário anual:

$S = 100$

A incógnita é o fator "f" que multiplicado por este salário dê uma série uniforme que ao final de 35 anos tenha um valor futuro que possa render uma outra série uniforme de amplitude S. Considerando, então, o ano 35 como referência tem-se:

$U = fS$
$n = 35$
$i = ?$

$$F = U * FAC\ (35,\ i\%) = fS * FAC\ (35,\ i\%)$$

Este valor futuro, ao final de 35 anos corresponde ao investimento feito pelo trabalhador para o período em que estiver aposentado, então:

$P = F$
$n' =$ *número de anos vivos após a aposentadoria*
$i = ?$
$U = S$

$$U = P * FRC(n',\ i\%)$$

$$S = fS * FAC\ (35,\ i\%) * FRC\ (n',\ i\%)$$
$$f(n',\ i\%) = 1/FAC(35,\ i\%) * FRC\ (n',\ i\%)$$

O fator de desconto é evidentemente função do número de anos n' e da taxa de juros. Pode-se construir a seguinte tabela:

Tabela A2.1

TAXA DE JUROS	1 ANO	10 ANOS	15 ANOS
0	0,0286	0,2857	0,4286
5	0,0105	0,0855	0,1149
10	0,0034	0,0227	0,0281
15	0,0010	0,0057	0,0066
20	0,0003	0,0014	0,0016

É interessante observar que para uma vida aposentada de 10 anos, considerando uma taxa de juros de 10 % aa, o desconto no salário deve ser de 2,27%.

2ª QUESTÃO

Uma lâmpada convencional de 60W custa R$ 2,00 e dura aproximadamente 1.000 horas. Uma lâmpada fluorescente com reator eletrônico embutido custa R$ 50,00, tem uma potência de 15W e a mesma quantidade de iluminação que a lâmpada convencional e dura aproximadamente 10.000 horas. Determinar a partir de qual utilização diária vale a pena substituir a lâmpada convencional pela fluorescente.

Solução

Alternativa A:

Potência = 60 W;
Custo = R$ 2,00;
Duração = 1.000 horas.

Alternativa B:

Potência = 15 W;
Custo = R$ 50,00;
Duração = 10.000 horas.

Supondo o custo médio da energia igual a 100,00 R$/MWh e uma taxa de juros de i % ao mês.

A incógnita do problema é o número de horas de utilização por mês (h).

O custo mensal da energia é dado por:

*E = Potência * h * Tarifa*

Portanto:

$$E_A = 60W * h * 100\frac{R\$}{MWh} = 6 * 10^{-3} hR\$$$

$$E_B = 15W * h * 100\frac{R\$}{MWh} = 1{,}5 * 10^{-3} hR\$$$

Além da série uniforme definida pela tarifa, é necessário transformar o investimento em série uniforme. A duração de cada investimento é diferente, por isto o método da série uniforme é o mais apropriado. Se n é o número de meses que dura cada lâmpada, então:

nA = 1000/h;

nB = 10.000/h

A série uniforme do investimento é dada por:

Alternativa A:

$P = 2,00$
$n = 1.000/h$
$i = paramétrico$

$U = P * FRC\ (n,\ i)$

$U_A = 0,006\ h + 2 * FRC(1000/h,\ i)$

Alternativa B:

$P = 50,00$
$n = 10.000/h$
$i = paramétrico$

$U = P * FRC\ (n,\ i)$

$U_B = 0,0015\ h + 50 * FRC(10.000/h,\ i)$

As alternativas são comparáveis quando $U_A = U_B$. No entanto, explicitar o valor de h não é possível. Pode-se traçar U_A e U_B em função de h para diversas taxas de juros. Considerando i = 1% ao mês, tem-se:

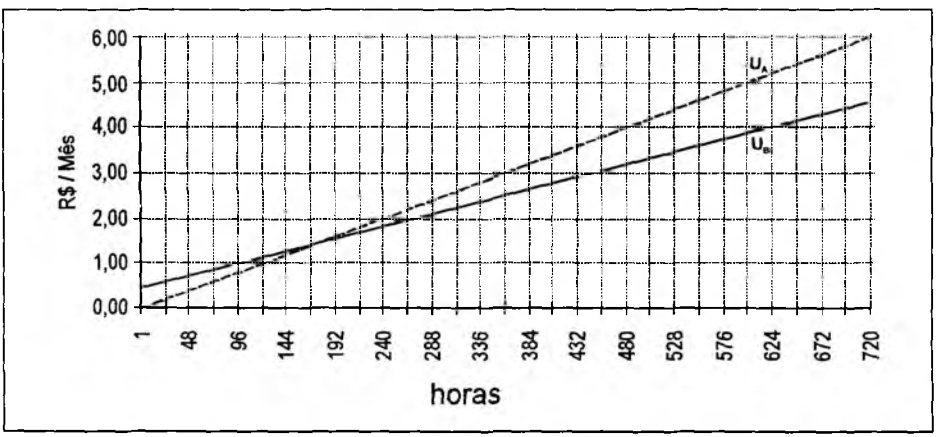

Figura A2.1

Do gráfico obtem-se que a partir de 168 horas de utilização mensais, ou seja, 7 dias, ou ainda 5,6 horas diárias, vale a pena o investimento na lâmpada mais cara.

3ª QUESTÃO

Repetir o exemplo 5.10 considerando que a taxa de remuneração do capital passe de 10 para 11% ao ano.

Solução

Usando as hipóteses que foram feitas no exemplo 5.10, ou seja:

Investimento na geração: 1.000 R\$ / kW
Investimento na transmissão: 500 R\$ / kW

Manutenção da geração e da transmissão igual a 5% do investimento ao ano; e fator de carga igual a 0,65.

Tem-se que o valor da energia comprada pela empresa distribuidora será:

$P = 1.500$
$n = 30$
$i = 11\%$ aa

$$U_1 = P * FRC\ (30{,}11\%) = 1.500 * 0{,}1150 = 172{,}54$$

$$U_2 = 0{,}05 * 1.500 = 75{,}00 \text{ (manutenção)}$$

$$U = \text{R\$ } 247{,}54 \text{ por ano}$$

$$TE \text{ (suprimento)} = \frac{247{,}54}{0{,}65 * 8{,}76} = 43{,}47 \text{ R\$ / MWh}$$

Recalculando as 3 parcelas referentes a investimento, manutenção e energia (agora considerando a taxa de juros igual a 11%) tem-se:

U(I) = P * FRC (30,11%) = 500 * 0,1150 = 57,50
U(M) = 0,4 * 500 = 200,00
U(E) = TE * 1 kW * fc * 8.760 = 43,47 * 1 * 0,65 * 8,76
U(E) = 247,51
U = U(I) + U(M) + U(E) = R$ 505,02 por ano

ou

TE (fornecimento) = 88,69 R$ / MWh

É interessante notar que um aumento de 1% na taxa de juros provoca o aumento de 3,66% na tarifa final.

4ª QUESTÃO

Faça uma avaliação da depreciação anual do seu carro e dos custos relativos a seguro e manutenção. Avalie, para uma taxa de juros de 6% aa, qual a melhor época para vender este carro.

Solução
Supondo que o valor de revenda de um carro cai 10% por ano. Supondo ainda que o custo de manutenção seja da ordem de 10% do valor do carro no primeiro ano e que este valor aumente 50% a cada ano. Calcular economicamente qual a idade ideal de venda do carro. Com estas considerações é mais negócio vender o carro ao final do primeiro ano de uso.

Tabela A2.2 - Análise da venda do carro.

PERÍODO	INVESTIMENTO	MANUTENÇÃO	REVENDA	VPL POR ANO	SÉRIE UNIFORME
0	-100	0,00		-100,00	
1		-10,00	90,00	-27,27	30,00
2		-15,00	80,00	-55,37	31,90
3		-20,00	70,00	-83,92	33,75
4		-25,00	60,00	-112,61	35,52
5		-30,00	50,00	-144,28	38,06

5ª QUESTÃO

Um apartamento custa R$ 200 mil. A vista ele pode ser adquirido por R$ 160 mil. Este apartamento pode também ser financiado em 36 meses com uma taxa de 2% am. Qual a taxa real de juros do financiamento?

Solução

Usando, mais uma vez, uma planilha eletrônica, fazendo:

$P = 200$
$n = 36$
$i = 2\%$ am

$U = 7{,}84$

Calculando a taxa de juros que obedeça a seguinte restrição:

$P = 160$
$U = 7{,}84$
$n = 36$

$i = 3{,}46\%$

A taxa real de juros é portanto de 3,46%.

6ª QUESTÃO

Faça uma análise paramétrica dos custos de uma usina hidroelétrica (UHE) e de uma usina termoelétrica (UTE) para avaliar a partir de qual taxa de juros anual a UTE passa a fornecer uma energia mais barata que a UHE. Considere as seguintes hipóteses:

Investimento (UHE) = 1.500 R$ / kW;
Manutenção (UHE) = 10 R$ / MWh;
Investimento (UTE) = 300 R$ / kW;
Manutenção (UTE) = 5 R$ / MWh;
Combustível (UTE) = 80 R$ / MWh;
Taxa de Carga = 0,65

Solução:
É preciso inicialmente, transformar os investimentos em valor de energia em função da taxa de juros. Para isto, usando as equações (2.9) e (5.6) tem-se:

$$U = TP = P * FRC\,(30, i\%) \quad [\,R\$ / kW \text{ por ano}]$$

$$TE = \frac{TP}{fc * 8{,}76} \quad [\,R\$ / MWh\,]$$

Acrescentando a manutenção na UHE vem:

$$TE\,(UHE) = \frac{1.500 * FRC\,(30, i\%)}{fc * 8{,}76} + M(UHE)$$

Para a UTE tem que acrescentar a manutenção e o combustível:

$$TE\,(UTE) = \frac{300 * FRC\,(30, i\%)}{fc * 8{,}76} + M(UTE) + \text{Combustível}$$

Colocando as duas equações em uma planilha obtem-se o gráfico a seguir da figura A2.2

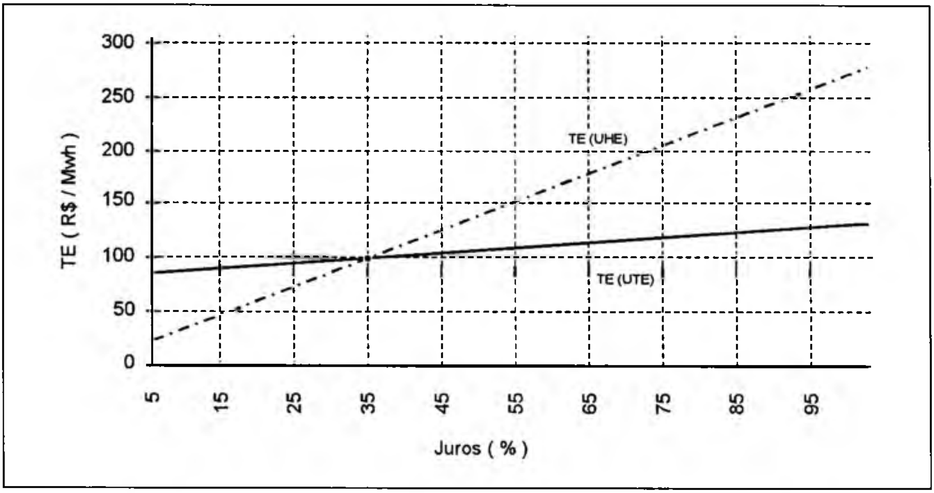

Figura A2.2 - Comparação de UHE com UTE

É interessante notar que a partir de uma taxa anual de juros de 35% aa, com estas hipóteses, a UTE é mais barata que a UHE.

Este livro foi feito para os profissionais interessados nos conceitos básicos de matemática financeira e em comparação de alternativas de investimentos. Na forma de um estudo dirigido, cada novo conceito é acompanhado de um exemplo. São mais de cem exemplos resolvidos. O último capítulo enfoca uma aplicação específica destes conceitos em uma análise simplificada de custos em um sistema de energia elétrica.