Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Problemas Elípticos Periódicos e Assintoticamente Periódicos

por

Reinaldo de Marchi

Orientador: Prof. Marcelo Fernandes Furtado

Brasília

2014

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Problemas Elípticos Periódicos e Assintoticamente Periódicos

por

Reinaldo de Marchi *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

02 de Abril de 2014

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado (MAT/UnB)

Prof. Dr. Elves Alves de Barros e Silva (MAT/UnB)

Prof. Dr. Carlos Alberto Pereira dos Santos (MAT/UnB)

Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva (MAT/UFPA)

Profa. Dra. Liliane de Almeida Maia (MAT/UnB)

*O autor foi bolsista da Capes pelo programa Prodoutoral durante a elaboração deste trabalho.

Os céus proclamam a glória de Deus e o firmamento anuncia a obra das suas mãos. Salmos 19:1

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, o Criador de todas as coisas.

Ao meu orientador Marcelo por ter dirigido meus passos em rumo a esta conquista. De coração, muito obrigado.

Aos professores que tiveram a paciência de ler esse trabalho e contribuir com sugestões relevantes: professores Elves, Carlos Alberto, João Pablo e professora Liliane. Também agradeço aos professores da Unb que contribuíram para minha formação.

Ao Departamento de Matemática da UFMT pela confiança em mim depositada.

A minha esposa Geizi que sempre acreditou em mim e me deu total apoio para que este sonho se tornasse real. Você, o Davi e este filho que estamos esperando são minha alegria, amo muito vocês.

Ao professor Martinho que desde os meus tempos de graduação me apoiou e me encorajou na busca dos objetivos.

Aos amigos que tive nesta minha caminhada. Aprendi também muitos valores convivendo com pessoas como vocês. Me arrisco em citar alguns que conheci em Brasília: Raimundo pelo companheirismo, Ricardo pela solicitude, Robson pelo encorajamento, Tarcísio pelos muitos conselhos, Bruno pelas boas conversas. As palavras são poucas para expressar o quanto sou grato. A lista de amigos que me ajudaram até aqui é imensa, dá até para escrever um livro contando cada história. Meu muito obrigado.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesse trabalho, estabelecemos resultados de existência e multiplicidade de soluções para algumas classes de problemas elípticos semilineares periódicos e assintoticamente periódicos. Consideramos três tipos de problemas: a equação de Schrödinger, caso positivo definido; a equação de Schrödinger, caso indefinido, e uma classe de sistemas hamiltonianos. As principais ferramentas utilizadas são métodos variacionais, tais como Teorema do Passo da Montanha, Teoremas de Linking, Variedade de Nehari Generalizada e o Princípio de Concentração de Compacidade de Lions.

Palavras-Chaves: Teorema do Passo da Montanha, Teorema de Linking, equação de Schrödinger semilinear, sistema hamiltoniano, variedade de Nehari generalizada, assintoticamente periódico.

Abstract

In this work, we establish some results on the existence and multiplicity of solutions for some classes of semilinear elliptic periodic and asymptotically periodic problems. We consider three types of problems: the Schrödinger equation, positive definite case; the Schrödinger equation, indefinite case, and a class of Hamiltonian systems. The main tools used are variational methods, such as the Mountain Pass Theorem, Linking Theorems, Generalized Nehari Manifold and Concentration Compactness Principle of Lions.

Keywords: Mountain Pass Theorem, Linking Theorem, Schrödinger semilinear equation, Hamiltonian system, generalized Nehari manifold, asymptotically periodic.

Conteúdo

Notações

- $\mathbb{R}^N$ é o espaço euclidiano de dimensão N com pontos $x = (x_1, \cdots, x_N)$.
- E é um espaço de Hilbert com produto interno $(\cdot, \cdot)$ e norma induzida $\|\cdot\|$.
- $B_r(y)$ é a bola de centro y e raio r em $\mathbb{R}^N$ ou E. Escreveremos B_r no lugar de $B_r(0)$.
- $o_n(1)$ denota uma função dependendo de $n \in \mathbb{N}$ que tende a 0 quando $n \to \infty$.
- $o(t)$ denota uma função dependendo de $t \in \mathbb{R}$ que tende a 0 quando $t \to 0$.
- ∇u é o gradiente de uma função real u: $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$.
- Δ denota o laplaciano: $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.
- $|\Omega|$ é a medida de Lebesgue de um conjunto mensurável Ω.
- denotaremos$\int_\Omega u(x)dx$ simplesmente por $\int_\Omega u$ e quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, abreviaremos escrevendo $\int u$.
- $L^p(\Omega)$ é o espaço usual de Lebesgue com norma $|\cdot|_p$.
- $H^1(\mathbb{R}^N)$ representa o espaço de Sobolev usual com norma $\|u\|_{H^1} = \int(|\nabla u|^2 + u^2)$.
- $\mathcal{F} := \{\varphi \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) : \ \forall \varepsilon > 0, \ |\{x \in \mathbb{R}^N : |\varphi(x)| \geq \varepsilon\}| < \infty\}$.
- $\sigma(A)$ denota o espectro do operador A.
- χ_Ω representa a função característica do conjunto Ω.

Introdução

Neste trabalho, estudaremos resultados sobre existência e multiplicidade de soluções para problemas elípticos em $\mathbb{R}^N$. Os dois primeiros capítulos serão dedicados ao estudo da equação de Schrödinger

$$-\Delta u + V(x)u = f(x,u),\ x \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

em que $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas. No Capítulo 1, analisaremos o caso definido, isto é, quando o espectro do operador $-\Delta + V$ está inteiramente contido no intervalo $(0, +\infty)$. Já no Capítulo 2, consideraremos o caso indefinido, ou seja, quando este espectro intercepta o intervalo $(-\infty, 0)$. No Capítulo 3, estudaremos uma classe de sistema hamiltoniano do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = F_v(x,u,v),\ x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + V(x)v = F_u(x,u,v),\ x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2}$$

em que $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e F_u, F_v denotam as derivadas parciais de F com respeito à segunda e terceira variável, respectivamente.

Em cada um dos problemas citados acima, além de olhar o caso em que o potencial V e a não linearidade são periódicos na variável x, nos ocuparemos também com o caso em que estas funções são perturbações de funções periódicas no infinito.

Embora tais problemas tenham que ser abordados caso a caso, podemos dizer que a metodologia para tratá-los é muito semelhante. De um modo geral, cada um deles pode ser visto como a equação de Euler-Lagrange de um funcional I definido em um espaço de Hilbert apropriado. Assim, estes problemas pertencem a um contexto variacional e portanto podemos fazer uso das ferramentas variacionais já consolidadas. No entanto, uma das principais dificuldades que temos que lidar com problemas em $\mathbb{R}^N$ é a perda de compacidade ocasionada por translações. Com intuito de recuperar alguma informação sobre o comportamento de sequências de Cerami (isto é, sequências (u_n) satisfazendo $I(u_n) \to c$ e $(1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\| \to 0$), será útil olhar para o problema limite. Por assumir certas hipóteses técnicas, temos que o funcional I pode ser escrito como

$$I(u) = I_\infty(u) + \psi(u).$$

Desse modo, I é uma perturbação do funcional I_∞ e ψ é a perturbação, que vamos assumir ser sempre não positiva. O funcional I_∞ será invariante por translações inteiras, ou seja, $I_\infty(u(\cdot - y)) = I_\infty(u)$ para todo $y \in \mathbb{Z}^N$. Uma vez obtida uma sequência de Cerami via Teorema do Passo da Montanha, para o Capítulo 1, ou Teorema de Linking, para os Capítulos 2 e 3, provaremos que tal sequência é limitada. Daí, teremos que uma subsequência converge fraco para um ponto crítico de I. Se este ponto crítico for não nulo, o resultado de existência segue. Caso contrário, usando o Princípio de Concentração de Compacidade de Lions, a menos de translação, obteremos uma subsequência que converge para um ponto crítico não nulo do funcional limite I_∞. Comparando os níveis críticos e usando o Teorema do Passo da Montanha Local para o Capítulo 1, ou o Teorema de Linking Local para os Capítulos 2 e 3, obteremos a existência de um ponto crítico não nulo para I e portanto concluiremos.

Para descrever em detalhes os resultados obtidos, dividimos o restante desta introdução em três seções. Em cada uma delas apresentamos de modo sucinto o conteúdo dos capítulos subsequentes.

Equação de Schrödinger subcrítica: caso definido

No Capítulo 1, estudaremos a existência de soluções não triviais para a equação de Schrödinger semilinear (1). Assumiremos que V é uma perturbação de uma função periódica no infinito. Com o objetivo de definir mais precisamente o que isto significa, denotaremos por $\mathcal{F}$ a seguinte classe de funções

$$\mathcal{F} := \big\{\varphi \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) : \ \forall \varepsilon > 0, \ |\{x \in \mathbb{R}^N : |\varphi(x)| \geq \varepsilon\}| < \infty\big\}.$$

A nossa hipótese no potencial será:

(V_0) existem uma constante $a_0 > 0$ e uma função $V_\infty \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, 1-periódica em

$x_1, \dots, x_N$, tais que $V_\infty - V \in \mathcal{F}$ e

$$V_\infty(x) \geq V(x) \geq a_0 > 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N,$$

em que $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$.

Considerando $F(x,t) := \int_0^t f(x,s)ds$ a primitiva de $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e

$$\widehat{F}(x,t) := \frac{1}{2}f(x,t)t - F(x,t),$$

assumiremos também as seguintes hipóteses:

(f_1) $F(x,t) \geq 0$ para $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ e $f(x,t) = o(t)$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$ quando $t \to 0$;

(f_2) para todo $r > 0$ vale

$$q(r) := \inf\{\widehat{F}(x,t) : x \in \mathbb{R}^N \text{ e } |t| \geq r\} > 0;$$

(f_3) existem constantes $a_1 > 0$, $R_1 > 0$ e $\tau > \max\{1, N/2\}$ tais que

$$|f(x,t)|^\tau \leq a_1 |t|^\tau \widehat{F}(x,t),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $|t| > R_1$;

(f_4) F é superquadrática no infinito, isto é,

$$\lim_{|t| \to +\infty} \frac{F(x,t)}{t^2} = +\infty$$

uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$;

(f_5) existem $p_\infty \in (2, 2^*)$, $\varphi \in \mathcal{F}$ e $f_\infty \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, 1-periódica em $x_1, \dots, x_N$, tais que:

(i) $F(x,t) \geq F_\infty(x,t) := \int_0^t f_\infty(x,s)ds$, para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$;

(ii) $|f(x,t) - f_\infty(x,t)| \leq \varphi(x)|t|^{p_\infty - 1}$, para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$;

(iii) $t \mapsto \dfrac{f_\infty(x,t)}{|t|}$ é crescente em $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$, para cada $x \in \mathbb{R}^N$.

O principal resultado do Capítulo 1 é o seguinte:

Teorema 1.1. *Suponha que* V *satisfaça* (V_0) *e* f *satisfaça* $(f_1)-(f_5)$*. Então o problema* (1) *possui uma solução não trivial.*

Daremos aqui uma descrição da demonstração deste teorema. A hipótese (V_0) nos permite usar em $H^1(\mathbb{R}^N)$ a norma equivalente

$$\|u\| = \left(\int (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\right)^{1/2}.$$

Por (f_1), (f_3) e (f_4), temos que o funcional

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int F(x,u)$$

é de classe C^1 e possui a geometria do passo da montanha. Assim, podemos usar o Teorema do Passo da Montanha para obter uma sequência de Cerami para o funcional I em um nível positivo. Para obter a limitação para este tipo de sequência, usaremos as hipóteses $(f_2)-(f_4)$. Passando para uma subsequência, temos que o limite fraco será ponto crítico para I. Se este limite fraco for não nulo, teremos a existência de solução. Se o limite fraco for nulo, então o próximo passo é usar o Princípio de Concentração de Compacidade de Lions para obter, a menos de translação, uma subsequência que converge para um limite fraco não nulo que será solução do problema periódico associado. Comparando os níveis e usando uma versão local do Teorema do Passo da Montanha, concluiremos a prova.

Para o caso periódico podemos obter existência de solução de energia mínima sem a necessidade da condição (f_5) e nosso resultado será:

Teorema 1.2. *Suponha que* $V_\infty(\cdot)$ *e* $f_\infty(\cdot,t)$ *são funções 1-periódicas em* $x_1,\ldots,x_N$*, e* $V_\infty(x)>0$ *para todo* $x\in\mathbb{R}^N$*. Se* f_∞ *satisfaz* (f_1), (f_3), (f_4) *e*

$(f_2)'$ $\widehat{F}_\infty(x,t) := \frac{1}{2}f_\infty(x,t)t - F_\infty(x,t) > 0$ *para todo* $t\neq 0$,

então o problema (1) *possui uma solução de energia mínima.*

Problemas como (1) têm sido foco de intensa pesquisa nos últimos anos. Inicialmente, vários autores trataram o caso em que f comporta-se como $q(x)|u|^{p-1}u$, $1<p<2^*-1$ e V sendo uma constante (veja [5, 7]). Nos trabalhos de P.H. Rabinowitz [25] e V. Coti-Zelati e P.H. Rabinowtz [13], foi imposta a clássica condição devido a Ambrosetti-Rabinowitz:

(AR) existe $\mu>2$ tal que $0<\mu F(x,t)\leq f(x,t)t$, $x\in\mathbb{R}^N$, $t\neq 0$.

Essa hipótese nos permite mostrar que sequências de Palais-Smale são limitadas. Contudo ela é bastante restritiva. Neste trabalho utilizamos a condição (f_3), que é mais fraca que a condição (AR), conforme demonstrado no artigo de Y. Ding e C. Lee [14]. Pelo que temos conhecimento, este foi o primeiro artigo em que tal condição foi usada. Vamos dar no que segue uma ideia da prova de que a condição (f_3) é mais fraca que (AR). Suponha que f satisfaça (AR) e $|f(x,t)| \leq C|t|^{p-1}$, $p \in (2, 2^*)$. Usando (AR) e considerando $0 < \nu < N + p + Np/2$, segue que

$$\frac{1}{2} - \frac{F(x,t)}{f(x,t)t} \geq \frac{\mu - 2}{2\mu} \geq \frac{1}{|t|^{\nu}}$$

para $|t|$ suficientemente grande. Definido $\tau = (p-\nu)/(p-2)$, vemos que $\tau > N/2$. Além disso, a condição de crescimento implica

$$\frac{(f(x,t)t)^{\tau-1}}{|t|^{2\tau}} \leq \frac{1}{|t|^{2\tau - p(\tau-1)}} = \frac{1}{|t|^{\nu}}$$

para $|t|$ suficientemente grande. Logo

$$\frac{1}{2} - \frac{F(x,t)}{f(x,t)t} \geq \frac{(f(x,t)t)^{\tau-1}}{|t|^{2\tau}}.$$

Multiplicando ambos os membro dessa desigualdade por $f(x,t)t$, obtemos (f_3) com $a_1 = 1$.

Enfatizamos que, no Teorema 1.1, não estamos supondo periodicidade para as funções V ou $f(\cdot, t)$. Em vez disso, consideramos o caso assintoticamente periódico, do mesmo modo que aparece no artigo de H.F. Lins e E.A.B. Silva [20]. A condição (f_5) descreve esta hipótese de assintoticidade periódica para a não linearidade f. Um trabalho pioneiro que aborda problemas como (1.1) é devido a S. Alama e Y.Y. Li [1] que foca o caso em que $V \equiv 1$ e f assintoticamente periódico em um certo sentido. Também citamos os artigos [2, 3, 20, 22, 27, 28] para alguns resultados relacionados. Observamos que nossas sobre f implicam $\widehat{F}(x,t) \to \infty$ quando $|t| \to \infty$. Este tipo de condição foi usada pela primeira vez em um artigo devido a D.G. Costa e C.A. Magalhães [11], onde os autores a chamaram de condição de não quadraticidade.

Como um exemplo de aplicação de nosso principal resultado, tomemos $a \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ 1-periódica em $x_1, \ldots, x_N$ com $a(x) \geq 2$. Defina as funções

$$f(x,t) := a(x)t\ln(1+t) + e^{-|x|^2}t(\ln(1+t) + 1 - \cos(t)),\ t \geq 0,$$

$$f_{\infty}(x,t) := a(x)t\ln(1+t),\ t \geq 0,$$

$f(x,t) := -f(x,-t)$, $f_{\infty}(x,t) := -f_{\infty}(x,-t)$ para $t < 0$. Esta função satisfaz $(f_1) - (f_5)$, mas não satisfaz (AR). Além disso, $f(x,t)/t$ é oscilante e, deste modo, a abordagem usando variedade de Nehari como em [30] não é aplicável.

Finalizamos observando que os resultados do Capítulo 1 generalizam [24] para o caso do operador laplaciano e complementam os resultados apresentados em [19] e [29] para o caso assintoticamente periódico.

Equação de Schrödinger subcrítica: caso indefinido

No Capítulo 2, estudaremos a existência de soluções não triviais para a equação de Schrödinger semilinear (1) considerando o caso em que espectro do operador $-\Delta + V$ contém elementos negativos. Neste caso, o potencial V deverá mudar de sinal.

Para o potencial V, assumiremos as condições:

(V_0) $V(x) = V(x_1, \ldots, x_N)$ é 1-periódica em $x_1, \ldots, x_N$;

(V_1) $0 \notin \sigma(-\Delta + V)$ e $\sigma(-\Delta + V) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$.

Estas condições garantem que em $H^1(\mathbb{R}^N)$ existe uma norma $\|\cdot\|$, equivalente a usual, tal que

$$\int (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) = \|u^+\|^2 - \|u^-\|^2, \; u = u^+ + u^-, u^\pm \in E^\pm,$$

em que E denota o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ com esta norma equivalente e vale a decomposição ortogonal $E = E^- \oplus E^+$, com $E^\pm$ sendo subespaços de E com dimensão infinita. A função $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ será como no caso definido. Nesse novo contexto, não podemos fazer uso direto do Teorema do Passo da Montanha. Comentamos que existem autores que tratam problemas indefinidos por meio de uma redução ao Teorema do Passo da Montanha em E^+, como por exemplo J. Wang, J. Xu e F. Zhang [32]. No entanto, preferimos fazer uso de um teorema de linking devido a W. Kryszewski e A. Szulkin [17] para obter uma sequência de Cerami em um nível positivo, que provamos ser limitada. Passando para uma subsequência, temos que o limite fraco será uma solução fraca de (1). Se este limite fraco for não nulo, o resultado segue. No caso em que o limite fraco é nulo, usando (f_5) e o princípio de concentração de compacidade de Lions, teremos, a menos de translação, uma subsequência que converge para um limite fraco, e este limite solução não nula do problema periódico associado. Comparando os níveis, poderemos usar um teorema abstrato, que descrevemos mais adiante, para garantir que o problema (1) possui uma solução não nula.

Nosso principal resultado é o seguinte:

Teorema 2.1. *Suponha que V satisfaça $(V_0) - (V_1)$ e f satisfaça $(f_1) - (f_5)$. Então o problema* (1) *possui uma solução não trivial.*

A equação de Schrödinger (1) tem sido estudada extensivamente sob as condições $(V_0) - (V_1)$. Entre estes trabalhos, podemos citar [14, 15, 17, 18, 23, 29, 31]. Em [17], W. Kryszewski e A. Szulkin generalizaram um teorema de linking e asseguraram a existência de uma solução não trivial, assumindo periodicidade. Posteriormente, supondo f assintoticamente periódica, G. Li e A. Szulkin [18] também obtiveram solução para (1). Usando uma generalização da variedade de Nehari e assumindo periodicidade, A. Pankov [23] demonstrou a existência de solução de energia mínima para (1). Observamos que em todos os trabalhos mencionados acima, foi assumida a condição (AR). Ainda podemos citar os trabalhos [9, 10] para o caso periódico e com expoente crítico.

Ainda assumindo periodicidade, Y. Ding e C. Lee [14] substituíram a condição (AR) pela hipótese (f_3) e (f_4), obtendo resultados de existência. Assumindo a condição (f_4) e

$$t \mapsto \frac{f(x,t)}{|t|} \text{ é crescente em } (-\infty, 0) \text{ e } (0, \infty),$$

os autores A. Szulkin e T. Weth [29], G. Évéquoz e T. Weth [15] e J. Wang et al [31] usaram a variedade de Nehari generalizada e provaram existência de solução de energia mínima para (1) sob diversas hipóteses do potencial $V(x)$ e da não linearidade f. Destes três, somente [15] não usa periodicidade.

Podemos dizer que o principal objetivo desse capítulo é melhorar os resultados obtidos em [18], retirando a condição de (AR) e generalizando a classe de funções assintoticamente periódicas. Além disso, conforme citado anteriormente, a prova do resultado de existência depende de uma versão do Teorema de Linking que, até onde sabemos, não havia sido considerado na literatura. Nos próximos parágrafos descrevemos em detalhes este resultado.

Seja $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert real com decomposição ortogonal $E = E^- \oplus E^+$. Assim, qualquer elemento $u \in E$ pode ser escrito de modo único como $u = u^+ + u^-$, com $u^\pm \in E^\pm$. Dada uma sequência ortonormal total (e_k) em E^-, definimos

$$\|u\|_\tau := \max \left\{ \|u^+\|, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\langle u^-, e_k \rangle| \right\}$$

e chamamos de τ-topologia a topologia gerada por esta norma. Dado um conjunto $M \subset E$, dizemos que uma homotopia $h : [0,1] \times M \to E$ é admissível se

(i) h é τ-contínua, isto é, se $t_n \to t$ e $u_n \overset{\tau}{\to} u$ então $h(t_n, u_n) \overset{\tau}{\to} h(t, u)$;

(ii) para cada $(t, u) \in [0,1] \times M$ existe uma vizinhança U de (t, u) na topologia produto de $[0,1]$ e (E, τ) tal que o conjunto $\{w - h(t, w) : (t, w) \in U \cap ([0,1] \times M)\}$ está contido em um subespaço de dimensão finita de E.

O símbolo Γ irá denotar a seguinte classe de aplicações admissíveis

$$\begin{aligned}\Gamma := \{ \quad h \in C([0,1] \times M, E) \ : \ & h \text{ é admissível}, \ h(0,\cdot) = \mathrm{Id}_M, \\ & I(h(t,z)) \leq \max\{I(u), -1\} \text{ para todo } (t,z) \in [0,1] \times M\}.\end{aligned}$$

Nosso resultado abstrato pode ser estabelecido como segue:

Teorema 2.3. *Seja*

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - J(u),$$

em que $J : E \to \mathbb{R}$ é limitado inferiormente, fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente e J' é fracamente sequencialmente contínuo. Suponha que existam $u_0 \in E^+ \backslash \{0\}$, $\alpha > 0$ e $R > r > 0$ tais que

$$\inf_{\{u \in E^+ : \|u\| = r\}} I(u) \geq \alpha, \quad \sup_{u \in \partial M} I(u) \leq 0,$$

sendo

$$M = \{u = tu_0 + u^- \ : \ u^- \in E^-, \ \|u\| \leq R, \ t \geq 0\}$$

e ∂M denotando a fronteira de M relativo a $\mathbb{R}u_0 \oplus E^-$. Se para algum $h_0 \in \Gamma$ vale

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in M} I(h(1,u)) = \sup_{u \in M} I(h_0(1,u)),$$

então I possui um ponto crítico $u \in h_0(1,M)$ que é não nulo e satisfaz $I(u) = c$.

Em [18], G. Li e A. Szulkin provaram que sem hipótese de existência da aplicação h_0 no teorema acima, podemos obter uma sequência de Cerami para o funcional I no nível c (veja também [17] para mais detalhes sobre a τ-topologia) . Contudo, nas condições do Teorema 2.1, nós não conseguimos provar que I satisfaz a condição de compacidade de Cerami. Assim, precisamos usar o teorema abstrato acima, juntamente com um argumento indireto de comparação de níveis com o funcional assintótico para obter a solução desejada. Vale a pena mencionar que o nosso resultado abstrato pode ser usado em outros tipos de problemas em que aparecem funcionais indefinidos que não satisfazem condições de compacidade habituais.

Sistema Hamiltoniano

Por último, no Capítulo 3, estabeleceremos resultados de existência e multiplicidade de solução para uma classe de sistemas Hamiltonianos do tipo (2). Consideraremos os casos em que F é periódica e assintoticamente periódica.

Para o potencial V, assumiremos a seguinte condição de periodicidade:

(V_0) $V(x) = V(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ é 1-periódica nas variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_N$.

Na Seção 1, iremos tratar o caso em que a não linearidade F é periódica. Além disso, motivados pelo caso escalar, assumiremos que F satisfaz as seguintes hipóteses :

(F_0) $F(x, z)$ é 1-periódica nas variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_N$;

(F_1) existem $C > 0$ e $p \in (2, 2N/(N-2))$ tais que

$$|F_z(x, z)| \leq C(1 + |z|^{p-1}), \text{ para cada } (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2;$$

(F_2) $F_z(x, z) = o(|z|)$ quando $|z| \to 0$, uniformemente para $x \in \mathbb{R}^N$;

(F_3) $\frac{F(x,z)}{|z|^2} \to \infty$ quando $|z| \to \infty$, uniformemente para $x \in \mathbb{R}^N$;

(F_4) existe uma função $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ crescente na segunda variável tal que

$$F_z(x, z) = g(x, |z|)z, \text{ par cada } (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2.$$

Em vista das condições $(F_1) - (F_2)$, podemos usar técnicas variacionais para tratar o problema. Conforme pode ser visto da hipótese (F_3), estamos interessados no caso em que F é superquadrática no infinito. Desde o trabalho seminal de A. Ambrosetti e P.H. Rabinowitz [4], problemas superlineares no infinito são objetos de intensa pesquisa. É bem conhecido que a condição superlinear introduzida neste artigo, a saber, no contexto de sistemas,

(AR) existe $\mu > 2$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ vale

$$0 < \mu F(x, z) \leq F_z(x, z) \cdot z.$$

é suficiente para provar que sequências de Palais-Smale do funcional associado são limitadas. Um cálculo padrão nos mostra que esta hipótese implica que $F(x, z) \geq c|z|^\mu$ para $|z| \geq 1$ e, desse modo, a condição (F_3) é mais fraca que (AR).

Para a equação escalar $-\Delta u + V(x)u = f(x,u)$, existem muitos resultados que substituem a condição (AR) pela condição análoga de (F_3). Muitos deles abordam o problema usando projeção sobre a variedade de Nehari e, para isso, os autores supõem uma condição de monotonicidade para o quociente $f(x,t)/t$. A nossa hipótese (F_4) é uma maneira de estender esta condição de monotonicidade para a não linearidade F.

Com o propósito de estabelecer nosso primeiro resultado de existência, lembramos que, para algum espaço de Banach E e algum funcional $I \in C^1(E,\mathbb{R})$, temos que soluções fracas de (2) são pontos críticos de I. Dizemos que $z_0 \in E$ é uma solução de energia mínima para (2) se

$$I(u_0) = \inf\{I(u) : u \in E \setminus \{0\} \text{ é uma solução fraca de } (2)\}.$$

Em nosso primeiro resultado do Capítulo 3 provamos a existência deste tipo de solução:

Teorema 3.1. *Suponha que V satisfaça (V_0) e F satisfaça $(F_0)-(F_4)$. Então o problema* (2) *possui uma solução de energia mínima.*

Devido a natureza do nosso sistema, temos que o funcional associado ao problema (3.1) é fortemente indefinido. Assim, a abordagem usual usando variedade de Nehari não funciona. Em [23], A. Pankov introduziu a variedade de Nehari generalizada para tratar funcionais indefinidos e em seu trabalho impôs algumas condições técnicas sobre a não linearidade, de modo a garantir que esta variedade fosse regular. Recentemente, A. Szulkin e T. Weth [30] desenvolveram uma nova abordagem que se baseia em um método de redução e nos permite provar que pontos de mínimo do funcional I restrito a variedade de Nehari generalizada são pontos críticos do funcional sem restrição.

Vale a pena observar que, nas condições do Teorema 3.1, o funcional associado é invariante por translações inteiras. Assim, se z é uma solução de (3.1), definindo

$$(a * z)(x) := z(x+a), \quad a \in \mathbb{Z}^N,$$

temos que $a * z$ também será solução de (3.1). Duas soluções z_1 e z_2 são ditas geometricamente distintas se $a * z_1 \neq z_2$ para todo $a \in \mathbb{Z}^N$. Tendo em vista a simetria do nosso problema, é natural perguntar se podemos obter soluções geometricamente distintas da solução obtida pelo Teorema 3.1. A resposta é positiva. De fato, em nosso próximo resultado, obtemos infinitas soluções.

Teorema 3.2. *Suponha que V satisfaça (V_0) e F satisfaça $(F_0) - (F_4)$. Então, existem infinitas soluções geometricamente distintas para o problema* (2).

Este teorema será provado como uma aplicação de um resultado abstrato devido a T. Bartsch e Y. Ding [6]. Embora ele garanta a existência de pontos críticos para I com energia crescente, nós não podemos estimar os níveis de energia das nossas soluções, visto que usamos um argumento indireto. Outro ponto chave na demonstração é um resultado técnico devido a V. Coti-Zelati e P.H. Rabinowitz [12], o qual fornece informações sobre o comportamento de sequências de Palais-Smale na presença de periodicidade.

Apresentamos aqui um exemplo de uma aplicação para nossos dois últimos teoremas. Seja $a \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ positiva e 1-periódica em $x_1, \cdots, x_N$ e considere

$$F(x,z) := \begin{cases} \dfrac{a(x)}{4}\big[2(|z|^2-1)\ln(1+|z|)+2|z|-|z|^2+4\ln(2)-3\big], \text{ se } |z| \geq 1, \\ \dfrac{a(x)}{4}\big[-2|z|^2+2(1+|z|^2)\ln(1+|z|^2)\big], \text{ se } |z| < 1. \end{cases}$$

Podemos ver que esta não linearidade satisfaz $(F_0)-(F_4)$, com

$$g(x,t) := \begin{cases} a(x)\ln(1+t), \text{ se } t \geq 1 \\ a(x)\ln(1+t^2), \text{ se } 0 \leq t < 1. \end{cases}$$

Contudo, ela não satisfaz a hipótese (AR).

Em nosso resultado final, consideramos o caso em que F é assintoticamente periódica. Para especificar melhor essa nova condição, precisamos introduzir a função auxiliar

$$\widehat{F}(x,z) := \frac{1}{2}F_z(x,z)z - F(x,z),$$

para $(x,z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2$ e considerar as hipóteses abaixo

(F_5) para todo $r > 0$ vale $q(r) := \inf\{\widehat{F}(x,z) : x \in \mathbb{R}^N \text{ e } |z| \geq r\} > 0$;

(F_6) existem constantes $c_0 > 0$, $R_0 > 0$ $\tau > N/2$ tais que

$$|F_z(x,z)|^\tau \leq c_0|z|^\tau \widehat{F}(x,z) \text{ para todo } (x,z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2 \text{ satisfazendo } |z| \geq R_0;$$

(F_7) existem $p_\infty \in (2, 2^*)$, $\varphi \in \mathcal{F}$ e F_∞ satisfazendo $(F_1)-(F_5)$ tais que:

(i) $F(x,z) \geq F_\infty(x,z)$ para todo $(x,z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2$ e

(ii) $|F_z(x,z) - F_{\infty,z}(x,z)| \leq \varphi(x)|z|^{p_\infty - 1}$ para todo $(x,z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2$.

Teorema 3.3. *Suponha que V satisfaça (V_0) e F satisfaça (F_2) e $(F_5)-(F_7)$. Então o problema* (2) *possui uma solução não trivial.*

A demonstração deste teorema consiste em aplicar o Teorema de Linking para obter uma sequência de Cerami em um nível positivo, que provamos ser limitada. Passando para uma subsequência, temos que o limite fraco será uma solução fraca de (2). Se este limite fraco for não nulo, o resultado segue. No caso em que o limite fraco é nulo, usando (F_7) e o princípio de concentração de compacidade de Lions, teremos a menos de translação, que o limite fraco converge para uma solução não nula do problema limite, isto é, o problema (2) com F_∞ no lugar de F. Comparando os níveis, poderemos usar a versão local do Teorema de Linking estabelecida no Capítulo 2 para garantir que o problema (3.1) possui uma solução não nula.

A condição (F_7) foi introduzida por H.F. Lins e E.A.B. Silva [20] no estudo de uma equação de Schrödinger. Pelo que temos conhecimento, a condição (F_6) foi introduzida por Y. Ding e C. Lee [14] como uma alternativa para substituir a condição (AR). Esta condição também foi usada em [33] no contexto da equação de Schrödinger. Finalmente, mencionamos o artigo de R. Zhang, J. Chen e F. Zhao [35] onde os autores consideraram o caso periódico de (2) com potencial indefinido. A condição técnica (F_5) é importante na prova da limitação de sequências de Cerami (veja [16] para algo relacionado). Esta hipótese é claramente satisfeita para o caso periódico.

Esta tese é organizado da seguinte maneira: no **Capítulo 1** estudamos a equação de Schrödinger definida e assintoticamente periódica, no **Capítulo 2** consideramos a equação de Schrödinger indefinida com termos assintoticamente periódicos, bem como a versão local do Teorema de Linking. O **Capítulo 3** trata de uma classe de sistemas Hamiltonianos no qual consideramos o caso periódico e assintoticamente periódico. Acrescentamos um **Apêndice** com uma descrição do método da variedade de Nehari generalizada. Para facilitar a leitura, no início de cada capítulo faremos uma recapitulação das hipóteses e resultados que serão provados. Desse modo, a leitura de cada um deles pode ser feita de maneira independente, sem prejuízo para o entendimento.

CAPÍTULO 1

Equação de Schrödinger definida e assintoticamente periódica

Neste capítulo, estudaremos a existência de soluções não triviais para a equação de Schrödinger semilinear

$$-\Delta u + V(x)u = f(x,u), \ x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.1}$$

em que $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas com V positiva. Nosso principal resultado estabelece existência de solução para o problema (1.1) sob uma condição de periodicidade assintótica no infinito.

Para descrever precisamente nosso resultado resultado vamos introduzir a seguinte classe de funções:

$$\mathcal{F} := \left\{\varphi \in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}) : \ \forall \varepsilon > 0, \ |\{x \in \mathbb{R}^N : |\varphi(x)| \geq \varepsilon\}| < \infty\right\}$$

Vamos supor que V é uma perturbação de uma função periódica no infinito no seguinte sentido:

(V_0) existem uma constante $a_0 > 0$ e uma função $V_\infty \in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, 1-periódica em $x_1,\ldots,x_N$, tais que $V_\infty - V \in \mathcal{F}$ e

$$V_\infty(x) \geq V(x) \geq a_0 > 0, \ \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N,$$

em que $x = (x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{R}^N$.

Considerando $F(x,t) := \int_0^t f(x,s)ds$ a primitiva de f e

$$\widehat{F}(x,t) := \frac{1}{2}f(x,t)t - F(x,t),$$

assumiremos também as seguintes hipóteses:

(f_1) $F(x,t) \geq 0$ para $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ e $f(x,t) = o(t)$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$ quando $t \to 0$;

(f_2) para todo $r > 0$ vale

$$q(r) := \inf\{\widehat{F}(x,t) : x \in \mathbb{R}^N \text{ e } |t| \geq r\} > 0;$$

(f_3) existem $a_1 > 0$, $R_1 > 0$ e $\tau > \max\{1, N/2\}$ tais que

$$|f(x,t)|^\tau \leq a_1 |t|^\tau \widehat{F}(x,t),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $|t| > R_1$;

(f_4) F é superquadrática no infinito, isto é,

$$\lim_{|t| \to +\infty} \frac{F(x,t)}{t^2} = +\infty$$

uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$;

(f_5) existem $p_\infty \in (2, 2^*)$, $\varphi \in \mathcal{F}$ e $f_\infty \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, 1-periódica em $x_1, \ldots, x_N$, tais que:

(i) $F(x,t) \geq F_\infty(x,t) := \int_0^t f_\infty(x,s)ds$, para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$;

(ii) $|f(x,t) - f_\infty(x,t)| \leq \varphi(x)|t|^{p_\infty - 1}$, para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$;

(iii) $\dfrac{f_\infty(x,\cdot)}{|\cdot|}$ é crescente em $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$, para cada $x \in \mathbb{R}^N$.

O principal resultado deste capítulo pode ser estabelecido como segue:

Teorema 1.1. *Suponha que V satisfaz (V_0) e f satisfaz $(f_1) - (f_5)$. Então o problema* (1.1) *possui uma solução não trivial.*

Com uma pequena alteração em nossos cálculos, podemos obter existência de solução de energia mínima para o problema periódico. Nesta situação, não precisaremos da condição (f_5) e nosso resultado é o seguinte:

Teorema 1.2. *Suponha que $V_\infty(\cdot)$ e $f_\infty(\cdot,t)$ são funções 1-periódicas em $x_1,\ldots,x_N$, e $V_\infty(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}^N$. Se f_∞ satisfaz (f_1), (f_3), (f_4) e*

$(f_2)'$ $\widehat{F}_\infty(x,t):=\frac{1}{2}f_\infty(x,t)t-F_\infty(x,t)>0$ *para todo* $x\in\mathbb{R}^N$ *e* $t\neq 0$,

então o problema (1.1) *possui uma solução de energia mínima.*

Este capítulo possui mais duas seções. Na primeira, apresentaremos as ferramentas principais para obtenção dos nossos resultados, descreveremos a estrutura variacional associado ao problema (1.1) e provaremos vários lemas auxiliares. Na última seção, demonstraremos os Teoremas 1.1 e 1.2.

1.1 Resultados preliminares

Nessa seção, descreveremos a estrutura variacional relacionada ao problema (1.1). Mostraremos que o funcional associado possui a geometria requerida pelo Teorema do Passo da Montanha e que sequências de Cerami são limitadas. Além disso, apresentaremos o Teorema Local do Passo da Montanha e alguns lemas que serão úteis na demonstração do nosso principal teorema.

Com intuito de obter os pontos críticos, iremos usar o seguinte resultado abstrato, devido a H. F. Lins e E.A.B. Silva [20, Teorema 2.3].

Teorema 1.3 (versão local do Passo da Montanha)**.** *Seja E um espaço de Banach real. Suponha que $I\in C^1(E,\mathbb{R})$ satisfaz $I(0)=0$ e*

(PM_1) *existem $\rho,\alpha>0$ tais que $I(u)\geq\alpha>0$ para todo $\|u\|=\rho$;*

(PM_2) *existe $e\in E$ com $\|e\|>\rho$ tal que $I(e)\leq 0$.*

Denote

$$\Gamma:=\{\gamma\in C([0,1],E):\gamma(0)=0,\|\gamma(1)\|>\rho,I(\gamma(1))\leq 0\}$$

e

$$c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}I(\gamma(t)).$$

Se existe $\gamma_0\in\Gamma$ tal que

$$c=\max_{t\in[0,1]}I(\gamma_0(t)),$$

então I possui um ponto crítico não trivial $u\in\gamma_0([0,1])$ tal que $I(u)=c$.

Em toda a seção assumiremos que o potencial V satisfaz a condição (V_0). Isto implica que a norma

$$\|u\|^2 := \int (|\nabla u|^2 + V(x)u^2), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

é equivalente a norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$. No que segue, iremos denotar por E o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ munido da norma acima.

Em nosso primeiro lema, obtemos estimativas básicas sobre o crescimento da não linearidade f.

Lema 1.4. *Suponha que f satisfaça (f_1), (f_3) e (f_5)-(ii). Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ e $p \in (2, 2^*)$ tais que*

$$|f(x,t)| \leq \varepsilon|t| + C_\varepsilon|t|^{p-1}, \quad |F(x,t)| \leq \varepsilon|t|^2 + C_\varepsilon|t|^p, \tag{1.2}$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$.

Demonstração. Tomando $\varepsilon > 0$ e usando (f_1), obtemos $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq \varepsilon|t|, \ x \in \mathbb{R}^N, \ |t| \leq \delta. \tag{1.3}$$

Por (f_3), existe $R_1 > 0$ satisfazendo

$$|f(x,t)|^\tau \leq a_1|t|^\tau \widehat{F}(x,t) \leq \frac{a_1}{2}|t|^{\tau+1}|f(x,t)|, \ x \in \mathbb{R}^N, \ |t| \geq R_1.$$

Daí, pondo $p = 2\tau/(\tau-1)$ e lembrando que $\tau > N/2$, concluímos que $2 < p < 2^*$. Além disso,

$$|f(x,t)| \leq C|t|^{\frac{\tau+1}{\tau-1}} = C|t|^{p-1}, \ x \in \mathbb{R}^N, \ |t| \geq R_1. \tag{1.4}$$

Segue da continuidade e periodicidade de f_∞ que existe $M > 0$ tal que

$$|f_\infty(x,t)| \leq M, \ x \in \mathbb{R}^N, \ \delta \leq |t| \leq R_1.$$

Agora, usando (f_5)-(ii), obtemos

$$|f(x,t)| \leq |\varphi|_\infty |t|^{p_\infty - 1} + M \leq \left(|\varphi|_\infty + \frac{M}{\delta^{p_\infty - 1}} \right) |t|^{p_\infty - 1}, \ x \in \mathbb{R}^N, \ \delta \leq |t| \leq R_1.$$

Isto, (1.3) e (1.4) comprovam a primeira desigualdade em (1.2). A segunda é obtida diretamente por integração. $\square$

Em vista do lema acima, fica bem definido o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int F(x,u).$$

Além disso, argumentos padrões implicam que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ com derivada de Frechét dada por

$$I'(u)v = \int (\nabla u \nabla v + V(x)uv) - \int f(x,u)v,$$

para quaisquer u, $v \in E$. Assim, os pontos críticos de I são precisamente soluções fracas do problema (1.1).

Nosso próximo resultado prova que o funcional I satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 1.5. *Suponha que f satisfaça (f_1), (f_3), (f_4) e (f_5)-(ii). Então I satisfaz (PM_1) e (PM_2).*

Demonstração. Pelo Lema 1.4 e a desigualdade de Sobolev temos que, para $u \in E$,

$$\int F(x,u) \le \varepsilon|u|_2^2 + C_\varepsilon|u|_p^p \le C_1\varepsilon\|u\|^2 + C_2\|u\|^p,$$

para constantes $C_1, C_2 > 0$. Uma vez que $p > 2$, temos que

$$I(u) \ge \left(\frac{1}{2} - C_1\varepsilon\right)\|u\|^2 + o(\|u\|^2),$$

quando $\|u\| \to 0$. Assim, para $\|u\| = \rho$ suficientemente pequeno, temos que $I(u) \ge \alpha > 0$. Isto prova (PM_1).

Para provar a condição (PM_2), fixemos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo $\varphi(x) \ge 0$ em $\mathbb{R}^N$ e $\|\varphi\| = 1$. Afirmamos que existe $R_0 > 0$ tal que, para todo $R > R_0$, temos que $I(R\varphi) < 0$. Se isto for verdade, basta tomar $e = R\varphi$ com $R > 0$ suficientemente grande para obter (PM_2).

Para demonstrar a afirmação, considerando $k = 2/\int \varphi^2$ e usando (f_4), obtemos $M > 0$ satisfazendo

$$F(x,t) \ge kt^2 \text{ para todo } |t| \ge M.$$

Daí, denotando $A_R = \{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(x) \ge M/R\}$, temos que

$$\int F(x,R\varphi) \ge \int_{A_R} F(x,R\varphi) \ge kR^2 \int_{A_R} \varphi^2. \tag{1.5}$$

Uma vez que $\varphi \ge 0$, pela continuidade da medida, podemos escolher $R_0 > 0$ tal que, para qualquer $R \geq R_0$, vale $\int_{A_R} \varphi^2 \geq \frac{1}{2} \int \varphi^2$. Segue da definição de k e (1.5) que $\int F(x, R\varphi) \geq R^2$ e portanto,

$$I(R\varphi) \leq \frac{1}{2}R^2 - R^2 = -\frac{1}{2}R^2 < 0,$$

para qualquer $R > R_0$. $\square$

Dizemos que $(u_n) \subset E$ é uma sequência de Cerami no nível $c \in \mathbb{R}$ ($(\mathrm{Ce})_c$ abreviadamente) para o funcional I, se

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad (1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\|_{E^*} \to 0$$

quando $n \to \infty$.

Nosso próximo lema nos garante que sequências de Cerami para o funcional I são limitadas.

Lema 1.6. *Suponha que f satisfaça $(f_1) - (f_4)$ e (f_5)-(ii). Então qualquer sequência de Cerami para I é limitada.*

Demonstração. Esta demonstração é uma adaptação de um argumento de [14]. Seja $(u_n) \subset E$ tal que

$$\lim_{n \to +\infty} I(u_n) = c \ \text{ e } \lim_{n \to +\infty} (1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\|_{E^*} = 0.$$

Segue que

$$c + o_n(1) = I(u_n) - \frac{1}{2}I'(u_n)u_n = \int \widehat{F}(x, u_n), \tag{1.6}$$

onde $o_n(1)$ denota uma quantidade que se aproxima de zero quando $n \to +\infty$. Suponha por contradição que, para alguma subsequência, ainda denotada por (u_n), temos que $\|u_n\| \to \infty$. Definindo $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$, obtemos

$$o_n(1) = \frac{I'(u_n)u_n}{\|u_n\|^2} = 1 - \int \frac{f(x, u_n)v_n}{\|u_n\|},$$

e portanto,

$$\lim_{n \to +\infty} \int \frac{f(x, u_n)v_n}{\|u_n\|} = 1. \tag{1.7}$$

Seja $R_1 > 0$ dado pela hipótese (f_3). Para qualquer $|t| > R_1$, temos que

$$a_1 \widehat{F}(x, t) \geq \left(\frac{f(x, t)}{t}\right)^\tau \geq \left(\frac{2F(x, t)}{t^2}\right)^\tau.$$

Assim, segue de (f_4) que $\widehat{F}(x,t) \to \infty$ quando $t \to \infty$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$. Isto implica que $q(r) > 0$ para todo $r > 0$ e $q(r) \to \infty$ quando $r \to \infty$, em que $q(r)$ foi definido em (f_2) como $q(r) = \inf\{\widehat{F}(x,t) : x \in \mathbb{R}^n \text{ e } |t| \geq r\}$.

Para $0 \leq a < b$, definimos

$$\Omega_n(a,b) := \{x \in \mathbb{R}^N : a \leq |u_n(x)| < b\}.$$

Usando (1.6) e a definição acima, e denotando por $|A|$ a medida de Lebesgue de $A \subset \mathbb{R}^N$, obtemos

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &= \int_{\Omega_n(0,a)} \widehat{F}(x,u_n) + \int_{\Omega_n(a,b)} \widehat{F}(x,u_n) + \int_{\Omega_n(b,\infty)} \widehat{F}(x,u_n) \\ &\geq \int_{\Omega_n(0,a)} \widehat{F}(x,u_n) + \frac{q(a)}{b^2} \int_{\Omega_n(a,b)} u_n^2 + q(b)|\Omega_n(b,\infty)|, \end{aligned}$$

e portanto, para algum $C_1 > 0$, temos que

$$\max\left\{ \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n(a,b)} \widehat{F}(x,u_n),\ \frac{q(a)}{b^2} \int_{\Omega_n(a,b)} u_n^2,\ q(b)|\Omega_n(b,\infty)| \right\} \leq C_1. \tag{1.8}$$

A desigualdade acima implica que $|\Omega_n(b,\infty)| \leq C_1/q(b)$. Lembrando que $q(b) \to +\infty$ quando $b \to +\infty$, concluímos que

$$\lim_{b \to +\infty} |\Omega_n(b,\infty)| = 0 \text{ uniformemente em } n. \tag{1.9}$$

Fixado $\mu \in [2, 2^*)$, pela desigualdade de Hölder e pelas imersões de Sobolev, obtemos, para algum $C_2 > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n(b,\infty)} |v_n|^\mu &\leq \left(\int_{\Omega_n(b,\infty)} |v_n|^{2^*} \right)^{\mu/2^*} |\Omega_n(b,\infty)|^{(2^*-\mu)/2^*} \\ &\leq C_2 \|v_n\|^\mu |\Omega_n(b,\infty)|^{(2^*-\mu)/2^*} = C_2 |\Omega_n(b,\infty)|^{(2^*-\mu)/2^*}. \end{aligned}$$

Uma vez que $2^* - \mu > 0$, concluímos que

$$\lim_{b \to +\infty} \int_{\Omega_n(b,\infty)} |v_n|^\mu = 0, \text{ uniformemente em } n. \tag{1.10}$$

Pondo $2\tau' = 2\tau/(\tau - 1) \in (2, 2^*)$, podemos usar a condição (f_3), (1.8) e a desigualdade de Hölder para obter

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_n(b,\infty)} \frac{f(x,u_n)v_n}{\|u_n\|} &= \int_{\Omega_n(b,\infty)} \frac{f(x,u_n)v_n^2}{|u_n|} \\
&\leq \left(\int_{\Omega_n(b,\infty)} \frac{|f(x,u_n)|^\tau}{|u_n|^\tau} \right)^{1/\tau} \left(\int_{\Omega_n(b,\infty)} |v_n|^{2\tau'} \right)^{1/\tau'} \\
&\leq a_1^{1/\tau} \left(\int_{\Omega_n(b,\infty)} \widehat{F}(x,u_n) \right)^{1/\tau} \left(\int_{\Omega_n(b,\infty)} |v_n|^{2\tau'} \right)^{1/\tau'} \\
&\leq C_3 \left(\int_{\Omega_n(b,\infty)} |v_n|^{2\tau'} \right)^{1/\tau'}.
\end{aligned}$$

Fixe $\varepsilon > 0$. Essa última desigualdade e (1.10) provê $b_\varepsilon > 0$ suficientemente grande, de modo que

$$\int_{\Omega_n(b_\varepsilon,\infty)} \frac{f(x,u_n)v_n}{\|u_n\|} < \varepsilon, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Agora considere $C_4 > 0$ tal que $|u|_2^2 \leq C_3\|u\|^2$ para todo $u \in E$. Por (f_1), existe $a_\varepsilon \in (0, b_\varepsilon]$ tal que

$$|f(x,t)| \leq \frac{\varepsilon|t|}{C_4},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ e $|t| \leq a_\varepsilon$. Desse modo,

$$\int_{\Omega_n(0,a_\varepsilon)} \frac{f(x,u_n)v_n}{\|u_n\|} \leq \frac{\varepsilon}{C_4} \int_{\Omega_n(0,a_\varepsilon)} v_n^2 \leq \varepsilon. \tag{1.12}$$

Por outro lado, usando (1.8) com $0 < a < b$ fixados, segue que

$$\int_{\Omega_n(a,b)} |v_n|^2 = \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_{\Omega_n(a,b)} u_n^2 \leq \frac{1}{\|u_n\|^2} \frac{C_1 b^2}{q(a)} = o_n(1). \tag{1.13}$$

Pela condição (f_5) e o fato de que $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, obtemos $C_5 > 0$ tal que $|f(x,u_n)| \leq C_5|u_n|$ para todo $x \in \Omega_n(a_\varepsilon, b_\varepsilon)$. Logo, pela estimativa (1.13), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\Omega_n(a_\varepsilon,b_\varepsilon)} \frac{f(x,u_n)v_n}{\|u_n\|} \leq C_5 \int_{\Omega_n(a_\varepsilon,b_\varepsilon)} v_n^2 < \varepsilon, \quad \text{para todo } \; n \geq n_0. \tag{1.14}$$

Finalmente, as estimativas (1.11), (1.12) e (1.14) implicam que

$$\int \frac{f(x,u_n)v_n}{\|u_n\|} \leq 3\varepsilon, \quad \text{para todo } \; n \geq n_0$$

o que contradiz (1.7), visto que ε é arbitrário. Portanto (u_n) é limitada em E.

$\square$

Observação 1.7. *Assumindo que $f_\infty(\cdot,t)$ é periódica, podemos obter a estimativa em (1.14) sem assumir a condição (f_5), bastando observar que a continuidade e periodicidade de f_∞ implicam que $|f_\infty(x,t)| \leq C|t|$ para todo $x \in \Omega_n(a,b)$. Além disso, neste caso, temos ainda que $\widehat{F}_\infty(x,u) \geq q(a) > 0$ para todo $x \in \Omega_n(a,b)$. Portanto, esse lema também é válido nas condições do Teorema 1.2.*

Lema 1.8. *Suponha que f satisfaça $(f_1)-(f_3)$ e $(f_5)-(ii)$. Seja $(u_n) \subset E$ uma sequência de Cerami para I em um nível $c > 0$. Se $u_n \rightharpoonup 0$ fracamente em E, então existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, $R > 0$ e $\beta > 0$ tais que $|y_n| \to \infty$ e*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^2 \geq \beta > 0$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que o lema seja falso. Então, para qualquer $R > 0$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |u_n|^2 = 0.$$

Daí, podemos usar o Lema de Anulamento de Lions [21, Lema I.1] para concluir que $\int |u_n|^s \to 0$, para qualquer $s \in (2, 2^*)$. Segue da segunda desigualdade em (1.2) que

$$0 \leq \limsup_{n\to+\infty} \int F(x,u_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\varepsilon \int |u_n|^2 + C_\varepsilon \int |u_n|^p \right) \leq C\varepsilon,$$

onde usamos a limitação de (u_n) em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Uma vez que ε é arbitrário, concluímos que $\int F(x,u_n) \to 0$. O mesmo argumento e a primeira desigualdade em (1.2) implicam que $\int f(x,u_n)u_n \to 0$.

Como (u_n) é uma sequência de Cerami, segue que

$$c = \lim_{n\to\infty} \left(I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n)u_n \right) = \lim_{n\to\infty} \int \left(\frac{1}{2} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n) \right) = 0,$$

o que contradiz $c > 0$. O lema está demonstrado. $\square$

Finalizamos esta seção enunciando dois resultados técnicos de convergência que foram demonstrados em [20, Lemas 5.1 e 5.2], respectivamente. Apresentamos as demonstrações aqui por completude.

Lema 1.9. *Suponha que V satisfaça (V_0) e f satisfaça (f_5). Seja $(u_n) \subset E$ uma sequência* *limitada e* $v_n(x) = v(x - y_n)$, *onde* $v \in E$ *e* $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$. *Se* $|y_n| \to \infty$, *então temos que*

$$(V_\infty(\cdot) - V(\cdot))\, u_n v_n \to 0,$$

$$(f_\infty(\cdot, u_n) - f(\cdot, u_n))\, v_n \to 0,$$

fortemente em $L^1(\mathbb{R}^N)$, *quando* $n \to \infty$.

Demonstração. Dado $\delta > 0$, como $v \in L^s(\mathbb{R}^N)$ para todo $s \in [2, 2^*]$, obtemos $0 < \varepsilon < \delta$ tal que, para todo conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^N$ com $|A| < \varepsilon$, vale

$$\int_A v^2 < \delta \text{ e } \int_A |v|^{2^*} < \delta. \tag{1.15}$$

Considere os seguintes conjuntos:

$$D_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^N : |V_\infty(x) - V(x)| \geq \varepsilon\} \text{ e } D_\varepsilon(R) := D_\varepsilon \cap (\mathbb{R}^N \setminus B_R).$$

Afirmamos que $\lim_{R\to\infty} |D_\varepsilon(R)| = 0$. De fato, como $V_\infty - V \in \mathcal{F}$, segue que $|D_\varepsilon| < \infty$. Considerando $(R_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $R_n \to \infty$, $\xi := \chi_{D_\varepsilon}$ e $\xi_n := \chi_{D_\varepsilon(R_n)}$, obtemos que $|\xi|_1 = |D_\varepsilon|$, ou seja, $\xi \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, visto que $|\xi_n| \leq |\xi|$ e $\xi_n(x) \to 0$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$, concluímos a afirmação usando o Teorema da Convergência Dominada.

Segue da afirmação que existe $R > 0$ tal que $|D_\varepsilon(R)| < \varepsilon$. Usando a desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} |V_\infty(x) - V(x)||u_n||v_n| &\leq |V_\infty|_\infty \int_{D_\varepsilon(R)} |u_n||v_n| + \varepsilon \int_{D_\varepsilon(R)^c} |u_n||v_n| \\ &\leq |V_\infty|_\infty |u_n|_2 |v_n|_{L^2(D_\varepsilon(R))} + \varepsilon |u_n|_2 |v|_2.\end{aligned}$$

Daí, usando (1.15) e a limitação de (u_n), obtemos $C_1 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} |V_\infty(x) - V(x)||u_n||v_n| \leq C_1(\delta^{1/2} + \delta).$$

Usando novamente a desigualdade de Hölder, a condição (V_0) e o fato que (u_n) é limitada, segue que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |V_\infty(x) - V(x)||u_n||v_n| &\leq |V_\infty|_\infty \int_{D_\varepsilon(R)} |u_n|_2 \left(\int_{B_R} |v(\cdot - y_n)|^2 \right) \\ &\leq C_2 \left(\int_{B_R(-y_n)} |v|^2 \right).\end{aligned}$$

Daí, como $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $|y_n| \to \infty$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{B_R} |V_\infty(x) - V(x)||u_n||v_n| \leq C_2\delta,$$

para todo $n \geq n_0$. Portanto $(V_\infty(x) - V(x))u_n v_n \to 0$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$.

A segunda parte da demonstração é obtida por um procedimento análogo.

□

Lema 1.10. *Suponha que $\varphi \in \mathcal{F}$ e $s \in [2, 2^*]$. Se $(u_n) \subset E$ é tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em E, então*

$$\lim_{n\to+\infty} \int \varphi|u_n|^s = \int \varphi|u|^s.$$

Demonstração. Suponha por contradição que exista uma subsequência, que ainda denotaremos por (u_n), $\varepsilon > 0$, tais que

$$\int |\varphi|||u_n|^s - |u|^s|| \geq \varepsilon, \tag{1.16}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Definido $D_\delta(R) := \{x \in \mathbb{R}^N : |\varphi(x)| \geq \varepsilon, |x| \geq R\}$. Uma vez que $\varphi \in \mathcal{F}$, argumentando como no lema anterior, temos que existe $R = R_\delta > 0$ tal que $D_\delta(R) < \delta$. Aplicando a desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}\int_{D_\delta(R)} |\varphi(x)|||u_n|^s - |u|^s| &\leq |\varphi|_\infty \int_{D_\delta(R)} (|u_n|^s + |u|^s) \\ &\leq |\varphi|_\infty \left[|u_n|^2_{2^*} + |u|^2_{2^*}\right] |D_\delta(R)|^{\frac{2^*-2}{2^*}} \leq C_1\delta^{\frac{2^*-2}{2^*}},\end{aligned}$$

para alguma constante $C_1 > 0$. Da definição de $D_\delta(R)$ e a limitação de (u_n), existe $C_2 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus (B_R \cap D_\delta(R))} |\varphi|||u_n|^s - |u|^s| \leq \int (|u_n|^s + |u|^s) \leq C_2\delta.$$

Por outro lado, uma vez que $u_n \rightharpoonup u$ em E, podemos assumir que $u_n \to u$ em $L^\gamma_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $\gamma \in [1, 2^*)$. Assim, para $R = R_\delta > 0$ dado acima, lembrando que $\varphi \in L^\infty$ e usando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{B_R} |\varphi|||u_n|^p - |u|^p| \leq \delta,$$

para todo $n \geq n_0$. Daí, pelas estimativas acima, obtemos

$$\int |\varphi|||u_n|^p - |u|^p| \leq C_1\delta^{\frac{2^*-2}{2^*}} + (1 + C_2)\delta.$$

para todo $n \geq n_0$. Como δ foi tomando de modo arbitrário, obtemos uma contradição com (1.16). Portanto o lema é verdadeiro. $\square$

1.2 Demonstrações dos Teoremas 1.1 e 1.2

Nesta seção, denotaremos por $I_\infty : E \to \mathbb{R}$ o funcional associado ao problema periódico, a saber,

$$I_\infty(u) = \frac{1}{2}\int (|\nabla u|^2 + V_\infty(x)u^2) - \int F_\infty(x,u), \text{ para } u \in E.$$

Estamos prontos para demonstrar nosso principal resultado como segue:

Demonstração do Teorema 1.1. Pelo Lema 1.5 e o Teorema do Passo da Montanha, existe uma sequência $(u_n) \subset E$ tal que

$$I(u_n) \to c \geq \alpha > 0 \text{ e } (1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\|_{E^*} \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{1.17}$$

Aplicando o Lema 1.6, podemos assumir que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em E. Afirmamos que $I'(u) = 0$. De fato, como $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em E, é suficiente mostrar que $I'(u)v = 0$ para toda $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Temos que

$$I'(u_n)v - I'(u)v = o_n(1) - \int (f(x,u_n) - f(x,u))\, v. \tag{1.18}$$

Usando o teorema de imersão de Sobolev, a menos de subsequência, temos que $u_n \to u$ em $L^s_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para cada $s \in [1, 2^*)$ e

$$\begin{aligned} &u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } K, \text{ quando } n \to \infty,\\ &|u_n(x)| \leq w_s(x) \in L^s(K), \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ q.t.p. em } K, \end{aligned}$$

onde K denota o suporte da função v. Assim,

$$f(x,u_n) \to f(x,u) \text{ q.t.p. em } K, \text{ quando } n \to \infty,$$

e usando (1.2), obtemos

$$|f(x,u_n)v| \leq \varepsilon|w_1||v| + C_\varepsilon|w_p||v| \in L^1(K).$$

Então, tomando o limite em (1.18) e usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$I'(u)v = \lim_{n\to\infty} I'(u_n)v = 0,$$

que implica $I'(u) = 0$.

Se $u \neq 0$, o teorema está demonstrado. Dessa forma, precisamos somente tratar o caso em que $u = 0$. Pelo Lema 1.8, existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, $R > 0$ e $\beta > 0$ tais que $|y_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$, e

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^2 \geq \beta > 0. \tag{1.19}$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $(y_n) \subset \mathbb{Z}^N$. De fato, se não for assim, tomamos $k_n \in \mathbb{Z}^N$ de modo que $|k_n - y_n| = \inf\{|k - y_n| : k \in \mathbb{Z}^N\}$. Logo $|k_n - y_n| \leq \sqrt{N}/2$, o que implica que $B_R(y_n) \subset B_{R+\sqrt{N}/2}(k_n)$ e

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_{R+\sqrt{N}/2}(k_n)} |u_n|^2 \geq \limsup_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^2 \geq \beta > 0.$$

Escrevendo $\widetilde{u}_n(x) := u_n(x + y_n)$ e observando que

$$\int (|\nabla \widetilde{u}_n|^2 + V_\infty(x)\widetilde{u}_n^2) = \int (|\nabla u_n|^2 + V_\infty(x)u_n^2),$$

a menos de subsequência, temos que $\widetilde{u}_n \rightharpoonup \widetilde{u}$ em E, $\widetilde{u}_n \to \widetilde{u}$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Por (1.19), temos que $\widetilde{u} \neq 0$.

Afirmação 1. $I'_\infty(\widetilde{u}) = 0$

Para provar esta afirmação, vamos tomar $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e definir, para cada $n \in \mathbb{N}$, $v_n(x) := v(x - y_n)$. Argumentando como no início da demonstração e usando a periodicidade de f_∞, obtemos

$$I'_\infty(\widetilde{u})v = I'_\infty(\widetilde{u}_n)v + o_n(1) = I'_\infty(u_n)v_n + o_n(1)$$

e, desse modo, é suficiente verificar que $I'_\infty(u_n)v_n = o_n(1)$. Observe que, pelo Lema 1.9,

$$\begin{aligned} I'_\infty(u_n)v_n &= I'(u_n)v_n + \int (V_\infty(x) - V(x))\, u_n v_n - \int (f_\infty(x, u_n) - f(x, u))\, v_n \\ &= I'(u_n)v_n + o_n(1). \end{aligned}$$

Assim, por (1.17), a afirmação é válida.

Afirmação 2. $\liminf_{n\to\infty} \int \widehat{F}(x,u_n) \geq \int \widehat{F}_\infty(x,\widetilde{u})$

Usando a definição de $\widehat{F}$ e $\widehat{F}_\infty$, (f_5)-(ii), obtemos

$$\begin{aligned}|\widehat{F}(x,u_n) - \widehat{F}_\infty(x,u_n)| &\leq \frac{1}{2}|f(x,u_n) - f_\infty(x,u_n)||u_n| + |F(x,u_n) - F_\infty(x,u_n)| \\ &\leq \frac{1}{2}\varphi(x)|u_n|^{p_\infty} + \varphi(x)\int_0^{|u_n|} t^{p_\infty - 1}\, dt \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p_\infty}\right)\varphi(x)|u_n|^{p_\infty}.\end{aligned}$$

Uma vez $u_n \rightharpoonup 0$ fracamente em E, segue da desigualdade acima e do Lema 1.10 que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int \widehat{F}(x,u_n) &= \lim_{n\to\infty} \int \widehat{F}_\infty(x,u_n) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int \widehat{F}_\infty(x,\widetilde{u}_n) \geq \int \widehat{F}_\infty(x,\widetilde{u}),\end{aligned}$$

onde usamos também a periodicidade de $\widehat{F}_\infty$ e o Lema de Fatou.

Por (1.17) e pela afirmação acima, segue que

$$\begin{aligned}c &= \lim_{n\to\infty}\left(I(u_n) - \frac{1}{2}I'(u_n)u_n\right) = \liminf_{n\to\infty} \int \widehat{F}(x,u_n) \\ &\geq \int \widehat{F}_\infty(x,\widetilde{u}) = I_\infty(\widetilde{u}) - \frac{1}{2}I'_\infty(\widetilde{u})\widetilde{u} = I_\infty(\widetilde{u}),\end{aligned}$$

ou seja, $I_\infty(\widetilde{u}) \leq c$. Por (f_5)-(iii) e o fato de que $\widetilde{u}$ é um ponto crítico não nulo para I_∞, concluímos por um argumento padrão que $\max_{t\geq 0} I_\infty(t\widetilde{u}) = I_\infty(\widetilde{u})$. Daí, pela definição de c, (V_0) e (f_5)-(i), temos que

$$c \leq \max_{t\geq 0} I(t\widetilde{u}) \leq \max_{t\geq 0} I_\infty(t\widetilde{u}) = I_\infty(\widetilde{u}) \leq c$$

Invocando o Teorema 1.3, concluímos que I possui um ponto crítico não trivial no nível $c > 0$. Isto finaliza a demonstração. □

Como corolário, demonstraremos agora este mesmo resultado para o caso periódico.

Demonstração do Teorema 1.2. Em primeiro lugar, notamos que os Lemas 2.1, 2.2 e 2.3 ainda são válidos nas condições do Teorema 1.2. Assim, pelo Lema 1.5, obtemos uma sequência de Cerami $(u_n) \subset E$ para o funcional I_∞ no nível c_∞, em que c_∞ é o nível do passo da montanha de I_∞.

Argumentando como na prova do Teorema 1.1, concluímos que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em E com $I'_\infty(u) = 0$. Como antes, precisamos considerar somente o caso em que $u = 0$. Pelo Lema 1.8, existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{Z}^N$, $R > 0$ e $\beta > 0$ tais que $|y_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$ e

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^2 \geq \beta > 0. \tag{1.20}$$

Denotando $\widetilde{u}_n(x) := u_n(x+y_n)$ e observando que $\|\widetilde{u}_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, a menos de subsequência, temos que $\widetilde{u}_n \rightharpoonup \widetilde{u}$ fracamente em E, $\widetilde{u}_n \to \widetilde{u}$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $\widetilde{u}_n(x) \to \widetilde{u}(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. A convergência local e (1.20) implicam que $\widetilde{u} \neq 0$. Argumentando como na Afirmação 1 da prova do Teorema 1.1, podemos concluir que $I'_\infty(\widetilde{u}) = 0$ e portanto obtemos um ponto crítico não trivial.

Em vista do resultado de existência acima, fica bem definido

$$m_\infty = \inf\{I_\infty(u) : u \in E, u \neq 0 \text{ e } I'_\infty(u) = 0\}.$$

Afirmamos que $m_\infty > 0$ e esse ínfimo é atingido. De fato, seja $(u_n) \subset E$ uma sequência minimizante para m_∞, isto é,

$$I_\infty(u_n) \to m_\infty,\ I'_\infty(u_n) = 0 \text{ e } u_n \neq 0.$$

Uma vez que (u_n) é uma sequência de Cerami para I_∞, segue do Lema 1.6 que ela é limitada. Além disso, usando $I'_\infty(u_n)u_n = 0$, (V_0), (1.2) e a desigualdade de Sobolev, temos que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} &\leq C \int (|\nabla u_n|^2 + V_\infty(x)u_n^2) \\
&= C \int f_\infty(x, u_n)u_n \leq C(\varepsilon|u_n|_2^2 + |u_n|_p^p) \\
&\leq C(\varepsilon\|u_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \|u_n\|^p_{H^1(\mathbb{R}^N)}).
\end{aligned}$$

Logo, tomando ε pequeno, obtemos $k > 0$ satisfazendo $\|u_n\|_{H^1(R^N)} \geq k$. Se $u_n \to 0$ em L^p, então teremos pela desigualdade acima que $u_n \to 0$ em E, absurdo. Assim $u_n \not\to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ e portanto, pelo Lema de Lions [21, Lema I.1], a menos de translação, obtemos uma subsequência $(\widetilde{u}_n)$ que converge para um limite fraco $u_0 \neq 0$, tal que $I'_\infty(u_0) = 0$ e

$\widetilde{u}_n(x) \to u_0(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} m_\infty &= \lim_{n\to\infty} I_\infty(u_n) = \lim_{n\to\infty} I_\infty(\widetilde{u}_n) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int \widehat{F}_\infty(x, \widetilde{u}_n) \\ &\geq \int \widehat{F}_\infty(x, u_0) = I_\infty(u_0). \end{aligned}$$

Consequentemente $I_\infty(u_0) = m_\infty > 0$ e portanto, $u_0 \neq 0$ é uma solução de energia mínima. $\square$

CAPÍTULO 2

Equação de Schrödinger indefinida e assintoticamente periódica

Este capítulo será dedicado ao estudo de existência de soluções não triviais para a equação de Schrödinger semilinear

$$-\Delta u + V(x)u = f(x,u),\ x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.1}$$

em que $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas. Nosso objetivo é estabelecer existência de solução para o problema (2.1) assumindo que V muda de sinal e f é assintoticamente periódica.

Como no capítulo anterior, denotaremos por $\mathcal{F}$ a classe de funções $\varphi \in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : |\varphi(x)| \geq \epsilon\}$ possui medida de Lebesgue finita. Denotaremos por $F(x,t) := \int_0^t f(x,s)\, ds$ primitiva de $f(x,t)$ e

$$\widehat{F}(x,t) := \frac{1}{2}f(x,t)t - F(x,t).$$

Para o potencial V, assumiremos que

(V_0) $V(x) = V(x_1,\dots,x_N)$ é 1-periódica em $x_1,\dots,x_N$;

(V_1) $0 \notin \sigma(-\Delta + V)$ e $\sigma(-\Delta+V) \cap (-\infty,0) \neq \emptyset$

e $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R},\mathbb{R})$ é uma perturbação de uma função periódica no infinito no seguinte sentido:

(f_1) $F(x,t) \geq 0$ para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ e $f(x,t) = o(t)$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$ quando $t \to 0$;

(f_2) para todo $r > 0$ vale

$$q(r) := \inf\{\widehat{F}(x,t) : x \in \mathbb{R}^N \text{ e } |t| \geq r\} > 0;$$

(f_3) existem constantes $a_1 > 0$, $R_1 > 0$ e $\tau > \max\{1, N/2\}$ tais que

$$|f(x,t)|^\tau \leq a_1 |t|^\tau \widehat{F}(x,t)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $|t| \geq R_1$;

(f_4) F é superquadrática no infinito, isto é

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(x,t)}{t^2} \to \infty,$$

uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$ quando $|t| \to \infty$;

(f_5) existem $p_\infty \in (2, 2^*)$, $\varphi \in \mathcal{F}$ e $f_\infty \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, 1-periódica em $x_1, \ldots, x_N$, tais que:

(i) $F(x,t) \geq F_\infty(x,t) := \int_0^t f_\infty(x,s)ds$, para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$,

(ii) $|f(x,t) - f_\infty(x,t)| \leq \varphi(x)|t|^{p_\infty - 1}$, para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$,

(iii) $t \mapsto \dfrac{f_\infty(x,t)}{|t|}$ é crescente em $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$, para cada $x \in \mathbb{R}^N$.

Nosso principal resultado é o seguinte:

Teorema 2.1. *Suponha que V satisfaça $(V_0) - (V_1)$ e f satisfaça $(f_1) - (f_5)$. Então o problema* (2.1) *possui uma solução não trivial.*

O restante desse capítulo é organizado como segue. Na Seção 2.1 apresentamos duas versões de teorema de linking. A estrutura variacional e alguns lemas auxiliares são estabelecidos na Seção 2.2 e a demonstração do Teorema 2.1 feita na última seção.

2.1 Uma versão local do Teorema de Linking

Nessa seção apresentaremos duas ferramentas que serão usadas para obter pontos críticos : Uma versão do Teorema de Linking com sequência de Cerami, devido a G. Li e A. Szulkin [17] e o Teorema Local de Linking, de nossa autoria.

Em toda esta seção, denotaremos por E um espaço de Hilbert real com produto escalar $(\cdot,\cdot)$ e norma induzida $\|\cdot\|$. Assumiremos que existe uma decomposição ortogonal $E = E^- \oplus E^+$, de modo que cada elemento $u \in E$ é escrito de modo único da forma $u = u^+ + u^-$, com $u^\pm \in E^\pm$. Consideraremos também que E^- possui uma sequência ortonormal total (e_k) e em E definimos a nova norma

$$\|u\|_\tau := \max\left\{\|u^+\|, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}|(u^-, e_k)|\right\}.$$

A topologia em E gerada por $\|\cdot\|_\tau$ será denotada por τ e todas as noções relacionadas a ela incluirão este símbolo. Pode ser provado que em conjuntos limitados essa topologia coincide com a topologia produto de $E_w^- \times E^+$, em que E_w^- é o espaço E^- munido da topologia fraca. Assim, para uma sequência limitada (u_n), temos que $u_n \xrightarrow{\tau} u$ em E se, e somente se $u_n^+ \to u^+$ e $u_n^- \rightharpoonup u^-$ fracamente em E. Outras propriedades desta τ-topologia podem ser encontradas em [17, Seção 2].

Dado um conjunto $M \subset E$, uma homotopia $h : [0,1] \times M \to E$ é dita admissível se

(i) h é τ-contínua, isto é, se $t_n \to t$ e $u_n \xrightarrow{\tau} u$ então $h(t_n, u_n) \xrightarrow{\tau} h(t,u)$;

(ii) para cada $(t,u) \in [0,1] \times M$ existe uma vizinhança U de (t,u) na topologia produto de $[0,1]$ e (E,τ) tal que o conjunto $\{v - h(t,v) : (t,v) \in U \cap ([0,1] \times M)\}$ está contido em um subespaço de E, com dimensão finita.

O símbolo Γ denotará a seguinte classe de aplicações admissíveis

$$\begin{aligned}\Gamma := \{ \quad & h \in C([0,1] \times M, E) \ : \ h \text{ é admissível}, h(0,\cdot) = \mathrm{Id}_M, \\ & I(h(t,u)) \le \max\{I(u), -1\} \text{ para todo}(t,u) \in [0,1] \times M\}.\end{aligned}$$

A seguinte versão do Teorema de Linking foi demonstrada em [18, Teorema 2.1]:

Teorema 2.2. *Seja $I \in C^1(E,\mathbb{R})$. Suponha que*

(L_1) *I pode ser escrito na forma*

$$I(u) = \frac{1}{2}(\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2) - J(u),$$

com $J \in C^1(E,\mathbb{R})$ limitado inferiormente, fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente e J' é fracamente sequencialmente contínuo;

(L_2) *existe $u_0 \in E^+\backslash\{0\}$, $\alpha > 0$ e $R > r > 0$ tais que*

$$I_{|N_r} \ge \alpha,\ I_{|\partial M} \le 0,$$

em que $N_r = \{u \in E^+ : \|u\| = r\}$ *e* $M = M_{R,u_0}$ *é dado por*

$$M := \{u = u^- + tu_0 \ : \ u^- \in E^-, \ \|u\| \leq R, \ t \geq 0\}.$$

Se definirmos

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in M} I(h(1,u)),$$

então existe $(u_n) \subset E$ *tal que*

$$I(u_n) \to c \geq \alpha, \ \ (1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\| \to 0.$$

Para estabelecer o Teorema 2.1, precisamos relacionar a equação (2.1) com o problema limite. Para isso, iremos usar uma versão local do teorema acima, descrita a seguir.

Teorema 2.3. *Assumindo as mesmas hipóteses do Teorema 2.2, suponha adicionalmente que exista* $h_0 \in \Gamma$ *tal que*

$$c = \sup I(h_0(1, M)). \tag{2.2}$$

Então I *possui um ponto crítico não nulo* $u \in h_0(1, M)$ *tal que* $I(u) = c$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que $D := h_0(1, M)$ não possui nenhum ponto crítico de I no nível c. Isto implica que existem constantes $\varepsilon, \delta > 0$ tais que

$$\|I'(u)\| \geq \frac{8\varepsilon}{\delta} \text{ para qualquer } u \in I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap D^{\tau}_{2\delta}, \tag{2.3}$$

em que $D^{\tau}_{2\delta}$ denota o conjunto τ-fechado $\{u \in E \ : \ \|u - v\|_{\tau} \leq 2\delta$, para qualquer $v \in D\}$. De fato, se não fosse assim, obteríamos uma sequência $(u_n) \in D^{\tau}_{2/\sqrt{n}}$ tal que

$$c - \frac{2}{n} \leq I(u_n) \leq c + \frac{2}{n}, \ \ \|I'(u_n)\| \leq \frac{2}{\sqrt{n}},$$

que implica $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$. Como D^{τ}_{2} é τ-compacto, podemos assumir que $u_n \xrightarrow{\tau} u \in D$. Isto implica que $u_n^+ \to u^+$ e $u_n^- \rightharpoonup u^-$ fracamente em E. Uma vez que I' é fracamente contínua, obtemos que $I'(u) = 0$. Como tanto a norma quanto J são fracamente semicontínuos inferiormente, segue que $I(u) \geq c$. Observando que $u \in D \subset I^c$, obtemos que $I(u) \leq c$. Daí, concluímos que u é um ponto crítico no nível c, o que é um absurdo.

Em vista de (2.3) e das hipóteses de regularidade de I, podemos usar o Lema 2.5 (que será provado posteriormente), para obter uma homotopia admissível $\eta : [0, 1] \times M \to E$ tal que

$$\eta(1, D) \subset I^{c-\varepsilon}.$$

Considere $h : [0,1] \times M \to E$ dado por

$$h(t,u) := \begin{cases} h_0(2t,u), \\ \eta(2t-1, h_0(1,u)). \end{cases}$$

Então $h \in \Gamma$ e, para qualquer $u \in M$, vale

$$I(h(1,u)) = I(\eta(1, h_0(1,u))) \leq c - \varepsilon,$$

uma vez que $h_0(1,u) \in D$. Esta desigualdade contradiz a definição de c e conclui a demonstração do teorema.

$\square$

No que segue, iremos provar alguns resultados técnicos que garantirão a existência da deformação usada na prova do Teorema 2.3. Denotaremos por $K_c = \{u \in E : I(u) = c, I'(u) = 0\}$ o conjunto dos pontos críticos de I no nível c, e os conjuntos de nível $I^\beta = \{u \in E : I(u) \leq \beta\}$, $I_\alpha = \{u \in E : I(u) \geq \alpha\}$ e $I_\alpha^\beta = I_\alpha \cap I^\beta$. Além disso, assumiremos que

(A) $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ é τ-semicontínua superiormente e I' é fracamente sequencialmente semicontínua;

(B) existem $\alpha < \beta$, $\bar{\varepsilon} > 0$ e um conjunto τ-fechado $S \subset I^\beta$ satisfazendo

$$\|I'(u)\| \geq \bar{\varepsilon} \text{ para todo } u \in I_\alpha^\beta \cap S.$$

Primeiramente, construiremos um campo de vetores que será usado para obter o resultado de deformação. Por uma modificação em um resultado devido a W. Kryszewski e A. Szulkin [17, Proposição 3.2] (veja também [34, Lema 6.7]), obtemos o seguinte lema:

Lema 2.4. *Suponha que (A) e (B) são válidas. Então existem uma τ-vizinhança V de I^β e um campo vetorial $f : V \to E$ satisfazendo*

(a) f é localmente lipschitziana e τ-localmente lipschitziana;

(b) cada ponto $u \in V$ possui uma τ-vizinhança V_u tal que $f(V_u)$ está contida em um subespaço de dimensão finita de E;

(c) $m := sup_{u \in V} \|f(u)\| \leq \frac{2}{\bar{\varepsilon}}$ e $(I'(u), f(u)) \geq 0$ para todo $u \in V$;

(d) para todo $u \in I_\alpha^\beta \cap S$ temos que $(I'(u), f(u)) > 1$.

Demonstração. Para $v \in I_{\alpha}^{\beta} \cap S$, seja

$$g(v) := \frac{2I'(v)}{\|I'(v)\|^2}.$$

Pela condição (A), temos que $u \mapsto (I'(u), g(v))$ é τ-contínua. Logo, segue que v possui uma vizinhança τ-aberta V_v satisfazendo

$$(I'(u), g(v)) > 1 \text{ para todo } u \in V_v.$$

Uma vez que I é τ-contínuo superiormente e S é τ-fechado, o conjunto $V_0 := I^{-1}(-\infty, \beta) \cup (E \setminus S)$ é τ-aberto. A família $\{V_v : v \in I_{\alpha}^{\beta} \cap S\} \cup \{V_0\}$ é uma cobertura τ-aberta, do espaço métrico (I^{β}, τ). Portanto, existe um refinamento τ-aberto e τ-localmente finito $\{\mathcal{V}_j : j \in J\}$. Claramente $I^{\beta} \subset V := \bigcup_{j \in J} \mathcal{V}_j$ e V é τ-aberto. Seja $\{\lambda_j : j \in J\}$ uma partição τ-Lipschitz da unidade, subordinada à cobertura $\{\mathcal{V}_j : j \in J\}$. Se $\mathcal{V}_j \subset V_v$ para algum $v \in I_{\alpha}^{\beta} \cap S$, escolhemos $v_j = g(v)$. Se $\mathcal{V}_j \subset V_0$, escolhemos $v_j = 0$. Desse modo, definimos,

$$f(u) := \sum_{j \in J} \lambda(u) v_j, \;\; u \in V.$$

Pela construção de f, é imediato verificar (a) e (d). Usando (B), concluímos que $\|I'(v_j)\| \geq \bar{\varepsilon}$ e então, $\|v_j\| \leq 2/\bar{\varepsilon}$ para todo $j \in J$. Assim, pela definição de f, segue que $\|f(u)\|_{\tau} \leq \|f(u)\| \leq 2/\bar{\varepsilon}$, ou seja, a condição (c) é válida. Finalmente, para provar (b), vemos que por construção, qualquer ponto $u \in V$ possui uma vizinhança τ-aberta $V_u \subset V$, de modo que o conjunto $J_u := \{j \in J : \mathcal{V}_j \cap V_u \neq \emptyset\}$ é finito. Assim, $f(V_u)$ está contido em um subespaço de dimensão finita. Isto completa a demonstração. $\square$

No restante dessa seção vamos denotar por $D \subset I^c$ um conjunto não vazio τ-compacto tal que $K_c \cap D = \emptyset$. Nessa condições, se I satisfaz (A), o mesmo argumento utilizado na prova do Teorema 2.3 mostra que, existem $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tais que

$$\|I'(u)\| \geq \frac{8\varepsilon}{\delta} \text{ para todo } u \in I_{c-2\varepsilon}^{c+2\varepsilon} \cap D_{2\delta}^{\tau},$$

desse modo, o funcional I satisfaz a condição (B) com $S = D_{2\delta}^{\tau}$, $\alpha = c - 2\varepsilon$, $\beta = c + 2\varepsilon$ e $\bar{\varepsilon} = 8\varepsilon/\delta$.

Seja $\rho : H \to \mathbb{R}$ uma função τ-localmente Lipschitz satisfazendo

$$0 \leq \rho \leq 1, \;\; \rho \equiv 0 \text{ em } A := I_{c-2\varepsilon}^{c+2\varepsilon} \cap D_{2\delta}^{\tau} \text{ e } \rho \equiv 1 \text{ em } B := I_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \cap D_{\delta}^{\tau}.$$

Defina o seguinte campo de vetores $g : V \to H$ que é τ-localmente Lipschitz

$$g(u) := -\rho(u)\frac{f(u)}{m}, \tag{2.4}$$

onde f e m são como no Lema 2.2. Assim, $\|g(u)\| \leq 1$ e segue que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}w(t,u) = g(w(t,u)), \\ w(0,u) = u \in I^{c+2\varepsilon} \end{cases} \tag{2.5}$$

possui uma única solução $w(\cdot, u)$ definida para todo $t \geq 0$.

O lema abaixo estabelece a existência da deformação utilizada na prova do nosso resultado abstrato.

Lema 2.5. *Suponha que $D \subset E$ é como acima e I satisfaça (A). Então o fluxo $\eta(t,u) := w(\delta t, u)$ está bem definido sobre $\mathbb{R}^+ \times I^{c+2\varepsilon}$ e satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $\eta : [0,1] \times I^{c+2\varepsilon} \to E$ é uma homotopia admissível;

(b) $\eta(t,u) = u$ se $u \notin I^{c+2\varepsilon}_{c-2\varepsilon} \cap D^{\tau}_{2\delta}$;

(c) $\eta(1, D) \subset I^{c-\varepsilon} \cap D^{\tau}_{\delta}$.

Demonstração. (a) Tomemos $u_0 \in I^{c+2\varepsilon}$ e $t_0 \in [0,1]$. O conjunto $X := \eta([0,1] \times u_0)$ é compacto, assim τ-compacto. Usando o Lema 2.4(c) e observando que g é τ-localmente lipschitziana, temos que existem números $r, L > 0$ tais que $U := \{u \in E : \|u - X\|_\tau < r\} \subset N$ e se $u, v \in U$, então $\|g(u)\| \leq L$, $\|g(u) - g(v)\|_\tau \leq L\|u - v\|_\tau$. Além disso, $g(U)$ está contida em um subespaço $E_1 \subset E$ de dimensão finita.

Mostraremos agora que η é τ-contínua em (t_0, u_0). Dado $\sigma > 0$, seja $t \in [0,1]$ e $u \in I^{c+2\varepsilon}$ tal que $\|u - u_0\|_\tau < \sigma$. Suponha que $\eta(s,u) \in U$ para $0 \leq s \leq t$. Então

$$\begin{aligned} \|\eta(t,u) - \eta(t,u_0)\|_\tau &\leq \|u - u_0\|_\tau + \int_0^t \|g(\eta(s,u)) - g(\eta(s,u_0))\|_\tau \, ds \\ &\leq \|u - u_0\|_\tau + L\int_0^t \|\eta(s,u) - \eta(s,u_0)\|_\tau \, ds. \end{aligned}$$

Daí, pela desigualdade de Gronwall [34, Lema 6.9], temos que

$$\|\eta(t,u) - \eta(t,u_0)\|_\tau \leq \|u - u_0\|_\tau e^{Lt} \leq \|u - u_0\|_\tau e^{L}.$$

Se $\sigma < re^{-L}$, obtemos

$$\|\eta(t,u) - \eta(t,u_0)\|_\tau \leq r.$$

Desse modo, segue que $\eta(t,u) \in U$ para cada $t \in [0,1]$. Assim, se $|t - t_0| < \sigma$, temos que

$$\|\eta(t,u) - \eta(t_0,u_0)\|_\tau \leq \|\eta(t,u) - \eta(t,u_0)\|_\tau + \int_{t_0}^{t} \|g(\eta(s,u_0))\|_\tau \, ds < (e^L + L)\sigma.$$

Como σ pode ser tomado suficientemente pequeno, segue que η é τ-contínua. Para finalizar, notamos que para qualquer $t \in [0,1]$ e $\|u - u_0\|_\tau < \sigma$, temos que $u - \eta(t,u) = -\int_0^t g(\eta(s,u)) \, ds \in E_1$.

(b) Segue da construção de η.

(c) Para $t \geq 0$, podemos usar (2.4) e (2.5) para obter

$$\|w(t,u) - u\|_\tau \leq \int_0^t \|g(w(s,u))\|_\tau ds \leq \int_0^t \|g(w(s,u))\| ds \leq t,$$

que implica que $w(t,D) \subset D_\delta^\tau$ para todo $t \in [0,\delta]$, ou seja,

$$\eta(t,D) \subset D_\delta^\tau \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Fixado $u \in V$, observamos que a função $I(w(\cdot,u))$ é não crescente, uma vez que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} I(w(t,u)) &= \left(I'(w(t,u)), \frac{d}{dt} w(u,t)\right) \\
&= -\frac{\rho(w(t,u))}{m} \left(I'(w(t,u)), f(w(t,u))\right) \leq 0.
\end{aligned}$$

Agora, seja $u \in D \subset I^c$. Temos dois casos a considerar:

(i) Se $I(\eta(\tilde{t},u)) < c - \varepsilon$ para algum $\tilde{t} \in [0,1]$, então

$$I(\eta(1,u)) \leq I(\eta(\tilde{t},u)) < c - \varepsilon,$$

assim $\eta(1,u) \in I^{c-\varepsilon} \cap D_\delta^\tau$.

(ii) Se $\eta(t,u) \in I_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \cap D_\delta^\tau = B$ para todo $t \in [0,1]$, então pelo Lema 2.4(c)-(d), obtemos

$$\begin{aligned}
I(\eta(1,u)) = I(w(\delta,u)) &= I(u) + \int_0^\delta \frac{d}{dt} I(w(t,u)) dt \\
&= I(u) - \int_0^\delta \frac{(I'(w(t,u)), f(w(t,u))))}{m} \\
&\leq c - \frac{\delta}{m} < c - \varepsilon,
\end{aligned}$$

em que esta última desigualdade usamos $\bar{\varepsilon} \leq 2/m$ e $\bar{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{\delta}$. Neste caso, concluímos que $\eta(1, D) \subset (I^{c-\varepsilon} \cap D_\delta^\tau)$.

$\square$

2.2 Estrutura Variacional

Nessa seção, apresentaremos a estrutura variacional associada ao problema (2.1) e demonstraremos alguns lemas que serão úteis na prova dos resultados principais.

No que segue, descreveremos vários resultados conhecidos associados com a decomposição espectral do operador de Schrödinger. ([8, 26]). Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ dado por $A(u) := -\Delta u + V(x)u$. Como $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, sabemos que $\mathcal{D}(A) = H^2(\mathbb{R}^N)$. Por $(V_0) - (V_1)$, vale a decomposição ortogonal

$$L^2(\mathbb{R}^N) = L^+ \oplus L^-, u = u^+ + u^-,$$

sendo que A é positivo em L^+ e negativo em L^-.

Seja $E := \mathcal{D}(|A|^{1/2})$ o domínio do operador auto-adjunto $|A|^{1/2}$. Este espaço munido com o produto interno

$$(u, v) = (|A|^{1/2}u, |A|^{1/2}v)_{L^2}$$

é um espaço de Hilbert com norma $\|u\| = \left||A|^{1/2}u\right|_{L^2}$, onde $(\cdot,\cdot)_{L^2}$ denota o produto interno em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

A norma $\|\cdot\|$ é equivalente a norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $E = H^1(\mathbb{R}^N)$. Desse modo, E está imerso continuamente em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $s \in [2, 2^*]$ e compactamente em $L^s_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para $s \in [1, 2^*)$. Definindo $E^\pm = L^\pm \cap E$, obtemos a decomposição $E = E^+ \oplus E^-$, que é ortogonal em relação à ambos os produtos $(\cdot,\cdot)_{L^2}$ e $(\cdot,\cdot)$. Além disso,

$$\int (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) = \|u^+\|^2 - \|u^-\|^2, \ u = u^+ + u^-, u^\pm \in E^\pm.$$

Assim, temos que a equação (2.1) é a equação de Euler-Lagrange do funcional $I : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) := \frac{1}{2}\int (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) - \int F(x, u),$$

que pode ainda ser escrito como

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - \int F(x, u).$$

Segue do próximo lema que este funcional está bem definido e é de classe C^1.

Lema 2.6. *Suponha que (f_1), (f_3) e $(f_5)-(ii)$ são satisfeitos. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$ e $p \in (2, 2^*)$ tais que*

$$|f(x,t)| \leq \epsilon|t| + C_\epsilon|t|^{p-1}, \quad |F(x,t)| \leq \epsilon|t|^2 + C_\epsilon|t|^p, \tag{2.6}$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$.

Demonstração. Veja Lema 1.4. □

Lema 2.7. *Suponha f satisfaça $(f_1)-(f_3)$ e (f_5)-(ii). Então qualquer sequência $(Ce)_c$ para I é limitada.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset E$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} I(u_n) = c \;\text{ e }\; \lim_{n\to+\infty}(1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\|_{E'} = 0.$$

Segue que

$$c + o_n(1) = I(u_n) - \frac{1}{2}I'(u_n)u_n = \int \widehat{F}(x, u_n). \tag{2.7}$$

Argumentando por contradição, suponha que $\|u_n\| \to \infty$. Sendo (u_n) uma sequência $(Ce)_c$, temos que $I'(u_n)(u_n^+ - u_n^-) = o_n(1)$ e portanto

$$o_n(1) = \frac{I'(u_n)(u_n^+ - u_n^-)}{\|u_n\|^2} = 1 - \int \frac{f(x,u_n)(u_n^+ - u_n^-)}{\|u_n\|^2}.$$

Definindo $v_n := u_n/\|u_n\|$, podemos concluir que

$$\lim_{n\to+\infty} \int \frac{f(x,u_n)(v_n^+ - v_n^-)}{\|u_n\|} = 1. \tag{2.8}$$

Seja $R_1 > 0$ como em (f_3). Para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $|t| > R_1$, temos que

$$a_1\widehat{F}(x,t) \geq \left(\frac{f(x,t)}{t}\right)^\tau \geq \left(\frac{2F(x,t)}{t^2}\right)^\tau.$$

Assim, segue de (f_4) que $\widehat{F}(x,t) \to \infty$ quando $t \to \infty$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$. Isto, (f_2) e a definição de q implicam que $q(r) > 0$ para todo $r > 0$ e $q(r) \to \infty$ quando $r \to \infty$, sendo $q(r)$ como definido em (f_2).

Para $0 \leq a < b$, definimos

$$\Omega_n(a,b) := \{x \in \mathbb{R}^N : a \leq |u_n(x)| < b\}.$$

Usando (2.7) e a definição acima, segue que

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &= \int_{\Omega_n(0,a)} \widehat{F}(x,u_n) + \int_{\Omega_n(a,b)} \widehat{F}(x,u_n) + \int_{\Omega_n(b,\infty)} \widehat{F}(x,u_n) \\ &\geq \int_{\Omega_n(0,a)} \widehat{F}(x,u_n) + \frac{q(a)}{b^2}\int_{\Omega_n(a,b)} u_n^2 + q(b)|\Omega_n(b,\infty)|, \end{aligned}$$

e desse modo, para algum $C_1 > 0$, obtemos

$$\max\left\{\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n(a,b)} \widehat{F}(x,u_n),\ \frac{q(a)}{b^2}\int_{\Omega_n(a,b)} u_n^2,\ q(b)|\Omega_n(b,\infty)|\right\} \leq C_1. \tag{2.9}$$

A desigualdade acima implica que $|\Omega_n(b,\infty)| \leq C_1/q(b)$. Lembrando que $q(b) \to +\infty$ quando $b \to +\infty$, concluímos que

$$\lim_{b\to+\infty} |\Omega_n(b,\infty)| = 0, \text{ uniformemente em } n.$$

Fixado $\mu \in [2, 2^*)$, pela desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev, obtemos para algum $C_2 > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n(b,\infty)} |v_n|^\mu &\leq \left(\int_{\Omega_n(b,\infty)} |v_n|^{2^*}\right)^{\mu/2^*} |\Omega_n(b,\infty)|^{(2^*-\mu)/2^*} \\ &\leq C_2\|v_n\|^\mu|\Omega_n(b,\infty)|^{(2^*-\mu)/2^*} = C_2|\Omega_n(b,\infty)|^{(2^*-\mu)/2^*}. \end{aligned}$$

Como $2^* - \mu > 0$, concluímos que

$$\lim_{b\to+\infty} \int_{\Omega_n(b,\infty)} |v_n|^\mu = 0, \text{ uniformemente em } n. \tag{2.10}$$

Definido $2\tau' := 2\tau/(\tau-1) \in (2, 2^*)$, podemos usar a condição (f_3), (2.9) e a desigualdade de Hölder para obter

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n(b,\infty)} \frac{f(x,u_n)(v_n^+ - v_n^-)}{\|u_n\|} &= \int_{\Omega_n(b,\infty)} \frac{f(x,u_n)|v_n|(v_n^+ - v_n^-)}{|u_n|} \\ &\leq \left(\int_{\Omega_n(b,\infty)} \frac{|f(x,u_n)|^\tau}{|u_n|^\tau}\right)^{1/\tau} \left(\int_{\Omega_n(b,\infty)} (|v_n||v_n^+ - v_n^-|)^{x\tau'}\right)^{1/\tau'} \\ &\leq a_1^{1/\tau}\left(\int_{\Omega_n(b,\infty)} \widehat{F}(x,u_n)\right)^{1/\tau} \left(\int_{\Omega_n(b,\infty)} |v_n|^{2\tau'}\right)^{1/2\tau'} \left(\int_{\Omega_n(b,\infty)} |v_n^+ - v_n^-|^{2\tau'}\right)^{1/2\tau'} \\ &\leq C_3\left(\int_{\Omega_n(b,\infty)} |v_n|^{2\tau'}\right)^{1/2\tau'}. \end{aligned}$$

Fixe $\varepsilon > 0$. Esta última expressão e (2.10) nos permitem concluir que existe $b_\varepsilon > 0$, suficientemente grande, de modo que

$$\int_{\Omega_n(b_\varepsilon,\infty)} \frac{f(x,u_n)(v_n^+ - v_n^-)}{\|u_n\|} < \varepsilon, \text{ para todo } n. \tag{2.11}$$

Agora seja $C_4 > 0$ tal que $|u|_2^2 \leq C_4\|u\|^2$ para todo $u \in E$. Por (f_1), existe $a_\varepsilon \in (0, b_\varepsilon]$ tal que

$$|f(x,t)| \leq \frac{\varepsilon|t|}{C_4},$$

para todo $|t| \leq a_\varepsilon$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_n(0,a_\varepsilon)} \frac{f(x,u_n)(v_n^+ - v_n^-)}{\|u_n\|} &\leq \int_{\Omega_n(0,a_\varepsilon)} \frac{f(x,u_n)}{|u_n|}|v_n||v_n^+ - v_n^-| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{C_4}\int_{\Omega_n(0,a_\varepsilon)} v_n^2 \leq \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Usando (2.9), para $0 < a < b$ fixado, segue que

$$\int_{\Omega_n(a,b)} |v_n|^2 = \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_{\Omega_n(a,b)} u_n^2 \leq \frac{1}{\|u_n\|^2}\frac{C_1 b^2}{q(a)} = o_n(1).$$

Para finalizar, por (f_5) e o fato de que $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ obtemos $C_5 > 0$ tal que $|f(x,u_n)| \leq C_5|u_n|$ para todo $x \in \Omega_n(a_\varepsilon, b_\varepsilon)$. Daí, pela desigualdade anterior, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\Omega_n(a_\varepsilon,b_\varepsilon)} \frac{f(x,u_n)(v_n^+ - v_n^-)}{\|u_n\|} \leq C_5\int_{\Omega_n(a_\varepsilon,b_\varepsilon)} v_n^2 < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq n_0. \tag{2.13}$$

Juntando as estimativas (2.12)-(2.13) temos que

$$\int \frac{f(x,u_n)(v_n^+ - v_n^-)}{\|u_n\|} \leq 3\varepsilon,$$

o que contradiz (2.8), uma vez que $\varepsilon > 0$ é arbitrário. Portanto (u_n) é limitada em E. $\square$

Lema 2.8. *Suponha que f satisfaça $(f_1)-(f_2)$. Seja $(u_n) \subset E$ uma sequência de Cerami para I no nível $c > 0$. Se $u_n \rightharpoonup 0$ fracamente em E então existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ e $R > 0$, $\beta > 0$ tal que $|y_n| \to \infty$*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^2 \geq \beta > 0$$

Demonstração. Veja Lema 2.8. □

Encerramos essa seção enunciando resultados técnicos sobre convergência que já foram utilizados no capítulo anterior.

Lema 2.9. *Suponha que vale* (f_5). *Seja* $(u_n) \subset E$ *uma sequência limitada e* $v_n(x) = v(x - y_n)$, *onde* $v \in E$ *e* $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$. *Se* $|y_n| \to \infty$, *então*

$$(f_\infty(x, u_n) - f(x, u_n))\, v_n \to 0,$$

fortemente em $L^1(\mathbb{R}^N)$ *quando* $n \to \infty$.

Lema 2.10. *Suponha que* $\varphi \in \mathcal{F}$ *e* $s \in [2, 2^*]$. *Seja* $v_n \rightharpoonup v$ *em* E. *Então,*

$$\int \varphi |v_n|^s \to \int \varphi |v| \text{ quando } n \to \infty.$$

2.3 Demonstração do Teorema 2.1

Antes de demonstrar o Teorema 2.1, precisaremos fazer algumas considerações sobre o problema limite associado à equação (2.1). Pela hipóteses $(f_1) - (f_5)$, observamos que f_∞ satisfaz (2.6) e

(i) f_∞ é 1-periódica em $x_1, \ldots, x_N$,

(ii) $f_\infty(x, u) = o(u)$ uniformemente em x quando $u \to 0$,

(iii) $u \mapsto \frac{f_\infty(x,u)}{|u|}$ é crescente sobre $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$,

(iv) $\frac{F_\infty(x,u)}{u^2} \to \infty$ uniformemente em x quando $|u| \to \infty$.

Assim, para o problema periódico

$$-\Delta u + V_\infty(x)u = f_\infty(x, u), x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.14}$$

temos que vale o seguinte resultado de existência de solução:

Teorema 2.11. *Suponha que* V *satisfaça* $(V_0) - (V_1)$ *e* f_∞ *satisfaça* $(i) - (iv)$ *acima. Então* (2.14) *possui uma solução de energia mínima* $u_\infty \neq 0$.

Demonstração. Veja [30, Teorema 40] □

Assim, denotando por $I_\infty : E \to \mathbb{R}$ o funcional

$$I_\infty(u) := \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - \int F_\infty(x,u),$$

temos que

$$I_\infty(u_\infty) = \inf\{I_\infty(u) : u \in E, u \neq 0 \text{ e } I'_\infty(u) = 0\} > 0.$$

Utilizando a solução do problema limite acima, vamos definir os conjuntos relacionados com a estrutura de link para o funcional I. Considerando $u_0 = u_\infty^+$, definimos

$$M = M_{R,u_0} = \{u = u^- + tu_0 : u^- \in E^-,\ \|u\| \leq R,\ t \geq 0\}.$$

e

$$N_r := \{u \in E^+ : \|u\| = r\},$$

em que $R > r > 0$. O resultado abaixo mostra que R e r podem ser escolhidos de modo que I satisfaça as condições geométricas do Teorema 2.2.

Lema 2.12. *Suponha que f satisfaça (f_1) (f_3), (f_4) e (f_5)-(ii). Então I verifica as seguintes condições*

(i) existem r, $\alpha > 0$ tais que $I|_{N_r} \geq \alpha$;

(ii) existe $R > r$ tal que $I|_{\partial M_R} \leq 0$.

Demonstração. Para $u \in N_r$, temos que $u \in E^+$ com $\|u\| = r$. Usando (2.6) e as imersões de Sobolev, obtemos

$$\int F(x,u) \leq \varepsilon\|u\|^2 + C_\varepsilon\|u\|^p.$$

Agora, tomando $\varepsilon = 1/4$ e r suficientemente pequeno, segue que

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int F(x,u) \geq \frac{1}{4}\|u\|^2 + o(\|u\|^2) \geq \alpha > 0$$

para algum $\alpha > 0$. Assim, (i) é válido.

Para verificar (ii), considere $u = u^- + \rho u_0 \in \partial M_R$. Se $\|u\| \leq R$ e $\rho = 0$, temos que $u = u^- \in E^-$ e (f_1) implica que

$$I(u) = I(u^-) = -\frac{1}{2}\|u^-\|^2 - \int F(x,u^-) \leq 0.$$

Assim, resta considerar $\|u\| = R$ e $\rho > 0$. Se a conclusão do lema é falsa, podemos obter uma sequência (u_n) tal que $u_n = u_n^- + \rho_n u_0$, $\rho_n > 0$, $\|u_n\| = R_n \to \infty$ e $I(u_n) > 0$. Então

$$\frac{I(u_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_n^2\|u_0\|^2}{\|u_n\|^2} - \frac{\|u_n^-\|^2}{\|u_n\|^2}\right) - \int \frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^2} > 0$$

Como $F \geq 0$, devemos ter $\rho_n\|u_0\| \geq \|u_n^-\|$. Segue de

$$\frac{\rho_n^2\|u_0\|^2}{\|u_n\|^2} + \frac{\|u_n^-\|^2}{\|u_n\|^2} = 1,$$

que

$$\frac{1}{\sqrt{2}\|u_0\|} \leq \frac{\rho_n}{\|u_n\|} \leq \frac{1}{\|u_0\|}$$

e $u_n^-/\|u_n\|$ é limitada. Logo, passando para uma subsequência, temos que

$$\frac{\rho_n}{\|u_n\|} \to \rho > 0, \tag{2.15}$$

Sendo E^- fracamente fechado e usando as imersões de Sobolev, podemos assumir que

$$\frac{u_n^-}{\|u_n\|} \rightharpoonup v \in H^- \text{ e } \frac{u_n^-}{\|u_n\|} \to v \text{ q.t.p. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Por (2.15) e $\|u_n\| \to \infty$, obtemos $\rho_n \to \infty$. Defina

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N : \rho u_0(x) + v(x) \neq 0\}.$$

Lembrando que $u_0 \in E^+ \setminus \{0\}$ e $v \in E^-$, segue que $|\Omega| > 0$, e portanto

$$\lim |u_n(x)| = \infty \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Assim, tomando o $\limsup$ em

$$0 < \frac{I(u_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_n^2\|u_0\|^2}{\|u_n\|^2} - \frac{\|u_n^-\|^2}{\|u_n\|^2}\right) - \int_\Omega \frac{F(x,u_n)}{u_n^2}\frac{u_n^2}{\|u_n\|^2},$$

usando o Lema de Fatou e (f_4), concluímos que

$$0 \leq \frac{1}{2}\left(\rho^2\|u_0\|^2 - \|v\|^2\right) - \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} \frac{F(x,u_n)}{u_n^2}(\rho u_0 + v)^2 = -\infty,$$

que é uma contradição e o lema segue.

$\square$

Para poder comparar níveis de energia mais a frente, observando que $M_{R,u_0} \subset E^- \oplus \mathbb{R}^+ u_0 \equiv E^- \oplus \mathbb{R}^+ u_\infty$ e usando [30, Proposição 39 e Teorema 40], concluímos que

$$\sup I_\infty(M_R) \leq I_\infty(u_\infty). \tag{2.16}$$

Agora podemos concluir a demonstração do nosso principal resultado.

Demonstração do Teorema 2.1 Os Lemas 2.6 e 2.12 combinados com o Teorema 2.2 garantem a existência de uma sequência $(u_n) \subset E$ tal que

$$I(u_n) \to c \geq \alpha > 0 \text{ e } (1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\|_{E^*} \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Pelo Lema 2.7, (u_n) é limitada em E e, passando para uma subsequência, podemos assumir que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em E. Afirmamos que $I'(u) = 0$. De fato, como $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em E, é suficiente mostrar que $I'(u)v = 0$ para toda $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Temos que

$$I'(u_n)v - I'(u)v = (u_n - u, v) - \int [f(x, u_n) - f(x, u)]v. \tag{2.17}$$

Usando as imersões de Sobolev, temos que $u_n \to u$ em $L^s_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $s \in [1, 2^*)$ e

$$\begin{aligned} &u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \ K = \text{supp}(v), \text{ quando } n \to \infty, \\ &|u_n(x)| \leq w_s(x) \in L^s(K), \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e q.t.p em } K, \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(x, u_n) \to f(x, u) \text{ q.t.p. em } \ K, \text{ quando } n \to \infty.$$

Usando (2.6) e a desigualdade de Hölder , obtemos

$$|f(x, u_n)v| \leq \epsilon |w_2||v| + C_\epsilon |w_{p-1}||v| \in L^1(K).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e a convergência fraca $u_n \rightharpoonup u$ em E, tomando o limite em (2.17), temos que

$$I'(u)v = \lim_{n \to \infty} I'(u_n)v = 0,$$

que implica $I'(u) = 0$. Se $u \neq 0$, então o teorema é válido. Assim, precisamos somente tratar o caso $u = 0$.

Pelo Lema 2.8, existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, $R > 0$, e $\beta > 0$ tais que $|y_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$, e

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^2 \geq \beta > 0. \tag{2.18}$$

Pelo mesmo argumento usado no capítulo anterior, podemos assumir que $(y_n) \subset \mathbb{Z}^N$. Escrevendo $\widetilde{u}_n(x) := u_n(x+y_n)$ e observando que $\|\widetilde{u}_n\| = \|u_n\|$, a menos de subsequência, temos que $\widetilde{u}_n \rightharpoonup \widetilde{u}$ em E, $\widetilde{u}_n \to \widetilde{u}$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e para q.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$. Por (2.18) segue que $\widetilde{u} \neq 0$.

Afirmação 1. $I'_\infty(\widetilde{u}) = 0$

Para provar isto, fixemos $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Temos que

$$I'_\infty(\widetilde{u}_n)v - I'_\infty(\widetilde{u})v = (\widetilde{u}_n - \widetilde{u}, v) - \int (f_\infty(x, \widetilde{u}_n) - f_\infty(x, \widetilde{u}))v.$$

Os mesmos argumentos usados acima implicam que

$$I'_\infty(\widetilde{u})v = \lim_{n\to\infty} I'(\widetilde{u}_n)v.$$

Seja $v_n(x) := v(x - y_n)$. Pela periodicidade de f_∞, segue que

$$I'_\infty(\widetilde{u}_n)v = I'_\infty(u_n)v_n.$$

Por outro lado,

$$I'_\infty(u_n)v_n - I'(u_n)v_n = \int [f(x, u_n) - f_\infty(x, u)]v_n.$$

Usando o Lema 2.9, concluímos que

$$I'_\infty(u_n)v_n - I'(u_n)v_n \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Assim,

$$I'_\infty(\widetilde{u})v = \lim_{n\to\infty}[I'_\infty(u_n)v_n - I'(u_n)v_n] + \lim I'(u_n)v_n \to 0,$$

validando a afirmação.

Afirmação 2. $\liminf\limits_{n\to\infty} \int \widehat{F}(x, \widetilde{u}_n) \geq \int \widehat{F}_\infty(x, \widetilde{u})$

Usando a definição de $\widehat{F}$ e $\widehat{F}_\infty$, a condição (f_5), vemos que

$$\begin{aligned}|\widehat{F}(x,u_n)-\widehat{F}_\infty(x,u_n)| &\leq \frac{1}{2}|f(x,u_n)-f_\infty(x,u_n)||u_n|+|F(x,u_n)-F_\infty(x,u_n)|\\ &\leq \frac{1}{2}\varphi(x)|u_n|^{p_\infty}+\varphi(x)\int_0^{|u_n|}t^{p_\infty-1}\,dt\\ &\leq \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p_\infty}\right)\varphi(x)|u_n|^{p_\infty}.\end{aligned}$$

Daí, pelo Lema 2.10, Lema de Fatou e a periodicidade de $\widehat{F}_\infty$,

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\int \widehat{F}(x,u_n) &= \liminf_{n\to\infty}\int \widehat{F}_\infty(x,u_n)\\ &= \liminf_{n\to\infty}\int \widehat{F}_\infty(x,\widetilde{u}_n) \geq \int \widehat{F}_\infty(x,\widetilde{u}),\end{aligned}$$

e a afirmação é válida.

Com isso, obtemos

$$\begin{aligned}c &= \lim_{n\to\infty}[I(u_n)-\frac{1}{2}I'(u_n)u_n] = \liminf_{n\to\infty}\int \widehat{F}(x,u_n)\\ &\geq \int \widehat{F}_\infty(x,\widetilde{u}) = I_\infty(\widetilde{u})-\frac{1}{2}I'_\infty(\widetilde{u})\widetilde{u} = I_\infty(\widetilde{u}),\end{aligned}$$

isto é, $I_\infty(\widetilde{u})\leq c$. Decorre da definição de c, (f_5) e (3.12) que

$$c\leq \sup_{M_R} I(u)\leq \sup_{M_R} I_\infty(u)\leq I_\infty(u_\infty)\leq I_\infty(\widetilde{u})\leq c,$$

ou seja, para $h_0=\mathrm{Id}_M$ no Teorema 2.3, obtemos

$$\sup I(h_0(1,M))=c>0.$$

Aplicando o Teorema 2.3, garantimos a existência de um ponto crítico não trivial para I e, portanto, a prova está completa. $\square$

CAPÍTULO 3

Sistema Hamiltomiano periódico e assintoticamente periódico

Neste capítulo, estabeleceremos resultados de existência de solução para uma classe de sistema hamiltoniano do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = F_v(x,u,v), \ x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + V(x)v = F_u(x,u,v), \ x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $V : \mathbb{R}^N \to (0, +\infty)$ é uma função contínua, $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e F_u, F_v denotam as derivadas parciais de F com respeito à segunda e terceira variável, respectivamente. Vamos estudar os casos em que F é periódica e assintoticamente periódica.

Em todo este capítulo, assumiremos que o potencial V satisfaz a seguinte condição de periodicidade:

(V_0) $V(x) = V(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ é 1-periódica nas variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_N$.

Na Seção 1, iremos tratar o caso em que a não linearidade F é periódica. Além disso, motivados pelo caso escalar, assumiremos que F satisfaz as seguintes hipóteses :

(F_0) $F(x,z)$ é 1-periódica nas variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_N$;

(F_1) existem $C > 0$ e $p \in (2, 2N/(N-2))$ tais que

$$|F_z(x,z)| \leq C(1 + |z|^{p-1}), \ \text{para cada } (x,z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2;$$

(F_2) $F_z(x,z) = o(|z|)$ quando $|z| \to 0$, uniformemente para $x \in \mathbb{R}^N$;

(F_3) $\frac{F(x,z)}{|z|^2} \to \infty$ quando $|z| \to \infty$, uniformemente para $x \in \mathbb{R}^N$;

(F_4) existe uma função $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ crescente na segunda variável tal que

$$F_z(x,z) = g(x,|z|)z, \text{ para cada } (x,z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2.$$

Teorema 3.1. *Suponha que V satisfaça (V_0) e F satisfaça $(F_0) - (F_4)$. Então (3.1) possui uma solução de energia mínima.*

Teorema 3.2. *Suponha que V satisfaça (V_0) e F satisfaça $(F_0) - (F_4)$. Então, existem infinitas soluções geometricamente distintas para o problema (3.1).*

Apresentamos aqui um exemplo de uma aplicação para nossos dois teoremas acima. Seja $a \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ positiva e 1-periódica em $x_1, \cdots, x_N$ e considere

$$F(x,z) := \begin{cases} \dfrac{a(x)}{4}\left[2(|z|^2-1)\ln(1+|z|) + 2|z| - |z|^2 + 4\ln(2) - 3\right], \text{ se } |z| \geq 1 \\ \dfrac{a(x)}{4}[-2|z|^2 + 2(1+|z|^2)\ln(1+|z|^2)], \text{ se } |z| < 1. \end{cases}$$

Podemos ver que esta não linearidade satisfaz $(F_0) - (F_4)$, com

$$g(x,t) := \begin{cases} a(x)\ln(1+t), \text{ se } t \geq 1 \\ a(x)\ln(1+t^2), \text{ se } 0 \leq t < 1. \end{cases}$$

Contudo, ela não satisfaz a hipótese (AR).

Em nosso resultado final, consideramos o caso em que F não é periódica. Para especificar melhor essa nova condição, precisamos introduzir a função auxiliar

$$\widehat{F}(x,z) := \frac{1}{2}F_z(x,z)z - F(x,z),$$

para $(x,z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2$ e considerar as hipóteses abaixo

(F_5) para todo $r > 0$ vale $q(r) := \inf\{\widehat{F}(x,z) : x \in \mathbb{R}^N \text{ e } |z| \geq r\} > 0$;

(F_6) existem constantes $c_0 > 0$, $R_0 > 0$ $\tau > N/2$ tais que

$$|F_z(x,z)|^\tau \leq c_0|z|^\tau \widehat{F}(x,z) \text{ para todo } (x,z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2 \text{ satisfazendo } |z| \geq R_0;$$

(F_7) existem $p_\infty \in (2, 2^*)$, $\varphi \in \mathcal{F}$ e F_∞ satisfazendo $(F_1) - (F_5)$ tais que:

(i) $F(x,z) \geq F_\infty(x,z)$ para todo $(x,z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2$ e

(ii) $|F_z(x,z) - F_{\infty,z}(x,z)| \leq \varphi(x)|z|^{p_\infty - 1}$ para todo $(x,z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2$.

Teorema 3.3. *Suponha que V satisfaça (V_0) e F satisfaça (F_2) e $(F_5) - (F_7)$. Então* (3.1) *possui uma solução não trivial.*

O restante deste capítulo é organizado da seguinte maneira: na primeira seção apresentamos os resultados abstratos que iremos necessitar nas principais provas de nossos resultados. A Seção 2 é dedicada à prova do Teorema 3.1. Na Seção 3 provamos nosso resultado de multiplicidade e na Seção 4 apresentamos a demonstração do Teorema 3.3.

3.1 Resultados abstratos

Nessa seção apresentamos os resultados abstratos que serão utilizado nas provas dos teoremas que envolvem o problema periódico. Em toda a seção vamos denotar por E um espaço de Hilbert com uma decomposição ortogonal da forma $E = E^+ \oplus E^-$. Cada elemento $z \in E$ pode ser escrito, univocamente, como $z = z^+ + z^-$, com $z^\pm \in E^\pm$. Fixado $z \in E$ e $r > 0$, consideraremos os seguintes conjuntos

$$N_r := \{z \in E^+ : \|z\| = r\}, \quad S^+ := N_1 = \{z \in E^+ : \|z\| = 1\}, \tag{3.2}$$

$$E(z) := \mathbb{R}z \oplus E^- \equiv \mathbb{R}z^+ \oplus E^-,$$

e

$$\widehat{E}(z) := \mathbb{R}^+ z \oplus E^- \equiv \mathbb{R}^+ z^+ \oplus E^-.$$

Dado um funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, vamos assumir as seguintes hipóteses

(N_1) o funcional I se escreve como

$$I(z) = \frac{1}{2}\|z^+\|^2 - \frac{1}{2}\|z^-\|^2 - \mathcal{J}(z), \tag{3.3}$$

em que $\mathcal{J} : E \to \mathbb{R}$ é fracamente semicontínuo inferiormente, $\mathcal{J}(0) = 0$ e, para todo $z \neq 0$, vale

$$\mathcal{J}'(z)z > 2\mathcal{J}(z) > 0;$$

(N_2) para cada $z \in E \setminus E^-$ a restrição do funcional I ao conjunto $\widehat{E}(z)$ possui um único ponto crítico não trivial, que é o único máximo global de $I|_{\widehat{E}(z)}$;

(N_3) existe $\delta > 0$ tal que $\|\widehat{m}(z)^+\| \geq \delta$ para todo $z \in E \setminus E^-$ e, para cada subconjunto compacto $\mathcal{K} \subset E \setminus E^-$, existe uma constante $C_{\mathcal{K}}$ tal que $\|\widehat{m}(z)\| \leq C_{\mathcal{K}}$ para todo $z \in \mathcal{K}$.

Vamos definir ainda a variedade de Nehari generalizada como sendo

$$\mathcal{M} := \{z \in E \setminus E^- : I'(z)(tz + w) = 0,\ t \in \mathbb{R},\ w \in E^-\}.$$

Se $z \neq 0$ é um ponto crítico então, de acordo com (N_1), temos que

$$I(z) = I(z) - \frac{1}{2} I'(z)z = \int \left(\frac{1}{2}\mathcal{J}'(z)z - \mathcal{J}(z)\right) > 0, \tag{3.4}$$

enquanto que $I \leq 0$ sobre E^-. Note que a condição (N_2) acima e a definição de $\mathcal{M}$ nos permitem construir uma aplicação

$$\widehat{m} : E \setminus E^- \to \mathcal{M},\quad \widehat{m}(z) := \left\{\text{único máximo global da restrição } I|_{\widehat{E}(z)}\right\}.$$

Vamos denotar por m a restrição dessa aplicação ao conjunto S^+, isto é,

$$m := \widehat{m}|_{S^+}.$$

No próximo lema, reunimos várias propriedades associadas aos conceitos acima definidos.

Lema 3.4. *Suponha que I satisfaça $(N_1) - (N_3)$. Então:*

(a) $\widehat{m}$ é contínua;

(b) $m : S^+ \to \mathcal{M}$ é um homeomorfismo com inversa dada por $m^{-1}(z) = \frac{z^+}{\|z^+\|}$, para cada $z \in \mathcal{M}$;

(c) o funcional $\widehat{\Psi} : E^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definido por $\widehat{\Psi}(z) = I(\widehat{m}(z))$ é de classe C^1. Além disso, $\Psi := \widehat{\Psi}|_{S^+}$ é também de classe C^1 e

$$\Psi'(z)w = \|m(z)^+\| I'(m(z))w, \text{ para todo } w \in T_z(S^+);$$

(d) Se $(w_n) \subset S^+$ é uma sequência de Palais-Smale para Ψ, então $(m(w_n)) \subset \mathcal{M}$ é uma sequência de Palais-Smale para I. Se $(w_n) \subset \mathcal{M}$ é uma sequência limitada de Palais-Smale para I, então $(m^{-1}(u_n))$ é uma sequência de Palais-Smale para Ψ ;

(e) $\inf_{S^+} \Psi = \inf_{\mathcal{M}} I$.

Demonstração. Veja no Apêndice. □

Na prova do nosso resultado de multiplicidade vamos utilizar um outro resultado abstrato. Antes de enunciá-lo vamos introduzir duas novas hipóteses para o funcional:

(M_1) existem $r, \alpha > 0$ tais que $I(z) \geq \alpha$ para cada $z \in N_r$;

(M_2) existem uma sequência estritamente crescente de espaços $X_n \subset E^+$ de dimensão finita e $R_n > 0$ tais que

$$\sup I(X_n \oplus E^-) < +\infty, \ \sup I\left((X_n \oplus E^-) \setminus B_{R_n}(0)\right) < \inf I(B_r(0)).$$

As condições acima fornecem uma geometria do tipo Passo da Montanha para o funcional I. Se fosse possível provar a condição de Palais-Smale obteríamos uma sequência ilimitada de pontos críticos, usando o Teorema do Passo da Montanha com Simetria. Contudo, estamos interessados em casos em que as propriedades de compacidade são mais fracas. Para introduzir esse novo conceito de compacidade precisamos de algumas notações descritas a seguir. Para α, $\beta \in \mathbb{R}$, nós definimos os seguintes conjuntos de níveis $I^\beta := \{z \in E : I(z) \leq \beta\}$, $I_\alpha := \{z \in E : I(u) \geq \alpha\}$ e $I_\alpha^\beta := I_\alpha \cap I^\beta$.

Dado um intervalo $J \subset \mathbb{R}$, dizemos que $\mathcal{A} \subset E$ é um $(PS)_J$-atrator se toda $(PS)_c$-sequência para I com $c \in J$, e todos $\varepsilon, \delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, vale

$$z_n \in \left(\mathcal{A} \cap I_{c-\delta}^{c+\delta}\right)_\varepsilon,$$

em que Z_ε denota $\{z \in E : \|z - w\| < \varepsilon \text{ for any } w \in Z\}$.

Segue da definição acima que um conjunto $(PS)_J$-atrator contém todos os pontos críticos de I com níveis pertencentes a J. Outras propriedades dessa classe de conjuntos podem ser encontradas em [6], onde os autores provam o resultado abstrato que vamos utilizar aqui. Para enunciá-lo precisamos definir ainda algumas notações relacionadas com a topologia do espaço de trabalho: denotamos por E_w o espaço E munido da topologia fraca, a mesma notação valendo para E_w^-. Consideramos ainda $E_\sigma := E_w^- \times E^+$ o espaço E munido da topologia produto de E_w^- com E^+.

Enunciamos no que se segue o resultado abstrato que utilizaremos para prova o Teorema 3.2. Para uma demonstração, veja [6, Teorema 4.2].

Teorema 3.5. *Suponha que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ é par e satisfaz $(M_1) - (M_2)$, $I(0) = 0$ e*

(M_3) *$I' : E_\sigma \to E_w^*$ é contínuo e $I : E_\sigma \to \mathbb{R}$ e semicontínuo superiormente;*

(M_4) *para qualquer intervalo compacto* $J \subset (0,\infty)$ *existe um* $(PS)_J$*-atrator* $\mathcal{A}$ *tal que*

$$\inf\{\|z^+ - w^+\| : z, w \in \mathcal{A}, z \neq w\} > 0.$$

Então I *tem uma sequência ilimitada de níveis críticos.*

3.2 Caso periódico: existência

Nessa seção vamos usar o Lema 3.4 e um argumento de minimização para obter uma solução não trivial para o problema (3.1). Vamos denotar por E o espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ munido da norma

$$\|(u,v)\|^2 = \int (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) + \int (|\nabla v|^2 + V(x)v^2).$$

Vamos considerar a seguinte de composição do espaço E

$$E^{\pm} = \{(u, \pm u) : u \in H^1(\mathbb{R}^N)\}.$$

Temos que E^+ e E^- são ortogonais tanto em E quanto em $L^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$. Para $z = (u,v) \in E$ definimos

$$z^+ = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2}\right) \text{ e } z^- = \left(\frac{u-v}{2}, -\frac{u-v}{2}\right).$$

Assim, $z^{\pm} \in E^{\pm}$ e $z = z^+ + z^-$, de modo que $E = E^+ \oplus E^-$ e podemos calcular

$$\int (\nabla u \nabla v + V(x)uv) = \frac{1}{2}(\|z^+\|^2 - \|z^-\|^2).$$

Como $H^1(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para todo $s \in [2, 2^*]$, e a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $s \in [1, 2^*)$, é compacta, verifica-se imediatamente o próximo lema:

Lema 3.6. *A imersão* $E \hookrightarrow L^s := L^s(\mathbb{R}^N) \times L^s(\mathbb{R}^N)$, $2 \leq s \leq 2^*$ *é contínua e a imersão* $E \hookrightarrow L^s_{loc} := L^s_{loc}(\mathbb{R}^N) \times L^s_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq s < 2^*$, *é compacta.*

Usando (F_1) e (F_2) podemos checar que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\max\{|F(x,z)|, |F_z(x,z) \cdot z|\} \leq \varepsilon |z|^2 + C_\varepsilon |z|^p \;, \tag{3.5}$$

para cada $(x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2$. Assim, fica bem definido

$$\mathcal{J}(z) = \int F(x, z), \quad z \in E,$$

e também o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ associado ao nosso problema, qual seja

$$I(z) := \frac{1}{2}(\|z^+\|^2 - \|z^-\|^2) - \mathcal{J}(z). \tag{3.6}$$

Além disso, $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ com

$$I'(z)w = \langle z^+, w^+\rangle - \langle z^-, w^-\rangle - \int F_z(x, z)w, \;\; z, w \in E.$$

Portanto, os pontos críticos de I são precisamente as soluções fracas do problema (3.1).

Como nós queremos utilizar as informações do Lema 3.4, provaremos na sequência que o funcional I satisfaz as condições $(N_1) - (N_3)$.

Lema 3.7. *Suponha que F satisfaça $(F_1), (F_2)$ e (F_4). Então, para todo $z \neq 0$, vale*

$$\frac{1}{2}F_z(x, z)z > F(x, z) > 0.$$

Além disso, $\mathcal{J}(0) = 0$ e $\mathcal{J}(z) = \int F(x, z)$ é fracamente semicontínuo inferiormente.

Demonstração. Por (F_2) temos que $F(x, 0) = 0$, e portanto $\mathcal{J}(0) = 0$. Tomando $z \neq 0$ e usando (F_4) obtemos

$$F(x, z) = \int_0^1 \frac{d}{dt}[F(x, tz)]dt = \int_0^1 F_z(x, tz)zdt = |z|^2 \int_0^1 g(x, t|z|)tdt > 0. \tag{3.7}$$

Esta identidade, (F_4) e o fato de que $g(x, \cdot)$ é crescente implicam que

$$\frac{1}{2}F_z(x, z)z - F(x, z) = |z|^2 \left(\int_0^1 [g(x, |z|) - g(x, t|z|)]tdt \right) > 0.$$

Para a verificação da última afirmação, seja $z_n \rightharpoonup z$ em E. Usando o Lema 3.6 podemos assumir que, a menos de subsequência, $z_n \to z$ em L^2_{loc} e $z_n(x) \to z(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Como F é não-negativa, segue do Lema de Fatou que

$$\liminf_{n\to\infty} \mathcal{J}(z_n) = \liminf_{n\to\infty} \int F(x, z_n) \geq \int F(x, z) = \mathcal{J}(z)$$

e isto completa a demonstração. $\square$

Lema 3.8. *Suponha que F satisfaça $(F_2)-(F_4)$. Sejam $s \geq -1$ e $v, z \in \mathbb{R}^2$ com $w = sz + v \neq 0$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ vale*

$$F_z(x,z)\Big(s(\frac{s}{2}+1)z+(s+1)v\Big)+F(x,z)-F(x,z+w)<0,.$$

Demonstração. Seja $y = y(s) = w + z = (1+s)z + v$ e defina, para $s \geq -1$,

$$\beta(s) := F_z(x,z)\Big(s(\frac{s}{2}+1)z+(s+1)v\Big)+F(x,z)-F(x,z+w).$$

Precisamos mostrar que $\beta(s) < 0$ sempre que $w \neq 0$. Se $z = 0$, segue de (F_2) e do Lema 3.7 que $\beta(s) = -F(x,y) < 0$. Supondo que $z \neq 0$, iremos tratar dois casos:

Caso 1: $z \cdot y \leq 0$

Se isso ocorre observamos que, por (F_4), $F_z(x,z)y = g(x,|z|)z \cdot y \leq 0$. Assim, usando $v = y - (1+s)z$, o Lema 3.7 e $s \geq -1$, temos

$$\begin{aligned}\beta(s) &= -(\frac{s^2}{2}+s+1)F_z(x,z)z+(s+1)F_z(x,z)y+F(x,z)-F(x,y) \\ &< -\frac{1}{2}(s+1)^2F_z(x,z)z+(s+1)F_z(x,z)y-F(x,y)<0.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Caso 2: $z \cdot y > 0$

Nesse caso, usando o Lema 3.7 obtemos

$$\beta(-1) = -\frac{1}{2}F_z(x,z)z+F(x,z)-F(x,y) < -F(x,y) < 0.$$

Segue de (F_4) que $F_z(x,z)z = g(x,|z|)|z|^2 > 0$, e portanto $\lim_{s\to\infty}\beta(s) = -\infty$. Por consequência β atinge seu máximo em algum ponto $s_0 \in [-1,\infty)$. Se $s_0 = -1$ o resultado segue da desigualdade acima. Supondo $s_0 > -1$, temos que

$$0 = \frac{\beta'(s_0)}{s_0+1} = F_z(x,z)y - F_z(x,y)z.$$

Usando (F_4), obtemos que $g(x,|z|)z \cdot y = g(x,|y|)y \cdot z$ e então $|z| = |y|$. Assim,

$$F_z(x,z)y = g(x,|z|)z \cdot y \leq g(x,|z|)|z|^2 = F_z(x,z)z.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\beta(s) &= -\frac{s^2}{2}F_z(x,z)z + (s+1)(F_z(x,z)y - F_z(x,z)z)\\ &\leq -\frac{s^2}{2}F_z(x,z)z < 0,\end{aligned}$$

e a prova está completa. □

Lema 3.9. *Suponha que F satisfaça $(F_1)-(F_4)$. Se $z \in \mathcal{M}$, então*

$$I(z+w) < I(z) \text{ sempre que } z+w \in \widehat{E}(z),\ w \neq 0.$$

Em particular, z é o único máximo global de $I|_{\widehat{E}(z)}$.

Demonstração. Seja $z \in \mathcal{M}$ e $z+w \in \widehat{E}(z)$ com $w \neq 0$. Pela definição de $\widehat{E}(z)$, podemos escrever $z+w = (1+s)z + v$, onde $s \geq -1$ e $v \in E^-$. Como $z \in \mathcal{M}$, denotando $\phi := s(\frac{s}{2}+1)z + (s+1)v \in E(z)$, temos que

$$0 = I'(z)\phi = s(\frac{s}{2}+1)(\|z^+\|^2 - \|z^-\|^2) - (s+1)\langle z^-, v\rangle - \int F_z(x,z)\phi.$$

Assim,

$$\begin{aligned}&I(z+w) - I(z)\\ &= s(\frac{s}{2}+1)(\|z^+\|^2 - \|z^-\|^2) - (s+1)\langle z^-, v\rangle - \frac{1}{2}\|v\|^2 + \int [F(x,z) - F(x,z+w)]\\ &= -\frac{1}{2}\|v\|^2 + \int [F_z(x,z)(s(\frac{s}{2}+1)z + (s+1)v) + F(x,z) - F(x,z+w)].\end{aligned}$$

Como $w \neq 0$, segue do Lema 3.8 que $I(z+w) < I(z)$.

Vamos mostrar agora que a desigualdade provada acima implica que z é o único ponto de máximo da restrição $I|_{\widehat{E}(z)}$. De fato, dado um elemento de $tz + y \in \widehat{E}(z) \setminus \{z\}$, basta considerar $w = (t-1)z + y$ para obter $tz + y = z + w$. Note que, se $w = 0$, então $t = 1$ e $y = 0$, o que não pode ocorrer visto que $tz + y \neq z$. Assim, $w \neq 0$ e segue da primeira parte da prova que $I(tz+y) < I(z)$. Logo z é o único máximo global de $I|_{\widehat{E}(z)}$. □

Lema 3.10. *Suponha que F satisfaça $(F_1)-(F_2)$. Então, para cada $z \in E \setminus E^-$ temos que $\widehat{E}(z) \cap \mathcal{M} = \{\widehat{m}(z)\}$ tem um único elemento, que é exatamente o único máximo global de $I|_{\widehat{E}(z)}$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.9 é suficiente provar que $\mathcal{M} \cap \widehat{E}(z) \neq \emptyset$, para cada $z \in E \setminus E^-$. Como $\widehat{E}(z) = \widehat{E}(\frac{z^+}{\|z^+\|})$, podemos assumir que $z \in S^+$.

Afirmação: existe $R > 0$ tal que $I(w) \leq 0$, sempre que $w \in \widehat{E}(z) \setminus B_R(0)$.

De fato, se isto fosse falso, obteríamos uma sequência $(w_n) \subset \widehat{E}(z)$ tal que $\|w_n\| \to \infty$ e $I(w_n) > 0$. Pondo $z_n := w_n/\|w_n\|$ e passando para uma subsequência, podemos assumir que $z_n \rightharpoonup z_0$ em E e $z_n(x) \to z(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Se $z_0 \neq 0$, deduzimos pelo Lema de Fatou e (F_3),

$$0 \leq \frac{I(w_n)}{\|w_n\|^2} = \frac{1}{2}\|z_n^+\|^2 - \frac{1}{2}\|z_n^-\|^2 - \int \frac{F(x,w_n)}{|w_n|^2}|z_n|^2 \to -\infty,$$

o que é uma contradição. Supondo $z_0 = 0$, lembrando que $F \geq 0$ e usando a desigualdade acima, obtemos $\|z_n^+\| \geq \|z_n^-\|$ que implica $\|z_n^+\| \geq 1/\sqrt{2}$. Isso e o fato de que $z \in S^+$ nos permite escrever $z_n^+ = s_n z$, com $1/\sqrt{2} \leq s_n \leq 1$. Passando para uma subsequência, $z_n^+ \to sz$ em E com $s > 0$, que contradiz $z_n \rightharpoonup 0$. Isso conclui a prova da afirmação.

Usando (F_2) e um argumento padrão concluímos que $I(sz) = \frac{1}{2}s^2 + o(s^2)$ quando $s \to 0$. Isso, a afirmação acima e (F_1) implicam que $0 < \sup_{\widehat{E}(z)} I < \infty$. Como I é é fracamente semicontínuo inferiormente em $\widehat{E}(z) \cap B_R(0)$, podemos usar o fato de que $I \leq 0$ em $\widehat{E}(z) \cap E^-$, para concluir que o máximo é atingido em algum ponto $\tilde{z} \in \widehat{E}(z)$ tal que $\tilde{z}^+ \neq 0$. Então $\tilde{z} := \widehat{m}(z) \in \mathcal{M}$ e o lema está provado. □

Vamos agora definir o seguinte número

$$c := \inf_{z \in \mathcal{M}} I(z).$$

O resultado abaixo, entre outras coisas, relaciona o número c acima com o conjunto N_r definido em (3.2):

Lema 3.11. *Suponha que F satisfaça $(F_1) - (F_2)$. Então*

(i) existe $r > 0$ tal que

$$c = \inf_{\mathcal{M}} I \geq \inf_{N_r} I > 0;$$

(ii) para todo $z \in \mathcal{M}$, vale $\|z^+\| \geq \max\{\|z^-\|, \sqrt{2c}\}$.

Demonstração. Se $z \in E^+$, então $I(z) = \frac{1}{2}\|z\|^2 - \int F(x,z)$. Assim, podemos usar as condições $(F_1) - (F_2)$ para concluir que $\int F(x,z) = o(\|z\|^2)$ quando $\|z\| \to 0$, o que implica que $\inf_{N_r} I > 0$ para $r > 0$ suficientemente pequeno. Além disso, se $z \in \mathcal{M}$, então segue do Lema 3.9 que

$$I(z) \geq I\left(r\frac{z^+}{\|z^+\|}\right) \geq \inf_{N_r} I,$$

de onde se conclui que $c \geq \inf_{N_r} I$.

Para provar (ii), consideramos $z \in \mathcal{M}$ para obter

$$c \leq \frac{1}{2}(\|z^+\|^2 - \|z^-\|^2) - \int F(x,z) \leq \frac{1}{2}(\|z^+\|^2 - \|z^-\|^2),$$

o que estabelece a desigualdade. □

Lema 3.12. *Suponha que F satisfaça $(F_1) - (F_2)$. Se $\mathcal{K} \subset E \setminus E^-$ é compacto, então existe uma constante $C_{\mathcal{K}}$ tal que $\|\widehat{m}(z)\| \leq C_{\mathcal{K}}$, para todo $z \in \mathcal{K}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{K}$ um subconjunto compacto de $E \setminus E^-$. Como no lema anterior, podemos assumir que $\mathcal{K} \subset S^+$. Suponha, por contradição, que exista uma sequência $(z_n) \subset \mathcal{K}$ tal que $\|\widehat{m}(z_n)\| \to \infty$. Como $\widehat{m}(z_n) \in \widehat{E}(z_n)$, podemos escrever

$$w_n := \frac{\widehat{m}(z_n)}{\|\widehat{m}(z_n)\|} = s_n z_n + w_n^-.$$

Como no Lema 3.10, verifica-se que $1/\sqrt{2} \leq s_n \leq 1$ e $s_n \geq \|w_n^-\|$. Isto e a compacidade de $\mathcal{K}$ implicam que, a menos de subsequência, $s_n \to s > 0$, $z_n \to z \neq 0$ e $w_n^- \rightharpoonup w^-$ em E. Podemos assumir que $w_n(x) \to w(x) := sz(x) + w^-(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, com $w \neq 0$ e

$$\lim_{n\to\infty} |\widehat{m}(z_n)(x)| = \infty, \text{ q.t.p. em } \{x \in \mathbb{R}^N : w(x) \neq 0\}.$$

Por (F_3) e pelo Lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned}
0 \leq \frac{I(\widehat{m}(z_n))}{\|\widehat{m}(z_n)\|^2} &= \frac{1}{2}\frac{s_n^2}{\|\widehat{m}(z_n)\|^2} - \frac{1}{2}\frac{\|w_n^-\|^2}{\|\widehat{m}(z_n)\|^2} - \int \frac{F(x,\widehat{m}(z_n))}{\|\widehat{m}(z_n)\|^2} \\
&\leq \frac{1}{2} - \int \frac{F(x,\widehat{m}(z_n))}{|\widehat{m}(z_n)|^2}|w_n|^2 \to -\infty,
\end{aligned}$$

uma contradição. O lema está provado. □

Lema 3.13. *Suponha que F satisfaça $(F_1) - (F_3)$. Então I é coercivo sobre $\mathcal{M}$, i.e., $I(z) \to \infty$ quando $\|z\| \to \infty$, $z \in \mathcal{M}$. Em particular, todas as sequências de Palais-Smale de I em $\mathcal{M}$ são limitadas.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que exista uma sequência $(z_n) \subset \mathcal{M}$ satisfazendo $I(z_n) \leq d$ e $\lim_{n\to\infty} \|z_n\| = \infty$. Definindo $w_n := z_n/\|z_n\|$ temos que, a menos de uma subsequência, $w_n \rightharpoonup w$ e $w_n(x) \to w(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Se $w \neq 0$, argumentando como no lema anterior, obtemos uma contradição. Desse modo, devemos ter $w = 0$.

Afirmamos que, para $p \in (2, 2^*)$ dado em (F_1), temos que $w_n^+ \not\to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N) \times$

$L^p(\mathbb{R}^N)$. De fato, se isso não for verdade, podemos usar (3.5) para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \int F(x, sw_n^+) = 0.$$

Além disso, como $sw_n^+ \in \widehat{E}(z_n)$, o Lema 3.9 implica que

$$d \geq I(z_n) \geq I(sw_n^+) \geq \frac{1}{4}s^2 - \int F(x, sw_n^+).$$

O lado direito da expressão acima tende para $s^2/4$ quando $n \to +\infty$, o que é uma absurdo visto que o número $s > 0$ é arbitrário.

Usando a afirmação provada acima e o Lema de Lions [21, Lema I.1] obtemos $\beta > 0$ e uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{Z}^N$ tais que

$$\int_{B_1(y_n)} |w_n^+|^2 \geq \beta > 0. \tag{3.9}$$

Passando ao limite segue que $w^+ \neq 0$, contradizendo o fato de que $w = 0$ e com isso concluímos a demonstração. $\square$

Demonstração do Teorema 3.1: De acordo com os lemas provados acima o funcional I satisfaz $(N_1) - (N_3)$ e portanto podemos aplicar o Lema 3.4. Utilizando a notação lá apresentada, vamos considerar $(w_n) \subset S^+$ uma sequência minimizante para Ψ. Pelo Princípio Variacional de Ekeland, podemos assumir que $\Psi'(w_n) \to 0$ e, usando o Lema 3.4, temos ainda que $I'(z_n) \to 0$ onde $z_n = m(w_n) \in \mathcal{M}$. Segue do Lema 3.13 que (z_n) é limitada e portanto podemos assumir que $z_n \rightharpoonup z$ em E e $z_n(x) \to z(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Usando essas convergências, a condição (F_1) e um argumento padrão concluímos que z é uma solução fraca do problema (3.1).

Se $z_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N) \times L^p(\mathbb{R}^N)$, então usando (3.5) e (F_1) obtemos que $\int F_z(x, z_n)z_n = o(1)$. Daí

$$o(\|z_n\|) = I'(z_n)z_n = \|z_n^+\|^2 - \|z_n^-\|^2 - \int F_z(x, z_n)z_n \leq \|z_n^+\|^2 + o(1),$$

implicando $z_n^+ \to 0$. Contudo, isto contradiz a segunda afirmação do Lema 3.11. Dessa forma, $z_n \not\to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N) \times L^p(\mathbb{R}^N)$ e pelo Lema de Lions, vemos que

$$\int_{B_1(y_n)} |z_n|^2 \geq \beta > 0,$$

para algum $\beta > 0$ e $(y_n) \subset \mathbb{Z}^N$. Por translação de (z_n), como I é $\mathbb{Z}^N$-invariante, obtemos uma nova sequência de Palais-Smale que converge fracamente para um ponto crítico não nulo de I, que denotaremos por z. Note que, como I não possui pontos críticos não nulos em E^-, devemos ter $z \in \mathcal{M}$.

Nosso próximo objetivo é provar que

$$I(z) = c = \inf_{\mathcal{M}} I.$$

Como podemos assumir, passando para uma subsequência, que $z_n(x) \to z(x)$ para q.t.p. em $x \in \mathbb{R}^N$, usando o Lema 3.7 e o Lema de Fatou, temos que

$$\begin{aligned} c + o(1) &= I(z_n) - \frac{1}{2} I'(z_n) z_n = \int \widehat{F}(x, z_n) \\ &\geq \int \widehat{F}(x, z) + o(1) = I(z) - \frac{1}{2} I'(z) z + o(1) \\ &= I(z) + o(1), \end{aligned}$$

o que mostra que $c \geq I(z)$. Como $z \in \mathcal{M}$, vale também a desigualdade reversa $c \leq I(z)$, o que mostra que $I(z) = c$ e completa a demonstração.

□

3.3 Caso periódico: multiplicidade

Nessa subseção vamos provar o resultado de multiplicidade para o sistema (3.1), aplicando o Teorema 3.5. O espaço E e o funcional I são os mesmos utilizados na prova do Teorema 3.1.

Lema 3.14. *Suponha que F satisfaça $(F_1) - (F_2)$. Então I satisfaz (M_1).*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, podemos usar $(F_1) - (F_2)$ para obter $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|F(x, z) \leq \varepsilon |z|^2 + C_\varepsilon |z|^p,$$

para todo $(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Essa desigualdade e as imersões de Sobolev implicam que $\int F(x, z) = o(\|z\|^2)$ quando $\|z\| \to 0$. Assim, lembrando que para todo $z \in N_r$ temos que $z = z^+ \in E^+$, o resultado segue da definição do funcional. □

Lema 3.15. *Suponha que F satisfaça $(F_1) - (F_4)$. Então para todo subespaço $X_k \subset E^+$ de dimensão finita temos que $I(z) \to -\infty$ quando $\|z\| \to \infty$, $z \in X_k \oplus E^-$. Em particular, para qualquer $r > 0$, a condição (M_2) é satisfeita.*

Demonstração. Argumentando por contradição, vamos supor que existem $M > 0$ e $(z_n) \subset X_k \oplus E^-$ tais que $I(z_n) \geq -M$ e $\|z_n\| \to \infty$. Definindo $w_n := z_n/\|z_n\|$, podemos supor que $w_n \rightharpoonup w$, $w_n^- \rightharpoonup w^-$ fracamente em E e $w_n^+ \to w^+ \in X_k$. Temos que

$$-\frac{M}{\|z_n\|^2} \leq \frac{I(z_n)}{\|z_n\|^2} = \frac{1}{2}\|w_n^+\|^2 - \frac{1}{2}\|w_n^-\|^2 - \int \frac{F(x, z_n)}{\|z_n\|^2}. \tag{3.10}$$

Se $w^+ = 0$, segue da desigualdade acima e de $F \geq 0$ que

$$0 \leq \frac{1}{2}\|w_n^-\|^2 + \int \frac{F(x, z_n)}{\|z_n\|^2} \leq \frac{1}{2}\|w_n^+\|^2 + \frac{M}{\|z_n\|^2} \to 0.$$

Assim, $\|w_n^-\| \to 0$ e obtemos uma contradição com $1 = \|w_n\|^2 = \|w_n^+\|^2 + \|w_n^-\|^2$. Logo, $w^+ \neq 0$ e, como podemo supor que $w_n(x) \to w(x)$ para q.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n(x)| = \infty \quad \text{q.t.p. em } \Omega := \{x \in \mathbb{R}^N : w(x) \neq 0\}.$$

Tomando o limite inferior em (3.10), usando o Lema de Fatou e (F_3), obtemos

$$\frac{1}{2}\|w^+\|^2 = \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\|w_n^+\|^2 \geq \int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} \frac{F(x, z_n)}{|z_n|^2}|w_n|^2 dx = +\infty,$$

o que é absurdo. $\square$

Lema 3.16. *Suponha que F satisfaça $(F_1) - (F_2)$. Então I satisfaz (M_3).*

Demonstração. Para verificar que $I' : E_\tau \to E_w^*$ é contínua, é suficiente mostrar que $\mathcal{J}' : E_\tau \to E_w^*$ é contínua. Tomando $z_n \to z$ em E_τ, segue que $z_n \rightharpoonup z$ em E e desse modo, usando as imersões de Sobolev, podemos assumir que $z_n \to z$ em L^s_{loc}, $s \in [2, 2^*)$. Daí, para $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, obtemos que $z_n \to z$ em $L^s_{loc}(K)$, $K = \text{supp}(\eta)$, e então usando $(F_1) - (F_2)$, obtemos

$$\mathcal{J}'(z_n)\eta = \int F_z(x, z_n)\eta \to \int F_z(x, z)\eta = \mathcal{J}'(z)\eta$$

Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em E, concluímos a primeira continuidade. Para a segunda parte, basta usar a definição de E_τ e o fato de tanto a norma quanto $\mathcal{J}(z)$ serem fracamente semicontínuos inferiormente.

$\square$

No que segue, vamos denotar por $K \subset E$ o conjunto de todos os pontos críticos do funcional I. O próximo lema descreve o comportamento das sequências de Palais-Smale de I. Sua prova pode ser encontrada em [12] ou [13].

Lema 3.17. *Suponha que F satisfaça $(F_1)-(F_4)$. Se $(z_n) \subset E$ é uma sequência $(PS)_c$ para I, então ocorre exatamente uma das situações seguintes:*

(i) $z_n \to 0$*;*

(ii) $c \geq \theta = \inf I_{K\setminus\{0\}} > 0$ *e existe um inteiro positivo* $l \leq [c/\theta]$*,* $v_1, \cdots, v_l \in K \setminus \{0\}$ *e sequências* $(a_n^i)_n \subset \mathbb{Z}^N$*,* $i = 1, 2, \cdots, l$*, tal que, após passar para uma subsequência de* (z_n)*,*

$$\left\| z_n - \sum_{i=1}^{l} v_i(\cdot - a_n^i) \right\| \to 0, \quad \sum_{i=1}^{l} I(v_i) = c$$

e para $i \neq j$*, temos que* $|a_n^i - a_n^j| \to \infty$ *quando* $n \to \infty$*.*

Conforme veremos abaixo, esse último resultado é o ponto chave para a verificação da condição (M_4).

Lema 3.18. *Suponha que F satisfaça $(F_1)-(F_4)$. Se o conjunto $K/\mathbb{Z}^N$ é finito, então I satisfaz (M_4).*

Demonstração. Seja $\mathcal{T}$ um conjunto finito formado por uma escolha arbitrária de representantes das $\mathbb{Z}^N$-órbitas de K. Como I é par, podemos assumir que $\mathcal{T} = -\mathcal{T}$. Uma vez que $K \setminus \{0\} \subset \mathcal{M}$ e $\inf_{\mathcal{M}} I > 0$, obtemos que

$$I(z) \geq \theta := \inf_{K\setminus\{0\}} I > 0,$$

para todo $z \in K \setminus \{0\}$. Logo, existe $\nu \geq \theta$ tal que

$$\theta \leq \min_{\mathcal{T}} I = \min_{K\setminus\{0\}} I \leq \max_{K\setminus\{0\}} I = \max_{\mathcal{T}} I \leq \nu.$$

Para $l \in \mathbb{N}$ e um conjunto finito $B \subset E$, definimos

$$[B, l] := \left\{ \sum_{i=1}^{j} z_i(\cdot - a_i) : 1 \leq j \leq l, a_i \in \mathbb{Z}^N, z_i \in B \right\}.$$

Utilizando a Proposição 1.55 em [12] concluímos que

$$\inf\{\|z - w\| : z, w \in [B, l], z \neq w\} > 0. \tag{3.11}$$

Fixado um intervalo compacto $J \subset (0, \infty)$, denotemos

$$d := \max J, \quad l := [d/\theta], \quad \mathcal{A} := [\mathcal{T}, l].$$

Observando que $[\mathcal{T}, l]^+ = [\mathcal{T}^+, l]$ e usando (3.11), segue que

$$\inf\{\|z_1^+ - z_2^+\| : z_1, z_2 \in \mathcal{A}, z_1^+ \neq z_2^+\} > 0.$$

Usando a convergência forte dada pelo item (ii) do Lema 3.17, podemos concluir que $\mathcal{A}$ é um $(PS)_J$-atrator para I. Assim, o funcional I satisfaz a hipótese (M_4). □

O resultado de multiplicidade segue agora de uma simples aplicação dos lemas acima juntamente com o Teorema 3.5. Os detalhes seguem abaixo.

Demonstração do Teorema 3.2: Basta mostrar que o conjunto $K/\mathbb{Z}^N$ é um conjunto infinito. De fato, se não fosse assim, poderíamos usar os lemas acima para verificar que I satisfaz $(M_1) - (M_4)$. Segue de (3.7) que é par. Assim, como $I(0) = 0$, podemos usar o Teorema 3.5 para obter uma sequência ilimitada de valores críticos para I. Uma vez que I é invariante por translação, concluímos que o conjunto $K/\mathbb{Z}^N$ é infinito, o que é absurdo. □

3.4 Caso assintoticamente periódico

Nessa seção vamos analisar o caso que F é assintoticamente periódica. Inicialmente, vamos considerar o funcional limite $I_\infty : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\infty(z) := \frac{1}{2}\|z^+\|^2 - \frac{1}{2}\|z^-\|^2 - \int F_\infty(x, z),$$

em que F_∞ é o limite assintótico da função F, dado pela condição (F_7). Essa última hipótese nos permite utilizar o Teorema 3.1 para garantir a existência de uma solução de energia mínima $z_\infty \in E$ do problema periódico

$$\begin{cases} -\Delta u + V_\infty(x)u = F_{\infty,v}(x, u, v), \ x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + V_\infty(x)v = F_{\infty,u}(x, u, v), \ x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Usando essa solução definimos os conjuntos para fazermos o link conforme se segue:

$$M_{R,z_0} := \{z = z^- + tz_0 : z^- \in E^-, \ \|z\| \leq R, \ t \geq 0\}.$$

onde $z_0 := z_\infty^+$. Como $M_{R,z_0} \subset \widehat{E}(z_0) = \widehat{E}(z_\infty)$, segue do Lema 3.9 que

$$\sup_{M_{R,z_0}} I_0 \leq I_0(z_0). \tag{3.12}$$

Precisamos agora encontrar um ponto crítico para o funcional I definido em (3.6). Observamos inicialmente que, como não impusemos (diretamente) uma condição de crescimento para F, precisamos primeiro mostrar que o funcional está bem definido. Isso na verdade é uma consequência do resultado abaixo:

Lema 3.19. *Suponha que F satisfaça (F_2), (F_6) e (F_7). Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ e $q \in (2, 2^*)$ tais que*

$$|F_z(x,z)| \leq \varepsilon|z| + C_\varepsilon|z|^{q-1}, \quad |F(x,z)| \leq \varepsilon|z|^2 + C_\varepsilon|z|^q, \tag{3.13}$$

para todo $(x,z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2$.

Demonstração. Tomando $\varepsilon > 0$ e usando (F_2), obtemos $\delta > 0$ tal que

$$|F_z(x,z)| \leq \varepsilon|z|, \; x \in \mathbb{R}^N, \; |z| \leq \delta. \tag{3.14}$$

Por (F_7) existe $R > 0$ satisfazendo

$$|F_z(x,z)|^\tau \leq c_0|z|^\tau \widehat{F}(x,z) \leq \frac{c_0}{2}|z|^{\tau+1}|F_z(x,z)|, \; x \in \mathbb{R}^N, \; |z| \geq R.$$

Daí, definindo $q := 2\tau/(\tau - 1)$, podemos usar $\tau > N/2$ para concluir que $2 < q < 2^*$. Além disso,

$$|F_z(x,z)| \leq C|z|^{\frac{\tau+1}{\tau-1}} = C|z|^{q-1}, \; x \in \mathbb{R}^N, \; |z| \geq R. \tag{3.15}$$

Sendo $F_{\infty,z} = \frac{\partial}{\partial z}F_\infty$ contínua e periódica, obtemos $M > 0$ tal que

$$|F_{\infty,z}(x,z)| \leq M, \; x \in \mathbb{R}^N, \; \delta \leq |z| \leq R.$$

Agora, usando (F_7), temos

$$|F_z(x,z)| \leq |\varphi|_\infty |z|^{p_\infty - 1} + M \leq \left(|\varphi|_\infty + \frac{M}{\delta^{p_\infty - 1}}\right)|z|^{p_\infty - 1}, \; x \in \mathbb{R}^N, \; \delta \leq |z| \leq R.$$

Isto, (3.14) e (3.15) demonstram a primeira desigualdade em (3.13). A segunda segue diretamente da desigualdade do valor médio. $\square$

No próximo resultado provamos que o funcional I satisfaz as condições da geometria do Teorema de Linking.

Lema 3.20. *Suponha que F satisfaça (F_2) e $(F_5) - (F_7)$. Então I verifica as seguintes condições :*

(i) *existem* r, $\alpha > 0$, *tais que* $I|_{N_r} \geq \alpha$;

(ii) *existe* $R > r$ *tal que* $I|_{\partial M_R} \leq 0$.

Demonstração. O primeiro item segue do Lema 3.14. Para o segundo, fixe $z = z^- + \rho z_0 \in \partial M_R$. Se $\|z\| \leq R$ e $\rho = 0$, temos que $z = z^- \in E^-$. Daí, usando (F_7) segue que

$$I(z) = I(z^-) = -\frac{1}{2}\|z^-\|^2 - \int F(x, z^-) \leq 0.$$

Assim, basta considerar o caso em que $\|z\| = R$ e $\rho > 0$. Se a conclusão do lema é falsa, podemos obter uma sequência (z_n) tal que $z_n = \rho_n z_0 + z_n^-$, $\rho_n > 0$, $\|z_n\| = R_n \to \infty$ e $I(z_n) > 0$. Então

$$\frac{I(z_n)}{\|z_n\|^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_n^2\|z_0\|^2}{\|z_n\|^2} - \frac{\|z_n^-\|^2}{\|z_n\|^2}\right) - \int \frac{F(x, z_n)}{\|z_n\|^2} > 0$$

Uma vez que $F \geq 0$, devemos ter $\rho_n\|z_0\| \geq \|z_n^-\|$. Observando que

$$\frac{\rho_n^2\|z_0\|^2}{\|z_n\|^2} + \frac{\|z_n^-\|^2}{\|z_n\|^2} = 1,$$

segue que $\frac{1}{\sqrt{2}\|z_0\|} \leq \frac{\rho_n}{\|z_n\|} \leq \frac{1}{\|z_0\|}$ e $z_n^-/\|z_n\|$ é limitada. Assim, passando para uma subsequência, podemos supor que

$$\frac{\rho_n}{\|z_n\|} \to \rho > 0, \quad \frac{z_n^-}{\|z_n\|} \rightharpoonup w \in E^- \quad \text{e} \quad \frac{z_n^-(x)}{\|z_n\|} \to w \text{ q.t.p. } x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.16}$$

em que usamos o Lema 3.6 e o fato de E^- ser fracamente fechado. Usando (3.16), $\|z_n\| \to \infty$ e a primeira convergência acima concluímos que $\rho_n \to \infty$. Assim, se

$$\lim_{n\to\infty} |z_n(x)| = +\infty, \text{ q.t.p. em } \Omega := \{x \in \mathbb{R}^N : \rho z_0(x) + w(x) \neq 0\},$$

em que $|\Omega| > 0$. Portanto, tomando o limite superior na desigualdade

$$0 < \frac{I(z_n)}{\|z_n\|^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_n^2\|z_0\|^2}{\|z_n\|^2} - \frac{\|z_n^-\|^2}{\|z_n\|^2}\right) - \int_\Omega \frac{F(x, z_n)}{|z_n|^2}\frac{|z_n|^2}{\|z_n\|^2}, \tag{3.17}$$

usando o Lema de Fatou e (F_7), concluímos que

$$0 \leq \frac{1}{2}\left(\rho^2\|z_0\|^2 - \|w\|^2\right) - \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} \frac{F(x, z_n)}{|z_n|^2}\frac{|z_n|^2}{\|z_n\|^2} = -\infty,$$

em que usamos o fato de que a expressão dentro da integral acima tende para $+\infty$ em Ω.

Obtemos assim uma contradição que prova o lema. □

Passamos agora à demonstração da limitação das sequências de Cerami.

Lema 3.21. *Suponha que F satisfaça (F_2) e $(F_5)-(F_7)$. Então toda sequência $(Ce)_c$ para I é limitada.*

Demonstração. Seja $(z_n) \subset E$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} I(z_n) = c \text{ e } \lim_{n\to+\infty}(1+\|z_n\|)\|I'(z_n)\|_{E'} = 0.$$

Segue que

$$c + o(1) = I(z_n) - \frac{1}{2}I'(z_n)u_n = \int \widehat{F}(x, z_n). \tag{3.18}$$

Suponha, por contradição, que $\|z_n\| \to \infty$. Nesse caso, temos que

$$o_n(1) = \frac{I'(z_n)(z_n^+ - z_n^-)}{\|z_n\|^2} = 1 - \int \frac{F_z(x, z_n)(z_n^+ - z_n^-)}{\|z_n\|^2}.$$

Considerando $w_n := z_n/\|z_n\|$, segue que

$$\lim_{n\to+\infty} \int \frac{F_z(x, z_n)(w_n^+ - w_n^-)}{\|z_n\|} = 1. \tag{3.19}$$

Relembre que em (F_5) definimos

$$q(r) = \inf\{\widehat{F}(x, z); x \in \mathbb{R}^N, |z| \geq r\}.$$

Se $R_0 > 0$ é dado em (F_6), para qualquer $|z| > R_0$ vale

$$c_0\widehat{F}(x, z) \geq \left(\frac{|F_z(x, z)|}{|z|}\right)^\tau \geq \left(\frac{2F(x, z)}{|z|^2}\right)^\tau.$$

Assim, segue de (F_3) que $\widehat{F}(x, z) \to \infty$ quando $|z| \to \infty$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$. Isto, (F_5) e a definição de q implicam que $q(r) > 0$ para todo $r > 0$ e $q(r) \to \infty$ quando $r \to \infty$.

Para $0 \leq a < b$, definimos

$$\Omega_n(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^N : a \leq |z_n(x)| < b\}.$$

Usando (3.18) e as definições acima, obtemos

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &= \int_{\Omega_n(0,a)} \widehat{F}(x, z_n) + \int_{\Omega_n(a,b)} \frac{\widehat{F}(x, z_n)}{|z_n|^2}|z_n|^2 + \int_{\Omega_n(b,\infty)} \widehat{F}(x, z_n) \\ &\geq \int_{\Omega_n(0,a)} \widehat{F}(x, z_n) + \frac{q(a)}{b^2} \int_{\Omega_n(a,b)} |z_n|^2 + q(b)|\Omega_n(b, \infty)|, \end{aligned}$$

e portanto existe $C_1 > 0$ satisfazendo

$$\max\left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n(a,b)} \widehat{F}(x, z_n),\ \frac{q(a)}{b^2} \int\limits_{\Omega_n(a,b)} |z_n|^2,\ q(b)|\Omega_n(b, \infty)| \right\} \leq C_1. \tag{3.20}$$

Esta desigualdade acima implica que $|\Omega_n(b, \infty)| \leq C/q(b)$. Como $q(b) \to +\infty$ quando $b \to +\infty$ concluímos que

$$\lim_{b \to +\infty} |\Omega_n(b, \infty)| = 0, \text{ uniformemente em } n. \tag{3.21}$$

Fixado $\mu \in [2, 2^*)$, pela desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev, para algum $C_2 > 0$ segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n(b,\infty)} |w_n|^\mu &\leq \left(\int_{\Omega_n(b,\infty)} |w_n|^{2^*} \right)^{\mu/2^*} |\Omega_n(b, \infty)|^{(2^*-\mu)/2^*} \\ &\leq C_2 \|w_n\|^\mu |\Omega_n(b, \infty)|^{(2^*-\mu)/2^*} = C_2 |\Omega_n(b, \infty)|^{(2^*-\mu)/2^*}. \end{aligned}$$

Uma vez que $2^* - \mu > 0$, segue de (3.21) que

$$\lim_{b \to +\infty} \int_{\Omega_n(b,\infty)} |w_n|^\mu = 0 \text{ uniformemente em } n. \tag{3.22}$$

Sabendo que $2\tau' = 2\tau/(\tau - 1) \in (2, 2^*)$, podemos usar a condição (F_6), (3.20) e a desigualdade de Hölder para obter

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_n(b,\infty)} \frac{F_z(x,z_n)(w_n^+ - w_n^-)}{\|z_n\|} &= \int_{\Omega_n(b,\infty)} \frac{F_z(x,z_n)|w_n|(w_n^+ - w_n^-)}{|z_n|} \\
&\leq \left(\int_{\Omega_n(b,\infty)} \frac{|F_z(x,z_n)|^\tau}{|z_n|^\tau}\right)^{1/\tau} \left(\int_{\Omega_n(b,\infty)} (|w_n||w_n^+ - w_n^-|)^{\tau'}\right)^{1/\tau'} \\
&\leq c_0^{1/\tau} \left(\int_{\Omega_n(b,\infty)} \widehat{F}(x,z_n)\right)^{1/\tau} \left(\int_{\Omega_n(b,\infty)} |w_n|^{2\tau'}\right)^{1/2\tau'} \left(\int_{\Omega_n(b,\infty)} |w_n^+ - w_n^-|^{2\tau'}\right)^{1/2\tau'} \\
&\leq C_3 \left(\int_{\Omega_n(b,\infty)} |w_n|^{2\tau'}\right)^{1/2\tau'}.
\end{aligned}$$

Fixe $\varepsilon > 0$. Esta expressão acima e (3.22) nos garantem a existência de $b_\varepsilon > 0$ suficientemente grande, de modo que

$$\int_{\Omega_n(b_\varepsilon,\infty)} \frac{F_z(x,z_n)(w_n^+ - w_n^-)}{\|z_n\|} < \varepsilon, \ \text{ para todo } n. \tag{3.23}$$

Seja $C_4 > 0$ tal que $\|z\|_{L^2}^2 \leq C_4\|z\|^2$ para todo $z \in E$ e considere $\varepsilon > 0$. Por (F_2), existe $a_\varepsilon \in (0, b_\varepsilon]$ tal que $|F_z(x,z)| \leq \varepsilon|z|/C_4$ para todo $|z| \leq a_\varepsilon$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_n(0,a_\varepsilon)} \frac{F_z(x,z_n)(w_n^+ - w_n^-)}{\|z_n\|} &\leq \int_{\Omega_n(0,a_\varepsilon)} \frac{F_z(x,z_n)}{|z_n|}|w_n||w_n^+ - w_n^-| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{C_4} \int_{\Omega_n(0,a_\varepsilon)} |w_n|^2 \leq \varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Novamente usando (3.20), com $0 < a < b$ fixados, obtemos

$$\int_{\Omega_n(a,b)} |w_n|^2 = \frac{1}{\|z_n\|^2} \int_{\Omega_n(a,b)} |z_n|^2 \leq \frac{1}{\|z_n\|^2} \frac{b^2 C_1}{q(a)} = o_n(1). \tag{3.25}$$

Usando (F_7) e lembrando que $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, obtemos $C_5 > 0$ tal que $|F_z(x,z_n)| \leq C_5|z_n|$ para todo $x \in \Omega_n(a_\varepsilon, b_\varepsilon)$. Segue então de (3.25) que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\Omega_n(a_\varepsilon,b_\varepsilon)} \frac{F_z(x,z_n)(w_n^+ - w_n^-)}{\|z_n\|} \leq C_5 \int_{\Omega_n(a_\varepsilon,b_\varepsilon)} |w_n|^2 < \varepsilon, \ \text{ para todo } n \geq n_0. \tag{3.26}$$

Finalmente, as estimativas (3.23), (3.24) e (3.26) implicam

$$\int \frac{F_z(x,z_n)(w_n^+ - w_n^-)}{\|z_n\|} \leq 3\varepsilon,$$

para todo $n \geq n_0$. Uma vez que $\varepsilon > 0$ é arbitrário, a desigualdade acima contradiz (3.19).

Portanto, (z_n) é limitada em E. □

Lema 3.22. *Suponha que (F) satisfaça (F_2), (F_6) e (F_7). Seja $(z_n) \subset E$ uma $(Ce)_c$ sequência para I. Se $z_n \rightharpoonup 0$ fracamente em E, então existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, $R > 0$ e $\beta > 0$ tais que $|y_n| \to \infty$ e*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |z_n|^2 \geq \beta > 0$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que o lema é falso. Então, para qualquer $R > 0$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |z_n|^2 = 0.$$

Desse modo, usando o Lema de Lions podemos concluir que $|z_n|_s \to 0$ para qualquer $s \in (2, 2^*)$. Segue da segunda desigualdade em (3.13) que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int F(x, z_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\varepsilon \int |z_n|^2 + C_\varepsilon \int |z_n|^p \right) \leq C\varepsilon,$$

onde usamos a limitação de (z_n) em L^2. A arbitrariedade de ε implica que $\int F(x, z_n) \to 0$. O mesmo argumento e a primeira desigualdade em (3.13) nos fornece $\int F_z(x, z_n) z_n \to 0$.

Como (z_n) é uma sequência de Cerami, obtemos

$$c = \lim_{n\to\infty} \left[I(z_n) - \frac{1}{2} I'(z_n) z_n \right] = \lim_{n\to\infty} \int (\frac{1}{2} F_z(x, z_n) z_n - F(x, z_n)) = 0$$

que contradiz a hipótese $c > 0$. Portanto, o lema está provado. □

Finalizamos esta seção apresentado dois resultados de convergência análogos aos já usados no Capítulo 1.

Lema 3.23. *Suponha que F satisfaça (F_7). Seja $(z_n) \subset E$ uma sequência limitada e $w_n(x) := w(x - y_n)$, onde $w \in E$ e $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$. Se $|y_n| \to \infty$, então temos*

$$[F_{\infty,z}(x, z_n) - F_z(x, z_n)] w_n \to 0,$$

fortemente em $L^1(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$.

Lema 3.24. *Suponha que $\varphi \in \mathcal{F}$ e $s \in [2, 2^*]$. Se $w_n \rightharpoonup w$, então*

$$\lim_{n\to+\infty} \int \varphi |w_n|^s = \int \varphi |w|^s.$$

Finalizamos o capítulo apresentando a

Demonstração do Teorema 3.3: Utilizando o Lemas 3.20 e o Teorema 2.2 obtemos $(z_n) \subset E$ tal que

$$I(z_n) \to c \geq \alpha > 0 \text{ e } (1 + \|z_n\|)\|I'(z_n)\|_{E^*} \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{3.27}$$

Usando o Lema 3.21 podemos supor que $z_n \rightharpoonup z$ fracamente em E. Afirmamos que $I'(z) = 0$. De fato, por densidade, é suficiente verificar que $I'(z)\eta = 0$ para toda $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Temos que

$$I'(z_n)\eta - I'(z)\eta = \langle z_n - z, \eta\rangle_E - \int [F_z(x, z_n) - F_z(x, z)]\eta. \tag{3.28}$$

Usando as imersões de Sobolev podemos assumir, passando para uma subsequência, que $z_n \to z$ em L^s_{loc} para cada $s \in [1, 2^*)$ e

$$\begin{aligned} &z_n(x) \to z(x) \text{ q.t.p. em } K,\\ &|z_n(x)| \leq w_s(x) \in L^s(K), \text{ q.t.p. em } K, \end{aligned}$$

em que K denota o suporte de η. Assim $F_z(x, z_n)\eta \to F_z(x, z)\eta$ q.t.p. em K. Além disso, usando (3.13) e a desigualdade de Hölder obtemos

$$|F_z(x, z_n)\eta| \leq \varepsilon|w_2||\eta| + C_\varepsilon|w_{p-1}||\eta| \in L^1(K).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e a convergência fraca $z_n \rightharpoonup z$ em E, tomando o limite em (3.28), concluímos que

$$I'(z)\eta = \lim_{n\to\infty} I'(z_n)\eta = 0,$$

implicando que $I'(z) = 0$.

Se $z \neq 0$ então obtemos uma solução não trivial para o problema. Desse modo, é suficiente tratar o caso em que $z = 0$. Pelo Lema 3.22, existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{Z}^N$, $R > 0$, e $\beta > 0$ tais que $|y_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$, e

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |z_n|^2 \geq \beta > 0. \tag{3.29}$$

Escrevendo $\widetilde{z}_n(x) := z_n(x + y_n)$ e passando para uma subsequência, temos que $\widetilde{z}_n \rightharpoonup \widetilde{z}$ em E, $\widetilde{z}_n \to \widetilde{z}$ em L^2_{loc} e $\widetilde{z}_n(x) \to \widetilde{z}(x)$ para q.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$. Por (3.29), temos que $\widetilde{z} \neq 0$.

Afirmação 1. $I'_\infty(\widetilde{z}) = 0$.

Para provar isto fixamos $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, a translação $\eta_n(x) = \eta(x - y_n)$. Argumentando como acima e usando a periodicidade de F_∞ obtemos

$$I'_\infty(\widetilde{z}_n)\eta = I'_\infty(\widetilde{z})\eta + o_n(1) = I'(z_n)\eta_n + o_n(1),$$

de modo que é suficiente mostrar que $I'(z_n)\eta_n = o_n(1)$. Mas, pelo Lema 3.23,

$$I'_\infty(z_n)\eta_n = I'(z_n)\eta_n - \int [F_z(x, z_n) - F_{\infty,z}(x, z)]\eta_n = I'(z_n)\eta_n + o_n(1),$$

e a afirmação segue do fato de (z_n) ser uma sequência de Cerami.

Afirmação 2. $\liminf\limits_{n\to\infty} \int \widehat{F}(x, \widetilde{z}_n) \geq \int \widehat{F}_\infty(x, \widetilde{z})$

De fato, usando a definição de $\widehat{F}$, $\widehat{F}_\infty$, a primeira parte da equação (3.7) e (F_7), obtemos

$$\begin{aligned}
|\widehat{F}(x, z_n) - \widehat{F}_\infty(x, z_n)| &\leq \frac{1}{2}|F_z(x, z_n) - F_{\infty,z}(x, z_n)||z_n| + \int_0^1 |F_z(x, tz_n) - F_{\infty,z}(x, tz_n)||z_n|dt \\
&\leq \frac{1}{2}\varphi(x)|z_n|^{p_\infty} + \int_0^1 \varphi(x)t^{p_\infty - 1}|z_n|^{p_\infty}dt \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p_\infty}\right)\varphi(x)|z_n|^{p_\infty}.
\end{aligned}$$

A desigualdade acima e o Lema 3.24 nos permite usar o Lema de Fatou e a periodicidade de $\widehat{F}_\infty$ para obter

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \int \widehat{F}(x, z_n) &= \liminf_{n\to\infty} \int \widehat{F}_\infty(x, z_n) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int \widehat{F}_\infty(x, \widetilde{z}_n) \geq \int \widehat{F}_\infty(x, \widetilde{z}),
\end{aligned}$$

o que prova a veracidade da segunda afirmação.

Usando as duas afirmações e a periodicidade de $\widehat{F}$ obtemos

$$\begin{aligned}
c &= \lim_{n\to\infty}[I(z_n) - \frac{1}{2}I'(z_n)z_n] = \liminf_{n\to\infty} \int \widehat{F}(x, z_n) \\
&\geq \int \widehat{F}_\infty(x, \widetilde{z}) = I_\infty(\widetilde{z}) - \frac{1}{2}I'_\infty(\widetilde{z})\widetilde{z} = I_\infty(\widetilde{z}),
\end{aligned}$$

Usando agora a definição de c dada no Teorema 2.2, o fato de que $F \geq F_\infty$, (3.12) temos que

$$c \leq \sup_{z \in M_R} I(z) \leq \sup_{z \in M_R} I_\infty(z) \leq I_\infty(z_0) \leq I_\infty(\widetilde{z}) \leq c.$$

Desse modo, se definirmos $h_0 : [0,1] \times M_R \to E$ por $h_0(t,z) = z$, para todo $(t,z) \in [0,1] \times M_R$, a desigualdade acima implica

$$\sup I(h_0(1, M_R)) = c > 0.$$

Segue do Teorema 2.3 que I possui um ponto crítico não trivial. $\square$

Apêndice

Neste apêndice descrevemos em detalhes o método da variedade de Nehari generalizada e resultados relacionados. Este conteúdo foi extraído de [30].

Seja E um espaço de Hilbert com uma decomposição ortogonal $E = E^- \oplus E^+$ de modo que, para cada $u \in E$, podemos escrever

$$u = u^- + u^+, \text{ com } u^\pm \in E^\pm.$$

Considere

$$S^+ := S \cap E^+ = \{u \in E : \|u\| = 1\},$$

e, para cada $u \in E \setminus E^-$,

$$E(u) := \mathbb{R}u \oplus E^+ = \mathbb{R}u^+ \text{ e } \widehat{E}(u) := \mathbb{R}u \oplus E^- = \mathbb{R}u^+ \oplus E^-,$$

em que $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Para $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ faremos as seguintes suposições:

(N_1) O funcional I se escreve na forma

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u^+ + \|^2\frac{1}{2}\|u^-\|^2 - J(u),$$

com $J(0) = 0$, $\frac{1}{2}J'(u)u > J(u) > 0$ para todo $u \neq 0$ e J fracamente semicontínuo inferiormente;

(N_2) Para cada $w \in E \setminus E^-$, existe um único ponto crítico não nulo $\widehat{m}(w)$ de $I|_{\widehat{E}(w)}$. Além disso, $\widehat{m}(w)$ é o único máximo global de $I|_{\widehat{E}(w)}$;

(N_3) existe $\delta > 0$ tal que $\|\widehat{m}(w)^+\| \geq \delta$ para todo $w \in E \setminus E^-$ e, para cada subconjunto compacto $\mathcal{K} \subset E \setminus E^-$, existe uma constante $C_{\mathcal{K}}$ tal que $\|\widehat{m}(w)\| \leq C_{\mathcal{K}}$ para todo $w \in \mathcal{K}$.

Vamos definir ainda a variedade de Nehari generalizada como sendo

$$\mathcal{M} = \{u \in E \setminus E^- : I'(u)(tu + v) = 0,\ t \in \mathbb{R},\ v \in E^-\}.$$

Se $u \neq 0$ é um ponto crítico de I, então de acordo com (N_1), temos que

$$I(u) = I(u) - \frac{1}{2}I'(u)u = \int \left(\frac{1}{2}J'(u)u - J(u)\right) > 0, \tag{30}$$

enquanto que $I \leq 0$ sobre E^-. Note que a condição (N_2) acima e a definição de $\mathcal{M}$ nos permitem construir uma aplicação

$$\widehat{m} : E \setminus E^- \to \mathcal{M}, \quad \widehat{m}(u) := \left\{\text{único máximo global da restrição } I|_{\widehat{E}(u)}\right\}.$$

Vamos denotar por m a restrição dessa aplicação ao conjunto S^+, isto é,

$$m := \widehat{m}|_{S^+}.$$

Temos que m é uma bijeção cuja inversa m^{-1} é dada por

$$m^{-1}(u) = \frac{u^+}{\|u^+\|}.$$

Definimos

$$c = \inf_{u \in \mathcal{M}} I(u).$$

Se este ínfimo é atingido, então por (30) temos que $c > 0$.

Proposição A.1. *Suponha que I satisfaça $(N_1) - (N_3)$. Então:*

(i) a aplicação $\widehat{m}$ é contínua;

(ii) a aplicação m é um homeomorfismo entre S^+ e $\mathcal{M}$.

Demonstração. (i) Seja $(w_n) \subset E \backslash E^-$, $w_n \to w \notin E^-$. Desde que $\widehat{m}(w_n) = \widehat{m}(w_n^+/\|w_n^+\|)$, podemos assumir, sem perda de generalidade que $w_n \in S^+$. Pela definição de $\widehat{E}(w_n)$, podemos escrever $\widehat{m}(w_n) = s_n w_n + v_n$, com $s_n \geq 0$ e $v_n \in E^-$. Usando (N_3) vemos que $(\widehat{m}(w_n))$ é limitada, e portanto, passando para uma subsequência, segue que $s_n \to s$ e

$v_n \rightharpoonup v_* \in E^-$. Por outro lado, temos que $\widehat{m}(w) = sw + v$, com $v \in E^-$. Vamos provar que $v_* = v$. Por (N_2), obtemos

$$I(\widehat{m}(w_n)) \geq I(s_n w_n + v) \to I(sw + v) = I(\widehat{m}(w)),$$

daí, pela convergência fraca e semicontinuidade da norma e J, temos que

$$\begin{aligned} I(\widehat{m}(w)) &\leq \lim_{n\to\infty} I(\widehat{m}(w_n)) \\ &= \left(\frac{1}{2}s_n^2 - \frac{1}{2}\|v_n^-\|^2 - J(\widehat{m}(w_n))\right) \\ &\leq \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}\|v_*\| - J(sw + v_*) \leq I(\widehat{m}(w)). \end{aligned}$$

Logo $I(\widehat{m}(w)) = I(sw + v_*)$, com $sw + v_* \in \widehat{E}(w)$. Pela condição (N_2), concluímos que $\widehat{m}(w) = sw + v_* = sw + v$, donde $v_* = v$. Com isso, temos mostrado que toda sequência $w_n \to w$ possui uma subsequência (w_k) satisfazendo $\widehat{m}(w_k) \to \widehat{m}(w)$. Para concluir a prova, suponha por contradição que $\widehat{m}$ não é contínua em w. Logo, existem $\varepsilon > 0$ e (w_n) tal que $w_n \to w$ com $\|\widehat{m}(w_n) - \widehat{m}(w)\| \geq \varepsilon$. Aplicando o argumento acima, obtemos uma subsequência (w_k) de (w_n) tal que $\widehat{m}(w_k) \to \widehat{m}(w)$, o que é um absurdo, e portanto vale a continuidade.

(ii) Isto é uma consequência imediata do item anterior e do fato de que m^{-1} é contínua. □

Seja $\widehat{\Psi} : E^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\widehat{\Psi}(w) := I(\widehat{m}(w))$$

e $\Psi := \widehat{\Psi}|_{S^+}$.

Proposição A.2. *Suponha que I satisfaça $(N_1) - (N_3)$. Então $\widehat{\Psi} \in C^1(E^+ \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ e vale a fórmula*

$$\widehat{\Psi}'(w)z = \frac{\|\widehat{m}(w)^+\|}{\|w\|} I'(\widehat{m}(w))z,$$

para todo $w, z \in E^+$, $w \neq 0$.

Demonstração. Seja $w \in E^+ \setminus \{0\}$, $z \in E^+$ e denote $\widehat{m}(w) = s_w w + v_w$, com $s_w \geq 0$,

$v_w \in E^-$. Usando (N_2) a o Teorema do Valor Médio, obtemos

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}(w+tz)-\widehat{\Psi}(w) &= I(s_{w+tz}(w+tz)+v_{w+tz})-I(s_w w+v_w)\\ &\leq I(s_{w+tz}(w+tz)+v_{w+tz})-I(s_{w+tz}w+v_{w+tz})\\ &= I'(s_{w+tz}w+v_{w+tz}+\tau_t s_{w+tz}tz)s_{w+tz}tz,\end{aligned}$$

para $|t|$ suficientemente pequeno e algum $\tau_t \in (0,1)$. De modo análogo, temos que

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}(w+tz)-\widehat{\Psi}(w) &= I(s_{w+tz}(w+tz)+v_{w+tz})-I(s_w w+v_w)\\ &\geq I(s_w(w+tz)+v_w)-I(s_w w+v_w)\\ &= I'(s_w w+v_w+\sigma_t s_w tz)s_w tz,\end{aligned}$$

para algum $\sigma_t \in (0,1)$. Daí, usando a continuidade provada acima e a continuidade das projeções e de I', concluímos que

$$\widehat{\Psi}'(w)z = s_w I'(s_w w+v_w)z.$$

Para finalizar, basta observar que $\widehat{m}(w)^+ = s_w w$. □

Corolário A.3. *Suponha que I satisfaça $(N_1)-(N_3)$. Então:*

(a) $\Psi := \widehat{\Psi}|_{S^+}$ *é de classe* C^1 *e*

$$\Psi'(w)z = \|m(w)^+\| I'(m(w))z, \text{ para todo } z \in T_z(S^+);$$

(b) Se $(w_n) \subset S^+$ é uma sequência de Palais-Smale para Ψ, então $(m(w_n)) \subset \mathcal{M}$ é uma sequência de Palais-Smale para I. Se $(w_n) \subset \mathcal{M}$ é uma sequência limitada de Palais-Smale para I, então $(m^{-1}(u_n))$ é uma sequência de Palais-Smale para Ψ ;

(c) w é um ponto crítico de Ψ se, e somente se $m(w)$ é um ponto crítico não nulo para I;

(d) $\inf_{S^+} \Psi = \inf_{\mathcal{M}} I$.

Demonstração. (a) Segue da proposição anterior, bastando observar que se $w \in S$, então $\widehat{m}(u) = m(u)$.

(b) Por (N_1) temos que $E = T_w(S^+) \oplus E(w)$ para todo $w \in S^+$. Denotando $u = m(w)$ e observando que $I'(u)|_{E(u)} \equiv 0$, obtemos que

$$\begin{aligned}\|\Psi'(w)\| &= \sup_{\substack{z\in T_w(S^+)\\ \|z\|=1}} \Psi'(w)z = \|u^+\| \sup_{\substack{z\in T_w(S^+)\\ \|z\|=1}} I'(u)z \\ &= \|u^+\| \sup_{\substack{z\in E\\ \|z\|=1}} I'(u)z = \|u^+\|\|I'(u)\|_{E^*}.\end{aligned}$$

Esta expressão juntamente com o fato que $\|u^+\| \geq \delta > 0$ para todo $u \in \mathcal{M}$ implicam no resultado.

(c) Como $\|\Psi'(w)\| = \|m(w)^+\|\|I'(m(w))\|_{E^*}$, segue que $\Psi'(w) = 0$ se, e somente se $I'(m(w)) = 0$.

(d) Usando a definição de Ψ e a bijeção entre S^+ e $\mathcal{M}$, obtemos

$$\inf_{w\in S^+} \Psi(w) = \inf_{w\in S^+} I(m(w)) = \inf_{u\in\mathcal{M}} I(u).$$

□

Bibliografia

[1] S. Alama and Y. Y. Li. On "multibump" bound states for certain semilinear elliptic equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 41(4):983–1026, 1992.

[2] C. O. Alves, P. C. Carrião, and O. H. Miyagaki. Nonlinear perturbations of a periodic elliptic problem with critical growth. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 260(1):133–146, 2001.

[3] C. O. Alves, J. M. B. do Ó, and O. H. Miyagaki. On perturbations of a class of a periodic m-laplacian equation with critical growth. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 45(7):849–863, 2001.

[4] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of Functional Analysis*, 14(4):349–381, 1973.

[5] A. Bahri and Y. Li. On a min-max procedure for the existence of a positive solution for certain scalar field equations in $\mathbb{R}^n$. *Revista Matematica Iberoamericana*, 6(1):1–15, 1990.

[6] T. Bartsch and Y. Ding. On a nonlinear Schrödinger equation with periodic potential. *Mathematische Annalen*, 313(1):15–37, 1999.

[7] H. Berestycki and P. L. Lions. Nonlinear scalar field equations, II existence of infinitely many solutions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 82(4):347–375, 1983.

[8] F. A. Berezin and M. A. Shubin. *The Schrödinger Equation*, volume 66. Springer, 1991.

[9] Chabrowski, J., and Szulkin, A. "On a semilinear Schrödinger equation with critical Sobolev exponent." *Proceedings of the American Mathematical Society* 130 (1):85-93, 2002.

[10] Chabrowski, J., and Jianfu Y. "Existence theorems for the Schrödinger equation involving a critical Sobolev exponent." *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* 49(2):276-293, 1998.

[11] Costa, D. G., and C. A. Magalhaes. Existence results for perturbations of the p-Laplacian. *Nonlinear Analysis* 24(3):409–418, 1995.

[12] V. Coti-Zelati and P. Rabinowitz. Homoclinic orbits for second order Hamiltonian systems possessing superquadratic potentials. *Journal of the American Mathematical Society*, 4(4):693–727, 1991.

[13] V. Coti-Zelati and P. H. Rabinowitz. Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on $\mathbb{R}^n$. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 45(10):1217–1269, 1992.

[14] Y. Ding and C. Lee. Multiple solutions of Schrödinger equations with indefinite linear part and super or asymptotically linear terms. *Journal of Differential Equations*, 222(1):137–163, 2006.

[15] G. Évéquoz and T. Weth. Entire solutions to nonlinear scalar field equations with indefinite linear part. *Advanced Nonlinear Studies*, 12(2):281–314, 2012.

[16] H. He. Nonlinear Schrödinger equations with sign-changing potential. *Adv. Nonlinear Stud.*, 12(2):237–253, 2012.

[17] W. Kryszewski and A. Szulkin. Generalized linking theorem with an application to a semilinear Schrödinger equation. *Advances in Differential Equations*, 3(3):441–472, 1998.

[18] G. Li and A. Szulkin. An asymptotically periodic Schrödinger equation with indefinite linear part. *Communications in Contemporary Mathematics*, 4(04):763–776, 2002.

[19] Y. Li, Z.-Q. Wang, and J. Zeng. Ground states of nonlinear Schrödinger equations with potentials. In *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, volume 23, pages 829–837. Elsevier, 2006.

[20] H. F. Lins and E. A. B. Silva. Quasilinear asymptotically periodic elliptic equations with critical growth. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(7):2890–2905, 2009.

[21] P.-L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 2. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1(4):223–283, 1984.

[22] A. Pankov. Semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$ with nonstabilizing coefficients. *Ukrainian Mathematical Journal*, 41(9):1075–1078, 1989.

[23] A. Pankov. Periodic nonlinear Schrödinger equation with application to photonic crystals. *Milan Journal of Mathematics*, 73(1):259–287, 2005.

[24] P. H. Rabinowitz. A note on semilinear elliptic equation on $\mathbb{R}^n$. *Nonlinear Analysis, Scuola Norm. Superiore, Pisa*, pages 307–317, 1991.

[25] P. H. Rabinowitz. On a class of nonlinear Schrödinger equations. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 43(2):270–291, 1992.

[26] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics: Vol.: 4.: Analysis of Operators*. Academic Press, 1978.

[27] E. A. B. Silva and G. F. Vieira. Quasilinear asymptotically periodic Schrödinger equations with critical growth. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 39(1-2):1–33, 2010.

[28] E. A. B. Silva and G. F. Vieira. Quasilinear asymptotically periodic Schrödinger equations with subcritical growth. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72(6):2935–2949, 2010.

[29] A. Szulkin and T. Weth. Ground state solutions for some indefinite variational problems. *Journal of Functional Analysis*, 257(12):3802–3822, 2009.

[30] A. Szulkin and T. Weth. The method of Nehari manifold. *Handbook of Nonconvex Analysis and Applications*, pages 597–632, 2010.

[31] J. Wang, L. Tian, J. Xu, and F. Zhang. Existence and nonexistence of the ground state solutions for nonlinear Schrödinger equations with nonperiodic nonlinearities. *Mathematische Nachrichten*, 285(11-12):1543–1562, 2012.

[32] J. Wang, J. Xu, and F. Zhang. Existence of solutions for nonperiodic superquadratic Hamiltonian elliptic systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72(3):1949–1960, 2010.

[33] J. Wang, J. Xu, and F. Zhang. The existence of solutions for superquadratic Hamiltonian elliptic systems on $\mathbb{R}^n$. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 74(3):909–921, 2011.

[34] M. Willem. *Minimax theorems*, volume 24. Birkhäuser Boston, 1997.

[35] R. Zhang, J. Chen, and F. Zhao. Multiple solutions for superlinear elliptic systems of Hamiltonian type. *Discrete and Continuous Dynamical Systems (DCDS-A)*, 30(4):1249–1262, 2011.