REFERÊNCIA

CAMARGO, I.; PILLET, E.; POLOUJADOFF, M. Etude matricielle des machines synchrones autopilotees a double etoile et a commutation naturelle de courant. Revue Aim, Bélgica, v. 4, p. 16-29, 1989.

ETUDE MATRICIELLE DES MACHINES SYNCHRONES AUTOPILOTEES A DOUBLE ETOILE ET A COMMUTATION NATURELLE DE COURANT

I. CAMARGO, E. PILLET et M. POLOUJADOFF

Universités de Paris VI et XI - Laboratoire d'Electrotechnique

Pour améliorer le fonctionnement des machines synchrones autopilotées et, tout particulièrement, pour atténuer les fluctuations du couple moteur, on utilise fréquemment des bobinages à double (ou même multiple) étoile.
Dans la présente étude, nous allons montrer que les avantages de la méthode matricielle sont, ici, encore plus nets que pour la machine simple.

Nous ne reprendrons pas l'étude des points communs et renvoyons à notre précédent article pour les détails [13]*.

Machine a double étoile

Le schéma de montage est donné par la figure (1).

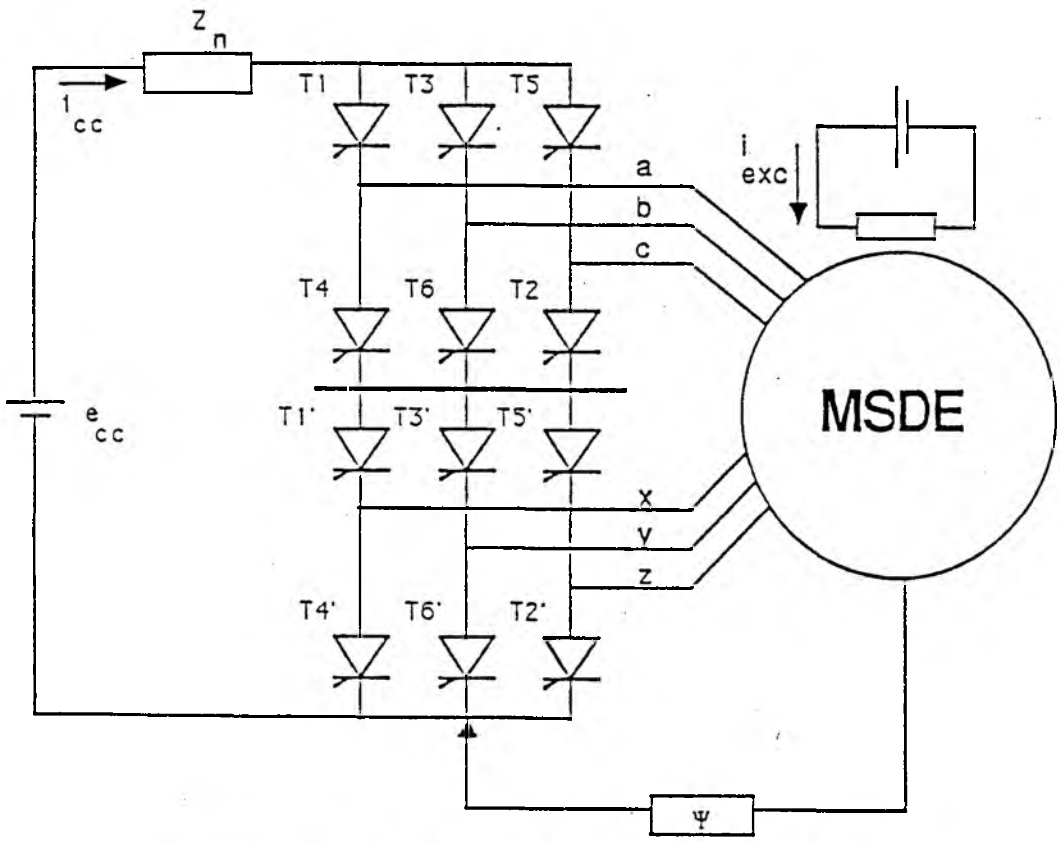
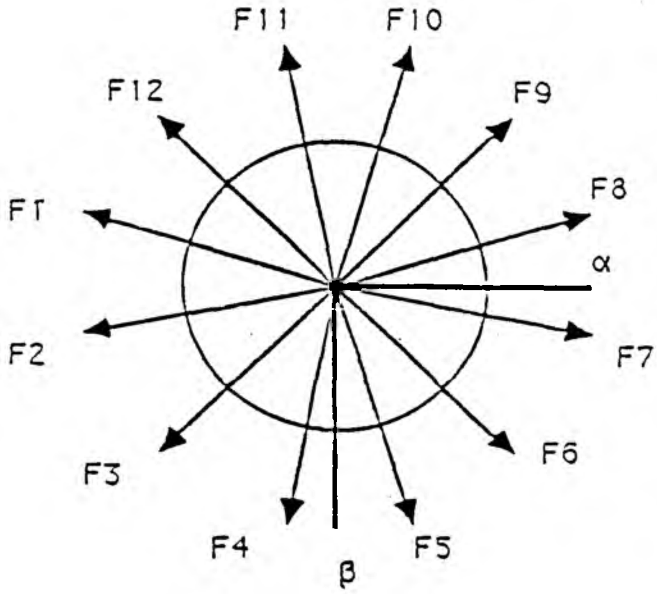


FIG. 1.- Représentation de la machine synchrone à double étoile autopilotée

* Les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie.

allumage									
xyz	T3'				T4'				T5'
abc			T4				T5		
angle	θ_0	μ	$\pi/6$	$\pi/6+\mu$	$\pi/3$	$\pi/3+\mu$	$\pi/2$	$\pi/2+\mu$	$2\pi/3$
position du flux	F4 F5	F5	F5 F6	F6	F6 F7	F7	F7 F8	F8	F8 F9
intervalle	1	2	3	4	5	6	7	8	9



thyristors en conduction "abc"	thyristors en conduction "xyz"	position du flux statorique
T1+T6	T1'+T6'	F1
T1+T2	T1'+T6'	F2
T1+T2	T1'+T2'	F3
T3+T2	T1'+T2'	F4
T3+T2	T3'+T2'	F5
T3+T4	T3'+T2'	F6
T3+T4	T3'+T4'	F7
T5+T4	T3'+T4'	F8
T5+T4	T5'+T4'	F9
T5+T6	T5'+T4'	F10
T5+T6	T5'+T6'	F11
T1+T6	T5'+T6'	F12

FIG. 2.- Définition des instants d'allumage et position du flux statorique pendant la conduction

La machine synchrone comporte deux bobinages statoriques triphasés, normaux, distincts, décalés de 30° électriques ; chacun d'eux est relié à un pont de thyristors. Les deux ponts sont en série dans l'alimentation continue.

Bien entendu, les deux étoiles, couplées magnétiquement sont isolées électriquement (neutres distincts non sortis).

Dans notre modèle, figure (1), nous supposons toujours que les thyristors redresseurs et le réseau triphasé peuvent être représentés par une source parfaite de tension continue(e_{cc})

Les thyristors du commutateur sont asservis à la position du rotor et on maintient un décalage de $\pi/6$ entre les déclenchements des thyristors de l'étoile "abc" et ceux de l'étoile "xyz". Alors les phénomènes se répètent tous les $\pi/6$ radians électriques et il suffit d'étudier un intervalle de commutation et un intervalle de conduction pour avoir les courants à tout instant et par conséquent, toutes les grandeurs qui interviennent dans l'étude de la machine.

La figure (2) définit les douze périodes caractéristiques. Nous constatons qu'aucune d'elles n'est en position privilégiée par rapport aux axes α, β, de la transformation de Clarke [5] [6]. Nous étudierons donc, tout simplement, les deux périodes consécutives 1 et 2.

Les équations de la machine

Nous considérons la machine à double-étoile, dont l'induit comporte deux enroulements triphasés identiques, indépendants et décalés de 30° électriques, figure (3).

Suivant toujours les mêmes hypothèses de la machine idéale, nous pouvons décrire le fonctionnement de cette machine par un système de neuf équations différentielles à coefficients périodiques que l'on peut regrouper sous la forme (1) dont tous les éléments sont eux-mêmes des vecteurs ou des matrices du 3ème ordre.

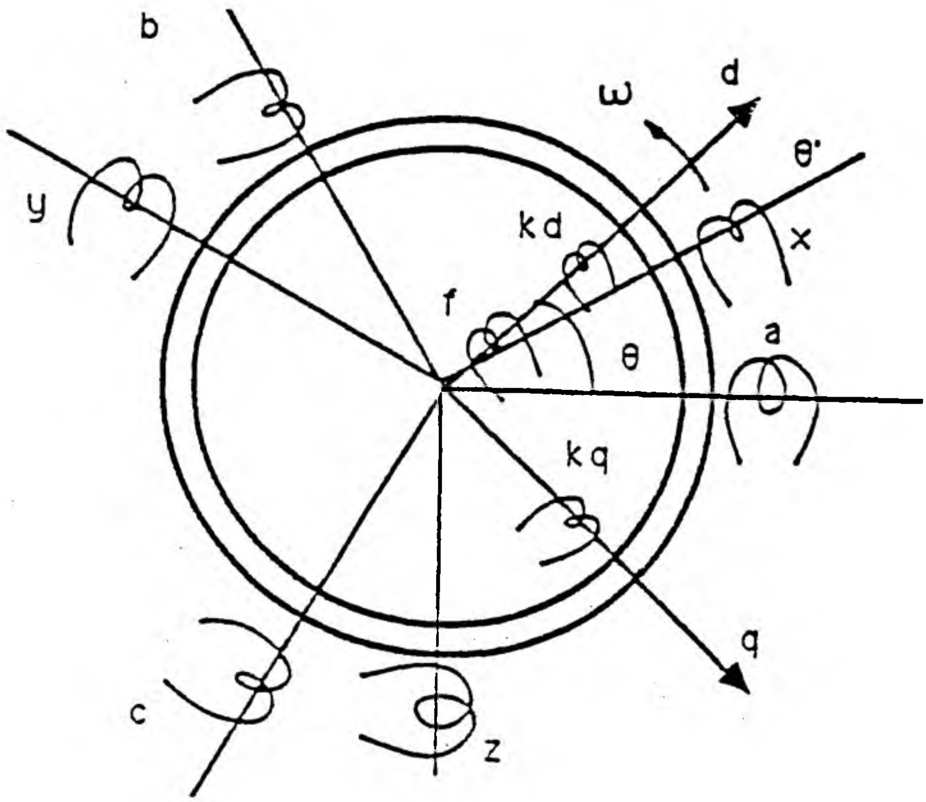


FIG. 3.- Machine synchrone à double étoile

$$\begin{vmatrix} V_{abc} \\ V_{xyz} \\ V_{fdq} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} [R_s] & 0 & 0 \\ 0 & [R_s] & 0 \\ 0 & 0 & [R_e] \end{bmatrix} \begin{vmatrix} I_{abc} \\ I_{xyz} \\ I_{fdq} \end{vmatrix} + p \begin{bmatrix} [L_{aa}] & [L_{ax}] & [L_{ar}] \\ [L_{xa}] & [L_{xx}] & [L_{xr}] \\ [L_{ra}] & [L_{rx}] & [L_{rr}] \end{bmatrix} \begin{vmatrix} I_{abc} \\ I_{xyz} \\ I_{fdq} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

où :

$$V_{abc} = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}, \; V_{xyz} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}, \; V_{fdq} = \begin{bmatrix} V_f \\ V_{kd} \\ V_{kq} \end{bmatrix}$$

$$I_{abc} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}, \; I_{xyz} = \begin{bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{bmatrix}, \; I_{fdq} = \begin{bmatrix} i_f \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{bmatrix}$$

$$[R_s] = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix}, \; [R_r] = \begin{bmatrix} R_f & 0 & 0 \\ 0 & R_{kd} & 0 \\ 0 & 0 & R_{kq} \end{bmatrix}$$

Les neuf sous-matrices d'inductances sont périodiques. Pour simplifier leur écriture nous allons décrire toutes les inductances par rapport à l'angle θ entre la phase "a" et l'axe direct du rotor, et l'angle θ' entre la phase "x" et le même axe rotorique. D'ailleurs, pour maintenir une notation cohérente, tout au long de ce chapitre les grandeurs "primes" sont relatives aux enroulements "xyz", donc à la deuxième étoile. Par définition on a :

$$\theta = \theta' + 30°$$

Avec les mêmes angles qui ont été utilisés pour décrire la machine simple : $\psi = \theta + 2\pi / 3$ et $\gamma = \theta - 2\pi / 3$; nous avons :

$$[L_{aa}] = \begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix} + L_2 \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \cos 2\varphi & \cos 2\gamma \\ \cos 2\varphi & \cos 2\gamma & \cos 2\theta \\ \cos 2\gamma & \cos 2\theta & \cos 2\varphi \end{bmatrix}$$

$$[L_{xx}] = [L_{aa}(\theta')]$$

$$[L_{ar}] = \begin{bmatrix} M_{af}\cos\theta & M_{akd}\cos\theta & M_{akq}\sin\theta \\ M_{af}\cos\gamma & M_{akd}\cos\gamma & M_{akq}\sin\gamma \\ M_{af}\cos\psi & M_{akd}\cos\psi & M_{akq}\sin\psi \end{bmatrix}$$

$$[L_{xr}] = [L_{ar}(\theta')]$$

La sous-matrice d'inductance propre rotorique est constante :

$$[L_r] = \begin{bmatrix} L_f & M_{fkd} & 0 \\ M_{fkd} & L_{kd} & 0 \\ 0 & 0 & L_{kq} \end{bmatrix}$$

et la sous-matrice d'inductance mutuelle entre les étoiles est définie par :

$$[L_{ax}] = \begin{bmatrix} L_1 & -L_1 & 0 \\ 0 & L_1 & -L_1 \\ -L_1 & 0 & L_1 \end{bmatrix} - L_2 \begin{bmatrix} \sin 2\psi & \sin 2\gamma & \sin 2\theta \\ \sin 2\gamma & \sin 2\theta & \sin 2\psi \\ \sin 2\theta & \sin 2\psi & \sin 2\gamma \end{bmatrix}$$

Comme le système est symétrique, nous avons défini toutes les matrices de (1), avec :

$$[L_{xa}] = [L_{ax}]^T$$
$$[L_{ra}] = [L_{ar}]^T$$
$$[L_{rx}] = [L_{xr}]^T$$

Ici encore, on simplifie beaucoup le système d'équations différentielles (1) en utilisant la transformation de Clarke. Autrement dit, on considère toutes les variables statoriques par rapport à deux axes perpendiculaires et un autre homopolaire. Pour faire ce changement d'axes de référence, il faut partager l'opération en deux : d'abord on change les coordonnées "abc" en $\alpha\beta 0$" d'une façon tout à fait classique. Ensuite, il faut changer les coordonnées "xyz" en "$\alpha' \beta' 0'$ " et appliquer au système obtenu une rotation de 30° pour faire coïncider les deux axes de référence. La figure (4) montre schématiquement le processus.

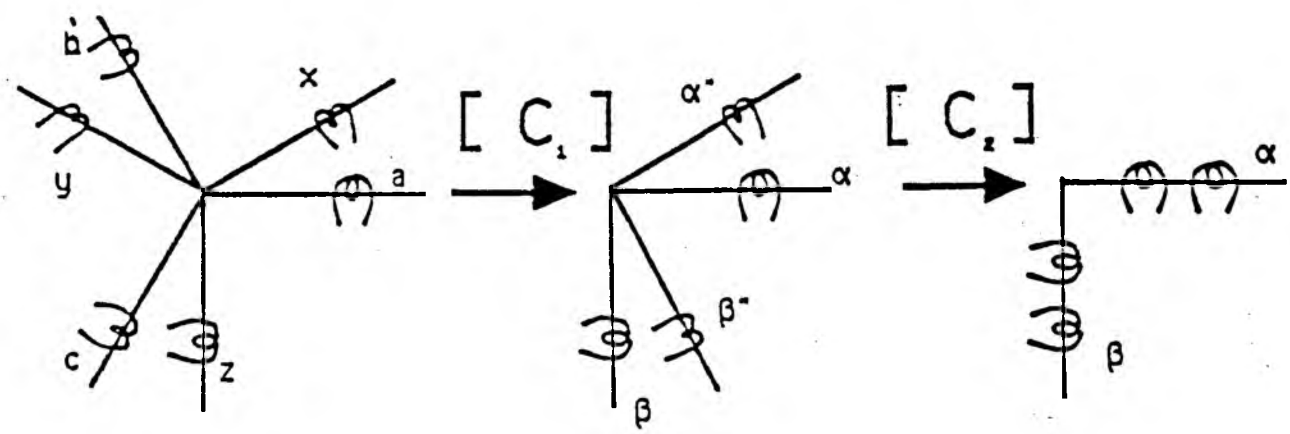


FIG. 4.- L'extension de la transformation de Clarke à la machine à double étoile

On maintient la même notation et la même convention des signes pour la matrice de transformation de Clarke normalisée ; et on notera par $[C_2]$ la matrice de rotation de 30° :

$$[C_1] = (1/\sqrt{3})\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1/\sqrt{2} & -\sqrt{3}/2 \\ 1 & -1/\sqrt{2} & +\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$[C_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

Le nouveau système s'obtient par les transformations linéaires suivantes :

$$I_{abc} = [C_1]\, I_{o\alpha\beta} \qquad (2)$$

$$I_{xyz} = [C_1][C_2]\, I'_{o\alpha\beta} \qquad (3)$$

comme les matrices de transformation sont orthonormales :

$$[C_1]^{-1} = [C_1]^T$$
$$[C_2]^{-1} = [C_2]^T$$

nous sommes alors en mesure de faire les transformations. Pour cela, nous allons partager le système (1) en trois équations matricielles :

$$\begin{aligned} V_{abc} &= [R_s]\, I_{abc} + p\,\{[L_{aa}]\, I_{abc} + [L_{ax}]\, I_{xyz} + [L_{ar}]\, I_{fdq}\} \\ V_{xyz} &= [R_s]\, I_{xyz} + p\,\{[L_{xa}]\, I_{abc} + [L_{xx}]\, I_{xyz} + [L_{xr}]\, I_{fdq}\} \qquad (4) \\ V_{fdq} &= [R_r]\, I_{fdq} + p\,\{[L_{ra}]\, I_{abc} + [L_{rx}]\, I_{xyz} + [L_{rr}]\, I_{fdq}\} \end{aligned}$$

l'application de (2) et (3) à (4) donne :

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta o} &= [R_s]\, I_{\alpha\beta o} + p\,\{[L_{\alpha\alpha}]\, I_{\alpha\beta o} + [M_{\alpha\alpha}]\, I'_{\alpha\beta o} + [L_{\alpha r}]\, I_{fdq}\} \\ V'_{\alpha\beta o} &= [R_s]\, I'_{\alpha\beta o} + p\,\{[M'_{\alpha\alpha}]\, I_{\alpha\beta o} + [L'_{\alpha\alpha}]\, I'_{\alpha\beta o} + [L'_{\alpha r}]\, I_{fdq}\} \qquad (5) \\ V_{fdq} &= [R_r]\, I_{fdq} + p\,\{[L_{r\alpha}]\, I_{\alpha\beta o} + [L_{r\alpha}]\, I'_{\alpha\beta o} + [L_{rr}]\, I_{fdq}\} \end{aligned}$$

où :

$$[L_{\alpha\alpha}] = [C_1]^T\, [L_{aa}]\, [C_1] = [L'_{\alpha\alpha}] = \{[C_1]\ [C_2]\}^T [L_{xx}]\, \{[C_1]\, [C_2]\}\}$$

$$= \begin{bmatrix} L + 2M & 0 & 0 \\ 0 & L - M & 0 \\ 0 & 0 & L - M \end{bmatrix} + (3/2)\, L_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & -\sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

On voit apparaître l'intérêt de cette transformation. En effet, les enroulements "abc" et "xyz" étaient identiques mais décalés d'un angle de 30° électriques ; après transformation, les enroulements fictifs deviennent tout-à-fait égaux. Les mêmes opérations appliquées aux autres matrices donnent :

$$[M_{\alpha\alpha}] = [C_1]^T [L_{ax}][C_1][C_2]$$

$$[M'_{\alpha\alpha}] = \{[C_1][C_2]\}^T [L_{xa}][C_1]$$

$$= L_2\sqrt{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (3/2)\, L_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & -\sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

$$[L_f] = [C_1]^T [L_{af}] =$$

$$[L'_{af}] = \{[C_1][C_2]\}^T [L_{xf}] =$$

$$= (\sqrt{3}/2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ M_{af}\cos\theta & M_{akd}\cos\theta & M_{akq}\sin\theta \\ -M_{af}\sin\theta & -M_{akd}\sin\theta & M_{akq}\cos\theta \end{bmatrix}$$

Cette extension de la transformation de Clarke à la machine à double étoile nous donne un système où les équations homopolaires sont découplées et tous les angles sont exprimés en fonction de l'angle θ. Toutes les matrices étant définies, nous avons obtenu un système de neuf équations différentielles à coefficients périodiques. Avec la normalisation de la matrice d'impédance ce système devient :

$$V_0 = \delta_0 i_0 + p l_0 i_0 \qquad (6)$$

$$V'_0 = \delta_0 i'_0 + p l_0 i'_0 \qquad (7)$$

et

$$V = [R]\, I + p\, [L]\, I \qquad (8)$$

où

$$V = [V_\alpha\ V_\beta\ V'_\alpha\ V'_\beta\ V_f\ V_{kd}\ V_{kq}]^T$$

$$I = [i_\alpha\ i_\beta\ i'_\alpha\ i'_\beta\ i_f\ i_{kd}\ i_{kq}]^T$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1+\gamma\cos 2\theta & -\gamma\sin 2\theta & \beta_m+\gamma\cos 2\theta & -\gamma\sin 2\theta & \beta_{af}\cos\theta & \beta_{akd}\cos\theta & \beta_{akq}\sin\theta \\ -\gamma\sin 2\theta & 1-\gamma\cos 2\theta & -\gamma\sin 2\theta & \beta_m-\gamma\cos 2\theta & -\beta_{af}\sin\theta & -\beta_{akd}\sin\theta & \beta_{akq}\cos\theta \\ \beta_m+\gamma\cos 2\theta & -\gamma\sin 2\theta & 1+\gamma\cos 2\theta & -\gamma\sin 2\theta & \beta_{af}\cos\theta & \beta_{akd}\cos\theta & \beta_{akq}\sin\theta \\ -\gamma\sin 2\theta & \beta_m-\gamma\cos 2\theta & -\gamma\sin 2\theta & 1+\gamma\cos 2\theta & -\beta_{af}\cos 2\theta & -\beta_{akd}\sin\theta & \beta_{akq}\cos\theta \\ \beta_{af}\cos\theta & -\beta_{af}\sin\theta & \beta_{af}\cos\theta & -\beta_{af}\sin\theta & 1 & \beta_{fkd} & 0 \\ \beta_{akd}\cos\theta & -\beta_{akd}\sin\theta & \beta_{akd}\cos\theta & -\beta_{akd}\sin\theta & \beta_{fkd} & 1 & 0 \\ \beta_{akq}\sin\theta & \beta_{akq}\cos\theta & \beta_{akq}\sin\theta & -\beta_{akq}\cos\theta & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et :

$$[R] = \begin{bmatrix} \delta_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{kd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{kq} \end{bmatrix}$$

Après l'étude particulière des deux courts-circuits, en commutation et en conduction, nous constaterons que nous aboutissons à des équations de même forme que dans le travail précédent [13]. Nous pourrons donc les étudier avec le même programme, résumé dans le même organigramme.

Les équations de la commutation

La commutation du courant de la phase "x" à la phase "y" est représentée dans la figure 5.

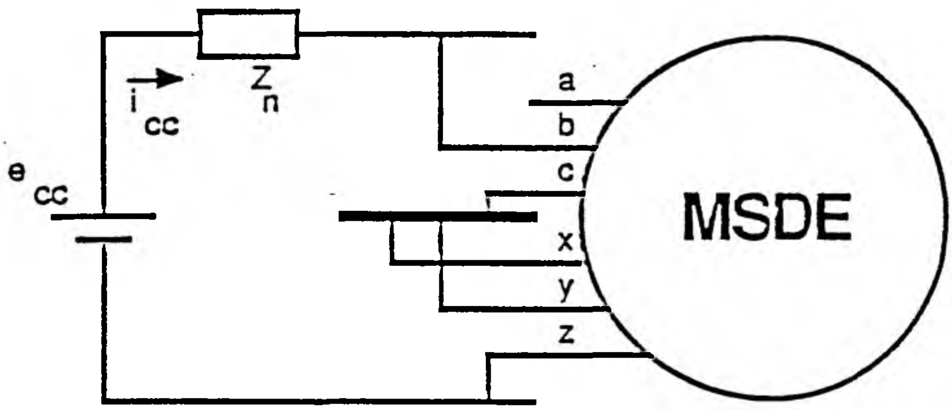


FIG. 5.- Commutation dans une machine à double étoile

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} & i_a = 0 \\ & i_b + i_c = 0 \\ & i_x + i_y + i_z = 0 \\ & i_b = -i_c = i_x + i_y = -i_z = i_{cc} \\ & V_x = V_y \\ & e_{cc} = Z_n i_{cc} + (V_b - V_c) + (V_x - V_z) \end{aligned} \qquad (9)$$

Dans le système de référence de Clarke, nous avons :

$$
\begin{aligned}
i_\alpha &= 0 \\
i_0 &= 0 \\
i'_0 &= 0 \\
V'_\alpha &= 0 \\
i_\beta &= -\sqrt{2}\, i_{cc} \ ; \ i'_\beta = -\sqrt{3}/2\, i_{cc} \\
e_{\alpha} &= Z_n\, i_{cc} - (\sqrt{2}\, V_\beta + \sqrt{3}/2\, V'_\beta
\end{aligned}
\tag{10}
$$

La substitution des équations qui définissent le court-circuit (10) dans les équations de la machine (8) est presque directe. Nous pouvons éliminer les deux équations homopolaires et la ligne "α" du système puisque :

$$i_\alpha = i_0 = i'_0 = 0$$

et nous faisons une combinaison linéaire des deux équations " β" et β' ".

Le système qui en résulte est d'ordre cinq et devient :

$$
\begin{bmatrix}
0 & \delta_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e_{cc} & 0 & (7/2)\delta_\alpha + \delta_n & 0 & 0 & 0 \\
e_f & 0 & 0 & \delta_f & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{kd} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{kq}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i'_\alpha \\ i_{cc} \\ i_f \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{bmatrix} +
$$

$$
p\left(
\begin{bmatrix}
1+\gamma\cos 2\theta & \kappa\gamma\sin 2\theta & \beta_{af}\cos\theta & \beta_{akd}\cos\theta & \beta_{akq}\sin\theta \\
\kappa\gamma\sin 2\theta & l_b - \kappa^2\gamma\cos 2\theta & \kappa\beta_{af}\sin\theta & \kappa\beta_{akd}\sin\theta & -\kappa\beta_{akq}\cos\theta \\
\beta_{af}\cos\theta & \kappa\beta_{af}\sin\theta & 1 & \beta_{fkd} & 0 \\
\beta_{akd}\cos\theta & \kappa\beta_{akd}\sin\theta & \beta_{fkd} & 1 & 0 \\
\beta_{akq}\sin\theta & -\kappa\beta_{akq}\cos\theta & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i'_\alpha \\ i_{cc} \\ i_f \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{bmatrix}
\right)
\tag{11}
$$

où

$\kappa = \sqrt{2} + \sqrt{3}/2$

et

$l_b = l_n + (7/2) + 2\sqrt{3}\,\beta_m$

Ce système d'équations différentielles à coefficients périodiques est de la même forme que celui de la commutation sur une machine à simple étoile. Sa résolution par l'application de la transformation de Floquet ne pose absolument aucun problème.

Les équations de la conduction

Nous avons choisi comme intervalle de conduction celui qui suit immédiatement la commutation. Nous avons donc les phases "b", "c", "y", et "z" qui conduisent. Dans la figure 6, on trouve la configuration du court-circuit.

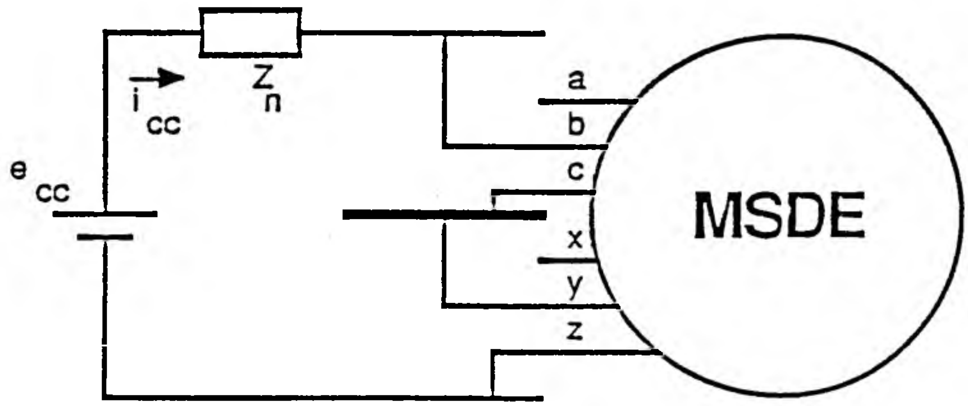


FIG. 6.- Conduction dans une machine à double étoile

Les six équations du court-circuit sont alors :

$$
\begin{aligned}
i_a &= 0\\
i_b + i_c &= 0\\
i_x &= 0\\
i_y + i_z &= 0\\
V_c &= V_y
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

et

$$e_{cc} = Z_n\, i_{cc} + (V_b - V_c) + (V_y - V_z)$$

Dans le système de référence de Clarke :

$$i_o = 0 \quad i_\alpha = 0 \quad i'_o = I \qquad (13)$$

$$i_\beta = -\sqrt{2}\, i_{cc}\,;\quad i'_\alpha = -1/\sqrt{2}\, i_{cc}$$

$$i'_\beta = -\sqrt{3}/2\, i_{cc}$$

et

$$e_{cc} = Z_n\, i_{cc} - \{\sqrt{2}\, V_\beta + (1/\sqrt{2})V'_\alpha + (\sqrt{3}/2)V'_\beta\}$$

Dans ce cas, nous devons faire une combinaison linéaire des trois tensions V_β, V'_α et V'_β qui donne une seule équation en e_{cc} et i_{cc}. Le système final est d'ordre quatre et se présente sous la forme suivante :

$$
\begin{bmatrix} e_{cc}\\ e_f\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\delta_n+4\delta_x & 0 & 0 & 0\\
0 & \delta_f & 0 & 0\\
0 & 0 & \delta_{kd} & 0\\
0 & 0 & 0 & \delta_{kq}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i_{cc}\\ i_f\\ i_{kd}\\ i_{kq} \end{bmatrix}
+
p\left\{
\begin{bmatrix}
4+2\sqrt{3}+l_n+\gamma f_3(2) & \beta_{af} f_1(\theta) & \beta_{akd} f_1(\theta) & \beta_{akq} f_2(\theta)\\
\beta_{af} f_1(\theta) & 1 & \beta_{fkd} & 0\\
\beta_{akd} f_1(\theta) & \beta_{fkd} & 1 & 0\\
\beta_{akq} f_2(\theta) & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i_{cc}\\ i_f\\ i_{kd}\\ i_{kq} \end{bmatrix}
\right\}
\qquad (14)
$$

où

$$f_1(\theta) = -\left\{(\sqrt{2}/2).\left[\cos\theta - (2+\sqrt{3})\sin\theta\right]\right\}$$

$$f_2(\theta) = -\left\{(\sqrt{2}/2).\left[(2+\sqrt{3})\cos\theta + \sin\theta\right]\right\}$$

$$f_3(2\theta) = -\left\{(3+\sqrt{3})\cos 2\theta + (2+\sqrt{3})\sin 2\theta\right\}$$

Il est clair que, plus on avance, plus les équations deviennent compliquées, et c'est précisément là où la notation matricielle prend toute sa valeur. En effet, à partir de (14) on identifie directement toutes les matrices de récurrence nécessaires au calcul itératif de la transformation de Floquet et, par conséquent, on aboutit à la solution numérique de notre problème.

Résultats

Les résultats, présentés ici, correspondent au fonctionnement d'une machine synchrone dont les caractéristiques ont été prises comme égales à celles de la machine synchrone simple de notre précédent article [13], avec un coefficient de couplage entre les étoiles (β_m) égal à 0,9.

Dans l'étude paramétrique qui suit, nous avons porté une attention spéciale au calcul du couple instantané. A partir de la formule générale du couple :

$$\Gamma = \frac{1}{\omega} I^T \left\{ \frac{d}{dt} [\,[L_{(\theta)}]\, I] \right\} \qquad (15)$$

des transformations (2) et (3) et du changement de variables :

$$i_d = (i_\alpha + i'_\alpha)\cos\theta - (i_\beta + i'_\beta)\sin\theta \qquad (16)$$

$$i_q = (i_\alpha + i'_\alpha)\sin\theta + (i_\beta + i'_\beta)\cos\theta$$

on obtient, en notation de Park [3][4]

$$\Gamma = -2\gamma i_d i_q - \beta_{\alpha f} i_f i_q - \beta_{\alpha kd} i_{kd} i_q + \beta_{\alpha kq} i_{kq} i_d \qquad (17)$$

Nous avons défini l'oscillation du couple à partir du quotient de la différence entre les valeurs extrêmes par la valeur du moment moyen

$$\Delta\Gamma = (\Gamma_{max} - \Gamma_{min}) / \Gamma_{max} \quad (\times 100\%) \qquad (18)$$

On trouvera aussi dans les résultats : l'oscillation du courant continu (Δi_{cc}) ;

$$\Delta i_{cc} = \left\{ i_{cc}(max) - i_{cc}(min) \right\} / i_{cc}(moy) \ (\times 100\%) \qquad (19)$$

les pertes joule (P_j) (y compris dans l'impédance de lissage) ;

$$P_j = (1/T) \int \left\{ \Sigma\, r_k\, i_k^2(t) \right\} dt \qquad (20)$$

l'angle de commutation (μ) ; et la tension redressée continue (e_{cc}).

Dans un premier temps, nous avons fait varier la réactance de lissage pour trois valeurs de fréquence : f = 50, 10 et 5 Hz ; avec les autres paramètres constants :

$$i_{cc} = 0{,}3 \text{ pu} ; \quad I_{exc} = 1{,}18 \text{ pu} \quad \text{et} \quad \psi = 55°$$

On constate que les oscillations du couple augmentent quand on augmente la réactance de lissage. Autrement dit, quand on augmente les oscillations du courant, on diminue l'oscillation du couple. Nous avons maintenu la même résistance (r_n = 0,06 pu) dans tous les calculs, pour cette raison les pertes joules sont restées constantes, mais normalement si on augmente la réactance, la résistance augmente aussi et, par conséquent, les pertes. On a donc intérêt à travailler avec une faible impédance de lissage.

Nous avons fait varier l'excitation pour un courant continu moyen constant (tableau 4) et pour un couple constant (tableau 5). L'angle (ψ), la réactance de lissage et la fréquence ont été maintenus à :

$$f = 5 \text{ Hz} ; \quad X_n = 1{,}0 \text{ pu} \quad \text{et} \quad \psi = 55°$$

Le tableau 4 montre l'influence de l'excitation sur l'angle de commutation. La tension aux bornes du thyristor qui va commuter augmente, ce qui diminue l'angle de commutation. On y observe aussi l'influence de l'excitation sur les oscillations du couple. Celles-ci augmentent plus que proportionnellement à l'excitation.

Le tableau 5 montre la même chose. La valeur relative des oscillations du couple augmentent beaucoup mais la valeur absolue reste comparable à celle du tableau 4.

Finalement, nous avons fait varier l'angle (ψ), d'abord pour un couple constant (tableau 6), avec :

$$f = 5 \text{ Hz} ; \quad I_{exc} = 1{,}18 \text{ pu} \quad \text{et} \quad x_n = 1{,}0 \text{ pu}$$

Dans ce tableau on observe que l'angle de commutation dépend du courant à commuter et de la tension aux bornes de la machine. Quand on augmente l'angle ψ, pour un couple constant, on doit aussi augmenter le courant i_{cc} ; à partir d'un moment (pour une même excitation) la machine n'arrive plus à faire la commutation naturelle. Par ailleurs, la diminution de l'angle ψ entraîne une diminution de la tension appliquée aux bornes du thyristor pendant la commutation, jusqu'à une autre limite de commutation.

Tableau 1 - f = 50 Hz

X_n (pu)	μ (°)	e_{cc} (pu)	Γ_{moy} (pu)	$\Delta\Gamma$ (%)	Δ_{icc} (%)	p_i (pu)
10,0	14,32	1,803	0,515	11,06	1,00	0,022
1,0	13,91	1,783	0,511	6,26	6,66	0,022
0,1	13,35	1,764	0,505	4,36	13,01	0,022

Tableau 2 - f = 10 Hz

X_n (pu)	μ (°)	e_{cc} (pu)	Γ_{moy} (pu)	$\Delta\Gamma$ (%)	Δ_{icc} (%)	p_i (pu)
10,0	14,61	0,398	0,513	10,91	1,22	0,022
1,0	14,26	0,394	0,509	5,89	7,00	0,022
0,1	13,74	0,390	0,503	3,38	13,34	0,022

Tableau 3 - f = 5 Hz

X_n (pu)	μ (°)	e_{cc} (pu)	Γ_{moy} (pu)	$\Delta\Gamma$ (%)	Δ_{icc} (%)	p_i (pu)
10,0	15,43	0,222	0,513	11,12	1,33	0,022
1,0	15,03	0,220	0,508	5,51	7,00	0,022
0,1	14,64	0,219	0,503	2,19	13,33	0,022

Tableau 4 - i_{cc} = 0,3 pu

i_{exc} (pu)	μ (°)	e_{cc} (pu)	i_{cc} (pu)	$\Delta\Gamma$ (%)	Δ_{icc} (%)	p_i (pu)
1,18	15,03	0,220	0,508	5,51	7,00	0,022
1,36	9,09	0,245	0,575	14,08	8,33	0,024
1,54	6,62	0,271	0,650	21,38	10,33	0,027
1,72	5,23	0,297	0,729	27,03	12,33	0,030
1,90	4,30	0,324	0,809	31,75	14,67	0,033

Tableau 5 - Γ_{moy} = 0,4 pu

i_{exc} (pu)	μ (°)	e_{cc} (pu)	i_{cc} (pu)	$\Delta\Gamma$ (%)	Δ_{icc} (%)	p_i (pu)
1,09	11,37	0,199	0,259	9,25	7,73	0,017
1,18	7,39	0,209	0,241	19,00	9,97	0,017
1,36	4,00	0,231	0,207	31,00	15,45	0,017
1,54	2,51	0,255	0,180	44,75	26,88	0,018
1,72	1,70	0,280	0,160	54,25	32,50	0,020
1,90	1,19	0,305	0,143	64,00	42,51	0,022

Tableau 6 - Γ_{moy} = 0,4 pu

ψ (°)	μ (°)	e_{cc} (pu)	i_{cc} (pu)	$\Delta\Gamma$ (%)	Δi_{cc} (%)	p_i (pu)
70	21,65	0,171	0,357	7,25	5,60	0,027
65	13,84	0,181	0,316	12,24	7,27	0,023
60	9,67	0,194	0,275	17,50	8,35	0,020
55	7,39	0,209	0,241	18,75	9,98	0,017
50	6,13	0,226	0,213	17,50	10,80	0,015
45	5,45	0,243	0,191	16,75	10,97	0,013
40	5,20	0,260	0,174	14,25	10,89	0,012
35	5,30	0,277	0,161	11,76	9,96	0,011
30	6,08	0,292	0,150	8,00	8,66	0,010
25	8,85	0,306	0,141	4,75	7,08	0,010

Nous avons aussi fait varier l'angle de déclenchement pour un courant constant ; toujours avec :

f = 5 Hz ; I_{exc} = 1,18 pu et
x_n = 1,0 pu

Tableau 7 - i_{cc} = 0,3 pu

ψ (°)	μ (°)	e_{cc} (pu)	i_{cc} (pu)	$\Delta\Gamma$ (%)	Δi_{cc} (%)	p_i (pu)
55	15,03	0,220	0,508	5,51	7,00	0,022
65	11,54	0,177	0,375	18,15	7,67	0,022
75	10,45	0,135	0,246	41,41	7,67	0,022
85	10,01	0,092	0,120	104,17	7,00	0,022
95	9,94	0,049	- 0,004	0,134*	6,33	0,022
105	9,97	0,007	- 0,128	101,95	5,00	0,022
115	10,36	- 0,036	- 0,250	45,53	6,00	0,022
125	11,15	- 0,077	- 0,369	23,31	6,00	0,022
135	12,82	- 0,115	- 0,480	11,25	5,67	0,022
145	16,17	- 0,146	- 0,575	4,87	5,33	0,022
155	22,56	- 0,165	- 0,633	3,48	4,33	0,022.

* $\Delta\Gamma = \Gamma_{max} - \Gamma_{min}$ (pu)

Ici on voit que, pour un courant constant, la machine peut fonctionner aussi bien en moteur qu'en alternateur. Il faut noter que l'angle entre la tension à vide et le fondamental du courant dans une phase ($\overline{\psi}$) est donné par :

$$\overline{\psi} = \psi - \mu / 2$$

alors, pour un angle de commutation de l'ordre de 10°, le fonctionnement en moteur cesse pour ψ = 95° et non ψ = 90°. Par contre, celui en alternateur ne commence que pour ψ = 107°.

Entre 95° et 107°, la machine est dans un état intermédiaire et alimente ses pertes partie par voie électrique, partie par voie mécanique.

Conclusion

Nous avons montré que le cas de la machine à double étoile se traite exactement comme celui de la machine simple. Il en serait de même pour le cas éventuel d'une machine à multiples étoiles.

La méthode matricielle permet de ramener la complexité des calculs à celle, réduite, du calcul de chaque terme, indépendamment les uns des autres.
L'organigramme reste le même dans tous les cas.
On évite donc les calculs particulièrement lourds qui avaient caractérisé un premier travail [8].
Il est évident que de nombreux problèmes, conduisant à des systèmes d'équations à coefficients périodiques peuvent être résolus de la même façon.

Bibliographie

[1] M.G. FLOQUET , "Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques". Annales de l'Ecole Normale Supérieure, Tome XII, pp. 47-88, 1883.

[2] P. BOUCHEROT. "Etude relative aux phénomènes électromagnétiques dus à la mise en court-circuit des machines. Bull. de la Soc. Intern. des Electriciens, 3ème série, vol. 17, n° 2, pp. 116-134, 1911.

[3] R.H. PARK, "Definition of an ideal synchronous machine and formula for the armature flux linkage". G.E. Review. Vol. 31, pp. 332-334, 1928.

[4] R.H. PARK, "Two reaction theory of synchronous machines : generalized method of analysis I". Trans. A.I.E.E. vol. 48, pp. 716-730, 1929.

[5] W.C. DUESTERHOEFT, M.W. SCHULZ and E. CLARKE. "Determination of instantaneous current and voltages by means of alpha, beta and zero components". Trans. A.I.E.E., vol. 70, pp. 1248-1255, 1951.

[6] C. CONCORDIA, Synchronous Machines. New-York, 1951.

[7] A.A. ABDEL-RAZEK. "Contribution à l'étude des régimes transitoires déséquilibres des machines synchrones dans deux cas : court-circuits brusques et alimentation par convertisseur statique". Thèse de docteur ès-sciences. Grenoble, 1976.

[8] E.M. MOUSTAFA. "Etude analytique du fonctionnement de la machine synchrone autopilotée à double étoile à commutation naturelle de courant". Thèse Docteur Ingénieur. Grenoble, 1982.