UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

O DIÁLOGO ENTRE DIFERENTES SUJEITOS QUE APRENDEM E ENSINAM MATEMÁTICA NO CONTEXTO ESCOLAR DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Erondina Barbosa da Silva

BRASÍLIA-DF

2014

ERONDINA BARBOSA DA SILVA

O DIÁLOGO ENTRE DIFERENTES SUJEITOS QUE APRENDEM E ENSINAM MATEMÁTICA NO CONTEXTO ESCOLAR DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Brasília – UnB, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Educação, na área de confluência Ensino de Ciências e Matemática, sob a orientação do Professor Doutor Cristiano Alberto Muniz.

BRASÍLIA-DF

2014

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

O DIÁLOGO ENTRE DIFERENTES SUJEITOS QUE APRENDEM E ENSINAM MATEMÁTICA NO CONTEXTO ESCOLAR DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Erondina Barbosa da Silva

Orientador:

Professor Doutor Cristiano Alberto Muniz

Banca Examinadora

Professor Doutor Ole Skovsmose (UNESP)

Professora Doutora Regina da Silva Pina Neves (MAT/UnB)

Professora Doutora Stella Maris Bortoni Ricardo (FE/UnB)

Professor Doutor Fernando González-Rey (FE/UnB)

Professor Doutor Cleyton Hércules Gontijo (FE/UnB)

Ao meu pai e meu irmão *(in memoriam)*

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, que me permitiu reencontrá-lo durante a realização dessa pesquisa.

Ao amigo, professor e orientador, Cristiano Muniz, que me apoiou, incentivou e me ensinou a mais preciosa lição de todo o doutorado: as relações acadêmicas podem e devem ser mais dialógicas e amorosas.

Aos adolescentes, colaboradores de pesquisa, que tanto me ensinaram sobre dialogar e aprender matemática. Vocês foram a parte mais bonita desse trabalho.

Às professoras “Edna” e “Leila” que me acolheram em suas salas de aulas e possibilitaram a realização da pesquisa.

Aos professores Ole Skovsmose, Stella Maris Bortoni-Ricardo, Cleyton Gontijo, Regina Pina e González-Rey que leram, avaliaram e tornaram meu trabalho melhor.

À Professora Nilza Bertoni, por sua incansável luta pela Educação Matemática e, sobretudo, por nos ensinar o verdadeiro significado da pesquisa nesta área.

A Anna Paula e Anna Cláudia, pelo amor incondicional e, sobretudo, por terem me dado carinho e estímulo.

A minha mãe, irmãs e demais familiares que souberam compreender as minhas ausências e jamais deixaram de incentivar e apoiar os meus propósitos.

A Carmyra e Lúcio, amigos-irmãos, por tudo e, principalmente, por terem me dado abrigo quando eu mais precisei.

À amiga Sandra Tiné, por me ouvir nos momentos de alegrias e tristezas, pelo incentivo carinhoso e pela leveza do olhar.

Às amigas Maria Antonia e Cláudia Rocha, por sempre terem tempo para mim e por não me deixarem esquecer da vida aqui fora.

Aos amigos Kátia Franca, Glorinha, Iris Borges, Alessandra, Gilmar, Luciano, Eduardo e Rabelo, pela amizade, pela companhia e, principalmente, pelos sorrisos na etapa final da pesquisa.

Aos colegas do doutorado, pelos momentos de aprendizagem e descontração.

Aos professores do Programa de Pós-graduação, Gilberto Lacerda, Cleyton Gontijo, Cristiano Muniz, Albertina Martínez e Célio da Cunha, pelas valorosas aprendizagens.

A Joaquim Pimenta, Daniel Nascimento, Miriam Braga e Dr. Estevam Guimarães, pelo apoio que me possibilitou equilibrar o corpo e a mente. Sem vocês, eu não teria conseguido.

Às fisioterapeutas Naiane, Fernanda e Ana, por terem me devolvido um corpo capaz de escrever uma tese.

Ao diagramador Tadio Caramaschi, por ter interpretado o que eu queria na produção de algumas das imagens da tese.

Ao Programa de Pós-Graduação em Educação da UnB, por ter acolhido a minha pesquisa e ter me proporcionado grandes aprendizagens.

Á Universidade Católica de Brasília, pelo Projeto de Extensão “Matemática: nenhum a menos”, um dos cenários da pesquisa.

... educar e educar-se na prática da liberdade é tarefa daqueles que pouco sabem, por isto sabem que sabem algo e podem assim chegar a saber mais em diálogo com aqueles que, quase sempre pensam que nada sabem, para que estes, transformando seu pensar que nada sabem em saber que pouco sabem, possam igualmente saber mais.

(Paulo Freire, 1977, p.25)

RESUMO

A pesquisa teve como objetivo geral analisar possibilidades e limites da criação de um ambiente que favorecesse o diálogo e a cooperação entre os diferentes sujeitos que interagem no contexto da aprendizagem escolar da Matemática, nos anos finais do ensino fundamental. Fundamentou-se na concepção de diálogo de Bakhtin (2010), Bakhtin e Volochínov (2009) e Freire (1977, 1992, 2010, 2011a, 2011b, 2011c) e também no trabalho de Alrø e Skovsmose (2006) sobre diálogo e aprendizagem matemática. A pesquisa de natureza participante, apoiada na epistemologia qualitativa de González-Rey (2005a, 2005b), buscou descrever e analisar a relação entre diálogo e aprendizagem matemática e foi realizada em duas etapas. Inicialmente, foi realizado um estudo exploratório que envolveu 30 estudantes do 8º ano do ensino fundamental e uma professora de Matemática, em um projeto de monitoria da aprendizagem. Esse estudo forneceu importantes indicadores que possibilitaram refinar os objetivos e a metodologia na segunda fase da pesquisa de campo propriamente dita, que contou com a participação de 14 estudantes do 7º ano do ensino fundamental. As informações foram coletadas em três cenários de pesquisa: o primeiro foi o espaço/tempo de um projeto de extensão denominado "Matemática: nenhum a menos", que acontecia no turno contrário ao das aulas regulares e no qual os estudantes eram motivados a interagir e a dialogar, colaborando uns com os outros na aprendizagem da Matemática, a partir da resolução de exercícios tradicionais, problemas e durante jogos. O segundo cenário foi o da própria sala de aula, onde esses mesmos estudantes foram observados em interação e diálogo, sobretudo na realização de exercícios tradicionais. O terceiro cenário foi o espaço/tempo do laboratório de informática, em que os estudantes foram observados interagindo e dialogando a partir de sequências didáticas em que foram utilizados aplicativos tecnológicos. Foi possível observar que a natureza das interações e dos diálogos dependia dos cenários em que estes se realizavam, e também dos objetos matemáticos sobre os quais se dialogavam. Também observou-se que a interação e os diálogos dos estudantes entre si, com a professora e com a professora pesquisadora possibilitaram a enunciação de importantes conceitos em ato, e também a emergência de uma produção matemática singular. Os diálogos também permitiram a observação de processos metacognitivos de autorregulação e validação, que indicam o funcionamento cognitivo dos estudantes e, portanto, o processo de desenvolvimento e aprendizagem matemática dos mesmos. Por fim, foi possível observar que os estudantes interagem e dialogam de modo bastante diverso e tendem a reproduzir enunciados de seus professores. Fica evidente pelos diálogos que as relações dos estudantes entre si podem ser mais horizontais, quando há cooperação e parceria no trabalho, ou as mais verticais, quando a parceria cede lugar à orientação e supervisão. As informações coletadas nas duas etapas da pesquisa possibilitam afirmar que há uma mútua implicação entre diálogo e aprendizagem matemática. Tanto os diálogos potencializam e desencadeiam aprendizagens matemáticas, como as aprendizagens matemáticas potencializam e qualificam os diálogos.

Palavras-chave: interação; diálogo; aprendizagem matemática.

ABSTRACT

The main objective of this research was to investigate the possibilities and limits for the creation of an environment that favors the communication and cooperation between two subjects that interact in the context of mathematical learning in the final years of elementary school. The fundament was the concept of dialog of Bakhtin (2010), Bakhtin and Volochínov (2009) and Freire (1977, 1992, 2010, 2011a, 2011b, 2011c) and also the work of Alrø and Skovsmose (2006) about dialog and mathematical learning. The research, of interactive nature, based on the qualitative epistemology of González-Rey (2005a, 2005b), tried to describe and analyze the relation between dialog and mathematical learning and was performed in two stages. An initial exploratory study was implemented with 30 students from the 8th year of the elementary school and a teacher of mathematics in a project of tutoring. This study provided important indicators that allowed the refinement of the objectives and the methodology for the second stage of the field research, which was performed with 14 students of the 7th year of the elementary school. The data was collected in three research scenarios: the first was the space/time in as extension project named “mathematics: no one left behind”, that occurred in the opposite shift of the regular classes in which the students were stimulated to interact and talk, collaborating with each other in the learning of mathematics through the resolution of traditional exercises, problems and also during games. The second scenario was the classroom itself, where the same students were observed interacting and talking, particularly while solving traditional problems. The third scenario was the space/time of the computer laboratory, in which the students were observed interacting while solving problems proposed by teaching apps. It was possible to observe that the nature of the interactions and conversations depended on the scenario in which they were performed and also on the mathematical objectives under which the occurred. It was also observed that the interactions and conversations between the students and the teacher and with the researcher allowed the utterance of important concepts as well as the emergence of a singular mathematical production. The conversation also allowed the observation of metacognitive processes of self-regulation and validation, which indicate the operation of cognitive processes and, therefore, the process of development and learning mathematics by the students. It was also possible to observe that the students interact and communicate in very diverse ways and tend to reproduce the speech of their teachers. It is very clear from the dialogues that the relationship among the students can be either horizontal, when there is cooperation and partnership in the task, or vertical, when the cooperation gives way to supervision and tutoring. The data collected in both stages allowed the conclusion that there is a mutual implication between dialog and mathematical learning. The conversations potentiated and triggered mathematical learning and the mathematical learning potentiated and improved the conversations.

Keywords: interaction, dialog, mathematical learning.

RÉSUMÉ

Cette recherche a comme but général l'analyse des possibilités et des limites de la création d'une ambiance qui pourrait faciliter le dialogue et la coopération entre les différents sujets qui interagiraient dans le contexte de l'apprentissage scolaire des Mathématiques dans les années finales de l'enseignement fondamental. Nous avons ancré cette étude sur la conception de dialogue de Bakhtin (2010), Bakhtin e Volochínov (2009) et Freire (1977, 1992, 2010, 2011a, 2011b, 2011c) et aussi dans le travail de Alro et Skovsmose (2006) sur le dialogue et l'apprentissage des Mathématiques. Cette recherche a une approche participante, soudée dans l'épistémologie qualitative de González-Rey (2005a, 2005b) et prétend décrire et analyser le premier apport entre le dialogue et l'apprentissage mathématique. Elle a été réalisée en deux étapes. D'abord, une étude exploratrice a été faite auprès de trente étudiants de la 8ème année et avec une professeure de Mathématiques, dans un projet de monitrice d'apprentissage. Cette étude fournit des indicateurs importants qui visent atteindre les objectifs et la méthodologie dans la seconde phase de cette recherche sur le terrain, qui a eu la participation de 14 étudiants de la 7ème année de l'enseignement fondamental. Les informations ont été récoltées dans trois scénarios de recherche : le premier scénario est l'espace/le temps d'un projet d'extension nommé "Les Mathématiques : Pas d'enfant laissé de côté. Au contraire, l'enfant était pris en charge pendant la période contraire à celle du cours régulier au cours de laquelle les étudiants étaient motivés à interagir et à dialoguer de façon à collaborer les uns avec les autres dans l'apprentissage des Mathématiques, à partir de la résolution des exercices traditionnels, des problèmes et pendant les jeux. Le deuxième scénario a été celui de la classe, où ces étudiants ont été observés en interaction et en dialogue, surtout dans la réalisation des exercices traditionnels. Le troisième scénario a été un espace/temps des laboratoires d'informatique, dans lequel les étudiants ont été également observés. Ils interrogeaient et dialoguaient à partir des séquences didactiques dans lesquelles des applicatifs technologiques ont été employés. Il a été possible d'observer que la nature des interactions et des dialogues dépendaient des scénarios ou cela se passait et également des objets mathématiques sur lesquels ils dialoguaient. Nous avons observé également que l'interaction et les dialogues des étudiants entre eux, avec la professeure et avec la chercheuse ont possibilité l'énonciation d'importants concepts en acte et aussi l'urgence d'une production mathématique singulière. Les dialogues ont aussi permis l'observation des processus métacognitifs d'autorégulation et la validation, qui indiquaient le fonctionnement cognitif des étudiants et, par conséquent le processus de développement et leur apprentissage mathématique. À la fin, il a été possible de constater que les étudiants interrogeaient et dialoguaient de façon diverse et ils avaient tendance de reproduire les énoncés de leurs professeurs. Il est évident que les dialogues qui soutiennent les rapports entre les étudiants entre eux peuvent être plus horizontaux, quand il y a une coopération et un partenariat dans le travail et où il y a une coopération verticale, quand le partenariat cède sa place à l'orientation et à la supervision. Les informations collectées dans les deux étapes de cette recherche ont essayé d'affirmer qu'il y a une implication mutuelle entre le dialogue et l'apprentissage mathématique. Les dialogues donnent du potentiel et déclenchent les apprentissages mathématique et procurent de la force aux dialogues.

Mots-croisés: interaction; dialogue; apprentissage mathématiques.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

"[...] na medida em que somos seres comunicativos, que nos comunicamos uns com os outros enquanto somos capazes de transformar nossa realidade, somos capazes de saber que sabemos, que é algo mais que só saber."
(FREIRE e SHOR, 1986, p. 123)

Gisele subiu correndo as escadas que levavam ao primeiro andar da escola e, sem ao menos dizer boa tarde, foi logo me dizendo com um sorriso no rosto:

Gisele — Eu fiz a prova de Matemática, ontem, e acho que gabaritei. Quando eu peguei a prova eu pensei: "eita e agora? Como é que eu vou fazer?". Aí eu comecei a pensar aqui nos jogos, aquele negocinho com os vermelhos e azuis, sabe? Aquele das argolinhas. Quando eu vi, eu tava brincando como se estivesse jogando só que com a prova. Eu acho que gabaritei.

O episódio acima será melhor discutido em nossas análises, por enquanto é necessário dizer apenas que Gisele é uma das estudantes participantes do Projeto de Extensão "Matemática: nenhum a menos[1]" e colaboradora da pesquisa que resultou na tese que ora apresentamos. Ao enunciar, de forma efusiva, que tinha se saído bem em uma prova de Matemática, Gisele evidenciou como o projeto estava influenciando a sua aprendizagem matemática. Mas o que tem de novidade nisso?

Menos de um ano antes, Gisele fracassou em seus estudos de Matemática e foi reprovada no 7º ano do ensino fundamental. Tida na escola como uma estudante problemática, com mau comportamento e com dificuldades na aprendizagem da Matemática, ela reconstruiu seu percurso nessa disciplina e passou de uma estudante que precisava da mediação da professora e de colegas para resolver atividades matemáticas para uma estudante que mediava a aprendizagem dos colegas. Ela saiu da condição de estudante em situação de fracasso escolar ou de dificuldade na aprendizagem da Matemática para uma estudante em situação de êxito ou de sucesso escolar. No projeto, Gisele reconstruiu sua relação com o saber matemático e com a escola (CHARLOT, 2000).

---

[1] Projeto de Extensão da Universidade Católica de Brasília, no âmbito do qual foi realizada a pesquisa de campo que coletou informações para a presente tese.

Essa tese se debruça sobre as histórias de Gisele, Priscila, George, Tadeu, Wilson e alguns outros estudantes que aceitaram o desafio de dialogar para aprender e ensinar Matemática em um contexto escolar.

Quando pensamos nesse contexto escolar ou na organização do trabalho pedagógico, podemos pensar como Freitas (1995), que na escola tanto os professores como os estudantes realizam um trabalho pedagógico. E mais, podemos pensar que o trabalho de um está imbricado no trabalho do outro, que o trabalho de um depende do trabalho do outro e que, por meio da comunicação, especialmente do diálogo, ambos vão produzindo significados para os seus trabalhos.

Mas o diálogo no contexto escolar, mais especificamente o diálogo no contexto da aprendizagem escolar da Matemática, nem sempre produz significados que contribuem efetivamente para o desenvolvimento profissional do professor e para o desenvolvimento cognitivo do estudante. Esse diálogo é, muitas vezes, marcado por ruídos, interrupções e incompreensões.

Assim, antes mesmo de traçar objetivos para essa pesquisa, já nos perguntávamos: é possível construir uma aprendizagem dialógica, de tal forma que todos possam aprender significativamente a Matemática? Como transformar a sala de aula em espaço de diálogo e interação, de tal forma que todos possam contribuir com a aprendizagem matemática de todos? Quais são as dificuldades e as possibilidades de se motivar o diálogo e a interação no processo de aprendizagem e ensino da matemática?

No primeiro capítulo, apresentamos a historicidade do encontro com o objeto de pesquisa, pois acreditamos que ninguém decide pesquisar aleatoriamente. Por isso, buscamos situar como o objeto "diálogo e aprendizagem matemática" esteve presente no nosso percurso escolar e profissional. Decorrente desse objeto, apresentamos, nesse capítulo, também os objetivos do trabalho e a tese que motivou a pesquisa.

Os marcos teóricos da pesquisa são apresentados no segundo capítulo. Como o interesse era estudar a relação entre diálogo e aprendizagem matemática, não podíamos abrir mão de dialogar com Freire (1977, 1992, 2010, 2011a, 2011b, 2011c), em razão do cerne do seu trabalho ser o dialogismo. Também optamos por dialogar com Bakhtin (2010) que tem sido considerado o teórico do diálogo. Muito embora a autoria de algumas de suas obras esteja sendo questionada desde meados dos anos de 1980, é inquestionável a validade das suas ideias sobre diálogo e outros conceitos, como aponta Valle (2012) em uma resenha sobre o mais recente livro[2] que busca desmascarar Bakhtin. Nesse livro, Bronckat e Brota (2012) sugerem que a obra “Marxismo e filosofia da linguagem”, que estamos usando como referencial teórico, é de autoria de Volochínov, e não de Bakhtin. Como essa questão da autoria parece ainda não ter tido fim, optamos por fazer referência a essa livro como Bakhtin e Volochínov (2009). Também dialogamos com Alrø e Skovsmose (2006) que publicaram importante trabalho sobre diálogo e aprendizagem matemática. Mas como o diálogo pressupõe interação e mediação da aprendizagem, dialogamos em Fávero (1993, 2005a, 2005b, 2008), buscando compreender os processos cognitivos e metacognitivos decorrentes da interação dos estudantes com eles mesmos, com a professora e a pesquisadora. Mas muitos outros teóricos foram chamados a entrar em diálogo conosco no curso da própria pesquisa de campo por exigência dos indicadores (GONZALEZ-REY, 2005a), que nos levaram à construção do sistema de categorias. Foi o caso, por exemplo, de Duval (2009, 2011), que trouxe importantes contribuições para compreender o funcionamento cognitivo dos estudantes na resolução de problemas algébricos, com a sua Teoria de Registro de Representação Semiótica. Também foi o caso de Vergnaud (2009a, 2009b) que, com a sua Teoria dos Campos Conceituais, nos possibilitou compreender a enunciação de Teoremas e Conceitos em ato em atividades matemáticas dialogadas.

No terceiro capítulo, apresentamos nossa opção metodológica por uma pesquisa participante (DEMO, 2008), uma vez que, em todas as etapas, participamos ativamente planejando e propondo atividades, realizando mediações e intervenções junto aos estudantes, tanto no cenário do projeto de extensão, como em sala de aula e no laboratório de informática. Também justificamos a opção pela epistemologia qualitativa de Gonzalez-Rey (2003, 2005a, 2005b) por entender que as informações produzidas têm caráter construtivo e interpretativo e que a singularidade das mesmas possui legitimidade científica.

Discutimos as informações produzidas na pesquisa de campo no quarto capítulo, evidenciando as seguintes cinco categorias de análise: i) diferentes cenários e situações produzindo diferentes diálogos e aprendizagens matemáticas; ii) a emergência de teoremas e conceitos-em-ato em diálogos constituídos a partir de atividades para a aprendizagem matemática; iii) o diálogo como espaço de emergência de uma produção matemática diversa; iv) a natureza do diálogo no contexto da construção de conceitos em diferentes quadros: numérico, geométrico e algébrico e v) aprender e ensinar matemática: duas faces de um

[2] Ver BRONCKAR, Jean-Paul; BOTA, Cristian. Bakhtin desmascarado: história de um mentiroso, de uma fraude, de um delírio coletivo. São Paulo: Parábola, 2012

mesmo processo dialógico;. Ainda nesse capítulo, realizamos um exercício de síntese, buscando apontar os principais achados da pesquisa.

Antes de dar continuidade, gostaríamos de justificar o porquê de essa tese estar sendo escrita na primeira pessoa do plural e do singular ao mesmo tempo. Embora o exercício de escrita tenha sido individual, todo o trabalho foi orientado e, por isso, produzido a mais de duas mãos. Além disso, as informações foram produzidas por um coletivo que incluiu a professora-pesquisadora, o orientador da pesquisa, as duas professoras colaboradoras e mais de 30 estudantes que colaboraram diretamente com a pesquisa exploratória e a pesquisa de campo propriamente dita. Assim, apenas quando for absolutamente necessário é que utilizaremos a primeira pessoa do singular.

1. HISTORICIDADE DO ENCONTRO COM O OBJETO DE PESQUISA, OS OBJETIVOS E A TESE

"O fato de me perceber no mundo, com o mundo e com os outros me põe numa posição em face do mundo que não é de quem nada tem a ver com ele. Afinal minha presença no mundo não é a de quem a ele se adapta, mas a de quem nele se insere. É a posição de quem luta para não ser apenas objeto, mas sujeito também da história."
(FREIRE, 2011C, p. 53)

Quando escolhemos um objeto de estudo, estamos exercendo uma função humana que não é meramente racional, pois a escolha está carregada de sentidos e significados provenientes dos diversos espaços culturais nos quais transitamos. Como sou professora e estou fazendo pesquisa no âmbito de um programa de pós-graduação em educação, a escolha se relacionou com o meu processo formativo e com o trabalho que desenvolvo ao longo dos últimos 25 anos. Assim, para compreender essa escolha, permitam-me contar parte do meu processo de escolarização, minha constituição como professora e a influência desses na definição do objeto que me propus a pesquisar.

As memórias foram evocadas na tentativa de melhor delinear o objeto de pesquisa apresentado, quando do meu ingresso no Programa de Pós-Graduação, da Faculdade de Educação da Universidade de Brasília (UnB). Naquele momento, perguntei-me em que ocasião da minha vida passei a me interessar pelo objeto que agora pesquiso e apontei um marco recente para esse interesse; no entanto, ao cursar a disciplina Laboratório de Pesquisa, o convite à reflexão me fez voltar à minha infância.

Fui alfabetizada precocemente por meu pai sobre o balcão da sua mercearia. Ali, em meio aos produtos que eram comercializados, aprendi a escrever os algarismos indo-arábicos e a fazer as quatro operações com números naturais, antes mesmo de saber ler e escrever em língua materna.

Quando entrei na escola, aos seis anos de idade, saber ler, escrever e operar com números naturais me credenciou a ser uma espécie de monitora de uma menina que, hoje eu sei, devia ter alguma necessidade educativa especial. Penso que Dona Josina, uma professora leiga do Estado de Goiás, ao atribuir a mim essa função, me mantinha ocupada e, de certa forma, se livrava da minha inquietação pueril.

Não me recordo se havia reprovação lá onde cursei as quatro primeiras séries do ensino fundamental. Procuro em minha memória o nome de algum colega que tenha fracassado em seus estudos e não encontro. Lembro-me, no entanto, que no Grupo Escolar Estadual de Água Fria de Goiás, eu já exercia uma espécie de monitoria, tentando ensinar meus colegas o pouco que sabia, dentro da sala de aula e em casa, escrevendo com carvão e com pedra de rio nas caixas vazias da mercearia do meu pai. Cedo, destaquei-me nos estudos e me tornei muito falante. Isso me rendeu uma varada nas pernas ainda no primeiro ano de escolaridade e alguns castigos memoráveis.

Mudei-me para o Distrito Federal (DF) para dar continuidade aos estudos. No Centro de Ensino Fundamental 01 de Planaltina-DF, descobri que prestar esse serviço era uma maneira de ser aceita pelos novos colegas. Em razão disso, formei grupos de estudos para ensiná-los matemática. Na maioria das vezes, isso acontecia à revelia dos professores, que não tomavam consciência dos nossos estudos. Não posso negar que os meus professores de Matemática até permitiam que eu ajudasse os colegas em sala de aula, desde que isso não atrapalhasse o necessário silêncio que se esperava de uma aula dessa disciplina.

Falo sempre que fui me constituindo professora a partir dessas experiências. Ficava fascinada em ensinar para os meus colegas algo que eles não haviam aprendido em sala de aula. Cobrava deles bom desempenho nas provas e era incansável na tentativa de fazê-los compreender a Matemática escolar, naquela época cheia de simbologias e muito abstrata.

Isso prosseguiu por todo o ensino médio e penso que foi determinante para a minha escolha profissional. Sou licenciada em Matemática e, há 25 anos, atuo na rede pública de ensino do DF e, mais recentemente, também na formação inicial de professores em cursos de licenciatura em Matemática e Pedagogia e na formação continuada dos meus colegas da Secretaria de Educação do DF (SEDF).

Durante a minha graduação, formamos grupos de estudos e isso foi importante para que obtivéssemos sucesso nas disciplinas mais duras do currículo da licenciatura em Matemática. Esses grupos eram sempre heterogêneos. Aqueles que tinham mais facilidade em alguma área assumiam o papel de monitores, colaborando com os demais em suas aprendizagens. Assim, nos revezávamos nesse papel.

Em 1989, aos 23 anos de idade, comecei a ensinar Matemática na rede pública de ensino do Distrito Federal. Como acontece com todo professor recém-contratado, fui para a periferia. Comecei a dar aulas em Ceilândia, uma das mais populosas regiões administrativas[3] do DF, cujas condições de vida eram muito precárias naquela época. Lá, no primeiro ano, praticamente repeti em sala de aula o que os meus professores de ensino fundamental e médio

[3] Inicialmente, essas regiões foram chamadas de cidades satélites.

faziam. Como era caloura na profissão, minha ação pedagógica sofria a influência de outros três professores veteranos que me acolheram com carinho. A sorte é que juntos formávamos um grupo um pouco tradicional, mas muito comprometido. No segundo ano, as coisas foram mudando, muito mais por intuição do que por formação. Meu curso superior não tinha me qualificado para atuar ensinando Matemática para adolescentes de 5ª a 8ª série, mas a experiência ensinava-me a cada dia. Muitas vezes, vi-me presa à lógica excludente da reprovação, encarada por muitos como inevitável naquela época. Todavia, sempre me senti muito envergonhada e incomodada com essa forma de exclusão que a escola tentava naturalizar. Jamais deixei de me sentir corresponsável pelo fracasso dos estudantes.

Talvez por isso, tenha me aproximado dos adolescentes com quem trabalhava, tentando ouvir suas diversas vozes e entender seus dramas. Entendi, por exemplo, que nessa fase da vida, eles estão se afastando da família e se aproximando de quem tem sensibilidade para ouvi-los. Aprendi também que minha linguagem era um obstáculo em nossa comunicação. Falávamos de coisas muito diferentes e de maneira também muito diferente. Para me aproximar deles, tentei entender de que matéria era constituída a realidade que os cercava. Com isso compreendi, por exemplo, que os esportes, as artes, principalmente a música, e as tecnologias poderiam mediar nosso diálogo.

Mais recentemente, tenho descoberto que, além de melhorar o diálogo com eles, é possível fazer da sala de aula um espaço dialógico em que a comunicação dos adolescentes com eles mesmos seja favorecida.

Há 25 anos atuando no ensino fundamental, alguns dos quais na formação de professores, tenho percebido que o diálogo dos estudantes entre si e destes com os professores tem sido marcado por ruídos que não representam o que de fato acontece. Alguns estudantes acreditam que os professores não os compreendem e não se interessam pelas suas aprendizagens. Alguns professores, por outro lado, acreditam que os estudantes são desinteressados e não querem aprender. Além disso, a sala de aula é organizada de maneira muito homogênea, favorecendo a segregação dos estudantes em situação de dificuldade. Assim, cada um à sua maneira contribui para o não-diálogo, na medida em que assume posições isoladas e, muitas vezes, antagônicas. Pior ainda, o isolamento e a tentativa de homogeneização muitas vezes contribuem para que não haja diálogo estudante-conhecimento, estudante-professor e estudante-estudante. A consequência é que as situações de assimetria cognitiva entre estudantes, que poderiam favorecer a comunicação, sequer são percebidas e, se são percebidas, parecem não ser consideradas.

Duran e Vidal (2011), embora não falem diretamente de assimetria cognitiva, destacam que, no processo de tutoria, há relações assimétricas que correspondem às relações em que tutores e tutorados possuem níveis diferentes de competência sobre determinada matéria ou sobre determinado objeto do conhecimento.

A palavra assimetria nos remete a algo não simétrico, que implica desigualdade e desequilíbrio e que, portanto, seria negativo e deveria ser evitado, alterado e até negado no contexto educativo. Mas não é apenas na escola que a assimetria parece nos incomodar. Só para dar um exemplo, é comum na estética a busca pela eliminação de assimetrias corporais ou a realização de intervenções cirúrgicas para construção de um corpo simétrico. No entanto, não é esse o sentido que queremos atribuir à assimetria na expressão "assimetria cognitiva".

De modo geral, consideramos que a assimetria também tem uma dimensão positiva que é a existência da diferença, ou seja, a garantia da não igualdade como fonte primeira da possibilidade de trocas, de permutas, de mútua retroalimentação, o que não ocorre no contexto da igualdade. Assim, estamos concebendo que a existência de assimetrias é possibilidade de haver troca, de haver interação e, portanto, de haver diálogo.

Mas ao pensar nas assimetrias como possibilidades de diálogo, não podemos deixar de considerar uma questão central: as interações, ao invés de tornar o outro mais forte, podem o anular, o reprimir e o negar.

A partir das ideias de Duran e Vidal (2011) para relações assimétricas, neste trabalho estamos considerando assimetria cognitiva como a situação provisória em que alguns estudantes estão em situação de sucesso escolar ou de êxito e outros em situação de fracasso ou de dificuldade na aprendizagem de algum objeto da Matemática, traduzido principalmente pelo rendimento escolar. Tal situação é comum não apenas na escola, mas em todos os ambientes sociais. Sempre sabemos coisas diferentes e de maneira também diferentes acerca de uma dada realidade ou situação. Melhor dizendo, nos apropriamos de forma diferente dos saberes. Fora da escola, é natural que esses saberes se complementem, ou seja, é natural que os sujeitos que sabem mais a respeito de algum aspecto do cotidiano assumam a tarefa de ensinar para aqueles que sabem menos. E isso é cíclico, pois os que hoje sabem menos de algo, amanhã podem saber mais de outro algo e assim acontecem as trocas de experiências que possibilitam a todos avançarem em seus saberes. Na escola, essa assimetria, em geral reforçada pelos processos avaliativos formais e informais, muitas vezes não é considerada ou aproveitada para que os estudantes saibam mais e melhor sobre os objetos de estudo, no nosso caso, os objetos da Matemática.

Do ponto de vista do que estamos trabalhando, as assimetrias cognitivas sempre existirão e constituem-se em possibilidade de interação e diálogo e, portanto, não devem ser negadas ou evitadas. Estamos defendendo que os processos de comunicação, especialmente o diálogo, decorrentes dessas relações assimétricas podem contribuir para reduzir as assimetrias cognitivas, de tal forma que as diferenças sejam propulsoras de um movimento contínuo e solidário em direção à aprendizagem significativa de todos os sujeitos da organização do trabalho pedagógico. Não se trata evidentemente de eliminar as assimetrias no contexto educativo, mas de potencializá-las em favor das aprendizagens, até porque as diferenças fazem parte da condição humana.

Muito embora o discurso corrente, de modo geral, aponte a falta de crença do professor na aprendizagem dos alunos, e uma apatia desses em relação à escola, minha experiência profissional tem me mostrado também que esses discursos não correspondem à realidade. Ao ministrar cursos de formação continuada para professores da rede pública de ensino do DF, tenho percebido a clara preocupação dos professores com as aprendizagens dos estudantes. Da mesma forma, como professora da escola básica, tenho percebido que os estudantes se interessam quando são convidados a participar mais ativamente da organização do trabalho pedagógico, sobretudo se envolvidos em ações mais cooperativas e colaborativas. Por fim, tenho percebido que os estudantes em situação de sucesso escolar se sentem valorizados, por um lado, quando convidados a colaborar com as aprendizagens dos colegas que estão em situação de dificuldade e, por outro, se sentem fortalecidos na medida em que acreditam em si mesmos como geradores e comunicadores de saberes. Da mesma forma, essas ações parecem resgatar nos estudantes em situação de fracasso ou de dificuldade a crença de que podem aprender e podem também contribuir com a aprendizagem dos outros, elevando a sua autoestima e fortalecendo o seu sentimento de pertencimento ao grupo.

Foi a partir dessas experiências como professora da escola básica e formadora de professores e, principalmente, a partir da implementação de um projeto pedagógico de enfrentamento do insucesso escolar em Matemática, por meio de uma ação colaborativa em salas de aulas dos anos finais do ensino fundamental, em uma escola pública do DF, que começou a emergir o meu objeto de pesquisa.

1.1. O encontro com o objeto

O interesse pelo tema nasceu de uma experiência em sala de aula com estudantes do 8º e 9º anos do ensino fundamental, em uma escola pública do DF, e da constatação de que a observação dos diálogos entre os estudantes, a partir de situações propostas em sala de aula, e, principalmente, das suas produções, fornecia elementos importantes para compreender o processo de aprendizagem matemática dos mesmos, sobretudo no que diz respeito ao pensamento matemático do estudante que, em tese, estaria em situação de fracasso ou de dificuldade. A percepção desses diálogos também foi gerando mudanças qualitativas na organização do meu trabalho pedagógico. Essa percepção me levou a construir uma avaliação com intenções formativas (VILLAS BOAS, 2006), que, por sua vez, gerou a necessidade de reorganizar todo o trabalho pedagógico, com maior ênfase na produção da aprendizagem e do conhecimento em contexto sociodidático, permeado pelo trabalho solidário no fazer Matemática na sala de aula.

Essa experiência aconteceu em uma escola pública do Distrito Federal, no ano de 2007 e em parte do ano de 2008, em um projeto pedagógico que tinha por objetivo engajar estudantes em situação de sucesso escolar em Matemática na cooperação com a aprendizagem daqueles que estavam em situação de fracasso ou dificuldade, por meio de um trabalho de monitoria. Essa ação nasceu da constatação dos próprios estudantes de que alguns não chegariam ao ensino médio em função do desempenho que tinham nessa disciplina.

Neste trabalho, estamos considerando situação de fracasso escolar ou de dificuldade como aquela situação provisória em que o próprio sujeito percebe suas capacidades cognitivas aquém do esperado por si mesmo e pelo seu grupo social, frente à construção de determinado conhecimento. Tal situação, em geral, é reforçada pelos procedimentos de avaliação formais e informais na escola.

Nossa opção se baseia nas ideias de Charlot (2000, p.16), para quem "o fracasso escolar não existe; o que existe são alunos fracassados, situações de fracasso, histórias escolares que terminam mal". Esse autor ainda acrescenta que o estudante em situação de fracasso escolar ocupa uma posição diferenciada em relação ao aluno em situação de êxito e tal posição é avaliada por notas, indicadores de sucesso, anos de distorção, além da classificação em um sistema hierarquizado. Assim, essa situação de fracasso não é apenas produto, mas processo de um sistema organizado com base na meritocracia, em que as experiências escolares dos estudantes em situação de fracasso são interpretadas como falta de algo ou em termos de diferenças em relação aos que estão em situação de êxito ou sucesso escolar, e não em termos de relação com o saber ou relação com a escola.

Para Charlot (2000, p. 17), "a experiência do aluno em situação de fracasso traz a marca da diferença e da falta: ele encontra dificuldades em certas situações, ou orientações que lhe são impostas, ele constrói uma imagem desvalorizada de si [...]." Diferentemente do estudante em situação de sucesso, que tem seus procedimentos validados pela escola, o estudante em situação de fracasso ou de dificuldade muitas vezes é ignorado pela escola, o que contribui, ainda mais, para a construção de uma autoimagem negativa de si mesmo.

No projeto acima citado, os estudantes em situação de êxito ou de sucesso escolar foram estimulados a serem monitores da disciplina, mediante um acordo em que a eles eram concedidos alguns benefícios, tais como participar de todos os passeios da escola sem efetuar pagamento e ter quitada a contribuição mensal para a Associação de Pais e Mestres (APAM). Além disso, eles poderiam escolher não realizar algumas das provas e trabalhos do bimestre. De todos os benefícios, este último foi o único que não chegou a funcionar, pois os estudantes monitores, paulatinamente, foram abrindo mão do mesmo.

Na experiência mencionada, a monitoria era semelhante ao que Duran e Vidal (2011, p. 26) chamam de tutoria, que corresponde à "relação entre dois alunos que frente a um tema específico apresentam diferente nível de habilidade." Do mesmo modo, no projeto acompanhado na pesquisa exploratória, a monitoria, termo de uso corrente da professora colaboradora e dos estudantes que participaram da pesquisa, tinha o mesmo sentido, ou seja, correspondia à relação cooperativa entre dois ou mais estudantes, em que um ocupava posição (CHARLOT, 2000) de destaque em relação aos demais no que se refere às habilidades matemáticas.

Utilizamos, portanto, o termo monitoria para designar o processo de interação entre sujeitos que estudam matemática juntos de forma cooperativa, mas que possuem apropriação diferenciada em relação aos objetos matemáticos, testemunhada principalmente pelos processos avaliativos. E estamos chamando de "monitor", o sujeito desse processo que, em dado momento, está em situação de sucesso escolar em relação à Matemática e, por isso, é eleito pelo professor, pelos seus pares e por ele mesmo como capaz de mediar a aprendizagem dos colegas em situação de fracasso ou de dificuldade.

As atividades de monitoria do projeto acima mencionado aconteciam dentro da própria sala de aula e em horário contrário ao das aulas, em todos os dias da semana. Na sala de aula, a organização espacial foi modificada para que os estudantes pudessem dialogar entre si de forma mais direta.

No turno contrário ao das aulas, as atividades também eram acompanhadas indiretamente por mim, que tinha como compromisso fornecer material e apoio didático-pedagógico ao estudo cooperativo, fazer as mediações necessárias no processo, além de intervir em conflitos quando havia algum desacordo. Nos encontros do contraturno, cada monitor acompanhava cerca de três estudantes.

O acompanhamento dessa ação mostrou que tanto os estudantes em situação de sucesso escolar como os estudantes em situação de fracasso ou de dificuldade se beneficiavam da relação estabelecida, que era permeada por trocas nem sempre explícitas e, portanto, muitas vezes desconhecidas e, consequentemente, não valorizadas no processo educativo. E mais, os diálogos mostraram que os estudantes que, naquele momento, estavam em uma situação de fracasso escolar tinham a capacidade de desequilibrar as aprendizagens daqueles que estavam em situação de sucesso, o que, por sua vez, motivava novas aprendizagens para ambos e transformações qualitativas na visão que tinham da Matemática.

As observações do trabalho me mostraram também que, muitas vezes, o estudante que se colocou na posição de monitor possuía uma linguagem muito mais próxima da do colega que estava em situação de dificuldade. Em muitas ocasiões, ele agia como tradutor da minha fala para o colega, falando o mesmo que eu havia dito, mas com outras palavras mais apropriadas para a compreensão deste.

Essas constatações influenciaram a organização do trabalho pedagógico desenvolvido em sala de aula como um todo. As carteiras universitárias foram trocadas por mesinhas com cadeiras e a configuração espacial da sala de aula era constantemente modificada segundo o planejamento. Os estudantes sentavam-se em grupos de cinco ou seis, em trios ou em duplas, de acordo com a atividade prevista. Cada grupo sempre tinha a presença de um estudante monitor e este, muitas vezes, contribuía para dar visibilidade ao trabalho do colega que estava em situação de dificuldade, falando-me que ele tinha acertado. Com essas modificações, passei a ouvir mais os estudantes e a reorganizar o espaço da sala de aula a partir da proposição de atividades mais cooperativas, centradas na resolução de problemas. Assim, a experiência me levou a observar com mais cuidado os diálogos entre os estudantes e os padrões de comunicação existentes em sala de aula, mas, infelizmente, fiz poucos registros do que foi vivenciado no projeto.

Um fato importante é que os diálogos que, muitas vezes, começavam no contraturno continuavam em sala de aula e vice-versa; além disso, esses diálogos muitas vezes envolviam a mim e outros colegas. Isso revelou, inicialmente, que os processos de aprendizagem não se limitam ao tempo e ao espaço de aula orquestrada pelo professor. Assim, preliminarmente, pode-se dizer que o projeto de monitoria resgatou, possibilitou, valorizou e deu visibilidade aos diálogos tanto dos estudantes entre si, como entre esses e a professora, e também entre esses sujeitos e os objetos de conhecimentos da Matemática.

Durante a realização de palestras e cursos no âmbito da Escola de Aperfeiçoamento dos Profissionais da Educação do DF (EAPE) e da Sociedade Brasileira de Educação

Matemática – Regional DF (SBEM-DF), tenho percebido o interesse dos professores por essa ação de enfrentamento do fracasso escolar. Muitos me procuram para compreender melhor esse projeto pedagógico. Alguns com desconfiança e outros com claro interesse. Isso me levou a considerar, inicialmente, a possibilidade de conceber como objeto de estudo o diálogo entre os estudantes em situação de sucesso e os estudantes em situação de dificuldade no contexto da aprendizagem escolar da Matemática nos anos finais do ensino fundamental. No entanto, no decorrer da pesquisa exploratória, ao perceber que não se tratava do diálogo apenas entre os estudantes, elencamos como objeto de estudo **o diálogo entre os diferentes sujeitos que interagem no contexto da aprendizagem escolar da Matemática nos anos finais do ensino fundamental.**

É importante dizer, ainda, que a experiência acima relatada não se converteu em pesquisa propriamente dita, limitando-se às experimentações empíricas, sem análises sistematizadas e aprofundadas e/ou teoricamente fundamentadas. Essas experimentações tinham como foco apenas o diálogo entre os estudantes. Ao definir o objeto acima, o interesse do trabalho era investigar possibilidades e limites de se provocar o diálogo entre os estudantes, mas considerar também o diálogo destes com a professora regente e a pesquisadora, já que se tratou de uma pesquisa participante.

A experiência mencionada trouxe algumas respostas importantes para a construção do projeto de pesquisa, mas muitas questões ficaram ainda por ser respondidas, tais como:

1) Quais são as possibilidades e os limites de se provocar o diálogo entre dois grupos de estudantes em aparente assimetria cognitiva no contexto da aprendizagem escolar da Matemática?
2) O que revelam os diálogos entre estudantes em situação de sucesso e estudantes em situação de dificuldade no contexto da aprendizagem escolar da Matemática?
3) Quais são os conteúdos, as lógicas e implicações desses diálogos?
4) Quem se beneficia desses diálogos?
5) Quais são os benefícios que se evidenciam nos diálogos desses estudantes?
6) Esses diálogos geram mudanças qualitativas na aprendizagem dos estudantes participantes?
7) O conhecimento e o reconhecimento desses diálogos geram mudanças qualitativas na organização do trabalho pedagógico?

Muito embora o termo “aluno”, de modo geral, seja mais utilizado em trabalhos científicos do que o termo “estudante”, neste trabalho fizemos a opção de utilizar o segundo sempre para nos referirmos ao sujeito participante do projeto e que se colocou na posição voluntária de estudo. Esta opção não está relacionada à falsa ideia de que a etimologia da palavra aluno se remeteria a “ser sem luz”. Segundo Castro (2007/2012), o vocábulo aluno é derivado do latim *alumnu*s, particípio substantivado do verbo *alere* (= alimentar, nutrir). Assim, o aluno seria aquele ou aquela que se nutre do conhecimento, ou que está sendo nutrido ou alimentado pelo conhecimento. Optamos pelo vocábulo estudante que vem do latim *studiosus*, palavra que designa a pessoa dedicada, que gosta de algo, que é zelosa. O estudante, nesse caso, seria aquele que, por definição, gosta de aprender, zela pela aprendizagem. Ainda que os dois termos remetam a uma concepção romântica do processo de aprendizagem, estamos considerando que o vocábulo estudante melhor se aplica ao sujeito que escolheu estudar porque se percebeu em situação provisória de fracasso ou de dificuldade, ou ao sujeito que fez essa escolha porque se considera em condição de contribuir com as aprendizagens dos colegas, ou ainda ao sujeito que não se percebe em nenhuma dessas situações, mas voluntariamente deseja estudar Matemática.

1.2. Os propósitos da pesquisa e a tese

Como já foi dito, a incursão no campo, por meio da pesquisa exploratória, permitiu-nos considerar que o objeto de nossa pesquisa era o diálogo entre os diferentes sujeitos que interagem no contexto da aprendizagem escolar da Matemática nos anos finais do ensino fundamental.

Da mesma forma, essa incursão nos possibilitou refletir sobre a complexidade desse objeto e sobre o desafio de apreender e dar significado aos diálogos dos sujeitos. Como nos adverte Amorim (2004, p. 16, *grifos da autora*), “não há trabalho de campo que não vise ao encontro com um *outro,* que não busque um interlocutor”. O problema é que, em nossa pesquisa, esse *outro* é um sujeito humano que também apreende e dá significado aos diálogos. Os interlocutores, sujeitos da pesquisa, são ativos e produzem um texto tanto quanto o pesquisador, muito embora este último tenha a obrigação de sistematizar em produções escritas suas ideias e análises.

A constatação da complexidade do objeto nos levou a redimensionar as questões de pesquisa para:

1) Quais são as possibilidades e os limites de se potencializar o diálogo e a cooperação entre os diferentes sujeitos que interagem no contexto da aprendizagem escolar da Matemática?

2) Que aprendizagens são reveladas pelos diálogos entre os diferentes sujeitos estimulados a interagir em cooperação no contexto escolar do processo de aprendizagem da Matemática?

3) Quais são os conteúdos, as lógicas e implicações dos diálogos entre os diferentes sujeitos estimulados a interagir no contexto da aprendizagem escolar da matemática?

4) Qual é a relação entre os diferentes contextos escolares e situações de aprendizagens e o diálogo entre os diferentes sujeitos estimulados a interagir no contexto escolar do processo de aprendizagem da Matemática?

Ao explicitar esses diálogos, o que se pretende é analisar de que forma a comunicação, especialmente o diálogo, se constitui no espaço pedagógico entre os diferentes sujeitos que interagem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Para isto, estamos considerando que todos os sujeitos desse processo estão em permanente aprendizagem e desenvolvimento.

Para tentar responder a essas questões, foi eleito o seguinte objetivo geral:

Analisar possibilidades e limites da criação de um ambiente que favoreça o diálogo e a cooperação entre os diferentes sujeitos que interagem no contexto da aprendizagem escolar da Matemática nos anos finais do ensino fundamental.

Os objetivos específicos decorrentes do propósito geral da pesquisa são:

1. Identificar possibilidades e limites de se criar um ambiente que favoreça o diálogo e a cooperação entre os diferentes sujeitos que interagem no contexto da aprendizagem escolar da Matemática.

2. Analisar que aprendizagens são reveladas pelos diálogos entre os diferentes sujeitos que interagem e cooperam no contexto escolar do processo de aprendizagem da Matemática.

3. Analisar os conteúdos, as lógicas e as implicações dos diálogos entre os diferentes sujeitos que interagem em situação de cooperação no contexto da aprendizagem escolar da Matemática.

4. Analisar a relação entre os diferentes contextos e situações de aprendizagem e o diálogo entre os diferentes sujeitos que interagem no processo de aprendizagem da Matemática.

No entanto, a análise não poderia se limitar apenas ao conteúdo das falas. A pesquisa evidenciou que os processos de comunicação não verbal, os gestos, as expressões, a postura corporal dizem muito do conteúdo emocional dos sujeitos e, portanto, podem contribuir para a compreensão dos seus pensamentos. Para González Rey (2003, p. 236), "a linguagem e o pensamento se expressam a partir do estado emocional de quem fala e pensa."

Como já foi dito, no curso já da pesquisa exploratória, compreendemos que a complexidade do objeto de pesquisa exigiria uma construção teórica que apreendesse a multidimensionalidade dos diálogos que se estabelecem entre os sujeitos que compõem o cotidiano escolar, entre esses e professora e também a pesquisadora. Assim sendo, o aporte teórico, como afirma González Rey (2003, p. 59), não poderia ser "um corpo rígido e, *a priori*, adotado de forma confortável pelo pesquisador e imposto às mais diversas formas do real." A teoria foi, então, entendida como o instrumento que permitiu dar significação ao objeto de pesquisa e que, de alguma forma, iluminou a organização do trabalho pedagógico, sobre a qual se produziu os conhecimentos. Em razão disso, no curso de toda a pesquisa, os indicadores (GONZALEZ-REY, 2005a) foram exigindo ampliações teóricas.

Pensar sobre essa teorização a partir da experiência empírica nos levou a pensar na nossa tese. Inicialmente postulamos que a construção de um espaço de interação e diálogo entre os estudantes em situação de sucesso e estudantes em situação de fracasso no contexto da aprendizagem escolar da Matemática faria com que as assimetrias cognitivas desaparecessem, ou seja, a interação e o diálogo fariam com os estudantes em situação de fracasso saíssem dessa condição, aproximando-se daqueles que estão em situação de sucesso.

O aporte teórico e a pesquisa de campo nos fez perceber que a tese inicial era muito simplista diante da complexidade do objeto, pois a mobilização do diálogo no contexto da aprendizagem escolar da Matemática promove modificações cognitivas em todos, e não apenas naqueles que estão em situação de fracasso escolar ou de dificuldade e, assim, acontece a potencialização e a qualificação das aprendizagens de todos os envolvidos, contribuindo para que todos saibam mais e melhor sobre os objetos matemáticos. Mas também percebemos que essas aprendizagens também potencializavam e qualificavam os diálogos. Foi assim, então, que enunciamos a seguinte tese:

No contexto da aprendizagem escolar da Matemática, há uma múltipla influência entre diálogo e aprendizagem matemática, portanto a conversão da sala de aula em espaço de diálogo e interação, de construção e criação, de espaço de pensar e fazer pode potencializar a aprendizagem matemática, do mesmo modo que a qualificação das aprendizagens pode potencializar o diálogo.

Um dos clássicos problemas da aprendizagem matemática no contexto escolar reside justamente em lidar com as situações de fracasso escolar ou de dificuldade. Em geral, são colocados em posição opostas, e até antagônicas, dois grupos de estudantes: aqueles que estão em situação de êxito ou de sucesso e aqueles que estão em situação de fracasso ou de dificuldade na aprendizagem da Matemática. Nossa experiência pedagógica tem nos mostrado que, de modo geral, o trabalho pedagógico nas escolas públicas brasileiras não é organizado em torno de nenhum desses grupos, mas daqueles estudantes considerados medianos pela escola, ou que precisam de uma mediação indireta por parte do professor, não exigindo o seu apoio direto. Embora os estudantes em situação de fracasso escolar ou de dificuldade sejam mais invisíveis na escola, os estudantes que estão em situação de êxito ou de sucesso escolar, considerados pelos professores e por seus pares como "estudantes brilhantes" são também desconsiderados na organização do trabalho pedagógico.

Skovsmose (2007, p. 35) demonstra preocupação com os estudantes considerados "'normais', 'regulares' e 'médios' que normalmente tendem a se tornar invisíveis na sala de aula". Estamos, de modo diverso, apontando que o trabalho tradicional de aulas expositivas foca exatamente esse grupo, desconsiderando as necessidades dos que estão em situação de fracasso escolar ou de dificuldade e as capacidades dos que estão em situação de sucesso escolar ou de êxito.

O planejamento das aulas tradicionais não favorece o desenvolvimento da capacidade cognitiva e criativa na Matemática dos estudantes considerados "brilhantes", uma vez que as atividades propostas não representam desafios reais para eles. Do mesmo modo, o planejamento não atinge os estudantes em situação de dificuldade, pois as atividades propostas, muitas vezes, representam um desafio acima das suas possibilidades cognitivas e, sozinhos, isolados dos seus pares, e sem a possibilidade de obter apoio individualizado do professor, esses estudantes se esquivam do fazer matemática. Isso nos remete ao que afirma Vigotski (2000, p. 171) quando aborda o desenvolvimento do adolescente:

> onde o meio não cria os problemas correspondentes, não apresenta novas exigências, não motiva nem estimula com novos objetivos o desenvolvimento do intelecto, o

> pensamento do adolescente não desenvolve todas as potencialidades que efetivamente contém, não atinge as formas superiores ou chega a elas com um extremo atraso.

Dessa forma, estamos considerando que a criação de espaços de interação que favoreçam o diálogo entre os adolescentes em aparente assimetria cognitiva pode contribuir para o desenvolvimento das potencialidades não apenas daqueles que estão em situação de dificuldade na aprendizagem escolar da matemática. Pode contribuir para a emergência de processos metacognitivos (FÁVERO, 2005a, 2005b) que promovam a aprendizagem e, portanto, o desenvolvimento de todos os envolvidos, pois, conforme Vigotski (2000), os processos interacionais possibilitam reconstruções e regulações internas. Por meio da mediação de um “par mais competente”, aquilo que em um dado momento o sujeito só consegue fazer com ajuda, com apoio, em um momento seguinte, poderá vir a fazer sozinho.

Estamos considerando que, na escola, o “par mais competente” pode não ser apenas o professor. Muitas vezes, o adolescente que possui um padrão de fala muito mais próximo ao de outro adolescente pode realizar o processo de mediação com mais propriedade que um adulto que possui uma fala mais monitorada e mais distante da linguagem dos jovens.

Novamente somos remetidos à complexidade do objeto de pesquisa. Essa constatação nos levou a considerar a introdução de uma pequena modificação no clássico triângulo didático (BROSSEAU, 2008), a fim de traduzir o diálogo entre os diferentes sujeitos que interagem no contexto da aprendizagem escolar da Matemática, e também as múltiplas relações entre eles e os objetos do conhecimento.

É impossível pensar na escola divorciada do meio social em que está situada. Sem pensar na função social que lhe é atribuída. É impossível pensar nos sujeitos sem pensar nas determinações sociais concretas que influenciam os seus fazeres, seus modos de pensar, de interagir, suas expectativas. Também é impossível pensar na Matemática como um objeto de conhecimento livre dessas determinações.

Como Freitas (1995), estamos considerando que a escola é o *locus* de um trabalho pedagógico que não é realizado apenas pelo professor e não está circunscrito à sala de aula. O estudante também realiza um trabalho que, muitas vezes, extrapola o espaço da sala de aula. Desta forma, as interações são dinâmicas, não lineares, complexas e profundamente influenciadas pelo contexto social.

Nesse aspecto, vemos a potencialização do diálogo em uma perspectiva crítica, da mesma forma que Skovsmose (2007) vê a educação matemática. A potencialização de um diálogo que já existe representa uma grande incerteza e seus efeitos não podem ser determinados *a priori*. Há certamente limites e possibilidades ao se potencializar a diálogo nas relações escolares. Nenhuma ação, nesse sentido, pode querer subjugar ou anular os sujeitos ou desconsiderar suas alteridades, sem considerar aquilo que os tornam únicos e diferentes diante dos outros.

Na impossibilidade de uma representação que mostrasse a dinamicidade das relações estabelecidas em uma escola que está encravada em um meio social, escolhemos a figura 1, a seguir, apenas para mostrar que há múltiplas relações entre os sujeitos e os objetos do conhecimento no contexto da aprendizagem escolar da Matemática. Na escola, o estudante entra em diálogo com o professor, com a(s) matemática(s) e com muitos outros estudantes, da mesma forma, o professor entre em diálogo com os estudantes, com a(s) matemática(s) e também com outros professores. A chegada de um pesquisador que propõe um estudo colaborativo altera ainda mais esse quadro já tão complexo, porque este também entra em diálogo com todos esses sujeitos e com os objetos do conhecimento da Matemática.

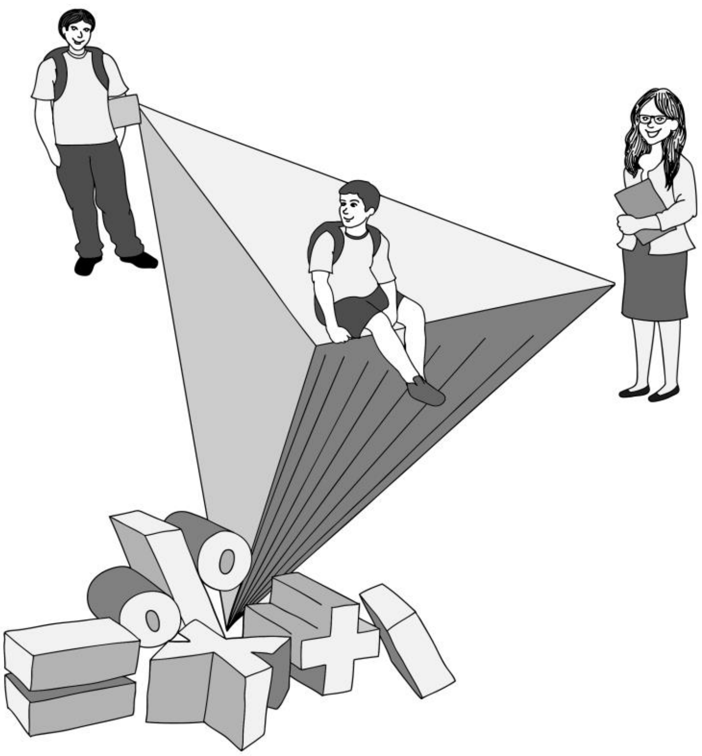


Figura 1. Múltiplas relações entre os sujeitos que interagem no contexto da aprendizagem escolar da Matemática

O marco teórico da pesquisa, apresentado no capítulo a seguir, foi escolhido considerando essas múltiplas relações dos sujeitos entre si e com os objetos matemáticos.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

"Enquanto relação democrática, o diálogo é a possibilidade de que disponho de, abrindo-me ao pensar dos outros, não fenecer no isolamento."
(FREIRE, 1992, p. 120)

2.1. A organização do trabalho pedagógico em Matemática

No prefácio do livro *Cenas de Sala de Aula*[4], Frederick Erickson, etnógrafo americano, nos desafia a pensar na sala de aula como espaço de aprendizagem escolar e no trabalho ali desenvolvido pelo professor e pelos estudantes. Ao descrever as salas de aula pelo mundo afora, ele diz que essas são muito semelhantes. Em geral, são retangulares, com janelas em uma lateral e um "quadro-negro" na parede anterior próximo à porta de entrada. Ele afirma ainda que, nesse espaço,

> há muitas crianças ou jovens presentes e somente um ou poucos adultos. Isso é óbvio, mas não trivial – deve-se notar que em nenhuma outra cena do cotidiano vê-se esta proporção de jovens por adulto: um mínimo de 25:1 e frequentemente de 40:1 ou mais. Quando o professor está dando aulas expositivas, ele se dirige à sala toda. De vez em quando, o professor pode se dirigir a um só aluno, ou os alunos podem falar entre si em pequenos grupos (2001, p. 10).

A descrição feita por esse pesquisador nos faz lembrar as salas de aulas brasileiras tanto no que diz respeito ao espaço físico como no que diz respeito à organização do trabalho pedagógico. No Brasil, a proporção entre alunos e professores nos anos finais do ensino fundamental, em geral, é de aproximadamente 40:1 (quarenta para um). Como bem disse Erickson, essa proporção nada trivial é bastante comum nas escolas. Não há dúvidas que esse fato influencia a comunicação em sala de aula e, consequentemente, o processo de aprendizagem.

Na mesma direção, Garcez (1998, 162) aponta que as salas de aula, como as conhecemos hoje, consolidaram-se em oposição a outros espaços como modelos assimétricos em que há um adulto para várias crianças e acrescenta que "as salas de aula nasceram hierárquicas, com uma ênfase exagerada na instrução direta, na cobrança, na fiscalização, no escrutínio, na ordenação, na padronização, na organização da aprendizagem, de forma ameaçadora e constrangedora."

Em um espaço em que há apenas um adulto e quarenta crianças ou jovens, geralmente, o direito à fala é coordenado pelo adulto. Nas escolas brasileiras, é ainda comum que esse

[4] COX, M. I. e ASSIS-PETERSON, A. A. de (orgs.) – Campinas – SP, Mercado da Letras, 2001

adulto detenha o maior tempo de fala, em aulas expositivas, centradas na transmissão de conteúdos.

Não é sem razão que a partir da década de 1960, Freire (2011a, p. 83) tenha denunciado o que denominou "educação bancária". Para Freire, as relações educador-educando são marcantemente narradoras e dissertadoras, colocando o professor como sujeito transmissor de conteúdos e conduzindo os estudantes à memorização dos conteúdos narrados, em situações que os colocam como objeto e não como sujeitos do processo de ensino e aprendizagem. Na perspectiva apontada por Freire (2011a, p. 80), "em lugar de comunicar-se, o educador faz 'comunicados' e depósitos que os educandos, meras incidências, recebem pacientemente, memorizam e repetem."

No caso da Matemática, ainda mais que em outras áreas do conhecimento, essa parece ser a lógica mais frequente na organização do trabalho pedagógico, muito embora novos paradigmas consubstanciados em novas orientações curriculares, desde meados da década de 1980, apontem para outra direção (BRASIL, 1998).

De maneira geral, esses novos paradigmas preconizam um papel mais ativo do estudante, sobretudo na resolução de problemas. No entanto, não é isso ainda que se vê na prática pedagógica cotidiana. A aula de Matemática ainda se organiza a partir do que Alrø e Skovsmose (2006, p. 52) chamam de "paradigma do exercício". Nesse paradigma cabe ao professor explicar os conteúdos, selecionar os exercícios que são então resolvidos pelos estudantes que, ao final, apresentam suas respostas para a correção do professor.

No paradigma do exercício, o professor é quem tem o conhecimento a ser doado ou transmitido ao estudante. Além disso, os conteúdos de ensino raramente têm ligação com o mundo dos jovens e, quando têm, muitas vezes fazem parte do que Alrø e Skovsmose (2006) chamam de "semirrealidades." Dessa forma, a organização do trabalho pedagógico em Matemática está distante da realidade imediata e concreta dos estudantes, o que contribui de maneira efetiva para o distanciamento desses das atividades matemáticas escolares, para as quais não conseguem atribuir significado. Essa organização influencia a forma como o estudante se relaciona com a Matemática.

Segundo Charlot (2000, p 78), "a relação com o saber é relação de um sujeito com o mundo, com ele mesmo e com os outros. É relação com o mundo como conjunto de significados, mas, também, como espaço de atividades, e se inscreve no tempo." Desta forma, a relação com a Matemática tem a ver com a relação do sujeito com o mundo, consigo mesmo e com os outros. Tem a ver com a percepção que tem dos objetos da Matemática, de si como sujeito capaz de aprender matemática, do professor como sujeito capaz de lhe ensinar matemática, dos colegas como parceiros da atividade matemática. Tem a ver com o conjunto de significações ou de representações relacionadas à atividade matemática.

A maneira de conceber a organização do trabalho pedagógico traduz uma concepção do que é a Matemática e do que são os objetos de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ponte et al (1997, p. 33) afirmam:

> situarmo-nos na perspectiva de ajudar quem aprende a compreender um corpo de saberes matemáticos que é o produto contingente de forças evolutivas históricas e culturais, é um problema diferente de ensinar segundo uma perspectiva que supõe a existência de um saber matemático imutável, eterno, fortemente estruturado, infalível, rigoroso e abstracto por natureza, que é exterior aos alunos, mas que estes podem receber do professor através de mecanismos de transmissão, imitação e absorção.

Se admitirmos que a Matemática é histórica e culturalmente construída, que os saberes matemáticos, passíveis de serem ensinados e aprendidos na escola, possuem significado sociocultural e que, por isso, devem fazer sentido para os estudantes e, ainda, se admitirmos que é possível fazer Matemática na escola, então a organização do trabalho pedagógico deve aproximar-se da realidade concreta e possibilitar a ação discente, bem como a interação e o diálogo como parte inerente ao processo de aprendizagem dos objetos da Matemática.

As aulas organizadas a partir da concepção de que a Matemática é exata, imutável, estruturada, infalível, rigorosa e abstrata possuem um padrão de comunicação muito próprio e centrado na figura do professor e em sua fala. Alrø e Skovsmose (2006) defendem que esse padrão não favorece a aprendizagem e argumentam que as relações interpessoais e, portanto, o diálogo podem expressar as qualidades da comunicação e as qualidades de aprendizagem. Assim, a mera transferência de informações do professor ao aluno não caracteriza o processo de comunicação mais adequado para se efetivar a aprendizagem. Para esses autores, “aprender é uma experiência pessoal, mas ela ocorre em contextos sociais repletos de relações interpessoais” (ALRØ e SKOVSMOSE, 2006, p. 12).

As ideias desses dois autores aproximam-se do pensamento de Freire (1977) e Freire e Shor (1986), para quem o ser humano é um ser de comunicação e o ato comunicativo, especialmente o diálogo, sela o ato de aprender que, embora tendo uma dimensão individual, é eminentemente social.

A dimensão social do processo de aprender será retomada adiante, por hora queremos nos deter na comunicação e mais especificamente nas relações dialógicas do processo de ensinar e aprender Matemática. Muito embora o processo de comunicação seja muito mais amplo que as interações verbais, estamos considerando que em uma sala de aula com quarenta adolescentes e um único professor ensinando Matemática, essas interações são de grande importância para que o professor tenha pistas do curso do pensamento do estudante. Como Freire (1986, p. 20), estamos considerando que as falas e textos dos estudantes, ancorados em contextos e experiências de significação, são “acesso privilegiado a suas consciências” ou como bem diz Charlot (2000) indicam a relação que os estudantes estabelecem com o saber matemático.

2.2. Diálogo e Aprendizagem Matemática

Muito embora haja hoje centralidade nas discussões sobre os processos de comunicação e os processos de aprendizagem, ainda são poucos os trabalhos, no Brasil, que tratam especificamente de diálogo e aprendizagem matemática.

Merece destaque o livro “Diálogo e Aprendizagem Matemática”, de Alrø e Skovsmose (2006), versão brasileira dos quatro primeiros capítulos de *Dialogue and Learning in Mathematics Education – intencion, Reflexion, Critique.* Este livro apresenta pesquisa realizada na Dinarmarca, que evidencia a complexa relação entre os processos dialógicos e a aprendizagem matemática. A pesquisa mostra que qualidades dos processos de comunicação influenciam as qualidades das aprendizagens. Muito embora se centre inicialmente nos processos comunicacionais entre professores e estudantes, os autores mostram que situações diferentes produzem diferentes padrões de comunicação entre os estudantes, determinando a relação que estabelecem com a Matemática.

Esses autores ainda postulam que o trabalho pedagógico em Matemática é marcado pelo que chamam de “absolutismo burocrático” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p. 26) que indica em termos absolutos o que é certo e o que é errado no processo de aprendizagem e ensino da Matemática, sem justificar a razão de tais escolhas. O absolutismo burocrático está presente nas aulas de matemática, principalmente na definição do que pode ou não fazer. É esse absolutismo que faz com que muitos procedimentos, que Muniz (2009) chama de algoritmos alternativos ou não usuais, fiquem na clandestinidade, pois não são validados ou considerados pelos professores.

Para Alrø e Skovsmose (2006, p. 27), a comunicação em sala de aula é marcada por esse absolutismo e “caracterizada por uma relação desigual entre professor e alunos”. Essa desigualdade beira o antagonismo, pois o professor é o que sabe e sabe que sabe; já o aluno é o que não sabe e é convencido por meio da organização do trabalho pedagógico, especialmente dos processos avaliativos, que não sabe. Quando o professor faz uma pergunta, propõe um exercício ou um problema, ele de antemão espera uma determinada resposta e quando a resposta do estudante frustra essa expectativa, o professor, em geral, trata de conduzir o estudante ao que ele espera.

Mas o que pode ou não fazer nem sempre é explícito, muitas vezes faz parte daquilo que é implícito, das regras de ação que de forma tácita regem as obrigações que caracterizam o "contrato didático" que modula as relações entre o professor, os estudantes e os objetos matemáticos (CHEVALLAR; BOSH; GASCON, 2001, p. 62).

É por meio principalmente do contrato didático que fica tácito que a perspectiva do professor deve se sobrepor à perspectiva do aluno. Segundo Alrø e Skovsmose (2006), a perspectiva é aquilo que é tácito na comunicação, é aquilo que serve de pano de fundo ao processo de interação verbal. Em um diálogo, a perspectiva é o que faz o sujeito dar sentido ao que fala e ao que ouve. O padrão de comunicação da aula de matemática tradicional contribui para fazer prevalecer a perspectiva do professor e não a do aluno, perdendo-se assim a possibilidade de, por meio da interação verbal, os sujeitos discutirem, partilharem e até pactuarem uma perspectiva comum e, até mesmo, reconhecer que há perspectivas diferentes entre os falantes.

No jogo das relações que se estabelecem na escola, os estudantes percebem que como a organização do trabalho pedagógico está centrada no professor, a quem cabe o papel de dizer de forma absoluta o que está certo ou errado, o que pode e o que não pode fazer, para melhor passar, ele procura adivinhar o que o professor quer e segue suas ideias, nem sempre porque as compreendem ou concorda com elas. Cedo o aluno percebe que o jogo pedagógico na tradicional aula de Matemática consiste em seguir a perspectiva do professor (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p. 29).

Mas o que seria essa aula de Matemática tradicional? Para Alrø e Skovsmose (2006), nas aulas de Matemática tradicionais, o centro da ação é o professor, a quem cabe explicar um tópico novo da lista de conteúdos, indicar quais exercícios devem ser resolvidos pelos alunos e corrigir os resultados. Essas são organizadas com base no que eles chamam de "paradigma do exercício" (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p. 29), caracterizado principalmente pela proposição de atividades elaboradas por pessoas externa à escola, geralmente propostas em livros didáticos.

O paradigma do exercício leva à falsa crença de que o fim último da atividade matemática escolar é resolver exercícios do livro didático e que, portanto, é uma atividade que não tem vinculação com o mundo real. Assim, a Matemática se resumiria a um amontoado de regras e técnicas que o professor apresenta e que permite resolver uma classe de exercícios.

Alrø e Skovsmose (2006, p. 54) indicam ainda que o paradigma do exercício vem sendo desafiado por "abordagens investigativas" como a resolução de problemas e o trabalho com projetos. Tais abordagens apontam a necessidade de criar diferentes cenários de investigação.

Os autores indicam que diferentes cenários de investigação produzem diferentes padrões de comunicação. Para Alrø e Skovsmose (2006), os cenários podem desafiar os modelos tradicionais centrados na resolução de exercícios ligados à Matemática pura ou à semirrealidades. Podem desafiar, portanto, o paradigma do exercício e serem referenciados na vida real. Mas eles não descartam a existência de cenários de investigação referenciados em temas puramente matemáticos.

Os autores introduzem a ideia de que um cenário não é bom ou ruim por si só. É como se o cenário fosse um convite aberto que dependesse fundamentalmente da aceitação do aluno. Eles advertem ainda que ao abandonar o paradigma do exercício, o professor abandona certa "zona de conforto" para entrar em uma "zona de risco" (ALRØ E SKOVSMOSE, 2006, p. 58), sobretudo porque não há um caminho pré-determinado e os resultados e conclusões não podem ser determinados antecipadamente.

Eles mostram, por fim, que os cenários de investigação conduzem os estudantes ao que chamam de "cooperação investigativa", cujos padrões de comunicação possuem elementos bastante característicos, como, por exemplo, a "escuta ativa" (ALRØ E SKOVSMOSE, P. 70) do professor que assume a responsabilidade por meio de questionamentos e apoio não verbal a desvendar a perspectiva do aluno, a compreender seu pensamento e seus procedimentos. Para Alrø e Skovsmose (2006, p. 117), os elementos encontrados na cooperação investigativa (estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, pensar alto, reformular, desafiar e avaliar) não surgem no processo de comunicação de maneira linear e direta e dizem respeito a determinadas formas como os sujeitos pensam e agem diante do cenário proposto.

Apresentamos, na tabela 1 a seguir, síntese com os elementos, acima mencionados, que, segundo os autores, integram a cooperação investigativa.

Tabela 1 – Elementos da cooperação investigativa

Elemento	**Caracterização**
Estabelecer contato	Envolve questões investigativas, prestar atenção, *tag questions*, confirmação recíproca, apoio mútuo e bom humor.
Perceber	Diz respeito a indicações de curiosidades, questões ampliadoras e elucidativas, aproximação, questões hipotéticas.

Reconhecer	Envolve esforços de explicação e justificação e o delineamento de ideias matemáticas.
Posicionar-se	Está intimamente ligado à argumentação e observação e é importante para esgotar as possibilidades das justificações.
Pensar alto	Surge, frequentemente, na forma de questões hipotéticas e na manifestação de pensamentos e sentimentos.
Reformular	Ocorre como parafraseamento, complementação de meias falas e manutenção de contato.
Desafiar	Por intermédio de questões hipotéticas, exames de novas possiblidades e elucidação de perspectivas.
Avaliar	Pressupõe apoio, crítica e *feedback* construtivos

Fonte: Alrø; Skovsmose, (2006, p. 69)

Sem reificar o modelo de cooperação investigativa, Alrø e Skovsmose (2006) indicam que um processo de aprendizagem dialógica apresentam esses elementos. Indicam ainda que tal processo possui fragilidades e que o diálogo não é a solução universal para todos os problemas da escola e da aprendizagem matemática.

Consideramos, assim, que o trabalho desses autores tem contribuições significativas para a nossa pesquisa.

Outro trabalho que gostaríamos de destacar é o de Fanizzi (2008). Em pesquisa de mestrado, realizada com estudantes do 3º ano do ensino fundamental com desempenho insatisfatório em Matemática, a autora aborda a interação nas aulas de Matemática, focando principalmente a comunicação entre ela própria e os estudantes. Ao analisar as falas desses estudantes, ela identificou aspectos afetivos, sociais e culturais relacionados ao conhecimento matemático.

No V Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (V EBRAPEM), ocorrido em 2011, dois trabalhos de doutorado, em andamento, nos chamaram a atenção porque se aproximam da perspectiva teórica adotada em nossa pesquisa. No primeiro deles, Barboza, Rego e Barbosa (2011) buscam identificar as estratégias utilizadas pelo professor de Matemática para facilitar a compreensão do seu discurso pelos alunos ao ensinar Geometria. No segundo, Milani (2011) busca elucidar como se desenvolvem os processos de planejamento e de efetivação do diálogo entre estagiários e seus alunos no processo de aprendizagem matemática. Esse trabalho foca principalmente os questionamentos feitos pelos estagiários aos estudantes.

Outro trabalho que destacamos é o de Baldino (1998) que sugere a Assimilação Solidária como alternativa de explicitação daquilo que geralmente fica implícito no “contrato didático" (CHEVALARD; BOSH; GASCON, 2001), entre outros, os critérios de aprovação em Matemática. Segundo Baldino (1998, p. 12, grifos do autor) a assimilação solidária é

> uma proposta didático pedagógica que consiste em colocar um *critério subsidiário de aprovação explícito* sobre a mesa da negociação do contrato didático, esta mesa em torno da qual todos querem fazer crer, ou que a negociação não está ali, ou que ali se negociam *exigências sobre aptidões matemáticas* Com isso, a *consciência cínica* entra em pânico, porque os critérios subsidiários de aprovação sempre figuraram no rol das transgressões, daquilo que tem de ser evitado, escondido, tal como a matéria prima dos escândalos.

Baldino (1998, p. 13) acredita que essa proposta pedagógica tem a capacidade de subverter a lógica do critério da promoção com base na avaliação da quantidade de conhecimentos adquiridos do ensino tradicional vigente para outra lógica baseada na avaliação do trabalho produtivo dos grupos de alunos em sala de aula. Nessa perspectiva, o trabalho produtivo desses grupos é medido em termos de tempo de execução e não pela competência matemática a que se chega ou pela quantidade de objetos aprendidos. Assim, os alunos em situação de dificuldade na aprendizagem da Matemática, por exemplo, seriam obrigados à seções extras de "recuperação paralela" que seriam incorporadas à nota de assimilação solidária que seria acrescida das notas em provas.

A assimilação solidária proposta por Baldino (1998) considera que a aprendizagem é consequência do trabalho realizado, o que desafiaria a ideia de promoção baseada apenas na competência matemática. Uma das estratégias de implantação da assimilação solidária é a negociação do trabalho produtivo por meio de um contrato de trabalho, expressão derivada do conceito de contrato didático (CHEVALARD; BOSH; GASCON, 2001), em que se explicita com precisão e clareza o que o estudante deve fazer para aprender o esperado dele. Caso o aluno não cumpra o acordado no contrato de trabalho a instituição tem o direito de reprová-lo.

Segundo Baldino (1995, p. 3), o "contrato de trabalho" diferentemente do "contrato didático" abrange fatores pedagógicos como o engajamento dos alunos com o objeto do conhecimento e se apoia nos seguintes elementos:

1) o contrato de trabalho, escrito, discutido e votado, estruturado em torno de pontos não negociáveis;
2) o trabalho em grupos homogêneos com regras para pontuação grupal além de provas escritas;
3) a plenária da turma reunida no final de cada aula;
4) recuperação paralela fora do horário da aula.

O que é do nosso interesse nesse trabalho é justamente o trabalho em grupo. No "contrato de trabalho" escrito e divulgado em textos, Baldino (1995) declara que o trabalho dos grupos tem supremacia sobre o trabalho individual e o trabalho do grupão tem supremacia sobre o trabalho dos grupos. Os grupos são constituídos de 4 elementos e segundo o autor são heterogêneos em tudo, mas na tarefa são homogêneos, ou seja, os componentes do grupo devem estar no mesmo nível de aprendizagem matemática, pois

> se um dos elementos já sabe, não há tarefa grupal e a farsa do ensino tradicional vigente fica transposta ao grupo, um ensinando e os outros fingindo que aprendem. É ridículo o argumento que o conhecimento vai se "transmitir" do que sabe mais ao que sabe menos, por uma espécie de osmose ou contágio (BALDINO, 1995, p. 5).

Baldino (1995, p. 5) até considera que um "elemento que sabe mais" possa participar do grupo, desde que na condição de monitor, como aquele que faz perguntas para conduzir os colegas. Nesse caso, esse "elemento" estaria aprendendo a ensinar.

Segundo Baldino (1995), a constituição de grupos homogêneos se dá a partir da aplicação de um teste inicial de conteúdos, cujo resultado possibilita agrupar os alunos segundo o rendimento na matemática. Nossa experiência docente mostra que os resultados de um único teste diagnóstico são insuficientes para se traçar um perfil de qualquer sujeito, a fim de classificá-lo, segundo o seu nível de desenvolvimento e aprendizagem.

O trabalho de Baldino (1995, 1988) segue em direção contrária ao do nosso em que os grupos são heterogêneos em tudo e aposta que é justamente essa heterogeneidade que amplia as possibilidades de aprendizagem. No entanto, podemos dizer que há um ponto de aproximação que é o incentivo às trocas em trabalho de grupo e a consideração de que o aluno realiza um trabalho produtivo em sala de aula.

As pesquisas concluídas e em andamento, aqui brevemente abordadas, focam principalmente os processos comunicacionais entre professores e estudantes. Nosso trabalho embora trate do diálogo entre os diferentes sujeitos que interagem no processo de aprendizagem da matemática, foca, principalmente, os limites e as possibilidades de se colocar em diálogo estudantes em situação de sucesso e estudantes em situação de fracasso ou dificuldade, no contexto da aprendizagem escolar da matemática e, assim, difere dos demais trabalhos.

Na pesquisa publicada no livro "Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática" Alrø e Skovsmose (2006) mostram também que o padrão de comunicação entre professores e alunos é determinado por diferentes fatores e que diferentes cenários implicam em diferentes aprendizagens. Esses autores analisaram o padrão de comunicação e, portanto, o diálogo entre professores e alunos e sua relação com a aprendizagem matemática. No caso da nossa pesquisa, o interesse é principalmente pesquisar a comunicação, especialmente o diálogo, entre os estudantes que estão em situação de sucesso escolar e aqueles que estão em situação de fracasso escolar ou de dificuldade, a fim de verificar a relação desses diálogos com a aprendizagem dos envolvidos e com a organização do trabalho pedagógico.

Estamos considerando que em uma sala com qualquer número de estudantes é natural que haja diferentes níveis de aprendizagem, ou seja, a heterogeneidade é um traço característico. No entanto, consideramos de maneira especial a dificuldade de se lidar com essa heterogeneidade em uma sala de aula com a proporção de quarenta estudantes para um professor. A comunicação em uma sala de aula com essa proporção, geralmente, não acontece de modo a favorecer a aprendizagem, sobretudo, daqueles que estão em situação de dificuldade. Mas a heterogeneidade da sala de aula pode deixar de ser um obstáculo se for administrada com vista à aprendizagem de todos os envolvidos no processo. Assim, nosso interesse é provocar o diálogo entre os dois grupos de estudantes já citados, por meio de diferentes situações, para isso, é preciso considerar que tanto a professora quanto a pesquisadora são partícipes ativas desse diálogo.

Conforme temos falado desde o início, a heterogeneidade da sala de aula, que se apresenta sob a forma de assimetrias cognitivas, é uma realidade sempre presente entre dois sujeitos, uma vez que o conhecimento, da mesma forma que a experiência, é de cada um. Essa heterogeneidade pode ser utilizada para favorecer o diálogo, a interação e, portanto, a aprendizagem, pois sempre há e haverá assimetrias cognitivas entre sujeitos.

2.3. Mas o que é mesmo diálogo?

Segundo Bohm (1996, p. 6), a palavra *diálogo* resulta da junção das palavras gregas *dia* e *logos*. *Dia* significa *por meio de* ou *através e logos* pode ser traduzida como *significado* ou *sentido da palavra*. Ao recorrer à etimologia da palavra diálogo, David Bohn contribui para esclarecer o mal entendido semântico do termo, que no senso comum é tido apenas como contrário de monólogo ou conversação entre duas pessoas. Para Bohm (1996), o diálogo pode acontecer entre duas ou mais pessoas e até mesmo com uma pessoa consigo mesma. A etimologia da palavra dá a ideia de diálogo como significados que fluem por meio das pessoas e entre elas. Mas apenas a etimologia da palavra não nos dá o seu real significado e muito menos os diversos sentidos presentes nas variadas concepções acerca do diálogo.

Ainda que o termo seja polissêmico e que não haja concordância sobre seus significados e sentidos, parece haver consenso de que o diálogo é, por si só, bom e desejável nas relações sociais. Parece não haver dúvidas de que o diálogo deve ser garantido em todos os meios sociais inclusive o pedagógico. É bastante comum se ouvir que a sala de aula deve se converter em espaço de diálogo e que as relações entre professores e estudantes devem ser mais dialógicas. Isso ocorre porque se acredita que a educação é um processo fundamentalmente dialógico. Nesse sentido, Freire (2011c, p. 26) contribui ao afirmar que "ninguém educa ninguém, como tampouco ninguém se educa a si mesmo: os homens se educam em comunhão, mediatizados pelo mundo." É ainda Freire (2011c) que nos leva a compreender que o pensamento do professor só adquire autenticidade na inter-relação com o estudante, ou na autenticidade do pensamento do estudante e, portanto, na intercomunicação.

Mas essa valorização do diálogo na relação pedagógica é relativamente recente. Para Brayner (2009), entre as décadas de 1930 e 1960, quando a concepção tradicional começa a perder força no ensino e um novo ideário pedagógico começa a surgir a partir das ideias pragmáticas introduzidas no Brasil por Anísio Teixeira, é que a noção de diálogo entre professor e estudantes entra em pauta, sobretudo porque saímos de uma concepção em que o centro do trabalho pedagógico era o professor e passamos para uma em que o estudante ganha centralidade e com isso se discute a democratização da palavra, o que implica na busca do diálogo. Para Brayner (2009, p. 208), "o diálogo aparecia, assim, no horizonte educativo, como prática dotada de certas virtudes altamente desejáveis, sendo a maior delas a possibilidade de um encontro intersubjetivo carregado de potencial 'emancipatório."

Nesse trabalho, busca-se compreender o diálogo no ambiente educativo, sobretudo o seu potencial emancipatório no processo de aprendizagem e ensino da Matemática. Em última instância, procura-se compreender de que maneira os diálogos entre estudantes e os diálogos entre estudantes e professores podem contribuir para a aprendizagem significativa da Matemática de todos os envolvidos.

Para Freire (1986, p. 123), por meio do diálogo nós refletimos juntos sobre o que sabemos e o que não sabemos, para podermos, em seguida, agir criticamente para transformar a realidade. Nesta perspectiva, o diálogo tem a ver com certa postura democrática de refletirmos sobre o que fazemos e como fazemos, para agirmos. Não é o diálogo vazio de ação, de conteúdos e de valores, mas repleto de significados e, portanto, histórico e ideológico. Mas não é apenas ação, é também reflexão. Na mesma direção, Alrø e Skovsmose (2006, p. 133) afirmam que "dialogar significa agir em cooperação". Assim, o diálogo pressupõe ação e reflexão, pressupõe uma ação intencional não individual, pressupõe a existência de sujeitos ativos.

González Rey (2006, p. 30) contribui com essa concepção ao afirmar que "o trabalho pedagógico tem muito a ver com a organização da sala de aula como espaço de diálogo, reflexão e construção". Do mesmo modo, para Tacca (2006, p. 50) "o diálogo é o cerne da relação na aprendizagem, em que as partes envolvidas fazem trocas e negociam os diferentes significados do objeto do conhecimento, o que dá relevância ao papel ativo e altamente reflexivo, emocional e criativo do estudante e do professor.”

Esses autores nos conduziram a pensar na relação entre diálogo e aprendizagem matemática e a questionar: o que é mesmo diálogo? O que é o diálogo dentro do processo de comunicação? Que padrões de comunicação estão presentes na sala de aula? A sala de aula é mesmo um lugar de diálogo? O trabalho pedagógico pressupõe mesmo o diálogo? As relações entre estudantes e entre estes e o professor podem ser mais dialógicas? A atividade matemática na escola favorece a emergência do diálogo? Quais são os elementos constitutivos do diálogo na aprendizagem da Matemática?

Esses questionamentos nos levaram a refletir que o mundo de relações do estudante na escola, sobretudo a relação jovem-adulto, é marcado por relações de poder, o que nem sempre possibilita uma comunicação mais horizontal baseada no diálogo.

A escola como está hoje organizada nem sempre é objetivada por meio do diálogo ou por outra natureza de relação entre saber e poder. A organização do trabalho pedagógico em Matemática, sobretudo os processos avaliativos, perpetuam relações de poder com base na meritocracia, em que aqueles que estão em situação de fracasso ou de dificuldade na aprendizagem são silenciados, não apenas nas suas vozes, mas nas suas produções matemáticas.

Por fim, o grande desafio da escola na construção de saberes necessários à vida em sociedade e ao exercício da cidadania exige a prática democrática do diálogo, sem a qual a função social da escola não ultrapassa da reprodução das relações sociais.

Para responder aos questionamentos e aprofundar as reflexões acima, poderíamos utilizar várias concepções de diálogo, mas estamos fazendo a opção pelas ideias de dois autores. O primeiro deles, Mikhail Bakhtin, tem sido considerado o teórico do diálogo, o segundo, Paulo Freire, tem sido o teórico que aposta na emancipação por meio do diálogo. Além desses dois, outros autores serão convidados a entrar na conversa.

Muito embora Bakhtin tenha construído suas ideias no âmbito da teoria literária e da filosofia da linguagem, há nelas uma concepção de diálogo que tem fortes implicações pedagógicas, o que nos interessa para compreender o diálogo no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Sua concepção de diálogo tem um caráter interativo, social e histórico-cultural que possibilita empregá-la no campo da Pedagogia. Sua teoria nos possibilita compreender o diálogo como construção humana. Diferentemente de Bakhtin, Paulo Freire construiu suas ideias no âmbito da Pedagogia. Sua concepção de diálogo é profundamente pedagógica ao propor uma epistemologia que funda novas relações entre professor, estudantes e objetos do conhecimento.

2.4. O diálogo em Mikhail Bakhtin

Durante a Conferência *Bakhtin, cultura, literatura e linguagem*[5], o pesquisador italiano Augusto Ponzio[6], para discutir a centralidade do pensamento Bakhtiniano no diálogo, afirma que Bakhtin, da mesma forma que Vigotski, insiste na relação entre pensamento e linguagem, que possibilita, portanto, articular esta perspectiva à metacognição e à metalinguagem. O conferencista fazendo referência ao pensamento do primeiro acrescenta: "penso, logo falo e, se falo, as palavras são minhas, mas as pego da boca de outros. Alguém me doou a palavra. Existe o outro. Tenho que contabilizar o outro. É preciso conhecer o outro."

Para compreender o pensamento de Bakhtin, é preciso compreender a relação entre o eu e o outro de que fala Ponzio. Esse outro é considerado naquilo que o torna único e que não pode ser reduzido a um simples objeto do meu olhar, em especial ao se tratar da matemática escolar. Esse outro é parte de mim e sou parte do outro, mas ambos somos únicos. Bakhtin (2010, p. 21) afirma que

> Quando contemplo no todo um homem situado fora e diante de mim, nossos horizontes concretos efetivamente vivenciáveis não coincidem. Porque em qualquer situação ou proximidade que esse outro que contemplo possa estar em relação a mim, sempre verei e saberei algo que ele, da sua posição fora e diante de mim, não pode ver: as partes do seu corpo inacessíveis ao seu próprio olhar – a cabeça, o rosto, e sua expressão, o mundo atrás dele, toda uma série de objetos e relações que, em função dessa ou daquela relação de reciprocidade entre nós, são acessíveis a mim e inacessíveis a ele. Quando nos olhamos, dois diferentes mundos se refletem na pupila do nosso olhar.

Essa forma de ver e perceber o outro foi chamada por Bakhtin (2010, p. 21) de "excedente de visão", que sempre é determinada pela singularidade e unicidade da posição que cada sujeito ocupa no mundo, que, por sua vez, tem fortes implicações acerca da concepção do que se constitui a relação pedagógica no que diz respeito à relação professor-estudante e estudante-estudante. As interações na relação pedagógica são marcadas por esse excedente de visão. Da minha posição como professora vejo e percebo coisas no estudante que ele mesmo não vê, assim como ele, da posição dele, vê em mim coisas que não vejo. O

[5] Conferência realizada no dia 03/11/2010, na Universidade de Brasília, organizada Departamento de Teoria Literária e Literaturas do Instituto de Letras.
[6] Professor de Linguagem e membro do departamento de Práticas Linguísticas e Análise de Texto na Universidade de Bari (Itália), suas principais áreas de pesquisa são Filosofia da Linguagem, Linguística, Semiótica e Teoria Literária.

mesmo ocorre entre os próprios estudantes. A posição singular e única de cada sujeito na relação pedagógica marca o modo de perceber a si mesmo, ao outro e a própria relação.

Para Bakhtin (2010), as pessoas estão ligadas umas às outras. E é essa ligação com os outros que nos torna únicos. Mas o outro não está dado inexoravelmente, o outro precisa ser conhecido, lido, escutado, compreendido, pois apenas conhecendo, lendo, escutando e compreendendo esse outro eu posso conhecer, ler, escutar e compreender a mim mesmo. O excedente de minha visão me permite entrar no mundo do outro, colocar-me em seu lugar e isso condiciona minhas ações no mundo.

> Eu devo entrar em empatia com esse outro indivíduo, ver axiologicamente o mundo de dentro dele tal qual ele o vê, colocar-me no lugar dele e, depois de ter retornado ao meu lugar, completar o horizonte dele com o excedente de visão que desse meu lugar se descortina fora dele, convertê-lo, criar para ele um ambiente concludente a partir desse excedente da minha visão, do meu conhecimento, da minha vontade e do meu sentimento (BAKHTIN, 2010, p. 23).

Mas por mais que eu veja o outro e me coloque no lugar dele, eu permaneço eu e o outro permanece outro. Eu me coloco no "lugar do outro" não naquilo que ele efetivamente é, mas naquilo que eu acredito que ele seja. Entro em empatia com o outro, mas retorno a mim e dou significado ao que vejo e percebo. Tal perspectiva deveria ser a base da relação pedagógica em que o professor necessariamente deveria se colocar no lugar do estudante, não para ser o estudante, mas para tentar perceber o mundo a partir da sua lógica.

Dessa forma, não faz sentido pensar em uma organização pedagógica em que o fazer matemático seja despersonalizado, em que a produção matemática seja encarcerada em procedimentos universais e, principalmente, em que os sujeitos não tenham a possibilidade de dialogar sobre seus fazeres, sobre suas produções matemáticas. É preciso compreender que na atividade pedagógica ocorre uma permanente reconstrução dos objetos de ensino e o mesmo ocorre com a Matemática, embora se acredite que esta seja exata e universal. Conhecer o fazer matemático do outro, me faz ter mais consciência do meu próprio fazer.

Mas por mais que nos coloquemos no lugar outro, somos únicos e diversos e, por isso, não nos perdemos uns nos outros. Minha identidade não se funde com identidade do outro que está à minha frente.

> O que enriqueceria o acontecimento se eu me fundisse com outra pessoa, se de *dois* passássemos a *um*? Que vantagem teria eu se o outro se fundisse comigo? Ele veria e saberia apenas o que eu sei, ele somente reproduziria em si mesmo o impasse da minha vida; é bom que ele permaneça fora de mim, porque dessa posição ele pode ver e saber o que não vejo nem sei a partir da minha posição, e pode enriquecer substancialmente o acontecimento de minha vida. Se *apenas* me fundo com a vida do outro, não vou além de aprofundar a sua inviabilidade e duplicá-la numericamente. Do ponto de vista da real eficácia do acontecimento, quando somos dois o que importa não é que além de mim exista *mais um indivíduo*, no fundo o mesmo (dois indivíduos), mas que ele seja *outro* para mim, e nesse sentido a simples

> simpatia dele por minha vida não representa nossa fusão num ser único e nem a repetição numérica de minha vida e sim um enriquecimento substancial do acontecimento, pois minha vida é vivenciada empaticamente por ele em nova forma, em nova categoria axiológica como a vida do outro, que tem colorido axiológico diferente e é aceita e justificada diferentemente da própria vida dele (BAKHTIN, 2010, p. 80, grifos do autor)

Para Bakhtin (2010, p. 30), como sujeitos únicos vivenciamos internamente toda a nossa expressividade externa e, por isso, construir uma autoimagem é algo complexo. Ainda que estejamos diante de um espelho "permanecemos dentro de nós mesmos e vemos apenas o nosso reflexo." Até mesmo nesse processo de autocontemplação nos comportamos como se estivéssemos diante de um outro fictício.

E é assim, diante do outro, que nos constituímos sujeito das nossas ações e entramos em permanente diálogo com o outro ainda que não queiramos. Para Bakhtin (2010, p. 99), "o homem é uma equação do *eu* e do *outro*."

Como o homem é essa complexa equação da relação do eu com o outro, a interação e consequentemente o diálogo são pressupostos da sua existência. E para compreender a dimensão dialógica das interações sociais é preciso compreender como os discursos são construídos, é preciso compreender como por meio da interação social nos colocamos em diálogo uns com os outros.

2.4.1. O enunciado

Os diferentes campos da atividade humana estão ligados ao uso da linguagem, que é tão diversa quanto são esses campos. O uso da língua se dá por meio de enunciados orais e escritos que são elaborados e proferidos pelos integrantes de um determinado campo (BAKHTIN, 2010, p. 261). Se tomarmos como referência a escola, podemos perceber uma série de enunciados que são partilhados por determinados grupos e segundo determinadas situações. Esses enunciados orais e escritos dependem também da área do conhecimento em que estão baseadas as situações. Se a área é Matemática, esses enunciados terão determinado estilo e, se for Geografia, terão outro. Se quem constrói o enunciado é o professor, existem determinadas características; se são estudantes, existem outras.

A reflexão em torno dos enunciados nos leva à questão da semiótica ou ao uso de signos e símbolos de significado sociocultural. A natureza da linguagem utilizada em determinada área do conhecimento pode ser determinante para a definição dos processos de comunicação. O que ocorre na Matemática, especialmente no campo da Álgebra, é que os signos e símbolos, muitas vezes, não fazem sentido para os sujeitos, que sequer conseguem dialogar sobre os conteúdos matemáticos, como veremos, por exemplo, em algumas situações da pesquisa exploratória.

Os enunciados refletem as características, as finalidades, os conteúdos de um determinado campo, por isso, possuem um estilo próprio. Apesar de individuais, os enunciados carregam o estilo de uma determinada área que é eminentemente social. Para Bakhtin (2010, p. 262), cada campo adota "tipos relativamente estáveis de enunciados", os quais são denominados "gêneros do discurso".

Bakhtin e Volochínov (2009, p. 113, grifos dos autores) argumentam que a enunciação é, por excelência, um ato social e, portanto, cultural e, assim, pleno da relação de poder: "o ato de fala, ou, mais exatamente, seu produto, a enunciação, não pode de forma alguma ser considerado como individual no sentido estrito do termo, não pode ser explicado a partir das condições psicofisiológicas do sujeito falante. *A enunciação é de natureza social.*"

Assim, enunciar é exprimir, expressar, transmitir por meio de palavras, sentimentos, emoções, ideias, opiniões que, apesar de individuais, compõem um campo de significação que não é meramente individual, mas social. A enunciação pressupõe a existência do outro que escuta, que acolhe, que replica, que concorda, que discorda, que interage, enfim que dialoga com aquele que produz o enunciado.

Assim pensada, a enunciação e, portanto, os enunciados, na perspectiva de Bakhtin e Volochínov (2009, p. 133), são constituídos não apenas de "formas linguísticas que entram na composição (as palavras, as formas morfológicas ou sintáticas, os sons, as entoações), mas igualmente pelos elementos não verbais da situação." Fazem parte de um todo que inclui significações individuais e sociais. É o próprio Bakhtin (2010) que adverte que a perda da situação compromete a compreensão da mesma forma que a perda da palavra. Assim, um enunciado só pode ser compreendido ou só adquire sentido dentro de uma situação e porque provém de alguém com destino a alguém, ou seja, está situado em determinado espaço sociocultural e em determinado tempo.

Na Matemática, a perda da situação se dá pelo tipo de "transposição didática" (CHEVALLARD, BOSH e GASCÓN, 2001, p. 136) que se faz dos objetos matemáticos. Nós sabemos que a matemática escolar se diferencia, em muitos aspectos, da "obra matemática original". Isso se deriva do fato de que o saber matemático passa por transformações e/ou reconstruções para torná-lo passível de ser ensinado e aprendido na escola. Nesse processo, o papel do professor de Matemática é oposto ao papel do matemático; enquanto este último trata de um saber despersonalizado e descontextualizado, o primeiro deve resgatar a situação que gera, na sua gênese, o conhecimento.

Os enunciados matemáticos dependem, portanto, das situações que, por sua vez, dependem da transposição didática. Quando a transposição didática não se compromete com a Matemática como construto humano e com a possibilidade de o estudante fazer matemática a partir de conhecimentos "contextualizados em situações próximas" (PAIS, 2001, p. 28), a interação do professor com os estudantes, dos estudantes entre si e destes com a Matemática é marcada pela ausência de significados partilhados.

A enunciação é, portanto, o produto da interação de sujeitos que dividem um mesmo espaço sociocultural, partilham uma dada situação e sentidos subjetivos (GONZÁLEZ REY, 2003). De acordo com Bakhtin e Volochínov (2009, p. 117, grifos dos autores):

> Toda palavra comporta *duas faces*. Ela é determinada tanto pelo fato *de* que procede de alguém, como pelo fato de que se dirige *para* alguém. Ela constitui *justamente o produto da interação do locutor e do ouvinte*. Toda palavra serve de expressão a um em relação ao *outro*. Através da palavra, defino-me em relação ao outro, isto é, em última análise, em relação à coletividade. A palavra é uma espécie de ponte lançada entre mim e os outros. Se ela se apoia sobre mim numa extremidade, na outra apoia-se sobre o meu interlocutor. A palavra é o território comum do locutor e do interlocutor.

Quando escolho as palavras que vão compor o meu discurso não o faço aleatoriamente. Escolho as palavras que tenham significado para mim, mas que penso que estejam ao alcance do outro que me ouve. Nesse processo, não estou escolhendo apenas signos abstratos de uma língua, mas palavras que são socialmente significativas em meu meio social e que são adequadas para aquela situação em particular. Estou construindo enunciados.

Mas não podemos deixar de considerar que o que está ao alcance do outro, do meu ponto de vista, é sempre uma hipótese que traduz o que imagino ser o conhecimento teórico e prático-real que o outro possui. Quando enuncio uma ideia para o outro, parto dessa hipótese, que pode estar próxima ou distante do que o outro realmente sabe e do que o outro é. Isso tem uma implicação pedagógica importante do ponto de vista das interações, pois o diálogo pode contribuir para a eficácia da hipótese, enquanto processo de permanente reconstrução, na medida em que, por meio das enunciações do outro, posso ter pistas dos seus pensamentos.

A relação pedagógica é marcada pelas hipóteses que o professor tem acerca do conhecimento do aluno. Quando constrói seus enunciados, o professor parte dessas hipóteses, construindo expectativas sobre o fazer do aluno que podem tanto limitar quanto possibilitar a ação/reflexão do aluno sobre os objetos do conhecimento.

Bakhtin e Volochínov (2009, p. 127) defendem que a língua não é um sistema abstrato de formas linguísticas, de signos e também não é apenas o ato de fala individual monológico. A língua é constituída pelo fenômeno da interação verbal, por meio do que eles denominam de enunciações. Assim "a interação constitui a realidade fundamental da língua."

Segundo Bakhtin (2010, p. 275 e 296), “por sua precisão e simplicidade, o diálogo é a forma clássica de comunicação discursiva” e “todo enunciado é um elo da comunicação discursiva de um determinado campo.” Assim, os sujeitos que participam do diálogo e constroem seus enunciados participam de um jogo de significação que pressupõe intenções, reciprocidade, escolha de meios linguísticos, estilos e antecipações que vão caracterizar o gênero do discurso e que permitirão a compreensão do conteúdo desses discursos.

Mas o outro que se coloca na posição de ouvinte não é passivo, pois ele pode atribuir significado que nem sempre é o mesmo do emissor e, assim, há no diálogo a “alternância dos sujeitos do discurso”. O sujeito que fala passa a palavra ao sujeito que ouve, dando lugar à “compreensão ativamente responsiva” deste, que constrói réplicas a partir dessa compreensão (BAKHTIN, 2010, p. 275). Desse ponto de vista, podemos definir o diálogo como essa alternância entre enunciados.

Bakhtin (2010, p. 275) adverte que as relações dialógicas de “pergunta-resposta, afirmação-objeção, afirmação-concordância, proposta-aceitação, ordem-execução etc – são impossíveis entre unidades da língua (palavras e orações) [...] Essas relações só são possíveis entre enunciações.” E essas enunciações pressupõem a existência de diferentes sujeitos do discurso que são membros da comunicação discursiva. Pressupõe que existem outros em relação ao falante. Desta forma, são os enunciados, e não as palavras e orações, a unidade da comunicação discursiva.

Para Bakhtin (2010, p. 292), as palavras e as orações em si não pertencem a ninguém e não carregam significados ou juízos de valor *a priori*. São os enunciados ou as enunciações no interior do diálogo que possuem essa capacidade. “Portanto, a emoção, o juízo de valor, a expressão são estranhos à palavra da língua e surgem unicamente no processo de seu emprego vivo em um enunciado concreto.”

Essa concepção nos remete ao dialogismo como princípio fundante da língua. Para Bakhtin e Volochínov (2009, p. 127),

> O diálogo, no sentido estrito do termo, não constitui, é claro, senão uma das formas, é verdade que das mais importantes, da interação verbal. Mas pode-se compreender a palavra “diálogo” num sentido amplo, isto é, não apenas como a comunicação em voz alta, de pessoas colocadas face a face, mas toda comunicação verbal, de qualquer tipo que seja.

Esse conceito ampliado de diálogo possibilita considerar que nos espaços sociais há diferentes tipos de diálogo, que nessa perspectiva pode acontecer entre duas ou mais pessoas, entre uma pessoa e um texto qualquer e até entre dois ou mais textos. No caso da aula de Matemática, o diálogo acontece entre o professor e os estudantes, entre os estudantes, entre ambos e os objetos matemáticos e até mesmo entre o estudante e ele mesmo.

A pesquisa em sala de aula torna tal realidade ainda mais complexa, quando insere o diálogo do pesquisador com todos esses sujeitos e com os objetos matemáticos.

Assim percebido, o diálogo compõe uma comunicação verbal e não verbal que se vincula a diferentes situações, textos e contextos, em uma rede tecida por formas complexas e carregadas de sentidos subjetivos (GONZÁLEZ REY, 2003).

É importante destacar também que, para Bakhtin (2010), o sujeito que fala não é o primeiro a falar, não inaugura o enunciado, pois este como elo da comunicação discursiva faz parte de um campo de significação social em que as intenções, os estilos, os conteúdos são partilhados. As palavras e orações são "repetíveis", mas os enunciados são "irrepetíveis". Quando escolhemos palavras e orações para os nossos enunciados, nós as tiramos de um repertório que é social e não de um sistema abstrato de formas linguísticas. Nossos enunciados, contraditoriamente, se reportam ao contexto sociocultural, ao campo a que se referem e, principalmente, aos enunciados de outros.

> A experiência discursiva individual de qualquer pessoa se forma e se desenvolve em uma interação constante e contínua com os enunciados individuais dos outros. Em certo sentido, essa experiência pode ser caracterizada como processo de *assimilação* – mais ou menos criador – das palavras do *outro* (e não das palavras da língua). Nosso discurso, isto é, todos os nossos enunciados (inclusive as obras criadas) é pleno de palavras de outros, de um grau vário de alteridade e de assimilabilidade, de um grau vário de aperceptibilidade e de relevância. Essas palavras dos outros trazem consigo a sua expressão, o seu tom valorativo que assimilamos, reelaboramos, e reacentuamos (BAKHTIN, 2010, p. 294, grifos do autor).

O outro é sempre alguém que eu assimilei, que entrou em meu discurso oral ou escrito. Nesse sentido, minha voz está repleta de outras vozes, meus enunciados são constituídos por outros enunciados. Ao construir meus enunciados, vou me constituindo como sujeito. Desta forma, o dialogismo é princípio de constituição do sujeito e seu princípio de ação (FIORIN, 2008, P. 55).

Em sala de aula, a fala do estudante está repleta da fala do professor, de colegas, de outros professores e dos livros que leu até aí. Do mesmo modo, a fala do professor está repleta das vozes de seus colegas, dos seus ex-professores, dos livros que leu ao longo da vida, dos livros didáticos.

Para Ponzio[7], o outro, quer eu goste ou não, vai entrar em diálogo comigo. E, desta forma, o diálogo não é uma concessão, o diálogo é inevitável. Em seu livro, esse autor reafirma: "o diálogo não é uma concessão, um convite do eu, mas uma necessidade, uma imposição, em um mundo que já pertence a outros" (PONZIO, 2009, p. 23).

---

[7] Na conferência *Bakhtin, cultura, literatura e linguagem,* realizada na Universidade de Brasília em 03/11/2010.

Como o diálogo é inevitável e não é uma concessão, não podemos pensar em criar o diálogo na atividade matemática, pois ele já existe. O que podemos pensar é em criar situações que favoreçam a emergência dos diálogos, a fim de colocá-los a serviço da aprendizagem. Ou seja, podemos potencializá-los, no sentido de favorecer a aprendizagem matemática em contextos de produções mais solidárias.

2.4.2. O diálogo com os pares

Não sendo uma concessão, o diálogo constitui o eu e é por ele constituído. É nas interações sociais, na história e na cultura que o sujeito se constitui em relação com outros sujeitos e agindo sobre o mundo constroem seus enunciados.

Bakhtin e Volochínov (2009, p. 72) afirmam que:

> Assim como, para observar o processo de combustão convém colocar o corpo no meio atmosférico, da mesma forma, para observar o fenômeno da linguagem, é preciso situar os sujeitos – emissor e receptor do som –, bem como o próprio som, no meio social. Com efeito, é indispensável que o locutor e o ouvinte pertençam a mesma comunidade linguística, a uma sociedade claramente organizada. E mais, é indispensável que esses dois indivíduos estejam integrados na unicidade da situação social imediata, quer dizer que tenham uma relação de pessoa para pessoa sobre um terreno bem-definido. É apenas sobre esse terreno preciso que a troca linguística se torna possível; um terreno de acordo ocasional não se presta a isso, mesmo que haja comunhão de espírito.

Fica claro, portanto, que duas condições são indispensáveis para que o diálogo se estabeleça: i) a unicidade do meio social mais amplo e ii) o contexto ou a situação social imediata. Isso pressupõe que haja entre os interlocutores alguma reciprocidade que possibilite a compreensão responsiva, sem a qual não há diálogo. Nesse sentido, para criar situações que favoreçam o diálogo entre dois estudantes no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, é preciso considerar o meio social em que esses sujeitos vivem e as situações que podem gerar significado para ambos e que podem produzir essa compreensão responsiva.

Isso nos remete à questão afetivo-social sobre as expectativas do OUTRO em relação ao meu EU. Nas palavras de Bakhtin (2010, p. 302),

> Ao falar, sempre levo em conta o fundo aperceptível da percepção do meu discurso pelo destinatário: até que ponto dele está a par da situação, dispõe de conhecimentos especiais de um dado campo cultural da comunicação; levo em conta as suas concepções e convicções, os seus preconceitos (do meu ponto de vista), as suas simpatias e antipatias – tudo isso irá determinar a ativa compreensão responsiva do meu enunciado por ele.

Isso é determinante para a escolha do estilo de fala e, portanto, do gênero do discurso, pois cada enunciado tem endereço ou destinatário certo. A escolha é determinada por antecipações do que esse outro é capaz de compreender e antecipações do que esse outro vai replicar que, como dissemos, é sempre hipotético.

Para Bakhtin (2010, p. 262), os gêneros do discurso correspondem a “tipos relativamente estáveis de enunciados" elaborados em diferentes esferas de utilização da língua. Para esse autor, em cada campo da atividade humana a riqueza e a diversidade de gêneros do discurso são infinitas porque esses gêneros crescem e se diferenciam à medida que esse campo se desenvolve e se complexifica.

No campo da Matemática, há uma heterogeneidade de gêneros do discurso, tanto orais quanto escritos, que podem mediar o diálogo. Cada gênero pode gerar um tipo de comunicação discursiva que favorece mais ou menos os diálogos.

No âmbito da escola e, mais precisamente, da sala de aula onde se aprende e se ensina Matemática, precisamos considerar não apenas os gêneros textuais próprios dessa área do conhecimento e que vão contribuir para dar significação aos enunciados, podendo ou não facilitar o diálogo, mas a possibilidade de haver entre os sujeitos falantes uma certa reciprocidade que possibilite o diálogo e portanto a aprendizagem. Precisamos considerar se os sujeitos fazem parte da mesma comunidade de fala.

2.5. O diálogo em Paulo Freire

Como já foi dito anteriormente, a concepção de diálogo de Paulo Freire, diferentemente da de Bakhtin, foi construída no âmbito de uma teoria pedagógica. As ideias de Freire constituem uma epistemologia que subverte a lógica da organização escolar tradicional, aqui entendida como aquela organização que ainda hoje é comum de se ver, em que o processo pedagógico está centrado na figura do professor e na transmissão de conhecimentos.

Ao se contrapor à educação tradicional, que dicotomiza as relações dos homens com outros homens e com o mundo, Freire (2011a, p.83) inaugura uma epistemologia ao negar o que chamou de “educação bancária”. Ele afirma que a educação, assim pensada, é contrária à própria natureza humana, pois coloca o homem como expectador e não como criador e recriador do mundo. A perspectiva da educação bancária atribui ao homem um papel passivo na construção do mundo e a escola, assim organizada, contribui para apassivar ainda mais o homem.

De forma contundente, Freire (2011a, p. 83) afirma que “se o educador é o que sabe, se o educandos são os que nada sabem. Cabe àquele dar, entregar, levar, transmitir o seu saber aos segundos. Saber que deixa se ser de ‘experiência feito’ para ser de experiência narrada ou transmitida”. Freire conclui que o educador bancário não percebe que a vida humana apenas adquire sentido na comunicação e, portanto, nas relações dialógicas e mediatizadoras que os educandos estabelecem uns com os outros e com o mundo. Freire (1992, p. 109) ainda acrescenta que

> toda prática educativa implica sempre a existência de sujeitos, aquele ou aquela que ensina e aprende e aquele ou aquela que, em situação de aprendiz, ensina também, a existência do objeto a ser ensinado e aprendido – a ser re-conhecido e conhecido – o conteúdo afinal.

O cerne da epistemologia freireana está justamente na defesa da educação como situação gnosiológica e dialógica, que insiste no caráter histórico-cultural do homem e do mundo, vendo-os como inacabados e em construção, daí o papel de transformação do processo educativo. Nessa perspectiva, não é o educador aquele que sabe e o estudante aquele que não sabe, mas ao contrário ambos são aprendizes ou sujeitos cognoscentes do processo educacional. São educadores-educandos e educandos-educadores em relação dialógica entre si e com os objetos do conhecimento.

A epistemologia freireana aponta o diálogo como pertencente à natureza humana e o dialogismo como essência de uma educação que contribui para a libertação do homem, para a sua emancipação. Uma educação em que educadores e educandos estão ambos se educando. Em *Medo e Ousadia*, em diálogo com Ira Shor, Freire (1986, p14) afirma: "o diálogo pertence à natureza do ser humano, enquanto ser de comunicação. O diálogo sela o ato de aprender, que nunca é individual, embora tenha uma dimensão individual."

Tal perspectiva aproxima-se da teoria sociocultural de Vigotski (2000), pois afirma categoricamente que o diálogo sela o ato de aprender, ou seja, que situações de interação e comunicação desencadeiam situações de aprendizagem ou que, embora tenha uma dimensão individual, a aprendizagem é eminentemente social. Isso ocorre inclusive no âmbito da aprendizagem matemática, pois as situações de interação na resolução de problemas e atividades matemáticas desencadeiam processos metacognitivos de regulação e de validação que potencializam e qualificam os processos de aprender.

Para Freire (2011a), o diálogo é um fenômeno humano que se realiza na *práxis* cujos elementos constitutivos são a ação e a reflexão não dicotomizadas. Freire (2011a, p. 108) acredita que "não é no silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação-reflexão", é, portanto, na *práxis* que os homens se constituem sujeitos da sua própria existência.

Ao desenvolver seu conceito de *práxis* como ação e reflexão humana para transformação da realidade, Freire (2011a), da mesma forma que Bakhtin (2010), contabiliza o outro como um NÃO EU, projetado, idealizado e representado mentalmente por MIM, que lhe dirige a palavra. E este outro a quem me dirijo é, por sua vez, parte de mim, pois é projeção do meu próprio inconsciente. Nesse processo, nunca me dirijo ao outro, mas ao que concebo que ele seja. Mas esse outro que não é necessariamente um sujeito humano, fazendo parte da realidade objetiva, contribui para a constituição do homem como sujeito de ação:

> não haveria ação humana se não houvesse uma realidade objetiva, um mundo como ‘não eu’ do homem, capaz de desafiá-lo; como também não haveria ação humana se o homem não fosse um ‘projeto’, um mais além de si, capaz de captar a sua realidade, de conhecê-la para transformá-la (FREIRE, 2011a, p. 55),.

Mas Freire (2011a) adverte que o homem não é apenas sujeito de ação, mas também de reflexão. Por meio do diálogo, os homens se encontram para construir e reconstruir o mundo, agindo e refletindo sobre a sua realidade.

No trabalho de construção e reconstrução do mundo, não há homens virtuosos que detêm o conhecimento e homens menos virtuosos sobre os quais se depositam os conhecimentos. Ainda que tenham saberes diferentes, todos os homens, sejam eles educadores ou educandos, possuem saberes igualmente importantes. Para Freire (2011a, p. 228), o diálogo funda-se na colaboração, ainda que os sujeitos tenham papeis sociais distintos. Não há, portanto, dominação, pois como Bakhtin, Freire defende que constituímos e somos constituídos nas relações com os outros:

> O *eu* dialógico, pelo contrário, sabe que é exatamente o *tu* que o constitui. Sabe também que, constituído por um *tu* – um não-eu –, esse *tu* que o constitui se constitui, por sua vez, como *eu*, ao ter no seu *eu* um *tu*. Desta forma, o eu e o tu passam a ser, na dialética destas relações constitutivas, dois *tu* que se fazem dois *eu* (FREIRE, 2011a, p. 227).

A relação do EU com o TU ou com o NÃO EU marca os processos de conhecer/aprender, mas isso não implica em determinação ou assujeitamento de um ao outro. Pelo contrário, só conhece/aprende verdadeiramente aquele que sem se assujeitar aos imperativos de outrem dá significado aos saberes, aquele que agindo criticamente consegue se apropriar do aprendido, transformando esses saberes em conhecimentos possíveis de serem adaptados a novas situações.

Não é sem razão que boa parte dos saberes matemáticos com os quais a escola trabalha não fazem sentido para os alunos. Muitos desses saberes seguem apenas a lógica do educador ou lógica interna da própria Matemática e, por isso, não fazem o menor sentido para os alunos que sequer se sentem estimulados ou desafiados a se envolverem na atividade matemática. Nesse caso, não há diálogo dos sujeitos entre si e nem com os objetos do conhecimento, pois narração pura e simples não é diálogo.

Para Freire (2011b), falta à educação, principalmente, o gosto pela descoberta, sem o qual, os conhecimentos são apenas transmitidos como se existissem aprioristicamente, independentemente dos sujeitos e do meio social. E isso ocorre com a Matemática. Algumas concepções partem da ideia de que a “Matemática e o pensamento matemático tem valor por si mesmos” (SKOVSMOSE, 2007, p. 32), sendo desnecessário discutir sua função social e política, o que culmina em práticas pedagógicas divorciadas da realidade concreta, em que não há espaço para a descoberta, para o fazer diferente, para a ação e a reflexão, enfim para o diálogo.

Muito embora Freire insista no diálogo entre educadores e educandos, sua concepção de ação educativa dialógica não poderia deixar de fora o diálogo entre os próprios educandos. Para Freire (1977, p. 65) “sem a relação comunicativa entre sujeitos cognoscentes em torno do objeto cognoscível desaparecia o ato cognoscitivo.” Essa relação comunicativa é tanto mais profícua quanto houver entre os sujeitos uma relação de reciprocidade como adverte Bakhtin (2010). Da mesma forma, Freire (1977, p. 67) afirma que o ato comunicativo e, portanto, o diálogo “implica numa reciprocidade que não pode ser rompida.” Assim, estamos considerando que o diálogo entre os estudantes que pertencem a uma mesma comunidade de fala, e que têm padrões semelhantes de comunicação, possui características de reciprocidade que poderiam desencadear importantes processos metacognitivos, que levariam à aprendizagem da matemática.

2.5.1. Diálogo e metacognição

Paulo Freire (1986, 2011a) insiste, ao longo de toda a sua obra, que uma das características fundantes do homem como ser histórico-cultural é a sua consciência da incompletude. Nessa consciência, reside a possibilidade de problematização de si mesmo, da sua realidade e do seu próprio processo de humanização. É no pouco saber de si que reside a possibilidade de busca e de descoberta do EU e isso não acontece no isolamento, mas nas relações dialógicas que se estabelecem com o OUTRO.

A ação dialógica pressupõe a negação da invasão, da manipulação, dos *slogans*, das relações assimétricas e pressupõe, sobretudo, considerar que o diálogo é pressuposto da existência humana e, como tal, só faz sentido se tiver como objetivo o esforço conjunto e não antagônico de promover a transformação da realidade, na medida em que se sabendo incompletos, os seres humanos são seres de procura. Assim, o dialogismo tem a função precípua de levar o homem a pronunciar o mundo, ou seja, a transformar a sua realidade concreta, em diálogo com os outros homens. O diálogo é, nesse sentido, o meio de problematização do mundo e do próprio conhecimento para promover a humanização do homem (FREIRE, 1977, p. 43).

Ao tomar consciência da sua incompletude, o homem, em processo metacognitivo, pode não apenas saber, mas saber que sabe e saber que não sabe. Para Freire e Shor (1986), essa consciência, adquirida nas relações dialógicas, nos permite refletir sobre o que sabemos e não sabemos para atuar criticamente e transformar a realidade.

Mas o homem não apenas sabe que sabe e sabe que não sabe, ele sabe que o mundo, ou que sua realidade objetiva e imediata, também é incompleta, também está em construção e isso dá a ele a possibilidade de construí-la e reconstruí-la, de transformá-la. Assim, "o diálogo é o encontro amoroso dos homens que, mediatizados pelo mundo, o 'pronunciam', isto é, o transformam, e, transformando-o, o humanizam para a humanização de todos" (FREIRE, 1977, p. 43).

Sendo encontro entre homens incompletos e que se sabem incompletos, o diálogo é a expressão máxima da humanização de sujeitos que com os pés fincados em sua realidade buscam transformarem-se e transformá-la. Assim, a relação pedagógica sendo dialógica, seria por excelência o meio de humanização do homem em busca da transformação de si e da realidade.

Nesse sentido, os objetos de conhecimento, como a Matemática, estariam a serviço da humanização do homem e da transformação da realidade e, como tal, teriam a função de contribuir para a problematização do homem, do mundo e dos próprios saberes historicamente construídos. Mas para que assim seja, os saberes escolares, conteúdos dos diálogos da relação pedagógica, deveriam ter como ponto de partida a cultura dos sujeitos envolvidos (FREIRE, 2011b). Isso seria impossível sem um profundo conhecer de si, conhecer do outro e conhecer do mundo. E esses diferentes saberes exigem dos sujeitos do processo de ensino e aprendizagem, disposição ao diálogo, amorosidade e postura democrática.

Tal perspectiva é complexa para todo e qualquer professor, mas no âmbito do processo de ensino e aprendizagem da Matemática adquire contornos ainda mais complexos, uma vez que o professor dessa área, em geral, viveu um processo de formação, ao longo da escola básica e da própria formação inicial, muito distante da relação dialógica de que fala Paulo Freire. A construção de uma relação pedagógica-dialógica exige um movimento de descentração, de desconstrução de uma lógica historicamente posta, em que o sujeito da atividade matemática era passivo em seus processos de aprender. Requer o conhecimento e reconhecimento do outro como sujeito de ação e de reflexão e, portanto, de produção matemática. Exige a construção de uma organização do trabalho pedagógico fundada na interação social, na experiência com a alteridade que, conforme Guérios e Stoltz (2010, p. 11), “conduz-nos a ver aquilo que jamais poderíamos imaginar e nem sequer sonhar por estarmos deamasiado fixados no que consideramos como evidente e relacionado com o cotidiano.”

As ideias de Freire (1977, 1986, 2011a, 2011b, 2011c), Bakhtin (2010), Bakhtin e Volochínov (2009) e Vigotisk (2000) nos convidam a pensar nessa relação com o outro da atividade pedagógica e, assim, nos instiga a refletir sobre a educação como experiência gnosiológica de alteridade, de diálogo, amorosidade e democracia.

2.5.2. Diálogo, amorosidade e democracia

O diálogo freireano tem determinadas características que o fazem fundamento da existência humana, princípio do processo educativo e opção político-pedagógica daqueles que se comprometem com a libertação e, portanto, com a autonomia dos estudantes. Para Freire (2011a), o amor, a humildade, a fé nos homens, a esperança e o pensar verdadeiro são os fundamentos do diálogo.

Em Freire (2011a), a amorosidade é decorrente da consciência de que a pronúncia do mundo é um ato de criação e recriação que se funda no respeito aos saberes do educando, no compromisso de libertar os homens da não-aprendizagem e do obscurantismo, na abertura e disponibilidade à alegria de viver, na constatação de que na relação pedagógica a afetividade não se separa da cognição e, portanto, do prazer pela busca incansável de respostas.

Na perspectiva freireana, é impossível pensar em um processo de ensino e de aprendizagem da Matemática em que, de um lado, estão os que sabem e, de outro, estão os que não sabem Matemática. É na interação dialógica de quem está em situação de sucesso ou de êxito com quem está em situação provisória de fracasso ou de dificuldade que reside a possibilidade de modificação dessa realidade, que não sendo absoluta e imutável, pode ser transformada.

Mas Freire (2011a) acrescenta que o processo de criação e recriação do mundo pelo ato pedagógico não pode ser arrogante. Há que se ter humildade. Não há diálogo, portanto, se o professor é o que sabe e os estudantes, os que não sabem. A humildade diz respeito à consideração de que todos sabem algo. Dessa característica decorre a fé nos homens e em sua capacidade de aprender. Essa fé tem a ver com a crença de que os homens são seres de procura e que o dessilenciamento possibilita ao homem fazer-se e refazer-se. Tem a ver com a vocação inalienável do homem de “ser mais”. Assim, dialogar com outro é revelar a fé nele e em sua capacidade de ir além, de aprender mais.

Dessa forma, o diálogo é também esperançoso, uma vez que, como sujeitos históricos, somos condicionados, mas não determinados, e, por isso, o mundo não está dado de maneira inexorável e, então, podemos conhecer e intervir no mundo; podemos, enfim, de modo esperançoso, reconstruir nossa história no mundo.

Do ponto de vista da aprendizagem matemática, isso significa que a situação provisória de fracasso, ou de dificuldade, pode ser reconstruída, pode ser reinventada por meio de relações mais horizontais e mais dialógicas entre aqueles que teoricamente sabem mais e aqueles que teoricamente sabem menos.

Por fim, Freire (2011a, p. 114) defende que "não há o diálogo verdadeiro se não há nos seus sujeitos um pensar verdadeiro. Pensar crítico. Pensar que, não aceitando a dicotomia mundo-homens, reconhece entre eles uma inquebrantável solidariedade." Mas o "pensar verdadeiro" ou "pensar certo" ou "pensar crítico" exige questionamento de teorias e práticas. Exige abrir mão de certezas absolutas e, principalmente, a atenta observação da não dicotomia entre teorias e práticas, entre ação e reflexão. Exige considerar a diversidade de saberes e a possibilidade de diálogo entre esses saberes. Para Freire (2011c, p.38, grifos do autor),

> Pensar certo não é *quefazer* de quem se isola, de quem se 'aconchega' a si mesmo na solidão, mas ato comunicante. Não há por isso mesmo pensar sem entendimento, e o entendimento, do ponto de vista do pensar certo, não é transferido, mas coparticipado.

Paulo Freire insiste que é na intercomunicação que ocorre o que chama de "pensar certo" ou "pensar verdadeiro." Assim, a grande tarefa do educador seria instigar, estimular e desafiar os estudantes a pensar e essa é uma opção político-pedagógica e democrática.

> O fato de me perceber no mundo, com o mundo e com os outros me põe numa posição em face do mundo que não é de quem nada tem a ver com ele. Afinal minha presença no mundo não é a de quem a ele se adapta, mas a de quem nele se insere. É a posição de quem luta para não ser apenas *objeto*, mas sujeito também da história (FREIRE, 2011c, p. 53)

Novamente Freire advoga em favor do fato de que homens e mulheres são sujeitos da sua história, não são objetos ou expectadores da vida que passa, mas partícipes e artífices da história. Dialogar e aprender juntos com as diferenças uns dos outros é imperativo ético e democrático de quem se sabe incompleto e sabe que o ato dialógico diminui essa incompletude, na medida em que possibilita a troca de saberes, a troca de experiências, a aprendizagem mútua.

Freire (2011c) postula que a relação dialógica é pressuposto da condição humana e fundamento da democracia, mas ele vai além ao considerar que a relação dialógica é fundamental para despertar a curiosidade epistemológica, que possibilita ao sujeito passar do senso comum ao conhecimento científico.

2.6. Interação, diálogo, mediação, metacognição e aprendizagem matemática

Muito se tem falado da relação entre os processos de interação, de comunicação e os processos de aprendizagem. Nos tempos atuais, é impossível pensar na aprendizagem e no desenvolvimento cognitivo sem pensar na relação com o outro.

Para Fávero (1993), saímos de uma psicogênese para uma psicossociogênese do conhecimento humano. As novas concepções de ciência e tecnologia nos fizeram construir novas concepções sobre o sujeito humano e seus processos de aprendizagem. Ao conceber a ciência como construto humano e despi-la da neutralidade social e política, pregada pelo positivismo, acabamos por considerá-la como processo e produto da *práxis* humana e, desta forma, foi preciso rever as concepções sobre a geração e produção de conhecimento. Para essa autora, nessas novas concepções, é inadequado estudar o desenvolvimento do pensamento humano e, portanto, os processos de aprender, tomando o sujeito individualmente sem considerar seu contexto sócio-histórico-cultural.

2.6.1. Processos cognitivos e mediação da aprendizagem matemática

Ao pensar na aprendizagem como processo que acontece, ao mesmo tempo, no plano individual e social, não podemos deixar de pensá-la, portanto, como atividade mediada, sobretudo porque, no âmbito escolar, os processos de aprendizagem que ocorrem são claramente processos de interação, de comunicação e de negociação de significados.

Para Fávero (2005b), se consideramos que a interação humana se constitui como uma permanente troca de significados, então, temos que pensar como Vigotski no efeito dos signos no processo de desenvolvimento psicológico e na cognição.

Isso nos remete à questão da mediação semiótica que, segundo Fávero (2005a, 2005b, 1993) nos conduz a pensar que a relação dos sujeitos com os objetos é sempre mediada pelas interações com os outros. Isso pressupõe um permanente confronto com as dificuldades inerentes aos instrumentos culturais mediadores dessa relação. Ora, se nas interações, a fala é um importante instrumento de mediação, temos que ter consciência das dificuldades advindas dos significados que estão explícitos e implícitos nos processos de comunicação e que podem, ou não, ser partilhados pelos sujeitos. Mas essas dificuldades também podem ser inerentes a outros instrumentos de mediação como os jogos, os exercícios, os problemas e outras situações de aprendizagem, a partir dos quais se constituíram as interações e diálogos no processo de aprendizagem matemática e que são objeto de estudo dessa pesquisa.

González-Rey (2009), ao analisar a obra de Vigotski no que se refere à ênfase na mediação a partir dos signos, afirma que essa ênfase é objetivante porque considera os processos psíquicos, entre eles, a aprendizagem com base na internalização, mantendo assim dicotomias históricas, tais como, interno e externo, social e individual, cognição e emoção. Em sua análise, resgata a categoria “sentido”, que, segundo ele, foi pouco desenvolvida por Vigotski, para discutir o caráter produtivo, construtivo e reflexivo da aprendizagem, que vem desenvolvendo. Tal perspectiva resgata o lugar do simbólico no processo de mediação da aprendizagem, o papel do sujeito que aprende por processos de significação, de atribuição de sentido e de reflexão que extrapola a mera internalização. Por fim, Gonzalez-Rey (2009) destaca a integração da emoção no processo de aprendizagem, reafirmando a importância da comunicação e do diálogo. Para ele, os sujeitos não podem se subordinar a fala um do outro. Por isso, na relação pedagógica, o aluno precisa ser participativo e ativo na construção da aprendizagem, pois assim o processo de aprender se integrará a sua produção de sentidos.

Assim, não faz sentido pensar na mediação semiótica somente por meio de signos que sejam social e culturalmente significativos. É preciso pensar no caráter simbólico da mediação e no sujeito que, de modo ativo, atribui sentido ao processo de mediação.

Na mesma direção, Fávero (2005a, 2005b), apoiada nas ideias de Pierce (1894), afirma que a mediação semiótica é um fenômeno complexo que não pode ser reduzido apenas ao aspecto simbólico e seu estudo exige a compreensão mais ampla dos signos como mediadores de significados. Nessa concepção, os signos podem ter diferentes relações com os objetos. Nesse sentido, a linguagem algébrica, por exemplo, como um sistema de signos, pode carregar uma relação de representação que a conecta a um objeto matemático e, por isso, possui um papel icônico que possibilita evocar a similaridade entre ambos. Mas, por manter uma conexão contextual com o objeto, a linguagem algébrica pode ter uma relação indexadora que possibilita vinculá-la ao objeto matemático por uma pretensa existência concreta. Não podemos deixar de considerar, como afirma Duval (2009), que os objetos matemáticos não são acessíveis de forma direta, necessitando sempre de uma representação para adquirir significado. Por fim, esse sistema de signos pode ter uma relação simbólica que possibilita dar significado ao objeto referente, por meio da interpretação do que está representado.

Como veremos mais adiante, Duval (2009, 2011) adverte que essa classificação pierceana é insuficiente porque deixa de considerar um aspecto crucial na aquisição do conhecimento, de modo especial na Matemática, que são as relações entre diferentes sistemas semióticos e a possibilidade de conversão de um registro produzido em um sistema em registro produzido em outro sistema, o que por si só implica em um processo de atribuição de significado.

Mas o sujeito que participa desse processo é um sujeito que pensa, que toma decisões ao se relacionar com os outros e com os objetos do conhecimento. Como já nos apontou Freire (1986, 2011a), muitas vezes ele não apenas sabe que sabe, como sabe que não sabe. Assim há uma inquestionável relação entre os processos de aprendizagem e desenvolvimento e os processos de tomada de consciência sobre o saber de si e o saber do mundo, que são processos que integram cognição e metacognição.

2.6.2. Processos metacognitivos e aprendizagem matemática

Para Fávero (2005a, 2005b) e Ribeiro (2003), é impossível separar objetivamente processos cognitivos de processos metacognitivos. Mas esse último diz respeito ao processo de tomada de consciência sobre o próprio conhecimento e envolve a avaliação, a regulação e a organização dos processos cognitivos.

No caso da Matemática, quando o estudante na resolução de um problema tem consciência dos processos de interpretação, das escolhas que fez, das estratégias que executou e consegue avaliar todo processo, realizando construções e reconstruções, podemos dizer que ele entrou em uma atividade metacognitiva, pois além de se conscientizar do que sabe, ele sabe avaliar o que sabe e o que não sabe para regular e organizar as suas ações.

Para Ribeiro (2003), “a prática da metacognição conduz a uma melhoria da atividade cognitiva e motivacional e, portanto, a uma potencialização do processo de aprender”. Isso significa que quando o estudante tem consciência sobre o que conhece e desconhece, ele se torna mais competente para avaliar suas estratégias e ações, para fazer escolhas, para mudar rumos e, portanto, para impactar positivamente seus processos cognitivos.

Flavel (1979, *apud* RIBEIRO, 2003, p. 111) advoga que a monitoração de processos cognitivos envolve quatro aspectos que são: i) o “conhecimento metacognitivo” que reúne ao mesmo tempo a consciência que o estudante tem de si mesmo e dos fatores que impactam na aprendizagem; ii) as “experiências metacognitivas” que corresponde à dimensão afetiva de ter impressões e percepções conscientes antes, durante e após a realização da tarefa.; iii) os “objetivos” que conduzem a tarefa cognitiva e que podem ser explícitos ou implícitos e iv) as “ações” que correspondem às estratégias utilizadas na realização da tarefa cognitiva.

Em síntese, como Fávero (2005b), podemos afirmar que a metacognição compreende, ao mesmo tempo, “conhecimento metacognitivos” e “regulações metacognitivos”, pois não implica apenas em ter consciência sobre os próprios processos cognitivos, mas também capacidade para avaliá-los para agir.

Ribeiro (2003) advoga que a metacognição tem importância capital para a aprendizagem porque possibilita ao sujeito ter consciência sobre o que sabe e sobre o que não sabe, permitindo que ele faça autorregulações, avaliações e planejamentos da melhor estratégia para cada tarefa que lhe é proposta. No caso da matemática, os processos metacognitivos poderiam levar o sujeito a escolher, de forma mais assertiva e segura, o algoritmo mais indicado para resolver determinada operação ou a estratégia mais adequada para resolver um problema.

Desse modo, podemos dizer que a interação e o diálogo entre os estudantes na aprendizagem da matemática desencadeiam importantes processos metacognitivos. Conforme salienta Fávero (2005a, p. 287), "embora as regulações em situação escolar se situem sempre numa dinâmica sociocognitiva, não podemos esquecer seu papel na aprendizagem e no ensino do ponto de vista das construções cognitivas elaboradas e exploradas pelo próprio sujeito." Dessa forma, a autora destaca a importância da autorregulação e, portanto, da metacognição para a aprendizagem de cada sujeito em contexto de interação e, assim, para seu desenvolvimento cognitivo. Por acréscimo, estamos considerando que também a validação é um processo metacognitivo importante para a aprendizagem, porque envolve a tomada de consciência, a apreciação e a avaliação do procedimento do outro em relação ao seu próprio procedimento, ao seu próprio fazer.

Como a validação e a autorregulação que acontecem a partir da interação e do diálogo são mediados pela produção matemática ou pelos registros escritos e orais dos estudantes, fomos conduzidas a Teoria dos Registros de Representação semiótica (DUVAL, 2009, 2011) que nos possibilita compreender o funcionamento cognitivo dos estudantes em termos de representações e mudanças de representação.

2.6.3. Os registros de representação semiótica

Na perspectiva de Fávero (1993), a compreensão da Matemática depende da escolha de meios mediacionais que não são aleatórios e veiculam significados socialmente partilhados e negociados que, em última instância, produzem sentidos para os sujeitos. Esses meios se manifestam em registros matemáticos orais e escritos. Damm (2002, p. 137) contribui para compreendermos a importância dos registros na aprendizagem da Matemática ao afirmar que "não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem o auxílio de uma representação." E acrescenta: "os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando, para sua apreensão o uso de uma representação."

Não sendo diretamente acessíveis, os objetos matemáticos são veiculados por meio de representações semióticas (DUVAL, 2009, 2011), que se traduzem em signos e símbolos cujos significados são socialmente negociados e partilhados. Mas esses signos e símbolos, além de terem um significado de ordem mais social, também precisam fazer sentido para o sujeito (VIGOTSKI, 2000).

Na construção da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, Duval (2009, p. 14) deixa claro que, para compreender a Matemática, é necessário distinguir um objeto da sua representação e acrescenta: "um mesmo objeto matemático pode ser dado através de diferentes representações." Ele afirma ainda que as representações semióticas (símbolos, sinais das operações, enunciados orais e escritos, fórmulas, figuras geométricas, etc.) são meio pelos quais os indivíduos externalizam suas representações mentais dos objetos matemáticos, tornando-os visíveis e acessíveis a outros. Assim, na sua perspectiva, "as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática."

Para Duval (2009, p. 18), é preciso considerar que "não há *noésis* sem semiósis", ou seja, não há apreensão conceitual, atribuição de significado, compreensão (*noésis*), sem uma pluralidade de representações semióticas que possam ser mobilizadas e coordenadas pelo sujeito (*semiósis*).

No processo de aprender e ensinar matemática, os sujeitos mobilizam e coordenam diferentes sistemas semióticos de representação. Mas a passagem de uma representação a outra, segundo Duval (2009, 2011) embora seja um processo corriqueiro não é nada trivial ou espontâneo. Assim, compreender como se dá esse processo é fundamental para a compreensão do funcionamento cognitivo dos estudantes.

Para Duval (2009, 2011), a mobilização e a coordenação de diferentes sistemas semióticos implicam em três atividades cognitivas que são inerentes a toda representação:

a) Formação – implica na escolha de traços perceptíveis que podem ser considerados a representação de algo. Que podem evocar um objeto da representação mental.
b) Tratamento – implica na mudança de representação segundo as regras internas do próprio sistema semiótico, de modo a conseguir uma outra representação semelhante à inicial. Assim, um tratamento ocorre dentro do mesmo sistema semiótico. Por exemplo, no processo de resolução de equações, ao reduzir termos

semelhantes, estamos fazendo um tratamento, pois a nova representação semelhante à anterior está dentro do sistema semiótico algébrico.

c) Conversão – implica em produzir uma nova representação semelhante à inicial, mas utilizando um outro sistema semiótico. Assim, uma conversão ocorre dentro de sistemas semióticos diferentes. Por exemplo, ao resolver problemas de 1º grau, ocorre uma conversão quando traduzimos a linguagem natural escrita do enunciado em uma equação. Saímos de um sistema semiótico da escrita em língua materna para um sistema semiótico algébrico.

Para Duval (2009), embora o ensino ainda privilegie a aprendizagem das regras de formação e tratamento, quando são analisadas em conjunto as atividades de tratamento e de conversão, é possível verificar dificuldades inerentes e persistentes nos processos de conversão. Isso porque a conversão implica na coordenação de registros de representação de diferentes sistemas semióticos.

Segundo Duval (2009), um dos grandes problemas da conversão de um registro de representação a outro registro está relacionado à questão da congruência, que diz respeito à correspondência de unidades de sentido nas duas representações.

Para Duval (2009, p. 66), “para determinar se duas representações são congruentes ou não, é preciso começar a segmentá-las em suas unidades significantes respectivas, de tal maneira que elas possam ser colocadas em correspondência.” A não congruência de representações pode conduzir a obstáculos e a fracassos na atividade cognitiva de conversão. É o que ocorre, por exemplo, quando no enunciado de um problema, a ordem das operações é inversa à ordem que devem aparecer no registro algébrico.

Isso não significa, todavia, que os estudantes tenham que entrar em contato apenas com problemas que possuam congruência semântica, mas é preciso ficar atento às dificuldades inerentes à conversão quando não há essa congruência.

O estudante como sujeito ativo da sua aprendizagem pode simplesmente se abster de realizar a atividade matemática de conversão, porque o custo é muito alto e ele não compreende o que deve fazer.

2.7. Subjetividade e aprendizagem matemática

A emergência de uma psicossociogênese do conhecimento humano fez surgir estudos como a Teoria Histórico-cultural da Subjetividade de González Rey (2003, 2005a, 2005b, 2006, 2009) que possibilita compreender os sujeitos e seus complexos processos psicológicos, destacando o papel ativo desses no processo de construção do conhecimento.

A teoria histórico-cultural da subjetividade, ao romper com dicotomias históricas entre social e individual, interno e externo, afetivo e cognitivo, intrapsíquico e interativo aponta importantes categorias que possibilitam compreender a subjetividade humana em seus aspectos individuais e sociais (GONZÁLEZ REY, 2003, 2005a). Tais categorias possibilitam lançar luzes sobre a complexa relação entre interação, diálogo, subjetividade e aprendizagem matemática.

Desse modo, a teoria tem importante valor heurístico para compreender os processos educacionais em que sujeitos individuais e sociais estão em permanente interação e em busca da aprendizagem que, como nos aponta Tacca e González Rey (2008), é um complexo processo que integra aspectos cognitivos e afetivos, a partir dos quais o sujeito produz sentidos subjetivos.

Para González Rey (2003, p. 202), a subjetividade não se apresenta como um fenômeno individual. Trata-se de um "sistema complexo produzido de forma simultânea no nível social e individual", cuja produção é histórica e cultural. Assim, o social deixa ser visto como meramente externo ao indivíduo. Na concepção desse pesquisador, a subjetividade social é constituída e constituinte das subjetividades individuais. Assim, a constituição social do indivíduo não segue uma trajetória ou uma lógica universal e linear, consequência do caráter ativo que adquire a relação entre social e individual.

González Rey (2003. p. 203) afirma que a subjetividade social exibe formas complexas de organização ligadas à institucionalização e à ação do sujeito em diferentes espaços. No caso da escola, estudantes, professores e todos os sujeitos que a compõe possuem singularidades e formas de produção de sentido que, no ambiente escolar, entram em contato, criando zonas de tensão que tanto geram acordos quanto desacordos, o que resulta em uma configuração singular única de cada escola.

No processo de ensino-aprendizagem da matemática, essas zonas de tensão se manifestam na emocionalidade dos sujeitos que os fazem se engajar ou não nas atividades propostas. Essa emocionalidade fica ainda mais evidente quando se trata da avaliação da aprendizagem matemática. Em nossa pesquisa trabalhamos com um grupo constituído por sujeitos rotulados pela escola como estudantes em situação de sucesso escolar ou de êxito e sujeitos rotulados como estudantes em situação de fracasso escolar ou de dificuldade na aprendizagem escolar da Matemática, que possuía uma complexa configuração, sobretudo no que dizia respeito à forma como esses se percebiam, percebiam a matemática e eram percebidos pelo professor.

González Rey (2003) adverte que a subjetividade social é constituída pelos diversos processos de produção de sentido e significados gerados nas diversas esferas sociais que, por sua vez, são histórica e socialmente constituídas por processos de subjetivação dos sujeitos que a compõem. Os sentidos que os sujeitos atribuem à atividade matemática são social e historicamente constituídos. Os sujeitos em suas relações sociais, familiares e escolares vão produzindo representações e, consequentemente, sentidos subjetivos do que é a Matemática e de como se dá o seu processo de ensino e aprendizagem. É importante que se diga que os processos de subjetivação individual estão absolutamente articulados com os sistemas de relações sociais. A esse conjunto de sentidos provenientes de diferentes espaços e experiências, González Rey (2003, p. 203) denomina de “configuração subjetiva”.

Para González Rey (2003), a noção de sujeito recupera o caráter dialético e complexo do homem, visto como capaz de optar, promover rupturas e de agir criativamente, ao mesmo tempo em que nega o determinismo externo presente em outras correntes da psicologia. Nesse sentido, estamos considerando que a situação de fracasso ou de dificuldade na aprendizagem da Matemática é transitória e que esse sujeito, em interação e diálogo com outros sujeitos em situação de sucesso ou de êxito, pode recuperar seu caráter ativo e promover a ruptura necessária para avançar na aprendizagem da Matemática. Assim, a dificuldade não é concebida de forma absoluta no sujeito, mas no sujeito em contexto, como parte de um processo temporal de desenvolvimento humano.

Do mesmo modo, o sujeito em situação de sucesso escolar, ao contribuir com as aprendizagens dos colegas pode ser desafiado e, assim, assumir um papel mais ativo em seus processos de aprender, ao assumir a função metacognitiva de validar as produções orais e escritas dos colegas que nem sempre são coincidentes com as suas.

2.8. Interação, cooperação e colaboração na aprendizagem matemática

No rastro das novas concepções sobre ciência e tecnologia também surgiram estudos que apontam o poder da colaboração e da cooperação entre estudantes no processo educacional. Como exemplo, temos os estudos de Duran (2008) e Duran e Vidal (2011) sobre a tutoria como uma espécie de “aprendizagem entre iguais”. Muito embora se possa questionar a expressão “aprendizagem entre iguais”, já que a diferença é pressuposto humano, esses autores, apoiados principalmente no socioconstrutivismo, apontam essa aprendizagem como cooperativa e consideram que

> la diversidad, incluso la de niveles de conocimientos, que tanto molesta a la enseñanza tradicional y homogeneizadora, es vista como algo positivo que juega a favor de la labor docente, teniendo como finalidad que cada alumno aprenda de los

> demás y se sienta responsable tanto de sua proprio aprendizaje com del de sus compañeros. (DURAN e VIDAL, 2011, p. 15)

Para esses autores, as situações de assimetrias cognitivas representam possibilidades e elementos facilitadores da aprendizagem, constituindo-se, dessa forma, em recurso para o ensino inclusivo, uma vez que possibilita que o sujeito se sinta responsável pela própria aprendizagem e também co-responsável pela aprendizagem dos outros com quem se relaciona.

Peixoto e Monteiro (1999, p. 11) argumentam que a maioria das situações de aprendizagem que acontecem em contextos da vida cotidiana ocorrem entre sujeitos com diferentes graus de competência em relação à tarefa dada. Eles acrescentam: “esse tipo de situação interactiva, normalmente, designada como interação assimétrica, caracteriza-se pela diferença nos papéis e no estatuto de cada um dos parceiros.”

Na escola isso não é diferente, os sujeitos que interagem no processo de ensino e aprendizagem da matemática possuem diferentes níveis de apreensão conceitual e, como nos adverte Charlot (2000), relacionam de forma também diferente com os saberes, isto é, estão em situação de assimetrias cognitivas. Ao invés de isolar esses sujeitos segundo o nível de apreensão conceitual, acreditamos que a interação assimétrica de que falam Peixoto e Monteiro (1999) constituem-se em possibilidades de aprendizagem.

Duran (2008, p. 13) esclarece que a “tutoria entre iguais”, pouco conhecida em seu país, é amplamente utilizada nos países anglo-saxões sob a denominação de *peer-tutoring*. Em um número dedicado a práticas efetivas em ensino da Matemática, no jornal *Evidence for Education*, publicado pelo *National Dissemination Center for Children with Desabilities* (NICHCY), Steedly et. al (2008, p. 3) apontam a *peer tutoring* como uma das práticas mais efetivas ou eficientes para estudantes em situação de dificuldade de aprendizagem na Matemática.

Do mesmo modo, Walberg e Paik (2000, p. 13), em relatório construído para a *International Academy of Education* e distribuído pela UNESCO, sobre práticas educativas eficientes, indicam que “a **tutoria entre iguais** ou o **ensino de tutores entre pares** promove uma aprendizagem eficaz, tanto nos alunos tutorados, como nos que actuam como tutores.”

Na tentativa de caracterizar o que denominam de “tutoria entre iguais”, Duran e Vidal (2011) diferenciam cooperação de colaboração, muito embora considerem essa distinção frágil. Para eles, no trabalho cooperativo os estudantes têm papeis relativamente similares e responsabilidades equivalentes, acontecendo uma reciprocidade média, em que esses, embora havendo assimetrias, dividem responsabilidades. Já no trabalho colaborativo há igualdade entre os membros do grupo e a reciprocidade é bastante alta. Eles afirmam que por processos interativos de negociação e de apropriação, na cooperação “el conocimeinto circula dentro del grupo de una forma multidirecional, no necessariamente de um alumno predeterminado a outro (DURAN e VIDAL, 2011, p. 27)”.

Para Duran e Vidal (2011, p.40) a “tutoria entre iguais” é uma forma de trabalho cooperativo baseado na criação de duplas, com relações assimétricas e objetivo comum, conhecido e compartilhado, no que diz respeito ao processo de aprendizagem de algum conhecimento curricular.

Para nós, a monitoria de que falamos em nosso estudo refere-se ao trabalho cooperativo entre estudantes, não necessariamente uma dupla, em que alguns estão em situação de sucesso ou de êxito e outros em situação de fracasso ou de dificuldade na aprendizagem escolar da matemática. Esse grupo de estudante tem como objetivo saber mais e melhor sobre os objetos matemáticos e, nesse sentido, interagem e dialogam a partir situações matemáticas sem que haja predeterminação na direção, no sentido e na forma como circulam os conhecimentos. Assim, ambos podem aprender uns com os outros.

3. PERCURSO METODOLÓGICO

A dialogicidade é uma exigência da natureza humana e também um reclamo da opção democrática do educador.
(FREIRE, 2010, p. 74)

É em interação e, portanto, em diálogo com os outros que vamos nos constituindo sujeitos do nosso percurso pelo mundo. É na tensão das relações sociais, especialmente por meio dos processos de comunicação, que vamos negociando e partilhando significados, construindo acordos, enfrentando desacordos, ou seja, vamos produzindo sentidos subjetivos (GONZÁLEZ-REY, 2005a) para a nossa existência. Assim, podemos dizer, como Freire (2010), que a dialogicidade é pressuposto da condição humana.

Foi pensando nesse pressuposto que resolvemos propor uma pesquisa em educação cujo cerne são os processos de comunicação, especialmente o diálogo, entre os diferentes sujeitos que interagem no contexto da aprendizagem escolar da Matemática, afinal, nos parecia óbvio que as relações pedagógicas se constituem a partir do diálogo. Restava-nos, portanto, pesquisar a relação entre diálogo e aprendizagem da matemática.

Entretanto, somente quando iniciamos a pesquisa exploratória é que constatamos a complexidade da pesquisa em que o diálogo é tanto objeto como método de pesquisa, o que nos levou a refletir sobre a natureza da pesquisa em educação e, de modo especial, na pesquisa em educação matemática.

Tais reflexões nos levaram a considerar que construir uma proposta metodológica para um projeto de pesquisa em Educação Matemática, exige pensar em um caminho ou em um percurso para a produção de conhecimento em uma área das ciências sociais, cujos sujeitos trabalham cotidianamente com objetos de uma ciência dita exata. Muito embora tenham em comum a Matemática, essas duas áreas possuem objetos e procedimentos absolutamente distintos. No que se refere à pesquisa científica, Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 4) afirmam que os educadores matemáticos, diferentemente dos matemáticos, realizam seus estudos por meio de "métodos interpretativos e analíticos das ciências sociais e humanas, tendo como perspectiva o desenvolvimento de conhecimentos e práticas pedagógicas que contribuam para uma formação mais integral, humana e crítica do aluno e do professor."

A perspectiva dos autores acima é congruente com as ideias de Fourez (1995, p. 81), para quem a ciência se propõe a fornecer interpretações do mundo por meio de uma linguagem inteligível, factível e, por isso mesmo, útil. Poderíamos pensar que objetivamente essas interpretações correspondem à realidade, são modelos do real. No entanto, o mesmo Fourez (1995) nos adverte que o modelo nunca é a realidade em si e que, portanto, não existe o melhor modelo, pois este sempre será uma aproximação.

Dessa forma, a pesquisa em Educação Matemática, da mesma forma que a pesquisa em educação, não busca a construção de modelos ideais ou universais, que poderiam ser replicados a toda e qualquer realidade, mas busca a interpretação das múltiplas relações estabelecidas entre o processo de ensino, o processo de aprendizagem e os objetos de ensino-aprendizagem, mas dentro de um dado contexto sociocultural. No nosso caso, a pesquisa buscou compreender a relação entre diálogo e aprendizagem matemática na organização do trabalho pedagógico escolar.

Ao assumir a ciência como uma tecnologia intelectual que produz modelos explicativos do mundo, Fourez (1995) afasta-se do paradigma positivista da ciência, segundo o qual a tarefa do cientista é desvelar um real ou uma verdade dada *a priori*. Segundo Fourez (1995, p. 86) "o fato de acreditar que a ciência seja uma tecnologia intelectual feita pelos humanos, para os humanos e tendo em vista os seus projetos não diminui em nada seu valor."

Para Gatti (2007, p.10), a pesquisa científica visa, em última instância, a criação de um "conjunto estruturado de conhecimentos que nos permita compreender em profundidade aquilo que, à primeira vista, o mundo das coisas e dos homens nos revela nebulosamente ou sob uma aparência caótica." Ela adverte, no entanto, que a pesquisa educacional possui especificidades porque diz respeito a seres humanos em situação de vida real, cuja essência é impossível de ser captada por métodos puramente experimentais.

A incorporação pelas ciências humanas e sociais do modelo objetivante, descritivo e explicativo das ciências exatas e biológicas foi feita a partir de um ideal de cientificidade que desconsidera a singularidade do ser humano como sujeito. Por outro lado, a adoção de modelos mais compreensivos e interpretativos não tem conseguido resolver o problema epistemológico das ciências humanas.

Para Japiassu (1978, p. 158),

> tanto o modelo explicativo quanto o modelo interpretativo apresentam dificuldades. Se nos decidirmos a tratar os fenômenos humanos "como coisas", ou seja, se nos limitarmos àquilo que nos ensinam as analogias formais entre sistemas materiais e fenômenos humanos, corremos o risco de relegar por completo ao domínio do não-sentido tudo que pertence à ordem das significações, das finalidades e dos valores.

Esse autor adverte que a adoção de perspectivas mais interpretativas não pode coisificar o ser humano e nem pode pretender a "apreensão da realidade", por meio da observação. Ao pesquisador é possível uma "reconstituição indireta", que em última instância visa decifrar a vida subjetiva ou o complexo processo de significação dos comportamentos humanos.

Fourez (1995, p.59) defende que “a observação será antes de mais nada uma construção do sujeito, e não a descoberta de alguma coisa que está lá independentemente do sujeito observante”. Nesse sentido, corrobora com as ideias de González Rey (2005a, 20) para quem as ciências antropossociais carecem de uma epistemologia qualitativa que considere o caráter construtivo e interpretativo do conhecimento, e isso “implica compreender o conhecimento como uma produção e não uma apropriação linear de uma realidade que se nos apresenta.”

O que esses autores defendem fundamentalmente é a necessidade de uma mudança epistemológica que altere a visão que se tem da produção do conhecimento. No caso da pesquisa educacional, essa mudança requer ainda que o pesquisador compreenda que a educação é uma área que possui uma complexidade muito peculiar pois é, ao mesmo tempo, área de pesquisa, atuação e de convergência de outras áreas de conhecimento.

Dessa forma, se o ser humano, seus pensamentos, seus diálogos e suas produções são objetos de investigação, o percurso da pesquisa é indiscutivelmente complexo. E mais, esse sujeito não será investigado individualmente, mas coletivamente. Em razão disso, fizemos a opção de pesquisar os processos de comunicação, em especial o diálogo entre sujeitos humanos que estudam matemática juntos, considerando as suas subjetividades individuais e sociais.

3.1. A complexidade do objeto de pesquisa, a escolha pela epistemologia qualitativa e por uma pesquisa participante

Em virtude da complexidade do nosso objeto de pesquisa: **o diálogo entre os diferentes sujeitos que interagem no contexto da aprendizagem escolar da Matemática nos anos finais do ensino fundamental**, fizemos a opção por uma abordagem que resgata o caráter epistemológico e a perspectiva construtiva, interpretativa e dialógica da produção de conhecimentos na pesquisa em ciências humanas e sociais (GONZÁLEZ REY, 2005a, 2005b).

Para González Rey (2005b, p. 3), sem uma revisão epistemológica, a pesquisa corre o risco, como de fato vem ocorrendo, de assumir uma posição instrumentalista em que o qualitativo é legitimado por meio dos instrumentos e não “pelos processos que caracterizam a produção do conhecimento.”

Na perspectiva aqui assumida, a produção de conhecimento em que o ser humano é ao mesmo tempo sujeito e objeto de pesquisa requer a redefinição do paradigma denominado qualitativo. Em razão disso, o percurso metodológico proposto leva em conta os três princípios ou atributos gerais, apontados por González Rey (2005a, 2005b), em sua epistemologia qualitativa:

i) **o conhecimento é uma produção construtiva-interpretativa;**

ii) **a produção do conhecimento possui um caráter interativo e portanto dialógico;**

iii) **na produção do conhecimento a singularidade é um nível legítimo.**

Considerar que a produção do conhecimento possui um caráter construtivo e interpretativo significa reafirmar que o conhecimento é uma produção humana que não está dado *a priori* e que não pode ser organizado por categorias universais (GONZÁLEZ REY, 2005b)

Nesse sentido, a produção do conhecimento é feita a partir de sucessivas construções e interpretações e da interação entre sujeitos singulares, alicerçada na comunicação, especialmente no diálogo, dos quais um é o próprio pesquisador.

Ao considerar o dialogismo um dos atributos da produção do conhecimento, González Rey (2005b) afirma que “a comunicação é uma via privilegiada para conhecer as configurações e processos de sentido subjetivo que caracterizam os sujeitos individuais e que permitem conhecer o modo como as diversas condições objetivas da vida social afetam o homem.”

Assim, para investigar o diálogo entre os diferentes sujeitos que interagem no contexto da aprendizagem escolar da Matemática nos anos finais do ensino fundamental, foi necessário construir um espaço dialógico que possibilitasse o acesso às múltiplas implicações das ações e reflexões dos sujeitos sobre o grupo e sobre a organização do trabalho pedagógico, bem como as implicações desses nas ações e reflexões dos sujeitos (estudantes, professor, professor-pesquisador).

Na epistemologia qualitativa, o pesquisador é também sujeito ativo e dialógico. Em razão disso, a percepção dos diálogos entre os vários sujeitos só foi possível porque foi estabelecida uma relação dialógica entre a pesquisadora e os sujeitos participantes da pesquisa. Para González Rey (2005a, p. 56) isso significa que

> toda pesquisa qualitativa deve implicar o desenvolvimento de um diálogo progressivo e organicamente construído, como uma das fontes principais de produção de informação. No diálogo se criam climas de segurança, tensão

> intelectual, interesse e confiança que favorecem níveis de conceituação da experiência que raramente aparecem de forma espontânea na vida cotidiana. Para se chegar a esses níveis de produção de informação, necessita-se de maturidade e interesse nos sujeitos estudados, os quais só surgem como resultado da maturidade dos processos de comunicação gerados de forma diversa no desenvolvimento da pesquisa.

Diante da complexidade de se ter o diálogo como objeto e método de pesquisa, assumimos que a produção das informações na pesquisa tinha caráter construtivo e interpretativo e que a singularidade do objeto, dos sujeitos e do próprio ambiente eram fontes de produção teórica que permitiam lançar luzes sobre a relação entre comunicação, especialmente o diálogo, e a aprendizagem da Matemática.

Assim, a opção por uma pesquisa participante (HAGUETTE, 2001) foi feita em razão da efetiva participação da pesquisadora no desenvolvimento do trabalho junto aos estudantes. Na pesquisa de campo, esta é denominada professora-pesquisadora, porque participa ativamente dos diálogos tanto dos estudantes entre si, como destes com ela própria e com as professoras colaboradoras do estudo.

Para Haguette (2001, p. 109), a pesquisa participante tem sido mais caracterizada do que definida. De modo geral, é possível dizer que a pesquisa participante envolve processos investigativos, educacionais e de ação. Do mesmo modo, Demo (2008, p. 93) afirma que a pesquisa participante "integra investigação social, trabalho educacional e ação".

Nesse sentido, a adoção da pesquisa participante foi importante porque possibilitou:

a) a rápida inserção da pesquisadora no ambiente da pesquisa, diminuindo o estranhamento dos participantes e permitindo que esta se tornasse um membro aceito na comunidade;
b) a observação dos diálogos no momento em que eles ocorriam, permitindo fazer intervenções que provocassem novas enunciações dos sujeitos;
c) compreender como os diálogos eram constituídos nos pequenos e grandes grupos;
d) acompanhar a produção matemática oral e escrita dos estudantes, permitindo compreender suas construções conceituais, especialmente os processos cognitivos e metacognitivos implicados nessas construções;
e) compreender a natureza do trabalho pedagógico desenvolvido pelas professoras, no momento em que ele era organizado;
f) participar de todas as etapas da organização do trabalho pedagógico, do planejamento à avaliação;
g) vivenciar dificuldades inerentes ao trabalho pedagógico das professoras na mediação da aprendizagem matemática;

h) conhecer os sujeitos participantes da pesquisa, identificando suas percepções, expectativas, angústias, estados emocionais que, de algum modo, ofereciam indicadores das suas histórias de vida e também dos seus processos de aprendizagem.

3.2. As etapas da pesquisa

A pesquisa de campo foi realizada fundamentalmente em duas etapas, mas aconteceram várias subetapas. A primeira etapa, que aconteceu no ano de 2011, foi uma pesquisa exploratória, realizada a fim de melhor delinear os objetivos e construir procedimentos e instrumentos adequados para compreender os diálogos entre os diferentes sujeitos participantes. Segundo Gil (2008) a pesquisa exploratória é aquela que tem por objetivo levar o pesquisador a se familiarizar com o problema de pesquisa e melhor conceber o projeto de investigação. Como veremos a seguir, essa pesquisa foi determinante para reorientar alguns procedimentos da pesquisa.

A segunda etapa, realizada durante todo o ano de 2012, foi a pesquisa de campo propriamente dita. Essa pesquisa foi realizada em local distinto da pesquisa exploratória e com sujeitos também distintos.

3.2.1. A pesquisa exploratória

A fim de melhor delinear o objeto e os objetivos do presente estudo, foi realizada uma pesquisa exploratória, em uma escola pública localizada na região administrativa de Planaltina-DF, no período de 31/5/2011 a 1º/12/2011, totalizando aproximadamente 120 horas de participação e observação em um projeto de monitoria, em turno contrário ao das aulas, e cerca de 80 horas de observação e participação em sala de aula.

3.2.1.1.A escola e os critérios de escolha

A escola foi escolhida em razão do público reconhecimento da mesma na gestão pedagógica, tendo já sido premiada por isso. Nessa região, havia mais de uma escola que havia recebido a mesma premiação, no entanto, a escola escolhida já possuía um projeto de monitoria da aprendizagem, coordenado por uma das professoras de Matemática dos anos finais do ensino fundamental, que demonstrou interesse em participar da pesquisa.

Também foi determinante para a escolha da escola a receptividade da direção da escola, da coordenação pedagógica e da professora coordenadora do projeto. Desde o início, firmei o compromisso de não identificar a escola que acolheu a pesquisa exploratória e os colaboradores da pesquisa.

Trata-se de uma escola de estrutura física bem simples, mas bastante conservada: possui quinze salas de aula, duas quadras de esportes, biblioteca, laboratório de informática, além dos espaços próprios para a administração e espaços para a gestão pedagógica, como sala dos professores, sala de coordenação e mecanografia. Possui também um espaço de leitura e um pátio coberto com palco que se destina às atividades culturais e reuniões com estudantes e pais.

Localizada em um bairro de população economicamente desfavorecida, a escola atende a estudantes do 1º ao 9º ano do ensino fundamental. Esses estudantes eram oriundos do próprio bairro e de bairros vizinhos, o que facilitava o deslocamento até a escola no turno contrário para participar do projeto de monitoria, em que estudantes considerados de sucesso escolar ou de bom rendimento nas avaliações cooperavam com a aprendizagem daqueles que estavam em situação de fracasso ou de dificuldade na aprendizagem da Matemática, testemunhada pelas avaliações, especialmente a prova.

3.2.1.2.Os sujeitos colaboradores da pesquisa exploratória

A pesquisa exploratória contou com a colaboração de uma professora de matemática e cerca de 30 estudantes participantes do projeto de monitoria, que ocorria em turno contrário ao das aulas. A fim de preservar a identidade dos participantes da pesquisa, serão utilizados nomes fictícios.

A Professora Edna, colaboradora da pesquisa e coordenadora do projeto de monitoria, era licenciada em Matemática e especialista em Metodologia do Ensino da Matemática. Possuía, em 2011, 22 anos de experiência docente na escola básica e, por cinco anos, foi docente de cursos de Licenciatura em Matemática e Pedagogia de uma universidade estadual, ministrando as disciplinas de Metodologia do Ensino da Matemática, Estágio Supervisionado e História da Matemática. Por três anos, ela atuou na gestão de uma escola: um ano como coordenadora pedagógica, um ano como vice-diretora e um ano como diretora. Em conversas informais, ela revelou que por sete anos foi professora de projetos de aceleração da aprendizagem e afirmou que tem especial apreço pelo trabalho com adolescentes com distorção idade-ano escolar.

Dada a impossibilidade de acompanhar o diálogo e a interação entre 30 estudantes, observamos de modo mais direto 12, dos quais quatro foram eleitos monitores pela professora Edna e tinham como papel acompanhar seus colegas, em turno contrário ao das aulas, realizando atividades fornecidas por ela. A tabela 1, a seguir, mostra os estudantes que participaram diretamente da pesquisa. Todos eles estavam matriculados no 8º ano do ensino fundamental e tinham idade entre 12 e 14 anos.

Tabela 2. Estudantes do 8º ano participantes da pesquisa exploratória

Nº	Nome fictício	Idade	Situação no projeto
1.	Angélica	13 anos	Recebia acompanhamento
2.	Carlos	13 anos	Recebia acompanhamento
3.	Daiane	13 anos	Recebia acompanhamento
4.	Débora	13 anos	Recebia acompanhamento
5.	Irina	14 anos	Recebia acompanhamento
6.	Isabela	12 anos	Monitora
7.	João	13 anos	Monitor
8.	Juliana	13 anos	Recebia acompanhamento
9.	Marina	13 anos	Monitora
10.	Pâmela	13 anos	Recebia acompanhamento
11.	Paulo	12 anos	Monitor
12.	Thiago	14 anos	Recebia acompanhamento

Desses estudantes, Irina e Thiago eram repetentes do 8º ano e estavam em situação de distorção idade-ano escolar, pois já haviam completado 14 anos. Os demais recebiam acompanhamento dos monitores no projeto porque estavam em situação de dificuldade na aprendizagem da matemática, evidenciada pelas suas notas, mas nunca haviam sido reprovados.

3.2.1.3.O projeto de monitoria da aprendizagem matemática – primeiro cenário da pesquisa exploratória

Estamos chamando de cenários os campos ou espaços/tempo de pesquisa, onde ocorreram as observações das interações e diálogos entre estudantes e destes com as professoras e com a professora-pesquisadora. Segundo González-Rey (2005b, p. 91) o campo de pesquisa é o "cenário social em que se tem lugar o fenômeno estudado e todo o conjunto de elementos que o constitui, e que, por sua vez, está constituído por ele." Assim, todos os espaços/tempos pedagógicos em que aconteceram a observação participante são cenários da pesquisa.

O primeiro cenário foi o projeto de monitoria, coordenado pela professora Edna, que ocorria no mesmo turno para os estudantes do 6º ano, dentro da sala de aula, e no horário contrário para os estudantes do 8º ano, em uma sala de aula comum destinada para esse fim. Todos os estudantes eram estimulados pela professora a participar do projeto e a ajudar uns aos outros no ambiente da própria sala de aula e no projeto. Por diversas vezes, a professora Edna falou: “se você tirou 8 ou 9 e não 10 na prova é porque tem algo que não fez e precisa aprender. Então vá para o projeto.” Muito embora estivesse atrelada à prova, sua fala revelou o desejo implícito de que todos pudessem aprender mais e melhor os conteúdos matemáticos.

O projeto de monitoria do 8º ano possuía momentos com a Professora Edna e esta, no intuito de colaborar com a pesquisa, sugeriu que para coletar as informações, eu desempenhasse o seu papel, coordenando as atividades no turno matutino e assim foi feito. Desta forma, entre os meses de maio e dezembro de 2011, às terças e quartas-feiras, no horário contrário ao das aulas, de 8h as 11h30, participei dos encontros de monitoria com os estudantes. Em alguns desses encontros, a professora coordenadora do projeto aparecia, fazia alguma intervenção junto a um grupo de estudantes, mas não permanecia por muito tempo.

Os estudantes foram divididos em grupos de aproximadamente cinco componentes e o combinado foi que, no máximo, três desses grupos comparecessem aos estudos que tinham duração de 1h30min, mas não foi bem isso que aconteceu. Alguns encontros chegaram a ter trinta estudantes, o que dificultava o trabalho de acompanhamento das interações e dos diálogos nos pequenos grupos.

Nos encontros de monitoria, os estudantes sentavam-se em pequenos grupos, de no máximo cinco ou seis componentes, e desenvolviam as atividades planejadas pela professora coordenadora do projeto para os estudos. A pedido da professora, os alunos realizavam atividades de cálculo algébrico por ela preparadas. Apenas no final do semestre, um conjunto de atividades explorava conteúdos da Geometria. Nos encontros, os estudantes também resolviam exercícios propostos em sala pela professora e exercícios de provas e trabalhos avaliativos.

Conforme será visto de forma mais detalhada nas análises, as listas, as provas e os exercícios avaliativos, de maneira geral, se caracterizavam pelo que Alrø e Skovsmose (2006, p. 52) denominam de “paradigma do exercício” e a maioria dos exercícios referia-se à “matemática pura” e alguns poucos a “semirrealidades”. Nenhum dos exercícios propostos se referia ao “mundo real”, portanto, sem contextualização fora da Matemática. Esses exercícios, em geral, eram de livros didáticos. A professora reaproveitava livros antigos, recortando os exercícios e montando manualmente as listas, por meio de colagens. Durante a pesquisa exploratória não fiquei sabendo que livros eram esses, pois as listas já chegavam montadas.

3.2.1.4.A sala de aula – um outro cenário da pesquisa exploratória

Já no primeiro encontro, a professora Edna convidou-me a assistir à sua aula, revelando abertura para a pesquisa. Assim, o segundo cenário da pesquisa foi a sala de aula, cujas observações aconteceram também entre maio e dezembro de 2011.

Em sala de aula, observamos que a professora era muito comunicativa e demonstrava muito carinho pelos estudantes. Suas falas transmitiam a crença de que os estudantes podiam aprender uns com os outros. Nas palavras da professora: *“*pode ser monitor quem quer ser monitor, quem quer aprender Matemática, pois é quando ensinamos que mais aprendemos.” Essa fala da professora revela uma concepção que se aproxima das ideias de Freire (1977, 2011a, 2011b, 2011c) para quem aquele que ensina aprende e o que aprende também ensina.

Durante toda a pesquisa, a professora Edna colocou à disposição da pesquisadora seus planejamentos, suas atividades e avaliações desenvolvidas e jamais se absteve de contribuir quando foi solicitada.

Em sala de aula sempre fui muito bem recebida pela professora e pelos estudantes, principalmente porque interagia com eles, tirando suas dúvidas. Muitos deles manifestavam alegria com a minha presença e falavam que era bom ter duas professoras.

No início do mês de junho, a professora chamou os estudantes para uma conversa e destacou que muitos não estavam cumprindo as atividades de sala e de casa e que, por isso, não chegariam a 50% da nota bimestral. Em dado momento ela perguntou: “quem quer mudar isso?” e todos levantaram a mão. Ela então propôs a confecção de um caderno de atividades, em que teriam a oportunidade de apresentar todas as atividades solicitadas por ela até então. Ela aproveitou o momento para convidar a todos para participar do projeto de tutoria. Após esse episódio, esse caderno continuamente foi levado para os encontros de monitoria para a resolução de exercícios propostos pela professora.

A professora era muito carismática e demonstrava ter boa relação com os estudantes. Ela sabia chamar a atenção deles e, além disso, era muito divertida. O tempo inteiro ela tentava levantar a autoestima deles, falando: “todos podem aprender”. E acrescentava: “a monitoria serve para todos aprenderem. Às vezes eu ensino aqui e você não aprende, mas na monitoria o colega ensina e você aprende.” Isto, de certa forma, preconiza que a professora concebe a possibilidade de haver aprendizagem fora da relação estudante-professor e, portanto, fora da sala de aula. Com essa fala, a professora sugeriu que o colega de sala possuía certas competências que ela mesma não possuía na mediação da aprendizagem matemática em sala de aula.

Durante todo o tempo em que permaneci na escola, percebi que a professora procurava estimular a solidariedade entre os alunos dizendo: ‘‘se meu colega não sabe, eu também sou responsável por isso”.

Em sala de aula, os monitores não tinham um papel bem definido como no projeto de monitoria, mas em geral eram cercados pelos mesmos colegas que frequentavam o projeto de monitoria e assim resolviam juntos os exercícios propostos.

Foi nesse contexto que a pesquisa exploratória foi desenvolvida. Dos muitos eventos ocorridos no período mencionado, estamos destacando alguns que apresentam “indicadores”, que, conforme González-Rey (2005a, p. 112), “são elementos que adquirem significação graças à interpretação do pesquisador, ou seja, sua significação não é acessível de forma direta à experiência, nem aparecem em sistemas de correlações.” Esses indicadores apontaram pré-categorias de análise que contribuíram tanto para a delimitação do objeto, quanto para a redefinição dos objetivos da pesquisa.

Ao final da pesquisa, consideramos ter havido um hiato entre as ações da professora e da professora-pesquisadora, pois nenhum planejamento foi feito em conjunto. Os indicadores (GONZALEZ-REY, 2005a) evidenciaram a necessidade de mudança de perspectiva para a pesquisa de campo propriamente dita.

Nos dois cenários, foram feitas observações participantes que eram transcritas para o caderno de campo no mesmo dia em que aconteciam e, posteriormente, digitadas em um diário de pesquisa. Essas observações incidiam-se sobre a produção oral e escrita dos estudantes, que eram discutidas com eles, no mesmo momento do registro. Decidimos manter na pesquisa de campo tanto o caderno de campo, como o diário de pesquisa, mas dada a dificuldade em acompanhar os diálogos decidimos utilizar também gravações em áudio.

Um dos mais importantes indicadores (GONZALEZ-REY, 2005a) evidenciados na pesquisa exploratória redirecionou o curso da pesquisa de campo propriamente dita. Percebemos tanto no cenário do projeto de monitoria como em sala de aula que era desnecessário eleger monitores de estudo. Percebemos que todos os estudantes se colocavam como aprendizes e ensinantes, ao mesmo tempo. Sempre que aprendiam algo, os estudantes, independentemente do fato de serem ou não monitores, ensinavam voluntariamente o aprendido para outros.

A figura 2, a seguir, mostra o desenho do curso da pesquisa exploratória, apresentando os objetivos e procedimentos/instrumentos utilizados para a coleta de informações.

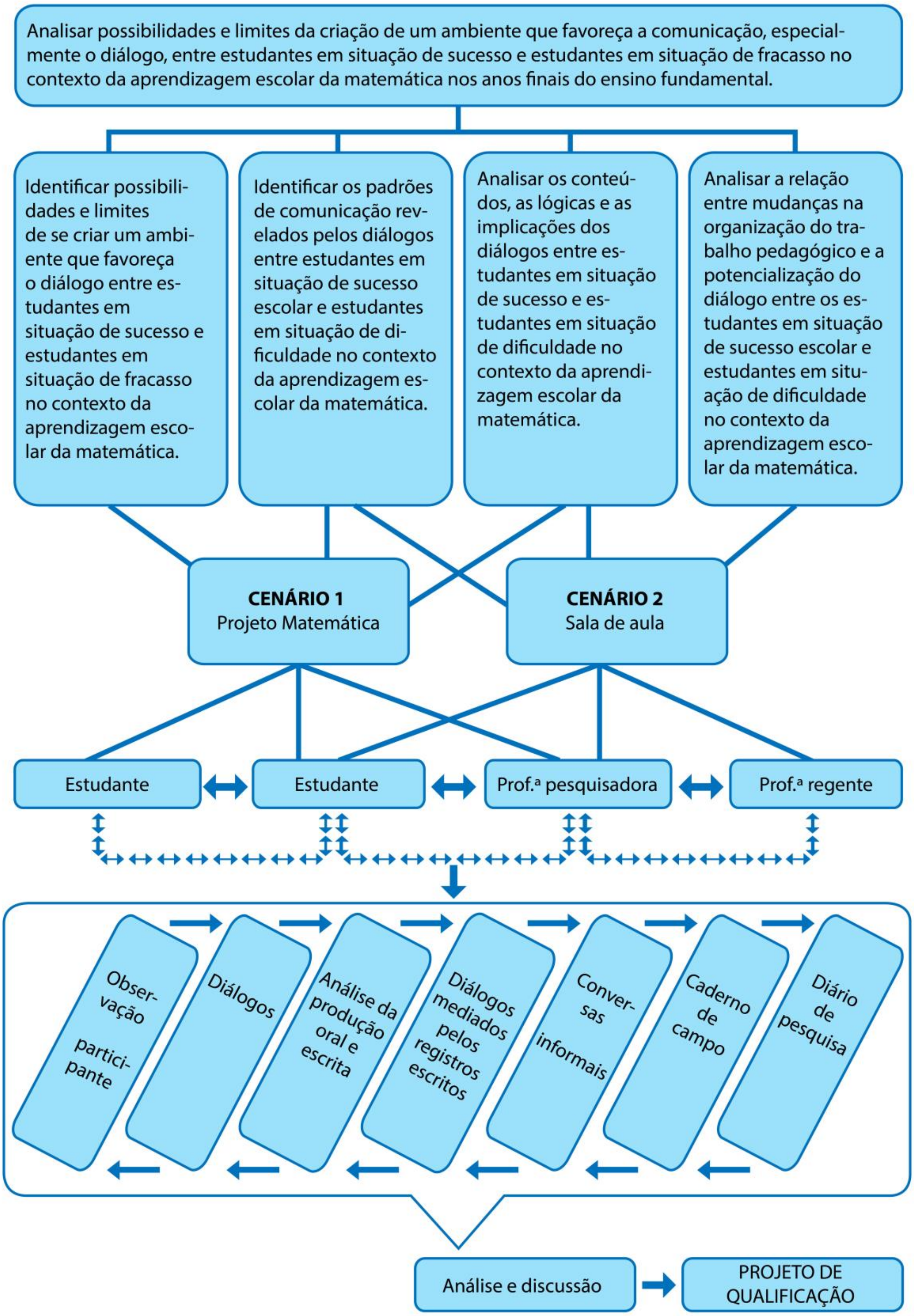


Figura 2. Desenho da pesquisa exploratória

3.2.2.A pesquisa de campo propriamente dita

Dada a impossibilidade de realizar a pesquisa de campo na mesma escola em que foi realizada a pesquisa exploratória, em razão da transferência da professora colaboradora para uma escola de zona rural e o manifesto desinteresse da professora que a substituiu em dar continuidade ao projeto, foi escolhida uma outra escola pública, em região administrativa do DF também diferente.

A pesquisa de campo propriamente dita foi realizada do dia 12 de março a 18 de dezembro de 2012, quando se finalizou o ano letivo, o que totalizou aproximadamente 180 horas de observação e participação no projeto de monitoria em turno contrário ao das aulas, 100 horas em sala de aula e 15 horas em laboratório de informática. É importante salientar que entre março e maio desse ano houve uma longa greve de professores das escolas públicas, mas a pesquisa de campo não foi interrompida, pois os encontros com os estudantes foram mantidos.

3.2.2.1.A escolha da escola para a pesquisa de campo

A escola foi selecionada em virtude de ter solicitado, em momentos anteriores, a ajuda da pesquisadora para enfrentar o fracasso na aprendizagem escolar da Matemática. Por mais de uma vez, a então diretora, manifestou o desejo de desenvolver algum projeto que possibilitasse melhorar o quadro de dificuldade na aprendizagem nessa área do conhecimento.

A escola escolhida atendia a estudantes dos anos iniciais e finais do ensino fundamental. No turno matutino, havia doze turmas de 6º ano e oito turmas do 7º ano. No turno vespertino, havia vinte turmas de 5º ano. A pesquisa foi realizada com estudantes de três turmas do 7º ano.

A escola fica localizada em uma comunidade que, embora exista há muito tempo, foi legalmente reconhecida como Região Administrativa do DF a pouco mais de 6 anos. De acordo com a Pesquisa Distrital por Amostra de Domicílios – PDAD 2010/2011[8], a população foi estimada em 25.732, no ano de 2011. Ainda segundo a pesquisa, a região não possui boas condições de saneamento básico, pois embora 99% dos domicílios tenham abastecimento de água, cerca de 20% não possuem esgotamento sanitário. Essa pesquisa mostra, ainda, que a região é carente de serviços públicos, inclusive no que se refere à educação. A comunidade possui apenas quatro escolas públicas que atendem aos estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental, uma das quais atende também aos estudantes dos anos finais, que é onde foi

[8] Disponível em www.codeplan.df.gov.br

realizada a pesquisa. Esse é um grave problema, pois 35,2% dos habitantes têm até 14 anos de idade, proporção muito acima da média do DF que é 25,5%.

A escola onde foi realizada a pesquisa se tornou uma grande conquista da comunidade, pois, até o ano de 2009, quando a escola foi inaugurada, todos os estudantes dos anos finais do ensino fundamental eram transportados de ônibus para escolas de regiões circunvizinhas. Nesse sentido, a escola representa a possibilidade para alguns de estudarem em local próximo às suas residências. É importante dizer que a escola não consegue atender a toda a demanda da região e muitos jovens continuam sendo transportados para outras cidades a fim de estudar.

A escola possui muito boa estrutura física, com vinte salas de aula, laboratórios de informática, de ciências e de artes, ainda não adequadamente equipados, quadra coberta, pista de skate, biblioteca em fase de montagem de acervo, sala de professores, sala de coordenação pedagógica, sala de orientação educacional, além de espaços administrativos como secretaria, direção, cozinha, entre outros.

Os estudantes e a comunidade, em geral, parecem estabelecer muito boa relação com a escola. Em suas falas, eles demonstram orgulho da estrutura física e pedagógica da escola. Para se ter uma ideia, a escola é, muito provavelmente, o prédio mais bonito da região e, geralmente, é utilizado para outras funções além das escolares. Além disso, a escola conta com atividades pedagógicas complementares, como a oficina de xadrez, as aulas de voleibol, aulas de *taekwondo*, dentre outras.

Para realização da pesquisa foi proposto um projeto de extensão que previa o atendimento dos alunos em turno contrário ao das aulas. Esse projeto acontecia dentro da proposta de Educação Integral da escola, que previa a permanência dos estudantes por 8 horas diárias na escola. O detalhamento desse projeto encontra-se logo adiante.

3.2.2.2. Os sujeitos participantes da pesquisa de campo

No início do ano letivo, em contato com os professores regentes de Matemática foi solicitado que eles indicassem alunos para um projeto de monitoria da aprendizagem que ocorreria em turno contrário ao das aulas. Esses estudantes poderiam ser do 6º e do 7º ano do ensino fundamental, mas apenas os do 7º seriam colaboradores da pesquisa, em razão disso, um dos professores deveria ser colaborador da pesquisa, visto que os objetivos, então delineados, previam a observação desses estudantes também em sala de aula. Os demais seriam atendidos por estudantes bolsistas da Universidade Católica de Brasília – UCB, responsável pelo projeto de extensão.

Assim, a Professora Leila, colaboradora da pesquisa, foi escolhida, entre os docentes de Matemática dos anos finais, porque manifestou o desejo de contribuir com a pesquisa. Ao aceitar o convite, a professora expressou o motivo pelo qual gostaria de participar:

> Prof.ª Leila: — Sou professora por opção. Sinto que estou estagnada intelectualmente e quero participar da pesquisa.

A professora Leila, licenciada em Matemática pela Universidade de Brasília, é docente a cerca de 15 anos, tendo sido nesse período também professora temporária da rede pública de ensino. Atuava na escola há dois anos e, por isso, já conhecia os estudantes com quem trabalhava, o que a permitiu indicar para o projeto estudantes segundo o perfil solicitado.

Por meio do termo de consentimento livre e esclarecido I (APÊNDICE A) foi informado à professora os objetivos da pesquisa.

Os 14 estudantes, sujeitos da pesquisa, possuíam idade entre 12 e 15 anos, e estavam cursando o 7º ano do ensino fundamental. Eles foram indicados pela professora Leila e pela coordenação pedagógica da escola, segundo os seguintes critérios: podiam estar em situação provisória de sucesso ou êxito ou em situação provisória de fracasso ou de dificuldade na aprendizagem escolar da Matemática, evidenciadas pela opinião do professor, considerando o desempenho no ano letivo anterior, desempenho no processo avaliativo da escola e pela autoavaliação feita por meio da expressa manifestação do próprio estudante. Além disso, só participaram da pesquisa, os estudantes que obtiveram expressa permissão dos pais por meio do Termo de consentimento livre e esclarecido II (APÊNDICE B), documento que esclarecia a necessidade de os estudantes ficarem na escola em turno contrário ao das aulas em projeto integrado à proposta de Educação Integral.

A tabela 3, a seguir, mostra a participação dos estudantes no projeto de monitoria. A parte sombreada da tabela indica o período em que efetivamente frequentaram o projeto "Matemática: nenhum a menos", que será apresentado a seguir.

Tabela 3. Estudantes do 7º ano participantes da pesquisa de campo

Nº.	**Nome**	**Idade**	**1º bim**	**2º bim**	**3º bim**	**4º bim**	**Observações**
1	George						Indicado pela professora, em virtude de ser estudante em situação de sucesso escolar.
2	Gisele						Indicada pela coordenação pedagógica, por ser estudante reprovada no 7º ano e de possuir comportamento não muito bom.
3	Helena						Indicada pela professora por ser aluna em situação de bom desempenho escolar, mas ser muito tímida.
4	Ingrid						Indicada pela professora por ter dificuldade na aprendizagem da Matemática e ter comportamento não muito bom.

5	Joana						Indicada pela coordenação pedagógica por estar em situação de dificuldade na aprendizagem da Matemática e ser excessivamente tímida.
6	Luana						Solicitou participação no projeto voluntariamente.
7	Luiza						Solicitou participação no projeto voluntariamente.
8	Priscila						Indicada pela professora e pela coordenação pedagógica da escola por ser estudante reprovada no 7º ano, com comportamento ruim, mas sem dificuldade na Matemática.
9	Saulo						Solicitou participação no projeto voluntariamente.
10	Talita						Indicada pela coordenação pedagógica por estar em situação de dificuldade na aprendizagem da Matemática.
11	Tânia						Solicitou participação no projeto voluntariamente.
12	Telma						Solicitou participação no projeto voluntariamente.
13	Tadeu						Solicitou participação no projeto voluntariamente.
14	Wilson						Solicitou participação no projeto voluntariamente.

Dos 7 estudantes indicados pela professora e pela coordenação pedagógica, George e Helena eram os únicos que estavam e permaneceram em situação de sucesso escolar, demonstrando bom desempenho nas avaliações escolares, muito embora ambos tenham considerado que o projeto contribuiu para melhorar as suas aprendizagens matemáticas. Embora muito tímidos, esses dois alunos sempre demonstravam atitude cooperativa nos diferentes cenários da pesquisa.

Todos os colaboradores da pesquisa permaneceram no projeto por no mínimo dois bimestre letivos, que corresponde a um pouco mais de quatro meses. É interessante observar que 50% dos estudantes participaram do projeto por decisão própria, não tendo sido indicados pelos professores. Esses estudantes procuraram a professora-pesquisadora e solicitaram ingresso no projeto. Todos alegaram dificuldades em aprender matemática, no entanto, o que se percebeu na prática é que a maioria não apresentava a dificuldade proclamada, embora contraditoriamente não tivessem bom desempenho nas avaliações escolares, como veremos a seguir.

A estudante Priscila, por exemplo, era repetente do 7º ano e não possuía bom desempenho escolar, mas demonstrava um alto nível de construção conceitual em Matemática. Essa estudante, que era sempre muito alegre, oscilava entre uma atitude cooperativa nos exercícios, circuito de problemas, sequências didáticas e uma atitude extremamente competitiva nos jogos, chegando a ser muitas vezes grosseira com os colegas. Como evidenciam os dados do rendimento escolar que serão mostrados mais adiante , o desempenho escolar de Priscila não sofreu grandes alterações. No entanto, sua professora relatou que seu comportamento e sua atitude diante das atividades matemáticas mudaram significativamente. Segundo a própria Priscila: “por causa do projeto eu comecei a ter caderno”. É importante dizer que quando entrou no projeto, Priscila não possuía um caderno de matemática minimamente organizado. No curso do projeto, comprou novo caderno e passou a organizá-lo com muito esmero.

A estudante Gisele, que permaneceu durante todo o ano letivo, foi indicada para participar em virtude da reprovação no 7º ano. Embora a professora e a coordenadora pedagógica tenham relatado o seu mau comportamento, Gisele se apresentava sempre com uma estudante muito tranquila, solidária com os colegas e muito interessada. Ela demonstrava ter alguma dificuldade com certas atividades, mas sempre que aprendia algo tratava de ensinar para os colegas. A estudante considerou que o projeto teve forte impacto na sua aprendizagem e no seu desempenho escolar, o que pode ser traduzido nas suas notas.

A estudante Ingrid, que foi indicada por sua dificuldade na aprendizagem da Matemática, desde o início se mostrou muito dispersa. Em meados do ano letivo, a diretora da escola comunicou a sua saída do projeto, em virtude do mau comportamento que se traduzia principalmente em fugas da escola. Embora tenhamos argumentado da necessidade de acolhê-la, não fomos ouvidos. Junto com ela saíram do projeto as estudantes Joana e Talita, que eram muito próximas. Das três, apenas Talita logrou aprovação no final do ano. Ingrid e Joana foram reprovadas. Esse fato nos levou a refletir sobre a dificuldade de fazer pesquisa na escola, sem interferir em seus processos disciplinares, que no nosso caso, excluiu estudantes que tinham muito a colaborar com a pesquisa.

As estudantes Luana e Tânia ingressaram no projeto no mesmo dia, por iniciativa própria, e tinham em comum a timidez. Embora apresentassem muitas dificuldades com a Matemática sempre se ajudavam, em atitude cooperativa. Ambas consideraram que o projeto impactou positivamente seus desempenhos escolares.

Do mesmo modo, a estudante Telma também ingressou no projeto por iniciativa própria. Tinha um comportamento sempre muito tímido, mas no cenário do projeto tinha coragem de fazer perguntas, o que não acontecia em sala de aula. A estudante também considerou que o projeto impactou positivamente seu desempenho escolar.

Os estudantes Tadeu, Wilson e Saulo também ingressaram no projeto por iniciativa própria e tinham em comum a descontração. Os três que eram considerados analfabetos pela professora, demonstraram no projeto que possuíam muitas habilidades matemáticas não exploradas, tanto que ao final do ano letivo lograram aprovação. Além disso, os três demonstravam sempre atitude cooperativa, pois assim que aprendiam algo, passavam a ensinar para os colegas. Ao final do ano letivo, os três consideraram que só foram aprovados porque ingressaram no projeto.

O 7º ano do ensino fundamental foi escolhido principalmente em razão da proposta curricular. Nessa fase do ensino fundamental, os alunos entram em contato com objetos da matemática, como números inteiros, equações e inequações, que embora não sejam exatamente novidades, são trabalhados de maneira formal pela primeira vez. O currículo prevê que sejam desenvolvidas, no 7º ano, dentre outras habilidades, as relacionadas aos estudos formais da álgebra, que em nossa pesquisa exploratória se mostraram como elemento dificultador do diálogo.

Pensar nos sujeitos de uma pesquisa em que o diálogo é tanto objeto como método de estudo, exigiu de modo especial pensar na relação com os "outros" da pesquisa. Nosso trabalho se teceu a partir da tentativa de compreender o outro, de interpretar como o outro agia, falava, se expressava e pensava. Esse foi o grande desafio. Nesse sentido, sem o reconhecimento da alteridade desse outro, a pesquisa não teria se realizado. Para que a pesquisa pudesse acontecer tivemos que considerar que esse outro era um estranho familiar, visto que era "ao mesmo tempo aquele que quero encontrar e aquele cuja impossibilidade de encontro integra o próprio princípio da pesquisa (AMORIM, 2004, p. 29). Isso significa que há um limite na interpretação da linguagem do outro e principalmente na apreensão desse outro naquilo que o torna singular, mas semelhante ao pesquisador. Foi preciso, então, considerar que esse outro, estudante ou professor, era ativo em sua participação na pesquisa. Ele não apenas respondia ao que era indagado, no que era exigido, mas significava as indagações a partir do que compreendia que se exigia dele. Daí a importância de se utilizar uma diversidade de procedimentos/instrumentos em uma diversidade de espaços/tempos que possibilitaram a expressão dos "outros" da pesquisa.

3.2.2.3. Os cenários da pesquisa de campo

Foram três os cenários onde se desenrolou a pesquisa de campo propriamente dita. O primeiro deles foi o projeto de extensão "Matemática: nenhum a menos"[9], que ocorria em turno contrário ao das aulas. O segundo, a sala de aula e o terceiro foi o laboratório de informática. Esses cenários serão descritos em detalhes na categoria 1 "Diferentes cenários e situações produzindo diferentes diálogos e aprendizagens matemáticas", a partir da página 107.

---

[9] Projeto de Extensão da Universidade Católica de Brasília e coordenado pela pesquisadora.

O projeto de extensão Matemática: nenhum a menos

O projeto de extensão “Matemática: nenhum a menos” foi uma iniciativa da professora pesquisadora que atua na Universidade Católica de Brasília – UCB, ministrando disciplinas das áreas de educação matemática, no curso de licenciatura em Matemática.

Conforme já foi dito, o projeto buscou atender a uma demanda da própria escola que queria intervir na situação de fracasso escolar em Matemática e também para possibilitar a realização da pesquisa de campo. Com isso, foi criado um projeto de extensão, ao abrigo da UCB, para atender a cerca de 60 estudantes do 6º e do 7º ano do ensino fundamental, dos quais 14 eram os colaboradores da pesquisa. O projeto foi coordenado pela professora pesquisadora e, em 2012, contou com a participação de mais um docente da UCB, dois estudantes bolsistas e mais dois estudantes voluntários.

O objetivo central do projeto era:

> Acompanhar a interação e o diálogo entre estudantes em situação de sucesso escolar e estudantes em situação de fracasso, com vistas à aprendizagem matemática significativa e colaborativa, nos anos finais do ensino fundamental, em uma escola pública do DF (UCB, 2012).

A ideia central do projeto era incentivar o diálogo entre os estudantes, que foram indicados pela escola ou a ele acederam por iniciativa própria, por meio da proposição de atividades matemática como jogos, problemas, exercícios, circuito de problemas, etc.

O planejamento das atividades na pesquisa como um todo, considerou que os estudantes eram adolescentes de 12 a 14 anos, em fase de ressignificação da vida social e grupal mais distanciada da família. Embora fossem oriundos de famílias de baixa renda, eles possuíam centros de interesses comuns aos adolescentes do mundo inteiro como, por exemplo, os esportes, as artes, especialmente a música, e as tecnologias. Além disso, possuíam uma condição socioeconômica cruel que influenciam as suas expectativas de vida. Como argumenta Skovsmose (2007, 2009), esses jovens precisavam ser considerados não apenas por sua vida pregressa, pelo chão que pisavam, pelos conhecimentos já construídos, pelas aprendizagens já consolidadas, ou pelo seu *background*, mas também pelas expectativas, pelas oportunidades que lhes eram oferecidas pela escola, pelas possibilidades de “vir a ser mais”, enfim pelo que esse autor tem chamado de *foreground*.

O cenário do projeto de extensão foi o que teve o maior número de encontros, no período compreendido entre o dia 12 de março e 18 de dezembro de 2012, sempre às segundas e quartas-feiras, no horário de 13h às 16h. Em cada encontro com duração de 1h30, compareciam entre 6 e 7 estudantes, o que permitia o acompanhamento dos diálogos.

Nem mesmo quando aconteceu a greve de professores, entre março e maio de 2012, os encontros do projeto foram interrompidos. Ao final do movimento paredista, o projeto ganhou novas adesões, sobretudo dos meninos. Na primeira etapa, até junho, havia apenas meninas.

Nesse cenário, a professora-pesquisadora participava dos diálogos e das atividades ativamente, mediando as aprendizagens matemáticas, provocando enunciações, questionando e respondendo perguntas. Muitas vezes seu papel era confundido com o papel da professora regente. E este foi um dos desafios da pesquisa, pois em muitos momentos a professora pesquisadora também se colocava no papel de professora realizando antecipações desnecessárias.

Segundo González-Rey (2005a), "o papel ativo do pesquisador determina que a produção de ideias represente um *continuum* que atravessa todos os momentos do desenvolvimento da pesquisa, o qual torna impossível separá-la em uma fase de provisão e outra de interpretação de dados." Em razão disso, a análise da produção oral e escrita dos estudantes já começava no exato momento em que aconteciam, durante os diálogos. No mesmo dia, as produções eram registradas em caderno de campo e, posteriormente, digitadas em uma diário de pesquisa.

Foram feitos registros em áudio dos encontros que, depois de degravados, complementavam os registros no caderno de campo e no diário de pesquisa. Muitos das gravações em áudio não puderam ser degravadas, pois os ruídos do ambiente escolar, associado a um grupo de estudantes que conversavam todos ao mesmo temo, as tornaram ininteligíveis.

Muitos protocolos com registros escritos dos estudantes mediaram os diálogos deles entre si e com a pesquisadora e também serviram de base para as conversas informais com a professora regente.

No cenário do Projeto de Extensão "Matemática: nenhum a menos", os "sistemas conversacionais" (GONZALEZ-REY, 2005a), traduzidos tanto em diálogos formais como em conversas informais, possibilitaram a análise das interações e dos diálogos e suas relações com a aprendizagem matemática. Foi possível analisar os processos cognitivos e metacognitivos, envolvidos nas produções orais e escritas dos estudantes e, assim, compreender suas construções conceituais.

A sala de aula

As observações em sala de aula iniciaram-se no segundo semestre letivo, no mês de agosto e se estenderam até o mês de dezembro de 2012. Foram realizadas sempre às 4as, 5as e

6as feiras, no turno matutino, quando a professora Leila tinha aulas com o 7º F, o 7º G e o 7º H, turmas dos estudantes participantes da pesquisa.

As observações eram do tipo participante, uma vez que a professora-pesquisadora participava ativamente das atividades, colaborando com o planejamento de algumas aulas, com a mediação da aprendizagem matemática e com a correção das atividades.

A observação da sala de aula foi muito importante, em primeiro lugar para analisar o processo de desenvolvimento e aprendizagem dos participantes da pesquisa. Foi possível constatar, por exemplo, que o absenteísmo (IRELAND et al, 2007) de alguns estudantes colaboradores foi paulatinamente substituído por uma postura mais ativa e cooperativa em sala de aula.

Também foi possível observar como a voz da professora regente estava presente nas vozes dos estudantes. Sem essa observação não teria sido possível identificar que os estudantes tomavam enunciados emprestados (BAKHTIN, 2010) da fala da professora, que reproduziam no cenário do projeto de extensão, quando dialogavam com seus pares.

Entre uma aula e outra, sempre havia tempo para tecer conversas informais com a professora sobre os acontecimentos da sala de aula e também do projeto de extensão.

Essas conversas possibilitaram uma maior aproximação entre a professora-pesquisadora e a professora regente, que passou a solicitar a opinião sobre os planejamentos e também solicitou o planejamento conjunto de algumas atividades, como as de equações, que serão descritas na análise.

Do mesmo modo que no cenário do Projeto “Matemática: nenhum a menos”, a análise da produção oral e escrita dos estudantes muitas vezes começavam no exato momento em que aconteciam e eram motivo para novos diálogos.

Os eventos de sala de aula, diálogos, conversas informais, produções orais e escritas dos estudantes entre si, com a professora pesquisadora e com a professora regente, também foram registrados em caderno de campo no mesmo dia, em momento posterior à aula, e depois transcritos para o diário de pesquisa. Alguns registros, sobretudo os feito no quadro branco, eram copiados para o caderno de campo no exato momento em que aconteciam por meio de registros rápidos. Isso despertou a curiosidade da alguns alunos que pediram para ver esses registros. Sempre mostrava os registros e dizia que eram para a pesquisa de doutorado.

Também foram feitos registros em áudio, por meio de um gravador digital que ficava no bolso da pesquisadora, mas poucos foram aproveitados devido aos ruídos da sala de aula.

O laboratório de informática

No cenário do laboratório de informática, aconteceram apenas três encontros, no entanto, como foram muitos significativos, o consideramos um espaço essencial para a produção de informações (GONZÁLEZ-REY, 2005a).

Os três encontros foram previamente planejados pela professora regente em parceria com a professora-pesquisadora, considerando o interesse dos mesmos pela tecnologia e também a possibilidade de agirem de forma mais autônoma, seguindo uma sequência didática que indicava em linhas gerais o que deveria ser feito, a fim de enunciar conclusões por eles mesmos.

Ficou claro também que no laboratório de informática, a verbalização de antecipações, de inferências e de conclusões, possibilitavam a observação de processos cognitivos e metacognitivos dos estudantes em interação e diálogo em frente ao computador. Além disso, a observação participante permitiu constatar que a organização espacial e pedagógica do laboratório favorecia a interação e o diálogo.

Do mesmo modo que nos cenários anteriores, a análise das produções já se iniciava no exato momento em que estas ocorriam e mediava os diálogos entre a professora-pesquisadora e os estudantes. Essa produção também foi registrada no caderno de campo, em momento posterior ao evento, e depois digitadas no diário de pesquisa.

Também foram feitos registros em áudio, por meio de um gravador digital que ficava no bolso da professora-pesquisadora, mas poucos foram aproveitados devido aos ruídos.

3.2.3. Os procedimentos/instrumentos de pesquisa e a produção de informações

A opção pela epistemologia qualitativa (GONZÁLEZ-REY, 2003, 2005a, 2005b) nos indicou que a pesquisa não teria necessariamente uma rota predeterminada, onde o teórico e o empírico estariam previstos antecipadamente. Para González Rey (2005a, p. 72) “a pesquisa qualitativa, é um processo permanente de produção de conhecimento, em que os resultados são momentos parciais que se integram constantemente com novas perguntas e abrem novos caminhos à produção do conhecimento.” Nesse sentido, aspectos teórico-metodológicos foram incorporados ao trabalho de campo quando este já estava em curso. Foi o caso, por exemplo, da ampliação teórica feita com a inserção da Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud (2009a, 2009b), que possibilitou a análise dos teoremas e conceitos em atos enunciados pelos estudantes nas interações e diálogos ou a inserção da Teoria de Registros de Representações Semióticas de Duval (2009, 2011) que permitiu analisar o funcionamento cognitivo dos estudantes, por meios dos seus registros escritos, sobretudo na resolução de problemas do 1º grau.

A pesquisa exploratória apontou importantes indicadores (GONZÁLEZ REY, 2005a), que possibilitaram reorganizar procedimentos/instrumentos, vislumbrados frente aos objetivos estabelecidos, e que permitiram dar significado às informações obtidas.

Em nossa pesquisa, os procedimentos e os instrumentos não podem ser objetivamente separados, uma vez que, como González Rey (2005b), estamos considerando que os instrumentos são todas e quaisquer situações, meios ou recursos que possibilitam a expressão dos sujeitos no ambiente da pesquisa, possibilitando a geração de informações. Daí a opção de usar a expressão procedimento/instrumento.

As informações produzidas são frutos da imersão da pesquisadora nos cenários de pesquisa por período relativamente elástico, se for considerado também o tempo relativo à pesquisa exploratória. Mas essas informações não são de propriedade da pesquisadora, uma vez que foram produzidas por todos os sujeitos em interação e diálogo. Coube à professora-pesquisadora apenas sistematizá-las a partir dos objetivos enunciados.

Dentre os procedimentos/instrumentos utilizados para a produção de informações, na pesquisa de campo propriamente dita, destacamos: (1) a observação participante; (2) os sistemas conversacionais e (3) as entrevistas.

(1) A observação participante é um procedimento que possibilita a imersão do pesquisador no ambiente de pesquisa por meio do estabelecimento de uma relação multilateral, em que ele sai da condição de mero expectador para sujeito ativo e partícipe das ações desenvolvidas. Para Alves-Mazzotti e Gewansdsznajder (2002, p. 166), “na observação participante o pesquisador se torna parte da situação observada, interagindo por longos períodos com os sujeitos, buscando compreender o que está ocorrendo numa dada situação.”

Na pesquisa, a observação participante se realizou mediante o acompanhamento sistemático de um grupo de estudantes do 7º ano do ensino fundamental, selecionados segundo critérios já explicitados. Esses estudantes foram acompanhados, inicialmente, em um projeto de extensão em horário extraclasse. Nesse projeto, eles realizaram atividades planejadas pela professora pesquisadora, a partir do trabalho que era feito em sala de aula e foram estimulados a cooperarem com a aprendizagem uns dos outros e incentivados a interagir e a dialogar. Durante as atividades a pesquisadora agia como uma professora mediando a construção do conhecimento, daí a opção de se autodenominar professora-pesquisadora.

Também foram realizadas observações participantes em sala de aula e no laboratório de informática, que permitiram o progressivo acompanhamento das produções orais e escritas dos estudantes. A observação se dava mediante o acompanhamento das atividades pela professora-pesquisadora que atuava fazendo mediações e intervenções em situações de resolução de exercícios, sequências didáticas e correção de provas.

A professora-pesquisadora acompanhou a produção oral e escrita de cada grupo, e em momento imediatamente posterior essa produção foi registrada em um **diário de campo** e sistematizada em um **diário de pesquisa**. As informações coletadas nos encontros por meio da observação foram mediadoras do diálogo entre a pesquisadora e os sujeitos participantes da pesquisa, tanto professor como estudantes, o que possibilitou a emergência de significações e o surgimento de novas zonas de sentido (GONZÁLEZ REY, 2005b), que exigiram novos instrumentos/procedimentos.

(2) Os sistemas conversacionais

Também constituíram via de acesso às informações, os momentos de diálogo formal dos estudantes entre si, com a professora pesquisadora e com a professora regente e de conversa informal entre todos os sujeitos, nos encontros do projeto de extensão, em sala de aula, no laboratório de informática e em outros espaços da escola.

Sobre a produção dialógica dos estudantes entre si, dos estudantes com a professora, dos estudantes com a professora-pesquisadora, e da professora-pesquisadora com a professora colaboradora, em momentos formais e informais, foi feita a análise de conteúdo na perspectiva tomada por González Rey (2002, p. 143-152) que extrapola o sentido tradicional, pois não considera o texto com entidade objetiva. Para González Rey (2002, p.152),

> [...] o discurso é uma categoria que permite acesso a processos de significação que, portadores de uma forte conotação ideológica, são constitutivos das estruturas de sentido subjetivo da subjetividade social. A análise de discursos nos dá acesso a um momento da realidade social implícita nos processos de subjetivação em cada realidade social concreta. No entanto, o discurso não esgota a riqueza da vida social e, portanto, não pode se constituir a única via de produção de informação sobre ela.

Em razão disso, a interpretação/construção das informações a partir dos diálogos foi apenas um dos elementos do percurso metodológico. O trabalho de investigar a singularidade das produções matemáticas escritas dos estudantes, bem como os significados que os sujeitos atribuíram aos diálogos e às produções orais e escritas foram elementos importantes na obtenção das informações da pesquisa.

As produções orais e escritas dos estudantes foram gravadas em áudio e também registradas no caderno de campo e diário da pesquisa.

(3) As entrevistas

No dia 21/06/2012, foi realizada uma entrevista coletiva, com seis alunas participantes a fim de coletar as impressões das mesmas sobre o funcionamento do projeto. O roteiro dessa entrevista pode ser conferido no apêndice C, mas como assevera González-Rey (2005), na pesquisa qualitativa a entrevista tem sempre o objetivo de converter-se em um diálogo progressivo. Assim, as perguntas padronizadas cedem lugar a um diálogo que integra os interesses do pesquisador, a partir dos objetivos delineados na pesquisa.

Do mesmo modo, no período compreendido entre o dia 10 e dia 18 de dezembro, oito dos estudantes participantes também foram entrevistados, mas individualmente, com o objetivo coletar as impressões dos mesmos sobre o impacto do projeto nas suas aprendizagens. O roteiro da entrevista com os estudantes pode ser visto no apêndice D.

Por fim, foi realizada uma entrevista com a professora Leila, cujo roteiro compõe o apêndice E. Por meio dessa entrevista foi possível compreender as percepções da professora acerca do projeto de extensão, sobretudo no que se refere a aprendizagem dos estudantes e o impacto sobre o seu trabalho.

A triangulação das informações obtidas foi feita a partir de várias etapas complementares e muitas vezes concomitantes de pesquisa e dos múltiplos procedimentos/ instrumentos adotados.

O quadro de coerência, a seguir, mostra a relação entre as questões de pesquisa, os objetivos e os procedimentos/instrumentos adotados para se responder as questões e atingir os objetivos previstos.

Na sequência, a figura 3, mostra o desenho da pesquisa que integra objetivos, cenários de pesquisa, sujeitos participantes, procedimentos/instrumentos utilizados para a produção de informações que culminaram na redação do relatório final.

.

<table>
<tr><td colspan="3">OBJETO: O diálogo entre os diferentes sujeitos que interagem no contexto da aprendizagem escolar da Matemática nos anos finais do ensino fundamental.</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVO GERAL: Analisar possibilidades e limites da criação de um ambiente que favoreça o diálogo e a cooperação entre os diferentes sujeitos que interagem no contexto da aprendizagem escolar da matemática nos anos finais do ensino fundamental.</td></tr>
<tr><th>QUESTÕES DE PESQUISA</th><th>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</th><th>PROCEDIMENTO/INSTRUMENTO</th></tr>
<tr><td>Quais são as possibilidades e os limites de se potencializar o diálogo e a cooperação entre os diferentes sujeitos que interagem no contexto da aprendizagem escolar da matemática?</td><td>Identificar possibilidades e limites de se criar um ambiente que favoreça o diálogo e a cooperação entre os diferentes sujeitos que interagem no contexto da aprendizagem escolar da matemática.</td><td rowspan="4">Construção do projeto de extensão “Matemática: nenhum a menos”

Constituição de um grupo de estudantes dispostos a dialogar e interagir no processo de aprendizagem da Matemática no turno contrário ao das aulas.

Elaboração e proposição de atividades objetivando o diálogo e a interação na aprendizagem da Matemática.

Observação participante nos encontros do projeto de extensão e em momentos em sala de aula, previamente negociados com a professora colaboradora.

Conversa informal com os estudantes e com a professora colaboradora nos diversos ambientes da escola.

Conversa mediada pelas produções orais e escritas dos estudantes com eles próprios e com a professora colaboradora.

Planejamento de atividades em conjunto com a professora colaboradora

Entrevista com os estudantes colaboradores da pesquisa e com a professora deles.

Registro em áudio e em caderno de campo dos eventos do projeto de extensão, da sala de aula e do laboratório de informática.

Sistematização dos registros em áudio e das informações do caderno de campo em um diário de pesquisa.</td></tr>
<tr><td>Que aprendizagens são reveladas pelos diálogos entre os diferentes sujeitos estimulados a interagir em cooperação no contexto escolar do processo de aprendizagem da Matemática?</td><td>Analisar que aprendizagens são reveladas pelos diálogos entre os diferentes sujeitos que interagem e cooperam no contexto escolar do processo de aprendizagem da Matemática.</td></tr>
<tr><td>Quais são os conteúdos, as lógicas e implicações dos diálogos entre os diferentes sujeitos estimulados a interagir no contexto da aprendizagem escolar da matemática?</td><td>Analisar os conteúdos, as lógicas e as implicações dos diálogos entre os diferentes sujeitos que interagem em situação de cooperação no contexto da aprendizagem escolar da matemática.</td></tr>
<tr><td>Qual é a relação entre os diferentes contextos escolares e situações de aprendizagens e o diálogo entre os diferentes sujeitos estimulados a interagir no contexto escolar do processo de aprendizagem da matemática?</td><td>Analisar a relação entre os diferentes contextos e situações de aprendizagem e o diálogo entre os diferentes sujeitos que interagem no processo de aprendizagem da Matemática.</td></tr>
<tr><td colspan="3">TESE: No contexto da aprendizagem escolar da Matemática, há uma múltipla influência entre diálogo e aprendizagem matemática, portanto a conversão da sala de aula em espaço de diálogo e interação, de construção e criação, de espaço de pensar e fazer, pode potencializar da aprendizagem matemática, do mesmo modo que a qualificação das aprendizagens pode potencializar o diálogo.</td></tr>
</table>

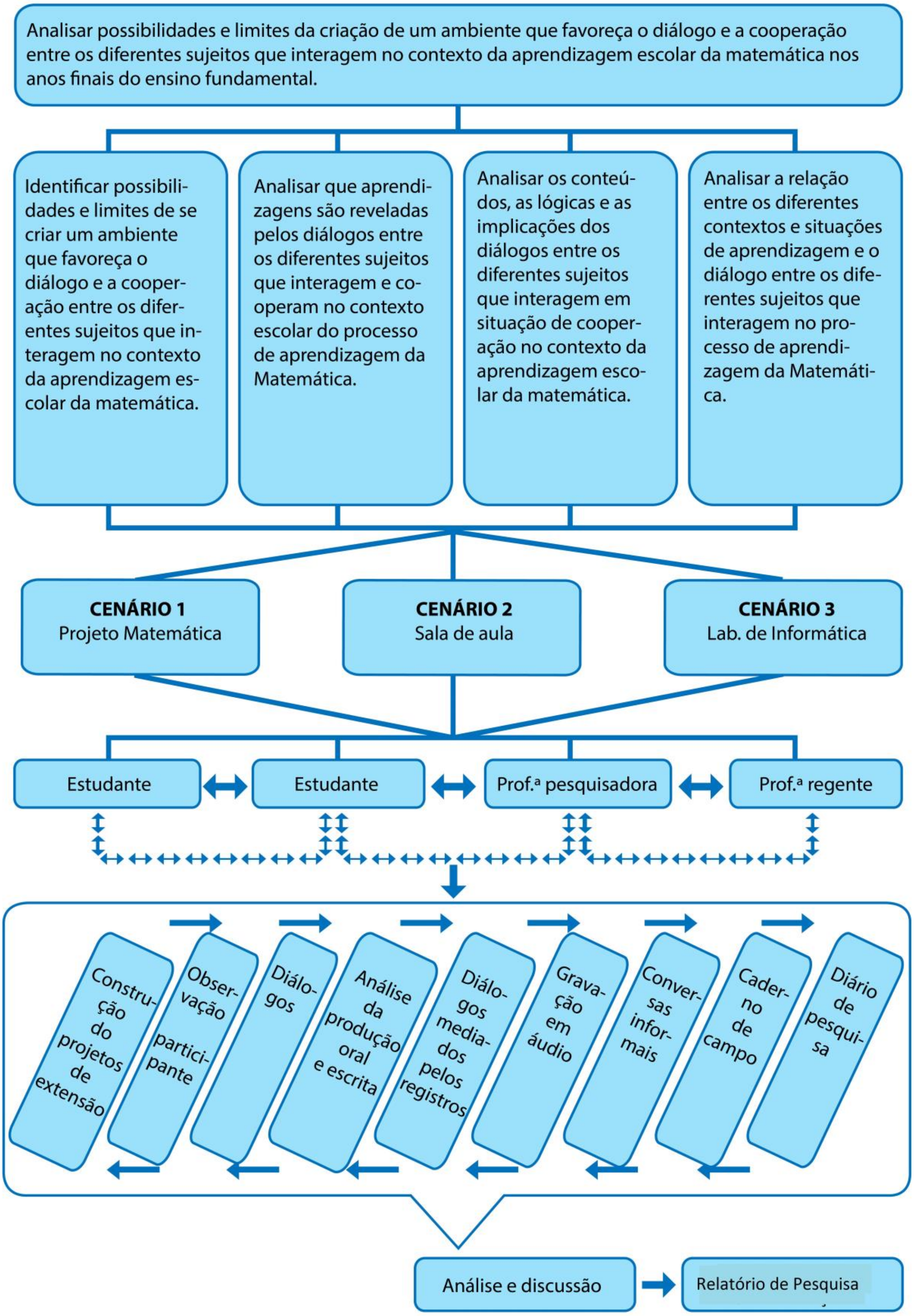


Figura 3. Desenho da pesquisa de campo

3.3. A construção do sistema de categorias de análise

Tanto na pesquisa exploratória, como na pesquisa de campo propriamente dita, acontecimentos, situações e, portanto, as informações se apresentavam como um todo não fragmentado que exigia o nosso registro escrito e a nossa interpretação. Embora nossa percepção fosse capaz de captar, ao mesmo tempo, os diálogos, os gestos, as expressões, os olhares, enfim, tudo que se passava ao redor, ao tentar registrar tudo por meio da linguagem escrita percebemos o quão limitada é a nossa capacidade de expressão. O que conseguimos registrar é apenas parte do observado. Só para dar um exemplo, no processo de resolução de problemas, os registros dos estudantes e seus diálogos são dinâmicos e não lineares e muitas vezes recheados de interrupções, retomadas e reconstruções que não puderam ser captados na totalidade. No caso da resolução escrita, muitas vezes o produto que foi registrado é apenas a etapa final de todo um processo que se fosse interrompido para o registro não teria o mesmo significado.

Além disso, constatamos que as informações oriundas das observações participantes, dos sistemas conversacionais, incluindo aí tantos os diálogos formais, como as conversas informais e também das entrevistas exigiam interpretações que pudessem estabelecer relações entre as particularidades de cada um e o sentido geral do todo. E isso só seria possível mediante a interpretação dos próprios sujeitos que estavam produzindo a informação. Como a pesquisadora era uma observadora participante isso muitas vezes exigia intervenções no exato momento em que as informações eram produzidas. Em razão disso, percebemos que a complexidade da pesquisa em educação cresce de modo considerável se o diálogo for tanto objeto como metodologia de trabalho, em que a produção do conhecimento não se dá de modo solitário, mas solidário. Para D’Ambrósio (2001, p. 32),

> Embora o conhecimento seja gerado individualmente, a partir de informações recebidas da realidade, no encontro com o outro se dá o fenômeno da comunicação, talvez a característica que mais distingue a espécie humana das demais espécies. Via comunicação, as informações captadas por um indivíduo são enriquecidas pelas informações captadas pelo outro. O conhecimento gerado pelo indivíduo, que é resultado do processamento da totalidade das informações disponíveis, é, também via comunicação, compartilhado, ao menos parcialmente, com o outro.

Por meio da comunicação e, portanto do diálogo, o homem socializa ou compartilha o conhecimento que produz, a partir das informações de que dispõe, mas como nos mostra Bakhtin (2010) cada ser humano é único, mas também parte de outros seres humanos, e assim a capacidade humana de captar e processar informações é também sempre única e dependente da cultura na qual está imerso. Na produção do conhecimento, o que cada um vê, ouve, sente e percebe não é o mesmo que outro está vendo, ouvindo, sentido e percebendo, embora haja intersecções, que nos leva a partilhar significados, por meio de consensos socioculturais. Dessa forma, a pesquisa que empreendemos foi esse exercício de comunicação conosco mesmo e com o(s) outro(s). Um exercício de comunicar o nosso sentido, a nossa percepção de um dado recorte da realidade e captar os sentido e as percepções dos outros .

Nesse processo de pesquisar e dialogar em que nos deparamos com a nossa incapacidade de olhar para os fatos, acontecimentos e situações de forma total, associada à nossa dificuldade de comunicar todo o nosso pensamento por meio da linguagem escrita ou falada, nos levou a reunir as informações de que dispúnhamos em categorias de análise, para tentar transformá-las em conhecimento que pudessem ser captados e validados por nós mesmos e por outros.

A opção pela epistemologia qualitativa (GONZÁLEZ-REY, 2005a, 2005b) e portanto pela convicção de que pesquisa é um processo interativo, construtivo e interpretativo não nos permitiu definir *a priori* as categorias de análise. Foi a permanência em campo nas etapas da pesquisa exploratória e na pesquisa propriamente dita que nos levou à produção de um sistema de categorias, embora esse estivesse vinculado aos objetivos que foram traçados e reconstruídos durante a pesquisa. Durante as duas etapas, alguns indicadores foram se apresentando e clarificando as ideias do que buscávamos construir. Algumas categorias se apresentaram de forma bastante clara desde o início da pesquisa, até porque não fomos a campo sem objetivos, todavia, outras só se apresentaram a partir da tentativa de leitura do todo, já quase no final da pesquisa. Outras, ainda, só surgiram no momento em que de posse dos dados foi nos possível observar inter-relações entre os indicadores e categorias já definidas

A seguir, apresentamos as análises feitas a partir das seguintes categorias: i) diferentes cenários e situações produzindo diferentes diálogos e aprendizagens matemáticas; ii) a emergência de teoremas e conceitos-em-ato em diálogos constituídos a partir de atividades para a aprendizagem matemática; iii) o diálogo como espaço de emergência de uma produção matemática diversa; iv) A natureza do diálogo no contexto da construção de conceitos em diferentes quadros: numérico, geométrico e algébrico e v) aprender e ensinar matemática: duas faces de um mesmo processo dialógico.

.

4. RESULTADOS E ANÁLISES

"Conhecer é tarefa de sujeitos, não de objetos. E é como sujeito e somente enquanto sujeito, que o homem pode realmente conhecer."
(FREIRE, 1977, p. 27)

4.1. CATEGORIA 1: Diferentes cenários e situações produzindo diferentes diálogos e aprendizagens matemáticas

Os processos de comunicação e, entre eles, os processos de aprendizagem são influenciados pelos diferentes cenários e situações. Tais cenários e situações possibilitam diferentes diálogos que, por sua vez, produzem diferentes aprendizagens a serem captadas e compreendidas pelos educadores.

Alrø e Skovsmose (2006) postulam que diferentes cenários e situações produzem diferentes padrões de comunicação. Para esses autores, as qualidades das aprendizagens são influenciadas pelas qualidades da comunicação que, em última instância, podem ser expressas pelas relações interpessoais e, portanto, por meio dos diálogos que são estabelecidos entre os sujeitos em ação.

Em nossa pesquisa, estamos considerando como cenários os espaços físicos, psicológicos e institucionais em que o trabalho pedagógico é organizado. Fazem parte desses cenários não apenas a organização espacial caracterizada pela disposição das cadeiras, carteiras, quadro de giz e outros equipamentos, como também a organização pedagógica que diz respeito às ações do professor e dos estudantes, as interações e as situações de aprendizagem. Assim, fazem parte desses cenários as regras de ação, nem sempre explícitas, e que são constituídas por aquilo que os estudantes consideram válido e que é valorizado pelo professor. Essas regras caracterizam o "contrato didático" que rege as relações entre o professor, os estudantes e a matemática (PAIS, 2001, p. 77).

A seguir, vamos descrever os três cenários da pesquisa focando tanto o espaço físico como o pedagógico. Em cada um desses cenários, elencamos situações e diálogos representativos da organização do trabalho pedagógico. Serão descritos o ambiente do projeto, em que aconteciam os encontros no turno contrário ao das aulas, a sala de aula propriamente dita e o laboratório de informática, onde aconteceram algumas aulas.

4.1.1. Cenário 1: o ambiente do projeto "Matemática: nenhum a menos"

O primeiro cenário da pesquisa foi o ambiente em que houve maior tempo de observação. Tratava-se da sala que foi destinada pela direção da escola para o Projeto de Extensão “Matemática: nenhum a menos”, onde também ocorreram os encontros da pesquisa.

O ambiente era uma ampla sala retangular, maior que uma sala de aula comum, onde deveria funcionar o laboratório de ciências, como mostra a representação na figura 4, a seguir. O espaço possuía sete bancadas retangulares e cada bancada comportava seis alunos. Havia uma grande bancada lateral com pia, sob a qual ficavam armários onde eram guardados os materiais do laboratório desativado e onde também tivemos um espaço para guardar os materiais utilizados na pesquisa.

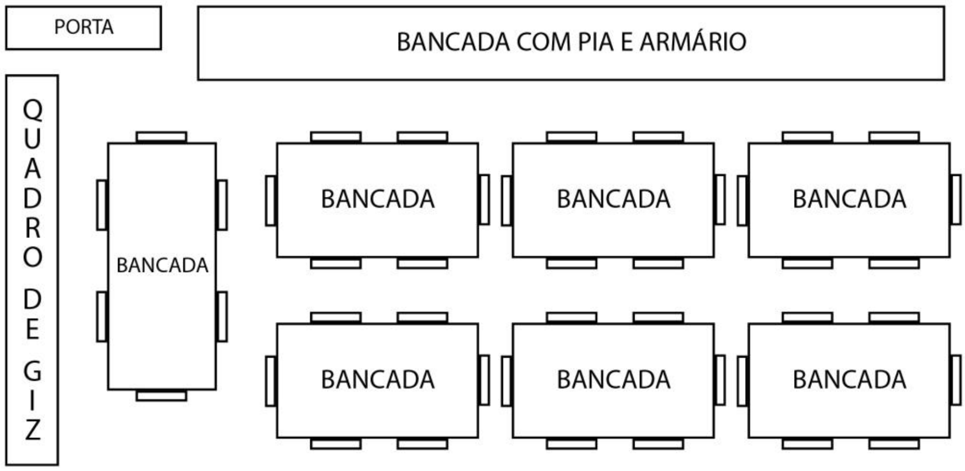


Figura 4. Representação do cenário do Projeto “Matemática nenhum a menos”

Os encontros sempre aconteciam às segundas e quartas-feiras, no horário de 13h a 16h, portanto, em turno contrário ao das aulas.

Em média, seis estudantes de cada vez participavam dos encontros da pesquisa. Mas esse número variava sempre. Houve encontros com apenas um estudante, em um dia de paralisação dos professores, e também encontros com dez estudantes.

Não havia lugar pré-determinado para os estudantes se sentarem, mas em geral eles ocupavam as duas primeiras bancadas próximas à porta, mas podiam mudar de lugar sempre que quisessem. Em geral, agrupavam-se por afinidade ou por solicitação da pesquisadora, quando a atividade exigia ou quando havia a necessidade de mediação entre pares.

Nos encontros, os estudantes realizavam atividades preparadas especialmente para a pesquisa, mas sempre relacionadas aos objetos matemáticos estudados em sala de aula. Essas atividades eram realizadas quase sempre sem a utilização do quadro de giz e com o uso de algum material pedagógico, como é o caso das argolinhas para representação de números inteiros e os jogos. A mediação era feita, na própria bancada, pela professora pesquisadora ou por um dos colegas, a partir da solicitação dos estudantes que julgavam precisar de ajuda ou espontaneamente na realização de atividades conjuntas. Os alunos eram sempre estimulados a cooperarem uns com os outros e, por isso, a maioria das atividades eram para duplas, trios ou grupos.

As situações de aprendizagem, mostradas a seguir, envolviam exercícios planejados para a pesquisa, exercícios do livro didático, jogos e resolução de problemas. Alguns dos exercícios do livro eram, na verdade, atividades que, segundo os próprios alunos, eles não haviam conseguido concluir em sala, ou que a professora deixou como tarefa de casa.

4.1.1.1.Situações de exercícios

Quando a professora começou a trabalhar multiplicação de inteiros, percebi que as estudantes tinham dificuldade em realizar as multiplicações e algumas, como não haviam memorizado a tabuada, ficavam paralisadas diante de algum cálculo ou demoravam muito para concluí-lo. Decidi trabalhar atividades que as levassem a pensar na multiplicação e em outros meios de obter os resultados. A primeira atividade proposta foi o preenchimento da tabela pitagórica, em que apenas alguns resultados estavam registrados, conforme mostra a figura 5 a seguir.

A tabela pitagórica é, na verdade, um exercício em formato diferenciado. Ao invés de dar uma lista de tabuadas, usa-se uma tabela.

Para preencher a tabela, as estudantes podiam conversar entre si em duplas ou trios.

Tabela Pitagórica – Multiplicação										
x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1					6				
2										
3									27	
4								32		40
5					25					
6		12					42			
7			21							
8										
9										
10				40					90	

Figura 5. Tabela Pitagórica

Priscila e Gisele preencheram rapidamente a tabela, encontrando os resultados mentalmente. Ingrid, Talita e Joana demoraram mais. Ingrid se apoiava nos dedos para fazer qualquer tabuada. Para calcular a operação 7 x 9, por exemplo, ela contava de nove em nove, mentalmente ou falando baixinho, e quando chegava no último dedo, ou seja, em nove, dezoito, vinte e sete etc, ela falava alto e dava uma pausa maior. Quando errava, ela franzia a testa, inclinava o corpo para frente e falava consigo mesma algo ininteligível mesmo para quem estava bem próximo. Mas isso era sempre muito rápido. Em um determinado momento, interrompi sua contagem e iniciamos um diálogo.

Ingrid: — Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito **NOVE...** dez, onze, doze, treze, catorze, quinze, dezesseis, dezessete, **DEZOITO...**
Prof.ª Pesq.: — Ingrid, você faz qualquer tabuada contando nos dedos?
Ingrid: — É, professora. Não pode?
Prof.ª Pesq.: — Claro que pode, mas será que é mesmo necessário sempre começar de novo para preencher a tabela?
Ingrid: — E não é?

Ao questionar Ingrid sobre a contagem nos dedos, embora não tivesse a intenção, transmiti a ela a ideia de que sua perspectiva (ALRØ e SKOVSMOSE, 2006) não estava correta. Isso mostra a complexidade da pesquisa em que o diálogo é, ao mesmo tempo, objeto e metodologia da pesquisa. No processo de conversação, o não dito, o que fica subentendido adquire significado para os sujeitos. A sorte é que Ingrid teve coragem de questionar se não podia.

Os dedos, a voz alta, a expressão corporal e a pausa serviam para testemunhar para Ingrid quais eram os múltiplos de 9. Nesses momentos, Ingrid se desligava do mundo e o diálogo era com ela mesma (BAKHTIN; VOLOCHÍNOV, 2009) e com mais ninguém.

Achei interessante o processo, mas fiquei preocupada, pois a cada tabuada Ingrid não aproveitava os resultados anteriores, e foi por isso que fiz a intervenção perguntando se era mesmo necessário reiniciar sempre. Ao ouvir minha intervenção, Priscila entra na conversa e diz:

Priscila: — Ah, não, Ingrid! Olha aqui, se você já sabe que seis vezes oito é quarenta e oito, então para achar sete vezes oito é só somar mais oito. Credo, Ingrid! Que feio!
Ingrid: — Ah, Priscila, me deixa...

Percebi que Ingrid estava rindo meio envergonhada e incomodada com a fala de Priscila. Mas, assim que Priscila virou as costas, Ingrid começou a aproveitar os resultados anteriores para encontrar os seguintes. Ao protestar, Priscila evidencia que a sua perspectiva (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006) é diferente da de Ingrid e o desacordo parece encerrar o diálogo, já que parecia não haver um acordo que possibilitasse às duas negociarem e chegarem a uma perspectiva comum.

Por outro lado, o diálogo entre as duas estudantes e a posterior reação de Ingrid revela uma forma de troca de teoremas-em-ato (VERGNAUD, 2009a, 1990), em que são confrontadas duas formas de pensar e fazer. Embora Ingrid tenha reagido negativamente, instantaneamente ela parece ter refletido sobre o que estava fazendo e percebe que o “modo de fazer” de Priscila é mais racional, não do ponto de vista da efetividade da ação, mas da racionalização do tempo, e passa a adotar o processo da colega. Há aí um interessante processo metacognitivo (FÁVERO, 2005a) que leva Ingrid a pensar no que estava fazendo, a partir da compreensão do que Priscila evidencia que faz, mas há também uma emocionalidade (GONZALEZ-REY, 2003) que fez com que Ingrid se sentisse envergonhada, mas fosse capaz de rever seu procedimento, reconstruindo sua ação.

Nesse e em outros episódios, ficou evidente que o diálogo entre os adolescentes, na maior parte do tempo, era muito direto, sem “meias palavras”. A forma encontrada por Priscila para fazer a intervenção sobre a ação de Ingrid foi muito diferente da forma como um professor faria, mas, no final das contas, parece ter funcionado, pois Ingrid parou para pensar no seu procedimento e reconstruiu sua ação. Nesse sentido, da posição que ocupa no mundo, Priscila sabe que seu enunciado tem endereço certo e, por isso, escolhe as palavras que julga adequadas para fazer Ingrid compreender (BAKHTIN, 2010). Como veremos a seguir, esse parece ser um processo consciente de Priscila, pois, com outras colegas, ela não age da mesma forma.

Como Priscila havia terminado, pedi a ela para ajudar Joana que não havia feito nada ainda na tabela. Primeiro, ela protestou dizendo que não sabia ajudar ninguém; como eu insisti, ela acabou concordando.

Prof.ª Pesq.:	— Priscila, ajuda a Joana com a tabuada.
Priscila:	— Ah, não, professora! Eu não sei ensinar ninguém.
Prof.ª Pesq.:	— Sabe sim, Priscila. Vamos... me ajuda...
Priscila:	— Tá bom, professora.

A fala de Priscila revela que alguns alunos participantes da pesquisa consideram que sabem, mas sabem só para eles mesmos, não sabem ensinar ou colaborar com a aprendizagem dos colegas. A imagem que fazem de si está longe da autoconfiança que deveria ser gerada pela resolução correta de um exercício ou de um problema. Outros alunos, no entanto, assim que acertam são mobilizados a ensinar, a colaborar com os colegas, como veremos mais adiante.

Como insisti que Priscila podia ajudar a colega, ela cedeu e, então, iniciou-se o seguinte diálogo:

Priscila: — Essa primeira coluna é só multiplicar por um, tá vendo?
Joana: — Humhum [fala acenando positivamente com a cabeça].
Priscila: — Joana, eu vou fazer junto com você. Olha aqui na linha e na coluna, um vezes dois é...

Joana estava em um mutismo desconcertante, muito encolhida, olhando para baixo. Quando olhava para mim, ela dava um sorriso inexpressivo. Mesmo assim, Priscila, não desistiu.

Priscila: — Fala, Joana, por favor... fala...
Joana: — É dois.
Priscila: — É dois. E quanto é dois vezes dois?

Para Bakhtin (2010), o diálogo é a alternância de enunciados e a enunciação pressupõe a existência do outro que escuta, que fala, que constrói réplicas e tréplicas, que concorda, que discorda, que interage. Como Joana permanece muda olhando para o chão, Priscila chega a verbalizar: “fala, Joana, por favor... fala...”, tentando inseri-la no diálogo. A ansiedade de Priscila mostra que interpretar o silêncio do outro não é tarefa fácil, pois este pode significar tanto que o estudante não entrou na situação, como também pode significar que ele está pensando sobre a situação, ou seja, ele pode estar antevendo algo que seja a base da representação de sua operação mental.

Na relação pedagógica em que há um professor para muitos alunos, interpretar o silêncio é tarefa ainda mais complicada. Muitas vezes, o silêncio é interpretado apenas como ausência, como não participação.

Como a provocação não foi suficiente para colocar Joana no diálogo, Priscila pega a sua mão e diz:

Priscila: — Aqui tem dois dedos e aqui mais dois dedos, tem quanto?
Joana: — Quatro.
Priscila: — Então duas vezes dois é quatro, tá vendo? Duas vezes... E quanto é três vezes dois?
Joana: — Seis [fala olhando para a própria mão e acrescentando mais dois dedos].
Priscila: — Tá vendo que é só contar de dois em dois?

A voz de Joana era quase inaudível. Ainda assim, Priscila insistiu em fazê-la trabalhar e perguntou quanto era “4 × 2”, mas Joana não respondeu e ela, então, tentou estimular, entregando a sua própria mão com quatro dedos estirados para Joana fazer a contagem.

O gesto de Priscila me fez pensar na invisibilidade de Joana em sala de aula. Ali naquele espaço, com apenas cinco alunos e uma colega tentando fazê-la agir, Joana se fecha ao diálogo. Na sala de aula é muito pior. Joana não fala, não age, não responde, não interage. Joana perdida entre muitos, é só mais uma invisível.

Priscila: — Faz nos dedos... Conta de dois em dois... Aqui ó, na minha mão.
Joana: — Oito.

Joana olhou para as mãos de Priscila, estirou também quatro dedos e respondeu “oito”. O gesto da mão estirada, mais do que a enunciação de Joana ao dizer “oito”, é o que diz para Priscila que ela deve continuar. Há, nesse episódio, uma comunicação não verbal, que faz o outro insistir no diálogo. Isso mostra que a alternância de enunciados não se dá apenas pela emissão de palavras, os elementos não verbais que compõem as enunciações são lidos e interpretados pelo outro e fazem parte do diálogo (BAKHTIN;VOLOCHÍNOV, 2009, p.133).

O episódio nos remete também ao que Alrø e Skovsmose (2006, p. 70) chamam de “escuta ativa”, que caracteriza a “cooperação investigativa”. Muito embora a atividade não seja típica de uma investigação, Priscila faz perguntas, dá apoio verbal e não verbal, tentando “fazer contato” com Joana. É interessante observar que sua atitude é completamente diversa da atitude que teve com Ingrid momentos antes. Aqui a “compreensão responsiva” (BAKHTIN, 2010, p. 302) de Priscila a faz escolher um estilo de fala e um gestual que a aproxime de Joana.

Na relação pedagógica, muitas vezes não há essa “escuta ativa” ou essa “compreensão responsiva”, essa observação sobre o fazer do aluno, sobre sua perspectiva e sobre o que pode fazê-lo engajar na atividade. Na dinâmica de uma organização pedagógica centrada na exposição oral do professor e na escuta passiva do aluno, o professor não interpreta, não tem como interpretar ou interpreta de forma equivocada essa comunicação não verbal entre os estudantes (MUNIZ, 2002). Passam despercebidos e são desconsiderados os gestos, os olhares, as contagens nos dedos, os sorrisos e muitos outros componentes da atividade matemática e que constituem esse processo não verbal de interagir.

Depois do episódio narrado acima, Priscila sorriu e seu sorriso foi retribuído por Joana. Daí para frente elas trabalham juntas, sempre contando nos dedos ou fazendo pauzinhos em uma folha branca, até preencherem quase toda a tabela.

Muito embora Priscila, que tinha sempre muita facilidade nas atividades, protestasse para ajudar os colegas, ela o fazia de forma sempre muito cooperativa e considerando as diferenças individuais. Priscila sabia que, com Joana, não podia ter o mesmo comportamento que tinha com Ingrid. Conforme defende Bakhtin (2010), da posição que Priscila ocupa no mundo, ela sabe se descolocar e colocar-se no lugar de Ingrid e Joana para entrar em diálogo com elas, e é por isso que ela sabe escolher as palavras que julga adequadas para colocá-las no diálogo. Seus enunciados são construídos considerando suas hipóteses sobre essas diferenças individuais.

O trabalho que Priscila realizou com Joana aproxima-se da “tutoria entre pares” descrita por Duran e Vidal (2011, p. 26) como aquela em que dois alunos com níveis diferentes de habilidade, frente a um tema específico, estabelecem uma relação em que um coopera com o outro. Nesse caso, é evidente que Priscila tinha muito mais habilidade com a tabuada do que Joana e Ingrid e, por isso, estava em situação na qual podia cooperar com a aprendizagem das duas.

No ambiente do projeto, frequentemente estudantes assumiam o papel de monitor de forma espontânea e, às vezes, estimulada, colaborando com a aprendizagem dos colegas. Mas nem sempre as atitudes eram cooperativas, como é possível ver em algumas situações de jogos mostradas a seguir.

4.1.1.2.Situações de jogos

No espaço do projeto, também foram utilizados vários jogos que sempre eram situações de grande diversão para o grupo. Nesses momentos, muitas vezes a cooperação cedia lugar à competição, mas ainda assim oportunizavam a constituição de interessantes diálogos.

Após o preenchimento da tabela pitagórica, foi proposto um jogo de tabuada chamado “Tabuada fácil[10]. Trata-se de um jogo que transfere para uma base lúdica um exercício tradicional. Esse tipo de jogo é o que Muniz (2010, p. 14) chama de “engodo pedagógico”, pois se utiliza do prazer natural dos estudantes pelo jogo e pela competição para lançá-los em

[10] Jogo de origem incerta e que foi utilizado pela Professora Edna com seus alunos, durante a pesquisa exploratória. As regras foram modificadas pela pesquisadora, que inseriu as fichas de cores diferenciadas e a pontuação de acordo com a cor das fichas.

uma atividade matemática que é carente de significado para eles, no caso, a tabuada. Trata-se na verdade de um exercício apresentado em uma base lúdica.

As peças do jogo foram construídas colaborativamente. Cada participante recebeu 6 fichas de 3 cores diferentes (2 verdes, 2 amarelas e 2 vermelhas) e, em parceria com colegas, registrou fatos da multiplicação. Em cada ficha de cor verde, ele escreveu uma tabuada que considerava fácil, mas sem registrar o resultado. Em cada ficha amarela, escreveu uma tabuada de média dificuldade e, em cada uma das vermelhas, uma tabuada que considerava difícil. No jogo, a tabuada difícil vale 5 pontos, a média, 3 pontos e a fácil, 2 pontos. Na primeira fase, cada jogador, na sua vez, escolhia se queria pegar uma tabuada fácil, média ou difícil. Ele virava a ficha e falava o resultado. Se acertasse, ficava com a ficha para si e ganhava os pontos correspondentes. Se errasse ou se não soubesse o resultado, o dono da ficha falava o resultado e ficava com a ficha para si, recebendo os pontos correspondentes. Se o dono da ficha também não soubesse, a ficha voltava para a mesa. Quando todas as fichas acabavam, cada jogador conferia seus pontos. Ganhava o jogo quem tivesse acumulado mais pontos. Na segunda fase, o jogador não mais escolhia o nível de dificuldade, pois era introduzido no jogo um dado, em cujas faces estava escrito FÁCIL, MÉDIO ou DIFÍCIL, que determinava a escolha.

Como era esperado, o jogo gerou grande prazer no grupo e possibilitou analisar as ações e reações dos estudantes em situação de alta competitividade.

Para chegar aos resultados, muitas vezes Ingrid contava nos dedos da mesma forma que fazia na atividade da tabela pitagórica, e isso incomodava Priscila que se mostrava muito competitiva em situações de jogos. É importante destacar que, diferentemente da atividade anterior, nessa não há um resultado anterior do qual Ingrid possa partir para enunciar o resultado da tabuada, por isso, ela usa o mesmo processo de contagem.

Na situação a seguir, Ingrid virou uma ficha de alta dificuldade em que estava registrada a tabuada “9 x 6”, então ela começou a contar nos dedos e aconteceu o seguinte diálogo:

Ingrid:	— Um, dois, três, quatro, cinco, SEIS.... sete, oito, nove, dez, onze, DOZE...
Priscila:	— Ah não, professora! A Ingrid tá demorando demais!
Prof.ª Pesq.:	— Deixa ela, Priscila! Nós não combinamos tempo, então, cada um pode usar o tempo que quiser.
Priscila:	— Professora, ela está fazendo nove vezes seis nos dedos! Ah não, professora, assim não vale...
Prof.ª Pesq.:	— Vale sim, Priscila.
Ingrid:	— É cinquenta e quatro.
Priscila:	— Não é justo.
Ingrid:	— Por quê? Deixa eu fazer do meu jeito e você faz do seu.
Prof.ª Pesq.:	— Priscila, é a sua vez.

O protesto de Priscila mostra que, em situações de jogo, ela queria ganhar. Já não importava se estava ali para aprender, o importante era vencer e o mais rápido possível. Ingrid, por sua vez, não se deixou abater e prosseguiu em seu procedimento de contar nos dedos, desafiando a perspectiva (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006) de Priscila.

Se, por um lado, a competitividade de Priscila coloca em risco as possibilidades de aprendizagens, na medida em que ela tenta intimidar as colegas, impelindo-as a jogar mais rápido, por outro, gera nas colegas um estado emocional (GONZALEZ-REY, 2003) de desejo de afirmar sua própria identidade. Ao dizer "deixa eu fazer do meu jeito", Ingrid se posiciona e se afirma diante de Priscila, não se deixando intimidar por seus argumentos e não se sucumbindo à sua perspectiva (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006). Mas evidentemente que essa alta competitividade pode diminuir as possibilidades de diálogo e de aprendizagens, como veremos a seguir.

Priscila, então, vangloriou-se que sabia a tabuada na "ponta da língua" e virou uma ficha vermelha em que estava escrito a tabuada "8 x 9" e, sem pestanejar, respondeu:

Priscila: — É sessenta e três.
Prof.ª Pesq.: — É?
Priscila: — É sim, professora. É sessenta e três.
Prof.ª Pesq.: — Errou...
Priscila: — É sim e eu provo!
Prof.ª Pesq.: — Então prova...

O excesso de autoconfiança de Priscila a conduziu à falta de autorregulação (FÁVERO, 2005a). Seu desejo de ganhar o mais rápido possível a conduziu ao erro e nem mesmo quando este foi apontado, ela se convenceu e disse que podia provar. Quando foi provocada a realizar a prova, Priscila fechou os olhos como se tivesse conversando com ela mesma e concluiu:

Priscila: — Caraca! Errei mesmo.
Prof.ª Pesq.: — Tá vendo? Você falou sem pensar.
Priscila: — É setenta e dois, professora.
Ingrid: — Mas agora já era. Você falou, então, já era — Falou sorrindo muito.
Priscila: — Tudo bem... Eu vou ganhar de qualquer jeito.
Prof.ª Pesq.: — Mas agora você vai pensar mais antes de responder, não vai?

Para impor-se no grupo, Priscila usava seu conhecimento como um poder. Ao dizer "eu vou ganhar de qualquer jeito", Priscila assumiu uma postura diferente da anterior; o confronto e a intimidação já não são mais indiretos, mas diretos. É como se dissesse "eu sei mais e vou ganhar". Nesse momento, as colegas pareciam aborrecidas e não retrucaram, apenas olharam com desânimo para Priscila e o diálogo foi interrompido. Novamente, percebemos que a atitude de Priscila cria uma zona de tensão (GONZÁLEZ-REY, 2003) que faz com que os sujeitos se mostrem pouco disponíveis para dialogar.

Mas em alguns jogos, embora houvesse competição, ela acontecia de forma menos acirrada. Havia mais trabalho cooperativo e muito mais possibilidade de aprendizagens coletivas. Foi o que aconteceu com o jogo "corrida fracionária[11]", mostrado na figura 6, a seguir, apresentado às alunas quando a professora começou a trabalhar, em sala de aula, a representação fracionária dos números racionais.

Figura 6. Jogo Corrida Fracionária

O jogo é composto de seis réguas fracionárias e dois dados, um que indica a régua ou a fração a ser tomada e o outro que indica quantas partes da fração serão tomadas. No caso específico desse jogo, há também miniaturas de cavalos que fazem a corrida. O jogo pressupõe a mediação do professor, que é também quem faz os registros inicialmente.

Começamos o jogo explorando cada uma das seis réguas e as regras do jogo foram explicadas. As réguas serviam para medir a distância que cada cavalo percorreria nas raias, na bancada de trabalho. Comecei a mostrar a régua com maior número de divisões.

Prof.ª Pesq.: — Talita, em quantas partes essa régua está dividida?
Talita: — Em seis.
Prof.ª Pesq.: — Então, como é o nome de cada parte?
Talita: — Como assim?
Prof.ª Pesq.: — A régua inteira está dividida em seis partes, então, cada uma dessas partes é uma fração do inteiro. Que fração é cada parte?
Talita: — Ah, professora, é um... um... um... como é que é, gente?
Priscila: — Um sexto, uai.
Talita: — É mesmo: um sexto.

[11] Jogo idealizado pelo Professor Cristiano Muniz e utilizado na formação de professores, no âmbito do Curso de Pedagogia para Professores em Exercício no Início de Escolarização, realizado ao abrigo do convênio entre a Universidade de Brasília e a Secretaria de Estado de Educação do DF.

Fizemos isso com todas as outras réguas até chegar à régua que estava dividida em duas partes.

No diálogo acima, Talita convocou os colegas a colaborar com ela. Quando disse "como é que é, gente?", ela abriu espaço para outros colegas participarem do diálogo. Ela "estabelece contato" (ALRØ E SKOVSMOSE, 2006, p. 70), ato comunicativo que inicia o processo de cooperação.

Na sequência, quando Priscila falou que era um sexto, Talita pegou de empréstimo seu enunciado para confirmar que era um sexto. Isso corrobora com a ideia de Bakhtin (2010) de que o enunciado é um elo da comunicação discursiva, pertencente a um campo de significação que é partilhado pelos sujeitos. Assim, a voz de Talita não é apenas a sua voz, mas também a voz de Priscila, cujo enunciado fez sentido para ela.

Também é interessante observar as marcas das falas. Toda vez que algo parece óbvio, interjeições como "uai", "ué", "ora" são utilizadas. Esses recursos são chamados por Alrø e Skovsmose (2006, p. 82) de *tag questions*, que tanto podem fazer parte do repertório linguístico individual do sujeito, como da herança cultural de sua comunidade de fala. Nesse caso, parece-nos que essas expressões fazem parte do repertório do grupo, e também representa uma herança dos grupos sociais a que pertencem.

Na sequência, peguei outra régua e perguntei:

Prof.ª Pesq.: — E essa, pessoal?
Gisele.: — Está dividida em duas partes.
Prof.ª Pesq.: — Então, como é o nome de cada parte?
Priscila: — Um... um... dois? ... Não, não é... é...
Prof.ª Pesq.: — Quando eu divido em dois, eu estou dividindo ao...
Priscila: — Ué! É meio! Meio! Lembrei: é um meio.
Prof.ª Pesq.: — Isso mesmo.

Há interessantes recursos de linguagem utilizados no diálogo e que, muitas vezes, não paramos para observar, em especial quando o diálogo é no contexto da aprendizagem matemática. Ao invés de dar a resposta, eu usei uma frase incompleta (ALRØ E SKOVSMOSE, 2006). Priscila captou a inflexão da minha fala e rapidamente completou a frase.

Na continuidade, mostrei também os dois dados, explicando que um indicava a régua a ser usada na medição da distância que o cavalo iria percorrer e o outro indicava o número de partes da régua que cada cavalo efetivamente andaria. Para exemplificar, joguei o primeiro e o segundo dado e disse:

Prof.ª Pesq.: — No dado "quem", eu tirei um quarto. No dado "quantos", eu tirei três, então vou andar três pedaços de um quarto, ou três quartos.

Entenderam?

Para que elas compreendessem a ideia do jogo, fiz o seguinte registro em uma tabela no quadro de giz, que está representada na figura 7, a seguir.

TABELA PARA REGISTRO DO JOGO "CORRIDA FRACIONÁRIA"			
Cavalo	**Quem?**	**Quantos?**	**Anda?**
Verde	$\frac{1}{4}$	3	$\frac{3}{4}$
Azul			
Roxo			
Amarelo			
Marrom			

Figura 7. Transcrição da tabela desenhada no quadro

Após essa conversa inicial, cada um escolheu seu cavalo e o jogo foi iniciado. A figura 8, a seguir, mostra a tabela com duas rodadas do jogo.

TABELA COM OS RESULTADOS DO JOGO "CORRIDA FRACIONÁRIA"						
Cavalo	**Quem?**		**Quantos?**		**Anda?**	
	1ª rodada	2ª rodada	1ª rodada	2ª rodada	1ª rodada	2ª rodada
Verde– Gisele	$\frac{1}{3}$	1	2	3	$\frac{2}{3}$	3
Azul – Talita	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	4	3	$\frac{4}{4}$	$\frac{3}{5}$
Roxo – Priscila	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	2	3	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{2}$
Amarelo – Ingrid	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	3	2	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$
Marrom – Joana	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	3	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6}$

Figura 8. Transcrição da tabela com os resultados com duas rodadas do jogo "Corrida Fracionária".

Na primeira rodada, a situação mais interessante foi vivenciada por Talita, que tirou a régua de $\frac{1}{4}$ ao jogar o primeiro dado e, ao jogar o segundo dado, tirou 4.

Prof.ª Pesq.: — Quem você tirou no dado?
Talita: — Um quarto.
Prof.ª Pesq.: — No outro dado, você tirou quantos?
Talita.: — Quatro, professora.
Prof.ª Pesq: — Então, quanto seu cavalo vai andar Talita?

Ela pegou a régua e fez seu cavalo andar o equivalente a quatro quartos.

Talita: — Ele vai andar quatro quartos... Ih! É a régua inteira!
Prof.ª Pesq.: — Isso mesmo, Talita: a régua inteira. Então, gente, quatro quartos é o mesmo que...
Gisele: —Uma régua inteira?

Todos: —Um inteiro.
Ingrid: — Massa!

Nesse momento, o jogo possibilita que o grupo compreenda que quatro quartos correspondem a um inteiro. A gíria “massa”, utilizada por Ingrid, mostra essa compreensão e seu estado emocional evidencia o prazer da descoberta de que fala Freire (2011b). No entanto, não podemos deixar de considerar que se trata de alunos do 7º ano do ensino fundamental, e que vêm estudando a representação fracionária dos números racionais desde o 4º ano. A surpresa das alunas, os palavrões e as gírias denotam o processo de descoberta de propriedades que, a essa altura, já deveriam estar consolidadas.

Na segunda rodada, Gisele tirou a régua sem divisões, ou seja, a régua do inteiro e, no segundo dado, tirou 3. Ficou assustada e disse:

Gisele: — E agora? O que eu faço? [Olhando para as colegas e depois para mim]
Prof.ª Pesq.: — E agora, gente, o que a Gisele tem que fazer?

Novamente, houve uma tentativa de “estabelecer contato” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006) por parte de Gisele, que não foi correspondida. Como ninguém respondeu, eu perguntei novamente.

Prof.ª Pesq.: — Se ela tivesse tirado um no segundo dado, quanto ela andaria?
Gisele: — Uma régua?
Prof.ª Pesq.: — É. Uma régua. Mas você tirou três.
Priscila: — Caralho! Ela vai andar três réguas. Ah, não! Professora, assim não dá. Três?
Prof.ª Pesq.: — Isso mesmo, três réguas [muito risos].

Em situações de jogo, Priscila sempre se revelava muito competitiva. Sua capacidade de cooperação era profundamente afetada pela competição. Ao se dar conta que Gisele praticamente ganhara o jogo, Priscila protestou, pois, naquele momento, o importante não era aprender, mas ganhar. Mas, nesse episódio, a competição foi muito menos acirrada do que no jogo da “Tabuada fácil”. Ao invés de causar aborrecimento, o protesto de Priscila gerou muitas gargalhadas e diversão no grupo.

A competição exacerbada limita a possibilidade de ações dialógicas e cooperativas, pois gera nos sujeitos uma predisposição a encerrar a alternância de enunciados que caracteriza o diálogo (BAKHTIN, 2010). No entanto, um certo nível de competição parece motivar o diálogo e, portanto, a cooperação. No caso do jogo da tabuada, o aborrecimento evidenciado pelos gestos e pelo silêncio revelou o desejo de encerrar o diálogo, diferentemente do que ocorreu no episódio acima, em que a diversão com a competição evidenciada na fala de Priscila não afastou os sujeitos do diálogo.

Na sequência, Priscila tirou a régua de $\frac{1}{2}$ e comemorou muito, então, brinquei com ela dizendo:

Prof.ª Pesq.:	— Você está feliz porque tirou um meio? Não seria melhor tirar um sexto?
Priscila:	— Oxe, professora! Claro que não! Aqui é melhor tirar um ou dois. [Falou pegando as réguas de um meio e de um sexto]
Prof.ª Pesq.:	— Por quê?
Priscila:	— Porque anda mais, uai?
Prof.ª Pesq:	— Não entendi...
Priscila:	— Ah! Professora, nem vem que não tem. Você sabe que esse pedaço aqui é maior que esse aqui. [Falou mostrando as réguas que tinha na mão]

Há aqui outro recurso de linguagem. Para fazer Priscila verbalizar a sua compreensão no jogo de perguntas e respostas, fiz uma pergunta que contrariava seu pensamento. Priscila, então, construiu seus argumentos usando as réguas divididas em duas e seis partes. Ao dizer "aqui é melhor tirar um ou dois", Priscila enunciou um importante teorema-em-ato (VERGNAUD, 2009a, 1990) que correspondia à ideia de que quanto menor o denominador, maior é a fração, ou seja, ela demonstrou domínio conceitual em relação à proporção inversa. Ao jogar o segundo dado, ela tirou 3 e rapidamente verbalizou:

Priscila:	— Meu cavalo vai andar três pedaços de um meio. Isso vai dar uma régua e meia.
Prof.ª Pesq.:	— Como se escreve isso, Priscila?
Priscila:	— O quê?
Prof.ª Pesq:	— Três pedaços de um meio.
Priscila:	— Ué! Escreve três meios. [Falou escrevendo no papel a fração três meios]
Prof.ª Pesq:	— Não há outro jeito de escrever esse número, essa fração?
Priscila:	— Não...
Prof.ª Pesq.:	— Não? O que vocês acham?
Priscila:	— Professora, fala logo. Se você tá falando assim é porque tem um jeito.

Ao ser questionada se havia uma outra maneira de escrever a fração, Priscila enunciou um "não", mas a inflexão de sua voz mostrava que ela não tinha certeza. Como ela era muito esperta, sabia que, nesse jogo de palavras, havia uma intencionalidade minha. Nessa alternância de enunciados (BAKHTIN, 2010), Priscila era capaz de antever ou de imaginar o que estava em minha mente. Isso corrobora com o que Alrø e Skovsmose (2006) afirmam sobre a faculdade que alguns alunos têm de adivinhar o que o professor está querendo. Muito embora não soubesse ou não se lembrasse de outra representação para o número $\frac{3}{2}$, ela sabia que havia outra, apenas pela forma como falei.

Mostrei, então, as réguas e ela chegou à conclusão que era um e meio.

Prof.ª Pesq.:	— Então não são três metades? E isso dá quanto?
Priscila:	— Um e meio?
Prof.ª Pesq.:	— Como se escreve?.
Priscila:	— Uai, professora, um e meio — [Falou escrevendo 1,5 em um papel]
Prof.ª Pesq.:	— Ok. Mas tem outro jeito?

Como ninguém falou, fui ao quadro e mostrei que $\frac{3}{2}$ ou 3 metades poderia ser escrita sob a forma de número misto ($1\frac{1}{2}$) e todos balbuciaram um som:

Todos:	— Hummm...
Prof.ª Pesq.:	— Vocês não se lembram disso?
Priscila:	— Mais ou menos.
Gisele:	— A professora ensinou isso no ano passado, mas eu já esqueci.
Prof.ª Pesq.:	— A professora Leila vai ensinar isso de novo para vocês esse ano, mas agora pode ser negativo ou positivo.

Novamente, é importante destacar que são estudantes do 7º ano e que, provavelmente, passaram por um processo de ensino e aprendizagem do número fracionário carente de significado. Essas estudantes não conseguiam reconhecer que uma fração imprópria tem uma representação sob a forma de número misto e a maioria sequer reconheceu essa representação, quando mostrada pela pesquisadora.

Na segunda jogada, Joana tirou $\frac{1}{6}$ em um dado e, no outro, tirou 3. Ela fez seu cavalo andar $\frac{3}{6}$, mas não quis saber de conversa nem comigo e nem com ninguém. Todas as perguntas que fiz a ela foram respondidas pelas colegas, muito embora eu pedisse para que deixassem que ela falasse. Perguntei:

Prof.ª Pesq.:	— Joana, você andou três pedaços de um sexto, isso é o mesmo que...
Gisele:	— Fala, Joana...
Prof.ª Pesq.:	— Você viu que os três pedaços é exatamente a metade da régua? Viu?
Ingrid:	— É mesmo!
Prof.ª Pesq.:	— A fração três sextos também representa a metade, não é? Que outra fração representa a metade?
Gisele:	— Um meio.
Prof.ª Pesq.:	— Isso mesmo, Gisele! Gente deixa a Joana falar. [Viro-me para Joana e pergunto] — Joana, tem outra fração que representa a metade? Olha aí nas

réguas.
Priscila: — Tem, professora: dois quartos.
Prof.ª Pesq.: — O que vocês acham, tem outras frações que representam a metade?

O episódio acima mostra as tentativas infrutíferas de colocar Joana no diálogo. Nesse dia, ela simplesmente não participou do diálogo, nem mesmo por processos não verbais. Da mesma forma que ocorria em sala de aula, a dinâmica da atividade impelia todos a prosseguirem e deixarem Joana para trás.

Diante da recusa de Joana de participar do diálogo, fiz o seguinte registro no quadro de giz, a partir da fala das estudantes:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

Enquanto estava registrando no quadro, percebi que Gisele e Priscila estavam conversando com as réguas na mão:

Priscila: — Gi, se a régua tivesse dividida em oito partes, então a metade era quatro.
Gisele: — É. A metade é quatro oitavos.

Nesse momento, percebi que as duas estavam dialogando à revelia do que eu estava fazendo no quadro, em processo de abstração que extrapolava as réguas fracionárias. Elas estavam no que, no senso comum, tem sido chamado de "conversa paralela". Como o número de estudantes era pequeno, foi possível perceber que ambas estavam em um importante processo de conceitualização. Em uma sala de aula, com 35 ou 40 alunos, é complicado gerenciar essas conversas; em virtude disso, em geral, elas não são bem-vindas e o seus conteúdos, muitas vezes, passam despercebidos pelos professores.

Pedi, então, que falassem alto e foi Priscila quem tomou a iniciativa de explicar o que estavam falando:

Priscila: — Professora, se a régua tiver dividida em oito é só pegar quatro partes. Se tiver dividida em dez partes, é só pegar cinco partes. Vai ser tudo metade, não é?
Prof.ª Pesq.: — Vamos ver, então, que frações são essas que Priscila e Gisele estão falando?

Fui ao quadro e completei o registro com a ajuda delas:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} \ldots$$

Depois, fizemos o mesmo com a fração $\frac{1}{3}$ e conversamos sobre frações equivalentes.

De um lado, fica claro que o espaço e a situação do jogo favoreceram aprendizagens significativas sobre números fracionários, mas, por outro lado, como já foi dito, é preciso considerar que são estudantes do 7º ano e, portanto, tais aprendizagens já deveriam ter acontecido. Isso mostra que, de fato, a aprendizagem do número fracionário é ainda um obstáculo a ser superado.

O jogo com apenas cinco alunas, sobre uma bancada em que todos podiam falar, revela-se um importante instrumento de mediação da aprendizagem, muito embora seja preciso considerar a questão da competição. Ainda assim, é preciso refletir sobre o fato de uma das cinco alunas simplesmente se recusar a participar dos processos conversacionais.

4.1.1.3.Situações de exercícios do livro didático

Por várias vezes, exercícios do livro didático, que não foram feitos em sala ou que foram deixados como tarefa de casa, constituíram-se em situações de aprendizagem no cenário do projeto "Matemática: nenhum a menos". Normalmente, as estudantes chegavam e diziam que precisavam de ajuda em alguma atividade ou que estavam com muitas tarefas para fazer.

Em um certo dia, Helena pediu ajuda para resolver o exercício mostrado na figura 9, a seguir, que havia sido deixado pela professora como tarefa de casa. Sua maior dificuldade era com o formato do exercício que exigia a coordenação de diferentes registros de representação (DUVAL, 2011). Para resolver o exercício, Helena deveria coordenar a informação da cor do arco do jogo de dardos, relacionando-a com uma pontuação específica e, além disso, também deveria relacionar cada jogador com um símbolo geométrico.

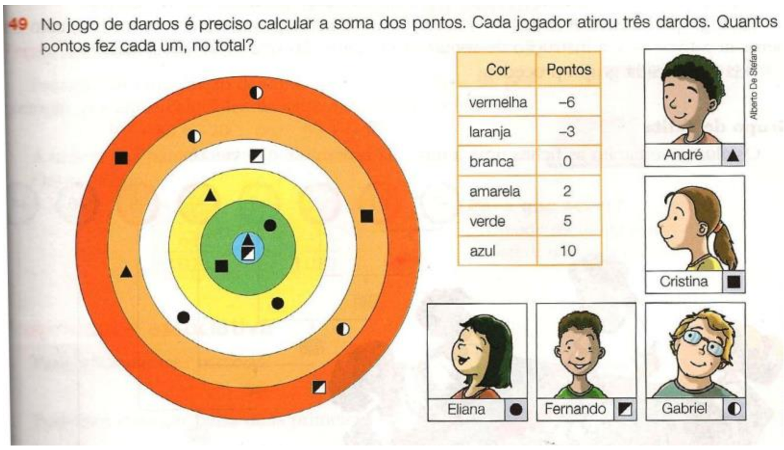


Figura 9. Exercício do livro (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009, p. 29)

Helena: — Professora, como faz esse? Não estou entendendo.
Prof.ª Pesq.: — Humm... Veja só: é um jogo de dardos e cada cor tem um valor, tá vendo? O centro ou o alvo, na cor azul, vale mais, vale dez pontos, mas quem acerta o dado na extremidade externa, em cor vermelha, vale ponto negativo, vale menos seis, certo? O laranja vale menos três, o branco vale zero, o amarelo, mais dois e o verde, mais cinco. Tá vendo que cada jogador está representado com um símbolo?
Helena: — Acho que entendi. O André está representado por um... como é o nome? [apontando para a imagem]
Prof.ª Pesq.: — Um triângulo? E Cristina?
Helena: — Um quadrado.
Prof.ª Pesq.: — Vamos ver quantos pontos André fez. Veja onde ele acertou, onde tem um triângulo.
Helena: — André acertou no laranja, menos três, no amarelo, mais dois, e no centro, no azul, mais dez. Somando os positivos dá mais doze. [Enquanto Helena fala, eu vou fazendo o registro no caderno dela.]
Prof.ª Pesq.: — E?
Helena: — Tem que tirar os negativos. Vai dar mais nove. O André fez mais nove.
Prof.ª Pesq.: — Será que ele foi o vencedor? Será que ele ganhou de Cristina, Eliana, Fernando e George?

A percepção da dificuldade de Helena em coordenar essas diferentes representações levou-me a construir meu enunciado a partir de uma tradução da imagem para ela. Helena conseguiu, então, perceber o que deveria fazer e enunciou, com tranquilidade, a quantidade de pontos de André, chegando à resposta sem dificuldade.

Para alguém que está fora da situação, o enunciado “tem que tirar os negativos” não faz o menor sentido, mas, como estamos na situação, sei que Helena juntou os positivos mentalmente e “tirou os negativos”, ou seja, calculou o saldo.

Em seguida, Helena continuou a resolver o exercício sem demonstrar qualquer dificuldade com a soma algébrica de números inteiros. Sem olhar para mim, ela falava baixinho e, muitas vezes, recorria às argolinhas azuis e vermelhas para fazer os cálculos. No “falar baixinho” de Helena, havia um diálogo com ela mesma (BAKHTIN, 2010). Ela franziu a testa e até sorriu enquanto estava nesse processo de explicitar para ela mesma, por meio da fala, os seus procedimentos, o modo próprio de pensar. Há aí um importante processo metacognitivo de tomada de consciência que, segundo Guimarães, Stoltz e Bosse (2008), torna o sujeito capaz de utilizar as estratégias cognitivas de que dispõe de modo mais eficaz, porque o permite escolher e regular essas estratégias de acordo com a sua necessidade.

No caso de Helena, na situação acima, a impressão que se teve foi que a cabeça dela estava tão cheia de ideias, que era impossível mantê-las presas e elas escapavam pela boca. O mesmo aconteceu com todas as estudantes quando realizaram esse diálogo consigo mesmas. No episódio acima, apenas chegando muito próximo é que se percebia que Helena “juntava negativos" ou "juntava positivos" para calcular o saldo final, como mostra o fragmento a seguir.

> Helena: — Cristina, é menos seis, menos três e mais cinco. Dá dá três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove...menos nove. Um negativo anula um positivo, sobra quatro vermelhas: menos quatro. [Fala baixinho, manipulando as argolas vermelhas e azuis]

Rapidamente, Helena concluiu todos os cálculos, apoiada nas argolas azuis e vermelhas para calcular o saldo de cada um. Ao final, ela concluiu:

> Helena: — Professora, André fez mais pontos. O saldo de Cristina é menos quatro, de Eliana é mais sete, de Fernando é mais quatro e de George, menos doze.
>
> Prof.ª Pesq.: — Muito bem, Helena! Meus parabéns!

A figura 10, a seguir, mostra o registro feito por Helena que confirma seu procedimento de somar positivos e somar negativos, para só então calcular o saldo.

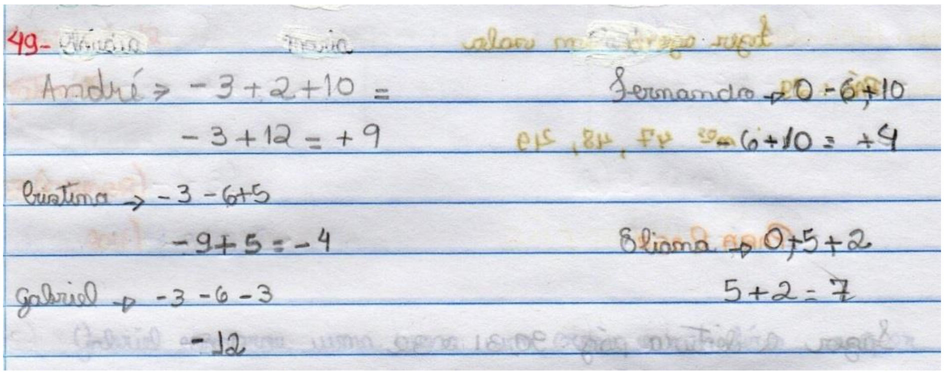


Figura 10. Registro com a resposta do exercício do dardo, feito por Helena no caderno.

Quando enunciava um elogio falando "muito bem", "parabéns", ou algo parecido, a postura corporal dos estudantes mudava. Foi o caso de Helena nesse exercício. Ao ser elogiada, ela sorriu e levantou os ombros, deixando a postura mais ereta. Meu elogio despertou em Helena um estado emocional (GONZALEZ-REY, 2003) que pareceu motivá-la, ainda mais, a realizar as atividades.

Os encontros me mostraram como a mediação direta, o atendimento individual fazia diferença no desempenho do estudante. Diferentemente do que acontecia em sala de aula, as dúvidas eram dirimidas no tempo em que elas aconteciam. Muitas vezes, apenas a leitura conjunta do exercício era suficiente para que o estudante dissesse: "hum... entendi. É só isso?"

Uma outra diferença da sala de aula era o apoio do material para testemunhar as operações com inteiros. No espaço do projeto “Matemática: nenhum a menos”, o material ficava sobre a mesa e o aluno recorria a ele sempre que julgasse necessário; já na sala de aula, não havia esse apoio.

Gisele, em uma conversa informal em que verbalizou, de forma efusiva, seu desempenho na prova de Matemática, destacou a importância desse material para a sua construção conceitual:

> Gisele: — Eu fiz a prova de Matemática, ontem, e acho que gabaritei. Quando eu peguei a prova, eu pensei: “eita, e agora? Como é que eu vou fazer?”. Aí eu comecei a pensar aqui nos jogos, aquele negocinho com os vermelhos e azuis, sabe? Aquele das argolinhas. Quando eu vi, eu tava brincando como se estivesse jogando, só que com a prova. Eu acho que gabaritei.

Ao enunciar como pensava no material sem que ele estivesse presente, Gisele realizou uma abstração que mostra a internalização da ação de operar com inteiros utilizando as argolas azuis e vermelhas. Ela mostrou também a autonomia (FREIRE, 2011a) construída na ação. Para realizar os cálculos, ela não precisava das argolas, precisava apenas pensar nas argolas. Dias depois, Gisele levou a prova que testemunhava a sua aprendizagem. Ela, de fato, “gabaritou” a prova.

4.1.1.4.Situações do circuito de problemas

Das situações de aprendizagens propostas no ambiente do projeto, uma das que se tornaram mais atrativas foi o circuito de problemas. O circuito era composto por um conjunto de problemas, impressos em tamanho grande, apresentados sobre as mesas, para que os estudantes pudessem escolher a ordem em que os resolveriam. No circuito, eles recebiam uma folha e apenas registravam a resposta. Ao circularem entre os problemas, podiam conversar uns com os outros e discutir suas estratégias.

Como a professora estava iniciando o trabalho com número racional, especialmente a representação fracionária, resolvi propor um circuito com oito problemas que envolviam a ideia de fração. Todos os problemas são criações de Bertoni (2003). Entreguei uma folha numerada de 1 a 8, informei que poderiam responder do jeito e na ordem que quisessem e pedi apenas que utilizassem o espaço correspondente, ou seja, o problema 1 deveria ser registrado no espaço 1, e assim sucessivamente.

Antes de começar o circuito, apresentei o minicartaz, mostrado na figura 11, e perguntei a quantidade de melancias que havia em cada situação.

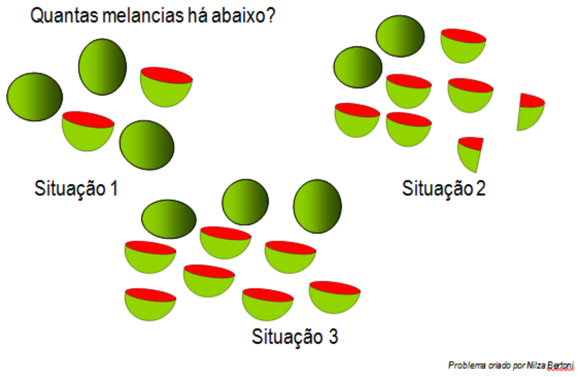


Figura 11. Problema das melancias

Prof.ª Pesq.: — Na situação um, há quantas melancias?
Gisele: — Tem cinco melancias.
Helena: — Mas essas aqui são duas metades.
Priscila: — Então, é quatro melancias.
Prof.ª Pesq.: — Por que são quatro, Priscila?
Priscila: — Uai, professora. Uma metade com outra metade dá uma melancia.
Prof.ª Pesq.: — Priscila está certa, gente?
Todos: — Tá.

No diálogo realizado a partir da imagem, as falas se complementavam. Ao dizer que havia cinco melancias, Gisele contou as peças sem considerar as metades. Helena tratou de chamar a atenção para isso e Priscila tomou de empréstimo a fala de Helena para concluir que haviam quatro melancias. O episódio mostra uma típica alternância de enunciados, característica do diálogo (BAKHTIN, 2010).

Na sequência do diálogo, a rapidez de Priscila em responder as questões começou a incomodar Gisele e ela, então, verbalizou esse incômodo. Mas há um sentido subjetivo (GONZALEZ-REY, 2005 b) que se evidencia no diálogo entre Gisele e Priscila. Na primeira situação, Gisele havia errado e Priscila foi quem a corrigiu. Agora era a hora de ela mostrar que sabia, mas Priscila não permitiu porque respondeu muito rápido.

Prof.ª Pesq.: — E na situação dois?
Priscila: — Tem cinco, professora.
Gisele: — Ah, não, professora! Priscila não deixa a gente responder.
Prof.ª Pesq.: — E então, Gisele? Priscila está certa? Tem cinco melancias?

Sempre que eu estava presente, Priscila assumia o papel de aluna. Muito embora tivesse mais habilidades construídas do que Gisele, em relação à representação fracionária do número racional, o episódio mostra que Priscila nunca era condescendente com Gisele, agindo de igual para igual. Tratei, então, de colocar Gisele no diálogo, a partir da fala de Priscila. Ela, então, conferiu a quantidade passando o dedo como se juntasse pedaços de melancias e disse.

Gisele:	— Tá sim, professora. Aqui ó tem duas melancias, essa metade com essa metade faz mais uma melancia, essa metade com essa faz outra, aí tem essa metade e essas duas aqui que não é metade, é metade da metade.
Prof.ª Pesq.:	— Isso mesmo, Gisele. Nós já sabemos que a metade da melancia nós podemos representar pela fração um meio. — [Falo e represento no papel a fração um meio] — Que fração nós podemos usar para representar esse pedaço aqui, que é metade da metade? [silêncio]

No processo de mediação, o professor, muitas vezes, depara-se com o silêncio e precisa interpretá-lo. No caso acima, considerei que a falta de resposta era motivada pela incompreensão da pergunta, por isso, repeti o questionamento, mudando as palavras na tentativa de “estabelecer contato” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p. 70) e iniciar o diálogo:

Prof.ª Pesq.:	— Tá bom... Então, em quantas partes eu tenho que dividir a melancia para conseguir a metade da metade?
Gisele:	— Em quatro, professora.
Prof.ª Pesq.:	— Se é em quatro, como é o nome de cada parte?
Gisele:	— Ah... é um quarto, não é?
Prof.ª Pesq.:	— Exatamente! A fração que representa a metade da metade é um quarto. Muito bem, Gisele!

De todas as participantes do projeto, Gisele era a que mais se envaidecia quando eu fazia um elogio, após validar um procedimento seu. No espaço do projeto, em que as interações eram mais diretas e próximas, era possível observar os diferentes procedimentos, e também as diferentes reações emocionais das alunas, o que nem sempre ocorria em sala de aula.

Prof.ª Pesq.:	— E na terceira situação? Há quantas melancias?
Todos:	— Seis e meia.
Prof.ª Pesq.:	— Essa foi fácil, não?
Todos:	— Hã-hã!

Depois desse problema inicial, espalhei os problemas impressos em tamanho grande por duas mesas. Cada mesa tinha quatro problemas. Orientei-as a fazerem na ordem que quisessem, mas deveriam fazer todos, e disse também que podiam conversar entre si, trocando ideias.

A figura 12, a seguir, mostra os problemas (BERTONI, 2003) utilizados no circuito.

Problema 1: 45 bolinhos para 30 alunos. Quanto cada um recebe?

Problema 2: Na casa de Luís cozinha-se uma xícara e meia de arroz por dia. Durante uma semana, quanto de arroz se gastará?

Problema 3: Dezesseis barras de chocolate vão ser divididas igualmente entre 5 pessoas. Quanto cada pessoa receberá?

Problema 4: Dividir 10 doces igualmente para 6 crianças. Quanto cada uma recebe?

Problema 5: Três chocolates para 4 crianças. Se todos comem igual, quanto cada uma come?

Problema 6: Bebi um litro e meio de água e meu irmão bebeu meio litro a mais do que eu. Quanto ele bebeu?

Problema 7: A jarra estava cheia de água. Graça bebeu metade da água, e Lúcia bebeu metade do que sobrou. Quanto de água ficou na jarra?

Problema 8: Para fazer um leite batido, foram misturados:
Meio litro de leite
1 quarto de litro de suco de laranja
1 quarto de litro de suco de acerola
Qual a quantidade total?

Figura 12. Transcrição dos problemas utilizados no circuito

Durante o circuito, os alunos se comportavam como se fosse um jogo. Eles começaram a disputar para ver quem terminava primeiro ou para ver quem tinha acertado.

No início do circuito, aproximei-me de Priscila que estava sozinha e concentrada em terminar o mais rápido possível. Seu registro dos problemas, a seguir, levou-me a questionar a organização das respostas.

O registro de Priscila, mostrado na figura 13 a seguir, apresentava muitas rasuras e ela utilizou corações para representar os bolinhos e as xícaras de arroz e, para representar a metade dos mesmos, ela pintou a metade do coração. Nos registros, estão subentendidas as respostas, muito embora o registro numérico seja diferente da resposta correta.

Figura 13. Primeiro registro da estudante Priscila para os problemas 1 e 2 do circuito

Priscila era uma estudante que, embora demonstrasse habilidades matemáticas bastante consolidadas se comparadas à totalidade do grupo, tinha notas aquém do esperado para uma estudante cuja relação com o saber matemático (CHARLOT, 2000) não era conflituoso. De alguma forma, seu boletim escolar não traduzia, de fato, o seu processo de aprendizagem e desenvolvimento.

Dito isso, é importante salientar que o fato de Priscila ter desempenho escolar apenas mediano me intrigou desde o início da pesquisa. Em diversos momentos, peguei-me pensando no porquê de Priscila ter reprovado o 7º ano e no porquê de suas notas serem tão baixas. A direção da escola, a coordenação pedagógica e sua professora sempre me respondiam que Priscila era muito danada, mas isso não era, diretamente, motivo para o baixo desempenho. Foi então que a professora Leila me disse que Priscila não fazia as atividades e tinha um caderno muito desorganizado. Embora ela mantivesse uma boa relação com o saber matemático, suas atitudes revelavam uma relação ruim com os procedimentos escolares, como, por exemplo, copiar, manter um caderno organizado, fazer tarefas de casa, entre outros.

Isso provavelmente me levou a romper a linha tênue que separa o papel de professora e o de pesquisadora. O episódio a seguir mostra essa ruptura. Saio do meu papel de pesquisadora e entro no papel de professora, mas isso não aconteceu só nesse episódio.

Prof.ª Pesq.: — Você está fazendo qual? Posso ver?
Priscila: — O um.
Prof.ª Pesq.: — Quarenta e cinco bolinhos para trinta pessoas...

Priscila:	— Dá um e meio
Prof.ª Pesq.:	— Como você fez?
Priscila:	— Tá aqui ó. — [Falou, mostrando a folha com o registro]
Prof.ª Pesq.:	— Nossa, Priscila! Que é isso? Que confusão!
Priscila:	— Ah, professora... Deixa eu... — [falou sorrindo]
Prof.ª Pesq.:	— Você precisa se organizar. Como é que a professora vai entender o que você fez?
Priscila:	— Aqui, professora, um bolinho e meio, Tá vendo? Está certo, não está?
Prof.ª Pesq.:	— Não, não está. Bem... está meio certo. Estou vendo aqui um coração e meio, mas você escreveu apenas um meio. Como é que eu vou saber que você sabe que é um bolinho e meio?
Priscila:	— Mas o segundo tá certo, num tá?
Prof.ª Pesq.:	— Na casa de Luís, cozinha-se uma xícara e meia de arroz todo dia. No final de uma semana... Conta aí os corações inteiros e os corações partidos — [nesse momento, ela sorri muito].
Priscila:	— Olha só, dá para entender. São um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete corações inteiros. Esse com esse forma um, esse com esse forma outro, esse com esse forma outro e sobre metade. São dez e meio, dez xícaras e meia. Tá escrito aqui ó. — [Fala apontando para os corações inteiros e para as metades, como se estivesse unindo]
Prof.ª Pesq.:	— E toda essa rasura aí do lado? Como é que eu vou saber que não faz parte da resposta? Eu tenho que adivinhar? Além do mais, não está escrito dez e meio. Está escrito dez meios.
Priscila:	— E é diferente, é?
Prof.ª Pesq.:	— E não é? O que são dez e meio? [Falo apontando para os corações no registro de Priscila]
Priscila:	— Uai, é dez coração inteiro e meio.
Prof.ª Pesq.:	— Como é que se escreve dez inteiros e meio?
Priscila:	— Uai, não é assim?
Prof.ª Pesq.:	— Vou mudar a pergunta: no jogo, lembra o jogo? Da aula passada? Como é que você escreveu uma régua e meia?
Priscila:	— Ih, professora! É mesmo. O dez fica sozinho. É o dez e o meio, né? [Falou registrando no papel o número misto dez e meio]
Prof.ª Pesq.:	— É Priscila. Você precisa se organizar. Você é muito inteligente e eu sei que é capaz de organizar seu caderno e responder os exercícios de uma forma que as pessoas podem entender.
Priscila:	— Tá, professora. Tá bom! Me dá outra folha de resposta?

O episódio acima exige duas análises, a primeira diz respeito à relação entre a professora pesquisadora e a estudante; já a segunda diz respeito ao processo de mediação da aprendizagem por meio do diálogo a partir do registro escrito.

Ao questionar os registros de Priscila, comporto-me mais como professora do que como pesquisadora. Quando digo "Você precisa se organizar. Como é que a professora vai entender o que você fez?", estou pensando em como "enquadrar" Priscila na perspectiva da sua professora que dá nota no caderno e pontua por atividades feitas. E, mesmo nessa hora, Priscila tem argumento, pois mostra o registro, explica o que fez e retruca: "dá para entender". Então, novamente, eu questiono seus registros dizendo: "E toda essa rasura aí do lado? Como é que eu vou saber que não faz parte da resposta? Eu tenho que adivinhar?".

O fato é que os registros pictóricos mostram que Priscila sabia as respostas dos problemas 1 e 2, mas os registros numéricos são divergentes dessas respostas. O diálogo evidencia que a escrita do número fracionário era um obstáculo para Priscila e isso se evidenciou na passagem em que apontei seu registro e disse: "não está escrito dez e meio. Está escrito dez meios" e ela, admirada, diz: "e é diferente, é?".

Para tentar fazer Priscila avançar em seu registro numérico, fiz uso do seu próprio registro pictórico para questionar a escrita de "dez inteiros e meio", mas ainda assim ela persistiu dizendo "uai, não é assim?". Nesse momento, percebi que era preciso utilizar algo que fizesse sentido (GONZALEZ-REY, 2003) para Priscila, então recorri à situação do jogo e mudei a pergunta: "no jogo, lembra do jogo? Da aula passada? Como é que você escreveu uma régua e meia?". Isso foi suficiente para que Priscila fizesse a transferência para a situação das xícaras de arroz. Ela percebeu seu erro e fez o registro numérico correto, dizendo: "Ih, professora! É mesmo. O dez fica sozinho. É o dez e o meio, né?".

Talvez por entender que a escola valoriza essencialmente o registro numérico, ao final da nossa conversa, ainda tentei persuadir Priscila dizendo: "você precisa se organizar. Você é muito inteligente e eu sei que é capaz de organizar seu caderno e responder os exercícios de uma forma que as pessoas podem entender." Priscila, então, se rendeu: "Tá, professora. Tá bom! Me dá outra folha de resposta?".

O fato é que, depois desse episódio, Priscila comprou cadernos novos, canetas coloridas e passou a ser mais cuidadosa com seus registros. Daí para frente, ela sempre me perguntava: "professora, meu caderno está bonito?". Como professora, sei que fiz a intervenção correta; como pesquisadora, tenho dúvidas.

Na sequência da atividade, entreguei outra folha para Priscila e ela, rapidamente respondeu a todos os problemas. Na nova folha de respostas, Priscila caprichou em todos os problemas, registrando por extenso algumas respostas, como mostra a figura 14 a seguir.

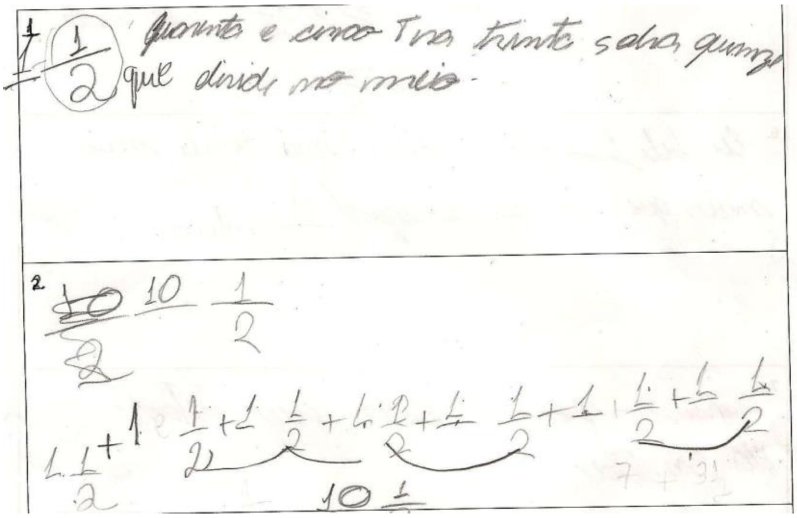


Figura 14. Segundo registro da estudante Priscila para os problemas 1 e 2 do circuito

É importante observar que, nessa nova folha, Priscila abriu mão do registro pictórico e fez apenas registros numéricos. No problema 1, Priscila explicou seu raciocínio e registrou a resposta, evidenciando que fez por cálculo mental. Já no problema 2, Priscila utilizou a representação numérica. Ela escreveu, inicialmente, $\frac{10}{2}$ e, sem que eu fizesse qualquer intervenção, rabiscou o registro e escreveu $10\frac{1}{2}$, provavelmente porque lembrou-se da nossa conversa. Isso mostra que o diálogo não se encerra com a interrupção dos enunciados, de algum modo ele continua sob a forma de lembranças ou de imagens mentais que evocam a alternância de enunciados. Em seguida, como que para testemunhar a sua resposta prévia, ela somou sete vezes $1\frac{1}{2}$, contou sete inteiros e, depois, foi juntando as metades até formar dez e registrou novamente $10\frac{1}{2}$. Nesses momentos, Priscila falava consigo mesma o tempo inteiro, mas era uma fala quase inaudível. Aproximando-se bem, era possível perceber que ela acompanhava parte do registro escrito com a fala. E, ao finalizar, enunciou um “tá certo”, confirmando para ela mesmo que sua resposta estava correta.

Priscila: — Uma, duas, três, quatro, cinco, seis, sete xícaras inteiras. Essa com essa: uma, essa com essa: uma, essa com essa: uma, três. Então dez e meia. Tá certo.

O autodiálogo de Priscila evidenciou seu processo metacognitivo de tomada de consciência (GUIMARAES; STOLTZ, 2008) e autorregulação (FÁVERO, 2005a). No falar baixinho consigo mesma, ela foi tomando consciência do seu próprio fazer, das etapas percorridas para chegar à resposta. Ela tomou conta do próprio processo de aprendizagem e sequer precisou de alguém que validasse sua resposta. Ela mesma a validou, demonstrando autoconfiança, ao enunciar “tá certo”. Esse processo metacognitivo está evidenciado, também, na justificativa construída no problema 1, mostrado na figura 14, em que ela apresentou, por escrito, o procedimento (cálculo mental) utilizado para obter a resposta, o que corrobora com as ideias de Ribeiro (2003), para quem a metacognição possibilita ao sujeito ter controle sobre o seu fazer, levando-o a fazer escolha da melhor estratégia para resolver o problema que lhe é proposto.

Como Priscila havia terminado de fazer todos os exercícios, pedi a ela que ajudasse Joana no circuito. Ela aproximou-se de Joana e disse:

Priscila: — Vamos fazer o primeiro? É bem fácil.

Priscila convidou Joana ao diálogo, ao trabalho cooperativo ao enunciar na primeira pessoa do plural: “vamos fazer o primeiro? É bem fácil”. Joana não disse nem que sim, nem que não, mas sorriu. Priscila, então, interpretou o sorriso como um “sim” e deu continuidade. Esse episódio mostra claramente o “estabelecer contato” de que fala Alrø e Skovsmose (2006, p. 70). O tom de voz, a escolha por falar na primeira pessoa do plural, o olhar, a postura corporal fizeram com que Joana se sentisse acolhida e, por outro lado, fez com que ela acolhesse o convite de Priscila por meio de um sorriso.

Priscila prosseguiu em sua tentativa de fazer contato ao estimular que Joana lesse o problema e, na sequência, quando questionou: “e aí?”, ela buscou “perceber” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p. 70) a perspectiva de Joana, ou seja, como ela interpretava o problema.

Priscila: — Lê o problema.
Joana: — 45 bolinhos para 30 alunos. Quanto cada um recebe?
Priscila: — E aí?

Sem falar nada, Joana fez sobre um registro apagado no papel um novo registro com 45 tracinhos. Ela não aproveitou os 45 quadradinhos que havia feito para representar os bolinhos, inicialmente. Enquanto isso, Priscila aguardou pacientemente e, após o término do registro de Joana, perguntou:

Priscila: — Quantos bolinhos cada uma vai comer?

Joana circulou 30 bolinhos e disse:

Joana: — Um bolinho, mas sobra quinze bolinhos.
Priscila: — Isso. E esses bolinhos que sobra? [Fala balançando a cabeça positivamente]
Joana: — Divide.

Priscila acolheu a resposta de Joana, ou a “reconheceu” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p. 70) no momento em que disse “isso”, balançando a cabeça positivamente. Ao fazer uma nova pergunta: “e esses bolinhos que sobra?”, é como se Priscila dissesse “está certo, agora continua", e Joana, então, sem que Priscila falasse mais qualquer coisa, conduziu a sua própria produção e partiu o tracinho ao meio para, em seguida, dizer:

Joana: — Meio bolinho.
Priscila: — Cada um vai comer...
Joana: — Um bolinho e meio.
Priscila: — Então escreve aí.

Quando Joana finalizou seu registro, Priscila a induziu a enunciar a resposta correta, utilizando o recurso da frase incompleta: "cada um vai comer...". Ao dizer "então escreve aí", Priscila validou o pensamento de Joana que, de imediato, escreveu acima do registro pictórico a resposta correta, como mostra a figura 15 a seguir.

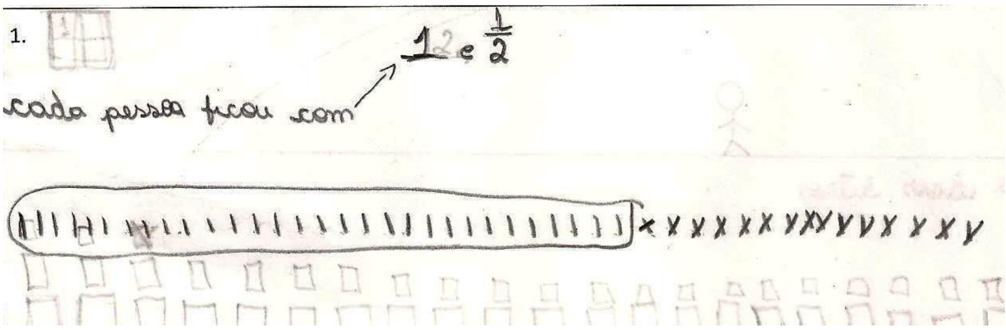


Figura 15. Registro da estudante Joana para o problema 1 do circuito

No episódio acima, Priscila fez uso de recursos de fala muito semelhantes aos meus próprios recursos e aos da professora em sala de aula. Ela conduziu um jogo de perguntas (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006) e, além disso, usou frases incompletas para colocar sua interlocutora no diálogo. A entonação da voz, nessas frases, indica ao outro sujeito da fala que ele deve completar a frase. Foi o que aconteceu com "cada um vai comer...". Ao invés de dar a resposta, Priscila assumiu o papel de professora e indicou que Joana deveria dar a resposta e, por isso, usou o recurso da frase incompleta.

Algo que chama a atenção no episódio acima é que, embora Joana tivesse feito de modo absolutamente diverso de Priscila, esta não impôs seu modo de pensar. Priscila fez por meio de cálculo mental, mas respeitou o processo de Joana que fez apoiada em registros pictóricos. O mesmo ocorreu no problema de número 3, que Priscila fez inicialmente por cálculo mental e, em seguida, fez um desenho para representar a fração $\frac{1}{5}$, como mostra figura 16 a seguir.

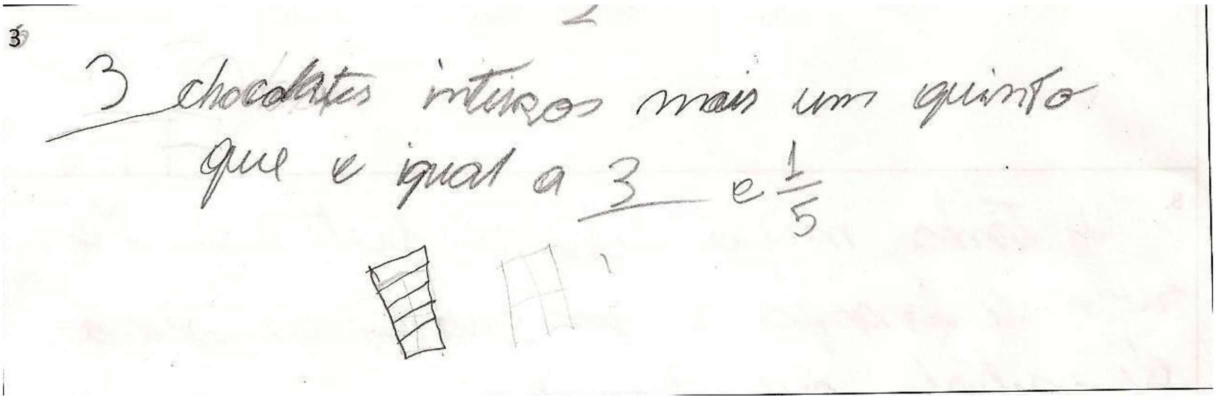


Figura 16. Registro da estudante Priscila para o problema 3 do circuito

Diferentemente de Priscila, Joana não usou o cálculo mental. Ela esperou pacientemente que Joana fizesse todo o registro pictórico para chegar à resposta.

Priscila: — Vamos fazer o 3?
Joana: — Vamos.
Priscila: — Então lê. [entregando o problema na mão de Joana]
Joana: — Dezesseis barras de chocolate vão ser divididas igualmente entre 5 pessoas. Quanto cada pessoa receberá?
Priscila: — Como é que você vai fazer?

Sem falar nada, Joana fez o desenho de 15 chocolates, lentamente. Também lentamente, contou os 5 primeiros fazendo um tracinho sobre cada um, em seguida fez um traço maior depois deles, separando-os dos demais. Contou mais 5, também fazendo um traço sobre cada um e um traço separador. Ela contou os 5 restantes do mesmo jeito. Por último, como se transferisse ou repartisse os chocolates entre os 5 primeiros, ela fez um traço sobre cada um até totalizar 3. Todo o processo foi acompanhado por Priscila que apenas disse:

Priscila: — Isso, isso...

Nos episódios acima descritos, Priscila “reconheceu” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p. 70) ou validou a produção de Joana ao dizer “isso, isso...”, em um processo metacognitivo (FÁVERO, 2005a) que a permite considerar como correto o fazer de sua colega, embora diferente do seu.

Quando terminou o registro, Joana disse:

Joana: — Dá três e sobra uma.
Priscila: — Mas Joana, essa que sobrou ainda dá para dividir, não dá? É chocolate... Mas está tão pequeno...

Joana, então, ampliou o desenho do lado do registro inicial, dividiu-o em 5 partes e escreveu a fração $\frac{1}{5}$ sobre o mesmo, como mostra a figura 17 a seguir.

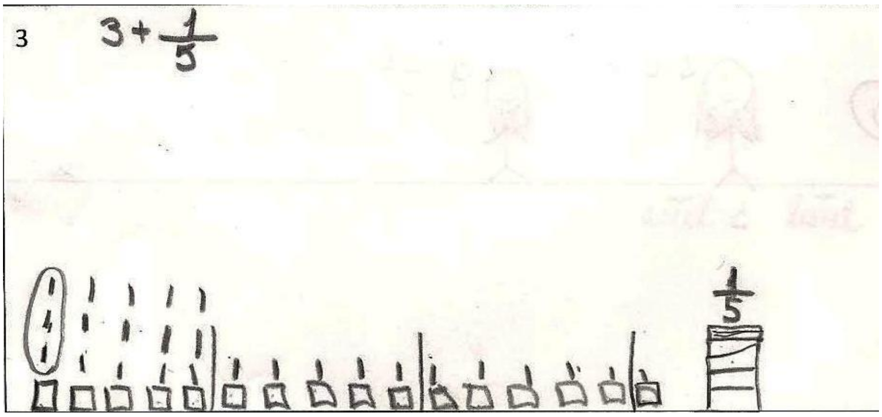


Figura 17. Registro da estudante Joana para o problema 3 do circuito

Nessa hora, Priscila não se aguentou e, ao invés de perguntar, como fez no primeiro problema, ela respondeu no lugar de Joana, antecipando a conclusão da atividade.

Priscila: — Isso mesmo. Cada pessoa come três chocolates mais um quinto.

A antecipação de Priscila induziu Joana a fazer o registro no papel tal e qual. Ela escreveu $3+\frac{1}{5}$, no canto superior da folha.

Para Bakhtin (2010, p. 275), o "enunciado é um elo da comunicação verbal" e o diálogo é a alternância de enunciados na interação verbal. Nesse sentido, em interação com o outro, escolho meus enunciados a partir da hipótese de quem ele é. A antecipação, muitas vezes, não é nada mais ou nada menos do que a enunciação de algo que eu penso que o outro hipoteticamente enunciaria. Esse parece ter sido o pensamento de Priscila. Parecia tão evidente que Joana chegaria à resposta que ela se antecipou e deu a resposta, afinal, o mais difícil Joana havia feito.

Nessa atividade, fica muito claro, também, que Priscila tem postura cooperativa quando se trata da resolução de exercícios ou problemas, diferentemente das situações de jogos. Seu modo de agir também é modulado pela hipótese do que ela acha que Joana consegue fazer. A observação da interação no espaço-tempo desse primeiro cenário levou-nos a considerar que as situações de aprendizagem favoreceram a alternância de enunciados, ou seja, favoreceram o diálogo e a cooperação entre pares.

O diálogo e a cooperação desencadeiam, nos estudantes, processos metacognitivos (FÁVERO, 2005a) tanto de autorregulação dos seus próprios procedimentos como de regulação do fazer do interlocutor. Isso leva o sujeito a um processo de tomada de consciência da sua ação, que o permite escolher, modificar, descartar e antecipar estratégias.

Não podemos deixar de considerar que, nesse cenário, o número reduzido de estudantes possibilitou o acompanhamento dos seus fazeres, bem como a observação dos diálogos. E foi esse acompanhamento direto que possibilitou identificar as estratégias adotadas pelos estudantes, nas variadas situações, e a observação de padrões de comunicação em que os mesmos estabelecem contato, percebem a perspectiva e reconhecem ou validam a produção matemática dos colegas.

A seguir, vamos mostrar como o diálogo e os padrões de comunicação são muito diversos no cenário da sala de aula.

4.1.2.Cenário 2: a sala de aula

As salas de aula, onde se realizaram as observações, não eram diferentes da maioria das salas de aula espalhadas pelo mundo afora. Eram retangulares, possuíam entre 35 e 40 carteiras, em forma de mesinhas, que ficam enfileiradas duas a duas, como mostra a figura 18 a seguir, que retrata a sala do 7º ano G, turma com maior número de colaboradores da pesquisa. Na parte anterior da sala, próximo à porta, ficava o quadro branco de pincel. Ao lado deste, ficava a mesa da professora.

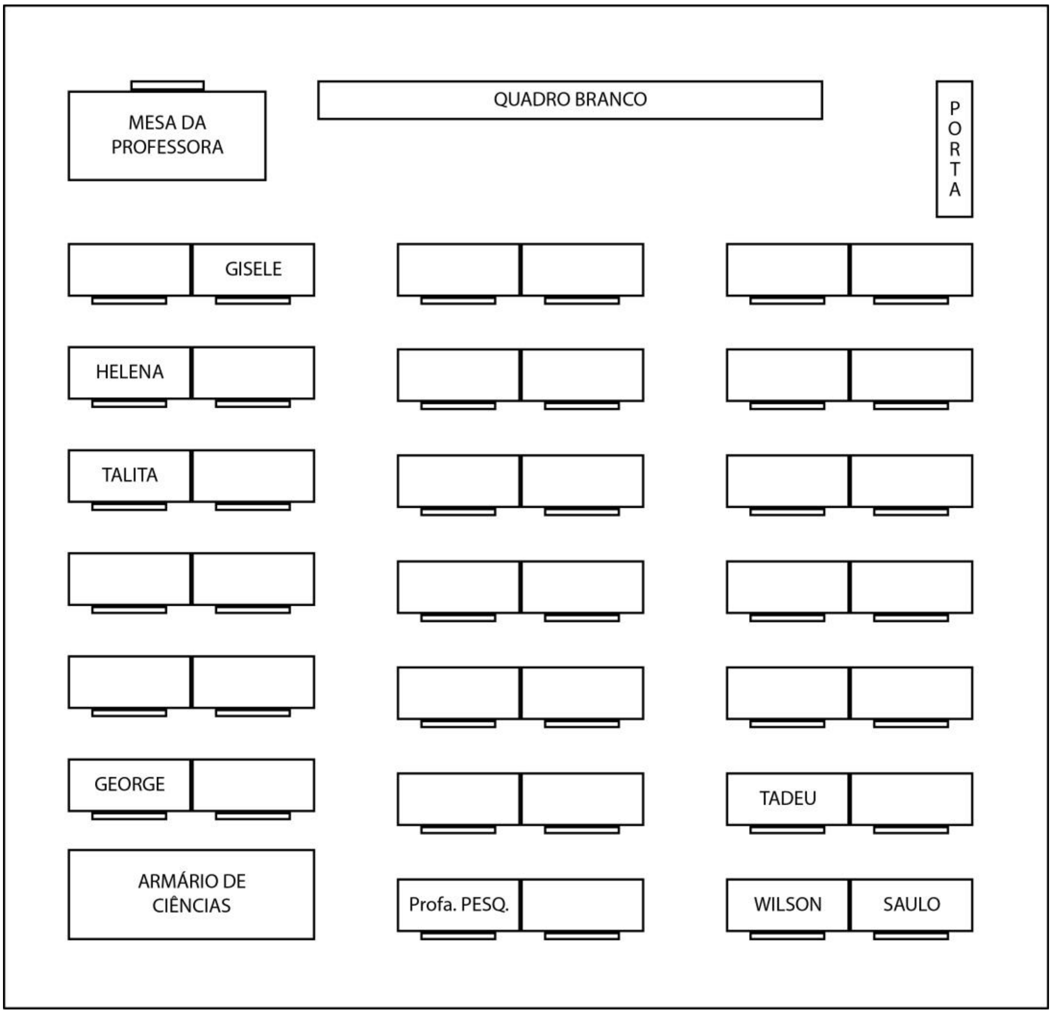


Figura 18. Configuração espacial do 7º ano G com a localização dos colaboradores da pesquisa

Muito embora houvesse um corredor entre as carteiras, na maioria das aulas, o espaço de circulação da professora se restringia à área próxima ao quadro.

Cada turma tinha cerca de 32 alunos matriculados, com idade entre 12 e 14 anos, e a frequência diária ficava em torno de 28 alunos. Das três turmas observadas, apenas uma possuía alunos fora da faixa etária para o ano e era justamente esta que apresentava contraditoriamente o maior grau de apatia e, ao mesmo tempo, de agitação.

Na sala de aula, os alunos tinham lugar demarcado pela professora e, normalmente, não podiam sair dele sem prévia autorização. Mas quando comecei a observação em sala de aula, aconteceu algo interessante. Três estudantes que não participavam do projeto foram se aproximando lentamente de mim e do estudante George, que foi indicado pela professora para participar da pesquisa. A professora percebeu o movimento e não se contrapôs a ele. A figura 19, a seguir, mostra esse movimento.

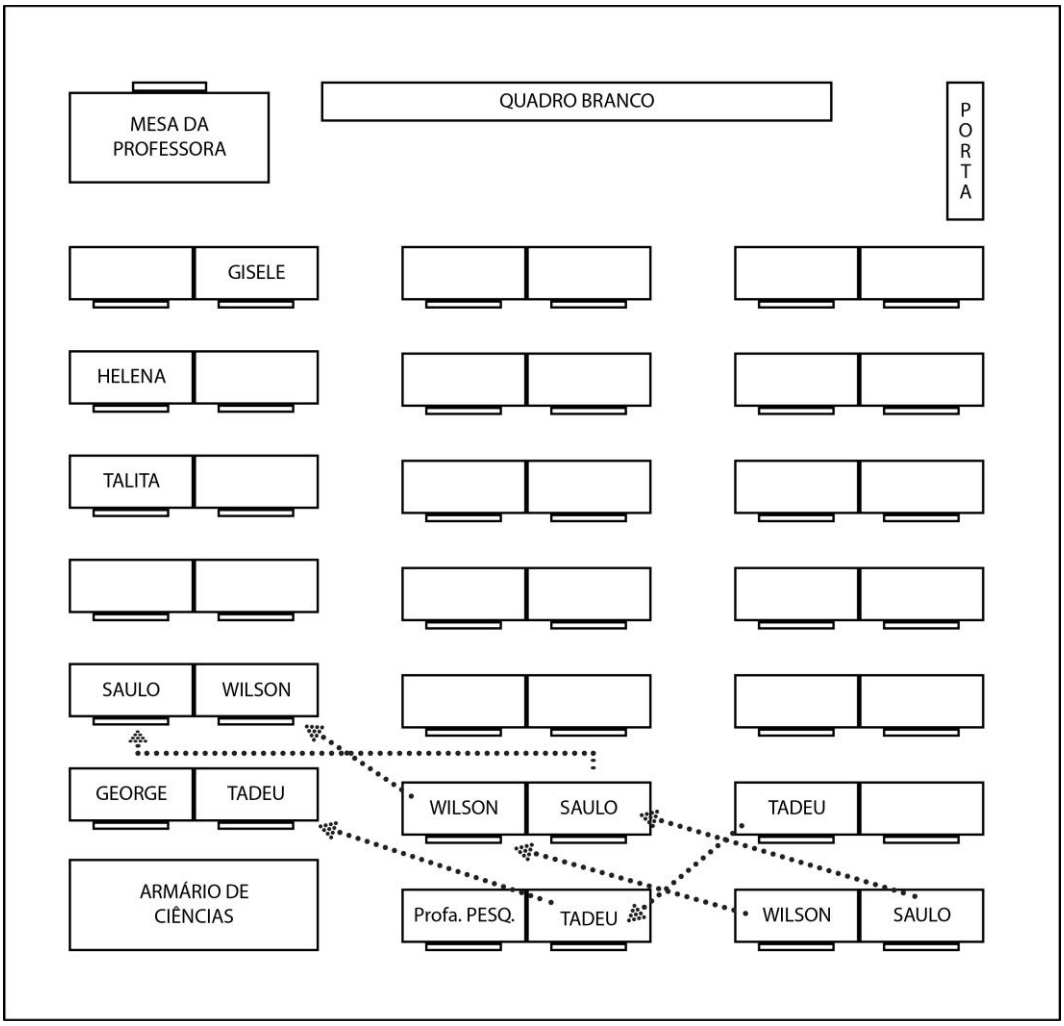


Figura 19. Movimento dos alunos na sala de aula

Em um primeiro momento, eles saíram dos seus lugares iniciais e ficaram próximos a mim na fileira do meio. Nesse momento, eles[12] perguntaram se poderiam participar do projeto, eu acenei positivamente e eles começaram, então, a frequentar os encontros no turno contrário. Paulatinamente, eles começaram a se aproximar de George e passaram a se sentar próximos a ele, onde permaneceram pelo resto do ano letivo.

Quanto à organização pedagógica, a aula, em geral expositiva, era centrada na figura da professora, aproximando-se do que Alrø e Skovsmose (2006) chamam de tradicional, pois os exercícios do livro, a exposição da professora, a quem cabia o papel de explicar novos conteúdos, se sobrepunha à ação dos alunos, a quem cabia resolver os exercícios propostos para serem corrigidos pela docente. As aulas aproximavam-se do que esses autores denominam de "paradigma do exercício" (2006, p. 52).

[12] Esses estudantes só começaram a participar do projeto no segundo semestre do ano letivo, quando iniciaram as observações em sala de aula.

Nessa organização pedagógica das aulas, o padrão de comunicação era basicamente o jogo de perguntas e respostas, em que apenas parte da turma participava, em geral aquela parte que se sentava nas primeiras fileiras, próxima da professora. A exceção, na pesquisa, ficou por conta de um grupo de estudantes colaboradores da pesquisa, mostrados na figura 19, que, embora sentasse nas últimas carteiras, era bastante participativo.

A correção dos exercícios, que geralmente eram do livro didático, acontecia de forma coletiva. Normalmente, era a própria professora quem fazia a correção no quadro, acompanhada por alguns dos alunos da sala, principalmente daqueles que se sentam do meio para a frente. Ela fazia as perguntas em voz alta e, quando não obtinha resposta, chamava a atenção da turma. Os demais ficavam ou apáticos ou realizando outra atividade não relacionada à Matemática. Vez ou outra, ela convidava alunos que se destacavam pelo bom desempenho para fazer a correção no quadro.

Durante a correção dos exercícios, alguns estudantes ficavam mexendo no celular com as mãos sob a carteira, alguns faziam exercícios de outras disciplinas e outros apenas copiavam do quadro os exercícios que não tinham feito.

Em certa aula, em que aconteceu a correção de expressões numéricas com números racionais com todas as operações, inclusive potenciação e radiciação, a professora fez algumas brincadeiras e isso contribuiu para aproximar os alunos dela.

A professora escreveu a expressão $1-5\cdot\sqrt{9}+2^2$ no quadro e perguntou:

Prof.ª Leila:	— Gente, nessa expressão aqui, o que podemos fazer primeiro? [Pausa e silêncio da turma] — Eu não estou ouvindo...
Gisele:	— A raiz e o dois ao quadrado.
Prof.ª Leila:	— Como fica então?
Alguns:	— Um, menos cinco, vezes três, mais quatro.
Prof.ª Leila:	— E agora o que podemos fazer primeiro?
Alguns:	— Cinco vezes três.
Prof.ª Leila:	— Vai ficar um menos quinze mais quatro. Menos quinze mais quatro é...
Alguém:	— Catorze.
Prof.ª Leila:	— Ah, não! Gente, nós estamos fazendo isso desde o início do ano. Não é possível! Aqui, gente, sinais diferentes a gente soma ou dimiNÓi? [Brinca a professora com o verbo diminuir, falando bem alto e chamando a atenção da turma].
Alguns:	— DimiNÓi.
Prof.ª Leila:	— Eu não ouvi. Vocês não tomaram café, não? Soma ou dimiNÓi? [Falando bem alto e em tom jocoso]
Muitos:	— DimiNÓi. [Muitos risos]
Prof.ª Leila:	— Então, vamos juntar os positivos primeiro. Um mais quatro dá...
Muitos:	— Mais cinco.
Prof.ª Leila:	— E mais cinco menos quinze
Muitos:	— Menos dez.

Muito embora a bronca dada pela professora tenha sido um momento de tensão, a brincadeira com o verbo diminuir serviu para distensionar. A partir da brincadeira, um maior número de alunos deixou o que estava fazendo e entrou na aula, passando a responder os questionamentos da professora. Nas respostas, os alunos tomavam de empréstimo (BAKHTIN, 2010) a expressão utilizada pela professora “DimiNÓi”, em substituição à correta expressão “diminui”.

Antes de prosseguir com as análises, é importante dizer que, nos fragmentos de diálogos da pesquisa, quando nos referimos a “muitos”, significa que a maior parte da turma respondeu ao questionamento da professora. Já a referência a “poucos” significa que uma minoria respondeu, em geral, os estudantes que se sentam nas duas primeiras fileiras de carteiras da sala de aula, próximo à área de circulação da professora. Já a referência a “alguém” significa que o enunciado foi feito por alguém não identificado e não colaborador direto da pesquisa.

É interessante observar que a professora, por diversas vezes, utilizou o recurso da frase incompleta e os estudantes a acompanhavam nesse jogo de linguagem, realizando assim a alternância de enunciados de que fala Bakhtin (2010).

Na sequência de correção de exercícios, em um dado momento, a professora escreveu a expressão $2\sqrt{49}-\sqrt{5+4}$ no quadro e, novamente, apareceram marcas na sua fala que eram reproduzidas pelos alunos.

> Prof.ª Leila: — Gente, nessa expressão, o que podemos fazer primeiro?
> Alguns: — A raiz.
> Prof.ª Leila: — A raiz quadrada de quarenta e nove que é...
> Alguns: — Sete.
> Prof.ª Leila: — Mas e esse dois que está perto da raiz quadrada? Não tem sinal, então ele está multiplicando é como se tivesse um sinal de vezes escondido aqui ó. [apontando para a expressão]

A expressão “tem um sinal de vezes escondido aqui” também foi utilizada por muitos estudantes que a tomavam de empréstimo (BAKHTIN, 2010) da fala da professora, principalmente quando íam ajudar os colegas.

Em muitas situações de sala de aula, embora a professora fizesse um esforço considerável, parecia acontecer o não diálogo. Foi o que aconteceu, por exemplo, em um exercício em que ela resolveu trabalhar a redução de termos semelhantes.

O exercício apresentava uma dificuldade adicional para os estudantes, que era a presença do número racional na representação fracionária. Percebi que os estudantes deixavam esse tipo de exercício sem fazer e, na hora da correção, apenas o copiavam.

No exercício, transcrito a seguir, a professora fez uma opção que me deixou pensativa. Ela fez o seguinte registro no quadro e falou:

$$\frac{3}{5}x + x = (\frac{3}{5} + 1)x$$

Professora:	— Gente, é fácil, olha. Conserva a parte literal e soma os coeficientes.
Alguém:	— Tem que calcular o mmc?
Professora:	— Sim. Tem que calcular.

Ela, então, colocou o denominador 1 embaixo do número 1 e perguntou, mas apenas alguns alunos responderam.

Professora:	— Qual é o mmc de 5 e 1?
Alguns alunos:	— É 5.
Professora:	— Nem precisa calcular, não é? O mmc de um número com um é sempre o outro número. Agora é só dividir pelo de baixo e multiplicar pelo de cima.

$$\frac{3}{5}x + x =$$

$$(\frac{3}{5} + \frac{1}{1})x =$$

$$(\frac{3}{5} + \frac{5}{5})x =$$

$$\frac{8}{5}x$$

A expressão de ausência e de desinteresse de boa parte da turma levaram-me a considerar que não houve compreensão nem da passagem inicial, em que a professora realizou uma fatoração. Do mesmo modo, não houve compreensão do algoritmo do mmc. A apatia geral indicava que esse era o momento do “não diálogo”. O silêncio da turma era sinal de que aquilo não havia sido compreendido, não havia sido assimilado. Ninguém perguntou, ninguém se manifestou, apenas aceitou e copiou. Alguns nem isso fizeram. Na escolha do procedimento pela professora, não houve a “compreensão responsiva” de fala Bakhtin (2010, p. 262).

Mas a sala de aula era também cheia de diálogos paralelos, que nem sempre o professor tomava ciência. Foi o que aconteceu, por exemplo, em uma aula em que a professora estava corrigindo as questões de uma prova.

Enquanto a professora estava fazendo a correção coletiva, Tadeu e Wilson conversavam sobre a equação $9x = -9$, que também estava na prova. Tadeu pareceu estranhar a equação e falou para Wilson:

Tadeu:	— Eu não sei resolver essa não, Wilson.
Wilson:	— Eu sei. É só dividir por nove.
Prof.ª pesq.:	— Psiu. [Chamo a atenção dos dois que estavam falando alto, enquanto a professora corrigia.]
Tadeu:	— Ih, professora! Nós estamos falando sobre o dever. [Protestam e continuam a conversa]
	[...]
Tadeu:	— Se tivesse um número bem ali, eu não sabia fazer.
Wilson:	— É fácil.

Não faço ideia do que Tadeu quis dizer com o enunciado "se tivesse um número bem ali, eu não sabia fazer", mas Wilson sabia e respondeu, demonstrando segurança, "é fácil". A professora estava corrigindo outra questão e não percebeu que o diálogo entre os dois estava indo em outra direção, mas desconfiou e, por isso, os colocou na aula, fazendo uma pergunta diretamente para um deles.

A equação era um pouco mais complexa ($5x + 7 = 4x + 10$) e a professora, então, perguntou para Tadeu o que fazer, mas, como Wilson estava cada vez mais confiante, ele participou do diálogo e acabou monopolizando a conversa com a professora.

Prof.ª Leila	— Por onde começa, Tadeu?
Tadeu:	— Tem que tirar o sete dali, ó.
Wilson:	— Tem que tirar o 4x.
Prof.ª Leila:	— Tanto faz.

No diálogo acima, é possível observar que Tadeu e Wilson tinham perspectivas (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p. 70) diferentes em relação ao exercício, e a professora perdeu a oportunidade de confrontar essas perspectivas quando disse: "tanto faz".

Embora tenha dito que tanto fazia, a professora prosseguiu na correção, seguindo a sugestão do Wilson e registrou no quadro:

$$5x + 7 = 4x + 10$$
$$5x + 7 - 4x = 4x - 4x + 10$$
$$1x + 7 = 10$$

Wilson olhou para o registro no quadro e disse:

Wilson:	— Pode deixar só o x.
Prof.ª Leila:	— É, Wilson, pode sim, pois um x é o mesmo que x, não é, gente?
Alguns alunos:	— É.
Wilson:	— Agora tira sete dos dois lados.
Prof.ª Leila:	— Como fica, então?
Wilson:	— O x é igual a três.

A observação do cenário da sala de aula nos levou a considerar, em primeiro lugar, que a organização do trabalho pedagógico centrado na figura da professora não favorecia o diálogo entre pares, objeto da presente pesquisa. Na maioria das vezes, o diálogo era entre a professora e os estudantes, por meio do jogo de perguntas e frases incompletas. A observação desses recursos de comunicação mostrou que os estudantes tomavam de empréstimo (BAKHTIN, 2010) da fala da professora enunciados que utilizavam largamente na interação com os colegas.

Também foi observado que, quando ocorria entre pares, o diálogo era quase sempre marginal, considerado como “conversa paralela” e, por isso, também quase sempre era desmotivado pela professora que o interrompia chamando a atenção dos estudantes, ou fazendo perguntas que os traziam para a aula coletiva.

Do mesmo modo, a organização espacial com carteiras enfileiradas e lugares demarcados também não favorecia a livre interação. É verdade que os estudantes que, voluntariamente, solicitaram a participação na pesquisa burlaram essa organização, e não foram repreendidos pela professora. Esses alunos, paulatinamente, tornaram-se mais ativos em sala de aula e a participação dos mesmos surpreendia a professora, que chegou a verbalizar que os imaginava analfabetos.

Esse indicador (GONZALEZ-REY, 2005B) mostra que não é apenas o diálogo que potencializa a aprendizagem. No caso de Wilson e Tadeu, ficou claro que a apropriação conceitual de ambos, após o ingresso no projeto, fez com que eles participassem mais ativamente dos diálogos, ou seja, as aprendizagens podem potencializar os diálogos.

Embora considerando que seja urgente construir uma outra organização espacial e pedagógica, não podemos deixar de dizer que o número de adolescentes em sala de aula, cerca de 30, dificultava o trabalho pedagógico da professora. Esses adolescentes que, cada vez mais, vivem em um mundo organizado a partir da interação e do diálogo mediado pelas novas tecnologias da informação e comunicação, de certa forma, são obrigados a frequentar uma sala de aula que não os desafia a pensar, a agir, a descobrir, como no mundo fora da escola.

Talvez por isso, esses adolescentes sempre escapam da aula por meio do uso não autorizado do celular, tecnologia ao alcance das mãos.

A seguir, vamos mostrar como a interação e o diálogo são diversos no cenário do laboratório de informática, em que aconteceram algumas poucas aulas.

4.1.3.Cenário 3: o laboratório de informática

Estamos chamando de cenário 3 o laboratório de informática. Embora não tenha havido muitos encontros lá, os que aconteceram foram muito significativos.

O laboratório de informática era uma sala retangular ampla, maior que uma sala de aula típica, e tinha oito computadores, mas esses computadores eram compartilhados por dois monitores, o que os transformavam em 16 computadores. Como cada turma tinha cerca de 32 estudantes, cada monitor e teclado era compartilhado por dois estudantes, que se alternavam nas atividades. Eles mesmos se encarregavam de dividir a responsabilidade na realização das tarefas.

A figura 20, a seguir, mostra a organização espacial do laboratório de informática:

Figura 20. Organização espacial do laboratório

Os estudantes sentavam-se em frente ao monitor e de costas para o espaço de circulação da professora. Desse espaço, a professora, em pé, conseguia ver todos os monitores e acompanhar todos os estudantes.

No laboratório, havia um funcionário que dava apoio técnico e só interferia se alguma máquina apresentasse problema de funcionamento. Ele permanecia quase o tempo inteiro sentado em frente ao computador que era o servidor da rede, de onde acompanhava as ações dos estudantes.

Quando chegamos ao laboratório, o funcionário explicou aos alunos o que deveriam fazer para "abrir" o jogo "Acerte a balança", atividade proposta pela professora Leila como introdutória do processo de resolução de equações. Esse jogo faz parte de um conjunto de aplicativos de um *software* livre educacional, integrado à plataforma *Linux*.

Segundo o próprio aplicativo, o jogo tem como objetivo trabalhar operações e equações matemáticas. O jogo é composto de 4 níveis e cada nível tem 5 fases. No primeiro nível, o aluno deve apenas equilibrar a balança colocando, no primeiro prato, os pesos correspondentes ao peso do objeto que está no segundo prato, como mostra a figura 21 a seguir.

Figura 21. Nível 1 do jogo "Acerte a balança"

No segundo nível, é dado um objeto no segundo prato, sem o correspondente peso, e o aluno deve equilibrar a balança colocando pesos no primeiro prato e, por fim, registrar o valor do peso do objeto dado logo abaixo da balança, como mostra a figura 22 a seguir.

Figura 22. Nível 2 do jogo "Acerte a balança"

No terceiro nível, o aluno deve equilibrar a balança colocando pesos tanto no primeiro como no segundo prato, como mostra a figura 23 a seguir. Observe que o objeto dado tem um peso, mas apenas colocando pesos no primeiro prato não se obtém o equilíbrio.

Figura 23. Nível 3 do jogo “Acerte a balança”

No quarto nível, é dado um objeto no segundo prato, sem o correspondente peso, e o aluno deve equilibrar a balança colocando pesos nos dois pratos e, por fim, registrar o peso do objeto dado logo abaixo da balança, como mostra a figura 24 a seguir.

Figura 24. Nível 4 do jogo “Acerte a balança”

Muito embora o jogo não tivesse um tratamento gráfico atrativo, pois as imagens, além de estáticas, eram muito simples e indefinidas, possuía uma interface bem amigável, que não exigiu maiores explicações para os alunos. A maioria não solicitou apoio para equilibrar as balanças.

Muitos dos alunos não tinham computador em casa, então, o laboratório de informática era um dos poucos lugares em que podiam lidar com essa tecnologia. Talvez por isso, tenham gostado tanto do jogo.

Algo que chamou a atenção foi que, na frente do computador, enquanto jogavam, eles conversavam livremente e a professora não chamava a atenção. Do mesmo modo, eles visitavam *sites* na internet, muito embora reclamassem que os *sites* de relacionamento estivessem bloqueados. Os estudantes demonstravam uma capacidade fora de série de fazer mais de uma coisa ao mesmo tempo. Equilibram-se entre a atividade proposta, o *blog* da escola, visitas em *sites* e outros jogos que encontraram no computador.

O jogo se revelou muito fácil para os estudantes e muitos chegaram a verbalizar que era infantil. Percebi que apenas na última fase é que o jogo apresentou um pouco de desafio para eles. De qualquer forma, eles concluíram todos os níveis em menos de meia hora e a professora Leila, então, perguntou-me o que fazer. Propus a ela que iniciássemos as atividades que planejamos com o aplicativo *Algebra Balance Scales* do NLVM[13], e que seriam utilizadas na aula seguinte.

O *Algebra Balance Scales* é um aplicativo pertencente à *National Library of Virtual Manipulatives – NLVM*, da *Utah State University*. Essa biblioteca disponibiliza uma série de recursos virtuais para o ensino da Matemática. Segundo a própria biblioteca:

> Learning and understanding mathematics, at every level, requires student engagement. Mathematics is not, as has been said, a spectator sport. Too much of current instruction fails to actively involve students. One way to address the problem is through the use of manipulatives, physical objects that help students visualize relationships and applications. We can now use computers to create virtual learning environments to address the same goals (EUA, Utah State University).

O aplicativo, de fato, tem potencial de envolver os alunos na resolução de equações, tirando-os da posição de meros espectadores. Possibilita que eles descubram que caminho devem seguir para resolver e, em tempo real, dá *feedback* ao aluno com relação ao respectivo processo. Foi justamente o caráter interativo do aplicativo virtual, bem como a possibilidade de fazer com que os alunos se engajassem nas atividades, que nos levaram a escolhê-lo. Muito embora os recursos apenas possam ser acessados em língua inglesa, espanhola, francesa ou em mandarim, avaliamos que o idioma não seria obstáculo, visto que o aspecto visual e a interface amigável fazia com que o aplicativo fosse muito fácil de ser utilizado.

A figura 25, a seguir, mostra a janela inicial do aplicativo *Algebra Balance Scales.*

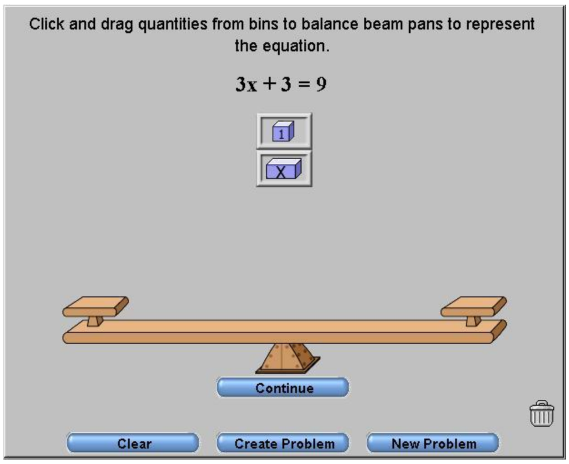


Figura 25. Página inicial do aplicativo *Algebra Balance Scales*

[13] *National Library of Virtual Manipulatives* – Biblioteca de Recursos Virtuais para o ensino da Matemática da Universidade Utah – EUA.

Como a professora Leila aceitou a minha sugestão, rapidamente o técnico colocou no *blog* da escola o *link*, para que os estudantes tivessem acesso ao aplicativo *Algebra Balance Scales*. Eu disse a todos que continuaríamos a trabalhar com a balança, mas agora para resolver equações. Lembrei a eles que, na balança, para se ter equilíbrio, o que se faz em um prato tem que se fazer no outro. Também falei para eles que era preciso colocar os números e os "xis" na balança, arrastando com o *mouse*.

Embora não fizesse parte do nosso planejamento, a professora, em sala de aula, antes de ir ao laboratório, enunciou algumas regras para resolução de equações por meio de alguns exemplos explorados no quadro branco. Quando todos já estavam com o aplicativo aberto nos computadores, a professora os relembrou dessas regras, falando que, para resolver as equações, eles deveriam deixar o x de um lado da equação e os números do outro lado. Muitos sequer prestaram atenção no que ela estava dizendo.

Em menos de 10 minutos, todos estavam resolvendo equações com o aplicativo, sem muita dificuldade. As duplas pediam ajuda tanto para a professora Leila e para mim como para colegas que estavam mais próximos.

Os episódios a seguir mostram os diálogos dos estudantes entre si, comigo e com a professora, ocorridos durante o uso do aplicativo *Algebra Balance Scales.*

No laboratório, George, Gisele, Tadeu e Wilson sentaram-se próximos e, dois a dois, dividiram o mesmo computador. Tadeu e Wilson estavam com a equação, mostrada na figura 26 a seguir, na tela do monitor.

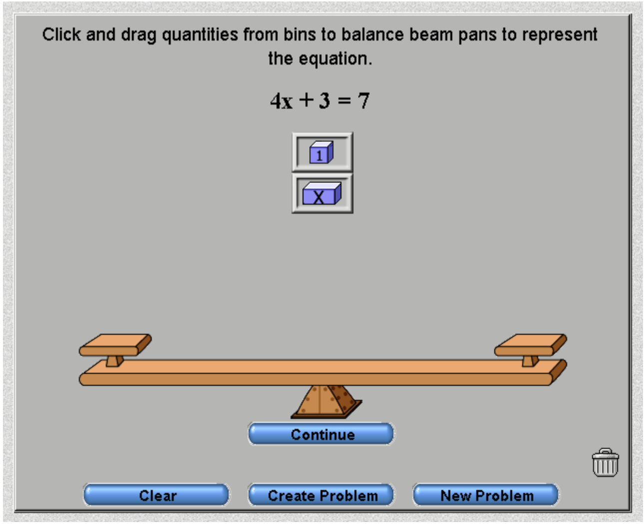


Figura 26. Equação do aplicativo *Algebra Balance Scales*

Wilson: — Eu faço essa e você faz a outra, tá?
Tadeu: — Tá bom.
Wilson: — Vou colocar quatro x e três na balança.
Tadeu: — Que maneiro! É igual uma balança mesmo. Agora coloca o sete do outro lado.

Wilson: — Pronto. Agora ficou igual.
Prof.ª Pesq.: — Agora tá equilibrado?
Wilson: — E agora, professora, faz o quê?
Prof.ª Pesq.: — Clica em continuar.
Wilson: — Pronto.
Prof.ª Pesq.: — Então... resolver uma equação é encontrar o valor desconhecido, certo? Quem é o valor que vocês não conhecem aí?
Tadeu: —É o x.
Prof.ª Pesq.: — Então, a gente tem que dar um jeito de deixar o x sozinho aí. Pensem.
Wilson: — Mas faz o quê?
Prof.ª Pesq.: — Tá vendo aí que você pode usar uma operação? Tem mais (+), menos (−), multiplicação, vezes (×) e divisão (:). Se eu quiser **tirar** o mais três daí, o que eu posso fazer? [acentuando a palavra tirar]
Tadeu: — Menos e três.
Prof.ª Pesq.: — Então, clica no menos (−) e digita três aí no espaço.
Tadeu: — Que massa! Sai três dos dois lados.
Prof.ª Pesq.: — Já temos o valor de x?
Wilson: — Não. Tem só que quatro x é quatro, então, x é um. [realizando cálculo mental]
Prof.ª Pesq.: — Agora, não vou falar mais. Use uma operação que deixe x sozinho — Falo isso e me afasto um pouco.
Wilson: — Não é somar quatro, pois vai colocar mais.
Tadeu: — Se a gente fizesse menos quatro?
Wilson: — Não deu certo. [após subtrair 4 dos dois membros da equação]

O episódio acima mostra que o diálogo dos estudantes, diante do computador, era muito mais livre do que nas situações de sala de aula, tanto que os mesmos usavam as gírias “que maneiro!” e “que massa!” para expressar a admiração diante do balança equilibrada. Mas as gírias evidenciam ainda o prazer da descoberta de que fala Freire (2011b). O episódio mostra também que a atividade possibilitava aos estudantes inferirem resultados, investigarem e fazerem descobertas por eles mesmos. Embora eles solicitassem a minha mediação, ao manipular a balança, Wilson inferiu o valor de x, por meio de um cálculo mental, ao dizer “tem só que quatro x é quatro, então, x é um”. Na sequência, quando me afastei dizendo que não iria falar mais nada, os estudantes prosseguiram dialogando e pensando sobre que ação deveriam desencadear para deixar o x sozinho. Wilson, então, fez uma antecipação ao dizer “não é somar quatro, pois vai colocar mais.” Essa antecipação revelou um processo metacognitivo de autorregulação (FÁVERO, 2005a), que possibilitou a Wilson descartar, com segurança, um procedimento, ainda sem saber qual deveria escolher. Sua consciência sobre a efetividade desse descarte era tanta, que ele justificou que não era somar, porque, se não, iria acrescentar e não era isso que ele queria. Esse processo metacognitivo aproxima-se do pensar verdadeiro e crítico de que fala Freire (2011a).

O episódio mostra, ainda, que os alunos se lançam à atividade sem medo de errar. O aplicativo *Algebra Balance Scales* os permitia escolher uma estratégia e, rapidamente, obter *feedback* do que faziam. Quando Tadeu sugeriu “e se a gente fizesse menos quatro?”, Wilson, sem titubear, experimentou e disse: “não deu certo”. Nesse momento, George, que estava sentado ao lado, olhou para a tela do computador de Tadeu e Wilson e disse:

George.: — Não é menos, não...
Wilson: — É dividir por quatro. Já fiz. E x é igual a um mesmo. Massa, muito massa! [interrompendo a fala de George]
Tadeu: — Massa! Agora é a minha vez.

Mas, antes mesmo de George concluir sua fala, Wilson já estava experimentando a divisão, confirmando assim o resultado que havia antecipado.

Tanto Wilson como Tadeu utilizavam a gíria “massa!” para expressar a admiração e o prazer da descoberta. Tadeu, então, avisou que era a sua vez, tomando a posição diante do teclado e do monitor. Quando solicitou um “novo problema”, o aplicativo apresentou a equação, mostrada na figura 27 a seguir, que possuía outro nível de dificuldade.

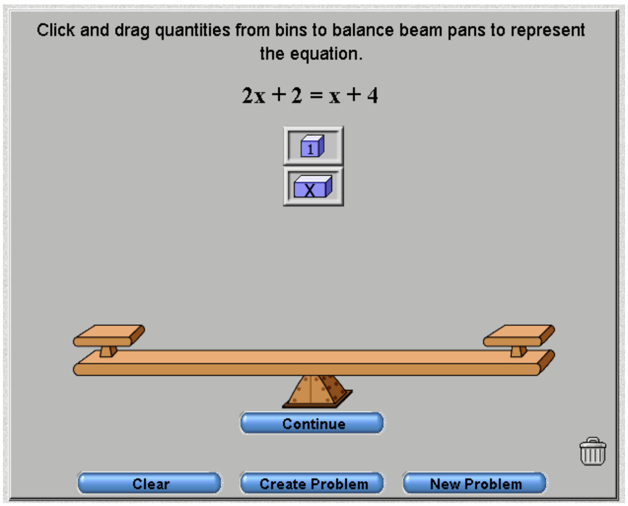


Figura 27. Equação do aplicativo *Algebra Balance Scales*

Todos, sem exceção, falavam muito alto ao começarem a trabalhar com a balança, e não foi diferente com Tadeu que, rapidamente, começou a resolver a equação dada pelo aplicativo.

Tadeu: — Já coloquei na balança. Agora vou tirar dois, menos dois. Maneiro! Sai dois dos dois lados.
Wilson: — Olha, vai aparecendo aqui o que ficou, ó, dois x.
Tadeu: — Hummm...Wilson, essa é diferente, olha. E agora?
Wilson: — Professora, tem que tirar o x daqui, não tem?
Prof.ª Peq.: — Tem, Wilson. O que você pode fazer para sumir com o x daí?
Wilson: — Menos x. Faz aí, Tadeu, menos x.[Falou de forma imperativa]
Tadeu: — Maneiro! Olha, o x é dois.

O episódio acima mostra que, durante toda a resolução, os estudantes, em um processo metacognitivo (FÁVERO, 2005a) íam verbalizando os procedimentos escolhidos. É interessante observar que Wilson se deu conta de que o aplicativo mostrava, em uma janela, a cada escolha de estratégia, a equação resultante da ação, como mostra a figura 28 a seguir.

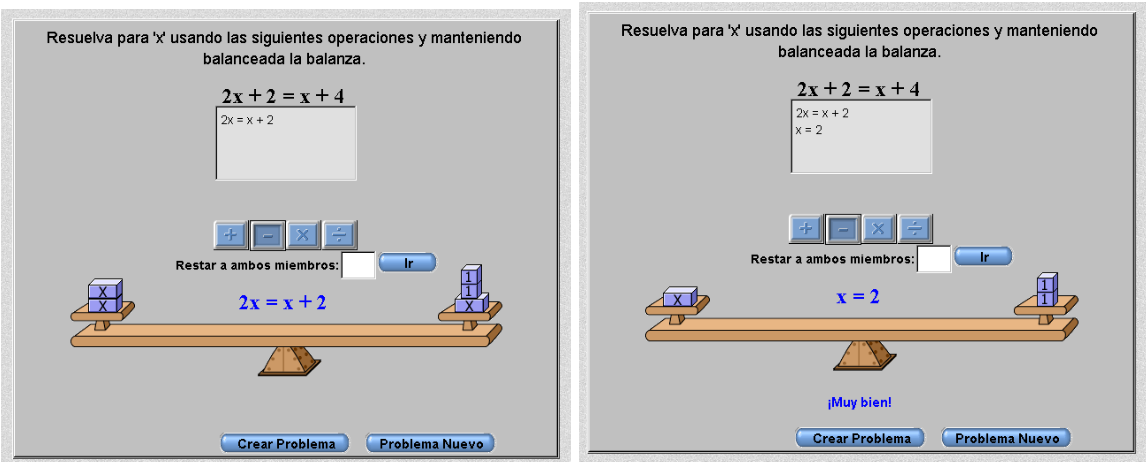


Figura 28. Janelas do aplicativo *Algebra Balance Scales*, que mostram as equações resultantes da subtração de 2 e de x nos dois membros da equação

Tadeu observou o que Wilson apontou, mas, em seguida, já percebeu que a equação era diferente da anterior. Seu enunciado "e agora?" foi um pedido de ajuda. Nesse momento, Wilson pareceu saber o que fazer, mas solicitou minha validação: "Professora, tem que tirar o x daqui, não tem?". Sua pergunta era quase uma afirmação. Quando confirmei seu raciocínio e questionei: "O que você pode fazer para sumir com o x daí?", Wilson não teve dúvidas e falou de forma imperativa: "Faz aí, Tadeu, menos x". Tadeu realizou o procedimento indicado e, novamente, utilizou a gíria "maneiro!" para expressar sua admiração.

A partir desse encontro, algumas expressões se consagraram e passaram a ser de uso corrente, como podemos ver no diálogo entre George e Gisele que, juntos, resolveram a equação mostrada na figura 29 a seguir.

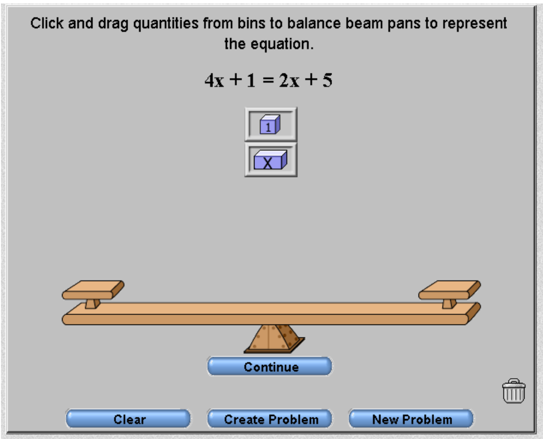


Figura 29. Equação do aplicativo *Algebra Balance Scales*

George: — Gisele, tem mais um aí, não é? O que some com o mais 1 é o..
Gisele: — Menos um.
George: — Agora a gente tem que tirar o dois x não é?
Gisele: — É menos dois x.
George: — Ainda não terminou porque a gente tem que achar só x, então é só dividir por dois.
Gisele: — Pronto. O x é dois. É fácil, não é?

A expressão "o que some com mais um" passou a circular nas vozes dos alunos e parece ter sido tomada emprestada (BAKHTIN, 2010) da minha fala e da fala da professora Leila.

Muito embora o aplicativo apresentasse uma boa quantidade de "*new problem*", todas as equações eram de um dos seguintes tipos: 3x + 5 = 8; 3x + 4 = x + 8 e, depois de um certo tempo, essas começaram a se repetir e as operações feitas, nessa balança, eram apenas de subtração e divisão, mas isso não parecia entediar os alunos, pelo contrário, era como se fosse sempre uma equação nova.

Mas alguns alunos, mesmo sem nossa orientação, passaram a trabalhar no aplicativo *Algebra Balance Scales – Negatives*, no qual também não tiveram dificuldade em resolver equações, como a mostrada na figura 30 a seguir.

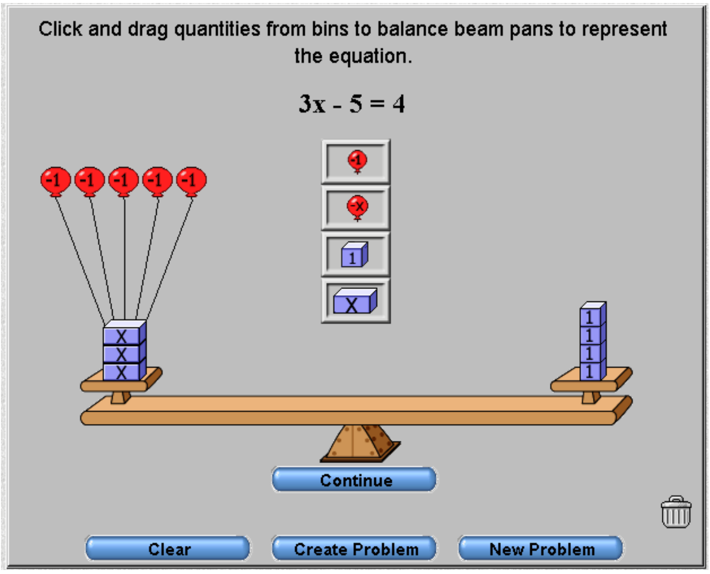


Figura 30. Equação do *Algebra Balance Scales – Negatives*

Wilson: — Professora, essa balança é diferente. Faz do mesmo jeito?
Prof.ª Pesq.: — É a mesma coisa, só que tem positivos e negativos. Experimenta resolver essa equação aí.

No cenário do laboratório de informática, foi possível observar que o diálogo entre os estudantes era muito intenso e informal. A maioria utilizava gírias para expressar a admiração com o aplicativo utilizado na resolução de equações. O tempo inteiro, os estudantes, em um processo metacognitivo (FÁVERO, 2005a), verbalizavam as ações que estavam desenvolvendo e interagiam com os colegas pedindo ajuda, dando opiniões. No ambiente virtual, engajavam-se nas atividades e não tinham medo de experimentar, de errar, de refazer.

Novamente somos levados a considerar que há uma mútua implicação entre diálogo e aprendizagem matemática. Os diálogos no laboratório desencadeavam importantes processos metacognitivos de autorregulação e de validação de procedimentos (FÁVERO, 2005a), que conduziam à apreensão do processo de resolução de equações, mas era justamente essa apreensão conceitual que levava os estudantes a entrarem mais ativamente em diálogo com seus pares.

O comportamento dos estudantes no laboratório nos levaram a questionar, afinal o que tornou esse cenário mais atrativo? É a tecnologia em si? A centralidade da aula no aluno? Ou é porque ele é diferente da sala de aula tradicional?

Por fim, ao concluir essa categoria, não podemos deixar de considerar que a transformação da sala de aula em espaço de interação e diálogo, com vistas à aprendizagem da Matemática, exige o esforço coletivo de professores e estudantes em ouvir, trocar experiências, colaborar com os demais e, principalmente, em aceitar que a diversidade é inerente à espécie humana, mas que as diferenças se complementam quando agimos cooperativamente. Assim, não faz sentido separar a sala entre os que sabem mais e os que sabem menos.

Mas, para que haja diálogo, é necessário também criar condições objetivas de espaço e tempo. A sala de aula com carteiras afastadas e com estudantes enfileirados um trás do outro, e sentados a mais de meio metro de distância, não favorece o diálogo e a interação. Essas condições passam necessariamente pela redução drástica do número de alunos em salas de aula e pela formação do professor na perspectiva de uma organização do trabalho pedagógico mais dialógica. Da mesma forma, o tempo reduzido para a resolução de problemas, para a discussão e para a efetiva interação entre pares reduz as possibilidade de diálogo e, portanto, de aprendizagens.

Na próxima categoria, vamos adentrar nos processos de conceitualização que se evidenciaram nos diálogos.

4.2. CATEGORIA 2. A emergência de teoremas e conceitos-em-ato em diálogos constituídos a partir de atividades para a aprendizagem matemática

A observação da interação e da alternância de enunciados, em diálogos constituídos durante a realização de diversas atividades na pesquisa de campo, levou-nos a considerar a possibilidade de analisar o processo de conceitualização matemática dos adolescentes colaboradores do estudo. Ao lançar nosso olhar sobre o conteúdo de suas falas, ficou evidente a emergência de conhecimentos-em-ato associados às situações vivenciadas.

Como assevera Vergnaud (2009a, p. 31), "o estudo da formação e do funcionamento das competências complexas na educação e no trabalho requer uma atenção maior ao conteúdo dos diálogos", mas esses precisam ser analisados tanto do ponto de vista dos conteúdos (daquilo que está explícito, e também implícito) como da forma.

É bem verdade que, no processo de conceitualização, o conteúdo que é explicitado na interação e nos diálogos é apenas parte de um todo, que não é diretamente observável. Mas Vergnaud (2009a), da mesma forma que Freire (1986), considera a importância de se estudar essa parte observável que temos acesso por meio da linguagem, em diálogo com os estudantes, a fim de termos pistas do curso de seus pensamentos. Ao explicitar conhecimentos em ação no contexto escolar, os sujeitos possibilitam a discussão desses, diferentemente do que acontece quando esses ficam apenas implícitos.

Assim, em nosso trabalho, a Teoria dos Campos Conceituais – TCC (VERGNAUD, 1990, 2009a, 2009b) não apareceu como um corpo teórico dado *a priori*, mas como uma "construção sistemática" que possibilitou o confronto com as informações geradas na pesquisa (GONZÁLEZ-REY, 2005a, 2005b), por meio dos diálogos estabelecidos com e pelos sujeitos em ação.

A TCC possibilitou lançar luzes sobre o processo de conceitualização dos estudantes, sobretudo em atividades interativas e dialógicas, nas quais os mesmos expressavam, de forma espontânea ou estimulada, seus pensamentos. Segundo o próprio Vergnaud (1990, 2009a), a Teoria dos Campos Conceituais fornece aporte teórico para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, especialmente as relativas a conceitos científicos e técnicos. Muito embora não seja específica da Matemática, a teoria tem sido elaborada no âmbito dos processos de construção de conceitos matemáticos.

Para Vergnaud (1990, 2009a), não é a definição que dá sentido ao conceito, mas as situações. Assim, somente por meio da análise das situações e dos problemas propostos aos adolescentes é que se podem conhecer seus processos de conceitualização. Esse autor afirma que o conceito é uma tríade constituída por três conjuntos distintos, mas não independentes: **S** (conjunto das situações que dão sentido ao conceito); **I** (conjunto de invariantes operacionais, sobre os quais repousam a organização invariante da atividade (esquemas) e, portanto, a emergência de conceitos-em-ato e teoremas-em-ato, elementos cognitivos que caracterizam a ação operatória do sujeito); e **L** (conjunto de representações linguísticas e não linguísticas que possibilitam representar simbolicamente um conceito, suas propriedades, as situações e os esquemas evocados).

O conceito de esquema, construído a partir das ideias de Piaget, é central na Teoria dos Campos Conceituais. Vergnaud (1990, 2009a) amplia o conceito piagetiano ao afirmar que um esquema é uma "organização invariante do comportamento para uma classe de situações dada", constituído necessariamente por objetivo, subobjetivos, antecipações, regras de ação, invariantes operatórios (conceitos-em-ato e teoremas-em-ato) e possibilidade de inferências.

Diante da situação proposta, segundo Vergnaud (1990, 2009a), o sujeito pode ou não dispor de um repertório de competências para o tratamento imediato dos problemas. Se não dispuser, isso o obriga a refletir, a explorar, a duvidar, a experimentar, a agir sobre os problemas, evocando esquemas que tanto podem conduzir ao êxito como ao fracasso. Nesse processo, de forma implícita, são evocados pelo sujeito conhecimentos-em-ato que lhe possibilitam selecionar informações que ele considera relevantes para sua produção.

Nos episódios narrados a seguir, mostraremos como a interação e o diálogo evidenciam conhecimentos-em-ato utilizados pelo sujeito, sobretudo como esse sujeito em situações dialógicas, muitas vezes, explicita teoremas-em-ato subjacentes à sua construção conceitual.

4.2.1. "Para calcular o saldo é só diminuir"

Para construir conceitos relativos à ideia de números inteiros, bem como as operações com esses números, foram utilizados jogos em que os números positivos eram representados por argolas azuis e os negativos, por argolas vermelhas, adaptados da proposta apresentada por Gaspar (1987) no I Encontro Nacional de Educação Matemática (I ENEM) [14]. Tal proposta também foi veiculada pelos módulo de Inteiros do projeto “Um novo currículo de Matemática”.[15]

No “Jogo do mais ou menos”, mostrado na figura 31 a seguir, cada participante joga um dado que indica a quantidade e outro dado que indica se a quantidade é positiva (+) ou negativa (−). Em seguida, deve representar as quantidades em seu ábaco. Vence o jogo quem, ao final, obtiver maior saldo.

Figura 31. Jogo do mais ou menos

Durante uma das sessões do jogo, propus a Helena jogar e, concomitantemente, realizar o registro no caderno. Assim, ao final do jogo, por sucessivas jogadas, eu tinha 20 argolas azuis e 18 argolas vermelhas no meu ábaco e Helena tinha 16 argolas azuis e 12 vermelhas em seu ábaco. Para calcular o saldo, Helena recorreu ao ábaco, e não ao registro feito no caderno, o que me pareceu bastante razoável. Há conhecimentos-em-ato (VERGNAUD, 2009a) subjacentes ao esquema utilizado por Helena e que organizam as suas ações. Ao manipular o ábaco, ela conta silenciosamente os azuis e os vermelhos de cada haste do ábaco separadamente; em seguida, retira das hastes, ao mesmo tempo, um vermelho e um azul, para chegar ao saldo.

A seguir, o diálogo que foi estabelecido entre nós duas após o jogo:

Prof.ª . Pesq.: —Helena, qual é o seu saldo?

Helena —12 vermelhas anulam 12 azuis, então sobram 4 azuis. Meu saldo é mais quatro.

Prof.ª . Pesq.: —Você ganhou de mim, pois meu saldo é mais 2. Tenho 18 vermelhas e 20 azuis.

---

[14] Promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), o I ENEM foi realizado em São Paulo, no período de 2 a 6 de fevereiro de 1987.

[15] O projeto “Um novo Currículo de Matemática”, realizado ao abrigo do “Projeto para a melhoria do ensino de Ciências e Matemática” do MEC/CAPES/PADCT, foi coordenado pela professora Nilza Eigenheer Bertoni, no âmbito da Universidade de Brasília e compreendeu, entre outras ações, a produção de módulos para o ensino de Matemática no 1º grau, destinados à formação de professores das escolas públicas do DF.

Em seguida, eu perguntei a Helena:

> Prof.ª . Pesq.: —Helena, e se nós não tivéssemos o ábaco e as argolas? Como calcularíamos essa conta que você registrou no caderno?
>
> Helena: —Hummmmm.... Deixa eu ver.... Professora, é só juntar os positivos e juntar os negativos. Tenho 12 negativos e 16 positivos.
>
> Prof.ª . Pesq.: —Ok. Você juntou os positivos e juntou os negativos, ou seja, você somou. E agora, para calcular o saldo? O que você faz? Soma? Diminui?

Helena, então, olhou para o ábaco, que ainda estava sobre a mesa, e respondeu:

> Helena —Ué, professora. Para calcular o saldo, tem que diminuir.
>
> Prof.ª . Pesq.: —Muito bem, Helena! A gente diminui.

Nesse momento, o diálogo que Helena estabeleceu comigo sobre suas ações permitiu que ela construísse e explicitasse um teorema-em-ato que, segundo Vergnaud (2009a, p. 23), é "uma proposição tida como verdadeira na ação em situação." O teorema-em-ato "para calcular o saldo, tem que diminuir", construído e explicitado por Helena, em ação, é uma proposição universalmente verdadeira para a situação em que temos que fazer a soma algébrica de números negativos e números positivos.

4.2.2. "O saldo é negativo, pois tem mais negativo"

Após o "Jogo do mais ou menos", percebi que Helena estava, de fato, em processo de construção das operações com números inteiros, quando resolveu o desafio mostrado na figura 32 a seguir.

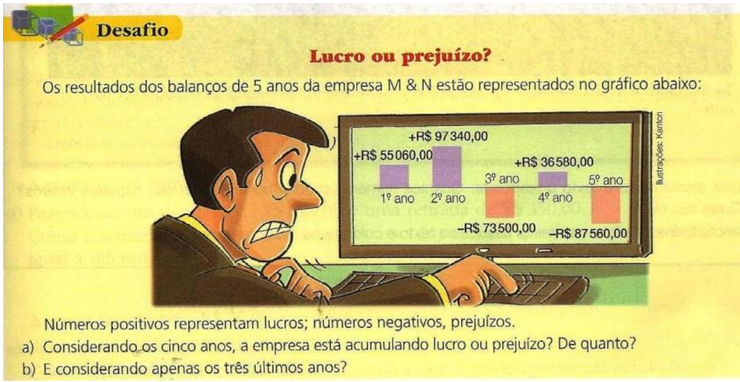


Figura 32. Exercício do livro (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009, p. 23)

Para resolver o exercício, Helena somou os valores representativos do lucro e os valores representativos do prejuízo e, em seguida, subtraiu um do outro encontrando o saldo.

Após a leitura do problema, iniciei um diálogo com Helena.

Prof.ª . Pesq.: — Helena, você sabe o que é lucro e prejuízo?
Helena: — Sei, professora.
Prof.ª . Pesq.: — O problema diz que os lucros são representados por...
Helena: — Números positivos.
Prof.ª . Pesq.: — E o prejuízo?
Helena: — Números negativos.
Prof.ª . Pesq.: — Agora olha para o gráfico e mostre onde estão os lucros e os prejuízos.
Helena: — Ih, professora! Pera aí. Já sei...

Sem falar uma palavra, Helena somou os lucros e somou os prejuízos e, em seguida, calculou a diferença, como mostra a figura 33 a seguir. Nessa passagem, Helena interrompeu o diálogo, pois o meu enunciado, de alguma forma, a fez perceber o que deveria fazer. Essa interrupção do diálogo ocorreu no exato momento em que ela precisava registrar no papel o que estava em seu pensamento.

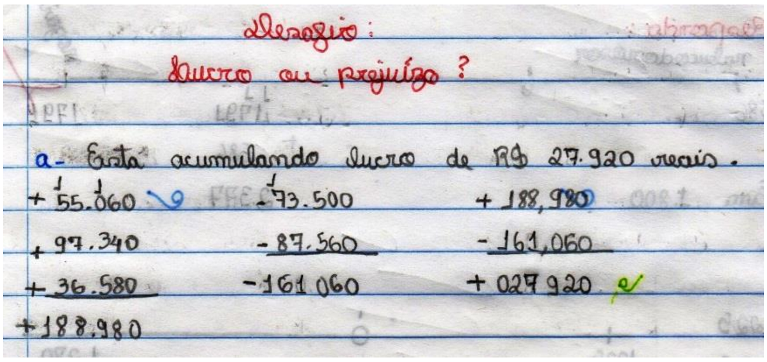


Figura 33. Registro com a resposta da primeira parte do desafio, feito por Helena, no caderno

Apenas após concluir o registro escrito, Helena retomou o diálogo comigo.

Helena — O saldo é de 27.920 reais.
Prof.ª . Pesq.: — Positivo ou negativo?
Helena — O saldo é positivo.

Para dar essa resposta, Helena precisou do registro para testemunhar a sua proposição, por isso, antes de responder, ela olhou para seu caderno. Eu confirmei sua resposta e dei continuidade ao diálogo perguntando:

Prof.ª . Pesq.: — Isso mesmo! Agora olhe os valores dos 3 últimos anos no gráfico. Sem fazer a conta, me diga: nesses três anos, o saldo é positivo ou negativo?
Helena — Professora, eu acho que é negativo. Olha aqui... tem mais negativo que positivo.

Prof.ª . Pesq.: — Muito bem, Helena. Tem mais negativo que positivo.

Muito embora a soma algébrica de inteiros não tivesse sido formalmente introduzida pela professora em sala de aula, Helena resolveu o exercício sem dificuldade. Em função dos altos valores do problema, ela não usou as argolas vermelhas e azuis, e, ainda assim, sua ação explicita um esquema (VERGNAUD, 2009a) que confirma um processo de conceitualização que foi iniciado no jogo do mais ou menos. Ao falar que o saldo era negativo porque "tem mais negativo que positivo", Helena enuncia um teorema-em-ato vinculado ao anterior, que é também uma proposição universalmente válida na soma algébrica de números inteiros.

Em seguida, Helena interrompeu novamente o diálogo e registrou, em seu caderno, o cálculo mostrado na figura 34 a seguir.

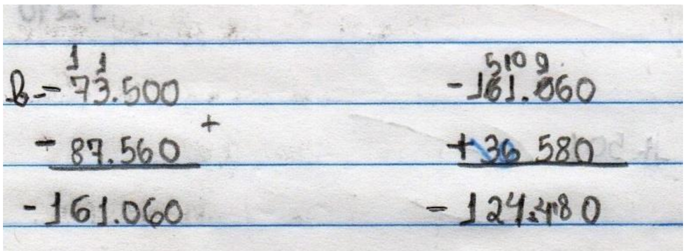


Figura 34. Registro com a resposta da segunda parte do desafio, feito por Helena, no caderno

No registro de Helena, é possível observar conceitos-em-ato subjacentes ao seu processo de conceitualização. Segundo Vergnaud (2009a), "um conceito-em-ato é um conceito considerado pertinente na ação em situação." Para chegar ao resultado, Helena se utilizou, entre outros, dos conceitos de adição e subtração. O sinal +, ao lado da primeira operação, serviu para testemunhar a escolha do conceito tido como pertinente à situação. Ela sabia que, embora os números fossem negativos, precisava somar para encontrar o prejuízo.

Após o registro no caderno, Helena reafirmou:

Helena — É negativo mesmo.

Helena resolveu o problema sem dificuldade, o que mostra que a situação possibilitou a emergência de um processo de conceitualização. Sua ação confirmou o importante teorema-em-ato (VERGNAUD, 2009a) que ela já havia enunciado na situação do jogo e que agora, em uma situação fora do jogo, ela expressou.

4.2.3.“Tenho mais positivo, então meu saldo é positivo”

Na sequência do jogo, solicitei a um grupo de estudantes que calculasse o saldo sem o uso do ábaco.

> Prof.ª . Pesq.: —Não mexam no ábaco ainda. Olhem no papel e vejam quantos positivos e quantos negativos vocês têm.

Todos somaram separadamente os positivos e os negativos, utilizando um esquema que já se estava evidenciando nas ações do grupo e, depois, olharam para o ábaco. Então, eu continuei:

> Prof.ª . Pesq.: —Agora confiram no ábaco. Está certo? Qual é o saldo?
> Priscila.: —Eu tenho mais positivo, então meu saldo é positivo.
> Prof.ª . Pesq.: —Quanto?
> Priscila —12 positivo.
> Prof.ª . Pesq.: —Mais 12? Muito, hein?

Havia um teorema-em-ato (VERGNAUD, 2009a) subjacente à fala de Priscila quando ela afirmou: “eu tenho mais positivo, então meu saldo é positivo.” Novamente observamos que o processo metacognitivo (FÁVERO, 2005a) de pensar e o falar sobre a ação, durante o jogo, faz emergir um teorema e este é uma proposição universalmente válida.

4.2.4.“Quanto mais positivo melhor” e “quanto menos negativo melhor”

Ainda no jogo do “mais ou menos”, ao conferir seus saldos, Ingrid e Talita travaram um diálogo em que um conceito-em-ato (VERGNAUD, 2009a) foi explicitado.

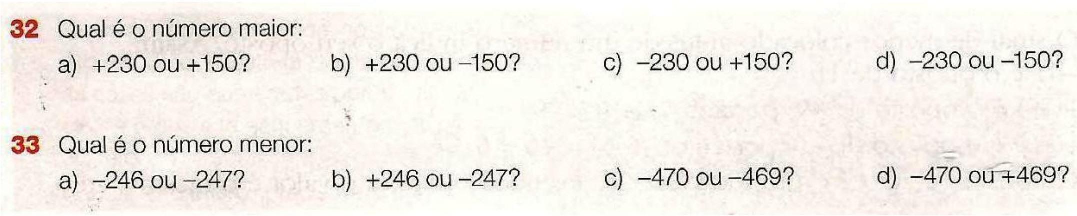
> Ingrid —Eu não tenho sorte. Tenho 5 negativos, mas estou melhor que Talita que tem 9 negativos.
> Talita —É mesmo. Eu perdi. Tenho um monte de negativo.
> Prof.ª . Pesq.: —É? Então é melhor ter – 5 do que ter – 9? Por que?
> Priscila: —Uai, professora! É negativo não é? Quanto menos negativo melhor.
> Talita: —Eita! É mesmo! Eu tenho mais negativo que a Ingrid.

Na fala da Ingrid, também havia um conceito-em-ato (VERGNAUD, 2009a). Ao estabelecer uma comparação de inteiros, ela enunciou: “tenho 5 negativos, mas estou melhor que Talita que tem 9 negativos.” Muito embora ela diga “estou melhor”, qualificando e não quantificando, está claro que é como se dissesse: “eu tenho mais” ou “meu saldo é maior”.

No contexto do jogo, na efetiva ação da aluna, comparar – 5 e – 9 não chega a ser uma obstáculo como, em geral, é nos exercícios tradicionais. Como o jogo é pleno de significado para a aluna, não há qualquer dificuldade de conceitualização. Mas isso também acontece fora do jogo, como veremos a seguir.

As atividades com jogos eram sempre intercaladas com exercícios tradicionais do livro, deixados pela professora. Muito embora esses exercícios produzissem poucos diálogos durante a execução, ao final, a conferência das respostas sempre geravam boas discussões.

Propus que as alunas resolvessem o exercício 32 e 33 da página 22 do livro, mostrado na figura 35 a seguir.


32 Qual é o número maior:
a) +230 ou +150? b) +230 ou –150? c) –230 ou +150? d) –230 ou –150?

33 Qual é o número menor:
a) –246 ou –247? b) +246 ou –247? c) –470 ou –469? d) –470 ou +469?

Figura 35.Exercício do livro (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009, p. 22)

A figura 36, a seguir, mostra o registro das respostas de Helena, em seu caderno.

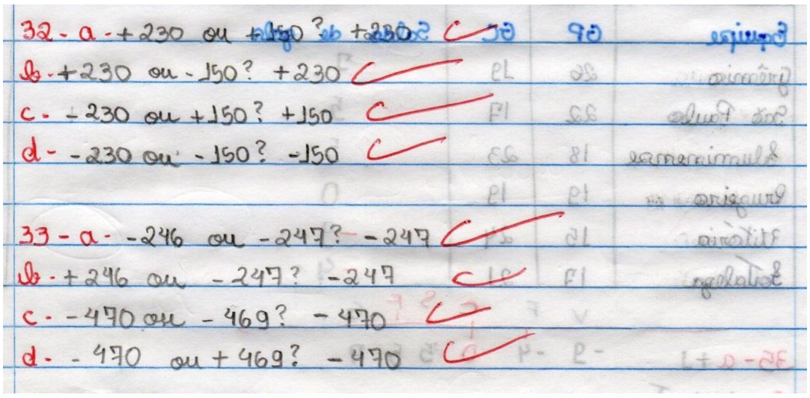

32 - a - +230 ou +150? +230
b - +230 ou - 150? +230
c - - 230 ou +150? +150
d - - 230 ou - 150? - 150
33 - a - - 246 ou - 247? - 247
b - + 246 ou - 247? - 247
c - - 470 ou - 469? - 470
d - - 470 ou + 469? - 470

Figura 36. Registro com a resposta dos exercícios 32 e 33, feitos por Helena, no caderno.

Olhei para o seu registro de Helena e percebi que todas as respostas estavam corretas, então, perguntei:

Prof.ª . Pesq.: — Helena, por que menos cento e cinquenta é maior que menos duzentos e trinta?
Helena: — Uai, professora, quanto menos negativo melhor.

Observe que ela não teve dificuldade em comparar nem mesmo dois números negativos e expressou essa compreensão utilizando um conceito-em-ato (VERGNAUD, 2009a) "quanto menos negativo melhor."

Ao comparar seu exercício com o de Janete, ela voltou a enunciar esse conceito, como mostra o diálogo a seguir.

> Helena.: — Mais duzentos e trinta é maior que mais cento e cinquenta, mais duzentos e trinta é maior que menos cento e cinquenta; Mais cento e cinquenta é maior é maior que menos duzentos e trinta; menos cento e cinquenta é maior que menos duzentos e trinta ... [De cabeça baixa]
>
> Janete: — Hum hum... [Não dá para saber se está concordando ou discordando]
>
> Helena.: — É... menos duzentos e quarenta e sete é menor que menos duzentos e quarenta e seis. Quanto menos negativo melhor. . [Levanta a cabeça rapidamente]

A proposição "quanto menos negativo melhor", era usada para quantificar. Foi a forma encontrada pelas estudantes para compreender a comparação de 2 números negativos. Helena, ao fazer isso, possivelmente faz referência à situação concreta do jogo em que, para ter um saldo maior era melhor ter menos negativo e mais positivo.

4.2.5."Perder negativo é o mesmo que ganhar positivo"

Para dar continuidade à construção do conceito de número inteiro, resolvemos utilizar outro jogo que foi muito bem aceito pelas alunas. Trata-se do jogo "Positivo e Negativo"[16], mostrado na figura 37, a seguir. Nesse jogo, um banqueiro fica com as fichas azuis e vermelhas e coordena as jogadas feitas a partir das cartas. Os jogadores, um de cada vez, devem pegar uma das cartas que devem estar viradas no centro da mesa e atender ao comando do que estiver escrito nela. No início, todos recebem 12 fichas azuis, ou seja, na partida todos tem um saldo de + 12. Combinamos que eu seria o banqueiro e elas as jogadoras. As cartas possuem comandos como: "pague 2 azuis ao jogador anterior", "receba 3 vermelhas do jogador anterior", "pague 1 azul ao banqueiro",

[16] Adaptado de LELLIS, Marcelo C.; JAKUBOVIC, José; IMENES, Luiz Márcio P. *Números negativos* – Coleção para que serve a Matemática? São Paulo: Atual, 2009.

Figura 37. Jogo Positivo e negativo

O jogo possibilitou que as estudantes compreendessem que uma quantidade não se altera quando acrescentamos zero relativo a ela, por exemplo, se há alguém com 12 fichas azuis, ou + 12, e recebe 2 azuis e 2 vermelhas, respectivamente +2 e –2, então continuará com os mesmos 12 positivos, como ocorreu com Gisele.

Isso aconteceu logo na primeira jogada. Gisele, como todas as demais, tinha 12 fichas azuis, ou +12, e tirou uma cartinha que dizia: “pague 2 vermelhas ao jogador seguinte”.

Gisele —E agora, professora? Eu não tenho vermelhas...
Prof.ª . Pesq.: —Mas se eu te der 2 vermelhas e 2 azuis, vai alterar o que você tem?
Gisele —Vai, né professora?
Prof.ª . Pesq.: —Vamos ver?

Passei 2 fichas azuis e 2 fichas vermelhas a ela, sob o olhar atento das demais, e pedi que ela calculasse seu saldo.

Gisele —Duas vermelhas anulam duas azuis e eu fico com...
Prof.ª . Pesq.: —Fica com...
Gisele —Com 12! Era o que eu tinha antes! Caraca!
Prof.ª . Pesq.: —É isso, Gisele. Quando eu te dei duas vermelhas e duas azuis, eu dei zero para você, concorda? E agora você tem duas vermelhas para dar ao jogador seguinte.
Gisele —É mesmo.
Prof.ª . Pesq.: —E agora qual é o seu saldo?
Gisele —Agora eu tenho 14 positivos. Eita! Tenho mais positivos.
Prof.ª . Pesq.: —Isso mesmo. Perder fichas vermelhas é o mesmo que ganhar azuis. Perder negativo é o mesmo que ganhar positivos.

A fala inicial de Gisele de que sua quantidade se alteraria quando recebesse 2 vermelhas e 2 azuis, mostra que ela estava pensando em valores absolutos. Ao calcular o saldo e descobrir que ele permanecia + 12, Gisele não se conteve e usou um palavrão para exprimir seu espanto e a descoberta.

Como eu falei que dar 2 azuis e 2 vermelhos era equivalente a “dar um zero”, a expressão “me dá um zero aí” foi amplamente utilizada no jogo a partir daí. Como nos mostra Bakhtin (2010): no diálogo pegamos de empréstimo a palavra do outro e isso se dá na interação, na relação que estabelecemos com o outro e, a partir, da qual nós vamos nos constituindo sujeitos únicos.

Notei que, além de Priscila, ninguém mais tinha prestado atenção na parte final da minha fala de que “perder negativo é o mesmo que ganhar positivos”. Muito embora ela não tivesse dito nada, seu olhar era pura interrogação. Isso mostra que minha antecipação enunciando o teorema que deveria ser a construção de cada um, era, portanto, desnecessária. Mas isso mostra também que não é possível separar objetivamente o pesquisador do professor que, diante de situações como essa, antecipa o que gostaria que seu aluno construísse. Na sequência dos diálogos, fica claro como essa antecipação foi mesmo desnecessária.

Ingrid:	—Tenho que pagar 3 azuis ao jogador anterior e não tenho, só tenho 2 azuis. Professora “me dá um zero” aí.
Prof.ª . Pesq.:	—Três azuis e três vermelhas?
Ingrid:	—Não, professora. Já tenho 2, o zero é só uma azul e uma vermelha.

Essa situação se repetiu várias vezes e, em todas elas, observei que Priscila ficava muito atenta, até que em uma dada rodada, na sua vez, Priscila tinha que “pagar duas vermelhas ao banqueiro” e não tinha fichas vermelhas. Ela pensou por um instante e disse:

Priscila:	—Professora, me dá aí duas azuis.
Prof.ª . Pesq.:	—Por quê?
Priscila:	—Dar vermelhas é o mesmo que receber azuis. Tenho que dar duas vermelhas para você e não tenho, então, é só você me dar duas azuis e já ficar com as duas vermelhas para você.
Prof.ª . Pesq.:	—É isso mesmo, Priscila. Perder negativo é o mesmo que ganhar positivos. Você tinha que dar menos dois para mim, ou seja, você vai perder dois negativos, então, basta que eu te dê mais dois. Entenderam?

Subjacente à fala da Priscila havia outro teorema-em-ato (VERGNAUD, 2009a). Em ação, ela percebeu que perder negativo era o mesmo que ganhar positivo.

Percebi que nem todas acompanhavam o raciocínio da Priscila, mas aos poucos, durante o jogo, elas verbalizavam a compreensão desse importante teorema, nos revelando que os conceitos e teoremas são construções dos sujeitos em ação, e não objeto de pura transmissão.

Gisele:	— Tenho que dar positivos, então vou perder positivo. Vou ganhar

> negativo. É ruim... Bom mesmo é perder negativo, pois assim a gente ganha positivo.

Nesse episódio, quem enunciou um teorema-em-ato (VERGNAUD, 2009a) foi Gisele que mostrou, por meio de uma qualificação, que: ganhar negativo era ruim, "bom mesmo é perder negativo." Isso mostra que a aprendizagem é do sujeito que, em seu tempo e a seu modo, a constrói. Evidentemente que as situações do jogo, bem como a interação com os colegas e comigo, contribuiram para essa construção.

4.2.6. "Vou pegar o zero, é melhor que pegar negativo"

Outro jogo utilizado na pesquisa foi o *Matix* 64 que, segundo Cavalcante e Ortega (2008, p. 451), é um jogo de origem alemã. Esse jogo foi popularizado no Brasil com o nome "Estrela Guia". O jogo utiliza um tabuleiro comum de xadrez, peças nas quais são inscritos números inteiros e uma peça coringa que é chamada de "estrela guia", como mostrado na figura 38 a seguir.

Figura 38. Jogo *Matix* ou Estrela Guia

Trata-se de um jogo de estratégia, para duplas, cujo objetivo principal do jogador é atingir a maior soma algébrica para tornar-se o ganhador. Um jogador joga na linha e outro na coluna. O jogador deve retirar da linha que está a estrela um número inteiro, movendo para esta casa a estrela. O jogador oponente, guiando-se também pela estrela, deve retirar o maior número inteiro da sua coluna, levando a estrela sempre para a casa em que foi feita a retirada. Os jogadores se alternam, sempre tentando retirar o maior número inteiro. Cada jogador, no entanto, tem que antever a jogada do outro, pois a retirada do maior inteiro de uma linha pode implicar na retirada, pelo adversário, de um maior inteiro na coluna, o que não seria vantajoso.

Durante o jogo, aconteceu o seguinte diálogo entre Priscila, Ingrid e eu:

Priscila: —Ah, não, professora! A Ingrid está demorando muito!
Ingrid: —Eu estou pensando, Priscila! Me deixa pensar.
Priscila: —Professora, fala para ela andar logo...
Prof.ª . Pesq.: —Priscila, deixa a Ingrid pensar.
Ingrid: —Professora, o maior número na minha linha é o +10, mas se eu tirar ele, a Priscila vai pegar o + 15 e aí é ruim. Só que os outros números são negativos. Vou pegar um negativo.
Prof.ª . Pesq.: —Então pegue um negativo.
Priscila: —Ah, Professora! Você está ajudando a Ingrid e isso não vale!
Prof.ª . Pesq.: —Não, Priscila, eu não estou ajudando. Só disse para ela pegar um negativo, mas não disse qual.
Ingrid: —Hummm... Tem um zero também. Vou pegar o zero, é melhor que pegar negativo.
Prof.ª . Pesq.: —Por que é melhor pegar o zero, que pegar negativo?
Ingrid: —Uai, professora, porque o zero é maior que qualquer negativo.
Prof.ª . Pesq.: —Muito bem, Ingrid!

Esse episódio me levou a considerar, em um primeiro momento, que a competitividade do jogo poderia diminuir a cooperação e o diálogo. No entanto, por outro lado, essa competitividade pode levar os sujeitos a se posicionarem e afirmarem sua identidade. Nesse episódio, Ingrid, uma aluna em situação de dificuldade, não se rendeu ao desejo da Priscila de fazê-la jogar mais rápido. Ela expressou o desejo de seguir no seu tempo e da sua forma quando disse: “Eu estou pensando, Priscila! Me deixa pensar.” Isso corrobora com as perspectiva de Bakhtin (2010) e Freire (2011a) quando afirmam que, no diálogo, nós não nos perdemos uns nos outros, nossa identidade não se funde com a identidade do outro.

Nesse diálogo, Priscila cruzou os braços em manifestação de protesto e Ingrid, sabendo que tinha meu apoio para “jogar pensando”, sorriu muito e agitou as duas mãos ao mesmo tempo manifestando sua felicidade. Para Bakhtin (2009), a enunciação é de ordem social e plena de relações de poder. O que Priscila deseja no jogo é impor seu modo, seu processo, sua perspectiva (ALRO; SKOVSMOSE, 2006) e, para isso, pressiona Ingrid pela enunciação de argumentos. No diálogo, ambas mostram não apenas por palavras, mas por meio de elementos não verbais, a situação emocional (GONZÁLEZ-REY, 2003) em que se encontram e que, de alguma forma, dão pistas do sentidos subjetivos que atribuem ao jogo.

Vergnaud (1998, *apud* MUNIZ, 2009a) postula que a compreensão da natureza do pensamento, bem como daquilo que o constitui, exige considerar todos os registros da atividade humana, e não apenas os registros formais, escritos, técnicos e científicos. É preciso considerar também os gestos, os diálogos, as interações sociais e afetivas. Assim, é impossível compreender o pensamento das estudantes sem considerar, inclusive, essa comunicação não verbal que ocorre entre ambas, que inclui os olhares, os gestos com a cabeça e com as mãos.

Para jogar, Ingrid não apenas expressou seu pensamento e externalizou um conhecimento-em-ato que evidenciou um processo de conceitualização em curso. Na fala de Ingrid, evidenciou-se o conceito-em-ato (VERGNAUD, 2009a): “vou pegar o zero, é melhor que pegar negativo”. O diálogo comigo e com Priscila possibilitou que ela justificasse: “porque o zero é maior que qualquer negativo”.

Os episódios aqui brevemente discutidos mostram que, embora os enunciados dos estudantes não expressem a totalidade dos seus pensamentos e, portanto, dos seus processos de construção conceitual, as interações verbais são de grande importância para que o professor tenha pistas do curso do pensamento desses. Como Freire (1986, p. 20), estamos considerando que as falas e textos dos estudantes, ancorados em contextos e experiências de significação, são “acesso privilegiado a suas consciências” e contribuem de maneira efetiva para a compreensão dos processos de construção do conhecimento matemático.

Evidentemente que, conforme postula Vergnaud (1990), os conceitos-em-ato e os teoremas-em-ato, explicitados pelas alunas, são apenas a parte mais visível de um grande *iceberg* da conceitualização, que foi permitida ver por meio dos diálogos. No entanto, há uma parte não visível, que não é diretamente acessível ao professor, cuja interpretação ou compreensão é apenas parcial, mas que pode ser facilitada pela comunicação. Isso é importante, sobretudo se consideramos que os conhecimentos-em-ato podem vir a se tornar conceitos científicos.

Mas a compreensão do processo de conceitualização dos estudantes também passa pela análise da sua produção escrita, que é objeto de estudo da próxima categoria.

4.3. CATEGORIA 3: O diálogo como espaço de emergência de uma produção matemática diversa

Essa foi uma das categorias que emergiu já no estudo exploratório. Percebemos que o diálogo possibilitava a emergência de uma produção matemática diferenciada, que nem sempre era reconhecida pelos estudantes que estavam em situação de sucesso escolar e que haviam sido indicados para atuar como monitores no projeto, cooperando com a aprendizagem daqueles que estavam em situação momentânea de dificuldade.

4.3.1. A emergência de uma produção matemática diferente na pesquisa exploratória

Na pesquisa exploratória, durante a resolução de um exercício que compunha uma das listas (ANEXO A), propostas pela professora Edna para serem resolvidas no projeto de monitoria, observamos a emergência de uma produção diferente da que normalmente era feita em sala de aula e notamos também a dificuldade dos monitores em validar tal produção.

O exercício 2, cuja letra a) é mostrada na figura 39 a seguir, pedia para calcular o perímetro e a área de várias figuras poligonais.

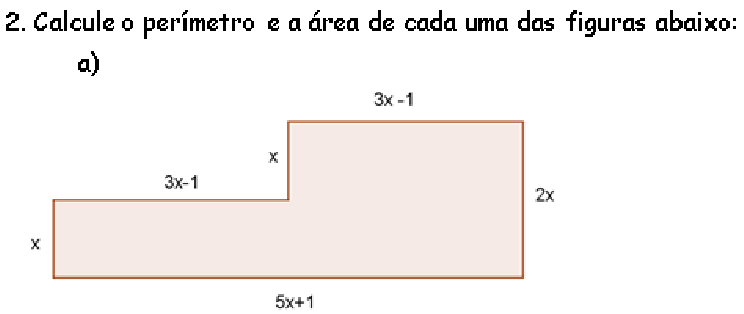


Figura 39. Exercício da lista deixada pela professora Edna

É importante observar que o exercício acima é característico do que Alrø e Skovsmose (2006, p. 52) denominam de atividade que faz referência à “matemática pura”, pois não possui contextualização fora da Matemática, ou seja, muito embora aborde o cálculo de área e de perímetro, dois conceitos de ampla aplicação no mundo real, o objetivo final é apenas o cálculo algébrico. Possui respostas únicas e fechadas e evocam procedimentos únicos. Quando realizados em sala de aula, não havia questionamento por parte da professora de procedimentos diferenciados, isso porque a mediação tinha por base a resposta que ela assumia como única para a atividade proposta

Percebi, inicialmente, que embora o projeto de monitoria tivesse uma dimensão cooperativa e houvesse alguns alunos com a função pré-definida de ajudar os colegas, quando entravam em contato com um exercício novo, inicialmente, os monitores se preocupavam em resolver seu próprio exercício, sem se envolver com os colegas. Foi o que aconteceu com Isabela, uma das estudantes monitoras. Ao receber sua lista, Isabela se preocupou primeiramente em resolvê-la. Aproximei-me da mesa e percebi que Juliana, que era do mesmo grupo, estava realizando a soma algébrica de maneira incorreta, como mostra a figura 40 a seguir. A estudante subtraiu o número 1 de 3x como se fossem semelhantes, ela fez 3x – 1 = – 2x e não apenas isso: ela considerou, em suas próprias palavras, que “mais com menos dá menos” e errou o sinal do resultado, encontrando –2x. O mesmo ocorreu quando ela somou 5x + 1= 6x. O curioso é que, quando eram apenas expressões algébricas como em x + 2x e 9x + x, ela acertava a soma. O registro a seguir evidencia a dificuldade em reduzir termos semelhantes em uma expressão algébrica.

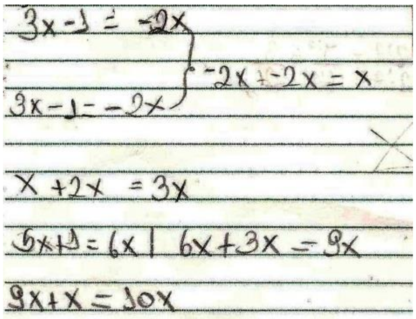


Figura 40. Registro feito por Juliana

Para chamar a atenção da monitora Isabela, toquei-lhe o braço e, em seguida, apontei para o registro mostrado acima. Apenas esse gesto foi suficiente para que Juliana pegasse a sua borracha para apagar o que havia feito. Não houve qualquer comunicação verbal e, ainda assim, a estudante compreendeu que o meu gesto de apontar para o seu trabalho era sinal de que havia algo errado. Nesse caso, o diálogo não requer o uso de palavras. O gesto de tocar a aluna, em geral raro nas aulas de Matemática, o gesto de apontar para o registro e minha expressão foram suficientes para que Juliana percebesse que algo estava errado e, de imediato, pegasse a borracha para apagar. Antecipei-me a ela, colocando a mão sobre o caderno para impedir o uso da borracha e, então, perguntei:

Prof.ª Pesq.: — Juliana, pode somar número com letra como você fez aqui?

Isabela não esperou a resposta da Juliana, olhou o registro e, então, antecipou-se respondendo:

Isabela: — Não, não pode. É letra com letra e número com número.

Como estava mais interessada em seu próprio exercício, Isabela voltou-se para seu caderno e Juliana fez novo registro. Permaneci em pé, ao lado dela, e nesse momento Débora, outra colega que estava ao lado, em silêncio, começou também a observar o que Juliana estava fazendo. Juliana, provavelmente motivada pela fala de Isabela, fez o registro mostrado na figura 41, a seguir, colocando os termos algébricos em uma coluna e os numéricos em outra, como se estivesse fazendo uma adição com várias parcelas de números naturais.

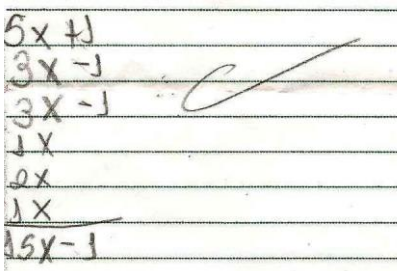


Figura 41. Registro feito por Juliana para o cálculo do perímetro

O registro mostra que Juliana não encontrou dificuldade em operar com as expressões algébricas e realizou, inclusive, a soma algébrica de números inteiros, acertando o resultado. Fica evidente que ela ancora o conhecimento novo em um conhecimento anterior já consolidado, mas o faz a partir da mediação de Isabela; quando esta diz: “é letra com letra e número com número”, foi como se ela dissesse “é unidade com unidade e dezena com dezena.” De alguma forma, essa mediação evocou em Juliana, uma aluna com dificuldades na aprendizagem de redução de termos semelhantes em expressões algébricas, a possibilidade de transferir para a situação nova do campo algébrico um procedimento que ela já dominava, mas no campo da aritmética.

Em um dado momento, Isabela deixou de fazer seu próprio exercício e começou a observar o registro de Juliana. Percebi nela uma expressão de dúvida e inquietação própria de quem estava preste a fazer alguma intervenção. A expressão corporal, a inquietação das mãos e o olhar mostravam que ela queria falar algo. Como me viu ao lado, ela perguntou para mim:

Isabela — E pode fazer isso?

O não reconhecimento de Isabela do registro de Juliana se prende ao fato de que ela própria utilizou uma estratégia semelhante à da professora em sala de aula e diferente do que sua colega fez, conforme mostra a figura 42 a seguir. Isabela, do mesmo modo que a professora, para encontrar a expressão algébrica do perímetro somou em linha horizontal.

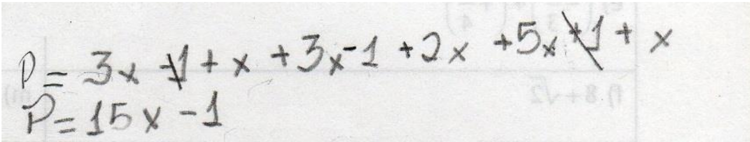


Figura 42. Registro feito por Isabela para o cálculo do perímetro

Fiz a intervenção no sentido de deixar que Juliana concluísse o que estava fazendo.

Prof.ª pesq.: — Deixe que ela termine e depois compare com o seu.

Quando Juliana terminou seu registro, Isabela observou que ambas haviam chegado ao mesmo resultado. Ela deu um sorriso e falou:

Isabela: — É. Tá certo.
Prof.ª pesq.: — Certinho.

Nesse momento, aconteceu uma interação não-verbal muito interessante. Isabela sorriu para a Juliana e esta, então, também abriu um largo sorriso. Juliana não falou mais nada, mas sua postura corporal era outra. Ela levantou os ombros, endireitou a coluna e sorriu. Era possível perceber a autoconfiança que o episódio gerou nela. Juliana, então, pegou o lápis e corrigiu seu registro com um "c", conforme se pode ver na figura 41, já mostrada na página 173.

O mesmo aconteceu para o cálculo da área. Isabela, do mesmo modo que a professora, decompôs a área total em duas, que chamou de A1 e A2, e utilizando a propriedade distributiva, encontrou a expressão algébrica dessas áreas. No final, ela somou as duas áreas encontrando a área total (AT), como mostra a figura 43 a seguir:

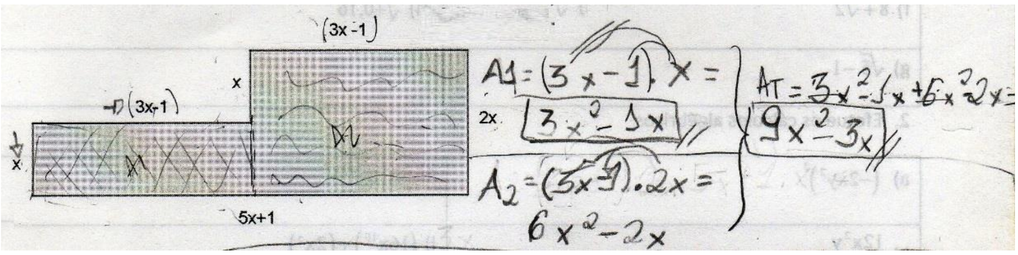


Figura 43. Registro feito por Isabela para o cálculo da área

Juliana que, até então, estava fazendo em uma folha de rascunho, resolveu, como Isabela, fazer o cálculo da área na própria folha do exercício e, novamente, utilizou um recurso diferente e muito próximo à multiplicação de números naturais, como mostra a figura 44 a seguir:

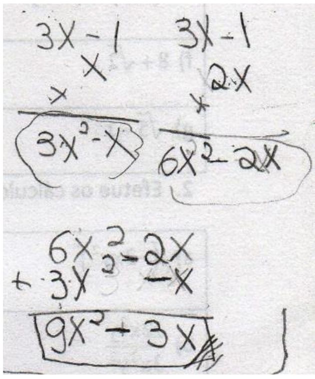


Figura 44. Registro feito por Juliana para o cálculo da área

O registro mostra que Juliana transpôs conhecimentos prévios do fazer matemática armando a operação como se faz no campo da aritmética, reproduzindo a forma algorítmica própria dos naturais e, inclusive, adotando o “x” da multiplicação sem confundi-lo com o “x”, enquanto variável.

Isabela olhou para mim, em seguida, para seu próprio exercício e validou o que Juliana havia feito, dizendo:

Isabela: —Tá certo também. Legal!

Imediatamente, Débora, que estava ao lado e em silêncio, falou:

Débora: — Vou fazer desse jeito também.

Ao falar que iria fazer do mesmo jeito que a colega, Débora não tinha mais como referência a professora e seus modos de fazer. Já não se trata mais de uma situação didática em que o professor está no controle (BROSSEAU, 2008).

Em ato contínuo, Juliana passou a estimular que Débora fizesse do mesmo jeito:

Juliana: — É só somar número com número e letra com letra. [Falou olhando para Débora]

Em frações de segundo, Juliana passa de aprendiz a mestre. Sua aprendizagem a motiva ao diálogo e ela, então, pega de empréstimo (BAKHTIN, 2010) a fala de Isabela "é número com número e letra com letra", mostrando que as palavras e as orações são "repetíveis", já os enunciados não são. Muito embora Juliana tenha usado as mesmas palavras que Isabela, o significado ali era absolutamente diverso, pois ela havia inserido a possibilidade de encontrar a expressão algébrica do perímetro, somando em colunas, como na adição de números naturais, diferentemente de Isabela que somava em linha horizontal, como a professora havia ensinado em sala de aula.

No exercício seguinte, que trazia uma série de operações numéricas com racionais, Juliana mostrou que ainda estava motivada pela autoconfiança gerada por sua produção, validada tanto por mim quanto por Isabela. Em uma das operações que envolvia a subtração de números fracionários [$\frac{3}{8}-\frac{5}{12}$], Juliana marcou sua posição resolvendo de forma diferente da colega monitora. Ela olhou para o lado e percebeu que Isabela estava resolvendo a operação utilizando o algoritmo do mínimo múltiplo comum – mmc[17] e até chegou a realizar a fatoração dos denominadores, como mostra a figura 45 a seguir, mas de ímpeto, fazendo referência à professora regente, Juliana abandonou o registro iniciado dizendo:

> Juliana: — A professora disse que dá certo também se multiplicar os denominadores. Vou fazer do jeito que ela falou.

A fala de Juliana fez referência a um episódio em que a professora mostrou que o algoritmo do mínimo múltiplo comum (mmc) não era o único para se obter frações equivalentes para efetuar a soma. Juliana, então, fez o registro mostrado na figura 45, a seguir, mas deixou registrada a fatoração que havia iniciado e abandonou.

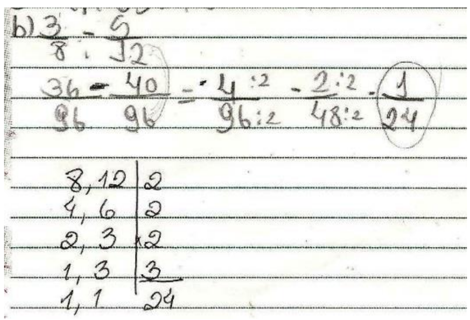


Figura 45. Registro feito por Juliana.

[17] O algoritmo do mmc é amplamente utilizado para encontrar duas ou mais frações equivalentes, que possibilitem a soma ou a subtração. Por meio de fatorações sucessivas, o mínimo múltiplo comum (mmc) de dois denominadores a e b, é o menor inteiro positivo múltiplo simultaneamente de a e de b.

A estudante Isabela apenas acompanhou a resolução e, no final, elas compararam os resultados. Novamente houve uma interação não verbal, em que a Isabela avaliou e validou o registro de Juliana por meio de um sorriso que foi retribuído.

Os episódios mostram que a interação e o diálogo entre as estudantes promovem tanto a validação do registro por parte da estudante monitora, como a autorregulação por parte da estudante que "em tese" estaria em situação de dificuldade. A autorregulação é um processo metacognitivo que, como salienta Fávero (2005a), envolve a tomada de consciência sobre os próprios processos mentais e sobre a própria cognição. Para essa autora, o termo metacognição pode ser empregado tanto para designar o conhecimento do sujeito dos seus próprios de pensamentos como para a compreensão do pensamento dos outros. Nesse sentido, a validação também é um processo metacognitivo.

Como já dito, para Ribeiro (2003), a metacognição é muito importante para o processo de aprendizagem porque possibilita ao sujeito ter consciência sobre o que sabe e sobre o que não sabe. Isso o leva, diante da tarefa, a fazer autorregulações, avaliações e planejamentos da melhor estratégia.

Como vimos, a validação e a autorregulação que acontecem a partir da interação entre os estudantes e destes com a pesquisadora são mediados pela produção matemática ou pelos registros escritos e orais, o que nos conduz a pensar na questão da "mediação semiótica" (FÁVERO, 1993, p. 74) e nos registros de mediação semiótica (DUVAL, 2009, 2011)

O episódio acima descrito nos levou a considerar também a importância do professor no acompanhamento desses registros, e também do acompanhamento dos encontros de monitoria. Sou tentada a pensar que se não estivesse presente, a estudante Isabela, provavelmente, desencorajaria sua colega Juliana de utilizar um procedimento diferente do que estava utilizando. Cabe observar também que o processo de resolução de Isabela e de outros alunos monitores era quase sempre semelhante ao utilizado pela professora em sala de aula; já o procedimento de Juliana e de outros alunos que estavam em situação de dificuldade era absolutamente diverso.

Na situação descrita, também é possível observar, nas diversas ações, registros e vozes dos estudantes, a ação, o registro e a voz da professora regente (BAKHTIN, 2010). A estudante Isabela resolveu o exercício de maneira semelhante ao modo como a professora resolvia em sala de aula e em seu processo de mediação utilizava as mesmas palavras da professora. Já a estudante em situação de dificuldade ousou fazer diferente do que a professora fazia. Seu pensamento, a partir da interpretação do registro, parece ser bem mais livre que o pensamento da estudante monitora. Uma evidência disso é o fato de que esta ancora seu modo de fazer em conhecimentos anteriores e não nos registros da professora em sala de aula. A soma de polinômios que ela fez aproximava-se do algoritmo utilizado em cálculos aritmético, anteriormente aprendidos e validados.

O curioso é que esse registro foi repetido por vários outros estudantes em situação de dificuldade, jamais por estudantes que estavam em situação de sucesso escolar. Em todos os casos, os últimos demonstraram estranheza e me solicitaram a validação do registro.

Os registros constantes das figuras 46, 47 e 48, a seguir, mostram que, no mesmo exercício acima, em datas e horários diferentes, estudantes de turmas também diferentes utilizam o mesmo procedimento na adição e na multiplicação de expressões algébricas, no cálculo de perímetro e área de regiões poligonais, respectivamente.

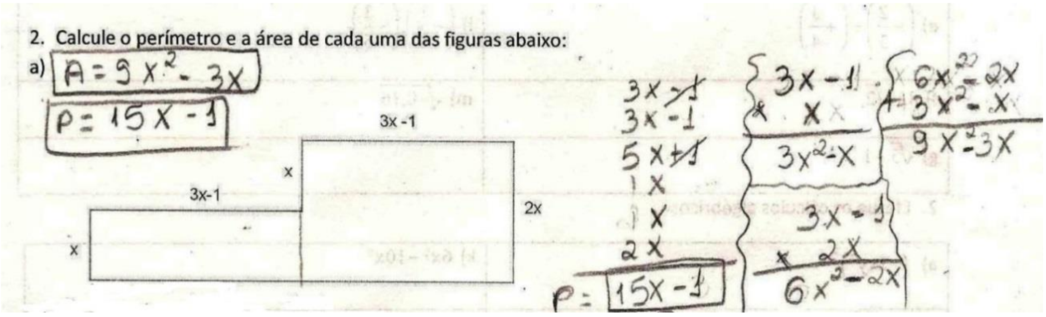


Figura 46. Registro feito por Daiane

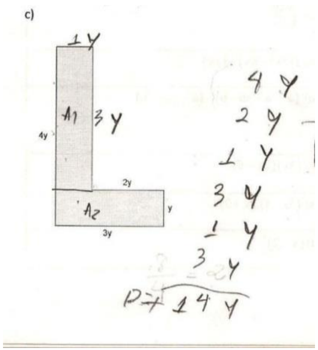


Figura 47. Registro feito por Thiago

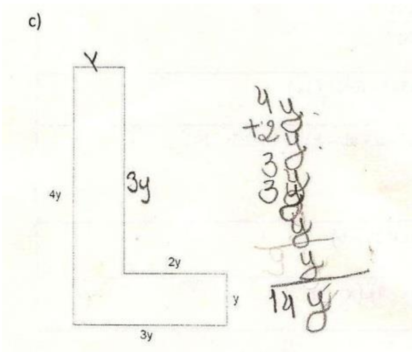


Figura 48. Registro feito por Pâmela

No registro mostrado na figura 49, a seguir, Juliana utilizou o mesmo procedimento que já havia utilizado (figuras 41 e 44) e que foi validado tanto por mim quanto pela estudante que exercia o papel de monitora. Muito embora fosse um quadrado e o perímetro pudesse ser encontrado pelo produto $4 \cdot [2 \cdot (x - 2)]$, a estudante optou por resolver somando os quatro lados iguais, mas novamente escreveu as expressões algébricas relativas aos quatro lados em uma coluna para, em seguida, fazer a soma. Nesse momento foi interrompida por Isabela que questionou: “e agora?”. Mesmo sem Isabela apontar para a soma, a estudante entendeu que ela estava se referindo aos parênteses das expressões. Sem pestanejar, ela utilizou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição em cada uma das expressões, formando uma nova coluna, para só então concluir o cálculo, encontrando como resultado 8x – 16.

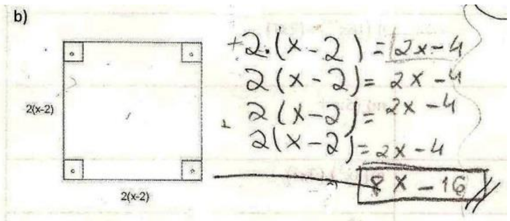


Figura 49. Registro feito por Juliana

No cálculo da área do quadrado (letra b) do exercício, os alunos se depararam com uma dificuldade adicional que era a multiplicação de um polinômio por outro polinômio. No registro mostrado na figura 50, a seguir, Daiane, que também já havia utilizado o procedimento semelhante ao das operações aritméticas tanto para o cálculo do perímetro quanto para o da área, conforme já mostrado na figura 46 (página 178), errou a multiplicação das expressões algébricas ao tentar encontrar a medida da área pelo produto de $2(x - 2) \cdot 2(x - 2)$. Embora ela tenha utilizado a propriedade distributiva para encontrar uma expressão mais simples para o lado do quadrado, ela apenas multiplicou os termos semelhantes entre si, encontrando de forma incorreta o resultado $4x^2 - 16$.

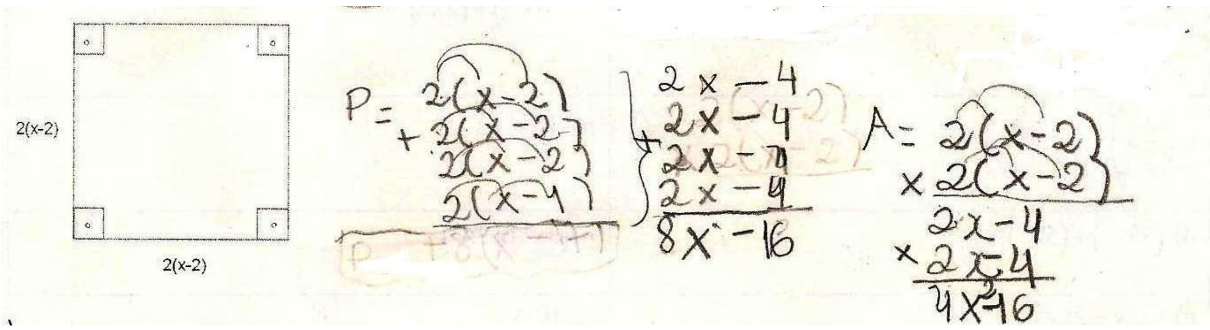


Figura 50. Registro da Daiane

O erro de Daiane só foi percebido dias depois por mim. O monitor que a acompanhava também não percebeu e isso me fez pensar em quanta coisa, na sala de aula, passa despercebida pelo professor. Se em um projeto de monitoria em que se tinha, em média, 15 alunos de cada vez, um erro não era percebido, imagina em uma sala com mais de 30 alunos? Isso indicou que, para a pesquisa de campo, os grupos precisavam ser menores para facilitar o acompanhamento. Isso mostrou também que a organização do trabalho pedagógico deve garantir um reposicionamento epistemológico do professor que o permita identificar elementos na produção do estudante que indique o processo de produção de significados na atividade matemática. Mas isso só será possível por meio da construção de uma relação mais horizontal, em que o diálogo e a interação sejam resgatados como forma de ter acesso tanto a produção do estudante como ao seu processo de significação.

A estratégia de Daiane nos mostra que, quando se trata da redução de termos semelhantes ou da multiplicação de um monômio por um polinômio, ela e muitos outros colegas não tiveram dificuldade; já a multiplicação de um polinômio por outro polinômio se apresentou como um obstáculo. É o que mostra, por exemplo, o cálculo feito por Angélica, na figura 51 a seguir. Ela não tem qualquer dificuldade para calcular o perímetro, usando a estratégia de somar em colunas. Para calcular a área da figura a), ela também usou de maneira adequada a estratégia similar à multiplicação de naturais. É possível observar que a ordem da multiplicação do monômio pelo polinômio é a mesma usada no campo da aritmética. Mas quando chega na figura b), optou pela estratégia utilizada pela professora em sala de aula, de multiplicar em linha horizontal, e também chegou em uma resposta incorreta, pois como Daiane, apenas multiplicou os termos semelhantes entre si.

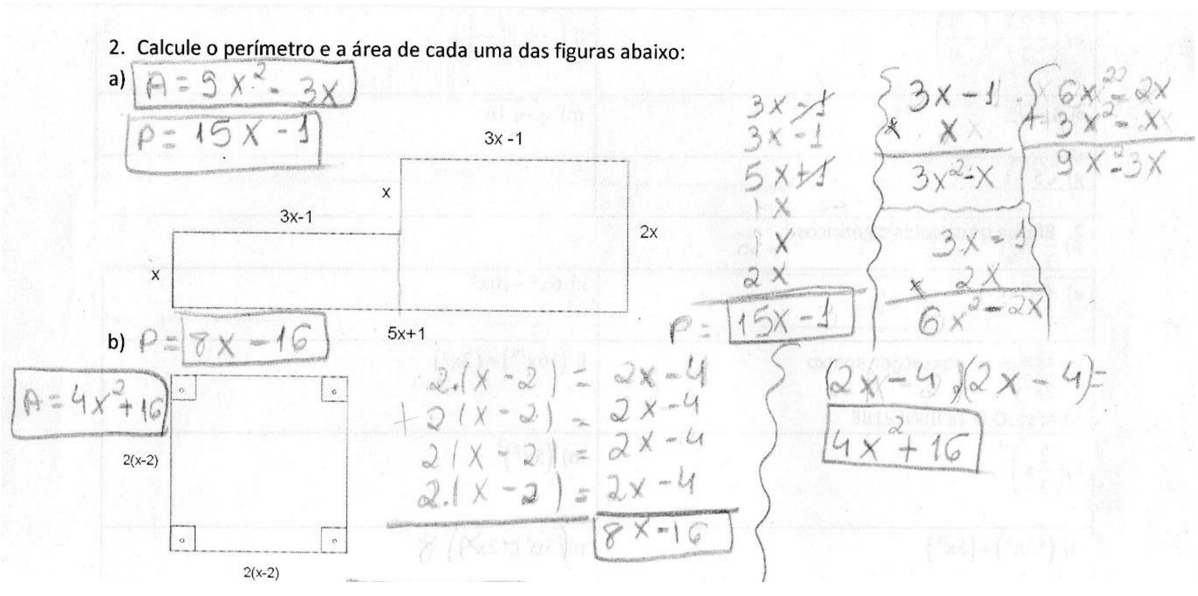


Figura 51. Registro da Angélica

No caso de Thiago, por exemplo, ele fez opção por um processo misto dos dois procedimentos aqui mostrados. Para o cálculo do perímetro, ele usou a soma em colunas, mas, para o cálculo da área, ele utilizou o procedimento usado pela professora, como mostra a figura 52 a seguir. É importante notar, no entanto, que, para realizar a redução dos termos semelhantes, ele voltou para a soma em coluna.

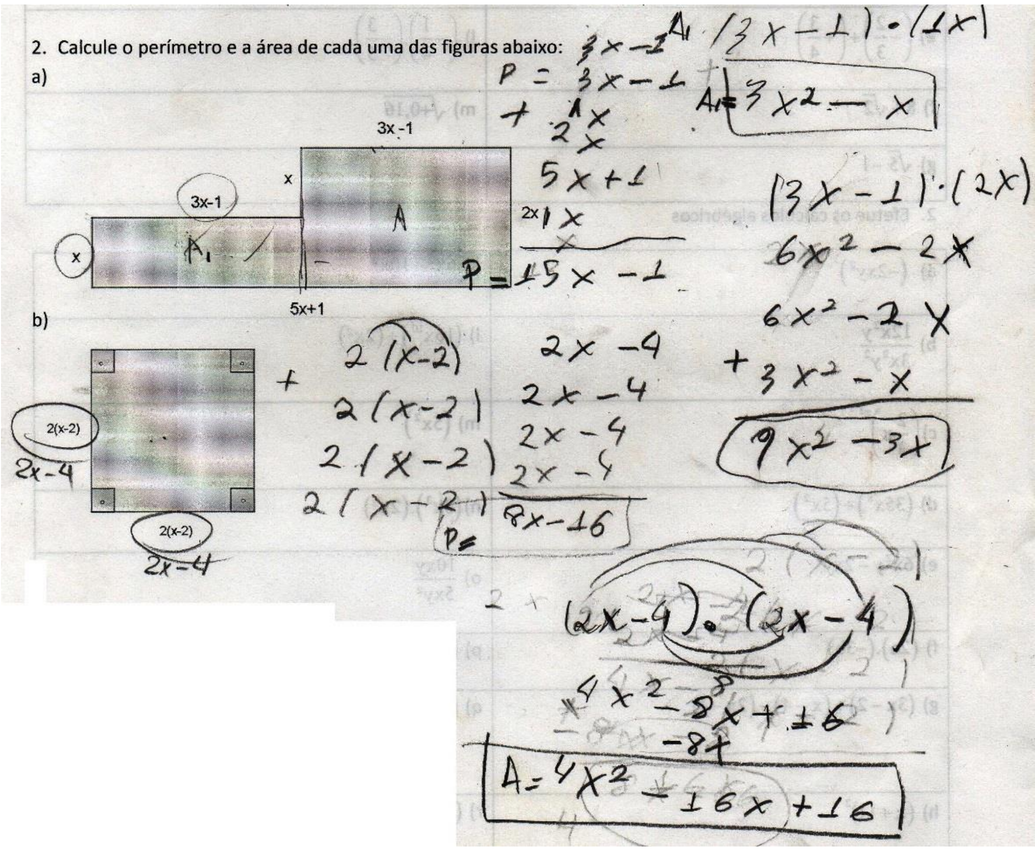


Figura 52. Registro feito por Thiago

Mesmo tendo decorrido mais de 15 dias dos registros, convidei os monitores para fazerem as correções dos erros no cálculo da área. O fragmento de diálogo, a seguir, mostra como Paulo, um dos monitores, fez a intervenção, mas usando as palavras da professora e de alguma forma negando a estratégia da colega:

Prof.ª Pesq.:	— Paulo, você consegue ajudar sua colega com essa multiplicação? [falo apontando para o exercício de Daiane]
Paulo:	— Aqui, ó, Daiane, não é só número com número e letra com letra não. Lembra do que a professora fala? Todo mundo dança com todo mundo. Lembra? [Fala também apontando para o Registro de Daiane]
Daiane	— Lembro. Lembro sim.

Paulo, então, usou o quadro de giz e fez registro semelhante ao que a professora fazia em sala, usando a estratégia de multiplicar em linha, conforme reprodução mostrada na figura 53, a seguir.

$$(2x - 4)\,(2x - 4).$$

Figura 53. Reprodução do registro que Paulo fez no quadro de giz.

Após o registro, Paulo prosseguiu:

Paulo: — Tá vendo? O dois x multiplica o dois x e a o menos quatro e o menos quatro também multiplica tudo. Entendeu? [falou acompanhando com o dedo cada setinha]

Daiane: — Mas na minha conta, eu...

Paulo: — Do mesmo jeito. O menos quatro com esse e o dois x com esse e com esse [Paulo fala interrompendo Daiane e apontando o dedo para o registro dela]

Daiane até tentou protestar, mas Paulo a interrompeu para dizer que era "do mesmo jeito". Fica evidente que embora Paulo tenha validado a estratégia de Daiane, havia um processo de negação, ao ir para o quadro e fazer do seu jeito e não do jeito dela. Resignada, ela acompanhou atentamente o cálculo que ele fez no quadro. Já não era mais o registro dela, mas o registro dele. Paulo, então, como um professor, prosseguiu:

Paulo: — Quanto é dois x vezes dois x?

Daiane: — É quatro x.

Paulo: — Quatro x?!... [Faz uma longa pausa para Daiane perceber que falta algo]

Daiane: — Ah! Quatro x ao quadrado.

Paulo: — Isso. Quatro x quadrado. E quanto é dois x vezes menos quatro?

Daiane: — Oito x. [Paulo olha para Daiane e não faz o registro no quadro e ela percebe que há algo errado e rapidamente corrige]. Não, não! É menos oito x.

Paulo: — É menos oito x. Pronto. Agora vamos multiplicar o outro. Todo mundo dança com todo mundo, não é? Então esse menos quatro vai...

Daiane: —... com o dois x e com o menos quatro.

Paulo: — E quanto vai dar?

Daiane: — Pera aí. [fala baixinho para si mesma] É... menos oito x.... menos, menos, mais dezesseis.

Paulo: — Menos dezesseis ou mais dezesseis?

Daiane: — É mais dezesseis.

Paulo: — Pronto. Agora é só juntar esse menos oito x com esse menos oito x aí fica quatro x quadrado, menos dezesseis x, mais dezesseis.

Nesse momento, Paulo se comportou como professor, usando os mesmos recursos de linguagem que a professora. Ele fez perguntas (e quanto vai dar?), usou inflexões na voz e fez pausas (Quatro x?!...), se utilizou de frases incompletas (Então esse menos quatro vai...) e expressões de confirmação para Daiane o acompanhar (Isso. Pronto), usou expressões coloquiais (Todo mundo dança com todo mundo), que foram tomadas de empréstimo da fala da professora (BAKHTIN, 2010).

Enquanto Paulo falava, procurei seu registro para esse exercício e percebi que ele não usava as setas que usou no quadro, conforme mostra a figura 54, a seguir. Mas para explicar para Daiane e outros colegas que estavam próximos, ele fez uso do mesmo procedimento da professora, tomando de empréstimo (BAKHTIN, 2010) não apenas a fala dela, como também sua forma de agir e de registrar no quadro de giz.

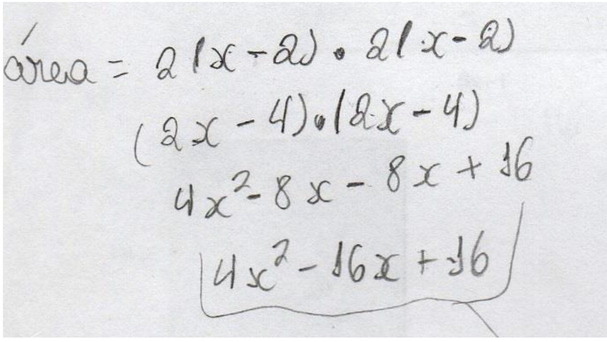


Figura 54. Registro feito por Paulo

Paulo e outros monitores gostavam de usar o quadro de giz e quando o faziam, comportavam-se como a professora. Nesse episódio, Paulo é o professor que usa inclusive as mesmas expressões e estratégias da professora. Já não é, portanto, o colega, mas o professor.

Em momento posterior aos encontros de tutoria, mostrei os registros dos alunos que somavam as expressões algébricas em coluna para a professora regente e ela, demonstrando surpresa, confirmou que aquele procedimento não havia sido ensinado por ela. Em todos os momentos em que estive em sala de aula, também notei que a professora sempre resolvia os cálculos algébricos em linha horizontal e jamais em coluna.

Os episódios e registros acima descritos indicaram a diversidade de produção matemática dos alunos, em diálogo uns com outros. Mas indicaram também que era preciso tomar alguns cuidados em relação ao número de alunos no projeto e também em relação ao comportamento dos "estudantes monitores". Para o objetivo da pesquisa era melhor que eles se investissem menos no papel de professor. Foi por isso, que na pesquisa de campo, eliminamos o papel de monitor.

4.3.2. A emergência de uma produção matemática diferente na pesquisa de campo

Em razão da preocupação anteriormente enunciada, como já foi dito, na pesquisa de campo, os alunos foram indicados pela professora seguindo o critério da heterogeneidade, ou seja, havia no grupo tanto alunos em situação de sucesso ou de êxito como aluno em situação de fracasso escolar ou de dificuldade, mas nenhum deles foi declarado monitor do projeto. A ideia foi sempre que todos podiam ajudar a todos. Também foi desestimulado o uso do quadro, pois a ideia era que os alunos mantivessem uma relação mais horizontal, reduzindo a possibilidade de que eles assumissem o papel de professor, mas em muitos momentos, isso não aconteceu.

4.3.2.1. Um ano depois a mesma estratégia para o cálculo do perímetro

Já na pesquisa de campo, no terceiro bimestre do ano letivo de 2012, iniciaram-se os estudos de álgebra. Em sala de aula, os exercícios tratavam de soma algébrica de termos semelhantes. Em um dos encontros do projeto, no turno contrário, Tadeu e Wilson levaram o livro e disseram que precisam fazer a “tarefa de casa”, composta por 3 exercícios da página 169 do livro. Observei que a página tinha 4 exercícios e que havia ficado de fora o exercício 26, que envolvia o cálculo de perímetro, mostrado na figura 55, a seguir:

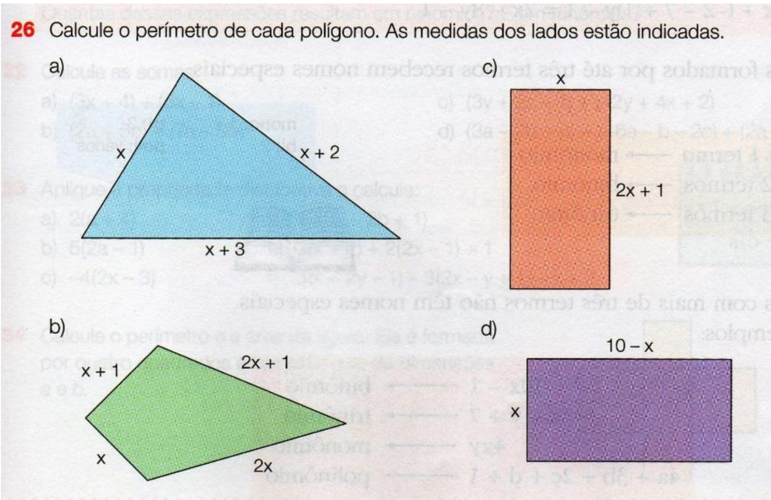


Figura 55. Exercício do livro (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009, p. 169)

Como Wilson e Tadeu haviam concluído, sem dificuldade, os três exercícios solicitados pela professora na tarefa de casa, os desafiei a fazer também o exercício não solicitado.

Prof.ª Pesq.: — Gente, vamos fazer o exercício 26, também?
Wilson: — Mas a professora não pediu...

Prof.ª Pesq.: — Mas nós podemos fazer, não podemos?
Wilson: — É. Podemos [falou meio desapontado]
Prof.ª Pesq.: — Ânimo, Wilson. Você lembra o que é perímetro?
Wilson: — Hum... hum... [Falou balançando a cabeça negativamente]
Prof.ª Pesq.: — Vocês têm ideia do que seria o perímetro dessa mesa?
Tadeu: — Eu acho que é assim, assim, assim, assim. A gente mede. [Falou passando a mão nas laterais da mesa.]
Prof.ª Pesq.: — Isso mesmo, Tadeu, o perímetro é o contorno, ou melhor, a medida do contorno da mesa. E como eu posso medir o contorno da mesa?
Tadeu: —Com uma régua, ou uma fita métrica.
Wilson: —Mas aí não vai dar.
Prof.ª Pesq.: — Por que não vai dar?
Wilson: — Precisa de uma trena...
Tadeu: — É só medir os pedaços. [Falou passando a mão nas laterais da mesa, novamente.]

O diálogo é sempre recheado de coisas não ditas, mas que o outro interpreta por causa do contexto. Quando Wilson disse: "precisa de uma trena", Tadeu entendeu que a fita métrica e a régua eram pequenas, ou seja que a dimensão a ser medida era maior que o instrumento. Em razão disso, ele propõe fazer a medição das partes ou das laterais do tampo da mesa.

Subjacente à fala de Tadeu há um conceito em ato (VERGNAUD, 2009a), quando ele expressa: "é só medir os pedaços". Ao dizer isso, ele está se referindo ao conceito universalmente aceito de que para calcular o perímetro de uma região poligonal é suficiente somar as medidas de todos os lados.

Prof.ª Pesq.: — E faz o que com as medidas "dos pedaços"?
Tadeu: — Ué! Soma.

A expressão "ué" enunciada por Tadeu, mostra que para ele aquilo lhe parece óbvio e sua admiração é porque deveria ser para mim também. Para dar continuidade ao exercício, copiei, então, a figura no caderno de Wilson e perguntei:

Prof.ª Pesq.: — Nesse triângulo aqui, o que eu posso fazer para encontrar o perímetro ou a medida do contorno?
Tadeu: — É só somar.
Prof.ª Pesq.: — Somar o que?
Tadeu: — Tudo. As letras e os números.

Muito embora Tadeu fosse mais participativo para perguntar e responder, Wilson, diferentemente de quando ingressou no projeto, tinha se tornado mais ativo em fazer as atividades. Mal terminamos a conversa e ele já estava fazendo o exercício.

Fiquei, então, observando. Nesse momento cada um se entregou ao próprio exercício e o diálogo comigo cessou. Ambos pareciam saber o caminho que deveriam seguir. Como eu estava entre os dois, percebi que eles fizeram escolhas diferentes. Tadeu somou em linha horizontal, repetindo o procedimento que estava acostumado a ver em sala de aula. Wilson, no entanto, me surpreendeu ao somar em colunas, conforme mostra a figura 56, a seguir.

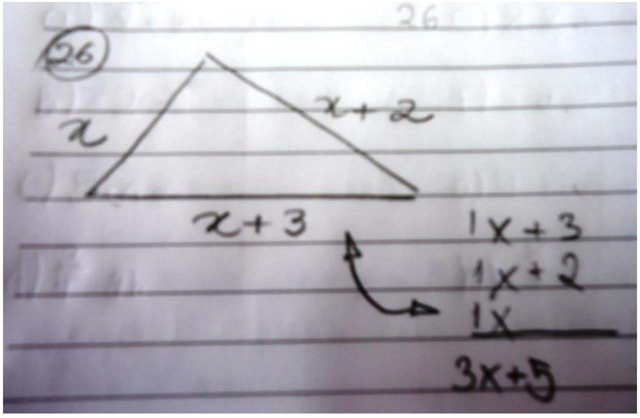


Figura 56. Registo feito por Wilson para a letra a) do exercício 26

O que Wilson fez era semelhante à estratégia utilizada pelos estudantes da escola em que foi feita a pesquisa exploratória, em 2011, e que fica localizada a quase 50 km de distância. Quando ele terminou de calcular, perguntei:

Prof.ª Pesq.: — Como é que você fez?
Wilson: — Não é só somar? Somei. Eu somei número com número e letra com letra. Tá certo?
Prof.ª Pesq.: — Certíssimo. Muito bem!

A fala de Wilson "eu somei número com número e letra com letra" revela um conceito-em-ato (VERGNAUD, 2009a) que aponta um importante processo de construção, que está ancorado na fala de Tadeu, quando este diz: "é só somar. [...] tudo. As letras e os números." Tal conceito já havia sido enunciado pelos estudantes na pesquisa exploratória, mas desta feita como expressão que havia sido tomada emprestada (BAKHTIN, 2010), da fala da professora, o que não era o caso aqui. Mas sua estratégia de somar em colunas também está ancorada na adição de números naturais. Não menos importante nesse episódio é o processo metacognitivo (FÁVERO, 2005a) vivenciado por Wilson ao explicar sobre como fez. Nesse momento ele tem a possibilidade de tomar consciência dos seus esquemas mentais na resolução do exercício.

É importante dizer ainda que o elogio fez com que a postura corporal de Wilson mudasse. Ele abriu um largo sorriso, endireitou os ombros e continuou a fazer. Passei, então, uns minutos observando o que Tadeu estava fazendo e quanto voltei ao caderno do Wilson, cheguei a pensar que ele erraria a letra **b)** do exercício, pois estava somando apenas dois lados do retângulo. Pensei em intervir nessa hora, mas resolvi esperar e mais uma vez fui surpreendida. Ele somou dois lados do retângulo e, em seguida, multiplicou por dois, não demonstrando qualquer dificuldade em lidar com a álgebra, conforme mostra a figura 57, a seguir. Quando foi me mostrar o que havia feito, ele, então, escreveu o valor correspondente aos lados opostos no retângulo e disse, apontando para a figura.

> Wilson: — esse lado é igual a esse e esse lado é igual a esse. Então, esse lado e esse é igual a dois x mais um e esse e esse é igual a x.

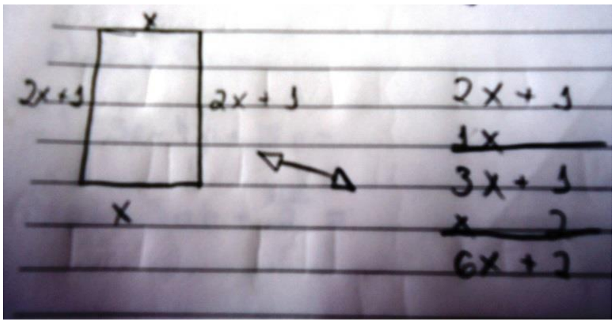


Figura 57. Registo feito por Wilson para a letra c) do exercício 26.

Motivado provavelmente pela confiança gerada no primeiro exercício, Wilson, a partir desse registro, passou a não esperar que eu perguntasse como ele fez. Ele mesmo tomou a iniciativa de explicar seu processo de resolução, explicitando seu modo de pensar. Não me contive e disse:

> Prof.ª Pesq.: — Caramba! Que coisa!!!
> Wilson: — Eu acertei, não é professora? Acertei. Vou fazer o outro. [Não digo nada e ainda assim, Wilson lê minha expressão e sabe que acertou.]
> Prof.ª Pesq.: — Acertou mesmo e fez uma coisa muito bonita! Diferente.

Wilson, então, demostrou pleno domínio do processo, repetindo o mesmo procedimento para o quadrilátero, mostrado na figura 58, a seguir:

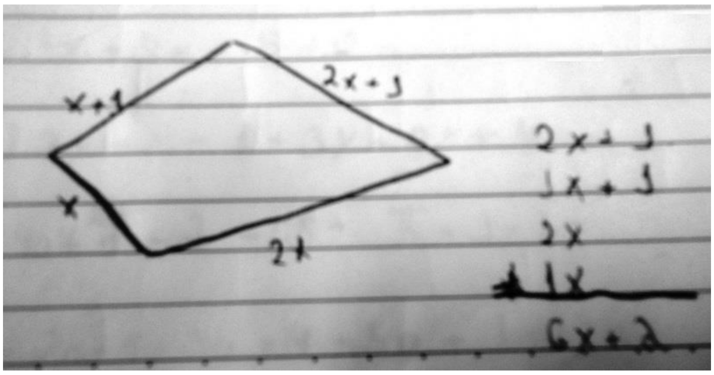


Figura 58. Registo feito por Wilson para a letra b) do exercício 26

Quando foi me mostrar o exercício resolvido, Wilson disse:

> Wilson: — Deu seis porque aqui nesse x e nesse x “tem um um escondido”. Tá vendo?
> Prof.ª Pesq.: — Estou vendo. Isso mesmo.
> Wilson: — Nem precisa escrever o um, mas eu escrevi.

Para se referir ao coeficiente de x, Wilson toma de empréstimo da fala da professora (BAKHTIN, 2010) a expressão “tem um um escondido”.

Tadeu que, até então, estava concentrado em seu próprio exercício, olhou para o registro de Wilson, conferiu os resultados e disse:

> Tadeu: — Eita, Wilson! Você fez diferente de mim, mas tá tudo certo.

Muito embora eu já tivesse validado a estratégia de Wilson, quando Tadeu fez a validação, Wilson parece ter ganhado novo ânimo, tanto que sequer foi embora quando seu tempo terminou. Ele prosseguiu resolvendo os exercícios da página seguinte, que não haviam sido solicitados pela professora.

É importante dizer também que Tadeu era um aluno que estava na mesma situação de dificuldade que Wilson e, talvez por isso, não tenha tido qualquer dificuldade em fazer o reconhecimento e a validação da estratégia do amigo. O “eita, Wilson!” é uma expressão de admiração que funcionou para Wilson como elogio. Ele sorriu envaidecido pelo reconhecimento do amigo.

Apesar de ter havido apenas essa ocorrência de soma em colunas, considerei que ela merecia registro pela semelhança com as estratégias encontradas na pesquisa exploratória realizada em Planaltina-DF, um ano antes.

4.3.2.2.Produções singulares na resolução de problemas com frações e números fracionários

No final do segundo bimestre e início do terceiro, a dificuldade dos alunos com o cálculo com números fracionários, me deixou bastante angustiada. Percebi que a maioria não efetuava as operações básicas com esses números, mas, mais que isso, percebi que boa parte sequer compreendia o que significava $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$. Resolvi, então, trabalhar na perspectiva de reconstruir esses conceitos. Para isso, propus a resolução de oito problemas da Professora Nilza, em forma de circuito, conforme já foi mostrado na página 127.

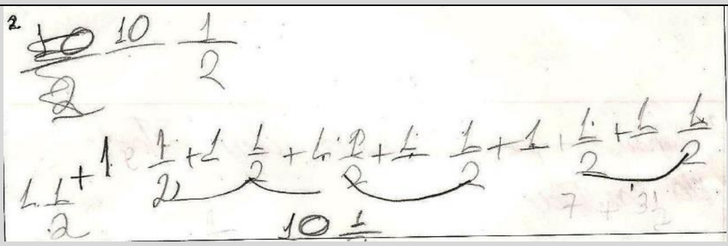
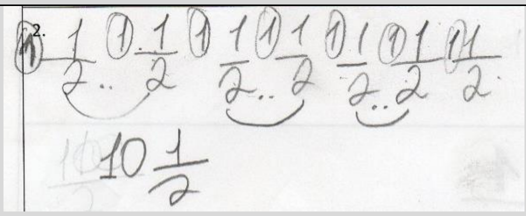
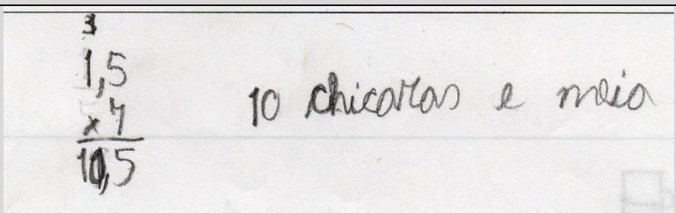
Durante a resolução dos problemas, ficou evidente que o diálogo era intenso e também que as estratégias de resolução eram muito diversas. Os registros a seguir mostram diferentes resoluções de dois dos problemas do circuito.

O segundo problema do circuito tinha a seguinte redação, mostrada na figura 59, a seguir:

Na casa de Luís cozinha-se uma xícara e meia de arroz por dia. Durante uma semana, quanto de arroz se gastará?

Figura 59. Transcrição do problema 2 do Circuito

Para esse problema houve diferentes registros. Dos oito alunos presentes, dois fizeram com registro pictórico, três não fizeram, dois fizeram usando número fracionário e um usando número decimal. O quadro constante da figura 60, a seguir, mostra os registros representativos das soluções apresentadas:

Estudante	Registro	Observações
Priscila		Registra sete vezes $1+\frac{1}{2}$ Em seguida, junta meios para formar inteiros e chega à resposta correta. É importante notar que antes de registrar a resposta correta, Priscila escreve $\frac{10}{2}$, mas risca.
Wilson		Faz registro semelhante ao da Priscila, mas não utiliza o sinal da operação de adição.
Tadeu		Faz cálculo usando decimais.

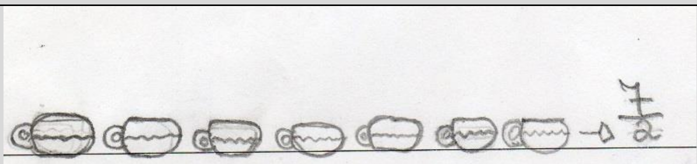
Helena		Faz registro pictórico para uma semana de 5 dias e verbaliza: “são 7 xícaras e meia”
Ingrid		Ao invés de registrar sete xícaras e meia, registra sete meias xícaras.

Figura 60. Diferentes respostas ao problema 2 do circuito.

O recurso da representação pictórica e do uso de estruturas aditivas para resolver os problemas nos mostram uma incipiente conceitualização. Mostram que esses estudantes, embora venham estudando a representação fracionária do número racional desde os anos iniciais, chegaram ao 7º ano, com idade entre 12 e 14 anos, sem ter o conceito de frações construído.

No processo de resolução aconteceram vários pequenos diálogos, como o que ocorre entre Helena e Priscila:

Helena: — O seu deu dez e meia?
Priscila: — É. Não é uma xícara e meia por dia? Então em uma semana...
Helena: — Ih! Eu só fiz cinco dias. Deu sete e meia.
Priscila: — Então, é só aumentar mais dois dias.
Helena: — Mais três xícaras, então. Dá dez e meia.

Como estava acompanhando, pedi que Helena mantivesse o registro como estava e ela, sob protesto, manteve. Disse a ela que eu já sabia que ela sabia, mas ela não gostou.

Outro interessante diálogo acontece com Ingrid e Priscila.

Priscila: — Professora, vem ver o que a Ingrid fez. [rindo]
Prof.ª Pesq.: — O que foi, Priscila?
Priscila: — A Ingrid não fez sete xícaras e meia, ela fez sete meia xícaras. Ingrid, deixa de ser burra!
Prof.ª Pesq.: — Priscila, não fale assim. Mostre para ela como faz.
Ingrid: — Professora, ela me ama. [muitos risos]
Priscila: — Olha só, Ingrid, é uma xícara e meia. Se hoje cozinha uma e meia e amanhã cozinha uma e meia, então é...
Ingrid: — Três xícaras, uai.
Priscila: — Então, segunda e terça, três xícaras. Quarta e quinta, mais três xícaras. Sexta e sábado, mais três xícaras. Quantas xícaras até sábado?
Ingrid: — Nove, mais ainda falta domingo. Então é dez e meia.
Priscila: — Isso mesmo. Tá vendo?

Os diálogos entre Priscila e Ingrid nos mostram, em primeiro lugar, que dizer uma para o outra "deixa de ser burro", não chegou a ser uma ofensa, naquele momento. Diferentemente de outros momentos, o estado emocional de Ingrid (GONZÁLEZ-REY, 2003) não a fez se sentir incomodada, pelo contrário, usando de ironia ela afirma que Priscila a ama e, por isso, não se ofende. Em segundo lugar, mostra a capacidade de Priscila de conduzir Ingrid por uma resolução mental. Ao acompanhar o diálogo, sou tentada a pensar que apenas Priscila está construindo o conhecimento, pois ela não faz perguntas, ela afirma "quarta e quinta, mais três xícaras", mas ao fazer a pergunta final, Ingrid não apenas responde o que foi perguntado, como dá a resposta final, mostrando que está inteiramente dentro do raciocínio. Ambas estão em um processo metacognitivo que as permite regular (FÁVERO, 2005a) suas estratégias.

Em seguida, peço a Priscila que compare a sua estratégia com a de Tadeu e pergunto se tinham encontrado a mesma resposta.

Prof.ª Pesq.: — Vocês fizeram do mesmo jeito?
Priscila e Tadeu: — Não.
Prof.ª Pesq.: — E encontraram o mesmo resultado?
Priscila: — Claro, né, professora.
Tadeu: — É, professora, tanto faz dez e meio [$10\frac{1}{2}$] como dez vírgula cinco [10,5].

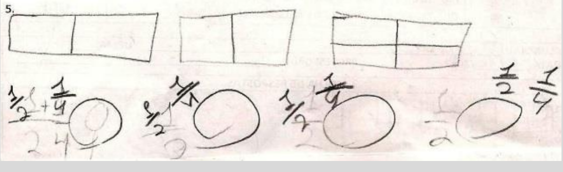
Tanto Priscila como Tadeu têm consciência que encontraram resultados equivalentes. A expressão "ué" na fala de Priscila, me mostra que para ela minha pergunta era desnecessária ou óbvia demais.

O quinto problema do circuito tinha a seguinte redação, mostrada na figura 61:

Três chocolates para 4 crianças. Se todos comem igual, quanto cada um come?

Figura 61. Transcrição do problema 5 do Circuito

Para esse problema também houve diferentes registros. Dos oito estudantes presentes, seis fizeram com registro pictórico e dois não fizeram. O quadro, mostrado na figura 62, a seguir, apresenta os registros representativos das soluções apresentadas:

Estudante	Registro	Observações
Talita		Usa registro pictórico e se satisfaz plenamente com a resposta $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$.

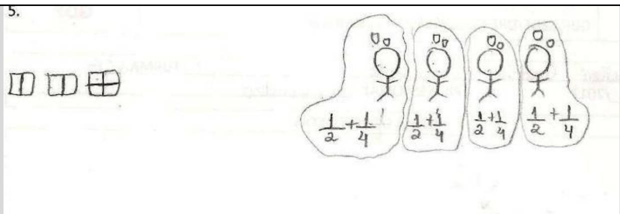
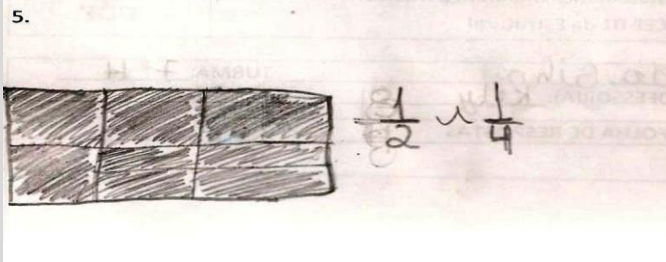
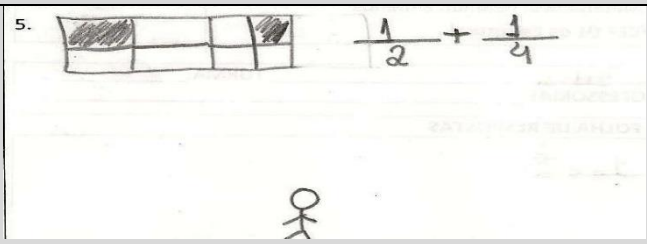
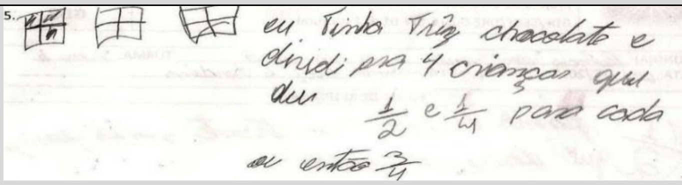
Helena		Também usa registro pictórico, mas representa as partes do chocolate que cada criança vai comer com a soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.
Ingrid		Também usa registro pictórico. Os três chocolates estão únicos como se fosse um só. Todos foram divididos ao meio. Por último, “separa” quatro pedaços de $\frac{1}{2}$ e divide os dois últimos pedaços de $\frac{1}{2}$ ao meio. A resposta é dada com uma conjunção aditiva: $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.
Joana		Do mesmo modo que Ingrid, Joana representa os três chocolates com uma única figura. Também divide os chocolates ao meio e o último chocolate é dividido em 4 partes. Ela colore a parte equivalente a $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ e representa a resposta com uma soma.
Priscila		Usa registro pictórico, mas de maneira diferente das demais, divide todos os chocolates ao meio e encontra $\frac{1}{2}$, depois divide todos os chocolates ao meio novamente e encontra $\frac{1}{4}$ Por fim, nota que isso equivale a $\frac{3}{4}$

Figura 62. Diferentes respostas ao problema 5 do circuito.

Ao analisar os registros, percebi que Talita e Helena estavam próximas e utilizaram estratégias muito parecidas, o que indica que dialogaram durante a resolução. Questionadas separadamente sobre quanto cada criança iria comer, ambas responderam da mesma forma: “a metade de um chocolate e a quarta parte de outro.”

Diante do registro de Ingrid, perguntei:

Prof.ª . Pesq: — Ué, Ingrid, você só desenhou um chocolate?

Ingrid: — Não professora. Estão os três aqui ó. [Apontando para o desenho.]
Prof.ª . Pesq: — Hummm... entendi. Mas como você fez?
Ingrid: — Dividi esses dois ao meio e dividi esse aqui em quatro, então todo mundo vai comer a metade e a metade da metade. Por isso escrevi um meio e um quarto.

Antes de ser ajudada por Priscila, Joana estava com Ingrid, talvez por isso, tenha optado pela representação de todos os chocolates juntos. Ao ser questionada sobre o porquê de desenhar chocolates juntos, ela apenas fez um sinal com os ombros que eu interpretei como "não sei".

Já o registro de Priscila mostra seu domínio sobre a equivalência de frações. Olhei para o registro e perguntei:

Prof.ª . Pesq: — Priscila, sua resposta está diferente das de outras colegas. Você diz que cada criança vai comer três quartos, por que?
Priscila: — Não, professora, é a mesma coisa.
Prof.ª . Pesq: — Como assim? Me explica.
Priscila: — Olha só, cada uma vai comer metade e metade da metade, não vai? Então... A metade é a mesma coisa que duas metades da metade, entendeu?
Prof.ª . Pesq: — Humm...
Priscila: — Essa metade aqui, é dois quartos, mais esse quarto então é três quartos [Fala colorindo os três quartos].

Os eventos aqui explorados indicam que, embora os diálogos sejam muito importantes, apenas os conteúdos das falas são insuficientes para compreender os processos metacognitivos de autorregulação (FÁVERO, 2005) e validação, já mencionados. Da mesma forma, apenas os registros são insuficientes para compreender o pensamento dos estudantes. Se queremos compreender as estratégias dos alunos, precisamos aliar seus registros escritos com suas falas. O registro de Priscila, bem como sua fala, nos dá a ideia de que ela compreende o que é metade, o que é metade da metade e o que são três quartos. Ao dizer, "não, professora, é igual", ela mostra que sabe que as respostas dos colegas e a sua são equivalentes. Para Fávero (2008) a verbalização de Priscila sobre o seu fazer denota um processo metacognitivo de tomada de consciência em um nível mais elaborado e explícito, porque ela não apenas fala sobre a sequência linear das suas ações, ela consegue refletir sobre o que está fazendo e explica para um outro (a pesquisadora) o conteúdo das suas estratégias.

Essa categoria mostrou que, em um ambiente mais dialógico, a emergência de produções matemáticas diferenciadas podem acontecer, desde que sejam estimuladas. Os alunos em situação de sucesso escolar, em diálogo com os alunos em situação de dificuldade, tendem a não reconhecer e a não validar essa produção diferenciada. Eles tendem a fazer cálculos usando algoritmos, procedimentos e estratégias muito próximos ao que fazem o professor em sala de aula. Já os alunos em situação de dificuldade apresentam estratégias mais livres e menos engessadas no fazer tradicional da sala de aula. Para esses últimos, o presumido “não-saber” não foi obstáculo para fazer emergir processos divergentes de fazer matemática na escola. Muitos deles ancoraram esses processos divergentes em conhecimentos construídos em outros momentos e em outros saberes.

Os episódios indicam que o estimulo a uma produção matemática diferenciada depende fortemente do acompanhamento do professor. Sem a intervenção desse, é tanto provável o desestímulo de uma produção matemática diferente, quanto a manutenção de procedimentos incorretos. Esse acompanhamento deve acontecer tanto na proposição de atividades, como na supervisão do trabalho de troca entre estudantes, por meio da mediação e da intervenção sobre as ações e produções dos estudantes.

Também chama a atenção como a comunicação não verbal, os gestos, as expressões e a postura dos estudantes frente às diversas produções atuam estimulando ou desestimulando a produção matemática.

Por fim, merece atenção especial o fato de que muitos dos estudantes, ao passarem pela validação do colega ou da professora pesquisadora, perceberam que tinham acertado por uma via diferente e assumiram atitudes mais proativas. Passaram de aprendizes a mestres, em frações de segundos, ensinando o que acabaram de aprender. Assim, não fazia sentido, pelo menos para o objetivo da nossa pesquisa, eleger monitores ou tutores, pois, como nos mostra Freire (2011), aquele que aprende também ensina.

Na próxima categoria vamos mostra como o diálogo se concretiza nos diferentes campos de objetos matemáticos.

4.4. CATEGORIA 4. A natureza do diálogo no contexto da construção de conceitos em diferentes quadros: numérico, geométrico e algébrico

A pesquisa exploratória nos indicou que, no contexto da aprendizagem da álgebra, os diálogos eram quase sempre marcados por incompreensões, interrupções e tentativas de aproximação de um raciocínio mais aritmético. Como as mediações nos processos de ensino e aprendizagem se sustentavam nas falas apoiadas em registros escritos, pictóricos e orais, fomos conduzidos a pensar na questão da mediação semiótica (FÁVERO, 2005a, 2005b) e nos registros de representação semiótica (DUVAL, 2009, 2011).

Na maioria dos exercícios algoritmos e em atividades situadas em uma “semi-realidade” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p. 53), os estudantes manipulavam as incógnitas, sem entenderem muito bem o significado do que estavam fazendo. Alguns, após tentativas frustradas de calcular produtos notáveis ou de resolver operações com polinômios, demonstravam um sentimento de incapacidade que nem de longe correspondia às habilidades que já haviam desenvolvido.

Os indicadores (GONZALEZ-REY, 2005a) da pesquisa exploratória nos conduziram a pensar que, como a relação dos sujeitos com os objetos é sempre mediada pelas interações com os outros, e estas são mediadas por registros escritos e orais, teríamos que pensar tanto nessas interações como no processo de mediação e na natureza dos objetos matemáticos e de suas representações, como veremos a seguir.

Se tomarmos como referência o exercício que solicitava o cálculo do perímetro e da área de regiões poligonais, como o mostrado na figura 63 a seguir, e que já foi mostrado na página 171, podemos analisar a linguagem algébrica como sistema de signos para representar os objetos matemáticos perímetro e área de figuras planas.

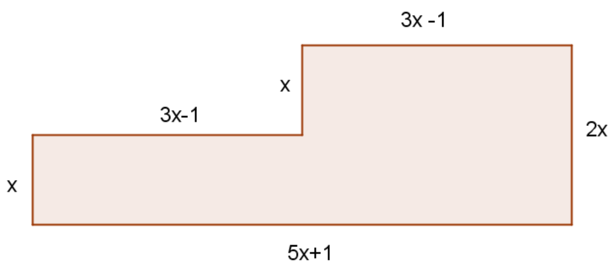


Figura 63. Exercício mimeografado – pesquisa exploratória

Considerando o que postula Fávero (2005a), podemos dizer que a relação inicial dos estudantes com o exercício evoca a função icônica da representação. O sistema de signos utilizados no exercício, composto por figura, números, sinais, operadores e letras, são de conhecimento social. Isso leva os alunos a uma aproximação da situação por meio do reconhecimento desses signos. Em momento contínuo, quando passam a pensar na situação, a tentar lembrar o que é perímetro e área de uma região poligonal, os signos assumem uma função indexadora, pois tentam compreender a situação de forma concreta, estabelecendo conexão com algo já visto, já estudado. O problema é que, do ponto de vista simbólico e, portanto, da representação em si, os estudantes enfrentam obstáculos relativos ao processo de atribuição de significado. Afinal, como é possível, por exemplo, relacionar a expressão 2x ou 5x + 1 a uma medida de comprimento real? O sistema de signos ou a linguagem algébrica se mostra como um amontoado de letras, números, sinais, operadores que não fazem sentido dentro do conjunto de significações individuais e sociais a que pertencem os estudantes, mas estes, pela via do foi estabelecido no “contrato didático” (PAIS, 2001, p. 77), entendem que é preciso realizar manipulações, operações, cálculos para se chegar a um resultado e expressar isso em registros para o professor. Isso pode explicar porque para a maioria dos estudantes as medidas representadas por expressões algébricas não faziam sentido, mas ainda assim um cálculo era realizado e registrado no papel.

Como sustenta Duval (2009, 2011), o exercício exige que o estudante faça a conversão de um registro feito no âmbito da Geometria e das Grandezas e medidas para um outro registro no campo da Álgebra e aí surgem obstáculos relacionados, sobretudo, a não apropriação da linguagem algébrica, como sistema de signos para representar os objetos matemáticos em questão. A falta de significado conduz o aluno a fazer a conversão e o tratamento da expressão, mas usando um registro que se aproxima da aritmética.

Um episódio envolvendo o estudante monitor Paulo nos mostrou essa dificuldade de atribuir significado às expressões algébricas, no exercício acima. Esse estudante, que era sempre muito inquieto, normalmente exigia compreender o que estava fazendo. Quando quase todos os estudantes já tinham resolvido o exercício, inclusive ele próprio, que até havia ajudado a alguns colegas, Paulo me procurou para conversar. Com uma expressão de dúvida, ele fez a seguinte afirmação que motivou o diálogo entre nós.

Paulo:	— Professora, aqui embaixo não pode ser cinco x mais um [apontando para a parte inferior da região poligonal].
Prof.ª Pesq.:	— Por que não pode?
Paulo:	— Esse pedaço aqui [apontando para 5x + 1 na figura] é igual a esse pedaço [apontando para 3x – 1] mais esse pedaço [apontando

para o outro 3x – 1].
Prof.ª Pesq.: — E daí?
Paulo: — Daí que não pode. Olha só: três x mais três x não é seis x? Tinha que ser seis x aqui, ó?

O questionamento de Paulo revela a sua dificuldade em coordenar diferentes registros de representação. Mostra que o estudante não consegue reconhecer a representação algébrica como uma representação genérica de medida, sem recorrer à aritmética. Fica claro que, para o estudante, se a medida dos segmentos superiores da figura poligonal são 3x – 1 e 3x –1, a base inferior deveria ser, pelo menos, 6x mais alguma coisa. Isso é uma dificuldade associada ao que Duval (2009, 2011) chama de conversão de representação.

O fato é que esse questionamento de Paulo me pegou tão de surpresa que, inicialmente, não soube o que dizer, mas passados alguns minutos, pensei que, se ele percebesse concretamente que se tratava do mesmo tamanho, talvez se convencesse de que não havia problema com as expressões. Então retomei o diálogo:

Prof.ª Pesq.: — Hummm... Entendi o que você está pensando... Vamos escrever o que você disse em linguagem matemática, em linguagem algébrica. Você disse que esse pedaço aqui, três x menos um, mais esse pedaço aqui, três x menos um, é igual a cinco x mais um não foi? [apontando para a figura] Você consegue escrever isso?
Paulo: — Humhum... [balançando a cabeça em sinal de dúvida]
Prof.ª Pesq.: — É só escrever do jeitinho que você falou. Vamos escrever juntos?

Com a minha mediação apoiada na sua fala, Paulo, então, faz o registro da equação correspondente no caderno e nosso diálogo prossegue:

$$(3x - 1) + (3x - 1) = (5x + 1)$$

Prof.ª Pesq.: — É isso que o exercício tá dizendo, não é? Esse pedaço aqui é igual a esse pedaço aqui, não é? [apontando para a figura poligonal]
Paulo: — É, professora, é isso.
Prof.ª Pesq.: —Você sabe o que é isso? [apontando para a equação]
Paulo: — Como assim?
Prof.ª Pesq.: — Essa expressão com um sinal de igual, aqui, ó. [apontando para a equação]
Paulo: — Não sei...
Prof.ª Pesq.: — O ano passado você estudou equação, não estudou?
Paulo: — Ih!!! É mesmo!
Prof.ª Pesq.: — Você se lembra como resolve?
Paulo: — Não sei...Acho que não me lembro...
Prof.ª Pesq.: — Vamos fazer juntos? O que podemos fazer primeiro.
Paulo: — Tirar os parênteses?

Confirmei e ele, então, escreveu a seguinte expressão, realizando um tratamento adequado (DUVAL, 2009, 2011), pois o permitiu escrever um outro registro, representativo da situação inicial, obedecendo as regras internas do sistema semiótico escolhido, que é algébrico:

$$3x - 1 + 3x - 1 = 5x + 1$$

Prof.ª Pesq.: — E agora?
Paulo: — Lembrei, professora. Tem que juntar x com x e número com número e deixar x de um lado e número do outro, não é?
Prof.ª Pesq: — Faça, então.

Rapidamente Paulo resolveu a equação, dizendo que, quando um número muda de lugar, troca o sinal. Considerei que não era o momento adequado de falar dos princípios da igualdade e evocar a "balança" como sempre faço. Imaginei que isso poderia ser um obstáculo desnecessário naquele momento, já que o objetivo era levá-lo a entender as expressões algébricas que compunham o perímetro da figura poligonal. Ele, então, fez o seguinte registro, demonstrando que não tinha dificuldade em fazer o tratamento (DUVAL, 2009, 2011) no interior do registro e apropriação sobre a resolução de uma equação do 1º grau:

$$3x + 3x - 5x = +1+1+1$$

$$6x - 5x = 3$$

$$x = 3$$

Pedi, então, para ele retornar ao desenho e utilizar o valor de x que encontrou na equação.

Prof.ª Pesq: — Agora nós já sabemos que x vale três, vamos voltar ao desenho e calcular o valor numérico de cada pedaço? [apontando para a parte superior e inferior da figura poligonal]

Rapidamente Paulo calculou, mentalmente, falando alto e apontando para a figura:

Paulo: — Aqui fica três x menos um, três vezes três dá nove, menos um dá oito, aqui também dá oito [calculou mentalmente], então é dezesseis. Aqui embaixo é cinco x mais um. Cinco vezes três dá quinze mais um dá dezesseis [calculou também mentalmente]

Ele levantou-se da cadeira, deu um giro em torno do próprio corpo como se estivesse dançando e, com os olhos brilhando, falou dois palavrões que representavam seu estado de admiração.

Paulo — Caralho! A matemática é foda!

A descoberta de Paulo, nesse dia, fez-me considerar que muitos estudantes resolveram o exercício de maneira correta, mas sem pensar no que estavam fazendo, apenas cumprindo uma cláusula do “contrato didático” (PAIS, 2001, p. 77) que, de modo geral, induz os alunos a pensarem que todo exercício tem que ser resolvido e uma resposta deve ser encontrada. Sua coragem de dizer que a medida da base da região poligonal não podia ser 5x +1 denota sua incompreensão do significado da expressão algébrica como representação simbólica associada à medida de comprimento e revela um processo metacognitivo de autorregulação (FÁVERO, 2005a), ao externalizar a perturbação gerada por essa incompreensão. Ao final da atividade, quando girou em torno do seu próprio corpo e enunciou os palavrões, Paulo mostrou o caráter reconstrutivo do processo metacognitivo da sua experiência. É importante dizer, ainda, que Paulo só externalizou sua dificuldade porque encontrou um ambiente propício para isso. Um ambiente em que fazer perguntas, ter dúvidas era natural.

O episódio acima descrito indica que os cálculos algébricos, muitas vezes, possuem pouco significado para os estudantes que, na maioria das vezes, realizam as manipulações algébricas sem que essas façam sentido para eles. No caso do perímetro e da área, dois conceitos de amplo uso social, o cálculo algébrico não pode prescindir da relação com situações cotidianas e, principalmente, com as reais dimensões dos segmentos, afinal o que significa para um aluno uma medida igual a 5x + 1 ou a 3x –1, se efetivamente não se traduzir em uma medida real?

Assim, a pesquisa exploratória nos levou a considerar a possibilidade de melhor compreender o diálogo na construção de conceitos algébricos. Mas, durante a pesquisa de campo propriamente dita, aventamos a possibilidade de ampliar nossas análises para o campo numérico, e também para o campo da geometria e das grandezas e medidas, visto que o período maior de observação nos garantiria, em tese, entrar em contato com os diferentes eixos do currículo, e também porque a investigação seria realizada com estudantes do 7º ano, cujo currículo prevê o início dos estudos de um campo numérico novo, os inteiros.

4.4.1.O diálogo no contexto da aprendizagem do número inteiro

É importante dizer novamente que boa parte do trabalho realizado com números inteiros foi feito em turno contrário ao das aulas, entre os meses de março e maio de 2012, quando os professores da rede pública de ensino do DF estavam em greve. Em razão disso, em cada episódio descrito a seguir, vamos apontar o cenário e o período em que aconteceu.

Conforme já foi dito, para trabalhar a ideia de número inteiro, bem como as operações de adição e subtração, fizemos a opção de partir da noção de saldo que é de conhecimento social, usando parte dos materiais do Projeto "Um novo currículo[18]" de Matemática que, na década de 1980, formou cerca de 3500 professores da rede pública de ensino e construiu fascículos sobre temas específicos da Matemática, como o de Números Inteiros (GASPAR, 1986; 1987), que serviu de referência no planejamento das atividades.

No primeiro encontro com as alunas, no cenário do projeto, e ainda no período da greve dos professores, propus um jogo de perguntas e respostas, denominado de *Quiz* de Inteiros, mostrado na figura 64 a seguir.

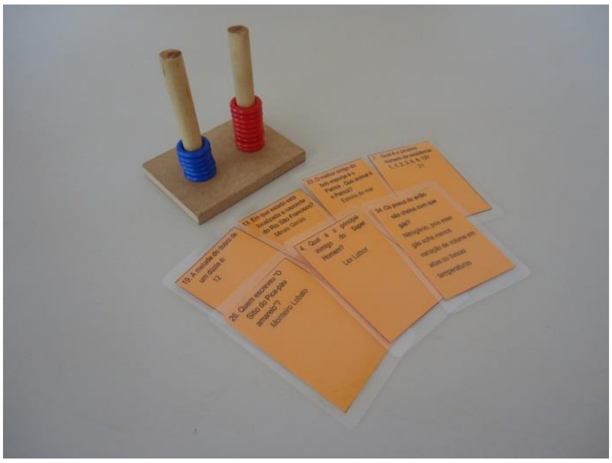


Figura 64. Ábaco de inteiros com as cartas do *Quiz* de inteiros

Para iniciar o jogo, fiz a seguinte explicação:

> Prof.ª Pesq.: — Nós vamos jogar um jogo de perguntas e respostas, certo? Cada pergunta que você acertar você ganha uma argolinha azul e cada pergunta que errar você ganha uma argolinha vermelha. Você vai colocar as argolinhas nesse ábaco aqui. De um lado as vermelhas e do outro as azuis. No final, vamos calcular o saldo de pontos. Cada erro anula um acerto. É como no futebol. Se o Flamengo fizer três gols e sofrer dois gols, qual será o saldo dele?
> Janete.: — Três gols?
> Prof.ª Pesq.: — Mas e os dois gols que ele levou?
> Helena; — É um, professora?
> Janete.: — Ih! É mesmo.
> Prof.ª Pesq.: — É, Helena. Mas por que é um?

Nesse diálogo inicial, é possível perceber que Helena parecia ter a compreensão do significado de saldo e que Janete pareceu reconstruir sua compreensão a partir do que Helena

---

[18] Projeto coordenado pela Professora Nilza Bertoni, no âmbito do Departamento de Matemática da UnB, ao abrigo do Subprograma Educação para a Ciência – SPEC, da CAPES/MEC e CNPq/PADCT.

falou em um processo metacognitivo de autorregulação (FÁVERO, 2005a); no entanto, quando perguntei o porquê, ambas ficaram em silêncio. Então, expliquei:

Prof.ª Pesq.:	— É um porque cada gol sofrido anula um gol feito. É o que chamamos de saldo de gols. Aqui nesse jogo, que chamamos de "*Quiz* de inteiros", vamos trabalhar com saldo de pontos. Um ponto vermelho que você ganha, quando responde errado, anula um ponto azul que você ganha quando acerta. Por exemplo, se você responde certo ganha uma argola azul, mas se você responde errado ganha uma argola vermelha. Isso significa que você tem saldo zero, ou seja, uma vermelha anula uma azul. Entenderam?
Helena e Janete:	— Humhum [falaram concordando]

A primeira tentativa do *Quiz* foi frustrada porque as perguntas de conhecimentos gerais não eram conhecidas de Helena e Janete, que estavam jogando comigo. Mudamos, então, para perguntas que envolviam temas mais populares como televisão, música e esporte e elas se divertiram muito. Isso mostra, como adverte Fávero (1993), que a escolha dos meios mediacionais e dos conteúdos do que é mediado não pode ser aleatória, pois ambos carregam significados socioculturais.

Depois de algumas rodadas, parei o jogo e perguntei:

Prof.ª Pesq.:	— Esse jogo tem algo a ver com o que vocês estavam estudando em sala, antes da greve dos professores?
Helena:	— Acho que tem...[demonstrando dúvida]
Prof.ª Pesq.:	— Tem o que? [Silêncio] — O que são as argolas azuis e as vermelhas?
Helena:	— Professora, eu acho que as azuis são os positivos e as vermelhas os negativos. Não é, Janete?
Janete:	— Aquilo que a professora tava ensinando?
Helena:	— É, não é, professora?

Muito embora, no início do jogo, as alunas não tenham sido avisadas de que se tratava de um jogo sobre números inteiros, Helena percebeu que o mesmo estava relacionado aos conceitos que estavam sendo trabalhados em sala de aula. Sua fala mostrou que ela conseguiu relacionar e, portanto atribuir significado à representação ou ao significante (argolas azuis e vermelhas), com o conteúdo da representação ou referente (conceito de positivo e negativo) evocando, portanto, as diferentes relações dos signos com o objeto ou conteúdo matemático. A representação dos números inteiros positivos e negativos pelas argolas e a situação de ganhar positivos e negativos para calcular saldos não parecem ser estranhas para Helena. Nesse sentido, o sistema de signos utilizado evoca as relações icônicas, indexadoras e simbólicas (FÁVERO, 2005a) que permitem associá-las ao objeto matemático número inteiro.

Na situação, fica subentendido que Helena não teve dificuldade em fazer a conversão (DUVAL, 2009, 2011), ou em transitar da representação dos números inteiros por meio das argolas azuis e vermelhas à representação simbólica dos números positivos e negativos, cujo estudo havia sido iniciado em sala de aula.

Na sequência, foi possível observar que mesmo a tímida Helena demonstrava animação e ficava mais falante com o jogo. Após a pausa, ela passou a verbalizar que as argolas azuis eram pontos positivos e as vermelhas pontos negativos.

Helena — Ganhei mais um ponto, mais um azul: um ponto positivo!

Para calcular o saldo de pontos do jogo, Helena falou alto e mostrou que ía da representação ao conceito, sem dificuldade, ao expressar que mais um ponto azul é mais um ponto positivo. Janete que, no início, apenas acompanhava atentamente a fala de Helena, sorrindo toda vez que ela falava alto, em determinado momento também começou a calcular o saldo, falando em voz alta. Ambas não tiveram qualquer dificuldade para chegar ao saldo, apoiadas no material. Percebi que uma sempre ficava muito atenta à fala e aos gestos da outra.

Helena — Essa eu errei, me dá uma vermelha, um ponto negativo. Chato!
Janete: — Eu também errei. Droga! Um ponto negativo, uma vermelha.

Ao final de 15 perguntas, propus que elas calculassem o saldo:

Helena: — Eu acertei doze perguntas e errei três. Três vermelhas anulam três azuis [retirando 3 vermelhas e 3 azuis do ábaco, uma de cada vez]. Fiquei com nove azuis. Eu tenho nove. Ganhei nove.
Prof.ª Pesq: — Isso mesmo. Nove azuis é o mesmo que...
Helena: — Mais nove. Nove positivo.
Prof.ª Pesq.: — Isso mesmo Helena.

Janete, que era mais desconfiada, olhava e não dizia nada, muito provavelmente por sua timidez, e também pelo fato de ter tido pior desempenho no jogo. Sua desconfiança e seu silêncio podem ser frutos da influência desse aspecto afetivo-emocional que o jogo provoca naqueles que não obtêm êxito.

Prof.ª. Pesq.: — E você, Janete? Qual é o seu saldo?
Janete: — Acertei oito e errei sete. Tenho oito azuis e sete vermelhos.
Helena — Um vermelho anula um azul, um vermelho anula um azul... [observando Janete retirar pares de argolas do ábaco]

Janete: — Então tenho um ponto [sorrindo e olhado para o ábaco de Helena]
Helena — Um ponto positivo.

Para chegar ao saldo de pontos, tanto Helena como Janete emparelhavam uma argola azul com uma vermelha, até que restasse o que consideravam ser o resultado. O material servia para testemunhar o que estavam fazendo e o que estavam pensando. Nem sempre as palavras eram necessárias. Um balançar de cabeça, um olhar ou um breve sorriso pareciam indicar para uma o que a outra estava pensando. Esses gestos pareciam iniciar um processo de diálogo, em que a ação de uma estava fortemente vinculada aos gestos da outra. No caso desse jogo, Janete, que era mais insegura, emparelhava as argolinhas (uma vermelha e uma azul) e olhava para Helena, como se tivesse a convidando a participar, a contribuir. Nesse momento, Helena, sem tocar nas argolas da colega, dizia: "um vermelho anula um azul, um vermelho anula um azul...". Antes mesmo de Helena terminar, Janete expressou sua conclusão: "então tenho um ponto." Helena já não dizia mais nada, apenas confirmava com um sorriso e a alternância de enunciados (BAKHTIN, 2010) era complementada pela alternância de gestos, como a mão indicando positivo, o olhar e o sorriso.

É interessante observar também que, nessa alternância de enunciados e de gestos, há uma dinâmica sociocognitiva (FÁVERO, 2005a) que promove a cooperação entre ambas e a imersão delas em processos metacognitivos de autorregulação e validação, possibilitando a qualificação de suas aprendizagens.

Para compreender o pensamento de Helena e Janete, é preciso também entender a comunicação não verbal que ocorria entre ambas, que incluía os olhares, os gestos com a cabeça e com as mãos, os sorrisos etc.

O episódio acima mostra também como, de fato, a aprendizagem é um complexo processo que integra aspectos cognitivos e afetivos, a partir dos quais os sujeito produz sentidos subjetivos (TACCA; GONZÁLEZ-REY, 2008). Ao observar o estado de ânimo de Helena, Janete, em um primeiro momento, agiu de modo desconfiado, mas, aos poucos, entrou no jogo e passou a se comportar como Helena, falando alto e expressando seus pensamentos. Isso possibilitou que ela expressasse, por meio da fala, o seu processo de aprendizagem.

O fragmento acima mostra ainda que a situação de saldo de pontos, bem como o material e o jogo, favoreciam a construção da ideia de número inteiro pelas duas estudantes. Nos dias seguintes, em exercícios tradicionais, observamos que as alunas usavam as argolas, mas dispensavam o ábaco no processo de resolução. Quando os números eram muito grandes, elas também dispensavam as argolas.

Em exercícios de comparação de números inteiros, embora o cálculo de saldo não fosse exigido, muitas vezes as estudantes representavam as quantidades, ou simplesmente, olhavam para as argolas como se estas estivessem testemunhando o processo, como mostra o fragmento a seguir:

> Helena — Menos quatro é menor que menos um [fala lentamente, olha para as argolas e pega apenas 4 vermelhas] — É. Quanto menos negativo melhor. É menor.

Nesse fragmento, Helena estava falando consigo mesma. Ao pegar as quatro argolas vermelhas, ela enunciou o conceito em ato (VERGNAUD, 2009a) “quanto menos negativo melhor” para confirmar para si mesma que menos quatro é menor que menos um $(-4 < -1)$. O apoio no material, para comparar os números inteiros negativos, mostra que a conversão (DUVAL, 2009, 2011) de um registro a outro possibilita a conceitualização ou a emergência do conceito em ato já citado.

No exercício mostrado na figura 65 a seguir, Helena e Janete não utilizaram as argolas para representar as quantidades e fazer as comparações, até porque os valores absolutos eram muito altos.

Esse exercício já foi brevemente discutido na página 164, quanto tratamos da emergência de teoremas-em-atos nos diálogos durante a resolução de exercícios; no entanto, consideramos que vale a pena retornar a ele para mostrar a natureza do diálogo que ocorre entre Janete e Helena.

32 Qual é o número maior:
a) +230 ou +150? b) +230 ou −150? c) −230 ou +150? d) −230 ou −150?

33 Qual é o número menor:
a) −246 ou −247? b) +246 ou −247? c) −470 ou −469? d) −470 ou +469?

Figura 65. Exercício do livro (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009, p. 22)

O registro no caderno de Helena, mostrado na figura 66 a seguir, indica essa compreensão:

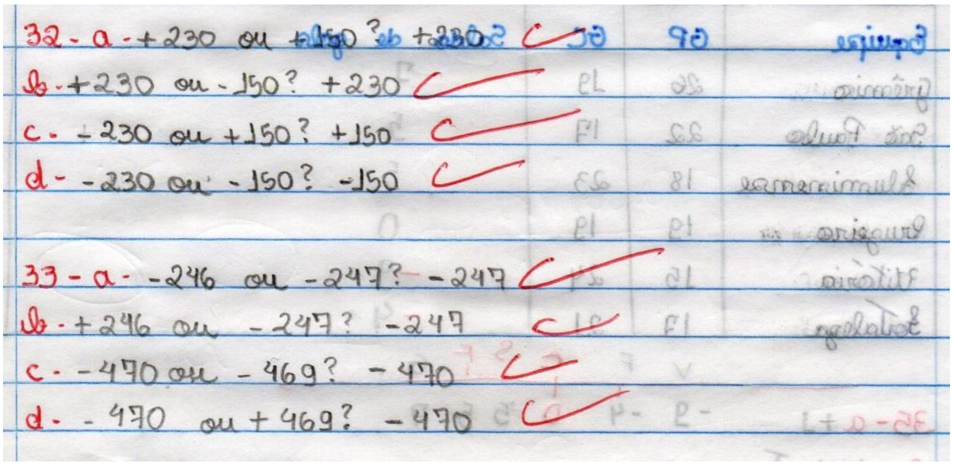


Figura 66. Registro com a resposta dos exercícios 32 e 33, feitos por Helena, no caderno.

É possível observar que, nessa situação, o diálogo era bastante pontual e formal, diferentemente da situação do jogo em que as alunas estavam manipulando concretamente as argolas para representar números inteiros. A postura corporal também era outra.

> Helena.: — Mais duzentos e trinta é maior que mais cento e cinquenta, mais duzentos e trinta é maior que menos cento e cinquenta; Mais cento e cinquenta é maior que menos duzentos e trinta; menos cento e cinquenta é maior que menos duzentos e trinta ... [De cabeça baixa sem olhar para a colega]
> Janete: — Humhum... [Não dá para saber se está concordando ou discordando]
> Helena.: — É... menos duzentos e quarenta e sete é menor que menos duzentos e quarenta e seis. Quanto menos negativo melhor. [Levanta a cabeça rapidamente]

Embora Helena enunciasse um conceito-em-ato (VERGNAUD, 2009a) para justificar seu raciocínio, é como se ela estivesse dialogando consigo mesma, e não com Janete. As duas prosseguiram nesse quase monólogo e, de vez em quando, Janete olhava silenciosamente para o registro de Helena, como se estivesse conferindo suas respostas. Ao final, Helena convida:

> Helena.: — Vamos ver se fizemos igual?
> Janete: — Vamos [olhando para o caderno de Helena e para o seu próprio caderno].
> Helena.: — É. Tá tudo certo.

Na verdade, no próprio processo de resolução, Janete foi conferindo suas respostas com as de Helena, mas esta última, que estava mais centrada no seu próprio exercício, não percebeu e, por isso, formulou o convite para conferir as respostas. Esse convite foi reiteradamente feito pelos estudantes em exercícios tradicionais. Quase sempre faziam os cálculos de modo solitário e, ao final ou mesmo no processo, conferiam suas respostas ou se dirigiam a mim para conferir, como mostra esse outro fragmento:

Priscila: — Quando não tem sinal é positivo, não é, professora?
Prof.ª Pesq: — É sim.
Priscila: — Então menos dez vezes trinta e três é menos trezentos e trinta, né? Menos vezes mais dá menos, né?
Prof.ª Pesq.: — É isso mesmo, Priscila.

Nesse episódio, como em outros, Priscila não demonstrava qualquer dificuldade em operar com os números inteiros e até enunciava as regras de sinais, que em geral são geradoras de grandes dificuldades no ensino fundamental.

As dificuldades de que estamos falando se evidenciaram mais claramente quando, ao final da greve, a professora concluiu o trabalho com adição e subtração de inteiros e iniciou o trabalho com as operações de multiplicação e divisão, sem o uso de qualquer material. Observei pelos cadernos e pelo livro que a maioria dos exercícios eram algorítmicos e faziam referência à matemática pura ou a semirrealidades (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006).

A maioria desses exercícios possibilitavam a mobilização da atividade cognitiva de tratamento, e não a de conversão, que segundo Duval (2009) é onde residem e persistem as maiores dificuldades na aprendizagem da Matemática.

Os exercícios evidenciaram que, para explicar algo para os colegas, os estudantes tomavam de empréstimo a fala do professor. O fragmento a seguir mostra Helena e Priscila resolvendo uma expressão em que o sinal da multiplicação está ausente. Trata-se do seguinte exercício:

$$(-4)6+20(-1)=$$

Helena: — Priscila, aqui é vezes, não é? [Apontando para a expressão $(-4)6$ no próprio caderno]
Priscila: — É sim. Tem um vezes escondido aí.

A expressão “tem um vezes escondido aí” era de uso corrente da professora Leila. Também na pesquisa exploratória, os alunos usavam uma expressão semelhante, que era amplamente utilizada pela professora Edna em sala de aula.

Mas os diálogos constituídos a partir de exercícios algorítmicos nos mostraram também que as operações com números inteiros representavam para os estudantes “obstáculos” (IGLIORI, 1999, p. 97) tanto de ordem epistemológica como didática, como mostra o episódio, a seguir.

Ingrid: — Professora, a gente faz a multiplicação primeiro, não é?
Prof.ª Pesq: — Onde, Ingrid?
Ingrid: — Nessa aqui, ó. [apontando para a expressão $5(-4)-3$]
Prof.ª Pesq: — Humm... deixa eu ver: cinco vezes menos quatro menos três. É isso mesmo. Quanto é cinco vezes menos quatro?
Ingrid: — É menos vinte.
Prof.ª Pesq: — Isso. E agora?
Ingrid: — Menos vinte menos três é mais vinte e três.
Prof.ª Pesq: — Opa! Isso é uma multiplicação ou uma divisão?
Ingrid: — Menos com menos num dá mais, professora?
Prof.ª Pesq: — Mas isso só vale para a multiplicação e para divisão. Vamos combinar o seguinte: não vamos falar “menos com menos”, vamos falar a operação?
Ingrid: — Então como é que faz?
Prof.ª Pesq: — Lembra das argolinhas azuis e vermelhas? Vou pegar.

O episódio mostra claramente a dificuldade de Ingrid e outros estudantes quando foram introduzidas as operações de multiplicação e divisão. Esse dificuldade, aliás, não é exclusiva deles, mas universal. Ao enunciar a pergunta “menos com menos não dá mais?”, Ingrid evidencia um obstáculo de origem didática (IGLIORI, 1999), ao tomar de empréstimo, de forma generalizada, um enunciado válido apenas para as operações de multiplicação e divisão.

Quando pego as argolas, Priscila aproxima-se e, então, recomeçamos o diálogo:

Prof.ª Pesq: — Vamos começar com cinco vezes menos quatro. O que é cinco vezes menos quatro aqui com as argolas? [mostrando o registro no caderno]
Priscila: — Uai, professora, é cinco vezes menos quatro.
Prof.ª Pesq: — Mas como é que faz isso com as argolas?
Priscila: — Uai, professora, é menos quatro, menos quatro, menos quatro, menos quatro, menos quatro, cinco vezes. [Falou fazendo 5 montinhos de 4 argolas vermelhas]
Prof.ª Pesq: — E dá quanto?
Priscila: — Dá vinte vermelhas. Vinte negativo.
Prof.ª Pesq: — Entendeu Ingrid?
Ingrid: — Entendi, professora, cinco vezes menos quatro dá menos vinte. [fala olhando para as argolas e para o exercício registrado em seu caderno]
Prof.ª Pesq: — Agora vamos pensar: como é que fazíamos menos vinte menos três com as argolinhas? [Falo olhando para Ingrid]
Ingrid: — Como é que faz? É... [Demonstrando dúvida]
Priscila: — Olha, Ingrid, não é tudo negativo? Então vai ser que cor?
Ingrid: — É tudo vermelha. [Fala pegando 20 argolinhas vermelhas e mais 3 argolinhas vermelhas]
Priscila: — É isso, Ingrid.
Ingrid: — Vinte e três vermelhas.
Priscila: — Então...
Ingrid: — Menos vinte e três. [Olhando para o seu caderno e apagando a conta inicial]

O episódio mostra, em primeiro lugar, nossa opção de superar o obstáculo pela mobilização e coordenação de diferentes representações semióticas (DUVAL, 2009). No caso da operação menos vinte menos três (–20 – 3), as estudantes precisavam coordenar o registro oral com o registro simbólico no caderno e o registro por meio das argolas azuis e vermelhas, fazendo o que Duval (2009, 2011) chama de conversão, pois exige a transformação de um registro em outro, em sistemas semióticos diversos.

É interessante observar que, quando tentei mediar a construção de Ingrid, a partir de determinado ponto do diálogo, Priscila assumiu a mediação. Isso ocorreu muito provavelmente porque ela percebeu que não me fiz entender e, por isso, realizou uma espécie de tradução. Por outro lado, sua motivação também pode estar relacionada com a minha validação do seu processo de multiplicação com apoio no material, na primeira parte do diálogo. Essa validação tem um sentido subjetivo (GONZÁLEZ-REY, 2003) para Priscila que a faz agir dentro do grupo, assumindo o papel de tradutora da situação. Inicialmente, quem participava diretamente da alternância de enunciados (BAKHTIN, 2010) era Priscila, muito embora Ingrid participasse sem falar, pois acompanhava tudo atentamente. No momento em que eu valido o procedimento de Priscila, dizendo “entendeu Ingrid?”, fica subtendido no meu enunciado que Priscila havia acertado. Quando Ingrid confirmou sua compreensão e, com o olhar, associou o registro com as argolas com o registro no caderno, mudei o sentido do diálogo e me dirigi a ela fazendo o convite (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006): “Agora vamos pensar: como é que fazíamos menos vinte menos três com as argolinhas?”. Nesse momento, a inflexão na voz de Ingrid mostrou sua dúvida e Priscila, então, tomou a decisão de continuar no diálogo traduzindo a minha fala e lembrando a Ingrid que se é tudo negativo, então, será de uma determinada cor. Ingrid, por sua vez, aceitou o convite e passou a dialogar com Priscila, completando seu raciocínio.

O episódio revelou, por um lado, o potencial do material (argolas azuis e vermelhas) na representação simbólica dos números inteiros. Apoiada nesse material e em interação com Priscila, Ingrid resolveu facilmente a operação que havia errado inicialmente. Por outro lado, o episódio mostrou também como a situação desencadeou processos metacognitivos (FÁVERO, 2005a) de validação por parte de Priscila, que medeia a construção da colega, e de autorregulação por parte de Ingrid, que reconstrói a operação inicial.

Os obstáculos com as operações com inteiros se evidenciaram ao longo de todo o ano letivo, exigindo sempre intervenções que pudessem levar os estudantes a refletir sobre esse campo numérico. No quarto bimestre, a professora Leila e eu observamos que alguns alunos acertavam as operações de multiplicação de inteiros, mas apresentavam dificuldades em adições e subtrações em resolução de equações do 1º grau. Resolvi, então, propor o exercício mostrado nas figuras 67 e 68 a seguir, para retomar essas operações. Como a professora estava ausente, tive a possibilidade de estar com todas as turmas na resolução desse exercício.

1. O campeonato brasileiro de futebol, mais conhecido como Brasileirão, tem 38 rodadas, com 20 equipes se enfrentando em turno e returno. Observe a tabela do Brasileirão de 2011, abaixo, e complete os espaços que estão em branco, em seguida responda:

BRASILEIRÃO 2011

Posição	Time	Pontos ganhos	Jogos	Vitória	Empate	Derrota	Gols pró	Gols Contra	Saldo de Gol	%
1	Corinthians	71	38	21	8	9	53	– 36		62
2	Vasco	69	38	19	12	7	57	– 40		60
3	Fluminense	63	38	20	3	15		– 51	9	55
4	Flamengo	61	38	15	16	7		– 47	12	53
5	Internacional	60	38	16	12	10	57		14	52
6	São Paulo	59	38	16	11	11	57	– 46		51
7	Figueirense	58	38	15	13	10		– 45	1	50
8	Coritiba	57	38	16	9	13	57	– 41	16	50
9	Botafogo	56	38	16	8	14	52		3	49
10	Santos	53	38	15	8	15	55	– 55		46
11	Palmeiras	50	38	11	17	10	43	– 39	4	43
12	Grêmio	48	38	13	9	16	49	– 57	– 8	42
13	Atlético–GO	48	38	12	12	14		– 45	5	42
14	Bahia	46	38	11	13	14	43	– 49	– 6	40
15	Atlético–MG	45	38	13	6	19		– 60	– 10	39
16	Cruzeiro	43	38	11	10	17	48	– 51	– 3	37
17	Atlético–PR	41	38	10	11	17	38	– 55	– 17	35
18	Ceará	39	38	10	9	19	47		– 17	34
19	América–MG	37	38	8	13	17	51	– 69	–18	32
20	Avaí	31	38	7	10	21	45		–30	27

a) Por que alguns times possuem saldos de gol negativos e outros positivos?
b) Quais times tiveram o melhor saldo de gols?
c) Qual time teve o pior saldo de gols?
d) Qual foi o saldo de gols do Santos? Por que ele teve esse saldo?
e) O Avaí, último colocado, tem saldo igual –30, quantos gols ele sofreu durante o campeonato?

Figura 67. Exercício sobre o Campeonato Brasileiros de Futebol – 1ª parte

O exercício trata de uma situação real que é a tabela do Campeonato Brasileiro de futebol da série A, mais conhecido como Brasileirão. Durante o ano, percebi que o futebol era um centro de interesse tanto dos meninos como das meninas. Em geral, às segundas e quintas feiras, as conversas giravam em torno de que time havia perdido ou ganhado na rodada.

Talvez por fazer referência ao mundo real (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006), a adesão ao exercício foi instantânea, não tendo sido necessário motivar nenhum aluno a resolvê-lo. Como viram que se tratava do campeonato passado, muitos deles fizeram as tradicionais brincadeiras relativas ao sucesso ou fracasso dos times e passaram a calcular os saldos, como solicitado no comando.

Merece registro a dificuldade em acompanhar todos os diálogos e interações nas três turmas que, nesse dia, tinham uma média de 30 alunos presentes. A gravação em áudio também foi prejudicada porque todos falavam ao mesmo tempo e, ao final, identificar as poucas vozes inteligíveis se revelou uma tarefa pouco produtiva. Assim, os fragmentos que se seguem são frutos das poucos momentos degravados e de anotações feitas em caderno de campo imediatamente após o evento.

No cálculo dos saldos de gols, George, Wilson, Tadeu e Saulo estavam próximos e o tempo inteiro dialogavam sobre seus resultados:

Saulo:	— O primeiro deu mais dezessete.
Wilson:	— É. Corinthians tem mais dezessete e o Vasco também.
Saulo.:	— É. O saldo é o mesmo, mas o Vasco é VICE. [Olhando para mim]
Prof.ª. Pesq.:	— Ei, pode parar [sorrindo].
Tadeu:	— É professora, o Vasco é sempre vice. [risos].
George:	— O Corinthians teve mais vitórias [apontando para a coluna das vitórias na tabela]
Tadeu:	— O saldo do Fluminense é ...
Wilson:	— Como faz?
George:	— O Saldo já está aí. Tem que calcular é os gols feitos.
Wilson:	— É. Tem que calcular os gols feitos.
Tadeu:	— O saldo é nove.
Saulo:	— Mais nove.
Wilson:	— Tem que achar os gols feitos, não é? Mas como faz?
George:	— Como faz?! [Demonstrando não ter entendido a pergunta de Wilson]
Wilson:	— A gente soma ou diminui?
George:	— Ah!!! Não tem que ter mais gols feitos? Se diminuir fica menos gols.
Tadeu:	— É sessenta. Sessenta menos cinquenta e um dá nove. Nove positivo.
Wilson:	— Mas olha só, advinha quem fez mais gol? Meu Mengão.
George:	— Mas ele levou um monte. O saldo é mais doze só.
Saulo:	— O Santos é igual. O saldo é zero.
Wilson:	— Ih! É mesmo. Zero.
Saulo:	— O saldo é zero.
Wilson:	— É zero. Cinquenta e cinco gols feitos e cinquenta e cinco gols sofridos. Fica zero.

O tipo de exercício situado em uma realidade concreta parecia impeli-los a esse permanente diálogo. É interessante observar que há, de fato, uma alternância de enunciados (BAKHTIN, 2010) e todos prestam atenção em todos. Quando Tadeu enunciou a frase incompleta “o saldo do Fluminense é...”, Wilson não apenas sabia do que ele estava falando, como se adiantou para questionar “como faz?” O questionamento de Wilson só foi estranhado por George, que já havia registrado a resposta em sua tabela. Diferentemente das duas primeiras linhas da tabela, em que era necessário apenas subtrair os gols sofridos dos gols feitos, nessa eles tiveram que pensar mais demoradamente. George, então, fez a mediação sem dar a resposta. Ele disse: “Não tem que ter mais gols feitos? Se diminuir fica menos gols.” Tadeu acompanhou o raciocínio e não apenas deu a resposta correta como a justificou.

O fragmento mostra, ainda, que o não dito, ou as “meias palavras” ou “meias expressões” são plenamente compreendidas, se os sujeitos estão todos em ação na situação. O enunciado de Saulo, “o Santos é igual. O saldo é zero”, deixou subentendido que o número de gols feitos foi igual ao número de gols sofridos, mas como todos estavam participando ativamente, isso não representou uma dificuldade, tanto que Wilson, enunciou que o saldo era zero e justificou: “cinquenta e cinco gols feitos e cinquenta e cinco gols sofridos. Fica zero.”

Nessa atividade, foi possível perceber, ainda, que alguns alunos reconstruíam suas respostas em interação com os colegas, como mostra o fragmento de diálogo entre Gisele e Helena, a seguir:

Gisele:	— Ei! O saldo do Atlético não é MENOS dez? [acentuando a palavra menos.]
Helena:	— É.
Gisele :	— Então não pode ser setenta aqui ó. [apontando para a coluna dos gols feitos.
Helena:	— Ih! É mesmo. É... [pausa longa e inflexão na voz]
Gisele:	— Tem mais gols sofridos então... [frase incompleta]
Helloá:	— É cinquenta, então.
Gisele:	— É cinquenta. [risos]

É interessante observar que a pausa e a inflexão na voz de Helena é um convite para Gisele permanecer no diálogo; por isso, ela, ao invés de dar uma resposta, prolonga o diálogo usando uma frase incompleta, para mediar a reconstrução de Helena.

Alguns alunos realizavam essa reconstrução em um diálogo interior muito próprio e recheado de pausas, como mostra o fragmento a seguir. Aproximei-me de Saulo e vi que ele estava conferindo seus resultados sozinho:

Saulo:	— Não é quinze. O Avaí é menos trinta. [pausa] É... [pausa] Fez quarenta e cinco [pausa]. Dez, cinquenta e cinco, Vinte, sessenta e cinco. Trinta, setenta e cinco. É setenta e cinco [apaga – 15 e registra – 75] — Tá certo, né, professora?
Prof.ª Pesq.:	— Agora está, Saulo.

No processo de conferir seu próprio exercício, Saulo realizou uma contagem de dez em dez, a partir da quantidade de gols feitos, mas tendo em mente os gols sofridos que estavam ausentes do exercício, e também estavam ausentes da sua enunciação. No entanto, essa quantidade estava, de algum modo, presente em seu pensamento, tanto que chegou à resposta correta "menos setenta e cinco". Como assevera Vigotski (2000, p. 477), "o pensamento não coincide diretamente com a sua expressão verbalizada". O pensamento é um todo complexo não fragmentado e a enunciação não é a expressão exata desse todo, mas fornece pistas do curso do pensamento do sujeito ou, como Freire (1986) defende, a fala e textos dos estudantes são acesso privilegiado às suas consciências, mas isso requer interpretação, sobretudo, do motivo que levou à sua expressão (VIGOTSKI, 2000). No caso aqui discutido, Saulo não sabia que operação realizar, mas sabia que, se o saldo era negativo, era porque houve mais gols sofridos do que feitos, por isso, ele partiu da "situação de zero", e foi como se ele emparelhasse os gols sofridos e os gols feitos e, a partir dos gols feitos, contasse de dez em dez para encontrar os gols sofridos que dariam o saldo negativo de menos trinta.

O engajamento dos estudantes na atividade e os diálogos mostram que a situação não é uma representação do real, é a própria realidade, tanto que eles transitam com tranquilidade nas operações com números inteiros como se estivessem com o caderno de esportes na mão. Muito embora a tabela tenha sido adaptada pela atribuição de sinais negativos aos valores da coluna "gols contra", trata-se da tabela que estão acostumados a ler nos meios de comunicação e que cotidianamente fazem parte dos seus diálogos e, por isso, como meio mediacional evoca tanto o caráter icônico, como o indexador e simbólico que possibilita vinculá-lo ao objeto matemático número inteiro (FÁVERO, 2005a). Por outro lado, possibilita a conversão dos registros escritos de gols feitos e gols sofridos em registros orais (DUVAL, 2009, 2011) plenos de sentidos para os sujeitos participantes.

Na sequência, foi ofertada uma situação semelhante, mas tendo como pano de fundo o campeonato brasileiro de futebol 2012, que estava em curso, como mostra a figura 68 a seguir:

2. Agora observe a tabela do campeonato brasileiro de futebol desse ano, preencha os espaços em branco e, em seguida, responda:

BRASILEIRÃO 2012										
Posição	Time	Pontos ganhos	Jogos	Vitória	Empate	Derrota	Gols pró	Gols Contra	Saldo de Gol	%
1	Fluminense	69	32	20	9	3	53	−24		71.9
2	Atlético-MG	63	32	18	9	5		−28	26	65.6
3	Grêmio	59	32	17	8	7	46	−27	19	61.5
4	São Paulo	55	32	17	4	11	48	−30		57.3
5	Vasco	50	31	14	8	9	38	−34		53.8
6	Internacion	45	31	11	12	8	40		10	48.4
7	Botafogo	44	31	12	8	11	45	−41	4	47.3
8	Corinthians	44	32	11	11	10	39	−34	5	45.8
9	Cruzeiro	43	32	12	7	13	38	−41	−3	44.8
10	Coritiba	42	32	12	6	14	45	−49	−4	43.8
11	Santos	42	32	10	12	10	39		−1	43.8
12	Náutico	41	32	12	5	15	38	−47	−9	42.7
13	Ponte Preta	40	32	10	10	12		−42	−7	41.7
14	Flamengo	40	32	10	10	12	32	−41	−9	41.7
15	Portuguesa	39	32	9	12	11	35		0	40.6
16	Bahia	36	32	8	12	12	31	−36	−5	37.5
17	Sport	33	32	8	9	15	30	−49	−19	34.4
18	Palmeiras	32	32	9	5	18		−41	−10	33.3
19	Figueirense	28	31	7	7	17	36	−59	−23	30.1
20	Atlético-GO	23	32	5	8	19	31	−56		24

a) O campeão do ano passado tem chances de ser campeão novamente? Por que?

b) Quantas rodadas estão faltando?

c) O Atlético Mineiro ainda tem chance de ganhar o campeonato?

d) Qual é a expressão algébrica utilizada para calcular o número de pontos de um time?

e) O que significa o percentual (%) no final de cada linha?

Figura 68. Exercício sobre o Campeonato Brasileiros de Futebol – 2ª parte

Novamente o engajamento na atividade foi instantâneo e muitas brincadeiras foram feitas em relação ao desempenho dos times, quando do cálculo dos saldos de gols. Mas gostaríamos de chamar a atenção para as questões logo após a tabela. A primeira pergunta que dizia respeito à possibilidade do Corinthians ser campeão novamente foi rapidamente discutida por George, Wilson e Tadeu:

> Wilson: — Eu acho que não tem.
>
> Tadeu.: — É... não tem. Corinthians tem só quarenta e quatro pontos. O Fluminense tem sessenta e nove, ele já ganhou.
>
> George — Ganhou nada, mas o Corinthians não tem como chegar lá. Só faltam seis rodadas. Se ele ganhar todas, ganha dezoito pontos.
>
> Tadeu: — É... Quarenta e quatro mais dezoito é sessenta e dois.
>
> Wilson: — Nem se o Fluminense perdesse tudo, o Corinthians ia ganhar.

É importante observar que Wilson e Tadeu construíam seus enunciados a partir das suas percepções do campeonato, mas George os conduziu a pensar mais logicamente em relação à matemática da situação. Ao lembrá-los de quantas rodadas estavam faltando, George convidou os seus colegas torcedores a saírem da estado emocional provocado pela situação, o campeonato brasileiro, e pensar matematicamente nas suas regras. Na fala de George, ficou subtendido que cada jogo ganho somava três pontos. Nesse momento, Wilson e Tadeu passaram a discutir a situação, de forma mais racional, e concluíram que mesmo se o Corinthians ganhasse todos os jogos restantes, não chegaria ao total de pontos do Fluminense, ainda que este perdesse todos os jogos. O enunciado argumentativo de George conduz os colegas a um processo metacognitivo (FÁVERO, 2005a) de pensar sobre o que estavam pensando, e assim reconstruir a ideia inicial.

Na sequência, eles continuam enunciando raciocínios probabilísticos:

Wilson:	— O Atlético pode ser campeão... Se ele ganhar todos e Fluminense perder alguns.
George	— Se ganhar todos, o Atlético fica com... sessenta e três mais dezoito...
Wilson	— Dá oitenta e um. O Fluminense tem que perder pelo menos dois.
Tadeu:	— Mas aí fica empate.
Wilson:	— Então, o Fluminense tem que perder três. Aí o Atlético ganha.
George:	— É aí o Atlético fica com oitenta e um e o Fluminense fica com setenta e oito. Mas é difícil.

Nesse fragmento, é a fala inicial de Wilson “o Atlético pode ser campeão. Se ele ganhar todos e Fluminense perder alguns” que induz todos a um raciocínio probabilístico, cujas inferências os conduzem a pensar que a possibilidade do Atlético ser campeão está atrelada à possibilidade do Fluminense perder alguns jogos.

Ao chegarem à questão d), que pergunta sobre a expressão algébrica, os estudantes me chamaram:

George:	— Professora, nós não entendemos a letra d..
Prof.ª Pesq.:	— O que vocês não entenderam?
George:	— A d, professora... [pausa] expressão algébrica?
Prof.ª Pesq.:	— Ah! O Fluminense não tem sessenta e nove pontos? [apontando para a tabela] — Que expressão algébrica a gente usa para chegar nessa quantidade de pontos?
Wilson:	— Uai, professora ele teve vinte vitórias e nove empates. [também apontando para a tabela]
Prof.ª Pesq.:	— E a vitória vale quanto?
Wilson:	— Vale três. Vinte vezes três dá sessenta.
George:	— E o empate vale um, então, nove vezes um dá nove. Sessenta e

nove.

Prof.ª Pesq.:	— É isso. Vitória vezes três e empate vezes um. Então podemos escrever uma expressão algébrica, uma fórmula, para calcular os pontos de todos os times?
Wilson:	— Fórmula? Como assim?
Prof.ª Pesq.:	— É uma fórmula para calcular os pontos de qualquer time. Vamos chamar vitória de V e empates de E. Derrota não vale nada, né?
George:	— Já sei. O número de pontos é vitória vezes três e empate vezes um.
Prof.ª Pesq.:	— Se eu chamar o número de pontos de P, então... [anotando no papel P =]
George:	— V vezes três e E vezes 1 [completando o registro P = Vx3 + E x 1]
Prof.ª Pesq.:	— Podemos escrever isso assim ó: P é igual a três V mais E [registrando no papel P = 3V + 1E].
Tadeu	— O um não precisa né, professora? [Apontando para o final da fórmula]
Prof.ª Pesq.:	— É, não precisa. Vocês entenderam?
Todos:	— Humhum...
Prof.ª Pesq.:	— Isso é a expressão algébrica ou a fórmula que dá para calcular o número de pontos de qualquer time.

Nesse episódio, mais uma vez vemos como a representação algébrica não é lembrada pelos estudantes. Mesmo quando questionei a expressão que dá o total de pontos, os alunos se encaminharam para um raciocínio aritmético evocando o total de vitórias e de empates. Como permanecem sem compreender, utilizei a expressão “fórmula” como sinônimo e isso pareceu não ajudar. Somente quando os induzi a pensar que podemos representar as vitória pela letra V é que eles pareceram captar o que eu estava querendo dizer.

Embora saibam, do ponto de vista aritmético, efetuar o cálculo do número de pontos, a expressão algébrica que generaliza esse cálculo exige dos estudantes a realização de uma conversão (DUVAL, 2009, 2011) com alto grau de abstração, o que é de fato um obstáculo muito grande para eles.

4.4.2.O diálogo no contexto da aprendizagem da Geometria, Grandezas e Medidas

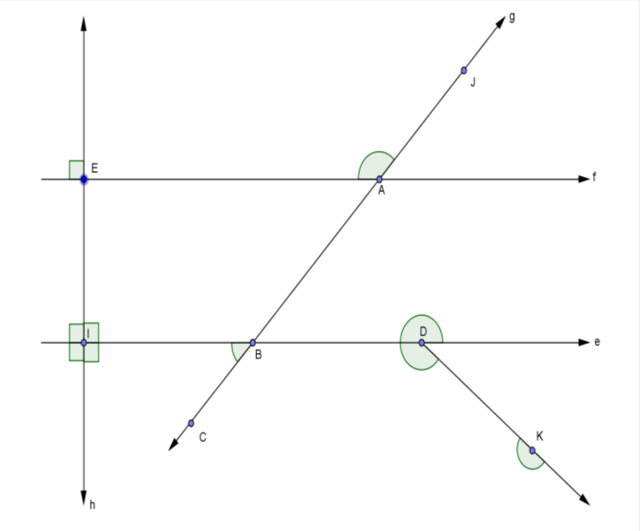
A pesquisa exploratória e a pesquisa de campo nos mostraram que, embora haja orientações pedagógicas claras no sentido de integrar os objetos matemáticos e não tratar de forma estanque os blocos de conteúdos indicados nos PCN (BRASIL, 1998), os conteúdos relativos aos blocos “Espaço e Forma” e “Grandezas e Medidas” ainda são deixados de lado, o que revela um quadro pouco diferente daquele mostrado por Pavanello (1989) na sua dissertação de mestrado sobre o abandono da Geometria nos currículos escolares. Notamos que, muitas vezes, os exercícios que abordavam conteúdos geométricos, mesmo em integração com conteúdos da aritmética e da álgebra, não eram propostos aos alunos.

Percebemos que tais conteúdos ainda são deixados para o segundo semestre do ano letivo e quando são tratados, a abordagem é, em geral, axiomática, sem construções geométricas, com exercícios que fazem referência à matemática pura ou a semi-realidades (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006). Com isso, são deixadas de lado situações potencialmente ricas para possibilitar a coordenação de diferentes representações e a emergência de atividades cognitivas de conversão, e não apenas de tratamento, que estão na base do fazer matemática na escola, conforme preconiza Duval (2009, 2011).

Percebemos uma hipervalorização do bloco "Números, Operações e Álgebra", cujo trabalho acaba tomando boa parte do ano letivo. Em virtude disso, poucos foram os episódios observados em relação ao campo da Geometria e das medidas.

Ainda na pesquisa exploratória, notamos que, no início do 2º semestre, a professora começou a demonstrar preocupação com o ensino da Geometria. Ela deu a entender que o trabalho com a Geometria seria feito paralelamente ao da Álgebra, mas em aulas separadas. Duas das cinco aulas semanais foram, então, destinadas ao trabalho com Geometria, embora já estivesse trabalhando com as medidas de perímetro e área, que evocavam conceitos geométricos de formas, como por exemplo, o discutido na página 171, que solicitava o cálculo de áreas e perímetros, cujas medidas eram dadas por meio de expressões algébricas.

As figuras 69 e 70, a seguir, mostram exercícios característicos do trabalho com Geometria nesse período.



1. Observe o desenho e, em seguida, encontre
   a)Duas retas paralelas
   b)Dois pares de retas perpendiculares
   c)Três pares de retas oblíquas
   d)Retas inclinadas
   e)Retas verticais
   f)Retas horizontais
   g)Segmentos de retas

h)Semirretas
i)Um ângulo reto
j)Um ângulo agudo
k)Um ângulo obtuso
l)Um ângulo côncavo
m)Um ângulo de volta inteira
n)Um ângulo raso

2. Calcule, trace e classifique o ângulo de

a) $\frac{3}{10}$ de horas

3. Trace um ângulo e a sua bissetriz

3. Calcule o complemento, o suplemento e o replemento do ângulo de 65º10’25’’

Figura 69. Reprodução do desenho feito no quadro pela professora e das questões propostas aos alunos, a partir do desenho, como atividade avaliativa

Os exercícios mostrados acima fazem referência à Matemática Pura (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006) e foram utilizados durante uma prova em grupo. Cada estudante deveria olhar o desenho feito pela professora em um quadro e, em seguida, podia discutir suas respostas com os colegas. Para resolver os exercícios dispunham de lápis, borracha, régua e transferidor.

A prova foi realizada em turno contrário ao das aulas, em uma biblioteca muito pequena e desconfortável e, muito embora os alunos estivessem sentados em torno de uma mesa redonda, o processo de comunicação foi atrapalhado pela configuração espacial da sala, pois as mesas estavam muito próximas e o barulho era intenso. O mesmo aconteceu com o processo de observação dos diálogos, pois havia pouco espaço de circulação entre os grupos.

Os diálogos, de modo geral, se resumiam a conferência de respostas, como mostra o fragmento a seguir. Quem toma a iniciativa do diálogo é Irina que está com dúvidas.

Irina: — As retas paralelas são **f** e **e**, né? Mas e as perpendiculares?
Paulo: — As perpendiculares são as que estão assim ó [representando com as mãos] — Noventa graus.
Irina: — Então **f** e **h** é perpendicular, não é?
Paulo: — É. Pode ser **e** e **h** também.
Irina: — É. Pode.

Ao representar as retas perpendiculares com as mãos, Paulo fez uma conversão (DUVAL, 2009, 2011) do registro da representação geométrica para um registro gestual e oral, mas sua expressão corporal não era de quem estava aberto ao diálogo. Ele mal levantava a cabeça do seu próprio papel para falar com Isabela e voltava rapidamente a ele, encerrando o diálogo. As frases curtas e pontuais também demonstraram essa não abertura. Isso fica mais claro ainda quando, nos episódios seguintes, Isabela prosseguiu tentando tirar suas dúvidas e

Paulo demonstrou certa impaciência, afinal é momento de prova e ele está mais envolvido em responder a sua prova, e não em ajudar a colega.

> Irina: — E segmento de reta?
> Paulo: — Você não sabe o que é segmento de reta? [com impaciência].
> Irina : — Não... [com constrangimento]
> Paulo: — Olha é um pedaço de reta que tem começo e fim. Aqui ó [mostrando o segmento BD e escrevendo a representação $\overline{BD}$ no papel].
> Irina: — E semirreta?
> Paulo: — Ah não, Irina! [com mais impaciência ainda] É um pedaço de reta que tem começo e não tem fim. Aqui ó [apontando para o desenho], a semirreta EA começa em E, mas não tem fim. Entendeu? Escreve assim, ó: EA [escrevendo a representação $\overrightarrow{EA}$ no papel]
> Irina: — Entendi. [copiando a resposta]

O episódio acima mostra que Irina apenas reproduziu a linguagem que estava no próprio exercício, mas Paulo demonstrou, de um lado, a reprodução da linguagem da professora, utilizando não apenas os termos matemáticos próprios da sua fala, como também as explicações que buscavam aproximar a linguagem matemática da linguagem cotidiana, como nos trechos em que disse que segmento de reta era “um pedaço de reta que tem começo e fim”, ou que uma semirreta “tem começo e não tem fim.” Ao fazer isso, novamente Paulo converteu o registro escrito de entes geométricos para registros da linguagem oral e gestual (DUVAL, 2009, 2011).

No diálogo, Irina, que apenas observou e copiou, não pareceu estar fazendo essa conversão de registros. Os enunciados de Irina eram constituídos por frases curtas e não davam pistas se estava havendo ou não aprendizagem. Já os enunciados de Paulo mostraram domínio conceitual.

Um outro exercício representativo do que estava sendo trabalho é o mostrado na figura 70, a seguir, que faz referência a uma semi-realidade (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006), uma vez que a representação das ruas é apenas pretexto para se trabalhar com medidas de ângulos

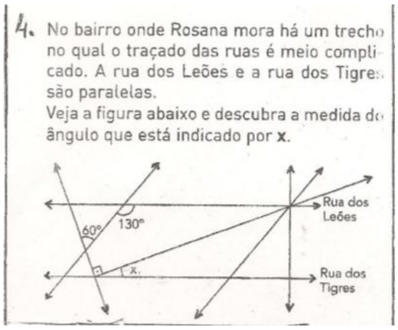


Figura 70. Exercício da lista avaliativa de Geometria

Essa semirrealidade (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006) é prontamente abandonada no registro da resolução como mostra a figura 71, a seguir, feita por Paulo, que em diálogo com João, resolveu o exercício.

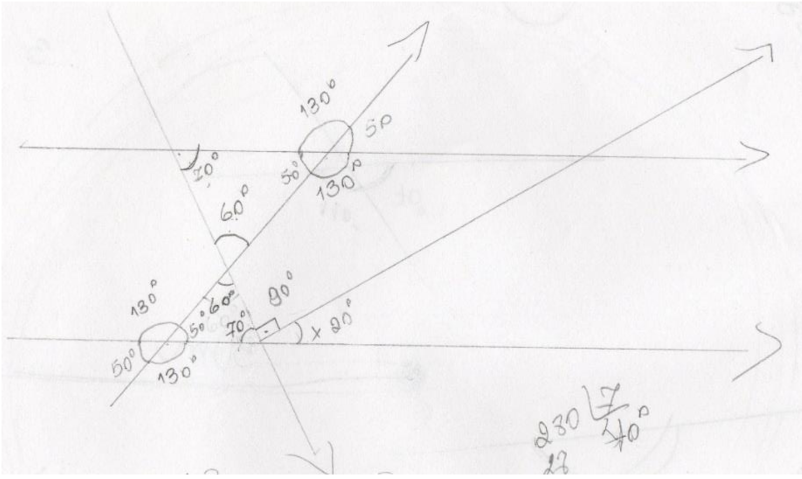


Figura 71. Resolução do exercício feita por Paulo

Nem mesmo no diálogo entre Paulo e João, a semirrealidade está presente, como mostra o diálogo a seguir:

Paulo: — Aqui é oposto pelo vértice, então é cento e trinta também. [fala apontando para o ângulo de 130º]
João: — Aqui também, então, é sessenta. [fala apontando para o ângulo de 60º]
Paulo: — Esse outro aqui é cinquenta. Cento e trinta mais cinquenta é cento e oitenta. Né?
João: — É cinquenta. [concordando]
Paulo: — Então aqui embaixo é igual, tá vendo? Cinquenta, cento e trinta, cinquenta, cento e trinta. Né?
João: — É.
Paulo: — Aqui é um triângulo. Soma cento e oitenta.
João: — Hum?
Paulo: — É. Lembra? Dentro do triângulo é sempre cento e oitenta. Cinquenta, mais sessenta é cento e dez, então fica faltando.... [pausa] setenta. É... setenta.
João: — O que falta para cento e oitenta. [Ainda com expressão de dúvida]
Paulo: — E aqui é meia volta. Esse é reto. Setenta mais noventa é cento e sessenta com mais vinte dá cento e oitenta. Então x é vinte.

Quem toma a iniciativa do diálogo é Paulo que demonstrou domínio conceitual. João até tentou acompanhar, mas o diálogo de Paulo era muito mais com ele mesmo do que com João. Embora Paulo usasse a *Tag question* (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006) “né?” para colocar João no diálogo, não há na verdade uma alternância de enunciados como preconiza Bakhtin (2010), e nem mesmo dá para saber se houve, de fato, aprendizagem. Isso evidencia que a constituição do diálogo no contexto escolar depende do processo de conceitualização. As construções do sujeito, seja perguntando ou respondendo ou simplesmente enunciando uma ideia ou construindo uma réplica, necessitam de conceito. Evidente que a construção conceitual pode ser parcial, inconclusa ou equivocada.

Como vários exercícios algébricos evocavam os conceitos de perímetro e área, como o mostrado na página 171, e muitos estudantes pareciam não ter se apropriado desses conceitos, resolvi, então, intervir nessa situação discutindo esses conceitos mas fora da álgebra. O fragmento a seguir mostra o diálogo entre alguns estudantes comigo sobre esses conceitos:

Prof.ª Pesq.:	— Meninos, se a gente resolvesse trocar o piso dessa sala, teria que saber quanto de cerâmica comprar, não é?
Todos:	— É.
Prof.ª Pesq.:	— E como é que a gente faria?
Marina	— Para saber os metros?
Prof.ª Pesq.:	— É. Para saber quanto de cerâmica a gente compra. Alguém aqui tem parente que é pedreiro, que sabe colocar cerâmica?
Marina:	— Professora, meu pai é pedreiro.
Prof.ª Pesq.:	— Humm... Você já viu seu pai fazendo as contas para colocar cerâmica em um cômodo da casa, como, por exemplo, em uma sala?
Marina:	— Já vi sim... [pausa]. Acho que ele mede assim e assim [apontando para o comprimento e para a largura da sala].
Prof.ª Pesq.:	— Sei. E depois?
Marina:	— Eu acho que multiplica ou soma...
Prof.ª Pesq.:	— Multiplica ou soma?
Paulo:	— Multiplica.
Prof.ª Pesq.:	— É isso. Ele multiplica. Você sabe o que ele está calculando quando faz isso? [longo silêncio]

O silêncio prolongado mostrou que, embora sabendo que o pedreiro multiplicava um lado pelo outro, os estudantes não associaram esse processo ao conceito de área.

Como ninguém se habilitou a responder, prossegui:

Prof.ª Pesq.:	— Ele está calculando a medida da área, para saber quantos metros quadrados de cerâmica, ele precisa para cobrir toda a sala. Como a sala é retangular, ele multiplica o comprimento pela largura.
Todos:	— Hummm...

Dei, então, um exemplo, fazendo um desenho no quadro, que está representado na figura 72 a seguir:

Prof.ª Pesq.:	— Vamos pensar que seja uma sala com as seguintes medidas [falei fazendo a seguinte representação no quadro]

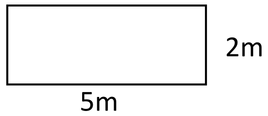


Figura 72. Representação do registro feito no quadro branco.

Prof.ª Pesq.: — Como é que calculamos a área dessa sala aqui? [apontando para o desenho feito no quadro branco]

Muitos dos alunos responderam ao mesmo tempo, tomando de empréstimo (BAKHTIN, 2010) a expressão que eu acabara de enunciar:

Alguns: — O comprimento pela largura.

Escrevi no quadro: 5 m x 2 m e perguntei:

Prof.ª Pesq.: — Quanto dá, então, comprimento, cinco metros, pela largura, dois metros?

Eles também responderam ao mesmo tempo e eu questionei a resposta.

Todos: — Dez metros.
Prof.ª Pesq.: — Dez metros?!!!!
Marina: — Quadrado. É dez metros quadrados, cerâmica é vendida em metros quadrados.
Prof.ª Pesq.: — Muito bem! Isso mesmo. Dá dez metros quadrados.

No diálogo, é possível perceber que Marina demonstrou um conhecimento social/prático sobre o cálculo de medida de área oriundo da relação que tem com seu pai, que é pedreiro. Tal conceito não parece ter sido construído na escola e ela, como os demais, tem dificuldade em relacionar tal conceito aos objetos matemáticos com os quais a escola trabalha, ou seja, não tem o conhecimento escolar/teórico desse conceito.

No exercício, mostrado na figura 39 da página 171, o cálculo da área e do perímetro da região poligonal são apenas pretextos para realizar manipulações algébricas, nesse sentido se referenciam na matemática pura (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006). O exercício referido é fechado, ou seja, possui uma única resposta e sequer faz alusão a uma situação cotidiana.

Após essa situação inicial, passamos, então, a conversar sobre a própria sala de aula. Muitos falaram que, para trocar o piso da sala, teriam que calcular a área e que, para isso, precisariam de uma trena para medir o comprimento e a largura. Foi então que resolvi perguntar pelo rodapé que contornava a sala de aula.

Prof.ª Pesq.:	— E como é o nome desse negócio que tem em torno da sala? [tocando com o pé o rodapé da sala]
João:	— É... como é o nome? Eu sei, eu sei é... é.... rodapé! [falando bem alto]
Prof.ª Pesq.:	— Como é que podemos saber quanto de rodapé vamos gastar nessa sala?
Carlos;	— Ué, professora, medindo!
Prof.ª Pesq.:	— Medindo o quê?
João:	— Todos os lados. Assim, assim, assim e assim [apontando para todos os lados da sala]
Prof.ª Pesq:	— Muito bem! Quando medimos estamos calculando o quê?
Marina	— Acho que é o perímetro, professora.
Prof.ª Pesq.:	— Isso mesmo, o perímetro ou a medida do contorno da sala.

Voltei ao quadro e perguntei como fariam para calcular o perímetro ou o contorno da sala que estava representada no desenho e eles prontamente responderam que era somando as medidas dos lados (5 m + 5m + 2m + 2m), o que totalizava 14 metros. Tentei, então relacionar o que acabamos de ver com os exercícios que haviam resolvido na folha.

Prof.ª Pesq.:	— Sabe os exercícios da folha, aqueles que resolvemos juntos aqui na sala?
João:	— Os que fizemos aqui? Esse aqui? [mostrando a folha]
Prof.ª Pesq.:	— Pois é... lembram que nele calculamos vários perímetros e áreas de figuras, de retângulos, quadrados, lembram?
João:	— É... mas lá não tinha metro, só x e y.

A fala de João “mas lá não tinha metro” também mostrou a dificuldade em perceber que as expressões algébricas dos exercícios representavam medidas de comprimento. Mostraram sua dificuldade em navegar entre diferentes registros de representação (DUVAL, 2009, 2011) de um mesmo objeto, sobretudo quando se tratava de generalizar algo pleno de significado social, como as medidas.

Na pesquisa de campo propriamente dita, a geometria esteve ainda mais ausente do currículo escolar. Muito embora conceitos geométricos não estivessem sendo explorados em sala de aula, algumas atividades, cujo objetivo não era a geometria em si, mas que exploravam esses conceitos, foram desenvolvidas no contraturno, no ambiente do projeto. Foi o caso, por exemplo, das dobraduras em origami, em que o objetivo central era explorar o significado das frações.

Sabe-se que quase todos os origamis partem de um quadrado e, em geral, inicialmente, são feitas as dobras mostradas pelas linhas pontilhadas na figura 73, a seguir:

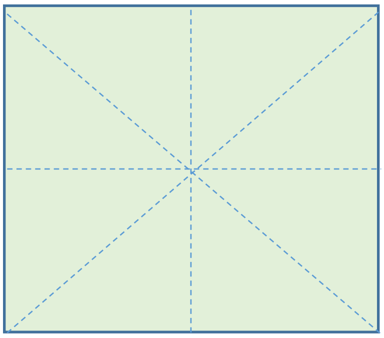


Figura 73. Reprodução das dobras iniciais do origami

Como para dobrar os origami iríamos utilizar folhas retangulares não quadradas, resolvi explorar algumas propriedades dos quadriláteros, como mostra fragmento a seguir:

Prof.ª Pesq:	— Pessoal, essa folha [mostrando uma folha de tamanho A4] que vocês receberam lembra que figura geométrica?
Priscila:	— Um retângulo, professora.
Prof.ª Pesq:	— Por que?
Todos:	— Uai.. é um retângulo.
Prof.ª Pesq:	— Por que?
Priscila:	— Esse lado é igual a esse, e esse é igual a esse [apontando os lados opostos da folha]
Prof.ª Pesq:	— A palavra ret – ângulo lembra o que? [fazendo pausa entre o início e o final da palavra].
Gisele	— Ângulo?
Prof.ª Pesq:	— É, mas e o início? Retan... [falando apenas parte da palavra]
Helena:	— Reta?
Prof.ª Pesq:	— Lembra reto. Ângulo reto. Um retângulo é um polígono de quatro lados que tem quatro ângulos retos. É um quadrilátero, quatro lados, um, dois, três, quarto lados [apontando para o lados] que tem quatro ângulos retos, um, dois, três, quatro ângulos [apontando para os cantos].
Priscila:	— Hummmm... E ângulo reto, eu acho que a professora do ano passado ensinou.
Prof.ª Pesq:	— Toda vez que o canto é quadrado assim como na folha [apontando para a folha], a gente tem um ângulo reto, que mede 90º. Onde mais tem ângulos retos aqui?
Helena:	— Aqui na mesa [apontando o canto da mesa]
Priscila:	— No canto do quadro.
Tânia:	— Lá na porta.
Prof.ª Pesq:	— Agora retirem dessa folha retangular o maior quadrado possível.

O episódio acima mostra que as frases incompletas, as meias-palavras são utilizadas para colocar os estudantes no jogo de perguntas e respostas. A interação verbal ocorre por meio do completamento de frases e palavras. Na ansiedade de fazer os alunos lembrarem do que é um ângulo reto, utilizo o que Brosseau (2008, p. 77) chama de efeito do contrato didático. Ao utilizar a meia palavra “retan...”, eu estou “soprando” a resposta para os estudantes, isso é o que esse autor chama de “efeito *topase*”. No contrato estabelecido, sou eu que escolho a resposta que quero ouvir dos alunos. Gisele, diz “reta” e eu digo “reto. Ângulo reto”, que é a resposta que eu desejava ouvir. Esse processo evoca apenas em Priscila, que é repetente, a lembrança de ter estudado ângulo reto no ano anterior. Os demais parecem não ter lembrança do que é ângulo reto, mas, a partir da analogia entre esses e cantos quadrados, todos passam a identificar ângulos retos em objetos da sala.

Assim que todas dobram a folha para conseguir um quadrado, prosseguimos com o diálogo.

Prof.ª Pesq: — Por que essa figura aí lembra um quadrado?
Helena: — Uai professora, tem quatro lados iguais.
Prof.ª Pesq.: — E os ângulos?
Priscila: — São retos também.
Prof.ª Pesq: — E o quadrado também é um quadrilátero?
Todos: — É.
Prof.ª Pesq: — Então o quadrado também é um retângulo?
Priscila: — Claro que não!
Prof.ª Pesq: — Não?
Priscila: — É? Professora, é?... [desconfiada]

É interessante observar que, no jogo de perguntas e respostas, Priscila inferiu significados por trás da minha fala. O diálogo só aconteceu porque houve um nível de construção conceitual que fez Priscila questionar, responder, argumentar, replicar, enfim que a possibilitou entrar na alternância de enunciados que caracterizou o diálogo (BAKHTIN, 2010). Quando questionei o seu enunciado de que o quadrado não é um retângulo por meio de uma simples pergunta “não?”, ela se colocou em posição de desconfiança que permitiu perceber que seu pensamento estava em um processo metacognitivo (FÁVERO, 2005a) de regulação e reconstrução da sua fala.

Prof.ª Pesq.: — O que vocês acham? [dirigindo a todos]
Priscila: — Professora, professora, o quadrado tem 4 ângulos retos, então é um retângulo, é? [ansiosa]
Prof.ª Pesq.: — O que você acha, Gisele?
Priscila: — Fala logo, professora? [ficando de pé e gesticulando as mãos]
Prof.ª Pesq.: — Gisele?
Gisele: — Eu acho ... não sei... É?
Priscila.: — Ah, não! Professora, fala logo. [Ainda mais ansiosa]
Prof.ª Pesq.: — É, Priscila!
Priscila: — Caraca!
Prof.ª Pesq. : — Todos quadrilátero que tem quatro ângulos retos é um retângulo. O quadrado é um retângulo que resolveu ter todos os lados iguais.

A ansiedade de Priscila era evidente tanto pelos reiterados enunciados “fala logo”, como pelos gestos das mãos e expressão do rosto, que comunicavam a todos o desejo de saber logo. Quando finalmente obteve a resposta, ela enunciou um palavrão que demonstrou a sua reconstrução.

Depois fizemos a mesma coisa mostrando que o quadrado era um paralelogramo e Patrícia não se conteve e enunciou seu espanto:

Priscila: — Eu, heim... Nunca ninguém disse isso. [risos]
Prof.ª Pesq. : — É, Priscila, pode confiar. Mais para frente, vamos continuar conversando sobre isso.

Na sequência, fomos dobrando o quadrado para explorar as frações e, então, surgiu a oportunidade de explorar o conceito geométrico de diagonal.

Prof.ª Pesq: — Dobrem o quadrado ao meio. [pausa] Que fração representa cada uma das partes do quadrado?
Todos: — Um meio.
Prof.ª Pesq: — Agora dobre o quadrado ao meio de novo. [pausa] Ficam quantas partes?
Todos: — Quatro.
Prof.ª Pesq: — Gisele, que fração representa cada uma dessas partes?
Gisele: — Um quarto?
Prof.ª Pesq: — Talita, e se eu pegar duas dessas partes?
Talita — Ai vai ser dois quartos.
Prof.ª Pesq: — Ou...
Helena: — Metade.
Prof.ª Pesq: — E que fração representa a metade?
Priscila: — Um meio, NÉ, professora? [enfatizando o NÉ]
Prof.ª Pesq: — Talita, se nós dobramos esse quadrado nas duas diagonais vão ficar quantas partes?
Helena: — O que é diagonal?
Prof.ª Pesq.: — Alguém sabe o que é diagonal? [silêncio]
Priscila: — Professora, o que é diagonal?

Como ninguém respondeu, expliquei apontando para o quadrado:

Prof.ª Pesq: — A diagonal é essa linha que liga uma pontinha a essa outra pontinha que fica do lado oposto, que liga um vértice ao outro vértice que fica do lado oposto, em frente [mostrando no quadrado].
Todos: — Hummm...
Prof.ª Pesq: — O quadrado tem quantas diagonais?
Priscila: — Duas, né, professora? Você já até falou.
Prof.ª Pesq: — Falei, Patrícia. Nem lembro [muitos risos]. Então, Talita, agora o quadrado ficou dividido em quantas partes?
Talita: — Em oito [Com muita timidez].
Helena: — Cada parte é um oitavo.
Prof.ª Pesq: — Se eu pegar quatro dessas oito partes, a fração...
Gisele: — Quatro oitavos...
Priscila — Metade também...

Os dois fragmentos acima mostram uma desnecessária antecipação minha ao definir diagonal para o grupo. Quando Helena perguntou “o que é diagonal?”, devolvi a pergunta para o grupo, mas Patrícia apenas reiterou a dúvida, fazendo a pergunta retornar a mim. Não há qualquer tentativa minha de fazer analogias ou de fazer outros questionamentos que provoquem possíveis respostas, apenas respondo. Isso mostra a complexidade da pesquisa em que o pesquisador assume o papel de mediar a construção conceitual. Nesse momento, comporto-me como professora que, diante da dúvida e do silêncio, enuncia a definição, sem esperar pela conceitualização dos estudantes.

Nesse mesmo sentido, merece destaque também a percepção de Priscila de que formulei uma pergunta para a qual já havia dado a resposta, minutos antes, talvez levada pela ansiedade do grupo de chegar ao produto final do origami.

A ansiedade os levavam a me pressionar a dar logo as respostas ou não me esperavam enunciar as perguntas, como na parte final do último fragmento em que Helena inferiu o que eu iria perguntar e disse “cada parte é um oitavo’. Na sequência, Gisele se antecipou respondendo à minha pergunta, antes mesmo que eu a concluísse, e Priscila deu a resposta antes mesmo que eu enunciasse a pergunta.

Apenas no começo do mês de novembro é que o estudo da geometria e das medidas foi iniciado, com os capítulos do livro que tratavam de ângulos e retas.

Na resolução do exercício do livro, mostrado na figura 74, a seguir, acontece um pequeno diálogo entre Wilson e Tadeu que mostra a tentativa do primeiro de explicar a definição de ângulos adjacentes pela aproximação de algo mais palpável e real:

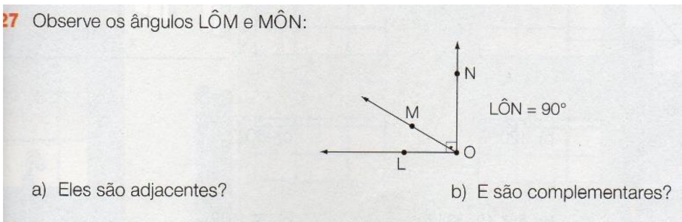


Figura 74. Exercício do livro (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009, p. 81)

Tadeu:	— O que é adjacente?
Wilson:	— Adjacente? É... Adjacente é vizinho de parede
Tadeu.:	— Vizinho de parede?
Wilson:	— É. A professora falou: vizinho de parede assim coladinho um no outro. Essa sala é adjacente a essa outra sala aqui [apontando para a parede que divide as duas salas]
Tadeu:	—Ah! Entendi. Então é adjacente. Esse ângulo é vizinho desse.

A metáfora utilizada por Wilson, "vizinho de parede", bem como seu exemplo "essa sala é adjacente a essa outra sala" ajudam Tadeu a estabelecer relação entre a fala e o exercício. Embora o exercício faça referência à matemática pura, a mediação de Wilson evoca a relação icônica, indexadora e simbólica da representação (metáfora e exemplo) com o objeto (ângulos adjacentes). Mas é mais que isso, Wilson converte o registro da representação dos ângulos, em um registro oral que dá sentido ao exercício (DUVAL, 2009, 2011).

Wilson enuncia que a metáfora utilizada havia sido tomada de empréstimo (BAKHTIN, 2010) da fala da professora Leila e isso é confirmado por ela, quando me pediu ajuda para trabalhar os conceitos de área e perímetro, como mostra o fragmento a seguir:

> Prof.ª Leila: — Olha, Erondina, sei que esses meninos nunca viram geometria e quero que eles vejam algumas coisas.
> Prof.ª Pesq.: — Vi que você trabalhou ângulos com eles na semana passada e os que estiveram comigo estão sabendo direitinho medir ângulos, resolver as equações e os probleminhas envolvendo as noções de ângulos complementares e suplementares. Sabem o que são retas paralelas, concorrentes e perpendiculares. Sabem o que são ângulos adjacentes, opostos pelo vértice.
> Prof.ª Leila: — Trabalhei com eles em sala. Disse a eles que adjacentes são vizinhos e eles gostaram. Amanhã, eu vou corrigir os exercícios, mas queria que eles aprendessem a calcular área. Acho que ninguém nunca ensinou para eles.
> Prof.ª Pesq.: — Pois é... As primeiras noções de área deveriam ser trabalhadas nos anos iniciais em malha quadriculada. Podíamos começar daí, o que acha?

O diálogo mostra, em primeiro lugar, a confiança que se estabeleceu entre a professora Leila e eu. Ela expressa que tem consciência da ausência da Geometria no currículo e, embora, já seja final do ano letivo, quer fazer algo e me pede ajuda, como mostra a seguir:

> Prof.ª Leila: — Você tem alguma atividade para começar área com eles?
> Prof.ª Pesq.: — Posso ver. Humm...
> Prof.ª Leila: — Podia ser dobradura.
> Prof.ª Pesq.: — Então... Eu sei fazer umas dobraduras que mostra o cálculo de áreas. Primeiro teríamos que retomar com eles a área do quadrado e do retângulo com papel quadriculado. Tem papel quadriculado?
> Prof.ª Leila: — Tem sim. Eu tenho e a escola também tem.

É importante deixar claro que a pesquisa não tinha inicialmente como foco o diálogo entre a professora e a pesquisadora, e nem mesmo o diálogo entre a professora e os estudantes, mas a observação participante conduziu à algumas análises a partir dessa interação.

Mostrei à professora Leila como calcular a área de alguns polígonos por meio de dobraduras e ela achou que eram interessantes, mas aí acrescentei.

Prof.ª Pesq.:	— Ou, então, podíamos usar o laboratório de informática. Nunca mais voltamos lá e acho que eles iam gostar. O NLVM tem um geoplano virtual.
Prof.ª Leila:	— Eu vi lá. Preciso ver se o laboratório está disponível.
Prof.ª Pesq.:	— Tenho umas atividades que Terezinha e eu preparamos para um curso lá em Goiânia. Podemos adaptá-las. O que acha?

Como já havíamos trabalhado com o NLVM, percebi que ela ficou mais atraída por essa possibilidade e, então, planejamos juntas a atividade que será relatada a seguir e que foi conduzida por mim, mas com a participação direta dela.

Do mesmo modo que no trabalho com as equações, a adesão dos alunos foi imediata. No laboratório de informática, diante do computador, a concentração na atividade e o envolvimento eram admiráveis.

Inicialmente, ensinamos a eles a trabalharem com o geoplano virtual para construírem figuras poligonais. Não precisou de muitas explicações, pois a maioria descobriu sozinha como esticar o elástico virtual para construir polígonos. Minha intervenção foi apenas no sentido de pedir que eles construíssem as figuras poligonais com apenas um elástico, e não com várias como alguns estavam fazendo.

Em seguida, pedi a eles que se afastassem do computador e olhassem para mim e, então, perguntei a eles o que era perímetro e fez-se silêncio total. Perguntei novamente e Saulo respondeu:

Saulo:	— É uma medida.
Prof.ª Pesq.:	— De quê?
Saulo:	— Acho que uma medida do chão [Falou olhando para o chão.]
Prof.ª Pesq.:	— Como assim? Do chão?
Saulo:	— É. Do Chão. [Falou fazendo um gesto com a mão como se estivesse alisando a superfície]

Enquanto Saulo e eu dialogávamos, os demais nos olhavam participando da conversa com os olhos, tanto que todos ficaram olhando para o chão.

Prof.ª Pesq.:	— Isso que você está indicando com a mão é uma medida sim, mas de superfície, de área. Se o pedreiro quisesse trocar o piso desse laboratório, teria que calcular a medida da superfície, a medida da área.

Eu falei fazendo o mesmo gesto que ele fez e continuei:

Prof.ª Pesq.: — Mas e o perímetro? [Silêncio] É também uma medida, mas de que?

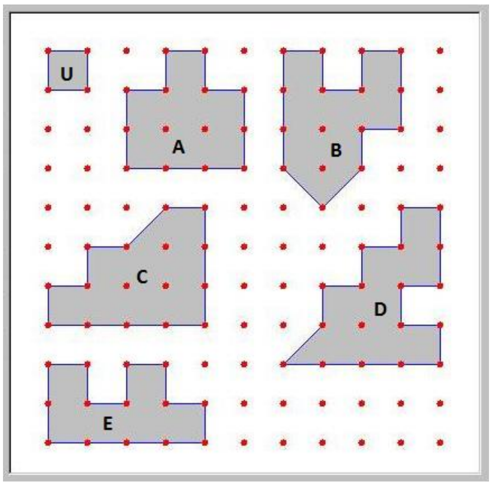
Como ninguém respondeu, fui até a parede e, com a ponta do pé, toquei o rodapé da parede e perguntei:

Prof.ª Pesq.: — Gente, alguém sabe o que é isso?
Vários alunos — Parede.
Prof.ª Pesq.: — Sim. É uma parede. Mas estou falando disso aqui, essa parte que circula toda a parede, de fora a fora, menos na porta.
Aluna — É o rodapé
Prof.ª Pesq.: — Isso mesmo! É o rodapé. Quando o pedreiro quer assentar o rodapé, ele calcula o perímetro ou a medida do contorno. Como é que eu faço para medir o perímetro desse laboratório.
Lucas: — É só pegar uma trena e medir tudo.
Saulo: — Pode também medir os lados e somar, pois são iguais. [apontando para a parede da frente e de trás da sala e para as paredes laterais].

Depois dessa conversa, pedi a eles para construírem as figuras da atividade 1 do roteiro (ANEXO B) que distribuímos. Combinei que responderíamos as perguntas juntos. Como em cada computador ficavam 2 alunos, isso os levavam a dividir as responsabilidades e a discutir permanentemente as respostas.

A primeira atividade, mostrada na figura 75 a seguir, pedia para construir figuras poligonais e a calcular as áreas correspondentes, estabelecendo comparações entre as medidas.

ATIVIDADE 1: Construa, no geoplano virtual, as seguintes figuras:



a) Calcule a área de cada uma das superfícies construídas.

b) Que superfícies têm a mesma área?

c) Encontre duas superfícies que tenham áreas diferentes e diga qual delas tem área maior.

d) Quando é que duas superfícies têm a mesma área?

e) Quando podemos afirmar que a área de uma superfície é maior do que a de outra superfície?

Figura 75. Atividade 1 do roteiro feito para o Laboratório

Antes de iniciar a atividades, retomamos o conceito de perímetro, por contagem de unidades lineares (lado do quadradinho) e o conceito de área, por contagem de unidades quadradas:

> Prof.ª Pesq.: — Aí no geoplano, para medir o perímetro nós vamos contar os lados do quadradinho e para medir a área nós vamos contar quadradinhos. Certo?
>
> Todos: — Certo.

A dificuldade inicial deles foi compreender que a diagonal era maior que o lado. No caso da figura B, por exemplo, não poderiam dizer que o perímetro era igual a 14, mas maior que 14. Vencida essa dificuldade, eles calcularam todos os perímetros. Em seguida, pedi que calculassem a área, como era solicitado no item a). Conversamos que a medida do perímetro era dada em unidades (u), pois era medida de comprimento e a medida da área era da em unidades quadradas (u²), pois era medida de superfície

Nesse momento, aconteceu algo muito interessante, dois alunos me chamaram e, mostrando a tela do computador deles, um disse:

> Tadeu — Professora, olha só o que eu descobri. Não precisa contar quadradinhos para calcular a área. Se eu clicar em uma figura e clicar em medidas, o computador dá o resultado, olha só que legal!

Tadeu, então, me mostrou que, clicando na primeira figura e clicando em medidas, apareciam as medidas do perímetro e da área, conforme mostram as figuras 76 e 77 a seguir.

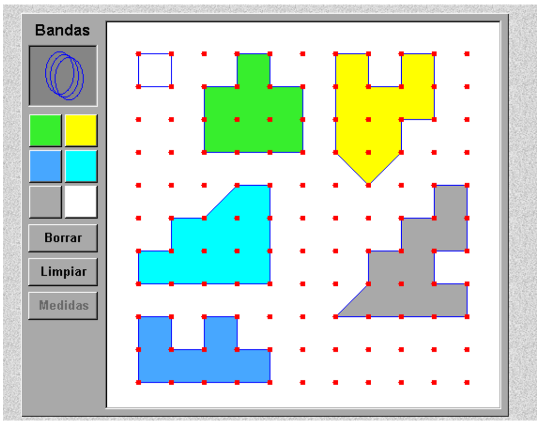


Figura 76. Tela com as figuras poligonais construídas no geoplano virtual

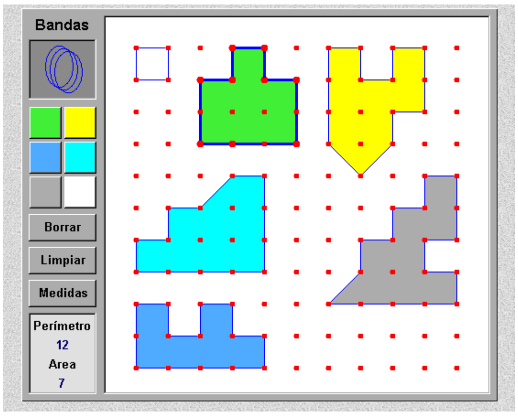


Figura 77. Tela com as medidas do perímetro e da área no geoplano virtual

Não me restou outra alternativa a não ser pedir que ele conferisse para ver se estava certo, pois no planejamento não havíamos previsto esta descoberta. Rapidamente ele conferiu e respondeu:

Tadeu: — Legal mesmo. Mas é um segredo, tá? Não conta prá ninguém. Deixa eles descobrirem.

Não demorou muito e todos já haviam feito “a descoberta”, o que serviu para justificar que o perímetro da figura B era realmente maior que 14.

Helena: — Tá dizendo aqui que o perímetro da B é catorze vírgula oitenta e três[apontando para o valor 14,83 na tela do computador]. Esse ladinho aqui é maior que um mesmo. [apontando para a diagonal]
Gisele: — Mas dá para ver só de olhar que é maior.

Respondemos as perguntas juntos e, então, pedi que passássemos à segunda atividade, mostrada na figura 78, a seguir.

ATIVIDADE 2: Construa no geoplano virtual retângulos cujos lados são dados na tabela abaixo

Lado 1	**Lado 2**	**Área**
3	**4**	
5	**7**	
2	**3**	
8	**5**	
3	**6**	

a) Calcule a área de cada um deles.
b) É possível calcular a área dos retângulos sem contar quadradinhos? Explique.
c) Construa no geoplano, retângulos de área 12. Quais são as medidas dos seus lados?
d) Construa no geoplano, retângulos de área 24. Quais são as medidas dos seus lados?

Figura 78. Atividade 2 para o Geoplano Virtual

Todos calcularam as áreas e registraram no papel e, em conversas paralelas, eu ouvia.

> George: — Tá vendo: um lado é 3 e outro é 4, então a área é 12.
> Saulo: — É mesmo. Nem precisa contar quadradinhos, é só multiplicar. Aqui, um lado é 5 e o outro é 7, então a área é 35 [olhando para as anotações no roteiro].

A fala de Saulo evidenciou um processo de conceitualização. Ele observou e percebeu que havia uma regularidade: para calcular a área bastava multiplicar um lado pelo outro. Saulo transitou entre diferentes registros de representação (DUVAL, 2009, 2011) ao construir e observar o retângulo no computador, registrar as medidas dos lados no papel e verbalizar o seu pensamento.

A professora Leila, a todo momento, me olhava com olhar de quem estava gostando do que via. No laboratório, o comportamento dela também era diferente. Ela andava pelo laboratório inteiro, tirava dúvidas, fazia perguntas. Em sala, seu comportamento era mais estático e a área de circulação, na maioria das vezes, se limitava ao espaço mais próximo do quadro de giz.

Quando todos terminaram, conferimos o resultado encontrado para cada área e, então, eu perguntei.

> Prof.ª Pesq. : — E, então gente, a que conclusão nós podemos chegar? [silêncio]

Diante do silêncio, eu tive que mudar a pergunta:

> Prof.ª Pesq.: — O que eu estou perguntando é: tem jeito de calcular a medida da área sem ser contando quadradinhos?
> Saulo: — Tem sim, professora, é só multiplicar um lado pelo outro lado.

No fragmento acima, ficou claro como o silêncio ou a ausência de enunciados provoca uma espécie de réplica. Diante do silêncio dos alunos, ao invés de fazer uma antecipação, aproximei minha fala fazendo a tradução do que queria dizer com o enunciado anterior. Tal procedimento buscou a manutenção do diálogo, pois se fosse feita a antecipação, o diálogo muito provavelmente se encerraria ou tomaria um outro rumo.

O episódio mostrou também que, de fato, Saulo havia compreendido como calcular a medida da área, sem contar quadradinhos.

Pedi, então, para que fizessem a letra c) da atividade. Nesse momento, aconteceu um diálogo interessante entre três colaboradores diretos da minha pesquisa. No momento em que pedi que todos “limpassem” o geoplano e construíssem um retângulo de área 12, Wilson falou:

Wilson: — Não dá.
George: — Dá sim. Eu já construí o meu.
Wilson: — Mas no geoplano só cabe 10.
Saulo: — Dá sim, Wilson. Nós já fizemos o nosso.

Ao dizer que dava e que já até havia construído o seu, George pensa no seu próprio fazer e no fazer do Wilson, em um processo metacognitivo de autorregulação (FÁVERO, 2005a) que o permite comparar o seu fazer com o fazer do outro. Mas, ao fazer isso, ele induziu Wilson também a fazer o mesmo. Wilson, então, olhou o computador de George e falou:

Wilson: — Ih! É mesmo, eu estava pensando em doze, mas é a área que é doze.
George: — Cabe. Eu fiz um três por quatro.

O diálogo mostra que, no contexto da situação concreta, “meias palavras” ou “meias frases são plenamente compreendidas. Quando Wilson disse “eu estava pensando em 12”, ficou subentendido em sua fala que ele estava pensando na largura do geoplano. George não estranhou o seu enunciado e o complementou: “cabe. Eu fiz um três por quatro”. Wilson, então, voltou ao seu computador e construiu um retângulo três por quatro (3 x 4). Nesse momento, achei que era hora de intervir, então, perguntei:

Prof.ª Pesq.: — Tem outro retângulo, diferente do três por quatro, que tem área igual a doze?
Wilson: — Eu também fiz um três por quatro.
Tadeu: — Eu fiz um dois por seis.
Gisele: — Tem também o quatro por três.
Helena: — Tem também o seis por dois
Wilson: — Tem também o um por doze, mas aí não cabe no geoplano.

Nesse momento, foi possível perceber que o erro do Wilson e sua interação como os colegas o conduziu a um processo metacognitivo importante, que possibilitou a autorregulação e a reconstrução do que estava pensando (FÁVERO, 2005a). Wilson foi o único aluno a perceber que o retângulo um por doze (1 x 12), também tinha área igual a doze (12).

Ao final da atividade, a Professora Leila disse para a turma:

Prof.ª Leila: — Olhem para o piso aqui do laboratório. Estão vendo esse quadrado, ele tem um metro de lado, então ele é um metro quadrado, certo?
Todos: — Certo.
Prof.ª Leila: — Como é que eu faço para calcular a área dessa sala?
Saulo: — É fácil, professora, é só medir.
Prof.ª Leila: — Mas nós não temos trena aqui...

Saulo, então, ficou em pé e disse:

Saulo: — Professora, é só medir, quer dizer, contar os quadrados.
Prof.ª Leila: — Todos os quadrados?
Saulo: — Não precisa. É só contar assim e assim. [apontando para a largura e o comprimento da sala.

Ao dizer isso, Saulo demonstrou apropriação do importante conceito de que "medir é comparar" (MUNIZ; SILVA; BATISTA, 2008, p. 59). Ele tomou como referência o quadrado do piso da sala e sabia que, se realizasse a contagem, chegaria à medida da área em função desse quadrado. Mas ele foi além e mostrou também apropriação do conceito de área ao afirmar que bastava contar os quadrados que compõem a largura e o comprimento da sala e, em seguida, multiplicar. Nesse momento, a professora Leila validou seu raciocínio, estimulando-o a contar, como mostra a figura seguir:

Prof.ª Leila: — Então, conta, Saulo

Saulo fez a contagem, mas como estava bastante excitado com a situação, pulou um. A professora, então, deixou que ele terminasse e ela própria, pisando de quadrado em quadrado, fez a contagem e disse para Saulo:

Prof.ª Leila: — São doze e não onze. Agora conta quantos tem na largura.
Saulo: — Seis. [pisando em alguns dos quadrados e fazendo a contagem com os olhos]
Prof.ª Leila: — Então, gente qual é a área do laboratório? [silêncio]
Gisele: — Setenta e dois.
Prof.ª Leila: — Setenta e dois, o quê?.
Todos — Metros quadrados

Os demais alunos da sala acompanhavam atentamente o diálogo entre a professora Leila e Saulo, e muitos, assim que terminaram a contagem, efetuaram a multiplicação que resultou em 72 metros quadrados de área. Depois do episódio, fomos ao quadro e sistematizamos a ideia de que, para calcular a área de qualquer figura poligonal retangular, é necessário e suficiente multiplicar um lado pelo outro lado.

Esse episódio confirma o potencial do laboratório no desenvolvimento de atividades matemática centradas na interação e no diálogo e mostra também o potencial de um simples aplicativo (geoplano virtual) como mediador da aprendizagem matemática. Mostra, por fim, que nesse ambiente, embora o professor tenha um papel importante, ele se desloca para uma função mais mediadora da construção do aluno.

4.4.3.O diálogo no contexto da aprendizagem da Álgebra

Diferentemente dos conceitos geométricos, os conceitos algébricos foram trabalhados por um longo período de tempo, tanto na pesquisa exploratória como na pesquisa de campo, propriamente dita. Por esse motivo, a variedade de atividades e de diálogos observados foi muito maior.

Como já foi dito, diante de exercícios algébricos foi possível observar não apenas que os diálogos eram caracterizados por incompreensões, interrupções e silêncios, mas também pelo surgimento de uma produção diversa, já mostrada na categoria 3 desse trabalho, principalmente porque o estudante buscava ancorar seu pensamento em ações mais próximas do campo da aritmética, sua velha conhecida.

Ficou bastante evidente que a maioria dos estudantes seguia os procedimentos de resolução utilizados pelo professor em sala de aula. É o caso, por exemplo, do monitor Paulo que, para resolver o exercício que pedia para calcular a medida do perímetro e da área de figuras poligonais, mostrado novamente na figura 79, a seguir, realizou a soma algébrica e a multiplicação de polinômios exigidas, em linha (figura 80), reproduzindo o modo de fazer da professora. Para Paulo, o custo desse tratamento (DUVAL, 2009) parecia baixo, tanto que o utilizou reiteradamente sem qualquer dificuldade.

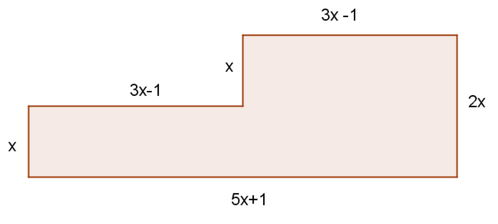


Figura 79. Exercício mimeografado – pesquisa exploratória

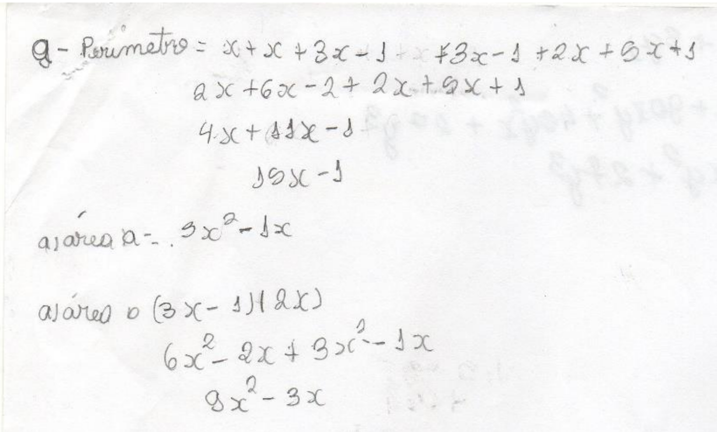


Figura 80. Resolução do exercício por Paulo – 13 anos

Tal procedimento era tão elementar para Paulo que ele realizava os cálculos rapidamente e sem enunciar qualquer dúvida. Observe que, para calcular a área, ele decompõe a figura em duas, que chama de “área a” e “área b”, mas, em ato contínuo, já soma ao cálculo da primeira área o cálculo da segunda área, chegando à expressão algébrica da área total.

Mas nem sempre esse tratamento (DUVAL, 2009) era realizado sem um custo muito alto para o aluno. É o caso, por exemplo, de Arthur que, após inúmeras tentativas de somar em linha, pergunta:

Arthur:	— Professora, posso somar os pedaços?
Prof ª Pesq. :	— Como assim
Arthur:	— É somar um pedaço com o outro pedaço
Prof ª Pesq. :	— Faz aí para eu ver.

Ele, então, fez o registro, mostrado na figura 81, a seguir:

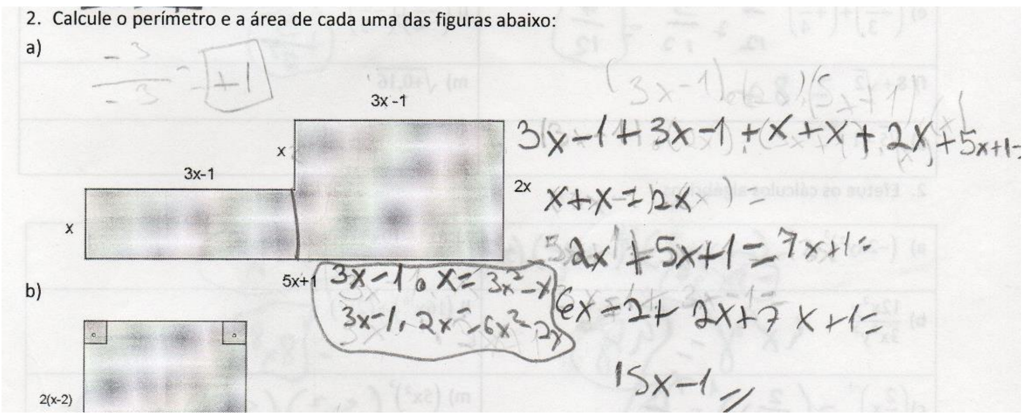


Figura 81. Resolução do exercício por Artur – 13 anos

É importante observar que o registro de Arthur mostra inúmeras tentativas que são apagadas até que ele resolveu “somar os pedaços”, ou somar termos que para ele tinha alguma semelhança, decompondo a figura em partes. Ele soma x com x, depois soma 2x (lateral direita da figura) com 5x+1 (base da figura) e, por fim, mentalmente, soma 3x –1 com 3x –1, que compõe a base superior da figura. Ao resultado do cálculo mental, ele acrescenta as somas parciais obtidas para achar a expressão algébrica que dá o perímetro da figura poligonal. Para encontrar a expressão algébrica da área da figura, ele a decompõe em duas, faz corretamente os cálculos parciais de cada área, mas não chega a registrar a expressão que dá a área total.

Mas o custo desse tratamento (DUVAL, 2009), para alguns, parece ser alto demais. Fazendo a atividade sozinhos, sem a mediação dos colegas ou da pesquisadora, eles não conseguem resolver corretamente o exercício, como mostra a figura 82, a seguir:

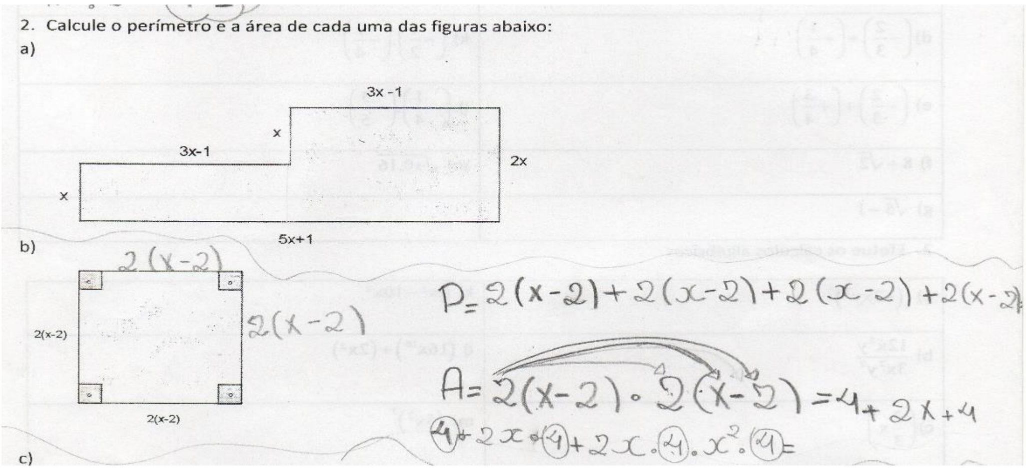


Figura 82. Resolução do exercício por Vânia – 14 anos

No item b), Vânia apenas registrou as quatro parcelas da soma, demonstrando saber que, para calcular o perímetro, precisava somar as medidas dos lados, mas não chegara a desenvolver a soma. Vânia também demonstrou saber que, para calcular a medida área, tinha que multiplicar um lado pelo outro, no entanto, evidenciou dificuldade em efetuar a multiplicação de um polinômio por outro polinômio. Ao tentar calcular a expressão algébrica da área, evocou o processo que envolve o uso da propriedade distributiva, mas se atrapalhou ao tentar realizar a distributividade e também com as regras do sinais. Isso evidenciou sua dificuldade de lidar com as propriedades e regras internas do sistema semiótico de referência que é o sistema algébrico, o que resultou em tratamento inadequado (DUVAL, 2009, 2011).

Outros estudantes, no entanto, sequer realizaram o mesmo tratamento (DUVAL, 2009) utilizado pela professora. Como o custo parece alto demais, aproximaram-se de um raciocínio mais aritmético, realizando a soma em colunas, como mostrado na figura 83 a seguir:

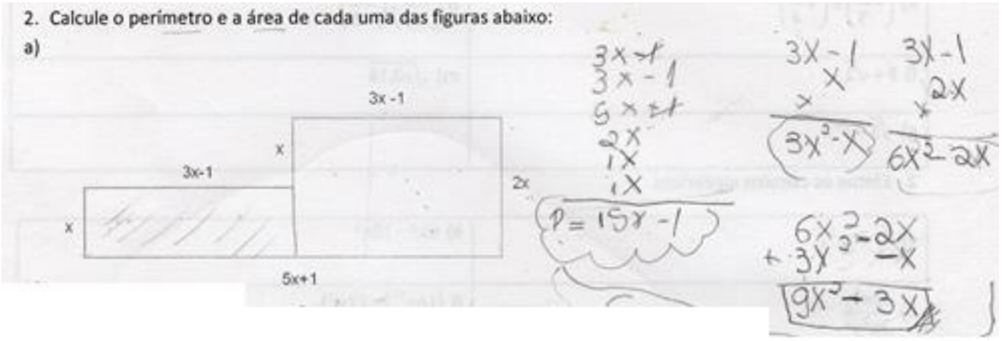


Figura 83. Resolução do exercício por Bianca – 14 anos

O protocolo mostra que Bianca, como diversos outros estudantes, diante do custo de efetuar os cálculos em linha como fazia a professora, somou e multiplicou como se estivesse efetuando adições e multiplicações com números naturais, embora, como pode ser visto, no cálculo do perímetro e no cálculo da área final, utilizasse as regras de sinais próprias dos números inteiros. Ao ser questionada sobre quem a havia ensinado a fazer dessa forma, Bianca se preocupou primeiro em perguntar se estava errado, como mostra o fragmento a seguir:

Prof ª Pesq. : — Quem te ensinou a fazer assim, Bianca?
Bianca: — Tá errado?
Prof ª Pesq. : — Não. Tá certinho.
Bianca: — Uai, professora, o perímetro não tem que somar todos lados?
Prof ª Pesq. : — E a área?
Bianca: — Tá aqui ó [apontando para o cálculo].
Prof ª Pesq. : — Você somou...
Bianca: — É duas, ué! Essa e essa [apontando para a figura].
Prof ª Pesq. : — É que você faz diferente da professora.
Bianca: — É que aprendi com Juliana.

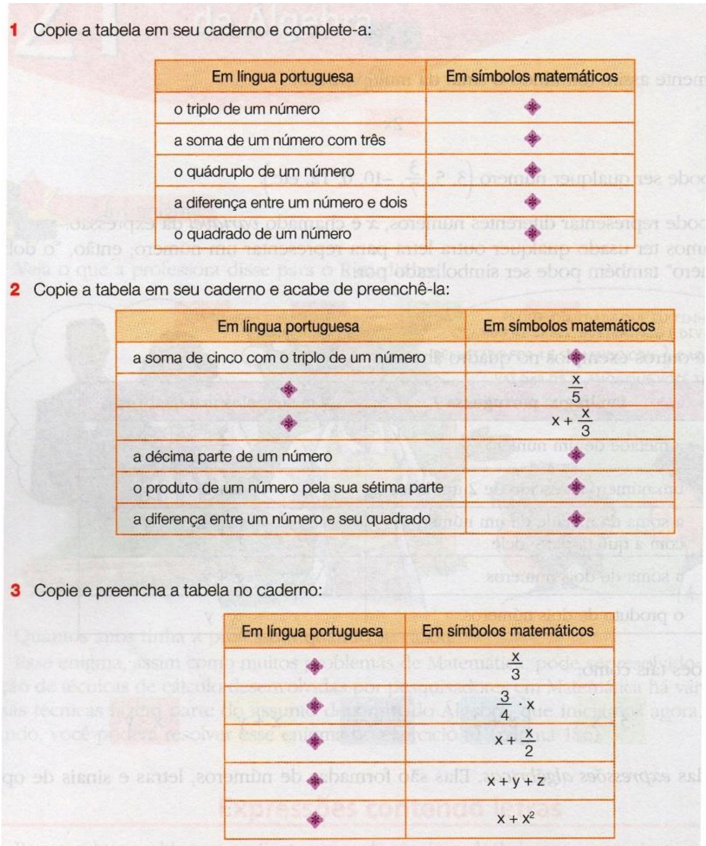
Para Bianca, parecia evidente que, para calcular o perímetro, era só somar todos os lados, o que evoca o algoritmo da adição de naturais e, para calcular a área, era só multiplicar um lado do retângulo pelo outro, o que evoca o algoritmo da multiplicação. Assim, o tratamento (DUVAL, 2009, 2011) dado ao cálculo era bastante diferente do utilizado em sala de aula pela professora.

4.4.3.1.O início dos estudos algébricos na pesquisa de campo

Na pesquisa de campo, os estudos de álgebra iniciaram-se em agosto e prosseguiram por todo o segundo semestre. No primeiro encontro sobre álgebra, a professora Leila se utilizou de um minidicionário para definir que “álgebra é parte da matemática que estuda as leis e processos formais de operações com entidades abstratas” (FERREIRA, 1994, p. 30). Na sequência, ela deu exemplos de coisas abstratas e concretos. Disse, por exemplo, “felicidade é algo abstrato e cadeira é algo concreto”. Observei que a turma estava prestando atenção na conversa, mas as expressões mostraram que não compreendiam o que ela estava dizendo.

Em seguida, fazendo referência à aritmética, a professora explicou como representar o dobro de um número, primeiro utilizando números e, em seguida, representando a expressão algebricamente. Por último, mostrou como escrever o dobro de um número mais cinco, a metade de um número, dentre outros exemplos. O que a professora estava fazendo é o que Duval (2009) chama de “conversão”, ou seja, a transformação de um registro oral em um registro escrito e algébrico, mas a ação era muito mais sua do que dos alunos.

Em seguida, a professora propôs a resolução dos exercícios 1, 2 e 3 da página 164, do livro, mostrados na figura 84 a seguir, que trata de converter (DUVAL, 2009, 2011) para registros algébricos, expressões ou registros em língua portuguesa e vice-versa.



1 Copie a tabela em seu caderno e complete-a:

Em língua portuguesa	Em símbolos matemáticos
o triplo de um número	◆
a soma de um número com três	◆
o quádruplo de um número	◆
a diferença entre um número e dois	◆
o quadrado de um número	◆

2 Copie a tabela em seu caderno e acabe de preenchê-la:

Em língua portuguesa	Em símbolos matemáticos
a soma de cinco com o triplo de um número	◆
◆	$\frac{x}{5}$
◆	$x + \frac{x}{3}$
a décima parte de um número	◆
o produto de um número pela sua sétima parte	◆
a diferença entre um número e seu quadrado	◆

3 Copie e preencha a tabela no caderno:

Em língua portuguesa	Em símbolos matemáticos
◆	$\frac{x}{3}$
◆	$\frac{3}{4} \cdot x$
◆	$x + \frac{x}{2}$
◆	$x + y + z$
◆	$x + x^2$

Figura 84. Exercícios do livro (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009, p. 164)

Os alunos resolveram o primeiro exercício sem muita dificuldade, mas estranharam algumas expressões:

Gisele: — Professora, vem cá. O que é diferença?
Prof.ª Leila: — É menos. A diferença entre um número e dois é um número menos dois.

Gisele: — Quadrado, eu não entendi. [Se dirigindo a mim]
Prof.ª Pesq.: — Lembra de potências? Lá você não calculava, por exemplo, três ao quadrado? [escrevendo o registro 3^2 no caderno]
Gisele: — Humhum... Que dá seis, né, professora?
Prof.ª Pesq.: — Não. O expoente mostra quantas vezes...
Gisele: — Ah! Lembrei. Dá nove. É três vezes três.
Prof.ª Pesq.: — Isso. Então, três ao quadrado é nove, ou o quadrado de três é nove, certo?
Gisele: — Humhum...
Prof.ª Pesq.: — Então... Aqui é o quadrado de um número. Um número qualquer, então...
Gisele: — É o quadrado de x. Pode ser x, não pode?
Prof.ª Pesq.: — Pode. Pode ser qualquer letra. Escreve.
Gisele: — É... x ao quadrado [falando lentamente enquanto escrevia x^2]
Prof.ª Pesq.: — Isso. Muito bem.
Gisele: — Mas professora, x ao quadrado é x vezes x, vai dar...
Prof.ª Pesq.: — Depende. Se o x for três, dá nove. Se o x for cinco dá vinte e cinco, não é? O x pode ser qualquer número.
Gisele: — Acho que entendi.

No diálogo com Gisele, é possível perceber lapsos de compreensão tanto em relação à conceitos matemáticos como diferença e quadrado, como em relação à linguagem algébrica. Ela conseguiu chegar na expressão x^2, mas ficou esperando por um resultado concreto, por isso, enunciou “x ao quadrado é x vezes x, vai dar...”

Mas isso se repetiu com vários alunos. Percebi que muitos seguiram o procedimento da professora, mas não houve qualquer compreensão mais profunda do que estavam fazendo. Após muitas perguntas, em um dado momento, a professora foi ao quadro e explicou:

Prof.ª Leila: — O dobro de z é duas vezes z. [registrando no quadro 2z]
Lucas: — Mas, professora, quanto vale z?
Prof.ª Leila: — Z pode ser qualquer número.

Esse pequeno fragmento mostrou que a álgebra era, para os alunos, uma nova linguagem e que havia obstáculos a serem superados na aprendizagem dos conceitos algébricos; no entanto, a sala de aula, com seus diálogos curtos, interrompidos e fragmentados não favoreciam que acontecesse essa superação. O diálogo entre Lucas e a professora foi interrompido por um aluno que tinha dúvida em outro exercício e ele, então, ficou pensativo, olhando para o quadro, com a expressão de quem não havia compreendido.

No segundo exercício, a dificuldade aumentou significativamente. Na “conversão” (DUVAL, 2009) das expressões algébricas $\frac{x}{5}$ e $x+\frac{x}{3}$ para a linguagem escrita natural, os estudantes demonstraram muita dificuldade, como mostra o fragmento a seguir:

Tadeu: — Professora, aqui é x quintos? Como escreve.
Prof.ª Pesq.: —A fração um quinto representa o que?
Tadeu: — Uai, um quinto é um quinto.
Prof.ª Pesq: — É, mas se eu divido um chocolate em cinco partes e te dou uma. Você ganhou...
Tadeu: — Um quinto.
Prof.ª Pesq: — Pois é, mas é que parte do chocolate, metade.
George: — É a quinta parte do chocolate.
Prof.ª Pesq.: — Isso. Então a expressão $\frac{x}{5}$ é o mesmo que a quinta parte de...
George: — A quinta parte de x, então escreve isso?
Prof.ª Pesq.: — Isso. E a outra? [apontando para $x+\frac{x}{3}$]
Tadeu: — Um número somado com...
George: — Com a terça parte de um número.
Prof.ª Pesq.: — Como o número é x e é o mesmo número, podemos escrever "um número somado com a sua terça parte.
Ambos: — Hummm...

As dificuldades dos alunos podem ser associadas tanto aos obstáculos relacionados a compreensão do significado da fração, como ao fato de que não há "congruência semântica entre as representações" (DUVAL, 2009, 2011). Ao ler a expressão $\frac{x}{5}$, o aluno pensa no x e no cinco enquanto representação fracionária e, por isso, diz "x quintos", transferindo a lógica da leitura em língua materna para a leitura da linguagem matemática. No entanto, o que se espera é que ele diga "a quinta parte de um número". Como as unidades de sentido do registro simbólico algébrico não correspondem às unidades de sentido do registro na linguagem oral ou escrita, podemos dizer que não há congruência semântica entre os registros (DUVAL, 2009, 2011).

Após a correção do exercício, a professora explicou que uma expressão algébrica é uma sentença matemática que envolve letras e números. Ela deu alguns exemplos, como os mostrados na figura 85 a seguir.

$$3x + 4$$

$$-10y + 5x + 10w$$

$$x^2 - 3x - 10$$

Figura 85. Transcrição das expressões escritas no quadro pela professora

Em seguida, ela escreveu no quadro os exercícios mostrados na figura 86, a seguir, e disse que, para responder, eles teriam que utilizar uma expressão algébrica.

1)Um caderno, em reais, tem o preço representado por x.

✓O preço do compasso é o dobro do caderno:

✓O lápis custa R$3,00 a mais que o caderno. ✓O livro custa o dobro do caderno mais R$18,00 ✓A régua custa a metade do preço do caderno menos R$1,00.

Figura 86. Transcrição do exercício escrito no quadro de giz

Antes de terminar de escrever o exercício no quadro, um aluno perguntou:

Lucas: — Professora, quanto custa o caderno?
Prof.ª Leila: — X reais, ou seja, o caderno pode custar qualquer valor. Por exemplo, se o caderno custasse oito reais, quanto custaria o compasso?
Gisele: — O dobro?
Prof.ª Leila: — E quanto é o dobro?
Gisele: — Como assim?
Prof.ª Leila: — O caderno custa oito reais, então, o compasso custa...
Gisele: — Ah! Entendi. O compasso custa dezesseis que é o dobro.

Novamente percebemos o lapso de compreensão dos estudantes em relação à linguagem algébrica. Embora esteja escrito que o caderno custa x reais, o estudante perguntou pelo preço concreto do caderno. E mesmo a estudante Gisele, que tentou responder ao questionamento da professora quanto ao preço do compasso, o fez a partir do que estava escrito. Ela sabia que é dobro porque estava escrito que é dobro, mas quando a professora reiterou a pergunta, ela questionou “como assim?”, então a professora precisou lembrá-la de que o caderno custava oito reais, para que ela lembrasse que é o dobro de oito, portanto, dezesseis.

A professora então continuou escrevendo no quadro o restante do exercício mostrado na figura 87 a seguir.

Em seu caderno continue a representar outros preços usando as expressões necessárias: a)A caneta custa o triplo do preço do lápis. b)A mochila custa R$15,00 a mais que o caderno. c)A pasta custa a metade do preço do caderno. d)O esquadro custa R$1,00 a menos que a pasta. e)O preço do estojo é igual ao triplo do caderno menos R$8,00 f)Se o preço do caderno fosse igual a R$10,00 qual seria o preço dos seguintes itens: 1)Caneta 2)Lápis 3)Mochila 4)Esquadro 5)Estojo

Figura 87. Transcrição do exercício dado no quadro de giz

Apenas parte do exercício, foi feito em sala. A professora ia falando e alguns poucos alunos respondiam. Os demais apenas copiavam.

Como já era esperado, alguns alunos apareceram no turno contrário com os exercícios para fazer.

O episódio, a seguir, evidencia os obstáculos enfrentados pelos estudantes com a linguagem algébrica.

Prof.ª Pesq.: — Como podemos representar o preço do estojo?
Gisele: — O preço do estojo é igual ao triplo do caderno menos oito.
Prof.ª Pesq.: — Hum... pensem aí e me falem.
Gisele: — É três mais...
Tadeu: — Então, eu posso fazer assim ó, professora: coloco o três e o oito embaixo assim [Fala e escreve no papel $\frac{3}{8}x$].
Wilson: — Não é assim. Eu vou escrever o três, o x e oito do lado.
Prof.ª Pesq.: — Faz aí para eu ver. É o triplo não é? De quem?
Tadeu: — Do caderno.
Prof.ª Pesq.: — E quanto é o caderno?
Tadeu: — É o oito multiplicado três vezes.
Wilson: — Não, não é.
Gisele: — Não é.
Prof.ª Pesq.: — Então, é o que? O triplo do caderno é quanto.
Gisele: — É três x.
Prof.ª Pesq.: — Aham! Continua.
Tadeu: — E esse oito? Vai onde?
Wilson: — É o triplo menos oito, então é três x menos oito. [Escreve no papel 3x – 8.]
Prof.ª Pesq.: — Muito bem, Wilson! Muito bem! Agora, explica para os seus colegas.
Wilson: — Você escreve o três do lado o x e o menos oito [Fala apontando para o que tinha escrito].
Gisele: — Eu sei explicar. É por causa que o preço do estojo a gente não sabe, mas é igual ao triplo do caderno que é x, então a gente escreve 3x.
Wilson: — É isso e menos o oito [fala complementando a ideia de Gisele]
Prof.ª Pesq.: — Parabéns, Wilson!

No processo de “conversão” (DUVAL, 2009) da expressão escrita relativa ao preço do estojo para a linguagem algébrica, Gisele sabia que o triplo se referia a três, por isso, disse “três mais”, mas esqueceu-se de que é o triplo do caderno que tem um preço x. Tadeu sabia que era 3x, mas não sabia o que fazer com o “oito” e, então, sugeriu que ele fosse o denominador da expressão. Wilson, então, fez a intervenção e disse como deveriam ficar todos os signos na expressão, “Eu vou escreve o três, o x e oito do lado.” Ao dizer isso, Wilson apontou a congruência semântica entre os dois registros (DUVAL, 2009). Mesmo quando Tadeu enunciou uma expressão “é o oito multiplicado três vezes”, Wilson não se deixou levar pela aparente segurança do colega e protestou: “não, não é” e assim conseguiu a adesão de Gisele, que também afirmou que não era. A ação de Wilson provocou em Gisele a autorregulação (FÁVERO, 2005a) que a possibilitou reconstruir o seu pensamento e ela enunciou: "é três x". Nesse momento, embora desconfiando que minha presença já não era mais necessária, tento estimular para continuarem o raciocínio. Tadeu, então, às voltas com o que fazer com oito, questionou: "e esse oito? Vai onde?" Novamente, Wilson apontou a posição de cada termo na expressão dizendo: "você escreve o três, do lado o x e o menos oito" e mostrou o registro em seu caderno. Ao fazer isso, Wilson mostrou que as unidades de sentido dos dois registros eram correspondentes (DUVAL, 2009). Sem que houvesse solicitação minha, Gisele, em um enunciado argumentativo, explicou a expressão algébrica e assim fez nova conversão (DUVAL, 2009) ao passar o registro da linguagem algébrica para a linguagem natural: "é por causa que o preço do estojo a gente não sabe, mas é igual ao triplo do caderno que é x, então a gente escreve três x" e, antes que ela concluísse, Wilson complementou "é isso e menos o oito", demonstrando que o registro escrito, o registro algébrico e o registro da fala natural faziam sentido também para ele.

Vale ressaltar, ainda nesse episódio, o papel dos elogios na validação dos processos cognitivos enunciados pelos alunos. Normalmente, após o elogio, a expressão corporal mudava, os alunos elogiados endireitavam o corpo na cadeira, olhavam para os colegas e riam muito.

Prof.ª Pesq.: — Gente, e o livro, lá no início?
Tadeu: — É dois x mais dezoito porque é o dobro do caderno mais dezoito.

É interessante observar que, momentos antes, Tadeu não sabia construir o registro algébrico para o preço do estojo, no entanto, a interação e o diálogo com os colegas e comigo permitiram que ele reconstruísse o seu fazer, em um processo metacognitivo de regulação (FÁVERO 2005a) que o possibilitou realizar o exercício seguinte.

No episódio a seguir, estimulei-os a resolver a letra f) do exercício que implicava calcular o valor numérico da expressão. Para minha surpresa, Wilson se negou a calcular o preço do lápis porque ele era mais caro que o caderno. Ele trouxe para a escola o conhecimento de vida que desestabilizava o conhecimento escolar.

Prof.ª Pesq.: — E quanto dava o preço do livro, se o caderno fosse dez reais?
Gisele: — Pera ai, professora. O dobro de dez é vinte mais dezoito dá... trinta e oito [para responder fez uma continha no caderno somando 20 com 18].
Prof.ª Pesq.: — Vamos voltar para o primeiro que é o preço da caneta. Tá dizendo aqui que a caneta custa o triplo do preço do lápis. Como é que fica?

Gisele — Mas a gente não sabe o preço do lápis.
Prof.ª Pesq.: — Lá no outro a gente não viu que o preço do lápis era x mais três?
Gisele: — É... Mas como é que fica, então, o triplo do lápis?
Prof.ª Pesq.: — Como é que fica, gente?
Tadeu: — É três vezes.
Prof.ª Pesq.: — Três vezes o que?
Tadeu: — O preço do lápis.
Prof.ª Pesq.: — E quanto custa o lápis?
Wilson: — Não tem o preço.
Tadeu: — É três vezes x mais três [escrevendo 3.x + 3 e ignorando o que Wilson e Gisele haviam dito]

Embora eu tentasse fazê-los enunciar o preço da caneta em função do preço do lápis que, por sua vez, estava em função do preço do caderno, apenas Tadeu falou que eram "três vezes x mais três", Gisele e Wilson falaram categoricamente, não deixando espaço para discussão, que o lápis não tinha preço. Como Tadeu escreveu a expressão, eu continuei.

Prof.ª Pesq.: — Tadeu, do jeito que você escreveu, apenas o x está multiplicado por três.
Tadeu: — Tem que colocar parênteses, professora?
Prof.ª Pesq.: — Tem, Tadeu.
Tadeu: — A professora Leila já disse isso. O três vai com todo mundo, por isso tem que colocar parênteses [Risos].
Prof.ª Pesq.: — Isso mesmo Tadeu, o três vai com todo mundo [risos]. Ele multiplica o x e também o mais três.
Wilson: — Professora, mas o preço do lápis não é treze reais? Então o preço da caneta é três vezes treze que dá trinta e nove. [mostrando aborrecimento] — Não pode.
Prof.ª Pesq.: — É mesmo, Wilson. É treze. Mas não pode ser, não é Wilson? [risos]

No episódio, Tadeu tomou emprestado (BAKHTIN, 2010) da fala da professora a expressão "o três vai com todo mundo". Ao evocar a fala da professora, ele reconstruiu o tratamento (DUVAL, 2009, 2011) que vinha dando à situação, introduzindo os parênteses na expressão 3x + 3.

O episódio mostra ainda que, embora aborrecido porque já havia enunciado que o lápis não poderia ter aquele preço, Wilson fez uma conversão (DUVAL, 2009, 2011) para a aritmética, quando disse que o preço do lápis era 13 e, portanto, a caneta só poderia ser 39.

Após essa fase inicial, os estudos de álgebra entraram em uma fase mais complicada para os alunos, principalmente porque a professora começou a trabalhar valor numérico de expressões algébricas e redução de termos semelhantes.

Como Helena andava afastada do projeto, em sala de aula pedi para ver seu caderno e percebi como a construção de conceitos algébricos é feita de avanços e recuos. Os registros, mostrados na figura 88 a seguir, foram feitos por Helena na resolução de exercícios no mesmo dia:

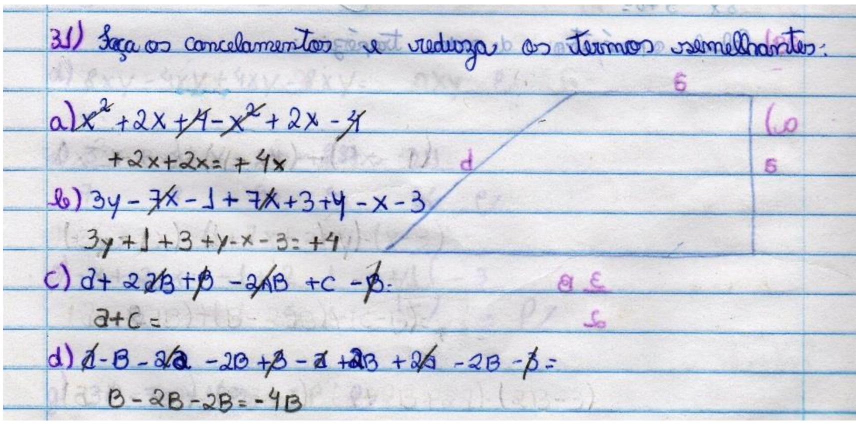


Figura 88. Registro feito por Helena para exercício do livro.

Observe que o tratamento (DUVAL, 2009) dado por Helena ao item a) do exercício, em que, após o cancelamento dos opostos, restam apenas termos semelhantes e de coeficientes diferentes de um, a conduz a uma resposta correta, mas na letra d), em que restam também termos semelhantes, mas um dos termos tem coeficiente igual a 1, o tratamento a conduz a uma resposta incorreta. No item b), em que, após o cancelamento dos opostos, restam termos com coeficientes diversos e partes literais também diversas, Helena operou apenas com os coeficientes e chegou a uma resposta numérica. Já no item c), o fato de restarem apenas termos dessemelhantes e de coeficiente 1, não pareceu ter representado dificuldade para Helena.

Chamei a atenção de Helena de que havia erros em seu caderno e a convidei para voltar ao projeto:

Prof.ª Pesq.: — Helena, aqui na letra a está certinho, mas na b, não.
Helena: — Professora, eu tô com dificuldade. Minha nota piorou.
Prof.ª Pesq.: — Por que não volta para o projeto?
Helena: — Vou ver.
Prof.ª Pesq.: — Olha aqui a b está errada. Você somou tudo, esqueceu das letras.
Helena: — É letra com letra e número com número, né?

Embora a expressão "letra com letra e número com número" seja reiteradamente enunciada pelos estudantes, o que se percebe, na prática, são erros semelhantes ao de Helena e que, na maioria das vezes, passam despercebidos pela professora. Como já foi dito, a configuração espacial da sala de aula, o número de alunos e a opção por um trabalho pedagógico centrado na aula expositiva dificultam o acompanhamento dos alunos e de seus processos cognitivos. Nessa configuração, Helena, que é muito tímida, não consegue tirar suas dúvidas e no diálogo comigo diz que está com dificuldade e que sua nota piorou.

Mas é preciso dizer que a professora sempre demonstrou preocupação com a aprendizagem dos alunos. Antes de iniciar o estudo das equações, em um encontro na coordenação pedagógica, ela verbalizou essa preocupação:

4.4.3.2.A resolução de equações do 1º grau

Já em meados do segundo semestre, a Professora Leila perguntou minha opinião sobre como deveria trabalhar as equações.

Professora Leila:	— Vou começar a resolver equação com eles. Acho que vou utilizar a balança. Quero que eles compreendam o que acontece, o processo. Não quero que eles apenas decorem “passe para o outro com o sinal contrário”. Nunca trabalhei com 7º ano e estou em dúvida.
Prof.ª Pesqu.:	— Leila, eu sempre trabalho utilizando os princípios da igualdade, lembrando da balança.
Professora:	— Pensei em levá-los ao laboratório de informática e mostrar um aplicativo para equações que usa a balança.

Concordei com ela e disse que a ajudava. Sugeri o aplicativo *Algebra Balance Scales*, que pertence à *National Library of Virtual Manipulatives – NLVM*, da *Utah State University* – EUA, já descrito na página 150, na Categoria 1, quando tratamos do cenário do laboratório de informática.

Mas como já descrito também, a professora preferiu iniciar pelo jogo “Acerte a balança”, que faz parte de um conjunto de aplicativos de um *software* livre educacional, integrado à plataforma *Linux*.

No dia combinado, ainda em sala de aula, a professora disse apenas que eles teriam uma aula no laboratório e que nessa aula começariam a aprender a resolver equações. Falou para eles que resolver equações é encontrar um valor desconhecido. O fragmento a seguir mostra parte da conversa da professora com a turma:

Prof.ª Pesq.:	— Na expressão x + 5 = 13, quanto vale x?
Alguns alunos:	— Oito.
Prof.ª Pesq.:	— Tá vendo? Encontramos o valor de x que era desconhecido. Mas algumas equações não são simples como essa e vamos hoje começar a aprender como resolver.

A equação mostrada favoreceu que os estudantes encontrassem, mentalmente, o valor de x. A professora, então, resolveu dar outro exemplo e, desta vez utilizou a noção de balança. Ela disse:

Prof.ª Pesq.: — Uma equação é como uma balança de dois pratos, sabem? Daquelas que tem na feira...

Alguns alunos: —Aham...

Prof.ª Pesq.: — Então, veja essa equação [registrou no quadro 2a = 80 e continuou, apontando para o registro] — O primeiro membro, dois a, é um prato da balança e o segundo membro, oitenta, é o outro prato. Quanto vale a, gente?

Alguns alunos: — Quarenta.

Prof.ª Pesq.: — Isso. Quarenta. Mas olha só, se eu fizer assim como se fosse uma balança eu posso descobrir o valor de a, vejam

Novamente, a equação favoreceu a resolução mental, mas ainda assim a professora foi ao quadro e fez o registro pictórico, mostrado na figura 89 a seguir, dizendo que poderia dividir os dois lados da equação por 2 e, então teria a = 40. .

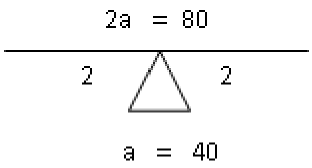


Figura 89. Transcrição do registro feito no quadro pela professora.

Os alunos permaneceram calados, mas ficou evidente que não tinham compreendido o que ela havia falado. Nesse caso, o silêncio dizia muita coisa. A falta de diálogo indica a ausência de uma conceitualização que impediu a alternância de enunciado, característica do diálogo (BAKHTIN, 2010) e limitou a possibilidade de fazer perguntas, réplicas, tréplicas.

A professora, então, deu outro exemplo, com a equação a + 50 = 450, fazendo no quadro o registro mostrado na figura 90, a seguir.

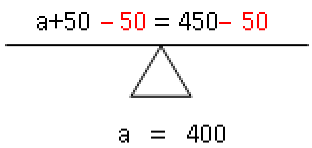


Figura 90. Transcrição do registro feito no quadro pela professora.

Ela prosseguiu em sua explicação:

Prof.ª Pesq.:	— A equação é como uma balança certo? Se eu tirar cinquenta daqui o que vai acontecer com a balança? [Fala apontando para o primeiro prato e escrevendo – 50 no primeiro membro].

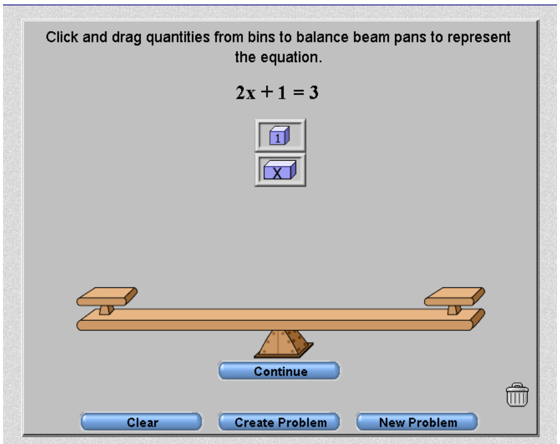
Como os alunos permanecem em silêncio, a professora continuou:

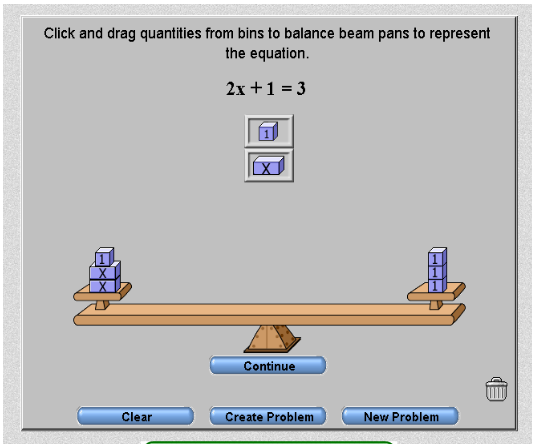
Prof.ª Pesq.:	— Gente, a balança vai ficar em desequilíbrio, não é? Vai cair para cá, diz apontando para o segundo membro.
Alguns alunos:	— Vai.
Prof.ª Pesq.:	— Então, o que a gente pode fazer para a balança equilibrar?
Tadeu:	— Tira cinquenta do outro lado também.
Prof.ª Pesq.:	— Isso. Aí a gente vai ter aqui só a e aqui [apontando para o segundo prato], vai ter quanto?
Alguns alunos:	— Quatrocentos

Embora alguns alunos prestassem atenção e respondessem as perguntas da professora, a maioria parecia não fazer ideia do que ela estava fazendo e, então, novamente houve um grande silêncio motivado por essa incompreensão, e também pela ansiedade de ir logo para o laboratório de informática. Fica evidente que não houve alternância de enunciados (BAKHTIN, 2010), pelo menos não com a maioria da turma, portanto, não houve diálogo.

Já no laboratório de informática, após a rápida experiência com os princípios da igualdade, no jogo “Acerte a balança”, já relatada no página 148, desse trabalho, foi apresentado o aplicativo *Algebra balance scales*, sobre o qual também já fizemos um breve relato na página 150 quando tratamos dos diálogos e das interações no cenário do laboratório. Não foram necessárias mais do que algumas poucas explicações sobre o funcionamento do aplicativo para que os alunos começassem a resolver as equações na balança virtual. Os episódios, a seguir, mostram as interações e os diálogos entre os estudantes na resolução dessas equações.

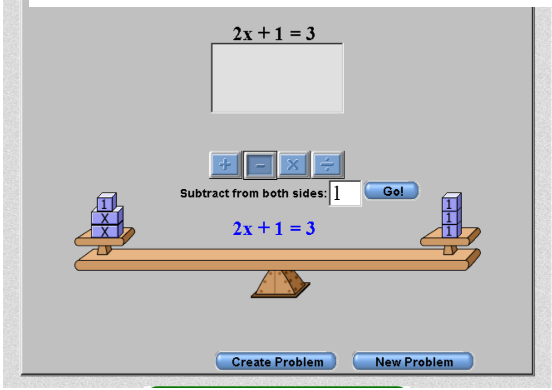
Para resolver a equação mostrada na figura a seguir, Gisele e George passaram pelas seguintes etapas, mostradas na figura 91 a seguir.

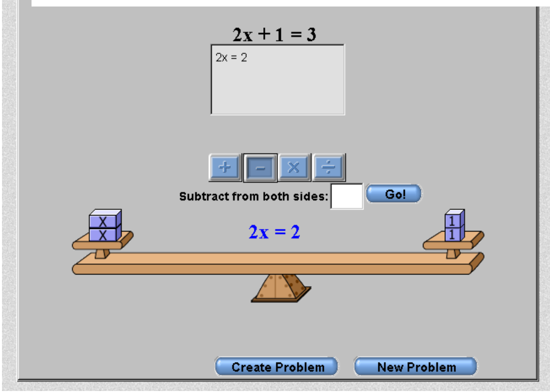




Etapa 1: reconhecimento da equação

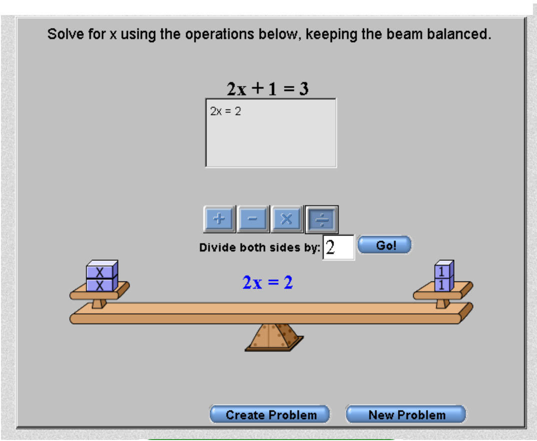
Etapa 2: registro da equação na balança

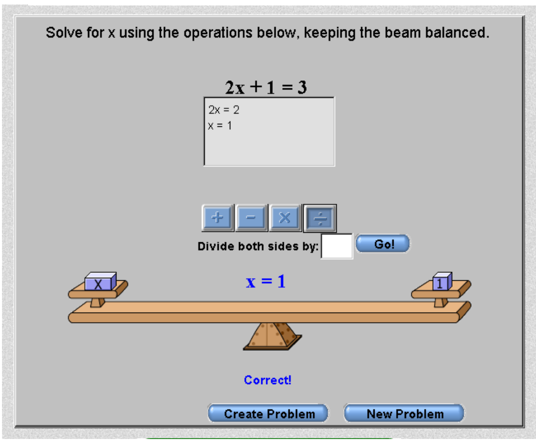




. Etapa 3: escolha da operação para iniciar a resolução.

Etapa 4: visualização do registro após escolha da operação





Etapa 5: escolha de nova operação para prosseguir a resolução

Etapa 6: visualização do resultado final.

Figura 91. Etapas de resolução de uma equação no aplicativo *Algebra balance scales*

Em cada uma das etapas, houve muita interação e diálogo entre os colegas que estavam dividindo o mesmo computador.

George: — Gisele, essa é fácil. Já fizemos igual.
Gisele: — É mesmo. Vou colocar na balança x, x e um de cá e de lá, três, um, um e um. Pronto tá igual [apontando para os pratos].

George: — É. A balança agora tá equilibrada.
Gisele: — É muito legal, né?
George: — É legal, mesmo. E agora?
Gisele: — Tem que sumir com mais um daqui ó [apontando para o prato da esquerda].
George: — É. Tem que sumir com o mais um.
Gisele: — É só tirar um [clicando na operação de subtração (−) e digitando 1 no espaço indicado.] — Pronto. Já saiu um dos dois lados.
George: — Agora ficou dois x igual a dois, então tem que...
Gisele: — Dividir por dois, né? [clicando na operação de divisão (:) e digitando 2 no espaço indicado].
George: — Pronto, agora é só terminar. Clica no *go* e termina.
Gisele: — O dois sumiu. Acertamos! O x é igual a 1.

É interessante observar que, na primeira etapa, após o reconhecimento de que se trata de uma equação familiar, Gisele e George converteram (DUVAL, 2009, 2011) o registro escrito da equação em linguagem algébrica escrita, para uma representação pictórica na balança. Há congruência entre os dois registros e talvez por isso, não há qualquer dificuldade para construí-lo. A partir daí, em diálogo eles foram realizando tratamentos (DUVAL, 2009, 2011) que permitiram ir transformando, simultaneamente, o registro algébrico e o registro pictórico. Quando Gisele disse "tem que sumir com mais um" ou "é só tirar um", estava realizando um tratamento, e quando disse "já saiu um dos dois lados" ou "o dois sumiu. Acertamos!", estava reconhecendo que o tratamento escolhido foi adequado. Embora seja o aplicativo que faça as retiradas, a escolha dos tratamentos é deles. Uma escolha inadequada de um tratamento implica a recusa do aplicativo de fazer a operação, que dá *feedback* imediato aos aluno. Assim, por meio da ação dialogada e mediada pelo aplicativo, o tempo inteiro, ocorrem processos metacognitivos de autorregulação (FÁVERO, 2005a) que possibilitam aos estudantes terem controle sobre suas ações.

No episódio a seguir, Helena e Talita tiveram que resolver a equação mostrada na figura 92, a seguir, e por meio de tentativas e erros tomaram consciência da escolha de tratamentos (DUVAL, 2009) inadequados.

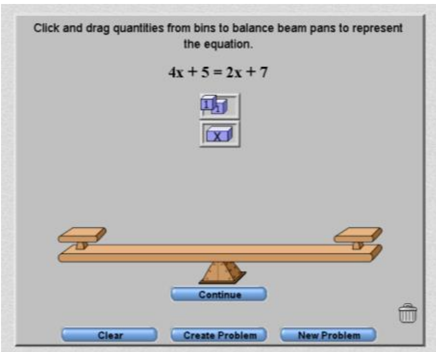


Figura 92. Tela do NLVM com a equação a ser resolvida.

Helena: — É a sua vez. Coloca na balança os x e os números [apontando para o aplicativo].
Talita: — Aqui é x ,x, x, x e um, um, um, um, um, um [mostrando o primeiro prato da balança] — E aqui é x, x e um, um, um, um, um, um, um, pronto, sete. Um monte, heim? Muito doido!
Helena: — Tá retinho agora [mostrando o equilíbrio da balança no aplicativo]
Talita: — E agora? O que a gente tira? Essa é diferente.
Helena: — Tem que deixar o x sozinho, né?
Talita: — Então vamos tirar o cinco.
Helena: — O que some com o cinco aí é...
Talita: — Menos e cinco [clicando na operação de subtração (−) e digitando cinco no espaço indicado.]
Helena: — Agora divide por quatro, não é?
Talita: — Divisão e quatro [clicando na operação de divisão (:) e digitando quatro no espaço indicado.]
Helena: — Ih! Não deu.
Gisele: — É, tá errado.
Helena: — Professora, não deu. A gente dividiu por 4 e não deu.
Prof.ª Pesq.:: — Pera aí. Não tem que ficar x de um lado e número o do outro? Um prato só com x e outro só com número. Pensem. O que ainda está fora do lugar.
Helena: — Uai.. Tem que tirar...
Talita: — É o dois x que está fora do lugar. Tem que tirar o dois x [apontando para o segundo prato da balança]
Helena: — Então tira.
Talita: — Menos e o dois [clicando na operação de subtração (−) e digitando 2 no espaço indicado, de forma equivocada.] — Deu errado de novo!
Helena: — Você só tirou dois, não viu? E o x?
Talita: — E foi, é? Foi, professora?
Prof.ª Pesq.: — Acho que sim.
Talita: — Vou tirar dois x: é o menos e dois e x [clicando na operação de subtração (−) e digitando 2x no espaço indicado] — Pronto. Mas ainda falta
Helena: — Agora é só dividir por dois e termina.
Talita: — Divisão e dois [clicando na operação de subtração (−) e digitando 2 no espaço indicado] — Pronto. Uh! Acertamos!

O reconhecimento da equação e a conversão (DUVAL, 2009) da mesma da linguagem algébrica para a representação pictórica foram imediatos. No processo de conversão, Talita enunciou cada parte da ação de colocar, sobre os pratos da balança, os cubinhos de x e os números. Por meio de uma gíria, ela expressou não apenas o prazer que pareceu estar sentido em resolver a equação, como o espanto com o que o aplicativo fez: “Um monte, heim? Muito doido!” Helena, por outro lado, reconheceu o equilíbrio da balança por meio da enunciação: “tá retinho agora”.

Na sequência da atividade, foi possível perceber que a primeira escolha: “menos e cinco”, resultou em um tratamento adequado (DUVAL, 2009), mas a segunda escolha “divisão e quatro”, resultou em um tratamento inadequado (DUVAL, 2009) que é recusado pelo aplicativo. A constatação dessa inadequação as fizeram pedir ajuda a mim, que tentei mediar sem exatamente dar a resposta. O fato de eu dizer que, em um prato, deveriam ficar só as incógnitas (x) e, no outro, apenas os números, as conduziu à escolha de um tratamento adequado que foi o de retirar 2x. A pressa, no entanto, fez Talita se equivocar e tirar apenas 2 e, novamente, o aplicativo recusou o tratamento dado, mas Helena, que estava atenta, percebeu o erro e o corrigiu.

Muito embora o aplicativo apresente apenas os tradicionais exercícios algorítmicos (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006) de resolução de equações, o instrumento de mediação escolhido (o aplicativo *Algebra Balance Scales*) contribui para que os alunos atribuam significado à atividade e, mais, contribui para que eles entrem em ações cognitivas de conversão e tratamento (DUVAL, 2009) e ações metacognitivas (FÁVERO, 2005a) que possibilitam qualificar suas aprendizagens, por meio da interação e do diálogo.

Nos dias seguintes, vários exercícios semelhantes aos do aplicativo foram resolvidos em sala de aula no caderno e a maioria dos estudantes resolvia, utilizando os princípios da igualdade, fazendo referência à balança, como mostra o seguinte episódio:

A resolução da equação 2x + 11 = x, em sala de aula, gerou um interessante diálogo entre George e Tadeu:

Tadeu: — Professora, essa eu não sei. E agora? O que eu faço?
Prof.ª Pesq.: — Olhe para a equação. Quem está fora do lugar?
Tadeu: — O x e o onze, professora?

O estranhamento de Tadeu em relação à equação provavelmente era devido ao fato de haver um x no segundo membro da equação, mas, quando perguntei o que estava fora do lugar, ele demonstrou saber. Nesse momento, George, que estava ao lado, assumiu a mediação, dando continuidade ao que eu havia começado:

George: — Então vamos no x primeiro? O que some com o x?
Tadeu: — É o menos x. Vou acrescentar menos x dos dois lados.

A expressão utilizada por George "o que some com o x?" foi a mesma que foi amplamente utilizava no laboratório. Tadeu não disse que iria tirar x dos dois membros, mas que iria "acrescentar menos x dos dois lados", mas isso não pareceu causar estranhamento em George, que apenas acompanhou o registro de Tadeu em seu caderno, balançando a cabeça de forma positiva. Tadeu, então, concluiu:

Tadeu.: — Prá sumir com o onze daqui é só tirar onze dos dois lados, não é? Menos onze.
George: — É.

Tadeu.: — Então, x é menos onze.
George: — Certinho.

Na sequência, Tadeu disse que iria “tirar onze dos lados” e não acrescentaria “menos onze” como fez com o x. George apenas o acompanhou e validou sua resolução.

No entanto, dias depois, durante a entrega de uma prova (ANEXO C), constituída por 20 equações e que foi aplicada em um momento em que eu não estava presente, a professora Leila destacou que o resultado havia sido muito ruim:

Professora: — Gente, eu nunca fiz isso que vou fazer hoje, mas vou fazer. O resultado da prova foi muito ruim, muito ruim. Muita gente tirou menos de um em um prova que valia 6. Teve alguém que tirou 5, mas a maioria foi muito mal. Observe que a prova, tem certo (C), errado (X) e meio certo. Vocês devem refazer o que estiver errado e meio certo. Para isso, vocês podem olhar no caderno, no livro e podem também conversar com os colegas.

Em primeiro lugar, é importante dizer que, dias antes, eu havia entregue à professora o artigo “Releitura de uma experiência em educação matemática feita a partir da teoria histórico-cultural da subjetividade” (SILVA, 2011), de minha autoria e que havia sido apresentado durante a XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, em Junho de 2011. Nesse artigo, falo da experiência com a prova em duas etapas (ABRANTES, 1995) e o trabalho de monitoria que deu origem ao projeto de doutorado. Cheguei a pensar que ela não havia lido o artigo, pois não me deu retorno. No entanto, como veremos a seguir, de forma indireta, ela mostrou que leu.

A professora disse, então, que eles deveriam refazer a prova e podiam fazer perguntas a mim. Observei que os alunos se sentiram aliviados e, imediatamente, começaram a trabalhar. Muitos deles resolviam a equação e perguntavam a mim se estava certo ou errado.

Observei que a absoluta maioria resolvia a equação usando os princípios da igualdade, mas quando ia finalizar, errava a soma algébrica, a divisão ou a multiplicação de números inteiros. Apenas um aluno resolvia sem usar os princípios da igualdade porque não esteve no laboratório e disse que aprendeu a resolver as equações em casa com o irmão.

Muito embora tenha ajudado a todos que solicitaram, confirmando se estava errado ou certo e fazendo perguntas que os levassem à resolução, pude lançar meu olhar para os meus colaboradores de pesquisa.

Um aluno não colaborador da pesquisa mostrou como o instrumento de mediação ou aplicativo no meio virtual, gerou significados diferentes dos gerados pela resolução tradicional no caderno:

Aluno: — Professora como faz essa?
Prof.ª Pesq.: — Você estava aqui no dia que fomos ao laboratório e usamos a balança para resolver as equações?
Aluno: — Sim, estava.
Prof.ª Pesq.: — Então você deve lembrar-se que ou somávamos, ou subtraíamos, ou dividíamos ou multiplicávamos um termo dos dois lados da equação, não lembra?

O aluno fez sinal afirmativo com a cabeça e eu continuei.

Prof.ª pesq: — É só fazer a mesma coisa.
Aluno: — É, mas lá era no computador. Aqui é no papel.

O que o aluno disse era a mais pura verdade. Lá era no computador e nós não voltamos mais lá e nem planejamos uma aula em que os alunos pudessem fazer a equação no computador e o registro no papel ao mesmo tempo. Um ambiente era o do laboratório, em que estavam livres para fazer em um instrumento que tinham familiaridade, completamente diverso era o ambiente da sala de aula com suas formalidades. Ali em sala, a prova não tinha um aspecto visual tão bonito nem era tão amigável quanto o do aplicativo. Era como se fossem dois mundos diferentes.

Aproximei-me de Wilson e percebi que ele também resolvia todos os exercícios da prova sem qualquer dificuldade. Então, perguntei:

Prof. pesq: — Por que você não fez na prova? Você sabia tudo.
Wilson: — Sei lá... [Falou balançando um ombro]

Como ele já havia feito as quatro primeiras, passei para as seguintes.

Prof. pesq: — Essa aqui [apontando para a equação 35x = 105], por exemplo, como faz?
Wilson. — Divide os dois lados por trinta e cinco
Prof. pesq: — E por que não fez?
Wilson: — Sei lá...
Prof. pesq: — E essa? (apontando para a equação $\frac{x}{3} = 7$]
Wilson: — Multiplica os dois lados por 3?

Prof. pesq: — Aham. Faz todas e eu volto para ver.

Wilson sentou-se e resolveu todas as equações, no que foi acompanhado a meia distância por George que tinha errado apenas uma questão da prova.

Jamais vou saber o que houve de fato nessa prova, pois não estava presente. O fato é que os resultados, as notas não eram congruentes com o desenvolvimento conceitual dos alunos.

Dias depois, no processo de correção da prova, a professora Leila escreveu no quadro a equação $-7x = 14$ e falou:

Prof.ª Leila: — Aqui nós temos menos sete x igual a catorze. Como faz?
George: — Multiplica por menos um dos dois lados.
Wilson: — Por que?
George: — Para ficar positivo, uai.
Prof.ª Leila: — Isso mesmo, George, para o x ficar positivo. E agora?
George: — Divide por sete.
Prof.ª Leila: — Isso. Tenho que dividir sempre exatamente pelo que eu tenho. Então fica um x é igual a menos 2 [fazendo o correspondente registro no quadro].

Muito embora Wilson não fizesse nenhuma pergunta, ficou evidente que ele não havia compreendido o tratamento (DUVAL, 2009) que multiplicava os dois membros da equação por –1, isso porque ele havia utilizado um tratamento diverso, ao dividir os dois membros por –7. Mas no ambiente da sala de aula, com aquele número de aluno, dúvidas como essas passam despercebidas e, muitas vezes, sequer são manifestadas pelos alunos. Wilson simplesmente apagou o seu registro e copiou o registro feito pela professora no quadro.

Em outro exercício, a Professora Leila registrou a equação $4(x+4) - 1 = 3\,(2x - 7)$ no quadro e perguntou:

Prof.ª Leila: — Como faz essa?
Wilson — Tem que multiplicar o quatro por tudo que está dentro?.
Prof.ª Leila: — É isso que Wilson falou, gente?
Alguns alunos: — É.
Prof.ª Leila: — Isso mesmo. É a propriedade distributiva. O quatro vai com todo mundo. [Muitos risos].
George: — E o três também tem que multiplicar por tudo.

A professora, sempre perguntando os alunos, aplicou a propriedade distributiva e registrou, no quadro, a resolução da equação até esse ponto (figura 93):

$$4(x+4)-1=3(2x-7)$$
$$4x+16-1=6x-21$$
$$4x+15=6x-21$$

Figura 93. Transcrição do registro feito no quadro pela professora

Nesse momento, ela parou e falou:

Prof.ª Leila: — O que eu, Leila, faria.

Usando um gesto com os dedos que representa inversão, ela escreveu no quadro a equação mostrada na figura 94, a seguir:

$$6x-21=4x+15$$

Figura 94. Transcrição do registro feito no quadro pela professora

Ao fazer isso, a professora Leila apontou a sua perspectiva (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006) ou enunciou o tratamento (DUVAL, 2009) dado à equação, que não foi imediatamente reconhecida por Tadeu e Wilson.

Wilson	— Ela trocou os lados? [Fala em voz alta, mas sem se dirigir a ninguém.]
Tadeu:	— Professora, e pode fazer isso?
Wilson:	— Por que?
Prof.ª Leila:	— Pode. Se a= b, então b=a. Se eu tenho em prato da balança um quilo de chuchu e o do outro um quilo de banana, então posso trocar o chuchu com a banana e a balança vai ficar no mesmo equilíbrio.
Tadeu:	— Caralho, véi! Quantas vezes eu podia ter feito isso e só agora ela vem dizer isso. Caralho!
Saulo:	— É estranho, mas....
Tadeu:	— É estranhão mesmo!
Prof. Pesq:	— Por que?
Saulo:	— Eu nunca tinha feito isso.
Tadeu:	— Eita, poxa! Caraca! Eu poderia ter feito isso desde começo.

A professora Leila sorriu muito com a situação e a com reação dos estudantes e eu fiquei pensando se aquele diálogo cheio de coisas não ditas, que estava sendo acompanhado apenas por uma parte da turma, tinha sido mesmo compreendido por Tadeu, Saulo, Wilson e George que estavam próximos a mim. Foi então, que tive a confirmação. A professora escreveu, no quadro, a equação 16 = x – 3 e Wilson falou em voz alta:

Wilson — É só trocar. x menos três é igual a dezesseis.
Prof.ª Leila: — Se fizermos como Wilson falou, vai dar certo, gente?
Tadeu: — Claro que vai. É o mesmo que você fez naquela. Troca de lugar [Falou Tadeu fazendo um sinal com a mão, indicando a inversão dos membros]
Prof.ª Leila: — E agora?
Tadeu: — Mais três dos dois lados.
Prof.ª Leila: — Então fica x menos três mais três e dezesseis mais três [falou fazendo o registro x– 3 + 3 = 16 +3. no quadro]
Tadeu: — O x é treze.
Wilson — Não é não. É dezenove. Tem que somar.
Tadeu: — Ih é mesmo! Eu pensei que era negativo, mas é tudo positivo.

De um lado, esse episódio mostrou que o tratamento (DUVAL, 2009) dado ao registro por Wilson demonstrou apropriação conceitual e um processo metacognitivo de autorregulação (FÁVERO, 2005a), que foi acompanhado por Tadeu que, inicialmente, havia estranhado o procedimento da professora.

De outro lado, o episódio mostrou, mais uma vez, como os alunos que estavam participando do projeto deixavam paulatinamente de ser invisíveis, engajando-se na atividade matemática e ganhando confiança no fazer matemática, saindo do absenteísmo (CHARLOT, 2005) e construindo uma nova relação com o saber matemático. Esses alunos saíram do silêncio e passaram a verbalizar os tratamentos e conversões (DUVAL, 2009, 2011) subjacente ao seu fazer.

4.4.3.3.A resolução de problemas do 1º grau

A professora iniciou a resolução de problemas do 1º grau, em meados do segundo semestre, em um momento em que eu não estava presente, mas, como de costume, os exercícios não resolvidos em sala sempre chegavam no projeto, no turno contrário.

Foi o que aconteceu com o problema, mostrado na figura 95 a seguir, que pode ser inscrito no que Alro e Skovsmose (2006) chamam de semirrealidade, uma vez que faz referência a uma situação real, mas essa é apenas pretexto para se escrever e resolver uma equação.

Minha irmã tem o dobro da minha idade e juntas nós temos 24 anos. Qual e a minha idade e a idade da minha irmã?

Figura 95. Transcrição de problema do caderno de Tânia

Diante do problema acima, Tânia solicitou minha ajuda:

Tânia: — Professora, como faz esse?
Prof.ª Pesq.: — É fácil. Leia o problema para mim.

Tânia leu o problema e fez uma cara de quem não entendeu. Eu, então, prossegui:

Prof.ª Pesq.: — Está escrito aí no problema qual é minha idade?
Tânia: — Não. Então, é “x”.
Prof.ª Pesq.: — Isso. Posso chamar de “x”. E qual é a idade da minha irmã?
Tânia: — É vinte e quatro.
Prof.ª Pesq.: — Leia o problema de novo.

Tânia leu silenciosamente o problema e conseguiu, com a minha mediação, identificar que a “minha idade” não foi um dado do problema e, de imediato, disse então que essa é a incógnita, o valor desconhecido a que chama de x. No entanto, ao perguntar pela idade da irmã, Tânia buscou, no problema, um dado numérico e respondeu que era 24. Não disse que estava nem certo nem errado e apenas pedi que lesse o problema novamente. Nesse momento, ela se voltou silenciosamente para o problema e, em um processo metacognitivo (FÁVERO, 2005a), reconstruiu sua resposta.

Nosso diálogo prosseguiu e eu percebi que os colegas que estavam por perto, especialmente George, deixavam de fazer o que estavam fazendo e passavam a nos olhar.

Tânia: — É o dobro.
Prof.ª Pesq.: — Dobro de quem
Tânia: — Da minha... Então é dois x.
Prof.ª Pesq.: — Isso mesmo, Tânia. E quantos anos eu e minha irmã temos juntas?
Tânia: — Vinte e quatro.

O fragmento mostra que Tânia identificou que a idade da “minha irmã” é o dobro e também, de imediato, fez a conversão dizendo “então é dois x”. Na sequência, sem muita dificuldade, falou que “eu e minha irmã temos 24 anos” e, em seguida, registrou no papel a equação $x + 2x = 24$.

A conversão do registro (DUVAL, 2009, 2011) do problema na língua escrita para o registro algébrico se revelou um grande obstáculo para os estudantes. Sempre era necessário ler o enunciado mais de uma vez e, no processo de mediação, ir separando o que Duval (2009) chama de unidades de sentido. É isso que vamos fazendo ao perguntar “está escrito aí no problema qual é minha idade?”, ou quando perguntamos: “qual é a idade da minha irmã?”; “E quantos anos eu e minha irmã temos juntas?

O registro da equação escrito por Tânia ($x + 2x = 24$) não tinha congruência semântica com o problema escrito, pois as unidades de sentido dos dois registros não eram correspondentes (DUVAL, 2009, 2011). Então, eu passei a me reportar a ela e não mais ao problema, enunciando, na linguagem oral, um registro correspondente à equação:

Prof.ª Pesq.: — Isso mesmo. A minha idade mais a idade da minha irmã é igual a vinte e quatro, então, x mais dois x é igual a vinte e quatro [falo apontando para o registo feito por Tânia] — E quanto é x mais dois x? [apontando para o primeiro membro da equação]
Tânia: — Dois x.
Prof.ª. Pesq.: — Não. Pense quanto é x mais dois x?
George: — Tânia, é três x. Olha, tem um um perto do x, tá vendo? [apontando para o registro]
Tânia: — É mesmo. Quando não tem nada é um, né?.

George entrou no diálogo e assumiu a mediação na resolução da equação. A expressão “tem um 1 perto do x”, utilizada por ele, é tanto característica da minha fala como da fala da professora Leila, que ele pegou de empréstimo (BAKHTIN, 2011).

George sempre assumiu a fala nos diálogos em que participei, quando pensava que eu estava “em apuros”, ou seja, quando pensava que eu não estava me fazendo entender. Ele era uma espécie de tradutor da minha fala.

A partir daí, Tânia prosseguiu, resolvendo corretamente a equação e enunciando a resposta do problema.

Tânia: — Pronto: x é oito.
George: — E x é a idade de quem? [silêncio] — Lê no problema.
Tânia: — É minha.
George: — E minha irmã?
Tânia: — O dobro. O dobro de oito é dezesseis.
George: — Isso mesmo, eu tenho oito e minha irmã dezesseis.

Ao analisar os exercícios do livro, percebi que, na maioria dos problemas, não havia congruência semântica (DUVAL, 2009, 2011). O capítulo do livro que trata desse tema possui 40 problemas, dos quais 6 estão resolvidos pelos autores. Dos 40 problemas, há apenas 5 que possuem congruência semântica, ou seja, que as unidades de sentido do enunciado correspondem às unidades de sentido das equações que os resolvem. Desses, 2 estão resolvidos, portanto restam apenas 3 para os alunos resolverem. Isso foi um grande obstáculo no processo de resolução, como se pode ver no diálogo abaixo, em que George e Wilson resolveram juntos o problema do livro, mostrado na figura 96 a seguir.

79 Subtrair 3 anos do triplo da idade de Rodrigo é igual a adicionar 5 anos ao dobro da idade dele. Que idade tem Rodrigo?

Figura 96. Exercício do livro (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009, p. 186)

Quem iniciou o diálogo foi George que observou que Wilson estava escrevendo a equação do problema de modo incorreto.

George: — Ei, tá errado.
Wilson: — O que?
George: — Aqui não é três menos... [apontado para o registro 3 – 3x no caderno de Wilson]
Wilson: — Errado? [duvidando] — Aqui está escrito subtrair três [apontando para o enunciado do problema]
George: — Olha só é para subtrair o três do triplo da idade de Rodrigo.
Wilson: — Então... [pausa] É três menos três x, não é? [sem muita certeza].
George: — Ó... É para tirar o três do triplo, então fica três x menos três.
Wilson: — Subtrair três do triplo... [lendo o problema] — Eu heim...
George — É sim. Tá dizendo que é para diminuir o três.
Wilson: — Então fica três x menos três igual a... [pausa] — Dois x mais cinco ou cinco mais dois x?
George: — Aí tanto faz, porque é mais.

No diálogo, ficou muito claro como a falta de congruência semântica (DUVAL, 2009, 2011) era um obstáculo para Wilson. A primeira unidade de sentido do problema era a expressão “subtrair três”, ele a tomou e queria fazer correspondência com a expressão “3 menos.” George mediou seu processo de reconstrução, mas sua dúvida permaneceu, tanto que, para escrever o segundo membro da equação, ele perguntou: “Dois x mais cinco ou cinco mais dois x?”

Também é interessante observar como George utilizou o recurso de aproximar a linguagem do interlocutor para se fazer entender. No início do diálogo, ele usou a mesma expressão do problema: “subtrair três”, mas, na sequência, quando percebeu a dificuldade de Wilson de compreender, ele modificou a expressão duas vezes. Em um determinado momento, ele disse: “diminuir o três” e, em seguida, “tirar o três.” Esse é um recurso muito utilizado pelos professores, de maneira geral, e mostra uma construção conceitual de George que o permitiu modificar seus enunciados em função da situação, buscando a apreensão pelo seu interlocutor.

Diálogos como esse foram constantes no processo de resolução dos problemas do livro. Do grupo, apenas George e Luiza transitavam com certa tranquilidade entre o registro escrito do problema e o seu correspondente registro algébrico. Mas mesmo os dois enfrentavam dificuldades em alguns problemas, como pode ser visto no diálogo a seguir, em que George e Luiza estavam resolvendo o problema, mostrado na figura 97 a seguir:

77 Talita nasceu em 2001, quando sua mãe, Luana, tinha 26 anos de idade.
a) Num certo ano, Luana terá o triplo da idade de Talita. Qual será a idade de Talita?
b) Em que ano isso ocorrerá?

Figura 97. Exercício do livro (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009, p. 186)

George: — Professora, a gente não conseguiu fazer o setenta e sete.
Prof.ª. Pesq.: — Deixa eu ver. Talita nasceu em dois mil e um...[fazendo a leitura do problema] — Qual é a dúvida?
Luiza: — Uai, professora, eu não entendi foi nada.
George: — Eu não fiz nada. A mãe de Talita tinha vinte e seis e ela tinha zero, quando nasceu.
Prof.ª. Pesq.: — Vamos pensar juntos? Veja só, quando Talita tiver um ano, quantos anos a mãe dela terá?
George: — Vinte e sete.
Prof.ª. Pesq.: — Quando Talita tiver dois anos, a mãe dela vai ter...
Luiza: — Vinte e oito.
Prof.ª. Pesq.: — E quando ela tiver cinco anos, a mãe dela vai ter...
George — Cinco mais vinte seis é trinta e um
Prof.ª. Pesq.: — Então a diferença de idade delas sempre vai ser...
George e Luiza: — Vinte e seis.
Prof.ª. Pesq.: — Então a idade da mãe de Talita menos a idade de Talita vai ser sempre.
George e Luiza: — Vinte e seis anos, ué.
Prof.ª. Pesq.: — Agora que a gente entendeu isso, vamos ler o problema de novo, A letra a do problema.
Luiza: — Num certo ano, Luana terá o triplo da idade de Talita...[interrompendo a leitura] — A mãe de Talita vai ter 3x e Talita vai ter x.
Prof.ª. Pesq.: — E?
George: — A diferença é vinte e seis.
Luiza: — Três x menos x é igual a vinte seis. Caramba!
George: — É mesmo. Tava na cara, nós é que não vimos.

O diálogo mostra que mesmo alunos em situação de sucesso escolar tinham dificuldade de escrever as equações de problemas em que as unidades de sentido de um registro não correspondiam às unidades de sentido do outro registro (DUVAL, 2009, 2011). De qualquer modo, é importante dizer que o problema não é de fácil compreensão e ambos tiveram dificuldade em interpretá-lo.

No espaço do projeto, tínhamos o compromisso de ajudar uns aos outros, então, percebi que tanto George quanto Luiza decidiram ajudar os colegas nesse problema, antes de passar aos demais. Os dois começavam sempre do mesmo modo que eu, pedindo para ler o problema e nesse, em especial, eles reproduziram completamente a minha ação. George, após dizer para Wilson ler o problema, questionou:

George: — Wilson, quando Talita nasceu sua mãe tinha 26 anos, né? Quando Talita fez um ano, a mãe dela tava com quantos anos?

O mesmo aconteceu com Luiza que se juntou à Tânia na resolução. Após pedir que lesse o problema, Luiza perguntou:

Luiza: — Quando Talita nasceu a mãe dela tinha quantos anos?
Tânia — Vinte e seis.
Luiza: — E quando Talita tinha um ano, quantos anos a mãe dela tinha?
Tânia: — Uai, vinte e sete!

Daí para frente, ambos mediaram o processo de resolução do problema passando pela interpretação, escrita e resolução da equação, até o registro da resposta final, sempre repetindo as minhas palavras (BAKHTIN, 2009).

Como os problemas do livro estavam provocando um sentimento de incapacidade porque poucos eram os que conseguiam resolver sem a minha ajuda ou de um colega, resolvi propor uma lista de problemas (ANEXO D) que tanto tivesse problemas com congruência semântica, como não.

Os dois primeiros exercícios da lista resgatavam a figura da balança que havia sido trabalhada no laboratório, mas de maneira inversa. No aplicativo *Algebra Balance Scales*, do *NLVM*, era dado o registro da equação e eles tinham que fazer a conversão (DUVAL, 2009, 2011) para a balança. Nesses, a balança em equilíbrio é dada e os alunos tem que converter no registro algébrico da equação. Há congruência semântica porque o primeiro prato da balança seria o primeiro membro da equação e o segundo prato seria o segundo membro, como pode ser visto nas figuras a seguir, que mostram processos de resolução.

Todos os alunos, sem exceção, perceberam a semelhança entre os exercícios da lista e os do laboratório, como mostra o pequeno diálogo a seguir.:

Wilson: — Olha só! É igual lá do computador, lembra?
George — É mesmo. Igualzinho. A balança...
Wilson: — É só escrever quatro x mais quatro igual três x mais seis [registrando no papel]
George: — Só.

No primeiro exercício, todos fizeram a conversão adequadamente, mas dois dos seis alunos presentes tiveram algum problema com o tratamento, como mostram as figuras 98 e 99 a seguir:

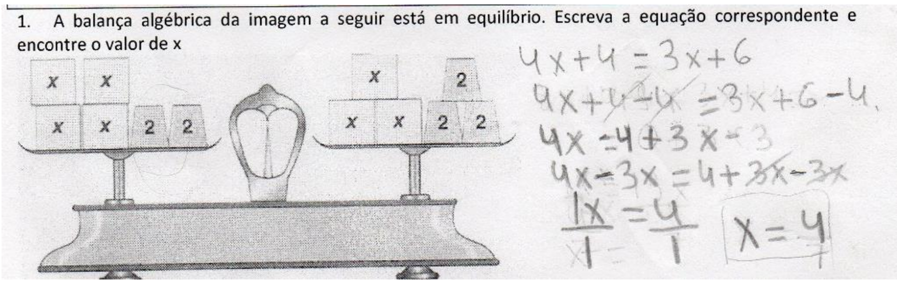


Figura 98. Resposta dada por Tânia ao exercício 1

Tânia converteu um registro no outro sem dificuldade, mas ao fazer o tratamento no interior do registro algébrico (DUVAL, 2009, 2011), embora utilizasse corretamente o princípio aditivo da igualdade ao retirar 4 e 3x dos dois membros da equação, observou-se que teve dificuldade em lidar com a soma algébrica, pois 6 – 4 resulta em 4, e não em 2. Não podemos dizer que Tânia não sabia resolver uma equação e nem mesmo que não sabia operar com números inteiros. Seu erro pode ser fruto de mera distração, tanto que, em outros registros, não mostrou a mesma dificuldade.

Quem também dá um tratamento inadequado à equação é Wilson, como mostra a figura 99 a seguir.

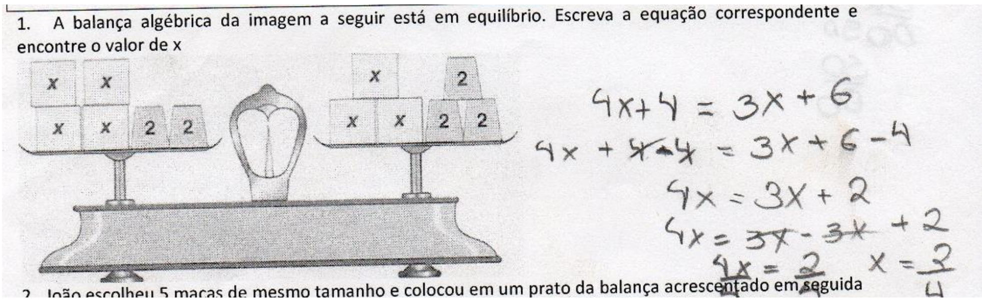


Figura 99. Resposta dada por Wilson ao exercício 1

Diferentemente de Tânia, Wilson se equivocou no momento de utilizar o princípio aditivo da igualdade, pois ele retirou 3x apenas do segundo membro da equação, o que o conduziu a uma resposta incorreta. Se for observado o conjunto das produções de Wilson nesta lista de exercício, é possível dizer que ele também soube resolver equações. Na verdade, ao que tudo indica, o custo do tratamento (DUVAL, 2009, 2011) desse primeiro exercício é mais alto que o seguinte, embora os valores numéricos sejam menores. No primeiro, o tratamento implica retirar 4 e 3x nos dois membros da equação, enquanto que o segundo só exige retirar 250 nos dois membros, como mostra a figura 100 a seguir.

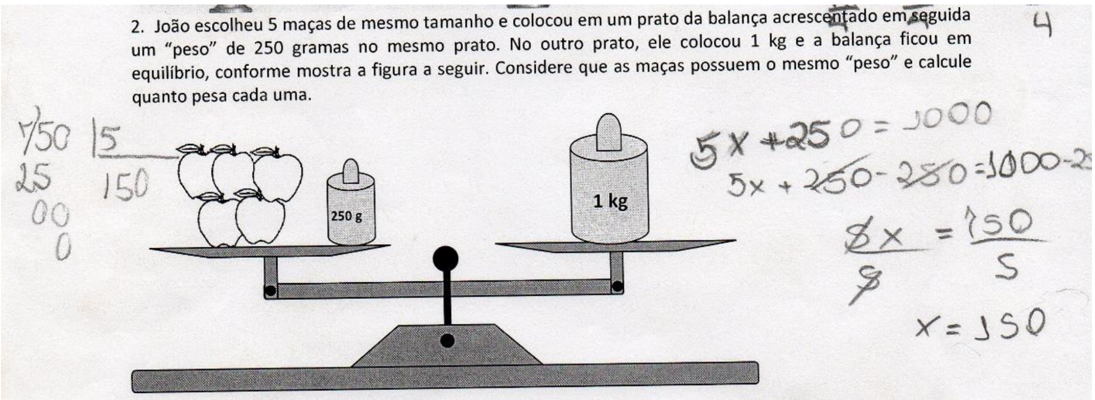


Figura 100. Resposta dada por Wilson ao exercício 2

Nem mesmo o tratamento que possibilitou transformar 1kg em 1000 gramas foi obstáculo para os estudantes, pois resolveram o problema corretamente. Todos apenas buscavam a confirmação, conforme mostra o fragmento a seguir:

Saulo: — Professora, um quilo é igual a 1000 gramas não é?
Prof.ª Pesq.: — É, Saulo.
Saulo: — Então é melhor fazer a conta com 1000, né?
Prof.ª Pesq.: — Ok!

No exercício de número 3, é interessante observar que, embora fosse possível escrever a equação de modo a garantir congruência semântica com o enunciado, todos fizeram opção contrária. Nenhum dos alunos optou por escrever a equação (1235 = 2x + 250). Todos escreveram a equação (2x + 250 = 1235) de modo semelhante ao que faz a professora em sala, deixando a incógnita no primeiro membro, conforme mostrou a protocolo de resolução mostrado na figura 101 a seguir.

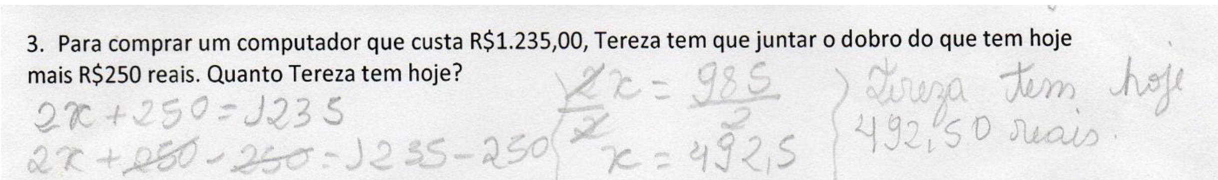


Figura 101. Resposta dada por Luiza ao exercício 3

Nesse problema, muitos também precisaram da mediação de um colega para escrever o registro. Foi o caso, por exemplo, de Saulo que buscou apoio em George, como mostra o fragmento a seguir:

Saulo: — Me ajuda nessa.
George: — Vamos ler juntos: para comprar um computador... [fazendo a leitura completa do problema]. — Tá escrito aí quanto é que Tereza

tem de dinheiro?
Saulo: — É o que a gente tem que encontrar.
George: — Então, é...
Saulo: — x
George: — Prá comprar o computador Tereza vai precisar de quanto?
Saulo: — De... [olhando para o problema] — O dobro mais duzentos e cinquenta.
George: — Então...
Saulo: — Dois x mais duzentos cinquenta é igual a...
George: — Mil duzentos e trinta e cinco. Escreve aí.
Saulo — Dois x mais duzentos e cinquenta igual mil duzentos e trinta e cinco. Agora eu sei, pode deixar.

No diálogo acima, é possível perceber que George agiu como um professor e usou os mesmos recursos que a professora Leila e eu usamos. Como nós, ele iniciou solicitando que Saulo lesse o problema. Em sua mediação, ele questionou pelo valor desconhecido quando disse: “Tá escrito aí quanto é que Tereza tem de dinheiro?”. Ele também vai conduzindo a mediação pacientemente usando perguntas e frases incompletas. Saulo, por sua vez, mostra que sua dificuldade era na conversão, e não no tratamento (DUVAL, 2011), tanto que dispensou a ajuda de George assim que a equação do problema foi escrita. Ele fez, então, o registro mostrado na figura 102 a seguir:

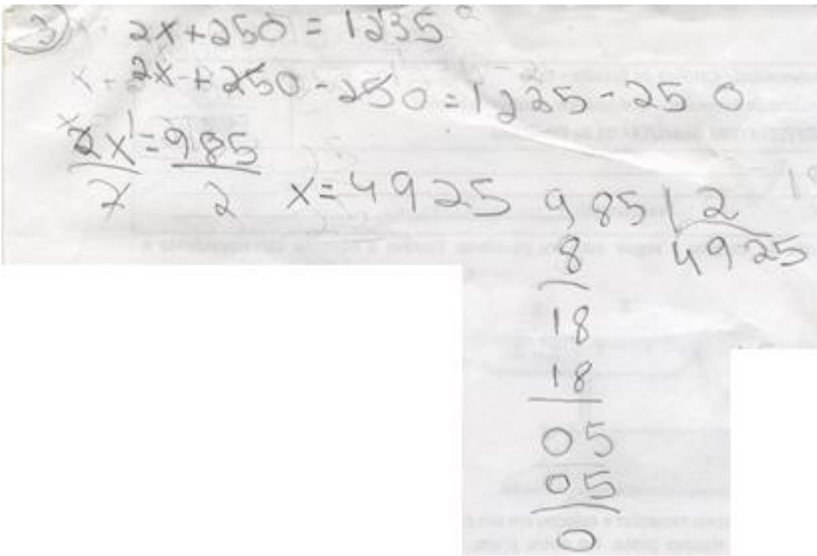


Figura 102. Resposta dada por Saulo ao exercício 3

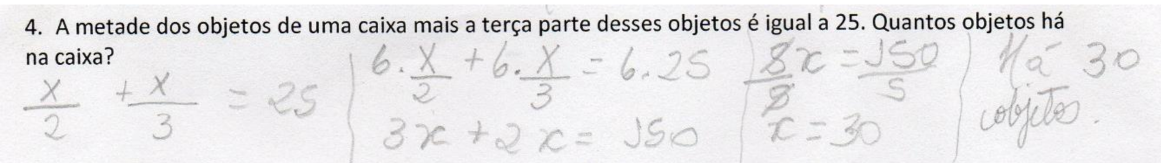
É importante dizer que antes de pedir ajuda para George, Saulo havia tentado resolver inúmeras vezes, como mostram os borrões apagados sob o registro final mostrado na figura acima. E essa é uma das dificuldades metodológicas da pesquisa. Pedir que o aluno não apague o registro pode interromper seu raciocínio e o diálogo em curso. O registro mostrado é apenas a etapa final de todo um processo metacognitivo composto de construções e reconstruções, cujo acesso é apenas parcial. É possível perceber, por exemplo, que antes da mediação de George, a equação escrita por Saulo era, provavelmente, algo como x + 2x – 250 = 1235.

No registro, também chama a atenção o modo como Saulo realizou a conta de divisão. Ele calculou normalmente até chegar no resto 5. A partir daí, ele calculou mentalmente e apenas registrou a resposta 4925. Como estava acompanhando, perguntei:

> Prof.ª Pesq.: : — Então, Tereza tinha quatro mil novecentos e vinte e cinco reais? [Silêncio]
>
> Saulo: — É... [vira a folha, pois o registro estava no verso, e lê o problema] — É quatrocentos e noventa e dois reais e cinquenta.

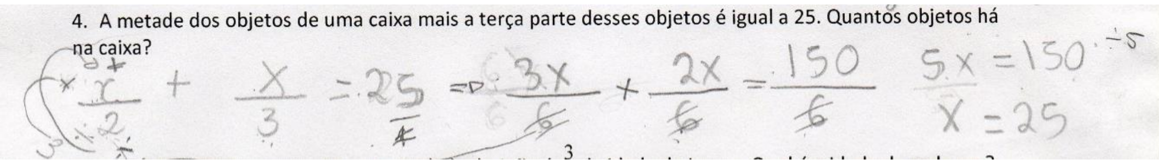
Nesse momento, o problema está resolvido para Saulo. Ele se levantou, mudou de mesa e iniciou o problema de número 4, sem alterar o registro.

Embora o problema de número 4 envolvesse equações com denominadores, o que, em geral, é um obstáculo para os estudantes, a conversão para a linguagem algébrica não representou dificuldade, isso porque é um problema que possui congruência semântica, como mostram os três protocolos nas figuras 103, 104 e 105 a seguir, que apresentam diferentes tratamentos (DUVAL, 2009, 2011).


4. A metade dos objetos de uma caixa mais a terça parte desses objetos é igual a 25. Quantos objetos há na caixa?

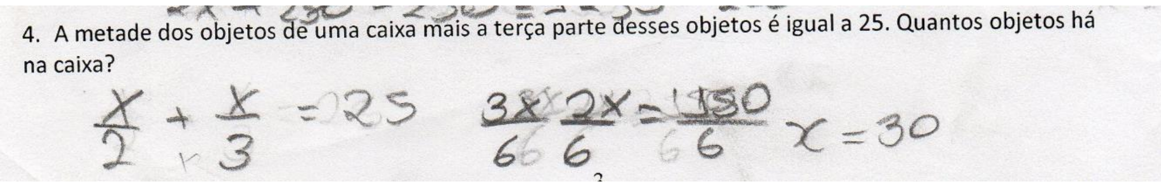
$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 25$ | $6.\frac{x}{2} + 6.\frac{x}{3} = 6.25$ | $3x + 2x = 150$ | $\frac{5x}{5} = \frac{150}{5}$ | $x = 30$ | Há 30 objetos.

Figura 103. Resposta dada por Luiza ao exercício 4


4. A metade dos objetos de uma caixa mais a terça parte desses objetos é igual a 25. Quantos objetos há na caixa?

$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 25 \Rightarrow \frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} = \frac{150}{6}$ $5x = 150 \div 5$ $x = 25$

Figura 104. Resposta dada por Tânia ao exercício 4


4. A metade dos objetos de uma caixa mais a terça parte desses objetos é igual a 25. Quantos objetos há na caixa?

$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 25$ $\frac{3x}{6} \frac{2x}{6} = \frac{150}{6}$ $x = 30$

Figura 105. Resposta dada por Wilson ao exercício 4

Os protocolos mostram que o custo do tratamento (DUVAL, 2009) é diferente para o estudantes, principalmente quando a atividade é realizada de forma solitária. Na figura 103, é possível ver que Luiza adotou o tratamento que vinha sendo utilizado em sala de aula, ao aplicar o princípio multiplicativo que implicou a multiplicação de seis aos dois membros da equação. Isso não pareceu ter um custo alto para Luiza. É importante dizer que ela resolveu silenciosamente e de uma vez, sem exigir reconstruções. Já o protocolo de Tânia, mostrado na figura 104, revelou um outro tratamento, não ensinado em sala, mas aprendido em casa, segundo a aluna, que consistiu em calcular o mínimo múltiplo comum dos denominadores. É interessante observar que ela deixou indicadas as operações com setas, mostrando o sentido das mesmas e, quando questionei o que ela fez, ela disse:

Tânia :	— Calculei o mmc, aí divide pelo debaixo e multiplica pelo de cima, aqui ó [mostrando a parte do registro com as setas e as operações]
Prof.ª Pesq.:	— Humm... E depois?.
Tânia:	— Aí corta, corta... o seis. [mostrando os denominadores 6 cortados]
Prof.ª Pesq.:	— Porque corta o seis?
Tânia:	— Sei lá...
Prof.ª Pesq:	— Quem te ensinou assim?
Tânia:	— Meu irmão. Tá errado?
Prof.ª Pesq:	— É diferente do que estamos fazendo aqui.

O custo desse tratamento para Tânia pareceu alto. Os borrões mostraram diversos registros apagados, além disso, a resposta final, que estava incorreta, apontou que foi obtida por meio de uma divisão, sem utilizar os princípios da igualdade.

Como Luiza estava acompanhando o nosso diálogo, pedi então que elas comparassem o que haviam feito. Luiza, então, disse:

Luiza:	— Eu pensei que o seis dava para dividir por dois e três, aí eu multipliquei os dois lados por seis [mostrando o próprio registro]. Entendeu?
Tânia:	— Entendi.

Tânia apenas balançou a cabeça dizendo que havia entendido e prosseguiu nos seus exercícios, não dando abertura a Luiza para prosseguir o diálogo. Cheguei a pensar que Tânia não havia entendido, mas no problema 6, que veremos mais adiante, ela resolveu utilizando os princípios da igualdade, e não o algoritmo do mmc.

A figura 105, mostrada na página 267, evidencia que Wilson adotou um tratamento misto, que estava entre o tratamento adotado por Tânia e o adotado por Luiza. Ele calculou o mínimo múltiplo comum dos denominadores e registrou a resposta final x = 30, o que me levou a considerar que ele havia copiado a resposta de alguém; então, falei:

Prof.ª Pesq.: — Wilson, você copiou a resposta de alguém? Como chegou em trinta aqui? [apontando para o registro]
Wilson: — Copiei não, professora.
Prof.ª Pesq.: — Então me fala como fez.
Wilson: — Eu fiz de cabeça. Aqui [apontando para o parte final do registro] eu multipliquei por seis, aí o seis some [apontando para os denominadores]. Fica dois x mais três x que dá cinco x e 150. Aí divide por cinco e dá trinta.

Ao revelar seu pensamento, ficou claro que Wilson intuitivamente utilizou os princípios da igualdade para obter a resposta final. Ele não soube dizer com quem aprendeu a resolver equações utilizando o algoritmo do mmc. Paulatinamente, tanto ele quanto Tânia, para resolver equações, passaram a adotar o tratamento que implica o uso dos princípios da igualdade.

O exercício 6, além de não possuir congruência semântica (DUVAL, 2009, 2011), resultou em uma equação com denominadores. Tânia, após inúmeras tentativas, fez um registro que mostrava a dificuldade em converter para a linguagem algébrica problemas desse tipo. É possível observar que ela retirou do problema os dados na ordem em que eles apareciam no enunciado. Ela somou os gastos e do total subtraiu o salário desconhecido (x), como mostra a figura 106 a seguir.

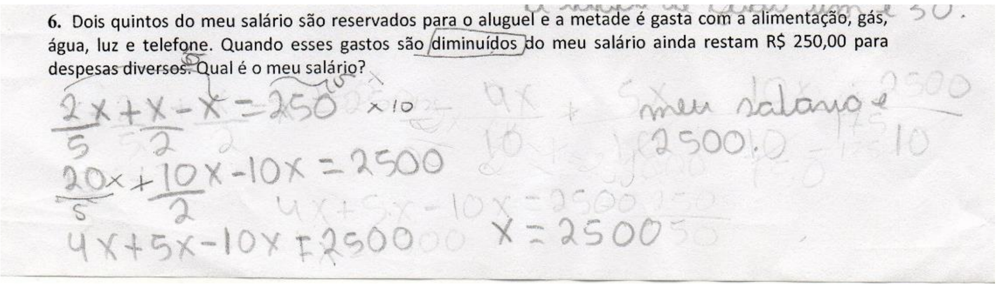


Figura 106. Resposta dada por Tânia ao exercício 6

Mas o registro mostrou também a tentativa de Tânia, que até então estava usando o algoritmo do mmc para resolver equação com denominadores, de dar um tratamento pelo uso do princípio multiplicativo da igualdade. Embora ela tenha utilizado propriedades incorretas no interior do sistema algébrico, pois 4x + 5x – 10 x resultou em x, é notório o fato de que ela conseguiu multiplicar, com sucesso, os dois membros da equação por 10 e conseguiu fazer a simplificação dos coeficientes.

No mesmo exercício, mostrado a seguir, Saulo me pediu ajuda para escrever a equação e Luiza passou a nos observar. No diálogo, fomos separando as unidades de sentido do problema, como mostra o fragmento a seguir:

Saulo: — Professora, me ajuda no seis.
Prof.ª Pesq.: — Vamos ler o problema?
Saulo: — Dois quintos do meu salário são reservados para o aluguel e a metade é gasta com alimentação, gás, água, luz e telefone. Como fica, professora?
Prof.ª Pesq: — O problema dá o valor do meu salário?
Saulo: — Não [silêncio]. — Então é x.
Prof.ª Pesq: — Ok! Isso mesmo. E quanto é o gasto com o aluguel?
Saulo: — Dois quintos?
Prof.ª Pesq: — Dois quintos de que?
Saulo: — Do salário.
Prof.ª Pesq: — Então, fica como? [silêncio]
Luiza: — Pode falar, professora?
Prof.ª Pesq: — Pode, Luiza.
Luiza: — É dois x sobre cinco.
Prof.ª Pesq: — Isso mesmo. O salário é x, então o aluguel é dois quintos de x ou dois x sobre cinco. [registrando na lateral da folha] — E quanto é o gasto com alimentação? [Me dirigindo a Saulo]
Saulo: — É... Metade? [Aceno positivamente com a cabeça e ele prossegue] — Então é x sobre... [pausa] — sobre dois. Metade é x sobre dois.
Prof.ª Pesq: — Muito bem! Metade é x sobre dois. [registrando na lateral da folha] — Agora a gente consegue escrever a equação do problema, certo? Leia o restante do problema.
Saulo: — Quando esses gastos são diminuídos do meu salário ainda restam R$250,00 para despesas diversas. Qual é o meu salário?
Prof.ª Pesq: — Como fica, então? O que vai ser diminuído do salário?
Saulo — As despesas. Então fica x menos dois x sobre cinco e... [registrando a equação no papel] — Diminui esse aqui também? [apontando para o termo $\frac{x}{2}$ que está na lateral da folha. Como faço gesto de positivo com a mão ele prossegue] — menos x sobre dois [registrando no papel]
Luiza: — E ainda sobra duzentos e cinquenta. Então, igual a duzentos e cinquenta.

A figura 107, a seguir, mostra o registro feito por Saulo na conversão do problema para a linguagem algébrica. Na lateral da folha, há o meu registro na separação das unidades de sentido que possibilitou a escrita da equação.

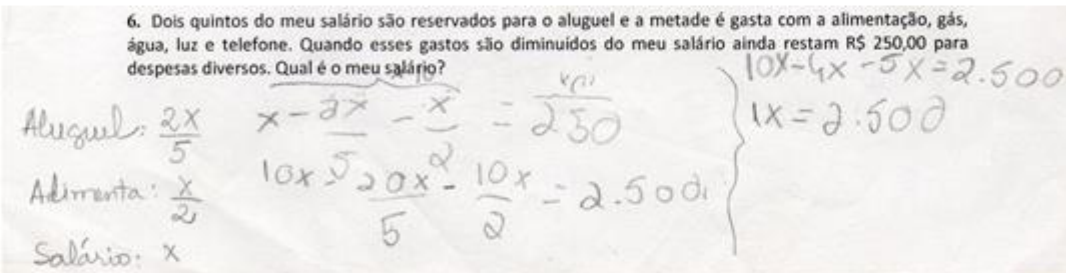


Figura 107. Resposta dada por Saulo ao exercício 6

Ao concluir o registro da equação, Saulo optou pelo tratamento que implicava no uso do princípio multiplicativo da igualdade. Ele disse:

Saulo: — Dois e cinco. É só multiplicar por dez os dois lados.

Diferentemente de Tânia, Saulo não teve qualquer dificuldade para dar um tratamento adequado à equação, utilizando propriedades corretas no interior do sistema algébrico.

Acompanhar os estudos da álgebra na pesquisa de campo propriamente dita nos mostrou mais do que a pesquisa exploratória havia indicado. Além dos obstáculos relativos à apropriação da linguagem algébrica, percebemos a dificuldade de atribuir sentido aos objetos da álgebra. Em razão dessa dificuldade, muitos dos estudantes tentavam aproximar o raciocínio algébrico do raciocínio aritmético.

Também ficou muito claro como o uso dos princípios da igualdade na resolução das equações contribuem para a atribuição de significado do processo resolutivo. O uso do aplicativo *Algebra Balance Scales*, no laboratório de informática, contribuiu fortemente para que os alunos desenvolvessem a habilidade de resolver equações. O uso desse aplicativo mostrou, de um lado, o engajamento dos alunos nas atividades e, de outro, a emergência de interações verbais que possibilitaram compreender o processo de conceitualização. Diante da balança virtual, os estudantes permanentemente verbalizavam o seu fazer e agiam cooperativamente, partilhando com os colegas dúvidas, antecipações e soluções. Assim, é possível dizer que esses diálogos fizeram emergir processos cognitivos e metacognitivos que possibilitaram realizar mediações e intervenções no sentido de levar o aluno à autorregulação e à reconstrução de suas ações (FÁVERO, 2005a).

No que se refere à resolução de problemas do 1º grau, as evidências indicam obstáculos muito claros no que se refere à conversão de um registro em outro registro, sobretudo quando não há congruência semântica entre um e outro, e também no que se refere ao tratamento dentro de um mesmo sistema (DUVAL, 2011). Em ambos os casos, há indicadores claros de que a interação e o diálogo favorecem a superação desses obstáculos.

A quinta e última categoria, vai tratar justamente de como o aprender e o ensinar são duas faces de um mesmo processo.

4.5. CATEGORIA 5. Aprender e ensinar matemática: duas faces de um mesmo processo dialógico

A observação dos estudantes em ação, já na pesquisa exploratória, nos levou a considerar a possibilidade de criar um ambiente dialógico em que fosse possível investigar a cooperação entre os estudantes e o engajamento desses na atividade matemática.

Na pesquisa exploratória, ocorrida em 2011, monitores foram escolhidos pela professora Edna que, em sala de aula, dizia: *"pode ser monitor quem quer ser monitor, quem quer aprender Matemática, pois é quando ensinamos que mais aprendemos."* A fala da professora aproxima-se do pensamento de Freire (2011c), para quem, na relação pedagógica, todos ensinam e todos aprendem.

Mesmo dizendo isso, os monitores foram escolhidos, dentre aqueles que tinham melhor desempenho escolar. Isso fazia com que eles ocupassem uma posição de destaque no grupo, assumindo muitas vezes o papel de professor, como mostra o episódio, a seguir, em que o monitor Paulo auxilia sua colega Ingrid a calcular o valor numérico de uma expressão algébrica. O exercício sobre o qual eles dialogam é o mostrado na figura 108, a seguir.

Calcule o valor numérico da expressão $x^2 - 2xy + y^2$ para $x = -1$ e $y = -2$.

Figura 108. Transcrição de exercício do caderno

O estudante monitor Paulo leu o exercício em voz alta e, em seguida, perguntou para Ingrid:

Paulo:	— Você sabe como faz?
Ingrid:	— Sei. No lugar do "x" eu escrevo menos um e no lugar do "y", eu escrevo menos dois. [Ela, então, faz o que disse e olha para Paulo buscando aprovação]
Paulo:	— E quanto é menos um ao quadrado? [Fala apontando para o exercício]
Ingrid:	— É menos dois.
Paulo:	—Não, não é. Olha aqui: menos um ao quadrado é menos um vezes menos um [fala registrando no papel]. E menos vezes menos é mais e um vezes um é um, então é mais um.

No episódio, Paulo se comportou como um professor fazendo antecipações desnecessárias. Ao invés de dizer "não, não é" e buscar a resposta em Ingrid, ele se adiantou e deu a resposta. Como a expressão de Ingrid foi a de quem não havia compreendido, tentei participar, mas foi Paulo quem conduziu o diálogo:

Ingrid: — Então porque tem esse número aqui? [Fala apontando para o expoente da expressão $(-1)^2$]
Prof.ª Pesq.: — O expoente?
Paulo: — O expoente está aí para dizer quantas vezes vou multiplicar o menos um por ele mesmo. Entendeu?
Ingrid: — Hummm... Entendi

Paulo assumiu o papel de professor e, inclusive, tomou de empréstimo da fala da sua professora a expressão "o expoente está aí para dizer quantas vezes vou multiplicar o menos um por ele mesmo". Na voz de Paulo, é possível identificar a voz da professora (BAKHTIN, 2010) e mais que isso, no seu modo de agir está o modo de agir da professora.

Ao perceber que Ingrid havia enunciado uma resposta incorreta para a potência, Paulo não questiona sua resposta, ele diz que está errado e assume para si a tarefa de explicar porque está errado, agindo como a professora.

Mas a voz da professora está presente também na voz de Ingrid. No fragmento, a seguir, Paulo continuou no seu papel de professor e Ingrid mostrou que sabia, usando a expressão "tem uma multiplicação invisível aqui", que também tomou de empréstimo da fala da professora:

Paulo: — Tá vendo aqui ó: menos dois xy é o mesmo que duas vezes x vezes y.
Ingrid — Tem uma "multiplicação invisível" aqui, não é?
Paulo: — Isso mesmo, Ingrid! Tem uma multiplicação invisível aí.

Durante todo o exercício, Paulo se comportou como se fosse o professor de Ingrid e, embora tenham a mesma idade, Ingrid não o questionava e o obedecia quando ele se queixava:

Paulo: — Ingrid, você não está prestando atenção!
Ingrid: — Tá bom, tá bom... Vou prestar, vou prestar...

Quando vão resolver o exercício que exige o cálculo do perímetro de uma região poligonal, eles têm que somar as expressões algébricas relativas aos lados (3x –1) + (3x –1) + (5x +1)+(2x) + (x) + (x). Nesse momento, Paulo utilizou uma expressão semelhante a utilizada por Ingrid, que ambos tomaram de empréstimo da fala da professora.

Paulo: — Tá vendo esse x aqui ó, tem um "um" invisível antes dele [fala apontando para a os dois x no final da expressão].
Ingrid — É mesmo. É como se fosse UM x mais UM x. [fala apontando para a expressão e acentuando a palavra "um"].

As expressões “tem uma multiplicação invisível aqui” e “tem um “um” invisível” eram costumeiramente utilizadas pela professora na correção dos exercícios em sala de aula. Assim, é possível perceber que nos diálogos ninguém está só. Por trás de cada voz, existem as vozes de outros sujeitos (BAKHTIN, 2010). Esses sujeitos podem ser aqueles das relações cotidianas imediatas ou não imediatas. Na relação pedagógica, nas vozes dos estudantes, pode haver as vozes dos professores, dos colegas, de professores dos anos anteriores e até de familiares. No caso da professora, podem ser as vozes dos colegas também docentes, de professores do passado, de autores de livros didáticos e outros autores que ao longo de sua vida foram se constituindo em referenciais para a sua prática pedagógica. A figura 109, a seguir, é uma tentativa de mostrar a rede de comunicação que se estabelece na relação pedagógica. Essa rede mostra que o discurso pedagógico é marcadamente polifônico (BAKHTIN, 2010).

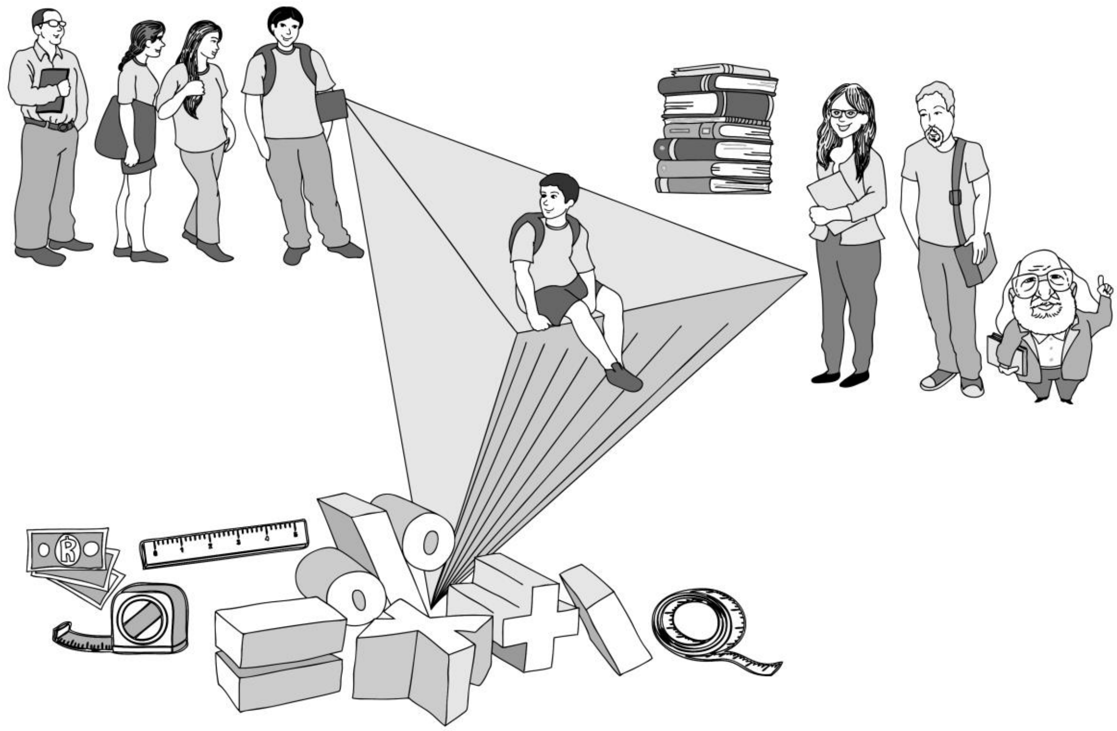


Figura 109. A polifonia dos discursos no diálogo pedagógico

Na pesquisa exploratória, a polifonia dos discursos no diálogo pedagógico foi fortemente influenciada pelo projeto de monitoria, por meio do qual estudantes com sucesso escolar em Matemática tinham o papel de contribuir com as aprendizagens dos estudantes que, em tese, estavam em situação provisória de fracasso ou de dificuldade.

Para Duran e Vidal (2011), a tutoria (ou a monitoria) pressupõe uma relação entre dois estudantes que frente a um objeto do conhecimento apresentam diferentes níveis de habilidade. Observamos, no entanto, que ao investir-se do papel de monitor, a maioria dos estudantes, embora tivesse postura cooperativa, se comportava como professor. Por outro lado, também observarmos que alguns estudantes, mesmo sem estarem investidos da atribuição de monitor, se comportavam como tal, sempre que sua produção era validada por algum colega ou por mim. A autoconfiança gerada pela constatação de que haviam aprendido algo, os faziam querer ensinar. Foi o que aconteceu, por exemplo, com Letícia quando, ao concluir um exercício de redução de termos semelhantes em expressões algébricas, teve seu processo validado primeiro pelo monitor e depois por mim.

Letícia:	— Tá certo, Paulo?
Paulo:	— Deixa eu ver. Hummm... Tá certinho... [depois de olhar demoradamente para o caderno].
Letícia:	— Tá certo mesmo?
Paulo:	— Professora, diz para ela que está certo.
Prof.ª Pesq.:	— Me dá aqui [falei pedindo o caderno]. Tá tudo certinho, Letícia. Muito bem!

Sem dizer uma palavra, Letícia sorriu, levantou-se do seu lugar, pegou um pincel, foi até o quadro branco e convidou os colegas que estavam próximos para ensinar o que havia acabado de aprender. Naquele momento, percebi que sua expressão corporal era diferente da que lhe era comum. Com os ombros erguidos e um sorriso nos lábios, ela disse:

Letícia:	— Gente, é muito fácil! É só procurar o que é parecido, x com x, y com y...

O gesto de Letícia de pegar o pincel e ir até o quadro ensinar é muito simbólico. Não era suficiente para ela ensinar o que havia aprendido no papel. Ao levantar-se e ir ao quadro, mostrou não apenas para seu colega monitor e para mim que sabia, mas para todos os colegas presentes e sentiu-se fortalecida para ensinar. Letícia parece ter consciência de que, ao fazer isso, reconstrói a sua imagem diante da turma.

Esses e outros episódios mostram que tanto as aprendizagens motivam e qualificam os diálogos como os diálogos desencadeiam e qualificam as aprendizagens.

Na perspectiva de Freire (1977, 2011a) e Freire e Shor (1986), era impossível pensar em um projeto de pesquisa que buscava incentivar a aprendizagem da Matemática, por meio do diálogo entre pares em que de um lado estavam os que sabiam e do outro estavam os que não sabiam Matemática. Em razão disso, na pesquisa de campo propriamente dita, embora houvesse marcantes assimetrias cognitivas, evidenciadas não apenas pelo rendimento escolar, mas pela nossa observação, optamos por não escolher tutores ou monitores.

4.5.1.A superação do absenteísmo

A pesquisa de campo nos mostrou a dimensão social e dialógica do processo de aprendizagem da matemática. À medida que se envolviam com as atividades do projeto, os estudantes passaram a interagir cada vez mais uns com os outros e muitos saíram da condição de passividade em que se encontravam.

A presente categoria mostra como, por meio da interação e do diálogo, alguns estudantes foram, paulatinamente, saindo do absenteísmo de que fala Ireland et al (2007) e que, segundo a professora da turma, era característica dos seus comportamentos. Alguns dos estudantes colaboradores de pesquisa, quando chegaram ao projeto, por iniciativa própria ou por indicação da professora, demonstravam desinteresse pelas atividades matemáticas. Aos poucos, foram se envolvendo e passaram da condição de estudantes passivos a sujeitos ativos, da condição de meros aprendizes a sujeitos que aprendem e ensinam ao mesmo tempo.

Para Charlot (2005, p. 65), "aprender requer uma atividade intelectual. Pode-se ensinar, ajudar, acompanhar quem aprende, mas ninguém pode aprender no lugar do outro." Isso significa que o sujeito tem um papel ativo nos seus processos de aprender e sua mobilização pessoal e sua disposição em aprender, embora possam ser estimuladas, não podem ser transferidas a outrem. Isso aconteceu principalmente com os estudantes que procuraram o projeto por iniciativa própria, porque acreditavam que ali poderiam melhorar seu rendimento escolar em Matemática.

Na mesma direção, Ireland et al (2007, p. 42) defende que "só aprende quem entra em uma atividade intelectual, e só entra quem está animado por um desejo. Essa mobilização depende do sentido que o aluno confere à escola, ao saber, ao fato de aprender, quer na escola quer fora dela". No caso da pesquisa, o projeto parece ter contribuído para essa mobilização do estudante em aprender Matemática. Em diálogo com seus pares e com a professora pesquisadora, os alunos parecem ter despertado o desejo de aprender, mas também de ensinar. Isso se manifestou também no modo como agiam em sala de aula.

Ao aprender/ensinar Matemática, os estudantes entraram em um processo metacognitivo (FÁVERO, 2005a) de compreensão do seu próprio fazer, a partir do fazer do outro. Por meio do diálogo e da interação, passaram a compreender melhor o seus próprios pensamentos, refletindo juntos sobre seus processos de aprendizagem. Como advoga Freire

(1986), ao conhecer o fazer do outro, os estudantes pareciam ter mais consciência do seus próprios fazeres.

A tabela a seguir mostra o desempenho escolar dos estudantes colaboradores da pesquisa. Embora não fosse objetivo da pesquisa analisar esse aspecto, em muitos momentos, sobretudo nas conversas informais com a professora da turma e nas entrevistas com os estudantes, o rendimento escolar foi referenciado.

Tabela 4. Desempenho escolar dos estudantes colaboradores da pesquisa.

No	Nome	1º bim	2º bim	3º bim	4º bim	Média	REC	Res.
1	George	8,5	8,2	10,0	8,5	9,0	-	AP
2	Gisele	8,4	4,3	9,1	7,5	7,5	-	AP
3	Helena	7,1	9,1	7,3	7,2	7,5	-	AP
4	Ingrid	4,3	2,1	3,6	6,0	4,0	-	RP
5	Joana	2,1	3,3	2,5	2,0	2,5	-	RP
6	Luana	4,9	3,5	4,7	7,2	5,0	-	AP
7	Luiza	6,8	5,6	9,6	9,5	8,0	-	AP
8	Priscila	5,7	5,6	5,7	4,5	5,5	-	AP
9	Saulo	4,4	3,5	2,1	5,4	4,0	5,0	AP
10	Talita	4,5	6,8	4,7	4,0	5,0		AP
11	Tânia	5,1	4,5	6,4	8,5	6,0		AP
12	Telma	5,2	3,6	7,0	8,7	6,0	-	AP
13	Tadeu	5,2	4,0	7,6	5,1	5,5	-	AP
14	Wilson	5,6	0	2,5	6,0	3,5	5,0	AP

Fonte: Secretaria da escola

O sombreamento na tabela corresponde aos bimestres letivos em que os estudantes participaram do projeto. Um bimestre escolar corresponde a aproximadamente 50 dias letivos e, portanto, um pouco mais de 2 meses.

Acreditamos que não seja possível fazer um correlação direta entre o desempenho escolar e a participação no projeto, visto que este é influenciado por inúmeras variáveis. No entanto, ao trazer essa informação que não faz parte dos objetivos da pesquisa, estamos dando vez e voz ao sujeito que relaciona seu processo de aprendizagem à participação no projeto.

Cada um dos 14 estudantes acima se configura um caso que merece estudo aprofundado sobre como interagiram com os colegas, com a professora regente, com a professora pesquisadora e com a própria Matemática, a partir da inserção no projeto.

Há situações em que o desenvolvimento de atitudes mais positivas do estudante na relação com a Matemática se manifestou em melhoria do rendimento escolar. Há situações em que o rendimento escolar não teve grandes oscilações, como mostra a tabela.

A fim de ilustrar o engajamento dos estudantes no processo de aprender/ensinar matemática, elencamos dois casos bastante significativos de mudança de atitudes, não apenas em relação à matemática, mas em relação à escola como um todo.

No caso de Gisele, para dar um exemplo, a participação no projeto parece ter melhorado não apenas a sua relação (CHARLOT, 2000) com a Matemática, mas com as pessoas de modo geral. Isso se manifestou em uma considerável melhoria do rendimento escolar, que ela atribui a sua participação no projeto.

No caso de Wilson, para dar um outro exemplo, é importante dizer que, embora a média final tenha sido 3,5 e esse logrou êxito apenas na recuperação final, essa nota não representa o ganho em aprendizagem que ele teve. Wilson saiu de uma situação de absenteísmo (IRELAND et al, 2007) em que sequer possuía caderno, para um quadro de participação ativa na sala de aula, a ponto de surpreender sua professora.

Consideramos que os casos de Gisele e Wilson são representativos das situações encontradas no projeto.

4.5.1.1.O caso de Gisele

No momento da pesquisa, Gisele era uma adolescente bastante comunicativa e alegre. Na época do projeto, tinha 14 anos e, portanto, estava em uma situação de distorção idade/ano escolar. Em conversa inicial, ela disse que havia sido reprovada em Matemática no ano anterior e que não gostava desse componente curricular.

Quando convidei os estudantes da turma a participarem do projeto, ela foi indicada pela professora, mas foi também a primeira a se manifestar, aceitando o convite. Gisele permaneceu no projeto de março a dezembro de 2012, com uma breve interrupção no mês de agosto, segundo ela própria porque, após o fim da greve dos professores, havia muitos trabalhos a fazer e ela estava sem tempo. No retorno ao projeto, em conversa informal, Gisele disse que seu rendimento escolar no 2º bimestre havia caído porque não estava estudando Matemática do mesmo modo que vinha fazendo.

Na entrevista coletiva realizada no dia 21/06/2012, ao ser questionada sobre a importância do projeto, Gisele falou:

> Gisele: — Aqui no projeto eu estou melhorando dia a dia e não é só na escola, em casa, em todos os lugares [faz uma pausa e acrescenta] — As minhas notas eram ruins, mas depois do projeto minhas notas ficou [sic] ótimas [risos]. — Meu boletim veio só com nota boa. Em Matemática, eu tirei 8,4 e agora eu sou até aluna destaque da sala.

Gisele atribuiu ao projeto a sua mudança de comportamento. Ao reconstruir seu percurso na aprendizagem matemática, ela reconstruiu também sua relação com o saber (CHARLOT, 2000) de maneira geral e com os outros. Isso mostra a estreita relação entre cognição e afetividade, como nos mostra González-Rey (2003).

Na entrevista individual, ocorrida no dia 11/12/2012, ao ser questionada novamente sobre a importância do projeto, Gisele acrescentou:

Gisele:	— O projeto melhorou as minhas notas. Foi muito bom. Antes, a Matemática para mim era mó ruim[sic]. Quando falava em Matemática prá mim, meu Deus! Eu até chorava, mas com o projeto eu fui começando a gostar de Matemática.

O que Gisele falou, tanto na entrevista coletiva como na entrevista individual, foi corroborado por sua professora de Matemática que, em conversa informal, afirmou:

Prof.ª Leila:	— Nossa! Esse ano Gisele é outra pessoa. Pense numa menina difícil! O ano passado, ela era impossível. Ela mudou demais. É aluna destaque. Faz tudo.

A coordenadora pedagógica da escola também disse a mesma coisa:

Coordenadora Pedagógica:	— Gisele era uma menina terrível! Foi reprovada e o comportamento era horrível. Nem parece a mesma pessoa, hoje. E não é só em Matemática.

As falas de Gisele, da professora e da coordenadora indicam que ela estava em processo de mudança, de engajamento nas atividades escolares e reconstrução da relação que estabelecia com os saberes (CHARLOT, 2000). Mas é a própria Gisele que mostra como o projeto influenciou sua aprendizagem matemática. No episódio a seguir, já mencionado, Gisele mostra seu engajamento:

Gisele:	— Eu fiz a prova de Matemática, ontem, e acho que gabaritei. Quando eu peguei a prova eu pensei: “eita e agora? Como é que eu vou fazer?”. Aí eu comecei a pensar aqui nos jogos, aquele negocinho com os vermelhos e azuis, sabe? Aquele das argolinhas. Quando eu vi, eu tava brincando como se estivesse jogando só que com a prova. Eu acho que gabaritei.

Esse fragmento da fala de Gisele mostra, além da influência no seu processo de aprendizagem da matemática, o quanto é importante o apoio do material para que os alunos construam os conceitos de números inteiros. Na prova, mesmo sem ter o material em mãos, para resolver os exercícios, Gisele imagina as argolas vermelhas e azuis que representavam respectivamente os números inteiros negativos e inteiros positivos.

No cenário do projeto, Gisele demonstrava apropriação desses conceitos e, como já tinha experiência com os jogos e materiais utilizados, voluntariamente, passou a ensinar para Telma, como mostra fragmento a seguir, em que explicou o funcionamento do jogo Tira/Põe negativos (GASPAR, 1986), mostrado na figura 110, a seguir.

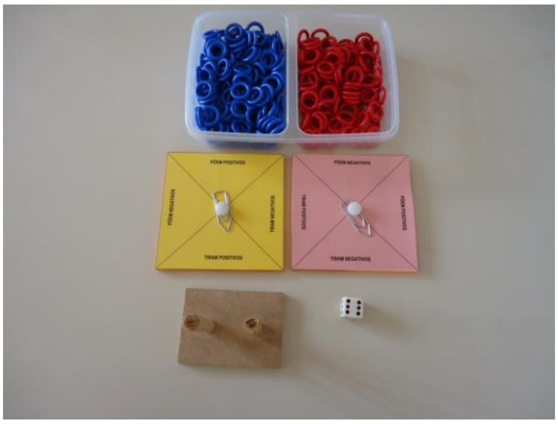


Figura 110. Jogo TIRA/POE positivos e negativos.

Nesse jogo, na sua vez, o jogador deve jogar o dado que indica a quantidade de argolinhas que deve colocar ou retirar do ábaco e fazer a roleta (*clips*) girar para saber qual a cor da argolinha e se vai retirar ou colocar no ábaco. Expliquei o jogo, mas não disse que ele oportunizava situações semelhantes ao JOGO POSITIVO E NEGATIVO, mostrado na página 166, e que já havia sido jogado por Gisele, mas não por Telma.

Gisele jogou o dado e tirou 5, ao girar a roleta, esta parou em PÕE POSITIVOS. Ela então colocou 5 argolinhas azuis no ábaco. Telma tirou 3 e sua roleta também parou em PÕE POSITIVOS. Na rodada seguinte, Gisele tirou 3 no dado e a roleta indicou TIRA NEGATIVOS. Como ela só tinha argolinhas azuis no ábaco, perguntou

Gisele: — Nesse jogo, eu também posso pegar zero?
Prof.ª Pesq: — Pode sim, Gisele.
Gisele: — Olha aqui Telma, se eu pegar três vermelhas e três azuis, não é zero? Então, não vale nada, é um zero, tá vendo? Agora eu já tenho três vermelhas para tirar. [falou mostrando 3 argolas vermelhas e 3 azuis. Em seguida coloca tudo no ábaco e retira apenas as vermelhas]
Telma: — Humm... Acho que entendi.

É interessante observar que Gisele questionou se podia "pegar zero" e, em ato contínuo, passou a explicar a Telma o significado de "pegar zero". Isso mostra que ela superou o obstáculo evidenciado ainda quando estava jogando JOGO DO POSITIVO E NEGATIVO. Nas rodadas seguintes, por várias vezes, aconteceu situação semelhante, ou seja, em que tinham que "pegar zero" e, nesse momento, Gisele acompanhava atentamente sua colega.

> Telma: — Agora sou eu que tenho que tirar negativo e eu não tenho vermelha. Tenho que tirar dois negativos. Então eu preciso de um zero.
> Gisele: — Pega, então.

Telma pegou 2 argolas vermelha e 2 azuis e colocou no ábaco, para então retirar as vermelhas. Gisele, então, falou:

> Gisele: — Pronto. Você viu que perder negativo é legal. Você fica com mais positivos. É bom perder negativo. Ruim mesmo é perder positivo.
> Telma: — É. Eu agora tenho mais positivo do que antes.

Gisele, que já havia jogado o POSITIVO E NEGATIVO, acumulou conhecimentos dessa experiência anterior e, por meio do diálogo, socializou com Telma o que sabia. Ela enunciou um teorema-em-ato (VERGNAUD, 2009a), de que perder negativo era melhor do que perder positivo e Telma demonstrou compreensão ao falar do seu saldo.

Na entrevista final, ocorrida no dia 11/12/2012, Gisele voltou a relacionar o seu desempenho escolar com o projeto, ao ser estimulada a falar de sua experiência:

> Gisele: — Na matemática, porque antes eu não gostava da matemática. Eu olhava assim para o povo e pensava: "nossa aquele ali é *nerd*, como eu faço para ser *nerd*?" Passado um tempo eu comecei a ir para o projeto e comecei a aprender e daí eu também aprendi a ensinar o que eu sabia e a aprender também. [Silêncio] — Aí eu comecei a me interessar bem, aí foi aumentando minha nota. Eu nunca tinha tirado oito em Matemática, nunca tinha tirado dez, aí quando eu olhei meu boletim: nossa! Aí eu vi que a Matemática era fácil.

Ao ser questionada se mais aprendeu ou ensinou no projeto, ela afirmou:

> Gisele: — Eu mais aprendi do que ensinei. Antes eu pensava que eu não tinha capacidade de ensinar e nem de aprender.

As falas de Gisele mostram que ela reconstruiu não apenas a visão que tinha da Matemática, mas a visão de si mesma como sujeito capaz da aprender e ensinar ao mesmo tempo. Gisele sai da condição de expectadora da atividade matemática que passa ao seu redor para a condição de partícipe e artífice da construção da sua própria aprendizagem (FREIRE, 2011a). Dessilenciada, Gisele descobriu que podia perguntar, responder, discordar, protestar, aprender e ensinar.

O caso de Gisele mostra a interrelação entre diálogo e aprendizagem matemática. As interações desencadeiam nela processos cognitivos e metacognitivos que a levam a apreensão conceitual e esta, por sua vez, a motiva a entrar em diálogo com as colegas, realizando mediações e intervenções.

4.5.1.2.O caso de Wilson

No momento da pesquisa, Wilson era um adolescente de 13 anos, bastante tímido, mas que gostava de esportes e se mostrava bastante ativo nas atividades desportivas da escola. Na aula de Matemática, ele se mantinha a maior parte do tempo calado. Na conversa inicial, ele disse que nunca havia sido reprovado e que gostava de Matemática, mas também disse que suas notas estavam péssimas e que nem tinha caderno.

Quando iniciaram as observações em sala de aula, Wilson foi se aproximando até que tomou coragem de se convidar para o projeto, questionando se ainda havia vagas. Permaneceu do final do mês de agosto até dezembro de 2012.

Logo nos primeiros encontros, foi possível perceber que Wilson se engajava nas atividades e participava de modo bastante ativo, principalmente dos jogos. Sua atitude, no cenário do projeto, era bastante participativa, ao contrário da sala de aula.

É importante dizer ainda que antes de entrar no projeto, Wilson não possuía caderno de Matemática. Seu caderno foi comprado na semana que entrou no projeto e, a partir daí, sempre o trazia consigo e se preocupava em registrar as aulas e tarefas de casa.

O fragmento a seguir, já mostrado na página 243, evidencia um diálogo que se estabeleceu entre Wilson, Tadeu e Gisele na resolução de um exercício (transcrito na figura 111) que pedia para escrever as expressões algébricas que representavam os preços dos produtos de uma papelaria que eram dados em função do preço “x” do caderno. Em um dos itens do exercício, Wilson mostra a sua capacidade de discordar e argumentar. É importante dizer que esse problema foi iniciado no cenário da sala de aula e, no cenário do projeto, os alunos pediram ajuda para resolver.

Exercício 1: Um caderno, em reais, tem o preço representado por x. [...] e) O preço do estojo é igual ao triplo do caderno menos R$8,00

Figura 111. Exercício transcrito do caderno de Wilson.

Prof.ª Pesq.:	— Como podemos representar o preço do estojo?
Gisele:	— O preço do estojo é igual ao triplo do caderno menos 8.
Prof.ª Pesq.:	— Hum... pensem aí e me falem.
Gisele:	— É três mais...
Tadeu:	— Então, eu posso fazer assim ó, professora: coloco o três e o oito embaixo assim [Fala e escreve no papel $\frac{3}{8}x$].
Wilson:	— Não é assim. Eu vou escrever o três, o x e oito do lado.
Prof.ª Pesq.:	— Faz aí para eu ver. É o triplo não é? De quem?
Tadeu:	— Do caderno.
Prof.ª Pesq.:	— E quanto é o caderno?
Tadeu:	— É o oito multiplicado três vezes.
Wilson:	— Não, não é.
Gisele:	— Não é.
Prof.ª Pesq.:	— Então, é o que? O triplo do caderno é quanto.
Gisele:	— É três x.
Prof.ª Pesq.:	— Aham! Continua.
Tadeu:	— E esse oito? Vai onde?
Wilson:	— É o triplo menos oito, então é três x menos oito. [Escreve no papel 3x – 8.]
Prof.ª Pesq.:	— Muito bem, Wilson! Muito bem! Agora, explica para os seus colegas.
Wilson:	— Você escreve o três do lado o x e o menos oito [Fala apontando para o que tinha escrito].
Gisele:	— Eu sei explicar. É por causa que o preço do estojo a gente não sabe, mas é igual ao triplo do caderno que é x, então a gente escreve 3x.
Wilson:	— É isso e menos o oito [fala complementando a ideia de Gisele]
Prof.ª Pesq.:	— Parabéns, Wilson!

No fragmento acima, é possível perceber que Wilson era capaz de discordar veementemente dos colegas. Ao dizer “não é assim”, “não, não é”, ele enunciou a sua discordância. Na sequência, ele construiu seus argumentos dizendo: “eu vou escrever o 3, o x e 8 do lado”. Como Tadeu permaneceu sem compreender e enunciou uma resposta incorreta, Wilson, voltou a argumentar: “É o triplo menos oito, então é três x menos oito.” E, desta vez, escreveu no papel o que estava dizendo. Quando Gisele enunciou sua interpretação do problema, dizendo que o preço do estojo era o triplo do caderno, por isso era 3x, ele complementa: “é isso e menos o oito.”

Ao verbalizar por duas vezes o que fez, Wilson vivenciou um processo metacognitivo que apenas explicitou em sequência linear, as etapas da sua ação, o que evidencia um processo de tomada de consciência, em um nível menos elaborado (FÁVERO, 2008).

Na sequência, o exercício (transcrito na figura 112) pedia para calcular o preço de alguns produtos, imaginando que o preço do caderno fosse R$10,00. Novamente, Wilson mostra capacidade de tecer argumentos e de questionar. O exercício tinha a seguinte redação:

f)Se o preço do caderno fosse igual a R$10,00, qual seria o preço dos seguintes itens?
[....]
2) Lápis
[...]

Figura 112.Exercício transcrito do caderno de Wilson

Para resolver, os estudantes deveriam retornar à primeira parte do exercício que havia sido feita em sala de aula, para encontrar as expressões algébricas de cada produto. Nesse momento, apenas Wilson resolveu questionar:

Prof.ª Pesq.: —O caderno custa x, não é? Vamos calcular o preço do lápis?
Todos: — Vamos.
Prof.ª Pesq.: — Quanto custa o lápis?
Wilson: — Três a mais que o caderno.
Prof.ª Pesq.: — Então, é...
Wilson: — É... Mas não pode.
Prof.ª Pesq.: — Por que?
Wilson: — Uai, professora, já viu um lápis custar mais que um caderno?
Prof.ª Pesq.: — É mesmo, Wilson, se o caderno custasse dez, então o lápis custaria...
Wilson: — Treze, né professora? É muito, um lápis custa menos de um real.

A postura crítica do Wilson e sua capacidade de questionar o problema, mostra a sua construção conceitual. Mais que isso, sua negação do problema mostram a sua compreensão da relação entre a matemática e o mundo, sua realidade objetiva (FREIRE, 2011a). Em sua negação, há um componente crítico que traduz o sentido que atribui à atividade matemática e que nos faz pensar que mesmo na álgebra, os saberes matemáticos precisam ter função e significado social, precisam estar ancorados na realidade concreta (SKOVSMOSE, 2007). No caso, ao dizer “mas não pode”, Wilson está dizendo que o exercício é absurdo.

O comportamento do Wilson no cenário do projeto nunca foi diferente. Embora muitas vezes ele fugisse dos encontros para ir jogar futebol ou praticar judô na quadra, quando estava no cenário do projeto se engajava ativamente nas atividades, fossem elas jogos, circuito de problemas ou exercícios tradicionais. No entanto, em sala de aula, ele era sempre muito calado. Ao ser questionado sobre o porquê de não agir em sala de aula da mesma forma, ele sempre respondia.

Wilson: — Sei lá... Tenho vergonha.

Mas o comportamento passivo e silencioso de Wilson, em sala de aula, começou a mudar a partir do dia em que teve coragem de interpelar a professora para dizer que sua conta estava errada.

A professora Leila estava corrigindo um exercício no quadro com a participação dos estudantes. O exercício tratava da redução de termos semelhantes em uma expressão algébrica, conforme transcrição mostrada na figura 113 a seguir:

27) Calcule

[...]

e) $\frac{3}{7}x + \frac{41}{8}x$

[...]

Figura 113. Exercício do livro (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009, p. 170)

Na correção, após calcular o mínimo múltiplo comum dos denominadores, a professora foi estimulando a participação de todos por meio de perguntas, até que em um dado momento ela disse:

Prof.ªLeila — Gente, acorda! Quanto é sete vezes quarenta e um x? [Fala apontando para o registro $\frac{24x+}{56}$, que havia feito no quadro]

Um aluno: — Dá duzentos e oitenta e um.

Prof.ª Leila: — Só 281?

Alguns alunos: — 281 x.

A professora não se deu conta que a multiplicação não estava correta e prosseguiu com o cálculo. Nesse momento, Wilson que estava próximo a mim e atento à aula diz bem baixinho:

Wilson: — Professora, a conta tá errada [se dirigindo a mim].

Prof.ª Pesq.: — Fala alto Wilson. — [Falo para ele, mas apontando para a Professora Leila.]

Encorajado por mim, ele levantou a mão e disse:

Wilson: —Professora, a conta tá errada. [Fala alto de modo que a professora ouça]

A professora Leila levou um susto, mas olhou para o Wilson e perguntou:

Prof.ª. Leila: — O que está errado?
Wilson: — Aí, professora, não é 281 [silêncio].
Prof.ª. Leila: — É mesmo, não pode ser 281. Eu fui na de vocês...Wilson tem razão.

A professora, então, foi para o canto do quadro, fez a conta e falou:

Prof.ª Leila: — Gente, vamos corrigir? É 287.

Ela concluiu a correção, olhou para Wilson e disse:

Prof.ª Leila: — Meus parabéns, Wilson!

Nesse momento, Wilson endireitou o corpo na cadeira, ergueu os ombros e sorriu. Todos os alunos olharam para ele e alguns se manifestaram:

Alguns alunos: — Olha o Wilson! Aí, Wilson!

Os parabéns da professora e as manifestações dos colegas parecem ter dado novo ânimo a Wilson. Daí para frente, ele de fato entrou na aula e passou a participar da correção dos exercícios. Ao perceber que podia ter vez e voz, Wilson passou a agir com mais autonomia (FREIRE, 2011a) e segurança e isso foi percebido pela professora que, ao final da aula, confidenciou

Prof.ª Leila: — Erondina, eu estou de cara! Eu achava que o Wilson fosse analfabeto. O que foi aquilo?! O que foi aquilo?!

Dias depois, em conversa informal, ela voltou a falar do comportamento de Wilson e de seu colega Tadeu:

Prof.ª Leila: — Eu estou impressionada como Tadeu e Wilson, estão diferentes. Juro! Eu pensei que Wilson fosse daqueles meninos que chegam ao 7º ano analfabeto. Até agora, ele não fazia nada. Ele e o Tadeu estão muito diferentes. Participam da aula, fazem perguntas.

A fala da professora mostra que os alunos deixaram de ser invisíveis para ela. Não é apenas o comportamento deles em relação a ela, a aula e a Matemática que havia mudado, o comportamento dela em relação a eles também mudou consideravelmente. Ela passou a incluí-los em sua aula, fazendo pergunta para eles, se dirigindo a eles e validando seus procedimentos.

Na entrevista realizada em 17/12/2012, ao final da pesquisa, ao ser questionado sobre o porquê de ter se aproximado de alguns colegas para estudar, Wilson diz:

> Wilson: — Dá mais facilidade estudar com os colega. Se ele não souber, dá prá gente ajudar e o que a gente não souber, ele ajuda a gente.

Quando questionei sobre a possibilidade de fazer exercícios e resolver problemas juntos, ele afirmou:

> Wilson: — Na sala a gente pode conversar mais ou menos. Aqui no projeto a gente pode conversar mais, andar...

É interessante observar que Wilson destacou algo que os demais colaboradores não destacaram, a liberdade de conversar e de andar, que na sala de aula convencional era restrita. Aqui é importante destacar a conversa como elemento constituidor do diálogo, o que nega a ideia, no senso comum, de que aula de Matemática deve ser silenciosa e que a atividade matemática é algo que se faz no silêncio. É sobretudo a possibilidade de conversar, de interagir que desencadeia o diálogo, ou a alternância de enunciados (BAKHTIN, 2010) que possibilita qualificar as aprendizagens.

Por fim, ao ser questionado sobre se mais aprendeu ou ensinou no projeto, Wilson sorriu e falou:

> Wilson: — Eu mais aprendi. Mas eu ensinei também. Eu ensinei equações para o Saulo.

Ao longo do segundo semestre de 2012, Wilson reconstruiu sua relação com a escola, com os colegas, com a professora e com a Matemática e, ao final do 4º bimestre, foi para a recuperação final e logrou êxito, sendo aprovado para o 8º ano. Mas a reconstrução da relação com o saber (CHARLOT, 2000) só foi possível porque Wilson entrou em diálogo com todos os sujeitos ao seu redor, com a professora e com a Matemática e consigo mesmo.

A participação de Wilson no projeto mostra que não apenas o diálogo potencializa a aprendizagem, como a aprendizagem potencializa o diálogo. De um adolescente passivo e silencioso, Wilson ao aprender os objetos matemáticos se torna um autêntico participante ativo do diálogo.

Na entrevista final, realizada no dia 18/12/2012, a professora Leila foi indagada se percebia alguma diferença nos alunos que estavam frequentando o projeto e ela, então, destacou o processo de desenvolvimento e aprendizagem de Wilson, Tadeu e Saulo, apontando de modo particular a confiança e a segurança que adquiriram, segundo ela pela apropriação dos saberes matemáticos.

> Prof.ª Leila: — A diferença foi absurda! É o que eu falei, a abertura, e acho que isso permeia todo o conhecimento, né? Quando você conhece, você entende, você vê com outros olhos. É obvio que para o menino, eu pego o Wilson e o Tadeu, que para mim são os ícones disso. Eu cria que eles eram analfabetos. De tudo assim, porque os primeiros contatos, as primeiras demonstrações que eles me deram é de que eram meninos que tinham chegado aqui na sexta série [sétimo ano] sem saber ler, sem saber escrever, sem saber quanto era dois mais dois. E aí você observar que esses dois meninos participando do projeto, e eles começaram tardiamente né? [...]Foi uma reviravolta, como eu vi o Saulo pegar a prova [se referindo à prova de recuperação final] agora e falar assim: "nossa professora! Obrigado!" Não. O trabalho não é a mesma coisa, porque a segurança, eles eram meninos inseguros e o que o projeto proporcionou para eles foi essa questão da segurança. Saber que eles têm capacidade. Wilson levantar o dedo e dizer "tá errado, professora.", isso é sensacional, não é? Isso é a segurança do conhecimento. Dele, com propriedade, estar sabendo o que está dizendo

Como já foi dito, ao sair do absenteísmo (IRELAND *et al*, 2007), esses alunos entraram em ação e isso provocou uma reação da professora. Não foram apenas eles que mudaram, ela também mudou porque percebeu na capacidade deles, então exposta, novas possibilidades de diálogo e interação. É como se eles, de repente, deixassem de ser invisíveis.

4.5.2.Aprender e ensinar matemática juntos ou quase juntos

Ao final da pesquisa, por meio de entrevistas individuais, coletamos as impressões dos estudantes colaboradores sobre o projeto que participaram. Todos afirmaram, em um primeiro momento, que mais aprenderam do que ensinaram, mas também falaram que tiveram a oportunidade de ensinar algo. É o caso, por exemplo, de George, que não teve dúvidas de que mais aprendeu que ensinou, embora tivesse excelente desempenho escolar e fosse reconhecido pela professora e pelos colegas como "aluno destaque":

> George: — Aqui, eu mais aprendi. A senhora ensina. Os colegas ensinam e tipo assim: cada um que sabe vai ensinando um pouco [faz um longo silêncio e continua] — por que aqui tem a senhora para ajudar. Tem menos aluno. A

	gente senta junto. Na sala é muita gente e aí fica mais difícil.
Prof.ª Pesq.	— Mas você ensinou também.
George:	— Acho que ensinei [risos]. Porque uma coisa que eu ensino, eu nunca mais esqueço. Quando eu comecei a ensinar equação, aí eu entendi de verdade equação

George destacou o fato de que no projeto, além do trabalho cooperativo em que todos ensinavam e, portanto, se ajudavam, havia menos alunos e, assim, era possível sentar juntos para aprender matemática. Ao final, quando afirmei que ele também ensinou, George sorriu e mostrou porque considerava que mais aprendeu, ele afirmou que mesmo quando estava ensinando “equações” estava aprendendo.

O que George falou nos remete as ideias de Freire (2011c, p. 25) de que, ao se reportar ao trabalho docente e discente, afirma que “quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender”. Embora estejamos falando do trabalho discente, do processo de aprender e ensinar juntos, essa concepção continua válida.

Mas a pesquisa mostrou, também, que o aprender/ensinar matemática entre os adolescentes colaboradores da pesquisa tinha diferentes estilos, que evidenciavam mais ou menos as assimetrias cognitivas que, como já dissemos, são inerente aos sujeitos, visto que a diversidade é pressuposto humano. No entanto, a depender do estilo, os estudantes assumiam um papel mais próximo ao papel do professor, ainda que não fossem nomeados tutores e monitores. Nesses momentos, as assimetrias ficavam muito aparentes e nem sempre o trabalho era cooperativo.

A seguir, apresentamos os quatro estilos do aprender/ensinar matemática juntos, evidenciados na pesquisa de campos. São eles: i) trabalho em parceria (nós fazemos juntos); ii) trabalho em paralelo (nós fazemos juntos, mas sem parceria); iii) trabalho orientado (você faz e eu oriento); e, iv) trabalho supervisionado (você faz e eu supervisiono).

4.5.2.1.Trabalho em parceria (nós fazemos juntos)

Esse estilo de aprender/ensinar matemática se evidenciou em momentos em que dois ou mais estudantes se juntavam de forma cooperativa em um jogo, para resolver um problema ou um exercício e atuavam em parceria, sem que a ação de um se sobrepusesse à ação do outro, como mostra a representação da figura 114 a seguir.

Figura 114. Representação para o trabalho em parceria

O episódio a seguir mostra uma situação em que Helena e Janete resolvem juntas um exercício tradicional do livro, mostrado na figura 115. Há uma relação de reciprocidade (BAKHTIN; VOLOCHÍNOV, 2009) entre elas e nenhuma assume o papel de professor. O estilo de aprender/ensinar é marcado pela cooperação e pela parceria, ora uma diz o que fazer, ora é a outra quem diz.

34 Veja, ao lado, a tabela de gols de um campeonato. Calcule o saldo de gols de cada equipe e responda:

a) Qual equipe tem o menor saldo de gols? E o maior?

b) Qual tem maior saldo de gols: Fluminense ou Cruzeiro?

c) Qual tem maior saldo de gols: Vitória ou Fortaleza?

d) Quais equipes têm saldos que são números opostos?

Equipe	Gols pró	Gols contra	Saldo de gols
Grêmio	26	19	
São Paulo	22	17	
Fluminense	18	23	
Cruzeiro	19	19	
Vitória	15	24	
Fortaleza	17	21	

Figura 115. Exercício do livro (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009, p. 22)

Embora eu estivesse um pouco afastada, percebi que Helena e Janete estavam com dúvidas. A pergunta de Helena para Janete não é uma pergunta de quem já tem a resposta, mas a pergunta de quem realmente não sabe.

Helena: — Janete, você sabe o que é gol pró?

Janete: — Eu sei que gol contra é quando um jogador faz gol no seu time, mas... [silêncio]

Helena.: — Hummmm... Professora, vem cá.

Prof.ª Pesq.: — Vocês estão com dúvidas? Qual exercício?

Helena: — Professora, nessa tabela temos que calcular o saldo, mas o que é gol pró e gol contra?

Prof.ª Pesq.: — Em um campeonato um time faz gols e leva gols, não é? Então os gols que o time faz são os gols pró e os gols que o time sofre são os gols contra. Entenderam?

Helena.: — Hum acho que entendi... Mas não tem sinal nenhum.

Prof.ª Pesq.: — E que sinal você acha que é? Coloque o sinal que você acha que é...

Helena: — Professora, é igual no jogo. Os gols feitos é positivo e os gols sofridos é negativo.

Prof.ª Pesq.: — Isso mesmo. Os gols prós ou feitos são positivos e gols contra ou sofridos são negativos. Agora dá para calcular o saldo.

Quando disse que elas podiam colocar o sinal que achavam mais conveniente, Helena atribui aos gols pró o sinal positivo e aos gols contra o sinal negativo. Em ato contínuo, vira-se para Janete e fala.

Helena: — Janete, lembra do jogo? Os gols prós é positivo, então é azul. Os gols contra é negativo, então é vermelho.

Janete: — Pera aí. Vou escrever... aqui é tudo positivo e aqui negativo [fala apontando para a tabela em seu caderno].

Helena, que poucos minutos antes estava com dúvidas, passou da situação de quem aprendia para a situação de quem ensinava, mas seu tom de voz e sua postura corporal não eram de uma professora. Ao dizer, "lembra do jogo?", Helena convidou ((ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p. 57) Janete a entrar na situação, por meio da referência a uma situação anterior vivenciada por ambas.

Muito embora os números não fossem pequenos, as duas juntas pegavam o número de argolas correspondentes aos gols pró e aos gols contra e calculavam o saldo para, só depois, fazerem o registro no caderno. Esse processo de cálculo era feito de forma cooperativa como mostra o diálogo a seguir:

Helena: — Janete, você pega os positivos e eu pego os negativos [pegando as argolas vermelhas para si e empurrando as azuis para Janete].

Janete: — Agora vamos ver quanto é o saldo? [Pega 26 argolas azuis e em seguida vai formando pares com as argolas vermelhas] — Um anula um, um anula um...

Helena: — O saldo do Grêmio é positivo, mais sete, porque tem mais positivo. Ele fez mais gols.

Janete — São Paulo é mais cinco. Tem mais gols feitos também.

Helena: — Fluminense é menos cinco. Ele fez menos gols. É menos cinco.

Quando disse "você pega os positivos e eu pego os negativos", Helena convidou Janete para iniciar um trabalho cooperativo e o convite foi prontamente aceito, pois esta pegou as argolas e começou a contar.

Quando chegaram ao cálculo do saldo de gols do Cruzeiro, elas não sentiram necessidade de usar as argolinhas para fazer o cálculo.

Helena.: — Agora não precisa pegar as argolas, não é Janete?

Janete: — É. Dezenove e Dezenove. Dezenove anula dezenove.

Helena.: — É. O saldo é zero.

Como estavam em um trabalho cooperativo, em que resolviam o exercício em parceria, até mesmo o não dito era entendido. Não havia estranhamento por parte de Helena quando Janete disse “Dezenove e dezenove. Dezenove anula dezenove”. Como estão dialogando a partir da argolas azuis e vermelhas, que as possibilitam representar os gols feitos e sofridos, atribuindo sentido aos números inteiros positivos e negativos, fica subentendido, na fala, que dezenove azuis anulam dezenove vermelhos. Isso mostra que há sentidos subjetivos (GONZÁLEZ-REY, 2003) que dois sujeitos partilham e que estão para além do dito. “Dezenove anula dezenove” só faz sentido para as duas que estão dentro da situação. Como nos garante Bakhtin e Volochínov (2009), os enunciados não são constituídos apenas de formas linguísticas, mas de elementos não verbais que incluem significações individuais e sociais, oriundas da situação, e é essa situação que permite a Helena compreender o que fica subentendido na fala de Janete: “dezenove negativo anula dezenove positivo.”

4.5.2.2.Trabalho em paralelo (nós fazemos juntos, mas sem parceria)

Em diversas situações, sobretudo de jogos, o trabalho realizado não era um trabalho de parceria, mas um trabalho realizado em paralelo, o qual o lado competitivo dos estudantes aflorava e, em virtude disso, a cooperação diminuía, como já foi mostrado no jogo *Matix*, na página 168, e no Jogo da “Tabuada Fácil”, na página 114. Nesses jogos, os alunos agiam de forma bastante competitiva e provocavam reação de desagrado em seus colegas. Nos jogos, foi possível perceber que as assimetrias cognitivas se tornavam mais explícitas, muitas vezes aparecendo nos enunciados dos estudantes de forma pejorativa, causando desconforto, como mostra representação na figura 116 a seguir.

Figura 116. Representação para o trabalho em paralelo

Mas esse estilo competitivo apareceu também em situações que não eram de jogos. Foi o que aconteceu, por exemplo, na atividade em que um grupo de estudantes deveria resolver um exercício que pedia a construção de uma reta numérica, para localizar todos os números inteiros de −9 a +9. Como ninguém utilizou a régua, chamei a atenção para o fato de que os espaços entre os números estavam desiguais. Em seguida, todas as alunas reconstruíram suas retas numéricas e não tiveram qualquer dificuldade em localizar os números inteiros. Considerei que, embora elas não tivessem estudando os números racionais na sua representação decimal, já haviam algum conhecido prévio desse objeto, então resolvi desafiá-las, pedindo que localizassem esses números, como mostra o diálogo a seguir:

Prof.ª Pesq.:	— Marquem o número dois e meio, dois vírgula cinco aí na reta. Vocês sabem onde fica na reta?
Priscila:	— É entre dois e três, não é professora?
Prof.ª Pesq.:	— O que acham? [Perguntei a todas]
Todas	— É.
Prof.ª Pesq.:	— E menos dois e meio?
Gisele:	— É entre menos 1 e menos 2.
Priscila:	— Não é! Não é! — Falando muito alto
Gisele:	— É sim, Priscila! — Falando também muito alto
Priscila:	— Ah é? Então onde fica menos um e meio?
Gisele:	— Entre 0 e 1.
Priscila:	— Professora, fala para Gisele que não é, professora, fala, fala, por favor...

Tive que intervir, pois ambas estavam já discutindo e falando muito alto. As demais olhavam sorrindo e eu, espantada, tive que pedir para que parassem. Lembrei-as de que os números eram simétricos e, por isso, estavam à mesma distância do zero. Nesse momento, Gisele se convenceu e Priscila começou a sorrir. Gisele ficou muito chateada e disse:

Gisele:	— Professora, a Priscila não deixa a gente pensar e fica rindo quando a gente erra.
Priscila:	— Deixo sim. Eu só disse que você estava errada.
Prof.ª . Pesq.:	— Mas não precisa brigar. Todas estamos aqui para aprender e errar é normal.
Priscila:	— Mas eu estava certa.

Embora estejam na mesma atividade, as estudantes assumem posições antagônicas e competitivas. Priscila ao dizer “você estava errada [...] mas eu estava certa”, expõe a assimetria cognitiva que existe entre ambas em relação a esse conhecimento e sua postura deixa Gisele em um estado emocional (GONZÁLEZ-REY, 2003) que a leva a demonstrar, por meio das palavras e também da postura corporal, o seu desagrado.

Em outro episódio, já no segundo semestre, foi preparada uma atividade em que os estudantes deveriam construir uma reta numérica em uma parede, utilizando fichas numéricas com inteiros e racionais positivos e negativas e 10 tiras de papel. Novamente, foi observado que, embora estivessem trabalhando juntos, havia pouca cooperação e as falas, acompanhadas de um postura corporal mais agressiva, eram marcadas pela tentativa de subjugar o outro.

Inicialmente, os estudantes colaram as 10 tiras de papel na parede e localizaram sem dificuldade o zero, os inteiros positivos e negativos, em um trabalho razoavelmente em parceria, conforme mostra o fragmento a seguir:

Prof.ª . Pesq.:	— Podemos começar com o zero? Onde vocês colocariam o zero?
Tadeu:	— Aqui ó, professora, bem no meio.
Priscila:	— É... bem no meio.
Prof.ª . Pesq.:	— Agora peguem lá nas fichas todos os números inteiros.
Priscila:	— Aqui ó: o menos um, o mais dois, menos 3[Pegando as fichas].
Tadeu:	— As frações não são números inteiros [Separando as fichas com números fracionários]. — Aqui mais três, mais quatro [Pegando fichas com números inteiros]
Saulo:	— O −4 é inteiro? [olhando para a ficha]
Tadeu:	— Claro que é.[fala de maneira ríspida].
Prof.ª . Pesq.:	— Agora colem esses números lá na reta.
Priscila:	— Os positivos de um lado e os negativos do outro.
Tadeu:	— Antes do zero, a gente cola os negativos.
Saulo	— Deixa eu colar os positivos aqui depois do zero.
Priscila:	— Os negativos eu colo.

O primeiro sinal de que o trabalho poderia deixar de ser cooperativo apareceu na fala de Tadeu, quando Saulo questionou se – 4 era inteiro. Quando Tadeu disse “claro que é”, seu tom de voz aumentou e Saulo se encolheu e se afastou fisicamente, não dando continuidade ao diálogo.

Quando a localização dos números fracionários foi iniciada, os desacordos se tornaram cada vez mais evidentes. Saulo pegou uma ficha numérica que continha a fração $\frac{1}{2}$ e parecia não saber o que fazer dela, então perguntei para ele:

Prof.ª Pesq.:	— O que significa a fração um meio?
Saulo:	— Fração um meio significa...

Patrícia interrompeu abruptamente a fala de Saulo e, apontando para a reta numérica, mostrou o espaço exatamente entre 0 e +1 e falou:

Priscila:	— Fração um meio significa bem aqui ó [Fala alto apontando para a

marca exatamente entre 0 e +1].
Saulo: — Não...
Patrícia: — É sim. [Falou de maneira ríspida, sem deixar Saulo completar seu pensamento]
Prof.ª . Pesq.: — Priscila, espera. Saulo, o que significa a fração um meio?
Saulo: — É... [Silêncio] é metade.
Priscila: — Então, é aqui mesmo [Fala em tom desafiador].
Prof.ª . Pesq.: — Isso. Cola aí. E a fração menos um meio?
Saulo: — Mas isso é tão fácil. Menos um meio é bem aqui, ó. [Apontando para marca entre −1 e −2]
Priscila: — Dá para ele que ele quer colocar [Fala apontando para Saulo].
Prof.ª . Pesq.: — Será que é aí mesmo? O que vocês acham?
Priscila: — Me dá. Deixa eu por, então.

É importante observar, no episódio acima, que a postura de Priscila era muito competitiva. Ela interrompeu o colega, falou alto e, além disso, mostrou-se impaciente quando ele indicou a localização incorreta. Embora apontasse os erros de Saulo, Priscila não se comportava como professora, pelo contrário. Seu comportamento o tempo inteiro era o de uma colega, mas que deixava claro as assimetrias que os separavam. Quando sugeriu que Saulo colasse a ficha numérica, Patrícia estava usando de uma sutil ironia, pois percebeu que ele indicou a posição incorreta. Quando questionei se a posição seria aquela mesmo, Patrícia disse “me dá. Deixa eu por, então”. Por meio dessa fala, Patrícia estava marcando sua posição, mostrando que Saulo não sabia e ela sabia.

Isso nos leva a considerar que esses alunos devem possuir uma vivência escolar, em que o certo deve ser premiado e o errado deve ser negado nas aulas de Matemática. Tal perspectiva, ainda muito comum, estimula a competição e a não cooperação, o que dificulta a construção do diálogo qualificado que promove a aprendizagem, o crescimento e desenvolve a autoestima e a autonomia.

Mas Saulo resolveu não entregar a ficha para Priscila e localizou, ele mesmo e de forma correta, o número na reta numérica, como mostra o fragmento a seguir:

Saulo: — É aqui ó. [Indicando o local exato entre 0 e −1 e olha de forma desafiadora para Priscila].
Prof.ª . Pesq.: — OK! Priscila, pega a fração menos três meios. Onde fica?
Saulo: — É bem aqui ó. [Indicando o espaço entre −2 e −3.]
Priscila: — É. [olha aborrecida para Saulo e, em seguida para mim buscando confirmação]

O aborrecimento de Priscila ocorreu porque Saulo respondeu em seu lugar, mas ela não percebeu que a localização novamente estava incorreta. Não foi possível saber se Saulo fez isso porque não sabia ou apenas para provocar Priscila. O fato é que ela demonstrou aborrecimento, como mostra o fragmento a seguir:

Priscila:	— Ah, não, Saulo!
Prof.ª . Pesq.:	— Patrícia, a fração um meio corresponde a uma metade e a fração três meios? [longo silêncio]
Saulo:	— Hum... Um e meio? Três metades?
Prof.ª . Pesq.:	— Isso. Venham cá: esse pedaço aqui não é metade? [Apontando para o espaço entre 0 e +1.]
Saulo:	— Eu também sei, tá vendo, Priscila?
Prof.ª . Pesq.:	— Onde ficaria duas metades ou dois meios?
Priscila:	— Aqui no um. [Apontando para o um na reta]
Prof.ª . Pesq.:	— E três metades ou três meios?
Saulo:	— Aqui, onde eu falei, um e meio. [Fala de modo desafiador].
Prof.ª . Pesq.:	— Como é menos três meios...
Priscila:	— Do outro lado no mesmo lugar? [Fala bem baixinho]

Como a disposição de cooperar um com o outro é pequena, ambos se dirigem a mim e pouco se falam. Não há diálogo, pois a reciprocidade (FREIRE, 1977) foi rompida e não foi restabelecida. Durante toda a atividade, os atos de fala foram marcados por provocações mútuas e pouca vontade de escutar, de acatar, de dialogar.

4.5.2.3.. Trabalho orientado (você faz e eu oriento)

Alguns episódios foram marcados por uma cooperação diferente, em que um estudante se colocava no papel do professor e fazia as mediações conduzindo e orientando o trabalho de outro estudante. Nesse momento, as assimetrias cognitivas ficavam evidentes, mas não havia tentativa de subjugar o outro. O estudante mediador, em geral, agia de forma muito paciente, escolhendo com cuidado as palavras que iria utilizar, como mostra a representação na figura 117 a seguir.

Figura 117. Representação para trabalho orientado

No fragmento a seguir, já mostrado anteriormente, na página 137, Priscila orienta Joana na resolução do problema transcrito na figura 118 a seguir, em um circuito de problemas.

Problema 3: Dezesseis barras de chocolate vão ser divididas igualmente entre 5 pessoas. Quanto cada pessoa receberá?

Figura 118. Problema de Nilza Bertoni, transcrito do circuito

A figura 119, a seguir, mostra o registro de Priscila em sua folha de resposta.

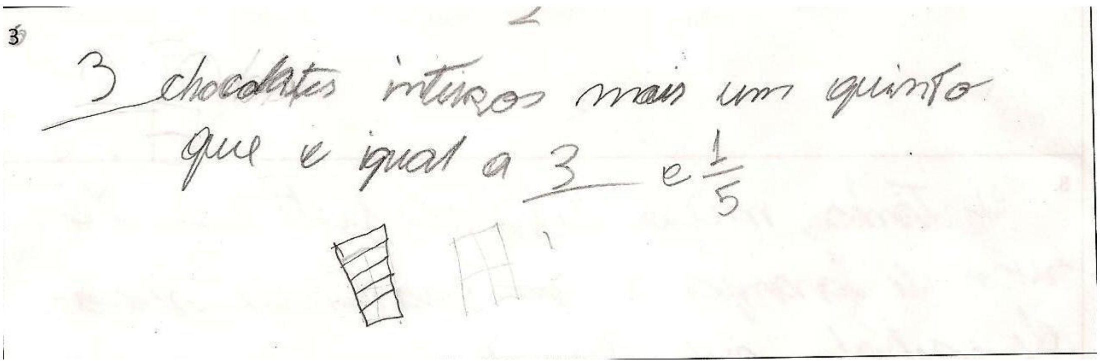


Figura 119. Registro da estudante Priscila para o problemas 3 do Circuito.

Priscila fez inicialmente um cálculo mental para encontrar quantos chocolates inteiros (3) cada pessoa ganharia. Em seguida, fez um desenho para encontrar a fração $\left(\frac{1}{5}\right)$ que cada uma receberia.

Após fazer isso, Priscila percebeu que Joana ainda não havia começado a fazer. Ela, então, afastou a sua própria folha e propôs:

Priscila: — Vamos fazer o três? [Fala delicadamente]
Joana: — Vamos.
Priscila: — Então lê [Entregando o problema na mão de Joana].
Joana: — Dezesseis barras de chocolate vão ser divididas igualmente entre 5 pessoas. Quanto cada pessoa receberá?
Priscila: — Como é que você vai fazer?

Quando disse "vamos fazer o três", Priscila fez um convite (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p. 57) para envolver Joana na situação. Em seguida, propôs que Joana lesse o problema, usando uma estratégia tipicamente docente. Como Joana a obedeceu, lendo em voz alta, ela disse: "como é que você vai fazer?" Já não é mas o "nós", mas o "você". Isso mostra que ela está investida do papel de uma professora que vai orientar o fazer da aluna.

Como já foi dito, sem falar nada, Joana fez o desenho de 15 chocolates, lentamente. Em seguida, a cada grupo de 5 chocolates fez um traço maior separando-os, como mostra a figura 120 a seguir.

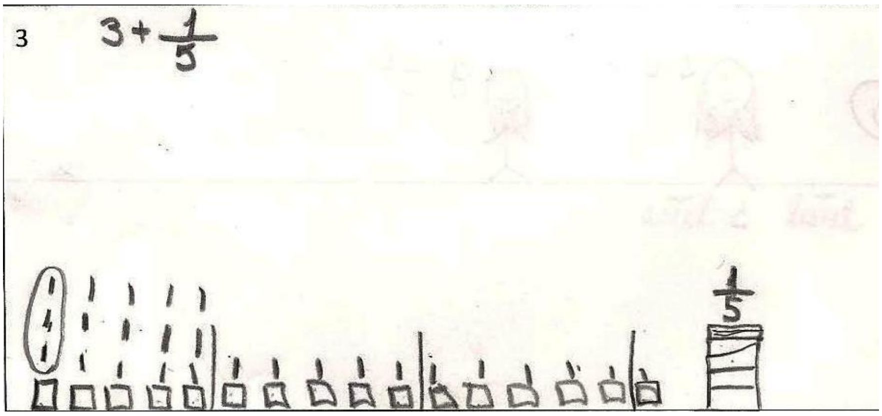


Figura 120. Registro da estudante Jéssica para o problemas 3 do Circuito.

Todo o processo de construção de Joana foi acompanhado pacientemente por Priscila que apenas validou, embora fosse diferente do seu próprio processo.

> Priscila: — Isso, isso...

Quando terminou o registro, Joana disse:

> Joana: — Dá três e sobra uma.
> Priscila: — Mas Joana, essa que sobrou ainda dá para dividir, não dá? É chocolate... Mas está tão pequeno...

Ao ouvir de Priscila: “mas está tão pequeno”, Joana entendeu que o desenho que fez para representar o chocolate que sobrou estava muito pequeno, então, ampliou o desenho do lado do registro e o dividiu em 5 partes, escrevendo a fração $\frac{1}{5}$ sobre o mesmo, como mostra a figura 120, já apresentada.

Nesse momento, Priscila não se aguentou e, ao invés de perguntar, respondeu no lugar de Joana, antecipando a conclusão da atividade.

> Priscila: — Isso mesmo. Cada pessoa come três chocolates mais um quinto.

A antecipação induziu Joana a fazer o registro no papel tal e qual Priscila falou . Ela escreveu, por fim, $3+\frac{1}{5}$, como resposta ao problema.

Embora eu estivesse o tempo todo próxima a elas, em nenhum momento fui convidada a entrar na situação ou a participar do diálogo. Priscila foi quem conduziu o processo inteiro.

A postura de Priscila foi o tempo todo cooperativa. Como uma professora, ela foi mediando o fazer de Joana. Não era a postura de quem fazia junto, mas de quem acompanhava o fazer do outro. E mais, de quem validava o fazer do outro, embora esse fosse diferente do seu próprio fazer.

4.5.2.4.. Trabalho supervisionado (você faz e eu supervisiono)

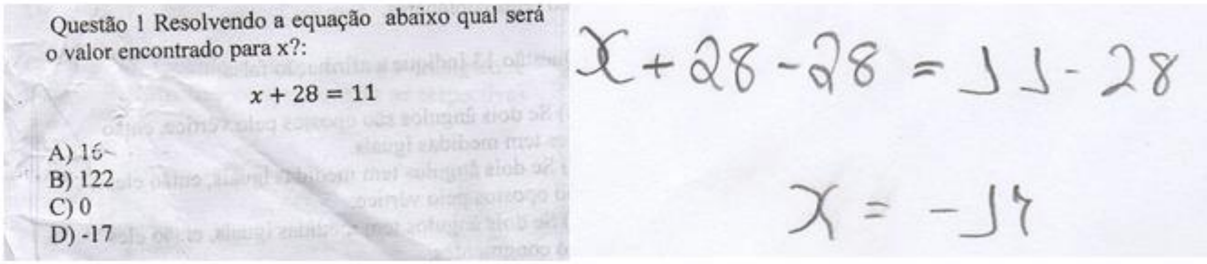
Um outro estilo presente no processo de aprender/ensinar matemática juntos era marcado pelo controle e supervisão de um estudante sobre o outro estudante. Em diversos momentos da pesquisa, um estudante assumia o papel de professor conduzindo o trabalho, mas expondo as assimetrias cognitivas, e nem sempre as palavras eram cuidadosamente escolhidas.

A figura 121, a seguir, mostra uma representação para o trabalho supervisionado.

Figura 121. Representação para o trabalho supervisionado

O fragmento a seguir mostra Luiza ajudando Wilson a corrigir a sua prova de matemática. Apenas Luiza havia levado a sua prova, mas Wilson falou que havia se saído muito mal. Então, ela se propôs a ajudá-lo porque ele já sabia que iria para a recuperação final.

A figura 122, a seguir, mostra a primeira questão da prova e a solução encontrada por Wilson com a ajuda de Luiza:



Questão 1 Resolvendo a equação abaixo qual será o valor encontrado para x?:

$x + 28 = 11$

A) 16
B) 122
C) 0
D) -17

$x + 28 - 28 = 11 - 28$

$x = -17$

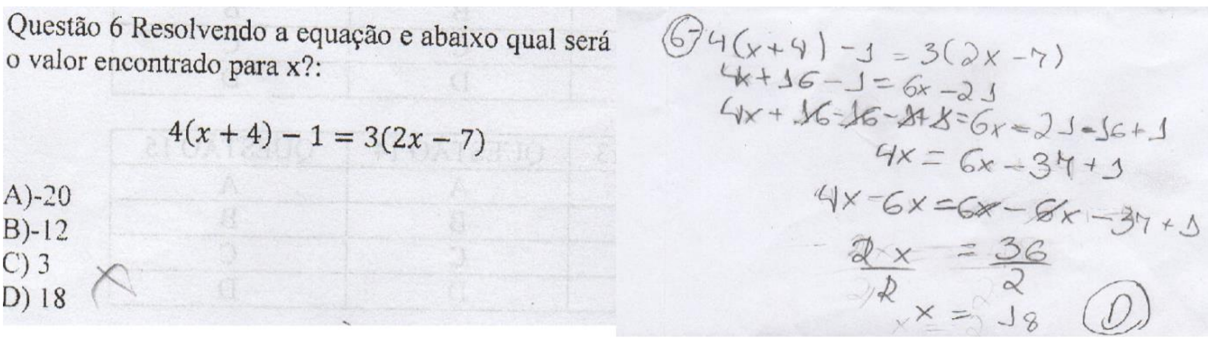
Figura 122. Questão 1 da prova com resolução feita por Wilson em momento posterior à aplicação

Wilson leu sozinho a questão e escreveu a primeira linha da resolução; nesse momento, Luiza não o esperou continuar a resolução e perguntou:

Luiza: — Quanto é 11 – 28 ?
Wilson: — 17.
Luiza: — Dezessete?!. [Fala bem alto e com uma certa ironia.]
Wilson: — Menos 17.
Luiza: — Muito bem! Parabéns! E qual é a alternativa?
Wilson: — É D.

Em nenhum momento, Luiza falou em fazerem juntos e, quando Wilson errou a resposta, ela repetiu a resposta em tom de voz muito alto, em tom irônico. Ele, então, respondeu corretamente e ela, como uma supervisora do trabalho, o parabenizou.

Wilson prosseguiu na resolução dos exercícios, sendo acompanhado de perto por Luiza, até que, na questão 6, mostrada na figura 123 a seguir, Wilson começou a falar com ele mesmo:



Questão 6 Resolvendo a equação e abaixo qual será o valor encontrado para x?:

$4(x + 4) - 1 = 3(2x - 7)$

A)-20
B)-12
C) 3
D) 18

6) $4(x+4) - 1 = 3(2x-7)$
$4x + 16 - 1 = 6x - 21$
$4x + 16 - 16 - 1 = 6x - 21 - 16 + 1$
$4x = 6x - 37 + 1$
$4x - 6x = 6x - 6x - 37 + 1$
$\frac{2x}{2} = \frac{36}{2}$
$x = 18$ D

Figura 123. Questão 1 da prova com resolução feita por Wilson em momento posterior à aplicação.

Wilson: — Caralho! Eu sou muito burro! [Fala para si mesmo]
Luiza: — Você não está conseguindo? [Pergunta, olhando sua folha]
Wilson: — Não.
Luiza: — Você não sabe o que fazer quando tem parênteses?
Wilson: — Sei.
Luiza: — E é o que, então?
Wilson: — Tem que multiplicar. Quatro vezes x dá quatro x e quatro vezes

quatro dá oito.
Luiza: — Oito?! Oito?!
Wilson: — Eita é 16.
Prof.ª pesq.: — O que houve? Ele estava fazendo certinho.
Wilson: — É, mas agora eu errei.
Luiza: — Agora tá certo, quatro x mais dezesseis menos um é igual a seis menos vinte e um [Fala apontando para o registro $4x + 16 - 1 = 6x - 21$, feito por Wilson].
Wilson: — Agora eu vou acrescentar menos dezesseis e mais um dos dois lados.
Luiza: — E vai ficar como?

Embora não se saiba exatamente porque o Wilson disse que era burro, Luiza interferiu, mas sua pergunta era quase uma afirmação de que ele não estava conseguindo mesmo. Ele confirmou e ela, ao invés de perguntar o que ele não sabia, fez outra pergunta sugerindo que ela sabia exatamente o que ele não sabia, ou seja, aplicar a propriedade distributiva. Mas não era isso, tanto é que ele discordou dela. Como nos mostra Bakhtin (2009, 2010), as palavras escolhidas por Luiza expressam sua relação com Wilson. Da posição que ela ocupa nessa relação, ela vê e percebe nele coisas que ele mesmo não vê, mas isso, como já dissemos, é sempre a hipótese do que ele realmente é. Ao inferir a dificuldade de Wilson, Luiza tem uma hipótese que não é confirmada, tanto que, em ato contínuo, ele aplica corretamente a propriedade distributiva, mas se enrola na soma algébrica no segundo membro da equação e, então, Luiza o interrompeu abruptamente, como mostra o diálogo a seguir:

Luiza: — Menino, tá errado![fala de forma impaciente].
Prof.ª pesq.: — O que está errado, Luiza? [pergunto, preocupada]
Luiza: — Wilson, é menos e menos.
Wilson: — Eu...
Luiza: — Mas é negativo e negativo, pode somar. Quanto é menos vinte e um e menos dezesseis? [interrompe abruptamente]
Wilson: — Menos cinco....
Luiza: — Quando é tudo negativo vai som...[Usa o recurso da frase incompleta]
Wilson: — mar. É mesmo, tem que somar. Dá menos trinta e sete menos um.[fala realizando um cálculo mental]
Luiza: — Continua. Agora tem que tirar esse 6x daqui, né? [Fala apontando para o segundo membro da equação.]

Nesse episódio, tentei entrar no diálogo, mas Luiza sequer prestou atenção no que eu estava dizendo, nem olhou para mim. Ela prosseguiu o diálogo com o Wilson, como se eu não estivesse presente, pois a professora ali é ela. Sua atitude de supervisão continuou e ela, sempre de maneira ríspida, conduzia o pensamento de Wilson. Não houve qualquer tentativa de fazê-lo descobrir, ela disse que estava errado, interrompeu e usou o recurso da frase incompleta quando ele, ao invés de somar, subtraiu os dois números negativos. Ao dizer “quando é tudo negativo vai som...”, Luiza, como uma professora, está “soprando” a resposta para Wilson. Esse é um dos efeitos do contrato didático que Brosseau (2008, p. 79) chama de “efeito topaze”. Na ansiedade de obter a resposta que espera, o professor “sopra” para o aluno, fazendo uma antecipação da resposta que deseja ouvir.

Por fim, ela se antecipou a ele dizendo o que precisava fazer no segundo membro da equação, comportando-se como se Wilson tivesse algo que precisasse ser preenchido. Sua atitude é marcadamente dissertativa (FREIRE, 2011a).

Wilson não protestou e, então, sem dizer nada, registrou no caderno a resolução completa, mostrada na figura 123, anteriormente. Luiza pegou sua folha e, ao conferir a resolução, protesta:

Luiza:	— Menino, que é isso?! Não é menos dois x? [Fala alto]
Wilson:	— É, mas de cá também vai dar menos trinta e seis, então... [Fala bem baixinho, mas argumenta sua opção]
Luiza:	— Então...
Wilson:	— Dá tudo positivo.
Luiza:	— É mesmo. [depois de olhar o exercício silenciosamente]

Nesse trecho, fica claro como Wilson avançou no processo de resolver equações do 1º grau. Na 6ª linha da sua resolução, ele chega a iniciar o registro $\frac{-2x}{2} = \frac{-36}{2}$, mas apaga demonstrando ter tomado consciência (FÁVERO, 2008) de que podia pular essa etapa. Ao verbalizar para Luiza seu processo econômico, ele mostrou a compreensão de que, se ambos os membros da equação são negativos, ao multiplicar por – 1, os membros ficam positivos. Luiza só validou seu processo depois que analisou atentamente o registro. Nesse caso, o processo metacognitivo de tomada de consciência evidenciado pela verbalização de Wilson é de natureza mais elaborada, porque vai além da mera descrição linear das ações. Do mesmo modo, o processo metacognitivo de validação do registro por Luiza revela uma tomada de consciência com base na reflexão sobre o fazer de Wilson (FÁVERO, 2008).

Durante toda a correção da prova, Luiza se comportou como uma professora que supervisionava de maneira impessoal o trabalho de Wilson. Até mesmo a forma como se dirige a Wilson é impessoal, ela não o chama pelo nome, mas de “menino”.

Acompanhei à meia distância o trabalho dos dois, praticamente sem interferir, com a certeza de que, se de um lado, Luiza agia tentando impor seu modo de fazer, de outro, Wilson agia como quem estava em franco processo de construção da sua autonomia (FREIRE, 2011a).

O que se observa, nas situações, é que há diferentes níveis de interação e diálogo e esses produzem diferentes aprendizagem. Nas situações em que o diálogo é mais horizontal, em que os estudantes se colocam como estudantes, aconteceu tanto o trabalho em parceria como o trabalho em paralelo, sem parceria e com um grau alto de competitividade. No primeiro caso, a relação entre cognição e afeto é tão evidente que não resta dúvidas da estreita relação entre diálogo e aprendizagem matemática. Já no segundo caso, o excesso de competitividade gera um estado emocional nos sujeitos que deixa dúvidas quanto à qualidade das aprendizagens. A competição exacerbada faz com que os sujeitos se coloquem em defensiva, exigindo a permanente mediação de um terceiro para equacionar os problemas. Se, por um lado, essa competição pode levar os sujeitos a se contraporem, a se colocarem diante do outro, também pode levá-los a se absterem de agir ou a se retirarem da atividade. Nas situações relatadas, a intervenção da professora pesquisadora foi crucial para que isso não ocorresse.

Nas situações em que a relação é mais vertical e um aluno assume o papel de professor e de coordenador da atividade, foi possível perceber as assimetrias cognitivas. No entanto, na primeira situação em que o estudante-professor apenas orienta o trabalho, há, de fato, cooperação e a relação entre cognição e afeto promove aprendizagens também significativas. Já na situação em que o aluno-professor assume a supervisão do trabalho, a cooperação é menor e, embora havendo aprendizagem, corre-se o risco de o aluno supervisionado também se abster de agir.

De qualquer modo, é importante dizer que o estímulo à interação e ao diálogo não podem prescindir do acompanhamento contínuo e atento do professor, que deve atuar mediando os conflitos e estimulando a cooperação.

Na quinta e última categoria, apresentada a seguir, mostramos como a interação e os diálogos se constroem de modo diverso, em função dos objetos matemáticos a que se referem.

5. POSSIBILIDADES E LIMITES DA PESQUISA EM QUE O DIÁLOGO É AO MESMO TEMPO OBJETO E METODOLOGIA DE ESTUDO – UMA SÍNTESE

> *"Quem tem o que dizer tem igualmente o direito e o dever de dizê-lo. É preciso, porém, que quem tem o que dizer saiba sem sombra de dúvida, não ser o único ou a única a ter o que dizer. Mais ainda, que o que tem a dizer não é necessariamente, por mais importante que seja, a verdade alvissareira por todos esperada. É preciso que quem tem o que dizer saiba, sem dúvida nenhuma, que, sem escutar o que quem escuta tem igualmente a dizer, termina por esgotar a sua capacidade de dizer por muito ter dito sem nada ou quase nada ter escutado."*
> *(FREIRE,* 2011c, p. 114)

Ao iniciarmos a presente pesquisa, tínhamos em mente que seu objeto era o diálogo entre os diferentes sujeitos que interagem no contexto da aprendizagem escolar da Matemática nos anos finais do ensino fundamental. No entanto, no decorrer tanto da pesquisa exploratória como da pesquisa de campo propriamente dita, fomos percebendo que o diálogo não era apenas objeto, mas metodologia de pesquisa.

Essa duplicidade de perspectiva do diálogo, no contexto da pesquisa, nos indicou possibilidades, e também limites que passamos a destacar nessa seção, em um exercício de síntese que, esperamos, possa contribuir do ponto de vista epistemológico e metodológico para a ampliação do campo de pesquisa nessa área.

5.1. A relação entre o espaço/tempo dos cenários da pesquisa, a interação, o diálogo e a aprendizagem matemática

A interação dos estudantes entre si e destes com a professora pesquisadora e com a professora regente nos diversos cenários da pesquisa produziram diferentes diálogos, que mostram possibilidades e limites quanto ao processo de aprender/ensinar matemática.

No cenário do projeto de extensão "Matemática: nenhum a menos", há indicadores (GONZÁLEZ-REY, 2005a) claros de que a interação mais direta dos estudantes entre si e com a professora pesquisadora propiciava um diálogo mais livre, em que os estudantes tinham a possibilidade de mediar o processo de aprendizagem uns dos outros. Nesse espaço/tempo, ficou evidente que tanto o estudante em situação de sucesso escolar, ou de êxito, como o estudante em situação provisória de fracasso, ou de dificuldade, beneficiavam-se da interação e do diálogo e qualificavam suas aprendizagens. Ambos se colocavam como sujeitos que podiam tanto aprender como ensinar matemática. Assim, não foi preciso eleger monitores ou tutores de estudos.

Embora haja evidências da possibilidade de todos aprenderem e ensinarem matemática no âmbito de um projeto em que os alunos são estimulados a cooperarem com as aprendizagens uns dos outros, no turno contrário ao das aulas, ficou claro também que o projeto não prescindia da presença de um professor que acompanhasse a interação e o diálogo entre os estudantes, isto porque sobretudo os alunos em situação de sucesso escolar, tendiam a negar a produção matemática dos colegas, se estas não coincidissem com as suas próprias produções. Além disso, a presença do professor contribuía para a mediação dos conflitos que, de alguma forma, podiam impactar na interação e no diálogo.

Como os alunos sentavam-se em torno de uma bancada e dispunham de um tempo mais dilatado para a discussão dos jogos, das atividades e dos problemas, o estilo de comunicação era mais dialógico e colaborativo, mas não livre de conflitos.

No cenário de sala de aula, a configuração espacial com alunos enfileirados e a organização pedagógica centrada na aula expositiva se mostraram como obstáculos à interação e ao diálogo. O padrão de comunicação era basicamente o jogo de perguntas (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006) e respostas em que apenas parte da turma participava efetivamente. Assim, os indicadores (GONZÁLEZ-REY, 2005a) da pesquisa mostram claramente a necessidade de alterar essa organização, para que os alunos sejam efetivamente sujeitos do seu processo de aprender/ensinar matemática.

Por outro lado, do ponto de vista metodológico, foi muito importante a observação em sala de aula, a fim de acompanhar o crescente engajamento dos estudantes participantes da pesquisa nas atividades matemáticas. Apenas a observação no cenário do projeto de extensão, em turno contrário ao das aulas, não daria a dimensão do processo de desenvolvimento e aprendizagem matemática desses estudantes.

Por fim, cabe destacar, de modo especial, as interações e o diálogo no cenário do laboratório de informática. De modo diverso da sala de aula, a configuração espacial em que os alunos sentavam-se dois a dois e a organização pedagógica, em que a aula expositiva era substituída por uma sequência didática a ser executada de forma cooperativa, propiciaram uma permanente interação dos estudantes entre si, que, por meio do diálogo, explicitavam, de modo bastante livre e descontraído, seus modos de pensar. Os diálogos revelaram que os estudantes traçavam estratégias, faziam inferências e antecipações, dando pistas dos processos cognitivos e metacognitivos (FÁVERO, 2005a) envolvidos na construção do conhecimento matemático.

As observações mostraram que, no cenário do laboratório de informática, como a aula não era centrada na figura do professor, esse assumia um papel muito mais de mediador da aprendizagem do aluno. Sua presença era solicitada pelos estudantes sempre que esses tinham dúvidas, não conseguiam fazer sozinhos alguma atividade, entravam em conflito com os colegas ou quando precisavam da validação de algum procedimento.

Os indicadores (GONZÁLEZ-REY, 2005a) mostram a necessidade de reorganização do trabalho pedagógico, a fim de se criar condições objetivas de espaço e tempo para que os estudantes assumam a condução do seu próprio processo de aprendizagem, e para que tenham tempo de discutir, dialogar e trocar ideias na processo de construção do conhecimento matemático. Na sala de aula, o tempo reduzido para execução de atividades e para a resolução de problemas impactavam de forma negativa na interação e no diálogo.

5.2. O jogo de perguntas e respostas revelando a presença do professor na fala do estudantes

O estilo de comunicação mais presente durante a pesquisa foi o que Alrø e Skovsmose (2006) chamam de jogo de perguntas e que estamos chamando de jogo de perguntas e respostas, em que, no diálogo, um assume o papel de questionar e o outro de responder. Esse jogo de perguntas e respostas revela tanto relações mais horizontais, em que os sujeitos dialogam de forma mais cooperativa, como relações menos horizontais, em que um se coloca como detentor do saber, deixando evidentes as assimetrias cognitivas.

Os indicadores (GONZALEZ-REY, 2005a) mostram que o jogo de perguntas e respostas se apresentam tanto como possibilidade quanto como limite em uma pesquisa em que o diálogo é, ao mesmo tempo, objeto e metodologia de estudo.

As evidências apontam que, nos diálogos, mesmo ausente, o professor está presente nas enunciações e nas ações dos estudantes. No jogo de perguntas e respostas, principalmente os estudantes em situação de sucesso escolar tendem a tomar emprestado (BAKHTIN, 2010) da fala da professora seus enunciados, e também a repetir seus procedimentos na resolução de exercícios, na correção de tarefas, na mediação/intervenção da aprendizagem, e até na validação da produção oral e escrita dos colegas.

Desta forma, a análise do jogo de perguntas e respostas apresenta-se como uma possibilidade de compreender a apropriação conceitual dos estudantes, uma vez que revela perspectivas (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006), estratégias, inferências, antecipações e posicionamentos dos mesmos diante da atividade matemática.

Por meio do jogo de perguntas e respostas, foi possível perceber e estabelecer contato com aluno, desafiá-lo e avaliá-lo. Também foi possível reconhecer e validar seus processos cognitivos (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006).

Mas o jogo de perguntas e respostas revela também limites no que se refere à relação de poder de um sujeito sobre outro. Nos diálogos, fica evidente antecipações desnecessárias, imposição do pensamento e do modo de agir de um sobre o outro e cerceamento da ação do outro. Isso ocorreu tanto na interação dos estudantes entre si como destes com a professora e com a professora-pesquisadora.

No jogo de perguntas e respostas, a exiguidade de tempo leva um dos sujeitos a apressar conclusões, a antecipar ou tentar adivinhar o pensamento do outro, a pensar e agir no lugar do outro, o que caracteriza o que Brosseau (2008, p. 79) chama de “efeito didático Topaze”, em que o professor, e nosso caso também o estudante, tenta controlar a incerteza. Ao fazer isso, tanto o professor como o estudante em pretensa atitude cooperativa desconsidera que o outro é sujeito do seu próprio processo de aprendizagem e pode pensar e agir por si mesmo.

Também no jogo de perguntas e respostas é possível identificar o uso abusivo da linguagem informal que, de um lado, aproxima o estudante da atividade matemática e, de outro, como nos mostra Pais (2001, p. 94), pode induzir a uma “redução do significado dos conceitos envolvidos.”

Os indicadores (GONZALEZ-REY, 2005) mostram a necessidade de formar o professor para a condução desse jogo de perguntas e respostas, a fim de que os alunos sejam estimulados a expressarem seus pensamentos, a se posicionarem, enfim, a pensarem e agirem por eles mesmos, conduzindo seus próprios processos de aprendizagem, diminuindo assim efeitos didáticos desnecessários (BROSSEAU, 2008).

5.3. O diálogo a partir dos registros escritos uma possibilidade, e também um limite

O espaço do projeto “Matemática: nenhum a menos”, em que os estudantes agiam de forma mais livre e dispunham de mais tempo para realizar as atividades, parece ter sido também o espaço em que mais emergiu produções matemáticas próprias e divergentes daquelas que comumente se vê em sala de aula.

Foi também nesse espaço em que se observou, com maior intensidade, diálogos a partir dos registros escritos dos estudantes. Do ponto de vista metodológico, esses diálogos foram muito importantes para compreender o processo de conceitualização dos estudantes, como no caso das expressões algébricas em que os alunos, para dar significado às operações com polinômios, aproximam-se de procedimentos da aritmética ou, como no caso das frações, em que as estudantes mostram pouco domínio conceitual e resolvem os problemas por meio de registros pictóricos.

Por meio dos diálogos a partir da produção escrita ou pictórica dos estudantes, foi possível observar o processo metacognitivo de validação dos registros associado ao processo de autorregulação (FÁVERO, 2005a), pois, ao avaliar e validar a produção de seus pares, os estudantes pensam e regulam a sua própria produção.

Ficou evidente também que apenas o registro escrito e pictórico é insuficiente para compreender o pensamento do outro. Para compreender os registros e, portanto, as ações e o pensamento do outro é preciso dialogar com ele.

Mas é preciso deixar claro que esse diálogo, a partir da produção escrita, tem um importante limite metodológico, pois em uma pesquisa em que o diálogo anda *paripassu* com a produção escrita ou pictórica, o registro mostrado no relatório de pesquisa é apenas a etapa final de um processo que teve idas e vindas, construções e reconstruções.

5.4. O diálogo como espaço de discordância e de emergência de uma produção matemática própria

Os indicadores da pesquisa (GONZALEZ-REY, 2005) evidenciam que a interação e, portanto, o diálogo são espaços de discordância, de pensamento divergente e de negociação de significados.

Foi no espaço dialógico da discordância e da divergência que surgiu uma produção matemática diferenciada que exigia dos sujeitos, que se colocavam na posição de mediadores da aprendizagem, o exercício da validação.

Nem sempre esse espaço de divergência era livre de tensões. Muitas vezes, os estudantes buscavam impor seus modos de pensar e agir. Principalmente os que estavam em situação de sucesso escolar não reconheciam produções diferentes da que habitualmente estavam presentes em sala de aula nos procedimentos da professora e que eram adotadas por eles mesmos.

No entanto, a partir da intervenção da professora-pesquisadora, muitos dos estudantes passaram a reconhecer a produção oral e escrita dos colegas, embora diferente das suas próprias produções.

Isso mostra que a interação e o diálogo do professor com o estudante é fundamental para que ele compreenda que não há um único modo de fazer matemática. É importante que, em sala de aula e em projetos de tutoria, os estudantes entrem em contato com essa produção matemática diferenciada e aprendam a avaliá-la, a considerá-la como pertinente. Para isso, faz-se necessário socializá-las e validá-las publicamente, como nos mostra Muniz (2009) em sua pesquisa que busca compreender a produção matemática de estudantes que, em tese, estariam em situação de dificuldade na aprendizagem da Matemática.

5.5. A interação professora-pesquisadora, estudantes e professora regente: uma possibilidade da universidade cumprir seu papel social

As universidades possuem papel estratégico na oferta de ensino, pesquisa e extensão que, de algum modo, promovam o desenvolvimento social, econômico e cultural de uma sociedade. Nesse sentido, no que diz respeito à educação brasileira, que ainda hoje sofre com a má qualidade de ensino, espera-se que a universidade seja capaz de atuar junto às escolas, tanto para compreender os seus fazeres como para propor inovações, a fim de enfrentar o fracasso escolar que, como fenômeno complexo, exige ações coordenadas e em parceria.

Nesse sentido, a pesquisa em que a universidade se propõe a dialogar não apenas com a professora regente, mas com os estudantes, buscando compreender seus processos de aprendizagem matemática, apresenta-se como uma possibilidade da instituição cumprir seu papel social.

Mas Freire (1977) adverte do equívoco de considerar que, na relação com a comunidade, a universidade tenha o papel de adestrar e treinar como aquela que tem conhecimentos verdadeiros em contraposição aos saberes do senso comum dessa comunidade. No caso da relação com a escola, é preciso considerar que esta já possui saberes válidos e que somente a parceria universidade-escola podem fazê-la pensar e repensar seus saberes e suas práticas, de forma crítica, do mesmo modo que a universidade tem a possibilidade de repensar seus processos acadêmicos.

Ao propor o projeto de Extensão “Matemática: nenhum a menos” para nele realizar a pesquisa de campo, tínhamos em mente estreitar a parceria com a professora regente, pois a pesquisa exploratória mostrou um hiato na relação entre a professora pesquisadora e a professora dos estudantes colaboradores da pesquisa. Esse hiato aconteceu provavelmente pelos poucos momentos de planejamento e de permanência conjunta em sala de aula. Em razão disso, na pesquisa de campo propriamente dita, negociamos tanto a observação em sala de aula como o acompanhamento da professora em momentos de coordenação pedagógica.

No contato inicial com a professora, ao convidá-la para a pesquisa, esta verbaliza:

> Prof.ª . Leila: — Eu quero participar da pesquisa porque eu sinto que estou estagnada intelectualmente

A fala da professora mostra que ela tinha a expectativa de que a pesquisa poderia contribuir com o seu desenvolvimento profissional (TARDIF, 2002).

Embora o foco da pesquisa não tenha sido a professora, seu posicionamento e sua abertura para a pesquisa nos fez estender o tempo de observação em sala de aula e, portanto, de acompanhamento do seu trabalho pedagógico.

No decorrer da pesquisa, o permanente diálogo com a professora Leila e a presença da pesquisadora em sala de aula possibilitou que esta se sentisse à vontade para expressar dúvidas, angústias e reflexões com relação à aprendizagem matemática dos estudantes. Na entrevista, ocorrida já no final da pesquisa, quando foi solicitada a falar sobre suas dificuldades em ensinar matemática, ela faz uma interessante reflexão:

> Prof.ª . Leila: — Eu acredito que é a falta de base que os alunos têm. Parece até recorrente, um discurso pronto, é isso aí... essa é a minha briga nos seminários que eu tive oportunidade de ir. Fica parecendo que a gente quer culpar o outro: "Ah são essas professoras normalistas, as pedagogas não sabem ensinar matemática...". Porque eu acho que o aluno chega e aí eu já andei por todas as séries do ensino fundamental e lá no ensino médio e os alunos realmente não sabem... a dificuldade é... eles sabem desenvolver um trinômio quadrado perfeito, mas eles não sabem menos dois elevado ao quadrado é... têm dificuldades nas operações básicas, não sabem a tabuada. A dificuldade de ensinar, ela bate de frente em você. Ter que estar atrelado a um conteúdo... a um currículo que você tem que cumprir e esse aluno precisa de uma bagagem e ele não tem essa bagagem na escola pública. Eu não conheço a realidade da escola particular, pois nunca trabalhei na escola particular. Mas em todos os tempos, lá em 1997, quando eu comecei, já era assim e eu vejo isso se agravando cada vez mais.

A fala da professora mostra que ela considera que sua dificuldade em ensinar está atrelada à dificuldade dos alunos em aprender, mas ela aponta também problemas estruturais como a questão curricular, evidenciando que tem consciência da complexidade do fenômeno da não aprendizagem.

Na entrevista, quando questionada sobre a importância e as contribuições da pesquisa em sua prática pedagógica, ela retoma seu pensamento e faz interessante reflexão sobre o fracasso escolar:

> Prof.ª . Leila: — Eu acho que contribui porque o que acontece, eu... veja isso, e isso já é uma cultura, você enquanto professora com mais tempo de secretaria do que eu, sabe que é uma cultura que está arraigada em todos os meios da escola pública que é: "eu passei em concurso e esses meninos não vão aprender mesmo..." e aí isso vira um círculo vicioso. Em muitos momentos eu me vejo tomando atitudes que permeiam e que contribuem para isso. Isso é uma coisa que me agride porque não é esse meu objetivo.

> Ontem eu estava conversando com um amigo e ele estava chocado porque tinha participado de um conselho de classe na escola que ele trabalha no Guará. Ele ficou horrorizado com a comemoração que os professores faziam a cada reprovação decretada. E aí eu usei uma expressão: "nossa, mas é impressionante como existem professores que gostam, que tem prazer com o fracasso, eles não reconhecem que o fracasso é deles, não é do aluno só." Eu acho que muito do fracasso não é do aluno, é só em parte. Eu acho que você tem que exigir mesmo. Por isso é que eu penso que o aluno, ele é a vítima, né? Então, quando eu falei para você que eu estou estagnada é porque eu queria poder fazer mais, queria poder estudar mais, queria poder me embasar de teorias. Me incomoda esse insucesso, eu não acho legal ver 32 alunos, de 90/105 que dei aula, fazendo prova de recuperação. Aqueles que estão ali, eles realmente não tem condição. Eles não sabem fazer uma multiplicação de frações. Salvo algumas exceções que conseguiram aí... no caminhar, vamos dizer assim, reverter esse processo, a grande maioria não sabe. E aí o que é pior, deixá-los ou passá-los para frente? Deixa a bomba para o próximo professor que ele pegar? Então, a pesquisa contribuiu para mim em que sentido? Tem coisa além disso daqui da Secretaria, né? Você precisa, tem como você crescer para contribuir. Por exemplo, participar daquele seminário lá da Nilza, é isso, é você ter contato com outras pessoas. Tem professores que passam aqui 20/25/30 anos aqui, preenchendo diário, fazendo ficha e eu não quero isso. Eu quero fazer diferença, mesmo que seja micro, né? Porque você atingir o macro é complicado.

Em suas reflexões, a professora amplia sua compreensão sobre o fracasso como fenômeno complexo e verbaliza que se sente corresponsável. De modo tranquilo, ela expõe suas angústias em relação à não aprendizagem matemática dos estudantes e, ao final, de modo indireto, fala da importância da formação continuada, quando diz que há outras coisas além da Secretaria de Educação e destaca a sua participação no II Seminário de História e Educação Matemática Nilza Bertoni, ocorrido nos dias 9 e 10 de novembro de 2012, quando estava em curso a pesquisa de campo.

Mas essas reflexões não aconteceram apenas na entrevista de forma provocada. Em conversas informais, a professora demonstrou confiança na pesquisadora ao confidenciar que achava que alguns alunos eram analfabetos e, ao final do ano, teve a coragem de reconhecer diante da turma o mérito do projeto em retirar esses estudantes do absenteísmo (IRELAND, 2007). No final do ano, em sala de aula, ela parabeniza dois estudantes:

> Prof.ª . Leila: — Eu queria parabenizar Wilson e Saulo. No início do ano, por mais que eu tentasse eu não conseguia fazer vocês entenderem matemática. Eu não conseguir ensinar a vocês. Graças à Erondina, vocês estão aprendendo Matemática. A mudança de vocês é impressionante!

Quando retruco dizendo que o mérito não é apenas meu, a professora reconhece o trabalho e o engajamento dos estudantes, como mostra o fragmento a seguir:

Prof.ª . Pesq. — Leila, eu preciso dizer que o mérito não é só meu. Há uma pessoa aqui que contribui demais. É o George. Foi ele que despertou nos dois a vontade de aprender matemática.

Prof.ª . Leila: — É verdade. [diz a professora com um sorriso] — O George gosta muito de estudar matemática, de aprender matemática e agora nós estamos descobrindo que gosta também de ensinar. Mas isso só aconteceu porque vocês dois também quiseram aprender [se dirigindo a Wilson e Saulo].

Na entrevista, ao ser questionada sobre as contribuições do projeto para a aprendizagem dos estudantes, questionamos se percebia diferença na aprendizagem matemática dos participantes do projeto e ela volta a falar sobre Wilson e Saulo:

Prof.ª . Leila: — Ah! Absurda! Né? Absurda! É o que eu falei, a abertura, e acho que isso permeia todo o conhecimento, né? Quando você conhece, você entende, você vê com outros olhos. É obvio que para o menino, eu pego o Wilson e o Tadeu, que para mim são os ícones disso que você acabou de falar. Eu cria que eles eram analfabetos. De tudo assim, porque os primeiros contatos, as primeiras demonstrações que eles me deram é de que eram meninos que tinham chegado aqui na 6ª série [7º ano] sem saber ler, sem saber escrever, sem saber quanto era dois mais dois. E aí você observar esses dois meninos participando do projeto, e eles começaram tardiamente né? [...] Assim... eles não foram no início. Foi uma reviravolta, como eu vi o Saulo pegar a prova agora e falar assim: "nossa professora! Obrigado!" Não! O trabalho não é a mesma coisa, porque a segurança, eles eram meninos inseguros e o que o projeto proporcionou para eles foi essa questão da segurança. Saber que eles têm capacidade.

A professora Leila destaca, em sua fala, o engajamento dos estudantes demonstrando admiração em relação ao tempo de aprendizagem dos mesmos e, no fragmento, a seguir, fala do episódio em que Wilson teve coragem de dizer que ela estava errada:

Prof.ª . Leila: — Foi sensacional ver o Wilson falando "professora, tá errado. Você errou!" Isso é a segurança do conhecimento. Dele com propriedade estar sabendo o que está dizendo.

Mas ela também se sentiu à vontade para pedir ajuda, como no momento em que solicitou apoio da pesquisadora no planejamento das atividades para introdução de equações e para o estudo da Geometria.

A professora também revelou abertura para inovações, como no momento em que, após ler um texto da professora-pesquisadora, tentou implantar a prova em duas etapas ou no momento em que aceitou a sugestão de trabalhar as equações utilizando as propriedades da igualdade por meio da metáfora da balança. Em conversa informal, ela confidencia:

Prof.ª . Leila: — Sabe? Eu aprendi isso com a Professora Terezinha lá no laboratório de matemática, na UnB, mas sabe quando a gente vai se deixando levar pela rotina? Quero experimentar.

O fragmento acima mostra que a professora se sente fortalecida pela pesquisa ao experimentar algo que ela já sabia desde a sua formação inicial, mas que não havia experimentado.

Na entrevista, ao ser questionada sobre os planejamentos conjuntos, minha presença em sala e minhas intervenções, a professora mostrou que a presença da pesquisadora em sua sala a estimulou a pensar no que estava fazendo e a não fazer "de qualquer jeito".

Prof.ª . Leila: — Não me incomodou, é como eu te disse: só me engrandece. Eu acho assim, eu, e isso é uma postura pessoal, eu gosto de ouvir crítica. Eu gosto de ser observada. Eu acho que a observação faz com que você dê o seu melhor. Então, a sua presença na minha aula me instigava a... "eu não posso fazer feio. Eu não posso fazer a coisa de qualquer jeito". Mesmo porque muitas vezes eu fiz de qualquer jeito. Assim, de chegar... é... eu tenho humildade e reconheço que eu estou muito aquém do que eu acho que um professor poderia ser. Com relação a questão de planejamento, de você testar, de você ver como funciona, enfim, por vários fatores. Eu acho que existe uma postura ideal de trabalho e como você pode dar o seu máximo e eu não faço isso por uma série de fatores, mas a sua presença ela era prá mim positiva nesse sentido. Porque era, de repente, o que me motivava a não fazer a coisa de qualquer jeito. Mesmo porque no dia-a-dia você pega e pensa: "meu Deus! O que eu vou dar hoje?" Onde eu parei, o que eu vou fazer? E você não sabe porque isso é da rotina, né? Você acaba se perdendo mesmo.

Podemos pensar, de modo cético, que essa professora realizou todas essas reflexões e promoveu mudanças em seu trabalho pedagógico, como ensinar equações por meio dos princípios da igualdade, utilizando o laboratório de informática, apenas para impressionar a professora pesquisadora e porque uma pesquisa estava sendo realizada em sua sala de aula. Entretanto, preferimos pensar que, no processo de desenvolvimento profissional dessa professora, a pesquisa em sua sala de aula, bem como as evidências de mudanças no processo de aprendizagem dos alunos, a motivou a refletir e a experimentar inovações. Ela se sentiu fortalecida a fazer mudanças em seu trabalho pedagógico. A questão que se coloca é: essas mudanças continuarão a ocorrer após a pesquisa? Pode ser que sim e pode ser que não. No caso do ensino de equações, ficou bastante evidente como a professora se impressionou com o processo de resolução dos alunos e a segurança demonstrada nesse processo. Como nos assevera Tardif (2002), a questão do desenvolvimento profissional docente é complexa e remete aos saberes do professor. No caso das inovações introduzidas pela professora em seu trabalho, podemos dizer que correspondem a saberes da sua experiência docente que, embora tenham surgido durante a sua relação com a pesquisa e a pesquisadora, nasceram do seu fazer pedagógico, das suas ações que buscaram dar respostas imediatas a um problema concreto que era ensinar equações de modo mais significativo. Não há garantia que esse processo de mudança será contínuo e permanente, do mesmo modo que não há garantias de que os estudantes que passaram pelo projeto continuarão a se desenvolver progressivamente na aprendizagem da matemática, mas uma semente foi lançada.

Mas não foi apenas a professora que apontou como a pesquisa influenciou em seu trabalho pedagógico. Os estudantes colaboradores da pesquisa, em diversos momentos, enunciaram as suas percepções do projeto, tanto em conversas informais como nas entrevistas.

Durante um dos encontros no turno contrário ao das aulas, em meados do ano, Gisele espontaneamente verbaliza:

> Gisele: — Professora, posso falar uma coisa? Hoje quando eu cheguei aqui, eu não estava sabendo... como fala? Aquele negócio... É... soma de frações. Quando a professora ensinou lá na sala eu não tinha entendido e nem fiz o dever. Aí eu cheguei aqui e você me explicou e eu aprendi e ainda ensinei a Joana.

Gisele mostra com essa fala que, além de aprender, pode ensinar. Essa percepção de poder aprender e ensinar ao mesmo tempo aparece na entrevista realizada no final do ano, quando ela diz:

> Gisele: — Na matemática, porque antes eu não gostava da matemática. Eu olhava assim para o povo e pensava: "nossa aquele ali é *nerd*, como eu faço para ser *nerd*?" Passado um tempo eu comecei a ir para o projeto e comecei a aprender e daí eu também aprendi a ensinar o que eu sabia e a aprender também

Mas não é apenas Gisele que tem essa percepção de que aprendeu e ensinou ao mesmo tempo. Todos os estudantes, ao serem questionados se mais aprenderam ou ensinaram, afirmaram que mais aprenderam, mas que também ensinaram, como mostram os fragmentos a seguir:

> Priscila: — Os dois. Eu aprendi e ensinei.
>
> George: — Eu aprendo. A senhora ensina. Os colegas ensinam e tipo assim: cada um que sabe vai ensinando um pouco. [...] Acho que ensinei. Porque uma coisa que eu ensino, eu nunca mais esqueço. Quando eu comecei a ensinar equações, aí eu entendi de verdade equação.
>
> Luiza: — Com a Priscila, eu aprendo um pouco. Com Tânia, ela me explica. Com a Luana, tem que ela me explica algumas coisas e noutras eu explico prá ela.
>
> Wilson: — Eu mais aprendi. Mas eu ensinei também. Eu ensinei equações para o Saulo.
>
> Helena: — Eu aprendi e ensinei. Mas eu acho que eu mais aprendi.

Do ponto de vista epistemológico, fica claro que o estímulo à interação e ao diálogo entre os estudantes pode promover um trabalho cooperativo, em que tanto o estudante em situação de sucesso escolar como o estudante em situação de fracasso podem se colocar tanto na posição de quem aprende como na posição de quem ensina. As falas dos estudantes evidenciam isso e mostram, sobretudo, a crença neles mesmo como sujeitos capazes de aprender e ensinar ao mesmo tempo.

5.6. A explicitação de processos cognitivos e metacognitivos nos diálogos construídos a partir da produção oral e escrita dos estudantes e a tese da inter-relação entre diálogo e aprendizagem matemática

Durante toda a pesquisa, nos diferentes espaços/tempos, foi possível observar que a interação e o diálogo entre os estudantes promoviam a explicitação de processos cognitivos e metacognitivos (FÁVERO, 2005a). Nas mais diferentes situações de aprendizagem (jogos, circuitos de problemas, sequências didáticas, exercícios), quando estimulados a interagir e, portanto, a dialogar, os estudantes verbalizavam seus modos de pensar dando pistas dos processos cognitivos e metacognitivos envolvidos em suas ações.

Embora, como salienta Fávero (2005), as interações e os diálogos estejam em uma dinâmica sociocognitiva, não podemos descartar o seu papel na aprendizagem dos sujeitos que, de forma ativa, por meio de processos metacognitivos, regulam seus processos de aprender.

Os indicadores (GONZALEZ-REY, 2005a) da pesquisa mostram que, em interação e diálogo com seus pares e com a professora, os estudantes autorregulam (FÁVERO, 2005a) seus processos de aprendizagem e, na maioria das vezes, verbalizam seus pensamentos, dando pistas do curso de seus processos de aprendizagem.

De modo semelhante, ao validar os procedimentos dos colegas, os estudantes também entram em uma dinâmica metacognitiva (FÁVERO, 2005a), que os permitem regular seus próprios processos cognitivos a partir da produção escrita e oral dos colegas em situações de aprendizagem.

Essa dinâmica sociocognitiva nos levou a pensar na mediação semiótica (FÁVERO, 2005a, 2005b) e nos registros de representação semiótica (DUVAL, 2009, 2011), considerando não apenas as interações e os diálogos entre os sujeitos, como a natureza dos objetos matemáticos e suas representações.

Nesse sentido, os indicadores (GONZALEZ-REY, 2005a) da pesquisa evidenciam que a análise da produção escrita e oral dos estudantes em interação com seus pares e com a professora, de fato, dão pistas dos seus processos de aprender, como argumentam Freire (1986) e Vigotski (2000), para quem a aprendizagem é social, embora tenha uma dimensão individual.

A discussão e análise dos registros dos estudantes, concomitante às interações, nos fez perceber que tanto os diálogos desencadeiam e potencializam as aprendizagens, como estas desencadeiam e potencializam situações de diálogos. Na interação com seus pares, os estudantes, por meio do diálogo, entram em uma dinâmica sociocognitiva e metacognitiva que lhes possibilitam pensar sobre o que sabem e sobre o que não sabem, sobre o que sabem e o que não sabem os colegas, de tal forma que os permitem tomar consciência (FÁVERO, 2008) dos seus processos cognitivos, avaliando, organizando, construindo e reconstruindo estratégias e os conduzem a uma aprendizagem mais significativa. Do mesmo modo, também em interação, os estudantes que se apropriam conceitualmente de algum objeto matemático, se sentem fortalecidos a mediarem a aprendizagem dos colegas e passam a participar mais ativamente do diálogo, o que nos faz crer que as aprendizagens qualificam os processos dialógicos.

Assim, confirmamos nossa tese de que, **no contexto da aprendizagem escolar da Matemática, há uma múltipla influência entre diálogo e aprendizagem matemática, portanto, a conversão da sala de aula em espaço de diálogo e interação, de construção e criação, de espaço de pensar e fazer pode potencializar a aprendizagem matemática, do mesmo modo que a qualificação das aprendizagens pode potencializar o diálogo.**

Discutir com o estudante a sua produção oral e escrita, fazê-lo falar sobre o que produziu e estimulá-lo a trocar experiências com os colegas, a explicar seus procedimentos é tanto uma possibilidade epistemológica quanto metodológica. Mas insistimos que tal perspectiva não prescinde da presença do professor que é aquele que está em melhores condições para efetivar mediações e intervenções necessárias à aprendizagem, sobretudo em situações de conflito.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando ingressei no doutorado, em 2010, tinha em mente dar um tratamento científico a uma experiência pedagógica de monitoria da aprendizagem matemática, centrada na interação e na cooperação entre estudantes em situação de sucesso escolar ou êxito e estudantes em situação de fracasso ou de dificuldade, que eram estimulados a dialogar para aprender matemática. Essa experiência foi realizada entre os anos de 2007 e 2008, na escola pública em que eu atuava como professora em turmas de 8º e 9º anos do ensino fundamental, e não se converteu em pesquisa propriamente dita, mas os resultados indicavam que havia ali uma boa oportunidade de pesquisa que poderia me levar a compreender a relação entre diálogo e aprendizagem matemática.

Naquele momento, não imaginava a complexidade de se ter o diálogo tanto como objeto como metodologia de pesquisa. Não se tratava apenas de observar e registrar diálogos entre os estudantes, mas de utilizar o diálogo para se chegar ao objetivo pretendido, que era o de compreender a relação deste com a aprendizagem matemática. O desafio, no entanto, é que uma das interlocutoras do diálogo era a própria pesquisadora.

Cedo percebi que os referenciais teóricos se apresentavam a mim como um banquete de ideias e de possibilidades e eu, pesquisadora ainda pouco experiente, deveria me servir desse banquete, não perdendo o foco de que meu objeto de estudo não era o fracasso na aprendizagem da matemática, mas o diálogo entre os sujeitos que aprendem e ensinam matemática no contexto escolar. Em razão disso, não tive dúvidas de que deveria sentar-me à mesa e dialogar com Paulo Freire e Mikhail Bakhtin, cujas ideias sobre diálogo e dialogismo me pareceram tão próximas. Também não tive dúvidas de convidar para o diálogo Helle Alrø e Ole Skovsmose, que tratam justamente da relação entre diálogo e aprendizagem matemática. Mas como esta é sempre mediada pelas relações dos sujeitos uns com os outros e pelos signos e símbolos que compõem o universo da escola e da matemática em si, também não tive dúvidas em convidar para o diálogo Maria Helena Fávero e outros autores, para tratar de mediação semiótica, e Raymond Duval, para tratar dos registros de representação semiótica. Embora a mesa de diálogo já estivesse bastante cheia, era impossível não dialogar com Bernard Charlot, por exemplo, que trata do fracasso escolar em termos de relação com o saber. Mas muitos outros se sentaram à mesa para dialogar comigo. Nesse momento, em que coloco um ponto final no relatório da pesquisa, achando que havia muito ainda para ser dito, não posso deixar de lembrar dos diálogos com Gerard Vergnaud, com meu orientador

Cristiano Muniz, com González-Rey e com tantos OUTROS que me permitiram lançar luzes sobre os indicadores que se evidenciaram nas duas etapas da pesquisa.

Já no estudo exploratório, ao fazer opção por uma pesquisa participante, fui me dando conta das dificuldades inerentes em participar dos diálogos e, ao mesmo tempo, registrá-los. Por muitas vezes, escorreguei da posição de pesquisadora para a posição de professora que, aliás, era reconhecida como tal pelos estudantes colaboradores da pesquisa. Muito cedo, deixei de ser uma estranha para ser a segunda professora deles.

Nem sempre os instrumentos/procedimentos adotados, como a gravação em áudio, por exemplo, contribuíram para a compreensão dos eventos. O fato de se ter vários adolescentes falando ao mesmo tempo, em alto tom de voz, fez com que alguns episódios ficassem absolutamente incompreensíveis. Na verdade, o velho e bom caderno de campo com o registro sistemático e diário dos acontecimentos foi o que mais me ajudou na interpretação das informações coletadas.

Do mesmo modo, percebi que a análise dos protocolos com resoluções de exercícios apresentava uma dificuldade. Embora meu olhar se lançasse sobre todo o processo e sobre o diálogo que se constituía ali na ação dos estudantes, o registro que ficava para posterior análise era apenas a etapa final desse processo, que era permeado por reconstruções. Como não tivemos autorização para filmar e fazer gravações em vídeo, parte das ações e dos procedimentos dos estudantes não foram registrados.

Essas dificuldades que se evidenciaram já no estudo exploratório levaram-me a considerar a impossibilidade de realizar a pesquisa com a mesma quantidade de estudantes de uma sala de aula. Em razão disso, para a pesquisa de campo propriamente dita, o número de colaboradores foi reduzido, o que não eliminou por completo as dificuldades metodológicas.

O estudo exploratório também evidenciou que era impossível separar objetivamente os estudantes como aqueles que estavam em situação de sucesso escolar ou êxito e que, portanto, seriam os monitores, e aqueles que estavam em situação de fracasso escolar ou dificuldade, e que seriam os “monitorados”. Ambos assumiam o papel de monitores a depender a situação, e isso foi uma descoberta, afinal, a ideia inicial era trabalhar com monitoria.

Esses e outros indicadores evidenciados no estudo exploratório permitiram-me melhor delinear a pesquisa e ter a clareza do objeto e dos objetivos com os quais deveria trabalhar. Assim, ao iniciar a pesquisa de campo propriamente dita, compreendi que o objetivo central que deveria orientar o estudo era “analisar possibilidades e limites da criação de um ambiente que favorecesse o diálogo e a cooperação entre os diferentes sujeitos que interagem no contexto da aprendizagem escolar da Matemática nos anos finais do ensino fundamental." Não se tratava mais do diálogo entre estudantes em situação de fracasso e estudantes em situação de sucesso escolar, mas de todos os sujeitos que interagem no processo de aprendizagem escolar da Matemática, entre eles, a própria pesquisadora.

Tal objetivo foi elencado, no intuito de comprovar nossa tese de que "no contexto da aprendizagem escolar da Matemática, há uma múltipla influência entre diálogo e aprendizagem matemática, portanto, a conversão da sala de aula em espaço de diálogo e interação, de construção e criação, de espaço de pensar e fazer pode potencializar a aprendizagem matemática, do mesmo modo que a qualificação das aprendizagens pode potencializar o diálogo."

Assim, a permanência no campo, por cerca de um ano e meio, possibilitou-me dialogar com os estudantes colaboradores da pesquisa e compreender os processos cognitivos e metacognitivos subjacentes à aprendizagem dos objetos da Matemática. Permitiu-me também perceber a relação entre interação, diálogo e aprendizagem matemática. Mas isso só foi possível porque, de fato, não fui uma observadora passiva dos diálogos, mas uma participante ativa que, muitas vezes, era confundida com a própria professora.

Em interação com os estudantes nos diferentes cenários de pesquisa, pude observar os padrões de comunicação presentes nos diálogos dos estudantes entre si e destes comigo, com a professora regente e com a própria Matemática. Fui percebendo que cada espaço/tempo produzia uma forma de se comunicar, de interagir e de dialogar. Percebi que dos cenários da pesquisa, o que a comunicação era menos livre e mais truncada era o da sala de aula, em que a organização espacial e pedagógica ainda era centrada na figura do professor. Embora em poucos encontros, percebi como, no laboratório de informática, a interação e o diálogo entre os estudantes era mais livre e rico em enunciações que evidenciavam o processo de construção conceitual dos estudantes. Tal cenário merece pesquisas adicionais sobre a relação entre diálogo e aprendizagem matemática, pois os indicadores evidenciam a potencialidade do laboratório de matemática para o desenvolvimento psicológico e para a aprendizagem dos estudantes.

Não posso deixar de dizer também, que embora em todos os cenários o diálogo exista independentemente de ter um adulto que o conceda, transformar a sala de aula em ambiente dialógico passa sem dúvida pela redução drástica do número de estudantes. Percebi a dificuldade em acompanhar o diálogo de 30 estudantes na pesquisa exploratória e, em razão disso, na pesquisa de campo propriamente dita, optei por trabalhar com um grupo de apenas

14. Não se trata de apenas dar vez e voz aos estudantes, mas de criar condições reais para que o professor seja de fato um dos sujeitos do diálogo, que tenha condição de analisar e se apropriar dos diálogos.

Também percebi que a interação e o diálogo dependiam também dos objetos de conhecimento com os quais se trabalhava e com o tipo de atividade proposta. Foi muito interessante perceber, por exemplo, que, em atividades que envolviam a álgebra, os diálogos eram mais truncados do que em atividades da aritmética; que em situações de jogos, a linguagem era mais livre do que em situações de exercícios formais.

Nos diferentes cenários da pesquisa, surpreendi-me com o fato de que os estudantes reproduzem os enunciados e os procedimentos dos seus professores, e até da pesquisadora, mas nada me surpreendeu mais do que perceber que, de modo geral, os estudantes em situação de dificuldade tendem a ter uma produção matemática própria, realizando procedimentos divergentes daqueles realizados em sala de aula pela professora.

A interação e o diálogo com os estudantes entre si, com a professora e comigo ofereceram indicadores importantes para compreender seus processos cognitivos e metacognitivos, evidenciados, por exemplo, na enunciação de conceitos e teoremas-em-ato, nos obstáculos em converter registros escritos e orais em registros simbólicos, no processo de validação dos procedimentos dos colegas, na autorregulação que se evidenciava nesse processo de validação, na correção de exercícios dos colegas, nas antecipações, inferências e conclusões enunciadas durante as atividades, na verbalização de dúvidas, nos conflitos surgidos durantes as atividades.

No curso de toda a pesquisa de campo, muitas vezes fui surpreendida positivamente e me emocionei com os estudantes e seus processos de dialogar e aprender matemática. Já na pesquisa exploratória, ficou muito clara a solidariedade dos estudantes e isso se confirmou na pesquisa de campo. Embora não houvesse qualquer premiação para participar do projeto, a maioria se envolveu efetivamente e cooperativamente com as aprendizagens dos colegas. Na pesquisa exploratória, em que haviam monitores eleitos, acompanhei como estes se desdobravam para fazer os próprios exercícios e ajudar os colegas. Muitas vezes envolvidos com a própria tarefa, percebi a angústia dos mesmos em não conseguirem colaborar com as aprendizagens dos outros. Vi monitores ficando depois do horário apenas para fazer esse trabalho. Na pesquisa de campo propriamente dita, em que não havia monitores eleitos, também vi a mesma solidariedade. Muitas vezes, os estudantes falavam que não sabiam ensinar, mas bastava um “por favor” meu para que entrassem em diálogo com os colegas. Mas o que mais me impressionou foi perceber que o aprendiz de agora era o ensinante de daqui a pouco. Sem nenhuma exceção, todos que aprendiam algo, logo passavam a ensinar e assim pude observar o que bem diz Paulo Freire quando afirma que todos aprendem e ensinam na relação pedagógica.

Emocionei-me ao me dar conta de que alunos em situação de dificuldade reconstruíram suas histórias, saindo do absenteísmo em que se encontravam e que os tornava quase invisíveis, para uma situação em que se tornaram visíveis e até admirados não só pela professora como pelos colegas.

Perceber o esforço individual de meninos e meninas de 13/14 anos em fazer seus colegas aprenderem matemática foi talvez a maior recompensa dessa pesquisa. Observei que não há conflito de interesse quando todos se mobilizam para aprenderem juntos. Nesse processo, era impossível não admirar a alegria dos estudantes quando se percebiam como sujeitos capazes de aprender e ensinar matemática.

Assim, saio dessa pesquisa melhor pesquisadora porque aprendi com os erros e tropeços de uma pesquisa participante. Aprendi a importância do registro em diferentes meios e aprendi, também, que a análise já começa no curso da própria interação e dos diálogos, e é quase impossível não assumir o papel de professora na relação com os estudantes e que, portanto, é preciso ficar atenta a esse viés.

Deixo a pesquisa sentindo-me melhor professora, pois aprendi com os próprios estudantes sobre dialogar e aprender matemática. Ficou evidente a importância de estimular o diálogo entre os estudantes e de observar o processo de conceitualização dos mesmos, que se evidencia nas interações. Assim, é preciso converter a sala de aula em um espaço mais dialógico em que todos os sujeitos tenham vez e voz, tenham a oportunidade de aprender significativamente a Matemática.

Como formadora de professores em exercício e de futuros professores, saio com a impressão de que é preciso melhor prepará-los para dialogar com os estudantes, para interpretar a produção oral e escrita dos estudantes, para organizar o trabalho pedagógico com atividades mais dialógicas, para deixarem de ser o centro da organização do trabalho pedagógico, enfim, para converterem a sala de aula em espaço de interação e de diálogo e construção de conhecimentos.

Mas o mais importante é que saio desse trabalho sentindo-me uma pessoa melhor, por ter me envolvido com os estudantes e seus processos de aprender e ensinar matemática; por ter contribuído minimamente com suas aprendizagens e com a formação da professora da pesquisa de campo. Saio com a impressão de que não apenas realizei uma pesquisa, mas também contribui para que a vida dos sujeitos que se relacionaram comigo se tornasse um pouco melhor.

Mas, ao colocar o ponto final nesse trabalho, não posso deixar de falar da sensação de incompletude de que fala Paulo Freire. A impressão é de que havia muito ainda para pesquisar, para observar, muito para dizer sobre diálogo e aprendizagem matemática. Assim, o término desse relatório é apenas o começo do que pode ser feito lá na sala de aula, para onde retorno.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, Paulo. *Avaliação e Educação Matemática* – Volume 1. Série Reflexões em Educação Matemática. Rio de Janeiro: GEPEM, 1995.

ALVES-MAZZOTTI; Alda Judith; GEWANSDSZNAJDER, Fernando. *O método nas ciências naturais e sociais*: pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2002.

AMORIM, Marília. *O pesquisador e seu outro:* Bakhtin nas ciências humanas. São Paulo: Musa Editora, 2004.

ALRØ, Helle; SKOVSMOSE, Ole. *Diálogo e aprendizagem em Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica: 2006.

BALDINO, Roberto R. *Assimilação solidária*: escola, mais-valia e consciência cínica. Educação em Foco, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de fora, MG, vol.3, n°1 p.39-65, mar-ago,1998.

_______ *Assimilação solidária*. Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática – GPA, UNESP, Rio Claro, 1995. (Apostila)

BARBOZA, Pedro Lúcio; REGO, Rômulo M. do; BARBOSA, Jonei C. Enunciados do Professor e alunos estudando Geometria. In: *Anais do IV Encontro Brasileiro de Pesquisa em Educação Matemática* – IV EBRAPEM, disponível em: http://www.ebrapem.com.br/index.php?pagina=trabalhosaceitos. Acesso em: 10 abr. 2012.

BAKHTIN, Mikhail M. *Estética da criação verbal*. Tradução de Paulo Bezerra. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 2010.

BAKHTIN, Mikhail M.; (V.N. Volochínov). *Marxismo e filosofia da linguagem:* problemas fundamentais do método sociológico da linguagem. Tradução de Michael Lahud e Yara Frateschi Vieira. São Paulo: Hucitec, 2009.

BERTONI, Nilza E. Educação e Linguagem Matemática IV: frações e números fracionários. In:*Curso de Pedagogia para Professores em Exercício no Início de Escolarização*, módulo V, vol. 2. Brasília: PIE/FE/UnB, 2003.

BOHM, David. *On dialogue*. Londres: Routledge, 1996.

BRAYNER, Flávio Henrique A. Homens e mulheres de “palavra”. *Revista Portuguesa de Educação*, Universidade de Minho – Portugal, 2009.

BRASIL, Ministério da Educação – Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília: MEC/SEF,1998.

BRONCKAR, Jean-Paul; BOTA, Cristian. *Bakhtin desmascarado*: história de um mentiroso, de uma fraude, de um delírio coletivo. São Paulo: Parábola, 2012

BROSSEAU, Guy. *Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas*: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CASTRO, Yeda A. Pessoa de. *Dicionário etimológico online da Língua Portuguesa* (2007/2012). Disponível em: http://www.dicionarioetimologico.com.br. Acesso em: 01abr2012.

CAVALCANTE, Christiany Maria B.; ORTEGA, Antonio Carlos. Análise microgenética do funcionamento cognitivo de crianças por meio do jogo matix. Estudos de Psicologia, Campinas, v. 25, n. 3, p. 449-459, julho-setembro , 2008. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-166X2008000300013&script=sci_arttext. Acesso em: 03 jan. 2013.

CHEVALLARD, Yves; BOSH, Marianna; GASCÓN, Josep. *Estudar Matemáticas*: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. *P*orto Alegre: ARTMED, 2001.

CHARLOT, Bernard. *Da relação com o saber*: elementos para uma teoria. Porto Alegre: Artmed, 2000.

_______Relação com o saber, formação de professores e globalização: questões para a educação hoje. Porto Alegre: Artmed, 2005.

COX, Maria Inês; ASSIS-PETERSON, Ana Antônia de (orgs).*Cenas de sala de aula*. Campinas – SP: Mercado da Letras, 2001.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Etnomatemática* – elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica: Papirus, 2001.

DAMM, Regina Flemming. Registro de Representação. In: MACHADO, Silvia D. A. et. al. *Educação Matemática*: uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002.

DEMO, Pedro. *Pesquisa participante*: saber pensar e intervir juntos. Brasília: Liber Livros, 2008.

DURAN, David. Utilizar pedagogicamente as diferenças entre alunos: uma prática de tutoria entre iguais. In: FETZNER, Andrea Rosana (org.). *Ciclos em revista*: a aprendizagem em diálgo com as diferenças – Volume 3. Rio de Janeiro: Wak Editora, 2008.

DURAN, David; VIDAL, Vinyet. *Tutoría entre iguales*: de la teoría a la práctica. Barcelona: Editorial Graó, 2011.

DUVAL, Raymond. Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

_______ Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

EUA. Utah State University. *National Library of Virtual Manipulatives* – NLVM. Disponível em: http://nlvm.usu.edu/. Acesso em: 19 set. 2012.

FANIZZI, Sueli. A interação nas aulas de matemática: um estudo sobre aspectos constitutivos do processo interativo e suas implicações na aprendizagem – Dissertação de Mestrado. Sao Paulo: USP, 2008.

FÁVERO, Maria Helena. As funções das regulações cognitivas e metacognitivas na prática das complexas do adulto: questões e proposições para um ensaio conclusivo. In: GUIMARÃES, Sandra Regina K.; STOLTZ, Tânia; BOSSE, Vera Regina P. Da tomada de consciência à metacognição. In: GUIMARÃES, Sandra Regina K.; STOLTZ, Tânia (Orgs). *Tomada de consciência e conhecimento metacognitivo*. Curitiba: Editora UFPR, 2008.

_______ *Psicologia e conhecimento*: subsídios da psicologia do conhecimento para a análise de ensinar e aprender. Brasília: Editora UnB, 2005a.

_______ Desenvolvimento psicológico, mediação semiótica e representações sociais: por uma articulação teórica e metodológica. In: *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, revista do Instituto de Psicologia da Universidade de Brasília, Brasília, Vol. 21, n. 1, 2005b.

_______ Psicologia do conhecimento. In: FIORIENTINI, Leda Maria (Coord). *Curso de Especialização a distância*: Projeto "o professor em construção". Brasília: UnB/FE/CEAD, 1993.

FERREIRA, Aurélio B.H. *Mini dicionário Aurélio*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1994.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. *Investigação em Educação Matemática*: percursos teóricos e metodológicos Campinas-SP: Autores Associados, 2006.

FIORIN, José Luiz. *Introdução ao pensamento de Bakhtin*. São Paulo: Ática, 2008.

FOUREZ, Gérard. *A construção das ciências*: introdução à filosofia e á ética das ciências. São Paulo: Editora UNESP, 1995.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia do oprimido*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2011a.

_______*Educação como prática da liberdade*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2011b.

_______*Pedagogia da autonomia:* saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 2011c.

______*À sombra desta mangueira.* São Paulo: Olho d'água, 2010.

_______*Pedagogia da esperança*: um encontro com a pedagogia do oprimido. Rio de Janeiro, Paz e Terra, 1992.

_______*Extensão ou comunicação?* Rio de Janeiro: Paz e Terrra, 1977.

FREIRE, Paulo; SHOR, Ira. *Medo e Ousadia:* cotidiano do professor. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1986.

FREITAS, Luiz Carlos de. Crítica da organização do trabalho pedagógico e da didática. Campinas: Papirus, 1995.

GASPAR, Maria Terezinha J. Inteiros: dificuldades históricas e uma proposta de ensino para ultrapassá-las. In: *Anais do I Encontro Nacional de Educação Matemática* – I ENEM, São Paulo: SBEM, 1987

_______ *Inteiros*: módulos para o ensino da Matemática no 1º grau – Projeto para Melhoria do ensino de Ciência e Matemática (MEC/CAPES/PADCT) – Subprojeto "Um novo currículo de Matemática (UnB). Brasília: UnB, 1986.

GARCEZ, Lucília Helena do C. *A escrita e o outro*: os modos de participação na construção do texto. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1998.

GATTI, Bernadete Angelina. *A construção da pesquisa em educação no Brasil*. Brasília: Liber Livro Editora, 2007.

_______Grupo focal na pesquisa em ciências sociais e humanas. Brasília: Liber Livro Editora, 2005.

GIL, Antonio Carlos. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GONZÁLEZ REY, Fernando Luis. Questões teóricas e metodológicas nas pesquisas sobre aprendizagem. In: MARTINEZ, Albertina M.; TACCA, Maria Carmem V. R. (org). *A complexidade da aprendizagem*: destaque ao ensino superior. Campinas: Alínea, 2009.

_______O sujeito que aprende – desafios do desenvolvimento do tema da aprendizagem na psicologia e na prática pedagógica. In: TACCA, Maria Carmem V. R. (org.) *Aprendizagem e Trabalho Pedagógico*. Campinas: Alínea, 2006.

_______*Pesquisa qualitativa em psicologia:* caminhos e desafios. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005a.

_______*Pesquisa qualitativa e subjetividade:* os processos de construção da informação. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005b.

_______*Sujeito e subjetividade*: uma aproximação histórico-cultural. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

GUÉRIOS, Ettiene; STOLTZ, Tânia. Educação e alteridade. In: GUÉRIOS, Ettiene; STOLTZ (Orgs) *Educação e Alteridade.* São Carlos, EduFSCar, 2010.

GUIMARÃES, Sandra Regina K.; STOLTZ, Tânia; BOSSE, Vera Regina P. Da tomada de consciência à metacognição. In: GUIMARÃES, Sandra Regina K.; STOLTZ, Tânia (Orgs). *Tomada de consciência e conhecimento metacognitivo*. Curitiba: Editora UFPR, 2008.

HAGUETTE, Teresa Maria F. Metodologias qualitativas na sociologia. Petrópolis: Editora Vozes, 2001.

IGLIORI, Sonia B. C. A noção de “obstáculo epistemológico” e a educação matemática. In: MACHADO, Sílvia D. A. *Educação Matemática*: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

IRELAND, Vera Esther (org). *Repensando a escola*: um estudo sobre os desafios de aprender, ler e escrever. Brasília: UNESCO, MEC/INEP, 2007.

JAPIASSU, Hilton. *Nascimento e Morte das ciências humanas*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1978.

LELLIS, Marcelo C.; JAKUBOVIC, José; IMENES, Luiz Márcio P. *Números negativos* – Coleção para que serve a Matemática? São Paulo: Atual, 2009.

MILANI, Raquel. O Desenvolvimento dos Processos de Planejamento e de Efetivação do Diálogo dos Estagiários e seus Alunos nas Aulas de Matemática. In: *Anais do IV Encontro Brasileiro de Pesquisa em Educação Matemática* – IV EBRAPEM, disponível em: http://www.ebrapem.com.br/index.php?pagina=trabalhosaceitos. Acesso em: 10 abr. 2012.

MUNIZ, Cristiano Alberto. *Brincar e jogar*: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educaçao matemática. Belo Horizonte-MG: Autêntica, 2010.

_______. O conceito de esquema para um novo olhar para a produção matemática na escola: as contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto (org.). *A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais*. Curitiba: Editora CRV, 2009.

_______. Educação e Linguagem Matemática I: Fundamentos básicos de Educação Matemática para início de escolarização. In: *Curso de Pedagogia para Professores em Exercício no Início de Escolarização,* módulo I, v. 2. Brasília: PIE/FE/UnB, 2002.

MUNIZ, Critiano; SILVA; Carmyra O; Erondina B. da; BATISTA. *Módulo IV do Curso de Pedagogia à distância*: Matemática e Cultura: Decimais, Medidas e Sistema Monetário. Brasília: Universidade de Brasília, 2008.

PAIS, Luiz Carlos. *Didática da Matemática*: uma análise da influência francesa**.** Belo Horizonte-MG: Autêntica, 2001.

PAVANELLO, Regina Maria. *O abandono do ensino da Geometria*: uma visão histórica –. Dissertação de Mestrado. Campinas: UNICAMP, 1989.

PEIXOTO, Francisco; MONTEIRO, Vera. Interações sociais, desenvolvimento e aprendizagem: o papel do estatuto do par e da mediação semiótica. In: Análise Psicológica - Revista do Instituto Superior de Psicologia Aplicada, 1(XVII) – Lisboa, 1999

PONTE, João Pedro; et al. *Didáctica da Matemática*. Lisboa: DES do ME, 1997.

PONZIO, Augusto. *A revolução bakhtiniana:* o pensamento de Bakhtin e a ideologia contemporânea. São Paulo: Contexto, 2009.

RIBEIRO, Célia. Metacognição: um apoio à aprendizagem. In: *Psicologia*: Reflexão e Crítica – Revista do Curso de Pós-Graduação em Psicologia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Vol.16, nº.1, Porto Alegre, 2003.

SKOVSMOSE, Ole. Preocupações de uma educação matemática crítica. In: FÁVERO, Maria Helena; CUNHA, Célio da. *Psicologia do conhecimento*: o diálogo entre as ciências e a cidadania. Brasília: UNESCO, Instituto de Psicologia da Universidade de Brasília, Liber Livro Editora, 2009.

_______*Educação Crítica*: incerteza, matemática, responsabilidade. São Paulo: Cortez, 2007.

STEEDLY, Kathlin. et al. Effective mathematics instruction. In: *Evidence for Educacion* – Jornal do National Dissemination Center for Children with Disabilities. Volume III, ano I, 2008. Disponível em: http://nichcy.org/research/ee/math. Acesso em: 12 abr. 2012.

TACCA, Maria Carmem V. R. Estratégias Pedagógicas – Conceituação e desdobramentos com foco nas relações professor-aluno. In: TACCA, Maria Carmem V. R. (org.) *Aprendizagem e Trabalho Pedagógico*. Campinhas: Alínea, 2006.

TACCA, Maria Carmem V. R; GONZÁLEZ REY, Fernando Luiz. Produção de sentido subjetivo: as singularidades dos alunos no processo de aprender. In: *Revista Ciência e Profissão*, nº. 28(1), 2008.

TARDIF, Maurice. *Saberes docentes e formação profissional***.** Petrópolis: Vozes, 2002.

VALLE, Diego G. do. Resenha do livro Bakhtin desmascarado: história de um mentiroso, de uma fraude, de um delírio coletivo. In: Revista de Linguística e Teoria Literária – Via Litterae – V. 4, nº. 2, jul/dez 2012. Disponível em: www2.unucseh.ueg.br/vialiterae. Acesso em: 12 dez. 2013.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender? In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto (org.). *A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais*. Curitiba: Editora CRV, 2009a.

_______. *A criança, a matemática e a realidade*: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Editora da UFPR, 2009b.

______ La Teoría de los Campos Conceptuales. In: *Rechercges en Didactique des Mathématiques*. Vol. 10. No. 2,3. 1990. Disponível em: http://www.fundesuperior.org/Articulos/Pedagogia/Teoria_campos_conceptuales.pdf. Acesso em: 12 nov. 2013.

VIGOTSKI, Lev S. *A construção do pensamento e da linguagem.* Tradução de Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

VILLAS BOAS, Benigna Maria de F. Avaliação formativa e formação de professores: ainda um desafio. In: *Linhas Críticas* – Revista da Faculdade de Educação da Universidade Brasília, v. 12, n. 22, jan/jun 2006. Brasília: UnB/FE, 2006.

UCB. Projeto de Extensão Matemática – nenhum a menos. Brasília: UCP/POREX, 2012

WALBERG, Herbert J.; PAIK, Susan. Práticas Educativas Eficazes. In: UNESCO. Série *Práticas Educativas* – 3, 2000. Disponível em: http://www.ibe.unesco.org/publications/. Acesso em: 10 abr. 2012.

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO I (Professora)

Esta pesquisa intitulada “o diálogo entre estudantes em situação de sucesso estudantes em situação de fracasso no contexto da aprendizagem escolar da Matemática”, está sendo desenvolvida como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Doutora em Educação pela Professora **Erondina Barbosa da Silva**, junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Brasília (UnB), com o objetivo de analisar as relações entre diálogo e aprendizagem matemática em contexto escolar.

É importante esclarecer que os participantes não correrão riscos algum. Para a realização deste estudo serão necessárias observações em sala de aula e no projeto de tutoria da aprendizagem, bem como a produção de textos sobre o tema da pesquisa. O sigilo total será mantido quanto aos dados de identificação dos participantes, havendo também a garantia de que os resultados serão utilizados somente para fins científicos.

Os sujeitos, cuja participação na pesquisa será plenamente voluntária, poderão recusar-se a participar do estudo ou solicitar a retirada do consentimento a qualquer momento ao longo do estudo, sem que isso acarrete nenhum prejuízo.

Esclarecimentos adicionais poderão ser obtidos nos telefones abaixo e ainda ressaltamos que a pesquisa a ser desenvolvida tem sido acompanhada pelo Comitê de Ética em pesquisa da UnB.

....	....
Erondina Barbosa da Silva	Cristiano Alberto Muniz
Doutoranda	Orientador
(61) 3383 1687 ou (61) 9987 5455	
erondina@gmail.com	

Autorizo a utilização, para fins estritamente científicos, das informações coletadas na pesquisa, pela professora Erondina Barbosa da Silva, doutoranda em educação pela UnB.

Fui informada de que será mantido sigilo sobre dados que possam identificar a mim e aos alunos participantes da pesquisa. Estou ciente de que a minha participação é voluntária e de que posso, em qualquer momento do processo, retirar meu consentimento. Declaro ter recebido informações suficientes sobre os objetivos e demais aspectos da pesquisa, tendo sido esclarecida em relação às minhas dúvidas. Afirmo, ainda, que recebi uma cópia desse documento.

Nome da Professora ....

RG: ....

Assinatura: ....

Data: ___/___/2012.

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO I (Pais)

Esta pesquisa intitulada "o diálogo entre estudantes em situação de sucesso estudantes em situação de fracasso no contexto da aprendizagem escolar da Matemática", está sendo desenvolvida como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Doutora em Educação pela Professora **Erondina Barbosa da Silva**, junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Brasília (UnB), com o objetivo de analisar as relações entre diálogo e aprendizagem matemática em contexto escolar.

É importante esclarecer que os participantes não correrão riscos algum. Para a realização deste estudo serão necessárias observações em sala de aula e no projeto de tutoria da aprendizagem, bem como a produção de textos sobre o tema da pesquisa. O sigilo total será mantido quanto aos dados de identificação dos participantes, havendo também a garantia de que os resultados serão utilizados somente para fins científicos.

Os sujeitos, cuja participação na pesquisa será plenamente voluntária, poderão recusar-se a participar do estudo ou solicitar a retirada do consentimento a qualquer momento ao longo do estudo, sem que isso acarrete nenhum prejuízo.

Esclarecimentos adicionais poderão ser obtidos nos telefones abaixo e ainda ressaltamos que a pesquisa a ser desenvolvida tem sido acompanhada pelo Comitê de Ética em pesquisa da UnB.

....	....
Erondina Barbosa da Silva	Cristiano Alberto Muniz
Doutoranda	Orientador
(61) 3383 1687 ou (61) 9987 5455	
erondina@gmail.com	

Autorizo a utilização, para fins estritamente científicos das informações coletadas na pesquisa, pela professora Erondina Barbosa da Silva, doutoranda em educação pela UnB.

Fui informado(a) de que será mantido sigilo sobre dados que possam identificar meu filho(a), durante a realização da pesquisa. Estou ciente de a participação dele(a) é voluntária e de que posso, em qualquer momento do processo, retirar meu consentimento. Declaro ter recebido informações suficientes sobre os objetivos e demais aspectos da pesquisa, tendo sido esclarecido(a) em relação às minhas dúvidas. Afirmo, ainda, que recebi uma cópia desse documento.

Nome do(a) aluno(a): ....
RG (se houver): ....
Assinatura: ....
Nome do pai, mãe ou responsável: ....
RG: ....
Assinatura: ....

Data: ___/___/2012.

APÊNDICE C – ROTEIRO DA ENTREVISTA COLETIVA – 21/06/2012

Essa entrevista tem como objetivo coletar as impressões de vocês sobre o projeto "Matemática: nenhum a menos". Para começar eu quero pedir que digam o nome de vocês e a idade. Os dados pessoais de vocês serão mantidos em sigilo.

1)Desde quando vocês estão no projeto?

2)Qual é a importância do projeto para vocês?

3)O projeto tem ajudado a vocês a aprenderem matemática? De que forma?

4)Como estão as notas de vocês em Matemática?

5)O que acontece no projeto que vocês mais gostam?

6)Aqui no projeto você mais aprende ou mais ensina?

APÊNCDICE D – Roteiro de entrevista com os alunos – 10/12 a 20/12/2012

Agora que o projeto está chegando ao fim, eu quero entrevistar você para saber quais são as suas percepções sobre o projeto. Como você sabe, eu estou fazendo uma pesquisa de doutorado que investiga a relação entre diálogo e aprendizagem matemática. As respostas que der nessa entrevista serão utilizadas nessa pesquisa, mas seu nome será mantido em sigilo, por isso, pode ser bastante sincero.

Data:

Participante/idade:

1. Por favor, diga o seu nome e a sua idade.
2. Qual é a sua turma?
3. Você já foi reprovado alguma vez? Por que?
4. Você gosta de matemática?
5. Descreva seu desempenho em matemática.
6. Desde quando está no projeto de tutoria em matemática?
7. O que acha do projeto?
8. Você gosta de estudar com os colegas? Você aprende estudando com os colegas no projeto?
9. O ambiente da sala de aula favorece que você e seus colegas conversem sobre matemática? E do projeto?
10. No projeto você mais ensina ou mais aprende matemática?
11. Qual foi a atividade do projeto você mais gostou? Por que?
12. Qual foi a atividade de sala de aula que você mais gostou? Por que?
13. Você vai ser aprovado em Matemática?

APÊNCDICE E – Roteiro de entrevista com a professora – 10/12 a 20/12/2012

Agora que o projeto está chegando ao fim, eu quero entrevistar você para saber quais são as suas percepções sobre o projeto “Matemática: nenhum a menos”. Como você sabe, eu estou fazendo uma pesquisa de doutorado que investiga a relação entre diálogo e aprendizagem matemática. Assim, o foco principal é o diálogo entre os estudantes, no entanto, as respostas que der nessa entrevista serão utilizadas nessa pesquisa, mas seu nome será mantido em sigilo, por isso, pode ser bastante sincera.

1. Por favor, diga o seu nome e a sua idade.
2. Qual é a sua formação? Onde se formou? Há quanto tempo?
3. Quantos anos você tem de experiência em docência? Quantos anos nessa escola?
4. Quais são suas principais dificuldades como professora de Matemática?
5. O que achou de ter uma professora fazendo pesquisa participante em sua sala, dividindo o espaço da sala de aula?
6. Quando começou o projeto, você lembra-se que disse que gostaria de participar da pesquisa porque estava estagnada intelectualmente. A pesquisa contribuiu para sua a sua formação? De que modo?
7. Alguns planejamentos nós realizamos juntas. Como se sentiu?
8. Você percebeu alguma diferença nos alunos que frequentaram o projeto?
9. Os alunos podem aprender uns com os outros?
10. O que pode ser feito para promover a aprendizagem entre pares, entre os alunos?
11. A sala de aula é um espaço dialógico? A sala de aula favorece o diálogo entre os alunos?
12. Você percebeu diferença nos alunos que frequentaram o projeto no turno da tarde?

ANEXO A - Lista de exercícios utilizada no Projeto de Monitoria durante a pesquisa exploratória

1. Calcule o valor numérico

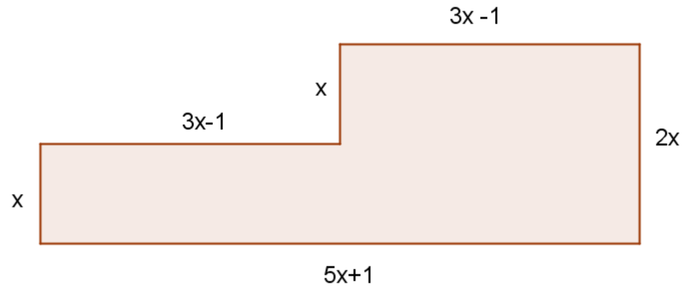
a) $\frac{1-a^2}{a-1}$ para $a=-2$

b) $x^2-2xy+y^2$ para $x=-1$ e $y=-2$

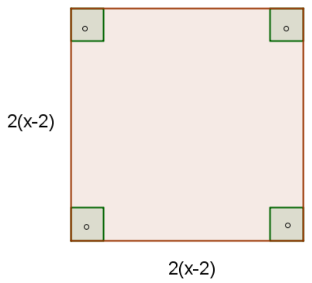
c) a^2-b^2 para $a=-1$ e $b=2$

2. Calcule o perímetro e a área de cada uma das figuras abaixo:

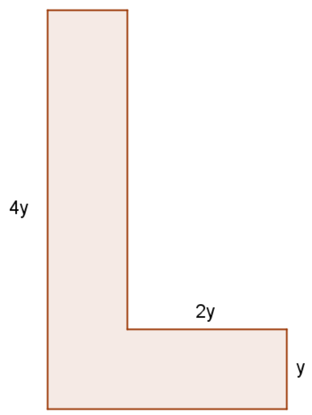
a)



b)



c)



REVENDO O 1º BIMESTRE

1. Efetue as operações abaixo

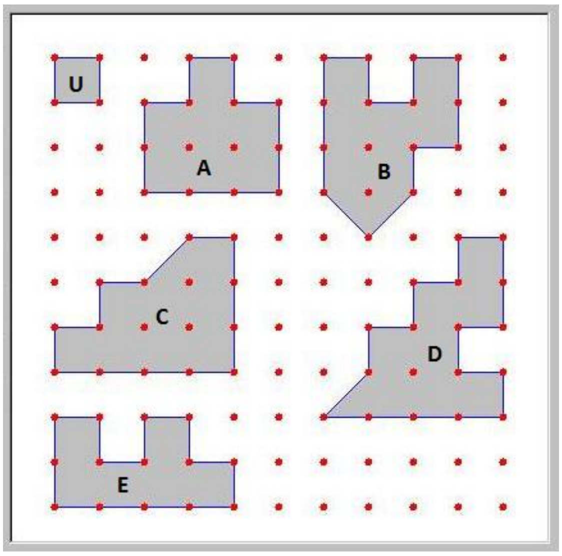
a) (-35).(-10)	h) 3π
b) $\frac{3}{8}-\frac{5}{12}$	i) $\frac{\sqrt{10}}{2}$
c) $0,444...\div 1\frac{1}{2}$	i) $(-1,5)-(-2,3)$
d) $\left(-\frac{2}{3}\right)\div\left(+\frac{1}{4}\right)$	k) $\left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{1}{4}\right)$
e) $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)$	l) $\left(-\frac{1}{4}\right).\left(-\frac{3}{5}\right)$
f) $8+\sqrt{2}$	m) $\sqrt{+0,16}$
g) $\sqrt{5}-1$	

2. Efetue os cálculos algébricos

a) $\left(-2xy^2\right)^3$	k) $6x^2-10x^2$
b) $\frac{12x^2y}{3x^2y^2}$	l) $\left(16x^{10}\right)\div\left(2x^2\right)$
c) $\left(\frac{2}{3}x\right)^{-1}$	m) $\left(5x^2\right)^3$
d) $\left(35x^8\right)\div\left(5x^2\right)$	n) $\left(3x^3\right).\left(2x^2\right)$
e) $6x^2y-2xy^2$	o) $\frac{10xy}{5xy^2}$
f) $(2a).(-3b)$	p) $\left(15x^2-6x\right)\div(3x)$
g) $(3x-2)+(x-4)-(2x-1)$	q) $\left(a^2-a+ab-b\right)-(a+2ab-b)$
h) $(x+11)^2$	r) $(3x)(2x-6)$
i) $(x+6)(x-5)$	s) $(5x-1).(x+3)$

ANEXO B – Roteiro para estudo dos conceitos de perímetro e área no laboratório de informática

1. Construa, no geoplano virtual, as seguintes figuras:



a)Calcule a área de cada uma das superfícies construídas.

b)Que superfícies têm a mesma área?

c)Encontre duas superfícies que tenham áreas diferentes e diga qual delas tem área maior.

d)Quando é que duas superfícies têm a mesma área?

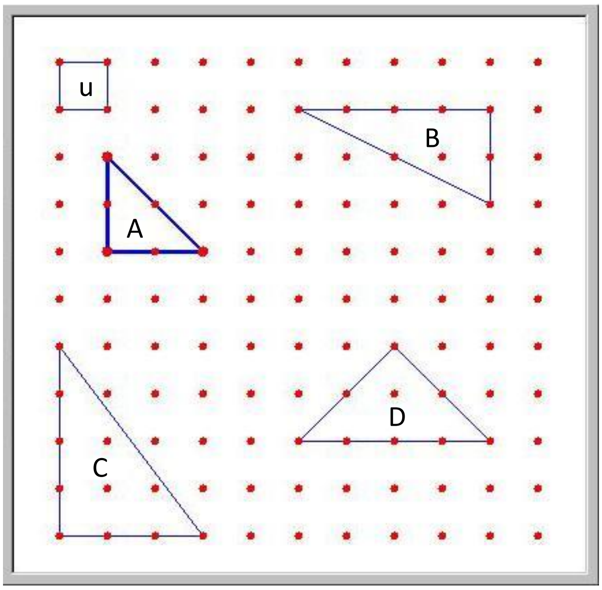
e)Quando podemos afirmar que a área de uma superfície é maior do que a de outra superfície?

2. Construa no geoplano virtual retângulos cujos lados são dados na tabela abaixo.

Lado 1	Lado 2	Área
3	4	
5	7	
2	3	
8	5	
3	6	

e) Calcule a área de cada um deles.
f) É possível calcular a área dos retângulos sem contar quadradinhos? Explique.
g) Construa no geoplano, retângulos de área 12. Quais são as medidas dos seus lados?
h) Construa no geoplano, retângulos de área 24. Quais são as medidas dos seus lados?

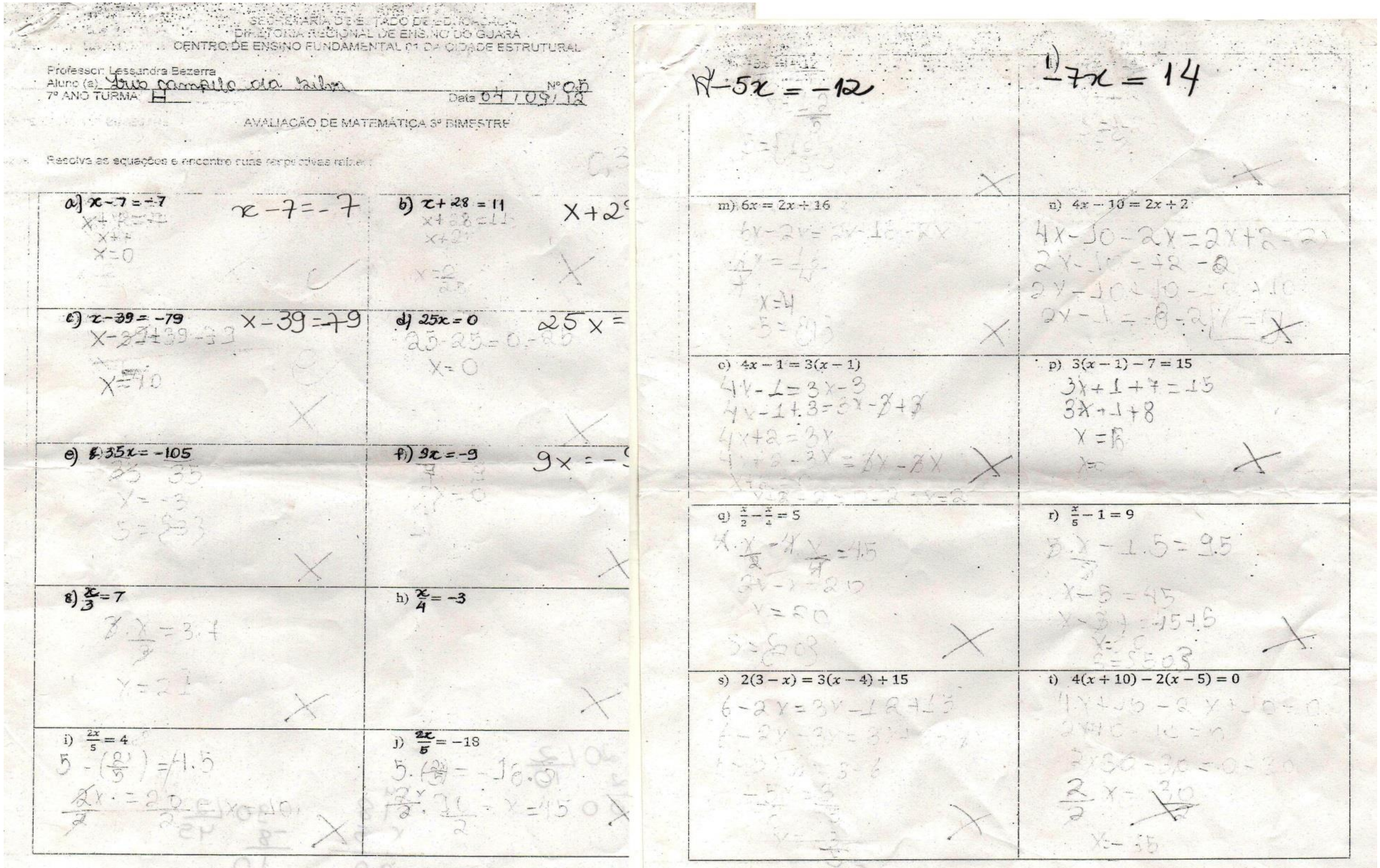
3. Construa cada um dos triângulos abaixo no geoplano.



a)Calcule a área de cada um dos triângulos.

b)Explique como você encontrou a área de cada um deles.

ANEXO C – Prova aplicada pela professora regente para avaliar a aprendizagem de equações


SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
DIRETORIA REGIONAL DE ENSINO DO GUARÁ
CENTRO DE ENSINO FUNDAMENTAL 01 DA CIDADE ESTRUTURAL

Professor: Lessandra Bezerra
Aluno (a): [illegible] Nº 05
7º ANO TURMA: H Data 04/09/12

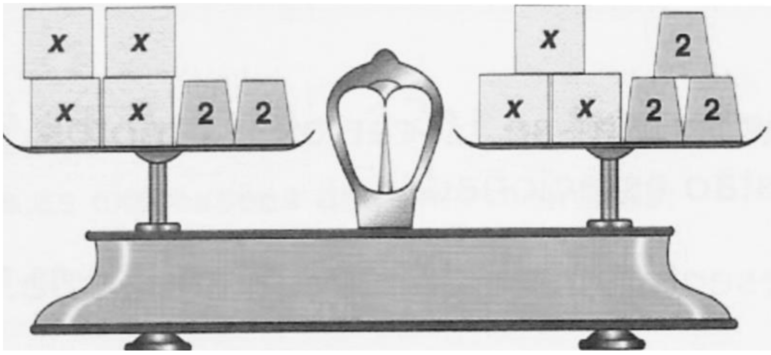
AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA 3º BIMESTRE

Resolva as equações e encontre suas respectivas raízes.

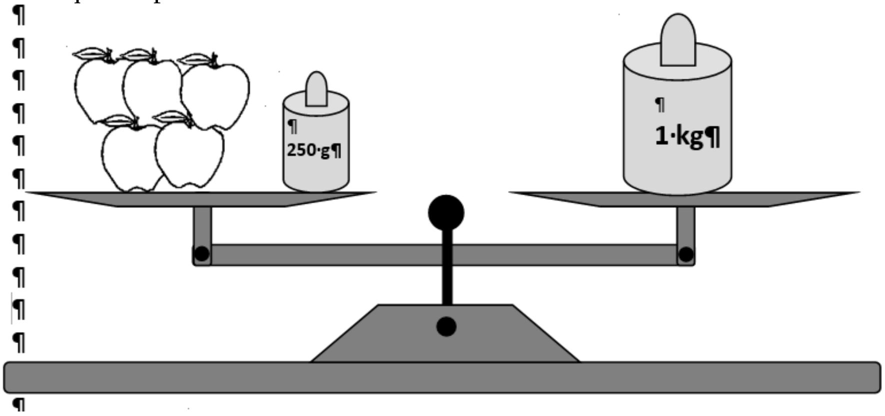
a) $x - 7 = -7$	b) $x + 28 = 11$
c) $x - 39 = -79$	d) $25x = 0$
e) $35x = -105$	f) $9x = -9$
g) $\frac{x}{3} = 7$	h) $\frac{x}{4} = -3$
i) $\frac{2x}{5} = 4$	j) $\frac{2x}{5} = -18$
k) $-5x = -12$	l) $-7x = 14$
m) $6x = 2x + 16$	n) $4x - 10 = 2x + 2$
o) $4x - 1 = 3(x - 1)$	p) $3(x - 1) - 7 = 15$
q) $\frac{x}{2} - \frac{x}{4} = 5$	r) $\frac{x}{5} - 1 = 9$
s) $2(3 - x) = 3(x - 4) + 15$	t) $4(x + 10) - 2(x - 5) = 0$

ANEXO D – Lista de exercícios utilizada no cenário do Projeto "Matemática – nenhum a menos"

1. A balança algébrica da imagem a seguir está em equilíbrio. Escreva a equação correspondente e encontre o valor de x



2. João escolheu 5 maças de mesmo tamanho e colocou em um prato da balança acrescentado em seguida um "peso" de 250 gramas no mesmo prato. No outro prato, ele colocou 1 kg e a balança ficou em equilíbrio, conforme mostra a figura a seguir. Considere que as maças possuem o mesmo "peso" e calcule quanto pesa cada uma.



3. Para comprar um computador que custa R$1.235,00, Tereza tem que juntar o dobro do que tem hoje mais R$250 reais. Quanto Tereza tem hoje?

4. A metade dos objetos de uma caixa mais a terça parte desses objetos é igual a 25. Quantos objetos há na caixa?

5. Luana e João têm juntos 48 anos. A idade de João é $\frac{3}{5}$ da idade de Luana. Qual é a idade de cada um?

6. Dois quintos do meu salário são reservados para o aluguel e a metade é gasta com a alimentação, gás, água, luz e telefone. Quando esses gastos são diminuídos do meu salário ainda restam R$ 250,00 para despesas diversos. Qual é o meu salário?