



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Análise, controle e filtragem de sistemas dinâmicos em tempo finito**

Hugo Tadashi Muniz Kussaba

Brasília, Março de 2014

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**ANÁLISE, CONTROLE E FILTRAGEM DE SISTEMAS  
DINÂMICOS EM TEMPO FINITO**

**HUGO TADASHI MUNIZ KUSSABA**

**ORIENTADOR: PROF. JOÃO YOSHIYUKI ISHIHARA**

**CO-ORIENTADOR: PROF. RENATO ALVES BORGES**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**PUBLICAÇÃO: PGEA.DM - 555/14**

**BRASÍLIA/DF: MARÇO – 2014**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO  
**Análise, controle e filtragem de sistemas dinâmicos em tempo finito**

**Hugo Tadashi Muniz Kussaba**

*Relatório submetido ao Departamento de Engenharia  
Elétrica como requisito parcial para obtenção  
do grau de Mestre em Engenharia Elétrica*

Orientadores

Prof. João Yoshiyuki Ishihara, ENE/UnB  
*Orientador*

Prof. Renato Alves Borges, ENE/UnB  
*Coorientador*

Banca Examinadora

Prof. João Yoshiyuki Ishihara, ENE/UnB \_\_\_\_\_  
*Orientador*

Prof. Eduardo Stockler Tognetti, ENE/UnB \_\_\_\_\_  
*Examinador interno*

Prof. Reinaldo Martinez Palhares, UFMG \_\_\_\_\_  
*Examinador externo*

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

KUSSABA, HUGO TADASHI MUNIZ

Análise, controle e filtragem de sistemas dinâmicos em tempo finito [Distrito Federal] 2014. xi, 108p., 210 x 297 mm (ENE/FT/UnB, Mestre, Engenharia Elétrica, 2014).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Elétrica

1. Sistemas lineares

2. Controle

3. Filtragem

4. Tempo finito

I. ENE/FT/UnB

II. Título (série)

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

KUSSABA, H. T. M. (2014). Análise, controle e filtragem de sistemas dinâmicos em tempo finito, Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica, Publicação PGEA.DM - 555/14, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 108p.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

AUTOR: Hugo Tadashi Muniz Kussaba

TÍTULO: Análise, controle e filtragem de sistemas dinâmicos em tempo finito.

GRAU: Mestre ANO: 2014

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Hugo Tadashi Muniz Kussaba

Departamento de Eng. Elétrica (ENE) - FT

Universidade de Brasília (UnB)

Campus Darcy Ribeiro

CEP 70919-970 - Brasília - DF - Brasil

## **Dedicatória**

*À minha família, pelo amor incondicional — em especial aos meus pais, Mariangela e Francisco Kussaba.*

*Hugo Tadashi Muniz Kussaba*

## Agradecimentos

*Inaugurando os agradecimentos, agradeço a Deus, pela vida.*

*Como diz um provérbio judaico:*

*"Não há melhor negócio que a vida. A gente a obtém a troco de nada".*

*Agradeço aos familiares pelo incentivo e carinho. Sem dúvida, a família é um dos bens mais preciosos pelo qual o ser humano pode ser grato. Também agradeço pelas orações e suporte espiritual dos meus irmãos - pois apesar de ser filho único, possuo milhares de irmãos. Estes são os que compartilham da minha esperança e fé em Deus.*

*Com muita satisfação, também coloco em palavras agora a minha gratidão e admiração pelos meus professores, em especial pelos meus orientadores, sensei João Yoshiyuki Ishihara e sensei Renato Borges. Com o auxílio deles, nenhuma montanha de teoremas é alta demais para ser escalada. Espero que no futuro ainda haja muitas discussões frutíferas e muitos teoremas sendo demonstradas na sala de reuniões do LARA.*

*Também agradeço pela amizade dos meus queridos "conterrâneos" de UnB, em especial os colegas do LARA, sempre solícitos e sempre oferecendo ajuda e conselhos quando preciso. Certamente, as horas mais agradáveis da minha vida foi tomando chá pelo ICC e proseando com meus amigos.*

*Pelo suporte financeiro, agradeço as agências de fomento à pesquisa CAPES, CNPq e DPP/UnB.*

*Finalmente, peço desculpas por um agradecimento tão sucinto; não haveria tempo e espaço, porém, para citar todos nome por nome, pois apesar da cardinalidade deste conjunto não ser  $\aleph_0$ , é suficientemente grande para a escrita desse conjunto ser ineficaz em um tempo razoável.*

*Hugo Tadashi Muniz Kussaba*

---

## RESUMO

Para investigar se as variáveis de estado de um sistema dinâmico são limitadas em um horizonte de tempo finito, é utilizado a noção de estabilidade em tempo finito. Uma versão robusta dessa noção, que é a limitação em tempo finito, também é investigada.

A análise de estabilidade e limitação em tempo finito de sistemas lineares podem ser feitas com as condições propostas nessa dissertação. Com estas condições de análise também podem ser resolvidos alguns problemas de controle e filtragem de sistemas lineares de parâmetros variáveis, no contexto de estabilidade e limitação em tempo finito.

---

## ABSTRACT

To investigate whether the state variables of a dynamical system are bounded in a finite time horizon, it is used the notion of finite time stability. A robust version of this notion, which is the finite time boundedness, is also investigated.

The analysis of the finite time stability and the finite time boundedness of a linear system can be made using the proposed conditions in this dissertation. With these analysis conditions, some control and filtering problems for linear parameter varying systems can also be solved in the context of finite time stability and finite time boundedness.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	ESTABILIDADE DE LYAPUNOV DE SISTEMAS DINÂMICOS	2
1.2	CONCEITOS DE ESTABILIDADE EM TEMPO FINITO	5
1.2.1	ESTABILIDADE EM TEMPO FINITO ( <i>Finite Time Stability</i> - FTS)	5
1.2.2	LIMITAÇÃO EM TEMPO FINITO ( <i>Finite Time Boundedness</i> - FTB)	9
1.2.3	ALGUNS CONCEITOS RELACIONADOS À ESTABILIDADE EM TEMPO FINITO	10
1.3	OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES DESTA DISSERTAÇÃO	11
1.4	ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	11
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b>	<b>13</b>
2.1	SISTEMAS LINEARES DE PARÂMETROS VARIÁVEIS (LPV)	13
2.2	DESIGUALDADES MATRICIAIS (MI)	16
2.2.1	DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES (LMI)	17
2.2.2	LMIS DEPENDENTES DE PARÂMETROS (PD-LMI)	20
2.2.3	DESIGUALDADES MATRICIAIS BILINEARES (BMI) E DESIGUALDADES MATRICIAIS DIFERENCIAIS (DMI)	24
<b>3</b>	<b>ANÁLISE DE ESTABILIDADE E LIMITAÇÃO EM TEMPO FINITO</b>	<b>26</b>
3.1	CONDIÇÕES DE ANÁLISE DE FTB E FTS BASEADAS EM DMIS	26
3.2	CONDIÇÕES DE ANÁLISE DE FTB E FTS BASEADAS EM LMIS	33
3.3	COMPARAÇÃO ENTRE AS CONDIÇÕES DE ANÁLISE BASEADAS EM LMI E BASEADAS EM DMI	41
3.4	EXPERIMENTO NUMÉRICO	42
<b>4</b>	<b>CONTROLE EM TEMPO-FINITO</b>	<b>43</b>
4.1	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA	43
4.2	CONTROLADOR POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS	44
4.3	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS	47
4.3.1	EXEMPLO 1	47
4.3.2	EXEMPLO 2	48
<b>5</b>	<b>FILTRAGEM EM TEMPO-FINITO</b>	<b>52</b>
5.1	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA	52
5.2	SÍNTESE DO FILTRO	55



5.3	SÍNTESE ALTERNATIVA DO FILTRO COM $R$ DIAGONAL .....	63
5.4	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS .....	66
5.4.1	EXEMPLO 1 .....	66
5.4.2	EXEMPLO 2 .....	68
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	<b>72</b>
6.1	TRABALHOS FUTUROS.....	73
<b>ANEXOS</b> .....		<b>84</b>
<b>A</b>	<b>RESULTADOS DE ÁLGEBRA LINEAR E ANÁLISE</b> .....	<b>85</b>
A.1	LEMA DE GRONWALL-BELLMAN.....	85
A.2	RESULTADOS SOBRE AUTOVALORES .....	86
A.3	RESULTADOS SOBRE A ORDEM DE LOEWNER .....	89
A.4	RESULTADOS SOBRE A TÉCNICA DE PARTIÇÃO DE MATRIZES INTRODUZIDA EM [1] .....	91
A.5	RESULTADOS SOBRE FUNÇÕES COM VALORES EM MATRIZES .....	95
A.6	RESULTADOS SOBRE O LEMA DE FINSLER .....	97
<b>B</b>	<b>EQUIVALÊNCIA ENTRE OS TEOREMAS DESTA DISSERTAÇÃO E O ARTIGO [2]</b> ...	<b>106</b>
B.1	EQUIVALÊNCIA ENTRE A CONDIÇÃO DE ANÁLISE .....	106
B.2	LEMAS PARA FAZER A TROCA DE VARIÁVEL $K = Y - Z$ .....	106
<b>C</b>	<b>ARTIGOS PUBLICADOS</b> .....	<b>110</b>

# LISTA DE FIGURAS

1.1	Ponte rolante para transportar cargas via guindaste. ....	1
1.2	Ponto de equilíbrio estável no sentido de Lyapunov. ....	3
1.3	Ponto de equilíbrio atrativo. ....	4
1.4	Exemplo de sistema possuindo um ponto de equilíbrio instável e atrativo. ....	5
1.5	Trajatória não limitada em uma vizinhança pequena do ponto de equilíbrio.....	6
1.6	Sistema estável em tempo finito. ....	7
1.7	Independência entre estabilidade de Lyapunov e de tempo finito. ....	8
2.1	Representação politópica. ....	15
2.2	Sistema massa-mola com amortecimento. ....	15
3.1	Regiões e formas possíveis da função $V(t)$ de acordo com $\beta$ pela condição (3.42).....	38
4.1	Norma quadrática ponderada por $R$ dos estados do sistema em malha aberta. ....	50
4.2	Norma quadrática ponderada por $R$ dos estados do sistema em malha fechada.....	50
5.1	Arquitetura do filtro próprio de ordem completa. ....	53
5.2	Elipsoide limitando o estado da planta e o erro de observação no caso de um sistema escalar. ....	63
5.3	Simulação no domínio do tempo considerando $\alpha = -2, -1.5, -1$ . ....	67
5.4	Norma quadrática ponderada dos estados do sistema aumentado. ....	68
5.5	Referência acoplado a espaçonave do Exemplo 2. ....	69
5.6	Simulação comparando a norma do erro com o limite imposto por $\Omega$ . ....	71
5.7	Soma da norma quadrática ponderada dos estados da planta e do erro de observação. ....	71

# LISTA DE TABELAS

4.1	Mínima cotas superiores de $c_2$ para valores diferentes do grau $g$ obtidos usando o Teorema 18 e as abordagens de [6]. .....	48
5.1	Valores dos parâmetros físicos utilizados para o exemplo da espaçonave .....	70

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais, i.e.: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Conjunto das matrizes reais de ordem $m \times n$
$\mathbb{S}^n$	Conjunto das matrizes simétricas reais de ordem $n \times n$
$\mathbb{S}_+^n$	Conjunto das matrizes simétricas reais positivas definidas de ordem $n \times n$
$\mathbb{P}^{m \times n}$	Conjunto das matrizes polinomiais de ordem $m \times n$
$\mathbb{H}^{m \times n}$	Conjunto das matrizes polinomiais homogêneas de ordem $m \times n$
$\Delta_N$	Simplex unitário de dimensão $N$
$\mathcal{C}^k(X, Y)$	Conjunto das funções de $X$ para $Y$ possuindo $k$ -ésima derivada contínua
$\mathcal{L}^2(X, Y)$	Conjunto das funções quadrado integráveis de $X$ para $Y$
$\mathcal{W}_d^2$	Subconjunto de $\mathfrak{W}([0, T], \mathbb{R}^r)$ tal que $\omega \in \mathcal{W}_d^2$ se e só se $\int_0^T \omega^T \omega \leq d$
$\mathcal{W}_d^\infty$	Subconjunto de $\mathfrak{W}([0, T], \mathbb{R}^r)$ tal que $\omega \in \mathcal{W}_d^\infty$ se e só se $\omega^T \omega \leq d$
$\mathcal{W}_{d, \Pi}^S$	Conjunto de ruídos gerados pelo sistema $\dot{\omega} = S\omega$ tal que $\omega^T(0) \Pi \omega(0) \leq d$
$A \succ B$	$A - B$ é positiva definida
$A \prec B$	$A - B$ é negativa definida
$A \succeq B$	$A - B$ é positiva semi-definida
$A \preceq B$	$A - B$ é negativa semi-definida
$\text{Im}(A)$	Imagem de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
$\text{Ker}(A)$	Núcleo de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
$\text{posto}(A)$	Posto de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
$\dim(V)$	Dimensão do espaço vetorial $V$
$\lambda_{\min}(A)$	Autovalor mínimo de $A \in \mathbb{S}^n$
$\lambda_{\max}(A)$	Autovalor máximo de $A \in \mathbb{S}^n$
$\text{diag}(A_1, \dots, A_r)$	Matriz bloco diagonal formada pelas matrizes $A_1, \dots, A_r$
$\star$	Bloco simétrico em uma desigualdade matricial

## Siglas

FTS	Estabilidade em tempo finito ( <i>Finite Time Stability</i> )
FTB	Limitação em tempo finito ( <i>Finite Time Boundedness</i> )
MI	Desigualdade matricial ( <i>Matrix Inequality</i> )
LMI	Desigualdade matricial linear ( <i>Linear Matrix Inequality</i> )
LMIP	Problema de factibilidade de desigualdade matricial linear ( <i>Linear Matrix Inequality Problem</i> )
PD-LMI	Desigualdade matricial linear dependente de parâmetros ( <i>Parameter Dependent Linear Matrix Inequality</i> )
BMI	Desigualdade matricial bilinear ( <i>Bilinear Matrix Inequality</i> )
DMI	Desigualdade matricial diferencial ( <i>Differential Matrix Inequality</i> )
DLMI	Desigualdade matricial linear diferencial ( <i>Differential Linear Matrix Inequality</i> )
SDP	Programação semi-definida ( <i>Semi-Definite Programming</i> )
EVP	Problema de autovalor ( <i>Eigenvalue Problem</i> )
SOS	Soma de quadrados ( <i>Sum of Squares</i> )
LPV	Sistemas lineares de parâmetros variáveis ( <i>Linear Parameter Varying</i> )

# Capítulo 1

## Introdução

Muitos sistemas não precisam operar durante todo instante de tempo, mas apenas durante um tempo pré-estabelecido. Essa situação se encontra, por exemplo, no problema de transporte de uma carga por uma ponte rolante.

A ponte rolante é uma máquina transportadora para içar e locomover cargas a partir de um guindaste instalado sobre um carro que se desloca longitudinalmente através de uma viga, conforme ilustrado na Figura 1.1. O transporte de carga por meio da ponte rolante é um exemplo de sistema cujo funcionamento ocorre em intervalos de tempo fixos correspondendo o tempo de duração do transporte da carga; realizado o transporte, pode-se desligar o sistema.

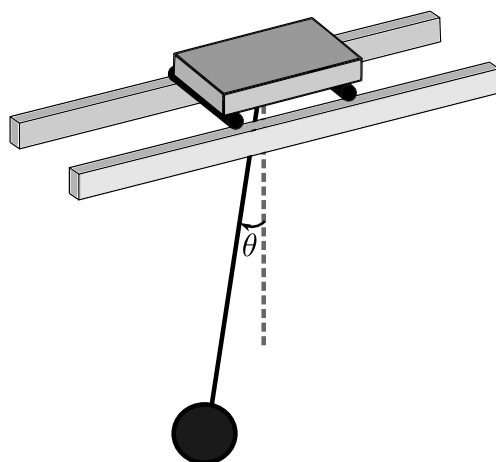


Figura 1.1: Ponte rolante para transportar cargas via guindaste.

Mais ainda, por razões de segurança, um controlador para realizar o transporte pela ponte rolante precisa assegurar que o cabo do guindaste não se mova muito. Para isso, é desejado que o ângulo  $\theta$  entre a carga e o carro, conforme mostrado na Figura 1.1, permaneça limitado em uma região de segurança pré-estabelecida durante o intervalo de tempo que o carro leva para chegar no fim de curso da viga.

Pode-se projetar então um controlador para fazer o ângulo  $\theta$  tender assintoticamente para  $0^\circ$ , mas apenas a convergência para  $0^\circ$  não basta para garantir que o ângulo fique limitado na região

de segurança pré-estabelecida: pode-se ultrapassar esta região enquanto o ângulo converge para  $0^\circ$ . Mais ainda, esta convergência pode ocorrer em um tempo infinito, enquanto que o transporte da carga ocorre durante um intervalo de tempo apenas finito.

Utilizando o conceito de estabilidade de Lyapunov para projetar este controlador juntamente com técnicas de alocação de polos é possível impor restrições no ângulo  $\theta$  e na taxa de velocidade de convergência deste para  $0^\circ$  resolvendo efetivamente o problema; nessa situação e em outras parecidas, porém, as noções de estabilidade e de limitação em tempo finito, que serão discutidas e trabalhadas nessa dissertação, são mais naturais, pois a preocupação é justamente assegurar que as variáveis de estado do sistema fiquem limitadas de uma maneira robusta dentro de uma região pré-escrita em um intervalo de tempo finito e pré-determinado.

Antes de entrar em detalhes nas noções de estabilidade e limitação em tempo finito, será dada uma breve revisão na estabilidade de Lyapunov na Seção 1.1 para comparar com tais noções. Estas, por sua vez, serão apresentadas com mais detalhes na Seção 1.2. Para situar melhor o leitor em relação à literatura atual, será dado na Seção 1.2.3 alguns conceitos semelhantes ou relacionados aos conceitos de estabilidade e de limitação em tempo finito. Os objetivos e as contribuições desta dissertação serão apresentados na Seção 1.3. Por fim, a organização desta dissertação é detalhada na Seção 1.4.

## 1.1 Estabilidade de Lyapunov de sistemas dinâmicos

Em diversos problemas de engenharia de controle de sistemas dinâmicos, a fim de proteger o sistema de danos e até mesmo para preservar a segurança à vida humana, é desejado fazer com que este sistema se torne estável, isto é, fazer com que os estados deste não cresçam sem limites. Talvez a teoria matemática de estabilidade mais conhecida seja a proposta por Lyapunov em 1892 [7, 8], a qual só veio a passar a ser aplicável depois de anos, inauguralmente em sistemas aeroespaciais de navegação [9] e daí em diante em diversas tecnologias de controle atuais, como sistemas mecânicos, elétricos, robóticos e aeroespaciais [10, 11].

Desde então, outros conceitos alternativos de estabilidade foram propostos na literatura, como por exemplo: ***D*-estabilidade** [1], **estabilidade forte** [12], **semi-estabilidade** [13], **estabilidade *input-to-state*** [14] e **estabilidade em tempo finito**. Esta refere-se a duas noções distintas: uma trabalha com sistemas não lineares que atingem o ponto de equilíbrio em um intervalo de tempo finito [15, 16, 17], enquanto a outra trabalha com sistemas que apresentam restrições nas variáveis do espaço de estado durante um intervalo de tempo pré-estabelecido. Neste trabalho será explorado a última e em particular, para os sistemas lineares de tempo contínuo<sup>1</sup>. Este tipo de estabilidade apareceu na literatura russa na década de 50 com os artigos seminais [23, 24, 25], e continua sendo investigada desde então, como por exemplo [26] lançado recentemente. Nota-se que o conceito de estabilidade em tempo finito também é chamado de *short-time stability* na literatura, como por exemplo em [27] e [28, p.50].

---

<sup>1</sup>Para resultados no caso de tempo discreto linear ver, entre outros, [18, 19, 20]. Artigos recentes no contexto de sistemas não-lineares são [21, 22], por exemplo.

Para comparar a estabilidade em tempo finito com a estabilidade de Lyapunov será dado antes uma breve revisão nesta. Considerando o seguinte sistema dinâmico representado pela seguinte equação diferencial autônoma<sup>2</sup>

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.1)$$

será suposto que  $f$  seja suficientemente bem comportado de modo que exista uma solução única para (1.1), isto é, uma função diferenciável em uma vizinhança de  $t_0$  satisfazendo (1.1). Por exemplo, uma condição suficiente<sup>3</sup> para que isso ocorra é que  $f$  seja Lipschitz. Pelo teorema de Picard-Lindelöf [31, p.88], esta hipótese garante a existência de uma solução local que pode ser prolongada a um intervalo máximo de existência no qual esta solução é unicamente determinada. Tal intervalo por sua vez será denotado como

$$\mathcal{I}(x_0) = [0, \Omega(x_0)],$$

onde  $\Omega(x_0)$  denota o intervalo máximo de existência tal que  $x(t_0) = x_0$ .

A imagem de uma solução de (1.1) será denominada de trajetória ou órbita, e se existe  $t'$  tal que  $x(t')$  esteja na trajetória, será dito que a trajetória passa pelo ponto  $x(t')$ . Em particular, toda trajetória passa por um ponto inicial  $x_0$  e será dito que a trajetória começa de  $x_0$ .

Os pontos de equilíbrio de (1.1) são as soluções constantes

$$x(t) = x_e \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in [t_0, +\infty),$$

ou seja, são as soluções que podem ser obtidas fazendo  $\dot{x} \equiv 0$  e  $x_0 = x_e$  em (1.1).

Um ponto de equilíbrio é estável no sentido de Lyapunov se uma solução que começa suficientemente perto de um dos pontos de equilíbrios, permanece perto do mesmo ponto de equilíbrio a longo prazo. Formalmente, isto significa que o ponto de equilíbrio  $x_e$  é estável se para toda vizinhança  $U$  de  $x_e$ , tem-se que existe uma vizinhança  $V \subseteq U$  de  $x_e$  tal que toda solução  $x(t)$  com  $x(t_0) \in V$  permanece em  $U$  para todo  $t \geq t_0$ , conforme ilustra a Figura 1.2. Um ponto de equilíbrio instável no sentido de Lyapunov é justamente um ponto de equilíbrio que não é estável no sentido de Lyapunov.

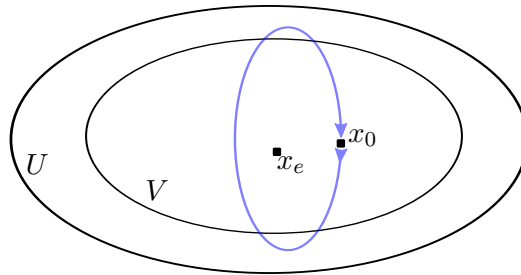


Figura 1.2: Ponto de equilíbrio estável no sentido de Lyapunov.

<sup>2</sup>Será apresentado o caso autônomo para simplificar a exposição. Para o caso variante no tempo, ver o Capítulo 3 de [29].

<sup>3</sup>É interessante notar que existem condições suficientes e necessárias para a existência e unicidade de (1.1), porém tais condições são em geral mais difíceis de verificar. Para mais sobre o assunto, ver [30].



Por outro lado, um ponto de equilíbrio  $x_e$  é atrativo se existe uma vizinhança  $V$  de  $x_e$  tal que para toda solução  $x(t)$  com  $x(t_0) \in V$  tem-se que  $\mathcal{I}(x_0) = [0, +\infty)$  e que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$ . O maior conjunto satisfazendo esta propriedade é denominada de região de atração de  $x_e$ . O conceito de ponto equilíbrio atrativo é ilustrado na Figura 1.3.

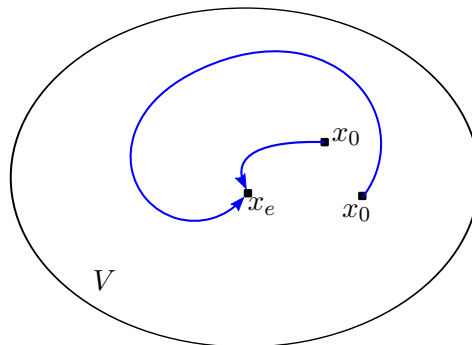


Figura 1.3: Ponto de equilíbrio atrativo.

Por fim, um ponto de equilíbrio é assintoticamente estável quando é estável no sentido de Lyapunov e também atrativo. É importante notar que as propriedades de instabilidade e atratividade de um ponto de equilíbrio não são mutuamente exclusivas<sup>4</sup>. O seguinte exemplo dado em [4, p.58] demonstra o porquê. Conforme ilustra a Figura 1.4, o sistema autônomo

$$\dot{r} = r(1 - r), \quad \dot{\theta} = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

possui os pontos de equilíbrio  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ , sendo o ponto  $(1, 0)$  atrativo e com a região de atração igual a todo o espaço salvo por  $\{(0, 0)\}$ . No entanto, sempre há uma trajetória contida em  $r = 1$  em uma vizinhança de  $(1, 0)$  violando a condição de estabilidade de  $(1, 0)$ . Portanto,  $(1, 0)$  é atrativo e instável ao mesmo tempo.

Um outro exemplo clássico é o sistema de Vinograd [33], comentado em [34, p.50] e [35, p.142]. Uma análise detalhada deste sistema é dada em [36, pp.191-194]. Também vale a pena mencionar [32], que dá um exemplo usando um sistema em tempo discreto.

<sup>4</sup>É interessante notar que para o caso particular de sistemas dinâmicos em  $\mathbb{R}$  um ponto de equilíbrio realmente não pode ser atraente e instável ao mesmo tempo (ver [32] para a demonstração no caso discreto).

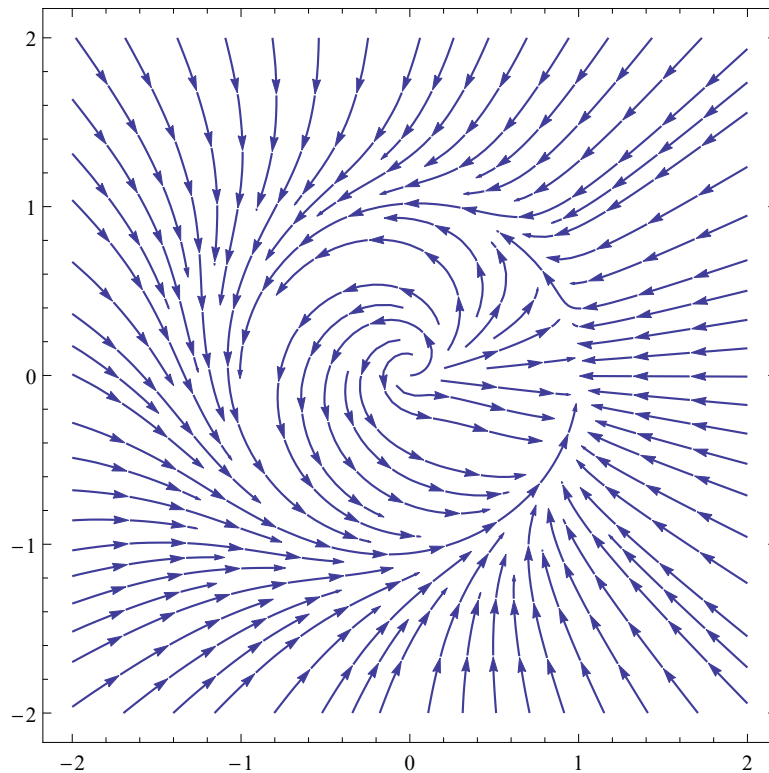


Figura 1.4: Exemplo de sistema possuindo um ponto de equilíbrio instável e atrativo.

Em certas situações, o sistema pode ter uma performance aceitável mesmo que os pontos de equilíbrios do sistema possuam apenas estabilidade no sentido de Lyapunov e não necessariamente estabilidade assintótica. É o caso quando o estado oscila suficientemente perto do ponto de equilíbrio, embora sem convergir para o mesmo. Ainda no âmbito de termos práticos, pode ser desejado ainda que o sistema seja limitado de outras formas, como será visto nas seções a seguir.

## 1.2 Conceitos de estabilidade em tempo finito

### 1.2.1 Estabilidade em tempo finito (*Finite Time Stability - FTS*)

É importante notar que a estabilidade de Lyapunov é um conceito local, isto é, para vizinhanças suficientemente próximas do ponto de equilíbrio, as trajetórias continuam próximas do ponto de equilíbrio. Em uma situação real, pode ser o caso destas vizinhanças serem muitas pequenas, e a região dos possíveis pontos iniciais do sistema ser maior que esta vizinhança (por exemplo, o projetista do sistema só tem garantia que o ponto inicial se encontra nesta determinada região). Conforme ilustrado na Figura 1.5, mesmo que o ponto de equilíbrio seja estável, pode haver uma vizinhança do ponto de equilíbrio dentro da região de incerteza tal que exista um ponto cujas trajetórias a partir deste não são limitadas. Por isso, nestes casos onde o interesse é limitar trajetórias do sistema, seria adequado que o projetista pudesse pré-escrever essas vizinhanças de maneira determinada.

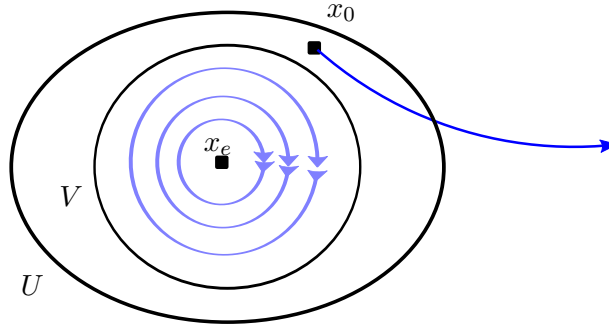


Figura 1.5: Trajetória não limitada em uma vizinhança pequena do ponto de equilíbrio.

Por outro lado, em muitos casos de interesse prático a preocupação em que a trajetória seja contida em limites específicos é apenas em um intervalo determinado de tempo: enquanto a maioria dos sistemas têm de operar satisfatoriamente sobre um intervalo infinito de tempo, alguns sistemas apenas requerem operar satisfatoriamente por um intervalo finito e fixo de tempo, como por exemplo, sistemas de mísseis, onde-se tem o problema de enviar um foguete da vizinhança do ponto  $A$  para o ponto  $B$ , problemas de processo químico, onde se tem de manter a temperatura ou a pressão ou outro parâmetro químico dentro dos limites especificados, algumas manobras de aeronaves e de robótica e redes de comunicação [37, 38]. No contexto da última aplicação vale citar [39] para controle de redes ATM (*Asynchronous Transfer Mode*) e [40, 41] para sistemas controlados por rede, que são exemplos onde as técnicas de projeto de estabilidade em tempo finito foram aplicadas.

Com base nestas motivações, diz-se que um sistema é estável em tempo finito (FTS)<sup>5</sup> em um determinado intervalo de tempo, se os estados do sistema permanecer dentro de certos limites pré-definidos durante este intervalo de tempo. Portanto, enquanto que na estabilidade usual de Lyapunov, o interesse é no comportamento do sistema em períodos longos de tempo das soluções e se estas permanecem ou não limitada e, em caso de permanecer, se esta converge assintoticamente para algum ponto de equilíbrio, o conceito de estabilidade em tempo finito o interesse é limitar o comportamento transitório do sistema. O conceito de estabilidade de tempo finito é resumido formalmente na Definição 1.

**Definição 1.** [26] Dados conjuntos  $S_0$  e  $S_1$  no espaço de estados do sistema (1.1), tal que  $S_0 \subseteq S_1$  e um  $T > 0$ , diz-se que o sistema (1.1) é estável em tempo finito em relação a esses parâmetros se é válido que

$$x_0 \in S_0 \implies x(t) \in S_1 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.2)$$

<sup>5</sup>O acrônimo FTS pode se referir tanto a estabilidade em tempo finito (*Finite Time Stability*) como estável em tempo finito (*Finite Time Stable*) dependendo do contexto.

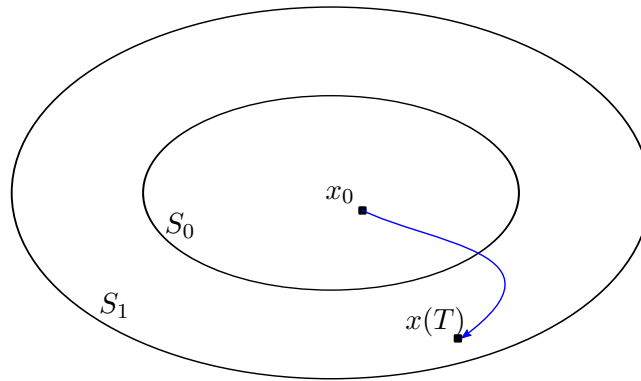


Figura 1.6: Sistema estável em tempo finito.

Analisando a Definição 1, pode-se notar algumas diferenças entre a estabilidade em tempo finito em referência à estabilidade de Lyapunov. A primeira, é que o conceito de estabilidade em tempo finito é em respeito ao sistema, enquanto que o conceito de estabilidade de Lyapunov é em respeito a pontos de equilíbrio do sistema: um sistema não-linear pode ser estável em tempo finito mesmo não possuindo nenhum ponto de equilíbrio. Um exemplo é dado por  $\dot{x} = 1$ , que não possui nenhum ponto de equilíbrio, mas é estável em tempo finito em relação a  $S_0 = \{-1, 1\}$ ,  $S_1 = \{-1, 2\}$  e  $T = 1$ , por exemplo.

Note ainda que mesmo tomando  $S_0$  como o conjunto que contém apenas um ponto de equilíbrio do sistema, então para qualquer  $S_1$  e para qualquer  $T > 0$  o sistema será estável em tempo finito em relação a esses parâmetros, mesmo que o ponto de equilíbrio seja instável no sentido de Lyapunov. De fato, é sempre possível escolher  $S_1$  e  $T$  suficientemente grandes tal que um sistema seja estável em tempo finito em relação a esses parâmetros e um  $S_0$  arbitrário.

Uma outra diferença que vale chamar atenção é que a estabilidade em tempo finito é um conceito relativo: um mesmo sistema pode ser simultaneamente estável em tempo finito para uma n-upla de parâmetros e instável em tempo finito para outra n-upla de parâmetros.

Todas essas diferenças entre as definições de estabilidade em tempo finito e de Lyapunov levam a seguinte pergunta: o quão dependentes são os conceitos de estabilidade em tempo finito e estabilidade no sentido de Lyapunov? A Figura 1.7 ilustra um exemplo de um sistema que não é estável no sentido de Lyapunov, mas é estável em tempo finito e também um exemplo de outro sistema que a recíproca é válida, isto é, o sistema é estável no sentido de Lyapunov mas não é estável em tempo finito.

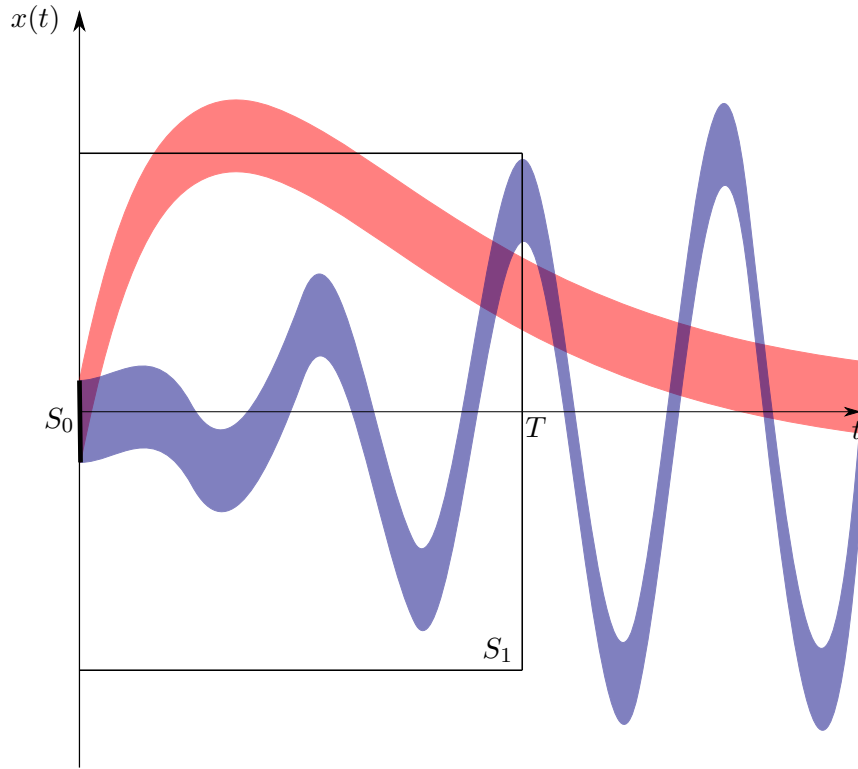


Figura 1.7: Independência entre estabilidade de Lyapunov e de tempo finito.

A faixa em vermelho da Figura 1.7 representa várias trajetórias de um sistema escalar realizadas a partir de todos os pontos iniciais em  $S_0$ . Este sistema é estável no sentido de Lyapunov pois a tendência é que as soluções do sistema decaiam exponencialmente, mas não é estável em tempo finito pois existem trajetórias que escapam do conjunto  $S_1$  antes de  $t = T$ . De modo similar, a faixa azul representa trajetórias de um sistema estável em tempo finito, mas que não é estável no sentido de Lyapunov.

Dois casos particulares de  $S_0$  e  $S_1$  que são utilizados usualmente na literatura são quando estes são domínios elipsoidais ou polidrais [26]. Neste trabalho, os conjuntos  $S_0$  e  $S_1$  serão escolhidos como elipsoides<sup>6</sup>, ou seja, da forma

$$\{x \in \mathbb{R}^n | x^T R x \leq c\},$$

onde  $c \in \mathbb{R}$  é o tamanho e  $R \in \mathbb{S}^n$  o formato da elipsoide. É dito então que o sistema linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t), t \in [0, T] \quad (1.3)$$

é FTS em relação a  $(c_1, c_2, T, R)$  com  $c_2 > c_1$  e  $R \succ 0$  se:

$$x^T(0) R x(0) \leq c_1 \implies x^T(t) R x(t) \leq c_2 \forall t \in [0, T]. \quad (1.4)$$

É interessante notar que se  $c_1 = 0$ , então  $x(0) = 0$  e pede-se para garantir apenas que a trajetória a partir de 0 seja limitada de acordo com  $S_2$ . Para  $c_1 > 0$ , garante-se robustez em relação a uma incerteza do estado inicial do sistema.

<sup>6</sup>Para o leitor interessado no caso de conjuntos polidrais, recomenda-se os artigos [42, 43] e as referências presentes nestes.

### 1.2.2 Limitação em tempo finito (*Finite Time Boundedness* - FTB)

Na presença de entradas exógenas o conceito de estabilidade em tempo finito é estendido para garantir uma certa robustez na propriedade do sistema ser FTS, motivando a Definição 2 a seguir.

**Definição 2.** [44] Considerando o sistema linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\omega(t), \quad (1.5)$$

onde  $\omega(t) \in \mathbb{R}^r$  é uma perturbação pertencente a um conjunto  $\mathcal{W}$ , diz-se que (1.5) é limitado em tempo finito (FTB) em relação a  $(c_1, c_2, \mathcal{W}, T, R)$  se (1.4) é válido para todo  $\omega \in \mathcal{W}$ .

No caso em que não há perturbações (caso em que  $\mathcal{W} = \emptyset$ ) ou que o sistema não apresenta entradas ( $B = 0$ ), a definição de FTB recai na de FTS. Por isso, e também para deixar mais claro a exposição deste trabalho, será utilizado o termo estabilidade em tempo finito também para se referir a limitação em tempo finito quando não houver possibilidade de confusão.

Alguns conjuntos de perturbações  $\mathcal{W}$  utilizados com frequência na literatura são subconjuntos do conjunto  $\mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R}^r)$  de funções quadrado integráveis de  $[0, T]$  para  $\mathbb{R}^r$ , a saber

- [45, 6, 46] o subconjunto de ruídos

$$\mathcal{W}_d^2 := \left\{ \omega(\cdot) \in \mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R}^r) \mid \int_0^T \omega^T(\tau) \omega(\tau) d\tau \leq d \right\},$$

- [44, 47, 48] o subconjunto de ruídos

$$\mathcal{W}_d^\infty := \{ \omega(\cdot) \in \mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R}^r) \mid \omega^T(t) \omega(t) \leq d \forall t \in [0, T] \}.$$

A semelhança das classes  $\mathcal{W}_d^2$  e  $\mathcal{W}_d^\infty$  faz com que alguns resultados de FTB em relação à essas duas classes sejam também semelhantes.

Uma apreciação conveniente sobre a modelagem da perturbação no contexto de FTB é que apesar da perturbação ser uma variável desconhecida para o projetista do sistema, esta não é modelada como uma variável aleatória e nem assume-se uma estrutura estatística para esta, apenas tendo-se a informação de qual classe esta perturbação pertence.

Uma razão para isto é que as perturbações afetando o sistema são bastante genéricas, não provindo de leis físicas que dão distribuições de probabilidade bem conhecidas, em contraste, por exemplo, de perturbações de sistemas de comunicação, que em geral são afetados por ruídos comuns de circuitos eletrônicos que tem distribuições bem conhecidas [50].

Mais ainda, nestes tipo de sistemas onde se modela a perturbação com variáveis aleatórias, o projetista do sistema tem que garantir apenas boa performance em média, em contraponto com sistemas onde as tarefas são críticas e deve-se garantir a boa performance toda vez que uma planta é utilizada, não apenas em média [50].

### 1.2.3 Alguns conceitos relacionados à estabilidade em tempo finito

Devido a importância de uma concepção de estabilidade para a operação adequada de sistemas reais, várias noções semelhantes ao conceito de estabilidade em tempo finito foram propostas ao longo dos anos, e em alguns casos, essas noções são até equivalentes para certas escolhas de parâmetros de tempo finito. A seguir é apresentado uma lista não exaustiva deles:

**Conjuntos atingíveis** Os conjuntos atingíveis de um sistema dinâmico são definidos como o conjunto de estados que um sistema dinâmico atinge dado um conjunto de entradas permissíveis e começando de estados iniciais pré-definidos [51, p.54]. Por outro lado, o conceito de FTB explora se dado uma limitação nas variáveis de estado e no conjunto de estados iniciais permitidos, as trajetórias do sistema permanecem confinadas dentro das limitações prescritas quando condições iniciais diferente de zero e perturbações externas são consideradas. Uma diferença importante nas duas abordagens é que na análise de conjuntos atingíveis, a hipótese do sistema ser assintoticamente estável é utilizada, enquanto isto não é necessário na análise FTB do sistema [44].

**Conjunto invariante** Se tomarmos  $S_0 = S_1 := S$  em (1.2), temos que  $S$  é um conjunto invariante até o tempo  $T$ . Se este  $T$  tender ao infinito, temos o conceito tradicional de conjunto invariante [31].

**Estabilidade prática** Se a restrição (1.4) valer para todo  $t \geq 0$ , então tem-se a noção de estabilidade prática definida em [52, pp.121-126].

**Estabilidade de Lagrange** Um sistema definido no  $\mathbb{R}^n$  é estável no sentido de Lagrange se toda solução do sistema é limitada [53, 54], isto é, dado qualquer  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , existe  $B := B(x_0) > 0$ , possivelmente dependente de  $x_0$  tal que

$$x_0 \in \mathbb{R}^n \implies \|x(t)\| < B(x_0), \forall t \geq 0.$$

Este conceito, apesar de envolver limitação das soluções, difere do de estabilidade em tempo finito pois além desta restrição ter que valer para todo  $t \geq 0$ , o conjunto  $B$  não é prescrito pelo projetista, bastando apenas a existência de  $B$  para garantir a estabilidade de Lagrange do sistema.

**Estabilidade em tempo finito no sentido de [16]** Apesar de lidar também com um conceito de estabilidade em um horizonte de tempo finito, um sistema é estável em tempo finito no sentido de [16] se exhibe convergência para um ponto de equilíbrio em um tempo finito. Enquanto que esta noção de estabilidade implica a estabilidade assintótica no sentido de Lyapunov, a noção de estabilidade em tempo finito que será abordado neste trabalho é independente do conceito de estabilidade de Lyapunov, como será visto no Capítulo 3.

Todas essas variantes acima mostram a importância de se compreender bem uma noção de estabilidade para um sistema. Dentre todos esses conceitos, nesta dissertação será estudado a noção de estabilidade em tempo finito na linha de [55, 49, 26].

### 1.3 Objetivos e contribuições desta dissertação

Enquanto na literatura pode-se encontrar vários resultados clássicos sobre sistemas dinâmicos no contexto de estabilidade assintótica, ainda há muito a se explorar no contexto de estabilidade em tempo finito. Em específico vamos considerar os seguintes problemas:

**Caracterização por LMI de FTS e FTB** Desde da proposta da definição de FTS e FTB, existem várias condições analíticas para verificar se um sistema é FTB ou apenas FTS [27, 56, 37, 38]. Neste trabalho em particular será seguido uma abordagem por desigualdades lineares matriciais (LMI), pois esta tem se mostrado uma ferramenta flexível, em especial para a realização da síntese de controlados e filtros [57, 26].

**Controle e filtragem FTB de sistemas LPV** Os problemas clássicos de controle e filtragem de sistemas serão tratados no contexto de estabilidade e limitação em tempo finito. Em especial será tratado o controle e filtragem de sistemas lineares de parâmetros variáveis (LPV), devido à versatilidade desses sistemas: um grande número de situações reais podem ser modeladas usando esse tipo de sistema.

Como contribuições deste trabalho vale ressaltar:

- Novas condições de análise baseadas em LMI e no lema de Finsler para verificar se um dado sistema é FTS ou FTB.
- Uma extensão uniforme do lema de Finsler que generaliza o tradicional. Apesar deste não ser utilizado diretamente nesta dissertação, espera-se que possa aplicar o mesmo em breve em outros problemas de sistemas e controle.
- Proposta de uma forma de sintetizar um controlador por realimentação de estados em um contexto de estabilidade em tempo finito.
- Proposta de duas abordagens para sintetizar filtros, que dependendo do cenário, podem ser robustos ou dependente de parâmetros, e que resolvem alguns problemas de estimação no contexto de estabilidade em tempo finito.

### 1.4 Organização da dissertação

Esta dissertação esta organizada da seguinte forma:

- No Capítulo 2 é apresentado uma introdução sucinta sobre alguns conceitos necessários para a compreensão desta dissertação.
- No Capítulo 3 é feito uma revisão da literatura sobre condições suficientes baseadas em DMI e LMI para analisar se um dado sistema é FTB. Também são propostas novas condições de análise baseadas no lema de Finsler.



- No Capítulo 4 desenvolve-se um controlador polinomial por realimentação de estados que garante que o sistema em malha fechada seja FTB. Com o aumento do grau do polinômio associado ao controlador, pode-se obter controladores possivelmente melhores.
- No Capítulo 5 resolve-se alguns problemas de estimação no contexto de estabilidade em tempo finito: deseja-se que o sistema acoplado com o filtro seja FTB e que o erro de estimação seja limitado de uma forma que será definida de maneira mais precisa neste capítulo. Para resolver tais problemas, propõe-se duas abordagens para sintetizar um filtro que pode ser robusto em relação a alguma incerteza paramétrica do sistema, ou pode ser dependente de parâmetros do sistema.
- No Capítulo 6 esta dissertação é concluída, indicando problemas que ficaram em aberto e possíveis trabalhos futuros.
- No Anexo A é demonstrado algumas proposições e teoremas relevantes de álgebra linear e análise.
- No Anexo B é demonstrado a equivalência entre as condições de análise e síntese do filtro robusto proposto nesta dissertação e o do artigo [2].
- No Anexo C é listado os artigos publicados durante o período de mestrado.

# Capítulo 2

## Preliminares

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos e resultados importantes para o desenvolvimento da dissertação. Na Seção 2.1 será dada uma breve introdução aos sistemas lineares dependente de parâmetros, com uma atenção em especial para os que dependem dos parâmetros de uma maneira afim. Já na Seção 2.2 as desigualdades matriciais serão examinadas. Será dada uma ênfase para as chamadas desigualdades matriciais lineares na Seção 2.2.1, visto que estas tem propriedades que tornam sua resolução numérica facilitada. Será visto também na Seção 2.2.2 como problemas em sistemas lineares dependente de parâmetros, quando postos no contexto de desigualdades matriciais, se tornam em problemas que não são computacionalmente tratáveis em geral, e como relaxar esses problemas para torná-los resolúveis computacionalmente e de maneira eficiente. Outras classes de problemas relacionados às desigualdades matriciais que são repetidamente encontrados na literatura de controle e filtragem em tempo finito serão sumarizados na Seção 2.2.3.

### 2.1 Sistemas lineares de parâmetros variáveis (LPV)

Na modelagem de sistemas lineares em espaços de estados, os vários elementos das matrizes da realização do sistema representam quantidades físicas bem definidas. Variações, perturbações ou incertezas nos parâmetros físicos levam ao que se chama de incerteza paramétrica no modelo. Isto significa que as matrizes envolvidas se tornam dependente de um parâmetro que representam a incerteza no sistema, podendo ser esta variante ou não no tempo. O projetista do controle fica incumbido de garantir então, não só uma boa operação no sistema nominal, mas sim em uma família de sistemas lineares [58].

Outro caso de interesse em que as matrizes do sistema também se tornam dependentes de parâmetros são nas técnicas de *gain-scheduling* no contexto de controle de sistemas não lineares. Neste caso, o vetor de parâmetros não é mais incerto, mas assume-se que este é um parâmetro que pode ser lido em tempo-real. De acordo com o valor deste, tem-se um sistema linear que aproxima o ponto de operação atual do sistema não linear, e o parâmetro pode ser utilizado no projeto de controladores que variam continuamente o ganho dependendo em qual ponto de operação o sistema

se encontra.

Para esses dois cenários, pode-se modelar o problema utilizando sistemas lineares de parâmetros variáveis (LPV). Um sistema LPV é uma família de sistemas lineares indexada por um parâmetro  $\theta(t)$ , possivelmente variante no tempo e que independe do estado [58], ou seja, da forma genérica

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta(t))x + B(\theta(t))u, \\ y &= C(\theta(t))x + D(\theta(t))u, \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u \in \mathbb{R}^r$  e  $y \in \mathbb{R}^q$  são respectivamente as entradas e as saídas do sistema e  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são funções, com valores em matrizes de ordem adequadas, definidas sobre um espaço de parâmetros - em geral, um subconjunto de  $\mathbb{R}^N$ .

Alguns exemplos de áreas em que sistemas LPV foram aplicados incluem controle de voo [59, 60, 61], motores *turbofan* [62, 63, 64, 65], manufatura de circuitos integrados [66], sistemas automotivos [67, 68, 69] e aplicações médicas [70, 71].

Em particular, um caso muito encontrado na prática e na literatura é quando as matrizes do sistema dependem de maneira afim do parâmetro, isto é, da forma

$$\left[ \begin{array}{c|c} A(\theta(t)) & B(\theta(t)) \\ \hline C(\theta(t)) & D(\theta(t)) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_0 & B_0 \\ \hline C_0 & D_0 \end{array} \right] + \sum_{i=1}^N \theta_i(t) \left[ \begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_i & D_i \end{array} \right]. \quad (2.2)$$

A (2.2) aparece, por exemplo, ao se fazer uma aproximação de primeira ordem de um sistema LPV geral da forma (2.1) [5].

Um sistema LPV com dependência afim pode ser reescrito em uma outra maneira chamada de politópica [5]: nesta forma as matrizes do sistema pertencem a um politopo matricial

$$\left[ \begin{array}{c|c} A(\alpha(t)) & B(\alpha(t)) \\ \hline C(\alpha(t)) & D(\alpha(t)) \end{array} \right] = \sum_{i=1}^{2^N} \alpha_i(t) \left[ \begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_i & D_i \end{array} \right], \quad (2.3)$$

onde  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  e  $D_i$  são matrizes constantes, chamadas de vértices  $V_i$  do politopo, e o parâmetro  $\alpha$  pertence ao  $N$ -simplex unitário  $\Delta_N$ , que é o conjunto definido por

$$\Delta_N = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N \left| \sum_{i=0}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right. \right\}. \quad (2.4)$$

A representação politópica é uma reparametrização dos parâmetros  $\theta(t)$  de forma a encaixar estes dentro de  $\Delta_N$ , conforme ilustra a Figura 2.1. Uma fórmula para converter sistemas LPVs na representação por um sistema politópico é dada em [5, pp.10-11].

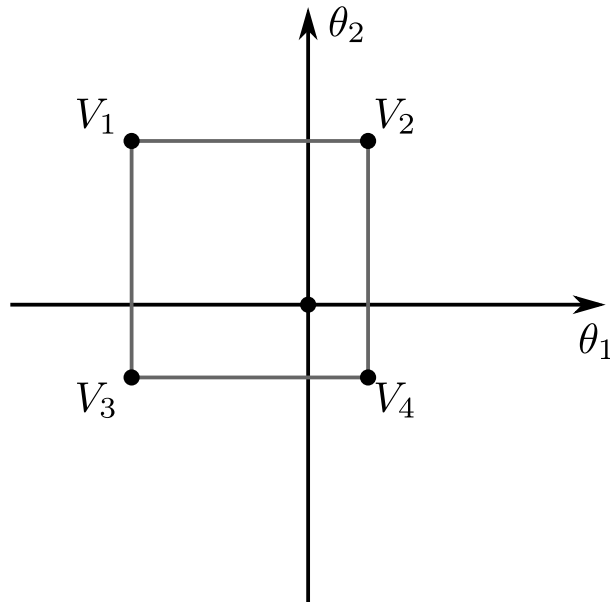


Figura 2.1: Representação politópica.

Para ilustrar como se descreve a incerteza de um sistema usando um sistema politópico, considere o sistema massa-mola com amortecimento apresentado na Figura 2.2, onde  $x$  é o deslocamento relativo da massa  $m$ ,  $k$  o coeficiente de rigidez da mola,  $B$  o coeficiente de amortecimento do amortecedor e  $F$  uma força de entrada. Uma realização desse sistema no espaço de estados é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{B}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F}{m} \end{bmatrix}.$$

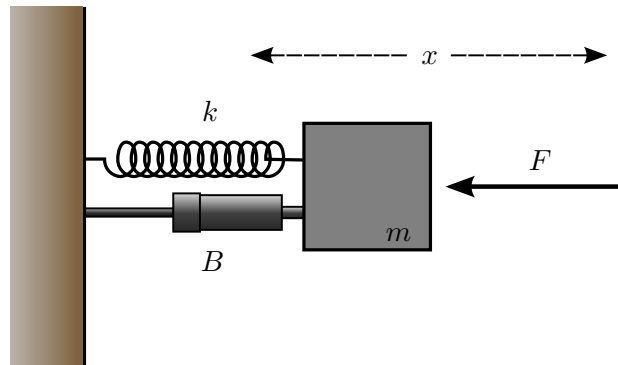


Figura 2.2: Sistema massa-mola com amortecimento.

Supondo que haja uma incerteza nos coeficientes de amortecimento e de rigidez, tal que esses valores se encontrem nas faixas de valores

$$\begin{aligned} k_l &\leq k \leq k_u, \\ B_l &\leq B \leq B_u, \end{aligned}$$

o sistema pode ser descrito pelo sistema LPV afim

$$A(k, B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} & 0 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m} \end{bmatrix}.$$

com  $k \in [k_l, k_u]$  e  $B \in [B_l, B_u]$ .

Este modelo também pode ser convertido para a seguinte representação politópica

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_l}{m} & -\frac{B_l}{m} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_l}{m} & -\frac{B_u}{m} \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_u}{m} & -\frac{B_l}{m} \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_u}{m} & -\frac{B_u}{m} \end{bmatrix},$$

com  $\alpha \in \Delta_N$  e com os vértices dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_l}{m} & -\frac{B_l}{m} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_l}{m} & -\frac{B_u}{m} \end{bmatrix}, \\ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_u}{m} & -\frac{B_l}{m} \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_u}{m} & -\frac{B_u}{m} \end{bmatrix}.$$

## 2.2 Desigualdades matriciais (MI)

Com frequência, problemas encontrados na teoria de controle são resolvidos a partir da determinação da existência de uma matriz positiva definida (negativa definida) ou positiva semi-definida (negativa semi-definida)<sup>1</sup>, isto é, uma matriz cujos autovalores são positivos (negativos) ou não-negativos (não-positivos).

Por exemplo, pelo teorema de Lyapunov [7] tem-se que provar a estabilidade de um sistema linear de ordem  $n$  com a dinâmica definida por

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0,$$

é equivalente a provar a existência de uma matriz simétrica  $P \in \mathbb{S}^n$  tal que  $P \succ 0$  e  $A^T P + PA \prec 0$ . Essas duas desigualdades podem ser juntadas na desigualdade [72]

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -(A^T P + PA) \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.5)$$

e o problema de estabilidade é resolvido encontrando-se  $P \in \mathbb{S}^n$  tal que (2.5) seja satisfeita. De uma maneira genérica, pode-se reformular este problema como achar uma matriz  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que

$$F(X) \succ 0, \quad (2.6)$$

onde  $F : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{S}^{p \times p}$  é uma função do conjunto das matrizes reais  $m \times n$  para o conjunto das matrizes reais e simétricas  $p \times p$ . Desigualdades do tipo (2.6) são chamadas de desigualdades matriciais (MI, do inglês *Matrix Inequality*). Além do critério de estabilidade de Lyapunov, outros

<sup>1</sup>As notações  $A \succ 0$  ( $A \prec 0$ ) e  $A \succeq 0$  ( $A \preceq 0$ ) serão utilizadas para denotar que a matriz  $A$  é positiva definida (negativa definida) e positiva semi-definida (negativa semi-definida) respectivamente.

critérios de análise e de projeto de sistemas podem ser estabelecidos via a abordagem com MIs, como estabilizabilidade, controlabilidade, observabilidade, detectabilidade e análise de performance  $\mathcal{H}^2$  e  $\mathcal{H}^\infty$ , assim como síntese de controladores e filtros. Estes e outros resultados clássicos podem ser vistos nos livros [72, 73] por exemplo.

Vale ressaltar que moldar um problema de controle em uma MI permite uma grande flexibilidade ao projetista do controlador, pois assim como feito em (2.5), múltiplas MIs  $F_1(x) \succ 0, \dots, F_n(x) \succ 0$  podem ser reescritas como uma MI única dada por (ver Proposição 38 do Anexo A para a demonstração)

$$\begin{bmatrix} F_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & F_n(x) \end{bmatrix} \succ 0$$

e assim pode-se combinar restrições expressas em MIs em uma única MI. Isto é particularmente útil para o projeto de controladores e filtros multi-objetivo, ou seja, que têm várias restrições de especificações simultaneamente [74]. Um exemplo no contexto de estabilidade de tempo finito é dado em [49], onde é feito um controlador estável em tempo-finito e também obedecendo especificações de  $\mathcal{D}$ -estabilidade.

### 2.2.1 Desigualdades matriciais lineares (LMI)

Quando  $F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$  em (2.6) é em particular uma função afim, isto é, tal que  $F(X) - F(0)$  é linear em  $X$ , a (2.6) pode ser reescrito como

$$f(x) = F_0 + \sum_{i=1}^p x_i F_i \succ 0 \quad (2.7)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^p$  é a variável buscada e  $F_i \in \mathbb{S}^m$ ,  $i = 0, \dots, p$  são matrizes simétricas dadas. Basta escolher uma base  $X_1, \dots, X_p$  para  $\mathbb{S}^n$  e parametrizar  $X$  como  $X = x_1 X_1 + \dots + x_p X_p$ . Usando que  $F$  é afim, tem-se então que

$$f(x_1, \dots, x_p) := F\left(\sum_{k=1}^p x_k X_k\right) = F(0) + \sum_{k=1}^p x_k [F(X_k) - F(0)] \succ 0$$

e pode-se tomar

$$F_0 = F(0), F_i = F(X_i) - F(0), i = 0, \dots, p.$$

Como ilustração, considerando que  $n = 2$  em (2.5), tem-se

$$f(x) = \sum_{i=1}^3 x_i \begin{bmatrix} X_i & 0 \\ 0 & -(A^T X_i + X_i A) \end{bmatrix},$$

onde

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é a base escolhida para  $\mathbb{S}^2$ .

A forma (2.7) é conhecida na literatura como desigualdade matricial linear (abreviado como LMI, do inglês *Linear Matrix Inequality*) e o problema de achar uma variável  $x$  que satisfaz (2.7) ou determinar que esta não existe é chamado de problema de factibilidade de LMI ou LMIP [72] - caso a variável  $x$  exista, esta é uma solução da LMI e a LMI é factível, caso contrário, a LMI é infactível. Outros problemas importantes são de otimização de certas funções sobre a região definida por uma LMI, em especial os problemas de programação semi-definida (SDP, do inglês *Semi-Definite Programming*) [75]

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimizar}} \quad c^T x \\ & \text{sujeito a} \quad f(x) \succ 0 \end{aligned}$$

e o problema de autovalores (EVP, do inglês *Eigenvalue Problem*) [72]

$$\begin{aligned} & \underset{x, \lambda}{\text{minimizar}} \quad \lambda \\ & \text{sujeito a} \quad f(x) \succ 0, \\ & \quad \quad \lambda I - g(x) \succ 0 \end{aligned}$$

que surgem no contexto de sistemas por exemplo, como problemas de projeto de controlador e filtro com norma  $\mathcal{H}_\infty$  mínima [72, p.10]. Em [76], demonstra-se a equivalência entre esses problemas.

Uma propriedade importante de (2.7) que permite achar a solução por métodos computacionais eficientes, é que (2.7) é uma restrição convexa em  $x$ , ou seja, o conjunto  $D = \{x \mid f(x) \succ 0\}$  é convexo. Para ver isso, sejam  $x_1$  e  $x_2$  duas soluções de (2.7) e  $\lambda \in [0, 1]$ . A combinação convexa entre  $x_1$  e  $x_2$  satisfaz

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) = (1 - \lambda) \underbrace{f(x_1)}_{\succ 0} + \lambda \underbrace{f(x_2)}_{\succ 0} \succ 0,$$

onde foi utilizada que  $f$  é afim. Com isto, a resolução do problema de minimizar uma função convexa sobre  $D$  é facilitada, pois a convexidade de  $D$  implica que todo mínimo local de uma função convexa definida em  $D$  é automaticamente o único mínimo global desta função. De fato, o problema de minimizar uma função convexa sobre  $D$  faz parte da chamada classe de problemas de otimização convexa, que são bastantes conhecidos na literatura e que há vários algoritmos eficientes disponíveis que podem ser utilizados para resolução deles [75]. Entre esses, destacam-se os algoritmos de ponto interior [77]. A proposta principal deste algoritmo é definir uma função de barreira para codificar a região convexa e transformar o problema de otimização com restrições em um problema de otimização sem restrições.

Para ilustrar, será utilizado o conceito de função de barreira para resolver o problema LMIP. A ideia básica é que esta função deve ser estritamente convexa no interior de  $D$  e tender para o infinito ao longo de qualquer sequência de pontos no interior de  $D$  que convirja para a fronteira de  $D$ . No caso do LMIP, uma função de barreira candidata é a função logarítmica

$$\phi(x) := \begin{cases} \log \det \left( -F(x)^{-1} \right) & \text{se } x \in D, \\ \infty & \text{se } x \notin D. \end{cases}$$

Note que na fronteira de  $D$ ,  $F(x) = 0$  e portanto  $\phi(x)$  tende a infinito. Supondo que  $D$  seja limitado e não-vazio, ou seja, que a LMI possua solução factível, demonstra-se também que  $\phi$  é estritamente convexa em  $D$ , e portanto possui um único mínimo global. Este ponto, conhecido na literatura como o centro analítico do conjunto factível  $D$ , é a resposta do problema de LMIP e pode-se obter o mesmo utilizando-se um método usual de otimização como o método de Newton [77]. O problema de EVP é resolvido de maneira similar; mais detalhes pode ser visto em [72, pp.16-17].

Cabe ressaltar que há vários pacotes computacionais especializados na resolução de LMIs, como por exemplo, LMI Control Toolbox [78], SeDuMi [79] e [80] para MATLAB, CSDP [81] para a linguagem C e SDPA [82] para a linguagem C++. Vale citar também o parser Yalmip [83] para MATLAB, que facilita a implementação de problemas de LMI e SDP.

É importante também fazer menção de que apesar de um problema não se encontrar diretamente na forma de uma LMI, mas sim de uma desigualdade matricial (MI) não linear, dependendo do problema, pode-se usar técnicas para transformar esta MI em uma LMI. Um teorema muito utilizado neste sentido é que a LMI particionada

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) \\ F_{21}(x) & F_{22}(x) \end{bmatrix} \prec 0$$

é equivalente à

$$\begin{cases} F_{11}(x) \prec 0 \\ S_{22}(x) := F_{22}(x) - F_{21}(x)F_{11}^{-1}(x)F_{12}(x) \prec 0 \end{cases}$$

e também à

$$\begin{cases} S_{11}(x) := F_{11}(x) - F_{12}(x)F_{22}^{-1}(x)F_{21}(x) \prec 0 \\ F_{22}(x) \prec 0, \end{cases}$$

onde  $S_{11}(x)$  e  $S_{22}(x)$  são conhecidos respectivamente como complementos de Schur<sup>2</sup> de  $F_{22}(x)$  e  $F_{11}(x)$  em  $F(x)$  [72, p.7]. Como  $F$  é uma função afim, essa equivalência permite rescrever certos tipos de desigualdades matriciais quadráticas e racionais como uma LMI. Um exemplo de aplicação é na desigualdade de Riccati

$$A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q \prec 0,$$

onde  $A, B, Q = Q^T, R = R^T$  são matrizes dadas de dimensão apropriadas e  $P = P^T$  é a variável [76]. Apesar deste problema ser quadrático em  $P$ , ele pode ser expressado usando complemento de Schur como a LMI

$$\begin{bmatrix} -A^T P - PA - Q & PB \\ B^T P & R \end{bmatrix} \succ 0.$$

Outro resultado que será utilizado também frequentemente ao longo desta dissertação para manipular MIs e que vale mencionar é a de transformação de congruência (ver Proposição 39 do Anexo A). Vale ressaltar ainda que o problema de saber se uma dada MI é uma LMI é bem

---

<sup>2</sup>É interessante notar que este teorema se generaliza para o caso de desigualdades não-estritas utilizando o complemento de Schur generalizado [72, p.28].



investigado na literatura [84], assim como o de saber se um conjunto convexo tem uma representação por LMI [85].

### 2.2.2 LMIs dependentes de parâmetros (PD-LMI)

A dependência de parâmetro nas matrizes de um sistema LPV leva os critérios de análise e de projeto formulados em LMI a serem formulados agora em uma LMI dependente de parâmetros (PD-LMI). Por exemplo, para checar a estabilidade do sistema linear incerto

$$\dot{x} = A(\alpha)x, \alpha \in S \subseteq \mathbb{R}^N$$

é necessário checar a estabilidade do sistema para todo  $\alpha \in S$ . Prosseguindo de maneira similar a dedução de (2.5), isto é equivalente a verificação da existência de uma função  $P : S \rightarrow \mathbb{S}^n$  tal que

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & 0 \\ 0 & -A^T(\alpha)P(\alpha) - P(\alpha)A(\alpha) \end{bmatrix} \succ 0, \forall \alpha \in S. \quad (2.8)$$

A desigualdade (2.8) é um primeiro exemplo de uma PD-LMI. De forma genérica, um problema de PD-LMI pode ser escrito de forma análoga a (2.7) como

$$f(x, \alpha) = F_0(\alpha) + \sum_{i=1}^p x_i F_i(\alpha) \succ 0, \forall \alpha \in S. \quad (2.9)$$

Dependendo das propriedades do conjunto  $S$ , o problema (2.9) é intratável computacionalmente, por exemplo, se  $S$  é infinito (como é usual em problemas físicos), é necessário checar infinitas LMIs. Especificamente, tal problema pertence a classe computacional NP-difícil [86], a qual não se tem atualmente algoritmos de resolução em tempo polinomial.

A fim de simplificar este problema são propostas na literatura vários métodos de relaxação que em troca de conservadorismo na solução, transformam uma PD-LMI em um problema tradicional de LMI [87]. Um método ingênuo, por exemplo, é aproximar  $S$  por um conjunto finito de pontos, transformando (2.9) em um conjunto também finito de LMIs. No entanto, para os resultados serem satisfatórios com o uso desta técnica, pede-se um número muito grande de pontos dependendo do conjunto  $S$  gerando uma carga computacional muito intensiva. Além disso, com a exclusão de certos parâmetros de  $S$  arrisca-se a ter uma resposta excessivamente otimista [87].

Outra forma de transformar (2.9) em um conjunto finito de LMIs tradicionais é utilizando informações adicionais sobre  $S$  e  $F_i, i = 1, \dots, p$ : para descrições particulares destes, a complexidade computacional do problema pode ser reduzida de maneira significativa, como será visto nas próximas subseções.

#### 2.2.2.1 Relaxação por polinômios homogêneos

Assumindo que exista uma solução constante  $P(\alpha) = P$  para (2.8) com  $A(\alpha)$  como em (2.3) e  $S = \Delta_N$ , então uma condição suficiente para que (2.8) seja satisfeita é verificar a LMI em todos

os vértices do politopo [88], pois

$$P \succ 0, A^T(\alpha)P + PA(\alpha) \prec 0 \iff P \succ 0, \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i \right)^T P + P \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i \right) \prec 0 \quad (2.10)$$

$$\iff P \succ 0, \sum_{i=1}^N \underbrace{\alpha_i}_{\geq 0} (A_i^T P + PA_i) \prec 0 \quad (2.11)$$

$$\iff \begin{cases} P \succ 0, \\ A_1^T P + PA_1 \prec 0, \\ \vdots \\ A_N^T P + PA_N \prec 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

onde foi utilizado que como  $\alpha \in \Delta_N$ , então  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Esta é uma condição apenas suficiente, e não equivalente a (2.8), pois pode ser o caso de (2.8) ser satisfeita mesmo com (2.12) não sendo factível. Isto insere conservadorismo nesta condição, ou seja, apesar de uma solução de (2.12) ser uma solução de (2.8), nem toda solução de (2.8) é uma solução de (2.12). Uma ideia proposta na literatura para diminuir o conservadorismo é impor uma estrutura polinomial para  $P(\alpha)$ , de forma a se ampliar o espaço de soluções das LMIs propostas para relaxação da PD-LMI original.

Uma matriz polinomial  $H$  de grau  $g$  é uma função de  $\mathbb{R}^N$  para  $\mathbb{R}^{m \times n}$  que pode ser expressa na forma

$$H(x) = \sum_{\beta \in I^{(g)}} H_{\beta_1, \dots, \beta_N} x_1^{\beta_1} \cdots x_N^{\beta_N}, \text{ com } H_{\beta_1, \dots, \beta_N} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (2.13)$$

tal que existe  $H_{\beta_1, \dots, \beta_N} \neq 0$  em  $I_h^{(g)} \subseteq I^{(g)}$ , onde  $I^{(g)}$  e  $I_h^{(g)}$  são índices dados respectivamente pelos conjuntos

$$I^{(g)} := \left\{ \beta \in \mathbb{N}^N \mid \sum_{i=1}^N \beta_i \leq g \right\} \text{ e } I_h^{(g)} := \left\{ \beta \in \mathbb{N}^N \mid \sum_{i=1}^N \beta_i = g \right\}. \quad (2.14)$$

As matrizes  $H_{\beta_1, \dots, \beta_N} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  são chamadas de coeficientes da matriz polinomial. No caso particular em que  $I^{(g)} = I_h^{(g)}$ , a matriz polinomial  $H$  ainda é dita ser homogênea. O conjunto de todas as matrizes polinomiais de ordem  $m \times n$  será denotado por  $\mathbb{P}^{m \times n}$  e o subconjunto das matrizes polinomiais homogêneas por  $\mathbb{H}^{m \times n}$ .

Para clarificar a notação de (2.13), um exemplo será dado. Supondo que  $H \in \mathbb{H}^{m \times n}$  com  $N = 3$  e  $g = 2$ , tem-se então que

$$I_h^{(2)} = \{(0, 0, 2), (0, 1, 1), (0, 2, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 0, 0)\}$$

e que  $H$  é dada pela soma de 6 termos, a saber:

$$H(x) = x_3^2 H_{0,0,2} + x_2 x_3 H_{0,1,1} + x_2^2 H_{0,2,0} + x_1 x_3 H_{1,0,1} + x_1 x_2 H_{1,1,0} + x_1^2 H_{2,0,0}.$$

Tais funções polinomiais com valores matriciais têm a seguinte importância: Em [89] é demonstrado que se (2.9) possui solução e se  $S$  é compacto e  $F_i, i = 1, \dots, p$ , funções contínuas, então

sem perdas de generalidade existe uma solução que é uma matriz polinomial para (2.9)<sup>3</sup>. No caso particular em que  $S = \Delta_N$ , também existirá, sem perdas de generalidade, uma solução que é uma matriz polinomial homogênea [90].

Para ilustrar, a técnica de relaxação por polinômios homogêneos será aplicada na LMI (2.8) considerando que  $S = \Delta_N$ , com  $N = 2$  e  $g = 2$  (para um número genérico de vértices e graus maiores ver [91]). Neste caso, assume-se que a variável do problema  $P$  tem a estrutura

$$P(\alpha) = \alpha_1^2 P_{2,0} + \alpha_1 \alpha_2 P_{1,1} + \alpha_2^2 P_{0,2}. \quad (2.15)$$

Daí:

$$\begin{aligned} A^T(\alpha) P(\alpha) &= (\alpha_1 A_1^T + \alpha_2 A_2^T) (\alpha_1^2 P_{2,0} + \alpha_1 \alpha_2 P_{1,1} + \alpha_2^2 P_{0,2}) \\ &= \alpha_1^3 A_1^T P_{2,0} + \alpha_1^2 \alpha_2 A_1^T P_{1,1} + \alpha_1 \alpha_2^2 A_1^T P_{0,2} + \alpha_1^2 \alpha_2 A_2^T P_{2,0} + \alpha_1 \alpha_2^2 A_2^T P_{1,1} + \alpha_2^3 A_2^T P_{0,2} \\ &= \alpha_1^3 A_1^T P_{2,0} + \alpha_1^2 \alpha_2 (A_1^T P_{1,1} + A_2^T P_{2,0}) + \alpha_1 \alpha_2^2 (A_1^T P_{0,2} + A_2^T P_{1,1}) + \alpha_2^3 A_2^T P_{0,2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P(\alpha) A(\alpha) &= [A^T(\alpha) P(\alpha)]^T \\ &= \alpha_1^3 P_{2,0} A_1 + \alpha_1^2 \alpha_2 (P_{1,1} A_1 + P_{2,0} A_2) + \alpha_1 \alpha_2^2 (P_{0,2} A_1 + P_{1,1} A_2) + \alpha_2^3 P_{0,2} A_2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} A^T(\alpha) P(\alpha) + P(\alpha) A(\alpha) &= \alpha_1^3 (A_1^T P_{2,0} + P_{2,0} A_1) + \alpha_1^2 \alpha_2 (A_1^T P_{1,1} + A_2^T P_{2,0} + P_{1,1} A_1 + P_{2,0} A_2) \\ &\quad + \alpha_1 \alpha_2^2 (A_1^T P_{0,2} + A_2^T P_{1,1} + P_{0,2} A_1 + P_{1,1} A_2) + \alpha_2^3 (A_2^T P_{0,2} + P_{0,2} A_2) \quad (2.16) \end{aligned}$$

e desta forma, uma condição suficiente para que (2.8) seja satisfeita é que os coeficientes de (2.15) e de (2.16) satisfaçam

$$\begin{aligned} P_{2,0} &\succ 0, \quad P_{1,1} \succ 0, \quad P_{0,2} \succ 0, \\ A_1^T P_{2,0} + P_{2,0} A_1 &\prec 0, \\ A_1^T P_{1,1} + A_2^T P_{2,0} + P_{1,1} A_1 + P_{2,0} A_2 &\prec 0, \\ A_1^T P_{0,2} + A_2^T P_{1,1} + P_{0,2} A_1 + P_{1,1} A_2 &\prec 0, \\ A_2^T P_{0,2} + P_{0,2} A_2 &\prec 0, \end{aligned}$$

reduzindo um problema PD-LMI de dimensão infinita para várias LMIs usuais, de dimensão finita. É importante notar que não é necessário que os coeficientes de uma matriz polinomial homogênea definida em  $\Delta_N$  seja negativos (respectivamente positivos) para que esta seja negativa (respectivamente positiva) em todo  $\Delta_N$ , o que motiva a relaxação baseado no teorema de Pólya, na

<sup>3</sup>É interessante notar que mesmo  $f(x, \alpha)$  não tendo a forma apresentada em (2.9), este resultado ainda vale se  $f(x, \alpha)$  for côncava em  $x$  [89], isto é,

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^p, \forall \alpha \in S, \forall \lambda \in [0, 1], \quad G(\lambda x + (1 - \lambda)x', \alpha) \succeq \lambda G(x, \alpha) + (1 - \lambda)G(x', \alpha).$$

Seção 2.2.2.2 seguinte. Observa-se que com o aumento do grau da matriz polinomial homogênea, mais variáveis serão adicionadas nas LMIs resultantes por esta relaxação da PD-LMI.

Outra observação importante é que o cálculo dos coeficientes da matriz polinomial envolve manipulações algébricas complicadas, como pode ser visto pelo exemplo acima. Para evitar tais manipulações, que consomem muito tempo e podem levar a erros de programação, pode ser utilizado o analisador especializado ROLMIP<sup>4</sup> [92] para construir automaticamente as LMIs correspondentes aos coeficientes.

### 2.2.2.2 Relaxação pelo teorema de Pólya

O teorema de Pólya [93, pp.57-59] diz que se  $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]$  é um polinômio homogêneo tal que é positivo em  $\Delta_N$ , então existe um  $d$  suficientemente grande tal que todos os coeficientes de

$$(x_1 + \dots + x_N)^d f(x_1, \dots, x_N)$$

são positivos. Este teorema provê um algoritmo semi-decidível<sup>5</sup> para a verificação se  $f$  é estritamente positiva para  $x_i, i = 1, \dots, N$  positivos: basta multiplicar  $f$  repetidamente por  $\sum x_i$ , e se  $f$  for positiva, mais cedo ou mais tarde será obtido um polinômio com todos os coeficientes positivos. Versões deste teorema chamadas de efetivas permitem calcular uma cota superior para este  $d$ , como por exemplo a dada em [94] para um polinômio  $f$  de grau  $g$  por

$$d > \frac{g(g-1)L}{2\kappa} - g,$$

onde

$$L := \max_{\beta \in I_h} \left\{ |f_\beta| \frac{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_N!}{g!} \right\}$$

e

$$\kappa := \min_{\alpha \in \Delta_N} f(\alpha).$$

Desta maneira o algoritmo se torna decidível, mas tal cota superior é difícil de calcular na maioria das vezes.

Este resultado pode ser levado para matrizes polinomiais homogêneas [95, 96]: Com isto tem-se um procedimento sistemático para construir uma família de condições formuladas em LMI com precisão aumentando conforme o grau  $d$  de relaxação e que tendem assintoticamente para condições necessárias e suficientes.

Como exemplo, será aplicado a técnica de relaxação de Pólya com  $d = 1$  na matriz polinomial homogênea definida em (2.15):

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_{=1} P(\alpha) = (\alpha_1 + \alpha_2) (\alpha_1^2 P_{2,0} + \alpha_1 \alpha_2 P_{1,1} + \alpha_2^2 P_{0,2}) \\ &= \alpha_1^3 P_{2,0} + \alpha_1^2 \alpha_2 P_{1,1} + \alpha_1 \alpha_2^2 P_{0,2} + \alpha_1^2 \alpha_2 P_{2,0} + \alpha_1 \alpha_2^2 P_{1,1} + \alpha_2^3 P_{0,2} \\ &= \alpha_1^3 P_{2,0} + \alpha_1^2 \alpha_2 (P_{1,1} + P_{2,0}) + \alpha_1 \alpha_2^2 (P_{0,2} + P_{1,1}) + \alpha_2^3 P_{0,2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

<sup>4</sup>Disponível gratuitamente para download em <http://www.dt.fee.unicamp.br/~agulhari/rolmip/rolmip.htm>.

<sup>5</sup>Ou seja, um algoritmo que eventualmente para quando a resposta é sim, mas pode rodar para sempre se a resposta for não.

De modo análogo a discussão de 2.2.2.1, uma condição suficiente para que ocorra  $P(\alpha) \succ 0$  é que os coeficientes de (2.17) sejam todos positivos, ou seja, que as LMIs

$$\begin{aligned} P_{2,0} \succ 0, P_{1,1} + P_{2,0} \succ 0, \\ P_{0,2} \succ 0, P_{0,2} + P_{1,1} \succ 0 \end{aligned}$$

sejam verificadas. Pode ser que apenas com  $d = 1$ , estas LMIs resultantes ainda não sejam equivalentes a  $P(\alpha) \succ 0$ , mas pelo teorema de Pólya, existirá um  $d$  suficientemente grande tal que as LMIs resultantes pela relaxação de Pólya sejam equivalentes a PD-LMI original. Mais uma vez, para evitar as complicações algébricas, pode-se usar o analisador ROLMIP para produzir as LMIs. É interessante notar que diferentemente da relaxação por polinômios homogêneos introduzida em 2.2.2.1, a relaxação de Pólya não introduz novas variáveis aumentando o grau de relaxação  $d$ , mas introduz novas LMIs.

### 2.2.3 Desigualdades matriciais bilineares (BMI) e desigualdades matriciais diferenciais (DMI)

Outros problemas relacionados a MI que surgem naturalmente no contexto de controle de sistemas dinâmicos mas em geral não possuem atualmente algoritmos eficientes para a resolução dos mesmos como as LMIs, são as desigualdades matriciais bilineares (BMI) e as desigualdades matriciais diferenciais (DMI).

Uma BMI é uma desigualdade do tipo

$$F(X, Y) \prec 0 \tag{2.18}$$

onde  $F : \mathbb{R}^{m_1 \times n_1} \times \mathbb{R}^{m_2 \times n_2} \rightarrow \mathbb{S}^p$  é uma função afim no primeiro e no segundo argumentos, isto é, mantendo  $X$  constante em (2.18),  $F$  deve ser afim em  $Y$  e vice-versa [76]. Esta desigualdade surge por exemplo quando se procura estabilizar o sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

com um controlador por realimentação de saída [97] dado por  $u = Ky$ . Aplicando o teorema de Lyapunov para o sistema em malha-fechada é possível mostrar que tal controlador existe se existem matrizes  $K$  e  $P$  tal que  $P \succ 0$  e

$$(A + BKC)^T P + P(A + BKC) \prec 0,$$

sendo esta última desigualdade uma BMI. Apesar de ser encontrado na literatura vários algoritmos para resolução de BMIs, como por exemplo [98, 99, 100], sabe-se que tal problema pertence a classe computacional NP-difícil [101].

Já uma DMI é uma desigualdade da forma

$$F(X, \dot{X}, \dots, X^{(k)}) \prec 0,$$

onde  $X^{(k)}$  é a  $k$ -ésima derivada de  $X$  e com

$$F : \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}) \times \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}) \times \dots \times \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m_k \times n_k}) \rightarrow \mathbb{S}^p.$$

Se  $F$  pode ser escrita como uma combinação linear das variáveis  $X, \dot{X}, \dots, X^{(k)}$ , então a DMI é em particular uma desigualdade matricial linear diferencial (DLMI). Estes problemas são extremamente difíceis pois o espaço que se encontra as variáveis é um espaço de funções, que é naturalmente de dimensão infinita. Como uma PD-LMI pode ser vista como uma DLMI que não depende das derivadas de  $X$ , o problema de resolver uma DLMI é tão ou mais difícil que uma PD-LMI, e sendo portanto, também NP-difícil. As desigualdades DLMI surgem naturalmente quando o problema envolve uma equação diferencial de Riccati com matrizes [102, p.89], como na solução de controle por realimentação de estados ou de saída para sistemas variantes no tempo sobre um horizonte de tempo finito [103].

## Capítulo 3

# Análise de estabilidade e limitação em tempo finito

Neste capítulo será visto como verificar se um sistema linear é FTS ou FTB. Para tal, o problema será reformulado em condições envolvendo desigualdades matriciais, sendo que a maioria dessas condições são formuladas em termos de DMI e LMI [57].

Estas condições, em geral, são apenas suficientes, isto é, a garantia dessas condições implicam que o sistema é FTS ou FTB, mas a recíproca não é necessariamente verdadeira. Embora existam condições baseadas em DMIs que são necessárias e suficientes, estas envolvem um número infinito de DMIs e portanto são proibitivas computacionalmente [55, 45, 104, 105, 106]. Por isso, torna-se imprescindível introduzir conservadorismo nessas condições (isto é, tornando-as em condições apenas suficientes para o sistema ser FTS ou FTB) transformando um número infinito de DMIs em apenas um número finito de DMIs.

Mesmo assim, conforme visto no Capítulo 2, os problemas de DMI são extremamente difíceis em relação aos problemas de LMI. Isto encoraja a ser utilizadas condições de análise de FTB e FTS baseadas em LMIs, que apesar de em geral ser mais conservadoras do que as condições baseadas em DMIs, são mais fáceis de implementar e são mais eficientes em termos computacionais.

As condições baseadas em DMI serão abordadas na Seção 3.1 e as condições baseadas em LMI serão abordadas na Seção 3.2. Uma comparação mais detalhada entre ambas será feita na Seção 3.3. Por fim, um experimento numérico é feito na Seção 3.4 para comparar duas condições de análise baseadas em LMI.

### 3.1 Condições de análise de FTB e FTS baseadas em DMIs

Em [47] são dadas condições necessárias e suficientes em termos de um número infinito de DMIs para o sistema ser FTS e, no caso particular em que o estado inicial do sistema é zero, DMIs para ser FTB em relação aos ruídos da classe  $\mathcal{W}_{d_2}^2$ . No caso geral em que o estado inicial do sistema não é zero, é apresentada uma condição suficiente. Em [?], é apresentada uma condição

suficiente para o sistema ser FTB em relação aos ruídos da classe  $\mathcal{W}_d^\infty$ .

No entanto, observamos que as demonstrações apresentadas nestes trabalhos na verdade garantem que o sistema seja FTB apenas por trechos. Como forma de corrigir os resultados de [45] e em [47] somos motivados a introduzir a seguinte definição.

**Definição 3.** Um sistema variante no tempo é FTB em relação a  $(c_1, c_2, \mathcal{W}, T, R)$  em quase todas partes de  $[0, T]$  se o sistema é FTB em relação a  $(c_1, c_2, \mathcal{W}, T, R)$  salvo por um número enumerável de pontos pertencentes ao intervalo  $[0, T]$ .

Diferentemente dos enunciados apresentados em [45] e em [47], os enunciados abaixo explicitam que estas condições apenas implicam em FTB em quase todas as partes.

**Lema 4.** *Suponha que sejam dados  $c_1 \geq 0, c_2, T, d > 0, R \succ 0$ . O sistema variante no tempo*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\omega(t)^1, \quad (3.1)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $\omega(t) \in \mathbb{R}^r$  é o sinal de ruído,  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$  e com

$$\omega \in \mathcal{W}_d^2 := \left\{ \omega(\cdot) \in \mathfrak{W}([0, T], \mathbb{R}^r) \mid \int_0^T \omega^T(\tau)\omega(\tau) d\tau \leq d \right\} \quad (3.2)$$

é FTB em relação a  $(c_1, c_2, \mathcal{W}_d^2, T, R)$  em quase todas partes de  $[0, T]$  se existe uma função  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^n$  diferenciável continuamente em trechos tal que

$$\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + \frac{c_1 + d}{c_2}P(t)B(t)B^T(t)P(t) \prec 0, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.3)$$

$$P(t) \succeq R, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.4)$$

$$P(0) \prec \frac{c_2}{c_1 + d}R. \quad (3.5)$$

*Demonstração.* (Modificada de [45]) Considere um trecho genérico de  $[0, T]$  onde  $P$  é contínua. Seja

$$\gamma := \frac{c_1 + d}{c_2}.$$

Por (3.3), tem-se que

$$x^T \dot{P}(t)x + x^T A^T(t)P(t)x + x^T P(t)A(t)x + \gamma x^T P(t)B(t)B^T(t)P(t)x < 0. \quad (3.6)$$

Somando  $\omega^T B^T(t)P(t)x + x^T P(t)B(t)\omega$  em ambos os lados de (3.6), é obtido

$$\begin{aligned} x^T \dot{P}(t)x + x^T A^T(t)P(t)x + \omega^T B^T(t)P(t)x + x^T P(t)A(t)x + x^T P(t)B(t)\omega \\ + \gamma x^T P(t)B(t)B^T(t)P(t)x < \omega^T B^T(t)P(t)x + x^T P(t)B(t)\omega, \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Neste e nos demais lemas, é suposto que  $A(t)$ ,  $B(t)$  e  $\omega(t)$  são tais que garantem a existência e a unicidade de uma solução  $x(t)$  diferenciável de (3.1) no intervalo de  $[0, T]$  para quaisquer  $x(0) \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T R x \leq c_1\}$ .



mas como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [x^T P(t) x] &= x^T \dot{P}(t) x + \dot{x}^T P(t) x + x^T P(t) \dot{x} \\ &\stackrel{(3.1)}{=} x^T \dot{P}(t) x + x^T A^T(t) P(t) x + \omega^T B^T(t) P(t) x \\ &\quad + x^T P(t) A(t) x + x^T P(t) B(t) \omega, \end{aligned}$$

a inequação se torna

$$\frac{d}{dt} [x^T P(t) x] < -\gamma x^T P(t) B(t) B^T(t) P(t) x + \omega^T B^T(t) P(t) x + x^T P(t) B(t) \omega. \quad (3.7)$$

Integrando (3.7), se obtém

$$\begin{aligned} x^T(t) P(t) x(t) - x^T(0) P(0) x(0) &< \int_0^t \frac{\omega^T \omega}{\gamma} - \left( \frac{\omega}{\sqrt{\gamma}} - \sqrt{\gamma} B^T P x \right)^T \left( \frac{\omega}{\sqrt{\gamma}} - \sqrt{\gamma} B^T P x \right) d\tau \\ &\leq \int_0^t \frac{\omega^T \omega}{\gamma} d\tau \\ &\leq \int_0^T \frac{\omega^T \omega}{\gamma} d\tau \stackrel{(3.2)}{\leq} \frac{1}{\gamma} d, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Seja  $x^T(0) R x(0) \leq c_1$ . Então para um  $t \in [0, T]$ , temos que

$$\begin{aligned} x^T(t) R x(t) &\leq x^T(t) P(t) x(t) \\ &< x^T(0) P(0) x(0) + \frac{1}{\gamma} d \\ &\stackrel{(3.5)}{<} \frac{1}{\gamma} \left[ \underbrace{x^T(0) R x(0)}_{\leq c_1} + d \right] = c_2, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Assim, o sistema é FTB para cada trecho onde  $P$  é contínua. Como existe apenas um número finito de pontos de descontinuidades de  $P$ , o sistema não é FTB em todo o intervalo  $[0, T]$ , mas apenas FTB em quase todas as partes de  $[0, T]$ .  $\square$

O Lema 5 adapta o Lema 4 para o caso em que a perturbação pertença a classe de ruídos cuja norma é limitada.

**Lema 5.** *O sistema variante no tempo (3.1) com*

$$\omega \in \mathcal{W}_d^\infty := \{ \omega(\cdot) \in \mathfrak{W}([0, T], \mathbb{R}^r) \mid \omega^T(t) \omega(t) \leq d \quad \forall t \in [0, T] \} \quad (3.8)$$

*é FTB em relação a  $(c_1, c_2, \mathcal{W}_d^\infty, T, R)$  em quase todas as partes de  $[0, T]$  se existe uma função  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^n$  diferenciável continuamente em trechos tal que*

$$\dot{P}(t) + A^T(t) P(t) + P(t) A(t) + \frac{c_1 + dT}{c_2} P(t) B(t) B^T(t) P(t) < 0, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.9)$$

$$P(t) \succeq R, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.10)$$

$$P(0) < \frac{c_2}{c_1 + dT} R. \quad (3.11)$$

*Demonstração.* (Modificada de [47]) Considere um trecho genérico de  $[0, T]$  onde  $P$  é contínua. Seja

$$\gamma := \frac{c_1 + dT}{c_2}.$$

Por (3.3), tem-se que

$$x^T \dot{P}(t)x + x^T A^T(t)P(t)x + x^T P(t)A(t)x + \gamma x^T P(t)B(t)B^T(t)P(t)x < 0. \quad (3.12)$$

Somando  $\omega^T B^T(t)P(t)x + x^T P(t)B(t)\omega$  em ambos os lados de (3.12), é obtido

$$\begin{aligned} x^T \dot{P}(t)x + x^T A^T(t)P(t)x + \omega^T B^T(t)P(t)x + x^T P(t)A(t)x + x^T P(t)B(t)\omega \\ + \gamma x^T P(t)B(t)B^T(t)P(t)x < \omega^T B^T(t)P(t)x + x^T P(t)B(t)\omega, \end{aligned}$$

mas como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [x^T P(t)x] &= x^T \dot{P}(t)x + \dot{x}^T P(t)x + x^T P(t)\dot{x} \\ &\stackrel{(3.1)}{=} x^T \dot{P}(t)x + x^T A^T(t)P(t)x + \omega^T B^T(t)P(t)x \\ &\quad + x^T P(t)A(t)x + x^T P(t)B(t)\omega, \end{aligned}$$

a inequação se torna

$$\frac{d}{dt} [x^T P(t)x] < -\gamma x^T P(t)B(t)B^T(t)P(t)x + \omega^T B^T(t)P(t)x + x^T P(t)B(t)\omega. \quad (3.13)$$

Integrando (3.13), se obtém

$$\begin{aligned} x^T(t)P(t)x(t) - x^T(0)P(0)x(0) &< \int_0^t \frac{\omega^T \omega}{\gamma} - \left( \frac{\omega}{\sqrt{\gamma}} - \sqrt{\gamma} B^T P x \right)^T \left( \frac{\omega}{\sqrt{\gamma}} - \sqrt{\gamma} B^T P x \right) d\tau \\ &\leq \int_0^t \frac{\omega^T \omega}{\gamma} d\tau \\ &\leq \int_0^T \frac{\omega^T \omega}{\gamma} d\tau \stackrel{(3.8)}{\leq} \frac{1}{\gamma} dT, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Seja  $x^T(0)Rx(0) \leq c_1$ . Então para um  $t \in [0, T]$ , temos que

$$\begin{aligned} x^T(t)Rx(t) &\leq x^T(t)P(t)x(t) \\ &< x^T(0)P(0)x(0) + \frac{1}{\gamma} dT \\ &\stackrel{(3.11)}{<} \frac{1}{\gamma} \left[ \underbrace{x^T(0)Rx(0)}_{\leq c_1} + dT \right] = c_2, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Assim, o sistema é FTB para cada trecho onde  $P$  é contínua. Como existe apenas um número finito de pontos de descontinuidades de  $P$ , o sistema não é FTB em todo o intervalo  $[0, T]$ , mas apenas FTB em quase todas as partes de  $[0, T]$ .  $\square$

O Lema 4 e o Lema 5 acima podem ser resumidos no Lema 6 seguinte.

**Lema 6.** *O sistema variante no tempo (3.1) é FTB em relação a  $(c_1, c_2, \mathcal{W}_d^2, T, R)$  (ou em relação a  $(c_1, c_2, \mathcal{W}_d^\infty, T, R)$ ) em quase todas partes de  $[0, T]$  se existe uma função  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^n$  diferenciável continuamente em trechos tal que*

$$\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + \hat{\gamma}P(t)B(t)B^T(t)P(t) \prec 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.14)$$

$$P(t) \succeq R, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.15)$$

$$P(0) \prec \hat{\gamma}R, \quad (3.16)$$

onde  $\hat{\gamma} = (c_1 + d) / c_2$  (ou  $\hat{\gamma} = (c_1 + dT) / c_2$  respectivamente).

A Proposição 7 a seguir demonstra que não há perda de generalidade se o sistema é apenas FTB em quase todas as partes de  $[0, T]$ , pois a própria existência de uma solução de (3.1) dá uma condição suficiente para que um sistema FTB em quase todas as partes de  $[0, T]$  seja FTB em todo o intervalo  $[0, T]$ .

**Proposição 7.** *Suponha que (3.1) possua uma solução para cada valor inicial  $x(0) = x_0$  tal que  $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n | x^T R x \leq c_1\}$ . Se o sistema (3.1) é FTB em relação a  $(c_1, c_2, \mathcal{W}, T, R)$  em quase todas partes de  $[0, T]$ , então o sistema (3.1) é FTB em relação a  $(c_1, c_2, \mathcal{W}, T, R)$ .*

*Demonstração.* Seja  $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n | x^T R x \leq c_1\}$ . Por hipótese, a solução do problema de valor inicial

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)\omega(t), \quad x(0) = x_0$$

é contínua, e portanto, a função  $x^T(t)Rx(t)$  é contínua. Seja  $\tau$  um ponto em que não seja FTB. No entanto, existe uma vizinhança  $V$  de  $\tau$  tal que  $x^T(t)Rx(t) < c_2$  para todo  $t \in V$ . Pela continuidade de  $x^T(t)Rx(t)$ , tem-se que  $x^T(\tau)Rx(\tau) < c_2$ .  $\square$

A condição de análise para o sistema ser FTS pode ser obtida como um caso particular do Lema 6 fazendo  $d = 0$  e  $B = 0$ , conforme explicitado no Corolário 8 a seguir.

**Corolário 8.** *O sistema variante no tempo (3.1) é FTS em relação a  $(c_1, c_2, T, R)$  em quase todas partes de  $[0, T]$  se existe uma função  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^n$  diferenciável continuamente em trechos tal que*

$$\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) \prec 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.17)$$

$$P(t) \succeq R, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.18)$$

$$P(0) \prec \frac{c_1}{c_2}R. \quad (3.19)$$

É interessante observar que as condições (3.17) e (3.18) implicam nas condições

$$\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) \prec 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.20)$$

$$P(t) \succ 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.21)$$

À primeira vista, pode parecer então que para o sistema ser estável em tempo finito é necessário que também seja estável assintoticamente no sentido de Lyapunov. Isso seria válido se (3.20) e

(3.21) fossem válidas para todo  $t \geq 0$  (para mais detalhes ver [31, p.155]), porém estas condições precisam ser apenas válidas no intervalo  $[0, T]$ .

Com a finalidade de ilustrar que há mais possibilidade de escolhas para a solução  $P$  de (3.20) e (3.21) com a restrição do tempo  $t$  para o intervalo  $[0, T]$ , considere o seguinte sistema escalar:

$$\dot{x}(t) = 2tx(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (3.22)$$

A solução de (3.22) é dada por

$$x(t) = x_0 e^{(t^2 - t_0^2)}$$

e daí o ponto de equilíbrio em  $x = 0$  não é assintoticamente estável. Portanto, não existe  $P(t)$  tal que satisfaça (3.20) e (3.21) para todo  $t \geq 0$ .

Porém, utilizando  $P(t) := e^{-2t^2} - t/2$ , tem-se que

$$\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) = -4te^{-2t^2} - \frac{1}{2} + 2(2t) \left( e^{-2t^2} - \frac{t}{2} \right) = -2t^2 - \frac{1}{2} < 0$$

é satisfeita para  $t \geq 0$  e que (3.21) apesar de não ser válida para todo  $t \geq 0$ , existe um  $T$  tal que é satisfeita para todo  $t \in [0, T]$ . Tem-se ainda que  $P(0) = 1$ , e daí sempre podemos escolher  $c_1 \geq 0, c_2 > 0$  e  $R \succ 0$  tal que o sistema seja FTS em relação à esses parâmetros.

A seguinte proposição mostra como implementar o Lema 6 computacionalmente para sistemas autônomos de acordo com [104, 106], restringindo a variável  $P(\cdot)$  a ser uma função afim em trechos. Com esta restrição, a DMI se transforma em várias BMIs (ou apenas LMIs, se a análise for apenas para verificar se o sistema é FTS). Quanto maior o número de trechos diferentes se toma para  $P(\cdot)$ , maior é o número de variáveis que são introduzidas na condição, possivelmente diminuindo o conservadorismo, e também maior é o número de BMIs e LMIs geradas aumentando o esforço computacional.

**Proposição 9.** *Seja  $(t_k)_{k=0}^M$  uma sequência de  $M$  pontos em  $[0, T]$  tal que  $t_0 = 0$  e  $t_M = T$ . Se existem matrizes  $P_{0k} \in \mathbb{S}^n$  e  $P_{1k} \in \mathbb{S}^n$  tais que as desigualdades*

$$\begin{aligned} & \hat{\gamma}P_{1k}BB^T P_{1k}t_k^2 + (A^T P_{1k} + P_{1k}A + \hat{\gamma}P_{1k}BB^T P_{0k} + \hat{\gamma}P_{0k}BB^T P_{1k}) t_k \\ & + P_{1k} + A^T P_{0k} + P_{0k}A + P_{0k}BB^T P_{0k} \prec 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} & \hat{\gamma}P_{1k}BB^T P_{1k}t_{k+1}^2 + (A^T P_{1k} + P_{1k}A + \hat{\gamma}P_{1k}BB^T P_{0k} + \hat{\gamma}P_{0k}BB^T P_{1k}) t_{k+1} \\ & + P_{1k} + A^T P_{0k} + P_{0k}A + P_{0k}BB^T P_{0k} \prec 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$P_{1k}t_k + P_{0k} \succeq R, \quad (3.25)$$

$$P_{1k}t_{k+1} + P_{0k} \succeq R, \quad (3.26)$$

$$P_{0k} \prec \frac{1}{\hat{\gamma}}R, \quad (3.27)$$

são satisfeitas para todo  $k = 0, \dots, M-1$  e com  $\hat{\gamma} = (c_1 + d)/c_2$  (ou  $\hat{\gamma} = (c_1 + dT)/c_2$ ) então o sistema é FTB em relação a  $(c_1, c_2, \mathcal{W}_d^2, T, R)$  (ou em relação a  $(c_1, c_2, \mathcal{W}_d^\infty, T, R)$  respectivamente) em quase todas partes de  $[0, T]$ .

*Demonstração.* Tem-se que a função afim definida por trechos dada por

$$P(t) = P_{1k}t + P_{0k}, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}] \quad (3.28)$$

é diferenciável continuamente em cada trecho. Substituindo (3.28) em (3.14), (3.15) e (3.16), temos que se

$$\begin{aligned} \Gamma(t) := & \hat{\gamma} P_{1k} B B^T P_{1k} t^2 + (A^T P_{1k} + P_{1k} A + \hat{\gamma} P_{1k} B B^T P_{0k} + \hat{\gamma} P_{0k} B B^T P_{1k}) t + P_{1k} \\ & + A^T P_{0k} + P_{0k} A + P_{0k} B B^T P_{0k} \prec 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\zeta(t) := P_{1k}t + P_{0k} \succeq R, \quad (3.30)$$

para todo  $t \in [0, T]$  e se

$$P_{0k} \prec \frac{1}{\hat{\gamma}} R,$$

que é a LMI (3.27), então o sistema é FTB pelo Lema 6. Vamos demonstrar agora que é necessário apenas checar (3.29) e (3.30) nos pontos em que  $t = t_k$  para que o sistema seja FTB.

Seja a função  $\bar{\Gamma}_z(t) := z^* \Gamma(t) z$ . Tem-se que

$$\frac{d^2}{dt^2} (\bar{\Gamma}_z) = 2\hat{\gamma} z^* P_{1k} B B^T P_{1k} z = 2\hat{\gamma} z^* \underbrace{(B^T P_{1k})^T (B^T P_{1k})}_{\succeq 0} z \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}^n$$

e portanto, a função  $\Gamma$  é convexa pela Proposição 54 do Anexo A. Já a função  $\zeta - P_{0k}$  é linear. Daí, se  $t = ut_k + (1 - u)t_{k+1}$  com  $u \in [0, 1]$ , tem-se então que

$$\Gamma(t) \preceq u \underbrace{\Gamma(t_k)}_{\prec 0, \text{ por (3.23)}} + (1 - u) \underbrace{\Gamma(t_{k+1})}_{\prec 0, \text{ por (3.24)}} \prec 0$$

e

$$\zeta(t) - P_{0k} = u \underbrace{\zeta(t_k)}_{\succeq R, \text{ por (3.25)}} + (1 - u) \underbrace{\zeta(t_{k+1})}_{\succeq R, \text{ por (3.26)}} - P_{0k} \succeq R - P_{0k}$$

implicando em (3.29) e (3.30) para todo  $t \in [0, T]$ .  $\square$

É importante ressaltar que não foi encontrada na literatura uma demonstração de que essa relaxação converge assintoticamente para a necessidade. Em outras palavras, não há garantias que se  $M \rightarrow \infty$ , então as condições da Proposição 9 são equivalentes às condições do Lema 6. Portanto, é possível que mesmo com a introdução de novas variáveis com o aumento de  $M$ , ainda exista um conservadorismo muito grande e a custo de um esforço computacional extenso.

Cabe ainda citar que uma outra forma possível de implementar computacionalmente as DMIs do Lema 6 é utilizar a técnica de soma de quadrados (SOS)[107] para transformar as DMIs em um programa SOS; tal é feito em [105], porém para a classe de ruídos

$$\mathcal{W}_{d,\Pi}^S = \{ \omega(\cdot) \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^r) \mid \dot{\omega} = S\omega, \omega^T(0) \Pi \omega(0) \leq d \}, \quad (3.31)$$

onde  $S$  é uma matriz de dimensão compatível. Investigações serão feitas futuramente para averiguar se é possível fazer essa relaxação também para o caso das classes de ruídos  $\mathcal{W}_d^2$  e  $\mathcal{W}_d^\infty$ . É interessante

mencionar também que há bibliotecas computacionais disponíveis gratuitamente para implementar e resolver tais programas SOS, como por exemplo a biblioteca SOSTOOLS<sup>2</sup> [108].

Finalmente, é importante lembrar que as condições baseadas em DMI, apesar de serem baseadas em relaxações de condições necessárias e suficientes, são apenas condições suficientes para o sistema ser FTB pois contém duas fontes de conservadorismo: a primeira é uma relaxação da condição necessária e suficiente, que são um conjunto infinito de DMIs [45], para uma DMI apenas; a segunda é que não há técnicas numéricas eficientes para resolver uma DMI diretamente, sendo necessário restringir o espaço das variáveis para apenas funções afim.

### 3.2 Condições de análise de FTB e FTS baseadas em LMIs

Conforme ficará mais claro a seguir, as condições baseadas em LMIs são construídas a partir de desigualdades diferenciais com uma função candidata de Lyapunov. O lema a seguir, de [109], apresenta uma condição suficiente para analisar se o sistema é FTB em relação a classe  $\mathcal{W}_d^\infty$ . Este lema é uma generalização do Lema 6 de [44], que analisa apenas se o sistema é FTB em relação aos ruídos constantes da classe  $\mathcal{W}_d^\infty$ .

**Lema 10.** *O sistema variante no tempo (3.1) é FTB em relação a  $(c_1, c_2, \mathcal{W}_d^\infty, T, R)$  se existem  $Q_1 \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $Q_2 \in \mathbb{S}_+^r$ ,  $\beta > 0$  tais que*

$$\begin{bmatrix} A(t)\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 A^T(t) - \beta\tilde{Q}_1 & B(t)Q_2 \\ \star & -\beta Q_2 \end{bmatrix} \prec 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.32)$$

$$\frac{c_1}{\lambda_{\min}(Q_1)} + \frac{d}{\lambda_{\min}(Q_2)} < \frac{c_2 e^{-\beta T}}{\lambda_{\max}(Q_1)}, \quad (3.33)$$

onde

$$\tilde{Q}_1 := R^{-\frac{1}{2}} Q_1 R^{-\frac{1}{2}} \quad (3.34)$$

e  $\lambda_{\max}(\cdot)$  e  $\lambda_{\min}(\cdot)$  denotam os autovalores máximos e mínimos do argumento.

*Demonstração.* Considere a função quadrática positiva definida dada por

$$V(x) = x^T \tilde{Q}_1^{-1} x \quad (3.35)$$

e seja  $x_0$  tal que satisfaça a hipótese  $x_0^T R x_0 < c_1$ . Assumindo que a desigualdade

$$\dot{V}(x) < \beta V(x) + \beta \omega^T Q_2^{-1} \omega \quad (3.36)$$

é válida para todo  $t \in [0, T]$ , tem-se que multiplicando os lados da desigualdade por  $e^{-\beta t}$  é obtido

$$\begin{aligned} e^{-\beta t} \dot{V}(x) &< \beta e^{-\beta t} V(x) + \beta e^{-\beta t} \omega^T Q_2^{-1} \omega \\ e^{-\beta t} \dot{V}(x) - \beta e^{-\beta t} V(x) &< \beta e^{-\beta t} \omega^T Q_2^{-1} \omega \\ \frac{d(e^{-\beta t} V(x))}{dt} &< \beta e^{-\beta t} \omega^T Q_2^{-1} \omega. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Disponível gratuitamente para download em <http://www.cds.caltech.edu/sostools/>.

Integrando a última desigualdade, segue-se que

$$\begin{aligned} e^{-\beta t} V(x) - V(x_0) &< \beta \int_0^t e^{-\beta \tau} \omega^T Q_2^{-1} \omega \, d\tau \\ V(x) &< e^{\beta t} V(x_0) + \beta e^{\beta t} \int_0^t e^{-\beta \tau} \omega^T Q_2^{-1} \omega \, d\tau. \end{aligned}$$

Como  $\omega^T(t) \omega(t) \leq d$  para todo  $t \in [0, T]$ , tem-se que

$$\omega^T Q_2^{-1} \omega \leq \lambda_{\max}(Q_2^{-1}) \omega^T \omega \leq d \lambda_{\max}(Q_2^{-1})$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} V(x) &< e^{\beta t} V(x_0) + \beta e^{\beta t} d \lambda_{\max}(Q_2^{-1}) \int_0^t e^{-\beta \tau} \, d\tau \\ &< e^{\beta t} \left[ V(x_0) + d \lambda_{\max}(Q_2^{-1}) (1 - e^{-\beta t}) \right]. \end{aligned}$$

Substituindo (3.34) em (3.35) é obtido:

$$\lambda_{\min}(Q_1^{-1}) x^T R x \leq x^T R^{1/2} Q_1^{-1} R^{1/2} x \leq \lambda_{\max}(Q_1^{-1}) x^T R x.$$

Daí:

$$\lambda_{\min}(Q_1^{-1}) x^T R x < e^{\beta t} \left[ x_0^T R x_0 \lambda_{\max}(Q_1^{-1}) + d \lambda_{\max}(Q_2^{-1}) (1 - e^{-\beta t}) \right],$$

e como  $(1 - e^{-\beta t}) < 1$  e  $x_0^T R x_0 < c_1$ , segue-se que

$$x^T R x < \frac{e^{\beta t}}{\lambda_{\min}(Q_1^{-1})} [c_1 \lambda_{\max}(Q_1^{-1}) + d \lambda_{\max}(Q_2^{-1})].$$

Consequentemente, a desigualdade

$$\frac{e^{\beta t}}{\lambda_{\min}(Q_1^{-1})} [c_1 \lambda_{\max}(Q_1^{-1}) + d \lambda_{\max}(Q_2^{-1})] < c_2$$

assegura que  $x^T R x < c_2$ . Em particular, para  $t = T_f$  tem-se

$$c_1 \lambda_{\max}(Q_1^{-1}) + d \lambda_{\max}(Q_2^{-1}) < c_2 e^{-\beta T_f} \lambda_{\min}(Q_1^{-1})$$

Usando as identidades  $\lambda_{\max}(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_{\min}(A)}$  e  $\lambda_{\min}(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_{\max}(A)}$  (ver Anexo A), chega-se em

$$\frac{c_1}{\lambda_{\min}(Q_1)} + \frac{d}{\lambda_{\min}(Q_2)} < \frac{c_2 e^{-\beta T_f}}{\lambda_{\max}(Q_1)},$$

que é exatamente (3.33).

Será obtido (3.32) agora calculando as trajetórias do sistema na desigualdade diferencial dada por (3.36). Substituindo (3.35) em (3.36),

$$\dot{x}^T \tilde{Q}_1^{-1} x + x^T \tilde{Q}_1^{-1} \dot{x} < \beta x^T \tilde{Q}_1^{-1} x + \beta \omega^T Q_2^{-1} \omega$$

utilizando (3.1),

$$(x^T A^T + \omega^T B^T) \tilde{Q}_1^{-1} x + x^T \tilde{Q}_1^{-1} (Ax + B\omega) < \beta x^T \tilde{Q}_1^{-1} x + \beta \omega^T Q_2^{-1} \omega$$

e rearranjando os termos,

$$x^T \left( A^T \tilde{Q}_1^{-1} + \tilde{Q}_1^{-1} A - \beta \tilde{Q}_1^{-1} \right) x + x^T \tilde{Q}_1^{-1} B \omega + \omega^T B^T \tilde{Q}_1^{-1} x + \omega^T (-\beta Q_2^{-1}) \omega < 0$$

é obtido

$$\begin{bmatrix} A^T(t) \tilde{Q}_1^{-1} + \tilde{Q}_1^{-1} A(t) - \beta \tilde{Q}_1^{-1} & \tilde{Q}_1^{-1} B(t) \\ \star & -\beta Q_2^{-1} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.37)$$

Para substituir  $\tilde{Q}_1^{-1}$  e  $\tilde{Q}_2^{-1}$  por  $\tilde{Q}_1$  e  $\tilde{Q}_2$  em (3.37), é aplicada a seguinte transformação de congruência (ver Proposição 39 do Anexo A)

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T(t) \tilde{Q}_1^{-1} + \tilde{Q}_1^{-1} A(t) - \beta \tilde{Q}_1^{-1} & \tilde{Q}_1^{-1} B(t) \\ \star & -\beta Q_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_2 \end{bmatrix} \prec 0$$

resultando em (3.32).  $\square$

O Lema 11 a seguir, de [6], é uma adaptação do Lema 10 para o caso em que a perturbação pertença a classe de ruídos  $\mathcal{W}_d^2$ .

**Lema 11.** [6] *O sistema variante no tempo (3.1) é FTB em relação a  $(c_1, c_2, \mathcal{W}_d^2, T, R)$  se existem  $Q_1 \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $Q_2 \in \mathbb{S}_+^r$ ,  $\beta > 0$  tais que as condições*

$$\begin{bmatrix} A(t) \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 A^T(t) - \beta \tilde{Q}_1 & B(t) Q_2 \\ \star & -Q_2 \end{bmatrix} \prec 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.38)$$

(3.33) e (3.34) são satisfeitas.

*Demonstração.* A prova é semelhante a do Lema 10, por isso omitida. Para detalhes, ver [6].  $\square$

Uma indagação natural que surge devido a semelhança entre o Lema 10 e o Lema 11 é se há alguma relação entre as condições destes: uma óbvia é que ambos são equivalentes se  $\beta = 1$ . A Proposição 12 a seguir detalha mais uma relação entre essas condições.

**Proposição 12.** *Se um sistema é FTB em relação a classe  $\mathcal{W}_d^\infty$  pela condição do Lema 10 com  $\beta < 1$ , então ele também é FTB em relação a classe  $\mathcal{W}_d^2$ . Por outro lado, se o sistema for FTB em relação a classe  $\mathcal{W}_d^2$  pela condição do Lema 11 com  $\beta > 1$ , então ele também é FTB em relação a classe  $\mathcal{W}_d^\infty$ .*

*Demonstração.* Seja  $\tilde{Q}_1^*$ ,  $Q_1^*$  e  $Q_2^*$  uma solução particular de (3.32). As condições (3.33) e (3.34) são as mesmas para os dois lemas. Por outro lado, aplicando complemento de Schur em (3.32), tem-se que esta equivale as condições

$$A(t) \tilde{Q}_1^* + \tilde{Q}_1^* A^T(t) - \beta \tilde{Q}_1^* \prec 0, \quad (3.39)$$

$$-\beta Q_2^* - Q_2^{*T} B^T(t) \left( A(t) \tilde{Q}_1^* + \tilde{Q}_1^* A^T(t) - \beta \tilde{Q}_1^* \right)^{-1} B(t) Q_2^* \prec 0. \quad (3.40)$$



Como  $\beta < 1$ ,  $\beta Q_2^* \prec Q_2^*$  e daí

$$-Q_2^{*T} B^T(t) \left( A(t) \tilde{Q}_1^* + \tilde{Q}_1^{*T} A^T(t) - \beta \tilde{Q}_1^* \right)^{-1} B(t) Q_2^* \prec \beta Q_2^* \prec Q_2^*. \quad (3.41)$$

Aplicando complemento de Schur em (3.38), vê-se que esta é equivalente a (3.39) e (3.40), e portanto  $\tilde{Q}_1^*$ ,  $Q_1^*$  e  $Q_2^*$  também é uma solução de (3.38) para o mesmo  $\beta$ . Para a recíproca com  $\beta > 1$ , a demonstração é análoga.  $\square$

Para facilitar a referência, ambos os Lemas 10 e 11 serão resumidos como o Lema 13 abaixo.

**Lema 13.** *O sistema variante no tempo (3.1) é FTB em relação a  $(c_1, c_2, \mathcal{W}_d^\infty, T, R)$  (ou em relação a  $(c_1, c_2, \mathcal{W}_d^2, T, R)$ ) se existem  $Q_1 \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $Q_2 \in \mathbb{S}_+^r$ ,  $\beta, \hat{\beta} > 0$  tais que as condições*

$$\begin{bmatrix} A(t) \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 A^T(t) - \beta \tilde{Q}_1 & B(t) Q_2 \\ \star & -\hat{\beta} Q_2 \end{bmatrix} \prec 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.42)$$

(3.33) e (3.34) são satisfeitas, onde  $\hat{\beta} = \beta$  (ou  $\hat{\beta} = 1$  respectivamente).

A condição de análise para o sistema ser FTS pode ser obtida como um caso particular do Lema 13 fazendo  $d = 0$  e  $B = 0$ , conforme explicitado no Corolário 14 a seguir.

**Corolário 14.** *O sistema variante no tempo (3.1) é FTS em relação a  $(c_1, c_2, T, R)$  se existem  $\tilde{Q}_1 \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $\beta > 0$  tais que as condições*

$$A(t) \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 A^T(t) - \beta \tilde{Q}_1 \prec 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.43)$$

$$\frac{\lambda_{\max} \left( R^{\frac{1}{2}} \tilde{Q}_1 R^{\frac{1}{2}} \right)}{\lambda_{\min} \left( R^{\frac{1}{2}} \tilde{Q}_1 R^{\frac{1}{2}} \right)} < \frac{c_2}{c_1} e^{-\beta T}, \quad (3.44)$$

são satisfeitas.

Algumas observações são pertinentes a fazer sobre esses lemas baseados em LMI. A primeira é que, diferentemente das condições baseadas em DMI, a condição dada em (3.33) fornece diretamente várias informações relativas à natureza do problema de estabilidade em tempo finito. Por exemplo, se fixar as variáveis  $Q_1$  e  $Q_2$ , as constantes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $R$ ,  $T$  e  $\beta$ , então a condição (3.33) estabelece uma cota superior para  $d$  e diminui-se o espaço de soluções de  $d$  se  $c_2$  diminui, ou  $c_1$  aumenta, ou  $T$  aumenta, etc.

Outra ponderação de interesse é que a condição (3.42) implica que deve existir um  $\tilde{Q}_1 \succ 0$  tal que

$$A(t) \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 A^T(t) - \beta \tilde{Q}_1 \prec 0,$$

ou de maneira equivalente por uma transformação de congruência (ver Proposição 39 do Anexo A), que

$$\tilde{Q}_1^{-1} \left( A(t) \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 A^T(t) - \beta \tilde{Q}_1 \right) \tilde{Q}_1^{-1} = A^T(t) \tilde{Q}_1^{-1} + \tilde{Q}_1^{-1} A(t) - \beta \tilde{Q}_1^{-1} \prec 0. \quad (3.45)$$

Procedendo novamente como na demonstração do Lema 10 e definindo

$$V(x(t)) := x^T(t) \tilde{Q}_1^{-1} x(t), \quad (3.46)$$

tem-se que  $V > 0$  e que a condição (3.45) equivale a

$$\dot{V}(t) < \beta V(t). \quad (3.47)$$

Se o parâmetro  $\beta$  pudesse assumir o valor 0 em (3.47), teria-se que  $V$  é uma função de Lyapunov e que portanto, para utilizar a condição (3.42), o sistema teria que ser necessariamente assintoticamente estável. Como foi suposto  $\beta > 0$ , isto não ocorre e pode-se utilizar a condição (3.42) inclusive para sistemas que não sejam assintoticamente estáveis, reafirmando que os conceitos de estabilidade assintótica e de tempo finito são independentes.

Voltando a análise da condição (3.42), é interessante mostrar como esta condição compete com a condição (3.33) em relação ao valor de  $\beta$ . Lembrando que (3.42) implica na existência de uma função  $V(t)$  que satisfaz (3.47), tem-se pelo lema de Gronwall (ver Lema 23 do Anexo A) que

$$V(t) \leq V(0) e^{\beta t} \quad \forall t \in [0, T],$$

ou em outras palavras, os valores que  $V(t)$  pode assumir é limitado por uma curva exponencial durante o intervalo  $[0, T]$ . Quanto maior o valor de  $\beta$ , maior será a área desta região, e por (3.47), também maior será a faixa de valores possíveis que a tangente de  $V(t)$  pode assumir, como ilustra a Figura 3.1. Isso nos leva a pensar que quanto maior o  $\beta$ , mais fácil será verificar que um sistema seja FTB, pois mais fácil será achar uma  $\tilde{Q}_1$  tal que  $V(t) = x^T(t) \tilde{Q}_1^{-1} x(t)$  satisfaça (3.47). No entanto, tem-se também pela condição (3.33) que quanto maior o valor de  $\beta$ , menor é a faixa de valores que as variáveis em

$$\frac{c_1}{\lambda_{\min}(Q_1)} + \frac{d}{\lambda_{\min}(Q_2)}$$

podem assumir, tendendo assintoticamente para um conjunto vazio quando  $\beta$  tende ao infinito e deste modo, contrabalanceando a condição (3.33) em relação ao valor do parâmetro  $\beta$ .

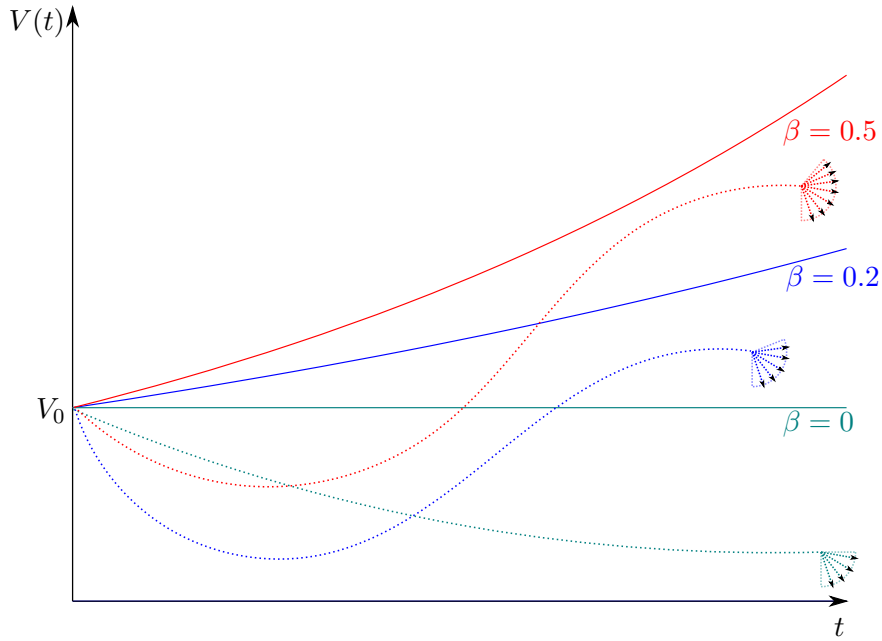


Figura 3.1: Regiões e formas possíveis da função  $V(t)$  de acordo com  $\beta$  pela condição (3.42).

Por fim, será enunciado no Teorema 15 a seguir outra condição para analisar se um sistema é FTB também baseada em LMI, inédita na literatura. Ao invés de substituir a dinâmica do sistema dada em (3.1) na desigualdade (3.36), (3.1) e (3.36) serão vistos como um problema de otimização sujeito a uma restrição de igualdade dinâmica, assim como é feito em [110] para o problema de estabilidade assintótica. Para isso, assim como em [110], será utilizado o lema de Finsler (ver Lema 57 do Anexo A).

O lema de Finsler permite introduzir variáveis extras na condição de análise, aumentando o espaço de busca e assim possibilitando menos conservadorismo - tal abordagem é feita também no contexto de estabilidade assintótica em [91]. De fato, como será visto na Proposição 16 e em um exemplo numérico posteriormente, este teorema engloba as condições de análise do Lema 13 e apresenta menos conservadorismo do que o Lema 13.

**Teorema 15.** *O sistema linear e variante no tempo (3.1) é FTB em relação a  $(c_1, c_2, \mathcal{W}_d^\infty, T, R)$  (ou em relação a  $(c_1, c_2, \mathcal{W}_d^2, T, R)$ ) se existirem matrizes  $P_1 \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $P_2 \in \mathbb{S}_+^r$ ; matrizes  $F(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H(t) \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ; e escalares  $\beta, \hat{\beta} > 0$  tais que:*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_{11}(t) & \mathcal{F}_{12}(t) & F(t)B(t) + A^T(t)H^T(t) \\ \star & -G(t) - G^T(t) & G(t)B(t) - H^T(t) \\ \star & \star & -\hat{\beta}P_2 + H(t)B(t) + B^T(t)H^T(t) \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.48)$$

$$\mathcal{F}_{11}(t) := -\beta\tilde{P}_1 + F(t)A(t) + A^T(t)F^T(t), \quad \forall t \in [0, T]$$

$$\mathcal{F}_{12}(t) := \tilde{P}_1 - F(t) + A^T(t)G^T(t),$$

$$c_1\lambda_{\max}(P_1) + d\lambda_{\max}(P_2) < c_2e^{-\beta T_f}\lambda_{\min}(P_1), \quad (3.49)$$

com  $\tilde{P}_1 = R^{1/2}P_1R^{1/2}$  e  $\hat{\beta} = \beta$  (ou  $\hat{\beta} = 1$ ).

*Demonstração.* Da mesma maneira como na demonstração do Lema 10 (com  $\hat{\beta} = \beta$ ) ou do Lema 11 (com  $\hat{\beta} = 1$ ), considere a função quadrática positiva definida dada por

$$V(x) := x^T \tilde{P}_1 x.$$

Assumindo a desigualdade

$$\dot{V}(x) < \beta V + \hat{\beta} \omega^T P_2 \omega \quad (3.50)$$

e utilizando (3.49), pode-se prosseguir como na demonstração do Lema 10 para demonstrar que o sistema (3.1) é FTB.

Será demonstrado agora que (3.50) implica (3.48). Tem-se que (3.50) pode ser reescrita como

$$-\underbrace{\beta x^T(t) \tilde{P}_1 x(t)}_{V(t)} + \underbrace{\dot{x}^T(t) \tilde{P}_1 x(t) + x^T(t) \tilde{P}_1 \dot{x}(t)}_{\dot{V}(t)} - \hat{\beta} \omega^T(t) P_2 \omega(t) < 0,$$

ou de maneira equivalente, como

$$\begin{bmatrix} x^T(t) & \dot{x}^T(t) & \omega^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta \tilde{P}_1 & \tilde{P}_1 & 0 \\ \tilde{P}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{\beta} P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} < 0. \quad (3.51)$$

Utilizando a equivalência dos itens (1) e (4) do lema de Finsler (Lema 57) em (3.51) com

$$x \leftarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}, \mathcal{Q} \leftarrow \begin{bmatrix} -\beta \tilde{P}_1 & \tilde{P}_1 & 0 \\ \tilde{P}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{\beta} P_2 \end{bmatrix}, \mathcal{B}^T \leftarrow \begin{bmatrix} A^T \\ -I \\ B^T \end{bmatrix}, \mathcal{X} = \begin{bmatrix} F \\ G \\ H \end{bmatrix}$$

é obtido (3.48). □

É importante notar que o Teorema 15 permite que a matriz da função  $V$  seja invariante no tempo ao mesmo tempo que dá liberdade de colocar-se estrutura, por exemplo polinomial, nas variáveis extras  $F(t), G(t)$  e  $H(t)$ .

Será provado na Proposição 16 a seguir que para uma escolha particular de variáveis, o Teorema 15 recai no Lema 13, ou seja, a condição de análise do Lema 13 está contida dentro da condição de análise do Teorema 15 e portanto este Teorema é menos ou tão conservador quanto aquele Lema. De fato, verificou-se numericamente que o Teorema 15 é realmente menos conservador: há um exemplo de sistema que é FTB pelo Teorema 15, mas pelo Lema 13 não há garantias sobre o sistema ser FTB ou não.

**Proposição 16.** *Seja  $\epsilon > 0$ . Escolhendo  $F = \tilde{P}_1$ ,  $G = \epsilon I$  e  $H = 0$  no Teorema 15 temos que a LMI (3.48) se torna*

$$\mathfrak{F}(t) := \begin{bmatrix} -\beta \tilde{P}_1 + \tilde{P}_1 A(t) + A^T(t) \tilde{P}_1 & \epsilon A^T(t) & \tilde{P}_1 B(t) \\ \star & -2\epsilon I & \epsilon B(t) \\ \star & \star & -\hat{\beta} P_2 \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.52)$$

À vista disso, sempre existirá um  $\epsilon$  suficientemente pequeno tal que

$$\begin{bmatrix} -\beta\tilde{P}_1 + \tilde{P}_1 A(t) + A^T(t)\tilde{P}_1 & \tilde{P}_1 B(t) \\ \star & -\hat{\beta}P_2 \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.53)$$

que é equivalente a LMI (3.42) do Lema 13.

*Demonstração.* Aplicando uma transformação de congruência (ver Proposição 39 do Anexo A) em (3.52) tem-se que

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \mathfrak{F}(t) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta\tilde{P}_1 + \tilde{P}_1 A(t) + A^T(t)\tilde{P}_1 & \tilde{P}_1 B(t) & \epsilon A^T(t) \\ \star & -\beta P_2 & \epsilon B^T(t) \\ \star & \star & -2\epsilon I \end{bmatrix} \prec 0.$$

Utilizando complemento de Schur, esta última LMI é equivalente a

$$\begin{cases} 2\epsilon I \succ 0 \\ \begin{bmatrix} \beta\tilde{P}_1 - \tilde{P}_1 A(t) - A^T(t)\tilde{P}_1 & -\tilde{P}_1 B(t) \\ \star & \beta P_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\epsilon A^T(t) \\ -\epsilon B^T(t) \end{bmatrix} (2\epsilon I)^{-1} \begin{bmatrix} -\epsilon A(t) & -\epsilon B(t) \end{bmatrix} \succ 0 \end{cases}$$

e como a desigualdade  $2\epsilon I \succ 0$  é trivialmente satisfeita, tem-se que

$$\begin{bmatrix} \beta\tilde{P}_1 - \tilde{P}_1 A(t) - A^T(t)\tilde{P}_1 & -\tilde{P}_1 B(t) \\ \star & \beta P_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\epsilon \begin{bmatrix} A^T(t) \\ B^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) & B(t) \end{bmatrix} \succ 0.$$

Daí

$$\begin{bmatrix} -\beta\tilde{P}_1 + \tilde{P}_1 A(t) + A^T(t)\tilde{P}_1 & \tilde{P}_1 B(t) \\ \star & -\beta P_2 \end{bmatrix} \prec \underbrace{-\frac{1}{2}\epsilon \begin{bmatrix} A^T(t) \\ B^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) & B(t) \end{bmatrix}}_{\succeq 0},$$

de onde se segue o resultado.

Finalmente, substituindo  $\tilde{P}_1 = \tilde{Q}_1^{-1}$  e  $P_2 = Q_2^{-1}$  em (3.53) e aplicando a transformação de congruência (ver Proposição 39 do Anexo A) dada por

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$$

em (3.53), tem-se que (3.53) é equivalente a (3.42).  $\square$

Apesar do Teorema 15 apresentar menos conservadorismo que o Lema 13, será utilizado este lema e não o Teorema 15 para realizar a síntese de filtros e controles devido a dificuldade de se obter uma representação por LMI do Teorema 15 quando utilizado no contexto da síntese.

### 3.3 Comparação entre as condições de análise baseadas em LMI e baseadas em DMI

Uma primeira comparação que pode ser feita entre o Lema 6, baseado em DMI, com o Lema 13 e o Teorema 15, baseados em LMI, é em relação ao conservadorismo das condições: foi visto nas seções anteriores que as condições de análise destes lemas e deste teorema são apenas suficientes, sendo que a não existência de uma solução para as condições não implicam necessariamente que o sistema considerado não seja FTB. Deseja-se saber então qual destas condições de análise garantem que uma maior classe de sistemas sejam FTB.

Para facilitar a exposição, como o Teorema 15 não será utilizado neste trabalho para realizar a síntese de controladores ou filtros, a comparação será focada especificamente entre o Lema 6 e o Lema 13. Para comparar estes lemas, será dado um exemplo de uma classe de sistemas tal que se estes são FTS em relação a certos parâmetros pelas condições do Lema 13, então estes também são FTS em relação aos mesmos parâmetros pelas condições do Lema 6.

Considerando que  $n = 1$ ,  $c_1 \neq 0$ ,  $d = 0$  e  $B = 0$ , as condições do Corolário 14 para o sistema escalar  $\dot{x}(t) = a(t)x$  ser FTS em relação a  $(c_1, c_2, T, r)$  são dadas pelas desigualdades

$$2a(t) - \beta < 0, \quad (3.54)$$

$$c_1 < c_2 e^{-\beta T}. \quad (3.55)$$

Mais ainda, tem-se que (3.55) implica de modo geral que

$$c_1 < c_2 e^{-\beta t}, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.56)$$

por  $e^{-\beta t}$  ser uma função decrescente.

Por outro lado, para este sistema ser FTS em relação aos mesmos parâmetros pelas condições do Corolário 8, deve-se existir uma função  $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\dot{p}(t) + 2a(t)p(t) < 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.57)$$

$$p(t) \geq r, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.58)$$

$$p(0) < \frac{c_2}{c_1} r. \quad (3.59)$$

Escolhendo então

$$p(t) = \frac{(c_2 - \varepsilon)}{c_1} r e^{-\beta t}, \quad t \in [0, T]$$

com  $\varepsilon > 0$ , tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) + 2a(t)p(t) &= -\beta \frac{(c_2 - \varepsilon)}{c_1} r e^{-\beta t} + 2a(t) \frac{(c_2 - \varepsilon)}{c_1} r e^{-\beta t} \\ &= \frac{(c_2 - \varepsilon)}{c_1} r e^{-\beta t} \underbrace{(2a(t) - \beta)}_{(3.54)} < 0, \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

satisfazendo (3.57), que (3.56) implica em (3.58) e finalmente que

$$p(0) = \frac{(c_2 - \varepsilon)}{c_1} r < \frac{c_2}{c_1} r,$$

que é justamente a condição (3.59).

Em contra-partida, não se encontrou um exemplo de sistema que fosse FTS ou FTB em relação a certos parâmetros pelas condições do Lema 13 e ao mesmo tempo não satisfazendo as condições do Lema 6. Conjectura-se então que o Lema 6 é menos conservador que o Lema 13.

No entanto, partindo para o segundo ponto de comparação, que é a efetividade da solução computacional, tem-se que as condições baseadas em DMI são em geral proibitivas computacionalmente e dependem de dividir o intervalo de tempo em vários sub-intervalos para relaxar o problema ou em várias LMIs (se  $B = 0$  e apenas é analisado se o sistema é FTS) ou em várias BMIs (se  $B \neq 0$  e  $\mathcal{W} \neq \emptyset$ , e é analisado se o sistema é FTB), que são problemas em geral não-convexos e portanto mais difíceis de resolver computacionalmente. Quanto maior a subdivisão de intervalos, mais se aumenta a precisão das condições de análise, mas pode ser necessário um número alto de subdivisões para diminuir suficientemente o conservadorismo: em um exemplo de [104] o intervalo  $[0, 0.5]$  teve que ser dividido em 30 sub-intervalos para verificar que o sistema é FTS. Quanto mais subdivisões, mais linhas e mais variáveis de LMIs são produzidas aumentando o fardo computacional.

É importante mencionar também que os controladores baseados em DMI possuem estruturas variantes no tempo mesmo se o sistema é autônomo [57, 42, 106, 111, 112, 113], uma característica não desejada do ponto de vista prático. Em contraponto, o filtro robusto que será proposto no Capítulo 5 utilizando as condições baseadas em LMI, possui estruturas invariantes no tempo se o sistema for autônomo.

### 3.4 Experimento numérico

Para ilustrar que a condição proposta baseada em Finsler (Teorema 15) é menos conservadora que o Lema 13, considerou-se o seguinte exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

com parâmetros  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 10$ ,  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_d^\infty$  com  $d = 0.5$ ,  $R = I$ ,  $\beta = 22$  e  $T = 0.1$ . Pelo Lema 13, não se sabe se o sistema é FTB, porém utilizando o Teorema 15, o sistema é FTB.

# Capítulo 4

## Controle em tempo-finito

Neste capítulo será abordado o controlador dependente de parâmetro que resultou o artigo [114]. O problema a ser resolvido será detalhado na Seção 4.1 e a proposta de como projetar o controlador para resolver o problema é descrita na Seção 4.2. Por fim, para ilustrar o controlador proposto, alguns experimentos numéricos são realizados na Seção 4.3.

### 4.1 Descrição do problema

No contexto de controle em tempo finito vale a pena mencionar os trabalhos [115], interessado na estabilização em tempo finito de sistemas precisamente conhecidos afetados por perturbações exógenas com norma limitada, [21] que lida com o problema de estabilidade em tempo finito e estabilização de sistemas não-lineares quadráticos, [45] que utiliza condições de análise de FTB baseadas em DMI para projetar um controlador por realimentação de estado para sistemas variantes no tempo. Em [6], o autor fornece condições suficientes para projetar controladores *gain-scheduling* por realimentação de estado que asseguram a limitação em tempo finito do sistema em malha fechada.

Diferente desses resultados e de resultados anteriores na literatura, relaxações de LMI baseadas no teorema de Pólya e na estrutura de polinômio homogêneo na variável são consideradas para diminuir o conservadorismo das condições de síntese do controlador.

Considere o seguinte sistema LPV com  $t \in [0, T]$ ,

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B_1(\alpha(t))u(t) + B_2(\alpha(t))\omega(t), \quad (4.1)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  é a entrada de controle,  $\omega(t) \in \mathbb{R}^r$  é o sinal de ruído pertencente à classe  $\mathcal{W}_d^2$  ou à classe  $\mathcal{W}_d^\infty$  e  $\alpha(t) \in \Delta_N$ .

Todas as matrizes são reais com dimensões convenientes e pertencentes ao politopo

$$\mathcal{P} = \left\{ \left[ \begin{array}{c|c} A(\alpha(t)) & B_1(\alpha(t)) \\ \hline B_2(\alpha(t)) & - \end{array} \right] = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \left[ \begin{array}{c|c} A_i & B_{1i} \\ \hline B_{2i} & - \end{array} \right] \right\}.$$



Como exposto no Capítulo 2, este tipo de sistema é útil para modelar incertezas e/ou sistemas com parâmetros variantes. Neste caso será assumido um cenário idealizado em que este parâmetro pode ser lido em tempo real e sem ruídos, porém, diferentemente de abordagens mais tradicionais de LPV, não é imposto nenhuma limitação na taxa de variação do parâmetro [58]. Finalmente, o problema a ser resolvido é acoplar um controlador a planta (4.1) que faça com que o sistema em malha fechada seja FTB ou para a classe classe  $\mathcal{W}_d^2$  ou para a classe  $\mathcal{W}_d^\infty$ .

## 4.2 Controlador por realimentação de estados

A arquitetura da lei de controle proposta será um controlador por realimentação de estados e dependente do parâmetro lido em tempo real  $\alpha(t)$  de maneira polinomial homogênea. Deste modo, a atuação é dada por

$$u(t) = K_g(\alpha(t))x(t)$$

com  $K_g \in \mathbb{H}^{p \times n}$ . A estrutura de polinômio homogêneo do controlador será utilizada para relaxar as LMIs propostas para a síntese de  $K_g$ , de tal forma que com o aumento do grau  $g$  e adicionalmente usando a técnica de relaxação baseada no teorema de Pólya diminui-se o conservadorismo.

Acoplando o sistema com o controlador proposto, o sistema em malha fechada é dado por

$$\dot{x}(t) = \bar{A}(\alpha(t))x(t) + \bar{B}(\alpha(t))\omega(t), \quad (4.2)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{A}(\alpha(t)) &= A(\alpha(t)) + B_1(\alpha(t))K_g(\alpha(t)), \\ \bar{B}(\alpha(t)) &= B_2(\alpha(t)). \end{aligned} \quad (4.3)$$

No Teorema 18 será apresentado condições suficientes para a síntese de um controlador FTB dependente de parâmetro de forma polinomial e homogênea. Antes de provar este teorema, será provado rapidamente o Lema 17, que converte uma desigualdade envolvendo autovalores em várias LMIs mais simples e que será também útil na síntese de filtros no contexto de estabilidade em tempo finito.

**Lema 17.** *A desigualdade*

$$c_1\lambda_{\max}(P_1) + d\lambda_{\max}(P_2) < c_2e^{-\beta T}\lambda_{\min}(P_1)$$

*é satisfeita se existem  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  e  $\mu_3$  reais tais que:*

$$\mu_3 I \prec P_1 \prec \mu_1 I, \quad (4.4)$$

$$P_2 \prec \mu_2 I, \quad (4.5)$$

$$c_1\mu_1 + d\mu_2 < c_2e^{-\beta T}\mu_3. \quad (4.6)$$

*Demonstração.* Pela Proposição 42 do Anexo A, as condições (4.4) e (4.5) implicam em

$$\mu_3 < \lambda_{\min}(P_1), \lambda_{\max}(P_1) < \mu_1,$$

$$\lambda_{\max}(P_2) < \mu_2,$$

que junto com (4.6) implicam em

$$c_1 \lambda_{\max}(P_1) + d \lambda_{\max}(P_2) < c_1 \mu_1 + d \mu_2 < c_2 e^{-\beta T} \mu_3 < c_2 e^{-\beta T} \lambda_{\min}(P_1).$$

□

**Teorema 18.** [114] Dado um sistema LPV como em (4.1), um grau  $g$ , parâmetros  $c_1 \geq 0$ ,  $c_2, d, T, \beta, \hat{\beta} > 0$ ,  $R \in \mathbb{S}_+^n$ , se existem matrizes  $Q_1 \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $Q_2 \in \mathbb{S}_+^r$ ;  $L_g \in \mathbb{H}^{p \times n}$  com grau  $g$  e escalares  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , tais que<sup>1</sup>

$$\begin{bmatrix} A(\alpha) \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 A^T(\alpha) + B_1(\alpha) L_g(\alpha) + L_g^T(\alpha) B_1^T(\alpha) - \beta \tilde{Q}_1 & B_2(\alpha) Q_2 \\ \star & -\hat{\beta} Q_2 \end{bmatrix} \prec 0, \quad (4.7)$$

$$\lambda_1 I \prec Q_1 \prec I, \quad (4.8)$$

$$\lambda_2 I \prec Q_2, \quad (4.9)$$

$$\begin{bmatrix} c_2 e^{-\beta T} & \sqrt{c_1} & \sqrt{d} \\ \star & \lambda_1 & 0 \\ \star & \star & \lambda_2 \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.10)$$

$$\tilde{Q}_1 = R^{-\frac{1}{2}} Q_1 R^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.11)$$

então existe um controlador por realimentação de estados com estrutura de uma matriz polinomial homogênea com grau  $g$  tal que o sistema em malha-fechada (4.2) é FTB em relação aos parâmetros  $(c_1, c_2, \mathcal{W}_d^\infty, T, R)$ , se  $\hat{\beta} = \beta$ , ou em relação aos parâmetros  $(c_1, c_2, \mathcal{W}_d^2, T, R)$ , se  $\hat{\beta} = 1$ . O ganho deste controlador é dado por

$$K_g(\alpha) = L_g(\alpha) \tilde{Q}_1^{-1} = \sum_{k \in I_h^{(g)}} \left( L_{k_1, \dots, k_N} \tilde{Q}_1^{-1} \right) \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N}. \quad (4.12)$$

*Demonstração.* Será utilizado o Lema 13 para realizar a síntese do controlador. Substituindo as matrizes do sistema em malha fechada dadas por (4.3) em 3.42, tem-se que

$$\begin{bmatrix} A(\alpha) \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 A^T(\alpha) + B_1(\alpha) K_g(\alpha) \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 K_g^T(\alpha) B_1^T(\alpha) & B_2(\alpha) Q_2 \\ \star & -\hat{\beta} Q_2 \end{bmatrix} \prec 0. \quad (4.13)$$

Utilizando a troca de variável

$$L_g(\alpha) = K_g(\alpha) \tilde{Q}_1,$$

é possível recuperar  $K_g(\alpha)$  como em (4.12), e a desigualdade (4.13) se torna igual a LMI (4.12) do teorema.

Será demonstrado agora como as LMIs (4.8), (4.9) e (4.10) implicam a condição (3.33) do Lema 13. Utilizando o Lema 17 com  $P_1 = Q_1^{-1}$ ,  $P_2 = Q_2^{-1}$ ,  $\mu_1 = \lambda_1^{-1}$ ,  $\mu_2 = \lambda_2^{-1}$  e  $\mu_3 = 1$ , e as

<sup>1</sup>A dependência temporal de  $\alpha(t)$  será omitida neste teorema e nos corolários a seguir para deixar a exposição mais clara.

identidades  $\lambda_{\min}^{-1}(M) = \lambda_{\max}(M^{-1})$  e  $\lambda_{\max}^{-1}(M) = \lambda_{\min}(M^{-1})$  (ver Proposição 28 do Anexo A), tem-se que

$$I \prec Q_1^{-1} \prec \lambda_1^{-1}I \quad (4.14)$$

$$Q_2^{-1} \prec \lambda_2^{-1}I \quad (4.15)$$

$$\frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{c_2}{\lambda_2} < c_2 e^{-\beta T} \quad (4.16)$$

implicam na condição (3.33) do Lema 13. Porém, (4.14) e (4.15) são equivalentes após uma inversão às LMIs (4.8) e (4.9), respectivamente e (4.16) é equivalente a (4.10) após uma aplicação do complemento de Schur:

$$\begin{cases} c_2 e^{-\beta T} > 0 \\ \frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{c_2}{\lambda_2} < c_2 e^{-\beta T} \end{cases} \iff \begin{bmatrix} c_2 e^{-\beta T} & \sqrt{c_1} & \sqrt{d} \\ \star & \lambda_1 & 0 \\ \star & \star & \lambda_2 \end{bmatrix} \succ 0.$$

Finalmente, a LMI (4.11) é exatamente a condição (3.34) do Lema 13.  $\square$

Relembrando os métodos de relaxações propostas para sistemas politópicos no Capítulo 2, tem-se o seguinte corolário.

**Corolário 19.** [114] *Sejam  $c_2^*(\bar{g})$ ,  $c_1^*(\bar{g})$  e  $d^*(\bar{g})$  respectivamente o mínimo valor obtido para  $c_2$ , o máximo valor obtido para  $c_1$  e o máximo valor obtido para  $d$  sujeito as condições (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) e (4.11) do Teorema 18 com  $g = \bar{g}$ . Então, tem-se que  $c_2^*(\bar{g} + 1) \leq c_2^*(\bar{g})$ ,  $c_1^*(\bar{g} + 1) \geq c_1^*(\bar{g})$  e  $d^*(\bar{g} + 1) \geq d^*(\bar{g})$ .*

*Demonstração.* Se existem matrizes  $Q_1 \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $Q_2 \in \mathbb{S}_+^r$ ;  $L_g \in \mathbb{H}^{p \times n}$  com grau  $g$  e escalares positivos reais  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , tais que (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) e (4.11) são verificadas, então como  $\alpha \in \Delta_N$ , a matriz polinomial homogênea

$$\left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \right) L_g$$

com grau  $\bar{g} + 1$  juntamente com  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  é uma solução de (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) e (4.11) com grau  $\bar{g} + 1$ .

Logo, a minimização de  $c_2$ , ou maximização de  $c_1$  ou  $d$ , sujeito as condições do Teorema 18 com  $\bar{g} + 1$  produz pelo menos o mesmo valor ótimo para  $c_2^*$ ,  $c_1^*$  ou  $d^*$  com  $g = \bar{g}$ .  $\square$

Isto significa que uma sequencia de relaxações de LMI menos conservadores podem ser obtidas com as condições do Teorema 18 com o aumento de grau  $g$ . Como consequência, o número de variáveis da LMI também é aumentado; usando a relaxação baseada no teorema de Pólya, porém, as condições podem ficar menos conservadores com o aumento de um grau de relaxação  $f$  sem aumento no número de decisões de variáveis para um grau constante  $g$ . Esta discussão é resumida no Corolário 20.

**Corolário 20.** [114] Dado um sistema LPV como em (4.1), um inteiro  $f \geq 0$ , um grau  $g$ , parâmetros  $c_1 \geq 0$ ,  $c_2, d, T, \beta, \hat{\beta} > 0$ ,  $R \in \mathbb{S}_+^n$ , se existem matrizes  $Q_1 \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $Q_2 \in \mathbb{S}_+^r$ ;  $L_g \in \mathbb{H}^{p \times n}$  com grau  $g$  e escalares  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , tais que (4.8), (4.9), (4.10), (4.11) e <sup>2</sup>

$$\left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^f \begin{bmatrix} A(\alpha) \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 A^T(\alpha) + B_1(\alpha) L_g(\alpha) + L_g(\alpha) B_1^T(\alpha) - \beta \tilde{Q}_1 & B_2(\alpha) Q_2 \\ \star & -\hat{\beta} Q_2 \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.17)$$

são verificadas, então existe um controlador por realimentação de estados com o ganho dado como em (4.12) tal que o sistema em malha-fechada (4.2) é FTB em relação aos parâmetros  $(c_1, c_2, \mathcal{W}_d^\infty, T, R)$ , se  $\hat{\beta} = \beta$ , ou em relação aos parâmetros  $(c_1, c_2, \mathcal{W}_d^2, T, R)$ , se  $\hat{\beta} = 1$ .

*Demonstração.* Segue-se diretamente do teorema de Pólya e do fato de que  $\alpha \in \Delta_N$ . □

### 4.3 Experimentos numéricos

Os experimentos foram feitos utilizando SeDuMi interfaceado pelo analisador ROLMIP 2.0.

#### 4.3.1 Exemplo 1

Este primeiro exemplo, de [44], consiste de um sistema variante no tempo que pode ser reescrito em uma estrutura politópica com os seguintes vértices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -11 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, \\ B_{11} = \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}, B_{21} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ -1 \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como exposto em [44], esse sistema é FTB com  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 10$ ,  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{0.5}^\infty$ ,  $T = 0.42s$ ,  $\beta = 1.1$  e  $R = I$  por meio de um controlador por realimentação de estados robusto. Este controlador é equivalente ao de Teorema 18 com  $g = 0$ .

É importante notar que este sistema não é assintoticamente estável, como pode ser facilmente checado pelo autovalor positivo do vértice  $A_2$ . Considerando um cenário diferente, onde os parâmetros estão disponíveis em tempo real, o método proposto em [44] também pode ser utilizado. Assumindo um valor de  $c_2 = 9.8$ , um pouco menor que o caso anterior, as condições em [44] não são mais capazes de fornecer um controlador por realimentação de estados que garante o sistema em malha fechada (4.2) ser FTB.

Por outro lado, Teorema 18 foi aplicado com  $g = 1$  podendo providenciar um ganho dependendo linearmente dos parâmetros na forma

$$K(\alpha) = \alpha_1 K_{1,0} + \alpha_2 K_{0,1}$$

---

<sup>2</sup>A dependência temporal de  $\alpha(t)$  será omitida neste corolário para deixar a exposição mais clara.

com as matrizes

$$K_{1,0} = \begin{bmatrix} -0.84124 & -3.1545 \end{bmatrix},$$

$$K_{0,1} = \begin{bmatrix} -0.70253 & -2.7773 \end{bmatrix}.$$

Considerando agora  $T = 1\text{s}$ ,  $\beta = 0.6$  e a classe de perturbações  $\mathcal{W}_{0.5}^2$ , os Corolários 19 e 20 são aplicados com a intenção de investigar o efeito de aumentar  $g$  e  $f$  na busca de menores cotas superiores atingidas pelas condições do Teorema 18: utilizando a abordagem proposta com  $g = 3$  e  $f = 2$  foi possível obter uma cota superior para  $c_2$  aproximadamente 4.2 vezes menor que a provida por [6, Teorema 2]. Os resultados desta busca estão resumidos na Tabela 4.1.

O número de variáveis escalares  $V$ , o número de linhas escalares  $L$  da LMI e o tempo medido  $t$  para resolver o problema de LMI são providenciados pelo *parser* ROLMIP [92].

Tabela 4.1: Mínima cotas superiores de  $c_2$  para valores diferentes do grau  $g$  obtidos usando o Teorema 18 e as abordagens de [6].

Método utilizado	$g$	$f$	$c_2$	$V$	$L$	$t$
[6, Teorema 1]	0	0	112.49	9	14	0.22s
[6, Teorema 2]	1	0	61.60	11	17	0.19s
Teorema 18	1	1	44.66	11	28	0.26s
	1	2	44.66	11	39	0.34s
	2	0	44.66	13	20	0.21s
	2	1	36.21	13	31	0.31s
	2	2	33.46	13	42	0.33s
	3	0	36.21	15	23	0.24s
	3	1	31.15	15	34	0.32s
	3	2	<b>26.81</b>	15	45	0.40s
	4	0	31.15	17	26	0.26s
	4	1	27.79	17	37	0.35s

De maneira geral, com o aumento de  $g$  e  $f$  pode-se notar o aumento do tempo  $t$  medido para rodar o algoritmo, visto que a complexidade deste depende de  $V$  e de  $L$ . Pode-se ainda ver pela Tabela 4.1 que para  $g = 1, \dots, 4$ , com o aumento do grau  $f$  houve melhorias sem aumentar o número  $V$ . Outro ponto interessante a ser observado na Tabela 4.1 é que aumentando  $f$  de 0 para 1 com  $g = 1, \dots, 4$  obteve-se a mesma cota superior para  $c_2$  que teria incrementando  $g$  em 1 e mantendo  $f = 0$  constante.

### 4.3.2 Exemplo 2

O segundo exemplo é adaptado de [106] considerando uma função variante no tempo  $\theta(t)$  na matriz  $A$ . Considerando os valores

$$A(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) & -0.4026 & -0.5796 & -0.5733 \\ 0.8984 & 0.0276 & -0.3622 & 0.9771 \\ -1.0667 & 2.8289 & -2.4719 & 1.0680 \\ -1.1599 & 0.1808 & -0.0779 & -1.2306 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde  $\theta(t) = 0.0884 |\sin(t)| + 1.0884 (1 - |\sin(t)|)$ .

Esse sistema pode ser descrito por um politopo com  $N = 2$ . Os vértices são obtidos considerando os valores mínimo e máximo de  $\theta(t)$ , dados por 0.0884 e 1.0884 respectivamente. O vetor de parâmetros é modelado pelo vetor  $\alpha \in \Delta_N$  variante no tempo cujas componentes são dadas por

$$\alpha_1(t) = |\sin(t)|,$$

$$\alpha_2(t) = 1 - |\sin(t)|.$$

Para condições iniciais iguais a zero, uma simulação foi feita no intervalo  $t \in [0, 11s]$  considerando que o sistema é afetado por um degrau unitário no tempo  $t = 1s$ . O comportamento das variáveis do espaço de estado do sistema em malha aberta pode ser vista na Figura 4.1. Pela curva mostrada, é evidente que o sistema não é FTS já que a condição  $x^T(t) R x(t) \leq c_2 = 50$  é violada para  $t > 9.6s$ .

O Teorema 18 foi então aplicado com os graus  $g = 0, 1$  e  $2$ , utilizando os parâmetros  $T = 11s$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 50$ ,  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1^\infty$  e  $R = 5I$ . Os seguintes controladores foram obtidos:

$$K_0 = \begin{bmatrix} 11.4169 & -4.9106 & -1.4545 & -4.9372 \end{bmatrix},$$

$$K_1(\alpha(t)) = \alpha_1(t) K_{10} + \alpha_2(t) K_{01},$$

$$K_2(\alpha(t)) = \alpha_1^2(t) K_{2,0} + \alpha_1(t) \alpha_2(t) K_{1,1} + \alpha_2^2(t) K_{0,2},$$

com as matrizes dadas por

$$K_{1,0} = \begin{bmatrix} 12.6621 & -5.1395 & -1.6034 & -5.2659 \end{bmatrix},$$

$$K_{0,1} = \begin{bmatrix} 11.0537 & -4.7956 & -1.3772 & -4.8096 \end{bmatrix},$$

$$K_{2,0} = \begin{bmatrix} 15.8084 & -6.4101 & -1.9485 & -7.9729 \end{bmatrix},$$

$$K_{1,1} = \begin{bmatrix} 11.9927 & -6.0836 & -1.2193 & -0.4973 \end{bmatrix},$$

$$K_{0,2} = \begin{bmatrix} 14.1894 & -6.0509 & -1.7219 & -7.5007 \end{bmatrix}.$$

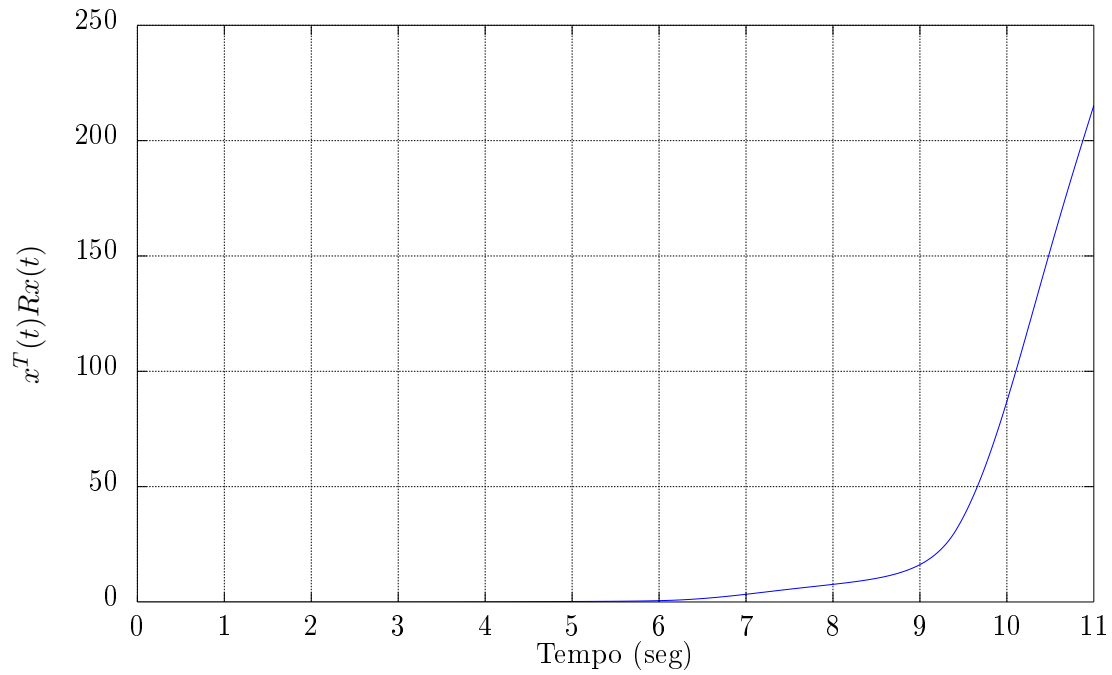


Figura 4.1: Norma quadrática ponderada por  $R$  dos estados do sistema em malha aberta.

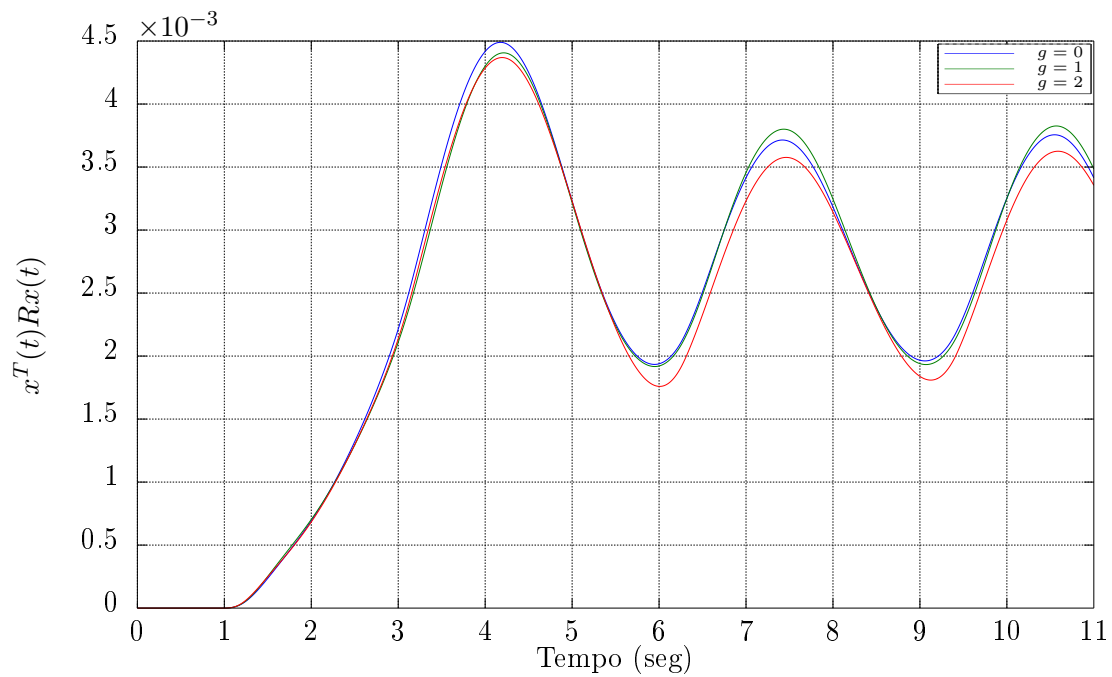


Figura 4.2: Norma quadrática ponderada por  $R$  dos estados do sistema em malha fechada.

Como se vê na Figura 4.2, os três controladores projetados conseguem garantir que o sistema em malha fechada seja FTB. Um ponto importante também a ser observado é que nos três casos, o máximo da função  $x^T(t)Rx(t)$  no intervalo  $[0, 11s]$  é muito menor que  $c_2 = 50$ , indicando o

conservadorismo do Teorema 18, visto que este é baseado em uma condição de análise apenas suficiente, mas não necessária. Novos estudos devem ter como objetivo critérios de análises menos conservadores mas ao mesmo tempo que sejam tratáveis computacionalmente.



## Capítulo 5

# Filtragem em tempo-finito

Neste capítulo é abordado o problema de estimação no contexto de estabilidade em tempo finito. Na Seção 5.1 o problema de estimação a ser resolvido será formulado e detalhado. Este problema pode ser resolvido com o filtro proposto na Seção 5.2, e para um caso particular deste problema de estimação, também pode ser feita uma outra abordagem para realizar a síntese do filtro. Esta é detalhada na Seção 5.3.

Os filtros podem ser projetados para dois cenários: no primeiro se tem uma incerteza paramétrica e o filtro projetado é o filtro robusto apresentado em [2]; no segundo se têm informações em tempo-real de parâmetros do sistema e estas informações podem ser utilizadas pelo filtro. Finalmente, para ilustrar o projeto desses filtros, alguns experimentos numéricos e um estudo de caso são feitos na Seção 5.4.

### 5.1 Descrição do problema

No contexto de filtragem em tempo finito, vale a pena mencionar, dentre outros, [116], que trata o problema de projeto de filtro para sistemas com saltos Markovianos. O filtro é obtido de tal modo que o erro é garantido ser estável em tempo finito usando para isso uma versão modificada da condição de análise apresentada em [44]. Problemas similares de filtragem são investigados em [117], onde um índice de performance  $L_2 - L_\infty$  é aplicado, e em [118] é considerado o problema de filtragem para sistemas singulares com saltos Markovianos. Em ambos casos, o erro de estimação é garantido ser limitado em tempo finito.

Diferente desses e de outros trabalhos anteriores da literatura, é utilizado para o projeto do filtro um resultado de análise matricial devido a N. Aronszajn que relaciona os autovalores de uma matriz Hermitiana positiva semi-definida com os autovalores dos blocos da diagonal principal. Com este resultado, é possível considerar uma matriz de Lyapunov sem ser bloco diagonal, uma estrutura conservadora por não considerar os efeitos de termos cruzados entre as variáveis de estado da planta e do filtro.

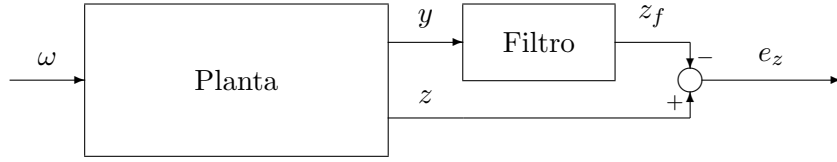


Figura 5.1: Arquitetura do filtro próprio de ordem completa.

Considere um sistema LPV dado por

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))\omega(t), \\
 y(t) &= C_y(\alpha(t))x(t) + D(\alpha(t))\omega(t), \\
 z(t) &= C_z(\alpha(t))x(t),
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor no espaço de estados,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  é a saída medida,  $z(t) \in \mathbb{R}^p$  é o sinal a ser estimado,  $\omega(t) \in \mathbb{R}^r$  é o ruído pertencente ou a classe  $\mathcal{W}_d^2$  ou a classe  $\mathcal{W}_d^\infty$  e  $\alpha(t) \in \Delta_N$ , para todo  $t \in [0, T]$ .

Todas as matrizes são reais com dimensões convenientes e pertencentes ao politopo

$$\mathcal{P} = \left\{ \left[ \begin{array}{c|c} A(\alpha(t)) & B(\alpha(t)) \\ \hline C_y(\alpha(t)) & D(\alpha(t)) \\ C_z(\alpha(t)) & - \end{array} \right] = \sum_{i=1}^N \alpha_i \left[ \begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_{yi} & D_i \\ C_{zi} & - \end{array} \right] \right\}.$$

Para a estimação de  $z(t)$  é proposto um filtro estritamente próprio de ordem completa cuja arquitetura é dada por

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_f(t) &= A_f(\alpha(t))x_f(t) + B_f(\alpha(t))y(t), \\
 z_f(t) &= C_f(\alpha(t))x_f(t),
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

onde  $x_f(t) \in \mathbb{R}^n$  é o estado do filtro e  $z_f(t) \in \mathbb{R}^p$  é a estimação do sinal dada pelo filtro.

Será apreciada a construção do filtro em dois cenários: em um cenário, será considerado que não se têm informação sobre o parâmetro  $\alpha(t)$  e que este parâmetro é uma incerteza variante no tempo; no outro cenário será permitido que haja informação disponível em tempo real de  $\alpha(t)$  para investigar o que pode ser ganho com esta informação adicional.

No primeiro cenário o filtro deverá ser robusto, ou seja,  $A_f$ ,  $B_f$  e  $C_f$  são invariantes no tempo e não dependem de  $\alpha(t)$  e no segundo cenário, o filtro será dependente de parâmetro e será assumido que  $A_f, B_f, C_f \in \mathbb{H}$ , todas com o mesmo grau  $g$ . O segundo cenário generaliza o primeiro cenário no sentido que se  $g = 0$ , então as matrizes não dependerão de  $\alpha(t)$  recaindo para o primeiro cenário.

Acoplando o filtro com a planta, as equações que descrevem a dinâmica do sistema aumentado podem ser dadas por

$$\begin{aligned}
 \dot{\varsigma}(t) &= \bar{A}(\alpha(t))\varsigma(t) + \bar{B}(\alpha(t))\omega(t), \\
 e_z(t) &= \bar{C}(\alpha(t))\varsigma(t),
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

com  $\varsigma(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & x_f^T(t) \end{bmatrix}^T$ ,  $e_z(t) = z(t) - z_f(t)$  e

$$\begin{aligned}\bar{A}(\alpha(t)) &= \begin{bmatrix} A(\alpha(t)) & 0 \\ B_f(\alpha(t)) C_y(\alpha(t)) & A_f(\alpha(t)) \end{bmatrix}, \\ \bar{B}(\alpha(t)) &= \begin{bmatrix} B(\alpha(t)) \\ B_f(\alpha(t)) D(\alpha(t)) \end{bmatrix}, \\ \bar{C}(\alpha(t)) &= \begin{bmatrix} C_z(\alpha(t)) & -C_f(\alpha(t)) \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{5.4}$$

ou, alternativamente, por

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(t) &= \bar{A}'(\alpha(t)) \sigma(t) + \bar{B}'(\alpha(t)) \omega(t), \\ e_z(t) &= \bar{C}'(\alpha(t)) \sigma(t),\end{aligned}\tag{5.5}$$

com  $\sigma(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & e_x^T(t) \end{bmatrix}^T$ , onde  $e_x := x - x_f$  é definido como o erro de observação do filtro<sup>1</sup>.

$$\begin{aligned}\bar{A}'(\alpha(t)) &= \begin{bmatrix} A(\alpha(t)) & 0 \\ A(\alpha(t)) - A_f(\alpha(t)) - B_f(\alpha(t)) C_y(\alpha(t)) & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{B}'(\alpha(t)) &= \begin{bmatrix} B(\alpha(t)) \\ B(\alpha(t)) - B_f(\alpha(t)) D \end{bmatrix}, \\ \bar{C}'(\alpha(t)) &= \begin{bmatrix} C_z(\alpha(t)) - C_f(\alpha(t)) & C_f(\alpha(t)) \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{5.6}$$

Em ambos casos deseja-se que o sistema aumentado seja FTB em relação a alguns parâmetros  $(c_1, c_2, \mathcal{W}, T, R)$  dados. No caso da realização dada por (5.3), almeja-se limitar tanto o estado da planta quanto o estado do filtro, isto é, que seja satisfeito

$$\varsigma^T(0) R \varsigma(0) \leq c_1 \implies \varsigma^T(t) R \varsigma(t) \leq c_2, \forall t \in [0, T], \forall \omega \in \mathcal{W}.\tag{5.7}$$

Já no caso da realização dada por (5.5), o que é almejado é limitar o estado da planta e o erro de observação do filtro, ou em outras palavras, que seja satisfeito

$$\sigma^T(0) R \sigma(0) \leq c_1 \implies \sigma^T(t) R \sigma(t) \leq c_2, \forall t \in [0, T], \forall \omega \in \mathcal{W}.\tag{5.8}$$

Também é desejado que o erro de filtragem  $z - z_f$  seja limitado de alguma forma. Verificou-se que uma hipótese razoável de limitação para o erro do filtro foi a de [109], a qual será chamada neste trabalho de  $\Omega$ -limitação: dado uma matriz  $\Omega \in \mathbb{S}_+^{2n}$ , o sistema (5.3) é dito ser  $\Omega$ -limitado em um tempo finito  $T$  se o erro de estimação satisfizer

$$e_z^T(t) e_z(t) < \varsigma^T(t) \Omega^{-1} \varsigma(t), \forall t \in [0, T]\tag{5.9}$$

e no caso do sistema (5.3), se satisfizer

$$e_z^T(t) e_z(t) < \sigma^T(t) \Omega^{-1} \sigma(t), \forall t \in [0, T].\tag{5.10}$$

---

<sup>1</sup>Apesar do filtro não ser um observador de Luenberger propriamente dito, achou-se conveniente usar esta terminologia para o erro  $x - x_f$ .

Como

$$\sigma = \Lambda \varsigma \text{ e } \varsigma = \Lambda \sigma, \text{ com } \Lambda = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

ambos os problemas são relacionados: se existem  $\bar{R}$  e  $\bar{\Omega}$  tais que (5.7) e (5.9) são satisfeitas, então  $R = \Lambda^T \bar{R} \Lambda$  satisfaz (5.8) e  $\Omega = \Lambda^{-1} \bar{\Omega} \Lambda^{-T}$  satisfaz (5.10) e, da mesma maneira, a recíproca é válida. Portanto, se existe um algoritmo que ache um filtro que faça (5.7) e (5.9) serem válidas para dados  $R$  e  $\Omega$ , para achar um filtro que faça (5.8) e (5.10) serem válidas para  $R$  e  $\Omega$  basta rodar tal algoritmo usando  $\Lambda^T R \Lambda$  para  $R$  e  $\Lambda^{-1} \Omega \Lambda^{-T}$  para  $\Omega$ . Na Seção 5.2 será proposto tal algoritmo no Teorema 21.

Já na Seção 5.3, será demonstrado que utilizando a hipótese razoável de usar uma  $R$  bloco diagonal em (5.8), digamos  $R = \text{diag}(R_p, R_e)$ , existe uma maneira mais direta de realizar a síntese do filtro. Tal escolha de  $R$  significa que pode-se limitar o estado da planta e o erro de observação do filtro de uma maneira independente.

## 5.2 Síntese do filtro

No Teorema 21 a seguir, serão apresentadas condições suficientes para realizar a síntese de um filtro para (5.1) de tal modo que o sistema aumentado (5.3) satisfaça (5.7) e (5.9). Pela relação apresentada em (5.11), também é possível utilizar o Teorema 21 para fazer a síntese de um filtro tal que o sistema aumentado (5.5) satisfaça (5.8) e (5.10).

Este filtro depende de maneira polinomial do parâmetro  $\alpha(t)$  com grau  $g$ , sendo que se  $g = 0$ , é considerado que o filtro é independente do parâmetro  $\alpha(t)$ , correspondendo ao filtro robusto proposto em [2].

É importante observar que as condições apresentadas para a síntese do filtro robusto em [2] podem parecer, à primeira vista, diferentes das apresentadas no Teorema 21 para o caso  $g = 0$ , porém nos teoremas do Anexo B é demonstrado que as condições são equivalentes.

**Teorema 21.** *Dado um sistema LPV conforme (5.1) e parâmetros  $c_1 \geq 0$ ,  $c_2, d, T, \beta, \hat{\beta} > 0$ ,  $R \in \mathbb{S}_+^{2n}$ , se existem matrizes  $Y \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $Z \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $W \in \mathbb{S}_+^r$ ,  $L \in \mathbb{H}^{n \times q}$ ,  $M \in \mathbb{H}^{n \times n}$  e  $F \in \mathbb{H}^{p \times n}$ , e escalares  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 > 0$  tais que<sup>2</sup>*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} & YB(\alpha) + L(\alpha)D(\alpha) \\ \star & A^T(\alpha)Z + ZA(\alpha) - \beta Z & ZB(\alpha) \\ \star & \star & -\hat{\beta}W \end{bmatrix} \prec 0, \quad (5.12)$$

$$\mathcal{M}_{11} = YA(\alpha) + A^T(\alpha)Y + L(\alpha)C_y(\alpha) + C_y^T(\alpha)L^T(\alpha) - \beta Y,$$

$$\mathcal{M}_{12} = YA(\alpha) + L(\alpha)C_y(\alpha) + M(\alpha) + A^T(\alpha)Z - \beta Z,$$

$$c_1 \lambda_1 + d \lambda_2 < c_2 e^{-\beta T}, \quad (5.13)$$

$$W \prec \lambda_2 I, \quad (5.14)$$

<sup>2</sup>A dependência temporal de  $\alpha(t)$  será omitida neste teorema para deixar a exposição mais clara.

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & Z \\ Z & Z \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Y & I \\ Z & 0 \end{bmatrix} \\ \star & \lambda_1 R \end{bmatrix} \succ 0, \quad (5.15)$$

$$\lambda_3 + \lambda_4 < \lambda_{\min}(R^{-1}), \quad (5.16)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_3 I & I \\ \star & Z \end{bmatrix} \succ 0, \quad (5.17)$$

$$\begin{bmatrix} Y + \lambda_4 I & Y \\ \star & Z \end{bmatrix} \succ 0, \quad (5.18)$$

$$\begin{bmatrix} Y & Z & C_z^T(\alpha) \\ \star & Z & C_z^T(\alpha) - F^T(\alpha) \\ \star & \star & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad (5.19)$$

então existe um filtro da forma (5.2) tal que o sistema aumentado (5.3) é FTB em relação a  $(c_1, c_2, \mathcal{W}_d^\infty, T, R)$ , se  $\hat{\beta} = \beta$ , ou FTB em relação a  $(c_1, c_2, \mathcal{W}_d^2, T, R)$ , se  $\beta = 1$ . Em ambos os casos, o erro de estimação satisfaz (5.9) com  $\Omega = \Gamma \tilde{Q}_1 \Gamma^T$ , onde

$$\Gamma = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Gamma_{22} \end{bmatrix},$$

com  $\Gamma_{22}$  não-singular. Uma realização deste filtro é dada pelas matrizes

$$\begin{aligned} A_f(\alpha) &= M(\alpha)(Z - Y)^{-1}, \\ B_f(\alpha) &= L(\alpha), \\ C_f(\alpha) &= F(\alpha)(\Gamma_{22}(Z - Y))^{-1}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

*Demonstração.* Para desenvolver o filtro será utilizada a condição de análise baseada em LMI do Lema 13 do Capítulo 3. Será demonstrado primeiro como a LMI (5.12) implica a condição (3.42). Substituindo (5.4) em (3.42), é obtido

$$\Xi_1(\alpha) := \begin{bmatrix} \bar{A}(\alpha) \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 \bar{A}^T(\alpha) - \beta \tilde{Q}_1 & \bar{B}(\alpha) Q_2 \\ \star & -\hat{\beta} Q_2 \end{bmatrix} \prec 0. \quad (5.21)$$

Observe que o bloco (1, 2) de (5.21), que é

$$\bar{B}(\alpha) Q_2 = \begin{bmatrix} B(\alpha) Q_2 \\ B_f(\alpha) D(\alpha) Q_2 \end{bmatrix},$$

fornece o termo quadrático  $B_f(\alpha) D(\alpha) Q_2$  nas variáveis  $B_f(\alpha)$  e  $Q_2$ . Para tornar os blocos (1, 2) e (2, 1) lineares nas variáveis, vamos eliminar a variável  $Q_2$  aplicando-se a seguinte transformação de congruência (ver Proposição 39 do Anexo A) em (5.21)

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_2^{-1} \end{bmatrix} \Xi_1(\alpha) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}(\alpha) \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 \bar{A}^T(\alpha) - \beta \tilde{Q}_1 & \bar{B}(\alpha) \\ \star & -\hat{\beta} Q_2^{-1} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Fazendo-se a mudança de variável  $W := Q_2^{-1} \succ 0$  tem-se que existem  $Q_1 \succ 0$ ,  $Q_2 \succ 0$  satisfazendo (5.21) se e somente se existirem  $Q_1 \succ 0$ ,  $W \succ 0$  satisfazendo

$$\Xi_2(\alpha) := \begin{bmatrix} \bar{A}(\alpha) \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 \bar{A}^T(\alpha) - \beta \tilde{Q}_1 & \bar{B}(\alpha) \\ \star & -\hat{\beta}W \end{bmatrix} \prec 0. \quad (5.22)$$

Nesta desigualdade, os blocos (1, 2), (2, 1) e (2, 2) são lineares nas variáveis  $B_f(\alpha)$  e  $W$ . Vamos considerar agora as seguintes partições como apresentadas em [1] no contexto de alocação de polos e  $\mathcal{D}$ -estabilidade (ver a Seção A.4 do Anexo A para algumas proposições relativas a esta partição):

$$\tilde{Q}_1 = \begin{bmatrix} X & U^T \\ U & \hat{X} \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q}_1^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V^T \\ V & \hat{Y} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} Y & I \\ V & 0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se que  $H$  é invertível se e somente se  $V$  é invertível. Por isso, apesar de se inserir conservadorismo, será suposto um  $V$  invertível. Neste caso,  $U$  também é invertível (ver a Proposição 45 e o Corolário 48 do Anexo A para a demonstração destas afirmações).

Com o objetivo de simplificar o bloco (1, 1), será aplicado uma transformação de congruência em (5.22) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} H^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Xi_2(\alpha) \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^T \bar{A}(\alpha) \tilde{Q}_1 H + H^T \tilde{Q}_1 \bar{A}^T(\alpha) H - \beta H^T \tilde{Q}_1 H & H^T \bar{B}(\alpha) \\ \star & -\hat{\beta}W \end{bmatrix} \prec 0. \quad (5.23)$$

Calculando então o primeiro termo do bloco (1, 1) e usando a identidade  $\tilde{Q}_1 \tilde{Q}_1^{-1} = I$ , tem-se

$$H^T \bar{A}(\alpha) \tilde{Q}_1 H = \begin{bmatrix} Y & V^T \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ B_f(\alpha) C_y(\alpha) & A_f(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & U^T \\ U & \hat{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & I \\ V & 0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$= \begin{bmatrix} Y & V^T \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ B_f(\alpha) C_y(\alpha) & A_f(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & U \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$= \begin{bmatrix} YA(\alpha) + V^T B_f(\alpha) C_y(\alpha) & V^T A_f(\alpha) \\ A(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & U \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

$$= \begin{bmatrix} YA(\alpha) + V^T B_f(\alpha) C_y(\alpha) & YA(\alpha) X + V^T B_f(\alpha) C_y(\alpha) X + V^T A_f(\alpha) U \\ A(\alpha) & A(\alpha) X \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

O produto de variáveis  $V^T B_f(\alpha)$  no bloco (1, 1) pode ser considerado linear na nova variável

$$L(\alpha) := V^T B_f(\alpha) \quad (5.28)$$

e pode-se recuperar  $B_f(\alpha)$  a partir de  $L(\alpha)$  com a hipótese de  $V$  invertível:

$$B_f(\alpha) = V^{-T} L(\alpha). \quad (5.29)$$

Após a troca de variável, a equação (5.27) se torna igual a:

$$H^T \bar{A}(\alpha) \tilde{Q}_1 H = \begin{bmatrix} YA(\alpha) + L(\alpha) C_y(\alpha) & YA(\alpha) X + L(\alpha) C_y(\alpha) X + V^T A_f(\alpha) U \\ A(\alpha) & A(\alpha) X \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

O segundo termo do bloco (1,1) de (5.23) é dado por

$$H^T \tilde{Q}_1 \bar{A}^T(\alpha) H = \left( H^T \bar{A}(\alpha) \tilde{Q}_1 H \right)^T \quad (5.31)$$

$$\stackrel{(5.30)}{=} \begin{bmatrix} A^T(\alpha) Y + C_y^T(\alpha) L^T(\alpha) & A^T(\alpha) \\ X A^T(\alpha) Y + X C_y^T(\alpha) L^T(\alpha) + U^T A_f(\alpha) V & X A^T(\alpha) \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

e o terceiro termo do bloco (1,1) de (5.23) é

$$\beta H^T \tilde{Q}_1 H = \beta \begin{bmatrix} Y & V^T \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & U^T \\ U & \hat{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & I \\ V & 0 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} Y & V^T \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & U \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

e somando estes com (5.30), tem-se que o bloco (1,1) de (5.23) é dado por

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \star & A(\alpha) X + X A^T(\alpha) - \beta X \end{bmatrix}, \quad (5.34)$$

$$\mathcal{M}_{11} = Y A(\alpha) + A^T(\alpha) Y + L(\alpha) C_y(\alpha) + C_y^T(\alpha) L^T(\alpha) - \beta Y,$$

$$\mathcal{M}_{12} = Y A(\alpha) X + L(\alpha) C_y(\alpha) X + V^T A_f(\alpha) U + A^T(\alpha) - \beta I$$

e que o bloco (1,2) de (5.23) é

$$H^T \bar{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} Y & V^T \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(\alpha) \\ B_f(\alpha) D(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y B(\alpha) + V^T B_f(\alpha) D(\alpha) \\ B(\alpha) \end{bmatrix} \stackrel{(5.28)}{=} \begin{bmatrix} Y B(\alpha) + L D(\alpha) \\ B(\alpha) \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

e portanto a LMI (5.23) é equivalente à:

$$\Xi_3(\alpha) := \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} & Y B(\alpha) + L(\alpha) D(\alpha) \\ \star & A(\alpha) X + X A^T(\alpha) - \beta X & B(\alpha) \\ \star & \star & -\hat{\beta} W \end{bmatrix} \prec 0. \quad (5.36)$$

Nota-se que o termo do bloco (1,2) de (5.36) pode ser escrito como

$$\mathcal{M}_{12} = (Y A(\alpha) + L(\alpha) C_y(\alpha) + V^T A_f(\alpha) U X^{-1} + A^T(\alpha) X^{-1} - \beta X^{-1}) X,$$

sendo que o termo  $V^T A_f(\alpha) U X^{-1}$  pode ser considerado como linear na variável  $M(\alpha) := V^T A_f(\alpha) U X^{-1}$ , permitindo a recuperação de  $A_f(\alpha)$  a partir de  $M(\alpha)$  usando novamente a hipótese de que  $V$  é invertível:

$$A_f(\alpha) = V^{-T} M(\alpha) X U^{-1}. \quad (5.37)$$

Isto sugere aplicar a seguinte transformação de congruência para linearizar (5.36) em termos de  $Z := X^{-1}$ :

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & X^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \Xi_3(\alpha) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & X^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \prec 0,$$

resultando na LMI (5.12).

Desenvolver-se-á agora as condições (3.33) e (3.34). Utilizando que  $\frac{1}{\lambda_{\min}(Q_1)} = \lambda_{\max}(Q_1^{-1})$ ,  $\frac{1}{\lambda_{\max}(Q_1)} = \lambda_{\min}(Q_1^{-1})$  (ver Proposição 28 do Anexo A) e lembrando que  $W = Q_2^{-1}$ , tem-se que a condição (3.33) é equivalente à

$$c_1 \lambda_{\max}(Q_1^{-1}) + d \lambda_{\max}(W) < c_2 e^{-\beta T} \lambda_{\min}(Q_1^{-1}). \quad (5.38)$$

Utilizando o Lema 17 do Capítulo 4 com  $P_1 = Q_1^{-1}$ ,  $P_2 = W$ ,  $\mu_1 = \lambda_1$ ,  $\mu_2 = \lambda_2$  e  $\mu_3 = 1$ , tem-se que uma condição suficiente para que (5.38) seja satisfeita é que exista escalares positivos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tais que

$$I \prec Q_1^{-1} \prec \lambda_1 I, \quad (5.39)$$

$$W \prec \lambda_2 I, \quad (5.40)$$

$$c_1 \lambda_1 + d \lambda_2 \prec c_2 e^{-\beta T}. \quad (5.41)$$

As condições (5.40) e (5.41) são exatamente as LMIs (5.14) e (5.13) deste teorema. Trabalhar-se-á agora na condição (5.39): utilizando agora (3.34), tem-se que (5.39) é equivalente à

$$\lambda_1 R^{-1} \prec \tilde{Q}_1 \prec R^{-1}.$$

Será desenvolvido primeiro a condição  $\lambda_1 R^{-1} \prec \tilde{Q}_1$ : aplicando-se a técnica de complemento de Schur, tem-se que

$$\tilde{Q}_1 - \lambda_1 R^{-1} \succ 0 \iff \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 & I \\ \star & \lambda_1 R \end{bmatrix} \succ 0$$

e aplicando em seguida a seguinte transformação de congruência se obtém

$$\begin{bmatrix} H^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 & I \\ \star & \lambda_1 R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Y & V^T \\ I & 0 \end{bmatrix} \\ \star & \lambda_1 R \end{bmatrix} \succ 0.$$

Finalmente, aplica-se mais uma transformação de congruência para escrever a desigualdade anterior em termos de  $Z = X^{-1}$ :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & X^{-1} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Y & V^T \\ I & 0 \end{bmatrix} \\ \star & \lambda_1 R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & X^{-1} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & Z \\ Z & Z \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Y & V^T \\ Z & 0 \end{bmatrix} \\ \star & \lambda_1 R \end{bmatrix} \succ 0, \quad (5.42)$$

que será a LMI (5.15) do teorema após uma escolha conveniente de  $V$  invertível.

Será desenvolvido agora a condição  $\tilde{Q}_1 \prec R^{-1}$ . Para isto, sejam escalares  $\lambda_3$  e  $\lambda_4$  satisfazendo as seguintes condições:

$$X \prec \lambda_3 I, \quad (5.43)$$

$$\hat{X} \prec \lambda_4 I, \quad (5.44)$$

$$\lambda_3 + \lambda_4 < \lambda_{\min}(R^{-1}). \quad (5.45)$$



Pela desigualdade de Aronszajn (ver Teorema 36 do Anexo A), tem-se então que

$$\begin{aligned}\lambda_{\max}(\tilde{Q}_1) &< \lambda_{\max}(X) + \lambda_{\max}(\hat{X}) \\ &< \lambda_3 + \lambda_4 \\ &< \lambda_{\min}(R^{-1}).\end{aligned}$$

A condição (5.43) pode ser reescrita em termos de  $Z = X^{-1}$  aplicando-se a técnica de complemento de Schur:

$$\lambda_3 I - X \succ 0 \iff \lambda_3 I - Z^{-1} \succ 0 \iff \begin{bmatrix} \lambda_3 I & I \\ I & Z \end{bmatrix} \succ 0,$$

que é justamente a LMI (5.17) do teorema. A condição (5.44) torna-se, usando a parametrização de  $\hat{X}$  por  $V$  (ver Proposição 46 do Anexo A), em

$$\hat{X} \prec \lambda_4 I \iff (V^{-T})(Y - X^{-1})XYV^{-1} \prec \lambda_4 I$$

Escolhendo  $V = I$ , a hipótese de invertibilidade de  $V$  é satisfeita, a condição (5.42) se torna linear e equivale a LMI (5.15) do teorema, e a condição (5.44) se torna igual a

$$Y + \lambda_4 I - YXY \succ 0,$$

a qual após aplicando a técnica de complemento de Schur, é possível reescrever como uma LMI em  $Z$ :

$$(Y + \lambda_4 I) - YZ^{-1}Y \succ 0 \iff \begin{bmatrix} Y + \lambda_4 I & Y \\ \star & Z \end{bmatrix} \succ 0,$$

que é justamente a LMI (5.18) do teorema.

Será demonstrado agora que a condição (5.19) garantirá que o filtro projetado é  $\Omega$ -limitado, tal que

$$\Omega = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \tilde{Q}_1 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Gamma_{22}^T \end{bmatrix} \succ 0.$$

Substituindo a dinâmica do erro, dada por (5.3) em (5.9) e utilizando complemento de Schur tem-se que

$$e_z^T e_z = \varsigma^T \bar{C}^T(\alpha) \bar{C}(\alpha) \varsigma < \varsigma^T(t) \Omega^{-1} \varsigma(t) \iff \begin{bmatrix} \Omega^{-1} & \bar{C}^T(\alpha) \\ \star & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad (5.46)$$

com

$$\Omega^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Gamma_{22}^{-T} \end{bmatrix} \tilde{Q}_1^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Gamma_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Gamma_{22}^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & V^T \\ V & \hat{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Gamma_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

$$= \begin{bmatrix} Y & V^T \Gamma_{22}^{-1} \\ \Gamma_{22}^{-T} V & \Gamma_{22}^{-T} \hat{Y} \Gamma_{22}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

Substituindo (5.49) em (5.46) e aplicando uma transformação de congruência como a seguir, é possível reescrever a desigualdade (5.46) em termos de  $\Gamma_{22}^T$ :

$$\xi_1(\alpha) := \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{22}^T & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & V^T \Gamma_{22}^{-1} & C_z^T(\alpha) \\ \star & \Gamma_{22}^{-T} \hat{Y} \Gamma_{22}^{-1} & -C_f^T(\alpha) \\ \star & \star & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & V^T & C_z^T(\alpha) \\ \star & \hat{Y} & -\Gamma_{22}^T C_f^T(\alpha) \\ \star & \star & I \end{bmatrix} \succ 0. \quad (5.50)$$

Utiliza-se então a transformação de congruência

$$\xi_2(\alpha) := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & U^T \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \xi_1(\alpha) \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & U \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & I & C_z^T(\alpha) \\ \star & X & X C_z^T(\alpha) - U^T \Gamma_{22}^T C_f^T(\alpha) \\ \star & \star & I \end{bmatrix} \succ 0 \quad (5.51)$$

para escrever  $\hat{Y}$  em termos de  $X$ , e em seguida a transformação de congruência

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & X^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \xi_2(\alpha) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & X^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & Z & C_z^T(\alpha) \\ \star & Z & C_z^T(\alpha) - Z U^T \Gamma_{22}^T C_f^T(\alpha) \\ \star & \star & I \end{bmatrix} \succ 0 \quad (5.52)$$

para escrever a última desigualdade em termos de  $Z = X^{-1}$ .

Afim de tornar linear o bloco (2, 3) da desigualdade (5.52), faz-se a troca de variáveis  $F(\alpha) := C_f(\alpha) \Gamma_{22} U Z$ . Com esta troca é possível recuperar  $C_f(\alpha)$  pela expressão

$$C_f(\alpha) = F(\alpha) (\Gamma_{22} U Z)^{-1} = F(\alpha) Z^{-1} U^{-1} \Gamma_{22}^{-1}, \quad (5.53)$$

e (5.52) se torna equivalente à

$$\begin{bmatrix} Y & Z & C_z^T(\alpha) \\ \star & Z & C_z^T(\alpha) - F^T(\alpha) \\ \star & \star & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad (5.54)$$

que é justamente a LMI (5.19) do teorema.

Por fim, utilizando as trocas de variáveis (5.37), (5.29) e (5.53) com a escolha de  $V = I$  (neste caso  $U = -(Y - Z) Z^{-1}$ , como pode ser visto na Proposição 46 no Anexo A), tem-se que a realização do filtro é dada por

$$\begin{cases} A_f(\alpha) = V^{-T} M(\alpha) X U^{-1} = M(\alpha) (Z - Y)^{-1}, \\ B_f(\alpha) = V^{-T} L(\alpha) = L(\alpha), \\ C_f(\alpha) = F(\alpha) Z^{-1} U^{-1} \Gamma_{22}^{-1} = F(\alpha) (\Gamma_{22} (Z - Y))^{-1}. \end{cases}$$

□

É importante notar que  $\Omega$  é um parâmetro de projeto do filtro que deve ser ajustado para uma adequada ponderação do tamanho do erro de estimativa da saída com o tamanho dos estados da planta e do filtro. Não há perda de generalidade em se escrever  $\Omega = \Gamma \tilde{Q}_1 \Gamma^T$  e considerar o

parâmetro  $\Gamma$  para ajuste ( $\Omega, \Gamma, \tilde{Q}_1$  são invertíveis). A escolha de  $\Gamma = \text{diag}(I, \Gamma_{22})$ , permite atuar diretamente na matriz  $C_f(\alpha)$  com um fator de escala dado por  $\Gamma_{22}$ , e conseqüentemente, melhorar a qualidade da realização  $\{A_f, B_f, C_f\}$  do filtro sem deteriorar o erro de estimativa. Em específico, tem-se para todo  $t \in [0, T]$  que

$$\begin{aligned} e_z^T(t)e_z(t) &< \varsigma^T(t) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Gamma_{22}^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & I \\ I & (Y - Z)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Gamma_{22}^{-1} \end{bmatrix} \varsigma(t) \\ &= \varsigma^T(t) \begin{bmatrix} Y & \Gamma_{22}^{-1} \\ \Gamma_{22}^{-T} & \Gamma_{22}^{-T} (Y - Z)^{-1} \Gamma_{22}^{-1} \end{bmatrix} \varsigma(t) \end{aligned}$$

e apesar da cota superior para  $e_z^T e_z$  depender das variáveis  $Y$  e  $Z$ , pode-se regular parcialmente esta dependência com o ajuste da matriz  $\Gamma_{22}$ . De fato, quanto maior  $\det \Gamma_{22}$ , menor a influência de  $Y$  e  $Z$  no bloco  $(2, 2)$  de  $\Omega^{-1}$ . É importante notar também que o bloco  $(1, 1)$  de  $\Omega^{-1}$  depende apenas da variável  $Y$  e não sofre influência de  $\Gamma_{22}$  e portanto, pode ser que mesmo com o ajuste de  $\Gamma_{22}$  não se tenha uma performance aceitável até ser encontrada uma outra realização com um  $Y$  diferente.

É interessante notar também o uso da desigualdade de Aronszajn (Teorema 36 do Anexo A), que relaciona os autovalores de uma matriz Hermitiana positiva-definida com os autovalores dos blocos diagonais. Este resultado possibilitou considerar a matriz da função candidata de Lyapunov sem restrições, um fato que aparentemente não foi explorado na literatura até no contexto de estabilidade em tempo finito - por exemplo, nos trabalhos [116, 119, 117, 118] usa-se uma matriz bloco diagonal, uma estrutura mais conservadora por não considerar os termos cruzados entre as variáveis de estado da planta e do filtro.

Finalmente, outro ponto importante a se observar é que o filtro é obtido por um problema de LMI cuja condições são apenas suficientes para se ter o sistema aumentado FTB, e portanto a não existência de uma solução do problema de LMI não necessariamente implica que um filtro não exista; conforme discutido no Capítulo 2, porém, com o aumento do grau  $g$  do filtro, pode ser que as condições de síntese fiquem menos conservadoras: por exemplo, pode ser que não haja um filtro robusto resolvendo o problema, mas haja um filtro dependendo de  $\alpha(t)$  polinomialmente com um grau suficientemente grande que resolva o problema.

No entanto, verificou-se numericamente em diversos testes que isto não ocorre. Com o mesmo resultado desanimador, em diversos testes de otimização de algum parâmetro de FTB (como por exemplo  $c_2$ ) não houve um ganho considerável para a variável sendo otimizada com o aumento de  $g$  e  $f$ , como ocorreu com o controle projetado no Capítulo 4. Em outras palavras, aparentemente não há ganhos neste contexto com o acréscimo de informação de  $\alpha(t)$  no filtro.

Apesar disso, verificou-se numericamente que houve uma melhoria significativa não supondo mais a variável  $Z$  constante, mas sim com uma estrutura polinomial com grau  $g > 0$ . No entanto, se é imposto uma estrutura dependente de  $\alpha(t)$  nessa variável, faz-se com que seja necessário impor dependência de  $\alpha(t)$  também na variável  $\tilde{Q}_1$ : isto significa que esta possui derivada não nula, e o Lema 13 de análise baseado em LMI acaba se tornando então numa tão evitada DMI.

Uma alternativa tentada para contornar este problema foi a proposta da condição de análise

do Teorema 15 baseada em Finsler: neste caso, poderia se introduzir uma estrutura polinomial nas variáveis extras introduzidas pelo lema de Finsler enquanto  $\tilde{Q}_1$  é mantida independente de  $\alpha(t)$ . Contudo, conforme já comentado no Capítulo 3, a realização de síntese utilizando esta condição é mais difícil. Substituindo as matrizes do sistema aumentado nesta condição se encontra uma BMI a qual não foi possível transformar em uma LMI ou até mesmo resolver numericamente para vários exemplos. Outra alternativa, que ainda será estudo de investigação, será a de supor uma hipótese, talvez até desnecessariamente grosseira, de que o parâmetro  $\alpha$  seja suficientemente lento no tempo a fim de que a derivada de  $\tilde{Q}_1$  seja aproximadamente zero para tentar evitar uma abordagem por DMI.

### 5.3 Síntese alternativa do filtro com $R$ diagonal

No caso em que o projetista desejar limitar o estado da planta e o erro de observação do filtro de uma maneira desacoplada, pode-se utilizar uma matriz diagonal  $R = \text{diag}(R_p, R_e)$ . Daí, a condição (5.10) se torna

$$x^T(0) R_p x(0) + e_x^T(0) R_e e_x(0) \leq c_1 \implies x^T(t) R_p x(t) + e_x^T(t) R_e e_x(t) \leq c_2, \forall t \in [0, T], \forall \omega \in \mathcal{W}. \quad (5.55)$$

As matrizes  $R_p$  e  $R_e$  ponderam a importância entre limitar o estado da planta e o erro da observação do filtro: quanto maior a norma de  $R_p$  (ou de  $R_e$ ), mais restrito deve ficar o estado da planta (ou o erro de observação do filtro). O caso escalar é ilustrado na Figura 5.2.

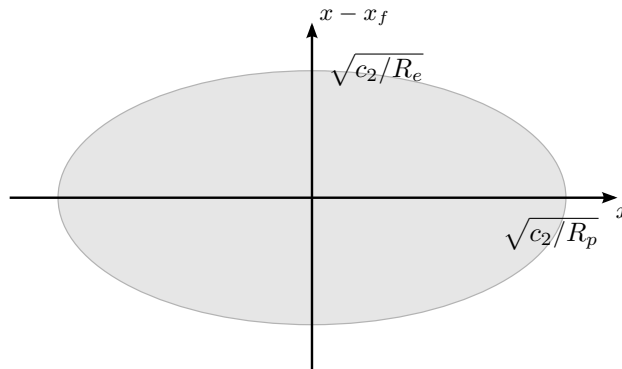


Figura 5.2: Elipse limitando o estado da planta e o erro de observação no caso de um sistema escalar.

Como será visto no Teorema 22, com essa escolha de  $R$  diagonal, é permitido uma outra abordagem para realizar a síntese do filtro.

**Teorema 22.** *Dado um sistema LPV conforme (5.1) e parâmetros  $c_1 \geq 0$ ,  $c_2, d, T, \beta, \hat{\beta} > 0$ ,  $R_p, R_e \in \mathbb{S}_+^n$ , se existem matrizes  $Y \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $Z \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $W \in \mathbb{S}_+^r$ ,  $L \in \mathbb{H}^{n \times q}$ ,  $M \in \mathbb{H}^{n \times n}$  e  $F \in \mathbb{H}^{p \times n}$ ,*

e escalares  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$  tais que<sup>3</sup>

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11}(\alpha) & YA(\alpha) + L(\alpha)C_y + M(\alpha) + A^T(\alpha)Z - \beta Z & YB(\alpha) + L(\alpha)D(\alpha) \\ \star & A^T(\alpha)Z + ZA(\alpha) - \beta Z & ZB(\alpha) \\ \star & \star & -\hat{\beta}W(\alpha) \end{bmatrix} \prec 0, \quad (5.56)$$

$$\mathcal{M}_{11}(\alpha) = YA(\alpha) + A^T(\alpha)Y + LC_y(\alpha) + C_y^T(\alpha)L^T - \beta Y,$$

$$c_1\lambda_1 + d\lambda_2 < c_2e^{-\beta T}\lambda_3, \quad (5.57)$$

$$W \prec \lambda_2 I, \quad (5.58)$$

$$\lambda_3 R_p \prec Z \prec \lambda_1 R_p, \quad (5.59)$$

$$\lambda_3 R_e \prec Y - Z \prec \lambda_1 R_e, \quad (5.60)$$

$$\begin{bmatrix} Y - Z & 0 & F^T(\alpha) \\ \star & Z & C_z^T(\alpha) - F^T(\alpha) \\ \star & \star & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad (5.61)$$

então existe um filtro da forma (5.2) tal que o sistema aumentado (5.5) é FTB em relação a  $(c_1, c_2, \mathcal{W}_d^\infty, T, \text{diag}(R_p, R_e))$ , se  $\hat{\beta} = \beta$ , ou FTB em relação a  $(c_1, c_2, \mathcal{W}_d^2, T, \text{diag}(R_p, R_e))$ , se  $\beta = 1$ . Em ambos os casos, o erro de estimação satisfaz (5.10) com  $\Omega = \Lambda\Gamma\tilde{Q}_1(\Lambda\Gamma)^T$ , onde

$$\Gamma = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Gamma_{22} \end{bmatrix},$$

com  $\Gamma_{22}$  não-singular. Uma realização deste filtro é dada pelas matrizes

$$\begin{aligned} A_f(\alpha) &= (Z - Y)^{-1}M(\alpha), \\ B_f(\alpha) &= (Z - Y)^{-1}L(\alpha), \\ C_f(\alpha) &= F(\alpha)\Gamma_{22}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

*Demonstração.* Utilizando a relação (5.11) entre  $\sigma$  e  $\varsigma$ , tem-se que

$$\sigma^T \begin{bmatrix} R_p & 0 \\ 0 & R_e \end{bmatrix} \sigma = \varsigma^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_p & 0 \\ 0 & R_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \varsigma = \varsigma^T \begin{bmatrix} R_p + R_e & -R_e \\ -R_e & R_e \end{bmatrix} \varsigma$$

e que portanto a condição (5.55) é equivalente a

$$\varsigma^T(0) \begin{bmatrix} R_p + R_e & -R_e \\ -R_e & R_e \end{bmatrix} \varsigma(0) < c_1 \implies \varsigma^T(t) \begin{bmatrix} R_p + R_e & -R_e \\ -R_e & R_e \end{bmatrix} \varsigma(t) < c_2, \quad \forall t \in [0, T], \forall \omega \in \mathcal{W}.$$

À vista disso, utilizando

$$R = \begin{bmatrix} R_p + R_e & -R_e \\ -R_e & R_e \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

na demonstração do Teorema 21, vê-se que a LMI (5.12) implica a condição (3.42) do Lema 13 e que (5.61) implica a propriedade de  $\Omega$ -limitação com  $\Omega = \Lambda\Gamma\tilde{Q}_1(\Lambda\Gamma)^T$ . A novidade na demonstração

<sup>3</sup>A dependência temporal de  $\alpha(t)$  será omitida novamente neste teorema para deixar a exposição mais clara.

será justamente mostrar como as LMIs (5.57), (5.58), (5.59) e (5.60) implicam as condições (3.33) e (3.34) do Lema 13.

Utilizando novamente que  $\frac{1}{\lambda_{\min}(Q_1)} = \lambda_{\max}(Q_1^{-1})$ ,  $\frac{1}{\lambda_{\max}(Q_1)} = \lambda_{\min}(Q_1^{-1})$  (ver Proposição 28 do Anexo A) e que  $W = Q_2^{-1}$ , tem-se que a condição (3.33) é equivalente à

$$c_1 \lambda_{\max}(Q_1^{-1}) + d \lambda_{\max}(W) < c_2 e^{-\beta T} \lambda_{\min}(Q_1^{-1}). \quad (5.64)$$

Pelo Lema 17 do Capítulo 4 com  $P_1 = Q_1^{-1}$ ,  $P_2 = W$ ,  $\mu_1 = \lambda_1$ ,  $\mu_2 = \lambda_2$  e  $\mu_3 = \lambda_3$ , tem-se que uma condição suficiente para que (5.64) seja satisfeita é que exista escalares positivos  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  tais que

$$\lambda_3 I \prec Q_1^{-1} \prec \lambda_1 I, \quad (5.65)$$

$$W \prec \lambda_2 I, \quad (5.66)$$

$$c_1 \lambda_1 + d \lambda_2 < c_2 e^{-\beta T} \lambda_3. \quad (5.67)$$

As condições (5.66) e (5.67) são exatamente as LMIs (5.58) e (5.57), respectivamente.

Utilizando agora a condição (3.34), tem-se que (5.65) é equivalente à

$$\lambda_3 R \prec \begin{bmatrix} Y & V^T \\ V & \hat{Y} \end{bmatrix} \prec \lambda_1 R, \quad (5.68)$$

onde  $R$  é dada por (5.63) e  $\hat{Y} = V(Y - X^{-1})^{-1}V^T$ , pela Proposição 46 do Anexo A.

Escolhendo  $V = -(Y - X^{-1})$  para cancelar o termo não linear e utilizando a troca de coordenadas  $Z = X^{-1}$ , (5.68) se torna

$$\lambda_3 R \prec \begin{bmatrix} Y & Z - Y \\ Z - Y & Y - Z \end{bmatrix} \prec \lambda_1 R. \quad (5.69)$$

Multiplicando (5.69) à esquerda por  $H^T$  e à direita por  $H$ , com

$$H = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix}$$

tem-se que (ver Proposição 39 do Anexo A)

$$\lambda_3 \begin{bmatrix} R_p & 0 \\ 0 & R_e \end{bmatrix} \prec \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & Y - Z \end{bmatrix} \prec \lambda_1 \begin{bmatrix} R_p & 0 \\ 0 & R_e \end{bmatrix}. \quad (5.70)$$

Como a desigualdade (5.70) é entre matrizes bloco diagonal, é imediato que tal desigualdade equivale as LMIs (5.59) e (5.60) deste Teorema.  $\square$

É importante notar que, em contraste com um cenário clássico onde a estabilidade de Lyapunov de  $x - x_f$  implica a estabilidade de  $z - z_f$  usando um observador de Luenberger como um filtro, a restrição do erro  $x - x_f$  em uma região durante um horizonte de tempo finito não implica

necessariamente que  $z - z_f$  satisfaça a mesma restrição. Porém, com a propriedade de  $\Omega$ -limitação, garante-se uma certa limitação do erro de estimação.

É interessante notar também que no Teorema 22 não houve necessidade de inserir conservadorismo forçando a variável  $\mu_3$  no Lema 17 para 1, diferentemente do desenvolvimento do filtro do Teorema 21 e do controlador do Teorema 18.

## 5.4 Experimentos numéricos

Os experimentos foram feitos utilizando SeDuMi interfaceado pelo analisador ROLMIP 2.0.

### 5.4.1 Exemplo 1

Considere o sistema (5.1) com as matrizes a seguir

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & \alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0.1 \end{bmatrix}, \quad C_z = \begin{bmatrix} 0.6 & 1 \end{bmatrix},$$

e com a incerteza  $\alpha$  considerada invariante no tempo, pertencente ao intervalo  $-2 \leq \alpha \leq -1$ .

Usando o Teorema 21 com  $T = 2s$ ,  $\Gamma_{22} = 0.01$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 2$ ,  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_2^\infty$  e  $R = 5I$ , um filtro robusto da forma (5.2) foi obtido com as matrizes dadas por

$$A_f = \begin{bmatrix} -32.7976 & -0.7503 \\ -6.5276 & -39.9412 \end{bmatrix},$$

$$B_f = \begin{bmatrix} 2.1506 \\ -1.7790 \end{bmatrix},$$

$$C_f = \begin{bmatrix} -6.1400 & -19.5852 \end{bmatrix}.$$

Com o propósito de ilustração, uma simulação no domínio do tempo foi realizada no intervalo  $t \in [0, 2s]$  considerando condições iniciais igual a zero, três valores diferentes para  $\alpha$  e uma perturbação dada por

$$\omega(t) = 1.2e^{-0.2t} \sin(t).$$

Os resultados podem ser vistos na Figura 5.3. Para cada valor de  $\alpha$ , os sinais estimados pelo filtro e os sinais a serem estimados foram plotados em pares de mesma cor.

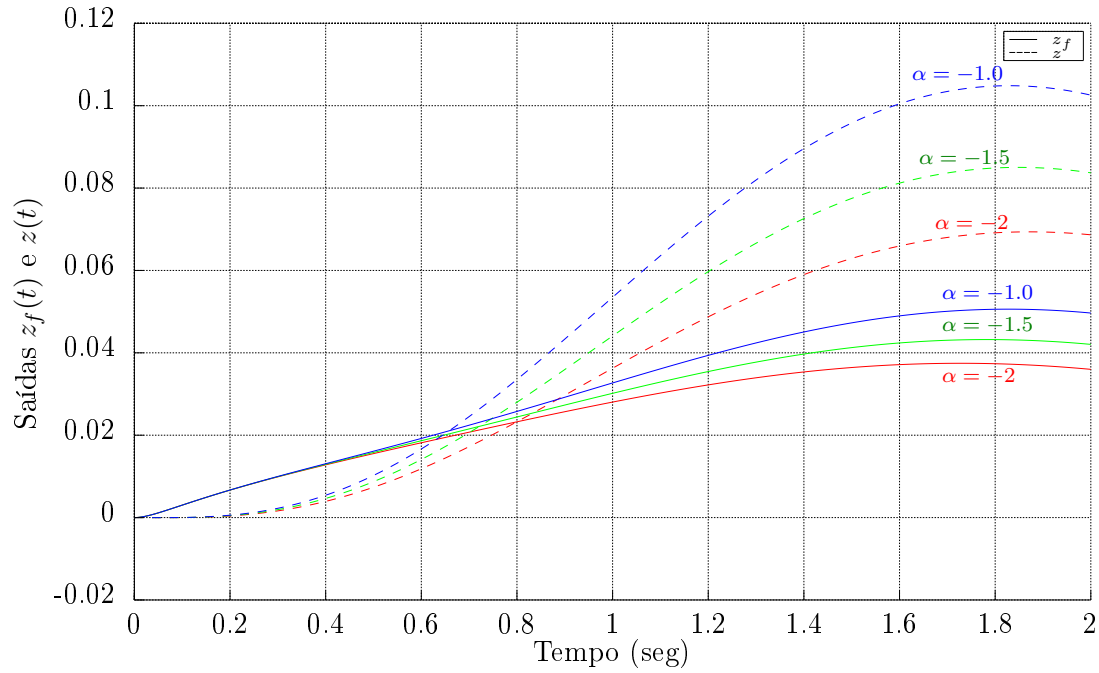


Figura 5.3: Simulação no domínio do tempo considerando  $\alpha = -2, -1.5, -1$ .

Em todos estes casos, vê-se que apesar da escolha de  $\Gamma_{22}$  não ter anulado o erro de estimação dentro do horizonte de tempo finito, garantiu que houvesse um erro máximo de aproximadamente 0.06. A dificuldade em se ter um erro de estimação nulo no horizonte de tempo finito é justamente o pouco tempo em que o filtro possui para estimar dinamicamente a saída  $z$ .

O comportamento das variáveis do espaço de estado do sistema aumentado pode ser visto na simulação da Figura 5.4, que foi feita considerando condições iniciais iguais a zero e com  $\alpha$  variando de  $-2$  a  $1$  com um passo incremental de  $0.025$ . Pela análise da Figura 5.4 fica evidente que o filtro robusto pode garantir a condição  $\zeta^T(t) R \zeta(t) \leq c_2 = 2$  para todo o conjunto de incertezas.



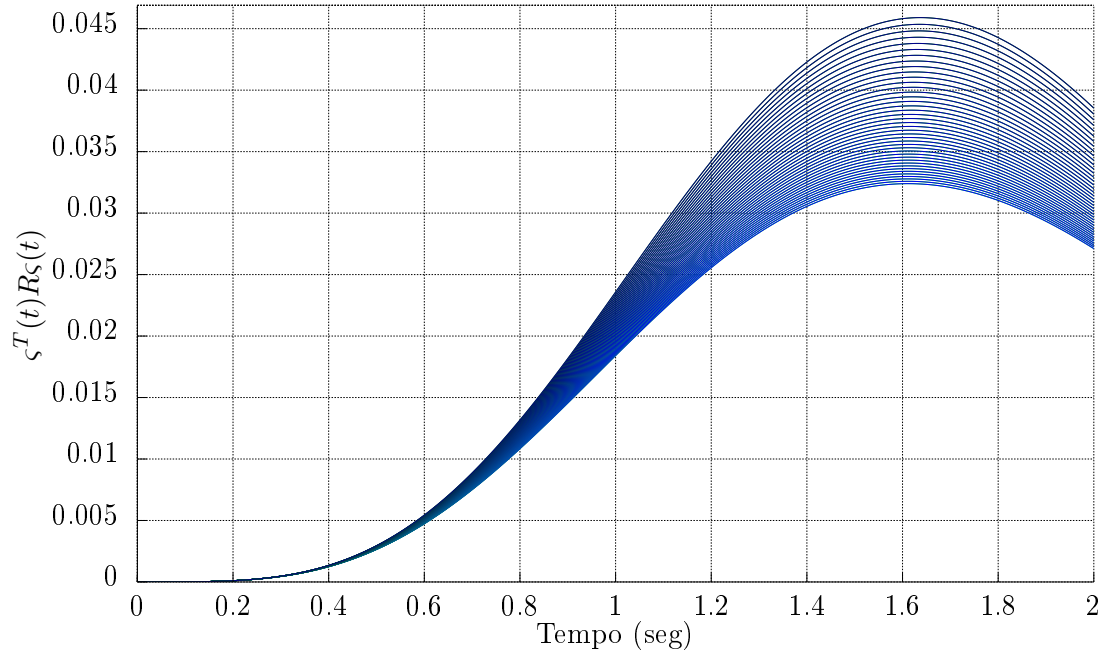


Figura 5.4: Norma quadrática ponderada dos estados do sistema aumentado.

É importante verificar que a Figura 5.4 revela um grau de conservadorismo dos resultados desse filtro, provavelmente relacionado ao uso do Lema 13, que é apenas um critério suficiente para analisar se um sistema é FTB. Trabalhos futuros tem como objetivo investigar condições menos conservadoras para a análise do sistema mas ainda computacionalmente tratáveis.

### 5.4.2 Exemplo 2

Será utilizado agora o Teorema 22 em um estudo de caso adaptado de [120, pp.115-118] para ilustrar a aplicação do mesmo. Será projetado um filtro robusto para a dinâmica linearizada dos eixos de rolamento/guinada de uma espaçonave que emprega três volantes de inércia como atuadores. É assumido que a matriz de inércia  $I$  da espaçonave possui produtos de inércia zero, ou seja, a matriz de inércia  $I$  é dada pela matriz diagonal

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}.$$

O modelo dos eixos de rolamento/guinada da espaçonave é tirado de [120, pp.115-118] e é

descrito pelas equações dinâmicas

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_3 \\ \dot{h}_1 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -n & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3n^2\Delta_1 & 0 & 0 & -n\Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n\Delta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \\ \omega_1 \\ \omega_3 \\ h_1 \\ h_3 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1}, \quad \Delta_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3},$$

onde  $n$  é a velocidade angular orbital,  $\theta_1$  o ângulo de rolamento,  $\theta_3$  o ângulo de guinada,  $\omega$  o vetor de velocidade angular e  $h$  o vetor do momento angular total dos volantes de inércia.

Os eixos da espaçonave são mostrados na Figura 5.5 e os valores numéricos desses parâmetros juntamente com as condições iniciais consideradas são mostradas na Tabela 5.1.

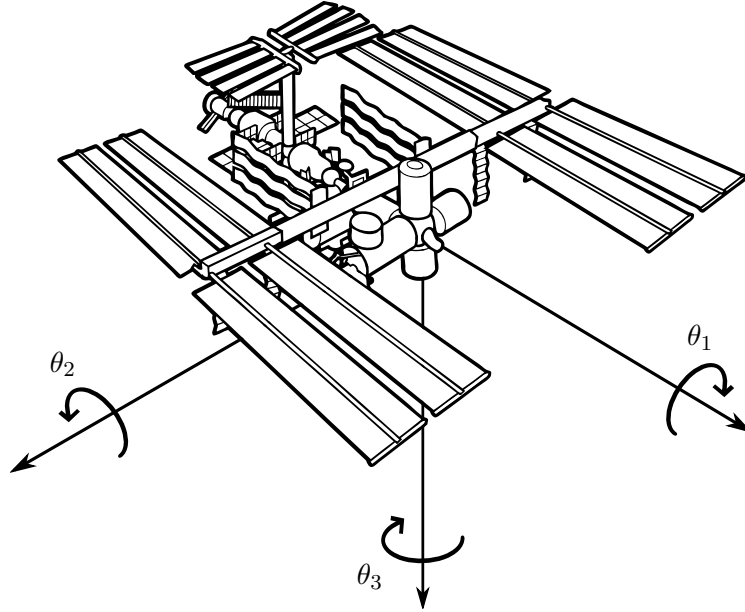


Figura 5.5: Referência acoplado a espaçonave do Exemplo 2.

No cenário proposto, é desejado estimar o ângulo de guinada com as medidas do ângulo de rolamento, considerando que este é perturbado por sinais de  $\mathcal{W}_d^\infty$ . Portanto, as matrizes  $C_y$ ,  $C_z$  e  $D$  de (5.1) são dadas por

$$C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = 1.$$

<sup>4</sup>1 slug  $\approx$  14.59 kg, 1 lb  $\approx$  0.45 kg, 1 ft  $\approx$  0.30 m.

Tabela 5.1: Valores dos parâmetros físicos utilizados para o exemplo da espaçonave

Parâmetro	Valor	Unidade <sup>4</sup>
$I_1$	$48.28 \times 10^6 \leq I_1 \leq 52.28 \times 10^6$	slug · ft <sup>2</sup>
$I_2$	$8.80 \times 10^6 \leq I_2 \leq 12.80 \times 10^6$	slug · ft <sup>2</sup>
$I_3$	$56.57 \times 10^6 \leq I_3 \leq 60.57 \times 10^6$	slug · ft <sup>2</sup>
$n$	0.0011	rad/s
$\theta_1(0)$	0.1	rad
$\theta_3(0)$	0.1	rad
$\omega_1(0)$	0.01	rad/s
$\omega_3(0)$	0.01	rad/s
$h_1(0)$	0.1	ft · lb · s
$h_3(0)$	0.1	ft · lb · s

Para parâmetros de FTB dados por  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 8$ ,  $d = 2$ ,  $T = 1s$ ,  $R_e = 4I$  e  $R_p = 4I$ , é utilizado o Teorema 22 com  $g = 0$ ,  $\beta = 0.5$  e  $\Gamma_{22} = 30$  para projetar um filtro robusto como solução do problema de factibilidade das LMIs correspondentes. Esta escolha de  $\Gamma_{22}$  foi feita ajustando esse parâmetro até se ter um erro máximo aceitável de estimação no horizonte de tempo finito. É obtido então as seguintes matrizes para (5.2):

$$A_f = \begin{bmatrix} 0.023 & 0.001 & 0.856 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.001 & 0.025 & 0.000 & 0.858 & 0.000 & 0.000 \\ -0.034 & 0.000 & 0.052 & 0.001 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.031 & 0.001 & 0.050 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.080 & 0.001 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.001 & -0.080 \end{bmatrix},$$

$$B_f = \begin{bmatrix} 0.004 \\ 0.000 \\ 0.004 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix},$$

$$C_f = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.017 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}.$$

Na Figura 5.6 é exibido uma simulação feita sobre o intervalo  $t \in [0, 1s]$  com uma entrada de perturbação dada por

$$\omega(t) = 1.2e^{-0.2} \sin(t).$$

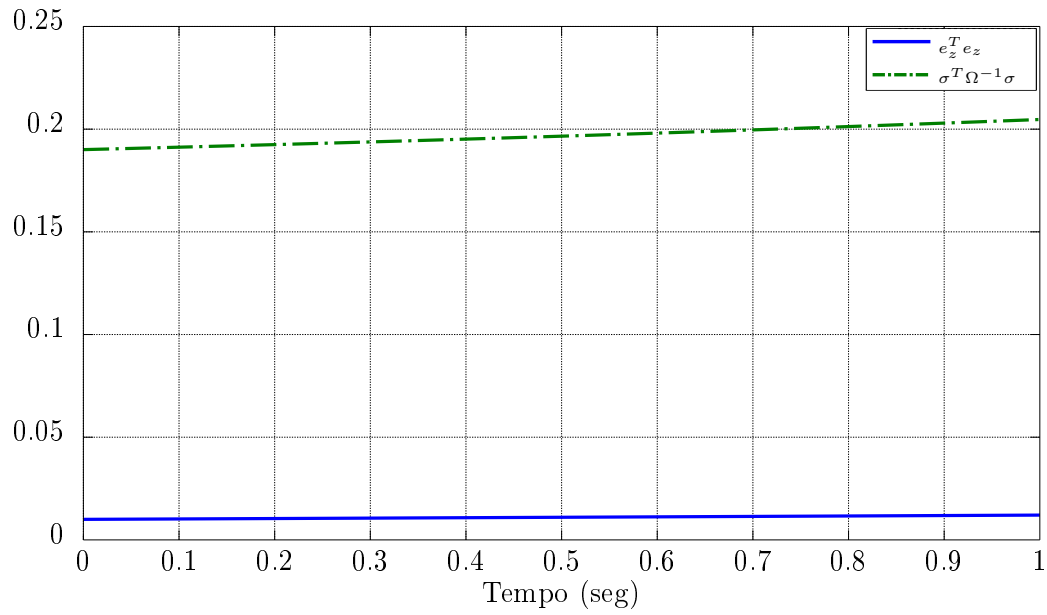


Figura 5.6: Simulação comparando a norma do erro com o limite imposto por  $\Omega$ .

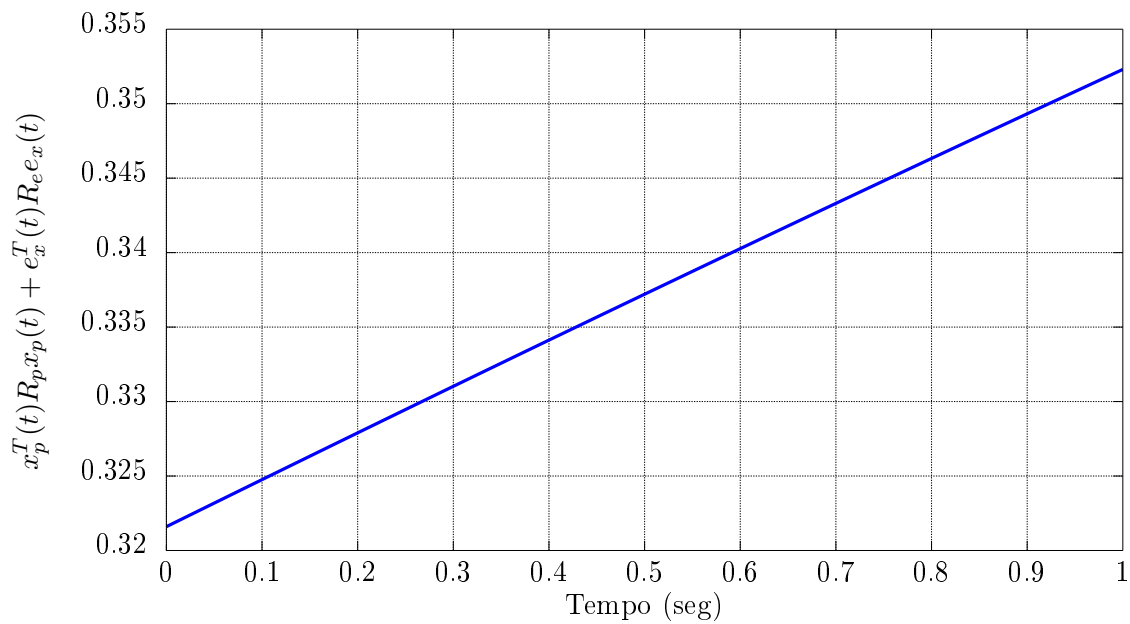


Figura 5.7: Soma da norma quadrática ponderada dos estados da planta e do erro de observação.

Conforme pode ser visto na Figura 5.6, o filtro projetado satisfaz a propriedade de  $\Omega$ -limitação desejada. Já pela Figura 5.7 pode-se ver que o filtro satisfaz a condição (5.55), com o valor máximo obtido para  $x_p^T(t) R_p x_p(t) + e_x^T(t) R_e e_x(t)$  no intervalo  $t \in [0, 1]$  de aproximadamente 0,352, 4,40% do valor de  $c_2 = 8$ . Isto indica novamente o conservadorismo da condição de análise utilizada.

## Capítulo 6

# Conclusão

Uma revisão das abordagens para a análise FTB de um sistema via LMI e DMI foi feita no Capítulo 3. Em particular, foi feita uma análise mais rigorosa das condições baseadas em DMI mostrando que estas implicam num caso de FTB definido aqui como FTB em quase toda parte. Também foram propostas novas condições de análise, em particular uma baseada no lema de Finsler. O estudo deste lema possibilitou uma nova generalização do lema de Finsler, dado no Colorário 67 do Anexo A.

No Capítulo 4 foram obtidas condições em termos de LMI para o projeto de um controlador por realimentação de estados com estrutura de matriz polinomial homogênea, de tal forma que o controlador obtido garante que o sistema em malha fechada é FTB - conforme o grau  $g$  deste controlador aumenta ou o parâmetro de relaxação  $f$  introduzido pelo teorema de Pólya aumenta, resultados menos conservadores são obtidos. Este controlador resultou a publicação [114].

Já no Capítulo 5 foi proposto um filtro que além de limitar as variáveis de estado da planta em um horizonte de tempo finito, pode também limitar as variáveis de estados do filtro ou a diferença entre as variáveis de estado da planta e do filtro. O filtro proposto pode ser projetado tanto para um cenário em que há incerteza paramétricas no modelo, resultando em um filtro robusto, quanto para um cenário em que se há informações sobre o parâmetro de um sistema LPV, resultando em um filtro dependendo de maneira polinomial deste parâmetro. Em ambos os casos, o erro do filtro obedece uma restrição definida em [109] como  $\Omega$ -limitação, que pode ser visto como um parâmetro para ajustar o erro de estimação do filtro.

Cabe ainda ressaltar que foram propostas duas maneiras de fazer a síntese do filtro: uma abordagem mais direta, serve para uma versão particular do problema de filtragem, em que se deseja limitar de maneira desacoplada tanto as variáveis de estado do filtro quanto o que se chamou nessa dissertação de erro de observação do filtro; a outra abordagem, geral, utiliza a desigualdade de Aronszajn para relacionar os autovalores de uma matriz bloco simétrica com os autovalores dos seus blocos diagonais. O cenário de estimação com um filtro robusto que assegura tanto a  $\Omega$ -limitação do erro de estimação quanto a limitação das variáveis de estados do filtro e da planta rendeu a publicação [2].

## 6.1 Trabalhos futuros

Em um horizonte de tempo finito, tem-se a expectativa de realizar as seguintes propostas de trabalho:

- Estabelecer uma comparação mais detalhada entre as condições de análise baseadas em DMI da Seção 3.1 e as baseadas em LMI da Seção 3.2. Em particular, foi visto no Capítulo 3 um exemplo de uma classe de sistemas que se são FTS em relação a certos parâmetros pelas condições do Lema 13, então também são FTS em relação aos mesmos parâmetros pelas condições do Lema 6, mas a questão recíproca, i.e. se existem exemplos de sistemas que são FTB pelas condições do Lema 13 mas não são pelas condições do Lema 6, ficou em aberto.
- Apesar do Teorema 15 ser menos conservador do que o Lema 13 para verificar se um dado sistema é FTB, utilizou-se do último e não do primeiro na síntese de controladores e filtros devido à dificuldade que se encontrou em representar o problema de síntese como uma LMI usando o Teorema 15. Pretende-se em trabalhos futuros sanar esta dificuldade para resolver problemas de síntese ou até mesmo buscar novas condições de análise que sejam menos conservadores do que o Lema 13 e que também tenham verificação computacional mais tratáveis do que o Lema 6.
- Dependendo do problema, conjuntos poliedrais podem modelar melhor o espaço em que o projetista quer limitar as variáveis do que conjuntos de elipsoides [42, 43]. Pretende-se então adaptar as condições de análise e de síntese de controle desenvolvidos nessa dissertação para o caso em que  $S_1$  e  $S_2$  em (1.2) são domínios poliedrais.
- Averiguar como a técnica de SOS [107], utilizada em [105] para relaxar DLMI's que analisam se um sistema é FTB em relação a classe  $\mathcal{W}_{d,\Pi}^S$  definida em (3.31), pode ser utilizada para relaxar a condição baseada em DMI do Lema 6.
- Investigar se é possível e como a generalização do lema de Finsler (ver Colorário 67 do Anexo A) pode ser aplicada em problemas de controle e estimação.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] M. Chilali e P. Gahinet, “ $\mathcal{H}_\infty$  design with pole placement constraints: an LMI approach,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, pp. 358–367, Março 1996.
- [2] R. A. Borges, J. Y. Ishihara, I. G. Rocha, L. O. Risso, e H. T. M. Kussaba, “Finite time robust filtering for time-varying uncertain polytopic linear systems,” in *Proceedings of the 2013 European Control Conference*, (Zurich, Switzerland), pp. 1854–1859, Julho 2013.
- [3] Y. Fang, W. E. Dixon, D. M. Dawson, e E. Zergeroglu, “Nonlinear coupling control laws for an underactuated overhead crane system,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 8, no. 3, pp. 418–423, 2003.
- [4] N. P. Bhatia e G. P. Szegö, *Dynamical systems: stability theory and applications*, vol. 1967. Springer, 1967.
- [5] A. P. White, G. Zhu, e J. Choi, *Linear parameter-varying control for engineering applications*. Springer briefs in electrical and computer engineering, Springer, 2013.
- [6] Y. Shen, “Finite-time control of linear parameter-varying systems with norm-bounded exogenous disturbance,” *Journal of Control Theory and Applications*, vol. 6, pp. 184–188, Maio 2008.
- [7] A. M. Lyapunov, *The general problem of stability of motion*. Dissertação de doutorado, University of Kharkov, 1892.
- [8] R. I. Leine, “The historical development of classical stability concepts: Lagrange, Poisson and Lyapunov stability,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 59, pp. 173–182, Janeiro 2010.
- [9] P. C. Parks, “A. M. Lyapunov’s stability theory - 100 years on,” *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, vol. 9, no. 4, pp. 275–303, 1992.
- [10] W. E. Dixon, *Nonlinear control of engineering systems: a Lyapunov-based approach*. Control engineering, New York: Springer Verlag, 2003.
- [11] A. Behal, W. Dixon, D. M. Dawson, e B. Xian, *Lyapunov-based control of robotic systems*. Automation and Control Engineering, New York: Taylor & Francis, 2009.
- [12] N. Karcanias, G. Halikias, e A. Papageorgiou, “Strong stability of internal system descriptions,” *International Journal of Control*, vol. 83, no. 1, pp. 182–205, 2010.

- [13] S. P. Bhat e D. S. Bernstein, “Nontangency-based Lyapunov tests for convergence and stability in systems having a continuum of equilibria,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 42, no. 5, pp. 1745–1775, 2003.
- [14] E. D. Sontag, “Input to state stability: basic concepts and results,” in *Nonlinear and optimal control theory*, pp. 163–220, Springer, 2008.
- [15] V. T. Haimo, “Finite time controllers,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 24, no. 4, pp. 760–770, 1986.
- [16] S. P. Bhat e D. S. Bernstein, “Finite-time stability of continuous autonomous systems,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 38, no. 3, pp. 751–766, 2000.
- [17] E. Moulay e W. Perruquetti, “Finite time stability conditions for non-autonomous continuous systems,” *International Journal of Control*, vol. 81, pp. 797–803, Maio 2008.
- [18] F. Amato, M. Carbone, M. Ariola, e C. Cosentino, “Finite-time stability of discrete-time systems,” in *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, vol. 2, pp. 1440–1444, Julho 2004.
- [19] L. Zhu, Y. Shen, e C. Li, “Finite-time control of discrete-time systems with time-varying exogenous disturbance,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 14, pp. 361–370, Fevereiro 2009.
- [20] F. Amato, M. Ariola, e C. Cosentino, “Finite-time control of discrete-time linear systems: Analysis and design conditions,” *Automatica*, vol. 46, pp. 919–924, Maio 2010.
- [21] F. Amato, C. Cosentino, e A. Merola, “Sufficient conditions for finite-time stability and stabilization of nonlinear quadratic systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, pp. 430–434, Fevereiro 2010.
- [22] M. N. ElBsat, *Finite-time control and estimation of nonlinear systems with disturbance attenuation*. Doctor of philosophy dissertation, Marquette University, 2012. [http://epublications.marquette.edu/dissertations\\_mu/206/](http://epublications.marquette.edu/dissertations_mu/206/).
- [23] G. Kamenkov, “On stability of motion over a finite interval of time,” *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 17, pp. 529–540, 1953.
- [24] A. Lebedev, “On stability of motion during a given interval of time,” *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 18, pp. 139–148, 1954.
- [25] A. Lebedev, “The problem of stability in a finite interval of time,” *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 18, pp. 75–94, 1954.
- [26] F. Amato, R. Ambrosino, M. Ariola, C. Cosentino, e G. De Tommasi, *Finite-Time Stability and Control*. London, UK: Springer, 2014.
- [27] P. Dorato, “Short-time stability in linear time-varying systems,” rel. tec., Polytechnic Institute of Brooklyn, 1961.



- [28] J. A. Richards, *Analysis of periodically time-varying systems*. Berlin: Springer, 1983.
- [29] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 3rd ed., 2002.
- [30] R. P. Agarwal e V. Lakshmikantham, *Uniqueness and nonuniqueness criteria for ordinary differential equations*. Series in real analysis, World Scientific, 1993.
- [31] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*. Prentice Hall, 3 ed., 2002.
- [32] M. Martelli e D. Marshall, “Stability and attractivity in discrete dynamical systems,” *Mathematical Biosciences*, vol. 128, no. 1-2, pp. 347–55, 1995.
- [33] R. E. Vinograd, “Inapplicability of the method of characteristic exponents to the study of non-linear differential equations,” *Matematicheskii Sbornik*, vol. 41(83), no. 4, pp. 431–438, 1957.
- [34] J.-J. E. Slotine e W. Li, *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, 1 ed., 1991.
- [35] M. Vidyasagar, *Nonlinear systems analysis*. SIAM, 2002.
- [36] W. Hahn, *Stability of motion*. Springer-Verlag, 1967.
- [37] L. Weiss e E. F. Infante, “Finite time stability under perturbing forces and on product spaces,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 12, pp. 54–59, Fevereiro 1967.
- [38] P. Dorato, “An overview of finite-time stability,” in *Current trends in nonlinear systems and control: in honor of Petar Kokotović and Turi Nicosia* (L. Menini, L. Zaccarian, e C. T. Abdallah, eds.), Systems & Control: Foundations & Applications, pp. 185–194, Boston: Birkhäuser, 2006.
- [39] F. Amato, M. Ariola, C. T. Abdallah, e C. Cosentino, “Application of finite-time stability concepts to the control of ATM networks,” in *40th Allerton Conference on Communication, Control and Computers*, (Allerton, IL, US), 2002.
- [40] S. Mastellone, “Finite-time stability of nonlinear networked-control systems,” tese de mestrado, University of New Mexico, 2004. <http://www.ece.unm.edu/faculty/chaouki/PAPERS/Theses/Silvia-Thesis.pdf>.
- [41] S. Mastellone, P. Dorato, e C. T. Abdallah, “Finite-time stability for nonlinear networked control systems,” in *Current trends in nonlinear systems and control: in honor of Petar Kokotović and Turi Nicosia* (L. Menini, L. Zaccarian, e C. T. Abdallah, eds.), Systems & Control: Foundations & Applications, pp. 535–553, Boston: Birkhäuser, 2006.
- [42] G. Garcia, S. Tarbouriech, e J. Bernussou, “Finite-time stabilization of linear time-varying continuous systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, pp. 364–369, Fevereiro 2009.
- [43] F. Amato, R. Ambrosino, M. Ariola, e F. Calabrese, “Finite-time stability of linear systems: an approach based on polyhedral Lyapunov functions,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 4, no. 9, pp. 1767–1774, 2010.

- [44] F. Amato, M. Ariola, e P. Dorato, “Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances,” *Automatica*, vol. 37, pp. 1459–1563, Setembro 2001.
- [45] F. Amato, M. Ariola, e C. Cosentino, “Finite-time control of linear time-varying systems via output feedback,” in *Proceedings of the 2005 American Control Conference*, (Portland, OR, USA), pp. 4722–4726, Junho 2005.
- [46] Y. Sun e J. Xu, “Finite-time boundedness and stabilization of networked control systems with time delay,” *Mathematical Problems in Engineering*, 2012. <http://www.hindawi.com/journals/mpe/2012/705828/>.
- [47] F. Amato, M. Ariola, C. Cosentino, C. T. Abdallah, e P. Dorato, “Necessary and sufficient conditions for finite-time stability of linear systems,” in *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, vol. 5, pp. 4452 – 4456, 2003.
- [48] R. A. Borges, J. Y. Ishihara, I. G. Rocha, e L. O. Risso, “Finite time control via time-invariant dynamic output feedback,” in *Proceeding of the 15th Latinamerican Control Conference*, (Lima, Perú), Outubro 2012.
- [49] F. Amato, M. Ariola, e C. Cosentino, “Finite-time stabilization via dynamic output feedback,” *Automatica*, vol. 42, pp. 337–342, Fevereiro 2006.
- [50] G. N. Nair, “A nonstochastic information theory for communication and state estimation,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, pp. 1497–1510, Março 2013.
- [51] J. Baumeister e A. Leitão, *Introdução à teoria de controle e programação dinâmica*. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA.
- [52] J. LaSalle e S. Lefschetz, *Stability by Liapunov’s direct method with applications*. London, UK: Academic Press, 3 ed., 1964.
- [53] V. Lakshmikantham, S. Leela, e A. A. Martynyuk, *Practical stability of nonlinear systems*. World Scientific, 1990.
- [54] V. G. Ivancevic e T. T. Ivancevic, *New trends in control theory*. Series on stability, vibration and control of systems, World Scientific, 2013.
- [55] F. Amato, M. Ariola, e C. Cosentino, “Finite time control via output feedback: a general approach,” in *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 350–355, Dezembro 2003.
- [56] L. Weiss e E. F. Infante, “On the stability of systems defined over a finite time interval,” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 54, pp. 44–48, Julho 1965.
- [57] F. Amato, M. Ariola, M. Carbone, e C. Cosentino, “Finite-time control of linear systems: a survey,” in *Current trends in nonlinear systems and control: in honor of Petar Kokotović and Turi Nicosia* (L. Menini, L. Zaccarian, e C. T. Abdallah, eds.), Systems & Control: Foundations & Applications, pp. 195–213, Boston: Birkhäuser, 2006.

- [58] J. S. Shamma, “An overview of LPV systems,” in *Control of linear parameter varying systems with applications*, pp. 3–26, Springer, 2012.
- [59] L. H. Carter e J. S. Shamma, “Gain-scheduled bank-to-turn autopilot design using linear parameter varying transformations,” *Journal of guidance, control, and dynamics*, vol. 19, no. 5, pp. 1056–1063, 1996.
- [60] G. J. Balas, I. Fialho, A. Packard, J. Renfrow, e C. Mullaney, “On the design of LPV controllers for the F-14 aircraft lateral-directional axis during powered approach,” in *Proceedings of the 1997 American Control Conference*, vol. 1, pp. 123–127, IEEE, 1997.
- [61] S. Ganguli, A. Marcos, e G. Balas, “Reconfigurable LPV control design for Boeing 747-100/200 longitudinal axis,” in *Proceedings of the 2002 American Control Conference*, vol. 5, pp. 3612–3617, IEEE, 2002.
- [62] G. J. Balas, “Linear parameter-varying control and its application to a turbofan engine,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 12, no. 9, pp. 763–796, 2002.
- [63] F. Bruzelius, C. Breitholtz, e S. Pettersson, “LPV-based gain scheduling technique applied to a turbo fan engine model,” in *Control Applications, 2002. Proceedings of the 2002 International Conference on*, vol. 2, pp. 713–718, IEEE, 2002.
- [64] W. Gilbert, D. Henrion, J. Bernussou, e D. Boyer, “Polynomial LPV synthesis applied to turbofan engines,” *Control Engineering Practice*, vol. 18, no. 9, pp. 1077–1083, 2010.
- [65] L. Shu-Qing e Z. Sheng-Xiu, “A modified LPV modeling technique for turbofan engine control system,” in *Computer Application and System Modeling (ICCSM), 2010 International Conference on*, vol. 5, pp. 5–99, IEEE, 2010.
- [66] M. G. Wassink, M. van de Wal, C. Scherer, e O. Bosgra, “LPV control for a wafer stage: beyond the theoretical solution,” *Control Engineering Practice*, vol. 13, no. 2, pp. 231–245, 2005.
- [67] I. Fialho e G. J. Balas, “Road adaptive active suspension design using linear parameter-varying gain-scheduling,” *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, vol. 10, no. 1, pp. 43–54, 2002.
- [68] F. Zhang, K. M. Grigoriadis, M. A. Franchek, e I. H. Makki, “Linear parameter-varying lean burn air-fuel ratio control for a spark ignition engine,” *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, vol. 129, p. 404, 2007.
- [69] S. Ç. Baslamisli, İ. E. Köse, e G. Anlaş, “Gain-scheduled integrated active steering and differential control for vehicle handling improvement,” *Vehicle System Dynamics*, vol. 47, no. 1, pp. 99–119, 2009.
- [70] H. H. Lin, C. Beck, e M. Bloom, “Multivariable LPV control of anesthesia delivery during surgery,” in *Proceedings of the 2008 American Control Conference*, pp. 825–831, IEEE, 2008.

- [71] R. S. S. Peña e A. S. Ghersin, “LPV control of glucose for diabetes type I,” in *Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC), 2010 Annual International Conference of the IEEE*, pp. 680–683, IEEE, 2010.
- [72] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, e V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [73] L. El Ghaoui e S. I. Niculescu, eds., *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. Advances in Design and Control, Philadelphia, PA: SIAM, 2000.
- [74] C. Scherer, P. Gahinet, e M. Chilali, “Multiobjective output-feedback control via LMI optimization,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, pp. 896–911, Julho 1997.
- [75] S. Boyd e L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
- [76] J. G. VanAntwerp e R. D. Braatz, “A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities,” *Journal of Process Control*, vol. 10, pp. 363–385, Agosto 2000.
- [77] Y. Nesterov e A. Nemirovskii, *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [78] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, e M. Chilali, *LMI Control Toolbox User’s Guide*. Natick, MA: The Math Works, 1995.
- [79] J. F. Sturm, “Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones,” *Optimization Methods and Software*, vol. 11, no. 1–4, pp. 625–653, 1999. <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.
- [80] K. C. Toh, M. J. Todd, e R. Tütüncü, “SDPT3 — A Matlab software package for semidefinite programming, Version 1.3,” *Optimization Methods and Software*, vol. 11, no. 1, pp. 545–581, 1999.
- [81] B. Borchers, “CSDP, A C library for semidefinite programming,” *Optimization Methods and Software*, vol. 11, pp. 613–623, 1999.
- [82] M. Yamashita, K. Fujisawa, e M. Kojima, “Implementation and evaluation of SDPA 6.0 (Semidefinite Programming Algorithm 6.0),” *Optimization Methods and Software*, vol. 18, pp. 491–505, August 2003.
- [83] J. Löfberg, “YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB,” in *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, (Taipei, Taiwan), pp. 284–289, Setembro 2004. <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>.
- [84] M. C. de Oliveira, J. W. Helton, S. A. McCullough, e M. Putinar, “Engineering systems and free semi-algebraic geometry,” in *Emerging Applications of Algebraic Geometry* (M. Putinar e S. Sullivan, eds.), The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, pp. 17–61, New York, NY, USA: Springer, 2009.

- [85] J. W. Helton e V. Vinnikov, “Linear matrix inequality representation of sets,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 60, pp. 654–674, Maio 2007.
- [86] A. Ben-Tal e A. Nemirovski, “Robust convex optimization,” *Mathematics of Operations Research*, vol. 23, no. 4, pp. 769–805, 1998.
- [87] P. Apkarian e H. D. Tuan, “Parametrized LMIs in control theory,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 38, pp. 1241–1264, Maio 2000.
- [88] H. P. Horisberger e P. R. Belanger, “Regulators for linear, time invariant plants with uncertain parameters,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 21, pp. 705–708, 1976.
- [89] P.-A. Bliman, “An existence result for polynomial solutions of parameter-dependent LMIs,” *Systems & Control Letters*, vol. 51, pp. 165–169, Março 2004.
- [90] P.-A. Bliman, R. C. L. F. Oliveira, V. F. Montagner, e P. L. D. Peres, “Existence of homogeneous polynomial solutions for parameter-dependent linear matrix inequalities with parameters in the simplex,” in *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, (San Diego, CA, USA), pp. 1486–1491, Dezembro 2006.
- [91] R. C. L. F. Oliveira e P. L. D. Peres, “Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, pp. 1334–1340, Julho 2007.
- [92] C. M. Agulhari, R. C. L. F. de Oliveira, e P. L. D. Peres, “Robust LMI Parser: a computational package to construct LMI conditions for uncertain systems,” in *XIX Brazilian Conference on Automation (CBA 2012)*, (Campina Grande, PB, Brazil), pp. 2298–2305, 2012.
- [93] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, e G. Pólya, *Inequalities*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2 ed., 1952.
- [94] V. Powers e B. Reznick, “A new bound for Pólya’s Theorem with applications to polynomials positive on polyhedra,” *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 164, pp. 221–229, 2001.
- [95] C. W. Scherer, “Higher-order relaxations for robust LMI problems with verifications for exactness,” in *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, (Maui, HI, USA), pp. 4652–4657, Dezembro 2003.
- [96] C. W. Scherer, “Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness,” *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 27, pp. 365–395, Junho 2005.
- [97] S. Kanev, C. Scherer, M. Verhaegen, e B. D. Schutter, “Robust output-feedback controller design via local BMI optimization,” *Automatica*, vol. 40, pp. 1115–1127, Julho 2004.
- [98] A. Hassibi, J. How, e S. Boyd, “A path-following method for solving BMI problems in control,” in *Proceedings of the 1999 American Control Conference*, (San Diego, CA, USA), pp. 1385–1389, Junho 1999.

- [99] M. Fukuda e M. Kojima, “Branch-and-cut algorithms for the bilinear matrix inequality eigenvalue problem,” *Computational Optimization and Applications*, vol. 19, no. 1, pp. 79–105, 2001.
- [100] F. Zheng, Q. G. Wang, e T. H. Lee, “A heuristic approach to solving a class of bilinear matrix inequality problems,” *Systems & Control Letters*, vol. 47, pp. 111–119, Outubro 2002.
- [101] O. Toker e H. Özbay, “On the NP-hardness of solving bilinear matrix inequalities and simultaneous stabilization with static output feedback,” in *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, vol. 4, pp. 2525–2526, Junho 1995.
- [102] H. Abou-Kandil, G. Freiling, V. Ionescu, e G. Jank, *Matrix Riccati equations: in control and systems theory*. Systems & Control: Foundations & Applications.
- [103] U. Shaked e V. Suplin, “A new bounded real lemma representation for the continuous-time case,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, pp. 1420–1426, Setembro 2001.
- [104] F. Amato, M. Ariola, M. Carbone, e C. Cosentino, “Finite-time output feedback control of linear systems via differential linear matrix conditions,” in *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, (San Diego, CA, USA), pp. 5371–5375, Dezembro 2006.
- [105] H. Ichihara e H. Katayama, “Necessary and sufficient conditions for finite-time boundedness of linear continuous-time systems,” in *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control — 28th Chinese Control Conference*, pp. 3214–3219, Dezembro 2009.
- [106] F. Amato, M. Ariola, e C. Cosentino, “Finite-time stability of linear time-varying systems: analysis and controller design,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, pp. 1003–1008, Abril 2010.
- [107] F. Wu e S. Prajna, “SOS-based solution approach to polynomial LPV system analysis and synthesis problems,” *International Journal of Control*, vol. 78, no. 8, pp. 600–611, 2005.
- [108] A. Papachristodoulou, J. Anderson, G. Valmorbida, S. Prajna, P. Seiler, e P. A. Parrilo, *SOSTOOLS: Sum of squares optimization toolbox for MATLAB*. <http://arxiv.org/abs/1310.4716>, 2013. Disponível em <http://www.eng.ox.ac.uk/control/sostools>, <http://www.cds.caltech.edu/sostools> e <http://www.mit.edu/~parrilo/sostools>.
- [109] R. A. Borges e J. Y. Ishihara, “Filtragem em tempo finito para sistemas lineares por meio de desigualdades matriciais lineares,” in *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*, (Campina Grande, PB), pp. 4631–4636, Setembro 2012.
- [110] M. C. De Oliveira e R. E. Skelton, “Stability tests for constrained linear systems,” in *Perspectives in robust control*, vol. 268 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, cap. 15, pp. 241–257, Springer London, 2001.
- [111] F. Amato, M. Ariola, e C. Cosentino, “Robust finite-time stabilization of uncertain linear systems,” *International Journal of Control*, vol. 84, pp. 2117–2127, Dezembro 2011.

- [112] F. Amato, R. Ambrosino, C. Cosentino, e G. Tommasi, “Finite-time stabilization of impulsive dynamical linear systems,” *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 5, pp. 89–101, Fevereiro 2011.
- [113] F. Amato, G. Carannante, G. De Tommasi, e A. Pironti, “Input-output finite-time stabilization of LTV systems via dynamic output feedback,” in *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control — European Control Conference ECC 2011*, pp. 1928 – 1932, Dezembro 2011.
- [114] R. A. Borges, J. Y. Ishihara, H. T. M. Kussaba, e L. P. Silva, “Homogeneous polynomially parameter-dependent state feedback controllers for finite time stabilization of linear time-varying systems,” in *Proceedings of the 2013 European Control Conference*, (Zurich, Switzerland), pp. 3889–3894, Julho 2013.
- [115] Q. Meng e Y. Shen, “Finite-time  $\mathcal{H}_\infty$  control for linear continuous systems with norm-bounded disturbance,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 14, pp. 1043–1049, Abril 2009.
- [116] X. Luan, F. Liu, e P. Shi, “Finite-time filtering for non-linear stochastic systems with partially known transition jump rates,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 4, no. 5, pp. 735–745, 2010.
- [117] S. He e F. Liu, “Robust  $L_2$ - $L_\infty$  filtering of time-delay jump systems with respect to the finite-time interval,” *Mathematical Problems in Engineering*, 2011. <http://www.hindawi.com/journals/mpe/2011/839648/>.
- [118] C. Liu, Y. Zhang, e H. Sun, “Finite-time  $H_\infty$  filtering for singular stochastic systems,” *Journal of Applied Mathematics*, 2012. <http://www.hindawi.com/journals/jam/2012/615790/>.
- [119] S. He e F. Liu, “Robust peak-to-peak filtering for Markov jump systems,” *Signal Processing*, vol. 90, pp. 513–522, Fevereiro 2010.
- [120] R. C. Dorf e R. H. Bishop, *Sistemas de controle modernos*. LTC - Livros Técnicos e Científicos, 8 ed., 2001.
- [121] E. L. Lima, *Análise real volume 1*. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA, 8 ed., 2006.
- [122] W. Cheney e D. Kincaid, *Linear algebra: theory and applications*. Jones & Bartlett Learning, 2010.
- [123] R. Horn e C. Johnson, *Matrix analysis*. Cambridge University Press, 1990.
- [124] C. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*. SIAM, 2000.
- [125] R. Bhatia, *Matrix analysis*. Graduate texts in mathematics.
- [126] M. Robdera, *A concise approach to mathematical analysis*. Springer London, Limited, 2003.
- [127] E. Schimmerling, *A course on set theory*. Cambridge University Press, 2011.

- [128] J. B. Conway, *Functions of one complex variable I*. Graduate texts in mathematics, Springer, 1978.
- [129] N. J. Higham, *Functions of matrices: theory and computation*. SIAM, 2008.
- [130] K. J. Arrow, F. J. Gould, e S. M. Howe, “A general saddle point result for constrained optimization,” *Mathematical Programming*, vol. 5, no. 1, pp. 225–234, 1973.
- [131] K. Tan e K. M. Grigoriadis, “Stabilization and  $\mathcal{H}_\infty$  control of symmetric systems: an explicit solution,” *Systems & Control Letters*, vol. 44, pp. 57–72, Settembre 2001.



# ANEXOS

# ANEXO A

## Resultados de álgebra linear e análise

Neste anexo é demonstrado ou referenciado na literatura as proposições e teoremas enunciados ao longo do texto relativas a álgebra linear e análise.

### A.1 Lema de Gronwall-Bellman

O seguinte lema estima uma cota superior para a solução de uma desigualdade diferencial usando a solução da respectiva equação diferencial.

**Lema 23.** *Sejam  $u$  e  $\beta$  funções contínuas em  $[0, T)$ , com  $u$  diferenciável em  $(0, T)$  e tal que*

$$\dot{u}(t) \leq \beta(t) u(t), \quad \forall t \in (0, T).$$

*Então  $u$  é limitada pela solução da equação diferencial correspondente, isto é,*

$$u(t) \leq u(0) \exp\left(\int_0^t \beta(s) ds\right)$$

*para todo  $t \in [0, T)$ .*

*Demonstração.* Definindo a função

$$v(t) = \exp\left(\int_0^t \beta(s) ds\right), \quad \forall t \in [0, T),$$

tem-se que

$$\dot{v}(t) = \beta(t) v(t), \quad \forall t \in (0, T)$$

com  $v(0) = 1$  e  $v(t) > 0$  para todo  $t \in [0, T)$ .

Segue-se que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{u(t)}{v(t)} \right) = \frac{\dot{u}(t) v(t) - \dot{v}(t) u(t)}{v^2(t)} \leq \frac{\beta(t) u(t) v(t) - \beta(t) v(t) u(t)}{v^2(t)} = 0, \quad \forall t \in (0, T),$$

ou seja, a derivada da função  $u(t)/v(t)$  é não positiva para todo  $t$  em  $(0, T)$ . Pelo teorema do valor médio [121, p.96] procede então que

$$\frac{u(t)}{v(t)} \leq \frac{u(0)}{v(0)} = u(0), \quad \forall t \in [0, T].$$

□

## A.2 Resultados sobre autovalores

**Teorema 24** (Teorema espectral para matrizes simétricas [122, p.468]). *Se  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é simétrica, existe  $T$  ortogonal que diagonaliza  $Q$ , ou seja,  $T^T Q T = D$  onde  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  e  $\lambda_i$  são os autovalores de  $Q$ .*

*Demonstração.* Ver [122, p.468].

□

**Teorema 25.** *Sejam  $A$  e  $B$  normais.  $A$  e  $B$  comutam se e somente se elas são diagonalizáveis simultaneamente, isto é, existe  $S$  tal que  $S^{-1}AS$  e  $S^{-1}BS$  são diagonais.*

*Demonstração.* Ver Teorema 1.3.12 de [123, p.50].

□

**Corolário 26.** *Se  $A$  e  $B$  são normais e comutam, então elas possuem os mesmos autovetores.*

*Demonstração.* Direto do Teorema 25.

□

**Proposição 27.** *Seja  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . É válida a seguinte igualdade:  $\lambda_{\max}(-A) = -\lambda_{\min}(A)$ .*

*Demonstração.* Seja  $p(\lambda) := |A - \lambda I|$  o polinômio característico de  $A$  e  $q(\lambda) := |(-A) - \lambda I|$  o polinômio característico de  $-A$ . Temos a seguinte igualdade entre  $p$  e  $q$ :

$$q(-\lambda) = |-A + \lambda I| = |-(A - \lambda I)| = (-1)^n |A - \lambda I| = (-1)^n p(\lambda).$$

Logo,  $p(\lambda) = 0 \iff q(-\lambda) = 0$ . Como os zeros do polinômio característico de uma matriz  $M$  são os autovalores de  $M$ , se  $\lambda$  é autovalor de  $A$  então  $-\lambda$  é autovalor de  $-A$ . Daí, sendo  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  os autovalores de  $A$  ordenados de tal forma que

$$\lambda_{\max}(A) = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n = \lambda_{\min}(A),$$

tem-se que

$$\lambda_{\min}(-A) = -\lambda_1 \leq -\lambda_2 \leq \dots \leq -\lambda_n = \lambda_{\max}(-A).$$

□

**Proposição 28.** *Seja  $A \succ 0$  ou  $A \prec 0$ . Então são válidas as seguintes igualdades:*

$$\lambda_{\max}(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_{\min}(A)} \quad \text{e} \quad \lambda_{\min}(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_{\max}(A)}$$

*Demonstração.* Seja  $p(\lambda) = |A - \lambda I|$  o polinômio característico de  $A$  e  $q(\lambda) := |(A^{-1}) - \lambda I|$  o polinômio característico de  $A^{-1}$ .

Temos a seguinte igualdade entre  $p$  e  $q$ :

$$q\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \left|A^{-1} - \frac{1}{\lambda}I\right| = \left|A^{-1}\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)\right| = \left|A^{-1}\right| \left|-\frac{1}{\lambda}(A - \lambda I)\right| = \left|A^{-1}\right| \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^n p(\lambda).$$

Logo,  $p(\lambda) = 0 \iff q\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0$ . Como os zeros do polinômio característico de uma matriz  $M$  são os autovalores de  $M$ , se  $\lambda$  é autovalor de  $A$  então  $\frac{1}{\lambda}$  é autovalor de  $A^{-1}$ . Tem-se que  $A \succ 0$  ou  $A \prec 0$  implica que todos os autovalores de  $A$  possuem o mesmo sinal, então sendo  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  os autovalores de  $A$  ordenados de tal forma que

$$\lambda_{\max}(A) = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n = \lambda_{\min}(A),$$

tem-se que

$$\lambda_{\min}(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1} \leq \frac{1}{\lambda_2} \leq \dots \leq \frac{1}{\lambda_n} = \lambda_{\max}(A^{-1}).$$

□

**Proposição 29.** *Seja  $\sigma(A)$  o espectro de uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $\|\cdot\|$  uma norma induzida pela norma Euclídiana. Defina-se o raio espectral de  $A$  como  $\rho(A) := \max \sigma(A)$ . Então para todo  $k \in \mathbb{N}$ , tem-se que*

$$\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}.$$

*Demonstração.* Seja  $(\mathbf{v}, \lambda)$  um autopar de  $A$ . Pela propriedade sub-multiplicativa da norma, tem-se que

$$|\lambda|^k \|\mathbf{v}\| = \|\lambda^k \mathbf{v}\| = \|A^k \mathbf{v}\| \leq \|A^k\| \|\mathbf{v}\|$$

e como  $\mathbf{v} \neq 0$  para todo  $\lambda$ ,

$$|\lambda|^k \leq \|A^k\|.$$

Portanto,  $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$ .

□

**Proposição 30.** *Se  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  é Hermitiana, então os autovalores de  $A$  são reais.*

*Demonstração.* Ver [124, pp.548-549].

□

**Corolário 31.** *Se  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é simétrica, então os autovalores de  $A$  são reais.*

**Teorema 32** (Desigualdades de Weyl). *Sejam  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  Hermitianas (ou reais simétricas) e  $\lambda_j : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $j = 1, \dots, n$ , as funções que mapeiam  $A$  ao seu  $j$ -ésimo autovalor em ordem decrescente (isto é,  $\lambda_1(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A)$ ). Então são válidas as seguintes desigualdades:*

$$\begin{aligned} \lambda_j(A+B) &\leq \lambda_i(A) + \lambda_{j-i+1}(B), \text{ para } i \leq j, \\ \lambda_j(A+B) &\geq \lambda_i(A) + \lambda_{j-i+n}(B), \text{ para } i \geq j. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Ver Teorema III.2.1 de [125, p.62] ou Teorema 4.3.7 de [123, p.184].

□

**Corolário 33.** Para cada  $j = 1, 2, \dots, n$ , tem-se que

$$\lambda_j(A) + \lambda_n(B) \leq \lambda_j(A+B) \leq \lambda_j(A) + \lambda_1(B).$$

*Demonstração.* Basta fazer  $i = j$  nas desigualdades do Teorema 32.  $\square$

**Corolário 34** (Teorema de perturbação de Weyl). *Sejam  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  Hermitianas (ou reais simétricas). Então*

$$\max_j |\lambda_j(A) - \lambda_j(B)| \leq \|A - B\|$$

*Demonstração.* Sejam  $U, V \in \mathbb{C}^{n \times n}$  Hermitianas (ou reais simétricas). Temos do Corolário 33 que

$$\lambda_j(U) + \lambda_n(V) \leq \lambda_j(U+V) \leq \lambda_j(U) + \lambda_1(V), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

o que implica em

$$\lambda_n(V) \leq \lambda_j(U+V) - \lambda_j(U) \leq \lambda_1(V). \quad (\text{A.1})$$

Seja  $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$  o raio espectral da matriz  $A$ . Temos então que

$$\begin{aligned} \lambda_1(V) &\leq |\lambda_1(V)| \leq \rho(V), \\ \lambda_n(V) &\geq -|\lambda_n(V)| \geq -\rho(V). \end{aligned}$$

Portanto, substituindo em (A.1) é obtido

$$-\rho(V) \leq \lambda_j(U+V) - \lambda_j(U) \leq \rho(V) \iff |\lambda_j(U+V) - \lambda_j(U)| \leq \rho(V).$$

Pela Proposição 29, tem-se que  $\rho(V) \leq \|V\|$  e daí:

$$|\lambda_j(U+V) - \lambda_j(U)| \leq \|V\|.$$

Como  $B$  e  $A - B$  são Hermitianas, substituindo  $U = B$  e  $V = A - B$  tem-se o resultado.  $\square$

**Corolário 35.** Para  $j$  fixo com  $1 \leq j \leq n$ , a aplicação  $\lambda_j : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é Lipschitz contínua.

O Teorema 36 a seguir é aplicado no artigo [2]. É interessante notar que o mesmo pode ser demonstrado a partir da desigualdade de Weyl e vice-versa. A mesma estratégia de prova também pode ser aplicada em outras desigualdades lineares para os autovalores da soma de matrizes Hermitianas para transformar em desigualdades lineares para os autovalores do bloco diagonal de matrizes Hermitianas e vice-versa.

**Teorema 36** (Desigualdade de Aronszajn). *Seja  $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$  uma matriz Hermitiana particionada em blocos da seguinte forma*

$$C = \begin{bmatrix} A & X \\ X^* & B \end{bmatrix},$$

com  $A \in \mathbb{C}^{k \times k}$  Hermitiana e sejam os autovalores de  $A, B$  e  $C$  dados por  $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_k$ ,  $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_{n-k}$  e  $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_n$  respectivamente. Então

$$\gamma_{i+j-1} + \gamma_n \leq \alpha_i + \beta_j, \quad \text{para todo } i, j \text{ com } i + j - 1 \leq n.$$

*Demonstração.* Ver Teorema III.2.9 de [125, p.64].  $\square$

### A.3 Resultados sobre a ordem de Loewner

**Proposição 37.** *Seja  $A \in \mathbb{S}^n$ . Então os seguintes itens são equivalentes:*

- $A \succ 0$  ( $A \geq 0$ ).
- $x^T A x > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  tal que  $x \neq 0$  ( $x^T A x \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ).
- Todos os autovalores de  $A$  são positivos (não-negativos).
- Os menores principais de  $A$  são positivos (não-negativos).

*Demonstração.* Ver [124, p.559] para o caso  $A \succ 0$  e [124, p.566] para o caso  $A \succeq 0$ . □

**Proposição 38.** *Sejam  $F_1, \dots, F_r \in \mathbb{C}^{n \times n}$  Hermitianas. Então  $\text{diag}(F_1, \dots, F_r) \succ 0$  se e só se  $F_i \succ 0, i = 1, \dots, r$ .*

*Demonstração.* Seja  $x = (x_1, \dots, x_r)$ . Se  $F_i \succ 0, i = 1, \dots, r$ , então:

$$x_i^T F_i x_i > 0 \quad i = 1, \dots, r \implies \sum_{i=1}^r x_i^T F_i x_i > 0 \iff \begin{bmatrix} x_1^T & \dots & x_r^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 & & \\ & \ddots & \\ & & F_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} > 0.$$

Reciprocamente, se  $\text{diag}(F_1, \dots, F_r) \succ 0$ , tem-se que o vetor  $v_i$  cuja  $i$ -ésima componente é  $x_i$  e as outras  $r - 1$  são nulas é tal que

$$x_i^T F_i x_i = v_i^T \begin{bmatrix} F_1 & & \\ & \ddots & \\ & & F_r \end{bmatrix} v_i > 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

□

**Proposição 39** (Transformação de congruência). *Sejam  $A \in \mathbb{S}^n$  e  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  não singular. Segue-se que  $A \succ 0$  ( $A \prec 0$ ) se e somente se  $P^T A P \succ 0$  ( $P^T A P \prec 0$ ).*

*Demonstração.* Segue-se diretamente do teorema de inércia de Sylvester, cuja prova pode ser encontrada em [124, p.569]. □

**Proposição 40.** *Sejam  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  Hermitianas. Então:*

$$\lambda_{\max}(A) < \lambda_{\min}(B) \implies A \prec B$$

*Demonstração.* Da identidade  $\lambda_{\max}(A) = \sup_{|v|=1} v^T A v$  (ver [123, p.176]) e da desigualdade triangular do supremo<sup>1</sup>, segue-se que:

$$\lambda_{\max}(A + B) \leq \lambda_{\max}(A) + \lambda_{\max}(B).$$

---

<sup>1</sup> $\sup \{f(t) + g(t) \mid t \in A\} \leq \sup \{f(t) \mid t \in A\} + \sup \{g(t) \mid t \in A\}$  [126, p.11]

Daí:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{max}(A - B) &\leq \lambda_{max}(A) + \lambda_{max}(-B) \\
 &= \lambda_{max}(A) - \lambda_{min}(B) \quad (\text{utilizando a proposição 27}) \\
 &< \lambda_{min}(B) - \lambda_{min}(B) \quad (\text{por hipótese}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Mas  $\lambda_{max}(A - B) < 0 \iff A - B \prec 0 \iff A \prec B$ . □

*Observação 41.* A recíproca da proposição não é válida. Considere o seguinte contra-exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$A - B = \begin{bmatrix} -0.4 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  tem autovalores  $-0,4$  e  $-1$ , logo  $\lambda_i(A - B) < 0$ . No entanto,  $\lambda_{max}(A) = 1$ ,  $\lambda_{min}(B) = 0,5$  e  $1 < 0,5$  não é válido.

**Proposição 42** (Cota equivalente com autovalores). *Seja  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica. É válida as seguintes equivalências:*

$$Q \succ \alpha I \iff \lambda_{min}(Q) > \alpha$$

$$Q \prec \beta I \iff \lambda_{max}(Q) < \beta$$

*Demonstração.* Como  $Q$  é real e simétrica, existe  $T$  ortogonal que diagonaliza  $Q$ , ou seja,  $T^T Q T = D$  onde  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  e  $\lambda_i$  são os autovalores de  $Q$ .

A primeira equivalência é obtida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 Q \succ \alpha I &\iff Q - \alpha I \succ 0 \\
 &\iff T^T (Q - \alpha I) T \succ 0 \quad (\text{transformação de congruência}) \\
 &\iff D - \alpha I \succ 0 \\
 &\iff \begin{bmatrix} \lambda_1 - \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n - \alpha \end{bmatrix} \succ 0 \\
 &\iff \lambda_{min}(Q) - \alpha > 0 \quad (\text{todos os autovalores de } D - \alpha I \text{ positivos})
 \end{aligned}$$

De maneira semelhante segue a segunda equivalência:

$$\begin{aligned}
Q \prec \beta I &\iff Q - \beta I \prec 0 \\
&\iff T^T (Q - \beta I) T \prec 0 \text{ (transformação de congruência)} \\
&\iff D - \beta I \prec 0 \\
&\iff \begin{bmatrix} \lambda_1 - \beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \beta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n - \beta \end{bmatrix} \prec 0 \\
&\iff \lambda_{\max}(Q) - \beta < 0 \text{ (todos os autovalores de } D - \beta I \text{ negativos)}
\end{aligned}$$

□

**Proposição 43.** *A ordem parcial<sup>2</sup> definida no conjunto das matrizes Hermitianas por  $A \succeq B \iff A - B \succeq 0$  é densa [127, p.125], isto é, dado matrizes Hermitianas  $A, B$  tal que  $B \succ A$ , existe uma matriz Hermitiana  $X$  tal que  $B \succ X \succ A$ .*

*Demonstração.* Sejam matrizes Hermitianas  $A, B$  tal que  $B \succ A$  e seja  $X := A + \frac{1}{2}(B - A) = \frac{A+B}{2}$ . Temos então:

$$B \succ A \iff B - A \succ 0 \iff \frac{1}{2}(B - A) \succ 0 \iff A + \frac{1}{2}(B - A) \succ A \iff X \succ A \text{ e} \quad (\text{A.2})$$

$$B \succ A \iff B - A \succ 0 \iff B \succ A \iff \frac{B}{2} \succ \frac{A}{2} \iff B \succ \frac{A+B}{2} \iff B \succ X \quad (\text{A.3})$$

Logo, de (A.2) e (A.3) temos que  $B \succ X \succ A$ . □

**Proposição 44.** *Sejam dados  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica e  $\beta I$ , com  $\beta \in \mathbb{R}$  e  $A \prec \beta I$ . Então existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $A \prec \alpha I \prec \beta I$ .*

*Demonstração.* Seja  $\alpha := \frac{\lambda_{\max}(A) + \beta}{2}$ . Como  $\lambda_{\max}(A) < \alpha < \beta$ , temos que:

$$\lambda_{\max}(A) < \alpha \iff A \prec \alpha I \text{ (pela Proposição 42)} \quad (\text{A.4})$$

$$\alpha < \beta \iff \alpha - \beta < 0 \iff (\alpha - \beta)I \prec 0 \iff \alpha I \prec \beta I \quad (\text{A.5})$$

Logo, de (A.4) e (A.5) temos que  $A \prec \alpha I \prec \beta I$ . □

## A.4 Resultados sobre a técnica de partição de matrizes introduzida em [1]

**Proposição 45.** *Seja:*

---

<sup>2</sup>Na literatura é conhecida como ordem parcial de Loewner



$$Q := \begin{bmatrix} X & U^T \\ U & \hat{X} \end{bmatrix} \succ 0$$

e considere:

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V^T \\ V & \hat{V} \end{bmatrix} \succ 0$$

São equivalentes:

1.  $U$  é invertível
2.  $V$  é invertível
3.  $I - XY$  é invertível

*Demonstração.* Da identidade

$$QQ^{-1} = \begin{bmatrix} X & U^T \\ U & \hat{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & V^T \\ V & \hat{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

são obtidas as seguintes equações:

$$XY + U^T V = I, \quad (\text{A.7})$$

$$XV^T + U^T \hat{V} = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$UY + \hat{X}V = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$UV^T + \hat{X}\hat{V} = I. \quad (\text{A.10})$$

De (A.9), tem-se:

$$UY = -\hat{X}V. \quad (\text{A.11})$$

Como  $Q \succ 0$ , então  $Q^{-1} \succ 0$  e tem-se que  $\hat{X} \succ 0$  e  $Y \succ 0$ .

(1  $\iff$  2) De (A.11) e de  $\hat{X} \succ 0$  e  $Y \succ 0$ :

$$V = -(\hat{X})^{-1}UY \text{ e } U = -\hat{X}VY^{-1}.$$

Daí, se  $U$  é invertível, tem-se

$$V(-Y^{-1}U^{-1}\hat{X}) = I \implies V^{-1} = -Y^{-1}U^{-1}\hat{X}$$

e se  $V$  é invertível,

$$U(-YV^{-1}\hat{X}^{-1}) = I \implies U^{-1} = -YV^{-1}\hat{X}^{-1}.$$

(2  $\implies$  3) De (A.7) é obtido

$$U^T V = I - XY$$

e como  $V$  é invertível,  $U$  é invertível. Portanto

$$(I - XY)^{-1} = V^{-1}U^{-T}.$$

(3  $\implies$  2) Usando novamente (A.7):

$$(I - XY)^{-1}U^T V = I \implies V^{-1} = (I - XY)^{-1}U^T$$

□

A seguinte proposição mostra como parametrizar a partição de uma matriz positiva definida por alguns de seus blocos.

**Proposição 46.** *Sejam:*

$$Q := \begin{bmatrix} X & U^T \\ U & \hat{X} \end{bmatrix} \succ 0, Q^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V^T \\ V & \hat{Y} \end{bmatrix} \succ 0$$

com  $V$  invertível. Tem-se que:

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} X & -(XY - I)V^{-1} \\ -V^{-T}(YX - I) & V^{-T}(YXY - Y)V^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X & -X(Y - X^{-1})V^{-1} \\ -V^{-T}(Y - X^{-1})X & V^{-T}(Y - X^{-1})XYV^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^{-1} &= \begin{bmatrix} Y & V^T \\ V & VX(YX - I)^{-1}V^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Y & V^T \\ V & V(Y - X^{-1})^{-1}V^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou ainda, escrevendo em função de  $W := (Y - X^{-1}) \succ 0$ :

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} X & -XWV^{-1} \\ -V^{-T}WX & V^{-T}WXYV^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X & -XWV^{-1} \\ -V^{-T}WX & V^{-T}(W + WXW)V^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^{-1} &= \begin{bmatrix} Y & V^T \\ V & VW^{-1}V^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} W + X^{-1} & V^T \\ V & VW^{-1}V^T \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

*Demonstração.* Da identidade

$$QQ^{-1} = \begin{bmatrix} X & U^T \\ U & \hat{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & V^T \\ V & \hat{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

são obtidas as seguintes equações:

$$XY + U^T V = I, \quad (\text{A.13})$$

$$XV^T + U^T \hat{Y} = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$UY + \hat{X}V = 0, \quad (\text{A.15})$$

$$UV^T + \hat{X}\hat{Y} = I. \quad (\text{A.16})$$

Pode-se então parametrizar  $U, U^T, \hat{X}$  e  $\hat{Y}$  em função de  $X, Y$  e  $V$ . De (A.13):

$$U^T V = I - XY$$

$$U^T = (I - XY) V^{-1}$$

$$U^T = -(XY - I) V^{-1}$$

Como  $X \succ 0$ , temos ainda

$$U^T = -X(Y - X^{-1})V^{-1}.$$

Transpondo  $U^T$ :

$$U = -V^{-T}(YX - I) = -V^{-T}(Y - X^{-1})X.$$

De (A.15):

$$\hat{X}V = -UY$$

$$\hat{X} = -UYV^{-1}$$

$$\hat{X} = V^{-T}(YX - I)YV^{-1}$$

e como  $X \succ 0$ , temos ainda:

$$\hat{X} = V^{-T}(Y - X^{-1})XYV^{-1}.$$

De (A.14):

$$\hat{Y}U = -VX$$

$$\hat{Y} = -VXU^{-1}$$

$$\hat{Y} = VX(YX - I)^{-1}V^T$$

$$\hat{Y} = V(Y - X^{-1})^{-1}V^T$$

e como  $\hat{Y} \succ 0$  e  $V$  é invertível segue-se que  $W := (Y - X)^{-1} \succ 0$ . □

**Proposição 47.** *Seja  $M$  uma matriz blocada tal que*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

então

$$\det(M) = \det(A) \det(D - CA^{-1}B).$$

*Demonstração.* Ver [124, p.475]. □

**Corolário 48.** *A matriz*

$$H = \begin{bmatrix} Y & I \\ V & 0 \end{bmatrix}$$

*é invertível se e só se  $V$  for invertível.*

*Demonstração.* Diretamente da Proposição 47. □

## A.5 Resultados sobre funções com valores em matrizes

**Proposição 49.** *Seja  $S$  um conjunto compacto e  $P : S \rightarrow \mathbb{S}^n$  uma função contínua. Então  $P$  é limitada superiormente em  $S$ , isto é, existe  $L \in \mathbb{S}^n$  tal que  $L \succeq P(s)$  para todo  $s \in S$ . Mais ainda, pode-se tomar  $L = xI$ , para algum  $x \in \mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Seja  $f(s) := \lambda_{\max}[P(s)]$ . Como  $\lambda_{\max}$  e  $P$  são funções contínuas, temos que  $f$  é uma função contínua com valores reais. Como também  $S$  é compacto, então existe  $s_0 \in S$  tal que  $\bar{f} := f(s_0) \geq \lambda_{\max}[P(s)]$  para todo  $s \in S$ .

Seja  $x \in \mathbb{R}$ . Tem-se que:

$$\begin{aligned} xI \succeq P(s) &\iff xI - P(s) \succeq 0 \\ &\iff \lambda_{\min}[xI - P(s)] \geq 0 \\ &\iff xI - \lambda_{\max}[P(s)]I \succeq 0 \\ &\iff x \geq \lambda_{\max}[P(s)]. \end{aligned}$$

Portanto, tomando  $x \geq \bar{f}$ , temos que  $L = xI$  satisfaz  $L \succeq P(s)$  para todo  $s \in S$ . □

*Observação 50.* No caso escalar ( $n = 1$ ) vale ainda que existem pontos em  $S$  em que a função  $P$  assume valores máximos, isto é, é possível ainda tomar  $s_0 \in S$  tal que  $P(s_0) \succeq P(s)$  para todo  $s \in S$  [128, p.27]. Porém, se  $n > 1$ , é possível que isto não seja mais válido, como mostra o seguinte contra-exemplo:

Seja

$$P(s) = \begin{bmatrix} 1+s & 0 \\ 0 & -1-s \end{bmatrix}, \quad s \in [0, 1].$$

Supondo a existência de  $s_0$  tal que  $P(s_0) \succeq P(s)$  para todo  $s$ , temos que para  $s \neq s_0$  que:

$$P(s_0) - P(s) = (s_0 - s) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \not\leq 0,$$

contradizendo a suposição.

**Corolário 51.** *Se  $S$  é um conjunto compacto e  $P : S \rightarrow \mathbb{S}^n$  uma função contínua, então  $P$  é limitada inferiormente em  $S$ , isto é, existe  $M \in \mathbb{S}^n$  tal que  $M \preceq P(s)$  para todo  $s \in S$ .*

*Demonstração.* A função  $-P$  é contínua, pois  $P$  é contínua. Aplicando a Proposição 49 em  $-P$ , existe  $L$  tal que  $L \succeq -P(s)$  para todo  $s \in S$ . Logo, tomando  $M := -L$ , tem-se que  $M \preceq P(s)$  para todo  $s \in S$ .  $\square$

**Teorema 52.** *Seja  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  uma matriz invertível. Então a função  $\text{inv}$  que mapeia  $A$  para  $A^{-1}$  é contínua.*

*Demonstração.* Como  $A$  é invertível se e somente se  $A$  não possuir autovalor igual a 0, a continuidade de  $\text{inv}$  segue-se diretamente do Teorema 1.19 de [129, p.13].  $\square$

**Teorema 53.** *Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica positiva definida. Então existe uma única matriz  $A^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{S}_+^n$  tal que  $A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} = A$ . Mais ainda, se  $f : \mathbb{S}_+^n \rightarrow \mathbb{S}_+^n$  é a função que mapeia a matriz  $A$  para  $A^{\frac{1}{2}}$ , então  $f$  é contínua.*

*Demonstração.* Vamos provar que se  $A^{\frac{1}{2}}$  existe, é única. Suponha que  $B^2 = A$  é tal que  $B = B^T > 0$ . Temos que  $A$  e  $B$  comutam, pois

$$BA = B(BB) = (BB)B = AB.$$

Disto e de  $A$  e  $B$  serem normais, existe uma base de autovetores comum às duas matrizes  $A$  e  $B$ , digamos  $\{e_1, \dots, e_n\}$ .

Portanto, se  $\lambda_i$  são os autovalores de  $B$ , temos que

$$Be_i = \lambda_i e_i$$

e daí,  $Ae_i = \lambda_i^2 e_i$ . Como  $e_i$  também são autovetores de  $A$ ,  $\lambda_i^2$  são os autovalores de  $A$ , e logo, são determinados de maneira única por  $A$ . Como consequência, os autovalores  $\lambda_i$  também são determinados de maneira única por  $A$ .

Provemos agora a existência de  $A^{\frac{1}{2}}$  construindo a mesma explicitamente: Como  $A$  é simétrica, existe uma decomposição de  $A$  tal que

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$$

onde  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ . Temos que

$$f(A) = P \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} P^{-1}$$

satisfaz  $f(A) f(A) = A$ . Que  $f(A)$  é contínua segue-se pelo Teorema 1.19 de [129, p.13].

□

**Proposição 54.** *Seja  $S$  um conjunto convexo. A função  $\Gamma : S \rightarrow \mathbb{S}^n$  é convexa, isto é,*

$$\Gamma(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \preceq \lambda \Gamma(x_1) + (1 - \lambda) \Gamma(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in S, \lambda \in (0, 1),$$

se as funções  $\bar{\Gamma}_z : S \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$\bar{\Gamma}_z(x) = z^* \Gamma(x) z$$

são convexas para todo  $z \in \mathbb{C}^n$ .

*Demonstração.* Pela hipótese de convexidade de  $\bar{\Gamma}_z$ , tem-se que

$$\bar{\Gamma}_z(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \preceq \lambda \bar{\Gamma}_z(x_1) + (1 - \lambda) \bar{\Gamma}_z(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in S, \lambda \in (0, 1)$$

para todo  $z \in \mathbb{C}^n$ .

Substituindo pela definição de  $\bar{\Gamma}_z$  é obtido

$$z^* [\Gamma(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) - \lambda \Gamma(x_1) + (1 - \lambda) \Gamma(x_2)] z \leq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in S, \lambda \in (0, 1), z \in \mathbb{C}^n,$$

ou seja, a função  $\Gamma$  é convexa. □

## A.6 Resultados sobre o lema de Finsler

**Lema 55** (Lema auxiliar para a demonstração do lema de Finsler - Adaptado de [130, p.233]).

*Seja  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto compacto não vazio. Se  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : K \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas e  $g(x) \geq 0$  para todo  $x \in K$ , então são equivalentes:*

1. *Para  $x \in K$ ,  $f(x) > 0$  sempre que  $g(x) = 0$ .*
2. *Para cada  $x \in K$ , existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) + \alpha g(x) > 0$ .*
3. *Para cada  $x \in K$ , existe  $\alpha^*(x) \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) + \alpha g(x) > 0, \forall \alpha > \alpha^*(x)$ .*
4. *Existe  $\alpha^* \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) + \alpha g(x) > 0, \forall \alpha > \alpha^*, \forall x \in K$ .*

*Observação 56.* No item (4), o valor de  $\alpha^*$  é independente de  $x \in K$  e pode ser negativo.

*Demonstração.*

(4  $\implies$  3  $\implies$  2) Imediato.

(2  $\implies$  1) Se  $g(x) = 0$ , então por (2) temos que

$$f(x) = f(x) + \underbrace{\alpha g(x)}_0 > 0.$$

(1  $\implies$  4) Seja  $K' \subseteq K$  o conjunto definido por

$$K' := \{x \in K \mid f(x) \leq 0\}.$$

Lembrando que pelo teorema de Heine-Borel [128, p.23], um conjunto é compacto no  $\mathbb{R}^n$  se, e somente se é fechado e limitado, temos que, como  $K$  é compacto,  $K$  é limitado e por consequência  $K'$  também é limitado. Temos também que

$$K' = f^{-1}(I), \text{ com } I = (-\infty, 0].$$

Ou seja,  $K'$  é a pré-imagem de um conjunto fechado  $I$  (pois o intervalo  $\mathbb{R} - I = (0, \infty)$  é aberto) por uma função contínua. Daí,  $K'$  é fechado e, novamente por Heine-Borel, temos que  $K'$  é um conjunto compacto.

Por hipótese, temos que  $g(x) \geq 0$  para todo  $x \in K$ . Se  $g(x) = 0$ , temos  $f(x) + \alpha g(x) = f(x) > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

Se  $g(x) > 0$ , para cada  $x \in K \setminus K'$  (isto é, para  $x$  tal que  $f(x) > 0$ ) temos que

$$f(x) + \alpha g(x) > 0 \iff \alpha > -\frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in K \setminus K'$$

e daí podemos escolher  $\alpha_1^* = -\frac{f(x)}{g(x)}$  tal que

$$f(x) + \alpha_1 g(x) > 0, \forall x \in K \setminus K', \forall \alpha_1 > \alpha_1^*. \quad (\text{A.17})$$

Note que se  $K' = \emptyset$  o lema já está demonstrado. Vamos supor então que  $K' \neq \emptyset$ . Como  $K'$  é compacto e  $f$  e  $g$  são funções contínuas em  $K'$  (pois como  $f$  e  $g$  são contínuas em  $K$ , as restrições  $f|_{K'}$  e  $g|_{K'}$  são contínuas em  $K'$ ) existem

$$\mu_f := \min_{x \in K'} f(x) \text{ e } \mu_g := \min_{x \in K'} g(x).$$

Seja então  $x^* \in \operatorname{argmin}_{x \in K'} g(x)$  (isto é,  $g(x^*) = \mu_g$  com  $x^* \in K'$ ). Pela hipótese de que  $g(x) \geq 0$  para todo  $x \in K$ , temos que  $g(x^*) \geq 0$ .

Supondo  $g(x^*) = 0$  temos por (1) que  $f(x^*) > 0$ , contrariando que  $x^* \in K'$ . Logo,  $\mu_g = g(x^*) > 0$ . Daí:

$$\underbrace{\mu_f}_{\leq 0} + \alpha_2 \underbrace{\mu_g}_{> 0} > 0 \iff \alpha_2 > -\frac{\mu_f}{\mu_g}.$$

Como  $\mu_f$  e  $\mu_g$  são valores mínimos, temos que para qualquer  $x \in K'$ :

$$f(x) + \alpha_2 g(x) \geq \mu_f + \alpha_2 \mu_g > 0, \forall x \in K' \text{ e } \alpha_2 > -\frac{\mu_f}{\mu_g}. \quad (\text{A.18})$$

Escolhendo  $\alpha^* = \max \left\{ \alpha_1^*, -\frac{\mu_f}{\mu_g} \right\}$  para (A.17) e (A.18) temos que (4) é válido.  $\square$

**Lema 57** (Lema de Finsler). *Sejam  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{Q} \in \mathbb{S}^n$  e  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que  $\text{posto}(\mathcal{B}) = r < n$ . Então são equivalentes:*

1.  $x^T \mathcal{Q} x < 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $x \neq 0$  e  $\mathcal{B}x = 0$ .
2.  $(\mathcal{B}^\perp)^T \mathcal{Q} \mathcal{B}^\perp \prec 0$ .
3.  $\exists \mu \in \mathbb{R} : \mathcal{Q} - \mu \mathcal{B}^T \mathcal{B} \prec 0$ .
4.  $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{Q} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T \prec 0$ .

onde  $\mathcal{B}^\perp$  denota uma matriz cujas colunas formam uma base para  $\text{Ker}(\mathcal{B})$ , ou seja, uma matriz  $\mathcal{B}^\perp \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$  que satisfaça  $\text{Im}(\mathcal{B}^\perp) = \text{Ker}(\mathcal{B})$ .

*Demonstração.* Baseada em [110, p.19]. Note que  $\text{Im}(\mathcal{B}^\perp) = \text{Ker}(\mathcal{B})$  implica que  $\mathcal{B}^\perp$  é posto coluna pleno.

(1  $\implies$  2) Seja  $y \in \mathbb{R}^{n-r}$  tal que  $y \neq 0$ . Temos que

$$y^T (\mathcal{B}^\perp)^T \mathcal{Q} \mathcal{B}^\perp y = (\mathcal{B}^\perp y)^T \mathcal{Q} (\mathcal{B}^\perp y)$$

e que  $\mathcal{B}^\perp y \in \text{Im}(\mathcal{B}^\perp) \setminus \{0\} = \text{Ker}(\mathcal{B}) \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{B}x = 0 \text{ e } x \neq 0\}$ , pois como  $\mathcal{B}^\perp$  é posto coluna pleno e  $y \neq 0$ ,  $\mathcal{B}^\perp y \neq 0$ .

Como  $y$  foi escolhido arbitrariamente, então

$$(\mathcal{B}^\perp y)^T \mathcal{Q} (\mathcal{B}^\perp y) < 0 \forall y \in \mathbb{R}^{n-r} \setminus \{0\}.$$

(2  $\implies$  1) Seja  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\mathcal{B}x = 0$  e  $x \neq 0$ . Como  $x \in \text{Ker}(\mathcal{B}) = \text{Im}(\mathcal{B}^\perp)$ , existe  $y \in \mathbb{R}^{n-r}$  tal que  $x = \mathcal{B}^\perp y$ . Daí:

$$0 \stackrel{(2)}{>} y^T (\mathcal{B}^\perp)^T \mathcal{Q} \mathcal{B}^\perp y = (\mathcal{B}^\perp y)^T \mathcal{Q} (\mathcal{B}^\perp y) = x^T \mathcal{Q} x.$$

(3  $\implies$  2) Usando que  $\mathcal{B}^\perp$  é posto coluna pleno e aplicando uma transformação de congruência (Proposição 39) em (3) multiplicando à esquerda por  $(\mathcal{B}^\perp)^T$  e à direita por  $\mathcal{B}^\perp$ , tem-se que

$$(\mathcal{B}^\perp)^T \mathcal{Q} \mathcal{B}^\perp - \mu (\mathcal{B}^\perp)^T \mathcal{B}^T \mathcal{B} \mathcal{B}^\perp = (\mathcal{B}^\perp)^T \mathcal{Q} \mathcal{B}^\perp - \mu (\mathcal{B} \mathcal{B}^\perp)^T \mathcal{B} \mathcal{B}^\perp \prec 0.$$



Porém, como  $\text{Im}(\mathcal{B}^\perp) \subseteq \text{Ker}(\mathcal{B})$ , temos que  $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$ , logo

$$\left(\mathcal{B}^\perp\right)^T \mathcal{Q}\mathcal{B}^\perp \prec 0.$$

(4  $\implies$  2) Usando que  $\mathcal{B}^\perp$  é posto coluna pleno e aplicando uma transformação de congruência (Proposição 39) em (4) multiplicando à esquerda por  $\left(\mathcal{B}^\perp\right)^T$  e à direita por  $\mathcal{B}^\perp$ , tem-se que

$$\left(\mathcal{B}^\perp\right)^T \mathcal{Q}\mathcal{B}^\perp + \left(\mathcal{B}^\perp\right)^T \mathcal{X}\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp + \left(\mathcal{B}^\perp\right)^T \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T \mathcal{B}^\perp = \left(\mathcal{B}^\perp\right)^T \mathcal{Q}\mathcal{B}^\perp + \left(\mathcal{B}^\perp\right)^T \mathcal{X} \left(\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp\right) + \left(\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp\right)^T \mathcal{X}^T \mathcal{B}^\perp \prec 0.$$

Porém, como  $\text{Im}(\mathcal{B}^\perp) \subseteq \text{Ker}(\mathcal{B})$ , temos que  $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$ , logo

$$\left(\mathcal{B}^\perp\right)^T \mathcal{Q}\mathcal{B}^\perp \prec 0.$$

(3  $\implies$  4) Escolhendo  $\mathcal{X} = -(\mu/2)\mathcal{B}^T$  em (4) temos que

$$\mathcal{Q} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T = \mathcal{Q} - \frac{\mu}{2}\mathcal{B}^T \mathcal{B} - \frac{\mu}{2}\mathcal{B}^T \mathcal{B} = \mathcal{Q} - \mu\mathcal{B}^T \mathcal{B} \stackrel{(3)}{\prec} 0$$

(1  $\implies$  3) Sejam  $f(x) = -x^T \mathcal{Q}x$ ,  $g(x) = x^T \mathcal{B}^T \mathcal{B}x$  e  $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T x = 1\}$ .

Por (1), temos que

$$f(x) = -\underbrace{x^T \mathcal{Q}x}_{<0} > 0 \quad \forall \mathcal{B}x = 0, \quad x \neq 0.$$

Isto é,  $f(x) > 0$  para todo  $x \in \text{Ker}(\mathcal{B}) \setminus \{0\}$ . Como  $g(x) = (\mathcal{B}x)^T (\mathcal{B}x) = \|\mathcal{B}x\|^2 \geq 0$ , temos que  $g(x) = 0$  se, e somente se  $x \in \text{Ker}(\mathcal{B})$ . Daí, como  $0 \notin K$ , temos que para todo  $x \in K$ ,  $f(x) > 0$  sempre que  $g(x) = 0$ , que é justamente a condição (1) do lema 55. Esta é equivalente a que para todo  $x \in K$ , existe  $\mu \in \mathbb{R}$  tal que

$$f(x) + \mu g(x) > 0 \quad \forall x \in K.$$

Temos então que para todo  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  que

$$y^T (\mathcal{Q} - \mu\mathcal{B}^T \mathcal{B}) y = \underbrace{\|y\|^2}_{>0} \underbrace{\left[ \left( \frac{y}{\|y\|} \right)^T (\mathcal{Q} - \mu\mathcal{B}^T \mathcal{B}) \left( \frac{y}{\|y\|} \right) \right]}_{<0, \text{ pois } \frac{y}{\|y\|} \in K} < 0.$$

Consequentemente,  $\mathcal{Q} - \mu\mathcal{B}^T \mathcal{B} \prec 0$ .

□

A equivalência entre (3) e (4) do lema de Finsler pode ser generalizada para o caso em que a matriz  $\mathcal{B}$  possui posto coluna pleno. Isso será provado no Lema 60 com auxílio do Lema 58.

**Lema 58.** *Sejam  $A, B \in \mathbb{S}^n$  com  $B \succ 0$ . Então existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $A - \alpha B \preceq 0$ .*

*Demonstração.* Como  $B \succ 0$ , existe  $B^{\frac{1}{2}} \succ 0$  tal que  $B^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} = B$  pelo Teorema 53. Daí:

$$\begin{aligned}
A - \alpha B \preceq 0 &\iff B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}} - \alpha I \preceq 0 \\
&\iff \alpha I - B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}} \succeq 0 \\
&\iff \lambda_i \left[ \alpha I - B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}} \right] \geq 0 \\
&\iff \alpha - \lambda_i \left[ B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}} \right] \geq 0 \\
&\iff \alpha \geq \lambda_{\max} \left[ B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}} \right].
\end{aligned}$$

□

*Observação 59.* O Lema 58 não vale para  $B \succeq 0$ , como pode ser visto pelo seguinte contra-exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } A - \alpha B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \not\prec 0 \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

**Lema 60.** *Sejam  $Q \in \mathbb{S}^n$  e  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  com  $\text{posto}(B) = n$ . Então são equivalentes:*

1.  $\exists \mu \in \mathbb{R} : Q - \mu B^T B \prec 0$ .
2.  $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m} : Q + \mathcal{X} B + B^T \mathcal{X}^T \prec 0$ .

*Demonstração.*

(1  $\implies$  2) Tomando  $\mathcal{X} = -\frac{\mu}{2} B$ , temos que

$$0 \succ Q - \mu B^T B = Q + \underbrace{\left(-\frac{\mu}{2} B^T\right)}_{\mathcal{X}} B + B^T \underbrace{\left(-\frac{\mu}{2} B\right)}_{\mathcal{X}^T}.$$

(2  $\implies$  1) Temos que existe  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tal que

$$Q + \mathcal{X} B + B^T \mathcal{X}^T \prec 0 \iff x^T (Q + \mathcal{X} B + B^T \mathcal{X}^T) x < 0 \forall x \in \mathbb{R}^n : x \neq 0. \quad (\text{A.19})$$

Sejam  $y, z \in \mathbb{R}^m$ . Então:

$$\begin{aligned}
-(y+z)^T (y+z) &\leq 0 \\
-y^T y - y^T z - z^T y - z^T z &\leq 0 \\
-(y^T y + z^T z) &\leq z^T y + y^T z.
\end{aligned}$$

Portanto, para qualquer  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $x \neq 0$ , se  $y = Bx$  e  $z = \mathcal{X}^T x$  temos então que

$$\begin{aligned}
-(x^T B^T B x + x^T \mathcal{X} \mathcal{X}^T x) &\leq x^T \mathcal{X} B x + x^T B^T \mathcal{X}^T x \\
x^T Q x - (x^T B^T B x + x^T \mathcal{X} \mathcal{X}^T x) &\leq x^T Q x + x^T \mathcal{X} B x + x^T B^T \mathcal{X}^T x \\
x^T (Q - B^T B - \mathcal{X} \mathcal{X}^T) x &\leq x^T (Q + \mathcal{X} B + B^T \mathcal{X}^T) x \stackrel{(\text{A.19})}{<} 0.
\end{aligned}$$

Daí,

$$x^T (Q - B^T B - \mathcal{X} \mathcal{X}^T) x \prec 0,$$

o que implica que para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x^T \mathcal{Q}x - (1 - \alpha) x^T \mathcal{B}^T \mathcal{B}x < x^T \mathcal{X} \mathcal{X}^T x - \alpha x^T \mathcal{B}^T \mathcal{B}x = x^T (\mathcal{X} \mathcal{X}^T - \alpha \mathcal{B}^T \mathcal{B}) x.$$

Escolhendo  $\mu = (1 - \alpha)$ , tem-se o resultado desejado se existir  $\alpha^* \in \mathbb{R}$  tal que  $(\mathcal{X} \mathcal{X}^T - \alpha^* \mathcal{B}^T \mathcal{B}) \prec 0$ . Tal é garantido pelo Lema 58, pois como  $\mathcal{B}^T \mathcal{B}$  possui posto coluna pleno, tem-se que  $\mathcal{B}^T \mathcal{B} \succ 0$ .  $\square$

*Observação 61.* [131, p.58] A matriz  $\mathcal{B}^\perp$  pode ser construída a partir da SVD de  $\mathcal{B}$  da seguinte maneira:

$$\mathcal{B}^\perp = T U_2^T$$

onde  $T$  é uma matriz arbitrária não singular e  $U_2$  é definida pela SVD de  $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}.$$

O lema de Finsler pode ser generalizado para funções matriciais pontualmente, conforme é feito no Lema 62 adiante.

**Lema 62** (Lema de Finsler). *Sejam  $S \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{Q} : S \rightarrow \mathbb{S}^n$  e  $\mathcal{B} : S \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que posto  $(\mathcal{B}(s)) < n$ , para cada  $s \in S$ . Então são equivalentes:*

1. Para cada  $s \in S$ , tem-se  $x^T \mathcal{Q}(s)x < 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $x \neq 0$  e  $\mathcal{B}(s)x = 0$ .
2. Para cada  $s \in S$ , tem-se  $(\mathcal{B}^\perp(s))^T \mathcal{Q}(s) \mathcal{B}^\perp(s) < 0$ .
3.  $(\forall s \in S) (\exists \mu(s) \in \mathbb{R}) : \mathcal{Q}(s) - \mu(s) \mathcal{B}^T(s) \mathcal{B}(s) < 0$ .
4.  $(\forall s \in S) (\exists \mathcal{X}(s) \in \mathbb{R}^{n \times m}) : \mathcal{Q}(s) + \mathcal{X}(s) \mathcal{B}(s) + \mathcal{B}^T(s) \mathcal{X}^T(s) < 0$ .

*Demonstração.* (1  $\iff$  2  $\iff$  3  $\iff$  4) Basta estender o lema de Finsler ponto a ponto.  $\square$

*Observação 63.* É interessante notar que o posto  $(\mathcal{B}(s))$  pode ser variante com  $s$ , bastando apenas ser menor que  $n$ .

Um questionamento que surge naturalmente agora é se os itens (3) e (4) do Lema 62 também são válidos de maneira uniforme em  $\mu$  e  $\mathcal{X}$ , respectivamente. O Exemplo 64 a seguir mostra que em geral não é possível garantir a uniformidade.

**Exemplo 64.** Sejam

$$\mathcal{Q}(s) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}^T(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} \quad \text{e } S = (0, 1].$$

Será exibido um  $\mu(s)$  dependente de  $s$  tal que o item (3) do Lema 62 é satisfeito, e que  $\mu(s)$  não pode ser escolhido de tal forma que  $\mu(s) = \bar{\mu}$  é independente de  $s$ . Tem-se que

$$\mathcal{Q}(s) - \mu(s) \mathcal{B}^T(s) \mathcal{B}(s) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & s - \mu(s) s^2 \end{bmatrix} \prec 0 \iff s - \mu(s) s^2 < 0 \stackrel{0 \notin S}{\iff} \frac{1}{s} < \mu(s)$$

Daí, para que o item (3) do Lema 62 seja satisfeito, pode-se tomar por exemplo  $\mu(s) = \frac{1}{s} + \epsilon$  com algum  $\epsilon > 0$ . Porém, não é possível escolher um  $\mu(s) = \bar{\mu}$  onde  $\bar{\mu}$  é uma constante independente de  $s$ , pois para pontos próximos de 0, a função  $1/s$  cresce sem limite.

Embora os itens (3) e (4) do Lema 62 não são válidos de maneira uniforme em geral, será visto nos Lemas a seguir como é possível tornar-los uniformes forçando certas restrições nas funções  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{B}$  e no conjunto  $S$  em que estas estão definidas. Este resultado parece ser inédito na literatura, e pretende-se aplicar-lo futuramente em diversos problemas de sistemas e controle.

**Lema 65.** *Sejam  $\mathcal{Q} : S \rightarrow \mathbb{S}^n$  e  $\mathcal{B} : S \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$  funções definidas em um conjunto  $S \subseteq \mathbb{R}$  tais que*

$$\sup_{s \in S} \inf_{\mu \in \mathbb{R}} \{ \mathcal{Q}(s) - \mu \mathcal{B}^T(s) \mathcal{B}(s) \prec 0 \} < \infty. \quad (\text{A.20})$$

Segue que se

$$(\forall s \in S) (\exists \mu(s) \in \mathbb{R}) : \mathcal{Q}(s) - \mu(s) \mathcal{B}^T(s) \mathcal{B}(s) \prec 0 \quad (\text{A.21})$$

então

$$(\exists \bar{\mu} \in \mathbb{R}) (\forall s \in S) : \mathcal{Q}(s) - \bar{\mu} \mathcal{B}^T(s) \mathcal{B}(s) \prec 0. \quad (\text{A.22})$$

*Demonstração.* Para cada  $s \in S$  defina

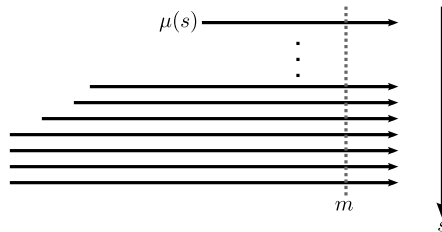
$$\mathcal{M}(s) := \{ \mu \in \mathbb{R} \mid \mathcal{Q}(s) - \mu \mathcal{B}^T(s) \mathcal{B}(s) \prec 0 \}.$$

Por (A.21), temos que  $\mathcal{M}(s) \neq \emptyset$ . Temos também que se  $\mu^* \in \mathcal{M}(s)$ , então  $(\mu^* + \alpha) \in \mathcal{M}(s)$  para todo  $\alpha \geq 0$ , pois

$$\begin{aligned} 0 \succ \mathcal{Q}(s) - \mu^* \mathcal{B}^T(s) \mathcal{B}(s) &\succeq \mathcal{Q}(s) - \mu^* \mathcal{B}^T(s) \mathcal{B}(s) - \underbrace{\alpha \mathcal{B}^T(s) \mathcal{B}(s)}_{\preceq 0} \\ &= \mathcal{Q}(s) - (\mu^* + \alpha) \mathcal{B}^T(s) \mathcal{B}(s). \end{aligned}$$

Portanto, sempre existe  $\mu^* \in \mathcal{M}(s)$  tal que  $[\mu^*, \infty) \subseteq \mathcal{M}(s)$ . Por (A.20), existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que

$$\inf_{\mu \in \mathbb{R}} \{ \mathcal{Q}(s) - \mu \mathcal{B}^T(s) \mathcal{B}(s) \prec 0 \} < m, \quad \forall s \in S$$



Por isso,  $m \in \mathcal{M}(s)$  para todo  $s \in S$  e  $\bar{\mu} = m$  é tal que

$$\mathcal{Q}(s) - \bar{\mu} \mathcal{B}^T(s) \mathcal{B}(s) \prec 0, \quad \forall s \in S.$$

□

**Teorema 66.** *Sejam  $\mathcal{Q} : S \rightarrow \mathbb{S}^n$  e  $\mathcal{B} : S \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$  funções contínuas definidas em um conjunto  $S \subseteq \mathbb{R}$  compacto. Supondo*

$$\text{Ker } \mathcal{B}(s) = K, \quad \forall s \in S$$

e que

$$(\forall s \in S) (\exists \mu(s) \in \mathbb{R}) : \mathcal{Q}(s) - \mu(s) \mathcal{B}^T(s) \mathcal{B}(s) \prec 0$$

então

$$\sup_{s \in S} \inf_{\mu \in \mathbb{R}} \{ \mathcal{Q}(s) - \mu \mathcal{B}^T(s) \mathcal{B}(s) \prec 0 \} < \infty \quad (\text{A.23})$$

*Demonstração.* Seja  $k := \dim K$ . Tem-se que posto  $\mathcal{B}(s)$  é constante em  $s$ , pois

$$\text{posto } \mathcal{B}(s) = n - \dim K = n - k.$$

Considerando uma decomposição de  $\mathbb{R}^n$  dada por

$$\mathbb{R}^n = K^\perp \oplus K$$

e  $\begin{bmatrix} C_1 & C \end{bmatrix}$  uma matriz com as colunas formando uma base de  $\mathbb{R}^n$ , sendo  $C_1$  a matriz cuja colunas formam uma base para  $K^\perp$  e  $C$  a matriz cuja colunas formam uma base para  $K$ , segue-se que

$$\mathcal{B}(s) \begin{bmatrix} C_1 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1(s) & 0 \end{bmatrix},$$

onde  $\mathcal{B}_1(s) \in \mathbb{R}^{m \times (n-k)}$ ,  $\forall s \in S$ .

Tem-se também que

$$\begin{aligned} \text{posto } \mathcal{B}_1(s) &= \text{posto} \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1(s) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \text{posto } \mathcal{B}(s) \begin{bmatrix} C_1 & C \end{bmatrix} \\ &= \text{posto } \mathcal{B}(s), \text{ pois } \begin{bmatrix} C_1 & C \end{bmatrix} \text{ é posto completo.} \\ &\stackrel{(\text{A.23})}{=} n - k, \end{aligned}$$

ou seja,  $\mathcal{B}_1(s)$  é posto coluna pleno. Daí, segue-se que  $R(s) := \mathcal{B}_1^T(s) \mathcal{B}_1(s)$  é invertível para todo  $s \in S$ . Temos também que  $R(s)$  é contínua em  $S$ , pois como  $\mathcal{B}(s)$  é contínua,  $\mathcal{B}_1(s) = \mathcal{B}(s) C_1$  é contínua em  $S$ .

Agora,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(s) - \mu(s) \mathcal{B}^T(s) \mathcal{B}(s) \prec 0 &\iff \begin{bmatrix} C_1^T \\ C^T \end{bmatrix} (\mathcal{Q}(s) - \mu(s) \mathcal{B}^T(s) \mathcal{B}(s)) \begin{bmatrix} C_1 & C \end{bmatrix} \prec 0 \\ &\iff \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{11}(s) & \mathcal{Q}_{12}(s) \\ \mathcal{Q}_{12}^T(s) & \mathcal{Q}_{22}(s) \end{bmatrix} - \mu(s) \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1^T(s) \mathcal{B}_1(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \prec 0 \\ &\iff \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{11}(s) - \mu(s) \mathcal{B}_1^T(s) \mathcal{B}_1(s) & \mathcal{Q}_{12}(s) \\ \mathcal{Q}_{12}^T(s) & \mathcal{Q}_{22}(s) \end{bmatrix} \prec 0 \\ &\iff \begin{cases} \mathcal{Q}_{22} \prec 0 \\ -\mu(s) \mathcal{B}_1^T(s) \mathcal{B}_1(s) + \mathcal{Q}_{11}(s) - \mathcal{Q}_{12}(s) \mathcal{Q}_{22}^{-1}(s) \mathcal{Q}_{12}^T(s) \prec 0 \end{cases} \end{aligned}$$

onde foi utilizado complemento de Schur. Definindo

$$\bar{\mathcal{Q}}(s) = \mathcal{Q}_{11}(s) - \mathcal{Q}_{12}(s) \mathcal{Q}_{22}^{-1}(s) \mathcal{Q}_{12}^T(s)$$

segue-se que

$$M(s) := \{\mu \in \mathbb{R} \mid \mathcal{Q}(s) - \mu(s) \mathcal{B}^T(s) \mathcal{B}(s) \prec 0\} = \{\mu \in \mathbb{R} \mid \bar{\mathcal{Q}}(s) - \mu(s) \mathcal{B}_1^T(s) \mathcal{B}_1(s) \prec 0\}.$$

Como  $\mathcal{Q}(s)$  é contínua, segue que  $\mathcal{Q}_{11}(s)$ ,  $\mathcal{Q}_{12}(s)$  e  $\mathcal{Q}_{22}(s)$  são contínuas. Pelo Teorema 52, a função inv que mapeia uma matriz  $A$  invertível em sua inversa é contínua. Assim  $\mathcal{Q}_{22}^{-1}(s) = \text{inv}[\mathcal{Q}_{22}(s)]$  é contínua e segue-se que  $\bar{\mathcal{Q}}$  é contínua em  $S$ .

Do Teorema 53, tem-se que se  $R^{\frac{1}{2}}(s)$  é a matriz raiz quadrada de  $R(s)$ , i.e.:  $R(s) = R^{\frac{1}{2}}(s) R^{\frac{1}{2}}(s)$ , então  $R^{\frac{1}{2}}(s)$  é contínua em  $S$ . Temos também que

$$\bar{\mathcal{Q}}(s) - \mu(s) \underbrace{\mathcal{B}_1^T(s) \mathcal{B}_1(s)}_{R(s)} \prec 0 \iff R^{-\frac{1}{2}}(s) \bar{\mathcal{Q}}(s) R^{-\frac{1}{2}}(s) - \mu(s) I \prec 0.$$

Definindo  $\mathcal{Q}_1^*(s) := R^{-\frac{1}{2}}(s) \bar{\mathcal{Q}}(s) R^{-\frac{1}{2}}(s)$ , segue-se que

$$\begin{aligned} \inf_{\mu \in \mathbb{R}} \{\mathcal{Q}_1^*(s) - \mu I \prec 0\} &= \inf_{\mu \in \mathbb{R}} \{\mathcal{Q}_1^*(s) \prec \mu I\} \\ &\stackrel{(42)}{=} \inf_{\mu \in \mathbb{R}} \{\lambda_{\max}[\mathcal{Q}_1^*(s)] \prec \mu\} \\ &= \lambda_{\max}[\mathcal{Q}_1^*(s)]. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\sup_{s \in S} \inf_{\mu \in \mathbb{R}} \{\mathcal{Q}(s) - \mu \mathcal{B}^T(s) \mathcal{B}(s) \prec 0\} = \sup_{s \in S} \{\lambda_{\max}[\mathcal{Q}_1^*(s)]\} < \infty,$$

pois  $S$  é compacto e a função  $\lambda_{\max}(\cdot)$  é contínua (pelo Corolário 35).  $\square$

**Corolário 67.** *Sejam  $\mathcal{Q} : S \rightarrow \mathbb{S}^n$  e  $\mathcal{B} : S \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$  funções contínuas definidas em um conjunto  $S \subseteq \mathbb{R}$  compacto. Supondo*

$$\text{Ker } \mathcal{B}(s) = K, \quad \forall s \in S$$

e que

$$(\forall s \in S) (\exists \mu(s) \in \mathbb{R}) : \mathcal{Q}(s) - \mu(s) \mathcal{B}^T(s) \mathcal{B}(s) \prec 0$$

então

$$(\exists \bar{\mu} \in \mathbb{R}) (\forall s \in S) : \mathcal{Q}(s) - \bar{\mu} \mathcal{B}^T(s) \mathcal{B}(s) \prec 0.$$

*Demonstração.* Segue-se diretamente do Lema 65 e do Teorema 66.  $\square$

## ANEXO B

# Equivalência entre os Teoremas desta dissertação e o artigo [2]

### B.1 Equivalência entre a condição de análise

Será demonstrado que o Lema 1 enunciado em [2] para fazer a análise FTB de um sistema em relação a classe de ruídos  $\mathcal{W}_d^\infty$  é equivalente ao Lema 10 desta dissertação.

**Teorema 68.** *As LMIs*

$$\begin{bmatrix} A(t)\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 A^T(t) - \beta\tilde{Q}_1 & G(t)Q_2 \\ \star & -\mu Q_2 \end{bmatrix} \prec 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{c_1}{\lambda_{\min}(Q_1)} + \frac{d}{\lambda_{\min}(Q_2)} \frac{\mu}{\beta} < \frac{c_2 e^{-\beta T}}{\lambda_{\max}(Q_1)}, \quad (\text{B.2})$$

com

$$\tilde{Q}_1 := R^{-\frac{1}{2}} Q_1 R^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{B.3})$$

são equivalentes as LMIs (3.32), (3.33) e (3.34) do Lema 10 desta dissertação.

*Demonstração.* Se  $\mu = \beta$  em (B.1) e (B.2), estas recaem em (3.32) e (3.33) respectivamente. Reciprocamente, reescrevendo  $Q_2$  em (B.1) e (B.2) como

$$\bar{Q}_2 := \frac{\beta}{\mu} Q_2,$$

pode-se colocar (B.1) e (B.2) nas formas (3.32) e (3.33).  $\square$

### B.2 Lemas para fazer a troca de variável $K = Y - Z$

Os lemas a seguir buscam trocar a variável  $Y$  das LMIs do teorema 1 do artigo do filtro de tempo-finito pela variável  $K := Y - Z$ .

**Lema 69.** *São equivalentes:*

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q} & S \\ \star & \lambda_1 R \end{bmatrix} \succ 0, \text{ sendo } \tilde{Q} = \begin{bmatrix} Y & Z \\ Z & Z \end{bmatrix} \text{ e } S = \begin{bmatrix} Y & I \\ Z & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$\iff \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{Q}} & \tilde{\tilde{S}} \\ \star & \lambda_1 R \end{bmatrix} \succ 0, \text{ sendo } \tilde{\tilde{Q}} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}, \tilde{\tilde{S}} = \begin{bmatrix} K & I \\ Z & 0 \end{bmatrix} \text{ e } K := Y - Z \quad (\text{B.5})$$

*Demonstração.* Aplicando uma transformação de congruência (Proposição 39) em (B.4), tem-se

$$\begin{bmatrix} T^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Q} & S \\ \star & \lambda_1 R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \succ 0 \iff \begin{bmatrix} T^T \tilde{Q} T & T^T S \\ \star & \lambda_1 R \end{bmatrix} \succ 0. \quad (\text{B.6})$$

Para  $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix}$ , podemos realizar a troca de variável de  $Y$  para  $K := Y - Z$ :

O termo (1, 1) de  $\begin{bmatrix} T^T \tilde{Q} T & T^T S \\ \star & \lambda_1 R \end{bmatrix}$  é:

$$T^T \tilde{Q} T = \begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & Z \\ Z & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y - Z & 0 \\ Z & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y - Z & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} = \tilde{\tilde{Q}}.$$

O termo (1, 2) de  $\begin{bmatrix} T^T \tilde{Q} T & T^T S \\ \star & \lambda_1 R \end{bmatrix}$  é:

$$T^T S = \begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & I \\ Z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y - Z & I \\ Z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & I \\ Z & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\tilde{S}}.$$

Logo

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q} & S \\ \star & \lambda_1 R \end{bmatrix} \succ 0 \implies \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{Q}} & \tilde{\tilde{S}} \\ \star & \lambda_1 R \end{bmatrix} \succ 0$$

e como  $T$  é invertível, com  $T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix}$ , a recíproca também é válida.  $\square$

**Lema 70.** *São equivalentes:*

$$\begin{bmatrix} YA + A^T Y + LC_y + C_y^T L^T - \beta Y & YA + LC_y + M + A^T Z - \beta Z & YB + LD \\ \star & A^T Z + ZA - \beta Z & ZB \\ \star & \star & -\hat{\beta}W \end{bmatrix} \prec 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\iff \begin{bmatrix} -(\beta K + M + M^T) & KA + LC_y + M & KB + LD \\ \star & A^T Z + ZA - \beta Z & ZB \\ \star & \star & -\hat{\beta}W \end{bmatrix} \prec 0, K := Y - Z \quad (\text{B.8})$$



*Demonstração.* (B.7) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} M & B \\ \star & -\hat{\beta}W \end{bmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

$$\text{com } M = \begin{bmatrix} YA + A^T Y + LC_y + C_y^T L^T - \beta Y & YA + LC_y + M + A^T Z - \beta Z \\ \star & A^T Z + ZA - \beta Z \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} YB + LD \\ ZB \end{bmatrix}.$$

Aplicando uma transformação de congruência (Proposição 39) em (B.9), tem-se

$$\begin{bmatrix} T^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & B \\ \star & -\hat{\beta}W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0 \iff \begin{bmatrix} T^T M T & T^T B \\ \star & -\hat{\beta}W \end{bmatrix} \prec 0.$$

Para  $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix}$ , podemos realizar a troca de variável de  $Y$  para  $K := Y - Z$ :

O termo (1, 1) de  $\begin{bmatrix} T^T M T & T^T B \\ \star & -\hat{\beta}W \end{bmatrix}$  é:

$$\begin{aligned} T^T M T &= \begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} YA + A^T Y + LC_y + C_y^T L^T - \beta Y & YA + LC_y + M + A^T Z - \beta Z \\ A^T Y + C_y^T L^T + M^T + ZA - \beta Z & A^T Z + ZA - \beta Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} YA + LC_y - ZA - M^T - \beta Y + \beta Z & YA + LC_y + M - ZA \\ A^T Y + C_y^T L^T + M^T + ZA - \beta Z & A^T Z + ZA - \beta Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -[\beta(Y - Z) + M + M^T] & (Y - Z)A + LC_y + M \\ \star & A^T Z + ZA - \beta Z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(\beta K + M + M^T) & KA + LC_y + M \\ \star & A^T Z + ZA - \beta Z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O termo (1, 2) de  $\begin{bmatrix} T^T M T & T^T B \\ \star & -\hat{\beta}W \end{bmatrix}$  é:

$$T^T B = \begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} YB + LD \\ ZB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Y - Z)B + LD \\ ZB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} KB + LD \\ ZB \end{bmatrix}.$$

□

**Lema 71.** *São equivalentes:*

$$\begin{bmatrix} Y + \lambda_4 I & Y \\ \star & Z \end{bmatrix} \succ 0 \iff \begin{bmatrix} \lambda_4 I - K & K \\ \star & Z \end{bmatrix} \succ 0, \quad K := Y - Z \quad (\text{B.10})$$

*Demonstração.* Aplicando uma transformação de congruência (Proposição 39) em  $\begin{bmatrix} Y + \lambda_4 I & Y \\ \star & Z \end{bmatrix}$ ,

tem-se

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y + \lambda_4 I & Y \\ Y & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \succ 0 &\iff \begin{bmatrix} \lambda_4 I & Y - Z \\ Y & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \succ 0 \\
&\iff \begin{bmatrix} \lambda_4 I - (Y - Z) & Y - Z \\ Y - Z & Z \end{bmatrix} \succ 0 \\
&\iff \begin{bmatrix} \lambda_4 I - K & K \\ K & Z \end{bmatrix} \succ 0.
\end{aligned}$$

□

**Lema 72.** *São equivalentes:*

$$\begin{bmatrix} Y & Z & C_z^T \\ \star & Z & C_z^T - F^T \\ \star & \star & I \end{bmatrix} \succ 0 \iff \begin{bmatrix} K & 0 & F^T \\ \star & Z & C_z^T - F^T \\ \star & \star & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad K := Y - Z \quad (\text{B.11})$$

*Demonstração.* A matriz  $\begin{bmatrix} Y & Z & C_z^T \\ \star & Z & C_z^T - F^T \\ \star & \star & I \end{bmatrix}$  pode ser escrita como  $\begin{bmatrix} \tilde{Q} & C \\ \star & I \end{bmatrix}$ , onde  $\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Y & Z \\ \star & Z \end{bmatrix}$  e  $C = \begin{bmatrix} C_z^T \\ C_z^T - F^T \end{bmatrix}$ .

Aplicando uma transformação de congruência (Proposição 39) em  $\begin{bmatrix} \tilde{Q} & C \\ \star & I \end{bmatrix}$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} T^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Q} & C \\ \star & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0 \iff \begin{bmatrix} T^T \tilde{Q} T & T^T C \\ \star & I \end{bmatrix} \prec 0.$$

Para  $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix}$ , podemos realizar a troca de variável de  $Y$  para  $K := Y - Z$ :

O termo (1,1) de  $\begin{bmatrix} T^T \tilde{Q} T & T^T C \\ \star & I \end{bmatrix}$  é:

$$T^T \tilde{Q} T = \begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & Z \\ Z & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y - Z & 0 \\ Z & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y - Z & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}.$$

O termo (1,2) de  $\begin{bmatrix} T^T \tilde{Q} T & T^T C \\ \star & I \end{bmatrix}$  é:

$$T^T C = \begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_z^T \\ C_z^T - F^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^T \\ C_z^T - F^T \end{bmatrix}.$$

□

# ANEXO C

## Artigos publicados

Neste anexo é listado todos os trabalhos científicos publicados durante o período do mestrado.

- R. A. Borges, J. Y. Ishihara, I. G. Rocha, L. O. Risso, e H. T. M. Kussaba, “Finite time robust filtering for time-varying uncertain polytopic linear systems,” in *Proceedings of the 2013 European Control Conference*, (Zurich, Suíça), pp. 1854–1859, Julho 2013. [2]
- R. A. Borges, J. Y. Ishihara, H. T. M. Kussaba, e L. P. Silva, “Homogeneous polynomially parameter-dependent state feedback controllers for finite time stabilization of linear time-varying systems,” in *Proceedings of the 2013 European Control Conference*, (Zurich, Suíça), pp. 3889–3894, Julho 2013. [114]