

**ESTUDO NUMÉRICO-ANALÍTICO DE MODELOS REOLÓGICOS  
UNIDIMENSIONAIS VISCOELÁSTICOS, ELASTOPLÁSTICOS E  
VISCOPLÁSTICOS**

**MARCOS ANDRADE DE CARVALHO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ESTUDO NUMÉRICO-ANALÍTICO DE MODELOS REOLÓGICOS  
UNIDIMENSIONAIS VISCOELÁSTICOS, ELASTOPLÁSTICOS E  
VISCOPLÁSTICOS**

**MARCOS ANDRADE DE CARVALHO**

**ORIENTADOR: GILBERTO GOMES**

**CO-ORIENTADOR: FRANCISCO EVANGELISTA JUNIOR**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E  
CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM-008A/14**

**BRASÍLIA/DF: JULHO - 2014**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

ESTUDO NUMÉRICO-ANALÍTICO DE MODELOS REOLÓGICOS  
UNIDIMENSIONAIS VISCOELÁSTICOS, ELASTOPLÁSTICO E  
VISCOPLÁSTICOS

MARCOS ANDRADE DE CARVALHO

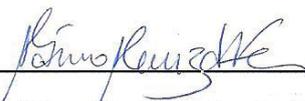
DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA  
CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:



---

Prof. Gilberto Gomes, DSc (ENC/UnB)  
(Orientador)



---

Prof. Marcio Muniz de Farias, PhD (ENC/UnB)  
(Examinador Interno)



---

Prof. Givanildo Alves de Azeredo PhD (UFPB)  
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 18 DE JULHO DE 2014.

## FICHA CATALOGRÁFICA

CARVALHO, MARCOS ANDRADE DE  
Estudo Numérico-Analítico de Modelos Reológicos Unidimensionais Viscoelásticos,  
Elastoplásticos e Viscoplasticos

xix, 116 p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2014).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.  
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

- |                      |                       |
|----------------------|-----------------------|
| 1. Viscoelasticidade | 2. Elastoplasticidade |
| 3. Viscoplasticidade | 4. MDF                |
| I. ENC/FT/UnB        | II. Título (série)    |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

CARVALHO, M. A. (2014). Estudo Numérico-Analítico de Modelos Reológicos Unidimensionais Viscoelásticos, Elastoplásticos e Viscoplasticos. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação N°: E.DM-008A/14, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 116 p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Marcos Andrade de Carvalho.

TÍTULO: Estudo Numérico-Analítico de Modelos Reológicos Unidimensionais Viscoelásticos, Elastoplásticos e Viscoplasticos.

GRAU/ANO: Mestre/2014

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Marcos Andrade de Carvalho  
Q 7, Conj. G, Casa 4, Setor Sul, Gama – CEP 72.410-407  
Brasília – DF – Brasil

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela saúde, força, fé e perseverança, pois me guiou e iluminou nas minhas escolhas e em nenhum momento me deixou desanimar, pois sem a sua força jamais teria conseguido chegar aqui.

À minha esposa Patrícia que com o seu amor, a sua compreensão e o carinho sempre esteve presente me apoiando em tudo o que fosse necessário.

Aos meus pais Francisco e Maria das Graças que dedicaram suas vidas para me oferecerem a oportunidade de estudar, mesmo sem condições financeiras suficientes. Mas com esforço e muita fé, Deus fez o pouco com se tornar muito, porque o muito sem Deus não é nada. Agradeço-lhes pela confiança, esforço, motivação e o amor que jamais me deixaram faltar.

Ao meu orientador Prof.º Dr. Gilberto Gomes pelo esforço, dedicação, compreensão e paciência, pois tenho plena consciência que sua orientação foi fundamental para o meu sucesso, muito obrigado por tudo.

Ao meu coorientador Prof.º PhD. Evangelista e aos demais professores que me passaram seus conhecimentos e experiências ao longo do curso, afinal dedico o que sou como profissional da ciência e da pesquisa a todos vocês.

Aos meus irmãos e sobrinhos, avós, tios, primos, enfim a todos os meus familiares que tanto torceram por mim, como a minha tia Judite e aos demais familiares de Brasília, pelo acolhimento e o carinho com o qual sempre me trataram. Agradeço por tudo e sei que permanecerão as agradáveis lembranças de todos vocês, que levarei sempre comigo por onde eu passar.

A todos os meus amigos e colegas que sempre me apoiaram e que acreditaram e contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão deste trabalho.

Ao PECC (Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil) da Universidade de Brasília e ao CNPq (Centro Nacional de Desenvolvimento Científico e tecnológico) pelo suporte.

Muito obrigado a todos!

*“Ele fortalece o cansado  
e dá grande vigor ao que está sem forças.  
Até os jovens se cansam e ficam exaustos,  
e os moços tropeçam e caem;  
mas aqueles que esperam no Senhor  
renovam as suas forças.  
Voam alto como águias;  
correm e não ficam exaustos,  
andam e não se cansam.”*

**(Isaias 40: 29-31)**

## RESUMO

Os materiais com comportamento viscoelástico e viscoplástico vêm gradativamente atraindo interesse industrial e adquirindo maior espaço entre aplicações práticas tais como o uso de dissipadores de energia sísmica. Esse crescente interesse tem estimulado o desenvolvimento de modelos e estratégias de modelagem computacional nesse tipo de material. Estes materiais se comportam de modos muito complexos, por isso é importante fazer um estudo para tentar simular o seu comportamento o mais próximo possível da realidade. Nesse trabalho, apresenta-se um estudo numérico-analítico de alguns modelos reológicos viscoelásticos e viscoplásticos, cuja análise é feita tanto analiticamente – resolução de EDO, quanto numericamente através do Método das Diferenças Finitas. Neste estudo, toma-se como base tanto a representação integral quanto a representação diferencial para o desenvolvimento dos seguintes modelos reológicos: viscoelásticos (Maxwell, Kelvin e Boltzmann), elastoplástico (Modelo de Prandtl-Reuss) e viscoplásticos (modelos conjugados). O estudo apresenta uma análise da sensibilidade da resposta reológica das tensões  $\sigma(t)$ , deformações  $\varepsilon(t)$ , função de fluência específica  $D(t)$  e função de relaxação específica  $E(t)$ , considerando três diferentes tipos de solicitações mecânicas e utilizando os modelos reológicos unidimensionais. O *MATLAB* é usado na implementação dos algoritmos numéricos e na geração dos gráficos dos exemplos apresentados.

## ABSTRACT

Materials with viscoelastic and viscoplastic behavior have gradually attracting industrial interest and getting more space between practical applications such as the use of seismic energy sinks. This growing interest has stimulated the development of models and strategies for computational modeling in this kind of material. These materials behave very complex ways, so it is important to do a study to try to simulate their behavior as close as possible to reality. In this work, we present a numerical and analytical study of some viscoelastic and viscoplastic rheological models, whose analysis is done both analytically - solving ODE, and numerically by Finite Difference Method. Here we used both the integral representation as a differential representation for the development of the following rheological models: viscoelastic (Maxwell, Kelvin and Boltzmann), Elastoplastic (Prandtl-Reuss) and viscoplastic (mixed models). The study presents an analysis of the sensitivity of the rheological response of stress  $\sigma(t)$ , strain  $\varepsilon(t)$ , specific creep function  $D(t)$  and specific relaxation function  $E(t)$  and three different types of mechanical loads and using one-dimensional rheological models. *MATLAB* is used in the implementation of numerical algorithms and the generation of the graphs of the examples presented.

## ÍNDICE

<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	1
1.1	GENERALIDADES	1
1.2	HISTÓRICO	2
1.2.1	Sobre Viscoelasticidade	2
1.2.2	Sobre Elastoplasticidade	4
1.2.3	Sobre Viscoplasticidade	5
1.2.4	Sobre o MATLAB	6
1.3	MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS	7
1.4	CONTEÚDO DO TRABALHO	8
<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>MODELOS REOLÓGICOS</b>	9
2.1	MODELOS BÁSICOS	9
2.1.1	Modelo Elástico	10
2.1.2	Modelo Viscoso	11
2.1.3	Modelo Plástico	11
2.1.4	Modelos Conjugados	12
2.2	MODELOS VISCOELÁSTICOS	14
2.2.1	Conceitos Básicos	14
2.2.2	Representação Integral	17
2.2.3	Representações Diferenciais dos Modelos	18
2.2.3.1	Modelo de Maxwell	18
2.2.3.2	Modelo de Kelvin	19
2.2.3.3	Modelo de Boltzmann	20
2.3	MODELO ELASTOPLÁSTICO	22
2.3.1	Conceitos Básicos	22
2.3.1.1	Comportamento Plástico	22

2.3.1.2 Tipos de Encruamento.....	23
2.3.2 Modelo elastoplástico de Prandtl-Reuss.....	24
2.3.2.1 Comportamento Elastoplástico Perfeito.....	25
2.3.2.2 Comportamento Elastoplástico com Encruamento Isotrópico.....	28
2.4 MODELOS VISCOPLÁSTICOS.....	31
2.4.1 Modelo Viscoplastico com Comportamento Instantâneo.....	31
2.4.2 Modelo Viscoplastico sem Comportamento Instantâneo.....	33
<b>CAPÍTULO 3 SOLUÇÕES ANALÍTICAS.....</b>	<b>36</b>
3.1 TIPOS DE TESTES.....	36
3.2 MODELOS VISCOELÁSTICOS.....	38
3.2.1 Modelo de Maxwell.....	38
3.2.1.1 Solução para o Teste 1.....	39
3.2.1.2 Solução para o Teste 2.....	41
3.2.1.3 Solução para o Teste 3.....	43
3.2.2 Modelo de Kelvin.....	46
3.2.2.1 Solução para o Teste 1.....	46
3.2.2.2 Solução para o Teste 2.....	49
3.2.2.3 Solução para o Teste 3.....	49
3.2.3 Modelo de Boltzmann.....	52
3.2.3.1 Solução para o Teste 1.....	52
3.2.3.2 Solução para o Teste 2.....	55
3.2.3.3 Solução para o Teste 3.....	57
3.3 MODELOS VISCOPLÁSTICOS.....	60
3.3.1 Modelo com Comportamento Instantâneo.....	60
3.3.1.1 Solução para o Teste 1.....	60
3.3.1.2 Solução para o Teste 2.....	62
3.3.1.3 Solução para o Teste 3.....	64

<b>CAPÍTULO 4</b>	<b>SOLUÇÕES NUMÉRICAS.....</b>	<b>67</b>
4.1	TIPOS DE TESTES.....	67
4.2	MODELOS VISCOELÁSTICOS.....	69
4.2.1	Modelo de Maxwell.....	69
4.2.1.1	Solução para os Testes 1 e 3.....	69
4.2.1.2	Solução para o Teste 2.....	70
4.2.2	Modelo de Kelvin.....	70
4.2.2.1	Solução para os Testes 1 e 3.....	70
4.2.2.2	Solução para o Teste 2.....	71
4.2.3	Modelo de Boltzmann.....	71
4.2.3.1	Solução para os Testes 1 e 3.....	71
4.2.3.2	Solução para o Teste 2.....	72
4.3	MODELOS VISCOPLÁSTICOS.....	72
4.3.1	Modelo com Comportamento Instantâneo.....	72
4.3.1.1	Solução para os Testes 1 e 3.....	72
4.3.1.2	Solução para o Teste 2.....	73
4.3.2	Modelo sem Comportamento Instantâneo.....	74
4.3.2.1	Solução para os Testes 1 e 3.....	74
4.3.2.2	Solução para o Teste 2.....	76
<b>CAPÍTULO 5</b>	<b>ANÁLISES DAS RESPOSTAS.....</b>	<b>77</b>
5.1	ANÁLISES PARA O MODELO DE MAXWELL.....	77
5.2	ANÁLISES PARA O MODELO DE KELVIN.....	86
5.3	ANÁLISES PARA O MODELO DE BOLTZMANN.....	93
5.4	ANÁLISES PARA O MODELO VISCOPLÁSTICO.....	100
5.4.1	Modelo Viscoplastico com Comportamento Instantâneo.....	100
5.4.2	Modelo Viscoplastico sem Comportamento Instantâneo.....	106
<b>CAPÍTULO 6</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....</b>	<b>111</b>

6.1 SOBRE ANÁLISES PARA O MODELO DE MAXWELL.....	112
6.2 SOBRE ANÁLISES PARA O MODELO DE KELVIN.....	112
6.3 SOBRE ANÁLISES PARA O MODELO DE BOLTZMANN.....	113
6.4 SOBRE O MODELO VISCOPLÁSTICO COM COMPORTAMENTO INSTANTÂNEO.....	113
6.5 SOBRE O MODELO VISCOPLÁSTICO SEM COMPORTAMENTO INSTANTÂNEO.....	113
6.6 CONTRIBUIÇÃO E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	114
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>115</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1– Modelos básicos unidimensionais: (a) elástico, (b) viscoso, (c) plástico.....	10
Figura 2.2 – Comportamento do modelo elástico.....	10
Figura 2.3 – Comportamento do modelo viscoso linear.....	11
Figura 2.4 – Comportamento do modelo plástico.....	12
Figura 2.5 – Deformações imediatas no aço.....	13
Figura 2.6 – Deformações imediatas em uma peça de concreto.....	13
Figura 2.7 - Teste de fluência de um material viscoelástico, Creus (1986).....	15
Figura 2.8 – Modelo Reológico de Maxwell.....	18
Figura 2.9 - Modelo Reológico de Kelvin.....	19
Figura 2.10 - Modelo Reológico de Boltzmann.....	20
Figura 2.11 – Modelos elastoplásticos (Foltran, 1999).....	22
Figura 2.12 – Tipos de encruamento (Foltran, 1999).....	23
Figura 2.13 - Modelo elastoplástico de Prandtl-Reuss.....	24
Figura 2.14 – Representação gráfica dos conjuntos $\text{int}(E_\sigma)$ e $\partial E_\sigma$ .....	25
Figura 2.15 – Modelo elastoplástico com encruamento isotrópico linear.....	28
Figura 2.16 - Modelo viscoplástico com comportamento instantâneo.....	31
Figura 2.17 - Modelo viscoplástico sem comportamento instantâneo.....	33
Figura 3.1 – Teste de fluência com tensão constante.....	36
Figura 3.2 - Teste de relaxação com deformação constante.....	37
Figura 3.3 – Teste de fluência com um trecho de tensão linear e depois tensão constante.....	38
Figura 3.4 – Teste 3 para o modelo viscoplástico com $\sigma_0 > \sigma_y$ .....	64
Figura 4.1 – Teste de fluência.....	67
Figura 4.2 - Teste de relaxação.....	68
Figura 4.3 – Teste de fluência com um trecho de tensão linear e depois tensão constante.....	69
Figura 5.1 – Teste de fluência para o modelo de Maxwell.....	77
Figura 5.2 – Deformações para 3 valores de $\sigma_0$ no tempo $t_0$ a $t_1$ ( $\Delta t=0,2$ ).....	78
Figura 5.3 – Deformações analíticas para diferentes valores de $\sigma_0$ no tempo.....	79
Figura 5.4 – Função de fluência específica em escala logarítmica do tempo ( $\Delta t=0,2$ )....	79

Figura 5.5 – Solução numérica completa de $t_0$ a $t_f$ .....	80
Figura 5.6 – Teste de relaxação para o modelo de Maxwell.....	80
Figura 5.7 – Tensões analíticas e numéricas para diferentes valores de $\Delta t$ .....	81
Figura 5.8 – Tensões para três valores de $\epsilon_0$ , com tempo $t$ de $t_0$ a $t_1$ e $\Delta t=0,2$ .....	82
Figura 5.9 – Tensões analíticas para diferentes valores de $\epsilon_0$ no tempo.....	82
Figura 5.10 – Função de relaxação específica.....	83
Figura 5.11 – solução numérica completa do teste.....	83
Figura 5.12 – Teste 3 para o modelo de Maxwell.....	84
Figura 5.13 – Deformações analíticas e numéricas para diferentes valores de $\Delta t$ .....	85
Figura 5.14 – Resposta numérica para diferentes valores de $C$ .....	86
Figura 5.15 – Teste de fluência para o modelo de Kelvin.....	87
Figura 5.16 – Deformações analíticas e numéricas para diferentes valores de $\Delta t$ .....	87
Figura 5.17 – Tensões para três valores de $\sigma_0$ , com tempo $t$ de $t_0$ a $t_1$ .....	88
Figura 5.18 – Deformações analíticas para diferentes valores de $\sigma_0$ no tempo.....	89
Figura 5.19 – Função de fluência específica.....	89
Figura 5.20 – Solução numérica completa de $t_0$ a $t_f$ .....	90
Figura 5.21 – Teste de relaxação para o modelo de Kelvin.....	90
Figura 5.22 – Solução numérica completa.....	91
Figura 5.23 – Teste 3 para o modelo de Kelvin.....	92
Figura 5.24 – Deformações para três valores de $\eta$ , com tempo $t$ de $t_0$ a $t_1$ .....	92
Figura 5.25 – resposta numérica completa de $t_0$ a $t_f$ .....	93
Figura 5.26 – Teste de fluência para o modelo de Boltzmann.....	93
Figura 5.27 – Deformações para 3 valores de $\sigma_0$ até o tempo $t_1$ .....	94
Figura 5.28 – Deformações analíticas para diferentes valores de $\sigma_0$ no tempo.....	94
Figura 5.29 – Solução numérica completa para o exemplo.....	95
Figura 5.30 – Teste de relaxação para o modelo de Boltzmann.....	95
Figura 5.31 – Tensões para três valores de $\eta$ , até o tempo $t_1$ .....	96
Figura 5.32 – Tensões para três valores de $\epsilon_0$ , até o tempo $t_1$ .....	97
Figura 5.33 – Tensões analíticas para diferentes valores de $\epsilon_0$ no tempo.....	97
Figura 5.34 – Função de relaxação específica.....	98
Figura 5.35 – solução numérica completa do teste.....	98
Figura 5.36 – Teste 3 para o modelo de Boltzmann.....	99
Figura 5.37 – Deformações analíticas e numéricas para diferentes valores de $\Delta t$ .....	99

Figura 5.38 – Resposta numérica para diferentes valores de $C$ .....	100
Figura 5.39 – Modelo viscoplástico e teste de fluência.....	101
Figura 5.40 – Deformações para o teste até o tempo $t_1$ .....	101
Figura 5.41 – Solução numérica completa das deformações para diferentes valores de $\sigma_y$ .....	102
Figura 5.42 – Modelo viscoplástico e teste de relaxação.....	102
Figura 5.43 – Comparação de tensões até o tempo $t_1$ .....	103
Figura 5.44 – Solução numérica completa para diferentes valores de $\sigma_y$ até o tempo $t_f$ ..	104
Figura 5.45 – Teste 3 para este modelo viscoplástico.....	104
Figura 5.46 – Solução analítica para diferentes valores de $\sigma_y$ até o tempo $t_2$ .....	105
Figura 5.47 – Resposta numérica para diferentes valores de $C$ .....	106
Figura 5.48 – Modelo viscoplástico e teste de fluência.....	106
Figura 5.49 – Solução numérica para diferentes valores de $\sigma_y$ .....	107
Figura 5.50 – Modelo viscoplástico e o teste de relaxação.....	108
Figura 5.51 – Solução numérica completa.....	108
Figura 5.52 – Teste de fluência para este modelo viscoplástico.....	109
Figura 5.53 – Solução numérica completa para diferentes valores de $\sigma_y$ .....	109
Figura 5.54 – Resposta numérica para diferentes valores de $C$ .....	110

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – valores atribuídos ao teste de fluência no modelo de Maxwell.....	78
Tabela 5.2 – Dados para o exemplo 2.....	81
Tabela 5.3 – Tensões iniciais e finais.....	81
Tabela 5.4 – Valores adotados para o modelo de Maxwell e teste 3.....	84
Tabela 5.5 – deformações finais.....	85
Tabela 5.6 – Valores adotados para o exemplo.....	87
Tabela 5.7 – deformações finais.....	88
Tabela 5.8 – valores atribuídos ao teste de relaxação no modelo de Kelvin.....	91
Tabela 5.9 – Valores adotados para o modelo de Kelvin e teste 3.....	91
Tabela 5.10 – Dados para o exemplo 2 do modelo de Boltzmann.....	96

## LISTA DE SIMBOLOS

$E$	Módulo de elasticidade
$\eta$	Coefficiente de viscosidade
$\sigma_y$	Tensão de escoamento
$\sigma_0$	Tensão constante
$\varepsilon_0$	Deformação constante
$\sigma$	Tensão
$\varepsilon$	Deformação
$\varepsilon_E$	Deformação na mola
$\varepsilon_{\sigma_y}$	Deformação plástica
$\tau_0$	Tempo inicial arbitrário
$\infty$	Infinito
$t$	Tempo
$\mathcal{G}$	Funcional que indica o valor da deformação
$D^e$	Função Ordinária definida nos Reais
$D$	Fator de confluência elástica
$\varepsilon_{ve}$	Deformação viscoelástica
$\int$	Integral
$D(t - \tau)$	Função de fluência específica
$E(t - \tau)$	Função de relaxação específica
$\frac{\partial}{\partial \tau}$	Derivada em relação a $\tau$
$\varepsilon_\eta$	Deformação no amortecedor
$\sigma_E$	Tensão na mola
$\sigma_\eta$	Tensão no amortecedor
$E_k$	Módulo de Elasticidade da mola de Kelvin
$E_0$	Módulo de Elasticidade da mola que está em série com Kelvin
$\varepsilon_{E_0}$	Deformação na mola $E_0$
$\varepsilon_k$	Deformação no modelo de Kelvin

$\sigma_{E_0}$	Tensão na mola $E_0$
$\sigma_k$	Tensão no modelo de Kelvin
$\sigma_{E_k}$	Tensão na mola $E_k$
$\varepsilon_{E_k}$	Deformação na mola $E_k$
$\sigma_{\sigma_y}$	Tensão no elemento de atrito
$\dot{\sigma}$	Derivada de $\sigma$ em relação ao tempo
$\dot{\varepsilon}$	Derivada de $\varepsilon$ em relação ao tempo
$E_\sigma$	Conjunto de tensões admissíveis
$f(\tau)$	Função de escoamento
$\text{int}(E_\sigma)$	Conjunto aberto corresponde ao intervalo elástico
$\partial E_\sigma$	Superfície de escoamento
$\gamma$	Valor absoluto da taxa de deslizamento do elemento de atrito
$\text{sign}$	Função sinal
$\alpha$	Variável de endurecimento interno
$K$	Módulo plástico
$\varepsilon_{vp}$	Deformação viscoplástica
$\notin$	Não pertence
$\sigma_{ex}$	Tensão extra
$ \sigma $	Módulo da tensão
$\tau$	Tempo de relaxação
$\varepsilon_{ep}$	Deformação elastoplástica
$\sigma_{ep}$	Tensão elastoplástica
$d\tau$	Diferencial de $\tau$
$H(t)$	Função de passo unitário
$\ln$	Logaritmo natural
$e$	Número de Euler
$\delta(\tau)$	Função Delta de Dirac

$\varepsilon_H$	Solução homogênea da deformação
$\varepsilon_P$	Solução particular da deformação
$0^-$	Valor infinitesimal imediatamente à esquerda de zero
$0^+$	Valor infinitesimal imediatamente à direita de zero
$\infty$	Infinito
$>$	Maior que
$<$	Menor que
$\neq$	Diferente
$\Delta\varepsilon_i$	Varição de deformação incremental
$\Delta\sigma_i$	Varição de tensão incremental
$\Delta t_i$	Varição do tempo incremental
$\varepsilon_i$	Incremento de deformação
$\sigma_i$	Incremento de tensão

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1. GENERALIDADES

No campo da engenharia de estruturas, tem sido motivo de muitas pesquisas em todo o mundo, a busca por modelos matemáticos que expressem o comportamento real dos sistemas estruturais. Entretanto, devido à complexidade da maioria dos materiais utilizados na engenharia, caracterizar e equacionar estes materiais de forma exata é uma tarefa extremamente difícil. Assim torna-se necessário a adoção de modelos simplificados que representem as principais características e proporcionem soluções próximas do comportamento real das estruturas.

A não-linearidade do processo de deformação e vários fenômenos que ocorrem depois de o material se tornar plástico são fatores de complexidade na formulação das relações físicas que descrevem o comportamento real de um material. Em geral o comportamento físico dos materiais é influenciado por uma série de parâmetros como: tempo, temperatura, condições ambientais, carregamentos, etc. Além disso, não se pode aplicar uma mesma lei constitutiva para todos os materiais. Assim, em geral são construídas relações constitutivas para cada tipo específico de material, sendo que para materiais mais complexos é feita uma combinação entre as relações dos modelos básicos.

Na engenharia podemos encontrar alguns materiais que podem apresentar, simultaneamente, características de sólidos e fluidos viscosos. Estes materiais são chamados de viscoelásticos e o comportamento dos mesmos tem como característica essencial a variável tempo. Isto significa que materiais viscoelásticos, quando submetidos a tensão constante, produzem deformações que crescem com o tempo, ou quando submetidos a deformação constante, passam a resultar em tensões decrescentes com o tempo. Estes fenômenos são chamados, respectivamente de fluência e relaxação.

Muitos materiais, principalmente os materiais dúcteis, podem ter o seu comportamento aproximado pelo modelo da elasticidade linear, mas somente até certo limite de tensão. Após este limite, estes materiais apresentam deformações permanentes, ou seja, que não desaparecem após o descarregamento das forças aplicadas sobre o material. Sendo que a

elasticidade prevê a reversibilidade das deformações ao estado inicial, caso contrário o comportamento será inelástico, ou seja, o material retém parte da deformação no descarregamento e este fenômeno é chamado de plasticidade. Um critério de escoamento é adotado para decidir, para que níveis de tensões, uma partícula de um determinado material, está se comportando elasticamente ou plasticamente.

O fato é que na busca por modelos que representem o comportamento real dos materiais muitos deles chegam a equações matemáticas muito complexas, que por muitas vezes não somos capazes de resolver analiticamente, por isso houve a necessidade da criação dos chamados métodos numéricos. O desenvolvimento dos métodos numéricos, que ocorreu principalmente na segunda metade do século passado, veio para revolucionar o campo da engenharia, pois permitiu uma análise eficiente da grande maioria dos problemas de engenharia e facilitou o trabalho dos engenheiros em geral. Dentre estes métodos o Método das Diferenças Finitas (MDF) é uma importante ferramenta que pode ser utilizada para a resolução das equações diferenciais.

## 1.2. HISTÓRICO

### 1.2.1. Sobre Viscoelasticidade

A teoria da viscoelasticidade teve sua origem no início do século XIX. A primeira contribuição relevante para o comportamento viscoelástico dos materiais foi dada por Wilhelm Weber, em 1835 estudando os fios de seda. Weber observou que este material, quando solicitado, não só apresentava uma deformação elástica instantânea, mas também uma deformação adicional que aumentava gradualmente com o tempo. Ele concluiu que este comportamento não podia ser definido somente pelas leis da elasticidade, pois o mesmo dependia da duração da força aplicada. Weber também conseguiu deduzir a existência do fenômeno da relaxação de tensões, observando que ocorria a diminuição das tensões nos fios com o passar do tempo.

Pouco tempo depois, R. Kohlrausch e seu filho Friederich, através de testes feitos no laboratório de Weber, notaram que outros materiais, como o vidro e a prata, também exibiam este comportamento. Eles também foram capazes de observar o efeito da temperatura e de mostrar, em 1863, a linearidade do comportamento. Entretanto, foi James Clerk Maxwell quem primeiro propôs uma descrição para o fenômeno da

viscoelasticidade, independente de hipóteses, em termos de uma equação diferencial de primeira ordem como veremos mais adiante.

O avanço tecnológico dos materiais poliméricos e o seu emprego crescente, a partir de 1940, trouxeram de novo a atenção dos cientistas à teoria da viscoelasticidade. As contribuições que surgiram a partir de então focaram, basicamente, o estudo da equação constitutiva e das propriedades reológicas dos materiais, o estudo do comportamento linear e não linear, e a análise das soluções dos problemas de valores de contorno e inicial.

Um dos materiais mais utilizados na engenharia estrutural é o concreto. E o comportamento reológico do mesmo tornou-se muito importante, principalmente devido ao maior porte e à maior complexidade das estruturas que têm sido executadas com este material nas últimas décadas. Quando submetido a solicitações, o concreto comporta-se de uma maneira bastante complexa, apresentando uma resposta não linear. Sensale (1991) estudou o comportamento não linear de estruturas de concreto armado submetidas a estado plano de tensões, ao longo do tempo.

Muitos materiais, alguns de natureza betuminosa, apresentam em suas características um comportamento intermediário, tendo tanto características viscosas como elásticas e por isso são considerados como materiais viscoelásticos. De acordo com Lakes (1998), estes materiais têm a sua relação entre tensões e deformações dependente do tempo e ele caracteriza os dois fenômenos reológicos: a deformação aumenta com o tempo ao aplicar-se uma tensão constante, este fenômeno é chamado de *fluência*; a tensão diminui com o tempo ao aplicar-se uma deformação constante, este fenômeno é chamado de *relaxação*.

Gomes, Partridge e Creus (2001) implementaram algoritmos para análise não linear de problemas viscoelásticos, para uso com o Método dos Elementos de Contorno. No seu trabalho eles obtiveram a deformação viscoelástica, baseada no modelo de Kelvin com envelhecimento. No mesmo trabalho, é feita uma extensão ao comportamento viscoelástico não linear para a obtenção da deformação viscoelástica em problemas que envolvem Danos, baseado no modelo de Helman. Os modelos de viscoelasticidade com envelhecimento e viscoelasticidade não-linear são apresentados juntamente com os procedimentos numéricos para integração no tempo. Os resultados são calculados pelos

métodos das Variáveis de Estado (SV) e Diferenças Finitas (DF), e então são comparados com a solução teórica.

Theisen (2006) apresenta a aplicação de um modelo de comportamento para a previsão de deformação de misturas asfálticas, deduzindo com base na teoria da viscoelasticidade e na aplicação do princípio da correspondência Elasto-viscoelástica. Na sua dissertação é feita uma revisão dos fundamentos da viscoelasticidade linear mostrando algumas aplicações que modelam o comportamento de misturas asfálticas.

Seguindo uma linha mais formal sobre a abordagem do tema, mais trabalhos importantes podem ser citados, como o livro de Marques e Creus (2012). Neste livro eles explicam os modelos reológicos, a formulação por variáveis de estado e a resolução de problemas de viscoelasticidade utilizando métodos computacionais. O efeito da temperatura e o efeito do envelhecimento do material são mostrados, bem como a formulação em elementos finitos e elementos de contorno. Apresenta também as soluções de problemas viscoelásticos com o uso do programa Abaqus e fornece fontes bibliográficas riquíssimas sobre o tema. Christensen (2010) no seu livro apresenta uma discussão geral sobre a teoria da viscoelasticidade linear e não linear, sobre condições isotérmicas e não isotérmicas, para problemas quasi-estáticos ou dinâmicos.

### 1.2.2. Sobre Elastoplasticidade

Pela teoria da elasticidade todas as deformações são recuperáveis, sendo que as tensões podem aumentar de forma ilimitada sem alterar as propriedades dos materiais. A teoria da plasticidade foi desenvolvida a partir de 1930 devido à necessidade de se conhecer variações no comportamento de materiais como, por exemplo, os metais. Para isso foi necessário o estudo de equações constitutivas que permitiam determinar os estados limites, último e de ruptura, bem como a modelagem de deformações não recuperáveis, dentre outros.

Segundo Argyris (1982) foi feita uma análise em elementos finitos do comportamento não linear de pórticos em duas e três dimensões. Quando nenhuma condição limite foi atingida, utilizou-se a matriz de rigidez elástica, porém quando atingia uma zona de plastificação era necessário introduzir a matriz de rigidez elastoplástica. As zonas de plastificação foram definidas por superfícies de iteração plástica e dependiam das propriedades geométricas dos elementos.

Marques (1990) apresenta uma formulação do tipo incremental-iterativa destinada à análise não linear de pórticos espaciais. A modelagem do comportamento plástico do material é efetuada através do conceito de rótula plástica, estabelecido a partir de um critério de plastificação generalizado. A formulação permite uma descrição completa do desempenho mecânico da estrutura, inclusive um estágio de deformação pós-crítico em que ocorre regressão do carregamento com o aumento dos deslocamentos, ou vice-versa.

### 1.2.3 Sobre Viscoplasticidade

A teoria da viscoplasticidade surgiu devido ao fato de que o comportamento de determinados materiais (polímeros, por exemplo) não podiam ser explicado somente pela teoria da plasticidade, pois o efeito do tempo não estava incluso. Observou-se que em certos problemas, como, por exemplo, a conformação dos metais a elevadas temperaturas, era necessário incluir o efeito da viscosidade, ou seja, a análise do processo de deformação com a inclusão do efeito do tempo era então indispensável. Assim, na teoria da viscoplasticidade, como o próprio nome indica, os efeitos da viscosidade do material e do tempo são considerados parâmetros fundamentais do comportamento do material.

As análises de modelos com materiais viscoplásticos apresentam-se cada vez mais importantes em projetos de engenharia. Machado (2002) desenvolveu um modelo computacional para o estudo de estruturas de concreto armado e protendido sob estado plano de tensões. O modelo computacional utilizou dois modelos distintos, a saber: no primeiro determinou a resposta da estrutura ao longo do tempo considerando o material com comportamento viscoelástico; no segundo considerou o material com um comportamento elastoplástico, buscando-se a resposta da estrutura para um carregamento instantâneo.

Carbone (2007) apresenta um novo algoritmo para análise viscoplástica com o Método dos Elementos de Contorno (MEC), que transforma as integrais de domínio em integrais de contorno. A existência das integrais de domínio em formulações viscoplásticas anula uma das principais vantagens do MEC, que é a facilidade de analisar problemas complexos discretizando apenas o contorno do modelo. A importância do seu trabalho é a transformação dessas integrais de domínio, pois exigem que o modelo seja

discretizado por uma malha auxiliar formada por células internas. Esse algoritmo é fundamentado por uma técnica de visualização proposta por Pereira e Noronha (2003).

#### 1.2.4 Sobre o MATLAB

O MATLAB é um programa computacional que possui a sua própria linguagem de programação. O significado da sigla MATLAB é *Matrix Laboratory* (Laboratório de Matrizes), pois este programa foi desenvolvido baseado no cálculo com matrizes. Sua criação se deu no final do ano de 1970, por Cleve Moler, um dos fundadores da Mathworks, e então presidente do departamento de ciências da computação da Universidade do Novo México, onde ele foi professor de matemática por quase 20 anos. Devido a sua grande utilidade para a resolução dos mais diversos problemas, esse programa se espalhou rapidamente pelo mundo, sendo utilizado por profissionais de diversas áreas de atuação.

Conforme Chapman (2006) o MATLAB é um programa de computador otimizado para resolver cálculos científicos e problemas de engenharia. O MATLAB é um ambiente e, também, uma linguagem de programação e oferece uma ampla biblioteca de funções predefinidas para que a programação técnica torne-se mais rápida, eficiente e de fácil utilização, tornando-se assim muito mais fácil desenvolver programas técnicos nele do que em outras linguagens como o Fortran ou C.

No que se refere à exploração e utilização de softwares para ensino e pesquisa, o MATLAB tem um papel privilegiado, no que diz respeito à computação técnica, pois é bastante versátil em cálculos matemáticos, análises numéricas, simulações, desenvolvimento de algoritmos, construções gráficas, dentre outras funcionalidades (GILAT, 2006).

Devido suas transformações ao longo dos anos, o MATLAB se tornou capaz de resolver diversos problemas técnicos de engenharia, por isso ele é hoje muito utilizado por engenheiros e cientistas para estudos e elaboração de projetos. No próprio Programa de Pós Graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) da Universidade de Brasília ele é muito importante no ensino dos métodos numéricos, que são aplicados em várias disciplinas do programa.

### 1.3. MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

O estudo do comportamento inelástico de estruturas é muito importante, porque o comportamento, para efeito de cálculo, que é por muitas vezes aproximado para o modelo da elasticidade linear, na prática funciona de uma forma diferente. Os materiais se comportam de modos muito complexos, por isso é importante fazer um estudo para tentar simular o seu comportamento o mais próximo possível da realidade.

Existem diversos materiais que apresentam relações constitutivas dependentes de fatores que influem no seu comportamento. O concreto, por exemplo, que apresenta características mecânicas dependentes do tempo, pode ser modelado com relações constitutivas viscoelásticas (Masuero, 1992), nas quais a resposta de um material, a uma dada tensão ou deformação, depende fundamentalmente do intervalo de tempo entre o instante de aplicação das tensões e deformações, e o instante considerado. Este material pode assumir um comportamento plástico, uma vez que deformações e tensões aplicadas podem mudar a sua configuração original, quando parte da deformação permanece mesmo após o descarregamento. Este comportamento é caracterizado pela dependência do histórico do carregamento e das deformações, ou seja, da forma como o carregamento foi aplicado no corpo em análise e como as deformações plásticas evoluíram no seu interior.

Os materiais com comportamento viscoelástico e plástico vêm gradativamente atraindo interesse industrial e adquirindo maior espaço entre aplicações práticas tais como o uso de dissipadores de energia sísmica. Esse crescente interesse tem estimulado o desenvolvimento de modelos e estratégias de modelagem computacional nesse tipo de material.

Neste contexto, e buscando dar continuidade a estudos anteriores, este trabalho tem como objetivo principal fazer um estudo numérico-analítico de alguns modelos reológicos unidimensionais: viscoelásticos, elastoplástico e viscoplástico.

A fim de se cumprir com este objetivo faz-se necessário realizar o desenvolvimento de alguns objetivos específicos, alguns dos quais serão citados a seguir:

- Fazer uma análise da sensibilidade da resposta reológica das tensões  $\sigma(t)$ , deformações  $\epsilon(t)$ , função de fluência específica  $D(t)$  e função de relaxação específica  $E(t)$ , considerando três diferentes tipos de solicitações mecânicas e

utilizando os modelos reológicos unidimensionais. A importância de se obter  $D(t)$  e  $E(t)$  é que os mesmos são obtidos em ensaios experimentais, de fluência e de relaxação, respectivamente, e podem ser comparados com os resultados numéricos e analíticos encontrados.

- Neste estudo, toma-se como base tanto a representação integral quanto a representação diferencial para o desenvolvimento dos seguintes modelos reológicos: viscoelásticos (Maxwell, Kelvin e Boltzmann), elastoplástico (Modelo de Prandtl-Reuss) e viscoplásticos (com comportamento instantâneo e sem comportamento instantâneo).
- Programar numericamente, usando o software MATLAB, o cálculo da resposta reológica nos modelos, através do método das Diferenças e compará-lo com o resultado obtido analiticamente, buscando comprovar a eficácia deste método;

#### 1.4. CONTEÚDO DO TRABALHO

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, conforme descritos a seguir: a introdução com suas generalidades, histórico, motivação e objetivos descrevem o primeiro capítulo.

No segundo capítulo se constituirá de uma revisão bibliográfica, onde serão abordados os conceitos de reologia e a apresentação dos três tipos básicos de comportamento reológico: o elástico, o plástico e o viscoso. Também serão determinadas as EDOs que regem o comportamento dos seguintes modelos reológicos: viscoelásticos (Maxwell, Kelvin e Boltzmann); elastoplástico (Prandtl-Reuss) e viscoplástico (com comportamento instantâneo e sem comportamento instantâneo).

Os capítulos três e quatro versam sobre as soluções analíticas e numéricas, respectivamente, e suas aplicações para três diferentes tipos de testes: teste de fluência com tensão constante; teste de relaxação com deformação constante; e teste de fluência com um trecho de tensão linear e depois tensão constante.

No capítulo cinco, serão apresentadas algumas análises para ilustrar estes estudos iniciais e validar as soluções analíticas e numéricas desenvolvidas para os modelos. As conclusões deste trabalho, bem como as sugestões de continuidade do mesmo, finalizam a parte escrita da dissertação no capítulo seis.

## **CAPÍTULO 2**

### **MODELOS REOLÓGICOS**

A reologia estuda as relações entre as tensões, as deformações e o tempo. A Macro-reologia é a parte da Reologia que procura estabelecer as equações constitutivas de cada material, sem se preocupar com as origens físico-químicas das mesmas no interior da matéria. Já a Micro-reologia é a parte da Reologia que busca as origens físico-químicas das equações constitutivas. O estudo que será desenvolvido nesta dissertação enquadra-se exclusivamente na Macro-reologia.

A Macro-reologia parte do reconhecimento de três tipos básicos de comportamento reológico, o elástico, o plástico e o viscoso, correspondendo cada um deles a um modelo de comportamento do material: o modelo elástico, o modelo plástico, e o modelo viscoso. Estes tipos básicos de comportamento são combinados de diversas formas, dando origem aos modelos conjugados, que, juntamente com os básicos, permitem descrever com maior ou menor precisão o comportamento reológico dos materiais reais.

Como em geral o comportamento reológico dos materiais reais é bastante complexo, é comum procurar associar aos mesmos vários modelos reológicos, de modo que cada um deles descreva satisfatoriamente o comportamento do material real em determinadas circunstâncias. Embora seja possível procurar definir um único modelo para todas as situações possíveis, a simplificação que se obtém com a decomposição é quase sempre compensadora.

#### **2.1 MODELOS BÁSICOS**

Os modelos básicos possuem relações matemáticas bastante simples. A partir destes modelos é feita uma combinação entre eles para se obter representações mais complexas que retratam de forma mais real o comportamento de um material. A seguir será comentado sobre os três modelos básicos: elástico, viscoso e plástico, que são mostrados na Figura 2.1

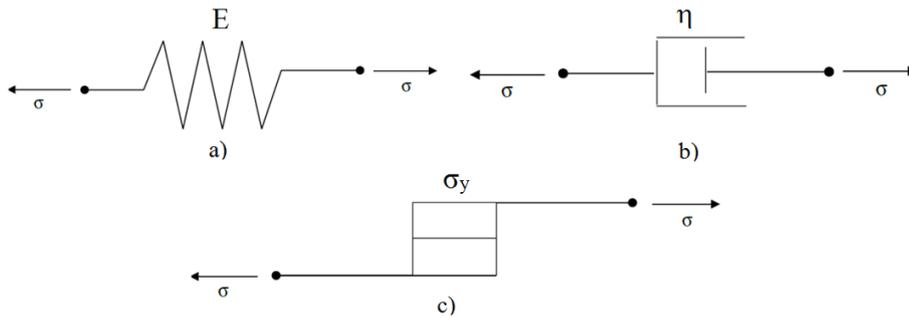


Figura 2.1- Modelos básicos unidimensionais: (a) elástico, (b) viscoso, (c) plástico.

### 2.1.1 Modelo elástico

Os materiais elásticos são aqueles que quando solicitados, apresentam uma deformação reversível, que é atingida imediatamente após a aplicação do carregamento. Assim esse modelo é adequado para materiais cujo comportamento não varia com o tempo e que em situações de descarregamento não apresentem deformações residuais.

O modelo elástico é representado por uma mola helicoidal ideal de massa desprezível e perfeitamente linear conforme a Figura 2.1 (a). Aplicando-se uma tensão constante  $\sigma_0$  na mola, observa-se uma deformação constante  $\epsilon_0$  e proporcional à tensão aplicada como é mostrado na Figura 2.2.

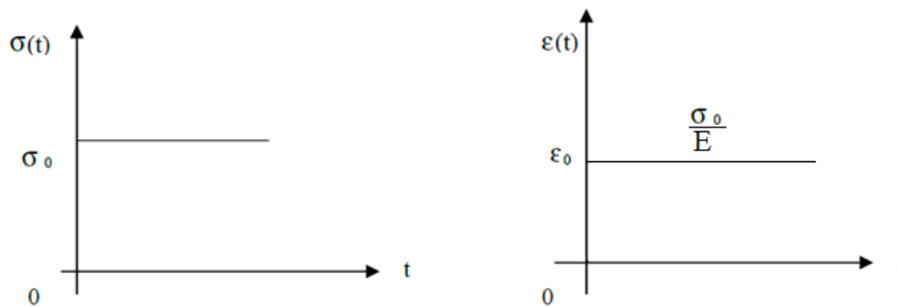


Figura 2.2 – Comportamento do modelo elástico

Na elasticidade linear a relação constitutiva é expressa pela lei de Hooke da seguinte forma:

$$\sigma(t) = E \cdot \epsilon(t) \quad (2.1)$$

Onde a constante  $E$  é conhecida como módulo de elasticidade ou módulo de Young.

### 2.1.2 Modelo viscoso

O modelo viscoso, também conhecido como modelo viscoso de Newton, é caracterizado pelo comportamento dependente do tempo, ou seja, mesmo que as solicitações sejam constantes, as deformações se alteram no decorrer do tempo. Este modelo é representado por um amortecedor como mostrado na Figura 2.1(b). Aplicando-se nesse elemento uma tensão, a taxa de deformação é diretamente proporcional à tensão aplicada. Assim temos que:

$$\sigma(t) = \eta \cdot \dot{\varepsilon}(t) \quad (2.2)$$

Onde a constante  $\eta$  é conhecida como coeficiente de viscosidade.

Se aplicarmos uma tensão constante  $\sigma_0$ , a taxa de deformação será constante, dada por:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} \quad (2.3)$$

De modo que partindo do instante  $t=0$ , onde  $\varepsilon(0)=0$  e integrando a equação diferencial (2.3) com essa condição inicial, obtemos:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} t \quad (2.4)$$

Pode-se visualizar o resultado obtido na Figura 2.3 abaixo.

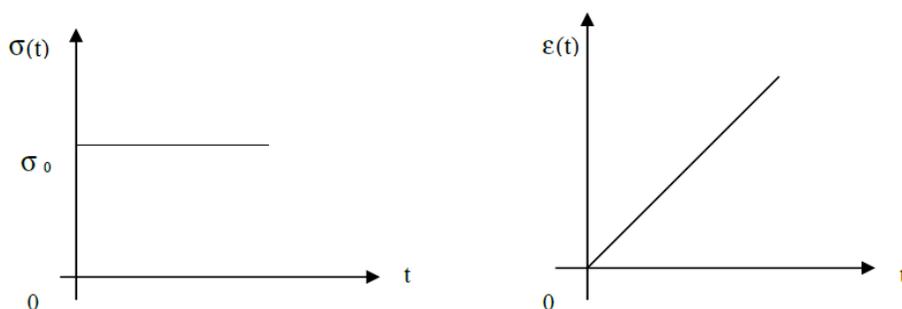


Figura 2.3 – Comportamento do modelo viscoso linear

### 2.1.3 Modelo plástico

No modelo plástico as deformações são imediatas e irreversíveis, ou seja, que não desaparecem quando ocorre o descarregamento. Este modelo é representado por um

dispositivo de atrito como mostrado na Figura 2.1(c). Esse dispositivo desliza a partir do instante em que a tensão aplicada atinge o valor da tensão de escoamento  $\sigma_y$ .

Na Figura 2.4, abaixo, pode-se observar os diagramas  $(\sigma, \epsilon)$  em um ensaio de tração uniaxial.

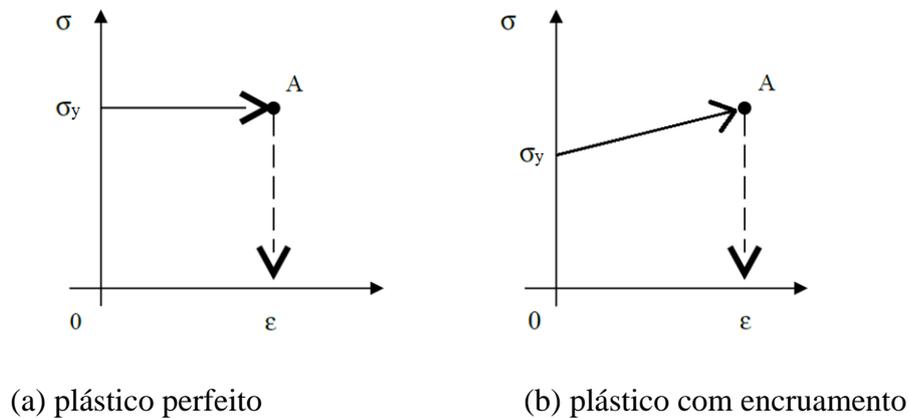


Figura 2.4 – Comportamento do modelo plástico

É possível observar que existe uma tensão  $\sigma_y$ , chamada de tensão de escoamento, tal que enquanto  $\sigma$  for menor que  $\sigma_y$ , não aparecem deformações plásticas, porém após atingir a tensão  $\sigma_y$  as mesmas começam a aparecer. No caso da Figura 2.4 (a), tem-se o modelo plástico perfeito onde a tensão permanece constante, enquanto a deformação plástica cresce. A linha tracejada indica que a descarga foi feita e não houve reversibilidade da deformação. No caso da Figura 2.4 (b), observa-se o modelo plástico com encruamento, onde enquanto a deformação plástica cresce a tensão não permanece constante e também cresce.

#### 2.1.4 Modelos conjugados

Para representarmos os mais diversos tipos de materiais existentes, é necessário combinar os três modelos anteriores (elástico, viscoso e plástico), de modo que cada um deles pode se apresentar em maior ou menor grau. Pode-se também colocar os mesmos em posições diferentes para obter as mais diferentes respostas que caracterizem com particularidade as características de cada material.

Pode-se tomar como exemplo o aço, que em um ensaio de tração simples, pode apresentar deformações conforme a Figura 2.5 abaixo:

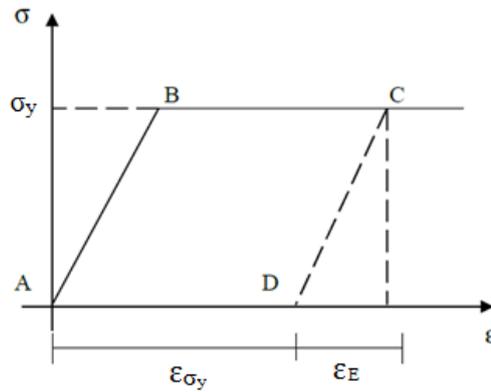


Figura 2.5 – Deformações imediatas no aço

Pode-se observar que enquanto o carregamento ocorre no trecho retilíneo AB, esse material apresenta apenas deformações elásticas, sendo que neste caso é representado por um modelo elástico linear. Se, no entanto for carregado até o ponto C, seu descarregamento dar-se-á por CD, aparecendo uma combinação de deformações elásticas  $\varepsilon_E$  com deformações plásticas  $\varepsilon_{\sigma_y}$ . Até aqui já se observa a conjugação de um modelo elástico com um modelo plástico perfeito.

Se a tensão aplicada no aço se mantiver constante por algum tempo, é possível observar deformações não-imediatas (fluência do aço) de origem viscosa. Assim sendo, um modelo reológico que represente o aço doce, por exemplo, deve ser formado através da conjugação de modelos elásticos, plásticos e viscosos.

Da mesma forma, em um ensaio de compressão simples em uma peça de concreto apresenta deformações imediatas de acordo com a Figura 2.6.

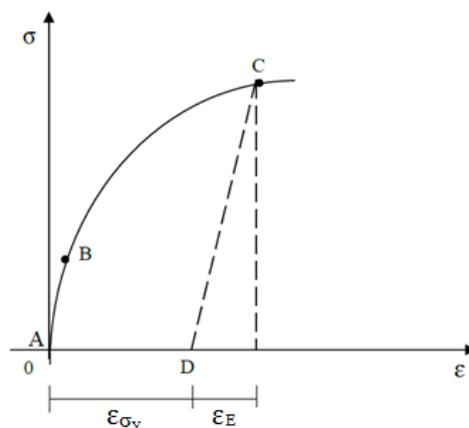


Figura 2.6 – Deformações imediatas em uma peça de concreto

Enquanto o carregamento está no pequeno trecho retilíneo AB, a peça apresenta apenas deformações elásticas, podendo, nestas condições, ser representado por um modelo elástico linear. Se, no entanto for carregado até o ponto C, seu descarregamento se dará aparecendo uma combinação de deformações elásticas  $\varepsilon_E$  com deformações plásticas  $\varepsilon_{\sigma_y}$ . Até aqui já observamos a conjugação de um modelo elástico com um modelo plástico com encruamento.

Se a tensão aplicada no concreto se mantiver constante por algum tempo, pode-se observar deformações não-imediatas (deformação lenta do concreto) de origem viscosa. Sendo assim, um modelo reológico que represente o concreto também deve ser formado através da conjugação de modelos elásticos, plásticos e viscosos.

A obtenção de modelos conjugados é feita pela combinação, em série ou em paralelo, dos modelos fundamentais já vistos, ou de outros modelos conjugados. Para uma melhor organização e compreensão serão apresentados separadamente, nos tópicos seguintes, os modelos viscoelásticos, elastoplásticos e viscoplásticos.

## 2.2 MODELOS VISCOELÁSTICOS

### 2.2.1 Conceitos Básicos

De acordo com os Princípios Gerais da Mecânica, valem para todos os materiais as equações de equilíbrio e de compatibilidade e, especificamente para cada material são válidas as equações constitutivas, que revelam suas propriedades características, relacionando tensões e deformações.

As relações constitutivas são extraídas de experimentos, para então ser estabelecido um significado matemático através de equações. Assim, para uma história de tensão  $\sigma(t)$ , variando no tempo ( $\tau_0 \leq \tau \leq \infty$ ), pode-se medir a história de deformação  $\varepsilon(t)$  correspondente, experimentalmente. Ou seja, a deformação  $\varepsilon(t)$  dependerá, geralmente, de todos os valores de  $\tau$  no intervalo  $\tau_0 \leq \tau \leq t$ , que matematicamente pode ser expressa da seguinte forma:

$$\varepsilon(t) = \mathcal{G} \left\{ \sigma(\tau) \right\}_{\tau=\tau_0}^{\tau=t} \quad (2.5)$$

Onde  $\mathfrak{F}$  é um funcional, indicando que o valor de  $\varepsilon$ , no tempo  $t$ , depende de todos os valores de  $\sigma(\tau)$ , para  $\tau$  variando entre  $\tau_0$  e  $t$ . Sendo  $\tau_0$  um tempo inicial arbitrário, tal que  $\sigma(t) = 0$  e  $\varepsilon(t) = 0$  para  $t < \tau_0$ . Este funcional é diferente para cada classe de material.

Assim, tem-se que, para materiais elásticos, a resposta é instantânea, ou seja, uma deformação  $\varepsilon(t)$  no tempo  $t$  dependente apenas do valor da tensão  $\sigma(t)$  no tempo  $t$ . Daí pode-se escrever a Eq. (2.5) na forma:

$$\varepsilon(t) = D^e \{ \sigma(t) \} \quad (2.6)$$

Com  $D^e$  sendo uma função ordinária definida nos reais. Se o material é linearmente elástico a equação (2.2) pode ser simplificada para:

$$\varepsilon(t) = D \sigma(t) \quad (2.7)$$

Sendo  $D$  um fator de compressibilidade elástica (definido como o inverso do módulo de elasticidade  $E$ ).

Isto não acontece para materiais viscoelásticos, uma vez que estes são caracterizados pela dependência da história do tempo no processo de deformação. Logo, suas relações constitutivas devem ter a estrutura funcional de (2.5).

O comportamento viscoelástico tem como característica essencial a variável tempo. Isto significa que materiais viscoelásticos, submetidos a tensão constante, produzem deformações que crescem com o tempo, ou quando submetidos a deformação constante, passam a resultar em tensões decrescentes com o tempo. O comportamento de um material viscoelástico submetido a um teste de fluência, no qual uma tensão constante  $\sigma_0$  no tempo  $\tau_0$  foi aplicada, encontra-se indicado na Figura 2.7.

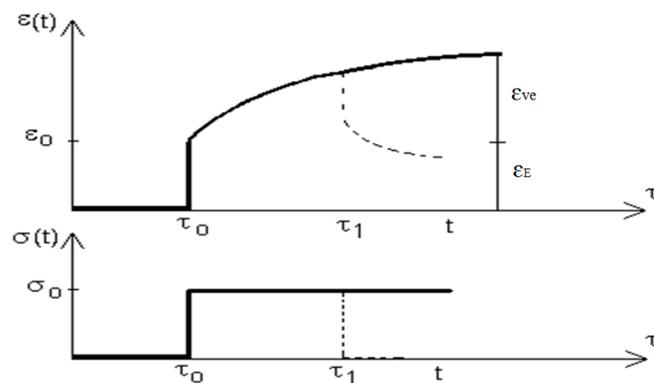


Figura 2.7 - Teste de fluência de um material viscoelástico, Creus (1986).

A história de tensão, indicada na Figura 2.7, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t - \tau_0) \quad (2.8)$$

onde  $H(t - \tau_0)$  é uma função de passo unitário, definida como,

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t > \tau_0 \\ 0 & \text{para } t < \tau_0 \end{cases}$$

A equação acima define o valor da tensão aplicada durante o teste de fluência e o tempo de aplicação. Neste teste, geralmente são encontradas duas componentes de deformação: uma instantânea, que diz respeito à componente de deformação elástica  $\varepsilon_E$ , e outra lenta (ou de fluência), que revela a componente de deformação viscoelástica  $\varepsilon_{ve}$ , que traduz o comportamento viscoelástico.

A linha tracejada, no gráfico superior da Figura 2.7, indica a história de deformação para  $t > \tau_1$  obtida no descarregamento da tensão aplicada no tempo  $\tau_1 > \tau_0$ . Em um teste de fluência é comum substituir a relação funcional (2.5), por uma função de três variáveis, isto é,

$$\varepsilon(t) = D(\sigma_0, t, \tau) \quad (2.9)$$

onde  $D(\sigma_0, t, \tau)$  varia com o tempo  $t$ , sendo  $\sigma_0$  e  $\tau$  constantes, que estão diretamente relacionadas com a linearidade e o envelhecimento de um material, respectivamente.

Muitos materiais apresentam comportamento linear sob baixas tensões e comportamento não-linear para altas tensões, ambos para deformação elástica e viscoelástica. Vale ressaltar que, em muitos materiais como, por exemplo, o concreto, a história de carregamento e descarregamento é muito importante no contexto da linearidade.

Para uma faixa linear, a equação (2.5) pode ser reescrita na forma,

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 D(t, \tau) \quad (2.10)$$

onde  $D(t, \tau)$  é a função de fluência específica, definida como a resposta, no tempo  $t$ , para um passo unitário de tensão aplicado no tempo  $\tau$ . Esta função caracteriza o comportamento do material viscoelástico linear.

### 2.2.2 Representação Integral

As relações viscoelásticas podem ser expressas por ambas as formas integral e diferencial. A representação integral é mais geral, sendo, portanto, mais apropriada para o desenvolvimento teórico, já a representação diferencial proporciona uma melhor interpretação física do comportamento viscoelástico dos modelos reológicos.

Um comportamento viscoelástico é dito linear se, para uma dada história de tensões, obtém-se uma história de deformações que se inter-relacionam, ou seja, é válido para ambas as histórias o princípio da superposição dos efeitos. Um comportamento é dito contínuo se, para duas experiências com histórias de tensões próximas, correspondem duas histórias de deformações tão próximas quanto se deseja.

Segundo Riesz (1990), a relação funcional de (2.5), para um comportamento viscoelástico linear e contínuo, pode ser escrita como,

$$\varepsilon(t) = \int_{\omega}^t D(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (2.11)$$

Além da relação (2.11), que é usada para encontrar a deformação, pode-se usar a seguinte relação inversa para obter a tensão:

$$\sigma(t) = \int_{\omega}^t E(t-\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (2.12)$$

onde  $\varepsilon(t)$  e  $\sigma(t)$  correspondem às deformações e tensões, respectivamente.  $D(t-\tau)$  e  $E(t-\tau)$  são conhecidas como função de fluência e de relaxação específica, respectivamente.

Uma forma alternativa para a representação integral pode ser obtida integrando-se por partes a equação (2.11), onde se obtém a seguinte expressão:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(0)} + \int_{\omega}^t d(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (2.13)$$

Onde

$$\begin{aligned} d(t-\tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau} D(t-\tau) \\ E(0) &= 1/D(t-\tau) \end{aligned} \quad (2.14)$$

### 2.2.3 Representações Diferenciais dos Modelos

O comportamento viscoelástico dos materiais em carregamento uniaxial é, geralmente, representado por modelos constituídos de elementos elásticos e viscosos. Estes elementos podem ser combinados, resultando em diferentes modelos reológicos que traduzem o comportamento viscoelástico, como descrito por Christensen (2010), entre os principais citem-se: Modelo de Maxwell, Modelo de Kelvin e Modelo de Boltzmann.

#### 2.2.3.1 Modelo de Maxwell

O Modelo de Maxwell é composto por uma mola e um amortecedor, dispostos em série, como ilustra a Figura 2.8 abaixo. Por ser uma associação em série, entende-se que ambos os modelos básicos estarão submetidos à mesma tensão  $\sigma$  e que a deformação total é igual à soma das respectivas deformações na mola e no amortecedor.



Figura 2.8 – Modelo Reológico de Maxwell

Assim, para este modelo, podem-se escrever as seguintes equações:

$$\text{Compatibilidade: } \varepsilon(t) = \varepsilon_E(t) + \varepsilon_\eta(t) \quad (2.15)$$

$$\text{Equilíbrio: } \sigma_E(t) = \sigma_\eta(t) = \sigma(t) \quad (2.16)$$

$$\text{Constitutivas: } \sigma_E(t) = E\varepsilon_E(t) \quad (2.17)$$

$$\sigma_\eta(t) = \eta\dot{\varepsilon}_\eta(t) \quad (2.18)$$

onde os subíndices E e  $\eta$  indicam mola e amortecedor, respectivamente.

Diferenciando a equação (2.15) em relação ao tempo t e usando as equações constitutivas para ambos, mola e amortecedor, obtém-se a equação para o modelo de Maxwell. Assim tem-se que:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_E(t) + \dot{\varepsilon}_\eta(t) \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_E(t) = \frac{\sigma_E(t)}{E} \Rightarrow \varepsilon_E(t) = \frac{\sigma(t)}{E} \Rightarrow \dot{\varepsilon}_E(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} \quad (2.20)$$

$$\dot{\varepsilon}_\eta(t) = \frac{\sigma_\eta(t)}{\eta} \Rightarrow \dot{\varepsilon}_\eta(t) = \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad (2.21)$$

E chega-se a EDO (Equação Diferencial Ordinária) que governa o sistema para o modelo de Maxwell, dada por:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad (2.22)$$

### 2.2.3.2 Modelo de Kelvin

Dentre os diversos modelos, o bem conhecido Modelo de Kelvin é composto de uma mola e um amortecedor, dispostos paralelamente, como ilustra a Figura 2.9. Por ser uma associação em paralelo, entende-se que ambos os modelos básicos estarão submetidos à mesma deformação e que a soma das tensões em cada modelo é igual à tensão total  $\sigma$ .

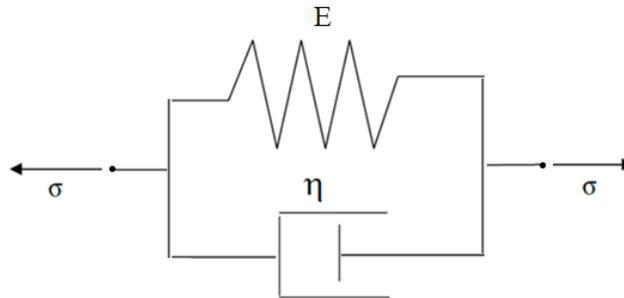


Figura 2.9 - Modelo Reológico de Kelvin

Sendo E, o Módulo de Elasticidade da mola e  $\eta$ , o coeficiente de viscosidade do amortecedor, pode-se escrever as seguintes equações:

- Equilíbrio:

$$\sigma(t) = \sigma_E(t) + \sigma_\eta(t) \quad (2.23)$$

- Compatibilidade:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_E(t) = \varepsilon_\eta(t) \quad (2.24)$$

- Constitutiva para a mola:

$$\sigma_E(t) = E \cdot \varepsilon_E(t) \quad (2.25)$$

- Constitutiva para o amortecedor:

$$\sigma_{\eta}(t) = \eta \cdot \dot{\varepsilon}_{\eta}(t) \quad (2.26)$$

onde os subíndices E e  $\eta$  indicam mola e amortecedor, respectivamente.

Diferenciando e manipulando estas equações em relação ao tempo t, tem-se que:

$$\sigma(t) = E\varepsilon_E(t) + \eta\dot{\varepsilon}_{\eta}(t) \quad (2.27)$$

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) \quad (2.28)$$

A equação 2.28 é a EDO que governa o sistema para o Modelo de Kelvin.

### 2.2.3.3 Modelo de Boltzmann

O modelo viscoelástico de Boltzmann é composto por uma associação em série do modelo viscoelástico de Kelvin com uma mola, como é ilustrado na Figura 2.10 abaixo.

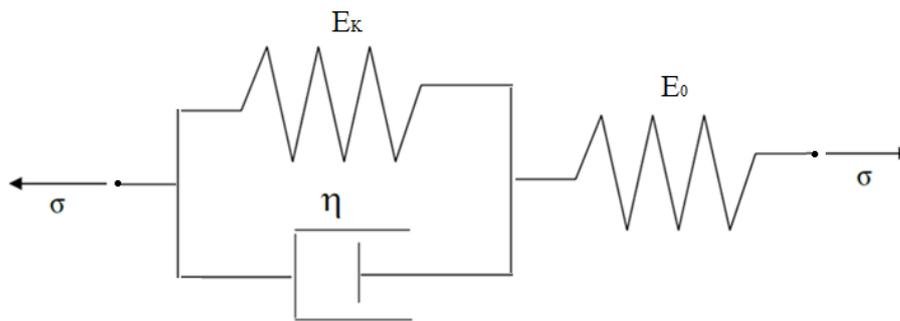


Figura 2.10 - Modelo Reológico de Boltzmann

onde  $E_k$  é o Módulo de Elasticidade da mola que representa o modelo de Kelvin,  $E_0$  é o Módulo de Elasticidade da mola que está em série com o modelo de Kelvin e  $\eta$  é o coeficiente de viscosidade do amortecedor.

Por ser uma associação em série de um modelo de Kelvin com uma mola, entende-se que ambos o modelo de Kelvin e a mola estarão submetidos à mesma tensão  $\sigma$  e que a soma das deformações em cada modelo é igual à deformação total. Assim podem-se escrever as seguintes equações:

- Equilíbrio:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{E_0}(t) + \varepsilon_k(t) \Rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_{E_0}(t) + \dot{\varepsilon}_k(t) \quad (2.29)$$

- Compatibilidade:

$$\sigma(t) = \sigma_{E_0}(t) = \sigma_k(t) \Rightarrow \dot{\sigma}(t) = \dot{\sigma}_{E_0}(t) = \dot{\sigma}_k(t) \quad (2.30)$$

- Constitutivas:

$$\sigma_{E_k} = E_k \cdot \varepsilon_{E_k} \quad (2.31)$$

$$\sigma_\eta = \eta \cdot \dot{\varepsilon}_\eta \quad (2.32)$$

$$\sigma_{E_0} = E_0 \cdot \varepsilon_{E_0} \quad (2.33)$$

onde o subíndice  $E_k$  indica mola que representa o modelo de Kelvin, o subíndice  $E_0$  indica mola que está em série com o modelo de Kelvin e o subíndice  $\eta$  indica a tensão ou deformação no amortecedor.

Para o modelo de Kelvin tem-se que:

$$\sigma_k = \sigma_{E_k} + \sigma_\eta \quad (2.34)$$

Aplicando as relações constitutivas para este modelo, tem-se:

$$\sigma_k = E_k \cdot \varepsilon_{E_k} + \eta \cdot \dot{\varepsilon}_\eta \quad (2.35)$$

Já foi mostrado que no o modelo de Kelvin a deformação total  $\varepsilon_k$ , é a mesma deformação que ocorre na mola  $\varepsilon_{E_k}$  e que também é igual à deformação no amortecedor  $\varepsilon_\eta$ . Assim, é possível escrever:

$$\sigma_k = E_k \cdot \varepsilon_k + \eta \cdot \dot{\varepsilon}_k \quad (2.36)$$

Já para a mola:

$$\sigma_{E_0} = E_0 \cdot \varepsilon_{E_0} \quad (2.37)$$

$$\text{Como de (2.30) } \sigma = \sigma_k, \text{ então } \sigma = E_k \cdot \varepsilon_k + \eta \cdot \dot{\varepsilon}_k. \quad (2.38)$$

Da equação (2.29) pode-se dizer que  $\varepsilon_k = \varepsilon - \varepsilon_{E_0} \Rightarrow \dot{\varepsilon}_k = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{E_0}$

Partindo da equação (2.38) pode-se desenvolver da seguinte forma:

$$\sigma = E_k(\varepsilon - \varepsilon_{E_0}) + \eta(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{E_0}) \quad (2.39)$$

$$\sigma = E_k \varepsilon - E_k \varepsilon_{E_0} + \eta \dot{\varepsilon} - \eta \dot{\varepsilon}_{E_0} \quad (2.40)$$

Como de (2.30)  $\sigma = \sigma_{E_0}$ , então de (2.37) pode-se dizer que  $\varepsilon_{E_0} = \frac{\sigma}{E_0} \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{E_0} = \frac{\dot{\sigma}}{E_0}$ , por

isso:

$$\sigma = E_k \varepsilon - E_k \frac{\sigma}{E_0} + \eta \dot{\varepsilon} - \eta \frac{\dot{\sigma}}{E_0} \quad (2.41)$$

$$\sigma + \frac{E_k}{E_0} \sigma + \frac{\eta}{E_0} \dot{\sigma} = E_k \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \quad (2.42)$$

$$\sigma \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} \right) + \frac{\eta}{E_0} \dot{\sigma} = E_k \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \quad (2.43)$$

A equação 2.43 é a EDO que governa o sistema para o modelo viscoelástico de Boltzmann.

## 2.3 MODELO ELASTOPLÁSTICO

### 2.3.1 Conceitos Básicos

A plasticidade é definida como uma propriedade que permite um dado material se deformar, sem ruptura, durante a aplicação de uma tensão que excede o limite elástico do material. Quando ocorre a remoção das cargas, existem deformações permanentes, sendo que a deformação final dependerá tanto das tensões finais quanto da história de tensão desde o início do escoamento.

#### 2.3.1.1 Comportamento Plástico

O comportamento plástico da maioria dos materiais, usualmente empregados em estruturas, pode ser analisado seguindo-se um dos modelos apresentados na Figura 2.11, obtidos de ensaios de tração uniaxial.

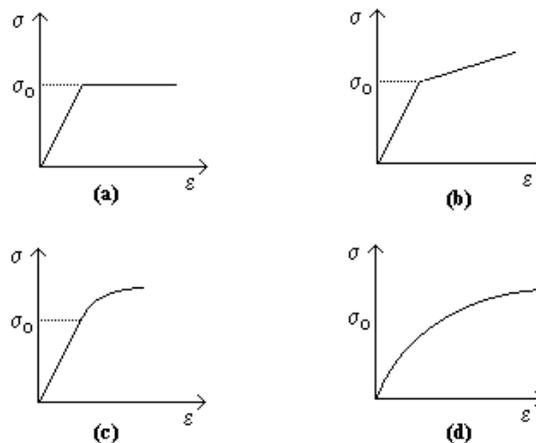


Figura 2.11 – Modelos elastoplásticos (Foltran, 1999).

Na Figura 2.11(a) vê-se o modelo elastoplástico perfeito, onde o material deforma-se elasticamente até atingir a tensão  $\sigma_0$ , conhecida como tensão de escoamento. Deste ponto em diante, o material deforma-se indefinidamente sem que haja um acréscimo nas tensões. Este modelo é normalmente empregado para o aço.

Na Figura 2.11(b) observa-se o modelo de plastificação com encruamento linear, tendo o material uma reserva de resistência após a tensão  $\sigma_0$  ter sido alcançada. Neste caso, há um acréscimo de tensões acompanhando o acréscimo da deformação. O comportamento de vários metais pode ser representado por este modelo, dentre eles o alumínio.

Nas Figuras 2.11(c) e 2.11(d), trata-se de materiais com comportamento não linear. Na Figura 2.11(c), a não-linearidade ocorre apenas depois de atingir a tensão de escoamento  $\sigma_0$ . Em 2.11(d), o comportamento é não-linear desde o início do carregamento, não sendo clara a separação das fases elástica e plástica. Estes modelos podem ser empregados para estudo de materiais como o concreto.

### 2.3.1.2 Tipos de Encruamento

Tendo em vista o comportamento plástico através dos modelos apresentados, serão descritos, agora, os tipos de encruamento isotópico, cinemático e misto. Na Figura 2.12, ilustra-se o comportamento de um material que, após sofrer escoamento, é solicitado de maneira reversa, podendo se comportar de uma maneira diferente da inicial.

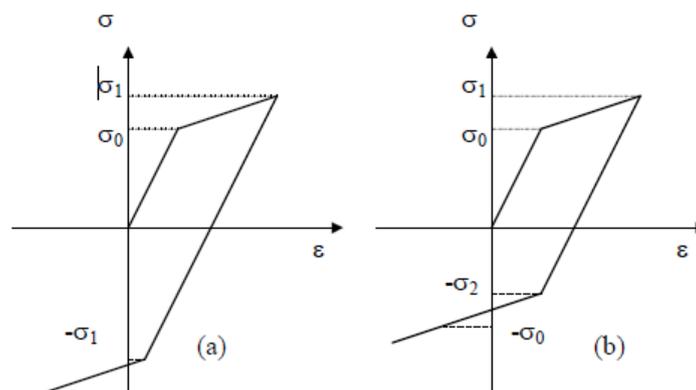


Figura 2.12 – Tipos de encruamento (Foltran, 1999).

Admitindo-se um material com encruamento, na Figura 2.12(a), este é solicitado até uma tensão  $\sigma_1$ , após o escoamento ter ocorrido em  $\sigma_0$ . Em seguida, o carregamento é invertido e o material escoava novamente, sob a ação de uma tensão de módulo  $\sigma_1$ . Neste

caso, o encruamento representa um ganho de resistência para o material, caracterizando o encruamento isotrópico.

Na situação da Figura 3.2(b), a tensão de escoamento no carregamento reverso é  $-\sigma_2$ , que tem módulo inferior a  $\sigma_0$ . Assim, tem-se que a existência do encruamento representa uma diminuição de resistência para cargas no sentido reverso, caracterizando o encruamento cinemático, ou efeito de Bauschinger. Qualquer outra possibilidade de encruamento pode ser escrita como uma combinação dessas anteriores, sendo conhecido como encruamento misto.

### 2.3.2 Modelo elastoplástico de Prandtl-Reuss

O modelo elastoplástico de Prandtl-Reuss é obtido pela associação em série de uma mola e um dispositivo de atrito, como ilustra a Figura 2.13 abaixo.

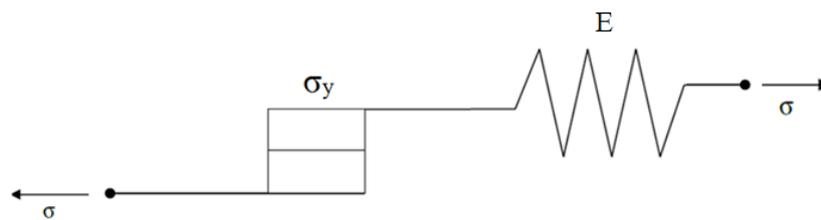


Figura 2.13 - Modelo elastoplástico de Prandtl-Reuss

Por ser uma associação em série, entende-se que ambos os modelos básicos estarão submetidos à mesma tensão  $\sigma$  e que a deformação total é igual à soma das respectivas deformações na mola e no dispositivo de atrito. Assim, para este modelo, tem-se as seguintes equações:

$$\text{Compatibilidade: } \varepsilon = \varepsilon_E + \varepsilon_{\sigma_y} \quad (2.44)$$

$$\text{Equilíbrio: } \sigma_E = \sigma_{\sigma_y} = \sigma \quad (2.45)$$

onde os subíndices E e  $\sigma_y$  indicam mola e dispositivo de atrito, respectivamente.

A tensão  $\sigma$  na mola tem a seguinte relação constitutiva:

$$\sigma_E = E\varepsilon_E \quad (2.46)$$

Portanto é necessário caracterizar a resposta mecânica do dispositivo de atrito. Para entender melhor esta resposta se iniciará falando sobre o comportamento elastoplástico perfeito.

### 2.3.2.1 Comportamento Elastoplástico Perfeito

Sendo  $\dot{\varepsilon}$  a derivada de  $\varepsilon$  em relação ao tempo  $t$ , uma mudança na configuração inicial do dispositivo de atrito, só é possível se  $\dot{\varepsilon}_{\sigma_y} \neq 0$ . Já a tensão  $\sigma$ , no dispositivo de atrito, não pode ser maior, em valor absoluto, do que  $\sigma_y > 0$ . Isto significa que as tensões admissíveis são obrigadas a residir no intervalo fechado  $[-\sigma_y, \sigma_y] \subset \mathbb{R}$ . Com isso, é possível definir o seguinte conjunto de tensões admissíveis  $E_\sigma$ .

$$E_\sigma = \{\sigma \in \mathbb{R} \mid f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_y \leq 0\} \quad (2.47)$$

onde a função  $f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_y \leq 0$  é chamada de *condição de escoamento*. Se  $f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_y < 0$  a resposta será somente elástica, isto é, só é possível que haja deformação plástica se  $f(\sigma) = 0$ . Com isso pode-se definir os seguintes conjuntos:

$$\text{int}(E_\sigma) = \{\sigma \in \mathbb{R} \mid f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_y < 0\} \quad (2.48)$$

$$\partial E_\sigma = \{\sigma \in \mathbb{R} \mid f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_y = 0\} \quad (2.49)$$

$$E_\sigma = \text{int}(E_\sigma) \cup \partial E_\sigma \quad (2.50)$$

O conjunto aberto  $\text{int}(E_\sigma)$  corresponde ao intervalo elástico e o conjunto  $\partial E_\sigma$ , chamado de *superfície de escoamento*, corresponde ao contorno do conjunto  $E_\sigma$ , que é a união dos dois primeiros. Onde no modelo unidimensional  $\partial E_\sigma = \{-\sigma_y, \sigma_y\}$  e reduz-se a dois pontos, como será mostrado na Figura 2.14.

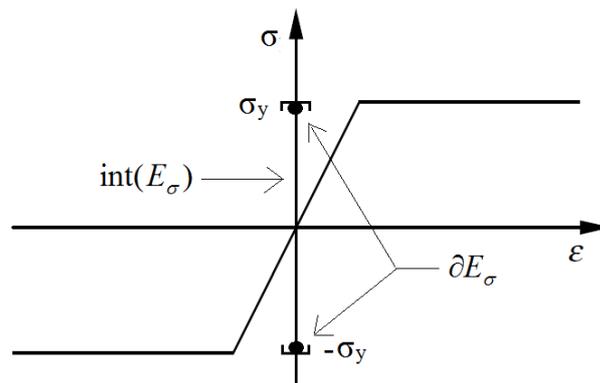


Figura 2.14 – Representação gráfica dos conjuntos  $\text{int}(E_\sigma)$  e  $\partial E_\sigma$ .

É possível observar que, neste simples modelo, o conjunto  $E_\sigma$  se mantém constante ao longo do tempo, devido a não existência do encruamento.

Observe que, no caso de se ter  $f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_y = 0$ , a interface de atrito poderá sofrer um deslizamento no sentido da força  $\sigma$  aplicada, com taxa de deslizamento constante. Assim, pode-se definir como  $\gamma \geq 0$  o valor absoluto da taxa de deslizamento. Tem-se então que:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\sigma_y} &= \gamma \geq 0 & \text{se} & \quad \sigma = \sigma_y > 0 \\ \dot{\epsilon}_{\sigma_y} &= -\gamma \leq 0 & \text{se} & \quad \sigma = -\sigma_y < 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Então é possível unificar as expressões acima e escrever a seguinte expressão:

$$\dot{\epsilon}_{\sigma_y} = \gamma \cdot \text{sign}(\sigma) \quad (2.52)$$

Que tem por nome *lei de fluxo*, onde  $\text{sign}(\sigma) : R \rightarrow R$  é a função sinal definida como:

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad \sigma > 0 \\ -1 & \text{se} \quad \sigma < 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

Para que a equação (2.52) seja descrita para qualquer estado de tensão admissível implica-se as seguintes condições:

$$\begin{aligned} f(\sigma) < 0 &\Rightarrow \gamma = 0 \\ \gamma > 0 &\Rightarrow f(\sigma) = 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Então se pode dizer, a partir das expressões acima, que

$$\gamma \cdot f(\sigma) = 0 \quad (2.55)$$

Estabelecendo as chamadas *condições de Kuhn-Tucker*.

Agora se deve encontrar uma forma de quantificar o valor de  $\gamma$  para qualquer situação, em qualquer instante de tempo  $t \in [0, T]$ . Para isso considere o caso para um tempo  $t$  onde partindo da premissa anterior que  $f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_y \leq 0$  e empregando-se a notação  $f[\sigma(t)]$ , conclui-se que  $\dot{f}[\sigma(t)] \leq 0$ , uma vez que se  $\dot{f}[\sigma(t)]$  fosse positivo, implicaria que  $f[\sigma(t + \Delta t)] > 0$  para  $\Delta t > 0$ , violando a lei de escoamento. Portanto, tem-se que:

$$\begin{aligned} \gamma > 0 &\Rightarrow \dot{f} = 0 \\ \dot{f} < 0 &\Rightarrow \gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ou, alternativamente, pode ser escrito mediante uma única condição adicional, chamada de *condição de persistência ou consistência*,

$$\gamma \cdot \dot{f}(\sigma) = 0 \quad (2.57)$$

Então como já se sabe que, se  $\dot{f} < 0 \Rightarrow \gamma = 0$ , deve-se, agora, encontrar o valor de  $\gamma$  quando  $\dot{f} = 0$ . Assim tem-se que:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \quad (2.58)$$

A partir das equações (2.44) e (2.46) é possível dizer que:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_{\sigma_y}) \quad (2.59)$$

Assim pode-se escrever (2.58) da seguinte forma:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{\sigma_y}) \quad (2.60)$$

E substituindo (2.52) em (2.60) tem-se:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E\dot{\varepsilon} - \frac{\partial f}{\partial \sigma} E\gamma \text{sign}(\sigma) \quad (2.61)$$

Como  $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma)$ , resulta que:

$$\dot{f} = E\dot{\varepsilon} \text{sign}(\sigma) - E\gamma \quad (2.62)$$

Logo, fazendo-se  $\dot{f}(\sigma) = 0$  obtém:

$$\gamma = \dot{\varepsilon} \text{sign}(\sigma) \quad (2.63)$$

Assim, pelo exposto é possível escrever uma expressão que relaciona a taxa de tensão e a taxa de deformação. Como uma mudança na configuração do dispositivo de atrito é possível apenas se  $\dot{\varepsilon}_{\sigma_y} \neq 0$ , isso implica que partindo da equação (2.59),

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{\sigma_y}) \text{ se } \sigma = \sigma_y \quad (2.64)$$

Substituindo em (2.64) o valor de  $\dot{\varepsilon}_{\sigma_y}$  da equação (2.52) é possível chegar a:

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - E\gamma \text{sign}(\sigma) \quad (2.65)$$

Substituindo em (2.65) o valor de  $\gamma$  da equação (2.63) tem-se:

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - E\dot{\varepsilon} \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\sigma) \quad (2.66)$$

Como o produto  $sign(\sigma)sign(\dot{\sigma})$  é igual a 1, a taxa de tensão é nula sendo, portanto

$$\dot{\sigma} = 0 \quad (2.67)$$

Caso a taxa de deformação plástica for  $\dot{\epsilon}_{\sigma_y} = 0$ , não haverá mudança na configuração do dispositivo de atrito e isso implica que,

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} \quad (2.68)$$

Então, as equações que governam o sistema para o Modelo elastoplástico de Prandtl-Reuss para um comportamento elastoplástico perfeito podem ser resumidas como.

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E\dot{\epsilon} & se \ \dot{\epsilon}_{\sigma_y} = 0 \\ 0 & se \ \dot{\epsilon}_{\sigma_y} \neq 0 \end{cases} \quad (2.69)$$

### 2.3.2.2 Comportamento Elastoplástico com Encruamento Isotrópico

Tendo mostrado o modelo constitutivo elastoplástico perfeito, será explicado de forma mais simplificada, o modelo com encruamento isotrópico. Um modelo elastoplástico com encruamento isotrópico linear é apresentado na Figura 2.15 abaixo:

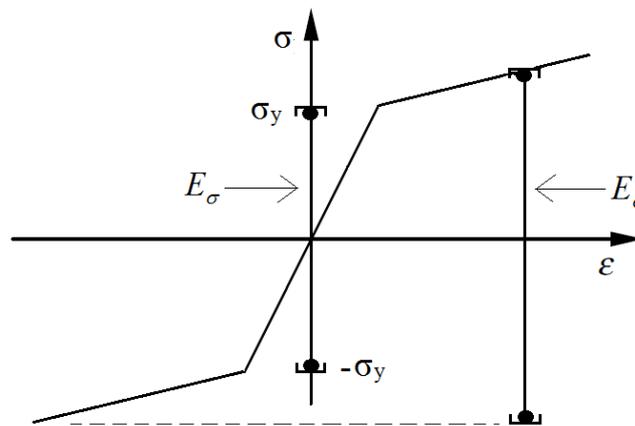


Figura 2.15 – Modelo elastoplástico com encruamento isotrópico linear.

É possível observar que, neste modelo, o conjunto de tensões admissíveis  $E_\sigma$  não é constante ao longo do tempo. A expansão no intervalo de  $E_\sigma$  caracteriza o encruamento do material. Esta expansão está sujeita às seguintes condições:

- O encruamento é isotrópico, pois o centro se mantém na origem. Com isso podemos definir uma função de escoamento;
- O encruamento é linear em relação à  $\dot{\epsilon}_{\sigma_y}$  e independente de  $sign(\dot{\epsilon}_{\sigma_y})$ .

Da primeira condição podemos definir uma função de escoamento como:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - [\sigma_y + K\alpha] \leq 0, \quad \alpha \geq 0 \quad (2.70)$$

onde  $\sigma_y > 0$  e  $K \geq 0$  são constantes conhecidas.  $K$  é chamado de módulo plástico. A variável  $\alpha$ , chamada de variável de endurecimento interno, é uma função do valor do fluxo plástico.

A partir da segunda condição, pode-se definir uma lei de evolução para  $\alpha$ , como:

$$\dot{\alpha} = \left| \dot{\varepsilon}_{\sigma_y} \right| = \gamma \quad (2.71)$$

A lei de fluxo, as condições de Kuhn-Tucker e a condição de persistência não alteram as suas propriedades gerais em relação ao já apresentado para o caso elastoplástico perfeito. Assim tem-se que:

$$\dot{\varepsilon}_{\sigma_y} = \gamma \cdot \text{sign}(\sigma) \quad (2.72)$$

Define a lei de fluxo. Com relação às condições de Kuhn-Tucker, pode-se dizer que:

$$\gamma \cdot f(\sigma, \alpha) = 0 \quad (2.73)$$

Já para a condição de persistência ou consistência tem-se a seguinte expressão:

$$\gamma \cdot \dot{f}(\sigma, \alpha) = 0 \quad (2.74)$$

Como é necessário encontrar uma expressão explícita para  $\gamma$ , deve-se fazer uso da condição de persistência. O caso de interesse é aquele onde  $\gamma \neq 0$ ,  $\dot{f} = 0$ . Portanto, tem-se que:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \quad (2.75)$$

$$\dot{f} = \text{sign}(\sigma)E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{\sigma_y}) - K\dot{\alpha} \quad (2.76)$$

$$\dot{f} = \text{sign}(\sigma)E\dot{\varepsilon} - \text{sign}(\sigma)E\gamma \text{sign}(\sigma) - K\gamma \quad (2.77)$$

$$\dot{f} = \text{sign}(\sigma)E\dot{\varepsilon} - \gamma(E + K) \quad (2.78)$$

Logo, fazendo-se  $\dot{f}(\sigma, \alpha) = 0$ , resulta que:

$$\gamma = \frac{\text{sign}(\sigma)E\dot{\varepsilon}}{(E + K)} \quad (2.79)$$

Assim é possível escrever uma expressão que relaciona a taxa de tensão e a taxa de deformação. Como uma mudança na configuração do dispositivo de atrito é possível apenas se  $\dot{\epsilon}_{\sigma_y} \neq 0$ , isso implica que, partindo da equação (2.59),

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_{\sigma_y}) \text{ se } \sigma \geq \sigma_y \quad (2.80)$$

Substituindo na equação anterior o valor de  $\dot{\epsilon}_{\sigma_y}$ , tem-se:

$$\dot{\sigma} = E[\dot{\epsilon} - \gamma \cdot \text{sign}(\sigma)] \quad (2.81)$$

Como o valor de  $\gamma$  é dado na equação (2.79), pode-se dizer que,

$$\dot{\sigma} = E \left[ \dot{\epsilon} - \frac{\text{sign}(\sigma) E \dot{\epsilon}}{E + K} \cdot \text{sign}(\sigma) \right] \quad (2.82)$$

E ainda é possível desenvolver (2.82) da seguinte maneira:

$$\dot{\sigma} = E \left( \dot{\epsilon} - \frac{E \dot{\epsilon}}{E + K} \right) \quad (2.83)$$

$$\dot{\sigma} = E \dot{\epsilon} \left( 1 - \frac{E}{E + K} \right) = E \left( \frac{K}{E + K} \right) \dot{\epsilon} \quad (2.84)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{EK}{E + K} \dot{\epsilon} \quad (2.85)$$

Caso a taxa de deformação plástica seja  $\dot{\epsilon}_{\sigma_y} = 0$ , não haverá mudança na configuração do dispositivo de atrito e isso implica em:

$$\dot{\sigma} = E \dot{\epsilon} \text{ , se } \sigma < \sigma_y \quad (2.86)$$

Então as equações que governam o sistema para o Modelo elastoplástico de Prandtl-Reuss para um comportamento elastoplástico com encruamento isotrópico linear podem ser resumidas como:

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E \dot{\epsilon} & \text{se } \dot{\epsilon}_{\sigma_y} = 0 \\ \frac{EK}{E + K} \dot{\epsilon} & \text{se } \dot{\epsilon}_{\sigma_y} \neq 0 \end{cases} \quad (2.87)$$

## 2.4 MODELOS VISCOPLÁSTICOS

### 2.4.1 Modelo Viscoplastico com Comportamento Instantâneo

O modelo viscoplastico com comportamento instantâneo é obtido pela associação de uma mola com constante elástica  $E$ , que está ligada a um amortecedor com constante  $\eta$ , onde este está em paralelo com um dispositivo de atrito com coeficiente de atrito  $\sigma_y$ , como ilustra a figura 2.16 abaixo:

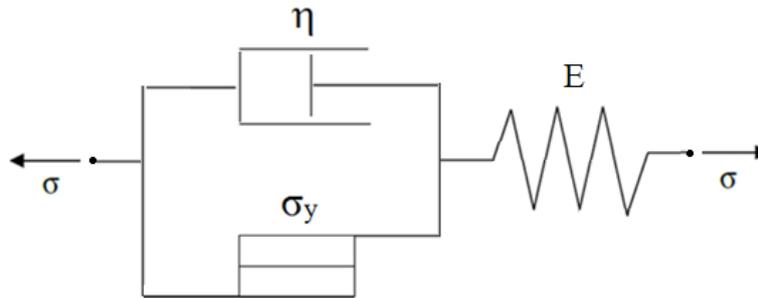


Figura 2.16 - Modelo viscoplastico com comportamento instantâneo

Sendo  $\sigma$  a tensão aplicada no conjunto e  $\varepsilon$  a deformação total obtida, para este modelo, tem-se a seguinte equação:

$$\varepsilon = \varepsilon_E + \varepsilon_{vp} \quad (2.88)$$

onde  $\varepsilon_E$  é a deformação na mola. Assim, tem-se que a tensão  $\sigma$  na mola tem a seguinte relação constitutiva:

$$\sigma = E\varepsilon_E = E(\varepsilon - \varepsilon_{vp}) \quad (2.89)$$

Portanto é necessário caracterizarmos a resposta de  $\varepsilon_{vp} = \varepsilon - \varepsilon_E$ . Para este fim, considere o conjunto de todas as tensões possíveis, cujo valor absoluto for menor ou igual ao coeficiente de atrito  $\sigma_y$ . Este conjunto é o intervalo fechado  $[-\sigma_y, \sigma_y]$ . Assim como foi feito na seção anterior, será usada a seguinte notação:

$$E_\sigma = \{\sigma \in R \mid f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0\} \quad (2.90)$$

E assim será chamada a função  $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y$ , de *função de carregamento*. Além disso, lembra-se que  $\text{int}(E_\sigma)$  e  $\partial E_\sigma$  indicam o interior e o contorno de  $E_\sigma$ , respectivamente, isto é:

$$\text{int}(E_\sigma) = (-\sigma_y, \sigma_y), \quad \partial E_\sigma = \{-\sigma_y, \sigma_y\} \quad (2.91)$$

Com essas anotações em mãos, consideram-se as duas seguintes possibilidades:

- a) Primeiro, sendo  $\sigma \in \text{int}(E_\sigma)$ . Então  $f(\sigma) \equiv |\sigma| - \sigma_y < 0$  e nenhuma mudança instantânea deve ocorrer em  $\varepsilon_{vp} = \varepsilon - \varepsilon_E$ , logo,

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = 0 \quad \text{se } f(\sigma) \equiv |\sigma| - \sigma_y < 0 \quad (2.92)$$

Assim:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_E = \dot{\sigma} E \quad (2.93)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{E} \dot{\varepsilon} \quad (2.94)$$

- b) Segundo, assume que  $\sigma \notin E_\sigma$ ,  $f(\sigma) \equiv |\sigma| - \sigma_y > 0$ . Então, a tensão no dispositivo de atrito é  $\sigma_y$  e a tensão no amortecedor, chamada de tensão extra e denotada por  $\sigma_{ex}$ , é dada como:

$$\sigma_{ex} = \begin{cases} \sigma - \sigma_y & \text{se } \sigma \geq \sigma_y \\ \sigma + \sigma_y & \text{se } \sigma \leq -\sigma_y \end{cases} = (|\sigma| - \sigma_y) \text{sign}(\sigma) \quad (2.95)$$

Usando-se o fato que a tensão  $\sigma_{ex}$  no amortecedor está ligada à deformação através da relação viscosa  $\sigma_{ex} = \eta \dot{\varepsilon}_{vp}$  de (2.94), obtém-se:

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = \frac{1}{\eta} f(\sigma) \text{sign}(\sigma) \quad \text{se } f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \geq 0 \quad (2.96)$$

Para uma melhor interpretação de (2.95) primeiro será introduzido uma constante de tempo, designada por  $\tau$ , como:

$$\tau = \frac{\eta}{E} \quad (2.97)$$

Esta relação entre o coeficiente de viscosidade do amortecedor e a constante da mola é chamada de *tempo de relaxação*. Assim pode-se reescrever (2.96) como:

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = \frac{E^{-1}}{\tau} [|\sigma| \text{sign}(\sigma) - \sigma_y \text{sign}(\sigma)] \quad (2.98)$$

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = \frac{E^{-1}}{\tau} [\sigma - \sigma_y \text{sign}(\sigma)] \quad (2.99)$$

De (2.89) tem-se que:

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - E\dot{\varepsilon}_{vp} \quad (2.100)$$

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - E \frac{E^{-1}}{\tau} [\sigma - \sigma_y \text{sign}(\sigma)] \quad (2.101)$$

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\tau} \sigma = E\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\tau} \sigma_y \text{sign}(\sigma) \quad (2.102)$$

#### 2.4.2 Modelo Viscoplastico sem Comportamento Instantâneo

O modelo viscoplastico sem comportamento instantâneo é obtido pela associação de uma mola com constante elástica  $E$  em série com um dispositivo de atrito com coeficiente de atrito  $\sigma_y$ , que estão ligados em paralelo a um amortecedor com constante  $\eta$ , como ilustra a figura 2.17.

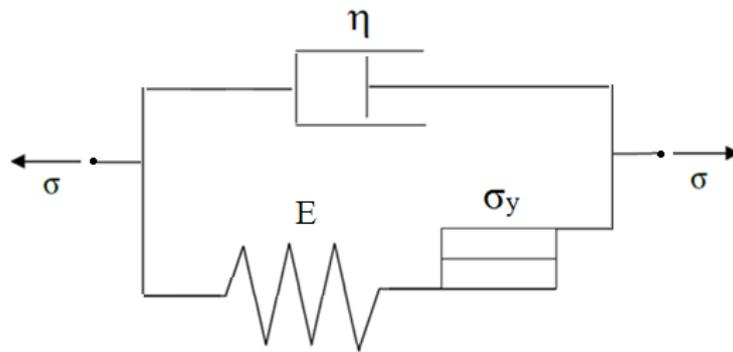


Figura 2.17 - Modelo viscoplastico sem comportamento instantâneo

Sendo  $\sigma$  a tensão aplicada no conjunto e  $\varepsilon$  a deformação total obtida, para este modelo, têm-se as seguintes equações:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\eta} = \varepsilon_{ep} = \varepsilon_E + \varepsilon_{\sigma_y} \quad (2.103)$$

$$\sigma = \sigma_{\eta} + \sigma_{ep} \quad (2.104)$$

onde  $\varepsilon_{ep}$  e  $\sigma_{ep}$  são a deformação e a tensão elastoplástica, respectivamente. Já os subíndices  $E$ ,  $\sigma_y$  e  $\eta$  indicam mola, dispositivo de atrito e amortecedor, respectivamente.

Assim a deformação  $\varepsilon$  na mola tem a seguinte relação constitutiva:

$$\varepsilon_E = \frac{\sigma_E}{E} \quad (2.105)$$

Como a tensão máxima na mola é  $\sigma_y$ , já que a mesma encontra-se em série com o dispositivo de atrito, isso implica que:

$$\sigma_{ep} = \sigma_E \quad (2.106)$$

E a deformação máxima na mola é dada por:

$$\varepsilon_{E\max} = \frac{\sigma_y}{E} \quad (2.107)$$

Tomando como referência a função de carregamento  $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y$ , que foi apresentada no item anterior, e a deformação elástica na mola  $\varepsilon_E$ , podemos considerar as duas seguintes possibilidades:

- a) Primeiro, sendo  $f(\sigma) \equiv |\sigma| - \sigma_y < 0$  ou  $|\varepsilon_E| < \varepsilon_{E\max}$  ou  $sign(\sigma) \neq sign(\varepsilon_E)$ , o sistema se deforma em regime viscoelástico e nenhuma mudança instantânea deve ocorrer em  $\varepsilon_{\sigma_y} = \varepsilon - \varepsilon_E$ , isto é,

$$\dot{\varepsilon}_{\sigma_y} = 0 \quad (2.108)$$

Então é possível reescrever as equações (2.103) como:

$$\varepsilon = \varepsilon_\eta = \varepsilon_E + \varepsilon_{\sigma_y} \quad (2.109)$$

$$\sigma = \sigma_\eta + \sigma_E \quad (2.110)$$

Manipulando estas equações é possível chegar a uma única equação que descreve o comportamento do sistema:

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} + E(\varepsilon - \varepsilon_{\sigma_y}) \quad (2.111)$$

E a deformação elástica na mola será:

$$\varepsilon_E = \varepsilon - \varepsilon_{\sigma_y} \quad (2.112)$$

- b) Segundo, assume que caso contrário, se  $f(\sigma) \equiv |\sigma| - \sigma_y \geq 0$  e  $|\varepsilon_E| \geq \varepsilon_{E\max}$  e  $sign(\sigma) = sign(\varepsilon_E)$ , o sistema se deforma em regime viscoplástico e a deformação na mola  $\varepsilon_E$  não sofrerá alteração, sendo seu valor em módulo igual a  $\varepsilon_{E\max}$ . Pode-se então afirmar que a deformação na mola será:

$$\varepsilon_E = \varepsilon_{E\max} \text{sign}(\varepsilon_E) \quad (2.113)$$

Já a tensão  $\sigma_E$  na mola será dada por:

$$\sigma_E = \sigma_y \text{sign}(\sigma) \quad (2.114)$$

Assim as equações (2.103) e (2.104) tornam-se,

$$\varepsilon = \varepsilon_\eta = \varepsilon_E + \varepsilon_{\sigma_y} \quad (2.115)$$

$$\sigma = \sigma_\eta + \sigma_y \text{sign}(\sigma) \quad (2.116)$$

A tensão no amortecedor, denotada por  $\sigma_\eta$ , é dada por:

$$\sigma_\eta = \sigma - \sigma_y \text{sign}(\sigma) \quad (2.117)$$

Usando-se o fato que a tensão  $\sigma_\eta$  no amortecedor está ligada à deformação através da relação viscosa  $\sigma_\eta = \eta \dot{\varepsilon}_\eta$ , partindo-se de (2.117) será escrito:

$$\dot{\varepsilon}_\eta = \frac{1}{\eta} [\sigma - \sigma_y \text{sign}(\sigma)] \quad (2.118)$$

Como  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_\eta$  tem-se:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta} [\sigma - \sigma_y \text{sign}(\sigma)] \quad (2.119)$$

E a deformação plástica no dispositivo de atrito será:

$$\varepsilon_{\sigma_y} = \varepsilon - \varepsilon_{E\max} \text{sign}(\varepsilon_E) \quad (2.120)$$

## CAPÍTULO 3

### SOLUÇÕES ANALÍTICAS

#### 3.1 TIPOS DE TESTES

Como ao longo do capítulo anterior foram encontradas as Equações Diferenciais Ordinárias que caracterizam o comportamento de cada um dos modelos reológicos estudados, deve-se, neste capítulo, encontrar suas respectivas soluções analíticas. Para os modelos viscoelásticos e viscoplásticos serão encontradas as devidas soluções analíticas para os seguintes ensaios, apresentados nas figuras 3.1, 3.2 e 3.3, respectivamente:

- **Teste 1:** Teste de fluência com tensão constante

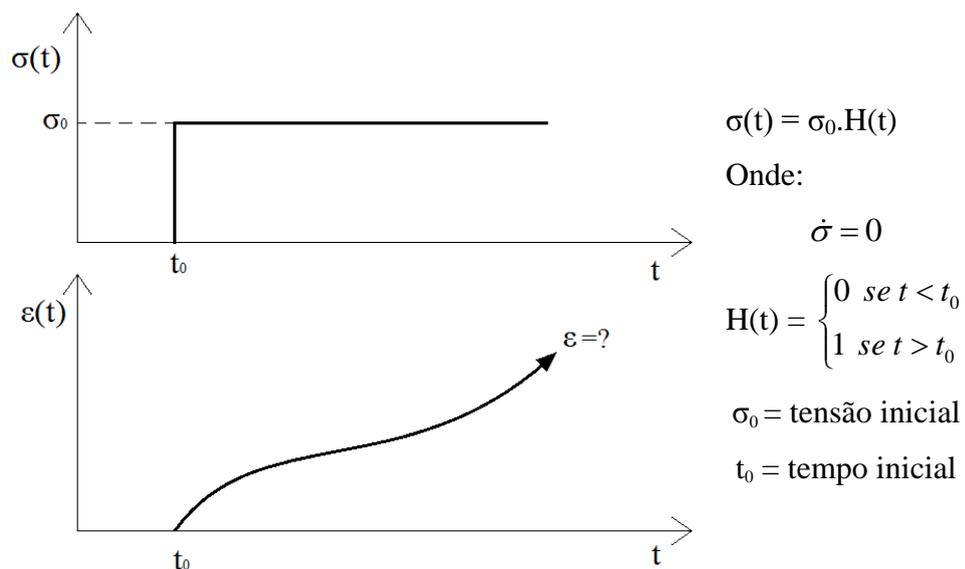


Figura 3.1 – Teste de fluência com tensão constante

Para o teste de fluência apresentado na figura 3.1, tem-se uma tensão  $\sigma$  nula até o instante de tempo  $t_0$ , onde depois de atingir o tempo  $t_0$  a tensão passa a ter um valor constante igual a  $\sigma_0$ . Assim, é possível dizer que a tensão pode ser representada por:

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$$

onde  $H(t)$  é a função de passo unitário.

A partir deste teste, com o uso das Equações Diferenciais Ordinárias de cada modelo, que foram encontradas no capítulo 2, será encontrada a solução analítica para as deformações  $\varepsilon(t)$ . Em seguida, já com a solução de  $\varepsilon(t)$  em mãos, iremos encontrar a *Função de Fluência Específica*  $D(t)$ .

- **Teste 2:** Teste de relaxação com deformação constante

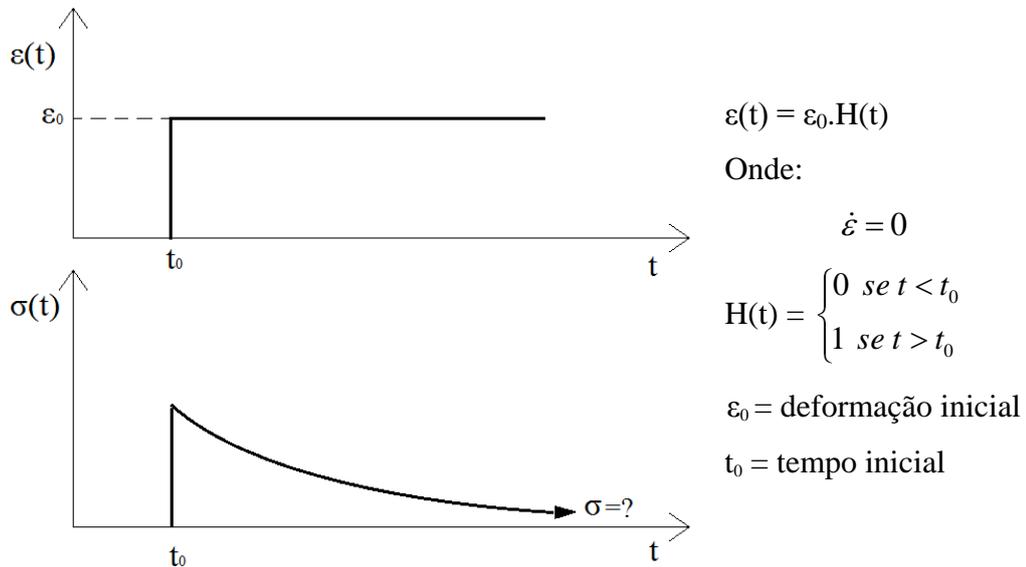


Figura 3.2 - Teste de relaxação com deformação constante

Para o teste de relaxação com um histórico de deformação  $\varepsilon(t)$  apresentado na Figura 3.2, serão resolvidas as Equações Diferenciais Ordinárias de cada modelo, que foram encontradas no capítulo 2, para então chegar à solução analítica para as tensões  $\sigma(t)$ . Em seguida, já com a solução de  $\sigma(t)$  em mãos, pode-se então encontrar a *Função de Relaxação Específica*  $E(t)$ .

- **Teste 3:** Teste de fluência com um trecho de tensão linear e depois tensão constante

A Figura 3.3 seguinte nos mostra este tipo de teste de fluência.

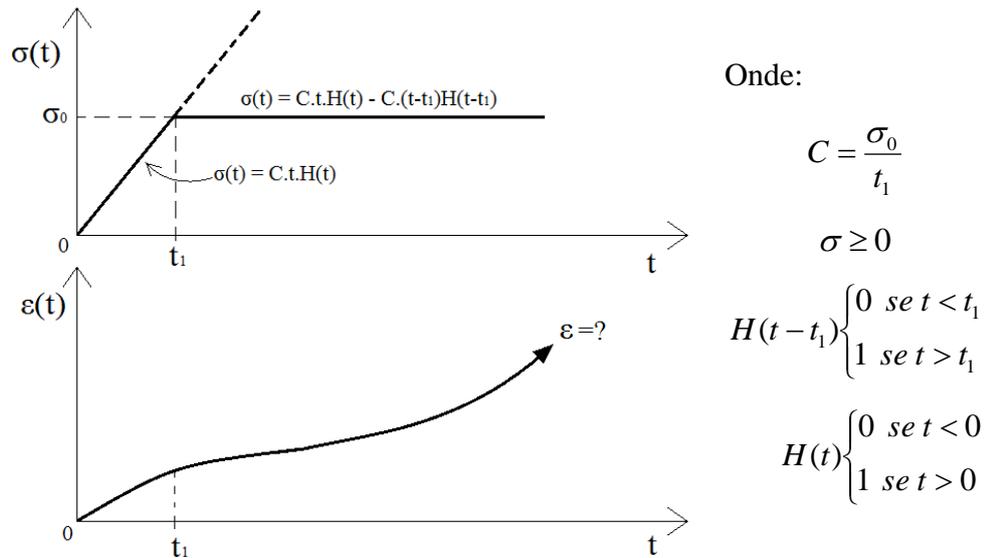


Figura 3.3 – Teste de fluência com um trecho de tensão linear e depois tensão constante.

Neste teste a tensão  $\sigma(t)$  é linear até o instante de tempo  $t_1$ , sendo dada por:

$$\sigma(t) = C \cdot t \cdot H(t)$$

Depois de atingir o tempo  $t_1$  a tensão  $\sigma(t)$  passa a ter um valor constante igual a  $\sigma_0$ , sendo denotada por:

$$\sigma(t) = \sigma_0 = C \cdot t \cdot H(t) - C \cdot (t - t_1) \cdot H(t - t_1)$$

Para este teste, também será encontrada a solução analítica para as deformações  $\epsilon(t)$ , a partir das Equações Diferenciais Ordinárias de cada modelo apresentadas no capítulo 2 desta dissertação.

Este ensaio é o que mais se aproxima de um ensaio real, já que em um experimento de laboratório as tensões vão sendo acrescentadas com o tempo até atingir um valor máximo, que neste caso é a tensão  $\sigma_0$ .

Tendo como base estes ensaios, serão resolvidos cada modelo, separadamente, para os três testes mostrados anteriormente.

## 3.2 MODELOS VISCOELÁSTICOS

### 3.2.1 Modelo de Maxwell

Para este modelo, foi mostrado no capítulo 2, que sua EDO tem a seguinte forma, repetida aqui:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad (3.1)$$

Portanto, é necessário resolver esta equação para cada um dos três testes apresentados. Primeiro deve-se encontrar a solução para a deformação  $\varepsilon(t)$  e função de fluência específica  $D(t)$  para o teste 1; Em seguida encontrar a solução para a tensão  $\sigma(t)$  e função de relaxação específica  $E(t)$  para o teste 2; E por ultimo encontrar a solução para a deformação  $\varepsilon(t)$  para o teste 3.

### 3.2.1.1 Solução para o Teste 1

Para o teste de fluência apresentado na Figura 3.1, tem-se  $\dot{\sigma}(t) = 0$ , e iremos considerar que  $t_0 = 0$ . Assim a EDO (3.1) torna-se:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta} \quad (3.2)$$

Como  $\sigma(t) = \sigma_0$  para  $t > 0$  a EDO de fluência é dada por:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\eta} \quad (3.3)$$

Resolvendo a EDO (3.3) por integração, tem-se:

$$\int \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt = \int \frac{\sigma_0}{\eta} dt \quad (3.4)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} t + C_1 \quad (3.5)$$

É necessário agora encontrar as condições iniciais para assim achar o valor da constante  $C_1$ . Para isso deve-se integrar a EDO (3.1) no intervalo infinitesimal de  $0^-$  a  $0^+$ . Assim:

$$\int_0^t \dot{\varepsilon} dt = \int_0^t \frac{\dot{\sigma}}{E} dt + \int_0^t \frac{\sigma}{\eta} dt \quad (3.6)$$

$$\int_0^t \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt = \frac{1}{E} \int_0^t \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt + \frac{\sigma}{\eta} \int_0^t dt \quad (3.7)$$

$$\varepsilon(t) \Big|_{0^-}^{0^+} = \frac{1}{E} \sigma(t) \Big|_{0^-}^{0^+} + \frac{\sigma}{\eta} t \Big|_{0^-}^{0^+} \quad (3.8)$$

$$[\varepsilon(0^+) - \varepsilon(0^-)] = \frac{1}{E} [\sigma(0^+) - \sigma(0^-)] + \frac{\sigma}{\eta} (0^+ - 0^-) \quad (3.9)$$

Como os valores de  $\varepsilon(0^-)$ ,  $\sigma(0^-)$  e  $(0^+ - 0^-)$  são nulos chega-se a:

$$\varepsilon(0^+) = \frac{1}{E} \sigma(0^+) \quad (3.10)$$

Partindo-se da equação (3.5) e fazendo-se o valor de  $\varepsilon(t)$  igual a  $\varepsilon(0^+)$  da equação (3.10),

$$\frac{1}{E} \sigma(0^+) = \frac{\sigma_0}{\eta} t + C_1 \quad (3.11)$$

Como o tempo  $t$  inicial é igual a 0 e  $\sigma(0^+) = \sigma_0$  é possível afirmar que:

$$C_1 = \frac{\sigma_0}{E} \quad (3.12)$$

Uma vez encontrado o valor da constante  $C_1$ , a solução  $\varepsilon(t)$  da EDO para esse teste é dada por:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} t + \frac{\sigma_0}{E} \quad (3.13)$$

Uma vez que obtida a solução para as deformações  $\varepsilon(t)$  dadas por (3.13), deve-se agora obter a solução para a função de fluência específica  $D(t)$ . Para isso foi colocado o  $\sigma_0$  da solução anterior em evidência.

$$\varepsilon = \sigma_0 \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} t \right) \quad (3.14)$$

Como  $D(t)$  é dada por,

$$D(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (3.15)$$

Podemos dizer que  $D(t)$  é:

$$D(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} t \quad (3.16)$$

Analisando a solução (3.16) é possível observar que, se  $t=0$ , tem-se  $D(t) = 1/E$  e isso faz sentido, porque para um tempo imediato o amortecedor é um membro rígido e a tensão é totalmente absorvida pela mola. Uma vez que para materiais lineares elásticos:

$$E = \frac{1}{D} \Rightarrow E = \frac{1}{\frac{1}{E}} \Rightarrow E = E \quad (3.17)$$

### 3.2.1.2 Solução para o Teste 2

Para o teste de relaxação apresentado na Figura 3.2, tem-se  $\dot{\varepsilon}(t) = 0$ , e será considerado que  $t_0 = 0$ . Assim a EDO (3.1) torna-se:

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = 0 \quad (3.18)$$

Resolvendo a EDO (3.18), tem-se:

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} = -\frac{\sigma}{\eta} \quad (3.19)$$

$$\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = -\frac{E}{\eta} \quad (3.20)$$

$$\int \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt = -\int \frac{E}{\eta} dt \quad (3.21)$$

$$\ln \sigma = -\frac{E}{\eta} t + C_2 \quad (3.22)$$

Fazendo-se a inversa de  $\ln$ , tem-se:

$$\sigma = e^{-\frac{E}{\eta} t + C_2} \quad (3.23)$$

$$\sigma = C_2 \cdot e^{-\frac{E}{\eta} t} \quad (3.24)$$

Deve-se agora encontrar as condições iniciais para achar o valor da constante  $C_2$ . Para isso deve-se integrar a EDO (3.1) no intervalo infinitesimal de  $0^-$  a  $0^+$ . Assim:

$$\int_0^t \dot{\varepsilon} dt = \int_0^t \frac{\dot{\sigma}}{E} dt + \int_0^t \frac{\sigma}{\eta} dt \quad (3.25)$$

$$\int_0^t \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt = \frac{1}{E} \int_0^t \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt + \frac{\sigma}{\eta} \int_0^t dt \quad (3.26)$$

$$\varepsilon(t) \Big|_{0^-}^{0^+} = \frac{1}{E} \sigma(t) \Big|_{0^-}^{0^+} + \frac{\sigma}{\eta} t \Big|_{0^-}^{0^+} \quad (3.27)$$

$$[\varepsilon(0^+) - \varepsilon(0^-)] = \frac{1}{E} [\sigma(0^+) - \sigma(0^-)] + \frac{\sigma}{\eta} (0^+ - 0^-) \quad (3.28)$$

Como os valores de  $\varepsilon(0^-)$ ,  $\sigma(0^-)$  e  $(0^+ - 0^-)$  são nulos chega-se a:

$$\sigma(0^+) = E\varepsilon(0^+) \quad (3.29)$$

Partindo-se da equação (3.24) e fazendo-se o valor de  $\sigma(t)$  igual a  $\sigma(0^+)$  da equação (3.29),

$$E\varepsilon(0^+) = C_2 \cdot e^{-\frac{E}{\eta}t} \quad (3.30)$$

Como o tempo  $t$  inicial é igual a 0 e  $\varepsilon(0^+) = \varepsilon_0$  é possível afirmar que:

$$E\varepsilon_0 = C_2 \cdot e^{-\frac{E}{\eta}0} \quad (3.31)$$

$$C_2 = E\varepsilon_0 \quad (3.32)$$

Uma vez encontrado o valor da constante  $C_2$ , a solução  $\sigma(t)$  da EDO para esse teste é dada por:

$$\sigma = E\varepsilon_0 \cdot e^{-\frac{E}{\eta}t} \quad (3.33)$$

Uma vez que obtida a solução para as deformações  $\varepsilon(t)$  dada por (3.33), deve-se agora obter a solução para a função de relaxação específica  $E(t)$ . Para isso será colocado o  $\varepsilon_0$  da solução anterior em evidência.

$$\sigma = \varepsilon_0 \left( E \cdot e^{-\frac{E}{\eta}t} \right) \quad (3.34)$$

Como  $E(t)$  é dada por:

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad (3.35)$$

Pode-se dizer que  $E(t)$  é:

$$E(t) = E \cdot e^{-\frac{E}{\eta}t} \quad (3.36)$$

Analisando a solução (3.36) observa-se que para um tempo  $t=0$ , temos que  $E(t) = E$ , e isso faz sentido, porque para um tempo imediato o amortecedor é um membro rígido e a deformação é totalmente aplicada à mola.

### 3.2.1.3 Solução para o Teste 3

Para o teste de fluência com um trecho de tensão linear e depois tensão constante apresentado na Figura 3.3, será resolvida usando a fórmula geral da representação integral (2.11) apresentada no capítulo 2, que é dada pela seguinte equação:

$$\varepsilon(t) = \int_{\tau_0}^t D(t-\tau) \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} d\tau \quad (3.37)$$

Vê-se então que a tensão  $\sigma(t)$  é dada por:

$$\sigma(t) = CtH(t) - C(t-t_1)H(t-t_1) \quad (3.38)$$

Modificando a equação anterior e substituindo a variável  $t$  por  $\tau$ , tem-se:

$$\sigma(\tau) = C\tau H(\tau) - C(\tau-t_1)H(\tau-t_1) \quad (3.39)$$

Fazendo-se a derivada de  $\sigma(\tau)$ , obtém-se:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = C \left[ \left( \frac{\partial \tau}{\partial \tau} H(\tau) + \tau \frac{\partial H(\tau)}{\partial \tau} \right) - \left( \frac{\partial(\tau-t_1)}{\partial \tau} H(\tau-t_1) + (\tau-t_1) \frac{\partial H(\tau-t_1)}{\partial \tau} \right) \right] \quad (3.40)$$

Na equação (3.40)  $\frac{\partial \tau}{\partial \tau} = 1$ ,  $\frac{\partial(\tau-t_1)}{\partial \tau} = 1$ ,  $\frac{\partial H(\tau)}{\partial \tau} = \delta(\tau)$  e  $\frac{\partial H(\tau-t_1)}{\partial \tau} = \delta(\tau-t_1)$ , assim :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = C \{ [H(\tau) + \tau\delta(\tau)] - [H(\tau-t_1) + (\tau-t_1)\delta(\tau-t_1)] \} \quad (3.41)$$

onde  $\delta(\tau)$  é a função *Delta de Dirac*, que é dada por:

$$\delta(\tau) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \tau = 0 \\ 0 & \text{se } \tau \neq 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

Como foi mostrado na solução para o teste 1, a função de fluência específica  $D(t)$  é dada por (3.16) e tem a seguinte forma:

$$D(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta}t$$

Pode-se então substituir  $D(t - \tau)$  e  $\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}$  na fórmula integral (3.37) da seguinte forma:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \left[ \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta}(t - \tau) \right] \cdot C \cdot [H(\tau) + \tau\delta(\tau) - H(\tau - t_1) - (\tau - t_1)\delta(\tau - t_1)] d\tau \quad (3.43)$$

Pode-se expressar como 4 integrais distintas:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & C \int_0^t \left[ \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta}(t - \tau) \right] H(\tau) d\tau + C \int_0^t \left[ \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta}(t - \tau) \right] \overbrace{\tau\delta(\tau)}^0 d\tau \rightarrow \\ & - C \int_{t_1}^t \left[ \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta}(t - \tau) \right] H(\tau - t_1) d\tau - C \int_{t_1}^t \left[ \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta}(t - \tau) \right] \overbrace{(\tau - t_1)\delta(\tau - t_1)}^0 d\tau \end{aligned} \quad (3.44)$$

Das propriedades da função Delta de Dirac, é possível afirmar que os termos acima indicados  $\tau\delta(\tau) = 0$  e  $(\tau - t_1)\delta(\tau - t_1) = 0$ . Assim a segunda e a quarta integral, às quais estes termos pertencem, são nulas e pode-se reescrever  $\varepsilon(t)$  da seguinte forma:

$$\varepsilon(t) = C \int_0^t \frac{1}{E} H(\tau) d\tau + C \int_0^t \frac{1}{\eta} (t - \tau) H(\tau) d\tau - C \int_{t_1}^t \frac{1}{E} H(\tau - t_1) d\tau - C \int_{t_1}^t \frac{1}{\eta} (t - \tau) H(\tau - t_1) d\tau \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \frac{C}{E} \int_0^t H(\tau) d\tau + \frac{C}{\eta} t \int_0^t H(\tau) d\tau - \frac{C}{\eta} \int_0^t \tau H(\tau) d\tau - \frac{C}{E} \int_{t_1}^t H(\tau - t_1) d\tau \rightarrow \\ & - \frac{C}{\eta} t \int_{t_1}^t H(\tau - t_1) d\tau + \frac{C}{\eta} \int_{t_1}^t \tau H(\tau - t_1) d\tau \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\varepsilon(t) = \underbrace{\left( \frac{C}{E} + \frac{C}{\eta} t \right) \int_0^t H(\tau) d\tau}_{1^a \text{ Integral}} - \underbrace{\frac{C}{\eta} \int_0^t \tau H(\tau) d\tau}_{2^a \text{ Integral}} - \underbrace{\left( \frac{C}{E} + \frac{C}{\eta} t \right) \int_{t_1}^t H(\tau - t_1) d\tau}_{3^a \text{ Integral}} + \underbrace{\frac{C}{\eta} \int_{t_1}^t \tau H(\tau - t_1) d\tau}_{4^a \text{ Integral}} \quad (3.47)$$

Resolvendo a **1ª Integral**, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^t H(\tau) d\tau = \tau H(\tau) \Big|_0^t &= [tH(t) - 0H(0)] \\ \int_0^t H(\tau) d\tau &= tH(t) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Para resolver a **2ª Integral**, é possível utilizar a regra de integração por partes da seguinte forma:

$$\int_0^t \underbrace{\tau H(\tau) d\tau}_{u \over dv} = \int u dv = uv - \int v du = \tau \cdot \tau H(\tau) - \int \tau H(\tau) d\tau \quad (3.49)$$

$$\int_0^t \tau H(\tau) d\tau = \tau \cdot \tau H(\tau) - \int_0^t \tau H(\tau) d\tau$$

$$2 \int_0^t \tau H(\tau) d\tau = \tau^2 H(\tau)$$

$$\int_0^t \tau H(\tau) d\tau = \frac{\tau^2 H(\tau)}{2} \Big|_0^t = \left[ \frac{t^2 H(t)}{2} - \frac{0^2 H(0)}{2} \right] \quad (3.50)$$

$$\int_0^t \tau H(\tau) d\tau = \frac{t^2 H(t)}{2} \quad (3.51)$$

E para resolver a **3ª Integral** tem-se:

$$\int_{t_1}^t H(\tau - t_1) d\tau = (\tau - t_1) H(\tau - t_1) \Big|_{t_1}^t = [(t - t_1) H(t - t_1) - (t_1 - t_1) H(t_1 - t_1)] \quad (3.52)$$

$$\int_{t_1}^t H(\tau - t_1) d\tau = (t - t_1) H(t - t_1) \quad (3.53)$$

E finalmente para a **4ª Integral** tem-se:

$$\int_{t_1}^t \underbrace{\tau H(\tau - t_1) d\tau}_{u \over dv} = \int u dv = uv - \int v du = \tau \cdot (\tau - t_1) H(\tau - t_1) - \int (\tau - t_1) H(\tau - t_1) d\tau \quad (3.54)$$

$$\int_{t_1}^t \tau H(\tau - t_1) d\tau = \tau \cdot (\tau - t_1) H(\tau - t_1) - \int_{t_1}^t \tau H(\tau - t_1) d\tau + \int_{t_1}^t t_1 H(\tau - t_1) d\tau$$

$$2 \int_{t_1}^t \tau H(\tau - t_1) d\tau = \tau \cdot (\tau - t_1) H(\tau - t_1) + t_1 \cdot (\tau - t_1) H(\tau - t_1)$$

$$\int_{t_1}^t \tau H(\tau - t_1) d\tau = \frac{(\tau + t_1)(\tau - t_1)}{2} H(\tau - t_1)$$

$$\int_{t_1}^t \tau H(\tau - t_1) d\tau = \left( \frac{\tau^2 - t_1^2}{2} \right) H(\tau - t_1) \Big|_{t_1}^t = \left[ \left( \frac{t^2 - t_1^2}{2} \right) H(t - t_1) - \left( \frac{t_1^2 - t_1^2}{2} \right) H(t_1 - t_1) \right] \quad (3.55)$$

$$\int_{t_1}^t \tau H(\tau - t_1) d\tau = \left( \frac{t^2 - t_1^2}{2} \right) H(t - t_1) \quad (3.56)$$

Pode-se então retornar para a equação (3.47), onde a partir das soluções das 4 integrais encontradas, é possível reescrever  $\varepsilon(t)$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \left( \frac{C}{E} + \frac{C}{\eta} t \right) t H(t) - \frac{C}{\eta} \frac{t^2 H(t)}{2} - \left( \frac{C}{E} + \frac{C}{\eta} t \right) (t - t_1) H(t - t_1) \rightarrow \\ & + \frac{C}{\eta} \left( \frac{t^2 - t_1^2}{2} \right) H(t - t_1) \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\varepsilon(t) = \left( \frac{C}{E} t + \frac{C}{\eta} t^2 - \frac{C}{2\eta} t^2 \right) H(t) + \left( -\frac{C}{E} - \frac{C}{\eta} t + \frac{C}{2\eta} t + \frac{C}{2\eta} t_1 \right) (t - t_1) H(t - t_1) \quad (3.58)$$

$$\varepsilon(t) = \left( \frac{C}{E} t + \frac{C}{2\eta} t^2 \right) H(t) + \left( -\frac{C}{E} - \frac{C}{2\eta} t + \frac{C}{2\eta} t_1 \right) (t - t_1) H(t - t_1) \quad (3.59)$$

$$\varepsilon(t) = \left( \frac{C}{E} t + \frac{C}{2\eta} t^2 \right) H(t) + \left( -\frac{C}{E} t - \frac{C}{2\eta} t^2 + \frac{C}{2\eta} t_1 t + \frac{C}{E} t_1 + \frac{C}{2\eta} t t_1 - \frac{C}{2\eta} t_1^2 \right) H(t - t_1) \quad (3.60)$$

$$\varepsilon(t) = \left( \frac{C}{E} t + \frac{C}{2\eta} t^2 \right) H(t) + \left( -\frac{C}{E} t - \frac{C}{2\eta} t^2 + \frac{C}{\eta} t t_1 + \frac{C}{E} t_1 - \frac{C}{2\eta} t_1^2 \right) H(t - t_1) \quad (3.61)$$

### 3.2.2 Modelo de Kelvin

Para o modelo viscoelástico de Kelvin, foi mostrado no capítulo 2, que sua EDO é dada pela seguinte equação:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) \quad (3.62)$$

Agora esta equação será resolvida para cada um dos três testes apresentados anteriormente.

#### 3.2.2.1 Solução para o Teste 1

Para o teste de fluência apresentado na Figura 3.1, tem-se  $\sigma(t) = \sigma_0$ , para  $t > t_0$ . Será considerando para efeito de cálculo que  $t_0 = 0$ . Sendo assim a EDO (3.62) torna-se:

$$\sigma_0 = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (3.63)$$

Resolvendo primeiro a solução homogênea da EDO (3.63), considera-se  $\sigma_0 = 0$ , logo:

$$E\varepsilon_H + \eta\dot{\varepsilon}_H = 0 \quad (3.64)$$

$$\eta\dot{\varepsilon}_H = -E\varepsilon_H$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_H}{\varepsilon_H} = -\frac{E}{\eta}$$

Integrando ambos os membros, tem-se:

$$\int \frac{1}{\varepsilon_H} \frac{d\varepsilon_H}{dt} dt = -\int \frac{E}{\eta} dt \quad (3.65)$$

$$\ln \varepsilon_H = -\frac{E}{\eta} t + C_3 \quad (3.66)$$

Fazendo a inversa do *logaritmo natural*  $\ln$  chega-se a:

$$\varepsilon_H = e^{-\frac{E}{\eta} t + C_3} \quad (3.67)$$

$$\varepsilon_H = C_3 \cdot e^{-\frac{E}{\eta} t} \quad (3.68)$$

Uma vez encontrada a solução homogênea (3.68), deve-se agora partir para a solução particular. Como  $\sigma_0$  é constante no tempo  $t > 0$ , a solução particular  $\varepsilon_p$  será também uma constante, assim:

$$\dot{\varepsilon}_p = 0 \quad (3.69)$$

Partindo-se, então da nossa EDO (3.63), pode-se escrever para a forma particular:

$$\sigma_0 = E\varepsilon_p + \eta\dot{\varepsilon}_p \quad (3.70)$$

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_0}{E} \quad (3.71)$$

Sabe-se que a solução total é dada pela soma da solução homogênea com a solução particular, logo:

$$\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_p \quad (3.72)$$

$$\varepsilon = C_3 \cdot e^{-\frac{E}{\eta} t} + \frac{\sigma_0}{E} \quad (3.73)$$

Deve-se agora encontrar as condições iniciais para achar o valor da constante  $C_3$ . Para isso deve-se integrar a EDO (3.62) no intervalo infinitesimal de  $0^-$  a  $0^+$ . Assim:

$$\int_0^t \sigma dt = \int_0^t E\varepsilon dt + \int_0^t \eta\dot{\varepsilon} dt \quad (3.74)$$

$$\sigma \int_0^t dt = E\varepsilon \int_0^t dt + \eta \int_0^t \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt \quad (3.75)$$

$$\sigma \cdot t \Big|_{0^-}^{0^+} = E\varepsilon \cdot t \Big|_{0^-}^{0^+} + \eta \varepsilon(t) \Big|_{0^-}^{0^+} \quad (3.76)$$

$$\sigma(0^+ - 0^-) = E\varepsilon(0^+ - 0^-) + \eta[\varepsilon(0^+) - \varepsilon(0^-)] \quad (3.77)$$

Como os valores de  $\varepsilon(0^-)$  e  $(0^+ - 0^-)$  são nulos chega-se a:

$$\begin{aligned} \eta \varepsilon(0^+) &= 0 \\ \varepsilon(0^+) &= 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

Partindo-se da equação (3.73) e fazendo-se o valor de  $\varepsilon(t)$  igual a  $\varepsilon(0^+)$  da equação (3.78):

$$\varepsilon(0^+) = \frac{\sigma_0}{E} + C_3 \cdot e^{-\frac{E}{\eta}t} \quad (3.79)$$

Como o tempo  $t$  inicial é igual a 0 e  $\varepsilon(0^+) = 0$  é possível afirmar que:

$$C_3 = -\frac{\sigma_0}{E} \quad (3.80)$$

Uma vez encontrado o valor da constante  $C_3$ , a solução  $\varepsilon(t)$  da EDO para esse teste é dada por:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} - \frac{\sigma_0}{E} e^{-\frac{E}{\eta}t} \quad (3.81)$$

Uma vez que obtida a solução para as deformações  $\varepsilon(t)$  dada por (3.81), deve-se agora obter a solução para a função de fluência específica  $D(t)$ . Para isso será colocado o  $\sigma_0$  da solução anterior em evidência.

$$\varepsilon = \sigma_0 \left( \frac{1}{E} - \frac{1}{E} e^{-\frac{E}{\eta}t} \right) \quad (3.82)$$

Como  $D(t)$  é dada por:

$$D(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (3.83)$$

Pode-se dizer que  $D(t)$  é:

$$D(t) = \frac{1}{E} - \frac{1}{E} e^{-\frac{E}{\eta}t} \quad (3.84)$$

### 3.2.2.2 Solução para o Teste 2

Para o teste de relaxação apresentado na Figura 3.2, tem-se  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$ , para  $t > t_0$ . Será considerado para efeito de cálculo que  $t_0 = 0$ . Sendo assim a EDO (3.62) torna-se:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta \frac{d}{dt} \varepsilon(t) \quad (3.85)$$

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 H(t) + \eta \frac{d}{dt} \varepsilon_0 H(t) \quad (3.86)$$

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 H(t) + \eta \varepsilon_0 \delta(t) \quad (3.87)$$

onde  $\delta(t)$  é a função *Delta de Dirac*, que é dada por:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{se } t \neq 0 \end{cases} \quad (3.88)$$

Para o tempo inicial  $t_0 = 0$ , a tensão  $\sigma(t)$  da equação (3.87) é infinitamente grande, ou seja, o teste de relaxação para o modelo de Kelvin é fisicamente impossível. Sendo assim é possível resumir essa solução da seguinte forma:

$$\sigma(t) = \begin{cases} +\infty & \text{se } t = 0 \\ E\varepsilon_0 & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad (3.89)$$

### 3.2.2.3 Solução para o Teste 3

Para o teste de fluência com um trecho de tensão linear e depois tensão constante apresentado na Figura 3.3, resolver-se-á usando a fórmula geral da representação integral (2.11) apresentada no capítulo 2, que é dada pela seguinte equação:

$$\varepsilon(t) = \int_{\tau_0}^t D(t-\tau) \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} d\tau \quad (3.90)$$

É possível ver que a tensão  $\sigma(t)$  é dada por:

$$\sigma(t) = CtH(t) - C(t-t_1)H(t-t_1) \quad (3.91)$$

Modificando a equação anterior e substituindo a variável  $t$  por  $\tau$ , obteremos:

$$\sigma(\tau) = C t H(\tau) - C(\tau - t_1) H(\tau - t_1) \quad (3.92)$$

Já foi mostrado que a derivada de  $\sigma(\tau)$ , é:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = C \{ [H(\tau) + \tau \delta(\tau)] - [H(\tau - t_1) + (\tau - t_1) \delta(\tau - t_1)] \} \quad (3.93)$$

Como foi mostrado na solução para o teste 1, a função de fluência específica  $D(t)$  é dada por (3.84) e tem a seguinte forma:

$$D(t) = \frac{1}{E} - \frac{1}{E} e^{-\frac{E}{\eta} t} \quad (3.94)$$

É possível então substituir  $D(t - \tau)$  e  $\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}$  na fórmula integral (3.90) da seguinte forma:

$$\varepsilon(t) = \int_w^t \left[ \frac{1}{E} - \frac{1}{E} e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} \right] \cdot C \cdot [H(\tau) + \tau \delta(\tau) - H(\tau - t_1) - (\tau - t_1) \delta(\tau - t_1)] d\tau \quad (3.95)$$

Pode-se expressar como 4 integrais distintas:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & C \int_0^t \left[ \frac{1}{E} - \frac{1}{E} e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} \right] H(\tau) d\tau + C \int_0^t \left[ \frac{1}{E} - \frac{1}{E} e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} \right] \overbrace{\tau \delta(\tau)}^0 d\tau \rightarrow \\ & - C \int_{t_1}^t \left[ \frac{1}{E} - \frac{1}{E} e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} \right] H(\tau - t_1) d\tau - C \int_{t_1}^t \left[ \frac{1}{E} - \frac{1}{E} e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} \right] \overbrace{(\tau - t_1) \delta(\tau - t_1)}^0 d\tau \end{aligned} \quad (3.96)$$

Das propriedades da função Delta de Dirac, é possível afirmar que os termos acima indicados  $\tau \delta(\tau) = 0$  e  $(\tau - t_1) \delta(\tau - t_1) = 0$ . Assim a segunda e a quarta integral, às quais estes termos pertencem são nulas e pode-se reescrever  $\varepsilon(t)$  da seguinte forma:

$$\varepsilon(t) = \frac{C}{E} \int_0^t H(\tau) d\tau - \frac{C}{E} \int_0^t e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} H(\tau) d\tau - \frac{C}{E} \int_{t_1}^t H(\tau - t_1) d\tau + \frac{C}{E} \int_{t_1}^t e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} H(\tau - t_1) d\tau \quad (3.97)$$

$$\varepsilon(t) = \underbrace{\frac{C}{E} \int_0^t H(\tau) d\tau}_{1^a \text{ Integral}} - \underbrace{\frac{C}{E} e^{-\frac{E}{\eta} t} \int_0^t e^{\frac{E}{\eta} \tau} H(\tau) d\tau}_{2^a \text{ Integral}} - \underbrace{\frac{C}{E} \int_{t_1}^t H(\tau - t_1) d\tau}_{3^a \text{ Integral}} + \underbrace{\frac{C}{E} e^{-\frac{E}{\eta} t} \int_{t_1}^t e^{\frac{E}{\eta} \tau} H(\tau - t_1) d\tau}_{4^a \text{ Integral}} \quad (3.98)$$

Para a **1ª Integral**, já foi mostrado que:

$$\int_0^t H(\tau) d\tau = t H(t) \quad (3.99)$$

Para resolver a **2ª Integral**, pode-se utilizar a regra de integração por partes da seguinte forma:

$$\int_0^t \underbrace{H(\tau)}_u \underbrace{e^{\frac{E}{\eta}\tau}}_{dv} d\tau = \int u dv = uv - \int v du = H(\tau) \cdot \frac{\eta}{E} e^{\frac{E}{\eta}\tau} - \int_0^t \frac{\eta}{E} e^{\frac{E}{\eta}\tau} \delta(\tau) d\tau \quad (3.100)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t H(\tau) e^{\frac{E}{\eta}\tau} d\tau &= H(\tau) \cdot \frac{\eta}{E} e^{\frac{E}{\eta}\tau} - \frac{\eta}{E} H(\tau) \\ \int_0^t H(\tau) e^{\frac{E}{\eta}\tau} d\tau &= \frac{\eta}{E} \left( e^{\frac{E}{\eta}t} - 1 \right) H(\tau) \Big|_0^t = \frac{\eta}{E} \left[ \left( e^{\frac{E}{\eta}t} - 1 \right) H(t) - \left( e^{\frac{E}{\eta} \cdot 0} - 1 \right) H(0) \right] \\ \int_0^t H(\tau) e^{\frac{E}{\eta}\tau} d\tau &= \frac{\eta}{E} \left( e^{\frac{E}{\eta}t} - 1 \right) H(t) \end{aligned} \quad (3.101)$$

Para a **3ª Integral** já foi mostrado que:

$$\int_{t_1}^t H(\tau - t_1) d\tau = (t - t_1) H(t - t_1) \quad (3.102)$$

E finalmente para a **4ª Integral** tem-se:

$$\int_{t_1}^t e^{\frac{E}{\eta}\tau} H(\tau - t_1) d\tau = \frac{\eta}{E} \left( e^{\frac{E}{\eta}t} - e^{\frac{E}{\eta}t_1} \right) H(\tau - t_1) \Big|_{t_1}^t \quad (3.103)$$

$$\int_{t_1}^t e^{\frac{E}{\eta}\tau} H(\tau - t_1) d\tau = \frac{\eta}{E} \left[ \left( e^{\frac{E}{\eta}t} - e^{\frac{E}{\eta}t_1} \right) H(t - t_1) - \left( e^{\frac{E}{\eta}t_1} - e^{\frac{E}{\eta}t_1} \right) H(t_1 - t_1) \right] \quad (3.104)$$

$$\int_{t_1}^t e^{\frac{E}{\eta}\tau} H(\tau - t_1) d\tau = \frac{\eta}{E} \left( e^{\frac{E}{\eta}t} - e^{\frac{E}{\eta}t_1} \right) H(t - t_1) \quad (3.105)$$

Pode-se então retornar para a equação (3.98), onde a partir das soluções das 4 integrais encontradas, é possível reescrever  $\varepsilon(t)$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{C}{E} t H(t) - \frac{C}{E} e^{-\frac{E}{\eta}t} \frac{\eta}{E} \left( e^{\frac{E}{\eta}t} - 1 \right) H(t) - \frac{C}{E} (t - t_1) H(t - t_1) \rightarrow \\ &+ \frac{C}{E} e^{-\frac{E}{\eta}t} \frac{\eta}{E} \left( e^{\frac{E}{\eta}t} - e^{\frac{E}{\eta}t_1} \right) H(t - t_1) \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{C}{E} t H(t) - \frac{C\eta}{E^2} \left( 1 - e^{-\frac{E}{\eta}t} \right) H(t) - \frac{C}{E} (t - t_1) H(t - t_1) + \frac{C\eta}{E^2} \left( 1 - e^{-\frac{E}{\eta}(t-t_1)} \right) H(t - t_1) \quad (3.107)$$

$$\varepsilon(t) = \left( \frac{C}{E}t - \frac{C\eta}{E^2} + \frac{C\eta}{E^2} e^{-\frac{E}{\eta}t} \right) H(t) + \left( -\frac{C}{E}t + \frac{C}{E}t_1 + \frac{C\eta}{E^2} - \frac{C\eta}{E^2} e^{-\frac{E}{\eta}(t-t_1)} \right) H(t-t_1) \quad (3.108)$$

### 3.2.3 Modelo de Boltzmann

Para este modelo, foi mostrado no capítulo 2, que sua EDO é dada pela equação (2.43).

Esta equação tem a seguinte forma:

$$\sigma \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} \right) + \frac{\eta}{E_0} \dot{\sigma} = E_k \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \quad (3.109)$$

Deve-se, portanto, resolver esta equação para cada um dos três testes apresentados.

#### 3.2.3.1 Solução para o Teste 1

Para o teste de fluência apresentado na Figura 3.1, tem-se  $\sigma(t) = \sigma_0$  e  $\dot{\sigma}(t) = 0$ , e será considerado que  $t_0 = 0$ . Assim a EDO (3.109) torna-se:

$$\sigma_0 \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} \right) = E_k \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \quad (3.110)$$

Resolvendo primeiro a solução homogênea da EDO (3.110), considera-se

$$\sigma_0 \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} \right) = 0, \text{ logo:}$$

$$E_k \varepsilon_H + \eta \dot{\varepsilon}_H = 0 \quad (3.111)$$

$$\eta \dot{\varepsilon}_H = -E_k \varepsilon_H \quad (3.112)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_H}{\varepsilon_H} = -\frac{E_k}{\eta} \quad (3.113)$$

Integrando ambos os membros, tem-se:

$$\int \frac{1}{\varepsilon_H} \frac{d\varepsilon_H}{dt} dt = -\int \frac{E_k}{\eta} dt \quad (3.114)$$

$$\ln \varepsilon_H = -\frac{E_k}{\eta} t + C_4 \quad (3.115)$$

Fazendo a inversa do *logaritmo natural* ln chega-se a:

$$\varepsilon_H = e^{-\frac{E_k t + C_4}{\eta}} \quad (3.116)$$

$$\varepsilon_H = C_4 \cdot e^{-\frac{E_k t}{\eta}} \quad (3.117)$$

Uma vez encontrada a solução homogênea (3.117), deve-se partir agora para a solução particular. Como  $\sigma_0 \left(1 + \frac{E_k}{E_0}\right)$  é constante no tempo  $t > 0$ , a solução particular  $\varepsilon_p$  será também uma constante, assim:

$$\dot{\varepsilon}_p = 0 \quad (3.118)$$

Partindo-se, então da nossa EDO (3.110), pode-se escrever para a forma particular:

$$\sigma_0 \left(1 + \frac{E_k}{E_0}\right) = E_k \varepsilon_p + \eta \dot{\varepsilon}_p \quad (3.119)$$

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_0}{E_k} \left(1 + \frac{E_k}{E_0}\right) \quad (3.120)$$

Sabe-se que a solução total é dada pela soma da solução homogênea com a solução particular, logo:

$$\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_p \quad (3.121)$$

$$\varepsilon = C_4 \cdot e^{-\frac{E_k t}{\eta}} + \frac{\sigma_0}{E_k} \left(1 + \frac{E_k}{E_0}\right) \quad (3.122)$$

Deve-se agora encontrar as condições iniciais para achar o valor da constante  $C_4$ . Para isso deve-se integrar a EDO (3.109) no intervalo infinitesimal de  $0^-$  a  $0^+$ . Assim:

$$\int_0^t \sigma \left(1 + \frac{E_k}{E_0}\right) dt + \int_0^t \frac{\eta}{E_0} \dot{\sigma} dt = \int_0^t E_k \varepsilon dt + \int_0^t \eta \dot{\varepsilon} dt \quad (3.23)$$

$$\sigma \left(1 + \frac{E_k}{E_0}\right) \int_0^t dt + \frac{\eta}{E_0} \int_0^t \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt = E_k \varepsilon \int_0^t dt + \eta \int_0^t \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt \quad (3.124)$$

$$\sigma \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} \right) \cdot t \left| \begin{array}{c} 0^+ \\ 0^- \end{array} \right. + \frac{\eta}{E_0} \sigma(t) \left| \begin{array}{c} 0^+ \\ 0^- \end{array} \right. = E_k \varepsilon \cdot t \left| \begin{array}{c} 0^+ \\ 0^- \end{array} \right. + \eta \varepsilon(t) \left| \begin{array}{c} 0^+ \\ 0^- \end{array} \right. \quad (3.125)$$

$$\sigma \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} \right) (0^+ - 0^-) + \frac{\eta}{E_0} [\sigma(0^+) - \sigma(0^-)] = E_k \varepsilon (0^+ - 0^-) + \eta [\varepsilon(0^+) - \varepsilon(0^-)] \quad (3.126)$$

Como os valores de  $(0^+ - 0^-)$ ,  $\sigma(0^-)$  e  $\varepsilon(0^-)$  são nulos chega-se a:

$$\frac{\eta}{E_0} \sigma(0^+) = \eta \varepsilon(0^+) \quad (3.127)$$

$$\varepsilon(0^+) = \frac{\sigma_0}{E_0} \quad (3.128)$$

Partindo-se da equação (3.122) e fazendo-se o valor de  $\varepsilon(t)$  igual a  $\varepsilon(0^+)$  da equação (3.128),

$$\varepsilon(0^+) = C_4 \cdot e^{-\frac{E_k t}{\eta}} + \frac{\sigma_0}{E_k} \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} \right) = \frac{\sigma_0}{E_0} \quad (3.129)$$

Como o tempo t inicial é igual a 0, pode-se afirmar que:

$$C_4 = \frac{\sigma_0}{E_0} - \frac{\sigma_0}{E_k} - \frac{\sigma_0}{E_0} \quad (3.130)$$

$$C_4 = -\frac{\sigma_0}{E_k} \quad (3.131)$$

Uma vez encontrado o valor da constante  $C_4$ , a solução  $\varepsilon(t)$  da EDO para esse teste é dada por:

$$\varepsilon = -\frac{\sigma_0}{E_k} \cdot e^{-\frac{E_k t}{\eta}} + \frac{\sigma_0}{E_k} \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} \right) \quad (3.132)$$

Uma vez obtida a solução para as deformações  $\varepsilon(t)$  dada por (3.132), deve-se agora obter a solução para a função de fluência específica  $D(t)$ . Para isso será colocado o  $\sigma_0$  da solução anterior em evidência.

$$\varepsilon = \sigma_0 \frac{1}{E_k} \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} - e^{-\frac{E_k t}{\eta}} \right) \quad (3.133)$$

Como  $D(t)$  é dada por:

$$D(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (3.134)$$

Pode-se dizer que D(t) é:

$$D(t) = \frac{1}{E_k} \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} - e^{-\frac{E_k t}{\eta}} \right) \quad (3.135)$$

### 3.2.3.2 Solução para o Teste 2

Para o teste de relaxação apresentado na Figura 3.2, tem-se  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$  e  $\dot{\varepsilon}(t) = 0$ , para  $t > t_0$ . Será considerado para efeito de cálculo que  $t_0 = 0$ . Sendo assim a EDO (3.109) torna-se:

$$\sigma \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} \right) + \frac{\eta}{E_0} \dot{\sigma} = E_k \varepsilon_0 \quad (3.136)$$

Resolvendo primeiro a solução homogênea da EDO (3.136), considera-se  $E_k \varepsilon_0 = 0$ , logo:

$$\left( 1 + \frac{E_k}{E_0} \right) \sigma_H + \frac{\eta}{E_0} \dot{\sigma}_H = 0 \quad (3.137)$$

$$\frac{\eta}{E_0} \dot{\sigma}_H = - \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} \right) \sigma_H$$

$$\frac{\dot{\sigma}_H}{\sigma_H} = - \left( \frac{E_0 + E_k}{E_0} \right) \frac{E_0}{\eta} \quad (3.138)$$

Integrando ambos os membros, temos:

$$\int \frac{1}{\sigma_H} \frac{d\sigma_H}{dt} dt = - \int \frac{E_0 + E_k}{\eta} dt$$

$$\ln \sigma_H = - \frac{E_0 + E_k}{\eta} t + C_5 \quad (3.139)$$

Fazendo a inversa do *logaritmo natural* ln chega-se a:

$$\sigma_H = e^{-\frac{E_0 + E_k}{\eta} t + C_5}$$

$$\sigma_H = C_5 e^{-\frac{(E_0+E_k)t}{\eta}} \quad (3.140)$$

Uma vez encontrada a solução homogênea (3.140), deve-se partir agora para a solução particular. Como  $E_k \varepsilon_0$  é constante no tempo  $t > 0$ , a solução particular  $\sigma_P$  será também uma constante, assim:

$$\dot{\sigma}_P = 0 \quad (3.141)$$

Partindo-se, então da nossa EDO (3.136), pode-se escrever para a forma particular:

$$\sigma_P \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} \right) + \frac{\eta}{E_0} \dot{\sigma}_P = E_k \varepsilon_0 \quad (3.142)$$

$$\sigma_P \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} \right) = E_k \varepsilon_0$$

$$\sigma_P = \frac{E_k E_0}{E_k + E_0} \varepsilon_0 \quad (3.143)$$

Sabe-se que a solução total é dada pela soma da solução homogênea com a solução particular, logo:

$$\sigma = \sigma_H + \sigma_P \quad (3.144)$$

$$\sigma(t) = C_5 e^{-\frac{(E_0+E_k)t}{\eta}} + \frac{E_k E_0}{E_k + E_0} \varepsilon_0 \quad (3.145)$$

Deve-se agora encontrar as condições iniciais para acharmos o valor da constante  $C_5$ .

Partindo-se, da equação (3.127), pode-se escrever a seguinte condição inicial:

$$\frac{\eta}{E_0} \sigma(0^+) = \eta \varepsilon(0^+)$$

$$\sigma(0^+) = E_0 \varepsilon(0^+) \quad (3.146)$$

Partindo-se da equação (3.145), fazendo-se o valor de  $\sigma(t)$  igual a  $\sigma(0^+)$  da equação (3.146) e considerando que  $\varepsilon(0^+) = \varepsilon_0$ :

$$\sigma(0^+) = C_5 e^{-\frac{(E_0+E_k)t}{\eta}} + \frac{E_k E_0}{E_k + E_0} \varepsilon_0 = E_0 \varepsilon_0 \quad (3.147)$$

Como o tempo  $t$  inicial é igual a 0, pode-se afirmar que:

$$C_5 = E_0 \varepsilon_0 - \frac{E_k E_0}{E_k + E_0} \varepsilon_0 \quad (3.148)$$

$$C_5 = \frac{E_0^2}{E_k + E_0} \varepsilon_0$$

Uma vez encontrado o valor da constante  $C_5$ , a solução  $\sigma(t)$  da EDO para esse teste é dada por:

$$\sigma(t) = \frac{E_0^2}{E_k + E_0} \varepsilon_0 e^{-\frac{(E_0+E_k)t}{\eta}} + \frac{E_k E_0}{E_k + E_0} \varepsilon_0 \quad (3.149)$$

Uma vez que já obtemos a solução para as tensões  $\sigma(t)$  dada por (3.149), deve-se agora obter a solução para a função de relaxação específica  $E(t)$ . Para isso será colocado o  $\varepsilon_0$  da solução anterior em evidência.

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \frac{E_0}{E_k + E_0} \left[ E_0 e^{-\frac{(E_0+E_k)t}{\eta}} + E_k \right] \quad (3.150)$$

Como  $E(t)$  é dada por:

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad (3.151)$$

Podemos dizer que  $E(t)$  é:

$$E(t) = \frac{E_0}{E_k + E_0} \left[ E_0 e^{-\frac{(E_0+E_k)t}{\eta}} + E_k \right] \quad (3.152)$$

### 3.2.3.3 Solução para o Teste 3

Para o teste de fluência com um trecho de tensão linear e depois tensão constante apresentado na Figura 3.3, resolver-se-á usando a fórmula geral da representação integral apresentada no capítulo 2, que é dada pela seguinte equação:

$$\varepsilon(t) = \int_{\omega}^t D(t-\tau) \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} d\tau \quad (3.153)$$

É possível ver que a tensão  $\sigma(t)$  é dada por:

$$\sigma(t) = CtH(t) - C(t-t_1)H(t-t_1) \quad (3.154)$$

Modificando a equação anterior e substituindo a variável t por  $\tau$ , temos:

$$\sigma(\tau) = C\tau H(\tau) - C(\tau - t_1)H(\tau - t_1) \quad (3.155)$$

Foi mostrado que a derivada de  $\sigma(\tau)$  é

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = C\{[H(\tau) + \tau\delta(\tau)] - [H(\tau - t_1) + (\tau - t_1)\delta(\tau - t_1)]\} \quad (3.156)$$

Como foi mostrado na solução para o teste 1, a função de fluência específica D(t) é dada por (3.135) e tem a seguinte forma:

$$D(t) = \frac{1}{E_k} \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} - e^{-\frac{E_k t}{\eta}} \right)$$

Pode-se então substituir D(t -  $\tau$ ) e  $\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}$  na fórmula integral (3.153) da seguinte forma:

$$\varepsilon(t) = \int_{\tau_0}^t \left[ \frac{1}{E_k} + \frac{1}{E_0} - \frac{1}{E_k} e^{-\frac{E_k(t-\tau)}{\eta}} \right] \cdot C \cdot [H(\tau) + \tau\delta(\tau) - H(\tau - t_1) - (\tau - t_1)\delta(\tau - t_1)] d\tau \quad (3.157)$$

Pode-se expressar como 4 integrais distintas:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= C \int_0^t \left[ \frac{1}{E_k} + \frac{1}{E_0} - \frac{1}{E_k} e^{-\frac{E_k(t-\tau)}{\eta}} \right] H(\tau) d\tau + C \int_0^t \left[ \frac{1}{E_k} + \frac{1}{E_0} - \frac{1}{E_k} e^{-\frac{E_k(t-\tau)}{\eta}} \right] \overbrace{\tau\delta(\tau)}^0 d\tau \rightarrow \\ &- C \int_{t_1}^t \left[ \frac{1}{E_k} + \frac{1}{E_0} - \frac{1}{E_k} e^{-\frac{E_k(t-\tau)}{\eta}} \right] H(\tau - t_1) d\tau \rightarrow \\ &- C \int_{t_1}^t \left[ \frac{1}{E_k} + \frac{1}{E_0} - \frac{1}{E_k} e^{-\frac{E_k(t-\tau)}{\eta}} \right] \overbrace{(\tau - t_1)\delta(\tau - t_1)}^0 d\tau \end{aligned} \quad (3.158)$$

Das propriedades da função Delta de Dirac, pode-se afirmar que os termos acima indicados  $\tau\delta(\tau) = 0$  e  $(\tau - t_1)\delta(\tau - t_1) = 0$ . Assim a segunda e a quarta integral, às quais estes termos pertencem são nulas e é possível reescrever  $\varepsilon(t)$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= C \left( \frac{1}{E_k} + \frac{1}{E_0} \right) \int_0^t H(\tau) d\tau - \frac{C}{E_k} \int_0^t e^{-\frac{E_k(t-\tau)}{\eta}} H(\tau) d\tau \rightarrow \\ &- C \left( \frac{1}{E_k} + \frac{1}{E_0} \right) \int_{t_1}^t H(\tau - t_1) d\tau + \frac{C}{E_k} \int_{t_1}^t e^{-\frac{E_k(t-\tau)}{\eta}} H(\tau - t_1) d\tau \end{aligned} \quad (3.159)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & C \left( \frac{1}{E_k} + \frac{1}{E_0} \right) \underbrace{\int_0^t H(\tau) d\tau}_{1^{\text{a Integral}}} - \frac{C}{E_k} e^{-\frac{E_k t}{\eta}} \underbrace{\int_0^t e^{\frac{E_k \tau}{\eta}} H(\tau) d\tau}_{2^{\text{a Integral}}} \rightarrow \\ & - C \left( \frac{1}{E_k} + \frac{1}{E_0} \right) \underbrace{\int_{t_1}^t H(\tau - t_1) d\tau}_{3^{\text{a Integral}}} + \frac{C}{E_k} e^{-\frac{E_k t}{\eta}} \underbrace{\int_{t_1}^t e^{\frac{E_k \tau}{\eta}} H(\tau - t_1) d\tau}_{4^{\text{a Integral}}} \end{aligned} \quad (3.160)$$

Resolvendo a **1ª Integral**, obtém-se:

$$\int_0^t H(\tau) d\tau = tH(t) \quad (3.161)$$

Para a **2ª Integral**, pode-se utilizar a regra de integração por partes e assim obter:

$$\int_0^t H(\tau) e^{\frac{E_k \tau}{\eta}} d\tau = \frac{\eta}{E_k} \left( e^{\frac{E_k t}{\eta}} - 1 \right) H(t) \quad (3.162)$$

Para a **3ª Integral**, tem-se:

$$\int_{t_1}^t H(\tau - t_1) d\tau = (t - t_1) H(t - t_1) \quad (3.163)$$

E finalmente para a **4ª Integral** tem-se:

$$\int_{t_1}^t e^{\frac{E_k \tau}{\eta}} H(\tau - t_1) d\tau = \frac{\eta}{E_k} \left( e^{\frac{E_k t}{\eta}} - e^{\frac{E_k t_1}{\eta}} \right) H(t - t_1) \quad (3.164)$$

Pode-se então retornar para a equação (3.160), onde a partir das soluções das 4 integrais encontradas, é possível reescrever  $\varepsilon(t)$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & C \left( \frac{1}{E_k} + \frac{1}{E_0} \right) tH(t) - \frac{C}{E_k} e^{-\frac{E_k t}{\eta}} \frac{\eta}{E_k} \left( e^{\frac{E_k t}{\eta}} - 1 \right) H(t) \rightarrow \\ & - C \left( \frac{1}{E_k} + \frac{1}{E_0} \right) (t - t_1) H(t - t_1) + \frac{C}{E_k} e^{-\frac{E_k t}{\eta}} \frac{\eta}{E_k} \left( e^{\frac{E_k t}{\eta}} - e^{\frac{E_k t_1}{\eta}} \right) H(t - t_1) \end{aligned} \quad (3.165)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \left( \frac{C}{E_k} + \frac{C}{E_0} \right) tH(t) - \frac{C\eta}{E_k^2} \left( 1 - e^{-\frac{E_k t}{\eta}} \right) H(t) - \left( \frac{C}{E_k} + \frac{C}{E_0} \right) tH(t - t_1) \rightarrow \\ & + \left( \frac{C}{E_k} + \frac{C}{E_0} \right) t_1 H(t - t_1) + \frac{C\eta}{E_k^2} \left( 1 - e^{-\frac{E_k (t-t_1)}{\eta}} \right) H(t - t_1) \end{aligned} \quad (3.166)$$

$$(3.167)$$

$$\varepsilon(t) = \left[ \left( \frac{C}{E_k} + \frac{C}{E_0} \right) t - \frac{C\eta}{E_k^2} + \frac{C\eta}{E_k^2} e^{-\frac{E_k t}{\eta}} \right] H(t) \rightarrow$$

$$\left[ - \left( \frac{C}{E_k} + \frac{C}{E_0} \right) t + \left( \frac{C}{E_k} + \frac{C}{E_0} \right) t_1 + \frac{C\eta}{E_k^2} - \frac{C\eta}{E_k^2} e^{-\frac{E_k (t-t_1)}{\eta}} \right] H(t-t_1)$$

### 3.3 MODELOS VISCOPLÁSTICOS

#### 3.3.1 Modelo com Comportamento Instantâneo

Para o modelo viscoplástico com comportamento instantâneo, a solução depende da seguinte condição:

$$\begin{cases} se |\sigma| < \sigma_y \Rightarrow \dot{\varepsilon}^{vp} = 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = \frac{1}{E} \dot{\varepsilon} \text{ (resposta elástica)} \\ se |\sigma| > \sigma_y \Rightarrow \dot{\varepsilon}^{vp} \neq 0 \Rightarrow \dot{\sigma} + \frac{1}{\tau} \sigma = E\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\tau} \sigma_y \text{sign}(\sigma) \text{ (resposta viscoplástica)} \end{cases} \quad (3.168)$$

Deve-se, portanto, resolver este problema para cada um dos três testes apresentados, para encontrar a solução para as deformações  $\varepsilon(t)$  e para as tensões  $\sigma(t)$  quando for o caso.

##### 3.3.1.1 Solução para o Teste 1

Para o teste de fluência apresentado na Figura 3.1, tem-se  $\sigma(t) = \sigma_0$  e  $\dot{\sigma}(t) = 0$ , e deve ser considerado que  $t_0 = 0$ . Uma vez que o caso elástico é elementar ( $\sigma_0 < \sigma_y$ ), será resolvida apenas a situação em que ocorre resposta viscoplástica ( $\sigma_0 > \sigma_y$ ).

Sendo  $\sigma_0 > 0$ , da condição (3.168), onde  $\sigma = \sigma_0 > \sigma_y$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \sigma_0 &= E\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\tau} \sigma_y \\ \dot{\varepsilon} &= \frac{1}{E\tau} (\sigma_0 - \sigma_y) \end{aligned} \quad (3.169)$$

Resolvendo esta a EDO por integração, tem-se:

$$\int \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt = \int \frac{1}{E\tau} (\sigma_0 - \sigma_y) dt \quad (3.170)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{E\tau} (\sigma_0 - \sigma_y)t + C_6 \quad (3.171)$$

Deve-se agora encontrar as condições iniciais para achar o valor da constante  $C_6$ .

$$\int_0^t \dot{\sigma} dt + \int_0^t \frac{1}{\tau} \sigma dt = \int_0^t E \dot{\varepsilon} dt + \int_0^t \frac{1}{\tau} \sigma_y dt \quad (3.172)$$

$$\int_0^t \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt + \frac{\sigma}{\tau} \int_0^t dt = E \int_0^t \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt + \frac{\sigma_y}{\tau} \int_0^t dt \quad (3.173)$$

$$\sigma(t) \left| \begin{array}{c} 0^+ \\ 0^- \end{array} + \frac{\sigma}{\tau} t \right| \begin{array}{c} 0^+ \\ 0^- \end{array} = E \varepsilon(t) \left| \begin{array}{c} 0^+ \\ 0^- \end{array} + \frac{\sigma_y}{\tau} t \right| \begin{array}{c} 0^+ \\ 0^- \end{array} \quad (3.174)$$

$$[\sigma(0^+) - \sigma(0^-)] + \frac{\sigma}{\tau} (0^+ - 0^-) = E[\varepsilon(0^+) - \varepsilon(0^-)] + \frac{\sigma_y}{\tau} (0^+ - 0^-) \quad (3.175)$$

Como os valores de  $\sigma(0^-)$ ,  $(0^+ - 0^-)$  e  $\varepsilon(0^-)$  são nulos chega-se a:

$$\varepsilon(0^+) = \frac{1}{E} \sigma(0^+) \quad (3.176)$$

Partindo-se da equação (3.171) e fazendo-se o valor de  $\varepsilon(t)$  igual a  $\varepsilon(0^+)$  da equação (3.176):

$$\varepsilon(0^+) = \frac{1}{E\tau} (\sigma_0 - \sigma_y)t + C_6 = \frac{1}{E} \sigma(0^+) \quad (3.177)$$

Como o tempo  $t$  inicial é igual a 0 e  $\sigma(0^+) = \sigma_0$  pode-se afirmar que:

$$C_6 = \frac{\sigma_0}{E} \quad (3.178)$$

Uma vez encontrado o valor da constante  $C_6$ , a solução  $\varepsilon(t)$  da EDO para esse teste é dada por:

$$\varepsilon = \frac{1}{E\tau} (\sigma_0 - \sigma_y)t + \frac{\sigma_0}{E} \quad (3.179)$$

### 3.3.1.2 Solução para o Teste 2

Para o teste de relaxação apresentado na Figura 3.2, tem-se  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$  e  $\dot{\varepsilon}(t) = 0$ , para  $t > t_0$ . Será considerado para efeito de cálculo que  $t_0 = 0$ . Uma vez que o caso elástico

é elementar ( $E\varepsilon_0 < \sigma_y$ ), será resolvida apenas a situação em que ocorre resposta viscoplástica ( $E\varepsilon_0 \geq \sigma_y$ ).

Pode-se então simplificar a condição (3.168), da seguinte forma:

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\tau}\sigma = \frac{1}{\tau}\sigma_y \quad (3.180)$$

Resolvendo primeiro a solução homogênea da EDO (3.180), considera-se  $\frac{1}{\tau}\sigma_y = 0$ ,

logo:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_H + \frac{1}{\tau}\sigma_H &= 0 \\ \dot{\sigma}_H &= -\frac{1}{\tau}\sigma_H \end{aligned} \quad (3.181)$$

$$\frac{\dot{\sigma}_H}{\sigma_H} = -\frac{1}{\tau}$$

Integrando ambos os membros, tem-se:

$$\int \frac{1}{\sigma_H} \frac{d\sigma_H}{dt} dt = -\int \frac{1}{\tau} dt \quad (3.182)$$

$$\ln \sigma_H = -\frac{1}{\tau}t + C_7 \quad (3.183)$$

Fazendo a inversa do *logaritmo natural*  $\ln$ , chega-se a:

$$\sigma_H = e^{-\frac{t}{\tau} + C_7} \quad (3.184)$$

$$\sigma_H = C_7 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.185)$$

Uma vez encontrada a solução homogênea (3.185), deve-se partir agora para a solução particular. Como  $\frac{1}{\tau}\sigma_y$  é constante no tempo  $t > 0$ , a solução particular  $\sigma_p$  será também uma constante, assim:

$$\dot{\sigma}_p = 0 \quad (3.186)$$

Partindo-se, então da nossa EDO (3.180), pode-se escrever para a forma particular:

$$\dot{\sigma}_p + \frac{1}{\tau} \sigma_p = \frac{1}{\tau} \sigma_y \quad (3.187)$$

$$\sigma_p = \sigma_y \quad (3.188)$$

Sabe-se que a solução total é dada pela soma da solução homogênea com a solução particular, logo:

$$\sigma = \sigma_H + \sigma_p \quad (3.189)$$

$$\sigma = C_7 e^{-\frac{t}{\tau}} + \sigma_y \quad (3.190)$$

Deve-se agora encontrar as condições iniciais para achar o valor da constante  $C_7$ . Partindo-se, da equação (3.176), pode-se escrever a seguinte condição inicial:

$$\varepsilon(0^+) = \frac{1}{E} \sigma(0^+) \quad (3.191)$$

$$\sigma(0^+) = E\varepsilon(0^+)$$

Partindo-se da equação (3.190) e fazendo-se o valor de  $\varepsilon(t)$  igual a  $\varepsilon(0^+)$  da equação (3.191):

$$\sigma(0^+) = C_7 e^{-\frac{t}{\tau}} + \sigma_y = E\varepsilon_0 \quad (3.192)$$

Como o tempo  $t$  inicial é igual a 0, pode-se afirmar que:

$$C_7 = E\varepsilon_0 - \sigma_y \quad (3.193)$$

Uma vez encontrado o valor da constante  $C_7$ , a solução  $\sigma(t)$  da EDO para esse teste é dada por:

$$\sigma = (E\varepsilon_0 - \sigma_y) e^{-\frac{t}{\tau}} + \sigma_y \quad (3.194)$$

### 3.3.1.3 Solução para o Teste 3

Para o teste de fluência com um trecho de tensão linear e depois tensão constante apresentado na Figura 3.3, foi visto que a tensão  $\sigma(t)$  é dada por:

$$\sigma(t) = CtH(t) - C(t-t_1)H(t-t_1) \quad (3.195)$$

Uma vez que o caso elástico é elementar ( $\sigma_0 < \sigma_y$ ), será resolvida apenas a situação em que ocorre resposta viscoplástica ( $\sigma_0 > \sigma_y$ ), como é mostrado na Figura 3.4:

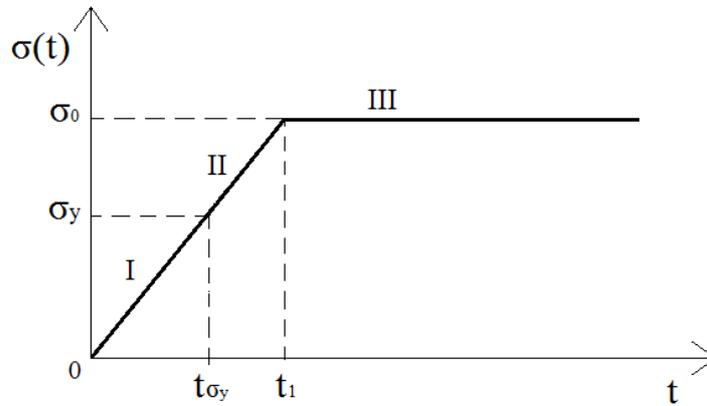


Figura 3.4 – Teste 3 para o modelo viscoplástico com  $\sigma_0 > \sigma_y$ .

Para este teste tem-se, sendo  $\sigma_y > 0$ ,  $\sigma_0 > 0$  e  $t > t_0$  com  $t_0 = 0$ , a condição (3.168), pode gerar 3 situações diferentes:

I. Se  $0 < \sigma < \sigma_y$ , observa-se que  $\sigma = C.t$  e tem-se a seguinte EDO:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= E\dot{\varepsilon} \\ \dot{\varepsilon} &= \frac{C}{E} \end{aligned} \tag{3.196}$$

Que resolvendo, obtém-se a seguinte solução:

$$\varepsilon = \frac{C}{E}t \tag{3.197}$$

II. Se  $\sigma_y \leq \sigma < \sigma_0$ , também  $\sigma = C.t$  e tem-se a seguinte EDO:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= E\dot{\varepsilon} - E \frac{1}{\tau} E^{-1}[\sigma - \sigma_y] \\ \dot{\sigma} + \frac{1}{\tau}\sigma &= E\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\tau}\sigma_y \\ C + \frac{1}{\tau}C \cdot t &= E\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\tau}\sigma_y \end{aligned} \tag{3.198}$$

$$E\dot{\varepsilon} = C + \frac{C \cdot t}{\tau} - \frac{\sigma_y}{\tau} \quad (3.199)$$

Resolvendo esta a EDO por integração, tem-se:

$$E \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt = \int \left( C + \frac{C \cdot t}{\tau} - \frac{\sigma_y}{\tau} \right) dt \quad (3.200)$$

$$E\varepsilon = C \cdot t + \frac{1}{2} \frac{C}{\tau} t^2 - \frac{\sigma_y}{\tau} t + C_8$$

$$\varepsilon = \frac{C}{E} \cdot t + \frac{1}{2} \frac{C}{E\tau} t^2 - \frac{\sigma_y}{E\tau} t + C_8 \quad (3.201)$$

Deve-se agora aplicar as condições iniciais para achar o valor da constante  $C_8$ . Para isso pode-se dizer que a condição final de I para o tempo  $t_{\sigma_y}$  é igual à condição inicial de II para o mesmo tempo  $t_{\sigma_y}$ .

$$\varepsilon(t_{\sigma_y}) = \frac{C}{E} \cdot t_{\sigma_y} + \frac{1}{2} \frac{C}{E\tau} t_{\sigma_y}^2 - \frac{\sigma_y}{E\tau} t_{\sigma_y} + C_8 = \frac{C}{E} \cdot t_{\sigma_y} \quad (3.202)$$

$$C_8 = \frac{\sigma_y}{E\tau} t_{\sigma_y} - \frac{1}{2} \frac{C}{E\tau} t_{\sigma_y}^2 \Rightarrow t_{\sigma_y} = \frac{\sigma_y}{C}$$

$$C_8 = \frac{1}{2} \frac{\sigma_y^2}{CE\tau} \quad (3.203)$$

Uma vez encontrado o valor da constante  $C_8$ , a solução  $\varepsilon(t)$  da EDO para esse teste é dada por:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{C}{E\tau} t^2 + \left( \frac{C}{E} - \frac{\sigma_y}{E\tau} \right) t + \frac{1}{2} \frac{\sigma_y^2}{CE\tau} \quad (3.204)$$

III. Se  $\sigma = \sigma_0$ , então  $\dot{\sigma} = 0$  e tem-se a seguinte EDO:

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - E \frac{1}{\tau} E^{-1} [\sigma - \sigma_y] \quad (3.198)$$

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\tau} \sigma = E\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\tau} \sigma_y$$

$$\frac{\sigma_0}{\tau} = E\dot{\varepsilon} + \frac{\sigma_y}{\tau}$$

$$E\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\tau} - \frac{\sigma_y}{\tau} \quad (3.199)$$

Resolvendo esta a EDO por integração, tem-se:

$$E \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt = \int \left( \frac{\sigma_0}{\tau} - \frac{\sigma_y}{\tau} \right) dt \quad (3.200)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0 - \sigma_y}{E\tau} t + C_9 \quad (3.201)$$

Deve-se agora aplicar as condições iniciais para achar o valor da constante  $C_9$ . Para isso pode-se dizer que a condição final de II para o tempo  $t_1$  é igual à condição inicial de III para o mesmo tempo  $t_1$ .

$$\varepsilon(t_1) = \frac{\sigma_0 - \sigma_y}{E\tau} t_1 + C_9 = \frac{1}{2} \frac{C}{E\tau} t_1^2 + \left( \frac{C}{E} - \frac{\sigma_y}{E\tau} \right) t_1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_y^2}{CE\tau} \quad (3.202)$$

$$C_9 = \frac{1}{2} \frac{C}{E\tau} t_1^2 + \left( \frac{C}{E} - \frac{\sigma_0}{E\tau} \right) t_1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_y^2}{CE\tau} \Rightarrow t_1 = \frac{\sigma_0}{C}$$

$$C_9 = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2}{CE\tau} + \frac{\sigma_0}{E} - \frac{\sigma_0^2}{CE\tau} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_y^2}{CE\tau}$$

$$C_9 = \frac{\sigma_0}{E} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2}{CE\tau} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_y^2}{CE\tau} = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{1}{2} \frac{(\sigma_y^2 - \sigma_0^2)}{CE\tau} \quad (3.203)$$

Uma vez encontrado o valor da constante  $C_9$ , a solução  $\varepsilon(t)$  da EDO para esse teste é dada por:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0 - \sigma_y}{E\tau} t + \frac{\sigma_0}{E} + \frac{1}{2} \frac{(\sigma_y^2 - \sigma_0^2)}{CE\tau} \quad (3.204)$$

## CAPÍTULO 4

### SOLUÇÕES NUMÉRICAS

Um modelo matemático representa o fenômeno físico para o qual se deseja a solução, sendo este modelo formado pelas equações governantes do problema, podendo ser uma única equação ou um sistema de equações diferenciais. Assim, para resolver equações diferenciais, utilizam-se métodos numéricos, como o Método das Diferenças Finitas, para aproximar as derivadas. Geralmente, usa-se a Série de Taylor da função derivada para a fórmula da aproximação.

Este capítulo trata das soluções numéricas a serem desenvolvidas para simular o comportamento dos modelos reológicos citados. Inicialmente, será abordada apenas a formulação através do Método das Diferenças Finitas para cada modelo separadamente. O procedimento consiste em escrever, a partir da equação diferencial de qualquer modelo, uma solução numérica.

#### 4.1 TIPOS DE TESTES

Para os modelos viscoelásticos e viscoplásticos, devem-se encontrar as devidas soluções numéricas para os seguintes ensaios, apresentados nas Figuras 4.1, 4.2 e 4.3, respectivamente:

- **Teste 1:** Considere o teste de fluência da Figura 4.1 abaixo:

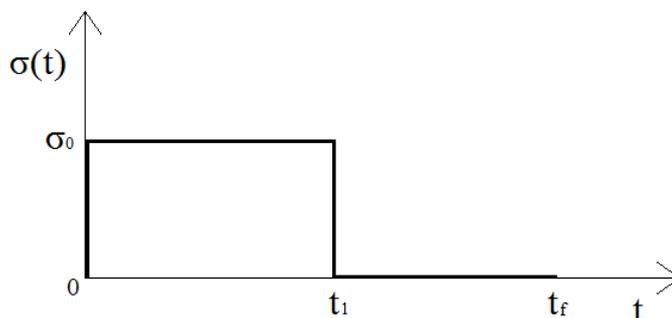


Figura 4.1 – Teste de fluência

Para o teste de fluência apresentado acima, tem-se uma tensão  $\sigma(t) = \sigma_0$  até o instante de tempo  $t_1$ , onde a partir do tempo  $t_1$  a tensão passa a ter um valor nulo até atingir um tempo final  $t_f$ . Assim, pode-se dizer que a tensão pode ser representada por:

$$\begin{cases} \sigma_i = \sigma_0 & \text{se } 0 < t \leq t_1 \\ \sigma_i = 0 & \text{se } t_1 < t < t_f \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\Delta\sigma_i = \sigma_i - \sigma_{i-1} \quad (4.2)$$

A partir deste teste, com o uso das Equações Diferenciais Ordinárias de cada modelo, que foram encontradas no capítulo 2, será encontrada a solução numérica para as deformações  $\varepsilon(t)$ .

- **Teste 2:** Considere o teste de Relaxação da Figura 4.2.

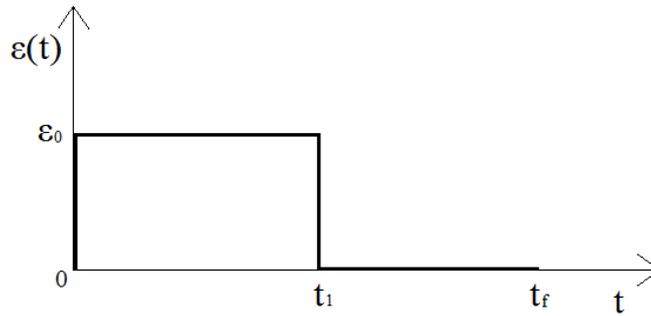


Figura 4.2 - Teste de relaxação

Para o teste de relaxação apresentado acima, tem-se uma deformação  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$  até o instante de tempo  $t_1$ , onde a partir do tempo  $t_1$  a deformação passa a ter um valor nulo até atingir um tempo final  $t_f$ . Assim, pode-se dizer que a deformação pode ser representada por:

$$\begin{cases} \varepsilon_i = \varepsilon_0 & \text{se } 0 < t \leq t_1 \\ \varepsilon_i = 0 & \text{se } t_1 < t < t_f \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\Delta\varepsilon_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1} \quad (4.4)$$

A partir deste teste, com o uso das Equações Diferenciais Ordinárias de cada modelo, que foram encontradas no capítulo 2, será encontrada a solução numérica para as tensões  $\sigma(t)$ .

- **Teste 3:** É o Teste de fluência com um trecho de tensão linear e depois tensão constante. A Figura 4.3 mostra este tipo de teste de fluência.

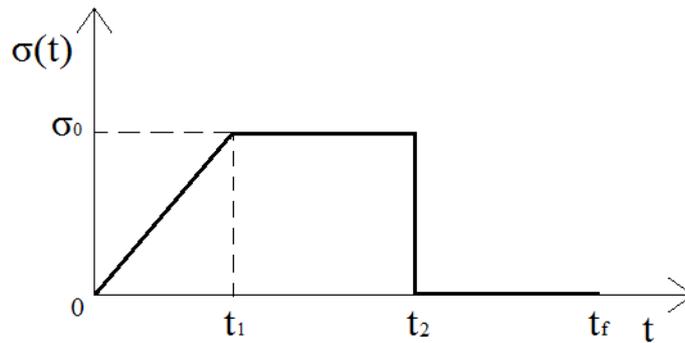


Figura 4.3 – Teste de fluência com um trecho de tensão linear e depois tensão constante.

Para o teste de fluência apresentado acima, tem-se uma tensão  $\sigma(t) = C \cdot t$  até o instante de tempo  $t_1$ ; a partir do tempo  $t_1$  a tensão passa a ter um valor  $\sigma(t) = \sigma_0$  até o tempo  $t_2$ ; e a partir do tempo  $t_2$  a tensão passa a ter um valor  $\sigma(t) = 0$  até o tempo final  $t_f$ . Após o tempo  $t_2$  a tensão passa a ter um valor nulo. Assim, pode-se dizer que a tensão pode ser representada por:

$$\begin{cases} \sigma_i = C \cdot t \text{ se } 0 < t < t_1 \\ \sigma_i = \sigma_0 \text{ se } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \sigma_i = 0 \text{ se } t_2 < t < t_f \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\Delta\sigma_i = \sigma_i - \sigma_{i-1} \quad (4.6)$$

Para este teste será encontrada a solução para as deformações  $\varepsilon(t)$ .

Agora se deve desenvolver a solução numérica de cada modelo separadamente.

## 4.2 MODELOS VISCOELÁSTICOS

### 4.2.1 Modelo de Maxwell

#### 4.2.1.1 Solução para os Testes 1 e 3

Para o modelo viscoelástico de Maxwell, que foi desenvolvido na seção 2.2.3.1 na página 18 deste trabalho, chegou-se à seguinte equação:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad (4.7)$$

Pode-se aproximar a taxa de deformação da equação acima de forma incremental, por Diferenças Finitas. Assim é possível reescrever esta equação da seguinte forma:

$$\frac{\Delta \varepsilon_i}{\Delta t_i} = \frac{1}{E} \frac{\Delta \sigma_i}{\Delta t_i} + \frac{1}{\eta} \sigma_i \quad (4.8)$$

$$\Delta \varepsilon_i = \left( \frac{1}{E} \frac{\Delta \sigma_i}{\Delta t_i} + \frac{1}{\eta} \sigma_i \right) \Delta t_i \quad (4.9)$$

E daí, obter o incremento de deformação seguinte, como:

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \Delta \varepsilon_i \quad (4.10)$$

#### 4.2.1.2 Solução para o Teste 2

Também se pode aproximar a taxa de tensão da equação (4.7) de forma incremental, por Diferenças Finitas. Assim é possível reescrever a mesma equação da seguinte forma:

$$\frac{\Delta \varepsilon_i}{\Delta t_i} = \frac{1}{E} \frac{\Delta \sigma_i}{\Delta t_i} + \frac{1}{\eta} \sigma_i \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{E} \frac{\Delta \sigma_i}{\Delta t_i} = \frac{\Delta \varepsilon_i}{\Delta t_i} - \frac{1}{\eta} \sigma_i$$

$$\Delta \sigma_i = \left( \frac{\Delta \varepsilon_i}{\Delta t_i} - \frac{1}{\eta} \sigma_i \right) E \Delta t_i \quad (4.12)$$

E daí, obter o incremento de tensão seguinte, como:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \Delta \sigma_i \quad (4.13)$$

#### 4.2.2 Modelo de Kelvin

##### 4.2.2.1 Solução para os Testes 1 e 3

Para o modelo viscoelástico Kelvin, que foi desenvolvido na seção 2.2.3.2 deste trabalho, chegou-se à seguinte equação:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) \quad (4.14)$$

Pode-se aproximar a taxa de deformação da equação acima de forma incremental, por Diferenças Finitas. Assim é possível reescrever esta equação da seguinte forma:

$$\sigma_i = E\varepsilon_i + \eta \frac{\Delta \varepsilon_i}{\Delta t_i} \quad (4.15)$$

$$\Delta\varepsilon_i = \left( \frac{\sigma_i - E\varepsilon_i}{\eta} \right) \Delta t_i \quad (4.16)$$

E daí, obter o incremento de deformação seguinte, como:

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \Delta\varepsilon_i \quad (4.17)$$

#### 4.2.2.2 Solução para o Teste 2

Para o teste 2 também pode-se aproximar a tensão da equação (4.14) por Diferenças Finitas. Assim é possível reescrever a mesma equação da seguinte forma:

$$\sigma_{i+1} = E\varepsilon_{i+1} + \eta \frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta t_i} \quad (4.18)$$

#### 4.2.3 Modelo de Boltzmann

##### 4.2.3.1 Solução para os Testes 1 e 3

Para o modelo viscoelástico de Boltzmann, que foi desenvolvido na seção 2.2.3.3 deste trabalho, chegou-se à seguinte equação:

$$\sigma \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} \right) + \frac{\eta}{E_0} \dot{\sigma} = E_k \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \quad (4.19)$$

Pode-se aproximar a taxa de deformação da equação acima de forma incremental, por Diferenças Finitas. Assim é possível reescrever esta equação da seguinte forma:

$$\sigma_i \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} \right) + \frac{\eta}{E_0} \frac{\Delta\sigma_i}{\Delta t_i} = E_k \varepsilon_i + \eta \frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta t_i} \quad (4.20)$$

$$\eta \frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta t_i} = \sigma_i \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} \right) + \frac{\eta}{E_0} \frac{\Delta\sigma_i}{\Delta t_i} - E_k \varepsilon_i$$

$$\Delta\varepsilon_i = \left[ \sigma_i \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} \right) + \frac{\eta}{E_0} \frac{\Delta\sigma_i}{\Delta t_i} - E_k \varepsilon_i \right] \frac{1}{\eta} \Delta t_i \quad (4.21)$$

E daí, obter o incremento de deformação seguinte, como:

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \Delta\varepsilon_i \quad (4.22)$$

#### 4.2.3.2 Solução para o Teste 2

Foi visto que para o modelo viscoelástico de Boltzmann, chegou-se à equação (4.19). Pode-se também aproximar a taxa de tensão desta equação de forma incremental, por Diferenças Finitas. Assim é possível reescrever a mesma da seguinte forma:

$$\sigma_i \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} \right) + \frac{\eta}{E_0} \frac{\Delta \sigma_i}{\Delta t_i} = E_k \varepsilon_i + \eta \frac{\Delta \varepsilon_i}{\Delta t_i} \quad (4.23)$$

$$\frac{\eta}{E_0} \frac{\Delta \sigma_i}{\Delta t_i} = E_k \varepsilon_i + \eta \frac{\Delta \varepsilon_i}{\Delta t_i} - \sigma_i \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} \right)$$

$$\Delta \sigma_i = \left[ E_k \varepsilon_i + \eta \frac{\Delta \varepsilon_i}{\Delta t_i} - \sigma_i \left( 1 + \frac{E_k}{E_0} \right) \right] \frac{E_0}{\eta} \cdot \Delta t_i \quad (4.24)$$

E daí, obter o incremento de tensão seguinte, como:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \Delta \sigma_i \quad (4.25)$$

### 4.3 MODELOS VISCOPLÁSTICOS

#### 4.3.1 Modelo com Comportamento Instantâneo

Foi visto que para o modelo viscoplástico com comportamento instantâneo, que foi desenvolvido na seção 2.4.1 deste trabalho, chegou-se às seguintes equações:

$$\begin{cases} \text{se } |\sigma| < \sigma_y \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{vp} = 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = \frac{1}{E} \dot{\varepsilon} \text{ (resposta elástica)} \\ \text{se } |\sigma| > \sigma_y \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{vp} \neq 0 \Rightarrow \dot{\sigma} + \frac{1}{\tau} \sigma = E \dot{\varepsilon} + \frac{1}{\tau} \sigma_y \text{sign}(\sigma) \text{ (resposta viscopástica)} \end{cases} \quad (4.26)$$

Deve-se, portanto, resolver este problema para cada um dos três testes apresentados, para encontrar a solução para as deformações  $\varepsilon(t)$  e para as tensões  $\sigma(t)$  quando for o caso.

#### 4.3.1.1 Solução para os Testes 1 e 3

Uma vez que o caso elástico é elementar (quando  $\sigma_0 < \sigma_y$ ), para os testes de fluência apresentados nas Figuras 4.1 e 4.3, será resolvida a situação em que ocorre resposta viscoplástica, ou seja, quando  $\sigma_0 \geq \sigma_y$ .

Pode-se aproximar a taxa de deformação da equação (4.26) de forma incremental, por Diferenças Finitas. Assim é possível reescrever esta equação considerando as seguintes possibilidades:

- Caso  $|\sigma_i| < \sigma_y$ , então a deformação será:

$$\frac{\Delta\sigma_i}{\Delta t_i} = E \frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta t_i} \quad (4.27)$$

$$\Delta\varepsilon_i = \frac{1}{E} \Delta\sigma_i \quad (4.28)$$

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \Delta\varepsilon_i \quad (4.29)$$

- Se  $|\sigma_i| \geq \sigma_y$ , pode-se escrever a deformação como:

$$\frac{\Delta\sigma_i}{\Delta t_i} + \frac{1}{\tau} \sigma_i = E \frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta t_i} + \frac{1}{\tau} \sigma_y \text{sign}(\sigma_i) \quad (4.30)$$

$$\varepsilon(t) \quad (4.31)$$

$$E \frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta t_i} = \frac{\Delta\sigma_i}{\Delta t_i} + \frac{1}{\tau} [\sigma_i - \sigma_y \text{sign}(\sigma_i)] \quad (4.32)$$

$$\Delta\varepsilon_i = \frac{1}{E} \left\{ \Delta\sigma_i + \frac{\Delta t_i}{\tau} [\sigma_i - \sigma_y \text{sign}(\sigma_i)] \right\} \quad (4.33)$$

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \Delta\varepsilon_i \quad (4.34)$$

#### 4.3.1.2 Solução para o Teste 2

Para o teste de relaxação apresentado na Figura 4.2, será resolvida a situação em que ocorre resposta viscoplástica (ou seja,  $\varepsilon_0 \geq \frac{\sigma_y}{E}$ ), uma vez que o caso elástico é elementar (quando  $\varepsilon_0 < \frac{\sigma_y}{E}$ ).

Para a tensão pode-se considerar as seguintes possibilidades:

- Se  $|\sigma_i| < \sigma_y$ , é possível escrever a tensão como:

$$\frac{\Delta\sigma_i}{\Delta t_i} = E \frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta t_i} \quad (4.35)$$

$$\Delta\sigma_i = E\Delta\varepsilon_i \quad (4.36)$$

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \Delta\sigma_i \quad (4.37)$$

- Caso  $|\sigma_i| \geq \sigma_y$ , então a tensão será:

$$\frac{\Delta\sigma_i}{\Delta t_i} + \frac{1}{\tau} \sigma_i = E \frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta t_i} + \frac{1}{\tau} \sigma_y \text{sign}(\sigma_i) \quad (4.38)$$

$$\frac{\Delta\sigma_i}{\Delta t_i} = E \frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta t_i} + \frac{1}{\tau} \sigma_y \text{sign}(\sigma_i) - \frac{1}{\tau} \sigma_i \quad (4.39)$$

$$\Delta\sigma_i = E\Delta\varepsilon_i + \frac{\Delta t_i}{\tau} [\sigma_y \text{sign}(\sigma_i) - \sigma_i] \quad (4.40)$$

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \Delta\sigma_i \quad (4.41)$$

#### 4.3.2 Modelo sem Comportamento Instantâneo

Foi visto que para o modelo viscoplástico sem comportamento instantâneo, que foi desenvolvido na seção 2.4.2 deste trabalho, chegou-se às seguintes equações:

$$\begin{cases} \sigma = \eta \dot{\varepsilon} + E(\varepsilon - \varepsilon_{\sigma_y}) & \text{se } |\sigma| < \sigma_y \text{ ou } |\varepsilon_E| < \varepsilon_{E\max} \text{ ou } \text{sign}(\sigma) \neq \text{sign}(\varepsilon_E) \\ \dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta} [\sigma - \sigma_y \text{sign}(\sigma)] & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.42)$$

Deve-se, portanto, resolver este problema para cada um dos três testes apresentados, para encontrar a solução para as deformações  $\varepsilon(t)$  e para as tensões  $\sigma(t)$  quando for o caso.

##### 4.3.2.1 Solução para os Testes 1 e 3

Uma vez que sendo  $\sigma_0 < \sigma_y$ , o comportamento do sistema será idêntico ao modelo viscoelástico de Kelvin e o mesmo já foi mostrado anteriormente, para os testes de fluência apresentados nas Figuras 4.1 e 4.3 será resolvida a situação em que ocorre resposta viscoplástica, ou seja,  $\sigma_0 \geq \sigma_y$ .

Pode-se reescrever a equação (4.42) considerando as seguintes possibilidades:

- Se  $|\sigma_i| < \sigma_y$  ou  $|\varepsilon_E| < \varepsilon_{E\max}$  ou  $\text{sign}(\sigma_i) \neq \text{sign}(\varepsilon_E)$ , é possível escrever a deformação total como:

$$\eta \dot{\varepsilon} = \sigma - E(\varepsilon - \varepsilon_{\sigma_y}) \quad (4.43)$$

$$\frac{\Delta \varepsilon_i}{\Delta t_i} = \frac{1}{\eta} [\sigma_i - E(\varepsilon_i - \varepsilon_{\sigma_y})] \quad (4.44)$$

$$\Delta \varepsilon_i = \frac{\Delta t_i}{\eta} [\sigma_i - E(\varepsilon_i - \varepsilon_{\sigma_y})] \quad (4.45)$$

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \Delta \varepsilon_i \quad (4.46)$$

A deformação elástica na mola é:

$$\varepsilon_E = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{\sigma_y} \quad (4.47)$$

E a deformação plástica no dispositivo de atrito  $\varepsilon_{\sigma_y}$  não se altera.

- Caso contrário, então a deformação total seguinte será:

$$\frac{\Delta \varepsilon_i}{\Delta t_i} = \frac{1}{\eta} [\sigma_i - \sigma_y \text{sign}(\sigma_i)] \quad (4.48)$$

$$\Delta \varepsilon_i = \frac{\Delta t_i}{\eta} [\sigma_i - \sigma_y \text{sign}(\sigma_i)] \quad (4.49)$$

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \Delta \varepsilon_i \quad (4.50)$$

A deformação elástica na mola não se altera. Já a deformação plástica no dispositivo de atrito será:

$$\varepsilon_{\sigma_y} = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{E\max} \text{sign}(\varepsilon_E) \quad (4.51)$$

#### 4.3.2.2 Solução para o Teste 2

Para o teste de relaxação apresentado na Figura 4.2, apenas a situação em que ocorre resposta viscoplástica (ou seja,  $\varepsilon_0 \geq \frac{\sigma_y}{E}$ ) será analisada, uma vez que o caso em que a resposta é viscoelástica (quando  $\varepsilon_0 < \frac{\sigma_y}{E}$ ) já foi apresentado.

Para a tensão pode-se considerar as seguintes possibilidades:

- Se  $|\varepsilon_E| < \varepsilon_{E\max}$  ou  $\text{sign}(\Delta\varepsilon_i) \neq \text{sign}(\varepsilon_E)$ , é possível escrever a tensão total seguinte como:

$$\sigma_{i+1} = \eta \frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta t_i} + E(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{\sigma_y}) \quad (4.52)$$

E a deformação elástica na mola é:

$$\varepsilon_E = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{\sigma_y} \quad (4.53)$$

- Caso contrário, então a tensão total será:

$$\eta \frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta t_i} = \sigma_{i+1} - \sigma_y \text{sign}(\sigma_i) \quad (4.54)$$

$$\sigma_{i+1} = \eta \frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta t_i} + \sigma_y \text{sign}(\sigma_i) \quad (4.55)$$

Já a deformação plástica no dispositivo de atrito será:

$$\varepsilon_{\sigma_y} = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{E\max} \text{sign}(\varepsilon_E) \quad (4.56)$$

## CAPÍTULO 5

### ANÁLISE DAS RESPOSTAS

Neste capítulo, serão apresentadas as análises das respostas analíticas e numéricas com a finalidade de ilustrar as deformações, tensões, funções de fluência e funções de relaxação obtidas pelos modelos reológicos em estudo. Estas análises servirão de base, dentre outros, para testar e validar as soluções desenvolvidas para os modelos. As soluções analíticas serão comparadas com as soluções numéricas, que serão implementadas com o Software MATLAB, utilizando-se o Método das Diferenças Finitas.

Para cada modelo serão feitas três análises correspondentes a cada um dos três testes mostrados no início dos capítulos 3 e 4 desta dissertação. Assim, o capítulo será iniciado ilustrando as análises para o Modelo de Maxwell e depois serão mostrados análises para cada um dos demais modelos reológicos apresentados. As unidades correspondentes que serão apresentadas no decorrer desta seção serão as seguintes: E em MPa (Mega Pascal);  $\eta$  em MPa.t;  $\sigma$  em MPa;  $\epsilon$  é adimensional e o tempo t em s (segundos).

#### 5.1 ANÁLISES PARA O MODELO DE MAXWELL

Análise 1 – Considere o modelo de Maxwell e o teste de fluência apresentados na Figura 5.1:

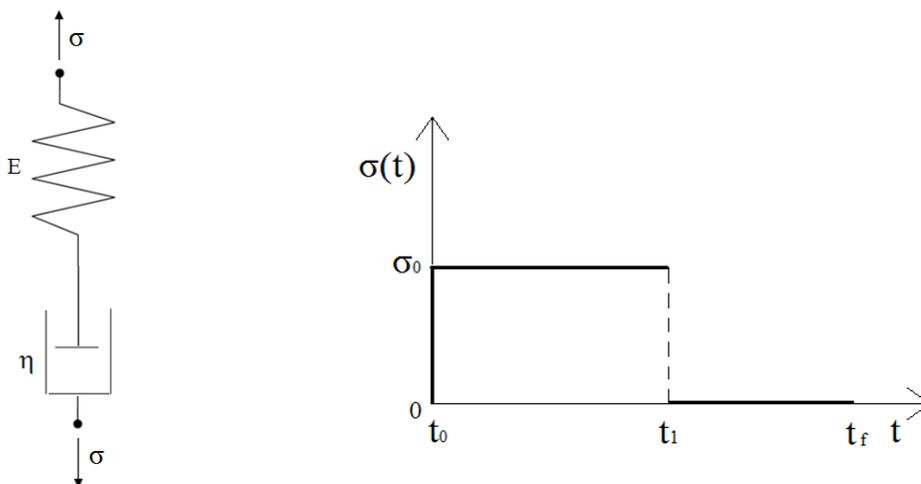


Figura 5.1 – Teste de fluência para o modelo de Maxwell.

A Tabela 5.1 mostra os respectivos valores atribuídos para este teste:

Tabela 5.1 – valores atribuídos ao teste de fluência no modelo de Maxwell.

E	$\eta$	$\sigma_0$	$t_0$	$t_1$	$t_f$
100	1000	50	0	20	60

A partir dos dados da Tabela 5.1, obter-se-á a solução analítica e numérica, sendo que para a solução numérica, será adotado um passo de tempo  $\Delta t=0,2$  e comparar-se-á com os resultados obtidos analiticamente.

Com as soluções analíticas e numéricas apresentadas nos capítulos 3 e 4, respectivamente, e com o auxílio do software MATLAB, pode-se chegar aos resultados das deformações  $\varepsilon(t)$  para diferentes valores de  $\sigma_0$ , como são mostradas na Figura 5.2 abaixo, para o tempo  $t$  variando de  $t_0$  a  $t_1$ :

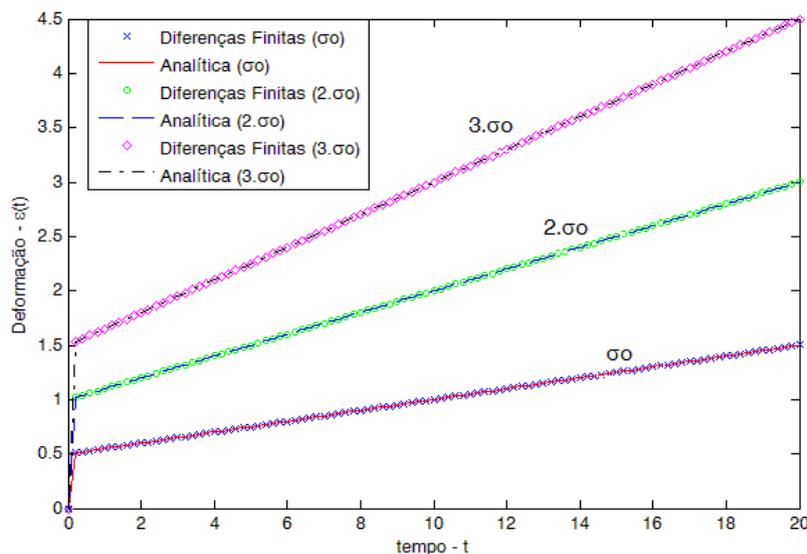


Figura 5.2 – Deformações para 3 valores de  $\sigma_0$  no tempo  $t_0$  a  $t_1$  ( $\Delta t=0,2$ ).

A Figura 5.2 apresenta a solução para três valores de  $\sigma_0$ . Sendo  $\sigma_0 = 50$  ( $\sigma_0$ ),  $\sigma_0 = 100$  ( $2. \sigma_0$ ) e  $\sigma_0 = 150$  ( $3. \sigma_0$ ). A solução numérica por diferenças finitas permite calcular a história de deformações, gerando resultados idênticos em comparação com a solução analítica. No gráfico 3D da Figura 5.3 é mostrada a solução analítica para todos os valores de  $\sigma_0$  variando de 0 a 150.

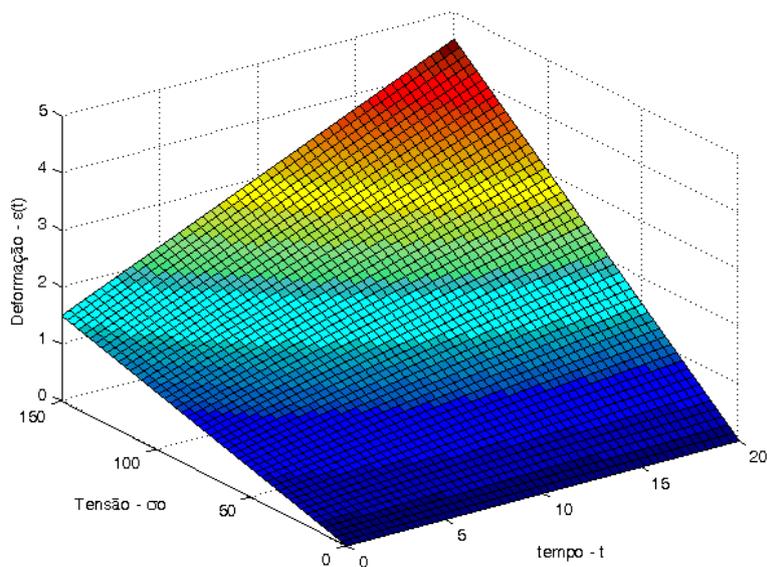


Figura 5.3 – Deformações analíticas para diferentes valores de  $\sigma_0$  no tempo.

É possível também chegar aos valores da Função de Fluência Específica  $D(t)$ , como podem ser observados na Figura 5.4:

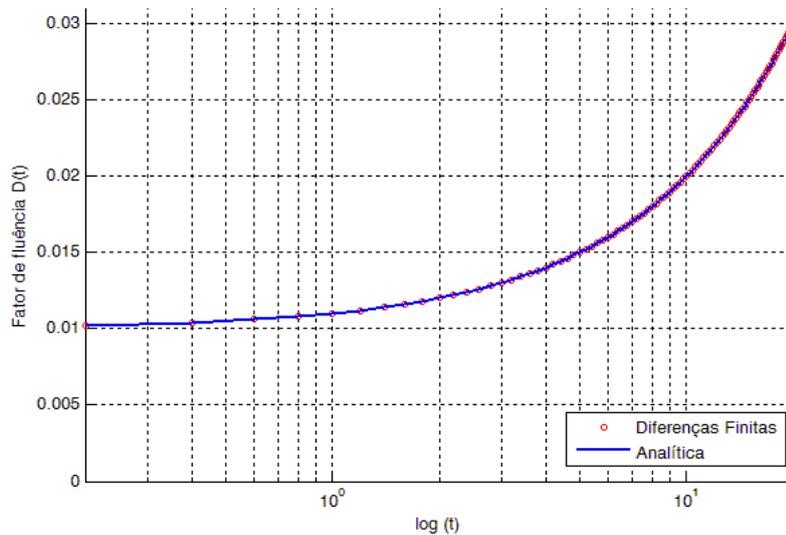


Figura 5.4 – Função de fluência específica em escala logarítmica do tempo ( $\Delta t=0,2$ ).

Será mostrado agora o comportamento completo deste teste, até o tempo final  $t_f$  pelo método das diferenças finitas na figura seguinte.

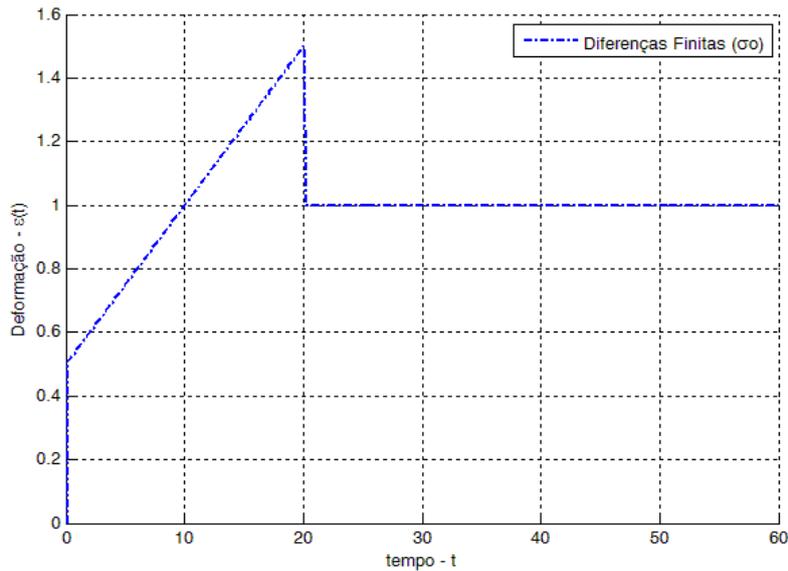


Figura 5.5 – Solução numérica completa de  $t_0$  a  $t_f$ .

A partir dos resultados apresentados, observa-se que o teste de fluência para o modelo de Maxwell apresenta uma deformação instantânea inicial. Em seguida a deformação cresce com comportamento linear no intervalo de tempo  $t_0$  a  $t_1$ , onde em seguida apresenta uma descontinuidade no momento em que houve o descarregamento no teste. A partir deste momento seu comportamento é constante no intervalo de tempo  $t_1$  a  $t_f$ . Observa-se, portanto que a deformação viscosa permanecerá como uma deformação residual mesmo após o descarregamento do sistema.

Análise 2 – Considere o modelo de Maxwell apresentado na análise anterior. Considere ainda o teste de relaxação apresentado na Figura 5.6:

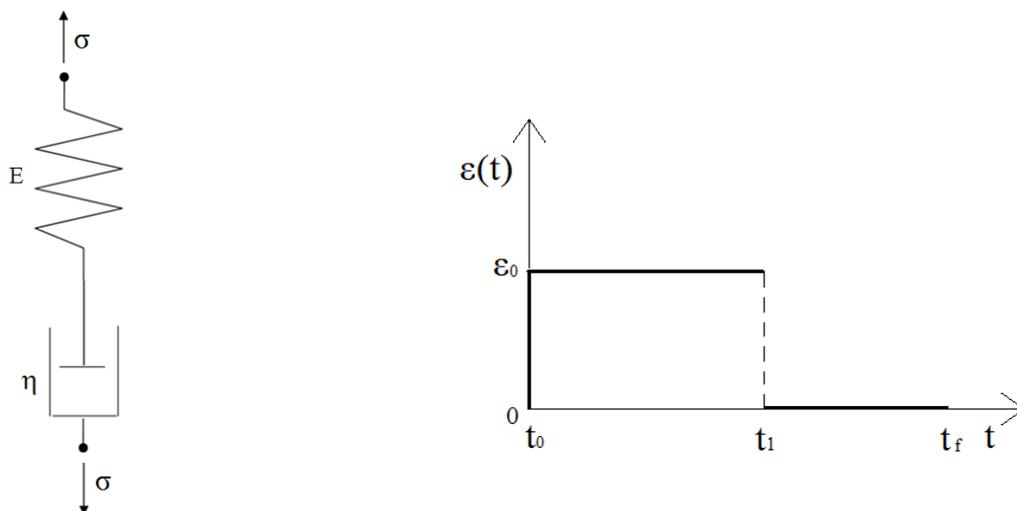


Figura 5.6 – Teste de relaxação para o modelo de Maxwell.

A Tabela 5.2 abaixo mostra os dados para esta análise:

Tabela 5.2 – Dados para a análise 2

E	$\eta$	$\varepsilon_0$	$t_0$	$t_1$	$t_f$
100	1000	50	0	20	60

Com estes valores pode-se obter a solução analítica e numérica, sendo que para a solução numérica, serão adotados três diferentes passos de tempo  $\Delta t$  para comparar a solução numérica com os resultados obtidos analiticamente. Os resultados para as tensões são apresentados na Figura 5.7:

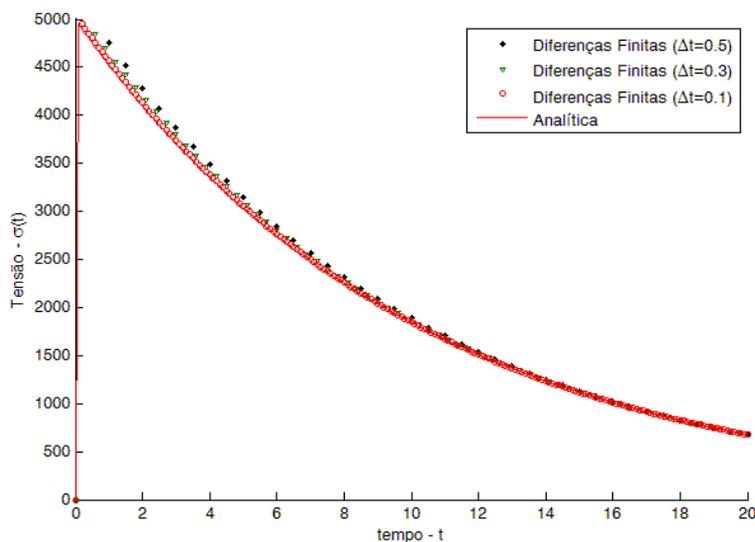


Figura 5.7 – Tensões analíticas e numéricas para diferentes valores de  $\Delta t$

Na Tabela 5.3 apresentam-se os valores iniciais ( $t = 0,5$ ) e finais da tensão da Figura 5.7

Tabela 5.3 – Tensões iniciais e finais

Tensão inicial ( $t = 0,5$ )			Analítica	Tensão final			Analítica
Numérica				Numérica			
$\Delta t = 0,5$	$\Delta t = 0,3$	$\Delta t = 0,1$	$\Delta t = 0,5$	$\Delta t = 0,3$	$\Delta t = 0,1$		
5000	4900	4803	4756,10	676,38	676,52	676,67	676,67

Observa-se que os resultados numéricos melhoram com a diminuição do passo de tempo e se aproximam da solução analítica. Nota-se também que para tempos finais a resposta numérica se aproxima mais da solução analítica.

Será mostrada agora, outra comparação de resultados das tensões  $\sigma(t)$ , mas desta vez para diferentes valores de  $\epsilon_0$ , com um passo de tempo  $\Delta t = 0,2$ , como ilustrado na Figura 5.8:

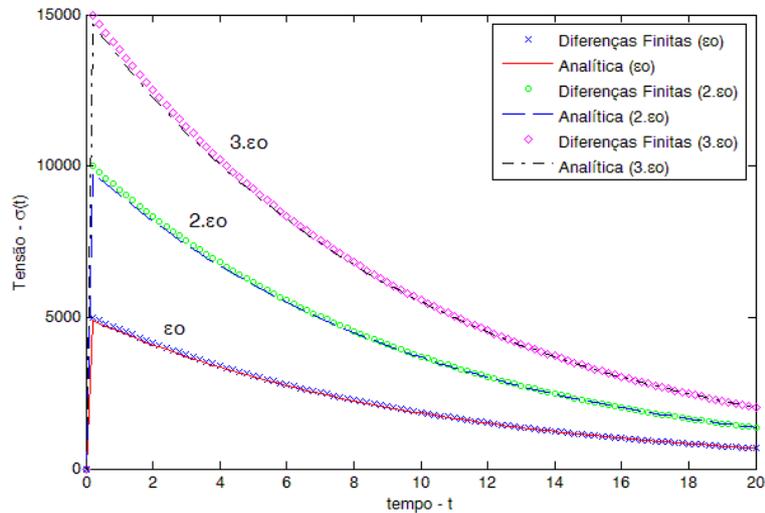


Figura 5.8 – Tensões para três valores de  $\epsilon_0$ , com tempo  $t$  de  $t_0$  a  $t_1$  e  $\Delta t=0,2$

Observa-se que os resultados obtidos por diferenças finitas são relativamente próximos da resposta analítica e que os valores de  $\sigma(t)$  são diretamente proporcionais aos valores de  $\epsilon_0$ . Na Figura 5.9 é mostrada a resposta analítica para todos os valores de  $\epsilon_0$  variando de 0 a 150.

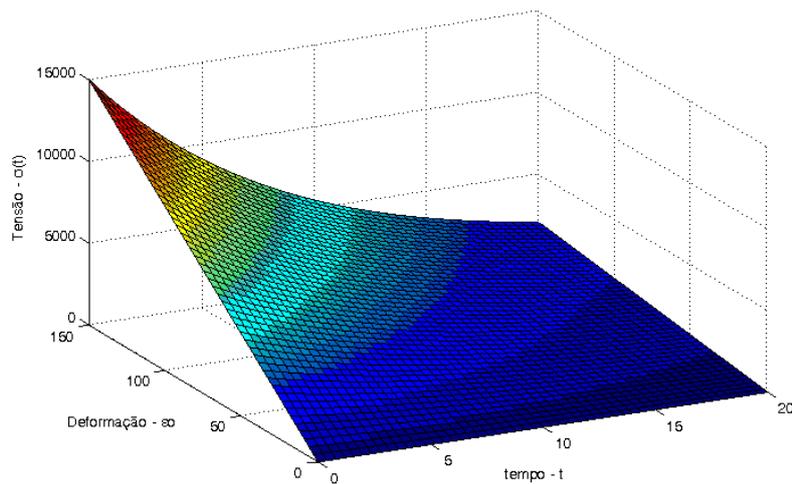


Figura 5.9 – Tensões analíticas para diferentes valores de  $\epsilon_0$  no tempo.

Os valores da função de relaxação específica  $E(t)$  são mostrados na Figura 5.10, em escala logarítmica, para um passo de tempo  $\Delta t=0,2$ .

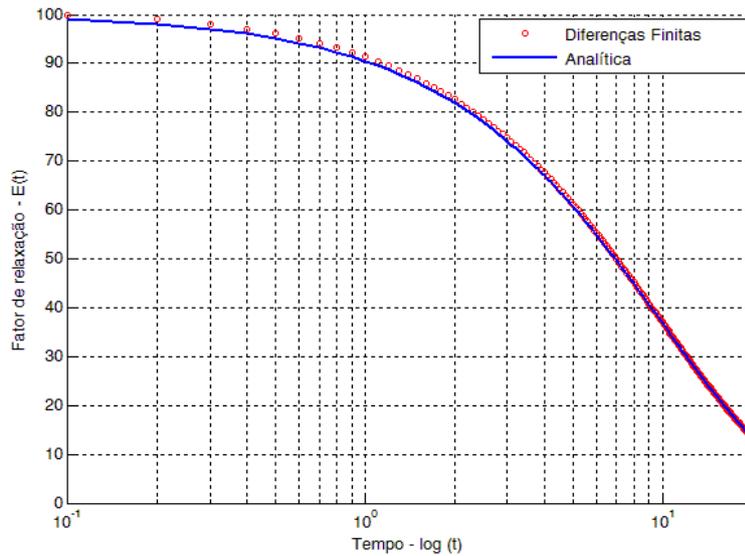


Figura 5.10 – Função de relaxação específica

Uma vez mostrada a eficácia do método das diferenças finitas em comparação com a solução exata, será mostrado agora o comportamento completo deste teste, somente através do seu resultado numérico. Este resultado está na Figura 5.11 seguinte:

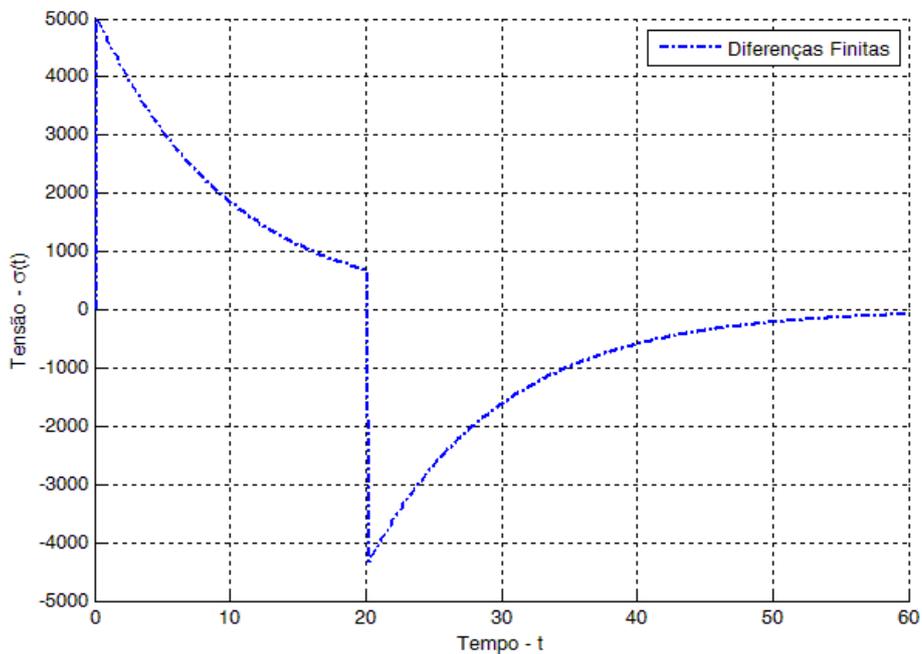


Figura 5.11 – solução numérica completa do teste.

A partir da solução numérica completa, nota-se que este teste gera uma tensão instantânea inicial e em seguida a tensão cai exponencialmente até o tempo  $t_1$ . Em seguida sofre uma descontinuidade e atinge seu valor negativo máximo. Esta

descontinuidade é provocada pela deformação instantânea aplicada, que é totalmente absorvida pela mola. Após este momento a tensão total no modelo cresce e no decorrer do tempo tende a voltar para a sua condição inicial.

Análise 3 – Considere o modelo de Maxwell apresentado na seção 2.2.3.1, com as suas propriedades mostradas na Tabela 5.4. Considere ainda o teste de fluência apresentado na Figura 5.12 abaixo, tendo seus dados também apresentados na mesma tabela:

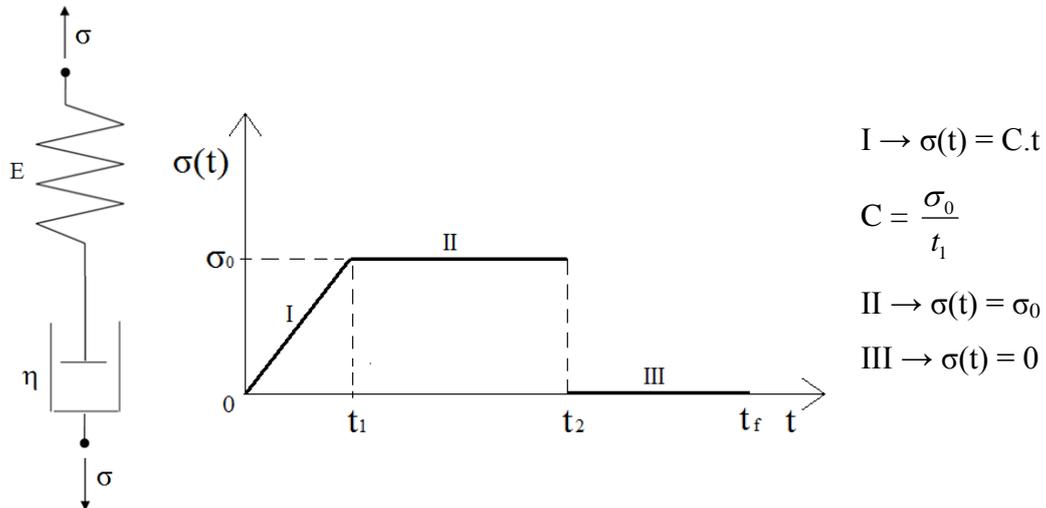


Figura 5.12 – Teste 3 para o modelo de Maxwell.

Tabela 5.4 – Valores adotados para o modelo de Maxwell e análise 3

E	η	σ <sub>0</sub>	t <sub>1</sub>	t <sub>2</sub>	t <sub>f</sub>
100	1000	50	20	40	80

Adotando-se diferentes passos de tempo Δt é possível comparar a resposta numérica com os resultados obtidos analiticamente. Estes resultados para as deformações totais são apresentados na Figura 5.13:

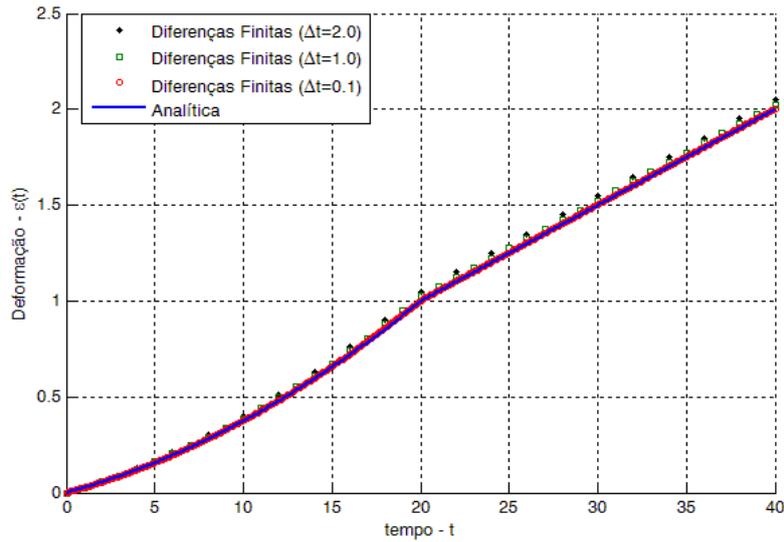


Figura 5.13 – Deformações analíticas e numéricas para diferentes valores de  $\Delta t$

A Tabela 5.5 apresenta os valores finais das deformações do gráfico da Figura 5.13.

Tabela 5.5 – deformações finais

Resposta Numérica			Resposta Analítica
$\Delta t = 2,0$	$\Delta t = 1,0$	$\Delta t = 0,1$	
2,05	2,025	2,0025	2,0000

A solução numérica por diferenças finitas permite calcular a história de deformações, gerando bons resultados em comparação com a solução analítica. Observa-se que para tempos iniciais a resposta numérica se aproxima mais da solução analítica e que os resultados numéricos melhoram com a diminuição do passo de tempo.

Será mostrada agora a resposta numérica completa do teste, com um passo de tempo  $\Delta t = 0,2$ , para diferentes valores de C, como ilustrado na Figura 5.14:

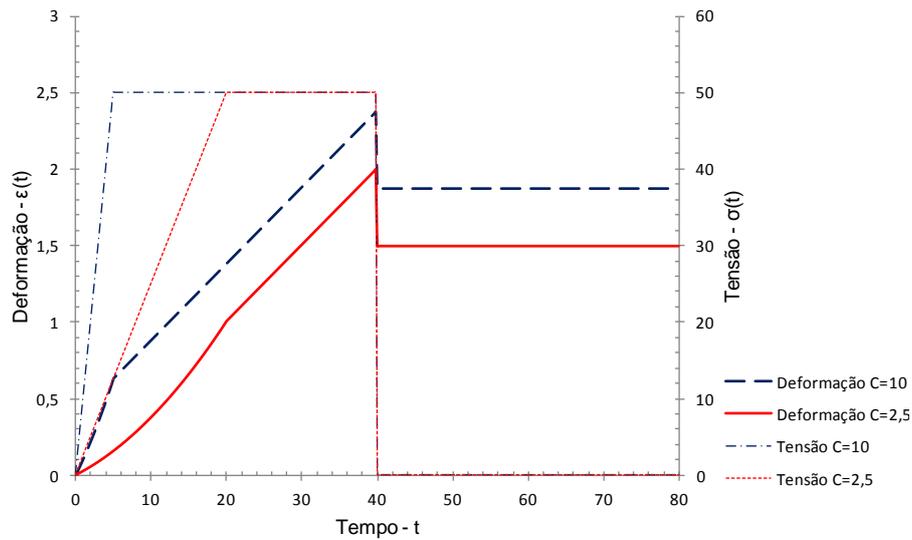


Figura 5.14 – Resposta numérica para diferentes valores de C

Observa-se que ao se inserir o carregamento mais rapidamente, com a mudança da constante C de 2,5 para 10, as deformações se tornam maiores no decorrer de todo o teste.

De modo geral, a deformação cresce em forma parabólica até atingir o tempo  $t_1$  e logo em seguida este comportamento passa a ser linear no intervalo de tempo  $t_1$  a  $t_2$ . Logo em seguida apresenta uma descontinuidade no momento em que houve o descarregamento no teste. A partir deste momento seu comportamento é constante no intervalo de tempo  $t_2$  a  $t_f$  e apresenta uma deformação permanente mesmo após o descarregamento do teste.

## 5.2 ANÁLISES PARA O MODELO DE KELVIN

Análise 1 – Considere o modelo de Kelvin e o teste de fluência apresentado na Figura 5.15:

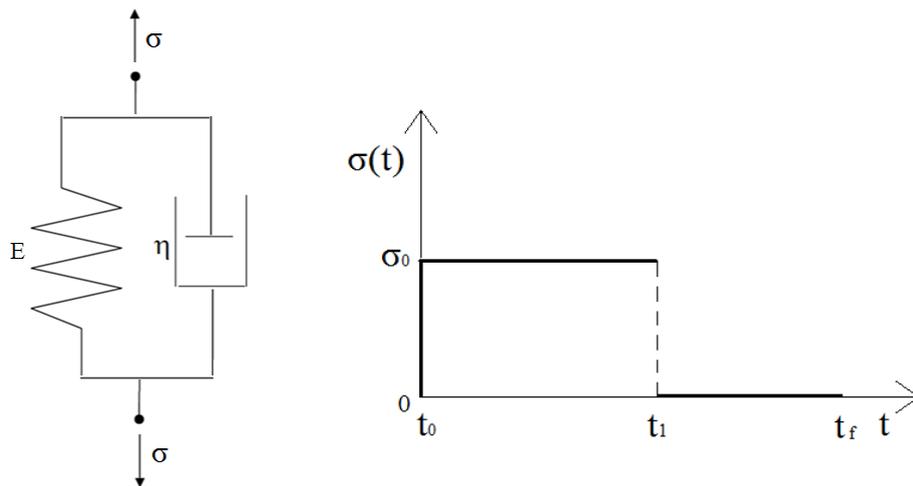


Figura 5.15 – Teste de fluência para o modelo de Kelvin.

Tendo como dados os valores apresentados na Tabela 5.6.

Tabela 5.6 – Valores adotados para a análise

E	η	σ <sub>0</sub>	t <sub>0</sub>	t <sub>1</sub>	t <sub>f</sub>
100	1000	50	0	20	60

Com estes dados em mãos, pode-se obter as respostas analítica e numérica, sendo que para a solução numérica é possível adotar diferentes passos de tempo Δt. Os resultados para as deformações totais no tempo de 0 a 20 são apresentados na Figura 5.16:

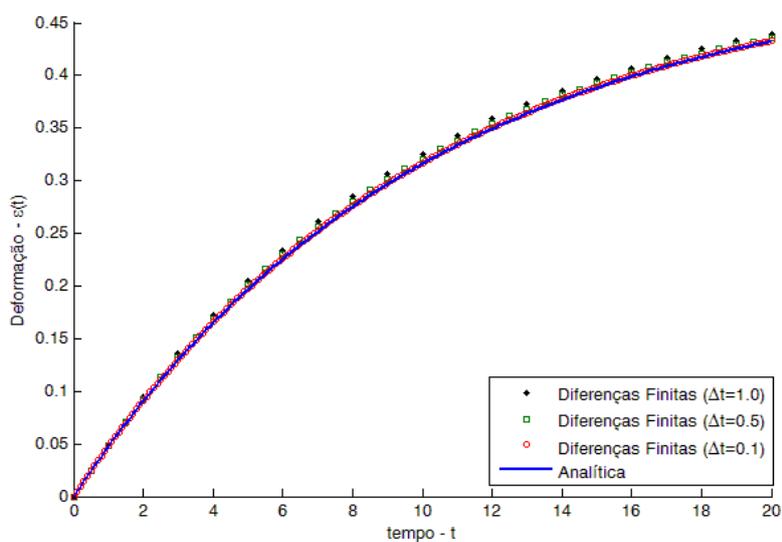


Figura 5.16 – Deformações analíticas e numéricas para diferentes valores de Δt

Os valores finais dos resultados são mostrados na seguinte tabela:

Tabela 5.7 – deformações finais

Resposta Numérica			Resposta Analítica
$\Delta t = 1,0$	$\Delta t = 0,5$	$\Delta t = 0,1$	
0,4392	0,4357	0,4330	0,4323

Com os resultados apresentados é possível observar que a resposta numérica se aproxima da analítica e pode gerar ótimos resultados com a diminuição do passo de tempo.

Para um passo de tempo  $\Delta t=0,2$  serão comparados os resultados das deformações  $\epsilon(t)$  para diferentes valores de  $\sigma_0$ . Considere os resultados numéricos e analíticos que são mostrados na Figura 5.17:

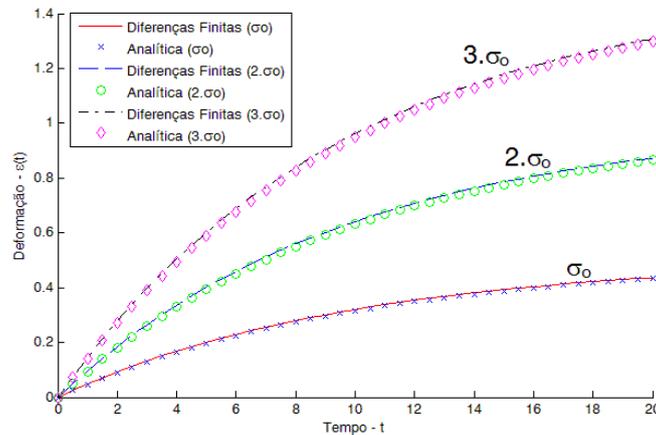


Figura 5.17 – Deformações para três valores de  $\sigma_0$ , com tempo  $t$  de  $t_0$  a  $t_1$

Observa-se na Figura 5.17, que o algoritmo numérico, permite calcular a história de deformações razoavelmente bem, em comparação com o resultado analítico. Os valores de  $\epsilon(t)$  são diretamente proporcionais aos valores de  $\sigma_0$ . Na Figura 5.18 abaixo é mostrada a resposta analítica para todos os valores de  $\sigma_0$  variando de 0 a 150.

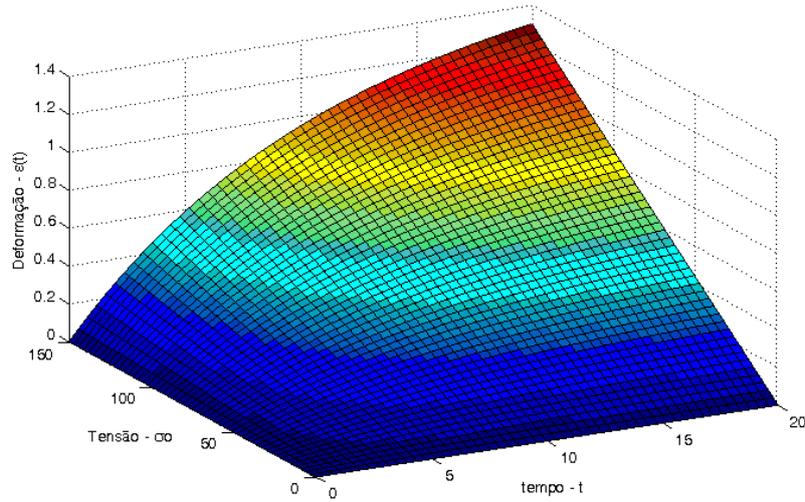


Figura 5.18 – Deformações analíticas para diferentes valores de  $\sigma_0$  no tempo.

Pode-se também chegar aos valores da Função de Fluência Específica  $D(t)$ , como pode ser observado na Figura 5.19, em escala logarítmica, para um passo de tempo  $\Delta t=0,2$ .

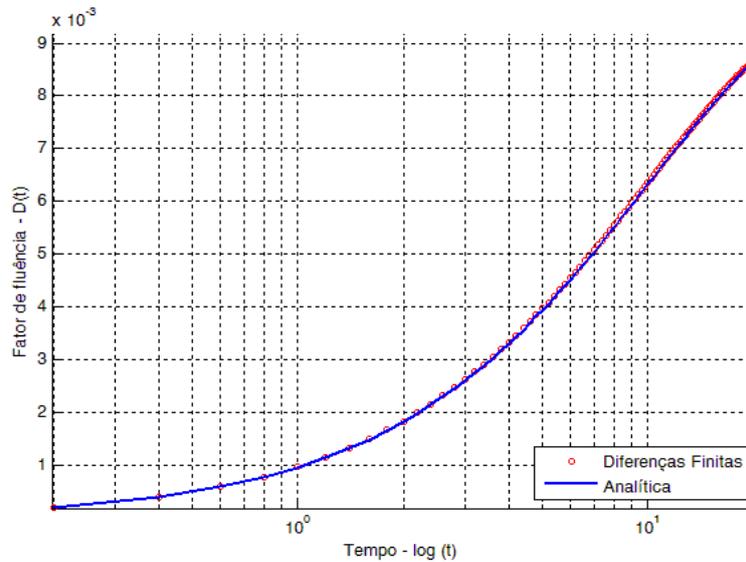


Figura 5.19 – Função de fluência específica

Será mostrado agora o comportamento completo deste teste até o tempo  $t_f$ , através da solução por diferenças finitas. Este resultado está na figura seguinte:

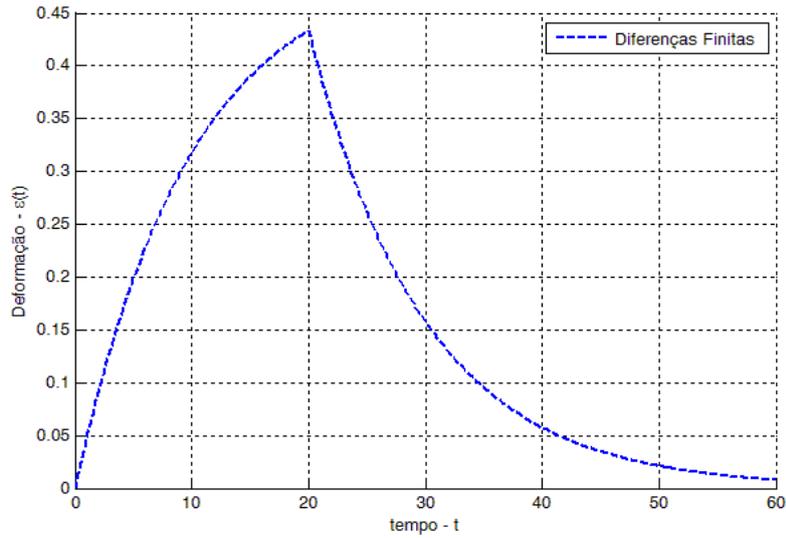


Figura 5.20 – Solução numérica completa de  $t_0$  a  $t_f$ .

A deformação cresce exponencialmente até o tempo  $t_1$ , onde atinge o seu valor máximo. Em seguida este valor decresce no decorrer do tempo até voltar para a sua condição inicial cuja deformação é zero.

Análise 2 – Considere o modelo de Kelvin apresentado na análise anterior. Considere ainda o teste de relaxação apresentado na Figura 5.21 abaixo. Para a solução numérica desta análise, utilizou-se um passo de tempo  $\Delta t=0,2$ .

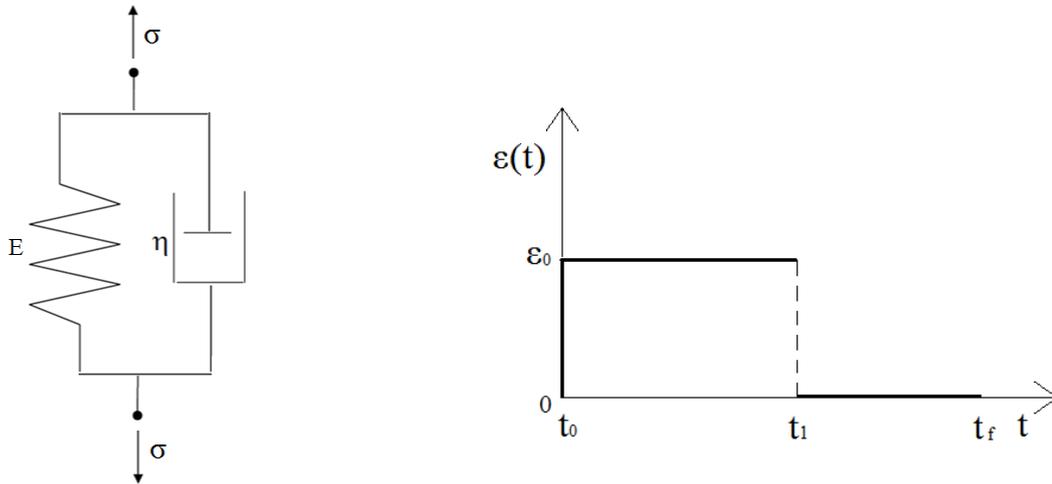


Figura 5.21 – Teste de relaxação para o modelo de Kelvin.

A Tabela 5.8 abaixo mostra os respectivos valores atribuídos para este teste:

Tabela 5.8 – valores atribuídos ao teste de relaxação no modelo de Kelvin.

E	$\eta$	$\varepsilon_0$	$t_0$	$t_1$	$t_f$
100	1000	50	0	40	80

Na Figura 5.22 abaixo é mostrada a solução numérica para este teste.

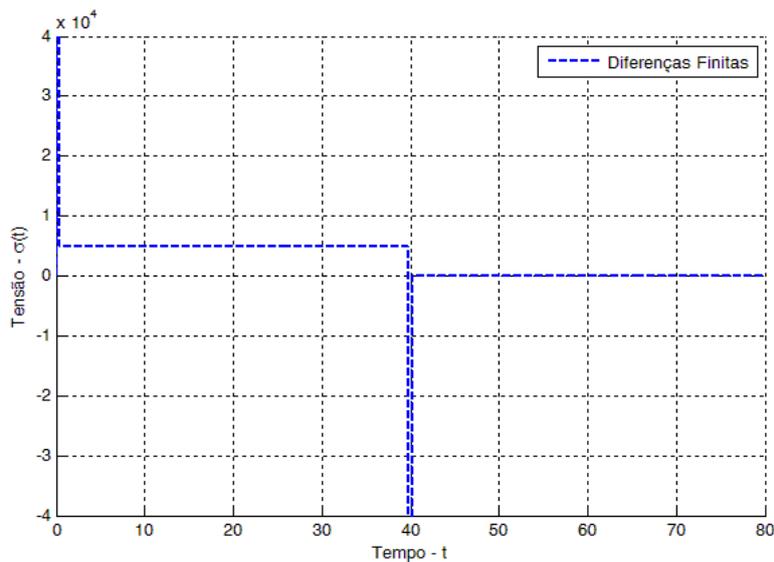


Figura 5.22 – Solução numérica completa

A solução numérica acima mostra que a tensão sofre um impulso no tempo inicial de valor muito grande. Em seguida seu comportamento é constante com valor de 5000 no intervalo de tempo  $t_0$  a  $t_1$ , onde em seguida apresenta um impulso negativo e permanece com valor nulo até o tempo  $t_f$ . Nota-se que os impulsos positivo e negativo ocorrem, respectivamente, ao se aplicar a deformação  $\varepsilon_0$  e quando a mesma é retirada.

Análise 3 – Considere o modelo de Kelvin e o teste de fluência mostrado na Figura 2.23 abaixo, com as seguintes propriedades:

Tabela 5.9 – Valores adotados para o modelo de Kelvin e teste 3

E	$\eta$	$\sigma_0$	$t_1$	$t_2$	$t_f$
100	1000	50	20	40	80

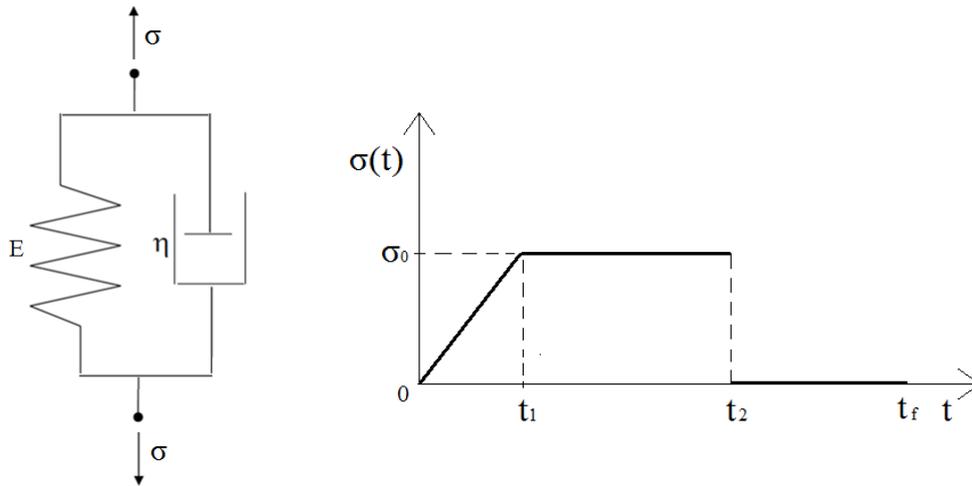


Figura 5.23 – Teste 3 para o modelo de Kelvin.

Para a solução numérica desta análise, um passo de tempo  $\Delta t=0,2$  é considerado e os resultados são comparados com os obtidos analiticamente. Estes resultados para as deformações totais são apresentados na Figura 5.24 para diferentes valores de  $\eta$ :

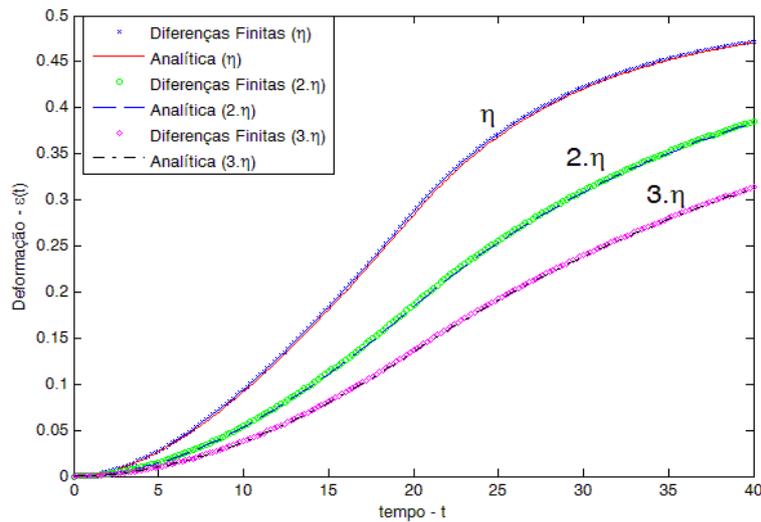


Figura 5.24 – Deformações para três valores de  $\eta$ , com tempo  $t$  de  $t_0$  a  $t_1$ .

Esta figura permite notar que valores maiores de  $\eta$  geram deformações menores. As soluções numéricas permitem calcular a história de deformações com valores bem próximos, em comparação com o resultado analítico.

Veja agora a resposta completa deste teste até o tempo final  $t_f$  através da solução numérica para dois diferentes valores de  $C$  na Figura 5.25.

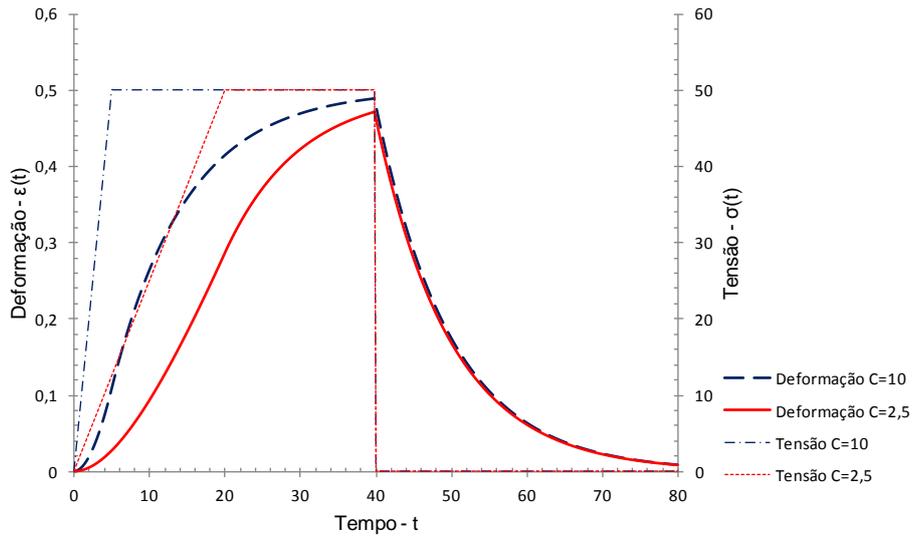


Figura 5.25 – resposta numérica completa de  $t_0$  a  $t_f$ .

A deformação cresce até atingir o seu valor máximo, sendo que com  $C = 10$  as deformações se tornam maiores do que com  $C = 2,5$  até o tempo  $t_2 = 40$ . A partir deste momento ambos os resultados são bem próximos e seus valores decrescem no decorrer do tempo e tendem voltar para a sua condição inicial cuja deformação é zero.

### 5.3 ANÁLISES PARA O MODELO DE BOLTZMANN

Análise 1 – Considere o modelo de Boltzmann que foi apresentado na seção 2.2.3.3, com as seguintes propriedades:  $E_0 = 100$ ,  $E_k = 150$  e  $\eta = 1000$ . Considere ainda o teste de fluência apresentado na Figura 5.26 abaixo, tendo como dados:  $\sigma_0 = 50$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 20$  e  $t_f = 60$ . Para a solução numérica desta análise, um passo de tempo  $\Delta t = 0,2$  é considerado e os resultados são comparados com os obtidos analiticamente.

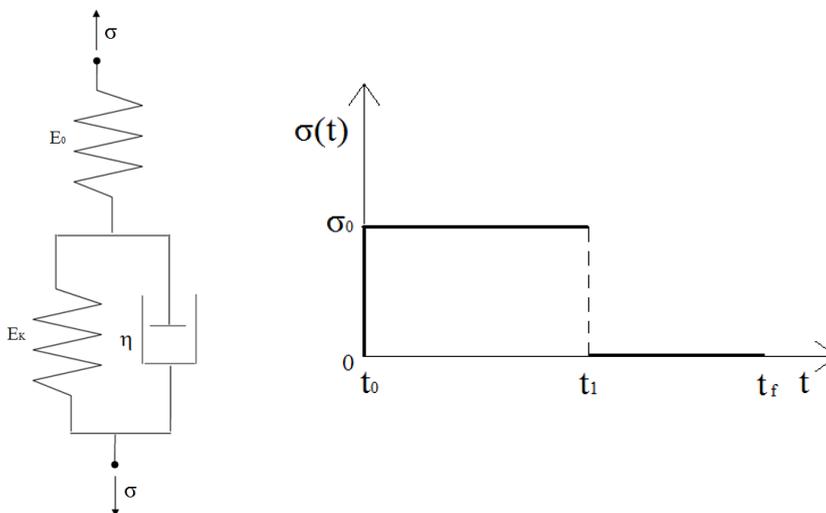


Figura 5.26 – Teste de fluência para o modelo de Boltzmann.

Com as soluções analíticas e numéricas apresentadas nos capítulos 3 e 4, respectivamente, e com o auxílio do software Matlab para desenvolvimento dos algoritmos, pode-se chegar aos resultados para as deformações  $\varepsilon(t)$ , que são mostrados na Figura 5.27:

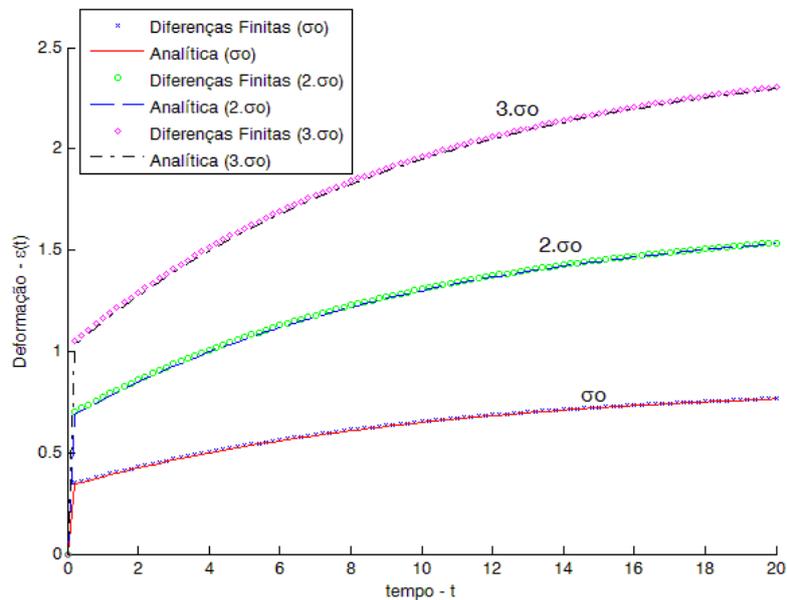


Figura 5.27 – Deformações para 3 valores de  $\sigma_0$  até o tempo  $t_1$

A Figura 5.27 mostra que o aumento do valor de  $\sigma_0$  ocasiona o aumento proporcional das deformações totais do modelo e que a solução numérica gera resultados próximos da solução analítica. Na Figura 5.28 apresenta-se um gráfico tridimensional das soluções analíticas para todos os valores de  $\sigma_0$  que variam de 0 a 150

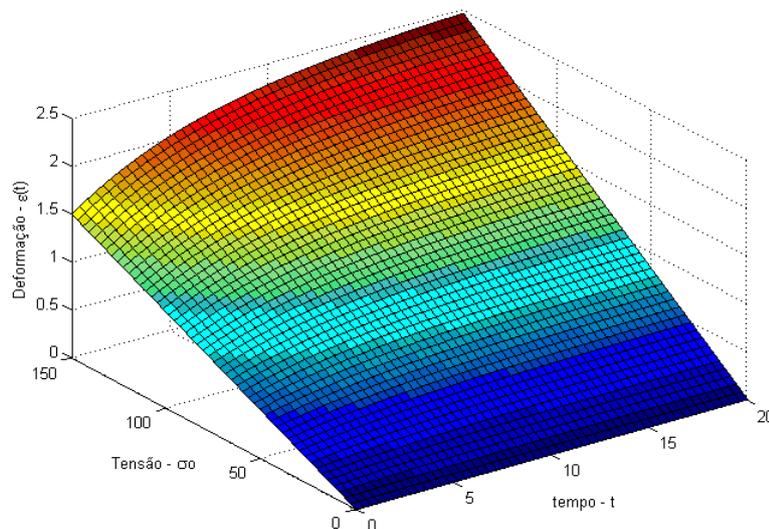


Figura 5.28 – Deformações analíticas para diferentes valores de  $\sigma_0$  no tempo.

Veja o comportamento completo deste teste, até o tempo final  $t_f$  pelo método das diferenças finitas na próxima figura:

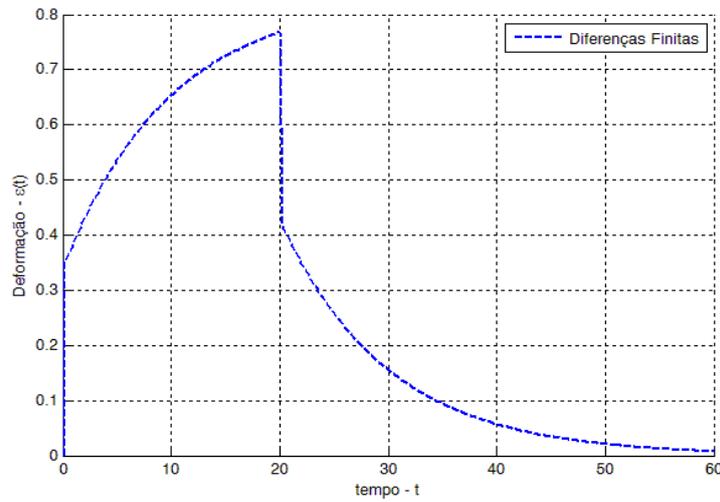


Figura 5.29 – Solução numérica completa para o exemplo

A partir da solução numérica completa, nota-se que este teste apresenta uma deformação instantânea inicial e em seguida a mesma cresce exponencialmente até o tempo  $t_1=20$ . Em seguida sofre uma descontinuidade no momento em que houve o descarregamento devido à deformação instantânea da mola  $E_0$ . Depois a deformação total no modelo decai e no decorrer do tempo tende a voltar para a sua condição inicial, cujo valor é nulo.

Análise 2 – Considere o modelo de Boltzmann apresentado na análise anterior. Considere ainda o teste de relaxação apresentado na Figura 5.30:

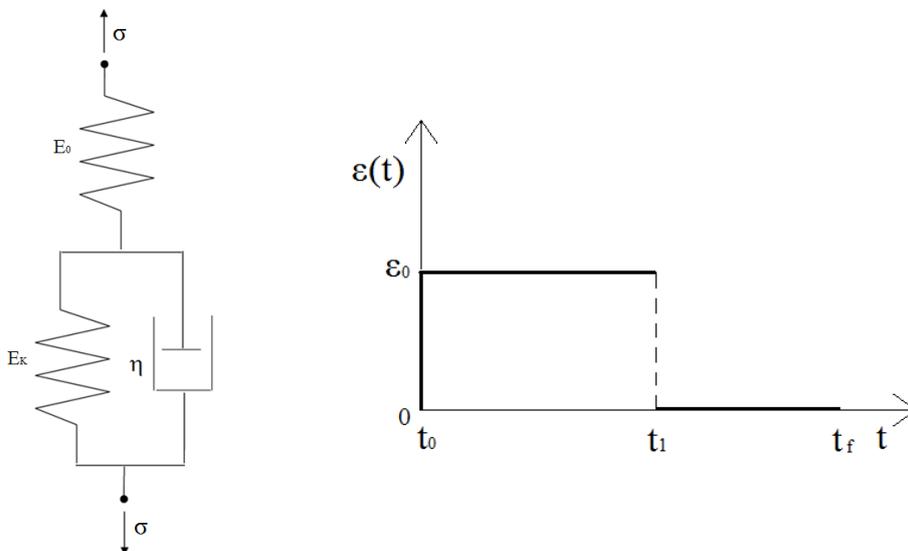


Figura 5.30 – Teste de relaxação para o modelo de Boltzmann.

A Tabela 5.10 mostra os dados para esta análise:

Tabela 5.10 – Dados para a análise 2 do modelo de Boltzmann

$E_k$	$E_0$	$\eta$	$\varepsilon_0$	$t_1$	$t_f$
100	150	1000	50	20	60

Adotando-se um passo de tempo  $\Delta t=0,2$  para a obtenção da solução numérica, as tensões são apresentadas nas Figuras 5.31 e 5.32.

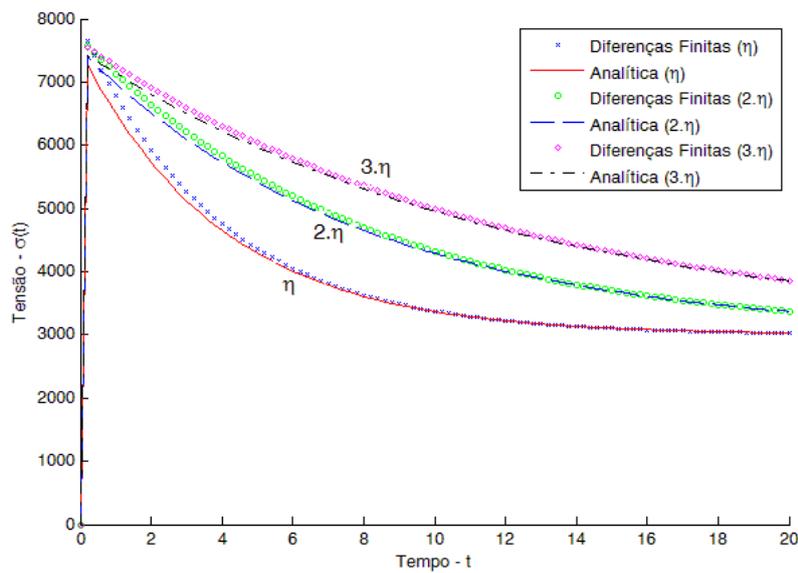


Figura 5.31 – Tensões para três valores de  $\eta$ , até o tempo  $t_1$

Na Figura 5.31 é mostrada a solução para três valores de  $\eta$ . Sendo  $\eta = 1000$  ( $\eta$ ),  $\eta = 2000$  ( $2.\eta$ ) e  $\eta = 3000$  ( $3.\eta$ ) os resultados numéricos apresentaram-se ruins no início e melhoraram com o passar do tempo.

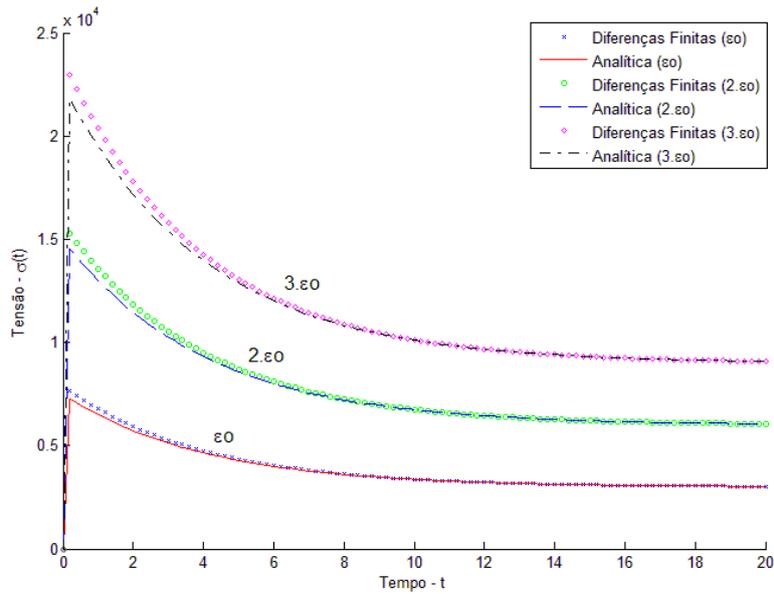


Figura 5.32 – Tensões para três valores de  $\epsilon_0$ , até o tempo  $t_1$

Já a Figura 5.32 apresenta a solução para três valores de  $\epsilon_0$ . Sendo  $\epsilon_0 = 50$  ( $\epsilon_0$ ),  $\epsilon_0 = 100$  ( $2. \epsilon_0$ ) e  $\epsilon_0 = 150$  ( $3. \epsilon_0$ ), sendo que os resultados numéricos apresentaram-se melhores nos tempos finais em comparação com a resposta analítica. Na Figura 5.33 abaixo é mostrada a resposta analítica para todos os valores de  $\epsilon_0$  variando de 0 a 150.

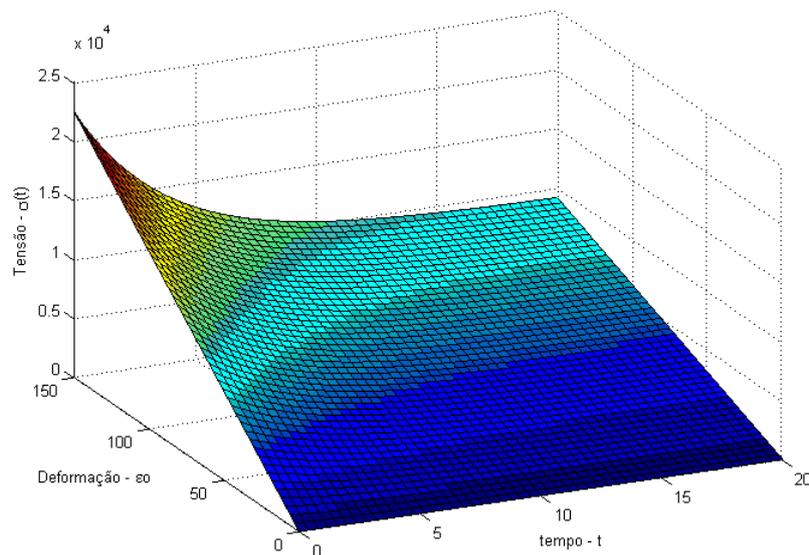


Figura 5.33 – Tensões analíticas para diferentes valores de  $\epsilon_0$  no tempo.

Os valores da função de relaxação específica  $E(t)$  são mostrados na Figura 5.34 para diferentes passos de tempo.

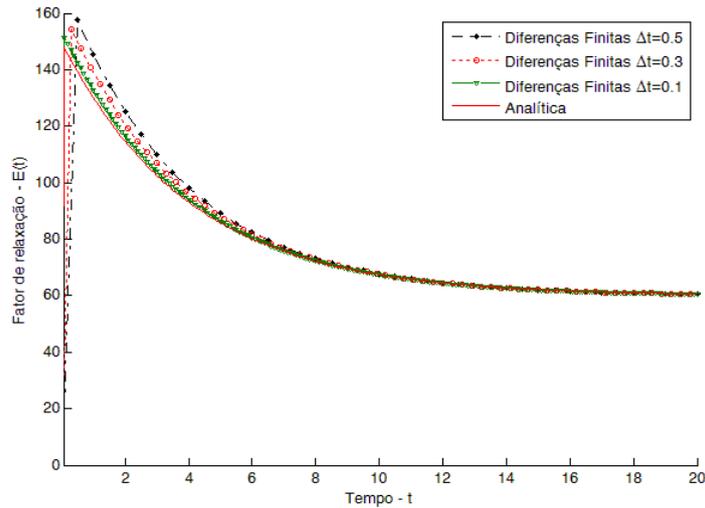


Figura 5.34 – Função de relaxação específica

Observa-se que os resultados numéricos melhoram com a diminuição do passo de tempo e se aproximam da solução analítica. Nota-se também que para tempos finais a resposta numérica se aproxima mais da solução analítica.

Será mostrado agora o comportamento completo deste teste através do seu resultado numérico. Estes resultados estão na Figura 5.35 seguinte:

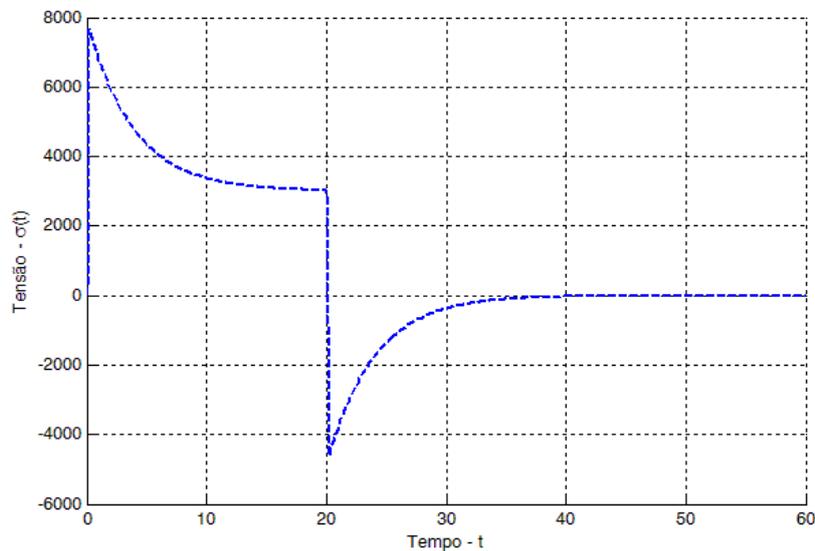


Figura 5.35 – solução numérica completa do teste.

A partir da solução numérica completa, nota-se que este teste gera uma tensão instantânea inicial e em seguida a tensão cai lentamente até o tempo  $t_1$ . Em seguida sofre uma descontinuidade e atinge seu valor negativo máximo, depois a tensão total no modelo cresce e no decorrer do tempo volta para a sua condição inicial, cujo valor é

nulo. Esta resposta é semelhante à resposta apresentada pelo modelo de Maxwell na página 83.

Análise 3 – Considere o modelo de Boltzmann que foi apresentado na seção 2.2.3.3, com as seguintes propriedades:  $E_0 = 100$ ,  $E_k = 150$  e  $\eta = 1000$ . Considere ainda o teste de fluência apresentado na Figura 5.36 abaixo, tendo como dados:  $\sigma_0 = 50$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 20$ ,  $t_2 = 40$  e  $t_f = 80$ .

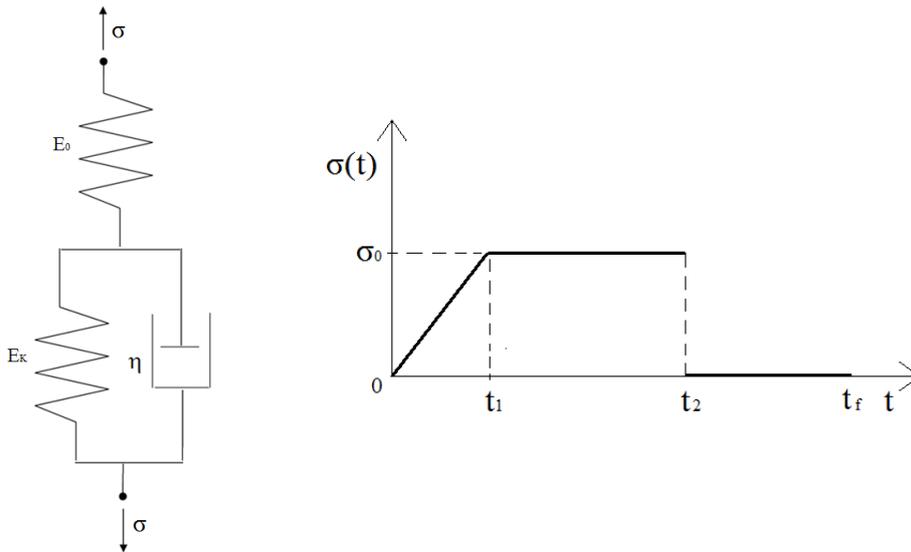


Figura 5.36 – Teste 3 para o modelo de Boltzmann.

Adotando-se diferentes passos de tempo  $\Delta t$  é possível comparar a resposta numérica com os resultados obtidos analiticamente. Estes resultados para as deformações totais são apresentados na Figura 5.37:

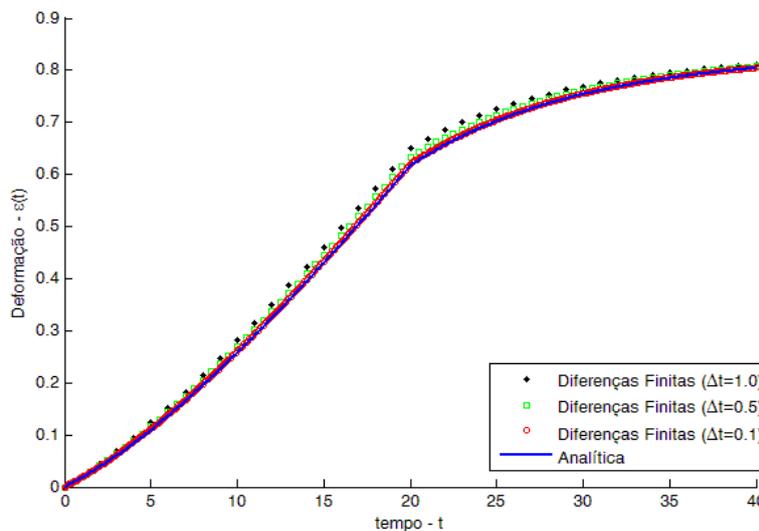


Figura 5.37 – Deformações analíticas e numéricas para diferentes valores de  $\Delta t$

Observa-se que os resultados numéricos melhoram com a diminuição do passo de tempo. Também é possível observar que para tempos iniciais e finais a resposta numérica se aproxima mais da solução analítica.

Uma vez mostrada a eficácia do método das diferenças finitas em uma comparação com a solução exata, será mostrado agora o comportamento completo deste teste, somente através do seu resultado numérico. Estes resultados são mostrados na Figura 5.38:

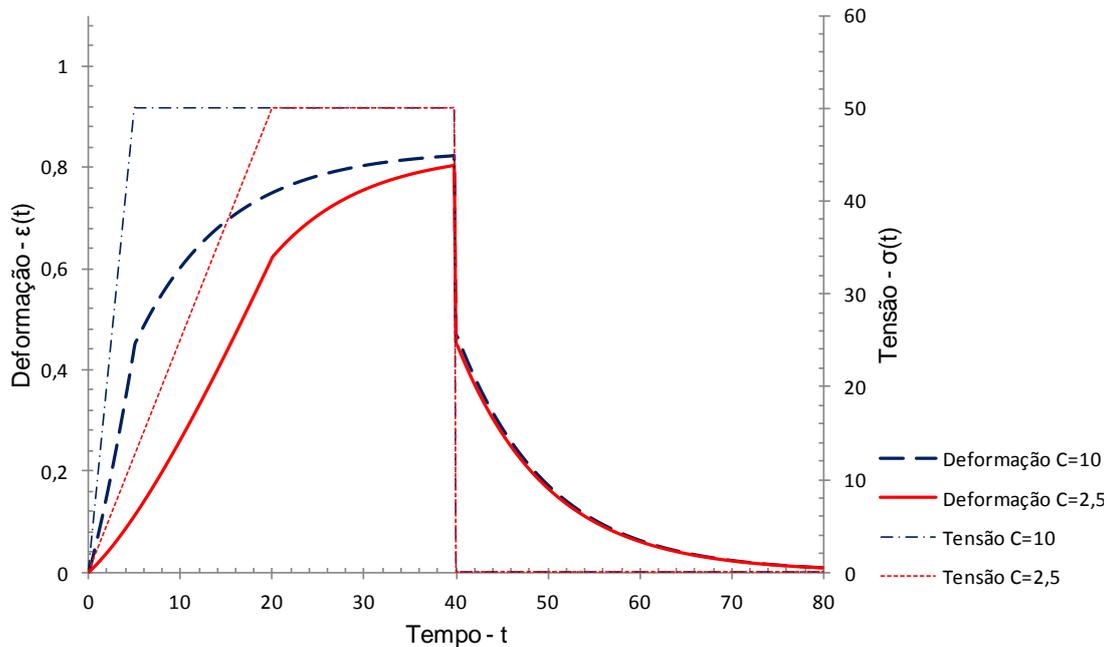


Figura 5.38 – Resposta numérica para diferentes valores de C

De modo geral, a deformação cresce até atingir o tempo  $t_2$  e logo em seguida apresenta uma descontinuidade no momento em que houve o descarregamento no teste. A partir deste momento ambos os resultados são bem próximos e seus valores decrescem no decorrer do tempo e tendem voltar para a sua condição inicial cuja deformação é zero.

## 5.4 ANÁLISES PARA OS MODELOS VISCOPLÁSTICOS

### 5.4.1 Modelo Viscoplastico com Comportamento Instantâneo

Análise 1 – Considere o modelo Viscoplastico com Comportamento Instantâneo e o teste de fluência apresentado na Figura 5.39.

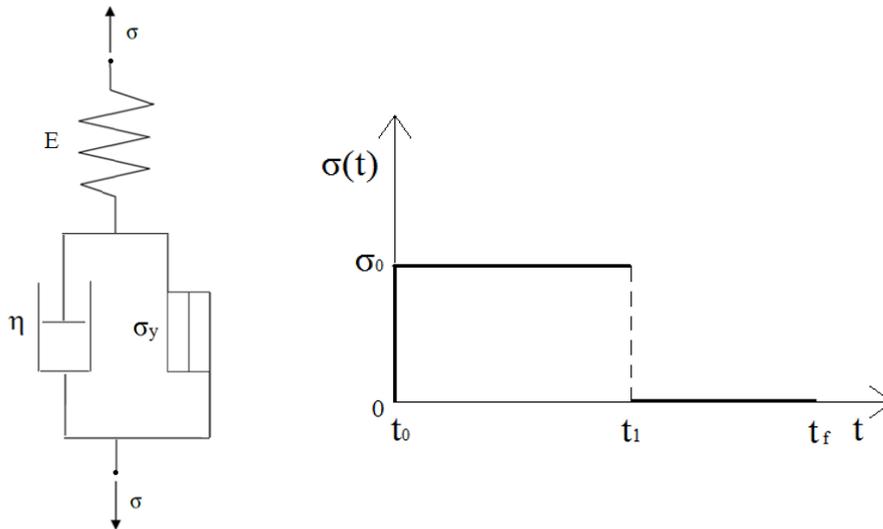


Figura 5.39 – Modelo viscoplástico e teste de fluência

Considere as seguintes propriedades do modelo:  $E = 100$ ,  $\sigma_y = 25$  e  $\eta = 1000$ . Considere ainda os seguintes dados para o teste:  $\sigma_0 = 50$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 20$  e  $t_f = 60$ .

Com as soluções analíticas e numéricas encontradas, adotando-se um passo de tempo  $\Delta t = 0.2$ , pode-se chegar aos resultados para as deformações  $\varepsilon(t)$ , que são mostrados na Figura 5.40:

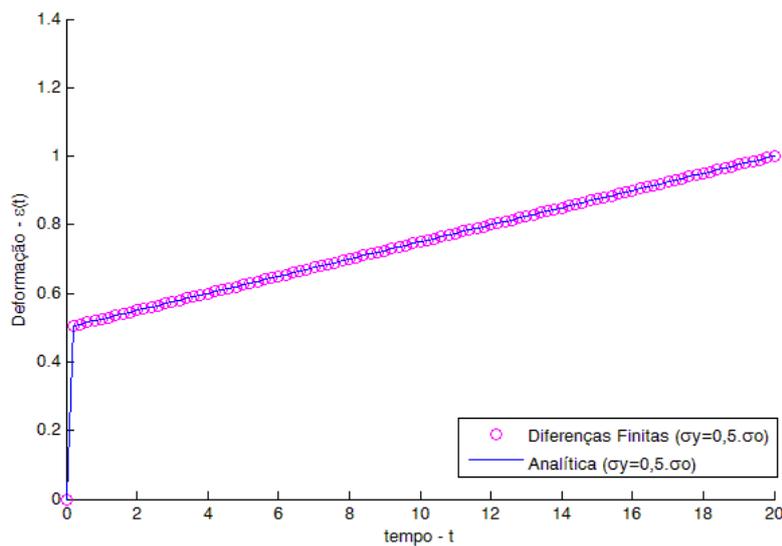


Figura 5.40 – Deformações para o teste até o tempo  $t_1$

A figura acima revela que as soluções numéricas coincidem com as soluções analíticas. Tendo observado isto, serão comparadas as soluções numéricas com a resposta do modelo de Maxwell, alterando-se os valores de  $\sigma_y$ , (ver Figura 5.41).

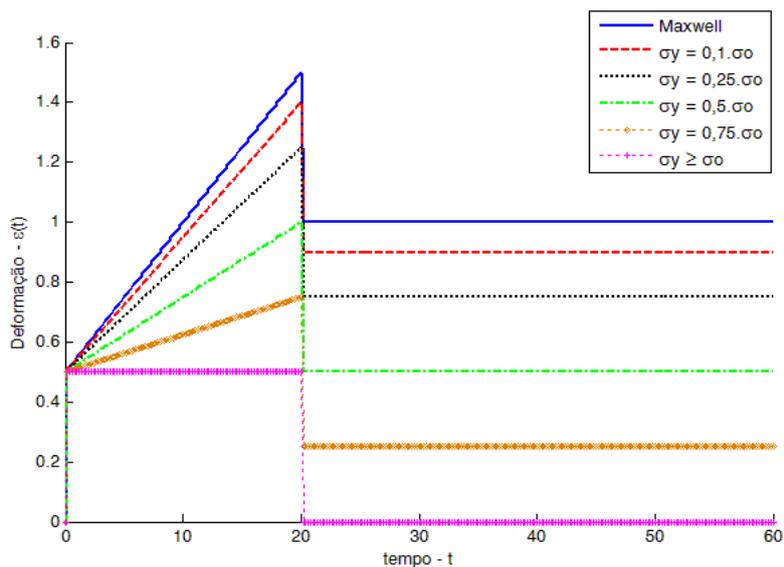


Figura 5.41 – Solução numérica completa das deformações para diferentes valores de  $\sigma_y$

Observa-se que quando o valor de  $\sigma_y$  se aproxima de zero, o comportamento deste modelo tende ao comportamento do modelo de Maxwell. Já o aumento no valor de  $\sigma_y$  ocasiona uma redução nos valores das deformações. Quando  $\sigma_y \geq \sigma_0$  o comportamento do modelo é constante e o mesmo deforma-se apenas elasticamente. Assim é possível afirmar que para este teste o modelo é recomendado apenas para valores onde  $0 < \sigma_y < \sigma_0$ .

Análise 2 – Observe o modelo viscoplástico com comportamento instantâneo (MVCCI) e o teste de relaxação apresentados na Figura 5.42:

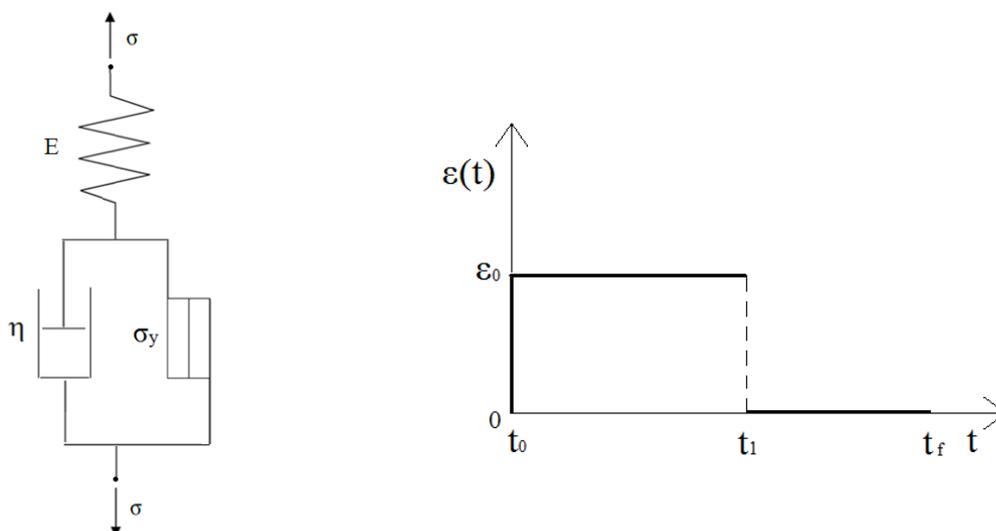


Figura 5.42 – Modelo viscoplástico e teste de relaxação

Considere as seguintes propriedades do modelo:  $E = 100$ ,  $\eta = 1000$  e  $\sigma_y = 2500$ . Considere ainda os seguintes dados para o teste:  $\sigma_0 = 50$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 40$  e  $t_f = 80$ . Adotando-se um passo de tempo  $\Delta t = 0,2$  para a obtenção da solução numérica, as tensões para este modelo são comparadas com o modelo de Maxwell como se ilustra na Figura 5.43.

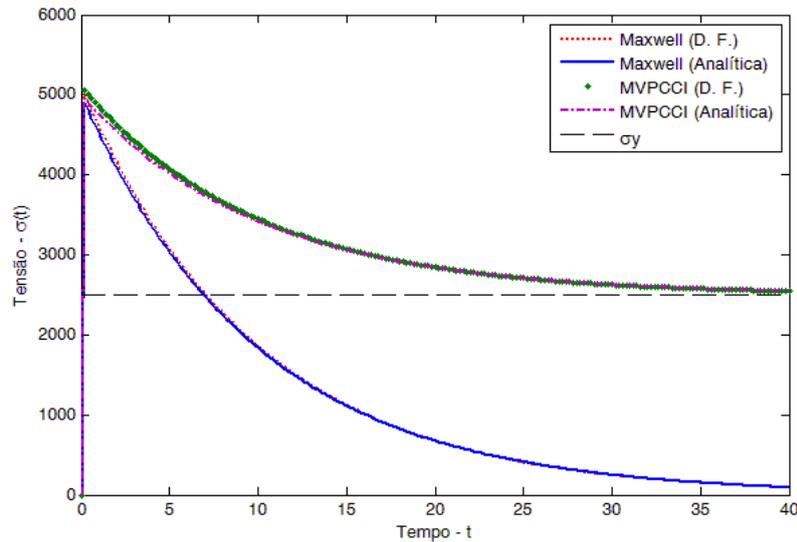


Figura 5.43 – Comparação de tensões até o tempo  $t_1$

Note-se que para ambos os modelos, a tensão decai exponencialmente com o tempo. De fato, para o MVPCCI, quando  $t/\tau \rightarrow \infty, \sigma(t) \rightarrow \sigma_y$ . Do ponto de vista físico, é importante perceber que o fator de controle no processo de relaxação ilustrado na Figura 5.44 é o tempo relativo  $t / \tau$ . O tempo absoluto  $t \in [0, \infty]$  é considerado como curto ou longo apenas quando comparado com  $\tau = \eta/E$ . De forma equivalente, o que interessa é a razão entre a viscosidade  $\eta$  no amortecedor e a rigidez  $E$  na mola. Já para o modelo de Maxwell, quando  $t / \tau \rightarrow \infty, \sigma(t) \rightarrow 0$ .

Agora serão comparadas as soluções numéricas completas desta análise alterando-se os valores de  $\sigma_y$  como será ilustrado na Figura 5.44.

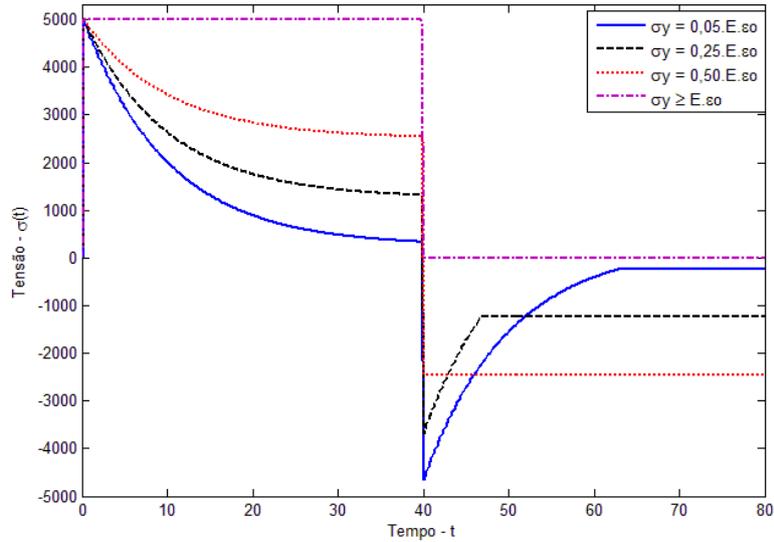


Figura 5.44 – Solução numérica completa para diferentes valores de  $\sigma_y$  até o tempo  $t_f$

Pode-se observar na figura acima que existem tensões finais negativas para valores em que  $0 < \sigma_y < E\varepsilon_0$ . Quando  $\sigma_y \geq E\varepsilon_0$ , o modelo deforma-se apenas elasticamente e quando  $\sigma_y = 0$ , não ocorrerão tensões plásticas e o comportamento do modelo é semelhante ao modelo de Maxwell. Os dois últimos casos resultarão em tensões nulas ao final do teste.

Análise 3 – Considere o modelo viscoplástico com comportamento instantâneo que foi apresentado na seção 2.2.4.1, com as seguintes propriedades:  $E = 100$  e  $\eta = 50$ . Considere ainda o teste de fluência apresentado na Figura 5.46 abaixo, tendo como dados:  $\sigma_0 = 50$ ,  $t_1 = 20$ ,  $t_2 = 40$  e  $t_f = 80$ . Para a solução numérica desta análise, um passo de tempo  $\Delta t = 0,2$  é considerado.

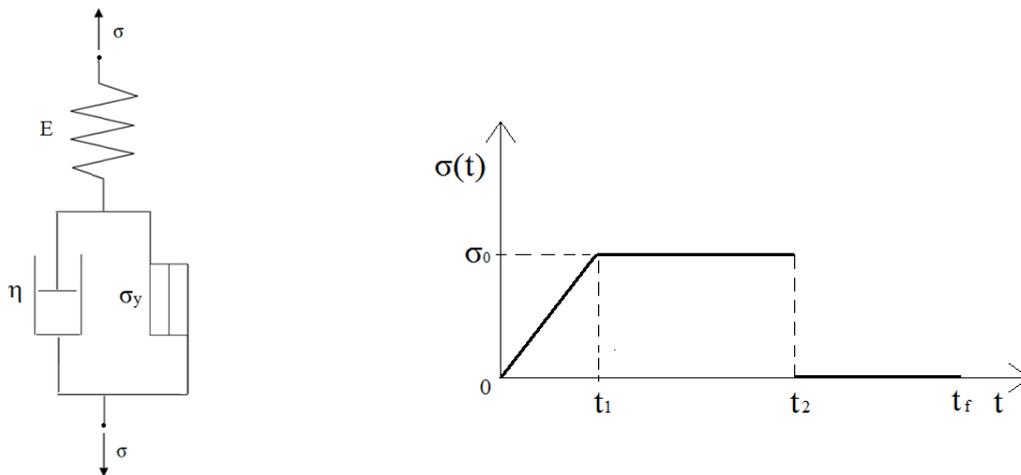


Figura 5.45 – Teste 3 para este modelo viscoplástico.

Adotando-se diferentes valores de  $\sigma_y$ , é possível comparar a resposta analítica com os resultados obtidos para o modelo de Maxwell. Estes resultados para as deformações totais são apresentados na Figura 5.46.

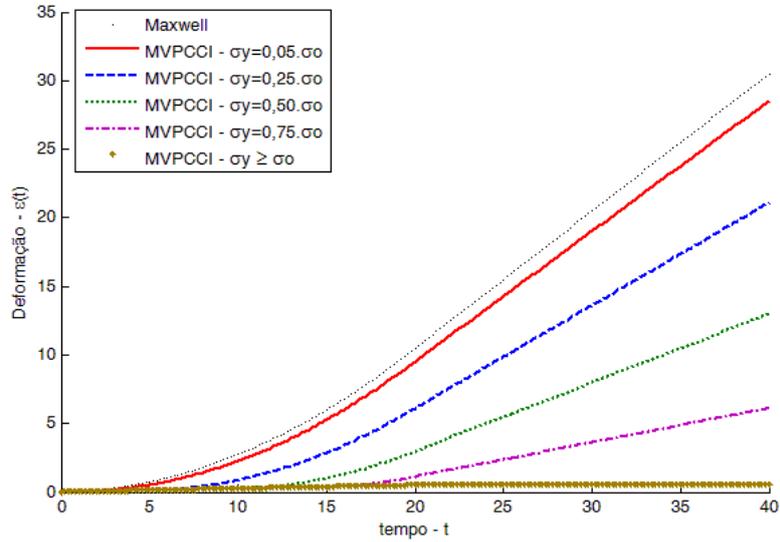


Figura 5.46 – Solução analítica para diferentes valores de  $\sigma_y$  até o tempo  $t_2$

Observa-se que quando o valor de  $\sigma_y$  é muito pequeno, o comportamento deste modelo tende ao comportamento do modelo de Maxwell, pois o dispositivo de atrito passa a não interferir no comportamento do modelo. Já o aumento no valor de  $\sigma_y$  ocasiona uma redução nos valores das deformações. Quando  $\sigma_y \geq \sigma_0$  o modelo deforma-se apenas elasticamente.

Será mostrado agora o comportamento completo deste teste até o tempo final, através do resultado numérico, para diferentes valores da constante  $C = \sigma_0 / t_1$ , a partir da alteração do valor de  $t_1$ . Para isso considerou-se que  $\sigma_y = 0,50 \cdot \sigma_0 = 25$ . Estes resultados são mostrados Figura 5.47 seguinte.

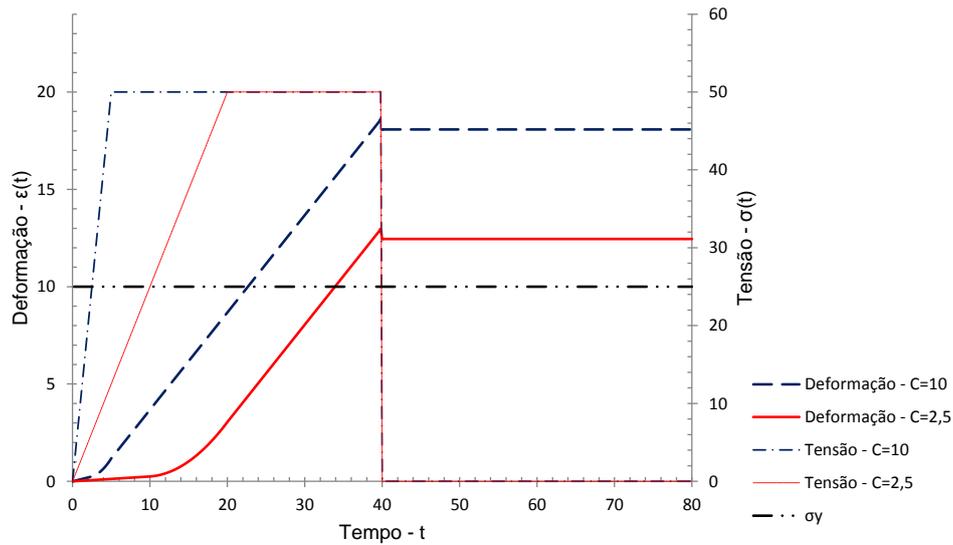


Figura 5.47 – Resposta numérica para diferentes valores de C

É possível notar vários comportamentos distintos que ocorrem desde o início até o final do teste para ambos os casos. Inicialmente o modelo se deforma linearmente até o tempo em que a tensão atinge o valor de  $\sigma_y$ . A partir deste momento o seu comportamento é de uma parábola até o tempo  $t_1$ . De  $t_1$  até  $t_2$  a resposta volta a ser linear e então sofre uma descontinuidade e permanece constante até o tempo final  $t_f$ . A diferença entre os dois casos é que ao se inserir o carregamento mais rapidamente, as deformações se tornam maiores desde o início até o final do teste.

#### 5.4.2 Modelo Viscoplastico sem Comportamento Instantâneo

Análise 1 – Considere o modelo Viscoplastico sem Comportamento Instantâneo e o teste de fluência apresentados na Figura 5.48:

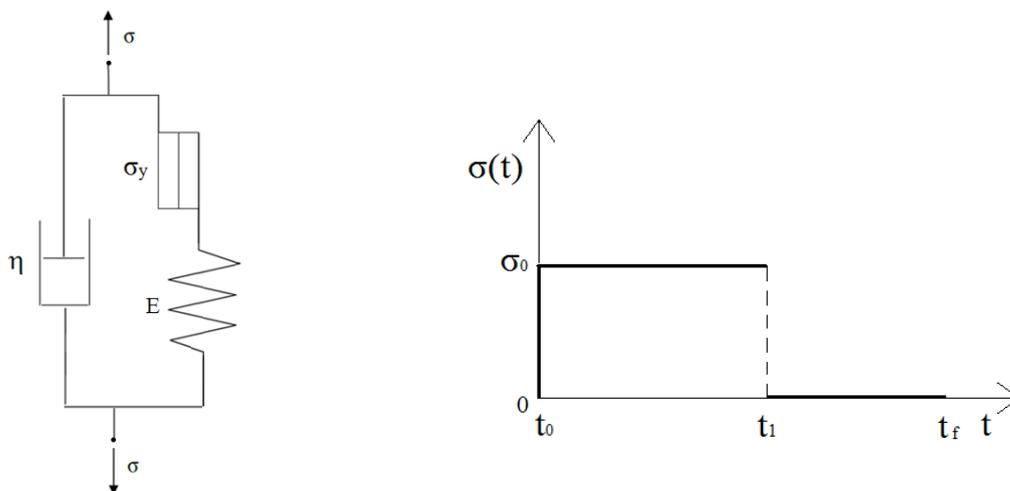


Figura 5.48 – Modelo viscoplastico e teste de fluência

Considere as seguintes propriedades do modelo:  $E = 100$  e  $\eta = 500$ . Considere ainda os seguintes dados para o teste:  $\sigma_0 = 50$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 40$  e  $t_f = 80$ .

Com as soluções numéricas encontradas, adotando-se um passo de tempo  $\Delta t = 0.2$ , é possível comparar a resposta das deformações  $\varepsilon(t)$  para diferentes valores de  $\sigma_y$ , como podem ser observadas na Figura 5.49:

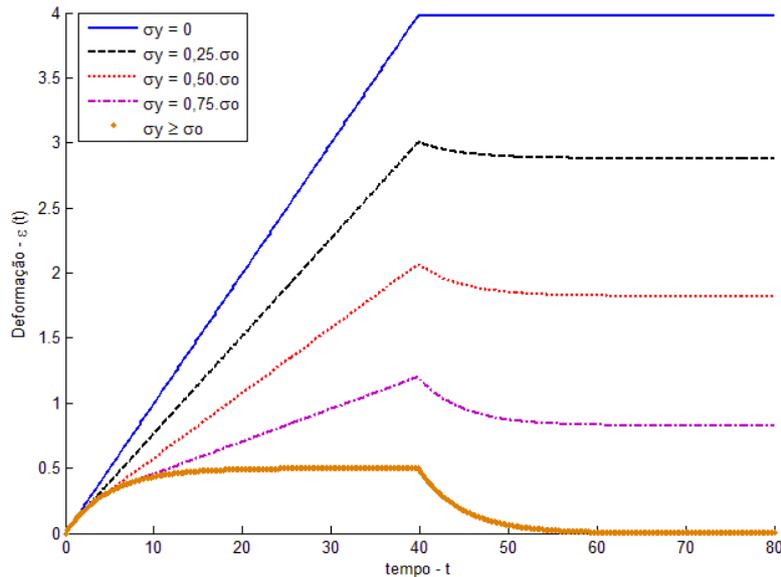


Figura 5.49 – Solução numérica para diferentes valores de  $\sigma_y$

Nota-se que quando o valor de  $\sigma_y$  é igual à zero, a tensão no dispositivo de atrito e na mola são nulas e somente o amortecedor resistirá às tensões aplicadas e será o responsável pelas deformações totais no teste. Com o aumento no valor de  $\sigma_y$  ocorre a diminuição das deformações totais, pois a mola e o dispositivo de atrito passam a resistir às tensões aplicadas. Quando  $\sigma_y \geq \sigma_0$  o modelo deforma-se de forma semelhante ao modelo de Kelvin.

Análise 2 – A Figura 5.50 abaixo mostra o modelo viscoplástico sem comportamento instantâneo e o teste de relaxação para esta análise.

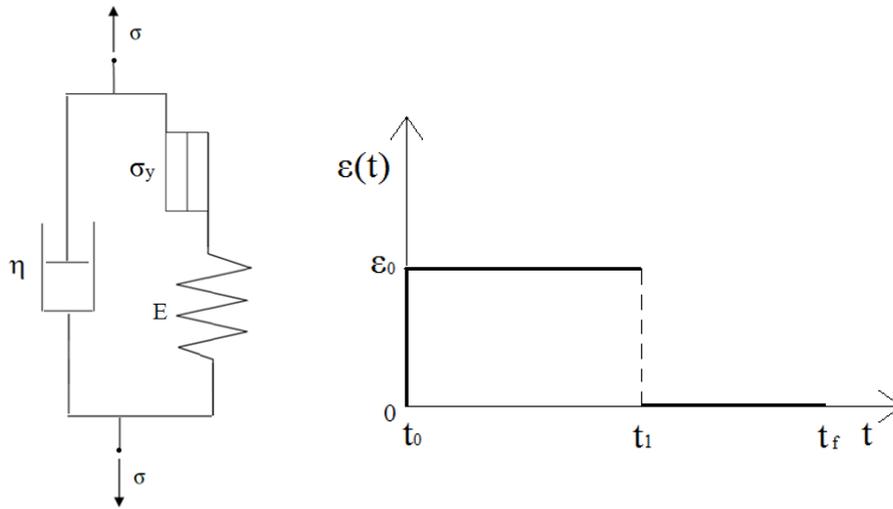


Figura 5.50 – Modelo viscoplástico e o teste de relaxação

Considere as seguintes propriedades do modelo:  $E = 100$ ,  $\sigma_y = 2500$  e  $\eta = 500$ . Considere ainda os seguintes dados para o teste:  $\epsilon_0 = 50$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 40$  e  $t_f = 80$ . Adotando-se um passo de tempo  $\Delta t = 0,2$  para a obtenção da solução numérica, a resposta para as tensões neste modelo são ilustradas na Figura 5.51.

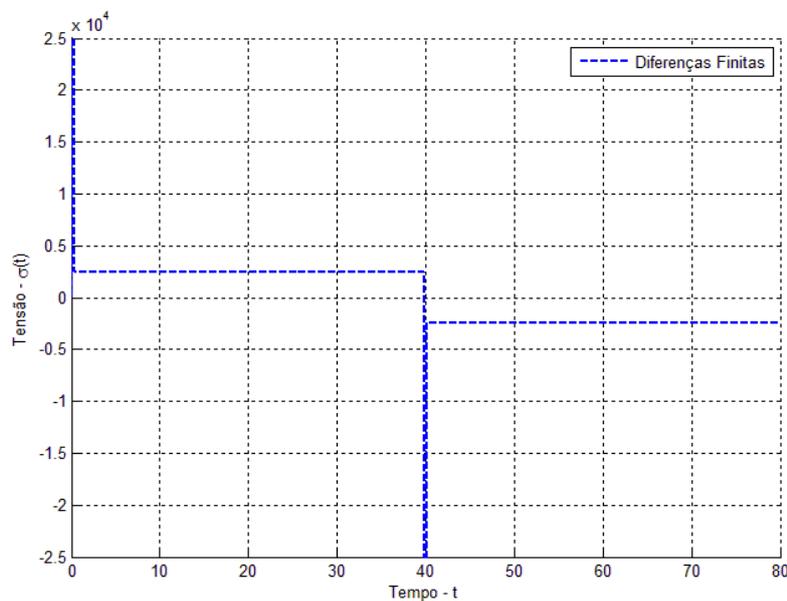


Figura 5.51 – Solução numérica completa

A solução numérica acima mostra que a tensão sofre um impulso no tempo inicial de valor muito grande. Em seguida seu comportamento é constante com valor de 2500 no intervalo de tempo  $t_0$  a  $t_1$ , onde em seguida apresenta um impulso negativo e continua com valor de -2500 até o tempo  $t_f$ . Nota-se que os impulsos positivo e negativo ocorrem, respectivamente, ao se aplicar a deformação  $\epsilon_0$  e quando a mesma é retirada.

Análise 3 – Considere o modelo viscoplástico sem comportamento instantâneo que foi apresentado na seção 2.2.4.2, com as seguintes propriedades:  $E = 100$  e  $\eta = 500$ . Considere ainda o teste de fluência apresentado na Figura 5.52 abaixo, tendo como dados:  $\sigma_0=50$ ,  $t_1 = 20$ ,  $t_2 = 40$  e  $t_f = 80$ . Para a solução numérica desta análise, um passo de tempo  $\Delta t=0,2$  é considerado.

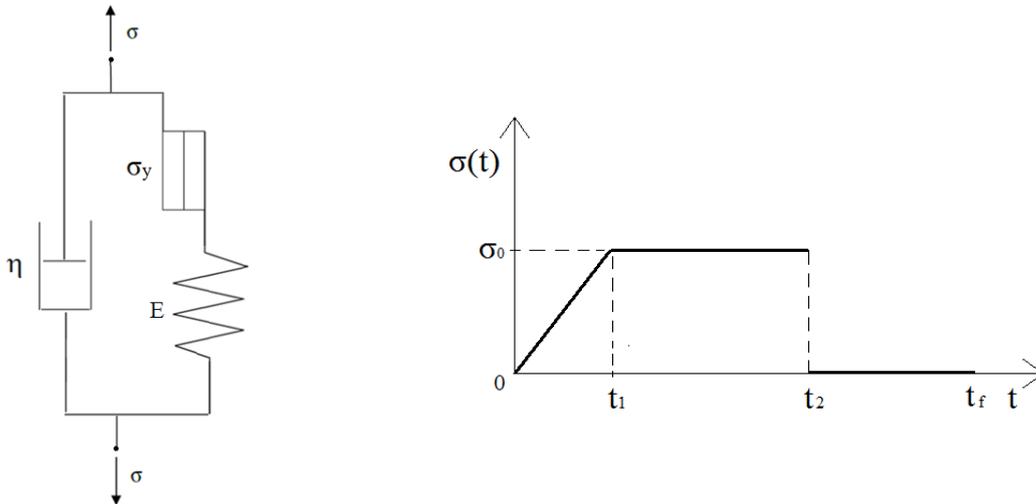


Figura 5.52 – Teste de fluência para este modelo viscoplástico.

Adotando-se diferentes valores de  $\sigma_y$ , é possível comparar as respostas numéricas obtidas. Os resultados para as deformações totais são apresentados na Figura 5.53 abaixo:

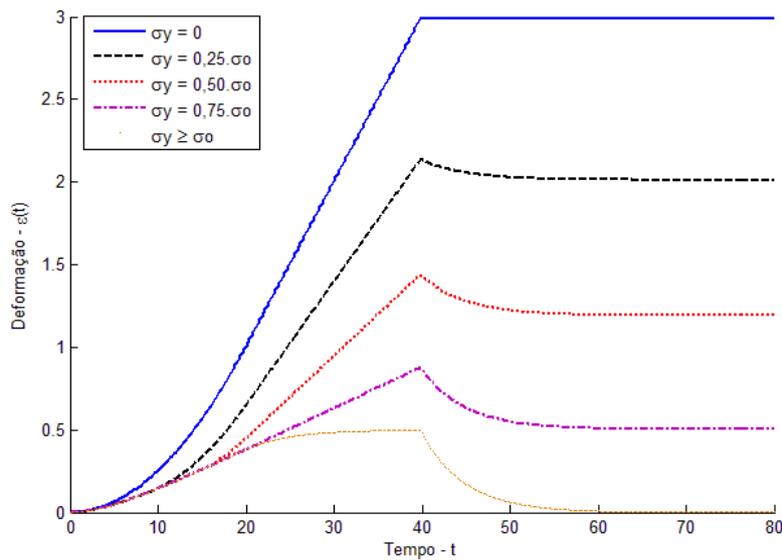


Figura 5.53 – Solução numérica completa para diferentes valores de  $\sigma_y$ .

Nota-se que quando o valor de  $\sigma_y$  é igual à zero, as tensões no dispositivo de atrito e na mola são nulas, portanto o comportamento do sistema será igual ao de um amortecedor isolado. Com o aumento no valor de  $\sigma_y$  ocorre a diminuição das deformações totais e Quando  $\sigma_y \geq \sigma_0$  o modelo deforma-se de forma semelhante ao modelo de Kelvin e não apresentará deformações permanentes ao final do teste.

Agora será mostrado o comportamento completo deste teste até o tempo final, através do resultado numérico, para diferentes valores da constante  $C = \sigma_0 / t_1$ , a partir da alteração do valor de  $t_1$ . Para isso considerou-se que  $\sigma_y = 25$ . Estes resultados são mostrados Figura 5.54:

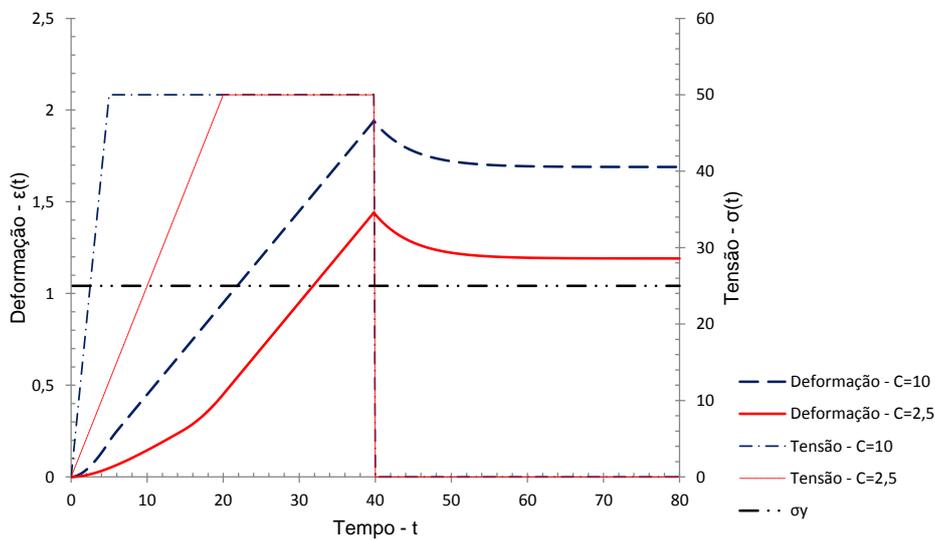


Figura 5.54 – Resposta numérica para diferentes valores de C

É possível notar vários comportamentos distintos que ocorrem desde o início até o final do teste para ambos os casos. De forma resumida temos que inicialmente o modelo aumenta a sua deformação total até atingir o seu valor máximo no tempo  $t_2$ , onde a partir de então a resposta passa a ser decrescente até o modelo deixar de se deformar e passa a ter uma deformação constante e permanente até o tempo final  $t_f$ . A diferença entre os dois casos é que ao se inserir o carregamento mais rapidamente, as deformações se tornam maiores desde o início até o final do teste.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

A pesquisa materializada no presente trabalho teve como objetivo fazer um estudo numérico-analítico de alguns modelos reológicos unidimensionais: viscoelásticos, elastoplásticos e viscoplásticos. Para isso necessitou-se fazer uma análise da sensibilidade da resposta reológica das tensões  $\sigma(t)$ , deformações  $\varepsilon(t)$ , função de fluência específica  $D(t)$  e função de relaxação específica  $E(t)$ , considerando três diferentes tipos de solicitações mecânicas para os modelos reológicos viscoelásticos e viscoplásticos. Para o modelo elastoplástico foram derivadas apenas as equações diferenciais do modelo para os casos sem e com encruamento, devido às soluções deste modelo não serem dependentes da variável tempo.

No capítulo 2 foi introduzido o conceito de reologia e sobre suas subdivisões em Macro-reologia e Micro-reologia. Foram apresentados os três tipos básicos de comportamento reológico: o elástico, o plástico e o viscoso, que dão origem aos três modelos reológicos básicos. Em seguida foram apresentadas e determinadas as EDOs que regem o comportamento dos seguintes modelos: viscoelásticos (Maxwell, Kelvin e Boltzmann); elastoplástico (Prandtl-Reuss) e viscoplástico (com comportamento instantâneo e sem comportamento instantâneo).

A partir das EDOs encontradas, nos capítulos 3 e 4 foram desenvolvidas as soluções analíticas e numéricas (através do Método das Diferenças Finitas) para os modelos viscoelásticos e viscoplásticos para três diferentes tipos de testes: teste de fluência com tensão constante; teste de relaxação com deformação constante; e teste de fluência com um trecho de tensão linear e depois tensão constante.

No capítulo 5, foram apresentadas análises com a finalidade de ilustrar as deformações, tensões, funções de fluência e funções de relaxação específicas obtidas pelos modelos reológicos em estudo. Estes exemplos serviram para testar e validar as soluções desenvolvidas para os modelos. Assim foram apresentadas as respostas analíticas e as mesmas foram comparadas com as soluções numéricas, que foram obtidas pelo Método das Diferenças Finitas.

As conclusões acerca das análises do capítulo 5 serão feitas a seguir pra cada um dos modelos apresentados.

### 6.1 SOBRE ANÁLISES PARA O MODELO DE MAXWELL

No teste 1 concluiu-se que a solução numérica permite calcular a história de deformações, gerando resultados compatíveis em comparação com a solução analítica.

No Teste 2 concluiu-se que os resultados numéricos melhoram com a diminuição do passo de tempo e se aproximam da solução analítica. Concluiu-se também que os resultados obtidos pelo método das diferenças finitas são relativamente próximos da resposta analítica e que os valores de  $\sigma(t)$  são diretamente proporcionais aos valores de  $\epsilon_0$ . Observou-se também que, para tempos finais, a resposta numérica se aproxima mais da solução analítica.

Já no teste 3, observou-se que para tempos iniciais a resposta numérica se aproxima mais da solução analítica e que os resultados numéricos também melhoram com a diminuição do passo de tempo. Concluiu-se também que ao se inserir o carregamento mais rapidamente, com a mudança do valor da constante C, as deformações se tornam maiores e que quando o valor desta constante é muito grande o teste 3 pode substituir o teste 1.

### 6.2 SOBRE ANÁLISES PARA O MODELO DE KELVIN

No teste 1 concluiu-se que a resposta numérica se aproxima da analítica e pode gerar ótimos resultados com a diminuição do passo de tempo. Já os valores de  $\epsilon(t)$  são diretamente proporcionais aos valores de  $\sigma_0$  adotados. Na solução numérica completa a deformação cresce exponencialmente até o tempo  $t_1$ , onde atinge o seu valor máximo, em seguida este valor decresce no decorrer do tempo até voltar para a sua condição inicial cuja deformação é zero.

No teste 2 foi visto que a tensão sofreu um impulso no tempo inicial de valor muito grande. Em seguida seu comportamento foi constante no intervalo de tempo  $t_0$  a  $t_1$ , onde em seguida apresentou um impulso negativo e permaneceu com valor nulo até o tempo final. Concluiu-se também que valores maiores de  $\eta$  geram deformações menores no teste 3.

### 6.3 SOBRE ANÁLISES PARA O MODELO DE BOLTZMANN

O teste 1 mostrou que o aumento do valor de  $\sigma_0$  ocasiona o aumento proporcional das deformações totais do modelo e que a solução numérica gera resultados próximos da solução analítica. Já no teste 2 concluiu-se que os resultados numéricos apresentaram-se pobres no início e melhoraram nos tempos finais do teste.

No teste 3 observou-se que os resultados numéricos melhoram com a diminuição do passo de tempo. Também foi possível concluir que para tempos iniciais e finais a resposta numérica se aproxima mais da solução analítica. Concluiu-se também que no final deste teste o modelo não apresenta deformações permanentes.

### 6.4 SOBRE O MODELO VISCOPLÁSTICO COM COMPORTAMENTO INSTANTÂNEO

Nos testes 1 e 3 foi possível concluir que quando o valor de  $\sigma_y$  se aproxima de zero, o comportamento deste modelo tende ao comportamento do modelo de Maxwell. Já o aumento no valor de  $\sigma_y$  ocasiona uma redução nos valores das deformações. Quando  $\sigma_y \geq \sigma_0$  o comportamento do modelo é constante e o mesmo deforma-se apenas elasticamente.

O teste 2 foi importante para perceber que o fator de controle no processo de relaxação é o tempo relativo  $t/\tau$ . Já o tempo absoluto  $t$  é considerado como curto ou longo apenas quando comparado com  $\tau = \eta/E$ , desta forma concluiu-se que o que interessa é a razão entre a viscosidade  $\eta$  no amortecedor e a rigidez  $E$  na mola.

### 6.5 SOBRE O MODELO VISCOPLÁSTICO SEM COMPORTAMENTO INSTANTÂNEO

Nos testes 1 e 3 concluiu-se que quando o valor de  $\sigma_y$  é igual à zero, as tensões no dispositivo de atrito e na mola são nulas, portanto o comportamento do sistema se mostrou igual ao de um amortecedor isolado. Notou-se também que com o aumento no valor de  $\sigma_y$  ocorreu a diminuição das deformações totais e quando  $\sigma_y \geq \sigma_0$  o modelo deformou-se de forma semelhante ao modelo de Kelvin e não apresentou deformações permanentes ao final do teste.

No teste 2 a solução numérica mostrou que a tensão sofreu um impulso no tempo inicial de valor muito grande. Em seguida seu comportamento foi constante com valor de 2500 no intervalo de tempo  $t_0$  a  $t_1$ , onde em seguida apresentou um impulso negativo e continuou com valor de -2500 até o tempo  $t_f$ . Notou-se também que os impulsos positivo e negativo ocorreram, respectivamente, no momento da aplicação da deformação  $\varepsilon_0$  e quando a mesma foi retirada.

## 6.6 CONTRIBUIÇÃO E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O desenvolvimento deste trabalho serve de base para uma grande variedade de novas e ricas frentes de pesquisas. As soluções analíticas e numéricas aqui apresentadas podem ser ampliadas para que os modelos viscoelásticos e viscoplásticos sejam estudados para outros tipos de testes ou solicitações mecânicas, como por exemplo, a utilização de cargas senoidais ou cossenoidais.

A importância de termos obtido as respostas de  $D(t)$  e  $E(t)$  é que os mesmos são medidos nos ensaios experimentais, de fluência e de relaxação, respectivamente, e assim é possível comparar os nossos resultados numéricos e analíticos encontrados com os valores adquiridos nos ensaios experimentais. Ensaios estes que na engenharia, por exemplo, podem ser aplicados para testes envolvendo materiais como o concreto, bem como para argamassas de cimento.

Abaixo seguem algumas sugestões para trabalhos futuros:

- A extensão dos modelos apresentados para uso com a aplicação do Método dos elementos finitos e Método dos elementos de contorno para fazer uma extensão da análise viscoelástica e viscoplástica para problemas multidimensionais.
- Uma aplicação na modelagem de sólidos viscoelásticos e viscoplásticos em um trabalho com ensaios experimentais para a calibração da solução dos modelos aqui apresentados.
- Fazer um estudo para diferentes associações (série ou paralelo) dos modelos básicos apresentados, bem como de modelos generalizados compostos por  $n$ -ésimas associações dos modelos aqui apresentados.
- Desenvolver outro trabalho utilizando como método numérico a aproximação por Variáveis de Estado e para a solução analítica as Transformadas de Laplace para problemas que envolvam viscoelasticidade linear e não-linear.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Argyris, O.C., Boni, B., Hindenlang, U., e Kleiber, M., "*Finite element analysis of two an three-dimensional elasto-plastic frames - the natural approach*", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 35, pp. 221-248, 1982.
- Bathe, K.J., "*Finite Element Procedures in Engineering Analysis*", Prentice-Hall, 1982.
- Biot, M.A., "*Mechanics of Incremental Deformations*" Miley, New York, 1965.
- Carbone, N., "*Desenvolvimento de um Novo Algoritmo para Análise Viscoplastica com o Método dos Elementos de Contorno*" Dissertação de Mestrado em Engenharia – USP, São Paulo, 2007
- Chapman, S. J. "*Programação em MATLAB para Engenheiros*", Thompson learning, São Paulo, 2006.
- Christensen, R. M., "*Theory of Viscoelasticity*", 2nd edn. Dover Publications Inc., New York, 2010.
- Creus, G. J., "*Viscoelasticity - Basic Theory and Applications to Concrete Structures.*", Springer – Verlag, Berlin, 1986.
- Filho, J.M.; Freitas, J.A. e Costa, M.M.M., "*Materiais de construção – Reologia*" Notas de aula, Departamento de Construção Civil da Universidade Federal do Paraná, 2007.
- Foltran, C. E., "*Análise de Problemas em Regime Elasto-plastico pelo Método dos Elementos de Contorno*" Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil – FEC/UNICAMP, 1999.
- Gilat, A., "*MATLAB com aplicações*", Bookman, 2ª Ed., Porto Alegre, 2006.
- Gomes, G., Partridge, P. W. e Creus, G. J. "*Algorithms for the Analysis of Nonlinear Viscoelastic Problems using the Boundary Element Method.*", XXII CILAMCE, UNICAMP, Campinas, 2001.
- Lakes, R. S., "*Viscoelastic Solids*", Mechanical Engineering Series, CRC Press, Boca Raton-FL, 1998.
- Machado, M. A. S., "*Aplicação do Método dos Elementos Finitos para a Análise Elasto-Viscoplastica de Peças de Concreto Armado e Protendido, Submetidas a Estados Planos de Tensão*" Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil - PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 2002.
- Marques, S. P. C., "*Análise não Linear Física e Geométrica de Pórticos Espaciais*" Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil -PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 1990.

Marques, S. P. C. e Creus, G. J., “*Computational Viscoelasticity*” Springer, London, 2012.

Masuro, J., “*Análise de Problemas de Fratura em Materiais Viscoelásticos via Elementos Finitos.*” Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil - CPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 1992.

Noronha, M; Pereira, A. M. B. “*A new algorithm for visualization of domain results in analysis with the Boundary Element Method*”. 15th International Conference on Boundary Element Technology – BETECH, Detroit, USA, 2003

Perzyna, P., “*Fundamental Problems in Viscoplasticity*” *Advances in Applied Mechanics*, 9, pp. 246-377, Academic Press, New York, 1966.

Pipkin, A.C., “*Lectures on Viscoelasticity Theory*”, Springer, Heidelberg, 1972.

Riesz, F. e Sz.-Nagy, B., “*Functional Analysis*” Dover Publications Inc., New York, 1990.

Santos, J.P.A., “*Análise de Modelos Reológicos Viscoelásticos Através de Formulações Mistas em Elementos Finitos*” Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil - COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2008.

Sensale, B., “*Análise do comportamento ao longo do tempo de peças de concreto armado submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos*” Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil - CPGEC/ UFRGS, Porto Alegre, 1991.

Sensale, B., Patridge, P. W. e Creus, G. J., “*General Boundary Elements Solution for ageing viscoelastic structures*”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2001, 1455-1468.

Simo, J.C., Hughes, T.J.R. “*Computational Inelasticity*” Springer-Verlag, New York, 1998.

Sorvari, J. e Hämäläinen, J., “*Time integration in linear viscoelasticity – a comparative study*” *Mech. Time-dependent. Mater* 14(3), pp. 307-328, 2010.

Volterra, V., “*Theory of functionals*” Dover, New York, 1959.

Theisen, K. M., “*Aplicação do Princípio da Correspondência Elasto-Viscoelástica para Previsão de Deformabilidade de Misturas Asfálticas*” Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil -PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 2006.