



Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

**Modelos Envolvendo Duas Distribuições  
Weibull Inversa e Apresentação da Weibull  
Inversa Generalizada**

Valdiego Siqueira Melo

Brasília

2014

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Modelos Envolvendo Duas Distribuições Weibull Inversa e Apresentação da Weibull Inversa Generalizada

Valdiego Siqueira Melo

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora  
Prof.<sup>a</sup> Daniele da Silva Baratela Martins Neto

Brasília  
2014

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade de Brasília. Acervo 1016196.

M528m Melo, Valdiego Siqueira.  
Modelos envolvendo duas distribuições Weibull inversa e apresentação da Weibull inversa generalizada / Valdiego Siqueira Melo. -- 2014.  
viii, 70 f. : il. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade de Brasília, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Departamento de Matemática, 2014.

Inclui bibliografia.

Orientação: Daniele da Silva Baratela Martins Neto.

1. Distribuição de Weibull. I. Martins Neto, Daniele da Silva Baratela. II. Título.

CDU 519.21

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Modelos Envolvendo Duas Distribuições Weibull Inversa e Apresentação da Weibull Inversa Generalizada

Valdiego Siqueira Melo<sup>1</sup>

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Comissão examinadora:

---

Prof.<sup>a</sup> Daniele S. Baratela Martins Neto - Orientadora (MAT/UnB)

---

Prof.<sup>a</sup> Cátia Regina Gonçalves - Membro (MAT/UnB)

---

Prof. Ary Vasconcelos Medino - Membro (MAT/UnB)

Brasília, 01 de julho de 2014

---

<sup>1</sup>O autor foi bolsista da Capes e do CNPQ durante a elaboração desta dissertação.

# Agradecimentos

Aos meus pais, Lourdes e Valdo, por sempre acreditarem em mim e me apoiarem nesta importante etapa da minha vida. À minha irmã e amiga, Vanessa, pelo carinho e palavras de apoio nos momentos em que mais precisei.

À professora Daniele, pela orientação, dedicação e incentivo. Às professoras Cátia e Débora, agradeço pelas correções e sugestões. Ao professor Ary por aceitar compor a banca de última hora no lugar da profa Débora.

Ao meu amigo/irmão Vinícius pela parceria e momentos de descontração.

Aos meus amigos Eliana, Jhonattan, Max, Laís e Éder. A amizade e companheirismo de vocês foi essencial.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática, por suas contribuições à minha formação.

À Capes e ao CNPQ pelo apoio financeiro em forma de bolsa de estudos.

A todas as pessoas que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho.

# Resumo

Modelos Weibull têm sido amplamente discutidos na literatura. Esse grande interesse tem refletido no surgimento de modificações e generalizações de modelos Weibull. Primeiramente neste trabalho, apresentamos três modelos (risco competitivo, multiplicativo e mistura) que envolvem duas distribuições Weibull inversa, baseados no artigo de Jiang et al. [10]. As formas das funções densidade e taxa de falha são apresentadas e métodos gráficos para determinar se um dado conjunto de observações pode ser ajustado por um desses modelos são discutidos. Num segundo momento, nós apresentamos a distribuição Weibull inversa generalizada de Gusmão et al. [8] e discutimos a estimação de máxima verossimilhança com dados censurados. O modelo de mistura de duas distribuições Weibull inversa generalizada é investigado e a propriedade de identificabilidade do modelo de mistura é demonstrada.

**Palavras-chave:** Weibull Inversa, Modelo de Risco, Modelo Multiplicativo, Modelo de Mistura, Identificabilidade, Gráfico-IWPP.

# Abstract

Weibull models have been extensively discussed in the literature. This great interest is reflected in the emergence of modifications and generalizations of Weibull models. Firstly in this work, we present three models (competing risk, multiplicative and mixture) involving two inverse Weibull distributions, based on Jiang et al. [10] paper. The shapes of the density and failure rate functions are shown and graphical methods to determine if a given data set can be adjusted by one of these models are discussed. Secondly, we present a generalized inverse Weibull distribution by Gusmão et al. [8] and discuss the estimation of maximum likelihood with censored data. The mixture model of two generalized inverse Weibull distributions is investigated. The identifiability property of the mixed model is demonstrated.

**Keywords:** Inverse Weibull, Competing Risk Model, Multiplicative Model, Mixture Model, Identifiability, IWPP-plot.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Ajuste de Reta por Mínimos Quadrados . . . . .	5
1.2 Função Taxa de Falha . . . . .	8
1.3 A Distribuição Weibull Inversa . . . . .	11
1.3.1 Função Densidade . . . . .	12
1.3.2 Função Taxa de Falha . . . . .	13
1.3.3 Momentos . . . . .	15
1.3.4 Gráficos Modificados . . . . .	16
1.3.4.1 O Gráfico-WPP . . . . .	16
1.3.4.2 O Gráfico-IWPP . . . . .	18
1.3.4.3 Comparação Entre os Gráficos WPP e IWPP e Esti- mação de Parâmetros . . . . .	20
1.4 Mistura de Distribuições e Identificabilidade . . . . .	21
<b>2 Análise de Duas Distribuições Weibull Inversa</b>	<b>29</b>
2.1 Modelo de Risco . . . . .	29
2.1.1 Função Densidade e Função Taxa de Falha . . . . .	30
2.1.2 Gráfico Modificado - IWPP . . . . .	32
2.2 Modelo Multiplicativo . . . . .	34
2.2.1 Função Densidade e Função Taxa de Falha . . . . .	35
2.2.2 Gráfico Modificado - IWPP . . . . .	37
2.3 Modelo de Mistura . . . . .	40
2.3.1 Função Densidade e Momentos . . . . .	41

2.3.2	Função Taxa de Falha . . . . .	41
2.3.3	Gráfico Modificado - IWPP . . . . .	43
2.3.4	Identificabilidade . . . . .	54
<b>3</b>	<b>A Distribuição Weibull Inversa Generalizada</b>	<b>56</b>
3.1	Função Densidade . . . . .	56
3.2	Função Taxa de Falha . . . . .	57
3.3	Momentos . . . . .	58
3.4	Estimação de Máxima Verossimilhança com Dados Censurados . . . . .	59
3.5	Mistura de Duas Distribuições Weibull Inversa Generalizada . . . . .	64
3.5.1	Função Densidade e Momentos . . . . .	65
3.5.2	Função Taxa de Falha . . . . .	66
3.5.3	Identificabilidade . . . . .	67
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>69</b>

# Lista de Figuras

1.1	Ajustes que consideram o mínimo da soma dos valores absolutos dos erros.	6
1.2	Função taxa de falha da distribuição Weibull para alguns valores de $\beta$ e para $\lambda = 1$ .	10
1.3	Gráficos WPP para Weibull e Weibull inversa para $\alpha = 5$ e $\beta = 3, 5$ .	18
1.4	Gráficos IWPP para Weibull e Weibull inversa para $\alpha = 5$ e $\beta = 3, 5$ .	20
2.1	Função densidade para o modelo de risco.	31
2.2	Função taxa de falha para o modelo de risco.	31
2.3	Gráfico-IWPP para o modelo de risco.	34
2.4	Função densidade para o modelo multiplicativo.	36
2.5	Função taxa de falha para o modelo multiplicativo.	36
2.6	Gráfico-IWPP para o modelo multiplicativo.	40
2.7	Função densidade para o modelo de mistura.	41
2.8	Função taxa de falha para o modelo de mistura.	44
2.9	Gráfico-IWPP para o modelo de mistura - caso (a) e $\alpha_1 < \alpha_2$ .	49
2.10	Gráfico-IWPP para o modelo de mistura - caso (a) e $\alpha_1 > \alpha_2$ .	49
2.11	Gráfico-IWPP para o modelo de mistura - caso (b).	52
3.1	Função densidade da distribuição Weibull inversa generalizada para alguns valores de $\alpha$ com $\beta = 5$ e $\gamma = 0, 5$ .	58
3.2	Função taxa de falha da distribuição Weibull inversa generalizada para alguns valores de $\alpha$ com $\beta = 5$ e $\gamma = 0, 5$ .	59
3.3	Função densidade para o modelo de mistura.	65
3.4	Função taxa de falha para o modelo de mistura.	66

# Introdução

A distribuição Weibull tem sido amplamente estudada nas últimas décadas. A popularidade desta distribuição é evidenciada principalmente em estudos de confiabilidade e na análise de dados de sobrevivência no contexto da modelagem de funções de risco. Sua habilidade de modelar taxas de falhas reside na dependência do parâmetro de forma.

Neste trabalho consideramos uma distribuição Weibull de dois parâmetros que tem função de distribuição dada por

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

onde  $\alpha$ , o parâmetro de escala, e  $\beta$ , o parâmetro de forma, são positivos. Uma variedade de modelos tem sido obtida a partir de (1) na tentativa de modelar outras formas da função taxa de falha. Um desses modelos foi proposto por Jiang et al. [10] a partir da seguinte transformação: considere  $Y$  uma variável aleatória definida por

$$Y = \frac{\alpha^2}{X},$$

onde  $X$  é uma variável aleatória com distribuição de Weibull. A função de distribuição de  $Y$  é dada por

$$F(t) = P(Y \leq t) = e^{-\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta}, \quad t > 0, \quad (2)$$

onde  $\alpha, \beta > 0$ . Neste caso, se  $Y$  é uma variável aleatória com função de distribuição dada por (2), então é dita ter distribuição *Weibull inversa*. Uma característica importante desta distribuição é que a sua função taxa de falha é unimodal.

Na literatura alguns modelos envolvendo  $n$  distribuições unidimensionais são observados, como por exemplo, o modelo de risco, o multiplicativo e o de mistura. Para entendê-los, apresentamos:

- Sejam  $T_1, \dots, T_n$  variáveis aleatórias independentes, sendo  $F_1(t), \dots, F_n(t)$  as respectivas funções de distribuição associadas. Se  $Z = \min\{T_1, \dots, T_n\}$ , então a sua

função de distribuição é dada por

$$F(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_i(t)].$$

Este modelo é conhecido como *modelo de risco*. Outras terminologias também são utilizadas na literatura, como, por exemplo, modelo composto, modelo de sistema em série e modelo multirrisco. Ele tem recebido considerável atenção na literatura e tem sido estudado há bastante tempo. No contexto da análise de confiabilidade, o modelo pode ser considerado como um sistema de  $n$  componentes em série, sendo  $T_i$  o tempo de vida da componente  $i$  e  $Z$  o do sistema. O sistema falha no primeiro instante que uma componente falha. Para mais detalhes, veja Nelson [15].

- Sejam  $T_1, \dots, T_n$  variáveis aleatórias independentes, sendo  $F_1(t), \dots, F_n(t)$  as respectivas funções de distribuição associadas. Se  $W = \max\{T_1, \dots, T_n\}$ , então a sua função de distribuição é dada por

$$F(t) = P(W \leq t) = P\left(\bigcap_{i=1}^n (T_i \leq t)\right) = \prod_{i=1}^n F_i(t).$$

Este modelo é conhecido como *modelo multiplicativo* e, apesar dele não ter se destacado tanto quanto o modelo de risco, como observado por Murthy et al. [14], tem sido aplicado na literatura de confiabilidade no contexto da modelagem de um sistema em paralelo com componentes independentes. Um sistema pode ser, por exemplo, um organismo ou um dispositivo mecânico, e o termo paralelo significa que a sua falha está condicionada à falha de todas as suas partes. Para mais detalhes, veja Elandt-Johnson e Johnson [7].

- Modelos de misturas finitas têm sido amplamente discutidos nas últimas décadas. Esse interesse é decorrente de sua aplicabilidade em áreas diversas como Biologia, Física, Economia, Medicina e Engenharia. Em muitas aplicações, os dados disponíveis podem ser considerados como sendo de uma população de mistura de duas ou mais distribuições. Titterington et al. [18] e McLachlan e Peel [16] são algumas das principais referências na literatura de misturas finitas.

Uma propriedade importante no estudo de misturas finitas é a *identificabilidade*, isto é, a representação única dos elementos de uma classe de misturas finitas. Se o modelo não é identificável, podemos ter dificuldades para fazer inferências. Alguns trabalhos como Chandra [4], Yakowitz e Spragins [19] e Atienza et al. [1] estabelecem condições suficientes para a identificabilidade de misturas finitas de distribuições.

Vários casos especiais dos modelos mencionados acima podem ser obtidos, dependendo do número de subpopulações e da distribuição associada a cada uma dessas subpopulações. Um dos objetivos deste estudo é analisar esses modelos para o caso em que  $n = 2$  e ambas as subpopulações seguem uma distribuição Weibull inversa. Murthy et al. [14] reúnem alguns dos principais estudos relacionados às distribuições Weibull e Weibull inversa publicados até o início dos anos 2000 envolvendo esses modelos. Como exemplo podemos citar Jiang e Murthy [9] e Jiang et al. [10], duas principais referências do nosso estudo. O primeiro apresenta um método gráfico para estimação dos parâmetros do modelo de mistura de duas distribuições Weibull; o segundo apresenta a forma da função densidade e da função taxa de falha para os modelos de mistura, de risco e o multiplicativo, considerando duas distribuições Weibull inversa, além de uma técnica gráfica para estimação dos parâmetros desses modelos.

Também apresentamos um estudo mais recente, onde Gusmão et al. [8] propõem uma nova distribuição obtida a partir da Weibull inversa. A sua função de distribuição,  $G(t)$ , proposta pelos autores em [8], é dada por

$$G(t) = [F(t)]^\gamma = e^{-\gamma(\frac{t}{\tau})^\beta}, \quad t > 0. \quad (3)$$

A distribuição associada à (3) é chamada *distribuição Weibull inversa generalizada*. Esta distribuição tem uma flexibilidade ainda maior, devido a inclusão do parâmetro  $\gamma$ , que permite obter como casos particulares as distribuições Weibull inversa, exponencial inversa e Rayleigh inversa. Outra característica desta distribuição é que a sua função taxa de falha tem forma unimodal.

Apresentamos a seguir os principais tópicos abordados em cada capítulo.

O Capítulo 1 é dedicado à apresentação de definições e resultados importantes para o restante do trabalho. Mostramos, por exemplo, que a função taxa de falha da distribuição Weibull inversa é unimodal, apresentamos um método gráfico, chamado gráfico-IWPP, para estimação de parâmetros e duas condições suficientes, de Chandra [4] e Atienza et al. [1], para garantir a identificabilidade de uma classe de misturas finitas de distribuições.

No Capítulo 2 apresentamos os modelos de risco, o multiplicativo e o de mistura. Esses modelos são analisados nas Seções 2.1, 2.2 e 2.3, respectivamente, onde consideramos duas subpopulações que seguem uma distribuição Weibull inversa. O objetivo dessas seções é analisar as funções densidade e taxa de falha dos modelos mencionados, além de apresentar algumas propriedades envolvendo o gráfico-IWPP e um procedimento de estimação baseado nesse método gráfico. Na Seção 2.3 também provamos a identificabilidade de uma classe de misturas finitas de distribuições Weibull inversa.

---

Finalizamos o trabalho no Capítulo 3, apresentando a distribuição Weibull inversa generalizada. As suas funções densidade e taxa de falha têm forma unimodal, como exposto nas Seções 3.1 e 3.2, respectivamente. Na Seção 3.3 é obtida uma expressão geral para os momentos. A estimação dos parâmetros da distribuição é feita na Seção 3.4, utilizando o método de máxima verossimilhança para dados censurados. Por fim, na Seção 3.5, apresentamos as funções densidade, taxa de falha e os momentos do modelo de mistura de duas distribuições Weibull inversa generalizada. A propriedade de identificabilidade também é provada.

## Preliminares

Este capítulo é dedicado à apresentação de resultados, conceitos e definições importantes para o desenvolvimento do trabalho. Iniciamos na Seção 1.1 com o método de mínimos quadrados para ajuste de retas. Na Seção 1.2, definimos a função de sobrevivência e função taxa de falha, importantes em estudos de confiabilidade e análise de sobrevivência, e exemplificamo-as por meio das distribuições exponencial e Weibull. As referências básicas para essa seção são: Bolfarine et al. [2], Colosimo e Giolo [5] e Lawless [12]. Na Seção 1.3, apresentamos a distribuição Weibull inversa como uma modificação de uma distribuição Weibull, seguindo o trabalho de Jiang et al. [10]. Além disso, estudamos as formas das funções densidade e taxa de falha, calculamos uma expressão para o  $k$ -ésimo momento de uma variável aleatória com distribuição Weibull inversa e discutimos duas técnicas gráficas, apresentando um procedimento para estimação de parâmetros baseados nesses métodos. Na Seção 1.4 finalizamos o capítulo com um estudo sobre misturas finitas de distribuições e identificabilidade, onde demonstramos dois resultados, de Chandra [4] e Atienza et al. [1], que garantem a identificabilidade de uma classe de misturas finitas de distribuições de uma mesma família paramétrica. A identificabilidade para uma classe de misturas de distribuições Weibull é também demonstrada.

### 1.1 - Ajuste de Reta por Mínimos Quadrados

Nosso objetivo nesta seção é estabelecer a melhor maneira de se ajustar uma reta. Para isso, precisamos de um método de ajuste que minimize o erro total. Um erro pode ser considerado como sendo a diferença entre o valor observado em uma amostra e o valor da ordenada da reta ajustada. Assim, se considerarmos como critério o ajuste da reta que minimiza a soma de todos esses erros, não teríamos garantias de

um bom ajuste. Isto ocorre porque o erro pode ser tanto positivo (quando o valor observado estiver acima da reta) quanto negativo (quando o valor observado estiver abaixo da reta), o que pode levar a uma soma nula dos erros mesmo com os valores muito distantes da reta.

Uma alternativa para superar este problema é minimizar a soma dos valores absolutos dos erros, uma vez que isto evita que grandes erros positivos e negativos sejam compensados. No entanto, tal método ainda apresenta uma desvantagem. Pela Figura 1.1, note que o ajuste em (b) satisfaz este critério melhor que o ajuste em (a). Mas esta não é uma boa solução para o problema, pois nenhuma atenção é dada ao ponto do meio. O ajuste em (a) é preferível porque leva em consideração todos os pontos.

Uma outra opção para tentarmos superar o nosso problema inicial é minimizar a soma dos quadrados dos erros. Este critério é chamado de *método de mínimos quadrados*. Ele é bem útil e prático, uma vez que os cálculos envolvidos são bem simples. Ao considerarmos o quadrado dos erros, estes se tornam positivos, o que resolve o problema de sinal, e, além disso, os grandes erros são evitados.

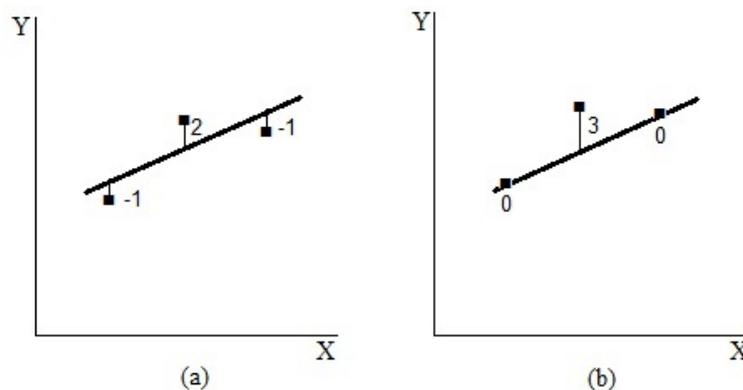


Figura 1.1: Ajustes que consideram o mínimo da soma dos valores absolutos dos erros.

Para definirmos o método de mínimos quadrados para ajuste de retas, consideremos primeiramente que  $X$  e  $Y$  sejam variáveis aleatórias relacionadas da seguinte forma:

$$Y = a_0 + bX, \quad (1.1)$$

onde  $a_0$  e  $b$  são constantes desconhecidas. Com o intuito de estimar  $a_0$  e  $b$  sem os problemas mencionados anteriormente, comecemos tomando uma amostra observada

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

do vetor aleatório  $(X, Y)$  e considerando a seguinte transformação:

$$z_i = x_i - \bar{x}, \quad (1.2)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$  e onde  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ .

A transformação proposta conduz a dois fatos importantes. São eles:

1. Geometricamente, o eixo  $y$  é transladado de 0 para  $\bar{x}$  e a equação (1.1) pode ser reescrita na forma:

$$Y = a + bZ,$$

onde  $Z = X - \bar{X}$  com  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  e  $X_1, \dots, X_n$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e com a mesma distribuição de  $X$ .

2. Alguns cálculos são simplificados. Note que:

$$\sum_{i=1}^n z_i = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - n\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i - n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 0. \quad (1.3)$$

Para facilitar a notação, daqui até o final desta seção, omitimos os índices do somatório, utilizando o símbolo  $\sum$  ao invés de  $\sum_{i=1}^n$ .

O objetivo do método de mínimos quadrados é encontrar  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$ , estimadores de mínimos quadrados de  $a$  e  $b$ , pelos valores de  $a$  e  $b$  que minimizam a função  $S(a, b)$ , dada por

$$S(a, b) = \sum (y_i - a - bz_i)^2, \quad (1.4)$$

Esses estimadores são apresentados no teorema a seguir.

**Teorema 1.1.** *Se  $S(a, b)$  é a função dada em (1.4), então os estimadores de mínimos quadrados para  $a$  e  $b$  são dados por*

$$\hat{a} = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i \quad e \quad \hat{b} = \frac{\sum y_i z_i}{\sum z_i^2}.$$

**Demonstração.** Primeiramente, vamos calcular o(s) ponto(s) crítico(s) de  $S$ . A derivada de (1.4) em relação a  $a$  é

$$S_1(a, b) = \frac{\partial}{\partial a} S(a, b) = -2 \sum (y_i - a - bz_i). \quad (1.5)$$

Igualando a zero e utilizando (1.3), segue que

$$\hat{a} = \frac{\sum y_i}{n} = \bar{y}. \quad (1.6)$$

A derivada de (1.4) em relação a  $b$  é dada por

$$S_2(a, b) = \frac{\partial}{\partial b} S(a, b) = -2 \sum z_i (y_i - a - bz_i). \quad (1.7)$$

Igualando a zero e usando novamente (1.3), obtemos

$$\hat{b} = \frac{\sum y_i z_i}{\sum z_i^2}. \quad (1.8)$$

Logo, o ponto  $(a, b)$ , determinado por (1.6) e (1.8), é o único ponto crítico de  $S$ . Resta mostrar que ele é um ponto de mínimo de  $S$ . Para isso, precisamos de suas derivadas parciais de segunda ordem. De (1.5) e (1.7), usando (1.3), segue que

$$S_{11}(a, b) = 2n, \quad S_{12}(a, b) = 0 = S_{21}(a, b) \quad \text{e} \quad S_{22}(a, b) = 2 \sum z_i^2.$$

Conseqüentemente, o determinante da matriz hessiana é dado por

$$H(a, b) = \begin{vmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2 \sum z_i^2 \end{vmatrix} = 4n \sum z_i^2 > 0,$$

e como ainda  $S_{11}(a, b) = 2n > 0$ , segue o resultado. ■

## 1.2 - Função Taxa de Falha

Nas definições seguintes desta seção,  $T$  denota uma variável aleatória não negativa e contínua que representa o tempo de falha de um elemento, ou seja, o tempo até a ocorrência de um evento de interesse. O tempo de falha pode ser, por exemplo, o tempo de vida de um paciente do momento que foi diagnosticada a doença até a sua morte ou até a cura, pode ainda ser o tempo útil de um certo equipamento até a sua queima. Sejam  $f(t)$  a função densidade de probabilidade de  $T$  e  $F(t)$  a função de distribuição correspondente.

**Definição 1.2.** A *função de sobrevivência* de  $T$  é definida por

$$S(t) = P(T \geq t) = \int_t^\infty f(x) dx.$$

Note que a função  $S(t)$  representa a probabilidade de uma observação não falhar até um certo tempo  $t$ , ou, equivalentemente, a probabilidade de uma observação sobreviver ao tempo  $t$ . Quando tratada em contextos que envolvem sistemas ou tempos de sobrevivência de itens manufaturados, é também denominada *função de confiabilidade*. Da Definição 1.2, utilizando as propriedades de função densidade, segue que  $S(t)$  é uma função monótona decrescente, contínua, com  $S(0) = 1$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$ . Alternativamente, podemos expressar a função de sobrevivência de  $T$  por

$$S(t) = 1 - F(t).$$

Derivando ambos os membros desta igualdade, obtemos:

$$f(t) = -S'(t), \quad (1.9)$$

onde ' denota a derivada em relação a  $t$ .

**Definição 1.3.** A função taxa de falha (ou função risco) é definida por

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t}.$$

Note que a função taxa de falha especifica a taxa instantânea de falha ou morte no tempo  $t$ , dado que o elemento sobreviveu até o tempo  $t$  (Lawless [12]). Por outro lado, da definição de probabilidade condicional, temos:

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t, T \geq t)}{\Delta t P(T \geq t)} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t)}{\Delta t P(T \geq t)}, \end{aligned}$$

pois  $[t, t + \Delta t) \subset [t, +\infty)$ . Assim,

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t S(t)} = \frac{F'(t)}{S(t)} = \frac{f(t)}{S(t)}.$$

Nos exemplos seguintes, calculamos as funções de sobrevivência e taxa de falha para as distribuições exponencial e Weibull de dois parâmetros. No contexto da análise de sobrevivência ou da teoria de confiabilidade, ambas ocupam posição de destaque por se adequarem a muitas situações práticas.

**Exemplo 1.4.** A função densidade de probabilidade para uma variável aleatória  $T$  com distribuição exponencial é dada por

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \lambda, t > 0.$$

A função de sobrevivência de  $T$  é obtida do seguinte modo:

$$S(t) = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t}.$$

Consequentemente, a função taxa de falha é dada por

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \lambda.$$

Assim, a distribuição exponencial é caracterizada pelo fato de ter uma taxa de falha constante. Isto significa que tanto uma unidade velha quanto uma nova, que ainda não falharam, têm o mesmo risco de falhar em um intervalo futuro. Esta propriedade é chamada de falta de memória da distribuição exponencial.

**Exemplo 1.5.** A função densidade de probabilidade para uma variável aleatória  $T$  com distribuição Weibull é dada por

$$f(t) = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1}e^{-(\lambda t)^\beta}, \quad t > 0,$$

onde  $\beta$ , o parâmetro de forma, e  $\lambda$ , o de escala, são ambos positivos. A função de sobrevivência de  $T$  é expressa por

$$S(t) = \int_t^\infty \lambda\beta(\lambda x)^{\beta-1}e^{-(\lambda x)^\beta} dx = \int_{(\lambda t)^\beta}^\infty e^{-u} du = e^{-(\lambda t)^\beta}$$

e a função taxa de falha é dada por

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1}, \quad t > 0.$$

A distribuição Weibull é muito utilizada em estudos de confiabilidade e na análise de dados de sobrevivência, devido a sua flexibilidade em ajustar diferentes formas da função taxa de falha. Para  $\beta = 1$ , temos a distribuição exponencial como caso particular da Weibull e, como vimos no Exemplo 1.4, a função taxa de falha é constante. Se  $\beta > 1$ , a função taxa de falha é crescente e, no caso em que  $\beta < 1$ , ela é decrescente. De fato, como

$$h'(t) = \lambda^2\beta(\beta - 1)(\lambda t)^{\beta-2}$$

e  $\beta, \lambda, t > 0$ , segue que  $h'(t) > 0$  para  $\beta > 1$  e, assim,  $h$  é crescente e quando  $\beta < 1$ , temos  $h'(t) < 0$ , o que implica que  $h$  é decrescente. Veja Figura 1.2.

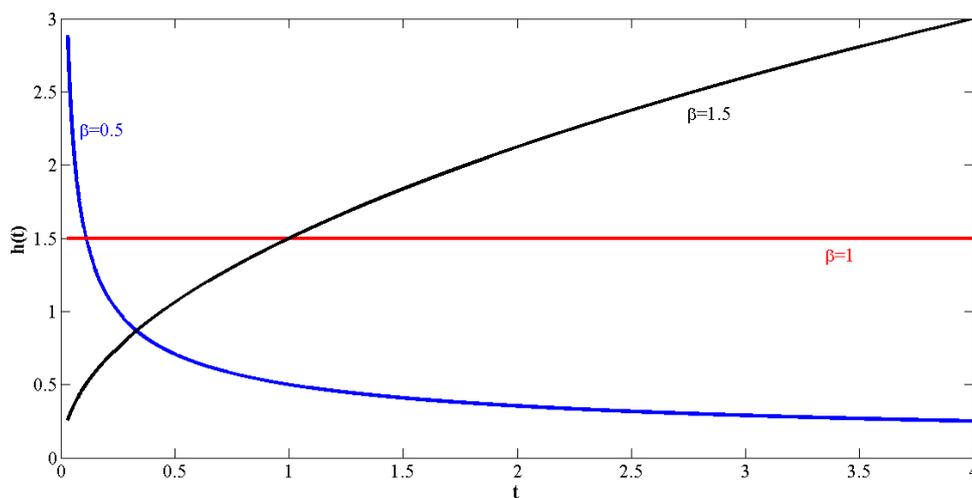


Figura 1.2: Função taxa de falha da distribuição Weibull para alguns valores de  $\beta$  e para  $\lambda = 1$ .

## 1.3 - A Distribuição Weibull Inversa

A distribuição Weibull ganhou destaque a partir dos estudos de Waloddi Weibull que evidenciaram a sua ampla aplicabilidade em diversas áreas. Seu primeiro trabalho foi publicado no ano de 1939 em um jornal escandinavo e tratou da resistência de materiais. Em um estudo subsequente em inglês, de 1951, ele mostrou a aplicabilidade do modelo Weibull em diferentes áreas. Desde então, o modelo tem sido extensivamente utilizado em estudos de confiabilidade, na análise de sobrevivência e em outras áreas devido a sua versatilidade, a medida que pode modelar taxas de falhas com formas constantes, crescentes e decrescentes (veja Exemplo 1.5).

Muitas modificações e generalizações foram propostas em diversos trabalhos nos últimos anos, como por exemplo em Murthy et al. [14] e Lai et al. [11], que permitem modelar outras formas da função taxa de falha. Uma dessas é a função taxa de falha unimodal, que pode ser modelada por uma distribuição chamada de Weibull inversa, proposta por Jiang et al. [10] como uma variação da distribuição Weibull.

Considere uma distribuição Weibull de dois parâmetros que tem função de distribuição dada por

$$F(t) = 1 - e^{-(\frac{t}{\alpha})^\beta}, \quad \alpha, \beta > 0; t \geq 0, \quad (1.10)$$

onde  $\alpha$  é o parâmetro de escala e  $\beta$  é o parâmetro de forma. Vamos nos referir a (1.10) como o modelo *Weibull básico*. Podemos utilizar parametrizações alternativas para representá-lo, como as listadas a seguir:

$$F(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^\beta}, \quad \text{com } \lambda = \frac{1}{\alpha};$$

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t^\beta}{\alpha'}}, \quad \text{com } \alpha' = \alpha^\beta;$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda' t^\beta}, \quad \text{com } \lambda' = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\beta.$$

Embora sejam todas equivalentes, dependendo do contexto uma parametrização particular pode ser mais apropriada. No decorrer do trabalho, a representação para o modelo Weibull básico é a equação (1.10), a menos que seja indicado o contrário. Uma variedade de modelos tem sido obtida a partir deste modelo básico. Um deles é o estudado em [10], em que é proposta a seguinte transformação: considere  $Y$  uma variável aleatória definida por

$$Y = \frac{\alpha^2}{X},$$

onde  $X$  é uma variável aleatória com distribuição de Weibull, a função de distribuição

de  $Y$  é obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F(t) = P(Y \leq t) &= P\left(\frac{\alpha^2}{X} \leq t\right) = P\left(X \geq \frac{\alpha^2}{t}\right) = 1 - P\left(X < \frac{\alpha^2}{t}\right) \\ &= 1 - P\left(X \leq \frac{\alpha^2}{t}\right) = 1 - F\left(\frac{\alpha^2}{t}\right) \\ &= e^{-\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta}, \end{aligned}$$

onde  $\alpha, \beta > 0$  e  $t > 0$ . Neste caso, dizemos que  $Y$  tem uma distribuição *Weibull inversa*, cuja função de distribuição é dada por

$$F(t) = e^{-\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta}, \quad \alpha, \beta > 0 \text{ e } t > 0. \quad (1.11)$$

A seguir, iniciamos uma análise da distribuição dada por (1.11), obtendo a função densidade, a função taxa de falha e uma expressão para o  $k$ -ésimo momento de uma variável aleatória com esta distribuição. Finalizamos a seção apresentando duas técnicas gráficas, chamadas gráfico-WPP e gráfico-IWPP, descrevendo um procedimento para estimação de parâmetros baseados nesses métodos.

### 1.3.1 Função Densidade

Diferenciando  $F(t)$  obtemos a função densidade da distribuição Weibull inversa:

$$f(t) = \alpha^\beta \beta t^{-\beta-1} e^{-\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta}, \quad \alpha, \beta > 0 \text{ e } t > 0. \quad (1.12)$$

Vamos analisar o comportamento da função densidade a partir do estudo da monotonicidade de uma função. Para isso, precisamos de sua derivada de primeira ordem, que é obtida do seguinte modo:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \alpha^\beta \beta t^{-\beta-1} e^{-\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta} [(-\beta - 1)t^{-1} + t^{-\beta-1} \alpha^\beta \beta] \\ &= \alpha^\beta \beta t^{-\beta-1} e^{-\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta} t^{-\beta-1} [-(\beta + 1)t^\beta + \alpha^\beta \beta] \\ &= f(t) t^{-\beta-1} [-(\beta + 1)t^\beta + \alpha^\beta \beta]. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Como  $f(t) t^{-\beta-1} > 0$ , segue que

$$f'(t) = 0 \iff t^\beta = \frac{\alpha^\beta \beta}{\beta + 1} \iff t = \alpha \left(\frac{\beta + 1}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}} \iff t = \alpha \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}}.$$

Denotando  $t_m = \alpha \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}}$ , temos que  $f'(t) > 0$  para  $t < t_m$  e, assim,  $f(t)$  é uma função crescente e quando  $t > t_m$ , temos  $f'(t) < 0$ , o que implica que  $f(t)$  é decrescente. Logo, a função densidade é unimodal.

Isto difere do modelo Weibull básico, em que a função densidade é decrescente (para  $\beta \leq 1$ ) ou unimodal (para  $\beta > 1$ ), como observado abaixo.

Derivando  $F(t)$  em (1.10), obtemos a função densidade para o modelo Weibull básico,

$$f(t) = \beta \alpha^{-\beta} t^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}, \quad t > 0.$$

A derivada de  $f(t)$  é dada por

$$f'(t) = f(t) t^{\beta-1} [(\beta - 1)t^{-\beta} - \beta \alpha^{-\beta}].$$

Como  $\alpha, \beta, t, f(t) > 0$ , segue que  $f'(t) < 0$  se  $\beta \leq 1$  e, assim,  $f(t)$  é decrescente. No caso em que  $\beta > 1$ , temos que  $f'(t) > 0$  para  $t < t_m$  e  $f'(t) < 0$  para  $t > t_m$ , onde

$$t_m = \alpha \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

o que implica que a função densidade é unimodal.

### 1.3.2 Função Taxa de Falha

A função de sobrevivência para a variável aleatória  $T$  com densidade Weibull inversa  $(\alpha, \beta)$  é dada por

$$S(t) = 1 - e^{-\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta},$$

onde  $t > 0$  e  $\alpha, \beta > 0$ . A função taxa de falha correspondente é descrita da seguinte forma:

$$h(t) = \frac{\alpha^\beta \beta t^{-\beta-1} e^{-\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta}}{1 - e^{-\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta}},$$

onde  $t > 0$  e  $\alpha, \beta > 0$ .

**Lema 1.6.** *A função taxa de falha da distribuição Weibull inversa satisfaz os seguintes limites:*

$$(i) \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0 \quad e \quad (ii) \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0.$$

**Demonstração.**

(i) Na expressão para  $h(t)$ , temos que o denominador tende a 1, quando  $t$  tende a 0. Então basta mostrar que o numerador tende a 0, quando  $t$  tende a 0. Usando L'Hospital, temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \beta \alpha^\beta t^{-\beta-1} e^{-\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta} &= \beta \alpha^\beta \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{\beta+1}} e^{-\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta} = \beta \alpha^\beta \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-(\beta+1)t^{-\beta-2}}{-\beta \alpha^\beta t^{-\beta-1} e^{-\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta}} \\ &= (\beta+1) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t e^{\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta}} = 0, \end{aligned}$$

pois

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( t e^{\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta} \right) = +\infty. \quad (1.14)$$

Para provar o limite em (1.14), note (fazendo  $h = \frac{1}{t^\beta}$ ) que

$$\lim_{t \rightarrow 0} t e^{\frac{1}{t^\beta}} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h^{\frac{1}{\beta}}} e^h = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{e^h}{\frac{1}{\beta} h^{\frac{1}{\beta}-1}}.$$

Sendo assim, dois casos podem ser analisados separadamente. São eles:

- $\beta > 1$

Temos que  $\frac{1}{\beta} < 1$  e assim

$$\lim_{t \rightarrow 0} t e^{\frac{1}{t^\beta}} = \lim_{h \rightarrow \infty} \beta e^h h^{1-\frac{1}{\beta}} = +\infty.$$

- $\beta < 1$

Neste caso, aplicando L'Hospital várias vezes e sendo  $\frac{1}{\beta} > 1$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} t e^{\frac{1}{t^\beta}} &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{e^h}{\frac{1}{\beta} h^{\frac{1}{\beta}-1}} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{e^h}{\frac{1}{\beta} (\frac{1}{\beta} - 1) h^{\frac{1}{\beta}-2}} = \dots \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{e^h}{\frac{1}{\beta} (\frac{1}{\beta} - 1) \dots \left( \frac{1}{\beta} - \left( \left[ \frac{1}{\beta} \right] - 1 \right) \right) h^{\frac{1}{\beta} - \left[ \frac{1}{\beta} \right]}} \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} C e^h h^{\left[ \frac{1}{\beta} \right] - \frac{1}{\beta}} = +\infty, \end{aligned}$$

onde

$$C = \frac{1}{\frac{1}{\beta} (\frac{1}{\beta} - 1) \dots \left( \frac{1}{\beta} - \left( \left[ \frac{1}{\beta} \right] - 1 \right) \right)} \quad \text{e} \quad [x] := \min\{n \in \mathbb{Z}; n \geq x\}.$$

(ii) Usando L'Hospital novamente e as expressões (1.13) e (1.9), temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{S(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t) t^{-\beta-1} [-(\beta+1)t^\beta + \alpha^\beta \beta]}{-f(t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\beta+1}{t} - \frac{\alpha^\beta \beta}{t^{\beta+1}} \right) = 0. \end{aligned}$$

■

Para analisar o comportamento da função taxa de falha, precisamos de sua derivada de primeira ordem, que é obtida do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
h'(t) &= \frac{f'(t)S(t) + [f(t)]^2}{[S(t)]^2} \quad (\text{pois } S'(t) = -f(t)) \\
&= \frac{f(t)t^{-\beta-1}[-(\beta+1)t^\beta + \alpha^\beta\beta]S(t) + [f(t)]^2}{[S(t)]^2} \\
&= \frac{f(t)}{S(t)} \left( \frac{t^{-\beta-1}[-(\beta+1)t^\beta + \alpha^\beta\beta]S(t) + f(t)}{S(t)} \right) \\
&= h(t) t^{-\beta-1} \left( -(\beta+1)t^\beta + \alpha^\beta\beta + \frac{\alpha^\beta\beta e^{-(\frac{\alpha}{t})^\beta}}{1 - e^{-(\frac{\alpha}{t})^\beta}} \right) \\
&= h(t) t^{-\beta-1} \left( -(\beta+1)t^\beta + \frac{\alpha^\beta\beta(1 - e^{-(\frac{\alpha}{t})^\beta}) + \alpha^\beta\beta e^{-(\frac{\alpha}{t})^\beta}}{1 - e^{-(\frac{\alpha}{t})^\beta}} \right) \\
&= h(t) t^{-\beta-1} \left( -(\beta+1)t^\beta + \frac{\alpha^\beta\beta}{1 - e^{-(\frac{\alpha}{t})^\beta}} \right).
\end{aligned}$$

Temos que a função taxa de falha tem forma unimodal e tem máximo em  $t = t_M$  dado pela solução da seguinte equação:

$$\frac{(\frac{\alpha}{t_M})^\beta}{1 - e^{-(\frac{\alpha}{t_M})^\beta}} = 1 + \frac{1}{\beta}.$$

Isto difere do modelo Weibull básico, em que a função taxa de falha é estritamente crescente (para  $\beta > 1$ ), estritamente decrescente (para  $\beta < 1$ ) ou constante (para  $\beta = 1$ ), conforme Exemplo 1.5 (considere  $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ ).

### 1.3.3 Momentos

Seja  $Y$  uma variável aleatória com distribuição Weibull inversa de parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , dada por (1.11). O  $k$ -ésimo momento de  $Y$  é descrito da seguinte forma:

$$E(Y^k) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k f(t) dt = \int_0^{\infty} \alpha^\beta \beta t^{(k-\beta-1)} e^{-(\frac{\alpha}{t})^\beta} dt.$$

Fazendo  $u = \alpha^\beta t^{-\beta}$ , temos as seguintes relações:  $du = -\alpha^\beta \beta t^{-\beta-1} dt$ ;  $u \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow 0$  e  $u \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ ;  $t^k = (t^{-\beta})^{-\frac{k}{\beta}} = (\frac{u}{\alpha^\beta})^{-\frac{k}{\beta}}$ . Desse modo, obtemos que

$$\begin{aligned}
E(Y^k) &= \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{\alpha^\beta}\right)^{-\frac{k}{\beta}} e^{-u} du = (\alpha^{-\beta})^{-\frac{k}{\beta}} \int_0^{\infty} u^{[(1-\frac{k}{\beta})-1]} e^{-u} du \\
&= \alpha^k \Gamma\left(1 - \frac{k}{\beta}\right).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Essa integral não tem valor definido para  $k \geq \beta$ .

### 1.3.4 Gráficos Modificados

Gráficos modificados têm sido utilizados como um método alternativo na representação geométrica de dados, segundo Murthy et al. [14]. A ideia é transformar os dados no intuito de linearizar a função de sobrevivência (ou a função de distribuição) do modelo proposto. Para isso, consideramos duas modificações de Nelson [15] e Drapella [6], chamadas *Weibull Probability Paper* (WPP) e *Inverse Weibull Probability Paper* (IWPP), as quais, neste estudo, nos referimos como gráfico-WPP e gráfico-IWPP, respectivamente. O objetivo aqui é discutir tais técnicas gráficas e apresentar um procedimento para estimação dos parâmetros de forma e escala da distribuição Weibull inversa (ou Weibull) baseado nesses métodos gráficos.

#### 1.3.4.1 O Gráfico-WPP

Gráficos-WPP podem ser construídos de várias maneiras. Uma delas é a apresentada por Nelson [15], que baseia-se na modificação dada por

$$y = \ln[-\ln(1 - F(t))] \quad \text{e} \quad x = \ln t. \quad (1.16)$$

Considerando o modelo Weibull básico (1.10), obtemos:

$$y = \ln[-\ln(1 - F(t))] = \ln[-\ln e^{-(\frac{t}{\alpha})^\beta}] = \ln \left( \frac{t}{\alpha} \right)^\beta = \beta \ln t - \beta \ln \alpha.$$

Assim, sendo  $x = \ln t$ , o modelo Weibull básico é representado pela relação linear

$$y = \beta x - \beta \ln \alpha.$$

O gráfico de  $y$  por  $x$  é chamado de *gráfico-WPP*. Note que a representação geométrica do gráfico-WPP é uma reta, com inclinação dada pelo parâmetro de forma  $\beta$  e que intercepta o eixo  $y$  em  $-\beta \ln \alpha$ .

Agora se aplicarmos a modificação (1.16) à distribuição Weibull inversa dada por (1.11), obtemos a seguinte relação:

$$y = \ln[-\ln(1 - e^{-z})], \quad (1.17)$$

onde

$$z = \left( \frac{\alpha}{t} \right)^\beta = e^{[\beta \ln \alpha - \beta x]}.$$

Note que  $y$  é uma função não-linear de  $x$ . Os teoremas a seguir dão dois resultados do gráfico-WPP para a distribuição Weibull Inversa.

**Teorema 1.7.** *O gráfico-WPP para a distribuição Weibull Inversa é côncavo para baixo.*

**Demonstração.** Basta mostrar que  $y''(x) < 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Derivando  $y(x)$ , obtemos

$$y'(x) = -\frac{\beta z e^{-z}}{(1 - e^{-z}) \ln(1 - e^{-z})}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Derivando novamente, obtemos

$$y''(x) = -\frac{\beta^2 z e^{-z} [(z + e^{-z} - 1) \ln(1 - e^{-z}) + z e^{-z}]}{[(1 - e^{-z}) \ln(1 - e^{-z})]^2} < 0,$$

pois

$$z + e^{-z} - 1 > 0. \quad (1.18)$$

Para provar a desigualdade (1.18), vamos considerar  $g$  como sendo a função definida por  $g(z) = z + e^{-z} - 1$ , onde  $z = z(x) = \alpha^\beta e^{-\beta x} > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Como  $g'(z) = 1 - e^{-z}$ , temos que  $g'(z) = 0$  se, e somente se,  $z = 0$ . Assim,  $g$  não possui ponto crítico. Além disso,  $z > 0$  implica que  $g'(z) = 1 - e^{-z} > 0$ , logo  $g$  é crescente para todo  $z > 0$  e, como  $g''(z) = e^{-z} > 0$ ,  $\forall z > 0$ , o gráfico de  $g$  é côncavo para cima. Portanto,  $g(z) > 0$ ,  $\forall z > 0$ . ■

**Teorema 1.8.** *O gráfico-WPP para a distribuição Weibull inversa satisfaz as seguintes condições:*

(i)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y}{-z} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln[-\ln(1 - e^{-z})]}{-z} = 1$ , ou seja, para  $t$  suficientemente pequeno (ou  $z$  suficientemente grande), temos

$$y = \ln[-\ln(1 - e^{-z})] \approx -z = -e^{-\beta(x - \ln \alpha)}.$$

(ii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y}{\ln(-\ln z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln[-\ln(1 - e^{-z})]}{\ln(-\ln z)} = 1$ , ou seja, para  $t$  suficientemente grande (ou  $z$  suficientemente pequeno), temos

$$y = \ln[-\ln(1 - e^{-z})] \approx \ln(-\ln z) = \ln[\beta(x - \ln \alpha)].$$

**Demonstração.**

(i) Aplicando a Regra de L'Hospital duas vezes, temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln[-\ln(1 - e^{-z})]}{-z} &= \lim_{z \rightarrow \infty} (-1) \frac{e^{-z}}{(1 - e^{-z}) \ln(1 - e^{-z})} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{e^{-z}}{e^{-z} [1 + \ln(1 - e^{-z})]} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \ln(1 - e^{-z})} = 1. \end{aligned}$$

(ii) Usando L'Hospital, obtemos:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - e^{-z})}{\ln(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{ze^{-z}}{1 - e^{-z}} = \lim_{z \rightarrow 0} (1 - z) = 1.$$

Conseqüentemente, para  $z$  suficientemente pequeno ( $z \rightarrow 0$ ), temos que

$$-\ln(1 - e^{-z}) \approx -\ln(z),$$

e pela continuidade da função logarítmica,

$$y = \ln[-\ln(1 - e^{-z})] \approx \ln[-\ln(z)].$$

■

Os Teoremas 1.7 e 1.8 determinam a forma do gráfico-WPP para a distribuição Weibull inversa. O primeiro mostra que sua concavidade é voltada para baixo e o segundo dá o comportamento da curva para valores assintóticos. Exemplos dos gráficos-WPP para os dois modelos são exibidos na Figura 1.3.

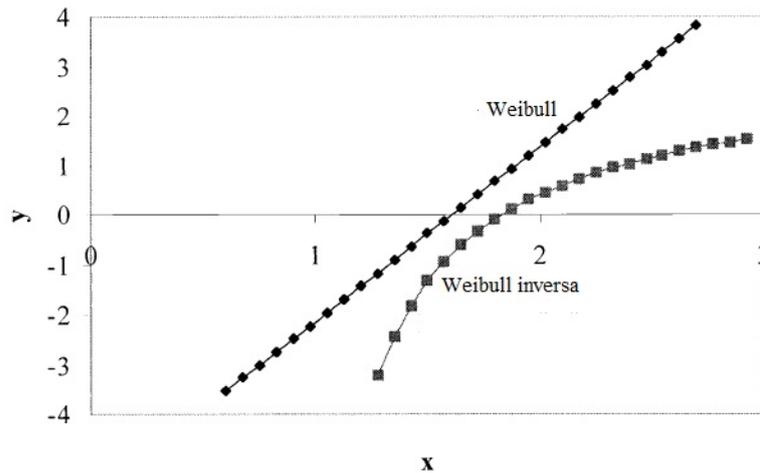


Figura 1.3: Gráficos WPP para Weibull e Weibull inversa para  $\alpha = 5$  e  $\beta = 3, 5$ .

### 1.3.4.2 O Gráfico-IWPP

Drapella [6] propôs a seguinte modificação:

$$y = -\ln[-\ln F(t)] \quad \text{e} \quad x = \ln t. \quad (1.19)$$

Considerando a distribuição Weibull inversa (1.11), obtemos:

$$y = -\ln[-\ln e^{-(\frac{\alpha}{t})^\beta}] = -\ln \left( \frac{\alpha}{t} \right)^\beta = -\beta \ln \alpha + \beta \ln t = \beta(\ln t - \ln \alpha).$$

Assim, sendo  $x = \ln t$ , a distribuição Weibull inversa (1.11) é representado pela reta de equação

$$y = \beta(x - \ln \alpha). \quad (1.20)$$

O gráfico de  $y$  por  $x$  é chamado de *gráfico-IWPP*. Observe que a representação geométrica do gráfico-IWPP é uma reta com inclinação dada pelo parâmetro  $\beta$  e que intercepta o eixo  $y$  em  $-\beta \ln \alpha$ .

Por outro lado, se aplicarmos a modificação (1.19) ao modelo Weibull básico (1.10), obtemos uma função não-linear dada por

$$y = -\ln[-\ln(1 - e^{-1/z})],$$

onde  $z = (\frac{\alpha}{t})^\beta$ . Isto difere do gráfico-WPP, que resulta em uma relação linear para o modelo Weibull básico.

Os teoremas a seguir dão dois resultados do gráfico-IWPP para o modelo Weibull básico. Para ambos os resultados, denotamos  $u = \frac{1}{z}$ , onde  $z = (\frac{\alpha}{t})^\beta$  e  $t = e^x$ .

**Teorema 1.9.** *O gráfico-IWPP para o modelo Weibull básico é côncavo para cima.*

*Demonstração.* Derivando  $y(x)$ , obtemos

$$y'(x) = -\frac{\beta z e^{-u}}{(1 - e^{-u}) \ln(1 - e^{-u})}.$$

Derivando novamente, segue que

$$y''(x) = \frac{\beta^2 u e^{-u} [(u + e^{-u} - 1) \ln(1 - e^{-u}) + u e^{-u}]}{[(1 - e^{-u}) \ln(1 - e^{-u})]^2} > 0.$$

pois  $u + e^{-u} - 1 > 0$  (ver (1.18)).

■

**Teorema 1.10.** *O gráfico-IWPP para a distribuição Weibull satisfaz as seguintes condições:*

$$(i) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y}{-\ln(-\ln u)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln[-\ln(1 - e^{-u})]}{\ln(-\ln u)} = 1, \text{ ou seja, para } t \text{ (ou } u \text{) suficientemente pequeno (} t \rightarrow 0 \text{ ou } u \rightarrow 0 \text{), temos}$$

$$y = -\ln[-\ln(1 - e^{-u})] \approx -\ln(-\ln u) = -\ln[-\beta(x - \ln \alpha)].$$

$$(ii) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{-\ln[-\ln(1 - e^{-u})]}{u} = 1, \text{ ou seja, para } t \text{ (ou } u \text{) suficientemente grande, temos}$$

$$y = -\ln[-\ln(1 - e^{-u})] \approx u = e^{\beta(x - \ln \alpha)}.$$

Demonstração.

- (i) Basta trocar  $z$  por  $u$  na demonstração do item (ii) do Teorema 1.8.
- (ii) Basta trocar  $z$  por  $u$  na demonstração do item (i) do Teorema 1.8.

■

Os Teoremas 1.9 e 1.10 determinam a forma do gráfico-IWPP para a distribuição Weibull. O primeiro mostra que sua concavidade é voltada para cima e o segundo exhibe o comportamento assintótico da curva. Exemplos dos gráficos-IWPP para os dois modelos podem ser vistos na Figura 1.4.

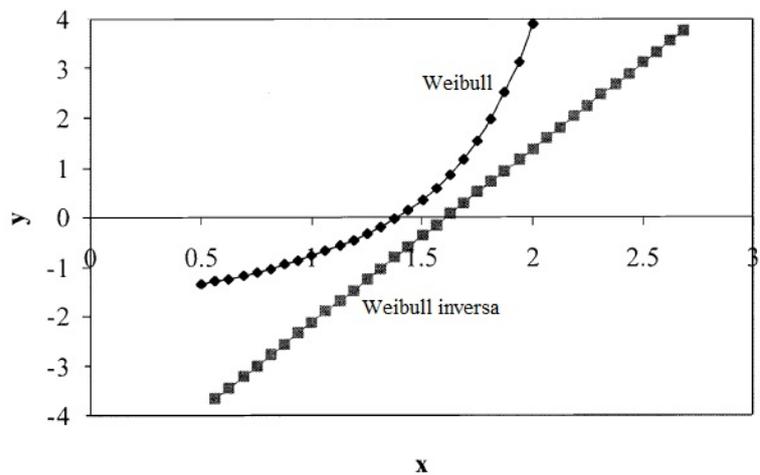


Figura 1.4: Gráficos IWPP para Weibull e Weibull inversa para  $\alpha = 5$  e  $\beta = 3, 5$ .

### 1.3.4.3 Comparação Entre os Gráficos WPP e IWPP e Estimação de Parâmetros

O gráfico-WPP para a Weibull inversa e o gráfico-IWPP para a Weibull são parecidos nas suas formas, embora um seja côncavo para baixo e o outro seja côncavo para cima (veja Teoremas 1.7 e 1.9). Comparando as Figuras 1.3 e 1.4, note que um é o “espelho” do outro.

A principal importância dos gráficos IWPP e WPP é que por meio deles é possível estimar os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  do modelo Weibull inversa ou Weibull. Ao representarmos geometricamente os pontos  $(x, y)$  dados pela relação (1.19), gráfico-IWPP (ou (1.16), gráfico-WPP) para um conjunto de dados observados de uma distribuição Weibull inversa (ou Weibull), os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  do modelo podem ser estimados ajustando uma reta via mínimos quadrados. O procedimento segue o seguinte roteiro:

1. Determine a reta que melhor se ajusta aos dados usando o método de mínimos quadrados (veja a Seção 1.1).
2. A inclinação desta reta dá o valor de  $\hat{\beta}$ , o estimador de mínimos quadrados de  $\beta$ .
3. O estimador de mínimos quadrados de  $\alpha$  é dado por  $\hat{\alpha} = e^{-y_0/\hat{\beta}}$ , onde  $y_0$  denota a ordenada do ponto de interseção da reta ajustada com o eixo  $y$ .

## 1.4 - Mistura de Distribuições e Identificabilidade

**Definição 1.11.** Sejam  $f_1, \dots, f_m$  funções de densidades e  $X$  uma variável aleatória com função densidade dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \pi_i f_i(x), \quad (1.21)$$

onde

$$0 \leq \pi_i \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^m \pi_i = 1.$$

Desta forma, dizemos que a distribuição de  $X$  é uma *mistura finita de distribuições*, e que  $f$  é uma *mistura finita de densidades*. Os valores  $\pi_1, \dots, \pi_m$  são chamados *pesos* ou *componentes de proporção* e, as funções,  $f_1, \dots, f_m$ , *densidades componentes da mistura*.

As densidades componentes de uma mistura não, necessariamente, pertencem todas a uma mesma família de distribuições. Se considerarmos uma mistura cujas densidades componentes pertencem a uma mesma família paramétrica  $\mathcal{F} = \{f(x; \theta) : \theta \in \Theta, x \in \mathbb{R}^p\}$ , onde  $\Theta$  é o espaço paramétrico correspondente, neste caso, a densidade (1.21) pode ser descrita da forma

$$f(x; \Psi) = \sum_{i=1}^m \pi_i f_i(x; \theta_i), \quad (1.22)$$

com  $\Psi = (\pi_1, \dots, \pi_{m-1}, \theta_1, \dots, \theta_m)$  denotando a coleção de todos os parâmetros da mistura.

**Definição 1.12.** Seja  $\mathcal{F} = \{f(x; \theta) : \theta \in \Theta, x \in \mathbb{R}^p\}$  uma família de densidades paramétricas. Dizemos que  $\mathcal{F}$  é *identificável* quando:

$$f(\cdot; \theta) = f(\cdot; \theta^*) \quad \text{se, e somente se,} \quad \theta = \theta^*.$$

Identificabilidade é uma propriedade do modelo e não de um estimador ou de alguma técnica de estimação. No entanto, se o modelo não é identificável, podemos ter dificuldades para fazer inferências. Este é um problema que ocorre, principalmente, quando se pretende estimar o parâmetro  $\theta$  baseado em observações independentes de uma variável aleatória com densidade  $f(\cdot; \theta)$ , por meio de técnicas de estimação via máxima verossimilhança. Veja o exemplo a seguir.

**Exemplo 1.13.** A família de distribuições binomiais dada por

$$\mathcal{F} = \left\{ p(x; \theta) = \binom{2}{x} \theta^x (1 - \theta)^{2-x} : x = 0, 1, 2 \text{ e } \theta \in (0, 1) \right\}$$

não é identificável, visto que  $p(1; \theta) = \binom{2}{1} \theta(1 - \theta) = p(1; 1 - \theta)$ , e  $\theta \neq 1 - \theta$  para  $\theta \neq \frac{1}{2}$ .

A identificabilidade para misturas de distribuições é definida um pouco diferente. Para perceber a razão desta diferença, considere a seguinte mistura de densidades de uma mesma família paramétrica,

$$f(x; \Psi) = \pi f_1(x; \theta_1) + (1 - \pi) f_2(x; \theta_2),$$

onde  $\Psi = (\pi, \theta_1, \theta_2)$ . Tomando  $\Psi^* = (1 - \pi, \theta_2, \theta_1)$ , note que  $f(x; \Psi) = f(x; \Psi^*)$  para  $\Psi \neq \Psi^*$ . De modo geral, se todas as  $m$  componentes da mistura pertencem a mesma família paramétrica, então  $f(x; \Psi)$  é invariante sob as  $m!$  permutações dos índices das componentes de  $\Psi$ . Este problema associado a identificabilidade de  $\Psi$  é conhecido na literatura como *label switching* e motiva a definição a seguir para misturas de densidades. Para mais detalhes, veja McLachlan [16].

**Definição 1.14.** Seja  $\mathcal{F} = \{f(x; \theta) : \theta \in \Theta, x \in \mathbb{R}^p\}$  uma família de densidades paramétricas. Definimos uma *classe de misturas finitas* de  $\mathcal{F}$  por

$$\mathcal{H} = \left\{ f(x; \Psi) : f(x; \Psi) = \sum_{i=1}^m \pi_i f_i(x; \theta_i), \pi_i > 0, \sum_{i=1}^m \pi_i = 1, x \in \mathbb{R}^p \text{ e} \right.$$

$$\left. f_i(\cdot; \theta_i) \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \dots, m, \forall m \in \mathbb{Z}^+ \right\},$$

com  $\Psi = (\pi_1, \dots, \pi_{m-1}, \theta_1, \dots, \theta_m)$ .

Se considerarmos uma família de funções de distribuição dada por  $\mathcal{F} = \{F(x; \theta) : \theta \in \Theta, x \in \mathbb{R}^p\}$ , uma mistura de  $F_1, \dots, F_m \in \mathcal{F}$  pode ser descrita como:

$$F(x, \Psi) = \sum_{i=1}^m \pi_i F_i(x; \theta_i).$$

Neste caso, a classe de misturas finitas de  $\mathcal{F}$  é dada por

$$\mathcal{H} = \left\{ F(x, \Psi) : F(x; \Psi) = \sum_{i=1}^m \pi_i F_i(x; \theta_i), \pi_i > 0, \sum_{i=1}^m \pi_i = 1, x \in \mathbb{R}^p \text{ e} \right. \\ \left. F_i(\cdot; \theta_i) \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \dots, m, \forall m \in \mathbb{Z}^+ \right\}.$$

**Definição 1.15.** Sejam

$$f(x; \Psi) = \sum_{i=1}^m \pi_i f_i(x; \theta_i) \quad \text{e} \quad f(x; \Psi^*) = \sum_{i=1}^{m^*} \pi_i^* f_i(x; \theta_i^*)$$

dois membros quaisquer de uma classe  $\mathcal{H}$  de misturas finitas de  $\mathcal{F}$ . Dizemos que  $\mathcal{H}$  é identificável em relação a  $\Psi$  se

$$f(\cdot; \Psi) \equiv f(\cdot; \Psi^*)$$

se, e somente se,  $m = m^*$  e podemos permutar os índices das componentes da mistura tais que

$$\pi_i = \pi_i^* \quad \text{e} \quad f_i(x; \theta_i) = f_i(x; \theta_i^*), \quad i = 1, \dots, m;$$

em que  $\equiv$  implica a igualdade das densidades para quase todo  $x$  relativo a uma medida em  $\mathbb{R}^p$ . De modo equivalente, dizemos que  $\mathcal{H}$  é identificável em relação a  $\Psi$  se

$$F(\cdot; \Psi) \equiv F(\cdot; \Psi^*)$$

se, e somente se,  $m = m^*$  e podemos permutar os índices das componentes da mistura tais que

$$\pi_i = \pi_i^* \quad \text{e} \quad F_i(x; \theta_i) = F_i(x; \theta_i^*), \quad i = 1, \dots, m;$$

sendo  $F(x; \Psi)$  uma função de distribuição relativa a densidade  $f(x; \Psi)$ .

Do Exemplo 1.13, temos que a classe de misturas de distribuição binomial de vetor de parâmetros  $(2, \theta)$  não é identificável.

Uma condição necessária e suficiente para que uma classe de misturas finitas de distribuições de  $\mathcal{F} = \{F(x, \theta) : \theta \in \Theta, x \in \mathbb{R}^p\}$  seja identificável é que este conjunto seja linearmente independente sobre o corpo dos números reais. Para mais detalhes, veja Yakowitz e Spragins [19]. Vamos utilizar este resultado para provar a caracterização a seguir, de Chandra [4], que fornece condições suficientes para a identificabilidade de uma classe de misturas finitas de distribuições. Tal caracterização será usada na Seção 2.3.4 para mostrar a identificabilidade de uma classe de misturas de distribuições Weibull inversa de parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ .

Para facilitar a notação, daqui até o final desta seção, utilizamos o símbolo  $F_i$  ao invés de  $F_i(x; \theta_i)$ .

**Teorema 1.16.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma família de distribuições. Suponha que para cada  $F_i \in \mathcal{F}$  existe uma transformação  $\phi_i$  com domínio  $D_{\phi_i}$  tal que a aplicação  $M : F_i \mapsto \phi_i$  é linear. Suponha também que exista uma relação de ordem total em  $\mathcal{F}$ , denotada por  $\prec$ , que satisfaz as seguintes condições:*

(i)  $F_1 \prec F_2$  ( $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ) implica  $D_{\phi_1} \subseteq D_{\phi_2}$ ;

(ii) para cada  $F_1 \in \mathcal{F}$ , existe algum  $t_1$  no fecho de  $T_1 = \{t : \phi_1(t) \neq 0\}$  tal que

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_1 \\ t \in T_1}} \frac{\phi_2(t)}{\phi_1(t)} = 0 \text{ para } F_1 \prec F_2 \text{ } (F_1, F_2 \in \mathcal{F}).$$

Então, a classe de misturas finitas de distribuições de  $\mathcal{F}$  é identificável.

*Demonstração.* Vamos mostrar que  $\mathcal{F}$  é linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$ . Isto equivale a provar que todo subconjunto finito de  $\mathcal{F}$  é linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$ .

Para cada  $i = 1, \dots, m$ , sejam  $c_i \in \mathbb{R}$  e  $F_i \in \mathcal{F}$  tais que

$$\sum_{i=1}^m c_i F_i = 0. \quad (1.23)$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $F_i \prec F_j$  para  $i < j$ . Aplicando a transformação linear  $M$  a ambos os membros de (1.23), segue que

$$\sum_{i=1}^m c_i \phi_i(t) = 0.$$

Assim, para cada  $t \in \{t \in D_{\phi_1} : \phi_1(t) \neq 0\}$  (um conjunto não-vazio por definição), podemos dividir a igualdade anterior por  $\phi_1(t)$ , e fazendo  $t \rightarrow t_1$  obtemos

$$c_1 + \sum_{i=2}^m c_i \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{\phi_i(t)}{\phi_1(t)} = 0.$$

Como  $F_1 \prec F_i$ ,  $\forall i = 2, \dots, m$ , então, pelo item (ii), temos que  $\lim_{t \rightarrow t_1} \frac{\phi_i(t)}{\phi_1(t)} = 0$ ,  $\forall i = 2, \dots, m$ . Logo  $c_1 = 0$  e, desse modo, podemos reescrever a soma em (1.23):

$$\sum_{i=2}^m c_i F_i = 0.$$

Repetindo o raciocínio acima, obtemos  $c_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Logo  $\mathcal{F}$  é linearmente independente sobre  $\mathbb{R}$  e portanto a classe de misturas de distribuições de  $\mathcal{F}$  é identificável. ■

O resultado a seguir, de Atienza et al. [1], dá condições suficientes para a identificabilidade de uma classe de misturas finitas de distribuições de uma mesma família paramétrica. Neste contexto, vamos denotar  $A'$  como sendo o conjunto dos pontos de acumulação de  $A \subset \mathbb{R}^p$ .

**Teorema 1.17.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma família de distribuições. Seja  $M$  uma aplicação linear que transforma qualquer  $F \in \mathcal{F}$  numa função real  $\phi_F$  com domínio  $S(F) \subset \mathbb{R}^p$ . Seja  $S_0(F) = \{t \in S(F) : \phi_F(t) \neq 0\}$ . Suponha que exista uma ordem total  $\prec$  em  $\mathcal{F}$  tal que, para qualquer  $F \in \mathcal{F}$ , existe  $t(F) \in S_0(F)'$  satisfazendo*

(i) *Se  $F_1, F_2, \dots, F_n \in \mathcal{F}$  com  $F_1 \prec F_i$  para  $2 \leq i \leq n$ , então*

$$t(F_1) \in [S_0(F_1) \cap [\cap_{i=2}^n S(F_i)]]'.$$

(ii) *Se  $F_1 \prec F_2$ , então  $\lim_{t \rightarrow t(F_1)} \frac{\phi_{F_2}(t)}{\phi_{F_1}(t)} = 0$ .*

Então, a classe de todas as misturas finitas de distribuições de  $\mathcal{F}$  é identificável.

**Demonstração.** Vamos supor que

$$\sum_{i=1}^m \pi_i F_i = \sum_{j=1}^{m^*} \pi_j^* F_j^*, \quad (1.24)$$

onde  $\pi_i, \pi_j^* > 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, m^*$ , tal que  $\sum_{i=1}^m \pi_i = 1 = \sum_{j=1}^{m^*} \pi_j^*$  e  $F_1, \dots, F_m, F_1^*, \dots, F_{m^*}^* \in \mathcal{F}$ . Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $m \leq m^*$ ,  $F_i \prec F_j, F_i^* \prec F_j^*$  para  $i < j$  e  $F_1 \preceq F_1^*$ . Temos que  $F_1 \preceq F_1^*$  e  $F_1^* \prec F_j^*, \forall j = 2, \dots, m^*$  e assim  $F_1 \prec F_j^*, \forall j = 2, \dots, m^*$ , por transitividade da ordem total  $\prec$  sobre  $\mathcal{F}$ . Temos também que  $F_1 \prec F_i, \forall i = 2, \dots, m$ . Se denotarmos

$$A = S_0(F_1) \cap [\cap_{i=2}^m S(F_i)] \cap [\cap_{i=1}^{m^*} S(F_i^*)]$$

então, pelo item (i), existe  $t(F_1) \in A'$ . Aplicando  $M$  a ambos os membros da equação (1.24), pela linearidade obtemos, para qualquer  $t \in A$ , que

$$\sum_{i=1}^m \pi_i \phi_{F_i}(t) = \sum_{j=1}^{m^*} \pi_j^* \phi_{F_j^*}(t).$$

Como  $t \in S_0(F_1)$ , podemos dividir a igualdade anterior por  $\phi_{F_1}(t)$ . Fazendo  $t \rightarrow t(F_1)$ , obtemos

$$\sum_{i=1}^m \pi_i \lim_{t \rightarrow t(F_1)} \frac{\phi_{F_i}(t)}{\phi_{F_1}(t)} = \sum_{j=1}^{m^*} \pi_j^* \lim_{t \rightarrow t(F_1)} \frac{\phi_{F_j^*}(t)}{\phi_{F_1}(t)}.$$

Equivalentemente,

$$\pi_1 + \sum_{i=2}^m \pi_i \lim_{t \rightarrow t(F_1)} \frac{\phi_{F_i}(t)}{\phi_{F_1}(t)} = \pi_1^* \lim_{t \rightarrow t(F_1)} \frac{\phi_{F_1^*}(t)}{\phi_{F_1}(t)} + \sum_{j=2}^{m^*} \pi_j^* \lim_{t \rightarrow t(F_1)} \frac{\phi_{F_j^*}(t)}{\phi_{F_1}(t)}.$$

Como  $F_1 \prec F_i$ ,  $\forall i = 2, \dots, m$  e  $F_1 \prec F_j^*$ ,  $\forall j = 2, \dots, m^*$ , pelo item (ii) segue que

$$\lim_{t \rightarrow t(F_1)} \frac{\phi_{F_i}(t)}{\phi_{F_1}(t)} = 0, \quad \forall i = 2, \dots, m \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow t(F_1)} \frac{\phi_{F_j^*}(t)}{\phi_{F_1}(t)} = 0, \quad \forall j = 2, \dots, m^*.$$

Assim,

$$\pi_1 = \pi_1^* \lim_{t \rightarrow t(F_1)} \frac{\phi_{F_1^*}(t)}{\phi_{F_1}(t)}.$$

Temos, por hipótese, que  $F_1 \preceq F_1^*$ , no entanto, se  $F_1 \prec F_1^*$  então  $\pi_1 = 0$ , o que é um absurdo. Logo  $F_1 = F_1^*$  e assim  $\pi_1 = \pi_1^*$ . Os termos correspondentes em (1.24) são cancelados. Seguindo este raciocínio, obtemos  $\pi_i = \pi_i^*$  e  $F_i = F_i^*$  para  $i = 1, 2, \dots, \min(m, m^*)$ .

Resta provar que  $m = m^*$ . Se  $m^* > m$  então  $\min(m, m^*) = m$  implica que  $\pi_i = \pi_i^*$  e  $F_i = F_i^*$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ . Cancelando os termos correspondentes nas somas em (1.24), obtemos  $\sum_{j=m+1}^{m^*} \pi_j^* F_j^* = 0$  e desse modo  $\pi_j^* = 0$  para  $j = m+1, \dots, m^*$ , o que é uma contradição. Logo  $m = m^*$ , e a classe de misturas finitas de  $\mathcal{F}$  é identificável. ■

Nos casos em que  $t(F) = t_0$  não depende de  $F \in \mathcal{F}$ , é possível simplificar as hipóteses do Teorema 1.17. Veja o corolário a seguir.

**Corolário 1.18.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma família de distribuições. Seja  $M$  uma aplicação linear que transforma qualquer  $F \in \mathcal{F}$  numa função real  $\phi_F$  com domínio  $S(F) \subset \mathbb{R}^p$ . Seja  $S_0(F) = \{t \in S(F) : \phi_F(t) \neq 0\}$  e suponha que exista um ponto  $t_0$  satisfazendo*

$$t_0 \in \left[ \bigcap_{1 \leq i \leq k} S_0(F_i) \right]' \quad (1.25)$$

para qualquer coleção finita de distribuições  $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{F}$ . Se a ordem

$$F_1 \prec F_2 \text{ se, e somente se, } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\phi_{F_2}(t)}{\phi_{F_1}(t)} = 0 \quad (1.26)$$

é uma ordem total sobre  $\mathcal{F}$ , então a classe de todas as misturas finitas de  $\mathcal{F}$  é identificável.

Para finalizar esta seção, utilizamos a caracterização de identificabilidade provada acima para mostrar que a classe de misturas de distribuições Weibull com dois parâmetros é identificável.

**Proposição 1.19.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma família de distribuições Weibull dada por*

$$\mathcal{F} = \left\{ F : F(x; \alpha, \beta) = \int_0^x \frac{\alpha}{\beta} u^{\alpha-1} e^{-\frac{u^\alpha}{\beta}} du : \alpha, \beta > 0 \text{ e } x > 0 \right\}.$$

*Então a classe de misturas de  $\mathcal{F}$  é identificável.*

**Demonstração.** Seja  $M$  uma aplicação que transforma uma função de distribuição  $F \in \mathcal{F}$  em uma função geradora de momentos de  $\log X$ , onde  $X$  é uma variável aleatória com distribuição Weibull( $\alpha, \beta$ ). Temos que  $M$  é linear, pela linearidade da esperança, e para qualquer  $F \in \mathcal{F}$ :

$$\begin{aligned} M[F(x; \alpha, \beta)] &= \phi_F(t) = E(e^{t \log X}) = E(X^t) = \int_0^\infty x^t \frac{\alpha}{\beta} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x^\alpha}{\beta}} dx \\ &= \int_0^\infty (\beta u)^{\frac{t}{\alpha}} e^{-u} du = \beta^{\frac{t}{\alpha}} \int_0^\infty u^{\frac{t}{\alpha}} e^{-u} du \\ &= \beta^{\frac{t}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{t}{\alpha} + 1\right), \quad t \in (-\alpha, +\infty), \end{aligned}$$

onde  $\Gamma(r) = \int_0^\infty y^{r-1} e^{-y} dy$  é a função gama. Como  $\phi_F(t) \neq 0$  para todo  $t \in S(F) = (-\alpha, +\infty)$ , temos que  $S_0(F) = (-\alpha, +\infty)$ . Neste caso, dados  $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{F}$ , obtemos

$$\left[ \bigcap_{1 \leq i \leq k} S_0(F_i) \right]' = \left[ \bigcap_{1 \leq i \leq k} (-\alpha_i, +\infty) \right]' = [(-\tilde{\alpha}, +\infty)]' = [-\tilde{\alpha}, +\infty),$$

onde  $\tilde{\alpha} = \min\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ .

Pela fórmula de Stirling, a qual estabelece que  $\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi z} z^z e^{-z}$  para  $z \rightarrow +\infty$ , segue que, para  $t$  suficientemente grande,

$$\phi_F(t) \sim \beta^{\frac{t}{\alpha}} \sqrt{2\pi \frac{t}{\alpha}} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\frac{t}{\alpha}} e^{-\frac{t}{\alpha}}.$$

Assim, dados  $F_1 = F_1(\cdot; \alpha_1, \beta_1) \in \mathcal{F}$  e  $F_2 = F_2(\cdot; \alpha_2, \beta_2) \in \mathcal{F}$ , temos, para  $t$  suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{F_2}(t)}{\phi_{F_1}(t)} &\sim \frac{\beta_2^{\frac{t}{\alpha_2}} \sqrt{2\pi \frac{t}{\alpha_2}} \left(\frac{t}{\alpha_2}\right)^{\frac{t}{\alpha_2}} e^{-\frac{t}{\alpha_2}}}{\beta_1^{\frac{t}{\alpha_1}} \sqrt{2\pi \frac{t}{\alpha_1}} \left(\frac{t}{\alpha_1}\right)^{\frac{t}{\alpha_1}} e^{-\frac{t}{\alpha_1}}} \\ &= \left(\frac{\beta_2^{\frac{1}{\alpha_2}}}{\beta_1^{\frac{1}{\alpha_1}}}\right)^t \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \frac{\alpha_1^{\frac{t}{\alpha_1}}}{\alpha_2^{\frac{t}{\alpha_2}}} e^{\left(-(\alpha_1 - \alpha_2) \frac{t}{\alpha_1 \alpha_2}\right)} t^{\left(\frac{t(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1 \alpha_2}\right)} \end{aligned}$$

Aplicando o limite para  $t \rightarrow +\infty$ , segue que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\phi_{F_2}(t)}{\phi_{F_1}(t)} = 0$$

se, e somente se,

$$[\alpha_1 < \alpha_2] \text{ ou } [\alpha_1 = \alpha_2, \beta_2 < \beta_1]. \quad (1.27)$$

Mas,  $F_1 \prec F_2$  se, e somente se, (1.27), logo pelo Corolário 1.18, a classe de misturas de distribuições Weibull( $\alpha, \beta$ ) é identificável.

■

# Análise de Duas Distribuições Weibull Inversa

Diversos modelos de distribuições Weibull têm sido estudados nas últimas décadas. Muitos desses são analisados em Murthy et al. [14], que é um livro inteiramente dedicado aos modelos Weibull. Ele reúne resultados discutidos em vários trabalhos publicados até o início dos anos 2000 como, por exemplo, Jiang et al. [10] e Jiang e Murthy [9].

Dentre os inúmeros modelos envolvendo a distribuição Weibull, temos os modelos de risco, o multiplicativo e o de mistura. Esses modelos são analisados neste capítulo nas Seções 2.1, 2.2 e 2.3, respectivamente, onde consideramos duas subpopulações que seguem uma distribuição Weibull inversa. O foco principal dessas seções é estudar as funções densidade e taxa de falha dos modelos mencionados, além de apresentar algumas propriedades envolvendo o gráfico-IWPP e um procedimento de estimação baseado nesse método gráfico. Na Seção 2.3, provamos ainda a identificabilidade de uma classe de misturas finitas de distribuições Weibull inversa.

## 2.1 - Modelo de Risco

Sejam  $T_1, \dots, T_n$  variáveis aleatórias independentes, sendo  $F_1(t), \dots, F_n(t)$  as respectivas funções de distribuição. Se  $Z = \min\{T_1, \dots, T_n\}$ , então a sua função de distribuição é dada por

$$\begin{aligned} F(t) &= P(Z \leq t) = P(Z > t)^C = 1 - P(\min\{T_1, \dots, T_n\} > t) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n (T_i > t)\right) = 1 - \prod_{i=1}^n P(T_i > t) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_i(t)]. \end{aligned}$$

Este modelo é conhecido como *modelo de risco*. Outras terminologias também são utilizadas na literatura, como, por exemplo, modelo composto, modelo de sistema em série e modelo multirrisco. Este modelo tem recebido considerável atenção na literatura e tem sido estudado há bastante tempo. No contexto da análise de confiabilidade, o modelo pode ser considerado como um sistema de  $n$  componentes em série, sendo  $T_i$  o tempo de vida da componente  $i$  e  $Z$  o do sistema. O sistema falha no primeiro instante que uma componente falha. Para mais detalhes, veja Nelson [15].

O modelo de risco é caracterizado por  $n$ , o número de subpopulações, e a forma da função de distribuição para cada uma das subpopulações. Alguns casos especiais do modelo são detalhados por Murthy et al. [14]. Um desses, pode ser visto considerando duas subpopulações que seguem uma distribuição Weibull inversa. Neste caso, o modelo assume a seguinte forma:

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) - F_1(t)F_2(t), \quad (2.1)$$

onde  $F_i(t) = e^{-\left(\frac{\alpha_i}{t}\right)^{\beta_i}}$ ,  $i = 1, 2$ . Note que podemos ter  $F_1(t) \equiv F_2(t)$ . Consequentemente, podemos assumir sem perda de generalidade que  $\beta_1 \leq \beta_2$  e  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  quando  $\beta_1 = \beta_2$ .

Seguindo os estudos de Jiang et al. [10], fazemos uma análise do modelo apresentando as funções densidade e taxa de falha, além de um estudo gráfico para obter estimativas de seus parâmetros.

### 2.1.1 Função Densidade e Função Taxa de Falha

Derivando a equação (2.1), obtemos a função densidade para o modelo de risco:

$$f(t) = f_1(t)[1 - F_2(t)] + f_2(t)[1 - F_1(t)].$$

Como a função densidade para cada subpopulação é unimodal (veja a Seção 1.3.1), a função densidade para o modelo de risco pode ser unimodal ou bimodal, conforme é ilustrado na Figura 2.1.

A função taxa de falha  $h(t)$  é dada por

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f_1(t)[1 - F_2(t)] + f_2(t)[1 - F_1(t)]}{[1 - F_1(t)][1 - F_2(t)]} = \frac{f_1(t)}{1 - F_1(t)} + \frac{f_2(t)}{1 - F_2(t)} \\ &= h_1(t) + h_2(t). \end{aligned}$$

Como  $h_1(t)$  e  $h_2(t)$  têm forma unimodal (veja a Seção 1.3.2), a função taxa de falha para o modelo de risco pode ser unimodal ou bimodal, conforme é ilustrado na Figura 2.2.

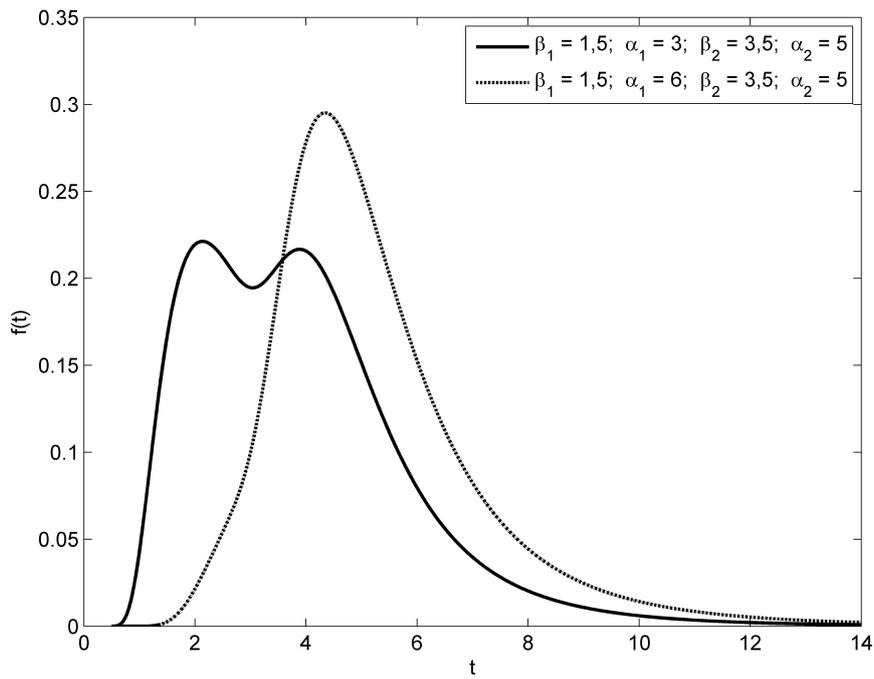


Figura 2.1: Função densidade para o modelo de risco.

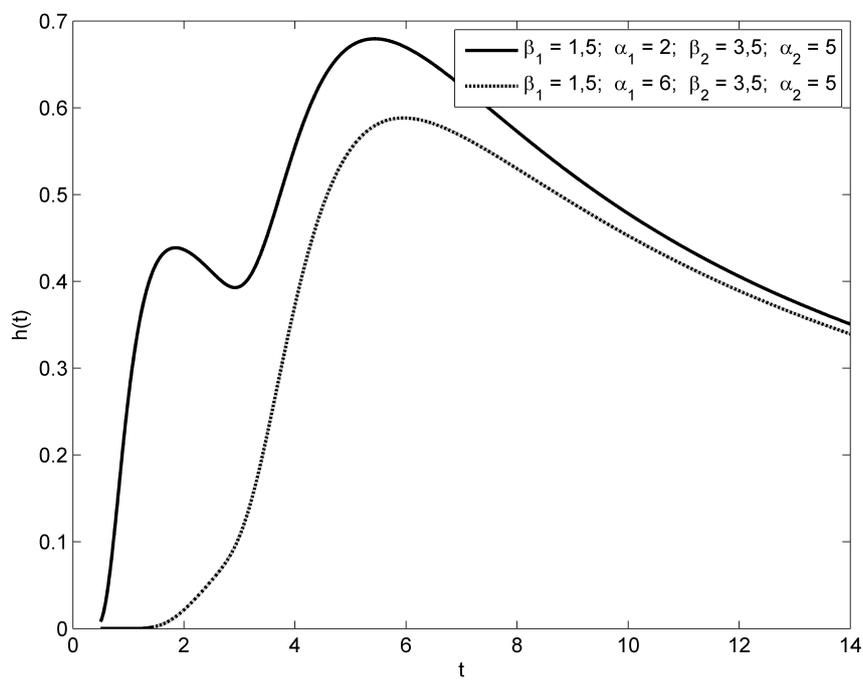


Figura 2.2: Função taxa de falha para o modelo de risco.

### 2.1.2 Gráfico Modificado - IWPP

Considerando a modificação (1.19), temos:

$$y(t) = -\ln[-\ln F(t)] = -\ln[-\ln(F_1(t) + F_2(t) - F_1(t)F_2(t))],$$

que representa uma curva  $C$  no plano x-y, chamada *gráfico-IWPP para o modelo de risco*. Nos resultados a seguir fazemos um estudo assintótico de  $F(t)$  para determinar as assíntotas da curva  $C$  do gráfico-IWPP.

O lema a seguir é utilizado na análise assintótica da curva  $C$ .

**Lema 2.1.** *Se (i)  $\beta_1 < \beta_2$  ou (ii)  $\beta_1 = \beta_2 (= \beta)$  e  $\alpha_1 < \alpha_2$ , temos que as funções  $F_i(t) = e^{-z_i}$ , onde  $z_i = z_i(t) = \left(\frac{\alpha_i}{t}\right)^{\beta_i}$ ,  $i = 1, 2$ , definidas para  $t > 0$ , satisfazem*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_2(t)}{F_1(t)} = 0.$$

*Demonstração.*

(i) Como  $\beta_1 < \beta_2$ , logo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_2(t)}{F_1(t)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-z_2}}{e^{-z_1}} = \lim_{t \rightarrow 0} \exp \left[ \left( \frac{\alpha_1}{t} \right)^{\beta_1} - \left( \frac{\alpha_2}{t} \right)^{\beta_2} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \exp \left[ \left( \frac{1}{t} \right)^{\beta_1} \left( \alpha_1^{\beta_1} - \frac{\alpha_2^{\beta_2}}{t^{\beta_2 - \beta_1}} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

(ii) Sendo  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ , segue que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_2(t)}{F_1(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{z_1 - z_2} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{\alpha_1^\beta - \alpha_2^\beta}{t^\beta}} = 0,$$

pois  $\alpha_1 < \alpha_2$ . ■

**Teorema 2.2.** *A função de distribuição para o modelo de risco,  $F(t)$ , satisfaz:*

$$(i) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{F_1(t)} = 1. \quad (2.2)$$

$$(ii) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{1 - z_1 z_2} = 1 \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 - z_1 z_2)}{-z_1 z_2} = 1, \quad (2.3)$$

onde  $z_i = z_i(t) = \left(\frac{\alpha_i}{t}\right)^{\beta_i}$ ,  $i = 1, 2$ .

*Demonstração.*

(i) Do Lema 2.1 e usando o fato que  $F_2(t) = e^{-(\frac{\alpha_2}{t})^{\beta_2}} \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow 0$ , obtemos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{F_1(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{F_2(t)}{F_1(t)} - F_2(t) \right) = 1.$$

$$(ii) \quad \bullet \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{1 - z_1 z_2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F_1(t) + F_2(t) - F_1(t)F_2(t)}{1 - \left(\frac{\alpha_1}{t}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\alpha_2}{t}\right)^{\beta_2}} = 1.$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 - z_1 z_2)}{-z_1 z_2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - z)}{-z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1 - z} = 1.$$

■

O Teorema 2.2 nos permite obter as assíntotas da curva  $C$  do gráfico-IWPP para o modelo de risco. Vejamos como obtê-las.

- Para  $t$  suficientemente pequeno ( $t \rightarrow 0$ ), de (2.2), temos que

$$y(t) = -\ln[-\ln F(t)] \approx -\ln[-\ln F_1(t)] = \beta_1(\ln t - \ln \alpha_1).$$

Com  $x = \ln t$ , segue que, para  $x$  suficientemente grande:

$$y(x) \approx \beta_1(x - \ln \alpha_1).$$

- Para  $t$  suficientemente grande, de (2.3), temos que

$$\begin{aligned} y(t) &= -\ln[-\ln F(t)] \approx -\ln(z_1 z_2) = \beta_1(\ln t - \ln \alpha_1) + \beta_2(\ln t - \ln \alpha_2) \\ &= (\beta_1 + \beta_2) \ln t - (\beta_1 \ln \alpha_1 + \beta_2 \ln \alpha_2) \\ &= (\beta_1 + \beta_2) \left( \ln t - \frac{\beta_1 \ln \alpha_1 + \beta_2 \ln \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2} \right). \end{aligned}$$

Com  $x = \ln t$ , segue que, para  $x$  suficientemente grande:

$$y(x) \approx (\beta_1 + \beta_2) \left( x - \frac{\beta_1 \ln \alpha_1 + \beta_2 \ln \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2} \right).$$

Sendo assim, as assíntotas esquerda e direita da curva  $C$  são dadas, respectivamente, por

$$L_E : y = \beta_1(x - \ln \alpha_1),$$

o gráfico-IWPP para a subpopulação  $F_1$ , e

$$L_D : y = (\beta_1 + \beta_2) \left( x - \frac{\beta_1 \ln \alpha_1 + \beta_2 \ln \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2} \right). \quad (2.4)$$

Neste caso, como o coeficiente angular da reta  $L_E$  é menor que o da reta  $L_D$ , logo elas se interseptam em um ponto  $I$ , e este é dado por

$$I = \left( \ln \alpha_2, \beta_1 \ln \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \right).$$

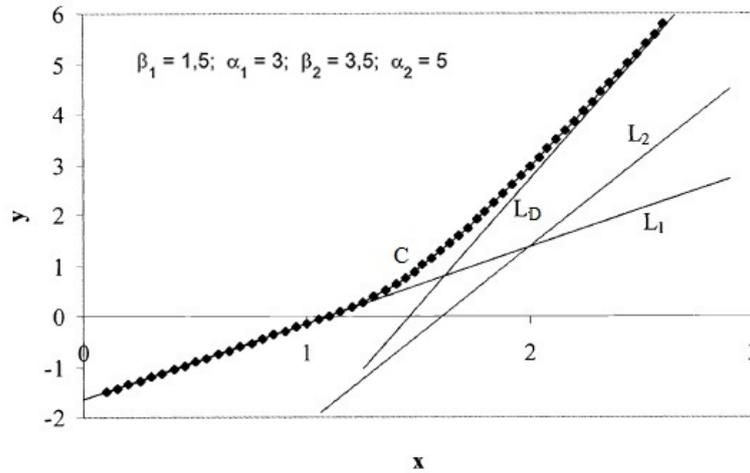


Figura 2.3: Gráfico-IWPP para o modelo de risco.

A Figura 2.3 mostra a curva  $C$  do gráfico-IWPP e suas assíntotas para determinados valores dos parâmetros do modelo.

O que acabamos de ver é usado na estimação dos parâmetros do modelo de risco, e isto é feito por meio das seguintes etapas:

1. A partir do ajuste da assíntota esquerda, obtenha os estimadores de mínimos quadrados de  $\beta_1$  e  $\alpha_1$ .
2. Ajuste a assíntota direita e utilize sua inclinação e intersepto em (2.4) para obter os estimadores de mínimos quadrados de  $\beta_2$  e  $\alpha_2$ .
3. Determine as coordenadas do ponto de interseção das duas assíntotas. Verifique se elas estão próximas à

$$\left( \ln \alpha_2, \beta_1 \ln \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \right),$$

que são calculadas utilizando os valores estimados.

## 2.2 - Modelo Multiplicativo

Sejam  $T_1, \dots, T_n$  variáveis aleatórias independentes, sendo  $F_1(t), \dots, F_n(t)$  as respectivas funções de distribuição associadas. Se  $W = \max\{T_1, \dots, T_n\}$ , então a sua função de distribuição é dada por

$$F(t) = P(W \leq t) = P\left(\bigcap_{i=1}^n (T_i \leq t)\right) = \prod_{i=1}^n F_i(t).$$

Este modelo é conhecido como *modelo multiplicativo* e, apesar dele não ter se destacado tanto quanto o modelo de risco, como observado por Murthy et al. [14], tem

sido aplicado na literatura de confiabilidade, tendo surgido no contexto da modelagem de um sistema em paralelo com componentes independentes. Um sistema pode ser, por exemplo, um organismo ou um dispositivo mecânico, e é dito paralelo quando a sua falha está condicionada à falha de todas as suas partes. Para mais detalhes, veja Elandt-Johnson e Johnson [7].

O modelo multiplicativo é caracterizado por  $n$ , o número de subpopulações, e a forma da função de distribuição para cada uma das subpopulações. Alguns casos especiais do modelo é detalhado por Murthy et al. [14]. Um destes, pode ser visto considerando duas subpopulações que seguem uma distribuição Weibull inversa. Neste caso, o modelo assume a seguinte forma:

$$F(t) = F_1(t)F_2(t), \quad (2.5)$$

onde  $F_i(t) = e^{-\left(\frac{\alpha_i}{t}\right)^{\beta_i}}$ ,  $i = 1, 2$ . Se  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ , então as subpopulações  $F_1(t)$  e  $F_2(t)$  podem ser incorporadas em uma única subpopulação  $F(t)$  com parâmetro de forma  $\beta$  e parâmetro de escala  $(\alpha_1^\beta + \alpha_2^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ . A distribuição  $F(t)$  é dada então por:

$$F(t) = F_1(t)F_2(t) = e^{-\left(\frac{\alpha_1}{t}\right)^\beta} e^{-\left(\frac{\alpha_2}{t}\right)^\beta} = e^{-\left(\frac{\alpha_1^\beta + \alpha_2^\beta}{t^\beta}\right)} = e^{-\left[\frac{(\alpha_1^\beta + \alpha_2^\beta)^{\frac{1}{\beta}}}{t}\right]^\beta}.$$

Neste caso, o modelo se reduz a uma simples distribuição Weibull inversa. Conseqüentemente, sem perda de generalidade, podemos considerar  $\beta_1 < \beta_2$ .

Seguindo os estudos de Jiang et al. [10], fazemos uma análise do modelo, apresentando as suas funções densidade e taxa de falha, além de um gráfico que permite obter estimativas de seus parâmetros.

### 2.2.1 Função Densidade e Função Taxa de Falha

Derivando a equação (2.5), temos a função densidade para o modelo multiplicativo:

$$f(t) = f_1(t)F_2(t) + f_2(t)F_1(t).$$

Neste caso, a função densidade é unimodal, como é ilustrado na Figura 2.4, sendo  $\beta_1 = 1, 5$ ;  $\alpha_1 = 3$ ;  $\beta_2 = 3, 5$ ;  $\alpha_2 = 5$ .

A função taxa de falha é dada por

$$h(t) = \frac{f_1(t)F_2(t) + f_2(t)F_1(t)}{1 - F_1(t)F_2(t)} = \frac{f_1(t)}{1 - F_1(t)} \frac{F_2(t)(1 - F_2(t))}{1 - F_1(t)F_2(t)} + \frac{f_2(t)}{1 - F_1(t)} \frac{F_1(t)(1 - F_2(t))}{1 - F_1(t)F_2(t)},$$

para  $t > 0$ . Denotando

$$p(t) = \frac{F_2(t)(1 - F_1(t))}{1 - F_1(t)F_2(t)}, \quad q(t) = \frac{F_1(t)(1 - F_2(t))}{1 - F_1(t)F_2(t)} \quad \text{e} \quad h_i(t) = \frac{f_i(t)}{1 - F_i(t)}, \quad i = 1, 2,$$

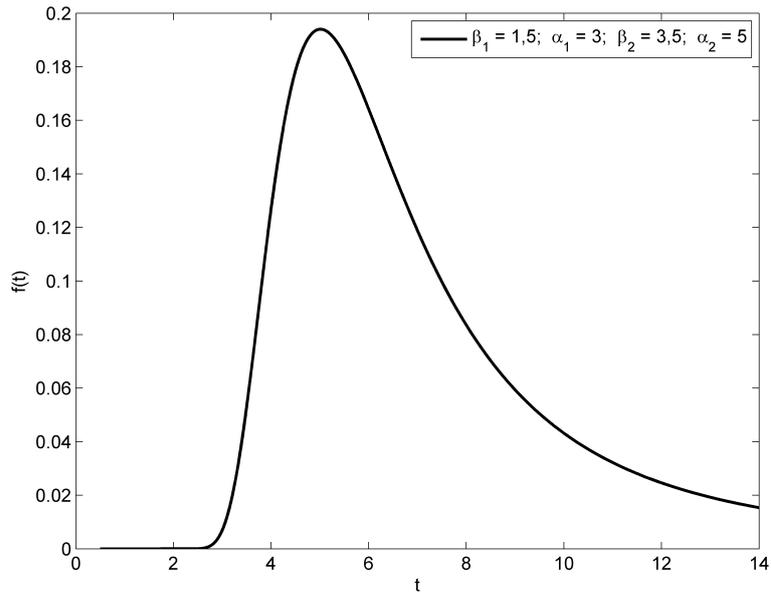


Figura 2.4: Função densidade para o modelo multiplicativo.

a função  $h(t)$  resulta em:

$$h(t) = h_1(t)p(t) + h_2(t)q(t), \quad t > 0.$$

A função taxa de falha do modelo multiplicativo também tem forma unimodal. A Figura 2.5 exibe o gráfico de  $h(t)$ , considerando os mesmos valores dos parâmetros da Figura 2.4.

Para maiores detalhes, ver Jiang et al. [10] ou Murthy et al. [14].

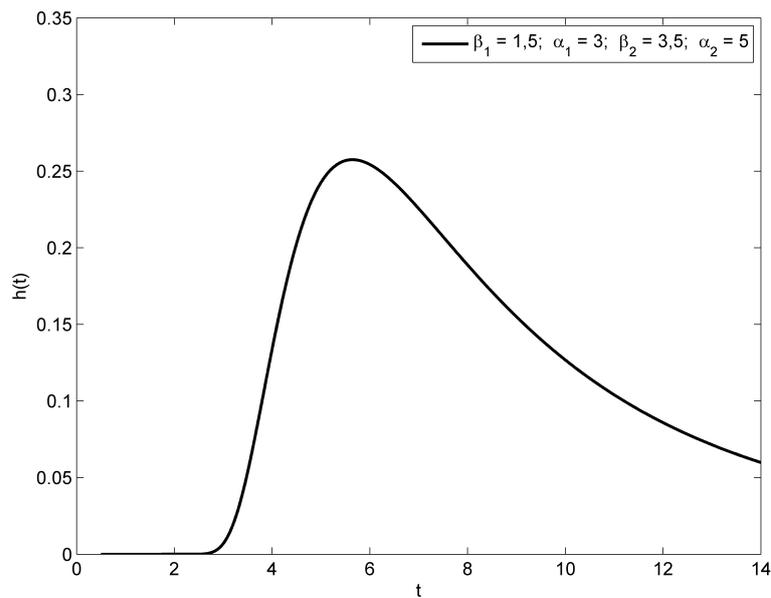


Figura 2.5: Função taxa de falha para o modelo multiplicativo.

### 2.2.2 Gráfico Modificado - IWPP

Considerando a modificação (1.19), onde

$$y = -\ln[-\ln F(t)] \quad \text{e} \quad x = \ln t,$$

reescrevemos  $y$  em função de  $x$ , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y(x) &= -\ln[-\ln F(e^x)] = -\ln[-\ln(F_1(e^x)F_2(e^x))] = -\ln[-\ln(e^{-z_1(x)}e^{-z_2(x)})] \\ &= -\ln[z_1(x) + z_2(x)], \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde  $z_i(x) = \alpha_i^{\beta_i} e^{-\beta_i x}$ ,  $i = 1, 2$ . A relação obtida define uma curva  $C$  no plano  $x$ - $y$ , chamada *gráfico-IWPP para o modelo multiplicativo*. A seguir, mostramos alguns resultados acerca dessa curva.

**Teorema 2.3.**  $C$  é côncava para baixo.

*Demonstração.* Vamos provar que  $y''(x) < 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Derivando  $y(x)$ , obtemos

$$y'(x) = \frac{\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2}{z_1 + z_2}. \quad (2.7)$$

A derivada da igualdade (2.7) é apresentada abaixo.

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{(\beta_1^2 z_1 - \beta_2^2 z_2)(z_1 + z_2) + (\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2)^2}{(z_1 + z_2)^2} \\ &= \frac{-(\beta_1 z_1)^2 - \beta_2^2 z_1 z_2 - \beta_1^2 z_1 z_2 - (\beta_2 z_2)^2 + (\beta_1 z_1)^2 + 2\beta_1 \beta_2 z_1 z_2 + (\beta_2 z_2)^2}{(z_1 + z_2)^2} \\ &= \frac{-(\beta_1^2 + \beta_2^2 - 2\beta_1 \beta_2) z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} = \frac{-(\beta_1 - \beta_2)^2 z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} < 0. \end{aligned}$$

■

O lema a seguir é utilizado na análise assintótica da curva  $C$ .

**Lema 2.4.** Se  $\beta_1 < \beta_2$ , temos que as funções  $z_i = z_i(t) = (\frac{\alpha_i}{t})^{\beta_i}$ ,  $i = 1, 2$ , definidas para  $t > 0$ , satisfazem

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{z_2}{z_1} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{z_2}{z_1} = 0.$$

*Demonstração.*

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{z_2}{z_1} = \lim_{t \rightarrow a} \left( \frac{\alpha_2^{\beta_2}}{\alpha_1^{\beta_1}} \frac{1}{t^{-(\beta_1 - \beta_2)}} \right) = \begin{cases} \infty, & a = 0 \\ 0, & a = \infty \end{cases}.$$

■

**Teorema 2.5.** *O função de distribuição para o modelo multiplicativo,  $F(t)$ , satisfaz:*

$$(i) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{F_2(t)} = 1. \quad (2.8)$$

$$(ii) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{F_1(t)} = 1. \quad (2.9)$$

*Demonstração.* Escrevendo

$$F(t) = e^{-z_1 - z_2} = e^{-z_1 \left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right)} = e^{-z_2 \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)},$$

e usando o Lema 2.4, temos:

$$(i) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{F_2(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-z_2 \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)}}{e^{-z_2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-z_2}}{e^{-z_2}} = 1.$$

$$(ii) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{F_1(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-z_1 \left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right)}}{e^{-z_1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-z_1}}{e^{-z_1}} = 1.$$

■

O Teorema 2.5 nos permite obter as assíntotas da curva  $C$  do gráfico-IWPP para o modelo multiplicativo. Observe que:

- de (2.8), para  $t$  suficientemente pequeno ( $t \rightarrow 0$ ), temos que

$$y(t) = -\ln[-\ln F(t)] \approx -\ln[-\ln F_2(t)] = \beta_2(\ln t - \ln \alpha_2).$$

Com  $x = \ln t$ , segue que, para  $x$  suficientemente pequeno ( $x \rightarrow -\infty$ ):

$$y(x) \approx \beta_2(x - \ln \alpha_2).$$

- de (2.9), para  $t$  suficientemente grande, temos que

$$y(t) = -\ln[-\ln F(t)] \approx -\ln[-\ln F_1(t)] = \beta_1(\ln t - \ln \alpha_1).$$

Com  $x = \ln t$ , segue que, para  $x$  suficientemente grande:

$$y(x) = \beta_1(x - \ln \alpha_1).$$

Portanto, as assíntotas esquerda e direita de  $C$  são dadas, respectivamente, por

$$L_E : y = \beta_2(x - \ln \alpha_2),$$

e por

$$L_D : y = \beta_1(x - \ln \alpha_1),$$

onde  $L_E$  e  $L_D$  são os gráficos-IWPP para as subpopulações  $F_2(t)$  e  $F_1(t)$ , respectivamente.

Uma vez que estamos supondo  $\beta_1 < \beta_2$ , as retas  $L_D$  e  $L_E$  se interseptam em um ponto  $I$  de coordenadas  $(x_I, y_I)$  dadas por

$$x_I = \frac{\beta_1 \ln \alpha_1 - \beta_2 \ln \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} \quad \text{e} \quad y_I = \frac{\beta_1 \beta_2 [\ln \alpha_1 - \ln \alpha_2]}{\beta_1 - \beta_2}. \quad (2.10)$$

**Lema 2.6.** *A coordenada  $x_I$  do ponto  $I$  de interseção das retas  $L_D$  e  $L_E$  satisfaz a igualdade  $z_1(x_I) = z_2(x_I)$ , onde  $z_i(x) = \alpha_i^{\beta_i} e^{-\beta_i x}$ , para  $i = 1, 2$ .*

*Demonstração.* Usando propriedades do logaritmo, a coordenada  $x_I$  em (2.10) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$x_I = \ln \left( \frac{\alpha_1^{\beta_1}}{\alpha_2^{\beta_2}} \right)^{\frac{1}{\beta_1 - \beta_2}}.$$

Conseqüentemente,

$$z_1(x_I) = \alpha_1^{\beta_1} e^{-\beta_1 x_I} = \alpha_1^{\beta_1} \left( \frac{\alpha_1^{\beta_1}}{\alpha_2^{\beta_2}} \right)^{\frac{-\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}} = \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{\frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 - \beta_2}}. \quad (2.11)$$

Também,

$$z_2(x_I) = \alpha_2^{\beta_2} e^{-\beta_2 x_I} = \alpha_2^{\beta_2} \left( \frac{\alpha_1^{\beta_1}}{\alpha_2^{\beta_2}} \right)^{\frac{-\beta_2}{\beta_1 - \beta_2}} = \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{\frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 - \beta_2}}.$$

■

**Teorema 2.7.** *A curva  $C$ , no ponto  $I$ , satisfaz as seguintes relações:*

$$(i) \ y(x_I) = y_I - \ln 2 \quad \text{e} \quad (ii) \ y'(x_I) = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}. \quad (2.12)$$

*Demonstração.*

(i) Usando o Lema 2.6 em (2.6) e a igualdade (2.11), segue que

$$y(x_I) = -\ln[2 z_1(x_I)] = -\ln 2 - \ln(z_1(x_I)) = -\ln 2 - \frac{\beta_1 \beta_2 [\ln \alpha_2 - \ln \alpha_1]}{\beta_1 - \beta_2} = y_I - \ln 2.$$

(ii) Aplicando o Lema 2.6 à igualdade (2.7), segue o resultado.

■

A Figura 2.6 mostra a curva  $C$  do gráfico-IWPP e suas assíntotas para determinados valores dos parâmetros do modelo.

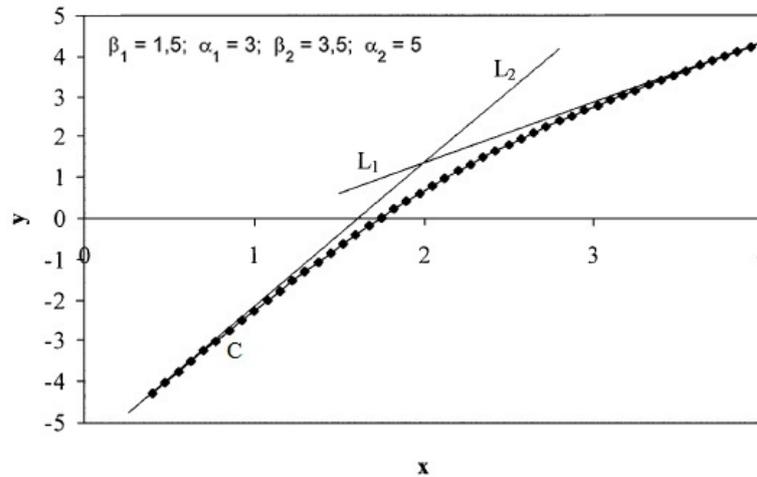


Figura 2.6: Gráfico-IWPP para o modelo multiplicativo.

Do que foi visto, os parâmetros das subpopulações  $F_1$  e  $F_2$  do modelo multiplicativo podem ser estimados.

O ajuste da assíntota esquerda dá as estimativas de  $\beta_2, \alpha_2$  e o ajuste da assíntota direita dá as estimativas de  $\beta_1$  e  $\alpha_1$ , similar ao que foi feito na Seção 2.1.2. Utilizando os valores estimados, verifique se as igualdades (i) e (ii) dadas em (2.12) são satisfeitas.

## 2.3 - Modelo de Mistura

Este modelo foi apresentado na Seção 1.4. Ele é caracterizado pelo número de componentes ou, alternativamente, pelo número de subpopulações e a forma da função de distribuição para cada uma das subpopulações. Alguns casos especiais do modelo é detalhado por Murthy et al. [14]. Um caso particular é quando temos duas subpopulações que seguem uma distribuição Weibull inversa. Neste caso, o modelo assume a seguinte forma:

$$F(t) = pF_1(t) + qF_2(t), \quad (2.13)$$

onde  $F_i(t) = e^{-\left(\frac{\alpha_i}{t}\right)^{\beta_i}}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $0 \leq p, q \leq 1$  e  $p + q = 1$ . Nos referimos à (2.13) como *modelo de mistura de duas distribuições Weibull inversa*. Por simplicidade, neste capítulo usaremos para (2.13) o termo *modelo de mistura*.

Seguindo os estudos de Jiang et al. [10] e Sultan et al. [17], apresentamos as suas funções densidade e taxa de falha, e um método gráfico que permite obter estimativas de seus parâmetros. A identificabilidade do modelo de mistura também é provada no final desta seção.

### 2.3.1 Função Densidade e Momentos

A densidade para o modelo de mistura é dada por

$$f(t) = pf_1(t) + qf_2(t), \quad (2.14)$$

onde  $0 \leq p, q \leq 1$ ,  $p + q = 1$  e a função densidade de cada subpopulação é dada por

$$f_i(t) = \beta_i \alpha_i^{\beta_i} t^{-(\beta_i+1)} e^{-\left(\frac{\alpha_i}{t}\right)^{\beta_i}}, \quad t > 0, \quad (2.15)$$

onde  $\alpha_i > 0$  e  $\beta_i > 0$  para  $i = 1, 2$ . Como a função densidade para cada subpopulação é unimodal (veja a Seção 1.3.1), a função densidade para o modelo de mistura (2.13) pode ser unimodal ou bimodal, conforme é ilustrado na Figura 2.7.

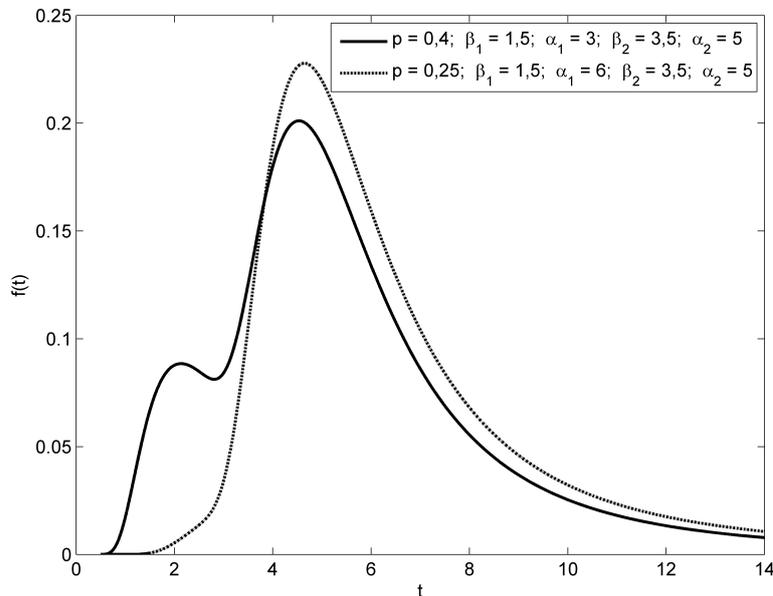


Figura 2.7: Função densidade para o modelo de mistura.

Se  $T$  é uma variável aleatória com função densidade dada por (2.14), segue de (2.15) e (1.15), que o  $k$ -ésimo momento de  $T$  é dado por

$$E(T^k) = p \alpha_1^k \Gamma\left(1 - \frac{k}{\beta_1}\right) + q \alpha_2^k \Gamma\left(1 - \frac{k}{\beta_2}\right).$$

### 2.3.2 Função Taxa de Falha

A função de confiabilidade para o modelo de mistura é exibida abaixo.

$$S(t) = 1 - F(t) = 1 - pF_1(t) - qF_2(t), \quad \text{onde } F_i(t) = e^{-\left(\frac{\alpha_i}{t}\right)^{\beta_i}}, \quad i = 1, 2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S(t) &= p + q - pF_1(t) - qF_2(t) = p(1 - F_1(t)) + q(1 - F_2(t)) \\ &= pS_1(t) + qS_2(t) \\ &= p\left(1 - e^{-\left(\frac{\alpha_1}{t}\right)^{\beta_1}}\right) + q\left(1 - e^{-\left(\frac{\alpha_2}{t}\right)^{\beta_2}}\right). \end{aligned}$$

A função de taxa de falha correspondente é dada por

$$h(t) = \frac{p\beta_1\alpha_1^{\beta_1}t^{-(\beta_1+1)}e^{-\left(\frac{\alpha_1}{t}\right)^{\beta_1}} + q\beta_2\alpha_2^{\beta_2}t^{-(\beta_2+1)}e^{-\left(\frac{\alpha_2}{t}\right)^{\beta_2}}}{p\left(1 - e^{-\left(\frac{\alpha_1}{t}\right)^{\beta_1}}\right) + q\left(1 - e^{-\left(\frac{\alpha_2}{t}\right)^{\beta_2}}\right)}.$$

A função  $h(t)$  também pode ser expressa em função das confiabilidades e taxas de falha das distribuições Weibull inversa  $F_1$  e  $F_2$ . Note que:

$$h(t) = \frac{pf_1(t) + qf_2(t)}{pS_1(t) + qS_2(t)},$$

onde  $f_1, f_2$  e  $S_1, S_2$  são as funções densidade e as funções de confiabilidade, respectivamente, das distribuições Weibull inversa.

Sendo assim, temos que:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{pf_1(t)}{pS_1(t) + qS_2(t)} + \frac{qf_2(t)}{pS_1(t) + qS_2(t)} \\ &= \frac{1}{\frac{pS_1(t) + qS_2(t)}{pS_1(t)}} \frac{f_1(t)}{S_1(t)} + \left(1 - \frac{pS_1(t)}{pS_1(t) + qS_2(t)}\right) \frac{f_2(t)}{S_2(t)}, \end{aligned}$$

onde  $S_i(t) = 1 - e^{-\left(\frac{\alpha_i}{t}\right)^{\beta_i}}$ ,  $i = 1, 2$ . Fazendo  $h_i(t) = \frac{f_i(t)}{S_i(t)}$ ,  $i = 1, 2$ , obtemos:

$$h(t) = \left( \frac{1}{1 + \frac{qS_2(t)}{pS_1(t)}} \right) h_1(t) + \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{qS_2(t)}{pS_1(t)}} \right) h_2(t).$$

Denotando agora,  $r(t) = \frac{1}{1 + \frac{qS_2(t)}{pS_1(t)}}$ , a função taxa de falha  $h(t)$  resulta em:

$$h(t) = r(t)h_1(t) + (1 - r(t))h_2(t). \quad (2.16)$$

A seguir, mostramos resultados limites da função taxa de falha.

**Lema 2.8.**

$$(i) \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0 \quad e \quad (ii) \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0.$$

Demonstração.

(i) Pelo Lema 1.6, vimos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} h_1(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} h_2(t) = 0.$$

Além disso, para  $i = 1, 2$ , temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} S_i(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left( 1 - e^{-(\frac{\alpha_i}{t})^{\beta_i}} \right) = 1.$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow 0} r(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 + \frac{qS_2(t)}{pS_1(t)}} \right) = \frac{1}{1 + \frac{q}{p}} = \frac{1}{\frac{p+q}{p}} = \frac{1}{\frac{p}{p}} = p.$$

Portanto, de (2.16), segue que  $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$ .

(ii) Do Lema 1.6, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_i(t) = 0, \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Observe ainda que, sendo  $\alpha_i > 0$  e  $\beta_i > 0$  para  $i = 1, 2$ , então para todo  $t > 0$ , temos

$$\left( \frac{\alpha_i}{t} \right)^{\beta_i} > 0 \iff e^{-(\frac{\alpha_i}{t})^{\beta_i}} < 1 \iff S_i(t) = 1 - e^{-(\frac{\alpha_i}{t})^{\beta_i}} > 0, \quad i = 1, 2.$$

Também,  $\lim_{t \rightarrow \infty} S_i(t) = 0$ ,  $i = 1, 2$ , logo  $\frac{qS_2(t)}{pS_1(t)}$  tende a um número não-negativo ou para  $+\infty$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . Em qualquer um desses casos teremos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = r, \quad \text{com } 0 \leq r \leq 1.$$

Assim, segue que  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ . ■

A função taxa de falha para o modelo de mistura pode ter forma unimodal ou bimodal, dependendo dos valores dos parâmetros. A Figura 2.8 ilustra estas duas formas e os valores dos parâmetros são os mesmos dos da Figura 2.7.

### 2.3.3 Gráfico Modificado - IWPP

O gráfico-IWPP é uma curva no plano x-y, cujas coordenadas são dadas em (1.19). A forma do gráfico é significativamente influenciada pelos dois parâmetros de forma,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  das subpopulações. A seguir, analisamos dois casos separadamente. São eles:

(a) Se  $\beta_1 \neq \beta_2$ , então, sem perda de generalidade, podemos assumir que  $\beta_1 < \beta_2$ .

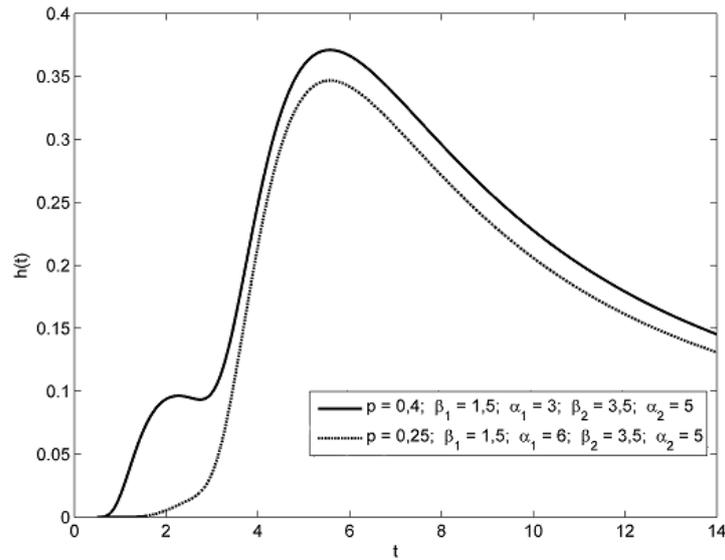


Figura 2.8: Função taxa de falha para o modelo de mistura.

- (b) Se  $\beta_1 = \beta_2 (= \beta)$ , então devemos ter  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , pois caso contrário, o modelo se reduz a uma única distribuição Weibull inversa como em (1.11). Assim, sem perda de generalidade, podemos considerar  $\alpha_1 < \alpha_2$ .

A modificação (1.19) para o modelo de mistura é expressa por

$$y = -\ln[-\ln(pF_1(t) + qF_2(t))] \quad \text{e} \quad x = \ln t. \quad (2.17)$$

O gráfico de  $y$  por  $x$  é uma curva, denotada por  $C$ , chamada *gráficoo-IWPP para o modelo de mistura*. No caso em que  $p = 1$  e  $p = 0$ , conforme (1.20), a curva  $C$  é dada pelas respectivas retas:

$$\begin{aligned} L_1 : y_1(x) &= \beta_1(x - \ln \alpha_1), \quad \text{para } p = 1; \\ L_2 : y_2(x) &= \beta_2(x - \ln \alpha_2), \quad \text{para } p = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

No caso geral, a curva  $C$  é expressa por

$$C : y(x) = \beta_1 x - \ln[\alpha_1^{\beta_1} - e^{\beta_1 x} \ln(p + qe^{\Psi_{1,2}(x)})], \quad (2.19)$$

onde  $\Psi_{1,2}(x) = z_1(x) - z_2(x)$ , com  $z_i(x) = \alpha_i^{\beta_i} e^{-\beta_i x}$ ,  $i = 1, 2$ . Vejamos como obter (2.19).

De (2.17), temos que  $x = \ln t$  ou, equivalentemente,  $t = e^x$ . Assim, podemos reescrever o modelo de mistura (2.13) em termos de  $x$ , do seguinte modo:

$$F(e^x) = pe^{-\alpha_1^{\beta_1} e^{-\beta_1 x}} + qe^{-\alpha_2^{\beta_2} e^{-\beta_2 x}} = \frac{p + qe^{\alpha_1^{\beta_1} e^{-\beta_1 x} - \alpha_2^{\beta_2} e^{-\beta_2 x}}}{e^{\alpha_1^{\beta_1} e^{-\beta_1 x}}}.$$

Das propriedades do logaritmo, segue que

$$-\ln F(e^x) = \alpha_1^{\beta_1} e^{-\beta_1 x} - \ln(p + qe^{z_1(x) - z_2(x)}),$$

onde  $z_i(x) = \alpha_i^{\beta_i} e^{-\beta_i x}$ ,  $i = 1, 2$ . Fazendo  $\Psi_{1,2}(x) = z_1(x) - z_2(x)$ , obtemos:

$$-\ln F(e^x) = \frac{\alpha_1^{\beta_1} - e^{\beta_1 x} \ln(p + qe^{\Psi_{1,2}(x)})}{e^{\beta_1 x}}.$$

Logo, a coordenada  $y$  da modificação (2.17) é dada por

$$y(x) = -\ln[-\ln F(e^x)] = \beta_1 x - \ln[\alpha_1^{\beta_1} - e^{\beta_1 x} \ln(p + qe^{\Psi_{1,2}(x)})],$$

onde  $\Psi_{1,2}(x) = z_1(x) - z_2(x)$ , com  $z_i(x) = \alpha_i^{\beta_i} e^{-\beta_i x}$ ,  $i = 1, 2$ .

**Caso (a):**  $\beta_1 < \beta_2$

Neste caso, as retas  $L_1$  e  $L_2$  se interseptam em um ponto  $I$  de coordenadas  $(x_I, y_I)$  dadas por (2.10), onde

$$x_I = \frac{\beta_1 \ln \alpha_1 - \beta_2 \ln \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} \quad \text{e} \quad y_I = \frac{\beta_1 \beta_2 [\ln \alpha_1 - \ln \alpha_2]}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Os resultados a seguir são importantes na descrição da curva  $C$  e também servem de base para a estimação dos parâmetros do modelo, que é apresentada no final desta seção. Mostramos, por exemplo, que a curva  $C$  é delimitada pelas retas  $L_1$  e  $L_2$ , passando pelo ponto  $I$  e com inclinação em  $I$  dada por  $p\beta_1 + q\beta_2$ . Uma análise do comportamento de  $C$  para valores assintóticos também é apresentada.

**Teorema 2.9.** *As funções  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  dadas em (2.18) satisfazem a seguinte relação:*

$$\min\{y_1(x), y_2(x)\} < y(x) < \max\{y_1(x), y_2(x)\}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.20)$$

*Demonstração.* Para todo  $t > 0$ , temos que:

$$\min\{F_1(t), F_2(t)\} < F(t) < \max\{F_1(t), F_2(t)\}.$$

A desigualdade (2.20) é obtida em decorrência da monotonicidade da função logarítmica e por  $x = \ln t$ . ■

**Teorema 2.10.** *A curva  $C$  passa pelo ponto  $I$  e sua inclinação neste ponto é  $p\beta_1 + q\beta_2$ .*

**Demonstração.** Como  $z_1(x_I) = z_2(x_I)$  (ver Lema 2.6), logo, de (2.19), temos que:

$$\begin{aligned} y(x_I) &= \beta_1 x_I - \ln(\alpha_1^{\beta_1}) = \frac{\beta_1^2 \ln \alpha_1 - \beta_1 \beta_2 \ln \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} - \beta_1 \ln \alpha_1 = \frac{\beta_1 \beta_2 [\ln \alpha_1 - \ln \alpha_2]}{\beta_1 - \beta_2} \\ &= y_I. \end{aligned}$$

Por outro lado, derivando em  $x$  a igualdade (2.19), obtemos:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \beta_1 + \frac{\beta_1 e^{\beta_1 x} \ln(p + qe^{\Psi_{1,2}(x)}) + \frac{e^{\beta_1 x} (q\beta_2 z_2 - q\beta_1 z_1) e^{\Psi_{1,2}(x)}}{p + qe^{\Psi_{1,2}(x)}}}{\alpha_1^{\beta_1} - e^{\beta_1 x} \ln(p + qe^{\Psi_{1,2}(x)})} \\ &= \frac{\beta_1 \alpha_1^{\beta_1} + \frac{q\beta_2 z_2 e^{\Psi_{1,2}(x)} e^{\beta_1 x} - q\beta_1 z_1 \overbrace{e^{\beta_1 x}}^{\alpha_1^{\beta_1}} e^{\Psi_{1,2}(x)}}{p + qe^{\Psi_{1,2}(x)}}}{\alpha_1^{\beta_1} - e^{\beta_1 x} \ln(p + qe^{\Psi_{1,2}(x)})} \\ &= \frac{\frac{p\beta_1 \alpha_1^{\beta_1} + q\beta_2 z_2 e^{\Psi_{1,2}(x)} e^{\beta_1 x}}{p + qe^{\Psi_{1,2}(x)}}}{\alpha_1^{\beta_1} - e^{\beta_1 x} \ln(p + qe^{\Psi_{1,2}(x)})} = \frac{(p\beta_1 \alpha_1^{\beta_1} e^{-\beta_1 x} + q\beta_2 z_2 e^{\Psi_{1,2}(x)}) e^{\beta_1 x}}{(p + qe^{\Psi_{1,2}(x)}) [\alpha_1^{\beta_1} - e^{\beta_1 x} \ln(p + qe^{\Psi_{1,2}(x)})]}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

onde  $\Psi_{1,2}(x) = z_1(x) - z_2(x)$ , com  $z_i = z_i(x) = \alpha_i^{\beta_i} e^{-\beta_i x}$ ,  $i = 1, 2$ . Sendo  $z_1(x_I) = z_2(x_I)$ , segue que

$$y'(x_I) = \frac{[p\beta_1 z_1(x_I) + q\beta_2 z_2(x_I)] e^{\beta_1 x_I}}{\alpha_1^{\beta_1}} = \frac{p\beta_1 z_1(x_I) + q\beta_2 z_2(x_I)}{z_1(x_I)} = p\beta_1 + q\beta_2. \quad \blacksquare$$

A localização do ponto de interseção  $I$  no plano  $x$ - $y$  depende dos parâmetros de  $F_1$  e  $F_2$ . Note, a partir da expressão para  $x_I$  na equação (2.10), que o sinal de  $x_I$  depende dos parâmetros de escala e de forma das subpopulações, no entanto o sinal de  $y_I$  depende apenas dos parâmetros de escala das subpopulações, como pode ser visto no teorema a seguir.

**Teorema 2.11.** *Seja  $I = (x_I, y_I)$  o ponto de interseção das retas  $L_1$  e  $L_2$ . Sendo assim, temos que:*

- (i) Se  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > 1$ , então  $y_I < 0$ ;
- (ii) Se  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1$ , então  $y_I = 0$ ;
- (iii) Se  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < 1$ , então  $y_I > 0$ .

**Demonstração.**

(i) Neste caso, como  $\alpha_1 > \alpha_2$ , pela monotonicidade da função logarítmica, temos que  $\ln \alpha_1 > \ln \alpha_2$ . Como ainda  $\beta_1 < \beta_2$ , segue que:

$$y_I = \frac{\beta_1 \beta_2 [\ln \alpha_1 - \ln \alpha_2]}{\beta_1 - \beta_2} < 0.$$

Mostra-se que (ii) e (iii) são verdadeiros, seguindo demonstração análoga à de (i). ■

No teorema a seguir fazemos um estudo do comportamento assintótico da curva  $C$ .

**Teorema 2.12.** *A função  $y(t)$ , dada em (2.17), satisfaz:*

$$(i) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{-\ln[-\ln(pF_1(t))]} = 1. \quad (2.22)$$

e

$$(ii) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{-\ln(pz_1 + qz_2)} = 1, \quad (2.23)$$

onde  $z_i = z_i(t) = \left(\frac{\alpha_i}{t}\right)^{\beta_i}$ ,  $i = 1, 2$ .

**Demonstração.**

(i) Do Lema 2.1 (i), temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{pF_1(t) + qF_2(t)}{pF_1(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{qF_2(t)}{pF_1(t)}\right) = 1,$$

o que implica que, para  $t$  suficientemente pequeno ( $t \rightarrow 0$ ),

$$pF_1(t) + qF_2(t) \approx pF_1(t).$$

Pela continuidade da função logarítmica, temos também, para  $t$  suficientemente pequeno ( $t \rightarrow 0$ ):

$$y(t) = -\ln[-\ln(pF_1(t) + qF_2(t))] \approx -\ln[-\ln(pF_1(t))].$$

Daí, segue o resultado.

(ii) Sabemos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha_i}{t}\right)^{\beta_i} = 0$ ,  $i = 1, 2$ , assim:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{p(1 - z_1) + q(1 - z_2)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{pe^{-z_1} + qe^{-z_2}}{p(1 - z_1) + q(1 - z_2)} = 1,$$

e pela continuidade da função logarítmica,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln F(t)}{\ln[p(1 - z_1) + q(1 - z_2)]} = 1. \quad (2.24)$$

Por outro lado, usando L'Hospital e o fato que  $z'_i = z'_i(t) = -\frac{\beta_i}{t} z_i$ ,  $i = 1, 2$ , temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{pz_1 + qz_2}{-\ln[p(1-z_1) + q(1-z_2)]} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-p\frac{\beta_1}{t}z_1 - q\frac{\beta_2}{t}z_2}{\frac{p\frac{\beta_1}{t}z_1 + q\frac{\beta_2}{t}z_2}{p(1-z_1) + q(1-z_2)}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [p(1-z_1) + q(1-z_2)] \\ &= p + q = 1. \end{aligned} \quad (2.25)$$

De (2.24) e (2.25), segue que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\ln F(t)}{pz_1 + qz_2} = 1.$$

Pela continuidade da função logarítmica, segue o resultado:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{-\ln(pz_1 + qz_2)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\ln[-\ln F(t)]}{-\ln(pz_1 + qz_2)} = 1. \quad \blacksquare$$

Os resultados apresentados no Teorema 2.12 nos permite obter as assíntotas da curva  $C$ . Observe que:

- de (2.22), temos que, para  $t$  suficientemente pequeno ( $t \rightarrow 0$ ):

$$\begin{aligned} y(t) &\approx -\ln[-\ln(pF_1(t))] = -\ln[-\ln(pe^{-(\frac{\alpha_1}{t})^{\beta_1}})] = -\ln\left[-\ln p + \left(\frac{\alpha_1}{t}\right)^{\beta_1}\right] \\ &\approx -\ln\left(\frac{\alpha_1}{t}\right)^{\beta_1} = \beta_1(\ln t - \ln \alpha_1). \end{aligned}$$

Com  $x = \ln t$ , segue que, para  $x$  suficientemente pequeno ( $x \rightarrow -\infty$ ):

$$y(x) \approx \beta_1(x - \ln \alpha_1).$$

- de (2.23) e do Lema 2.4, temos que, para  $t$  suficientemente grande:

$$\begin{aligned} y(t) &\approx -\ln(pz_1 + qz_2) = -\ln\left(\frac{pz_1 + qz_2}{z_1} z_1\right) \\ &= -\ln z_1 - \ln\left(p + q\frac{z_2}{z_1}\right) \\ &\approx \beta_1(\ln t - \ln \alpha_1) - \ln p. \end{aligned}$$

Com  $x = \ln t$ , segue que, para  $x$  suficientemente grande:

$$y(x) \approx \beta_1(x - \ln \alpha_1) - \ln p.$$

Assim, as assíntotas de  $C$  são as retas, denotadas por  $L_E$  e  $L_D$ , expressas por

$$L_E : y = \beta_1(x - \ln \alpha_1),$$

o gráfico-IWPP para a subpopulação  $F_1$ , podendo assim ser também denotada por  $L_1$ , e

$$L_D : y = \beta_1(x - \ln \alpha_1) - \ln p.$$

Note que a reta  $L_D$  é paralela à reta  $L_E$ , pois a inclinação de ambas é determinada pelo parâmetro  $\beta_1$ . No entanto,  $L_D$  está deslocada verticalmente de  $L_E$  por  $\ln(1/p)$ .

A Figura 2.9 mostra o gráfico-IWPP para determinados valores dos parâmetros do modelo. Note que  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < 1$ . Neste caso, o ponto de inflexão esquerdo pode ser usado para estimar o parâmetro  $p$ .

A Figura 2.10 mostra o gráfico-IWPP para determinados valores dos parâmetros do modelo. Note que  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > 1$ . Neste caso, o ponto de inflexão direito pode ser usado para estimar o parâmetro  $q$ .

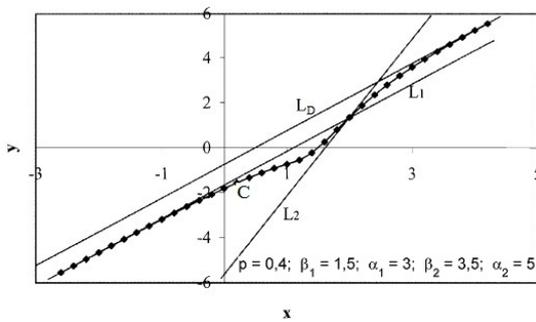


Figura 2.9: Gráfico-IWPP para o modelo de mistura - caso (a) e  $\alpha_1 < \alpha_2$ .

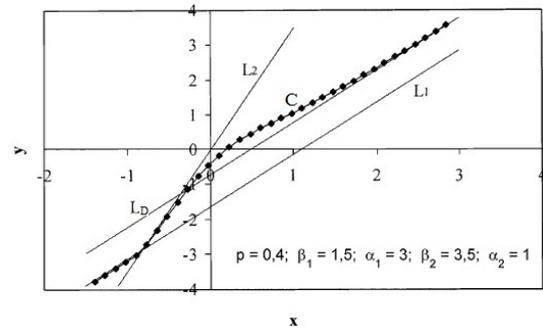


Figura 2.10: Gráfico-IWPP para o modelo de mistura - caso (a) e  $\alpha_1 > \alpha_2$ .

Os pontos de inflexão devem ser obtidos resolvendo  $y'' = 0$ , entretanto é impossível obtê-los analiticamente. Traçando gráficos para vários valores dos parâmetros podemos perceber que em todos os casos  $y(x)$  tem 3 pontos de inflexão:

$$A = (x_A, y_A), \quad B = (x_B, y_B) \quad \text{e} \quad C = (x_C, y_C).$$

Resumindo as informações a respeito da curva  $C$ , podemos citar:

- A assíntota para  $x \rightarrow -\infty$  é a reta  $L_1$ ;
- A assíntota para  $x \rightarrow +\infty$  é a reta  $L_R$ ;
- $C$  passa por  $I$  e a inclinação de  $C$  neste ponto é  $p\beta_1 + q\beta_2$ ;
- $C$  tem 3 pontos de inflexão:  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Seguindo uma análise similar à apresentada em Jiang e Murthy [9], exibimos a seguir um estudo assintótico para os casos (i)  $\alpha_1 \ll \alpha_2$  e (ii)  $\alpha_1 \gg \alpha_2$ . Essa análise

possibilita obter aproximações para as ordenadas dos pontos de inflexão  $A$  e  $C$ . Isto será utilizado no final desta seção para a estimação dos parâmetros. A notação  $\ll$  ( $\gg$ ) indica “muito menor que” (“muito maior que”).

(a.1)  $\alpha_1 \ll \alpha_2$

Como  $\beta_2 > \beta_1$ ,  $F_2(t) \rightarrow 0$  mais rápido que  $F_1(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow 0$ , onde  $F_i(t) = e^{-(\frac{\alpha_i}{t})^{\beta_i}}$  para  $i = 1, 2$ . Daí, para  $0 < t \ll \alpha_2$  segue que  $F_2(t) \approx 0$  e assim

$$F(t) = pF_1(t) + qF_2(t) \approx pF_1(t).$$

O gráfico-IWPP para esta aproximação é uma curva  $C_1$  dada por

$$y(x) = -\ln[-\ln(pF_1(e^x))] = -\ln[-\ln(pe^{-\alpha_1^{\beta_1}e^{-\beta_1x}})] = -\ln(\alpha_1^{\beta_1}e^{-\beta_1x} - \ln p). \quad (2.26)$$

As inclinações assintóticas para  $C_1$  podem ser obtidas a partir da derivada de (2.26):

$$\lim_{x \rightarrow a} y'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta_1 \alpha_1^{\beta_1} e^{-\beta_1 x}}{\alpha_1^{\beta_1} e^{-\beta_1 x} - \ln p} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta_1 \alpha_1^{\beta_1}}{\alpha_1^{\beta_1} - e^{\beta_1 x} \ln p} = \begin{cases} \beta_1, & a = -\infty \\ 0, & a = \infty \end{cases}.$$

Por outro lado, de (2.26), note que

- Para  $x$  suficientemente pequeno ( $x \rightarrow -\infty$ ):

$$y(x) = -\ln(-\ln p + \alpha_1^{\beta_1} e^{-\beta_1 x}) \approx -\ln(\alpha_1^{\beta_1} e^{-\beta_1 x}) = \beta_1(x - \ln \alpha_1).$$

- Para  $x$  suficientemente grande:

$$y(x) = -\ln(-\ln p + \alpha_1^{\beta_1} e^{-\beta_1 x}) \approx -\ln(-\ln p).$$

Assim, as assíntotas de  $C_1$  são as retas  $L_1$ , isto é, o gráfico-IWPP da curva  $C$  para  $p = 1$  dada em (2.18), e  $y = -\ln(-\ln p)$ .

Em  $A$ , temos que  $y'' = 0$ , pois  $A$  é ponto de inflexão da curva  $C$ . A interseção da reta horizontal  $y = -\ln(-\ln p)$  com a curva  $C$  define um ponto que pode ser tomado como uma aproximação de  $A$ . Isto pode ser percebido traçando gráficos para vários valores dos parâmetros. Isto resulta em:

$$y_A \approx -\ln(-\ln p). \quad (2.27)$$

(a.2)  $\alpha_1 \gg \alpha_2$

Fazendo um procedimento análogo ao feito em (a.1) resulta em

$$y_C \approx -\ln(-\ln q), \quad (2.28)$$

onde  $C$  denota o ponto de inflexão direito da curva do gráfico-IWPP.

As aproximações dadas em (2.27) e (2.28) serão utilizadas no final desta seção para a estimação dos parâmetros.

**Caso (b):**  $\beta_1 = \beta_2 (= \beta)$

Neste caso, as retas  $L_1$  e  $L_2$ , dadas em (2.18), são paralelas e, como observamos no início da seção, podemos supor  $\alpha_1 < \alpha_2$ .

Pelo Lema 2.1 (ii), temos que o Teorema 2.12 é válido também para  $\beta_1 = \beta_2 (= \beta)$ . Assim, para  $t$  suficientemente pequeno (ou  $x \rightarrow -\infty$ ), temos

$$y(t) \approx -\ln[-\ln(pF_1(t))] \quad \left(\text{ou } y(x) \approx \beta(x - \ln \alpha_1)\right)$$

e, para  $t$  suficientemente grande (ou  $x \rightarrow \infty$ ),

$$y(t) \approx -\ln(pz_1 + qz_2) \quad \left(\text{ou } y(x) \approx \beta(x - \ln \alpha_1) - \ln\left(p + q\frac{z_2}{z_1}\right)\right).$$

Neste caso, as assíntotas esquerda e direita de  $C$  são dadas, respectivamente, por

$$L_E : y = \beta(x - \ln \alpha_1) \quad (2.29)$$

e

$$L_D : y = \beta(x - \ln \alpha_1) - \ln\left(p + q\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^\beta\right). \quad (2.30)$$

Note que a reta  $L_D$  é paralela à reta  $L_E$ , uma vez que o coeficiente angular de ambas é  $\beta$ . No entanto,  $L_D$  está deslocada verticalmente de  $L_E$  por  $\ln\left(p + q\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^\beta\right)$ .

A Figura 2.11 mostra o gráfico-IWPP da curva  $C$  e suas assíntotas para determinados valores dos parâmetros do modelo.

Neste momento, apresentamos um procedimento para estimação dos parâmetros do modelo de mistura que baseia-se no gráfico-IWPP. A ideia básica é linearizar, para valores assintóticos, a função de distribuição do modelo de mistura ajustando retas, via mínimos quadrados, para as assíntotas esquerda e direita obtidas acima. As inclinações e interceptos destas retas, além das coordenadas de interseção, nos permite estimar os parâmetros de forma e escala das subpopulações  $F_1$  e  $F_2$ . Um estudo mais detalhado pode ser encontrado em Jiang et al. [10] e Jiang e Murthy [9]. A seguir, analisamos separadamente os casos onde  $\beta_1 < \beta_2$  e  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ .

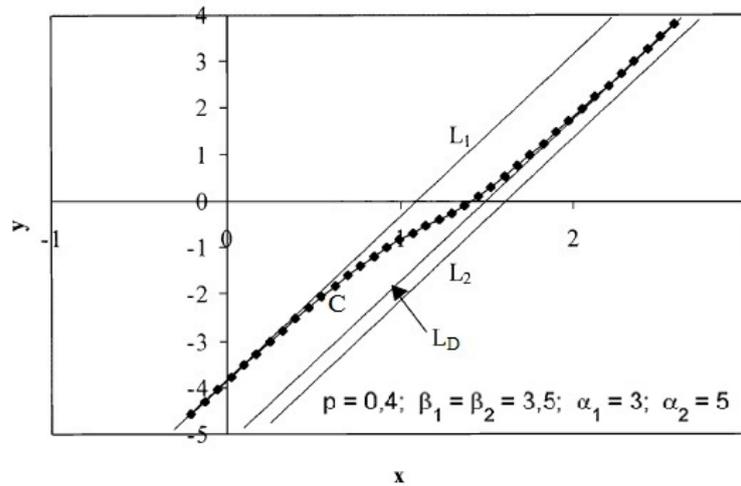


Figura 2.11: Gráfico-IWPP para o modelo de mistura - caso (b).

**Caso (a):**  $\beta_1 < \beta_2$

A estimação dos parâmetros do modelo está relacionada à dispersão dos pontos da curva  $C$  do gráfico-IWPP relativa ao ponto  $I$  de interseção de  $L_1$  e  $L_2$ . Se o conjunto de dados é muito grande, então a curva  $C$  tem pontos suficientes de ambos os lados de  $I$ , de modo que podemos ajustar as assíntotas para  $x \rightarrow -\infty$  e  $x \rightarrow \infty$ . Por outro lado, quando os parâmetros de escala diferem significativamente, o que é simbolizado por  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \ll 1$  ( $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \gg 1$ ), ou quando o tamanho do conjunto de dados não é grande, o ajuste das assíntotas esquerda e direita pode ser dificultado e assim a estimação pode ser afetada. Para maiores detalhes, ver Murthy et al. [14].

Se  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \ll 1$  ( $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \gg 1$ ), a maioria dos dados está à esquerda (direita) de  $I$  e assim podemos ajustar apenas a assíntota para  $x \rightarrow -\infty$  ( $x \rightarrow \infty$ ). Quando  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \approx 1$ , os dados estão igualmente dispersos de ambos os lados de  $I$ , de modo que podemos ajustar ambas as assíntotas. Sendo assim, o procedimento de estimação leva em consideração os três casos a seguir:

(i) :  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \approx 1$ .

A partir do ajuste das assíntotas esquerda,  $L_E$ , e direita,  $L_D$ , obtenha os estimadores de mínimos quadrados de  $\beta_1, \alpha_1$  e  $p$ . Determine o ponto onde  $L_E$  e a curva  $C$  se intersectam. Usando isto em (2.10), onde temos as coordenadas da interseção de  $L_1$  e  $L_2$ , obtenha as estimativas de  $\beta_2$  e  $\alpha_2$ .

(ii) :  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \ll 1$ .

A partir do ajuste da assíntota esquerda, obtenha os estimadores de mínimos quadrados de  $\beta_1$  e  $\alpha_1$ . Determine as coordenadas do ponto de interseção de  $L_E$

com a curva  $C$ . Usando isto em (2.10), obtenha as estimativas de  $\beta_2$  e  $\alpha_2$ . Localize a inflexão esquerda da curva e obtenha a ordenada deste ponto. De (2.27), uma estimativa de  $p$  é dada por  $\exp[-\exp(-y_A)]$ .

(iii) :  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \gg 1$ .

Seguindo procedimento análogo ao feito em (ii), de (2.28) uma estimativa de  $q$  (ou  $1 - p$ ) é dada por  $\exp[-\exp(-y_C)]$ , onde  $y_C$  denota a ordenada do ponto de inflexão direita da curva. A partir do ajuste da assíntota direita, obtenha os estimadores de mínimos quadrados de  $\beta_1$  e  $\alpha_1$  usando a estimativa de  $p$ . Determine as coordenadas da interseção de  $L_E (= L_D + \ln \hat{p})$  com a curva  $C$ . Usando isto em (2.10) obtenha as estimativas de  $\beta_2$  e  $\alpha_2$ .

**Observação 2.13.** A escolha entre os casos  $\alpha_1 \ll \alpha_2$  ou  $\alpha_1 \gg \alpha_2$  é determinada visualmente observando a dispersão dos dados ao longo da curva  $C$ , isto é, se os pontos estão mais concentrados na parte inferior (ou superior) da curva.

**Caso (b):**  $\beta_1 = \beta_2 (= \beta)$

Neste caso, os parâmetros do modelo podem ser estimados utilizando o procedimento descrito abaixo.

A partir do ajuste das assíntotas esquerda e direita, dadas em (2.29) e (2.30), respectivamente, obtenha os estimadores de mínimos quadrados de  $\beta$ ,  $\alpha_1$  e  $p + qk$ , onde  $k = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^\beta$ . Denote  $p + qk$  por  $c_1$ . Localize a interseção de  $C$  com o eixo  $x$ , e isto dá  $x_0$ , a abscissa deste ponto. Considerando a curva  $C$ , dada por  $y(x) = -\ln[-\ln(pF_1(x) + qF_2(x))]$ , onde  $F_i(x) = \exp[-(\alpha_i/e^x)^\beta]$ , segue que

$$y(x_0) = -\ln \left\{ -\ln \left( p \exp[-(\alpha_1/e^{x_0})^\beta] + q \exp[-(\alpha_2/e^{x_0})^\beta] \right) \right\} = 0. \quad (2.31)$$

Note que, sendo  $k = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^\beta$ , temos que:

$$\exp[-(\alpha_2/e^{x_0})^\beta] = \exp[-k(\alpha_1/e^{x_0})^\beta] = \left(\exp[-(\alpha_1/e^{x_0})^\beta]\right)^k.$$

Denotando  $c_2 = \exp[-(\alpha_1/e^{x_0})^\beta]$ , a equação (2.31) resulta em:

$$-\ln[-\ln(pc_2 + qc_2^k)] = 0,$$

ou equivalentemente,  $pc_2 + qc_2^k = e^{-1}$ . Assim, podemos obter  $p$  e  $k$  resolvendo as equações

$$p + qk = c_1 \quad \text{e} \quad pc_2 + qc_2^k = e^{-1}.$$

A estimativa de  $\alpha_2$  é então obtida a partir da estimativa de  $k$ .

**Observação 2.14.** Se  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \ll 1$ , a maioria dos pontos da curva  $C$  estão dispersos à sua esquerda, o que pode dificultar o ajuste da assíntota direita, como observado no início da seção. Neste caso, localize o ponto de inflexão,  $T$ , e obtenha a sua ordenada,  $y_T$ . Seguindo procedimento análogo ao feito em (a.1), pode ser obtida a seguinte aproximação:

$$y_T \approx -\ln(-\ln p).$$

Assim, uma estimativa de  $p$  é dada por  $\exp[-\exp(-y_T)]$ .

**Observação 2.15.** Métodos gráficos para estimação de parâmetros envolvem um grau de subjetividade e dá estimativas não muito precisas. No entanto, as estimativas baseadas no método gráfico podem servir como valores iniciais para estimação de parâmetros utilizando métodos mais refinados como, por exemplo, o método de máxima verossimilhança.

### 2.3.4 Identificabilidade

Nesta seção, utilizamos o resultado de Chandra [4], apresentado no Teorema 1.16 da Seção 1.4, para mostrar que a classe de misturas de distribuições Weibull inversa com dois parâmetros é identificável. Para isso, consideramos primeiramente uma reparametrização para a distribuição Weibull inversa, onde a função de densidade e a função de distribuição da  $i$ -ésima componente da mistura são dadas, respectivamente, por

$$f_i(t; \alpha_i, \beta_i) = \beta_i \alpha_i^{-\beta_i} t^{-(\beta_i+1)} e^{-(\alpha_i t)^{-\beta_i}} \quad \text{e} \quad F_i(t; \alpha_i, \beta_i) = e^{-(\alpha_i t)^{-\beta_i}}, \quad (2.32)$$

em que  $t \geq 0$ ,  $\alpha_i, \beta_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ .

**Proposição 2.16.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma família de distribuições Weibull inversa dada por*

$$\mathcal{F} = \left\{ F : F(t; \alpha, \beta) = \int_0^t \beta \alpha^{-\beta} u^{-(\beta+1)} e^{-(\alpha u)^{-\beta}} du : \alpha, \beta > 0 \text{ e } t > 0 \right\}.$$

*Então a classe de misturas de  $\mathcal{F}$  é identificável.*

**Demonstração.** Seja  $M$  uma aplicação que transforma uma função de distribuição  $F \in \mathcal{F}$  em uma função geradora de momentos de  $\log T$ , onde  $T$  é uma variável aleatória com distribuição Weibull inversa  $(\alpha, \beta)$  dada por (2.32). Temos que  $M$  é linear, pela linearidade da esperança, e para qualquer  $F_i \in \mathcal{F}$ ,  $i = 1, 2$ :

$$M[F_i(\cdot; \alpha_i, \beta_i)] = \phi_i(s) = E(e^{s \log T}) = E(T^s) = \alpha_i^{-s} \Gamma\left(1 - \frac{s}{\beta_i}\right), \quad (2.33)$$

com domínio  $D_{\phi_i} = (-\infty, \beta_i)$ . A última igualdade em (2.33) é obtida de modo análogo ao cálculo feito na Seção 1.3.3, considerando  $u = (\alpha_i t)^{-\beta_i}$ .

Da função de distribuição de  $T$ , segue que

$$F_1 \prec F_2 \quad \text{quando} \quad \beta_1 = \beta_2 \quad \text{e} \quad \alpha_1 < \alpha_2 \quad (2.34)$$

e

$$F_1 \prec F_2 \quad \text{quando} \quad \alpha_1 = \alpha_2 > \frac{1}{t} \quad \text{e} \quad \beta_1 < \beta_2. \quad (2.35)$$

Temos que  $D_{\phi_1}(s) = (-\infty, \beta_1)$ ,  $D_{\phi_2}(s) = (-\infty, \beta_2)$  e podemos considerar  $s_1 = \beta_1 \in \overline{S_1} = (-\infty, \beta_1]$ , onde  $S_1 = \{s : \phi_1(s) \neq 0\}$  e a barra denota o fecho de  $S_1$ . Assim, das equações (2.34) e (2.35), temos que  $D_{\phi_1}(s) \subseteq D_{\phi_2}(s)$ . Como  $\Gamma(x)$  é contínua em  $(0, +\infty)$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = \infty$ , segue que

$$\lim_{s \rightarrow \beta_1} \Gamma\left(1 - \frac{s}{\beta_1}\right) = \infty$$

e desse modo obtemos:

$$\lim_{s \rightarrow \beta_1} \phi_1(s) = \lim_{s \rightarrow \beta_1} \alpha_1^{-s} \Gamma\left(1 - \frac{s}{\beta_1}\right) = \infty. \quad (2.36)$$

Por outro lado, quando  $\alpha_1 = \alpha_2 > \frac{1}{t}$  e  $\beta_1 < \beta_2$ , obtemos

$$\lim_{s \rightarrow \beta_1} \phi_2(s) = \alpha_2^{-\beta_1} \Gamma\left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right) > 0. \quad (2.37)$$

Das equações (2.36) e (2.37), segue que

$$\lim_{\substack{s \rightarrow \beta_1 \\ s \in S_1}} \frac{\phi_2(s)}{\phi_1(s)} = 0,$$

onde  $S_1 = (-\infty, \beta_1)$ . Portanto, pelo Teorema 1.16 da Seção 1.4, a classe de misturas de distribuições Weibull inversa  $(\alpha, \beta)$  é identificável. ■

## A Distribuição Weibull Inversa Generalizada

Neste capítulo apresentamos uma modificação da distribuição Weibull inversa tendo como referência básica Gusmão et al. [8]. Esta nova distribuição, denotada por  $G(t)$ , é definida por

$$G(t) = [F(t)]^\gamma = e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t})^\beta}, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

onde  $\gamma > 0$ .

A distribuição (3.1) é chamada *distribuição Weibull inversa generalizada* e inclui outras distribuições como por exemplo: Weibull inversa ( $\gamma = 1$ ), exponencial inversa ( $\gamma = 1$  e  $\beta = 1$ ) e Rayleigh inversa ( $\gamma = 1$  e  $\beta = 2$ ).

Ao longo do capítulo, analisamos algumas propriedades da distribuição dada por (3.1). Iniciamos a Seção 3.1 apresentando a função densidade de probabilidade associada à (3.1). A função taxa de falha é apresentada na Seção 3.2 e na Seção 3.3 obtemos uma expressão para o  $k$ -ésimo momento de uma variável aleatória com distribuição Weibull inversa generalizada. A estimação de parâmetros é feita pelo método de máxima verossimilhança para dados censurados na Seção 3.4. Na Seção 3.5 fazemos uma análise do modelo de mistura de duas distribuições Weibull inversa generalizada, obtendo as funções densidade e taxa de falha e os momentos. Finalizamos provando a identificabilidade de uma classe de misturas finitas de distribuições Weibull inversa generalizada.

### 3.1 - Função Densidade

Derivando  $G(t)$ , dada em (3.1), com respeito a  $t$ , e denotando esta derivada por  $g(t)$ , obtemos

$$g(t) = \gamma\beta\alpha^\beta t^{-(\beta+1)} e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t})^\beta}, \quad t > 0, \quad (3.2)$$

onde  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ .

**Proposição 3.1.** *A função definida em (3.2) é uma função densidade de probabilidade.*

**Demonstração.** Escrevendo

$$g(t) = \gamma\beta\alpha^\beta t^{-(\beta+1)} e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t})^\beta} I_{(0,\infty)}(t),$$

onde

$$I_{(0,\infty)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \end{cases},$$

temos que  $g(t) = 0$ , se  $t \in (-\infty, 0]$  e que para  $t > 0$ ,  $g(t) > 0$ .

Por outro lado,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = \int_0^{\infty} \gamma\beta\alpha^\beta t^{-(\beta+1)} e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t})^\beta} dt = \int_{-\infty}^0 e^u du = 1,$$

onde  $u = -\gamma(\frac{\alpha}{t})^\beta$ .

Logo,  $g$ , dada em (3.2), é função densidade de probabilidade. ■

A função definida em (3.2) é chamada *densidade Weibull inversa generalizada*. Essa densidade é unimodal e para ver isso, note que sua derivada é dada por

$$g'(t) = g(t) t^{-(\beta+1)} [-(\beta+1)t^\beta + \gamma\beta\alpha^\beta],$$

que se anula em

$$t_m = \alpha\gamma^{\frac{1}{\beta}} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}}$$

e é positiva para  $t < t_m$  e negativa para  $t > t_m$ . Veja uma ilustração gráfica desta densidade na Figura 3.1.

## 3.2 - Função Taxa de Falha

A função de sobrevivência para uma variável aleatória  $T$  que segue uma distribuição Weibull inversa generalizada é dada por:

$$S(t) = 1 - e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t})^\beta}. \quad (3.3)$$

A função taxa de falha, como vimos na Seção 1.2, pode ser expressa como o quociente da função densidade pela função de sobrevivência. Assim, de (3.2) e (3.3), a função taxa de falha correspondente é descrita da seguinte forma:

$$h(t) = \frac{\gamma\beta\alpha^\beta t^{-(\beta+1)} e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t})^\beta}}{1 - e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t})^\beta}}. \quad (3.4)$$

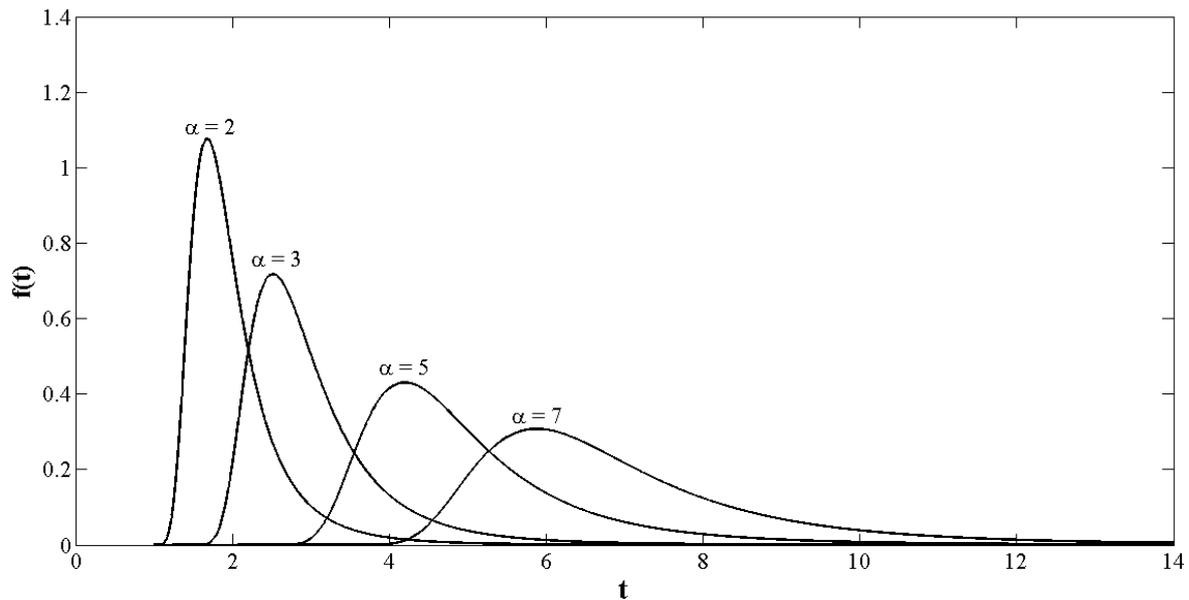


Figura 3.1: Função densidade da distribuição Weibull inversa generalizada para alguns valores de  $\alpha$  com  $\beta = 5$  e  $\gamma = 0,5$ .

O Lema 1.6, que afirma que

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0,$$

continua válido para a distribuição Weibull inversa generalizada, pois  $\gamma > 0$ . A demonstração é análoga a que foi feita na Seção 1.3.2.

Para estudar o comportamento da função taxa de falha, calculamos a sua derivada

$$h'(t) = h(t) t^{-(\beta+1)} \left[ -(\beta + 1)t^\beta + \frac{\gamma\beta\alpha^\beta}{1 - e^{-\gamma(\frac{\alpha}{t})^\beta}} \right].$$

Temos que a função taxa de falha tem forma unimodal com um valor máximo em  $t = t_M$  que satisfaz a igualdade

$$\frac{\gamma \left(\frac{\alpha}{t_M}\right)^\beta}{1 - e^{-\gamma \left(\frac{\alpha}{t_M}\right)^\beta}} = 1 + \frac{1}{\beta}.$$

A Figura 3.2 exhibe a função taxa de falha para alguns valores dos parâmetros de  $h(t)$ .

### 3.3 - Momentos

Algumas das principais características de uma distribuição, tais como média, variância, assimetria e curtose, podem ser estudadas por meio dos momentos. Se a variável

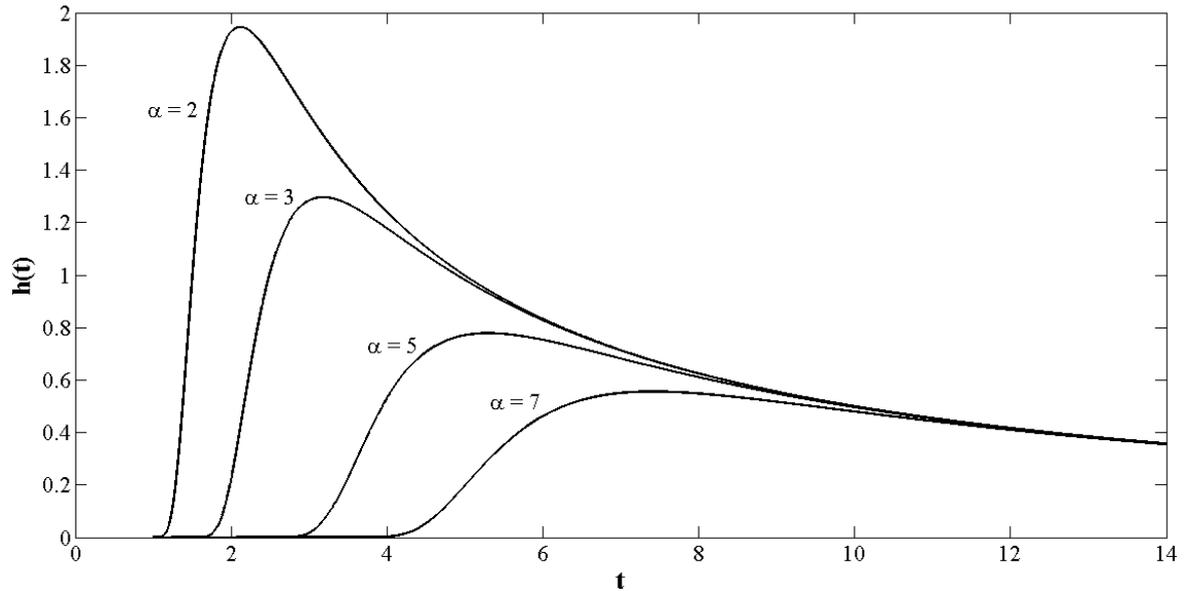


Figura 3.2: Funo taxa de falha da distribuio Weibull inversa generalizada para alguns valores de  $\alpha$  com  $\beta = 5$  e  $\gamma = 0,5$ .

aleatória  $T$  tem densidade Weibull inversa generalizada (3.2), o  $k$ -ésimo momento de  $T$   descrito da seguinte maneira:

$$E(T^k) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k g(t) dt = \int_0^{\infty} \gamma \beta \alpha^\beta t^{(k-\beta-1)} e^{-\gamma(\frac{t}{\alpha})^\beta} dt.$$

Fazendo  $u = \gamma \alpha^\beta t^{-\beta}$ , temos as seguintes relaes:  $du = -\gamma \beta \alpha^\beta t^{-\beta-1} dt$ ;  $u \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow 0$  e  $u \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ ;  $t^k = (t^{-\beta})^{-\frac{k}{\beta}} = \left(\frac{u}{\gamma \alpha^\beta}\right)^{-\frac{k}{\beta}}$ . Desse modo, obtemos que

$$\begin{aligned} E(T^k) &= \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{\gamma \alpha^\beta}\right)^{-\frac{k}{\beta}} e^{-u} du = (\gamma^{-1} \alpha^{-\beta})^{-\frac{k}{\beta}} \int_0^{\infty} u^{[(1-\frac{k}{\beta})-1]} e^{-u} du \\ &= \gamma^{\frac{k}{\beta}} \alpha^k \Gamma\left(1 - \frac{k}{\beta}\right), \quad \text{com } k < \beta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

### 3.4 - Estimacão de Máxima Verossimilhana com Dados Censurados

O objetivo principal dessa seo  obter estimadores para os parâmetros do modelo dado por (3.1), via máxima verossimilhana. Sendo assim, iniciamos com as definies de funo de verossimilhana e estimador de máxima verossimilhana. Em seguida, apresentamos alguns tipos de censura, exibindo a expressão da funo de verossimilhana para cada caso. Terminamos com a estimacão de máxima verossimilhana,

considerando uma amostra de observaes censuradas da distribuico Weibull inversa generalizada.

Nas definies seguintes, consideramos  $\theta$  como sendo um vetor de parâmetros em  $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ , onde  $k$   um inteiro positivo.

**Definio 3.2.** Seja  $f(t; \theta)$  a densidade conjunta da amostra aleatória  $T = (T_1, \dots, T_n)$ . Dado que  $t = (t_1, \dots, t_n)$   uma observao de  $f(t; \theta)$ , a *funao de verossimilhana* correspondente a essa observao  uma funao de  $\theta$  definida por

$$L(\theta) = L(\theta; t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \theta). \quad (3.6)$$

**Definio 3.3.** Para cada ponto amostral  $t = (t_1, \dots, t_n)$ , se  $\hat{\theta}(t)$   o valor que maximiza  $L(\theta; t)$ , *Um estimador de máxima verossimilhana do parâmetro  $\theta$*  baseado em uma amostra aleatória  $T_1, \dots, T_n$    $\hat{\theta}(T_1, \dots, T_n)$ .

Observando que a funao logarmica  estritamente crescente em  $(0, \infty)$ ,  mais conveniente utilizar o logaritmo da funao de verossimilhana, conhecida como *funao log-verossimilhana*, quando pretende-se estimar  $\theta$  via máxima verossimilhana. Denotemos esta funao por  $\log L(\theta)$  simplesmente por  $l(\theta)$ . Sendo assim, a log-verossimilhana  dada por:

$$l(\theta) = \log L(\theta; t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n \log f(t_i; \theta).$$

Se a funao log-verossimilhana  diferenciável em  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , os candidatos a estimadores de máxima verossimilhana são os valores de  $\theta_1, \dots, \theta_k \in \Theta$  que satisfazem as equaes:

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

A funao de verossimilhana pode ser modificada quando temos uma amostra aleatória com observaes incompletas ou parciais. Essas observaes, denominadas censuras, podem ocorrer por várias razões e surgem com frequência na análise de confiabilidade (ou sobrevivência), onde a variável de interesse  tempo de vida (ou tempo de falha). A informaao relativa aos tempos de vida censurados  de grande importância e não  descartada na análise estatística.

Vamos considerar apenas censura à direita, ou seja, aquela em que o tempo de ocorrência do evento de interesse (tempo de vida) está  direita do tempo observado. A seguir, apresentamos alguns mecanismos de censura à direita e suas respectivas funes de verossimilhana.

### Censura do Tipo I

Num mecanismo de censuras do tipo I, temos experimentos com um tempo fixo de observao. Uma possibilidade é considerar  $n$  unidades no início do experimento e terminar o estudo após um período de tempo fixo  $C$ . Assim, todas as unidades têm um tempo fixo de censura  $C > 0$ . Note que o tempo de realizao do experimento é fixo e, por outro lado, o número de unidades cujos tempos de vida são observados  uma variável aleatória.

Vamos considerar os tempos de vida  $T_1, \dots, T_n$  como sendo variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com funo de densidade  $f(t)$  e funo de sobrevivência  $S(t)$ . O tempo exato de sobrevivência é observado apenas se  $T_i \leq C$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; caso contrário, sabemos apenas que  $P(T_i > C) > 0$ . Sendo assim, uma amostra sob esquema de censura do tipo I  uma amostra  $X_1, \dots, X_n$  dada por

$$X_i = \min(T_i, C) = \begin{cases} T_i & \text{se } T_i \leq C \\ C & \text{se } T_i > C \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

Na presena de censura, a funo de verossimilhana é modificada. Em amostragens com dados completos, ou seja, sem censura, a funo de verossimilhana é o produto das densidades completas, veja (3.6). Quando uma censura do tipo I ocorre, o que se sabe é que o intervalo do tempo de vida,  $T$ ,   $(C, \infty)$ . Essa é uma informao importante que deve ser levada em considerao na funo de verossimilhana e  resumida por  $P(T > C)$ . Sendo assim, se  $t_1, \dots, t_n$   uma amostra observada de  $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , temos que a funo de verossimilhana de  $\theta$ , para o caso de censura tipo I, é dada por

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n [f(t_i; \theta)]^{\delta_i} [1 - F(C; \theta)]^{1-\delta_i}, \quad (3.8)$$

onde  $\delta_i = \begin{cases} 1, & t \leq C \\ 0, & t > C \end{cases}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . A notaco  $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$  indica ‘‘mesma distribuo que’’. Para maiores detalhes veja Lawless [12].

### Censura do Tipo II

Neste tipo de censura, apenas as  $r$  menores observaoes ordenadas em uma amostra aleatória de tamanho  $n$  são observadas, onde  $r$  é um inteiro fixo entre 1 e  $n$ . Esse tipo de censura ocorre quando  $n$  unidades são colocadas em teste e o experimento é finalizado após a ocorrência da  $r$ -ésima falha. O número de falhas,  $r$ , é fixado antes da realizao do experimento. Sendo assim, podemos observar que o tempo de realizao

do experimento   aleatório e, em contrapartida, o número de unidades observadas é fixo, o que difere da censura do tipo I.

Para obter a funo de verossimilhana para uma amostra de observaes sob censura do tipo II, precisamos de um resultado de estatísticas de ordem, o qual enunciamos a seguir.

**Proposio 3.4.** *Se  $T_i$  tem densidade  $f(t; \theta)$  e funo de sobrevivência  $S(t; \theta)$ , então a densidade conjunta das  $r$  estatísticas de ordem  $T_{(1)}, \dots, T_{(r)}$  ( $r \leq n$ )   dada por*

$$f(t_{(1)}, \dots, t_{(r)}) = \frac{n!}{(n-r)!} \left( \prod_{i=1}^r f(t_{(i)}; \theta) \right) [S(t_{(r)}; \theta)]^{n-r},$$

onde  $t_{(r)}$    o tempo de vida que corresponde à ocorrência da  $r$ -ésima falha.

Assim, a funo de verossimilhana para censura tipo II é dada por

$$L(\theta) = \frac{n!}{(n-r)!} \left( \prod_{i=1}^r f(t_{(i)}; \theta) \right) [S(t_{(r)}; \theta)]^{n-r},$$

onde  $t_{(1)} \leq \dots \leq t_{(r)}$ . Para maiores detalhes, ver Lawless [12].

### Censura Aleatória

Neste caso os tempos de censura são aleatórios. Nesta situao, considere os tempos de vida  $T_1, \dots, T_n$  como sendo variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com funo de sobrevivência comum,  $S(t, \theta)$ ; e sejam os tempos de censura  $C_1, \dots, C_n$ , variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com funo de sobrevivência comum  $G(t)$ . Isto  ,  $C_i$  tempo de censura correspondente a  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Considere ainda independência entre o tempo de vida e tempo de censura. Uma amostra sob esquema de censura aleatória é uma amostra  $X_1, \dots, X_n$  dada por

$$X_i = \min(T_i, C_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.9)$$

Observa-se  $(t_i, \delta_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , do vetor aleatório  $(X_i, \Delta_i)$ , onde  $X_i$  é dado por (3.9) e  $\Delta_i = I_{(T_i \leq C_i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . A funo de verossimilhana de  $\theta$ , sob esquema de censura aleatória, é dada por:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n [f(t_i; \theta)]^{\delta_i} [S(t_i; \theta)]^{1-\delta_i}, \quad (3.10)$$

onde  $f(\cdot; \theta)$  é a funo densidade comum das variáveis  $T_1, \dots, T_n$ , ou por

$$L(\theta) = \prod_{i \in F} f(t_i; \theta) \prod_{i \in C} S(t_i; \theta), \quad (3.11)$$

onde  $F$  denota o conjunto das observaes não-censuradas e  $C$  denota o conjunto das observaes censuradas. Maiores detalhes podem ser encontrados em Colosimo e Giolo [5].

Considerando, agora,  $T_1, \dots, T_n$  uma amostra aleatória da distribuio Weibull inversa generalizada, temos, sob censura aleatória, que a funo log-verossimilhana de  $\theta = (\alpha, \beta, \gamma)$   dada por:

$$l(\alpha, \beta, \gamma) = r[\log \gamma + \log \beta + \beta \log \alpha] - (\beta + 1) \sum_{i \in F} \log t_i - \gamma \alpha^\beta \sum_{i \in F} t_i^{-\beta} + \sum_{i \in C} \log \left\{ 1 - \exp \left[ -\gamma \left( \frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right] \right\},$$

onde  $r$   o número de falhas.

As derivadas de  $l(\alpha, \beta, \gamma)$  em relao aos respectivos parâmetros da distribuio são descritas abaixo, onde  $u_i = 1 - \exp \left[ -\gamma \left( \frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right]$ .

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \alpha} = \frac{r\beta}{\alpha} - \gamma\beta\alpha^{\beta-1} + \sum_{i \in F} t_i^{-\beta} + \gamma\beta\alpha^{\beta-1} \sum_{i \in C} t_i^{-\beta} \left( \frac{1-u_i}{u_i} \right), \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \beta} &= \frac{r}{\beta} + r \log \alpha - \sum_{i \in F} \log t_i - \gamma\alpha^\beta \sum_{i \in F} t_i^{-\beta} \log \left( \frac{\alpha}{t_i} \right) \\ &+ \gamma\alpha^\beta \sum_{i \in C} t_i^{-\beta} \log \left( \frac{\alpha}{t_i} \right) \left( \frac{1-u_i}{u_i} \right) \text{ e} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \gamma} = \frac{r}{\gamma} - \alpha^\beta \sum_{i \in F} t_i^{-\beta} + \alpha^\beta \sum_{i \in C} t_i^{-\beta} \left( \frac{1-u_i}{u_i} \right), \quad (3.14)$$

Igualando a zero as expressões (3.12), (3.13) e (3.14) obtm-se um sistema não-linear cuja soluo d os estimadores de máxima verossimilhana de  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ . Ele pode ser resolvido por meio de um método numérico como, por exemplo, Newton-Raphson.

Além disso, determinamos a matriz de informao observada

$$J(\alpha, \beta, \gamma) = - \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}.$$

Os elementos dessa matriz são exibidos abaixo. Denotando  $u_i = 1 - \exp \left[ -\gamma \left( \frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right]$ , temos:

$$\begin{aligned} l_{11} &= \frac{\partial^2 l(\alpha, \beta, \alpha)}{\partial \alpha^2} = -\frac{r\beta}{\alpha^2} - \gamma\beta(\beta-1)\alpha^{\beta-2} \sum_{i \in F} t_i^{-\beta} + \\ &+ \gamma\beta\alpha^{\beta-2} \sum_{i \in C} t_i^{-\beta} \left( \frac{1-u_i}{u_i} \right) \left[ \beta - 1 - \frac{\gamma\beta}{u_i} \left( \frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right]; \end{aligned}$$

$$l_{12} = \frac{\partial^2 l(\alpha, \beta, \alpha)}{\partial \beta \partial \alpha} = -\frac{r}{\alpha} - \gamma \alpha^{\beta-1} \sum_{i \in F} t_i^{-\beta} \left[ 1 + \beta \log \left( \frac{\alpha}{t_i} \right) \right] + \\ + \gamma \beta \alpha^{\beta-1} \sum_{i \in C} t_i^{-\beta} \left( \frac{1-u_i}{u_i} \right) \left\{ 1 + \beta \log \left( \frac{\alpha}{t_i} \right) \left[ 1 - \frac{\gamma}{u_i} \left( \frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right] \right\};$$

$$l_{32} = \frac{\partial^2 l(\alpha, \beta, \alpha)}{\partial \beta \partial \gamma} = -\alpha^\beta \sum_{i \in F} t_i^{-\beta} \log \left( \frac{\alpha}{t_i} \right) + \\ + \alpha^\beta \sum_{i \in C} t_i^{-\beta} \log \left( \frac{\alpha}{t_i} \right) \left( \frac{1-u_i}{u_i} \right) \left[ 1 - \frac{\gamma}{u_i} \left( \frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right];$$

$$l_{13} = \frac{\partial^2 l(\alpha, \beta, \alpha)}{\partial \gamma \partial \alpha} = -\beta \alpha^{\beta-1} \sum_{i \in F} t_i^{-\beta} + \beta \alpha^{\beta-1} \sum_{i \in C} t_i^{-\beta} \left( \frac{1-u_i}{u_i} \right) \left[ 1 - \frac{\gamma}{u_i} \left( \frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right];$$

$$l_{33} = \frac{\partial^2 l(\alpha, \beta, \alpha)}{\partial \gamma^2} = -\frac{r}{\gamma^2} - \alpha^{2\beta} \sum_{i \in C} t_i^{-2\beta} \left( \frac{1-u_i}{u_i^2} \right);$$

e

$$l_{22} = \frac{\partial^2 l(\alpha, \beta, \alpha)}{\partial \beta^2} = -\frac{r}{\beta^2} - \gamma \alpha^\beta \sum_{i \in F} \log \left( \frac{\alpha}{t_i} \right) \left[ \log(\alpha) - t_i^{-\beta} \log(t_i) \right] + \\ + \gamma \alpha^\beta \sum_{i \in C} \log \left( \frac{\alpha}{t_i} \right) \left( \frac{1-u_i}{u_i} \right) \left[ \log(\alpha) - t_i^{-\beta} \log(t_i) - \frac{t_i^{-\beta} \gamma}{u_i} \left( \frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \log \left( \frac{\alpha}{t_i} \right) \right].$$

A matriz de informação observada calculada em  $\hat{\theta}$ ,  $J(\hat{\theta})$ , pode ser usada para verificar a normalidade assintótica de  $\hat{\theta}$ . Sendo assim, sob certas condições de regularidade (ver, por exemplo, Lehmann [13]), a distribuição assintótica de  $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$  é  $N_3(0, J(\hat{\theta})^{-1})$ , onde o índice é o número de parâmetros da distribuição Weibull inversa generalizada. Esta propriedade é importante para a construção de intervalos de confiança para os parâmetros da distribuição. Para mais detalhes, ver Colosimo e Giolo [5].

### 3.5 - Mistura de Duas Distribuições Weibull Inversa Generalizada

Nesta seção analisamos o modelo descrito por

$$G(t) = p G_1(t) + q G_2(t), \quad (3.15)$$

onde  $G_i(t) = e^{-\gamma(\frac{\alpha_i}{t})^{\beta_i}}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $0 \leq p, q \leq 1$  e  $p + q = 1$ . Nos referimos à (3.15) como modelo de mistura de duas distribuições Weibull inversa generalizada. Por simplicidade, neste capítulo usaremos para (3.15) o termo modelo de mistura. Em particular, quando  $\gamma = 1$ , temos uma mistura de duas distribuições Weibull inversa como caso especial de (3.15). As propriedades e resultados de interesse deste modelo foram apresentados na Seção 2.3.

A seguir destacamos algumas propriedades do modelo de mistura (função densidade, função taxa de falha e momentos) por extensão dos resultados correspondentes para a distribuição Weibull inversa, além de provar a identificabilidade de uma mistura finita de distribuições Weibull inversa generalizada.

### 3.5.1 Função Densidade e Momentos

A função densidade para o modelo de mistura (3.15) é dada por:

$$g(t) = p g_1(t) + q g_2(t), \quad (3.16)$$

onde  $0 \leq p, q \leq 1$ ,  $p + q = 1$  e a densidade componente da mistura é dada por

$$g_i(t) = \gamma_i \beta_i \alpha_i^{\beta_i} t^{-(\beta_i+1)} e^{-\gamma_i(\frac{\alpha_i}{t})^{\beta_i}}, \quad t > 0,$$

com  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i > 0$  para  $i = 1, 2$ .

A função densidade (3.16) pode ser unimodal ou bimodal, conforme é ilustrado na Figura 3.3.

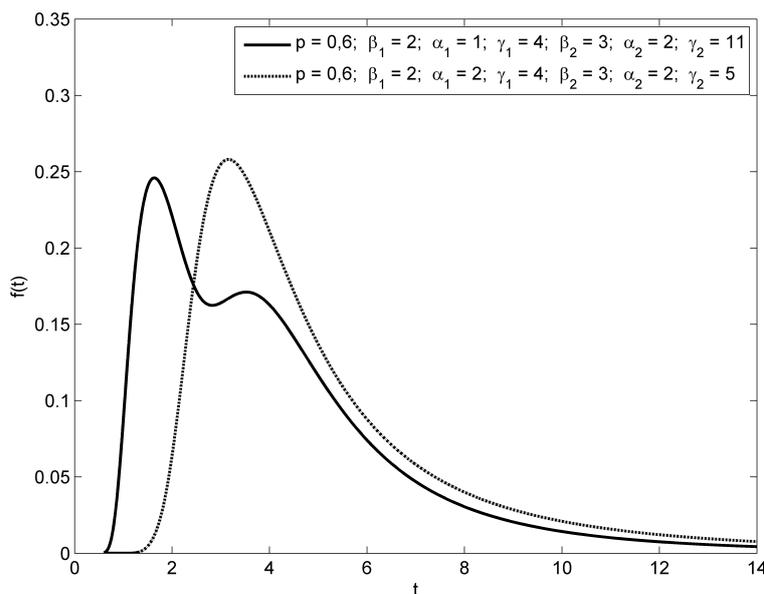


Figura 3.3: Função densidade para o modelo de mistura.

Se  $T$  é uma variável aleatória com função densidade dada por (3.16), segue de (3.5) que o  $k$ -ésimo momento de  $T$  é dado por:

$$E(T^k) = p \gamma_1^{\frac{k}{\beta_1}} \alpha_1^k \Gamma\left(1 - \frac{k}{\beta_1}\right) + q \gamma_2^{\frac{k}{\beta_2}} \alpha_2^k \Gamma\left(1 - \frac{k}{\beta_2}\right), \quad k < \beta_1 \text{ e } k < \beta_2.$$

### 3.5.2 Função Taxa de Falha

A função de sobrevivência do modelo de mistura pode ser descrita da seguinte forma:

$$S(t) = p(1 - e^{-\gamma_1(\frac{\alpha_1}{t})^{\beta_1}}) + q(1 - e^{-\gamma_2(\frac{\alpha_2}{t})^{\beta_2}}).$$

A função taxa de falha correspondente é dada por

$$h(t) = \frac{p \gamma_1 \beta_1 \alpha_1^{\beta_1} t^{-(\beta_1+1)} e^{-\gamma_1(\frac{\alpha_1}{t})^{\beta_1}} + q \gamma_2 \beta_2 \alpha_2^{\beta_2} t^{-(\beta_2+1)} e^{-\gamma_2(\frac{\alpha_2}{t})^{\beta_2}}}{p(1 - e^{-\gamma_1(\frac{\alpha_1}{t})^{\beta_1}}) + q(1 - e^{-\gamma_2(\frac{\alpha_2}{t})^{\beta_2}})}. \quad (3.17)$$

O Lema 2.8, que afirma que

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0,$$

continua válido quando  $h(t)$  é como em (3.17) e a demonstração é análoga a que foi feita na Seção 2.3.2, uma vez que o parâmetro  $\gamma$  é positivo.

Uma outra característica da função taxa de falha do modelo de mistura (3.1) é que ela pode ser unimodal ou bimodal, dependendo dos valores dos parâmetros. A Figura 3.4 ilustra estas duas formas e os valores dos parâmetros são os mesmos da Figura 3.3.

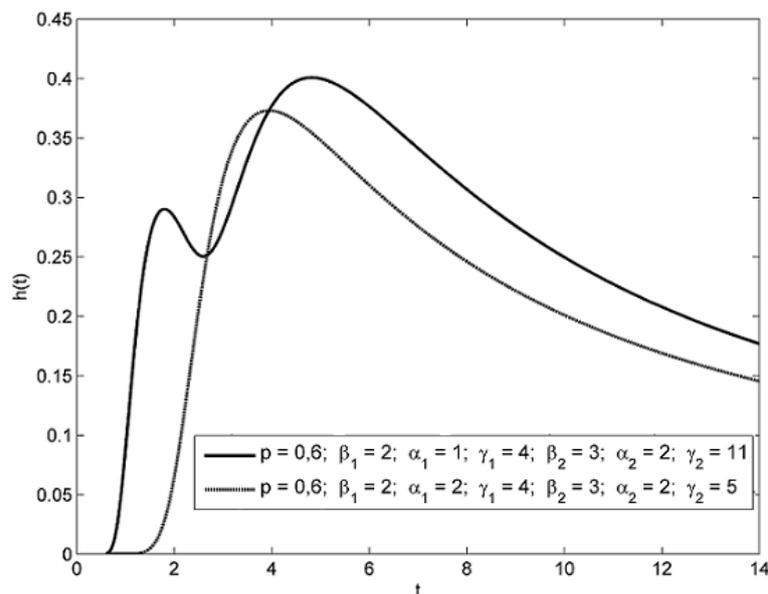


Figura 3.4: Função taxa de falha para o modelo de mistura.

### 3.5.3 Identificabilidade

Nesta seção, utilizamos o Teorema 1.16 da Seção 1.4 para mostrar que a classe de misturas de distribuições Weibull inversa generalizada é identificável. Para isso, consideramos primeiramente uma reparametrização para a distribuição Weibull inversa generalizada, onde a função de densidade e a função de distribuição da  $i$ -ésima componente da mistura são dadas, respectivamente, por

$$g_i(t; \alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = \gamma_i \beta_i \alpha_i^{-\beta_i} t^{-(\beta_i+1)} e^{-\gamma_i(\alpha_i t)^{-\beta_i}} \quad \text{e} \quad G_i(t; \alpha_i, \beta_i) = e^{-\gamma_i(\alpha_i t)^{-\beta_i}}, \quad (3.18)$$

onde  $t \geq 0$  e  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i > 0$  para  $i = 1, 2$ .

**Proposição 3.5.** *Seja  $\mathcal{G}$  uma família de distribuições Weibull inversa generalizada dada por*

$$\mathcal{G} = \left\{ G : G(t; \alpha, \beta, \gamma) = \int_0^t \gamma \beta \alpha^{-\beta} u^{-(\beta+1)} e^{-\gamma(\alpha u)^{-\beta}} du : \alpha, \beta, \gamma > 0 \text{ e } t > 0 \right\}.$$

*Então a classe de misturas de  $\mathcal{G}$  é identificável.*

**Demonstração.** Seja  $M$  uma aplicação que transforma uma função de distribuição  $G \in \mathcal{G}$  em uma função geradora de momentos de  $\log(T)$ , onde  $T$  é uma variável aleatória com distribuição dada por (3.18). Temos que  $M$  é linear, pela linearidade da esperança, e para qualquer  $G_i \in \mathcal{G}$ ,  $i = 1, 2$ , temos que:

$$M[G_i(\cdot; \alpha_i, \beta_i, \gamma_i)] = \phi_i(s) = E(e^{s \log T}) = E(T^s) = \gamma_i^{\frac{s}{\beta_i}} \alpha_i^{-s} \Gamma\left(1 - \frac{s}{\beta_i}\right), \quad (3.19)$$

com domínio  $D_{\phi_i} = (-\infty, \beta_i)$ . A última igualdade em (3.19) é obtida de modo análogo ao cálculo feito na Seção 3.3, considerando  $u = \gamma_i(\alpha_i t)^{-\beta_i}$ .

Da função de distribuição de  $T$ , segue que

$$G_1 \prec G_2 \quad \text{quando} \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2 \quad \text{e} \quad \alpha_1 < \alpha_2 \quad (3.20)$$

e

$$G_1 \prec G_2 \quad \text{quando} \quad \alpha_1 = \alpha_2 > \frac{1}{t}, \quad \gamma_1 = \gamma_2 \quad \text{e} \quad \beta_1 < \beta_2. \quad (3.21)$$

Temos que  $D_{\phi_1}(s) = (-\infty, \beta_1)$ ,  $D_{\phi_2}(s) = (-\infty, \beta_2)$  e podemos considerar  $s_1 = \beta_1 \in \overline{S_1} = (-\infty, \beta_1]$ , onde  $S_1 = \{s : \phi_1(s) \neq 0\}$  e a barra denota o fecho de  $S_1$ . Assim, das equações (3.20) e (3.21), segue que  $D_{\phi_1}(s) \subseteq D_{\phi_2}(s)$ . Como  $\Gamma(x)$  é contínua em  $(0, +\infty)$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = \infty$ , segue que

$$\lim_{s \rightarrow \beta_1} \Gamma\left(1 - \frac{s}{\beta_1}\right) = \infty$$

e desse modo obtemos:

$$\lim_{s \rightarrow \beta_1} \phi_1(s) = \lim_{s \rightarrow \beta_1} \gamma_1^{\frac{s}{\beta_1}} \alpha_1^{-s} \Gamma\left(1 - \frac{s}{\beta_1}\right) = \infty. \quad (3.22)$$

Por outro lado, quando  $\alpha_1 = \alpha_2 > \frac{1}{t}$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2$  e  $\beta_1 < \beta_2$ , obtemos

$$\lim_{s \rightarrow \beta_1} \phi_2(s) = \gamma_2^{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \alpha_2^{-\beta_1} \Gamma\left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right) > 0. \quad (3.23)$$

Das equações (3.22) e (3.23), segue que

$$\lim_{\substack{s \rightarrow \beta_1 \\ s \in S_1}} \frac{\phi_2(s)}{\phi_1(s)} = 0,$$

onde  $S_1 = (-\infty, \beta_1)$ . Portanto, pelo Teorema 1.16 da Seção 1.4, a classe de misturas de distribuições Weibull inversa generalizada é identificável. ■

# Referências Bibliográficas

- [1] Atienza, N., Garcia-Heras, J. e Muñoz-Pichardo, J. M., *A New Condition for Identifiability of Finite Mixture Distributions*, *Metrika*, v. 63, p. 215-221, 2006.
- [2] Bolfarine, H., Rodrigues, J., Achcar J. A., *Análise de Sobrevivência*, Instituto de Matemática/UFRJ, Rio de Janeiro, 1991.
- [3] Casella, G., Berger, R. L., *Inferência Estatística - Tradução da 2ª Edição Norteamericana*, Cengage Learning, São Paulo, 2010.
- [4] Chandra, S., *On the Mixtures of Probability Distributions*, *Scandinavian Journal of Statistics*, v. 4, p. 105-112, 1977.
- [5] Colosimo, E. A., Giolo, S. R., *Análise de Sobrevivência Aplicada*, Edgard Blucher, São Paulo, 2006.
- [6] Drapella, A., *The Complementary Weibull Distribution: unknown or just forgotten?*, *Quality Reliability Engineering Int*, v. 9, p. 383-385, 1993.
- [7] Elandt-Johnson R. C. e Johnson N. L., *Survival Models and Data Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1980.
- [8] Gusmão, F. R. S. de, Ortega, E. M. M., Cordeiro, G. M., *The Generalized Inverse Weibull Distribution*, *Statistical Papers*, v. 52, p. 591-619, 2011.
- [9] Jiang, R., Murthy D. N. P., *Modeling Failure-Data by Mixture of Two Weibull Distributions: A Graphical Approach*, *IEEE Transactions on Reliability*, v. 44, n° 3, p. 477-488, 1995.
- [10] Jiang, R., Murthy D. N. P., Ji, P., *Models Involving Two Inverse Weibull Distributions*, *Reliability Engineering & System Safety*, v. 73, p. 73-81, 2001.

- 
- [11] Lai, Chin-Diew., Pham, H., *On Recent Generalizations of the Weibull Distribution*, IEEE Transactions on Reliability, v. 56, p. 454-458, 2007.
- [12] Lawless, J. F., *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New Jersey, 2003.
- [13] Lehmann, E. L., *Elements of Large-Sample Theory*, Springer, New York, 1999.
- [14] Murthy, D. N. P., Xie M., Jiang, R., *Weibull Models*, John Wiley & Sons, New Jersey, 2004.
- [15] Nelson, L. S., *Weibull Probability Paper*, Industrial Quality Control, v. 23, p. 452-453, 1967.
- [16] McLachlan, G. J. e Peel, D., *Finite Mixture Models*, John Wiley & Sons, New York, 2000.
- [17] Sultan, K. S., Ismail, M. A., Al-Moisheer, A. S., *Mixture of two inverse Weibull distributions: Properties and estimation*, Computational Statistics & Data Analysis, v. 51, p. 5377-5387, 2007.
- [18] Titterington, D. M., Smith, A. F. M., Makov, U. E., *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions*, John Wiley & Sons, New York, 1985.
- [19] Yakowitz, S. J., Spragins, J. D., *On the Identifiability of Finite Mixtures*, The Annals of Mathematical Statistics, v. 39, p. 209-214, 1968.