

**ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE ESTRUTURAS METÁLICAS  
USANDO O CONCEITO DE RÓTULAS PLÁSTICAS E O  
ALGORITMO DE RETORNO RADIAL.**

**MARÍA PAZ DUQUE GUTIÉRREZ**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS  
E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE ESTRUTURAS  
METÁLICAS USANDO O CONCEITO DE RÓTULAS  
PLÁSTICAS E O ALGORITMO DE RETORNO RADIAL.**

**MARÍA PAZ DUQUE GUTIÉRREZ**

**ORIENTADOR: WILLIAM TAYLOR MATIAS SILVA, Dr. Ing.  
CO-ORIENTADOR: LUCIANO MENDES BEZERRA, PhD.**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS**

**PUBLICAÇÃO: E.DM-004A/14**

**BRASÍLIA / DF: 17 / 04 / 2014**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE ESTRUTURAS METÁLICAS  
USANDO O CONCEITO DE RÓTULAS PLÁSTICAS E O  
ALGORITMO DE RETORNO RADIAL.**

**MARÍA PAZ DUQUE GUTIÉRREZ**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

**APROVADA POR:**

---

**Prof. William Taylor Matias Silva, Dr. Ing. (UnB)**  
(Orientador)

---

**Prof. Francisco Evangelista Junior, PhD (UnB)**  
(Examinador Interno)

---

**Prof. Osvaldo Luís Manzoli, Dr. Ing (UNESP)**  
(Examinador Externo)

**BRASÍLIA, 17 DE ABRIL DE 2014**

## FICHA CATALOGRÁFICA

DUQUE GUTIÉRREZ, MARÍA PAZ

Análise Elastoplástica de Estruturas Metálicas Usando o Conceito de Rótula Plástica e o Algoritmo de Retorno Radial. [Distrito Federal] 2014.

xiii, 87p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2014).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Análise Não Linear

2. Rótula Plástica

3. Plasticidade

4. Método dos Elementos Finitos

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

GUTIERREZ, M. P. D. (2014). Análise Elastoplástica de Estruturas Metálicas Usando o Conceito de Rótula Plástica e o Algoritmo de Retorno Radial. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.DM-004A/14, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 87p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: María Paz Duque Gutiérrez

TÍTULO: Análise Elastoplástica de Estruturas Metálicas Usando o Conceito de Rótula Plástica e o Algoritmo de Retorno Radial.

GRAU: Mestre      ANO: 2014

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

María Paz Duque Gutiérrez  
CLN 403, Bloco C apto 108 - Asa Norte  
70.835-530 Brasília - DF- Brasil  
e-mail: mpazduque@gmail.com

Dedicatória.

*A Bernardo y Elvia (in memoriam)*

*A mi abuelita Rosalba y a Isabel*

## **AGRADECIMENTOS**

Obrigada Deus pelas infinitas bênçãos recebidas.

Ao meu orientador o Prof. William Taylor Matias Silva, por ter-me aceito como sua orientanda, pela constante disponibilidade e incentivo.

Ao programa de Pós-Graduação em estruturas e Construção Civil, aos professores e os estudantes.

À minha família que amo profundamente, pelo apoio e carinho especialmente aos meus pais, a vocês minha eterna gratidão. Às minhas irmãs Natalia, Daniela e à minha sobrinha Emma. Aos meus primos, tios e amigos na Colômbia pelo amor e apoio. Sempre acreditaram em minha capacidade e me acharam a melhor de todas, mesmo não sendo.

Ao Julián pelo amor que me brinda dia a dia, pela companhia, paciência, pelo incentivo sempre, pelo apoio incondicional e por ser, de tantas formas, um homem maravilhoso.

Aos amigos, companheiros e conhecidos em Brasília pela companhia, carinho e apoio durante o tempo da realização do Mestrado, pela ajuda para a execução da minha dissertação, pela amizade e pelos momentos convividos nestes últimos dois anos. Obrigada por dividir comigo as angústias e alegrias.

À CAPES pelo apoio financeiro.

## **RESUMO**

### **ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE ESTRUTURAS METÁLICAS USANDO O CONCEITO DE RÓTULAS PLÁSTICAS E O ALGORITMO DE RETORNO RADIAL**

**Autor: María Paz Duque Gutiérrez**

**Orientador: William Taylor Matias Silva, Dr. Ing.**

**Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, abril de 2014**

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento e implementação de uma rotina de aplicação prática para uma análise elastoplástica de primeira ordem (pequenas deformações e pequenos deslocamentos), baseada nos conceitos de algoritmo de retorno radial, preditor/corretor e o conceito de rótulas plásticas. Espera-se obter uma ferramenta numérica precisa e computacionalmente econômica para a solução de diferentes tipos de estruturas metálicas. Para a análise limite, é utilizada uma superfície de escoamento assumida como uma função convexa e contínua das forças, agindo na seção transversal da estrutura. Para a solução das equações de equilíbrio, é utilizado um método iterativo baseado no método de Newton-Raphson combinado com o método de comprimento de arco. É introduzido o endurecimento isotrópico no regime plástico. As deformações plásticas são regidas pelo princípio da normalidade e são restritas aos extremos dos elementos. Os extremos dos elementos podem mudar bruscamente do estado elástico ao estado plástico. A matriz modular tangente consistente é determinada e aplicada sendo essencial para obter precisão e convergência. Finalmente, diferentes exemplos numéricos são estudados para avaliar a eficiência e aplicabilidade dos métodos empregados.

## **ABSTRACT**

### **ELASTOPLASTIC ANALYSIS OF METAL STRUCTURES USING THE CONCEPT OF PLASTIC HINGES AN THE RADIAL RETURN ALGORITHM**

**Author: María Paz Duque Gutiérrez**

**Supervisor: William Taylor Matias Silva, Dr. Ing.**

**Postgraduate Program in Structure and Civil Construction Engineering**

**Brasília, April of 2014**

The objective of this work is the development and implementation of a routine of practical application for a first order elastoplastic analysis (small strains and small displacements). Based on the concepts of radial return algorithm, predictor / corrector and the concept of plastic hinge. It is expected to obtain a numerical tool accurate and computationally economical for the solution of different metal structural typologies. For the limit analysis is used a yield surface assumed as a convex and continuous function of the forces acting at the cross section of the structure and therefore, for the solution of the equilibrium equations is used an iterative method based on the Newton-Raphson method combined whit the arc length method. Isotropic hardening in the plastic regime is introduced. The plastic deformations are governed by the principle of normality and are restricted to the extremes of the elements. The extremes of the elements can change abruptly from elastic to plastic state. Consistent modular tangent matrix is determined and applied since it is essential for the accuracy and convergence. Finally, different numerical examples are studied to evaluate the efficiency and applicability of the methods employed.



## SUMÁRIO

<b>1.</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	MOTIVAÇÃO	1
1.2	OBJETIVOS	3
1.2.1	Objetivo geral	3
1.2.2	Objetivos específicos	3
1.3	METODOLOGIA	4
1.4	ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	4
<b>2.</b>	<b>RÓTULA PLÁSTICA</b>	<b>6</b>
2.1	CONCEITO DE RÓTULA PLÁSTICA	6
2.2	SUPERFÍCIE DE INTERAÇÃO	8
2.2.1	Fluxo plástico	10
2.2.2	Derivadas de primeira ordem da superfície de interação	11
2.2.3	Derivadas de segunda ordem da superfície de interação	12
2.2.4	Endurecimento isotrópico	13
2.3	MULTIPLICADOR PLÁSTICO	17
2.4	MATRIZ DE RIGIDEZ ELASTOPLÁSTICA	21
<b>3.</b>	<b>ALGORITMO DE RETORNO RADIAL</b>	<b>23</b>
3.1	DERIVADAS DA SUPERFÍCIE DE INTERAÇÃO	24
3.2	DESCRIÇÃO DO ALGORITMO DE RETORNO RADIAL	25
3.2.1	Algoritmo de retorno de vetor simples	26
3.2.2	Algoritmo de retorno com dois vetores	29
3.3	MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE CONSISTENTE	32
3.3.1	Algoritmo de retorno de vetor simples	33
3.3.2	Algoritmo de retorno com dois vetores	34
<b>4.</b>	<b>SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES NÃO LINEARES</b>	<b>39</b>
4.1	MÉTODOS DE COMPRIMENTO DE ARCO	40
4.1.1	Método de controle de deslocamento	40
4.1.2	Método de comprimento de arco esférico e formulação do método de comprimento de arco cilíndrico	42
4.1.3	Métodos de comprimento de arco linearizados	44
4.1.4	Tamanho do comprimento de arco	45

<b>5.</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>46</b>
<b>5.1</b>	<b>TRELIÇA PLANA .....</b>	<b>47</b>
<b>5.1.1</b>	<b>Exemplo 1 .....</b>	<b>47</b>
<b>5.1.2</b>	<b>Exemplo 2.....</b>	<b>49</b>
<b>5.2</b>	<b>PÓRTICO PLANO .....</b>	<b>51</b>
<b>5.2.1</b>	<b>Exemplo1.....</b>	<b>51</b>
<b>5.2.2</b>	<b>Exemplo 2.....</b>	<b>53</b>
<b>5.2.3</b>	<b>Exemplo 3.....</b>	<b>56</b>
<b>5.2.4</b>	<b>Exemplo 4.....</b>	<b>57</b>
<b>5.2.5</b>	<b>Viga Engastada-Livre .....</b>	<b>59</b>
<b>5.3</b>	<b>GRELHA PLANA .....</b>	<b>61</b>
<b>5.3.1</b>	<b>Exemplo 1.....</b>	<b>61</b>
<b>5.4</b>	<b>PÓRTICO ESPACIAL .....</b>	<b>63</b>
<b>5.4.1</b>	<b>Exemplo 1.....</b>	<b>63</b>
<b>5.5</b>	<b>EXEMPLOS NO ANSYS .....</b>	<b>66</b>
<b>5.5.1</b>	<b>Viga Engastada-Engastada com carga no centro do vão .....</b>	<b>67</b>
<b>5.5.2</b>	<b>Viga Engastada-Livre .....</b>	<b>69</b>
<b>6.</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....</b>	<b>73</b>
<b>6.1</b>	<b>CONCLUSÕES GERAIS.....</b>	<b>73</b>
<b>6.2</b>	<b>SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>74</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>76</b>
	<b>ANEXO A.....</b>	<b>79</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 Elemento de viga com região escoada e rótula plástica, Ueda e Fujikubo (1990)	15
Figura 2.2 Constante de Endurecimento isotrópico.....	16
Figura 2.3 Método de rótula plástica .....	17
Figura 3.1 Algoritmo para uma rótula plástica.....	27
Figura 3.2 Algoritmo para duas rótulas plásticas .....	29
Figura 4.1 Método de comprimento de arco esférico e notação para um sistema com um grau de liberdade ( $\psi=1$ ) (Crisfield, 1991) .....	41
Figura 5.1 Geometria e carregamento .....	48
Figura 5.2 Malha de elementos finitos .....	48
Figura 5.3 Formação das rótulas plásticas.....	48
Figura 5.4 Resposta do ciclo de carga-descarga.....	49
Figura 5.5 Geometria e carregamento .....	50
Figura 5.6 Malha de elementos finitos .....	50
Figura 5.7 Formação das rótulas plásticas.....	50
Figura 5.8 Resposta do processo de carregamento.....	51
Figura 5.9 Geometria e carregamento .....	52
Figura 5.10 Malha de elementos finitos .....	52
Figura 5.11 Formação das rótulas plásticas.....	52
Figura 5.12 Resposta para o ciclo de carga-descarga.....	53
Figura 5.13 Geometria e carregamento .....	54
Figura 5.14 Malha de elementos finitos .....	54
Figura 5.15 Formação das rótulas plásticas.....	54
Figura 5.16 Resposta do ciclo de carga-descarga.....	55
Figura 5.17 Geometria e carregamento .....	56
Figura 5.18 Malha de elementos finitos .....	56
Figura 5.19 Formação das rótulas plásticas.....	56
Figura 5.20 Resposta do processo de carregamento.....	57
Figura 5.21 Geometria e carregamento .....	58
Figura 5.22 Malha de elementos finitos .....	58
Figura 5.23 Formação das rótulas plásticas.....	58

Figura 5.24 Resposta do processo de carregamento.....	59
Figura 5.25 Geometria e carregamento .....	60
Figura 5.26 Malha de elementos finitos .....	60
Figura 5.27 Formação da rótula plástica .....	60
Figura 5.28 Resposta do processo de carregamento.....	61
Figura 5.29 Geometria e carregamento .....	62
Figura 5.30 Malha de elementos finitos .....	62
Figura 5.31 Formação das rótulas plásticas.....	62
Figura 5.32 Resposta do ciclo de carga-descarga.....	63
Figura 5.33 Geometria e carregamento .....	64
Figura 5.34 Malha de elementos finitos .....	64
Figura 5.35 Formação das rótulas plásticas.....	64
Figura 5.36 Resposta do ciclo carga-descarga.....	65
Figura 5.37 Modelo de endurecimento isotrópico. (ANSYS).....	66
Figura 5.38 Elemento SOLID186, da Biblioteca (ANSYS).....	67
Figura 5.39 Geometria e carregamento .....	68
Figura 5.40 Malha de elementos finitos .....	68
Figura 5.41 Formação das rótulas plásticas.....	68
Figura 5.42 Configuração deformada ANSYS.....	69
Figura 5.43 Resposta para o processo de carregamento.....	69
Figura 5.44 Geometria e carregamento .....	70
Figura 5.45 Malha de elementos finitos .....	70
Figura 5.46 Formação da rótula plástica .....	70
Figura 5.47 Configuração deformada ANSYS.....	71
Figura 5.48 Tensões equivalentes, Von Mises .....	71
Figura 5.49 Resposta para o processo de carregamento.....	72
Figura A.0.1 Sistema de coordenadas locais e globais da treliça plana. ....	79
Figura A.0.2 Sistema de coordenadas locais da treliça espacial. ....	81
Figura A.0.3 Sistema de coordenadas locais e globais do pórtico plano.....	83
Figura A.0.4 Sistema de coordenadas locais grelha plana. ....	84
Figura A.0.5 Sistema de coordenadas locais do pórtico espacial.....	86

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5-1 Propriedades dos elementos .....	47
Tabela 5-2 Propriedades dos elementos .....	50
Tabela 5-3 Propriedades dos elementos .....	52
Tabela 5-4 Propriedades dos elementos .....	55
Tabela 5-5 Propriedades dos elementos .....	57
Tabela 5-6 Propriedades dos elementos .....	59
Tabela 5-7 Propriedades dos elementos .....	60
Tabela 5-8 Propriedades dos elementos .....	62
Tabela 5-9 Propriedades dos elementos .....	65
Tabela 5-10 Propriedades dos elementos .....	68
Tabela 5-11 Propriedades dos elementos. ....	70

## LISTA DE SÍMBOLOS

$E$	Módulo de elasticidade
$F_x$	Força axial
$F_y, F_z$	Força cortantes
$F_{xp}$	Força axial de plastificação
$F_{yp}, F_{zp}$	Forças cortantes de plastificação
$f_l$	Vetor de forças
$\hat{F}_i$	Vetor de força generalizado
$F_i^{trial}$	Vetor de forças preditor elástico de partida
$g$	Equação de equilíbrio do sistema
$g_1$	Superfície de escoamento do nó 1
$g_2$	Superfície de escoamento do nó 1
$g_1$	Vetor de fluxo plástico do nó 1
$g_2$	Vetor de fluxo plástico do nó 2
$\dot{g}_1$	Taxa do vetor de fluxo plástico do nó 1
$\dot{g}_2$	Taxa do vetor de fluxo plástico do nó 2
$G$	Módulo de cisalhamento
$H$	Constante de endurecimento isotrópico
$l_0$	Iterações requeridas para convergência
$l_d$	Iterações desejadas para convergência
$K_l$	Matriz de rigidez elástica
$K_t$	Matriz de rigidez tangente
$K^{ep}$	Matriz de rigidez elastoplástica
$K_{ij}^{AL}$	Matriz de rigidez elastoplástica consistente algorítmica
$l_i^p$	Comprimento da região escoada dos elementos
$M_i$	Vetor de momento fletor no nó $i$
$M_x$	Momento torçor
$M_y, M_z$	Momentos fletores
$M_{xp}$	Momento torçor de plastificação
$M_{yp}, M_{zp}$	Momentos fletores de plastificação

$N_i$	Vetor de força axial no nó $i$
$P$	Deslocamentos
$Q_i$	Vetor de força cortante no nó $i$
$q_i$	Forças internas
$q_{ef}$	Vetor fixo de força externa
$r_i$	Vetor de forças residuais
$R_{ij}$	Matriz de redução de rigidez
$S$	Comprimento de arco
$\text{sgn}(x)$	Denota o sinal de $x$
$\mathbf{u}_l$	Vetor de deslocamentos
$\mathbf{u}_l^e$	Vetor de deslocamentos elásticos
$\mathbf{u}_l^p$	Vetor de deslocamentos plásticos
$\dot{\mathbf{u}}_l^p$	Taxa do vetor de deslocamentos plásticos
$W^p$	Trabalho plástico acumulado
$x_0$	Denota um valor inicial de $x$
$K$	Constante de endurecimento
$\phi$	Superfície de escoamento
$\dot{\phi}$	Taxa da superfície de escoamento
$\Lambda$	Parâmetro do nível de carga
$\lambda$	Multiplicador plástico
$\lambda_1$	Multiplicador plástico do nó 1
$\lambda_2$	Multiplicador plástico do nó 2
$\Delta x$	Denota a variação de $x$
$\Psi$	Parâmetro que define o comprimento de arco

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 MOTIVAÇÃO

Atualmente existe uma tendência, nos códigos de projeto, de se incorporar os efeitos das não linearidades nas análises estruturais, e um esforço considerável no desenvolvimento de técnicas numéricas para a solução desse tipo de problemas. Com o intuito de obter um melhor aproveitamento da capacidade de resistência dos materiais, isso, pelos constantes nos materiais usados na construção civil, e nas ferramentas computacionais usadas no cálculo. No projeto das estruturas é usual que a análise estrutural seja feita levando em conta só o comportamento em estado elástico dos materiais, ignorando, assim, o aporte quando os materiais estão trabalhando em regime plástico, sendo esse aporte ainda mais importante nas estruturas metálicas por terem um comportamento dúctil.

Os materiais comportam-se de modos muito complexos, e não é viável escrever um conjunto de equações que descrevam o desempenho do material de modo exato. Então, são formuladas equações que descrevem diferentes tipos ideais de resposta do material. Resulta o estudo do comportamento não linear dos materiais, devido às deformações de segunda ordem (não linearidade geométrica) ou pelo fato dos materiais possuírem leis constitutivas não lineares (não linearidade física) Nesse sentido, o presente trabalho concentra-se no comportamento não linear dos materiais.

A teoria da plasticidade foi desenvolvida a partir de 1930. Fundamentou-se inicialmente, no estudo de metais. Nasceu da necessidade de estudar outros tipos de equações constitutivas que permitissem determinar os estados últimos e de ruptura, a modelagem de deformações não recuperáveis, variações no comportamento dos materiais, entre outras questões.

O comportamento elástico dos materiais depende simplesmente da deformação atual e não da história das deformações, ao contrário do comportamento elastoplástico. Por isso, variáveis adicionais conhecidas como variáveis internas são introduzidas com a finalidade de representar o efeito da história das deformações no material. Em plasticidade não existe uma relação única entre o estado de tensões  $\sigma_{ij}$  e o estado de deformações  $\epsilon_{ij}$ . Então, as relações



constitutivas para o comportamento elastoplástico devem ser de natureza incremental, ou seja, para uma deformação dada, o estado de tensão correspondente é obtido pela integração das relações constitutivas e o resultado irá depender da história do carregamento.

As variáveis internas podem estar relacionadas ao comportamento microscópico do material, responsável pelo desempenho e resposta no regime plástico. Porém, desenvolver as relações entre as variações desses parâmetros e as deformações plásticas, na prática, pode-se tornar uma tarefa que não é sempre possível. Assim, é usual em modelos constitutivos que variáveis que representem o endurecimento, tamanho, forma e posição da superfície de escoamento sejam desenvolvidas como as variáveis internas do material.

O método de rótula plástica, conceito fundamental deste trabalho, nasce no final da década de 1960 como uma abstração matemática, pois implica deformações infinitas, o que permite simplificar as análises elastoplásticas de diferentes elementos finitos. O método considera que todas as deformações plásticas são concentradas em regiões plásticas, de comprimentos nulos, e localizados nos extremos dos elementos, enquanto o resto do elemento, entre os dois nós, está em regime elástico. O conceito é computacionalmente conveniente e pode ser preciso o suficiente para muitas aplicações práticas.

Atualmente o método é amplamente utilizado em projetos estruturais. Por meio do *software* SAP2000, por exemplo, podem ser inseridas rótulas plásticas em qualquer número de posições ao longo da estrutura. Cada rótula representa o comportamento do elemento após o patamar de escoamento, concentrado na posição da rótula.

Por outro lado, são estudadas as propriedades e o comportamento das estruturas metálicas, porque elas representam um dos mais importantes sistemas construtivos utilizados, por ser um material de alta resistência nos diversos estados de tensão, ademais da possibilidade de construir estruturas mais leves, com maior velocidade construtiva e limpeza.

Finalmente, levando em consideração que os materiais, por várias razões, não satisfazem às equações baseadas na teoria da elasticidade, daí que esta só pode ser usada com aproximação, dentro de determinadas faixas de cargas. Fora desses limites e para cargas próximas ao colapso da estrutura, os estados de solicitações nos membros que a compõem irão obedecer

leis diferentes, que estão dentro do campo da plasticidade ou da elastoplasticidade. Pretende-se, com esta pesquisa, obter uma modelagem mais próxima da realidade de alguns tipos de estruturas metálicas simples.

Para a integração do modelo constitutivo, será utilizado o algoritmo de retorno radial, testado por Silva e Bezerra (2010) com diferentes superfícies de escoamento, notando que o algoritmo proposto fornece uma forma de manter o vetor de força generalizado sempre na superfície de escoamento ou dentro dela e que o uso da matriz modular tangente "consistente" é fundamental para obter a taxa quadrática de convergência, com o método de Newton-Raphson.

## **1.2 OBJETIVOS**

### **1.2.1 Objetivo geral**

Esta pesquisa tem como objetivo geral realizar uma análise não linear de primeira ordem, partindo-se do trabalho de Silva e Bezerra (2010) em estruturas metálicas reticuladas, planas e espaciais, por meio da utilização do conceito de rótula plástica e o algoritmo de retorno radial, introduzindo e avaliando o efeito de endurecimento isotrópico nas estruturas analisadas, por meio da elaboração de um programa em código aberto, que poderá ser utilizado com fins de ensino.

### **1.2.2 Objetivos específicos**

- Realizar uma rotina de aplicação prática no *software* MATLAB para uma análise elastoplástica de primeira ordem, implementando um modelo e critério de ruptura que considere a plasticidade num programa de análise.
- Realizar uma análise de elementos de treliça e pórticos em duas e três dimensões, e de elementos de grelha plana e determinar a capacidade portante das diferentes tipologias estruturais.

- Validar a formulação proposta, comparando as soluções numéricas obtidas com exemplos encontrados na literatura.

### **1.3 METODOLOGIA**

Inicialmente, será realizada uma análise estrutural elástica por elementos finitos de estruturas, que podem ser discretizadas por elementos finitos de treliça, pórticos ou por elementos de grelha plana, como passo inicial da rotina programada em MATLAB.

Em seguida, é feito um estudo para a solução da não linearidade física, empregando técnica iterativa, baseada no método de Newton-Raphson. A matriz de rigidez tangente será calculada no começo de cada passo de carga e é mantida constante durante as iterações para atingir o equilíbrio. Para determinar pontos da trajetória não linear de equilíbrio, além de um ponto limite, será utilizada a técnica do comprimento de arco.

Com base na rotina desenvolvida, é introduzido o regime plástico na análise por meio do conceito de rótula plástica, via a superfície de escoamento que define a capacidade portante última da seção. As deformações plásticas estarão confinadas às seções nos extremos dos elementos. Na simulação numérica, utiliza-se o algoritmo de retorno radial, podendo ocorrer uma ou duas rótulas plásticas no elemento.

Finalmente, para verificar a coerência da implementação dos métodos e algoritmos estudados e implementados numericamente, apresentam-se diversos exemplos numéricos extraídos da literatura para demonstrar a eficácia do algoritmo de retorno radial na análise elastoplástica de estruturas metálicas reticuladas.

### **1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO**

Esta dissertação está dividida em seis capítulos, e os assuntos de cada capítulo são brevemente descritos a seguir:

- O Capítulo 1 apresenta introdução ao tema e contextualização ao assunto estudado, assim como os objetivos gerais e específicos do trabalho.

- O Capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica e a descrição analítica da utilização do conceito de rótula plástica para simular o comportamento elastoplástico em um elemento de barra.
- O Capítulo 3 apresenta a formulação do método de integração para o modelo constitutivo assumido no trabalho.
- No Capítulo 4, é apresentado brevemente o método de solução das equações não lineares.
- No Capítulo 5, são apresentados diversos exemplos numéricos para avaliar a efetividade dos métodos empregados.
- No Capítulo 6, são apresentadas as conclusões da pesquisa e também algumas sugestões para investigações futuras na área.

## **2. RÓTULA PLÁSTICA**

As aplicações de conceitos plásticos a projetos estruturais começaram em 1914, com a primeira publicação do húngaro Gabor Kazinczy, que introduziu o conceito fundamental de rótula plástica.

Por meio de estudos experimentais de vigas engastadas nos extremos, com carga uniformemente distribuída, foi percebido que as primeiras fissuras aparecem nos extremos, indicando o limite elástico nesses pontos, porém, as vigas podiam resistir a cargas adicionais. Durante a descarga percebeu-se que as vigas apresentam deformações permanentes nos extremos e no centro do vão. Kazinczy chamou essas deformações de rótulas.

A teoria plástica básica está relacionada com a redistribuição das tensões em uma estrutura, depois de que em certos pontos desta se atinge a tensão de escoamento. Segundo a teoria plástica, aquelas partes da estrutura que alcançam a tensão de escoamento não podem resistir a tensões adicionais, mas deformarão o suficiente para permitir que essas tensões sejam transmitidas às outras partes da estrutura em que as tensões são menores que a tensão de escoamento e são capazes de absorver tensões adicionais.

Existem, em geral, dois métodos para descrever o comportamento não linear dos materiais, o primeiro, chamado de plasticidade por camadas, consiste em aplicar a condição de plasticidade em termos das tensões a cada uma das camadas da seção. No outro, as equações constitutivas são formuladas em termos das tensões resultantes e das deformações generalizadas. Assim a integração por meio da espessura não é necessária, o que reduz significativamente o tempo e a capacidade computacional.

### **2.1 CONCEITO DE RÓTULA PLÁSTICA**

A utilização do conceito de rótula plástica nas análises elastoplásticas foi introduzida por Ueda *et al.* (1968, 1969a, 1969b), que desenvolveram um mecanismo para uma análise elastoplástica de estruturas aporticadas, baseado na teoria incremental da plasticidade.

Aplicando o conceito de rótula plástica, as equações constitutivas são formuladas em termos dos esforços resultantes e das deformações generalizadas. Todos os deslocamentos plásticos são concentrados em regiões plásticas, de comprimentos nulos, e localizados nos extremos dos elementos.

Esse método se baseia nos princípios básicos da teoria da plasticidade. A existência de uma superfície de interação dos esforços internos agindo na seção transversal, que define a capacidade portante última da seção. Definição de uma regra de fluxo plástico proporcional ao gradiente da superfície de interação adotada, sendo que o fluxo plástico determina a evolução dos deslocamentos plásticos. Adota-se uma lei para o endurecimento isotrópico da superfície de interação.

Para análises elastoplásticas de primeira ordem, existem deslocamentos elásticos (recuperáveis) e plásticos (não recuperáveis). O deslocamento total é a soma de ambos.

Segundo Ueda e Fujikubo (1990), com a definição do critério de escoamento como uma função em termos dos esforços resultantes, os deslocamentos plásticos, associados com cada componente dos esforços resultantes, podem ser definidos conforme a lei de fluxo. O método foi estendido ao método do nó plástico, que pode ser aplicado a elementos finitos de qualquer forma geométrica.

A seguir se apresenta uma breve descrição de alguns trabalhos encontrados na literatura, em que é utilizado o método das rótulas plásticas junto com procedimentos incrementais – iterativos para análises elastoplásticas.

Argyris (1982) expõe uma análise de grandes deformações, com ênfase na análise passo a passo do comportamento não linear, utilizando a matriz de rigidez elástica quando não seja atingida nenhuma condição limite, e a matriz de rigidez elastoplástica quando uma zona plástica seja desenvolvida. As zonas de plastificação são definidas por superfícies de interação plástica, considerando que estas dependem fortemente das propriedades geométricas da seção transversal. O documento faz uma comparação entre a técnica e o modelo de plasticidade em camadas.

Nee e Haldar (1988) apresentam uma análise usando o conceito de rótula plástica para o estudo do comportamento de flambagem em estruturas espaciais, verificando, com diversos exemplos, que o método é extremamente eficiente e, igualmente, é muito econômico em comparação com outros métodos em termos de tempo requerido pelas ferramentas computacionais para resolver o problema.

Orbison e McGuire (1982) desenvolveram um programa que trata as não linearidades geométricas e do material. A formação de rótulas plásticas, a interação das forças nos elementos na rótula e descarregamento elástico são levados em consideração para a modelagem do comportamento inelástico em estruturas de aço.

Shi e Atluri (1988), tratam a análise elastoplástica de grandes deformações de pórticos espaciais sobre cargas que podem ser não conservativas. Ueda e Yao (1982) fazem uma análise de placas e sólidos, na qual o nó torna-se plástico quando as tensões resultantes satisfazem a condição de plasticidade apropriada. Nesse sentido, são desenvolvidas deformações plásticas apenas nos nós. Assim, os autores chamam este método como o Método do nó plástico.

## **2.2 SUPERFÍCIE DE INTERAÇÃO**

Um elemento fundamental na teoria da plasticidade é a existência de um domínio que determina o comportamento elástico inicial dos materiais, isto é, os materiais têm um limite dentro do qual eles respondem a uma forma puramente elástica. A fronteira dessa região, seja no campo de tensões ou deformações, é denominada superfície de escoamento. O tamanho da superfície depende do tipo de material e da história de carregamento.

No presente trabalho, a superfície de escoamento é uma função de interação, que depende principalmente da combinação dos esforços resultantes que atuam na seção transversal, assim, como da geometria da seção transversal e alguns outros fatores que separa no espaço de esforços resultantes aquelas combinações que conduzem a comportamentos do tipo elástico ou comportamentos do tipo plástico, e que permite visualizar o conjunto de tensões possíveis ou admissíveis do material.

É aplicada a condição de consistência da superfície de interação, que se refere a que o estado de tensões deve permanecer dentro ou na superfície. Quando o elemento encontra-se no regime plástico, pode ocorrer que o estado de tensões se afaste da superfície de interação então, esta pode mudar seu tamanho, forma ou posição, de tal maneira que o estado atual de tensões continue na superfície.

Existem na literatura diferentes tipos de equações que definem a superfície de escoamento, para diversos tipos de materiais, que tentam ser uma boa aproximação da superfície real. O fato de que sejam contínuas, convexas e suaves proporciona uma implementação computacional eficiente. Zyczkowski (1966) apresenta uma breve descrição de cerca de quatrocentos tipos de enfoques, alguns deles teóricos e outros experimentais de barras, tubos, placas e cascas.

No método proposto é assumida uma superfície de interação  $g$  como uma função contínua e convexa, que se aplica a uma seção transversal arbitraria, definida pela equação (2.1) proposta por Silva e Bezerra (2010). Na equação (2.1) é considerado um elemento de pórtico espacial, mas a função  $g$  dependerá do elemento utilizado na discretização da estrutura.

$$\begin{aligned}
g = & \alpha_1 \left( \frac{|F_x|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_2} + \alpha_3 \left( \frac{|F_y|}{F_{yp}} \right)^{\alpha_4} + \alpha_5 \left( \frac{|F_z|}{F_{zp}} \right)^{\alpha_6} + \alpha_7 \left( \frac{|M_x|}{M_{xp}} \right)^{\alpha_8} + \alpha_9 \left( \frac{|M_y|}{M_{yp}} \right)^{\alpha_{10}} \\
& + \alpha_{11} \left( \frac{|M_z|}{M_{zp}} \right)^{\alpha_{12}} + \alpha_{13} \left( \frac{|F_x|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_{14}} \left( \frac{|M_y|}{M_{yp}} \right)^{\alpha_{15}} \\
& + \alpha_{16} \left( \frac{|F_x|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_{17}} \left( \frac{|M_z|}{M_{zp}} \right)^{\alpha_{18}} - 1 \leq 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Os esforços que atuam na seção são: axial ( $F_x$ ), cortantes ( $F_y$  e  $F_z$ ), momento torçor ( $M_x$ ) e momentos fletores ( $M_y$  e  $M_z$ ); e conformam o vetor de forças no nó:

$$\mathbf{f}_l = (F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z)^T \tag{2.2}$$

Os momentos de plastificação, em função da geometria da seção transversal, que definem a capacidade portante última são: axial ( $F_{xp}$ ), cortantes ( $F_{yp}$  e  $F_{zp}$ ), momento torçor ( $M_{xp}$ ) e momentos fletores ( $M_{yp}$  e  $M_{zp}$ ).



Os valores de  $\alpha_i$  dependem da geometria da seção transversal, sendo sempre constantes positivas. Nas modelagens realizadas, essas constantes carecem de sentido físico, mas são calibradas no momento da simulação, dependendo da seção transversal utilizada.

Alguns outros autores desenvolveram expressões para a superfície de interação e deram valores às constantes  $\alpha_i$ , por exemplo por meio de aproximações com métodos como o de mínimos quadrados (Orbison,1982). Vieira (2013) utiliza o modelo de regressão linear múltipla, que permite tratar esforços resultantes de várias análises para obter uma superfície de interação com esforços combinados. Também existem expressões para a formulação de superfícies de interação nos códigos de normas de projeto.

### 2.2.1 Fluxo plástico

A definição da superfície de interação junto com o critério de escoamento adotado estabelece as condições em que os deslocamentos plásticos podem ocorrer. O vetor de fluxo plástico  $\mathbf{g}$ , é obtido a partir de um potencial plástico, definido na equação (2.3). Nesse caso por se tratar de estruturas metálicas, o potencial plástico é definido em relação à superfície de interação.

$$\mathbf{g} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{f}_l} = \left( \frac{\partial g}{\partial F_x}, \frac{\partial g}{\partial F_y}, \frac{\partial g}{\partial F_z}, \frac{\partial g}{\partial M_x}, \frac{\partial g}{\partial M_y}, \frac{\partial g}{\partial M_z} \right)^T \quad (2.3)$$

Em que,  $\mathbf{f}_l$  é o vetor de esforços resultantes na seção transversal.

A evolução dos deslocamentos plásticos é definida pelo produto entre o vetor de fluxo plástico  $\mathbf{g}$  e o multiplicador plástico  $\lambda$ , este é um valor não negativo que satisfaz a condição de complementaridade definida pela equação (2.4).

$$g\lambda = 0 \quad (2.4)$$

A equação anterior implica que os deslocamentos plásticos não se desenvolvem dentro do domínio elástico, o fluxo plástico pode ocorrer apenas quando o nível de tensões é tal que é atingida a condição de escoamento, e então ocorre a formação da rótula plástica i.e.  $g = 0$ , então  $\lambda \geq 0$ .

Também é definida a condição de consistência sob escoamento plástico ( $\lambda \neq 0$ ), pela equação (2.5).

$$\dot{g} = 0 \quad (2.5)$$

Por outro lado, o vetor de deslocamentos locais no nó  $\mathbf{u}_l$ , calcula-se como a soma dos deslocamentos elásticos  $\mathbf{u}_l^e$ , e plásticos  $\mathbf{u}_l^p$ :

$$\mathbf{u}_l = \mathbf{u}_l^e + \mathbf{u}_l^p \quad (2.6)$$

$$\mathbf{u}_l^p = (u_1^p, v_1^p, w_1^p, \theta_{x1}^p, \theta_{y1}^p, \theta_{z1}^p, u_2^p, v_2^p, w_2^p, \theta_{x2}^p, \theta_{y2}^p, \theta_{z2}^p)^T \quad (2.7)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_l^p = (\dot{u}_1^p, \dot{v}_1^p, \dot{w}_1^p, \dot{\theta}_{x1}^p, \dot{\theta}_{y1}^p, \dot{\theta}_{z1}^p, \dot{u}_2^p, \dot{v}_2^p, \dot{w}_2^p, \dot{\theta}_{x2}^p, \dot{\theta}_{y2}^p, \dot{\theta}_{z2}^p)^T \quad (2.8)$$

Assim, a taxa do vetor de deslocamentos plásticos é calculada como:

$$\dot{\mathbf{u}}_l^p = \lambda \left\{ \frac{\partial g}{\partial \mathbf{f}_l} \right\} = \lambda \mathbf{g} \quad (2.9)$$

## 2.2.2 Derivadas de primeira ordem da superfície de interação

Em relação à equação (2.1), obtêm-se as derivadas de primeira ordem da superfície de interação para o cálculo do potencial plástico. Em que  $sign(F_i) = \frac{|F_i|}{F_i}$  é o sinal das componentes do vetor de forças nodais. As equações (2.10) serão coletadas em vetores na implementação numérica a fim de obter uma forma mais compacta.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial F_x} = & \alpha_1 \alpha_2 \frac{|F_x|^{(\alpha_2-1)}}{F_{xp}^{\alpha_2}} sign(F_x) + \alpha_{13} \alpha_{14} \frac{|F_x|^{(\alpha_{14}-1)}}{F_{xp}^{\alpha_{14}}} sign(F_x) \left( \frac{|M_y|}{M_{yp}} \right)^{\alpha_{15}} \\ & + \alpha_{16} \alpha_{17} \frac{|F_x|^{(\alpha_{17}-1)}}{F_{xp}^{\alpha_{17}}} sign(F_x) \left( \frac{|M_z|}{M_{zp}} \right)^{\alpha_{18}} \end{aligned} \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial g}{\partial F_y} = \alpha_3 \alpha_4 \frac{|F_y|^{(\alpha_4-1)}}{F_{yp}^{\alpha_4}} sign(F_y) \quad (2.10b)$$

$$\frac{\partial g}{\partial F_z} = \alpha_5 \alpha_6 \frac{|F_z|^{(\alpha_6-1)}}{F_{zp}^{\alpha_6}} \text{sign}(F_z) \quad (2.10c)$$

$$\frac{\partial g}{\partial M_x} = \alpha_7 \alpha_8 \frac{|M_x|^{(\alpha_8-1)}}{M_{xp}^{\alpha_8}} \text{sign}(M_x) \quad (2.10d)$$

$$\frac{\partial g}{\partial M_y} = \alpha_9 \alpha_{10} \frac{|M_y|^{(\alpha_{10}-1)}}{M_{yp}^{\alpha_{10}}} \text{sign}(M_y) + \alpha_{13} \alpha_{15} \left( \frac{|F_x|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_{14}} \frac{|M_y|^{(\alpha_{15}-1)}}{M_{yp}^{\alpha_{15}}} \text{sign}(M_y) \quad (2.10e)$$

$$\frac{\partial g}{\partial M_z} = \alpha_{11} \alpha_{12} \frac{|M_z|^{(\alpha_{12}-1)}}{M_{zp}^{\alpha_{12}}} \text{sign}(M_z) + \alpha_{16} \alpha_{18} \left( \frac{|F_x|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_{17}} \frac{|M_z|^{(\alpha_{18}-1)}}{M_{zp}^{\alpha_{18}}} \text{sign}(M_z) \quad (2.10f)$$

### 2.2.3 Derivadas de segunda ordem da superfície de interação

Para a implementação numérica do algoritmo de retorno radial devem ser avaliados os gradientes do potencial plástico, que são calculados pela diferenciação de cada uma das equações (2.10) como se mostra a seguir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial F_x \partial F_x} &= \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 - 1) \frac{|F_x|^{(\alpha_2-2)}}{F_{xp}^{\alpha_2}} + \alpha_{13} \alpha_{14} (\alpha_{14} - 1) \frac{|F_x|^{(\alpha_{14}-2)}}{F_{xp}^{\alpha_{14}}} \left( \frac{|M_y|}{M_{yp}} \right)^{\alpha_{15}} \\ &\quad + \alpha_{16} \alpha_{17} (\alpha_{17} - 1) \frac{|F_x|^{(\alpha_{17}-2)}}{F_{xp}^{\alpha_{17}}} \left( \frac{|M_z|}{M_{zp}} \right)^{\alpha_{18}} \end{aligned} \quad (2.11a)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial F_x \partial F_y} = 0; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial F_x \partial F_z} = 0; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial F_x \partial M_x} = 0 \quad (2.11b)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial F_x \partial M_y} = \alpha_{13} \alpha_{15} \alpha_{14} \frac{|F_x|^{(\alpha_{14}-1)}}{F_{xp}^{\alpha_{14}}} \text{sign}(F_x) \frac{|M_y|^{(\alpha_{15}-1)}}{M_{yp}^{\alpha_{15}}} \text{sign}(M_y) \quad (2.11c)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial F_x \partial M_z} = \alpha_{16} \alpha_{17} \alpha_{18} \frac{|F_x|^{(\alpha_{17}-1)}}{F_{xp}^{\alpha_{17}}} \text{sign}(F_x) \frac{|M_z|^{(\alpha_{18}-1)}}{M_{yp}^{\alpha_{18}}} \text{sign}(M_z) \quad (2.11d)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial F_y \partial F_x} = 0; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial F_y \partial F_z} = 0; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial F_y \partial M_x} = 0; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial F_y \partial M_y} = 0; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial F_y \partial M_z} = 0 \quad (2.11e)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial F_y \partial F_y} = \alpha_3 \alpha_4 (\alpha_4 - 1) \frac{|F_y|^{(\alpha_4-2)}}{F_{yp}^{\alpha_4}} \quad (2.11f)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial F_z \partial F_x} = 0; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial F_z \partial F_y} = 0; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial F_z \partial M_x} = 0; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial F_z \partial M_y} = 0; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial F_z \partial M_z} = 0 \quad (2.11g)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial F_z \partial F_z} = \alpha_5 \alpha_6 (\alpha_6 - 1) \frac{|F_x|^{(\alpha_6-2)}}{F_{zp}^{\alpha_6}} \quad (2.11h)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial M_x \partial F_x} = 0; \frac{\partial^2 g}{\partial M_x \partial F_y} = 0; \frac{\partial^2 g}{\partial M_x \partial F_z} = 0; \frac{\partial^2 g}{\partial M_x \partial M_y} = 0; \frac{\partial^2 g}{\partial M_x \partial M_z} = 0 \quad (2.11i)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial M_x \partial M_x} = \alpha_7 \alpha_8 (\alpha_8 - 1) \frac{|M_x|^{(\alpha_8-1)}}{M_{xp}^{\alpha_8}} \quad (2.11j)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial M_y \partial F_x} = \alpha_{13} \alpha_{14} \alpha_{15} \frac{|F_x|^{(\alpha_{14}-1)}}{F_{xp}^{\alpha_{14}}} \text{sign}(F_x) \frac{|M_y|^{(\alpha_{15}-1)}}{M_{yp}^{\alpha_{15}}} \text{sign}(M_y) \quad (2.11k)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial M_y \partial F_y} = 0; \frac{\partial^2 g}{\partial M_y \partial F_z} = 0; \frac{\partial^2 g}{\partial M_y \partial M_x} = 0; \frac{\partial^2 g}{\partial M_y \partial M_z} = 0 \quad (2.11l)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial M_y \partial M_y} = \alpha_9 \alpha_{10} (\alpha_{10} - 1) \frac{|M_y|^{(\alpha_{10}-2)}}{M_{yp}^{\alpha_{10}}} \quad (2.11m)$$

$$+ \alpha_{13} \alpha_{15} (\alpha_{15} - 1) \left( \frac{|F_x|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_{14}} \frac{|M_y|^{(\alpha_{15}-2)}}{M_{yp}^{\alpha_{15}}}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial M_z \partial F_x} = \alpha_{16} \alpha_{17} \alpha_{18} \frac{|F_x|^{(\alpha_{17}-1)}}{F_{xp}^{\alpha_{17}}} \text{sign}(F_x) \frac{|M_z|^{(\alpha_{18}-1)}}{M_{zp}^{\alpha_{18}}} \text{sign}(M_z) \quad (2.11n)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial M_z \partial F_y} = 0; \frac{\partial^2 g}{\partial M_z \partial F_z} = 0; \frac{\partial^2 g}{\partial M_z \partial M_x} = 0; \frac{\partial^2 g}{\partial M_z \partial M_y} = 0 \quad (2.11o)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial M_z \partial M_z} = \alpha_{11} \alpha_{12} (\alpha_{12} - 1) \frac{|M_z|^{(\alpha_{12}-2)}}{M_{zp}^{\alpha_{12}}} \quad (2.11p)$$

$$+ \alpha_{16} \alpha_{18} (\alpha_{18} - 1) \left( \frac{|F_x|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_{17}} \frac{|M_z|^{(\alpha_{18}-2)}}{M_{zp}^{\alpha_{18}}}$$

As equações (2.11) serão coletadas em forma matricial para obter as matrizes que contêm o gradiente do fluxo de potencial plástico nos extremos dos elementos.

#### 2.2.4 Endurecimento isotrópico

Nos materiais que apresentam endurecimento, ao contrário do comportamento elástico perfeitamente plástico, a forma e tamanho da superfície de interação é afetada pela história completa dos deslocamentos plásticos. O endurecimento isotrópico introduzido por Hill (1950) assume que a forma e a posição da superfície de escoamento permanecem fixas enquanto o tamanho muda.

Uma formulação matemática do endurecimento isotrópico assume que as deformações plásticas afetam a condição de escoamento, independentemente da direção da aplicação das

tensões, a superfície de escoamento se expande ou se contrai uniformemente, sem mudança na forma. A quantidade de endurecimento é dada pelo estado final das deformações plásticas.

Uma taxa de endurecimento isotrópico para o deslocamento em um determinado ponto, ou em uma seção do elemento, não pode ser diretamente utilizada no método com rótula plástica. Então, deve-se desenvolver um método para concentrar os efeitos do endurecimento isotrópico nos nós.

Entre os autores que têm introduzido o endurecimento isotrópico na análise elastoplástica com rótulas plásticas, estão, por exemplo, Ueda e Fujikubo (1990), em que o trabalho da rótula plástica  $dW_i^p$  associado ao nó  $i$  do elemento deve ser igual ao trabalho  $dW_i^{p*}$  da região real escoada ( $V_i^p$ ).

$$dW_i^p = d\lambda_i \phi_i^t \mathbf{f} \quad (2.12)$$

$$dW_i^{p*} = \int_{V_i^p} \sigma_0 d\bar{\epsilon}^p dV \quad (2.13)$$

Sendo  $d\lambda_i$  uma medida da magnitude do deslocamento plástico no nó  $i$ ,  $\phi_i$  é o vetor diferencial da função de escoamento com respeito ao vetor de forças nodais  $\mathbf{f}$ . Então, é calculado um parâmetro  $h_i$  para converter o efeito do endurecimento na região escoada, realmente se espalhando no elemento, dentro do efeito no deslocamento nodal plástico.

$$d\bar{\epsilon}_i^p = h_i d\lambda_i \quad (2.14)$$

O valor de  $h_i$  é calculado por meio de parâmetros que representam a taxa de endurecimento na seção, a taxa do endurecimento nodal do ponto  $i$ , da função da distribuição das deformações plásticas é do módulo de endurecimento do material  $H$ .

Quando é considerado o efeito do endurecimento do material na evolução das deformações plásticas, por meio do método dos elementos finitos, este é considerado como distribuído sobre a região escoada do elemento, e então, a matriz de rigidez elastoplástica é derivada introduzindo a taxa de endurecimento à relação tensão – deformação no ponto escoado.

Por outro lado, no método com rótula plástica, a rigidez de um elemento é calculada concentrando as deformações plásticas nos nós, e para um elemento com um nó  $i$  escoado

(Figura 2.1), devido ao endurecimento, a região escoada estende-se não só na seção transversal do nó  $i$ , mas também sobre o comprimento do elemento. Faz-se necessário estimar a região escoada real no elemento e concentrar os efeitos do endurecimento no nó.

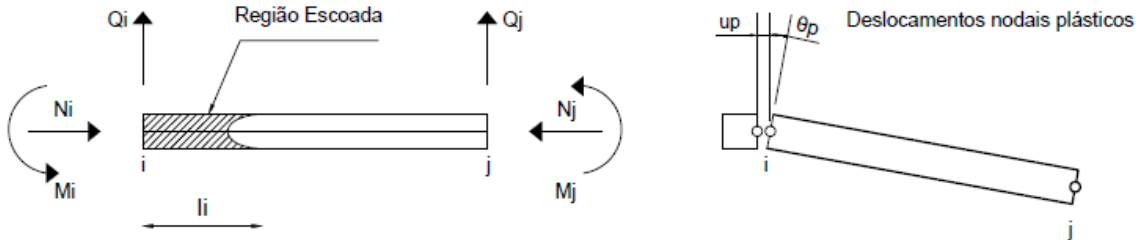


Figura 2.1 Elemento de viga com região escoada e rótula plástica, Ueda e Fujikubo (1990)

Com o intuito de aumentar o tamanho da superfície de interação no processo de carregamento e na evolução dos deslocamentos plásticos, para assim estender a teoria básica do método de rótula plástica e considerar os efeitos do endurecimento no material, calcula-se a constante  $\kappa$ , definida pela equação (2.15).

$$\kappa = \frac{HA}{F_{xp}^2 l} + \frac{HA}{F_{yp}^2 l} + \frac{HA}{F_{zp}^2 l} + \frac{HI_x}{M_{xp}^2 l} + \frac{HI_y}{M_{yp}^2 l} + \frac{HI_z}{M_{zp}^2 l} \quad (2.15)$$

O valor de  $\kappa$  foi determinado com base na análise das dimensões da função de interação e do multiplicador plástico. Essa constante depende do módulo de endurecimento  $H$ , definido pela equação (2.16) e ilustrado na Figura 2.2, e das propriedades geométricas da seção transversal.

$$H = \frac{EE_t}{E - E_t} \quad (2.16)$$

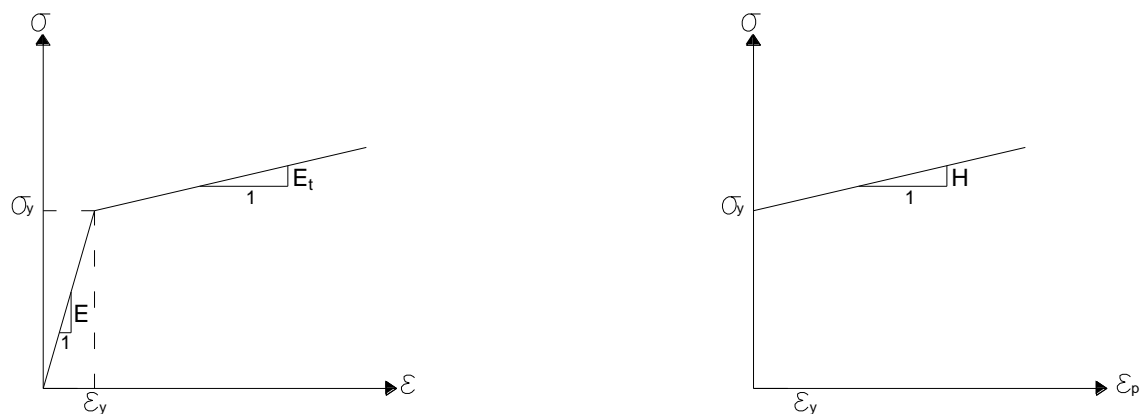


Figura 2.2 Constante de Endurecimento isotrópico

Sendo,  $A$  a área transversal do elemento,  $l$  o comprimento da barra e  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  a inércia na seção transversal respeito aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente.

No estudo de exemplos numéricos, observou-se que introduzindo a constante  $\kappa$  multiplicada pelo multiplicador plástico em cada uma das iterações nos incrementos de carga, o tamanho da superfície de interação aumenta, o que se traduz em aumento da capacidade na evolução dos deslocamentos plásticos.

Porém comparando os resultados obtidos com os encontrados na literatura e os fornecidos pelo *software* ANSYS, os valores obtidos para os fatores de carga são menores. Isso por que a metodologia proposta, utilizando-se o conceito de rótula plástica, não leva em consideração a região escoada real do elemento.

É introduzido um coeficiente  $\omega$  para ajustar o módulo de endurecimento  $H$ , pois, o valor numérico do módulo  $H$  é obtido da curva tensão vs. deformação do material, e com o método de rótula plástica, ele será usado no campo dos esforços resultantes. O valor de  $\omega$ , é obtido neste trabalho por meio da calibração do programa mediante a comparação dos resultados com os encontrados na literatura. Analiticamente pode ser ilustrada mediante a equivalência do trabalho plástico da região escoada e o trabalho realizado pela rótula plástica (Figura 2.3).



Figura 2.3 Método de rótula plástica

$$\omega \rightarrow \omega(N\bar{u}^p + M\bar{\theta}^p) \equiv \int_{V_p} \int (\boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^p) dV \quad (2.17)$$

$$\downarrow$$

$$\omega H$$

Finalmente, a superfície de interação utilizada no desenvolvimento da rotina, adotando-se uma lei para o endurecimento isotrópico será:

$$g = \alpha_1 \left( \frac{|F_x|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_2} + \alpha_3 \left( \frac{|F_y|}{F_{yp}} \right)^{\alpha_4} + \alpha_5 \left( \frac{|F_z|}{F_{zp}} \right)^{\alpha_6} + \alpha_7 \left( \frac{|M_x|}{M_{xp}} \right)^{\alpha_8} + \alpha_9 \left( \frac{|M_y|}{M_{yp}} \right)^{\alpha_{10}}$$

$$+ \alpha_{11} \left( \frac{|M_z|}{M_{zp}} \right)^{\alpha_{12}} + \alpha_{13} \left( \frac{|F_x|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_{14}} \left( \frac{|M_y|}{M_{yp}} \right)^{\alpha_{15}} \quad (2.18)$$

$$+ \alpha_{16} \left( \frac{|F_x|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_{17}} \left( \frac{|M_z|}{M_{zp}} \right)^{\alpha_{18}} - (1 + \kappa\beta) \leq 0$$

Em que a evolução da variável  $\beta$  dependerá do multiplicador plástico, ou seja:

$$\dot{\beta} = \lambda \quad (2.19)$$

### 2.3 MULTIPLICADOR PLÁSTICO

O multiplicador plástico  $\lambda$  é o valor que define a magnitude da evolução dos deslocamentos plásticos. Considerando-se, por exemplo, a formação de uma rótula plástica no nó 1 do elemento de viga, a superfície de interação no nó será:



$$\begin{aligned}
g_1 = & \alpha_1 \left( \frac{|F_{x1}|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_2} + \alpha_3 \left( \frac{|F_{y1}|}{F_{yp}} \right)^{\alpha_4} + \alpha_5 \left( \frac{|F_{z1}|}{F_{zp}} \right)^{\alpha_6} + \alpha_7 \left( \frac{|M_{x1}|}{M_{xp}} \right)^{\alpha_8} \\
& + \alpha_9 \left( \frac{|M_{y1}|}{M_{yp}} \right)^{\alpha_{10}} + \alpha_{11} \left( \frac{|M_{z1}|}{M_{zp}} \right)^{\alpha_{12}} \\
& + \alpha_{13} \left( \frac{|F_{x1}|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_{14}} \left( \frac{|M_{y1}|}{M_{yp}} \right)^{\alpha_{15}} + \alpha_{16} \left( \frac{|F_{x1}|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_{17}} \left( \frac{|M_{z1}|}{M_{zp}} \right)^{\alpha_{18}} \\
& - (1 + \omega\kappa\beta_1) = 0
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Aplica-se a condição de consistência assim como definida pela equação (2.5), como o multiplicador plástico  $\lambda_1 \neq 0$ ;

$$\dot{g}_1 = \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{f}_l} \right\}^T \dot{\mathbf{f}}_l + \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial \beta_1} \right\} \dot{\beta}_1 = 0 \tag{2.21}$$

Onde:

$$\left\{ \frac{\partial g_1}{\partial \beta_1} \right\} = -\kappa \tag{2.22}$$

Assim a condição de consistência fica como:

$$\dot{g}_1 = \mathbf{g}_1^T \dot{\mathbf{f}}_l - \kappa \lambda_1 = 0 \tag{2.23}$$

Dado que os deslocamentos estão compostos pela soma dos deslocamentos elásticos e plásticos, o aumento do vetor de forças pode ser calculado como sendo o aumento dos deslocamentos elásticos multiplicados pela matriz de rigidez elástica do elemento. Assim:

$$\dot{\mathbf{f}}_l = \mathbf{K}_l \dot{\mathbf{u}}^e_l = \mathbf{K}_l (\dot{\mathbf{u}}_l - \dot{\mathbf{u}}^p_l) \tag{2.24}$$

E, como por sua vez, os deslocamentos plásticos se obtêm com a magnitude do multiplicador plástico multiplicado pelo vetor de fluxo plástico, tem-se:

$$\dot{f}_l = \mathbf{K}_l \dot{\mathbf{u}}_l - \lambda_1 \mathbf{K}_l \mathbf{g}_1 \quad (2.25)$$

Substituindo a equação anterior em (2.23):

$$\dot{g}_1 = \mathbf{g}_1^T \mathbf{K}_l \dot{\mathbf{u}}_l - \lambda_1 \mathbf{g}_1^T \mathbf{K}_l \mathbf{g}_1 - \kappa \lambda_1 = 0 \quad (2.26)$$

É possível calcular o valor do multiplicador plástico  $\lambda_l$ , como;

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{g}_1^T \mathbf{K}_l \dot{\mathbf{u}}_l}{\mathbf{g}_1^T \mathbf{K}_l \mathbf{g}_1 + \kappa} \quad (2.27)$$

Quando ocorre a formação de duas rótulas plásticas, um procedimento análogo é utilizado para o cálculo dos multiplicadores plásticos. Os quais definirão a magnitude dos deslocamentos plásticos nos nós 1 e 2.

As superfícies de interação nos nós 1 e 2 do elemento de viga serão respectivamente:

$$\begin{aligned} g_1 = & \alpha_1 \left( \frac{|F_{x1}|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_2} + \alpha_3 \left( \frac{|F_{y1}|}{F_{yp}} \right)^{\alpha_4} + \alpha_5 \left( \frac{|F_{z1}|}{F_{zp}} \right)^{\alpha_6} + \alpha_7 \left( \frac{|M_{x1}|}{M_{xp}} \right)^{\alpha_8} + \alpha_9 \left( \frac{|M_{y1}|}{M_{yp}} \right)^{\alpha_{10}} \\ & + \alpha_{11} \left( \frac{|M_{z1}|}{M_{zp}} \right)^{\alpha_{12}} + \alpha_{13} \left( \frac{|F_{x1}|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_{14}} \left( \frac{|M_{y1}|}{M_{yp}} \right)^{\alpha_{15}} \\ & + \alpha_{16} \left( \frac{|F_{x1}|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_{17}} \left( \frac{|M_{z1}|}{M_{zp}} \right)^{\alpha_{18}} - (1 + \kappa \beta_1) = 0 \end{aligned} \quad (2.28a)$$

$$\begin{aligned} g_2 = & \alpha_1 \left( \frac{|F_{x2}|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_2} + \alpha_3 \left( \frac{|F_{y2}|}{F_{yp}} \right)^{\alpha_4} + \alpha_5 \left( \frac{|F_{z2}|}{F_{zp}} \right)^{\alpha_6} + \alpha_7 \left( \frac{|M_{x2}|}{M_{xp}} \right)^{\alpha_8} + \alpha_9 \left( \frac{|M_{y2}|}{M_{yp}} \right)^{\alpha_{10}} \\ & + \alpha_{11} \left( \frac{|M_{z2}|}{M_{zp}} \right)^{\alpha_{12}} + \alpha_{13} \left( \frac{|F_{x2}|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_{14}} \left( \frac{|M_{y2}|}{M_{yp}} \right)^{\alpha_{15}} \\ & + \alpha_{16} \left( \frac{|F_{x2}|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_{17}} \left( \frac{|M_{z2}|}{M_{zp}} \right)^{\alpha_{18}} - (1 + \kappa \beta_2) = 0 \end{aligned} \quad (2.28b)$$

Aplica-se de novo a condição de consistência para a derivada da função de escoamento:

$$\dot{g} = \mathbf{G} \dot{f}_l - \mathbf{r} \lambda = \mathbf{0} \quad (2.29)$$

Em que,  $\mathbf{G}$  é uma matriz que contém os vetores de fluxo plástico em cada um dos nós do elemento,  $\dot{\mathbf{g}}$  é um vetor com as derivadas da superfície de interação, e  $\lambda$  é um vetor que contém os valores dos multiplicadores plásticos, definidos pelas seguintes equações :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial F_{x1}} & \frac{\partial g_1}{\partial F_{y1}} & \frac{\partial g_1}{\partial F_{z1}} & \frac{\partial g_1}{\partial M_{x1}} & \frac{\partial g_1}{\partial M_{y1}} & \frac{\partial g_1}{\partial M_{z1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial g_2}{\partial F_{x2}} & \frac{\partial g_2}{\partial F_{y2}} & \frac{\partial g_2}{\partial F_{z2}} & \frac{\partial g_2}{\partial M_{x2}} & \frac{\partial g_2}{\partial M_{y2}} & \frac{\partial g_2}{\partial M_{z2}} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$$\dot{\mathbf{g}} = (\dot{g}_1, \dot{g}_2)^T \quad (2.31)$$

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^T, \quad (2.32)$$

E  $\mathbf{0}$  é um vetor de seis colunas com elementos nulos. Também é definida a matriz  $\mathbf{\Gamma}$  que contém a constante de endurecimento  $\kappa$  como:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Idêntico ao procedimento descrito para a formação de uma rótula plástica, e como os deslocamentos estão compostos pela soma dos deslocamentos elásticos e plásticos, o incremento do vetor de forças pode ser escrito como:

$$\dot{\mathbf{f}}_l = \mathbf{K}_l \dot{\mathbf{u}}^e_l = \mathbf{K}_l (\dot{\mathbf{u}}_l - \dot{\mathbf{u}}_l^p) \quad (2.34)$$

A evolução das variáveis internas são escritas agora como:

$$\dot{\mathbf{u}}^p_l = \mathbf{G}^T \lambda \quad (2.35)$$

Substituindo a equação anterior no vetor de forças nodais, obtém-se que:

$$\dot{\mathbf{f}}_l = \mathbf{K}_l \dot{\mathbf{u}}_l - \mathbf{K}_l \mathbf{G}^T \lambda \quad (2.36)$$

Assim a condição de consistência é escrita como:

$$\dot{\mathbf{g}} = \mathbf{G}\mathbf{K}_l\dot{\mathbf{u}}_l - \mathbf{G}\mathbf{K}_l\mathbf{G}^T\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (2.37)$$

Finalmente, com as equações anteriores é possível calcular os valores dos multiplicadores plásticos:

$$\boldsymbol{\lambda} = [\mathbf{G}\mathbf{K}_l\mathbf{G}^T + \boldsymbol{\Gamma}]^{-1}\mathbf{G}\mathbf{K}_l\dot{\mathbf{u}}_l \quad (2.38)$$

## 2.4 MATRIZ DE RIGIDEZ ELASTOPLÁSTICA

Uma vez que em um ou ambos nós do elemento o estado de tensão é igual o superior à capacidade portante última da seção, ocorre a formação de uma ou duas rótulas plásticas respectivamente. Por conseguinte, é necessário o cálculo de uma expressão para a matriz de rigidez elastoplástica para modificar as relações força vs. deslocamento.

Para o caso da formação de uma rótula plástica. Substituindo-se o valor do multiplicador plástico calculado em (2.27) na equação (2.25);

$$\dot{\mathbf{f}}_l = \mathbf{K}_l\dot{\mathbf{u}}_l - \frac{\mathbf{g}_1^T\mathbf{K}_l\dot{\mathbf{u}}_l}{\mathbf{g}_1^T\mathbf{K}_l\mathbf{g}_1 + \kappa}\mathbf{K}_l\mathbf{g}_1 = \mathbf{K}_l\dot{\mathbf{u}}_l - \frac{\mathbf{K}_l\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1\mathbf{K}_l}{\mathbf{g}_1^T\mathbf{K}_l\mathbf{g}_1 + \kappa}\dot{\mathbf{u}}_l \quad (2.39)$$

Pode-se calcular a matriz de rigidez elastoplástica como:

$$\mathbf{K}^{ep}_{l1} = \mathbf{K}_l - \frac{\mathbf{K}_l\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1\mathbf{K}_l}{\mathbf{g}_1^T\mathbf{K}_l\mathbf{g}_1 + \kappa} \quad (2.40)$$

Substituindo os valores obtidos na equação (2.38) para os multiplicadores plásticos na equação (2.36), tem-se que;

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}}_l &= \mathbf{K}_l\dot{\mathbf{u}}_l - \mathbf{K}_l\mathbf{G}^T[\mathbf{G}\mathbf{K}_l\mathbf{G}^T + \boldsymbol{\Gamma}]^{-1}\mathbf{G}\mathbf{K}_l\dot{\mathbf{u}}_l \\ &= \{\mathbf{K}_l - \mathbf{K}_l\mathbf{G}^T[\mathbf{G}\mathbf{K}_l\mathbf{G}^T + \boldsymbol{\Gamma}]^{-1}\mathbf{G}\mathbf{K}_l\}\dot{\mathbf{u}}_l \end{aligned} \quad (2.47)$$

Da equação anterior pode ser obtida a expressão para a matriz de rigidez elastoplástica, no caso da formação de duas rótulas plásticas:

$$\mathbf{K}^{ep}_{l12} = \mathbf{K}_l - \mathbf{K}_l \mathbf{G}^T [\mathbf{G} \mathbf{K}_l \mathbf{G}^T + \mathbf{\Gamma}]^{-1} \mathbf{G} \mathbf{K}_l \quad (2.48)$$

### 3. ALGORITMO DE RETORNO RADIAL

Como parte fundamental numa análise elastoplástica, tem-se a avaliação nos incrementos das tensões para um dado incremento no vetor de deformações. Deve-se calcular a matriz tangente do material para a implementação do método de Newton-Raphson. Para análises elásticas, a derivação da matriz pode resultar uma tarefa trivial, porém, métodos numéricos de integração das relações constitutivas podem ser utilizados no caso de análise elastoplástica.

O problema é então, para os valores das tensões, os incrementos nas deformações e as variáveis internas, no incremento atual  $n$ . Encontrar para o incremento  $n+1$ , os valores da matriz tangente, ou operador de rigidez tangente, assim como as tensões e as variáveis internas do material

A maior parte dos métodos de cálculo, desviam as tensões finais da superfície de escoamento, pelo que o método de integração utilizado deve trazer de volta as tensões à superfície. O método clássico para a consecução desse objetivo é o *algoritmo de retorno radial* introduzido por Wilkins (1964).

Uma categoria de algoritmos conhecida como algoritmo preditor/corretor elástico, dentro da qual está o algoritmo de retorno radial, pode ser descrita como um processo de dois passos, no primeiro, a resposta inelástica do material é mantida *congelada*. Depois o incremento da deformação é aplicado como uma deformação elástica, e o incremento nas tensões é calculado como um preditor elástico. No segundo passo, as tensões são trazidas de volta à superfície de escoamento, o procedimento é conhecido como mapeamento de retorno, o que é equivalente a encontrar a projeção ao ponto mais próximo da tensão de partida. Por essa razão o algoritmo é também conhecido como o método ao ponto mais próximo, CPPM, por suas siglas em inglês (*closest point projection method*).

Uma vez que o estado final de tensões é forçado a permanecer na superfície de escoamento, o algoritmo aplica a consistência. A técnica utiliza o método *Backward Euler*, método implícito que permite passos grandes de carga, e que pelo uso de uma matriz tangente consistente, aumenta significativamente a taxa de convergência. É chamado de consistente por que ele é

consistente com o algoritmo usado para calcular as tensões. A vantagem principal do método é que, para a maioria das vezes, é estável e proporciona uma precisão satisfatória.

### 3.1 DERIVADAS DA SUPERFÍCIE DE INTERAÇÃO

Como foi mencionado no capítulo anterior, é assumida uma superfície de interação contínua e convexa, já que para computar a matriz tangente consistente é necessário o cálculo de gradientes da superfície. Essa função se aplica a uma seção transversal arbitrária, definida pela equação (2.18), em relação aos esforços resultantes.

Para obter a função do potencial plástico em cada nó do elemento, são calculadas as derivadas de primeira ordem da superfície de interação pelas equações (2.10). As derivadas são descritas num arranjo que define o fluxo plástico nos nós do elemento durante o processo de carregamento.

$$\left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial F_{x_1}} \\ \frac{\partial g}{\partial F_{y_1}} \\ \frac{\partial g}{\partial F_{z_1}} \\ \frac{\partial g}{\partial M_{x_1}} \\ \frac{\partial g}{\partial M_{y_1}} \\ \frac{\partial g}{\partial M_{z_1}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial F_{x_2}} \\ \frac{\partial g}{\partial F_{y_2}} \\ \frac{\partial g}{\partial F_{z_2}} \\ \frac{\partial g}{\partial M_{x_2}} \\ \frac{\partial g}{\partial M_{y_2}} \\ \frac{\partial g}{\partial M_{z_2}} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

O gradiente do vetor de potencial plástico é obtido pela diferenciação de cada um dos componentes dos vetores definidos em (3.1), assim resultam as equações (2.11). O gradiente de fluxo plástico de cada um dos nós está definido pelas matrizes nas equações (3.2c):

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial F_{x_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{x_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{x_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{x_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{x_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{x_1} \partial M_{z_1}} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial F_{y_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{y_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{y_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{y_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{y_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{y_1} \partial M_{z_1}} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial F_{z_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{z_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{z_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{z_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{z_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{z_1} \partial M_{z_1}} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial M_{x_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{x_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{x_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{x_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{x_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{x_1} \partial M_{z_1}} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial M_{y_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{y_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{y_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{y_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{y_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{y_1} \partial M_{z_1}} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial M_{z_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{z_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{z_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{z_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{z_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{z_1} \partial M_{z_1}} \end{pmatrix} \quad (3.2a)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial F_{x_2} \partial F_{x_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{x_2} \partial F_{y_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{x_2} \partial F_{z_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{x_2} \partial M_{x_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{x_2} \partial M_{y_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{x_2} \partial M_{z_2}} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial F_{y_2} \partial F_{x_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{y_2} \partial F_{y_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{y_2} \partial F_{z_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{y_2} \partial M_{x_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{y_2} \partial M_{y_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{y_2} \partial M_{z_2}} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial F_{z_2} \partial F_{x_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{z_2} \partial F_{y_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{z_2} \partial F_{z_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{z_2} \partial M_{x_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{z_2} \partial M_{y_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial F_{z_2} \partial M_{z_2}} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial M_{x_2} \partial F_{x_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{x_2} \partial F_{y_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{x_2} \partial F_{z_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{x_2} \partial M_{x_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{x_2} \partial M_{y_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{x_2} \partial M_{z_2}} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial M_{y_2} \partial F_{x_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{y_2} \partial F_{y_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{y_2} \partial F_{z_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{y_2} \partial M_{x_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{y_2} \partial M_{y_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{y_2} \partial M_{z_2}} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial M_{z_2} \partial F_{x_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{z_2} \partial F_{y_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{z_2} \partial F_{z_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{z_2} \partial M_{x_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{z_2} \partial M_{y_2}} & \frac{\partial^2 g}{\partial M_{z_2} \partial M_{z_2}} \end{pmatrix} \quad (3.2b)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial F_j \partial F_k} \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix} \quad (3.2c)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial F_j \partial F_k} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix}$$

### 3.2 DESCRIÇÃO DO ALGORITMO DE RETORNO RADIAL

Assumindo a existência de um vetor de força generalizado no nó 1 fora da superfície de interação, o algoritmo *Backward Euler* baseia-se na seguinte equação:

$$\hat{F}_i = F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 \quad (3.3)$$



Em que:

$$F_i^{trial} = \bar{F}_i + K_{ij}dU_j \quad (3.4)$$

$\lambda_1 > 0$  é o multiplicador plástico,  $K_{ij}$  é a matriz de rigidez elástica do elemento,  $dU_j$  é o incremento no vetor de deslocamentos nodais  $U_j$ .  $F_i^{trial}$  é o vetor de forças nodais preditor elástico de partida,  $\left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1$  é o vetor de fluxo plástico no nó 1 que estará definido pelos esforços resultantes na seção transversal do nó 1, que estão fora de superfície de interação.

O termo  $\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1$  é o corretor plástico utilizado para retornar o vetor de forças nodais à superfície.  $\hat{F}_i$  é o vetor de forças nodais após a correção. Como geralmente o vetor preditor não satisfaz a condição de escoamento, é necessário um procedimento iterativo para retornar o vetor de forças à superfície de interação.

A Figura 3.1 mostra a representação geométrica do algoritmo para a formação de uma rótula plástica, em que pode-se observar o vetor de forças  $\bar{F}_1$  do último passo de carga e  $F_i^{trial}$  o vetor preditor elástico que está fora da superfície. Portanto, começa o processo iterativo e são calculados os corretores plásticos até atingir a condição de escoamento. Para a formação de duas rótulas plásticas, aplica-se uma metodologia análoga, mas com dois vetores de retorno como apresentado na Figura 3.2.

### 3.2.1 Algoritmo de retorno de vetor simples

Quando os esforços nodais seccionais saírem só de um nó do elemento, ocorre a formação de uma rótula plástica no nó. É aplicado um algoritmo com um vetor de retorno.

Assumindo que no nó 1 do elemento não se satisfaz a condição de escoamento, o algoritmo traz de volta o vetor de forças nodais à superfície. É definido um vetor de forças residuais  $r_i$  como:

$$r_i = F_i - \hat{F}_i = F_i - \left( F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 \right) \quad (3.5)$$

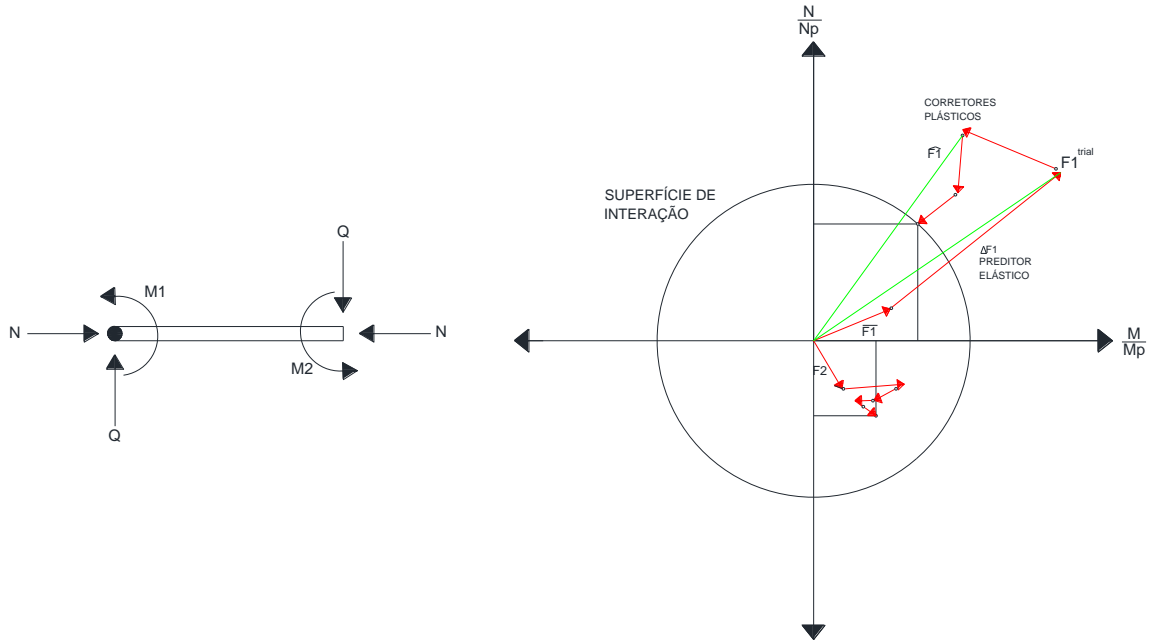


Figura 3.1 Algoritmo para uma rótula plástica

O vetor de forças residuais representa a diferença entre o estado atual do vetor de forças nodais e a força *Backward Euler*  $\hat{F}_i$ . O vetor preditor  $F_i^{\text{trial}}$  é mantido constante durante o processo de iteração. É aplicada uma expansão em Séries de Taylor de primeira ordem na equação (3.5) para obter uma expressão do vetor de forças residuais atualizado  $r_i^{\text{new}}$ , em termos do vetor de forças residuais anterior  $r_i^{\text{old}}$ .

$$r_i^{\text{new}} = r_i^{\text{old}} + dF_i + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 dF_k \quad (3.6)$$

Nesse sentido,  $dF_i$  é um incremento infinitesimal do vetor de forças generalizadas,  $F_i$ ,  $d\lambda_1$  é a variação do multiplicador plástico  $\lambda_1$ , e o termo  $\left[ \frac{\partial^2 g}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 dF_k$  é a mudança no vetor de potencial plástico  $\left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1$ . O objetivo será atingir a condição na qual  $r_i^{\text{new}} = 0$ , representado pela seguinte equação:

$$0 = r_i^{\text{old}} + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 + \left( \delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 \right) dF_k \quad (3.7)$$

Para determinar uma expressão do vetor corretor de forças  $dF_i$ , é definida a seguinte matriz auxiliar:

$$Q_{ik} = \delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 \quad (3.8)$$

Considerando as equações anteriores e após algumas manipulações algébricas, é obtida uma expressão para  $dF_i$ , que é dada pela seguinte expressão:

$$dF_i = - Q_{il}^{-1} \left( r_l^{old} + d\lambda_1 K_{lj} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 \right) \quad (3.9)$$

É aplicada uma expansão de primeira ordem em Séries de Taylor da função de interação  $g$ , em torno do vetor de forças nodais finais  $F_i$ .

$$g_1^{new} = g_1^{old} + \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 dF_i - \kappa d\lambda_1 \quad (3.10)$$

Para que o vetor de forças atualizado esteja na superfície de interação, deve ser  $g_1^{new} = 0$ . Com essa condição e com a equação (3.9), a variação do multiplicador plástico  $d\lambda_1$  é facilmente encontrada como:

$$d\lambda_1 = \frac{g_1^{old} - \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} r_l^{old}}{\left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 + \kappa} \quad (3.11)$$

### **Critério de convergência**

O procedimento iterativo continua até que o critério de escoamento  $g = 0$  seja satisfeito no estado final de força, o qual está representado pelas equações:

$$r^{norm} = \sqrt{\frac{\|r_i\|}{\|F_i^{trial}\|}} < TOL \quad (3.12)$$

$$g^{norm} = |g - 1| < TOL$$

Em que  $r^{norm}$  é a norma para o vetor de forças residuais.  $g^{norm}$  é definida como a norma residual de escoamento. TOL é a tolerância adotada para convergência.

### 3.2.2 Algoritmo de retorno com dois vetores

No caso em que os esforços nodais seccionais, em ambos nós do elemento, saiam da superfície de interação, ocorre a formação de duas rótulas plásticas, uma em cada nó. Pelo que é aplicado um algoritmo com dois vetores de retorno. O algoritmo é utilizado para que os vetores de forças nodais em ambos extremos do elemento, depois do incremento nos deslocamentos, possam ser levados à superfície de interação.

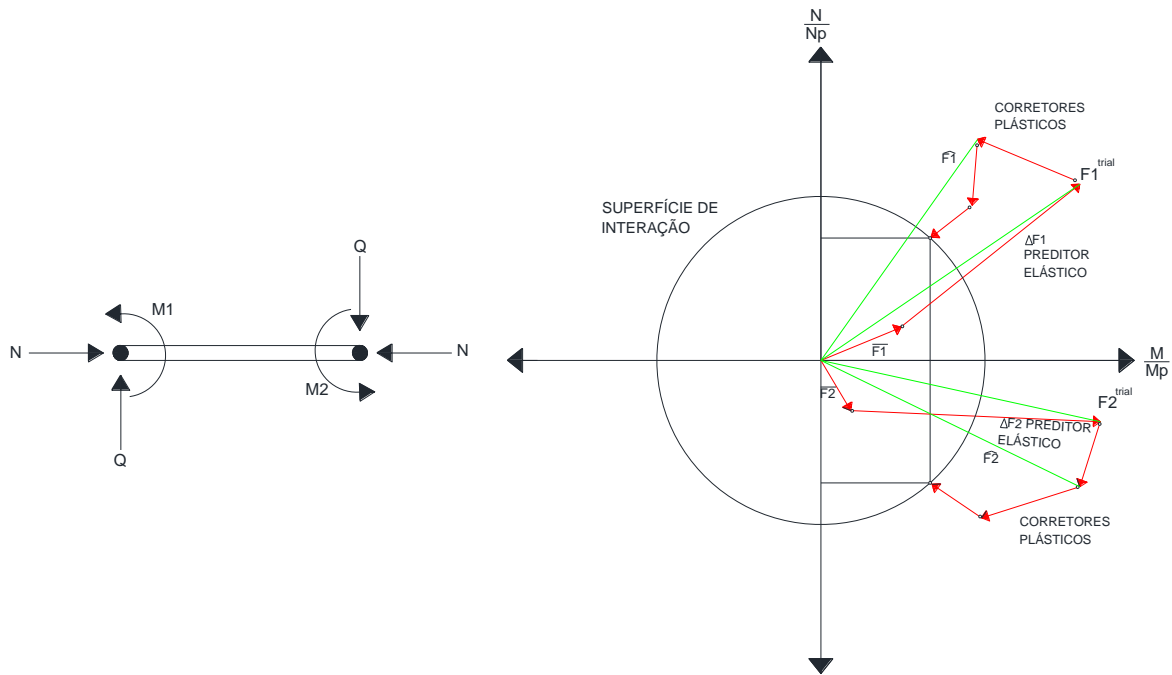


Figura 3.2 Algoritmo para duas rótulas plásticas

A força *Backward Euler*, obtida com o algoritmo com dois vetores de retorno, pode ser definida como:

$$\hat{F}_i = F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 - \lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_2 \quad (3.13)$$

Com  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 > 0$ .

O procedimento descrito para o algoritmo com um vetor de retorno é definido de maneira similar ao vetor de forças residuais;

$$r_i = F_i - \hat{F}_i = F_i - \left( F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 - \lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_2 \right) \quad (3.14)$$

O vetor de forças residuais representa a diferença entre o estado atual do vetor de forças nodais e a força *Backward Euler*  $\hat{F}_i$ . Análogo ao procedimento anterior, o esforço preditor  $F^{trial}$  é mantido constante durante o processo iterativo.

Uma expansão em Séries de Taylor de primeira ordem é aplicada à equação (3.14) para obter uma expressão do vetor de forças residuais atualizado  $r_i^{new}$ , em termos do vetor de forças residuais anterior  $r_i^{old}$ ;

$$\begin{aligned} r_i^{new} = r_i^{old} + dF_i + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 dF_k + d\lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_2 \\ + \lambda_2 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 dF_k \end{aligned} \quad (3.15)$$

Impondo-se a condição  $r_i^{new} = 0$  na equação anterior, tem-se que:

$$\begin{aligned} 0 = r_i^{old} + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 + d\lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_2 \\ + \left( \delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 + \lambda_2 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 \right) dF_k \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para determinar uma expressão do vetor corretor de forças  $dF_i$ , é definida a seguinte matriz auxiliar:

$$Q_{ik} = \delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 + \lambda_2 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 \quad (3.17)$$

Considerando-se as equações (3.16) e (3.17), e após algumas manipulações algébricas para resolver  $dF_i$ , segue-se que:

$$dF_i = -Q_{il}^{-1} \left( r_l^{old} + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 + d\lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_2 \right) \quad (3.18)$$

São desenvolvidas expansões em Séries de Taylor de primeira ordem às funções de interação nos nós 1 e 2,  $g_1$  e  $g_2$  respectivamente. Essas séries geram aproximações lineares dos novos valores das funções de interação  $g_1^{new}$  e  $g_2^{new}$ , como:

$$g_1^{new} = g_1^{old} + \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 dF_i - \kappa d\lambda_1 \quad (3.19)$$

$$g_2^{new} = g_2^{old} + \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_2 dF_i - \kappa d\lambda_2$$

Para que os vetores de forças atualizados estejam na superfície de interação, deve ser  $g_1^{new} = 0$  e  $g_2^{new} = 0$ . Utilizando a expressão para  $dF_i$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} g_1^{old} - \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} r_l^{old} = \\ d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 + d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_2 + \kappa d\lambda_1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} g_2^{old} - \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} r_l^{old} = \\ d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 + d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_2 + \kappa d\lambda_2 \end{aligned}$$

As duas equações anteriores formam um sistema 2x2 com  $d\lambda_1$  e  $d\lambda_2$  como variáveis, e introduzindo algumas variáveis auxiliares, o sistema pode ser colocado na forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Utilizando-se a regra de Cramer para o sistema de equações, as variações dos multiplicadores plásticos em ambos extremos do elemento são encontrados facilmente como:

$$d\lambda_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad (3.22)$$

$$d\lambda_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

As variáveis auxiliares estão definidas como:

$$b_1 = g_1^{old} - \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} r_l^{old} \quad b_2 = g_2^{old} - \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} r_l^{old}$$

$$a_{11} = \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 + \kappa \quad a_{12} = \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_2 \quad (3.23)$$

$$a_{21} = \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 \quad a_{22} = \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_2 + \kappa$$

### Critério de convergência

O procedimento iterativo continua até que o critério de escoamento  $g = 0$  seja satisfeito no estado final de força, o qual está representado pelas equações:

$$\sqrt{\frac{\|r_i\|}{\|F_i^{trial}\|}} < TOL \quad (3.24)$$

$$|g_1 - 1| < TOL; \text{ e } |g_2 - 1| < TOL$$

### 3.3 MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE CONSISTENTE

O objetivo final na derivação do algoritmo *Backward Euler*, para a integração das equações constitutivas, é o uso dos algoritmos com uma e duas rótulas plásticas em cálculos em elementos finitos. Se as iterações com o método de Newton-Raphson são usadas para o equilíbrio global, o uso da chamada matriz de rigidez elastoplástica tradicional,  $K_{ij}^{ep}$  coloca em risco a taxa de convergência quadrática do procedimento iterativo.

Com o objetivo de preservar a taxa quadrática de convergência, pode ser derivada uma matriz de rigidez consistente. No que se segue, são derivadas duas matrizes de rigidez consistentes, cada uma para o algoritmo com uma ou duas rótulas plásticas respectivamente.

Uma vez são atingidos os critérios de convergência e os esforços seccionais são trazidos até a superfície de interação, a matriz de rigidez tangente consistente é atualizada antes de começar o próximo ciclo de carga.

### 3.3.1 Algoritmo de retorno de vetor simples

Iniciando-se pela equação *Backward Euler*, e considerando-se que o vetor  $\hat{F}_i$  está fora da superfície de interação, e o vetor de forças nodais  $F_i$  está na superfície de interação, no final do processo iterativo, a equação (3.3) pode ser escrita como:

$$F_i = F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 \quad (3.25)$$

Com  $\lambda_1 > 0$  O termo  $dF_i^{trial} = K_{ij} dU_j$  representa o incremento elástico no vetor de forças nodais de partida e está associado com o incremento no vetor de deslocamentos nodais  $dU_j$ . O diferencial da equação (3.25) fornece a seguinte expressão:

$$dF_i = K_{ij} dU_j - d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 - \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 dF_k \quad (3.26)$$

A equação anterior pode ser escrita, para colocar o termo  $dF_k$  em evidência, após algumas operações algébricas como:

$$\left( \delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 \right) dF_k = K_{ij} dU_j - d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 \quad (3.27)$$

Usando-se a matriz  $Q_{ik}$ , definida pela equação (3.8), e definindo-se a matriz de redução de rigidez como  $R_{ij} = Q_{il}^{-1} K_{lj}$ , a equação anterior fica como:



$$dF_i = R_{ij} \left( dU_j - d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 \right) \quad (3.28)$$

A forma da equação anterior resulta similar à forma não consistente exceto pela mudança de  $K_{ij}$  por  $R_{ij} = Q_{il}^{-1} K_{lj}$ . Uma vez que à posição final de forças cumpre a condição de consistência, isto é;  $g(F_i) = 0$ , diferenciando-se essa condição e substituindo o valor de  $dF_i$  encontrado na equação (3.28), resulta:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 dF_i - \kappa d\lambda_1 &= 0 \quad \rightarrow \\ \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left( dU_j - d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 \right) - \kappa d\lambda_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Portanto, a variação no multiplicador plástico pode ser expressada como:

$$d\lambda_1 = \frac{\left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} dU_j}{\left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 + \kappa} \quad (3.30)$$

Finalmente, usando as equações (3.28) a (3.30), a matriz de rigidez elastoplástica consistente  $K_{ij}^{AL}$ , com o método de integração utilizado, é determinada como:

$$K_{ij}^{AL} = R_{ij} - \frac{R_{im} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_m} \right\}_1 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_n} \right\}_1 R_{nj}}{\left\{ \frac{\partial g}{\partial F_m} \right\}_1 R_{mn} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_n} \right\}_1 + \kappa} \quad (3.31)$$

### 3.3.2 Algoritmo de retorno com dois vetores

Análogo ao procedimento descrito para o algoritmo com uma rótula plástica, começando-se pela equação do algoritmo *Backward Euler*, para o algoritmo com dois vetores de retorno, pode-se escrever a seguinte expressão para o vetor de forças nodais no final do procedimento iterativo:

$$F_i = F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 - \lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_2 \quad (3.32)$$

Com  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 > 0$ . O diferencial da equação (3.32) fornece a seguinte expressão, utilizando-se o vetor de forças nodais de partida definido pela equação (3.3);

$$\begin{aligned} dF_i = & K_{ij} dU_j - d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 - d\lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_2 - \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 dF_k \\ & - \lambda_2 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 dF_k \end{aligned} \quad (3.33)$$

E, após algumas operações algébricas, colocando-se o termo  $dF_i$  em evidência, chega-se a:

$$\begin{aligned} & \left( \delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 + \lambda_2 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 \right) dF_k \\ & = K_{ij} dU_j - d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 - d\lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Usando-se a matriz  $Q_{ik}$  como definida pela equação (3.17), e denotando-se a matriz de redução plástica como  $R_{ij} = Q_{il}^{-1} K_{lj}$ , a equação anterior pode ser reescrita como:

$$dF_i = R_{ij} \left( dU_j - d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 - d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_2 \right) \quad (3.35)$$

Novamente, assumindo que a condição de consistência deve prender completamente ao ponto final de forças, isto é:  $g_1 = 0$  e  $g_2 = 0$ . Diferenciando-se essas condições, e introduzindo-se a expressão encontrada para  $dF_i$  pela equação (3.35), pode-se obter:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 dF_i - \kappa d\lambda_1 = 0 \quad \rightarrow \\ & \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left( dU_j - d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 - d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_2 \right) - \kappa d\lambda_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_2 dF_i - \kappa d\lambda_2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} \left( dU_j - d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 - d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_2 \right) - \kappa d\lambda_2 = 0$$

Ou coletando os termos algebricamente as equações (3.36) são transformadas em:

$$\left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} dU_j = d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 + d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_2 + \kappa d\lambda_1 \quad (3.37)$$

$$\left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} dU_j = d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 + d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_2 + \kappa d\lambda_2$$

As equações anteriores formam um sistema de equações com  $d\lambda_1$  e  $d\lambda_2$  como variáveis, introduzindo-se as variáveis auxiliares  $c_1, c_2, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ , como:

$$c_1 = \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} dU_j \quad c_2 = \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} dU_j$$

$$b_{11} = \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 + \kappa \quad b_{12} = \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_2 \quad (3.38)$$

$$b_{21} = \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_1 \quad b_{22} = \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_j} \right\}_2 + \kappa$$

Usando-se a regra de Cramer, o sistema anterior é resolvido para  $d\lambda_1$  e  $d\lambda_2$ , como:

$$d\lambda_1 = \frac{c_1 b_{22} - c_2 b_{12}}{b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}} \quad (3.39)$$

$$d\lambda_2 = \frac{c_2 b_{11} - c_1 b_{21}}{b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}}$$

Ou alternativamente,

$$d\lambda_1 = \left( \frac{b_{22} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_m} \right\}_1 - b_{12} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_m} \right\}_2}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} \right) R_{mn} dU_n \quad (3.40)$$

$$d\lambda_2 = \left( \frac{b_{11} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_m} \right\}_2 - b_{21} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_m} \right\}_1}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} \right) R_{mn} dU_n$$

No caso em que algum dos multiplicadores plásticos seja negativo ( $d\lambda_1 < 0$  ou  $d\lambda_2 < 0$ ), o multiplicador plástico será automaticamente definido como zero ( $d\lambda_1 = 0$  ou  $d\lambda_2 = 0$ ), o que corresponde ao início de uma rótula plástica.

Novamente introduzindo-se novas variáveis auxiliares:

$$d_1 = \frac{b_{22}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}; \quad d_2 = \frac{b_{12}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}; \quad (3.41)$$

$$d_3 = \frac{b_{11}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}; \quad d_4 = \frac{b_{21}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}$$

As equações que definem os multiplicadores plásticos podem ser escritas como:

$$d\lambda_1 = \left( d_1 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_m} \right\}_1 R_{mn} - d_2 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_m} \right\}_2 R_{mn} \right) dU_n \quad (3.42)$$

$$d\lambda_2 = \left( d_3 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_m} \right\}_2 R_{mn} - d_4 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_m} \right\}_1 R_{mn} \right) dU_n$$

Finalmente usando-se as equações (3.35) e (3.42), a matriz de rigidez elastoplástica consistente,  $K_{ij}^{AL}$ , para o método descrito é obtida pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{AL} = R_{ij} - & \left( d_1 R_{im} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_m} \right\}_1 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_n} \right\}_1 R_{nj} - d_2 R_{im} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_m} \right\}_1 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_n} \right\}_1 R_{nj} \right) \\
& - \left( d_3 R_{im} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_m} \right\}_2 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_n} \right\}_2 R_{nj} - d_4 R_{im} \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_m} \right\}_2 \left\{ \frac{\partial g}{\partial F_n} \right\}_1 R_{nj} \right)
\end{aligned} \tag{3.43}$$

## 4. SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES NÃO LINEARES

Análises estruturais que consideram grandes deslocamentos ou relações constitutivas fora do escopo linear (materiais hiperelásticos, plásticos, viscoelásticos, etc.), ou ainda a alteração nas condições de contorno, requerem a solução de sistemas de equações não lineares.

Até meados da década de setenta do século passado, os problemas com não linearidade em estruturas eram solucionados por meio de métodos puramente incrementais sob controle de carga. No entanto, métodos incrementais-iterativos foram desenvolvidos devido às dificuldades dos métodos meramente incrementais, uma vez que estes têm a grande desvantagem de poder desviar a solução da trajetória de equilíbrio, acumulando o erro determinado pelo passo de carga. Para uma boa aproximação inicial à solução, e visando obter-se uma resposta completa do sistema, a carga externa total é dividida em vários incrementos (Menin, 2006).

Segundo Clarke (1990), a estratégia de solução incremental-iterativa, para problemas elásticos não lineares, é idealmente adequada para a obtenção da resposta de carga vs. deflexão estática de uma estrutura completa. Passos grandes de carga podem ser usados com a garantia de que o total de equações de equilíbrio sempre pode ser satisfeito dentro de uma tolerância especificada. No método incremental-iterativo, cada passo de carga consiste na aplicação de um incremento de carga externa, e iterações subsequentes para restabelecer o equilíbrio.

O método de comprimento de arco foi introduzido por Riks (1972) para estruturas geometricamente não lineares. As equações de equilíbrio são complementadas por uma equação simples auxiliar. Assim, problemas governados pelo comportamento elástico da estrutura, associado com a perda de estabilidade num ponto limite, podem ser calculados se o problema é adequadamente formulado.

Rodrigues (2000) explica como a ideia básica desse método é tratar o parâmetro de carga como uma variável adicional, controlando não o incremento do parâmetro de carga, nem o incremento de uma determinada componente  $j$  do vetor de deslocamento, mas sim o comprimento do vetor que une o ponto conhecido da trajetória ao incógnito desejado, ou seja, a corda do arco da trajetória a ser determinada.

Segundo Crisfield (1991), os métodos de comprimento de arco se destinam a permitir que os algoritmos de solução possam passar os pontos limites (cargas máximas e mínimas). O método destaca-se pela versatilidade e a aplicabilidade na resolução de problemas na engenharia estrutural.

## 4.1 MÉTODOS DE COMPRIMENTO DE ARCO

### 4.1.1 Método de controle de deslocamento

A equação de equilíbrio pode ser escrita como:

$$g(p, \lambda) = q_i(p) - \lambda q_{ef} = 0 \quad (4.1)$$

Sendo:

$q_i$ , Forças internas, função dos deslocamentos  $p$ .

$q_{ef}$ , Vetor fixo de força externa.

$\lambda$ , Parâmetro do nível de carga.

A equação (4.1) define um estado de carregamento proporcional, em que o padrão de carga é mantido fixo. Diversas formas de método de comprimento de arco têm como objetivo encontrar a intersecção de (4.1) com o comprimento de arco  $s$ , definido por:

$$s = \int ds \quad (4.2)$$

E,

$$ds = \sqrt{(dp^T dp) + d\lambda^2 \psi^2 q_{ef}^T q_{ef}} \quad (4.3)$$

O parâmetro  $\psi$  depende da escala adotada entre os termos de carga e os termos de deslocamento. O problema é, então, resolver a equação:

$$g(s) = q_i(p(s)) - \lambda(s)q_{ef} = 0 \quad (4.4)$$

No entanto, nessa aproximação é frequentemente muito difícil de limitar apropriadamente o desvio do equilíbrio, então é usualmente utilizados métodos "preditor/corretor".

Nos métodos comprimento de arco, pode-se substituir efetivamente a forma diferencial de (4.3) de forma incremental:

$$a = (\Delta p^T \Delta p + \Delta \lambda^2 \psi^2 q_{ef}^T q_{ef}) - \Delta l^2 = 0 \quad (4.5)$$

Em que  $\Delta l$  é o raio da interseção desejada prefixado.

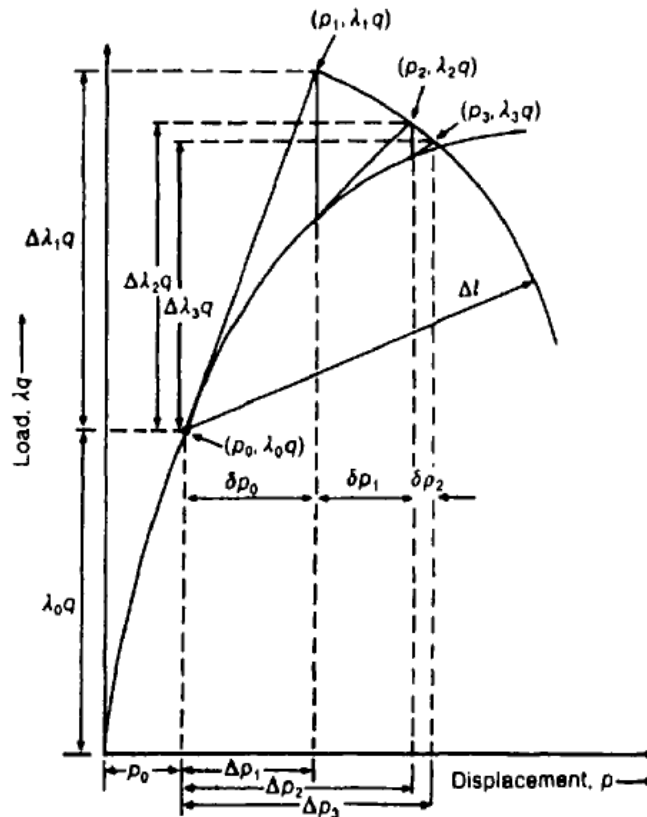


Figura 4.1 Método de comprimento de arco esférico e notação para um sistema com um grau de liberdade ( $\psi=1$ ) (Crisfield, 1991)

A essência principal dos métodos de comprimento de arco é que o parâmetro de carga  $\lambda$  torna-se uma variável, então, junto com os  $n$  deslocamentos variáveis, têm-se em total  $n+1$  variáveis. Para resolver essas incógnitas temos as  $n$  equações de equilíbrio de (4.1) e a



equação de restrição dada por (4.5). Na Figura 4.1 visualizam-se as aproximações da solução situadas em uma esfera de raio  $\Delta l$ .

Seguindo a Riks (1972 e 1979) e Wempner (1971), pode-se resolver o sistema de equações por uma aplicação direta do método de Newton-Rapshon de (4.1) a (4.5). O método de Newton-Rapshon fica melhor introduzido por meio de Séries de Taylor truncadas com o subscrito  $n$  (Crisfield, 1991).

Das equações (4.1) a (4.5):

$$g_n = g_o + \frac{\partial g}{\partial p} \delta p + \frac{\partial g}{\partial \lambda} \delta \lambda = g_o + K_t \delta p - q_{ef} \delta \lambda = 0 \quad (4.6a)$$

$$a_n = a_o + 2\Delta p^T \delta p + 2\Delta \lambda \delta \lambda \psi^2 q_{ef}^T q_{ef} = 0 \quad (4.6b)$$

As equações (4.6a) e (4.6b) podem ser combinadas e escritas em forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \delta p \\ \delta \lambda \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} K_t & -q_{ef} \\ 2\Delta p^T & 2\Delta \lambda \psi^2 q_{ef}^T q_{ef} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g_o \\ a_o \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Equações (4.7) podem ser usadas diretamente para encontrar a variação  $\delta p$  e  $\delta \lambda$ . Mas, ao contrário de  $K_t$ , a matriz aumentada em (4.7) não é nem simétrica ou em banda.

#### 4.1.2 Método de comprimento de arco esférico e formulação do método de comprimento de arco cilíndrico

Segundo Batoz e Dhatt (1979), em vez de resolver (4.7), é possível introduzir diretamente a restrição de (4.6b) para o controle de deslocamento em um único ponto. Para esse fim, o deslocamento iterativo  $\delta p$  é dividido em dois. Então, a mudança no novo nível de carga desconhecido,  $\lambda_n = \lambda_o + \delta \lambda$  torna-se:

$$\delta p = -K_t g(p_o, \lambda) = -K_t^{-1} (q_i(p_o) - \lambda_n q_{ef}) = -K_t^{-1} (g(p_o, \lambda_o) - \delta \lambda q_{ef}) \quad (4.8)$$

Podendo trabalhar com qualquer das expressões, a forma final pode-se definir como:

$$\delta p = -K_t^{-1} g_o + \delta \lambda K_t^{-1} q_{ef} = \delta \bar{p} + \delta \lambda \delta p_t \quad (4.9)$$

$\delta \bar{p}$  é a variação iterativa do método padrão de carga controlada do Newton-Rapshon, no nível de carga fixo  $\lambda_o$ , enquanto  $\delta p_t = K_t^{-1} q_{ef}$  deverá ser calculado do passo preditor inicial,  $\delta p_t$  não muda nas iterações uma vez que  $K_t$  é fixa. Depois de calcular  $\delta p$  de (4.9), os novos deslocamentos incrementais são:

$$\Delta p_n = \Delta p_o + \delta p = \Delta p_o + \delta \bar{p} + \delta \lambda \delta p_t \quad (4.10)$$

Sendo  $\delta \lambda$  a única incógnita da equação. Através da restrição (4.5) que pode ser reescrita como:

$$(\Delta p_o^T \Delta p_o + \Delta \lambda_o^2 \psi^2 q_{ef}^T q_{ef}) = (\Delta p_n^T \Delta p_n + \Delta \lambda_n^2 \psi^2 q_{ef}^T q_{ef}) = \Delta l^2 \quad (4.11)$$

Substituindo (4.10) em (4.11), chegamos à equação quadrática escalar:

$$a_1 \delta \lambda^2 + a_2 \delta \lambda + a_3 = 0 \quad (4.12)$$

Em que:

$$a_1 = \delta p_t^T \delta p_t + \psi^2 q_{ef}^T q_{ef} \quad (4.13a)$$

$$a_2 = 2 \delta p_t^T (\Delta p_o + \delta \bar{p}) + 2 \Delta \lambda_o \psi^2 q_{ef}^T q_{ef} \quad (4.13b)$$

$$a_3 = (\Delta p_o + \delta \bar{p})^T (\Delta p_o + \delta \bar{p}) - \Delta l^2 + \Delta \lambda_o^2 \psi^2 q_{ef}^T q_{ef} \quad (4.13c)$$

Resolvendo para  $\delta \lambda$ , e com a equação (4.10) a mudança completa é determinada. Diversos autores, incluindo Crisfield (1981) e Ramm (1981 e 1982), independentemente, concluíram que para problemas práticos, o parâmetro  $\psi$  tem pouco efeito sobre o processo e pode ser zero. Como resultado, a restrição deverá ser considerada cilíndrica em vez de esférica.

Na formulação do método de comprimento de arco cilíndrico, são aplicadas as equações (4.12) e (4.13) com  $\psi=0$ .

$$a_1 = \delta p_t^T \delta p_t \quad (4.14a)$$

$$a_2 = 2\delta p_t^T (\Delta p_o + \delta \bar{p}) \quad (4.14b)$$

$$a_3 = (\Delta p_o + \delta \bar{p})^T (\Delta p_o + \delta \bar{p}) - \Delta l^2 \quad (4.14c)$$

Para escolher a raiz apropriada de (4.13), as duas raízes são calculadas.

$$\Delta p_{n1} = \Delta p_o + \delta \bar{p} + \delta \lambda_1 \delta p_t \quad (4.15a)$$

$$\Delta p_{n2} = \Delta p_o + \delta \bar{p} + \delta \lambda_2 \delta p_t \quad (4.15b)$$

Em seguida, para descobrir qual é a mais próxima da direção incremental prévia,  $\Delta p_o$ . O ângulo mínimo entre  $\Delta p_o$  e  $\Delta p_n$  representa a direção indicada, o que é o cosseno máximo dado por:

$$\cos \theta = \frac{\Delta p_o^T \Delta p_n}{\Delta l^2} = \frac{\Delta p_o^T (\Delta p_o + \delta \bar{p})}{\Delta l^2} + \frac{\delta \lambda \Delta p_o^T \delta p_t}{\Delta l^2} = \frac{a_4 + a_5}{\Delta l^2} \quad (4.16)$$

Em que:

$$a_4 = \Delta p_o^T \delta \bar{p} + \Delta p_o^T \Delta p_o \quad (4.17a)$$

$$a_5 = \Delta p_o^T \delta p_t \quad (4.17b)$$

O deslocamento final será:

$$p = p + \delta p = p + \delta \bar{p} + \delta \lambda \delta p_t \quad (4.18)$$

### 4.1.3 Métodos de comprimento de arco linearizados

Da equação (4.18) pode-se escrever:

$$\Delta p_o^T \delta p + \delta \lambda (\Delta \lambda_0 \psi^2 q_{ef}^T q_{ef}) = -a_0/2 \quad (4.19)$$

Sendo  $a_0$  o valor anterior da incompatibilidade do comprimento de arco. Se  $a_0 = 0$  temos o método de Ramm (1981). Usando a equação (4.9), é possível obter a seguinte relação linearizada para o fator de carga:

$$\delta\lambda(\Delta p_0, \Delta\lambda_0) = \frac{-a_0/2 - \Delta p_0^T \delta\bar{p}}{(\Delta p_0^T \delta p_t + \Delta\lambda_0 \psi^2 q_{ef}^T q_{ef})} \quad (4.20)$$

### Predição de $\Delta\lambda$

A predição do incremento de carga pode ser obtida por:

$$\Delta p_p = \Delta\lambda_p K_t^{-1} q_{ef} = \Delta\lambda_p \delta p_t \quad (4.21)$$

Em que  $K_t$  é a matriz de rigidez tangente no início do incremento. Substituindo-se em (4.11) com  $\psi=0$ :

$$\Delta\lambda_p = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{(\delta p_t^T \delta p_t)}} = s \frac{\Delta l}{\sqrt{(\delta p_t^T \delta p_t)}} \quad (4.22)$$

Segundo Crisfield (1981),  $s$  será igual a  $+1$  quando  $K_t$  for definida positiva, isto é:

$$s = \text{sgn}(\delta p_t^T K_t \delta p_t) \quad (4.23)$$

#### 4.1.4 Tamanho do comprimento de arco

Segundo Menin (2006), para a determinação do comprimento de arco, precisa-se considerar que este deve ser tal que, em regiões com poucas não linearidades, ele seja grande e pequeno no caso contrário.

Para a atualização do comprimento, Crisfield (1991) propõe:

$$\Delta l^n = \Delta l_o \left( \frac{I_d}{I_o} \right)^{1/2} \quad (4.24)$$

Em que  $\Delta l^n$  é o comprimento precedente para o qual  $I_o$  iterações foram requeridas para garantir a convergência e  $I_d$  o número de iterações desejadas ( $I_d=3$ ).

## 5. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados e analisados diversos exemplos numéricos, com o objetivo de comparar os resultados e avaliar a precisão e eficácia do método apresentado e descrito nos capítulos anteriores. Os exemplos testam o desempenho global da estratégia de solução e o desempenho local dos esquemas de integração *Backward Euler*.

Um método incremental iterativo baseado no método de Newton-Raphson, combinado com o método de controle de comprimento de arco constante, é utilizado para a solução das equações de equilíbrio não lineares.

Como “ $n$ ” elementos podem compartilhar um nó comum, no caso de se desenvolver a rótula plástica, esta será atribuída ao nó adequado do elemento em conformidade com a sucessão de análise de elementos. Com o propósito de evitar singularidade na matriz de rigidez global, no máximo  $(n-1)$  rótulas plásticas podem ser designadas ao nó comum.

Nos exemplos podem ser observados a geometria, o carregamento e a malha utilizada para cada uma das estruturas analisadas, assim como as propriedades mecânicas do material, a superfície de interação adotada para cada caso e a curva carga deslocamento obtida em cada exemplo.

O leitor pode consultar os resultados obtidos por Silva e Bezerra (2010), para a análise de convergência do algoritmo de retorno radial de diferentes estruturas estudadas e a demonstração da convergência quadrática do método.

A discretização de cada um dos elementos e os graus de liberdade local e global podem ser observadas no ANEXO A.

## 5.1 TRELIÇA PLANA

### 5.1.1 Exemplo 1

Neste exemplo é considerada uma estrutura de treliça plana, estaticamente indeterminada com duas cargas concentradas aplicadas simetricamente. Na Figura 5.1 é apresentada a geometria e o carregamento, na Figura 5.2 a malha utilizada, na Figura 5.3 é indicado por números o desenvolvimento progressivo da formação das rótulas plásticas. E na Tabela 5-1, apresentam-se as propriedades do material e a superfície de interação utilizada, que define a capacidade portante última da seção transversal.

A estrutura foi analisada por Powell e Simons (1981), assumindo uma análise de pequenas deformações, com a finalidade de descobrir algum tipo de dificuldade que possa ocorrer no processo de descarregamento. Nesta pesquisa foi estudado o deslocamento vertical, considerando um endurecimento do material na evolução dos deslocamentos plásticos, com um módulo de endurecimento  $H$  de 0.02 vezes o módulo de elasticidade  $E$ . A resposta de carga vs. deslocamento para o ciclo de carga-descarga é mostrado na Figura 5.4.

Na resposta carga vs. deslocamento mostrada pela Figura 5.4, é observado o deslocamento vertical no nó 10 da malha para um ciclo de carga e descarga. O valor de  $\omega$  igual a zero implica um comportamento perfeitamente plástico dos elementos, pois, a superfície de interação permanece inata em todo o processo. Para esse exemplo, introduzindo o valor de  $\omega$  igual a 2, é calculada a resposta elastoplástica, e se obtém resultados semelhantes aos dos autores anteriores. Observou-se o aumento da capacidade portante do material depois de se atingir o patamar de escoamento.

Tabela 5-1 Propriedades dos elementos

Elementos	Diagonais	Demais
EA (kN)	$1 \times 10^5$	$1 \times 10^5$
$N_p$ (kN)	65	61.1
$\frac{ N }{N_p} = 1$		

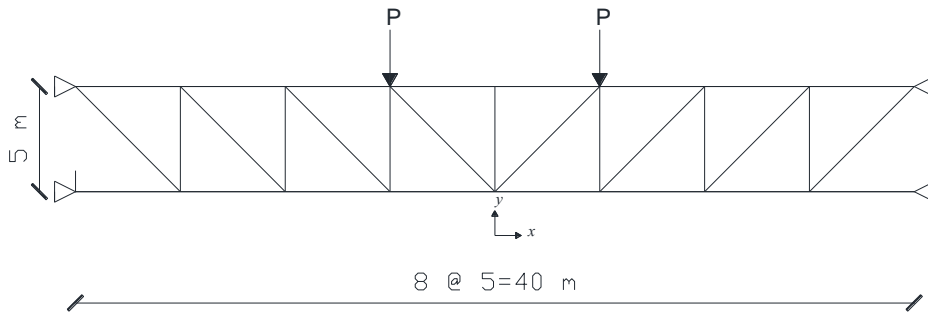


Figura 5.1 Geometria e carregamento

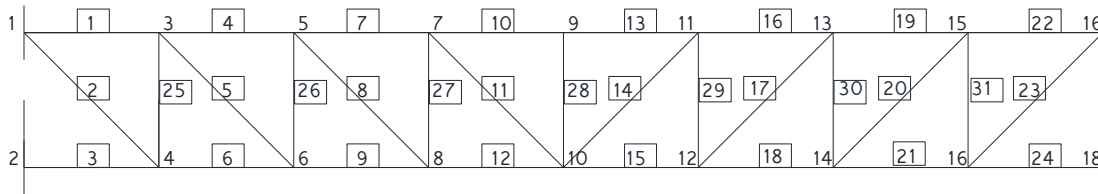


Figura 5.2 Malha de elementos finitos

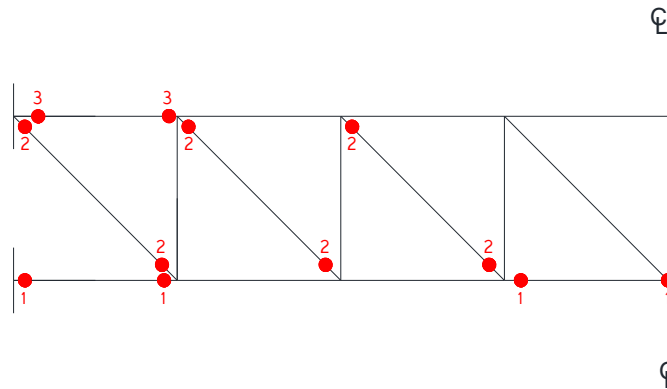


Figura 5.3 Formação das rótulas plásticas

A superfície de interação adotada para os elementos de treliça plana considera a interação dos esforços axiais nos extremos dos elementos e dos esforços axiais de plastificação, definidos pela área da seção transversal do elemento e da tensão de escoamento do material.

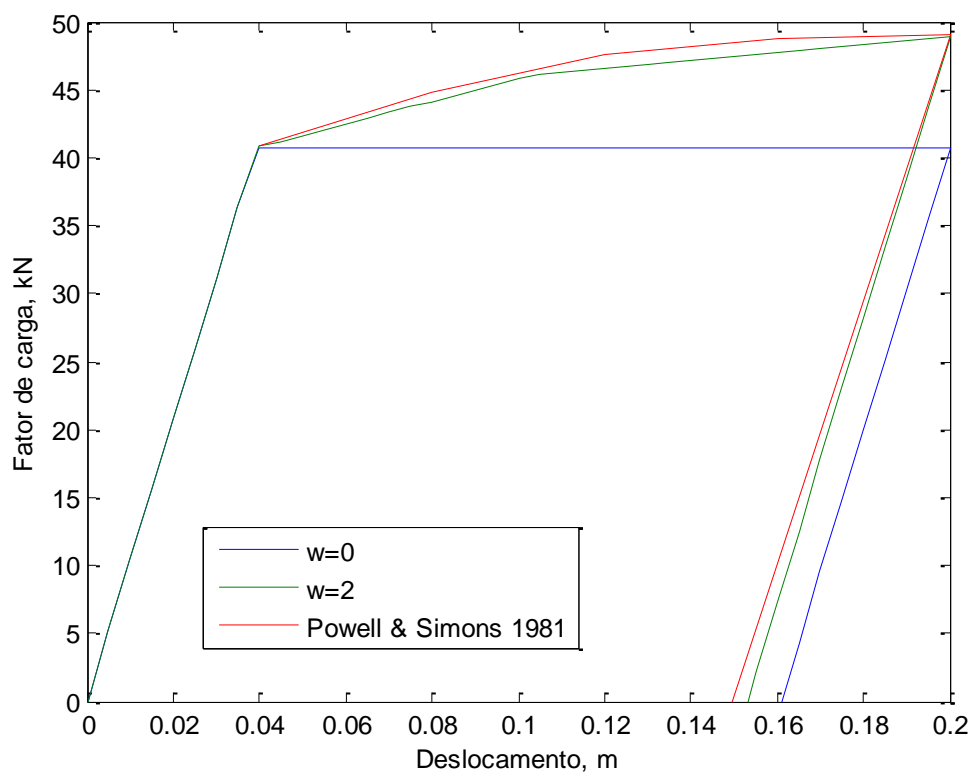


Figura 5.4 Resposta do ciclo de carga-descarga

### 5.1.2 Exemplo 2

Na Figura 5.5 é apresentada a geometria e o carregamento, na Figura 5.6 a malha utilizada, na Figura 5.7 é indicado por números o desenvolvimento progressivo da formação das rótulas plásticas, e na Tabela 5-2, se apresentam as propriedades do material e a superfície de interação utilizada.

O mesmo problema foi analisado para a carga de colapso por Bathe e Dvorkin (1983), assumindo uma formulação Lagrangiana. A resposta de carga vs. deslocamento para o processo de carregamento é mostrado na Figura 5.8.

Na Figura 5.8 é apresentada a evolução do deslocamento vertical no nó 4 da malha utilizada para discretizar a estrutura, obtendo-se os mesmos resultados dos autores anteriores. Sem considerar o endurecimento do material, mostrando que os métodos utilizados fornecem uma ferramenta prática para o estudo de comportamento elastoplástico de estruturas reticuladas.



Tabela 5-2 Propriedades dos elementos

Elementos	1 e 3	2
Área	1	1
E (kN/m <sup>2</sup> )	2x10 <sup>5</sup>	2x10 <sup>5</sup>
N <sub>p</sub> (kN)	100	300
$\frac{ N }{N_p} = 1$		

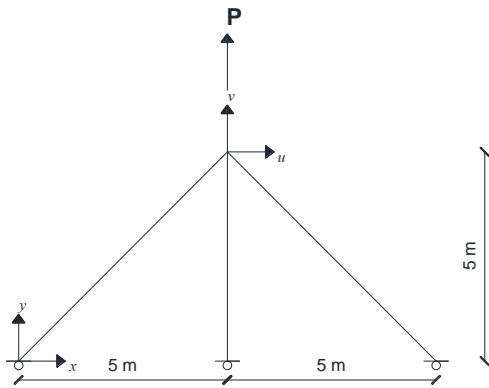


Figura 5.5 Geometria e carregamento

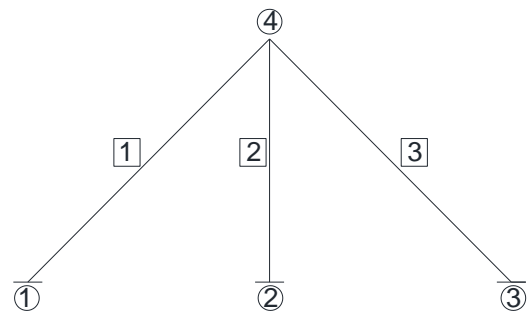


Figura 5.6 Malha de elementos finitos

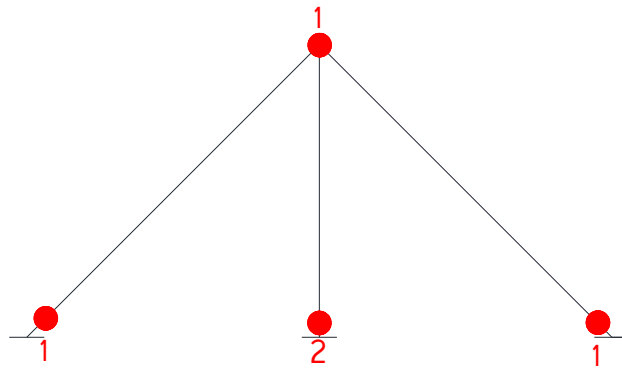


Figura 5.7 Formação das rótulas plásticas

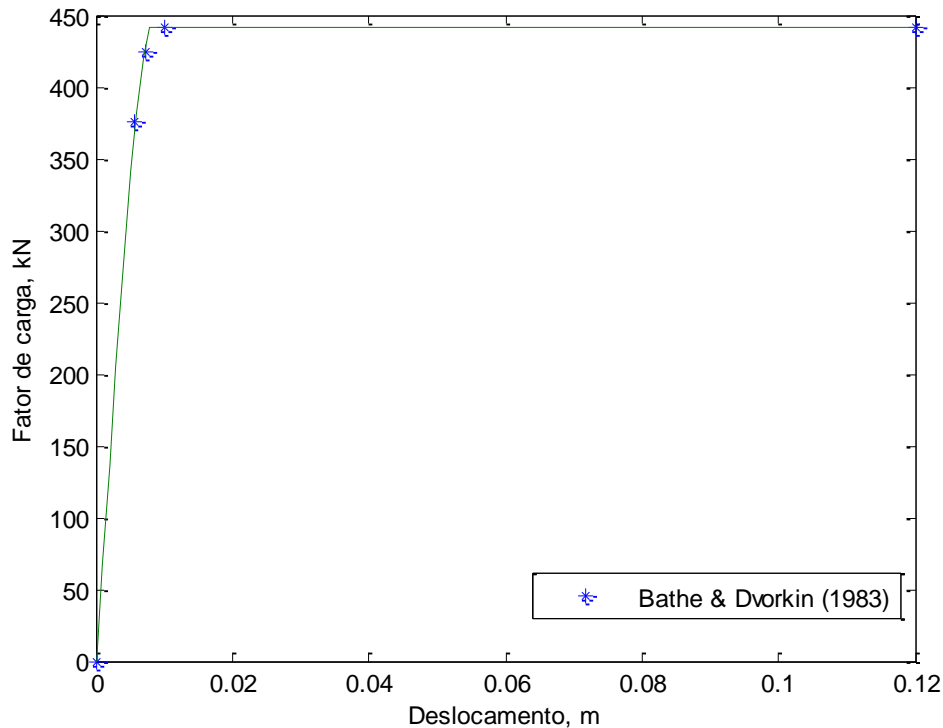


Figura 5.8 Resposta do processo de carregamento

## 5.2 PÓRTICO PLANO

### 5.2.1 Exemplo 1

É estudada uma estrutura aporticada de dois pavimentos, o mesmo problema foi analisado por Argyris (1982), além de outros autores, para o caso de pequenas e grandes deformações. Na Figura 5.9 é apresentada a geometria e o carregamento, na Figura 5.10 a malha utilizada, na Figura 5.11 e indicado por números o desenvolvimento progressivo da formação das rótulas plásticas, e na Tabela 5-3 são apresentadas as propriedades do material e a superfície de interação utilizada, neste caso considerando a interação entre os esforços axiais e os momentos fletores que atuam na seção transversal dos elementos.

A resposta de carga vs. deslocamento para o ciclo de carga-descarga é mostrada na Figura 5.12, em que pode ser observado o comportamento quando é considerado o comportamento elastoplástico perfeito do material, a resposta é bastante aproximada à apresentada por os autores anteriores para a análise de pequenas deformações.

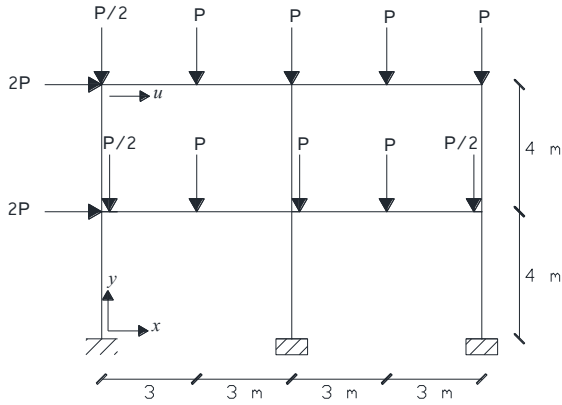


Figura 5.9 Geometria e carregamento

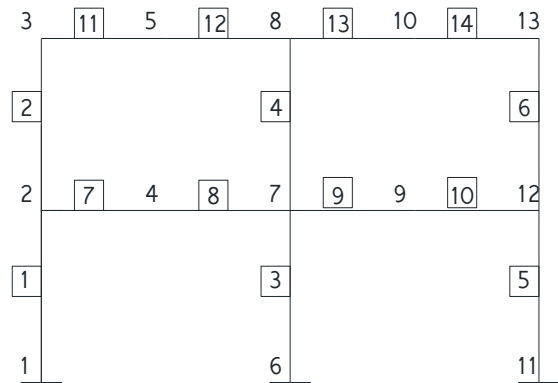


Figura 5.10 Malha de elementos finitos

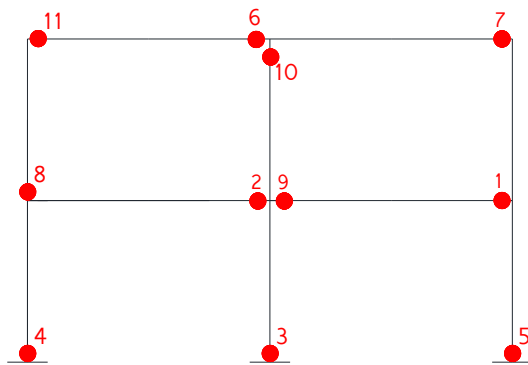


Figura 5.11 Formação das rótulas plásticas

Tabela 5-3 Propriedades dos elementos

Elementos	Vigas	Pilares
E (kN/m <sup>2</sup> )	2.1x10 <sup>8</sup>	2.1x10 <sup>10</sup>
A (m <sup>2</sup> )	0.01	0.02
I (m <sup>4</sup> )	0.29x10 <sup>-3</sup>	0.51x10 <sup>-3</sup>
N <sub>p</sub> (kN)	2.95	4.80
M <sub>p</sub> (kN.m)	0.42	0.73
$\left(\frac{ N }{N_p}\right)^2 + \frac{ M }{M_p} = 1$		

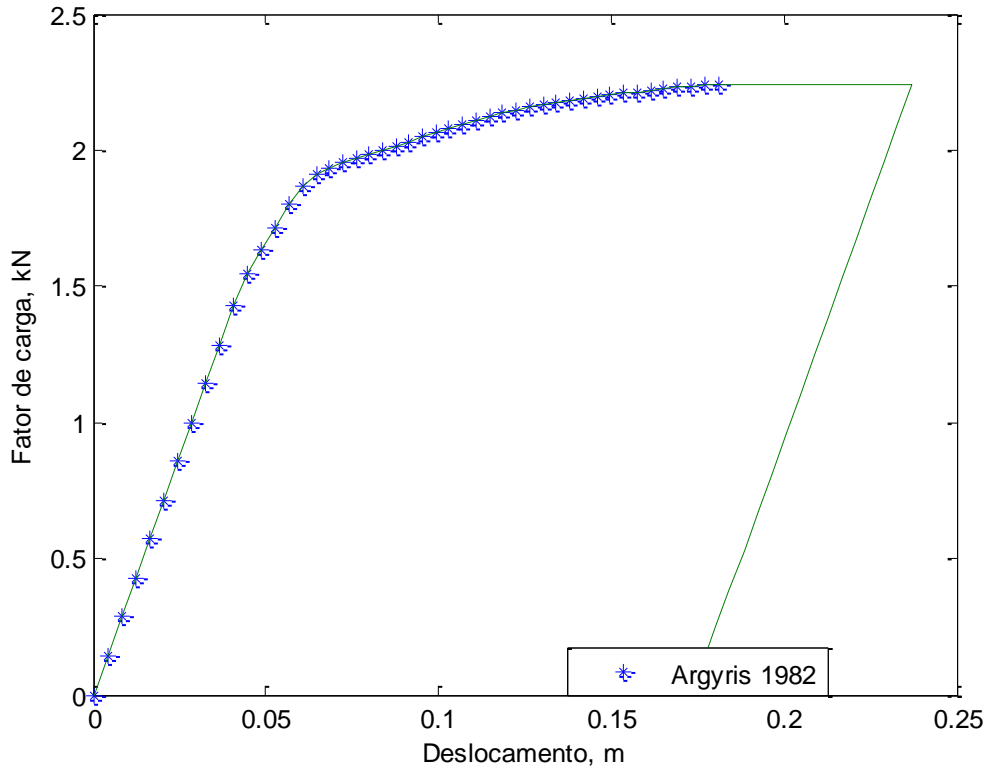


Figura 5.12 Resposta para o ciclo de carga-descarga.

Na Figura 5.12 se observa, o deslocamento horizontal no nó 3 da malha utilizada para discretizar a estrutura, devido ao incremento no carregamento definido pela Figura 5.9, e posterior descarga. Pode-se resaltar que com os algoritmos empregados a resposta obtida é semelhante à encontrada na literatura.

## 5.2.2 Exemplo 2

É apresentado um pórtico plano de quatro pavimentos. A estrutura foi analisada por Haldar e Nee (1988) para um valor de  $a=0.5$ . Na Figura 5.13, é apresentada a geometria e o carregamento, na

Figura 5.14 observa-se a malha utilizada, na Figura 5.15 é indicado por números o desenvolvimento progressivo da formação das rótulas plásticas, na Tabela 5-4 são apresentadas as propriedades do material e a superfície de interação utilizada, sendo a mesma adotada pelos autores anteriores com a finalidade de comparar os resultados.

A resposta de carga vs. deslocamento para o ciclo de carga-descarga é apresentada na Figura 5.16. Pode ser observado o comportamento do deslocamento horizontal do nó 14 da malha

utilizada. É considerado o comportamento elastoplástico perfeito do material, a resposta tem uma excelente aproximação com os resultados apresentados por Haldar e Nee (1988).

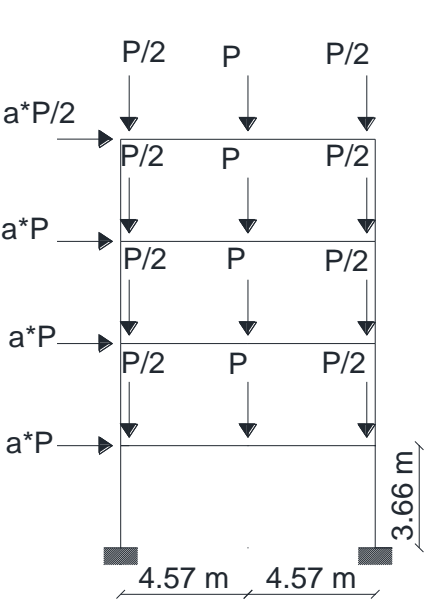


Figura 5.13 Geometria e carregamento

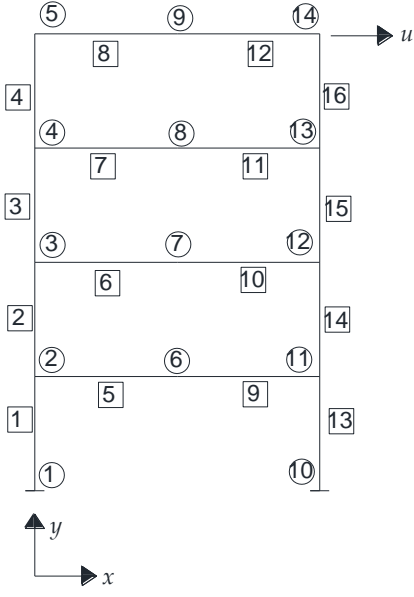


Figura 5.14 Malha de elementos finitos

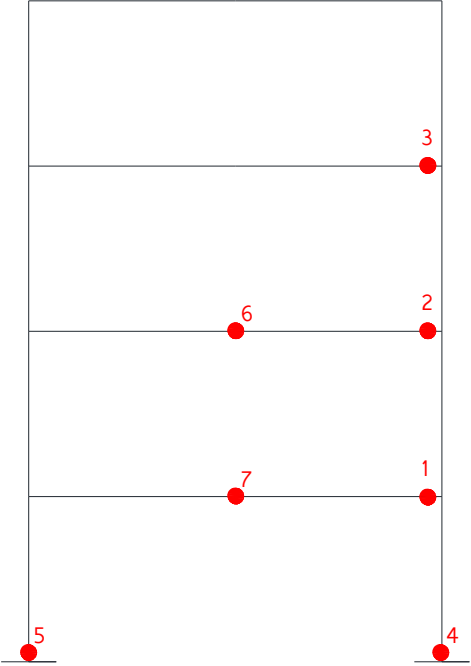


Figura 5.15 Formação das rótulas plásticas

Tabela 5-4 Propriedades dos elementos

Elementos	Colunas inferiores	Demais colunas	Vigas
E(kN/m <sup>2</sup> )	1.99x10 <sup>8</sup>	1.99x10 <sup>8</sup>	1.99x10 <sup>8</sup>
A(m <sup>2</sup> )	0.014	0.011	0.008
I(m <sup>4</sup> )	2.759x10 <sup>-4</sup>	1.3902x10 <sup>-4</sup>	2.152x10 <sup>-4</sup>
Mp(kN.m)	484.027	305.059	295.568
Np(kN)	3594.163	2730.763	2263.699
$\left(\frac{ N }{N_p}\right)^2 + \frac{ M }{M_p} = 1$			

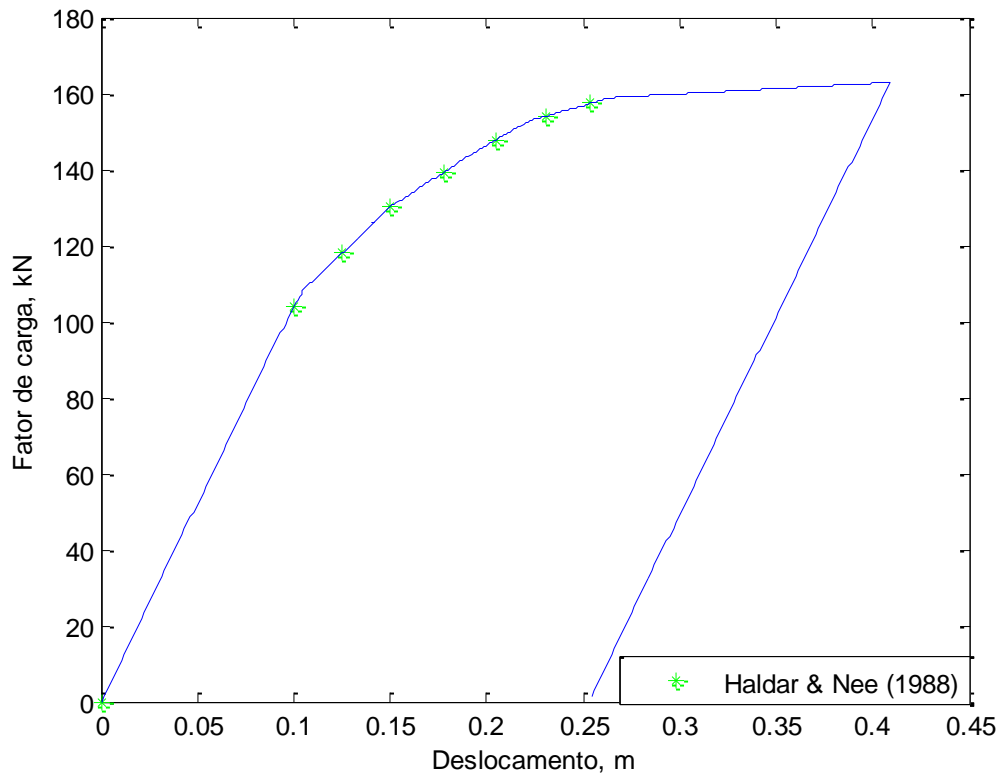


Figura 5.16 Resposta do ciclo de carga-descarga

### 5.2.3 Exemplo 3

No exemplo a seguir, é estudada uma estrutura formada por duas vigas, na Figura 5.17 é apresentada a geometria e o carregamento, na Figura 5.18 a malha utilizada, na Figura 5.19 é indicado por números o desenvolvimento progressivo da formação das rótulas plásticas, na

Tabela 5-5 são apresentadas as propriedades do material e a superfície de interação utilizada.

A estrutura foi analisada por Argyris (1982), comparando os resultados obtidos com resultados experimentais. A resposta de carga vs. deslocamento para o processo de carregamento é mostrada na Figura 5.20. É estudado o comportamento do deslocamento vertical do nó 2 da malha utilizada devido ao incremento do fator de carga, é considerado um material perfeitamente plástico, sem endurecimento. A resposta tem uma excelente aproximação com os resultados com a apresentada por Argyris (1982) discretizado por dois elementos de viga bi-dimensionais.

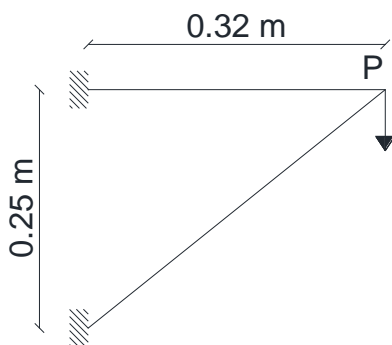


Figura 5.17 Geometria e carregamento

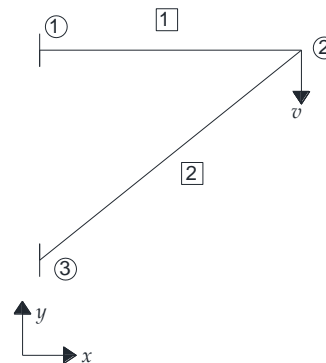


Figura 5.18 Malha de elementos finitos

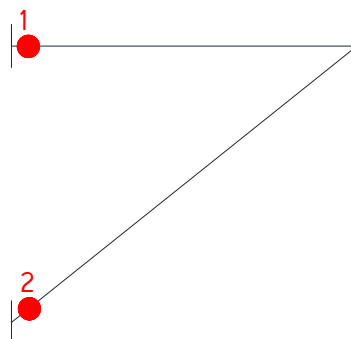


Figura 5.19 Formação das rótulas plásticas

Tabela 5-5 Propriedades dos elementos

Elementos	1	2
E(kN/m <sup>2</sup> )	3.114x10 <sup>10</sup>	3.114x10 <sup>10</sup>
A(m <sup>2</sup> )	4.85x10 <sup>-4</sup>	4.85x10 <sup>-4</sup>
I(m <sup>4</sup> )	1.475x10 <sup>-8</sup>	1.475x10 <sup>-8</sup>
M <sub>p</sub> (kN.m)	275.345	347.762
N <sub>p</sub> (kN)	57662.297	72830.732
$\left(\frac{ N }{N_p}\right)^2 + \frac{ M }{M_p} = 1$		

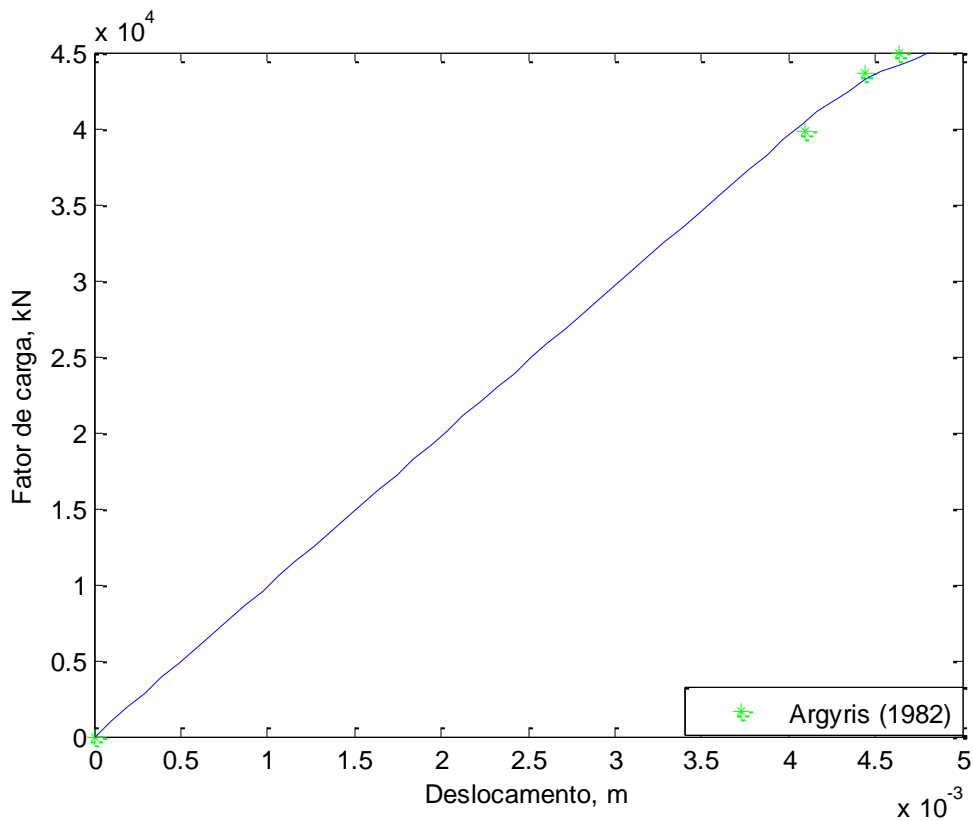


Figura 5.20 Resposta do processo de carregamento

#### 5.2.4 Exemplo 4

A seguir é apresentado um pórtico assimétrico que foi analisado, entre outros, por Argyris (1982) e depois por Vieira (2013), este com diversas superfícies de interação obtidas por regressão linear múltipla. Na Figura 5.21, é apresentada a geometria e o carregamento, na Figura 5.22 a malha utilizada, na Figura 5.23 é indicado por números o desenvolvimento



progressivo da formação das rótulas plásticas, e na Tabela 5-6 se apresentam as propriedades do material e a superfície de interação adotada, sendo a mesma dos autores anteriores.

A resposta de carga vs. deslocamento para o processo de carregamento é mostrada na Figura 5.24, em que se estuda o deslocamento horizontal do nó 2 da malha. Devido ao incremento nas cargas aplicadas, é considerado um material perfeitamente plástico, a resposta tem uma excelente aproximação com a apresentada por Vieira (2013), na análise de pequenas deformações:

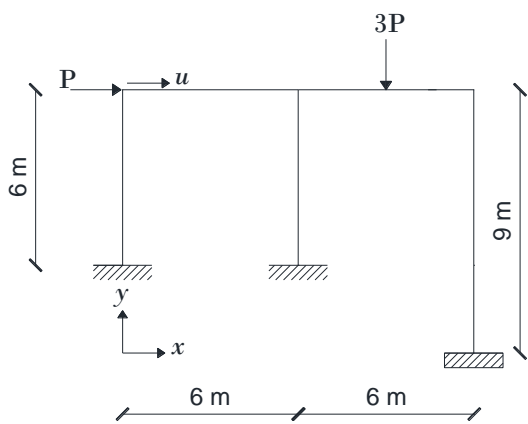


Figura 5.21 Geometria e carregamento

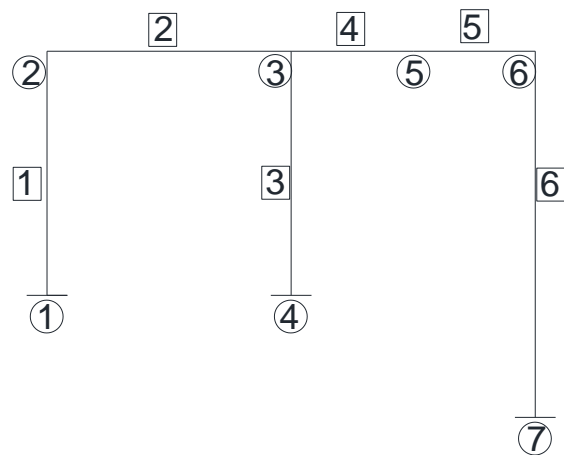


Figura 5.22 Malha de elementos finitos

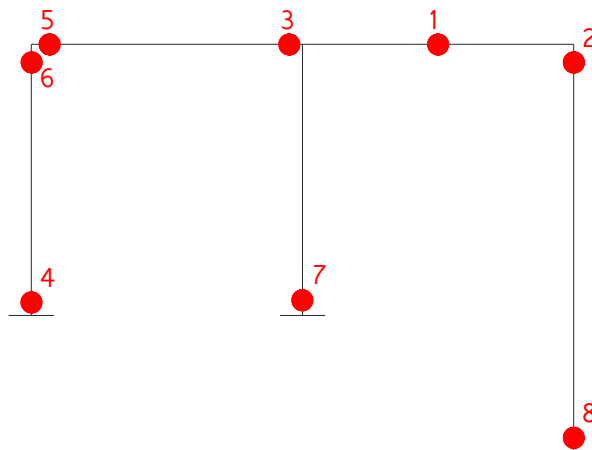


Figura 5.23 Formação das rótulas plásticas

Tabela 5-6 Propriedades dos elementos

Elementos	1, 2, 3 e 6	4 e 5
E (kN/m <sup>2</sup> )	88964.359	88964.359
A (m <sup>2</sup> )	0.080	0.139
I(m <sup>4</sup> )	1.067x10 <sup>-3</sup>	2.454x10 <sup>-3</sup>
Mp(kN.m)	0.028	0.057
Np(kN)	2.847	4.951
$\left(\frac{ N }{N_p}\right)^2 + \frac{ M }{M_p} = 1$		

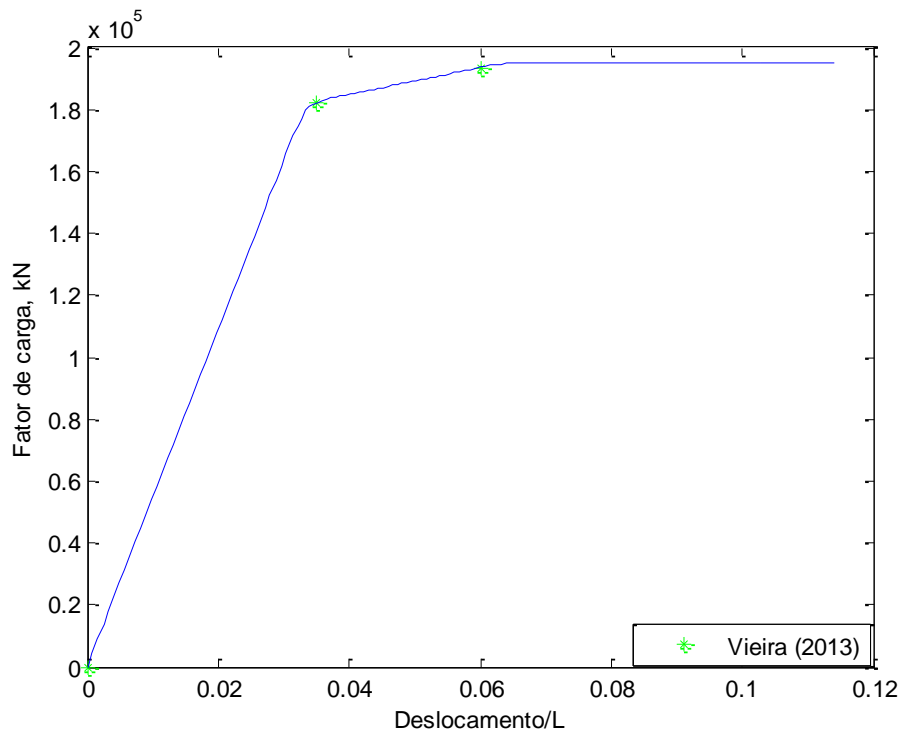


Figura 5.24 Resposta do processo de carregamento

### 5.2.5 Viga Engastada-Livre

Neste exemplo é considerada uma viga engastada num extremo e livre no outro, com duas cargas concentradas, uma horizontal e a outra vertical, no extremo livre da estrutura. Na Figura 5.25, é apresentada a geometria e o carregamento, na Figura 5.26 a malha utilizada, na Figura 5.27 é indicado por números o desenvolvimento progressivo da formação das rótulas

plásticas, e na Tabela 5-7 são apresentadas as propriedades do material e a superfície de interação utilizada, sendo o mesmo critério de escoamento adotado pelos autores anteriores.

A estrutura foi analisada por Ueda e Fujikubo (1990) pelo método do nó plástico introduzindo uma taxa de endurecimento  $H$ . A trajetória de carga vs. deslocamento para o processo de carregamento é apresentada na Figura 5.28.

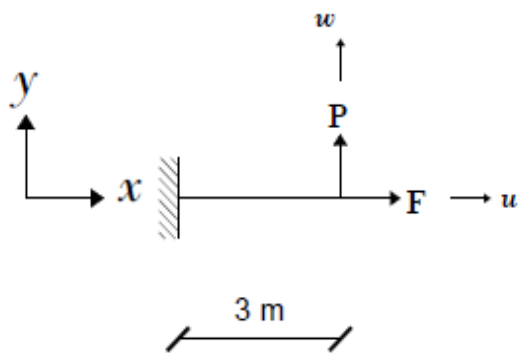


Figura 5.25 Geometria e carregamento

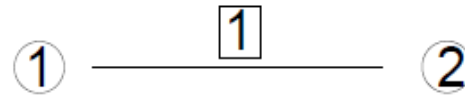


Figura 5.26 Malha de elementos finitos



Figura 5.27 Formação da rótula plástica

Tabela 5-7 Propriedades dos elementos

Elementos	1
$E(\text{kN/m}^2)$	$2.059 \times 10^8$
$A(\text{m}^2)$	$2.4 \times 10^{-4}$
$I(\text{m}^4)$	$8 \times 10^{-9}$
$M_p(\text{kN.m})$	0.360
$N_p(\text{kN})$	72
$\frac{ N ^2}{2N_p} + \frac{ M }{M_p} = 1$	

Na Figura 5.28, observa-se o deslocamento vertical do nó 2 da viga para à análise incremental da carga aplicada. Introduzindo-se um valor de  $\omega$  igual a 4 na superfície de interação, obtém-se uma trajetória para o processo, semelhante à encontrada na literatura.

Pode-se observar o aumento da capacidade portante do material depois de se atingir o patamar de escoamento. Porém, com resultados ainda menores do que os obtidos por Ueda e Fujikubo (1990), devido ao fato de que eles introduzem alguns fatores na superfície de interação, e pela discretização da estrutura.

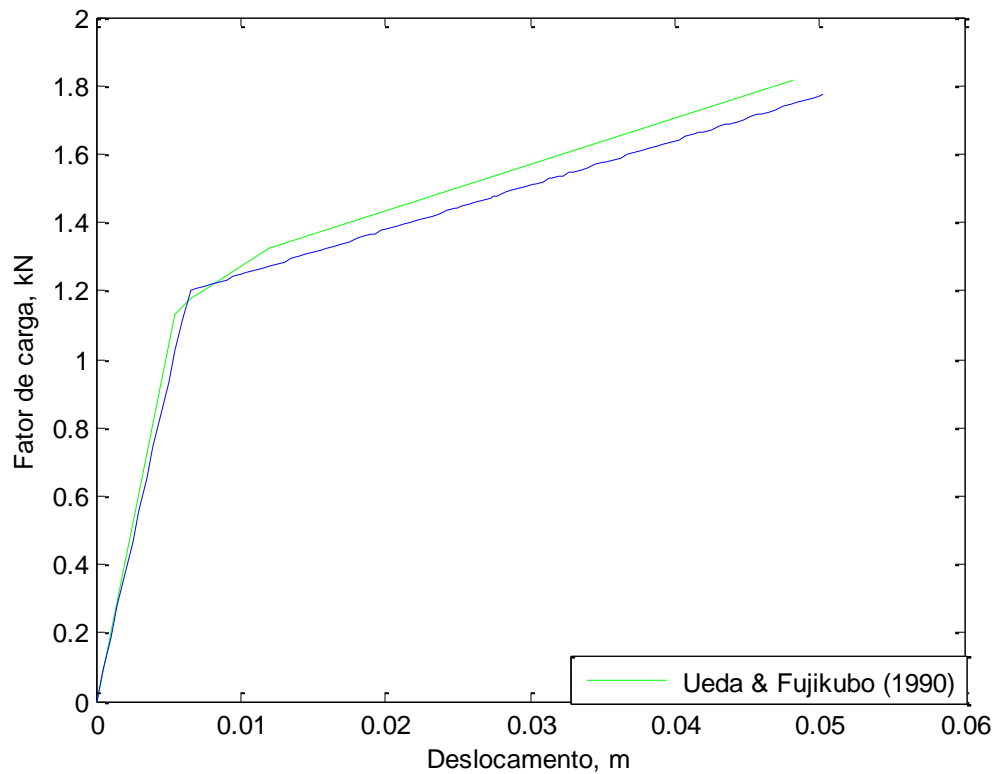


Figura 5.28 Resposta do processo de carregamento

## 5.3 GRELHA PLANA

### 5.3.1 Exemplo 1

Para o estudo do elemento de grelha plana é considerada uma estrutura que foi analisada por Ueda e Yao (1982), sobre a ação de uma carga  $P$  concentrada, submetendo a estrutura a momentos fletores e torçores. Na Figura 5.29, é apresentada a geometria e o carregamento, na Figura 5.30 a malha utilizada, na Figura 5.31 é indicado por números o desenvolvimento progressivo da formação das rótulas plásticas, e na Tabela 5-8 se apresentam as propriedades do material e a superfície de interação utilizada.

A análise inelástica de primeira ordem dessa estrutura é realizada para um processo de carregamento, descarregamento e reversão de carga, os resultados são comparados com o processo de carga obtido por Ueda e Yao (1982), assumindo uma análise com pequenas deformações. A resposta de carga vs. deslocamento para o ciclo é apresentada na Figura 5.32.

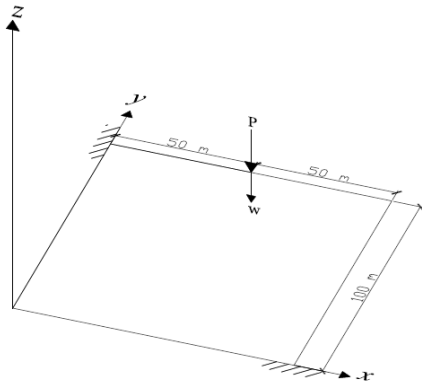


Figura 5.29 Geometria e carregamento

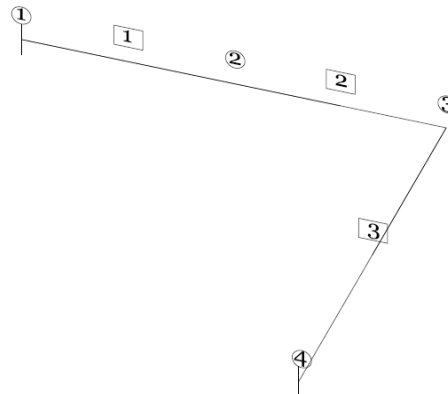


Figura 5.30 Malha de elementos finitos

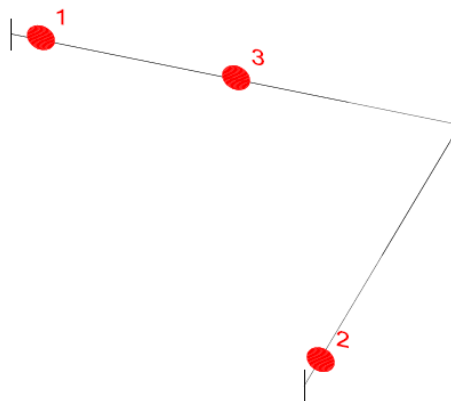


Figura 5.31 Formação das rótulas plásticas

Tabela 5-8 Propriedades dos elementos

$EI(\text{kN.m}^2)$	388.08
$M_p(\text{kN.m})$	21.95
$GJ(\text{kN.m}^2)$	297.92
$T_p(\text{kN.m})$	17.24
$\left(\frac{ T }{T_p}\right)^2 + \left(\frac{ M }{M_p}\right)^2 = 1$	

Na Figura 5.32, pode ser observado o comportamento do deslocamento vertical do nó 2 da malha utilizada. É considerado um material com comportamento perfeitamente plástico, a

resposta obtida está em uma excelente concordância com os valores relatados pelos autores anteriores.

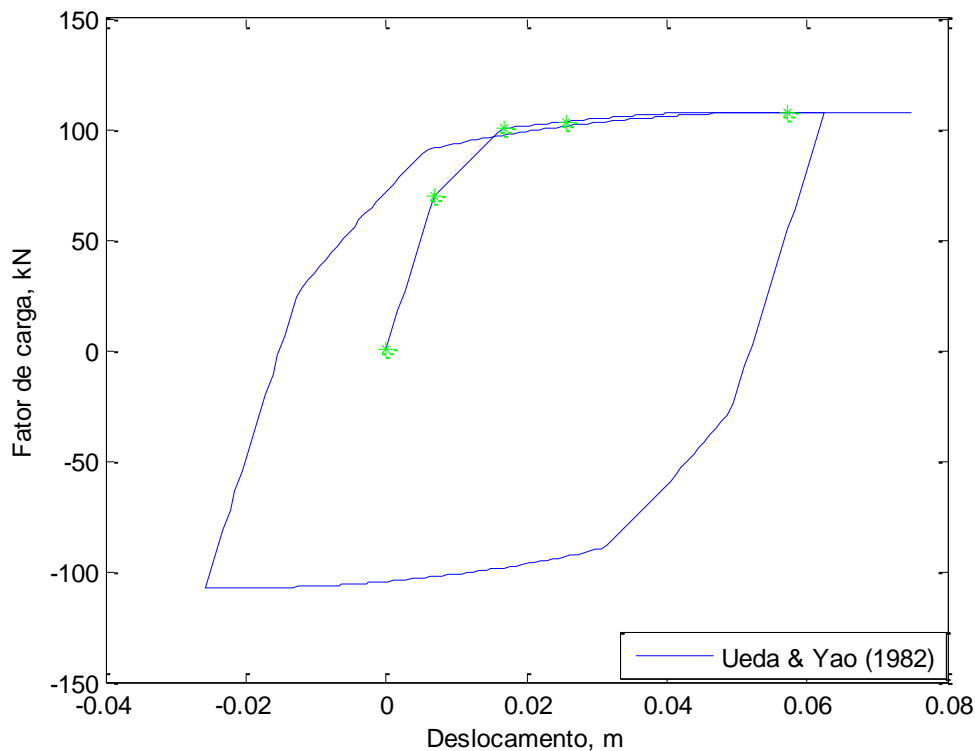


Figura 5.32 Resposta do ciclo de carga-descarga

## 5.4 PÓRTICO ESPACIAL

### 5.4.1 Exemplo 1

Neste exemplo é analisado um tipo de estrutura usada frequentemente para indústrias *off-shore*, analisada por Shi e Atluri (1988), cada um dos elementos da estrutura é modelado como elemento de viga 3D. É realizada uma análise inelástica de primeira ordem considerando um processo de carregamento e descarregamento. Os autores anteriores realizaram uma análise de segunda ordem do problema, por consequência seus resultados representam valores levemente menores, mas os resultados obtidos na rotina desenvolvida estão em boa concordância com os anteriores.

Na Figura 5.33, é apresentada a geometria e o carregamento, na Figura 5.34 a malha utilizada, na Figura 5.35 é indicado por números o desenvolvimento progressivo da formação das

rótulas plásticas, e na Tabela 5-9 são apresentadas as propriedades do material e a superfície de interação utilizada.

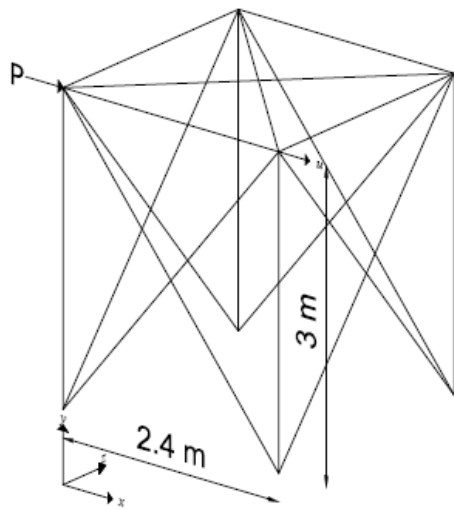


Figura 5.33 Geometria e carregamento

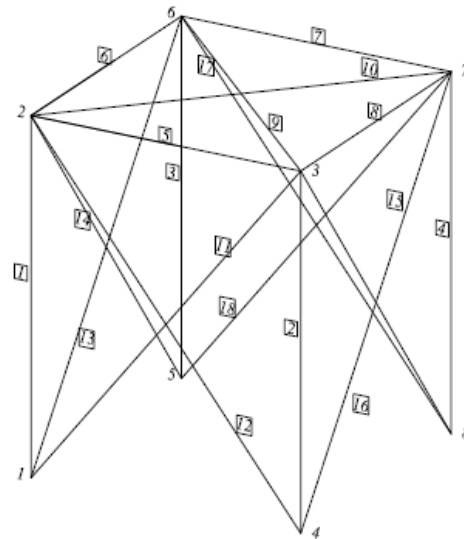


Figura 5.34 Malha de elementos finitos

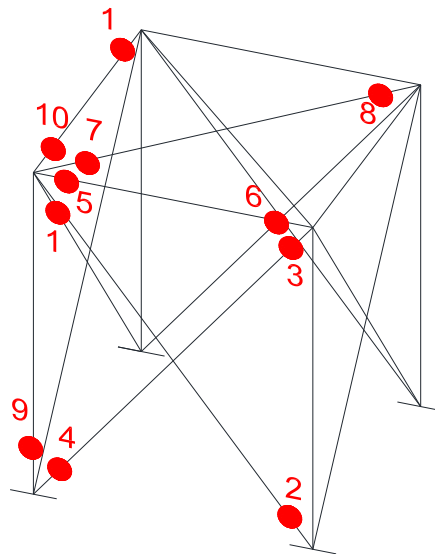


Figura 5.35 Formação das rótulas plásticas

A resposta de carga vs. deslocamento para o ciclo é mostrada na Figura 5.36, estudando o comportamento do deslocamento horizontal do nó 3 da malha utilizada para discretizar a estrutura, pode ser observado o comportamento quando é considerado um material perfeitamente plástico.

Tabela 5-9 Propriedades dos elementos

Elementos	Pilares	Contraventamentos
E (kN/m <sup>2</sup> )	2.1x10 <sup>8</sup>	2.1x10 <sup>8</sup>
A (m <sup>2</sup> )	5.28x10 <sup>-3</sup>	8.62x10 <sup>-4</sup>
I (m <sup>4</sup> )	4.7x10 <sup>-5</sup>	7.9x 10 <sup>-6</sup>
J (m <sup>4</sup> )	9.39x10 <sup>-5</sup>	1.58x10 <sup>-6</sup>
Mp (kN.m)	125.5	6.6
Np (kN)	1478	241.2
Tp (kN.m)	105.6	5.5
$\left(\frac{ M }{N_p}\right)^2 + \left(\frac{ T }{T_p}\right)^2 + \left(\frac{ M_y }{M_p}\right)^2 + \left(\frac{ M_z }{M_p}\right)^2 = 1$		

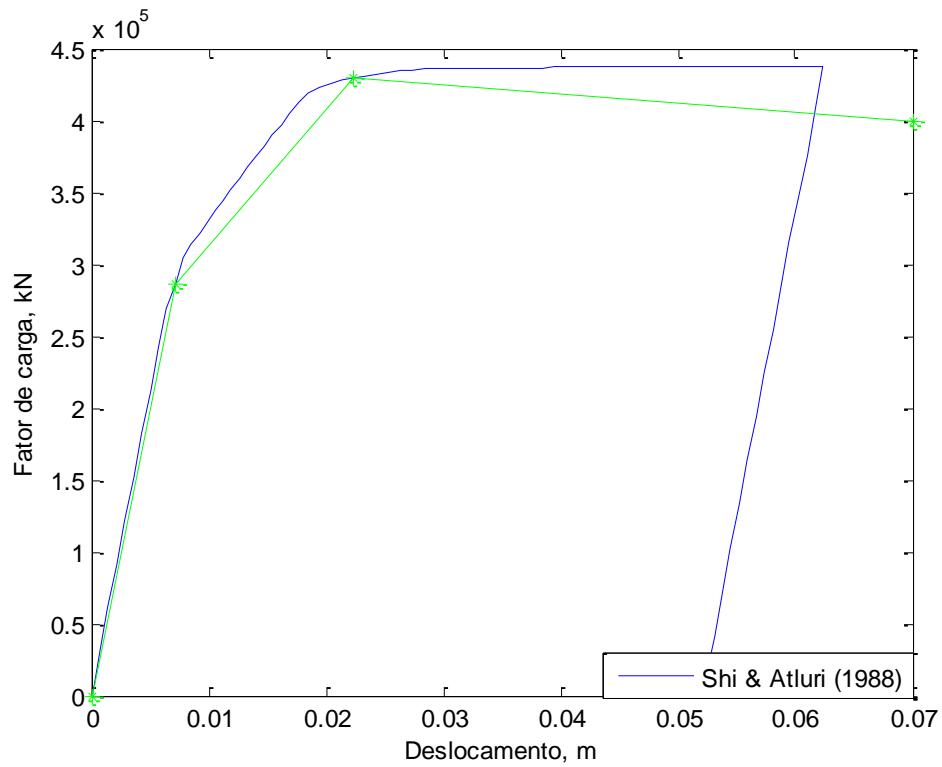


Figura 5.36 Resposta do ciclo carga-descarga



## 5.5 EXEMPLOS NO ANSYS

A seguir são apresentados dois exemplos numéricos feitos no programa ANSYS (Workbench 14.5), na tentativa de comparar os resultados com os obtidos na rotina desenvolvida no MATLAB.

A opção utilizada para a análise elastoplástica no ANSYS é *Bilinear Isotropic Hardening*, utilizando um modelo de endurecimento bilinear isotrópico, representado na Figura 5.37, com um critério de escoamento de Von Mises e uma regra de fluxo associativa.

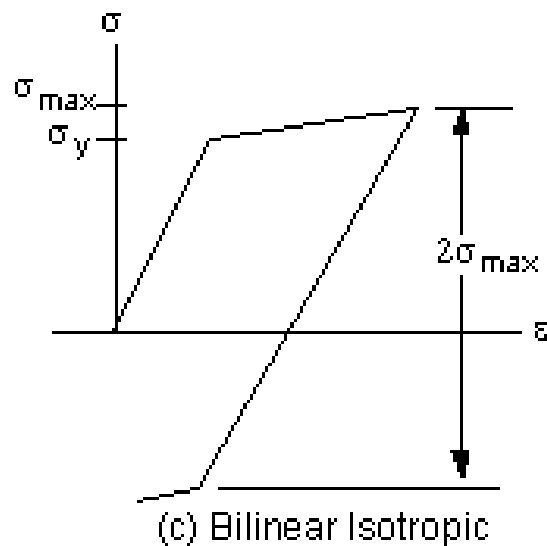


Figura 5.37 Modelo de endurecimento isotrópico. (ANSYS).

O elemento utilizado para a modelagem foi SOLID186, elemento de ordem superior com 20 nós que apresenta um comportamento de deslocamento quadrático. O elemento é usado para modelagem de estruturas sólidas 3-D. Está definido por vinte nós com três graus de liberdade em cada nó: translações nas direções x, y e z. A geometria, as localizações dos nós e o sistema de coordenadas para este elemento são mostrados na Figura 5.38. O elemento básico tem forma de hexaedro, mas pode ser utilizado como um prisma.

O elemento SOLID186 suporta plasticidade, hiperplasticidade, endurecimento nas tensões, grandes deformações, entre outros tipos de comportamentos.

A Figura 5.38 identifica as faces do elemento e representa o sistema de coordenadas. As propriedades do material podem ser anisotrópicas.

As cargas são definidas como sendo de dois tipos: cargas nodais e cargas do elemento. As cargas nodais são definidas nos nós e não estão diretamente relacionadas aos elementos. Essas cargas nodais estão associadas aos graus de liberdade no nó e, normalmente, são inseridos como restrições de deslocamento, forças e cargas nodais. As cargas do elemento são: cargas de superfície, que carregam o peso próprio do corpo, e cargas de inércia.

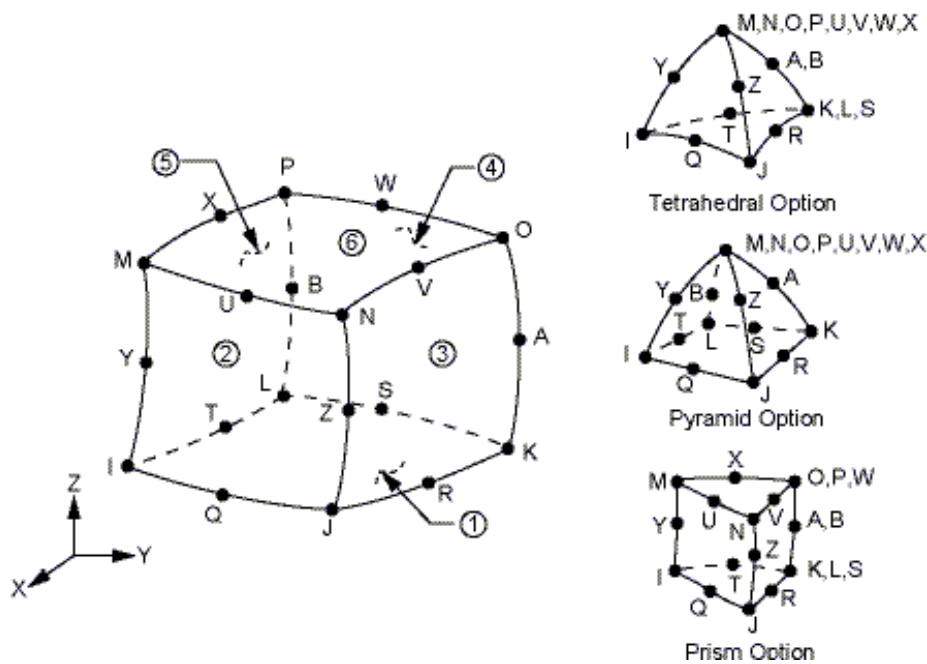


Figura 5.38 Elemento SOLID186, da Biblioteca (ANSYS)

### 5.5.1 Viga Engastada-Engastada com carga no centro do vão

A seguir é analisada uma viga com carregamento e geometria definida pela Figura 5.39, a malha utilizada no MATLAB definida na Figura 5.40, e na Figura 5.41 as rótulas plásticas que se formam na viga. Na Tabela 5-10, apresentam-se as propriedades geométricas e mecânicas do elemento de viga.

As características das condições de contorno para a viga são: o apoio de terceiro gênero para ambos os extremos. Para simular o apoio, os deslocamentos foram restritos na direção  $x$ ,  $y$  e  $z$ . (Figura 5.42).

A resposta de carga vs. deslocamento para o processo de carregamento é mostrada na Figura 5.43, em que pode ser observada a evolução do deslocamento vertical do nó 2 da malha, devido ao incremento da carga aplicada. É apresentada a resposta quando é considerado um comportamento do material perfeitamente plástico, utilizando na modelagem um valor de  $\omega$  igual a zero, e assim a superfície permanece intata no processo.

No ANSYS introduzido-se um módulo de endurecimento  $H$  de  $1 \times 10^6$  kN/m<sup>2</sup> e ajustando-se um valor de  $\omega$  igual a 21 na rotina, obtêm-se resultados semelhantes.

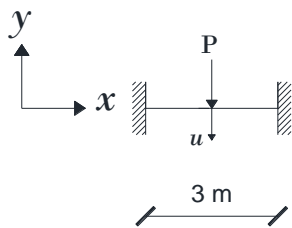


Figura 5.39 Geometria e carregamento



Figura 5.40 Malha de elementos finitos



Figura 5.41 Formação das rótulas plásticas

Tabela 5-10 Propriedades dos elementos

E (kN/m <sup>2</sup> )	$2.059 \times 10^8$
A (m <sup>2</sup> )	0.024
I (m <sup>4</sup> )	$8 \times 10^{-9}$
M <sub>p</sub> (kN.m)	0.36
$\frac{ M }{M_p} = 1$	

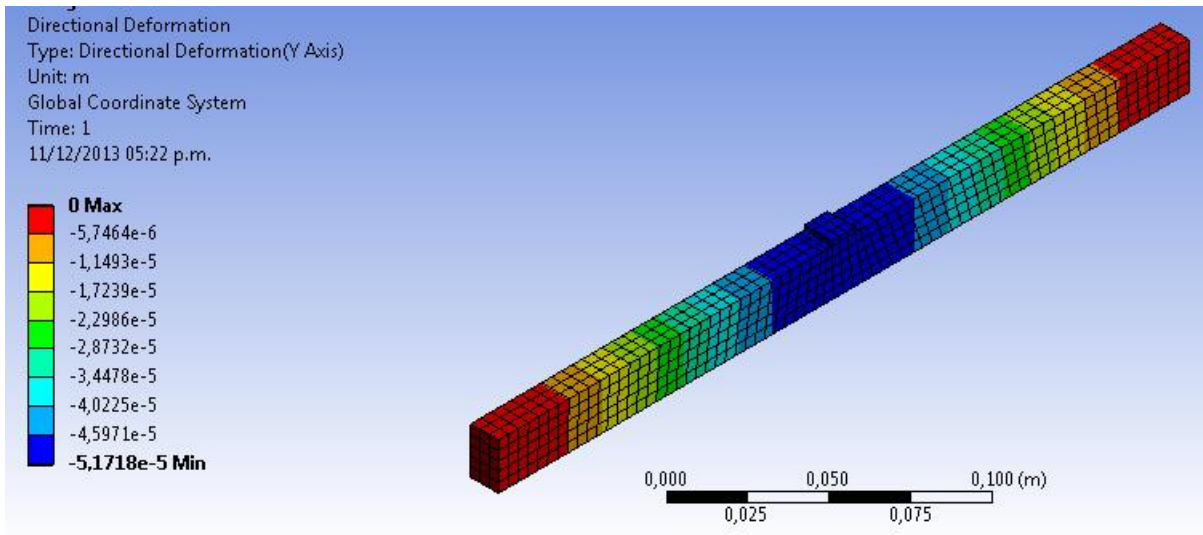


Figura 5.42 Configuração deformada ANSYS

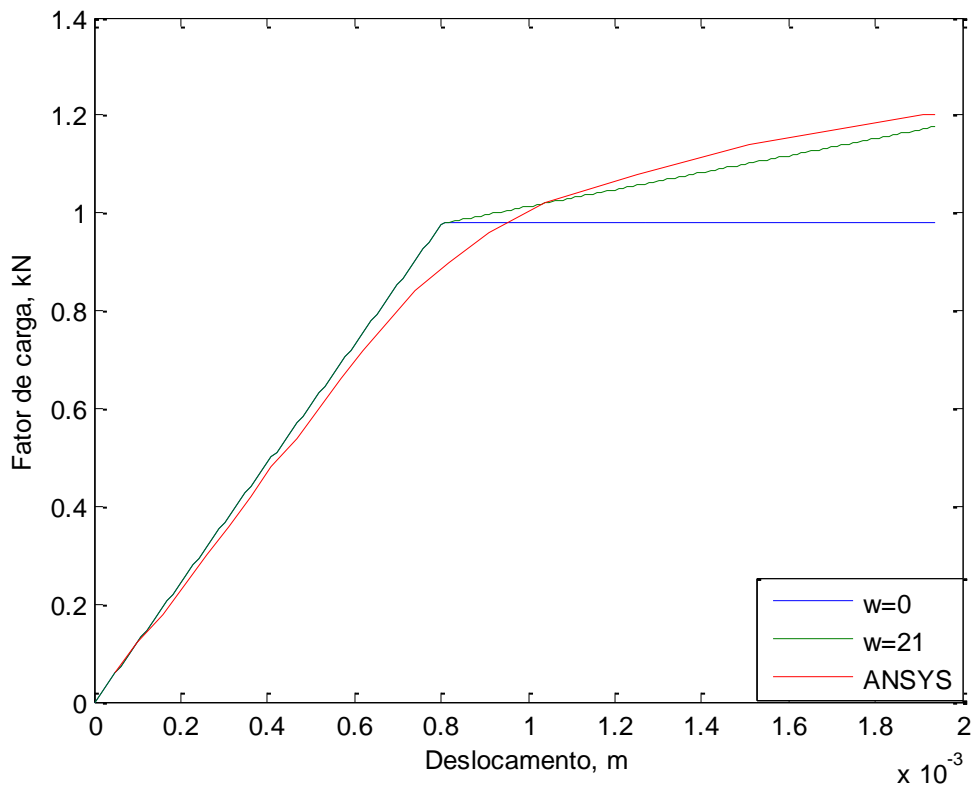


Figura 5.43 Resposta para o processo de carregamento

### 5.5.2 Viga Engastada-Livre

Para o seguinte exemplo, é estudada uma viga com carregamento e geometria definida pela Figura 5.44, na Figura 5.45 a malha utilizada no MATLAB, e na Figura 5.46 se observa a

formação da rótula plástica na viga. Na Tabela 5-11, Observam-se as propriedades geométricas e mecânicas do elemento de viga, e a superfície de interação utilizada.

As características das condições de contorno para a viga são: o apoio de terceiro gênero para o extremo esquerdo. Para simular o apoio, os deslocamentos foram restritos na direção  $x$ ,  $y$  e  $z$ . (Figura 5.47), e na Figura 5.48 as tensões equivalentes de Von Mises.

A resposta de carga vs. deslocamento para o processo de carregamento é mostrada na Figura 5.49, em que pode ser observado a evolução do deslocamento vertical do extremo livre da estrutura, devido ao processo de carga. É apresentada a resposta quando é considerado um comportamento do material perfeitamente plástico, utilizando na modelagem um valor de  $\omega$  igual a zero, e assim a superfície permanece intata no processo.

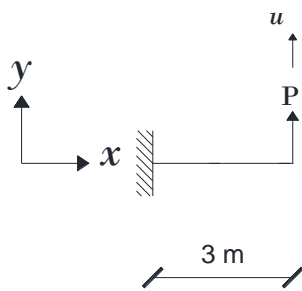


Figura 5.44 Geometria e carregamento



Figura 5.45 Malha de elementos finitos



Figura 5.46 Formação da rótula plástica

Tabela 5-11 Propriedades dos elementos.

$E$ (kN/m <sup>2</sup> )	$1 \times 10^4$
$A$ (m <sup>2</sup> )	4
$I$ (m <sup>4</sup> )	5.33
$M_p$ (kN.m)	1200
$\frac{ M }{M_p} = 1$	

No ANSYS introduzindo-se um módulo de endurecimento  $H$  de  $1 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$  e ajustando-se com um valor de  $\omega$  igual a 7 na rotina, obtêm resultados semelhantes.

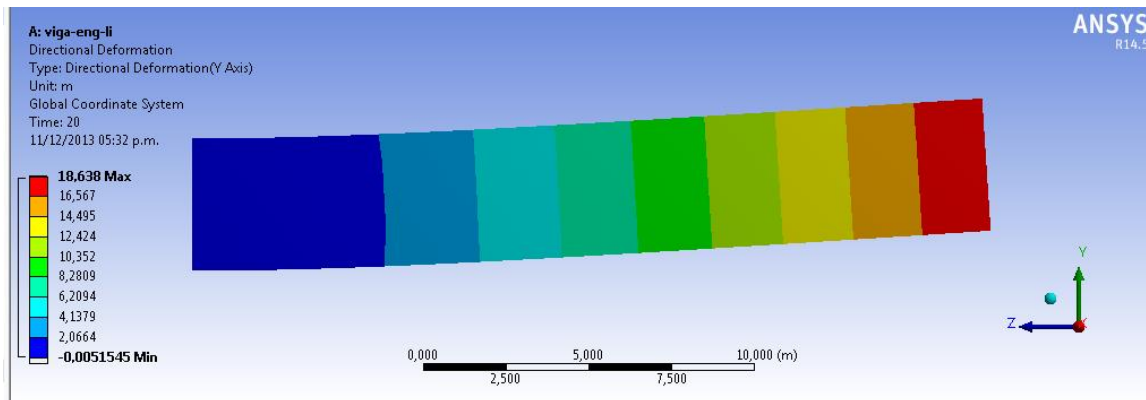


Figura 5.47 Configuração deformada ANSYS

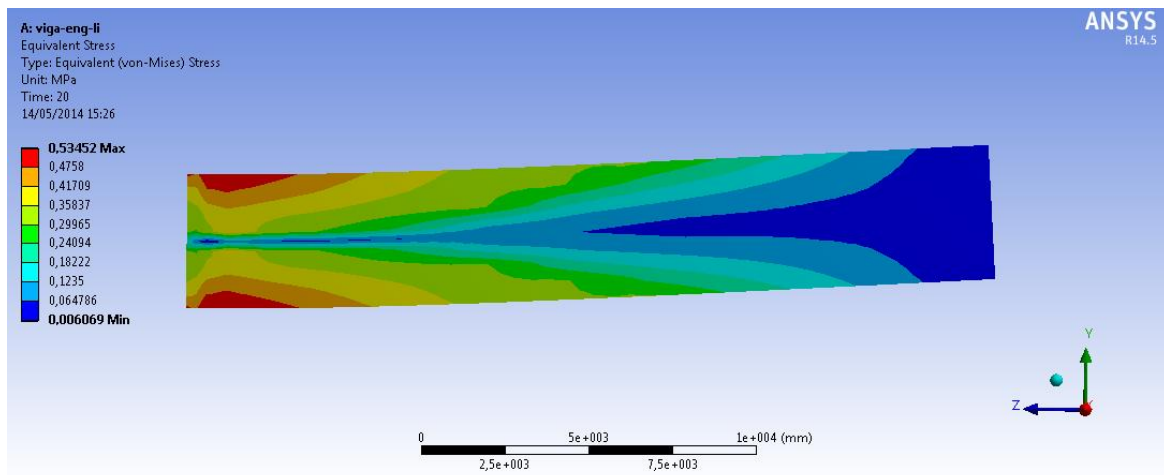


Figura 5.48 Tensões equivalentes, Von Mises

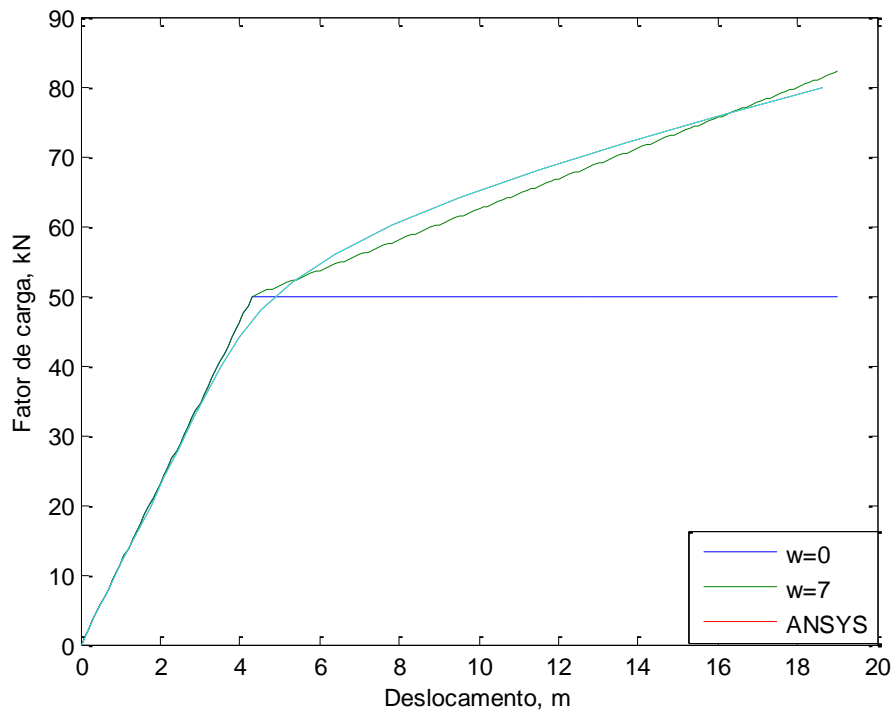


Figura 5.49 Resposta para o processo de carregamento

## 6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 6.1 CONCLUSÕES GERAIS

No presente trabalho foi testado o algoritmo de retorno radial com diferentes tipos de superfícies de interação. É de notar que o algoritmo formulado fornece uma maneira de manter o vetor de esforços generalizados dentro da superfície de escoamento ou sobre ela.

O método foi implementado por Silva e Bezerra (2010), acrescentando neste trabalho as tipologias estruturais analisadas (como o caso das treliças planas), a quantidade de estruturas estudadas, comparando também os resultados com exemplos simples feitos no programa ANSYS, e introduzindo o endurecimento isotrópico na evolução das deformações plásticas por meio de uma constante que depende das propriedades geométricas e mecânicas dos elementos que conformam a estrutura, afetada pelo multiplicador plástico que é uma medida de magnitude do aumento das deformações plásticas.

O método proposto trata simultaneamente com duas rótulas plásticas localizadas nos extremos dos elementos finitos durante ciclos de carga e descarga. Combinando o método de Newton-Raphson e o método de retorno radial, é fornecida uma matriz de rigidez tangente consistente com o método, e são obtidos algoritmos robustos, precisos e rapidamente convergentes. Os algoritmos de retorno com um e dois vetores foram propostos simulando, respectivamente, uma e duas rótulas plásticas nos extremos dos elementos.

Foi desenvolvida neste trabalho, a formulação analítica e numérica para o elemento de pórtico tridimensional, considerando-se o efeito da não linearidade física do material, via a formação de rótulas plásticas, por meio de uma função de interação dos esforços atuantes e os esforços de plastificação.

No desenvolvimento do trabalho, foram pesquisadas as técnicas de comprimento de arco baseado no descrito por Crisfield (1991) e Menin (2006) e implementação daquela que melhor se adapta ao problema estudado. As técnicas se mostraram muito eficientes fornecendo bons resultados na solução das equações não lineares.



Conclui-se com o anterior o seguinte:

- A rotina resultante desta pesquisa para análise não linear de estruturas metálicas simples proporciona um comportamento robusto em termos de implementação numérica e econômico em termos de capacidade computacional, exibindo eficiência e precisão. A rotina foi escrita em código aberto, podendo ser utilizada com fins de ensino.
- Ao combinar a técnica de comprimento de arco com o método de Newton-Rapshon, é obtida uma rotina capaz de traçar trajetórias de equilíbrio completas, passando por pontos limites de carga e deslocamento para um ciclo que pode ser de carga-descarga.
- Com a implementação numérica, foi percebido o aumento das tensões na evolução das deformações plásticas (endurecimento do material). Porém, os resultados obtidos dos fatores de carga foram menores do que os obtidos por outros autores e aos obtidos pelo programa ANSYS, já que o conceito de rótula plástica não considera a região real escoada no elemento. Por meio da calibração do programa, via uma constante que representaria esta região, foram obtidos resultados satisfatórios.

## 6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Finalmente, a seguir se deixam como sugestões para a continuação deste trabalho.

- Extensão do programa para outras tipologias estruturais como placas e cascas;
- Deduzir analiticamente uma expressão para a constante  $\omega$  que representa a região real escoada no elemento quando este plastifica, e implementar numericamente;
- Estudo de leis de endurecimento isotrópico não linear e posterior implementação;
- Implementação do endurecimento cinemático no modelo constitutivo para análises dinâmicas;

- Desenvolvimento de interfaces para as etapas de pré e pós-processamento, e, assim, tornar o programa mais amigável no processo de entrada de dados e melhorar a visualização e interpretação dos resultados.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- A. Anandarajah, "Computational Methods in Elasticity and Plasticity, Solids and Porous Media", Springer Science, New York, pp. 277-373, 2010.
- O.C. Argyris, B. Boni, U. Hindenlang y M. Kleiber, "Finite element analysis of two and three-dimensional elasto-plastic frames - the natural approach", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 35, pp. 221-248, 1982.
- H. Balmer, I.St. Doltsinis, e M. König, "Elastoplastic and creep analysis with the ASKA program system", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 3, pp. 87-104, 1974.
- K. Bathe, E. N. Dvorkin, "On the automatic solution of nonlinear finite element equations", *Computers & Structures* 17, pp. 871-879, 1983.
- J.L. Batoz, G. Dhatt," Incremental displacement algorithms for non-linear problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14, pp. 1262- 1266, 1979.
- M.J. Clarke, G. J. Hancock, "A study of incremental-iterative strategies for non-linear analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 29, pp. 1365-1391, 1990.
- B.D. Coleman, "On thermodynamics of materials with memory", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 17 (1), pp. 1-46, 1964.
- M.A.Crisfield, "A fast incremental/iterative solution procedure that handles 'snapthrough'", *Computers & Structures*, 13, pp. 55-62, 1981.
- M.A. Crisfield, "Non-linear finite element analysis of solids and structures", Volume 1: Essential, John Wiley & Sons, Chichester, UK, pp. 252- 333, 1991.
- I. Doltsinis, "Elements of Plasticity, Theory and Computation", Second Edition, WIT Press, Boston, pp. 170-193, 2010.
- P.G.J. Hodge, "Piecewise linear hardening" 9th International Congress on Applied Mechanics, University of Brussels, Belgium, volume 8, pp. 65-72, 1957.
- G.V. Kazinczy, "Trials whit fixed-end beams", In Hungarian, *Betonszemle*, volume 2, pp.68-104, 1914.
- R.C.G. Menin, "Aplicação da descrição co-rotacional na análise não-linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas", Tese de doutorado, E.TD-004A/06, Brasília : ENC/FT/UnB, 2006.

- E. S. Neto, "Computational methods for plasticity: theory and applications", John Wiley & Sons, Chichester, UK, pp. 139-189, 2008.
- G. Powell, J. Simons, "Improved iteration strategy for nonlinear structures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 17, pp. 1455- 1467, 1981.
- G. Powell, P. Chen, "3D Beam-Column Element With Generalized Plastic Hinges", *Journal of Engineering Mechanics* 112, No. 7, 1986.
- W. Prager, "Introduction to Mechanics of Continua", Ginn, Boston, MA, 1961.
- P. Prat "Ecuaciones Constitutivas ELASTICIDAD y PLASTICIDAD". Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, pp. 32-33, 2003.
- K.M. Nee, A. Haldar, "Elastoplastic nonlinear post-buckling analysis of partially restrained space structures", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 71, pp. 69-97, 1988.
- J.G. Orbison, W. McGuire, J.F. Abel, "Yield surface applications in nonlinear steel frame analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 33, pp. 557-573, 1982.
- E. Ramm, "Strategies for tracing the non-linear response near limit-points, Non-linear Finite element Analysis in structural Mechanics", ed. W. Wunderlich, Springer-Verlag, Berlin, pp. 63-89, 1981.
- E. Ramm, "The Riks/Wempner approach-an extension of the displacement control method in non-linear analysis, Non-linear Computational Mechanics", ed. E. Hinton et al., Pineridge, Swansea, pp. 63-86, 1982.
- E. Riks, "The application of Newton's method to the problem of elastic stability", *Journal of Applied Mechanics* 39, pp. 1060-1066, 1972.
- E. Riks, "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems", *International Journal of Solids and Structures* 15, pp. 529-551, 1979.
- P.F.N. Rodrigues, "Ferramentas Numéricas para a Análise Não-Linear Física e Geométrica de Estruturas Reticuladas na Exploração de Petróleo Offshore" Tese de doutorado 2000 X, 258 p. 29,7 cm, Rio de Janeiro, COPPE, 2000.
- R.E. Sennet, "Matrix Analysis of Structures", California Polytechnic State University. San Luis Obispo, 2000.
- W.T. Silva, L.M. Bezerra, "A Radial Return Algorithm Application in Elastoplastic Frame Analysis Using Plastic Hinge Approach," *Mathematical Problems in Engineering* 2010, Article ID 142743, 22 pp., 2010.

- G. Shi, N. Atluri, "Elasto-plastic large deformation analysis of space frames: a plastic-hinge and stress-based explicit derivation of tangent stiffnesses", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 26, pp. 589-615, 1988.
- H. Tresca, "Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 59, pp. 754-758, 1864.
- Y. Ueda, M. Matsuishi, T. Yamakawa, Y. Akamatsu, "Elastic-plastic analysis of framed structures using matrix method" *Soc. Naval Arch. Japan* 124, pp. 183-191, 1968.
- Y. Ueda, T. Akamatsu, Y. Ohmi, "Elastic-plastic analysis of framed structures using matrix method (2nd report)" *Soc. Naval Arch. Japan* 126, pp. 253-2621, 1969a.
- Y. Ueda, T. Yamakawa, T. Akamatsu, M. Matsuishi, "A new theory on elastic-plastic of framed structures" *Tech. Repts, 19-875, Osaka University, Japan*, pp. 263-276, 1969b.
- Y. Ueda, T. Yao, "The plastic node method: a new method of plastic analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 34, pp. 1089-1104, 1982.
- Y. Ueda, M Fujikubo, "Plastic node method considering strain-hardening effects", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 94, pp. 317-337, 1990.
- P.C.S. Vieira, W. T. M. Silva, "Análise elastoplástica de estruturas apertada com superfícies de interação obtidas por regressão linear múltipla", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño em Ingeniería* 29, pp. 175-187, 2013.
- R. von Mises, "Mechanik der festen körper im plastisch deformablen zustand", *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse, Göttingen*, pp. 582-592, 1913.
- G.A. Wempner, "Discrete approximations related to nonlinear theories of solids", *International Journal of Solids and Structures* 7, pp. 1581-1599, 1971.
- M.L. Wilkins, "Calculation of elastic-plastic flow, in *Methods of Computational Physics*", Vol. 3, B. Alter et al. (Eds), Academic Press, New York, 1964.
- M. Zyczkowski, "Combined loadings in the theory of plasticity", *International Journal Non-Linear Mechanics* 2, pp.173-205, 1966.

## ANEXO A

### MATRIZES DE RIGIDEZ E ROTAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS

A seguir são apresentadas as matrizes locais de rigidez elástica dos elementos utilizados no programa desenvolvido. Assim como as matrizes de rotação para o cálculo das matrizes globais de rigidez. No livro de Sennet (2000) pode-se encontrar mais informação acerca da análise matricial de estruturas.

#### Treliça plana

São permitidos dois deslocamentos em cada nó, então, cada nó possui dois graus de liberdade. Na Figura A.0.1 é apresentada a configuração local e global do elemento, os deslocamentos da barra são denotados por  $\delta$  e os globais  $u$ .

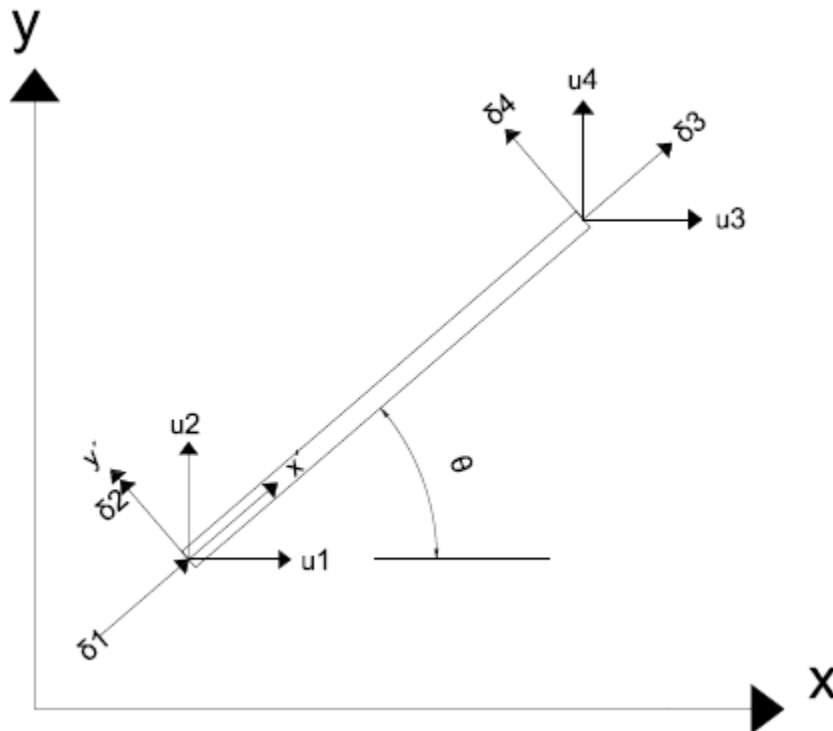


Figura A.0.1 Sistema de coordenadas locais e globais da treliça plana.

Onde:  $C=\cos(\theta)$ ;  $S=\text{sen}(\theta)$

A matriz de rigidez do elemento de barra dependerá da área da seção transversal A, do módulo de elasticidade, e do comprimento L. Expressa pela equação (0.1), a matriz de rotação R, equação (0.2), pela qual poderá ser determinada a matriz de rigidez global como indicado na equação (0.3).

$$k = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (0.1)$$

$$R = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \quad (0.2)$$

$$[K] = [R]^T [k] [R] \quad (0.3)$$

### Treliça espacial

O elemento de treliça espacial, diferente da treliça plana, tem a característica de ter um grau adicional por nó, sendo em total, três graus de liberdade para cada um dos nós. Na Figura A.0.2 é apresentada a configuração local do elemento, os deslocamentos da barra são denotados por  $\delta$ .

A matriz de rigidez do elemento de barra dependerá da área da seção transversal A, do módulo de elasticidade E, e do comprimento L. Expressa pela equação (0.4), a matriz de rotação R, calculada por meio das equações (0.5), pela qual poderá ser determinada a matriz de rigidez global como indicado na equação (0.6).

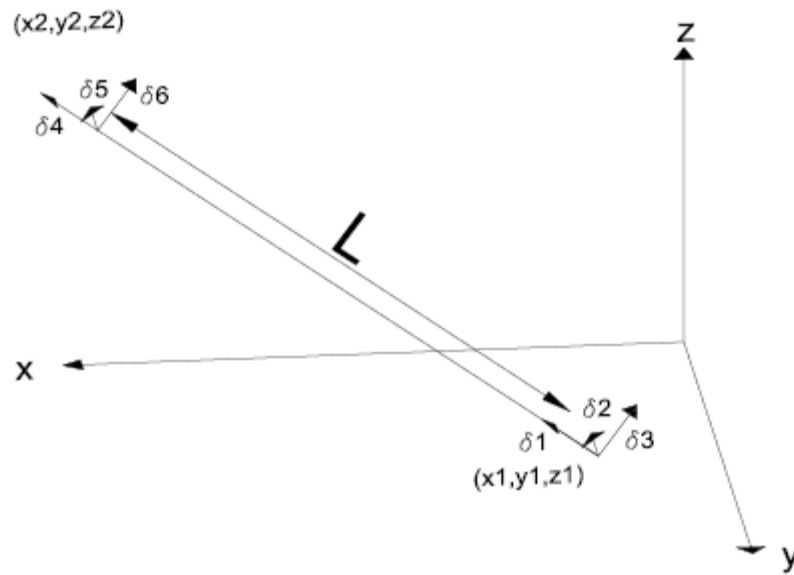


Figura A.0.2 Sistema de coordenadas locais da treliça espacial.

$$k = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (0.4)$$

$$R = \begin{bmatrix} [L] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [L] \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} l_{11} &= \frac{(x_2 - x_1)}{L}; l_{12} = \frac{(y_2 - y_1)}{L}; l_{13} = \frac{(z_2 - z_1)}{L} \\ l_{21} &= -\frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{L \cdot L_{xz}}; l_{22} = \frac{L_{xz}}{L}; l_{23} = \frac{(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)}{L \cdot L_{xz}} \\ l_{31} &= -\frac{(z_2 - z_1)}{L_{xz}}; l_{32} = 0; l_{33} = \frac{(x_2 - x_1)}{L_{xz}} \end{aligned} \quad (0.5)$$

Onde  $\mathbf{0}$  é uma matriz 3x3 de elementos nulos.

Exceto quando o elemento está alinhado com o eixo Y, então a matriz R resulta



em:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & l_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -l_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo:

$$l_y = \frac{(y_2 - y_1)}{L}$$

$$[K] = [R]^T [k] [R] \tag{0.6}$$

### **Pórtico plano**

São permitidos dois deslocamentos e uma rotação em cada nó, então, cada nó possui três graus de liberdade. Na Figura A.0.3 é apresentada a configuração local e global do elemento, os deslocamentos da barra são denotados por  $\delta$  e os globais  $u$ .

A matriz de rigidez do elemento de barra dependerá da área da seção transversal  $A$ , do módulo de elasticidade, do comprimento  $L$  e da inércia  $I$  da seção transversal. Expressa pela equação (0.7), a matriz de rotação  $R$ , equação (0.8), pela qual poderá ser determinada a matriz de rigidez global como indicado na equação (0.9).

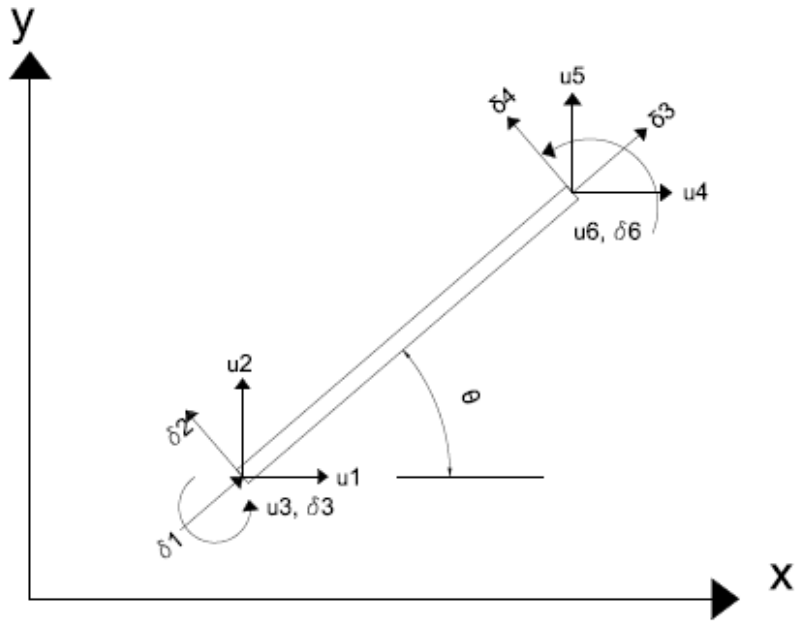


Figura A.0.3 Sistema de coordenadas locais e globais do pórtico plano.

$$k = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_z/L^3 & 6EI_z/L^2 & 0 & -12EI_z/L^3 & 6EI_z/L^2 \\ 0 & 6EI_z/L^2 & 4EI_z/L & 0 & -6EI_z/L^2 & 2EI_z/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI_z/L^3 & -6EI_z/L^2 & 0 & 12EI_z/L^3 & -6EI_z/L^2 \\ 0 & 6EI_z/L^2 & 2EI_z/L & 0 & -6EI_z/L^2 & 4EI_z/L \end{bmatrix} \quad (0.7)$$

$$R = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (0.8)$$

$$[K] = [R]^T [k] [R] \quad (0.9)$$

## Grelha plana

A grelha é uma estrutura que tem cargas aplicadas perpendicular ao seu plano, o elemento terá em cada nó, deslocamento vertical, rotação sobre o eixo horizontal da seção transversal devido à flexão, e rotação sobre o eixo do elemento devido à torção. Na Figura A.0.4 é apresentada a configuração local do elemento, os deslocamentos da barra são denotados por  $\delta$ .

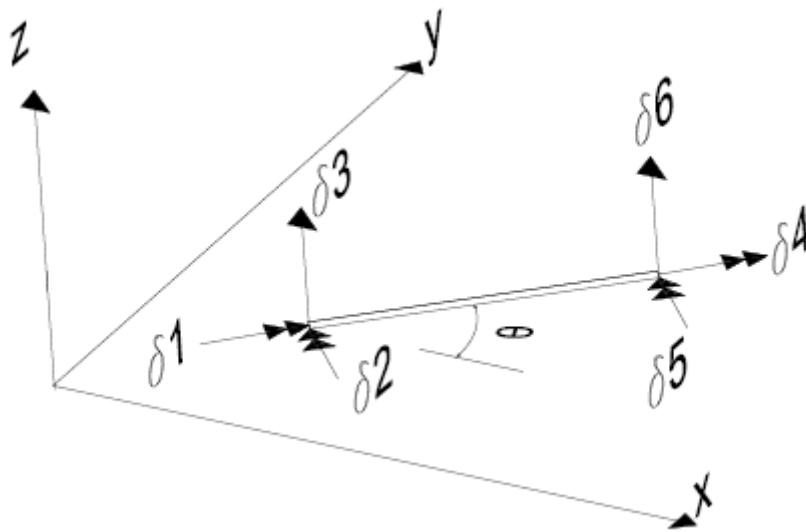


Figura A.0.4 Sistema de coordenadas locais grelha plana.

A matriz de rigidez do elemento de barra dependerá do momento polar de inércia  $J$  da seção transversal, do módulo de elasticidade  $E$ , do módulo de cisalhamento  $G$  e do comprimento  $L$ . Expressa pela equação (0.10), a matriz de rotação  $R$ , calculada por meio das equações (0.11), pela qual poderá ser determinada a matriz de rigidez global como indicado na equação (0.12).

$$k = \begin{bmatrix} 12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 & -12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 \\ 0 & \frac{GJ_x}{L} & 0 & 0 & \frac{-GJ_x}{L} & 0 \\ -6EI_y/L^2 & 0 & 4EI_y/L & 6EI_y/L^2 & 0 & 2EI_y/L \\ -12EI_y/L^3 & 0 & 6EI_y/L^2 & 12EI_y/L^3 & 0 & 6EI_y/L^2 \\ 0 & \frac{-GJ_x}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ_x}{L} & 0 \\ -6EI_y/L^2 & 0 & 2EI_y/L & 6EI_y/L^2 & 0 & 4EI_y/L \end{bmatrix} \quad (0.10)$$

$$R = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (0.11)$$

$$[K] = [R]^T [k] [R] \quad (0.12)$$

### Pórtico espacial

Para descrever os deslocamentos do nó devem ser especificadas três rotações; duas devidas à flexão, uma à torção e três translações ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ), então o elemento terá seis graus de liberdade em cada nó. Na Figura A.0.5 é apresentada a configuração local do elemento, os deslocamentos da barra são denotados por  $\delta$ .

A matriz de rigidez do elemento de barra dependerá da área da seção transversal  $A$ , do módulo de elasticidade  $E$ , do módulo de cisalhamento  $G$ , da inércia da seção transversal sobre os eixos  $y$  e  $z$   $I_y$  e  $I_z$  respectivamente, do momento polar de inércia  $J_x$  e do comprimento  $L$ . Expressa pela equação (0.13), a matriz de rotação  $R$ , calculada por meio das equações (0.14), pela qual poderá ser determinada a matriz de rigidez global como indicado na equação (0.15).

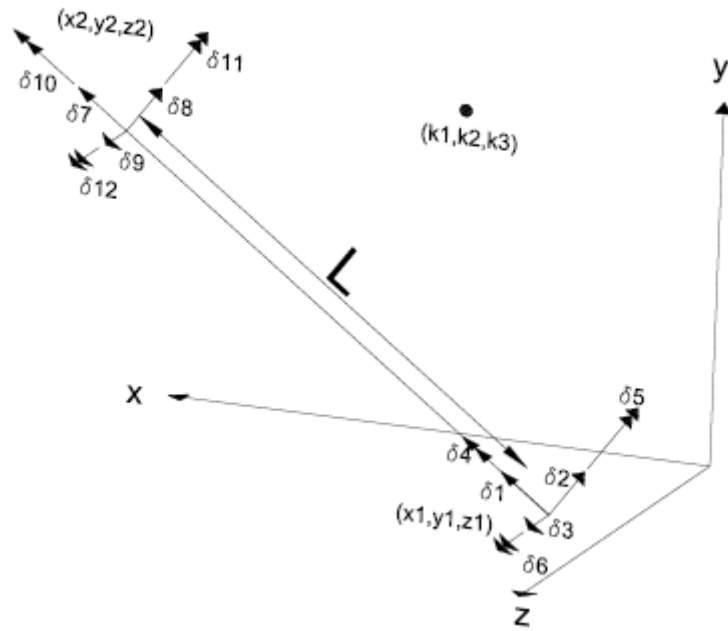


Figura A.0.5 Sistema de coordenadas locais do pórtico espacial.

$$k = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 & 0 & -12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 \\ 0 & 0 & 12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 & 0 & 0 & -12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ_x/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GJ_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 & 4EI_y/L & 0 & 0 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 & 2EI_y/L & 0 \\ 0 & 6EI_z/L^2 & 0 & 0 & 0 & 4EI_z/L & 0 & -6EI_z/L^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_z/L \\ -EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & -6EI_z/L^2 & 0 & 12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & -6EI_z/L^2 \\ 0 & 0 & -12EI_y/L^3 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 & 0 & 0 & 12EI_y/L^3 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -GJ_x/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GJ_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 & 2EI_y/L & 0 & 0 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 & 4EI_y/L & 0 \\ 0 & 6EI_z/L^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_z/L & 0 & -6EI_z/L^2 & 0 & 0 & 0 & 4EI_z/L \end{bmatrix} \quad (0.13)$$

$$R = \begin{bmatrix} [L] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [L] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [L] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [L] \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \quad (0.14)$$

$$l_{11} = \frac{(x_2 - x_1)}{L}; \quad l_{12} = \frac{(y_2 - y_1)}{L}; \quad l_{13} = \frac{(z_2 - z_1)}{L}$$

$$Z_x = (y_2 - y_1)(z_k - z_1) - (z_2 - z_1)(y_k - y_1)$$

$$Z_y = (z_2 - z_1)(x_k - x_1) - (x_2 - x_1)(z_k - z_1)$$

$$Z_z = (x_2 - x_1)(y_k - y_1) - (y_2 - y_1)(x_k - x_1)$$

$$l_{31} = \frac{Z_x}{Z}; l_{32} = \frac{Z_y}{Z}; l_{33} = \frac{Z_z}{Z}$$

Sendo

$$Z = \sqrt{Z_x^2 + Z_y^2 + Z_z^2}$$

$$Y_x = l_{13}l_{32} - l_{12}l_{33}$$

$$Y_y = l_{11}l_{33} - l_{13}l_{31}$$

$$Y_z = l_{12}l_{31} - l_{11}l_{32}$$

Finalmente

$$l_{21} = \frac{Y_x}{Y}; l_{22} = \frac{Y_y}{Y}; l_{23} = \frac{Y_z}{Y}$$

Onde

$$Y = \sqrt{Y_x^2 + Y_y^2 + Y_z^2}$$

$$[K] = [R]^T [k] [R]$$

(0.15)