

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**UM ESTUDO COMPARATIVO ANALÍTICO E NUMÉRICO  
DOS EFEITOS DAS VINCULAÇÕES NAS VIBRAÇÕES  
LIVRES DE PLACAS QUADRADAS FINAS**

**RONALDO BASTOS CESARINO DUTRA**

**ORIENTADOR: LINEU JOSÉ PEDROSO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS**

**BRASÍLIA / DF: 06/2014**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**UM ESTUDO COMPARATIVO ANALÍTICO E NUMÉRICO**  
**DOS EFEITOS DAS VINCULAÇÕES NAS VIBRAÇÕES**  
**LIVRES DE PLACAS QUADRADAS FINAS**

**RONALDO BASTOS CESARINO DUTRA**

**ORIENTADOR: LINEU JOSÉ PEDROSO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E**  
**CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO E.DM-008A/14**  
**BRASÍLIA/DF: JUNHO – 2014**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**UM ESTUDO COMPARATIVO ANALÍTICO E NUMÉRICO DOS  
EFEITOS DAS VINCULAÇÕES NAS VIBRAÇÕES LIVRES DE  
PLACAS QUADRADAS FINAS**

**RONALDO BASTOS CESARINO DUTRA**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE  
ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE  
TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE  
DOS REQUISITOS NECESÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU  
DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.**

**APROVADA POR:**

---

**Prof. Lineu José Pedroso, Dr. Ing. (ENC-UnB).  
(Orientador)**

---

**Prof. Marcus Vinicius Girão de Moraes, Dr. Ing. (ENM-UnB)  
(Examinador Interno)**

---

**Prof. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro, D.Sc. (UFPE)  
(Examinador Externo)**

**BRASÍLIA/DF, 24 DE JUNHO DE 2014**

**FICHA CATALOGRÁFICA**

<b>DUTRA, RONALDO BASTOS CESARINO</b>	
Um Estudo Comparativo Analítico e Numérico dos Efeitos das Vinculações nas Vibrações Livres de Placas Quadradas Finas [DISTRITO FEDERAL] 2014.	
xx, 160p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2014).	
Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.	
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.	
1.Placas finas	2.Vibração livre
3.Elementos finitos	4.Frequências naturais
I. ENC/FT/UnB	II. Título (série)

**REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

DUTRA, R.B.C. (2014). Um Estudo Comparativo Analítico e Numérico dos Efeitos das Vinculações nas Vibrações Livres de Placas Quadradas Finas. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-008A/14, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 160 p.

**CESSÃO DE DIREITOS**

AUTOR: Ronaldo Bastos Cesarino Dutra.

TÍTULO: Um Estudo Comparativo Analítico e Numérico dos Efeitos das Vinculações nas Vibrações Livres de Placas Quadradas Finas.

GRAU: Mestre

ANO: 2014

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Ronaldo Bastos Cesarino Dutra  
Condomínio Mansões Rurais do Lago Sul Rua D Casa 03.  
72595-490 Brasília – DF – Brasil.  
e-mail: roceladu@hotmail.com / ronaldocesarino@outlook.com

*“A frase mais empolgante de se ouvir em ciência, a que prenuncia novas descobertas, não é “Eureka!”, mas sim “Isto é estranho...””*

***Isaac Asimov***

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus pela dádiva da vida, pelas maravilhas criadas neste mundo e toda a beleza que nos cerca.

Ao meu orientador, professor Lineu José Pedroso, pela colaboração, dedicação e incentivo à pesquisa, durante os anos de pós-graduação, nos quais trabalhou com grande empenho para que eu mantivesse o foco e a motivação na dissertação.

Aos meus pais pelo amor, compreensão, suporte, esforço, dedicação e sacrifícios realizados em meu favor, tanto nos bons quanto nos maus momentos, dando-me a possibilidade de estudar e poder me dedicar a uma formação de qualidade.

Ao meu irmão Rodrigo, pelos ótimos momentos que compartilhamos, pelas brincadeiras, risadas, músicas e apoio. Que tudo se repita por muitos anos mais.

Aos meus amigos e colegas do curso de mestrado, pelo incentivo, compreensão, risadas, brincadeiras e estudos, foi um prazer conhecê-los e compartilhar esses anos de pós-graduação.

A CAPES pelo financiamento da bolsa de estudos.

## **RESUMO**

### **UM ESTUDO COMPARATIVO ANALÍTICO E NUMÉRICO DOS EFEITOS DAS VINCULAÇÕES NAS VIBRAÇÕES LIVRES DE PLACAS QUADRADAS FINAS**

**Autor: Ronaldo Bastos Cesarino Dutra**

**Orientador: Lineu José Pedroso**

**Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, Junho de 2014.**

As estruturas em estudo se caracterizam por placas finas, são lâminas nas quais uma dimensão, a espessura, é muito menor que as outras e classifica-se em fina respeitando determinadas relações. Estas placas se constituem num tipo estrutural de grande utilização na engenharia e na indústria: pavimento de uma ponte, muros de contenção, caixas d'água, lajes de piso ou cobrimento, cascos de navio, partes componentes de automóveis, estruturas aeroespaciais e reatores nucleares são alguns dos exemplos de seu vasto emprego. Estas estruturas muitas vezes trabalham sobre ação dinâmica: vento, caminhada ou corrida de pessoas, movimentos de veículos e outros movimentos ritmados, são exemplos de solicitações dinâmicas ocasionando o surgimento de esforços que se desenvolvem ao longo do tempo, podendo também causar sérios problemas. Como um estudo completo é de enorme complexidade e também se faz necessário entender a placa e o fenômeno em sua essência, foi estudada a base do cálculo dinâmico para o bom entendimento. Os resultados foram obtidos de maneira analítica e numérica, comparando ambos entre si, evidenciando as frequências naturais da estrutura, os modos de vibração e suas deformadas e a eficácia da análise numérica por meio de tabelas e gráficos que permitem uma visualização adequada do fenômeno.

## **ABSTRACT**

### **UM ESTUDO COMPARATIVO ANALÍTICO E NUMÉRICO DOS EFEITOS DAS VINCULAÇÕES NAS VIBRAÇÕES LIVRES DE PLACAS QUADRADAS FINAS**

**Author: Ronaldo Bastos Cesarino Dutra**

**Supervisor: Lineu José Pedroso**

**Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, June of 2014.**

The structures studied are characterized by thin plates, a three-dimensional solid in which one dimension, the thickness, is much smaller than the others and the plate ranks as thin respecting certain relationships. These plates constitute a structure of great use in engineering and industry: a bridge deck, retaining walls, water tanks, slabs or floor coverings, ship hulls, automobile parts components, aerospace structures and nuclear reactors are some examples of its vast employment. These structures often work on dynamic action: wind, people walking or running over it, movement of vehicles and other rhythmic movements are examples of dynamic loads resulting in stresses that develop over time and can also cause serious problems. As a full study is highly complex and it is also necessary to understand the plate and the phenomenon in its essence, the basis of the dynamic analysis was studied for the proper understanding. The results were obtained from numerical and analytical solutions, compared to each other, showing the natural frequencies of the structure, the mode shapes and effectiveness of numerical analysis in tables and charts that allow adequate visualization of the phenomenon.



# SUMÁRIO

Capítulo	Página
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	1
1.1 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA	2
1.2 OBJETIVOS	3
1.3 METODOLOGIA	3
1.4 ABRANGÊNCIAS E LIMITAÇÕES	4
1.5 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	4
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	11
2.1 ESTUDOS RECENTES E RELEVANTES	11
<b>3 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO</b>	19
3.1 HIPÓTESES GERAIS	20
3.2 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA PLACA	20
3.2.1 Cálculo das tensões e dos momentos	22
3.2.2 Condições de equilíbrio de um elemento de placa	25
3.3 SOLUÇÃO DE NAVIER	30
3.4 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO	31
3.4.1 Deformadas modais	37
3.4.1.1 Placa apoiada nas outras duas bordas	39
3.4.1.2 Placa engastada nas outras duas bordas	41
3.5 ANÁLISE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	43
<b>4 RESULTADOS</b>	47
4.1 TESTES E QUALIFICAÇÃO DO ELEMENTO UTILIZADO	47
4.1.1 Placa sob carregamento estático	47
4.1.2 Placas em vibração livre	52
4.1.2.1 Placa engastada nas quatro bordas	53
4.1.2.2 Placa engastada em apenas uma borda	55
4.2 RESULTADOS NUMÉRICOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	56

4.2.1 Caso 1 – placa quadrada apoiada nas quatro bordas	57
4.2.1.1 Estudo da convergência	63
4.2.1.2 Influência dos parâmetros característicos na resposta da frequência natural	68
4.2.1.3 Deformadas modais	72
4.2.2 Análises subsequentes para a placa, variações das condições de contorno	73
<b>5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES</b>	123
5.1 CONCLUSÕES	123
5.2 SUGESTÕES	125
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	126
<b>APÊNDICES</b>	129
<b>A DEFORMADAS ADICIONAIS</b>	130
<b>B MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS</b>	133
B.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO	136
B.2 APLICAÇÃO PARA PLACAS	138
B.3 PROPOSTA DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	141
B.3.1 Discretização 1	141
B.3.2 Discretização 2	144
<b>C MÉTODO DA EXPANSÃO EM CO-FATORES</b>	149
<b>D EQUAÇÕES ANALÍTICAS PARA FREQUÊNCIAS NATURAIS</b>	152
<b>E SCRIPT DO ANSYS PARA ANÁLISE DE VIBRAÇÃO LIVRE DA PLACA</b>	158

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela</b>	<b>Página</b>
Tabela 1.1 – Casos analisados e suas principais características	5
Tabela 4.1 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos do deslocamento $w$	49
Tabela 4.2 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos dos momentos $M_x$ e $M_y$	49
Tabela 4.3 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos do momento $M_{xy}$	50
Tabela 4.4 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos para as primeiras frequências naturais de uma placa fina	54
Tabela 4.5 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos para as primeiras frequências naturais de uma placa espessa	55
Tabela 4.6 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos para as primeiras frequências naturais de uma placa fina com três bordas livres e uma engastada	56
Tabela 4.7 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 1 com $h=0,1$ m	59
Tabela 4.8 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 1 com $h=0,2$ m	60
Tabela 4.9 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 1 com $h=0,5$ m	61
Tabela 4.10 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 1 com $h=1,0$ m	62
Tabela 4.11 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 1 com $h=2,0$ m	62
Tabela 4.12 – Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 1	72
Tabela 4.13 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 2 (L-L-L-L)	75
Tabela 4.14 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das	76

frequências naturais para o Caso 3 (L-L-L-A)	
Tabela 4.15 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 4 (L-L-L-E)	77
Tabela 4.16 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 5 (L-L-A-A)	78
Tabela 4.17 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 6 (L-A-L-A)	79
Tabela 4.18 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 7 (L-A-L-E)	80
Tabela 4.19 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 8 (L-L-A-E)	81
Tabela 4.20 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 9 (L-E-L-E)	82
Tabela 4.21 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 10 (L-L-E-E)	83
Tabela 4.22 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 11 (L-A-A-A)	84
Tabela 4.23 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 12 (L-A-E-A)	85
Tabela 4.24 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 13 (L-E-A-E)	86
Tabela 4.25 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 14 (L-A-A-E)	87
Tabela 4.26 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 15 (L-A-E-E)	88
Tabela 4.27 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 16 (L-E-E-E)	89
Tabela 4.28 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 17 (A-A-E-A)	90
Tabela 4.29 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 18 (A-A-E-E)	91
Tabela 4.30 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 19 (E-A-E-A)	92

Tabela 4.31 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 20 (A-E-E-E)	93
Tabela 4.32 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 21 (E-E-E-E)	94
Tabela 4.33 – Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 2	102
Tabela 4.34 – Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 3	103
Tabela 4.35 – Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 4	104
Tabela 4.36 – Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 5	105
Tabela 4.37 – Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 6	106
Tabela 4.38 – Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 7	107
Tabela 4.39 – Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 8	108
Tabela 4.40 – Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 9	109
Tabela 4.41 – Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 10	110
Tabela 4.42 – Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 11	111
Tabela 4.43 – Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 12	112
Tabela 4.44 – Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 13	113
Tabela 4.45 – Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 14	114
Tabela 4.46 – Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 15	115
Tabela 4.47 – Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso	116

16	
Tabela 4.48 – Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 17	117
Tabela 4.49 – Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 18	118
Tabela 4.50 – Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 19	119
Tabela 4.51 – Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 20	120
Tabela 4.52 – Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 21	121
Tabela A.1 – Modos de vibração restantes e suas respectivas deformadas modais para o Caso 1 (A-A-A-A)	130
Tabela D.1 – Frequências naturais para placas quadradas (Blevins, 1979)	152

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura</b>	<b>Página</b>
Figura 1.1 – Exemplos de uso de placas. a) Pavimento de uma ponte; b) Laje; c) Comporta de barragem; d) Componente de uma asa; e) Componente de um navio petroleiro (Ventsel, 2001)	1
Figura 2.1 – Placa do experimento com duas massas de 50 g dispostas sobre a mesma (Amabili e Carra, 2012)	12
Figura 2.2 – Resposta da amplitude de frequência para a placa com uma massa concentrada de 25 g no centro (Amabili e Carra, 2012)	13
Figura 2.3 – Resultados analíticos (a), experimentais (b) e pelo método dos elementos finitos (c) para os modos 1, 2, 5 e 8 (Lin, 2011)	14
Figura 2.4 – Seção transversal da placa com núcleo rígido (Hosseini-Hashemi, Rezaee, Atashipour e Girhammar, 2012)	15
Figura 2.5 – Placas com aumento brusco de espessura analisadas: (a) apoiada em todas as bordas e (b) engastada em todas as bordas (Wang e Unal, 2013)	16
Figura 2.6 – Microplaca perfurada com distribuição uniforme dos furos (Li, Fang e Xu, 2014)	17
Figura 2.7 – Modos de vibração para o caso simplesmente apoiado e livre na borda. Os valores de b representam a distância relativa dos apoios internos (Wang, 2014)	18
Figura 3.1 – Placa fina com um corte passando por X (Pedroso, 1998)	21
Figura 3.2 – Corte no plano 0yz e deformação da placa (Pedroso, 1998)	21
Figura 3.3 – Distribuição das tensões no elemento infinitesimal de placa (Szilard, 2004)	24
Figura 3.4 – Equilíbrio dos esforços no elemento infinitesimal (Szilard, 2004, modificado)	26
Figura 3.5 – Efeitos do momento torçor nas bordas (Szilard, 2004)	29
Figura 3.6 – Modos de vibração para placas engastadas (Szilard, 2004)	37
Figura 3.7 – Geometria do elemento SHELL281 (Biblioteca do ANSYS)	44
Figura 3.8 – Tensões e momentos no elemento SHELL281 (Biblioteca do ANSYS)	44

Figura 3.9 – Malha de elementos finitos	45
Figura 3.10 – Condições de contorno aplicadas aos nós externos	46
Figura 4.1 – Placa apoiada nas quatro bordas	48
Figura 4.2 – Convergência dos resultados do deslocamento $w$	51
Figura 4.3 – Convergência dos resultados dos momentos $M_x$ e $M_y$	51
Figura 4.4 – Convergência dos resultados do momento $M_{xy}$	52
Figura 4.5 – Placa engastada nas quatro bordas	52
Figura 4.6 – Placa engastada em apenas uma borda	53
Figura 4.7 – Placa padrão a ser resolvida	57
Figura 4.8 – Convergência das frequências naturais referentes à Tabela 4.7	64
Figura 4.9 – Convergência das frequências naturais referentes à Tabela 4.8	64
Figura 4.10 – Convergência das frequências naturais referentes à Tabela 4.9	65
Figura 4.11 – Convergência das frequências naturais referentes à Tabela 4.10	65
Figura 4.12 – Convergência das frequências naturais referentes à Tabela 4.11	66
Figura 4.13 – Caso ilustrativo de uma viga discretizada em elementos de barra	67
Figura 4.14 – Erro relativo relacionado com a discretização em $y$ e o número de meia-onda na mesma direção	68
Figura 4.15 – Seis primeiras frequências naturais do Caso 1	69
Figura 4.16 – Frequências naturais do Caso 1 com $h=0,1$ m	69
Figura 4.17 – Frequências naturais do Caso 1 com $h=0,2$ m	70
Figura 4.18 – Evolução da frequência de acordo com a relação $\frac{a}{b}$ para o Caso 1	71
Figura 4.19 – Frequências naturais analisadas no Caso 2	95
Figura 4.20 – Frequências naturais analisadas no Caso 3	95
Figura 4.21 – Frequências naturais analisadas no Caso 4	96
Figura 4.22 – Frequências naturais analisadas no Caso 5	96
Figura 4.23 – Frequências naturais analisadas no Caso 6	96
Figura 4.24 – Frequências naturais analisadas no Caso 7	97
Figura 4.25 – Frequências naturais analisadas no Caso 8	97
Figura 4.26 – Frequências naturais analisadas no Caso 9	97
Figura 4.27 – Frequências naturais analisadas no Caso 10	98
Figura 4.28 – Frequências naturais analisadas no Caso 11	98



Figura 4.29 – Frequências naturais analisadas no Caso 12	98
Figura 4.30 – Frequências naturais analisadas no Caso 13	99
Figura 4.31 – Frequências naturais analisadas no Caso 14	99
Figura 4.32 – Frequências naturais analisadas no Caso 15	99
Figura 4.33 – Frequências naturais analisadas no Caso 16	100
Figura 4.34 – Frequências naturais analisadas no Caso 17	100
Figura 4.35 – Frequências naturais analisadas no Caso 18	100
Figura 4.36 – Frequências naturais analisadas no Caso 19	101
Figura 4.37 – Frequências naturais analisadas no Caso 20	101
Figura 4.38 – Frequências naturais analisadas no Caso 21	101
Figura 5.1 – Frequências naturais para uma casca cilíndrica circular vibrando livremente com seus extremos engastado-engastado (Lopez, Dutra e Pedroso, 2013)	124
Figura B.1 – Aproximação de Taylor por diferença centrada (Pedroso, 2011)	133
Figura B.2 – Representação esquemática dos operadores para diferença finita central (Pedroso, 2005)	135
Figura B.3 – Extremo engastado com ponto virtual e ponto interno (Pedroso, 2005)	136
Figura B.4 – Extremo apoiado com ponto virtual e ponto interno (Pedroso, 2005)	136
Figura B.5 – Extremo livre com pontos virtuais e pontos internos (Pedroso, 2005)	137
Figura B.6 – Malha igualmente espaçada (Pedroso, 1999)	140
Figura B.7 – Operador de diferenças finitas usado em problemas de placas	140
Figura B.8 – Malha de pontos das diferenças finitas com um ponto interno	143
Figura B.9 – Malha de pontos das diferenças finitas com quatro pontos internos	145

# LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

## Símbolos

$a$	- comprimento da placa
$a_{ij}$	- elemento de uma matriz
$A$	- apoiado; constante
$\mathbf{A}$	- matriz $A$
$b$	- largura da placa
$B$	- constante
$C$	- constante
$C_{ij}$	- co-fator de $a_{ij}$
$d$	- distância entre os pontos
$D$	- rigidez flexional das placas; constante
$E$	- módulo de elasticidade do material ou engastado
$f$	- frequência de vibração em Hz
$h$	- espessura da placa
$i$	- linha de uma matriz
$[I]$	- matriz identidade
$j$	- coluna de uma matriz
$K$	- parâmetro envolvendo a frequência e características geométricas da placa
$L$	- livre
$m$	- número de meia-ondas na direção $x$ ou posição no eixo $x$ do ponto das diferenças finitas
$\bar{m}$	- massa por unidade de área
$m_x$	- momento fletor por unidade de comprimento sobre a face $x$ e ao redor do eixo $y$
$m_y$	- momento fletor por unidade de comprimento sobre a face $y$ e ao redor do eixo $x$
$m_{xy}$	- momento torçor por unidade de comprimento
$M_x$	- momento fletor sobre a face $x$ e ao redor do eixo $y$
$M_y$	- momento fletor sobre a face $y$ e ao redor do eixo $x$

$M_{xy}$	- momento torçor
$M_{ij}$	- menor de $a_{ij}$
n	- número de meia-ondas na direção y ou posição no eixo y do ponto das diferenças finitas
$\hat{p}$	- força inercial
P	- carregamento distribuído
$q_x$	- esforço cortante por unidade de comprimento na face x
$q_y$	- esforço cortante por unidade de comprimento na face y
$\hat{q}_x$	- força adicional de Kirchhoff sobre a face x
$\hat{q}_y$	- força adicional de Kirchhoff sobre a face y
S	- superfície média da placa
t	- tempo
$V_x$	- esforço cortante total na face x
$V_y$	- esforço cortante total na face y
w	- deslocamento na direção z
x, y, z	- eixos coordenados
X, Y	- pontos da placa
cos	- função cosseno
sen	- função seno
cosh	- função cosseno hiperbólico
senh	- função seno hiperbólico
$\beta$	- parâmetro criado envolvendo $\bar{m}$ , $\Delta$ e D
$\gamma$	- deformação específica transversal
$\delta$	- deslocamento dos pontos
$\varepsilon$	- deformação específica longitudinal
$\Delta x$	- espaçamento da malha de pontos na direção x no método das diferenças finitas
$\Delta y$	- espaçamento da malha de pontos na direção y no método das diferenças finitas
$\Delta$	- espaçamento geral da malha de pontos
$\lambda$	- parâmetro criado representando o quadrado da frequência
$\mu$	- relação entre o número de elementos finitos e o número de meia-ondas em

	uma direção da placa
$\nu$	- coeficiente de Poisson
$\xi$	- tamanho do elemento na malha
$\rho$	- massa específica do material
$\sigma$	- tensão normal
$\tau$	- tensão de cisalhamento
$\varphi$	- rotação
$\omega$	- frequência de vibração em rad/s
$\Omega$	- parâmetro fictício de frequência
det	- determinante de uma matriz

# 1 INTRODUÇÃO

“Placa é definida como uma estrutura laminar na qual uma de suas dimensões (espessura) é muito menor que as outras duas. A superfície plana equidistante das faces se denomina plano médio da placa. Define-se como estado de placa a configuração de cargas que agem paralelamente ao plano da placa: forças normais ao plano médio e momentos cujos eixos estão contidos neste plano” (Silva, 1998).

O comportamento estrutural bidimensional das placas resulta em estruturas mais leves e econômicas. Algumas estruturas requerem cobrimentos, como tetos por exemplo, o que pode ser obtido facilmente com o uso de placas, podendo até mesmo economizar outros tipos de material. Alguns exemplos de placas utilizadas em construções são mostradas na Figura 1.1 a seguir: tabuleiro de uma ponte, comportas, caixas d’água, lajes de piso ou cobrimento, cascos de navio, partes componentes de automóveis, estruturas aeroespaciais, lajes de edifício, etc.

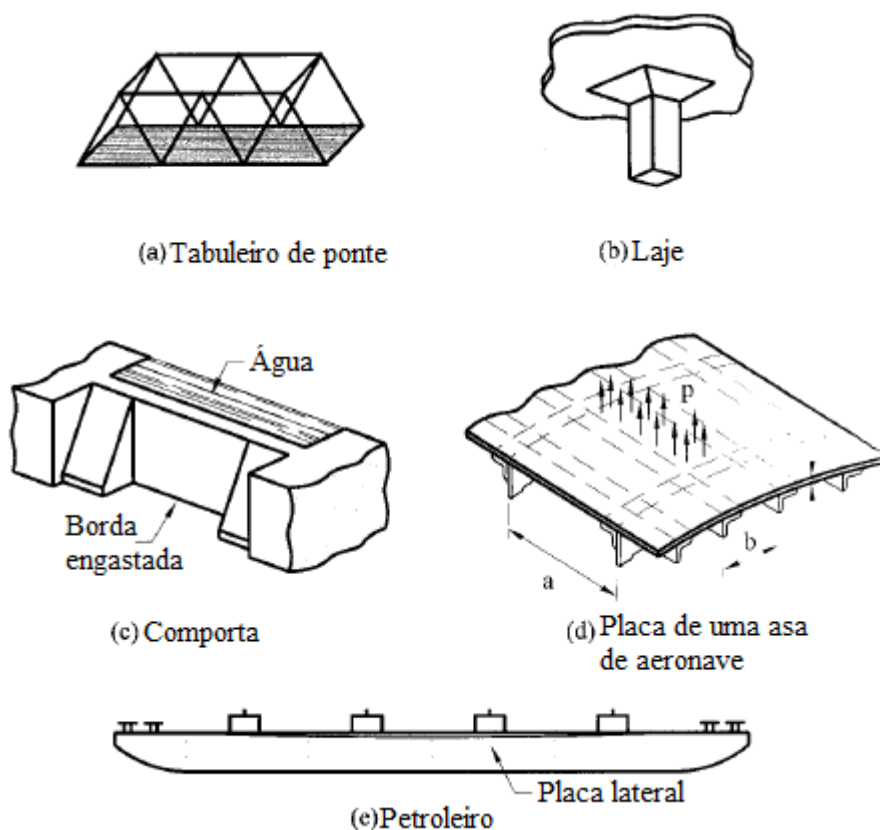


Figura 1.1 – Exemplos de uso de placas. a) Pavimento de uma ponte; b) Laje; c) Comporta de barragem; d) Componente de uma asa; e) Componente de um navio petroleiro (Ventsel, 2001)

Das teorias desenvolvidas a partir do século XIX, duas são as mais usuais na engenharia, diferenciando-se nas hipóteses sobre o giro das normais ao plano médio: a teoria clássica de placas finas de Kirchhoff-Love, que estabelece que as normais se mantêm retas e ortogonais à deformada do plano médio (Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1987), e a teoria de Reissner-Mindlin que mantém a condição de deformação reta da normal, mas não exige a sua ortogonalidade com a deformada do plano médio (Reissner, 1945 e Mindlin, 1951). Vale ressaltar que a teoria de Kirchhoff-Love é válida para o caso de placas finas enquanto a teoria de Reissner-Mindlin pode ser aplicada tanto para placas finas quanto para espessas.

Sob certas condições de geometria, vinculação e carregamento a placa de Kirchhoff possui solução analítica, sendo que, por vezes, é bastante trabalhosa. Exemplos para a solução analítica de problemas dinâmicos de placas de Kirchhoff (obtenção das frequências naturais) são apresentadas no trabalho de (Leissa, 1973). No caso da placa de Reissner-Mindlin, soluções analíticas são quase inexistentes devido ao alto grau de complexidade de suas equações. Portanto, a análise de placas foi uma das primeiras aplicações com sucesso do método dos elementos finitos na década de 60.

## **1.1 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA**

As placas são estruturas muito utilizadas na engenharia e indústria, desde uma simples laje até estruturas aeroespaciais, passando por pavimento rodoviário, a placa está presente no dia-a-dia de todas as pessoas e estão sujeitas a todo tipo de carregamento. Carregamentos dinâmicos são de extremo interesse, pois o caminhar, ou corrida de pessoas caracterizam-se como carregamentos dinâmicos, bem como o tráfego de veículos, ventos, sismos, etc, que produzem ações dinâmicas.

Começa-se o estudo dinâmico em vibrações livres da estrutura que se pretende analisar. Portanto é de grande importância nessa etapa entender a teoria dinâmica básica e saber analisar corretamente o problema, encontrar as frequências naturais e modos de vibração, para depois proceder a outros cálculos, com diferentes formas de vinculação, por exemplo.

Os estudos realizados são importantes por se constituírem na primeira etapa da análise dinâmica, que se caracteriza pela determinação das propriedades dinâmicas da estrutura,

em termos das frequências naturais e deformadas modais, tão necessárias nos estudos do comportamento e da resposta dinâmica.

## **1.2 OBJETIVOS**

O objetivo geral desse trabalho é investigar o comportamento dinâmico, em vibração livre, de placas retangulares finas submetidas à várias condições de vinculação e tentar estabelecer relações de interesse que explicitem o grau de importância dos diversos parâmetros que intervêm no fenômeno.

Especificamente, pretende-se:

- Elaborar um material didático que permita uma iniciação aos interessados no campo de análises dinâmicas de placas;
- Obter as frequências naturais de placas finas por meio de equações analíticas (teoria clássica) e método numérico, a fim de comparar os resultados entre si;
- Comprovar a eficácia e precisão da análise numérica para obter respostas de frequências naturais utilizando os resultados obtidos analiticamente como base;
- Mostrar a não conformidade da teoria de Kirchhoff-Love para resolver casos de placas espessas ou moderadamente espessas;
- Mostrar a influência das condições de vinculação na deformada dos modos de vibração;
- Adquirir experiência de uso e modelização no ANSYS para placas.

## **1.3 METODOLOGIA**

Propõe-se estudar, em placas retangulares, o problema de vibrações livres, no qual buscam-se as frequências naturais e deformadas modais, em diferentes condições de contorno para evidenciar a influência das vinculações e outros parâmetros nas respostas numéricas.

O trabalho consiste em estudo comparativo analítico e numérico realizado com o programa ANSYS (método dos elementos finitos). As análises serão realizadas sob diversas condições e comparadas com os resultados analíticos.

Será também efetuada uma análise, pelo método das diferenças finitas, para uma placa já resolvida analiticamente e por elementos finitos, e os resultados comparados entre si.

#### **1.4 ABRANGÊNCIAS E LIMITAÇÕES**

O estudo realizado nessa dissertação limita-se a placas finas, embora a análise feita pelo método dos elementos finitos possa ser utilizada para placas espessas, a teoria analítica utilizada não é válida para tal. As análises serão feitas com material linear, elástico e isotrópico. Por se tratar de problemas de vibração livre, o amortecimento não será abordado. As condições de contorno abordadas foram as condições básicas de apoio, engaste e livre ao longo de toda borda. Explora-se, nos estudos, os seguintes parâmetros:

$\frac{h}{a}$ ,  $\frac{a}{b}$  e  $\Omega$ , onde  $h$  é a espessura da placa,  $a$  e  $b$  são as dimensões da placa e  $\Omega$  é o parâmetro de frequência. Não foram feitos cortes nas deformadas modais devido a maior riqueza da representação tridimensional utilizada.

#### **1.5 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO**

O capítulo 2 efetua uma breve revisão bibliográfica das teorias clássicas e métodos tradicionais a respeito de placas em vibrações livres, que foram publicados por diversos autores, bem como alguns trabalhos mais próximos do tema em questão.

O capítulo 3 apresenta o desenvolvimento teórico básico das placas em estudo sob a ótica estática e dinâmica (vibração livre). São mostradas as principais equações que regem os problemas estáticos e modais, bem como o método geral de obtenção das mesmas. O método das diferenças finitas também é apresentado, bem como a parte computacional aplicada na dissertação. Aborda-se o elemento finito utilizado na análise numérica, suas características e funcionalidade, as dificuldades na modelagem e comentários acerca da malha e condições de contorno.

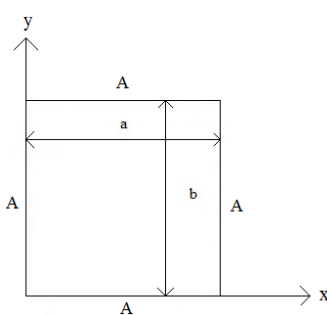
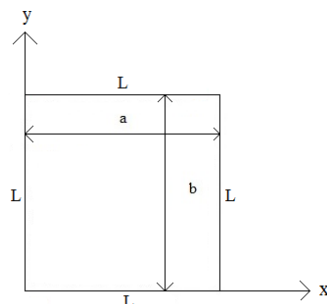
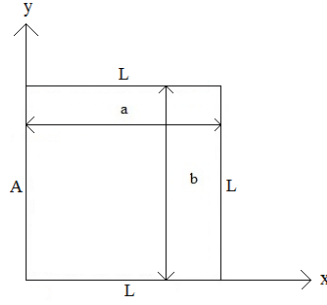
O capítulo 4 apresenta os resultados obtidos e discute as comparações entre os cálculos analíticos e numéricos, baseados respectivamente na teoria desenvolvida no capítulo 3 e obtidos pelo programa ANSYS. É feita uma “análise visual” da influência das condições de contorno na deformada dos modos de vibração (resposta qualitativa das deformadas



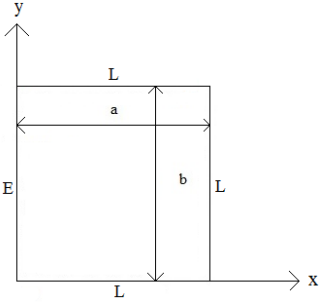
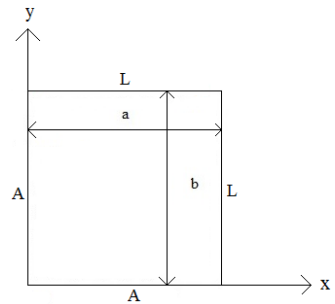
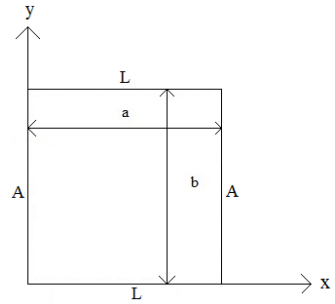
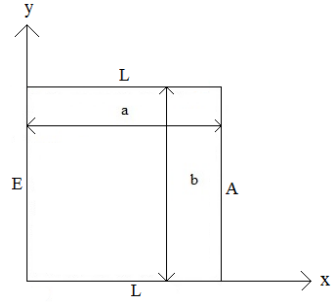
modais). Além disso, realiza-se uma análise pelo método das diferenças finitas (para o caso da placa totalmente apoiada) comparando com os resultados analíticos pertinentes.

A Tabela 1.1 a seguir ilustra os casos estudados, mostrando as condições de contorno aplicadas, a análise e abordagens realizadas e os principais objetivos.

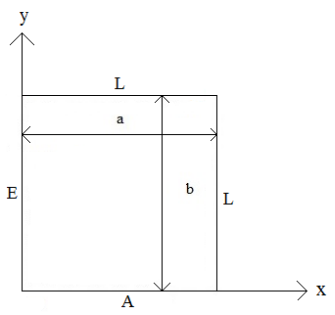
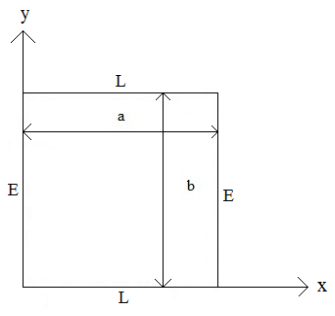
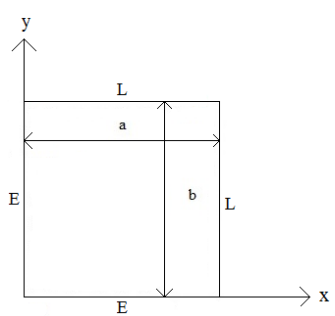
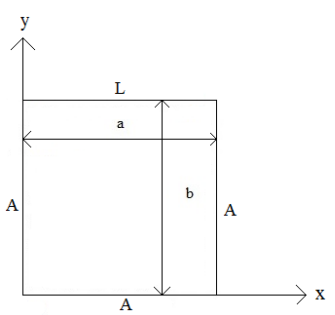
Tabela 1.1 – Casos analisados e suas principais características

Esquema	Análise	Abordagem	Objetivos
<p>Caso 1 (caso de referência)</p> 	Vibração livre	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Analítica</li> <li>– Elementos finitos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Aplicar a metodologia apresentada;</li> <li>– Comparar os resultados analíticos e numéricos obtidos;</li> <li>– Visualizar a deformada dos modos de vibração.</li> </ul>
<p>Caso 2</p> 	Vibração livre	– Idem ao Caso 1	– Idem ao Caso 1
<p>Caso 3</p> 	Vibração livre	– Idem ao Caso 1	– Idem ao Caso 1.

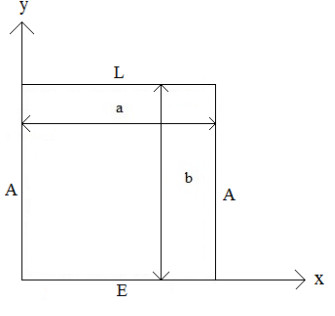
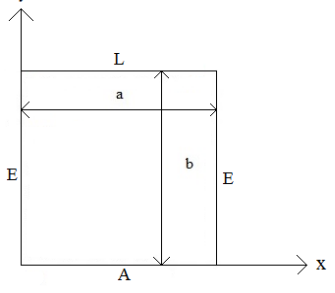
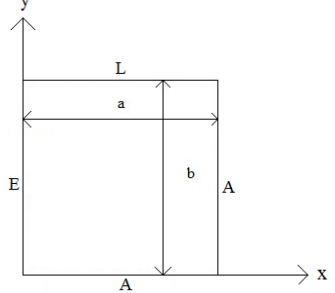
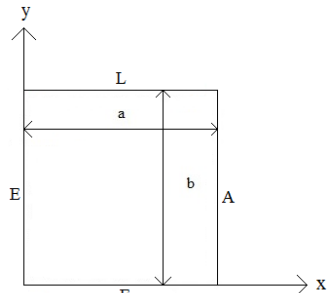
A=Apoiado E=Engastado L=Livre

<p><b>Caso 4</b></p> 	<p>Vibração livre</p>	<p>– Idem ao Caso 1</p>	<p>– Idem ao Caso 1.</p>
<p><b>Caso 5</b></p> 	<p>Vibração livre</p>	<p>– Idem ao Caso 1</p>	<p>– Idem ao Caso 1.</p>
<p><b>Caso 6</b></p> 	<p>Vibração livre</p>	<p>– Idem ao Caso 1</p>	<p>– Idem ao Caso 1.</p>
<p><b>Caso 7</b></p> 	<p>Vibração livre</p>	<p>– Idem ao Caso 1</p>	<p>– Idem ao Caso 1.</p>

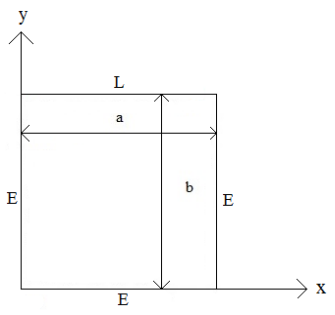
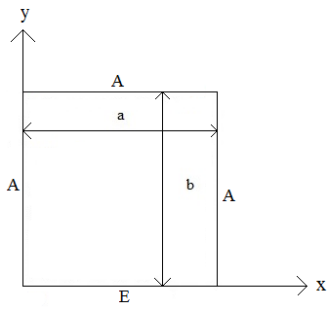
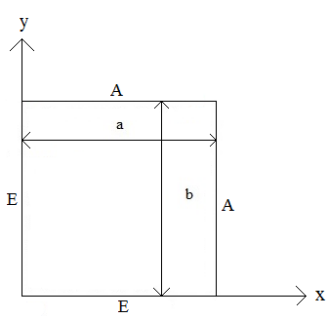
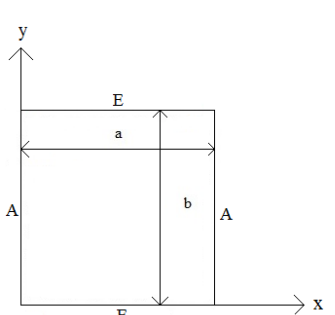
A=Apoiado E=Engastado L=Livre

<p><b>Caso 8</b></p> 	<p>Vibração livre</p>	<p>– Idem ao Caso 1</p>	<p>– Idem ao Caso 1.</p>
<p><b>Caso 9</b></p> 	<p>Vibração livre</p>	<p>– Idem ao Caso 1</p>	<p>– Idem ao Caso 1.</p>
<p><b>Caso 10</b></p> 	<p>Vibração livre</p>	<p>– Idem ao Caso 1</p>	<p>– Idem ao Caso 1.</p>
<p><b>Caso 11</b></p> 	<p>Vibração livre</p>	<p>– Idem ao Caso 1</p>	<p>– Idem ao Caso 1.</p>

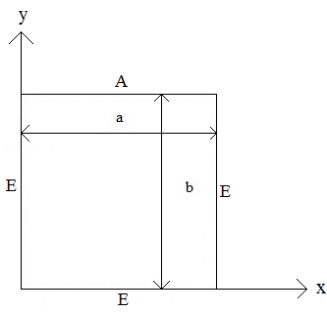
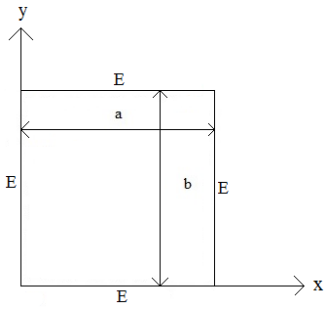
A=Apoiado E=Engastado L=Livre

<p><b>Caso 12</b></p> 	<p>Vibração livre</p>	<p>– Idem ao Caso 1</p>	<p>– Idem ao Caso 1.</p>
<p><b>Caso 13</b></p> 	<p>Vibração livre</p>	<p>– Idem ao Caso 1</p>	<p>– Idem ao Caso 1.</p>
<p><b>Caso 14</b></p> 	<p>Vibração livre</p>	<p>– Idem ao Caso 1</p>	<p>– Idem ao Caso 1.</p>
<p><b>Caso 15</b></p> 	<p>Vibração livre</p>	<p>– Idem ao Caso 1</p>	<p>– Idem ao Caso 1.</p>

A=Apoiado E=Engastado L=Livre

<p><b>Caso 16</b></p> 	<p>Vibração livre</p>	<p>– Idem ao Caso 1</p>	<p>– Idem ao Caso 1.</p>
<p><b>Caso 17</b></p> 	<p>Vibração livre</p>	<p>– Idem ao Caso 1</p>	<p>– Idem ao Caso 1.</p>
<p><b>Caso 18</b></p> 	<p>Vibração livre</p>	<p>– Idem ao Caso 1</p>	<p>– Idem ao Caso 1.</p>
<p><b>Caso 19</b></p> 	<p>Vibração livre</p>	<p>– Idem ao Caso 1</p>	<p>– Idem ao Caso 1.</p>

A=Apoiado E=Engastado L=Livre

<p><b>Caso 20</b></p> 	<p>Vibração livre</p>	<p>– Idem ao Caso 1</p>	<p>– Idem ao Caso 1.</p>
<p><b>Caso 21</b></p> 	<p>Vibração livre</p>	<p>– Idem ao Caso 1</p>	<p>– Idem ao Caso 1.</p>
<p>A=Apoiado    E=Engastado    L=Livre</p>			

O capítulo 5 fornece as conclusões percebidas nesta dissertação e sugestões para estudos futuros

## **2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Nesta seção serão mostrados os principais estudos realizados que envolvem a resposta dinâmica de placas, seja em vibração livre ou forçada. Todos esses estudos foram realizados para mostrar a importância desse conhecimento.

### **2.1 ESTUDOS RECENTES E RELEVANTES**

Gupta, Lal e Sharma (2007) realizaram estudo sobre a vibração livre de placas circulares não-homogêneas com espessura variável. Valeram-se da teoria de placas de Mindlin e obtiveram as três primeiras frequências naturais e os respectivos modos de vibração investigando, assim, a influência das condições de contorno e da não-homogeneidade na resposta da frequência natural. Concluíram que a frequência aumenta com o aumento do parâmetro que representa a não-homogeneidade e também com o aumento da espessura, entretanto ela decresce com o aumento do parâmetro que representa a densidade.

Mochida e Ilanko (2010) estudaram a resposta transiente de uma placa livre em todas as bordas usando o método da superposição de Gorman. A placa possui como carregamento apenas o peso próprio. Verificaram que os modos mais baixos dominam a respostas transiente (os primeiros modos) e que o método da superposição, em comparação com a aplicação do método de Rayleigh-Ritz, fornece respostas mais precisas, com convergência mais rápida e, por fim, mais confiável para esse tipo de análise em uma placa livre.

Xu, Du e Li (2010) estudaram a vibração de placas retangulares reforçadas por vigas. Apresentam um método analítico para a resolução desse problema o comparando com um método híbrido analítico-numérico e com a resposta numérica obtida com o ANSYS. As placas foram estudadas com diferentes condições de contorno e excelentes resultados foram obtidos para todas as análises feitas, concluindo que um método inteiramente analítico foi desenvolvido.

Zhou, Wong, Xu e Leung (2011) estudaram a resposta da frequência natural de placas finas circulares e anulares pela aproximação de Hamilton. Diferentes condições de contorno são estudadas e as respostas obtidas para os primeiros modos de vibração mostraram-se

excelentes em comparação com outros métodos de cálculo. Concluíram que a aplicação não se restringe apenas ao caso da vibração livre das placas e que o método pode ser utilizado para validar a precisão de métodos numéricos.

Lin, Tan, Yan e Hargreaves (2011) analisaram a vibração de placas em forma de L devida a excitação por uma força pontual ou momento. Formularam solução analítica para ambos os casos e compararam os resultados com respostas numéricas, pesquisando, também, a influência do local de aplicação da excitação na resposta de frequência. Procederam com a solução de forma fechada o que não necessita inversão de matriz na solução.

Amabili e Carra (2012) realizaram estudos experimentais acerca de vibrações forçadas de grande amplitude em placas retangulares carregando diferentes massas concentradas. Excitadores eletrodinâmicos foram utilizados para aplicar a excitação harmônica, a placa foi engastada em todas suas bordas e simulações numéricas foram realizadas para comparar os resultados e entender melhor o problema. A Figura 2.1 a seguir mostra o experimento montado. Os resultados mostraram que a gravidade produz deflexões estáticas na placa, que aumentam não linearmente com o aumento das massas. O amortecimento aumenta de maneira não linear com a amplitude de vibração.

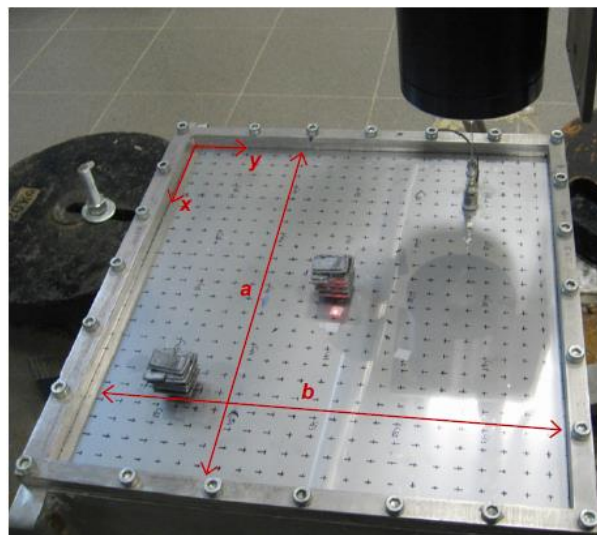


Figura 2.1 – Placa do experimento com duas massas de 50 g dispostas sobre a mesma (Amabili e Carra, 2012)



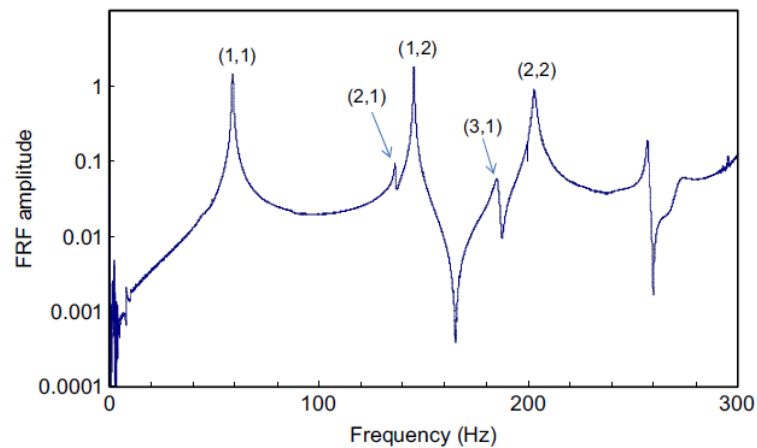


Figura 2.2 – Resposta da amplitude de frequência para a placa com uma massa concentrada de 25 g no centro (Amabili e Carra, 2012)

Lin (2012) estudou a resposta de vibração de uma placa engastada reforçada com uma nervura. Resultados analíticos e experimentais são obtidos para a vibração livre e forçada da placa (a mesma é excitada por uma carga pontual), sendo que os resultados experimentais foram obtidos para verificar os resultados analíticos. Também há alguns resultados obtidos pelo método dos elementos finitos para comparação e verificação da boa precisão do mesmo. Concluiu que quando o comprimento da meia-onda do modo de vibração é maior que a maior dimensão da nervura, a mesma se comporta como um apoio. Uma vez que a frequência aumenta e, conseqüentemente, o comprimento da meia-onda diminui a nervura passa a comportar-se como um engaste, sendo observado para quando o comprimento da meia-onda é menor que a metade da maior dimensão da nervura. A Figura 2.3 mostra alguns resultados observados e o comportamento de apoio e engaste da nervura situada a 0,3 da borda.

Kim, Cho e Beom (2012) estudaram analiticamente a vibração de uma placa circular com a borda externa elasticamente restrita (apoio elástico). Apresentam as equações analíticas resolvidas de maneira exata, as funções modais, as frequências naturais e os modos de vibração. Para confirmar a acurácia da proposta, comparam os resultados obtidos pelas equações desenvolvidas com resultados de placas engastadas e livres da literatura.

Ismail e Cartmell (2012) estudaram a vibração forçada de uma placa contendo uma fissura de orientação variável em sua superfície. Propuseram um novo modelo analítico para obter as respostas de vibração (baseado na teoria clássica de placas) para essa situação investigada. Solucionaram a placa para três condições de contorno, placas retangulares e

quadradas. Mostraram a influência da orientação e tamanho da fissura, bem como do local de aplicação da força pontual excitatória. A validação dos resultados é comprovada por comparação com resultados experimentais.

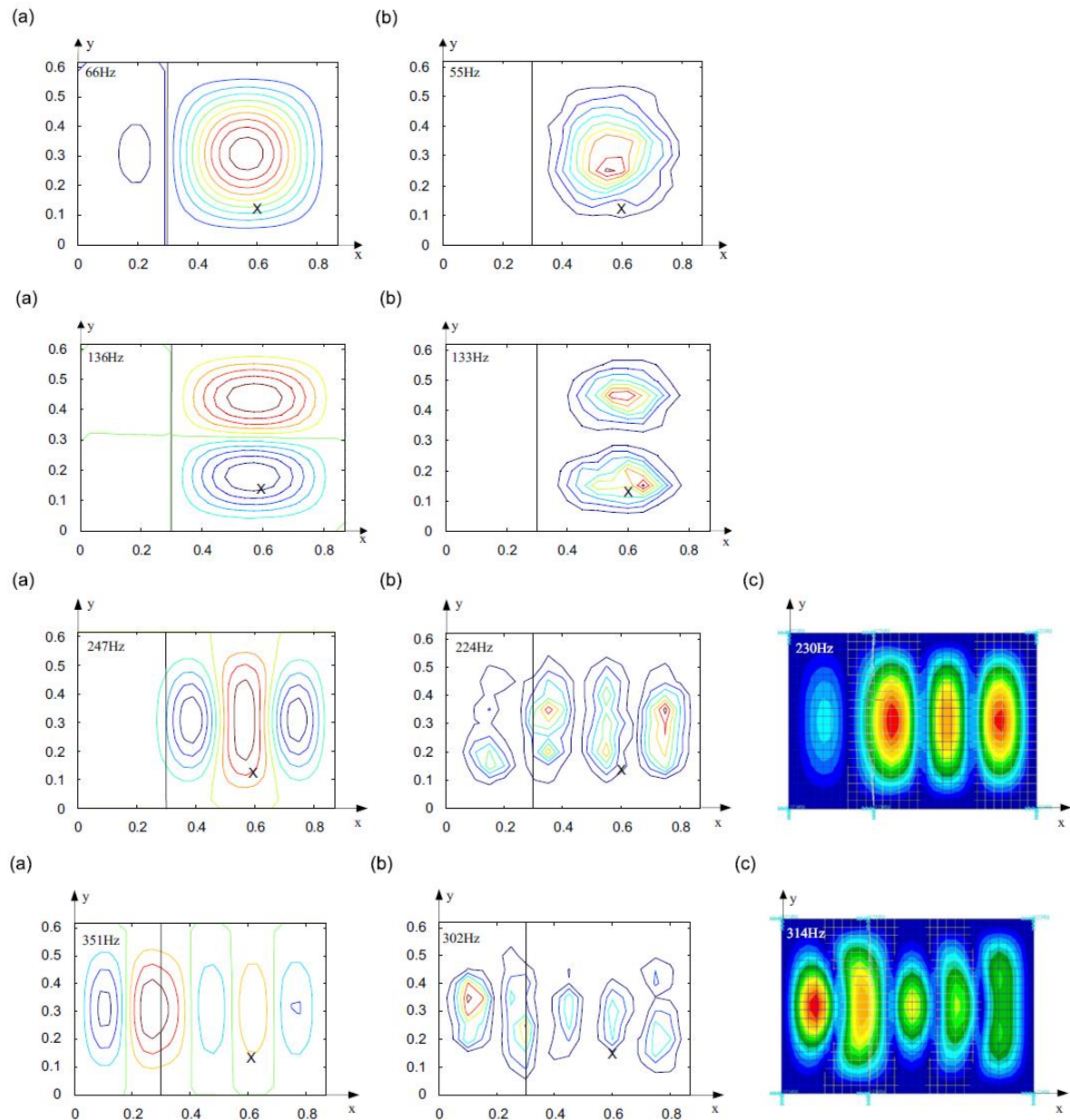


Figura 2.3 – Resultados analíticos (a), experimentais (b) e pelo método dos elementos finitos (c) para os modos 1, 2, 5 e 8 (Lin, 2012)

Shi e Dong (2012) estudaram a vibração em placas anulares, com diferentes tipos de apoio interna e externamente, submetidas a variação de temperatura no ambiente. Estudaram o caso de aumento de temperatura de não linear, comparando os resultados analíticos e numéricos obtidos para os diferentes casos analisados, concluindo que as frequências naturais diminuía com o aumento da temperatura.

Hosseini-Hashemi, Rezaee, Atashipour e Girhammar (2012) estudaram a vibração livre de placas circulares espessas com um núcleo rígido agregado ao centro das mesmas, conforme Figura 2.4. Apresentam solução analítica e numérica para diferentes condições de contorno e parâmetros que controlam o problema, como a relação entre a espessura e o raio, relação entre os raios da placa e do núcleo rígido e massa do núcleo, entre outros. Concluíram que a solução analítica apresentada é excelente pois os resultados obtidos estão em concordância com os resultados numéricos obtidos pelo método dos elementos finitos.

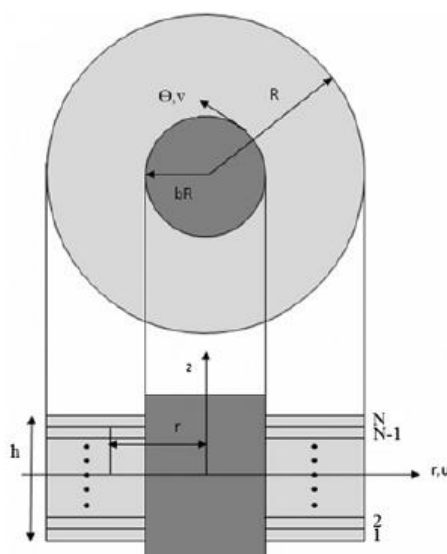


Figura 2.4 – Seção transversal da placa com o núcleo rígido (Hosseini-Hashemi, Rezaee, Atashipour e Girhammar, 2012)

Senjanovic, Vladimir e Tomic (2013) apresentam uma teoria avançada para a resposta de vibração de placas retangulares moderadamente espessas. Buscaram reduzir o número de equações governantes de três para apenas uma equação em função da deflexão. Obtiveram resultados muito bons para placas totalmente apoiadas e placas apoiadas em duas bordas opostas e engastadas nas outras duas. Os mesmos foram comparados com os resultados retirados da literatura para diferentes relações de espessura. Concluíram que a vantagem do método é a simplicidade e transparência do mesmo, reduzindo o recurso computacional necessário para resolver o problema.

Askari, Jeong e Amabili (2013) investigaram a vibração de placas circulares imersas em um recipiente contendo líquido com a superfície livre. Apresentaram um método teórico para a análise de vibração livre desse caso e validaram os resultados mediante a realização de alguns experimentos. As frequências naturais são obtidas levando em consideração a

interação fluido-estrutura. Realizaram análises para as condições de contorno livre e engastada. Concluíram que os resultados obtidos estão de acordo com os resultados experimentais.

Wang e Unal (2013) analisaram a vibração livre de placas retangulares, com aumento da espessura não gradual, mediante o método dos elementos finitos espectral. O objeto de estudo foi uma placa com um aumento brusco na espessura, considerando duas condições de contorno, apoiada e engastada, conforme Figura 2.5. Compararam resultados obtidos da literatura e de análises feitas com o programa NASTRAN com os resultados obtidos pelo método proposto. Concluíram que a solução proposta constitui um método de análise eficiente e preciso e que apenas uma porção da malha é necessária para obter resultados semelhantes aos obtidos com o método dos elementos finitos tradicional.

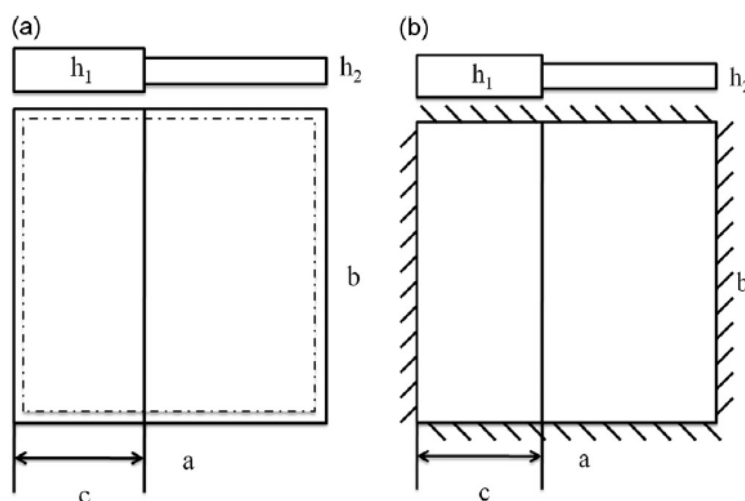


Figura 2.5 – Placas com aumento brusco de espessura analisadas: (a) apoiada em todas as bordas e (b) engastada em todas as bordas (Wang e Unal, 2013)

Bose e Mohanty (2013) estudaram o caso de uma placa fina retangular com uma fissura de posição e orientação arbitrárias sobre vibração livre. As frequências naturais são obtidas para diferentes condições de apoio nas bordas da placa, diferentes comprimentos, ângulos e posições da fissura. Alguns resultados obtidos, analiticamente, são comparados com a literatura, mostrando a influência da fissura nos modos de vibração da placa. Concluíram que os resultados estão em acordância com os apresentados na literatura para fissuras longas, as frequências naturais diminuem com o aumento do comprimento da fissura e com o aumento do ângulo da mesma até o limite de  $45^\circ$ .

Li, Fang e Xu (2014) estudaram o efeito do amortecimento devido ao ar presente nos furos da microestrutura analisada. Realizaram estudos analíticos e comparações com o método dos elementos finitos para as respostas de vibração. A estrutura trata-se de uma placa circular com furos circulares disposto na mesma a fim de fornecer o amortecimento para a estrutura. O problema tem aplicação em micro sistemas eletromecânicos. A Figura 2.6 mostra a placa analisada. Concluíram que para placas com razão de perfuração pequena e média o resultado analítico proposto é extremamente satisfatório, de acordo com os valores numéricos, enquanto que, para razão de perfuração grande, há discrepância entre os resultados numérico e analítico em modos de vibração mais altos. A razão de perfuração é dada pelo diâmetro do furo dividido pela distância entre os centros de dois furos adjacentes.

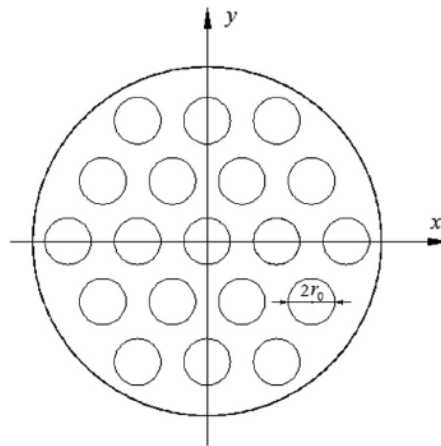


Figura 2.6 – Microplaca perfurada com distribuição uniforme dos furos (Li, Fang e Xu, 2014)

Wang (2014) estudou a vibração de placas circulares livres em suas bordas externas e concentricamente apoiadas no interior, variando a distância do apoio. O autor analisou os primeiros modos de vibração variando as condições de apoio interna, juntamente com a distância do mesmo em relação ao centro da placa. Obteve resultados analíticos e os comparou com os resultados da literatura, evidenciando singularidades para o caso do raio do apoio ser zero (condição de contorno apenas no ponto central da placa). A Figura 2.7 a seguir ilustra os resultados do caso simplesmente apoiado.

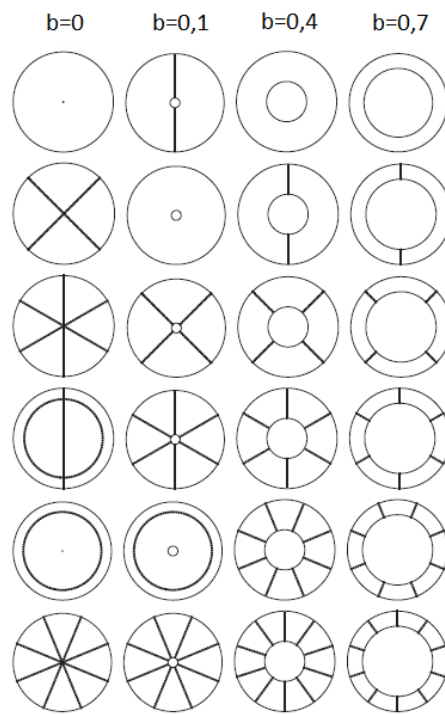


Figura 2.7 – Modos de vibração para o caso simplesmente apoiado e livre na borda. Os valores de  $b$  representam a distância relativa dos apoios internos (Wang, 2014)

### 3 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Uma apresentação simplificada das teorias e formulações para o estudo e resolução de problemas dinâmicos de vibração livre de cascas retangulares será apresentado neste capítulo. Será abordado, também, a base da teoria de Kirchhoff-Love para casos estáticos. Por fim, mostra-se uma breve formulação do método das diferenças finitas para poder aplicá-lo ao problema dinâmico. A teoria desenvolvida nesse capítulo baseia-se nos seguintes autores (Szilard, 2004), (Ventsel, 2001), (Soedel, 2004), (Pedroso, 1998, 1999, 2005, 2011) e (Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1987).

Uma análise rigorosa requereria que a placa fosse considerada como um meio tridimensional contínuo ao invés de uma ação estrutural bidimensional como indicam os autores. Devido a dificuldades matemáticas criadas e a não praticidade da solução, (Szilard, 2004), (Ventsel, 2001) e outros autores fornecem tipos de placa, intervalos diferentes nos quais as placas se encaixam e são categorizadas para proceder às soluções analíticas apropriadas à cada caso.

Usando a relação  $\frac{h}{a}$  (espessura dividida pelo comprimento, ou dimensão governante)

pode-se classificar as placas segundo os autores:

(Szilard, 2004)

- Placas finas  $\left(0,02 \leq \frac{h}{a} \leq 0,1\right)$ ;
- Placas moderadamente espessas  $\left(0,1 < \frac{h}{a} \leq 0,2\right)$ ;
- Placas espessas  $\left(\frac{h}{a} > 0,2\right)$ .

(Ventsel, 2001)

- Placas finas  $\left(0,01 \leq \frac{h}{a} \leq 0,1\right)$ ;
- Placas espessas  $\left(\frac{h}{a} > 0,1\right)$ .

Embora (Ventsel, 2001) não considere a classificação de placas em moderadamente espessas, os intervalos propostos pelo autor são mais usuais, estão presentes na grande maioria dos trabalhos na área. Portanto, prefere-se utilizar sua classificação ao longo desse trabalho.

### 3.1 HIPÓTESES GERAIS

De acordo com (Pedroso, 1998) pode-se imaginar que a forma de uma placa fina é definida pela geometria de sua superfície média. A teoria de placas de Kirchhoff-Love baseia-se nas seguintes condições:

- O material da placa é elástico, homogêneo e isotrópico ( $\sigma = E\varepsilon$ );
- A espessura  $h$  é pequena em relação as outras dimensões (placas finas);
- As tensões normais a superfície média são desprezíveis em relação as demais tensões ( $\sigma_z = 0$ );
- Os pontos pertencente (antes da deformação) a retas normais a superfície média encontram-se, após a deformação, sobre retas perpendiculares a superfície média deformada (deformações devido ao esforço cortante são desprezadas);
- Os deslocamentos são pequenos se comparados com a espessura da placa, sendo possível desprezar a influência dos mesmos no estado das condições de equilíbrio do elemento de superfície (teoria linear e superposição de efeitos);
- As deflexões são muito menores que 1 (teoria de pequenas deformações).

### 3.2 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA PLACA

Na Figura 3.1 a seguir, encontra-se uma representação de uma placa  $D$ , de forma qualquer, e sua superfície média  $S$ , bem como os eixos coordenados  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Os pontos  $X$  e  $Y$  pertencem a placa sendo que  $X$  é um ponto contido na superfície média e  $Y$  um ponto logo abaixo de  $X$  (distância perpendicular a superfície média). De acordo com as hipóteses da seção 3.1, os deslocamentos dos pontos  $X$  e  $Y$  são, respectivamente,  $\bar{\delta}(X) = (0, 0, w)$  e  $\bar{\delta}(Y) = (u, v, w)$ .



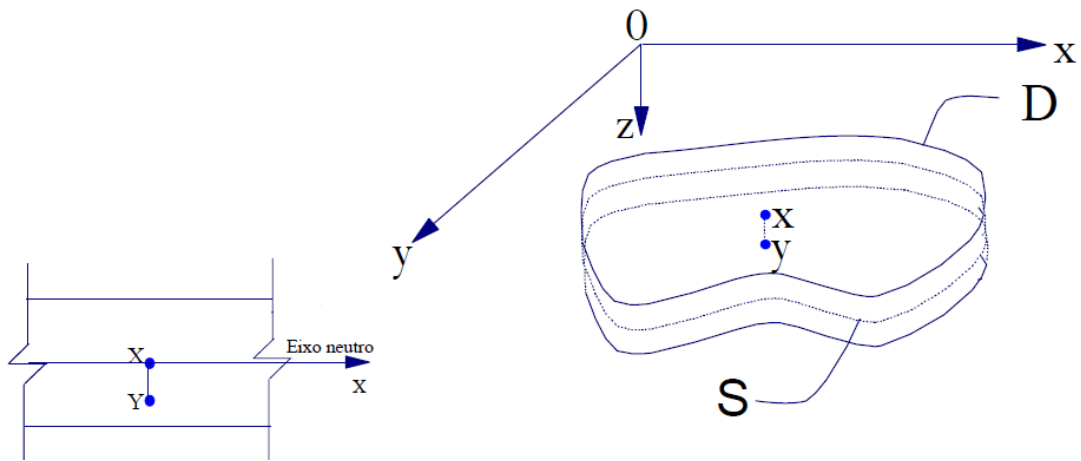


Figura 3.1 – Placa fina com um corte passando por X (Pedroso, 1998)

Após a deformação, a situação da placa é explicitada na Figura 3.2. Pode-se observar que a distância  $d$  entre os dois pontos considerados permanece a mesma e os pontos X e Y continuam pertencentes a uma reta normal a superfície média deformada (eixo neutro deformado). Há uma rotação do ponto Y (devido a deformação da superfície média) e um deslocamento  $v$  na direção  $y$ . Infere-se que o deslocamento  $w$  de um ponto é função apenas da posição  $(x,y)$  do mesmo, uma vez que o mesmo deslocamento  $w$  é compartilhado por pontos com diferentes posições em  $z$  e mesma posição  $(x,y)$ .

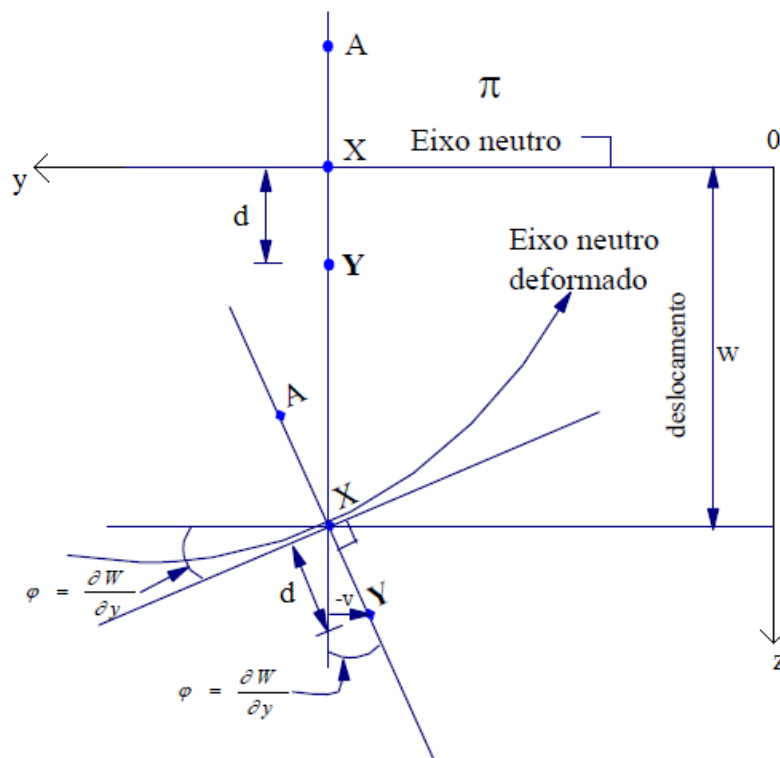


Figura 3.2 – Corte no plano  $0yz$  e deformação da placa (Pedroso, 1998)

Então, evidenciando o sinal dos deslocamentos de acordo com a disposição dos eixos nas Figuras 3.1 e 3.2 e de acordo com a hipótese de deflexões muito pequenas:

$$-v = d \operatorname{sen} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \Rightarrow v = -d \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (3.1)$$

De forma análoga para o plano 0xz:

$$-u = d \operatorname{sen} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Rightarrow u = -d \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3.2)$$

Mostrando que todos os deslocamentos de um ponto da placa, ponto Y por exemplo, são determinados mediante o conhecimento de  $w$ , também um deslocamento do ponto. As deformações do ponto, do mesmo modo que os deslocamentos, serão perfeitamente determinadas ao se conhecer  $w$ :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -d \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -d \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2d \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.5)$$

### 3.2.1 Cálculo das tensões e dos momentos

De posse das deformações, pode-se aplicar a validade da lei de Hooke (fato contemplado por uma hipótese na seção 3.1) e determinar equações para obtenção das tensões, lembrando que  $\sigma_z = 0$ :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = -\frac{Ed}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.6)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = -\frac{Ed}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.7)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = -\frac{Ed}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.8)$$

As equações (3.6) a (3.8) mostram que as tensões variam linearmente com a distância  $d$  medida a partir do eixo neutro, mantendo a posição  $(x,y)$  constante, e anula-se no eixo neutro, ou seja, quando  $d=0$ . A Figura 3.3 ilustra a distribuição de tensões nas faces de um elemento infinitesimal da placa ao longo de uma normal genérica a superfície  $S$ .

A convenção de sinais adotada será:

- Forças internas, externas e deslocamentos são positivos quando estão no sentido positivo dos eixos;
- Momentos fletores são positivos quando tracionam as fibras inferiores. Momentos torçores são positivos quando estiverem no sentido positivo dos eixos para as faces primárias;
- Momentos por unidade de comprimento, produzidos pelas tensões, serão positivos quando tracionarem as fibras inferiores (para os momentos fletores) e quando estiverem no sentido positivo dos eixos (para momentos torçores nas faces primárias).

Para auxiliar no entendimento, todas as grandezas apresentadas na Figura 3.3 estão representadas em suas quantidades positivas. Caso haja mudança dos eixos coordenados muda-se convenção do momento fletor, conforme indica a Figura 4.2 e sua representação das quantidades positivas.

De acordo com (Szilard, 2004) é costume trabalhar em placas com os esforços por unidade de comprimento, portanto utiliza-se os mesmos (representados por letras minúsculas).

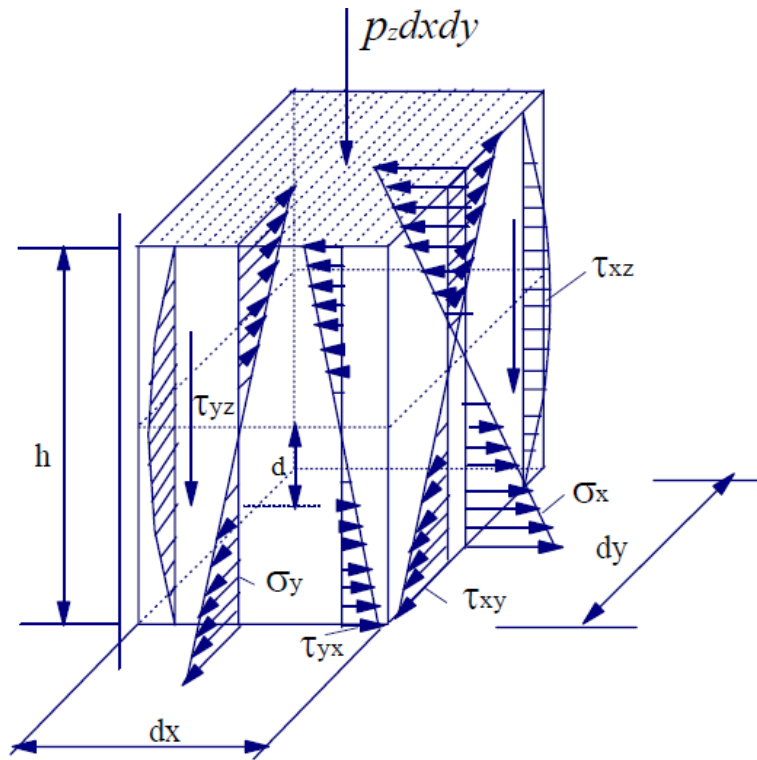


Figura 3.3 – Distribuição das tensões no elemento infinitesimal de placa (Szilard, 2004)

Procedendo ao cálculo dos momentos:

$$m = \int dFd = \int \sigma dAd \quad \text{ou} \quad \int \tau dAd \quad (3.9)$$

Como se trata de manter a posição  $(x,y)$  constante (normal genérica a superfície S), variando apenas no eixo z, o diferencial de área dA se torna apenas dz.

$$\begin{aligned} m_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x ddz = \int_{-h/2}^{h/2} -\frac{Ed^2}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dz = \\ &= \frac{-Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

De maneira análoga para  $m_y$  :

$$\begin{aligned}
 m_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y ddz = \int_{-h/2}^{h/2} -\frac{Ed^2}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dz = \\
 &= \frac{-Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Para a torção:

$$\begin{aligned}
 m_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} ddz = \int_{-h/2}^{h/2} -\frac{Ed^2}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dz = \\
 &= -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = -(1-\nu)D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Introduziu-se a grandeza D definida como rigidez flexional da placa cuja equação é:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

### 3.2.2 Condições de equilíbrio de um elemento de placa

A Figura 3.4 mostra um elemento infinitesimal de placa (dx,dy) submetido a um carregamento P(x,y) perpendicular a superfície média com todos os esforços atuantes. Utilizando os esforços por unidade de comprimento (representados pelas letras minúsculas) e aplicando o equilíbrio dos esforços para o elemento.

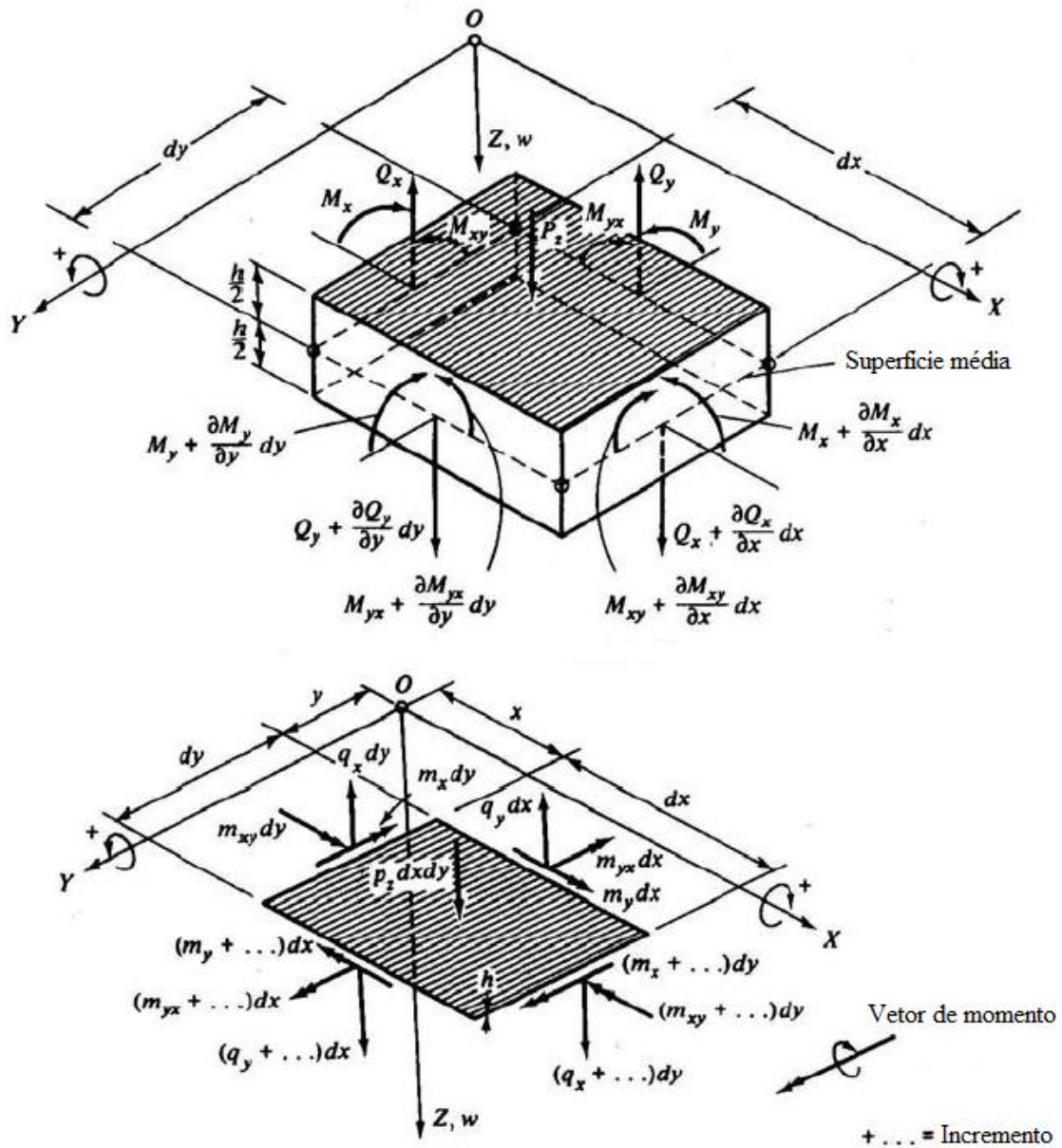


Figura 3.4 – Equilíbrio dos esforços no elemento infinitesimal (Szilard, 2004, modificado)

Equilíbrio de forças verticais  $\sum F_x = 0$ :

$$\left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx - q_x dy - q_y dx + p dx dy = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -p(x, y)$$

Somatório dos momentos em relação ao centro de gravidade  $\sum M_x = 0$ :

$$\begin{aligned} & \left( m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dx \right) dy + \left( m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} dy \right) dx - m_{xy} dy - m_y dx - \\ & - \left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dy}{2} - q_y dx \frac{dy}{2} = 0 \Rightarrow q_y = \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.14)$$

O termo  $\frac{\partial q_y}{\partial y} dy dx \frac{dy}{2}$  foi desprezado por ser infinitesimal e muito menor que os termos restantes, tornando-se portanto irrelevante.

Somatório dos momentos em relação ao centro de gravidade  $\sum M_y = 0$ :

$$\begin{aligned} & \left( m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy \right) dx + \left( m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx \right) dy - m_{xy} dx - m_x dy - \\ & - \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dx}{2} - q_x dy \frac{dx}{2} = 0 \Rightarrow q_x = \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial m_x}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Combinando as equações (3.13) a (3.15):

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p(x, y) \quad (3.16)$$

Valendo-se das equações (3.10) a (3.12), a equação (3.16) é reescrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ -(1-\nu) D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = -p(x, y) \\ & \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} p(x, y) \end{aligned} \quad (3.17)$$

A equação (3.17) é, portanto, uma equação diferencial parcial de 4ª ordem que permite obter  $w$  em função do carregamento aplicado na placa. Durante a seção 3.2 inteira percebeu-se que conhecendo o deslocamento  $w$  obtém-se todas as grandezas relevantes para a placa, fica assim expresso a importância primordial da equação (3.17). Essa equação possui em seu lado esquerdo o operador Laplaciano bi-harmônico, podendo ser escrita de forma mais compacta, conforme (Ventsel, 2001):

$$D\nabla^4 w(x, y) = p(x, y) \quad (3.18)$$

O problema é considerado resolvido se for encontrada uma expressão da deformada da superfície média ( $w$ ) que satisfaça a equação de Lagrange (3.18) e as condições de contorno. Ressalta-se que as equações (3.10) a (3.12) são aplicáveis para as grandezas resultantes (letras maiúsculas) e não só para os esforços por unidade de comprimento.

É interessante representar os esforços cortantes  $q_x$  e  $q_y$  em função do deslocamento  $w$ :

$$q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.19)$$

$$q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.20)$$

Os esforços cortantes resultantes são constituídos de duas parcelas, portanto não se pode apenas utilizar a mesma equação obtida para os esforços por unidade de comprimento, equações (3.19) e (3.20). É necessário somar uma parcela do efeito do momento torçor à parcela já obtida por unidade de comprimento, tem-se:

$$V_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (3.21)$$

$$V_y = q_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] \quad (3.22)$$



De acordo com (Szilard, 2004), a segunda parcela das equações (3.21) e (3.22) representam esforços cortantes adicionais ao longo das bordas. Substitui-se o momento torçor por uma equivalência estática ao longo da borda igual a  $m_{xy} \frac{dy}{dy}$  e  $m_{xy} \frac{dx}{dx}$  de acordo com a Figura 3.5. As forças se cancelam entre os elementos adjacentes, conforme Figura 3.5, exceto a parte incremental  $\frac{m_{xy}}{\partial y} dy$  e  $\frac{m_{xy}}{\partial x} dx$ . Dividindo por  $dy$  e  $dx$ , respectivamente, encontram-se as forças adicionais de Kirchhoff:

$$\hat{q}_x = \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \text{ e } \hat{q}_y = \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \quad (3.23)$$

Nos cantos das placas as forças não se cancelam, mas se somam resultando uma força adicional no canto, fato que explica a “tendência de elevação dos cantos de uma laje” (Clímaco, 2008). A Figura 3.5 mostra esse efeito em um dos cantos da placa com a presença da força  $R_0$ . Na prática denomina-se esse efeito como momento volvente e é necessário colocar uma armadura adicional na região para combater o surgimento de fissuras diagonais nos cantos da laje.

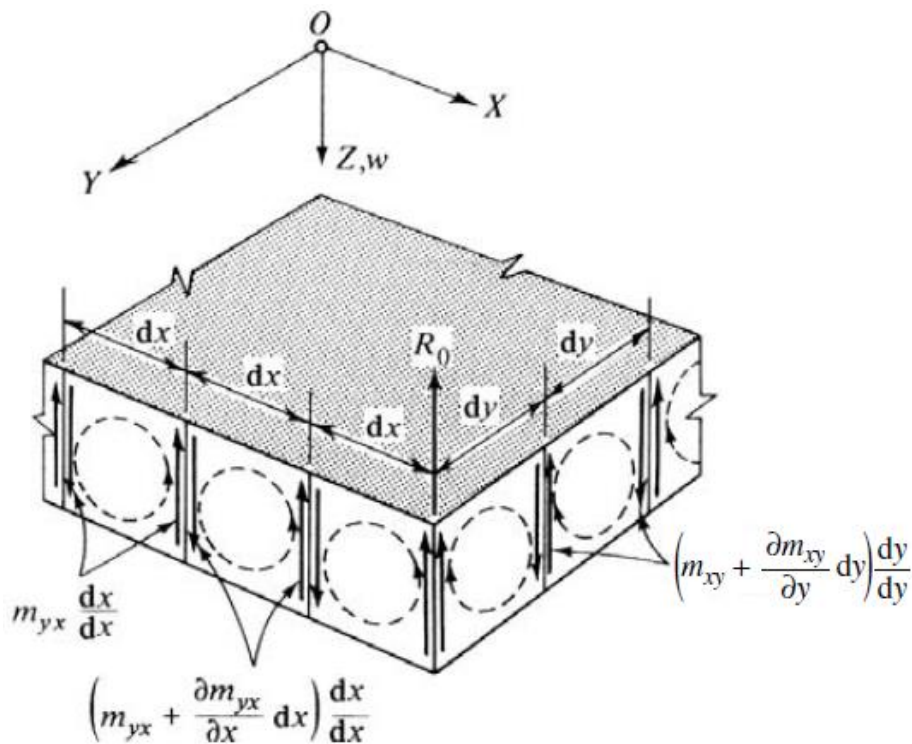


Figura 3.5 – Efeitos do momento torçor nas bordas (Szilard, 2004)

Com todas as grandezas definidas, procede-se a qualquer cálculo necessário, inclusive considerações sobre as condições de contorno, uma vez que ao necessitar definir que o momento fletor é nulo, por exemplo, recorre-se a equação (3.10).

### 3.3 SOLUÇÃO DE NAVIER

(Szilard, 2004) informa que a equação diferencial (3.18) é uma equação diferencial parcial linear de quarta ordem com coeficientes constantes e que há quatro tipos de soluções matemáticas para o problema de placas:

- Solução exata;
- Superposição da solução da equação bi-harmônica homogênea com a solução particular imposta;
- Solução em dupla série trigonométrica (Solução de Navier);
- Solução em série trigonométrica simples (Solução de Levy).

Aborda-se apenas a solução em dupla série trigonométrica, chamada de solução de Navier, que funciona apenas para o caso de uma placa simplesmente apoiada em todas as suas bordas. As condições de contorno são, lembrando que as equações para utilizá-las já foram definidas:

$$\begin{aligned} w_{x=0,x=a} = 0 \quad (m_x)_{x=0,x=a} = 0 \\ w_{y=0,y=b} = 0 \quad (m_y)_{y=0,y=b} = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

O deslocamento e o carregamento são expressos por dupla série trigonométrica:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right); \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.25)$$

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right); \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.26)$$

O coeficiente  $P_{mn}$  é obtido utilizando o carregamento do problema (carga distribuída, carga concentrada no centro da placa, entre outros) e procedendo à resolução clássica para

expansão em dupla série de Fourier. Para o caso de carregamento uniformemente distribuído sobre a placa, chamando  $p(x, y) = p_o$  :

$$\begin{aligned} P_{mn} &= \frac{16p_o}{mn\pi^2}; \quad m, n = 1, 3, 5, \dots \\ P_{mn} &= 0; \quad m, n = 2, 4, 6, \dots \end{aligned} \quad (3.27)$$

Levando as respostas na equação de Lagrange, equação (3.17) ou (3.18), obtém-se a expressão para o coeficiente  $W_{mn}$  e, com isso, a resposta final para o deslocamento  $w$  em forma de série.

$$\begin{aligned} W_{mn}\pi^4 \left[ \frac{m^4}{a^4} + \frac{2m^2n^2}{a^2b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right] \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) &= \frac{1}{D} P_{mn} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ W_{mn} &= \frac{P_{mn}}{D\pi^4 \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{a}\right)^2 \right]^2} = \frac{16p_o}{mnD\pi^6 \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{a}\right)^2 \right]^2} \quad (3.28) \\ w(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16p_o}{mnD\pi^6 \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{a}\right)^2 \right]^2} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned}$$

Como foi visto na seção 3.2, a partir do deslocamento  $w$  calcula-se qualquer grandeza pertinente à placa. O problema está resolvido.

### 3.4 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

(Szilard, 2004) atesta que embora o amortecimento esteja presente em qualquer vibração de placas, é intrínseco à estrutura, ele não tem efeito para uma análise inicial de vibração buscando frequências naturais da estrutura, portanto pode ser ignorado sem prejuízo.

Para obter a equação diferencial de movimento pode-se recorrer a dois modelos: aplicação do princípio de equilíbrio dinâmico de D'Alembert ou a formulação baseada na conservação de energia. Aplica-se o princípio do equilíbrio dinâmico, por ser mais simples,

para um elemento de placa como o da Figura 3.4. Sendo  $\bar{m} = \rho h$  sendo definido como a massa por unidade de área, a força inercial pode ser expressa por:

$$\hat{p} = -\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\bar{m} \ddot{w} \quad (3.29)$$

Sabe-se que as respostas de deslocamento e as forças são dependentes do tempo em uma análise dinâmica. Estendendo a equação de equilíbrio estática, equação (3.18), ao adicionar a força inercial, tem-se a equação diferencial de movimento não amortecida sobre a ação de carregamento dinâmico externo, vibração forçada.

$$D\nabla^4 w(x, y, t) = p(x, y, t) - \bar{m} \ddot{w}(x, y, t) \quad (3.30)$$

Percebe-se que o deslocamento não é mais função apenas da posição (x,y) nos eixos coordenados (independe de z), mas é também função do tempo t, assim como a força externa agindo na estrutura.

Para obter a equação de movimento não amortecida de uma placa sujeita a vibração livre, basta fazer a força externa igual a zero na equação (3.30).

$$D\nabla^4 w(x, y, t) + \bar{m} \ddot{w}(x, y, t) = 0 \quad (3.31)$$

Assumindo uma vibração harmônica de frequência  $\omega$  para representar a dependência do tempo, escreve-se juntamente com as suas derivadas necessárias:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= w(x, y) \text{sen}(\omega t) \\ \dot{w}(x, y, t) &= w(x, y) \omega \text{cos}(\omega t) \\ \ddot{w}(x, y, t) &= -w(x, y) \omega^2 \text{sen}(\omega t) \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde  $w(x, y)$  descreve os modos de vibração, é a função de forma, e  $\omega$  é a frequência natural da placa dada em rad/s. Trabalhando com as equações chega-se em, suprimindo a dependência das coordenadas (x,y) apenas por praticidade na escrita:

$$\nabla^4 w - \frac{\bar{m}\omega^2}{D} w = 0 \quad (3.33)$$

Utilizar-se-á a técnica da separação de variáveis para proceder aos cálculos e obter a resposta de frequência da equação de vibração livre. Seja:

$$w(x, y) = H(x)F(y) \quad (3.34)$$

Lembrando do operador Laplaciano bi-harmônico e sua formulação nas equações (3.17) e (3.18):

$$\nabla^4 w - \frac{\bar{m}\omega^2}{D} w = H''''F + 2H''F'' + HF'''' - \frac{\bar{m}\omega^2}{D} HF = 0 \quad (3.35)$$

Para a condição de contorno simplesmente apoiada, equação (3.24), aplicada nas quatro bordas da placa, a função de forma pode se dar pela dupla série de Fourier.

$$w(x, y) = H(x)F(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right); \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.36)$$

As derivadas necessárias são:

$$\begin{aligned} H''''F &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ H''F'' &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ HF'''' &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Utilizando e combinando as equações (3.36), (3.37) na equação (3.35):

$$\begin{aligned}
& W_{mn}\pi^4 \left[ \frac{m^4}{a^4} + \frac{2m^2n^2}{a^2b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right] \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) - \\
& - \frac{\bar{m}\omega^2}{D} W_{mn} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = 0
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Resolvendo para  $\omega$  obtém-se a equação para as frequências naturais de uma placa qualquer com dimensões a e b simplesmente apoiada nas quatro bordas. Vale ressaltar que a massa por unidade de área é dada por  $\bar{m} = \rho h$ .

$$\omega = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\bar{m}}} \tag{3.39}$$

Ao utilizar a equação (3.39) calcula-se as frequências naturais da placa para qualquer combinação modal m,n. O termo m representa o número de meia-ondas no modo de vibração ao longo do eixo x e o n representa o número de meia-ondas ao longo do eixo y. (Szilard, 2004) indica que apesar de existirem combinações modais com a mesma frequência (combinação m=1; n=2 e m=2; n=1 por exemplo) os modos de vibração serão diferentes, apresentarão deformadas diferentes. Esse fato será mostrado em figuras dos deslocamentos dos modos apresentadas nos resultados.

Segundo (Ventsel, 2001) a primeira frequência natural (m=1; n=1) é denominada frequência natural fundamental.

Vale ressaltar que a equação (3.39) diz respeito a placa simplesmente apoiada apenas e para obter a solução analítica de outros casos de vinculação procede-se com a separação de variáveis e aplicação das condições de contorno referentes a cada caso:

Engaste:

$$\begin{aligned}
w_{x=0,x=a} = 0 & \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0,x=a} = 0 \\
w_{y=0,y=b} = 0 & \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0,y=b} = 0
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Livre:

$$\begin{aligned} (m_x)_{x=0,x=a} = 0 & \quad (V_x)_{x=0,x=a} = 0 \\ (m_y)_{y=0,y=b} = 0 & \quad e \quad (V_y)_{y=0,y=b} = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

As equações (3.24), (3.40) e (3.41) referem-se aos casos de placas com todas as bordas submetidas àquela condição de contorno. Obviamente que, em casos de combinações das diferentes condições de vinculação, deve-se aplicá-la apenas para as bordas necessárias (equação (3.40) apenas em  $x=a$  e  $y=0$ , por exemplo).

Tendo sido entendido o processo de obtenção da resposta, recorre-se à (Blevins, 1979), que condensou as soluções analíticas de diversos casos de vinculação em forma de tabelas, para obter as diversas soluções apresentadas mais adiante. Blevins valeu-se do trabalho de (Leissa, 1973) para apresentar as equações analíticas que fornecem as frequências naturais das placas, equações essas que serão apresentadas no apêndice D.

A Figura 3.6 apresenta padrões para a deformada dos modos de vibração de placas engastadas.

Resgatando a equação (3.39) a fim de realizar algumas operações na mesma para evidenciar relações e termos importantes, que influenciam de maneira contundente a resposta de frequência buscada. É válido utilizar de representações diferentes para a frequência, pois auxiliam em estudos paramétricos, representações gráficas e visualização dos principais parâmetros que controlam as frequências naturais. Portanto:

$$\omega = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)\rho h}} \Rightarrow \frac{\omega}{\pi^2} = \left[ m^2 + \left( \frac{a}{b} n \right)^2 \right] \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E}{12(1-\nu^2)\rho}} \quad (3.42)$$

$$\frac{\omega a}{\pi^2} \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)\rho}{E}} = \left[ m^2 + \left( \frac{a}{b} n \right)^2 \right] \frac{h}{a} \quad (3.43)$$

$$\Omega = \frac{\omega a}{\pi^2} \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)\rho}{E}} \Rightarrow \Omega = \left[ m^2 + \left( \frac{a}{b} n \right)^2 \right] \frac{h}{a} \quad (3.44)$$

A equação (3.44) mostra um parâmetro de frequência  $\Omega$  obtido pela multiplicação da frequência natural por algumas constantes presentes na equação geral. A equação (3.43) evidencia a relação  $\frac{h}{a}$  e mostra que a frequência é diretamente proporcional a mesma.

Outra relação de interesse representada é  $\frac{a}{b}n$  ou simplesmente  $\frac{a}{b}$ , enquanto este apresenta a evolução da frequência de acordo com a relação entre as dimensões da placa, aquele mostra a influência que o número de meia-ondas tem sobre a frequência natural. Pode-se definir parâmetros de frequência  $\Omega$  diferentes, alterando as constantes que multiplicam a frequência  $\omega$ , por exemplo  $\Omega = \omega a$ .



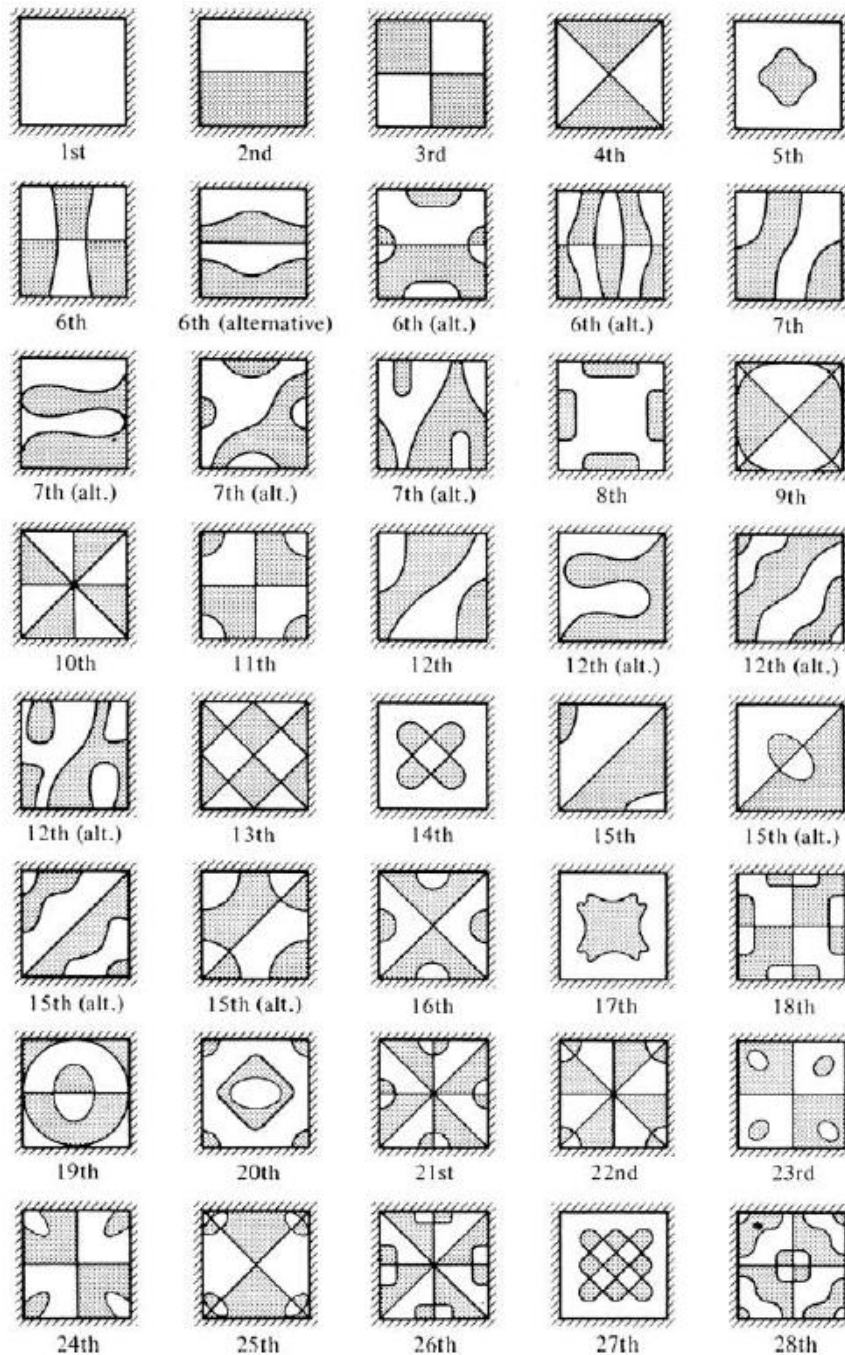


Figura 3.6 – Modos de vibração para placas engastadas (Szilard, 2004)

### 3.4.1 Deformadas modais

(Soedel, 2004) apresenta o desenvolvimento para as deformadas modais. O processo será descrito de maneira sucinta para obter a resposta final e aplica-la posteriormente a fim de comparar essa deformada obtida analiticamente com as deformadas modais obtidas numericamente (pelo ANSYS).

Primeiramente, considera-se a placa simplesmente apoiada ao longo de duas bordas opostas, no eixo  $x$ . Levando em consideração as condições de contorno mostradas na equação (3.24), elas estarão satisfeitas caso:

$$w(x, y) = Y(y) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (3.45)$$

Levando a resposta da equação (3.45) na equação de movimento (3.33) obtém-se:

$$\frac{d^4 Y}{dy^4} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 Y}{dy^2} + \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - \frac{\rho h}{D} \omega^2\right] Y = 0 \quad (3.46)$$

A solução dessa equação diferencial de quarta ordem precisa satisfazer as quatro condições de contorno do apoio (duas condições em cada borda). Substituindo, na equação (3.46), a solução apresentada na equação (3.47) desenvolve-se a resposta de  $Y(y)$ .

$$Y(y) = \sum_{i=1}^4 C_i e^{\lambda_i (y/b)} \quad (3.47)$$

$$\left(\frac{\lambda_i}{b}\right)^4 - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\lambda_i}{b}\right)^2 + \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - \frac{\rho h}{D} \omega^2\right] = 0 \quad (3.48)$$

$$\lambda_i = \pm \frac{b}{a} m\pi \sqrt{1 \pm K}$$

onde  $K = \frac{\omega}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}}}$  com o denominador sendo a equação para cálculo da frequência

de uma viga simplesmente apoiada. Logo,  $K > 1$  e procede-se com o seguinte desenvolvimento:

$$\lambda_1 = r_1 \quad \lambda_2 = -r_1 \quad \lambda_3 = ir_2 \quad \lambda_4 = -ir_2 \quad (3.49)$$

$$r_1 = \frac{b}{a} m\pi\sqrt{K+1} \quad r_2 = \frac{b}{a} m\pi\sqrt{K-1} \quad (3.50)$$

A solução estipulada na equação (3.47), escrita com todas as suas parcelas, é:

$$Y(y) = C_1 e^{r_1(y/b)} + C_2 e^{-r_1(y/b)} + C_3 e^{ir_2(y/b)} + C_4 e^{-ir_2(y/b)} \quad (3.51)$$

Trabalhando com as constantes:

$$C_1 = \frac{A+B}{2} \quad C_2 = \frac{A-B}{2} \quad C_3 = \frac{C+D}{2i} \quad C_4 = \frac{C-D}{2i} \quad (3.52)$$

Utilizando relações trigonométricas e definições das funções seno e cosseno hiperbólicos:

$$Y(y) = A \cosh\left(r_1 \frac{y}{b}\right) + B \sinh\left(r_1 \frac{y}{b}\right) + C \cos\left(r_2 \frac{y}{b}\right) + D \sin\left(r_2 \frac{y}{b}\right) \quad (3.53)$$

#### 3.4.1.1 Placa apoiada nas outras duas bordas

Assumindo que as outras duas bordas opostas estão, também, simplesmente apoiadas, no eixo  $y$ , aplica-se as condições de contorno do caso apoiado para a equação (3.53), ou seja, a equação de  $Y(y)$  deve satisfazer as condições expressas na equação (3.24).

$$\begin{aligned} C + A = 0 & \quad A \cosh(r_1) + B \sinh(r_1) + C \cos(r_2) + D \sin(r_2) = 0 \\ Ar_1^2 - Cr_2^2 = 0 & \quad Ar_1^2 \cosh(r_1) + Br_1^2 \sinh(r_1) - Cr_2^2 \cos(r_2) - Dr_2^2 \sin(r_2) = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Expandindo o determinante do sistema de equações definido em (3.54) e igualando a 0, obtém-se:

$$(r_1^2 + r_2^2)^2 \sinh(r_1) \sin(r_2) = 0 \quad (3.55)$$

Para soluções não triviais, apenas  $\sin(r_2)$  pode ser nulo. Portanto:

$$r_2 = n\pi \Rightarrow K = \left(\frac{n}{m}\right)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 \quad (3.56)$$

Ao substituir a equação (3.56) em  $K = \frac{\omega}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}}}$ , obtém-se a equação (3.39) para

calcular as frequências naturais de uma placa totalmente apoiada. Para obter as deformadas modais resolve-se o sistema de equações descrito em (3.54) para três dos quatro coeficientes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \cosh(r_1) & \sinh(r_1) & \cos(r_2) \\ r_1^2 & 0 & -r_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = -D \begin{Bmatrix} 0 \\ \sin(r_2) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.57)$$

Como resposta obtém-se:

$$\frac{A}{D} = 0 \quad \frac{B}{D} = 0 \quad \frac{C}{D} = 0 \quad Y(y) = D \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.58)$$

Substituindo na equação (3.45):

$$w(x, y) = D \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (3.59)$$

(Szilard, 2004) afirma que o modo de vibração de uma placa totalmente apoiada em suas bordas é uma curva senoidal simples nas duas direções, x e y (de acordo com a equação (3.59)).

Para o caso de mesma frequência natural e deformadas diferentes, m=1; n=2 e m=2; n=1, por exemplo, desde que a razão a/b seja racional, pode-se superpor as deformadas dos dois modos, obtendo:

$$w(x, y) = D \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + C \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad (3.60)$$

A equação (3.59) fornece as deformadas modais evidenciando as meia-ondas nas direções  $x$  e  $y$ , mas nunca fornecerá a deformada de maneira alternativa. Ao se utilizar a equação (3.60) é possível verificar as deformadas alternativas para os modos de vibração.

(Szilard, 2004) atesta que as constantes são arbitrárias podendo utilizar a equação (3.60) como equação geral, obtendo as deformadas alternativas quando  $D = -C$  e  $D = C$ , e obtendo as deformadas que evidenciam as meia-ondas quando  $D = 0$  e  $C \neq 0$  ou  $D \neq 0$   $C = 0$ .

#### 3.4.1.2 Placa engastada nas outras duas bordas

Assumindo que as outras duas bordas opostas estão engastadas, no eixo  $y$ , aplica-se as condições de contorno do caso engastado para a equação (3.53), ou seja, a equação de  $Y(y)$  deve satisfazer as condições expressas na equação (3.40).

$$\begin{aligned} C + A = 0 & \quad A \cosh(r_1) + B \sinh(r_1) + C \cos(r_2) + D \sin(r_2) = 0 \\ B \frac{r_1}{b} + D \frac{r_2}{b} = 0 & \quad A \frac{r_1}{b} \sinh(r_1) + B \frac{r_1}{b} \cosh(r_1) - C \frac{r_2}{b} \sin(r_2) + D \frac{r_2}{b} \cos(r_2) = 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Expandindo o determinante do sistema de equações definido em (3.61) e igualando a 0, obtém-se:

$$2r_1 r_2 (\cosh(r_1) \cos(r_2) - 1) + (r_2^2 - r_1^2) \sinh(r_1) \sin(r_2) = 0 \quad (3.62)$$

Resolvendo a equação (3.62) para as raízes  $K_n$  e substituindo em  $K = \frac{\omega}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}}}$ :

$$K_n m^2 \pi^2 = a^2 \omega_{mn} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (3.63)$$

Os valores de  $K_n m^2 \pi^2$  são os valores de  $\alpha^2$  que constam na Tabela D.1. As deformadas dos modos de vibração são obtidas resolvendo o sistema (3.61) para três dos quatro coeficientes e definindo as equações expressas em (3.64)

$$r_{1n} = \frac{b}{a} m\pi \sqrt{K_n + 1} \quad r_{2n} = \frac{b}{a} m\pi \sqrt{K_n - 1} \quad (3.64)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{senh}(r_{1n}) & \cos(r_{2n}) & \operatorname{sen}(r_{2n}) \\ r_{1n} & 0 & r_{2n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = -A \begin{Bmatrix} 1 \\ \cosh(r_{1n}) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.65)$$

Como resposta obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= -\frac{r_{2n}(\cos(r_{2n}) - \cosh(r_{1n}))}{r_{1n}\operatorname{sen}(r_{2n}) - r_{2n}\operatorname{senh}(r_{1n})} \\ \frac{C}{A} &= -\frac{r_{1n}\operatorname{sen}(r_{2n}) - r_{2n}\operatorname{senh}(r_{1n})}{r_{1n}\operatorname{sen}(r_{2n}) - r_{2n}\operatorname{senh}(r_{1n})} = -1 \\ \frac{D}{A} &= -\frac{r_{1n}(\cosh(r_{1n}) - \cos(r_{2n}))}{r_{1n}\operatorname{sen}(r_{2n}) - r_{2n}\operatorname{senh}(r_{1n})} = -\frac{r_{1n}B}{r_{2n}A} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Substituindo na equação (3.53) e posteriormente na equação (3.45):

$$\begin{aligned} w(x, y) &= A \left[ \left( \cosh\left(\frac{r_{1n}y}{b}\right) - \cos\left(\frac{r_{2n}y}{b}\right) \right) - \frac{r_{2n}(\cos(r_{2n}) - \cosh(r_{1n}))}{r_{1n}\operatorname{sen}(r_{2n}) - r_{2n}\operatorname{senh}(r_{1n})} \times \right. \\ &\times \left. \left( \operatorname{senh}\left(\frac{r_{1n}y}{b}\right) - \frac{r_{1n}}{r_{2n}} \operatorname{sen}\left(\frac{r_{2n}y}{b}\right) \right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \end{aligned} \quad (3.67)$$

A constante A também será arbitrária, os valores de  $r_{1n}$  e  $r_{2n}$  dependem da combinação modal para a qual pretende-se achar a deformada e esta será representada evidenciando as meia-ondas nas direções x e y.

### 3.5 ANÁLISE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A modelagem numérica foi feita pelo método dos elementos finitos por meio do software ANSYS, sendo possível obter as mais diversas respostas, como deslocamento, esforços e também uma representação gráfica dessas grandezas.

Escolheu-se, para a modelagem, o elemento SHELL281 em virtude de suas propriedades, rápida convergência das respostas e dados de saída pertinentes, como o momento fletor, por exemplo, que não é um dado de saída de todos os elementos contidos no programa. O elemento se utiliza, ainda, da teoria de Reissner-Mindlin, o que indica a validade do elemento para análises de placas finas e espessas.

O elemento é adequado para análises de placas ou cascas finas e espessas. Possui seis graus de liberdade em cada um dos seus oito nós (translação nos eixos x, y e z, e rotação ao redor de x, y e z). Pode simular comportamento de membrana utilizando uma de suas opções, sendo que, neste caso, apresenta apenas os graus de liberdade translacionais. Caracteriza-se num bom elemento para análises lineares, não-lineares ou de grande rotação. A geometria do elemento SHELL281 é mostrada na Figura 3.7. Seus oito nós estão representados por letras e os números nos círculos indicam cada uma das superfícies. A forma triangular também pode ser utilizada, conforme representado na Figura 3.7, porém, nesse trabalho, utilizou-se apenas a forma quadrilateral do elemento, uma vez que até a biblioteca do ANSYS desaconselha o uso da vertente triangular e a divisão de uma placa quadrilateral em elementos quadrilaterais é, não só intuitiva, como também o procedimento mais correto.

O fato do elemento apresentar um nó intermediário em cada face, resultando em oito nós, caracteriza-o como um elemento de ordem mais alta que um elemento com apenas quatro nós, um em cada vértice, canto do elemento. Isso permite que o elemento modele melhor contornos e condições curvas. O nó intermediário fornece uma variação parabólica para os deslocamentos naquela face enquanto que, sem esse nó, o deslocamento varia de forma linear.

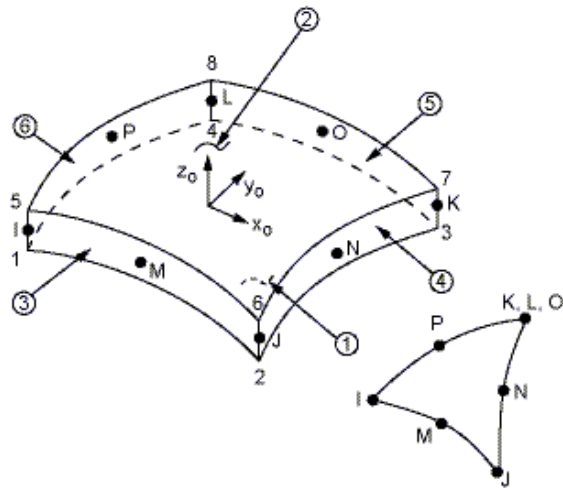


Figura 3.7 – Geometria do elemento SHELL281 (Biblioteca do ANSYS)

Vários itens são ilustrados nos resultados de tensão, a saída de impressão inclui o momento sobre a face x e ao redor do eixo y ( $M11=M_x$ ), o momento sobre a face y e ao redor do eixo x ( $M22=M_y$ ) e o momento de torção ( $M12=M21=M_{xy}$ ). Os momentos são calculados por unidade de comprimento no sistema de coordenadas do elemento e as direções de tensão são paralelas a esse sistema. A descrição geral está representada na Figura 3.8.

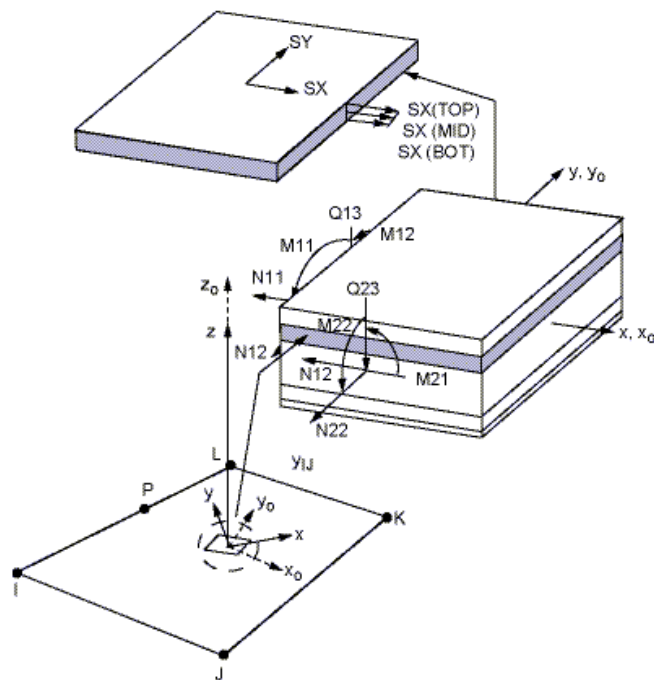


Figura 3.8 – Tensões e momentos no elemento SHELL281 (Biblioteca do ANSYS)



Não são permitidos elementos de área igual à zero, isto acontece frequentemente quando os elementos não são numerados corretamente, e não são permitidos elementos de espessura nula. A deflexão de cisalhamento está incluída nesse elemento. Uma malha desse elemento produz boas aproximações para superfícies curvas.

De acordo com (Cook, 1995) deve-se evitar elementos muito grandes por não representarem variações importantes das quantidades buscadas e evitar o uso excessivo de elementos. Assim, torna-se um exagero refinar a malha indefinidamente, deve-se buscar a convergência dos resultados. Outro fator importante é o tempo de análise, pois análises dinâmicas demandam bastante recurso computacional.

Um modelo de análise encontra-se representado na Figura 3.9, pode-se perceber a divisão de uma placa quadrada em vários elementos quadrados iguais entre si. As cores diferentes é apenas a forma do programa indicar que tratam-se de elementos distintos, embora possam ter as mesmas propriedades. As análises desse trabalho seguirão essa premissa, divisão de uma placa quadrilateral em elementos quadrilaterais, buscando a convergência dos resultados, ou seja, refinando cada vez mais a malha.

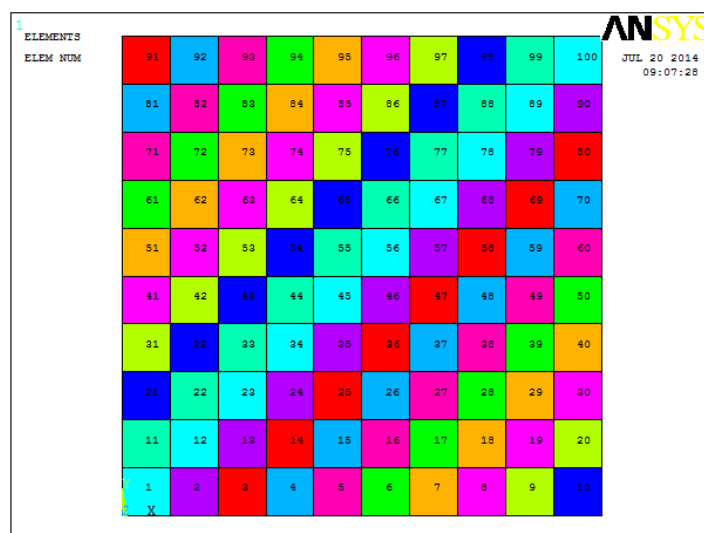


Figura 3.9 – Malha de elementos finitos

É interessante definir uma relação de elementos na malha para poder inferir a quantidade de elementos necessários em uma estrutura similar a trabalhada. A relação indicará, ao invés do número bruto de elementos utilizados, a quantidade de elementos utilizada ou a se utilizar ao longo de um lado. Escolheu-se, para isso, trabalhar com o tamanho do elemento

representado na equação (3.68) na qual o número de elementos representa a quantidade de elementos utilizados ao longo da borda da placa (lado da placa) e  $a$  é o comprimento da placa em questão:

$$\xi = \frac{a}{N^{\circ}_{\text{elementos}}} \quad (3.68)$$

As condições de contorno pertinentes serão aplicadas nos nós das bordas de acordo com suas especificações. A Figura 3.10 mostra um exemplo de combinação das condições de contorno estudadas. A borda da esquerda está apoiada, a da direita está engastada e as demais estão livres. Ao longo do eixo  $z$  (sentido para fora do plano do papel) também há um símbolo da condição aplicada, não foi mostrado pois a figura está mostrando o plano  $xy$  que contém a placa.

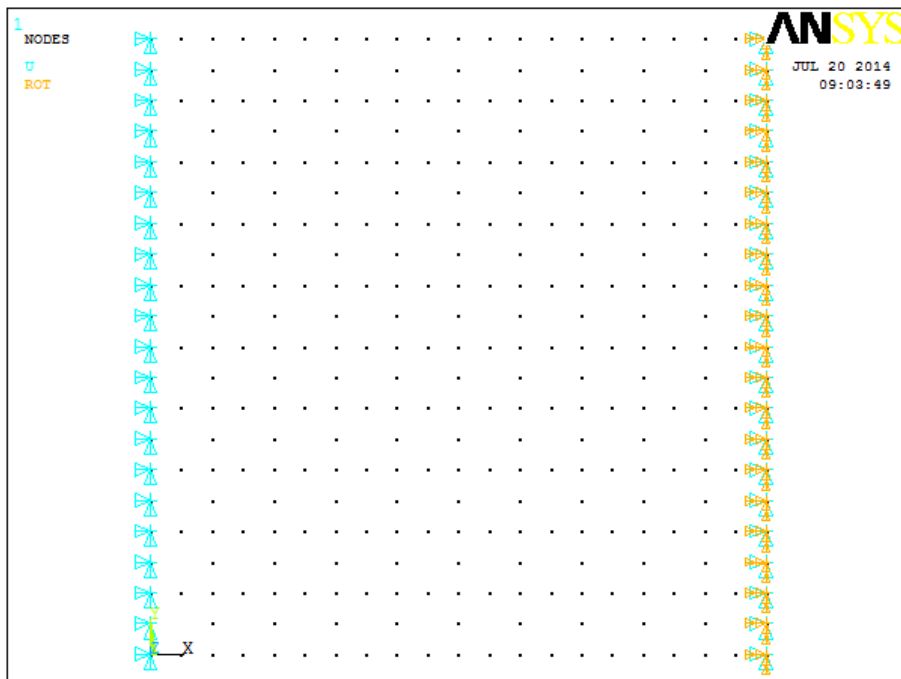


Figura 3.10 – Condições de contorno aplicadas aos nós externos

## **4 RESULTADOS**

Neste capítulo, apresentam-se diversos resultados de frequências referentes às análises realizadas pelo método dos elementos finitos (utilizando o software ANSYS) e comparações com as respostas analíticas obtidas com o auxílio de (Blevins, 1979). Há, também, uma análise comparativa entre o método das diferenças finitas e a solução analítica para um caso estudado.

### **4.1 TESTES E QUALIFICAÇÃO DO ELEMENTO UTILIZADO**

Primeiramente, realiza-se uma análise estática a fim de conhecer o elemento adotado, aprender alguns de seus usos e obter uma idéia da acurácia do mesmo. Embora uma verificação da aproximação da resposta estática, mediante gráficos e tabelas de erros, não seja representativa para o caso dinâmico, é possível ter noção da quantidade de elementos a utilizar. A placa estática, nome dado a esta placa analisada estaticamente, terá as mesmas dimensões e propriedades do material que as placas analisadas dinamicamente, com a diferença de um carregamento uniformemente distribuído sobre a mesma.

Em seguida, realizam-se análises dinâmicas de placas com resultados conhecidos, para tal utilizam-se três placas estudadas por (Silva, 1998) em sua dissertação de mestrado. Silva fornece resultados analíticos e numéricos, os quais serão usados para comparação. Os fatores de interesse nesses resultados são a resolução numérica realizada pelo autor, utilizando um tipo de elemento finito diferente do SHELL281 e sem utilizar o ANSYS, portanto, explora-se a validade do elemento escolhido e do programa utilizado para as análises comparando com as boas respostas obtidas por Silva, e a resposta apresentada para uma placa espessa, podendo verificar quão eficaz é o elemento adotado para este caso.

#### **4.1.1 Placa sob carregamento estático**

O caso a ser resolvido é o de uma placa quadrada simplesmente apoiada em suas quatro bordas (os apoios são representados por linhas tracejadas), conforme Figura 4.1. Nesse caso  $a$  e  $b$  são iguais, pois a placa é quadrada. Ela possui espessura  $h$ , a qual define em qual grupo será classificada a placa (fina, espessa, membrana ou moderadamente espessa) de

acordo com a relação  $h/a$ . Ao longo de todo esse trabalho manter-se-á a dimensão  $a$  na direção  $x$  e a dimensão  $b$  na direção  $y$ .

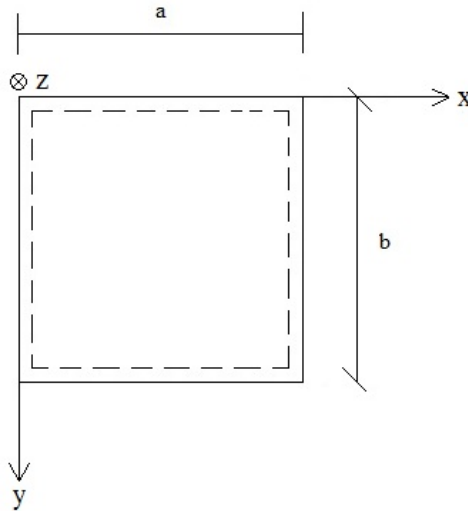


Figura 4.1 – Placa apoiada nas quatro bordas

A placa é feita de concreto com as seguintes propriedades do material:  $E=30$  GPa,  $\rho=2500$  kg/m<sup>3</sup>,  $\nu=0,3$ . Suas dimensões são:  $a=b=6$  m e  $h=0,1$  m. Há, ainda, um carregamento uniformemente distribuído na superfície da placa, entrando no plano da mesma (direção  $z$  positiva),  $P=5000$ N/m<sup>2</sup>. De acordo com o exposto no capítulo 3 a placa é fina.

Realizam-se testes de convergência para a resposta numérica, tendo como valor de referência os resultados analíticos, para três grandezas de interesse: deslocamento  $w$  no centro da placa ( $x=a/2$  e  $y=b/2$ ), momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$  no centro da placa ( $x=a/2$  e  $y=b/2$ ) e momento  $M_{xy}$  na origem do eixo cartesiano ( $x=0$  e  $y=0$ ).

Nas tabelas a seguir, encontram-se os resultados analíticos e numéricos para as grandezas referidas anteriormente, bem como o erro calculado. Os resultados analíticos foram obtidos por meio da solução de Navier (seção 3.3) utilizando seis termos da série. Os erros foram

$$\text{calculados mediante a equação: } E(\%) = \frac{f_{\text{numérico}} - f_{\text{analítico}}}{f_{\text{analítico}}} \times 100.$$

Tabela 4.1 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos do deslocamento  $w$

$\xi$	Numérico		Analítico	Erro (%)
	$w$ (m)	$w$ (m)		
3	0,010332	0,0098280	0,0098280	5,128
1,5	0,0098522	0,0098280	0,0098280	0,246
0,75	0,009737	0,0098280	0,0098280	-0,926
0,6	0,0097329	0,0098280	0,0098280	-0,968
0,429	0,0097326	0,0098280	0,0098280	-0,971
0,3	0,0097328	0,0098280	0,0098280	-0,969
0,2	0,0097328	0,0098280	0,0098280	-0,969
0,1	0,0097329	0,0098280	0,0098280	-0,968

Tabela 4.2 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos dos momentos  $M_x$  e  $M_y$

$\xi$	$M_y$			
	Numérico		Analítico	
	$M_x = M_y$ (Nm/m)	$M_x = M_y$ (Nm/m)		
3	4392,6	9749,1	9749,1	-54,943
1,5	7582,4	9749,1	9749,1	-22,225
0,75	8412,1	9749,1	9749,1	-13,714
0,6	8518,1	9749,1	9749,1	-12,627
0,429	8612,9	9749,1	9749,1	-11,654
0,3	8663,6	9749,1	9749,1	-11,134
0,2	8690,7	9749,1	9749,1	-10,856
0,1	8707,0	9749,1	9749,1	-10,689

Tabela 4.3 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos do momento  $M_{xy}$

$\xi$	Numérico		Análítico $M_{xy}$ (Nm/m)	Erro (%)
	$M_{xy}$ (Nm/m)			
3	-2202,6		-5249,5	58,042
1,5	-4405,9		-5249,5	16,070
0,75	-5243,8		-5249,5	0,109
0,6	-5320,6		-5249,5	-1,354
0,429	-5283,8		-5249,5	-0,653
0,3	-5084,0		-5249,5	3,153
0,2	-5387,6		-5249,5	-2,631
0,1	-5711,8		-5249,5	-8,806

Em virtude da natureza quadrada da placa ( $a=b$ ) os valores de  $M_x$  e  $M_y$  foram iguais. Buscaram-se os valores máximos, em pontos onde os valores das grandezas são máximos, para efetuar as comparações.

Observa-se a excelente aproximação dos deslocamentos, já esperado em virtude dos bons resultados que o ANSYS apresenta para deslocamentos e pelo fato dos deslocamentos serem dados por uma equação direta que não envolve derivada. Já para os momentos  $M_x$  e  $M_y$ , a equação envolve duas derivadas, derivada de segunda ordem em relação à mesma direção  $x$  ou  $y$ . Para o caso de  $M_{xy}$  a equação envolve uma derivada cruzada também de segunda ordem, deriva-se em  $x$  e em  $y$ . Como a função a ser derivada é a função que fornece o valor do deslocamento, é de se esperar que os erros para os momentos sejam maiores, como observado nas Tabelas 4.1 a 4.3.

Apesar dos erros constatados para as respostas dos momentos, os resultados foram satisfatórios, pois há uma clara convergência em todos os casos estudados e os momentos convergiram para um erro em torno de 10%, resultado ainda aceitável. Logo, verificou-se a boa eficácia do elemento e rápida convergência dos resultados.

Esses fatos permitem criar boas expectativas quanto à resposta dinâmica ao discretizar a placa com esse elemento. A seguir encontram-se os gráficos referentes às Tabelas 4.1 a 4.3.

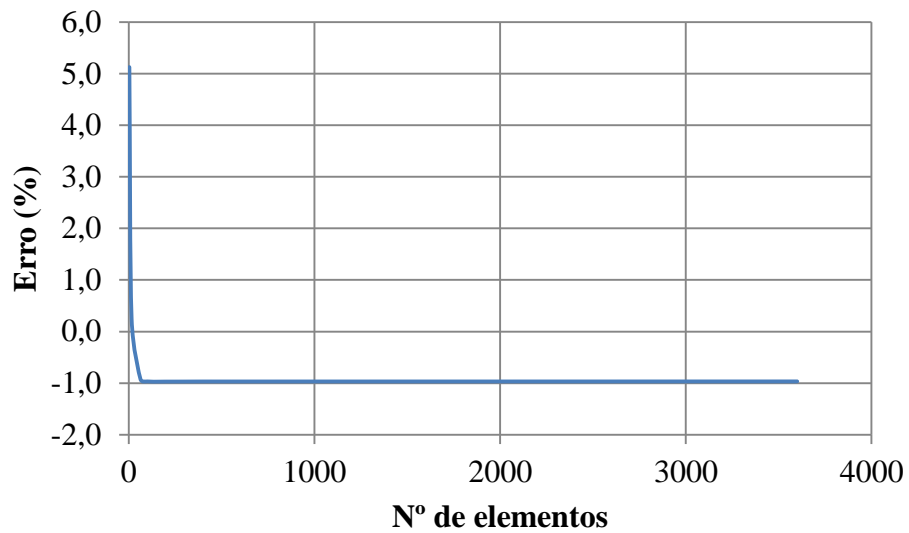


Figura 4.2 – Convergência dos resultados do deslocamento  $w$

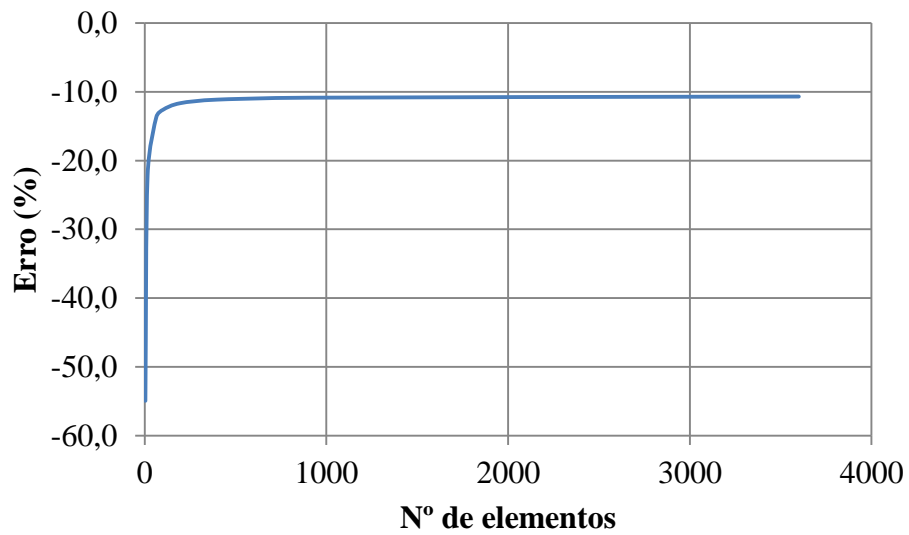


Figura 4.3 – Convergência dos resultados dos momentos  $M_x$  e  $M_y$

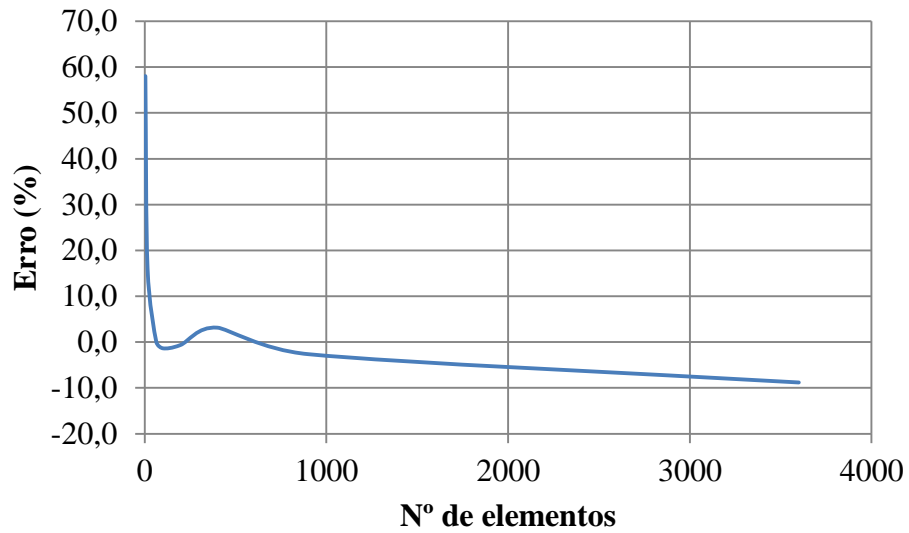


Figura 4.4 – Convergência dos resultados do momento  $M_{xy}$

#### 4.1.2 Placas em vibração livre

Os casos a serem resolvidos são de placas quadradas, sendo duas placas engastadas e uma placa com uma borda engastada e três bordas livres, conforme Figuras 4.5 e 4.6. São definidas, também, por suas propriedades geométricas, lados  $a$  e  $b$  e espessura  $h$ , e propriedades do material.

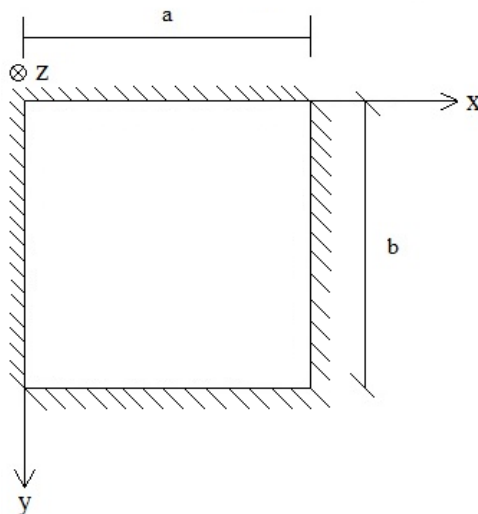


Figura 4.5 – Placa engastada nas quatro bordas



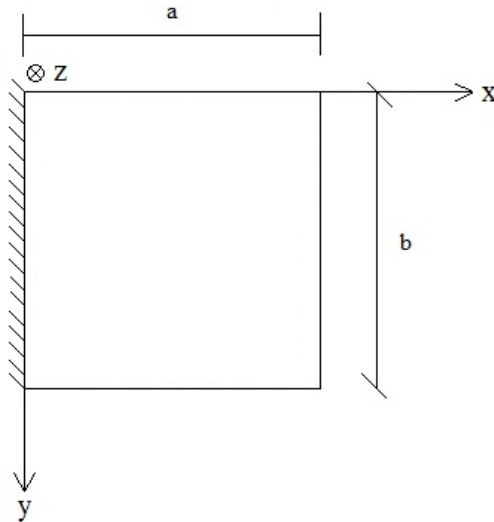


Figura 4.6 – Placa engastada em apenas uma borda

#### 4.1.2.1 Placa engastada nas quatro bordas

A placa escolhida foi definida e resolvida por (Silva, 1998), é feita de concreto com as seguintes propriedades do material, sem qualquer relação com valores físicos usuais:  $E=1365 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho=1 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu=0,3$ . Suas dimensões são:  $a=b=3 \text{ m}$  e  $h=0,03 \text{ m}$ . De acordo com o exposto no capítulo 3 a placa é fina.

Na Tabela 4.4, encontram-se os resultados analíticos e numéricos para as frequências naturais, bem como o erro calculado. Os erros foram calculados mediante a equação:

$E(\%) = \frac{f_{numérico} - f_{analítico}}{f_{analítico}} \times 100$ . O parâmetro de frequência é definido por:

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{2(1+\nu)\rho a^2}{E}}$$

Tabela 4.4 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos para as primeiras frequências naturais de uma placa fina

$\xi$	m	n	Numérico			Analítico*	Erro (%)
			f (Hz)	$\omega$ (rad/s)	$\Omega$	$\Omega$	
0,6	1	1	0,213	1,341	0,176	0,176	-0,243
	2	1	0,436	2,737	0,358	0,358	0,098
	1	2	0,436	2,737	0,358	0,358	0,098
	2	2	0,645	4,050	0,530	0,528	0,422
0,3	1	1	0,213	1,340	0,175	0,176	-0,350
	2	1	0,434	2,730	0,357	0,358	-0,168
	1	2	0,434	2,730	0,357	0,358	-0,168
	2	2	0,640	4,021	0,527	0,528	-0,282
0,2	1	1	0,213	1,340	0,175	0,176	-0,350
	2	1	0,434	2,729	0,357	0,358	-0,175
	1	2	0,434	2,729	0,357	0,358	-0,175
	2	2	0,640	4,021	0,526	0,528	-0,291

\*Resultados retirados de (Silva, 1998)

Silva (1998) encontrou erros entre 2% e 8% em suas análises, enquanto o elemento utilizado no presente trabalho apresentou todos os erros menores que 1%, mostrando, então, a eficácia do elemento, excelente aproximação com a teoria analítica e rápida convergência dos resultados, bem parecido com as respostas de deslocamento obtidas na análise estática feita anteriormente.

Em seguida utiliza-se a mesma placa engastada, mas aumenta-se a espessura para  $h=0,3$  m, fazendo com que a classificação mude de placa fina para placa espessa ou moderadamente espessa (dependendo da referência utilizada, conforme capítulo 3). De qualquer forma, as equações que regem o comportamento de uma placa fina não se aplicam nesse novo caso.

Verificar-se-á, portanto, a validade do elemento finito para placas espessas mediante comparação com os resultados analíticos fornecidos por (Silva, 1998) baseados na solução comparativa de (Dawe & Roufaeil, 1980). De acordo, tem-se a Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos para as primeiras frequências naturais de uma placa espessa

$\xi$	m	n	Numérico			Analítico*	Erro (%)
			f (Hz)	$\omega$ (rad/s)	$\Omega$	$\Omega$	
0,6	1	1	1,929	12,122	1,587	1,594	-0,429
	2	1	3,682	23,134	3,029	3,046	-0,559
	1	2	3,682	23,134	3,029	3,046	-0,559
	2	2	5,161	32,424	4,245	4,285	-0,925
0,3	1	1	1,929	12,121	1,587	1,594	-0,439
	2	1	3,680	23,121	3,027	3,046	-0,613
	1	2	3,680	23,121	3,027	3,046	-0,613
	2	2	5,158	32,406	4,243	4,285	-0,983
0,2	1	1	1,929	12,121	1,587	1,594	-0,439
	2	1	3,680	23,121	3,027	3,046	-0,616
	1	2	3,680	23,121	3,027	3,046	-0,616
	2	2	5,157	32,404	4,243	4,285	-0,987

\*Resultados retirados de (Silva, 1998)

Silva (1998) encontrou resultados melhores para o caso da placa espessa, com erros de no máximo 3,6%, ao passo que os erros encontrados neste trabalho estão todos abaixo de 1%.

#### 4.1.2.2 Placa engastada em apenas uma borda

A placa é feita de aço com as seguintes propriedades do material:  $E=200$  GPa,  $\rho=7800$  kg/m<sup>3</sup>,  $\nu=0,3$ . Suas dimensões são:  $a=b=3$  m e  $h=0,03$  m. De acordo com o exposto no capítulo 3 a placa é fina.

Na Tabela 4.6, encontram-se os resultados analíticos e numéricos para as frequências naturais, bem como o erro calculado. Os erros foram calculados mediante a equação:

$E(\%) = \frac{f_{numérico} - f_{analítico}}{f_{analítico}} \times 100$ . O parâmetro de frequência é definido por:

$$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)\rho h}{Eh^3}}$$

Tabela 4.6 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos para as primeiras frequências naturais de uma placa fina com três bordas livres e uma engastada

$\xi$	m	n	Numérico			Analítico*	Erro (%)
			f (Hz)	$\omega$ (rad/s)	$\Omega$	$\Omega$	
0,6	1	1	2,822	17,728	3,471	3,49	-0,551
	2	1	17,292	108,649	21,271	21,43	-0,741
	1	3	22,069	138,664	27,147	27,33	-0,668
0,3	1	1	2,821	17,724	3,470	3,49	-0,572
	2	1	17,285	108,605	21,262	21,43	-0,782
	1	3	22,065	138,638	27,142	27,33	-0,686
0,2	1	1	2,821	17,724	3,470	3,49	-0,572
	2	1	17,285	108,605	21,262	21,43	-0,782
	1	3	22,065	138,638	27,142	27,33	-0,686

\*Resultados retirados de (Silva,1998)

Silva encontrou erros de até 5% em suas análises, enquanto o elemento utilizado neste trabalho apresentou todos os erros menores que 1%, mostrando assim, a eficácia do elemento, excelente aproximação com a teoria analítica e rápida convergência dos resultados, mesmo com a mudança da condição de contorno. Portanto pode-se utilizar o elemento indiscriminadamente, desde que os passos de implementação no programa estejam corretos, ele funcionará bem para qualquer análise dinâmica de placas.

## 4.2 RESULTADOS NUMÉRICOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

As análises propostas são de placas quadradas de concreto, definidas pela geometria, propriedades do material e condições de contorno delas. Os casos estudados diferem entre si nas condições de contorno, ao todo 21 casos, cada um com uma combinação diferente

das condições engastada, apoiada e livre aplicadas às quatro bordas da placa. As propriedades do material e a geometria das placas permanecerão iguais para cada caso, assim, tem-se um estudo da influência das condições de contorno na resposta de frequência (magnitude, combinações modais). As respostas buscadas são as frequências naturais, mais precisamente as seis primeiras frequências percebidas. Haverá comparação com resultados analíticos fornecidos por (Blevins, 1979), equações fornecidas no apêndice D, que, por sua vez, adaptou-os de (Leissa, 1973).

A Figura 4.7 mostra a placa padrão a ser estudada, cada número na borda da placa será utilizado para referenciar facilmente qual condição de contorno será aplicada em determinada borda (A para apoiado, E para engastado e L para livre). Como as placas serão quadradas as dimensões  $a$  e  $b$  são iguais e tem-se  $a$  na direção  $x$  e  $b$  na direção  $y$ .

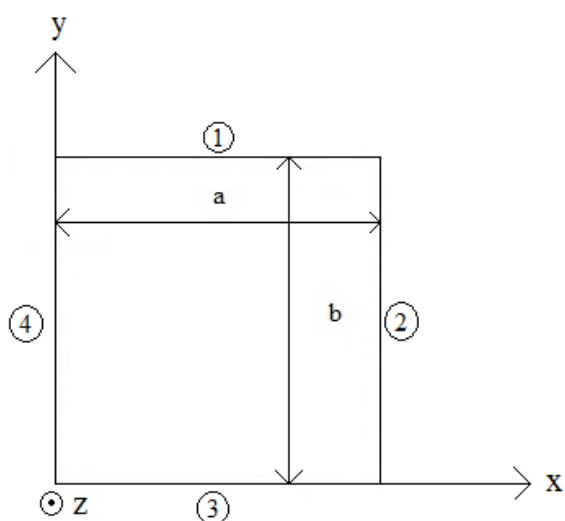


Figura 4.7 – Placa padrão a ser resolvida

É interessante definir os valores que serão constantes para todos os casos analisados, logo tem-se:  $a=b=6$  m,  $\rho=2500$  kg/m<sup>3</sup>,  $E=30$  GPa e  $\nu=0,3$ . A espessura  $h$  e as condições nas bordas serão mostradas em cada caso.

#### 4.2.1 Caso 1 – Placa quadrada apoiada nas quatro bordas

Este caso é caracterizado pelas condições: 1-A, 2-A, 3-A e 4-A, conforme Figura 4.7. O primeiro caso foi escolhido como a placa toda apoiada devido à facilidade em sua manipulação e investigação, muitas referências que dizem a seu respeito e a equação

analítica completa. Serão feitos cinco casos diferentes no que concerne a espessura da placa:  $h=0,1$  m,  $h=0,2$  m,  $h=0,5$  m,  $h=1,0$  m e  $h=2,0$  m. Utilizando (Ventsel, 2001) percebe-se que para as espessuras de 0,1 m, 0,2 m e 0,5 m a placa é considerada fina e para as espessuras de 1,0 m e 2,0 m a placa é espessa. Realizam-se testes de convergência para as análises numéricas, tendo a resposta analítica como referência.

Já sabendo, da seção 4.1, que a resposta numérica será muito boa para todos os casos, pretende-se comprovar a validade das respostas analíticas de (Blevins, 1979), mostrando que realmente só vale para placas finas (teoria de Kirchhoff-Love). Como já visto, as respostas numéricas para placas espessas apresentam poucos erros, as respostas analíticas para os casos espessos serão obtidas pela teoria de placas finas, evidenciando grandes diferenças entre os valores numéricos e analíticos. Como se pode assumir que os valores numéricos estarão corretos, a teoria analítica não é válida de acordo com os erros muito grandes encontrados, sendo necessário obter os resultados analíticos por outra teoria.

Nas Tabelas 4.7 a 4.11 estão os resultados referentes ao maior número de elementos utilizados, deixando que as demais análises, com número menor de elementos, sejam representadas nos gráficos de convergência. Cada tabela é referente a um valor diferente de espessura. Apresentam-se as combinações modais, as frequências associadas a cada uma delas e o erro tomando o valor analítico como referência, sendo calculado por:

$$E(\%) = \frac{f_{numérico} - f_{analítico}}{f_{analítico}} \times 100. \text{ O cálculo das frequências, de maneira analítica, se dará}$$

pela equação (3.37) porque pretende-se mostrar mais modos de vibração do que os fornecidos por (Blevins, 1979) e expostos no Caso 1 da Tabela D.1.

Tabela 4.7 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 1 com  $h=0,1$  m

$\xi$	m	n	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,1	1	1	9,072	9,148	-0,832
	2	1	22,705	22,870	-0,722
	1	2	22,705	22,870	-0,722
	2	2	36,178	36,592	-1,132
	3	1	45,390	45,740	-0,765
	1	3	45,392	45,740	-0,761
	3	2	58,707	59,462	-1,270
	2	3	58,707	59,462	-1,270
	4	1	76,975	77,758	-1,007
	1	4	76,975	77,758	-1,007
	3	3	80,997	82,332	-1,622
	4	2	90,143	91,480	-1,462
	2	4	90,152	91,480	-1,452
	4	3	112,180	114,350	-1,898
	3	4	112,180	114,350	-1,898
	5	1	117,270	118,924	-1,391
	1	5	117,270	118,924	-1,391
	5	2	130,300	132,646	-1,769
	2	5	130,300	132,646	-1,769
	4	4	143,020	146,368	-2,288

Tabela 4.8 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 1 com  $h=0,2$  m

$\xi$	m	n	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,1	1	1	17,959	18,296	-1,842
	2	1	44,869	45,740	-1,904
	1	2	44,869	45,740	-1,904
	2	2	71,002	73,184	-2,982
	3	1	89,226	91,480	-2,464
	1	3	89,246	91,480	-2,442
	3	2	114,540	118,924	-3,687
	2	3	114,540	118,924	-3,687
	4	1	150,020	155,516	-3,534
	1	4	150,020	155,516	-3,534
	3	3	156,820	164,664	-4,764
	4	2	174,460	182,960	-4,646
	2	4	174,530	182,960	-4,608
	4	3	215,350	228,700	-5,837
	3	4	215,350	228,700	-5,837
	5	1	225,960	237,848	-4,998
	1	5	225,980	237,848	-4,990
	5	2	249,600	265,292	-5,915
	2	5	249,600	265,292	-5,915
	4	4	272,060	292,736	-7,063



Tabela 4.9 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 1 com  $h=0,5$  m

$\xi$	m	n	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,1	1	1	43,13	45,740	-5,706
	2	1	105,65	114,350	-7,608
	1	2	105,65	114,350	-7,608
	2	2	162,16	182,960	-11,369
	3	1	202,74	228,700	-11,351
	1	3	203,01	228,700	-11,233
	3	2	253,07	297,310	-14,880
	2	3	253,07	297,310	-14,880
	4	1	325,82	388,790	-16,197
	1	4	325,82	388,790	-16,197
	3	3	335,18	411,660	-18,579
	4	2	369,97	457,401	-19,115
	2	4	370,70	457,401	-18,955
	4	3	443,56	571,751	-22,421
	3	4	443,56	571,751	-22,421
	5	1	466,74	594,621	-21,506
1	5	466,95	594,621	-21,471	

Tabela 4.10 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 1 com h=1,0 m

$\xi$	m	n	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,1	1	1	78,929	91,480	-13,720
	2	1	182,54	228,700	-20,184
	1	2	182,54	228,700	-20,184
	2	2	265,55	365,920	-27,430
	3	1	324,95	457,401	-28,957
	1	3	326,13	457,401	-28,699
	3	2	391,02	594,621	-34,240
	2	3	391,02	594,621	-34,240
	4	1	486,76	777,581	-37,401
	1	4	486,76	777,581	-37,401
	3	3	495,48	823,321	-39,819
	4	2	538,46	914,801	-41,139
	2	4	540,93	914,801	-40,869

Tabela 4.11 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 1 com h=2,0 m

$\xi$	m	n	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,1	1	1	128,60	182,960	-29,711
	2	1	265,62	457,401	-41,928
	1	2	265,62	457,401	-41,928
	2	2	362,98	731,841	-50,402
	3	1	426,40	914,801	-53,389
	1	3	431,13	914,801	-52,872
	3	2	499,28	1189,241	-58,017
	2	3	499,28	1189,241	-58,017
	4	1	580,99	1555,162	-62,641
	1	4	580,99	1555,162	-62,641

É possível perceber, nas Tabelas 4.7 a 4.11, que os erros são maiores nas combinações modais mais altas, conforme (Blevins, 1979), a convergência é atingida com o aumento dos números de elementos na discretização. Há um erro intrínseco ao uso do programa, mas têm-se bons resultados como os da Tabela 4.7 com erros da ordem de 1%.

As Tabelas 4.10 e 4.11 comprovam, de acordo com os grandes erros, que não é possível utilizar a teoria de placas finas para obter respostas para placas espessas. Outro fato interessante é o aumento do erro ao passo que se aumenta a espessura, ou seja, os erros aumentam conforme a placa caminha para tornar-se espessa. De acordo com (Ventsel, 2001) e a classificação proposta para as placas (capítulo 3), as Tabelas 4.7 a 4.9 representam placas finas  $\left(\frac{h}{a} = 0,01666\dots, \frac{h}{a} = 0,0333\dots \text{ e } \frac{h}{a} = 0,08333\dots\right)$ , logo a teoria analítica tem aplicabilidade para esses casos, porém os erros aumentaram consideravelmente conforme se aproxima da relação limite entre placas finas e placas espessas  $\left(\frac{h}{a} = 0,1\right)$ .

Isso deve-se ao fato de o limite de placas finas não ser bem definido (variando de autor para autor) e ser proposto para casos estáticos. Portanto, percebe-se que não se pode usar indiscriminadamente o intervalo de placas finas para classificar as placas em análises dinâmicas, sendo que propõe-se o estreitamento do intervalo para considerações dinâmicas, diminuir o limite máximo do intervalo (embora alguns erros da Tabela 4.9, em especial dos modos mais baixos e de maior interesse prático, apresentem erros aceitáveis para projetos).

#### 4.2.1.1 Estudo da convergência

A seguir estão os gráficos de convergência referentes às Tabelas 4.7 a 4.11, mostrando como a convergência é boa e ocorre rapidamente, com poucos elementos finitos na malha. Para melhor visualização, plotou-se apenas os dados referentes às seis primeiras combinações modais e até se obter a convergência (embora tenham sido feitas análises com malhas mais discretizada, a convergência já havia sido atingida com uma malha mais grosseira). Os modos mais baixos são de maior interesse na engenharia, devido a isso apenas as seis primeiras frequências de cada placa serão estudadas nos próximos casos.

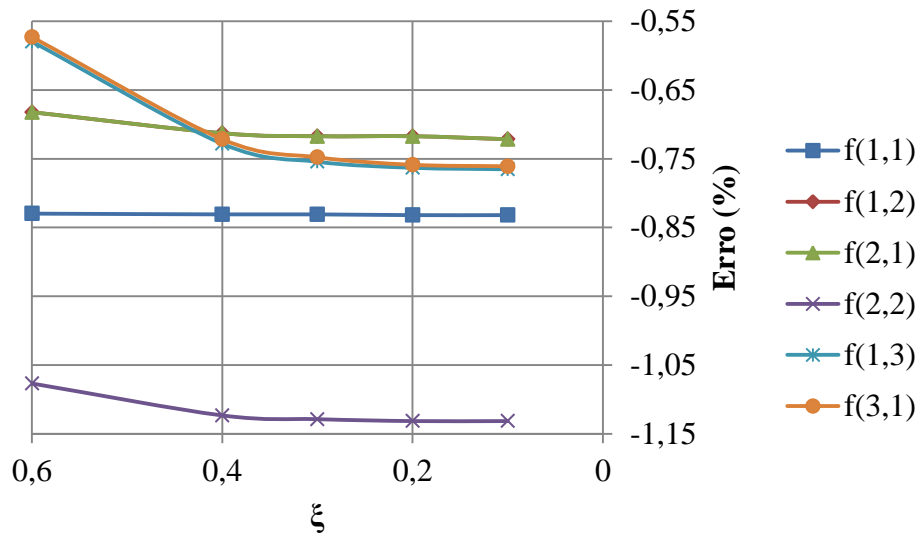


Figura 4.8 – Convergência das frequências naturais referentes à Tabela 4.7

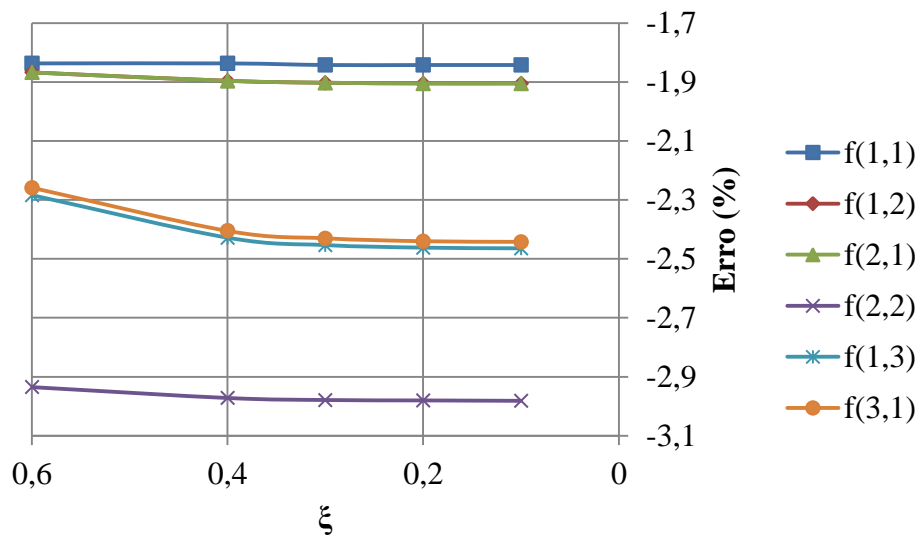


Figura 4.9 – Convergência das frequências naturais referentes à Tabela 4.8

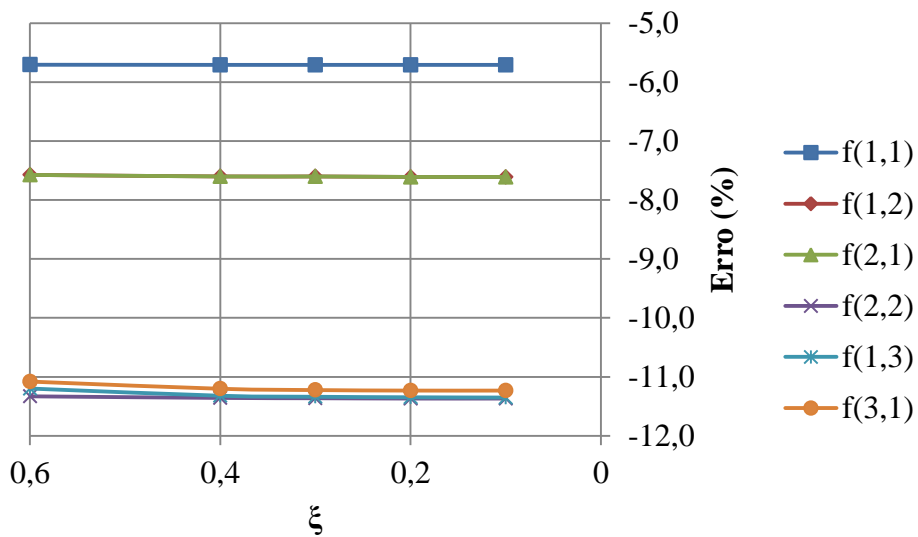


Figura 4.10 – Convergência das frequências naturais referentes à Tabela 4.9

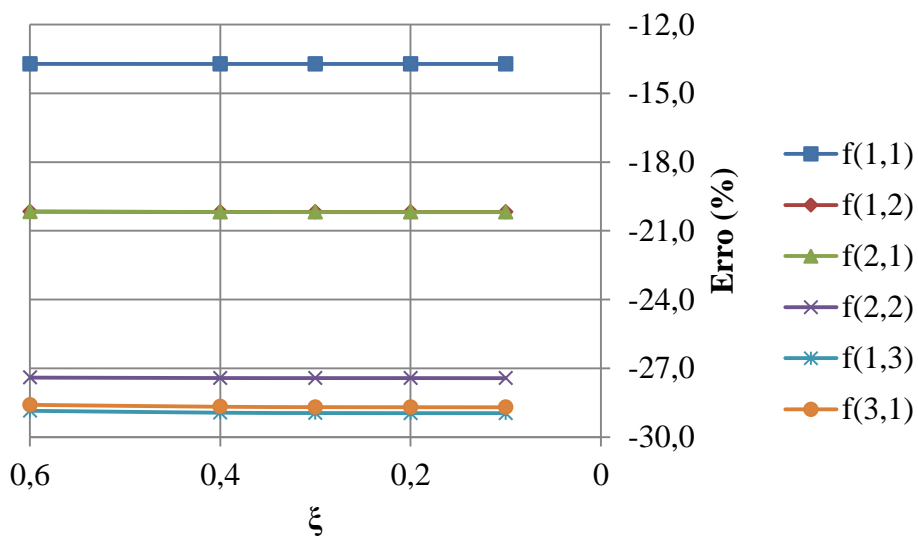


Figura 4.11 – Convergência das frequências naturais referentes à Tabela 4.10

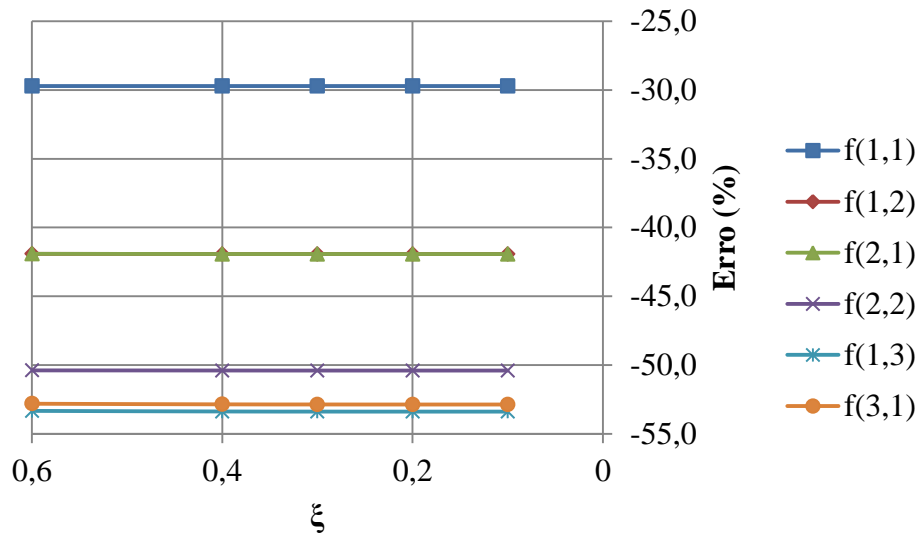


Figura 4.12 – Convergência das frequências naturais referentes à Tabela 4.11

Apesar da boa convergência e do fato esperado que os modos de vibração mais altos apresentem erros maiores, deve-se atentar para a influência da discretização do objeto em estudo em comparação com as meia-ondas desenvolvidas nos modos de vibração.

Pretende-se investigar, portanto, a influência da discretização ao seguir ou não as meia-ondas de determinado modo de vibração. Sabe-se que para o caso de uma viga, a boa discretização da mesma está relacionada não só ao número de elementos, mas a posição deles e dos seus nós em relação às meia-ondas do modo de vibração em estudo. A Figura 4.13 a seguir ilustra o caso de uma viga com boa discretização para o segundo modo mas uma discretização ruim para o terceiro modo de vibração. Isso deve-se ao fato dos nós dos elementos de barra utilizados estarem numa posição que não mapeia corretamente a deformada modal procurada (terceiro modo da viga).

Percebe-se que não basta simplesmente dividir cada vez mais o objeto em estudo, mas sim fazer uma análise correta da resposta que pretende-se obter para otimizar a discretização em elementos finitos.

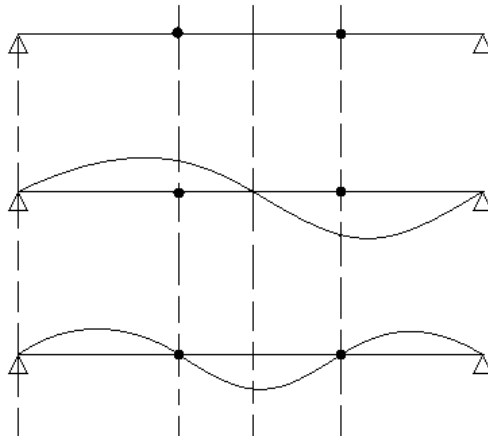


Figura 4.13 – Caso ilustrativo de uma viga discretizada em elementos de barra

Tendo em mente essas considerações, procurou-se traçar um gráfico que evidenciasse esse efeito na placa, ao invés dos simples gráficos que dizem respeito apenas ao número de elementos utilizados. Utilizando a espessura  $h=0,1$  m (placa fina), as mesmas dimensões e propriedades do material já definidas, mantendo a condição apoiada-apoiada (A-A) para as bordas opostas no eixo  $x$  e mantendo o número de meia-ondas em  $x$  igual a 1 ( $m=1$ ), obteve-se o gráfico do erro relativo das frequências naturais

$$\left( E(\%) = \frac{f_{numérico} - f_{analítico}}{f_{analítico}} \times 100 \right) \text{ em função da relação entre o número de elementos}$$

$$\text{finitos utilizados na direção } y \text{ e o número de meia-ondas } n \quad \mu = \frac{N^{\circ}_{elementos}}{n}.$$

A Figura 4.14 a seguir ilustra a relação discutida para o caso da placa totalmente apoiada para diferentes  $n$ . É possível notar o aumento dos erros com a maior discretização, especialmente para os modos mais altos, isso se deve ao fato de não ter sido feita uma discretização criteriosa. Não se importou com a posição do centro de massa dos elementos em relação as meia-ondas obtidas nas respostas, portanto, alguns centros de massa não estarão bem localizados para representar as respostas. Apesar disso, os erros finais, atingida a convergência dos resultados, são muito pequenos, indicando boas respostas para as análises. Justifica-se, assim, a não modificação da malha nas análises subsequentes levando em conta os pontos abordados. O modo (1,1) praticamente não apresenta variação no erro percentual, por isso não foi mostrado no gráfico.

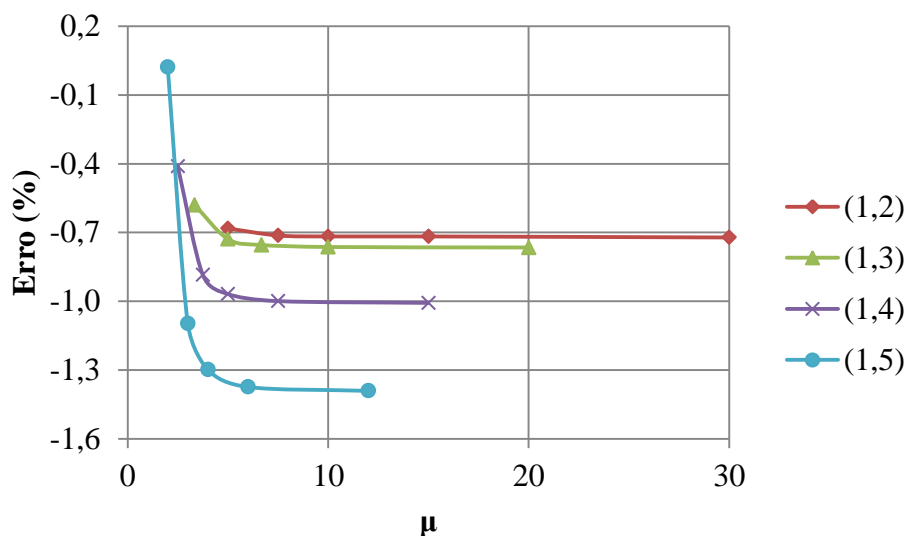


Figura 4.14 – Erro relativo relacionado com a discretização em y e o número de meia-onda na mesma direção

#### 4.2.1.2 Influência dos parâmetros característicos na resposta da frequência natural

Como dito anteriormente, pretendia-se mostrar que as equações teóricas utilizadas são válidas apenas para as placas finas, para isso construiu-se o seguinte gráfico, exposto na Figura 4.15. Pode-se observar a grande diferença entre as respostas analíticas e numéricas contidas no domínio das placas espessas. Também é possível verificar o afastamento entre as respostas analítica e numérica ao passo que o gráfico caminha em direção a linha divisória, caminha para sair do domínio das placas finas, ou seja, as respostas se distanciam ao passo que a espessura aumenta (mantendo-se as demais dimensões da placa constantes).



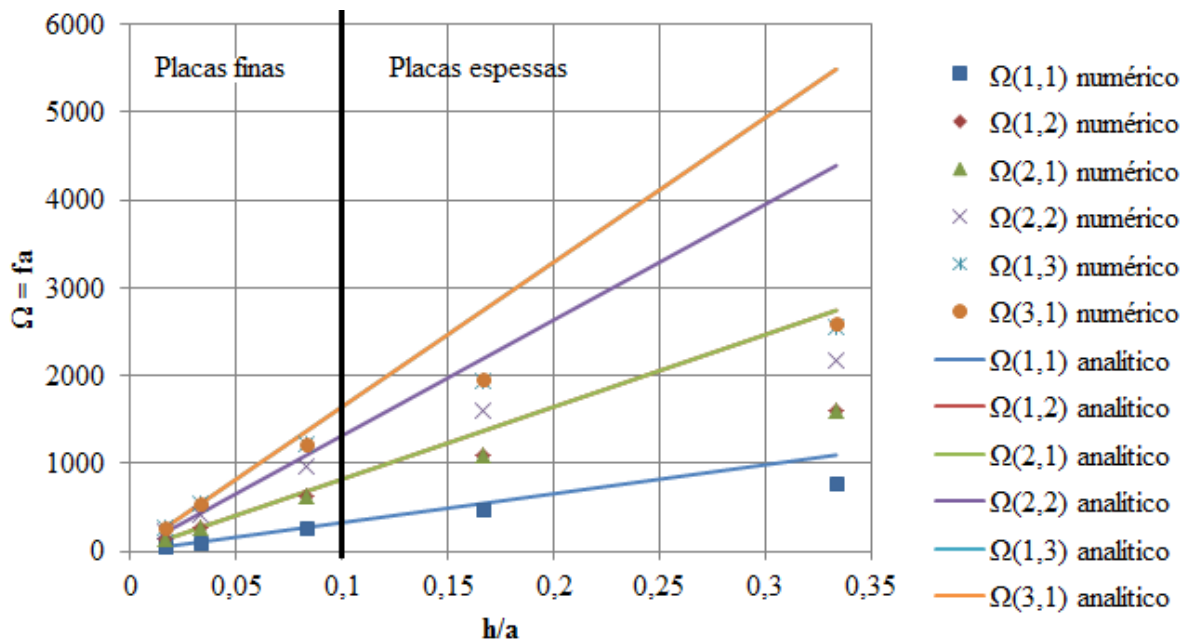


Figura 4.15 – Seis primeiras frequências naturais do Caso 1

Nas Figuras 4.16 e 4.17 há uma representação gráfica das combinações modais obtidas para  $h=0,1$  m e  $h=0,2$  m, relacionando o número  $n$  de meia-ondas no modo de vibração ao longo do eixo  $y$  com a frequência em Hertz. Pode-se observar o erro, diferença entre os resultados analíticos e numéricos, maior para o caso de  $h=0,2$  m.

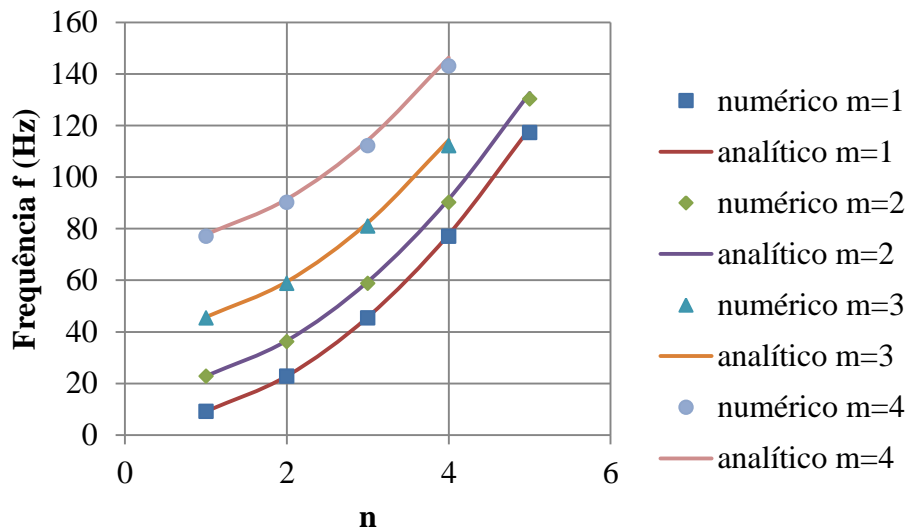


Figura 4.16 – Frequências naturais do Caso 1 com  $h=0,1$  m

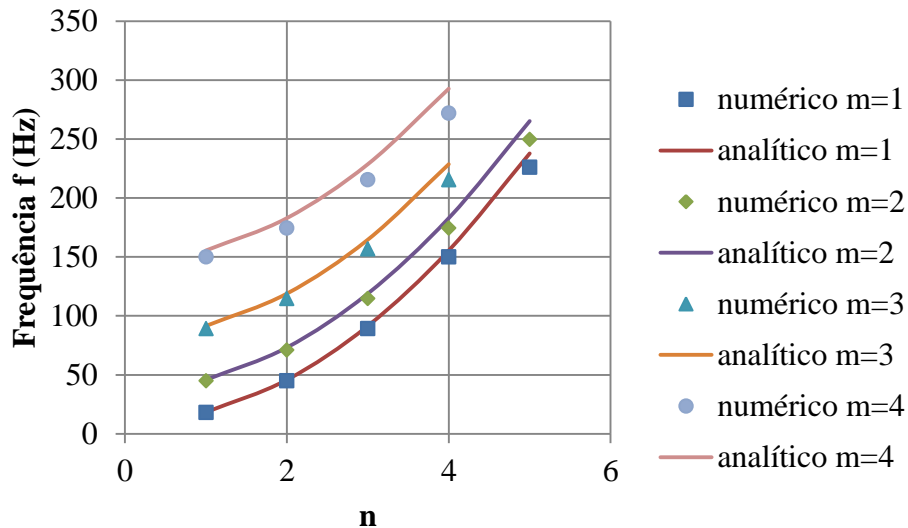


Figura 4.17 – Frequências naturais do Caso 1 com  $h=0,2$  m

A evolução das frequências naturais em função do número de meia-onda  $n$  evidencia a presença apenas do tramo ascendente para as placas. A menor energia, a frequência natural mais baixa, será sempre referente ao primeiro modo de vibração (1,1) e para valores maiores de  $m$  a menor energia se dá sempre com a presença de uma meia-onda na outra direção, isto é (2,1) e (3,1) seriam os modos de menor energia (frequências mais baixas) para os casos  $m=2$  e  $m=3$  (mostrados nos gráficos). Fica evidenciado, assim, a previsibilidade do surgimento dos modos de vibração das placas, bem como a independência dos mesmos em relação a espessura  $h$  e a relação  $h/a$ .

Na figura a seguir, apresentam-se as evoluções da frequência de acordo com outra relação que controla o fenômeno. Para tal, manteve-se todas as grandezas constantes e variou-se apenas o que era pertinente à relação estudada  $\left(\frac{a}{b}\right)$  para o eixo  $x$  e para o eixo  $y$  utilizou-

se o parâmetro de frequência  $\Omega = \frac{\omega a}{\pi^2} \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)\rho}{E}}$ .

Na Figura 4.18, sempre relacionou-se o parâmetro  $\Omega$  ao primeiro modo de vibração ( $m=1$ ;  $n=1$ , com a placa simplesmente apoiada nas quatro bordas), logo as grandezas mantidas constantes foram:  $E$ ,  $\nu$ ,  $\rho$ ,  $a$ ,  $h$ ,  $m$  e  $n$ . Variou-se a largura  $b$  fazendo, assim, variar a relação  $\frac{a}{b}$  e o valor  $\omega$  da primeira frequência natural (frequência natural fundamental

segundo (Ventsel, 2001)). Os valores das grandezas constantes são aqueles já definidos na seção 4.2.

Posteriormente utilizou-se diferentes valores de h para traçar novas curvas com diferentes relações de espessura  $\left(\frac{h}{a}\right)$ . Ao observar a tendência das curvas, procurou-se aumentar o modo de vibração, para tal utilizou-se de valores de m maiores enquanto o número n foi mantido constante.

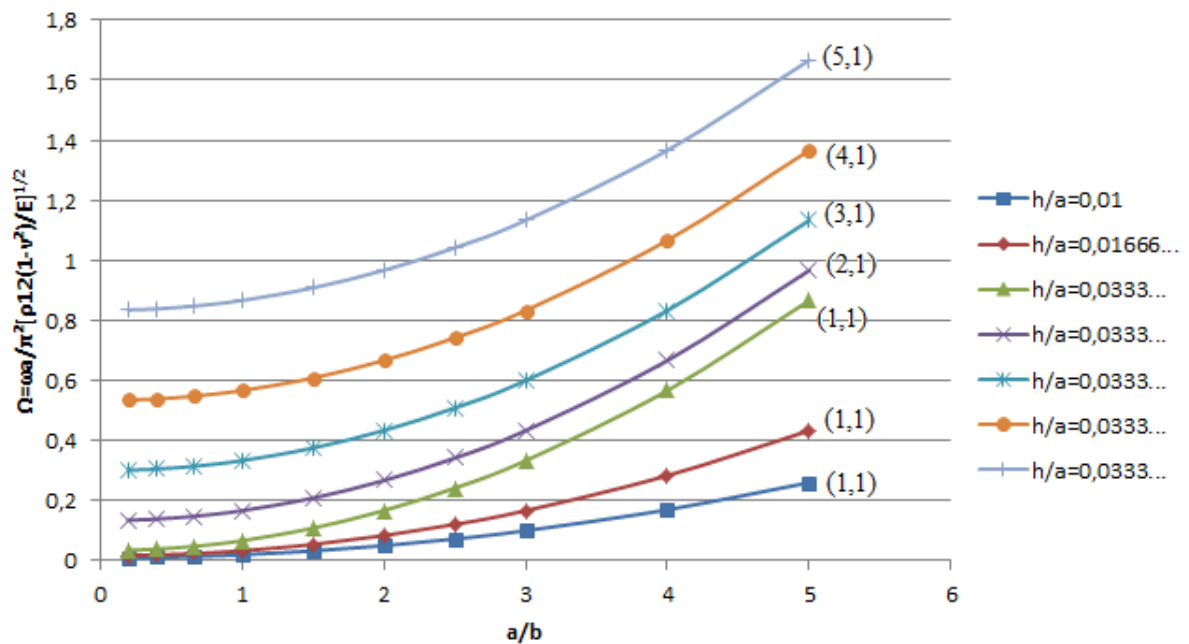


Figura 4.18 – Evolução da frequência de acordo com a relação  $\frac{a}{b}$  para o Caso 1

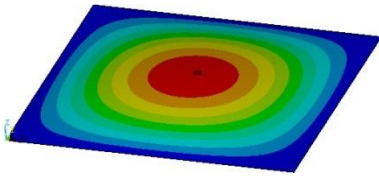
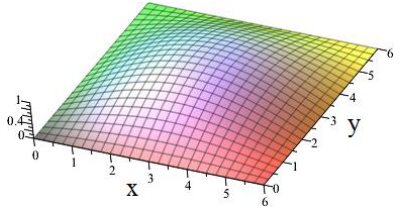
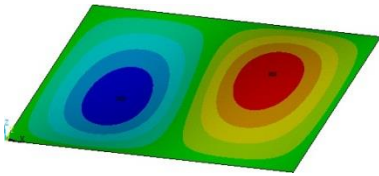
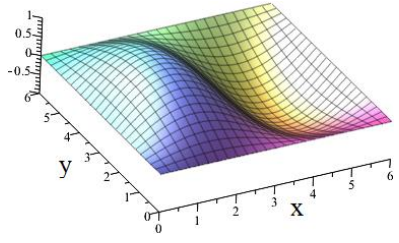
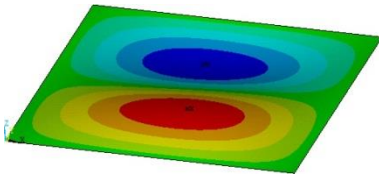
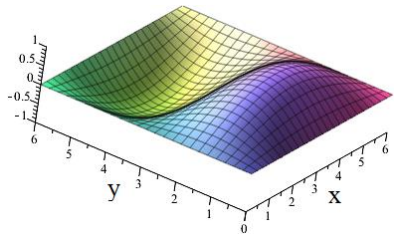
Ao analisar as curvas do modo de vibração (1,1) na Figura 4.18, percebe-se que para valores muito baixos da relação a/b o parâmetro de frequência  $\Omega$  apresenta variações mínimas. Esse fato deve-se ao valor grande da dimensão b, como os valores de h, m, n e a permanecem constantes ao longo de cada curva (embora h seja diferente entre as mesmas) o valor de b comanda o valor do parâmetro de frequência. Mesmo com o aumento do valor de h (diretamente proporcional a  $\Omega$ ), a grandeza b (inversamente proporcional a  $\Omega$ ) é muito maior e está elevada ao quadrado, conforme as equações (3.39) e (3.44). Portanto a mudança em h torna-se praticamente irrelevante quando a dimensão b é muito grande.

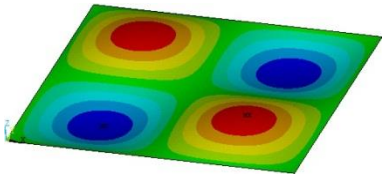
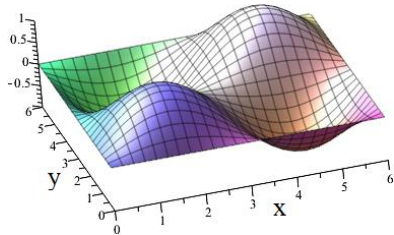
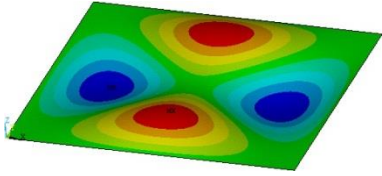
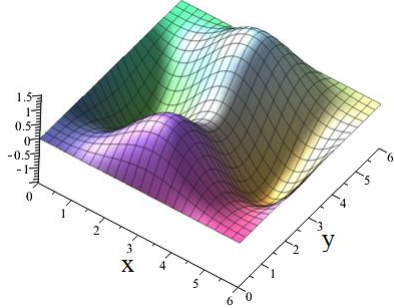
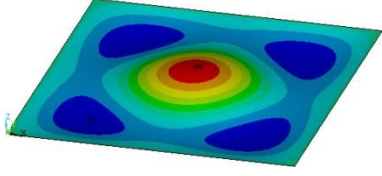
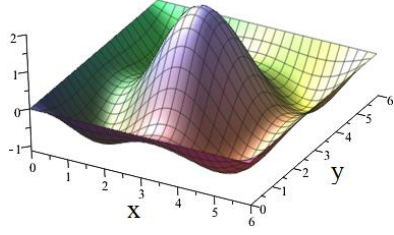
Ao se diminuir bastante a dimensão  $b$ , a influência da mudança de  $h$  torna-se mais sensível na resposta de frequência.

#### 4.2.1.3 Deformadas modais

Na Tabela 4.12 estão as deformadas dos modos de vibração para as seis primeiras frequências naturais com  $h=0,1$  m, mostrando as meia-ondas nas direções  $x$  e  $y$  que fornecem os índices  $m$  e  $n$ , respectivamente. Figuras semelhantes são apresentadas para os próximos casos, nas quais é possível observar as diferentes condições de contorno, condições das bordas da placa, influenciando a deformada de cada modo de vibração apresentado, por exemplo, pode-se comparar a deformada para o modo  $m=1$ ;  $n=1$  e perceber as diferenças apresentadas devido à presença de uma borda livre. No apêndice A, encontram-se as representações dos modos de vibração para as quatorze frequências naturais restantes do Caso 1.

Tabela 4.12 Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 1

Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal (numérico)	Deformada modal (analítico)
1,1	9,072		
2,1	22,705		
1,2	22,705		

2,2	36,178		
3,1	45,390		
1,3	45,392		

#### 4.2.2 Análises subsequentes para a placa, variações das condições de contorno

Serão analisados dois casos diferentes no que concerne a espessura da placa:  $h=0,1$  m,  $h=0,2$  m. Abandonou-se as espessuras que caracterizavam a placa como espessa devido à não validade da teoria de Kirchhoff-Love e também deixou-se de lado a espessura de  $0,5$  m porque a relação  $\frac{h}{a}$  está muito alta, produzindo erros muito grandes. Realizam-se testes de convergência para as análises numéricas, tendo a resposta analítica como referência. De acordo com o exposto no capítulo 3, as placas estudadas em todas as análises subsequentes são finas.

A cada novo caso, tomando a placa padrão exibida na Figura 4.7, variou-se apenas as condições de contorno nas bordas das placas, combinando as situações livre, apoiada e engastada até se esgotar as possibilidades. Soluciona-se as placas de modo analítico e numérico para comparação dos resultados de frequência natural. Representam-se, também, as deformadas modais por meio de figuras tridimensionais obtidas das análises numéricas.

Procura-se mostrar as diferenças causadas pelas condições de contorno, tanto no aspecto visual das deformadas modais, permitindo a fácil identificação e relação entre as características visuais da deformada e as condições de contorno adotadas, como nos valores numéricos das frequências naturais, indicando uma combinação de condições de contorno mais rígida que as outras, por exemplo.

Nas tabelas a seguir, estão os resultados referentes aos diferentes números de elementos finitos utilizados na malha, às seis primeiras frequências naturais e às duas espessuras adotadas, para todos os vinte casos. Apresentam-se as combinações modais, as frequências associadas a cada uma delas e o erro tomando o valor analítico como referência, sendo calculado por:  $E(\%) = \frac{f_{numérico} - f_{analítico}}{f_{analítico}} \times 100$ . O cálculo das frequências, de maneira analítica, se dará pela equação fornecida por (Blevins, 1979) e exposta nos casos 2 a 21 da Tabela D.1.

É possível perceber, em todas as tabelas construídas, os erros maiores nas combinações modais mais altas, conforme (Blevins, 1979), a convergência é atingida com o aumento dos números de elementos na discretização. Há um erro intrínseco ao uso do programa, mas têm-se bons resultados como os referentes a espessura  $h=0,1$  m com os maiores erros da ordem de 1% e os referentes a espessura  $h=0,2$  m da ordem de 2%. Observa-se, ainda, o aumento dos erros com o aumento da espessura.

Devido as condições de contorno adotadas, o Caso 2 apresenta três combinações modais como movimento de corpo rígido, são os três primeiros modos de vibração:  $m=1; n=1$ ,  $m=1; n=2$  e  $m=2; n=1$ . Pelo mesmo motivo o Caso 3 apresenta o primeiro modo de vibração como movimento de corpo rígido, é a combinação modal  $m=1; n=1$ .

Tabela 4.13 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 2 (L-L-L-L)

$\xi$	m	n	h = 0,1 m			h = 0,2 m		
			Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,6	2	2	6,198	6,252	-0,863	12,295	12,504	-1,669
	1	3	9,073	9,172	-1,075	18,092	18,343	-1,369
	3	1	11,234	11,322	-0,777	22,388	22,644	-1,130
	3	2	16,008	16,230	-1,367	31,675	32,460	-2,417
	2	3	16,008	16,230	-1,367	31,675	32,460	-2,417
	4	1	28,246	28,516	-0,946	55,964	57,031	-1,872
0,4	2	2	6,198	6,252	-0,866	12,295	12,504	-1,669
	1	3	9,0722	9,172	-1,083	18,090	18,343	-1,380
	3	1	11,233	11,322	-0,785	22,385	22,644	-1,143
	3	2	16,006	16,230	-1,379	31,671	32,460	-2,429
	2	3	16,006	16,230	-1,379	31,671	32,460	-2,429
	4	1	28,222	28,516	-1,030	55,919	57,031	-1,950
0,3	2	2	6,198	6,252	-0,866	12,295	12,504	-1,669
	1	3	9,072	9,172	-1,085	18,090	18,343	-1,380
	3	1	11,233	11,322	-0,785	22,384	22,644	-1,148
	3	2	16,005	16,230	-1,385	31,671	32,460	-2,429
	2	3	16,005	16,230	-1,385	31,671	32,460	-2,429
	4	1	28,218	28,516	-1,044	55,911	57,031	-1,964
0,2	2	2	6,198	6,252	-0,866	12,295	12,504	-1,669
	1	3	9,072	9,172	-1,085	18,090	18,343	-1,380
	3	1	11,232	11,322	-0,794	22,384	22,644	-1,148
	3	2	16,005	16,230	-1,385	31,670	32,460	-2,433
	2	3	16,005	16,230	-1,385	31,670	32,460	-2,433
	4	1	28,217	28,516	-1,047	55,908	57,031	-1,970
0,1	2	2	6,198	6,252	-0,866	12,295	12,504	-1,669
	1	3	9,072	9,172	-1,085	18,090	18,343	-1,380
	3	1	11,232	11,322	-0,794	22,384	22,644	-1,148
	3	2	16,005	16,230	-1,385	31,670	32,460	-2,433
	2	3	16,005	16,230	-1,385	31,670	32,460	-2,433
	4	1	28,217	28,516	-1,047	55,907	57,031	-1,972

Tabela 4.14 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 3 (L-L-L-A)

$\xi$	m	n	h = 0,1 m			h = 0,2 m		
			Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,6	1	2	3,048	3,081	-1,060	6,031	6,162	-2,122
	2	1	6,897	6,961	-0,926	13,752	13,922	-1,220
	2	2	11,664	11,813	-1,263	23,083	23,626	-2,300
	1	3	11,993	12,110	-0,964	23,813	24,220	-1,679
	3	1	22,286	22,574	-1,277	43,989	45,149	-2,569
	2	3	23,303	23,566	-1,116	46,124	47,132	-2,139
0,4	1	2	3,048	3,081	-1,064	6,031	6,162	-2,125
	2	1	6,896	6,961	-0,931	13,752	13,922	-1,220
	2	2	11,663	11,813	-1,271	23,081	23,626	-2,308
	1	3	11,991	12,110	-0,981	23,810	24,220	-1,691
	3	1	22,279	22,574	-1,308	43,975	45,149	-2,600
	2	3	23,294	23,566	-1,155	46,105	47,132	-2,179
0,3	1	2	3,048	3,081	-1,064	6,031	6,162	-2,127
	2	1	6,896	6,961	-0,933	13,752	13,922	-1,220
	2	2	11,663	11,813	-1,271	23,080	23,626	-2,312
	1	3	11,991	12,110	-0,981	23,809	24,220	-1,695
	3	1	22,277	22,574	-1,317	43,973	45,149	-2,604
	2	3	23,293	23,566	-1,159	46,101	47,132	-2,188
0,2	1	2	3,048	3,081	-1,064	6,031	6,162	-2,128
	2	1	6,896	6,961	-0,933	13,751	13,922	-1,227
	2	2	11,663	11,813	-1,271	23,080	23,626	-2,312
	1	3	11,991	12,110	-0,981	23,809	24,220	-1,695
	3	1	22,277	22,574	-1,317	43,971	45,149	-2,608
	2	3	23,292	23,566	-1,163	46,100	47,132	-2,190
0,1	1	2	3,048	3,081	-1,067	6,031	6,162	-2,130
	2	1	6,896	6,961	-0,933	13,751	13,922	-1,227
	2	2	11,663	11,813	-1,271	23,080	23,626	-2,312
	1	3	11,991	12,110	-0,981	23,809	24,220	-1,695
	3	1	22,276	22,574	-1,322	43,970	45,149	-2,611
	2	3	23,292	23,566	-1,163	46,100	47,132	-2,190



Tabela 4.15 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 4 (L-L-L-E)

$\xi$	m	n	h = 0,1 m			h = 0,2 m		
			Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,6	1	1	1,608	1,618	-0,652	3,212	3,237	-0,775
	1	2	3,922	3,951	-0,730	7,789	7,902	-1,428
	2	1	9,844	9,932	-0,879	19,580	19,863	-1,426
	1	3	12,556	12,666	-0,868	24,936	25,332	-1,563
	2	2	14,258	14,418	-1,108	28,216	28,835	-2,148
	2	3	24,894	25,230	-1,331	49,028	50,460	-2,837
0,4	1	1	1,608	1,618	-0,652	3,211	3,237	-0,781
	1	2	3,922	3,951	-0,730	7,788	7,902	-1,443
	2	1	9,844	9,932	-0,879	19,575	19,863	-1,451
	1	3	12,556	12,666	-0,868	24,933	25,332	-1,574
	2	2	14,258	14,418	-1,108	28,209	28,835	-2,173
	2	3	24,894	25,230	-1,331	49,012	50,460	-2,869
0,3	1	1	1,608	1,618	-0,652	3,211	3,237	-0,784
	1	2	3,922	3,951	-0,730	7,787	7,902	-1,448
	2	1	9,844	9,932	-0,879	19,574	19,863	-1,456
	1	3	12,556	12,666	-0,868	24,932	25,332	-1,578
	2	2	14,258	14,418	-1,108	28,206	28,835	-2,183
	2	3	24,894	25,230	-1,331	49,008	50,460	-2,877
0,2	1	1	1,608	1,618	-0,652	3,211	3,237	-0,788
	1	2	3,922	3,951	-0,730	7,787	7,902	-1,452
	2	1	9,844	9,932	-0,879	19,573	19,863	-1,461
	1	3	12,556	12,666	-0,868	24,932	25,332	-1,578
	2	2	14,258	14,418	-1,108	28,205	28,835	-2,186
	2	3	24,894	25,230	-1,331	49,005	50,460	-2,883
0,1	1	1	1,608	1,618	-0,652	3,211	3,237	-0,788
	1	2	3,922	3,951	-0,730	7,787	7,902	-1,454
	2	1	9,844	9,932	-0,879	19,573	19,863	-1,461
	1	3	12,556	12,666	-0,868	24,932	25,332	-1,578
	2	2	14,258	14,418	-1,108	28,205	28,835	-2,186
	2	3	24,894	25,230	-1,331	49,004	50,460	-2,885

Tabela 4.16 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 5 (L-L-A-A)

$\xi$	m	n	h = 0,1 m			h = 0,2 m		
			Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,6	1	1	1,545	1,561	-1,066	3,057	3,123	-2,103
	1	2	7,973	8,069	-1,186	15,815	16,137	-1,996
	2	1	8,905	8,977	-0,801	17,705	17,954	-1,386
	2	2	17,521	17,745	-1,264	34,545	35,491	-2,664
	1	3	23,558	23,784	-0,950	46,665	47,568	-1,898
	3	1	24,688	24,905	-0,873	48,890	49,811	-1,849
0,4	1	1	1,545	1,561	-1,066	3,057	3,123	-2,107
	1	2	7,972	8,069	-1,192	15,813	16,137	-2,008
	2	1	8,905	8,977	-0,807	17,704	17,954	-1,391
	2	2	17,520	17,745	-1,269	34,541	35,491	-2,675
	1	3	23,546	23,784	-1,000	46,642	47,568	-1,946
	3	1	24,674	24,905	-0,929	48,862	49,811	-1,905
0,3	1	1	1,545	1,561	-1,066	3,057	3,123	-2,107
	1	2	7,972	8,069	-1,193	15,813	16,137	-2,008
	2	1	8,904	8,977	-0,808	17,704	17,954	-1,391
	2	2	17,519	17,745	-1,275	34,540	35,491	-2,678
	1	3	23,544	23,784	-1,009	46,638	47,568	-1,955
	3	1	24,672	24,905	-0,937	48,857	49,811	-1,915
0,2	1	1	1,545	1,561	-1,066	3,057	3,123	-2,110
	1	2	7,972	8,069	-1,194	15,813	16,137	-2,008
	2	1	8,904	8,977	-0,809	17,704	17,954	-1,391
	2	2	17,519	17,745	-1,275	34,539	35,491	-2,681
	1	3	23,543	23,784	-1,013	46,637	47,568	-1,957
	3	1	24,671	24,905	-0,941	48,855	49,811	-1,919
0,1	1	1	1,545	1,561	-1,072	3,057	3,123	-2,110
	1	2	7,972	8,069	-1,194	15,813	16,137	-2,008
	2	1	8,904	8,977	-0,809	17,704	17,954	-1,391
	2	2	17,519	17,745	-1,275	34,538	35,491	-2,684
	1	3	23,543	23,784	-1,013	46,636	47,568	-1,959
	3	1	24,670	24,905	-0,945	48,855	49,811	-1,919

Tabela 4.17 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 6 (L-A-L-A)

$\xi$	m	n	h = 0,1 m			h = 0,2 m		
			Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,6	1	1	4,458	4,463	-0,113	8,898	8,927	-0,328
	1	2	7,396	7,480	-1,121	14,606	14,960	-2,366
	1	3	16,831	17,022	-1,124	33,173	34,045	-2,560
	2	1	18,007	18,051	-0,244	35,776	36,102	-0,904
	2	2	21,503	21,661	-0,731	42,481	43,323	-1,943
	2	3	32,375	32,784	-1,248	63,490	65,568	-3,169
0,4	1	1	4,458	4,463	-0,115	8,897	8,927	-0,331
	1	2	7,396	7,480	-1,124	14,605	14,960	-2,373
	1	3	16,830	17,022	-1,130	33,168	34,045	-2,575
	2	1	18,001	18,051	-0,278	35,763	36,102	-0,940
	2	2	21,496	21,661	-0,763	42,467	43,323	-1,975
	2	3	32,364	32,784	-1,281	63,468	65,568	-3,203
0,3	1	1	4,458	4,463	-0,115	8,897	8,927	-0,331
	1	2	7,396	7,480	-1,125	14,605	14,960	-2,373
	1	3	16,829	17,022	-1,135	33,166	34,045	-2,581
	2	1	18,000	18,051	-0,283	35,761	36,102	-0,945
	2	2	21,495	21,661	-0,768	42,465	43,323	-1,980
	2	3	32,362	32,784	-1,287	63,463	65,568	-3,210
0,2	1	1	4,458	4,463	-0,115	8,897	8,927	-0,332
	1	2	7,396	7,480	-1,127	14,605	14,960	-2,373
	1	3	16,829	17,022	-1,135	33,165	34,045	-2,584
	2	1	17,999	18,051	-0,289	35,760	36,102	-0,948
	2	2	21,494	21,661	-0,773	42,463	43,323	-1,984
	2	3	32,361	32,784	-1,290	63,461	65,568	-3,213
0,1	1	1	4,458	4,463	-0,115	8,897	8,927	-0,332
	1	2	7,396	7,480	-1,128	14,604	14,960	-2,379
	1	3	16,829	17,022	-1,135	33,164	34,045	-2,587
	2	1	17,999	18,051	-0,289	35,760	36,102	-0,948
	2	2	21,494	21,661	-0,773	42,463	43,323	-1,984
	2	3	32,360	32,784	-1,293	63,459	65,568	-3,217

Tabela 4.18 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 7 (L-A-L-E)

$\xi$	m	n	h = 0,1 m			h = 0,2 m		
			Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,6	1	1	7,030	7,086	-0,798	14,000	14,172	-1,214
	1	2	9,471	9,579	-1,132	18,741	19,159	-2,181
	1	3	18,246	18,436	-1,029	35,972	36,872	-2,440
	2	1	22,846	23,047	-0,872	45,222	46,094	-1,892
	2	2	25,924	26,240	-1,205	51,124	52,480	-2,585
	1	4	35,563	35,857	-0,819	69,941	71,713	-2,471
0,4	1	1	7,028	7,086	-0,815	13,998	14,172	-1,229
	1	2	9,468	9,579	-1,159	18,736	19,159	-2,207
	1	3	18,241	18,436	-1,057	35,964	36,872	-2,461
	2	1	22,830	23,047	-0,942	45,192	46,094	-1,957
	2	2	25,905	26,240	-1,277	51,089	52,480	-2,651
	1	4	35,528	35,857	-0,917	69,883	71,713	-2,552
0,3	1	1	7,028	7,086	-0,821	13,997	14,172	-1,236
	1	2	9,468	9,579	-1,167	18,735	19,159	-2,212
	1	3	18,240	18,436	-1,062	35,961	36,872	-2,470
	2	1	22,827	23,047	-0,955	45,186	46,094	-1,970
	2	2	25,901	26,240	-1,293	51,081	52,480	-2,666
	1	4	35,523	35,857	-0,930	69,873	71,713	-2,566
0,2	1	1	7,028	7,086	-0,823	13,997	14,172	-1,236
	1	2	9,467	9,579	-1,172	18,734	19,159	-2,217
	1	3	18,239	18,436	-1,067	35,960	36,872	-2,472
	2	1	22,826	23,047	-0,959	45,183	46,094	-1,977
	2	2	25,899	26,240	-1,300	51,077	52,480	-2,674
	1	4	35,520	35,857	-0,939	69,868	71,713	-2,573
0,1	1	1	7,028	7,086	-0,825	13,996	14,172	-1,243
	1	2	9,467	9,579	-1,175	18,733	19,159	-2,222
	1	3	18,238	18,436	-1,073	35,958	36,872	-2,478
	2	1	22,825	23,047	-0,963	45,182	46,094	-1,979
	2	2	25,898	26,240	-1,304	51,075	52,480	-2,678
	1	4	35,519	35,857	-0,942	69,866	71,713	-2,576

Tabela 4.19 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 8 (L-L-A-E)

$\xi$	m	n	h = 0,1 m			h = 0,2 m		
			Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,6	1	1	2,467	2,486	-0,745	4,905	4,972	-1,350
	1	2	8,798	8,884	-0,975	17,468	17,768	-1,691
	2	1	11,389	11,479	-0,788	22,605	22,959	-1,542
	2	2	19,793	20,016	-1,115	39,026	40,032	-2,514
	1	3	24,333	24,563	-0,934	48,186	49,125	-1,912
	3	1	29,423	29,684	-0,878	58,073	59,367	-2,180
0,4	1	1	2,467	2,486	-0,757	4,904	4,972	-1,360
	1	2	8,797	8,884	-0,987	17,466	17,768	-1,702
	2	1	11,386	11,479	-0,814	22,601	22,959	-1,559
	2	2	19,788	20,016	-1,140	39,017	40,032	-2,536
	1	3	24,319	24,563	-0,991	48,160	49,125	-1,964
	3	1	29,395	29,684	-0,972	58,020	59,367	-2,269
0,3	1	1	2,467	2,486	-0,757	4,904	4,972	-1,362
	1	2	8,796	8,884	-0,992	17,465	17,768	-1,708
	2	1	11,386	11,479	-0,814	22,600	22,959	-1,564
	2	2	19,787	20,016	-1,145	39,015	40,032	-2,541
	1	3	24,317	24,563	-1,000	48,156	49,125	-1,973
	3	1	29,390	29,684	-0,989	58,009	59,367	-2,288
0,2	1	1	2,467	2,486	-0,761	4,904	4,972	-1,364
	1	2	8,796	8,884	-0,994	17,465	17,768	-1,708
	2	1	11,385	11,479	-0,823	22,599	22,959	-1,568
	2	2	19,787	20,016	-1,145	39,014	40,032	-2,544
	1	3	24,316	24,563	-1,004	48,154	49,125	-1,977
	3	1	29,387	29,684	-0,999	58,005	59,367	-2,294
0,1	1	1	2,467	2,486	-0,761	4,904	4,972	-1,366
	1	2	8,796	8,884	-0,995	17,464	17,768	-1,713
	2	1	11,385	11,479	-0,823	22,599	22,959	-1,568
	2	2	19,786	20,016	-1,150	39,013	40,032	-2,546
	1	3	24,316	24,563	-1,004	48,154	49,125	-1,977
	3	1	29,386	29,684	-1,002	58,003	59,367	-2,298

Tabela 4.20 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 9 (L-E-L-E)

$\xi$	m	n	h = 0,1 m			h = 0,2 m		
			Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,6	1	1	10,251	10,321	-0,677	20,364	20,642	-1,346
	1	2	12,187	12,295	-0,880	24,133	24,590	-1,860
	1	3	20,070	20,234	-0,810	39,590	40,468	-2,169
	2	1	28,238	28,488	-0,877	55,652	56,976	-2,323
	2	2	30,964	31,306	-1,091	60,885	62,611	-2,757
	1	4	36,755	37,029	-0,740	72,255	74,058	-2,435
0,4	1	1	10,247	10,321	-0,716	20,357	20,642	-1,380
	1	2	12,180	12,295	-0,937	24,122	24,590	-1,904
	1	3	20,061	20,234	-0,855	39,575	40,468	-2,206
	2	1	28,207	28,488	-0,986	55,593	56,976	-2,427
	2	2	30,926	31,306	-1,213	60,817	62,611	-2,866
	1	4	36,710	37,029	-0,862	72,191	74,058	-2,521
0,3	1	1	10,246	10,321	-0,726	20,355	20,642	-1,389
	1	2	12,178	12,295	-0,953	24,118	24,590	-1,921
	1	3	20,058	20,234	-0,870	39,571	40,468	-2,216
	2	1	28,200	28,488	-1,011	55,581	56,976	-2,448
	2	2	30,917	31,306	-1,241	60,801	62,611	-2,891
	1	4	36,703	37,029	-0,881	72,179	74,058	-2,538
0,2	1	1	10,246	10,321	-0,726	20,354	20,642	-1,394
	1	2	12,177	12,295	-0,961	24,116	24,590	-1,929
	1	3	20,057	20,234	-0,875	39,569	40,468	-2,221
	2	1	28,197	28,488	-1,021	55,575	56,976	-2,459
	2	2	30,912	31,306	-1,257	60,793	62,611	-2,904
	1	4	36,700	37,029	-0,889	72,174	74,058	-2,544
0,1	1	1	10,245	10,321	-0,735	20,353	20,642	-1,399
	1	2	12,176	12,295	-0,969	24,115	24,590	-1,933
	1	3	20,056	20,234	-0,879	39,568	40,468	-2,224
	2	1	28,196	28,488	-1,025	55,573	56,976	-2,462
	2	2	30,910	31,306	-1,264	60,789	62,611	-2,910
	1	4	36,699	37,029	-0,892	72,173	74,058	-2,546

Tabela 4.21 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 10 (L-L-E-E)

$\xi$	m	n	h = 0,1 m			h = 0,2 m		
			Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,6	1	1	3,197	3,217	-0,619	6,366	6,434	-1,068
	2	1	11,034	11,137	-0,921	21,886	22,273	-1,738
	1	2	12,280	12,365	-0,685	24,379	24,729	-1,417
	2	2	21,927	22,143	-0,977	43,235	44,287	-2,375
	1	3	28,933	29,215	-0,967	57,094	58,431	-2,288
	3	1	30,255	30,508	-0,831	59,712	61,017	-2,139
0,4	1	1	3,197	3,217	-0,641	6,365	6,434	-1,086
	2	1	11,029	11,137	-0,966	21,879	22,273	-1,769
	1	2	12,277	12,365	-0,709	24,375	24,729	-1,433
	2	2	21,917	22,143	-1,022	43,221	44,287	-2,406
	1	3	28,907	29,215	-1,056	57,045	58,431	-2,372
	3	1	30,222	30,508	-0,939	59,654	61,017	-2,234
0,3	1	1	3,196	3,217	-0,647	6,364	6,434	-1,092
	2	1	11,028	11,137	-0,975	21,877	22,273	-1,778
	1	2	12,277	12,365	-0,709	24,374	24,729	-1,437
	2	2	21,915	22,143	-1,031	43,217	44,287	-2,415
	1	3	28,902	29,215	-1,073	57,036	58,431	-2,387
	3	1	30,216	30,508	-0,959	59,642	61,017	-2,253
0,2	1	1	3,196	3,217	-0,650	6,364	6,434	-1,095
	2	1	11,027	11,137	-0,984	21,875	22,273	-1,787
	1	2	12,277	12,365	-0,709	24,374	24,729	-1,437
	2	2	21,914	22,143	-1,036	43,215	44,287	-2,420
	1	3	28,900	29,215	-1,080	57,032	58,431	-2,394
	3	1	30,213	30,508	-0,969	59,637	61,017	-2,262
0,1	1	1	3,196	3,217	-0,654	6,364	6,434	-1,096
	2	1	11,027	11,137	-0,984	21,875	22,273	-1,787
	1	2	12,277	12,365	-0,709	24,374	24,729	-1,437
	2	2	21,913	22,143	-1,040	43,214	44,287	-2,422
	1	3	28,899	29,215	-1,083	57,030	58,431	-2,398
	3	1	30,212	30,508	-0,972	59,635	61,017	-2,265

Tabela 4.22 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 11 (L-A-A-A)

$\xi$	m	n	h = 0,1 m			h = 0,2 m		
			Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,6	1	1	5,384	5,413	-0,536	10,694	10,826	-1,220
	1	2	12,733	12,865	-1,028	25,141	25,730	-2,291
	2	1	19,019	19,094	-0,392	37,719	38,188	-1,228
	2	2	27,100	27,376	-1,007	53,336	54,751	-2,585
	1	3	28,445	28,669	-0,780	56,082	57,337	-2,189
	3	1	41,680	41,844	-0,393	82,128	83,689	-1,865
0,4	1	1	5,384	5,413	-0,538	10,693	10,826	-1,229
	1	2	12,733	12,865	-1,028	25,139	25,730	-2,298
	2	1	19,012	19,094	-0,429	37,707	38,188	-1,259
	2	2	27,092	27,376	-1,036	53,321	54,751	-2,612
	1	3	28,431	28,669	-0,829	56,054	57,337	-2,238
	3	1	41,611	41,844	-0,558	81,994	83,689	-2,025
0,3	1	1	5,384	5,413	-0,538	10,693	10,826	-1,229
	1	2	12,733	12,865	-1,028	25,138	25,730	-2,302
	2	1	19,011	19,094	-0,434	37,704	38,188	-1,267
	2	2	27,091	27,376	-1,040	53,317	54,751	-2,620
	1	3	28,428	28,669	-0,839	56,048	57,337	-2,249
	3	1	41,599	41,844	-0,586	81,971	83,689	-2,052
0,2	1	1	5,384	5,413	-0,540	10,693	10,826	-1,229
	1	2	12,732	12,865	-1,035	25,138	25,730	-2,302
	2	1	19,010	19,094	-0,439	37,704	38,188	-1,267
	2	2	27,090	27,376	-1,043	53,316	54,751	-2,621
	1	3	28,427	28,669	-0,843	56,046	57,337	-2,252
	3	1	41,594	41,844	-0,598	81,962	83,689	-2,063
0,1	1	1	5,384	5,413	-0,540	10,693	10,826	-1,229
	1	2	12,732	12,865	-1,035	25,137	25,730	-2,306
	2	1	19,010	19,094	-0,439	37,703	38,188	-1,269
	2	2	27,090	27,376	-1,043	53,315	54,751	-2,623
	1	3	28,427	28,669	-0,843	56,045	57,337	-2,254
	3	1	41,593	41,844	-0,601	81,960	83,689	-2,066



Tabela 4.23 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 12 (L-A-E-A)

$\xi$	m	n	h = 0,1 m			h = 0,2 m		
			Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,6	1	1	5,846	5,881	-0,590	11,608	11,762	-1,311
	1	2	15,193	15,326	-0,868	29,996	30,652	-2,141
	2	1	19,252	19,326	-0,381	38,174	38,651	-1,235
	2	2	28,938	29,202	-0,903	56,912	58,403	-2,553
	1	3	33,309	33,553	-0,728	65,512	67,107	-2,376
	3	1	41,828	41,993	-0,392	82,406	83,985	-1,880
0,4	1	1	5,846	5,881	-0,592	11,607	11,762	-1,319
	1	2	15,191	15,326	-0,881	29,993	30,652	-2,150
	2	1	19,245	19,326	-0,417	38,161	38,651	-1,268
	2	2	28,924	29,202	-0,951	56,893	58,403	-2,586
	1	3	33,284	33,553	-0,803	65,464	67,107	-2,448
	3	1	41,757	41,993	-0,561	82,272	83,985	-2,040
0,3	1	1	5,846	5,881	-0,592	11,607	11,762	-1,319
	1	2	15,191	15,326	-0,881	29,992	30,652	-2,154
	2	1	19,244	19,326	-0,422	38,158	38,651	-1,276
	2	2	28,922	29,202	-0,957	56,890	58,403	-2,591
	1	3	33,280	33,553	-0,815	65,455	67,107	-2,461
	3	1	41,745	41,993	-0,590	82,248	83,985	-2,069
0,2	1	1	5,846	5,881	-0,593	11,607	11,762	-1,319
	1	2	15,191	15,326	-0,881	29,991	30,652	-2,157
	2	1	19,243	19,326	-0,427	38,157	38,651	-1,279
	2	2	28,921	29,202	-0,961	56,888	58,403	-2,594
	1	3	33,278	33,553	-0,821	65,452	67,107	-2,466
	3	1	41,740	41,993	-0,602	82,239	83,985	-2,079
0,1	1	1	5,846	5,881	-0,593	11,607	11,762	-1,319
	1	2	15,191	15,326	-0,881	29,991	30,652	-2,157
	2	1	19,243	19,326	-0,427	38,157	38,651	-1,279
	2	2	28,921	29,202	-0,961	56,887	58,403	-2,596
	1	3	33,278	33,553	-0,821	65,450	67,107	-2,469
	3	1	41,739	41,993	-0,604	82,237	83,985	-2,082

Tabela 4.24 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 13 (L-E-A-E)

$\xi$	m	n	h = 0,1 m			h = 0,2 m		
			Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,6	1	1	10,800	10,872	-0,666	21,434	21,745	-1,429
	1	2	16,392	16,503	-0,674	32,399	33,006	-1,840
	2	1	29,010	29,257	-0,845	57,138	58,514	-2,352
	1	3	30,759	30,963	-0,658	60,598	61,925	-2,143
	2	2	35,607	35,917	-0,863	69,856	71,834	-2,753
	2	3	50,004	50,515	-1,012	97,543	101,031	-3,452
0,4	1	1	10,796	10,872	-0,703	21,427	21,745	-1,461
	1	2	16,387	16,503	-0,704	32,391	33,006	-1,865
	2	1	28,979	29,257	-0,951	57,079	58,514	-2,453
	1	3	30,733	30,963	-0,742	60,562	61,925	-2,202
	2	2	35,574	35,917	-0,955	69,802	71,834	-2,828
	2	3	49,923	50,515	-1,173	97,451	101,031	-3,543
0,3	1	1	10,795	10,872	-0,712	21,425	21,745	-1,471
	1	2	16,386	16,503	-0,710	32,388	33,006	-1,874
	2	1	28,972	29,257	-0,975	57,067	58,514	-2,474
	1	3	30,729	30,963	-0,755	60,556	61,925	-2,211
	2	2	35,568	35,917	-0,971	69,790	71,834	-2,845
	2	3	49,912	50,515	-1,194	97,436	101,031	-3,558
0,2	1	1	10,794	10,872	-0,721	21,423	21,745	-1,480
	1	2	16,385	16,503	-0,716	32,387	33,006	-1,877
	2	1	28,969	29,257	-0,985	57,061	58,514	-2,484
	1	3	30,727	30,963	-0,761	60,553	61,925	-2,216
	2	2	35,564	35,917	-0,982	69,785	71,834	-2,852
	2	3	49,908	50,515	-1,202	97,429	101,031	-3,565
0,1	1	1	10,794	10,872	-0,721	21,423	21,745	-1,480
	1	2	16,384	16,503	-0,722	32,386	33,006	-1,880
	2	1	28,967	29,257	-0,992	57,059	58,514	-2,487
	1	3	30,726	30,963	-0,764	60,553	61,925	-2,216
	2	2	35,563	35,917	-0,985	69,783	71,834	-2,855
	2	3	49,906	50,515	-1,206	97,427	101,031	-3,567

Tabela 4.25 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 14 (L-A-A-E)

$\xi$	m	n	h = 0,1 m			h = 0,2 m		
			Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,6	1	1	7,753	7,818	-0,835	15,404	15,637	-1,487
	1	2	14,302	14,432	-0,898	28,253	28,863	-2,114
	2	1	23,725	23,928	-0,847	46,910	47,855	-1,975
	1	3	29,461	29,679	-0,734	58,063	59,358	-2,181
	2	2	31,040	31,352	-0,995	61,023	62,704	-2,681
	2	3	46,356	46,900	-1,161	90,572	93,801	-3,442
0,4	1	1	7,752	7,818	-0,854	15,401	15,637	-1,507
	1	2	14,300	14,432	-0,912	28,249	28,863	-2,128
	2	1	23,709	23,928	-0,914	46,880	47,855	-2,038
	1	3	29,442	29,679	-0,798	58,032	59,358	-2,234
	2	2	31,023	31,352	-1,049	60,993	62,704	-2,729
	2	3	46,306	46,900	-1,268	90,506	93,801	-3,513
0,3	1	1	7,751	7,818	-0,859	15,401	15,637	-1,507
	1	2	14,299	14,432	-0,919	28,248	28,863	-2,132
	2	1	23,705	23,928	-0,930	46,874	47,855	-2,050
	1	3	29,439	29,679	-0,808	58,027	59,358	-2,242
	2	2	31,019	31,352	-1,062	60,986	62,704	-2,740
	2	3	46,299	46,900	-1,282	90,495	93,801	-3,524
0,2	1	1	7,751	7,818	-0,863	15,400	15,637	-1,513
	1	2	14,298	14,432	-0,926	28,247	28,863	-2,135
	2	1	23,704	23,928	-0,934	46,871	47,855	-2,057
	1	3	29,438	29,679	-0,812	58,024	59,358	-2,247
	2	2	31,018	31,352	-1,065	60,983	62,704	-2,745
	2	3	46,296	46,900	-1,289	90,490	93,801	-3,530
0,1	1	1	7,751	7,818	-0,865	15,400	15,637	-1,513
	1	2	14,298	14,432	-0,926	28,246	28,863	-2,139
	2	1	23,703	23,928	-0,939	46,870	47,855	-2,059
	1	3	29,437	29,679	-0,815	58,023	59,358	-2,249
	2	2	31,017	31,352	-1,068	60,982	62,704	-2,746
	2	3	46,295	46,900	-1,291	90,488	93,801	-3,532

Tabela 4.26 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 15 (L-A-E-E)

$\xi$	m	n	h = 0,1 m			h = 0,2 m		
			Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,6	1	1	8,097	8,166	-0,845	16,083	16,332	-1,523
	1	2	16,577	16,707	-0,779	32,738	33,414	-2,024
	2	1	23,918	24,132	-0,885	47,286	48,263	-2,024
	2	2	32,694	32,993	-0,905	64,236	65,985	-2,651
	1	3	34,218	34,457	-0,694	67,274	68,914	-2,380
	3	1	48,806	49,264	-0,930	95,675	98,528	-2,896
0,4	1	1	8,095	8,166	-0,867	16,080	16,332	-1,542
	1	2	16,573	16,707	-0,803	32,732	33,414	-2,042
	2	1	23,901	24,132	-0,955	47,254	48,263	-2,091
	2	2	32,667	32,993	-0,987	64,201	65,985	-2,704
	1	3	34,185	34,457	-0,789	67,222	68,914	-2,455
	3	1	48,687	49,264	-1,171	95,453	98,528	-3,121
0,3	1	1	8,095	8,166	-0,873	16,079	16,332	-1,548
	1	2	16,572	16,707	-0,809	32,730	33,414	-2,048
	2	1	23,897	24,132	-0,972	47,248	48,263	-2,103
	2	2	32,663	32,993	-0,999	64,194	65,985	-2,714
	1	3	34,180	34,457	-0,804	67,213	68,914	-2,468
	3	1	48,665	49,264	-1,216	95,413	98,528	-3,162
0,2	1	1	8,094	8,166	-0,877	16,079	16,332	-1,548
	1	2	16,571	16,707	-0,815	32,729	33,414	-2,051
	2	1	23,896	24,132	-0,976	47,245	48,263	-2,109
	2	2	32,661	32,993	-1,005	64,191	65,985	-2,719
	1	3	34,178	34,457	-0,810	67,210	68,914	-2,473
	3	1	48,656	49,264	-1,234	95,397	98,528	-3,178
0,1	1	1	8,094	8,166	-0,878	16,078	16,332	-1,554
	1	2	16,571	16,707	-0,815	32,729	33,414	-2,051
	2	1	23,895	24,132	-0,980	47,244	48,263	-2,111
	2	2	32,660	32,993	-1,008	64,189	65,985	-2,722
	1	3	34,178	34,457	-0,810	67,209	68,914	-2,474
	3	1	48,654	49,264	-1,238	95,392	98,528	-3,183

Tabela 4.27 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 16 (L-E-E-E)

$\xi$	m	n	h = 0,1 m			h = 0,2 m		
			Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,6	1	1	11,056	11,132	-0,682	21,939	22,264	-1,459
	1	2	18,444	18,556	-0,605	36,438	37,113	-1,818
	2	1	29,173	29,424	-0,853	57,454	58,848	-2,369
	1	3	35,356	35,574	-0,613	69,489	71,148	-2,332
	2	2	37,108	37,405	-0,793	72,762	74,809	-2,736
	2	3	53,647	54,130	-0,893	104,450	108,260	-3,520
0,4	1	1	11,051	11,132	-0,727	21,931	22,264	-1,495
	1	2	18,436	18,556	-0,648	36,428	37,113	-1,845
	2	1	29,140	29,424	-0,965	57,394	58,848	-2,471
	1	3	35,312	35,574	-0,736	69,432	71,148	-2,412
	2	2	37,062	37,405	-0,916	72,702	74,809	-2,817
	2	3	53,518	54,130	-1,131	104,330	108,260	-3,631
0,3	1	1	11,049	11,132	-0,745	21,928	22,264	-1,508
	1	2	18,434	18,556	-0,659	36,425	37,113	-1,853
	2	1	29,133	29,424	-0,989	57,382	58,848	-2,491
	1	3	35,306	35,574	-0,753	69,423	71,148	-2,424
	2	2	37,054	37,405	-0,937	72,691	74,809	-2,831
	2	3	53,504	54,130	-1,157	104,310	108,260	-3,649
0,2	1	1	11,049	11,132	-0,745	21,927	22,264	-1,513
	1	2	18,433	18,556	-0,664	36,424	37,113	-1,855
	2	1	29,129	29,424	-1,003	57,376	58,848	-2,501
	1	3	35,304	35,574	-0,759	69,419	71,148	-2,430
	2	2	37,051	37,405	-0,945	72,685	74,809	-2,839
	2	3	53,499	54,130	-1,166	104,310	108,260	-3,649
0,1	1	1	11,048	11,132	-0,754	21,926	22,264	-1,517
	1	2	18,433	18,556	-0,664	36,423	37,113	-1,858
	2	1	29,128	29,424	-1,006	57,373	58,848	-2,507
	1	3	35,303	35,574	-0,762	69,418	71,148	-2,431
	2	2	37,049	37,405	-0,951	72,683	74,809	-2,842
	2	3	53,497	54,130	-1,170	104,300	108,260	-3,658

Tabela 4.28 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 17 (A-A-E-A)

$\xi$	m	n	h = 0,1 m			h = 0,2 m		
			Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,6	1	1	10,888	10,960	-0,661	21,568	21,921	-1,610
	2	1	23,799	23,946	-0,614	47,010	47,892	-1,842
	1	2	27,015	27,181	-0,611	53,283	54,362	-1,985
	2	2	39,543	39,916	-0,935	77,501	79,833	-2,921
	3	1	46,221	46,483	-0,564	90,819	92,967	-2,310
	1	3	52,165	52,462	-0,566	102,100	104,924	-2,691
0,4	1	1	10,888	10,960	-0,661	21,567	21,921	-1,614
	2	1	23,789	23,946	-0,656	46,996	47,892	-1,871
	1	2	27,002	27,181	-0,658	53,259	54,362	-2,029
	2	2	39,512	39,916	-1,013	77,462	79,833	-2,970
	3	1	46,142	46,483	-0,734	90,683	92,967	-2,457
	1	3	52,056	52,462	-0,774	101,900	104,924	-2,882
0,3	1	1	10,888	10,960	-0,661	21,566	21,921	-1,619
	2	1	23,788	23,946	-0,660	46,994	47,892	-1,876
	1	2	27,000	27,181	-0,666	53,255	54,362	-2,036
	2	2	39,508	39,916	-1,023	77,456	79,833	-2,977
	3	1	46,129	46,483	-0,762	90,660	92,967	-2,481
	1	3	52,038	52,462	-0,808	101,860	104,924	-2,920
0,2	1	1	10,888	10,960	-0,661	21,566	21,921	-1,619
	2	1	23,787	23,946	-0,665	46,993	47,892	-1,878
	1	2	26,999	27,181	-0,669	53,254	54,362	-2,038
	2	2	39,507	39,916	-1,026	77,454	79,833	-2,980
	3	1	46,125	46,483	-0,771	90,651	92,967	-2,491
	1	3	52,031	52,462	-0,821	101,850	104,924	-2,929
0,1	1	1	10,888	10,960	-0,661	21,566	21,921	-1,619
	2	1	23,787	23,946	-0,665	46,993	47,892	-1,878
	1	2	26,999	27,181	-0,669	53,253	54,362	-2,040
	2	2	39,506	39,916	-1,028	77,453	79,833	-2,981
	3	1	46,124	46,483	-0,773	90,649	92,967	-2,493
	1	3	52,029	52,462	-0,825	101,850	104,924	-2,929

Tabela 4.29 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 18 (A-A-E-E)

$\xi$	m	n	h = 0,1 m			h = 0,2 m		
			Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,6	1	1	12,472	12,541	-0,548	24,708	25,082	-1,489
	2	1	27,903	28,057	-0,548	55,020	56,114	-1,949
	1	2	28,013	28,173	-0,567	55,231	56,345	-1,978
	2	2	42,675	43,035	-0,837	83,534	86,071	-2,947
	1	3	52,793	53,111	-0,598	103,270	106,221	-2,778
	3	1	52,876	53,157	-0,529	103,460	106,314	-2,684
0,4	1	1	12,470	12,541	-0,564	24,707	25,082	-1,493
	2	1	27,887	28,057	-0,605	54,994	56,114	-1,996
	1	2	27,995	28,173	-0,631	55,205	56,345	-2,024
	2	2	42,621	43,035	-0,963	83,479	86,071	-3,011
	1	3	52,672	53,111	-0,826	103,060	106,221	-2,976
	3	1	52,750	53,157	-0,766	103,250	106,314	-2,882
0,3	1	1	12,470	12,541	-0,564	24,706	25,082	-1,497
	2	1	27,884	28,057	-0,616	54,990	56,114	-2,003
	1	2	27,992	28,173	-0,642	55,200	56,345	-2,033
	2	2	42,616	43,035	-0,974	83,472	86,071	-3,019
	1	3	52,652	53,111	-0,864	103,030	106,221	-3,004
	3	1	52,730	53,157	-0,803	103,220	106,314	-2,910
0,2	1	1	12,470	12,541	-0,564	24,706	25,082	-1,497
	2	1	27,883	28,057	-0,620	54,989	56,114	-2,004
	1	2	27,992	28,173	-0,642	55,199	56,345	-2,035
	2	2	42,614	43,035	-0,979	83,469	86,071	-3,023
	1	3	52,645	53,111	-0,877	103,020	106,221	-3,014
	3	1	52,723	53,157	-0,816	103,200	106,314	-2,929
0,1	1	1	12,470	12,541	-0,564	24,706	25,082	-1,497
	2	1	27,883	28,057	-0,620	54,988	56,114	-2,006
	1	2	27,991	28,173	-0,645	55,199	56,345	-2,035
	2	2	42,614	43,035	-0,979	83,469	86,071	-3,023
	1	3	52,644	53,111	-0,879	103,010	106,221	-3,023
	3	1	52,722	53,157	-0,818	103,200	106,314	-2,929

Tabela 4.30 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 19 (E-A-E-A)

$\xi$	m	n	h = 0,1 m			h = 0,2 m		
			Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,6	1	1	13,356	13,417	-0,452	26,456	26,833	-1,406
	2	1	25,239	25,369	-0,512	49,834	50,738	-1,781
	1	2	31,943	32,126	-0,569	62,815	64,252	-2,236
	2	2	43,483	43,837	-0,808	85,058	87,674	-2,984
	3	1	47,151	47,364	-0,450	92,589	94,728	-2,258
	1	3	59,451	59,831	-0,634	115,760	119,661	-3,260
0,4	1	1	13,355	13,417	-0,460	26,454	26,833	-1,414
	2	1	25,225	25,369	-0,567	49,817	50,738	-1,815
	1	2	31,920	32,126	-0,641	62,773	64,252	-2,302
	2	2	43,429	43,837	-0,931	84,998	87,674	-3,053
	3	1	47,055	47,364	-0,652	92,446	94,728	-2,409
	1	3	59,285	59,831	-0,912	115,460	119,661	-3,511
0,3	1	1	13,355	13,417	-0,460	26,453	26,833	-1,418
	2	1	25,223	25,369	-0,575	49,815	50,738	-1,819
	1	2	31,916	32,126	-0,653	62,766	64,252	-2,313
	2	2	43,424	43,837	-0,942	84,989	87,674	-3,063
	3	1	47,042	47,364	-0,680	92,423	94,728	-2,433
	1	3	59,256	59,831	-0,960	115,400	119,661	-3,561
0,2	1	1	13,355	13,417	-0,460	26,453	26,833	-1,418
	2	1	25,223	25,369	-0,575	49,814	50,738	-1,821
	1	2	31,915	32,126	-0,657	62,763	64,252	-2,317
	2	2	43,422	43,837	-0,947	84,986	87,674	-3,066
	3	1	47,037	47,364	-0,690	92,414	94,728	-2,443
	1	3	59,245	59,831	-0,979	115,380	119,661	-3,578
0,1	1	1	13,355	13,417	-0,460	26,453	26,833	-1,418
	2	1	25,223	25,369	-0,575	49,814	50,738	-1,821
	1	2	31,914	32,126	-0,660	62,762	64,252	-2,319
	2	2	43,422	43,837	-0,947	84,985	87,674	-3,067
	3	1	47,036	47,364	-0,692	92,412	94,728	-2,445
	1	3	59,243	59,831	-0,982	115,380	119,661	-3,578



Tabela 4.31 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 20 (A-E-E-E)

$\xi$	m	n	h = 0,1 m			h = 0,2 m		
			Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,6	1	1	14,693	14,751	-0,396	29,103	29,503	-1,355
	1	2	29,216	29,359	-0,488	57,583	58,718	-1,933
	2	1	32,766	32,942	-0,533	64,418	65,883	-2,224
	2	2	46,398	46,715	-0,679	90,646	93,430	-2,980
	1	3	53,669	53,945	-0,511	104,940	107,890	-2,734
	3	1	60,059	60,433	-0,619	116,900	120,866	-3,281
0,4	1	1	14,689	14,751	-0,423	29,100	29,503	-1,365
	1	2	29,190	29,359	-0,576	57,554	58,718	-1,983
	2	1	32,736	32,942	-0,624	64,373	65,883	-2,292
	2	2	46,310	46,715	-0,867	90,569	93,430	-3,062
	1	3	53,523	53,945	-0,782	104,720	107,890	-2,938
	3	1	59,873	60,433	-0,927	116,590	120,866	-3,538
0,3	1	1	14,689	14,751	-0,423	29,100	29,503	-1,365
	1	2	29,187	29,359	-0,586	57,550	58,718	-1,990
	2	1	32,732	32,942	-0,636	64,366	65,883	-2,303
	2	2	46,302	46,715	-0,884	90,559	93,430	-3,073
	1	3	53,503	53,945	-0,819	104,690	107,890	-2,966
	3	1	59,843	60,433	-0,976	116,540	120,866	-3,579
0,2	1	1	14,689	14,751	-0,423	29,099	29,503	-1,369
	1	2	29,187	29,359	-0,586	57,548	58,718	-1,993
	2	1	32,730	32,942	-0,642	64,363	65,883	-2,307
	2	2	46,300	46,715	-0,889	90,555	93,430	-3,077
	1	3	53,495	53,945	-0,834	104,680	107,890	-2,975
	3	1	59,833	60,433	-0,993	116,520	120,866	-3,596
0,1	1	1	14,689	14,751	-0,423	29,099	29,503	-1,369
	1	2	29,186	29,359	-0,590	57,548	58,718	-1,993
	2	1	32,730	32,942	-0,642	64,363	65,883	-2,307
	2	2	46,300	46,715	-0,889	90,554	93,430	-3,078
	1	3	53,494	53,945	-0,836	104,670	107,890	-2,984
	3	1	59,830	60,433	-0,998	116,510	120,866	-3,604

Tabela 4.32 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos das frequências naturais para o Caso 21 (E-E-E-E)

$\xi$	m	n	h = 0,1 m			h = 0,2 m		
			Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)	Numérico f (Hz)	Analítico f (Hz)	Erro (%)
0,6	1	1	16,630	16,679	-0,296	32,932	33,359	-1,279
	2	1	33,865	34,021	-0,460	66,559	68,043	-2,181
	1	2	33,865	34,021	-0,460	66,559	68,043	-2,181
	2	2	49,890	50,191	-0,600	97,287	100,382	-3,083
	3	1	60,654	60,989	-0,550	117,990	121,978	-3,270
	1	3	60,976	61,267	-0,475	118,640	122,535	-3,178
0,4	1	1	16,623	16,679	-0,338	32,927	33,359	-1,294
	2	1	33,823	34,021	-0,583	66,510	68,043	-2,253
	1	2	33,823	34,021	-0,583	66,510	68,043	-2,253
	2	2	49,755	50,191	-0,869	97,185	100,382	-3,185
	3	1	60,450	60,989	-0,884	117,670	121,978	-3,532
	1	3	60,751	61,267	-0,843	118,320	122,535	-3,439
0,3	1	1	16,622	16,679	-0,344	32,927	33,359	-1,294
	2	1	33,818	34,021	-0,598	66,503	68,043	-2,263
	1	2	33,818	34,021	-0,598	66,503	68,043	-2,263
	2	2	49,743	50,191	-0,892	97,172	100,382	-3,198
	3	1	60,420	60,989	-0,933	117,620	121,978	-3,573
	1	3	60,719	61,267	-0,895	118,260	122,535	-3,488
0,2	1	1	16,622	16,679	-0,344	32,927	33,359	-1,294
	2	1	33,816	34,021	-0,604	66,500	68,043	-2,267
	1	2	33,816	34,021	-0,604	66,500	68,043	-2,267
	2	2	49,740	50,191	-0,898	97,168	100,382	-3,202
	3	1	60,409	60,989	-0,951	117,600	121,978	-3,589
	1	3	60,707	61,267	-0,914	118,240	122,535	-3,505
0,1	1	1	16,622	16,679	-0,344	32,927	33,359	-1,294
	2	1	33,816	34,021	-0,604	66,500	68,043	-2,267
	1	2	33,816	34,021	-0,604	66,500	68,043	-2,267
	2	2	49,739	50,191	-0,900	97,167	100,382	-3,203
	3	1	60,407	60,989	-0,955	117,590	121,978	-3,598
	1	3	60,705	61,267	-0,918	118,240	122,535	-3,505

Apresentam-se, a seguir, gráficos comparativos entre os casos em estudo e o Caso 1 (placa simplesmente apoiada nas quatro bordas). Verifica-se a comparação entre os desenvolvimentos das frequências naturais para os seis primeiros modos de vibração observados. Plotou-se a frequência natural correspondente a cada modo de vibração, sendo

que os modos foram ordenados em ordem crescente de frequência (conforme são apresentados nas tabelas desse trabalho).

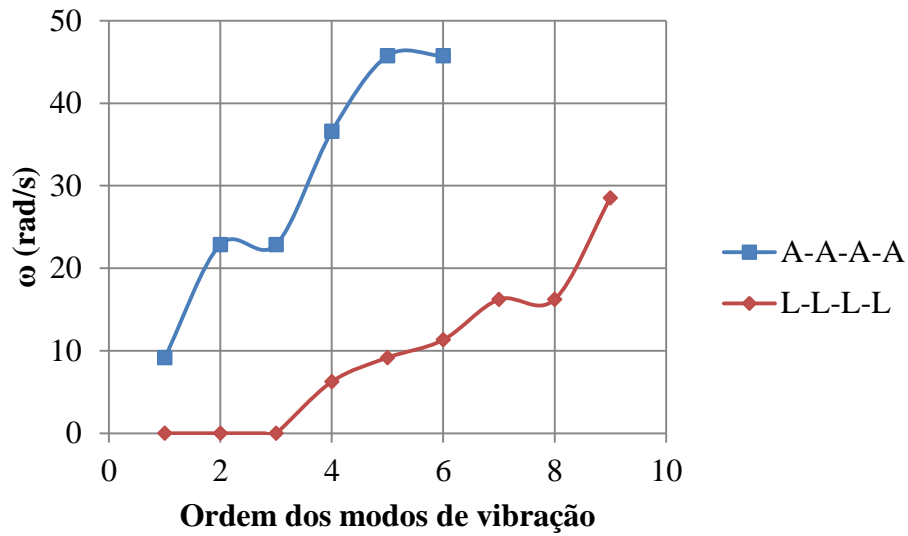


Figura 4.19 – Frequências naturais analisadas no Caso 2

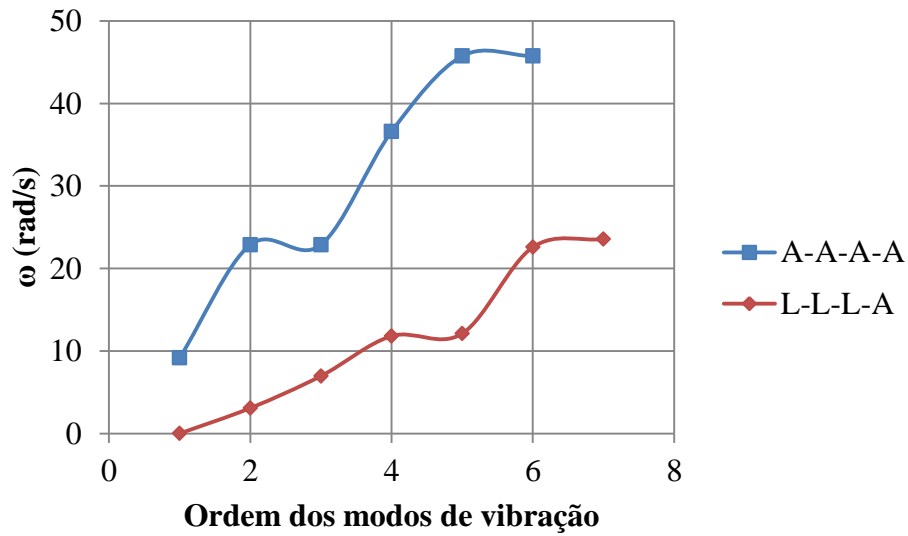


Figura 4.20 – Frequências naturais analisadas no Caso 3

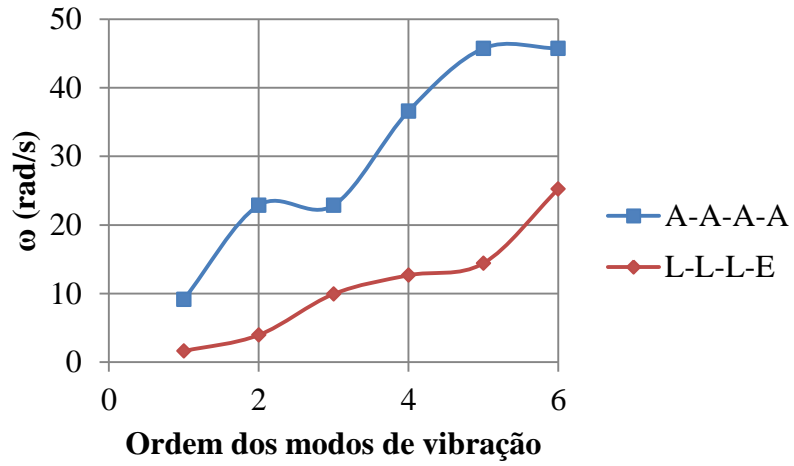


Figura 4.21 – Frequências naturais analisadas no Caso 4

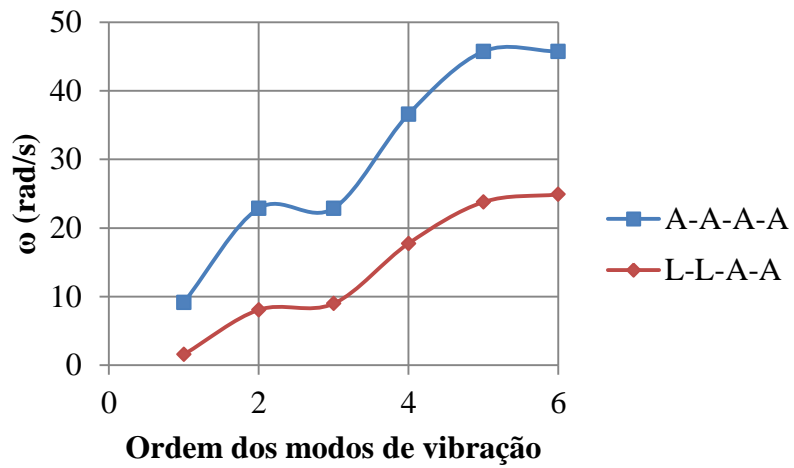


Figura 4.22 – Frequências naturais analisadas no Caso 5

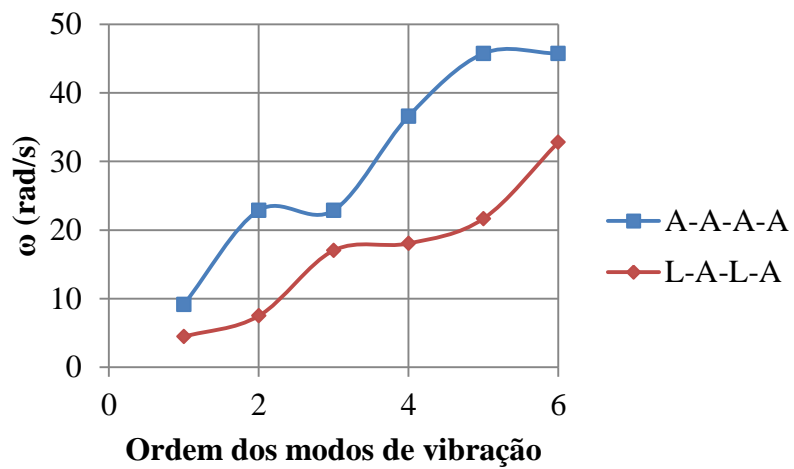


Figura 4.23 – Frequências naturais analisadas no Caso 6

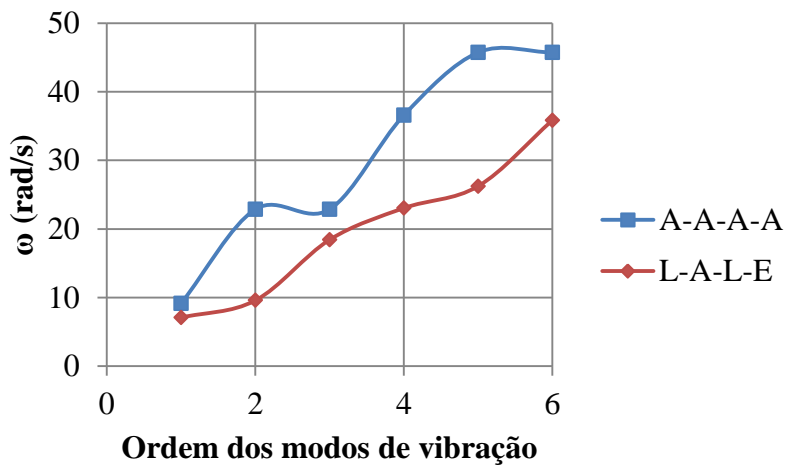


Figura 4.24 – Frequências naturais analisadas no Caso 7

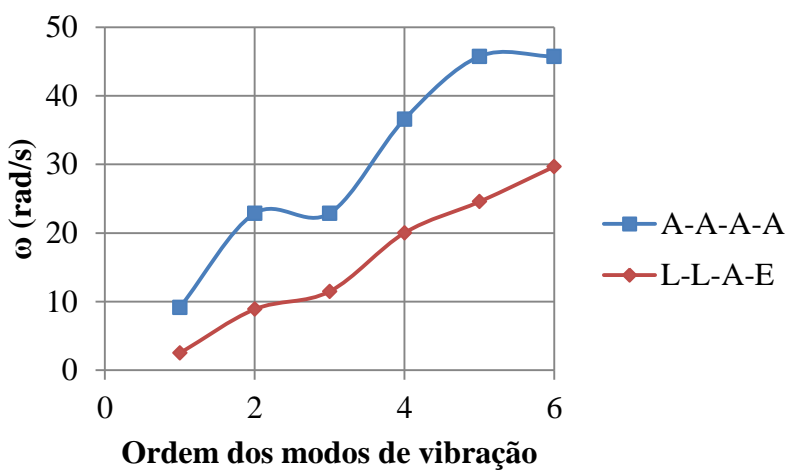


Figura 4.25 – Frequências naturais analisadas no Caso 8

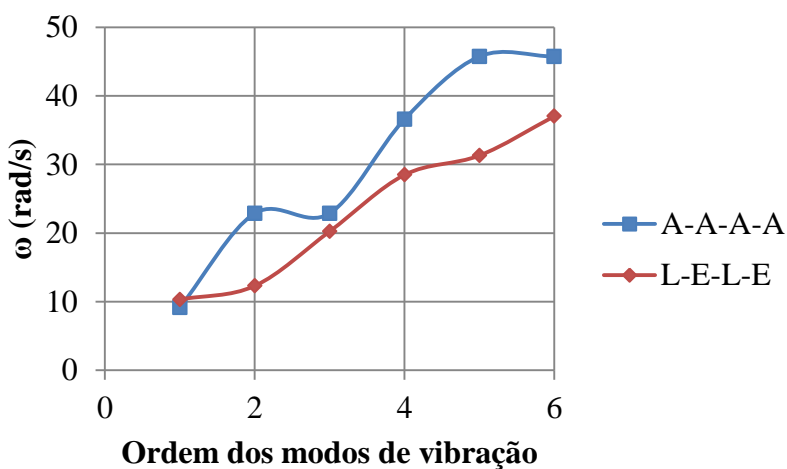


Figura 4.26 – Frequências naturais analisadas no Caso 9

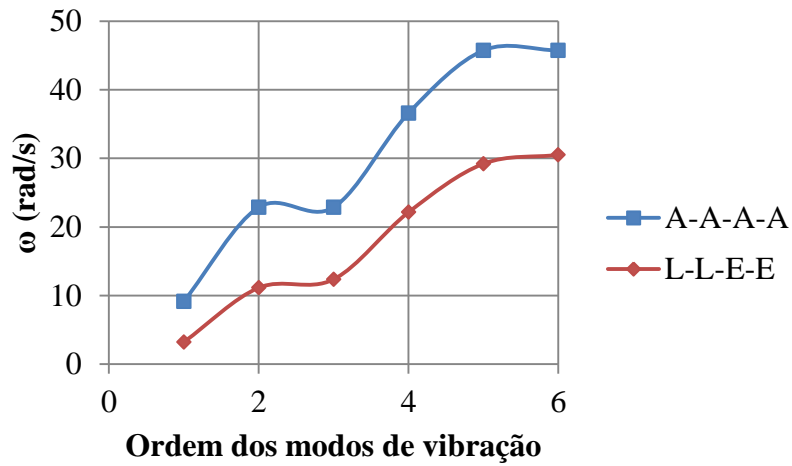


Figura 4.27 – Frequências naturais analisadas no Caso 10

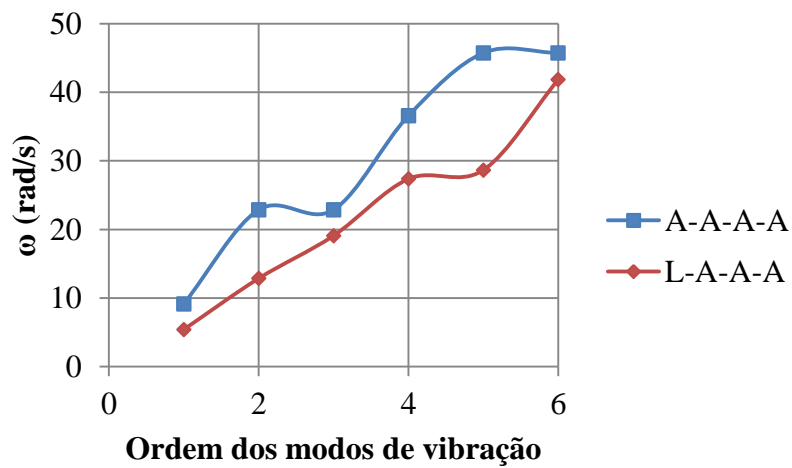


Figura 4.28 – Frequências naturais analisadas no Caso 11

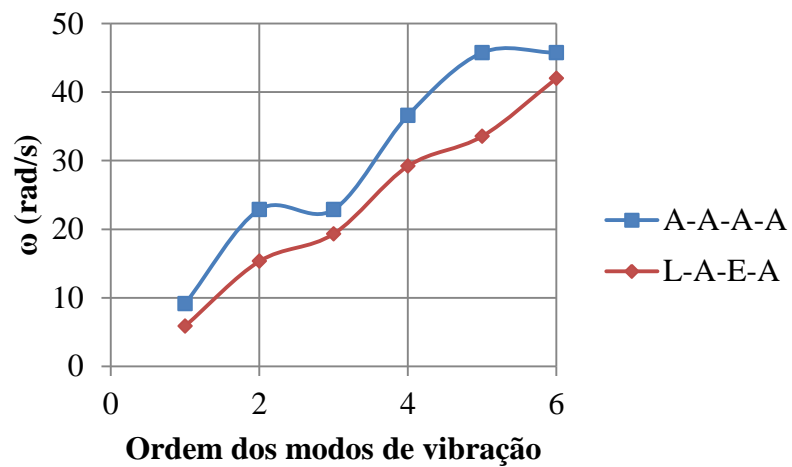


Figura 4.29 – Frequências naturais analisadas no Caso 12

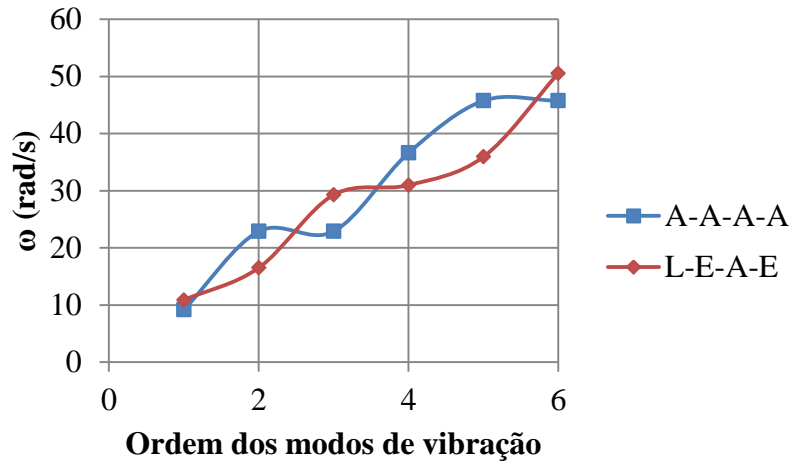


Figura 4.30 – Frequências naturais analisadas no Caso 13

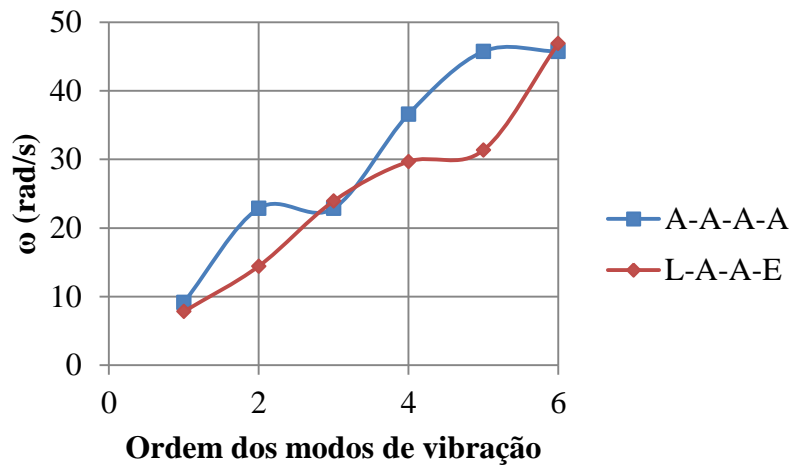


Figura 4.31 – Frequências naturais analisadas no Caso 14

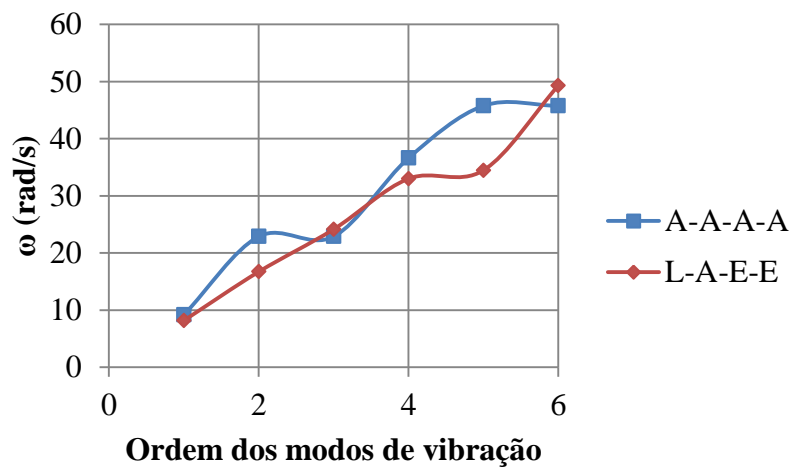


Figura 4.32 – Frequências naturais analisadas no Caso 15

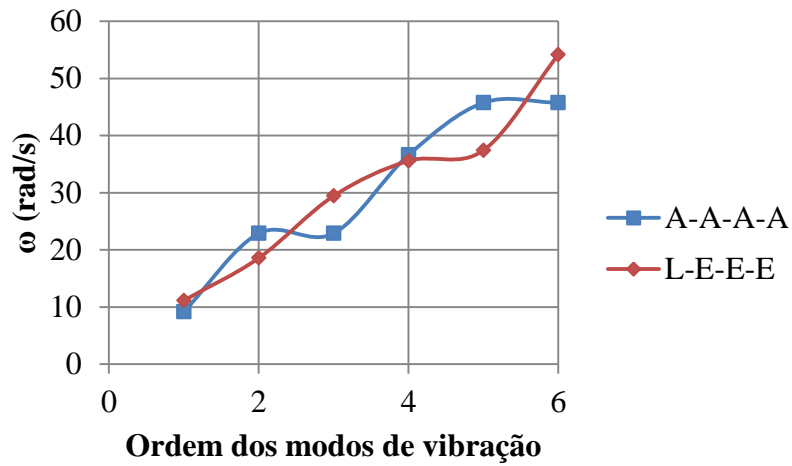


Figura 4.33 – Frequências naturais analisadas no Caso 16

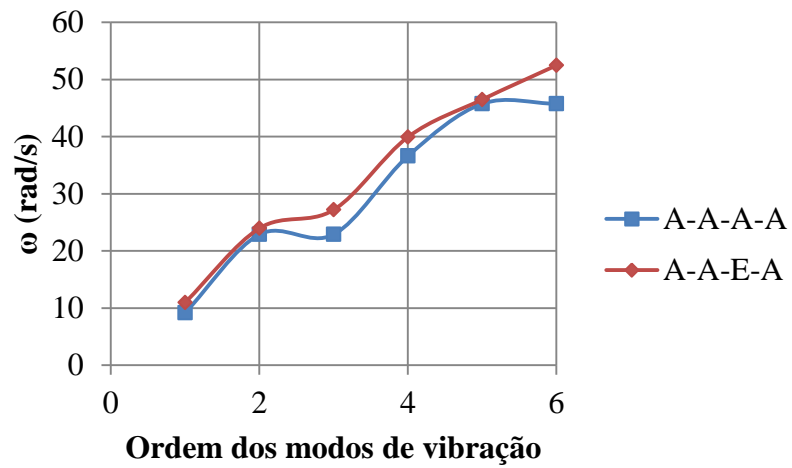


Figura 4.34 – Frequências naturais analisadas no Caso 17

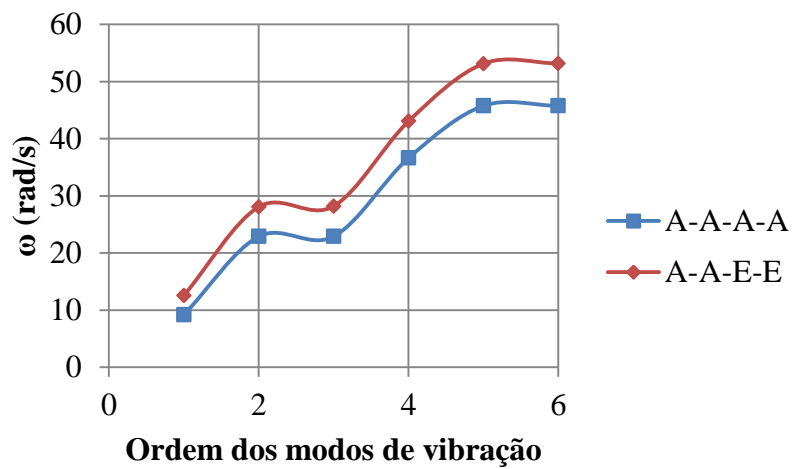


Figura 4.35 – Frequências naturais analisadas no Caso 18



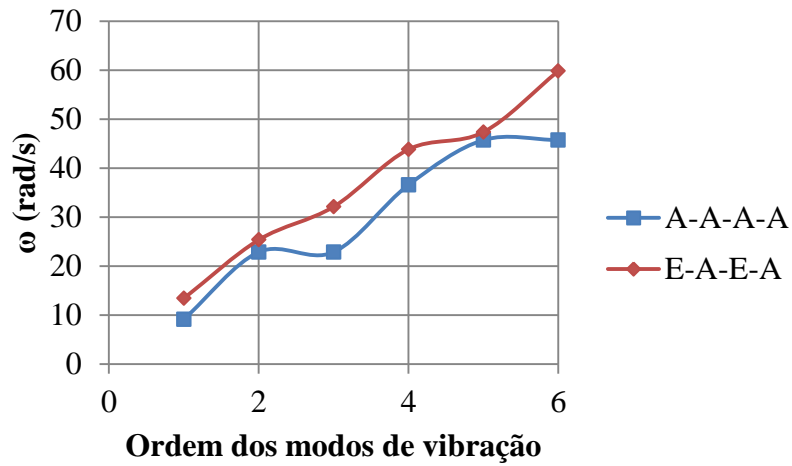


Figura 4.36 – Frequências naturais analisadas no Caso 19

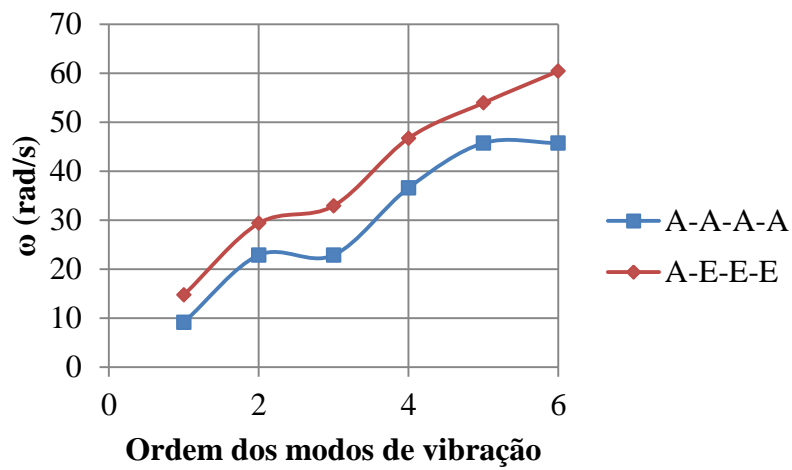


Figura 4.37 – Frequências naturais analisadas no Caso 20

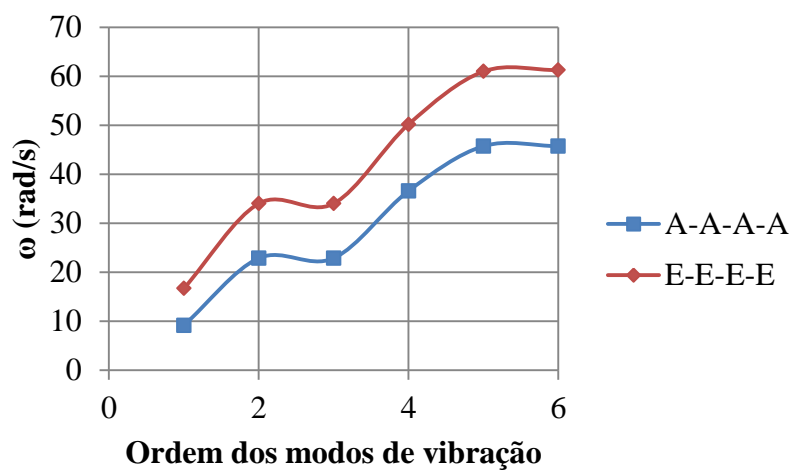
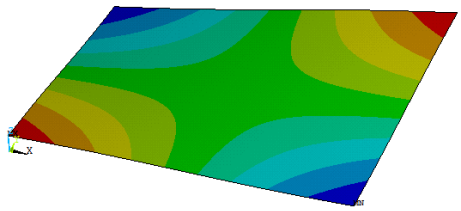
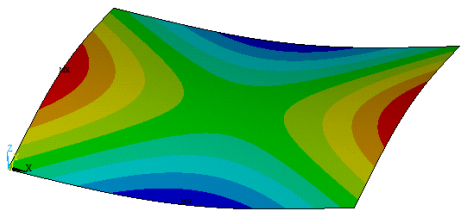
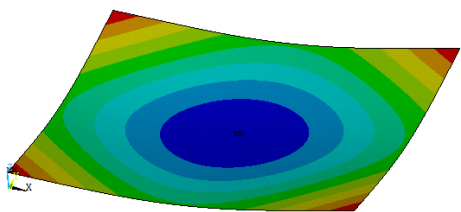
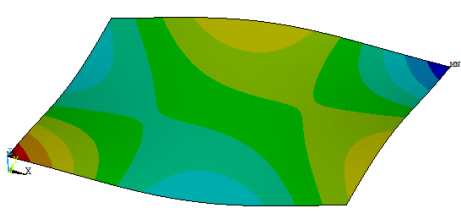
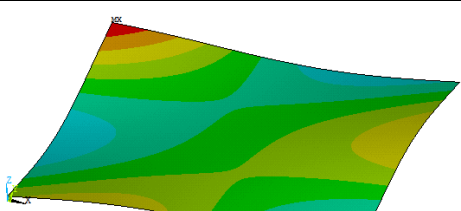


Figura 4.38 – Frequências naturais analisadas no Caso 21

Nas tabelas a seguir estão os modos de vibração para as seis primeiras frequências naturais para  $h=0,1$  m, mostrando as meia-ondas nas direções x e y que fornecem os índices m e n, respectivamente. É interessante notar uma correlação entre as deformadas obtidas no Caso 1 e as outras deformadas, embora a condição de contorno livre não permita o desenvolvimento completo das meia-ondas, é fácil fazer a correlação pra identificar os modos de vibração observados em todos os casos.

Tabela 4.33 Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 2

Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal
2,2	6,198	
1,3	9,072	
3,1	11,232	
3,2	16,005	
2,3	16,005	

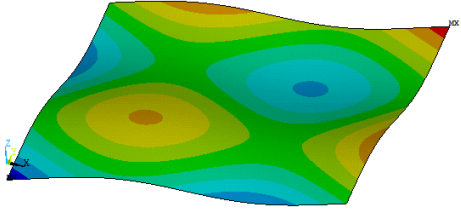
4,1	28,217	
-----	--------	--

Tabela 4.34 Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 3

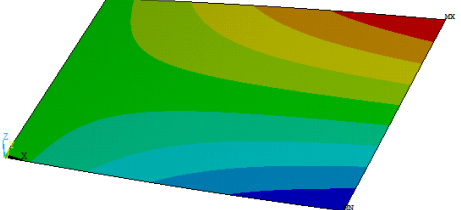
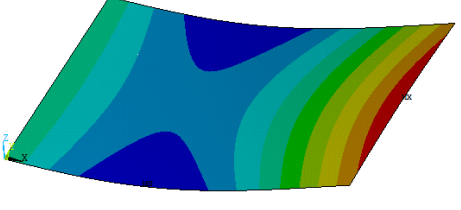
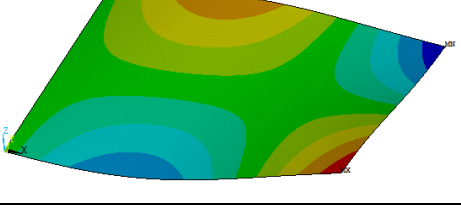
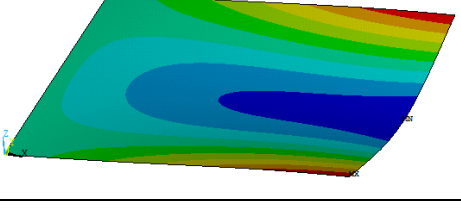
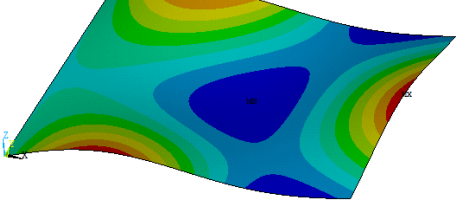
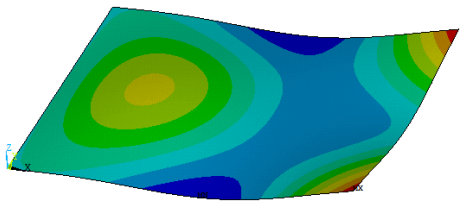
Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal
1,2	3,048	
2,1	6,896	
2,2	11,663	
1,3	11,991	
3,1	22,276	
2,3	23,292	

Tabela 4.35 Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 4

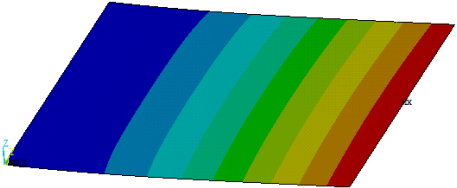
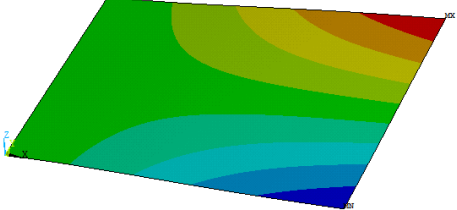
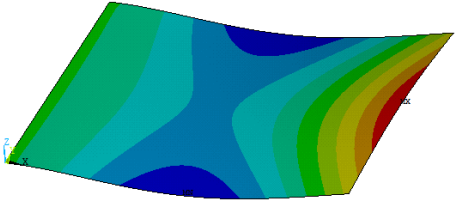
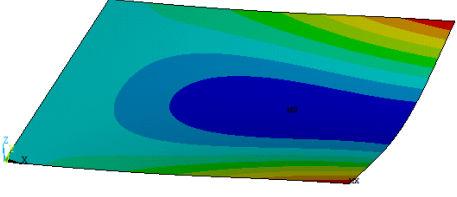
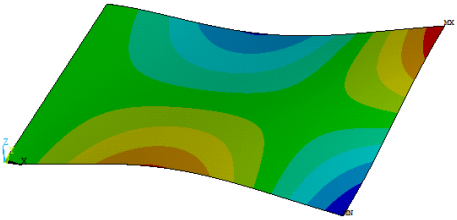
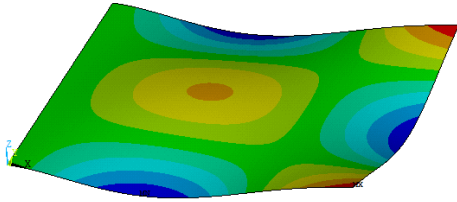
Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal
1,1	1,608	
1,2	3,922	
2,1	9,844	
1,3	12,556	
2,2	14,258	
2,3	24,894	

Tabela 4.36 Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 5

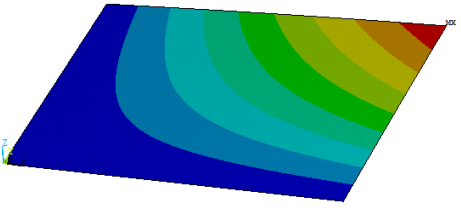
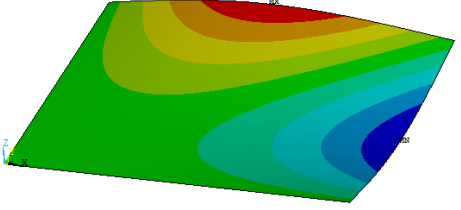
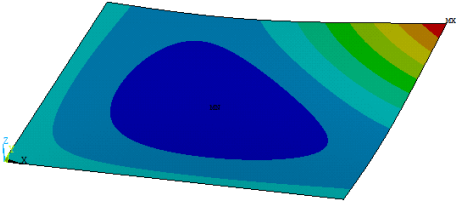
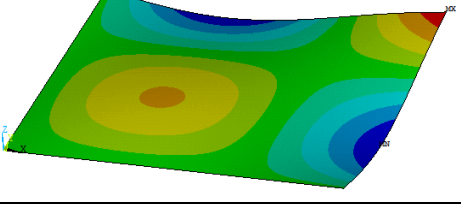
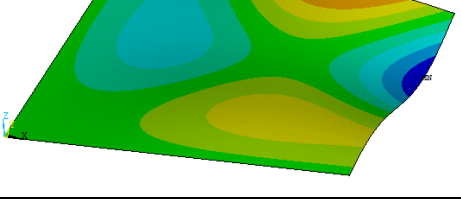
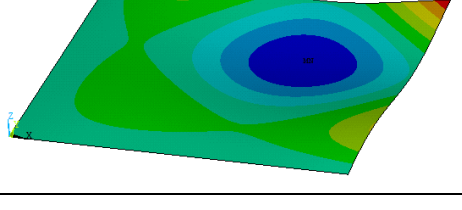
Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal
1,1	1,545	
1,2	7,972	
2,1	8,904	
2,2	17,519	
1,3	23,543	
3,1	24,670	

Tabela 4.37 Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 6

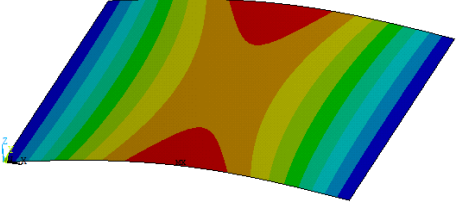
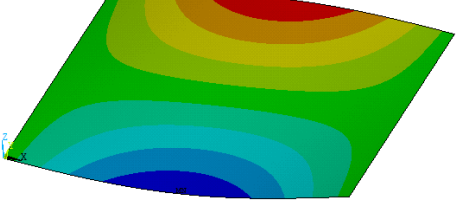
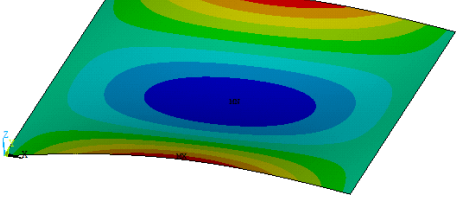
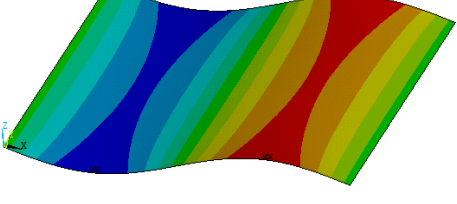
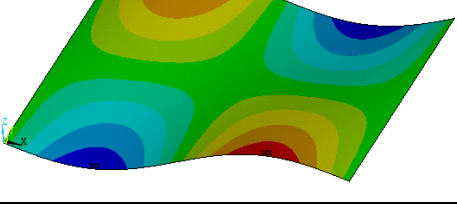
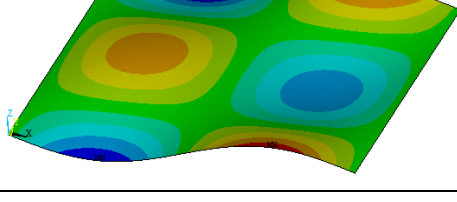
Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal
1,1	4,458	
1,2	7,396	
1,3	16,829	
2,1	17,999	
2,2	21,494	
2,3	32,360	

Tabela 4.38 Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 7

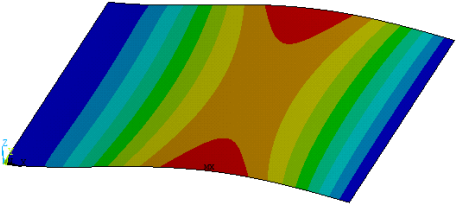
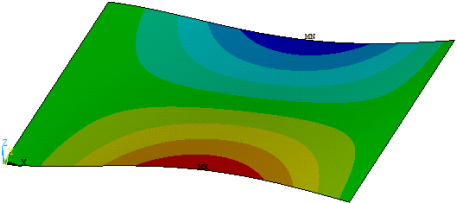
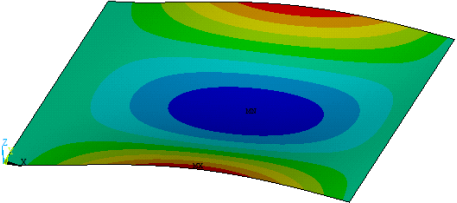
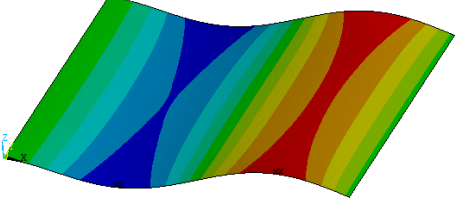
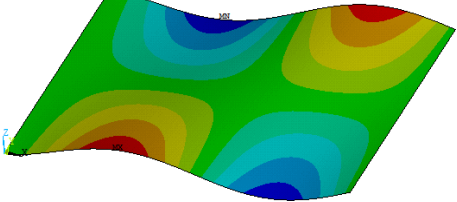
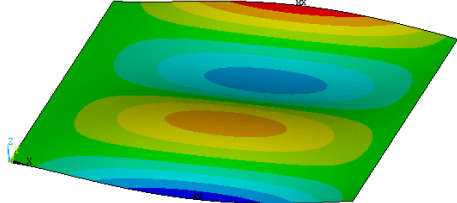
Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal
1,1	7,028	
1,2	9,467	
1,3	18,238	
2,1	22,825	
2,2	25,898	
1,4	35,519	

Tabela 4.39 Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 8

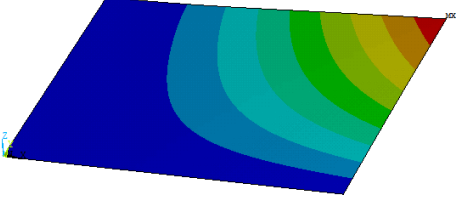
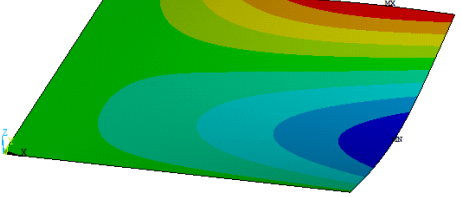
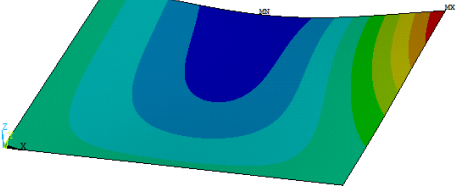
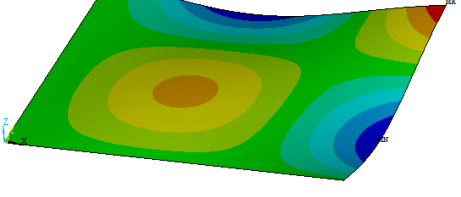
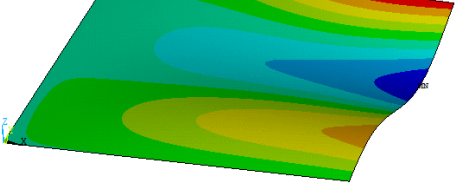
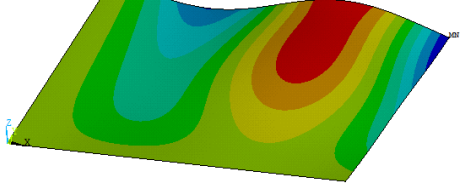
Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal
1,1	2,467	
1,2	8,796	
2,1	11,385	
2,2	19,786	
1,3	24,316	
3,1	29,386	



Tabela 4.40 Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 9

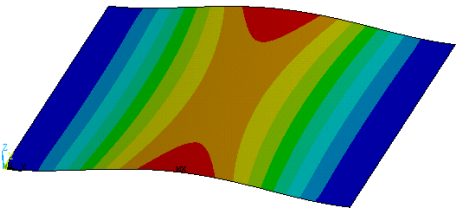
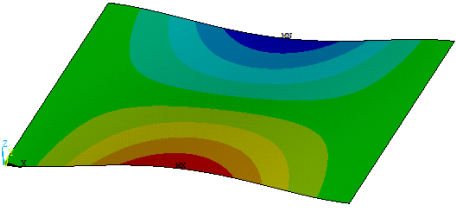
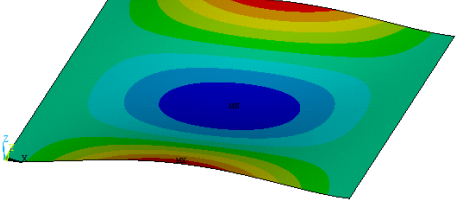
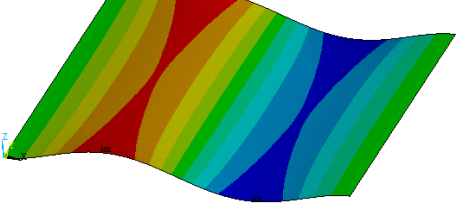
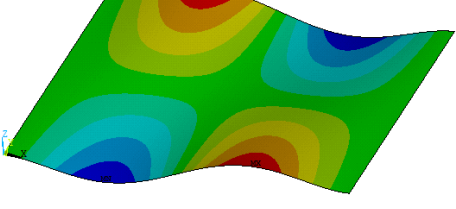
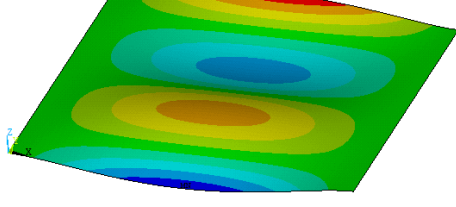
Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal
1,1	10,245	
1,2	12,176	
1,3	20,056	
2,1	28,196	
2,2	30,910	
1,4	36,699	

Tabela 4.41 Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 10

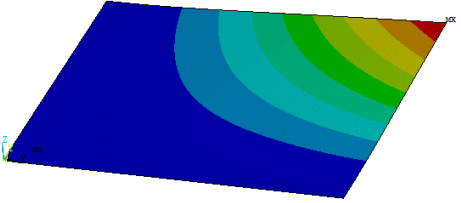
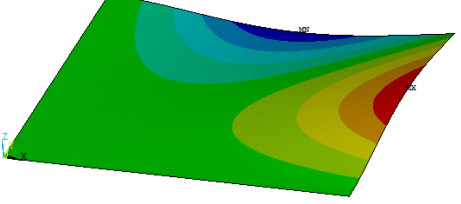
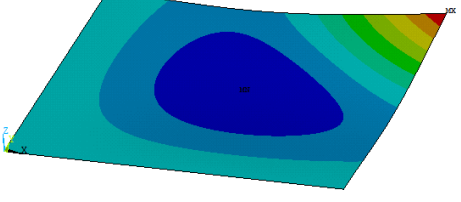
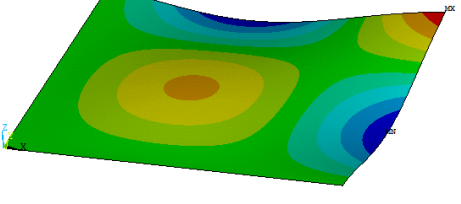
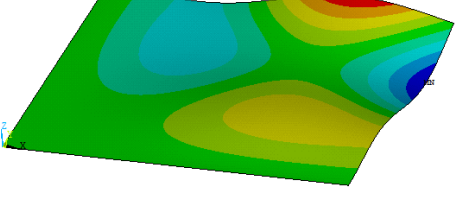
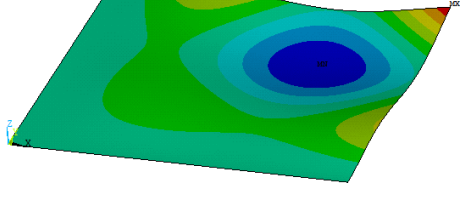
Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal
1,1	3,196	
2,1	11,027	
1,2	12,277	
2,2	21,913	
1,3	28,899	
3,1	30,212	

Tabela 4.42 Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 11

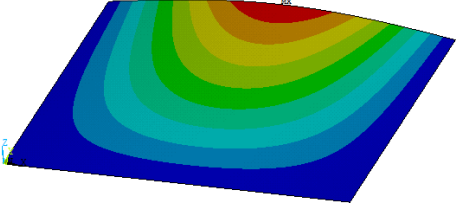
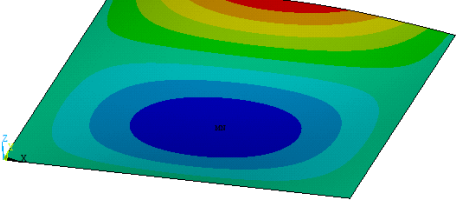
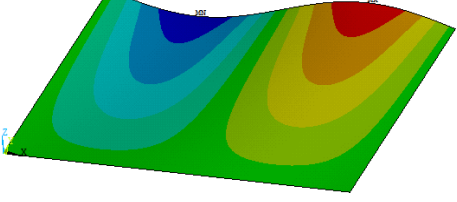
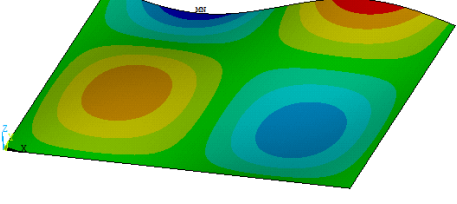
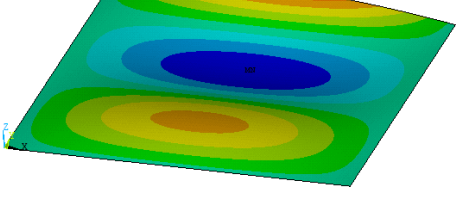
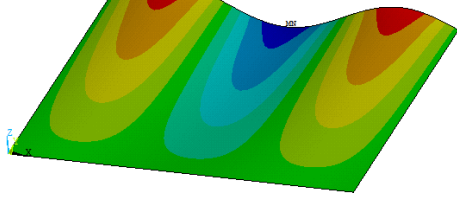
Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal
1,1	5,384	
1,2	12,732	
2,1	19,010	
2,2	27,090	
1,3	28,427	
3,1	41,593	

Tabela 4.43 Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 12

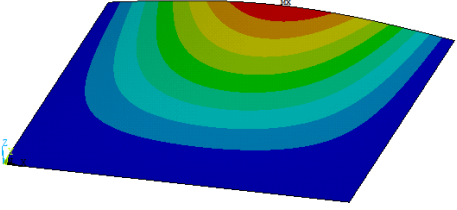
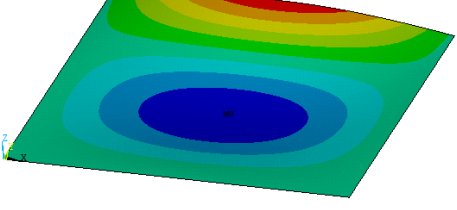
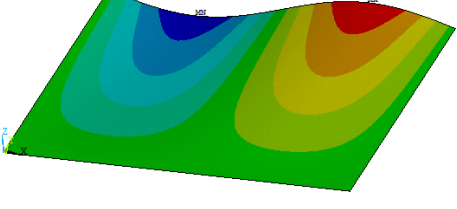
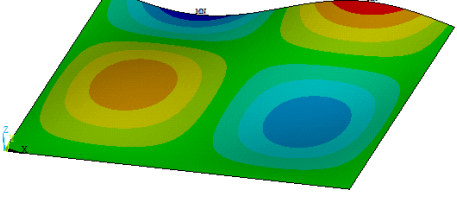
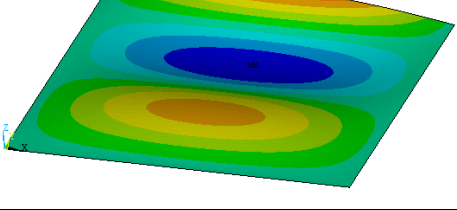
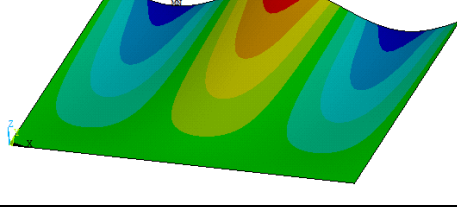
Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal
1,1	5,846	
1,2	15,191	
2,1	19,243	
2,2	28,921	
1,3	33,278	
3,1	41,739	

Tabela 4.44 Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 13

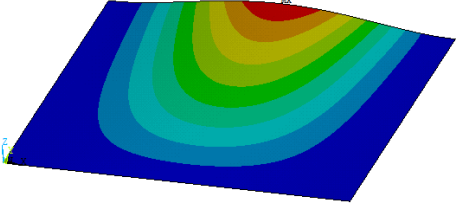
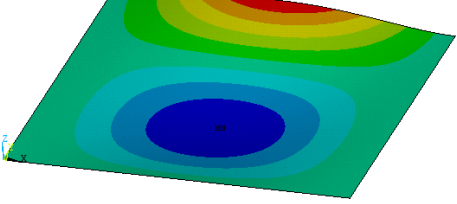
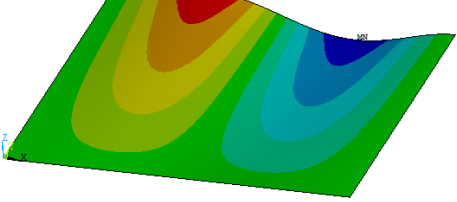
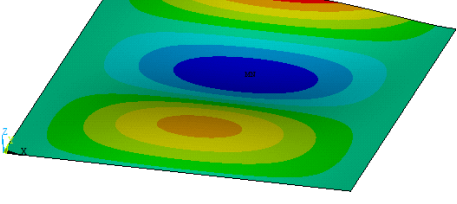
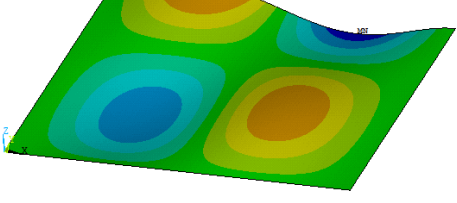
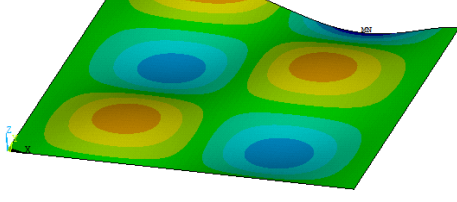
Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal
1,1	10,794	
1,2	16,384	
2,1	28,967	
1,3	30,726	
2,2	35,563	
2,3	49,906	

Tabela 4.45 Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 14

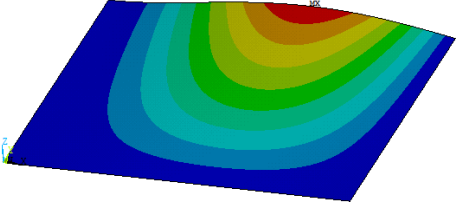
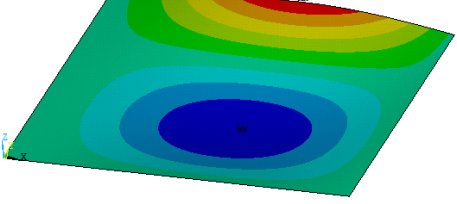
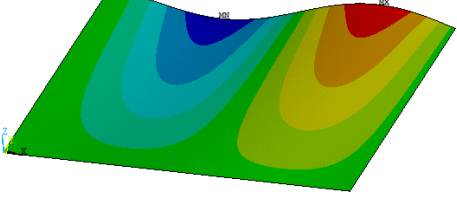
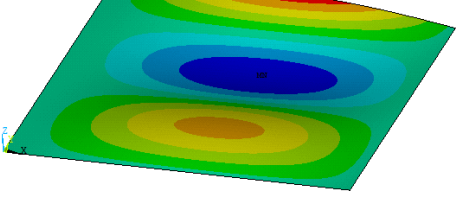
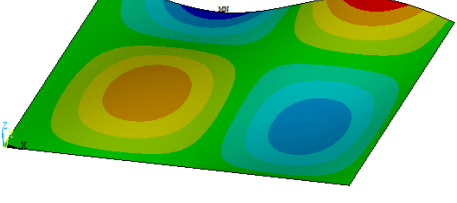
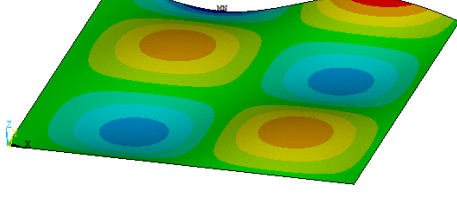
Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal
1,1	7,751	
1,2	14,298	
2,1	23,703	
1,3	29,437	
2,2	31,017	
2,3	46,295	

Tabela 4.46 Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 15

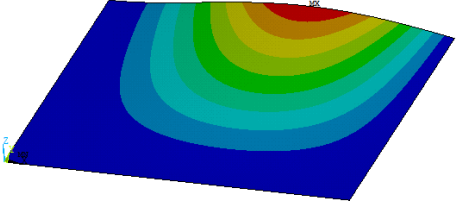
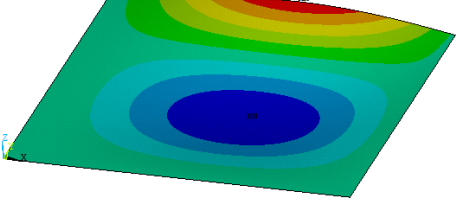
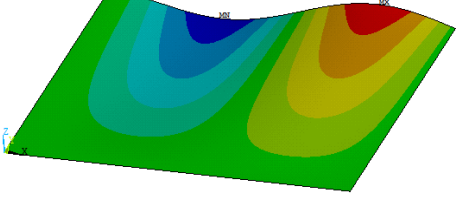
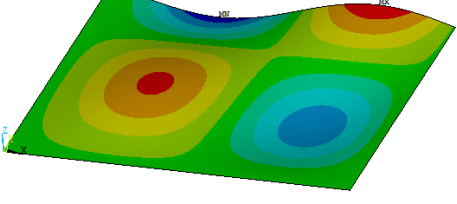
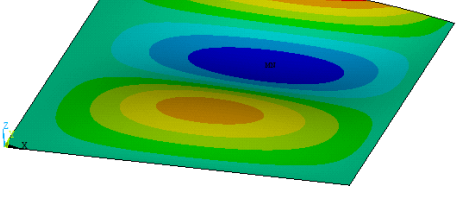
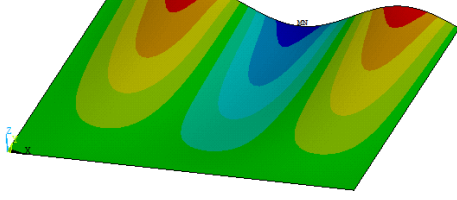
Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal
1,1	8,094	
1,2	16,571	
2,1	23,895	
2,2	32,660	
1,3	34,178	
3,1	48,654	

Tabela 4.47 Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 16

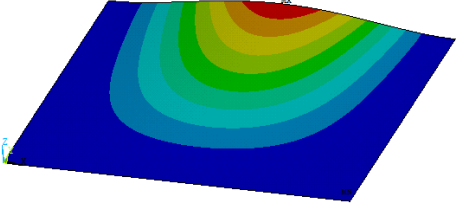
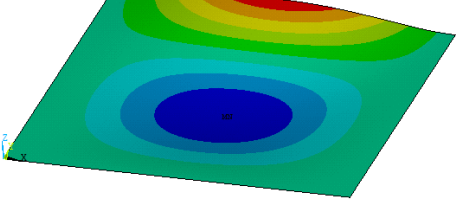
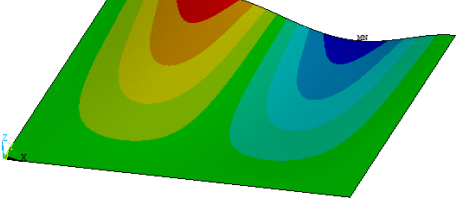
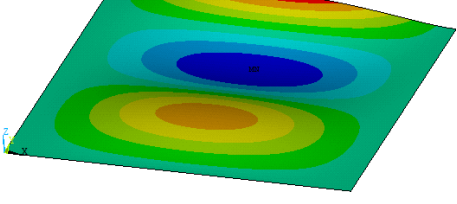
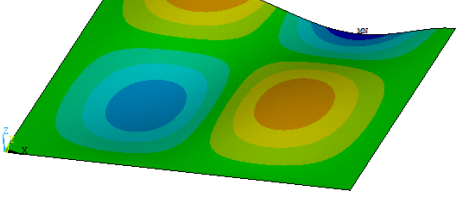
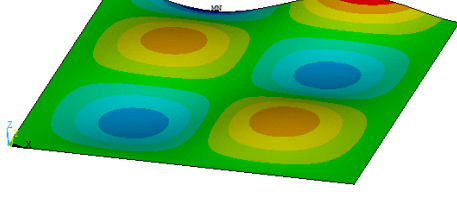
Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal
1,1	11,048	
1,2	18,433	
2,1	29,128	
1,3	35,303	
2,2	37,049	
2,3	53,497	



Tabela 4.48 Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 17

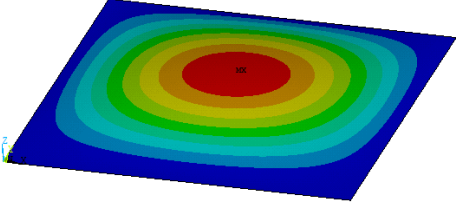
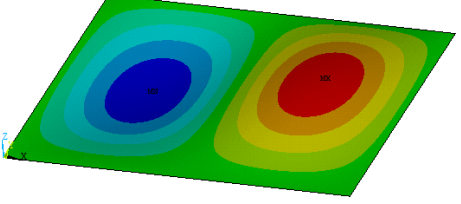
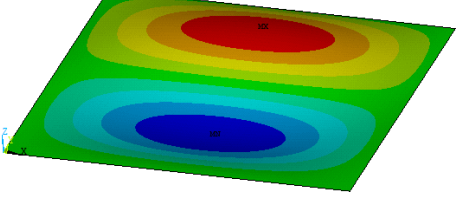
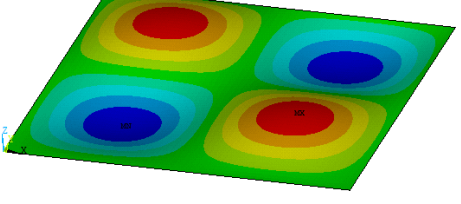
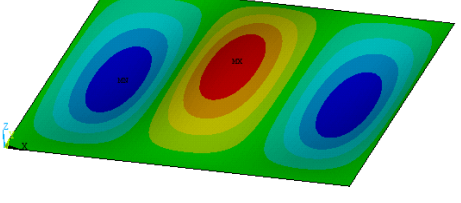
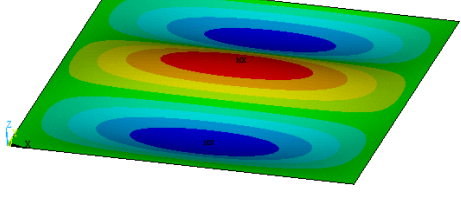
Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal
1,1	10,888	
2,1	23,787	
1,2	26,999	
2,2	39,506	
3,1	46,124	
1,3	52,029	

Tabela 4.49 Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 18

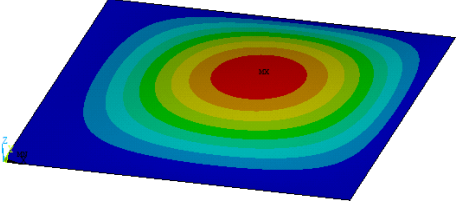
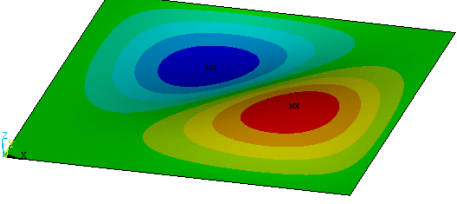
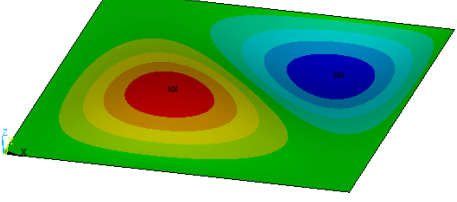
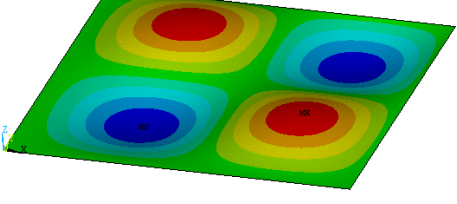
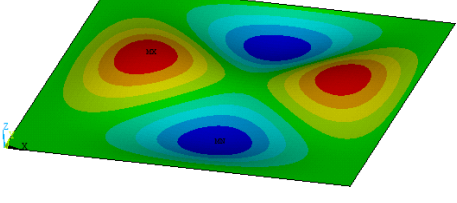
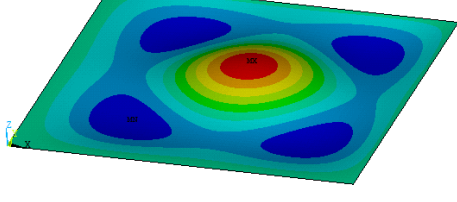
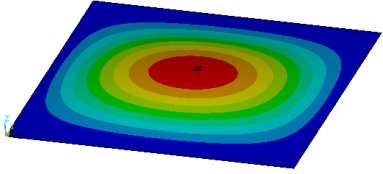
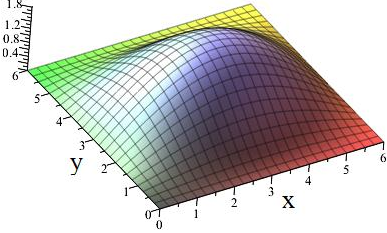
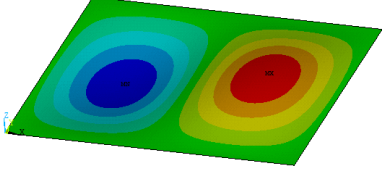
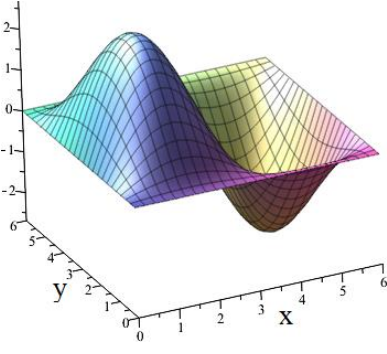
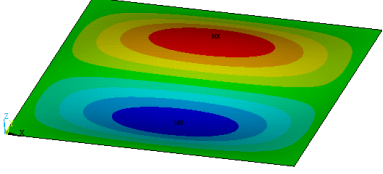
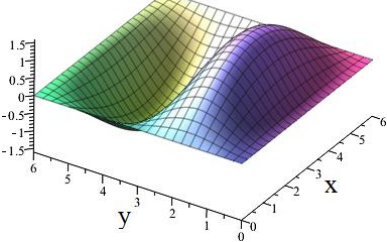
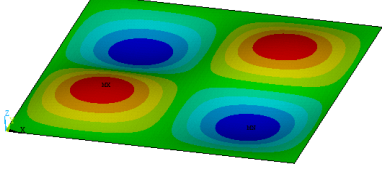
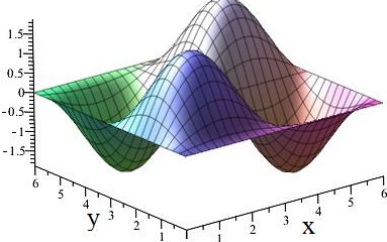
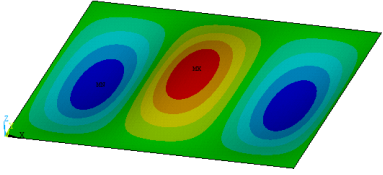
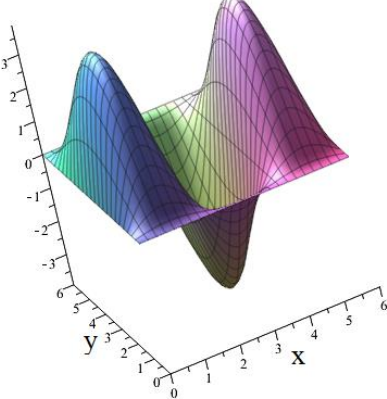
Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal
1,1	12,470	
2,1	27,883	
1,2	27,991	
2,2	42,614	
1,3	52,644	
3,1	52,722	

Tabela 4.50 Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 19

Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal (numérico)	Deformada modal (analítico)
1,1	13,355		
2,1	25,223		
1,2	31,914		
2,2	43,422		
3,1	47,036		

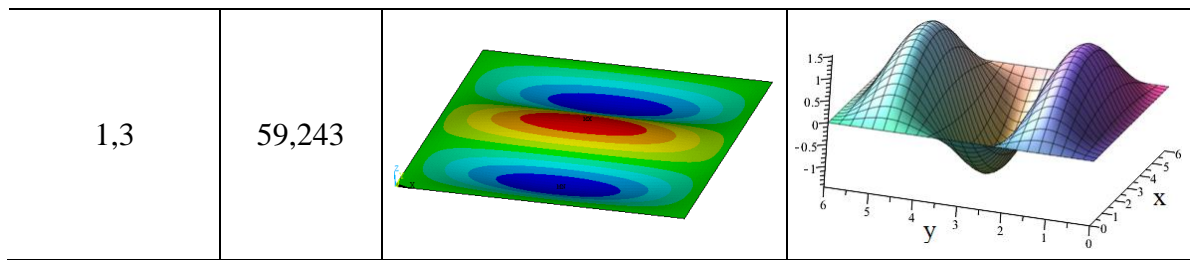
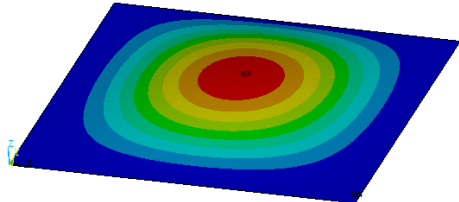
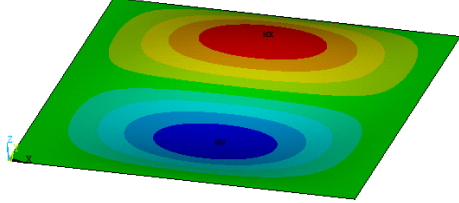
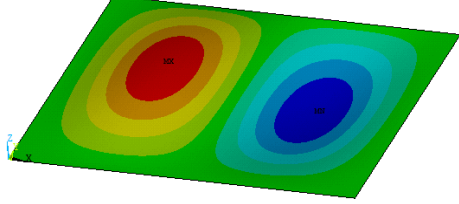
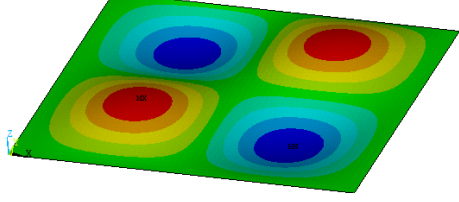
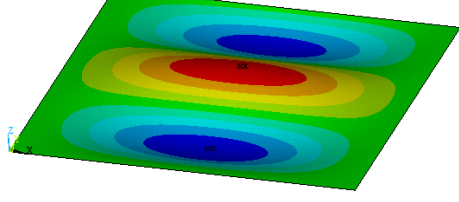


Tabela 4.51 Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 20

Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal
1,1	14,689	
1,2	29,186	
2,1	32,730	
2,2	46,300	
1,3	53,494	

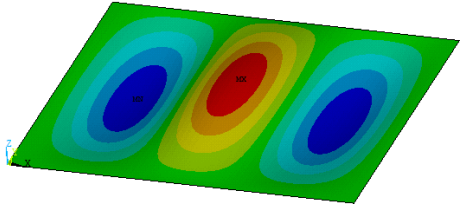
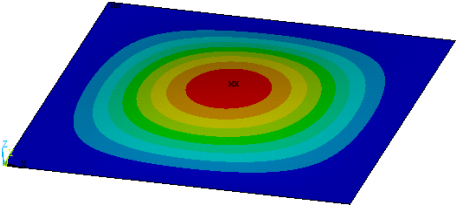
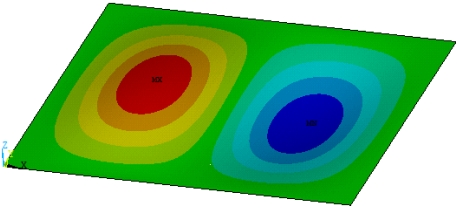
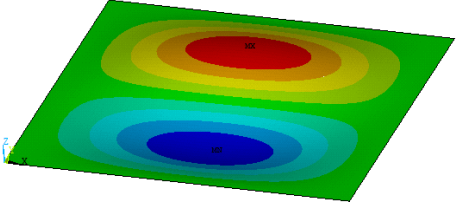
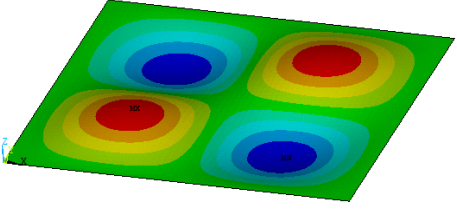
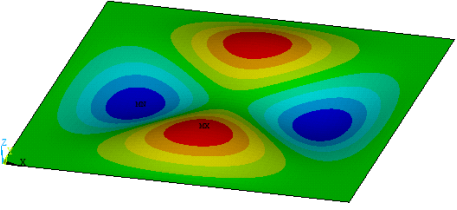
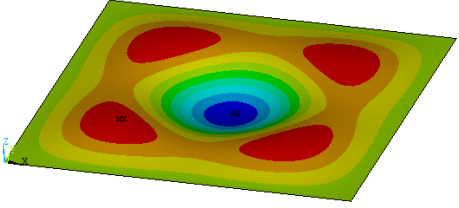
3,1	59,830	
-----	--------	--

Tabela 4.52 Deformadas dos seis primeiros modos de vibração para o Caso 21

Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal
1,1	16,622	
2,1	33,816	
1,2	33,816	
2,2	49,739	
3,1	60,407	

1,3	60,705	
-----	--------	--

## 5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Este capítulo divide-se em conclusões observadas durante os estudos, realizações das análises e reflexões sobre os resultados, e sugestões para trabalhos futuros.

### 5.1 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi mostrado um procedimento para estudo da vibração livre em placas retangulares finas, aplicado mais especificamente em placas quadradas. Mostrou-se a variação e influência de alguns parâmetros e das condições de vinculação nas respostas de frequências naturais e deformadas modais.

A partir das equações analíticas e tabelas desenvolvidas por autores consagrados foi possível obter as soluções de frequências naturais para diversos casos. Obteve-se as soluções analíticas para a deformada modal de apenas dois casos, (A-A-A-A) e (E-A-E-A), pois exigem a utilização e resolução de expressões complicadas. Surgem como um artifício para a validação e interpretação dos resultados obtidos numericamente.

A simulação numérica, realizada em elementos finitos por meio do programa ANSYS, proporcionou resultados que foram comparados com os analíticos e representações tridimensionais das deformadas modais.

Foi realizada uma rápida análise pelo método das diferenças finitas, mostrando a sua eficácia, simplicidade e rapidez, evidenciando não ser preciso conhecimentos profundos e avançados para utilizá-lo em um problema de difícil solução como o de vibração em placas.

Para a análise numérica foi utilizado o elemento SHELL281 da biblioteca do ANSYS, o qual foi testado e validado com resultados encontrados em (Silva, 1998). Foram feitos testes de convergência e análises de duas placas, uma fina e uma espessa.

Das análises, é possível perceber que as respostas obtidas por elementos finitos são extremamente precisas, inclusive sendo eficazes para análises de placas espessas. A análise

numérica é, portanto, um processo interessante que apresenta resultados rápidos e satisfatórios, podendo ser aplicados em estruturas de geometrias complexas sem soluções analíticas.

A evolução das frequências naturais em função do número de meia-onda em determinada direção evidenciou a presença apenas do tramo ascendente para as placas. Conclui-se que a menor energia será sempre referente ao primeiro modo (1,1) e para valores maiores de  $m$  ou  $n$  a menor energia se dá com a presença de uma meia-onda na outra direção, isto é (1,2), (1,3), (6,1) e (7,1) seriam os modos de menor energia (frequências mais baixas) para os casos constantes  $n=2$ ,  $n=3$ ,  $m=6$  e  $m=7$ . Evidencia-se esse fato nas Figuras 4.16 e 4.17. A comparação imediata com as cascas é natural, esta apresenta ramo descendente e ascendente, não sendo previsíveis os modos de menor energia (são, ainda, influenciados pelos parâmetros geométricos da casca), em contrapartida conclui-se a previsibilidade dos modos da placa. A Figura 5.1 a seguir mostra o desenvolvimento das frequências de uma casca de modo análogo às Figuras 4.16 e 4.17.

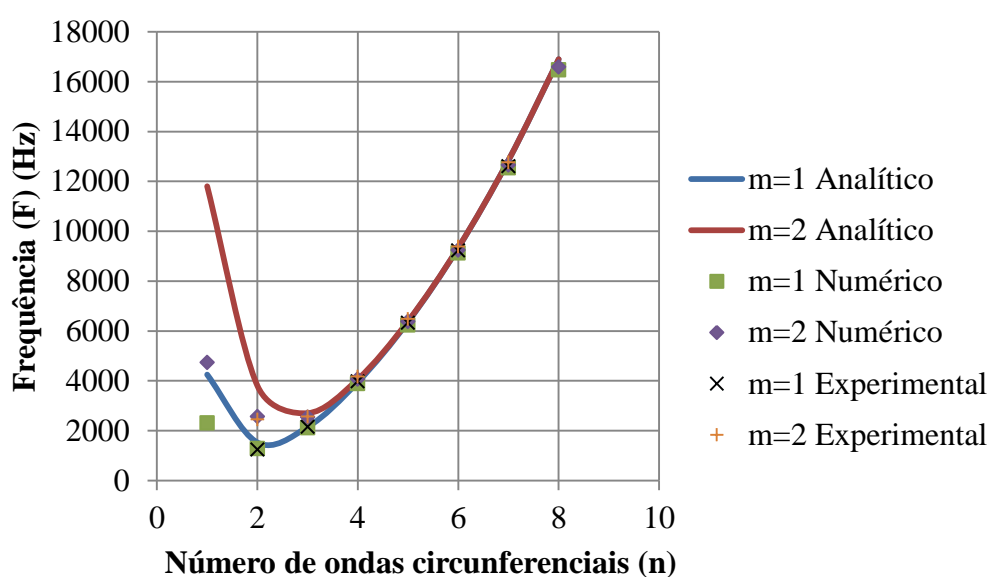


Figura 5.1 Frequências naturais para uma casca cilíndrica circular vibrando livremente com seus extremos engastado-engastado (Lopez, Dutra e Pedroso, 2013)

Em cada caso de vinculação estudado evidenciou-se o desenvolvimento das frequências naturais em ordem de surgimento (ordem crescente de energia e de frequência) comparando com o caso da placa totalmente apoiada (Caso 1) esclarecendo se a configuração de apoios em questão é mais ou menos rígida. Quando é menos rígido a curva



valores menores de frequência e está abaixo da curva de comparação (placa A-A-A-A), para casos mais rígidos é observado o contrário.

As representações tridimensionais das deformadas modais são uma adição interessante pelo fácil entendimento visual proporcionado e pela dificuldade em encontra-las na literatura. São representações qualitativas que evidenciam as diferenças que as condições de vinculação causam na deformada e permitem a visualização clara das meia-ondas. A presença de deformadas alternativas para os modos de vibração atrapalham a visualização das meia-ondas, mas são facilmente identificados pois se repetem entre casos.

Deste modo, este trabalho tem como contribuição, a elaboração de um material didático que permita uma iniciação no campo de análises dinâmicas de placas, investigação e representação de tendências das respostas em função de parâmetros que controlam o fenômeno e a representação das deformadas modais para vários casos de vinculação, sendo este último escasso na literatura.

## **5.2 SUGESTÕES**

- Expandir o estudo para placas espessas, utilizar a teoria de Reissner-Mindlin e comparar as respostas analíticas e numéricas para vários casos;
- Estudar condições de vinculação especiais, como uma placa apoiada em apenas alguns pontos por exemplo;
- Realizar o estudo com placas de diferentes geometrias, circular ou triangular por exemplo;
- Realizar o estudo com carregamento dinâmico;
- Expandir a análise feita com o método das diferenças finitas para malhas mais refinadas, utilizando um computador para auxiliar nos cálculos;
- Realizar análises para outras condições de contorno por meio do método das diferenças finitas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Amabili, M., Carra, S. (2012) “Experiments and simulations for large-amplitude vibrations of rectangular plates carrying concentrated masses.” *Journal of Sound and Vibration*, 331, 155-166.
- Anton, H., Rorres, C. (2001) “Álgebra linear com aplicações.” 8ª ed. Porto Alegre, Bookman.
- Askari, E., Jeong, K-H., Amabili, M. (2013) “Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface.” *Journal of Sound and Vibration*, 332, 3064-3085.
- Blevins, R. D. (1979) “Formulas for natural frequencies and mode shape.” New York: Van Nostrand Reinhold.
- Bose, T., Mohanty, A. R. (2013) “Vibration analysis of a rectangular thin isotropic plate with a part-through surface crack of arbitrary orientation and position.” *Journal of Sound and Vibration*, 332, 7123-7141.
- Clímaco, J. C. T. S. (2008) “Estruturas de concreto armado: fundamentos de projeto, dimensionamento e verificação.” 2ª ed. Brasília, Editora Universidade de Brasília, Finatec.
- Cook, R. D. (1995) “Finite element modeling for stress analysis.” United States of America, John Wiley & Sons, Inc.
- Dawe, D. J. & Roufaeil, O. L. (1980) “Rayleigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates.” *Journal of Sound and Vibration*, 69, 345-359.
- Gupta, U. S., Lal, R., Sharma, S. (2007) “Vibration of non-homogeneous circular Mindlin plates with variable thickness.” *Journal of Sound and Vibration*, 302, 1-17.
- Hosseini-Hashemi, Sh., Rezaee, V., Atashipour, S. R., Girhammar, U. A. (2012) “Accurate free vibration analysis of thick laminated circular plates with attached rigid core.” *Journal of Sound and Vibration*, 331, 5581-5596.
- Ismail, R., Cartmell, M. P. (2012) “An investigation into the vibration analysis of a plate with a surface crack of variable angular orientation.” *Journal of Sound and Vibration*, 331, 2929-2948.
- Kim, C. B., Cho, H. S., Beom, H. G. (2012) “Exact solutions of in-plane natural vibration of a circular plate with outer edge restrained elastically.” *Journal of Sound and Vibration*, 331, 2173-2189.

- Leissa, A. W. (1973) "The free vibration of rectangular plates." *Journal of Sound and Vibration*, 31, 257-293.
- Li, P., Fang, Y., Xu, F. (2014) "Analytical modeling of squeeze-film damping for perforated circular microplates." *Journal of Sound and Vibration*, 333, 2688-2700.
- Lin, T. R., Tan, A. C. C., Yang, C., Hargreaves, D. (2011) "Vibration of L-shaped plates under a deterministic force or moment excitation: a case of statistical energy analysis application." *Journal of Sound and Vibration*, 330, 4780-4797.
- Lin, T. R. (2012) "An analytical and experimental study of the vibration response of a clamped ribbed plate." *Journal of Sound and Vibration*, 331, 902-9013.
- Lopez, A. A. O., Dutra, R. B. C., Pedroso, L. J. (2013) "Um estudo analítico e numérico dos efeitos das condições de borda em vibrações livres de cascas cilíndricas" XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, 2013, Pirenópolis-GO.
- Mindlin, R. D. (1951) "Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates." *Journal of Applied Mechanics*, 18, 31-38.
- Mochida, Y., Ilanko, S. (2010) "Transient vibration analysis of completely free plate using modes obtained by Gorman's superposition method." *Journal of Sound and Vibration*, 329, 1890-1900.
- Pedroso, L. J. (1998) "Teoria de placas e cascas: uma abordagem analítica e numérica." Brasília, Grupo de dinâmica e fluido-estrutura, UnB.
- Pedroso, L. J. (1999) "Método das diferenças finitas em placas." Brasília, Grupo de dinâmica e fluido-estrutura, UnB.
- Pedroso, L. J. (2005) "Método das diferenças finitas em vigas esbeltas." Brasília, Grupo de dinâmica e fluido-estrutura, UnB.
- Pedroso, L. J. (2011) "Uma introdução ao método das diferenças finitas centrais." Brasília, Grupo de dinâmica e fluido-estrutura, UnB.
- Pedroso, L. J. (2013) "Manuscritos, esquemas e notas de sessões de orientação." Brasília, UnB.
- Reissner, E. (1945) "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates." *Journal of Applied Mechanics*, 12, 69-76.
- Senjanovic, I., Vladimir, N., Tomic, M. (2013) "An advanced theory of moderately thick plates vibrations." *Journal of Sound and Vibration*, 332, 1868-1880.

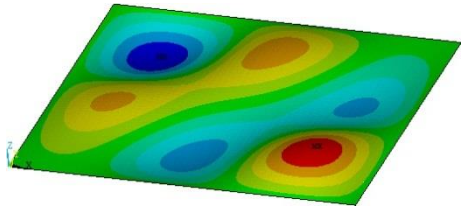
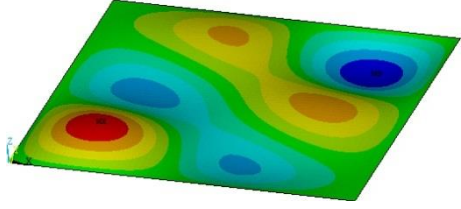
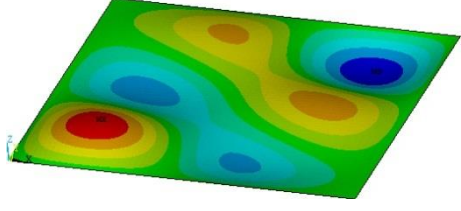
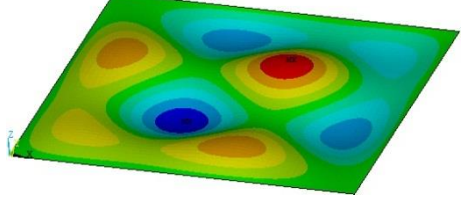
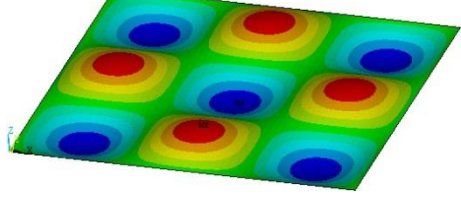
- Shi, P., Dong, C. Y. (2012) "Vibration analysis of functionally graded annular plates with mixed boundary conditions in thermal environment." *Journal of Sound and Vibration*, 331, 3649-3662.
- Silva, S. F. (1998) "Comportamento dinâmico de placas de Reissner-Mindlin utilizando o elemento finito quadrilátero lagrangeano de 16 nós." Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Civil, UnB, Brasília, DF, 112p.
- Soedel, W. (2004) "Vibration of shells and plates." 3<sup>rd</sup> ed. New York, Marcel Dekker, Inc.
- Szilard, R. (1974) "Theory and analysis of plates – classical and numerical methods." Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall Inc.
- Szilard, R. (2004) "Theory and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods." United States of America, John Wiley & Sons, Inc.
- Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S. (1987) "Theory of plates and shells." 2<sup>nd</sup> ed. United States of America, McGraw-Hill Book Company, Inc.
- Ventsel, E., Krauthammer, T. (2001) "Thin plates and shells: theory, analysis, and applications." New York, Marcel Dekker, Inc.
- Wang, G., Unal, A. (2013) "Free vibration of stepped thickness rectangular plates using spectral finite element method." *Journal of Sound and Vibration*, 332, 4324-4338.
- Wang, C. Y. (2014) "The vibration modes of concentrically supported free circular plates." *Journal of Sound and Vibration*, 333, 835-847.
- Xu, H., Du, J., Li, W. L. (2010) "Vibrations of rectangular plates reinforced by any number of beams of arbitrary lengths and placement angles." *Journal of Sound and Vibration*, 329, 3759-3779.
- Zhou, Z. H., Wong, K. W., Xu, X. S., Leung, A. Y. T. (2011) "Natural vibration of circular and annular thin plates by Hamiltonian approach." *Journal of Sound and Vibration*, 330, 1005-1017.

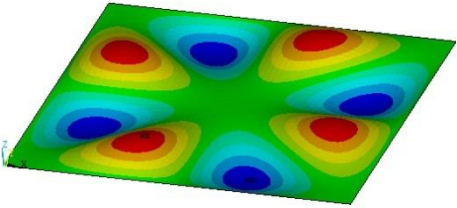
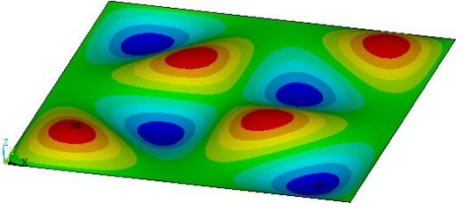
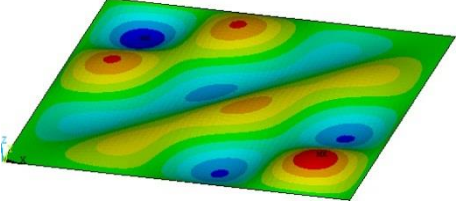
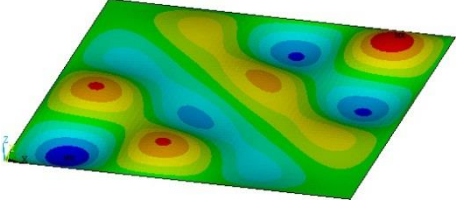
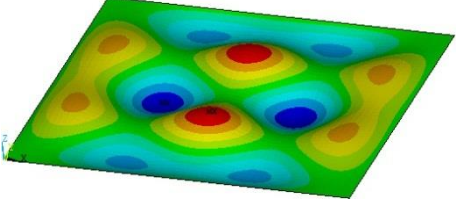
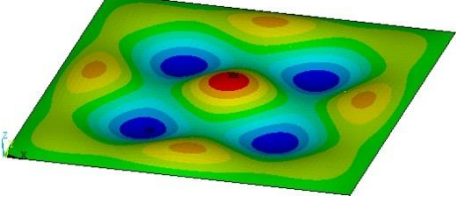
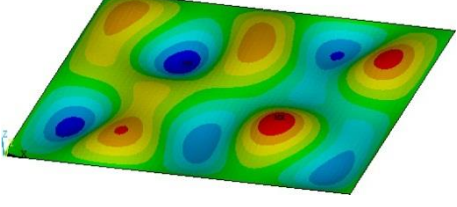
## **APÊNDICES**

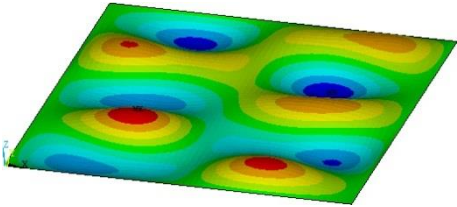
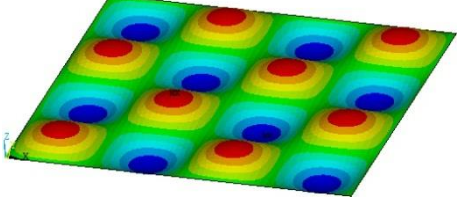
## APÊNDICE A DEFORMADAS ADICIONAIS

A tabela a seguir contém os quatorze modos de vibração do Caso 1 que não foram mostrados na seção 4.2.1. Referem-se ao caso de  $h=0,1$  m, mostrando as meia-ondas nas direções  $x$  e  $y$  que fornecem os índices  $m$  e  $n$ , respectivamente. Em alguns modos percebe-se a distorção na deformada por ser se tratar de uma representação alternativa, tornando, assim, difícil de saber qual o número de meia-onda correspondente a cada direção.

Tabela A.1 – Modos de vibração restantes e suas respectivas deformadas modais para o Caso 1 (A-A-A-A)

Modo de vibração (m,n)	Frequência (Hz)	Deformada modal
3,2	58,707	
2,3	58,707	
4,1	76,975	
1,4	76,975	
3,3	80,997	

4,2	90,143	
2,4	90,152	
4,3	112,180	
3,4	112,180	
5,1	117,270	
1,5	117,270	
5,2	130,300	

2,5	130,300	
4,4	143,020	



## APÊNDICE B MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

A idéia do método das diferenças finitas é transformar a resolução de uma equação diferencial na resolução de um sistema de equações algébricas, usando para isto aproximações das derivadas que aparecem nas equações em diferenças finitas. É um método numérico que pode ser usado em muitos problemas de engenharia, como resolução de placas, transferência de calor, deformações em vigas e outros, especialmente quando resoluções analíticas são de difícil determinação. Esse tratamento numérico das equações diferenciais rende resultados aproximados, aceitáveis na maioria dos casos (Szilard, 1974).

O método consiste em considerar uma função geral  $y=f(x)$  com o eixo  $x$  sendo dividido em intervalos regulares  $\Delta x$ , não sendo necessariamente iguais. Caracteriza-se os pontos criados por índices para representar o ordenamento dos mesmos, tem-se então pontos  $m-1$ ,  $m$ ,  $m+1$ , etc, com os respectivos valores da função nesses pontos  $y_{m-1}$ ,  $y_m$  e  $y_{m+1}$  (Pedroso, 2011).

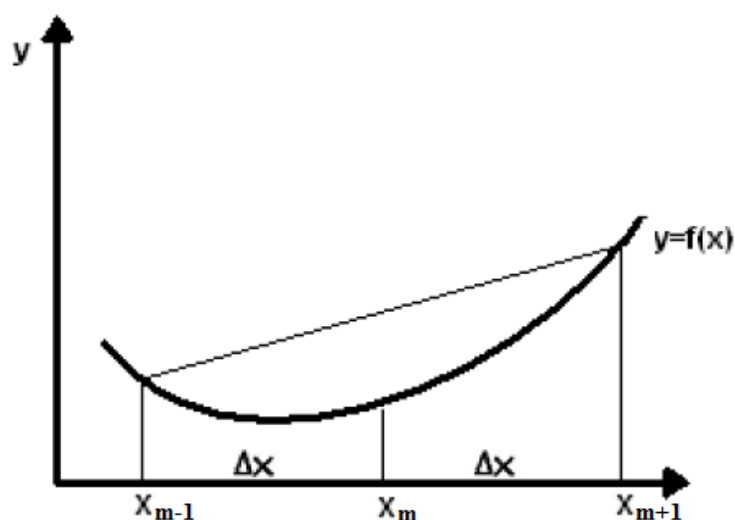


Figura B.1 – Aproximação de Taylor por diferença centrada (Pedroso, 2011)

Por série de Taylor:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= f(x) + \frac{df(x)}{dx} \Delta x + \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \\ f(x - \Delta x) &= f(x) - \frac{df(x)}{dx} \Delta x + \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Por meio das equações (B.1) formula-se as aproximações de diferenças finitas centrais das derivadas de qualquer ordem, porém mostra-se apenas até a quarta ordem por ser as mais usuais nos problemas de engenharia:

Derivada de primeira ordem  $\frac{df(x)}{dx}$ :

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} \Delta x - f(x) + \frac{df(x)}{dx} \Delta x = 2 \frac{df(x)}{dx} \Delta x$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} = \frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{2\Delta x} \quad (\text{B.2})$$

Derivada de segunda ordem  $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ :

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} \Delta x + \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} +$$

$$+ f(x) - \frac{df(x)}{dx} \Delta x + \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} = 2f(x) + 2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!}$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} = \frac{y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{B.3})$$

Derivada de terceira ordem  $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$ :

$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right) = \frac{\frac{d^2 f(x + \Delta x)}{dx^2} - \frac{d^2 f(x - \Delta x)}{dx^2}}{2\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{2\Delta x} \left[ \frac{f(x + \Delta x + \Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x + \Delta x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{f(x - \Delta x + \Delta x) - 2f(x - \Delta x) + f(x - \Delta x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \right] =$$

$$= \frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + 2f(x - \Delta x) - f(x - 2\Delta x)}{2(\Delta x)^3} = \frac{y_{m+2} - 2y_{m+1} + 2y_{m-1} - y_{m-2}}{2(\Delta x)^3} \quad (\text{B.4})$$

Derivada de quarta ordem  $\frac{d^4 f(x)}{dx^4}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{d^4 f(x)}{dx^4} &= \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right) = \frac{\frac{d^2 f(x+\Delta x)}{dx^2} - 2\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{d^2 f(x-\Delta x)}{dx^2}}{(\Delta x)^2} = \\
&= \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ \frac{f(x+\Delta x+\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x+\Delta x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} - \right. \\
&\quad \left. - 2\frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} + \frac{f(x-\Delta x+\Delta x) - 2f(x-\Delta x) + f(x-\Delta x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} \right] = \text{(B.5)} \\
&= \frac{f(x+2\Delta x) - 4f(x+\Delta x) + 6f(x) - 4f(x-\Delta x) + f(x-2\Delta x)}{(\Delta x)^4} \\
\frac{d^4 f(x)}{dx^4} &= \frac{y_{m+2} - 4y_{m+1} + 6y_m - 4y_{m-1} + y_{m-2}}{(\Delta x)^4}
\end{aligned}$$

A Figura B.2 a seguir mostra o resumo dos operadores para a utilização do método das diferenças finitas. É necessário uma manipulação extra para chegar ao operador que se utiliza na análise de placas (definido na seção B.2), mas é de extrema importância definir esses operadores básicos que serão necessários.

Operador Aproxim.	Célula (coeficientes)
$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_i$	$\frac{1}{2(\Delta x)} \left[ \begin{array}{c} \text{(-1)} \\ \text{---} \\ \text{(0)} \\ \text{---} \\ \text{(+1)} \end{array} \right]$
$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)_i$	$\frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ \begin{array}{c} \text{(+1)} \\ \text{---} \\ \text{(-2)} \\ \text{---} \\ \text{(+1)} \end{array} \right]$
$\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)_i$	$\frac{1}{2(\Delta x)^3} \left[ \begin{array}{c} \text{(-1)} \\ \text{---} \\ \text{(+2)} \\ \text{---} \\ \text{(0)} \\ \text{---} \\ \text{(-2)} \\ \text{---} \\ \text{(+1)} \end{array} \right]$
$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)_i$	$\frac{1}{(\Delta x)^4} \left[ \begin{array}{c} \text{(+1)} \\ \text{---} \\ \text{(-4)} \\ \text{---} \\ \text{(6)} \\ \text{---} \\ \text{(-4)} \\ \text{---} \\ \text{(+1)} \end{array} \right]$

Figura B.2 – Representação esquemática dos operadores para diferença finita central (Pedroso, 2005)

## B.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno, no método das diferenças finitas, têm a função de diminuir o número de variáveis do sistema por meio de valores conhecidos dos pontos que estão sobre o contorno e/ou relações entre pontos fora da viga ou placa, (pontos virtuais que complementam a malha) e pontos no interior. Chega-se, então, a sistemas possíveis e determinados para problemas estáticos e problemas de autovalores e autovetores para problemas dinâmicos (Pedroso, 2005).

Engaste:

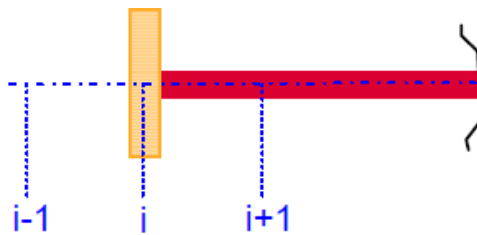


Figura B.3 – Extremo engastado com ponto virtual e ponto interno (Pedroso, 2005)

Deslocamento (flecha) no engaste é zero:  $y_m = 0$

Rotação no engaste é zero:  $\frac{dy_m}{dx} = 0 = \frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{2\Delta x} \Rightarrow y_{m+1} = y_{m-1}$

Apoio:

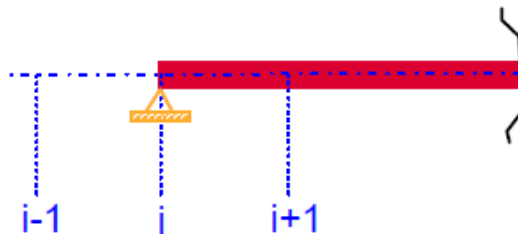


Figura B.4 – Extremo apoiado com ponto virtual e ponto interno (Pedroso, 2005)

Deslocamento (flecha) no apoio é zero:  $y_m = 0$

Momento fletor no apoio é zero:  $\frac{d^2 y_m}{dx^2} = 0 = \frac{y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1}}{(\Delta x)^2} \Rightarrow y_{m-1} = -y_{m+1}$

Livre:

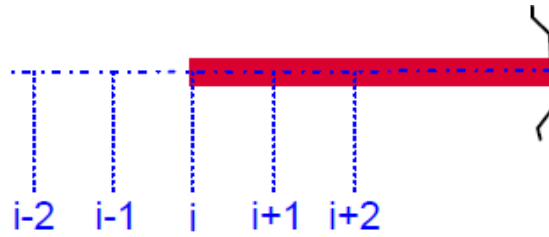


Figura B.5 – Extremo livre com pontos virtuais e pontos internos (Pedroso, 2005)

Momento na extremidade é zero:  $\frac{d^2 y_m}{dx^2} = 0 = \frac{y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1}}{(\Delta x)^2} \Rightarrow y_{m-1} = 2y_m - y_{m+1}$

Cortante na extremidade é zero:  $\frac{d^3 y_m}{dx^3} = 0 = \frac{y_{m+2} - 2y_{m+1} + 2y_{m-1} - y_{m-2}}{2(\Delta x)^3}$   
 $y_{m-2} = y_{m+2} - 2y_{m+1} + 2y_{m-1} = y_{m+2} - 4y_{m+1} + 4y_m$

Apesar dos esquemas representados e das equações terem utilizados a viga como exemplo, pode-se facilmente extrapolar os resultados para o caso de placas. O interesse está na ordem da derivada, relação entre o ponto virtual e o ponto interno e valor do ponto no contorno, basta utilizar o que foi apresentado para uma borda e encontrar-se-á o que é necessário, claro que aplicando para x e para y conforme necessário.

Portanto, se faz a substituição das derivadas pelas equações já apresentadas para diferenças finitas centrais (equações (B.2) a (B.5)) nas equações pertinentes para o contorno da placa, hora para uma linha paralela ao eixo x, hora para uma paralela ao eixo y.

Exemplo para o engaste tendo em vista as equações em (3.40):

$$\begin{aligned}
 (w_{m,n})_{x=0,x=a} &= 0 \\
 (w_{m,n})_{y=0,y=b} &= 0 \\
 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0,x=a} &= 0 \Rightarrow w_{m+1,n} = w_{m-1,n} \\
 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0,y=b} &= 0 \Rightarrow w_{m,n+1} = w_{m,n-1}
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

O subíndice  $n$  representa o mesmo que o subíndice  $m$ , mas diz respeito ao eixo  $y$ . Anteriormente trabalhou-se com uma curva fictícia que tinha a posição no eixo  $x$  como variável independente, para placas deve-se trabalhar em duas dimensões e tanto o eixo  $x$  quanto o eixo  $y$  fornecem variáveis independentes.

As relações na equação (B.6) mostram como é simples aplicar para placas as relações estabelecidas utilizando vigas.

## B.2 APLICAÇÃO PARA PLACAS

A solução de problemas de placa pelo método clássico é limitada a placas de geometria, carregamentos e condições de contorno muito simples. A análise pode ganhar muito em complexidade, conforme o problema, e tornar-se impraticável (Pedroso, 1999).

Devido a isso, os métodos numéricos tornaram-se bastante difundidos, em especial com o desenvolvimento dos computadores. O método das diferenças finitas constitui um método numérico extremamente simples e que pode ser utilizado para resolução de problemas de placas apresentando resultados bastante interessantes.

O tratamento numérico de equações diferenciais pode produzir resultados aproximados aceitáveis para os propósitos mais práticos. Aplicando as diferenças finitas, as derivadas nas equações são substituídas por pequenas diferenças em pontos selecionados, pontos localizados nas juntas de uma rede de formato retangular, triangular ou algum outro (malha de pontos). O deslocamento  $w(x,y)$  da placa é determinado por valores aproximados nos pontos da malha.

Dada uma malha com espaçamentos uniformes  $\Delta x$  e  $\Delta y$  para os eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente, e o conhecimento da equação (3.18) e do operador Laplaciano bi-harmônico, tem-se as seguintes diferenças para os termos do Laplaciano (utilizando as equações (B.2) e (B.4)):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{w_{m+2,n} - 4w_{m+1,n} + 6w_{m,n} - 4w_{m-1,n} + w_{m-2,n}}{(\Delta x)^4} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{w_{m,n+2} - 4w_{m,n+1} + 6w_{m,n} - 4w_{m,n-1} + w_{m,n-2}}{(\Delta y)^4} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{\left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m,n+1} - 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m,n} + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} = \\ &= \frac{1}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2} \left[ w_{m+1,n+1} - 2w_{m,n+1} + w_{m-1,n+1} - 2(w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n}) + \right. \\ &\quad \left. + w_{m+1,n-1} - 2w_{m,n-1} + w_{m-1,n-1} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Valendo-se das parcelas do Laplaciano bi-harmônico aproximadas pelas diferenças finitas centrais nas equações (B.7) a (B.9), obtém-se o Laplaciano aproximado por diferenças finitas para utilizar na equação (3.33) a fim de obter respostas dinâmicas:

$$\begin{aligned} \nabla^4 w &= \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{w_{m+2,n} - 4w_{m+1,n} + 6w_{m,n} - 4w_{m-1,n} + w_{m-2,n}}{(\Delta x)^4} + \\ &+ \frac{2}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2} \left[ w_{m+1,n+1} - 2w_{m,n+1} + w_{m-1,n+1} - 2(w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n}) + \right. \\ &\quad \left. + w_{m+1,n-1} - 2w_{m,n-1} + w_{m-1,n-1} \right] + \frac{w_{m,n+2} - 4w_{m,n+1} + 6w_{m,n} - 4w_{m,n-1} + w_{m,n-2}}{(\Delta y)^4} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Caso a malha seja igualmente espaçada em x e em y (procura-se sempre utilizar essa facilidade) define-se  $\Delta x = \Delta y = \Delta$  e a equação (B.10) apresenta-se de forma simplificada:

$$\begin{aligned} \nabla^4 w &= \frac{1}{(\Delta)^4} \left[ w_{m+2,n} - 4w_{m+1,n} + 6w_{m,n} - 4w_{m-1,n} + w_{m-2,n} + \right. \\ &+ 2w_{m+1,n+1} - 4w_{m,n+1} + 2w_{m-1,n+1} - 4w_{m+1,n} + 8w_{m,n} - 4w_{m-1,n} + \\ &+ 2w_{m+1,n-1} - 4w_{m,n-1} + 2w_{m-1,n-1} + w_{m,n+2} - 4w_{m,n+1} + 6w_{m,n} - 4w_{m,n-1} + w_{m,n-2} \left. \right] = \quad (\text{B.11}) \\ &= \frac{1}{(\Delta)^4} \left[ w_{m+2,n} + w_{m-2,n} + w_{m,n+2} + w_{m,n-2} - 8w_{m+1,n} - 8w_{m-1,n} - 8w_{m,n+1} - 8w_{m,n-1} + \right. \\ &\quad \left. + 2w_{m+1,n+1} + 2w_{m-1,n+1} + 2w_{m+1,n-1} + 2w_{m-1,n-1} + 20w_{m,n} \right] \end{aligned}$$

A Figura B.6 representa a malha igualmente espaçada bem como a ordem dos pontos representada pelos subíndice m e n.

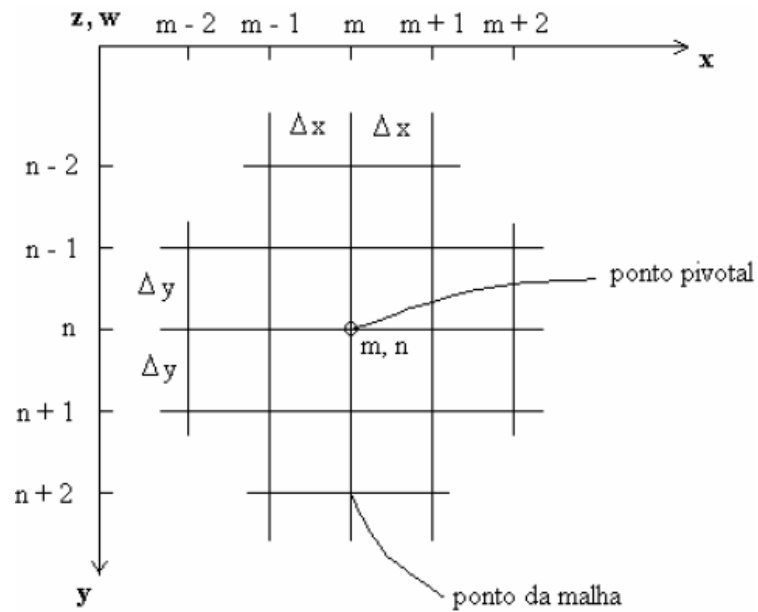


Figura B.6 – Malha igualmente espaçada (Pedroso, 1999)

A Figura B.7 apresenta uma representação esquemática do operador de diferenças finitas utilizado em análises de placa. Este operador aproxima o operador Laplaciano em qualquer problema a ser resolvido, seja estático (equação (3.18)) ou dinâmico (equação (3.33)).

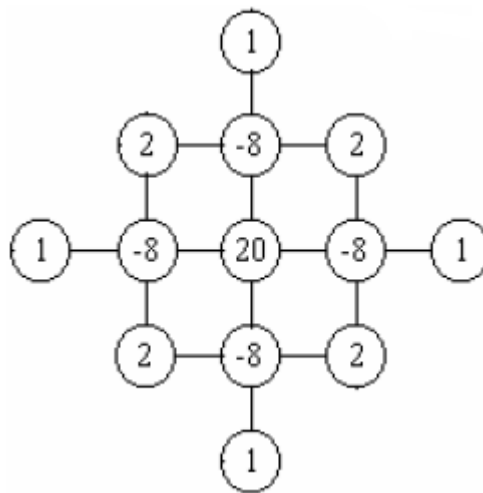


Figura B.7 – Operador de diferenças finitas usado em problemas de placas

Aplicando o operador sobre cada ponto da malha e utilizando as condições de contorno para saber a relação entre pontos virtuais e pontos internos, bem como para saber o valor dos pontos no contorno, monta-se um sistema de equações. Para o caso dinâmico, caso pertinente a esse trabalho, vale-se da equação (3.33) e tem-se um sistema do tipo  $[A]\{x\} - \lambda[B]\{x\} = 0$ , no qual  $[A]$  é a matriz dos coeficientes obtidos pela expressão das



diferenças finitas,  $[B]$  é a matriz diagonal das constantes,  $\lambda$  é uma constante, normalmente  $\lambda = \omega^2$ , e  $\{x\}$  é o vetor que representa amplitudes de vibração, no caso das placas é o vetor dos deslocamentos  $w$ .

Pré-multiplicando o sistema por  $[B]^{-1}$  e colocando  $\{x\}$  em evidência obtém-se o problema de autovalores a ser resolvido para calcular as frequências naturais da placa:

$$[B]^{-1}([A] - \lambda[B])\{x\} = 0 \Rightarrow ([C] - \lambda[I])\{x\} = 0 \Rightarrow [C] - \lambda[I] = 0 \quad (\text{B.12})$$

Onde  $[I]$  é a matriz identidade e  $[C]$  é a matriz obtida da multiplicação da inversa de  $[B]$  por  $[A]$ .

### B.3 PROPOSTA DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Embora o método das diferenças finitas não seja utilizado com frequência, por vezes esquecido completamente, ele fornece bons resultados de maneira prática e rápida. Pretende-se demonstrar a eficácia e simplicidade da técnica aplicando-a para o Caso 1, solucionado na seção 4.2.1 pelo método dos elementos finitos e pela solução analítica de (Blevins, 1979).

De acordo com as explicações e teorias apresentadas, utilizar-se-á duas discretizações grosseiras para mostrar a boa evolução dos resultados com o aumento da malha de pontos (eficiência) e a praticidade e rapidez da técnica, procedendo, para tanto, com os cálculos de forma manual, com ajuda de uma calculadora científica e sem auxílio computacional ou de uma calculadora gráfica.

#### B.3.1 Discretização 1

Sabe-se que a quantidade de respostas fornecidas, quantas frequências naturais serão obtidas, estará de acordo com o número de pontos utilizados na malha. A primeira discretização proposta diz respeito a divisão de cada lado da placa em dois segmentos iguais, assim tem-se a malha igualmente espaçada nas direções  $x$  e  $y$  com:  $\Delta x = \frac{a}{2}$  e

$\Delta y = \frac{b}{2}$ . A configuração dos pontos está representada na Figura B.8, lembrando que os valores numéricos são os mesmo apresentados no capítulo 4 por se tratar da mesma placa sendo resolvida.

Os pontos no contorno da placa, nas bordas, apresentam deslocamento nulo pois as quatro bordas são apoiados (condições de contorno fornecem informações acerca dos pontos nas bordas). Os pontos que estão fora do limite da placa são os pontos virtuais que terão relações definidas pelas condições de contorno. Como apenas o ponto 1 apresenta deslocamento, os pontos virtuais de interesse serão aqueles que se relacionam com aquele ponto. Os pontos virtuais também distam  $\Delta x = \frac{a}{2}$  ou  $\Delta y = \frac{b}{2}$  dos pontos vizinhos, é uma grade de pontos uniforme e de espaçamento constante.

A condição para os pontos virtuais é o momento nulo no contorno da placa:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 = \frac{w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \Rightarrow w_{m+1,n} = -w_{m-1,n} \quad (\text{B.13})$$

Analogamente:

$$w_{m,n+1} = -w_{m,n-1} \quad (\text{B.14})$$

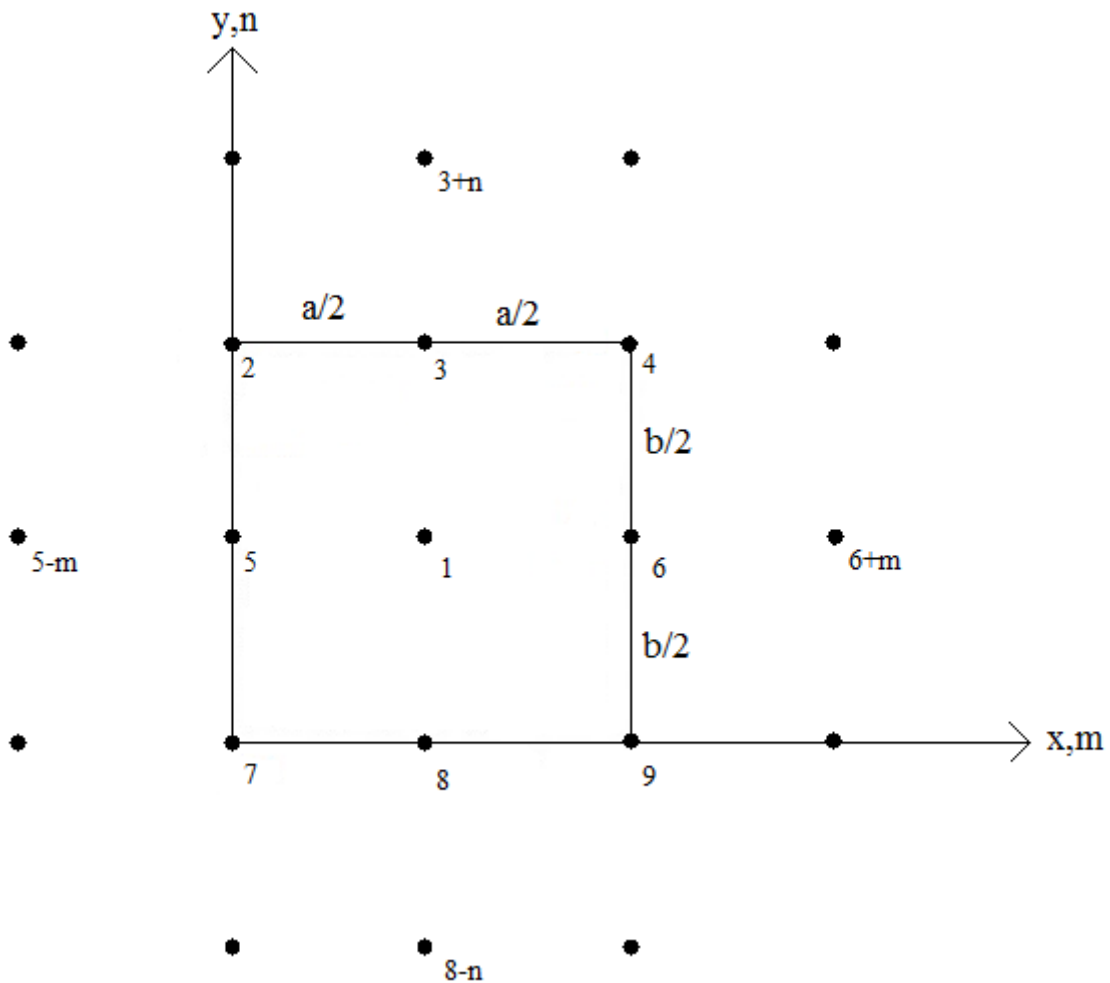


Figura B.8 – Malha de pontos das diferenças finitas com um ponto interno

Portanto, os pontos virtuais se relacionam com um ponto interno ao longo de uma linha reta paralela a  $x$  ou a  $y$  que contenha os pontos em questão. Os pontos virtuais de interesse, os que foram nomeados na Figura B.8, apresentarão deslocamentos com o mesmo valor absoluto do deslocamento do ponto 1, mas com sinal trocado. Como  $a$  e  $b$  têm o mesmo valor, as divisões  $\Delta x$  e  $\Delta y$  tem o mesmo valor também, logo pode-se utilizar o mesmo símbolo para ambas, já que representará o passo com um valor único, para tanto adotar-se-á  $\Delta x = \Delta y = \Delta$ .

Aplicando a técnica à equação diferencial de movimento, ou seja, substituindo a derivada pela expressão das diferenças finitas:

$$\frac{20w_1 - w_1 - w_1 - w_1 - w_1}{(\Delta)^4} = \frac{\omega^2 \bar{m}}{D} w_1 \quad (\text{B.15})$$

Conforme dito, a quantidade de frequências obtidas está ligada a discretização da malha, assim como a acurácia do método (erros menores são obtidos com a maior discretização). Pode-se eliminar o termo  $w_1$  e encontrar a primeira frequência natural ou  $\omega_{11}$ , conforme seção 4.2.1. Então, substituindo os valores de acordo com o que já foi apresentado anteriormente e usando a primeira espessura estudada ( $a=b=6$  m,  $\rho=2500$  kg/m<sup>3</sup>,  $E=30$  GPa,  $h=0,1$  m e  $\nu=0,3$ ,  $h=0,1$  m):

$$\omega = \sqrt{\frac{16D}{\bar{m}(\Delta)^4}} \Rightarrow \omega_{11} = 46,59 \text{ rad/s} \Rightarrow f_{11} = 7,415 \text{ Hz} \quad (\text{B.16})$$

Valendo-se da resposta analítica da Tabela 4.7 calcula-se o erro do resultado:

$$E(\%) = \frac{f_{\text{numérico}} - f_{\text{analítico}}}{f_{\text{analítico}}} \times 100 = \frac{7,415 - 9,148}{9,148} \times 100 = -18,944\% \quad (\text{B.17})$$

O erro é grande pois a malha é extremamente grosseira, é a menor malha que pode ser utilizada. Mesmo assim não é um resultado alarmante, uma vez que a discretização maior melhorará a resposta e o erro não está tão grande. O processo é rápido e simples e pode fornecer bons resultados.

### B.3.2 Discretização 2

A segunda discretização diz respeito a divisão de cada lado da placa em três segmentos iguais (um passo a mais), assim tem-se a malha igualmente espaçada nas direções x e y com:  $\Delta x = \frac{a}{3}$  e  $\Delta y = \frac{b}{3}$ . A configuração dos pontos está representada na Figura B.9 com os pontos no contorno da placa novamente apresentando deslocamento nulo pois as quatro bordas são apoiadas. Os pontos que estão fora do limite da placa são os pontos virtuais, distantes  $\Delta x$  e  $\Delta y$  dos pontos vizinhos, que terão relações definidas pelas condições de contorno. Como apenas os pontos 1, 2, 3 e 4 apresentam deslocamento, os pontos virtuais de interesse serão aqueles que se relacionam com aqueles pontos.

A condição para os pontos virtuais é o momento nulo no contorno da placa, conforme seção B.3.1. Portanto o ponto virtual se relaciona com um ponto interno que está na mesma linha dele, ou seja, deve-se andar duas casas, dois pontos, na grade de pontos para encontrar o ponto interno que se relaciona com o ponto virtual em questão. Para facilitar a visualização, os pontos virtuais foram nomeados com o número do ponto interno correspondente acompanhado de um sinal negativo que indica a diferença de sinal no valor do deslocamento, mas o mesmo valor absoluto.

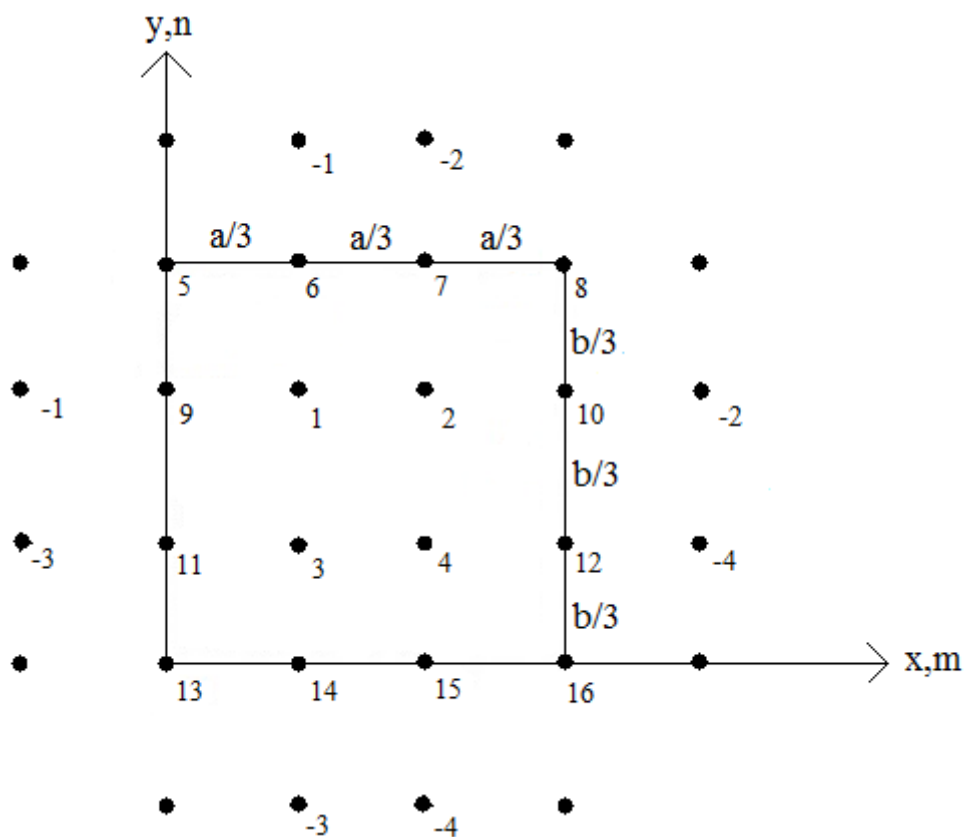


Figura B.9 – Malha de pontos das diferenças finitas com quatro pontos internos

Adotando  $\Delta x = \Delta y = \Delta$  e de posse dos valores numéricos das grandezas relevantes ( $a=b=6$  m,  $\rho=2500$  kg/m<sup>3</sup>,  $E=30$  GPa,  $h=0,1$  m e  $\nu=0,3$ ,  $h=0,1$  m) procede-se à aplicação do método à equação de movimento, sendo que, desta vez, obter-se-á quatro frequências naturais com maior precisão. Constrói-se, então, o sistema de quatro equações:

$$\begin{aligned}
1: \frac{20w_1 - 8w_2 - 8w_3 + 2w_4 - w_1 - w_1}{(\Delta)^4} &= \frac{\omega^2 \bar{m}}{D} w_1 \\
2: \frac{20w_2 - 8w_1 - 8w_4 + 2w_3 - w_2 - w_2}{(\Delta)^4} &= \frac{\omega^2 \bar{m}}{D} w_2 \\
3: \frac{20w_3 - 8w_1 - 8w_4 + 2w_2 - w_3 - w_3}{(\Delta)^4} &= \frac{\omega^2 \bar{m}}{D} w_3 \\
4: \frac{20w_4 - 8w_2 - 8w_3 + 2w_1 - w_4 - w_4}{(\Delta)^4} &= \frac{\omega^2 \bar{m}}{D} w_4
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Em forma matricial para proceder ao problema de autovalores e autovetores, fazendo

$\lambda = \omega^2$  e adotando  $\frac{\bar{m}(\Delta)^4}{D} = \frac{1}{\beta}$  como parte da constante:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 18 & -8 & -8 & 2 \\ -8 & 18 & 2 & -8 \\ -8 & 2 & 18 & -8 \\ 2 & -8 & -8 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left( \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & -8 & -8 & 2 \\ -8 & 18 & 2 & -8 \\ -8 & 2 & 18 & -8 \\ 2 & -8 & -8 & 18 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \tag{B.19} \\
& \Rightarrow \begin{vmatrix} 18\beta - \lambda & -8\beta & -8\beta & 2\beta \\ -8\beta & 18\beta - \lambda & 2\beta & -8\beta \\ -8\beta & 2\beta & 18\beta - \lambda & -8\beta \\ 2\beta & -8\beta & -8\beta & 18\beta - \lambda \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Calculando o determinante por expansão em co-fatores (todos os cálculos das seções B.3.1 e B.3.2 foram realizados manualmente com o auxílio apenas de uma calculadora científica) obtém-se uma equação polinomial de 4º grau, sendo  $\lambda$  a incógnita:

$$\det = \lambda^4 - 72\beta\lambda^3 + 1680\beta^2\lambda^2 - 14848\beta^3\lambda + 36864\beta^4 = 0 \tag{B.20}$$

O resultado da equação serão quatro valores para  $\lambda$ , que representam as quatro primeiras frequências naturais que esperava-se obter, bastando apenas transformar os valores em frequências ( $\omega_{11}$ ,  $\omega_{12}$ ,  $\omega_{21}$  e  $\omega_{22}$  de acordo com a Tabela 4.7). A seguir encontram-se as respostas com os respectivos erros, no apêndice C encontra-se uma breve explicação sobre como utilizar a expansão em co-fatores para encontrar determinantes de matrizes e o passo-a-passo do cálculo do determinante realizado nessa seção.

$$\lambda_1 = 4\beta \Rightarrow \omega_1 = 2\sqrt{\beta} = 2\sqrt{\frac{D}{\bar{m}(\Delta)^4}} = 52,414\text{rad/s} = \omega_{11} \Rightarrow f_{11} = 8,342\text{Hz}$$

$$E(\%) = \frac{f_{\text{numérico}} - f_{\text{analítico}}}{f_{\text{analítico}}} \times 100 = \frac{8,324 - 9,148}{9,148} \times 100 = -8,811\%$$
(B.21)

$$\lambda_2 = 16\beta \Rightarrow \omega_2 = 4\sqrt{\beta} = 4\sqrt{\frac{D}{\bar{m}(\Delta)^4}} = 104,828\text{rad/s} = \omega_{12} \Rightarrow f_{12} = 16,684\text{Hz}$$

$$E(\%) = \frac{f_{\text{numérico}} - f_{\text{analítico}}}{f_{\text{analítico}}} \times 100 = \frac{16,684 - 22,87}{22,87} \times 100 = -27,049\%$$
(B.22)

$$\lambda_3 = 16\beta \Rightarrow \omega_3 = 4\sqrt{\beta} = 4\sqrt{\frac{D}{\bar{m}(\Delta)^4}} = 104,828\text{rad/s} = \omega_{21} \Rightarrow f_{21} = 16,684\text{Hz}$$

$$E(\%) = \frac{f_{\text{numérico}} - f_{\text{analítico}}}{f_{\text{analítico}}} \times 100 = \frac{16,684 - 22,87}{22,87} \times 100 = -27,049\%$$
(B.23)

$$\lambda_4 = 36\beta \Rightarrow \omega_4 = 6\sqrt{\beta} = 6\sqrt{\frac{D}{\bar{m}(\Delta)^4}} = 157,243\text{rad/s} = \omega_{22} \Rightarrow f_{22} = 25,026\text{Hz}$$

$$E(\%) = \frac{f_{\text{numérico}} - f_{\text{analítico}}}{f_{\text{analítico}}} \times 100 = \frac{25,026 - 36,592}{36,592} \times 100 = -31,608\%$$
(B.24)

Pode-se observar como a melhora na resposta foi grande apesar do pouco aumento na malha, apenas uma divisão a mais nos lados da placa. Obteve-se mais respostas, mais frequências, e a resposta piora a cada combinação modal mais alta, apresenta erros maiores. Duas raízes do polinômio foram iguais, fato que indica a representação das combinações  $m=1$ ;  $n=2$  e  $m=2$ ;  $n=1$  que possuem o mesmo valor para a frequência natural, conforme esperado de acordo com as respostas da Tabela 4.7.

Utilizaram-se as menores malhas possíveis e a resposta da primeira frequência já apresenta erro menor que 10% com a melhora da discretização. A cada malha mais refinada essas respostas serão mais e mais precisas, provando, portanto, a eficácia do método, sua precisão, sua simplicidade e rapidez, pois os cálculos são fáceis, diretos e não demandam alto grau de conhecimento matemático, bem como são possíveis de serem feitos de forma manual.

Não serão apresentadas resoluções para os demais casos estudados, mas acredita-se que as respostas sejam igualmente satisfatórias. A aplicação continua simples, mudando apenas as condições de contorno, ou seja, a relação do ponto virtual com o ponto interno e o valor do ponto na borda.

Não serão resolvidos problemas com malhas mais refinadas pois a idéia era mostrar o fácil entendimento e a aplicação simples do método das diferenças finitas por meio de uma resolução manual, assim como a boa precisão inicial do mesmo. O processo torna-se extenso e tedioso com o aumento da malha, recorrendo a algum programa de computador para auxiliar nos cálculos.



## APÊNDICE C MÉTODO DA EXPANSÃO EM CO-FATORES

De acordo com (Anton, 2001) a expansão em co-fatores é um método para calcular determinantes que é útil para cálculos manuais. Primeiramente define-se o conceito de menor e de co-fator: “Se  $A$  é uma matriz quadrada, então o determinante menor da entrada  $a_{ij}$ , ou simplesmente o menor de  $a_{ij}$ , é denotado por  $M_{ij}$  e definido como o determinante da submatriz que sobra quando suprimimos a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna de  $A$ . O número  $(-1)^{i+j} M_{ij}$  é denotado por  $C_{ij}$  e é chamado de co-fator de  $a_{ij}$ ” (Anton, 2001).

Seja a matriz  $A$   $4 \times 4$  definida a seguir e os menores  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{13}$  e  $M_{14}$ :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (C.1)$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad (C.2)$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad M_{14} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \quad (C.3)$$

Os co-fatores  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{13}$  e  $C_{14}$  serão:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}, \quad C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}, \quad C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13}, \quad C_{14} = (-1)^{1+4} M_{14} \quad (C.4)$$

É importante notar que a diferença, quando há, entre o co-fator e o menor de um elemento  $a_{ij}$  é somente o sinal. Com as definições anteriores, pode-se enunciar o teorema da expansão em co-fatores: “O determinante de uma matriz  $A$  quadrada de qualquer tamanho pode ser calculado multiplicando as entradas de qualquer linha, ou coluna, pelos seus co-

fatores e somando os produtos resultantes, ou seja,  $\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j} + \dots + a_{ij}C_{ij}$  (expansão em co-fatores ao longo da j-ésima coluna) e  $\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3} + \dots + a_{ij}C_{ij}$  (expansão em co-fatores ao longo da i-ésima linha)” (Anton, 2001).

A equação do determinante da matriz **A** da equação (C.1) para a expansão ao longo da primeira linha será:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14} \quad (C.5)$$

O determinante para expansão ao longo da primeira coluna será:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} + a_{41}C_{41} \quad (C.6)$$

Nas definições anteriores, utilizou-se uma matriz 4x4 propositalmente, porque a matriz que será utilizada no exemplo a seguir é a matriz criada na seção 4.3.2, uma matriz também 4x4. Foi necessário calcular o determinante da matriz para proceder ao problema de autovalores, escolheu-se o método da expansão em co-fatores ao longo da primeira linha e o passo-a-passo do cálculo é mostrado a seguir:

$$\begin{vmatrix} 18\beta - \lambda & -8\beta & -8\beta & 2\beta \\ -8\beta & 18\beta - \lambda & 2\beta & -8\beta \\ -8\beta & 2\beta & 18\beta - \lambda & -8\beta \\ 2\beta & -8\beta & -8\beta & 18\beta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (C.7)$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^{l+1}(18\beta - \lambda) \begin{vmatrix} 18\beta - \lambda & 2\beta & -8\beta \\ 2\beta & 18\beta - \lambda & -8\beta \\ -8\beta & -8\beta & 18\beta - \lambda \end{vmatrix} + \\
& + (-1)^{l+2}(-8\beta) \begin{vmatrix} -8\beta & 2\beta & -8\beta \\ -8\beta & 18\beta - \lambda & -8\beta \\ 2\beta & -8\beta & 18\beta - \lambda \end{vmatrix} + \\
& + (-1)^{l+3}(-8\beta) \begin{vmatrix} -8\beta & 18\beta - \lambda & -8\beta \\ -8\beta & 2\beta & -8\beta \\ 2\beta & -8\beta & 18\beta - \lambda \end{vmatrix} + \\
& + (-1)^{l+4}(2\beta) \begin{vmatrix} -8\beta & 18\beta - \lambda & 2\beta \\ -8\beta & 2\beta & 18\beta - \lambda \\ 2\beta & -8\beta & -8\beta \end{vmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{C.8}$$

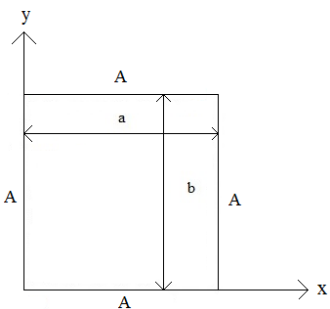
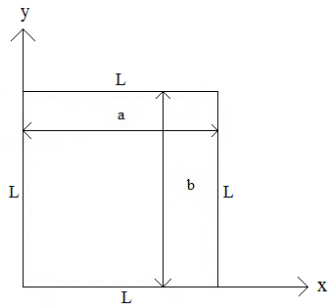
$$\begin{aligned}
& (18\beta - \lambda)[3712\beta^3 - 840\beta^2\lambda + 54\beta\lambda^2 - \lambda^3] + (8\beta)[-2048\beta^3 + 256\beta^2\lambda - 8\beta\lambda^2] + \\
& + (-8\beta)[2048\beta^3 - 256\beta^2\lambda + 8\beta\lambda^2] + (-2\beta)[-1408\beta^3 + 56\beta^2\lambda + 2\beta\lambda^2] = 0
\end{aligned} \tag{C.9}$$

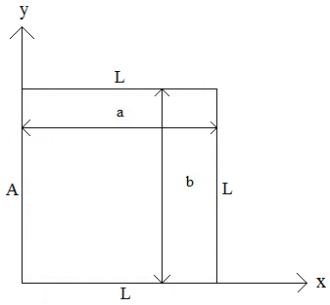
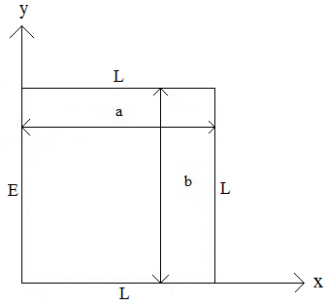
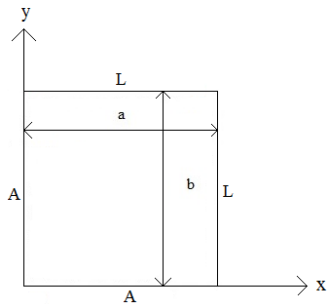
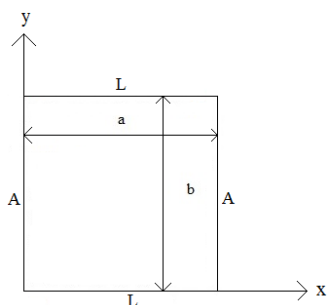
$$\det = \lambda^4 - 72\beta\lambda^3 + 1680\beta^2\lambda^2 - 14848\beta^3\lambda + 36864\beta^4 = 0 \tag{C.10}$$

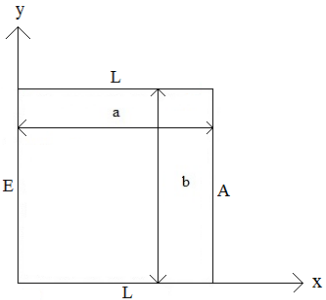
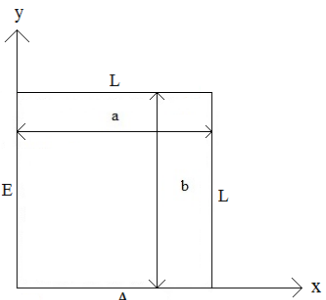
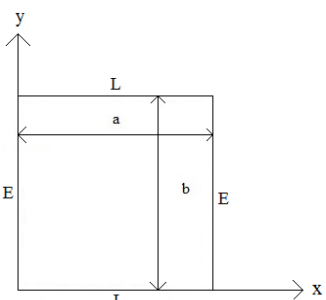
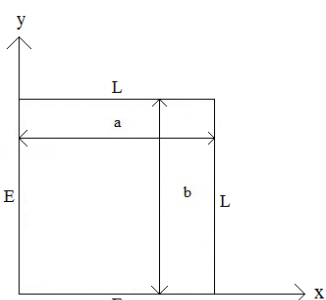
## APÊNDICE D EQUAÇÕES ANALÍTICAS PARA FREQUÊNCIAS NATURAIS

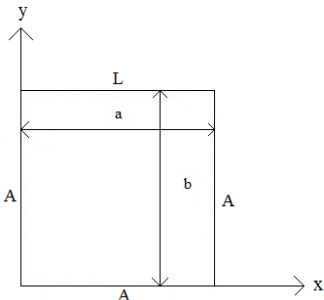
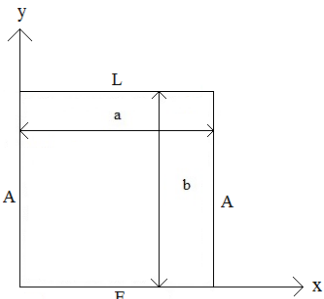
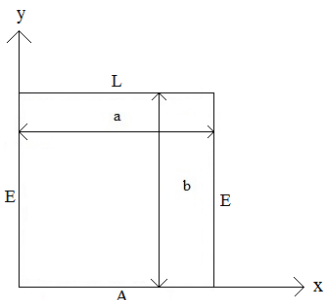
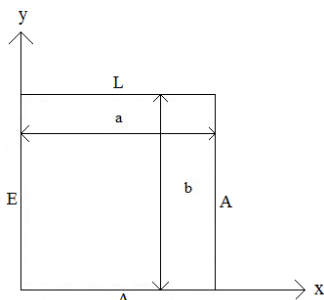
A seguir encontram-se as equações analíticas apresentadas em (Blevins, 1979) utilizadas para o cálculo das frequências naturais dos Casos 2 a 21, seção 4.2.2 a 4.2.21. A Tabela D.1 apresenta a equação analítica geral, um esquema das placas e suas condições de contorno (A para apoiado, E para engastado e L para livre) e os seis primeiros modos de vibração para placas quadradas (a=b).

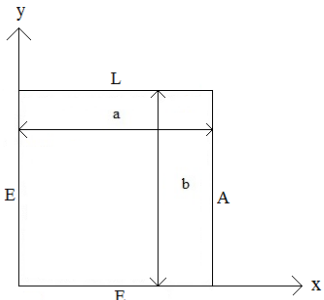
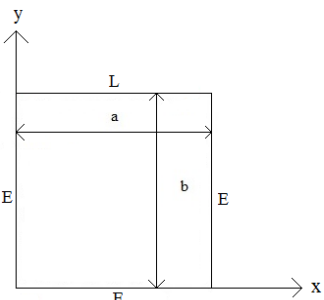
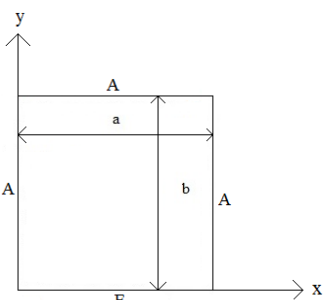
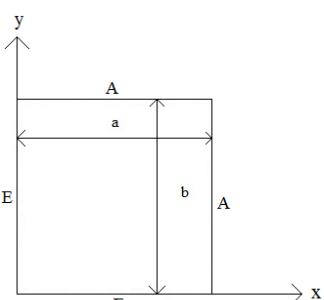
Tabela D.1 – Frequências naturais para placas quadradas (Blevins, 1979)

Frequência natural em Hertz: $f_{mn} = \frac{\alpha^2}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}$						
Esquema	(m;n) e $\alpha^2$					
<p><b>Caso 1</b></p> 	(1;1)	(2;1)	(1;2)	(2;2)	(3;1)	(1;3)
	19,74	49,35	49,35	78,96	98,70	98,70
<p><b>Caso 2</b></p> 	(2;2)	(1;3)	(3;1)	(3;2)	(2;3)	(4;1)
	13,49	19,79	24,43	35,02	35,02	61,53
Modos (1;1), (1;2) e (2;1) são movimento de corpo rígido						

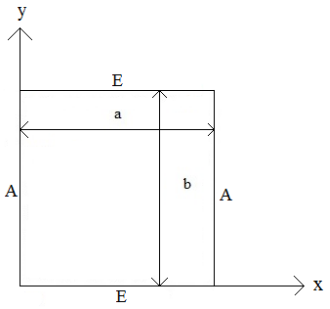
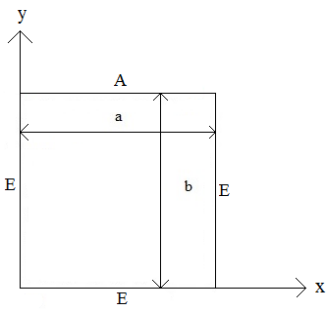
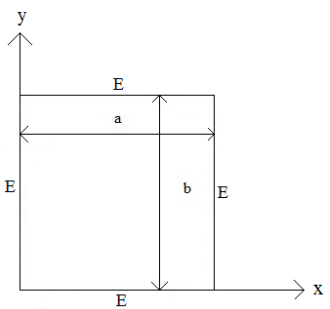
<p><b>Caso 3</b></p> 	(1;2) 6,648	(2;1) 15,02	(2;2) 25,49	(1;3) 26,13	(3;1) 48,71	(2;3) 50,85
Modo (1;1) é movimento de corpo rígido						
<p><b>Caso 4</b></p> 	(1;1) 3,492	(1;2) 8,525	(2;1) 21,43	(1;3) 27,33	(2;2) 31,11	(2;3) 54,44
<p><b>Caso 5</b></p> 	(1;1) 3,369	(1;2) 17,41	(2;1) 19,37	(2;2) 38,29	(1;3) 51,32	(3;1) 53,74
<p><b>Caso 6</b></p> 	(1;1) 9,631	(1;2) 16,14	(1;3) 36,73	(2;1) 38,95	(2;2) 46,74	(2;3) 70,74

<p><b>Caso 7</b></p> 	(1;1) 15,29	(1;2) 20,67	(1;3) 39,78	(2;1) 49,73	(2;2) 56,62	(1;4) 77,37
<p><b>Caso 8</b></p> 	(1;1) 5,364	(1;2) 19,17	(2;1) 24,77	(2;2) 43,19	(1;3) 53,00	(3;1) 64,05
<p><b>Caso 9</b></p> 	(1;1) 22,27	(1;2) 26,53	(1;3) 43,66	(2;1) 61,47	(2;2) 67,55	(1;4) 79,90
<p><b>Caso 10</b></p> 	(1;1) 6,942	(2;1) 24,03	(1;2) 26,68	(2;2) 47,78	(1;3) 63,04	(3;1) 65,83

<p><b>Caso 11</b></p> 	(1;1) 11,68	(1;2) 27,76	(2;1) 41,20	(2;2) 59,07	(1;3) 61,86	(3;1) 90,29
<p><b>Caso 12</b></p> 	(1;1) 12,69	(1;2) 33,07	(2;1) 41,70	(2;2) 63,01	(1;3) 72,40	(3;1) 90,61
<p><b>Caso 13</b></p> 	(1;1) 23,46	(1;2) 35,61	(2;1) 63,13	(1;3) 66,81	(2;2) 77,50	(2;3) 109,0
<p><b>Caso 14</b></p> 	(1;1) 16,87	(1;2) 31,14	(2;1) 51,63	(1;3) 64,04	(2;2) 67,65	(2;3) 101,2

<p><b>Caso 15</b></p> 	(1;1) 17,62	(1;2) 36,05	(2;1) 52,07	(2;2) 71,19	(1;3) 74,35	(3;1) 106,3
<p><b>Caso 16</b></p> 	(1;1) 24,02	(1;2) 40,04	(2;1) 63,49	(1;3) 76,76	(2;2) 80,71	(2;3) 116,8
<p><b>Caso 17</b></p> 	(1;1) 23,65	(2;1) 51,67	(1;2) 58,65	(2;2) 86,13	(3;1) 100,3	(1;3) 113,2
<p><b>Caso 18</b></p> 	(1;1) 27,06	(2;1) 60,54	(1;2) 60,79	(2;2) 92,86	(1;3) 114,6	(3;1) 114,7



<p><b>Caso 19</b></p> 	(1;1) 28,95	(2;1) 54,74	(1;2) 69,32	(2;2) 94,59	(3;1) 102,2	(1;3) 129,1
<p><b>Caso 20</b></p> 	(1;1) 31,83	(1;2) 63,35	(2;1) 71,08	(2;2) 100,8	(1;3) 116,4	(3;1) 130,4
<p><b>Caso 21</b></p> 	(1;1) 35,99	(2;1) 73,41	(1;2) 73,41	(2;2) 108,3	(3;1) 131,6	(1;3) 132,2

## APÊNDICE E SCRIPT DO ANSYS PARA ANÁLISE DE VIBRAÇÃO LIVRE DA PLACA

A seguir encontra-se o script do ANSYS para análise de vibração livre da placa do Caso 1, totalmente apoiada.

```
/PREP7
!*
ET,1,SHELL281
!*
!*
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,30e9
MPDATA,PRXY,1,,0.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,,2500
sect,1,shell,,
secdata, 0.1,1,0.0,3
secoffset,MID
seccontrol,,,, , , ,
RECTNG,0,6,0,6,
FLST,2,1,5,ORDE,1
FITEM,2,1
AESIZE,P51X,0.1,
CM,_Y,AREA
ASEL, , , , 1
CM,_Y1,AREA
CHKMSH,'AREA'
CMSEL,S,_Y
!*
MSHKEY,1
```

```

AMESH,_Y1
MSHKEY,0
!*
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CMDELE,_Y2
!*
FINISH
/SOL
NPLLOT
NSEL,S,EXT
NPLLOT
FLST,2,480,1,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-480
!*
/GO
D,P51X, ,0, , , ,UX,UY,UZ, , ,
NSEL,ALL
NPLLOT
!*
ANTYPE,2
!*
!*
MODEOPT,LANP,20
EQLV,PCG
MXPAND,0, , ,0
LUMPM,0
PSTRES,0
!*
MODEOPT,LANP,20,0,0,
PCGOPT,0, ,AUTO, NO, ,AUTO
MSAVE,0
!*

```

/STATUS,SOLU

SOLVE

FINISH

/POST1

SET,LIST

SAVE