

**ESTUDO COMPARATIVO ANALÍTICO-NUMÉRICO DE
VIBRAÇÕES LIVRES E LIVRES ACOPLADAS
FLUIDO-ESTRUTURA EM CASCAS CILÍNDRICAS**

ALEJANDRO AUGUSTO OSPINA LOPEZ

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E
CONSTRUÇÃO CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**ESTUDO COMPARATIVO ANALÍTICO - NUMÉRICO DE
VIBRAÇÕES LIVRES E LIVRES ACOPLADAS
FLUIDO-ESTRUTURA EM CASCAS CILÍNDRICAS**

ALEJANDRO AUGUSTO OSPINA LOPEZ

ORIENTADOR: LINEU JOSÉ PEDROSO

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E
CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO E. DM - 00A/14
BRASÍLIA/DF: ABRIL - 2014**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

ESTUDO COMPARATIVO ANALÍTICO-NUMÉRICO DE
VIBRAÇÕES LIVRES E LIVRES ACOPLADAS
FLUIDO-ESTRUTURA EM CASCAS CILÍNDRICAS

ALEJANDRO AUGUSTO OSPINA LOPEZ

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:

Prof. Lineu José Pedroso, Dr. Ing (UnB)
(Orientador)

Prof. Francisco Evangelista Junior, PhD (UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Zenón José Guzmán Núñez Del Prado, DSc (UFG)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA /DF, 16 DE ABRIL DE 2014

FICHA CATALOGRÁFICA

LOPEZ O, ALEJANDRO AUGUSTO

Estudo comparativo analítico-numérico de vibrações livres e livres acopladas fluido-estrutura em cascas cilíndricas [Distrito Federal] 2014. XXIV, 120p. 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2014).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Cascas cilíndricas

2. Vibração livre

3. Fluido- estrutura

4. Método dos elementos finitos

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

LOPEZ, A. A. (2014). Estudo comparativo analítico-numérico de vibrações livres e livres acopladas fluido-estrutura em cascas cilíndricas. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.DM-00A/14, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 120p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Alejandro Augusto Ospina Lopez

TÍTULO: Estudo comparativo analítico-numérico de vibrações livres e livres acopladas fluido-estrutura em cascas cilíndricas.

GRAU: Mestre ANO: 2014

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Alejandro Augusto Ospina Lopez

CLN 406 Bloco B Sala 220

Asa Norte

CEP: 70.847-520 Brasília – DF – Brasil

e-mail:alejandroaugustoospinalopez@gmail.com

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Camilo Augusto Ospina Arbelaez e Martha Lucia Lopez Orozco, pelo apoio e motivação em cada momento da minha formação.

A Ananda Fontes Bastos pelo convite para morar em Brasília e o apoio na obtenção de este logro.

Aos professores do programa de Pós graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) da Universidade de Brasília pelos conhecimentos transmitidos e sua atitude gentil.

Aos colegas da UnB: Neander, Almerío, George, Fabiano, Ronaldo, Erwin, Gerardo e Wilber pelas contribuições fundamentais para a realização deste trabalho.

Em especial, aos professores Lineu José Pedroso, Zénon José Guzmán Núñez Del Prado e Francisco Evangelista Junior., pelos valiosos ensinamentos, paciência e boa disposição.

Tú estás aquí, para permitir que el divino propósito del universo se despliegue;
Esa es tu importancia.

Eckart Tolle

RESUMO

ESTUDO COMPARATIVO ANALÍTICO-NUMÉRICO DE VIBRAÇÕES LIVRES E LIVRES ACOPLADAS FLUIDO - ESTRUTURA EM CASCAS CILÍNDRICAS

Autor: Alejandro Augusto Ospina Lopez

Orientador: Lineu José Pedroso, Dr. Ing.

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, Abril 16 de 2014

Neste trabalho estuda-se o comportamento dinâmico de cascas cilíndricas em vibrações livres e vibrações livres considerando o acoplamento fluido-estrutura.

O estudo das características dos movimentos vibratórios destas estruturas cilíndricas, onde a influência das restrições na sua vinculação e o acoplamento com o meio fluido representam parâmetros importantes para a compreensão geral dos fundamentos do seu comportamento. Tais fatores se observam nas aplicações industriais, quando se deve evitar efeitos destrutivos como a ressonância, assim como garantir o desempenho da estrutura de modo a satisfazer as exigências necessárias evitando acidentes com incidências ambientais, sociais e econômicas.

As soluções analíticas para a vibração livre de cascas circulares são obtidas considerando o campo de deformações proposto pela teoria de Donnell. Foram estudadas diferentes condições de contorno, modeladas por funções de viga, sendo que os deslocamentos da superfície media são assumidos como expansões modais de funções trigonométricas.

No estudo do Fluido acústico (cavidade cilíndrica) efetuou-se a solução da equação da onda mediante o método de separação de variáveis, Quanto a análise das vibrações acopladas fluido-estrutura, aplicou-se um método pseudo-acoplado, onde implementou-se um fator de massa adicional de fluido na equação de movimento.

Em todas as análises realizadas, utilizou-se o software ANSYS, baseado no método numérico dos elementos finitos. Posteriormente com os resultados obtidos, procedeu-se um estudo comparativo analítico e numérico que mostra uma boa aproximação.

ABSTRACT

ANALYTICAL-NUMERICAL COMPARATIVE STUDY OF FREE VIBRATION AND FREE COUPLING FLUID-STRUCTURE IN CYLINDRICALS SHELLS

Author: Alejandro Augusto Ospina Lopez

Supervisor: Lineu José Pedroso, Dr. Ing.

Postgraduate Program in Structures and Construction

Brasília, April 16 of 2014

In this paper we study the dynamic behavior of cylindrical shells in free vibration and free vibration considering the fluid-structure coupling.

The study of the characteristics of vibratory movements of these cylindrical structures, including the influence of the restrictions on its binding and coupling with the fluid medium are important parameters for the general understanding of the fundamentals of their behavior. Such factors are observed in industrial applications, when to avoid destructive effects such as resonance, as well as ensure the performance of the structure in order to meet the necessary requirements avoiding accidents with environmental, social and economic implications.

The analytical solutions for the free vibration of circular shells are obtained considering the strain field theory proposed by Donnell. Different boundary conditions, modeled by beam functions, and the average surface displacements are assumed to modal expansions of trigonometric function were studied.

The study of acoustic fluid (cylindrical cavity) was done by the solution of the wave equation using the method of separation of variables, for the analysis of the vibrations coupled fluid-structure applied a pseudo-coupled method, which implemented a factor additional mass of fluid in the radial coordinate movement.

In all analyzes, we used the ANSYS software based on numerical finite element method. After these results proceeded a comparative study between analytical and numerical data which shows a good approximation.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	JUSTIFICATIVA.....	2
1.2	OBJETIVOS	2
1.2.1	Objetivo geral.....	2
1.2.2	Objetivos específicos	3
1.3	METODOLOGIA	3
1.4	ABRANGÊNCIAS E LIMITAÇÕES.....	5
1.5	DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS DA DISSERTAÇÃO.....	6
2	REVISÃO BIBLIOGRAFICA.....	7
2.1	PRINCIPAIS ESTUDOS	7
3	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.....	15
3.1	MODELAGEM CASCA CILÍNDRICA	15
3.2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE MOVIMENTO.....	17
3.3	ESTRUTURA EM VIBRAÇÃO LIVRE (VL).....	19
3.3.1	Forma solução geral	22
3.3.2	Solução simplificada para outras condições de contorno	29
3.4	VIBRAÇÃO LIVRE (VL) DA CAVIDADE CILÍNDRICA	32
3.4.1	Formulação analítica da equação de onda.....	32
3.4.2	Solução da equação de onda em sistema de coordenadas cilíndricas	33
3.4.3	Condição de contorno e condição inicial	36
3.4.4	Frequência natural.....	40
3.5	ACOPLAMENTO CASCA-CAVIDADE ACÚSTICA	43
3.5.1	Vibrações livres acopladas.....	43
4	ASPECTOS COMPUTACIONAIS	45
4.1	DESCRIÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS	45
4.1.1	Casca elástica – SHELL63.....	45

4.1.2	Fluido acústico – FLUID30	46
4.1.3	Descrição dos modelos.....	47
4.2	ASPECTOS COMPUTACIONAIS	49
4.2.1	Análise modal	49
4.2.2	Análises de convergência.....	50
5	RESULTADOS.....	55
5.1.1	Caso 1.A.....	56
5.1.1.1	Considerações finais Caso 1.A.	65
5.1.2	Caso 1.B.....	66
5.1.2.1	Considerações finais Caso 1.B.....	71
5.1.3	Caso 1.C.....	71
5.1.3.1	Considerações finais Caso 1.C.....	81
5.1.4	Caso 1.D.....	82
5.1.5	Caso 2.....	85
5.1.6	Caso 3.....	88
5.1.6.1	Considerações finais Casos (1.D., 2. e 3.)	91
5.1.7	Caso 4.....	92
5.1.7.1	Considerações finais Caso 4.	94
6	CONCLUSÕES.....	95
7	TRABALHOS FUTUROS.....	98
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	99

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Exemplos de estruturas cilíndricas sujeitas a solicitações de natureza dinâmica.	1
Figura 1.2 - Metodologia geral da pesquisa.	4
Figura 1.3 - Condições de contorno em cascas cilíndricas.	5
Figura 3.1 - Geometria e campo de deslocamentos da casca cilíndrica circular.	15
Figura 3.2 - (a) Denominações principais, (b) Forças externas e internas de membrana e momentos de flexão e de torção no elemento diferencial de cascas cilíndrica.	17
Figura 3.3 - Formas de vibração para cascas cilíndricas circulares.	23
Figura 3.4 – Ilustração das funções de Bessel de primeira J_0 e segunda Y_0 espécie.	39
Figura 4.1 - Elemento para a casca elástica. SHELL63 – ANSYS.	45
Figura 4.2 - Tensões no elemento casca. SHELL63 – ANSYS.	46
Figura 4.3 - Elemento fluido. FLUID30.	47
Figura 4.4 (a) Modelo numérico casca cilíndrica (b) condições de contorno simplesmente apoiadas.	47
Figura 4.5 (a) Modelo cavidade acústica, (b) condições de contorno aberta nos extremos, (pressão $p = 0$).	48
Figura 4.6 - Esquema refinamento modelo casca.	51
Figura 4.7 - Análise de convergência para a estrutura casca.	51
Figura 4.8 - Esquema refinamento da cavidade cilíndrica.	52
Figura 4.9 - Análise de convergência para a cavidade cilíndrica.	53
Figura 4.10 - Esquema refinamento acoplamento fluido-estrutura.	53
Figura 4.11 - Análise de convergência para o acoplamento fluido-estrutura.	54
Figura 5.1 - Configuração modal.	59
Figura 5.2 - Deformada modal: [(a) e (b)] radial, [(c) e (d)] circunferencial: ao longo de duas curvas: uma reta $0 \leq z \leq L$ em $\phi = 36^\circ$ e uma circunferência $0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$ em $z = L/2$.	62
Figura 5.3 - Deformada modal: [(a) e (b)] radial, [(c) e (d)] circunferencial e [(e) e (f)] axial, ao longo de duas curvas: uma reta $0 \leq z \leq L$ em $\phi = 36^\circ$ e uma circunferência $0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$ em $z = L/2$.	63
Figura 5.4 - Relação de frequências naturais vs número de ondas circunferenciais de	63

uma casca cilíndrica simplesmente apoiada.	
Figura 5.5 - Frequências naturais analíticas da estrutura.	64
Figura 5.6 - Modos de vibração de pressão.	69
Figura 5.7 - Modos de vibração de pressão ao longo de três curvas: (a) uma reta $0 \leq r \leq a$ em $\varnothing = 36^\circ$, $z = L/2$, (b) uma circunferência $0^\circ \leq \varnothing \leq 360^\circ$ em $r = a/2$, $z = L/2$ e (c) uma uma reta $0 \leq z \leq L$ em $r = a/2$, $\varnothing = 36^\circ$.	70
Figura 5.8 - Deformadas modais para o sistema acoplado: (a) e (b) radial, (c) e (d) circunferencial e (e) e (f) axial, ao longo de duas trajetórias: uma reta $0 \leq z \leq L$ em $\varnothing = 36^\circ$ e uma circunferência $0^\circ \leq \varnothing \leq 360^\circ$ em $z = L/2$.	77
Figura 5.9 - Modos de vibração de pressão para o sistema acoplado ao longo de três curvas: Uma reta $0 \leq r \leq a$, em $\varnothing = 36^\circ$ e $z = L/2$, uma circunferência $0^\circ \leq \varnothing \leq 360^\circ$ em $r = a/2$ e $z = L/2$, e uma reta $0 \leq z \leq L$ em $r = a/2$ e $\varnothing = 36^\circ$.	78
Figura 5.10 - Frequências naturais analíticas acopladas.	80
Figura 5.11 - Frequências naturais analíticas para a casca vazia e cheia.	80
Figura 5.12 - Frequências naturais teóricas (linha contínua) e experimentais (símbolos) versus o número de ondas circunferenciais n , para $m = 1$ e 2 , para uma casca vazia (<i>empty</i>) e preenchida com água (<i>full</i>) com extremidades abertas e bi-apoiada, (Amabili e Dalpiaz, 1995).	81
Figura 5.13 - Condições de casca cilíndrica simplesmente apoiada (A – A).	83
Figura 5.14- Frequências naturais para uma casca cilíndrica circular vibrando livremente com seus extremos apoiado-apoiado.	84
Figura 5.15-Modos de vibração radial.	85
Figura 5.16 - Casca cilíndrica E – L.	86
Figura 5.17 - Frequências naturais para uma casca cilíndrica circular vibrando livremente com seus extremos engastado-livre.	87
Figura 5.18-Modos de vibração radial ao longo de duas trajetórias: (a) uma reta $0 \leq z \leq L$ em $\varnothing = 36^\circ$ e (b) uma circunferência $0^\circ \leq \varnothing \leq 360^\circ$ em $z = L/2$.	88
Figura 5.19 - Casca cilíndrica Engastada - Engastada (E-E).	89
Figura 5.20 - Frequências naturais para uma casca cilíndrica circular vibrando livremente com seus extremos engastados.	90
Figura 5.21 - Modos de vibração radial ao longo de duas trajetórias:(a) uma reta $0 \leq z \leq L$ em $\varnothing = 36^\circ$ e (b) uma circunferência $0^\circ \leq \varnothing \leq 360^\circ$ em $z = L/2$.	91
Figura 5.22 - Variação do parâmetro de frequência ξ em função da relação L/a .	93

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1- Nomenclaturas de referência da Figura 1.2 e Figura 1.3	4
Tabela 3.1 - Expressões para o cálculo de am e σm	30
Tabela 3.2 - Modos acústicos circunferenciais para cavidades cilíndricas.	42
Tabela 4.1 Características da casca	48
Tabela 4.2 Características da cavidade acústica	48
Tabela 4.3 - Níveis de refinamentos	50
Tabela 5.1 Estudo de casos	55
Tabela 5.2 Estudo de casos, Continuação.	56
Tabela 5.3 - Frequências naturais da estrutura desacoplada.	57
Tabela 5.4 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura, ANSYS.	58
Tabela 5.5 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura, ANSYS. Cont.	60
Tabela 5.6 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura, ANSYS. Cont.	61
Tabela 5.7 - Frequências naturais da cavidade cilíndrica desacoplada.	67
Tabela 5.8 - Frequências naturais e modos de pressão numéricos da cavidade acústica obtidos por ANSYS.	68
Tabela 5.9 - Frequências naturais e modos de pressão numéricos da cavidade acústica obtidos por ANSYS. Continuação.	69
Tabela 5.10 - Frequências naturais acopladas	72
Tabela 5.11 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados fluido-estrutura obtidos via ANSYS.	73
Tabela 5.12 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados fluido-estrutura obtidos via ANSYS. Cont.	74
Tabela 5.13 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados fluido-estrutura obtidos via ANSYS. Continuação.	75
Tabela 5.14 - Frequências numéricas comparativas casca vs casca-cavidade.	79
Tabela 5.15 - Comparação entre os resultados analíticos e numéricos para o caso apoiado-apoiado (A-A).	83
Tabela 5.16 - Comparação entre os resultados analíticos e numéricos para o caso engastado-livre E-L.	86

Tabela 5.17 - Comparação entre os resultados analíticos, numéricos e experimentais para o caso engastado-engastado.	89
Tabela 5.18 - Diferença nas frequências naturais de acordo com as condições de vinculação nos extremos da casca	93

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

A	Apoiado, sem restrição axial
A	Analítica
a	Raio médio da casca
Ab	Aberto
$A - A$	Condição de contorno simplesmente apoiada para a casca cilíndrica
$E - L$	Condição de contorno engastada-livre para a casca cilíndrica
$E - E$	Condição de contorno engastada-engastada para a casca cilíndrica
$Ab - Ab$	Condição de contorno aberta-aberta para a cavidade cilíndrica
w	Grau de liberdade radial da superfície media da casca
v	Grau de liberdade circunferencial da superfície media da casca
u	Grau de liberdade axial da superfície media da casca
$A, B e C$	Constantes dos deslocamentos axial, circunferencial e radial.
c	Velocidade de propagação do som no fluido
D	Rigidez flexional
E	Engastado
FE	Fluido-Estrutura
Estrutura	Casca cilíndrica
E	Modulo de Young
E	Estrutura
e	Base dos logaritmos Neperianos
H	Altura do fluido
N	Numérica
Fluido	Cavidade Acústica
h	Espessura casca cilíndrica
L	Livre
L	Comprimento da casca cilíndrica
$J_n e Y_n$	Funções de Bessel de primeira e segunda ordem de ordem n
J'_n	Derivada da função de Bessel de primeira classe de ordem n
$I_n e K_n$	Funções de Bessel de primeira e segunda ordem de ordem m
ρ_s	Densidade da estrutura casca

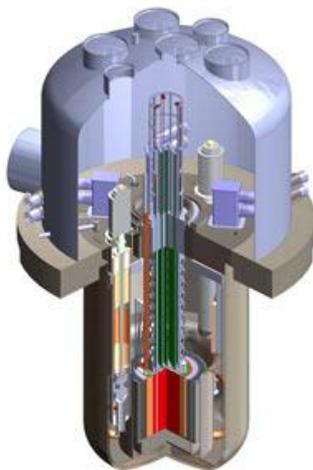
ν	Coeficiente de Poisson
ρ_f	Densidade do fluido
u, v e w	Deslocamento da superfície media na direção axial, circunferencial e radial.
x, y e z	Coordenadas cartesianas
z, ϕ e r	Coordenadas cilíndricas
N_z e N_ϕ	Forças de membrana por unidade de comprimento
$N_{z\phi}$ e $N_{\phi z}$	Forças cortantes de membrana por unidade de comprimento
M_z e M_ϕ	Momentos flexores por unidade de comprimento
$M_{z\phi}$ e $M_{\phi z}$	Momentos torçores por unidade de comprimento
Q_z e Q_ϕ	Forças cortantes transversais por unidade de comprimento
p_z, p_ϕ e p_r	Componentes do carregamento distribuído por unidade de área
i	Ordem da frequência natural
m	Número de semi-ondas no modo de vibração axial
n	Número de ondas no modo de vibração circunferencial
i	Número de círculos nodais
\bar{m}	Número de diâmetros modais
\bar{n}	Número de nodos axiais
ε_z e ε_ϕ	Deformações extensionais
$\varepsilon_{z\phi}$	Deformação cisalhante
k	Deformação flexional
k_z e k_ϕ	Mudanças de curvatura
$k_{z\phi}$	Deformação torsional
K	Rigidez de membrana
ω	Frequência natural circular de vibração
j	Unidade imaginaria
$\phi_m(z)$	Função modal axial da teoria de vigas
Ψ	Ângulo de fase arbitrário das teorias de casca e cavidade
ζ	Massa virtual
p	Pressão acústica de um ponto

1 INTRODUÇÃO

Cilindros de paredes finas são elementos estruturais de utilização frequente nas diversas áreas tecnológicas das engenharias civil, mecânica, química e naval, assim como nas indústrias aeronáutica e aeroespacial. Tais elementos estruturais apresentam propriedades intrínsecas de leveza e resistência, sendo amplamente utilizados em certos equipamentos onde o reduzido peso da estrutura é essencial. Alguns exemplos de estruturas cilíndricas sujeitas a solicitações de natureza dinâmica podem ser observados na Figura 1.1.



(a) Reservatório Cilíndrico



(b) Núcleo Reator



(c) Foguete espacial

Figura 1.1 - Exemplos de estruturas cilíndricas sujeitas a solicitações de natureza dinâmica.

Fontes: (a) Terrapower, (b) www.rplreservatorios.com.br,

(c) nasa.glenntechcenter.org

Movimentos vibratórios dependentes do tempo são gerados em uma casca sempre que houver uma perturbação de sua posição de equilíbrio estável. Se estes movimentos ocorrem na ausência de cargas externas, eles são classificados como vibrações "livres". Por outro lado, se estes movimentos são criados por cargas externas dependentes do tempo, eles são referidos como vibrações forçadas.

Uma casca cilíndrica, uma vez que é um exemplo de um corpo elástico, é constituída por um número infinito de partículas de massa. Como consequência, quando colocada em

movimento possui um número infinito de graus de liberdade. Assim, sua resposta a uma perturbação pode ser analisada em um número infinito de movimentos periódicos, que são referidos como os seus modos normais de vibração livre. Cada um desses modos normais tem uma frequência natural associada a respectiva vibração livre.

A grande vantagem da casca cilíndrica, além da facilidade de fabricação, é sua capacidade de resistir a carregamentos axiais e a pressões internas através de esforços de membrana, o que permite a construção de estruturas bastante leves e esbeltas. Os esforços de flexão, quando presentes, permanecem em geral restritos a pequenas regiões próximas dos apoios. Embora tais estruturas tenham uma forma geométrica simples, podem apresentar um comportamento dinâmico complexo devido a sua ampla variedade de combinações modais.

1.1 JUSTIFICATIVA

Muitas solicitações dinâmicas podem provocar esforços ou deformações que excedem os limites toleráveis de resistência e o bom funcionamento destas estruturas, causando à deterioração ou mesmo o colapso. Portanto, o conhecimento das vibrações livres de cascas cilíndricas finas é importante para a compreensão geral do seu desempenho nas aplicações industriais. Com isso, se reduz ou se evita os efeitos indesejáveis como a ressonância, além de permitir um desempenho satisfatório de acordo com as exigências normativas de comportamento.

Deve ser considerando também a necessidade de se prevenir acidentes com incidências ambientais, sociais e econômicas. Tais efeitos são encontrados no funcionamento de componentes de centrais nucleares, reservatórios de líquidos, *containers* de armazenamento, vasos sob pressão e circuitos tubulares, sendo estes caracterizados por serem cascas cilíndricas submetidas a solicitações de natureza dinâmica.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

- Estudo de vibrações livres e vibrações livres na condição acoplada fluido-estrutura para o sistema casca cilíndrica-cavidade acústica.

1.2.2 Objetivos específicos

- Obter as soluções analíticas e numéricas de vibrações livres de cascas cilíndricas sob a influência de diferentes condições de contorno.
- Analisar os resultados analíticos e numéricos de vibrações livres em cavidade acústica com geometria cilíndrica.
- Investigar através de abordagens numéricas e analíticas a natureza dos efeitos da interação fluido-estrutura em cascas cilíndrica-cavidade acústica.

1.3 METODOLOGIA

Para a análise da vibração livre da estrutura casca cilíndrica, parte-se da formulação presente na teoria linear de cascas cilíndricas finas proposta por Donnell (1976), e utiliza-se para satisfazer as condições de contorno funções modais de viga.

Quanto a análise da cavidade utiliza-se o método de separação de variáveis para a solução da equação da onda em coordenadas cilíndricas, a qual constitui a base teórica para o estudo do fenômeno de vibração livre em fluidos acústicos, obtendo-se por meio desta solução as frequências naturais e o campo de pressões no volume de fluido.

Finalmente estuda-se o caso onde acopla-se casca cilíndrica e cavidade acústica, implementa-se o método pseudo-acoplado, onde um fator de massa virtual de fluido é adicionado nas equações de movimento na direção radial.

Para um melhor entendimento da metodologia aqui proposta, apresenta-se na Figura 1.2 um esquema da evolução progressiva do estudo interação fluido-estrutura (FE). Partindo-se da análise de vibrações livres para os sistemas desacoplados: casca cilíndrica e cavidade ou fluido acústico, e posteriormente para o sistema acoplado (FE).

A Tabela 1.1 contem as nomenclaturas de referência para um melhor entendimento da Figura 1.2 e Figura 1.3, a seguir:

Tabela 1.1- Nomenclaturas de referência da Figura 1.2 e Figura 1.3

FE	Fluido-Estrutura
Estrutura	Casca Cilíndrica
Fluido	Cavidade Acústica
z	Coordenada axial sistema cilindrico
w	Grau de liberdade radial superfície media da casca
v	Grau de liberdade circunferencial superfície media da casca
u	Grau de liberdade axial superfície media da casca
A-A	Condição de contorno bi-apoiada para a casca cilíndrica
E-L	Condição de contorno Engastada-Livre para a casca cilíndrica
E-E	Condição de contorno Engastada-Engastada para a casca cilíndrica
Ab-Ab	Condição de contorno aberta-aberta para a cavidade

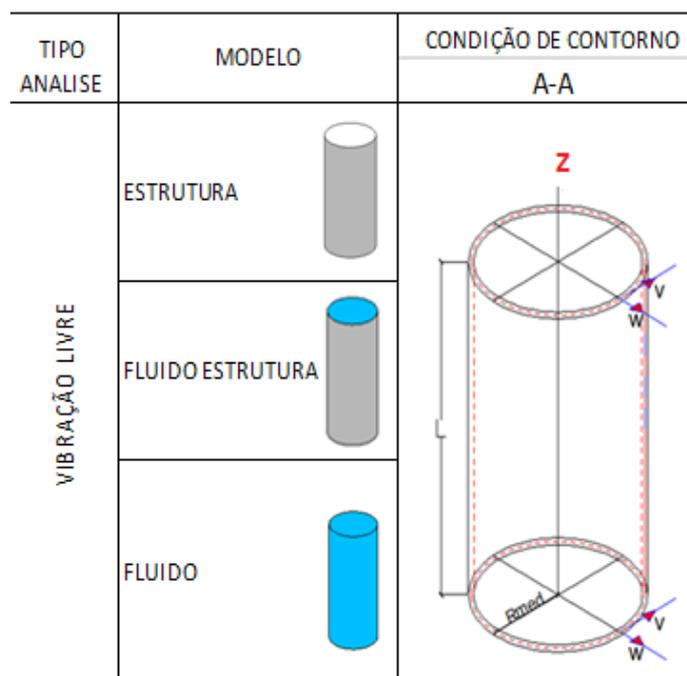


Figura 1.2 - Metodologia geral da pesquisa.

Na segunda parte deste trabalho foi realizado um estudo dos efeitos das condições de borda em vibrações livres de cascas cilíndricas secas, empregando uma aproximação de frequência linear estudada em Sharma e Johns (1971), Sharma (1974), considerando as deformações circunferencial e de cisalhamento nulas na casca. A Figura 1.3 mostra as condições de contorno a ser estudadas.

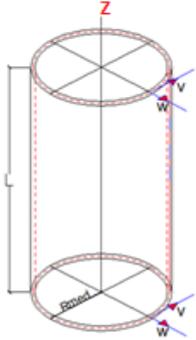
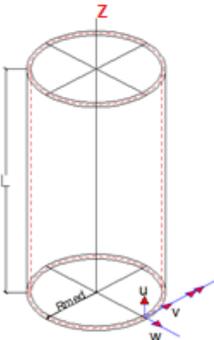
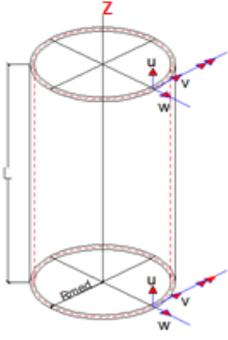
TIPO	MODELO	CONDIÇÕES DE CONTORNO		
ANALISE	ESTRUTURA	A-A	E-L	E-E
VIBRAÇÃO LIVRE				

Figura 1.3 - Condições de contorno em cascas cilíndricas,

Em que, [A-A] Apoiada –Apoiada, [E-L] Engastada –Livre, [E-E] Engastada – Engastada.

Para os estudos anteriores, a formulação analítica foi obtida da literatura especializada, os cálculos foram realizados computacionalmente e os resultados em planilhas eletrônicas. Sendo comparadas com soluções numéricas baseadas pelo método dos elementos finitos fornecidas pelo software ANSYS.

1.4 ABRANGÊNCIAS E LIMITAÇÕES

A estrutura casca cilíndrica é constituída de material linear, elástico, homogêneo e isotrópico. As cascas cilíndricas circulares retas têm espessura constante, parede fina e apresentam pequenas deflexões, sua análise é descrita pela teoria de cascas com aproximação de primeira ordem do campo de deformações proposto por Donnell (1976).

O fluido é considerado quiescente (estagnado), invíscido (não viscoso) e incompressível. Não há escoamento, somente vibração em torno de um ponto de equilíbrio (meio acústico).

Na análise do acoplamento fluido-estrutura considera-se a casca cilíndrica completamente preenchida com o fluido, sendo desconsiderado o efeito de onda de superfície ou *Sloshing*.

Foram analisadas frequências de ordem reduzida que ocorrem nas primeiras combinações modais, que coincidem com uma análise de vibração livre, uma vez que as elevadas frequências estão mais associadas a análise de ruído em cavidades acústicas.

1.5 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação é composta de seis capítulos, descritos a seguir:

No capítulo 1 são apresentadas as diferentes aplicações dos cilindros de parede fina, assim como suas vantagens e desvantagens estruturais, a importância do estudo de vibrações livres em problemas acoplados fluido estrutura, os objetivos, as abrangências e limitações e a metodologia empregada.

No capítulo 2 é descrito a revisão bibliográfica através de alguns dos principais estudos analíticos, numéricos e experimentais em sistemas casca cilíndrica- cavidade acústica.

O capítulo 3 trata das formulações analíticas empregadas para análise de vibrações livres dos sistemas desacoplados e sistema acoplado.

O capítulo 4 apresenta a geometria dos modelos, as condições de contorno estudadas, as características mecânicas dos materiais (para a casca cilíndrica e o fluido ou cavidade acústica), os elementos finitos utilizados. Finalmente, são apresentadas as malhas, a convergência e a validação das soluções numéricas.

Os resultados obtidos são apresentados no capítulo 5, os quais se compõem das comparações entre as soluções analíticas obtidas da literatura especializada com resultados numéricos obtidos do *software* ANSYS. Expressos em termos de frequências e deformadas modais.

No capítulo 6 apresentasse as conclusões do trabalho, finalmente no capítulo 7 proporcionasse algumas sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRAFICA

Neste capítulo serão apresentados alguns dos principais estudos analíticos, numéricos e experimentais referentes à vibrações livres de cascas desacopladas e acopladas a fluido.

2.1 PRINCIPAIS ESTUDOS

Cascas cilíndricas

O estudo de estruturas tipo casca é de grande relevância e complexidade, fato tangível é a vasta literatura sobre o tema; Segundo Del Prado (2005) a engenharia estrutural, nos anos recentes, motivada pelo aperfeiçoamento nos procedimentos de cálculo, nos detalhes construtivos e nos avanços dos materiais, gerou mudanças sensíveis nas concepções estruturais, tornando as estruturas cada vez mais leves e esbeltas.

Estruturas tipo casca cilíndrica são um bom exemplo de quão esbeltos podem ser atuais elementos estruturais. Gerando assim, estruturas mais suscetíveis à perda de estabilidade e a vibrações excessivas quando submetidas a carregamentos estáticos ou dinâmicos.

São numerosos os trabalhos que abrangem o estudo de cascas cilíndricas, historicamente, sabe-se que a estabilidade de cascas vem sendo estudada desde o final do século XIX (Brush, 1975). Algumas das soluções mais antigas para cascas cilíndricas submetidas à compressão axial podem ser encontradas, entre outros, por Lorenz em 1911. Também encontra-se pesquisas sobre soluções para flambagem sob pressão lateral uniforme por Southwell em 1913 e Von Mises em 1914.

Uma ampla revisão da literatura sobre vibrações não-lineares, livres e forçadas, de cascas, com ou sem fluido, pode ser encontrada em Amabili e Païdoussis (2003). Além da não-linearidade geométrica, expressa através das relações tensão deformação, os sistemas físicos também podem apresentar não linearidades relacionadas ao material empregado, às condições de contorno, às considerações sobre o amortecimento estrutural e ao tipo de carregamento aplicado.

Amabili, Pellicano e Païdoussis (1999 a, 1999 b, 2000 a e 2000 b) estudam as vibrações livres não-lineares e forçadas de uma casca cilíndrica simplesmente apoiada em contato com um fluido incompressível, não viscoso, estacionário ou em movimento, usando a teoria não linear de Donnell para cascas abatidas.

Donnell (1933) desenvolve suas formulações através do estudo de cascas cilíndricas sujeitas a carga torsional. Segundo Brush (1975) a formulação proposta por Donnell, apesar de certas limitações, fornece resultados bem precisos para análises da estabilidade e vibrações de cascas no regime não linear, sendo até hoje a teoria mais utilizada.

Sharma and Johns (1971) desenvolveram uma análise teórica para a vibração livre de cascas cilíndricas engastada-livre e engastada-anel rígido. O problema foi formulado usando a técnica de Rayleigh-Ritz. Utilizando a formulação teórica de casca de Fluggë é feita uma comparação com os resultados da teoria de Timoshenko-Love. Em ambos os casos, assumiu-se deformação circunferencial e de cisalhamento nulas na casca.

Sharma (1984) analisou o problema de vibrações livres de cilindros circulares engastados-livres usando a teoria de cascas delgadas de primeira ordem de Budiansky e Sanders (1963). Duas relações lineares simples para o parâmetro da frequência foram dadas pela incorporação de uma inter-relação entre componentes do deslocamento de duas maneiras diferentes. Para variações de números de onda, razão raio-espessura, razão comprimento-raio. A comparação com as frequências exatas e as frequências devido a várias fórmulas aproximadas foi extensivamente estudada. Considerações sobre a deformação e energia cinética foram apresentadas para explicar a diferença aparente entre as aproximações da frequência linear e cubica. Os resultados teóricos mostraram-se em acordo com as frequências observadas e também com os resultados calculados usando a teoria de casca de Fluggë.

Lakis e Païdoussis (1971) apresentam uma teoria para a determinação das características de vibração livres de uma casca cilíndrica circular fina parcial ou totalmente preenchida com líquido estacionário. A casca pode ser uniforme ou não uniforme, desde que seja axialmente simétrica. Implementase a teoria de elementos finitos, usando elementos finitos cilíndricos, mas usando as funções de deslocamento da teoria clássica de cascas. A carga inercial do fluido é tomada em consideração incorporando a massa virtual do fluido na matriz massa de estos elementos finitos os quais estão abaixo da superfície livre do líquido. O calculo analítico das

frequências naturais e das deformadas modais da casca cilíndrica junto aos resultados experimentais disponíveis, mostraram uma muito boa concordância.

No trabalho realizado por Blevins (1979) apresenta-se um extenso estudo sobre as generalidades das equações de casca, as quais permitem uma grande variedade de modos de vibração com caráter muito diferente. De fato algumas das soluções que podem ser obtidas a partir das equações que descrevem as deformadas modais numa casca cilíndrica são: A vibração transversal, longitudinal e torcional de vigas tubulares, a vibração de flexão e extensional no plano do anel, e os modos de vibração circunferenciais, exclusivos das cascas.

Chiba et al (1984) apresentam análises teóricas para a vibração livre linear de uma casca cilíndrica engastada livre, parcialmente preenchida com um líquido incompressível, não viscoso. Para a vibração do sistema, foram utilizadas as equações dinâmicas de Donnell, o problema foi resolvido com um procedimento de Galerkin modificado, tendo o efeito da deformação axisimétrica devido à pressão estática do líquido em consideração. No que respeita à vibração relevante para o movimento do líquido, a solução para a velocidade potencial foi assumida como uma soma de duas combinações lineares de funções harmônicas, o procedimento anterior leva a uma equação matricial para a determinação das frequências naturais do sistema acoplado casca-fluido.

Gonçalves e Batista (1986) desenvolveram uma análise teórica para a vibração livre de cascas cilíndricas verticais simplesmente apoiadas preenchidas parcialmente ou submersas em fluido. A técnica de Rayleigh-Ritz foi usada para obter uma solução aproximada que coincide com a solução exata para os casos de uma casca vazia ou uma completamente em contato com o fluido. As vibrações da casca foram examinadas usando a teoria de casca de Sanders. O fluido considerado como não viscoso e compressível e o acoplamento entre a casca deformável e seu meio acústico foram levados em consideração. As soluções foram apresentadas para mostrar o efeito de uma altura variável de fluido nas frequências naturais da casca. Os efeitos dos parâmetros da geometria da casca nas frequências foram também investigados. A solução analítica foi comparada com resultados disponíveis. Boa concordância foi exibida entre os resultados dos estudos encontrados na literatura e as frequências naturais previstas.

Em Gonçalves (1985) é obtida uma expressão de massa virtual, onde o líquido pode ser considerado como uma massa adicional para a casca cilíndrica, posteriormente em Gonçalves (1987), investigou-se as vibrações não-lineares de cilindros de paredes finas contendo líquido.

Koga e Saito, (1988); Koga (1988) mostram por um método assintótico que as características de vibração livre de uma casca circular cilíndrica vazia, podem ser classificadas como pertencentes a cinco tipos. Dependendo se as extremidades são livres ou suportados, e sim ou não, as extremidades são simplesmente apoiadas axialmente restringido. Uma fórmula simples para a frequência tem-se derivada e provou ser suficientemente precisa para fins de engenharia.

O método assintótico foi aplicado à flambagem de cascas cilíndricas circulares sob pressão externa uniforme, em Koga e Morimatsu (1989), obtivendo uma fórmula simples para a pressão de flambagem. No mesmo estudo. Foi mostrado como as condições de contorno têm um efeito semelhante sobre as características de flambagem como nas características de vibração livre. Sabendo que o método assintótico é eficaz tanto para a pressão lateral, como para a carga inercial, antispasse que o método irá também ser eficaz para as vibrações livres de cascas cilíndricas circulares cheias de um líquido, Particularmente quando a pressão exercida pelo líquido sobre a superfície do reservatório é devida a força de inércia do líquido oscilante. Razão pela qual o efeito do líquido pode ser incorporado nas equações do movimento da casca, como massa virtual.

Koga e Tsushima (1990), apresentam uma solução assintótica para a frequência natural do modo de respiração ou (modo Breathing) de uma casca cilíndrica cheia com um líquido. O efeito da força de inercial do líquido é incorporado nas equações de movimento da casca como massa virtual. A solução é válida para algumas possíveis combinações das condições de contorno, entre outras, a simplesmente apoiada e a engastada livre. Mostra-se que, como nos casos de cascas vazias, as características modais axiais podem ser classificadas como cinco tipos; Dependendo se as extremidades são livres ou suportados, e sim ou não, as extremidades são simplesmente apoiadas e axialmente restringidas. Resultados experimentais apresentam boa precisão com as previsões teóricas estudadas.

Estudos sobre a compressibilidade do líquido por Berry e Reissner (1958) demonstraram que a inclusão do termo inercial, associado com massa virtual nas equações de movimento da

casca cilíndrica é apropriado para determinar a frequência natural, se a casca não é muito curta, se a rigidez de flexão da chapa de fundo não é muito baixa, e se o fluxo do líquido tem um potencial de velocidade. Para o caso específico mencionado acima, uma expressão analítica da massa virtual é dado em Lindholm (1962), Bhuta e Koval (1964) e Berry e Reissner (1958). Uma expressão aproximada foi obtida por Lakis e Paidoussis em 1971, para implementação de um elemento finito.

Lee, L. T. e Lu, J. C. (1995) estudaram teoricamente a vibração livre de cascas cilíndricas verticais simplesmente apoiadas com líquido ideal no seu interior. As vibrações da casca são examinadas usando a teoria de cascas de Donnell. O fluido é considerado não viscoso e incompressível. A função da resposta dinâmica da casca é obtida pela aplicação do princípio de Hamilton. O método de Galerkin é usado para simplificar as equações diferenciais em equações algébricas, a fim de obter as frequências naturais e deformadas modais correspondentes. O método mostra a sua grande vantagem na economia no tempo de computação. Os resultados são comparados com os disponíveis na literatura e uma excelente concordância é observada entre eles.

Farshindianfar et al (2010) analisaram as vibrações livres em cascas cilíndricas usando a vantagem de excitação acústica para encontrar frequências naturais de cascas cilíndricas longas.

Em Zhang et al (2001) e Zhang (2002) estudou-se os efeitos da presença de um fluido denso no interior de uma casca cilíndrica, utilizando o método de propagação de onda para estudar o efeito da presença do fluido na resposta da estrutura. As frequências naturais obtidas para um modelo estrutural no vácuo e outro modelo similar acoplado ao fluido interno apresentaram diferenças entre 40% e 50% para um mesmo modo. O autor ressalta a necessidade de avaliar influência do acoplamento nas deformadas modais e frequências naturais, para o correto projeto de um sistema de controle.

A fim de estudar a vibração livre de cascas cilíndricas circulares simplesmente apoiadas Farshindianfar e Oliazadeh (2012), apresentam um processo semi-analítico, no qual a função de viga é usada como uma aproximação às condições de contorno simplesmente apoiadas. Uma revisão da literatura revela que as funções de viga são amplamente utilizadas na previsão de frequências naturais de cascas cilíndricas. Para verificar esta técnica aproximada foi aplicada

em dez teorias de cascas diferentes. 1) Donnell-Mushtari, 2) Love-Timoshenko, 3) Arnold-Warburton, 4) Houghton-Johns, 5) Flügge-Byrne-Lyr'ye, 6) Reissner-Naghdi-Berry, 7) Sanders, 8) Vlasov, 9) Kennard. Obtendo resultados que para o grande número de parâmetros estudados em engenharia, são admissíveis.

Dai (2012) neste trabalho, um método previamente desenvolvido para vigas e placas tem-se estendido para o estudo da análise de vibração livre de casca cilíndrica circular com condições de contorno restringidas elasticamente, com base na teoria de Flügge, uma solução em séries modificadas de Fourier para os deslocamentos da superfície meia da casca, é assumida. A precisão do método tem-se demonstrado comparando-se parâmetros modais com outros da literatura e com alguns resultados calculados utilizando o Método dos elementos finitos.

Kim et al (2003) desenvolveram um método teórico para investigar as características de vibração acoplada de cascas cilíndricas, enrijecidas por anéis e parcialmente preenchidas com um fluido invíscido, incompressível e irrotacional. Considerando o efeito de *sloshing* ou de superfície livre. Como o efeito das ondas de superfície livre foi levado em conta na análise, os modos de *Bulging* e *sloshing* foram estudados. O método de Rayleigh-Ritz foi usado para derivar a equação de frequência de cascas enrijecidas por anéis e parcialmente preenchidas com fluido. A formulação teórica baseasse na teoria para casca fina de Love. A solução para o potencial de velocidade do movimento do fluido, foi assumida como uma soma de dois conjuntos de combinações lineares de funções harmônicas que satisfizeram a equação de Laplace e as condições de contorno relevantes. O efeito do nível do fluido, o número e a posição dos enrijecedores sobre as características de vibração acoplada, foi investigado. Para demonstrar a validade do método teórico os resultados foram comparados com casos de cascas simplesmente apoiadas e a análise numérica mediante o método dos elementos finitos. A análise foi realizada para cascas não enrijecidas e enrijecidas, parcialmente preenchidas de fluido com condição de contorno engastada-livre.

Argenta e Del Prado (2014) Estudaram a influência das soluções modais e da geometria na instabilidade dinâmica de cascas cilíndricas, A modelagem da casca foi feita com a utilização da teoria não liner de Donnell para cascas abatidas e soluções assumidas apartir de funções de viga. Os resultados apresentam interesse pratico, como uma estimativa inicial para projetistas.

Cavidade acústica

Acústica é o estudo da produção, propagação, absorção e reflexão das ondas de pressão sonora de um meio fluido. Algumas das aplicações são: Radar acústico, concepção de salas de concerto, distribuição uniforme de pressão do som, minimização de ruído em oficinas mecânicas, acústica submarina, projeto de alto falantes, filtros acústicos, exploração geofísica.

Kinsler em 1982 apresentou um amplo estudo sobre fundamentos de fluidos acústicos partindo de algumas considerações como são: O fluido é compressível (isto é mudanças de densidade devido a variações na pressão), inviscido (não há dissipação viscosa), não há fluxo significativo do fluido, e a densidade média e a pressão são uniformes em todo o líquido.

Autores como Munjal (1987), Betts (1998), Sun et al (1996), Paxton (1997), Markovic (2000) e Brito (2002), estudaram o fenômeno da propagação sonora em cavidades cilíndricas, onde resolvendo a equação de onda em coordenadas cilíndricas, através do método de separação de variáveis, são obtidas as frequências naturais e os modos de pressão ao interior da cavidade; Aplicações práticas de este estudo pode-se encontrar em cabine de aeronaves, submarinos, foguetes e tubulações, etc.

Betts (1998) modelou a propagação de ondas planas em dutos, no seu estudo foi avaliado a influência do refinamento da malha e a ordem das funções de interpolação na precisão dos resultados; a dedução das matrizes de massa, rigidez e o vetor força através do método dos resíduos ponderados segundo Galerkin é apresentado. O autor recomenda o uso de elementos de alta ordem na modelagem de campos acústicos complexos.

Paula (2003) estudou o acoplamento acústico estrutural em cascas cilíndricas, partindo de formulações analíticas baseadas em um método de propagação de onda estudado por Zhang em 2002.

Fernholz e Robinson (2009) estudam o desempenho do NASTRAN programa computacional baseado na teoria de elementos finitos, na solução de problemas desacoplados e acoplados fluido-estrutura para placas e cascas cilíndricas, validados com soluções analíticas.

Lustosa (2011) apresentou uma metodologia para o cálculo de tensões e deslocamentos em cascas cilíndricas utilizando soluções analíticas e numéricas; Campos Junior (2011) realizou estudos progressivos para o tratamento de uma barragem em arco de concreto com simples curvatura, partindo de estudo analítico de diferentes elementos estruturais dentre deles vigas e cascas cilíndricas.

Sousa Junior (2006), Souza (2007), Feio (2007) realizaram estudos em cavidades acústicas, para uma, duas e três dimensões, comparando diferentes tipos de soluções numéricas como método de elementos finitos, método das diferenças finitas, formulações potencial simétricas, soluções analíticas.

Mendes (2013) apresenta uma metodologia progressiva para o acoplamento reservatório barragens em arco (com dupla curvatura), partindo da casca cilíndrica, passando por uma casca cilíndrica cortada por um plano paralelo ao seu eixo e culminando em uma barragem em arco com dupla curvatura, um estudo de vibrações livres, e vibrações livres acopladas com fluido contido. Foi realizado, um estudo comparativo de soluções analíticas e numéricas obtidas pelo *software* ANSYS.

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

No capítulo 3 estudam-se as formulações teóricas utilizadas na análise de vibrações livres nos sistemas casca cilíndrica, cavidade acústica e sistema acoplado casca-cavidade.

3.1 MODELAGEM CASCA CILÍNDRICA

As cascas cilíndricas podem ser definidas como um corpo limitado por duas superfícies curvas, cuja distância entre essas duas superfícies é pequena em relação às outras dimensões, sendo assim, espessor (h) \ll raio (a) e espessor (h) \ll comprimento (L).

Considera-se uma casca cilíndrica de raio a , espessura h e comprimento L , de material elástico linear com módulo de elasticidade E , coeficiente de Poisson ν e densidade ρ_s . Os componentes do sistema em coordenadas cilíndricas são z , θ e r ; Onde u, v e w representam o campo de deslocamentos axial, circunferencial e radial de um ponto na superfície média. A geometria e o campo de deslocamentos estão ilustrados na Figura 3.1.

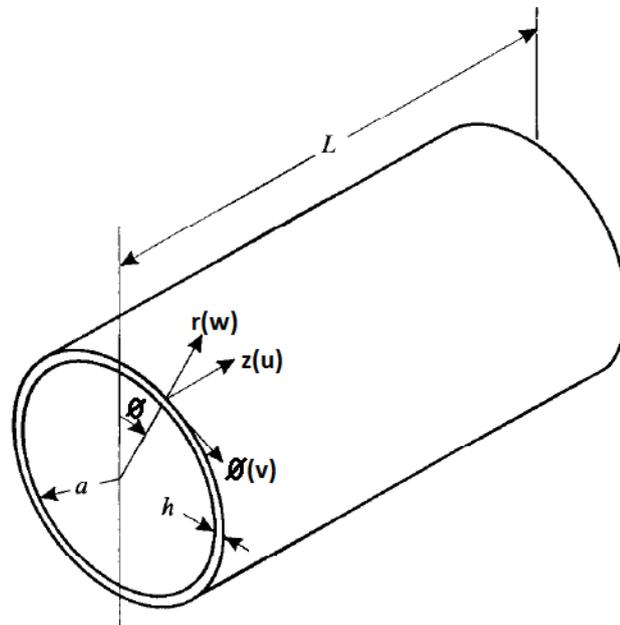


Figura 3.1 - Geometria e campo de deslocamentos da casca cilíndrica circular.

(Païdoussis, 2004, modificado)

As deformações específicas ε_z , ε_ϕ e $\gamma_{z\phi}$ de um ponto da superfície média da casca, segundo a teoria linear de Donnell (1976) para cascas finas, são dadas por:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{w}{a} \quad (3.2)$$

$$\gamma_{z\phi} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} \quad (3.3)$$

Em que χ_z , χ_ϕ , $\chi_{z\phi}$ são as mudanças de curvatura segundo a mesma teoria, dadas por:

$$\chi_z = -\frac{\partial \beta_z}{\partial z} \quad (3.4)$$

$$\chi_\phi = \frac{1}{a} \frac{\partial \beta_\phi}{\partial \phi} \quad (3.5)$$

$$\chi_{z\phi} = \frac{\partial \beta_\phi}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial \beta_z}{\partial \phi} \quad (3.6)$$

$$\beta_z = -\frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.7)$$

$$\beta_\phi = \frac{v}{a} - \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \phi} \quad (3.8)$$

3.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE MOVIMENTO

Segundo Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), ao discutir uma casca cilíndrica, assume-se que a geratriz da casca é paralela ao eixo z como observa-se na Figura 3.2a. Assim o corte de duas geratrizes adjacentes e duas seções transversais perpendiculares ao eixo z , configuram um elemento de casca, com sua posição definida pela coordenada z e o ângulo ϕ . As forças e momentos, que atuam sobre os lados do elemento são mostrados na Figura 3.2b, em que, a é o raio (médio) de curvatura, N_z e N_ϕ são forças de membrana normais no plano por unidade de comprimento, $N_{z\phi}$ e $N_{\phi z}$ são forças de membrana cortantes no plano por unidade de comprimento, M_z e M_ϕ são momentos fletores por unidade de comprimento, $M_{z\phi}$ e $M_{\phi z}$ são momentos torçorês por unidade de comprimento, Q_z e Q_ϕ são forças cortantes transversais por unidade de comprimento. $a \frac{\partial(\)}{\partial z} = (\)'$ e $a \frac{\partial(\)}{\partial \phi} = (\)^*$ derivadas com respeito as coordenadas adimensionais x/a e ϕ . Flügge (1973).

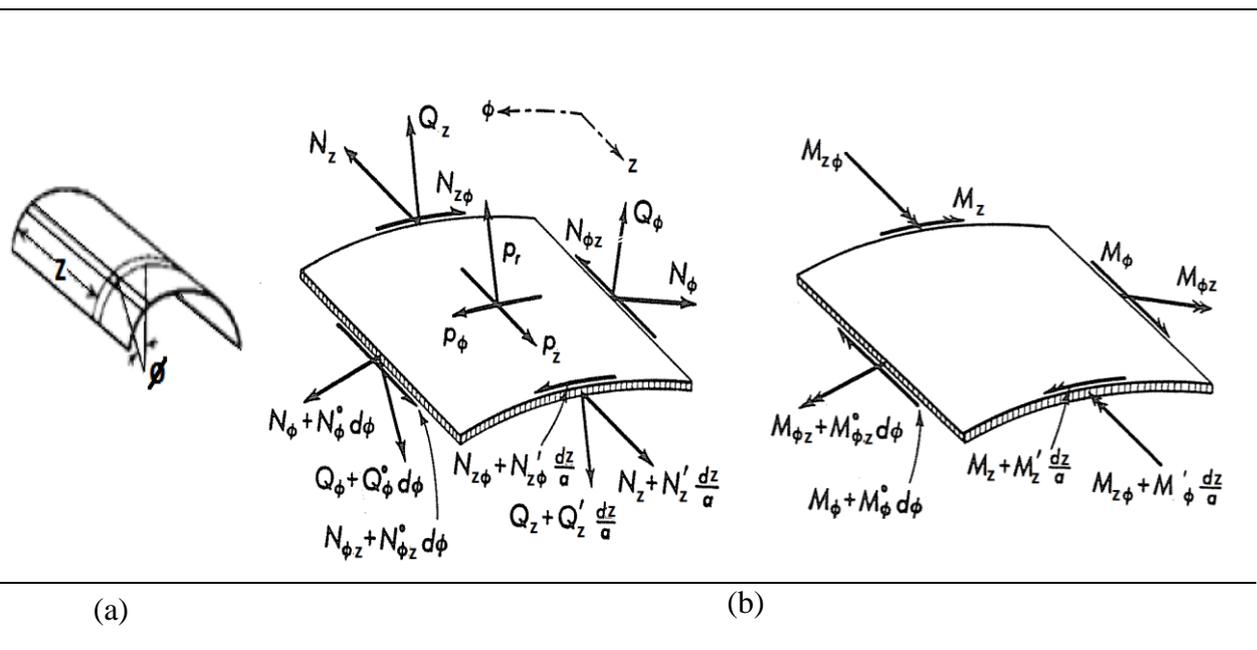


Figura 3.2 - (a) Denominações principais, (b) Forças externas e internas de membrana e momentos de flexão e de torção no elemento diferencial de cascas cilíndrica. [(a)Timoshenko, Woinowsky – Krieger, 1959; (b) Flügge, 1973]

Todas as cargas atuantes são supostas agindo na superfície média da casca entre a parede exterior e a interior, independentemente da espessura, como mostrado na Figura 3.2b, em que p_z , p_ϕ e p_r são componentes do carregamento distribuído por unidade de área, nas direções z axial, ϕ circunferencial e r radial, respectivamente.

A Figura 3.2b contém todos os momentos e as forças internas e externas que atuam sobre o elemento casca, Estas forças e momentos tem que satisfazer seis condições de equilíbrio, três deles sobre as componentes de forças e as outras três de momentos.

A continuação apresenta-se as equações dinâmicas proposta para análise de cilindros, em que, a condição para as forças na direção z é exatamente a mesma na teoria de membrana:

$$a \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{\partial N_{\phi z}}{\partial \phi} + p_z a = \rho_s h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.9)$$

As forças na direção ϕ , aqui um termo deve ser adicionado o qual representa a contribuição da força cortante Q_ϕ , sendo a condição de equilíbrio:

$$\frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} + a \frac{\partial N_{z\phi}}{\partial z} - Q_\phi + p_\phi a = \rho_s h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.10)$$

A terceira equação refere-se, as componentes radiais das forças:

$$\frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} + N_\phi - p_r a = \rho_s h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.11)$$

Onde as equações para momentos, são definidas por:

$$Q_\phi = \frac{1}{a} \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial M_{z\phi}}{\partial z} \quad (3.12)$$

$$Q_z = \frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial M_{\phi z}}{\partial \phi} \quad (3.13)$$

Em que as relações entre esforços de membrana e de flexão e suas respectivas deformações são dadas por:

$$N_z = K(\varepsilon_z + \nu \varepsilon_\phi) \quad (3.14)$$

$$N_\phi = K(\varepsilon_\phi + \nu \varepsilon_z) \quad (3.15)$$

$$N_{z\phi} = \frac{K(1 - \nu)}{2} \gamma_{z\phi} \quad (3.16)$$

$$M_z = D(\chi_z + \nu \chi_\phi) \quad (3.17)$$

$$M_\phi = D(\chi_\phi + \nu \chi_z) \quad (3.18)$$

$$M_{z\phi} = \frac{K(1 - \nu)}{2} \chi_{z\phi} \quad (3.19)$$

Em que, K é a rigidez de membrana

$$K = \frac{E h}{1 - \nu^2} \quad (3.20)$$

e, D é a rigidez flexional

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \quad (3.21)$$

3.3 ESTRUTURA EM VIBRAÇÃO LIVRE VL

O conhecimento das frequências naturais e deformadas modais é importante não só do ponto de vista de projetos (a fim de evitar condições de ressonância, por exemplo), mas é também o fundamento para os cálculos de respostas forçadas, Soedel (2005).

Definindo p_z , p_ϕ e p_r iguais a zero por ser uma análise de vibrações livres, com movimentos que ocorrem sem força aplicada e admitindo que em uma frequência natural cada ponto de um sistema elástico move-se harmonicamente, realiza-se a separação da variável tempo t , das equações diferenciais de movimento.

Para a solução das equações diferenciais de movimento, assume-se, os deslocamentos u , v e w da casca como segue:

$$u(z, \emptyset, t) = u(z, \emptyset) e^{j\omega t} \quad (3.22)$$

$$v(z, \emptyset, t) = v(z, \emptyset) e^{j\omega t} \quad (3.23)$$

$$w(z, \emptyset, t) = w(z, \emptyset) e^{j\omega t} \quad (3.24)$$

Sendo que $e^{j\omega t}$ é a solução da parcela tempo nas equações diferenciais de movimento.

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \operatorname{sen}(\omega t) \quad (3.25)$$

Em que e é base dos logaritmos neperianos, $j = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária, ω é a frequência natural circular de vibração, em radianos por segundo e t é o tempo.

As funções $u(z, \emptyset)$, $v(z, \emptyset)$ e $w(z, \emptyset)$ em conjunto, constituem uma deformada modal natural. Conhecida também como modo de vibração. Substituindo simplificadamente $u(z, \emptyset)$, $v(z, \emptyset)$ e $w(z, \emptyset)$ por u , v e w nas equações (3.9) a (3.11) e nas equações (3.22) a (3.24), tem-se:

$$\frac{\partial N_z^*}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_{\emptyset z}^*}{\partial \emptyset} + \rho_s h \omega^2 u = 0 \quad (3.26)$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial N_{\emptyset}^*}{\partial \emptyset} + \frac{\partial N_{z\emptyset}^*}{\partial z} - \frac{Q_{\emptyset}^*}{a} \rho_s h \omega^2 v = 0 \quad (3.27)$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial Q_{\emptyset}^*}{\partial \emptyset} + \frac{\partial Q_z^*}{\partial z} + \frac{N_{\emptyset}^*}{a} \rho_e h \omega^2 w = 0 \quad (3.28)$$

onde

$$Q_{\emptyset}^* = \frac{1}{a} \frac{\partial M_{\emptyset}^*}{\partial \emptyset} + \frac{\partial M_{z\emptyset}^*}{\partial z} \quad (3.29)$$

$$Q_z^* = \frac{\partial M_z^*}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial M_{\phi z}^*}{\partial \phi} \quad (3.30)$$

$$N_z^* = K(\varepsilon_z^* + \nu \varepsilon_\phi^*) \quad (3.31)$$

$$N_\phi^* = K(\varepsilon_\phi^* + \varepsilon_z^* \nu) \quad (3.32)$$

$$N_{z\phi}^* = \frac{K(1-\nu)}{2} \varepsilon_{z\phi}^* \quad (3.33)$$

$$M_z^* = D(\chi_z^* + \nu \chi_\phi^*) \quad (3.34)$$

$$M_\phi^* = D(\chi_\phi^* + \nu \chi_z^*) \quad (3.35)$$

$$M_{z\phi}^* = \frac{K(1-\nu)}{2} \chi_{z\phi}^* \quad (3.36)$$

$$\varepsilon_z^* = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.37)$$

$$\varepsilon_\phi^* = \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{w}{a} \quad (3.38)$$

$$\gamma_{z\phi}^* = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} \quad (3.39)$$

$$\chi_z^* = -\frac{\partial \beta_z^*}{\partial z} \quad (3.40)$$

$$\chi_\phi^* = \frac{1}{a} \frac{\partial \beta_\phi^*}{\partial \phi} \quad (3.41)$$

$$\chi_{z\phi}^* = \frac{\partial \beta_\phi^*}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial \beta_z^*}{\partial \phi} \quad (3.42)$$

$$\beta_z^* = -\frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.43)$$

$$\beta_\phi^* = \frac{v}{a} - \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \phi} \quad (3.44)$$

As expressões representadas pelo asterisco (*) são referidas dentro do procedimento da análise de vibração livre.

3.3.1 Forma solução geral

A seguinte forma de solução para as deformações da superfície média da casca cilíndrica que satisfazem tanto as equações de movimento e as condições de contorno são:

$$u = A \frac{\partial(\varphi_m)}{\partial z} \cos[n(\phi - \Psi)] \quad (3.45)$$

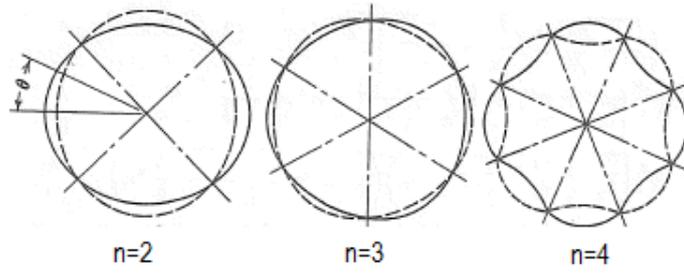
$$v = B \varphi_m \operatorname{sen}[n(\phi - \Psi)] \quad (3.46)$$

$$w = C \varphi_m \cos[n(\phi - \Psi)] \quad (3.47)$$

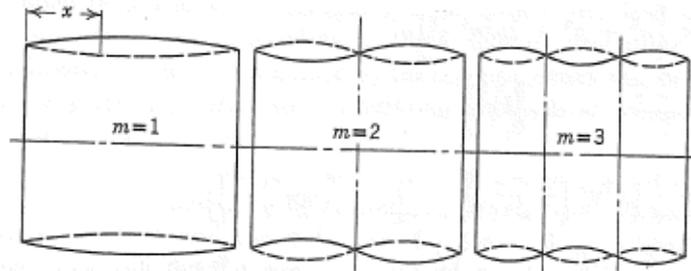
Onde φ_m , $\cos[n(\phi - \Psi)]$ são funções solução que descrevem as deformadas modais na vibração livre da viga e o anel, Soedel, (2005).

Sendo A , B e C constantes que descrevem a amplitude dos deslocamentos axial (u), circunferencial (v) e radial (w), respectivamente. A precisão destas formulas aproximadas geralmente aumenta com o número de ondas circunferenciais, sendo que a precisão da teoria de Donnell para cascas esbeltas, isto é com espessura h muito inferior ao raio a ou seja ($h \ll a$), é satisfeita para modos com um grande número de ondas circunferenciais n , onde a relação $1/n^2 \ll 1$ deve ser atendida. Para garantir uma boa precisão deve-se considerar $n \geq 5$.

As deformadas modais são caracterizadas em função do número de ondas circunferenciais n , e o número de semi-ondas longitudinais m . Como pode-se apreciar na Figura 3.3 a seguir.



(a) Formas de vibração circunferencial.



(b) Formas de vibração longitudinal.

Figura 3.3 - Formas de vibração para cascas cilíndricas circulares.

[(a), (b) Kraus (1967)]

As funções modais axiais da teoria de viga, são escolhidas para satisfazer as condições de contorno para cascas cilíndricas, a seguir apresentassem as condições de contorno para uma casca cilíndrica simplesmente apoiada:

$$w(0, \varnothing, t) = 0 \quad (3.48)$$

$$v(0, \varnothing, t) = 0 \quad (3.49)$$

$$N_z(0, \varnothing, t) = 0 \quad (3.50)$$

$$M_z(0, \varnothing, t) = 0 \quad (3.51)$$

e

$$w(L, \varnothing, t) = 0 \quad (3.52)$$

$$v(L, \varnothing, t) = 0 \quad (3.53)$$

$$N_z(L, \varnothing, t) = 0 \quad (3.54)$$

$$M_z(L, \emptyset, t) = 0 \quad (3.55)$$

Apresenta-se o auto-vetor, ou função de viga $\emptyset_m(z)$, que satisfaz as condições de contorno supracitadas.

$$\emptyset_m = \text{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \quad (3.56)$$

Substituindo a equação (3.56) nas equações (3.45) a (3.47), tem-se as deformadas modais da superfície media em uma casca cilíndrica com condições de borda simplesmente apoiada:

$$u = A \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos[n(\emptyset - \Psi)] \quad (3.57)$$

$$v = B \text{ sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \text{ sen}[n(\emptyset - \Psi)] \quad (3.58)$$

$$w = C \text{ sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos[n(\emptyset - \Psi)] \quad (3.59)$$

Substituindo as deformadas modais, (3.57), (3.58) e (3.59), nas equações de movimento consideradas pela teoria de Donnell (1976) e com ajuda da técnica variacional de Rayleigh Ritz, resultara na equação matricial característica de frequências e modos de vibração.

A continuação descreve-se o procedimento na obtenção da equação matricial de frequências como resultado ao substitui-se as soluções, (3.57), (3.58) e (3.59) nos grupos de equações: (3.40) a (3.42) e (3.29) a (3.39), e todas as anteriormente mencionadas, a sua vez no sistema de equações de movimento (3.26) a (3.28):

$$\varepsilon_{z\emptyset}^* = \left(\frac{m\pi}{L}B - \frac{n}{a}A\right) \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \text{ sen}[n(\emptyset - \Psi)] \quad (3.60)$$

$$\varepsilon_{\emptyset}^* = \frac{1}{a}(Bn + C) \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \text{ sen}[n(\emptyset - \Psi)] \quad (3.61)$$

$$\varepsilon_z^* = -A \frac{m\pi}{L} \text{sen} \left(\frac{m\pi z}{L} \right) \cos[n(\varnothing - \Psi)] \quad (3.62)$$

$$M_{z\varnothing}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \frac{m\pi}{aL} (B + 2nC) \cos \left(\frac{m\pi z}{L} \right) \text{sen}[n(\varnothing - \Psi)] \quad (3.63)$$

$$M_{\varnothing}^* = D \left\{ \frac{n}{a^2} B + \left[\frac{n^2}{a^2} + \nu \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] C \right\} \text{sen} \left(\frac{m\pi z}{L} \right) \cos[n(\varnothing - \Psi)] \quad (3.64)$$

$$M_z^* = D \left\{ \frac{\nu n}{a^2} B + \left[\nu \frac{n^2}{a^2} + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] C \right\} \text{sen} \left(\frac{m\pi z}{L} \right) \cos[n(\varnothing - \Psi)] \quad (3.65)$$

$$N_{z\varnothing}^* = \frac{K(1-\nu)}{2} \left(\frac{m\pi}{L} B - \frac{n}{a} A \right) \cos \left(\frac{m\pi z}{L} \right) \text{sen}[n(\varnothing - \Psi)] \quad (3.66)$$

$$N_{\varnothing}^* = \frac{K(1-\nu)}{2} \left(\frac{n}{a} B + \frac{1}{a} C - \nu \frac{m\pi}{L} A \right) \cos \left(\frac{m\pi z}{L} \right) \cos[n(\varnothing - \Psi)] \quad (3.67)$$

$$N_z^* = K \left(\frac{\nu n}{a} B + \frac{\nu}{a} C - \frac{m\pi}{L} A \right) \text{sen} \left(\frac{m\pi z}{L} \right) \cos[n(\varnothing - \Psi)] \quad (3.68)$$

$$N_z^* = K \left(\frac{\nu n}{a} B + \frac{\nu}{a} C - \frac{m\pi}{L} A \right) \text{sen} \left(\frac{m\pi z}{L} \right) \cos[n(\varnothing - \Psi)] \quad (3.69)$$

$$Q_z^* = D \frac{m\pi}{L} \left\{ \frac{n}{a^2} \frac{1+\nu}{2} B + \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] C \right\} \cos \left(\frac{m\pi z}{L} \right) \cos[n(\varnothing - \Psi)] \quad (3.70)$$

$$Q_{\varnothing}^* = -\frac{D}{a} \left\{ \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right] B + n \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] C \right\} \text{sen} \left(\frac{m\pi z}{L} \right) \text{sen}[n(\varnothing - \Psi)] \quad (3.71)$$

A continuação apresenta-se o sistema de equações de frequências para a casca cilíndrica com condições de contorno simplesmente apoiadas,

$$\left\{ \rho_s h \omega^2 - K \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right] \right\} A + \left(K \frac{1+\nu}{2} \frac{n}{a} \frac{m\pi}{L} \right) B + \left(K \frac{\nu}{a} \frac{m\pi}{L} \right) C = 0 \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} & \left(K \frac{1+\nu}{2} \frac{n}{a} \frac{m\pi}{L} \right) A + \left\{ \rho_s h \omega^2 - \left(K + \frac{D}{a^2} \right) \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right] \right\} B \\ & + \left\{ -\frac{Kn}{a^2} - \frac{Dn}{a^2} \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right] \right\} C = 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\nu K}{a} \frac{m\pi}{L} \right) A + \left\{ -\frac{Kn}{a^2} - \frac{Dn}{a^2} \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right] \right\} B \\ & + \left\{ \rho_s h \omega^2 - D \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right] - \frac{K}{a^2} \right\} C = 0 \end{aligned} \quad (3.74)$$

Ou, na forma de matriz característica

$$\begin{bmatrix} \rho_s h \omega^2 - k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & \rho_s h \omega^2 - k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & \rho_s h \omega^2 - k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.75)$$

Onde

$$k_{11} = K \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right] \quad (3.76)$$

$$k_{12} = K \frac{1+\nu}{2} \frac{n}{a} \frac{m\pi}{L} \quad (3.77)$$

$$k_{13} = k_{31} = K \frac{\nu}{a} \frac{m\pi}{L} \quad (3.78)$$

$$k_{22} = \left(K + \frac{D}{a^2} \right) \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right] \quad (3.79)$$

$$k_{23} = k_{32} = -\frac{Kn}{a^2} - \frac{Dn}{a^2} \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right] \quad (3.80)$$

$$k_{33} = D \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right]^2 - \frac{K}{a^2} \quad (3.81)$$

Para uma solução não trivial o determinante da matriz característica (3.75) tem que ser zero. Assim, expandindo o determinante, resulta no seguinte polinômio característico:

$$\omega^6 + a_1 \omega^4 + a_2 \omega^2 + a_3 = 0 \quad (3.82)$$

Onde

$$a_1 = -\frac{1}{\rho_s h} (k_{11} + k_{22} + k_{33}) \quad (3.83)$$

$$a_2 = -\frac{1}{(\rho_s h)^2} (k_{11} k_{33} + k_{22} k_{33} + k_{11} k_{22} - k_{23}^2 - k_{12}^2 - k_{13}^2) \quad (3.84)$$

$$a_3 = -\frac{1}{(\rho_s h)^3} (k_{11} k_{23}^2 + k_{22} k_{13}^2 + k_{33} k_{12}^2 + 2 k_{12} k_{23} k_{13} - k_{11} k_{22} k_{23}) \quad (3.85)$$

As soluções do polinômio de frequências naturais (ω) (3.82), são:

$$\omega_{(i=1,m,n)}^2 = -\frac{2}{3} \sqrt{a_1^2 - 3a_2} \cos \frac{\alpha}{3} - \frac{a_1}{3} \quad (3.86)$$

$$\omega_{(i=2,m,n)}^2 = -\frac{2}{3} \sqrt{a_1^2 - 3a_2} \cos \frac{\alpha + 2\pi}{3} - \frac{a_1}{3} \quad (3.87)$$

$$\omega_{(i=3,m,n)}^2 = -\frac{2}{3} \sqrt{a_1^2 - 3a_2} \cos \frac{\alpha + 4\pi}{3} - \frac{a_1}{3} \quad (3.88)$$

onde

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{27a_3 + 2a_1^3 - 9a_1 a_2}{2\sqrt{(a_1^2 - 3a_2)^3}} \quad (3.89)$$

Do anterior tem-se, o índice i que representa o grupo de frequências; sendo que para cada combinação m e n , tem-se, três frequências i ($i = 1,2,3$). Onde a frequência natural mais baixa

$\omega_{i=1,m,n}$ está associada com o modo fundamental (deslocamento lateral ou radial) w , enquanto as outras duas, $\omega_{i=2,m,n}$ e $\omega_{i=3,m,n}$ são geralmente maiores e estão associadas com o modo em que os deslocamentos que dominam são, u axial e v circunferencial.

Da equação matricial (3.75), resolve-se A e B , em termos de C , obtendo:

$$\begin{bmatrix} \rho_s h \omega_{i,m,n}^2 - k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & \rho_s h \omega_{i,m,n}^2 - k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{i,m,n} \\ B_{i,m,n} \end{Bmatrix} = -C_{i,m,n} \begin{Bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.90)$$

$$\frac{A_{i,m,n}}{C_{i,m,n}} = - \frac{k_{13}(\rho_e h \omega_{i,m,n}^2 - k_{22}) - k_{12}k_{23}}{(\rho_s h \omega_{i,m,n}^2 - k_{11})(\rho_e h \omega_{i,m,n}^2 - k_{22}) - k_{12}^2} \quad (3.91)$$

$$\frac{B_{i,m,n}}{C_{i,m,n}} = - \frac{k_{23}(\rho_e h \omega_{i,m,n}^2 - k_{11}) - k_{21}k_{13}}{(\rho_s h \omega_{i,m,n}^2 - k_{11})(\rho_e h \omega_{i,m,n}^2 - k_{22}) - k_{12}^2} \quad (3.92)$$

Assim, em resumo, as três deformadas modais naturais que estão associadas com as três frequências naturais $\omega_{(i=1,2,3),m,n}$ para cada combinação m, n são:

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix}_{i,m,n} = C_{i,m,n} \begin{bmatrix} \frac{A_{i,m,n}}{C_{i,m,n}} \cos \frac{m\pi z}{L} \cos[n(\varnothing - \Psi)] \\ \frac{B_{i,m,n}}{C_{i,m,n}} \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{L} \operatorname{sen}[n(\varnothing - \Psi)] \\ \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{L} \operatorname{sen}[n(\varnothing - \Psi)] \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Sendo z a coordenada axial, e \varnothing a coordenada circunferencial.

Dois conjuntos de modos naturais a considerar, referidos na literatura especializada nos trabalhos de Ginsberg, (1973), Chen e Babcock (1975) como modo *companion*, apresenta-se a continuação:

Para o primeiro conjunto de modos naturais, (1), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix}_{i,m,n (1)} = C_{i,m,n} \begin{bmatrix} \frac{A_{i,m,n}}{C_{i,m,n}} \cos \frac{m\pi z}{L} \cos(n\phi) \\ \frac{B_{i,m,n}}{C_{i,m,n}} \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{L} \operatorname{sen}(n\phi) \\ \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{L} \cos(n\phi) \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

Já para um ângulo de defasagem $\Psi = \pi/2n$ obtém-se o segundo conjunto de modos naturais, ou modos *companion* (2):

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix}_{i,m,n (2)} = C_{i,m,n} \begin{bmatrix} \frac{A_{i,m,n}}{C_{i,m,n}} \cos \frac{m\pi z}{L} \operatorname{sen}(n\phi) \\ -\frac{B_{i,m,n}}{C_{i,m,n}} \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{L} \cos(n\phi) \\ \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{L} \operatorname{sen}(n\phi) \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Em que

- i Ordem da frequência natural.
- m Número de semi-ondas longitudinais.
- n Número de ondas circunferenciais.

O procedimento anterior foi estudado no livro de Soedel, titulado *Vibrations of shells and Plates, Third*, capítulo 5.

3.3.2 Solução simplificada para outras condições de contorno

Uma forma de solução simplificada surge no trabalho de Sharma e Johns (1971), encontrando que o polinômio característico das frequências naturais (3.82), estudado no título anterior, poderia ser simplificado consideravelmente, se a deformação circunferencial ε_ϕ e a deformação cisalhante $\varepsilon_{z\phi}$ da superfície média da casca (exemplo em $z = 0$) fossem desprezadas.

Essas premissas levam às seguintes deformações da superfície média,

$$u = -\frac{A}{n^2} a \varphi_m'(z) \cos n\phi \cos \omega t \quad (3.96)$$

$$v = -\frac{A}{n} \varphi_m(z) \text{ sen } n\varnothing \text{ cos } \omega t \quad (3.97)$$

$$w = A \varphi_m(z) \text{ cos } n\varnothing \text{ cos } \omega t \quad (3.98)$$

Em que,

ω	Frequência circular,
$\varphi_m(z)$	Deformada modal de viga para diferentes condições de apoio
n	Número de ondas circunferenciais
m	Número de semi-ondas longitudinais
\varnothing	Coordenada circunferencial casca cilíndrica
t	Tempo
a	Raio

Sendo $\varphi_m(z)$ a função que representa os auto-vetores ou deformadas modais para diferentes condições de apoio, temos então, para cascas bi-engastadas e engastadas livres:

$$\varphi_m(z) = (\cosh a_m z - \cos a_m z) - \sigma_m (\sinh a_m z - \text{sen } a_m z) \quad (3.99)$$

onde a_m e σ_m são dados na Tabela (3.1) pelas raízes das equações transcendentais, em função das condições de contorno,

Tabela 3.1 - Expressões para o cálculo de a_m e σ_m .

Cascas com condição de contorno bi - engastadas	$\cos a_m L \cosh a_m L - 1 = 0$	$\sigma_m = \frac{(\cos a_m L - \cosh a_m L)}{(\text{sen } a_m L - \sinh a_m L)}$
Cascas com condição de contorno engastada - livre	$\cos a_m L \cosh a_m L + 1 = 0$	$\sigma_m = \frac{(\cos a_m L + \cosh a_m L)}{(\text{sen } a_m L + \sinh a_m L)}$

A continuação, utilizando as simplificações iniciais, uma aproximação linear de frequência $\lambda_{n,m}$ é obtida:

$$\lambda_{n,m}^2 = \frac{\beta_m^4 + k n^2 \beta_m^2 [\beta_m^2 n^2 + 2 v n^2 (n^2 - 1) I_1 + 2(1 - v)(n^2 - 1)^2 I_2] + k n^4 (n^2 - 1)^2}{\beta_m^2 I_2 + n^2 (n^2 + 1)} \quad (3.100)$$

Onde

$$\beta_m = \frac{\lambda_m a}{L} \quad (3.101)$$

$$k = \frac{h^2}{12 a^2} \quad (3.102)$$

Sendo λ_m um parâmetro adimensional de frequência natural que correspondem com a deformada modal axial $\varphi_m(z)$, desejada. Estes parâmetros apresentassem na Tabela 8-1, do livro de Blevins, titulado, *Formulas for natural frequency and mode shape*.

Onde a relação do parâmetro de frequência adimensional, com a expressão para a frequência natural em Hertz, é dada por;

$$F_{n,m} = \frac{\lambda_{n,m}}{2\pi a} \left[\frac{E}{\rho_s (1 - v^2)} \right]^{1/2} \quad (3.103)$$

$n = 2,3,4, \dots$ Numero de ondas circunferenciais

$m = 1,2,3, \dots$ Numero de semi ondas axiais

Em que, E é o modulo de elasticidade, a é o radio da superfície meia, ρ_s é a densidade do material da casca, v é o modulo de Poisson.

O procedimento anterior foi estudado no artigo de Sharma e Johns (1971), titulado *Vibrations characteristics of a clamped-free and clamped-ring-stiffened circular cylindrical shell*.

3.4 VIBRAÇÃO LIVRE (VL) DA CAVIDADE CILÍNDRICA

Modos acústicos em cavidades cheias de fluido surgem a partir de ondas de pressão, que atravessam as cavidades na velocidade do som e reflectem nos seus contornos. A velocidade do som num fluido (ou seja, um gás ou líquido) é geralmente uma função da natureza do fluido, a sua temperatura, e a sua pressão.

As premissas gerais utilizadas na análise de cavidades acústicas apresentadas nesta seção são: O fluido contido na cavidade é homogêneo, viscoso, e sob uma pressão média uniforme, qualquer fluxo no interior da cavidade é muito menor do que a velocidade do som, a cavidade é delimitada por paredes rígidas e as flutuações de pressão no domínio são muito menores do que a pressão média no fluido.

3.4.1 Formulação analítica da equação de onda

Esta é a equação de propagação de uma onda de pressão num meio fluido.

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.104)$$

Onde a constante c é definida por:

$$c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_f}} \quad (3.105)$$

Sendo β o modulo adiabático de Bulk, ρ_f é a densidade do meio fluido e $\nabla^2 p$ é o operador Laplaciano de pressão p .

Apresenta-se a equação de onda em coordenadas cilíndricas, que é a forma mais adequada para o caso em estudo.

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.106)$$

3.4.2 Solução da equação de onda em sistema de coordenadas cilíndricas

A solução da equação diferencial parcial (3.106) que representa o campo de pressões em uma cavidade cilíndrica pode ser obtida pelo método de separação de variáveis; A função solução é separada em duas funções espaço e tempo. Como é apresentado a seguir:

$$p(r, \phi, z, t) = p(r, \phi, z) T(t) \quad (3.107)$$

Substituindo (3.107) em (3.106), tem-se:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} T + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} T + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} T + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} T = \frac{1}{c^2} F \ddot{T} \quad (3.108)$$

$$T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{c^2} F \ddot{T} \quad (3.109)$$

$$\frac{1}{F} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) = \frac{\ddot{T}}{c^2 T} \quad (3.110)$$

Devido a que, o lado esquerdo da equação (3.110) são funções do espaço e do lado direito são funções do tempo, Cada lado da equação (3.110) deve ser igual a mesma constante comum, sendo $-v^2$ a constante de separação de variáveis,

$$\frac{1}{F} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) = \frac{\ddot{T}}{c^2 T} = -v^2 \quad (3.111)$$

O lado direito da equação (3.111) é função apenas do tempo t , reescrevendo:

$$\ddot{T} + v^2 c^2 T = 0 \quad (3.112)$$

$$\ddot{T} + \lambda^2 T = 0 \quad (3.113)$$

Onde

$$\lambda = v c \quad (3.114)$$

Assumindo resposta harmônica

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad (3.115)$$

Onde ω é a frequência angular definida por

$$\omega = v c \quad (3.116)$$

O lado esquerdo da equação (3.111) é função do espaço (r, ϕ, z) :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + v^2 F = 0 \quad (3.117)$$

A equação (3.117) é separada em dois, onde um termo é função da coordenada Z ,

$$F(r, \phi, z) = G(r, \phi) Z(z) \quad (3.118)$$

Substituindo (3.118) em (3.117), se-obtém:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} Z + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} Z + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} Z + G Z'' + v^2 G Z = 0 \quad (3.119)$$

$$Z \left(\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} + v^2 G \right) = -G Z'' \quad (3.120)$$

$$-\frac{1}{G} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} + v^2 G \right) = \frac{Z''}{Z} \quad (3.121)$$

Do mesmo modo, ambos os lados da equação (3.121) devem ser iguais à mesma constante comum, sendo $-k^2$ a constante de separação de variáveis:

$$-\frac{1}{G} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} + v^2 G \right) = \frac{Z''}{Z} = -k^2 \quad (3.122)$$

Reescrevendo o segundo termo da equação (3.122), temos uma equação em função apenas da coordenada Z :

$$Z'' + k^2 Z = 0 \quad (3.123)$$

Reescrevendo o lado esquerdo da equação (3.122), temos

$$-\frac{1}{G} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} + v^2 G \right) = -k^2 \quad (3.124)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} + v^2 G - k^2 G = 0 \quad (3.125)$$

Definindo η^2 por

$$\eta^2 = v^2 - k^2 \quad (3.126)$$

Reescrevendo (3.125) chega-se em:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} + \eta^2 G = 0 \quad (3.127)$$

A equação (3.127) é dividido em duas funções,

$$G(r, \phi) = R(r) \Theta(\phi) \quad (3.128)$$

Substituindo (3.128) em (3.127), tem-se:

$$R'' \Theta + \frac{1}{r} R' \Theta + \frac{1}{r^2} \Theta'' R + \eta^2 R \Theta = 0 \quad (3.129)$$

$$\Theta \left(R'' + \frac{1}{r} R' + \eta^2 R \right) = -\frac{1}{r^2} \Theta'' R \quad (3.130)$$

$$-\frac{r^2}{R} \left(R'' + \frac{1}{r} R' + \eta^2 R \right) = \frac{\Theta''}{\Theta} \quad (3.131)$$

Como ambos os lados, esquerdo e direito da equação (3.131) deve ser igual a mesma constante, tem-se $-n^2$ como a constante de separação de variáveis.

$$-\frac{r^2}{R} \left(R'' + \frac{1}{r} R' + \eta^2 R \right) = \frac{\Theta''}{\Theta} = -n^2 \quad (3.132)$$

Reescrevendo o lado direito da equação (3.132):

$$\Theta'' + n^2 \Theta = 0 \quad (3.133)$$

Reescrevendo o lado esquerdo da equação (3.132),

$$r^2 R'' + r R' + r^2 \eta^2 R - n^2 R = 0 \quad (3.134)$$

Chega-se na conhecida equação diferencial de Bessel

$$r^2 R'' + r R' + (r^2 \eta^2 - n^2) R = 0 \quad (3.135)$$

3.4.3 Condição de contorno e condição inicial

Na solução da equação (3.115) considera-se resposta harmônica chegando-se a solução no tempo por:

$$T(t) = A_t \cos(\omega t) + B_t \sin(\omega t) \quad (3.136)$$

A função $Z(z)$ depende das condições nos extremos da cavidade, assim, a solução geral da equação (3.123) é

$$Z(z) = A_z \cos(kz) + B_z \sin(kz) \quad (3.137)$$

Para a cavidade cilíndrica com condições de contorno aberta-aberta, a componente dinâmica da pressão na cavidade deve ser igual à zero nos limites abertos. Aplicando condição de contorno de pressão zero nos extremos da cavidade:

$$p|_{z=0} = F|_{z=0} = Z(z)|_{z=0} = 0 \quad (3.138)$$

$$Z(0) = A_z \cos(k \cdot 0) + B_z \operatorname{sen}(k \cdot 0) = 0 \quad (3.139)$$

$$A_z \cos(k \cdot 0) = 0 \quad (3.140)$$

$$A_z = 0 \quad (3.141)$$

$$p|_{z=L} = F|_{z=L} = Z(z)|_{z=L} = 0 \quad (3.142)$$

$$Z(L) = A_z \cos(k \cdot L) + B_z \operatorname{sen}(k \cdot L) = 0 \quad (3.143)$$

$$B_z \operatorname{sen}(k \cdot L) = 0 \quad (3.144)$$

$$k = \frac{\bar{m} \pi}{L} \quad (3.145)$$

$$Z(z) = B_z \operatorname{sen}\left(\frac{\bar{m} \pi z}{L}\right) \quad (3.146)$$

Em que \bar{m} é o número dos nodos axiais, z a coordenada na direção axial e L altura da cavidade.

A solução geral da equação (3.133) é:

$$\Theta(\emptyset) = A_\emptyset \cos(\bar{n} \emptyset) + B_\emptyset \operatorname{sen}(\bar{n} \emptyset) \quad (3.147)$$

Sendo a pressão sonora contínua em \emptyset , temos para a equação (3.147), que:

$$p|_{\emptyset=0} = p|_{\emptyset=2\pi} \quad (3.148)$$

$$p|_{\emptyset=0} = F|_{\emptyset=0} = G|_{\emptyset=0} = \Theta|_{\emptyset=0} \quad (3.149)$$

$$p|_{\emptyset=2\pi} = F|_{\emptyset=2\pi} = G|_{\emptyset=2\pi} = \Theta|_{\emptyset=2\pi} \quad (3.150)$$

$$\Theta|_{\emptyset=0} = \Theta|_{\emptyset=2\pi} \quad (3.151)$$

$$A_{\varnothing} \cos(\bar{n} \cdot 0) + B_{\varnothing} \operatorname{sen}(\bar{n} \cdot 0) = A_{\varnothing} \cos(\bar{n} \cdot 2\pi) + B_{\varnothing} \operatorname{sen}(\bar{n} \cdot 2\pi) \quad (3.152)$$

Se \bar{n} for inteiro

$$A_{\varnothing} \cdot 1 + B_{\varnothing} \cdot 0 = A_{\varnothing} \cdot 1 + B_{\varnothing} \cdot 0 \quad (3.153)$$

Assim a função $\Theta(\varnothing)$ é igual a

$$\Theta(\varnothing) = A_{\varnothing} \cos[\bar{n}(\varnothing - \Psi)] \quad (3.154)$$

Em que $\bar{n} = 1, 2, 3, \dots$ é o numero de diâmetros nodais e Ψ é o ângulo de fase modal.

Onde para $\Psi = 0$, temos $\Theta(\varnothing) = A_{\varnothing} \cos(\bar{n} \varnothing)$ e para $\Psi = \pi/(2\bar{n})$, temos $\Theta(\varnothing) = A_{\varnothing} \operatorname{sen}(\bar{n} \varnothing)$.

A equação (3.135), é conhecida como equação diferencial de Bessel e tem solução definida por:

$$R(r) = A_r J_n(\eta r) + B_r Y_n(\eta r) \quad (3.155)$$

Sendo J_n a função de Bessel de primeiro tipo e de ordem n , Y_n a função de Bessel de segundo tipo e de ordem n . Como as funções de Bessel de segundo tipo Y_n apresentam singularidade na origem, como se pode ver Figura 3.4, e a função precisa apresentar valor finito para $r \ll a$, esta é desprezada na análise.

$$|p(0, \varnothing, z)| < -\infty \quad (3.156)$$

$$B_r Y_n(\eta r)|_{r \rightarrow 0} \rightarrow -\infty \quad (3.157)$$

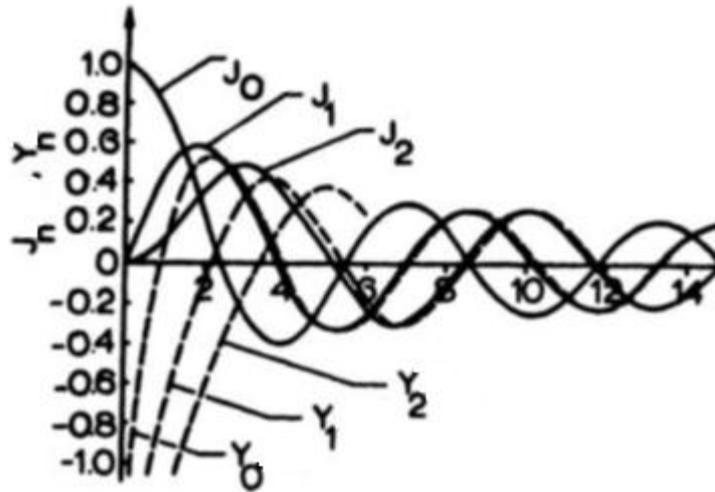


Figura 3.4 – Ilustração das funções de Bessel de primeira J_0 e segunda Y_0 espécie.
Soedel (2005)

Na Figura 3.4 aprecie a singularidade que apresentam as funções de Bessel de segundo tipo $Y_n = Y_0, Y_1, Y_2$ na origem.

Como as paredes da cavidade são rígidas, a velocidade de partícula deve ser nula no contorno, tem-se então:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial F}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial G}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (3.158)$$

$$R'(r) = A_r \eta J_n'(\eta r) \quad (3.159)$$

$$A_r \eta J_n'(\eta a) = 0 \quad (3.160)$$

$$J_n'(\chi_i) = 0 \quad (3.161)$$

Sendo que a função de Bessel de primeira espécie J_0 e ordem 0, apresenta um comportamento regular finito ao longo da coordenada radial, como aprecia-se na Figura 3.4, e onde χ_i é uma raiz da função de Bessel.

Tem-se que:

$$\eta a = \chi_i \quad (3.162)$$

$$\eta = \frac{\chi_i}{a} \quad (3.163)$$

Obtendo assim:

$$R(r) = A_r J_n \left(\frac{\chi_i}{a} r \right) \quad (3.164)$$

Em que $i = 0, 1, 2, \dots$ é o número de círculos nodais, χ_i é a i -ésima raiz de J_n' .

Sendo que a solução completa do campo de pressões ao interior de uma cavidade cilíndrica é dada por:

$$p(r, \varphi, z, t) = R(r) \cdot \Theta(\varphi) \cdot Z(z) \cdot T(t) \quad (3.165)$$

Substituindo as expressões finais (3.146), (3.154) e (3.164) em (3.165), obtém-se assim a expressão para o campo de pressões ao interior da cavidade cilíndrica dada por,

$$p(r, \varphi, z, t) = A_r J_n \left(\frac{\chi_i}{a} r \right) \cdot A_\varphi \cos[\bar{n}(\varphi - \varphi)] \cdot B_z \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{m} \pi z}{L} \right) \cdot e^{j\omega t} \quad (3.166)$$

$$p_{i,\bar{m},\bar{n}} = D_{i,\bar{m},\bar{n}} J_n \left(\frac{\chi_i}{a} r \right) \cos[\bar{n}(\varphi - \varphi)] \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{m} \pi z}{L} \right) e^{j\omega t} \quad (3.167)$$

Os três índices i, \bar{m}, \bar{n} são geralmente requeridos para especificar cada um dos modos acústicos de uma cavidade em três dimensões.

3.4.4 Freqüência natural

A equação de onda (3.115) apresenta resposta harmônica no tempo, onde ω é a freqüência natural. Reescrevendo a equação (3.126), tem-se:

$$v = \sqrt{\eta^2 + k^2} \quad (3.168)$$

Substituindo a equação (3.168) em (3.116) obtém-se:

$$\omega = c\sqrt{\eta^2 + k^2} \quad (3.169)$$

Onde k e η foram obtidos aplicando-se as condições de contorno e condições iniciais.

Assim substituindo às equações (3.145) e (3.163) respectivamente em (3.169), obtém-se a expressão final para a frequência natural.

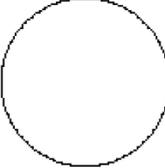
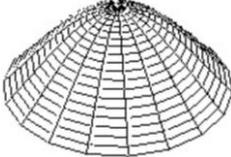
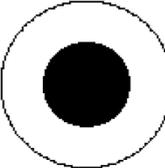
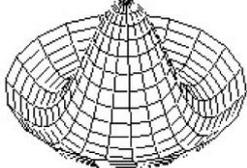
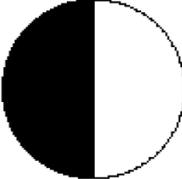
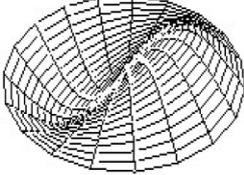
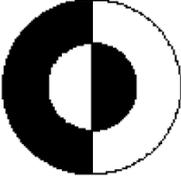
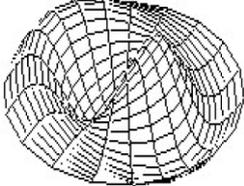
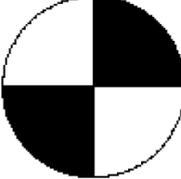
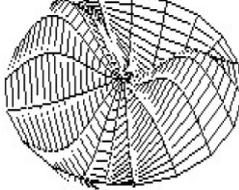
$$\omega = c \sqrt{\left(\frac{\bar{m}\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\chi_i}{a}\right)^2} \quad (3.170)$$

$$F = \frac{\omega}{2\pi} \quad (3.171)$$

$$\omega = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\bar{m}\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\chi_i}{a}\right)^2} \quad (3.172)$$

A Tabela 3.2 apresenta os modos acústicos circunferenciais para cavidades cilíndricas.

Tabela 3.2 - Modos acústicos circunferenciais para cavidades cilíndricas.

Modos (i, \bar{n})	2D	3D
$(1, 0)$		
$(2, 0)$		
$(3, 0)$		
$(1, 1)$		
$(2, 1)$		
$(1, 2)$		

A Tabela 3.2 acima mostra as primeiras combinações dos modos circunferenciais da cavidade cilíndrica, em que a coordenada r pauta o número de círculos nodais (i), a coordenada \varnothing pauta o número de diâmetros modais (\bar{n}), e por último, no modo axial, a coordenada z relaciona o número de nodos axiais (\bar{m}).

3.5 ACOPLAMENTO CASCA-CAVIDADE ACÚSTICA

Apresenta-se um método para a determinação das características de vibração livre em uma casca cilíndrica circular completamente cheia com um líquido ideal (estacionário, incompressível, não viscoso e irrotacional).

3.5.1 Vibrações livres acopladas

Para a determinação das frequências naturais e deformadas modais do sistema acoplado casca cilíndrica-cavidade cilíndrica (ou casca cilíndrica-fluido acústico), empregasse um método pseudo-acoplado no qual a pressão exercida pelo líquido sobre a parede da casca, devido a força de inércia do líquido oscilando, pode ser incorporada nas equações de movimento da casca, como massa virtual.

A expressão analítica da massa virtual utilizada neste trabalho é derivada em Lindholm (1962), Bhuta e Koval (1964), Berry e Reissner (1958), sendo:

$$\zeta = \left(\frac{\rho_f a}{\rho_s h} \right) \left[\frac{B_n(\alpha a)}{a B_n'(\alpha a)|_{r=a}} \right] \quad (3.173)$$

Em que,

ρ_f	Densidade do fluido acústico
ρ_s	Densidade da estrutura casca
a	Raio
h	Espessura
$B_n'(\alpha a) _{r=a}$	Derivada da função de Bessel.
ζ	Expressão da massa virtual

Berry e Reissner (1958), demonstraram que a inclusão do termo de inércia associada com massa virtual, nas equações do movimento da casca é adequado, para determinar a frequência natural, se a casca cilíndrica não é muito curta.

Desta forma, a expressão de massa virtual (3.173) é adicionada na componente radial da matriz característica (3.75), como se indica a seguir,

$$\begin{bmatrix} \rho_s h \omega^2 - k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & \rho_s h \omega^2 - k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & \rho_s h (1 + \zeta) \omega^2 - k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.174)$$

A continuação um procedimento análogo ao calculo das frequências naturais e deformadas modais para a casca vazia, devera ser efetuado.

Procedimentos análogos foram estudados por Lakis e Paidoussis (1971), Gonçalves (1985), Pedroso (2003) e Mendes (2013).

4 ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo apresentam-se os elementos finitos utilizados na análise numérica dos sistemas desacoplados e acoplados, como são os elementos finitos: Estrutural Shell63 para o sistema estrutura (casca), e fluido Fluid30 para o sistema cavidade cilíndrica, os valores numéricos das características geométricas e mecânicas dos materiais modelos Finalmente são mostradas as análise de convergência para os modelos estudados.

4.1 DESCRIÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS

A continuação apresenta-se os elementos finitos empregados na análise numérica dos sistemas desacoplados e acoplados.

4.1.1 Casca elástica – SHELL63

O elemento SHELL63 apresenta comportamento de membrana e de viga. São permitidos carregamentos no plano e na direção normal. O elemento possui seis graus de liberdade em cada um dos quatro nós (translações dos nós nas direções x, y e z; e rotações em torno dos mesmos eixos). Estão incluídas a capacidade de rigidez a tensão e grandes deflexões. A opção de matriz de rigidez consistente tangencial está disponível para uso na análise de grandes deflexões (rotação finita). A geometria do elemento é mostrada na Figura 4.1

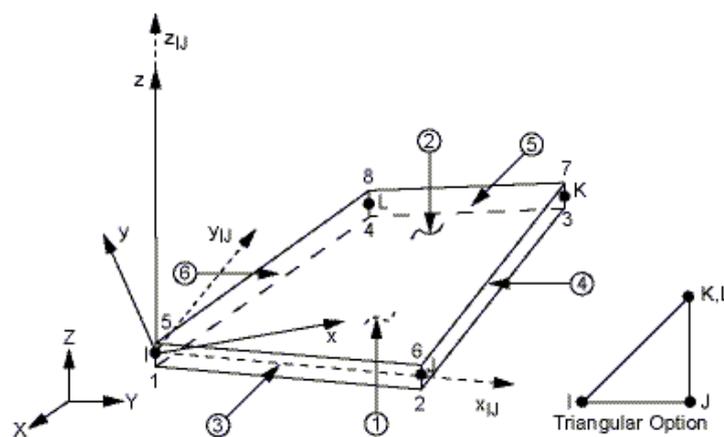


Figura 4.1 - Elemento para a casca elástica. SHELL63 - ANSYS

Vários itens são ilustrados nos resultados de tensão. Como são o momento sobre a face x (MX), o momento sobre a face y (MY), e o momento de torção (MXY). Os momentos são calculados por unidade de comprimento no sistema de coordenadas do elemento. As direções de tensão são paralelas ao sistema de coordenadas do elemento. A descrição geral é obtida na Figura 4.2.

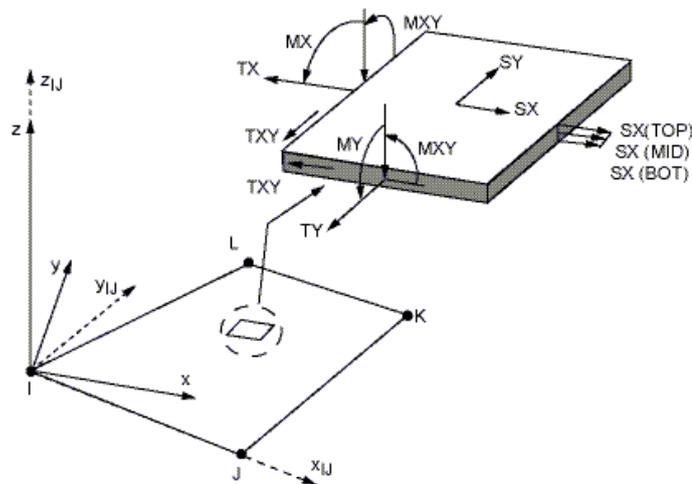


Figura 4.2 - Tensões no elemento casca. SHELL63 - ANSYS v.11

Não são permitidos elementos de área igual à zero, como também elementos de espessura nula. Uma malha de elementos planos de casca pode produzir uma boa aproximação de uma superfície curva contanto que cada elemento não esteja distante mais que 15° de outro elemento adjacente. A deflexão de cisalhamento não é incluída neste elemento de casca fina.

4.1.2 Fluido acústico – FLUID30

Fluid 30 é usado para modelar o meio fluido e a interface em problemas de interação fluido-estrutura. Aplicações típicas incluem problemas de propagação sonora e dinâmica de estruturas submersas em meio fluido. A equação que governa a acústica, isto é, a equação de onda tridimensional, pode ser discretizada considerando o acoplamento entre a pressão acústica e o movimento estrutural na interface. O elemento apresenta oito nós, com quatro graus de liberdade por nó; pressão p e translação do nó nas direções x , y e z . As translações, entretanto, são aplicáveis apenas nos nós que estão na interface.

O elemento tem capacidade para incluir amortecimento do som referente ao material de absorção da interface. O elemento pode ser usado com outros elementos estruturais

tridimensionais para executar análise modal não simétrica ou amortecida, resposta harmônica completa e análises transientes completas. Quando não houver nenhum movimento estrutural, o elemento também é aplicável a análise estática, análise reduzidas de resposta harmônicas e modais. Para uma melhor compreensão do elemento mostra-se na Figura 4.3.

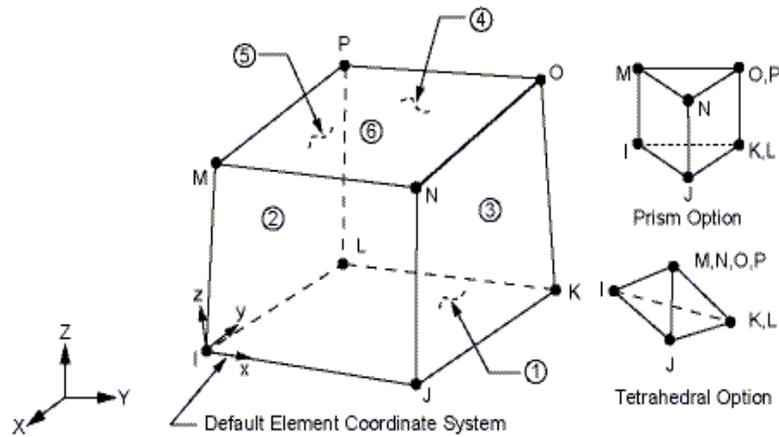


Figura 4.3 - Elemento fluido. FLUID30.

4.1.3 Descrição dos modelos

Modelo numérico da casca cilíndrica

Tratasse de uma casca cilíndrica circular reta, bi apoiada, sem restrição axial, como se mostra na Figura 4.4.

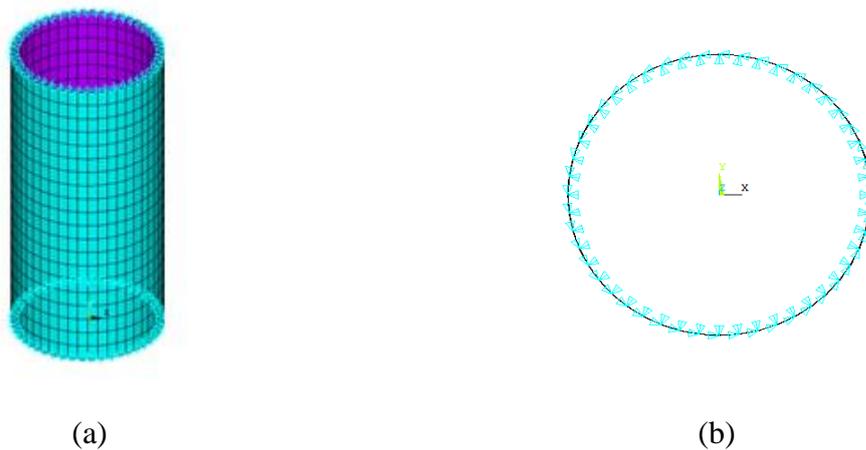


Figura 4.4 (a) Modelo numérico casca cilíndrica (b) condições de contorno simplesmente apoiadas.

Os dados gerais do modelo casca são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 Características da casca

Espessura	(h)	0,001 m
Raio	(a)	0,175 m
Comprimento	(L)	0,664 m
Módulo de elasticidade	(E)	2×10^{11} Mpa
Coefficiente de Poisson	(ν)	0,3
Densidade do aço	(ρ_s)	7680 Kg/m ³

Modelo numérico da cavidade acústica

A cavidade acústica tem geometria cilíndrica com extremidades abertas e fechada na lateral, como se mostra na Figura 4.5.

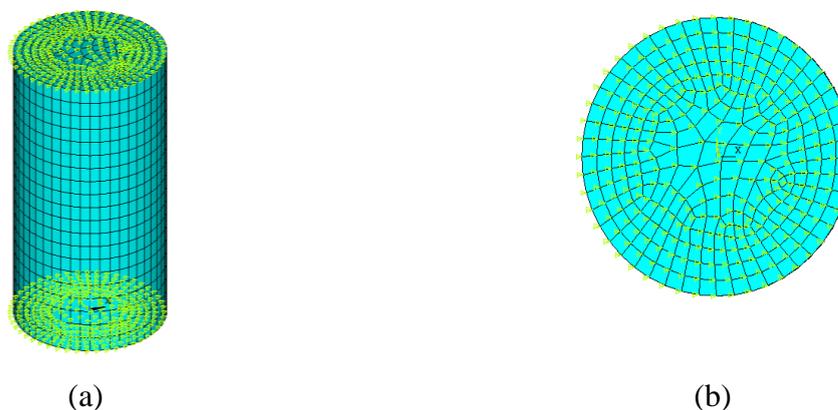


Figura 4.5 (a) Modelo cavidade acústica, (b) condições de contorno aberta nos extremos, (pressão $p = 0$)

Os dados gerais do modelo cavidade acústica são apresentados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 Características da cavidade acústica

Raio	(a)	0,175 m
Comprimento	(L)	0,664 m
Densidade do fluido	(ρ_f)	1000 Kg/m ³
Velocidade de propagação do som na água	(c)	1500 m/s

Já, o modelo acoplado fluido-estrutura (FE), consiste de uma estrutura casca simplesmente apoiada completamente preenchida de um fluido acústico, nas extremidades abertas.

As propriedades dos materiais e a geometria adotados no modelo Fluido-Estrutura, isto é Caso 1.C. foram transcritos de Amabili e Dalpiaz (1995), que realizaram, dentre outros, um ensaio em um tanque com o eixo na posição vertical, totalmente preenchido com água. As condições de contorno impostas à casca cilíndrica por placas delgadas nas extremidades foram consideradas muito próximas a do caso simplesmente apoiado e aberto nas extremidades. Os resultados obtidos com a presente formulação, foram comparados com os resultados do trabalho experimental da literatura especializada em Amabili *et al* (1995).

4.2 ASPECTOS COMPUTACIONAIS

4.2.1 Análise modal

A análise modal é utilizada para determinar frequências naturais e modos de vibração. Há muitos métodos numéricos para extração de modos. O ANSYS oferece estes métodos: *Block Lanczos*, *PCG Lanczos*, *Subspace* (subespaço), *Reduced* (reduzido), *Unsymmetric* (não simétrico), *Damped* (amortecido) e *QR Damped* (QR amortecido).

Os métodos utilizados para o desenvolvimento destes estudos foram o *Subspace* e *Unsymmetric*.

O método *Subspace* é utilizado para a determinação de autovalores e autovetores associados a matrizes simétricas, como nos casos das análises modais da estrutura e do fluido desacoplados. O método *Subspace* utiliza a técnica de interação do subespaço, que internamente utiliza o algoritmo de interação de Jacobi generalizado. É altamente preciso porque utiliza as matrizes de rigidez e massa completas.

O método *Unsymmetric*, que também utiliza as matrizes de rigidez e massa completas, destinasse a problemas onde essas matrizes são assimétricas, como em problemas de acoplamento acústico estrutural.

4.2.2 Análises de convergência

Para obter as soluções numéricas adequadas pelo Método dos Elementos Finitos no software ANSYS, estudos de convergência para cada modelo (casca, cavidade, acoplamento casca-cavidade cilíndrica), foram realizados.

A fórmula para obter o erro percentual dos resultados numéricos em comparação com os resultados analíticos foi:

$$\text{Erro (\%)} = \left| \frac{\omega_{\text{Analítico}} - \omega_{\text{Numérico}}}{\omega_{\text{Analítico}}} \right| \times 100 \quad (4.1)$$

Na Tabela 4.3 apreciam-se os quatro níveis de refinamentos feitos na configuração geométrica da casca cilíndrica (altura ou comprimento e circunferência).

Tabela 4.3 - Níveis de refinamentos.

Nível Refinamento	N° divisões Altura	N° divisões Circunferência
1	7	12
2	10	24
3	20	48
4	40	80

Análise de convergência da estrutura casca

Na Figura 4.6 apresenta-se o esquema dos refinamentos para o modelo numérico da casca cilíndrica, feitos no software ANSYS:

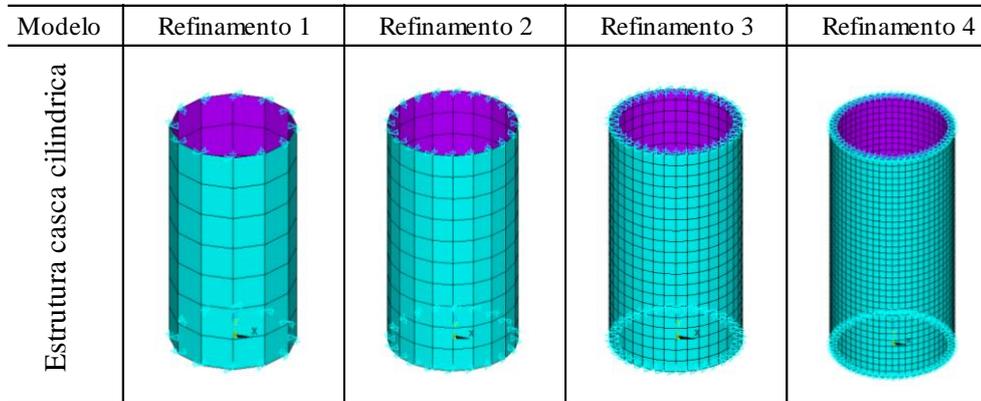


Figura 4.6 - Esquema refinamento modelo casca.

A Figura 4.7 apresenta a convergência das duas primeiras frequências naturais numéricas para cada nível de refinamento, a informação no gráfico refere-se as duas primeiras combinações modais m, n e suas frequências naturais analíticas, para as quais o estudo de convergência numérico é realizado.

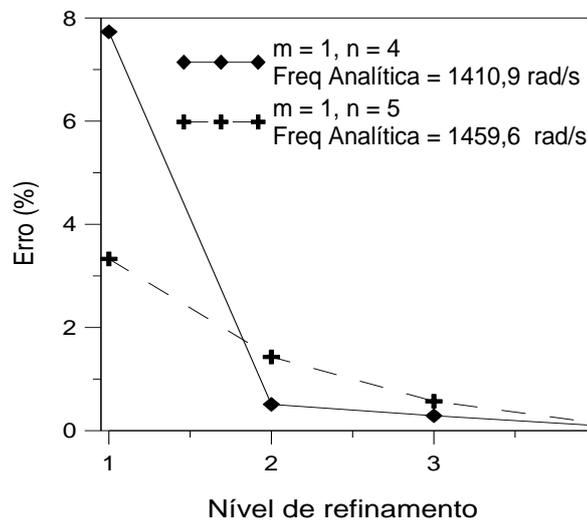


Figura 4.7 - Análise de convergência para a estrutura casca.

A convergência para a combinação modal $m = 1, n = 4$ ou frequência analítica $1410,6 \text{ rad/s}$, converge rapidamente passando de um erro de $7,73 \%$ com o primeiro nível de refinamento à um erro de $0,51\%$ com o segundo nível de refinamento, logo um erro de $0,10\%$

é obtido para o quarto nível de refinamento. Aprecia-se uma variação pequena de erro entre o segundo, o terceiro e o quarto nível de refinamento.

Para a convergência da combinação modal $m = 1$, $n = 5$, frequência analítica $1459,6 \text{ rad/s}$ apresenta-se erros percentuais menores nos quatro níveis de refinamento, observando um erro de $3,33 \%$ para o primeiro nível de refinamento, seguido com um erro de $1,43\%$ para o segundo nível de refinamento, passando a um erro de $0,57 \%$ para o terceiro nível de refinamento, finalmente obtém-se um erro de $0,15 \%$ com o quarto nível de refinamento. Aprecia-se menor erro percentual nos refinamentos e uma convergência mais suavizada.

Com os refinamentos procurou-se que as dimensões do elemento casca fossem o mais possível quadrada, permitindo uma boa precisão nas deformadas modais. A continuação, a configuração dos refinamentos realizados, será a mesma para o modelo cavidade cilíndrica e para o modelo acoplado fluido-estrutura.

Análise de convergência da cavidade cilíndrica

Na Figura 4.8 apresenta-se o esquema dos refinamentos do modelo numérico da cavidade cilíndrica, feitos no Software ANSYS.

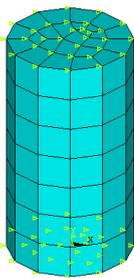
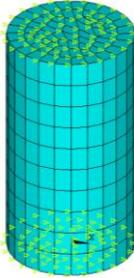
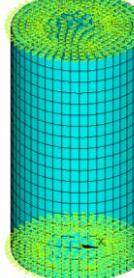
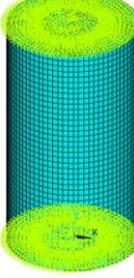
Modelo	Refinamento 1	Refinamento 2	Refinamento 3	Refinamento 4
Cavidade acústica				

Figura 4.8 - Esquema refinamento da cavidade cilíndrica.

Na Figura 4.9 apresenta-se a variação das frequências naturais numéricas, para cada nível de refinamento do modelo cavidade cilíndrica, a informação no gráfico reporta as duas primeiras frequências naturais analíticas para as quais o estudo de convergência numérico é realizado.

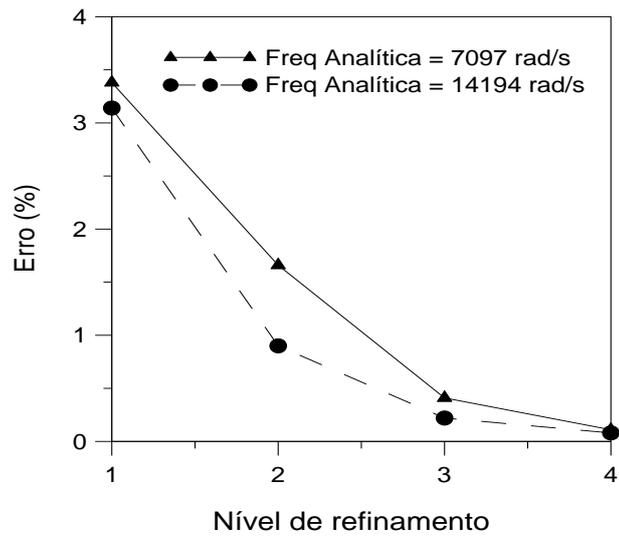


Figura 4.9 - Análise de convergência para a cavidade cilíndrica.

A convergência para a primeira frequência numérica da cavidade cilíndrica, mostra um erro porcentual de 3,38 % para o primeiro nível de refinamento, erros de 0,41 % e 0,11 % foram obtidos para o terceiro e quarto nível de refinamento.

Para a convergência da seguinte frequência numérica, mostra um erro porcentual de 3,14 % para o primeiro nível de refinamento, para os três outros níveis os erros foram satisfatoriamente inferiores a um por cento. As frequências e deformadas modais para este modelo foram obtidos com o quarto nível de refinamento.

Análise de convergência do acoplamento casca-cavidade cilíndrica

Na Figura 4.10 apresenta-se um esquema dos refinamentos para o modelo numérico do acoplamento fluido-estrutura, feitos no Software ANSYS.

Modelo	Refinamento 1	Refinamento 2	Refinamento 3	Refinamento 4
Acoplamento acústico estrutural				

Figura 4.10 - Esquema refinamento acoplamento fluido-estrutura.

A Figura 4.11 apresenta a convergência das duas primeiras frequências naturais numéricas para o sistema acoplado, pode-se apreciar as rigidezes das soluções numéricas, em que, um erro percentual de 40 % na frequência numérica para o primeiro nível de refinamento, diminui a 17% para o segundo nível de refinamento. Uma explicação para este fato é devido à pouco refinamento na superfície de interface, fundamental para garantir o efeito acoplado fluido-estrutura.

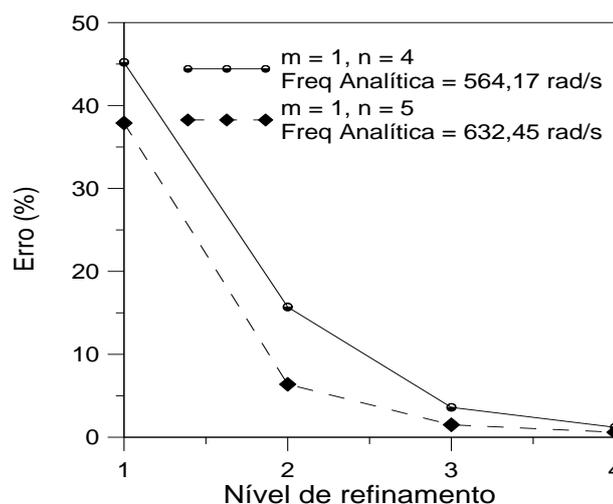


Figura 4.11 - Análise de convergência para o acoplamento fluido-estrutura.

O refinamento do nível 4 mostrado na Figura 4.11 permitiu no modelo acoplado casca-cavidade uma boa simulação dos efeitos de interação fluido-estrutura na superfície de interface.

Analisando a Figura 4.7, Figura 4.9 e Figura 4.11, observe-se que a partir do terceiro refinamento todos os erros são menores que 5%, o que caracteriza resultados satisfatórios. No quarto refinamento os testes exibem erros percentuais menores ou iguais que 1 %, em todas as análises dos casos desacoplados e acoplados, foi utilizado o nível de refinamento 4, para a obtenção das soluções numéricas neste trabalho.

5 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos de todos os casos propostos sob as abordagens analíticas, baseadas nas teorias desenvolvidas no capítulo 3, e numéricas obtidas com o programa ANSYS, tomando-se as malhas validadas no capítulo 4. Por último apresenta-se um estudo dos efeitos das condições de borda em vibrações livres de casca cilíndrica. Os estudos de caso serão determinados pelas condições de contorno conforme indicado na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 Estudo de casos

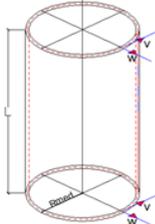
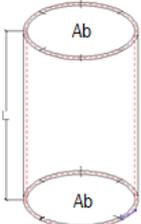
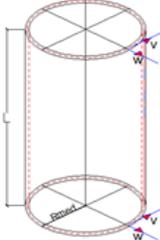
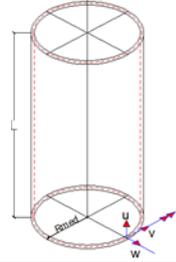
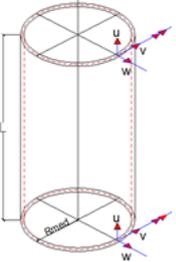
Caso	Esquema do modelo	Condições de contorno	Tipo Análise	Abordagem
	A. Casca Desacoplada 	Apoiada-Apoiada 	Vibração Livre	Analítico - Numérico
	B. Cavidade Desacoplada 	Aberta-Aberta 	Vibração Livre	Analítico - Numérico
1.	C. Acoplamento fluido estrutura 	Casca cilíndrica Apoiada-Apoiada <hr/> Cavidade cilíndrica Aberta-Aberta	Vibração Livre	Analítico - Numérico
	D. Casca 	Apoiada-Apoiada 	Vibração Livre	Analítico - Numérico

Tabela 5.2 Estudo de casos, Continuação.

Caso	Esquema do modelo	Condições de contorno	Tipo Análise	Abordagem
2.	Casca 	Engastado-Livre 	Vibração Livre	Análítico - Numérico
3.	Casca 	Engastado-Engastado 	Vibração Livre	Análítico - Numérico
4.	Estudo literatura 	Efeito restrição axial na frequência natural	Vibração Livre	Numérico

5.1.1 Caso 1.A.

Representa a estrutura para o problema acoplado fluido-estrutura (FE), trata-se de uma casca cilíndrica simplesmente apoiada (A-A), sem restrição axial, isto é restrição aos deslocamentos nas direções radial (w) e circunferencial (v).

As premissas da análise foram baseadas segundo a teoria linear para cascas elásticas finas de Donnell, onde a casca tem uma espessura constante, as paredes são finas e inferiores a 10% do raio médio. O material da casca apresenta características linear, elástico, homogêneo e isotrópico. Para o caso estudado não há cargas aplicadas. As deformações são pequenas em comparação com seu raio, a inércia de rotação e deformação de cisalhamento são negligenciadas. Uma análise de vibrações livres foi realizada mediante uma abordagem comparativa analítica e numérica.

Na Tabela 5.3, são apresentados os resultados das dez primeiras frequências circulares naturais (ω), analíticas e numéricas da casca cilíndrica, Onde (N) representa sua ordem, e (i, m, n) o índice ou combinação modal.

Tabela 5.3 - Frequências naturais da estrutura desacoplada.

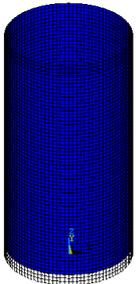
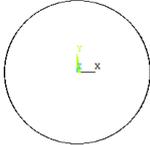
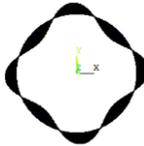
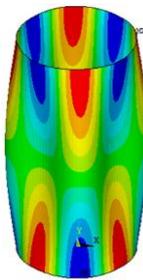
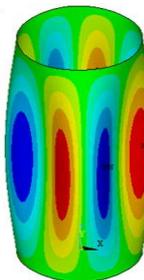
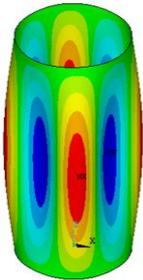
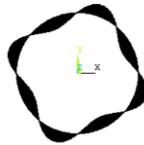
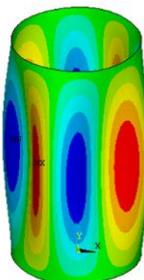
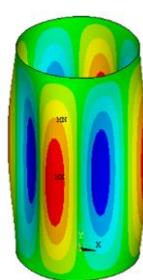
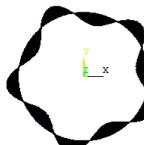
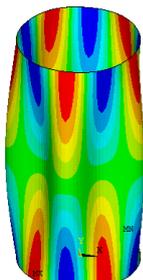
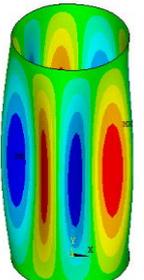
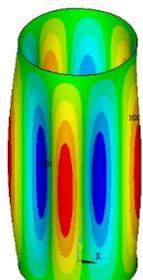
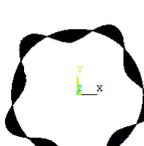
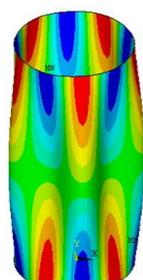
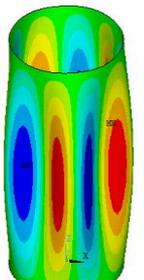
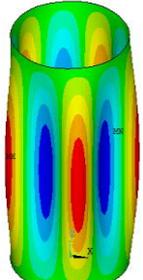
N	i	m	n	$\omega_{i,m,n}$ Analítico (rad/s)	$\omega_{i,m,n}$ Numérico (rad/s)	Erro (%)
1	1	1	4	1410,9	1410,07	0,06
2	1	1	5	1459,6	1458,14	0,10
3	1	1	6	1881,2	1878,48	0,14
4	1	1	3	2022,8	2022,2	0,03
5	1	1	7	2498,7	2497,6	0,04
6	1	2	6	2806,9	2805,6	0,05
7	1	2	7	3000,6	2998,2	0,08
8	1	2	5	3160,3	3160,4	0,00
9	1	1	8	3248,4	3246,6	0,06
10	1	2	8	3547,8	3544,2	0,10

As frequências naturais da estrutura obtidos na Tabela 5.3, mostram uma boa aproximação entre resultados analíticos e numéricos.

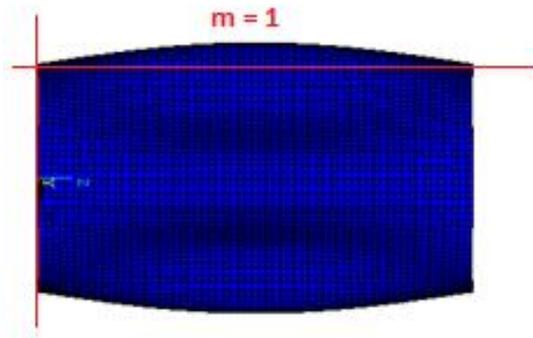
A Tabela 5.4, Tabela 5.5 e Tabela 5.6 apresentam as deformadas modais numéricas do Caso 1.A., As quais mostraram-se em vista isométrica e superior. Junto a uma apreciação qualitativa dos deslocamentos axial (U), circunferencial (V) e radial (W).

O primeiro a ser identificado é o modo de corpo livre, modo no qual toda a estrutura se desloca da sua posição de equilíbrio.

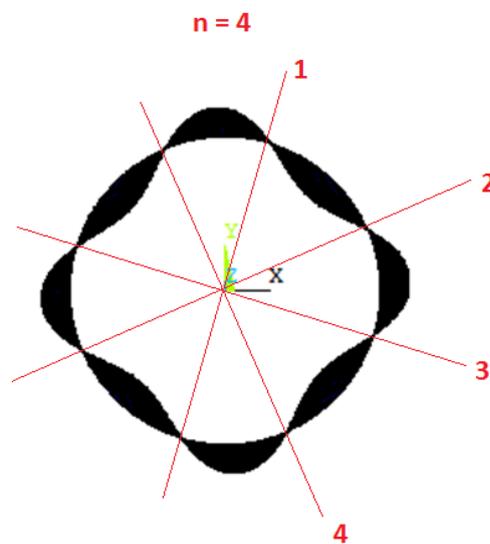
Tabela 5.4 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura, ANSYS.

Deformada Modal		Deslocamentos			
		Axial (U)	Cicunferencial (V)	Radial (W)	
Modo Corpo Livre			-	-	-
$i = 1, m = 1, n = 4, (1)$ $\omega = 1410,1 \text{ rad/s}$					
$i = 1, m = 1, n = 4, (2)$ $\omega = 1410,1 \text{ rad/s}$					
$i = 1, m = 1, n = 5, (1)$ $\omega = 1458,8 \text{ rad/s}$					
$i = 1, m = 1, n = 5, (2)$ $\omega = 1458,8 \text{ rad/s}$					

A primeira combinação modal numérica, a ser identificada foi $i = 1$, $m = 1$, $n = 4$ com uma frequência numérica de $1410,1 \text{ rad/s}$, onde o índice $i = 1$ indica que a menor entre as três frequências naturais, $m = 1$ representa uma semi-onda longitudinal e $n = 4$ representa quatro ondas circunferenciais ou quatro diâmetros, como se identifica na Figura 5.1a,b. Respectivamente.



(a)



(b)

Figura 5.1 - Configuração modal

Tabela 5.5 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura, ANSYS. Cont.

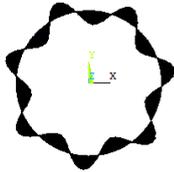
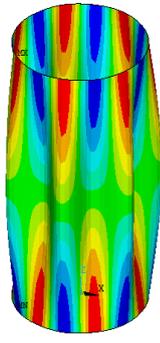
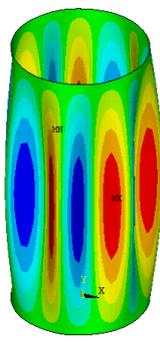
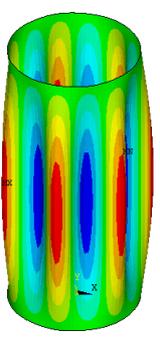
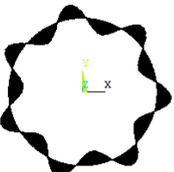
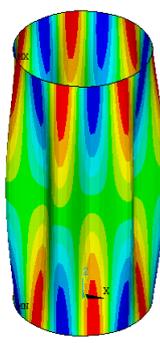
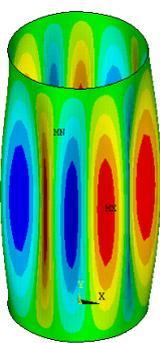
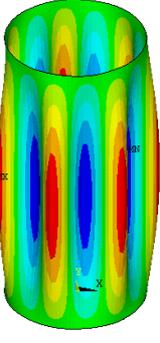
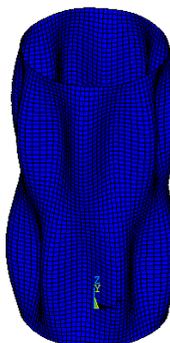
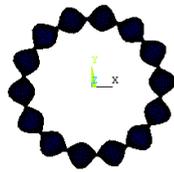
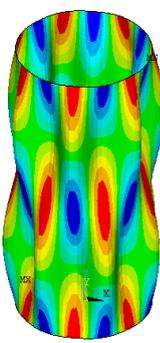
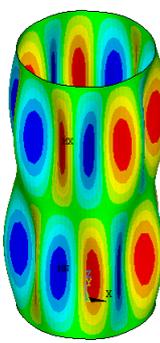
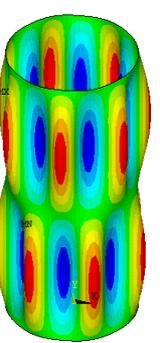
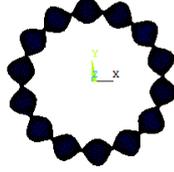
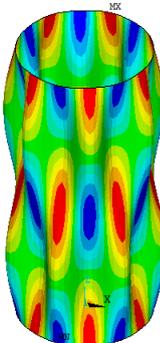
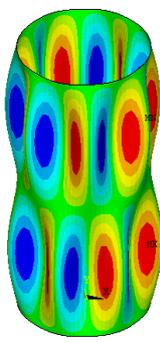
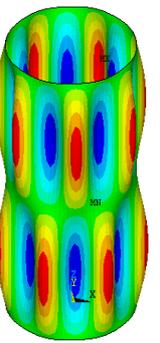
		Deformada Modal		Deslocamentos		
				Axial (U)	Circunferencial (V)	Radial (W)
i = 1, m = 1, n = 7, (1)	$\omega = 2497,5 \text{ rad/s}$					
						
i = 1, m = 2, n = 7, (1)	$\omega = 2998,24 \text{ rad/s}$					
						

Tabela 5.6 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos da estrutura, ANSYS. Cont.

		Deformada Modal		Deslocamentos		
				Axial (U)	Circunferencial (V)	Radial (W)
$i = 1, m = 1, n = 8, (1)$	$\omega = 3246,6 \text{ rad/s}$					
$i = 1, m = 1, n = 8, (2)$						

A comparação entre os resultados analítico e numérico dos modos de vibração axial, circunferencial e radial correspondentes à frequência natural $\omega_{i=1, m=1, n=4}$ é apresentada a seguir. O índice $i = 1$ indica que a menor entre as três frequências naturais $m = 1, n = 4$ é considerada, o que para o Caso 1.A., corresponde a um modo predominantemente radial; o índice $m = 1$ denota uma meia-onda longitudinal no modo de vibração e o índice $n = 4$ indica quatro ondas circunferenciais no modo de vibração. Para cada deslocamento, são mostrados os modos de vibração ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\phi = 36^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$) em $z = L/2$. A Figura 5.3 reúne o primeiro conjunto de modos, $i = 1, m = 1, n = 4, (1)$, cujo ângulo de fase $\Psi = 0$.

Como observado, na Tabela 5.3 e Figura 5.3, os resultados analítico e numérico coincidem muito bem tanto nas frequências naturais quanto nos modos de vibração. As deformadas modais, analítica e numérica mostradas nas Figura 5.3 b, d, e, f apresentam uma pequena defasagem, o que não invalida o resultado uma vez que o ângulo de fase Ψ , para o primeiro (1), conjunto de modos naturais, é arbitrário, considerado igual a zero (0) neste

trabalho. Caso Ψ fosse considerado igual a $[-\pi/48n]$, os resultados seriam coincidentes. Os modos de vibração numéricos foram ajustados pelos modos de vibração analíticos.

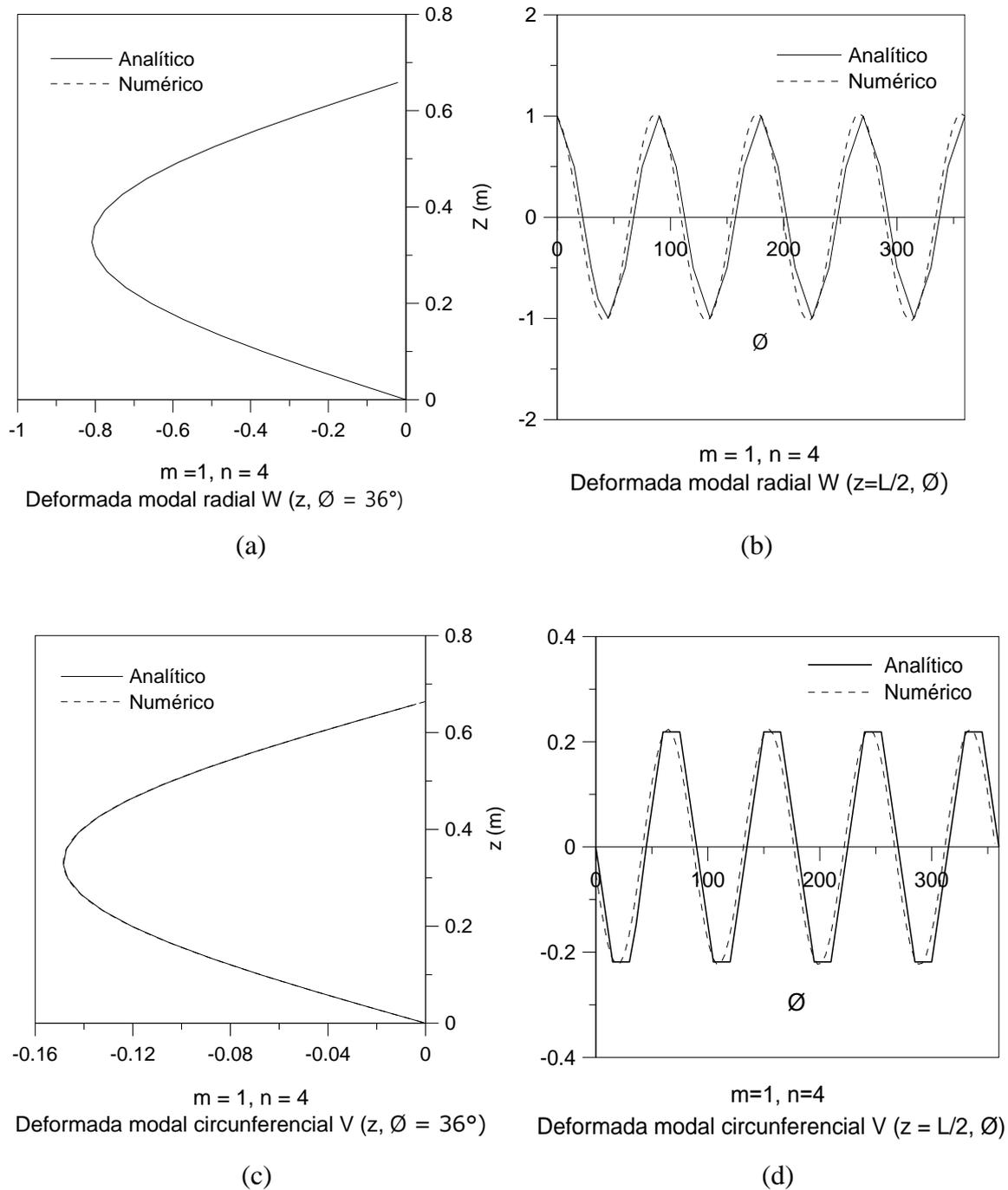


Figura 5.2 - Deformada modal: [(a) e (b)] radial, [(c) e (d)] circunferencial. ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\phi = 36^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$) em $z = L/2$.

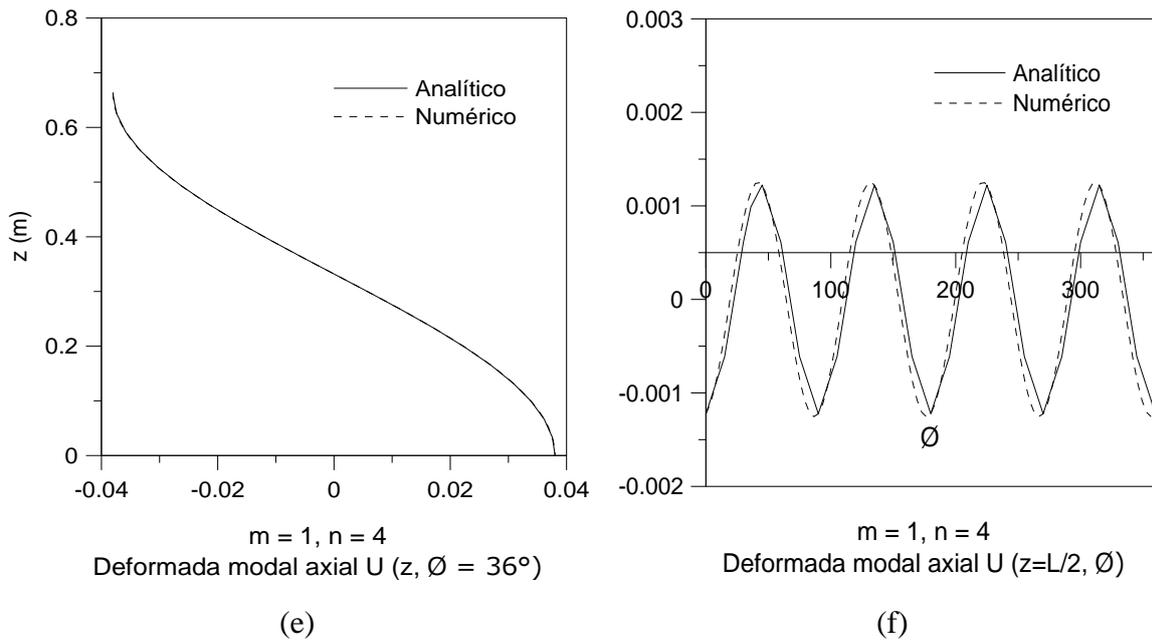


Figura 5.3 - Deformada modal: [(a) e (b)] radial, [(c) e (d)] circunferencial e [(e) e (f)] axial, ao longo de duas curvas: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\phi = 36^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$) em $z = L/2$.

A relação entre as frequências naturais analíticas e o número de ondas circunferenciais n , são mostradas na Figura 5.4, para as primeiras semi-ondas longitudinais m .

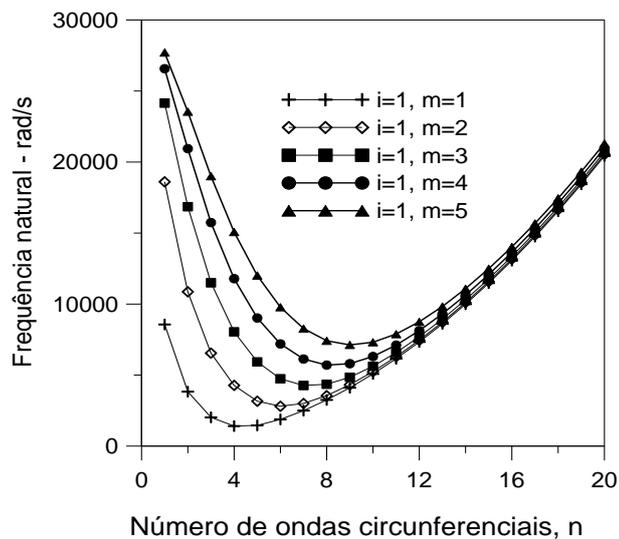


Figura 5.4 –Relação de frequências naturais vs número de ondas circunferenciais de uma casca cilíndrica simplesmente apoiada.

Na Figura 5.4, observa-se como as menores frequências naturais não necessariamente estão associadas com os menores valores de n , ($n = 1, n = 2$). Sendo que a menor frequência depende da taxa da energia de deformação total associada à flexão e à membrana. O valor de n associado com a frequência natural mínima depende principalmente das relações geométricas h/a e L/a .

A influência do número de semi-ondas longitudinais, m , nas frequências naturais da casca com extremos simplesmente apoiados, pode ser verificada através da Figura 5.4. Observa-se que a menor frequência natural da casca ocorre para $m = 1$, ou seja, para uma semi-onda longitudinal, e a medida que n cresce, os valores das frequências tendem a um valor comum para qualquer m , já para modos de vibração altos (n alto), o comportamento dinâmico das casca é dominado por energia de flexão.

Como vimos anteriormente na análise teorica para problemas de cilindros vibrando livremente, as frequências naturais são obtidas do polinomio caracteristico (3.82), assim para uma dada configuração de ondas longitudinais m e circunferenciais n , existem três raízes reais sendo as frequências naturais de vibração livre. Característico destas frequências naturais é o fato de que uma é sempre menor do que as outras. Em quanto o índice $i = 1$ representa as frequências que geralmente são menores e predominantemente radiais, já $i = 2$ e $i = 3$ estão associadas a vibrações predominantemente circunferenciais e axiais.

A Figura 5.5, reproduz novamente os gráficos plotados na Figura 5.4, acrescentando as combinações modais $i = 2, m = 1$ e $i = 3, m = 1$, as quais relacionam frequências naturais de maior ordem.

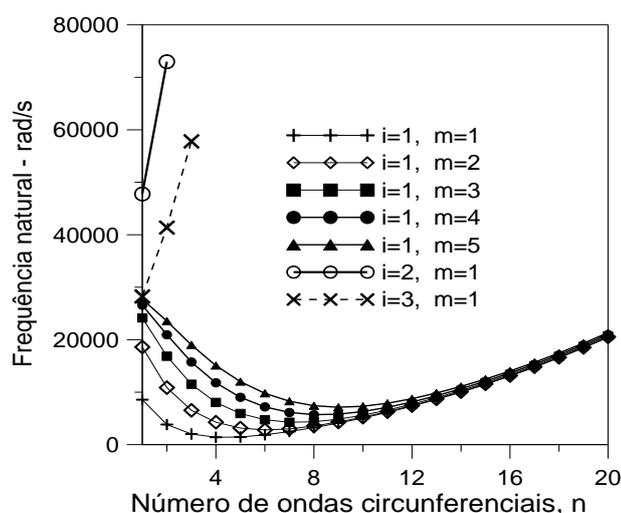


Figura 5.5 - Frequências naturais analíticas da estrutura.

Na Figura 5.5 observa-se a diferença entre o grupo associado a baixas frequências $i = 1$ e os grupos associados com altas frequências $i = 2, i = 3$. Sendo apenas a menor das três soluções de importância prática, devido que menores frequências implicam maiores amplitudes das deformações.

5.1.1.1 Considerações finais Caso 1.A.

A casca cilíndrica circular reta de paredes finas, bi apoiada e sem restrição axial, foi estudada em uma análise de vibrações livres pela abordagem comparativa dos estudos analíticos e numéricos. Os dados obtidos mostraram-se bastante aproximados, o que mostra a coerência dos procedimentos utilizados. Destaca-se também a compatibilidade da formulação analítica com os resultados experimentais disponíveis em Amabili e Dalpiaz (1995). A teoria analítica utilizada foi baseada nas formulações aproximadas de Donnell, apresentadas por Soedel no livro *Vibrations of Shells and Plates, Third Edition*, (2005). Analiticamente, as frequências naturais e as deformadas modais foram obtidas pela substituição das soluções assumidas, em expansões modais trigonométricas, nas equações de movimento para o sistema desacoplado.

Os resultados são expressos em função de frequências naturais e deformadas modais também conhecidas como combinações modais com índices (i, m, n) , onde i refere-se a ordem das frequências naturais, m indica o número de semi-ondas longitudinais e n indica o número de ondas circunferenciais associados ao modo de vibração.

Observa-se na Figura 5.3 que as menores frequências naturais não estão necessariamente associadas aos menores valores de n , ($n = 1, n = 2$). Sendo que a menor frequência natural da casca ($1410,9 \text{ rad/s}$), ocorre para $i = 1, m = 1, n = 4$, ou seja uma semi-onda longitudinal e quatro ondas circunferenciais, onde ($i = 1$) esta relacionado as frequências naturais de menor ordem, predominantemente radiais. Os valores do número de ondas circunferenciais n , para a frequência natural mínima na casca cilíndrica, dependem principalmente das relações geométricas como são: a esbelteza (altura/raio) e a espessura (espessor/raio), sendo que o Caso 1.A. é identificado como uma casca cilíndrica longa e fina.

Para propósitos práticos só o menor valor das três frequências naturais ($i = 1, 2, 3$) é ordinariamente de significativa importância para uma análise de vibrações por apresentar maior amplitude no deslocamento. Observa-se a grande variedade de deformadas modais com aspecto bastante diferenciado, obtidas a partir das equações que descrevem a casca cilíndrica; sendo observados modos de vibração transversal, longitudinal e torcional com formato idêntico a de vigas tubulares, vibração flexional e extensional no plano do anel, além dos modos de vibração próprios da teoria de cascas. Sendo que a deformação na casca pode variar entre puramente extensional para puramente flexional.

5.1.2 Caso 1.B.

Representa a cavidade cilíndrica (ou fluido acústico) para o problema acoplado fluido-estrutura. Trata-se de uma cavidade acústica com geometria cilíndrica, com suas extremidades abertas (Ab-Ab) e fechada na lateral.

As premissas gerais utilizadas na análise teórica de cavidades acústicas, segundo Kinsler (1962), no seu livro titulado *Fundamentals of acoustics*, são:

O fluido contido na cavidade é homogêneo, inviscido e estacionário. A densidade média e a pressão são uniformes em todo o líquido. A cavidade é delimitada por paredes rígidas e as partículas de fluido são ciclicamente deslocadas das suas posições de equilíbrio. A obtenção das frequências naturais e o campo de pressões no interior da cavidade acústica foram estudados mediante uma abordagem comparativa analítica e numérica.

A Tabela 5.7 contém os resultados das dez primeiras frequências circulares naturais (ω) analíticas e numéricas, sua ordem (N), seu índice (i, \bar{n}, \bar{m}) e os respectivos erros, obtidos pela fórmula para o erro percentual (4.1).

Os resultados das frequências da cavidade cilíndricas obtidas na Tabela 5.7, caracterizam-se por uma excelente aproximação, pois as frequências obtidas pela teoria analítica e pelo software ANSYS (método numérico) são praticamente iguais, ou seja, os erros são mínimos, o qual mostra uma boa coerência do modelo numérico e a formulação analítica para estas condições de contorno.

Tabela 5.7-Frequências naturais da cavidade cilíndrica desacoplada.

N	i	m̄	n̄	$\omega_{i,m̄,n̄}$ Analítico (rad/s)	$\omega_{i,m̄,n̄}$ Numérico (rad/s)	Erro (%)
1	0	1	0	7097	7098	0,01
2	0	2	0	14194	14209	0,11
3	0	1	1	17304	17318	0,08
4	0	2	1	21226	21233	0,03
5	0	3	0	21291	21299	0,04
6	0	3	1	26502	26513	0,04
7	0	1	2	27124	27148	0,09
8	0	4	0	28388	28406	0,06
9	0	2	2	29779	29802	0,08
10	0	4	1	32480	32500	0,06

A Tabela 5.8 e Tabela 5.9 apresenta os modos de vibração acústicos numéricos da cavidade cilíndrica. São apresentados os 16 primeiros modos associados às 10 primeiras frequências naturais numéricas.

Tabela 5.8 - Frequências naturais e modos de pressão numéricos da cavidade acústica obtidos por ANSYS.

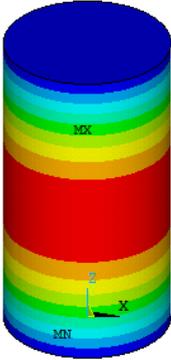
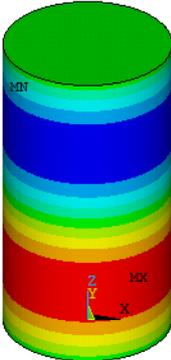
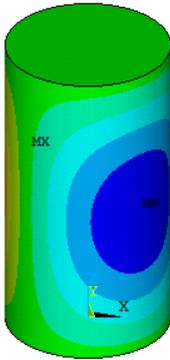
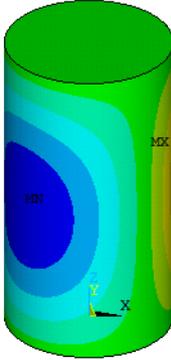
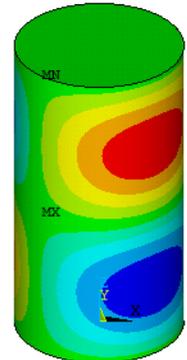
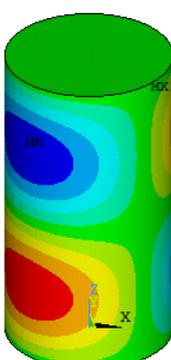
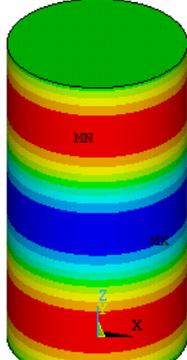
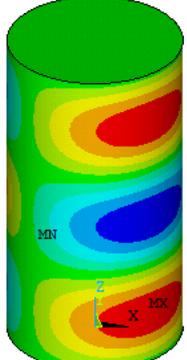
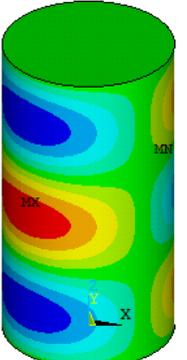
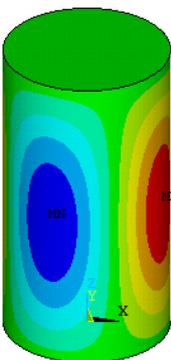
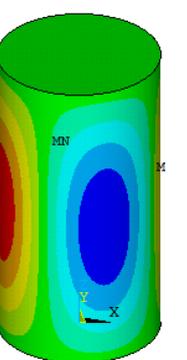
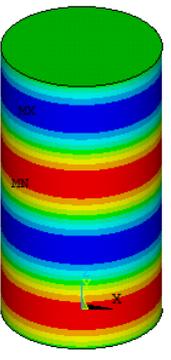
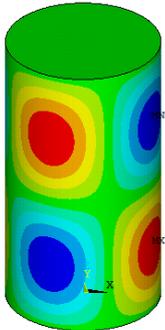
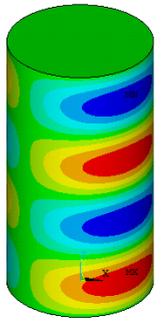
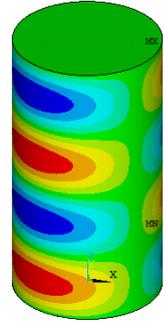
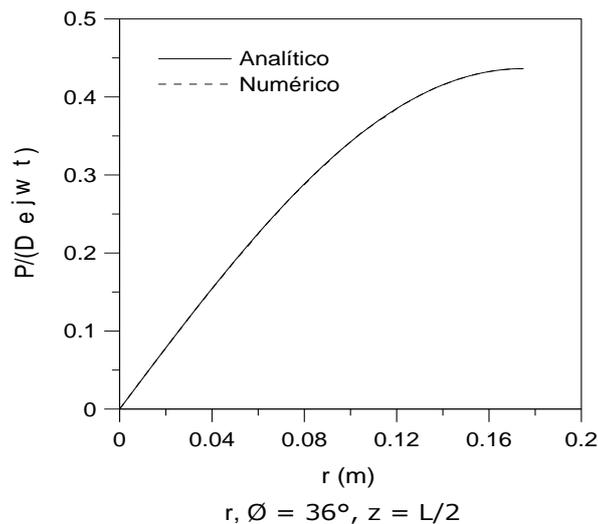
$i = 0, \bar{m} = 1, \bar{n} = 0, (1)$	$i = 0, \bar{m} = 2, \bar{n} = 0, (1)$	$i = 0, \bar{m} = 1, \bar{n} = 1, (1)$	$i = 0, \bar{m} = 1, \bar{n} = 1, (2)$
$\omega = 7097,5 \text{ rad/s}$	$\omega = 14196,2 \text{ rad/s}$	$\omega = 17310,8 \text{ rad/s}$	$\omega = 17310,8 \text{ rad/s}$
			
$i = 0, \bar{m} = 2, \bar{n} = 1, (1)$	$i = 0, \bar{m} = 2, \bar{n} = 1, (2)$	$i = 0, \bar{m} = 3, \bar{n} = 0, (1)$	$i = 0, \bar{m} = 3, \bar{n} = 1, (1)$
$\omega = 21232,8 \text{ rad/s}$	$\omega = 21232,8 \text{ rad/s}$	$\omega = 21298,7 \text{ rad/s}$	$\omega = 26512,5 \text{ rad/s}$
			
$i = 0, \bar{m} = 3, \bar{n} = 1, (2)$	$i = 0, \bar{m} = 1, \bar{n} = 2, (1)$	$i = 0, \bar{m} = 1, \bar{n} = 2, (2)$	$i = 0, \bar{m} = 4, \bar{n} = 0, (1)$
$\omega = 26512,5 \text{ rad/s}$	$\omega = 27147,8 \text{ rad/s}$	$\omega = 27149,8 \text{ rad/s}$	$\omega = 28406,3 \text{ rad/s}$
			

Tabela 5.9 - Frequências naturais e modos de pressão numéricos da cavidade acústica obtidos por ANSYS. Continuação.

$i = 0, \bar{m} = 2, \bar{n} = 2, (1)$	$i = 0, \bar{m} = 2, \bar{n} = 2, (2)$	$i = 0, \bar{m} = 4, \bar{n} = 1, (1)$	$i = 0, \bar{m} = 4, \bar{n} = 1, (2)$
$\omega = 29802,4 \text{ rad/s}$	$\omega = 29802,4 \text{ rad/s}$	$\omega = 32499,8 \text{ rad/s}$	$\omega = 32499,8 \text{ rad/s}$
			

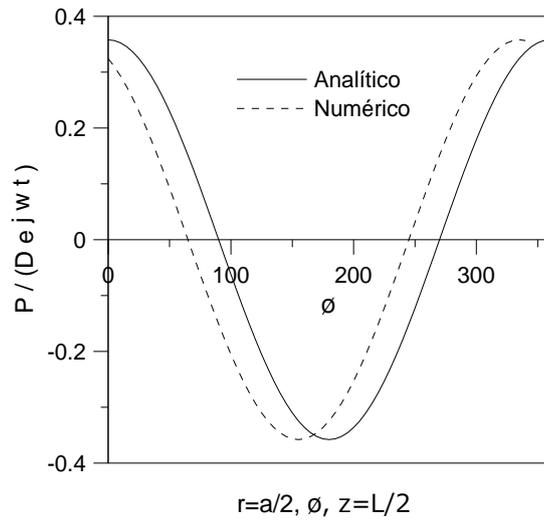
A comparação entre os resultados analítico e numérico do modo de vibração da pressão, correspondente à frequência natural $\omega_{i=0, \bar{n}=1, \bar{m}=1} = 17310,8 \text{ rad/s}$ com $\Psi = 0$ é apresentada na Figura 5.7. O índice $i = 0$ indica nenhum círculo nodal, o índice $\bar{m} = 1$ indica um nó axial e o índice $\bar{n} = 1$ denota um diâmetro nodal no modo de vibração.

A seguir são mostrados os modos de vibração da pressão ao longo de três curvas: uma reta ($0 \leq r \leq a$) em $\phi = 36^\circ, z = L/2$, uma circunferência ($0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$) em $r = a/2, z = L/2$ e uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $r = a/2, \phi = 36^\circ$.

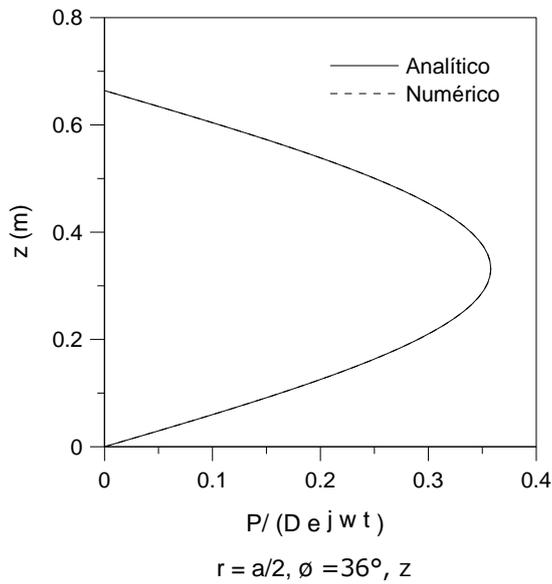


(a)

Figura 5.6 - Modos de vibração de pressão ao longo (a) uma reta ($0 \leq r \leq a$) em $\phi = 36^\circ, z = L/2$



(b)



(c)

Figura 5.7 - Modos de vibração de pressão ao longo de três curvas: (a) uma reta ($0 \leq r \leq a$) em $\varphi = 36^\circ, z = L/2$, (b) uma circunferência ($0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$) em $r = a/2, z = L/2$ e (c) uma uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $r = a/2, \varphi = 36^\circ$.

Como observado, na Tabela 5.7 e Figura 5.7, os resultados analítico e numérico coincidem muito bem tanto nas frequências naturais quanto nos modos de vibração. Apresenta-se uma defasagem de 20° , entre as soluções analíticas e numéricas mostradas na Figura 5.7b.

5.1.2.1 Considerações finais Caso 1.B.

A cavidade acústica com geometria cilíndrica, aberta nos extremos e na lateral rígida, foi estudada através de uma análise de vibração livre pela abordagem comparativa analítica e numérica. Os resultados caracterizam-se por uma excelente aproximação, os erros são mínimos, o que mostra uma boa coerência entre o modelo numérico e a formulação analítica para estas condições de contorno (Aberto-Aberto), ou seja, pressão zero nas extremidades.

A formulação teórica para o fluido esta fundamentada na equação de Helmholtz, sua solução se obteve através do método de separação de variáveis, cujos resultados são expressos em termos de frequências naturais e modos de pressão, onde os três índices (i , \bar{m} , \bar{n}) geralmente são necessários para especificar cada um dos modos acústicos de uma cavidade tridimensional, sendo i o número de círculos nodais, \bar{m} o número de nós axiais e \bar{n} o número de diâmetros nodais no modo de vibração.

A menor frequência natural da cavidade acústica ($7097,5 \text{ rad/s}$), ocorre para ($i = 0$, $\bar{m} = 1$, $\bar{n} = 0$), ou seja $i = 0$ indica nenhum círculo nodal, $\bar{m} = 1$ indica um nó axial e $\bar{n} = 1$ denota um diâmetro nodal no modo de vibração.

Observa-se como a ordem das frequências acústicas é de 5 ate 10 vezes a ordem das frequências naturais para a casca vazia.

5.1.3 Caso 1.C.

Representa o acoplamento fluido-estrutura (FE), tratasse de uma casca cilíndrica completamente preenchida de liquido, com condições de contorno:

Para a estrutura casca, simplesmente apoiadas (A-A) e para a cavidade acústica, com extremos aberto-aberto (Ab - Ab) e fechado na lateral. O fluido acústico referido no trabalho como cavidade acústica é considerado não viscoso e incompressível.

O método de solução para as vibrações livres de cascas cilíndricas cheias de liquido, parte de um método pseudo-acoplado, onde o efeito da força de inércia do líquido é incorporado nas equações de movimento da casca como massa virtual de fluido no sentido radial do movimento. A metodologia anterior tem sido amplamente utilizada entre outros por Lakis e Païdoussis em 1971, Koga e Tsushima em 1990, Gonçalves e Batista em 1986, Lee e Lu em 1995.

A obtenção das frequências naturais e deformadas modais acopladas foram estudadas mediante uma abordagem comparativa analítica e numérica.

Os resultados das dez primeiras frequências circulares naturais ω analíticas e numéricas, sua ordem (N), seu índice (i, n, m) e os respectivos erros são apresentados na Tabela 5.10.

Tabela 5.10 - Frequências naturais acopladas.

N	i	m	n	$\omega_{i,m,n}$ Analítico (rad/s)	$\omega_{i,m,n}$ Numérico (rad/s)	Erro (%)
1	1	1	4	564,17	567,2	0,5
2	1	1	5	632,45	637,8	0,8
3	1	1	3	734,15	736,3	0,3
4	1	1	6	871,22	881,9	1,2
5	1	1	7	1223,69	1243,9	1,7
6	1	1	2	1247,81	1248,5	0,1
7	1	2	6	1312,78	1329,21	1,3
8	1	2	5	1388,99	1401,8	0,9
9	1	2	7	1480,04	1504,4	1,6
10	1	2	8	1832,04	1703,6	7,0

A Tabela 5.11, Tabela 5.12 e Tabela 5.13, apresentam os modos de vibração numéricos para o sistema acoplado fluido-estrutura FE. Os quais mostrassem em vista isométrica 3D e superior, contendo também os deslocamentos axial (U), circunferencial (V) e radial (W) e a pressão (P). É apresentado o modo de corpo livre extraído dos resultados do programa.

Tabela 5.11 - Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados fluido-estrutura obtidos via ANSYS.

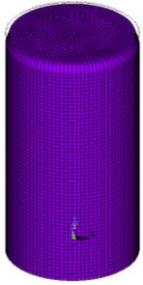
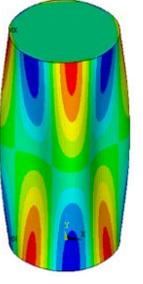
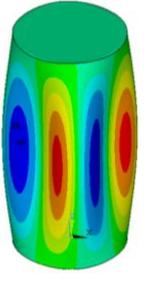
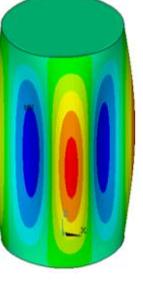
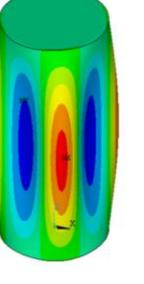
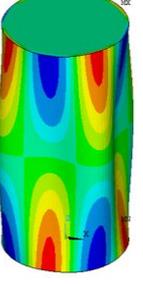
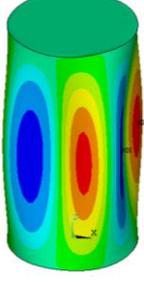
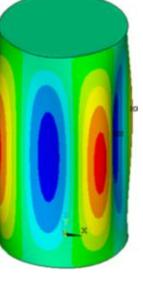
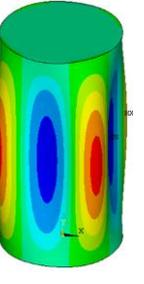
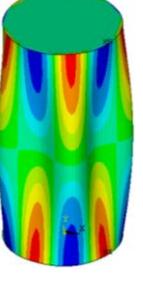
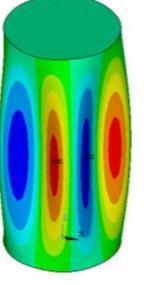
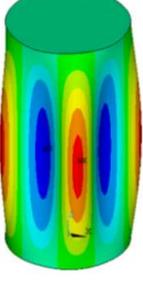
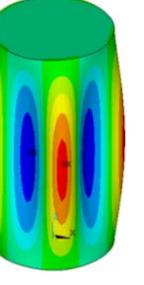
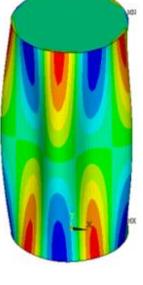
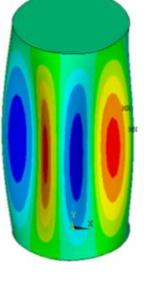
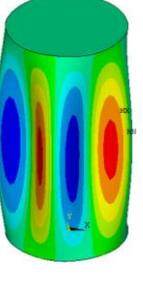
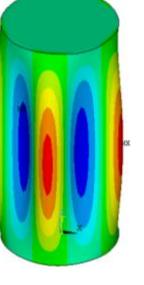
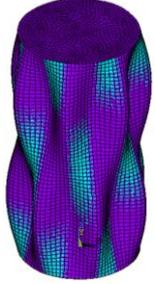
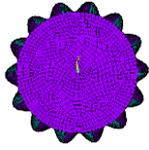
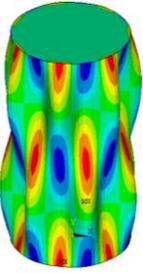
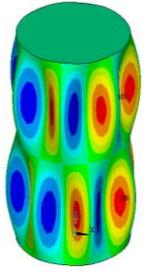
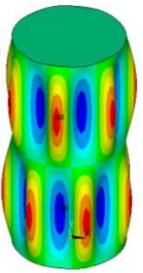
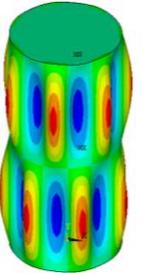
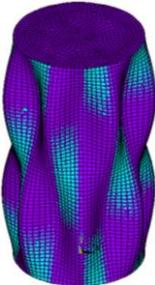
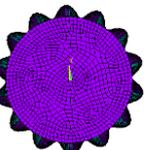
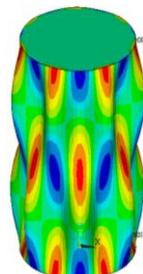
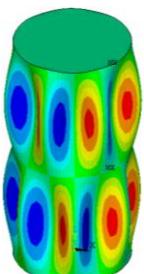
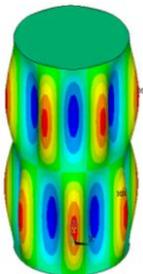
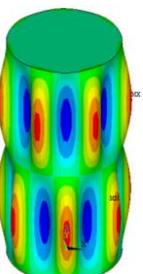
Deformada Modal		Deslocamentos			Pressão (P)
		Axial (U)	Circunferencial (V)	Radial (W)	
Corpo Livre		-	-	-	-
$i = 1, m = 1, n = 4, (1)$	$\omega = 567,2 \text{ rad/s}$ 				
$i = 1, m = 1, n = 4, (2)$	$\omega = 567,2 \text{ rad/s}$ 				
$i = 1, m = 1, n = 5, (1)$	$\omega = 637,8 \text{ rad/s}$ 				
$i = 1, m = 1, n = 5, (2)$	$\omega = 637,8 \text{ rad/s}$ 				

Tabela 5.12-Freqüências naturais e modos de vibração numéricos acoplados fluido-estrutura obtidos via ANSYS. Cont.

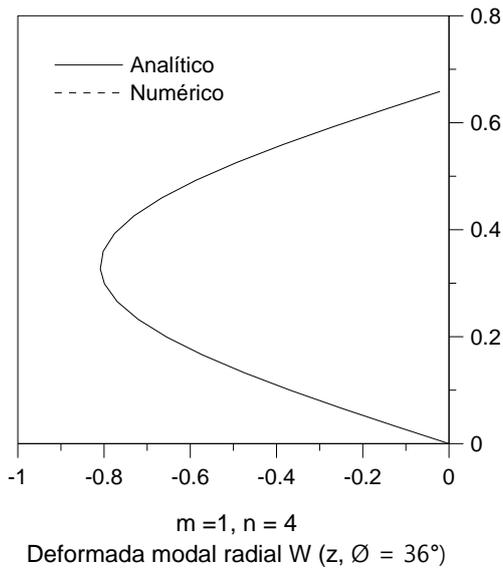
		Deformada Modal		Deslocamentos			Pressão (P)
				Axial (U)	Circunferencial (V)	Radial (W)	
i = 1, m = 1, n = 7, (1)	$\omega = 1243,9 \text{ rad/s}$						
i = 1, m = 2, n = 6, (1)	$\omega = 1329,21 \text{ rad/s}$						
i = 1, m = 2, n = 6, (2)	$\omega = 1329,21 \text{ rad/s}$						

Tabela 5.13-Frequências naturais e modos de vibração numéricos acoplados fluido-estrutura obtidos via ANSYS. Continuação.

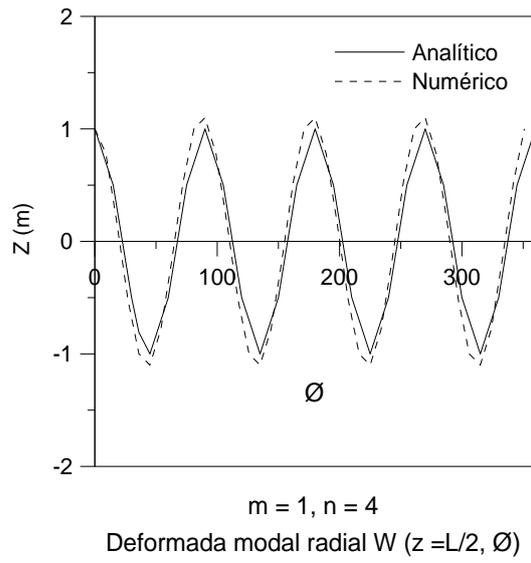
Deformada Modal		Deslocamentos			Pressão (P)	
		Axial (U)	Circunferencial (V)	Radial (W)		
$i = 1, m = 2, n = 7, (1)$ $\omega = 1504,4 \text{ rad/s}$						
						

A comparação entre os resultados analítico e numérico das deformadas modais radial, circunferencial e axial e de pressão correspondentes à frequência natural $\omega_{i=1, m=1, n=4}$, $\Psi = 0$ é apresentada na Figura 5.8 e Figura 5.9. O índice $i = 1$ indica que a menor das frequências naturais, $m = 1$, $n = 4$ é considerada. Para cada deslocamento são mostrados a deformada modal ao longo de duas trajetórias: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\phi = 36^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$) em $z = L/2$.

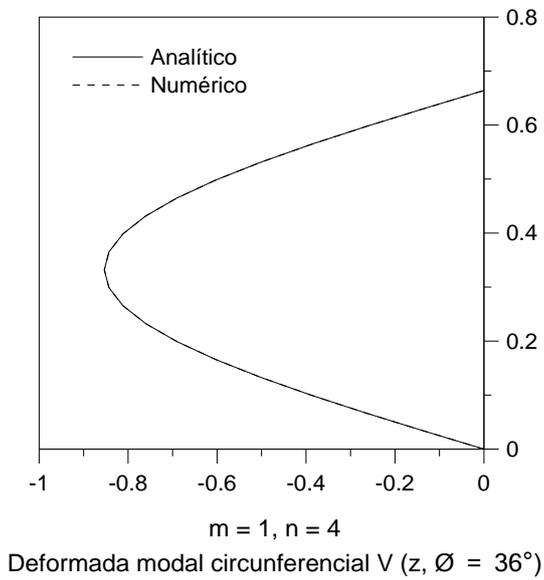
Para a pressão, são mostrados os modos de vibração ao longo de três curvas: Uma reta ($0 \leq r \leq a$), em $\phi = 36^\circ$ e $z = L/2$, uma circunferência ($0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$) em $r = a/2$ e $z = L/2$, e uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $r = a/2$ e $\phi = 36^\circ$.



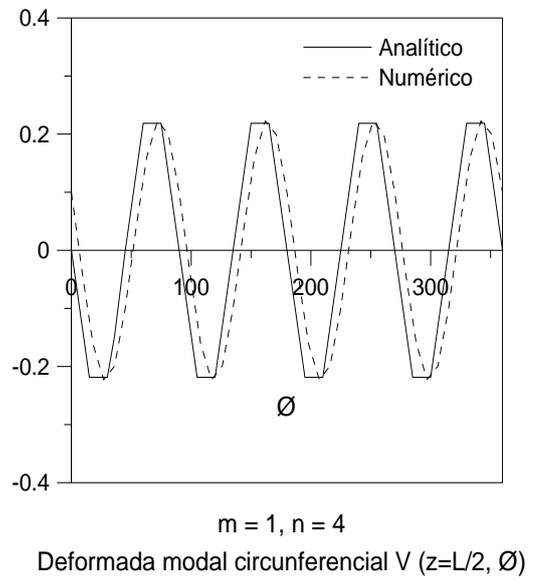
(a)



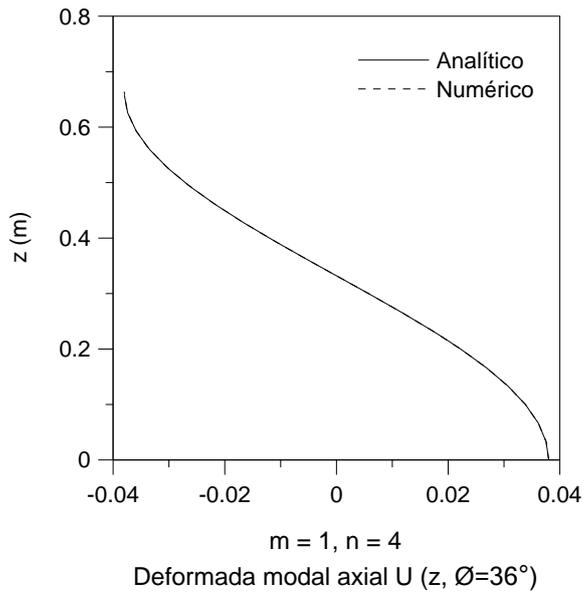
(b)



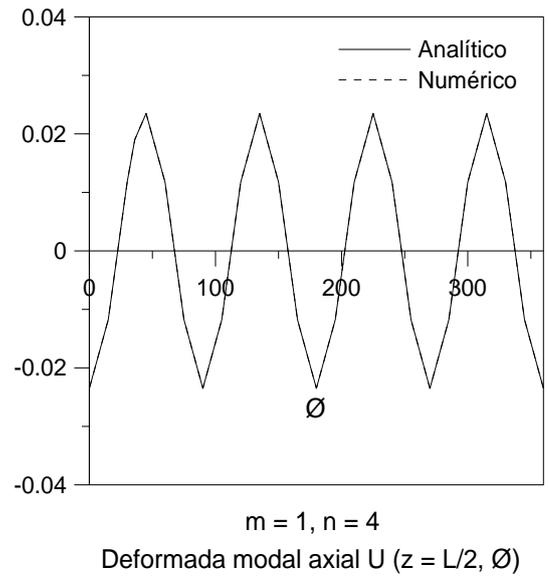
(c)



(d)

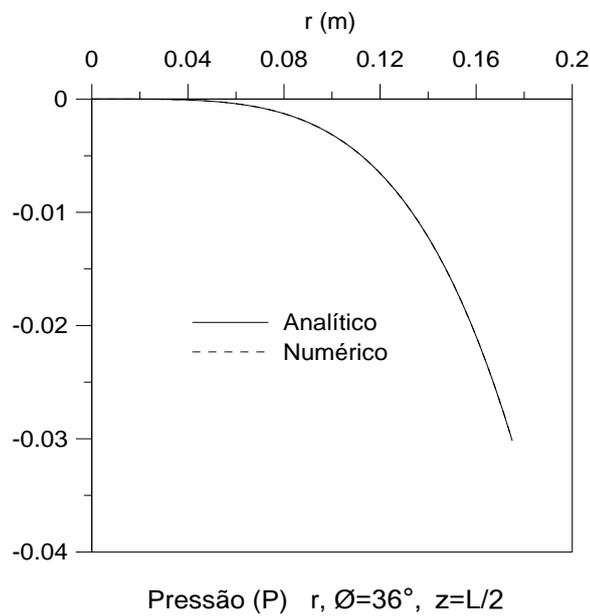


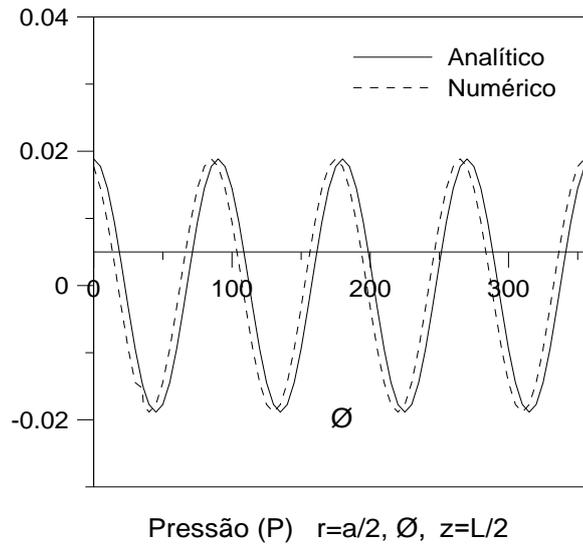
(e)



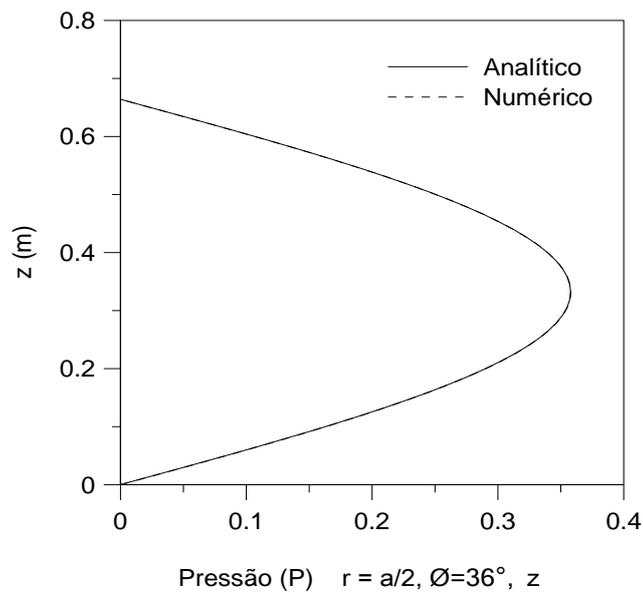
(f)

Figura 5.8 - Deformadas modais para o sistema acoplado: (a) e (b) radial, (c) e (d) circunferencial e (e) e (f) axial, ao longo de duas trajetórias: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\varnothing = 36^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \varnothing \leq 360^\circ$) em $z = L/2$.

(a) Uma reta ($0 \leq r \leq a$), em $\varnothing = 36^\circ$ e $z = L/2$



(b) uma circunferência ($0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$) em $r = a/2$ e $z = L/2$



(c) Uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $r = a/2$ e $\phi = 36^\circ$.

Figura 5.9 - Modos de vibração de pressão para o sistema acoplado ao longo de três curvas: Uma reta ($0 \leq r \leq a$), em $\phi = 36^\circ$ e $z = L/2$, uma circunferência ($0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$) em $r = a/2$ e $z = L/2$, e uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $r = a/2$ e $\phi = 36^\circ$.

Como observado, na Tabela 5.10 e Figura 5.8, Figura 5.9, os resultados analítico e numérico coincidem muito bem tanto nas frequências naturais quanto nas deformadas modais.

A Tabela 5.14 apresenta as dez primeiras frequências numéricas comparativas dos sistemas casca cilíndrica e acoplamento casca-cavidade.

Tabela 5.14 - Frequências numéricas comparativas casca vs casca-cavidade.

Estrutura Casca		Acoplamento Fluido-Estrutura	
N (i, m, n)	ω (rad/s)	N (i, m, n)	ω (rad/s)
1 (1,1,4)	1410,07	1 (1,1,4)	567,2
2 (1,1,5)	1458,14	2 (1,1,5)	637,8
4 (1,1,3)	2022,2	3 (1,1,3)	736,3
3 (1,1,6)	1878,48	4 (1,1,6)	881,9
5 (1,1,7)	2497,6	5 (1,1,7)	1243,9
11 (1,1,2)	3830,29	6 (1,1,2)	1248,5
6 (1,2,6)	2805,6	7 (1,2,6)	1329,21
8 (1,2,5)	3160,4	8 (1,2,5)	1401,8
7 (1,2,7)	2998,2	9 (1,2,7)	1504,4
10 (1,2,8)	3544,2	10 (1,2,8)	1703,6
9 (1,1,8)	3246,6		

Verifica-se que as formas modais acopladas das dez primeiras frequências, como mostra a Tabela 5.14 se caracterizam pelo modo controlado pela estrutura. Isso ocorre devido ao fato de que o sólido provoca uma perturbação na cavidade o que força o fluido a acompanhar a sua deformada, como observado nas colunas radial (W) e Pressão (P) na Tabela 5.11, Tabela 5.12 e Tabela 5.13.

Como o modo da estrutura é dominante, pode-se comparar esse resultado com a frequência correspondente para o caso desacoplado.

Observa-se que esse valor é maior que o resultado obtido no caso acoplado, devido à existência de massa adicional incorporada ao sistema fluido-estrutura.

Os modos da estrutura não apresentam excitação de formas modais típicas da cavidade, mas adicionam massa de fluido à estrutura, como se pode observar pela perturbação da região de fluido em contato com a parede da estrutura.

As frequências naturais $\omega_{i,m,n}$ analíticas, para o primeiro grupo de frequências $i = 1$, para combinações modais com $m = 1$ a 5 e $n = 1$ a 10, são mostradas na Figura 5.10.

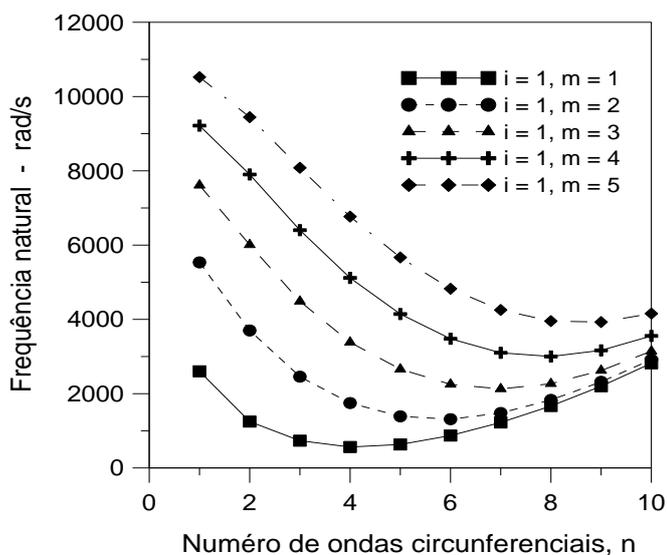


Figura 5.10 - Frequências naturais analíticas acopladas.

A Figura 5.11 apresenta as frequências naturais analíticas, $i = 1$ para as combinações modais $m = 1$ e 2 e $n = 3$ a 7 em Hz, para a estrutura desacoplada (casca cilíndrica vazia) e para o sistema acoplado fluido-estrutura FE (casca preenchida totalmente de água). A Figura 5.12 tem a mesma informação de acordo com Amabili e Dalpiaz (1995).

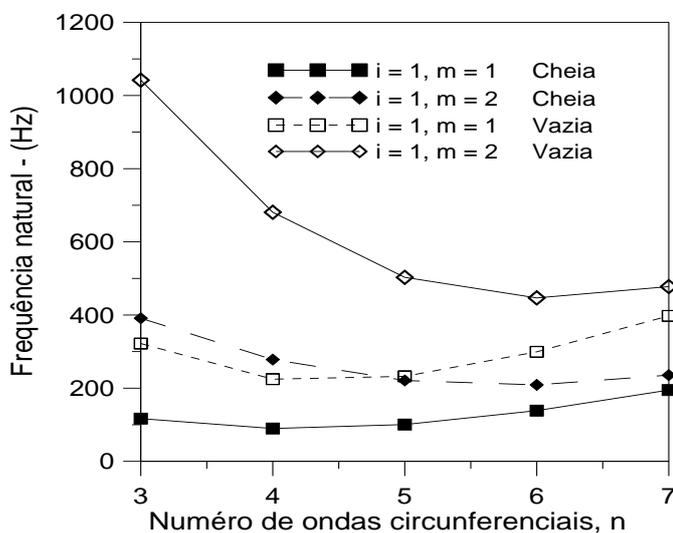


Figura 5.11 - Frequências naturais analíticas para a casca vazia e cheia.

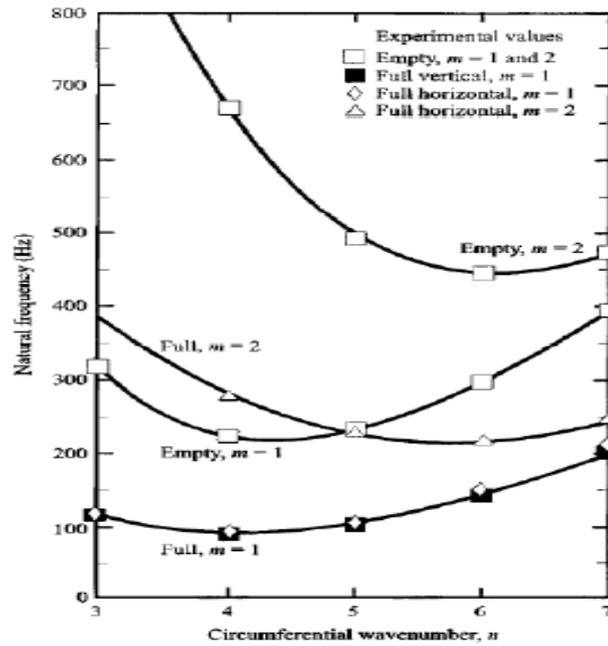


Figura 5.12 - Frequências naturais teóricas (linha contínua) e experimentais (símbolos) versus o número de ondas circunferenciais n , para $m = 1$ e 2, para uma casca vazia (*empty*) e preenchida com água (*full*) com extremidades abertas e bi-apoiada, (Amabili e Dalpiaz, 1995).

Comparando as Figura 5.11 e Figura 5.12, pode se verificar, mais uma vez a consistência do método empregado.

Observa-se na Figura 5.11, que tanto para a casca vazia, quanto para a casca preenchida de fluido, as frequência naturais atingem um valor mínimo para o mesmo valor de $n = 5$.

Isto indica que a energia interna de deformação elástica é praticamente idêntica nos dois casos. Pode-se concluir que o decréscimo acentuado das frequências no caso da casca cheia de liquido em relação ao caso da casca vazia, é explicado pelo aumento acentuado da energia cinética do sistema fluido-estrutura, que é traduzido pelo acréscimo do parâmetro de massa virtual ζ nas equações de movimento, ver Equação (3.173), sem um aumento correspondente da energia potencial do sistema. Sempre que isto ocorre em um sistema dinâmico conservativo há um decréscimo nas frequências naturais.

5.1.3.1 Considerações finais Caso 1.C.

A casca cilíndrica com condições de contorno simplesmente apoiada, acoplada a um fluido acústico ou cavidade acústica com extremos abertos (isto é, pressão zero), foi estudada

em uma análise de vibrações livres pelas abordagens analítica e numérica em um estudo comparativo. Os resultados caracterizam-se por uma boa aproximação. Percebe-se as suavidades das soluções analíticas em relação com a rigidez da solução numérica, isto é observado na análise de convergência, em especial na convergência para o modelo numérico acoplado, ver Figura 4.11, onde para a primeira mudança no nível de refinamento na superfície de interação fluido-estrutura a diminuição do erro foi considerável, passando de 47 % a 17 % para a primeira frequência natural, e de 37 % a 6 % para a segunda frequência natural.

Analiticamente a solução baseasse em incorporar nas equações do movimento da casca cilíndrica, o efeito da força de inércia do líquido oscilante, como massa virtual.

O qual permitira obter as frequências naturais para o sistema acoplado casca-cavidade acústica ou (casca-fluido acústico).

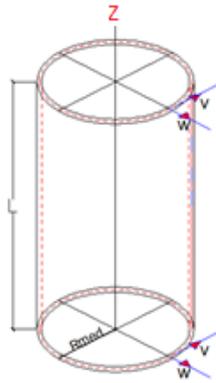
Pode ser visto que as ordens das frequências naturais para a casca contendo o fluido decrescem a metade ou terceira parte das ordem das frequências naturais para a casca vazia. Neste método desprezasse o efeito hidrostático da água e se particulariza o efeito oscilatório da pressão do líquido considerado como uma massa adicional para a casca.

5.1.4 Caso 1.D.

Tratasse de uma casca cilíndrica, com condições de contorno simplesmente apoiadas (A-A), Considera-se uma solução geral simplificada estudada em Sharma e Johns (1971), onde o polinômio característico de frequências (3.82) pode ser consideravelmente simplificado, se a deformação circunferencial e de cisalhamento da casca são negligenciadas.

Obtendo se assim, uma formula aproximada de frequência linear. Para maior informação dos estudos realizados para esta simplificação refira-se Sharma e Johns (1971) e Blevins (1979). Uma análise de vibração livre por uma abordagem analítica e numérica e realizada.

As condições de contorno para uma casca cilíndrica, a qual está simplesmente apoiada em seus extremos, são apresentadas na Figura 5.13:



Condições nos apoios

$$v = w = 0$$

$$N_z = m_z = 0$$

$$\text{em } z = 0 \text{ e } z = L$$

Figura 5.13 - Condições de casca cilíndrica simplesmente apoiada (A – A)

Para o modelo da casca (A-A) apresenta-se na Tabela 5.15, as primeiras frequências naturais circulares em Hertz definidas como $F_{m,n}$, sendo m o número de semi-ondas para o modo de vibração longitudinal e n o número de ondas para o modo de vibração circunferencial.

Tabela 5.15 - Comparação entre os resultados analíticos e numéricos para o caso apoiado-apoiado (A-A).

m	n	Frequência Analítica (Hz)	Frequência Numérica (Hz)	Erro (%)
1	1	1482,0	1480,6	0,09
	2	908,0	903,0	0,55
	3	2047,0	2044,6	0,12
	4	3867,0	3866,5	0,01
	5	6229,0	6228,2	0,01
	6	9120,0	9117,5	0,03
	7	12539,0	12532,0	0,06
2	1	4377,0	4376,1	0,02
	2	2082,0	2073,2	0,42
	3	2347,0	2337,6	0,40
	4	4015,0	4008,7	0,16
	5	6351,0	6346,0	0,08
	6	9237,0	9230,6	0,07
	7	12654,0	12644,0	0,08

Os resultados das frequências obtidos na Tabela 5.15, para o caso de vinculação apoiado-apoiado, caracterizam-se por um excelente resultado, pois as frequências obtidas pela teoria

analítica e pelo software ANSYS (método numérico) são praticamente iguais, ou seja, os erros são mínimos, o qual mostra uma boa coerência do modelo numérico e a formulação analítica para esta condição de contorno.

Na Figura 5.14 mostra-se o gráfico que relaciona o número de ondas circunferenciais n com a frequência $F_{m,n}$ em Hertz, pode-se ver como à partir do ponto de inflexão no qual a frequência chega a obter um valor mínimo, as frequências aumentam junto ao número de ondas circunferenciais. A menor frequência representa maior importância, uma vez que está relacionada com os maiores amplitudes nos deslocamentos.

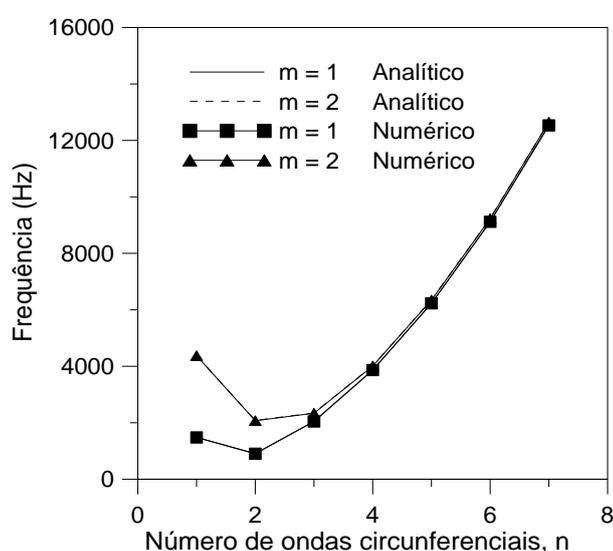


Figura 5.14- Frequências naturais para uma casca cilíndrica circular vibrando livremente com seus extremos apoiado-apoiado.

Os resultados dos deslocamentos analíticos e numéricos do modo de vibração radial, correspondentes à frequência $F_{m=1, n=4}$, são apresentados a seguir na Figura 5.15 o deslocamento radial, é mostrado ao longo de duas curvas: uma uma linha ($0 \leq \varnothing \leq L$) em $\varnothing = 36^\circ$ e uma circunferência ($0 \leq \varnothing \leq L$) em $z = L/2$.

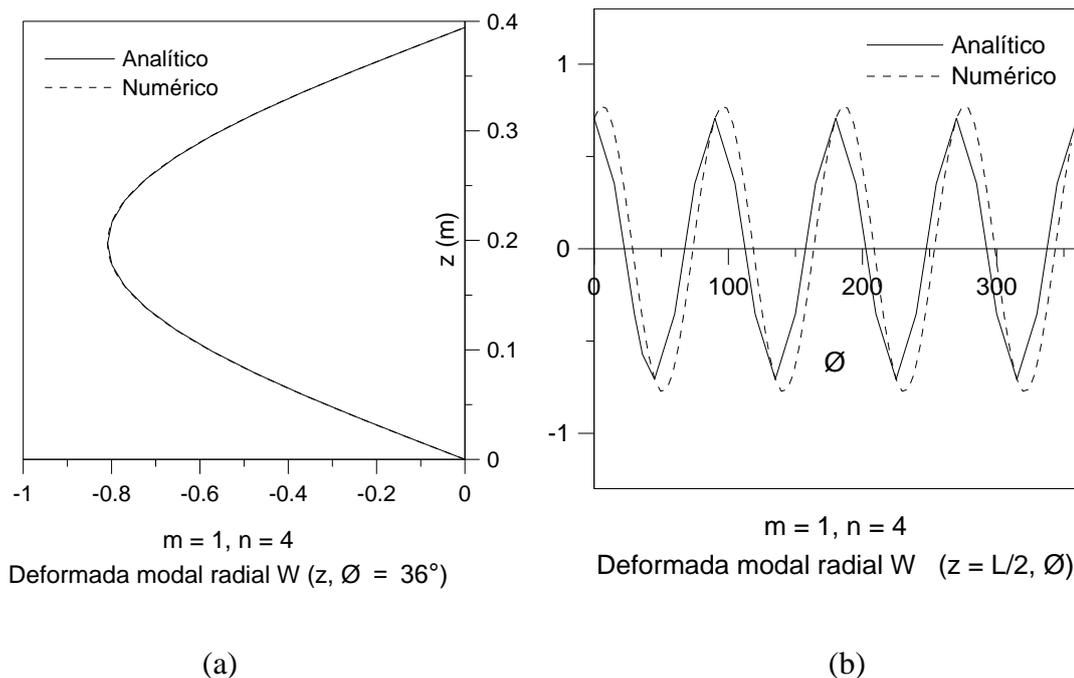


Figura 5.15-Modos de vibração radial ao longo de duas trajetórias: (a) uma linha ($0 \leq \varnothing \leq L$) em $\varnothing = 36^\circ$ e (b) uma circunferência ($0 \leq \varnothing \leq L$) em $z = L/2$

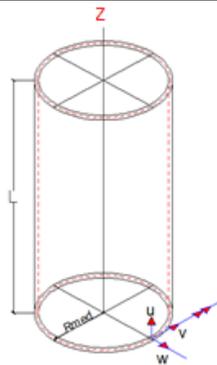
Pode-se observar como os deslocamentos analíticos e numéricos fornecem bons resultados para esse tipo de condição de contorno, embora exista uma pequena defasagem entre as respostas analítica e numérica no deslocamento radial.

5.1.5 Caso 2.

Tratasse de uma casca cilíndrica, com condições de contorno engastada-livre (E-L), estudada mediante a solução simplificada encontrada por Sharma e Johns (1971).

As frequências naturais e deformadas modais foram obtidas pelas abordagens analítica e numérica.

As condições de contorno para uma casca cilíndrica, a qual esta engastada em um extremo e livre no outro, mostra-se na Figura 5.16:



Condições nos apoios

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \text{ em } z = 0$$

$$N_z = m_z = 0 \text{ em } z = L$$

Figura 5.16 - Casca cilíndrica E - L

Na Tabela 5.16, encontram-se as frequências naturais $F_{m,n}$ para o modelo da casca definido anteriormente com condições de borda engastada-livre, em função dos modos longitudinal m e circunferencial n .

Tabela 5.16 - Comparação entre os resultados analíticos e numéricos para o caso engastado-livre E-L.

m	n	Frequência Analítica (Hz)	Frequência Numérica (Hz)	Erro (%)
1	1	643,9	566,5	12,02
	2	742,2	736,8	0,73
	3	2009,1	2002,9	0,31
	4	3840,7	3829,2	0,30
	5	6205,0	6187,1	0,29
	6	9097,8	9072,4	0,28
	7	12517,7	12483,0	0,28
2	1	3679,0	2501,4	32,01
	2	1496,9	1320,7	11,77
	3	2170,3	2142,2	1,30
	4	3939,5	3917,6	0,56
	5	6296,2	6267,9	0,45
	6	9188,3	9152,9	0,39
	7	12608,9	12565,0	0,35

Na Tabela 5.16, pode-se observar que os resultados das frequências numéricas apresentam erros consideráveis para as combinações modais mais baixas, já melhorando para combinações modais mais altas, como é previsto pela formulação utilizada.

Na Figura 5.17, mostra-se o gráfico que relaciona o número de ondas circunferenciais n com a frequência $F_{m,n}$ em Hertz, apreciase, que a frequência mais baixa apresentada no ponto de inflexão corresponde a baixos valores n , logo depois do ponto de inflexão acontece uma tendência proporcional F vs n .

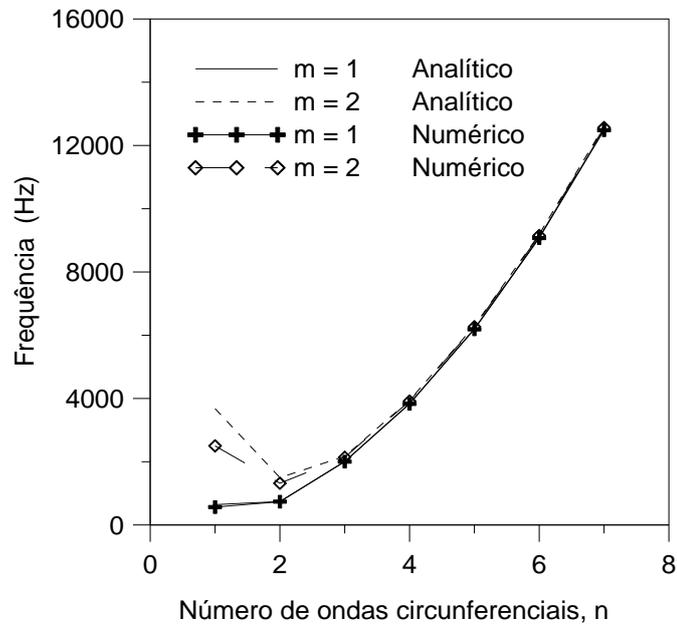


Figura 5.17 - Frequências naturais para uma casca cilíndrica circular vibrando livremente com seus extremos engastado-livre.

Os resultados analítico e numérico da deformada modal radial correspondente a $m = 1, n = 4$, ao longo de duas trajetórias: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\varnothing = 36^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \varnothing \leq 360^\circ$) em $z = L/2$ apresenta-se na Figura 5.18

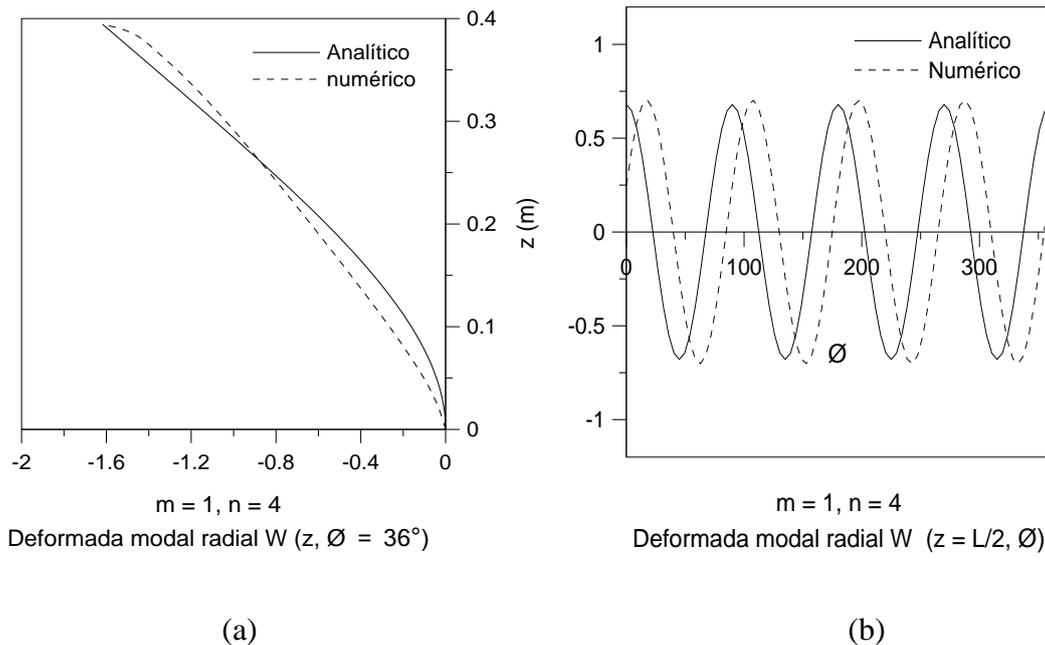


Figura 5.18 - Modos de vibração radial ao longo de duas trajetórias: (a) uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\varnothing = 36^\circ$ e (b) uma circunferência ($0^\circ \leq \varnothing \leq 360^\circ$) em $z = L/2$.

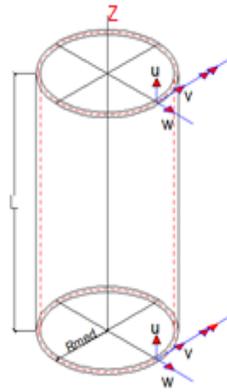
Observa-se que as deformadas modais analíticas e numéricas fornecem bons resultados para esse tipo de condição de contorno, apesar de uma pequena defasagem entre as respostas do anel. Na Figura 5.18a é de apreciar a influencia da restrição ao giro gerada pela condição engastada na semi-onda $m = 1$ em $z = 0$.

Assim os deslocamentos radiais além de ter muito boa precisão são os de maior importância para os estudos aqui realizados.

5.1.6 Caso 3.

Tratasse de uma casca cilíndrica, com condições de contorno engastada-engastada (E-E), estudada assumindo a solução simplificada encontrada por Sharma e Johns (1971). As soluções obtidas para este caso são comparadas com soluções experimentais obtidas por Wang e Lai (2000), *apud* Zhang (2002). A análise de vibração livre é realizada analítica e numericamente.

As condições de contorno para uma casca cilíndrica, a qual está engastada nos dois extremos, mostra-se na Figura 5.19:



Condições nos apoios

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

em $z = 0, L$

Figura 5.19 - Casca cilíndrica Engastada - Engastada (E-E)

Na Tabela 5.17, encontram-se as frequências para o modelo da casca definido anteriormente com condições de borda engastada-engastada. Para este modelo comparam-se os resultados analíticos, numéricos com a solução experimental encontrada Wang e Lai (2000) *apud* Zhang (2002). Para este caso os erros foram encontrados com referência das frequências experimentais.

Tabela 5.17 - Comparação entre os resultados analíticos, numéricos e experimentais para o caso engastado-engastado.

m	n	Frequência Analítica (Hz)	Frequência Numérica (Hz)	Frequência Experimental (Hz) ⁽¹⁾	Erro (%) Analítico	Erro (%) Numérico
1	1	4249,3	2303,5	-	-	-
	2	1527,0	1270,2	1240,0	23,15	2,44
	3	2147,3	2104,4	2150,0	0,13	2,12
	4	3950,8	3881,6	3970,0	0,48	2,23
	5	6366,4	6234,0	6320,0	0,73	1,36
	6	9334,4	9120,1	9230,0	1,13	1,19
	7	12846,2	12533,0	12600,0	1,95	0,53
	8	16899,9	16470,0	-	-	-
2	1	11803,5	4735,9	-	-	-
	2	3802,4	2561,7	2440,0	55,84	4,99
	3	2702,9	2531,0	2560,0	5,58	1,13
	4	4062,1	4065,6	4160,0	2,35	2,27
	5	6395,7	6367,7	6475,0	1,23	1,66
	6	9344,2	9240,5	9380,0	0,38	1,49
	7	12850,1	12649,0	12750,0	0,79	0,79
	8	16901,6	16584	-	-	-

(1) Wang e Lai (2000) *apud* Zhang (2002)

Para os resultados analíticos, observam-se erros consideráveis para as combinações modais mais baixas, já melhorando para combinações modais mais altas.

Na Figura 5.20, mostra-se o gráfico que relaciona o número de ondas circunferenciais (n) com a frequência (F) em Hertz, pode-se ver, novamente, o ponto de inflexão. A teoria apresenta grandes discrepâncias para baixas combinações modais e para esta condição de contorno (E-E).

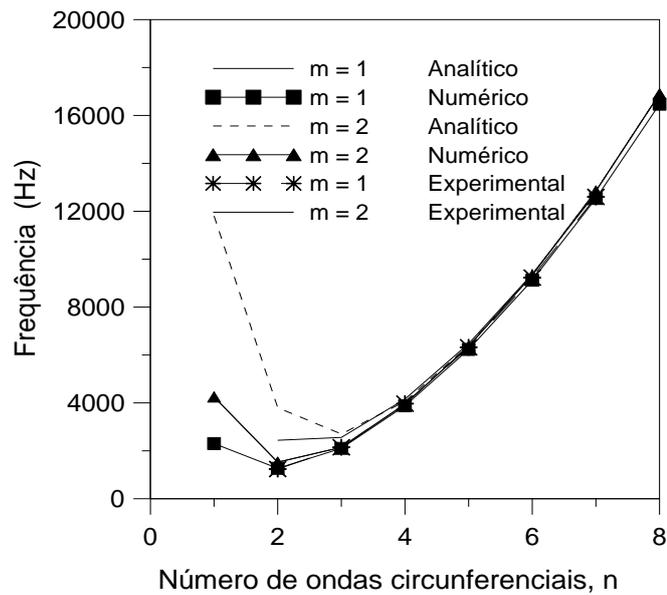


Figura 5.20 - Frequências naturais para uma casca cilíndrica circular vibrando livremente com seus extremos engastados.

Os resultados dos deslocamentos analíticos e numéricos para o modo de vibração radial, correspondentes à frequência $F_{m=1,n=4}$, são apresentados a seguir na Figura 5.21. Para cada deslocamento, é mostrado o modo de vibração ao longo de duas trajetórias: uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\phi = 36^\circ$ e uma circunferência ($0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$) em $z = L/2$.

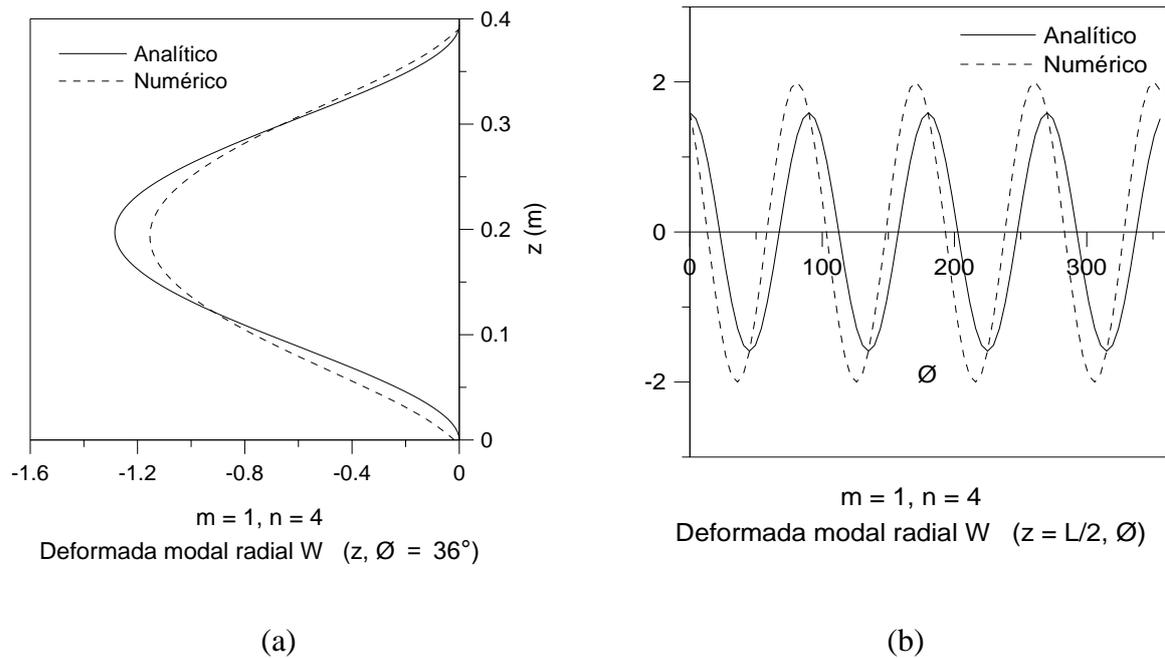


Figura 5.21 - Modos de vibração radial ao longo de duas trajetórias : (a) uma reta ($0 \leq z \leq L$) em $\varnothing = 36^\circ$ e (b) uma circunferência ($0^\circ \leq \varnothing \leq 360^\circ$) em $z = L/2$.

Os resultados analíticos e numéricos apresentam boa aproximação para as deformações modais radial.

5.1.6.1 Considerações finais Casos (1.D., 2. e 3.)

Para os seguintes casos realizase uma análise de vibração livre a uma casca cilíndrica para três diferentes condições de apoio, (isto é apoiada-apoiada, engastada-livre, engastada-engastada).

As três condições de contorno foram abordadas analítica e numericamente, obtendo resultados muito proximos em geral. Observa-se maiores erros para as primeras combinações modais, isto é ($m = 1, n = 1, 2$) e ($m = 2, n = 1, 2$).

A solução analítica para o Caso 1.D. apresentou o melhor dos resultados entre as três condições de contorno estudadas, já nos Casos 2 e 3, os resultados embora bons apreciam-se um pouco mais distantes. Pode-se pensar uma forma de solução exata para a condição de contorno apoiada - apoiada, implementando uma expansão trigonometrica seno da teoria de viga; Já as outras condições apresentam soluções em expansões modais mais complexas as quais perdem um pouco de precisão no tratamento numerico de Rayleigh-Ritz.

Observase nas Figuras 5.16b e 5.20b, como as deformadas modais circunferenciais são similares, independente da condição de contorno estudada, no entanto o aspecto das deformadas longitudinais, dependente das condições de extremidade na casca cilíndrica.

Assim pois observase a diferencia na configuração suavizada da semi-onda longitudinal na Figura 5.13a isto para a condição simplesmente apoiada, em comparação com a configuração da semi-onda sobre a influencia da restrição ao giro para os casos engastado-livre (E-L) e engastado- engastado (E-E), apresentados nas Figuras 5.16a e 5.20a.

5.1.7 Caso 4.

Efeito da restrição axial nas frequências naturais de cascas cilíndricas

Tratasse de uma análise numérica, no qual estudasse o efeito da restrição axial nas frequências naturais de uma casca cilíndrica, para três tipos de vinculação, engastado-engastado (E-E), apoiado-apoiado (A-A) sem restrição axial e apoiado-apoiado (A-A) com restrição axial vs uma relação geométrica (L/a), variando apenas L .

Forsberg (1964) percebeu que há diferenças nas frequências naturais de uma casca cilíndrica simplesmente apoiada sem restrição axial e uma similar engastada nos seus extremos. Essa diferença é, primeiramente, devida à adição da restrição axial e não pelo engastamento de sua extremidade. Isto sugere que a restrição ao deslocamento axial pode ser mais importante que a rotação local nas extremidades para o calculo das frequências naturais.

Na Tabela 5.18, apresentam-se os resultados dos parâmetros adimensionais de frequência ξ para três tipos de vinculação, engastado-engastado (E-E), apoiado-apoiado (A-A) sem restrição axial e apoiado-apoiado (A-A) com restrição axial vs uma relação geométrica (L/a), variando apenas L .

Tabela 5.18 - Diferença nas frequências naturais de acordo com as condições de vinculação nos extremos da casca

L/a	E - E		A - A; Sim Rest Axial		A - A; Com Rest Axial	
	w	$f = w a$	w	$f = w a$	w	$f = w a$
1	1827,6	720,8	1809,9	713,9	1827,6	720,8
2	2498,5	492,7	2453,9	483,9	2498,5	492,7
5	2566,1	202,4	1995,9	157,4	2566,1	202,4
8,13	2303,5	111,8	1480,6	71,8	2303,5	111,8
10	2130,3	84,0	1265,9	49,9	2130,3	84,0
20	1405,4	27,7	689,8	13,6	1405,4	27,7
50	632,1	5,0	284,3	2,2	632,1	5,0
100	325,2	1,3	144,3	0,6	325,2	1,3

Na Figura 5.22, verifica-se o aumento no parâmetro adimensional de frequência ao restringir o deslocamento axial nos extremos da casca.

De acordo com o apresentado na literatura especializada. O parâmetro de frequência e as frequências naturais, para o caso engastado-engastado e apoiado-apoiado com restrição axial, apresentou valores idênticos (as curvas se sobrepõem).

Observa-se quanto mais longa a casca, ou seja, maior relação L/a mais sensível é a diferença observada entre as condições de vinculação com e sem restrição axial.

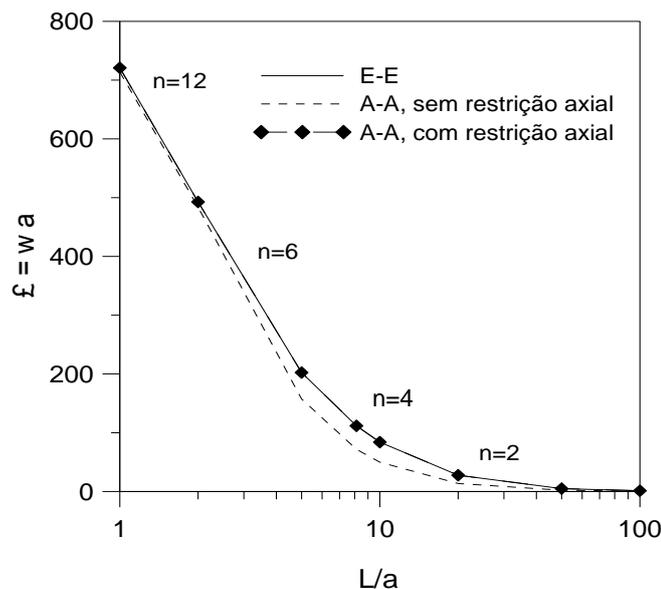


Figura 5.22 - Variação do parâmetro de frequência f em função da relação L/a , para $m = 1$.

5.1.7.1 Considerações Caso 4.

Sugere-se que a restrição ao deslocamento axial pode ser mais importante que a rotação local nas extremidades para o cálculo das frequências naturais.

As soluções numéricas foram comparadas os trabalhos teóricos em Blevins (1979) e Forsberg (1964).

Do estudo verifica-se o aumento na frequência natural na casca ao restringir o deslocamento axial nos extremos. também se percebe quanto mais longa é a casca mais sensível é a diferença observada na frequência entre as condições de vinculação com e sem restrição axial.

6 CONCLUSÕES

Para o estudo das características modais de cascas cilíndricas vazias e cheias com líquido, considerou-se o estudo de 8 casos, através de uma análise comparativa entre as soluções analíticas e numéricas.

Os três primeiros casos: Caso 1.A., Caso 1.B. e Caso 1.C., apresentam o estudo do acoplamento fluido-estrutura em um sistema casca cilíndrica-fluido acústico.

No Caso 1.A., analisou-se uma casca cilíndrica circular reta de paredes finas, simplesmente apoiada e sem restrição axial, Os dados obtidos pelas abordagens analítica e numérica mostraram-se bastante próximos, o que garante a coerência dos resultados. A modelagem da casca foi feita com a utilização da teoria linear de Donnell e as expansões modais de funções de viga. Observa-se que a menor frequência natural não esta necessariamente associada aos menores valores do numero de ondas circunferenciais, n .

Observa-se a grande variedade de deformadas modais com aspecto bastante diferenciado, obtidas a partir das equações dinâmicas que descrevem a casca cilíndrica, dentro das quais estão as vibrações transversal, longitudinal e torcional que apresentam formato identico ao de vigas tubulares, as vibrações a flexão e extensional no plano do anel, alem dos modos de vibração propios da teoria de cascas. Assim no estudo de vibrações livres de cascas cilíndricas pode ser observado modos da teoria de viga, de anel e próprios da teoria de casca.

No Caso 1.B. Analisou-se a cavidade acústica com geometria cilíndrica, aberta nos extremos e rígida na lateral, O estudo comparativo analítico e numérico caracteriza-se por uma excelente aproximação entre os resultados, se destacando por uma boa coerência entre o modelo numérico e a formulação analítica para estas condições de contorno.

Analicamente obteve-se a solução da equação de Helmholtz (que representa a base teórica para o fluido) através do método de separação de variáveis, os resultados são expressos em termos de frequências naturais e modos de pressão.

Observa-se que as frequências naturais da cavidade acústica são na ordem de 5 a 10 vezes superiores as frequências naturais para a casca vazia.

No Caso 1.C. estudou-se a análise de vibrações livres pelas abordagens analítica e numérica para o sistema acoplado casca-cavidade, Os resultados caracterizam-se por uma boa aproximação. Analiticamente o efeito do líquido foi incorporado nas equações do movimento da casca, como massa virtual, isto quando a pressão exercida pelo líquido sobre a superfície do reservatório é devida a força de inércia do líquido oscilante.

Pode ser visto que as frequências naturais para a casca contendo o fluido se reduz aproximadamente da metade a terça parte do valor das frequências para a casca vazia.

Observa-se de maneira acentuada que os modos naturais dominantes para o sistema acoplado são os modos naturais da estrutura.

Percebe-se a suavidade das soluções analíticas em relação a rigidez da solução numérica, isto é observado nas análise de convergência, em especial na convergência do modelo numérico fluido-estrutura, em que para a primeira mudança no nível de refinamento na superfície de interação fluido-estrutura ocorre uma diminuição considerável do erro.

Na segunda parte do trabalho, Caso 1.D., Caso 2. e Caso 3. estuda-se analítica e numericamente as vibrações livres de uma casca cilíndrica para as três condições de apoio: apoiada-apoiada, engastada-livre e engastada-engastada.

Utilizou-se um metodo aproximado para o calculo da frequencias naturais, em que a deformada circunferencial e a deformada cisalhante, foi despreada. Obteve-se resultados muito proximos entre ambas soluções, Observandou-se maiores erros para as primeras combinações modais (m, n) , devido que a teoria é mais aproximada para modos circunferenciais elevados.

A solução analítica para o Caso 1.D. (casca cilíndrica apoiada-apoiada) apresentou o melhor resultado entre as três condições de contorno estudadas. Por outro lado, nas soluções analíticas para a casca cilíndrica com condições de contorno Caso 2. e Caso 3 assume-se soluções aproximadas em expansões modais mais complexas, as quais perdem um pouco da precisão no tratamento numerico.

Observa-se que as deformadas modais circunferenciais são similares, independente da condição de contorno. No entanto, o aspecto da deformada longitudinal depende das condições de vinculação na casca cilíndrica,

Observa-se a diferença no desenho da semi-onda longitudinal para a vinculação simplesmente apoiada, em comparação com aquele da semi-onda sobre a influencia da restrição ao giro para os casos engastado-livre (E-L) e engastado- engastado (E-E).

Finalmente, para o Caso 4. Conclui-se que para o calculo das frequências naturais, a restrição ao deslocamento axial pode ser mais importante que a restrição ao giro nas extremidades, tendo em vista que ao restringir o deslocamento axial nos extremos se percebe um aumento da frequência natural na casca.

Também se percebe que quanto mais longa é a casca mais sensível é a diferença observada na frequência ao se considerar condições de vinculação com e sem restrição axial.

7 TRABALHOS FUTUROS

Pesquisas nesta direção que podem contribuir ao desenvolvimento de temas mais complexos ou no aprimoramento das soluções aqui apresentadas são:

- Estudar amplamente a instabilidade dinâmica de sistemas acoplados fluido-estrutura em estrutura casca cilíndrica.
- Estudar as vibrações não lineares de cascas cilíndricas contendo líquido.
- Estudo sobre as variáveis aleatórias na instabilidade dinâmica de cascas cilíndricas.
- Estudos de interação modal considerando o efeito de modos não lineares e diversas relações de cargas críticas e frequências naturais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Amabili, M. & Païdoussis, M. P., “Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid structure interaction”, *Applied Mechanics Review*, vol. 56, pp. 349v- 381, 2003.

Amabili, M., “Large deflection of circular cylindrical shells”. In: *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*, Cambridge University Press, New York, USA, 2008.

Amabili, M., Pellicano, F. & Païdoussis, M. P. “Non-linear dynamics and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid.” Part I: stability. *Journal of Sound and Vibration*, v225, p. 655-699, 1999a.

Amabili, M., Pellicano, F. & Païdoussis, M. P. “Non-linear dynamics and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid.” Part II: Large-amplitude vibrations without flow. *Journal of Sound and Vibration*, v228, p. 1103-1124, 1999b.

Amabili, M., Pellicano, F. & Païdoussis, M. P. “Non-linear dynamics and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid.” Part III: Truncation effect without flow and experiment. *Journal of Sound and Vibration*, v237, p. 641-666, 2000a.

Amabili, M., Pellicano, F. & Païdoussis, M. P. “Non-linear vibrations of fluid-filled, simply supported circular cylindrical shells: theory and experiments.” *The 2000 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition – Non-linear Dynamics of Shells and Plates*, Orlando, p 73-84. 2000b.

Amabili, M., & Dalpiaz, G. “Breathing vibrations of a Horizontal Cylindrical tank shell, partially filled with liquid”. *Journal of Vibration and Acoustics*. 1995.

Argenta, A. L. & Del Prado, Z. J. G.. “Influência das soluções modais e da geometria na instabilidade dinâmica de cascas cilíndricas”. Relatório Técnico, Escola de Engenharia Civil , Universidade Federal de Goiás, 74605-220, Brasil. 2014.

Budiansky, B. & Sanders, J. L., “On the ‘best’ first order linear shell theory” *Progress in applied mechanics*, New York, Macmillan. 1963.

Betts, J. F. “Finite Element Study of Plane Wave Acoustic Phenomena In Ducts”. *Dissertação de Mestrado de Engenharia Mecânica*, Instituto Politécnico de Virginia e a Universidade del estado de Virginia. 1998.

Berry, J. G. & Reissner, E. “The effect of an internal compressible fluid column on the breathing vibrations of a thin pressurized cylindrical shell.” *J. Aeronautical Sci.* 25, 288-294. 1958.

Blevins, R. D, *Formulas for the Natural Frequency and Mode Shape*. Krieger Publishing Company. 1979.

Brito, L. A. P. F, “Estudo da Influência dos Componentes de uma Fuselagem na Frequência de Vibração Livre da Estrutura e seu Acoplamento com o Fluido Interno”. *Dissertação Mestrado em Engenharia Aeronáutica e Mecânica*. Divisão de Pós-graduação, ITA, São José dos Campos. 2000.

Bhuta, P. & Koval, L. R. “Hydroelastic solution of the sloshing of a liquid in a cylindrical tank.” *J. Acoust. Soc. Am.* 36 (11), 2071-2079, 1964.

Campos Junior; “Procedimentos progressivos analíticos e numéricos para análise de barragens em arco” *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*, UnB, 2011.

Chen, J. D. & Babcock, C. D. “Non-linear vibration of cylindrical shells.” *American Institute of Aeronautics Journal*, v13, p. 868-876, 1975.

Chiba, M., Yamaki, N., & Tani, J., “Free vibration of a clamped-free circular cylindrical shell partially filled with liquid” – Part I: *Theoretical Analysis, Thin-walled structures 2*, 265 – 284, (1984).

Chiba, M., Yamaki, N., & Tani, J., “Free vibration of a clamped-free circular cylindrical shell partially filled with liquid” – Part II: *Numerical Results, Thin-walled structures 2*, 307 – 324, (1984).

Dai, L. et al. "An exact series solution for the vibration analysis of cylindrical shells with arbitrary boundary conditions." *Applied Acoustics*. 2012.

Donnell, L. H., *Beams, Plates, and Shells*. New York: McGraw-Hill. 1976.

Donnell, L. H., "Stability of thin walled tubes under torsion," *NACA Report N°479*. 1933.

Farshindianfar, A., Farshindianfar, M. H., Crocker, M. J. and Smith W. O., "The vibration analysis of long cylindrical shells using acoustical excitation." *Journal of Sound and Vibration*, vol. 232, pp. 917-943, 2010.

Farshindianfar, A. & Oliazadeh, P., "Free vibration analysis of circular cylindrical shells: comparison of different shell theories." *International Journal of Mechanics and applications*, 2 (5): 74 – 80, 2012.

Fernholz, C. M, Robinson, J. H. (1990). "Fully-Coupled Fluid/Structure Vibration Analysis Using MSC/NASTRAN", *NASA technical memorandum 102857*, 1990.

Feio da Silva; "Uma aplicação dos métodos dos elementos finitos e diferenças finitas à interação fluido estrutura" *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*, UnB, 2007.

Flügge, W. *Stresses in shells*. New York. Springer. 1973.

Flügge, W. *Theory of Shells*. Berlin: Springer-Verlag. 1932.

Forsberg, K., "Influence of boundary conditions on the modal characteristics of thin cylindrical shells." *AIAA j.* 2, 2150-2157. 1964.

Ginberg, J. H. "Large-amplitude forced vibrations of simply supported thin cylindrical shells." *Journal of Applied Mechanics*, v40,p. 471-477, 1973.

Gonçalves, P. B. & Prado, Z. J. G. N. “Low-Dimensional Galerkin Models for Nonlinear Vibration and Instability Analysis of Cylindrical Shells.” *Nonlinear Dynamics*, v. 41, p. 129-145, 2005.

Gonçalves, P. B., “Non-linear dynamics interaction between fluid and thin shells.” *Tese de Doutorado*, Universidade Federal de Rio De Janeiro-COPPE-UFRJ. 1987.

Gonçalves, P. B., “Linear vibrations of thin shells in a fluid medium.” *Rio*. 1985.

Kim, Y. W., Lee, Y.S. & Ko, S. H. (2003). “Coupled vibration of partially fluid-filled cylindrical shells with ring stiffener”. In: *Journal of Sound and Vibration*, 276 (2004) 869-897. DOI: 10.1016/j.jsv.2003.08.008.

Koga, T. & Tsushima, M., “Breathing vibrations of a liquid – filled circular cylindrical shell”, *Int. J. Solids Structures* vol. 26, No 9/10. pp. 1005-1015, 1990.

Koga, T. & Saito, A. “The inextensional free vibrations of circular cylindrical shells.” *AIAA JL* 26, 1499-1505, 1988.

Koga, T. “Effects of boundary conditions on the free vibrations of circular cylindrical shells under uniform external pressure”. *AIAAJL* 27, 242-248, 1988.

Koga, T. & Morimatsu, S. “Bifurcation buckling of circular cylindrical shells under uniform external pressure.” *AIAA JL* 27, 242-248, 1989.

Kraus, H. (1967). *Thin Elastic Shells*. New York: Wiley.

Kinsler, L. E. & Frey, A. R., *Fundamentals of Acoustics*, 2 Edn., John Wiley, New York, 1962.

Lakis, A. A. & Païdoussis, M. P., “Free vibration of cylindrical shells partially filled with liquid.” *Journal of Sound and Vibration*, 19 (1), 1-15, 1971.

Lee, L. T. and Lu, J. C. “Free vibration of cylindrical shells filled with liquid.” *Computers & Structures* vol. 54, No. 5, pp 997 – 1001, (1995).

Lindholm, U. S., Kana, D. D. & Abramson, H. N. "Breathing vibrations of a circular cylindrical shell with an internal liquid." *J. Aerospace. Sci.* 29, 1052-1059. 1962.

Lustosa; "Um estudo comparativo analítico e numérico de esforços e deslocamentos em cascas cilíndricas abertas ou com conexões de borda" *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*, UnB, 2011.

Markovic, V. et al., "Determination of Complex Resonant Frequencies in Rectangular and Cylindrical Rooms". *Applied Acoustic*, 59, p. 265-274. 2000.

Mendes, N. B, "Estudo Comparativo Analítico e Numérico de Aspectos da Interação Fluido Estrutura Aplicados a Barragens em arco" *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*, UnB, 2012.

Munjal, M. L., *Acoustic of Ducts and Mufflers*. India. Jhon Wiley & Sons. 1987.

Païdoussis, M. P. "*Fluid-Structure Interactions-Slender Structures and Axial Flow*" Volume 2. McGill University, Montreal, Québec, Canada. Elsevier Academic Press. 2004.

Pedroso, L.J. "Interação Fluido-Estrutura." In: *Notas de Curso e Apostila Didática*, UnB-FT/ENC, Vs.3 - Brasília, DF. 2003.

Paxton, S. "System identification and optimization Methodologies for Active Structural Acoustic Control of Aircraft Cabin Noise. *Mestrado em Engenharia Mecânica - Virginia Polytechnic Institute and State University*, Virginia. 1997.

Sharma, C. B. and Johns, D. J. "Vibrations characteristics of a clamped-free and clamped-ring-stiffened circular cylindrical shell." *J. Sound Vib.* 14 (4), 459 - 474, 1971.

Sharma, C. B. "Calculations of natural frequencies of fixed-free circular cylindrical shells." *Journal of Sound and Vibration* 35 (1), 55 - 76, (1974).

Soedel, W (2005). *Vibrations of shells and Plates*. Third Edition. New York, United States, Marcel Dekker, Inc.

Souza; M. “Contribuição para uma metodologia de análise acoplada fluido estrutura em cavidades acústicas com paredes flexíveis”. *Dissertação mestrado em Estruturas e Construção Civil*. UnB, 2007.

Sousa Junior; “Uma aplicação dos métodos dos elementos finitos e diferenças finitas à interação fluido estrutura.” *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*, UnB, 2006.

Sun, J. Q, Norris, M. A, et al, “Distributed Piezoelectric Actuators for Shell Interior Noise Control”. *Transactions of the ASME*, vol.118, p.678-681. 1996.

Timoshenko S., Woinowsky-Krieger, S. *Theory of Shells*. New York.McGraw-Hill. 1959.

Vlasov, V. Z. *General Theory of Shells and Its Applications in Engineering*, NASA-TT-F99. Washington DC: US Government Printing Office. 1964.

Zhang, M. X., “Parametric studies of coupled vibration of cylindrical pipes conveying fluid with the wave propagation approach.” *Computers and Structures* 80, 287 – 295, (2002).

Zhang, X. M., Liu, G. R., & Lam, K. Y., “Vibration analysis of thin cylindrical shell using wave propagation approach.” *Journal of Sound and Vibration*, 239 (3), 397 – 403, (2001).