Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Recorrências – Problemas e Aplicações

por

Marcus Vinícius Pereira

Brasília

2014

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Recorrências – Problemas e Aplicações

Marcus Vinícius Pereira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós - Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora Profa. Dra. Aline Gomes da Silva Pinto

2014

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade de Brasília. Acervo 1016220.

Pereira, Marcus Vinícius.
P436r Recorrências - problemas e aplicações / Marcus Vinícius Pereira. -- 2014.
61 f. : il. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade de Brasília, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2014.
Inclui bibliografia.
Orientação: Aline Gomes da Silva Pinto.

1. Números de Fibonacci. 2. Números de Lucas. 3. Sequências (Matemática). I. Pinto, Aline Gomes da Silva. II. Título.

CDU 511

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Recorrências – Problemas e Aplicações.

por

Marcus Vinícius Pereira*

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 02 de junho de 2014.

Comissão Examinadora:

Aline Gomes S. Pinto
Profa. Dra. Aline Gomes da Silva Pinto – MAT/UnB (Orientadora)

Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi – CMCC/UFABC

Prof. Dr. Adail de Castro Cavalheiro – MAT/UnB

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Ao Mestre Jesus.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente e acima de tudo ao nosso Pai já que, sem Ele coisa alguma sequer existiria.

A meus pais Maria e Hélio que me concederam a graça desta atual existência e que primeiro me mostraram a importância dos estudos e do conhecimento, à minha irmã Cláudia pelo amor que sempre me dedicou e a todos os meus familiares que contribuíram para que eu me tornasse a pessoa que sou hoje.

Agradeço à minha esposa Niulza pelo apoio nos momentos mais difíceis e à minha filha Julia que já me ensinava muito sobre a Vida mesmo antes de se tornar a fantástica bióloga que é hoje.

Aos amigos desta e da outra vida que, não obstante minhas tantas imperfeições, optaram por apoiar-me em meus projetos e em particular neste último.

Aos meus colegas de mestrado pelos momentos que passamos juntos e que já deixam saudades.

Aos nossos professores, a todo o Departamento de Matemática e aos demais servidores da UnB que, de uma forma ou de outra, foram fundamentais neste percurso. Foi fantástico “viver” na Universidade de Brasília nestes últimos dois anos e meio.

À minha orientadora, Prof.ª Dr.ª Aline Gomes da Silva Pinto, pelo fundamental apoio na consecução deste trabalho.

À dedicação de todos os matemáticos, famosos ou anônimos, que nos legaram os conhecimentos que tanto amamos e tanto nos esforçamos por honrar.

Agradeço ainda à CAPES pelo apoio financeiro concedido.

Por fim devo acrescentar que agradecer não é tarefa simples. Não pelo ato em si, mas por devermos tanto a tantos. Assim, peço desculpas por não poder citar todos nominalmente e reafirmo que minha gratidão há de alcançá-los onde quer que estejam.

A Matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o Universo.

Galileu Galilei

Uma única frustração persiste em mim com relação à Matemática: a de não conhecê-la tanto quanto a amo.

Marcus Vinícius Pereira

Resumo

O objetivo deste texto é realizar um estudo sobre sequências numéricas mostrando exemplos de sequências não comumente estudadas no ensino médio inclusive as decorrentes da solução de determinados problemas. Abordamos também as relações de recorrência, apresentando alguns resultados sobre a resolução de tais recorrências e sugerindo atividades de investigação matemática em sala de aula.

Palavras-chave: Equação de Pell, Fibonacci, números de Lucas, números figurados, relações de recorrência, sequências numéricas.

Abstract

The aim of this paper is to conduct a study on numerical sequences showing examples of sequences unusually studied in high school including those resulting from the solution of certain problems. We also analyze the recurrence relations, present some results about solving such recurrences and suggest mathematical research activities in the classroom.

Keywords: Fibonacci, figurate numbers, Lucas numbers, numerical sequences, Pell's equation, recurrence relations.

Sumário

Introdução

Em que pese a relevância e a abrangência do tema, as sequências têm sido estudadas no ensino básico de maneira muito limitada.

Fala-se pouco ou quase nada além das progressões aritmética e geométrica sendo que, outros tipos de sequência aparecem, quando muito, de maneira discreta e normalmente apenas como exemplos.

Acreditamos na importância de trabalhar com nossos alunos uma visão mais ampla do assunto abordando, tanto quanto possível, sequências as mais diversas, bem como aplicações e problemas que fujam da obviedade de apenas calcular determinado termo ou a soma dos termos de uma P.A. ou de uma P.G.

No primeiro capítulo definimos e classificamos as relações de recorrência tratando especificamente das recorrências de primeira ordem.

No segundo capítulo estudamos as recorrências de segunda ordem e várias de suas aplicações como as sequências de Fibonacci e de Lucas além da Equação de Pell.

Ampliamos no capítulo 3 nosso estudo de recorrências de modo a abranger as recorrências de ordem qualquer analisando sob esse prisma as progressões aritméticas de ordem superior, os números figurados em suas várias dimensões além de suas relações com o Triângulo de Pascal.

No capítulo 4 procuramos enfocar algumas atividades e problemas envolvendo os assuntos discutidos nos capítulos anteriores.

Nas palavras de David Wells em [13]: ” Centenas de sequências têm sido literalmente estudadas na procura da solução de problemas matemáticos ou pelo seu próprio interesse. ” Claro está que esgotar o assunto é tarefa impraticável. Não obstante entendemos ser fundamental ampliar os horizontes sobre o mesmo e é este o nosso principal objetivo.

1. Recorrências Lineares de primeira ordem

1.1 Sequências

Definição 1.1.1. Uma *sequência* de números reais é uma função $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que para cada $n \in \mathbb{N}$ associa um número a_n pertencente aos reais chamado n-ésimo termo.

É denominada finita, a sequência que possui um número limitado de termos. Do contrário a sequência é chamada infinita.

Usualmente representamos estes casos respectivamente como $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ e $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$.

Nem sempre uma dada sequência apresenta uma regra ou lei de formação definida ou conhecida. Nos casos em que tal regra é definida, ela pode ser apresentada principalmente das seguintes maneiras:

- Por meio de uma propriedade exclusiva dos termos da sequência. Exemplo: a sequência dos números primos, $(a_n) = (2, 3, 5, 7, 11, \dots)$.
- Por meio de uma expressão matemática que associa a cada n um determinado valor de a_n. Exemplo: $a_n = 2n - 3$, $(a_n) = (-1, 1, 3, 5, 7, \dots)$.
- Por meio de uma relação de recorrência que, a partir de um certo termo, determina cada termo seguinte em função dos anteriores. Exemplo: a sequência em que o primeiro termo é $a_1 = 3$ e cada termo a partir do segundo é dado por $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $(a_n) = (3, 7, 15, 31, 63, \dots)$.

1.2 Recorrências

Definição 1.2.1. Uma *relação de recorrência* ou, como também é chamada, uma *equação de recorrência,* é uma relação que determina cada termo de uma dada sequência, a partir de certo termo, em função dos termos anteriores

Uma equação de recorrência na qual cada termo depende exclusivamente dos anteriores é dita *homogênea*. Se, além dos termos anteriores, cada elemento da sequência está também em função de um termo independente da sequência, a recorrência é dita *não-homogênea*.

Observe ainda que, para que uma sequência seja completamente definida por uma relação de recorrência, é necessário que sejam informados também os primeiros termos a partir dos quais os demais serão obtidos. Note que, na recorrência $a_n = 2a_{n-1} + 1$, citada na Seção 1.1, se o primeiro termo mudar para, digamos, $a_1 = 2$, a sequência torna-se $(a_n) = (2, 5, 11, 23, 47, \dots)$.

Definição 1.2.2. Uma relação de recorrência é dita *linear* quando a função que relaciona cada termo aos termos anteriores é linear. Além disso, é dita de *primeira ordem* quando cada termo da sequência é obtido a partir do termo imediatamente anterior a ele, ou seja, quando a_n está em função de a_{n-1}.

Definição 1.2.3. Resolver uma relação ou equação de recorrência, significa encontrar uma *fórmula fechada* para a recorrência, ou seja, uma expressão que forneça cada termo a_n da sequência em função apenas de n e não dos termos anteriores. Tal expressão é chamada *solução* da recorrência.

1.3 Resolução de recorrências lineares homogêneas

Uma recorrência linear homogênea de primeira ordem é do tipo:

$$a_{n+1} = g(n)a_n$$

Onde $g(n)$ e a_n são não-nulos.

Podemos então escrever:

$$\begin{gathered} a_2 = g(1)a_1 \\ a_3 = g(2)a_2 \\ a_4 = g(3)a_3 \\ \vdots \\ a_{n+1} = g(n)a_n \end{gathered}$$

Substituindo cada termo na expressão seguinte, obtemos:

$$a_{n+1} = a_1 \cdot g(1) \cdot g(2) \cdot g(3) \cdot \ldots \cdot g(n),$$

ou seja,

$$a_{n+1} = a_1 \prod_{j=1}^{n} g(j) \ . \tag{1.1}$$

Exemplo 1.3.1. Resolver a recorrência $a_{n+1} = c \cdot a_n$, sendo c constante.

Neste caso, $g(n) = c\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Assim, temos:

$$a_{n+1} = a_1 \prod_{j=1}^{n} c$$

$$a_{n+1} = a_1 c^n,$$

ou seja,

$$a_n = a_1 c^{n-1}$$

Esta recorrência generaliza as chamadas progressões geométricas.

Definição 1.3.1. Denominamos *progressão geométrica*, toda sequência (a_n) de termos não nulos, tal que o quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ é constante, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

O quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ é chamado de razão e usualmente representada por q de modo que uma vez definido o primeiro termo, todos os outros a partir do segundo são obtidos multiplicando-se a razão ao termo anterior, ou seja:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \tag{1.2}$$

que é a expressão do termo geral da progressão geométrica.

Note que, se tomarmos $q = c$, a expressão (1.2) torna-se idêntica ao resultado obtido no Exemplo 1.3.1.

Exemplo 1.3.2. Resolver a recorrência $a_{n+1} = n \cdot a_n$.

Neste caso, $g(n) = n, \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Assim, temos:

$$a_{n+1} = a_1 \prod_{j=1}^{n} j$$

$$a_{n+1} = a_1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

$$a_{n+1} = a_1 \cdot n!$$

Ou seja,

$$a_n = a_1 (n-1)!$$

Note que, se tomarmos $a_1 = 1$, (a_n) representará a sequência do *fatorial de* n.

Outras sequências envolvendo fatorial podem ser descritas por meio de recorrências deste tipo.

Exemplo 1.3.3. Determine o produto dos n primeiros números pares positivos.

Determinar este produto equivale a resolver a recorrência $a_n = 2n \cdot a_{n-1}$. Com $a_1 = 2$.

Neste caso, $g(n) = 2n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Assim, temos:

$$a_n = 2 \cdot \prod_{j=2}^{n} 2j$$

$$a_n = 2 \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot \ldots \cdot 2n$$

$$a_n = 2^n \cdot n!$$

■

1.4 Resolução de recorrências lineares não-homogêneas

Uma recorrência linear não-homogênea de primeira ordem é do tipo:

$$a_{n+1} = g(n)a_n + f(n)$$

onde $g(n)$ *e* $f(n)$ são funções não-nulas.

Analisemos primeiramente o caso particular: $g(n) = 1$

Neste caso, a equação assume a forma:

$$a_{n+1} = a_n + f(n)$$

Podemos então escrever:

$$a_2 = a_1 + f(1)$$

$$a_3 = a_2 + f(2)$$

$$\vdots$$

$$a_{n+1} = a_n + f(n)$$

Somando as igualdades e cancelando os termos semelhantes, obtemos:

$$a_{n+1} = a_1 + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

Ou seja,

$$a_{n+1} = a_1 + \sum_{j=1}^{n} f(j) \tag{1.3}$$

Exemplo 1.4.1. Resolver a recorrência $a_{n+1} = a_n + c$.

Neste caso, $f(n) = c \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Assim, temos:

$$a_{n+1} = a_1 + \sum_{j=1}^{n} c$$

$$a_{n+1} = a_1 + nc$$

Ou seja,

$$a_n = a_1 + (n-1)c$$

Esta recorrência generaliza as chamadas progressões aritméticas. Para defini-las vamos, inicialmente, estabelecer o conceito de operador diferença.

Definição 1.4.1. Para uma dada sequência define-se o operador Δ, chamado *operador diferença* e representado por $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

Partindo das diferenças entre os termos de uma dada sequência, podemos ampliar o conceito de operador diferença, denotando por $\Delta^2\, a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n$, o *operador diferença de segunda ordem*.

De modo semelhante podemos generalizar o conceito definindo o *operador diferença de ordem k* representado por $\Delta^k\, a_n = \Delta^{k-1} a_{n+1} - \Delta^{k-1} a_n$.

Definição 1.4.2. Denominamos *progressão aritmética*, toda sequência (a_n), tal que a diferença $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é constante $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Neste caso, a diferença Δa_n é chamada de razão e usualmente representada por r de modo que uma vez definido o primeiro termo, todos os outros a partir do segundo são obtidos acrescentando-se a razão ao termo anterior, isto é:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$

$$\vdots$$

Ou seja:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \qquad (1.4)$$

que é a expressão do termo geral da progressão aritmética.

Note que, se tomarmos $r = c$, a expressão (1.4) torna-se idêntica ao resultado obtido no Exemplo 1.4.1.

1.5 Reduzindo uma recorrência não-homogênea ao caso $a_{n+1} = a_n + f(n)$

O teorema seguinte nos mostra um modo de reduzir a recorrência que se quer resolver ao caso mais simples já estudado.

Teorema 1.5.1. *Se x_n é solução não nula da recorrência $a_{n+1} = g(n)a_n$, então a substituição $a_n = x_n y_n$, transforma a recorrência $a_{n+1} = g(n)a_n + h(n)$ em*

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n)x_n}$$

Demonstração:

Tomando $a_n = x_n y_n$ podemos escrever a equação $a_{n+1} = g(n)a_n + h(n)$ como:

$$x_{n+1}y_{n+1} = g(n)x_n y_n + h(n) \qquad (1.5)$$

Mas, $x_{n+1} = g(n)x_n$ pois x_n é solução de $a_{n+1} = g(n)a_n$, o que transforma a equação (1.5) em

$$g(n)x_n y_{n+1} = g(n)x_n y_n + h(n)$$

Ou seja,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n)x_n}$$

■

Exemplo 1.5.1 Resolver a recorrência $a_{n+1} = c_1 a_n + c_2$, com c_1,c_2 constantes e $c_1 \neq 0$.

Uma solução da recorrência $a_{n+1} = c_1 a_n$ é $x_n = c_1^{n-1}$ conforme vimos no Exemplo 1.3.1.

Tomando $a_n = c_1^{n-1} y_n$ obtemos:

$$c_1^n y_{n+1} = c_1 c_1^{n-1} y_n + c_2$$

Ou seja,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{c_2}{c_1^n}$$

Resolvendo esta equação simplificada, encontramos:

$$y_{n+1} = y_1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_2}{c_1^j}$$

Desfazendo a mudança de variável por meio da igualdade $a_n = c_1^{n-1} y_n$, obtemos o resultado:

$$\frac{a_{n+1}}{c_1^n} = a_1 + c_2 \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{c_1}\right)^j$$

Ou seja,

$$a_{n+1} = c_1^n \left(a_1 + c_2 \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{c_1}\right)^j \right) \tag{1.6}$$

Note que, para resolvermos completamente a recorrência, precisamos desenvolver o somatório de $\left(\frac{1}{c_1}\right)^j$ em que as parcelas a serem somadas são os termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo e a razão são ambos iguais a $\frac{1}{c_1}$.

O somatório exigido é portanto, a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica, cuja expressão obteremos em seguida.

Proposição 1.5.1. A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$, é $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$.

Demonstração:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Multiplicando a igualdade pela razão q, obtemos:

$$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_{n+1}$$

Subtraindo as igualdades encontramos:

$$qS_n - S_n = a_{n+1} - a_n$$

$$S_n(q-1) = a_{n+1} - a_1$$

Entretanto, de acordo com a expressão (1.2), $a_{n+1} = a_1 q^n$.

Ou seja,

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Podemos agora concluir a solução do Exemplo 1.5.1.

O somatório

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{c_1}\right)^j = \frac{1}{c_1} + \left(\frac{1}{c_1}\right)^2 + \ \dots + \left(\frac{1}{c_1}\right)^n$$

Equivale a:

$$S_n = \frac{1}{c_1} \cdot \frac{\left(\frac{1}{c_1}\right)^n - 1}{\frac{1}{c_1} - 1}$$

$$S_n = \frac{1}{c_1} \cdot \left(\frac{1}{c_1^n} - 1\right) \cdot \frac{c_1}{1 - c_1}$$

$$S_n = \frac{c_1^n - 1}{(c_1 - 1)\, c_1^n} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{c_1}\right)^j \tag{1.7}$$

Substituindo o resultado (1.7) na expressão (1.6), obtemos:

$$a_{n+1} = c_1^n \left(a_1 + c_2 \cdot \frac{c_1^n - 1}{(c_1 - 1)\, c_1^n}\right)$$

$$a_{n+1} = a_1 c_1^n + c_2 \cdot \frac{c_1^n - 1}{(c_1 - 1)}$$

$$a_{n+1} = \frac{[a_1(c_1 - 1) + c_2]c_1^n - c_2}{c_1 - 1}$$

■

Nem sempre, ao resolvermos a recorrência em sua forma mais simples, encontramos um somatório já previamente conhecido como no Exemplo 1.5.1 no qual fizemos uso da soma dos n primeiros termos da progressão geométrica.

A seguinte proposição será útil na solução da próxima recorrência.

Proposição 1.5.2. *Sejam (a_n) uma progressão aritmética de razão r e (b_n) uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$. Além disso considere $S'_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$.*

A soma dos n primeiros termos da sequência $(a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \dots, a_nb_n, \dots)$ em que cada termo de uma das progressões é multiplicado ordenadamente pelos termos da outra é dado por

$$\sum_{j=1}^{n} a_jb_j = \frac{b_1}{q-1}\{[(q-1)(a_1+nr) - rq]S'_n + rn\} \qquad (1.8)$$

Demonstração:

Vamos proceder por indução sobre n.

Para $n = 1$, temos:

$$a_1b_1 = \frac{b_1}{q-1}\{[(q-1)(a_1+r) - rq]\cdot 1 + r\}$$

$$a_1b_1 = \frac{b_1}{q-1}(qa_1 + qr - a_1 - r - rq + r)$$

$$a_1b_1 = \frac{b_1}{q-1}a_1(q-1)$$

Como $q \neq 1$, podemos cancelar os fatores $q-1$ o que prova a validade da afirmação.

Agora, supondo por hipótese de indução que a expressão seja verdadeira para um certo n, vamos provar que ela é verdadeira para $n+1$.

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_jb_j = \sum_{j=1}^{n} a_jb_j + a_{n+1}b_{n+1}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_jb_j = \frac{b_1}{q-1}\{[(q-1)(a_1+nr) - rq]S'_n + rn\} + (a_1 + nr)b_1q^n$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_jb_j = \frac{b_1}{q-1}\{[(q-1)(a_1+nr) - rq]S'_n + rn + (q-1)(a_1+nr)q^n\}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_jb_j = \frac{b_1}{q-1}\{(q-1)(a_1+nr)(S'_n + q^n) - rq\,S'_n + rn\}$$

Fazendo as substituições $S'_n + q^n = S'_{n+1}$ e $q\,S'_n = S'_{n+1} - 1$, obtemos:

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_jb_j = \frac{b_1}{q-1}\{(q-1)(a_1+nr)\,S'_{n+1} - r\,S'_{n+1} + r + rn\}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_jb_j = \frac{b_1}{q-1}\{[(q-1)(a_1+(n+1)r - r) - r]\,S'_{n+1} + r(n+1)\}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j b_j = \frac{b_1}{q-1}\{[(q-1)(a_1+(n+1)r) - rq + r - r]\, S'_{n+1} + r(n+1)\}$$

Ou seja,

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j b_j = \frac{b_1}{q-1}\{[(q-1)(a_1+(n+1)r) - rq]\, S'_{n+1} + r(n+1)\}$$

■

No próximo exemplo, detalhamos a solução de um interessante problema encontrado em [8], fazendo uso dos conceitos descritos nesta seção.

Exemplo 1.5.2. “O Ministro Apressado”

Um rei decidiu distribuir pelos seus ministros, uma grande quantia em moedas de ouro.

Esse rei tinha uma estranha ideia de justiça e por isso resolveu distribuir as moedas do seguinte modo:

- para o primeiro ministro, 5 moedas;

- para o segundo, o dobro das moedas do primeiro menos 2 moedas;

- para o terceiro, o dobro das moedas do segundo menos 3 moedas; e assim sucessivamente, de tal modo que cada ministro receberia o dobro do anterior menos o número de moedas igual ao seu número de ordem.

O décimo ministro, avido de receber a sua parte, quer saber quantas moedas receberá. Será possível saber este valor sem calcular primeiro todos os valores anteriores? Quantas moedas receberá este ministro?

Escrevendo alguns termos a partir do segundo, encontramos:

$$a_2 = 2a_1 + 2$$
$$a_3 = 2a_2 + 3$$
$$a_4 = 2a_3 + 4$$

O que nos mostra que o problema pode ser representado pela seguinte relação de recorrência:

$$a_{n+1} = 2a_n - (n+1)$$

com $a_1 = 5$.

Neste caso $g(n) = 2$ e $f(n) = -(n+1)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Inicialmente, vamos resolver a recorrência sem atribuirmos o valor de a_1.

Uma solução da recorrência $a_{n+1} = 2a_n$ é $x_n = 2^{n-1}$.

Tomando $a_n = x_n y_n$, reescrevemos a recorrência como:

$$x_{n+1} y_{n+1} = 2x_n y_n - (n+1)$$

Mas, $x_{n+1} = 2x_n$ pois x_n é solução de $a_{n+1} = 2a_n$, o que transforma a recorrência em:

$$y_{n+1} = y_n - \frac{n+1}{2 \cdot 2^{n-1}}$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{n+1}{2^n}$$

De acordo com a expressão (1.3) podemos escrever:

$$y_{n+1} = y_1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{2^j}$$

Desfazendo a mudança de variável por meio da igualdade $a_n = 2^{n-1} y_n$, obtemos o resultado:

$$\frac{a_{n+1}}{2^n} = a_1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{2^j}$$

$$a_{n+1} = 2^n a_1 - 2^n \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{2^j} \qquad (1.9)$$

Note que, para resolvermos completamente a recorrência, precisamos desenvolver o somatório

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{2^j} = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + (n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

no qual as parcelas a serem somadas são os produtos ordenados dos termos de uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1 = 2$ e razão $r = 1$ pelos termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo b_1 e a razão q são ambos iguais a $\frac{1}{2}$.

Substituindo estes valores na expressão (1.8) obtemos:

$$\sum_{j=1}^{n} (j+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{1/2}{1/2 - 1} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} - 1\right)(2+n) - \frac{1}{2} \right] S'_n + n \right\}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (j+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^j = \left(\frac{n+3}{2}\right) S'_n - n$$

Mas, de acordo com a Proposição 1.5.2, sendo $q = \frac{1}{2}$, $S'_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$.

Portanto,

$$\sum_{j=1}^{n}(j+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{j}=\left(\frac{n+3}{2}\right)\left(\frac{2^{n}-1}{2^{n-1}}\right)-n$$

$$\sum_{j=1}^{n}(j+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{j}=\frac{n\cdot 2^{n}-n+3\cdot 2^{n}-3-n\cdot 2^{n}}{2^{n}}$$

$$\sum_{j=1}^{n}(j+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{j}=\frac{3\cdot 2^{n}-3-n}{2^{n}} \qquad (1.10)$$

Podemos agora completar a solução da recorrência do exemplo 1.5.2 substituindo a expressão (1.10) em (1.9).

$$a_{n+1}=2^{n}a_{1}-2^{n}\frac{3\cdot 2^{n}-3-n}{2^{n}}$$

$$a_{n+1}=2^{n}a_{1}-3\cdot 2^{n}+3+n$$

$$a_{n+1}=2^{n}(a_{1}-3)+3+n$$

Que é a solução procurada.

Como o primeiro ministro recebeu 5 moedas, $a_1=5$ e a solução torna-se:

$$a_{n+1}=2^{n+1}+3+n$$

Consequentemente, o décimo ministro receberá:

$$a_{10}=2^{10}+3+9=1036 \text{ moedas de ouro.}$$

É interessante notar o quanto o resultado de um problema como este pode ser diferente se alterarmos por exemplo o valor de a_1.

Voltando à solução obtida ainda sem o valor do primeiro termo, observamos inicialmente que se o primeiro ministro houvesse recebido 3 moedas, a solução da recorrência se resumiria a:

$$a_{n+1}=n+3$$

E o décimo ministro poderia facilmente calcular seu prêmio.

Por outro lado, se o primeiro termo da sequência fosse menor que 3, a parcela relativa à potência de 2 na solução, seria negativa.

Assim, se o rei começasse a premiação distribuindo duas moedas ao primeiro ministro, teríamos $a_1=a_2=2$, $a_3=1$ e todos os demais termos seriam negativos. E se começasse com uma moeda, $a_1=1$, $a_2=0$ e todos os demais termos seriam negativos.

Portanto, somente quando $a_1\geq 3$ a sequência de premiação é estritamente crescente.

2. Recorrências lineares de segunda ordem

2.1 Definições

Definição 2.1.1 Uma *relação de recorrência linear* é dita de *segunda ordem* quando cada termo da sequência é obtido a partir dos dois termos imediatamente anteriores a ele, ou seja, quando a_n está em função de a_{n-1} e a_{n-2} .

Uma recorrência linear de segunda ordem é do tipo:

$$a_n = h(n)a_{n-1} + g(n)a_{n-2} + f(n),$$

onde $g(n)$ é uma função não nula, caso contrário a recorrência será de primeira ordem. Além disso, se $f(n) = 0$ a recorrência é dita *homogênea*, caso contrário será não-homogênea.

2.2 A equação característica

Quando $h(n)$ e $g(n)$ são constantes e $f(n) = 0$, a relação de recorrência assume a forma

$$a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}$$

Ou ainda,

$$a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$$

A cada relação de recorrência da forma acima podemos associar uma equação do segundo grau $t^2 - pt - q = 0$, chamada equação característica. O teorema seguinte relaciona as raízes da equação característica com a solução da recorrência.

Teorema 2.2.1. Se t_1 e t_2 são raízes da equação $t^2 - pt - q = 0$, então $x_n = c_1t_1^n + c_2t_2^n$ é solução da recorrência $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$ para quaisquer valores de c_1 e c_2 .

Demonstração:

Substituindo $x_n = c_1t_1^n + c_2t_2^n$ em $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2}$ e agrupando os termos, obtemos:

$$c_1t_1^n + c_2t_2^n - p(c_1t_1^{n-1} + c_2t_2^{n-1}) - q(c_1t_1^{n-2} + c_2t_2^{n-2}) =$$

$$c_1(t_1^n - pt_1^{n-1} - qt_1^{n-2}) + c_2(t_2^n - p\,t_2^{n-1} - qt_2^{n-2}) =$$

$$c_1t_1^{n-2}(t_1^2 - pt_1 - q) + c_2t_2^{n-2}(t_2^2 - pt_2 - q) =$$

$$c_1t_1^{n-2} \cdot 0 + c_2t_2^{n-2} \cdot 0 = 0$$

Então x_n é solução.

■

2.3 Resolução de recorrências de segunda ordem

Teorema 2.3.1. Se t_1 e t_2 com $t_1 \neq t_2$ e $t_1, t_2 \neq 0$, são raízes da equação característica $t^2 - pt - q = 0$, então todas as soluções da recorrência $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$ são da forma $x_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n$ com c_1 e c_2 constantes.

Demonstração:

Seja u_n uma solução qualquer de $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$.

Vamos primeiro tentar escrever u_1 e u_2 na forma desejada. Ou seja, vamos tentar determinar c_1 e c_2 tais que u_n seja da forma $c_1 t_1^n + c_2 t_2^n$.

Escrevendo igualdades para u_1 e u_2, podemos formar um sistema de equações do qual as constantes c_1 e c_2 sejam as soluções:

$$\begin{cases} c_1 t_1 + c_2 t_2 = u_1 \\ c_1 t_1^2 + c_2 t_2^2 = u_2 \end{cases}$$

Ou seja,

$$c_1 = \frac{u_1 t_2 - u_2}{t_1(t_2 - t_1)} \ e \ c_2 = \frac{u_{2-} u_1 t_1}{t_2(t_2 - t_1)}$$

Note que, estas soluções são possíveis já que $t_1 \neq t_2$ e $t_1, t_2 \neq 0$.

Tomemos $v_n = u_n - c_1 t_1^n - c_2 t_2^n$ .Vamos provar que $v_n = 0$ para todo n.

Temos,

$$v_n - pv_{n-1} - qv_{n-2} = (u_n - pu_{n-1} - qu_{n-2}) - c_1 t_1^{n-2}(t_1^2 - pt_1 - q) - c_2 t_2^{n-2}(t_2^2 - pt_2 - q).$$

O primeiro parêntese é igual a zero já que u_n é solução de $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$ e os dois últimos parênteses são iguais a zero pois t_1 e t_2 são raízes da equação $t^2 - pt - q = 0$. Assim, $v_n - pv_{n-1} - qv_{n-2} = 0$.

Além disso, como $c_1 t_1 + c_2 t_2 = u_1$ e $c_1 t_1^2 + c_2 t_2^2 = u_2$, temos $v_1 = v_2 = 0$.

Entretanto, se $v_n - pv_{n-1} - qv_{n-2} = 0$ e $v_1 = v_2 = 0$ então $v_n = 0$ para todo n.

■

Exemplo 2.3.1. Resolver a recorrência $a_n = -3a_{n-1} + 10a_{n-2}$, com $a_1 = 2$ e $a_2 = 1$.

Inicialmente, vamos resolver a recorrência sem atribuirmos os valores de a_1 e a_2.
A equação característica $t^2 + 3t - 10 = 0$ tem raízes $t_1 = 2$ e $t_2 = -5$.
De acordo com o Teorema 2.3.1 as soluções da recorrência são da forma

$a_n = c_1 2^n + c_2(-5)^n$ onde c_1 e c_2 são constantes cujo valor depende de a_1 e a_2.
Ou seja,

$$c_1 = \frac{5a_1 + a_2}{14} \ e \ c_2 = \frac{a_{2-} 2a_1}{35}$$

Substituindo os valores de a_1 e a_2 encontramos as constantes e, com elas, a solução da recorrência:

$$a_n = \frac{11}{14} \cdot 2^n - \frac{3}{35}(-5)^n$$

Com relação à solução geral desta recorrência, é interessante notar que a constante c_2 anula-se no caso em que $a_2 = 2a_1$.

Quando tal acontece temos:

$$c_1 = \frac{7a_1}{14} = \frac{a_1}{2}$$

E então

$$a_n = \frac{a_1}{2} \cdot 2^n + 0 \ \cdot (-5)^n$$

$$a_n = a_1 \cdot 2^{n-1}$$

Ou seja, neste caso a recorrência torna-se uma progressão geométrica de razão 2.

A proposição seguinte generaliza este caso.

Proposição 2.3.1. Seja (a_n) é uma sequência de termos não nulos definida pela recorrência $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$ e $k = \frac{a_2}{a_1}$. Se $q = k(k-p)$, então (a_n) é uma *progressão geométrica* de razão k.

Demonstração:

Substituindo a expressão $q = k(k-p)$ na recorrência $a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}$, temos:

$$a_n = pa_{n-1} + k(k-p)a_{n-2}$$

cuja equação característica $t^2 - pt - k(k-p) = 0$ tem raízes $t_1 = k$ e $t_2 = p - k$.

De acordo com o Teorema 2.3.1 as soluções da recorrência são da forma

$$a_n = c_1 k^n + c_2 (p-k)^n$$

onde c_1 e c_2 são constantes cujo valor depende de a_1 e a_2.

Escrevendo igualdades para a_1 e a_2, podemos formar um sistema de equações do qual as constantes c_1 e c_2 sejam as soluções:

$$\begin{cases} \mathrm{c}_1 k + \mathrm{c}_2 (p-k) = a_1 \\ \mathrm{c}_1 k^2 + \mathrm{c}_2 (p-k)^2 = a_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos

$$c_2 = \frac{ka_1 - a_2}{p(k-p)}$$

Mas, $k = \frac{a_2}{a_1}$ e portanto $c_2 = 0$.

Assim temos

$$c_1 = \frac{a_1}{k}$$

e finalmente,

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$$

■

2.4 Resolução de recorrências de segunda ordem cuja equação característica tem raízes iguais

Inicialmente vamos pesquisar, por inspeção de soluções, que forma deverá ter a solução de uma recorrência de segunda ordem cuja equação característica tem raízes iguais.

Se t é raiz única da equação $t^2 - pt - q = 0$, então $u_n = t^n$ é solução da recorrência $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$.

Além disso, o discriminante de $t^2 - pt - q = 0$ é $p^2 + 4q = 0$ e $t = \frac{p}{2}$.

Tome v_n uma solução qualquer da recorrência e faça $y_n = \frac{v_n}{u_n} = \frac{v_n}{t^n}$.

Segue que $v_n = y_n t^n$ é solução de $y_n t^n - py_{n-1}t^{n-1} - qy_{n-2}t^{n-2} = 0$ e também de $y_n t^2 - py_{n-1}t - qy_{n-2} = 0$.

Substituindo t por $\frac{p}{2}$ e q por $-\frac{p^2}{4}$, temos:

$$y_n \frac{p^2}{4} - y_{n-1}\frac{p^2}{2} + y_{n-2}\frac{p^2}{4} = 0$$

$$y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} = 0$$

$$y_n - y_{n-1} = y_{n-1} - y_{n-2}$$

Logo, pela Definição 1.4.2, y_n é uma progressão aritmética e pode ser escrita como $y_n = a + bn$ para constantes $a, b \in \mathbb{R}$.

Portanto, a solução procurada é da forma $v_n = at^n + bnt^n$.

Teorema 2.4.1. Se $t_1 = t_2 = t$ são raízes iguais da equação $t^2 - pt - q = 0$, então $x_n = c_1 t^n + c_2 n t^n$ é *solução da recorrência* $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$ para quaisquer valores de c_1 e c_2 .

Demonstração:

Substituindo $x_n = c_1 t^n + c_2 n t^n$ em $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2}$ e agrupando os termos, obtemos:

$$c_1 t^n + c_2 n t^n - p(c_1 t^{n-1} + c_2(n-1)t^{n-1}) - q(c_1 t^{n-2} + c_2(n-2)t^{n-2}) =$$

$$c_1(t^n - pt^{n-1} - qt^{n-2}) + c_2(nt^n - p\,(n-1)t^{n-1} - q(n-2)t^{n-2}) =$$

$$c_1 t^{n-2}(t^2 - pt - q) + c_2 n t^{n-2}(t^2 - pt - q) + c_2 t^{n-2}(pt + 2q) =$$

Como $t_1 = t_2 = t$, temos que $p = 2t$ e $q = -t^2$ portanto:

$$c_1 t_1^{n-2} \cdot 0 + c_2 t_2^{n-2} \cdot 0 + c_2 t_2^{n-2} \cdot 0 = 0$$

Então x_n é solução.

■

Teorema 2.4.2. Se $t_1 = t_2 = t \neq 0$ são raízes da equação característica, então todas as soluções da recorrência $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$ são da forma $x_n = c_1 t^n + c_2 n t^n$ com c_1 e c_2 constantes.

Demonstração:

Seja u_n uma solução qualquer de $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$.

Vamos primeiro tentar escrever u_1 e u_2 na forma desejada. Ou seja, vamos tentar determinar c_1 e c_2 tais que u_n seja da forma $c_1 t^n + c_2 n t^n$.

Escrevendo igualdades para u_1 e u_2, podemos formar um sistema de equações do qual as constantes c_1 e c_2 sejam as soluções:

$$\begin{cases} c_1 t + c_2 t = u_1 \\ c_1 t^2 + 2c_2 t^2 = u_2 \end{cases}$$

Ou seja,

$$c_1 = \frac{2tu_1 - u_2}{t^2} \; e \; c_2 = \frac{u_{2} - tu_1}{t^2}$$

Note que, estas soluções são possíveis já que $t^2 \neq 0$.

Tomemos $v_n = u_n - c_1 t^n - c_2 n t^n$ .Vamos provar que $v_n = 0$ para todo n.

Temos,

$$v_n - pv_{n-1} - qv_{n-2} = (u_n - pu_{n-1} - qu_{n-2}) - c_1 t^{n-2}(t^2 - pt - q) -$$
$$-c_2 n t^{n-2}(t^2 - pt - q) - c_2 t^{n-2}(pt + 2q).$$

O primeiro parêntese é igual a zero já que u_n é solução de $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$, o segundo e o terceiro parênteses são iguais a zero pois t é raiz da equação $t^2 - pt - q = 0$, o último parêntese é igual a zero pois quando $t_1 = t_2 = t$, $p = 2t$ e $q = -t^2$ e assim, $pt + 2q = 0$. Portanto, $v_n - pv_{n-1} - qv_{n-2} = 0$.

Além disso, como $c_1 t + c_2 t = u_1$ e $c_1 t^2 + c_2 t^2 = u_2$, temos $v_1 = v_2 = 0$.

Entretanto, se $v_n - pv_{n-1} - qv_{n-2} = 0$ e $v_1 = v_2 = 0$ então $v_n = 0$ para todo n.

■

Exemplo 2.4.1 Resolver a recorrência $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, com $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$.

A equação característica $t^2 - 6t + 9 = 0$ tem raízes $t_1 = t_2 = t = 3$.

De acordo com o Teorema 2.4.2 as soluções da recorrência são da forma $a_n = c_1 3^n + c_2 n 3^n$ onde c_1 e c_2 são constantes cujo valor depende de a_1 e a_2.

Ou seja,

$$c_1 = \frac{6a_1 - a_2}{9} \; e \; c_2 = \frac{a_2 - 3a_1}{9}$$

Substituindo os valores de a_1 e a_2 encontramos as constantes e, com elas, a solução da recorrência:

$$a_n = -\frac{1}{9} \cdot 3^n + \frac{1}{9} n 3^n$$

$$a_n = (n-1) \cdot 3^{n-2}$$

■

Exemplo 2.4.2 Resolver a recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$.

Inicialmente, vamos resolver a recorrência sem atribuirmos valores para a_1 e a_2.

A equação característica $t^2 - 2t + 1 = 0$ tem raízes $t_1 = t_2 = t = 1$.

De acordo com o Teorema 2.4.2 as soluções da recorrência são da forma $a_n = c_1 t^n + c_2 n t^n$ onde c_1 e c_2 são constantes cujo valor depende de a_1 e a_2.

Neste exemplo em particular, como $t = 1$, as soluções assumem a forma

$$a_n = c_1 + nc_2$$

Ou seja,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = a_1 \\ c_1 + 2c_2 = a_2 \end{cases}$$

$$c_1 = 2a_1 - a_2 \; e \; c_2 = a_2 - a_1$$

Substituindo as expressões obtidas para c_1 e c_2 e agrupando os termos, encontramos a solução da recorrência:

$$a_n = 2a_1 - a_2 + n(a_2 - a_1)$$

$$a_n = a_1 + (a_1 - a_2) + n(a_2 - a_1)$$

$$a_n = a_1 + (n-1)(a_2 - a_1)$$

Note que, se tomarmos $a_2 - a_1 = r$, a expressão torna-se:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Que corresponde ao termo geral de uma progressão aritmética.

Vimos na Seção 1.4 que toda progressão aritmética pode ser expressa por uma recorrência de primeira ordem.

Nesta seção, concluímos que toda progressão aritmética também pode ser expressa por uma recorrência de segunda ordem $a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}$ desde que tenhamos $p = 2$ e $q = -1$.

De fato, em toda progressão aritmética temos:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}$$

Portanto

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

■

2.5 Resolução de recorrências de segunda ordem não-homogêneas

Teorema 2.5.1. Se x_n é uma solução da recorrência $a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2} + f(n)$ então a substituição $a_n = x_n + y_n$ reduz a recorrência ao caso homogêneo

$$y_n = py_{n-1} + qy_{n-2}$$

Demonstração:

Substituindo a_n na recorrência, obtemos

$$x_n + y_n = px_{n-1} + qx_{n-2} + py_{n-1} + qy_{n-2} + f(n)$$

Mas, $x_n = px_{n-1} + qx_{n-2} + f(n)$ pois x_n é solução da recorrência $a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2} + f(n)$.

Assim, a recorrência torna-se:

$$y_n = py_{n-1} + qy_{n-2}$$

■

Exemplo 2.5.1 Resolver a recorrência $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} + 2$, com $a_1 = a_2 = 1$.

De acordo com o Teorema 2.5.1 devemos encontrar uma solução x_n da recorrência $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} + 2$ tal que $x_n = 6x_{n-1} - 8x_{n-2} + 2$.

Suponha inicialmente que a solução x_n seja constante e portanto $x_n = x_{n-1} = x_{n-2}$.

Podemos então escrever:

$$x_n = 6x_n - 8x_n + 2$$

de onde resulta,

$$x_n = \frac{2}{3}$$

Assim a expressão $a_n = x_n + y_n$ torna-se $a_n = y_n + \frac{2}{3}$.

Substituindo a_n na recorrência, temos:

$$y_n + \frac{2}{3} = 6\left(y_{n-1} + \frac{2}{3}\right) - 8\left(y_{n-2} + \frac{2}{3}\right) + 2$$

$$y_n + \frac{2}{3} = 6y_{n-1} + \left(\frac{12}{3}\right) - 8y_{n-2} - \left(\frac{16}{3}\right) + 2$$

$$y_n = 6y_{n-1} - 8y_{n-2}$$

Uma vez reduzida a recorrência ao caso homogêneo, procedemos de acordo com o Teorema 2.3.1.

Equação característica: $t^2 - 6t + 8 = 0$

Raízes: $t_1 = 2$ e $t_2 = 4$

As soluções são da forma: $y_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 4^n$

Com as expressões de y_1 e y_2 montamos o sistema:

$$\begin{cases} 2\,c_1 + 4\,c_2 = y_1 \\ 4\,c_1 + 16\,c_2 = y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\,c_1 + 4\,c_2 = a_1 - \frac{2}{3} \\ 4\,c_1 + 16\,c_2 = a_2 - \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\,c_1 + 4\,c_2 = \frac{1}{3} \\ 4\,c_1 + 16\,c_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Que nos fornece os coeficientes $c_1 = \frac{1}{4}$ e $c_2 = -\frac{1}{24}$.

Portanto a solução da recorrência homogênea é dada por $y_n = \frac{1}{4} \cdot 2^n - \frac{1}{24} \cdot 4^n$.

Mas, $a_n = y_n + \frac{2}{3}$

Assim, a solução procurada é

$$a_n = \frac{2^n}{4} - \frac{4^n}{24} + \frac{2}{3}$$

■

2.6 A sequência de Fibonacci

Um dos exemplos mais famosos de sequências definidas por recorrência é, sem dúvida, a chamada *sequência de Fibonacci*.

Fibonacci (“filho de Bonaccio”, 1175-1250) foi “o matemático mais talentoso da Idade Média” (EVES, 2011, p.292).

Natural de Pisa, Itália, era também conhecido como Leonardo de pisa ou Leonardo Pisano.

As atividades mercantis de seu pai, além da própria vocação comercial da cidade, favoreceram a Leonardo a oportunidade de estudar fora da Itália e de viajar entrando em contato com o pensamento matemático árabe e do oriente.

Em seu livro “*Liber Abaci*”, publicado em 1202 assim que retornou de suas viagens, Fibonacci defendeu com vigor a adoção do sistema de numeração indo-arábico em lugar dos algarismos romanos então utilizados.

É neste mesmo livro que encontramos, entre outros, o problema que deu origem à famosa sequência.

“Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, a partir de um único casal, se cada casal procria a cada mês um novo casal que se torna produtivo depois de dois meses? ” (EVES, 2011, p.315)

A questão é fascinante tanto por sua aparente simplicidade como pela multiplicidade de formas em que pode ser apresentada.

Podemos visualizar melhor o raciocínio inerente à situação descrita no problema por meio do esquema explicitado na Tabela 2.6.1, a seguir.

MESES (n)	REPRODUÇÃO	CASAIS (F_n)
0	C_1	1
1	C_1	1
2	C_1 $\downarrow$ C_2	2
3	$C_1\ C_2$ $\downarrow$ C_3	3
4	$C_1\ C_2\ C_3$ $\downarrow\ \ \downarrow$ $C_4\ C_5$	5
5	$C_1\ \ C_2\ \ C_3\ \ C_4\ \ C_5$ $\downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow$ $C_6\ \ C_7\ \ C_8$	8
6	$C_1\ \ C_2\ \ C_3\ \ C_4\ \ C_5\ \ C_6\ \ C_7\ \ C_8$ $\downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow$ $C_9\ \ C_{10}\ \ C_{11}\ \ C_{12}\ \ C_{13}$	13

Tabela 2.6.1 – O problema dos coelhos de Fibonacci

Observe que fica bastante clara a relação de recorrência com o total de casais, a partir do segundo mês, sendo dado pela soma do número de casais dos dois meses anteriores, ou seja, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, com $F_1 = F_2 = 1$. Assim, o número de casais a cada mês gera a sequência $(F_n) = (1,1,2,3,5,8,\dots)$, chamada sequência de Fibonacci.

Apresentamos no exemplo seguinte um problema de argumentação combinatória que representa a mesma situação descrita por Fibonacci.

Exemplo 2.6.1. Usando apenas os algarismos 1 ou 2, quantos números podem ser formados de modo que a soma de seus algarismos seja um certo $n \in \mathbb{N}$?

Fazendo n variar podemos compor a seguinte tabela de resultados:

SOMA	0 dígitos 2	1 dígito 2	2 dígitos 2	3 dígitos 2	TOTAL
1	1				1
2	11	2			2
3	111	12, 21			3
4	1111	112, 121, 211	22		5
5	11111	1112, 1121, 1211, 2111	122, 212, 221		8
6	111111	11112, 11121, 11211, 12111, 21111	1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211	222	13
7	1111111	111112, 111121, 111211, 112111, 121111, 211111	11122, 11212, 11221, 12112, 12121, 12211, 21112, 21121, 21211, 22111	1222, 2122, 2212, 2221	21

Tabela 2.6.2 – Números formados pelos algarismos 1 ou 2 e agrupados segundo a soma de seus dígitos.

Se relacionarmos apenas a quantidade de números que aparece em cada coluna teremos:

SOMA	0 dígitos 2	1 dígito 2	2 dígitos 2	3 dígitos 2	TOTAL
1	1				1
2	1	1			2
3	1	2			3
4	1	3	1		5
5	1	4	3		8
6	1	5	6	1	13
7	1	6	10	4	21

Tabela 2.6.3 – Quantidade de números formados pelos algarismos 1 ou 2 e agrupados segundo a soma de seus dígitos.

A observação das sequências numéricas que surgem nas colunas sugere que elas sejam as mesmas colunas do Triângulo de Pascal. Vamos demonstrar que a sequência de Fibonacci pode ser obtida pela soma ordenada de elementos do Triângulo de Pascal dispostos do modo mostrado na Tabela 2.6.3. Para tanto, vamos definir o conceito de *números binomiais* e o próprio *Triângulo de Pascal*.

Definição 2.6.1. Chama-se *número binomial* o número representado por $\binom{n}{k}$ e calculado pela expressão

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{2.1}$$

Onde $n, k \in \mathbb{N}$ e $n \geq k$.

Definição 2.6.2. Chama-se *Triângulo de Pascal* ao conjunto de sequências formadas pelos números binomiais $\binom{n}{k}$, ou por seus valores, e dispostas em linhas e colunas de tal modo que em cada linha os números binomiais apresentam o mesmo valor de n e em cada coluna apresentam o mesmo valor de k. As linhas e colunas do Triângulo de Pascal são numeradas a partir de zero.

Assim, podemos escrever o Triângulo de Pascal usando os números binomiais:

$$\begin{array}{l}
\binom{0}{0} \\[1em]
\binom{1}{0}\binom{1}{1} \\[1em]
\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\[1em]
\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\[1em]
\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\[1em]
\qquad\qquad \vdots \\[1em]
\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\binom{n}{4}\cdots\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}
\end{array}$$

O nome dado ao *Triângulo* refere-se ao matemático francês do século dezessete Blaise Pascal (1623-1662).

Embora o Triângulo Aritmético, como também é chamado, já fosse conhecido por exemplo pelos chineses cerca de três séculos antes de Pascal, este em sua obra *Traité du triangle Arithmétique* escrita em 1653 mas, publicada apenas em 1665, estudou as propriedades e desenvolveu aplicações para o mesmo.

Podemos construir o Triângulo de Pascal apenas com os valores dos números binomiais lançando mão da relação de Stifel, assim chamada em referência a Michael Stifel (1486-1567) matemático alemão que publicou em 1544 a obra *Arithmetica Integra*, livro no qual, entre outros assuntos, estuda os coeficientes do desenvolvimento binomial.

Teorema 2.6.1. *Relação de Stifel.* A partir da terceira linha do Triângulo de Pascal, cada elemento entre o primeiro e o último, pode ser obtido pela soma de dois elementos consecutivos da linha anterior sendo o segundo o elemento imediatamente acima do que se quer obter.

Usando a notação de números binomiais podemos escrever a relação de Stifel como:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} \tag{2.2}$$

Demonstração:

Usando a relação (2.1) para representar os números binomiais na Relação de Stifel podemos escrever:

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k+1)!}+\frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}=$$

$$=\frac{k(n-1)!+(n-k)(n-1)!}{k!\,(n-k)!}=$$

$$=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

■

Podemos agora demonstrar a relação entre a sequência de Fibonacci e os números binomiais, sugerida pelo Exemplo 2.6.1.

Proposição 2.6.1. Se o Triângulo de Pascal for reescrito de modo que cada coluna tenha início nas linhas ímpares, então a soma dos elementos de duas linhas consecutivas é igual à soma dos elementos da linha subsequente. Além disso a soma de cada linha representa um termo da sequência de Fibonacci.

Demonstração:

Reescrevendo o Triângulo Aritmético de modo que cada coluna tenha início nas linhas de ordem ímpar, temos:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0}$$

$$\binom{2}{0}\binom{1}{1}$$

$$\binom{3}{0}\binom{2}{1}$$

$$\binom{4}{0}\binom{3}{1}\binom{2}{2}$$

$$\binom{5}{0}\binom{4}{1}\binom{3}{2}$$

Seja F_n a soma dos números binomiais da *n-ésima* linha do triângulo reescrito do modo acima.

Então, $F_1=\binom{0}{0}=1$ e $F_2=\binom{1}{0}=1$ coincidem com o primeiro e com o segundo termos da sequência de Fibonacci.

Queremos provar que $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo $n \geq 3$.

Vamos proceder por indução sobre n.

Inicialmente note que a expressão $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ é válida para $n = 3$ pois, $F_3 = \binom{2}{0} + \binom{1}{1}$ por definição e além disso, $\binom{2}{0} + \binom{1}{1} = \binom{1}{0} + \binom{0}{0}$ já que $\binom{2}{0} = \binom{1}{1} = \binom{1}{0} = \binom{0}{0} = 1$ o que mostra ainda que $F_3 = 2$ coincide com o terceiro termo da sequência de Fibonacci.

Agora, supondo por hipótese de indução que F_{n-1} e F_{n-2} coincidam com os termos de mesma ordem da sequência de Fibonacci, vamos mostrar que F_n coincide com o *n-ésimo* termo desta mesma sequência.

Para n ímpar, digamos $n = 2u - 1$, temos:

$$F_{n-2} = \binom{2u-2}{0} + \binom{2u-3}{1} + \cdots + \binom{u-1}{u-1}$$

$$F_{n-1} = \binom{2u-1}{0} + \binom{2u-2}{1} + \cdots + \binom{u}{u-1}$$

$$F_n = \binom{2u}{0} + \binom{2u-1}{1} + \cdots + \binom{u+1}{u-1} + \binom{u}{u}$$

Somando as duas primeiras igualdades e agrupando convenientemente as parcelas obtemos:

$$F_{n-2} + F_{n-1} = \binom{2u-1}{0} + \left[\binom{2u-2}{0} + \binom{2u-2}{1}\right] + \left[\binom{2u-3}{1} + \binom{2u-3}{2}\right] + \cdots$$
$$+ \left[\binom{u}{u-2} + \binom{u}{u-1}\right] + \binom{u-1}{u-1}$$

Note que $\binom{2u-1}{0} = \binom{2u}{0} = 1$ e $\binom{u-1}{u-1} = \binom{u}{u} = 1$.

Além disso, de acordo com a relação de Stifel, a primeira soma entre colchetes é igual a $\binom{2u-1}{1}$, a segunda é igual a $\binom{2u-2}{2}$e assim por diante, o que mostra que a soma do lado direito da igualdade é igual a F_n.

Portanto, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ e F_n corresponde ao *n-ésimo* termo da sequência de Fibonacci.

Para n par, a demonstração é análoga.

■

2.7 A fórmula de Binet

Vimos que a sequência de Fibonacci é definida pela recorrência linear homogênea de segunda ordem: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, com $F_1 = F_2 = 1$.

Resolvendo-a, podemos encontrar uma fórmula fechada para cada termo da sequência.

A equação característica: $t^2 - t - 1 = 0$

Raízes: $t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

As soluções são da forma: $F_n = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Com as expressões de F_1 e F_2 montamos o sistema:

$$\begin{cases} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)c_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)c_2 = 1 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 c_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 c_2 = 1 \end{cases}$$

Que nos fornece os coeficientes $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Portanto a solução da recorrência é dada por

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (2.3)$$

Tal resultado é conhecido como *fórmula de Binet*.

Percebemos, pelo exposto, que a referida fórmula nada mais é do que a solução de uma recorrência particular.

2.8 Os números de Lucas

Vimos na Seção 1.2 que uma sequência não pode ser completamente definida por uma relação de recorrência sem que se informe o primeiro ou os primeiros termos dos quais os termos subsequentes dependem. Na prática, isto significa que, uma mesma relação de recorrência pode dar origem a inúmeras sequências distintas. O Exemplo 1.5.2 nos mostra o quanto uma sequência pode tornar-se diferente a partir de mudanças nos termos iniciais.

O matemático francês Edouard Lucas (1842-1891) estudou as propriedades da sequência de Fibonacci sendo inclusive devido a ele que a chamamos assim. Lucas procurou ainda compreender como seria o comportamento de sequências que obedecessem a mesma relação de recorrência mas, fossem iniciadas por outros valores.

Em particular, quando os primeiros termos da recorrência são 1 e 3, a recorrência é conhecida por Sequência de Lucas e usualmente representada por

$$(L_n) = (1,3,4,7,11,\dots)$$

.

É interessante notar que as duas sequências têm muito em comum, a começar pelas fórmulas que solucionam suas respectivas recorrências, pois, como a relação de recorrência é a mesma, as equações características bem como suas raízes também o serão, diferindo, as fórmulas, apenas nos coeficientes que, no caso da sequência de Lucas, serão $c_1 = c_2 = 1$, gerando então a solução:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{2.4}$$

Além disso, muitas são as propriedades que relacionam as duas sequências ou que são ao menos semelhantes de modo que, em alguns casos, a propriedade parece ser muito mais uma característica da relação de recorrência do que propriamente da sequência em si.

A proposição seguinte ilustra esta afirmação.

Proposição 2.8.1 A soma dos n primeiros números de Fibonacci é igual ao $(n+2)$-ésimo número de Fibonacci diminuído de uma unidade.

Demonstração:

Queremos mostrar que:

$$\sum_{j=1}^{n} F_j = F_{n+2} - 1$$

Provaremos por indução sobre n.

Para $n = 1$ a propriedade é verdadeira pois,

$$F_1 = F_3 - 1 = 2 - 1 = 1$$

Supondo que a propriedade seja verdadeira para um certo n, vamos provar que é verdadeira para $n+1$.

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Somando F_{n+1} dos dois lados da igualdade, obtemos:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n + F_{n+1} = F_{n+1} + F_{n+2} - 1$$

E como $F_{n+1} + F_{n+2} = F_{n+3}$, podemos escrever:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n + F_{n+1} = F_{n+3} - 1 \tag{2.5}$$

■

A proposição seguinte generaliza este resultado para toda sequência que obedeça esta mesma relação de recorrência.

Proposição 2.8.2 Seja (a_n) uma sequência tal que, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A soma dos n primeiros termos de (a_n) é igual ao $(n+2)$-ésimo termo de (a_n) diminuído do segundo termo.

Demonstração:

Queremos mostrar que:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_{n+2} - a_2$$

Provaremos por indução sobre n.

Para $n = 1$ a propriedade é verdadeira pois,

$$a_1 = a_3 - a_2$$

$$a_1 + a_2 = a_3$$

Supondo que a propriedade seja verdadeira para um certo n, vamos provar que é verdadeira para $n + 1$.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_{n+2} - a_2$$

Somando a_{n+1} dos dois lados da igualdade, obtemos:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} = a_{n+1} + a_{n+2} - a_2$$

E como $a_{n+1} + a_{n+2} = a_{n+3}$, podemos escrever:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} = a_{n+3} - a_2 \tag{2.6}$$

■

Note ainda que, o resultado (2.5) é um caso particular da expressão (2.6) pois, quando a sequência é a de Fibonacci, o segundo termo é $a_2 = 1$.

Veremos no Capítulo 4 algumas outras propriedades interessantes destas sequências.

2.9 A Equação de Pell

Definição 2.9.1 Chama-se *Equação de Pell*, toda equação do tipo $x^2 - Dy^2 = 1$, com D não nulo, $x, y, D \in \mathbb{N}$ e $D \neq z^2$ para todo $z \in \mathbb{N}$.

A denominação “Equação de Pell” é, na verdade, um equívoco que vingou e foi mantido pelo uso e pelo costume. Trata-se de um engano de Euler que entendeu que o matemático inglês John Pell (1611-1685) teria obtido um método de resolução deste gênero de equações. Tal método deve-se entretanto ao também inglês Lord Brouncker (1620-1684).

Para cada valor distinto de D, a equação de Pell admite infinitas soluções, sendo cada solução um par ordenado (x, y).

Na seguinte proposição, vamos mostrar que as sequências (a_n) e (b_n) formadas respectivamente pelos valores de x e y que satisfazem as equações de Pell são recorrências lineares homogêneas de segunda ordem. Ao resolver tais recorrências obteremos fórmulas fechadas que nos permitirão encontrar infinitas soluções de uma Equação de Pell.

Proposição 2.9.1 Seja $x^2 - Dy^2 = 1$, a Equação de Pell para um certo valor D.Sejam x' e y' os menores valores não nulos que satisfazem a equação e $(a_0\,, b_0) = (1\,, 0)$ a solução trivial para todo D. Sejam ainda, (a_n) e (b_n) sequências tais que $a_n = 2x' \cdot a_{n-1} - a_{n-2}$ e $b_n = 2x' \cdot b_{n-1} - b_{n-2}$. Se $a_1 = x'$ e $b_1 = y'$, então o par ordenado $(a_n\,, b_n)$ é solução da Equação de Pell para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Tanto $a_n = 2x' \cdot a_{n-1} - a_{n-2}$ como $b_n = 2x' \cdot b_{n-1} - b_{n-2}$ têm como equação característica $t^2 - 2x't + 1 = 0$, cujas raízes são $t_1 = x' + \sqrt{(x')^2 - 1}$ e $t_2 = x' - \sqrt{(x')^2 - 1}$.

Mas, como x' e y' são soluções da equação de Pell, então $(x')^2 - 1 = D(y')^2$ e portanto, podemos escrever $t_1 = x' + y'\sqrt{D}$ e $t_2 = x' - y'\sqrt{D}$.

Assim, pelo Teorema 2.3.1 as soluções são da forma: $a_n = c_1 \cdot {t_1}^n + c_2 \cdot {t_2}^n$ e $b_n = d_1 \cdot {t_1}^n + d_2 \cdot {t_2}^n$.

Com as expressões de a_0 e a_1 montamos o sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ (x' + y'\sqrt{D})c_1 + (x' - y'\sqrt{D})\, c_2 = x' \end{cases}$$

Que nos fornece os coeficientes $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ para (a_n).

Portanto a solução da recorrência é dada por

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(x' + y'\sqrt{D}\right)^n + \left(x' - y'\sqrt{D}\right)^n\right]$$

Já com as expressões de b_0 e b_1 montamos o sistema:

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = 0 \\ (x' + y'\sqrt{D})d_1 + (x' - y'\sqrt{D})\, d_2 = y' \end{cases}$$

Que nos fornece os coeficientes $d_1 = \frac{1}{2\sqrt{D}}$ e $d_2 = -\frac{1}{2\sqrt{D}}$ para (b_n).

Portanto a solução da recorrência é dada por

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{D}} \cdot \left[\left(x' + y'\sqrt{D}\right)^n - \left(x' - y'\sqrt{D}\right)^n\right]$$

Reescrevendo as soluções encontradas temos:

$$\begin{cases} 2a_n = \left(x' + y'\sqrt{D}\right)^n + \left(x' - y'\sqrt{D}\right)^n \\ 2b_n\sqrt{D} = \left(x' + y'\sqrt{D}\right)^n - \left(x' - y'\sqrt{D}\right)^n \end{cases}$$

Somando as igualdades e em seguida subtraindo a segunda da primeira, obtemos:

$$2a_n + 2b_n\sqrt{D} = 2\left(x' + y'\sqrt{D}\right)^n$$

e

$$2a_n - 2b_n\sqrt{D} = 2\left(x' - y'\sqrt{D}\right)^n$$

Eliminando os fatores 2 e multiplicando uma expressão pela outra encontramos:

$$\left(a_n + b_n\sqrt{D}\right)\left(a_n - b_n\sqrt{D}\right) = ((x')^2 - D(y')^2)^n$$

E finalmente:

$$a_n^2 - Db_n^2 = 1$$

■

Exemplo 2.9.1 Determine as soluções da equação $x^2 - 2y^2 = 1$.

Neste caso, temos $D = 2$ e $(x', y') = (3\,, 2)$.

As sequências associadas à equação são: $a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$ e $b_n = 6b_{n-1} - b_{n-2}$.

Para ambas as sequências, a equação característica é $t^2 - 6t + 1 = 0$, cujas raízes são $t_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ e $t_2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

Assim, de acordo com a Proposição 2.9.1, as soluções são:

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n\right]$$

e

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left[\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n - \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n\right]$$

Fazendo n variar obtemos:

$(a_n) = (1, 3, 17, 99, 577, \dots)$ e $(b_n) = (0, 2, 12, 70, 408, \dots)$

Portanto, as soluções procuradas são $\{(1,0),(3,2),(17,12),(99,70),\ldots\}$.

Note que, como as recorrências foram resolvidas, podemos encontrar qualquer solução particular independentemente das demais. Por exemplo, para $n = 9$ a solução é $(3880899, 2744210)$.

2.10 Aproximação de radicais por frações

Tomando as soluções encontradas no Exemplo 2.9.1, à exceção da primeira, podemos escrever as seguintes frações:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{17}{12} = 1{,}41666\ldots$$

$$\frac{a_3}{b_3} = \frac{99}{70} = 1{,}4142857\ldots$$

$$\frac{a_4}{b_4} = \frac{577}{408} = 1{,}414215686\ldots$$

$$\frac{a_5}{b_5} = \frac{3363}{2378} = 1{,}414213625\ldots$$

A observação dos valores das frações sugere que à medida que n cresce, $\frac{a_n}{b_n}$ se aproxima de $\sqrt{2}$.

De fato, na proposição seguinte vamos provar a veracidade desta observação além de generalizá-la para qualquer valor D.

Proposição 2.10.1 Dada a equação $x^2 - Dy^2 = 1$, se (a_n, b_n) é solução da equação para todo $n \in \mathbb{N}$, então a sequência $z_n = \frac{a_n}{b_n}$ *converge* para $\sqrt{D}$.

Demonstração:

Se (a_n, b_n) é solução da equação, temos de acordo com a Proposição 2.9.1:

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(x' + y'\sqrt{D}\right)^n + \left(x' - y'\sqrt{D}\right)^n\right]$$

e

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{D}} \cdot \left[\left(x' + y'\sqrt{D}\right)^n - \left(x' - y'\sqrt{D}\right)^n\right]$$

De modo que podemos escrever;

$$z_n = \sqrt{D}\frac{\left(x' + y'\sqrt{D}\right)^n + \left(x' - y'\sqrt{D}\right)^n}{\left(x' + y'\sqrt{D}\right)^n - \left(x' - y'\sqrt{D}\right)^n}$$

Calculando o limite de z_n, obtemos:

$\lim_{n\to\infty} z_n =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{D}\frac{\left(x' + y'\sqrt{D}\right)^n + \left(x' - y'\sqrt{D}\right)^n}{\left(x' + y'\sqrt{D}\right)^n - \left(x' - y'\sqrt{D}\right)^n}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{D}\frac{1 + \frac{\left(x' - y'\sqrt{D}\right)^n}{\left(x' + y'\sqrt{D}\right)^n}}{1 - \frac{\left(x' - y'\sqrt{D}\right)^n}{\left(x' + y'\sqrt{D}\right)^n}}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{D}\frac{1 + \left(\frac{x' - y'\sqrt{D}}{x' + y'\sqrt{D}}\right)^n}{1 - \left(\frac{x' - y'\sqrt{D}}{x' + y'\sqrt{D}}\right)^n}\right] =$$

Mas, como (x', y') é solução da equação de Pell, podemos escrever:

$$x'^2 - Dy'^2 = 1$$

$$\left(x' - y'\sqrt{D}\right)\left(x' + y'\sqrt{D}\right) = 1$$

$$\left(x' - y'\sqrt{D}\right) = \frac{1}{\left(x' + y'\sqrt{D}\right)}$$

E portanto,

$\lim_{n\to\infty} z_n =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{D}\frac{1 + \frac{1}{\left(x' + y'\sqrt{D}\right)^{2n}}}{1 - \frac{1}{\left(x' + y'\sqrt{D}\right)^{2n}}}\right] = \sqrt{D}$$

■

3. Recorrências Lineares de ordem qualquer

3.1 Definições

O estudo feito nos dois primeiros capítulos deste trabalho, pode ser generalizado para recorrências de ordem qualquer, tendo em vista que, os conceitos já explorados permanecem válidos quando estendidos para recorrências de ordem maior que dois, como veremos nas definições seguintes.

Definição 3.1.1 Chama-se *relação de recorrência linear de ordem k* à sequência na qual cada termo é obtido a partir dos k termos imediatamente anteriores a ele.

Uma recorrência linear de ordem k é do tipo:

$$a_n = g_1(n)a_{n-1} + g_2(n)a_{n-2} + g_3(n)a_{n-3} + \cdots + g_k(n)a_{n-k} + f(n),$$

onde $g_k(n)$ é uma função não nula. Além disso, se $f(n) = 0$ a recorrência é dita *homogênea*, caso contrário será não-homogênea.

Quando $g_1(n), g_2(n), \ldots, g_k(n)$ são constantes e $f(n) = 0$, a relação de recorrência assume a forma

$$a_n = q_1 a_{n-1} + q_2 a_{n-2} + q_3 a_{n-3} + \cdots + q_k a_{n-k}$$

A cada relação de recorrência linear de ordem k podemos associar uma equação de grau k, $t^k - q_1 t^{k-1} - q_2 t^{k-2} - \cdots - q_{k-1} t - q_k = 0$, chamada equação característica.

Teorema 3.1.1. Se $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k$ são raízes da equação $t^k - q_1 t^{k-1} - \cdots - q_{k-1} t - q_k = 0$, então $x_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n + c_3 t_3^n + \cdots + c_k t_k^n$ *é solução da recorrência* para quaisquer valores de $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k$.

Demonstração:

Substituindo $x_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n + c_3 t_3^n + \cdots + c_k t_k^n$ na relação de recorrência $a_n - q_1 a_{n-1} - q_2 a_{n-2} - q_3 a_{n-3} - \cdots - q_k a_{n-k}$ e agrupando os termos, obtemos:

$$c_1 t_1^{n-k}\left(t_1^k - q_1 t_1^{k-1} - \cdots - q_k\right) + c_2 t_2^{n-k}\left(t_2^k - q_1 t_2^{k-1} - \cdots - q_k\right) + \cdots$$
$$+ c_k t_k^{n-k}\left(t_k^k - q_1 t_k^{k-1} - \cdots - q_k\right) =$$

$$c_1 t_1^{n-k} \cdot 0 + c_2 t_2^{n-k} \cdot 0 + \cdots + c_k t_k^{n-k} \cdot 0 = 0$$

■

3.2 Resolução de recorrências de ordem qualquer

Teorema 3.2.1. Se $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k$, são raízes distintas e não nulas da equação característica, então todas as soluções da recorrência $a_n = q_1 a_{n-1} + q_2 a_{n-2} + q_3 a_{n-3} + \cdots + q_k a_{n-k}$ são da forma $x_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n + c_3 t_3^n + \cdots + c_k t_k^n$ com $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ constantes.

Demonstração:

Seja u_n uma solução qualquer de $a_n - q_1 a_{n-1} - q_2 a_{n-2} - q_3 a_{n-3} - \cdots - q_k a_{n-k} = 0$.

Pelo Teorema 3.1.1 podemos formar um sistema de equações no qual as constantes $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ sejam as soluções:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & & t_k \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ t_1^{k-1} & t_2^{k-1} & \cdots & t_k^{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$$

Note que, estas soluções são possíveis já que $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k$, são raízes distintas e não nulas.

Além disso o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & & t_k \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ t_1^{k-1} & t_2^{k-1} & \cdots & t_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le k} (t_j - t_i)$$

é diferente de zero. O que garante que o sistema tem solução.

Tomemos $v_n = u_n - c_1 t_1^n - c_2 t_2^n - c_3 t_3^n - \cdots - c_k t_k^n$. Vamos provar que $v_n = 0$ para todo n.

Temos,

$v_n - q_1 v_{n-1} - q_2 v_{n-2} - q_3 v_{n-3} - \cdots - q_k v_{n-k} = (u_n - q_1 u_{n-1} - q_2 u_{n-2} - q_3 u_{n-3} - \cdots - q_k u_{n-k}) - c_1 t_1^{n-k}(t_1^k - q_1 t_1^{k-1} - \cdots - q_k) - c_2 t_2^{n-k}(t_2^k - q_1 t_2^{k-1} - \cdots - q_k) - \cdots - c_k t_k^{n-k}(t_k^k - q_1 t_k^{k-1} - \cdots - q_k)$.

O primeiro parêntese é igual a zero já que u_n é solução de $a_n - q_1 a_{n-1} - q_2 a_{n-2} - q_3 a_{n-3} - \cdots - q_k a_{n-k} = 0$ e os demais parênteses são iguais a zero pois $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}$, t_k são raízes da equação $t^k - q_1 t^{k-1} - \cdots - q_{k-1} t - q_k = 0$. Assim, $v_n - q_1 v_{n-1} - q_2 v_{n-2} - q_3 v_{n-3} - \cdots - q_k v_{n-k} = 0$.

Além disso, como $c_1 t_1 + c_2 t_2 + c_3 t_3 + \cdots + c_k t_k = u_1$ e $c_1 t_1^2 + c_2 t_2^2 + c_3 t_3^2 + \cdots + c_k t_k^2 = u_2$, temos $v_1 = v_2 = 0$.

Entretanto, se $v_n - q_1 v_{n-1} - q_2 v_{n-2} - q_3 v_{n-3} - \cdots - q_k v_{n-k} = 0$ e $v_1 = v_2 = 0$ então $v_n = 0$ para todo n. ■

3.3 Progressões Aritméticas de ordem qualquer

A Definição 1.4.1 nos permite ampliar o conceito de progressão aritmética para ordens superiores de modo que dada uma sequência (a_n), se a sequência das diferenças Δa_n formam uma P.A., diz-se que a sequência (a_n) é uma *progressão aritmética de segunda ordem*. Neste caso, a diferença de *segunda ordem* $\Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n$, é constante.

A próxima definição generaliza o conceito de progressão aritmética para uma ordem *k* qualquer.

Definição 3.3.1 Uma progressão aritmética de ordem k é uma sequência tal que as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética de ordem $k-1$. Neste caso, a diferença de ordem k, $\Delta^k a_n = \Delta^{k-1} a_{n+1} - \Delta^{k-1} a_n$, é constante.

Vimos na Seção 2.4 que toda progressão aritmética de primeira ordem pode ser representada por uma recorrência de segunda ordem do tipo $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$.

Podemos então, empregar o mesmo raciocínio na análise de progressões superiores, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 3.3.1 Que relação de recorrência representa a progressão aritmética de segunda ordem?

Em uma progressão aritmética de segunda ordem, a diferença constante é, como vimos, a de ordem 2. Isso significa que a sequência das diferenças de ordem um é uma P.A. de primeira ordem, ou seja:

$$\Delta a_n = 2\Delta a_{n-1} - \Delta a_{n-2} \ .$$

Mas, por definição,

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

Então,

$$a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1}) - (a_{n-1} - a_{n-2})$$

$$a_{n+1} = a_n + 2a_n - 2a_{n-1} - a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_{n+1} = 3a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} \ .$$

Ou ainda,

$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} \ .$$

A proposição seguinte generaliza este resultado.

Proposição 3.3.1 Toda progressão aritmética (a_n) de ordem k pode ser representada por uma recorrência linear de ordem $k+1$ tal que, $a_n = \binom{k+1}{1} a_{n-1} - \binom{k+1}{2} a_{n-2} + \binom{k+1}{3} a_{n-3} + \cdots + (-1)^k \binom{k+1}{k+1} a_{n-k-1}$.

Demonstração:

Vamos proceder por indução sobre k.

Para $k = 1$, a proposição é claramente verdadeira, pois a expressão $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ encontrada na Seção 2.4 pode ser reescrita como:

$$a_n = \binom{2}{1} a_{n-1} - \binom{2}{2} a_{n-2}$$

Supondo que a proposição seja correta para um certo k, vamos provar que ela é verdadeira para $k + 1$.

De fato, seja (a_n) uma progressão aritmética de ordem $k + 1$.

De acordo com a Definição 3.3.1 a sequência (Δa_n) das diferenças entre seus termos consecutivos é uma progressão aritmética de ordem k.

Mas, por hipótese de indução, (Δa_n) pode ser expressa por uma relação de recorrência como:

$$\Delta a_{n-1} = \binom{k+1}{1} \Delta a_{n-2} - \binom{k+1}{2} \Delta a_{n-3} + \cdots + (-1)^k \binom{k+1}{k+1} \Delta a_{n-k-2}$$

Entretanto, $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$.

Fazendo as substituições, temos:

$$a_n - a_{n-1} = \binom{k+1}{1} \cdot (a_{n-1} - a_{n-2}) - \binom{k+1}{2} \cdot (a_{n-2} - a_{n-3}) + \cdots + (-1)^k \cdot \binom{k+1}{k+1} \cdot (a_{n-k-1} - a_{n-k-2})$$

Assim,

$$a_n = \left[1 + \binom{k+1}{1}\right] \cdot a_{n-1} - \left[\binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2}\right] \cdot a_{n-2} + \cdots + (-1)^{k+1} \left[\binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1}\right] \cdot a_{n-k-1} + (-1)^{k+2} \binom{k+1}{k+1} \cdot a_{n-k-2}$$

e, pela equação (2.2), obtemos

$$a_n = \binom{k+2}{1} a_{n-1} - \binom{k+2}{2} a_{n-2} + \binom{k+2}{3} a_{n-3} + \cdots + (-1)^{k+3} \binom{k+2}{k+2} a_{n-k-2}$$

■

3.4 Números poligonais

Tendo seu berço na Grécia antiga, mais precisamente junto à Escola Pitagórica, os chamados números figurados são exemplo de progressões aritméticas de várias ordens e, por conseguinte são também exemplo de sequências que podem ser representadas por relações de recorrência.

Os Pitagóricos representavam com tais números, a quantidade necessária de pontos para formar determinados arranjos geométricos, fazendo assim uma espécie de ponte entre a geometria e a aritmética.

Vemos nas figuras 3.4.1, 3.4.2 e 3.4.3 alguns exemplos iniciais.

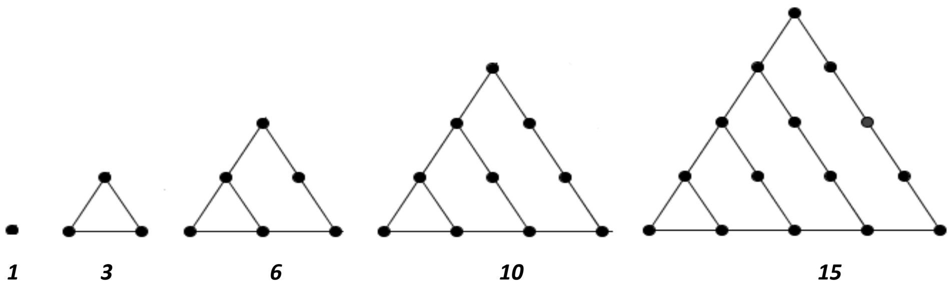


Figura 3.4.1 Números triangulares

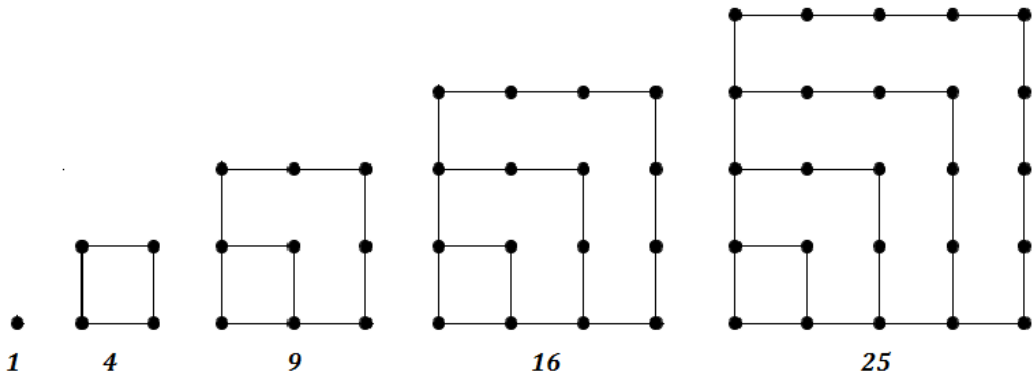


Figura 3.4.2 Números quadrados

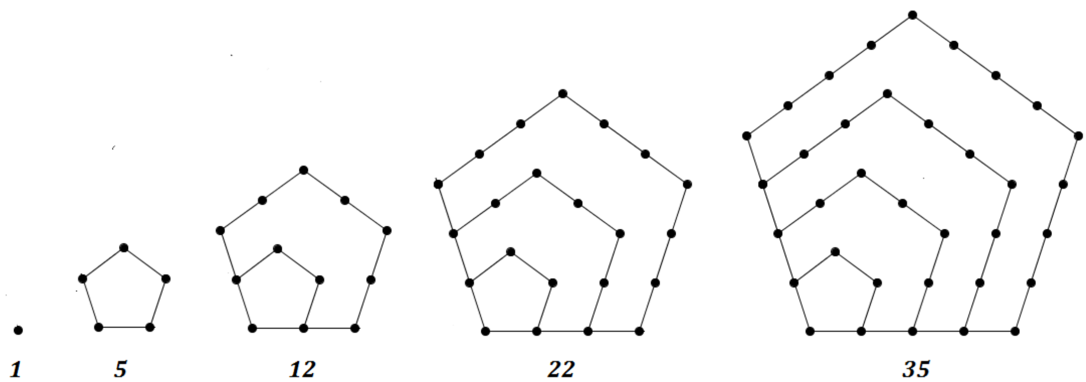


Figura 3.4.3 Números pentagonais

Podemos observar que o padrão de pontos cresce formando figuras planas, em particular, polígonos regulares, vindo daí as denominações *triangulares*, *quadrados*, *pentagonais*... Tais denominações costumam ser classificadas como *números poligonais*.

Definição 3.4.1 Chama-se *número poligonal*, a quantidade de pontos usada para construir uma figura formada pela sobreposição sucessiva de polígonos regulares de mesmo número de lados e com quantidade de pontos em cada lado aumentada de uma unidade em relação ao polígono imediatamente anterior e de modo que cada polígono sobreposto tenha dois lados coincidentes com todos os antecessores e os pontos sobre estes lados também coincidam.

Cada sequência de números poligonais é classificada de acordo com o polígono do qual se originou.

Observando as imagens notamos que, em cada sequência:

- A primeira "figura" é formada por um único ponto. Portanto o número 1 é, ao mesmo tempo, triangular, quadrado, pentagonal e assim por diante.
- A segunda figura é formada pelo número de pontos correspondente à quantidade de vértices do polígono que nomeia a sequência.
- A quantidade de pontos é sempre a mesma em todos os lados de cada figura.
- A partir da terceira figura, cada polígono cresce "aproveitando" alguns pontos da figura antecedente. Em particular, todos os pontos de dois lados adjacentes de uma dada figura pertencem à figura subsequente.

Partindo destas observações, vamos mostrar que as sequências de números poligonais podem ser expressas por meio de relações de recorrência.

Proposição 3.4.1 Seja $\mathbb{b} \in \mathbb{N}$, o número de vértices do polígono que nomeia a sequência de números poligonais. Se (a_n) é a sequência do número de pontos que formam o polígono de $\mathbb{b}$ vértices, então (a_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem e obedece à recorrência $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$.

Demonstração:

Primeiramente observe que, em cada sequência, ao passar de uma figura à seguinte, acrescentamos $(\mathbb{b} - 2)$ lados pois, dois são "aproveitados". Se estamos construindo a n-ésima figura, serão acrescidos $(\mathbb{b} - 2) \cdot n$ pontos.

Entretanto, é preciso subtrair deste número, os vértices comuns aos lados acrescidos para não serem contados em duplicata. Estes são em número de $(\mathbb{b} - 3)$ vértices.

Assim, o número real de pontos acrescentados a uma figura para formar a seguinte é de $(\mathbb{b} - 2) \cdot n - (\mathbb{b} - 3)$.

Portanto podemos escrever:

$$a_n = a_{n-1} + (\mathbb{b} - 2) \cdot n - \mathbb{b} + 3 \qquad (3.1)$$

Note que,

$$\Delta a_{n-1} = a_n - a_{n-1} = (\mathbb{b} - 2) \cdot n - \mathbb{b} + 3$$

Ou seja, como $\mathbb{b}$ é constante em cada sequência, as diferenças entre os termos consecutivos formam uma P.A.

Por conseguinte, toda sequência de números poligonais é uma progressão aritmética de segunda ordem e, conforme vimos na Seção 3.3, pode ser representada pela recorrência $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$.

■

Vemos na Tabela 3.4.1 os valores iniciais de algumas sequências de números poligonais.

Números Poligonais

Triangulares	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78
Quadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
Pentagonais	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	210
Hexagonais	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	276
Heptagonais	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235	286	342
Octogonais	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280	341	408
Eneagonais	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325	396	474
Decagonais	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370	451	540

Tabela 3.4.1

3.5 Números piramidais

O passo natural seguinte no âmbito dos números figurados é seguir do plano ao espaço formando figuras tridimensionais a partir das que dão origem aos números poligonais.

Desta forma, se trocarmos os pontos dos números poligonais podemos por bolas ou esferas ou ainda por cubos, poderemos criar "pirâmides" sobrepondo as esferas organizadas em formato poligonal como camadas sucessivas.

Os arranjos construídos deste modo são classificados em função da figura poligonal da qual se originou. Assim teremos os números piramidais de base triangular, quadrada, pentagonal e assim por diante.

Com base nestas ideias temos a definição de números piramidais.

Definição 3.5.1 Chama-se *número piramidal* de base triangular, quadrada, pentagonal e assim por diante, ao número obtido pela soma dos n primeiros números poligonais respectivamente triangulares, quadrados, pentagonais e assim por diante.

Partindo desta definição concluímos que as sequências de números piramidais são progressões aritméticas de terceira ordem pois as diferenças entre seus termos consecutivos formam as sequências de números poligonais que, como já vimos são progressões de segunda ordem.

A figura 3.5.1 nos dá uma ideia do processo realizado com os números quadrados.

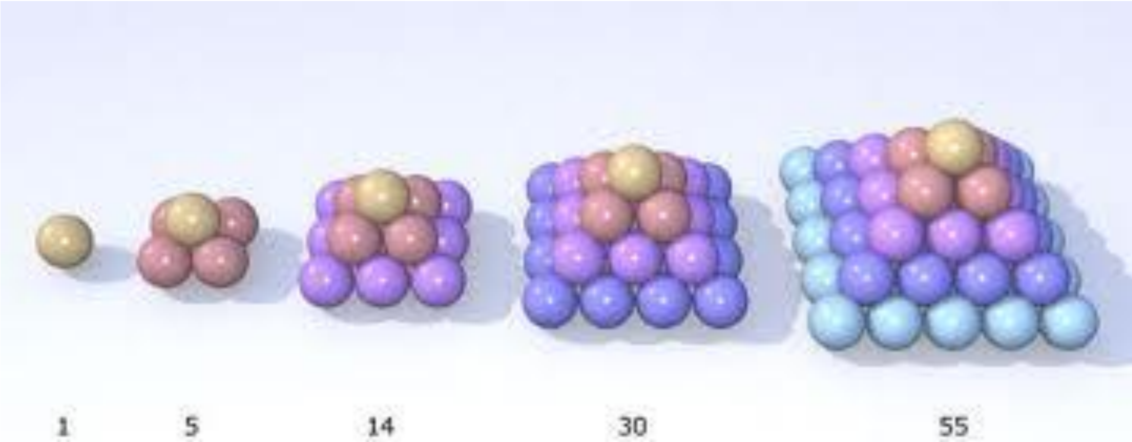


Figura 3.5.1 Números piramidais de base quadrada

Vemos na Tabela 3.5.1 os valores iniciais de algumas sequências de números piramidais.

Números Piramidais de base

Triangular	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364
Quadrada	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	506	650
Pentagonal	1	6	18	40	75	126	196	288	405	550	726	936
Hexagonal	1	7	22	50	95	161	252	372	525	715	946	1222
Heptagonal	1	8	26	60	115	196	308	456	645	880	1166	1508
Octogonal	1	9	30	70	135	231	364	540	765	1045	1386	1794
Eneagonal	1	10	34	80	155	266	420	624	885	1210	1606	2080
Decagonal	1	11	38	90	175	301	476	708	1005	1375	1826	2366

Tabela 3.5.1

3.6 Números figurados de dimensão qualquer

Vimos na seção anterior que o conceito de número poligonal pode ser ampliado para o de número piramidal.

Embora não haja meios de visualizar uma figura quadridimensional formada pela sobreposição de números piramidais, é perfeitamente possível generalizar a definição de números piramidais para dimensões maiores (e menores) que as já vistas.

Definição 3.6.1 Chama-se *número figurado* de dimensão $\mathbb{d}$ na base $\mathbb{b}$, o número igual à soma dos n primeiros termos da sequência formada pelos números figurados de dimensão $\mathbb{d} - 1$ na base $\mathbb{b}$, sendo $\mathbb{b}, \mathbb{d} \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{d} \geq 1$ e $\mathbb{b} \geq 3$.

Definidos desta forma, os números figurados representam toda uma classe de progressões aritméticas de ordem igual à dimensão $\mathbb{d}$, sendo que para cada dimensão, as progressões se diferenciam pela base à qual se vinculam.

Vemos na Tabela 3.6.1 um resumo desta nomenclatura.

Nomenclatura dos números figurados			
$\mathbb{b}$	Base	Dimensão ($\mathbb{d}$)	Classificação
3	Triângulo	1	Lineares
4	Quadrado	2	Poligonais
5	Pentágono	3	Piramidais
6	Hexágono	4	4ª dimensão
7	Heptágono	5	5ª dimensão

Tabela 3.6.1

Como exemplo, vemos na Tabela 3.6.2 as primeiras sequências de números figurados de base $\mathbb{b} = 3$ e dimensões de 1 a 9 até o 7º termo.

$n \backslash \mathbb{d}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	3	6	10	15	21	28	36	45	55
4	4	10	20	35	56	84	120	165	220
5	5	15	35	70	126	210	330	495	715
6	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
7	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005

Tabela 3.6.2

Note que as sequências dos números figurados de base triangular correspondem às colunas do Triângulo de Pascal.

De fato, as sequências de números binomiais que surgem nas colunas do Triângulo de Pascal são, ao mesmo tempo, números figurados e progressões aritméticas de ordem qualquer.

Devido ao fato de que sendo os números triangulares de dimensão 1 a sequência dos números naturais e portanto idêntica à coluna 1 do Triângulo, ao obedecerem à relação de Stifel, cada número de uma coluna k qualquer do Triângulo Aritmético equivale à soma dos n primeiros termos da coluna $k - 1$. Exatamente como ocorre com os números figurados.

Poderíamos então alternativamente definir o Triângulo de Pascal como o *Triângulo dos números figurados de base 3*.

Isto significa que podemos construir um “triângulo aritmético” para cada uma das bases de números figurados.

O número de ordem das colunas do triângulo corresponde à dimensão do número figurado, sendo que, no triângulo admite-se a dimensão 0 para a primeira coluna, embora esta seja sempre, por isso mesmo, uma sequência constante.

Como exemplo, construímos as primeiras linhas de um triângulo com números figurados de base 4.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	**2**											
1	**2**	1										
2	**2**	3	1									
3	**2**	5	4	1								
4	**2**	7	9	5	1							
5	**2**	9	16	14	6	1						
6	**2**	11	25	30	20	7	1					
7	**2**	13	36	55	50	27	8	1				
8	**2**	15	49	91	105	77	35	9	1			
9	**2**	17	64	140	196	182	112	44	10	1		
10	**2**	19	81	204	336	378	294	156	54	11	1	
11	**2**	21	100	285	540	714	672	450	210	65	12	1

Tabela 3.6.3 Triângulo de números figurados de base 4

É possível explorar este, bem como qualquer dos outros triângulos aritméticos assim formados que guardam várias semelhanças e identidades relacionadas com o triângulo aritmético original.

4. Problemas e Aplicações

Procuramos trazer neste capítulo alguns problemas envolvendo os conceitos desenvolvidos até aqui, bem como os conceitos que envolvem sequências de modo geral além de sugerir algumas atividades para o trabalho em sala de aula.

Queremos ressaltar o fato de que quaisquer que sejam as aplicações, problemas ou atividades sugeridas, o mais importante talvez seja a investigação matemática.

O professor deve orientar tanto quanto possível seus alunos na descoberta de relações matemáticas, padrões e regularidades. Algo que, no estudo de sequências, é de uma riqueza incalculável.

Uma boa medida, por exemplo, é explorar determinado problema já resolvido, mudando parâmetros, variáveis ou o próprio questionamento afim de que o aluno perceba que influência esta ou aquela informação tem na situação-problema.

É preciso ter em mente que:

> ... se um dos objetivos da educação matemática é fazer com que os alunos aprendam como é que as pessoas descobrem fatos e métodos, deveriam também, durante uma parte significativa do tempo de aprendizagem, dedicar-se a essa mesma atividade: descobrir os fatos. (GOLDENBERG, 1999, apud, FIORENTINI, 2006, p.135)

Em vários momentos, nos capítulos precedentes procuramos agir desta forma. Pensando e repensando as situações. Esta é, acreditamos, nossa melhor sugestão de atividade.

4.1 Problemas

Problema 4.1.1

Segundo PERELMAN (1986) o problema mais antigo que se conhece sobre progressões não é o da recompensa ao inventor do xadrez e sim um que aparece no famoso papiro egípcio de Rind e que enunciamos em seguida.

Foram repartidas cem medidas de trigo entre cinco pessoas de modo que a segunda recebeu mais que a primeira, tanto quanto a terceira recebeu a mais que a segunda, a quarta recebeu mais que a terceira e a quinta mais que a quarta. Além disso, as duas primeiras juntas receberam sete vezes menos que as três últimas juntas.

Quanto recebeu cada pessoa?

Solução:

As quantidades de medidas de trigo recebidas pelas pessoas formam uma progressão aritmética de 5 termos na qual a soma dos 3 últimos termos é igual a sete vezes a soma dos 2 primeiros.

Sejam $a-2r, a-r, a, a+r, a+2r$ as medidas de trigo.

A soma dos termos é $5a = 100$ portanto uma das pessoas recebe 20 medidas de trigo.

Além disso, temos que $a + (a+r) + (a+2r) = 7 \cdot [(a-r) + (a-2r)]$.

E como já sabemos que $a = 20$, encontramos $r = \frac{55}{6}$.

Assim, as medidas de trigo são: $\frac{5}{3}, \frac{65}{6}, 20, \frac{175}{6}$ e $\frac{115}{3}$.

Observações:

Surge aqui uma oportunidade de trabalhar frações que é um tema espinhoso para muitos alunos.

Por outro lado, uma boa linha de investigação pode ser a de determinar para que quantidade de "medidas de trigo", todas as pessoas receberiam valores inteiros.

Se bem orientados, os alunos descobrirão que, para alguns valores isto é impossível enquanto que, para outros, é necessário alterar a proporção entre as parcelas.

Por exemplo, no problema em questão, se a quantia recebida pelos 3 últimos fosse o *triplo* do recebido pelos 2 primeiros, teríamos como resultados: 10, 15, 20, 25 e 30.

Problema 4.1.2

Para 31 galinhas planejou-se uma quantidade de alimento a base de 100 gramas semanais para cada uma durante certo tempo. Entretanto, como a cada semana o número de galinhas diminuía em uma unidade, a reserva de alimento durou o dobro do planejado.

Que quantidade de alimento foi reservada e para quanto tempo?

Solução:

Uma das formas de pensar este problema é verificar quanto alimento *deixou de ser consumido* ao longo do tempo.

Se a quantidade de aves houvesse permanecido sempre a mesma, o gasto de alimento seria de $3100g$ por semana. Tomando n como o número de semanas e (a_n) como a sequência que representa o gasto *acumulado* de alimento, poderíamos escrever:

$$a_n = 3100n$$

Entretanto, na segunda semana foram gastos $100g$ a menos de alimento, na terceira $200g$ a menos e assim por diante. De modo que a *economia acumulada* de alimento foi de $\mathbf{100g}$ na 2ª semana, $100g + 200g = \mathbf{300g}$ na 3ª semana, $100g + 200g + 300g = \mathbf{600g}$ na 4ª semana e assim por diante.

Note que os valores encontrados são os números triangulares multiplicados por 100. Resolvendo a recorrência que define os números triangulares, encontramos a conhecida fórmula $\frac{n(n-1)}{2}$ que neste caso será multiplicada por 100 como vimos.

Chamando de (a'_n) a sequência que representa a quantidade *real* de gasto *acumulado* de alimento podemos escrever:

$$a'_n = 3100n - 100\frac{n(n-1)}{2}$$

$$a'_n = 3150n - 50n^2 \qquad (4.1)$$

Tomando o número de semanas por m, temos que a quantidade de alimento reservado foi $3100m$ mas, segundo o problema essa reserva durou $2m$ semanas, ou seja, $a'_{2m} = 3100m$.

Substituindo a expressão (4.1) na igualdade obtida temos.

$$3100m = 3150 \cdot (2m) - 50 \cdot (2m)^2$$

O que nos fornece $m = 16$.

Foram preparados portanto, $49600g$ de alimentos para 16 semanas.

Problema 4.1.3

Um problema clássico e que já foi recontado em outras versões é o da pessoa que sai às compras e gasta na primeira loja que entra, metade do que tem no bolso e mais um real. Na segunda loja gasta metade do que sobrou e mais um real. Na loja seguinte ocorre o mesmo. Entretanto, ao sair da terceira e última loja, a pessoa percebe que não tem dinheiro algum. Quantos reais ela possuía ao sair de casa?

Solução:

A estratégia mais utilizada na resolução deste problema é a de voltar da situação final até a inicial realizando as operações inversas. Sem dúvida para valores pequenos e uma sequência de apenas 3 termos, é uma boa estratégia. Vamos porém, aproveitar a ideia do problema para pensar de modo mais geral.

Seja (a_n) a sequência que fornece a quantidade, em reais, que restou a cada compra.

Neste caso, a_1 corresponde ao que a pessoa possuía ao sair de casa e a_{n+1}corresponde ao que restou após a n-ésima compra.

Após cada compra, resta o valor antecedente menos metade dele e menos um real.

Ou seja,

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n}{2} - 1$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} - 1$$

Resolvendo esta recorrência de acordo com o que vimos no Exemplo 1.5.1, encontramos:

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + 2}{2^n} - 2$$

No problema em questão, o dinheiro acaba após a 3ª compra. Portanto, $a_4 = 0$.

Assim, temos:

$$a_4 = \frac{a_1 + 2}{2^3} - 2 = 0 \ ,$$

de onde encontramos que a pessoa saiu de casa com 14 reais.

Note que, a solução da recorrência nos permite encontrar o valor inicial *qualquer que seja* o número de compras efetuadas até o dinheiro acabar.

Além disso, pode-se propor mudanças no problema como por exemplo no que resta após a última compra. Ou então, quanto deve ser o valor inicial para que após n compras, mesmo ainda restando dinheiro, seja impossível continuar gastando *metade mais um*.

Problema 4.1.4

Em [11], encontramos um problema semelhante ao anterior e bastante interessante chamado "As pérolas do Rajá".

Um velho rajá deixou como herança para suas filhas um lote de pérolas. Determinou, porém, que a partilha deveria ser feita por ordem decrescente de idade e de modo que à primeira filha coubessem *uma* pérola e mais um sétimo do que restasse, à segunda filha coubessem *duas* pérolas e mais um sétimo do que restasse e assim por diante até a filha mais nova.

Como cada filha, antes de retirar a sétima parte, deveria retirar uma quantidade sempre de uma unidade a mais que a antecessora, as filhas mais novas acreditaram-se prejudicadas e o caso foi parar na justiça.

O juiz, entretanto afirmou que a partilha estava correta e que todas receberiam partes iguais.

Quantas eram as filhas e quantas pérolas deixou como herança o rajá?

Solução:

Seja (a_n) uma sequência tal que, a_1 corresponde ao número de pérolas deixadas como herança e a_{n+1} corresponde ao que sobrou do total após a retirada da n-ésima filha.

Assim, temos:

$$a_{n+1} = a_n - n - \left(\frac{a_n - n}{7}\right)$$

$$a_{n+1} = 6\left(\frac{a_n - n}{7}\right) \tag{4.2}$$

Note que, como a herança é dividida igualmente para cada filha, a diferença Δa_n é constante e portanto a sequência (a_n) é uma progressão aritmética!

Mas, já vimos que toda progressão aritmética obedece à recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ e portanto podemos escrever;

$$a_3 = 2a_2 - a_1$$

Substituindo nos três primeiros termos a expressão (4.2), obtemos:

$$6\left(\frac{a_2 - 2}{7}\right) = 2 \cdot 6\left(\frac{a_1 - 1}{7}\right) - a_1$$

$$a_2 - 2 = 2a_1 - 2 - \frac{7a_1}{6}$$

$$a_2 = \frac{5a_1}{6}$$

$$6\left(\frac{a_1 - 1}{7}\right) = \frac{5a_1}{6}$$

$$36a_1 - 36 = 35a_1$$

$$a_1 = 36$$

Assim, vemos que o rajá deixou 36 pérolas para suas filhas e, como a primeira filha retirou uma pérola e mais a sétima parte das 35 que sobraram, ficou com 6 pérolas, a mesma quantidade cabendo a todas as outras. Portanto o rajá tinha 6 filhas.

É inevitável observar que a quantidade de filhas e de pérolas que couberam a cada uma é a mesma, assim como a aparente coincidência de a herança total ser o quadrado do número de filhas.

De fato, é possível mostrar com os mesmos argumentos usados na solução, que a forma de partilha proposta pelo rajá funciona somente nestas condições. Ou seja, se o número de filhas for a raiz quadrada do número total de pérolas.

Se generalizarmos o problema substituindo $\frac{1}{7}$ por, digamos $\frac{1}{q}$, sendo $q - 1$, o número de filhas, encontraremos $(q-1)^2$ como sendo o total de pérolas deixadas como herança.

Problema 4.1.5 (32nd British Mathematical Olympiad, 1996)

Uma função f é definida para todos os inteiros positivos e satisfaz as condições: $f(1) = 1996$ e $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$.

Calcule o exato valor de $f(1996)$.

Solução:

Este interessante problema, apresenta uma solução relativamente simples, embora talvez a princípio não pareça.

Note inicialmente que, apesar de a função ser definida por recorrência, o número de termos anteriores dos quais cada termo seguinte depende, não é fixo, aumentando a cada passo.

Isolando $f(n)$ na expressão que define a função, obtemos a recorrência:

$$f(n) = \frac{f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)}{n^2 - 1}$$

Para entender melhor o problema vamos calcular os valores iniciais de $f(n)$ omitindo, porém, o valor de $f(1)$.

$$f(2) = \frac{f(1)}{3}$$

$$f(3) = \frac{f(1) + f(2)}{8} = \frac{f(1)}{8} + \frac{f(1)}{3 \cdot 8} = \frac{f(1)}{6}$$

$$f(4) = \frac{f(1) + f(2) + f(3)}{15} = \frac{f(1)}{15} + \frac{f(1)}{3 \cdot 15} + \frac{f(1)}{6 \cdot 15} = \frac{f(1)}{10}$$

A observação dos primeiros resultados sugere que, quando escrevemos cada $f(n)$ em função de $f(1)$, os denominadores das frações que surgem são os *números triangulares*.

Simbolicamente, parece que a solução da recorrência é:

$$f(n) = \frac{f(1)}{\binom{n+1}{2}}$$

Antes de completarmos a solução do problema, vamos demonstrar que a solução da recorrência está correta.

Vamos proceder por indução sobre n

Para $n = 1$, a solução é correta pois, $f(1) = \frac{f(1)}{\binom{2}{2}} = f(1)$.

Supondo que a expressão seja válida para um certo n, vamos provar que é válida para $n + 1$.

A partir da definição da função, podemos escrever:

$$(n^2 - 1)f(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$$

e

$$[(n+1)^2 - 1]f(n+1) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

Subtraindo uma igualdade da outra, encontramos:

$$[(n+1)^2-1]f(n+1)-(n^2-1)f(n)=f(n)$$

$$[n^2+2n]f(n+1)=n^2f(n)$$

$$f(n+1)=\frac{nf(n)}{n+2}$$

Mas, por hipótese de indução, temos que $f(n)=\frac{f(1)}{\binom{n+1}{2}}$, portanto:

$$f(n+1)=\frac{n}{n+2}\cdot\frac{f(1)}{\binom{n+1}{2}}$$

$$f(n+1)=\frac{n}{n+2}\cdot\frac{f(1)}{\frac{(n+1)n}{2}}$$

$$f(n+1)=\frac{f(1)}{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}$$

Ou seja,

$$f(n+1)=\frac{f(1)}{\binom{n+2}{2}}$$

■

Assim, sabendo que $f(1)=1996$, podemos concluir a solução do problema.

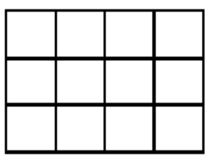
$$f(1996)=\frac{f(1)}{\binom{1997}{2}}$$

$$f(1996)=\frac{1996}{\frac{1997\cdot 1996}{2}}=\frac{2}{1997}$$

Podemos ainda explorar com os alunos outras vertentes deste problema, alterando as condições iniciais da recorrência e tentando identificar as mudanças decorrentes na sequência.

Problema 4.1.6

Considere um retângulo de dimensões n e $n+1$ unidades de comprimento subdividido em quadrados com uma unidade de comprimento de lado. A figura mostra um retângulo $3\ x\ 4$ como exemplo.



De quantas maneiras podemos escolher dois quadrados deste retângulo de modo que sejam adjacentes?

Solução:

Por simples inspeção verificamos que para $n = 1$ (retângulo $1\ x\ 2$) só há uma escolha possível.

Para $n = 2$ (retângulo $2\ x\ 3$) há sete escolhas possíveis.

Prosseguindo, obtemos os resultados:

Medida	$1\ x\ 2$	$2\ x\ 3$	$3\ x\ 4$	$4\ x\ 5$	$\cdots$	$n\ x\ n+1$
Escolhas	1	7	17	31	$\cdots$	?

Chamemos $(a_n) = (1, 7, 17, 31, \ldots)$ a sequência dos resultados.

Note que as diferenças entre termos consecutivos da sequência formam uma P.A. de primeira ordem, $\Delta a_n = (6, 10, 14, \ldots)$, o que significa que a sequência dos resultados é uma progressão aritmética de segunda ordem e obedece à recorrência $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$.

Como exemplo observe que $a_4 = 3 \cdot 17 - 3 \cdot 7 + 1 = 31$.

Resolvendo a recorrência encontramos, $a_n = 2n^2 - 1$.

Inúmeras são as variações que tal problema admite. Podemos mudar o critério de escolha, a relação entre as dimensões da figura ou mesmo a própria figura, gerando novas situações-problema e consequentemente novas sequências.

Problema 4.1.7

Sejam os pontos $A(i, 1), B(j, 2)\ e\ C(k, 3)$ com $i, j, k \leq n$ e $i, j, k, n \in \mathbb{N}$. De quantos modos diferentes se pode escolher os pontos A, B e C de modo que estejam alinhados?

Solução:

Sabemos da Geometria Analítica que, se três pontos são colineares, o determinante formado por suas coordenadas é igual a zero. Ou seja,

$$\begin{vmatrix} i & 1 & 1 \\ j & 2 & 1 \\ k & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

De onde obtemos,

$$j = \frac{k+i}{2}$$

Ora, como j, k, i são naturais, k e i devem ter a mesma paridade e como são abscissas de pontos no plano, a ordem em que os valores de k e i são dados, corresponde a dois outros pontos no plano. Por exemplo, $(2, 1)$, $(4, 2)$, $(6, 3)$ e $(6, 1)$, $(4, 2)$, $(2, 3)$.

Trata-se então de verificar quantos números pares e quantos ímpares existem de 1 a n elevando ao quadrado cada quantidade para obter o número de formas com que as coordenadas i e k podem ser simultaneamente pares ou ímpares, somando-se então os resultados parciais.

Por exemplo, no caso em que $n = 5$, temos 2 números pares (2 e 4) e 3 números ímpares (1,3 e 5). Portanto, i e k podem assumir 4 valores (2 e 2, 2 e 4, 4 e 2, 4 e 4), partindo dos números pares. O mesmo ocorre com os ímpares que vão gerar 9 valores para i e k.

Vamos dividir a solução em dois casos:

Para n ímpar, temos $\frac{n-1}{2}$ números pares e $\frac{n+1}{2}$ números ímpares e portanto:

$$a_n = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$a_n = \frac{n^2+1}{2} \qquad (4.3)$$

Para n par, temos $\frac{n}{2}$ números pares e $\frac{n}{2}$ números ímpares e portanto:

$$a_n = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

$$a_n = \frac{n^2}{2} \qquad (4.4)$$

Os primeiros valores de a_n podem ser vistos na tabela abaixo:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	2	5	8	13	18	25	32	41
Δa_n	1	3	3	5	5	7	7	9	9
$\Delta^2 a_n$	2	0	2	0	2	0	2	0	2

Tabela 4.1.1

Observe ainda que as expressões (4.3) e (4.4) diferem unicamente pelo acréscimo, ou não, da fração $\frac{1}{2}$.

Assim, podemos escrever:

$$a_n = \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \qquad (\,para\ n\ ímpar)$$

$$a_n = \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 \qquad (para\ n\ par)$$

Podemos unir as expressões escrevendo,

$$a_n = \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot b_n$$

Se tomarmos $b_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$, teremos $b_n = 1$ quando n é ímpar e $b_n = 0$ quando n é par. E portanto,

$$a_n = \frac{2n^2 + 1 - (-1)^n}{4}$$

Problema 4.1.8

Considere os números 24 e 48. Note que, além de o último ser o dobro do primeiro, ambos são antecessores de quadrados perfeitos. Ou seja,

$$24 + 1 = 25 = 5^2$$

e,

$$2 \cdot 24 + 1 = 48 + 1 = 49 = 7^2$$

Existirão outras duplas de inteiros positivos com a mesma propriedade? Quantas? Quais?

Solução:

Exprimindo a situação algebricamente, escrevemos:

$$k + 1 = x^2 \quad \text{e}$$

$$2 \cdot k + 1 = y^2$$

Da primeira igualdade, obtemos: $k = x^2 - 1$ o que, substituída na segunda, fornece:

$$2(x^2 - 1) + 1 = y^2$$

$$2x^2 - 1 = y^2$$

$$2x^2 - y^2 = 1$$

Note que, a expressão que obtivemos é uma variante da Equação de Pell já discutida na seção 2.9.

Neste caso, a solução trivial é o par $(1, 1)$ e a solução seguinte é justamente a que dá origem aos números mencionados pelo problema. Ou seja, para o par $(5, 7)$, temos $k = 5^2 - 1 = 24$.

De modo análogo ao que fizemos na seção 2.9, podemos mostrar que a solução geral (a_n, b_n) é formada pelas sequências (a_n) e (b_n) tais que $a_n = 6 \cdot a_{n-1} - a_{n-2}$ e $b_n = 6 \cdot b_{n-1} - b_{n-2}$. Assim, o problema apresentado tem infinitas soluções sendo a próxima o par $(29, 41)$ e portanto, $k = 29^2 - 1 = 840$ e $2k = 1680$.

4.2 Sugestões de atividades

Atividade 4.2.1

Trabalho em grupo.

Algumas pessoas uniram-se para realizar um trabalho coletivo. Se todos houvessem trabalhado o mesmo número de horas, o trabalho teria sido realizado em 24 horas. Entretanto, na hora marcada para início do trabalho, apenas uma pessoa do grupo compareceu. Após certo período de tempo, outro membro do grupo uniu-se ao primeiro. Passado mais um período igual de tempo, incorporou-se ao trabalho uma terceira pessoa e assim por diante até o último membro do grupo. Quando o trabalho foi concluído, verificou-se que a primeira pessoa a chegar havia trabalhado por um período de tempo 11 vezes maior que a última pessoa a chegar. Durante quanto tempo trabalhou a última pessoa?

Este problema, encontrado em [9] e aqui transcrito com adaptações, é semelhante ao Problema 4.1.2 e será deixado como exercício. Vale a pena, após resolvido, explorar com os alunos alguns aspectos como:

O fato de o intervalo de tempo em que os trabalhadores chegam não ter sido definido influencia a solução do problema?

É possível, com os dados disponíveis, encontrar o número de trabalhadores do grupo?

O que muda e o que não muda se alterarmos os dados do problema?

Atividade 4.2.2

Na mesma linha dos problemas 4.1.3 e 4.1.4, encontramos em [11] o problema dos 3 marinheiros.

Uma embarcação escapou de um naufrágio contando com a bravura e a destreza de 3 de seus marujos. O capitão do navio resolve então recompensá-los e promete repartir igualmente entre eles certo número de moedas. Ora, tais moedas que se contavam entre 200 e 300, foram colocadas em uma caixa para que o almoxarife do navio fizesse a entrega no dia seguinte.

Entretanto, durante a noite, um dos marinheiros acordou e foi até a caixa com o pensamento de que seria melhor tirar logo a sua parte para que não surgisse, na hora da partilha, qualquer motivo de discussão entre os amigos. Acontece que, ao partir o montante em três, descobriu que a divisão não era exata pois sobrava uma moeda. Pensando que aquela moeda poderia ser motivo de discórdia, atirou-a ao mar e levou sua parte consigo.

Horas depois, o segundo marinheiro tendo a mesma ideia, foi até a caixa e, encontrando a mesma situação, atirou uma moeda ao mar e levou para si a terça parte do que ficou na caixa.

O terceiro marujo, não sabendo da iniciativa dos colegas levantou-se algum tempo depois com o mesmo intuito. Encontrou situação idêntica à dos demais e resolveu-a do mesmo modo: atirando uma moeda ao mar e levando a terça parte do que ainda havia na caixa.

No dia seguinte, chegada a hora do desembarque, o almoxarife foi até a caixa e repartiu o que encontrou em 3 partes iguais. Ainda desta vez sobrou uma moeda que o funcionário guardou para si como paga pelo serviço distribuindo as 3 partes restantes aos marujos.

Quantas moedas havia na caixa? Quantas moedas cada marujo recebeu?

A resolução deste problema, semelhante à dos já mencionados, nos mostra que havia 241 moedas na caixa. Entretanto, ainda mais interessante que o exercício em si, é pensar em outras possibilidades.

O primeiro detalhe que chama atenção é a informação de que o montante situa-se entre 200 e 300 moedas. Esta informação faz supor que o problema não tem solução única e uma atividade interessante é a de solicitar aos alunos que encontrem outras soluções fora desta faixa.

De fato, há infinitas soluções e todas elas são termos de uma progressão aritmética de razão $r = 81$ e primeiro termo $a_1 = 79$.

Outra questão que pode ser levantada é se há algo de especial nos números 81 e 79. São inerentes a esse tipo de problema? Se alterarmos os dados, as soluções serão termos de uma outra sequência? E esta outra sequência apresentará similaridades com a que resolve o problema original?

Atividade 4.2.3

Considere a sequência definida pela recorrência $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$ com $a_1 = 1$. Embora seja de primeira ordem, note que não é uma recorrência linear.

Entretanto, se calcularmos os primeiros valores da sequência, encontramos:

$$(a_n) = \left(\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots\right)$$

A observação sugere que as sequências formadas pelos numeradores e pelos denominadores são ambas iguais à sequência de Fibonacci, apresentando apenas uma defasagem de um termo uma em relação à outra.

De fato, é possível mostrar que toda recorrência do tipo $a_n = x + \frac{y}{a_{n-1}}$ e com termos não nulos, apresenta comportamento semelhante e a exploração dessa recorrência alterando os valores de x e y ou ainda o primeiro termo pode ser uma atividade muito interessante para que os alunos percebam padrões e regularidades.

Observe que, se tomarmos $a_n = \frac{b_n}{b_{n-1}}$, poderemos escrever:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = x + \frac{y}{b_{n-1}/b_{n-2}}$$
$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = x + \frac{yb_{n-2}}{b_{n-1}}$$

Ou seja,

$$b_n = xb_{n-1} + yb_{n-2}$$

O que mostra que tanto os numeradores quanto os denominadores formam uma sequência que obedece a uma recorrência linear de segunda ordem. Em particular, se $a_1 = x = y = 1$, a sequência é a de Fibonacci.

Atividade 4.2.4

Vimos na seção 2.8 que as sequências de Fibonacci, de Lucas e todas as que obedecem à mesma recorrência, possuem propriedades semelhantes ou que as relacionam umas às outras.

Neste sentido, uma interessante atividade de investigação matemática, pode ser a exploração de tais identidades buscando compreender, como fizemos na referida seção, se uma identidade de Fibonacci também é válida para Lucas ou para outras recorrências semelhantes. Ou ainda, que propriedades relacionam tais sequências.

Como exemplo, citamos inicialmente três identidades relativas à sequência de Fibonacci:

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n} \tag{4.5}$$

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1 \tag{4.6}$$

$$F^2{}_1 + F^2{}_2 + \cdots + F^2{}_n = F_n \cdot F_{n+1} \tag{4.7}$$

Uma proposta inicial pode ser a de que os alunos tentem deduzir tais identidades efetuando as operações indicadas do lado esquerdo das igualdades e comparando os resultados com os termos da sequência de Fibonacci.

Em uma etapa posterior, os alunos poderão verificar se tais propriedades são corretas na sequência de Lucas e em outras sequências que seguem a mesma recorrência.

De modo inteiramente análogo ao que fizemos na seção 2.8, é possível demonstrar por indução que as identidades (4.5), (4.6) e (4.7) podem ser generalizadas de modo que, sendo (a_n) uma sequência regida pela recorrência $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ então valem as identidades:

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = a_{2n} - (a_2 - a_1) \tag{4.8}$$

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = a_{2n+1} - a_1 \tag{4.9}$$

$$a^2{}_1 + a^2{}_2 + \cdots + a^2{}_n = a_n \cdot a_{n+1} - (a_2 - a_1) \cdot a_1 \tag{4.10}$$

Outro foco interessante de investigação é o de explorar identidades que relacionam diretamente os termos de Fibonacci com os de Lucas e até mesmo com os de outras recorrências semelhantes.

Observe na Tabela 4.2.1 uma das relações entre os termos das sequências.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34
L_n	1	3	4	7	11	18	29	47	76

Os termos destacados na tabela sugerem que cada número de Lucas a partir do segundo é igual à soma de dois números de Fibonacci, de modo que $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$.

De fato, note que para $n = 2$ e $n = 3$, a identidade se verifica, pois

$$L_2 = F_1 + F_3 = 1 + 2 = 3 \quad e$$

$$L_3 = F_2 + F_4 = 1 + 3 = 4$$

Supondo que a identidade se verifique para certos L_n e L_{n+1},mostremos que ela é valida para L_{n+2}.

Por hipótese podemos escrever as igualdades:

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$

$$L_{n+1} = F_n + F_{n+2}$$

Somando as igualdades, obtemos:

$$L_n + L_{n+1} = F_{n-1} + F_{n+1} + F_n + F_{n+2}$$

Que resulta em:

$$L_{n+2} = F_{n+1} + F_{n+3} \tag{4.11}$$

■

Se compararmos a sequência de Fibonacci com outras recorrências de mesmo tipo, veremos que é possível obter uma expressão geral que forneça os termos de uma destas recorrências em função dos números de Fibonacci.

Proposição 4.2.1 Sendo (a_n) uma sequência tal que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, então $a_n = (a_2 - 2a_1)F_{n-1} + a_1F_{n+1}$.

Demonstração:

Vamos proceder por indução sobre n.

Note que para a_2 e a_3 a expressão se verifica pois,

$$a_2 = (a_2 - 2a_1)F_1 + a_1F_3$$

Mas, $F_1 = 1$ e $F_3 = 2$ então,

$$a_2 = a_2 - 2a_1 + 2a_1 = a_2$$

Da mesma forma temos,

$$a_3 = (a_2 - 2a_1)F_2 + a_1F_4$$

Mas, $F_2 = 1$ e $F_4 = 3$ então,

$$a_3 = a_2 - 2a_1 + 3a_1 = a_2 + a_1$$

Supondo que a expressão seja verdade para a_n e a_{n+1}, vamos mostrar que é verdade para a_{n+2}.

Por hipótese de indução, temos que:

$$a_n = (a_2 - 2a_1)F_{n-1} + a_1F_{n+1}$$

e,

$$a_{n+1} = (a_2 - 2a_1)F_n + a_1F_{n+2}$$

Somando as duas expressões e agrupando convenientemente os termos obtemos:

$$a_n + a_{n+1} = (a_2 - 2a_1)(F_{n-1} + F_n) + a_1(F_{n+1} + F_{n+2})$$

Ou seja,

$$a_{n+2} = (a_2 - 2a_1)F_{n+1} + a_1F_{n+3} \tag{4.12}$$

Note que, em particular na sequência de Lucas, $a_1 = 1$ e $a_2 = 3$ o que torna a expressão (4.12) idêntica ao resultado (4.11).

Atividade 4.2.5

Pelo que vimos nas seções 3.4, 3.5 e 3.6, outra fonte inesgotável de sequências e de explorações possíveis são os números figurados. E, neste sentido, vale salientar que não apenas pelo que vimos no Capítulo 3, já que, é possível explorar a mesma ideia que originou o estudo dos números figurados elaborando configurações que saiam do âmbito dos polígonos regulares

Sugerimos como exemplo, duas sequências de figuras que podem ser exploradas quanto ao número de pontos. Muitas outras porém podem ser imaginadas.

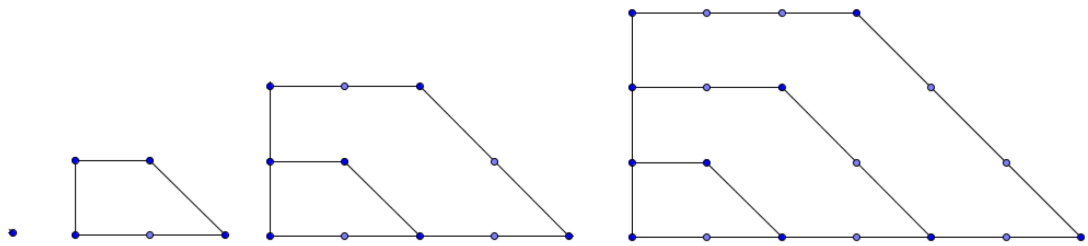


Figura 4.2.1

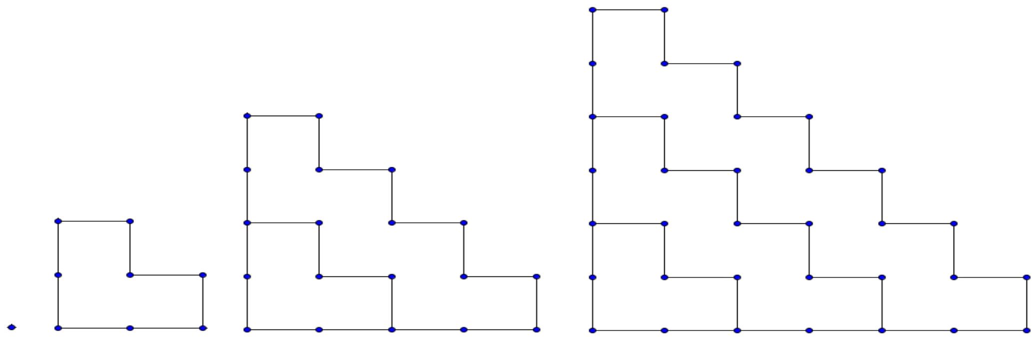


Figura 4.2.2

Na figura 4.2.1 encontramos a sequência $(1, 5, 11, 19, \ldots)$ e na figura 4.2.2 encontramos a sequência $(1, 8, 19, 34, \ldots)$ ambas, progressões aritméticas de segunda ordem. Quais são as progressões aritméticas a elas associadas? Quais são suas razões? Quantos pontos compõem a n-ésima figura? Responder tais perguntas para estas e outras configurações constitui um processo de investigação e de aprendizado interessante e instrutivo.

Conclusão

Ao longo deste trabalho procuramos ressaltar a importância do estudo das sequências numéricas, um tema valioso não apenas por estar ligado a vários outros assuntos como também pelo fato de ser um estudo relevante em si mesmo.

Nas sequências nos deparamos com o estudo de regularidades, padrões, simetrias, relações algébricas, generalização de situações particulares, entre outros tópicos fundamentais no aprendizado matemático.

Acreditamos que, embora seja tratado tradicionalmente na primeira série do Ensino Médio, este assunto poderia, e deveria, permear as três séries, sendo revisto e ampliado sempre que surgisse um novo foco ou uma aplicação ainda não vista na resolução de problemas.

Inúmeras são as situações em que a partir de um problema pode-se iniciar um estudo de sequências. Muitas vezes basta apenas escolher um dado que seja expresso por números naturais e substituí-lo por uma variável analisando então, o que muda no problema e quais são as respostas obtidas por meio da variação deste parâmetro.

Ressaltamos ainda que o estudo das relações de recorrência, embora não possa talvez ser repassado integralmente aos estudantes, deve ser conhecido pelos professores, visto que inúmeras são as situações em que é útil expressar o termo de uma sequência por sua posição na mesma.

Finalmente queremos sugerir que os professores não parem por aqui. Que aprofundem tanto quanto possível seus estudos ainda que *apenas* para a compreensão das sequências em si mesmas. Afinal, muitos são os casos na Matemática em que a utilidade atual de determinado assunto extrapola em muito a motivação inicial de seu estudo.

Referências Bibliográficas

[1] BEILER, Albert H. Recreations in the theory of numbers: The queen of mathematics entertains. 2nd ed. New York. Dover 1966.

[2] EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. 5.ed. Campinas, Unicamp, 2011.

[3] GREITZER, Samuel L. International mathematical olympiads 1959-1977. 5th ed. The Mathematical Association of America. 1978

[4] GARDINER, A. The mathematical olympiad handbook: An introduction to problem solving based on the first 32 British Mathematical Olympiads 1965-1996. New York. Oxford University Press. 1997

[5] HEFEZ, Abramo. Elementos de aritmética. 2.ed. Rio de Janeiro. SBM. 2011

[6] KRANTZ, Steven G. Techniques of problem solving. St. Louis. American Mathematical Society. 1999

[7] LIU, C. L. Introduction to combinatorial mathematics. New York. McGraw-Hill. 1968

[8] LOPES, Ana vieira et al. Actividades matemáticas na sala de aula. 3.ed. Lisboa.Texto.1996

[9] PERELMAN, Y. Álgebra recreativa. 6.ed. Moscou. Mir. 1986

[10] SLOMSOM, Alan. An introduction to combinatorics. London. Chapman and Hall. 1991

[11] TAHAN, Malba. O Homem que calculava. 67.ed. Rio de Janeiro. Record. 2006.

[12] VILENKIN, N. Ya. Combinatorics. New York. American Press. 1971

[13] WELLS, David. Dicionário de números interessantes e curiosos. Lisboa. Gradiva. 1996.