



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**APLICAÇÃO DE CONTROLE NÃO-LINEAR PARA
VEÍCULOS MARÍTIMOS E PRODUÇÃO DE PETRÓLEO**

José Oniram de Aquino Limaverde Filho

Brasília, Setembro de 2014

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**APLICAÇÃO DE CONTROLE NÃO-LINEAR PARA
VEÍCULOS MARÍTIMOS E PRODUÇÃO DE PETRÓLEO**

José Oniram de Aquino Limaverde Filho

*Dissertação submetida ao Departamento de Engenharia Mecânica
da Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília como requisito parcial
para obtenção do grau de Mestre Engenheiro em Sistemas Mecatrônicos.*

Banca Examinadora

Prof. Dr. Eugênio L. F. Fortaleza, ENM/UnB
Orientador

Prof. Dr. Carla Maria C. e C. Koike, CIC/UnB
Examinador interno

Prof. Dr. Márcio Yamamoto, PMI/POLI-USP
Examinador externo

FICHA CATALOGRÁFICA

LIMAVERDE FILHO, JOSÉ ONIRAM DE AQUINO
APLICAÇÃO DE CONTROLE NÃO-LINEAR PARA VEÍCULOS MARÍTIMOS E PRODUÇÃO DE PETRÓLEO

[Distrito Federal] 2014.

xii, 164p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Sistemas Mecatrônicos, 2014).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

- | | |
|---------------------------|--|
| 1. Veículos Marítimos | 2. Controle de Reservatórios de Petróleo |
| 3. Controle não-linear | 4. Sistemas Diferencialmente Planos |
| 5. Sistemas Liouvillianos | 6. Entradas Planas |
| I. ENM/FT/UnB | II. Título (série) |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

LIMAVERDE FILHO, J. O. A. (2014). APLICAÇÃO DE CONTROLE NÃO-LINEAR PARA VEÍCULOS MARÍTIMOS E PRODUÇÃO DE PETRÓLEO, Dissertação de Mestrado em Sistemas Mecatrônicos, Publicação ENM.DM-71A/14, Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 164p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: José Oniram de Aquino Limaverde Filho

TÍTULO: APLICAÇÃO DE CONTROLE NÃO-LINEAR PARA VEÍCULOS MARÍTIMOS E PRODUÇÃO DE PETRÓLEO.

GRAU: Mestre ANO: 2014

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desse trabalho de conclusão de curso pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

José Oniram de Aquino Limaverde Filho

CCSW 04 Lote 04 Bloco A Apto 413

Setor Sudoeste

CEP 70680-450 - Brasília - DF - Brasil

Dedicatória

À minha querida Yasmin.

José Oniram de Aquino Limaverde Filho

Agradecimentos

Na vida de um engenheiro, árduas etapas são superadas a cada instante. Encerrar o Mestrado após exatos 2 anos é uma sensação de dever cumprido, mas, para isso, sinto-me honrado em agradecer a todos que me apoiaram nessa jornada para obter o grau de Mestre.

Em primeiro lugar, agradeço aos meus pais, José Oniram e Natércia Linard, pelo amor e por serem meus maiores fãs nesses quase 25 anos. A distância jamais será um obstáculo na nossa convivência e tenho certeza que o apoio de vocês foi fundamental para continuar sempre lutando por meus sonhos. Agradeço também aos ensinamentos da minha avó do coração, Sinhá, por estar sempre preocupada comigo e torcendo pelo meu sucesso. E a toda família que sempre me incentivou, em especial, Vó Nair, Vó Noêmia, Wanks Limaverde, Lorena Limaverde, Tio João, Tia Lucinha e Diogenes Linard.

Em segundo lugar, à minha querida Yasmin Faro, a quem dedico este trabalho. Um verdadeiro anjo da guarda que esteve ao meu lado desde o início do Mestrado. Seu carinho, seu amor, seu sorriso, suas comidas deliciosas, suas histórias e seus abraços foram fundamentais para me fortalecer emocionalmente para enfrentar os desafios do dia-a-dia de mestrando.

Ao meu orientador e amigo, Prof. Eugênio Fortaleza, agradeço mais uma vez pela orientação neste trabalho e por acreditar no meu potencial como profissional. Agradeço a Profa. Carla Koike, ao Prof. Guilherme Caribé e ao Prof. Adolfo Bauchspiess por todo suporte e cordialidade nesses últimos anos.

Também agradeço ao meu primo, quase irmão, Júlio Seype, pelos inúmeros conselhos e, principalmente, pela amizade construída ao longo desses anos, a qual considero a mais importante desde a mudança para Brasília. As minhas queridas amigas, Dayana Itai e Mariana de Andrade, por serem pessoas maravilhosas com quem posso contar a qualquer momento. Ao casal mineiro, Paula Freitas e Rogério Dias, pela amizade e pelo companheirismo.

Gostaria de agradecer àqueles com quem construí uma amizade a partir do convívio diário na Universidade de Brasília. Em especial, agradeço ao Ana Clara da Hora, André Geraldes, André Vargas, André Vinícius, Bruno Noronha, Caio Neno, De Hong, Francismo Gomes, George Brindeiro, Guilherme Anselmo, Heyder Araújo, João Vítor Vilela, Lucas de Levy, Marcela Carvalho, Murilo Marinho, Pedro Perez, Rodrigo Castro, Thiago Rocha, Tiago Carneiro e Tiago Pimentel.

Não poderia deixar de agradecer a todos que me relacionei graças ao IEEE. Com certeza, nesses últimos anos, pude vivenciar uma experiência diferenciada para a minha carreira profissional sendo voluntário. Em especial, agradeço ao Prof. Rafael Shayani, Prof. André Noll e ao Prof. Paulo Gondim por acreditarem no meu potencial como voluntário. Também agradeço ao Celso Crivelaro e à Daniele Monteiro por todo apoio nessa jornada dentro do IEEE, além dos momentos compartilhados juntos.

Não posso deixar de agradecer aos meus companheiros de Fé, como diria Fabiano Marcolino, seja assistindo aos jogos do São Paulo, seja na convivência diária. Em especial, às minhas queridas amigas, Ana Carolina e Luciana Lobato, que sempre acreditam no meu sucesso profissional.

Aos amigos de Fortaleza, sem o apoio de cada um de vocês não teria alcançado mais esse objetivo na minha carreira profissional, pois acreditaram no meu sucesso desde sempre. Cada retorno à Fortaleza representava estar perto dos meus grandes amigos de infância que, independente de qualquer distância, estarão sempre ali com um sorriso de felicidade no rosto ao me receberem. A vocês, o meu muito obrigado.

Por fim, a todos que de forma direta ou indiretamente contribuíram para este trabalho, os meus sinceros agradecimentos.

José Oniram de Aquino Limaverde Filho

RESUMO

O desenvolvimento de sistemas de controle vem abrangendo cada vez mais diferentes operações em campos de petróleo a fim de contornar os desafios recentes da indústria petrolífera. Nesta dissertação, uma abordagem de controle não-linear baseada na teoria de planicidade diferencial é apresentada em torno de questões práticas relacionadas ao posicionamento dinâmico de veículos marítimos e ao problema de otimização de produção em reservatórios sujeitos ao fenômeno do cone de água ou de gás.

Dentro desse contexto, dois principais problemas na área de controle são discutidos: planejamento de trajetória e rastreamento de trajetória. A partir da noção de sistemas diferencialmente planos, esses problemas podem ser definidos em relação a um sistema linear controlável equivalente na forma canônica de Brunovsky, reduzindo os esforços no desenvolvimento da lei de controle ao se comparar a técnicas tradicionais da teoria de controle não-linear. Adicionalmente, como essa propriedade não é verificada em todos os sistemas dinâmicos abordados nesse manuscrito, conceitos de sistemas liouvillianos e de entradas planas são apresentados com o objetivo de adaptar sistemas não-diferencialmente planos de tal forma que estratégias de controle baseadas na planicidade diferencial possam ser utilizadas.

A partir da modelagem matemática existente na literatura e da teoria de planicidade diferencial, esse trabalho descreve o projeto de controladores de rastreamento de trajetória para os seguintes sistemas: navio de superfície, veículo subaquático autônomo e o comportamento dinâmico da superfície livre em reservatórios sujeitos ao fenômeno do cone 2D. Para um conjunto de trajetórias de referência, os resultados obtidos através de simulações numéricas e testes experimentais avaliam a performance dos controladores mesmo na presença de perturbações externas.

Palavras Chaves: Veículos Marítimos, Controle de Reservatórios de Petróleo, Cone de Água e Gás, Planejamento de Trajetória, Controle de Trajetória, Sistemas Diferencialmente Planos, Saídas Planas, Entradas Planas, Sistemas Liouvillianos.

ABSTRACT

Control design is increasingly encompassing different operations in oil fields aiming to circumvent the recent challenges in oil and gas industry. In this work, a nonlinear control approach based on differential flatness theory is presented around practical issues concerning dynamic positioning of marine vehicles and optimization of oil production in reservoir subject to the phenomenon of water and gas coning.

Within this context, two main problems in control theory are discussed here: motion planning and trajectory tracking. From the notion of differentially flat systems, these problems can be defined in relation to an equivalent controllable linear system in Brunovsky canonical form, reducing efforts on control law design over traditional techniques of nonlinear control theory. Additionally, as this property is not verified in all dynamic systems addressed in this manuscript, concepts of Liouvillean systems and flat inputs are presented in order to adapt non-differentially flat systems so that control strategies based on differential flatness can be used.

Based on the mathematical modeling from the existing literature and differential flatness theory, this manuscript describes the trajectory tracking control design for the following nonlinear systems: surface vessels, autonomous underwater vehicle and dynamic behavior of the free surface in reservoirs subject to the phenomenon of 2D cone. For a set of reference trajectories, the results obtained from numerical simulations and experimental tests evaluate the control performance, including in the presence of external disturbances.

Keywords: Marine Vehicles, Control of Petroleum Reservoirs, Water and Gas coning, Motion Planning, Trajectory Tracking, Differentially Flat Systems, Flat Outputs, Flat Inputs, Liouvillean Systems.

SUMÁRIO

1	Introdução	1
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	2
1.1.1	CONTROLE DE VEÍCULOS MARÍTIMOS	2
1.1.2	FENÔMENO DO CONE EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO	4
1.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
1.3	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	9
1.4	OBJETIVO GERAL	9
1.5	RESULTADOS ALCANÇADOS	10
1.6	DESCRIÇÃO DO MANUSCRITO	10
2	Sistemas Diferencialmente Planos	12
2.1	INTRODUÇÃO	12
2.2	SAÍDAS PLANAS	13
2.2.1	SISTEMAS LINEARES	14
2.2.2	SISTEMAS NÃO-LINEARES	17
2.2.3	PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA	18
2.2.4	ACOMPANHAMENTO DE TRAJETÓRIA	20
2.3	SISTEMAS LIOUVILIANOS	21
2.4	ENTRADAS PLANAS	23
2.4.1	ESTRUTURA DO CONTROLADOR	26
2.5	CONCLUSÕES	28
3	Veículos Marítimos	29
3.1	INTRODUÇÃO	29
3.2	MODELAGEM MATEMÁTICA	29
3.2.1	CINEMÁTICA	31
3.2.2	DINÂMICA	32
3.2.3	PERTURBAÇÕES EXTERNAS	34
3.3	MODELOS CONVENCIONAIS	37
3.3.1	NAVIO DE SUPERFÍCIE	38
3.3.2	VEÍCULO SUBAQUÁTICO	39
3.4	CONCLUSÕES	40

4	Navio de Superfície	41
4.1	INTRODUÇÃO	41
4.2	PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA	41
4.3	CONTROLE DE TRAJETÓRIA VIA SAÍDAS PLANAS	42
4.4	CONTROLE DE TRAJETÓRIA VIA ENTRADA PLANAS	46
4.5	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	49
4.5.1	PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA	50
4.5.2	CONTROLE DE TRAJETÓRIA	53
4.6	ANÁLISES DOS RESULTADOS	67
4.7	CONCLUSÕES	68
5	Veículo Subaquático	69
5.1	INTRODUÇÃO	69
5.2	PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA	69
5.3	CONTROLE DE TRAJETÓRIA VIA SAÍDAS PLANAS	71
5.4	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	75
5.4.1	PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA	76
5.4.2	CONTROLE DE TRAJETÓRIA	80
5.5	ANÁLISES DOS RESULTADOS	90
5.6	CONCLUSÕES	91
6	Cone 2D	92
6.1	INTRODUÇÃO	92
6.2	MODELAGEM MATEMÁTICA	92
6.3	CONTROLE DE TRAJETÓRIA VIA SAÍDAS PLANAS	96
6.3.1	PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA	96
6.3.2	SISTEMA DE CONTROLE	97
6.4	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	97
6.4.1	PARÂMETROS DO MODELO	98
6.4.2	DESEMPENHO DO SISTEMA DE CONTROLE	99
6.5	RESULTADOS EXPERIMENTAIS	109
6.6	CONCLUSÕES	117
7	Conclusões	118
7.1	CONTRIBUIÇÕES	119
7.2	TRABALHOS FUTUROS	119
7.3	PUBLICAÇÕES	120
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	121
	Anexos	126
I	Descrição da Implementação no Ambiente de Simulação <i>Simulink</i>	127

I.1	NAVIO DE SUPERFÍCIE.....	127
I.2	VEÍCULO SUBAQUÁTICO	133
II	Determinação da Condutividade Hidráulica do Aparato Experimental.....	137
II.1	INTRODUÇÃO	137
II.2	APROXIMAÇÃO DE DUPUIT	137
II.2.1	CÉLULA DE HELE-SHAW	140
II.3	EXPERIMENTO	141

LISTA DE FIGURAS

1.1	Veículos marítimos subatuados.....	2
1.2	Influência de efeitos ambientais durante uma missão típica de um ROV	3
1.3	Arquitetura de controle para veículos marítimos.	3
1.4	Problema do cone de água e de gás no reservatório.....	4
2.1	Estrutura do controlador a partir de uma abordagem com entradas planas	27
3.1	Sistemas de coordenadas de referência	30
4.1	Trajatória circular no plano XY desejada para o navio de superfície no Sistema <i>E</i> . ..	50
4.2	Trajórias nominais para a orientação e a velocidade em Deriva.....	51
4.3	Controles nominais.	51
4.4	Comportamento dinâmico desejado para o navio de superfície no Sistema <i>E</i> (Trajetória Polinomial).....	52
4.5	Trajórias nominais para a orientação e a velocidade em Deriva.....	52
4.6	Controles nominais.	53
4.7	Implementação do sistema de controle de trajetória via saídas planas do sistema linearizado para o navio de superfície no ambiente <i>Simulink</i>	53
4.8	Comportamento dinâmico do navio no plano XY a partir do controle via saídas planas do sistema linearizado (Trajetória Circular - Teste 01).....	54
4.9	Evolução temporal da posição em X e em Y.	54
4.10	Evolução temporal da orientação e da velocidade em Deriva.....	54
4.11	Evolução temporal dos sinais de controle.....	55
4.12	Comportamento dinâmico do navio no plano XY a partir do controle via saídas planas do sistema linearizado (Trajetória Circular - Teste 02).....	55
4.13	Evolução temporal da posição em X e em Y.	56
4.14	Evolução temporal da orientação e da velocidade em Deriva.....	56
4.15	Evolução temporal dos sinais de controle.....	56
4.16	Comportamento dinâmico do navio no plano XY a partir do controle via saídas planas do sistema linearizado na presença de perturbação externa (Trajetória Circular - Teste 03).	57
4.17	Evolução temporal da posição em X e em Y.	57
4.18	Evolução temporal da orientação e da velocidade em Deriva.....	58
4.19	Evolução temporal dos sinais de controle.....	58

4.20	Implementação do sistema de controle de trajetória via entradas planas para o navio de superfície no ambiente <i>Simulink</i>	59
4.21	Comportamento dinâmico do navio no plano XY a partir do controle via entradas planas do sistema linearizado (Trajetória Circular - Teste 01).	59
4.22	Evolução temporal da posição em X e em Y.	60
4.23	Evolução temporal da orientação e da velocidade em Deriva.	60
4.24	Evolução temporal dos sinais de controle.	60
4.25	Comportamento dinâmico do navio no plano XY a partir do controle via entradas planas do sistema linearizado (Trajetória Circular - Teste 02).	61
4.26	Evolução temporal da posição em X e em Y.	61
4.27	Evolução temporal da orientação e da velocidade em Deriva.	61
4.28	Evolução temporal dos sinais de controle.	62
4.29	Comportamento dinâmico do navio no plano XY a partir do controle via entradas planas do sistema linearizado na presença de perturbação externa (Trajetória Circular - Teste 03).	62
4.30	Evolução temporal da posição em X e em Y.	63
4.31	Evolução temporal da orientação e da velocidade em Deriva.	63
4.32	Evolução temporal dos sinais de controle.	63
4.33	Comportamento dinâmico do navio no plano XY a partir do controle via entradas planas do sistema linearizado (Trajetória Polinomial - Teste 04).	64
4.34	Evolução temporal da posição em X e em Y.	64
4.35	Evolução temporal da orientação e da velocidade em Deriva.	65
4.36	Evolução temporal dos sinais de controle.	65
4.37	Comportamento dinâmico do navio no plano XY a partir do controle via entradas planas do sistema linearizado na presença de perturbação externa (Trajetória Polinomial - Teste 05).	65
4.38	Evolução temporal da posição em X e em Y.	66
4.39	Evolução temporal da orientação e da velocidade em Deriva.	66
4.40	Evolução temporal dos sinais de controle.	66
5.1	Trajetória circular no plano XYZ desejada para o veículo subaquático no Sistema <i>E</i>	76
5.2	Trajetórias nominais para a orientação do sistema.	77
5.3	Trajetórias nominais para as velocidades lineares do sistema.	77
5.4	Trajetórias nominais para as velocidades angulares do sistema.	77
5.5	Controles nominais.	78
5.6	Trajetória helicoidal no plano XYZ desejada para o veículo subaquático no Sistema <i>E</i>	78
5.7	Trajetórias nominais para a orientação do sistema.	79
5.8	Trajetórias nominais para as velocidades lineares do sistema.	79
5.9	Trajetórias nominais para as velocidades angulares do sistema.	79
5.10	Controles nominais.	80

5.11	Implementação do sistema de controle de trajetória via saídas planas do sistema linearizado para o veículo subaquático no ambiente <i>Simulink</i>	80
5.12	Comportamento dinâmico do veículo subaquático no plano XYZ a partir do controle via saídas planas do sistema linearizado (Trajetória Circular - Teste 01).	81
5.13	Evolução temporal da posição do sistema.	81
5.14	Evolução temporal da orientação do sistema.	82
5.15	Evolução temporal das velocidades lineares do sistema.	82
5.16	Evolução temporal das velocidades angulares do sistema.	82
5.17	Evolução temporal dos sinais de controle.....	83
5.18	Comportamento dinâmico do veículo subaquático no plano XYZ a partir do controle via saídas planas do sistema linearizado na presença de perturbação externa (Trajetória Circular - Teste 02).	83
5.19	Evolução temporal da posição do sistema.	84
5.20	Evolução temporal da orientação do sistema.	84
5.21	Evolução temporal das velocidades lineares do sistema.	84
5.22	Evolução temporal das velocidades angulares do sistema.	85
5.23	Evolução temporal dos sinais de controle.....	85
5.24	Comportamento dinâmico do veículo subaquático no plano XYZ a partir do controle via saídas planas do sistema linearizado (Trajetória Helicoidal - Teste 03).....	86
5.25	Evolução temporal da posição do sistema.	86
5.26	Evolução temporal da orientação do sistema.	86
5.27	Evolução temporal das velocidades lineares do sistema.	87
5.28	Evolução temporal das velocidades angulares do sistema.	87
5.29	Evolução temporal dos sinais de controle.....	87
5.30	Comportamento dinâmico do veículo subaquático no plano XYZ a partir do controle via saídas planas do sistema linearizado na presença de perturbação externa (Trajetória Helicoidal - Teste 04).	88
5.31	Evolução temporal da posição do sistema.	88
5.32	Evolução temporal da orientação do sistema.	89
5.33	Evolução temporal das velocidades lineares do sistema.	89
5.34	Evolução temporal das velocidades angulares do sistema.	89
5.35	Evolução temporal dos sinais de controle.....	90
6.1	Plano físico de referência para simulação.....	93
6.2	Malha de discretização do contorno do reservatório.	93
6.3	Evolução temporal do potencial do nó central da superfície livre até a situação crítica	94
6.4	Célula de Hele-Shaw.	98
6.5	Evolução temporal do potencial do nó central da superfície livre (Trajetória Constante - Teste 01).	100
6.6	Superfície livre estabilizada na referência.....	100
6.7	Evolução temporal do erro de acompanhamento de trajetória.	100
6.8	Evolução temporal do sinal de controle.	101

6.9	Evolução temporal do potencial do nó central da superfície livre (Trajetória Constante - Teste 02).	101
6.10	Superfície livre estabilizada na referência.....	101
6.11	Evolução temporal do erro de acompanhamento de trajetória.	102
6.12	Evolução temporal do sinal de controle.	102
6.13	Evolução temporal do potencial do nó central da superfície livre (Trajetória Constante - Teste 03).	102
6.14	Superfície livre estabilizada na referência.....	103
6.15	Evolução temporal do erro de acompanhamento de trajetória.	103
6.16	Evolução temporal do sinal de controle.	103
6.17	Evolução temporal do potencial do nó central da superfície livre (Trajetória Polinomial - Teste 04).	104
6.18	Superfície livre estabilizada na referência.....	105
6.19	Evolução temporal do erro de acompanhamento de trajetória.	105
6.20	Evolução temporal do sinal de controle.	105
6.21	Evolução temporal do potencial do nó central da superfície livre (Trajetória Polinomial - Teste 05).	106
6.22	Superfície livre estabilizada na referência.....	106
6.23	Evolução temporal do erro de acompanhamento de trajetória.	106
6.24	Evolução temporal do sinal de controle.	107
6.25	Evolução temporal do potencial do nó central da superfície livre (Trajetória Polinomial - Teste 06).	107
6.26	Superfície livre estabilizada na referência.....	108
6.27	Evolução temporal do erro de acompanhamento de trajetória.	108
6.28	Evolução temporal do sinal de controle.	108
6.29	Conjunto de bombas disponíveis na célula de Hele-Shaw.	109
6.30	Sensor de nível das colunas de fluido presentes nas extremidades da célula de Hele-Shaw.	110
6.31	Par de câmeras para captação da altura dos pontos que discretizam a superfície livre da célula de Hele-Shaw.	110
6.32	Controlador Lógico Programável (CLP) responsável pela integração dos sensores e atuadores da célula de Hele-Shaw.	111
6.33	Evolução temporal do potencial do nó central da superfície livre (Trajetória Polinomial - Experimento 01).	112
6.34	Superfície livre estabilizada na referência.....	112
6.35	Evolução temporal do erro de acompanhamento de trajetória.	112
6.36	Evolução temporal do sinal de controle.	113
6.37	Evolução temporal do potencial do nó central da superfície livre (Trajetória Polinomial - Experimento 02).	113
6.38	Superfície livre estabilizada na referência.....	114
6.39	Evolução temporal do erro de acompanhamento de trajetória.	114
6.40	Evolução temporal do sinal de controle.	114

6.41	Evolução temporal do potencial do nó central da superfície livre (Trajetória Polinomial - Experimento 03).	115
6.42	Superfície livre estabilizada na referência.....	115
6.43	Evolução temporal do erro de acompanhamento de trajetória.	116
6.44	Evolução temporal do sinal de controle.	116
7.1	VideoRay PRO 4.	119
I.1	Implementação da abordagem de controle via saídas planas para o navio de superfície no <i>Simulink</i>	127
I.2	Implementação do modelo não-linear MIMO do navio de superfície no <i>Simulink</i>	128
I.3	Implementação do modelo não-linear transformado do navio de superfície no <i>Simulink</i>	128
I.4	Implementação da transformação geométrica no ambiente <i>Simulink</i>	129
I.5	Implementação dos controladores via saídas planas para o navio de superfície o <i>Simulink</i>	129
I.6	Implementação da etapa de cálculo dos erros de acompanhamento de trajetória no <i>Simulink</i>	129
I.7	Implementação da etapa de construção das saídas planas incrementais e suas derivadas temporais no <i>Simulink</i>	130
I.8	Implementação da etapa de construção dos termos de correção de trajetória no <i>Simulink</i>	130
I.9	Implementação da etapa de construção dos sinais de controle incrementais no <i>Simulink</i>	131
I.10	Implementação da abordagem de controle via entradas planas para o navio de superfície no <i>Simulink</i>	131
I.11	Implementação do modelo não-linear MIMO do navio de superfície no <i>Simulink</i>	132
I.12	Implementação dos controladores via entradas planas para o navio de superfície no <i>Simulink</i>	133
I.13	Implementação da abordagem de controle via saídas planas para o veículo subaquático no <i>Simulink</i>	134
I.14	Implementação do modelo não-linear MIMO do veículo subaquático no <i>Simulink</i>	134
I.15	Implementação das equações referentes a dinâmica do veículo subaquático no <i>Simulink</i>	135
I.16	Implementação das equações referentes a cinemática do veículo subaquático no <i>Simulink</i>	135
I.17	Implementação dos controladores via saídas planas para o veículo subaquático no <i>Simulink</i>	136
II.1	Hipóteses de Dupuit.....	138
II.2	Escoamento bidimensional na célula de Hele-Shaw.	140
II.3	Experimento para obter a condutividade hidráulica da célula de Hele-Shaw.....	142
II.4	Espaçador entre as placas planas verticais da célula de Hele-Shaw.	143

LISTA DE TABELAS

3.1	Notação SNAME para um veículo marítimo de 6 graus de liberdade.....	30
6.1	Valores dos parâmetros do modelo em diferentes regiões de análise.....	99
6.2	Erro médio de acompanhamento de trajetória constante em regime permanente - Simulações Numéricas.....	104
6.3	Erro médio de acompanhamento de trajetória polinomial em regime permanente - Simulações Numéricas.....	109
6.4	Erro médio de acompanhamento de trajetória polinomial em regime permanente - Testes Experimentais.....	117

LISTA DE SÍMBOLOS

Sistema E

η	Vetor de posição e orientação
η_1	Vetor de posição
η_2	Vetor de orientação
x	Componente do vetor posição na direção Avanço
y	Componente do vetor posição na direção Deriva
z	Componente do vetor posição na direção Afundamento
ϕ	Componente do vetor orientação na direção Jogo
θ	Componente do vetor orientação na direção Arfagem
ψ	Componente do vetor orientação na direção Guinada
ϖ_1	Componente do vetor posição na direção Avanço do sistema transformado
ϖ_2	Componente do vetor posição na direção Deriva do sistema transformado
ϖ_3	Componente do vetor posição na direção Guinada do sistema transformado

Sistema B

ν	Vetor de velocidade linear e angular
ν_1	Vetor de velocidade linear
ν_2	Vetor de velocidade angular
u	Componente do vetor velocidade linear na direção Avanço
v	Componente do vetor velocidade linear na direção Deriva
w	Componente do vetor velocidade linear na direção Afundamento
p	Componente do vetor velocidade angular na direção Jogo
q	Componente do vetor velocidade angular na direção Arfagem
r	Componente do vetor velocidade angular na direção Guinada
τ	Vetor de forças e momentos
τ_1	Vetor de forças externas ao corpo
τ_2	Vetor de momentos externos ao corpo
τ_{RB}	Vetor de perturbações externas
τ_H	Vetor de forças e momentos devido aos esforços hidrodinâmicos

τ_{EV}	Vetor de forças e momentos devido aos esforços ambientais
τ_{EV}^{cm}	Vetor de forças e momentos induzidos pelas correntes marítimas
τ_{EV}^{onda}	Vetor de forças e momentos induzidos pelas ondas
τ_{EV}^{vento}	Vetor de forças e momentos induzidos pelos ventos
$g_R(\eta)$	Forças restauradoras
W	Peso do corpo
B	Empuxo do corpo
r_G	Vetor de coordenadas do centro de gravidade do corpo
r_B	Vetor de coordenadas do centro de empuxo do corpo
I_0	Tensor de inércia em relação a origem

Veículos Marítimos

$\mathbf{0}_{n \times n}$	Matriz nula
$\mathbf{I}_{n \times n}$	Matriz identidade
\mathbf{M}_{RB}	Matriz de inércia
$\mathbf{C}_{RB}(\nu)$	Matriz de forças centrípetas e de Coriolis
\mathbf{M}_{AD}	Matriz de inércia de massa adicional
$\mathbf{C}_{AD}(\nu)$	Matriz de forças centrípetas e de Coriolis de massa adicional
$\mathbf{D}(\nu)$	Matriz de amortecimento hidrodinâmico
\mathbf{D}	Matriz de componentes lineares do amortecimento hidrodinâmico
$\mathbf{D}_n(\nu)$	Matriz de componentes não-lineares do amortecimento hidrodinâmico
β_N, γ_N	Parâmetros do modelo do navio de superfície
β_i	Parâmetros do modelo do veículo subaquático
ρ_w	Densidade da água
∇	Volume de água deslocado pelo corpo
\overline{GM}_L	Altura metacêntrica transversal

Cone 2D

H	Profundidade do reservatório
L	Largura do reservatório
B_m	Espessura do reservatório
K	Condutividade hidráulica do meio poroso
k	Permeabilidade intrínseca do meio poroso
μ	Viscosidade do fluido
Q_{bomba}	Vazão da bomba
q_c	Intensidade crítica do sumidouro
K_p	Ganho estático do modelo dinâmico do cone 2D
τ_p	Constante de tempo do modelo dinâmico do cone 2D
k_c	Ganho do controlador em malha fechada
k_I	Ganho do componente integrador controlador em malha fechada

Gerais

O	Origem do sistema de coordenadas
x	Vetor de estados
u	Vetor de estados ou de controle
y	Vetor de saída
F	Vetor de saídas planas
C_K	Matriz de controlabilidade de Kalman
κ^C	Índices de controlabilidade
κ^O	Índices de observabilidade
v	Termo de correção de acompanhamento de trajetória
E_O	Matriz de observabilidade
γ_S	Campo vetorial de entrada para sistemas não-lineares SISO
γ_M	Campo vetorial de entrada para sistemas não-lineares MIMO
r	Vetor grau relativo
k_{ij}	Ganhos dos controladores em malha fechada
Δt	Intervalo de amostragem
t_s	Tempo de simulação
ρ	Raio da trajetória circular
ω	Frequência angular da trajetória circular
λ_{Pert}	Perturbação externa
A_{Pert}	Amplitude da perturbação externa
b_{Pert}	Frequência de oscilação da perturbação externa
t_{Pert}	Intervalo de tempo de atuação da perturbação externa

Subscritos

A	Referente à variável do veículo subaquático
N	Referente à variável do navio de superfície
E	Referente às entradas planas
g	Referente à variável do centro de gravidade do corpo
u	Referente à direção Avanço
v	Referente à direção Deriva
w	Referente à direção Afundamento
p	Referente à direção Jogo
q	Referente à direção Arfagem
r	Referente à direção Guinada
RB	Referente ao equacionamento do corpo rígido
AD	Referente aos esforços de massa adicionada
NLS	Referente aos sistemas não-lineares SISO
LIS	Referente aos sistemas lineares invariantes no tempo SISO
LIM	Referente aos sistemas lineares invariantes no tempo MIMO

<i>LVS</i>	Referente aos sistemas lineares variantes no tempo SISO
<i>LVM</i>	Referente aos sistemas lineares variantes no tempo MIMO
<i>FIS</i>	Referente às entradas planas para sistemas não-lineares SISO
<i>FIM</i>	Referente às entradas planas para sistemas não-lineares MIMO
<i>Cone</i>	Referente ao cone
δ	Referente à variável linearizada

Sobrescritos

\cdot	Variação temporal
(3)	Terceira derivada temporal
(4)	Quarta derivada temporal
*	Referente ao valor nominal da variável

Operadores

J	Transformação não-linear entre os sistemas de coordenadas
$ad_f g$	Parêntese de Lie ou adjunta de g
$L_f h$	Derivada de Lie

Siglas

AUV	Autonomous Underwater Vehicles
ROV	Remotely Operated Vehicles
UUV	Unmanned Underwater Vehicles
SNAME	Society of Naval Architects and Marine Engineers
CG	Centro de Gravidade
PI	Proporcional Integrador
PID	Proporcional Integrador Derivativo
CLP	Controlador Lógico Programável
SISO	Single-Input Single-Output
MIMO	Multi-Input Multi-Output

Capítulo 1

Introdução

O controle de sistemas mecânicos é, atualmente, um dos campos mais ativos de pesquisa devido às diversas aplicações desses sistemas na vida real. Embora o estudo de sistemas mecânicos remonta a Euler e Lagrange em 1700, sistemas de controle mecânico surgiram em aplicações para regulação de motores a vapor somente a partir de 1850. Durante o século passado, uma série de aplicações científicas, industriais e militares motivou a análise rigorosa e projeto de controle de sistemas mecânicos [1].

Um típico uso de teoria de controle em sistemas modernos consiste em inverter a dinâmica do sistema para calcular os comandos desejados para realizar uma tarefa específica. Em geral, a solução referente a esse comando pode não ser única, o que implica, normalmente, na escolha de um função de custo a ser utilizada como referência durante a especificação dos requisitos de performance do sistema como, por exemplo, estabilidade e esforço dos atuadores [2].

Essa abordagem de controle assume que a dinâmica do sistema é conhecida e fixa. Na prática, incertezas e ruído estão sempre presentes e devem ser considerados de tal forma que não comprometam a performance do sistema. Para isso, técnicas de controle robusto são aplicadas em conjunto com inversão dinâmica para que o sistema responda a situações adversas ou mudanças de pontos de operação em tempo.

Ambas técnicas são normalmente aplicadas em sistemas que apresentam estruturas lineares ou aproximações de sistemas não-lineares em torno de pontos de operação. No entanto, a natureza teórica desafiadora de análise do comportamento de sistemas dinâmicos não-lineares atraíram muitos matemáticos para estudar tais sistemas de controle. Como resultado, os esforços de engenheiros e cientistas em conjunto levaram ao desenvolvimento do Controle Linear, do Controle Ótimo, do Controle Adaptativo e de teorias de controle não-lineares [1].

1.1 Contextualização

1.1.1 Controle de Veículos Marítimos

Os sistemas mecânicos subatuados (*do inglês Underactuated Systems*) são sistemas que possuem um número de entradas de controle inferior ao número de graus de liberdade. Esses sistemas aparecem em uma ampla gama de aplicações, incluindo Sistemas Aeroespaciais [3], Sistemas Marítimos [4] e Sistemas Biomecânicos [5]. O interesse deve principalmente ao fato que há uma redução de custos do projeto e de peso do sistema final, já que evita o uso de atuadores adicionais. Além disso, em situações em que há a possibilidade de falha dos atuadores, o sistema, inicialmente projetado para ser completamente atuado, pode continuar operando nessas situações críticas, o que evita maiores problemas (e.g. aeronaves).

Pertencendo a classe dos sistemas subatuados, o controle de veículos marítimos ganhou relevância nos últimos anos por sua importância nas áreas de petróleo e militar tais como transporte de passageiros e mercadorias, inspeção de cabos submersos, instalação de plataformas offshore, posicionamento dinâmico e outros. Para isso, promoveram-se vários trabalhos de pesquisa relacionados com aplicação da teoria de controle não-linear a esses sistemas reais [6].

Para um navio convencional, por exemplo, é comum considerar o movimento nas direções Avanço, Deriva e Guinada. No entanto, a grande maioria é equipada com dois propulsores de popa ou com um propulsor principal e um leme de popa, o que impede um controle na direção de Deriva [7]. Dentro desse grupo, inclui-se também o *hovercraft* que é um veículo sustentado por um colchão de ar e propulsionado normalmente por um ou dois ventiladores independentes. Esses dois exemplos podem ser observados na Figura 1.1.



(a) Navio de Superfície



(b) Hovercraft da Marinha dos EUA

Figura 1.1: Veículos marítimos subatuados.

Pertencendo também a esse grupo, os veículos subaquáticos não tripulados UUVs (*do inglês Unmanned Underwater Vehicles*) são robôs móveis que podem ser operados remotamente, denominados ROVs (*do inglês Remotely Operated Vehicles*), ou de forma autônoma, denominados AUVs (*do inglês Autonomous Underwater Vehicles*). A dependência de um operador humano é uma característica inerentes aos ROVs, enquanto que os AUVs usufruem de autonomia na geração de trajetórias e não necessitam de um cabo umbilical para receber comandos externos [8].

Sob o ponto de vista de modelagem matemática, as expressões que descrevem os comportamentos dinâmicos dos veículos marítimos ocorrem de maneira semelhante, exceto pela presença do cabo umbilical nos ROVs, o qual deve ser considerado, pois também está sujeito à ação de efeitos ambientais, como pode ser observado na Figura 1.2.

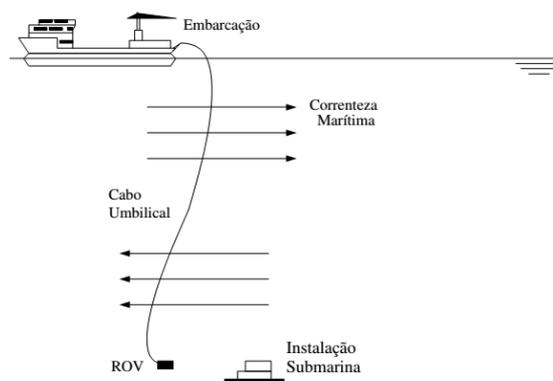


Figura 1.2: Influência de efeitos ambientais durante uma missão típica de um ROV. Extraído de [8].

Segundo De Souza [8], o sistema de controle empregado nesses tipos de sistemas segue uma composição de blocos funcionais estruturados formando o que se conhece como arquitetura de controle, como pode ser observado na Figura 1.3.

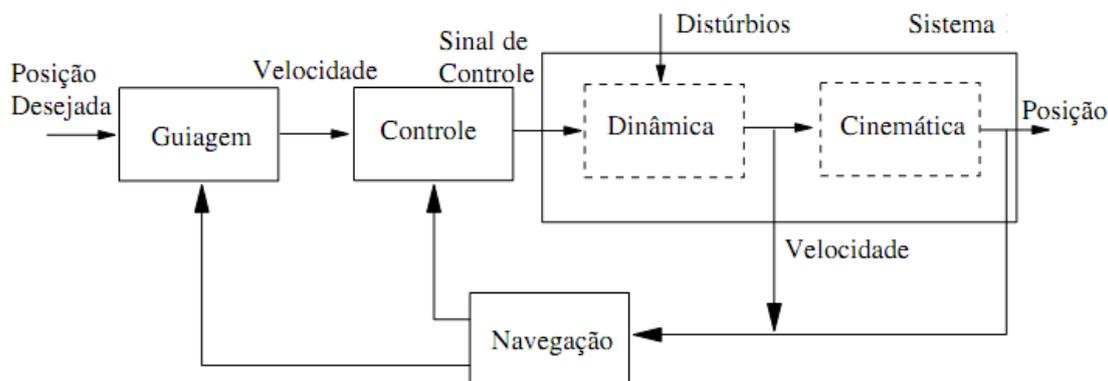


Figura 1.3: Arquitetura de controle para veículos marítimos. Adaptado de [8].

A partir da etapa de especificação das tarefas a serem desempenhadas pelo sistema, estratégias de controle são então empregadas para acionar os atuadores de modo a acompanhar as trajetórias desejadas. Estas estratégias são um conjunto de algoritmos distribuídos em blocos que se relacionam com o veículo. De maneira geral, esses blocos são especificados da seguinte maneira:

- **Navegação:** Envolve os subsistemas de sensoriamento e processamento de sinais relacionados com a estimação do estado do sistema móvel, isto é, a posição, velocidade e aceleração, em um sistema de coordenadas de referência.
- **Guiagem:** Atua de maneira que o veículo siga a trajetória desejada, comparando-a com a estimativa do subsistema de navegação através de realimentação.

- **Controle:** Aplicação das forças e momentos apropriados para garantir estabilidade no acompanhamento da velocidade de referência frente a ação de distúrbios.

Dentro desse contexto, observa-se que a controlabilidade é uma propriedade desejável para os veículos marítimos, pois os credenciam às aplicações citadas anteriormente. Na literatura, enquanto que essa propriedade é normalmente verificada em sistemas completamente atuados, no caso dos sistemas subatuados, não se apresenta como uma tarefa fácil principalmente devido à presença de não-linearidades no modelo.

1.1.2 Fenômeno do Cone em Reservatórios de Petróleo

Em paralelo ao controle de veículos marítimos, tem-se que a produção de água se apresenta como uma preocupação recorrente no promissor mercado de petróleo e gás do país. Segundo Bailey *et al.* [9], a cada ano mais de 40 bilhões de dólares são investidos para lidar com o tratamento da água produzida, já que, com as reservas cada vez mais escassas, a quantidade de água produzida pode comprometer a produção de óleo ou, até mesmo, tornar o poço economicamente inviável.

Dentro desse contexto, a produção excessiva de água pode estar relacionada a um fenômeno muito comum em poços produtores de petróleo conhecido como “cone de água” (*do inglês water coning*). Quando o óleo está acumulado em um reservatório de rocha porosa confinado por limites de rocha impermeável, uma zona de água é frequentemente encontrada abaixo da zona de óleo. Ao se retirar o óleo através de um poço, gera-se um gradiente de pressão que também desloca a água em direção ao poço, o que acaba formando o formato de um cone abaixo do poço. Esse mesmo problema também acontece na presença de uma capa de gás no reservatório, acarretando no fenômeno do cone de gás. Ambos os fenômenos estão representados na Figura 1.4.

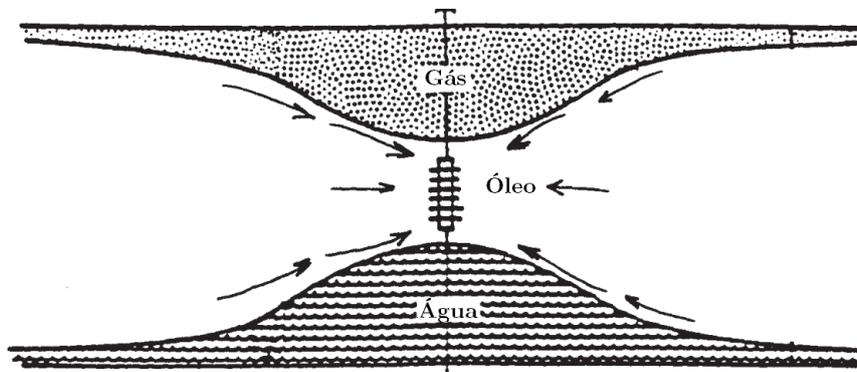


Figura 1.4: Problema do cone de água e de gás no reservatório. Adaptado de [10].

A partir de uma determinada vazão, conhecida como vazão crítica de produção, a interface óleo-água (ou de óleo-gás) se torna instável em malha aberta e, conseqüentemente, atinge o poço produtor e inicia a produção preferencial de água (ou de gás) em relação ao óleo devido a maior mobilidade do primeiro. Portanto, os engenheiros devem procurar minimizar ou, pelo menos, retardar esse fenômeno através do projeto de sistemas de controles que, a partir das informações provenientes do poço, são capazes de otimizar a vazão de produção de tal forma que essa sempre seja mantida abaixo e próximo da crítica.

1.2 Revisão Bibliográfica

Esta seção tem como objetivo descrever diferentes trabalhos encontrados na literatura, tanto para veículos marítimos como para controlar a produção de um reservatório sujeito ao fenômeno do cone de água ou de gás.

A revisão bibliográfica realizada durante o desenvolvimento do trabalho abrangeu os seguintes pilares: modelagem matemática dos sistemas offshore, técnicas tradicionais de controle para tais modelos, e aplicações da teoria de planicidade diferencial visando encontrar soluções para problemas de planejamento e acompanhamento de trajetória. Artigos que englobam esses pilares foram analisados, como pode ser visto a seguir.

Controle de Veículos Marítimos

A partir da década de 50, os primeiros modelos para veículos marítimos foram propostos de tal forma a se obter uma relação linear que representasse o comportamento do sistema. Davidson e Schiff [11] propõem um modelo em que a velocidade em Avanço era assumida constante, o que permitia a omissão da equação de movimento nessa direção, obtendo assim, uma característica linear aproximada ao modelo. Por outro lado, Nomoto *et al.* [12] apresentam duas representações para o modelo em [11] onde é proposta a eliminação da velocidade em Deriva, o que permite obter uma relação linear entre o curso do navio e o ângulo do leme.

Na literatura mais recente, predominam os trabalhos realizados por Fossen [13, 14], já que apresentam um maior detalhamento, principalmente devido à inclusão da análise das componentes não-lineares oriundas dos esforços externos ao sistema, tais como, forças hidrodinâmicas e ambientais. Além disso, normalmente, tais veículos apresentam a característica de serem subatuados, o que acarreta uma maior dificuldade na realização de controle de tais modelos. Um histórico geral do desenvolvimento de modelos matemáticos para esses sistemas pode ser encontrado em [15].

O grau de não-linearidade dos modelos incentivou o uso de estratégia de controle não-linear em aplicações que envolvam o posicionamento de veículos marítimos, tais como os navios de superfície [7], os veículos subaquáticos autônomos [16, 17], e o *hovercraft* [18]. A seleção da estratégia de controle para implementação é dependente não somente do sistema, mas, também, das condições de operação as quais está sujeito [8]. Predominantemente, aplicações práticas focam em problemas distribuídos nas áreas de estabilização e acompanhamento de trajetória.

A estabilização de navios de superfície subatuados tem sido abordada, em diversos estudos nas últimas décadas, principalmente, devido a sua importância em áreas cruciais como na indústria do petróleo. Segundo Brockett [19], não é possível estabilizar o modelo não-linear de veículo subaquático em torno do equilíbrio desejado utilizando teoria de controle linear ou teoria clássica de controle não-linear como linearização por realimentação de estados.

Para contornar esse problema, estratégias de controle descontínuo são encontradas na literatura. Reyhanoglu [20] propõe um controle descontínuo realimentado que permite uma convergência exponencial para um ponto de equilíbrio assumindo certas hipóteses sobre a condição inicial

do sistema. Em Pettersen e Egeland [21], emprega-se uma abordagem *backstepping* descontínua através de uma realimentação de estado parcial, o que garante uma estabilização global uniforme assintótica do sistema. Similarmente, Cheng Jin *et al.* [22] apresentam um controle descontínuo baseado na teoria de modos deslizantes (*do inglês sliding mode control*), o que torna o sistema exponencialmente convergente para o ponto de equilíbrio desejado.

Adicionando-se a influência de perturbações ambientais, o que não é abordado nos trabalhos citados anteriormente, é possível analisar o grau de robustez dos controladores. Nesses casos, estratégias de controle robusto vêm recebendo atenção, pois demonstram resultados satisfatórios em relação estabilidade e desempenho quando o sistema está sujeito à esses efeitos adversos, à variação paramétrica e ao ruído de medições dos sensores, como apresentado em Logan [23] e em Fryxell *et al.* [24].

Uma outra abordagem foi proposta por Pettersen e Nijmeijer [25] onde estratégias de controle adaptativo, as quais são justificadas frente às alterações das condições de operação do veículo, e uma realimentação variante no tempo foram combinadas, proporcionando assim uma estabilização assintótica semi-global. Para compensar tais perturbações em todas as direções, Yang Liu *et al.* [26] combinam a teoria de Lyapunov e técnicas de realimentação com alto ganho.

Em relação aos problemas de acompanhamento de trajetória, Godhavn [27] propõe uma aproximação de linearização por realimentação que proporciona um acompanhamento exponencial global da posição do barco assumindo que a velocidade em Avanço é sempre positiva, porém sua orientação não consegue ser regulada.

Para permitir a regulação tanto da posição como da orientação, uma técnica recursiva para sistemas na forma padrão de cadeias [28] foi usada em [29] para proporcionar uma convergência exponencial para uma vizinhança em torno da trajetória desejada. Ressalta-se também que, em [29], é requerido que a velocidade em Guinada não possa ser nula, o que impede o uso de retas como trajetórias de referência. Em Do *et al.* [30], propõe-se uma solução baseada no método direto de Lyapunov e em uma abordagem *backstepping* a fim de eliminar a restrição da velocidade em Guinada do sistema ser nula.

Como alternativa à essas estratégias de controle não-linear, iniciaram-se alguns estudos relacionados a teoria de planicidade diferencial (*do inglês differentially flatness theory*) proposta e desenvolvida por M. Fliess *et al.* [31]. O fato de ser possível determinar um conjunto de variáveis “internas” ao sistema, denominadas saídas planas (*do inglês flat outputs*), que representem a dinâmica global do mesmo, permitindo, assim, reduzir os esforços no desenvolvimento de controladores, já que problemas relacionados a estabilização e ao rastreamento de trajetórias podem ser transportados aos correspondentes definidos em relação as saídas planas.

Os sistemas que apresentam tal característica são comumente denominados diferencialmente planos (*do inglês differentially flat systems*). Uma variedade de sistemas conhecidos na literatura pertencem a essa classe, tais como, carros com trailers [32], pêndulo duplo invertido [33], motores de indução [34], reatores químicos [35] e aeronaves convencionais [36].

Em relação aos veículos marítimos, Sira-Ramírez [37] demonstra que o modelo geral de um

navio de superfície [13] é não-diferencialmente plano, porém pertence a uma classe especial de sistemas não-diferencialmente planos que é possível extrair um subsistema diferencialmente plano do sistema original. Isso permite um rápido planejamento das trajetórias nominais do sistema, porém ainda se necessita de outras abordagens de controle não-linear na resolução do problema de acompanhamento de trajetória [38].

Em um segundo trabalho, Sira-Ramírez e Ibanez [39] desenvolvem um controle por realimentação dinâmica de estados para o modelo simplificado de um *hovercraft*, o qual foi obtido a partir de considerações apresentadas por Fantoni *et al.* [18]. Isso foi possível porque tal modelo, diferentemente do navio de superfície, é diferencialmente plano. Ressalta-se também os resultados em Limaverde e Fortaleza [40] onde foi proposto o desenvolvimento de uma lei de controle em malha fechada para o *hovercraft* a partir da planicidade diferencial do sistema linearizado em torno das trajetórias nominais obtidas em Sira-Ramírez e Ibanez [39]. Adicionalmente, a robustez do controlador foi validada na presença de perturbações externas do tipo senoidal nas direções críticas do movimento, ou seja, naquelas em que não há atuação externa.

Dessa forma, a ausência de planicidade diferencial em diversos veículos marítimos limita o uso da abordagem de controle por saídas planas em aplicações práticas. Para contornar isso, o conceito de entradas planas foi introduzido por Waldherr e Zeitz [41] como potencial solução para o controle de sistemas não-diferencialmente planos. Consiste em determinar um conjunto de atuadores que force o sistema a apresentar a planicidade diferencial, o que permite utilizar as técnicas tradicionais de projeto de controladores relacionadas as saídas planas do sistema modificado.

Por outro lado, em casos práticos, isso equivale a redefinir os atuadores do sistema, o que normalmente não é viável. Para contornar esse problema, Stumper *et al.* [42] apresentam um método que relaciona os sinais de controle do sistema original e do sistema associado as entradas planas a partir de um compensador dinâmico derivado da equivalência entre os comportamentos entrada-saída dos sistemas.

Por último, a planicidade diferencial também vem demonstrando vantajosa em problemas de estimação de estados de sistemas não-lineares. Segundo Lévine [43], tal propriedade garante a existência de um sistema linear equivalente na forma canônica de Brunovsky com as variáveis de estado sendo as próprias saídas planas do sistema original. Seguindo esse raciocínio, Rigatos [44] propõe que o filtro de Kalman seja aplicado diretamente ao sistema equivalente a fim de estimar as saídas planas do sistema, as quais permitem a construção das variáveis de estados do sistema original. Essa abordagem demonstra resultados com uma performance superior em relação a de outros métodos clássicos de estimação não-linear como, por exemplo, o filtro de Kalman estendido e o filtro de partículas.

Fenômeno do Cone em Reservatórios de Petróleo

Os recentes estudos sobre o fenômeno do cone consistem em prever o desempenho dos poços por meio de um modelo matemático constituído por um conjunto de equações diferenciais que descreve o movimento dos fluidos em meios porosos, acoplado com um conjunto apropriado de

condições iniciais, condições de contorno e vários parâmetros do sistema poço/reservatório [45]. A maioria destes modelos são derivados a partir do princípio da conservação da massa, a lei de Darcy e as equações de estado.

Segundo Soares e Simões [46], resolve-se analiticamente a equação diferencial parcial que rege o problema ao se considerar um domínio de integração infinito com a condição de contorno de superfície livre. Adicionalmente, considera-se também que o fluxo permanente de fluidos incompressíveis em um reservatório isotrópico e homogêneo.

Através do método de mapeamento conforme, Soares e Simões [46] obtiveram uma formulação analítica aproximada por meio da qual é possível calcular a vazão crítica de produção no reservatório bidimensional sujeito a ação de um sumidouro pontual, além de prever a posição e o formato da interface de contato dos fluidos no instante em que se atinge a vazão crítica.

Em geral, métodos analíticos fornecem soluções para modelos matemáticos simplificados que governam o fenômeno do cone devido, principalmente, à complexidade não-linear do modelo matemático. Portanto, o uso de métodos numéricos se tornou necessário para resolver de maneira aproximada o modelo matemático [45]. A partir da discretização no espaço e no tempo das equações diferenciais parciais que regem o problema, os métodos numéricos fornecem soluções até para casos de regime não-permanentes, mesmo após o início da produção de água (ou de gás) no poço produtor [47].

Segundo Lucas *et al.* [48], pode-se prever a forma da interface de contato dos fluidos no regime estacionário e a vazão crítica a partir de uma formulação do problema com o método dos elementos de contorno. Para isso, aproxima-se o poço de petróleo por uma série de fontes e sumidouros pontuais, ou como um sumidouro distribuído, para simular a geometria real do poço.

Seguindo a modelagem utilizando o método dos elementos de contorno, Zhang *et al.* [49] analisa a eficiência de duas estratégias de bombeamento (contínuo e pulsado) para retirar o fluido de um reservatório sujeito a um aquífero freático em sua base. Um aparato experimental baseado em uma célula de Hele-Shaw foi desenvolvido para verificar experimentalmente as soluções numéricas obtidas em diferentes regimes.

Mais recentemente, o desenvolvimento de modelos simplificados que representem o comportamento dinâmico da interface entre os fluidos vem se apresentando também como potenciais alternativas para facilitar a síntese de controladores não-lineares que possam variar a vazão de produção do poço a fim de evitar que a interface atinja o poço produtor.

Córdoba [47] se utiliza da solução numérica da equação de fluxo do modelo do cone baseado no fluxo monofásico bidimensional de dois fluidos incompressíveis com superfície livre em reservatórios verticalmente confinados para obter a distribuição de potencial no reservatório em função do tempo. Dessa forma, o modelo dinâmico que representa o comportamento dinâmico da superfície livre foi estimado a partir do comportamento do potencial em sua região central visando obter um modelo não-linear em sua representação de espaço de estados. A partir desse modelo, projeta-se um controlador PI não-linear para manter estável o cone durante a extração do fluido do reservatório à vazão crítica.

A partir do comportamento dinâmico do nó central da superfície livre, ao se propor uma trajetória desejada desde a situação de equilíbrio do sistema até uma região próxima ao ponto de extração, a planicidade diferencial desse modelo aproximado facilitaria o desenvolvimento de um sistema de controle de trajetória que garanta somente a produção de óleo.

1.3 Definição do problema

O emprego de novas tecnologias nas mais diversas aplicações da indústria do petróleo apresentam-se como potenciais soluções para aumentar a rentabilidade dos campos de petróleo. Dentre elas, cita-se a necessidade do uso de sistemas de posicionamento dinâmico de navios-tanque, navios de perfuração e plataformas de petróleo para facilitar a realização de tarefas como, por exemplo, perfuração de poços, completação e instalação de árvores de natal.

Esses sistemas controlam automaticamente a posição e o aproamento de uma embarcação por meio de propulsão ativa. Como as condições ambientais são variáveis, o sistema de propulsão deve apresentar resposta compatível às variações de condição de operação, atuando rapidamente a fim de evitar instabilidade do sistema em casos extremos.

Segundo esse raciocínio, observa-se também que o desenvolvimento de sistemas de controle que alteram automaticamente a vazão de produção é de fundamental importância prática na indústria. Isso fica mais claro em reservatórios sujeitos ao fenômeno do cone, já que se pode utilizar tais sistemas para definir determinados perfis de vazão de produção a serem seguidos que implicam na redução da produção de água (ou de gás), já que essa limita as vazões de produção de óleo no poço e, conseqüentemente, pode reduzir a vida útil do mesmo.

Portanto, tais demandas presentes na indústria do petróleo continua sendo um campo de estudo que busca adaptar gradativamente abordagens de controle que atendam aos requisitos de desempenho e restrições de projeto nas mais diversas aplicações práticas.

1.4 Objetivo Geral

O objetivo principal desta dissertação centra-se no desenvolvimento de um sistema controle de acompanhamento de trajetória baseado na teoria de planicidade diferencial para os modelos não-lineares dos seguintes sistemas:

- Navio de Superfície
- Veículo Subaquático
- Comportamento dinâmico do nó central da superfície livre em reservatórios sujeitos ao fenômeno do cone 2D.

Para atingir o objetivo geral desta dissertação, propõem-se os seguintes objetivos específicos:

1. Apresentar o conceito de saídas planas de um sistema e como podem ser utilizadas para facilitar as etapas de planejamento de trajetória e de projeto do controlador responsável pela minimização do erro de acompanhamento de trajetória;
2. Descrever métodos que proporcionem diretamente a determinação das saídas planas para sistemas lineares e não-lineares, já que os primeiros naturalmente são obtidos a partir da linearização de sistemas não-lineares em torno das trajetórias desejadas;
3. Introduzir os conceitos de sistemas liouvillianos e de entradas planas como potenciais soluções para o controle de sistemas não-diferencialmente planos, já que, normalmente, sistemas subatuados não pertencem a essa classe de sistemas;
4. Descrever os modelos matemáticos conhecidos na literatura para os sistemas offshore citados anteriormente;
5. Validar e comparar o desempenho dos controladores desenvolvidos a partir de simulações numéricas e, se disponível, de forma experimental e;
6. Verificar o grau de robustez do controlador em situações adversas como, por exemplo, na presença de perturbações externas.

1.5 Resultados Alcançados

Neste trabalho, realizou-se um controle de acompanhamento de trajetória para diferentes modelos não-lineares de sistemas offshore seguindo uma abordagem de controle que se baseia na teoria de planicidade diferencial. A performance dos sistemas de controle foram validados a partir de simulações numéricas implementadas no ambiente de simulação *Simulink* do *software MATLAB*[®]

Em relação ao fenômeno do cone 2D, a disponibilidade de um aparato experimental presente no laboratório do Grupo de Controle e Automação (GRACO) da Universidade de Brasília permitiu realizar experimentos para validar o sistema de controle proposto. No entanto, para os veículos marítimos, a indisponibilidade de uma plataforma real limitou a análise dos resultados somente através de simulações numéricas.

1.6 Descrição do Manuscrito

No Capítulo 2, descreve-se a fundamentação teórica referente à classe dos sistemas diferencialmente planos. Conceitos relacionados as saídas planas são inicialmente introduzidas ao leitor por serem os percussores da teoria de planicidade diferencial. Em seguida, os sistemas liouvillianos são apresentados como uma primeira solução de controle de sistemas não-diferencialmente planos, porém controláveis. Encerra-se o capítulo ao detalhar os últimos avanços que se baseiam no conceito de entradas planas.

No Capítulo 3, apresenta-se a modelagem matemática para veículos marítimos junto com as simplificações assumidas nesse manuscrito a fim de obter os modelos não-lineares do navio de superfície e do veículo subaquático.

No Capítulo 4 e 5, desenvolvem-se, a partir da teoria de planicidade diferencial, diferentes abordagens de controle de trajetória para o modelo não-linear subatuado do navio de superfície e do veículo subaquático, respectivamente. Resultados são apresentados no final de cada capítulo junto com as análises de desempenho e de robustez perante perturbações externas dos controladores.

No Capítulo 6, descreve-se a modelagem matemática de um reservatório sujeito ao fenômeno do cone a partir do comportamento dinâmico do nó central da superfície livre. Em seguida, desenvolve-se uma lei de controle, a partir da teoria de planicidade diferencial, que garanta que a vazão de produção se mantenha próxima da vazão crítica.

As conclusões deste trabalho são apresentadas no Capítulo 7, bem como propostas de trabalhos futuros. Os anexos contém material complementar sobre a implementação dos modelos dinâmicos.

Capítulo 2

Sistemas Diferencialmente Planos

2.1 Introdução

A noção de planicidade diferencial, relativamente recente no campo da Automação, foi inicialmente introduzida no contexto da álgebra diferencial por M. Fliess *et al.* em [31], buscando obter soluções para problemas de planejamento de trajetória e de estabilização para sistemas não-lineares.

Segundo Lévine [43], um sistema definido pela equação:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \quad (2.1)$$

é dito diferencialmente plano se existe uma função $\mathbf{h}: \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m)^{r+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$, uma função $\lambda_0: (\mathbb{R}^m)^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ e uma função $\lambda_1: (\mathbb{R}^m)^{r+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ tais que se possa escrever as seguintes relações:

$$\mathbf{F} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(r)}) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{x} = \lambda_0(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}, \dots, \mathbf{F}^{(r)}) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{u} = \lambda_1(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}, \dots, \mathbf{F}^{(r)}, \mathbf{F}^{(r+1)}) \quad (2.4)$$

onde r é um inteiro finito e \mathbf{F} são as saídas planas de (2.1).

Mais precisamente, um sistema diferencialmente plano apresenta a propriedade de ser possível determinar um conjunto finito de variáveis “endógenas” ao sistema, denominadas saídas planas, de dimensão igual ao de entrada do sistema tal que o estado e a entrada deste possam ser determinados como função dessas saídas planas e de um número finito de suas derivadas sem usar a operação de integração.

De fato, pode-se relacionar planicidade diferencial com dois problemas bem conhecidos na teoria de controle moderno:

- **Linearização Exata** via mudança de coordenadas e realimentação de estado, ou seja, buscar uma realimentação de estado que permite o cancelamento exato das não-linearidades.

- **Desacoplamento** que consiste na construção de uma realimentação de estado cujo novo vetor de entrada do sistema promove o controle independente das saídas.

Como apresentado em Martin [36], se o sistema é diferencialmente plano, pode-se construir uma realimentação linearizante endógena e um difeomorfismo que transforma o sistema em malha fechada a um sistema linear controlável composto por uma cadeia de integradores puros, cujas saídas planas são as próprias saídas do sistema. Esse tipo de representação de sistemas lineares é conhecido como forma canônica de Brunovsky e pode ser escrita como:

$$F_j^{\kappa_j^C} = v_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.5)$$

com κ_j^C sendo os índices de controlabilidade de Kronecker do sistema [50] e v_i sendo uma realimentação endógena obtida a partir de (2.4).

Dessa forma, a vantagem de ser diferencialmente plano não consiste somente em realizar a linearização exata do sistema, mas também, ao identificar as saídas planas do sistema, permite-se reduzir problemas de estabilização ou acompanhamento de trajetória definidos para o sistema a um problema correspondente definido em relação às saídas planas [51]. Essa equivalência de sistemas é denominada isomorfismo de Lie-Backlund e um estudo mais detalhado pode ser encontrado em [43, 52].

Assim, a planicidade diferencial facilita a realização dessas tarefas independente da natureza da dinâmica interna associada com as variáveis de saída. No entanto, essa independência fica limitada as condições iniciais e finais das trajetórias especificadas as variáveis do sistema, além de possíveis restrições físicas do sistemas como, por exemplo, saturação dos atuadores. Essa abordagem é de elevado interesse no caso das saídas planas apresentarem um significado físico como, por exemplo, as coordenadas de posição de um ponto de um corpo no espaço [53].

Na Seção 2.2, apresentam-se os métodos difundidos na literatura para se determinar as saídas planas de sistemas lineares e não-lineares. A partir das saídas planas, propõem-se então soluções para problemas relacionados ao planejamento e acompanhamento de trajetórias. Em seguida, na Seção 2.3, introduz-se uma classe de sistemas não-diferencialmente planos, denominados sistemas liouvillianos, que apresentam uma característica estrutural que facilita a etapa de planejamento de trajetória. Por último, a Seção 2.4 apresenta o conceito de entradas planas como uma potencial solução para o controle de trajetória de sistemas não-diferencialmente planos.

2.2 Saídas Planas

Para sistemas lineares, a equivalência entre planicidade diferencial e controlabilidade permitiu a formulação de métodos diretos para determinação das saídas planas a partir da matriz de controlabilidade do sistema na sua representação em espaço de estados [43].

No caso dos sistemas não-lineares, a controlabilidade não é uma condição suficiente para o sistema ser diferencialmente plano, como será observado nos sistemas liouvillianos na Seção 2.3.

No entanto, se o sistema não-linear é diferencialmente plano, então as saídas planas podem ser obtidas de forma similar ao sistemas lineares [38].

Nessa seção, métodos para determinar as saídas planas de sistemas lineares e não-lineares são apresentados nas subseções 2.2.1 e 2.2.2, respectivamente. Caracterizações matemáticas sobre controlabilidade de sistemas lineares e não-lineares também são introduzidas para facilitar a compreensão do leitor.

2.2.1 Sistemas Lineares

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo - SISO

Seja um sistema linear SISO invariante no tempo em sua representação de espaço de estados

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (2.6)$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, \mathbf{A} sendo uma matriz $(n \times n)$ e \mathbf{b} sendo um vetor coluna $(n \times 1)$.

O sistema (2.6) é controlável se e somente se a matriz de controlabilidade \mathbf{C}_K dada por:

$$\mathbf{C}_K = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \quad (2.7)$$

tem posto igual a n .

Segundo Sira-Ramírez e Agrawal [38], para sistemas lineares invariantes no tempo, a relação entre controlabilidade e planicidade diferencial se resume ao sistema ser controlável. Assumindo que o sistema (2.6) é controlável, a saída plana é expressa pela combinação linear dos estados obtidos da última linha da inversa da matriz de controlabilidade \mathbf{C}_K :

$$F = a_{LIS}[0 \ 0 \ \dots \ 1]\mathbf{C}_K^{-1}\mathbf{x} \quad (2.8)$$

com a_{LIS} sendo uma função constante não-nula do vetor de estados \mathbf{x} . Tipicamente, $a_{LIS} = \det(\mathbf{C}_K)$ é escolhida para simplificar as expressões.

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo - MIMO

Seja um sistema linear MIMO invariante no tempo em sua representação de espaço de estados dada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.9)$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, \mathbf{A} sendo uma matriz $(n \times n)$ e $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m]$ com \mathbf{b}_i sendo vetor coluna $(n \times 1)$.

O sistema (2.9) é controlável se e somente se a matriz de controlabilidade \mathbf{C}_K $n \times nm$ dada

por:

$$\mathbf{C}_K = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (2.10)$$

tem posto igual a n .

Controlabilidade implica então que é possível extrair de \mathbf{C}_K uma matriz \mathbf{C}_F de posto igual a n com o seguinte formato [38]:

$$\mathbf{C}_F = [\mathbf{b}_1, \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}^{(\kappa_1^C-1)}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m, \mathbf{A}\mathbf{b}_m, \dots, \mathbf{A}^{(\kappa_m^C-1)}\mathbf{b}_m] \quad (2.11)$$

com κ_i^C , $i = 1, \dots, m$ sendo os índices de controlabilidade de Kronecker do sistema, os quais devem satisfazer a seguinte condição: $\sum_i \kappa_i^C = n$.

A partir da matriz \mathbf{C}_F , as saídas planas do sistema (2.9) são dadas por [38]:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{LIM}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_m \end{bmatrix} \mathbf{C}_F^{-1} \mathbf{x} \quad (2.12)$$

com ϕ_j sendo vetores linhas n -dimensionais da seguinte forma:

$$\phi_j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0], \quad j = 1, \dots, m \quad (2.13)$$

onde a posição do 1 será dada por $\sum_{i=1}^j \kappa_i^C$. A matriz $\mathbf{A}_{LIM}(\mathbf{x})$ sendo uma matriz $(n \times m)$ não-singular composta de funções escalares arbitrárias do vetor de estado \mathbf{x} .

Observa-se que há diversas maneiras de escolher os índices κ_{iC} acarretando em diferentes conjuntos de saídas planas, conseqüentemente em diferentes parametrizações possíveis para o sistema. Normalmente, a escolha deve ser guiada a partir de considerações físicas do sistema em estudo ou das intuições dos próprios engenheiros.

Sistemas Lineares Variantes no Tempo - SISO

Seja um sistema linear SISO variante no tempo em sua representação de espaço de estados dada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)u \quad (2.14)$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}$. A matriz $(n \times n)$ $\mathbf{A}(t)$ e o vetor coluna $(n \times 1)$ $\mathbf{b}(t)$ são contínuos no tempo.

Segundo Sira-Ramírez e Agrawal [38], para sistemas lineares variantes no tempo, a relação entre controlabilidade e planicidade diferencial está associada ao sistema ser uniformemente controlável. Assumindo que a matriz $\mathbf{A}(t)$ é $n - 2$ vezes diferenciável e $\mathbf{b}(t)$ é $n - 1$ vezes diferenciável, o sistema (2.14) é dito uniformemente controlável se o critério de controlabilidade é válido para

qualquer $t \in [t_0, t_f]$, ou seja, a matriz de controlabilidade $\mathbf{C}_K(t)$ dada por:

$$\mathbf{C}_K(t) = [\mathbf{b}(t), \dots, (\mathbf{A}(t) - \frac{d}{dt})\mathbf{b}(t), \dots, (\mathbf{A}(t) - \frac{d}{dt})^{(n-1)}\mathbf{b}(t)] \quad (2.15)$$

tem posto igual a n dentro do intervalo $[t_0, t_f]$. A matriz $\mathbf{C}_K(t)$ corresponde a extensão da matriz de controlabilidade de Kalman para sistemas lineares variantes no tempo e foi proposta por Silverman e Meadows [54].

Para o caso de sistemas não-uniformemente controláveis, utilizam-se os resultado de Malrait *et al.* [55] no qual propõem uma realimentação exógena que torna o sistema uniformemente controlável e, conseqüentemente, diferencialmente plano.

Assumindo que o sistema (2.14) é uniformemente controlável, a saída plana é dada por uma combinação linear dos estados obtidos a partir da última linha de $\mathbf{C}_K^{-1}(t)$ [38]:

$$\mathbf{F} = a_{LVS}(t)[0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]\mathbf{C}_K^{-1}(t)\mathbf{x} \quad (2.16)$$

com $a_{LVS}(t)$ sendo uma função real não-nula do vetor de estados \mathbf{x} . Normalmente, escolhe-se $a_{LVS}(\mathbf{x}) = \det(\mathbf{C}_K)$ a fim de simplificar as expressões das saídas planas.

Sistemas Lineares Variantes no Tempo - MIMO

Seja um sistema linear MIMO variante no tempo em sua representação de espaço de estados dada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad (2.17)$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A}(t)$ sendo uma matriz $(n \times n)$ e $\mathbf{B}(t)$ sendo uma matriz $(n \times m)$. As matrizes $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$ contínuas no tempo com $\mathbf{B}(t) = [\mathbf{b}_1(t), \dots, \mathbf{b}_m(t)]$.

A matriz de controlabilidade $\mathbf{C}_K(t)$ do sistema (2.17) é dada pela equação (2.15), porém se substitui $\mathbf{b}(t)$ por $\mathbf{B}(t)$, o que acarreta que $\mathbf{C}_K(t)$ tem dimensão $n \times nm$.

De forma análoga aos sistemas lineares invariantes no tempo, a controlabilidade do sistema (2.17) garante a existência de uma matriz $\mathbf{C}_F(t)$ de posto igual a n com o seguinte formato:

$$\mathbf{C}_F(t) = [\mathbf{b}_1(t), \dots, (\mathbf{A}(t) - \frac{d}{dt})^{(\kappa_1^C-1)}\mathbf{b}_1(t), \dots, \mathbf{b}_m(t), \dots, (\mathbf{A}(t) - \frac{d}{dt})^{(\kappa_m^C-1)}\mathbf{b}_m(t)] \quad (2.18)$$

com κ_i^C , $i = 1, \dots, m$, sendo os índices de controlabilidade de Kronecker do sistema, os quais satisfazem a seguinte condição: $\sum_i \kappa_i^C = n$.

Ao determinar $\mathbf{C}_F(t)$, as saídas planas do sistema (2.17) são dadas por [38]:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{LVM}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_m \end{bmatrix} \mathbf{C}_F^{-1}(t)\mathbf{x} \quad (2.19)$$

onde ϕ_j sendo vetores linhas n -dimensionais da seguinte forma:

$$\phi_j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0], \quad j = 1, \dots, m \quad (2.20)$$

onde a posição do 1 será dada por $\sum_{i=1}^j \kappa_i^C$, e $\mathbf{A}_{LVM}(\mathbf{x})$ é uma matriz $(n \times m)$ não-singular composta de funções escalares arbitrárias do vetor de estado \mathbf{x} .

2.2.2 Sistemas Não-Lineares

A noção de controlabilidade para sistemas não-lineares é baseada em uma ferramenta matemática denominada parênteses de Lie, conforme descrito em [56]. Segundo Slotine [57], se $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ são campos vectoriais em \mathbb{R}^n , o parêntese de Lie de \mathbf{f} e \mathbf{g} é definido pela expressão:

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \nabla \mathbf{g} \mathbf{f} - \nabla \mathbf{f} \mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (2.21)$$

onde $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]$ é um campo vectorial de dimensão n (vector coluna).

Outra possível notação para o parênteses de Lie é dado por:

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = ad_{\mathbf{f}} \mathbf{g} \quad (2.22)$$

onde $ad_{\mathbf{f}} \mathbf{g}$ significa adjunta de \mathbf{g} . A vantagem dessa notação é sua extensão para um formato recursivo em que o parênteses de Lie de ordem i é definido por:

$$\begin{aligned} ad_{\mathbf{f}}^0 \mathbf{g} &= \mathbf{g} \\ ad_{\mathbf{f}}^i \mathbf{g} &= [\mathbf{f}, ad_{\mathbf{f}}^{i-1} \mathbf{g}] \end{aligned} \quad (2.23)$$

Segundo Sira-Ramírez e Agrawal [38], os sistemas não-lineares SISO pertencem a última classe de sistemas em que o conceito de planicidade diferencial ainda está claramente relacionado com a noção de controlabilidade. Dessa forma, seja o seguinte sistema não-linear:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2.24)$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, o sistema é controlável se e somente se a matriz de controlabilidade \mathbf{C}_K dada por:

$$\mathbf{C}_K = [\mathbf{g}, ad_{\mathbf{f}} \mathbf{g}, \dots, ad_{\mathbf{f}}^{m-1} \mathbf{g}] \quad (2.25)$$

apresenta posto completo.

O gradiente da saída plana do sistema (2.24) é determinado a partir da última linha do inverso de \mathbf{C}_K [38]:

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{(\partial \mathbf{x})} = a_{NLS} [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \mathbf{C}_K^{-1} \quad (2.26)$$

para uma função escalar não-nula a_{NLS} . Tipicamente, escolhe-se $a_{NLS}(\mathbf{x}) = \det(\mathbf{C}_K)$ a fim de simplificar as expressões das saídas planas. Além disso, observa-se que o cálculo para determinar $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ requer a solução de um sistema de equações diferenciais parciais, o que não acontece para sistemas lineares.

2.2.3 Planejamento de Trajetória

Seja um sistema não-linear $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ com as seguintes condições iniciais dadas no instante de tempo t_i :

$$\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{u}(t_i) = \mathbf{u}_i \quad (2.27)$$

e com as condições finais no instante t_f dadas por:

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f, \quad \mathbf{u}(t_f) = \mathbf{u}_f \quad (2.28)$$

Planejamento de trajetória é a etapa responsável pela geração antecipada da trajetória desejada para o sistema e dos controles associados que permitirão a sua realização. Isso consiste em encontrar uma trajetória $t \mapsto (\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ para $t \in [t_i, t_f]$ que satisfaça $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, as equações (2.27) e (2.28), e, possivelmente, restrições. As trajetórias desejadas $\mathbf{x}^*(t)$ e $\mathbf{u}^*(t)$ são denominadas trajetória nominal e controle nominal, respectivamente.

Dentro desse contexto, uma primeira abordagem busca obter os sinais de controle através de métodos numéricos onde se assume um valor inicial \mathbf{u}_i e vai ajustando o valor de \mathbf{u} à medida que o sistema se aproxima das condições finais para \mathbf{x} , os quais são obtidos através da integração numérica das equações diferenciais do modelo.

Outra abordagem se baseia em uma visão relacionada a teoria de controle ótimo que se resume a encontrar um controle que minimize o desvio médio ao quadrado em relação a uma trajetória desejada.

De acordo com Lévine [43], a planicidade diferencial do sistema implica que, para construir uma trajetória com determinadas condições iniciais e finais, é suficiente calcular a correspondente trajetória para a saída plana, o que evita a necessidade de integração das equações diferenciais que descrevem o sistema.

A seguir, métodos para a construção de trajetórias sem restrições são descritos, os quais serão utilizados ao longo dos próximos capítulos desse manuscrito. Para mais detalhes sobre trajetórias com restrições, convida-se o leitor a buscar [43].

Planejamento de Trajetória sem restrições

Desde que as condições iniciais e finais de \mathbf{x} e \mathbf{u} sejam dadas, é possível determinar as respectivas condições para as saídas planas \mathbf{F} e suas derivadas temporais a partir da equação (2.2). Então, é suficiente encontrar uma trajetória $t \mapsto \mathbf{F}(t)$ ao menos $r + 1$ vezes diferenciável que satisfaça as condições iniciais e finais de \mathbf{F} e suas derivadas temporais. Além disso, ressalta-se também

que a trajetória $t \mapsto \mathbf{F}(t)$ não precisa satisfazer quaisquer equações diferenciais, o que permite o uso de interpolações polinomiais a fim de facilitar a sua construção. Assim, as equações (2.2) e (2.3) implicam que as trajetórias $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ e $t \mapsto \mathbf{u}(t)$ são obtidas diretamente e obrigatoriamente satisfazem as equações diferenciais do sistema [43].

De forma geral, assumamos que o seguinte conjunto de dados é fornecido no instante de tempo t_i :

$$F_1(t_i), \dots, F_1^{(r+1)}(t_i), \dots, F_m(t_i), \dots, F_m^{(r+1)}(t_i) \quad (2.29)$$

e no instante de tempo t_f :

$$F_1(t_f), \dots, F_1^{(r+1)}(t_f), \dots, F_m(t_f), \dots, F_m^{(r+1)}(t_f) \quad (2.30)$$

que, juntos, representam $2(r+2)$ condições para um dos m componentes de \mathbf{F} .

Analisando o conjunto (F_1, \dots, F_m) na forma de m polinômios com respeito ao tempo, cada componente de \mathbf{F} deve ter ao menos $2(r+2)$ coeficientes que satisfazem as condições iniciais e finais, e então devem ser ao menos de grau $2r+3$.

Denotando $T = t_f - t_i$ e $\tau(t) = \frac{t - t_i}{T}$, têm-se que as saídas planas $F_j(t)$ são expressas por:

$$F_j(t) = \sum_{k=0}^{2r+3} a_{j,k} \tau^k(t), \quad j = 1, \dots, m \quad (2.31)$$

onde os coeficientes $a_{j,k}$ são computados determinando as sucessivas derivadas de F_j nos instantes iniciais e finais representados pelos dados (2.29) e (2.30):

$$F_j^{(k)}(t) = \frac{1}{T^k} \sum_{l=k}^{2r+3} \frac{l!}{(l-k)!} a_{j,l} \tau^{l-k}(t), \quad j = 1, \dots, m \quad (2.32)$$

que permite montar um sistema com um total de $2r+4$ equações lineares com $2r+4$ coeficientes $a_{j,0}, \dots, a_{j,2r+3}$ para cada $j = 1, \dots, m$.

Como descrito em [43], o sistema pode ser reduzido para $r+2$ equações lineares com $r+2$ coeficientes $a_{j,r+2}, \dots, a_{j,2r+3}$ sabendo que os coeficientes $a_{j,0}, \dots, a_{j,r+1}$ das $r+2$ primeiras equações dadas pelo conjunto de dados (2.29) pode ser computados por:

$$a_{j,k} = \frac{T^k}{k!} F_j^k(t_i), \quad k = 0, \dots, r+1. \quad (2.33)$$

Os $r + 2$ coeficientes restantes são dados por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r+2 & r+3 & \cdots & 2r+3 \\ (r+1)(r+2) & (r+2)(r+3) & \cdots & (2r+2)(2r+3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (r+2)! & \frac{(r+3)!}{2} & \cdots & \frac{(2r+3)!}{(r+2)!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{j,r+2} \\ a_{j,r+3} \\ a_{j,r+4} \\ \vdots \\ a_{j,2r+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_j(t_f) - \sum_{l=0}^{r+1} \frac{T^l}{l!} F_j^{(l)}(t_i) \\ \vdots \\ T^k (F_j^k(t_f) - \sum_{l=k}^{r+1} \frac{T^{l-k}}{(l-k)!} F_j^{(l)}(t_i)) \\ \vdots \\ T^{r+1} (F_j^{(r+1)}(t_f) - F_j^{(r+1)}(t_i)) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Por outro lado, caso seja imposto trajetórias com condições iniciais e finais sendo pontos de equilíbrio, implica-se que as derivadas temporais das saídas planas são nulas. Assim, a trajetória pode ser expressa como:

$$F_j(t) = F_j(t_i) + (F_j(t_f) - F_j(t_i)) \left(\frac{t-t_i}{T} \right)^{r+2} \left(\sum_{k=0}^{r+1} a_{j,k} \left(\frac{t-t_i}{T} \right)^k \right), \quad j = 1, \dots, m \quad (2.35)$$

com os coeficientes $a_{j,0}, \dots, a_{j,r+1}$ solução de:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r+2 & r+3 & \cdots & 2r+3 \\ (r+1)(r+2) & (r+2)(r+3) & \cdots & (2r+2)(2r+3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (r+2)! & \frac{(r+3)!}{2} & \cdots & \frac{(2r+3)!}{(r+2)!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{j,0} \\ a_{j,1} \\ a_{j,2} \\ \vdots \\ a_{j,r+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Desde que todas as derivadas das componentes de \mathbf{F} são necessariamente iguais a 0 em um ponto de equilíbrio, permite-se adicionar um número arbitrário de condições iniciais e finais nulas de ordem maior ou igual a $r + 1$ sem alterar estrutura da trajetória. Esse processo garante que a trajetória apresentará um início e um final mais suave, o que pode ser útil a fim de evitar oscilações ou possíveis instabilidades próximas do ponto final [43].

2.2.4 Acompanhamento de Trajetória

Como solução para o problema de planejamento de trajetória, requiere-se somente um conhecimento do modelo dinâmico e do tempo, já que a trajetória nominal pode ser computada de um determinado instante até um tempo futuro de acordo com o que se sabe sobre a evolução do comportamento dinâmico do sistema.

Supondo que o sistema é precisamente conhecido e se perturbações não produzem desvios significativos em relação as trajetórias previstas no ambiente de trabalho, então o controle nominal $\mathbf{u}^*(t)$, conhecido também por comando em malha aberta, é suficiente para realizar tal planejamento.

Em contrapartida, nos caso em a presença de perturbações é suficiente para desviar o sistema em relação as trajetórias previstas, faz-se necessário uma etapa denominada acompanhamento de trajetória que é responsável pelo desenvolvimento de uma lei de controle, conhecida também como comando em malha

fechada, capaz de garantir que o sistema, a partir de uma configuração inicial qualquer, seguirá a trajetória nominal mesmo submetido a tais perturbações desconhecidas.

Para esse propósito, o controlador precisa levar em conta informações sobre a evolução do sistema ao longo do tempo com o objetivo de deduzir o grau de desvio em relação a trajetória nominal a cada instante. Se há sensores o suficiente para realizar medições de todas as variáveis de estado do sistema, o acompanhamento de trajetória pode ser construído a partir de uma realimentação de estados. Caso contrário, faz-se necessário a utilização de técnicas de estimação de estados tais como Observadores de Estado, Filtro de Partículas ou Filtro de Kalman.

No caso dos sistemas diferencialmente planos, o sistema é equivalente a um sistema linear na forma canônica de Brunovsky através de uma realimentação endógena, conforme descrito em (2.5). A partir disso, pode-se definir uma estrutura de controle em malha fechada para o sistema equivalente e substituí-lo na expressão de comando em malha aberta do sistema original obtido na etapa de planejamento de trajetória [43].

Assumindo que $e_j = F_j - F_j^*$, $j = 1, \dots, m$ são os componentes do erro de acompanhamento de trajetória para as saídas planas do sistema. Ao derivar as componentes do erro $r + 1$ vezes, têm-se que:

$$e_j^{(r+1)} = F_j^{(r+1)} - F_j^{*(r+1)} = v_j - v_j^* \quad (2.37)$$

É suficiente então definir o seguinte termo de correção:

$$v_j = v_j^* - \sum_{l=0}^r k_{j,l} e_j^{(l)}, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.38)$$

onde os ganhos $k_{j,l}$ são escolhidos de tal forma que os m polinômios da forma $s^{(r+1)} + \sum_{l=0}^r k_{j,l} s^{(l)} = 0$ possuem suas raízes com parte real estritamente negativa. Dessa forma, as componentes do erro e_i convergem para 0, enquanto que \mathbf{F} e todas suas derivadas temporais de ordem até $r+1$ convergem para suas respectivas trajetórias nominais. Portanto, devido a parametrização diferencial, \mathbf{x} e \mathbf{u} convergem exponencialmente localmente para $\mathbf{x}^*(t)$ e $\mathbf{u}^*(t)$, respectivamente [43].

2.3 Sistemas Liouvillianos

Como descrito na Seção 1.2, alguns sistemas não-lineares clássicos presentes na literatura, como o pêndulo duplo invertido, são conhecidos por não serem diferencialmente planos. Mesmo assim, esses sistemas ainda podem ser controláveis, porém a parametrização associada as saídas planas não é válida para todas as variáveis do sistema. O número de variáveis que não podem ser parametrizadas é definido como o “defeito” do sistema [33].

Nesse contexto, encontram-se os sistemas liouvillianos, ou sistemas integráveis por quadratura. Introduzida inicialmente por Chelouah [58], essa classe de sistemas é caracterizada por ser possível identificar um subsistema diferencialmente plano em que os defeitos do sistema original podem ser diferencialmente parametrizados a partir de simples integrações das saídas planas do subsistema.

O caráter liouviliano apresenta grande interesse por permitir antecipadamente o cálculo do controle ideal em malha aberta, como nos casos dos sistemas planas. Nesse caso, o controle em malha fechada a fim de garantir o sistema convirja para trajetória nominal é normalmente realizado através de técnicas tradicionais presentes na literatura [38].

Seguindo esse raciocínio, como abordado em [38], problemas relacionados a planejamento e acompanhamento de trajetória em sistemas não-lineares podem ser equivalentes a problemas de estabilização de sistemas lineares variantes no tempo em torno da origem. Isso ocorre porque a linearização de um sistema não-linear em torno das trajetórias desejadas acarreta em um sistema linear variante no tempo em que suas variáveis de estado representam o erro de acompanhamento de trajetória, o qual se espera que convirja para zero.

Dessa forma, seja o sistema não-linear dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.39)$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$.

Supondo que as trajetórias desejadas para as variáveis de estado e de controle são conhecidas e dadas por $\mathbf{x}^*(t)$ e $\mathbf{u}^*(t)$, a linearização do sistema (2.39) em torno delas resulta no seguinte sistema linear variante no tempo ao se desprezar os termos de ordem mais alta [38]:

$$\dot{\mathbf{x}}_\delta = \mathbf{A}_\delta(t)\mathbf{x}_\delta + \mathbf{B}_\delta(t)\mathbf{u}_\delta \quad (2.40)$$

onde as variáveis incrementais \mathbf{x}_δ e \mathbf{u}_δ são dadas por:

$$\mathbf{x}_\delta = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*(t) \quad (2.41)$$

$$\mathbf{u}_\delta = \mathbf{u} - \mathbf{u}^*(t) \quad (2.42)$$

As matrizes $\mathbf{A}_\delta(t)$ e $\mathbf{B}_\delta(t)$ são matrizes jacobianas calculadas da seguinte forma:

$$\mathbf{A}_\delta(t) = \left. \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right|_{(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial x_2} \right) & \dots & \left(\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial x_n} \right) \\ \left(\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial x_1} \right) & \dots & \dots & \left(\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial x_n} \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial x_2} \right) & \dots & \left(\frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial x_n} \right) \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\mathbf{B}_\delta(t) = \left. \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right) \right|_{(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial u_1} \right) & \left(\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial u_2} \right) & \dots & \left(\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial u_m} \right) \\ \left(\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial u_1} \right) & \dots & \dots & \left(\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial u_m} \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial u_1} \right) & \left(\frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial u_2} \right) & \dots & \left(\frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial u_m} \right) \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Assumindo que o sistema linear variante no tempo (2.40) é uniformemente controlável, a estratégia de controle de trajetória se baseia em obter a expressão do termo incremental de correção $v_{i\delta}$ a partir da equação (2.38) ao assumir que as trajetórias nominais para as saídas planas incrementais $F_{i\delta}$ e suas derivadas temporais sejam nulas. Substitui-se então $F_{i\delta}^{(r+1)}$ por v_i nas equações que representam a parametrização diferencial de \mathbf{u}_δ em função das saídas planas incrementais e suas derivadas temporais. Esse comando em malha fechada estabiliza as saídas planas incrementais em torno da origem quando $t \rightarrow \infty$, logo as variáveis

incrementais de estado e de controle converge a zero.

Por último, de acordo com a equação (2.42), adiciona-se o controle incremental \mathbf{u}_δ ao controle nominal $\mathbf{u}^*(t)$ para se obter a expressão final do controlador $\mathbf{u}(t)$.

2.4 Entradas Planas

Como observado nas seções anteriores, o conceito de planicidade diferencial permitiu o desenvolvimento de um poderoso conjunto de metodologias para a síntese de controladores de rastreamento de trajetória para sistemas não-lineares. Em aplicações práticas, engenheiros tipicamente buscam alocar os sensores na planta visando obter medições direta das saídas planas com o objetivo de realimentar o controlador em malha fechada.

Por outro lado, o controle de sistemas não-diferencialmente planos ainda se apresenta como um problema em aberto na literatura, apesar dos conceitos de sistemas liouvillianos apresentados na Seção 2.3. De forma similar, observa-se que, para um sistema diferencialmente plano com a saída plana diferente da saída do sistema, essa abordagem de controle se torna mais complexa ou, até mesmo, inviável devido a instabilidades numéricas do modelo [59]. Para ambos os casos, tipicamente, desenvolve-se um controlador baseado em um modelo aproximado, cuja o vetor de saída é composto pelas saídas planas do sistema. Os erros de aproximação podem então ser tratados como perturbações do modelo. No entanto, para casos em que o rastreamento é realizado durante o comportamento transiente do sistema, tais aproximações não são aceitáveis [42].

Recentemente, Waldherr e Zeitz [41] propuseram uma perspectiva de controle complementar ao das saídas planas para solucionar esse problema através do conceito de entradas planas (*do inglês Flat Inputs*). Consiste em determinar um conjunto de atuadores que force o sistema a ser diferencialmente plano, o que permite utilizar as técnicas tradicionais de projeto de controladores relacionadas as saídas planas do sistema modificado. No entanto, em casos práticos, isso equivale a redefinir os atuadores do sistema, o que normalmente não é viável. Para contornar esse problema, Stumper *et al.* [42] apresentam um método que relaciona as variáveis de entrada do sistema original e do sistema associado as entradas planas que permite desenvolver uma lei de controle para o segundo e obter diretamente a equivalente ao primeiro.

Nessa seção, apresentam-se expressões algébricas para determinar as entradas planas tanto para sistemas SISO como para sistemas MIMO. A análise será limitada para sistemas não-lineares que são afins em relação a entrada (*do inglês Affine Systems*). Por último, descreve-se o método proposto em [42] para se projetar o controlador a partir das entradas planas de tal forma a se preservar os atuadores originais.

Caso SISO

Seja o seguinte sistema não-linear SISO da forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{2.45}$$

com o sistema observável definido como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{2.46}$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $u, y \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são campos vetoriais suaves e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave. Além disso, assume-se $f(0) = 0$ e $h(0) = 0$.

Segundo Fliess *et al.* [33], o sistema (2.45) é diferencialmente plano se o grau relativo for igual a ordem do sistema, ou seja, pode-se obter uma relação explícita entre a entrada e a saída após derivar a saída n vezes. Matematicamente, o grau relativo r do sistema (2.45) é dado por [60]:

$$\begin{aligned} L_g L_f^i h(\mathbf{x}) &= 0, & \text{para } \mathbf{x} \in N(x_0) \text{ e } 0 \leq i \leq r-2 \\ L_g L_f^i h(\mathbf{x}) &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

onde $N(x_0)$ é a vizinhança de x_0 .

Seguindo esse raciocínio, o sistema observável (2.46) é dito diferencialmente plano se existir um campo vetorial de entrada ($n \times 1$) $\gamma_S(\mathbf{x})$ tal que o sistema resultante:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \gamma_S(\mathbf{x})u_E \\ y &= h(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.48)$$

apresente grau relativo n . Nesse caso, denomina-se u_E como a saída plana de (2.46) associada a um campo vetorial de entrada $\gamma_S(\mathbf{x})$.

Segundo Waldherr e Zeitz [41], a condição necessária e suficiente de existência de uma entrada plana é que o sistema (2.45) seja observável ao menos localmente ao domínio de interesse. Inicialmente introduzida em [56], a noção de observabilidade para sistemas não-lineares é baseada em uma ferramenta matemática denominada derivada de Lie.

Dados uma função escalar $h(\mathbf{x})$ e um campo vetorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, a derivada de Lie de $h(\mathbf{x})$ em relação a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é dada por [57]:

$$L_f h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla h(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.49)$$

Desde que a derivada de Lie de uma função escalar (vetor linha) é também uma função escalar, as derivadas de Lie de maior ordem são obtidas através de recorrência. Define-se derivada de Lie de ordem i de uma função escalar $h(\mathbf{x})$ por:

$$L_f^i h(\mathbf{x}) = L_f[L_f^{i-1} h(\mathbf{x})] = \nabla[L_f^{i-1} h(\mathbf{x})] \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.50)$$

em que, por definição, $L_f^0 h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$.

A partir disso, a matriz de observabilidade \mathbf{E}_O do sistema (2.46) é dada por [56]:

$$\mathbf{E}_O = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}) \\ L_f h(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

onde o sistema (2.45) é observável se e somente se a matriz \mathbf{E}_O apresenta posto completo, i.e:

$$\text{posto}(\mathbf{E}_O) = n \quad (2.52)$$

Satisfazendo (2.52), o campo vetorial de entrada $\gamma_S(\mathbf{x})$ pode ser determinado a partir da seguinte

fórmula algébrica proposta por Waldherr e Zeitz [41]:

$$\boldsymbol{\gamma}_S(\mathbf{x}) = a_{FIS}(\mathbf{x})\mathbf{E}_O^{-1}[0 \ 0 \ \cdots \ 1]^T \quad (2.53)$$

com $a_{FIS}(\mathbf{x})$ sendo uma função real não-nula do vetor de estados \mathbf{x} . Tipicamente, $a_{FIS}(\mathbf{x}) = \det(\mathbf{E}_O)$ é escolhida para simplificar as expressões.

Caso MIMO

Para os sistemas não-lineares MIMO, é possível determinar as entradas planas de forma similar ao apresentado anteriormente. No entanto, Waldherr e Zeitz [61] demonstram que o critério de observabilidade não é necessário para a existência das entradas planas no caso MIMO.

Seja o seguinte sistema não-linear MIMO da forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ y_i &= h_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.54)$$

com o sistema observável definido como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ y_i &= h_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.55)$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ e cada $y_i \in \mathbb{R}$. Como no caso SISO, as entradas planas $\mathbf{u}_E = [u_{E_1}, \dots, u_{E_m}]^T$ são associadas aos atuadores ou aos campos vetoriais de entrada $\boldsymbol{\gamma}_M(\mathbf{x}) = [\boldsymbol{\gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\gamma}_m]$, complementando o sistema (2.55) para obter o seguinte sistema diferencialmente plano:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\gamma}_M(\mathbf{x})\mathbf{u}_E \\ y_i &= h_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.56)$$

onde cada $\boldsymbol{\gamma}_i$ corresponde a um vetor-coluna ($n \times 1$).

Em [61], para determinar $\boldsymbol{\gamma}_M(\mathbf{x})$, distinguem-se duas classes de sistemas MIMO no que diz respeito ao vetor grau relativo do sistema:

1. $\sum_{i=1}^m r_i = n$
2. $\sum_{i=1}^m r_i > n$

onde, segundo Isidori [60], o sistema (2.56) tem o vetor grau relativo $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)$ localmente a $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se:

$$L_{g_j} L_f^k h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.57)$$

para $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, m$, $k = 0, \dots, r_i - 2$ e a matriz $\mathbf{A}_{GR}(x_0)$:

$$\mathbf{A}_{GR}(x_0) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x_0) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x_0) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x_0) \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

é não-singular.

Nesse manuscrito, só será abordado o primeiro caso, já que os sistemas estudados nos próximos capítulos pertencem a essa classe de sistemas MIMO. Assim, determinam-se os campos vetoriais γ_i para cada entrada plana u_{f_i} utilizando a noção de codistribuição de observabilidade e índices de observabilidade [61].

Segundo Krener e Respondek [62], o sistema (2.55) é dito ter os índices de observabilidade $\kappa^O = (\kappa_1^O, \dots, \kappa_m^O)$ em $x_0 \in \mathbb{R}^n$, se $\sum_{i=1}^m \kappa_i^O = n$, $\kappa_i^O \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, e há uma vizinhança χ de x_0 tal que a codistribuição de observabilidade:

$$dO_\kappa = \text{span} \left\{ dL_f^j h_i, 1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq \kappa_i^O - 1 \right\} \quad (2.59)$$

é de dimensão constante igual a n em χ .

Se o sistema (2.55) tem os índices de observabilidade $\kappa^O = (\kappa_1^O, \dots, \kappa_m^O)$, então é possível determinar a matriz de observabilidade \mathbf{E}_O :

$$\mathbf{E}_O = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}) \\ L_f h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{\kappa_1^O - 1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ h_m(\mathbf{x}) \\ L_f h_m(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{\kappa_m^O - 1} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Dessa forma, os campos vetoriais γ_i que compõem $\gamma_M(\mathbf{x})$ são dados por:

$$\gamma_M(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \cdots & \gamma_m \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{FIM}(\mathbf{x}) \mathbf{E}_O^{-1} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_m \end{bmatrix}^T \quad (2.61)$$

com $\mathbf{A}_{FIM}(\mathbf{x})$ sendo uma matriz $(n \times n)$ não-singular composta de funções escalares arbitrárias do vetor de estado \mathbf{x} e ϕ_j sendo vetores linhas n -dimensionais da seguinte forma:

$$\phi_j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0], \quad j = 1, \dots, m \quad (2.62)$$

onde a posição do 1 será dada por $\sum_{i=1}^j \kappa_i^O$.

2.4.1 Estrutura do Controlador

Como citado anteriormente, o problema agora é que, ao obter um sistema associado as entradas planas, implica-se na redefinição do atuador para que esse seja diferencialmente plano. Esta abordagem pode ser ineficiente ou até mesmo fisicamente impossível, já que nem todo estado pode ser diretamente atuado.

Para contornar isso, Stumper *et al.* [42] propuseram uma estrutura de controlador para sistemas SISO contendo um compensador dinâmico ($u_E \rightarrow u$) que transforma u_E no sinal de controle u , como pode ser observado na Figura 2.1. Essa abordagem de controle pode ser aplicada em sistemas observáveis e suficientemente suaves com dinâmica interna estável. Além disso, o sistema precisa ser controlável, mas

não necessariamente diferencialmente plano.

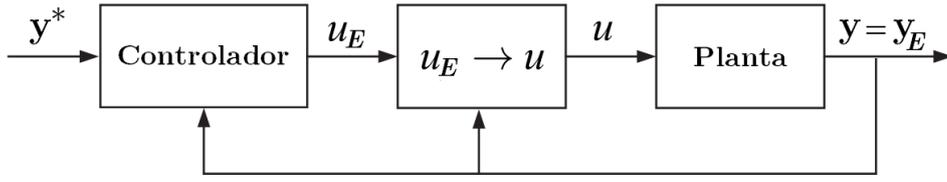


Figura 2.1: Estrutura do controlador a partir de uma abordagem com entradas planas. Adaptado de [42]

O compensador dinâmico deve ser sintetizado de tal forma que o comportamento entrada-saída do bloco formado pelo compensador e o sistema original seja idêntico ao do sistema associado com a entrada plana. Se o sistema é observável e suficientemente suave, o comportamento entrada-saída pode ser representado por uma única equação diferencial de ordem superior [63].

A partir disso, a representação entrada-saída do sistema original é dada pela seguinte equação:

$$y^{(n)} = q(y, \dots, y^{(n-1)}) + p(y, \dots, y^{(n-1)}, u, \dots, u^{(m)}) \quad (2.63)$$

onde n é a ordem do sistema e $m = n - r$ a ordem da dinâmica interna. O sistema associado a entrada planas tem grau relativo completo, portanto a sua representação entrada-saída toma a seguinte forma:

$$y_E^{(n)} = q(y_E, \dots, y_E^{(n-1)}) + p_E(y_E, \dots, y_E^{(n-1)})u_E \quad (2.64)$$

onde $p_E(\bullet) \neq 0$ se o sistema é controlável [42].

Como o comportamento entrada-saída de ambos sistemas é imposto a ser idêntico, ou seja, as equações (2.63) e (2.64) devem ser iguais. Isso implica que o comportamento dinâmico do compensador precisa satisfazer a equação diferencial:

$$y^{(n)} = y_E^{(n)} \Leftrightarrow p(y, \dots, y^{(n-1)}, u, \dots, u^{(m)}) = p_E(y, \dots, y^{(n-1)})u_E \quad (2.65)$$

onde se utilizou o fato que $y = y_E$.

Desde que o compensador reconheça u_E como entrada e u como saída, tem-se um sistema causal que pode ser implementado como um compensador de ordem m . Para sistemas com singularidades no grau relativo, isto representa uma equação com ordem indefinida, mas ainda se pode encontrar uma solução no domínio discreto, conforme detalhado em [42].

Para sistemas lineares, a aplicação desse compensador dinâmico corresponde ao cancelamento de polos e zeros através de um filtro passa-baixa na entrada. É bem conhecido que esse procedimento resulta em uma estabilidade global se o sistema é de fase mínima, o que equivale a dizer que a localização dos zeros do sistema estão sobre o semiplano complexo esquerdo [57]. Estendendo para sistemas não-lineares, isso significa que a dinâmica zero do sistema precisa ser assintoticamente estável, o que garante apenas uma estabilidade local, já que essa equivalência ainda é uma questão em aberto [42].

Por último, a extensão desse compensador para sistemas MIMO ainda não tinha sido proposta na literatura até o término desse manuscrito. Dessa forma, observou-se que os índices de observabilidade do sistema poderiam ser utilizados para obter um sistema de equações diferenciais de tal forma que as soluções do mesmo fornecessem a expressão dos compensadores dinâmicos para o caso MIMO.

Se o sistema (2.55) tem os índices de observabilidade $\kappa^O = (\kappa_1^O, \dots, \kappa_m^O)$, então, ao impor o comportamento entrada-saída de ambos sistemas, implica em satisfazer o seguinte sistemas de equações diferenciais:

$$\begin{cases} y^{(\kappa_1^O)} = y_E^{(\kappa_1^O)} \\ \vdots \\ y^{(\kappa_i^O)} = y_E^{(\kappa_i^O)} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.66)$$

onde $\sum_{i=1}^m \kappa_i^O = n$. Novamente, ressalta-se que $y = y_E$.

Assim, o controlador de rastreamento pode ser projetado inteiramente para o sistema associado as entradas planas, que é diferencialmente plano, seguindo as estratégias apresentadas nas etapas de planejamento de trajetória e de rastreamento de trajetória descritas nas subseções 2.2.4 e 2.2.3, respectivamente. A partir do compensador dinâmico fornecido pela equação (2.65), obtém-se então a expressão final do sinal de controle u a ser introduzido na planta.

2.5 Conclusões

Neste capítulo foram apresentadas estratégias de planejamento e controle de trajetória baseadas na teoria de planicidade diferencial de sistemas lineares e não-lineares.

No próximo capítulo, apresenta-se a modelagem matemática de veículos marítimos visando obter os modelos não-lineares do navio de superfície e do veículo subaquático, os quais serão utilizados no desenvolvimento de sistemas de controle baseados nas estratégias descritas neste capítulo.

Capítulo 3

Veículos Marítimos

3.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo apresentar a modelagem matemática para diferentes tipos de veículos marítimos seguindo o desenvolvimento descrito em [6, 13]: Navio de Superfície e Veículo Subaquático.

3.2 Modelagem Matemática

As expressões que descrevem os modelos matemáticos de veículos marítimos estão bem consolidadas e difundidas pela literatura e não representam desafios ao seu entendimento ou campo para possíveis contribuições da pesquisa científica. A caracterização do sistema real por expressões matemáticas permite discussões sobre propriedades do sistema, tais como estabilidade e controlabilidade, as quais são fundamentais no processo de escolha das estratégias de controle de trajetória visando atender aos requisitos de projeto.

O comportamento dinâmico dos veículos marítimos é comumente representado nos seguintes sistemas de coordenadas (ver Figura 3.1):

- **Sistema de coordenadas fixo na Terra** ($O_E X_E Y_E Z_E$), ou Sistema E , que pode coincidir com o sistema de coordenadas fixo ao navio em algumas condições iniciais. Geralmente é assumido que as acelerações de um ponto na superfície da Terra podem ser negligenciados, já que o movimento da Terra dificilmente afeta a baixa velocidade dos veículos marítimo (diferentemente dos veículos aéreos). Como resultado disso, esse sistema de coordenadas pode ser considerado inercial.
- **Sistema de coordenadas fixo ao corpo** ($O_B X_B Y_B Z_B$) ou Sistema B , tem sua origem O_B normalmente escolhida para coincidir com o centro de gravidade (CG), quando o CG é o principal plano de simetria, ou com algum outro ponto quando esse não for o caso. Os eixos $O_B X_B$, $O_B Y_B$ e $O_B Z_B$ coincidem com os eixos principais de inércia e são geralmente definidos como: $O_B X_B$ é o eixo longitudinal (direcionado da popa à proa); $O_B Y_B$ é o eixo transversal (direcionado a estibordo); e $O_B Z_B$ é o eixo normal (direcionado de cima para baixo).

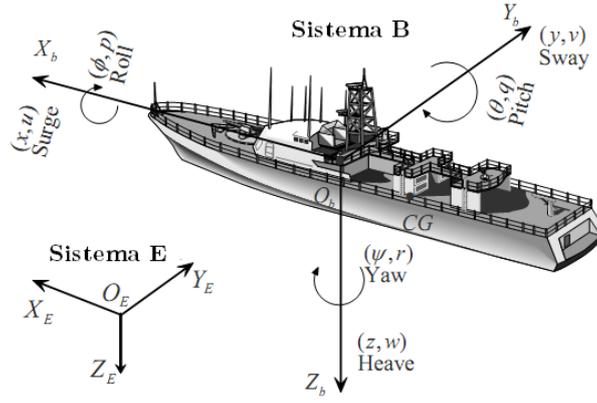


Figura 3.1: Sistemas de coordenadas de referência. Adaptado de [13].

Para um veículo marítimo se movendo em seis graus de liberdade, seis coordenadas independentes são requeridas para determinar a posição e orientação. As primeiras três coordenadas (x, y, z) e suas primeiras derivadas temporais correspondem respectivamente a posição e ao movimento translacional ao longo dos eixos X, Y e Z. Enquanto isso, as últimas três coordenadas (ϕ, θ, ψ) e suas primeiras derivadas temporais descrevem respectivamente a orientação e o movimento rotacional em torno dos eixos X, Y e Z.

Segundo a notação definida pela SNAME [64], as componentes do movimento do veículo marítimo são convencionalmente definidas como Avanço, Deriva, Afundamento, Jogo, Arfagem e Guinada (*do inglês surge, sway, heave, roll, pitch e yaw, respectivamente*), como pode ser observado na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Notação SNAME para um veículo marítimo de 6 graus de liberdade

Graus de Liberdade		Forças e Momentos	Velocidade Linear e Angular	Posições e Ângulos de Euler
1	Movimento na direção X (Avanço)	X	u	x
2	Movimento na direção Y (Deriva)	Y	v	y
3	Movimento na direção Z (Afundamento)	Z	w	z
4	Rotação sobre o eixo X (Jogo)	K	p	ϕ
5	Rotação sobre o eixo Y (Arfagem)	M	q	θ
6	Rotação sobre o eixo Z (Guinada)	N	r	ψ

Baseado na notação da Tabela 3.1, o comportamento em seis graus de liberdade do veículo marítimo pode ser descrito a partir dos seguintes vetores:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\eta} &= [\boldsymbol{\eta}_1 \ \boldsymbol{\eta}_2]^T; & \boldsymbol{\eta}_1 &= [x \ y \ z]^T; & \boldsymbol{\eta}_2 &= [\phi \ \theta \ \psi]^T & (\text{posição}) \\
 \boldsymbol{\nu} &= [\boldsymbol{\nu}_1 \ \boldsymbol{\nu}_2]^T; & \boldsymbol{\nu}_1 &= [u \ v \ w]^T; & \boldsymbol{\nu}_2 &= [p \ q \ r]^T & (\text{velocidade}) \\
 \boldsymbol{\tau} &= [\boldsymbol{\tau}_1 \ \boldsymbol{\tau}_2]^T; & \boldsymbol{\tau}_1 &= [X \ Y \ Z]^T; & \boldsymbol{\tau}_2 &= [K \ M \ N]^T & (\text{forças})
 \end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{\eta}$ denota o vetor posição e orientação com coordenadas no Sistema E , $\boldsymbol{\nu}$ denota o vetor velocidade linear e angular com coordenadas no Sistemas B , e $\boldsymbol{\tau}$ denota as forças e os momentos atuantes sobre o navio no Sistema B .

Seguindo essa notação, o modelo se divide em duas partes distintas: *Cinemática* que trata somente dos aspectos geométricos do movimento, e *Dinâmica* que é a análise das forças resultantes no movimento. Dessa forma, procura-se nas próximas seções apresentar o desenvolvimento das equações do modelo de um veículo marítimo se movimentando em 6 graus de liberdade.

3.2.1 Cinemática

O interesse em caracterizar o movimento de um corpo no espaço resulta na necessidade de estabelecer as relações entre os diferentes sistemas de coordenadas. A relação entre a primeira derivada do vetor posição $\dot{\boldsymbol{\eta}}_1$ se relaciona com o vetor velocidade linear $\boldsymbol{\nu}_1$ através do operador de transformação não-linear \mathbf{J}_1 como definido:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_1 = \mathbf{J}_1(\boldsymbol{\eta}_2)\boldsymbol{\nu}_1 \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{J}_1(\boldsymbol{\eta}_2)$ é uma matriz de transformação definida em relação aos ângulos de Euler: Jogo (ϕ), Arfagem (θ) e Guinada (ψ). Essa matriz é dada por:

$$\mathbf{J}_1(\boldsymbol{\eta}_2) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) \cos(\theta) & -\text{sen}(\psi) \cos(\phi) + \text{sen}(\phi) \text{sen}(\theta) c(\psi) & \text{sen}(\psi) \text{sen}(\phi) + \text{sen}(\theta) \cos(\psi) \cos(\phi) \\ \text{sen}(\psi) \cos(\theta) & \cos(\psi) \cos(\phi) + \text{sen}(\phi) \text{sen}(\theta) \text{sen}(\psi) & -\cos(\psi) \text{sen}(\phi) + \text{sen}(\theta) \text{sen}(\psi) \cos(\phi) \\ -\text{sen}(\theta) & \text{sen}(\phi) \cos(\theta) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Quando o veículo não sofre rotação em qualquer um dos seus eixos, a matriz $\mathbf{J}_1(\boldsymbol{\eta}_2)$ é equivalente a matriz identidade e, portanto, as velocidades são equivalentes em ambos os sistemas de coordenadas. De maneira análoga, a transformação das velocidades de rotação $\dot{\boldsymbol{\eta}}_2$ e $\boldsymbol{\nu}_2$ entre os dois sistemas de coordenadas é obtida pela matriz de transformação não-linear \mathbf{J}_2 através da seguinte expressão:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_2 = \mathbf{J}_2(\boldsymbol{\eta}_2)\boldsymbol{\nu}_2 \quad (3.3)$$

onde a matriz de transformação $\mathbf{J}_2(\boldsymbol{\eta}_2)$ é dada por:

$$\mathbf{J}_2(\boldsymbol{\eta}_2) = \begin{bmatrix} 1 & \text{sen}(\phi) \tan(\theta) & \cos(\phi) \tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ 0 & \text{sen}(\phi) / \cos(\theta) & \cos(\phi) / \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Notar que a matriz $\mathbf{J}_2(\boldsymbol{\eta}_2)$ é indefinida para $\theta = \pm\pi/2$, o que acarreta, conseqüentemente, em $\mathbf{J}_2^{-1}(\boldsymbol{\eta}_2) \neq \mathbf{J}_2^T(\boldsymbol{\eta}_2)$. No entanto, sabe-se que, durante a maioria das operações práticas, os veículos marítimos não são susceptíveis a entrar na vizinhança de $\theta = \pm\pi/2$ ou podem operar sem problemas próximos a essa região. Para os casos em que seja essencial considerar a região contendo $\theta = \pm\pi/2$, as equações cinemáticas podem ser descritas através de uma representação com quatro parâmetros ou quatérnions. Contudo, pelo fato dos ângulos de Euler apresentarem um apelo mais intuitivo, estes serão considerados ao longo desse manuscrito. O leitor pode obter

mais detalhes sobre uma representação por quatérnions em [65].

Sumarizando os resultados dessa subseção, as equações cinemáticas para um veículo marítimo em seis graus de liberdade podem ser expressadas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1(\boldsymbol{\eta}_2) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_2(\boldsymbol{\eta}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_1 \\ \boldsymbol{\nu}_2 \end{bmatrix} \iff \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\nu} \quad (3.5)$$

onde $\mathbf{0}_{3 \times 3}$ corresponde a matriz nula (3×3).

3.2.2 Dinâmica

A caracterização da dinâmica consiste em estabelecer relações entre causa e efeito para o movimento de um corpo material. Este pode ser interpretado como ponto material ou como corpo rígido dependendo das dimensões e da sua distribuição de massa.

As expressões que representam o comportamento dinâmico de um veículo marítimo estão sob as seguintes hipóteses:

- A massa está distribuída uniformemente.
- A massa é constante e a posição do centro de massa é considerado invariante.
- A origem do Sistema B não coincide com o centro de gravidade do veículo, para o caso mais geral.

Pelo fato não possuir dimensões não desprezíveis, os veículos marítimo devem ser tratados como corpos rígidos. A representação da dinâmica para um corpo rígido possui componentes adicionais em relação à dinâmica de um ponto material representadas pela força de Coriolis e à força Centrípeta, as quais estão relacionadas ao movimento de rotação do corpo em torno dos seus eixos. Ressalta-se também que é conveniente escrever as equações da dinâmica do movimento do corpo rígido segundo uma parametrização no sistema E , visto a ação dos agentes externos e a inércia do veículo serem constantes em relação a este sistema de coordenadas [8].

Inicialmente, definem-se os vetores abaixo seguindo a notação definida na Tabela 3.1:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{OB} = \boldsymbol{\tau}_1 &= [X \ Y \ Z]^T : \text{Vetor forças externas em relação ao Sistema } B \\ \mathbf{m}_{OB} = \boldsymbol{\tau}_2 &= [K \ M \ N]^T : \text{Vetor momentos externos em relação ao Sistema } B \\ \mathbf{v}_{OB} = \boldsymbol{\nu}_1 &= [u \ v \ w]^T : \text{Vetor velocidade linear em relação ao Sistema } B \\ \boldsymbol{\omega}_{OB} = \boldsymbol{\nu}_2 &= [p \ q \ r]^T : \text{Vetor velocidade angular em relação ao Sistema } B \\ \mathbf{r}_{OB} &= [x_g \ y_g \ z_g]^T : \text{Vetor de origem } O_B \text{ até CG em relação ao Sistema } B \end{aligned}$$

A partir de uma formulação Newton-Euler para um corpo rígido de massa m , as expressões que representam sua dinâmica, definidos em relação ao sistema B , podem ser representadas por [13]:

$$\begin{aligned}
m[\dot{u} - vr + wq - x_G(q^2 + r^2) + y_G(pq - \dot{r}) + z_G(pr + \dot{q})] &= X \\
m[\dot{v} - wp + ur - y_G(r^2 + p^2) + x_G(qr - \dot{p}) + x_G(qp + \dot{r})] &= Y \\
m[\dot{w} - uq + vp - z_G(p^2 + q^2) + z_G(rp - \dot{q}) + y_G(rq + \dot{p})] &= Z \\
I_x \dot{p} + (I_z - I_y)qr - (\dot{r} + pq)I_{xz} + (r^2 - q^2)I_{yz} + (pr - \dot{q})I_{xy} \\
+ m[y_G(\dot{w} - uq + vp) - z_G(\dot{v} - wp + ur)] &= K \\
I_y \dot{q} + (I_x - I_z)rp - (\dot{p} + qr)I_{xy} + (p^2 - r^2)I_{zx} + (qp - \dot{r})I_{yz} \\
+ m[z_G(\dot{u} - vr + wq) - x_G(\dot{w} - uq + vp)] &= M \\
I_z \dot{r} + (I_y - I_x)pq - (\dot{q} + rp)I_{yz} + (q^2 - p^2)I_{xy} + (rq - \dot{p})I_{zx} \\
+ m[x_G(\dot{v} - wp + ur) - y_G(\dot{r} - vr + wq)] &= N
\end{aligned} \tag{3.6}$$

As três primeiras equações representam o movimento translacional, enquanto que as três últimas representam o movimento rotacional. De forma compacta, pode-se expressar 3.6 como:

$$\begin{aligned}
m[\dot{\boldsymbol{\nu}}_1 + \boldsymbol{\nu}_2 \times \boldsymbol{\nu}_1 + \dot{\boldsymbol{\nu}}_2 \times \mathbf{r}_{OB} + \boldsymbol{\nu}_2 \times (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}_{OB})] &= \boldsymbol{\tau}_1 \\
\mathbf{I}_0 \dot{\boldsymbol{\nu}}_2 + m\mathbf{r}_{OB} \times (\dot{\boldsymbol{\nu}}_1 + \boldsymbol{\nu}_2 \times \boldsymbol{\nu}_1) &= \boldsymbol{\tau}_2
\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde \mathbf{I}_0 é o tensor de inércia em relação a O_B e contém os momentos e os produtos de inércia do corpo rígido.

Segundo as orientações [13], simplifica-se a representação do modelo não-linear do comportamento dinâmico do veículo marítimo através da manipulação das equações (3.7) de maneira a agrupá-las em uma forma matricial, como se observa na equação (3.8).

$$\mathbf{M}_{RB} \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}_{RB}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\tau}_{RB} \tag{3.8}$$

onde $\boldsymbol{\nu} = [u \ v \ w \ p \ q \ r]^T$ é o vetor velocidade linear e angular em relação ao Sistema B e $\boldsymbol{\tau}_{RB} = [X \ Y \ Z \ K \ M \ N]$ é o vetor generalizado para as forças e os momentos externos que agem sobre o veículo. A matriz \mathbf{M}_{RB} , que corresponde a matriz de inércia do sistema, pode ser expressa como:

$$\mathbf{M}_{RB} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_g & -my_g \\ 0 & m & 0 & -mz_g & 0 & mx_g \\ 0 & 0 & m & my_g & -mx_g & 0 \\ 0 & -mz_g & my_g & I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mz_g & 0 & -mx_g & -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -my_g & mx_g & 0 & -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

enquanto que a matriz \mathbf{C}_{RB} , que corresponde a matriz de forças centrípetas e de Coriolis do sistema, pode ser parametrizada de diferentes maneiras. Seguindo [6], nesse manuscrito, utiliza-se a seguinte parametrização:

$$\mathbf{C}_{RB} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{\Lambda}_1 \\ -\mathbf{\Lambda}_1^T & \mathbf{\Lambda}_2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

onde as matrizes $\mathbf{\Lambda}_1$ e $\mathbf{\Lambda}_2$ são dadas por:

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \begin{bmatrix} m(y_g q + z_g r) & -m(x_g q - w) & -m(x_g r + v) \\ -m(y_g p + w) & m(z_g r + x_g p) & -m(y_g r - u) \\ -m(z_g p - v) & -m(z_g q + u) & m(x_g p + y_g q) \end{bmatrix} \quad (3.11a)$$

$$\mathbf{\Lambda}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -I_{yz}q - I_{xz}p + I_z r & I_{yz}r + I_{xy}p - I_y q \\ I_{yz}q + I_{xz}p - I_z r & 0 & I_{xz}r + I_{xy}p - I_x p \\ I_{yz}r + I_{xy}p - I_y q & -I_{xz}r + I_{xy}q - I_x p & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11b)$$

O vetor $\boldsymbol{\tau}_{RB}$ corresponde as perturbações externas ao sistema e é representado pela soma de três outros vetores, como se observa na equação 3.12.

$$\boldsymbol{\tau}_{RB} = \boldsymbol{\tau}_H + \boldsymbol{\tau}_{EV} + \boldsymbol{\tau} \quad (3.12)$$

sendo $\boldsymbol{\tau}_H$ representa as forças e os momentos devidos aos esforços hidrodinâmicos, $\boldsymbol{\tau}_{EV}$ representa as forças e os momentos devidos aos esforços ambientais, e $\boldsymbol{\tau}$ representa as forças e os momentos devidos aos propulsores conectados ao veículo marítimo.

3.2.3 Perturbações Externas

De acordo com Faltinsen [66], para a maioria das aplicações de controle em veículos marítimos, o princípio da superposição é considerado um boa aproximação para acrescentar a influência das perturbações externas nas equações de movimento do veículo marítimo. Nessa subseção, é desenvolvido um breve resumo sobre as perturbações externas citadas na subseção 3.2.2. O leitor pode obter mais detalhes sobre a modelagem matemática desses esforços externos em Pan e Do [13] e Fossen [6].

Esforços Hidrodinâmicos

Assumindo a condição de ausência de ondas, os esforços hidrodinâmicos correspondem a forças e momentos que atuam sob o veículo marítimo quando o mesmo está se deslocando em um fluido. Esse fenômeno pode ser representado como a soma de três componentes:

1. Massa adicional devido à inércia do fluido circundante.
2. Arrasto ou amortecimento hidrodinâmico devido à energia levada pelas ondas de superfície.

3. Forças restauradoras.

Dessa forma, o vetor $\boldsymbol{\tau}_H$ pode ser expressado da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\tau}_H = -\mathbf{M}_{AD}\dot{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{C}_{AD}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} - \mathbf{D}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} - \mathbf{g}_R(\boldsymbol{\eta}) \quad (3.13)$$

onde \mathbf{M}_{AD} é a matriz de massa adicional, $\mathbf{C}_{AD}(\boldsymbol{\nu})$ é matriz de forças centrípetas e de Coriolis de massa adicional, $\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu})$ é a matriz de amortecimento hidrodinâmico, e $\mathbf{g}_R(\boldsymbol{\eta})$ corresponde à resultante das forças restauradoras.

Os esforços devido a massa adicional correspondem ao efeito hidrodinâmico mais importante nos instantes iniciais de aceleração de um veículo marítimo, pois o gradiente de velocidade relativa entre o corpo e o fluido é relativamente pequeno, permitindo assim desprezar os fenômenos viscosos. À medida que o corpo possui sua velocidade elevada, os esforços hidrodinâmicos se devem cada vez mais aos efeitos de viscosidade devido ao aparecimento de vórtices na superfície do corpo [8].

Assim, a matriz \mathbf{M}_{AD} e $\mathbf{C}_{AD}(\boldsymbol{\nu})$ são expressas por:

$$\mathbf{M}_{AD} = \begin{bmatrix} X_{\dot{u}} & X_{\dot{v}} & X_{\dot{w}} & X_{\dot{p}} & X_{\dot{q}} & X_{\dot{r}} \\ Y_{\dot{u}} & Y_{\dot{v}} & Y_{\dot{w}} & Y_{\dot{p}} & Y_{\dot{q}} & Y_{\dot{r}} \\ Z_{\dot{u}} & Z_{\dot{v}} & Z_{\dot{w}} & Z_{\dot{p}} & Z_{\dot{q}} & Z_{\dot{r}} \\ K_{\dot{u}} & K_{\dot{v}} & K_{\dot{w}} & K_{\dot{p}} & K_{\dot{q}} & K_{\dot{r}} \\ M_{\dot{u}} & M_{\dot{v}} & M_{\dot{w}} & M_{\dot{p}} & M_{\dot{q}} & M_{\dot{r}} \\ N_{\dot{u}} & N_{\dot{v}} & N_{\dot{w}} & N_{\dot{p}} & N_{\dot{q}} & N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{C}_{AD} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 & -b_3 & b_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 & b_3 & 0 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 & -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

onde

$$\begin{aligned} a_1 &= X_{\dot{u}}u + X_{\dot{v}}v + X_{\dot{w}}w + X_{\dot{p}}p + X_{\dot{q}}q + X_{\dot{r}}r \\ a_2 &= Y_{\dot{u}}u + Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{w}}w + Y_{\dot{p}}p + Y_{\dot{q}}q + Y_{\dot{r}}r \\ a_3 &= Z_{\dot{u}}u + Z_{\dot{v}}v + Z_{\dot{w}}w + Z_{\dot{p}}p + Z_{\dot{q}}q + Z_{\dot{r}}r \\ b_1 &= K_{\dot{u}}u + K_{\dot{v}}v + K_{\dot{w}}w + K_{\dot{p}}p + K_{\dot{q}}q + K_{\dot{r}}r \\ b_2 &= M_{\dot{u}}u + M_{\dot{v}}v + M_{\dot{w}}w + M_{\dot{p}}p + M_{\dot{q}}q + M_{\dot{r}}r \\ b_3 &= N_{\dot{u}}u + N_{\dot{v}}v + N_{\dot{w}}w + N_{\dot{p}}p + N_{\dot{q}}q + N_{\dot{r}}r \end{aligned} \quad (3.16)$$

Nas equações (3.14) e (3.15), utilizou-se a notação definida por [64] para representar, por exemplo, a força hidrodinâmica Y_{AD} ao longo do eixo Y devido a uma aceleração \dot{u} na direção

Avanço é dada por:

$$Y_{AD} = -Y_{\dot{u}}\dot{u}, \quad Y_{\dot{u}} := \frac{\partial Y}{\partial \dot{u}} \quad (3.17)$$

A matriz de amortecimento hidrodinâmico $\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu})$ é frequentemente composta por duas matrizes: \mathbf{D} e $\mathbf{D}_n(\boldsymbol{\nu})$. A primeira é composta por elementos lineares, enquanto que a segunda é geralmente aproximada utilizando uma expansão de terceira ordem da série de Taylor ou através de funções modulares, o que resulta no aparecimento de termos não-lineares dependentes do vetor $\boldsymbol{\nu}$. Nesse trabalho, ignorou-se a influência de $\mathbf{D}_n(\boldsymbol{\nu})$ no desenvolvimento do modelo, logo a expressão para $\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu})$ se resume a matriz \mathbf{D} expressa por:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} X_u & X_v & X_w & X_p & X_q & X_r \\ Y_u & Y_v & Y_w & Y_p & Y_q & Y_r \\ Z_u & Z_v & Z_w & Z_p & Z_q & Z_r \\ K_u & K_v & K_w & K_p & K_q & K_r \\ M_u & M_v & M_w & M_p & M_q & M_r \\ N_u & N_v & N_w & N_p & N_q & N_r \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Por último, a força gravitacional e o empuxo hidrostático correspondem as forças restauradoras. A primeira vai atuar através do centro de gravidade $\mathbf{r}_G = [x_G \ y_G \ z_G]^T$ do veículo, enquanto que a segunda vai atuar através do ponto de aplicação do empuxo $\mathbf{r}_B = [x_B \ y_B \ z_B]^T$. Dessa forma, ambos são modelados através da matriz $\mathbf{g}_R(\boldsymbol{\eta})$:

$$\mathbf{g}_R(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} (W - B)\text{sen}(\theta) \\ -(W - B)\text{cos}(\theta)\text{sen}(\phi) \\ -(W - B)\text{cos}(\theta)\text{cos}(\phi) \\ -(y_g W - y_b B)\text{cos}(\theta)\text{cos}(\phi) + (z_g W - z_b B)\text{cos}(\theta)\text{sen}(\phi) \\ (z_g W - z_b B)\text{sen}(\theta) + (x_g W - x_b B)\text{cos}(\theta)\text{cos}(\phi) \\ -(x_g W - x_b B)\text{cos}(\theta)\text{sen}(\phi) - (y_g W - y_b B)\text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

onde o empuxo hidrostático e o peso são dados respectivamente por:

$$W = mg \quad (3.20)$$

$$B = \rho_w g \nabla \quad (3.21)$$

com ∇ representando o volume de fluido deslocado pelo corpo, g sendo a aceleração da gravidade, e ρ_w correspondendo a densidade da água.

Esforços Ambientais

Como apresentado em Pan e Do [6], a ação das ondas, dos ventos e das correntes marítimas constituem os agentes de distúrbios ambientais mais importantes quando se considera embarcações de superfície, como navios ou plataformas marítimas. Dessa forma, o vetor $\boldsymbol{\tau}_{EV}$ pode ser

expressado como mostra a equação (3.22).

$$\boldsymbol{\tau}_{EV} = \boldsymbol{\tau}_{EV}^{cm} + \boldsymbol{\tau}_{EV}^{onda} + \boldsymbol{\tau}_{EV}^{vento} \quad (3.22)$$

onde $\boldsymbol{\tau}_{EV}^{cm}$, $\boldsymbol{\tau}_{EV}^{onda}$ e $\boldsymbol{\tau}_{EV}^{vento}$ correspondem aos vetores de forças e momentos induzidos pelas correntes marítimas, ondas e ventos, respectivamente.

Forças e Momentos de Propulsão

O vetor $\boldsymbol{\tau}$ depende da configuração específica dos atuadores, por exemplo, se há hélices e lemes instalados no veículo. Nesse trabalho, negligencia-se a dinâmica dos atuadores que provêm as forças e os momentos de propulsão, supondo que a resposta dos atuadores, tais como sistemas hidráulicos ou motores elétricos, é muito mais rápida que a resposta do veículo.

3.3 Modelos Convencionais

Considerando os principais resultados na subseção 3.2.3, Fossen [13] mostra que as equações do movimento em 6 graus de liberdade para um veículo marítimo:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\nu} \\ \mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\nu}} &= -\mathbf{C}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} - \mathbf{D}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} - \mathbf{g}_R(\boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_E \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{M}_{RB} + \mathbf{M}_{AD} \\ \mathbf{C}(\boldsymbol{\nu}) &= \mathbf{C}_{RB}(\boldsymbol{\nu}) + \mathbf{C}_{AD}(\boldsymbol{\nu}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Assumindo que o corpo está em repouso (ou na maioria das vezes está se movendo em baixa velocidade) em um fluido ideal, a matriz \mathbf{M} é sempre simétrica positiva, ou seja:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^T > 0 \quad (3.25)$$

Para um corpo rígido se movendo em um fluido, a matriz $\mathbf{C}(\boldsymbol{\nu})$ pode ser sempre parametrizada de tal forma que ela seja anti-simétrica, enquanto que a matriz $\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu})$ é real, não-simétrica e estritamente positiva [6], ou seja:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\nu}) = -\mathbf{C}(\boldsymbol{\nu})^T, \quad \forall \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^6 \quad (3.26)$$

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}) > 0, \quad \forall \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^6 \quad (3.27)$$

Nas subseções 3.3.1 e 3.3.2, simplificações são assumidas válidas a fim de obter modelos com fins de desenvolvimento do controlador e validação através de simulações numéricas. De forma geral, os esforços ambientais são desconsiderados e os coeficientes de arrasto hidrodinâmico são aproximados por constantes.

3.3.1 Navio de Superfície

A partir da equação (3.23), deriva-se o modelo para o comportamento dinâmico de um navio de superfície se movendo em um plano horizontal [6]. Para isso, inicialmente, assumem-se as seguintes hipóteses:

1. A dinâmica associada ao movimento nas direções Afundamento, Jogo e Arfagem é ignorada, ou seja, $z = 0$, $w = 0$, $\phi = 0$, $p = 0$, $\theta = 0$ e $q = 0$. Isso se deve ao fato que o movimento na horizontal é descrito somente pelas componentes nas direções Avanço, Deriva e Guinada.
2. O corpo apresenta uma distribuição de massa homogênea e um plano de simetria em XZ, implicando assim que os momentos de inércia I_{xy} e I_{yz} são nulos.
3. O centro de gravidade e o ponto de aplicação do empuxo são localizados verticalmente no eixo Z.

Além das hipóteses acima, um modelo simplificado pode ser obtido ao ignorar os termos não-diagonais das matrizes \mathbf{M} e \mathbf{D} . Essas considerações são consistentes quando o corpo apresenta três planos de simetria e os eixos do Sistema B são escolhidos para serem paralelos ao eixo principal do fluido deslocado, os quais são iguais ao eixo principal do corpo. Assim, o modelo simplificado que representa a dinâmica de um navio de superfície se movendo em um plano horizontal é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\nu} \\ \mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\nu}} &= -\mathbf{C}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} - \mathbf{D}\boldsymbol{\nu} - \mathbf{g}_R(\boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{\tau}\end{aligned}\tag{3.28}$$

onde as matrizes $\mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})$, \mathbf{M} , $\mathbf{C}(\boldsymbol{\eta})$ e \mathbf{D} são dadas por:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(\boldsymbol{\eta}) &= \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) & 0 \\ \text{sen}(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}(\boldsymbol{\nu}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_{22}v \\ 0 & 0 & m_{11}u \\ m_{22}v & -m_{11}u & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{3.29}$$

com

$$\begin{aligned}m_{11} &= m - X_{\dot{u}}, & m_{22} &= m - Y_{\dot{v}}, & m_{33} &= I_z - N_{\dot{r}} \\ d_{11} &= -X_u, & d_{22} &= -Y_v, & d_{33} &= -N_r\end{aligned}\tag{3.30}$$

A configuração do vetor $\boldsymbol{\tau} = [\tau_u \ 0 \ \tau_r]^T$ implica que o navio de superfície não apresenta um atuador independente na direção Deriva, ou seja, tem-se um sistema subatuado. As componentes τ_u e τ_r correspondem a uma força aplicada na direção Avanço e a um momento aplicado na direção Guinada, respectivamente.

A equação (3.28) pode ser reorganizada a fim de facilitar sua visualização:

$$\begin{cases} \dot{x}_N &= \cos(\psi_N)u_N - \text{sen}(\psi_N)v_N \\ \dot{y}_N &= \text{sen}(\psi_N)u_N + \cos(\psi_N)v_N \\ \dot{\psi}_N &= r_N \\ \dot{u}_N &= \frac{m_{22}}{m_{11}}v_N r_N - \frac{d_{11}}{m_{11}}u_N + \frac{1}{m_{11}}\tau_{uN} \\ \dot{v}_N &= -\frac{m_{11}}{m_{22}}u_N r_N - \frac{d_{22}}{m_{22}}v_N \\ \dot{r}_N &= \frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}}u_N v_N - \frac{d_{33}}{m_{33}}r_N + \frac{1}{m_{33}}\tau_{rN} \end{cases} \quad (3.31)$$

onde o subíndice N se refere ao navio de superfície.

Por último, seguindo o trabalho desenvolvido por Pettersen e Nijmeijer [67], sugere-se um modelo do navio de superfície assumindo os sinais de controle como a velocidade linear na direção Avanço e a velocidade angular na direção Guinada. Definindo as variáveis de controle $(u_{1N}, u_{2N}) = (u_N, r_N)$, tem-se o seguinte modelo:

$$\begin{cases} \dot{x}_N &= \cos(\psi_N)u_{1N} - \text{sen}(\psi_N)v_N \\ \dot{y}_N &= \text{sen}(\psi_N)u_{1N} + \cos(\psi_N)v_N \\ \dot{\psi}_N &= u_{2N} \\ \dot{v}_N &= -\gamma_N u_{1N} u_{2N} - \beta_N v_N \end{cases} \quad (3.32)$$

onde $\gamma_N = \frac{m_{11}}{m_{22}}$ e $\beta_N = \frac{d_{22}}{m_{22}}$.

3.3.2 Veículo Subaquático

Seguindo as mesmas hipóteses apresentadas na subseção 3.3.1, considera-se agora a dinâmica associada ao movimento nas direções Afundamento e Arfagem, enquanto que, na direção Jogo, assume-se que o sistema se mantém estabilizado pela própria sua própria estrutura mecânica ou por atuadores independentes. Assim, o modelo simplificado que representa a dinâmica de um veículo subaquático de 5 graus de liberdade é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{x}_A = \cos(\psi_A) \cos(\theta_A) u_A - \sin(\psi_A) v_A + \cos(\psi_A) \sin(\theta_A) w_A \\
\dot{y}_A = \sin(\psi_A) \cos(\theta_A) u_A + \cos(\psi_A) v_A + \sin(\psi_A) \sin(\theta_A) w_A \\
\dot{z}_A = -\sin(\theta_A) u_A + \cos(\theta_A) w_A \\
\dot{\theta}_A = q_A \\
\dot{\psi}_A = \frac{r_A}{\cos(\theta_A)} \\
\dot{u}_A = \beta_1 v_A r_A - \beta_2 w_A q_A - \beta_3 u_A + \tau_{1A} \\
\dot{v}_A = -\beta_4 u_A r_A - \beta_5 v_A \\
\dot{w}_A = \beta_6 u_A q_A - \beta_7 w_A \\
\dot{q}_A = \beta_8 u_A w_A - \beta_9 q_A - \beta_{10} \sin(\theta_A) + \tau_{2A} \\
\dot{r}_A = \beta_{11} u_A v_A - \beta_{12} r_A + \tau_{3A}
\end{array} \right. \quad (3.33)$$

sendo

$$\begin{array}{llll}
\beta_1 = \frac{m_{22}}{m_{11}} & \beta_2 = \frac{m_{33}}{m_{11}} & \beta_3 = \frac{d_{11}}{m_{11}} & \beta_4 = \frac{m_{11}}{m_{22}} \\
\beta_5 = \frac{d_{22}}{m_{22}} & \beta_6 = \frac{m_{11}}{m_{33}} & \beta_7 = \frac{d_{33}}{m_{33}} & \beta_8 = \frac{(m_{33} - m_{11})}{m_{55}} \\
\beta_9 = \frac{d_{55}}{m_{55}} & \beta_{10} = \frac{\rho_w g \nabla \overline{GM}_L}{m_{55}} & \beta_{11} = \frac{(m_{11} - m_{22})}{m_{66}} & \beta_{12} = \frac{d_{66}}{m_{66}} \\
\tau_{1A} = \frac{1}{m_{11}} \tau_{uA} & \tau_{2A} = \frac{1}{m_{55}} \tau_{qA} & \tau_{3A} = \frac{1}{m_{66}} \tau_{rA} &
\end{array} \quad (3.34)$$

com ρ_w , g , ∇ e \overline{GM}_L sendo a densidade da água, a gravidade da Terra, o volume de água deslocado e a altura metacêntrica transversal, respectivamente. Os sinais de controle disponíveis são τ_u , τ_q and τ_r que correspondem a uma força na Direção Avanço, um torque na Direção Arfagem e um torque na direção Guinada, respectivamente. O subíndice A se refere ao veículo subaquático.

3.4 Conclusões

Uma revisão da modelagem matemática de veículos marítimos foi apresentada neste capítulo visando obter os modelos não-lineares do navio de superfície e do veículo subaquático.

Nos próximos capítulos, para cada modelo apresentado, descrevem-se as etapas de planejamento e acompanhamento de trajetória a partir da teoria de controle não-linear relacionada com planicidade diferencial descrita no Capítulo 2.

Capítulo 4

Navio de Superfície

4.1 Introdução

Diferentemente da maioria das aplicações que empregam a estratégia de controle PID em veículos marítimos [13], esse capítulo desenvolve duas abordagens de controle de trajetória para o modelo não-linear subatuado do navio de superfície representado por (3.32).

Neste Capítulo, a Seção 4.2 realiza o planejamento de trajetória a partir do caráter liouviliano do modelo para obter diretamente as trajetórias nominais das variáveis do modelo não-linear. Em seguida, a Seção 4.3 detalha uma primeira abordagem de controle que consiste em linearizar o sistema em torno dessas a fim de obter um sistema linear diferencialmente plano variante no tempo, conforme descrito na Seção 2.3. Assim, desenvolve-se uma lei de controle incremental que, adicionada ao controle em malha aberta, é aplicada no modelo original.

A Seção 4.4 apresenta uma segunda abordagem que se baseia no conceito de entradas planas apresentado na Seção 2.4. A partir do modelo observável de (3.32), obtém-se um sistema não-linear diferencialmente plano fictício que permite desenvolver uma lei de controle a ser aplicada no modelo original.

Por último, a Seção 4.5 e a Seção 4.6 apresenta e discute os resultados das simulações numéricas para ambas abordagens de controle, respectivamente.

4.2 Planejamento de Trajetória

Seguindo o trabalho realizado em Sira-Ramírez [37], é possível extrair do modelo representado por (3.32) um subsistema não-linear diferencialmente plano caracterizado por ter a velocidade linear na direção Deriva e a orientação como as saídas planas. Dessa maneira, assumindo que as trajetórias nominais para $v_N^*(t)$ e $\psi_N^*(t)$ são conhecidas, então os sinais de controle nominais $u_{1N}^*(t)$ e $u_{2N}^*(t)$ são dados por:

$$u_{1N}^*(t) = -\frac{\dot{v}_N^*(t) + \beta_N v_N^*(t)}{\gamma_N \dot{\psi}_N^*(t)} \quad (4.1)$$

$$u_{2N}^*(t) = \dot{\psi}_N^*(t) \quad (4.2)$$

A posição do navio de superfície pode ser expressa como quadraturas de funções diferenciais das saídas planas do subsistema, como pode ser observado nas equações (4.3) e (4.4).

$$x_N^*(t) = \int \left\{ -\frac{\dot{v}_N^*(t) + \beta_N v_N^*(t)}{\gamma_N \dot{\psi}_N^*(t)} \cos(\psi_N^*(t)) - v_N^*(t) \text{sen}(\psi_N^*(t)) \right\} \quad (4.3)$$

$$y_N^*(t) = \int \left\{ -\frac{\dot{v}_N^*(t) + \beta_N v_N^*(t)}{\gamma_N \dot{\psi}_N^*(t)} \text{sen}(\psi_N^*(t)) + v_N^*(t) \cos(\psi_N^*(t)) \right\} \quad (4.4)$$

No entanto, em casos práticos, é muito mais simples e intuitivo definir as trajetórias nominais para o par $(x_N^*(t), y_N^*(t))$ do que para $(v_N^*(t), \psi_N^*(t))$. Dessa forma, após algumas manipulações algébricas, obtêm-se as equações (4.5) e (4.6) que permitem gerar as trajetórias nominais de $(v_N^*(t), \psi_N^*(t))$ a partir de $(x_N^*(t), y_N^*(t))$ e, conseqüentemente, das outras variáveis do sistema.

$$\dot{\psi}_N^*(t) = \left[\frac{\dot{x}_N^*(t) + \beta_N \dot{x}_N^*(t) \text{sen}(\psi_N^*(t)) - (\dot{y}_N^*(t) + \beta_N \dot{y}_N^*(t)) \cos(\psi_N^*(t))}{(\gamma_N - 1)(\dot{x}_N^*(t) \cos(\psi_N^*(t)) + \dot{y}_N^*(t) \text{sen}(\psi_N^*(t)))} \right] \quad (4.5)$$

$$v_N^*(t) = -\dot{x}_N^*(t) \text{sen}(\psi_N^*(t)) + \dot{y}_N^*(t) \cos(\psi_N^*(t)) \quad (4.6)$$

4.3 Controle de Trajetória via Saídas Planas

Inicialmente, sem perda de acurácia, adota-se uma simples transformação de coordenadas que permite substituir as funções trigonométricas presentes no modelo por equações polinomiais [21]:

$$\begin{aligned} \varpi_{1N} &= \cos(\psi_N) x_N + \text{sen}(\psi_N) y_N \\ \varpi_{2N} &= -\text{sen}(\psi_N) x_N + \cos(\psi_N) y_N \\ \varpi_{3N} &= \psi_N \end{aligned} \quad (4.7)$$

Esse procedimento reduz os esforços computacionais para determinar as saídas planas incrementais do sistema linearizado em torno das trajetórias nominais, como será visto a seguir. Assim, o modelo resultante do navio de superfície é dado por:

$$\begin{cases} \dot{\varpi}_{1N} &= u_{1N} + \varpi_{2N} u_{2N} \\ \dot{\varpi}_{2N} &= v_N - \varpi_{1N} u_{2N} \\ \dot{\varpi}_{3N} &= r_N \\ \dot{v}_N &= -\gamma_N u_{1N} u_{2N} - \beta_N v_N \end{cases} \quad (4.8)$$

onde as trajetórias nominais de $\varpi_{1N}^*(t)$, $\varpi_{2N}^*(t)$ e $\varpi_{3N}^*(t)$ são obtidas diretamente de (4.7).

Como descrito na Seção 2.3, a estrutura do controlador para sistemas liouvillianos é composta pelo controle nominal obtido na etapa de planejamento de trajetória completado pelo controle incremental que estabiliza na origem o sistema linearizado em torno das trajetórias nominais. Para o navio de superfície, isso é representado por:

$$u_{1N}(t) = u_{1N}^*(t) + u_{1N\delta} \quad (4.9)$$

$$u_{2N}(t) = u_{2N}^*(t) + u_{2N\delta} \quad (4.10)$$

onde $(u_{1N}^*(t), u_{2N}^*(t))$ e $(u_{1N\delta}, u_{2N\delta})$ correspondem aos controles nominais e incrementais, respectivamente.

A linearização Jacobiana do sistema (4.8) em torno das trajetórias nominais fornece o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} \dot{\varpi}_{1N\delta} &= u_{2N}^*(t)\varpi_{2N\delta} + u_{1N\delta} + \varpi_{2N}^*(t)u_{2N\delta} \\ \dot{\varpi}_{2N\delta} &= -u_{2N}^*(t)\varpi_{1N\delta} + v_{N\delta} - \varpi_{1N}^*(t)u_{2N\delta} \\ \dot{\varpi}_{3N\delta} &= u_{2N\delta} \\ \dot{v}_{N\delta} &= -\gamma_N u_{2N}^*(t)u_{1N\delta} - \beta_N v_{N\delta} - \gamma_N u_{1N}^*(t)u_{2N\delta} \end{cases} \quad (4.11)$$

com as variáveis incrementais de estado definidas como:

$$\begin{aligned} \varpi_{1N\delta} &= \varpi_{1N} - \varpi_{1N}^*(t) & \varpi_{2N\delta} &= \varpi_{2N} - \varpi_{2N}^*(t) \\ \varpi_{3N\delta} &= \varpi_{3N} - \varpi_{3N}^*(t) & v_{\delta} &= v - v^*(t) \end{aligned} \quad (4.12)$$

O sistema (4.11) pode ser reescrito na forma matricial $\dot{\mathbf{X}}_{N\delta} = \mathbf{A}_{N\delta}(t)\mathbf{X}_{N\delta} + \mathbf{B}_{N\delta}(t)\mathbf{U}_{N\delta}$ onde:

$$\mathbf{X}_{N\delta} = [\varpi_{1N\delta} \quad \varpi_{2N\delta} \quad \varpi_{3N\delta} \quad v_{\delta}]^T \quad (4.13)$$

$$\mathbf{U}_{N\delta} = [u_{1N\delta} \quad u_{2N\delta}]^T \quad (4.14)$$

$$\mathbf{A}_{N\delta}(t) = \begin{bmatrix} 0 & u_{2N}^*(t) & 0 & 0 \\ -u_{2N}^*(t) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{N\delta}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \varpi_{2N}^*(t) \\ 0 & -\varpi_{1N}^*(t) \\ 0 & 1 \\ -\gamma_N u_{2N}^*(t) & -\gamma_N u_{1N}^*(t) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

A matriz de controlabilidade de Kalman do sistema $\mathbf{C}_{KN}(t)$ é determinada de acordo com a equação (2.15). Assumindo que $\mathbf{C}_{KN}(t)$ tem posto completo dentro de um intervalo finito, o sistema linearizado é uniformemente controlável e é possível extrair a matriz $\mathbf{C}_{FN}(t)$ baseada nos índices de controlabilidade de Kronecker do sistema. Escolhendo-se os índices $\kappa_1^C = 2$ e $\kappa_2^C = 2$, $\mathbf{C}_{FN}(t)$ pode ser escrita como:

$$\mathbf{C}_{FN}(t) = [\mathbf{b}_{1N}(t), (\mathbf{A}_{N\delta}(t) - \frac{d}{dt})\mathbf{b}_{1N}(t), \mathbf{b}_{2N}(t), (\mathbf{A}_{N\delta}(t) - \frac{d}{dt})\mathbf{b}_{2N}(t)] \quad (4.16)$$

onde $\mathbf{b}_{1N}(t)$ e $\mathbf{b}_{2N}(t)$ correspondem ao primeiro e ao segundo vetor-coluna da matriz $\mathbf{B}_{N\delta}(t)$, respectivamente.

As saídas planas incrementais do sistema (4.11) são dadas por:

$$\mathbf{F}_{N\delta} = \begin{bmatrix} F_{1N\delta} \\ F_{2N\delta} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{C}_{FN}) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{C}_{FN}^{-1}(t) \mathbf{X}_{N\delta} \quad (4.17)$$

Após algumas simplificações algébricas, as saídas planas incrementais apresentam o seguinte formato:

$$F_{1N\delta} = \alpha_1(t)z_{1\delta} + \alpha_2(t)z_{2\delta} + \alpha_3(t)z_{3\delta} + \alpha_4(t)v_\delta \quad (4.18)$$

$$F_{2N\delta} = \eta_1(t)z_{1\delta} + \eta_2(t)z_{2\delta} + \eta_3(t)z_{3\delta} + \eta_4(t)v_\delta \quad (4.19)$$

onde

$$\alpha_1(t) = -\gamma_N u_{2N}^*(t) [\dot{\varpi}_{1N}^*(t) - u_{2N}^*(t) \varpi_{2N}^*(t)] \quad (4.20)$$

$$\alpha_2(t) = -\gamma_N [\dot{\varpi}_{2N}^*(t) u_{2N}^*(t) - \beta_N u_{1N}^*(t) - \dot{u}_{1N}^*(t) + u_{2N}^*(t)^2 \varpi_{1N}^*(t) + \gamma_N u_{1N}^*(t) u_{2N}^*(t)] \quad (4.21)$$

$$\alpha_3(t) = -\gamma_N \{ u_{2N}^*(t)^2 [\varpi_{1N}^*(t)^2 + \varpi_{2N}^*(t)^2] + \dot{\varpi}_{1N}^*(t) u_{1N}^*(t) - \dot{u}_{1N}^*(t) \varpi_{1N}^*(t) - \beta_N u_{1N}^*(t) \varpi_{1N}^*(t) - \dot{\varpi}_{1N}^*(t) u_{2N}^*(t) \varpi_{2N}^*(t) + \dot{\varpi}_{2N}^*(t) u_{2N}^*(t) \varpi_{1N}^*(t) - u_{1N}^*(t) u_{2N}^*(t) [\gamma_N \varpi_{1N}^*(t) \varpi_{2N}^*(t)] \} \quad (4.22)$$

$$\alpha_4(t) = u_{2N}^*(t) \varpi_{2N}^*(t) - \dot{\varpi}_{1N}^*(t) \quad (4.23)$$

$$\eta_1(t) = -\gamma_N u_{2N}^*(t)^2 \quad (4.24)$$

$$\eta_2(t) = -\gamma_N (-\gamma_N u_{2N}^*(t)^2 + \beta_N u_{2N}^*(t) + \dot{u}_{2N}^*(t)) \quad (4.25)$$

$$\eta_3(t) = -\gamma_N (\dot{u}_{2N}^*(t) \varpi_{1N}^*(t) + u_{1N}^*(t) u_{2N}^*(t) - u_{2N}^*(t)^2 \varpi_{2N}^*(t) - \gamma u_{2N}^*(t)^2 \varpi_{1N}^*(t) + \beta u_{2N}^*(t) \varpi_{1N}^*(t)) \quad (4.26)$$

$$\eta_4(t) = -u_{2N}^*(t) \quad (4.27)$$

Os índices de controlabilidade correspondem ao número de vezes necessários para derivar as saídas planas incrementais no sentido de obter a parametrização dos controle incrementais. Então, como se escolheu os índices de controlabilidade iguais a 2, derivou-se duas vezes as equações (4.18) e (4.19). As derivadas temporais de $F_{1N\delta}$ e $F_{2N\delta}$ também são combinações lineares do vetor de estados do sistema (4.11) com coeficientes variantes no tempo em que suas expressões são omitidas nesse manuscrito.

Dessa forma, após manipulações algébricas, monta-se a seguinte equação matricial $\mathbf{F}\mathbf{F}_N = \mathbf{M}\mathbf{M}_N(t)\mathbf{S}\mathbf{S}_N$:

$$\mathbf{F}\mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} F_{1N\delta} & \dot{F}_{1N\delta} & \ddot{F}_{1N\delta} & F_{2N\delta} & \dot{F}_{2N\delta} & \ddot{F}_{2N\delta} \end{bmatrix}^T \quad (4.28)$$

$$\mathbf{S}\mathbf{S}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N\delta} & \mathbf{U}_{N\delta} \end{bmatrix}^T \quad (4.29)$$

onde $\mathbf{M}\mathbf{M}_N(t)$ é uma matriz (6×6) com coeficientes variantes no tempo.

Invertendo a matriz $\mathbf{M}\mathbf{M}_N(t)$, obtém-se a parametrização diferencial do sistema linearizado (4.11) em termos das saídas planas incrementais e suas derivadas temporais. Assim, as variáveis incrementais de controle são parametrizadas como se segue:

$$u_{1N\delta} = C_1(t)F_{1N\delta} + C_2(t)\dot{F}_{1N\delta} + C_3(t)\ddot{F}_{1N\delta} + C_4(t)F_{2N\delta} + C_5(t)\dot{F}_{2N\delta} + C_6(t)\ddot{F}_{2N\delta} \quad (4.30)$$

$$u_{2N\delta} = C_7(t)F_{1N\delta} + C_8(t)\dot{F}_{1N\delta} + C_9(t)\ddot{F}_{1N\delta} + C_{10}(t)F_{2N\delta} + C_{11}(t)\dot{F}_{2N\delta} + C_{12}(t)\ddot{F}_{2N\delta} \quad (4.31)$$

onde os coeficientes variantes no tempo nas equações acima são obtidos das duas últimas linhas de $\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}(t)$.

Sendo diferencialmente plano, a partir das equações (4.30) e (4.31), o sistema (4.11) é portanto equivalente, sob uma alteração de coordenadas de variáveis de entrada, ao seguinte sistema linear MIMO na forma canônica de Brunovsky:

$$\begin{bmatrix} \dot{F}_{1N\delta} \\ \ddot{F}_{1N\delta} \\ \dot{F}_{2N\delta} \\ \ddot{F}_{2N\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{1N\delta} \\ \dot{F}_{1N\delta} \\ F_{2N\delta} \\ \dot{F}_{2N\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1N} \\ v_{2N} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Assim, os termos de correção em malha fechada v_{1N} e v_{2N} são dados por:

$$v_{1N} = \ddot{F}_{1N\delta}^*(t) - k_{11}(\dot{F}_{1N\delta} - \dot{F}_{1N\delta}^*(t)) - k_{10}(F_{1N\delta} - F_{1\delta}^*(t)) \quad (4.33)$$

$$v_{2N} = \ddot{F}_{2N\delta}^*(t) - k_{21}(\dot{F}_{2N\delta} - \dot{F}_{2N\delta}^*(t)) - k_{20}(F_{2N\delta} - F_{2\delta}^*(t)) \quad (4.34)$$

com (k_{11}, k_{10}) e (k_{21}, k_{20}) de tal forma que $p_1(s) = s^2 + k_{11}s + k_{10}$ e $p_2(s) = s^2 + k_{21}s + k_{20}$ possuam suas raízes com a parte real estritamente negativa. Como se espera estabilizar o sistema linearizado em torno da origem, logo se define que as trajetórias nominais para $F_{1N\delta}$, $F_{2N\delta}$ e suas respectivas derivadas temporais sejam nulas. Assim, a expressão de v_{1N} e v_{2N} se resumem a:

$$v_{1N} = -k_{11}\dot{F}_{1N\delta} - k_{10}F_{1N\delta} \quad (4.35)$$

$$v_{2N} = -k_{21}\dot{F}_{2N\delta} - k_{20}F_{2N\delta} \quad (4.36)$$

Substituindo $\ddot{F}_{1N\delta} = v_{1N}$ e $\ddot{F}_{2N\delta} = v_{2N}$ nas equações (4.30) e (4.31), além de adicionar os controles nominais $u_{1N}^*(t)$ e $u_{2N}^*(t)$, obtêm-se as expressões finais dos controladores $u_{1N}(t)$ e $u_{2N}(t)$:

$$\begin{aligned}
u_{1N}(t) = & u_{1N}^*(t) + \{C_1(t)F_{1N\delta} + C_2(t)\dot{F}_{1N\delta} + C_3(t)[-k_{11}\dot{F}_{1N\delta} - k_{10}F_{1N\delta}] + C_4(t)F_{2N\delta} \\
& + C_5(t)\dot{F}_{2N\delta} + C_6(t)[-k_{21}\dot{F}_{2N\delta} - k_{20}F_{2N\delta}]\} \tag{4.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{2N}(t) = & u_{1N}^*(t) + \{C_7(t)F_{1N\delta} + C_8(t)\dot{F}_{1N\delta} + C_9(t)[-k_{11}\dot{F}_{1N\delta} - k_{10}F_{1N\delta}] + C_{10}(t)F_{2N\delta} \\
& + C_{11}(t)\dot{F}_{2N\delta} + C_{12}(t)[-k_{21}\dot{F}_{2N\delta} - k_{20}F_{2N\delta}]\} \tag{4.38}
\end{aligned}$$

Assim, desde que $F_{1N\delta}$, $F_{2N\delta}$ assintoticamente convergem para zero de forma exponencial, então se garante que as variáveis incrementais de estado também convergem a zero, o que equivale a dizer que as variáveis do sistema (4.8) convergem localmente para suas respectivas trajetórias nominais [43].

4.4 Controle de Trajetória via Entrada Planas

Para aplicações práticas, é interessante que as coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ do navio de superfície sejam as saídas planas do sistema, pois facilitam tanto o planejamento quanto o rastreamento de trajetória. No entanto, a ausência da planicidade diferencial no modelo descrito por (3.32) impede a parametrização que simplifica o projeto do controlador. Para contornar isso, a abordagem de controle por entradas planas descrita na Seção 2.4 se apresenta como potencial solução.

Seja o sistema observável do modelo descrito por (3.32) dado por:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_N = F(\mathbf{x}_N, 0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_N &= -\text{sen}(\psi_N)v_N \\ \dot{y}_N &= \text{cos}(\psi_N)v_N \\ \dot{\psi}_N &= 0 \\ \dot{v}_N &= -\beta_N v_N \end{cases} \tag{4.39} \\
\dot{\mathbf{y}}_N = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}_N) \\ h_2(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

onde \mathbf{x}_N corresponde ao vetor de estados do sistema.

Assumindo os índices de observabilidade como $(\kappa_1^O, \kappa_2^O) = (2, 2)$, tem-se que, a partir da equação (2.60), a matriz de observabilidade \mathbf{E}_{O_N} é dada por:

$$\mathbf{E}_{O_N} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}_N) \\ L_f h_1(\mathbf{x}_N) \\ h_p(\mathbf{x}_N) \\ L_f h_2(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\text{cos}(\psi)v & -\text{sen}(\psi) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen}(\psi)v & \text{cos}(\psi) \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

A partir da equação (2.61), os campos vetoriais de entrada $(\gamma_1(\mathbf{x}_N), \gamma_2(\mathbf{x}_N))$ associados as entradas planas (u_{f1}, u_{f2}) são dados por:

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}_N) = \begin{bmatrix} \gamma_{1N} & \gamma_{2N} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_M(\mathbf{x}_N) \mathbf{E}_{O_N}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi)v & \cos(\psi)v \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

onde se assumiu $\mathbf{A}_M(\mathbf{x}_N) = -\det(\mathbf{E}_{O_N})$ a fim de simplificar $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}_N)$.

O sistema associado as entradas planas é então dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_E &= -\text{sen}(\psi_E)v \\ \dot{y}_E &= \cos(\psi_E)v \\ \dot{\psi}_E &= \cos(\psi_E)u_{E_1} + \text{sen}(\psi_E)u_{E_2} \\ \dot{v}_E &= v_E[\text{sen}(\psi_E)u_{E_1} - \cos(\psi_E)u_{E_2}] - \beta_N v_E \end{cases} \quad (4.42)$$

onde \mathbf{x}_E corresponde ao novo vetor de estados, já que não necessariamente corresponde ao vetor de estados do sistema original \mathbf{x}_N [42]. Por outro lado, o vetor de saída de ambos os sistemas são idênticos, assim como as suas derivadas temporais.

Desa forma, pode-se inferir que o sistema (4.42) é diferencialmente plano com as saídas planas dadas por $(F_{1E}, F_{2E}) = (x_E, y_E)$. Isso pode ser provado a partir da seguinte parametrização diferencial em função das saída planas e suas derivadas temporais:

$$\psi_E = \arctan\left(\frac{-\dot{F}_{1E}}{\dot{F}_{2E}}\right) \quad (4.43)$$

$$v_E = \sqrt{\dot{F}_{1E}^2 + \dot{F}_{2E}^2} \quad (4.44)$$

$$u_{E_1} = -\frac{\ddot{F}_{1E} + \beta_N \dot{F}_{1E}}{\sqrt{\dot{F}_{1E}^2 + \dot{F}_{2E}^2}} \quad (4.45)$$

$$u_{E_2} = -\frac{\ddot{F}_{2E} + \beta_N \dot{F}_{2E}}{\sqrt{\dot{F}_{1E}^2 + \dot{F}_{2E}^2}} \quad (4.46)$$

Em relação ao planejamento de trajetória, infere-se que, se o par $(F_{1E}^*(t), F_{2E}^*(t))$ é conhecido, então as trajetórias nominais $(\psi_E^*(t), v_E^*(t))$ e os sinais de controle nominais $(u_{E_1}^*(t), u_{E_2}^*(t))$ são obtidos diretamente a partir das equações (4.43-4.46).

Sendo diferencialmente plano, a partir das equações (4.45) e (4.46), o sistema (4.42) é portanto equivalente, sob uma alteração de coordenadas de variáveis de entrada, ao seguinte sistema linear MIMO na forma canônica de Brunovsky:

$$\begin{bmatrix} \dot{F}_{1E} \\ \ddot{F}_{1E} \\ \dot{F}_{2E} \\ \ddot{F}_{2E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{1E} \\ \dot{F}_{1E} \\ F_{2E} \\ \dot{F}_{2E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{E1} \\ v_{E2} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

onde os termos de correção em malha fechada v_{f1} e v_{f2} são da seguinte forma:

$$v_{E1} = \ddot{F}_{1E}^* - v_E k_{31} (\dot{F}_{1E} - \dot{F}_{1E}^*) - v_E^2 k_{30} (F_{1E} - F_{1E}^*) \quad (4.48)$$

$$v_{E2} = \ddot{F}_{2E}^* - v_E k_{41} (\dot{F}_{2E} - \dot{F}_{2E}^*) - v_E^2 k_{40} (F_{2E} - F_{2E}^*) \quad (4.49)$$

com (k_{31}, k_{30}) e (k_{41}, k_{40}) de tal forma que $p_3(s) = s^2 + k_{31}s + k_{30}$ e $p_4(s) = s^2 + k_{41}s + k_{40}$ possuam suas raízes com a parte real estritamente negativa, o que garante uma convergência assintótica do erro de trajetória para zero de forma exponencial. Ao adicionar v_E , aproxima-se o sistema a ser atuado pelos sinais de controle nominais quando $v_E \rightarrow 0$, ou seja, nos pontos de singularidade das equações (4.45) e (4.46).

Substituindo $\ddot{F}_{E1} = v_{E1}$ e $\ddot{F}_{E2} = v_{E2}$ nas equações (4.45) e (4.46), obtêm-se as expressões finais dos controladores u_{E1} e u_{E2} :

$$u_{E1} = -\frac{\ddot{F}_{1E}^* - k_{31}(\dot{F}_{1E} - \dot{F}_{1E}^*) - k_{30}(F_{1E} - F_{1E}^*) + \beta\dot{F}_{1E}}{\sqrt{\dot{F}_{1E}^2 + \dot{F}_{2E}^2}} \quad (4.50)$$

$$u_{E2} = -\frac{\ddot{F}_{2E}^* - k_{41}(\dot{F}_{2E} - \dot{F}_{2E}^*) - k_{40}(F_{2E} - F_{2E}^*) + \beta\dot{F}_{2E}}{\sqrt{\dot{F}_{1E}^2 + \dot{F}_{2E}^2}} \quad (4.51)$$

Assim, a última etapa consiste em obter o compensador dinâmico que relaciona (u_{1E}, u_{2E}) com (u_{f1}, u_{f2}) . Para isso, determinam-se as representações entrada-saída para o sistema original:

$$\begin{cases} \ddot{x}_N &= \text{sen}(\psi_N) (\beta_N v + u_{1N} u_{2N} \gamma_N) - u_{2N} \dot{y} + \cos(\psi_N) \dot{u}_{1N} \\ \ddot{y}_N &= u_{2N} \dot{x} + \cos(\psi_N) \dot{u}_{1N} - \cos(\psi_N) (\beta_N v_N + u_{1N} u_{2N} \gamma_N) \end{cases} \quad (4.52)$$

e para o sistema associado as entradas planas:

$$\begin{cases} \ddot{x}_E &= -u_{E1} v_E - \beta_N \dot{x}_E \\ \ddot{y}_E &= -u_{E2} v_E - \beta_N \dot{y}_E \end{cases} \quad (4.53)$$

onde se optou por expressões mais compactas do que se tivesse imposto as fornecidas pelas equações (2.63) e (2.64), respectivamente.

Sabendo que os índices de observabilidade do sistema (4.39) são $(\kappa_{O1}, \kappa_{O2}) = (2, 2)$, a equação (2.66) fornece o seguinte sistema de equações diferenciais a ser satisfeito:

$$\begin{cases} \ddot{x}_N &= \ddot{x}_E \\ \ddot{y}_N &= \ddot{y}_E \end{cases} \quad (4.54)$$

cujas soluções fornecem os seguintes compensadores dinâmicos:

$$u_1 = \frac{\text{sen}(\psi)(\dot{u}_1\dot{y} + v\beta_N\dot{x}) + \beta_N(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}(u_{E_1}\dot{x} + u_{E_2}\dot{y}) + \cos(\psi)(\dot{u}_1\dot{x} - v\beta_N\dot{y})}{\gamma_N(\dot{u}_1 + \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}(\cos(\psi)u_{E_1} + \text{sen}(\psi)u_{E_2})) + \beta_N(\cos(\psi)\dot{x} + \text{sen}(\psi)\dot{y})} \quad (4.55)$$

$$u_2 = \frac{\dot{u}_1 + \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}(\cos(\psi)u_{E_1} + \text{sen}(\psi)u_{E_2}) + \beta_N(\cos(\psi)\dot{x} + \text{sen}(\psi)\dot{y})}{\cos(\psi)\dot{y} - \text{sen}(\psi)\dot{x}} \quad (4.56)$$

onde se omitiu o subíndice N para facilitar a leitura. Ressalta-se que, nas equações (4.55) e (4.56), as variáveis estão definidas em relação ao sistema original (3.32), já que essas podem ser medidas ou estimadas em aplicações práticas.

Por último, segundo Stumper *et al.* [42], as expressões dos compensadores dinâmicos podem apresentar certas singularidades quando implementados em sistemas reais. Para contornar isso, optou-se por utilizar as seguintes aproximações em tempo discreto durante a implementação, conforme apresentada por Brayton *et al.* [68]:

$$\begin{cases} u &\approx u[k] \\ \dot{u} &\approx (u[k] - u[k-1])/\Delta t \\ u^2 &\approx u[k]u[k-1] \end{cases} \quad (4.57)$$

onde Δt corresponde ao intervalo de amostragem.

Assim, as expressões (4.55) e (4.56) dos compensadores dinâmicos são reescritas:

$$u_1[k] = \frac{\left[(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\beta_N + \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}(u_{E_1}\dot{x} + u_{E_2}\dot{y}) - v\beta_N(\cos(\psi)\dot{y} + \text{sen}(\psi)\dot{x}) \right] \Delta t - u_1[k-1](\cos(\psi)\dot{x} - \text{sen}(\psi)\dot{y})}{\Delta t\gamma_N \left[\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}(u_{E_1}\cos(\psi) + u_{E_2}\text{sen}(\psi)) + \beta_N(\dot{x}\cos(\psi) + \dot{y}\text{sen}(\psi)) \right] - \text{sen}(\psi)(\dot{y} - \dot{x})} \quad (4.58)$$

$$u_2[k] = \frac{(u_1[k] - u_1[k-1])/\Delta t + \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}(\cos(\psi)u_{E_1} + \text{sen}(\psi)u_{E_2}) + \beta_N(\cos(\psi)\dot{x} + \text{sen}(\psi)\dot{y})}{\cos(\psi)\dot{y} - \text{sen}(\psi)\dot{x}} \quad (4.59)$$

onde se omitiu novamente o subíndice N para facilitar a leitura.

4.5 Simulações Numéricas

Nessa seção, busca-se validar a performance dos sistemas de controle de trajetória descritos nas seções anteriores para o modelo não-linear do navio de superfície através de simulações numéricas performadas no ambiente *Simulink* do *software MATLAB*[®]. Os detalhes da implementação das abordagens de controle podem ser visualizados no Anexo I.

Como trajetórias nominais, seguindo [37, 67], opta-se, em um primeiro momento, por uma trajetória circular no plano XY definida no Sistema E centrada em torno da origem, já que é normalmente utilizada como *benchmarking* para diferentes estratégias de controle. Em um segundo momento, utiliza-se uma trajetória construída a partir de um polinômio de 5ª ordem obtido através do método descrito na subseção 2.2.3, pois possibilita um deslocamento suave do sistema no plano XY , o que apresenta interesse prático em aplicações relacionadas a desvios de obstáculos. Além disso, para ambas as trajetórias, avalia-se o grau de robustez do controlador ao introduzir uma perturbação externa do tipo senoidal ao sistema.

Dessa forma, nas subseções a seguir, escolhe-se um tempo de simulação $t_s = 200$ e um passo de tempo $\Delta t = 0,01$. Além disso, ressalta-se que os parâmetros do sistema (3.32) foram definidos seguindo o trabalho desenvolvido em Sira-Ramírez [37] e adaptados de Pan e Do [6]:

$$m_{11} = 103 \times 10^3 \text{ kg} \quad m_{22} = 178 \times 10^3 \text{ kg} \quad d_{22} = 12,5 \times 10^3 \text{ kg s}^{-1} \quad (4.60)$$

o que implica nos seguintes coeficientes:

$$\beta_N = 0,07 \quad \gamma_N = 0,58 \quad (4.61)$$

4.5.1 Planejamento de Trajetória

Trajetoária Circular

A parametrização de uma trajetória circular centrada na origem de raio ρ no sentido anti-horário no plano XY com uma dada velocidade angular ω pode ser definida como:

$$x_N^*(t) = \rho \text{sen}(\omega t) \quad y_N^*(t) = \rho \text{cos}(\omega t) \quad (4.62)$$

Assim, conforme descrito na Seção 4.2, tanto as trajetórias nominais das outras variáveis de estado do sistema como os controles nominais são obtidos a partir do caráter liouvilliano do sistema (3.32). Assumindo $\rho = 20 \text{ m}$ e $\omega = 0,05 \text{ rad/s}$, os resultados da etapa de planejamento de trajetória para a trajetória circular no plano XY podem ser observados nas Figuras 4.1-4.3.

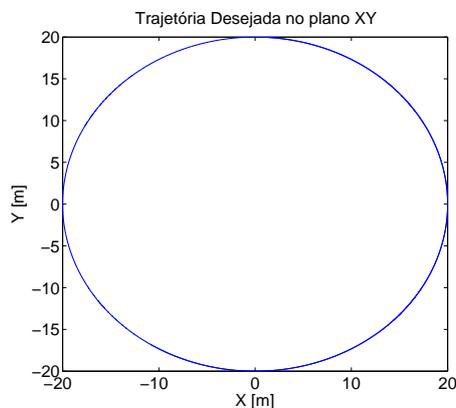


Figura 4.1: Trajetória circular no plano XY desejada para o navio de superfície no Sistema E .

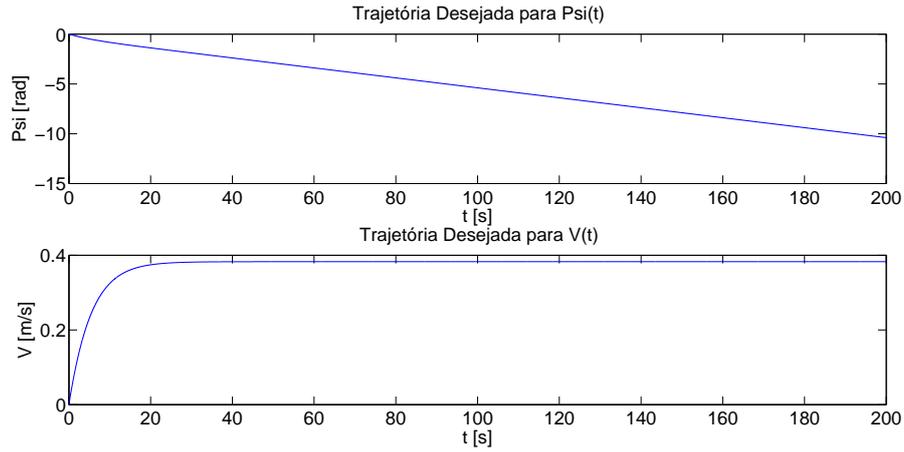


Figura 4.2: Trajetórias nominais para a orientação e a velocidade em Deriva.

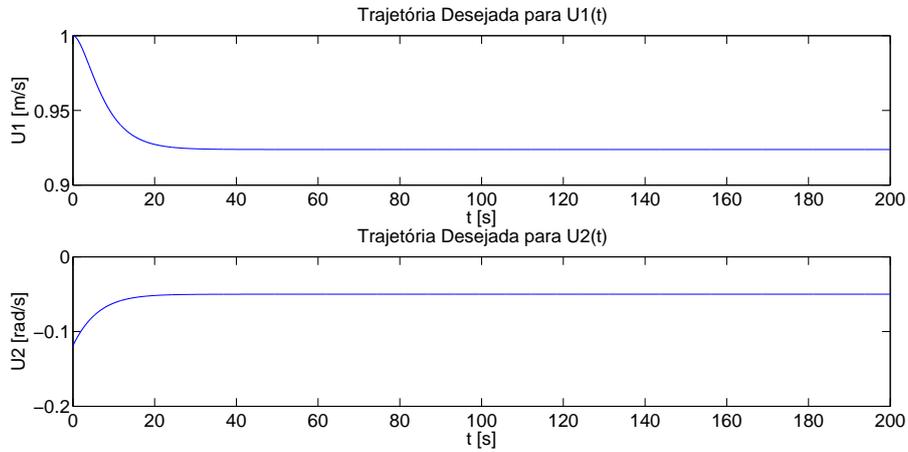


Figura 4.3: Controles nominais.

Trajétória Polinomial

Conforme descrito na subseção 2.2.3, para uma trajetória sem restrições, é possível obter os coeficientes de um polinômio com respeito ao tempo que satisfazem as condições iniciais e finais impostas para a trajetória desejada referentes as saídas do sistema.

Dessa forma, para o navio de superfície, observa-se que para ambas estratégias de controle, os termos de correção apresentam derivadas temporais das saídas planas até a segunda ordem, o que implica em um polinômio mínimo de 5ª ordem a ser construído. Mais precisamente, esses polinômios deve então obedecer as seguintes restrições em relação as condições iniciais e finais das variáveis de saída do sistema:

$$x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \ddot{x}(0) = 0 \quad x(T) = x_T \quad \dot{x}(T) = 0 \quad \ddot{x}(T) = 0 \quad (4.63)$$

$$y(0) = y_0 \quad \dot{y}(0) = 0 \quad \ddot{y}(0) = 0 \quad y(T) = y_T \quad \dot{y}(T) = 0 \quad \ddot{y}(T) = 0 \quad (4.64)$$

A partir disso, nesse manuscrito, opta-se por construir uma trajetória retilínea em x e uma trajetória polinomial em y de tal forma que se observe uma trajetória polinomial no plano XY :

$$x_N^*(t) = a_x t \quad (4.65)$$

$$y_N^*(t) = a_y t^5 + b_y t^4 + c_y t^3 + d_y t^2 + e_y t + f_y \quad (4.66)$$

Para determinar os coeficientes de $y_N^*(t)$, define-se $(y_N^*(0), y_N^*(160)) = (0, 20) m$ e mantém-se o valor de $y_N^*(160)$ até o final da simulação, o que acarreta nos seguintes coeficientes:

$$a_y = 1,58 \times 10^{-9} \quad b_y = -5,92 \times 10^{-7} \quad c_y = 5,92 \times 10^{-5} \quad d_y = 0 \quad e_y = 0 \quad f_y = 0 \quad (4.67)$$

Assim, assumindo $a_x = 0,30$, a trajetória nominal no plano XY pode ser então visualizada na Figura 4.4.

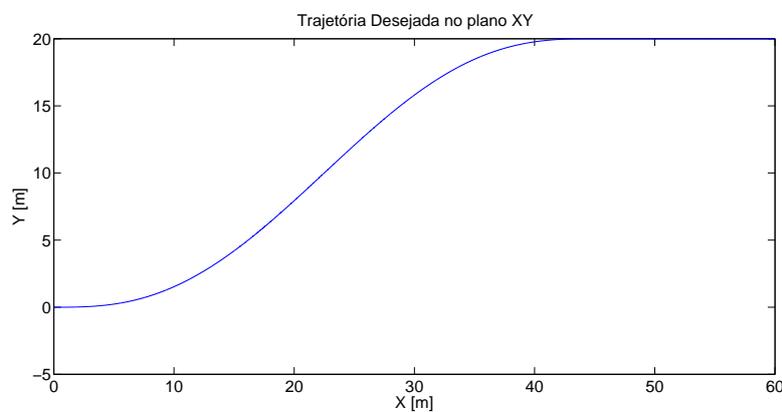


Figura 4.4: Comportamento dinâmico desejado para o navio de superfície no Sistema E (Trajetória Polinomial).

Seguindo a mesma estratégia para a trajetória circular, utiliza-se o caráter liouvilliano do sistema (3.32) para realizar a etapa de planejamento de trajetória. Os resultados então podem ser visualizados nas Figuras 4.5 e 4.6.

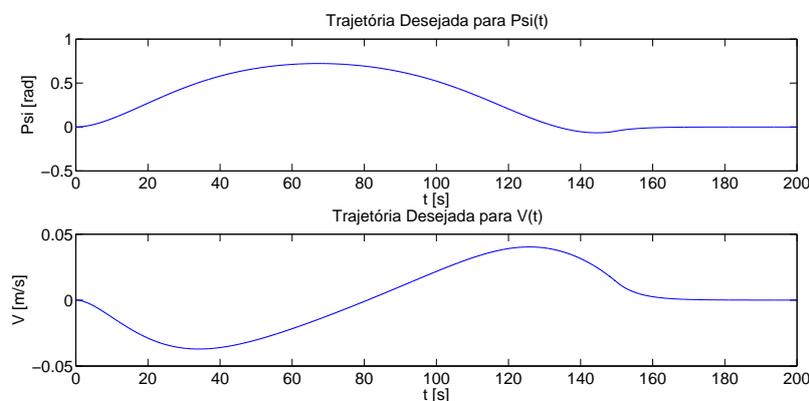


Figura 4.5: Trajetórias nominais para a orientação e a velocidade em Deriva.

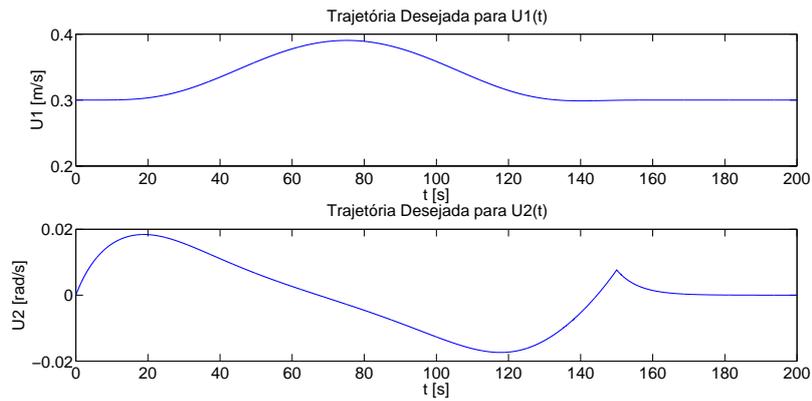


Figura 4.6: Controles nominais.

4.5.2 Controle de Trajetória

Controle de Trajetória via Saídas Planas

Assumindo saturação nos sinais de controle $u_{1N}(t) \in [-1 : 1] m/s$ e $u_{2N}(t) \in [-1 : 1] rad/s$, a implementação no ambiente *Simulink* do sistema de controle de trajetória via saídas planas do sistemas linearizado pode ser visualizada na Figura 4.7.

Os ganhos (k_{11}, k_{10}) e (k_{21}, k_{20}) dos controladores descritos pelas equações (4.37) e (4.38), respectivamente, foram definidos de tal forma que $p_1(s) = (s+0,25)^2$ e $p_2(s) = (s+0,25)(s+0,125)^2$:

$$k_{11} = 0,5 \quad k_{10} = 0,0625 \quad k_{21} = 0,375 \quad k_{20} = 0,0313 \quad (4.68)$$

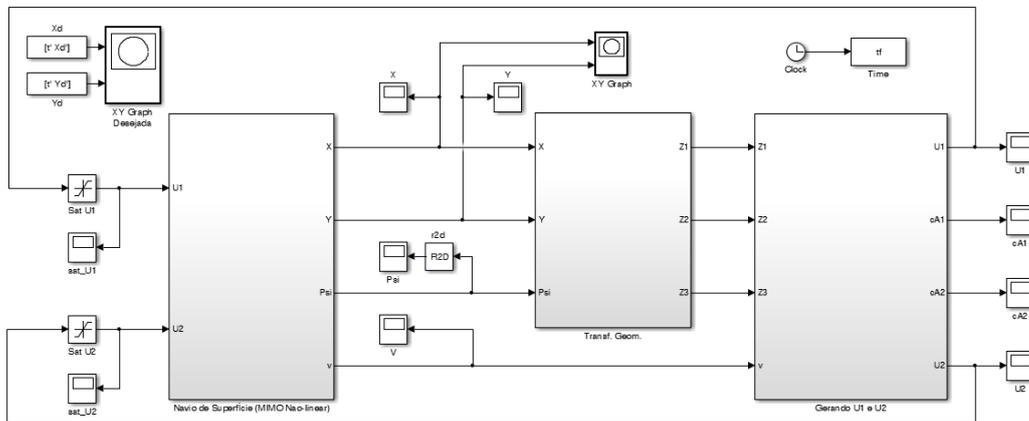


Figura 4.7: Implementação do sistema de controle de trajetória via saídas planas do sistema linearizado para o navio de superfície no ambiente *Simulink*.

Em um primeiro teste, define-se uma configuração inicial do sistema de tal maneira que o movimento do sistema se inicie no interior da trajetória circular:

$$x(0) = 0 \quad y(0) = 0 \quad \psi(0) = \pi/2 \quad v(0) = 0 \quad (4.69)$$

Os resultados da primeira simulação podem ser visualizados nas Figuras 4.8-4.11.

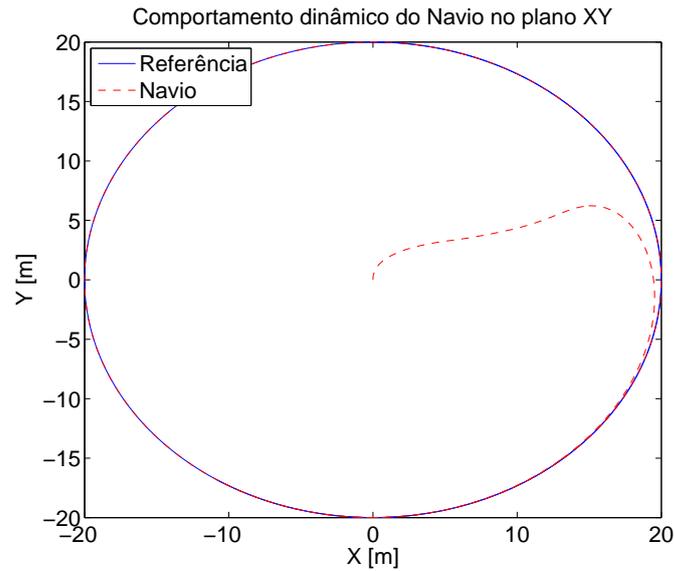


Figura 4.8: Comportamento dinâmico do navio no plano XY a partir do controle via saídas planas do sistema linearizado (Trajetória Circular - Teste 01).

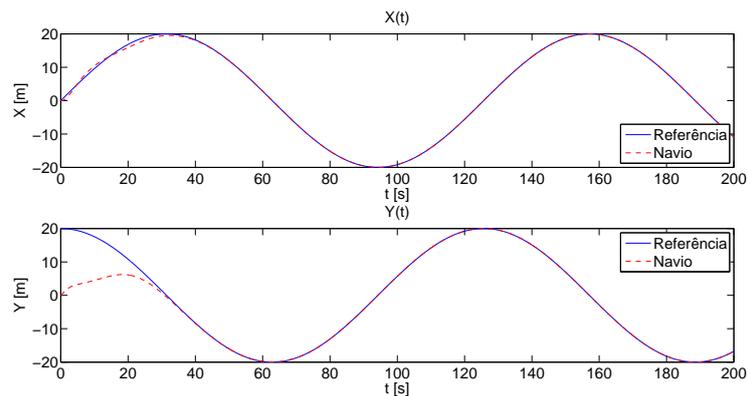


Figura 4.9: Evolução temporal da posição em X e em Y.

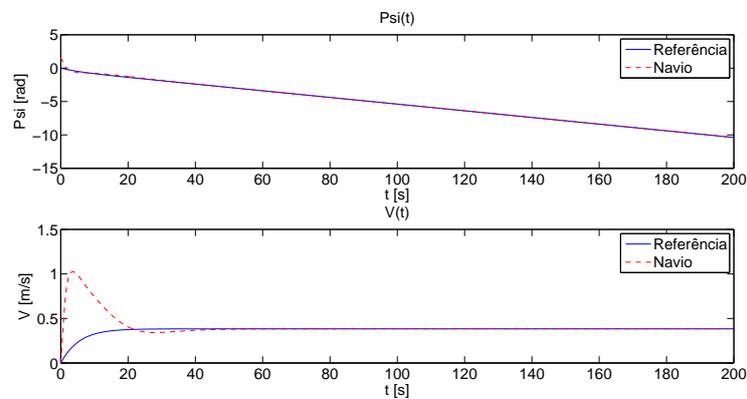


Figura 4.10: Evolução temporal da orientação e da velocidade em Deriva.

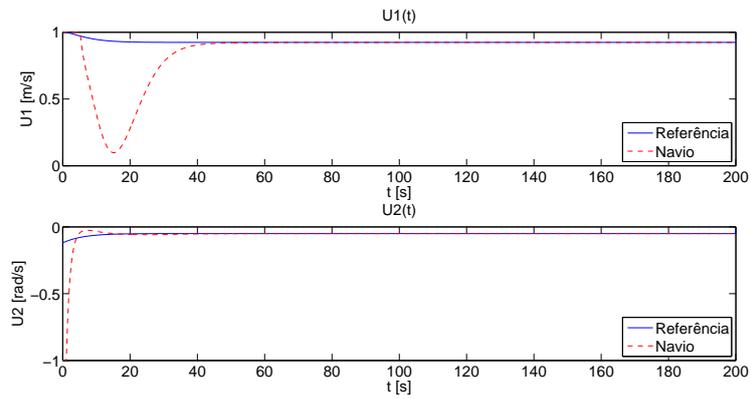


Figura 4.11: Evolução temporal dos sinais de controle.

Em um segundo teste, altera-se a configuração inicial do sistema de tal maneira que o movimento do sistema se inicie no exterior da trajetória circular:

$$x(0) = 10 \quad y(0) = -20 \quad \psi(0) = \pi \quad v(0) = 0 \quad (4.70)$$

Os resultados da segunda simulação podem ser visualizados nas Figuras 4.12-4.15.

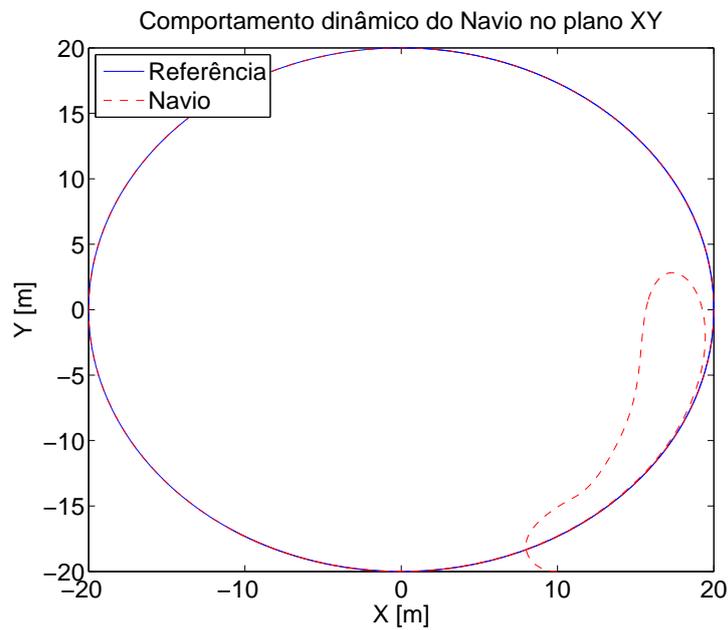


Figura 4.12: Comportamento dinâmico do navio no plano XY a partir do controle via saídas planas do sistema linearizado (Trajetória Circular - Teste 02).

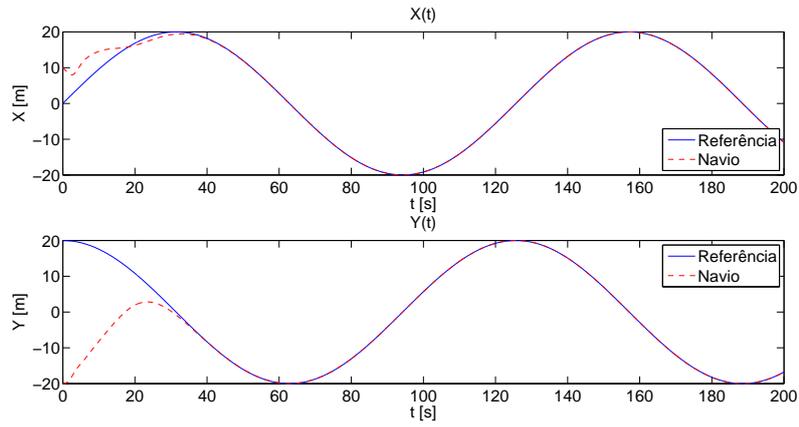


Figura 4.13: Evolução temporal da posição em X e em Y.

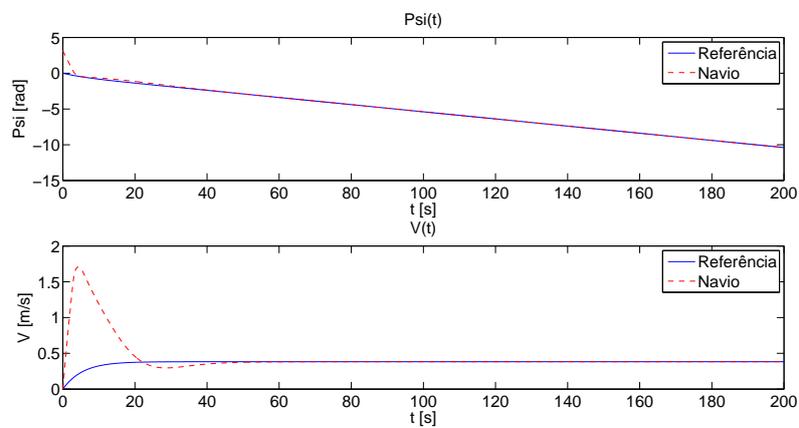


Figura 4.14: Evolução temporal da orientação e da velocidade em Deriva.

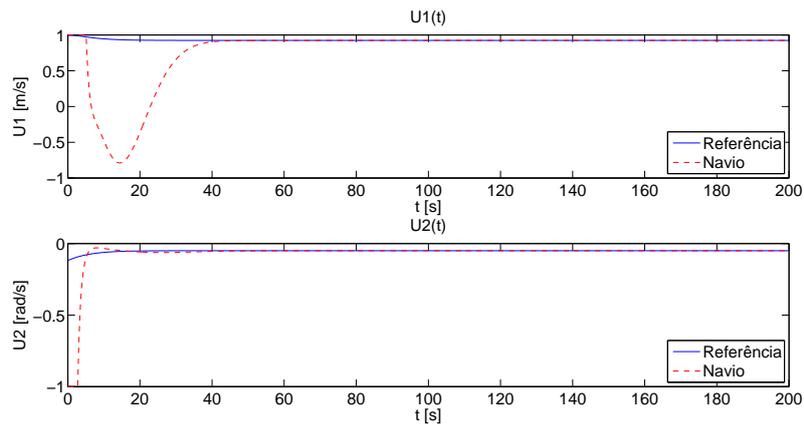


Figura 4.15: Evolução temporal dos sinais de controle.

Em um terceiro teste, verifica-se o grau de robustez do controlador ao introduzir uma perturbação externa $\tau_{EV}(t_{EV})$ na direção em que o sistema não é atuado:

$$\dot{v}_N = -\gamma_N u_{1N} u_{2N} - \beta_N v_N + \frac{\tau_{EV}(t_{EV})}{m_{22}} \quad (4.71)$$

Conforme descrito em Sira-Ramírez e Ibanez [39], assume-se que $\tau_{EV}(t_{EV})$ é composto por elementos senoidais e cossenoidais de tal forma a simular a influência das ondas no comportamento dinâmico do sistema, como pode ser observado na equação (4.72).

$$\tau_{EV}(t_{EV}) = m_{22} A_{EV} (\text{sen}(b_{EV} t_{EV}) + 0,2 \cos(\pi b_{EV} t_{EV})) \quad (4.72)$$

sendo $m_{22} A_{EV}$ a amplitude e b_{EV} a frequência de oscilação da perturbação, respectivamente. Além disso, a perturbação é introduzida somente durante um determinado intervalo de tempo t_{EV} da simulação.

Assumindo $A_{EV} = 1 \text{ m/s}^2$, $b_{EV} = 10 \text{ rad/s}$, $t_{EV} \in [60 : 140] \text{ s}$ e as mesmas condições do primeiro teste, os resultados da terceira simulação podem ser visualizados nas Figuras 4.16-4.19.

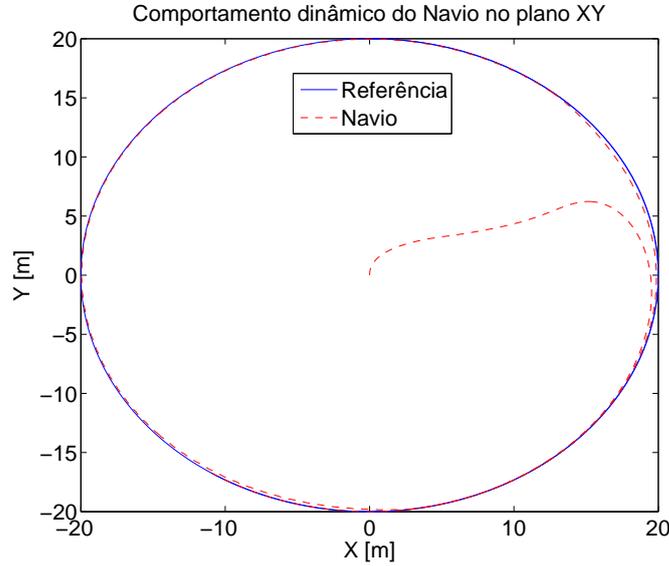


Figura 4.16: Comportamento dinâmico do navio no plano XY a partir do controle via saídas planas do sistema linearizado na presença de perturbação externa (Trajetória Circular - Teste 03).

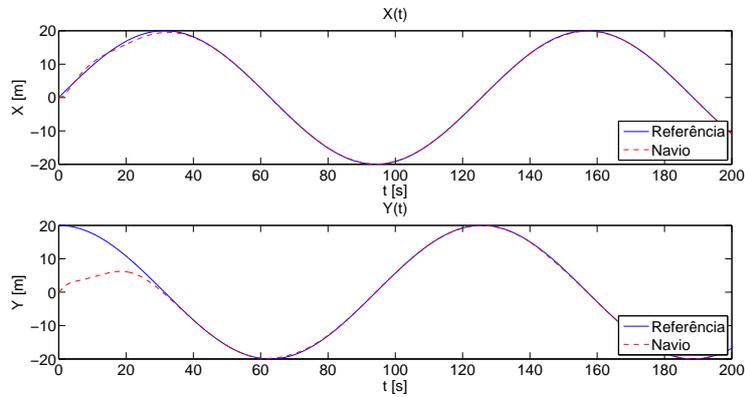


Figura 4.17: Evolução temporal da posição em X e em Y.

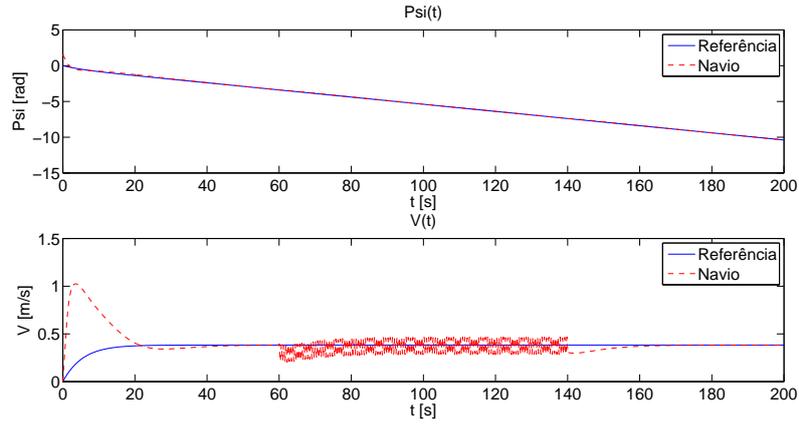


Figura 4.18: Evolução temporal da orientação e da velocidade em Deriva.

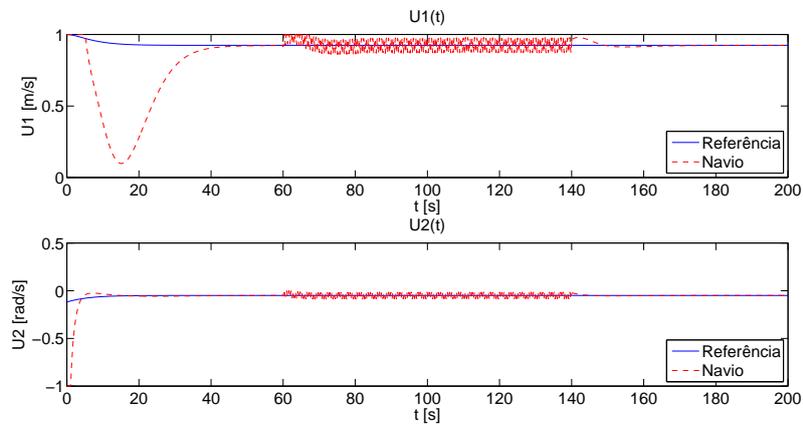


Figura 4.19: Evolução temporal dos sinais de controle.

Por último, ressalta-se que não foi possível realizar o acompanhamento da trajetória polinomial a partir do controle via saídas planas porque a matriz de controlabilidade $C_{KN}(t)$ deixa de ser uniformemente controlável quando $u_{2N}^*(t) = 0$.

Controle de Trajetória via Entradas Planas

Conforme obtido na Seção 4.4, implementa-se o sistema de controle de trajetória via entradas planas, descrito pelas equações (4.58) e (4.59), no ambiente *Simulink*, como pode ser observado na Figura 4.20.

Os ganhos (k_{31}, k_{30}) e (k_{41}, k_{40}) dos controladores descritos pelas equações (4.50) e (4.51), respectivamente, foram definidos de tal forma que $p_3(s) = (s + 0,2)(s + 0,4)$ e $p_4(s) = (s + 0,4)^2$:

$$\begin{aligned} k_{31} &= 0,6 & k_{30} &= 0,08 \\ k_{41} &= 0,8 & k_{40} &= 0,16 \end{aligned} \tag{4.73}$$

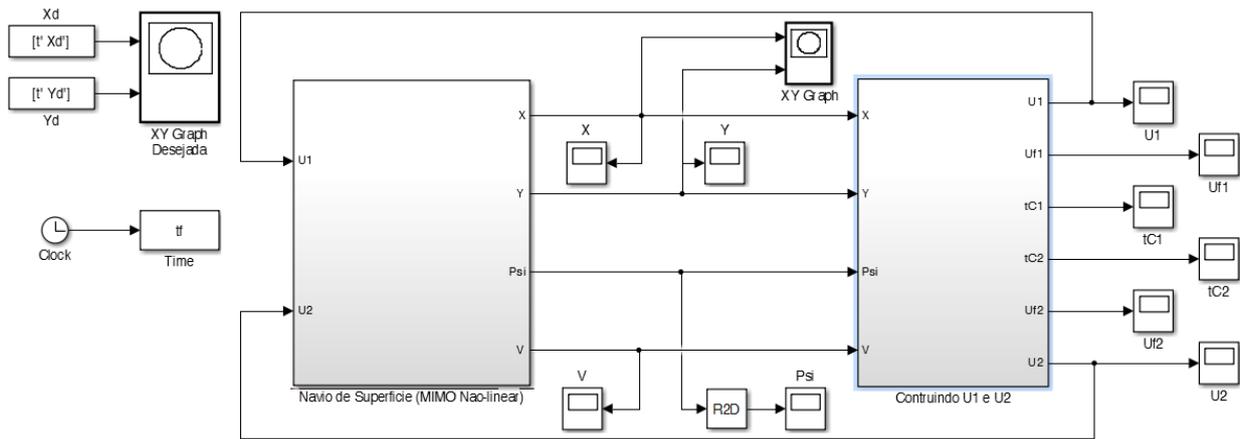


Figura 4.20: Implementação do sistema de controle de trajetória via entradas planas para o navio de superfície no ambiente *Simulink*.

Dessa forma, visando comparar as performances dos sistemas de controle, obtêm-se os resultados nas mesmas condições dos testes realizados anteriormente. Assim, assumindo a configuração inicial descrita pela equação (4.69), obtiveram-se os resultados da primeira simulação, os quais podem ser visualizados nas Figuras 4.21-4.24.

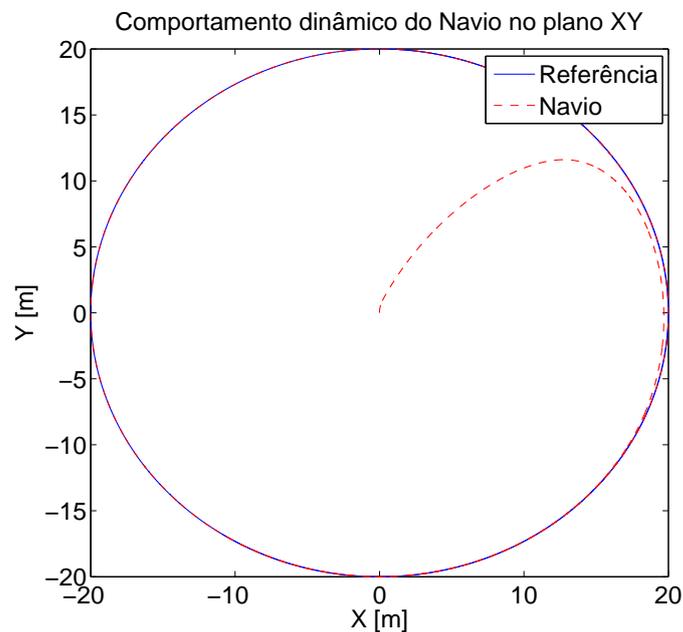


Figura 4.21: Comportamento dinâmico do navio no plano XY a partir do controle via entradas planas do sistema linearizado (Trajetória Circular - Teste 01).

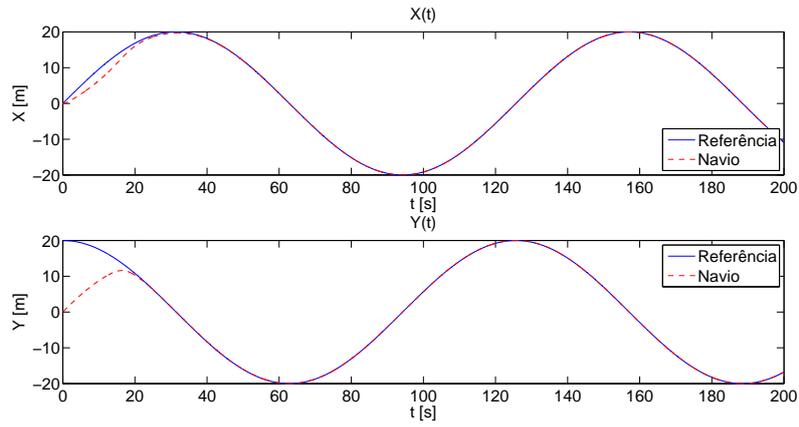


Figura 4.22: Evolução temporal da posição em X e em Y.

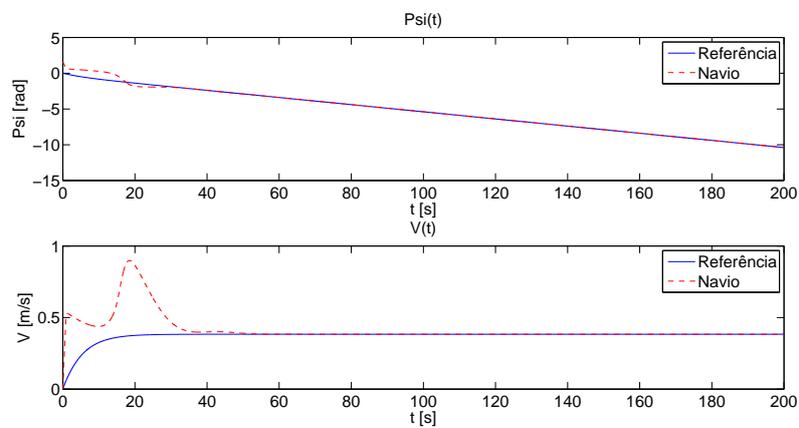


Figura 4.23: Evolução temporal da orientação e da velocidade em Deriva.

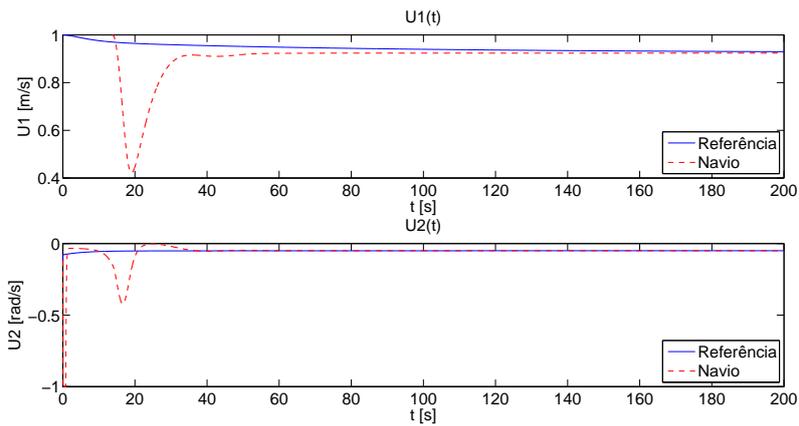


Figura 4.24: Evolução temporal dos sinais de controle.

Em seguida, assumindo a configuração inicial descrita pela equação (4.70), obtiveram-se os resultados da segunda simulação, os quais podem ser visualizados nas Figuras 4.25-4.28.

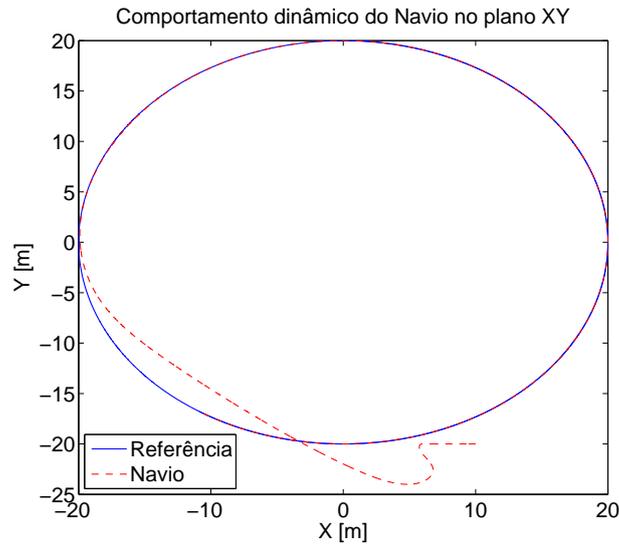


Figura 4.25: Comportamento dinâmico do navio no plano XY a partir do controle via entradas planas do sistema linearizado (Trajetória Circular - Teste 02).

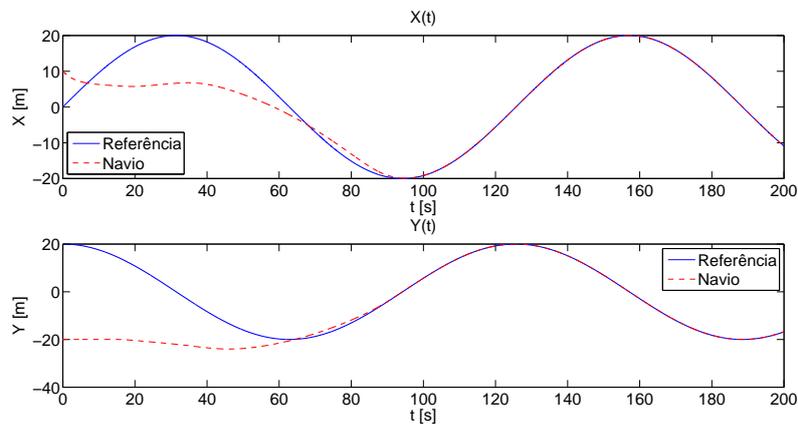


Figura 4.26: Evolução temporal da posição em X e em Y.

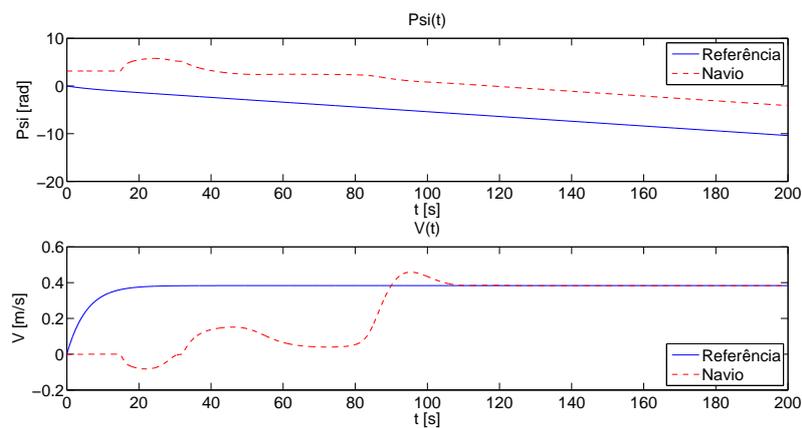


Figura 4.27: Evolução temporal da orientação e da velocidade em Deriva.

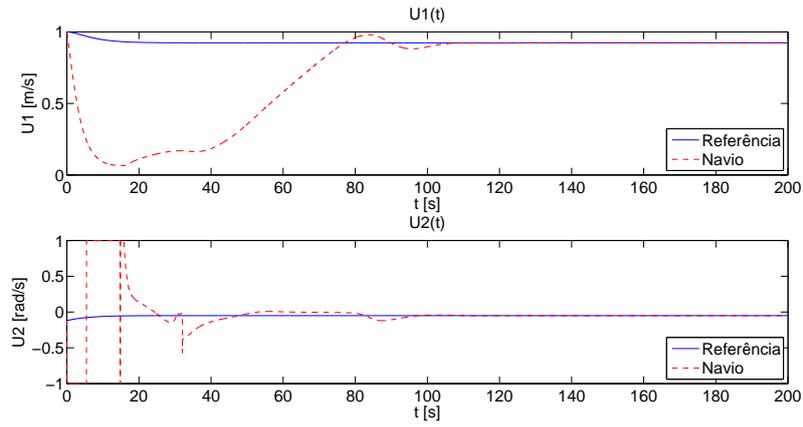


Figura 4.28: Evolução temporal dos sinais de controle.

Em seguida, introduze-se também uma perturbação externa na direção Deriva, porém com uma amplitude do sinal $A_{EV} = 0,6 \text{ m/s}^2$, $b_{EV} = 10 \text{ rad/s}$ e $t_{EV} \in [40 : 160] \text{ s}$. Assim, assumindo as mesmas condições da primeira simulação, obtiveram-se os resultados da terceira simulação, os quais podem ser visualizados nas Figuras 4.29-4.32.

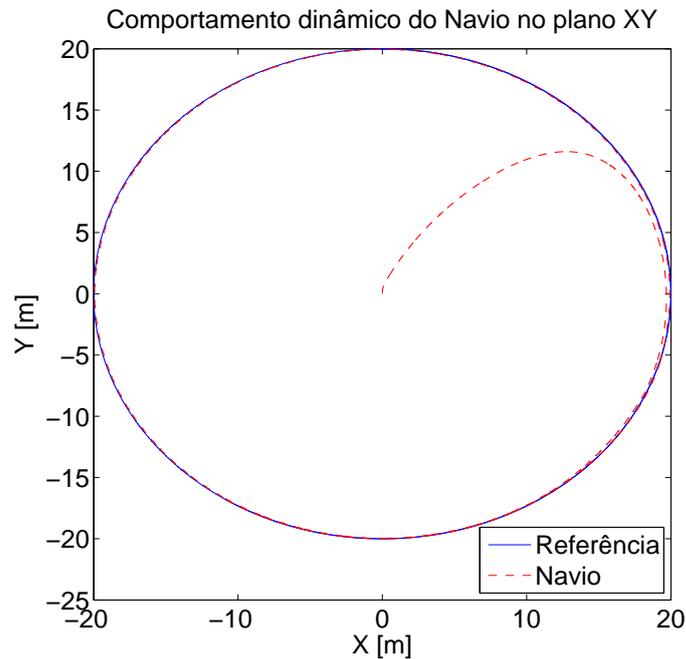


Figura 4.29: Comportamento dinâmico do navio no plano XY a partir do controle via entradas planas do sistema linearizado na presença de perturbação externa (Trajetória Circular - Teste 03).

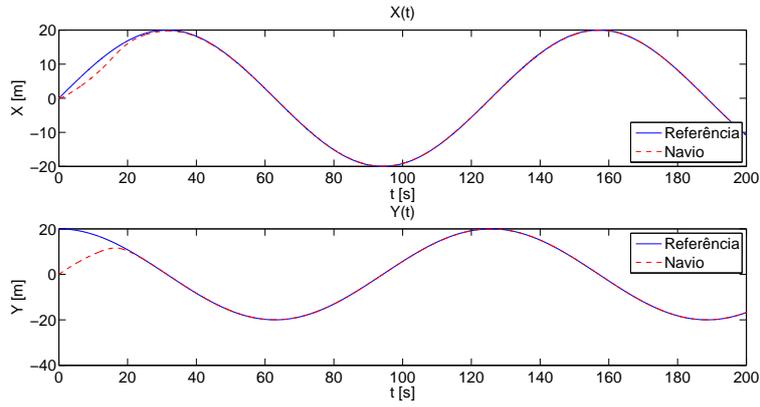


Figura 4.30: Evolução temporal da posição em X e em Y.

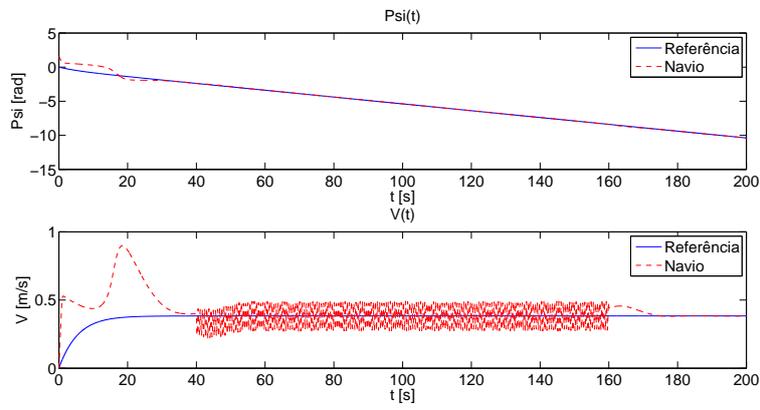


Figura 4.31: Evolução temporal da orientação e da velocidade em Deriva.

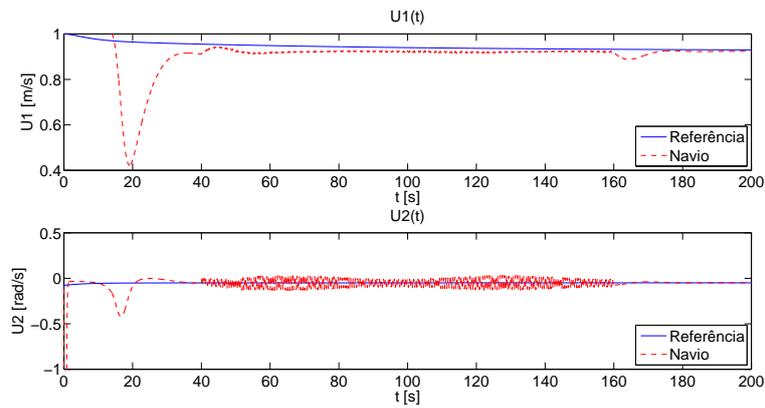


Figura 4.32: Evolução temporal dos sinais de controle.

Em relação a trajetória polinomial, o sistema de controle via entradas planas para o navio de superfície não apresenta singularidades quando $u_{2N}^*(t) = 0$. No entanto, apesar das aproximações sugeridas em [42], o compensador dinâmico descrito pela equação (4.59) apresenta singularidade quando:

$$v_N(t) = \cos(\psi)\dot{y} - \sin(\psi)\dot{x} = 0. \quad (4.74)$$

Apesar disso, as saturações dos sinais de controle $u_{1N}(t), u_{2N}(t)$ permitiram o acompanhamento da trajetória polinomial. Para um quarto teste, define-se a seguinte configuração inicial do sistema:

$$\begin{aligned} x(0) &= -5 & y(0) &= -5 \\ \psi(0) &= 0 & v(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.75)$$

e se alteram os ganhos (k_{31}, k_{30}) e (k_{41}, k_{40}) dos controladores de tal forma que $p_3(s) = (s + 0,7)(s + 3,5)$ e $p_4(s) = (s + 2,5)^2$:

$$\begin{aligned} k_{31} &= 0,6 & k_{30} &= 0,08 \\ k_{41} &= 0,8 & k_{40} &= 0,16 \end{aligned} \quad (4.76)$$

Dessa forma, os resultados da quarta simulação foram obtidos em 8,79 s e podem ser visualizados nas Figuras 4.33-4.36.

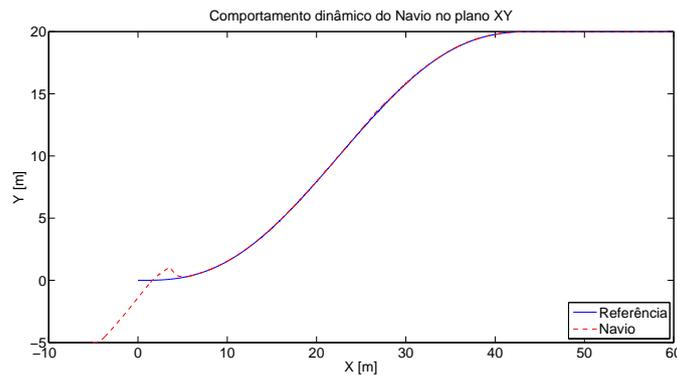


Figura 4.33: Comportamento dinâmico do navio no plano XY a partir do controle via entradas planas do sistema linearizado (Trajetória Polinomial - Teste 04).

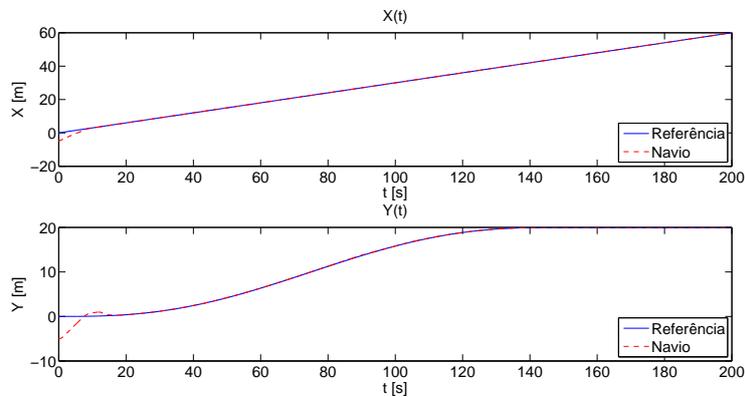


Figura 4.34: Evolução temporal da posição em X e em Y.

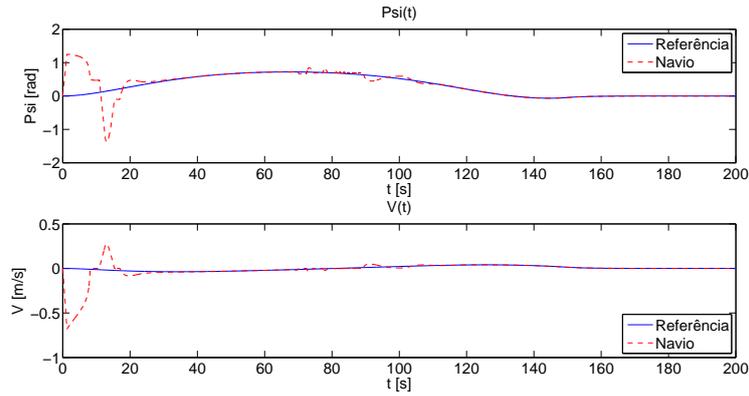


Figura 4.35: Evolução temporal da orientação e da velocidade em Deriva.

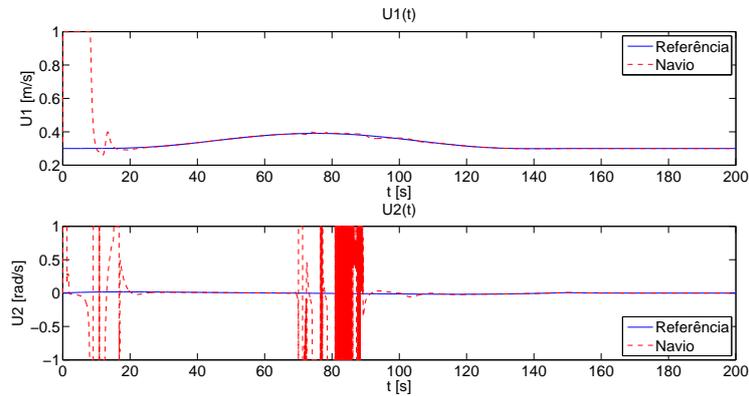


Figura 4.36: Evolução temporal dos sinais de controle.

Por último, introduz-se também uma perturbação externa na direção Deriva com $A_{EV} = 1 \text{ m/s}^w$, $b_{EV} = 10 \text{ rad/s}$ e $t_{EV} \in [140 : 160] \text{ s}$. Assumindo as mesmas condições da quarta simulação, obtiveram-se os resultados da quinta simulação, os quais podem ser visualizados nas Figuras 4.37-4.40.

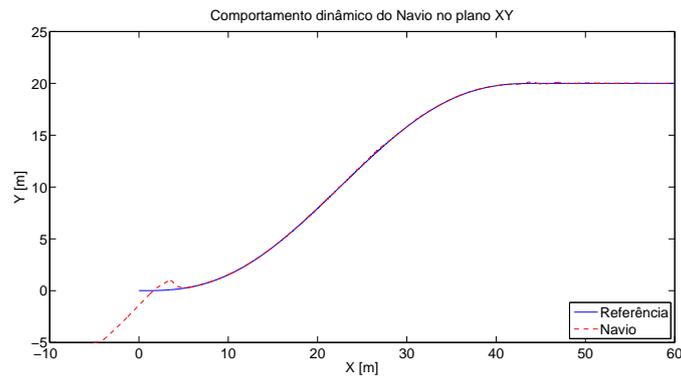


Figura 4.37: Comportamento dinâmico do navio no plano XY a partir do controle via entradas planas do sistema linearizado na presença de perturbação externa (Trajetória Polinomial - Teste 05).

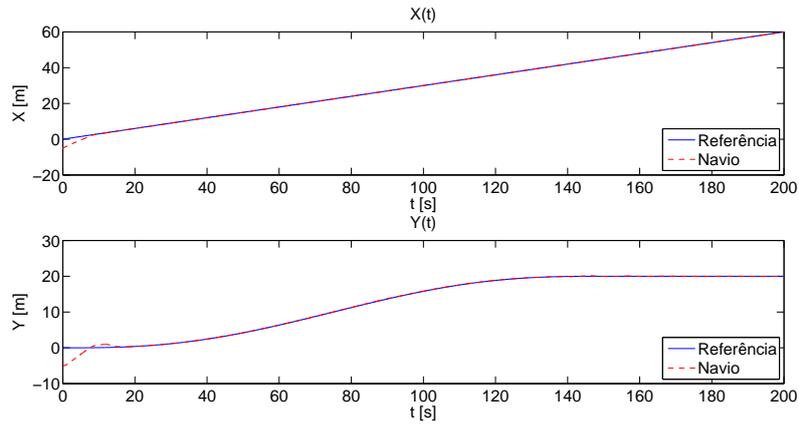


Figura 4.38: Evolução temporal da posição em X e em Y.

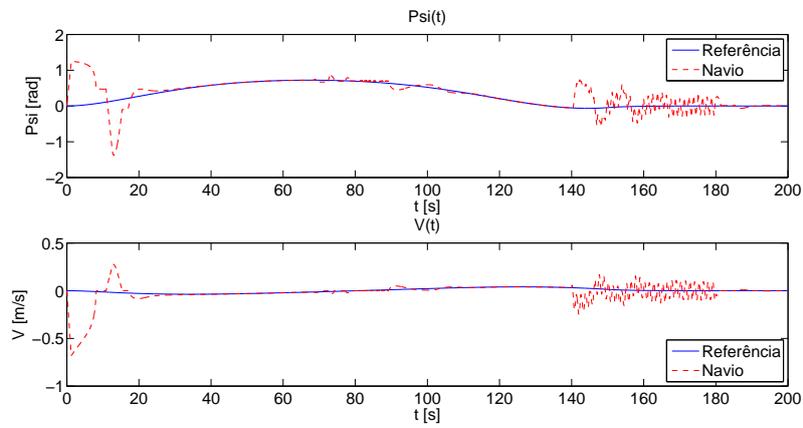


Figura 4.39: Evolução temporal da orientação e da velocidade em Deriva.

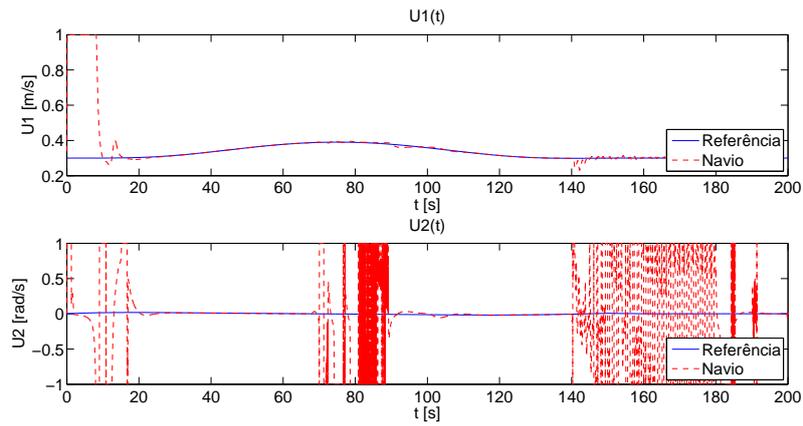


Figura 4.40: Evolução temporal dos sinais de controle.

4.6 Análises dos Resultados

Inicialmente, observou-se que o caráter liouvilliano permitiu obter diretamente as trajetórias e os controles nominais tanto para a trajetória circular como para a polinomial, conforme proposto previamente em [37].

Em relação a trajetória circular, como em [37], a abordagem via saídas planas a partir do sistema linearizado em torno das trajetórias nominais apresentou uma boa performance de acompanhamento de trajetória, juntamente com a abordagem via entradas planas a partir da extensão para o caso MIMO do compensador dinâmico proposto por Stumper *et al.* [42]. Isso se torna mais claro ao observar que as variáveis do sistema convergem para suas respectivas trajetórias nominais em tempo finito.

Para a primeira configuração inicial, a abordagem via entradas planas apresentou uma convergência mais suave em comparação a abordagem via saída planas. No entanto, para a segunda configuração inicial, observa-se que, na abordagem via entradas planas, o sinal de controle na direção Guinada apresentou algumas alterações abruptas devido a aproximação sugerida para evitar as singularidades no termo de correção do sistema associado as entradas planas. Do ponto de vista prático, esse fenômeno só implicaria em instabilidades a embarcação caso a resposta dos atuadores fosse rápida o suficiente para assumir os valores impostos.

Nota-se que, a influência da perturbação externa na direção Deriva se torna mais evidente em $u_{1N}(t)$ ao se utilizar uma abordagem via saídas planas, enquanto que, verifica-se que $u_{2N}(t)$ é mais influenciado quando ao se utilizar uma abordagem via entradas planas. Apesar disso, as oscilações nos sinais de controle não implicaram em mudanças abruptas no comportamento dinâmico do navio no plano XY em ambas estratégias de controle, acrescentando assim um grau de robustez aos controladores.

Em relação a trajetória polinomial, a estratégia de controle via saídas planas acabou não se apresentando válida para esse tipo de trajetória devido a presença de singularidades na matriz de controlabilidade do sistema linearizado. Enquanto isso, mesmo apresentando uma singularidade no compensador dinâmico, observa-se que a estratégia via entradas planas permitiu a convergência do sistema para a trajetória de referência devido a saturação dos atuadores.

Dos resultados obtidos, ressalta-se que o comportamento oscilatório de $u_{2N}(t)$ na região próxima ao ponto de inflexão da trajetória polinomial se deve a singularidade no compensador dinâmico em $v_N = 0$. Mais precisamente, tem-se que, na vizinhança da singularidade, o sistema tende a se afastar da referência porque $u_{2N}(t)$ satura. No entanto, logo que o sistema se afasta, $u_{2N}(t)$ tende a reduzir o erro de trajetória como esperado, aproximando-se novamente da singularidade, o que acaba gerando um ciclo e, conseqüentemente, a oscilação. Por outro lado, assim que a trajetória nominal se afasta do ponto de inflexão, $u_{2N}(t)$ converge novamente para o valor nominal, junto com as outras variáveis do sistema. Para compensar esse comportamento indesejável, pode-se propor uma lei de controle específica para quando o sistema estiver passando na vizinhança do ponto de inflexão.

Por último, esse fenômeno de oscilação de $u_{2N}(t)$ se intensifica novamente ao se introduzir a perturbação externa na direção Deriva. Mesmo com o comportamento dinâmico do navio praticamente não se alterando no plano XY, percebe-se que o sistema se aproxima diversas vezes do ponto de singularidade, já que a velocidade em Deriva altera diversas vezes o seu sinal durante o tempo de atuação da perturbação.

4.7 Conclusões

Neste capítulo foram desenvolvidos dois sistemas de controle baseados na teoria de planicidade diferencial descrita no Capítulo 2 para o modelo não-linear do navio de superfície. A partir dos resultados das simulações numéricas, foi possível validar os controladores, além de verificar os limites de aplicação de cada estratégia devido a presença de singularidades. Além disso, avaliou-se o grau de robustez perante a uma perturbação do tipo senoidal introduzida na direção em que não há atuação direta.

Capítulo 5

Veículo Subaquático

5.1 Introdução

Este capítulo aborda o problema de planejamento e acompanhamento de trajetória para o modelo não-linear subatuado do veículo subaquático apresentado na Seção 3.3. Esse veículo não apresenta atuadores independentes nas direções Deriva e Afundamento, o que torna o sistema não-diferencialmente plano. No entanto, como o navio de superfície, o veículo subaquático também pertence a classe de sistemas liouvillianos, o que permite desenvolver um sistema de controle baseado na planicidade diferencial do sistema linearizado em torno das trajetórias nominais, conforme descrito na Seção 2.3.

Na Seção 5.2, apresenta-se o subsistema diferencialmente plano que permite obter as trajetórias nominais para as variáveis de estado e de controle do modelo não-linear subatuado do veículo subaquático. Em seguida, na Seção 5.3, descreve-se o procedimento para se obter a expressão final do controlador a partir das saídas planas incrementais do sistema linearizado e do controle nominal.

5.2 Planejamento de Trajetória

O caráter liouviliano do modelo do veículo subaquático descrito por (3.33) pode ser visualizado pela existência de um subsistema diferencialmente plano caracterizado por v_A , w_A e θ_A como as saídas planas, enquanto que o defeito é representado por x_A , y_A , z_A e ψ_A . Então, se $v_A^*(t)$, $w_A^*(t)$, $\theta_A^*(t)$ e suas derivadas temporais são conhecidas, as trajetórias nominais $q_A^*(t)$, $u_A^*(t)$, $r_A^*(t)$ e os controles nominais $\tau_{1A}^*(t)$, $\tau_{2A}^*(t)$, $\tau_{3A}^*(t)$ podem ser expressos como se segue:

$$q_A^*(t) = \dot{\theta}_A^*(t) \quad (5.1)$$

$$u_A^*(t) = \frac{\dot{w}_A^*(t) + \beta_7 w_A^*(t)}{\beta_6 q_A^*(t)} \quad (5.2)$$

$$r_A^*(t) = -\frac{\dot{v}_A^*(t) + \beta_5 v_A^*(t)}{\beta_4 u_A^*(t)} \quad (5.3)$$

$$\tau_{1A}^*(t) = \dot{u}_A^*(t) - \beta_1 v_A^*(t) r_A^*(t) + \beta_2 w_A^*(t) q_A^*(t) + \beta_3 u_A^*(t) \quad (5.4)$$

$$\tau_{1A}^*(t) = \dot{q}_A^*(t) - \beta_8 u_A^*(t) w_A^*(t) + \beta_9 q_A^*(t) + \text{sen}(\theta_A^*(t)) \beta_{10} \quad (5.5)$$

$$\tau_{3A}^*(t) = \dot{r}_A^*(t) - \beta_{11} u_A^*(t) v_A^*(t) + \beta_{12} r_A^*(t) \quad (5.6)$$

É fácil observar que as variáveis que compõem o defeito do sistema (3.33) podem ser expressas através de integrais simples das saídas planas do subsistema. No entanto, como relatado no capítulo anterior, em situações reais, não é trivial especificar $v_A^*(t)$, $w_A^*(t)$ e $\theta_A^*(t)$, enquanto que é mais prático determinar as expressões para $x_A^*(t)$, $y_A^*(t)$, $z_A^*(t)$.

Esse problema foi contornado através do desenvolvimento de um conjunto de equações diferenciais que permitem determinar as trajetórias nominais $\psi_A^*(t)$ e $\theta_A^*(t)$ a partir de $x_A^*(t)$, $y_A^*(t)$, $z_A^*(t)$ e um par de condições iniciais $(\theta_A(0), \psi_A(0))$, conforme descrito a seguir:

$$\dot{\psi}_A(t) = \frac{\text{num}(\psi)}{\text{den}(\psi)} \quad (5.7)$$

$$\dot{\theta}_A(t) = \frac{\text{num}(\theta)}{\text{den}(\theta)} \quad (5.8)$$

com

$$\text{num}(\psi) = \{\text{sen}(\psi(t)) [\ddot{x}^*(t) + \beta_5 \dot{x}^*(t)] - \cos(\psi(t)) [\ddot{y}^*(t) + \beta_5 \dot{y}^*(t)]\} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \text{den}(\psi) = & [\beta_4 - 1] [\cos(\psi(t)) \dot{x}^*(t) + \text{sen}(\psi(t)) \dot{y}^*(t)] - \text{sen}^2(\theta(t)) \beta_4 [\cos(\psi(t)) \dot{x}^*(t) + \text{sen}(\psi(t)) \dot{y}^*(t)] \\ & - \text{sen}(\theta(t)) \beta_4 \cos(\theta(t)) \dot{z}^*(t) \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \text{num}(\theta) = & \text{sen}(\theta(t)) [\cos(\psi(t)) (\ddot{x}^*(t) + \beta_7 \dot{x}^*(t)) + \dot{y}^*(t) \dot{\psi}(t)] + \text{sen}(\psi(t)) (\ddot{y}^*(t) + \beta_7 \dot{y}^*(t) - \dot{x}^*(t) \dot{\psi}(t)) \\ & + \cos(\theta(t)) (\ddot{z}^*(t) + \beta_7 \dot{z}^*(t)) \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\text{den}(\theta) = [\beta_6 - 1] [\cos(\theta(t)) (\cos(\psi(t)) \dot{x}^*(t) + \text{sen}(\psi(t)) \dot{y}^*(t)) - \text{sen}(\theta(t)) \dot{z}^*(t)] \quad (5.12)$$

onde se omitiu o subíndice A para facilitar a leitura.

Portanto, as trajetórias nominais $v_A^*(t)$ and $w_A^*(t)$ são dadas por:

$$v_A^*(t) = -\text{sen}(\psi_A^*(t)) \dot{x}_A^*(t) + \cos(\psi_A^*(t)) \dot{y}_A^*(t) \quad (5.13)$$

$$w_A^*(t) = \text{sen}(\theta_A^*(t)) [\cos(\psi_A^*(t)) \dot{x}_A^*(t) + \text{sen}(\psi_A^*(t)) \dot{y}_A^*(t)] + \cos(\theta_A^*(t)) \dot{z}_A^*(t) \quad (5.14)$$

5.3 Controle de Trajetória via Saídas Planas

Seguindo a mesma estratégia abordada para o navio de superfície na Seção 4.3, a estrutura do controlador proposta para o veículo subaquático é composta pelo controle nominal obtido na etapa de planejamento de trajetória completado pelo controle incremental que estabiliza o sistema linearizado em torno das trajetórias nominais:

$$\tau_{1A}(t) = \tau_{1A}^*(t) + \tau_{1A\delta} \quad (5.15)$$

$$\tau_{2A}(t) = \tau_{2A}^*(t) + \tau_{2A\delta} \quad (5.16)$$

$$\tau_{3A}(t) = \tau_{3A}^*(t) + \tau_{3A\delta} \quad (5.17)$$

onde $\tau_{1A}^*(t), \tau_{2A}^*(t), \tau_{3A}^*(t)$ e $\tau_{1A\delta}, \tau_{2A\delta}, \tau_{3A\delta}$ representam os controles nominais e incrementais, respectivamente.

A linearização Jacobiana do sistema (3.33) em torno das trajetórias nominais fornece o seguinte conjunto de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{A\delta} = [\cos(\psi_A^*(t))\dot{z}_A^*(t)]\theta_{A\delta} + [-\dot{y}_A^*(t)]\psi_{A\delta} + [\cos(\psi_A^*(t))\cos(\theta_A^*(t))]u_{A\delta} \\ \quad + [-\text{sen}(\psi_A^*(t))]v_{A\delta} + [\cos(\psi_A^*(t))\text{sen}(\theta_A^*(t))]w_{A\delta} \\ \dot{y}_{A\delta} = [\text{sen}(\psi_A^*(t))\dot{z}_A^*(t)]\theta_{A\delta} + [\dot{x}_A^*(t)]\psi_{A\delta} + [\text{sen}(\psi_A^*(t))\cos(\theta_A^*(t))]u_{A\delta} \\ \quad + [\cos(\psi_A^*(t))]v_{A\delta} + [\text{sen}(\psi_A^*(t))\text{sen}(\theta_A^*(t))]w_{A\delta} \\ \dot{z}_{A\delta} = [-\cos(\psi_A^*(t))\dot{x}_A^*(t) + \text{sen}(\psi_A^*(t))\dot{y}_A^*(t)]\theta_{A\delta} \\ \quad + [-\text{sen}(\theta_A^*(t))]u_{A\delta} + [\cos(\theta_A^*(t))]w_{A\delta} \\ \dot{\theta}_{A\delta} = q_{A\delta} \\ \dot{\psi}_{A\delta} = [\tan(\theta_A^*(t))\sec(\theta_A^*(t))r_A^*(t)]\theta_{A\delta} + [\sec(\theta_A^*(t))]r_{A\delta} \\ \dot{u}_{A\delta} = [-\beta_3]u_{A\delta} + [\beta_1r_A^*(t)]v_{A\delta} + [-\beta_2q_A^*(t)]w_{A\delta} \\ \quad + [-\beta_2w_A^*(t)]q_{A\delta} + [\beta_1v_A^*(t)]r_{A\delta} + \tau_{1A\delta} \\ \dot{v}_{A\delta} = [-\beta_4r_A^*(t)]u_{A\delta} + [-\beta_5]v_{A\delta} + [-\beta_4u_A^*(t)]r_{A\delta} \\ \dot{w}_{A\delta} = [\beta_6q_A^*(t)]u_{A\delta} + [-\beta_7]w_{A\delta} + [\beta_6u_A^*(t)]q_{A\delta} \\ \dot{q}_{A\delta} = [-\beta_{10}\cos(\theta_A^*(t))] \theta_{A\delta} + [\beta_8w_A^*(t)]u_{A\delta} + [\beta_8u_A^*(t)]w_{A\delta} + [-\beta_9]q_{A\delta} + \tau_{2A\delta} \\ \dot{r}_{A\delta} = [\beta_{11}v_A^*(t)]u_{A\delta} + [\beta_{11}u_A^*(t)]v_{A\delta} + [-\beta_{12}]r_{A\delta} + \tau_{3A\delta} \end{array} \right. \quad (5.18)$$

com as variáveis incrementais de estado definidas como:

$$\begin{array}{llllll} x_{A\delta} = x_A - x_A^*(t) & y_{A\delta} = y_A - y_A^*(t) & z_{A\delta} = z_A - z_A^*(t) & \theta_{A\delta} = \theta_A - \theta_A^*(t) & \psi_{A\delta} = \psi_A - \psi_A^*(t) & \\ u_{A\delta} = u_A - u_A^*(t) & v_{A\delta} = v_A - v_A^*(t) & w_{A\delta} = w_A - w_A^*(t) & q_{A\delta} = q_A - q_A^*(t) & r_{A\delta} = r_A - r_A^*(t) & \end{array} \quad (5.19)$$

O sistema (5.18) pode ser reescrito na forma matricial $\dot{\mathbf{X}}_{A\delta} = \mathbf{A}_{A\delta}(t)\mathbf{X}_{A\delta} + \mathbf{B}_{A\delta}(t)\mathbf{U}_{A\delta}$ onde:

$$\mathbf{X}_{A\delta} = \begin{bmatrix} x_{A\delta} & y_{A\delta} & z_{A\delta} & \theta_{A\delta} & \psi_{A\delta} & u_{A\delta} & v_{A\delta} & w_{A\delta} & q_{A\delta} & r_{A\delta} \end{bmatrix}^T \quad (5.20)$$

$$\mathbf{U}_{A\delta} = \begin{bmatrix} \tau_{1A\delta} & \tau_{2A\delta} & \tau_{3A\delta} \end{bmatrix}^T \quad (5.21)$$

$$\mathbf{A}_{A\delta}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1A} & \mathbf{A}_{2A} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

$$\mathbf{B}_{A\delta}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1A} \\ \mathbf{b}_{2A} \\ \mathbf{b}_{3A} \end{bmatrix}^T \quad (5.23)$$

onde as matrizes \mathbf{A}_{1A} e \mathbf{A}_{2A} são dadas por:

$$\mathbf{A}_{1A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cos(\psi_A^*(t))\dot{z}_A^*(t) & -\dot{y}_A^*(t) \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}(\psi_A^*(t))\dot{z}_A^*(t) & \dot{x}_A^*(t) \\ 0 & 0 & 0 & -(\cos(\psi_A^*(t))\dot{x}_A^*(t) + \text{sen}(\psi_A^*(t))\dot{y}_A^*(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tan(\theta_A^*(t))\sec(\theta_A^*(t))r_A^*(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_{10}\cos(\theta_A^*(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$\mathbf{A}_{2A} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_A^*(t))\cos(\theta_A^*(t)) & -\text{sen}(\psi_A^*(t)) & \cos(\psi_A^*(t))\text{sen}(\theta_A^*(t)) & 0 & 0 \\ \text{sen}(\psi_A^*(t))\cos(\theta_A^*(t)) & \cos(\psi_A^*(t)) & \text{sen}(\psi_A^*(t))\text{sen}(\theta_A^*(t)) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\theta_A^*(t)) & 0 & \cos(\theta_A^*(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sec(\theta_A^*(t)) \\ -\beta_3 & \beta_1 r_A^*(t) & -\beta_2 q_A^*(t) & -\beta_2 w_A^*(t) & \beta_1 v_A^*(t) \\ -\beta_4 r_A^*(t) & -\beta_5 & 0 & 0 & -\beta_4 u_A^*(t) \\ \beta_6 q_A^*(t) & 0 & -\beta_7 & \beta_6 u_A^*(t) & 0 \\ \beta_8 w_A^*(t) & 0 & \beta_8 u_A^*(t) & -\beta_9 & 0 \\ \beta_{11} v_A^*(t) & \beta_{11} u_A^*(t) & 0 & 0 & -\beta_{12} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

A matriz de controlabilidade de Kalman do sistema $\mathbf{C}_{KA}(t)$ é determinada de acordo com a equação (2.15). Assumindo que $\mathbf{C}_{KA}(t)$ tem posto completo dentro de um intervalo finito, o sistema linearizado é uniformemente controlável e é possível extrair a matriz $\mathbf{C}_{FA}(t)$ baseada nos índices de controlabilidade de Kronecker do sistema. Escolhendo-se os índices $\kappa_1^C = 3$, $\kappa_2^C = 4$ e $\kappa_3^C = 3$, a matriz $\mathbf{C}_{FA}(t)$ pode escrita como:

$$\mathbf{C}_{FA}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{FA1} & \mathbf{C}_{FA2} & \mathbf{C}_{FA3} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

onde as matrizes \mathbf{C}_{FA1} , \mathbf{C}_{FA2} e \mathbf{C}_{FA3} são dadas por:

$$\mathbf{C}_{FA1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1A} & (\mathbf{A}_{A\delta}(t) - \frac{d}{dt})\mathbf{b}_{1A} & (\mathbf{A}_{A\delta}(t) - \frac{d}{dt})^2\mathbf{b}_{1A} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$\mathbf{C}_{FA2} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{2A} & (\mathbf{A}_{A\delta}(t) - \frac{d}{dt})\mathbf{b}_{2A} & (\mathbf{A}_{A\delta}(t) - \frac{d}{dt})^2\mathbf{b}_{2A} & (\mathbf{A}_{A\delta}(t) - \frac{d}{dt})^3\mathbf{b}_{2A} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

$$\mathbf{C}_{FA3} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{3A} & (\mathbf{A}_{A\delta}(t) - \frac{d}{dt})\mathbf{b}_{3A} & (\mathbf{A}_{A\delta}(t) - \frac{d}{dt})^2\mathbf{b}_{3A} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

As saídas planas incrementais de (5.18) então são calculadas por:

$$\mathbf{F}_{A\delta} = \begin{bmatrix} F_{1A\delta} \\ F_{2A\delta} \\ F_{3A\delta} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{C}_{FA}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{C}_{FA}^{-1}(t) \mathbf{X}_{A\delta} \quad (5.30)$$

A equação (5.30) indica que as saídas incrementais são combinações lineares das variáveis incrementais de estado, ou seja:

$$\begin{aligned} F_{1A\delta} &= \alpha_1(t)x_{A\delta} + \alpha_2(t)y_{A\delta} + \alpha_3(t)z_{A\delta} + \alpha_4(t)\theta_{A\delta} + \alpha_5(t)\psi_{A\delta} \\ &\quad + \alpha_6(t)u_{A\delta} + \alpha_7(t)v_{A\delta} + \alpha_8(t)w_{A\delta} + \alpha_9(t)q_{A\delta} + \alpha_{10}(t)r_{A\delta} \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} F_{2A\delta} &= \eta_1(t)x_{A\delta} + \eta_2(t)y_{A\delta} + \eta_3(t)z_{A\delta} + \eta_4(t)\theta_{A\delta} + \eta_5(t)\psi_{A\delta} \\ &\quad + \eta_6(t)u_{A\delta} + \eta_7(t)v_{A\delta} + \eta_8(t)w_{A\delta} + \eta_9(t)q_{A\delta} + \eta_{10}(t)r_{A\delta} \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} F_{3A\delta} &= \zeta_1(t)x_{A\delta} + \zeta_2(t)y_{A\delta} + \zeta_3(t)z_{A\delta} + \zeta_4(t)\theta_{A\delta} + \zeta_5(t)\psi_{A\delta} \\ &\quad + \zeta_6(t)u_{A\delta} + \zeta_7(t)v_{A\delta} + \zeta_8(t)w_{A\delta} + \zeta_9(t)q_{A\delta} + \zeta_{10}(t)r_{A\delta} \end{aligned} \quad (5.33)$$

com $\alpha_i(t)$, $\eta_i(t)$ e $\zeta_i(t)$ sendo coeficientes variantes no tempo que podem ser pré-computados durante a etapa de planejamento de trajetória, os quais são omitidos nesse manuscrito.

Como apresentado na Seção 4.3, os índices de controlabilidade correspondem ao número de vezes necessários para derivar as saídas planas incrementais de (5.18) no sentido de montar a seguinte equação matricial $\mathbf{F}\mathbf{F}_A = \mathbf{M}\mathbf{M}_A(t)\mathbf{S}\mathbf{S}_A$:

$$\mathbf{F}\mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} F_{1\delta} & \dot{F}_{1A\delta} & \ddot{F}_{1A\delta} & F_{1A\delta}^{(3)} & F_{2A\delta} & \dot{F}_{2A\delta} & \ddot{F}_{2A\delta} & F_{2A\delta}^{(3)} & F_{2A\delta}^{(4)} & F_{3A\delta} & \dot{F}_{3A\delta} & \ddot{F}_{3A\delta} & F_{3A\delta}^{(3)} \end{bmatrix}^T \quad (5.34)$$

$$\mathbf{S}\mathbf{S}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{A\delta} & \mathbf{U}_{A\delta} \end{bmatrix}^T \quad (5.35)$$

onde $\mathbf{M}\mathbf{M}_A(t)$ é uma matriz quadrada (13×13) composta pelos coeficientes variantes no tempo associados as saídas planas incrementais de (5.18) e as suas derivadas temporais.

Invertendo a matriz $\mathbf{MM}_A(t)$, a parametrização diferencial de $\mathbf{U}_{A\delta}$ em função de $F_{1A\delta}$, $F_{2A\delta}$, $F_{3A\delta}$ e suas derivadas temporais é dada por:

$$\begin{aligned} \tau_{1A\delta} = & C_1(t)F_{1A\delta} + C_2(t)\dot{F}_{1A\delta} + C_3(t)\ddot{F}_{1A\delta} + C_4(t)F_{1A\delta}^{(3)} + C_5(t)F_{2A\delta} + C_6(t)\dot{F}_{2A\delta} + C_7(t)\ddot{F}_{2A\delta} \\ & + C_8(t)F_{2A\delta}^{(3)} + C_9(t)F_{2A\delta}^{(4)} + C_{10}(t)F_{3A\delta} + C_{11}(t)\dot{F}_{3A\delta} + C_{12}(t)\ddot{F}_{3A\delta} + C_{13}(t)F_{3A\delta}^{(3)} \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} \tau_{2A\delta} = & C_{14}(t)F_{1A\delta} + C_{15}(t)\dot{F}_{1A\delta} + C_{16}(t)\ddot{F}_{1A\delta} + C_{17}(t)F_{1A\delta}^{(3)} + C_{18}(t)F_{2A\delta} + C_{19}(t)\dot{F}_{2A\delta} + C_{20}(t)\ddot{F}_{2A\delta} \\ & + C_{21}(t)F_{2A\delta}^{(3)} + C_{22}(t)F_{2A\delta}^{(4)} + C_{23}(t)F_{3A\delta} + C_{24}(t)\dot{F}_{3A\delta} + C_{25}(t)\ddot{F}_{3A\delta} + C_{26}(t)F_{3A\delta}^{(3)} \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \tau_{3A\delta} = & C_{27}(t)F_{1A\delta} + C_{28}(t)\dot{F}_{1A\delta} + C_{29}(t)\ddot{F}_{1A\delta} + C_{30}(t)F_{1A\delta}^{(3)} + C_{31}(t)F_{2A\delta} + C_{32}(t)\dot{F}_{2A\delta} + C_{33}(t)\ddot{F}_{2A\delta} \\ & + C_{34}(t)F_{2A\delta}^{(3)} + C_{35}(t)F_{2A\delta}^{(4)} + C_{36}(t)F_{3A\delta} + C_{37}(t)\dot{F}_{3A\delta} + C_{38}(t)\ddot{F}_{3A\delta} + C_{39}(t)F_{3A\delta}^{(3)} \end{aligned} \quad (5.38)$$

onde os coeficientes variantes no tempo nas equações acima são obtidos das três últimas linhas de $\mathbf{MM}_A^{-1}(t)$.

Sendo diferencialmente plano, a partir das equações (4.30) e (4.31), o sistema (4.11) é portanto equivalente, sob uma alteração de coordenadas de variáveis de entrada, ao seguinte sistema linear MIMO na forma canônica de Brunovsky:

$$\begin{bmatrix} \dot{F}_{1A\delta} \\ \ddot{F}_{1A\delta} \\ F_{1A\delta}^{(3)} \\ \dot{F}_{2A\delta} \\ \ddot{F}_{2A\delta} \\ F_{2A\delta}^{(3)} \\ F_{2A\delta}^{(4)} \\ \dot{F}_{3A\delta} \\ \ddot{F}_{3A\delta} \\ F_{3A\delta}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{1A\delta} \\ \dot{F}_{1A\delta} \\ \ddot{F}_{1A\delta} \\ F_{2A\delta} \\ \dot{F}_{2A\delta} \\ \ddot{F}_{2A\delta} \\ F_{2A\delta}^{(3)} \\ F_{3A\delta} \\ \dot{F}_{3A\delta} \\ \ddot{F}_{3A\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1A} \\ v_{2A} \\ v_{3A} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Isso implica que os termos de correção em malha fechada v_{1A} , v_{2A} e v_{3A} são definidos como:

$$v_{1A} = F_{1A\delta}^{*(3)}(t) - k_{52}(\ddot{F}_{1A\delta} - \ddot{F}_{1A\delta}^*(t)) - k_{51}(\dot{F}_{1A\delta} - \dot{F}_{1A\delta}^*(t)) - k_{50}(F_{1A\delta} - F_{1A\delta}^*(t)) \quad (5.40)$$

$$v_{2A} = F_{2A\delta}^{*(4)}(t) - k_{63}(F_{2A\delta}^{(3)} - F_{2A\delta}^{*(3)}(t)) - k_{62}(\ddot{F}_{2A\delta} - \ddot{F}_{2A\delta}^*(t)) - k_{61}(\dot{F}_{2A\delta} - \dot{F}_{2A\delta}^*(t)) - k_{60}(F_{2A\delta} - F_{2A\delta}^*(t)) \quad (5.41)$$

$$v_{3A} = F_{3A\delta}^{*(3)}(t) - k_{72}(\ddot{F}_{3A\delta} - \ddot{F}_{3A\delta}^*(t)) - k_{71}(\dot{F}_{3A\delta} - \dot{F}_{3A\delta}^*(t)) - k_{70}(F_{3A\delta} - F_{3A\delta}^*(t)) \quad (5.42)$$

com (k_{52}, k_{51}, k_{50}) , $(k_{63}, k_{62}, k_{61}, k_{60})$ e (k_{72}, k_{71}, k_{70}) sendo coeficientes constantes positivos de $p_5(s) = s^3 + k_{53}s^2 + k_{52}s + k_{51}$, $p_6(s) = s^4 + k_{63}s^3 + k_{62}s^2 + k_{61}s + k_{60}$ e $p_7(s) = s^3 + k_{72}s^2 + k_{71}s + k_{70}$, respectivamente.

Para estabilizar o sistema (5.18) em torno da origem, define-se que as trajetórias nominais para $F_{1A\delta}$, $F_{2A\delta}$, $F_{3A\delta}$ e suas respectivas derivadas temporais sejam nulas. Portanto, a expressão de v_{1A} , v_{2A} e v_{3A} se resumem a:

$$v_{1A} = -k_{52}\ddot{F}_{1A\delta} - k_{51}\dot{F}_{1A\delta} - k_{50}F_{1A\delta} \quad (5.43)$$

$$v_{2A} = -k_{63}F_{2A\delta}^{(3)} - k_{62}\ddot{F}_{2A\delta} - k_{61}\dot{F}_{2A\delta} - k_{60}F_{2A\delta} \quad (5.44)$$

$$v_{3A} = -k_{72}\ddot{F}_{3A\delta} - k_{71}\dot{F}_{3A\delta} - k_{70}F_{3A\delta} \quad (5.45)$$

Substituindo $F_{1A\delta}^{(3)} = v_{1A}$, $F_{2A\delta}^{(4)} = v_{2A}$ e $F_{3A\delta}^{(3)} = v_{3A}$ nas equações (5.36-5.38), além de adicionar os controles nominais $\tau_{1A}^*(t)$, $\tau_{2A}^*(t)$ e $\tau_{3A}^*(t)$, obtêm-se as expressões finais dos controladores $\tau_{1A}(t)$, $\tau_{2A}(t)$ e $\tau_{3A}(t)$:

$$\begin{aligned} \tau_{1A}(t) = & \tau_u^*(t) + C_1(t)F_{1A\delta} + C_2(t)\dot{F}_{1A\delta} + C_3(t)\ddot{F}_{1A\delta} + C_4(t)[-k_{52}\ddot{F}_{1A\delta} - k_{51}\dot{F}_{1A\delta} - k_{50}F_{1A\delta}] \\ & + C_5(t)F_{2A\delta} + C_6(t)\dot{F}_{2A\delta} + C_7(t)\ddot{F}_{2A\delta} + C_8(t)F_{2A\delta}^{(3)} + C_9(t)[-k_{63}F_{2A\delta}^{(3)} - k_{62}\ddot{F}_{2A\delta} - k_{61}\dot{F}_{2A\delta} \\ & - k_{60}F_{2A\delta}] + C_{10}(t)F_{3A\delta} + C_{11}(t)\dot{F}_{3A\delta} + C_{12}(t)\ddot{F}_{3A\delta} + C_{13}(t)[-k_{72}\ddot{F}_{3A\delta} - k_{71}\dot{F}_{3A\delta} - k_{70}F_{3A\delta}] \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} \tau_{2A}(t) = & \tau_q^*(t) + C_{14}(t)F_{1A\delta} + C_{15}(t)\dot{F}_{1A\delta} + C_{16}(t)\ddot{F}_{1A\delta} + C_{17}(t)[-k_{52}\ddot{F}_{1A\delta} - k_{51}\dot{F}_{1A\delta} - k_{50}F_{1A\delta}] \\ & + C_{18}(t)F_{2A\delta} + C_{19}(t)\dot{F}_{2A\delta} + C_{20}(t)\ddot{F}_{2A\delta} + C_{21}(t)F_{2A\delta}^{(3)} + C_{22}(t)[-k_{63}F_{2A\delta}^{(3)} - k_{62}\ddot{F}_{2A\delta} - k_{61}\dot{F}_{2A\delta} \\ & - k_{60}F_{2A\delta}] + C_{23}(t)F_{3A\delta} + C_{24}(t)\dot{F}_{3A\delta} + C_{25}(t)\ddot{F}_{3A\delta} + C_{26}(t)[-k_{72}\ddot{F}_{3A\delta} - k_{71}\dot{F}_{3A\delta} - k_{70}F_{3A\delta}] \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} \tau_{3A}(t) = & \tau_r^*(t) + C_{27}(t)F_{1A\delta} + C_{28}(t)\dot{F}_{1A\delta} + C_{29}(t)\ddot{F}_{1A\delta} + C_{30}(t)[-k_{52}\ddot{F}_{1A\delta} - k_{51}\dot{F}_{1A\delta} - k_{50}F_{1A\delta}] \\ & + C_{31}(t)F_{2A\delta} + C_{32}(t)\dot{F}_{2A\delta} + C_{33}(t)\ddot{F}_{2A\delta} + C_{34}(t)F_{2A\delta}^{(3)} + C_{35}(t)[-k_{63}F_{2A\delta}^{(3)} - k_{62}\ddot{F}_{2A\delta} - k_{61}\dot{F}_{2A\delta} \\ & - k_{60}F_{2A\delta}] + C_{36}(t)F_{3A\delta} + C_{37}(t)\dot{F}_{3A\delta} + C_{38}(t)\ddot{F}_{3A\delta} + C_{39}(t)[-k_{72}\ddot{F}_{3A\delta} - k_{71}\dot{F}_{3A\delta} - k_{70}F_{3A\delta}] \end{aligned} \quad (5.48)$$

5.4 Simulações Numéricas

Nessa seção, busca-se validar a performance do sistema de controle de trajetória descritos na Seção 5.3 para o modelo não-linear do veículo subaquático através de simulações numéricas performadas no ambiente *Simulink* do *software MATLAB*[®]. O detalhe da implementação da abordagem de controle pode ser visualizado no Anexo I.

Como trajetórias nominais, a escolha por trajetórias circulares no plano XY e helicoidais na direção Afundamento se baseia do ponto de vista prático durante inspeções de cabos submersos, onde o veículo subaquático se utiliza dessas para se aproximar de forma suave ao seu alvo. Adicionalmente, assumindo ambas trajetórias definidas no Sistema E e centradas em torno da origem, avalia-se também o grau de robustez do controlador ao introduzir uma perturbação externa ao sistema, como foi realizado para o navio de superfície no capítulo anterior.

Por último, ressalta-se que os parâmetros do sistema representado pela equação (3.33) foram definidos seguindo o trabalho desenvolvido em [6]:

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= 1116 \text{ kg} & m_{22} &= 2133 \text{ kg} & m_{33} &= 2133 \text{ kg} & m_{55} &= 4061 \text{ kgm}^2 & m_{66} &= 4061 \text{ kgm}^2 \\
 d_{11} &= 25,5 \text{ kgs}^{-1} & d_{22} &= 138 \text{ kgs}^{-1} & d_{33} &= 138 \text{ kgs}^{-1} & d_{55} &= 490 \text{ kgm}^2\text{s}^{-1} & m_{66} &= 490 \text{ kgm}^2\text{s}^{-1} \\
 \rho_w &= 10^3 \text{ kg/m}^3 & g &= 9,81 \text{ m/s}^2 & \nabla &= 0.012 \text{ m}^3 & \overline{GM}_L &= 5,55 \text{ m}
 \end{aligned}
 \tag{5.49}$$

o que implica nos seguintes coeficientes descritos na equação (3.34):

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= 1,9113 & \beta_2 &= 1,9113 & \beta_3 &= 0,0228 & \beta_4 &= 0,5232 & \beta_5 &= 0,0647 & \beta_6 &= 0,5232 \\
 \beta_7 &= 0,0647 & \beta_8 &= 0,2504 & \beta_9 &= 0,1207 & \beta_{10} &= 0,1609 & \beta_{11} &= -0,2504 & \beta_{12} &= 0,1207
 \end{aligned}
 \tag{5.50}$$

5.4.1 Planejamento de Trajetória

Trajetoária Circular

Conforme descrito na subseção 4.5.1, a parametrização de uma trajetória circular centrada na origem de raio ρ no sentido anti-horário no plano XY com uma dada velocidade angular ω pode ser expressa pela equação (4.62). Como o movimento agora está no plano XYZ , define-se também uma trajetória constante no eixo Z para construir a trajetória desejada:

$$x_A^*(t) = \rho \text{sen}(\omega t) \tag{5.51}$$

$$y_A^*(t) = \rho \text{cos}(\omega t) \tag{5.52}$$

$$z_A^*(t) = z_c \tag{5.53}$$

Assim, conforme descrito na Seção 5.2, o planejamento de trajetória é realizado a partir do caráter liouviliano do sistema (3.33). Assumindo um tempo de simulação $t_s = 300 \text{ s}$ com passo de tempo $d_t = 0.01$, $\rho = 20 \text{ m}$, $\omega = 0,05 \text{ rad/s}$ e $z_c = 20 \text{ m}$, os resultados da etapa de planejamento de trajetória para a trajetória circular no plano XYZ podem ser observados nas Figuras 5.1-5.5.

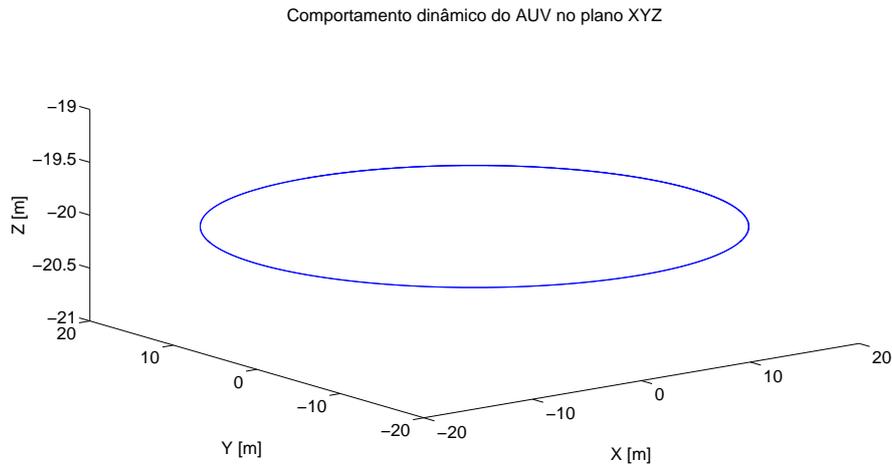


Figura 5.1: Trajetória circular no plano XYZ desejada para o veículo subaquático no Sistema E .

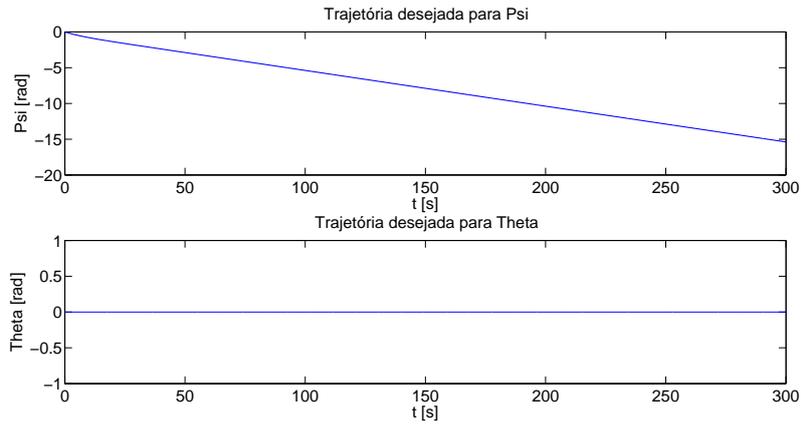


Figura 5.2: Trajetórias nominais para a orientação do sistema.

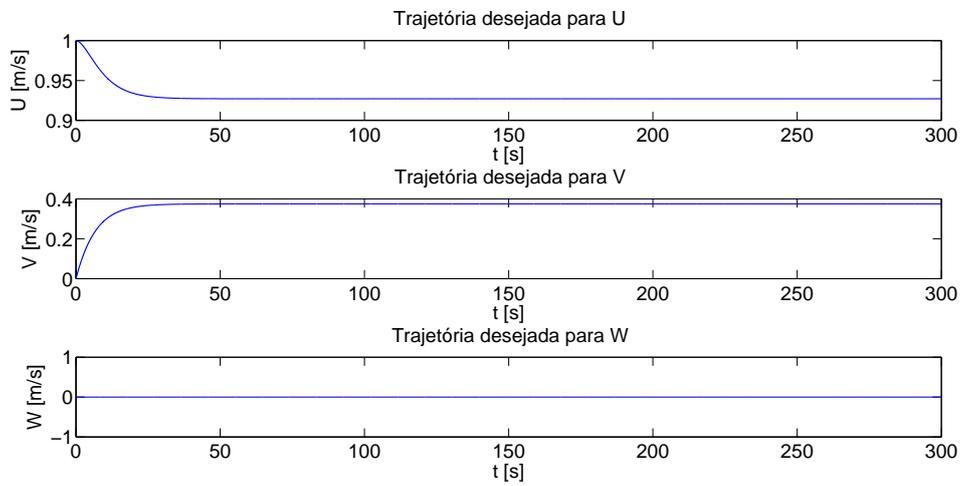


Figura 5.3: Trajetórias nominais para as velocidades lineares do sistema.

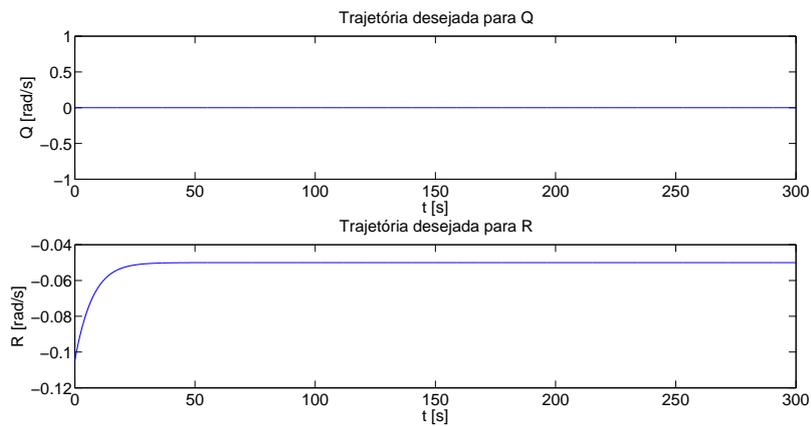


Figura 5.4: Trajetórias nominais para as velocidades angulares do sistema.

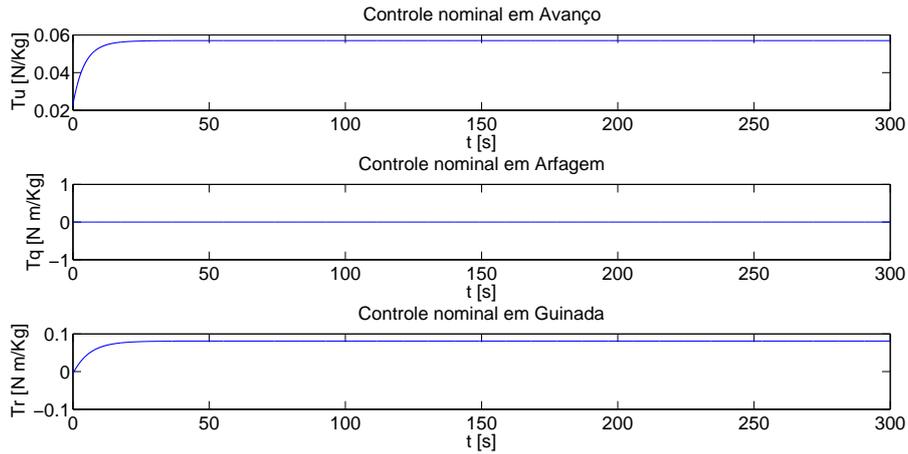


Figura 5.5: Controles nominais.

Trajetória Helicoidal

A parametrização de uma trajetória helicoidal no plano XYZ , que é composta por uma trajetória circular centrada na origem de raio ρ no sentido anti-horário no plano XY com uma dada velocidade angular ω e por uma trajetória retilínea no eixo Z , pode ser definida como:

$$x_A^*(t) = \rho \sin(\omega t) \quad (5.54)$$

$$y_A^*(t) = \rho \cos(\omega t) \quad (5.55)$$

$$z_A^*(t) = z_c t \quad (5.56)$$

Assim, novamente a partir do caráter liouviliano do sistema (3.33), realiza-se o planejamento de trajetória assumindo um tempo de simulação $t_s = 300 \text{ s}$ com passo de tempo $d_t = 0.01$, $\rho = 20 \text{ m}$, $\omega = 0,05 \text{ rad/s}$ e $z_c = 0,1 \text{ m/s}$, o que implica nos resultados representados nas Figuras 5.6-5.10.

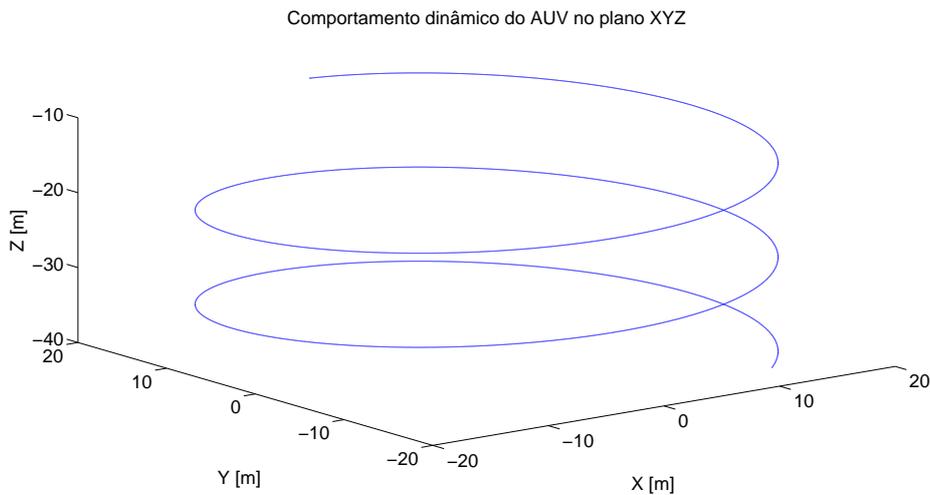


Figura 5.6: Trajetória helicoidal no plano XYZ desejada para o veículo subaquático no Sistema E .

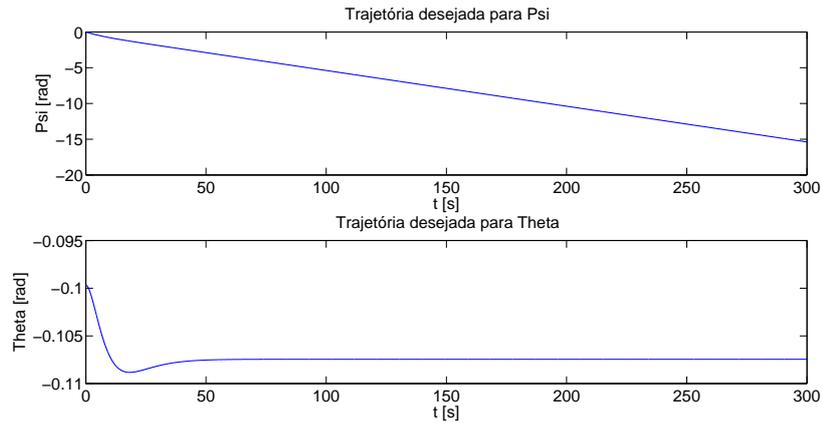


Figura 5.7: Trajetórias nominais para a orientação do sistema.

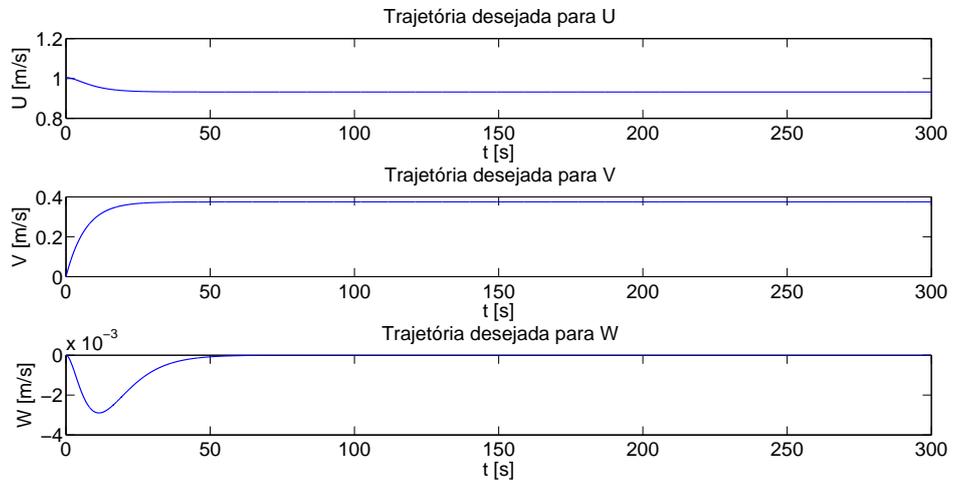


Figura 5.8: Trajetórias nominais para as velocidades lineares do sistema.

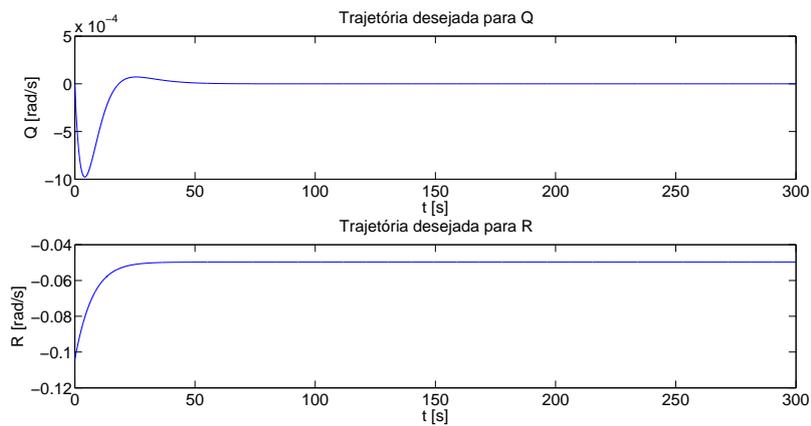


Figura 5.9: Trajetórias nominais para as velocidades angulares do sistema.

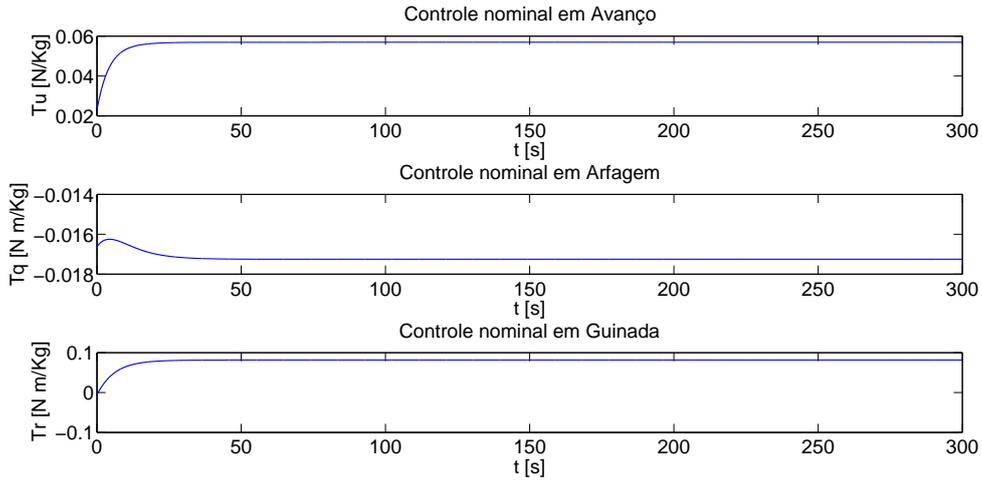


Figura 5.10: Controles nominais.

5.4.2 Controle de Trajetória

Controle de Trajetória via Saídas Planas

Como sugerido em [6], assume-se saturação nos sinais de controle: $\tau_{1A}(t) \in [-17,92 : 17,92] N/kg$, $\tau_{2A}(t) \in [-3,69 : 3,69] Nm/kg$ e $\tau_{3A}(t) \in [-3,69 : 3,69] N/kg$. A implementação no ambiente *Simulink* do sistema de controle de trajetória via saídas planas do sistemas linearizado pode ser visualizada na Figura 5.11.

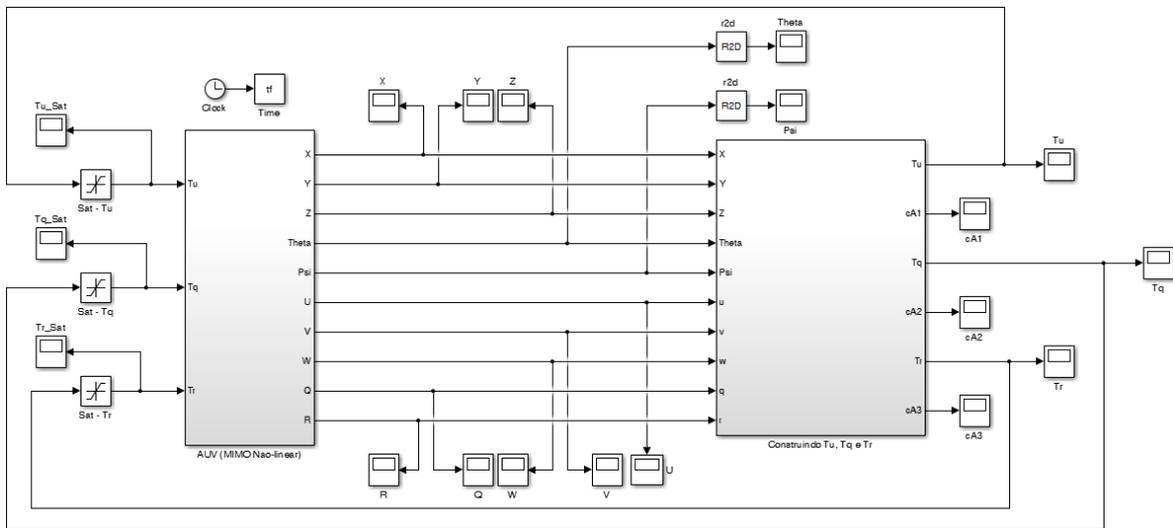


Figura 5.11: Implementação do sistema de controle de trajetória via saídas planas do sistema linearizado para o veículo subaquático no ambiente *Simulink*.

Os ganhos (k_{52}, k_{51}, k_{50}) , $(k_{63}, k_{62}, k_{61}, k_{60})$ e (k_{72}, k_{71}, k_{70}) dos controladores descritos pelas equações (5.46), (5.47) e (5.48), respectivamente, foram definidos de tal forma que $p_5(s) = (s + 0,125)^3$, $p_6(s) = (s + 0,2)^4$ e $p_7(s) = (s + 0,175)^3$:

$$\begin{aligned}
k_{52} &= 0,375 & k_{51} &= 0,0469 & k_{50} &= 0,002 \\
k_{63} &= 0,8 & k_{62} &= 0,24 & k_{61} &= 0,032 & k_{60} &= 0,0016 \\
k_{72} &= 0,525 & k_{71} &= 0,0919 & k_{70} &= 0,0054
\end{aligned}
\tag{5.57}$$

Para todos os testes a seguir, define-se uma configuração inicial do sistema de tal maneira que o movimento do sistema se inicie na origem do plano XYZ :

$$\begin{aligned}
x(0) &= 0 & y(0) &= 0 & z(0) &= 0 & \psi(0) &= \pi/3 & \theta(0) &= 0 \\
u(0) &= 0 & v(0) &= 0 & w(0) &= 0 & q(0) &= 0 & r(0) &= 0
\end{aligned}
\tag{5.58}$$

Em um primeiro teste, definindo a trajetória circular como referência, obtiveram-se os resultados da primeira simulação, os quais podem ser visualizados nas Figuras 5.12-5.17.

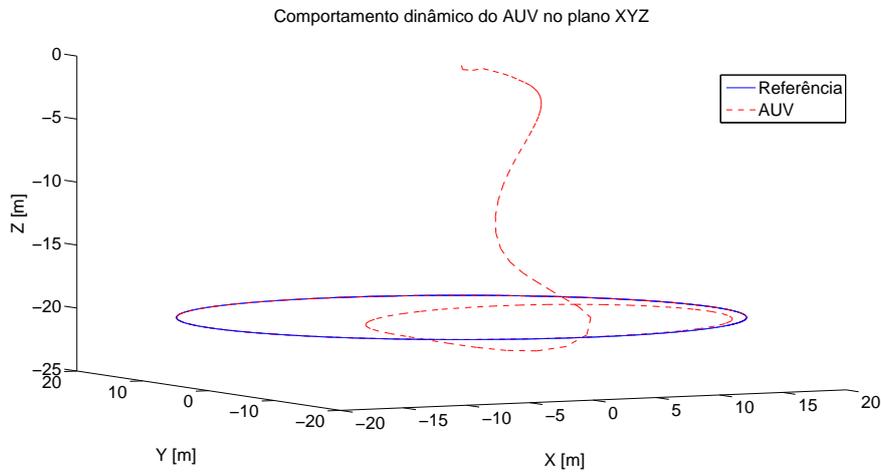


Figura 5.12: Comportamento dinâmico do veículo subaquático no plano XYZ a partir do controle via saídas planas do sistema linearizado (Trajetória Circular - Teste 01).

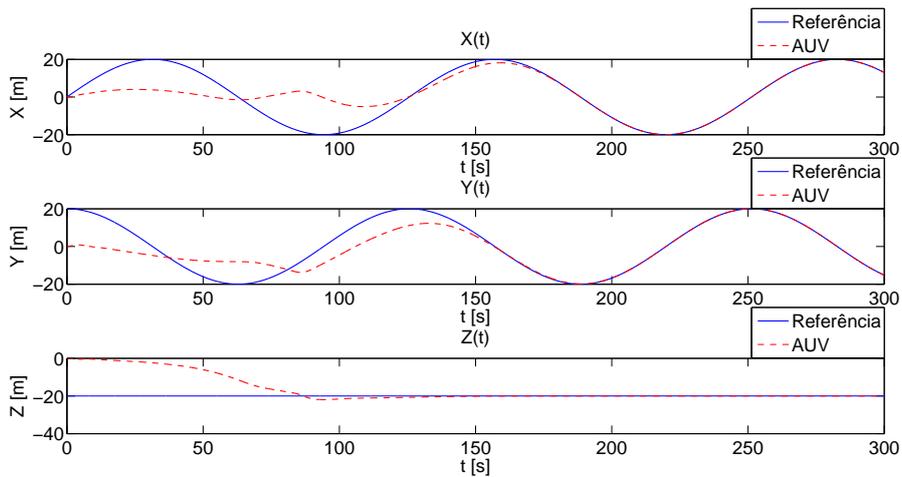


Figura 5.13: Evolução temporal da posição do sistema.

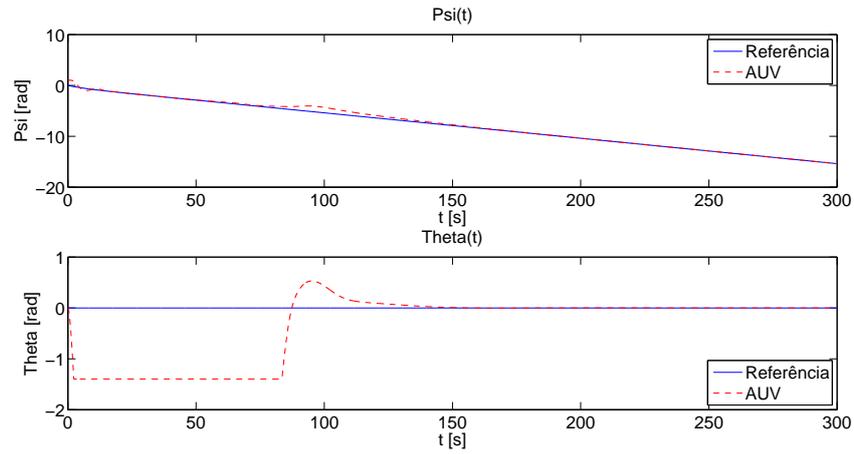


Figura 5.14: Evolução temporal da orientação do sistema.

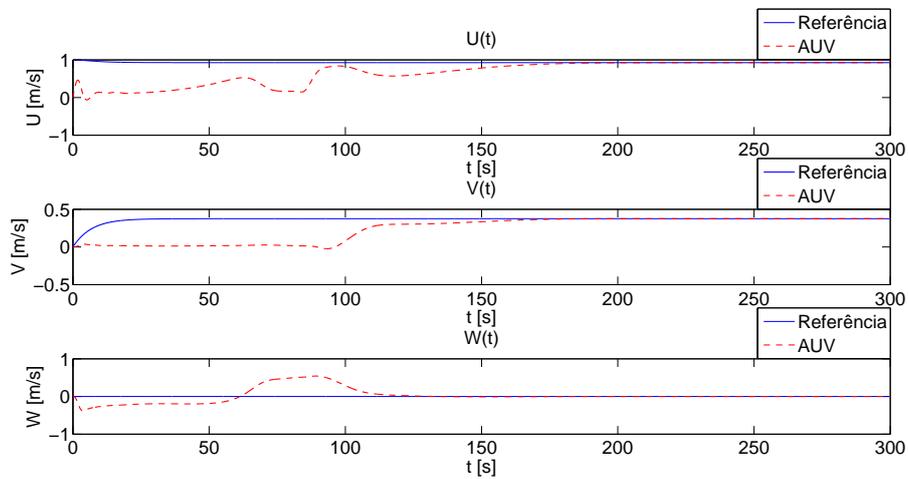


Figura 5.15: Evolução temporal das velocidades lineares do sistema.

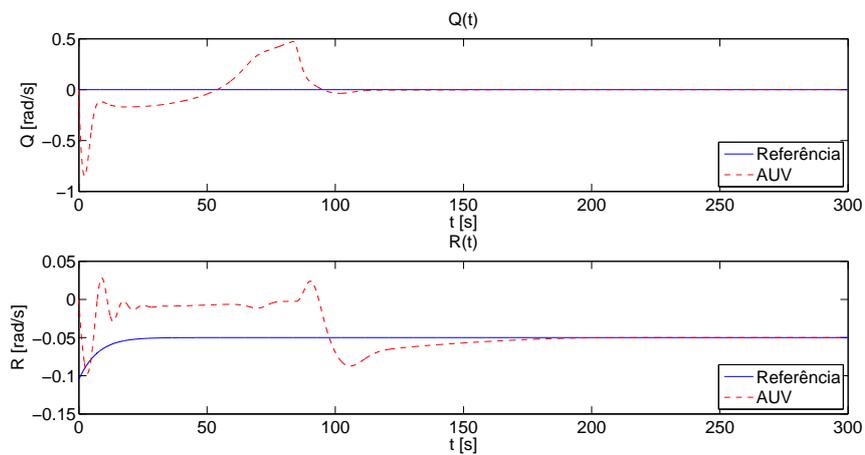


Figura 5.16: Evolução temporal das velocidades angulares do sistema.

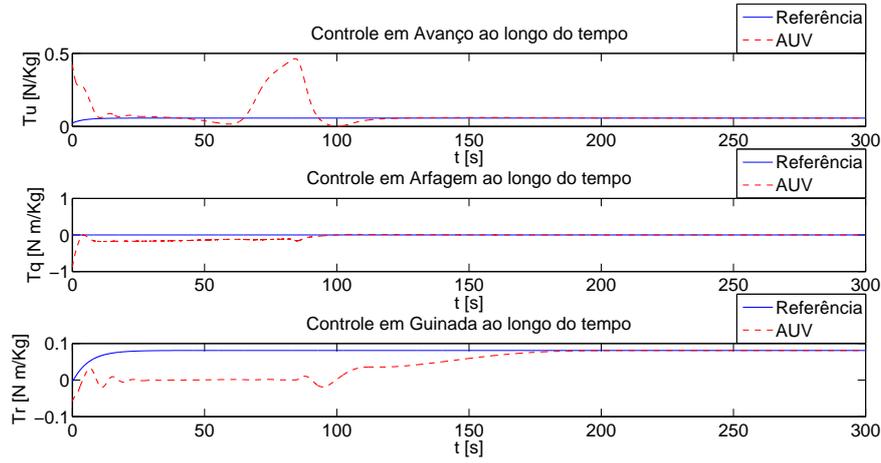


Figura 5.17: Evolução temporal dos sinais de controle.

Em um segundo teste, como para o navio de superfície, verifica-se o grau de robustez do controlador ao introduzir uma perturbação externa em uma das direções não atuadas do veículo subaquático. Mais precisamente, insere-se uma perturbação constante na direção Afundamento, como pode ser observado nas equações (5.59) e (5.60).

$$\dot{w}_A = \beta_6 u_{AQA} - \beta_7 w_A + \frac{\tau_{EV}(t_{EV})}{m_{33}} \quad (5.59)$$

$$\tau_{EV}(t_{EV}) = m_{33} A_{EV} \quad (5.60)$$

sendo $m_{33} A_{EV}$ a intensidade da perturbação. Além disso, somente durante um determinado intervalo de tempo t_{EV} da simulação que a perturbação atua sobre o sistema.

Assumindo $A_{EV} = 0,05 \text{ m/s}^2$, $t_{EV} \in [120 : 150] \text{ s}$ e as mesmas condições do primeiro teste, obtiveram-se os resultados da segunda simulação, os quais podem ser visualizados nas Figuras 5.18-5.23.

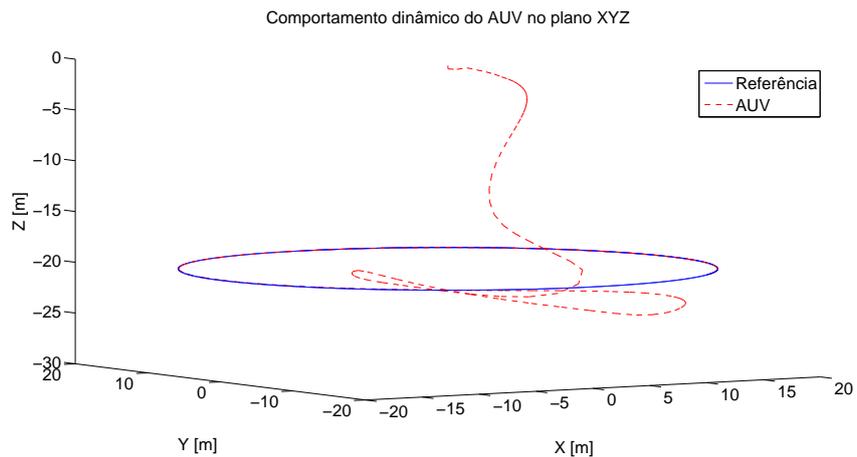


Figura 5.18: Comportamento dinâmico do veículo subaquático no plano XYZ a partir do controle via saídas planas do sistema linearizado na presença de perturbação externa (Trajetória Circular - Teste 02).

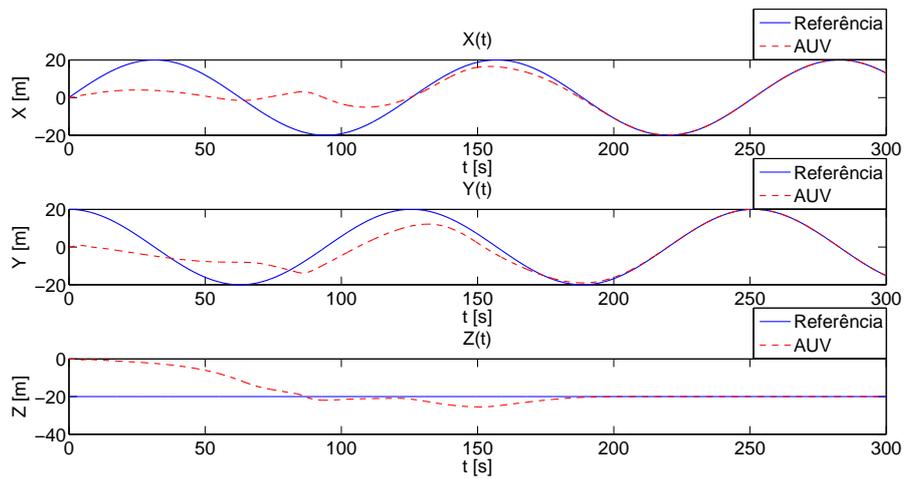


Figura 5.19: Evolução temporal da posição do sistema.

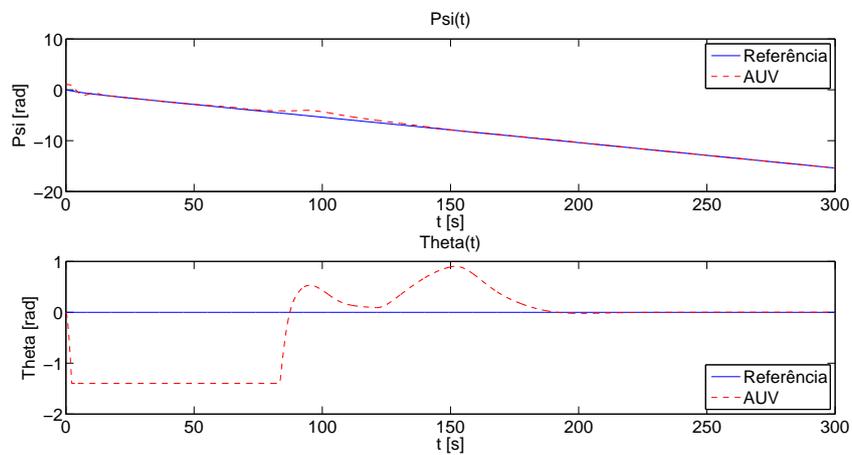


Figura 5.20: Evolução temporal da orientação do sistema.

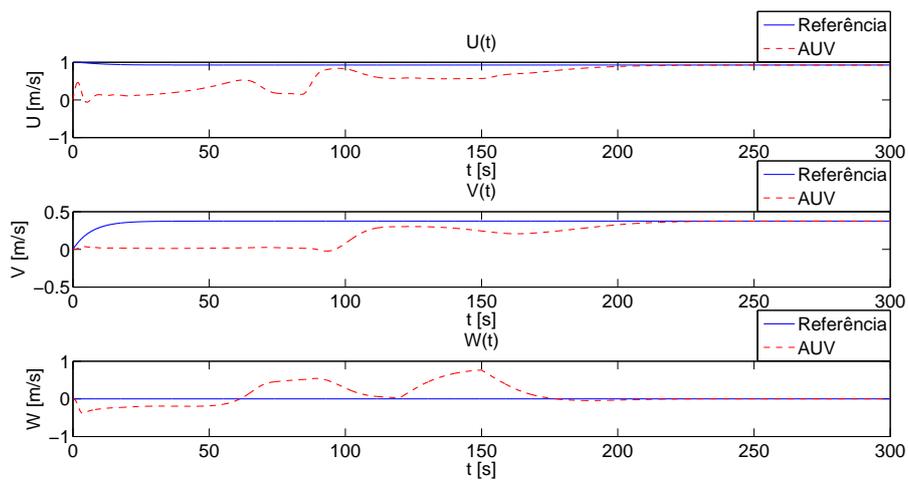


Figura 5.21: Evolução temporal das velocidades lineares do sistema.

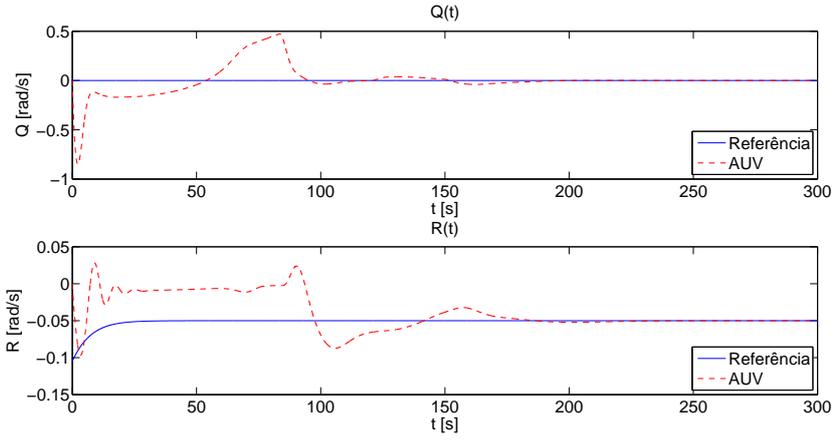


Figura 5.22: Evolução temporal das velocidades angulares do sistema.

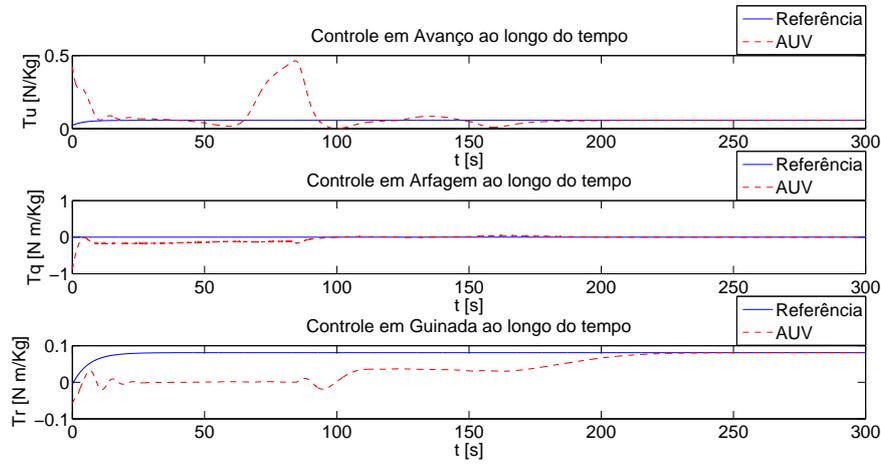


Figura 5.23: Evolução temporal dos sinais de controle.

Em um terceiro teste, assumindo agora a trajetória helicoidal como referência, definiram-se os ganhos (k_{52}, k_{51}, k_{50}) , $(k_{63}, k_{62}, k_{61}, k_{60})$ e (k_{72}, k_{71}, k_{70}) dos controladores descritos pelas equações (5.46), (5.47) e (5.48), respectivamente, foram definidos de tal forma que $p_5(s) = (s + 0,25)^3$, $p_6(s) = (s + 0,15)^4$ e $p_7(s) = (s + 0,25)^3$:

$$\begin{aligned}
 k_{52} &= 0,75 & k_{51} &= 0,1875 & k_{50} &= 0,0156 \\
 k_{63} &= 0,6 & k_{62} &= 0,135 & k_{61} &= 0,0135 & k_{60} &= 0,0005 \\
 k_{72} &= 0,75 & k_{71} &= 0,1875 & k_{70} &= 0,0156
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

Os resultados da terceira simulação podem ser visualizados nas Figuras 5.24-5.29.

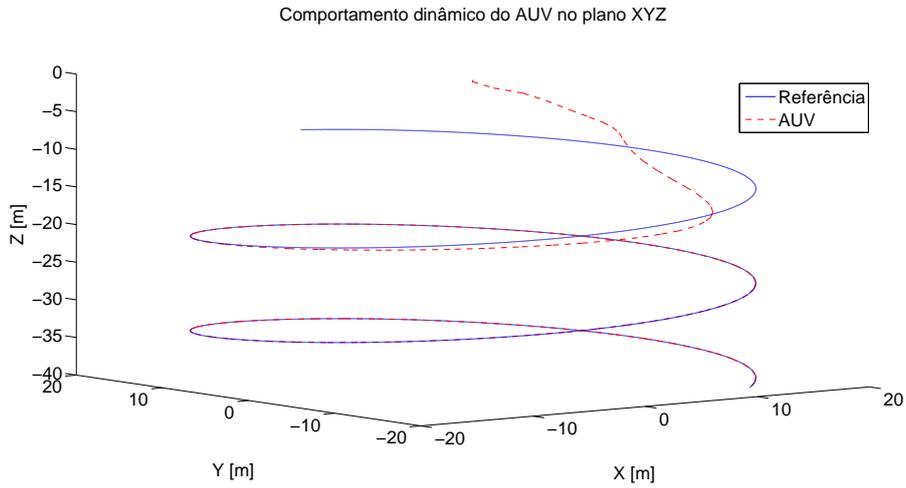


Figura 5.24: Comportamento dinâmico do veículo subaquático no plano XYZ a partir do controle via saídas planas do sistema linearizado (Trajetória Helicoidal - Teste 03).

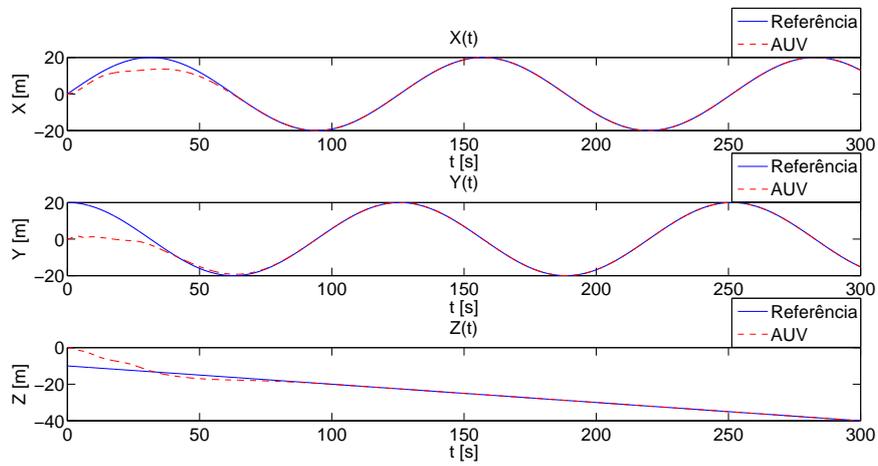


Figura 5.25: Evolução temporal da posição do sistema.

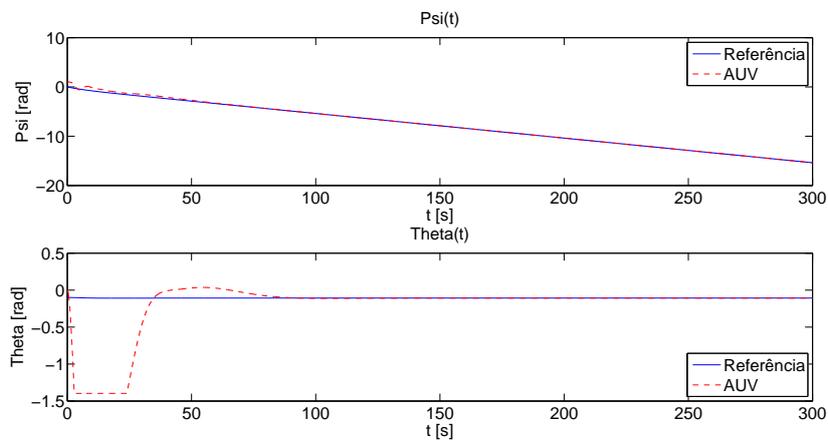


Figura 5.26: Evolução temporal da orientação do sistema.

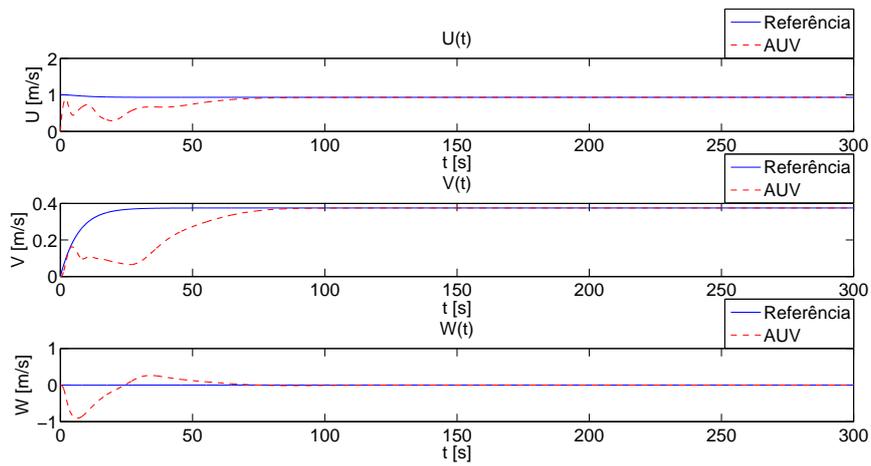


Figura 5.27: Evolução temporal das velocidades lineares do sistema.

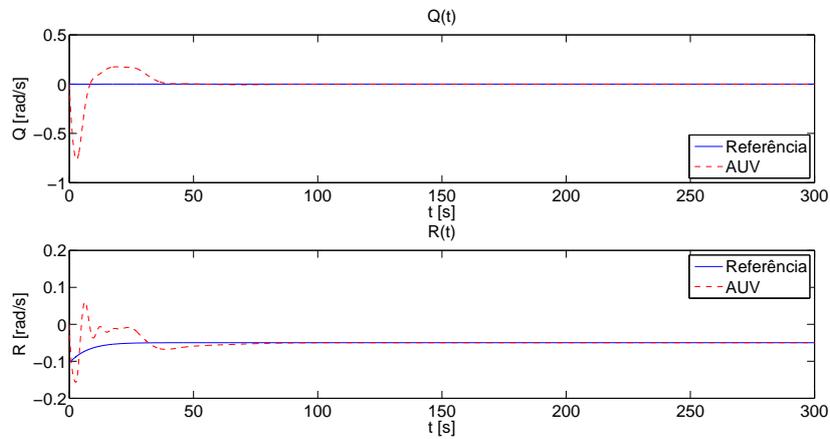


Figura 5.28: Evolução temporal das velocidades angulares do sistema.

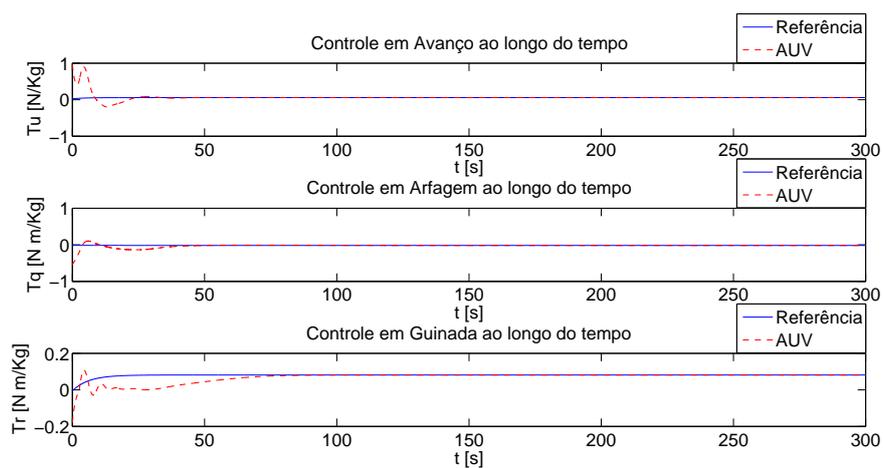


Figura 5.29: Evolução temporal dos sinais de controle.

Por último, em um quarto teste, como para a trajetória circular, verifica-se o grau de robustez do controlador ao introduzir uma perturbação externa na direção Afundamento. Assumindo $A_{EV} = 0,05 \text{ m/s}^2$, $t_{EV} \in [120 : 150] \text{ s}$ e as mesmas condições do terceiro teste, obtiveram-se os resultados da quarta simulação, os quais podem ser visualizados nas Figuras 5.30-5.35.

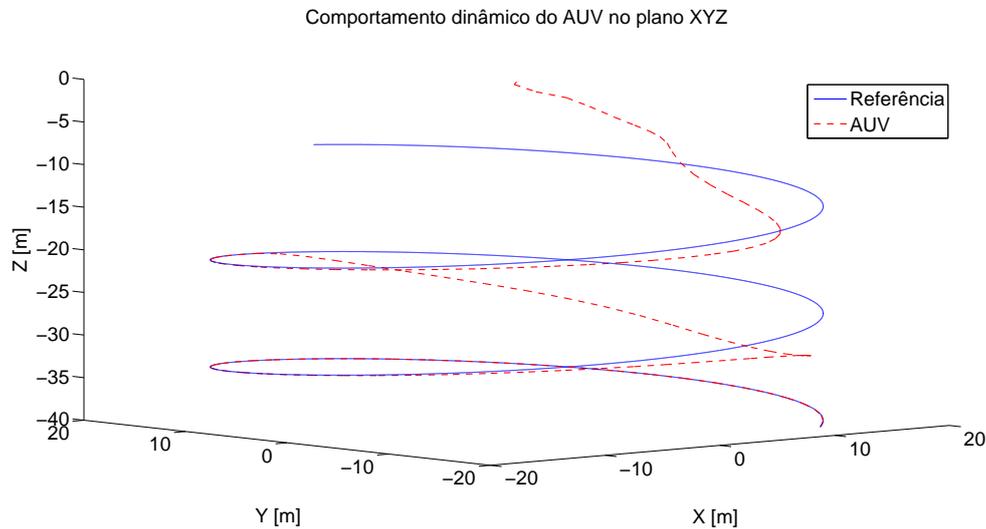


Figura 5.30: Comportamento dinâmico do veículo subaquático no plano XYZ a partir do controle via saídas planas do sistema linearizado na presença de perturbação externa (Trajetória Helicoidal - Teste 04).

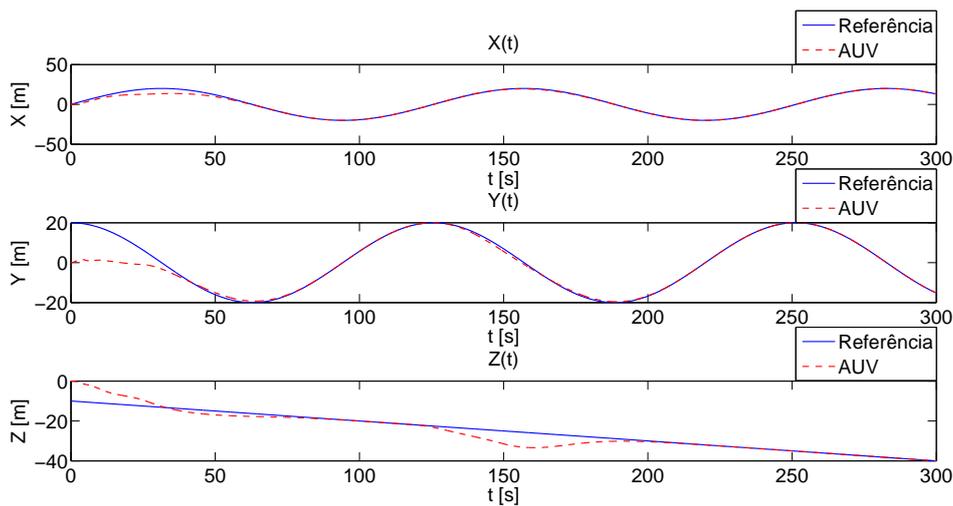


Figura 5.31: Evolução temporal da posição do sistema.

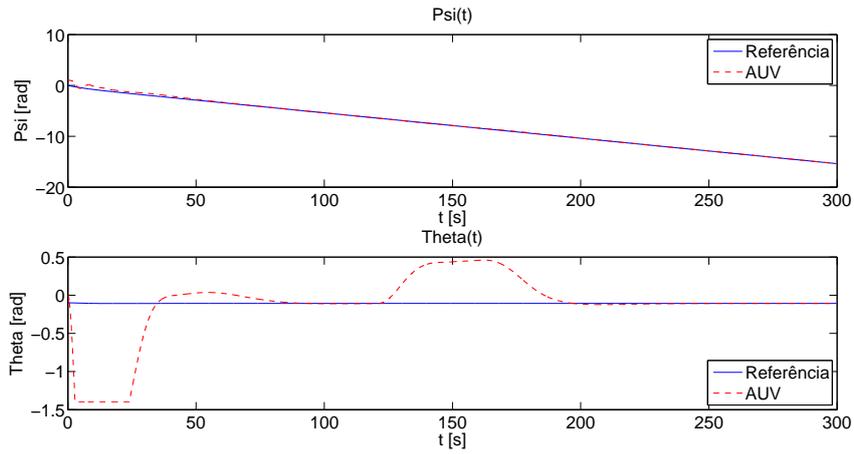


Figura 5.32: Evolução temporal da orientação do sistema.

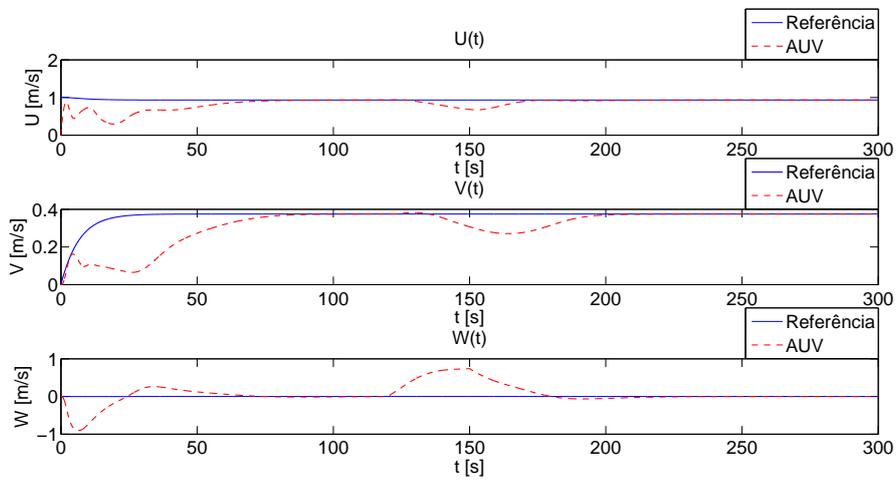


Figura 5.33: Evolução temporal das velocidades lineares do sistema.

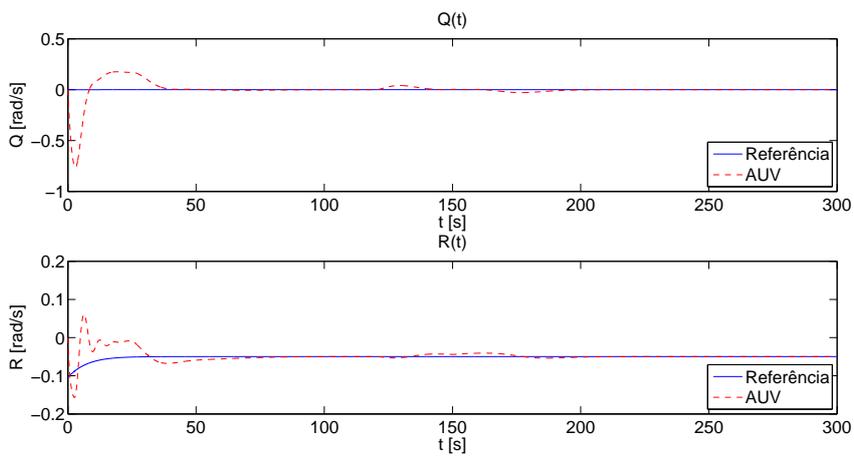


Figura 5.34: Evolução temporal das velocidades angulares do sistema.

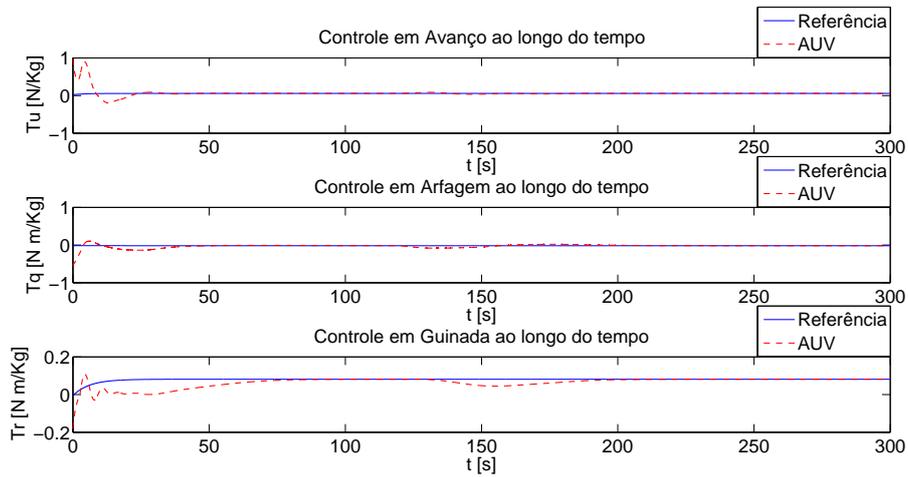


Figura 5.35: Evolução temporal dos sinais de controle.

5.5 Análises dos Resultados

Diferentemente dos resultados apresentados em Fraga *et al.* [69], que negligenciavam a dinâmica nas direções Jogo e Arfagem para obter um modelo não-linear diferencialmente plano para o veículos subaquático, observou-se que o caráter liouviliano do veículo aquático se movimentando em 5 graus de liberdade permitiu obter diretamente as trajetórias e os controles nominais tanto para a trajetória circular quanto para a helicoidal. Ressalta-se que uma extensão pode ser realizada para movimentos em 6 graus de liberdade, o que permite uma maior liberdade ao projeto mecânico do sistema dependendo da aplicação desejada.

Em ambas as trajetórias, infere-se que a estratégia de controle em malha fechada apresentou uma boa performance de acompanhamento de trajetória, já que as variáveis do sistema convergem de forma suave e sem oscilações indesejáveis para suas respectivas trajetórias nominais.

Ao introduzir uma perturbação externa na direção Afundamento, observou-se uma alteração do comportamento dinâmico do veículo subaquático nessa direção, exigindo uma compensação pelos sinais de controle para amenizar a sua influência na movimentação do sistema no plano XYZ , o que verifica um grau satisfatório de robustez aos controladores. Nota-se, ainda, que o sistema consegue se restabelecer rapidamente em direção as trajetórias nominais ao término da influência da perturbação.

Outro ponto importante a se considerar é a ausência de singularidades que pudessem comprometer a performance do sistema. No entanto, imagina-se que, para determinadas aplicações, as trajetórias requeridas, eventualmente, podem tornar o sistema linearizado não-uniformemente controlável, o que acaba comprometendo a performance do controlador. Para contornar isso, a utilização de uma representação por quatérnions para a orientação do sistema surge como alternativa à representação por ângulos de Euler, já que a primeira não apresenta essas singularidades associadas a segunda [13].

Do ponto de vista prático, esse comportamento dinâmico do sistema no plano XYZ é favorável a aplicações em águas profundas que necessitem de navegação autônoma e sujeitas a influência de esforços ambientais. No entanto, a limitação de sensores que captam informações de odometria em tempo real para alimentar controlador em malha fechada requer cada vez mais o uso de técnicas de estimação de estados não-lineares, exigindo, assim, uma capacidade de processamento embarcado. Por outro lado, ressalta-se que a abordagem de controle permite que muitos parâmetros e coeficientes sejam calculados de forma prévia durante a etapa de planejamento de trajetória, reduzindo assim os desafios de implementação do termo de correção em malha fechada.

5.6 Conclusões

Neste capítulo foi desenvolvido um sistema de controle baseado na planicidade diferencial do sistema linear variante no tempo obtido a partir da linearização do modelo não-linear do veículo subaquático em torno das trajetórias nominais. A partir dos resultados das simulações numéricas, foi possível validar o controlador para dois tipos de trajetórias, além de avaliar o grau de robustez perante a uma perturbação constante introduzida em uma das direções que não há atuação direta.

Capítulo 6

Cone 2D

6.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo desenvolver uma lei de controle que garanta que a vazão de produção de um reservatório sujeito ao fenômeno do cone se mantenha próxima da vazão crítica. Para isso, na Seção 6.2, apresenta-se a modelagem matemática do fenômeno similar ao cone de gás em um reservatório composto por glicerina e ar a partir do comportamento dinâmico do nó central da interface de contato dos fluidos, conforme apresentado por Córdoba [47].

Diferentemente dos modelos dos veículos marítimos apresentados nos capítulos anteriores, observa-se, na Seção 6.3, que o modelo não-linear obtido é diferencialmente plano, o que permite tanto o planejamento de trajetória como o projeto de controlador a partir do conceito de saídas planas apresentado na Seção 2.2.

Por último, as Seções 6.4 e 6.5 apresentam e discutem os resultados de desempenho do controlador obtidos através de simulações numéricas e de forma experimental, respectivamente.

6.2 Modelagem Matemática

Córdoba [47] desenvolveu um modelo matemático composto por uma equação diferencial parcial governante que corresponde ao modelo de fluxo monofásico bidimensional de fluidos incompressíveis com superfície livre em um reservatório homogêneo, isotrópico e verticalmente confinado. Para isso, assumiu que o fluido que satura o meio poroso é o óleo e a superfície livre do reservatório é a interface óleo-ar, o que resulta, de forma aproximada, ao do cone de gás. Além disso, utiliza-se de um sumidouro pontual para representar o poço que extrai o óleo do reservatório.

Esse modelo foi construído a partir das seguintes leis que regem o movimento dos fluidos em um reservatório de petróleo:

- **Lei de Darcy:** Derivada empiricamente, fornece uma relação linear entre a velocidade do fluido em relação ao sólido e o gradiente do potencial de fluxo do fluido [70].

- **Lei da Continuidade:** Descreve a lei da conservação da massa, ou seja, tem-se que a diferença entre a massa de entrada e a de saída é igual à variação de massa dentro do volume de controle [70].
- **Equação de Estado:** Definida em termos da compressibilidade do fluido a uma temperatura fixa, onde o volume é obtido em condições de reservatório [70].

Devido as não-linearidades das condições de contorno do modelo, Córdoba [47] utilizou o Método dos Elementos de Contorno (MEC) para obter uma solução aproximada à formulação matemática governante do modelo proposto a fim de simular o fenômeno do cone de ar. A implementação computacional do MEC precisou da descrição geométrica do problema, que pode ser visualizada na Figura 6.1, e da malha de discretização do contorno do reservatório, que é ilustrada na Figura 6.2.

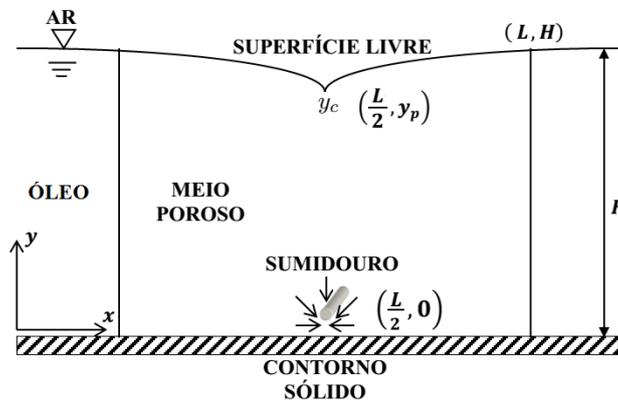


Figura 6.1: Plano físico de referência para simulação. Adaptado de [47].

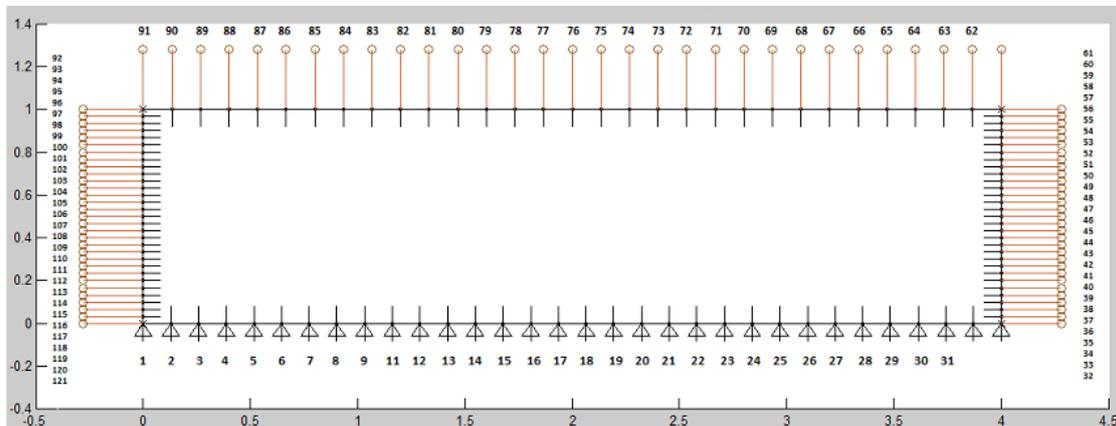


Figura 6.2: Malha de discretização do contorno do reservatório.

A malha de discretização do contorno do reservatório foi representada por 121 elementos distribuídos da seguinte forma:

- Contorno S_1 : Corresponde ao limite impermeável do reservatório e está discretizado pelos nós numerados de 1 a 31.

- Contorno S_2 : Corresponde a lateral direita do reservatório (permeável), e está discretizado pelos nós numerados de 32 a 61.
- Contorno S_3 : Corresponde a superfície livre (contorno móvel), e está discretizado pelos nós numerados de 62 a 91. Assume-se como condição inicial que o potencial em todos os nós é igual a profundidade do reservatório.
- Contorno S_4 : Corresponde a lateral esquerda do reservatório (permeável), e está discretizado pelos nós numerados de 92 a 121.

A solução obtida através do MEC fornece a distribuição de potencial e a velocidade de fluxo normal nos elementos da malha de discretização dos contornos do reservatório e, conseqüentemente, da superfície livre. A partir disso, Córdoba [47] propôs um sistema dinâmico que represente o fenômeno do cone a partir do comportamento do potencial (posição) do nó central da malha de discretização da superfície livre do reservatório. Este sistema tem como entrada a intensidade do sumidouro, e como saída o potencial.

Além disso, Córdoba [47] assumiu um reservatório com profundidade $H = 1\text{ m}$, largura $L = 4\text{ m}$, condutividade hidráulica $K = 1\text{ m/s}$ e sumidouro localizado no limite impermeável em $(x, y) = (2, 0)\text{ m}$, obtendo uma intensidade crítica do sumidouro de $q_c = -0,5180\text{ m}^2/\text{s}$, o que implicou na convergência do potencial do nó central da superfície livre para $y_c = 0,1402\text{ m}$, como pode ser observado na Figura 6.3. Conseqüentemente, a região de instabilidade do sistema é definida para um potencial de fluxo menor do que o potencial crítico.

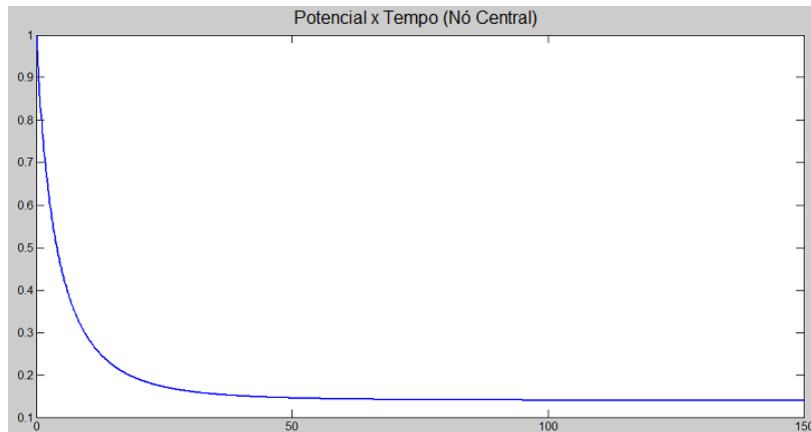


Figura 6.3: Evolução temporal do potencial do nó central da superfície livre até a situação crítica. Extraído de [47].

Analisando a Figura 6.3, Córdoba [47] observou que o comportamento da posição do nó central da superfície livre poderia ser aproximado por uma equação diferencial de um sistema linear de primeira ordem dada por:

$$\tau_p \dot{y}(t) + y(t) = K_p q(t) \quad (6.1)$$

e, que no domínio de Laplace, pode ser representado pela seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{Q(s)} = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} \quad (6.2)$$

onde o ganho estático K_p é a razão entre a variação da saída $y(t)$ e a variação da entrada $u(t)$ no regime estacionário:

$$K_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Delta y(x)}{\Delta q(x)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Y(s)}{Q(s)} \quad (6.3)$$

enquanto que a constante de tempo τ_p indica a rapidez com que a resposta do sistema reage a uma perturbação em uma certa entrada e é definida como o tempo em que a resposta $y(t)$ alcança 63,2% da sua variação total.

Assim, Córdoba [47] definiu diferentes regiões de análise que o sistema seria excitado com uma intensidade do sumidouro que variava de 0 a q_c para estimar os respectivos valores de K_p e de τ_p . Mais precisamente, definiram-se diferentes pontos de operação (y_{ref}, q_{ref}) em que a região de análise seria definida tomando uma entrada q_1 , que corresponde a 5% maior do que q_{ref} , e uma entrada q_2 , que corresponde a 5% menor do que q_{ref} , o que implica nas saídas y_1 e y_2 , respectivamente. Assim, o ganho estático é obtido a partir da equação (6.3), ou seja, tem-se que:

$$K_p = \frac{\frac{y_1 - y_{ref}}{q_1 - q_{ref}} + \frac{y_2 - y_{ref}}{q_2 - q_{ref}}}{2} \quad (6.4)$$

enquanto que τ_p é obtida conforme descrito anteriormente.

Em seguida, manipulou a equação (6.2) para o seguinte formato:

$$\frac{Y(s)}{Q(s)} = \frac{K_A}{s + K_B} \quad (6.5)$$

onde $K_A = \frac{K_p}{\tau_p}$ e $K_B = \frac{1}{\tau_p}$ são definidos como o ganho e o polo da função transferência, respectivamente.

Córdoba [47] buscou então analisar a dependência dos parâmetros K_A e K_B em função da posição do nó central da superfície livre y através do método de regressão linear com o objetivo de obter um modelo matemático que representasse o comportamento dinâmico do sistema de forma global.

Em relação a K_B , observou que este tende a zero à medida que o potencial se aproxima do valor crítico, o que rende ao sistema um comportamento de integrador. Então, propôs-se que K_B se comportasse da seguinte forma:

$$K_B = K_2(y - y_c) \quad (6.6)$$

Em relação a K_A , levou em consideração o fato que $K_A = K_p K_B$ para obter um conjunto de pontos de entrada para realizar a regressão linear. Assim, propôs que K_A se comportasse da seguinte forma:

$$K_A = K_1 + K_3 y \quad (6.7)$$

Portanto, Córdoba [47] propôs o seguinte modelo não-linear que descreve o comportamento do potencial da região central da superfície livre ao longo do tempo, tendo como sinal de entrada a intensidade do sumidouro:

$$\frac{y - y_{ref}}{q - q_{ref}} = \frac{K_1 + K_3 y}{s + K_2(y - y_c)} \quad (6.8)$$

onde o par (y_{ref}, q_{ref}) são valores de referência normalmente escolhidos através da Tabela 6.1, pois foram esses que utilizado no método de regressão linear descrito anteriormente [47].

Outra opção é determinar q_{ref} a partir da configuração inicial do reservatório e de um determinado valor para y_{ref} . Este último é normalmente definido como a altura em que se deseja estabilizar o nó central da superfície livre. No nosso caso, sabe-se que $(y(0), q(0)) = (H, 0)$, logo, a partir de (6.8), obtém-se a seguinte relação para q_{ref} :

$$q_{ref} = -\frac{K_2(H - y_{ref})(H - y_c)}{K_1 + K_3 H} \quad (6.9)$$

Na próxima seção, propõe-se um sistema de controle baseado no conceito de saídas planas para o modelo não-linear dado por (6.8).

6.3 Controle de Trajetória via Saídas Planas

6.3.1 Planejamento de Trajetória

Definido $y' = y - y_{ref}$ e $q' = q - q_{ref}$, manipula-se (6.8) da seguinte forma:

$$\frac{y'}{q'} = \frac{[K_1 + K_3 y_{ref}] + K_3 y'}{s + K_2[y' + (y_{ref} - y_c)]} \quad (6.10)$$

Agora, chamando $K'_1 = K_1 + K_3 y_{ref}$ e $y'_c = y_c - y_{ref}$, tem-se que:

$$\frac{y'}{q'} = \frac{K'_1 + K_3 y'}{s + K_2(y' - y'_c)} \quad (6.11)$$

Dessa maneira, observa-se que o sistema (6.11) é diferencialmente plano, cuja saída plana F_{Cone} é dada por y' . Definido $F_{Cone} = y'$, a parametrização de q' em função da saída plana e suas derivadas temporais é então dada por:

$$\dot{q}' = \frac{\dot{F}_{Cone} + K_2 F_{Cone} (F_{Cone} - y'_c)}{K'_1 + K_3 F_{Cone}} \quad (6.12)$$

Assim, se a trajetória nominal para $y'^*(t)$ é conhecida, então o controle nominal $\dot{q}'^*(t)$ é obtido diretamente através da equação (6.12).

6.3.2 Sistema de Controle

Sendo diferencialmente plano, o sistema (6.11) é portanto equivalente, sob uma alteração de coordenadas de variáveis de entrada, ao seguinte sistema linear SISO na forma canônica de Brunovsky:

$$\dot{F}_{Cone} = v_{Cone} \quad (6.13)$$

A partir disso, define-se então o seguinte termo de correção em malha fechada v_{Cone} dado por:

$$v_{Cone} = \dot{F}_{Cone}^*(t) - k_c(F_{Cone} - F_{Cone}^*(t)) \quad (6.14)$$

com k_c sendo coeficiente constante positivo de $p_c(s) = s + k_c$.

Substituindo $\dot{F}_{Cone} = v_{Cone}$ na equação (6.12), obtém-se a expressão para $\dot{q}'(t)$:

$$\dot{q}'(t) = \frac{[\dot{F}_{Cone}^*(t) - k_c(F_{Cone} - F_{Cone}^*(t))] + K_2 F_{Cone} (F_{Cone} - y'_c)}{K'_1 + K_3 F_{Cone}} \quad (6.15)$$

Assim, como $\dot{q}' = \dot{q} - \dot{q}_{ref}$, tem-se que a expressão final para $\dot{q}(t)$ é dada por:

$$\dot{q}(t) = \dot{q}_{ref} + \frac{[\dot{F}_{Cone}^*(t) - k_c(F_{Cone} - F_{Cone}^*(t))] + K_2 F_{Cone} (F_{Cone} - y'_c)}{K'_1 + K_3 F_{Cone}} \quad (6.16)$$

6.4 Simulações Numéricas

Nessa seção, busca-se validar a performance do sistema de controle de trajetória descrito na Seção 6.3 para o modelo não-linear que descreve o comportamento do potencial da região central da superfície livre através de simulações numéricas realizadas através do *software MATLAB*[®].

Em um primeiro momento, a partir da estratégia de modelagem descrita em [47], descreve-se o procedimento de identificação dos parâmetros do modelo descrito pela equação (6.8) através do simulador para uma configuração aproximada da célula de Hele-Shaw presente no laboratório do Grupo de Automação e Controle (GRACO) da Universidade de Brasília, conforme visualizada na Figura 6.4.

Em seguida, definem-se trajetórias constantes e polinomiais como referências para o sistema de controle de trajetória proposto. Assim, para cada trajetória, os resultados são apresentados e discutidos.



Figura 6.4: Célula de Hele-Shaw.

6.4.1 Parâmetros do Modelo

O reservatório apresenta uma profundidade $H = 0,25\text{ m}$, largura $L = 2\text{ m}$, espessura $B_m = 0,004\text{ m}$, condutividade hidráulica $K = 0,0335\text{ m/s}$. Apesar do sumidouro estar localizado localizado em $(x, y) = (2, 0,06)\text{ m}$ na célula de Hele-Shaw, opta-se por assumir, no simulador, que o sumidouro está localizado no limite impermeável em $(x, y) = (2, 0)\text{ m}$ por questões de simplificação de implementação no *MATLAB*[®]. Adicionalmente, o cálculo da condutividade hidráulica está descrito no Anexo II.

Para essa configuração, o simulador forneceu então uma intensidade crítica do sumidouro de $q_c = -2,155 \times 10^{-3}\text{ m}^2/\text{s}$, implicando na convergência do potencial do nó central da superfície livre para $y_c = 0,0312\text{ m}$. Assim, calcularam-se os parâmetros K_p e τ_p para cada região de análise, conforme podem ser visualizados na Tabela 6.1.

A partir dos valores da Tabela 6.1, as retas que melhor se ajustaram ao comportamento de K_A e de K_B são dadas por:

$$K_A = 1,5065 - 0,0383y \quad (6.17)$$

$$K_B = 0,1312(y - 0,0312) \quad (6.18)$$

Assim, o modelo não-linear referente ao comportamento do nó central da superfície livre da

Tabela 6.1: Valores dos parâmetros do modelo em diferentes regiões de análise

Intensidade do Sumidouro (q_{ref})	Potencial (y_{ref})	Ganho Estático (K_p)	Constante de Tempo (τ_p)
$-0,65 \times 10^{-3}$	0,213	61,55	40,0
$-0,72 \times 10^{-3}$	0,208	65,28	44,3
$-0,80 \times 10^{-3}$	0,203	62,50	41,0
$-0,88 \times 10^{-3}$	0,198	72,71	45,5
$-0,98 \times 10^{-3}$	0,190	72,45	51,0
$-1,08 \times 10^{-3}$	0,184	75,00	54,0
$-1,19 \times 10^{-3}$	0,175	80,68	55,9
$-1,32 \times 10^{-3}$	0,164	85,61	58,6
$-1,46 \times 10^{-3}$	0,152	94,51	64,0
$-1,61 \times 10^{-3}$	0,136	107,45	67,8
$-1,78 \times 10^{-3}$	0,120	129,32	77,0

célula de Hele-Shaw é dado por:

$$\frac{y - y_{ref}}{q - q_{ref}} = \frac{1,5065 - 0,0383y}{s + 0,1312(y - 0,0312)} \quad (6.19)$$

6.4.2 Desempenho do Sistema de Controle

Segundo as especificações das bombas da célula de Hele-Shaw, a vazão máxima corresponde a $Q_{max} = -54 L/h = -1,5 \times 10^{-5} m^3/s$, em que o sinal negativo representa a extração do fluido do interior da célula. Como se assume um movimento bidimensional, a intensidade máxima do sumidouro q_{max} é então dada por:

$$q_{max} = -\frac{Q_{max}}{B_m} = -\frac{1,5 \times 10^{-5}}{0,004} = -0,0037 m^2/s \quad (6.20)$$

Assim, definindo o ganho k_c do controlador descrito pela equação (6.16) de tal forma que $p_c(s) = (s + 2)$, assume-se uma configuração inicial em que o sistema se encontra na situação de equilíbrio, ou seja, $(y_0, q_0) = (H, 0)$.

Em um primeiro teste, escolhe-se uma trajetória constante $y^*(t) = 0,15 m$. Assumindo $y_{ref} = y^*(t)$, tem-se que $q_{ref} = -0,0019 m^2/s$ a partir da equação (6.9). Para um tempo de simulação $t_s = 100$, os resultados podem ser visualizados nas Figuras 6.5-6.8.

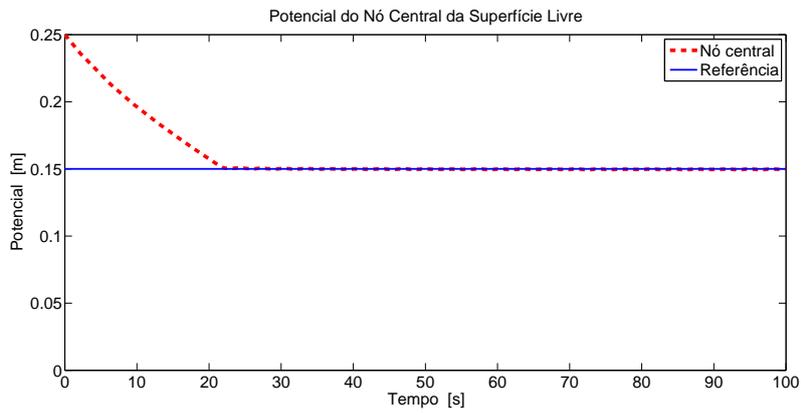


Figura 6.5: Evolução temporal do potencial do nó central da superfície livre (Trajetória Constante - Teste 01).

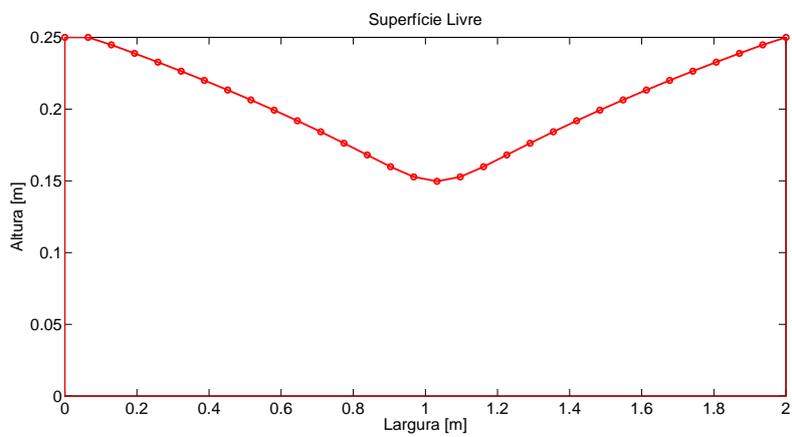


Figura 6.6: Superfície livre estabilizada na referência.

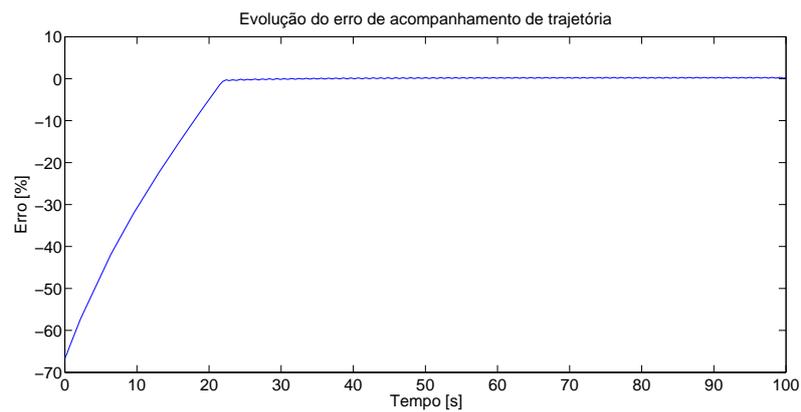


Figura 6.7: Evolução temporal do erro de acompanhamento de trajetória.

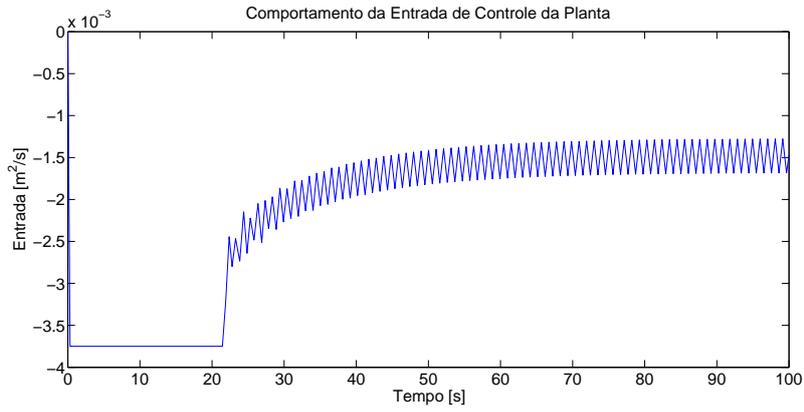


Figura 6.8: Evolução temporal do sinal de controle.

Em um segundo teste, mantém-se uma trajetória constante, porém com $y^*(t) = 0,10 m$. Assumindo novamente $y_{ref} = y^*(t)$, tem-se que $q_{ref} = -0,0029 m^2/s$ a partir da equação (6.9). Para um tempo de simulação $t_s = 100$, os resultados podem ser visualizados nas Figuras 6.9-6.12.

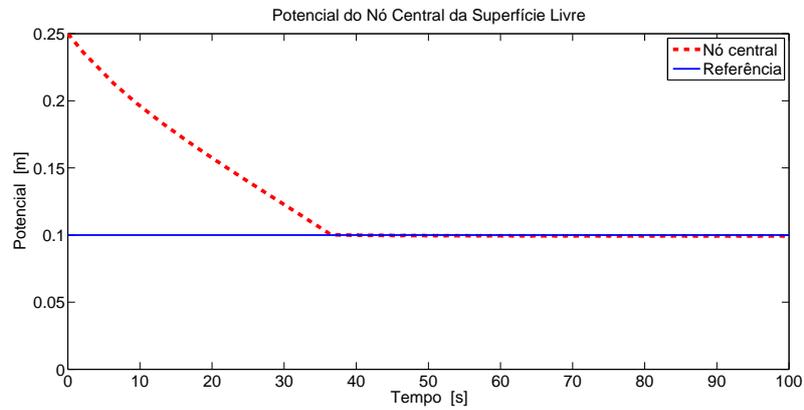


Figura 6.9: Evolução temporal do potencial do nó central da superfície livre (Trajetória Constante - Teste 02).

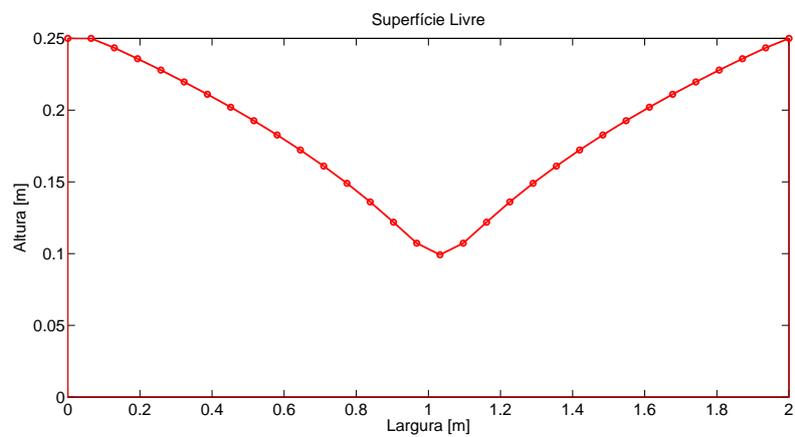


Figura 6.10: Superfície livre estabilizada na referência.

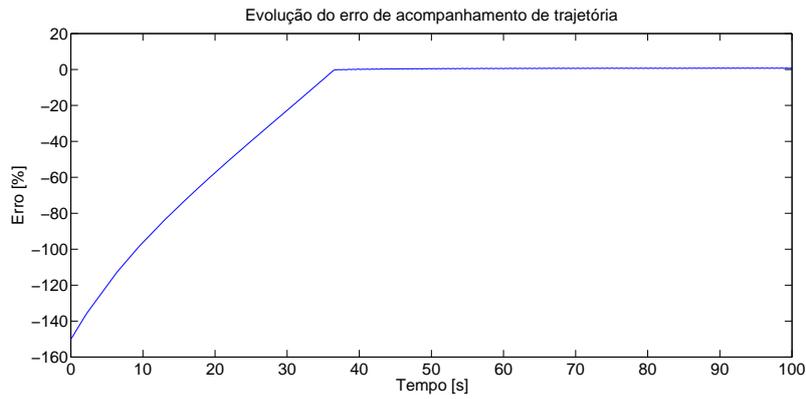


Figura 6.11: Evolução temporal do erro de acompanhamento de trajetória.

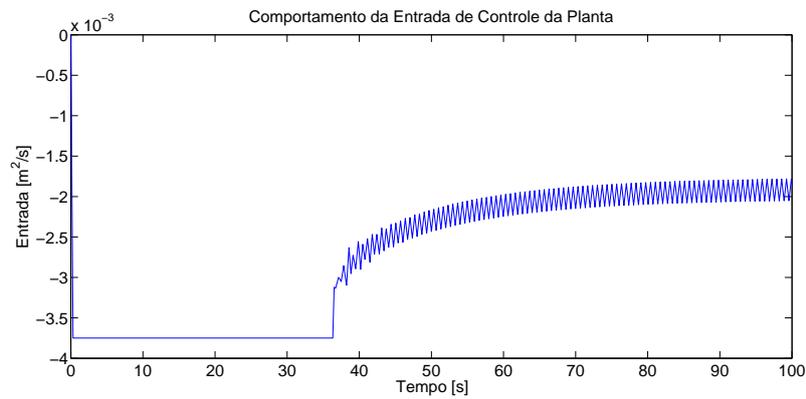


Figura 6.12: Evolução temporal do sinal de controle.

Em um terceiro teste, mantém-se uma trajetória constante, porém com $y^*(t) = 0,03\text{ m}$, ou seja, abaixo do potencial crítico para a configuração do reservatório. Fazendo $y_{ref} = y^*(t)$, implica-se que $q_{ref} = -0,0042\text{ m}^2/s$ a partir da equação (6.9). Para um tempo de simulação $t_s = 100$, os resultados podem ser visualizados nas Figuras 6.13-6.16.

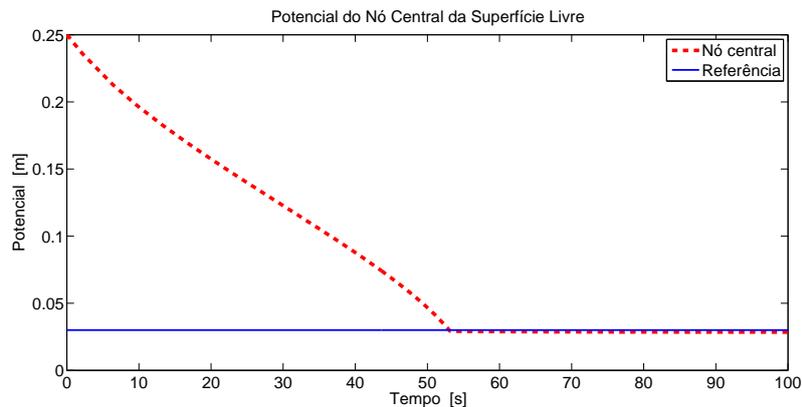


Figura 6.13: Evolução temporal do potencial do nó central da superfície livre (Trajetória Constante - Teste 03).

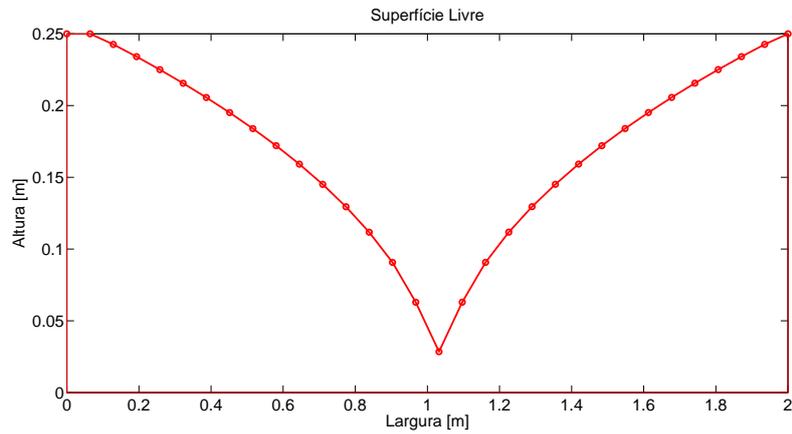


Figura 6.14: Superfície livre estabilizada na referência.

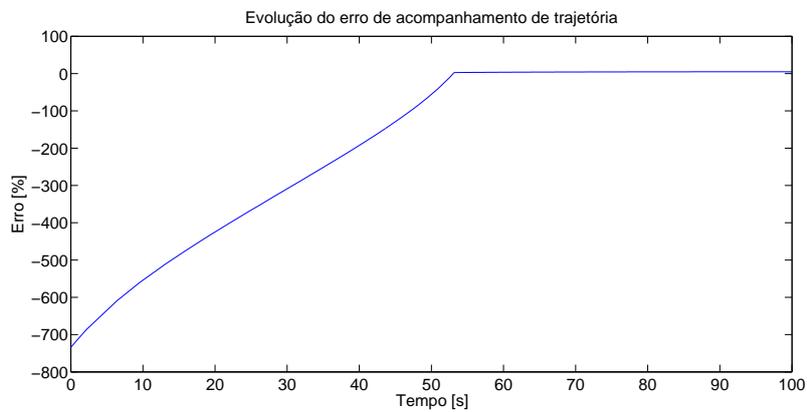


Figura 6.15: Evolução temporal do erro de acompanhamento de trajetória.

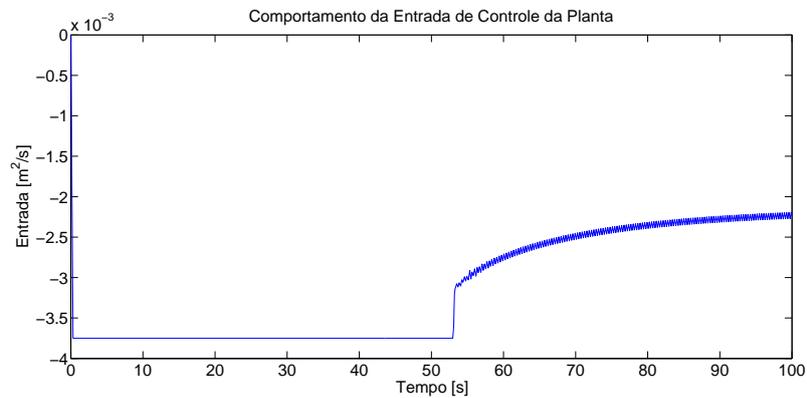


Figura 6.16: Evolução temporal do sinal de controle.

Em relação aos resultados anteriores, observa-se uma boa performance do controlador na tarefa de acompanhamento da referência através da resposta do sistema. O grau de oscilação do sinal de controle decorre, principalmente, aos possíveis desvios referentes ao método numérico implementado, além do fato que o modelo proposto aproxima um sistema de ordem infinita por um de primeira ordem não-linear.

Os erros de acompanhamento de trajetória convergem aproximadamente para os valores presentes na Tabela 6.2. Nos dois primeiros testes, percebe-se que o erro estabilizou próximo de zero, enquanto que, no terceiro caso, o erro é relativamente maior. Isso ocorre, principalmente, devido ao fato que o modelo proposto foi identificado em regiões acima do potencial crítico, já que, na prática, o sistema é instável em malha aberta na zona abaixo desse valor. Mesmo assim, o controlador ainda consegue estabilizar o sistema nessa zona de instabilidade, evitando assim a produção indesejável do segundo fluido.

Tabela 6.2: Erro médio de acompanhamento de trajetória constante em regime permanente - Simulações Numéricas

Simulação	Erro
1	$\approx 0,2\%$
2	$\approx 0,7\%$
3	$\approx 5,0\%$

Para os próximos testes, busca-se comparar a performance do controlador nas mesmas condições dos testes anteriores, porém definindo agora uma trajetória de referência a partir de um polinômio seguindo o método de planejamento de trajetória sem restrições descrito na subseção 2.2.3. Apesar do controle via saídas planas apresentar derivada temporal de primeira ordem da saída plana, que, na verdade, implicaria em um polinômio mínimo de 3ª ordem, opta-se por adicionar condições iniciais e finais nulas de segunda ordem. Esse procedimento garante então uma trajetória com um início e um final mais suave, mas implica em um polinômio de 5ª ordem:

$$y^*(t) = a_y t^5 + b_y t^4 + c_y t^3 + d_y t^2 + e_y t + f_y \quad (6.21)$$

Em um quarto teste, assumem-se as mesmas condições do primeiro teste, porém um tempo de simulação $t_s = 150$. Para determinar os coeficientes de $y^*(t)$, define-se $(y^*(0), y^*(125)) = (0, 0,15) m$ e mantém-se o valor de $y^*(125)$ até o final da simulação, o que acarreta nos seguintes coeficientes:

$$a_y = -1, \times 10^{-11} \quad b_y = 6,14 \times 10^{-9} \quad c_y = -5,12 \times 10^{-7} \quad d_y = 0 \quad e_y = 0 \quad f_y = 0,25 \quad (6.22)$$

Dessa forma, os resultados da quarta simulação podem ser visualizados nas Figuras 6.17-6.20.

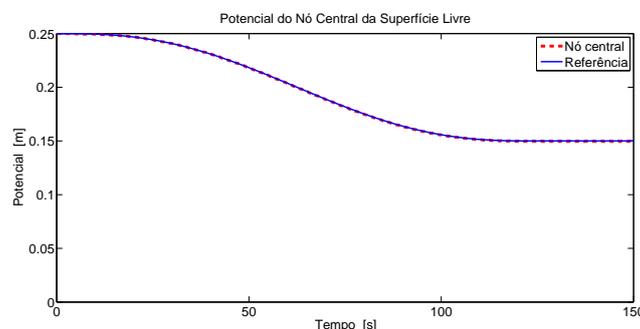


Figura 6.17: Evolução temporal do potencial do nó central da superfície livre (Trajetória Polinomial - Teste 04).

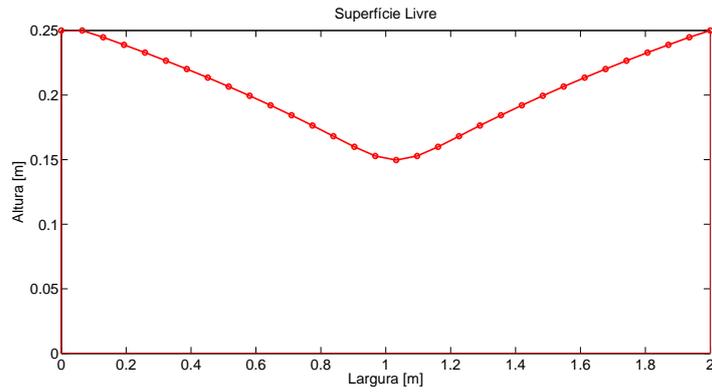


Figura 6.18: Superfície livre estabilizada na referência.

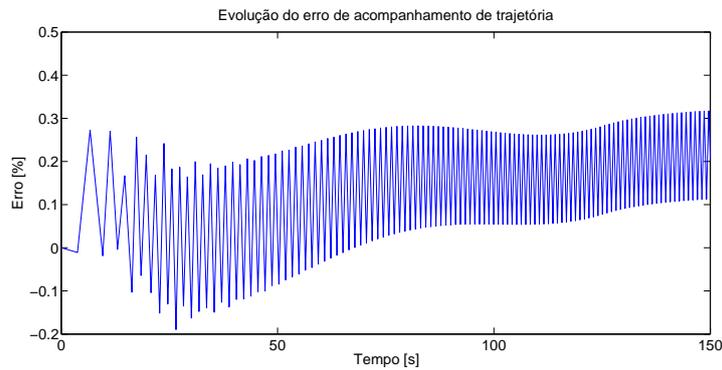


Figura 6.19: Evolução temporal do erro de acompanhamento de trajetória.

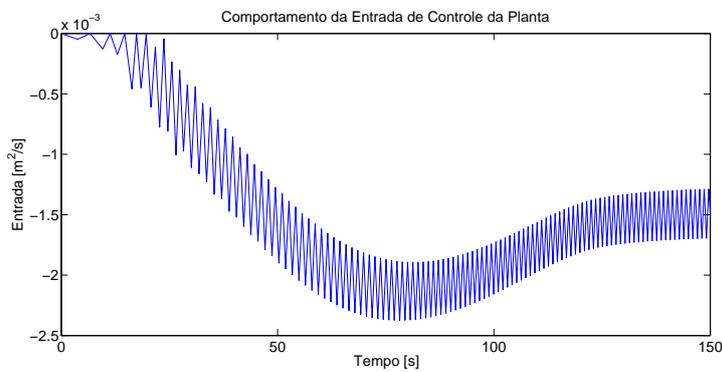


Figura 6.20: Evolução temporal do sinal de controle.

Em um quinto teste, assumem-se as mesmas condições do segundo teste, porém um tempo de simulação $t_s = 150$. Para determinar os coeficientes de $y^*(t)$, define-se $(y^*(0), y^*(125)) = (0, 0,10) m$ e mantém-se o valor de $y^*(125)$ até o final da simulação, o que acarreta nos seguintes coeficientes:

$$a_y = -2,95 \times 10^{-11} \quad b_y = 9,21 \times 10^{-9} \quad c_y = -7,68 \times 10^{-7} \quad d_y = 0 \quad e_y = 0 \quad f_y = 0,25 \quad (6.23)$$

Dessa forma, os resultados da quinta simulação podem ser visualizados nas Figuras 6.21-6.24.

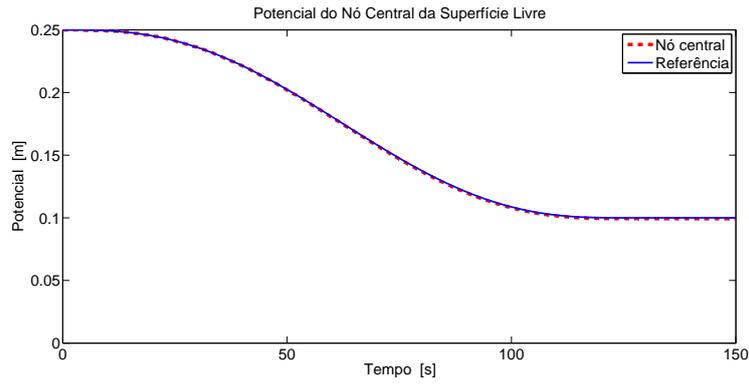


Figura 6.21: Evolução temporal do potencial do nó central da superfície livre (Trajetória Polinomial - Teste 05).

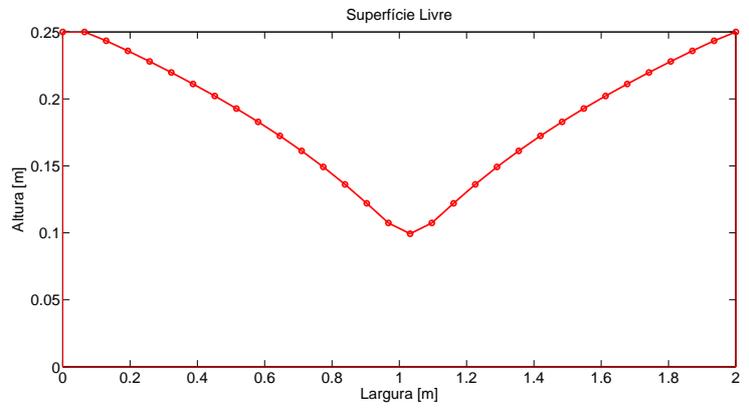


Figura 6.22: Superfície livre estabilizada na referência.

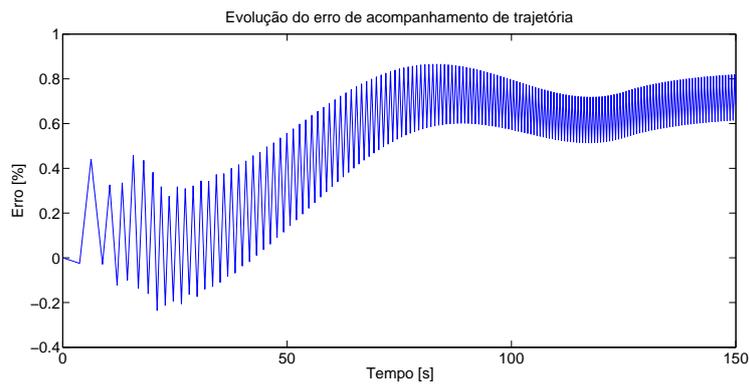


Figura 6.23: Evolução temporal do erro de acompanhamento de trajetória.

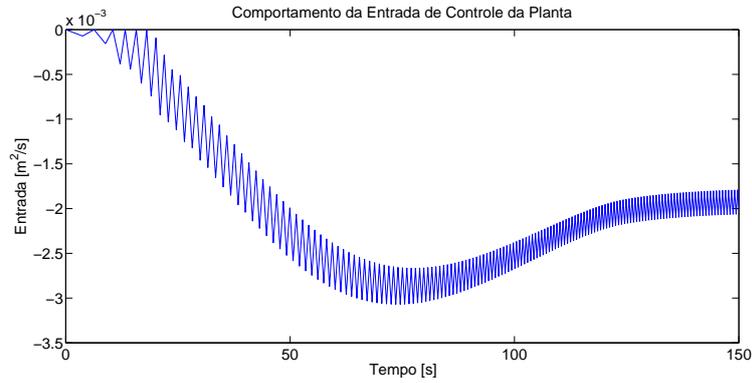


Figura 6.24: Evolução temporal do sinal de controle.

Em um sexto teste, assumem-se as mesmas condições do terceiro teste, porém um tempo de simulação $t_s = 150$. Para determinar os coeficientes de $y^*(t)$, define-se $(y^*(0), y^*(125)) = (0, 0,03) m$ e mantém-se o valor de $y^*(125)$ até o final da simulação, o que acarreta nos seguintes coeficientes:

$$a_y = -4,32 \times 10^{-11} \quad b_y = 1,35 \times 10^{-8} \quad c_y = -1,12 \times 10^{-6} \quad d_y = 0 \quad e_y = 0 \quad f_y = 0,25 \quad (6.24)$$

Dessa forma, os resultados da sexta simulação podem ser visualizados nas Figuras 6.25-6.28.

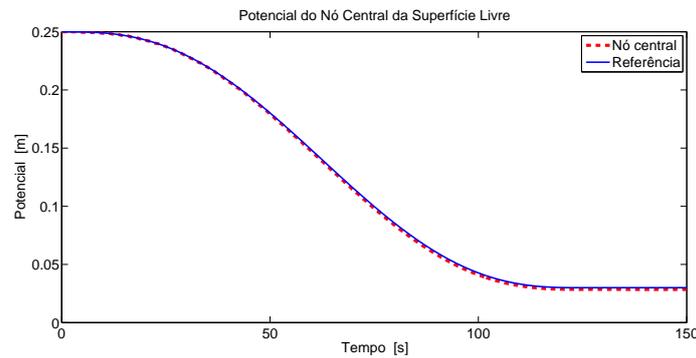


Figura 6.25: Evolução temporal do potencial do nó central da superfície livre (Trajetória Polinomial - Teste 06).

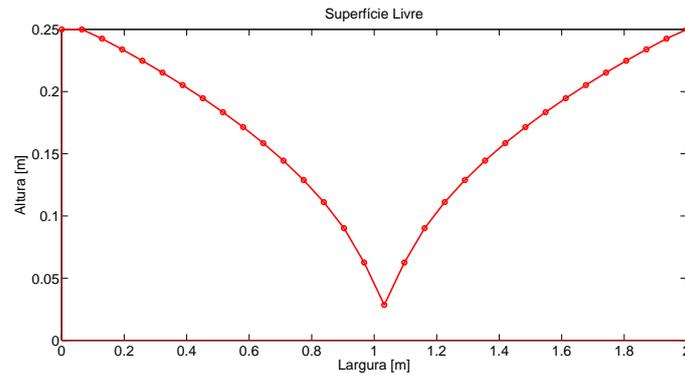


Figura 6.26: Superfície livre estabilizada na referência.

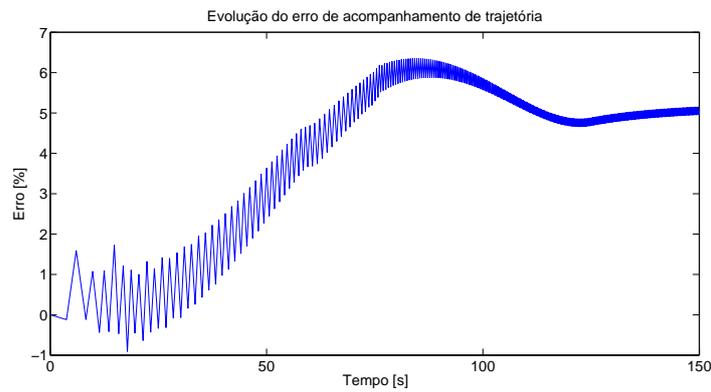


Figura 6.27: Evolução temporal do erro de acompanhamento de trajetória.

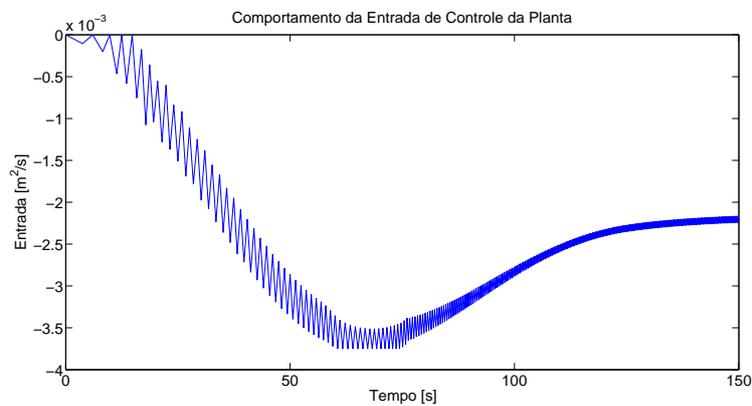


Figura 6.28: Evolução temporal do sinal de controle.

Em relação aos resultados referentes a trajetória polinomial, observa-se novamente uma boa performance do controlador na tarefa de acompanhamento da referência ao analisar a resposta do sistema. Apesar do grau de oscilação do sinal de controle ser recorrente, percebe-se que este apresenta um comportamento mais suave devido às características da trajetória polinomial, o que acarreta num menor esforço por parte do atuador em relação às primeiras simulações.

Os erros de acompanhamento de trajetória convergem aproximadamente para os valores presentes na Tabela 6.3. No geral, percebe-se as mesmas características descritas na análise dos resultados referentes a trajetória constante.

Tabela 6.3: Erro médio de acompanhamento de trajetória polinomial em regime permanente - Simulações Numéricas

Simulação	Erro
4	$\approx 0,3\%$
5	$\approx 0,7\%$
6	$\approx 5,0\%$

6.5 Resultados Experimentais

Em relação ao aparato experimental, há um conjunto de 3 bombas pulsadoras disponíveis como atuadores para o sistema de controle, como pode ser observado na Figura 6.29. Uma das bombas é utilizada para a extração do fluido, enquanto que as outras duas são utilizadas para a injeção de fluido com o objetivo de garantir um nível constante das colunas de fluido em cada uma das extremidades da célula. Isso se deve ao fato que o modelo proposto por Córdoba [47] assume que não há variação de altura da superfície livre em regiões distantes do ponto de extração. Para isso, a partir das medições dos sensores localizados na parte superior das colunas, como pode ser observado na Figura 6.30, acionam-se as bombas quando o nível estiver abaixo de um determinado valor de referência.



Figura 6.29: Conjunto de bombas disponíveis na célula de Hele-Shaw.

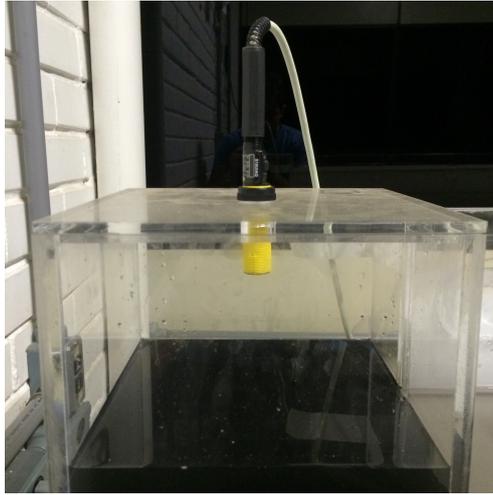


Figura 6.30: Sensor de nível das colunas de fluido presentes nas extremidades da célula de Hele-Shaw.

Adicionalmente, como ilustrado na Figura 6.31, um par de câmeras é responsável por captar 18 pontos da superfície-livre, o que permite determinar a altura desses em relação ao limite impermeável da célula.

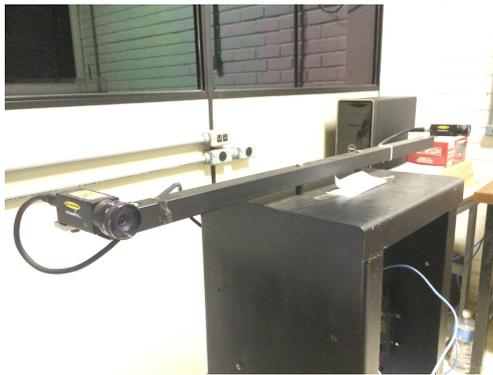


Figura 6.31: Par de câmeras para captação da altura dos pontos que discretizam a superfície livre da célula de Hele-Shaw.

A integração desses atuadores e sensores é então realizada por um CLP (ver Figura 6.32), o qual se comunica com *MATLAB*[®] através do protocolo de comunicação *OPC*.



Figura 6.32: Controlador Lógico Programável (CLP) responsável pela integração dos sensores e atuadores da célula de Hele-Shaw.

Apesar da diferença na localização do sumidouro no aparato experimental em relação ao simulador, utilizaram-se os parâmetros do modelo não-linear descrito pela equação (6.19). Para contornar essa aproximação, optou-se por adicionar um termo integrador ao termo de correção descrito pela equação (6.14):

$$v_{Cone} = \dot{F}_{Cone}^*(t) - k_c(F_{Cone} - F_{Cone}^*(t)) - k_I \int (F_{Cone} - F_{Cone}^*(t)) \quad (6.25)$$

onde k_I é uma constante não-nula positiva.

Nos testes experimentais, as trajetórias de referência são construídas em tempo real a partir do polinômio descrito pela equação (6.21). Para isso, determinam-se os coeficientes de $y^*(t)$ de tal forma que $y^*(0)$ corresponda ao valor aferido pela câmera do nó central da superfície livre no início do experimento, enquanto que $y^*(T)$ corresponda ao valor a ser atingido em T iterações do *MATLAB*[®]. Após esse instante, mantém-se o valor de $y^*(T)$ até o final do experimento.

No primeiro experimento, iniciou-se com uma configuração inicial $(y_0, q_0) = (0,2336, 0)$ em que se definiu que o nó central deveria atingir $y^*(T) = 0,2024 \text{ m}$ após 12000 iterações, implicando nos seguintes coeficientes:

$$a_y = -7,52 \times 10^{-22} \quad b_y = 2,25 \times 10^{-17} \quad c_y = -1,80 \times 10^{-13} \quad d_y = 0 \quad e_y = 0 \quad f_y = 0,2336 \quad (6.26)$$

Assumindo $y_{ref} = y^*(T)$, implica-se que $q_{ref} = -0,00095 \text{ m}^2/\text{s}$ a partir da equação (6.9). Assim, definido o ganho k_c de tal forma que $p_c(s) = (s + 0,35)$ e $k_I = 0,001$, os resultados do primeiro experimento foram obtidos após 63413 iterações do *MATLAB*[®] (ou $\approx 678 \text{ s}$), como está apresentado nas Figuras 6.33-6.36.

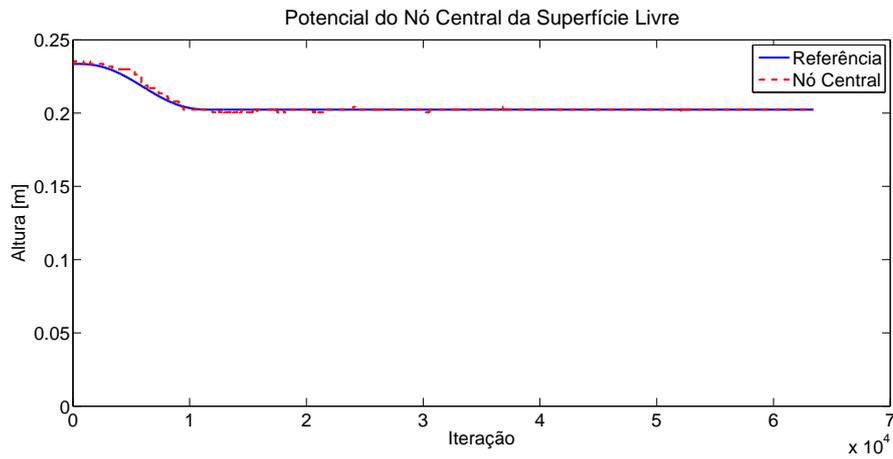


Figura 6.33: Evolução temporal do potencial do nó central da superfície livre (Trajetória Polinomial - Experimento 01).

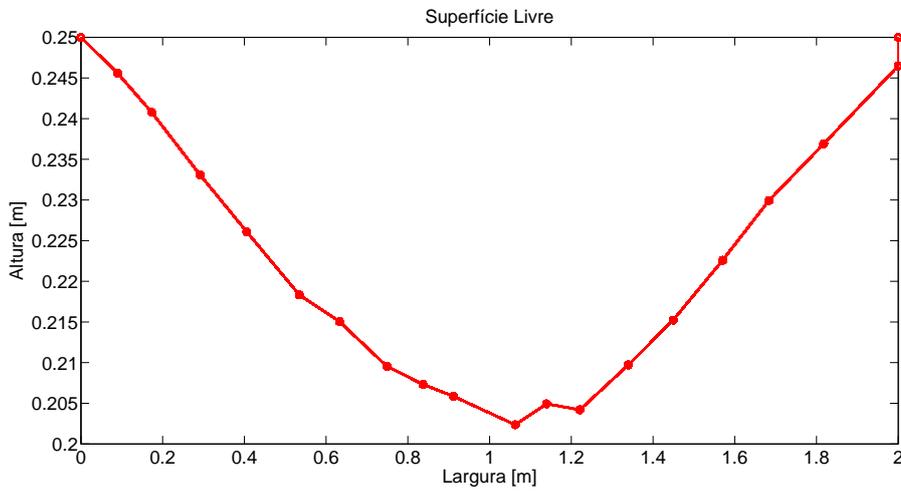


Figura 6.34: Superfície livre estabilizada na referência.

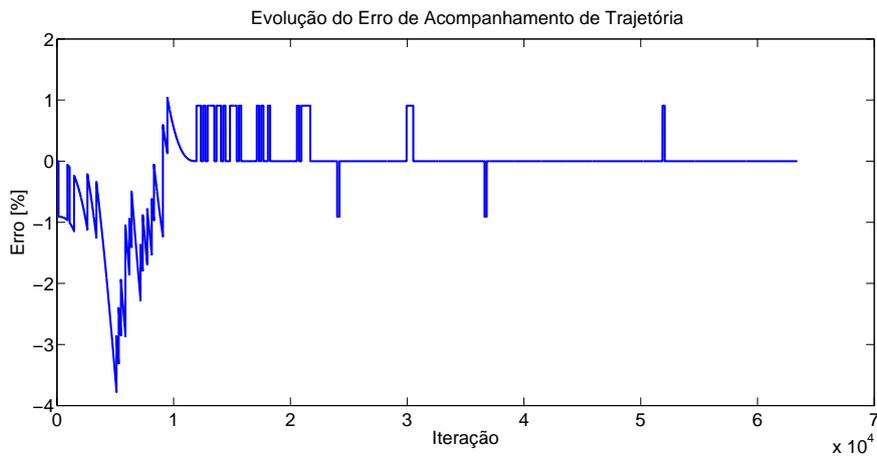


Figura 6.35: Evolução temporal do erro de acompanhamento de trajetória.

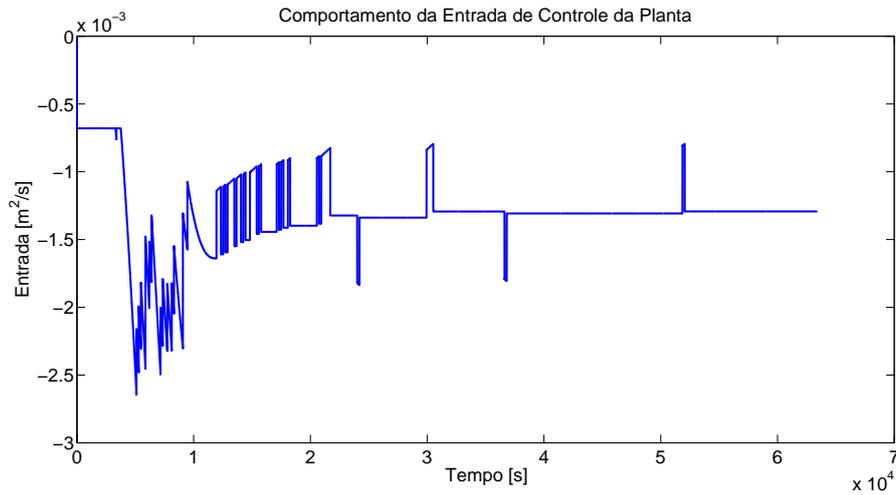


Figura 6.36: Evolução temporal do sinal de controle.

Em seguida, no segundo experimento, iniciou-se com uma configuração inicial $(y_0, q_0) = (0,2354, 0)$ em que se definiu que o nó central deveria atingir $y^*(T) = 0,13\text{ m}$ após 24000 iterações, implicando nos seguintes coeficientes:

$$a_y = -7,89 \times 10^{-23} \quad b_y = 4,73 \times 10^{-17} \quad c_y = -1,80 \times 10^{-14} \quad d_y = 0 \quad e_y = 0 \quad f_y = 0,2354 \quad (6.27)$$

Assumindo $y_{ref} = y^*(T)$, implica-se que $q_{ref} = -0,0023\text{ m}^2/\text{s}$ a partir da equação (6.9). Assim, definido o ganho k_c de tal forma que $p_c(s) = (s + 0,25)$ e $k_I = 0,001$, os resultados do segundo experimento foram obtidos após 106010 iterações do *MATLAB*[®] (ou $\approx 1108\text{ s}$), como está apresentado nas Figuras 6.37-6.40.

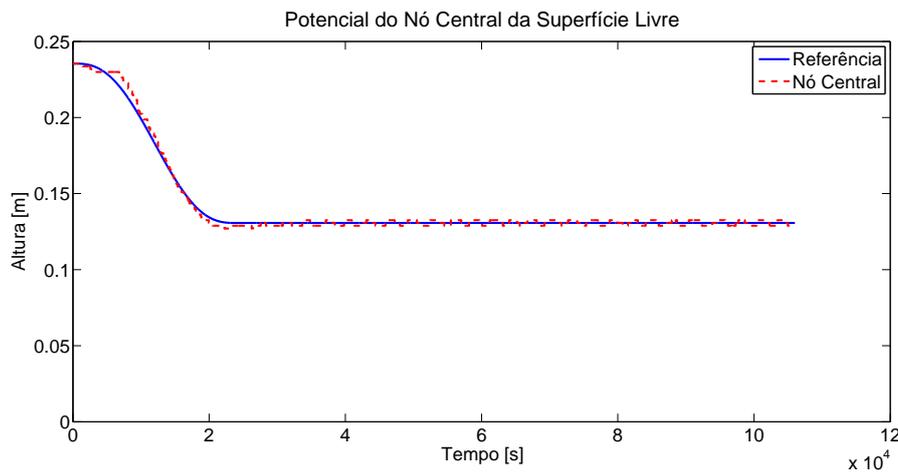


Figura 6.37: Evolução temporal do potencial do nó central da superfície livre (Trajetória Polinomial - Experimento 02).

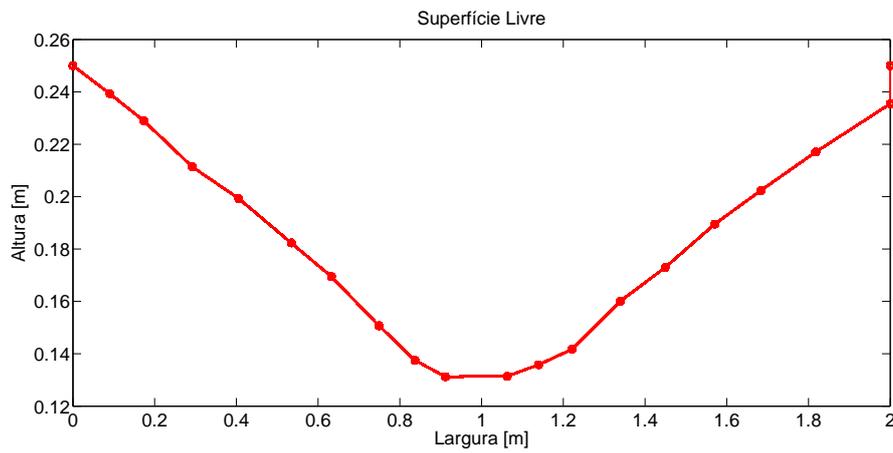


Figura 6.38: Superfície livre estabilizada na referência.

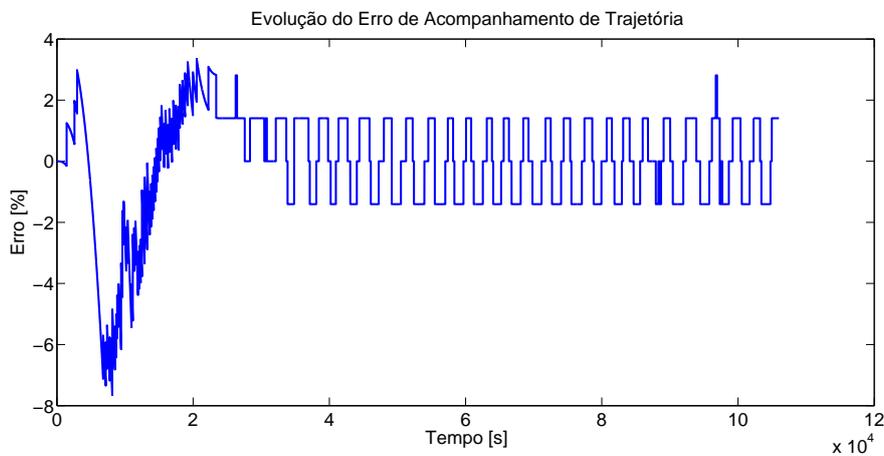


Figura 6.39: Evolução temporal do erro de acompanhamento de trajetória.

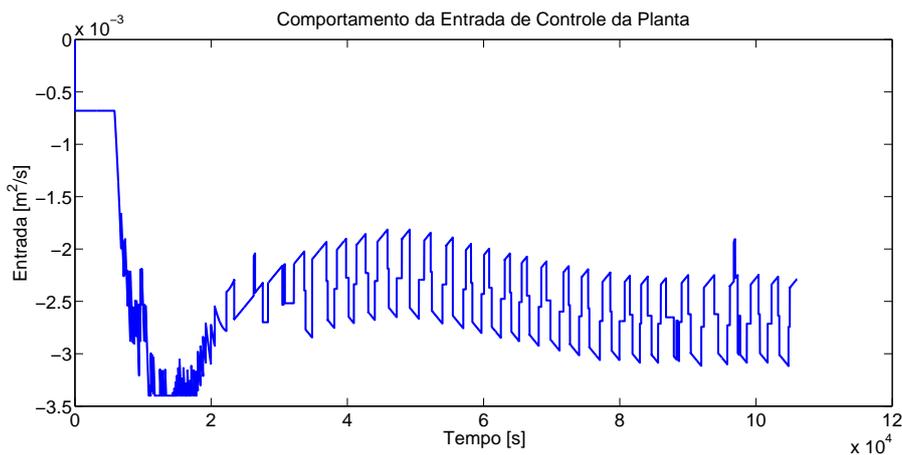


Figura 6.40: Evolução temporal do sinal de controle.

Por último, no terceiro experimento, escolheu-se o valor em regime permanente de tal forma que este seja próximo da região de instabilidade do cone. No simulador, tem-se que o potencial crítico

se encontra aproximadamente $0,03\text{ m}$ acima do sumidouro, logo, como o sumidouro está a uma altura de $0,06\text{ m}$ na célula de Hele-Shaw, define-se que o nó central deveria atingir $y^*(T) = 0,09\text{ m}$ após 24000 iterações. Assim, iniciou-se o experimento com uma configuração inicial $(y_0, q_0) = (0,2391, 0)$, implicando nos seguintes coeficientes:

$$a_y = -1,08 \times 10^{-22} \quad b_y = 6,48 \times 10^{-17} \quad c_y = -1,04 \times 10^{-13} \quad d_y = 0 \quad e_y = 0 \quad f_y = 0,2391 \quad (6.28)$$

Assumindo $y_{ref} = y^*(T)$, implica-se que $q_{ref} = -0,0031\text{ m}^2/\text{s}$ a partir da equação (6.9). Assim, definido o ganho k_c de tal forma que $p_c(s) = (s + 0,2)$ e $k_I = 0,001$, os resultados do segundo experimento foram obtidos após 84886 iterações do *MATLAB*[®] (ou $\approx 886\text{ s}$), como está apresentado nas Figuras 6.37-6.40.

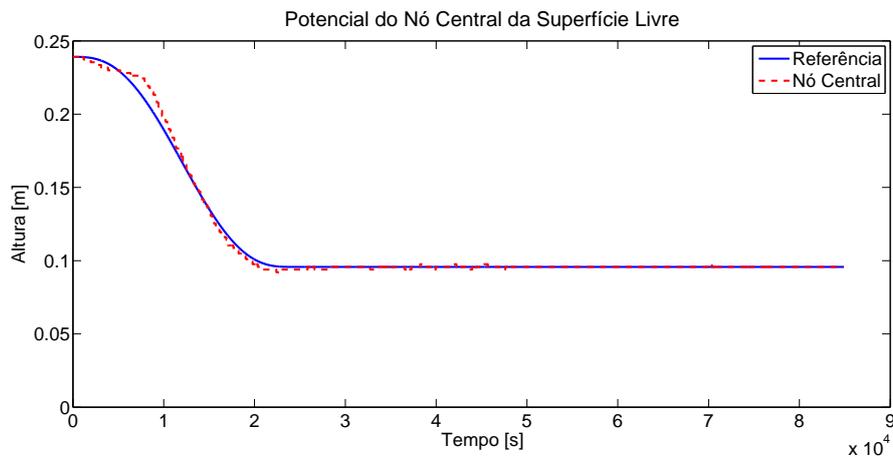


Figura 6.41: Evolução temporal do potencial do nó central da superfície livre (Trajetória Polinomial - Experimento 03).

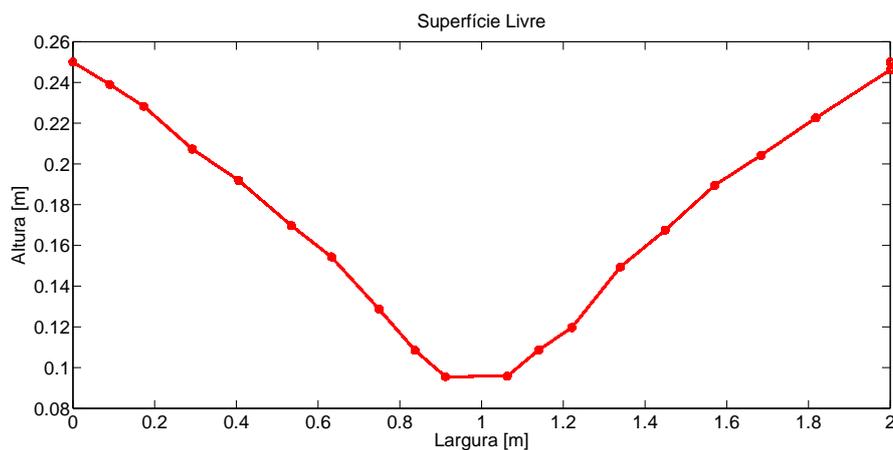


Figura 6.42: Superfície livre estabilizada na referência.

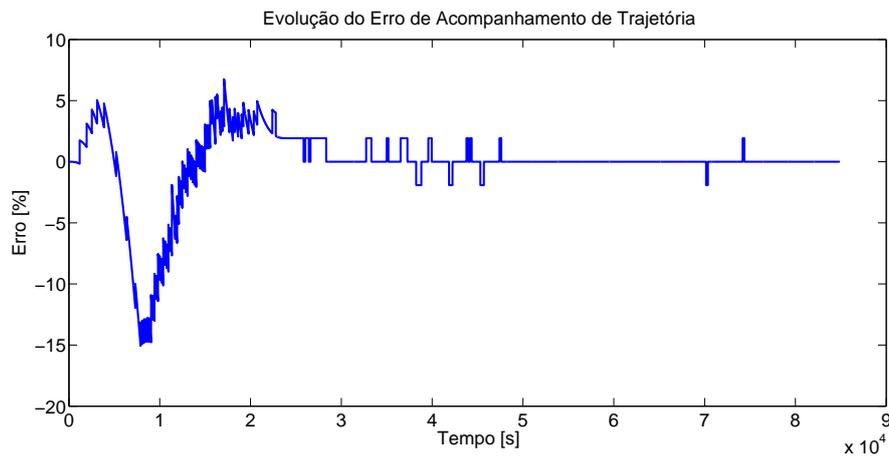


Figura 6.43: Evolução temporal do erro de acompanhamento de trajetória.

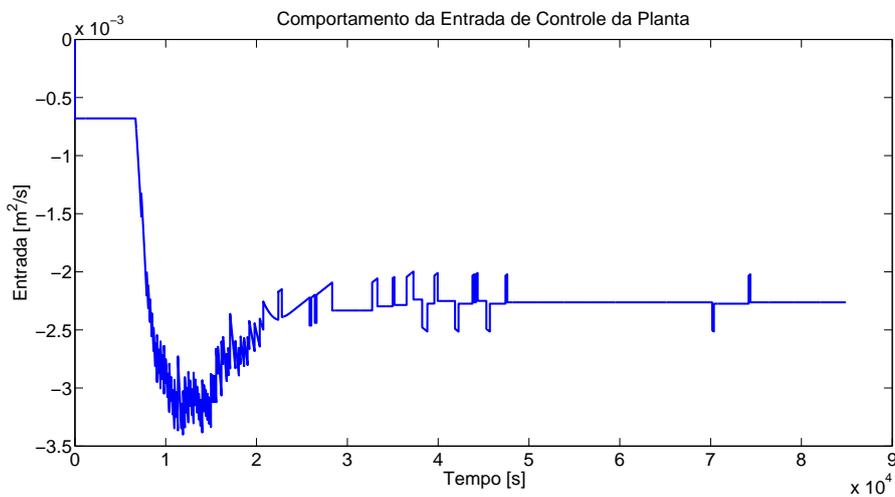


Figura 6.44: Evolução temporal do sinal de controle.

Em relação aos resultados dos experimentos, observa-se uma boa performance do controlador no sentido de que o nó central do sistema acompanha as trajetórias de referência. Com exceção do segundo experimento, percebe-se uma redução no grau de oscilação do sinal de controle quando o sistema atinge o regime permanente. Essa diferença se deve, principalmente, ao comportamento pulsantes da bomba de extração que, por muitas vezes, pode gerar um variação significativa nas medições das câmeras. Tal fenômeno acaba caracterizando um leve desvio médio da ordem de 2 a 4 milímetros em torno da trajetória, o que força o controlador a agir sobre o sistema, gerando essa oscilação.

Os erros de acompanhamento de trajetória convergem aproximadamente para os valores presentes na Tabela 6.4. A pequena variação do erro do segundo experimento em relação aos demais testes acaba sendo consequência do comportamento pulsantes da bomba descrito anteriormente.

Tabela 6.4: Erro médio de acompanhamento de trajetória polinomial em regime permanente - Testes Experimentais

Experimento	Erro
1	$\approx 0\%$
2	$\approx 1,5\%$
3	$\approx 0\%$

Do ponto de vista prático, o acompanhamento da superfície livre não se apresenta como tarefa fácil devido a impossibilidade de realizar o seu sensoriamento em operações no reservatório de petróleo. Espera-se que, a partir de informações sobre a evolução temporal das vazões críticas, aproximar os modelos descritos nesse manuscrito a fim de implementar sistemas de controle que permitam otimizar a produção de óleo em relação aos outros fluidos presentes no reservatório.

6.6 Conclusões

A modelagem matemática e o sistema de controle baseado na teoria de planicidade diferencial para um reservatório sujeito ao fenômeno do cone de gás foram apresentados neste capítulo. Resultados de simulações numéricas e de testes experimentais são apresentados e discutidos com o objetivo de validar o controlador proposto.

Capítulo 7

Conclusões

Neste manuscrito foi apresentada a modelagem matemática para diferentes modelos não-lineares de sistemas associados a indústria do petróleo seguindo trabalhos já difundidos na literatura. Discutiu-se o desenvolvimento de um sistema de controle baseado na teoria de planicidade diferencial como solução para problemas relacionados ao planejamento e ao acompanhamento de trajetória. Para isso, após uma revisão bibliográfica acerca do tema, descrevem-se métodos para determinar as saídas planas de sistemas lineares e não-lineares. Em seguida, abordaram-se os conceitos de sistemas liouvillianos e entradas planas como potenciais soluções para o controle de sistemas não-diferencialmente planos.

Em relação aos veículos marítimos, diferentes estratégias de controle foram validadas para um determinado conjunto de referências através de simulações numéricas por falta de disponibilidade de uma plataforma didática. No entanto, observou-se uma certa limitação dos controladores devido a presença de singularidades nas expressões que descrevem os modelos dinâmicos. Adicionalmente, verificou-se um grau de robustez com respeito as perturbações externas do tipo senoidal na direção em que o sistema não é atuado, sendo esta considerada em [37] como situação crítica durante aplicações práticas.

Em relação ao reservatório sujeito ao fenômeno do cone 2D, ao representar o sistema de ordem infinita por um sistema não-linear de primeira ordem diferencialmente plano, validou-se um sistema de controle que estabiliza o nó central da superfície livre para uma dada referência através de simulações numéricas e testes experimentais na célula de Hele-Shaw. Em termos práticos, ao estabilizar no interior da zona de instabilidade do cone, garante-se somente a produção do fluido de interesse. Sob ponto de vista econômico, não é possível obter esses resultados através de estratégias de controle em malha aberta, as quais são comumente encontradas na indústria. Assim, potenciais gastos com separação de fluidos na superfície podem ser evitados mesmo para vazões de produção elevadas.

7.1 Contribuições

Como contribuições desse manuscrito, podem se citar as seguintes:

1. Expansão para o caso MIMO da estratégia de desenvolvimento do compensador dinâmico proposta por Stumper *et al.* [42].
2. Desenvolvimento das expressões das trajetórias nominais para o veículo subaquático de 5 graus de liberdade a partir do caráter liouvilliano do sistema. Nesse caso, assume-se que a dinâmica associada ao movimento na direção Jogo já estabilizada pela própria estrutura mecânica do sistema ou por atuadores independentes.
3. Validação experimental do controlador que estabiliza nó central da superfície livre do reservatório sujeito ao fenômeno do cone 2D na célula de Hele-Shaw.

7.2 Trabalhos Futuros

Algumas possíveis sugestões para trabalhos futuros são resumidas a seguir:

1. Controle de Veículos Marítimos
 - Estender as estratégias de controles baseadas na teoria de planicidade diferencial para modelos em que a orientação é representada por quatérnions a fim de evitar problemas de singularidade das equações cinemáticas.
 - Adicionar a influência dos componentes não-lineares na referentes ao esforços hidrodinâmicos nas equações dinâmicas.
 - Validar a robustez dos controladores em relação a outros tipos de perturbações ambientais, tais como correntes marítimas e ventos.
 - Validação experimental do controlador proposto para o veículo subaquático através do ROV da empresa VideoRay (ver Figura 7.1) recentemente adquirido pelo Programa de Recursos Humanos (PRH) da Petrobrás da Universidade de Brasília.



Figura 7.1: VideoRay PRO 4.

2. Fenômeno do Cone em Reservatórios de Petróleo

- Propor uma extensão do modelo não-linear de tal forma que representa a variação da altura dos níveis laterais da célula de Hele-Shaw. Assim, aplicar a teoria de planicidade diferencial para propor um novo sistema de controle.
- Extensão dos resultados para o caso tridimensional.

7.3 Publicações

O trabalho desenvolvido nesse manuscrito permitiu o desenvolvimento, de forma direta ou indireta, dos seguintes artigos aceitos para apresentação em conferências:

- *LIMAVERDE FILHO, J. O. A.; FORTALEZA, E. L. F. Motion planning and tracking for marine vessels. In: Proc. ASME 2013 32nd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering (OMAE 2013). Nantes, France. 2013.*
- *LIMAVERDE FILHO, J. O. A.; FORTALEZA, E. L. F. Control of the Underactuated Ship - A Flatness Based Approach. In: Proc. XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2013). Fortaleza, Ceará. Brasil. 2013*
- *LIMAVERDE FILHO, J. O. A.; FORTALEZA, E. L. F. Control of Underactuated AUVs - A Flatness-Based Approach. In: Proc. IEEE/MST OCEANS'14. Taipei, Taiwan. 2014.*
- *LIMAVERDE FILHO, J. O. A.; FORTALEZA, E. L. F. Control of the Ball and Beam using Kalman Filter - A Flatness Based Approach. In: Proc. XX Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2014). Belo Horizonte, Minas Gerais. Brasil. 2014*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] OLFATI-SABER, R. *Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles*. Tese (Doutorado) — Massachusetts Institute of Technology, 2001.
- [2] MARTIN, P.; MURRAY, R.; ROUCHON, P. Flatness based design. *Control Systems, Robotics and Automation*, v. 13, january 2002.
- [3] NAKAMURA, Y.; MUKHERJEE, R. Nonholonomic path planning of space robots via a bidirectional approach. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 7, n. 4, p. 500–514, aug 1991.
- [4] DO, K.; PAN, J. Robust and adaptive path following for underactuated autonomous underwater vehicles. In: *American Control Conference, 2003. Proceedings of the 2003*. Colorado, USA: IEEE, 2003. v. 3, p. 1994 – 1999 vol.3.
- [5] BIRGLEN, L.; GOSSELIN, C. Kinetostatic analysis of underactuated fingers. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 20, n. 2, p. 211–221, april 2004.
- [6] PAN, J.; DO, K. D. *Control of Ships and Underwater Vehicles: Design for Underactuated and Nonlinear Marine Systems*. Crawley, Australia: Springer, 2009. (Advances in Industrial Control).
- [7] LEFEBER, E.; PETTERSEN, K.; NIJMEIJER, H. Tracking control of an underactuated ship. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 11, n. 1, p. 52–61, jan 2003.
- [8] SOUZA, E. C. *Modelagem e Controle de Veículos Submarinos Não Tripulados*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- [9] BAILEY, B. et al. Water control. *Oilfield Rev*, v. 12, n. 1, p. 30–51, 2000.
- [10] AHMED, P. T. *Reservoir Engineering Handbook*. : Elsevier Science, 2006.
- [11] DAVIDSON, K. S. M.; SCHIFF, L. I. Turning and course keeping qualities. *Transactions of SNAME*, v. 54, 1946.
- [12] NOMOTO, K. T.; TAGUCHI, K. H.; HIRANO, S. On the steering qualities of ships. *International Shipbuilding Progress*, v. 4, p. 354–370, 1946.

- [13] FOSSEN, T. I. *Guidance and Control of Ocean Vehicles*. Trondheim, Norway: John Wiley & Sons, 1994.
- [14] FOSSEN, T.; FJELLSTAD, O. erik. Nonlinear modelling of marine vehicles in 6 degrees of freedom. *Journal of Mathematical Modeling of Systems*, v. 1, n. 1, 1995.
- [15] CLARKE, D. The foundations of steering and maneuvering. IEEE, Giron, Spain, p. 10–25, 2003.
- [16] LEONARD, N. Control synthesis and adaptation for an underactuated autonomous underwater vehicle. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, v. 20, n. 3, p. 211 –220, July 1995.
- [17] PETTERSEN, K.; EGELAND, O. Time-varying exponential stabilization of the position and attitude of an underactuated autonomous underwater vehicle. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 44, n. 1, p. 112 –115, January 1999.
- [18] FANTONI, I. et al. Stabilization of a nonlinear underactuated hovercraft. In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, 1999*. Phoenix: IEEE, 1999. v. 3, p. 2533 –2538 vol.3.
- [19] BROCKETT, R. W. et al. Asymptotic stability and feedback stabilization. Defense Technical Information Center, 1983.
- [20] REYHANOGLU, M. Control and stabilization of an underactuated surface vessel. In: *Proceedings of the 35th IEEE Decision and Control, 1996*. Kobe: IEEE, 1996. v. 3, p. 2371–2376.
- [21] PETTERSEN, K.; EGELAND, O. Exponential stabilization of an underactuated surface vessel. In: *Proceedings of the 35th IEEE on Decision and Control, 1996*. Kobe: IEEE, 1996. v. 1, p. 967 –972 vol.1.
- [22] CHENG, J.; YI, J.; ZHAO, D. Stabilization of an underactuated surface vessel via discontinuous control. In: *American Control Conference, 2007. ACC '07*. New York, USA: IEEE, 2007. p. 206–211.
- [23] LOGAN, C. A comparison between h-infinity/ μ -synthesis control and sliding-mode control for robust control of a small autonomous underwater vehicle. In: *Proceedings of the 1994 Symposium on Autonomous Underwater Vehicle Technology (AUV'94), 1994*. Massachusetts, USA: IEEE, 1994. p. 399–416.
- [24] FRYXELL, D. et al. An integrated approach to the design and analysis of navigation, guidance and control systems for auvs. In: *Proceedings of the 1994 Symposium on Autonomous Underwater Vehicle Technology (AUV'94), 1994*. Massachusetts, USA: IEEE, 1994. p. 208–217.
- [25] PETTERSEN, K.; NIJMEIJER, H. Semi-global practical stabilization and disturbance adaptation for an underactuated ship. In: *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, 2000*. Sydney, Austrália: IEEE, 2000. v. 3, p. 2144 –2149.

- [26] LIU, Y.; GUO, C.; ZHOU, R. Robust feedback stabilization control of an underactuated surface vessel. In: *Computer Science and Information Engineering, 2009 WRI World Congress on*. Los Angeles, USA: IEEE, 2009. v. 5, p. 46–50.
- [27] GODHAVN, J.-M. Nonlinear tracking of underactuated surface vessels. In: *Proceedings of the 35th IEEE Decision and Control, 1996*. Kobe: IEEE, 1996. v. 1, p. 975–980.
- [28] JIANG, Z.-P.; NIJMEIJER, H. A recursive technique for tracking control of nonholonomic systems in chained form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 44, n. 2, p. 265–279, February 1999.
- [29] PETTERSEN, K.; NIJMEIJER, H. Underactuated ship tracking control: theory and experiments. *International Journal of Control*, v. 74, n. 14, p. 1435–1446, 2001.
- [30] DO, K.; JIANG, Z.; PAN, J. Underactuated ship global tracking under relaxed conditions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 47, n. 9, p. 1529–1536, September 2002.
- [31] FLIESS, M. et al. Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. *C. R. Acad. Sciences*, v. 315, p. 619–624, 1992.
- [32] ROUCHON, P. et al. Flatness, motion planning and trailer systems. In: *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control, 1993*. San Antonio, TX: IEEE, 1993. v. 3, p. 2700–2705.
- [33] FLIESS, M.; LÉVINE, J.; ROUCHON, P. Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples. *International Journal of Control*, v. 61, p. 1327–1361, 1995.
- [34] CHELOUAH, A. et al. Differential flatness and control of induction motors. *Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications*, p. 80–85, 1996.
- [35] ROTHFUSS, R.; RUDOLPH, J.; ZEITZ, M. Flatness based control of a nonlinear chemical reactor model. *Automatica*, v. 32, n. 10, p. 1433–1439, 1996.
- [36] MARTIN, P. *Contributions à l'étude des systèmes linéaires différentiellement plats*. Tese (Doutorado) — École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2002.
- [37] SIRA-RAMÍREZ, H. On the control of the underactuated ship: a trajectory planning approach. In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, 1999*. Phoenix, USA: IEEE, 1999. v. 3, p. 2192–2197.
- [38] SIRA-RAMÍREZ, H.; AGRAWAL, S. K. *Differentially Flat Systems*. New York, USA: Marcel Dekker, 2004. (Control Engineering Series).
- [39] SIRA-RAMÍREZ, H.; IBANEZ, C. The control of the hovercraft system: a flatness based approach. In: *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Control Applications, 2000*. Anchorage, USA: IEEE, 2000. p. 692–697.

- [40] LIMAVERDE FILHO, J. O. A.; FORTALEZA, E. L. F. Motion planning and tracking for marine vessels. In: *Proc. ASME 2012 32th International Conf. Ocean, Offshore and Arctic Engineering (OMAE'13)*. Nantes, France: ASME, 2013.
- [41] WALDHERR, S.; ZEITZ, M. Conditions for the existence of a flat input. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 81, n. 3, p. 439–443, 2008.
- [42] STUMPER, J.-F.; SVARICEK, F.; KENNEL, R. Trajectory tracking control with flat inputs and a dynamic compensator. *CoRR*, 2012.
- [43] LEVINE, J. *Analysis and Control of Nonlinear Systems: A Flatness-Based Approach*. New York, USA: Springer, 2010. (Mathematical Engineering).
- [44] RIGATOS, G. Derivative-free kalman filtering for sensorless control of mimo nonlinear dynamical systems. In: *2012 International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA)*. Chengdu, China: IEEE, 2012. p. 714–719.
- [45] CHEN, Z.; HUAN, G.; MA, Y. *Computational methods for multiphase flows in porous media*. Philadelphia, USA: Siam, 2006.
- [46] SOARES, M. M.; SIMÕES, R. D. P. Análise de escoamento bifásico em meio poroso. 2012.
- [47] CÓRDOBA, L. M. I. *Simulação 2D e Controle de Cone de Água*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, Brasília, 2013.
- [48] LUCAS, S.; BLAKE, J.; KUCERA, A. A boundary-integral method applied to water coning in oil reservoirs. *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics*, Cambridge Univ Press, v. 32, n. 03, p. 261–283, 1991.
- [49] ZHANG, H.; BARAY, D.; HOCKING, G. Analysis of continuous and pulsed pumping of a phreatic aquifer. *Advances in water resources*, Elsevier, v. 22, n. 6, p. 623–632, 1999.
- [50] POLJAK, S.; MATHEMATICS, U. K. D. of A. *On Controllability Kronecker Indices of Structured Systems*. Prague, Czech Republic: Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, 1990. (KAM series, discrete mathematics and combinatorics, operations research, mathematical linguistics).
- [51] BULLICH, J. F. et al. Flatness, tangent systems and flat outputs. Universitat Politècnica de Catalunya, May 1999.
- [52] FLIESS, M. et al. A lie-backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 44, n. 5, p. 922–937, May 1999.
- [53] FRAGA, S.; SOUSA, J. T.; PEREIRA, F. L. Geração de trajetórias para sistemas diferencialmente planos. v. 53, p. 22–27, nov 2003.
- [54] SILVERMAN, L. M.; MEADOWS, H. E. Controllability and observability in time-variable linear systems. *Siam Journal On Control*, v. 5, n. 1, p. 64–73, 1967.

- [55] MALRAIT, F.; MARTIN, P.; ROUCHON, P. Dynamic feedback transformations of controllable linear time-varying systems. In: *Nonlinear control in the year 2000*. : Springer, 2001. v. 2, p. 55–62.
- [56] HERMANN, R.; KRENER, A. J. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 22, n. 5, p. 728–740, October 1977.
- [57] SLOTINE, J.; LI, W. *Applied Nonlinear Control*. : Prentice Hall, 1991.
- [58] CHELOUAH, A. Extensions of differential flat fields and liouvillian systems. In: *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control, 1997*. : IEEE, 1997. v. 5, p. 4268–4273.
- [59] GRAICHEN, K.; HAGENMEYER, V.; ZEITZ, M. A new approach to inversion-based feed-forward control design for nonlinear systems. *Automatica*, v. 41, n. 12, p. 2033 – 2041, 2005.
- [60] ISIDORI, A. *Nonlinear Control Systems*. : Springer, 1995. (Communications and Control Engineering, v. 1).
- [61] WALDHERR, S.; ZEITZ, M. Flat inputs in the mimo case. In: *8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*. Bologna, Italy: IFAC, 2010. p. 695–700.
- [62] KRENER, A. J.; RESPONDEK, W. Nonlinear observers with linearizable error dynamics. *SIAM Journal on Control and Optimization*, SIAM, v. 23, n. 2, p. 197–216, 1985.
- [63] SCHAFT, A. Van der. Representing a nonlinear state space system as a set of higher-order differential equations in the inputs and outputs. *Systems & control letters*, Elsevier, v. 12, n. 2, p. 151–160, 1989.
- [64] SNAME. Nomenclature for Treating the Motion of a Submerged Body Through a Fluid. *Technical and Research Bulletin*, n. 1-5, April 1950.
- [65] FJELLSTAD, O. erik; FOSSEN, T. I. Position and attitude tracking of auvs: A quaternion feedback approach. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, v. 19, p. 51–8, 1994.
- [66] FALTINSEN, O. *Sea Loads on Ships and Offshore Structures*. : Cambridge University Press, 1993. (Cambridge Ocean Technology Series).
- [67] PETTERSEN, K. Y.; NIJMEIJER, H. Global Practical Stabilization and Tracking for an Underactuated Ship - A Combined Averaging and Backstepping Approach. *Modeling, Identification and Control*, Norwegian Society of Automatic Control, v. 20, n. 4, p. 189–200, 1999.
- [68] BRAYTON, R.; GUSTAVSON, F.; HACHTEL, G. A new efficient algorithm for solving differential-algebraic systems using implicit backward differentiation formulas. *Proceedings of the IEEE*, v. 60, n. 1, p. 98–108, Jan 1972.
- [69] FRAGA, S. L.; SOUSA, J. B.; PEREIRA, F. L. Trajectory generation for a remotely operated vehicle. *CELL*, v. 2, p. 4, 2003.
- [70] BEAR, J. *Dynamics of fluids in porous media*. New York, USA: Dover, 1972.

ANEXOS

I. DESCRIÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO NO AMBIENTE DE SIMULAÇÃO *SIMULINK*

Esse anexo tem como objetivo descrever os módulos implementados no ambiente *Simulink* que correspondem a modelagem matemática para os veículos marítimos, que foi apresentada no Capítulo 3, e as etapas de construção da leis de controles para as abordagens de controle baseadas na teoria de planicidade diferencial descritas no Capítulo 2. Iniciam-se com as implementações relacionadas ao navio de superfície e, em seguida, apresentam-se as referentes ao veículo subaquático.

I.1 Navio de Superfície

Como apresentado no Capítulo 4, duas abordagens de controle baseados na teoria de planicidade diferencial foram desenvolvidas:

Abordagem de controle via saídas planas

Basicamente foram implementados três módulos principais, como pode ser visualizado na Figura I.1.

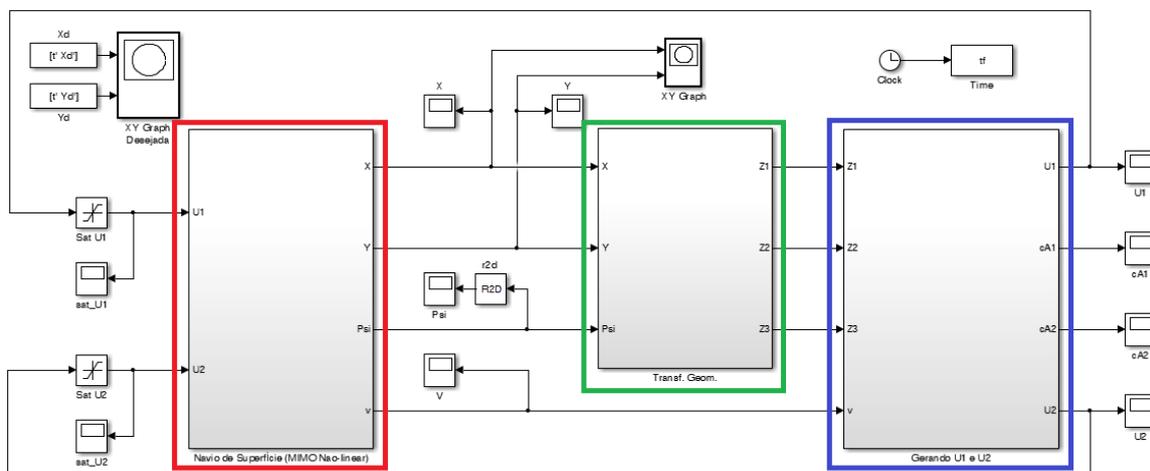


Figura I.1: Implementação da abordagem de controle via saídas planas para o navio de superfície no *Simulink*.

- Modelo não-linear MIMO do navio de superfície
- Transformação geométrica
- Desenvolvimento da lei de controle via saídas planas

O módulo referente ao modelo não-linear do navio de superfície pode ser visualizado na Figura I.2. Devido a transformação geométrica assumida, os sinais de controle $u_1(t)$ e $u_2(t)$ atuam sobre o sistema transformado descrito pela equação (4.8), o qual pode ser visualizado na Figura I.3. Ressalta-se também que, por questões de implementação, assume-se que $(z_1, z_2, z_3) = (\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3)$.

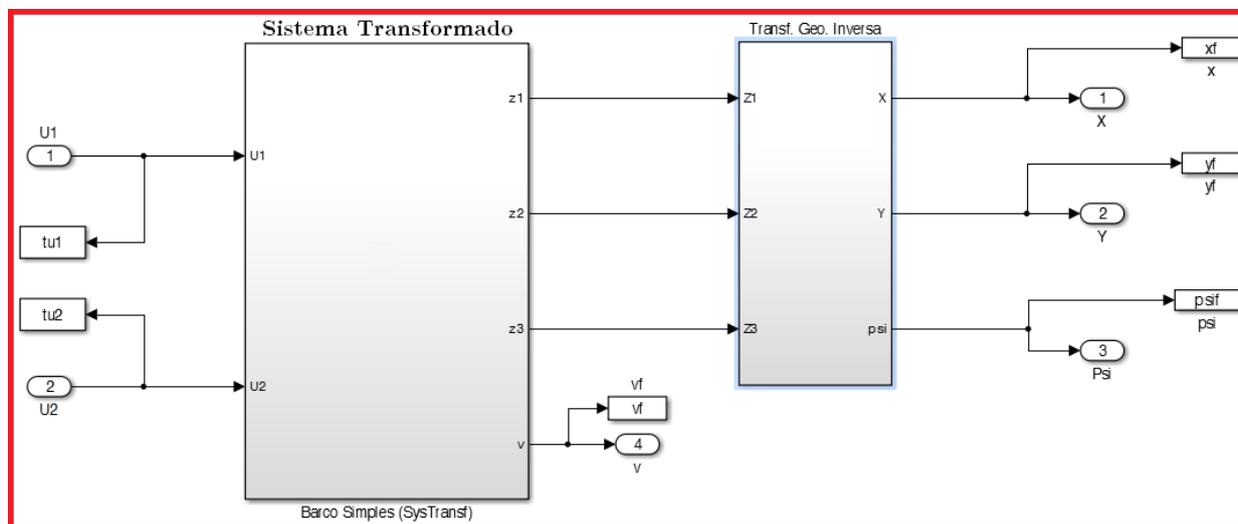


Figura I.2: Implementação do modelo não-linear MIMO do navio de superfície no *Simulink*.

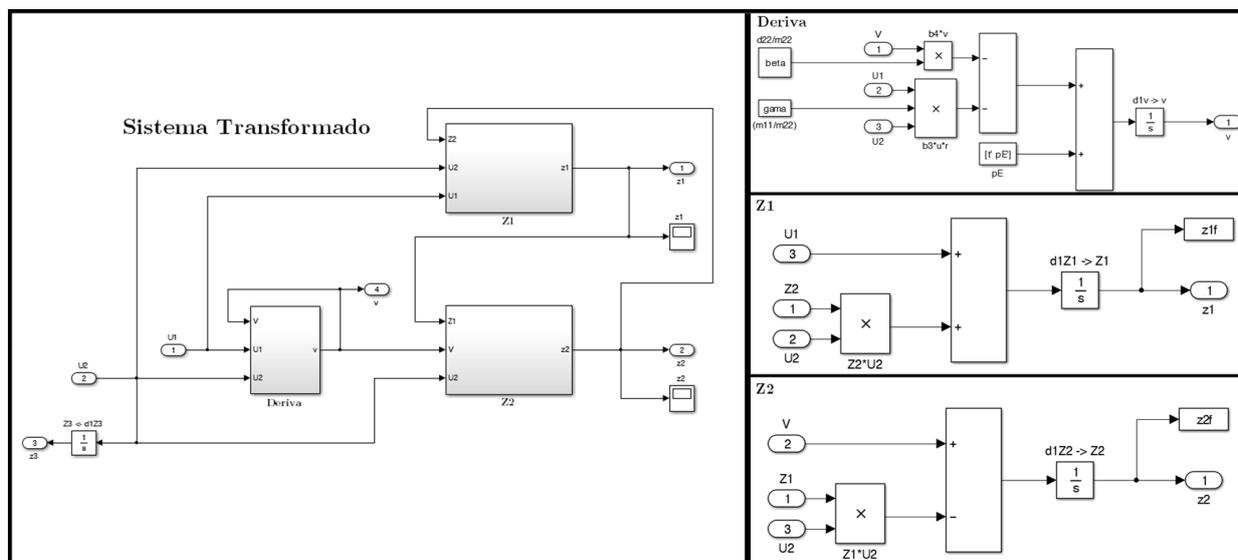


Figura I.3: Implementação do modelo não-linear transformado do navio de superfície no *Simulink*.

A partir de (4.7), o módulo referente a transformação geométrica proposta em [21] foi implementado através da ferramenta *Matlab Function*, a qual permite a inserção de *scripts* a fim de facilitar o tratamento das variáveis no ambiente *Simulink*.

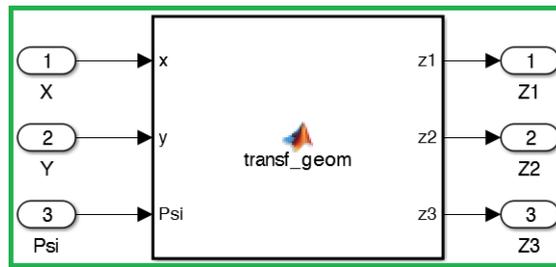


Figura I.4: Implementação da transformação geométrica no ambiente *Simulink*.

Como pode ser visualizado na Figura I.5, o módulo referente ao desenvolvimento da lei de controle é composto por 4 submódulos que representam as etapas necessárias para chegar na expressão final dos controladores:

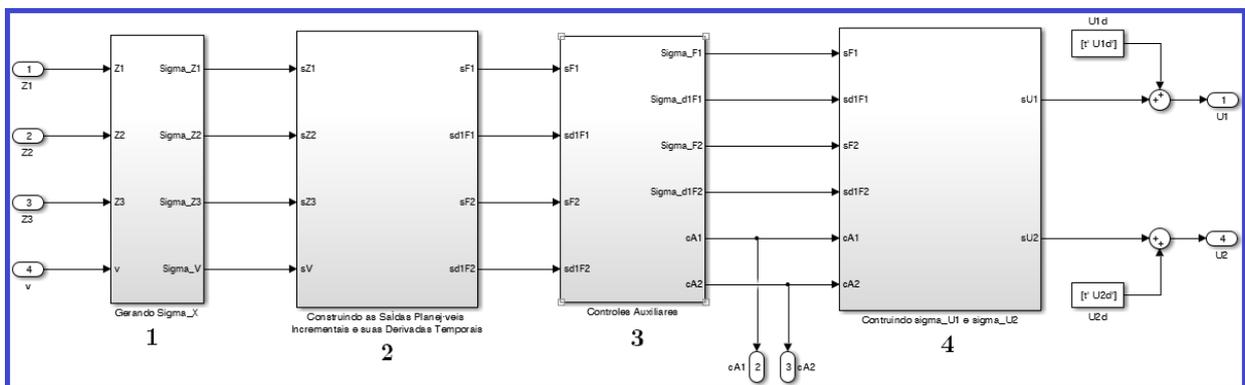


Figura I.5: Implementação dos controladores via saídas planas para o navio de superfície no *Simulink*.

A primeira etapa consiste no cálculo dos erros de acompanhamento de trajetória, os quais correspondem ao vetor de estados do sistema linearizado em torno das trajetórias nominais. A implementação do submódulo referente a essa etapa pode ser visualizado na Figura I.6.

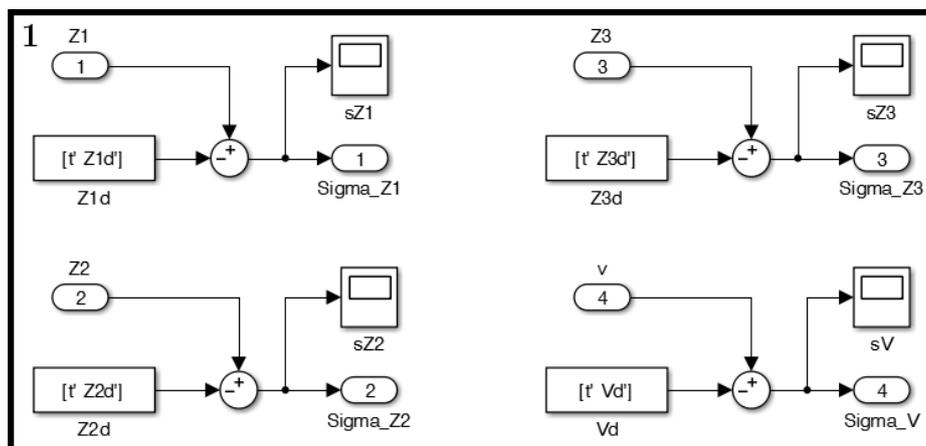


Figura I.6: Implementação da etapa de cálculo dos erros de acompanhamento de trajetória no *Simulink*.

A segunda etapa consiste na construção das saídas planas incrementais e suas derivadas temporais. A implementação do submódulo referente a essa etapa pode ser visualizado na Figura I.7.

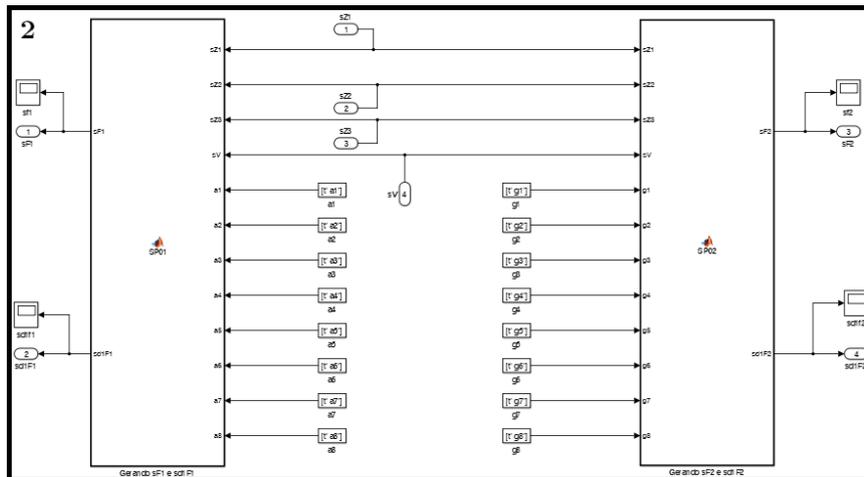


Figura I.7: Implementação da etapa de construção das saídas planas incrementais e suas derivadas temporais no *Simulink*.

A terceira etapa consiste na construção dos termos de correção de trajetória, os quais correspondem as equações (4.35) e (4.36). A implementação do submódulo referente a essa etapa pode ser visualizado na Figura I.8.

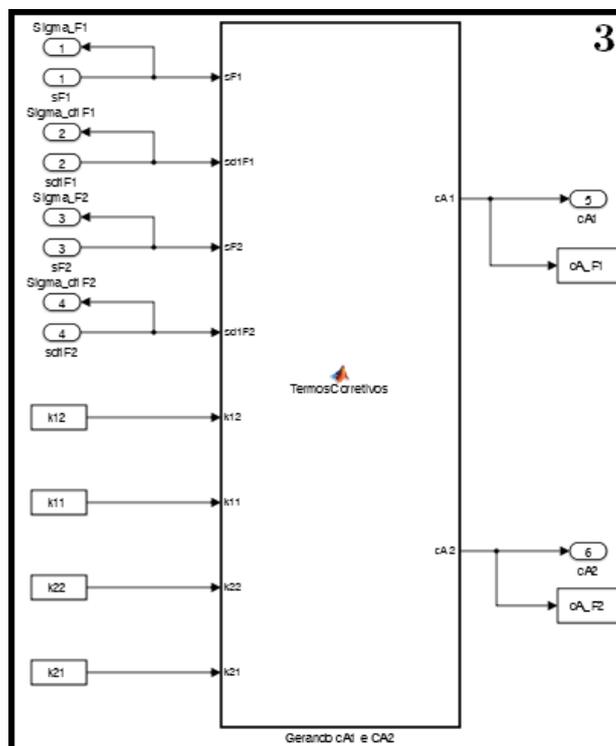


Figura I.8: Implementação da etapa de construção dos termos de correção de trajetória no *Simulink*.

A quarta etapa consiste na construção dos sinais de controle incrementais que, adicionados aos controles nominais, formam a expressão final dos controladores dados pelas equações (4.37) e (4.38). A implementação do submódulo referente a essa etapa pode ser visualizado na Figura I.9.

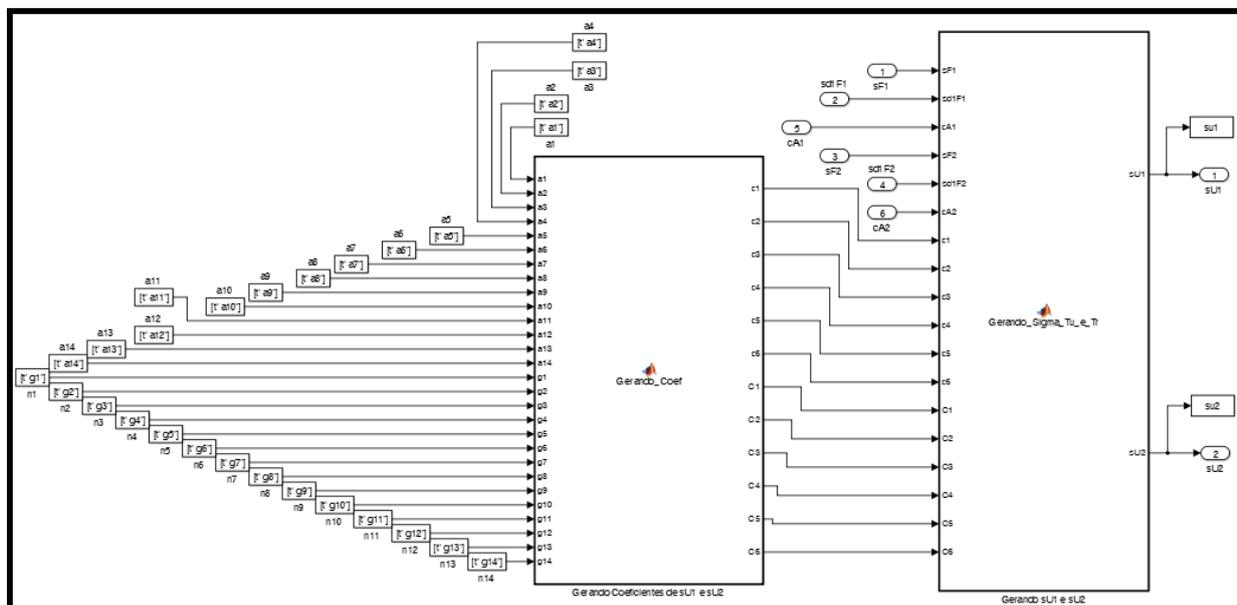


Figura I.9: Implementação da etapa de construção dos sinais de controle incrementais no *Simulink*.

Abordagem de controle via entradas planas

Diferentemente da abordagem de controle via saídas planas, não se utilizou da transformada geométrica, já que o sistema deixava de ser observável, o que comprometia o cálculo das entradas planas. Assim, como observado na Figura I.10, dois módulos principais são implementados.

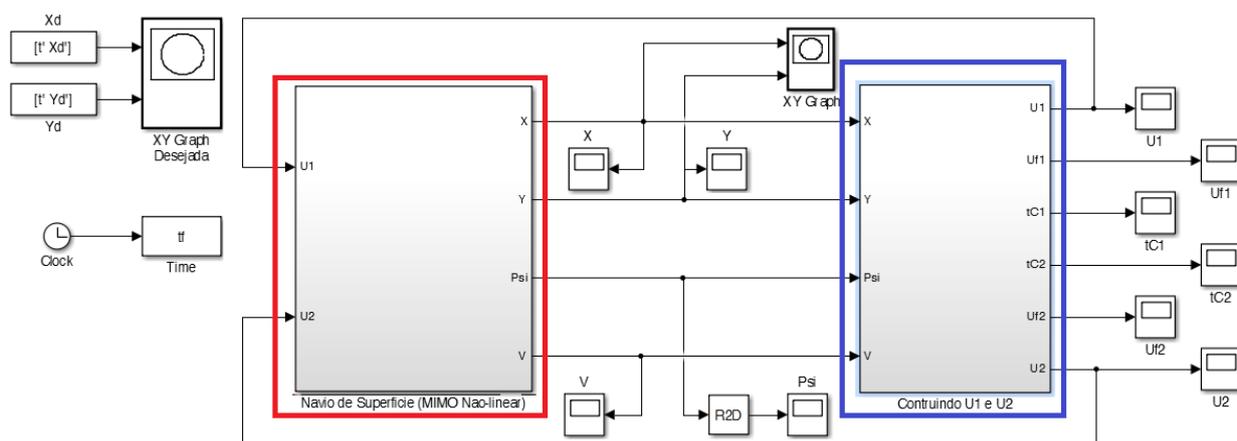


Figura I.10: Implementação da abordagem de controle via entradas planas para o navio de superfície no *Simulink*.

- Modelo não-linear MIMO do navio de superfície
- Desenvolvimento da lei de controle via entradas planas

A Figura I.11 apresenta a implementação do modelo não-linear MIMO do navio de superfície no ambiente *Simulink*, a qual foi baseada de acordo com o sistema de equações (3.32).

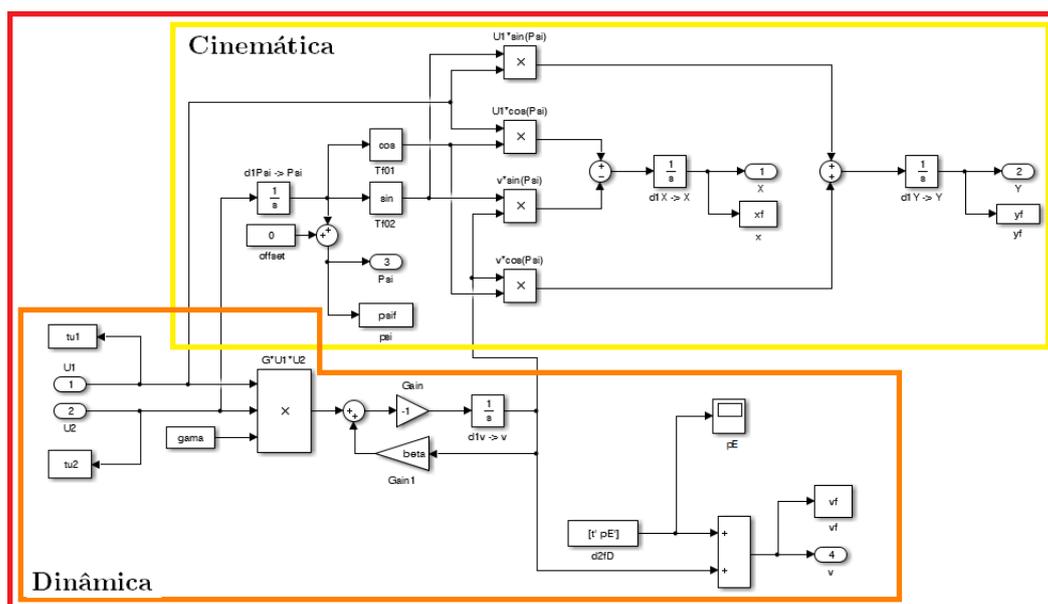


Figura I.11: Implementação do modelo não-linear MIMO do navio de superfície no *Simulink*.

A área destacada em laranja corresponde as equações que permitem obter a velocidade linear na direção Deriva em um determinado instante a partir dos sinais de controle $u_1(t)$ e $u_2(t)$. Ressalta-se também a variável pE que corresponde a inserção da perturbação externa na direção Deriva.

A área destacada em amarelo corresponde as equações que permitem obter a posição (X, Y) e a orientação (ψ) do navio de superfície no Sistema E , conforme descrito pelas três primeiras equações de (3.32).

Por último, o módulo referente ao desenvolvimento da lei de controle pode ser visualizado na Figura I.12. Tanto as expressões finais dos controladores do sistema associado as entradas planas, descritas pelas equações (4.50) e (4.51), quanto as expressões dos compensadores dinâmicos, descritas pelas equações (4.58) e (4.59), foram implementadas através da ferramenta *Matlab Function*.

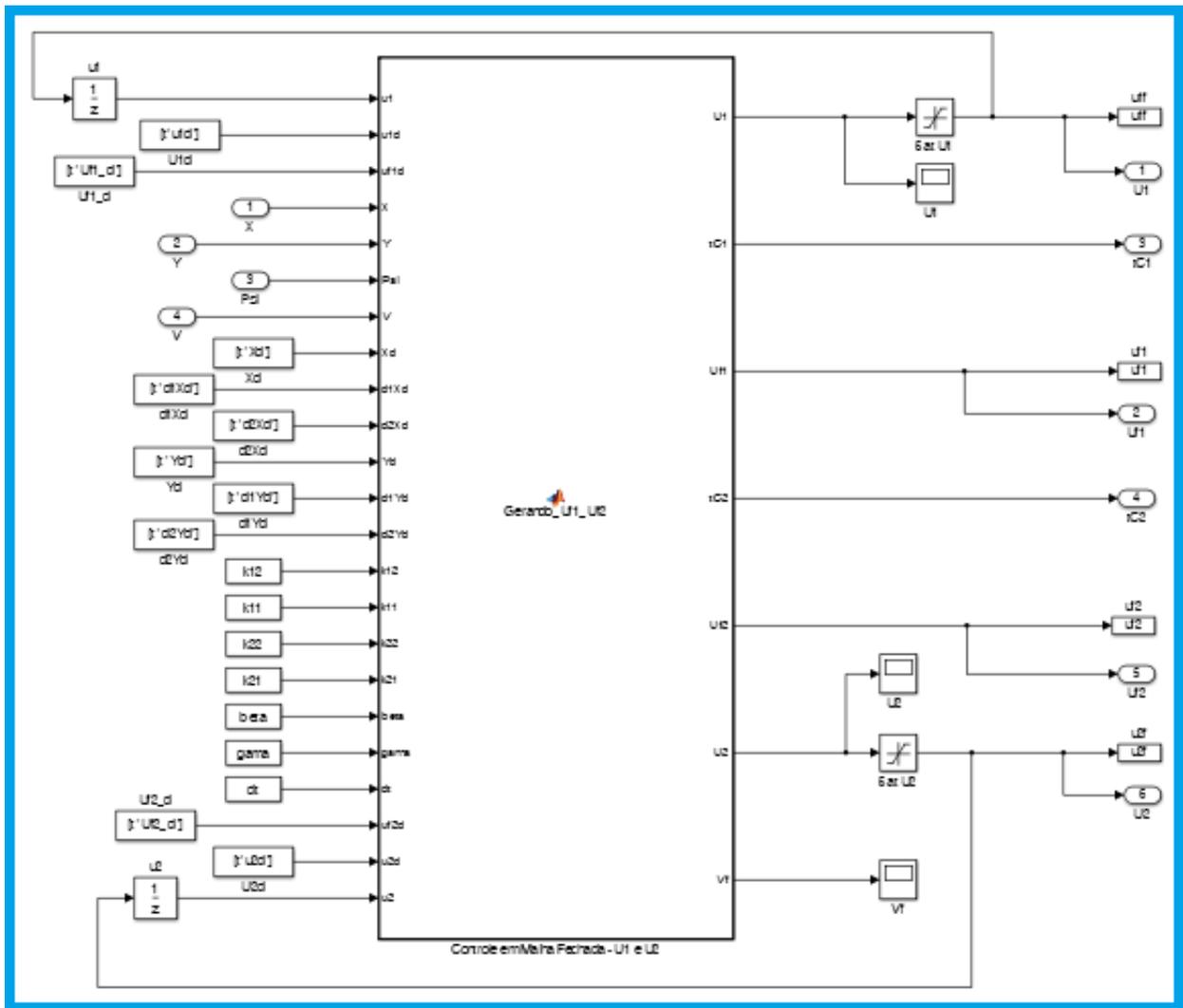


Figura I.12: Implementação dos controladores via entradas planas para o navio de superfície no *Simulink*.

I.2 Veículo Subaquático

Como apresentado no Capítulo 5, desenvolveu-se uma abordagem de controle baseada na planicidade diferencial do sistema linearizado do veículo subaquático em torno das trajetórias nominais, as quais foram obtidas através do caráter liouvilliano do modelo não-linear descrito pelo sistema de equações (3.33).

Basicamente foram implementados dois módulos principais, como pode ser visualizado na Figura I.13.

- Modelo não-linear MIMO do veículo subaquático
- Desenvolvimento da lei de controle via saídas planas

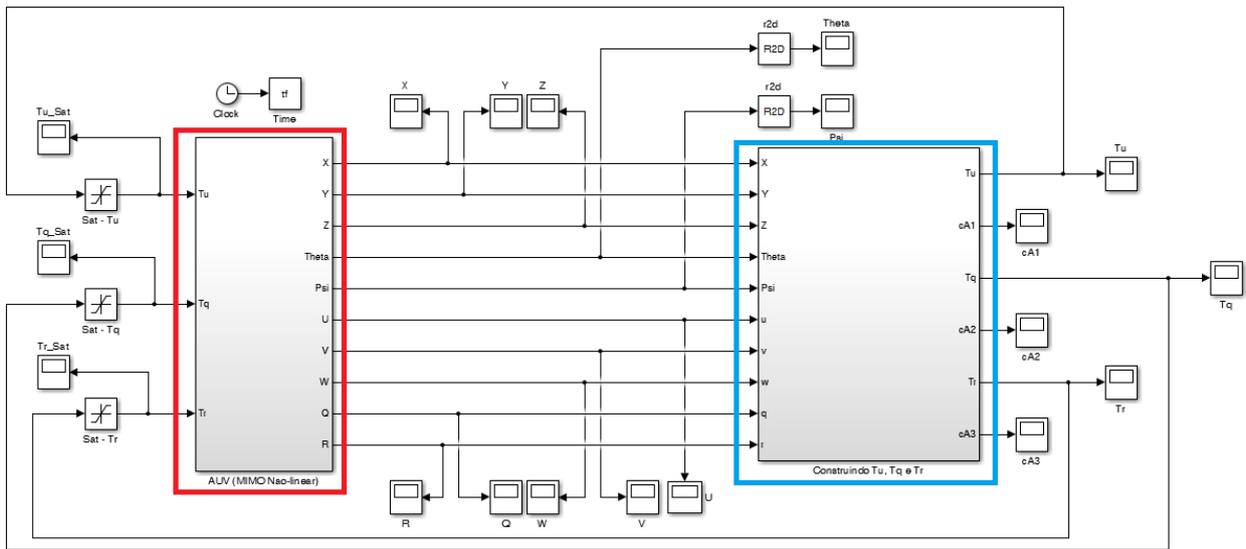


Figura I.13: Implementação da abordagem de controle via saídas planas para o veículo subaquático no *Simulink*.

A Figura I.14 apresenta a implementação do modelo não-linear MIMO do veículo subaquático no ambiente *Simulink*.

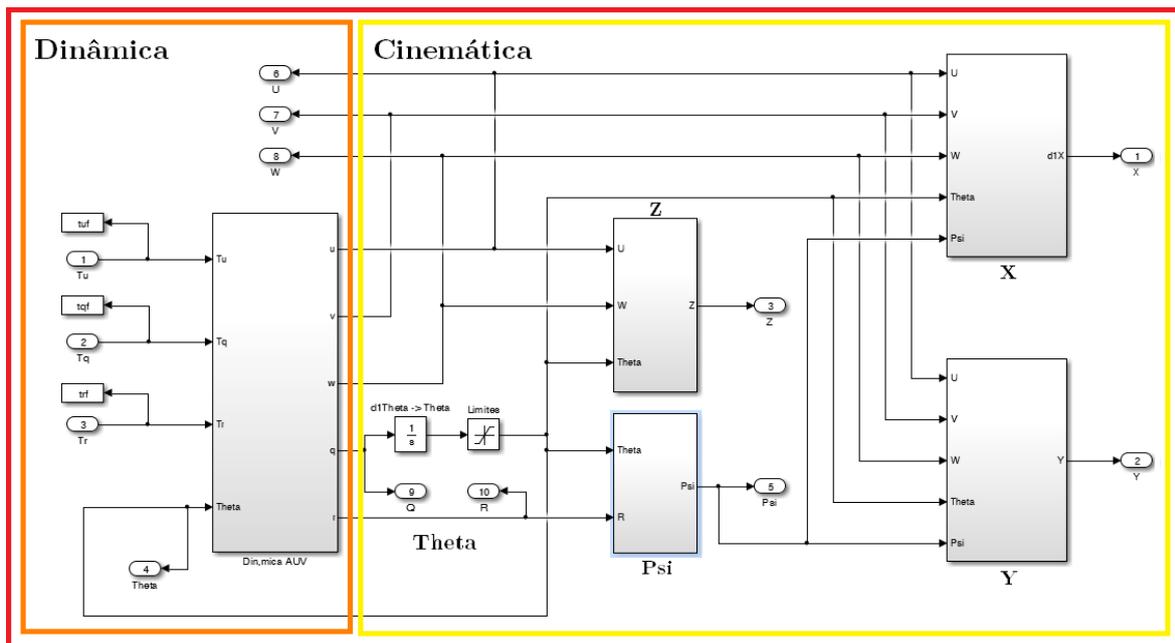


Figura I.14: Implementação do modelo não-linear MIMO do veículo subaquático no *Simulink*.

A área destacada em laranja corresponde as equações que permitem obter as velocidades lineares e angulares no Sistema *B* a partir dos sinais de controle nas direções Avanço, Arfagem e Guinada, como pode ser observado na Figura I.15.

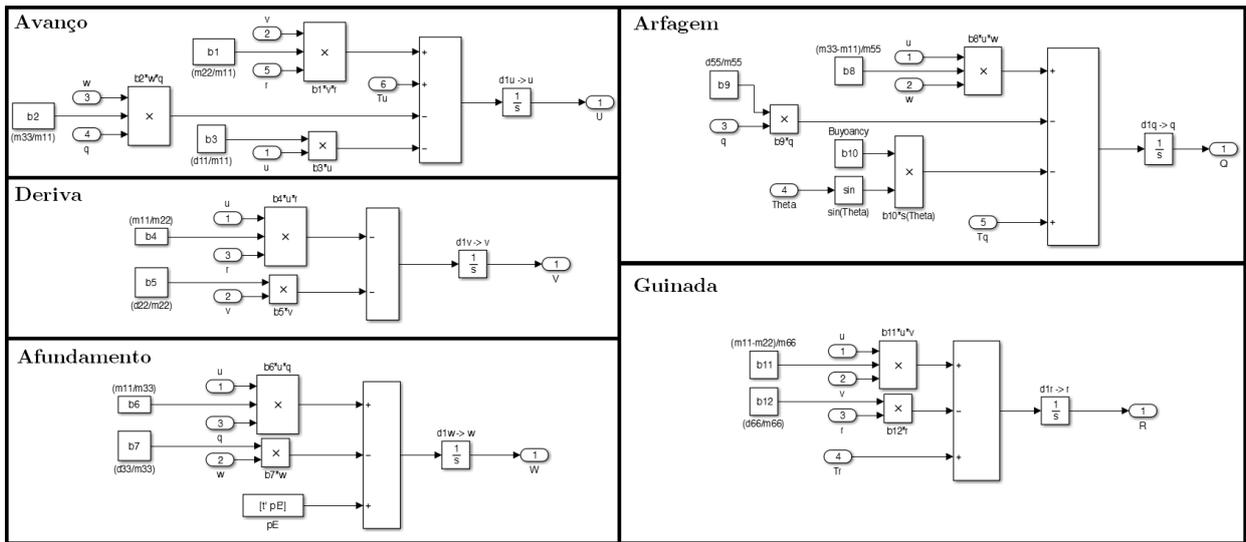


Figura I.15: Implementação das equações referentes a dinâmica do veículo subaquático no *Simulink*.

A área destacada em amarelo corresponde as equações que permitem obter a posição e a orientação do veículo subaquático no Sistema E , conforme descrito pelas cinco primeiras equações de (3.33). A Figura I.16 apresenta a implementação das equações para (X, Y, Z, ψ) , já que a para θ pode ser visualizada na Figura I.14.

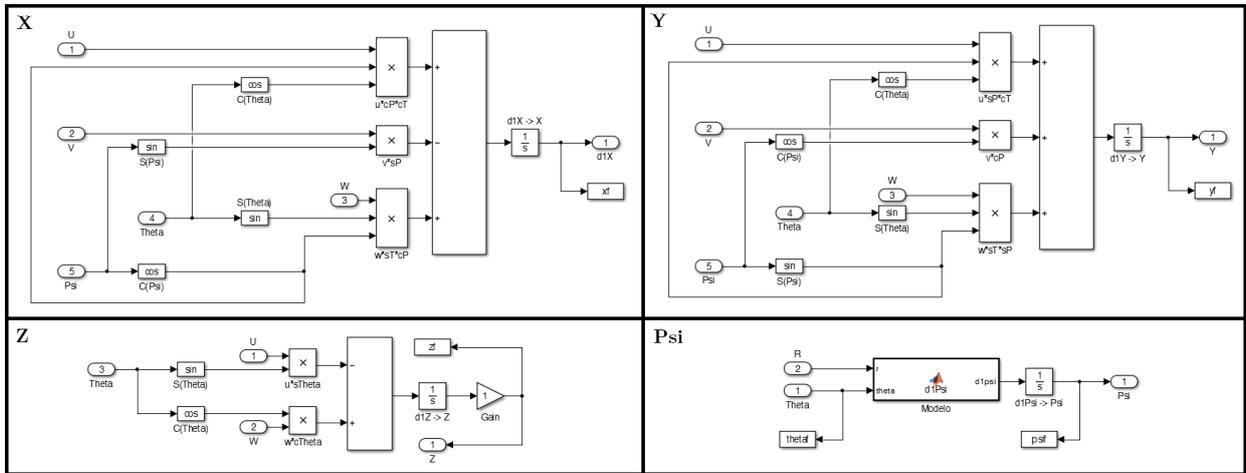


Figura I.16: Implementação das equações referentes a cinemática do veículo subaquático no *Simulink*.

Por último, o módulo referente ao desenvolvimento da lei de controle pode ser visualizado na Figura I.17. O detalhamento dos submódulos foi omitido nesse manuscrito por seguir a mesma estratégia de implementação da abordagem de controle via saídas planas para o navio de superfície.

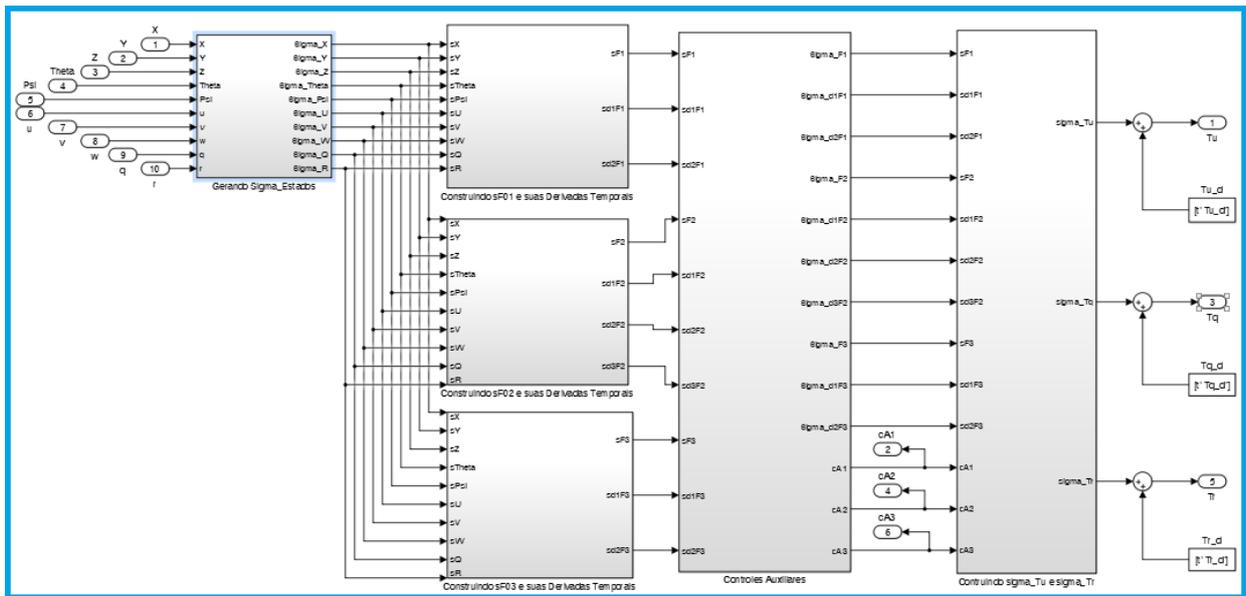


Figura I.17: Implementação dos controladores via saídas planas para o veículo subaquático no *Simulink*.

II. DETERMINAÇÃO DA CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA DO APARATO EXPERIMENTAL

II.1 Introdução

Considerando escoamentos limitados acima por uma superfície livre, como os que ocorrem em aquíferos encontrados em estudos de hidrologia, têm-se que as não-linearidades presentes nas condições de fronteira, junto com o fato que a localização da superfície livre é desconhecida a priori e é parte da solução requerida, tornam o desenvolvimento de uma solução analítica para o problema, muitas vezes, praticamente impossível, com exceção de um número limitado de casos.

Dessa forma, alguns problemas de escoamento bidimensionais constantes podem ser resolvidos através de métodos hodográficos e métodos numéricos. Alternativamente, encontram-se as soluções analíticas aproximadas baseadas na linearização de condições de fronteira e das equações não-lineares que descrevem os escoamentos, conforme descrito em [70].

Neste capítulo, será abordado o problema escoamento bidimensional com superfície livre através da aproximação de Dupuit para uma célula Hele-Shaw de tal forma a se obter uma relação matemática que permita determinar experimentalmente a condutividade hidráulica K e a permeabilidade intrínseca k do meio homogêneo.

II.2 Aproximação de Dupuit

Esta seção descreve sucintamente o desenvolvimento matemático para a vazão constante Q (por unidade de largura) que atravessa um meio poroso homogêneo de condutividade hidráulica K a partir dos trabalhos desenvolvidos pelo engenheiro francês Dupuit (1863). A aproximação de Dupuit está entre as ferramentas mais poderosas utilizadas por engenheiros e hidrologistas para tratar esse tipo de escoamento.

Dupuit desenvolveu sua teoria a partir de observações do comportamento do escoamento onde a inclinação da superfície freática era bem pequena. Em problemas de escoamento bidimensionais constantes sem acreção no plano vertical XZ , a superfície livre é uma linha de corrente, como se pode observar na Figura II.1.

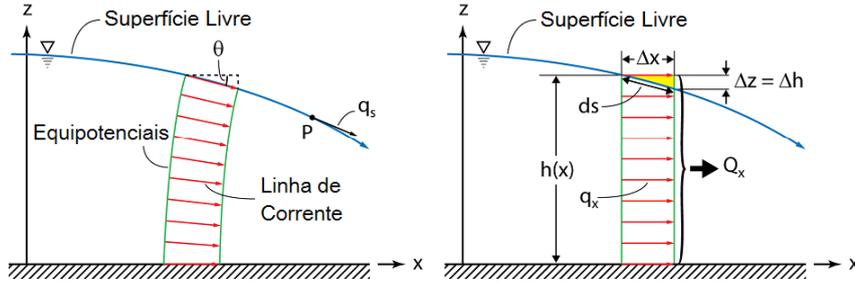


Figura II.1: Hipóteses de Dupuit.

Em cada ponto P ao longo da superfície freática, a velocidade de descarga q_s é dada pela Lei de Darcy:

$$q_s = -K \frac{d\varphi}{ds} = -K \frac{dz}{ds} = -K \sin(\theta) \quad (\text{II.1})$$

Como θ é muito pequeno, Dupuit sugere que $\sin(\theta)$ pode ser substituído pela inclinação $\tan(\theta) = dh/dx$. Essa hipótese é equivalente a assumir que as superfícies equipotenciais são verticais (i.e., $\varphi = \varphi(x)$ é independente de z) e o fluxo é essencialmente horizontal. Então, as hipóteses de Dupuit conduzem a seguinte expressão para a velocidade de descarga:

$$q_x = -K \frac{dh}{dx}; \quad h = h(x) \quad (\text{II.2})$$

e a expressão da vazão Q_{dupuit} através da seção transversal vertical é:

$$Q_{dupuit} = q_x h(x) = -Kh \frac{dh}{dx} \Rightarrow Q_{dupuit} = -K \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^2}{2} \right) \quad (\text{II.3})$$

A principal vantagem adquirida pelo emprego das hipóteses de Dupuit é que o número de variáveis independentes do problema original (x, z) foi reduzido para um, já que z não aparece na equação (II.3) como uma variável independente.

Naturalmente, é interessante estimar o erro introduzido em determinar $h = h(x)$ pelas hipóteses de Dupuit. A vazão Q_{real} através da seção transversal vertical é dada por:

$$Q_{real} = \int_0^{h(x)} q_x dz = -K \int_0^{h(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz \quad (\text{II.4})$$

A partir da regra de integração de Leibnitz, o termo integral da equação (II.4) pode ser escrito

como se segue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{h(x)} \varphi(x, z) dz \right] &= \int_0^{h(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz + \varphi(x, z) \frac{\partial h}{\partial x} \\
\Rightarrow \int_0^{h(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{h(x)} \varphi(x, z) dz \right] - h \frac{\partial h}{\partial x} \\
\Rightarrow \int_0^{h(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{h(x)} \varphi(x, z) dz - \frac{h^2}{2} \right]
\end{aligned} \tag{II.5}$$

Substituindo a equação (II.5) na (II.4), encontra-se que:

$$Q_{real} = -K \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{h(x)} \varphi(x, z) dz - \frac{h^2}{2} \right] = -K \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \tag{II.6}$$

onde

$$\varphi' = h\bar{\varphi} - \frac{h^2}{2} \qquad h\bar{\varphi} = \int_0^{h(x)} \varphi(x, z) dz \tag{II.7}$$

A equação (II.7) poder ser expandida através da regra de integração por partes, como observado a seguir:

$$\begin{aligned}
\varphi' &= \left[\int_0^{h(x)} \varphi(x, z) dz \right] - \frac{h^2}{2} = \left[z\varphi(x, z) \Big|_0^{h(x)} - \int_0^{h(x)} z \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right] - \frac{h^2(x)}{2} \\
\Rightarrow \varphi' &= \frac{h^2(x)}{2} \left[1 + \frac{2}{Kh^2(x)} \int_0^{h(x)} z q_z(x, z) dz \right]
\end{aligned} \tag{II.8}$$

onde $q_z = -K (\partial \varphi / \partial z)$.

O módulo do erro de aproximação em substituir φ' por $\frac{h^2}{2}$ na equação (II.6) é expressado por:

$$|error| = \left| \frac{\left(\frac{h^2}{2} - \varphi' \right)}{\frac{h^2}{2}} \right| = \left| \frac{2}{Kh^2} \int_0^{h(x)} z q_z(x, z) dz \right| \tag{II.9}$$

Analisando termo integral da equação (II.9), pode-se escrever que:

$$0 < \left| \int_0^{h(x)} z q_z(x, z) dz \right| < \left| \int_0^{h(x)} z q_z(x, z) \Big|_{z=h} dz \right| = \left| \frac{h^2}{2} q_z(x, z) \Big|_{z=h} \right| \tag{II.10}$$

Dessa forma, os resultados anteriores permitem chegar na seguinte desigualdade:

$$|error| < \left| \frac{q_z(x, z) \Big|_{z=h}}{K} \right| \tag{II.11}$$

Sabendo que, ao longo da superfície livre, $\varphi = h$ e $y = h(x)$, encontra-se que:

$$\begin{aligned}
 d\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy \\
 \Rightarrow dh &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dh \\
 \Rightarrow \frac{dh}{dx} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dh}{dx} \\
 \Rightarrow \frac{dh}{dx} &= -\frac{q_x}{K} - \frac{q_z}{K} \frac{dh}{dx}
 \end{aligned} \tag{II.12}$$

onde q_x e q_z são calculados em $z = h$. Desde que $q_z/q_x = dh/dx$, obtém-se que:

$$q_z(x, z)|_{z=h} = -K \frac{(dh/dx)^2}{1 + (dh/dx)^2} \tag{II.13}$$

Assim, a expressão final do erro de aproximação é dada por:

$$|error| < \left| \frac{(dh/dx)^2}{1 + (dh/dx)^2} \right| \tag{II.14}$$

e, então, as hipóteses de Dupuit são válidas tão longo quanto $(dh/dx)^2 \ll 1$.

II.2.1 Célula de Hele-Shaw

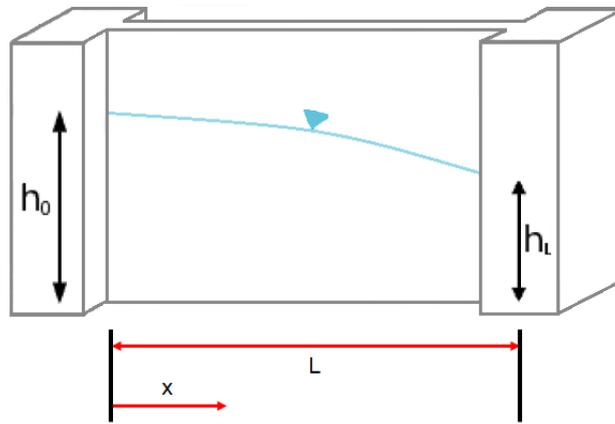


Figura II.2: Escoamento bidimensional na célula de Hele-Shaw.

Considerando a célula de Hele-Shaw apresentada na Figura II.2, é possível desenvolver uma expressão para a vazão Q (por unidade de largura) entre as placas planas paralelas através da

integração direta da equação (II.3):

$$\begin{aligned}
 Q &= -Kh \frac{dh}{dx} \\
 Q \int_0^x dx' &= -K \int_{h_0}^h h' dh' \\
 Q(x) &= -\frac{K}{2x} [h^2(x) - h_0^2]
 \end{aligned} \tag{II.15}$$

Segundo Bear [70], apesar de assumir as hipóteses de Dupuit, a equação (II.15) representa a expressão exata da vazão que atravessa o meio poroso. Dessa forma, sabendo que $x = L \Rightarrow h(L) = H_L$, a Eq. (II.15) permite expressar a constante hidráulica K da seguinte maneira:

$$K = \frac{2QL}{h_0^2 - h_L^2} \tag{II.16}$$

Em Zhang [49], apresenta-se uma expressão que relaciona a constante hidráulica K com as propriedades geométricas da célula de Hele-Shaw e as propriedades do fluido que atravessa as placas planas, como pode ser observado na Eq. (II.17).

$$K = \frac{gB_m^2 \rho_{fluido}}{12\mu} \tag{II.17}$$

onde ρ_{fluido} é a massa específica do fluido, g é a gravidade, B_m é a abertura entre as faces verticais e μ é a viscosidade do fluido.

Por último, a expressão da permeabilidade intrínseca k é dada por [70]:

$$k = \frac{K\mu}{g\rho_{fluido}} \tag{II.18}$$

II.3 Experimento

Esta seção busca apresentar o experimento realizado para obter uma ordem de grandeza tanto para a condutividade hidráulica K como para a permeabilidade intrínseca k da célula de Hele-Shaw presente no laboratório.

Inicialmente, ajustou-se as bombas de tal forma a garantir que o fluxo entre as placas planas verticais fosse aproximadamente constante, o que acarretou em níveis fixos nos dois tanques, como pode ser observado na Figura II.3.

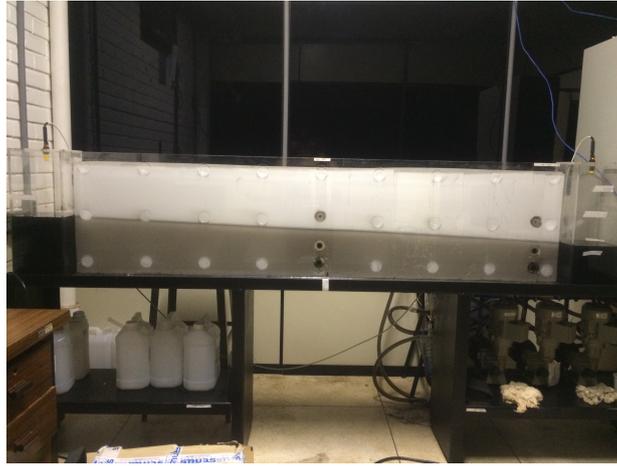


Figura II.3: Experimento para obter a condutividade hidráulica da célula de Hele-Shaw.

Os resultados encontrados estão descritos em (II.19).

$$\begin{cases} Q_{bomba} &= 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s} \\ H_0 &= 0,243 \text{ m} \\ H_L &= 0,171 \text{ m} \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

Para utilizar a equação (II.15), é preciso dividir Q_{bomba} por $B_m = 0,004 \text{ m}$:

$$Q = \frac{Q_{bomba}}{B_m} = \frac{10^{-6}}{0,004} = 2,5 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} \quad (\text{II.20})$$

Dessa forma, sabendo que $L = 2 \text{ m}$, obtém-se a condutividade hidráulica do aparato experimental:

$$K_{exp} = \frac{2 (2,5 \times 10^{-4}) 2}{(0,243^2) - (0,171^2)} \Rightarrow K_{exp} = 0,0335 \text{ m/s} \quad (\text{II.21})$$

Em seguida, utilizou-se o viscosímetro e a balança de precisão para determinar a viscosidade e a massa específica do fluido a uma temperatura de 26°C , respectivamente:

$$\begin{cases} \mu &= 0,51 \text{ Pa.s} \\ \rho_{fluido} &= 1255 \text{ Kg/m}^3 \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

Dessa forma, assumindo $g = 9,81 \text{ m}^2/\text{s}$, determinou-se o valor teórico da condutividade hidráulica a partir da Eq. (II.17):

$$K_{teo} = \frac{(1255) (9,81) (0,004)^2}{12 (0,51)} \Rightarrow K_{teo} = 0,0322 \text{ m/s} \quad (\text{II.23})$$

A proximidade entre o valor experimental e teórico para a condutividade hidráulica valida o experimento realizado no laboratório, apesar da presença de espaçadores (ver Figura II.4) na célula de Hele-Shaw, os quais foram inseridos com o objetivo de garantir a abertura constante entre as faces verticais.



Figura II.4: Espaçador entre as placas planas verticais da célula de Hele-Shaw.