Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Sobre sólitons de Ricci gradiente localmente conformemente planos

por

Valter Borges Sampaio Junior

Orientador: João Paulo dos Santos

Brasília

2014

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Sobre sólitons de Ricci gradiente localmente conformemente planos

por

Valter Borges Sampaio Júnior *

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 24 de setembro de 2014.

Comissão Examinadora:

____

Prof. Dr. João Paulo dos Santos - MAT/UnB (Orientador)

____

Prof. Dr. Kéllcio Oliveira Araújo - MAT/UnB (Membro)

____

Prof. Dr. Maurício Donizetti Pieterzack - MAT/UnB (Membro)

* O autor foi bolsista da CAPES e CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade de Brasília. Acervo 1017973.

Sampaio Júnior, Valter Borges.
S192s Sobre sólitons de Ricci gradiente localmente conformemente planos / por Valter Borges Sampaio Júnior. -- 2014.
85 f. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade de Brasília, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.
Orientação: João Paulo dos Santos.

1. Geometria diferencial. 2. Solitons. 3. Geometria riemaniana. 4. Variedades riemanianas. I. Santos, João Paulo dos. II. Título.

CDU 514.7

A Josué Aquino, em memória.

Por serem mais que merecedores, à

Dona Ana,

Seu Valter,

Nai e Lu.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao bom Deus que me deu forças e supriu todas as necessidades para que eu pudesse chegar até aqui. A Ele todo o mérito.

Agradeço também à minha mãe, dona Ana, minha primeira professora de Matemática. Além dos seus conselhos, seu incentivo e pulso firme, que nunca deixaram de existir, são parte substancial dos motivos que me proporcionaram mais esta conquista. Obrigado por tudo.

Ao meu pai, Valter Borges, que juntamente com dona Ana, me ensinou muito do que sei hoje.

Agradeço também à minha esposa, Lumena Paula, pelo cuidado, zelo, atenção e carinho que me tem prestado. Sem sombra de dúvidas, não teria o mesmo sabor sem a sua presença.

Sinceros agradecimentos também merece minha irmã, Naiana Caroline, companheira de longas datas. Viveu este sonho comigo desde o início e, mesmo distante, esteve sempre presente.

Ao professor João Paulo pela paciência que sempre teve comigo nas orientações em sua sala, nos corredores, no cafezinho, quando eu pegava sua carona e em outros momentos que me fogem à memória. Não apenas na orientação, mas também sobre diversas questões que envolviam Geometria Diferencial. Quase tudo que aprendi sobre Geometria Diferencial no mestrado foi nestes momentos.

Ao professor Erikson Alexandre Fonseca dos Santos por, dentre vários outros motivos, me apresentar à Geometria Diferencial na graduação, usando uma frase, da qual jamais esquecerei: "Neste semestre, meu objetivo é fazer você gostar de Geometria!!". Obrigado professor, como você já sabe, lhe sou muito, muito grato por tudo que me ensinou.

Aos professores João Paulo dos Santos, Kélcio Oliveira Araújo e Maurício Donizzeti Pieterzack que compuseram a banca avaliadora. Foi notável a atenção minuciosa que deram ao trabalho fazendo que este se tornasse melhor.

Aos amigos, que eu peço perdão por não listar nominalmente para não me arriscar a cometer alguma injustiça.

A todos os professores, desde o ensino fundamental até à pós-graduação, que contribuíram para a minha formação profissional, nas pessoas de Rosane Couto da Silva, Marcos Nascimento Sanches, Alex Santana dos Santos, Gilberto da Silva Pinna, Liliane de Almeida Maia e Noraí Romeu Rocco, representantes dos diferentes períodos de aprendizado da minha vida. É inegável que todos eles foram muito importantes.

A todos os funcionários do departamento de Matemática da Unb, na pessoa de Bruna Ribeiro, a quem não apenas agradeço, mas parabenizo, pela sua dedicação e prestatividade. Vocês tornaram viáveis este e muitos outros trabalhos realizados no Departamento de Matemática.

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

"Os encantos dessa sublime ciência
se revelam apenas àqueles que têm
coragem de irem a fundo nela".

Carl Friedrich Gauss

Resumo

Nesta dissertação será apresentado um estudo de classes de métricas Riemannianas, tendo como objetivo um resultado de classificação de sólitons de Ricci gradiente, steady ou shrinking, que são localmente conformemente planos. Este resultado é baseado em um trabalho de Manuel Fernández Lopéz e Eduardo García Río, onde os autores mostram que todo sóliton de Ricci gradiente completo, localmente conformemente plano e simplesmente conexo deve ser localmente isométrico ao produto warped de uma forma espacial com uma variedade unidimensional. Se, em adição, tal sóliton for shrinking ou steady, então deve ser rotacionalmente simétrico.

Palavras-chave: sólitons de Ricci, produto warped, variedades localmente conformemente planas.

Abstract

In this dissertation it will be presented a study about classes of Riemannian metrics, where the goal is a classification result of locally conformally flat steady or shrinking gradient Ricci solitons. This result is based on an article due to Manuel Fernández Lopéz and Eduardo García Río, where it is proved that a locally conformally flat gradient Ricci soliton, simply connected, is locally isometric to an warped product of a space form with an one dimensional manifold. In addition, if such soliton is shrinking or steady, then it will be rotationally symmetric.

Keywords: Ricci solitons, warped product, locally conformally flat manifolds.

Sumário

Introdução

Em seu artigo seminal de 1982, Hamilton [23], com o objetivo de resolver a conjectura da geometrização, introduziu o chamado fluxo de Ricci. O fluxo de Ricci é uma equação de evolução que faz a métrica evoluir na direção do tensor de Ricci. Uma característica deste fluxo é que ele é invariante por difeomorfismos, como se pode ver em Chow [1]. Uma classe notável de soluções para o fluxo de Ricci é a classe das soluções auto-similares que, geometricamente, evoluem sobre o fluxo de Ricci apenas por mudança de escala. Considerando o conjunto das métricas Riemannianas (em uma dada variedade diferenciável) módulo homotetia e difeomorfismo, a auto-similaridade significa que esta métrica é um ponto fixo para a equação do fluxo de Ricci. Dessa forma, uma solução auto-similar não evolui durante o fluxo, se este estiver devidamente normalizado. Como o objetivo de Hamilton era fazer com que a métrica evoluísse através do fluxo para obter uma métrica conveniente, uma solução auto-similar seria uma obstrução para a sua estratégia. Isto claramente motivou o estudo da geometria das soluções auto-similares do fluxo de Ricci, bem como a classificação de tais variedades, como será visto mais adiante. Como pode ser visto em Chow [1], as soluções auto-similares do fluxo de Ricci podem, em um certo sentido, ser descritas por uma condição estática, isto é, uma condição dada não para uma família a um parâmetro de métricas, mas para apenas uma métrica. Tal métrica é chamada de sóliton de Ricci. Uma variedade Riemanniana (M, g) é um sóliton de Ricci se é satisfeita a condição $Ric_g + \dfrac{1}{2}\mathfrak{L}_X g = \lambda g$, para algum campo de vetores X e para alguma constante λ. De acordo com a constante λ, um sóliton de Ricci é dito shrinking, steady ou expanding, conforme λ for positivo, nulo ou negativo, respectivamente. Pode acontecer que o campo envolvido na condição de sóliton seja o gradiente de alguma função suave definida na variedade. Tais sólitons são chamados de sólitons gradiente. Em [37], Perelman mostrou que, em variedades compactas, qualquer sóliton deve ser um sóliton gradiente.

Um outro aspecto relevante sobre sólitons de Ricci é que eles generalizam as famosas variedades de Eisntein. Para ver isto basta fazer $X = 0$ na condição de sóliton. No sentido contrário, Hamilton [25] e Ivey [28] mostraram que no caso compacto, quando o sóliton for steady ou expanding, estas variedades Riemannianas devem ser variedades de Einstein. No caso remanescente, quando o sóliton é shrinking e ainda no caso compacto, Xiadong Cao [15] mostrou que os sólitons devem ser variedades de Einstein no caso localmente conformemente plano. No entanto, existem exemplos de sólitons de Ricci gradiente (necessariamente não localmente conformemente plano) com $\lambda > 0$ que não são variedades de Einstein (ver Cao [11] para mais detalhes). No caso não compacto existem também sólitons de Ricci que não são variedades de Einstein. A existência de sólitons de Ricci que não são variedades de Einstein valida a ideia de que estas variedades de fato generalizam tais variedades. Um exemplo é o charuto de Hamilton [24] ou, mais geralmente, o sóliton de Bryant [9]. O sóliton de Bryant é um exemplo de sóliton com $\lambda = 0$ que não é compacto e que não é uma variedade de Einstein. Outras propriedades do sóliton de Bryant é que ele é localmente conformemente plano e possui simetria rotacional.

Desde sua aparição, os sólitons de Ricci vêm sendo objeto de estudo sob diversos pontos de vista. Um ponto de vista importante é o da classificação de sólitons de Ricci conformemente planos.

No caso compacto, quando o sóliton é shrinking, Derdzinski e Eminenti et al [19] mostraram que as únicas possibilidades são a esfera, com a métrica canônica, ou um dos seus quocientes.

Ni e Wallach [36] classificaram sólitons shrinking completos localmente conformemente planos, assumindo que a curvatura de Ricci do sóliton é não negativa e que a norma do tensor de curvatura tem crescimento no máximo exponencial. Nestas condições, o sóliton deve ser $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$ ou um de seus quocientes. Xiadong Cao, Biao Wang e Zhou Zhang [15] obtiveram o último resultado assumindo apenas que a curvatura de Ricci é limitada por baixo. No entanto, com um trabalho de Zhang [40], foi provado que as hipóteses de curvatura decorrem das anteriores, alcançando a classificação no caso shrinking, completo e localmente conformemente plano . De fato, com estas hipóteses o autor mostra que o operador de curvatura de tais sólitons é não negativo e que o crescimento da sua norma é no máximo exponencial.

No caso steady, sólitons completos e rotacionalmente simétricos foram classificados por Bryant [9]. O autor provou que, além do caso Gaussiano $\mathbb{R}^n$, existe um único tal sóliton, a menos de reescala, que ficou conhecido como sóliton de Bryant, já citado anteriormente. Estas são também as únicas possibilidades no caso steady, completo e localmente conformemente plano, como mostram Cao e Chen [14].

Esta dissertação ocupa-se em estudar classes de métricas Riemannianas, baseando-se em uma classificação presente no artigo de López e García Río [21], onde eles dão uma classificação unificada das classificações supracitadas. De fato, primeiro mostra-se que o sóliton deve ser rotacionalmente simétrico assumindo que ele é gradiente (com a função potencial não trivial), completo, localmente conformemente plano e simplesmente conexo, sem fazer referência quanto ao sinal da constante λ. Em seguida, é feita tal classificação para sólitons gradiente localmente conformemente planos com $\lambda \geq 0$.

O trabalho possui quatro capítulos divididos da seguinte maneira. No capítulo 1 serão introduzidas as variedades diferenciáveis bem como conceitos da geometria Riemanniana que serão necessários para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. No capítulo 2, serão estudadas algumas métricas especiais em variedades Riemannianas, com o intuito de tornar claras propriedades destas métricas que aparecem no resultado de classificação. No terceiro capítulo serão apresentados alguns lemas e, finalmente, uma classificação para sólitons gradiente. No capítulo 4 serão apresentados, sem demonstração, alguns resultados e definições com o objetivo de mostrar como a área vem se desenvolvendo. Será exibida uma classificação semelhante no caso Lorentziano e, em seguida, serão enunciados resultados envolvendo outros tensores.

Capítulo 1

Variedades Riemannianas

Grande parte das definições encontradas na primeira e na segunda seção deste capítulo podem ser encontradas em Lee [33]. Já para as seções terceira, quarta e quinta foram utilizados principalmente Lee [32] e do Carmo [18].

Na primeira seção deste capítulo serão introduzidas as variedades diferenciáveis. Em tais espaços, todas as noções locais da análise podem ser generalizadas. É desta generalização que trata o desenvolvimento do capítulo primeiro. Serão introduzidos conceitos como os de vetor tangente e de campo vetorial. Será explicado também o que se entende por uma aplicação diferenciável definida entre tais espaços, bem como a derivada de uma tal função. Será definida também a derivada de Lie de campos de vetores.

Na segunda seção são introduzidos os tensores, objetos indispensáveis no tratamento de muitas propriedades de caráter local e global envolvendo variedades diferenciáveis. No fim desta seção será generalizada a ideia da derivada de Lie para tensores e algumas propriedades serão listadas.

Na terceira seção deste capítulo serão introduzidas as variedades Riemannianas. Uma variedade Riemanniana é uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana, noção também introduzida neste capítulo. Partindo do fato que toda variedade diferenciável possui uma métrica Riemanniana, o próximo passo é explorar as consequências da consideração de uma tal estrutura. Será definida também uma maneira compatível com métrica de derivar campos de vetores. O aparato técnico introduzido é a conexão de Levi-Civita. A partir da conexão de Levi- Civita será introduzido o tensor de curvatura.

Na quarta seção será definido o tensor de Ricci, que é o traço do tensor de curvatura. Será definida também a curvatura escalar.

Na quinta seção serão definidos alguns operadores diferenciais, generalizando seus análogos Euclidianos. Serão exibidas algumas identidades envolvendo tais operadores.

1.1 Variedades diferenciáveis

Um espaço topológico M é dito de Hausdorff se, dados dois pontos distintos p e q em M, existem vizinhanças U, de p, e V, de q, que são disjuntas. Um espaço topológico é dito ter base enumerável se a topologia nele considerada possui uma base com uma quantidade enumerável de abertos, chamados básicos.

Definição 1.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um espaço topológico M de Hausdorff, possuindo base enumerável e munido com uma coleção de homeomorfismos $\{x_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n\}$ tais que a coleção $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura aberta para M e a aplicação*

$$x_\alpha \circ x_\gamma^{-1} : x_\gamma(U_\gamma \cap U_\alpha) \to x_\alpha(U_\gamma \cap U_\alpha)$$

é um difeomorfismo, sempre que $U_\gamma \cap U_\alpha \neq \emptyset$, para quaisquer índices α e γ.

A coleção $\{x_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n\}$ é chamada de atlas diferenciável e a aplicação $x_\alpha \circ x_\gamma^{-1}$ é chamada de mudança de cartas. Se um ponto $p \in M$ está contido em um aberto U_α como na definição acima, U_α é chamado de vizinhança coordenada de M em p e a aplicação x_α, chamada de carta coordenada de M em p. É de costume denotar uma carta coordenada por (U_α, x_α).

Observação 1.1. *Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n e $\{x_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n\}$ um atlas diferenciável para M. Seja $x : V \to \mathbb{R}^n$ um homeomorfismo (sobre sua imagem) que possui a seguinte propriedade: se (U_α, x_α) é uma carta coordenada tal que $U_\alpha \cap V \neq \emptyset$, então as aplicações $x \circ x_\alpha^{-1}$ e $x_\alpha \circ x^{-1}$ são diferenciáveis. Nessas condições, a coleção*

$$\{x_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n\} \cup \{x : V \to \mathbb{R}^n\}$$

é também um atlas diferenciável para M. Será admitido que o atlas de uma variedade diferenciável é maximal com relação à propriedade acima, isto é, uma tal x sempre pertence ao atlas. É sempre possível conseguir tal atlas usando o lema de Zorn. A este atlas maximal chama-se uma estrutura diferenciável em M. Será admitido que uma variedade diferenciável sempre está munida com a estrutura diferenciável que contém o atlas diferenciável em questão.

Definição 1.2. *Sejam M e N variedades diferenciáveis, $p \in M$ e $f : M \to N$ uma aplicação contínua. Diz-se que f é diferenciável (suave) em p se existem cartas (U, φ)e (V, ψ) tais que $f(U) \subset V$ e*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

é uma aplicação diferenciável. A aplicação $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é chamada representação local de f. Se f é uma bijeção diferenciável, cuja inversa também é diferenciável, f é chamada de difeomorfismo.

Alguns comentários sobre essa definição devem ser dados:

1. Primeiro, apesar de a representação em cartas locais de f depender das parametrizações envolvidas, a propriedade de ser f uma aplicação diferenciável não depende das cartas;

2. Segundo, com esta definição, uma parametrização passa a ser não só um homeomorfismo, mas sim um difeomorfismo. Deste modo, pode-se pensar nas variedades diferenciáveis como espaços que são localmente difeomorfos ao espaço euclidiano.

Definição 1.3. *Uma curva em uma variedade diferenciável M é uma aplicação diferenciável*

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M.$$

Diz-se que α passa por p se $\alpha(0) = p$.

Seja $C^\infty(M)$ o conjunto de todas as funções suaves definidas em M.

Definição 1.4. *O vetor tangente a α em p, ou velocidade de α em p, é uma aplicação $\alpha'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \alpha).$$

Um vetor tangente a M em p é o vetor tangente de alguma curva passando por p. O conjunto de todos os vetores tangentes a M em p é denotado por T_pM.

Considere um sistema de coordenadas (U, φ) tal que $\varphi(q) = (x_1, \ldots, x_n)$, $\forall q \in U$, e $\varphi(p) = (0, \ldots, 0)$. Fixando $j \in \{1, \ldots, n\}$ tem-se a curva $x_j(t) = (0, \ldots, t, \ldots, 0)$, onde o t aparece na j-ésima coordenada. Sendo assim, o vetor tangente a x_j é dado por:

$$\begin{aligned} x_j'(0)f &= \frac{d}{dt}(f \circ x_j(t))_{t=0} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p f. \end{aligned}$$

Isto sugere a notação $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$ para o vetor $x_j'(0) \in T_pM \ \forall j$.

Seja $v \in T_pM$. Então existe uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$ tal que $\alpha'(0) = v$. Assim,

$$\begin{aligned} vf &= \alpha'(0)f \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ \alpha(t))_{t=0} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right)f, \end{aligned}$$

para todas as funções $f \in C^\infty(M)$. Portanto, para todo $v \in T_pM$, pode-se escrever

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p. \tag{1.1}$$

As igualdades acima induzem a seguinte estrutura de $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão n em T_pM. Dados $v, w \in T_pM$, pode-se definir

$$\begin{aligned} v + w &= \sum_{i=1}^{n}(v_i + w_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \\ \lambda v &= \sum_{i=1}^{n}(\lambda v_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p. \end{aligned}$$

Com esta estrutura de espaço vetorial, o conjunto

$$\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p \dots (\frac{\partial}{\partial x_n})_p\}$$

passa a ser uma base do espaço vetorial T_pM, que será denotado apenas por $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$. Decorre da mudança de cartas que as definições acima não dependem do sistema de coordenadas em questão.

A noção de espaço tangente permite introduzir o conceito de diferencial de uma aplicação diferenciável entre duas variedades diferenciáveis.

Definição 1.5. *Sejam $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre as variedades diferenciáveis M e N, $p \in M$, $v \in T_pM$ e $\varphi \in C^\infty(N)$ uma aplicação suave. A diferencial de f em p é a aplicação linear*

$$df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$$

definida por $(df_pv)\varphi = v(\varphi \circ f)$.

Para definir o conceito de subvariedade são necessárias as definições de imersão e de mergulho.

Definição 1.6. *Sejam $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre as variedades M e N e $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ sua diferencial em $p \in M$. Diz-se que*

1. *f é uma imersão em p, se df_p é uma aplicação injetiva. f é uma imersão se o for para todo $p \in M$;*

2. *uma imersão f é um mergulho se for um homeomorfismo sobre sua imagem $f(M)$.*

Definição 1.7. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Diz-se que M é uma subvariedade de N se existe uma imersão $f : M \to N$. A variedade N é chamada de variedade ambiente.*

A proposição seguinte é indispensável para a teoria local de subvariedades.

Proposição 1.1. *Sejam N^n e M^m na variedades diferenciáveis, $f : N^n \to M^m$ uma imersão, e $p \in N$. Então existe uma vizinhança U de p tal que a aplicação $f|_U : U \to N$ é um homeomorfismo sobre $f(U)$.*

Demonstração. Ver [18]. □

Dado $p \in M$, pode-se identificar a vizinhança U dada pela proposição 1.1 com sua imagem $f(U)$. Neste mesmo raciocínio, pode-se identificar $v \in T_pM$ com $df_pv \in T_{f(p)}M$, bem como p com $f(p)$. Dessa maneira uma subvariedade pode ser pensada, a menos de propriedades globais, como um subconjunto da variedade ambiente.

A noção de diferencial de uma aplicação diferenciável entre variedades permite estender muitas noções familiares do espaço Euclidiano para uma variedade diferenciável qualquer.

Definição 1.8. *Seja U um aberto de M. Um campo de vetores em U é uma aplicação X que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Seja $(x_1, \ldots, x_n)$ um sistema de coordenadas para M em torno de p. Então*

$$X(q) = \sum_i a_i(q) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

com funções $a_i : U \to \mathbb{R}$. Diz-se que o campo X é diferenciável se as funções a_i são diferenciáveis.

Definição 1.9. *Se M é uma variedade diferenciável de dimensão n, a um conjunto de n campos de vetores diferenciáveis $\{X_1, \ldots, X_n\}$ em um aberto U de M tal que o conjunto $\{X_1(p), \ldots, X_n(p)\}$ é linearmente independente em T_pM chamamos um referencial em U.*

Observação 1.2. *Campos de vetores satisfazem a regra do produto, isto é, se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$, então $X(fg) = fX(g) + gX(f)$.*

O conjunto dos campos de vetores diferenciáveis sobre M é representado por $\mathfrak{X}(M)$. Com as operações pontuais de soma e multiplicação por escalares reais, $\mathfrak{X}(M)$ se torna um espaço vetorial real. De maneira análoga pode-se considerar o dual T_p^*M, de T_pM, e o conjunto $\mathfrak{X}^*(M)$ de todas as aplicações η tais que $\eta(p) \in T_p^*M$. A aplicação $\eta(p) : T_p^*M \to \mathbb{R}$ é então chamada uma 1-forma em T_pM e η é chamado de um campo de 1-formas em M, ou simplesmente de uma 1-forma em M.

Se $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ é um referencial coordenado, então pode-se considerar o referencial dual $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ tal que $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$, e assim $\eta(p) = \sum_j c_j(p)dx_j$. Além disso, da identificação canônica de T_pM com $(T_p^*M)^*$, obtém-se que $\frac{\partial}{\partial x_i}$ pode ser visto como um funcional lineal definido em T_p^*M pela expressão $X(\eta) \doteqdot \eta(X)$. Daí segue que:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(dx_j) = \delta_{ij}.$$

Definição 1.10. *Sejam M e N variedades diferenciáveis, $X \in \mathfrak{X}(N)$, $\eta \in \mathfrak{X}^*(N)$ e $f : M \to N$ um difeomorfismo. Então:*

1. *O campo de vetores $f^*X \in \mathfrak{X}(M)$, definido por*

$$(f^*X)(p) = d(f^{-1})_{f(p)}(X(f(p))), \; p \in M,$$

   é chamado de pull back de X por f.

2. *A 1-forma $f^*\eta \in \mathfrak{X}(M)$ sobre M, definida por*

$$(f^*\eta)(Y)(p) = \eta((df_p(Y))(p)), \; p \in M,$$

   é chamado de pull back de η por f.

Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos de vetores sobre M e $f \in C^\infty(M)$. Como $X(f) = \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ é ainda uma função, pode-se então calcular $Y(X(f))$ como segue:

$$
\begin{aligned}
Y(X(f)) &= \sum_i Y\left(a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i,j} b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i,j} \left(b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_j} + a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}\right).
\end{aligned}
$$

Como vetores satisfazem a regra do produto (como foi visto na observação 1.2) segue que, na maioria dos casos, YX não é um campo de vetores. No entanto, como $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}$, segue que a combinação $XY - YX$, denotada por $[X, Y]$ e chamada de colchete de Lie de X e Y, é um campo de vetores em M.

Proposição 1.2. *Sejam M e N variedades diferenciáveis, X, $Y \in \mathfrak{X}(N)$, $f, g \in C^\infty(N)$ e $h : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Então*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$;

2. $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$;

3. $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$;

4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$;

5. $h^*[X, Y] = [h^*X, h^*Y]$.

O colchete de Lie $[X, Y]$ de dois campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ pode ser interpretado como a taxa de variação de Y ao longo de curvas obtidas a partir do campo X, chamadas as curvas integrais de X. Tal noção leva à derivada de Lie. Antes é necessário introduzir a noção de fluxo. Para definir e mostrar a existência, será considerado o seguinte teorema de Equações Diferenciais,

Teorema 1.1. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$. Então existem $\varepsilon > 0$, $U \subset M$ vizinhança de p e uma função diferenciável $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$ tais que $\varphi_q : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é a única curva tal que $\varphi_q(0) = q$ e*

$$X(\varphi_q(t)) = \frac{d\varphi_q}{dt},$$

para todo $q \in U$. A curva

$$t \mapsto \varphi_p(t) = \varphi(t,p),\ \ p \in U$$

é chamada a curva integral de X começando em p, e a aplicação

$$q \mapsto \varphi_t(q) = \varphi(t,p),\ \ p \in U$$

é chamada o fluxo local de X.

Definição 1.11. *Sejam M uma variedade diferenciável. Um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ é chamado completo se seu fluxo está definido em $\mathbb{R} \times M$.*

A demonstração do teorema abaixo pode ser encontrada em [33].

Teorema 1.2. *Se M é uma variedade diferenciável compacta, qualquer campo de vetores é completo.*

Proposição 1.3. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ e seja $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$ seu fluxo. Então:*

1. *$\varphi_0 = Id$;*

2. *$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$, sempre que $t + s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.*

E, se o campo X for completo, o conjunto de todos os fluxos infinitesimais de X é um subgrupo do grupo de difeomorfismos de M.

Agora a derivada de Lie de campos de vetores pode ser definida. Sejam M uma variedade diferenciável, $p \in$ e $Y,\ X \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.12. *Define-se a derivada de Lie do campo Y com relação ao campo X, como sendo o campo de vetores*

$$\mathfrak{L}_X Y = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \varphi_t^* Y = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_t^* Y - Y}{t},$$

onde φ é o fluxo do campo X.

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada em [18]. Ele é quem estabelece a interpretação do colchete como taxa de variação.

Proposição 1.4. *Se* $X,\ Y \in \mathfrak{X}(M)$*, então vale a igualdade:*

$$[X, Y] = \mathfrak{L}_X Y.$$

Esta seção será encerrada tratando das variedades produto. Dadas as variedades diferenciáveis $M_1^{m_1}$ e $M_2^{m_2}$, é possível munir o espaço produto $M_1 \times M_2$ com uma etrutura diferenciável tal que, fixando $(a, b) \in M_1 \times M_2$ tem-se:

1. as aplicações $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$, definidas por $\pi_i(p_1, p_2) = p_i$, são submersões, com $i \in \{1, 2\}$;

2. as aplicações $\varphi_a : M_1 \to M_1 \times M_2$ e $\varphi_b : M_2 \to M_1 \times M_2$, definidas respectivamente por $\varphi_a(q) = (a, q)$ e $\varphi_b(p) = (p, b)$, são imersões

3. M_1 e M_2 são subvariedades de $M_1 \times M_2$;

4. a aplicação

$$\begin{aligned} T : T_a M_1 \oplus T_b M_2 \ &\to \ T_{(a,b)}(M_1 \times M_2) \\ T(V, W) \ &= \ (d\pi_1)_a V + (d\pi_2)_b W \end{aligned}$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais (independente de escolhas), isto é

$$T_a M_1 \oplus T_b M_2 = T_{(a,b)}(M_1 \times M_2).$$

Tal estrutura é descrita da seguinte maneira. Dado $(a, b) \in M_1 \times M_2$, existem cartas (U, φ) e (V, ψ), de a em M_1 e de b em M_2, respectivamente. Definindo $\varphi \times \psi :\to \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$ por

$$(\varphi \times \psi)(x, y) = (\varphi(x), \psi(y)),$$

e tomando o atlas maximal que contém todos as cartas obtidas desta maneira, obtém-se a estrutura diferenciável desejada em $M_1 \times M_2$.

1.2 Tensores em Variedades Diferenciáveis

Um tensor r-contravariante e s-covariante, ou simplesmente um (r, s)-tensor, é uma aplicação $(r + s)$-linear

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{\text{r vezes}} \times \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{\text{s vezes}} \to C^\infty(M).$$

O conjunto de todos os (r,s)-tensores, se munido com as operações de soma e multiplicação pontuais, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e um módulo sobre $C^\infty(M)$.

Com o objetivo de encontrar uma $\mathbb{R}$-base para tal conjunto, será definida uma aplicação $\otimes$ tal que, dados T, (r_1,s_1)-tensor de M, e G, (r_2,s_2)-tensor de M, associa um (r_1+r_2, s_1+s_2)-tensor de M, denotado por $T\otimes G$. Sejam T um (r_1,s_1)-tensor e G um (r_2,s_2)-tensor. Define-se o (r_1+r_2,s_1+s_2)-tensor $T\otimes G$ pela fórmula

$$\begin{aligned} T\otimes G(X_1,\ldots,X_{r_1},X_{r_1+1},\ldots,X_{r_1+r_2},\eta_1,\ldots,\eta_{s_1},\eta_{s_1+1},\ldots,\eta_{s_1+s_2}) &= \\ T(X_1,\ldots,X_{r_1},\eta_1,\ldots,\eta_{s_1})G(X_{r_1+1},\ldots,X_{r_1+r_2},\eta_{s_1+1},\ldots,\eta_{s_1+s_2}). \end{aligned}$$

Segue desta definição que $T\otimes G$ é realmente um (r_1+r_2,s_1+s_2)-tensor. Fixando um sistema de coordenadas $(x_1,\ldots,x_n)$ em M e considerando T um (r,s)-tensor em M, $X_1,\ldots,X_r\in\mathfrak{X}(M)$ e $\eta_1,\ldots,\eta_r\in\mathfrak{X}^*(M)$ com

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{j_k=1}^{n} x^k_{j_k}\partial_{j_k} \\ \eta_i &= \sum_{\alpha_i=1}^{n}\eta^i_{\alpha_i}dx_{\alpha_i}, \end{aligned}$$

onde $k\in\{1,\ldots,r\}$ e $i\in\{1,\ldots,s\}$, obtém-se

$$\begin{aligned} &T(X_1,\ldots,X_r,\eta_1,\ldots,\eta_s) = \\ &\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_r\\ \alpha_1,\ldots,\alpha s}} x^1_{j_1}\cdots x^r_{j_r}\eta^1_{\alpha_1}\cdots\eta^s_{\alpha_s}\underbrace{T(\partial_{j_1},\ldots,\partial_{j_r},dx_{\alpha_1},\ldots,dx_{\alpha_s})}_{T^{j_1\cdots j_r}_{\alpha_1\cdots\alpha_s}} = \\ &\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_r\\ \alpha_1,\ldots,\alpha s}} x^1_{j1}\cdots x^r_{j_r}\eta^1_{\alpha_1}\cdots\eta^s_{\alpha_s}T^{j_1\cdots j_r}_{\alpha_1\cdots\alpha_s} = \\ &\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_r\\ \alpha_1,\ldots,\alpha s}} T^{j_1\cdots j_r}_{\alpha_1\cdots\alpha_s}dx_{j_k}(X_1)\cdots dx_{j_r}(X_r)\partial_{\alpha_1}(\eta_1)\cdots\partial_{\alpha_s}(\eta_s) = \\ &\left(\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_r\\ \alpha_1,\ldots,\alpha s}} T^{j_1\cdots j_r}_{\alpha_1\cdots\alpha_s}dx_{j_k}\otimes\cdots\otimes dx_{j_r}\otimes\partial_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{\alpha_s}\right)(X_1,\ldots,X_r,\eta_1,\ldots,\eta_s). \end{aligned}$$

Dessa forma T pode ser escrito como

$$T=\sum T^{j_1\cdots j_r}_{\alpha_1\cdots\alpha_s}dx_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes dx_{\alpha_s}\otimes\partial_{j_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{j_r}.$$

Isto mostra que o conjunto

$$\Omega=\left\{dx_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes dx_{\alpha_s}\otimes\partial_{j_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{j_r}\;\middle|\;1\le j_l,\alpha_i\le n,\ 1\le l\le r,\ 1\le i\le s\right\}$$

gera o conjunto dos $(r, s)-$tensores de M. Tem-se também que β é um conjunto linearmente independente pois, considerando a combinação linear nula

$$\sum A^{j_1\cdots j_r}_{\alpha_1\cdots\alpha_s} dx_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes dx_{\alpha_s} \otimes \partial_{j_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{j_r} = 0,$$

e fixando $j_1 \cdots j_r, \alpha_1 \cdots \alpha_s \in \{1, \ldots, n\}$, pode-se tomar o vetor

$$(\partial_{j_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{j_r}, dx_{\alpha_1}, \ldots, dx_{\alpha_s}) \in \mathfrak{X}(M) \times \cdots \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^*(M) \times \cdots \mathfrak{X}^*(M). \tag{1.2}$$

Assim $A^{j_1\cdots j_r}_{\alpha_1\cdots\alpha_s} = 0$ e, pela arbitrariedade de 1.2, segue que Ω é um conjunto linearmente independente.

As funções $T^{j_1\cdots j_r}_{\alpha_1\cdots\alpha_s} : M \to \mathbb{R}$ são ditas os coeficientes do tensor T na base Ω. Também representa-se um tensor T por $(T^{j_1\cdots j_r}_{\alpha_1\cdots\alpha_s})$.

Definição 1.13. *Diz-se que um (r,s)-tensor T é diferenciável se os seus coeficientes o são em alguma base de $T^r_s(M)$. Denota-se o conjunto de todos os (r,s)-tensores diferenciáveis de M por $T^r_s(M)$.*

Observação 1.3. *As aplicações s-lineares $T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)}_{s\ vezes} \to \mathfrak{X}(M)$ podem ser vistas como $(1, s)$-tensores da seguinte maneira. Dados $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \mathfrak{X}^*(M)$, definimos $T^* \in T^1_s(M)$ como:*

$$T^*(X_1, \ldots, X_s, \eta) = \eta(T(X_1, \ldots, X_s)).$$

Da maneira como foi definido, T^* é realmente um $(1, s)$-tensor. Por isso é comum, algumas vezes, chamar uma aplicação T, como descrita aqui, de um $(1, s)$-tensor.

Dentre o conjunto dos (0,s)-tensores, serão destacados aqui os tensores simétricos e os tensores anti-simétricos que serão definidos abaixo.

Definição 1.14. *Sejam $T \in T^0_s(M)$ um (0,s)-tensor em M e $(T_{\alpha_1\cdots\alpha_s})$ sua representação em coordenadas. Diz-se que T é simétrico se*

$$T(\partial_{\alpha_1}, \ldots, \partial_{\alpha_i}, \ldots, \partial_{\alpha_l} \ldots, \partial_{\alpha_s}) = T(\partial_{\alpha_1}, \ldots, \partial_{\alpha_l}, \ldots, \partial_{\alpha_i}, \ldots, \partial_{\alpha_s}),\ \forall i, l \in \{1, \ldots, s\}$$

e que ele é anti-simétrico se

$$T(\partial_{\alpha_1}, \ldots, \partial_{\alpha_i}, \ldots, \partial_{\alpha_l} \ldots, \partial_{\alpha_s}) = -T(\partial_{\alpha_1}, \ldots, \partial_{\alpha_l}, \ldots, \partial_{\alpha_i}, \ldots, \partial_{\alpha_s}),\ \forall i, l \in \{1, \ldots, s\}$$

Da mesma maneira define-se tensores covariantes simétricos e anti-simétricos.

Agora será definido o pull back de um (0,s)-tensor.

Definição 1.15. *Sejam M e N variedades diferenciáveis, $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável e $T \in T_s^0(N)$ um (0,s)-tensor em N. O pull back de T é o (0,s)-tensor $f^*T \in T_s^0(M)$ definido por*

$$(f^*T)(X_1, \dots, X_s) = T(df(X_1), \dots, df(X_s)).$$

Se $G \in T_s^r(N)$ e se f for um difeomorfismo, o pull back de G é o (r,s)-tensor $f^*G \in T_s^r(M)$ definido por

$$(f^*G)(X_1, \dots, X_s, \eta_1, \dots, \eta_r) = G(df(X_1), \dots, df(X_s), \eta_1 \circ df, \dots, \eta_r \circ df).$$

Observação 1.4. *Sejam M, N e O variedades diferenciáveis, $f : M \to N$ e $h : N \to O$ aplicações diferenciáveis, e $G, T \in T_s^0(O)$. Então:*

1. $(h \circ f)^*T = f^*h^*T$;

2. $f^*(T + G) = f^*T + f^*G$.

Agora pode-se definir a derivada de Lie para tensores.

Definição 1.16. *Sejam $T \in T_s^0(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$. A derivada de Lie $\mathfrak{L}_X T$ do tensor T na direção do campo X é o tensor*

$$\mathfrak{L}_X T = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \varphi_t^* T = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_t^* T - T}{t},$$

onde φ é o fluxo do campo X.

Algumas propriedades da derivada de Lie de tensores é dada pela proposição abaixo.

Proposição 1.5. *Sejam M uma variedade diferenciável, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $T, G \in T_s^0$ e $f \in C^\infty(M)$. Então:*

1. $\mathfrak{L}_X f = Xf$;

2. $\mathfrak{L}_X(fT) = (\mathfrak{L}_X f)T + f\mathfrak{L}_X T$;

3. $\mathfrak{L}_X(T \otimes G) = \mathfrak{L}_X T \otimes G + T \otimes \mathfrak{L}_X G$;

4. $(\mathfrak{L}_X T)(X_1, \ldots, X_s) = X(A(X_1, \ldots, X_s)) - T([X, X_1], \ldots, X_s) - \cdots - T(X_1, \ldots, [X, X_s])$.

Proposição 1.6. *Sejam M uma variedade diferenciável, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $T, G \in T_s^0$. Então*

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} (\varphi_t^* T) &= \mathfrak{L}_{(\varphi_{t_0}^* X)}(\varphi_{t_0}^* T) \\ &= \varphi_{t_0}^*(\mathfrak{L}_X T), \end{aligned}$$

onde φ é o fluxo do campo X.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} \varphi_t^* T &= \lim_{t \to t_0} \frac{\varphi_t^* T - \varphi_{t_0}^* T}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{(\varphi_{t_0} \circ \varphi_{-t_0} \circ \varphi_t)^* T - \varphi_{t_0}^* T}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{(\varphi_{t-t_0})^* \varphi_{t_0}^* T - \varphi_{t_0}^* T}{t - t_0} \\ &= \mathfrak{L}_Y(\varphi_{t_0}^* T), \end{aligned}$$

onde Y é o campo cujo fluxo é φ_{t-t_0}, isto é:

$$\begin{aligned} Y(\varphi_{t-t_0}(p)) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} (\varphi_{s-t_0})(p) \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} (\varphi_{-t_0} \circ \varphi_s)(p) \\ &= (d\varphi_{t_0}^{-1})_{\varphi_{t_0}(p)} \left(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} \varphi_s(p) \right) \\ &= (d\varphi_{t_0}^{-1})_{\varphi_{t_0}(p)}(X(\varphi_t(p))) \\ &= (\varphi_{t_0}^* X)(\varphi_{t-t_0}(p)), \end{aligned}$$

o que nos dá $Y = \varphi_{t_0}^* X$, donde $\frac{d}{dt}\big|_{t_0} \varphi_t^* T = \mathfrak{L}_{(\varphi_{t_0}^* X)}(\varphi_{t_0}^* T)$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0} \varphi_t^* T &= \lim_{t \to t_0} \frac{\varphi_t^* T - \varphi_{t_0}^* T}{t - t_0} \\
&= \lim_{t \to t_0} \frac{(\varphi_t \circ \varphi_{-t_0} \circ \varphi_{t_0})^* T - \varphi_{t_0}^* T}{t - t_0} \\
&= \lim_{t \to t_0} \frac{\varphi_{t_0}^* \varphi_{(t-t_0)}^* T - \varphi_{t_0}^* T}{t - t_0} \\
&= \lim_{t \to t_0} \frac{\varphi_{t_0}^* (\varphi_{(t-t_0)}^* T - T)}{t - t_0} \\
&= \varphi_{t_0}^* \left(\lim_{t \to t_0} \frac{\varphi_{(t-t_0)}^* T - T}{t - t_0} \right) \\
&= \varphi_{t_0}^* \left(\lim_{s \to 0} \frac{\varphi_s^* T - T}{s} \right) \\
&= \varphi_{t_0}^* (\mathfrak{L}_X T).
\end{aligned}
$$

□

1.3 Métrica Riemanniana

Seja M uma variedade diferenciável. Para falar em objetos geométricos em M, como por exemplo a área de uma região ou o comprimento de uma curva, será necessário considerar um tensor em M, chamado de métrica Riemanniana. Uma métrica Riemanniana introduz em cada espaço tangente um produto interno. Além disso, é exigido de um tal objeto que ele varie diferenciavelmente com os pontos de M.

Definição 1.17. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma métrica Riemanniana g em M é um $(0,2)$-tensor simétrico, diferenciável, que é positivo definido para todo $p \in M$, isto é, a forma bilinear $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ é positiva definida. Uma variedade Riemanniana, (M, g), é uma variedade diferenciável na qual foi escolhida uma métrica Riemanniana g.*

Exemplo 1.1 (Espaço Euclidiano). *O espaço Euclidiano n-dimensional é o conjunto $\mathbb{R}^n$, de todas as n-uplas de números reais, munido com a métrica Euclidiana, que é definida em cada ponto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ pelo produto interno Euclidiano, isto é, por*

$$
\begin{aligned}
(g_E)_x(V, W) &= \langle V, W \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} v_i w_i,
\end{aligned}
$$

onde $V = (v_1, \ldots, v_n)$, $W = (w_1, \ldots, w_n) \in T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.2 (Esfera)**.** *A esfera n-dimensional é definida como sendo o conjunto* $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; g_E(x,x) = 1\}$, *onde a métrica é dada pela restrição da métrica Euclidiana, em cada espaço tangente.*

Exemplo 1.3 (Espaço hiperbólico)**.** *O espaço hiperbólico n-dimensional é definido como sendo o conjunto* $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$, *onde a métrica é*

$$\begin{aligned} g_x(V,W) &= \frac{(g_E)_x(V,W)}{x_n^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i w_i}{x_n^2}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.4 (Pull Back)**.** *Sejam* (M,g) *uma variedade Riemanniana,* N *uma variedade diferenciável e* $f : N \to M$ *uma imersão. Então o pull back* f^*g *do tensor* g *é uma métrica Riemanniana em* N*. Sendo assim,* (N, f^*g) *é uma variedade Riemanniana.*

Sempre existem métricas Riemannianas em variedades diferenciáveis.

Proposição 1.7. *Seja* M *uma variedade diferenciável. Então existe uma métrica Riemanniana.*

Demonstração. Ver [18]. □

Na demonstração deste fato é essencial que o espaço topológico subjacente seja de Hausdorff e que ele possua base enumerável. O interesse existe pois tais hipóteses garantem a existência de certo aparato técnico, chamado de partição da unidade. Partições da unidade são úteis para, de certa forma, colar métricas definidas no domínio de cada atlas através do pull-back da métrica euclidiana, obtendo assim, uma métrica definida em toda a variedade.

As próximas definições são para introduzir a noção de curva e comprimento de arco.

Definição 1.18. *Sejam* M *uma variedade diferenciável e* $p,\ q \in M$*. Uma curva* $\alpha : [a,b] \to M$ *liga* p *a* q *se* $\alpha(a) = p$ *e se* $\alpha(b) = q$*. Uma curva* $\alpha : [a,b] \to M$ *é diferenciável se existem* $\varepsilon > 0$ *e uma curva diferenciável* $\tilde{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ *tal que* $[a,b] \subset (-\varepsilon,\varepsilon)$ *e* $\tilde{\alpha}|_{[a,b]} = \alpha$.

Definição 1.19. *Seja* $\alpha : [a,b] \to M$ *uma curva suave. O comprimento de arco de* α *é definido como*

$$l(\alpha) = \int_a^b \sqrt{g(\alpha'(t), \alpha'(t))}dt$$

Definição 1.20. *Uma curva* $\alpha : [a,b] \to M$ *é chamada regular por partes se existe uma partição de* $[a,b]$,

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

tal que a curva $\alpha|_{[t_i,t_{i+1}]}$, $0 \leq i \leq n-1$, *é diferenciável. O comprimento de arco de uma tal curva é definido como sendo*

$$l(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{g(\alpha'(t), \alpha'(t))}dt.$$

A noção de comprimento de arco permite dar à variedade Riemanniana (M, g) uma estrutura de espaço métrico de modo que a topologia induzida pela métrica coincide com a topologia que foi considerada inicialmente em M.

Agora pode-se definir uma função distância em uma variedade Riemanniana.

Definição 1.21. *Sejam* (M, g) *uma variedade Riemanniana e* p, $q \in M$. *Denote por* $\Lambda_{p,q}$ *o conjunto de todas as curvas regulares por partes ligando* p *a* q. *A distância de* p *até* q, *induzida por* g, *é definida como*

$$d(p, q) = \inf\{l(\alpha); \alpha \in \Lambda_{p,q}\}.$$

Observação 1.5. *Para ver que a função da definição anterior define uma função distância na variedade Riemanniana* (M, g) *e, que a topologia induzida pela distância é a mesma do espaço topológico considerado inicialmente, veja [32].*

Definição 1.22. *Uma variedade Riemanniana* (M, g) *é chamada completa se a função distância induzida pela métrica faz de* M *um espaço métrico completo.*

Seja M um espaço topológico. Quando em M considera-se uma estrutura diferenciável, dada uma outra variedade diferenciável que seja difeomorfa a M, elas são indistinguíveis do ponto de vista da diferenciabilidade. Quando escolhe-se uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável, as funções que cumprem o papel dos difeomorfismos são as isometrias.

Sejam (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas e seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável.

Definição 1.23. *Se* f *é um difeomorfismo, diz-se que* f *é uma aplicação conforme se existe uma aplicação* $\varphi : M \to \mathbb{R}_+$ *tal que* $g_p = \varphi(p)(f^*h)_p$. *Neste caso diz-se que* M *e* N *são conformes* *e φ é chamado de fator conforme. Se $\varphi \equiv 1$, diz-se que f é uma isometria e que M e N são isométricas.*

Definição 1.24. *Dado $p \in M$, diz-se que f é localmente conforme (isometria local) em p se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f : U \to f(U)$ é uma aplicação conforme (isometria). Se f é localmente conforme (isometria local) em p, para todo $p \in M$, diz-se que M e N são localmente conformes (localmente isométricas). Neste caso diz-se também que a métrica g é localmente conforme (localmente isométrica) à métrica h.*

Com as definições que virão, ficará claro o quanto a noção de métrica Riemanniana enriquece uma variedade diferenciável. Serão definidos abaixo conceitos como divergente, gradiente, Laplaciano e outros. A métrica também permite definir o chamado tensor de curvatura, de onde derivam outros tensores, como por exemplo, a curvatura seccional e a curvatura de Ricci. De notável interesse é também o tensor de Ricci. Primeiro, será definida uma maneira de derivar campos de vetores.

Definição 1.25. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma conexão afim em M é uma atribuição*

$$\nabla : (X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M),$$

tal que:

1. *∇ é $C^\infty(M)$-linear em X, isto é: $\nabla_{X+fZ} Y = \nabla_X Y + f \nabla_Z Y$;*
2. *∇ é aditiva em Y, isto é: $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;*
3. *∇ é uma derivação em Y, isto é: $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y$.*

Além disso, ∇ é dita simétrica se:

4. *$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.*

Considerando uma métrica Riemanniana g em M, diz-se que ∇ é compatível com a métrica se:

5. *$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$;*

Se uma conexão afim em uma variedade Riemanniana satisfaz 4. e 5.*, então ela é chamada de conexão Riemanniana. O campo $\nabla_X Y$ é chamado a derivada covariante de Y com relação a X.*

Sejam $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ um referencial coordenado em M e sejam $X = \sum_i x_i \partial_i$ e $Y = \sum_j y_j \partial_j$. Usando as propriedades que definem a conexão de Levi-Civita de g, a expressão do campo $\nabla_X Y$ em coordenadas locais é:

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{(\sum_i x_i \partial_i)}(\sum_i x_i \partial_i) \\
&= \sum_{i,j} x_i \nabla_{\partial_i}(y_j \partial_j) \\
&= \sum_{i,j} x_i \{ y_j \nabla_{\partial_i} \partial_j + \partial_i y_j \} \partial_j.
\end{aligned}$$

Como $\nabla_{\partial_i} \partial_j$ é um campo de vetores, ele pode ser escrito como combinação linear da base coordenada, isto é, como

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Sendo assim,

$$\nabla_X Y = \sum_k \{ X(y_k) + \sum_{i,j} x_i y_j \Gamma_{ij}^k \} \partial_k, \tag{1.3}$$

onde as funções coordenadas Γ_{ij}^k, que são suaves, são chamadas de símbolos de Christoffel.

Observação 1.6. *A equação 1.3 revela uma informação sobre a conexão Riemanniana: apesar de ser definida para campos definidos em M, $\nabla_X Y$ depende apenas dos valores de X no ponto p e dos valores de Y ao longo de uma curva integral de X. É possível então falar da derivada covariante de um campo Y ao longo de uma curva γ com relação a um vetor $v \in T_pM$. Para mais detalhes veja [18].*

O teorema abaixo diz que sempre existe uma conexão Riemanniana em uma variedade Riemanniana.

Teorema 1.3 (Levi-Civita)**.** *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Então existe uma única conexão Riemanniana em (M, g).*

Demonstração. Ver [18]. $\square$

Por causa do Teorema acima acima, uma conexão Riemanniana é também chamada de conexão de Levi-Civita.

Como pode-se ver em [18], a demonstração deste teorema consiste em estabelecer a equação

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Y, Z], X),$$

conhecida como fórmula de Koszul. Uma simples aplicação da fórmula de Koszul é dada na proposição abaixo.

Proposição 1.8. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇^g e c uma constante positiva. Então h, definida por $h(X, Y) = cg(X, Y)$, é uma métrica Riemanniana em M tal que $\nabla^h = \nabla^g$.*

Demonstração. Que h é uma métrica Riemanniana decorre imediatamente das propriedades de g e do fato de c ser uma constante positiva. Decorre da fórmula de Koszul que ∇^g é a conexão de Levi-Civita de h. De fato,

$$\begin{aligned}
2h(\nabla^g_X Y, Z) &= 2cg(\nabla^g_X Y, Z) \\
&= c(Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Y, Z], X)) \\
&= X(cg(Y, Z)) + Y(cg(X, Z)) - Z(cg(X, Y)) + cg([X, Y], Z) + cg([Z, X], Y) \\
&+ cg([Y, Z], X) \\
&= Xh(Y, Z) + Yh(X, Z) - Zh(X, Y) + h([X, Y], Z) + h([Z, X], Y) + h([Y, Z], X),
\end{aligned}$$

e isto conclui que $\nabla^h = \nabla^g$.

□

Agora será introduzido o conceito de geodésica, noção fundamental na teoria das variedades Riemannianas que generaliza, em um certo sentido, as retas dos espaços Euclidianos para variedades Riemannianas mais gerais.

Definição 1.26. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva regular em M. O campo X é dito paralelo se $\nabla_{\gamma'} X = 0$. A curva γ é uma geodésica se o seu campo tangente γ' é paralelo ao longo de γ.*

A definição abaixo contém dois tipos de referenciais que serão muito úteis.

Definição 1.27. *Sejam $p \in M$ e $U \subset M$ um aberto contendo p. Um referencial $\{e_1, \ldots, e_n\}$, definido no conjunto U, é ortonormal se $g_q(e_i(q), e_j(q)) = \delta_{ij}$. Ele é geodésico em p, se ele é ortonormal e se $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$.*

Observação 1.7. *Em 1.21 foi definida a distância induzida por uma métrica Riemanniana de um ponto $p = \gamma(a)$ à um ponto $q = \gamma(b)$. Pode acontecer de o ínfimo ser realizado por uma curva. É possível provar (ver em [18]) que, neste caso, a curva é uma geodésica neste intervalo. A recíproca não é válida: nem toda geodésica ligando dois pontos realiza a distância entre eles, isto é, o comprimento da porção da curva entre estes dois pontos pode ser maior do que distância entre eles.*

Definição 1.28. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Uma geodésica $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é dita maximal se não existem $\tilde{\varepsilon} > \varepsilon$ e outra geodésica $\tilde{\gamma} : (-\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}) \to M$ tal que $\tilde{\gamma}|_{(-\varepsilon,\varepsilon)} = \gamma$. Se toda geodésica maximal está definida em $\mathbb{R}$, então (M, g) é dita geodesicamente completa .*

Teorema 1.4 (Hopf-Hinow)**.** *Uma variedade Riemanniana (M, g) é completa se, e somente se, é geodesicamente completa.*

Demonstração. Ver Lee [32]. □

Uma consequência muito importante do Teorema de Hopf-Hinow é o seguinte resultado, cuja demonstração também pode ser encontrada em [32].

Corolário 1.1. *Se a variedade Riemanniana (M, g) é completa, então dois quaisquer de seus pontos podem ser ligados por uma geodésica minimizante.*

Demonstração. Ver O'Neill [35]. □

Existe também uma caracterização de variedades Riemannianas completas, dada através de conjuntos fechados e limitados. Mais precisamente:

Teorema 1.5. *Uma variedade Riemanniana é completa se, e somente se, os conjuntos fechados e limitados são compactos.*

Demonstração. Ver Lee [32]. □

Agora será definido o tensor de curvatura.

Definição 1.29. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇. O operador de curvatura da métrica g*

$$Rm : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

é definido pela regra

$$Rm(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Considerando um referencial coordenado $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$, pode-se escrever

$$Rm(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_k R_{ijk}^l \partial_l,$$

onde os R_{ijk}^l são as funções coordenadas do operador de curvatura Rm.

Definição 1.30. *O tensor de curvatura de g é o $(0,4)$-tensor que a cada quatro campos ordenados (X,Y,Z,V) em M associa a função*

$$Rm(X,Y,Z,V) = g(Rm(X,Y)Z,V).$$

Em coordenadas locais, tem-se

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= Rm(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) \\ &= \sum_m g_{ml} R_{ijk}^m. \end{aligned}$$

A próxima proposição lista algumas propriedades do tensor de curvatura.

Proposição 1.9. *Simetrias do tensor de curvatura.*

1. $R_{ijkl} = R_{klij} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}$;

2. $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$ *(identidade algébrica de Bianchi);*

3. $\nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kilm} + \nabla_k R_{ijlm} = 0$ *(identidade diferencial de Bianchi).*

Demonstração. Ver [32]. □

É possível mostrar que, dados campos linearmente independentes $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, a expressão

$$\frac{g(Rm(X,Y)X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - (g(X,Y))^2}$$

não depende dos campos X e Y, mas apenas do plano gerado por estes dois campos.

Definição 1.31. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos linearmente independentes e $p \in M$ tais que $X(p) = x$ e $Y(p) = y$. A curvatura seccional do plano σ, gerado por X e por Y, no ponto p, é definido pelo número*

$$K(\sigma, p) = \frac{g(Rm(x,y)x,y)}{g(x,x)g(y,y) - (g(x,y))^2}.$$

Pode ser difícil manipular o tensor de curvatura, pois ele depende de 4 campos de vetores. Em [18] pode-se ver que o conhecimento de todas as curvaturas seccionais permite reobter o tensor de curvatura. Além disso, a curvatura seccional é algebricamente mais fácil de manipular, pois ela depende apenas de dois campos de vetores.

Teorema 1.6. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. A curvatura seccional de M é uma constante K_0 se, e somente se, seu operador de curvatura é dado por*

$$R(X, Y)Z = K_0(g(X, Z)Y - g(Y, Z)X).$$

Demonstração. Ver [32]. □

Exemplo 1.5. *O espaço Euclidiano n-dimensional possui curvatura seccional constante igual a* 0.

Exemplo 1.6. *A esfera n-dimensional possui curvatura seccional constante igual a* 1.

Exemplo 1.7. *O espaço hiperbólico n-dimensional possui curvatura seccional constante igual a* -1.

Definição 1.32. *Uma variedade Riemanniana completa que possui curvatura seccional constante é chamada de forma espacial.*

Um dos resultados mais importantes sobre as formas espaciais é o teorema abaixo.

Teorema 1.7. *Seja (M, g) uma forma espacial simplesmente conexa com curvatura constante K. Então ela é isométrica a*

1. $\mathbb{S}^n$, *se* $K = 1$;

2. $\mathbb{R}^n$, *se* $K = 0$;

3. $\mathbb{H}^n$, *se* $K = -1$.

Demonstração. Ver [32]. □

O objetivo agora é introduzir a noção de subvariedade Riemanniana. Se $(\overline{M}^m, g)$ é uma variedade Riemanniana, a existência de uma imersão $f : M \to \overline{M}$ faz de M^n uma variedade

Riemanniana, considerando-se a métria induzida em $\overline{M}$. Para cada ponto p, toma-se a vizinhança U, que faz de f um mergulho, e considera-se a métrica f^*g no aberto U. Feitas estas considerações, $f(U)$ passa a ser chamada de subvariedade Riemanniana de $(\overline{M}, g)$, que será identificado com U. Tal identificação pode ser feita, uma vez que a maioria das questões discutidas neste trabalho serão locais. Se $m = n + 1$, então U é chamada de hipersuperfície.

Seja (M, g) uma subvariedade Riemanniana de $(\overline{M}, g)$. Denotando a conexão de Levi-Civita de (M, g) por ∇ e a conexão de Levi-Civita de $(\overline{M}, g)$ por $\overline{\nabla}$, pode-se verificar que $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T$, onde $(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T(p)$ é projeção de $\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}$ sobre T_pM, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, de modo que $\overline{X}(p) = X(p)$ e $\overline{Y}(p) = Y(p)$, para todo $p \in M$. Tem-se então a seguinte definição.

Definição 1.33. *A segunda forma fundamental da imersão f é uma aplicação*

$$II : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^{\perp}(M)$$

definida como

$$II(X, Y) = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^{\perp} = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y.$$

A importância da segunda forma fundamental será revelada com a chamada fórmula de Gauss. Esta fórmula mostra de que maneira a segunda forma relaciona os tensores de curvatura de M e de $\overline{M}$.

Teorema 1.8 (Fórmula de Gauss)**.** *Seja M uma subvariedade Riemanniana de $(\overline{M}, g)$. Denotando por Rm e $\overline{Rm}$ os tensores de curvatura de M e $\overline{M}$, respectivamente, tem-se*

$$g(Rm(X, Y)Z, W) = g(\overline{Rm}(X, Y)Z, W) + g(II(X, Z), II(Y, W)) - g(II(X, W), II(Y, Z)),$$

onde $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Ver [18]. □

Em termos de curvatura seccional tem-se o seguinte corolário.

Corolário 1.2. *Sejam K e $\overline{K}$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos linearmente independentes (possivelmente localmente). Então*

$$K(X, Y) = \overline{K}(X, Y) + \frac{g(II(X, X), II(Y, Y)) - g(II(X, Y), II(X, Y))}{g(X, X)g(Y, Y) - (g(X, Y))^2}.$$

De acordo com a segunda forma fundamental, destacam-se dois tipos de variedades.

Definição 1.34. *Sejam* (M^m, g_M) *uma variedade Riemanniana e* (N^n, g_N) *uma subvariedade Riemanniana de* M*.* N *é dita totalmente umbílica (em* M*) se existe um campo* $\eta \in \mathfrak{X}^\perp(N)$ *tal que* $II_N = g_N\eta$*. Se o campo* η *for identicamente nulo, então diz-se que* N *é totalmente geodésica (em* M*).*

1.4 Tensor de Ricci

Além da curvatura seccional, é possível definir outros tensores que são muito importantes do ponto de vista da geometria da métrica g. Serão descritos agora o tensor de Ricci, a curvatura de Ricci e a curvatura escalar de uma métrica g. Para isto, será introduzido o conceito de traço de um $(0, s)$-tensor. A definição não será feita diretamente, mas as observações que seguirão darão consistência ao que será definido.

Observação 1.8. *Uma métrica Riemanniana identifica os conjuntos* $T_1^0(M)$ *e* $T_0^1(M)$*, associando para cada campo de vetores* X *a forma diferencial* X^**, definida por* $X^*(Y) = g(X, Y)$ *para todo* Y *e, reciprocamente, a cada forma diferencial* η*, um campo de vetores* η^**, onde* $\eta(X) = g(X, \eta^*)$ *para todo* X*.*

Observação 1.9. *Dado um* $(1, s)$*-tensor* T*, pode-se associar a ele, de maneira única, uma aplicação, denotada por* T^**, que a cada* s*-upla de campos atribui um campo de maneira linear. Tal aplicação é definida por*

$$T(X_1, \ldots, X_s, \eta) = g(T^*(X_1, \ldots, X_s), \eta^*),$$

onde η^* *é definido na observação acima. Tendo a observação 1.3 em mente, é natural perguntar qual a relação entre* $(T^*)^*$*, o qual será denotado por* T^{**}*, e* T*, pelo fato de ambos possuírem a mesma natureza, isto é, ambos são* $(1, s)$*-tensores. Descrevamos a relação entre eles.*

Utilizando a observação 1.3 e a definição do campo η^**, tem-se:*

$$\begin{aligned} T^{**}(X_1, \ldots, X_s, \eta) &= g(T^*(X_1, \ldots, X_s), \eta^*) \\ &= \eta(T^*(X_1, \ldots, X_s)) \\ &= T(X_1, \ldots, X_s, \eta), \end{aligned}$$

donde $T^{**} = T$*.*

Definição 1.35. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana.*

1. *Se*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{s\ vezes} \to \mathfrak{X}(M)$$

é uma aplicação s-linear e, se $1 \leq j \leq s$, o j-ésimo traço da aplicação T é o tensor $tr_j T \in T^0_{s-1}(M)$ definido por:

$$(tr_j T)(X_1, \ldots, X_{s-1}) \;=\; \sum_{i=1}^{n} g(T(X_1, \ldots, X_{j-1}, e_i, X_{j+1}, \ldots, X_{s-1}), e_i),$$

com $X_1, \ldots, X_{s-1} \in \mathfrak{X}(M)$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal;

2. *Se T for uma $(0,s)$-forma linear, utilizamos a aplicação T^*, dada pela observação 1.9, para definir o j -ésimo traço de T, isto é, $tr_j T = tr_j T^*$;*

3. *Se $s = 1$, então o primeiro traço de T é chamado apenas de traço e denotado por trT.*

Observação 1.10. *A definição acima não depende da base utilizada.*

Agora pode-se definir o tensor de Ricci.

Definição 1.36. *O tensor de Ricci da métrica g é o $(0,2)$-tensor $Ric : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$, definido pelo segundo traço do operador de curvatura Rm, isto é,*

$$tr_2(Rm) = Ric.$$

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é tal que $\|X\| = 1$, a curvatura de Ricci na direção de X é definida como $ric(X) = Ric(X,X)$.

Considerando um sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$, define-se as coordenadas do tensor de Ricci por $R_{ij} = Ric(\partial_i, \partial_j)$. Seja $\{e_i\}$ uma base ortornormal e escreva $e_k = \sum_l a_{kl}\partial_l$. Assim,

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= Ric(\partial_i, \partial_j) \\
&= (tr_2 Rm)(\partial_i, \partial_j) \\
&= \sum_k g(Rm(\partial_i, e_k)\partial_j, e_k) \\
&= \sum_{k,l,r} g(Rm(\partial_i, a_{kl}\partial_l)\partial_j, a_{kr}\partial_r) \\
&= \sum_{k,l,r} a_{kr}a_{kl} g(Rm(\partial_i, \partial_l)\partial_j, \partial_r) \\
&= \sum_{k,l,r} a_{kr}a_{kl} R_{iljr}.
\end{aligned}$$

Agora, escrevendo $\partial_l = \sum_k g(\partial_l, e_k)e_k$, como $e_k = \sum_r a_{kr}\partial_r$ segue que

$$\begin{aligned}\partial_l &= \sum_k g(\partial_l, e_k)e_k \\ &= \sum_{k,r} g(\partial_l, e_k)a_{kr}\partial_r \\ &= \sum_r \big(\sum_k g(\partial_l, e_k)a_{kr}\big)\partial_r.\end{aligned}$$

Isto mostra que $\sum_k g(\partial_l, e_k)a_{kr} = \delta_{lr}$. Como $g(\partial_l, e_k) = g(\partial_l, \sum_s a_{ks}\partial_s) = \sum_s a_{ks}g_{ls}$, tem-se que

$$\begin{aligned}\delta_{lr} &= \sum_k g(\partial_l, e_k)a_{kr} \\ &= \sum_{k,s} a_{ks}g_{ls}a_{kr} \\ &= \sum_s \big(\sum_k a_{ks}a_{kr}\big)g_{ls},\end{aligned}$$

Daí segue que

$$\sum_k a_{ks}a_{kr} = g^{sr}.$$

E, por fim,

$$\begin{aligned}R_{ij} &= \sum_{r,l} \big(\sum_k a_{kr}a_{kl}\big)R_{iljr} \\ &= \sum_{r,l} g^{rl}R_{iljr}.\end{aligned}$$

Através de restrições feitas na curvatura de Ricci, pode-se obter respostas quanto à topologia da variedade diferenciável. Um exemplo é o Teorema de Bonnet-Myers.

Teorema 1.9. *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Se a curvatura de Ricci de M satisfaz*

$$Ric(X) \geq \frac{1}{r^2} > 0,$$

para todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, com $\|X\| = 1$, então M é compacta e $diam(M) = \sup\{d(p,q); p, q \in M\} \leq \pi r$.

Demonstração. Ver [18]. $\square$

Como corolário do teorema acima, tem-se.

Corolário 1.3. *Se M é uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $K \geq \frac{1}{r^2} > 0$, então M é compacta, $diam(M) \leq \pi r$ e o grupo fundamental $\pi_1(M)$ é finito.*

Definição 1.37. *A curvatura escalar $R : M \to \mathbb{R}$, da métrica g, é definida como sendo o traço do tensor de Ricci , isto é,*

$$R = tr(Ric^*),$$

onde Ric^* é dado pela observação 1.9.

Em coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$, considerando a base ortonormal $\{e_i\}$ de modo que $e_i = \sum_l a_{il}\partial_l$, a curvatura escalar se escreve como

$$\begin{aligned} R &= tr(Ric^*) \\ &= \sum_k g(Ric^*(e_k), e_k) \\ &= \sum_k Ric(e_k, e_k) \\ &= \sum_k Ric(\sum_m a_{km}\partial_m, \sum_l a_{kl}\partial_l) \\ &= \sum_{k,m,l} a_{km}a_{kl}Ric(\partial_m, \partial_l) \\ &= \sum_{m,l} \underbrace{\Big(\sum_k a_{km}a_{kl}\Big)}_{g^{ml}} R_{ml} \\ &= \sum_{m,l} g^{ml}R_{ml} \\ &= \sum_{m,l,r,s} g^{ml}g^{rs}R_{mrls}. \end{aligned}$$

Como consequência direta das definições dadas acima, obtém-se a seguinte proposição.

Proposição 1.10. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e $c \in \mathbb{R}_+$. Considere a métrica cg em M. Então:*

1. $Rm_c = Rm;$

2. $K_c = \frac{1}{c}K;$

3. $Ric_c = Ric$*;*

4. $R_c = \frac{1}{c}R$*.*

1.5 Hessiano, Laplaciano e divergente

Agora serão definidos os operadores diferenciais Hessiano, Laplaciano e divergente. Para tanto necessita-se do conceito de vetor gradiente.

Definição 1.38. *Sejam* (M, g) *uma variedade Riemanniana e* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma aplicação suave. O gradiente de* f *é o único campo de vetores* $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ *satisfazendo*

$$X(f) = g(\nabla f, X).$$

Em coordenadas locais os campos X e ∇f podem ser escritos como

$$X = \sum_i x_i \partial_i$$

e

$$\nabla f = \sum_j \nabla^j f \partial_j.$$

Então $\nabla^j f = \sum_i g^{ij} \partial_i f$, isto é:

$$\nabla f = \sum_j \big(\sum_i g^{ij} \partial_i f \big) \partial_j.$$

Definição 1.39. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável. O tensor Hessiano de* f *é o* $(0, 2)$*-tensor* H_f *definido por*

$$H_f(X, Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y).$$

Em coordenadas locais,

$$\begin{aligned} H_f(X, Y) &= \sum_{i,j} x_i y_j H_f(\partial_i, \partial_j) \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j \{\partial_i \partial_j f - \nabla_i \partial_j f\} \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j \{\partial_i \partial_j f - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k f\} \end{aligned}$$

A equação acima permite concluir que o tensor H_f é um $(0,2)$-tensor simétrico.

O Hessiano de uma função $f : M \to \mathbb{R}$ e a métrica Riemanniana podem ser relacionados, através da derivada de Lie, da seguinte maneira.

Proposição 1.11. *Se (M,g) é uma variedade Riemanniana e $f : M \to \mathbb{R}$ é suave, então*

$$(\mathfrak{L}_{\nabla f}\, g)(Y,Z) = 2H_f(Y,Z).$$

Demonstração. Considerando a conexão de Levi-Civita de g e usando o item 4 da proposição 1.5, tem-se que

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{L}_X g)(Y,Z) &= X(g(Y,Z)) - g([X,Y],Z) - g(Y,[X,Z]) \\
&= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - g([X,Y],Z) - g(Y,[X,Z]) \\
&= g(\nabla_X Y - [X,Y], Z) + g(Y, \nabla_X Z - [X,Z]) \\
&= g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X).
\end{aligned}$$

Fazendo $X = \nabla f$ na equação acima, obtém-se

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{L}_{\nabla f}\, g)(Y,Z) &= g(\nabla_Y \nabla f, Z) + g(Y, \nabla_Z \nabla f) \\
&= H_f(Y,Z) + H_f(Z,Y) \\
&= 2H_f(Y,Z).
\end{aligned}$$

□

Dado o campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, convém considerar o operador $C^\infty(M)$-linear

$$\nabla X : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

definido como $\nabla X(Y) = \nabla_Y X$. Assim obtém-se a seguinte definição.

Definição 1.40. *Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de vetores. O divergente do campo X é a função $div(X) : M \to \mathbb{R}$ definida pela traço do operador ∇X, isto é:*

$$div(X) = tr(\nabla X).$$

Considerando um referencial ortonormal $\{e_i\}$ e um sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ tal que $Y = \sum_k y_k \partial_k$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
div(X) &= tr(\nabla X) \\
&= \sum_i g(\nabla_{e_i} X, e_i) \\
&= \sum_k \{\partial_k(y_k) + y_k \sum_l \Gamma^l_{lk}\}
\end{aligned}
$$

Definição 1.41. *O Laplaciano de uma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$ é a função $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\Delta f = tr(H_f).$$

Considerando um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e um referencial coordenado $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\Delta f &= tr(H_f) \\
&= \sum_k H_f(e_k, e_k) \\
&= \sum_{i,j} a_{ik} a_{jk} H_f(\partial_i, \partial_j) \\
&= \sum_{i,j} \underbrace{a_{ik} a_{jk}}_{g^{ij}} \{\partial_i \partial_j f - \nabla_i \partial_j f\} \\
&= \sum_{i,j} g^{ij} \{\partial_i \partial_j f - \sum_k \Gamma^k_{ij} \partial_k f\}
\end{aligned}
$$

A derivada covariante pode ser estendida para tensores na variedade. Esta extensão será tratada no caso em que o tensor é do tipo $(0, s)$.

Definição 1.42. *Seja T um $(0, s)$-tensor em (M, g). A diferencial covariante de T é o $(0, s+1)$-tensor ∇T definido por*

$$(\nabla T)(X_1, \ldots, X_s, X) = X(T(X_1, \ldots, X_s)) - \sum_{i=1}^{s} T(X_1, \ldots, X_{i-1}, \nabla_X X_i, X_{i+1}, \ldots, X_s).$$

A derivada covariante do tensor T na direção do campo X é o $(0, s)$-tensor $\nabla_X T$ definido por

$$(\nabla_X T)(X_1, \ldots, X_s) = (\nabla T)(X_1, \ldots, X_s, X).$$

A relação entre o traço de um tensor e a derivada covariante é dada na proposição a seguir.

Proposição 1.12. *Em uma variedade Riemanniana* (M, g) *tem-se que*

$$tr(\nabla_X T) = \nabla_X(trT),$$

para todo $(0, s)$*-tensor* T.

Demonstração. Ver [35]. $\square$

Com esta noção tem-se a seguinte caracterização do Hessiano de uma função.

Proposição 1.13. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave definida na variedade Riemanniana* (M, g)*. Então*

$$\begin{aligned} H_f(X, Y) &= \nabla\nabla f(X, Y) \\ &= YXf - (\nabla_Y X)f. \end{aligned}$$

Demonstração. Por um lado, tem-se

$$\begin{aligned} H_f(X, Y) &= g(\nabla_X \nabla f, Y) \\ &= Xg(\nabla f, Y) - g(\nabla f, \nabla_X Y) \\ &= XYf - (\nabla_X Y)f. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \nabla\nabla f(X, Y) &= Y(\nabla f(X)) - \nabla f(\nabla_Y X) \\ &= YXf - (\nabla_Y X)f \\ &= YXf + [X, Y]f - (\nabla_X Y)f \\ &= YXf + XYf - YXf - (\nabla_X Y)f \\ &= XYf - (\nabla_X Y)f, \end{aligned}$$

e isto mostra o resultado. $\square$

Agora serão definidos o divergente e Laplaciano para tensores.

Definição 1.43. *Seja T um $(0, s)$-tensor em (M, g). O Laplaciano de T é o $(0, s-1)$-tensor $div(T)$ definido por*

$$div(T)(X_1, \dots, X_{s-1}) = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i} T)(X_1, \dots, X_{s-1}, e_i),$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal.

Uma expressão muito útil envolvendo o divergente é a forma contraída da identidade diferencial de Bianchi. Ela apresenta uma relação entre a curvatura escalar e o tensor de Ricci de uma métrica.

Proposição 1.14 (Forma contraída da identidade diferencial de Bianchi)**.** *Para uma variedade Riemanniana (M, g), vale a expressão*

$$XR = 2divRic(X).$$

Demonstração. Sejam X um campo em M e $\{e_i\}_i$ uma base ortonormal. Então

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}Ric(X) &= \sum_i (\nabla_{e_i} Ric)(X, e_i) \\
&= \sum_i (\nabla_{e_i} (trRm))(X, e_i) \\
&= \sum_i tr(\nabla_{e_i} Rm)(X, e_i) \\
&= \sum_i \sum_j g((\nabla_{e_i} Rm)(e_j, X)e_j, e_i).
\end{aligned}$$

Pela identidade diferencial de Bianchi, tem-se

$$g((\nabla_{e_j} Rm)(X, e_i)e_j, e_i) + g((\nabla_X Rm)(e_i, e_j)e_j, e_i) = -g((\nabla_{e_i} Rm)(e_j, X)e_j, e_i),$$

e portanto

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}Ric(X) &= \sum_i \sum_j \{-g((\nabla_{e_j} Rm)(X, e_i)e_j, e_i) - g((\nabla_X Rm)(e_i, e_j)e_j, e_i)\} \\
&= \sum_j \{-\sum_i g((\nabla_{e_j} Rm)(e_i, X)e_i, e_j) + \sum_i g((\nabla_X Rm)(e_i, e_j)e_i, e_j)\} \\
&= \sum_j \{-tr(\nabla_{e_j} Rm)(X, e_j) + tr(\nabla_X Rm)(e_j, e_j)\} \\
&= \sum_j \{-(\nabla_{e_j}(trRm))(X, e_j) + (e_X(trRm))(e_j, e_j)\} \\
&= -\sum_j (\nabla_{e_j} Ric)(X, e_j) + \sum_j (\nabla_X Ric)(e_j, e_j) \\
&= -\mathrm{div}Ric(X) + tr(\nabla_X Ric) \\
&= -\mathrm{div}Ric(X) + \nabla_X(trRic) \\
&= -\mathrm{div}Ric(X) + \nabla_X R \\
&= -\mathrm{div}Ric(X) + XR,
\end{aligned}
$$

de onde $XR = 2\mathrm{div}Ric(X)$. □

Outra fórmula muito utilizada envolvendo o divergente é dada na proposição abaixo.

Proposição 1.15 (Fórmula de Bochner)**.** *Sejam* (M, g) *uma variedade Riemanniana e* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave. Então*

$$divH_f(X) = Ric(\nabla f, X) + X\Delta f.$$

Demonstração. Sejam $p \in M$ e $\{e_i\}_i$ um referencial geodésico em p. Então

$$\begin{aligned}
\mathrm{div} H_f(X) &= \sum_i (\nabla_{e_i} H_f)(X, e_i) \\
&= \sum_i (e_i(H_f(X, e_i)) - H_f(\nabla_{e_i} X, e_i) - H_f(X, \nabla_{e_i} e_i)) \\
&= \sum_i (e_i(g(\nabla_X \nabla f, e_i)) - g(\nabla_{\nabla_{e_i} X} \nabla f, e_i) - H_f(X, \underbrace{\nabla_{e_i} e_i}_{0})) \\
&= \sum_i (g(\nabla_{e_i} \nabla_X \nabla f, e_i) + g(\nabla_X \nabla f, \underbrace{\nabla_{e_i} e_i}_{0}) - g(\nabla_{\nabla_{e_i} X} \nabla f, e_i)) \\
&= \sum_i g(\nabla_{e_i} \nabla_X \nabla f - \nabla_{\nabla_{e_i} X} \nabla f, e_i) \\
&= \sum_i g(Rm(X, e_i)\nabla f + \nabla_X \nabla_{e_i} \nabla f - \nabla_{\nabla_X e_i} \nabla f, e_i) \\
&= \sum_i g(Rm(X, e_i)\nabla f, e_i) + \sum_i g(\nabla_X \nabla_{e_i} \nabla f - \nabla_{\underbrace{\nabla_X e_i}_{0}} \nabla f, e_i) \\
&= Ric(X, \nabla f) + \sum_i X g(\nabla_{e_i} \nabla f, e_i) \\
&= Ric(X, \nabla f) + X \Delta f.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Classes de métricas Riemannianas

Neste capítulo serão introduzidas classes especiais de métricas Riemannianas e relações entre elas serão estudadas.

Na primeira seção deste capítulo será introduzido o produto twisted, que consiste em definir uma métrica na variedade produto que depende de uma função positiva, chamada função twisting, definida nos dois fatores do produto. Em seguida serão estabelecidas algumas relações entre quantidades do produto e dos fatores do produto. Na sequência, serão listados alguns resultados sobre como reduzir a dependência da função twisting para apenas um dos fatores, obtendo assim um produto warped. São listados alguns resultados sobre folheações no fim desta seção.

Na segunda seção será introduzida a noção de variedade localmente conformemente plana. Tal noção será utilizada em enunciados objetivando a classificação em muitos casos. Um dos teoremas mais importantes desta teoria, o teorema de Weyl-Schouten, será citado e aplicado nesta seção. Será citado também um teorema que diz quando um produto warped é localmente conformemente plano.

Na terceira seção serão definidas as variedades de Einstein. Será determinado nesta seção quando variedades de Einstem são localmente conformemente planas. Será exibida também sua relação com as variedades de curvatura constante.

Na quarta seção será introduzido o conceito de sóliton de Ricci gradiente. Em seguida serão dados exemplos, alguns dos quais aparecerão em alguns resultados de classificação do capítulo seguinte. Serão listadas também propriedades dos sólitons no caso gradiente e teoremas que serão utilizados no capítulo posterior. Na seção seguinte será apresentada, de maneira breve, a relação entre sólitons de Ricci e o fluxo de Ricci, servindo assim de motivação para o estudo de sólitons de Ricci, mais precisamente, o caso gradiente.

2.1 Produto twisted

Nesta seção será apresentado o conceito de produto twisted. Tal conceito é uma generalização do produto warped que, por sua vez, é uma generalização do produto Riemanniano. As noções de produto Riemanniano e de produto warped também serão dados nesta seção. O produto warped foi introduzido por Bishop e O'Neil (em [8]) com o objetivo de construir exemplos de variedades Riemannianas com curvatura negativa. Uma classe importante de produtos warped são as variedades rotacionalmente simétricas, noção introduzida também nesta seção, que generaliza as conhecidas coordenadas polares do espaço Euclidiano.

Para as definições abaixo, sejam $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ as projeções canônicas, definidas por $\pi_i(p_1, p_2) = p_i$, com $i \in \{1, 2\}$.

Definição 2.1. *Sejam (M_1, g_1) e (M_2, g_2) variedades Riemannianas e $\varphi : M_1 \times M_2 \to \mathbb{R}$ uma função suave e positiva. A variedade produto $M_1 \times M_2$ munida com a métrica*

$$g_{(p,q)}(X, Y) = (\pi_1^* g_1)_{(p,q)}(X, Y) + \varphi(p, q)(\pi_2^* g_2)_{(p,q)}(X, Y),$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$ e $(p, q) \in M_1 \times M_2$, é chamada de produto twisted de (M_1, g_1) por (M_2, g_2), com função twisting φ. Neste caso denotamos por $M_1 \times_\varphi M_2$.

Definição 2.2. *Se na definição anterior o produto twisting $M_1 \times_\varphi M_2$ é tal que a função φ depende apenas de M_1, então a variedade Riemanniana $M_1 \times_\varphi M_2$ é chamada de produto warped de (M_1, g_1) por (M_2, g_2), com função warping φ. Se $\varphi \equiv 1$, chama-se $M_1 \times_\varphi M_2$ de o produto Riemanniano de (M_1, g_1) por (M_2, g_2) e representa-se por $M_1 \times M_2$.*

Um caso particularmente interessante é quando se tem um produto warped $M_1 \times_\varphi M_2$ onde M_1 é um intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ e M_2 é a esfera com a métrica canônica.

Definição 2.3. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dita rotacionalmente simétrica se*

$$g = dt^2 + \varphi^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

onde $(\mathbb{S}^{n-1}, g_{\mathbb{S}^{n-1}})$ é a esfera com a métrica canônica, isto é, se for isométrica ao produto warped $(-\varepsilon, \varepsilon) \times_\varphi \mathbb{S}^{n-1}$.

Agora serão determinadas as expressões da conexão de Levi-Civita, do operador de curvatura, do tensor de Ricci e da curvatura escalar de um produto twisted $M_1 \times M_2$ em função dos respectivos entes em (M_i, g_i), $i \in \{1,2\}$. Com esta finalidade, serão feitas algumas identificações e definições. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$:

$$\mathcal{L}(M_i) = \{X \in \mathfrak{X}(M_1 \times M_2); d\pi_{3-i}X = 0\},\ i \in \{1,2\}.$$

Os conjuntos $\mathcal{L}(M_1)$ e $\mathcal{L}(M_2)$ podem ser pensados como o conjunto de todos os campos de $\mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$ que são tangentes à M_1 e M_2, respectivamente.
Dado um campo $X \in \mathfrak{X}(M_i)$, o campo $\tilde{X} \in \mathcal{L}(M_i)$ chama-se o levantamento de X se $d\pi_i\tilde{X} = X$. Note que um tal levantamento é único pois, se $X' \in \mathcal{L}(M_i)$ é um outro levantamento de X, então tem-se $d\pi_{3-i}(\tilde{X} - X') = 0$, e também

$$\begin{aligned} d\pi_i(\tilde{X} - X') &= d\pi_i(\tilde{X}) - d\pi_i(X') \\ &= X - X \\ &= 0, \end{aligned}$$

de onde $\tilde{X} - X' = 0$. Portanto pode-se identificar X e $\tilde{X}$.

Considere o produto twisted $M_1 \times_\varphi M_2$ e seja $k = \ln(\varphi)$. Serão denotados por ∇^i, Rm^i, Ric^i e R^i as quantidades associadas a M_i e por ∇, Rm, Ric e R, as quantidades associadas a $M_1 \times_\varphi M_2$.

As proposições abaixo podem ser encontradas em Fernández-López [20]. Será exibida apenas a demonstração da primeira delas, pois as outras seguem a mesma linha de raciocínio.

Em todas as proposições abaixo serão considerados $X, Y, Z \in \mathfrak{L}(M_1)$ e $V, W, U \in \mathfrak{L}(M_2)$.

Proposição 2.1. *A conexão de Levi-Civita de $M_1 \times_\varphi M_2$ é dada por:*

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla^1_X Y; \\ \nabla_X V &= \nabla_V X = X(k)V; \\ \nabla_V W &= \nabla^2_V W + V(k)W + W(k)V - g(V,W)\nabla k. \end{aligned}$$

Demonstração. Por um lado:

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, V) &= Xg(Y,V) + Yg(X,V) - Vg(X,Y) - g(X,[Y,V]) + g(V,[X,Y]) + g(Y,[V,X]) \\
&= -Vg(X,Y) \\
&= -V(\pi_1^* g_1(X,Y) + \varphi^2 \pi_2^* g_2(X,Y)) \\
&= -V(\varphi^2)\pi_2^* g_2(X,Y) - \varphi^2 V \pi_2^* g_2(X,Y) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) - g(X,[Y,Z]) + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) \\
&= Xg_1(d\pi_1(Y), d\pi_1(Z)) + Yg(d\pi_1(X), d\pi_1(Z)) - Zg(d\pi_1(X), d\pi_1(Y)) - \\
&\quad - g(d\pi_1(X), d\pi_1([Y,Z])) - g(d\pi_1(Z), d\pi_1([X,Y])) + g(d\pi_1(Y), d\pi_1([Z,X])) \\
&= Xg_1(Y,Z) + Yg_1(X,Z) - Zg_1(X,Y) - g_1(X,[Y,Z]) + g_1(Z,[X,Y]) + g_1(Y,[Z,X]) \\
&= 2g_1(\nabla^1_X Y, Z) \\
&= 2\pi_1^* g_1(\nabla^1_X Y, Z) + \underbrace{2\varphi^2 \pi_2^* g_2(\nabla^1_X Y, Z)}_{0} \\
&= 2g(\nabla^1_X Y, Z).
\end{aligned}$$

Conclui-se então que $\nabla_X Y = \nabla^1_X Y$.

Como consequência da compatibilidade da métrica tem-se:

$$\nabla_X V - \nabla_V X = [X,V] = 0,$$

de onde $\nabla_X V = \nabla_V X$. Além disso, dado $E \in \mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$,

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X V, E) &= Xg(V,E) + V\underbrace{g(X,E)}_{0} - E\,\underbrace{g(X,V)}_{0} - g(X,[V,E]) + g(V,[E,X]) + g(E,\underbrace{[X,V]}_{0}) \\
&= X(\varphi^2 \pi_2^* g_2(V,E)) - \underbrace{\pi_1^* g_1(X,[V,E])}_{0} + \varphi^2\,\underbrace{\pi_2^* g_2(V,[E,X])}_{0} \\
&= 2\varphi X(\varphi)\pi_2^* g_2(V,E) + \varphi^2\,\underbrace{X(\pi_2^* g_2(V,E))}_{0} \\
&= 2\varphi^2 \pi_2^* g_2\Big(\frac{X(\varphi)}{\varphi} V, E\Big) \\
&= 2g(X(k)V, E).
\end{aligned}$$

Assim, $\nabla_X V = \nabla_V X = X(k)V$.

Para a parte tangente, tem-se:

$$
\begin{aligned}
2g(\nabla_V W, U) &= Vg(W,U) + Wg(V,U) - Ug(V,W) - g(V,[W,U]) + g(W,[U,V]) + g(U,[V,W]) \\
&= V(\varphi^2\pi_2^* g_2(W,U)) + W(\varphi^2\pi_2^* g_2(V,U)) - U(\varphi^2\pi_2^* g_2(V,W)) - \varphi^2\pi_2^* g_2(V,[W,U]) + \\
&\quad \varphi^2\pi_2^* g_2(W,[U,V]) + \varphi^2\pi_2^* g_2(U,[V,W]) \\
&= V(\varphi^2)\pi_2^* g_2(W,U) + W(\varphi^2)\pi_2^* g_2(V,U) - U(\varphi^2)\pi_2^* g_2(V,W) + \varphi^2[V(\pi_2^* g_2(W,U)) + \\
&\quad W(\pi_2^* g_2(V,U)) - U(\pi_2^* g_2(V,W)) - \varphi^2\pi_2^* g_2(V,[W,U]) + \varphi^2\pi_2^* g_2(W,[U,V]) \\
&\quad +\varphi^2\pi_2^* g_2(U,[V,W])] \\
&= V(\varphi^2)g_2(W,U) + W(\varphi^2)g_2(V,U) - U(\varphi^2)g_2(V,W) + \varphi^2[V(g_2(W,U)) + \\
&\quad W(g_2(V,U)) - U(g_2(V,W)) - g_2(V,[W,U]) + g_2(W,[U,V]) + g_2(U,[V,W])] \\
&= 2\varphi V(\varphi)g_2(W,U) + 2\varphi W(\varphi)g_2(V,U) - 2\varphi U(\varphi)g_2(V,W) + 2\varphi^2 g_2(\nabla^2_V W, U) \\
&= 2\varphi^2 g_2(\frac{V(\varphi)}{\varphi}W + \frac{W(\varphi)}{\varphi}V + \nabla^2_V W, U) - 2\varphi^2 g_2(\frac{\nabla\varphi}{\varphi}, U)g_2(V,W) \\
&= 2\varphi^2 g_2(\nabla^2_V W + V(k)W + W(k)V, U) - 2\varphi^2 g_2(V,W)g(\nabla k, U) \\
&= 2g(\nabla^2_V W + V(k)W + W(k)V, U) - 2g(V,W)g(\nabla k^\top, U) \\
&= 2g(\nabla^2_V W + V(k)W + W(k)V - g(V,W)\nabla k^\top, U)
\end{aligned}
$$

e, assim, $(\nabla_V W)^\top = \nabla^2_V W + V(k)W + W(k)V - g(V,W)\nabla k^\top$.

Para a parte normal tem-se:

$$
\begin{aligned}
2g(\nabla_V W, X) &= V\underbrace{g(W,X)}_{0} + W\underbrace{g(V,X)}_{0} - Xg(V,W) - g(V,\underbrace{[W,X]}_{0}) + g(W,\underbrace{[X,V]}_{0}) + \underbrace{g(X,[V,W])}_{0} \\
&= -X(\underbrace{\pi_1^* g_1(V,W)}_{0} + \varphi^2\pi_2^* g_2(V,W)) \\
&= -X(\varphi^2)g_2(d\pi_2(V), d\pi_2(W)) - \varphi^2\,\underbrace{X(g_2(d\pi_2(V), d\pi_2(W)))}_{0} \\
&= -2\varphi X(\varphi)g_2(V,W) \\
&= -2\varphi g(\nabla\varphi, X)g_2(V,W) \\
&= -2\varphi^2 g_2(V,W)g(\nabla k, X) \\
&= -2g(V,W)g(\nabla k^\perp, X) \\
&= 2g(-g(V,W)\nabla k^\perp, X)
\end{aligned}
$$

e assim $(\nabla_V W)^\perp = -g(V,W)\nabla k^\perp$. Consequentemente,

$$\nabla_V W = \nabla^2_V W + V(k)W + W(k)V - g(V,W)\nabla k.$$

$\square$

Para as duas proposições seguintes, sejam H^k, h^k e h_2^k definidos por

$$
\begin{aligned}
h_2^k(V, W) &= VW(k) - (\nabla_V^2 W)(k) \\
h^k(X, V) &= XV(k) - V(k)W(k) \\
h^k(V, W) &= g(H^k(V), W).
\end{aligned}
$$

Proposição 2.2. *O operador de curvatura de $M_1 \times_\varphi M_2$ é dado por:*

$$
\begin{aligned}
Rm(X, Y)Z &= Rm^1(X, Y)Z; \\
Rm(X, Y)V &= 0; \\
Rm(X, V)Y &= (XY(k) + X(k)Y(k) - (\nabla_X Y)(k))V; \\
Rm(X, V)W &= -XW(k)V + (X(k)\nabla k + \nabla_X \nabla k)g(V, W); \\
Rm(V, W)X &= WX(k)V - VX(k)W; \\
Rm(V, W)U &= Rm^2(V, W)U - g(W, U)[H_k(V) + V(k)\nabla k] - [h_2^k(W, U) - W(l)U(l)]V \\
&\quad + g(V, U)[H_k(W) + W(k)\nabla k] + [h_2^k(V, U) - V(k)U(k)]W.
\end{aligned}
$$

Proposição 2.3. *O tensor de Ricci de $M_1 \times_\varphi M_2$ é dado por:*

$$
\begin{aligned}
Ric(X, Y) &= Ric^1(X, Y) + n_1(H_k^2(X, Y) + X(k)Y(k)); \\
Ric(X, V) &= (1 - n_2)VX(k); \\
Ric(V, W) &= Ric^2(V, W) + h_k(V, W) + (1 - n_2)h_2^k(V, W) + n_2V(k)W(k) \\
&\quad - g(V, W)[\Delta k + g(\nabla k, \nabla k)].
\end{aligned}
$$

Onde $n_i = dim M_i$.

Teorema 2.1 (Condição Ricci-flat)**.** *Seja $M_1 \times_\varphi M_2$ o produto twisted de (M_1, g_1) e (M_2, g_2), com função twisted ψ, e $n_2 = dim M_2 > 1$. Então, $Ric(X, V) = 0$ para todos $X \in \mathcal{L}(M_1)$ e $V \in \mathcal{L}(M_2)$ se, e somente se, $M_1 \times_\varphi M_2$ pode ser escrito como o produto warped $M_1 \times_{\tilde{\varphi}} M_2$ de (M_1, g_1) e $(M_2, \tilde{g}_2)$, com função de torção $\tilde{\varphi} : M_1 \to \mathbb{R}$, onde $\tilde{g}_2$ é uma métrica conforme à métrica g_2, isto é, $\tilde{g}_2 = \hat{\varphi}^2 g_2$, para alguma $\hat{\varphi} : M_2 \to \mathbb{R}$.*

Demonstração. Suponha que $Ric(X, V) = 0$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M_1), \forall V \in \mathfrak{X}(M_2)$. Pela proposição 2.3, segue que

$$(1 - n_2)VX(k) = (1 - n_2)XV(k) = Ric(X, V) = 0,$$

donde $X(k)$ depende apenas dos pontos de M_1 e $V(k)$ depende apenas dos pontos de M_2. Assim segue que $k(p,q) = k_1(p) + k_2(q)$, com $k_i : M_i \to \mathbb{R}$ suaves e positivas. Daí $\varphi(p,q) = \tilde{\varphi}(p)\hat{\varphi}(q)$, com $\tilde{\varphi}(p) = e^{k_1(p)}$ e $\hat{\varphi}(q) = e^{k_2(q)}$. Assim, pode-se escrever

$$\begin{aligned} g &= \pi_1^* g_1 + \varphi^2 \pi_2^* g_2 \\ &= \pi_1^* g_1 + \tilde{\varphi}^2 \hat{\varphi}^2 \pi_2^* g_2 \\ &= \pi_1^* g_1 + \tilde{\varphi}^2 \pi_2^* (\underbrace{\hat{\varphi}^2 g_2}_{\tilde{g}_2}) \\ &= \pi_1^* g_1 + \tilde{\varphi}^2 \pi_2^* \tilde{g}_2, \end{aligned}$$

e segue que $M_1 \times_\varphi M_2$ pode ser visto como um produto warped $M_1 \times_{\tilde{\varphi}} M_2$ de (M_1, g_1) com $(M_2, \hat{\varphi}^2 g_2)$, com função warping $\tilde{\varphi} = e^{a_1} : M_1 \to \mathbb{R}$.

Suponha que $M_1 \times_\varphi M_2$ seja um produto warped, isto é, que φ dependa apenas de pontos de M_1. Tem-se então que k só depende de pontos de M_1. Pela proposição 2.3 tem-se que $Ric(X, V) = (1 - n_2)VX(k) = 0$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M_1), \forall V \in \mathfrak{X}(M_2)$. □

A fim de enunciar alguns resultados que nos serão úteis na demonstração de Teoremas posteriores, o conceito de folheação de uma variedade será apresentado. Algumas das definições aqui citadas podem ser encontradas em Fernández-López [20].

Definição 2.4. *Uma folheação $\mathfrak{F}$ de dimensão k de uma variedade diferenciável M^n, $(k \leq n)$, é uma partição de M em subvariedades de dimensão k, chamadas folhas da folheação, tal que para cada $p \in M$ existem um aberto U de M contendo p e uma submersão $f_U : U \to \mathbb{R}^{n-k}$, tal que $f_U^{-1}(x)$ é uma folha de $\mathfrak{F}\big|_U$, $\mathfrak{F}$ restrita a U, para todo $x \in \mathbb{R}^{n-k}$.*

Definição 2.5. *Duas folheações $\mathfrak{F}_1$, com dimensão k_1, e $\mathfrak{F}_2$, com dimensão k_2, de uma variedade diferenciável M^m são ditas complementares se $k_1 + k_2 = m$.*

Definição 2.6. *Uma folheação $\mathfrak{F}$ de dimensão k de uma variedade Riemanniana (M, g) é chamada totalmente umbílica (totalmente geodésica) se cada folha da folheação for totalmente umbílica (totalmente geodésica).*

Exemplo 2.1. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. As coleções $\mathfrak{F}_1 = \{M \times \{q\}\}_{q \in N}$ e $\mathfrak{F}_2 = \{\{p\} \times N\}_{p \in M}$ são folheações de $M \times N$ chamadas de folheações canônicas. Note que $\mathfrak{F}_1$ e $\mathfrak{F}_2$ são folheações complementares.*

Exemplo 2.2. *Considerando o produto twisted $M \times_f N$, de (M^m, g_M) e (N^n, g_N) com função twisting f pode se mostrar que, para todo $(p, q) \in M \times N$:*

1. *$M \times \{q\}$ é uma subvariedade totalmente geodésica de $M \times_f N$;*

2. *$\{p\} \times N$ é uma subvariedade totalmente umbílica de $M \times_f N$;*

Assim, a folheação $\mathfrak{F}_1$ é totalmente geodésica e a folheação $\mathfrak{F}_2$ é totalmente umbílica.

Os dois Teoremas abaixo relacionam produtos twisteds com folheações umbílicas e geodésicas. As demosntrações podem ser encontradas em Ponge [38].

Teorema 2.2. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana simplesmente conexa com duas folheações complementares $\mathfrak{F}_1$ e $\mathfrak{F}_2$ cujas folhas se intersectam perpendicularmente. Se as folhas de $\mathfrak{F}_1$ são totalmente geodésicas e completas e as folhas de $\mathfrak{F}_2$ são totalmente umbílicas, então (M, g) é isométrica a um produto twisted $M_1 \times_f M_2$, tal que $\mathfrak{F}_1$ e $\mathfrak{F}_2$ correspondem às folheações canônicas do produto $M_1 \times M_2$.*

Teorema 2.3. *Seja $(M_1 \times M_2, g)$ uma variedade Riemanniana, onde (M_1, g_1) e (M_2, g_2) são variedades Riemannianas. Suponha que as folheações canônicas $\mathfrak{F}_1$ e $\mathfrak{F}_2$ se intersectam perpendicularmente em todo ponto. Então a métrica g é:*

1. *um produto twisted $M_1 \times_\psi M_2$ se, e somente se, $\mathfrak{F}_1$ é totalmente geodésica e $\mathfrak{F}_2$ é totalmente umbílica;*

2. *o produto Riemanniano $M_1 \times M_2$ se, e somente se, $\mathfrak{F}_1$ e $\mathfrak{F}_2$ são totalmente geodésicas.*

2.2 Variedades localmente conformemente planas

Nesta seção serão introduzidas as variedades localmente conformemente planas, os tensores de Weyl e de Schouten, bem como algumas proposições envolvendo estes tensores. Em seguida, será apresentado o Teorema de Weyl-Schouten, que consiste em uma caracterização das variedades localmente conformemente planas em termos dos tensores de Weyl e de Schouten. Serão feitas duas aplicações deste teorema.

Definição 2.7. *Uma variedade Riemanniana (M, g) é localmente conformemente plana se, para todo ponto $p \in M$, existem uma vizinhança aberta U em M contendo p e uma função* *suave $\varphi : U \to (0, +\infty)$ tal que a variedade Riemanniana $(U, e^{\varphi} g\big|_U)$ tem curvatura seccional nula.*

Exemplo 2.3. *Toda variedade Riemanniana de dimensão 2 é localmente conformemente plana. De fato, em todas as variedades Riemannianas de dimensão 2 existem coordenadas isotérmicas.*

O produto de tensores definido abaixo será útil na definição dos tensores de Weyl e de Schouten.

Definição 2.8. *Sejam T e G $(0,2)$-tensores simétricos. O produto de Kulkarni-Nomizu de T e G, $T \odot G$, é definido como*

$$\begin{aligned}(T \odot G)(X,Y,Z,W) &= T(X,Z)G(Y,W) + T(Y,W)G(X,Z) \\ &\quad - T(X,W)G(Y,Z) - T(Y,Z)G(X,W).\end{aligned}$$

Propriedades do produto Kulkarni-Nomizu:

1. $(T \odot G)(X,Y,Z,W) + (T \odot G)(Y,Z,X,W) + (T \odot G)(Z,X,Y,W) = 0;$

2. $T \odot G = G \odot T;$

3. $\nabla_X (T \odot G) = (\nabla_X T) \odot G + T \odot (\nabla_X G).$

Definição 2.9. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana com operador de curvatura Rm, tensor de Ricci Ric e curvatura escalar R. Define-se o tensor de Schouten como o tensor*

$$S = Ric - \frac{R}{2(n-1)} g.$$

O tensor de Weyl é definido como o tensor

$$W = Rm - \frac{1}{n-2} S \odot g.$$

Uma condição utilizada no enunciado do Teorema de Weyl-Schouten é a definida abaixo.

Definição 2.10. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e T um $(0,2)$-tensor em M. Diz-se que T é tipo Codazzi se*

$$\big(\nabla_X T\big)(Y,Z) = \big(\nabla_Y T\big)(X,Z).$$

Sobre os tensores de Weyl e de Schouten tem-se os seguintes resultados, cujas demonstrações podem ser encontradas em Hertrich-Jeromin [26].

Proposição 2.4. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Se $n = 3$ então o tensor de Weyl é identicamente nulo*

Proposição 2.5. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana com $n > 3$. Se o tensor de Weyl é identicamente nulo, então o tensor de Schouten é tipo codazzi.*

Teorema 2.4 (Weyl-Schouten)**.** *Uma variedade Riemanniana (M, g) é localmente conformemente plana se, e só se*

1. *o tensor de Schouten é tipo Codazzi, se $n = 3$;*

2. *o tensor de Weyl é identicamente nulo, se $n > 3$.*

Exemplo 2.4. *Os espaços de curvatura constante K são localmente conformemente planos. Para mostrar isto será usado o Teorema de Weyl-Schouten. Neste caso sabe-se que $Rm = \frac{K}{2} g \odot g$. Daí, decorre que $Ric = (n-1)Kg$ e, consequentemente, que $R = n(n-1)K$. Assim, o tensor de Schouten fica*

$$\begin{aligned} S &= Ric - \frac{R}{2(n-1)} g \\ &= (n-1)Kg - \frac{n(n-1)K}{2(n-1)g} \\ &= \frac{(n-2)K}{2} g. \end{aligned}$$

Calculando o tensor de Weyl obtém-se

$$\begin{aligned} W &= Rm - \frac{1}{n-2} S \odot g \\ &= \frac{K}{2} g \odot g - \frac{1}{n-2} \frac{(n-2)K}{2} g \odot g \\ &= \frac{K}{2} g \odot g - \frac{K}{2} g \odot g \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, se o espaço possuir dimensão maior do que 3, o Teorema de Weyl-Schouten garante o resultado. Agora falta o caso em que o espaço tem dimensão 3. Isto segue do fato do tensor *métrico ser paralelo. De fato, sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Então*

$$\begin{aligned}
\big(\nabla_X S\big)(Y,Z) &= K\big(\nabla_X g\big)(Y,Z)\\
&= K\{X(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)\}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Então $\big(\nabla_X S\big)(Y,Z) = 0 = \big(\nabla_Y S\big)(X,Z)$. Pelo Teorema de Weyl-Schouten, segue o resultado no caso 3.

Uma aplicação do Teorema de Weyl-Schouten e da condição Ricci-flat é dada na proposição a seguir.

Proposição 2.6. *Seja $M \times_\varphi N$ o produto twisted das variedades Riemannianas (M^r, g_M) e (N^s, g_N) com função twisting φ. Suponha que $r \geq 2$ e $s \geq 2$. Se $M \times_\varphi N$ é localmente conformemente plana, então ela pode ser escrita como um produto warped.*

Demonstração. Sejam $n = r + s$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $V \in \mathfrak{X}(N)$. Como $r \geq 2$, é possível escolher $Y \in \mathfrak{X}(M)$ de modo que $g(X,Y) = g_M(X,Y) = 0$. Escolhendo desta maneira, tem-se que

$$\begin{aligned}
W(Y,X,Y,V) &= \underbrace{Rm(Y,X,Y,V)}_{0} - \frac{1}{n-2}(S \odot g)(Y,X,Y,V)\\
&= -\frac{1}{n-2}(S(Y,Y)\underbrace{g(X,V)}_{0} + S(X,V)g(Y,Y)\\
&\quad -S(Y,V)\underbrace{g(X,Y)}_{0} - S(X,Y)\underbrace{g(Y,V)}_{0})\\
&= -\frac{1}{n-2}(Ric(X,V) - \frac{R}{2(n-1)}\underbrace{g(X,V)}_{0})g(Y,Y)\\
&= -\frac{1}{n-2}Ric(X,V)g(Y,Y).
\end{aligned}$$

Como $M \times_\varphi N$ é localmente conformemente plana, pelo Teorema de Weyl-Schouten tem-se que $W \equiv 0$. Daí $\dfrac{1}{n-2}Ric(X,V)g(Y,Y) = 0$. Dessa forma tem-se que $Ric(X,V) = 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e todo $V \in \mathfrak{X}(N)$. O resultado segue da condição Ricci-flat, pois $s \geq 2$. $\square$

Esta seção será finalizada com um teorema que caracteriza produtos warped que são localmente conformemente planos, e que será útil futuramente. Os critérios fornecidos pelo teorema são em termos da dimensão e da curvatura. Ele será utilizado para exibir um exemplo simples de uma variedade Riemanniana que não é localmente conformemente plana.

Teorema 2.5 (B-Varquez, G-Rio,V-Lorenzo)**.** *Seja $M \times_\varphi N$ o produto warped de (M, g_M) e (N, g_N), com função warping φ. Então:*

i) se $\dim M = 1$, então $M \times_\varphi N$ é localmente conformemente plano se, e somente se, (N, g_N) é um espaço de curvatura constante.

ii) se $\dim M > 1$ e $\dim N > 1$, então $M \times_\varphi N$ é localmente conformmente plano se, e somente se,

ii.a) (N, g_N) é um espaço de curvatura constante c_N;

ii.b) a função $\varphi : M \to \mathbb{R}_+$ define uma deformação global em M tal que $(M, \frac{1}{\varphi^2} g_M)$ é um espaço de curvatura constante $c_M = -c_N$.

iii) se $\dim N = 1$, então $M \times_\varphi N$ é localmente conformemente plano se, e somente se, a função $\varphi : M \to \mathbb{R}_+$ define uma deformação conforme em M tal que $(M, \frac{1}{\varphi^2} g_M)$ é um espaço de curvatura constante.

Demonstração. Ver [5]. $\square$

Exemplo 2.5. *Considere o produto Riemanniano $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ de duas esferas de raio unitário. Como este é um produto warped que possui função warping constante $f(p) = 1$, $\forall p \in \mathbb{S}^2$, e como as dimensões são maiores do que 1 (ambas iguais a 2), segue que a variedade $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ não é localmente conformemente plana, como mostra o item ii) do Teorema acima.*

2.3 Variedades de Einstein

Nesta seção serão introduzidas as variedades de Eisntein, que desempenham um papel importante na Teoria da Relatividade Geral e possuem interesse geométrico próprio. Em seguida serão discutidas algumas propriedades destas variedades e será apresentado um resultado que explica o que acontece quando uma variedade de Einstein possui uma estrutura de variedade localmente conformemente plana.

Definição 2.11. *Uma variedade Riemanniana (M, g) é dita uma variedade de Einstein se existe uma constante λ tal que $Ric = \lambda g$. A constante λ é chamada de constante de Einstein.*

A proposição abaixo mostra que, em dimensão maior do que 3, não é possível flexibilizar a definição acima permitindo que a constante λ seja uma função.

Proposição 2.7. *Seja (M^n, g), $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana. Se existe uma função $\lambda : M \to \mathbb{R}$ tal que $Ric = \lambda g$, então λ é constante, isto é, M é uma variedade de Einstein.*

Demonstração. Seja $\{e_i\}_i$ uma base ortonormal local e seja X um campo qualquer. Por um lado,

$$\begin{aligned} \mathrm{div} Ric(X) &= \mathrm{div}(\lambda g)(X) \\ &= \sum_i (\nabla_{e_i}(\lambda g))(X, e_i) \\ &= \sum_i (e_i \lambda g + \lambda \underbrace{\nabla_{e_i} g}_{0}))(X, e_i) \\ &= \sum_i e_i \lambda g(X, e_i). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} XR &= X(trRic) \\ &= X(tr(\lambda g)) \\ &= X(\lambda n) \\ &= nX(\lambda). \end{aligned}$$

Fazendo $X = e_i$ na segunda forma contraída da identidade diferencial de Bianchi, tem-se

$$e_i \lambda = \mathrm{div} Ric(e_i) = \frac{1}{2} XR = \frac{n}{2} e_i \lambda,$$

de onde $e_i \lambda = 0$, pois $\dfrac{n}{2} \neq 1$. Pela arbitrariedade de i, tem-se que λ é constante. $\square$

Tomando o traço da equação $Ric = \lambda g$, tem-se que $R = n\lambda$, mostrando que variedades de Einstein possuem curvatura escalar constante. Além disso, considerando o tensor $\mathring{Ric} = Ric - \dfrac{R}{n} g$, tem-se que uma variedade Riemanniana (M^n, g), $n \geq 3$, é de Einstein se, e somente se, o tensor $\mathring{Ric}$ se anula.

É importante observar que variedades de Einstein também possuem curvatura de Ricci constante. Mais do que isso, as variedades de Einstein são exatamente as variedades Riemannianas que possuem curvatura de Ricci constante. De fato, se (M, g) é uma variedade de Einstein, com constante de Einstein λ, e X um campo qualquer em M, então

$$\begin{aligned} ric(X) &= \frac{Ric(X,X)}{g(X,X)} \\ &= \frac{\lambda g(X,X)}{g(X,X)} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se (M, g) é uma variedade Riemanniana que possui curvatura de Ricci constante igual a λ, isto é, $ric(X) = \dfrac{Ric(X,X)}{g(X,X)} = \lambda$, obtém-se

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= Ric(X+Y-Y, Y+X-X) \\ &= Ric(X+Y, X+Y) + Ric(X+Y, -X) + Ric(-Y, X+Y) + Ric(-Y, -X) \\ &= Ric(X+Y, X+Y) + Ric(X, -X) + Ric(Y, -X) + Ric(-Y, Y), \end{aligned}$$

e assim, $2Ric(X,Y) = Ric(X+Y, X+Y) - Ric(X,X) - Ric(Y,Y)$. Por M ter curvatura de Ricci constante igual a λ, tem-se

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \frac{1}{2}(Ric(X+Y, X+Y) - Ric(X,X) - Ric(Y,Y)) \\ &= \frac{\lambda}{2}(g(X+Y, X+Y) - g(X,X) - g(Y,Y)) \\ &= \frac{\lambda}{2}(g(X,X) + 2g(X,Y) + g(Y,Y) - g(X,X) - g(Y,Y)) \\ &= \lambda g(X,Y), \end{aligned}$$

para quaisquer campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

A próxima proposição mostra que as variedades de Einstein generalizam as variedades de curvatura constante.

Proposição 2.8. *Se (M, g) é uma variedade de curvatura seccional constante, então (M, g) é uma variedade de Einstein.*

Demonstração. Seja (M, g) uma variedade de curvatura seccional constante igual a K. Seu operador de curvatura é dado por

$$Rm(X,Y)Z = K(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X), \ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Considerando uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e campos $X = \sum x_i e_i$ e $Y = \sum y_j e_j$, tem-se

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= (trRm)(X,Y) \\ &= \sum_l g(Rm(X,e_l)Y,e_l) \\ &= \sum_{i,j,l} x_i y_j g(Rm(e_i,e_l)e_j,e_l) \\ &= \sum_{i,j,l} x_i y_j g(K(g(e_i,e_j)e_l - g(e_l,e_j)e_i),e_l) \\ &= \sum_{i,j,l} x_i y_j K(\delta_{ij} - \delta_{lj}\delta_{il}) \\ &= (n-1)Kg(X,Y). \end{aligned}$$

Isto mostra o resultado. □

A demonstração da proposição acima permite concluir que, em variedades de Einstein que possuem curvatura seccional constante K, tal constante é dada por $K = \dfrac{n}{n-1}R$.

As demosntrações das duas proposições abaixo podem ser encontradas em [31]. A primeira delas estabelece o que acontece nas dimensões 2 e 3.

Proposição 2.9. *Seja (M^n, g) uma variedade de Einstein. Se $n = 2$ ou $n = 3$, então M tem curvatura constante.*

O exemplo abaixo mostra que em dimensões maiores do que 3 uma variedade de Eisntein pode ter curvatura não constante.

Exemplo 2.6. *Considere o produto Riemanniano $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, onde $\mathbb{S}^2$ representa a esfera com a métrica induzida pelo espaço Euclidiano tridimensional. Tomando vetores tangentes a esferas distintas, tem-se que a curvatura seccional se anula, mostrando que a curvatura seccional deste produto não é constante. No entanto, como a métrica considerada é a produto,*

$$\begin{aligned} Ric_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2} &= Ric_{\mathbb{S}^2} + Ric_{\mathbb{S}^2} \\ &= \lambda g_{\mathbb{S}^2} + \lambda g_{\mathbb{S}^2} \\ &= \lambda g_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2}. \end{aligned}$$

Assim, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ é uma variedade de Eisntein que não possui curvatura constante.

Apesar de existirem variedades de Eisntein que não possuem curvatura constante em dimensões maiores do que 3, existe um critério, dado pelo corolário do teorema abaixo, que determina quando isto acontece. Para isto, considere o tensor Z, dado por

$$Z = \frac{1}{n-2}\mathring{Ric} \odot g, \tag{2.1}$$

onde $\mathring{Ric} = Ric - \dfrac{R}{n}g$.

Proposição 2.10. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana, com $n \geq 3$. Então,*

1. *M tem curvatura constante se, e somente se, $Z = W = 0$;*

2. *M é uma variedade de Einstein se, e somente se, $Z = 0$.*

Como consequência imediata da proposição acima segue o seguinte resultado.

Corolário 2.1. *Seja (M^n, g) uma variedade de Einstein com $n > 3$. M tem curvatura constante se, e somente se, M é localmente conformemente plana.*

2.4 Sóliton de Ricci

2.4.1 Definição e exemplos

Definição 2.12. *Uma variedade Riemanniana (M, g) é um sóliton de Ricci se existem um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma constante λ satisfazendo a equação do sóliton, dada por*

$$Ric + \frac{1}{2}\mathfrak{L}_X g = \lambda g.$$

Notação: (M, g, X, λ).

Definição 2.13. *Um sóliton de Ricci (M, g, X, λ) é chamado sóliton gradiente se existe uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$ tal que*

$$Ric + \frac{1}{2}\mathfrak{L}_{\nabla f} g = \lambda g.$$

Neste caso, usando a Proposição 1.11, pode-se escrever

$$Ric + H_f = \lambda g. \tag{2.2}$$

Notação: (M, f, X, λ).

Definição 2.14. *Seja (M, g, X, λ) um sóliton de Ricci. O sóliton é*

1. *shrinking, se $\lambda > 0$,*

2. *steady, se $\lambda = 0$,*

3. *expanding, se $\lambda < 0$.*

Dadas as definições, serão listados alguns exemplos.

Exemplo 2.7 (Variedades de Einstein)**.** *Toda variedade de Einstein (M, g) é um sóliton gradiente. De fato, sendo λ a constante de Einstein de M, considere uma aplicação constante $f : M \to \mathbb{R}$. Segue que $\lambda g = Ric = Ric + H_f$.*

Exemplo 2.8 (Espaços de Curvatura Constante)**.** *As variedades de curvatura constante são sólitons gradiente. De fato, como foi visto na Proposição 2.8 as variedades de curvatura constante são variedades de Einstein e, portanto, sólitons gradiente.*

Exemplo 2.9 (Sóliton Gaussiano)**.** *Considere o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ com a métrica Euclidiana g_E e seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \frac{\lambda}{2}\|x\|^2,$$

para alguma constante λ. Tem-se então que $\nabla f(x) = \lambda x = (\lambda I)(x)$, onde $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ denota a aplicação identidade. Denotando por $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a projeção na i-ésima coordenada, tem-se que $I = \sum_i \pi_i \partial_i$. Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla_Y \nabla f &= \nabla_Y(\lambda I) \\
&= \lambda \sum_{i,j} y_j \nabla_{\partial_j}(\pi_i \partial_i) \\
&= \lambda \sum_{i,j} y_j(\pi_i \underbrace{\nabla_{\partial_j}\partial_i}_{0} + \underbrace{\partial_j \pi_i}_{\delta_{ji}} \partial_i) \\
&= \lambda \sum_{i,j} y_j \delta_{ji} \partial_i \\
&= \lambda \sum_i y_i \partial_i = \lambda Y.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
H_f(X, Y) &= g(\nabla_X \nabla f, Y) \\
&= g(\lambda X, Y) \\
&= \lambda g(X, Y).
\end{aligned}$$

Como a curvatura do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ é nula, a condição do sóliton é satisfeita. O sóliton $(\mathbb{R}^n, g_E, f, \lambda)$ aqui descrito é chamado de sóliton Gaussiano. Ele é steady, shrinking ou expanding conforme a escolha de λ.

Exemplo 2.10 (Produto do sóliton Gaussiano com uma variedade de Einstein)**.** *Seja (M, g_M) uma variedade de Einstein com constante de Einstein λ. Considere o sóliton Gaussiano $(\mathbb{R}^n, g_E, f, \lambda)$, descrito no exemplo acima. O produto Riemanniano $(M \times \mathbb{R}, g)$, de M por $\mathbb{R}^n$, é um sóliton gradiente. De fato, como $Ric^M = \lambda g_M$ e $H_f^{\mathbb{R}^n} = \lambda g_E$, segue que*

$$\begin{aligned} Ric + H_f &= Ric^M + H_f^{\mathbb{R}^n} \\ &= \lambda g_M + \lambda g_E \\ &= \lambda g. \end{aligned}$$

Exemplo 2.11 (Sóliton Charuto de Hamilton)**.** *Considere o conjunto $\mathbb{R}^2$ com sua estrutura diferenciável natural e defina nele a métrica*

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}.$$

Vamos mostrar que $(\mathbb{R}^2, g, f, 0)$ é um sóliton gradiente steady, onde

$$f(x, y) = -\ln(1 + x^2 + y^2).$$

Considerando a base canônica de $\mathbb{R}^2$, os coeficientes da métrica são dados por

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \quad e \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

Além disso, a matriz inversa da matriz da métrica tem como coeficientes

$$g^{11} = g^{22} = 1 + x^2 + y^2 \quad e \quad g^{12} = g^{21} = 0.$$

Agora serão calculados os símbolos de Christoffel da métrica. Note que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{lk} \{\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\},$$

e

$$\begin{aligned} \partial_1 g_{11} = \partial_1 g_{22} &= \frac{-2x}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \\ \partial_2 g_{11} = \partial_2 g_{22} &= \frac{-2y}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \\ \partial_i g_{12} = \partial_i g_{21} &= 0, \ \forall i, j \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
2\Gamma_{11}^1 &= \sum_l g^{lk}\{\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\} \\
&= g^{11}\{\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}\} \\
&= g^{11}\partial_1 g_{11} \\
&= (1+x^2+y^2)\frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2},
\end{aligned}$$

e portanto $\Gamma_{11}^1 = \frac{-x}{1+x^2+y^2}$. *Analogamente mostra-se que*

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{-x}{1+x^2+y^2} \\
\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{-y}{1+x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_1}\partial_1 &= \frac{1}{1+x^2+y^2}(-x\partial_1 + y\partial_2); \\
\nabla_{\partial_1}\partial_2 &= \frac{1}{1+x^2+y^2}(-y\partial_1 - x\partial_2); \\
\nabla_{\partial_2}\partial_2 &= \frac{1}{1+x^2+y^2}(x\partial_1 - y\partial_2); \\
\nabla_{\partial_2}\partial_1 &= \frac{1}{1+x^2+y^2}(-y\partial_1 - x\partial_2).
\end{aligned}$$

Agora pode-se calcular a forma hessiana de f *e a curvatura de Ricci da métrica considerada. Por definição segue que, por um lado*

$$\begin{aligned}
g(\nabla f, X) &= \frac{1}{1+x^2+y^2}\sum_{i,j}\nabla^i f \delta_{ij} x_j \\
&= \frac{\nabla^1 f x_1 + \nabla^2 f x_2}{1+x^2+y^2},
\end{aligned}$$

e por outro

$$Xf = x_1\partial_1 f + x_2\partial_2 f.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla^1 f &= (1+x^2+y^2)\partial_1 f \\
\nabla^2 f &= (1+x^2+y^2)\partial_2 f,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\nabla f &= (1+x^2+y^2)(\partial_1 f\partial_1 + \partial_2 f\partial_2)\\ &= (-2x)\partial_1 + (-2y)\partial_2\\ &= -2(x\partial_1 + y\partial_2).\end{aligned}$$

Seja A *dado por* $A = a_1\partial_1 + a_2\partial_2$. *Como,* $\nabla_A\nabla f = a_1\nabla_{\partial_1}\nabla f + a_2\nabla_{\partial_2}\nabla f$ *e*

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_1}\nabla f &= \frac{-2}{1+x^2+y^2}\partial_1\\ \nabla_{\partial_2}\nabla f &= \frac{-2}{1+x^2+y^2}\partial_2,\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}\nabla_A\nabla f &= \frac{-2a_1}{1+x^2+y^2}\partial_1 + \frac{-2a_2}{1+x^2+y^2}\partial_2\\ &= \frac{-2}{1+x^2+y^2}A.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}H_f(A,B) &= g(\nabla_A\nabla f, B)\\ &= \frac{-2}{1+x^2+y^2}g(A,B).\end{aligned}$$

Agora será calculado o tensor de Ricci. Para isto considere a base ortonormal $\{e_1, e_2\}$, *onde,*

$$\begin{aligned}e_1 &= \sqrt{1+x^2+y^2}\partial_1\\ e_2 &= \sqrt{1+x^2+y^2}\partial_2.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}Ric(A,B) &= (trRm)(A,B)\\ &= \sum_k g(Rm(A,e_k)B,e_k)\\ &= (1+x^2+y^2)\sum_{k,i,j} a_i b_j g(Rm(\partial_i,\partial_k)\partial_j,\partial_k),\end{aligned}$$

onde $Rm(\partial_i, \partial_k)\partial_j = \nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_k}\partial_j$. *Usando os símbolos de Christoffel segue que*

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_1}\partial_1 &= \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}[(4xy)\partial_1 + (2x^2 - 2y^2 + 1)\partial_2] \\
\nabla_{\partial_1}\nabla_{\partial_2}\partial_1 &= \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}[(4xy)\partial_1 + (2x^2 - 2y^2 - 1)\partial_2].
\end{aligned}$$

Portanto

$$Rm(\partial_1, \partial_2)\partial_1 = \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\partial_2,$$

e assim

$$g(Rm(\partial_1, \partial_2)\partial_1, \partial_2) = g(Rm(\partial_2, \partial_1)\partial_2, \partial_1) = \frac{2}{(1+x^2+y^2)^3},$$

donde

$$\begin{aligned}
Ric(A, B) &= (1+x^2+y^2)\left(\frac{a_1 b_1}{(1+x^2+y^2)^3} + \frac{a_2 b_2}{(1+x^2+y^2)^3}\right) \\
&= \frac{2}{(1+x^2+y^2)}\left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{1+x^2+y^2}\right) \\
&= \frac{2}{1+x^2+y^2} g(A, B).
\end{aligned}$$

Isto conclui que $Ric + H_f = 0$.

Observemos também que o charuto tem curvatura seccional positiva em todo ponto. De fato, seja $\{e_1, e_2\}$ *a base ortonormal considerada anteriormente e seja* σ *o plano tengente gerado por esta base. Então,*

$$\begin{aligned}
K(\sigma) &= g(Rm(e_1, e_2)e_1, e_2) \\
&= (\sqrt{1+x^2+y^2})^4 g(Rm(\partial_1, \partial_2)\partial_1, \partial_2) \\
&= (\sqrt{1+x^2+y^2})^4 \frac{2}{(1+x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{2}{1+x^2+y^2} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Observe também que quanto mais o ponto (x, y) *se afasta da origem, a curvatura seccional* $K(\sigma)$ *se aproxima de zero.*

É possível mostrar que o charuto de Hamilton é uma variedade Riemanniana completa e que ele é rotacionalmente simétrico, como mostra Chow em [17]. Mais geralmente, tem-se o seguinte.

Teorema 2.6 (Bryant). *Existe, a menos de constantes, um único sóliton gradiente steady n-dimensional, completo, rotacionalmente simétrico que possui curvatura não nula.*

Demonstração. Ver [9]. □

O sólitom acima é chamado de sóliton de Bryant, devido ao fato de ele ter encontrado esta variedade e mostrado sua unicidade.

Agora serão apresentados alguns fatos sobre sólitons de Ricci.

Proposição 2.11. *Seja (M^n, g, f, λ) um sóliton de Ricci gradiente. Então, valem as relações:*

1. $R + \Delta f = n\lambda$;
2. $XR = 2Ric(\nabla f, X)$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$;
3. $R + \|\nabla f\|^2 - 2\lambda f = C = constante$.

Demonstração.

1. Tomando o traço na equação $Ric + H_f = \lambda g$ obtém-se o resultado desejado.
2. Seja X um campo de vetores em M. Pelo ítem 1 obtém-se:

$$XR = -X\Delta f. \tag{2.3}$$

Pela forma contraída da identidade diferencial de Bianchi, vale que $XR = 2\text{div}Ric(X)$. Usando a equação 2.3, tem-se

$$\begin{aligned} XR &= 2\text{div}Ric(X) \\ &= -2\text{div}H_f(X). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Pela fórmula de Bochner, segue que $\text{div}(H_f)(X) = Ric(\nabla f, X) + X\Delta f$. Usando a equação 2.3, tem-se também

$$\begin{aligned} \text{div}(H_f)(X) &= Ric(\nabla f, X) + X\Delta f \\ &= Ric(\nabla f, X) - XR. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Substituindo a equação 2.5 na equação 2.4, obtém-se

$$\begin{aligned} XR &= 2\text{div}Ric(X) \\ &= -2Ric(\nabla f, X) + 2XR, \end{aligned}$$

donde $XR = 2Ric(\nabla f, X)$, e segue o resultado.

Seja X um campo de vetores arbitrário. Pela equação acima segue que

$$\begin{aligned} XR &= 2Ric(\nabla f, X) \\ &= 2\lambda g(\nabla f, X) - 2H_f(\nabla f, X) \\ &= X(2\lambda f) - 2g(\nabla_{\nabla f}\nabla f, X) \\ &= X(2\lambda f) - Xg(\nabla f, \nabla f) \\ &= X(2\lambda f) - X\|\nabla f\|^2. \end{aligned}$$

Dessa forma $X(R + \|\nabla f\|^2 - 2\lambda f) = 0$. Pela arbitrariedade do campo X, segue que a expressão $R + \|\nabla f\|^2 - 2\lambda f$ é constante. □

Proposição 2.12 (Hamilton, Ivey). *Todo Sóliton gradiente compacto, expanding ou steady, é uma variedade de Einstein.*

Demonstração. Como M é uma variedade compacta e $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, existem $x_1, x_2 \in M$ tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \ \forall x \in M.$$

Subtraindo as equações 1 e 2 da proposição 2.11, obtém-se

$$-2\lambda f - \Delta f + \|\nabla f\|^2 = C_0 = C - n\lambda.$$

Supondo que M é expanding, tem-se

$$-2\lambda f(x_1) - \underbrace{\Delta f(x_1)}_{\geq 0} + \underbrace{\|\nabla f\|^2(x_1)}_{0} = C_0,$$

e assim

$$\begin{aligned} -2\lambda f(x_1) - C_0 &= \Delta f(x_1) \geq 0 \\ &\Downarrow \\ f(x_1) &\geq \frac{C_0}{-2\lambda}. \end{aligned}$$

Como vale também que $\Delta f(x_2) \leq 0$ e $\|\nabla f\|^2(x_2) = 0$, tem-se

$$f(x_2) \leq \frac{C_0}{-2\lambda}.$$

E, assim

$$\frac{C_0}{-2\lambda} \leq f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \leq \frac{C_0}{-2\lambda},\ \forall x \in M.$$

Portanto, $f(x) = -\dfrac{C_0}{2\lambda}, \forall x \in M$, o que completa o caso expanding.

Supondo agora que M é steady tem-se que $R = \Delta f$ e $R + \|\nabla f\|^2 = C$. Dessa maneira tem-se que $\Delta f + \|\nabla f\|^2 = C$. Considerando a função e^f, tem-se que $\Delta(e^f) = e^f(\|\nabla f\|^2 + \Delta f)$. De fato, para o gradiente de e^f, tem-se

$$\begin{aligned} g(\nabla(e^f), X) &= X(e^f) \\ &= e^f X f \\ &= e^f g(\nabla f, X) \\ &= g(e^f \nabla f, X), \end{aligned}$$

onde $\nabla(e^f) = e^f \nabla f$. Logo

$$\begin{aligned} \Delta(e^f) &= \mathrm{div} \nabla f(e^f) \\ &= \sum_i g(\nabla_{\partial_i} \nabla f(e^f), \partial_i) \\ &= \sum_i g(\nabla_{\partial_i} (e^f \nabla f), \partial_i) \\ &= \sum_i g(\partial_i(e^f) \nabla f + e^f \nabla_{\partial_i} \nabla f, \partial_i) \\ &= e^f \sum_i g(\partial_i f) \nabla f, \partial_i) + e^f \sum_i g(\nabla_{\partial_i} \nabla f, \partial_i) \\ &= e^f g(\nabla f, \sum_i \partial_i f \partial_i) + e^f \mathrm{div} \nabla f \\ &= e^f g(\nabla f, \nabla f) + e^f \Delta f \\ &= e^f(\|\nabla f\|^2 + \Delta f). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \Delta(e^f) \\ &= \int_M (\Delta f + \|\nabla f\|^2) e^f \\ &= \int_M C e^f \\ &= C \int_M e^f, \end{aligned}$$

de onde $C = 0$. Segue então que $\|\nabla f\|^2 = -\Delta f$ e, portanto

$$\begin{aligned} \int_M \|\nabla f\|^2 &= \int_M \Delta f \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daí segue que $\nabla f = 0$ e, consequentemente, f é constante, concluindo a demonstração no caso steady. □

Outro fato importante sobre sólitons compactos é o seguinte.

Proposição 2.13 (Perelman). *Qualquer sóliton de Ricci compacto é gradiente.*

Demonstração. Ver [37]. □

Juntando os dois últimos resultados obtém-se que todo sóliton compacto, expanding ou steady, é uma variedade de Einstein. No caso shrinking tem-se o seguinte.

Proposição 2.14 (Xiadong Cao). *Todo sóliton compacto shrinking, localmente conformemente plano é uma variedade de Einstein e possui curvatura seccional constante.*

Demonstração. Ver [15]. □

Da maneira como foram apresentados os três últimos resultados, poderia surgir o questionamento sobre a existência de sólitons compactos que não são variedades de Einstein. No entanto eles existem e, pelo que foi exposto acima, estes devem ser shrinking e não podem ser localmente conformemente planos. Alguns exemplos foram encontrados por Cao [11]. Para descrevê-los é preciso introduzir o conceito de variedades de Kähler. Como esta introdução foge ao escopo deste trabalho, tais exemplos não serão apresentados aqui.

Outro fato importante sobre sólitons de Ricci é que são, em alguns casos, espaços de curvatura escalar limitada, como pode-se ver nos seguintes resultados.

Proposição 2.15. *Seja (M, g, f, λ) um sóliton de Ricci shrinking completo. Então, sua curvatura escalar R é positiva.*

Demonstração. Ver Chow et al [17]. □

Proposição 2.16 (Cao). *Seja $(M, g, f, 0)$ um sóliton de Ricci steady completo. Então sua curvatura escalar R é não negativa.*

Demonstração. Ver Chow et al [17]. □

Proposição 2.17. *Um sóliton gradiente possui operador de curvatura não-negativo se:*

1. *for steady ou shrinking e possuir dimensão* 3*;*

2. *for steady possui dimensão* 4 *e for localmente conformemente plano.*

A primeira parte da Proposição acima foi provada por Chen [16] e a segunda por Zhang [40]. Como observam Cao e Qiang Chen em [14] e Fernández-López e García-Río em [21], os argumentos utilizados por Zhang valem para sólitons shrinking localmente conformemente plano em dimensão maior do que 3. Assim obtem-se o seguinte:

Proposição 2.18. *Um sóliton gradiente, steady ou shrinking, possui operador de curvatura não-negativo se:*

1. *possuir dimensão* 3*;*

2. *possuir dimensão* 4 *e for localmente conformemente plano.*

O próximo teorema garante a existência de um sistema de coordenadas analítico para um sóliton de Ricci, gradiente ou não, completo ou não.

Teorema 2.7. *Seja* (M, g, X, λ) *um sóliton de Ricci. Então* M *admite um sistema de coordenadas real analítico, tal que* g *e* X *são analíticos.*

Demonstração. Ver Ivey [27]. □

Esta seção será finalizada com o seguinte teorema de classificação.

Teorema 2.8. *Se* (M^n, g), $n \geq 2$, *é um sóliton gradiente shrinking, completo e rotacionalmente simétrico, que é difeomorfo a* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$ *ou* $\mathbb{S}^n$, *então*

1. *se* M *é difeomorfo a* $\mathbb{R}^n$, *então* (M^n, g) *é isométrico ao espaço Euclidiano (sóliton Gaussiano shrinking);*

2. *se* M *é difeomorfo a* $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$, *então* (M^n, g) *é isométrico ao cilindro com a métrica canônica* $dt^2 + \omega_0^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ *de raio* $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{n-1}{\lambda}}$ *e* $f(t) = \dfrac{(n-1)t^2}{\omega_0^2} = \lambda t^2$*;*

3. *se* M *é difeomorfo a* $\mathbb{S}^n$, *então* (M^n, g) *é isométrico à esfera com a métrica canônica.*

Demonstração. Ver kotschwar [29]. □

2.4.2 Sólitons e o fluxo de Ricci

O fluxo de Ricci foi introduzido por Hamilton [23]. O objetivo de Hamilton era provar a conjectura da geometrização, que afirma existirem apenas 8 geometrias que são "básicas" em um sentido que pode ser melhor compreendido em Thurston [39]. A estratégia de Hamilton foi a seguinte. Fixada uma variedade diferenciável compacta M^3 e dada uma métrica inicial g_0, encontrar uma métrica Riemanniana g que possuísse curvatura constante positiva através da equação de evolução do fluxo pela curvatura de Ricci, tendo em vista que em dimensão 3 a curvatura de Ricci determina o tensor de curvatura. Os pontos fixos da equação de evolução introduzida por Hamilton (definida a seguir) são exatamente os sólitons de Ricci. Sendo eles pontos fixos, não iriam evoluir através deste fluxo, tornando-se assim, uma obstrução na estratégia de Hamilton. Isto motivou o estudo da geometria dos sólitons de Ricci, principalmente no caso gradiente, onde a conexão com o fluxo é mais forte, como mostra o último teorema desta seção.

Definição 2.15. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. O fluxo de Ricci com condição inicial g é a equação de evolução*

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = -2Ric_t,$$

onde $\{g_t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ é uma família de métricas Riemannianas definidas em M e Ric_t é o tensor de Ricci da métrica g_t.

Exemplo 2.12. *Considere a esfera $\mathbb{S}^n$ junto com a métrica canônica $g_{\mathbb{S}^n}$, induzida pelo $\mathbb{R}^{n+1}$. Tendo em vista que $Ric(X, Y) = (n-1)g_{\mathbb{S}^n}(X, Y)$, defina $g_t = (1 - 2(n-1)t)g_{\mathbb{S}^n}$. Como o tensor de Ricci é invariante por reescala, tem-se que $Ric_t = Ric$. Assim,*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} g_t &= \frac{\partial}{\partial t}(1 - 2(n-1)t)g_{\mathbb{S}^n} \\
&= -2(n-1)g_{\mathbb{S}^n} \\
&= -2Ric \\
&= -2Ric_t.
\end{aligned}$$

Definição 2.16. *Uma solução $\{g_t\}_t$ para o fluxo de Ricci é chamada:*

1. *anciã, se está definida para $t \in (-\infty, c)$, com $c \in \mathbb{R}$;*

2. *imortal, se está definida para $t \in (c, +\infty)$, com $c \in \mathbb{R}$;*

3. eterna, se está definida para $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.13. *A família de métricas $\{g_t\}$, definida no exemplo anterior, é um exemplo de solução anciã do fluxo, pois está definida para $1 - 2(n-1)t > 0$, isto é, para $t \in (-\infty, \frac{1}{2(n-1)})$.*

No conjunto das soluções da equação do fluxo de Ricci destacam-se as soluções auto-similares, pois estas modelam algumas singularidades do fluxo. Acontece que as soluções auto-similares do fluxo de Ricci e os sólitons de Ricci estão intimamente relacionados. A relação fica ainda mais forte se o sóliton for gradiente e a métrica for completa.

Definição 2.17. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Uma solução $\{g_t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ para o fluxo de Ricci, com condição inicial g, é dita auto-similar se existem uma função $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to (0, +\infty)$ e uma família $\{\varphi_t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ de difeomorfismos de M tais que, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, vale*

$$g_t = \sigma(t)\varphi_t^* g,$$

com $\varphi_0 = id_M$ e $\sigma(0) = 1$.

A relação entre uma solução auto-similar para o fluxo de Ricci e a equação que define um sóliton de Ricci é dada pela proposição abaixo.

Proposição 2.19. *Se (M, g) é a condição inicial para uma solução auto-similar do fluxo de Ricci em M, então (M, g) é um sóliton de Ricci.*

Demonstração. Seja $\{g_t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ uma solução auto-similar para o fluxo de Ricci em uma variedade Riemanniana (M, g), com condição inicial g. Então, existem uma família de difeomorfismos $\varphi_t : M \to M$ e uma função suave positiva $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, tais que $g_t = \sigma(t)\varphi_t^* g$. Assim,

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 g_t &= \sigma'(0)\varphi_0^* g + \sigma(0)\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 \varphi_t^* g \\ &= \sigma'(0)g + \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 \varphi_t^* g. \end{aligned}$$

Da Proposição 1.6, segue que $\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 \varphi_t^* g = \varphi_0^*(\mathfrak{L}_X g) = \mathfrak{L}_X g$, onde $X(\varphi_t(p)) = \frac{d}{dt}\big(\varphi_t(p)\big)$. Da equação do fluxo de Ricci, obtém-se

$$\begin{aligned} -2Ric &= -2\varphi_0^* Ric \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 g_t \\ &= \sigma'(0)g + \mathfrak{L}_X g, \end{aligned}$$

isto é, $Ric + \dfrac{1}{2}\mathfrak{L}_X g = -\dfrac{1}{2}\sigma'(0)g$, e assim, $(M, g, X, -\dfrac{1}{2}\sigma'(0))$ é um sóliton de Ricci. $\square$

Teorema 2.9. *Se (M, g, f, λ) é um sóliton gradiente, com g completa, então o campo ∇f é completo, isto é, seu fluxo está definido em $\mathbb{R} \times M$.*

O Teorema abaixo mostra que, dado um sóliton de Ricci gradiente completo (M, g, f, λ), então existe uma solução do fluxo de Ricci em M que começa em g. Isto significa que, neste caso, estudar o fluxo de Ricci, que é uma equação de evolução, é, em certo sentido, estudar um sóliton de Ricci gradiente, que é uma condição estática, pois muitas propriedades são preservadas pelo fluxo. Um exemplo disso é a positividade do tensor de curvatura, como foi provado por Hamilton em Chow [1].

Teorema 2.10. *Seja (M, g, f, λ) um sóliton gradiente completo. Então existem uma solução g_t para o fluxo de Ricci com $g_0 = g$, difeomorfismos $\varphi_t : M \to M$, com $\varphi_0 = id_M$, uma família de funções $f_t : M \to \mathbb{R}$, com $f_0 = f$, definidos para todo t, onde $\tau(t) = \lambda t + 1 > 0$, tais que*

1. *a família φ_t é gerada pelo campo $X_t = \frac{1}{\tau(t)}\nabla_g f$, isto é,*

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x) = \frac{1}{\tau(t)}(\nabla_g f)\varphi_t(x);$$

2. *g_t é o pull back por φ_t de g, a menos do fator de escala $\tau(t)$, isto é,*

$$g_t = \tau(t)\varphi_t^* g;$$

3. *$f(t)$ é o pull back por φ_t de f, isto é,*

$$f_t = \varphi^* f = f \circ \varphi_t.$$

Além do mais,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t) = \left\|\nabla_{g_t f(t)}\right\|_{g_t}^2$$

e

$$Ric_{g_t} + H_f^{g_t} = -\frac{\lambda}{2\tau(t)},$$

onde $H_f^{g_t}$ denota o hessiano da função f com relação à métrica g_t.

Demonstração. Ver [1]. $\square$

Capítulo 3

Sólitons de Ricci gradiente localmente conformemente planos

Neste capítulo será discutido um teorema de classificação presente em um trabalho de Fernández-López e García-Río [21] sobre sólitons de Ricci gradiente, shrinking ou steady, que são localmente conformemente planos.

Serão provados dois lemas que estabelecem as expressões para o tensor de curvatura e para o tensor de Weyl, no caso em que o tensor de Schouten é tipo Codazzi e a quarta entrada em ambos os tensores é fixada sendo o campo gradiente da função potencial do sóliton, que pode ser shrinking, steady ou expanding. Em seguida será demonstrado que tais sólitons são localmente (em vizinhanças onde $\nabla f \neq 0$) um produto warped de uma variedade de dimensão 1 com uma variedade de curvatura constante, desde que sejam localmente conformemente planos. Se seu operador de curvatura é não negativo, será provado também que o sóliton é rotacionalmente simétrico, culminando a classificação.

3.1 Um teorema de classificação

Os lemas abaixo mostram a simplicidade do tensor de curvatura e do tensor de Weyl de um sóliton gradiente quando o tensor de Schouten é tipo Codazzi e a quarta entrada é fixada com o gradiente da função potencial.

Lema 3.1. *Seja (M^n, g, f, λ), $n \geq 2$, um sóliton gradiente. Se o tensor de Schouten de g for* *um tensor tipo Codazzi, então*

$$Rm(X,Y,Z,\nabla f) = \frac{1}{n-1}Ric(Y,\nabla f)g(X,Z) - \frac{1}{n-1}Ric(X,\nabla f)g(Y,Z),$$

onde $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Por hipótese, o tensor de Schouten

$$S = Ric - \frac{R}{2(n-1)}g$$

é um tensor tipo Codazzi, isto é,

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = (\nabla_Y S)(X,Z). \tag{3.1}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X S)(Y,Z) &= (\nabla_X(Ric - \frac{R}{2(n-1)}g))(Y,Z)\\
&= (\nabla_X Ric)(Y,Z) - \frac{1}{2(n-1)}(\nabla_X(Rg))(Y,Z)\\
&= (\nabla_X(\lambda g - H_f))(Y,Z) - \frac{X(R)}{2(n-1)}g(Y,Z) - \underbrace{R(\nabla_X g)(Y,Z)}_{=0}\\
&= -(\nabla_X H_f)(Y,Z) - \frac{X(R)}{2(n-1)}g(Y,Z)\\
&= -X(H_f(Y,Z)) + H_f(\nabla_X Y,Z) + H_f(Y,\nabla_X Z) - \frac{X(R)}{2(n-1)}g(Y,Z)\\
&= -X(g(\nabla_Y\nabla f,Z)) + g(\nabla_{\nabla_X Y}\nabla f,Z) + g(\nabla_Y\nabla f,\nabla_X Z) - \frac{X(R)}{2(n-1)}g(Y,Z)\\
&= \underbrace{-X(g(\nabla_Y\nabla f,Z)) + g(\nabla_Y\nabla f,\nabla_X Z)}_{-g(\nabla_X\nabla_Y\nabla f,Z)} + g(\nabla_{\nabla_X Y}\nabla f,Z) - \frac{X(R)}{2(n-1)}g(Y,Z)\\
&= g(-\nabla_X\nabla_Y\nabla f + \nabla_{\nabla_X Y}\nabla f,Z) - \frac{X(R)}{2(n-1)}g(Y,Z).
\end{aligned}$$

Trocando X por Y, tem-se

$$(\nabla_Y S)(X,Z) = g(-\nabla_Y\nabla_X\nabla f + \nabla_{\nabla_Y X}\nabla f,Z) - \frac{Y(R)}{2(n-1)}g(X,Z).$$

Assim, usado a equação 3.1, obtém-se que

$$\begin{aligned}
g(-\nabla_X\nabla_Y\nabla f + \nabla_{\nabla_X Y}\nabla f,Z) - \frac{X(R)}{2(n-1)}g(Y,Z) &=\\
g(-\nabla_Y\nabla_X\nabla f + \nabla_{\nabla_Y X}\nabla f,Z) - \frac{Y(R)}{2(n-1)}g(X,Z),&
\end{aligned}$$

donde

$$g(\nabla_Y\nabla_X\nabla f - \nabla_X\nabla_Y\nabla f + \nabla_{\nabla_X Y}\nabla f - \nabla_{\nabla_Y X}\nabla f, Z) = \frac{X(R)}{2(n-1)}g(Y,Z) - \frac{Y(R)}{2(n-1)}g(X,Z),$$

isto é

$$Rm(X,Y,\nabla f,Z) = \frac{X(R)}{2(n-1)}g(Y,Z) - \frac{Y(R)}{2(n-1)}g(X,Z).$$

Usando a Proposição 2.11 e as propriedades de simetria do tensor de curvatura conclui-se que

$$Rm(X,Y,Z,\nabla f) = \frac{1}{n-1}Ric(\nabla f,Y)g(X,Z) - \frac{1}{n-1}Ric(\nabla f,X)g(Y,Z).$$

□

Lema 3.2. *Sejam (M^n,g,f,λ), $n \geq 3$, um sóliton de Ricci gradiente não Einstein e $\{E_1,\ldots,E_n\}$ um referencial ortonormal definido onde $\nabla f \neq 0$, com $E_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Se o tensor de Schouten de g for um tensor tipo Codazzi, então, $\forall i,j,k \in \{1,\ldots,n\}$*

$$\begin{aligned} W(E_i,E_j,E_k,E_n) = &-\frac{\delta_{jk}}{(n-1)(n-2)}Ric(E_i,E_n) + \frac{\delta_{ik}}{(n-1)(n-2)}Ric(E_j,E_n) \\ &-\frac{\delta_{in}}{n-2}Ric(E_j,E_k) + \frac{\delta_{jn}}{n-2}Ric(E_i,E_k) \\ &+\frac{\delta_{in}\delta_{jk}}{(n-1)(n-2)}R - \frac{\delta_{jn}\delta_{ik}}{(n-1)(n-2)}R, \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde W é o tensor de Weyl.

Demonstração. Usando o lema 3.1, tem-se

$$\begin{aligned} W(E_i,E_j,E_k,E_n) = &\frac{1}{n-1}Ric(E_j,E_n)\delta_{ik} - \frac{1}{n-1}Ric(E_i,E_n)\delta_{jk} \\ &-\frac{1}{n-2}(S \odot g)(E_i,E_j,E_k,E_n). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Pela definição de $\odot$, tem-se

$$
\begin{aligned}
(S \odot g)(E_i, E_j, E_k, E_n) &= S(E_i, E_k)\delta_{jn} + S(E_j, E_n)\delta_{ik} - S(E_i, E_n)\delta_{jk} - S(E_j, E_k)\delta_{in} \\
&= Ric(E_i, E_k)\delta_{jn} - \frac{\delta_{ik}\delta_{jn}}{2(n-1)}R + Ric(E_j, E_n)\delta_{ik} - \frac{\delta_{jn}\delta_{ik}}{2(n-1)}R - Ric(E_i, E_n)\delta_{jk} \\
&\quad + \frac{\delta_{in}\delta_{jk}}{2(n-1)}R - Ric(E_j, E_k)\delta_{in} + \frac{\delta_{jk}\delta_{in}}{2(n-1)}R \\
&= Ric(E_i, E_k)\delta_{jn} - \frac{\delta_{ik}\delta_{jn}}{n-1}R + Ric(E_j, E_n)\delta_{ik} - Ric(E_i, E_n)\delta_{jk} \\
&\quad + \frac{\delta_{in}\delta_{jk}}{n-1}R - Ric(E_j, E_k)\delta_{in}.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Multiplicando a equação 3.4 por $\dfrac{1}{n-2}$ e subtraindo o resultado de 3.3, fica

$$
\begin{aligned}
W(E_i, E_j, E_k, E_n) =& \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}\right)Ric(E_j, E_n)\delta_{ik} + \left(-\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}\right)Ric(E_i, E_n)\delta_{jk} \\
& - \frac{1}{n-2}Ric(E_i, E_k)\delta_{jn} + \frac{\delta_{ik}\delta_{jn}}{(n-1)(n-2)}R - \frac{\delta_{in}\delta_{jk}}{(n-1)(n-2)}R \\
& + \frac{\delta_{in}}{(n-1)(n-2)}Ric(E_j, E_k) \\
=& \frac{\delta_{jk}}{(n-1)(n-2)}Ric(E_i, E_n) - \frac{\delta_{ik}}{(n-1)(n-2)}Ric(E_j, E_n) \\
& - \frac{\delta_{jn}}{n-2}Ric(E_i, E_k) + \frac{\delta_{in}}{n-2}Ric(E_j, E_k) \\
& - \frac{\delta_{in}\delta_{jk}}{(n-1)(n-2)}R + \frac{\delta_{jn}\delta_{ik}}{(n-1)(n-2)}R.
\end{aligned}
$$

$\square$

O teorema abaixo diz que todo sóliton gradiente localmente conformemente plano é localmente o produto warped de uma forma espacial com um espaço de dimensão 1, supondo que f é não constante.

Teorema 3.1. *Seja (M^n, g, f, λ), $n \geq 3$, um sóliton gradiente, com f não constante, e localmente conformemente plano. Então, todo ponto $p \in M$ tal que $\nabla f(p) \neq 0$ possui uma vizinhança em M que é localmente isométrica ao produto warped*

$$((-\varepsilon, \varepsilon) \times N, dt^2 + \varphi^2(t)g_N),$$

onde (N, g_N) é uma variedade Riemanniana de curvatura constante -1 ,0 ou 1.

Demonstração. Sejam $p \in M$ e $\{E_1, \ldots, E_{n-1}, E_n\}$ um referencial ortonormal, onde $\nabla f(p) \neq 0$, tal que $E_n = \dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Assim tem-se que $\{E_1, \ldots, E_{n-1}\}$ é um referencial ortonormal para a hipersuperfície $N = f^{-1}(c)$, com $f(p) = c$. O objetivo é mostrar que a hipersuperfície N é totalmente umbílica. Dados $q \in N$ e dois campos de vetores $X, Y \in T_qN$, com

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} x_i E_i \qquad \text{e} \qquad Y = \sum_{j=1}^{n-1} y_j E_j$$

obtém-se que

$$II(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{n-1} x_i y_j II(E_i, E_j),$$

onde II denota a segunda forma fundamental de N. Considerando $II(E_i, E_j)$, com $1 \leq i, j \leq n-1$, tem-se que

$$\begin{aligned}
II(E_i, E_j) &= -g(\nabla_{E_i} E_n, E_j) \\
&= -g(\nabla_{E_i}\left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\right), E_j) \\
&= -g(E_i\left(\frac{1}{\|\nabla f\|}\right)\nabla f + \frac{1}{\|\nabla f\|}\nabla_{E_i}\nabla f, E_j) \\
&= -g(E_i\left(\frac{1}{\|\nabla f\|}\right)\nabla f, E_j) - g(\frac{1}{\|\nabla f\|}\nabla_{E_i}\nabla f, E_j) \\
&= -E_i\left(\frac{1}{\|\nabla f\|}\right)\underbrace{g(\nabla f, E_j)}_{0} - \frac{1}{\|\nabla f\|}\underbrace{g(\nabla_{E_i}\nabla f, E_j)}_{H_f(E_i,E_j)} \\
&= -\frac{1}{\|\nabla f\|}H_f(E_i, E_j).
\end{aligned}$$

Além disso, como M é localmente conformemente plana, pelo Teorema de Weyl-Schouten, segue que o tensor de Weyl de g é identicamente nulo e o tensor de Schouten de g é tipo Codazzi. Assim, pelo Lema 3.2, vale que

$$\begin{aligned}
0 =& W(E_n, E_i, E_i, E_n) \\
=& -\frac{1}{(n-1)(n-2)}Ric(E_n, E_n) + \frac{1}{n-2}Ric(E_i, E_i) - \frac{1}{(n-1)(n-2)}R,
\end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq n-1$, de onde tem-se

$$Ric(E_i, E_i) = \frac{1}{n-1}\big(R - Ric(E_n, E_n)\big).$$

Usando a equação 2.2,

$$\begin{aligned}
H_f(E_i,E_i) =&\lambda - Ric(E_i,E_i)\\
=&\lambda - \frac{1}{n-1}\big(R - Ric(E_n,E_n)\big)\\
=&\frac{1}{n-1}\big((n-1)\lambda - R + Ric(E_n,E_n)\big)\\
=&\frac{1}{n-1}\big((n-1)\lambda - R + \lambda - H_f(E_n,E_n)\big)\\
=&\frac{1}{n-1}\big(\underbrace{n\lambda - R}_{\Delta f} - H_f(E_n,E_n)\big)\\
=&\frac{1}{n-1}\big(\Delta f - H_f(E_n,E_n)\big).
\end{aligned}$$

Assim, $II(E_i,E_i) = -\frac{1}{(n-1)\|\nabla f\|}\big(\Delta f - H_f(E_n,E_n)\big)$. Agora, considerando a equação 3.2, com $i = n$ e $j \neq k$ e $1 \leq j,k \leq n-1$, obtém-se $Ric(E_j,E_k) = 0$. Usando a equação 2.2 e tomando $j \neq k$, obtém-se

$$\begin{aligned}
H_f(E_j,E_k) =& -\lambda g(E_j,E_k) + Ric(E_j,E_k)\\
=&0,
\end{aligned}$$

donde $II(E_j,E_k) = 0$, sempre que $j \neq k$. Logo

$$\begin{aligned}
II(X,Y) =& \sum_{i,j=1}^{n-1} x_i y_j II(E_i,E_j)\\
=&\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i II(E_i,E_i)\\
=& -\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i \frac{1}{n-1}\big(\Delta f - H_f(E_n,E_n)\big)\\
=& -\frac{1}{(n-1)\|\nabla f\|}\big(\Delta f - H_f(E_n,E_n)\big)\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i\\
=&Fg(X,Y),
\end{aligned}$$

onde $F = -\frac{1}{(n-1)\|\nabla f\|}\big(\Delta f - H_f(E_n,E_n)\big)$ é uma função suave que só depende dos pontos de N. Isto conclui a afirmação de que N é uma subvariedade totalmente umbílica de M. O traço da geodésica definida em $(-\varepsilon,\varepsilon)$ que no instante 0 passa por p com velocidade E_n será denotado por $(-\varepsilon,\varepsilon)$. Sabe-se que $(-\varepsilon,\varepsilon)$ é uma subvariedade totalmente geodésica de M. Dessa forma, pelo Teorema 2.3, segue que p possui uma vizinhança aberta U que é isométrica ao produto twisted $(-\varepsilon,\varepsilon)\times_{\phi} N$, com $\phi:(-\varepsilon,\varepsilon)\times N\to(0,+\infty)$ sendo a função twisted.

Usando a equação 3.1 com $Z=\nabla f$ e $Y\in\mathfrak{X}(N)$ e as simetrias do tensor de curvatura, obtém-se

$$\begin{aligned}0 =& Rm(\nabla f, X, \nabla f, X)\\ =& \frac{1}{n-1}Ric(X,\nabla f)\underbrace{g(Y,\nabla f)}_{=0}-\frac{1}{n-1}Ric(Y,\nabla f)g(X,\nabla f)\\ =& -\frac{1}{n-1}Ric(Y,\nabla f)g(X,\nabla f).\end{aligned}$$

Como X é arbitrário, segue que $Ric(Y,\nabla f)=0,\ \forall\, Y\in\mathfrak{X}(N)$. Assim, pelo Teorema 2.1, tem-se que o produto twisted pode ser visto como um produto warped $(-\varepsilon,\varepsilon)\times_{\varphi} N$, com função de torção $\varphi:(-\varepsilon,\varepsilon)\to(0,+\infty)$. Tem-se então que as variedades $(U,g|_U)$ e $((-\varepsilon,\varepsilon)\times N, dt^2+\varphi^2 g_N)$ são isométricas, o que implica que $(-\varepsilon,\varepsilon)\times_{\varphi} N$ é um produto warped que é localmente conformemente plano. Usando o Teorema 2.5 segue que a variedade Riemanniana (N,g_N) tem curvatura seccional constante. $\square$

Uma consequência muito importante do Teorema acima é o seguinte Corolário.

Corolário 3.1. *Seja (M,g,f,λ), $n\geq 3$, um sóliton gradiente e localmente conformemente plano, com f não constante. Então a função potencial f é uma função radial.*

Demonstração. Seja $p\in M$ um ponto tal que $f(p)=c_p$ e $\nabla f(p)\neq 0$. Então existe uma vizinhança $V\subset M$ de p tal que $f(q)=c_q$ e $\nabla f(q)\neq 0$, para todo $q\in V$. Para cada $q\in V$, pode-se aplicar o Teorema anterior e obter um subconjunto U_q, um $\varepsilon_q>0$ e uma função $\varphi_q:(-\varepsilon_q,\varepsilon_q)\to\mathbb{R}_+$ tais que U_q é isométrico a $(-\varepsilon_q,\varepsilon_q)\times_{\varphi_q} N_q$, com $N_q=f^{-1}(c_q)$. Se $U_q\cap U_r\neq\emptyset$, como $dt^2+\varphi_c^2 g_{N_c}=g=dt^2+\varphi_r^2 g_{N_r}$ nesta interseção, segue que $\varphi_q=\varphi_r$. Sendo assim, diminuindo U se necessário for, obtem-se que U é folheado por superfícies de nível da função potencial. Dessa forma segue que a restrição $f:U\to\mathbb{R}$ é radial. Como os pontos em que ∇f se anula têm que ser isolados com respeito essa propriedade, por continuidade segue que $f:M\to\mathbb{R}$ é radial.

$\square$

Teorema 3.2. *Seja (M^n,g) um sóliton gradiente, shrinking ou steady, completo, simplesmente conexo e localmente conformemente plano. Então (M^n,g) é rotacionalmente simétrico.*

Demonstração. Seja $p \in M$ tal que $\nabla f(p) \neq 0$, $f(p) = c$ e seja $U \subset M$ um aberto tal que $(U, g|_U)$ é isométrico a um produto warped $(-\varepsilon, \varepsilon) \times_\psi N$, onde $(N, g|_N)$ é uma variedade curvatura constante, com $N = f^{-1}(c)$. Pelo teorema anterior, tem-se que N é totalmente umbílica. Seja $II = g_N \eta$, onde $\eta : N \to \mathbb{R}$ é uma função suave. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que a expressão $g_N(X,X)g_N(Y,Y) - (g_N(X,Y))^2 \geq 0$ é não negativa, portanto, a expressão

$$II(X,X)II(Y,Y) - (II(X,Y))^2 = (\eta)^2(g_N(X,X)g_N(Y,Y) - (g_N(X,Y))^2)$$

é não negativa. Tal expressão não pode se anular, pois se assim o fosse, tomando dois campos $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ não nulos e ortogonais, então

$$0 < g_N(X,X)g_N(Y,Y) = (g_N(X,Y))^2 = 0.$$

Como os sólitons em questão são shrinking ou steady, pelo teorema 2.18, tem-se que o tensor de curvatura de M é não negativo. Pela fórmula de Gauss segue que

$$\begin{aligned} Rm_N(X,Y,X,Y) &= Rm_M(X,Y,X,Y) + II(X,X)II(Y,Y) - (II(X,Y))^2 \\ &= Rm_M(X,Y,X,Y) + (\eta)^2(g_N(X,X)g_N(Y,Y) - (g_N(X,Y))^2), \end{aligned} \tag{3.5}$$

com $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$, o que implica que a curvatura seccional de N é não negativa. Pode-se então dividir a análise em dois casos: curvatura nula e curvatura positiva.

Supondo que N tem curvatura seccional constante igual a 0, segue que $(-\varepsilon, \varepsilon) \times_\varphi N$ possui curvatura seccional nula e, da equação 3.5, segue que $\eta = 0$, implicando que a $II \equiv 0$, isto é, que N é totalmente geodésicas. Como os outros níveis de f, suficietemente próximos de nível N, são homotéticos a (N, g_N), segue que U admite uma folheação cujas folhas são totalmente geodésicas. Diminuindo U se necessário, podemos considerar uma folheação de U por geodésicas na direção do campo $\dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|}(q)$, com $q \in N$. Assim temos duas folheações complementares de U que são totalmente geodésicas. Pelo Teorema 2.3, segue que U é isométrico ao produto Riemanniano $(-\varepsilon, \varepsilon) \times N$. Como cada uma das variedades possui curvatura seccional igual a zero, segue que U tem curvatura seccional nula, isto é, a curvatura seccional de M restrita a U é nula. Considerando o sistema de coordenadas analítico do sóliton de Ricci, dado pelo Teorema 2.7, tem-se que a curvatura seccional de M é uma função analítica que se anula em um aberto. Como os abertos em variedades diferenciáveis possuem pontos de acumulação, pelo princípio da identidade segue que a curvatura seccional de M é identicamente nula. Sendo M uma variedade completa, simplesmente conexa e com curvatura nula, segue do Teorema 1.7 que M é isométrica ao plano.

Para o caso em que a curvatura seccional de N é constante positiva, será considerado o conjunto

$$I_+ = \{t \in \mathbb{R}; g = dt^2 + \varphi^2 g_N \in d_N^{-1}([0,t])\},$$

onde $d_N : M \to \mathbb{R}$ é definida por $d_N(p) = \inf\{d(x,p); x \in N\}$. O conjunto I_+ é não vazio, pois $[0,\varepsilon) \subset I_+$.

Sejam $t \in \mathbb{R}$ e γ_x a geodésica tal que $\gamma_x(0) = x$ e $\gamma_x'(0) = \dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|}(x)$. Seja também $N_t = \{\gamma_x(t); x \in N\}$. Pelo Corolário 3.1, segue que $N_t = f^{-1}(c_t)$, para algum $c_t \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema 3.1, se $c_t \in \mathbb{R}$ é um valor regular de f, então $f^{-1}(c_t)$, portanto N_t, é uma hipersuperfície totalmente umbílica com a métrica induzida.

Sejam $\lim\limits_{t\to\varepsilon}\varphi(t) = \varphi_\varepsilon \neq 0$ e $N_\varepsilon = f^{-1}(c_\varepsilon)$. Se c_ε é um valor regular de f, então $N_\varepsilon = f^{-1}(c_\varepsilon)$ é totalmente umbílica. Se c_ε não é um valor regular de f, isto é, se ∇f se anula no nível N_ε, como ∇f é uma função analítica não nula, segue que ε é um ponto isolado com relação a esta propriedade, isto é, existe $\rho > 0$ tal que $\nabla f(t) \neq 0, \forall t \in (\varepsilon, \varepsilon+\rho)$, com N_t totalmente umbílica, $\forall t \in (\varepsilon, \varepsilon+\rho)$. Sejam $k_i : M \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,\dots,n-1\}$, tais que $k_i(p)$ é uma curvatura principal de N_t em p, com $p \in M$ e $t = d_N(p)$. Para $t \in (-\varepsilon,\varepsilon) \cup (\varepsilon, \varepsilon+\rho)$, tem-se que $k_i(x) = k_j(x)$, $\forall i, j$ e $\forall x \in N_t$. Se N_ε não fosse totalmente umbílica, existiria uma vizinhança de x_0 em M tal que $k_i(x) \neq k_j(x)$ nesta vizinhança. Em particular, existiria um $t_0 \in (-\varepsilon,\varepsilon) \cup (\varepsilon,\varepsilon+\rho)$ tal que $k_i(\gamma_x(t_0)) \neq k_j(\gamma_x(t_0))$, o que seria uma contradição, pois N_{t_0} é totalmente umbílica. Sendo assim N_ε é totalmente umbílica.

Em ambos os casos N_ε é totalmente umbílica e, pelo Teorema 3.1, existem um aberto $V \subset M$ e uma função suave $\psi : (\varepsilon-\delta, \varepsilon+\delta) \to (0,+\infty)$ tal que $((\varepsilon-\delta,\varepsilon+\delta)\times N_\varepsilon, dt^2+\psi^2 g_\varepsilon)$ e $(V, g|_V)$ são localmente isométricos. Tem-se então que $U \cap V \neq \emptyset$ e que nesta intersecção vale

$$\begin{aligned} dt^2 + (\varphi(t))^2 g_N &= g \\ &= dt^2 + (\psi(t))^2 g_\varepsilon \\ &= dt^2 + (\psi(t))^2 (\varphi_\varepsilon)^2 g_N, \end{aligned}$$

o que implica em $\varphi(t) = \varphi_\varepsilon \psi(t)$, $\forall (t) \in (\varepsilon-\delta, \varepsilon)$. Considerando a função, também denotada por φ,

$$\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon + \delta) \to (0, +\infty),$$

definida por,

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ \varphi_\varepsilon \psi(t), & t \in (\varepsilon - \delta, \varepsilon + \delta) \end{cases},$$

tem-se que a função acima é uma extensão suave da função φ. De fato, a suavidade é garantida pela condição $\varphi(t) = \varphi_\varepsilon \psi(t)$, $\forall t \in (\varepsilon - \delta, \varepsilon)$. Desta forma, conclui-se que $[0, \varepsilon + \delta) \subset I_+$. Procedendo da mesma maneira para o conjunto $I_- = \{t \in \mathbb{R}; dt^2 + \varphi^2 g_N \in d_N^{-1}((t, 0])\}$ obtém-se as seguintes possibilidades para $I_- \cup I_+$:

1. (a, b), com $\lim\limits_{t \to a} \varphi(t) = \lim\limits_{t \to b} \varphi(t) = 0$;
2. $(a, +\infty)$, com $\lim\limits_{t \to a} \varphi(t) = 0$;
3. $\mathbb{R}$.

No primeiro caso tem-se que $M \backslash \{\gamma_x(a), \gamma_x(b)\}$, $x \in N$, é isométrica à $(a, b) \times_\varphi N$, pois $g = dt^2 + \varphi^2 g_N$ em $M \backslash \{\gamma_x(a), \gamma_x(b)\}$. Pelo mesmo motivo, nos segundo e terceiro casos tem-se que $M \backslash \{\gamma_x(a)\}$ é isométrica a $(a, +\infty) \times_\varphi g_N$ e M é isométrica a $\mathbb{R} \times_\varphi N$, respectivamente. Denotando por $\pi_1(M)$ o grupo fundamental de M e notando que $n > 2$, tem-se

$$\begin{aligned} \pi_1(M \backslash \{\gamma_x(a), \gamma_x(b)\}) &= \pi_1(M \backslash \{\gamma_x(a)\}) \\ &= \pi_1(M) \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

Além disso, como $\pi_1((a, b) \times N) = \pi_1((a, b)) \times \pi_1(N)$, tem-se que $\pi_1(N) = \{0\}$, concluindo que N é simplesmente conexa. Da mesma forma conclui-se que N é simplesmente conexa nos outros casos. Tem-se também que N é fechada, pois é a imagem inversa de um fechado por uma função contínua. Nestas condições segue que N é completa. Como N tem curvatura constante positiva, é simplesmente conexa e é completa, segue do Teorema 1.7 que N é isométrica à esfera munida da métrica canônica. Portanto M é rotacionalmente simétrica.

$\square$

Na demonstração do Teorema anterior a hipótese de (M, g, λ, f) ser steady ou shrinking foi usado para garantir que curvatura seccional de M seja não negativa, fato decisivo na demonstração. Desta maneira, se um sóliton expanding possuir curvatura seccional não negativa, segue o mesmo resultado. Mais precisamente:

Corolário 3.2. *Se (M^n, g, f, λ) é um sóliton gradiente completo, com $\nabla f \neq 0$, simplesmente conexo, localmente conformemente plano que possui operador de curvatura não negativo, então M é rotacionalmente simétrico.*

O teorema acima estabelece que todo sóliton gradiente completo, simplesmente conexo, que possui função potencial não constante é rotacionalmente simétrico, desde que seja localmente conformemente plano e o sóliton seja steady ou shrinking. Juntando tal resultado com os Teoremas 2.8 e 2.6 do capítulo anterior, segue a seguinte classificação, no caso $\lambda \geq 0$.

Teorema 3.3. *Seja (M^n, g, f, λ), $n \geq 3$, um sóliton de Ricci gradiente, shrinking ou steady, completo, simplesmente conexo e localmente conformemente plano. Então:*

1. *Se (M, g) é shrinking, então ela é isométrica a $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$;*
2. *Se (M, g) é steady, então ela é isométrica a $\mathbb{R}^n$ ou ao sóliton de Bryant.*

Demonstração. Se a curvatura seccional da hipersuperfície de nível, dada pelo Teorema 3.1, for nula, pela demonstração do Teorema anterior, M é o sóliton Gaussiano shrinking ou steady. Se a curvatura da superfície de nível for positiva, pela demonstração do Teorema anterior, M menos k pontos, $k \in \{0, 1, 2\}$, é isométrica a $I \times_\varphi \mathbb{S}^{n-1}$, com $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$, onde $I \subset \mathbb{R}$ representa o intervalo maximal onde φ não se anula. Suponha que $I = (a, b)$. Então, como $\mathbb{S}^{n-1}$ é compacta, $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}_+$ é limitada e o intervalo I é limitado, segue que o diâmetro de M é finito. Sendo M limitada, fechada e completa, pelo Teorema 1.5, segue que M é compacta. Sendo compacta, segue dos Teoremas 2.12 e 2.14 que M é Einstein. Pela Proposição 2.10, tem-se que o tensor Z (ver 2.1) é identicamente nulo. Como o tensor de Weyl se anula, usando a Proposição 2.10 novamente, segue que M tem curvatura constante. Então M é isométrica à esfera, pois é uma forma espacial simplesmente conexa e compacta. Como $\mathbb{S}^n$ é uma variedade de Einstein, não pode ser $\lambda = 0$, pois $Ric_{\mathbb{S}^n} \neq 0$. Se $I = (a, +\infty)$ e $\lambda = 0$, tem-se pelo Teorema 2.6 que M é isométrica ao sóliton de Bryant, pois é steady, completo e rotacionalmente simétrico. Se $I = \mathbb{R}$

tem-se que M é isométrica ao cilindro e, sendo $\lambda > 0$, M é o cilindro descrito no item 2 do Teorema 2.8.

$\square$

Observação 3.1. *No caso em que $n \geq 4$, o Teorema 3.2 não precisa da hipótese do sóliton ser gradiente. De fato, em [10], G. Cantino, C. Matengazza e L. Mazzieri provam o seguinte resultado.*

Teorema 3.4. *Seja (M^n, g, X, λ), $n \geq 4$, um sóliton de Ricci completo, localmente conformemente plano, shrinking ou steady. Então o sóliton é gradiente.*

Vale ressaltar que as técnicas utilizadas para provar este teorema envolvem o fluxo de Ricci.

Capítulo 4

Conclusão

Como discutido na introdução deste trabalho, a classificação de sólitons de Ricci gradiente, completo e localmente conformemente plano é fruto do trabalho de muitos matemáticos. O sinal da constante λ, que aparece na definição de sóliton, induz uma classificação feita por casos, de acordo com o dado sinal. Da mesma maneira, a hipótese de ser localmente conformemente plana, por ser caracterizada completamente a partir dos tensores de Weyl e de Schouten, também indicam um tratamento dividido em casos, de acordo com a dimensão da variedade. No entanto, com o trabalho de Fernández-López e García-Río, a divisão de acordo com a dimensão e de acordo com a constante λ, desde que seja não negativa, não é necessária, pois o método apresentado pelos autores é essencialmente o mesmo. Assim, tal artigo dá uma prova unificada da classificação de sólitons gradiente, completo e localmente conformemente plano.

Neste capítulo será apresentado também como a teoria vem se desenvolvendo. Serão mostrados o caso semi-Riemanniano e casos em que algumas hipóteses, no caso Riemanniano, foram substituídas por outras mais gerais muitas vezes reobtendo a mesma classificação, outras vezes aumentando o leque de possibilidades. Também serão tratadas generalizações da condição de sóliton. Será feito como segue:

Na primeira seção serão definidas as variedades semi-Riemannianas e será exibido um resultado de classificação para este caso, análogo ao resultado do capítulo anterior, onde foram classificados certos sólitons de Ricci.

Na segunda seção serão introduzidos os tensores de Bach e de Coton, bem como as variedades Bach planas e Weyl harmônicas. Será introduzida também a noção de variedades quasi-Einstein. Logo em seguida são citados, sem demonstração, alguns teoremas de classificação para estas novas classes e a relação com as classes veteranas.

4.1 O caso semi-Riemanniano

Sejam E um espaço vetorial real de dimensão finita n e $Q : E \times E \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear definida em E. Diz-se que Q possui assinatura r, se o maior subespaço de E que faz de Q negativa definida, isto é, $Q(v, v) < 0$, $\forall v \in H$, possui dimensão r. Além disso diz-se que Q é não degenerado se $Q(v, w) = 0$, $\forall v \in T_pM$, implicar que $w = 0$.

Definição 4.1. *Uma métrica semi-Riemanniana em uma variedade diferenciável M é um $(0, 2)$-tensor g que é simétrico, não degenerado, cuja assinatura r da forma bilinear g_p não dependa de p. Uma variedade diferenciável M junto com uma métrica semi-Riemanniana g é chamada de variedade semi-Riemanniana.*

Definição 4.2. *Se (M, g) é uma variedade semi-Riemanniana, um vetor $v \in T_pM$, $p \in M$, é dito ser tipo*

1. *espaço, se $g_p(v, v) > 0$;*

2. *luz, se $g_p(v, v) = 0$;*

3. *tempo, se $g_p(v, v) < 0$.*

Se X é um campo de vetores, diz-se que X é tipo espaço, luz ou tempo, se $X(p)$ for tipo espaço, luz ou tempo, respectivamente, $\forall p \in M$. Diz-se também que esta é a característica do campo.

Observação 4.1. *Um campo de vetores pode ter sua característica variando ponto a ponto. Para um exemplo, ver [6].*

O principal exemplo de variedade semi-Riemanniana é o de uma variedade Riemanniana. Neste caso a assinatura é 0. Outro exemplo importante de variedade semi-Riemanniana é a variedade de Lorentz que, por definição, possui assinatura 1. Um exemplo de variedade de Lorentz é o espaço de Minikowsk, que consiste do espaço $\mathbb{R}^4$ munido com a métrica

$$g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

Observação 4.2. *Todos os conceitos introduzidos até aqui para variedades Riemannianas possuem um análogo semi-Riemanniano. Para maiores informações acerca de variedades semi-Riemannianas são indicados os livros [3] e [35].*

Apesar da observação acima, vale reforçar que a definição de Ricci sóliton dada anteriormente estende-se da mesma maneira para variedades semi-Riemannianas. Além disso, o Teorema 3.1 permanece válido para o caso Lorentziano. Mais precisamente tem-se o seguinte.

Teorema 4.1 (Brozos-Vázquez; García-Río; Gavino-Fernández, [6])**.** *Seja (M, g, f, λ) um sóliton de Ricci gradiente Lorentziano, localmente conformemente plano, com $\|\nabla f\|_p \neq 0$ para algum ponto $p \in M$. Então, em uma vizinhança de p, (M, g) é um produto warped de um intervalo real e um espaço de curvatura constante c.*

No caso Riemanniano, uma aplicação do Teorema 3.1 é o Teorema 3.2. No caso semi-Riemanniano, fazendo-se distinção entre os casos em que o campo gradiente da função potencial é isotrópico ($\|\nabla f\| \equiv 0$) ou não e aplicando o Teorema 4.1, tem-se o seguinte resultado.

Teorema 4.2 (Brozos-Vázquez; García-Río; Gavino-Fernández, [6])**.** *Seja (M, g, f, λ) um sóliton de Ricci gradiente Lorentziano, localmente conformemente plano.*

1. *Em uma vizinhança de qualquer ponto onde $\|\nabla f\| \neq 0$, M é localmente isométrico ao produto warped de Robertson-Walker $I \times_\psi N$ com métrica $\varepsilon dt^2 + \psi g_N$, onde I é um intervalo real e (N, g_N) é um espaço de curvatura constante c.*

2. *Se $\|\nabla f\| = 0$ em um conjunto aberto não vazio, então (M, g) é localmente isométrico ao espaço $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n$ com a métrica*

$$g = 2dudv + H(u, x_1, \ldots, x_n)du^2 + \sum_{i=1}^{n} dx_i,$$

onde $H(u, x_1, \ldots, x_n) = a(u)\sum_{i=1}^n x_i^2 + b_i(u)\sum_{i=1}^n x_i + c(u)$, para algumas funções $a(u), b_i(u)$ e $c(u)$ e a função potencial é dada por $f(u, x_1, \ldots, x_n) = f_0(u)$, com $f_0''(u) = -\rho(\partial_u, \partial_u) = na(u)$.

Observação 4.3. *Recomenda-se [2] e [35] para mais informações sobre variedades Robertson-Walker e [7] para mais informações sobre variedades Walker.*

O ítem 1. deste resultado é análogo ao resultado no caso Riemanniano que foi apresentado neste trabalho. No entanto, a parte 2. não tem contrapartida Riemanniana. Este fato mostra que existem fatos peculiares apenas ao caso semi-Riemanniano.

4.2 Generalizações

4.2.1 Tensor de Bach e tensor de Coton

É notável a importância da hipótese de o sóliton ser localmente conformemente plano na classificação aqui apresentada. A grande importância desta condição está no fato de que quando o tensor de Schouten é um tensor tipo Codazzi, as equações do tensor de Weyl e do tensor de curvatura ficam mais simples, como mostram os Lemas 3.1 e 3.2. Definindo o tensor de Coton pela expressão

$$C(X,Y,Z) = (\nabla_Y S)(X,Z) - (\nabla_X S)(Y,Z),$$

tem-se que o tensor de Schouten S é tipo Codazzi se, e somente se, o tensor de Coton se anula. Em dimensão maior do que 4, uma variedade Riemanniana para a qual o tensor de Coton se anula é chamada de Weyl harmônica, pois

$$C(X,Y,Z) = \frac{n-2}{n-3}\mathrm{div}W(X,Y,Z).$$

Dessa forma tem-se que, se (M^n, g), $n \geq 4$, é localmente conformemente plana, então ela é Weyl harmônica.

É natural questionar se a classificação aqui apresentada continua válida para variedades Weyl Harmônicas. Para o sóliton shrinking a resposta é sim, como mostram Fernández-López e García-Río [22], com o seguinte resultado

Teorema 4.3 (Fernández-López; García-Río, [22]). *Se (M^n, g, f, λ), $n \geq 4$, é um sóliton gradiente shrinking Weyl harmônico, então M é isométrico a $N^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, onde N é uma variedade de Einstein.*

Comparando este resultado com o análogo localmente conformemente plano, percebe-se a generalidade obtida com a mudança na hipótese.

Um outro tensor importante em geometria Riemanniana, em dimensões $n \geq 4$, é o chamado tensor de Bach.

Se (M^n, g), $n \geq 4$, é uma variedade Riemanniana, o tensor de Bach é definido pela expressão

$$B(X,Y) = \frac{1}{n-3}\sum_{i,j}(\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j} W)(X,\partial_k,Y,\partial_k) + \frac{1}{n-2}\sum_{i,j} Ric(\partial_i,\partial_j)W(X,\partial_i,Y,\partial_j).$$

Uma relação entre o tensor de Bach e o tensor de Coton é dada por

$$B(X,Y) = \frac{1}{n-2}\sum_i (\nabla_{\partial_i} C)(\partial_i, X, Y) + \frac{1}{n-2}\sum_{i,j} Ric(\partial_i, \partial_j) W(X, \partial_i, Y, \partial_j).$$

Uma variedade Riemanniana que possui tensor de Bach nulo é chamada de Bach plana. É importante notar que o anulamento do tensor de Weyl implica o anulamento do tensor de Bach, isto é, variedades Bach planas são uma generalização das variedades localmente conformemente planas. Além disso, variedades de Einstein também possuem tensor de Bach nulo.

No contexto dos sólitons gradiente, o tensor de Bach também mostra-se como um bom substituto para a hipótese de $W \equiv 0$. No caso steady tem-se.

Teorema 4.4 (Cao H.D. et al [12]). *Seja (M^n, g, f, λ), $n \geq 4$, um sóliton gradiente steady com curvatura de Ricci positiva tal que a curvatura escalar atinge seu máximo em algum ponto interior. Se em adição o tensor de Bach se anula, então M é isométrico ao sóliton de Bryant, a menos de um fator de escala.*

Além disso, como mostram Xiau-Dong Cao, Wang e Zhang em [15], no caso shrinking tem-se.

Teorema 4.5 (Cao X.D.; Wang; Zhang, [15]). *Seja (M^n, g, f, λ), $n \geq 4$, um sóliton gradiente shrinking completo com tensor de Bach nulo. Então M é*

1. *ou uma variedade de Einstein;*
2. *ou um quociente finito do sóliton Gaussiano shrinking R^n;*
3. *ou um quociente de $N^{n-1} \times \mathbb{R}$, onde N é uma variedade de Einstein de curvatura positiva.*

4.2.2 Variedades Quasi Einstein

Um conceito que generaliza sólitons de Ricci e, consequentemente, o de variedade de Einstein, é o de variedade quasi Einstein. Em termos mais precisos, uma variedade Riemanniana (M^n, g), $n \geq 3$, é chamada (λ, μ)-quasi Einstein, se existe uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$Ric + H_f + \mu df \otimes df = \lambda g.$$

Da condição dada acima segue que se f é uma função constante, então uma variedade (λ, μ)-quasi Einstein é uma variedade de Einstein.

Se $\mu = 0$, então uma variedade (λ, μ)-quasi Einstein é um sóliton de Ricci gradiente. Assim, variedades (λ, μ)-quasi Einstein generalizam os sólitons gradiente, sendo estes agora chamados de variedades $(\lambda, 0)$-quasi Einstein.

Se $\mu = -\dfrac{1}{m}$, então M chama-se uma variedade $(\lambda, n+m)$-quasi Einstein e escreve-se $Ric_f^m = Ric + H_f - \mu df \otimes df$. Assim tem-se que a condição de uma variedade $(\lambda, n+m)$-quasi Einstein é dada pela equação $Ric_f^m = \lambda g$. O tensor Ric_f^m é chamado de o tensor de m-Bakry Emery. A proposição abaixo relaciona variedades $(n, 2)$-quasi Einstein com variedades de Einstein.

Proposição 4.1. *Se (M^n, g) é uma variedade $(\lambda, n+(2-n))$-quasi Einstein, então g é conforme a uma métrica de Einstein. Mais precisamente, $(M, \tilde{g} = e^{-\frac{2}{n-2}f} g)$ é uma variedade de Einstein.*

A demonstração é baseada em estabelecer que

$$Ric_{\tilde{g}} = Ric_g + H_f^g + \frac{1}{n-2} df \otimes df + \frac{1}{n-2}(\Delta f - \|\nabla f\|^2) g.$$

Como (M^n, g) é uma variedade $(\lambda, n+(2-n))$-quasi Einstein, tem-se que

$$Ric_{\tilde{g}} = \frac{1}{n-2}(\Delta f - \|\nabla f\|^2 + (n-2)\lambda) e^{-\frac{2}{n-2}f} \tilde{g}.$$

Usando a proposição 2.7 tem-se que $\dfrac{1}{n-2}(\Delta f - \|\nabla f\|^2 + (n-2)\lambda) e^{-\frac{2}{n-2}f}$ é uma função constante e, portanto, $(M, \tilde{g})$ é uma variedade de Einstein.

Decorre do resultado acima e da Proposição 2.10 a seguinte proposição.

Proposição 4.2. *Toda variedade $(\lambda, n+(2-n))$-quasi Einstein de dimensão $n = 3$ é conforme a uma variedade de curvatura constante.*

Mais geralmente, se $(M^n, \tilde{g})$, $n \geq 3$, é uma variedade $(\lambda, n+(2-n))$-quasi Einstein localmente conformemente plana, então $(M, \tilde{g})$ possui curvatura constante.

Um dos resultados mais importantes e interessantes sobre métricas quasi Einstein, também relacionando variedades $(\lambda, n+m)$-quasi Einstein com variedades de Einstein, é o seguinte.

Teorema 4.6. *(M^n, g) é uma variedade $(\lambda, n+m)$-quasi Einstein se, e somente se, o produto warped $M \times_{e^{-\frac{f}{m}}} N$ é uma variedade de Einstein, onde N^m é uma variedade de Einstein com constante de Einstein $\mu = (\lambda - \dfrac{1}{m}(\Delta f - \|\nabla f\|^2)) e^{-\frac{2}{m}f}$.*

O ítem 1 do teorema abaixo classifica as variedades $(\lambda, 2)$-quasi Einstein. Já o ítem 2 do resultado seguinte estabelece que variedades (λ, μ)-quasi Einstein localmente conformemente planas, com $\mu \neq \dfrac{1}{2-n}$, se comportam localmente da mesma maneira que os sólitons gradiente conformemente planos.

Teorema 4.7. *Seja (M^n, g), $n \geq 3$, uma variedade (λ, μ)-quasi Einstein localmente conformemente plana. Então*

1. *se $\mu = \dfrac{1}{2-n}$, então (M^n, g) é globalmente conformemente equivalente a uma forma espacial;*
2. *se $\mu \neq \dfrac{1}{2-n}$, então, em torno de cada ponto regular de f, a variedade (M^n, g) é localmente um produto warped, cujas fibras possuem curvatura constante e são $(n-1)$-dimensionais.*

Referências Bibliográficas

[1] CHOW, B.; LU, P.; NI, L.. *Hamilton's Ricci flow*, American Mathematical Society and Science Press, 2006.

[2] BEEM, John K.; EHRLICH, Paul; EASLEY, Kevin.. *Global lorentzian geometry*. CRC Press, 1996.

[3] BESSE, A. L.. *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[4] BROZOS-VÁZQUEZ, M.; GARCÍA-RÍO, E; VÁZQUEZ-LORENZO, R.. *Complete locally conformally flat manifolds of negative curvature*. Pacific journal of mathematics, v. 226, n. 2, p. 201-219, 2006.

[5] BROZOS-VÁZQUEZ, M.; GARCÍA-RÍO, E.; VÁZQUEZ-LORENZO, R.. *Warped Product Metrics and Locally Conformally Flat Structures*. Matemática Contemporânea, v. 28, p. 91-110, 2005.

[6] BROZOS-VÁZQUEZ, M.; GARCÍA-RÍO, E.; GAVINO-FERNÁNDEZ, S.. *Locally conformally flat Lorentzian gradient Ricci solitons*. Journal of Geometric Analysis, v. 23, n. 3, p. 1196-1212, 2013.

[7] BROZOS-VÁZQUEZ, Miguel et al.. *The geometry of Walker manifolds*. Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics, v. 4, n. 1, p. 1-179, 2009.

[8] BISHOP, R. L.; O'NEILL, B. *Manifolds of negative curvature*. Transactions of the American Mathematical Society, p. 1-49, 1969.

[9] BRYANT, R. L. *Ricci flow solitons in dimension three with SO (3)-symmetries*. preprint, Duke Univ, 2005.

[10] CATINO, G.; MANTEGAZZA, C.; MAZZIERI, L.. *Locally conformally flat ancient ricci flows*. arXiv preprint arXiv:1308.2374, 2013.

[11] CAO, H.D.. *Existence of gradient Kahler-Ricci solitons*. arXiv preprint arXiv:1203.4794, 2012.

[12] CAO, H.D. et al. *Bach-flat gradient steady Ricci solitons*. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, v. 49, n. 1-2, p. 125-138, 2014.

[13] CAO, X.. *Compact gradient shrinking Ricci solitons with positive curvature operator*. The Journal of Geometric Analysis, v. 17, n. 3, p. 425-433, 2007.

[14] CAO, Huai-Dong; CHEN, Qiang.. *On locally conformally flat gradient steady Ricci solitons*. Transactions of the American Mathematical Society, v. 364, n. 5, p. 2377-2391, 2012.

[15] CAO, X.; WANG, B.; ZHANG, Z.. *On locally conformally flat gradient shrinking Ricci solitons*. Communications in Contemporary Mathematics, v. 13, n. 02, p. 269-282, 2011.

[16] CHEN, Bing-Long.. *Strong uniqueness of the Ricci flow*. arXiv preprint arXiv:0706.3081, 2007.

[17] CHOW, B. et al *The Ricci Flow: Techniques and Applications*. AMS, USA, first edition, 2007.

[18] DO CARMO, M. P.. *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, SBM, Rio de janeiro, 1988.

[19] EMINENTI, M.; LA NAVE, G.; MANTEGAZZA, C.. *Ricci solitons: the equation point of view*. manuscripta mathematica, v. 127, n. 3, p. 345-367, 2008.

[20] FERNÁNDEZ-LÓPEZ, M. et al. *A curvature condition for a twisted product to be a warped product*. manuscripta mathematica, v. 106, n. 2, p. 213-217, 2001.

[21] FERNÁNDEZ-LÓPEZ, M.; GARCÍA-RÍO, E.. *A note on locally conformally flat gradient Ricci solitons*. Geometriae Dedicata, v. 168, n. 1, p. 1-7, 2014.

[22] FERNÁNDEZ-LÓPEZ, M.; GARCÍA-RÍO, E.. *Rigidity of shrinking Ricci solitons*. Mathematische Zeitschrift, v. 269, n. 1-2, p. 461-466, 2011.

[23] HAMILTON, R. S.. *Three-manifolds with positive Ricci curvature*. Journal of Differential Geometry, v. 17, n. 2, p. 255-306, 1982.

[24] HAMILTON, R. S.. *The Ricci flow on surfaces*. Contemp. Math, v. 71, n. 1, 1988.

[25] HAMILTON, R. S.. *The formation of singularities in the Ricci flow*. Surveys in differential geometry, v. 2, p. 7-136, 1995.

[26] HERTRICH-JEROMIN, Udo.. *Introduction to Möbius differential geometry*. Cambridge University Press, 2003.

[27] IVEY, T. A. *Local existence of Ricci solitons*. manuscripta mathematica, v. 91, n. 1, p. 151-162, 1996.

[28] IVEY, T.. *Ricci solitons on compact three-manifolds*. Differential Geometry and its Applications, v. 3, n. 4, p. 301-307, 1993.

[29] KOTSCHWAR, B.. *On rotationally invariant shrinking gradient Ricci solitons*. arXiv preprint math/0702597, 2007.

[30] KIM, B. H. et al. *ON WARPED PRODUCT SPACES WITH A CERTAIN RICCI CONDITION*. Bull. Korean Math. Soc, v. 50, n. 5, p. 1683-1691, 2013.

[31] KUHNEL, W.. *Differential geometry: Curves-surfaces-manifolds*, Student Mathematical Library, Vol. 16, Second Edition, American Mathematical Society (2005).

[32] LEE, J. M.. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[33] LEE, J. M., *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[34] BROZOS-VÁZQUEZ, M.; GARCÍA-RÍO, E.; GAVINO-FERNÁNDEZ, S. *Locally conformally flat Lorentzian gradient Ricci solitons*. Journal of Geometric Analysis, v. 23, n. 3, p. 1196-1212, 2013.

[35] O'NEILL, B.. *Semi-Riemannian Geometry, with applications to relativity*, Academic Press (1983).

[36] NI, Lei; WALLACH, Nolan.. *On a classification of the gradient shrinking solitons*, arXiv preprint arXiv:0710.3194, 2007.

[37] PERELMAN, G.. *The antropy formula for the Ricci flow and its geome-trics applications*, Prerpint, arXiv math/0211159, 2002.

[38] PONGE, R.; RECKZIEGEL, H.. *Twisted products in pseudo-Riemannian geometry*. Geometriae Dedicata, v. 48, n. 1, p. 15-25, 1993.

[39] THURSTON, William P.; MILNOR, John Willard.. *The geometry and topology of three-manifolds*. Princeton: Princeton University, 1979.

[40] ZHANG, Z.H.. *Gradient shrinking solitons with vanishing Weyl tensor*. Pacific journal of mathematics, v. 242, n. 1, p. 189-200, 2009.