



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Translação e rotação
de cônicas em \mathbb{R}^2

Marcio Lopes Campolino

Brasília

2014

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Translação e rotação de cônicas em \mathbb{R}^2

por

Marcio Lopes Campolino *

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília,
como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 24 de Junho de 2014

Comissão Examinadora:

Dr. Ricardo Ruviano - UnB - Orientador

Dr. Kellcio Oliveira Araújo - UnB - Examinador

Dr. João Pablo Pinheiro da Silva - UFPA - Examinador

*O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração deste trabalho.

Dedico este trabalho a minha esposa Louana que, com toda atenção e dedicação de mulher, soube apoiar-me nessa tarefa, mesmo o momento exigindo que eu me dedicasse mais à ela e às coisas de casa, pois coincidiu com a gestação de nosso primogênito.

Agradecimentos

A Deus que, segundo Galileu Galilei, utilizou-se da linguagem matemática para construir o mundo.

A UnB por ter me acolhido durante graduação e pós graduação, bem como seu corpo docente composto por profissionais brilhantes que despertaram em mim o prazer pela Matemática.

Ao meu orientador, o professor Dr. Ricardo Ruviano, por ter dedicado grande parte do seu tempo à minha causa. Por ter sido um parceiro e apoiador deste trabalho.

Aos meus pais, Renato e Telma, por terem me dado condições de chegar até aqui. Pelo amor que sempre demonstraram e por tudo que eles fazem por mim.

A minha esposa, Louana, companheira amável que Deus escolheu para estar sempre ao meu lado.

Ao Theo, meu primeiro filho que está por vir, que me incentivou a não desistir e nem mesmo desanimar com o cansaço.

E a CAPES pelo suporte financeiro que foi muito importante para o cumprimento desse mestrado.

Resumo

Com o objetivo de identificar a cônica representada por uma equação do segundo grau, inicialmente foram apresentadas as equações canônicas da circunferência, elipse, hipérbole e parábola. Em seguida verificou-se a importância de simplificar a escrita de algumas equações, a fim de identificar a cônica e seus principais elementos. Entretanto, foi necessário um levantamento teórico acerca dos vetores e de sua aplicação na translação e rotação de pontos e curvas em um plano cartesiano.

Por fim, foi visto como eliminar os termos lineares e o termo quadrático misto de uma equação geral do segundo grau, tornando a equação mais simples e a identificação da cônica como circunferência, elipse, hipérbole ou parábola, bem como de seus principais elementos, uma tarefa mais fácil.

Palavras-chave Cônicas; Quádricas; Equação do segundo grau; Rotação; Translação; Vetores.

Abstract

Aiming to identify the conic represented by a quadratic equation, initially the canonical equations of the circle, ellipse, parabola and hyperbola were presented. Then there is the importance of simplifying the writing of some equations in order to identify the conical and its main elements. However, we needed a theoretical survey on the vectors and their applications in translation and rotation of the curves and points in a Cartesian plane.

Finally, it was seen as eliminate the linear terms and the quadratic mixed term of quadratic equations, making the simplest equation and the identify of the conic as circle, ellipse, hyperbola, or parabola, as well as its main components, an easier task.

Keywords Conics; Quadrics; Quadratic equations; Rotation; Translation; Vectors.

Lista de Figuras

1	Distância entre dois pontos em um plano.	9
2	Circunferência de centro C e raio r	10
3	Elipse cêntrica.	12
4	Casos especiais de elipses.	13
5	Elipse com focos $A = (1, 4)$ e $B = (9, 4)$	14
6	Elipse com focos $A = (-2\sqrt{6}, -2\sqrt{6})$ e $B = (2\sqrt{6}, 2\sqrt{6})$	16
7	Hipérbole cêntrica.	17
8	Hipérbole com focos $A = (2, 5)$ e $B = (-2, 3)$	19
9	Parábola com vértice $(0, 0)$	21
10	Parábola com reta diretriz $r : x + 2y = 1$	23
11	Segmentos colineares.	24
12	Segmentos paralelos.	25
13	Translação da parábola $y = x^2 + 3$	28
14	Translação da elipse $9x^2 + 25y^2 - 90x - 200y + 400 = 0$	29
15	Adição de vetores.	31
16	Ângulo entre vetores.	34
17	Projeção ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v}	35
18	Rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário.	38
19	Translação e rotação da hipérbole $x^2 - 6xy + y^2 + 2x - 8y - 4 = 0$	47
20	Translação e rotação da elipse $3x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$	49
21	Rotação e translação da parábola $4x^2 - 4xy + y^2 - 18x - 16y + 39 = 0$	52

Sumário

Introdução	7
1 Cônicas e a equação geral do segundo grau	9
1.1 Circunferência	9
1.2 Elipse	11
1.3 Hipérbole	17
1.4 Parábola	20
2 Vetores no plano e translação	24
2.1 Translação	27
2.2 Operações com vetores	31
2.2.1 Adição de vetores	31
2.2.2 Multiplicação de um vetor por um número real	32
2.2.3 Produto interno	34
2.2.4 Projeção ortogonal de um vetor sobre outro	35
3 Rotação e mudança de eixos	37
3.1 Mudança de eixos	37
3.2 Formas Quádricas	41
3.3 Equação geral do 2 ^o grau	45
4 Considerações finais	53
Referências	54

Introdução

O conhecimento matemático do ensino básico no Brasil é bastante generalista, abordando várias áreas da Matemática com diferentes níveis de aprofundamento. Um deles me chamou bastante atenção durante a minha passagem pelo Ensino Médio, o estudo de equações e gráficos, principalmente das cônicas. Conteúdo que divide opiniões até mesmo entre os matemáticos. Amada por muitos e odiada por tantos outros.

Conteúdo bastante rico em possibilidades de trabalho e com diversas aplicações nas engenharias e em outras áreas, o estudo das cônicas no Ensino Médio resume-se ao estudo de cônicas em que o eixo de simetria, ou reta focal, está sempre, ou quase sempre, paralelo a um dos eixos do sistema de coordenadas adotado.

Entretanto, questionamento sobre como seriam as equações de cônicas em outras posições no plano cartesiano podem surgir por parte dos alunos. Quando isso acontece, muitos professores esquivam-se, muitas vezes por não terem o conhecimento suficiente a ponto de se sentirem seguros em trabalhar com elas em sala.

Com o objetivo de dar à esses professores, bem como aos alunos, base para estudarem as cônicas em que a reta focal não é paralela a nenhum dos eixos, foi que decidi escrever sobre esse tema.

Mostrarei no meu trabalho que, com um pouco de conhecimento sobre as equações canônicas das cônicas, vetores e suas operações, e matrizes (conteúdos trabalhados no Ensino Médio), é possível transformarmos as equações dessas cônicas e reescrevê-las na forma canônica, facilitando a identificação de qual é a cônica representada e quais são seus principais elementos.

Na primeira seção do trabalho, foram abordadas as definições de cada uma das cônicas tratando-as como lugares geométricos. A partir dessas definições foram obtidas as equações canônicas de cada cônica.

Fazendo uma reflexão sobre a aplicação de vetores na translação de pontos e curvas em um plano, na segunda seção do trabalho foi definido o que é um vetor e apresentadas algumas operações e propriedades que, para o decorrer do trabalho, eram pré-requisitos. Ainda nessa seção, vimos como transladar um curva e obter sua nova equação.

Como parte do objetivo, a translação foi utilizada como uma possibilidade de simplificar a escrita de uma equação geral do segundo grau da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 +$

$Dx + Ey + F = 0$, eliminando-se os termos lineares.

Na terceira e última seção desse trabalho, foi apresentada a mudança de eixos por meio da rotação do sistema de coordenadas e como, por uma determinada rotação, eliminar o termo quadrático misto, Bxy , tornando a equação mais simples e a cônica com reta focal na mesma direção de um dos eixos do sistema de coordenadas adotado.

1 Cônicas e a equação geral do segundo grau

Uma cônica pode ser obtida pela intersecção de um plano com uma superfície cônica de revolução e tem por equação, em coordenadas cartesianas, uma equação do segundo grau, podendo ser uma circunferência, uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola.

Nessa primeira seção do trabalho recordaremos as equações de cada uma dessas cônicas analisando-as como lugares geométricos, isto é, como um conjunto de pontos que possuem uma mesma propriedade.

1.1 Circunferência

Antes de falarmos sobre a circunferência, vale lembrar que, dados dois pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, a distância entre eles é igual a medida do seguimento de reta AB , indicada por $d(A, B)$.

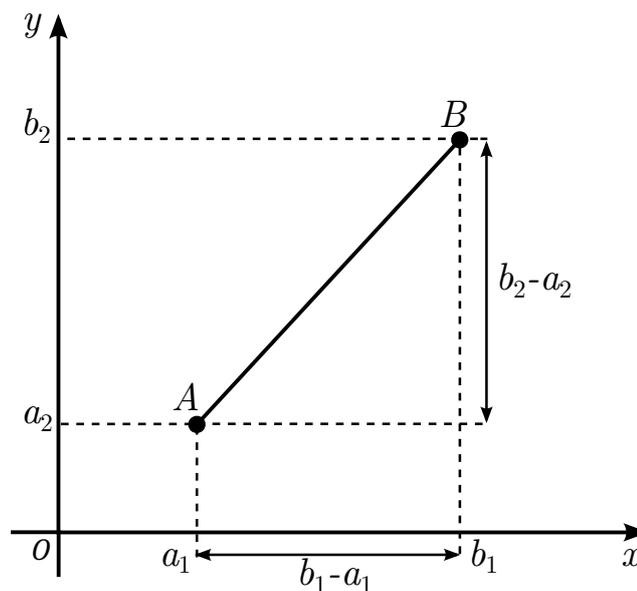


Figura 1: Distância entre dois pontos em um plano.

Pelo Teorema de Pitágoras, $d(A, B)^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$. O que implica em $d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

Definição 1. Circunferência é o lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo, denominado centro da circunferência.

Pela definição de circunferência, dados $C = (x_0, y_0)$, centro de uma circunferência, e r um número real positivo, para todo ponto $P = (x, y)$, da circunferência, tem-se que $d(P, C) = r$. Da definição, segue que:

$$\begin{aligned} d(P, C) &= r \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} &= r \\ \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= r^2. \end{aligned} \tag{1}$$

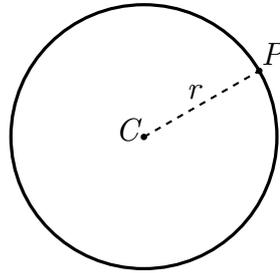


Figura 2: Circunferência de centro C e raio r .

Dizemos que (1) é a equação canônica da circunferência cujo centro é o ponto (x_0, y_0) e r o raio dessa circunferência.

Exemplo 1. Determinar a equação da circunferência de raio 5, centrada no ponto $C = (3, 2)$.

Solução: Pela definição, se $P = (x, y)$ é um ponto dessa circunferência, então $d(P, C) = r$. Logo:

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2} = 5 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5^2.$$

Essa é a equação canônica da circunferência, entretanto, se a escrevermos desenvolvendo as potências, teremos:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 &= 25 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Dizemos que (2) é a equação geral da circunferência de centro $C = (3, 2)$ e raio $r = 5$. \square

Exemplo 2. Seja $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 10 = 0$ a equação geral de uma circunferência. Determine o centro e o raio dessa circunferência.

Solução: Para determinarmos o centro e o raio dessa circunferência, basta escrever a sua equação na forma canônica. No exemplo anterior, para determinarmos a equação geral daquela circunferência, desenvolvemos as potências e reduzimos os termos semelhantes. Agora faremos o contrário, utilizaremos a técnica de completar quadrados para encontrarmos a equação canônica dessa.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 10x + 2y + 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 &= -10 + 25 + 1 \\ \Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y + 1)^2 &= 16 \\ \Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y - (-1))^2 &= 4^2.\end{aligned}$$

Na forma canônica $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, (x_0, y_0) é o centro da circunferência e r o raio. Logo, $(5, -1)$ é o centro dessa circunferência e $r = 4$ o seu raio. \square

1.2 Elipse

Na sequência, falaremos sobre a elipse, uma importante curva cujas aplicações vão desde o simples estudo de geometria analítica a contextos bem mais avançados, como o estudo do movimento dos astros.

Definição 2. Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante e maior do que a distância entre os focos.

Sem perda de generalidade, consideremos uma elipse centrada na origem do sistema de coordenadas, cujos focos A e B estão localizados sobre o eixo Ox , assim $A = (-c, 0)$ e $B = (c, 0)$. A reta determinada pelos focos da elipse é denominada reta focal. A reta perpendicular à reta focal pelo centro da elipse é a reta não focal. Denotaremos por b a distância do centro da elipse a cada um dos vértices da elipse sobre a reta não focal.

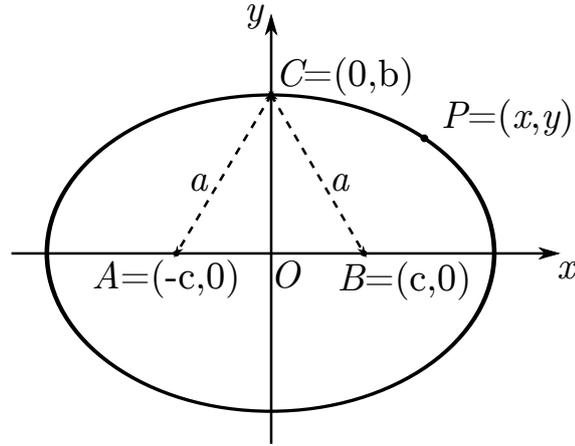


Figura 3: Elipse cêntrica.

Por definição, se $2a$ é a constante que representa a soma das distâncias de um ponto $P = (x, y)$ da elipse a cada um dos focos, então:

$$\begin{aligned}
 d(P, A) + d(P, B) &= 2a \\
 \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= 2a \\
 \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}. \tag{3}
 \end{aligned}$$

Elevando ambos membros da igualdade (3) ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow x^2 - 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 + x^2 + c^2 + 2xc + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
 \Leftrightarrow a^2 + xc &= a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
 \Leftrightarrow a^4 + 2a^2xc + x^2c^2 &= a^2x^2 + a^2c^2 + 2a^2xc + a^2y^2 \\
 \Leftrightarrow x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 &= a^2(a^2 - c^2).
 \end{aligned}$$

Mas $a^2 - c^2 = b^2$, portanto, $x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$. Dividindo a equação por a^2b^2 , temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

Tem-se que (4) é a equação canônica da elipse centrada no ponto $O = (0, 0)$, cuja reta focal coincide com o eixo Ox .

Para o caso em que a elipse está centrada na origem e a reta focal coincide com o eixo Oy , teremos a seguinte equação canônica:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Ao estudarmos uma equação do segundo grau, estamos interessados em identificar qual a cônica que ela representa. Mas não basta reconhecer a cônica como uma elipse, hipérbole ou parábola, se faz necessário identificar alguns de seus elementos. Na elipse, os principais elementos a serem identificados são: as coordenadas do foco, as coordenadas do centro da elipse, a distância entre os focos $2c$, a reta focal, a reta não focal (perpendicular à reta focal no centro da elipse) e a excentricidade e , definida pela razão de c para a , isto é, $e = \frac{c}{a}$.

Sobre a excentricidade, note que $0 \leq c \leq a$, portanto $0 \leq e \leq 1$. Se analisarmos os casos extremos, isto é, se $c = 0$, os dois focos coincidem e temos portanto uma circunferência de raio $2a$. Para o caso em que $c = a$, a elipse se degenera em um segmento de reta cujos extremos são os focos.

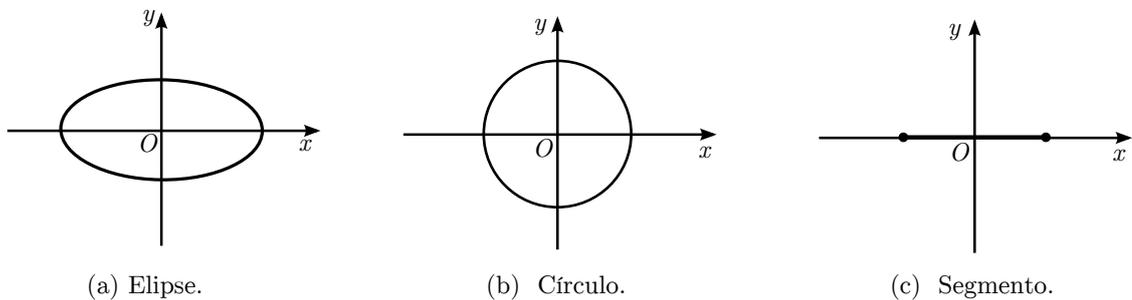


Figura 4: Casos especiais de elipses.

Exemplo 3. Utilizando a definição de elipse como um lugar geométrico, determine a equação da elipse cujos focos são os pontos $A = (1, 4)$ e $B = (9, 4)$, tal que a soma das distâncias de um ponto da elipse a cada um dos focos é $2a = 10$.

Solução: Note que os focos estão sobre a reta $y = 4$, e que o centro da elipse é o ponto médio dos focos, ou seja, se C é o centro da elipse de focos $A = (1, 4)$ e $B = (9, 4)$, então $C = \left(\frac{1+9}{2}, \frac{4+4}{2}\right) = (5, 4)$. Logo, a reta não focal é $x = 5$. Além disso, temos que a distância entre os focos é tal que $2c = 8 \Rightarrow c = 4$. Mas se $a = 5$, $c = 4$ e $b^2 = c^2 - a^2$, então $b = 3$. Além disso, temos que a excentricidade $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0,8$.

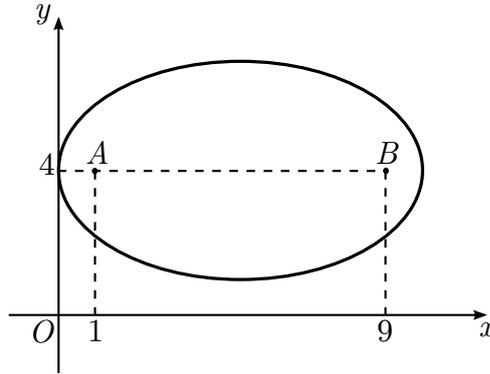


Figura 5: Elipse com focos $A = (1, 4)$ e $B = (9, 4)$.

Reconhecidos alguns elementos dessa elipse, utilizaremos o fato de que, pela definição, se $P = (x, y)$ é um ponto dessa elipse, então $d(P, A) + d(P, B) = 2a$, para determinarmos sua equação:

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-9)^2 + (y-4)^2} = 10 \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{(x-9)^2 + (y-4)^2} = 10 - \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} \\
 \Leftrightarrow & (x-9)^2 + (y-4)^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2 + 10^2 - 20\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} \\
 \Leftrightarrow & -4x - 5 = -5\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} \\
 \Leftrightarrow & 16x^2 + 40x + 25 = 25x^2 - 50x + 25 + 25y^2 - 200y + 400 \\
 \Leftrightarrow & 9x^2 + 25y^2 - 90x - 200y + 400 = 0. \tag{5}
 \end{aligned}$$

Dizemos que (5) é a equação geral dessa elipse. Note que, se utilizarmos a técnica de completar quadrados, teremos:

$$\begin{aligned}
 & 9x^2 + 25y^2 - 90x - 200y + 400 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 9(x^2 - 10x + 25) + 25(y^2 - 8y + 16) = -400 + 9 \cdot 25 + 25 \cdot 16 \\
 \Leftrightarrow & 9(x-5)^2 + 25(y-4)^2 = 225 \\
 \Leftrightarrow & \frac{(x-5)^2}{5^2} + \frac{(y-4)^2}{3^2} = 1. \tag{6}
 \end{aligned}$$

Em que (6) é denominada equação canônica dessa elipse, cujo centro $(5, 4)$, o raio maior $a = 5$ e o raio menor $b = 3$ podem ser observados. \square

Na próxima seção veremos que, pela translação de uma curva por um dado vetor, pode-se reescrever a equação de um cônica com o centro em qualquer ponto do plano, ou ainda, que dada uma cônica cujo centro não é a origem do sistema de coordenadas, pode-se transladá-la de modo que isso ocorra.

De modo geral, veremos que pela translação da elipse centrada em $(0, 0)$ por um vetor $\vec{v} = (x_0, y_0)$, a equação canônica de uma elipse centrada em (x_0, y_0) , com reta focal paralela ao eixo Ox , é $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$. No caso da reta focal ser paralela ao eixo Oy , troca-se a por b .

Exemplo 4. Determine a equação geral da elipse com centro $C = (2, -1)$, raio maior igual a 4 e raio menor igual a 3, sabendo que a reta focal é paralela ao eixo Oy .

Solução: Dado que a reta focal é paralela ao eixo Oy , podemos escrever a equação dessa elipse na forma canônica já que as medidas do raio maior e do menor são conhecidas. Portanto, $\frac{(x - 2)^2}{3^2} + \frac{(y - (-1))^2}{4^2} = 1$ é a equação canônica dessa elipse.

Desenvolvendo as potências e agrupando os termos semelhantes, determinamos sua equação geral:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 4x + 4}{9} + \frac{y^2 + 2y + 1}{16} &= 1 \\ \Leftrightarrow 16x^2 - 64x + 64 + 9y^2 + 18y + 9 - 144 &= 0 \\ \Leftrightarrow 16x^2 + 9y^2 - 64x + 18y - 71 &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $16x^2 + 9y^2 - 64x + 18y - 71 = 0$ é a equação geral dessa elipse. \square

Exemplo 5. Determine a equação da elipse cujos focos são os pontos $A = (-2\sqrt{6}, -2\sqrt{6})$ e $B = (2\sqrt{6}, 2\sqrt{6})$, tal que a soma das distâncias de um ponto da elipse a cada um dos focos é $2a = 16$.

Solução: Antes mesmo de determinarmos a equação, podemos identificar alguns dos elementos dessa elipse. Como são conhecidos os focos dessa elipse, podemos determinar a distância entre eles:

$$d(A, B) = \sqrt{(2\sqrt{6} + 2\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{6} + 2\sqrt{6})^2} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3} = 2c.$$

Como $a = 8$, $c = 4\sqrt{3}$ e $b^2 = c^2 - a^2$, segue que $b = 4$ e $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Além disso, como conhecemos os focos, podemos facilmente determinar o centro da elipse e a reta focal. Essa elipse tem centro $(0, 0)$ e reta focal $r : x - y = 0$.

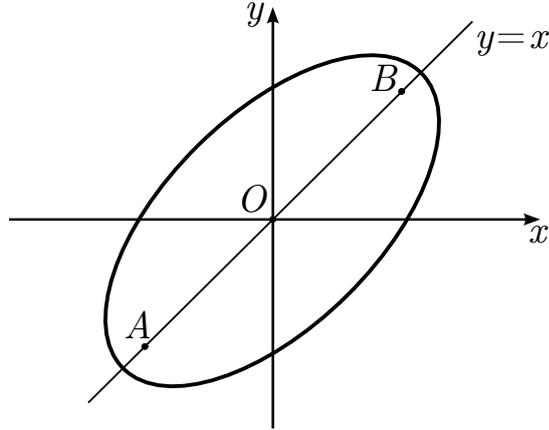


Figura 6: Elipse com focos $A = (-2\sqrt{6}, -2\sqrt{6})$ e $B = (2\sqrt{6}, 2\sqrt{6})$.

Pela definição, $d(P, A) + d(P, B) = 2a$, assim:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(x + 2\sqrt{6})^2 + (y + 2\sqrt{6})^2} + \sqrt{(x - 2\sqrt{6})^2 + (y - 2\sqrt{6})^2} = 16 \\
& \Leftrightarrow (x + 2\sqrt{6})^2 + (y + 2\sqrt{6})^2 = 16^2 + (x - 2\sqrt{6})^2 + (y - 2\sqrt{6})^2 - 32\sqrt{(x - 2\sqrt{6})^2 + (y - 2\sqrt{6})^2} \\
& \Leftrightarrow 4\sqrt{6}x + 4\sqrt{6}y = 256 - 4\sqrt{6}x - 4\sqrt{6}y - 32\sqrt{(x - 2\sqrt{6})^2 + (y - 2\sqrt{6})^2} \\
& \Leftrightarrow 8\sqrt{6}x + 8\sqrt{6}y - 256 = -32\sqrt{(x - 2\sqrt{6})^2 + (y - 2\sqrt{6})^2} \\
& \Leftrightarrow \sqrt{6}x + \sqrt{6}y - 32 = -4\sqrt{(x - 2\sqrt{6})^2 + (y - 2\sqrt{6})^2} \\
& \Leftrightarrow 6x^2 + 6y^2 + 1024 - 64\sqrt{6}x + 12xy - 64\sqrt{6}y = 16(x^2 - 4\sqrt{6}x + y^2 - 4\sqrt{6}y + 48) \\
& \Leftrightarrow 10x^2 - 12xy + 10y^2 - 256 = 0 \\
& \Leftrightarrow 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 128 = 0. \tag{7}
\end{aligned}$$

Logo, (7) é a equação geral dessa elipse. \square

Observe que, na determinação da equação dessa elipse, apareceu um termo quadrático misto, um termo do segundo grau formado por duas variáveis, o termo $6xy$, que ainda não havia aparecido em nossos exemplos. Perceba que este é o primeiro exemplo em que a cônica estudada não tem sua reta focal paralela a nenhum dos eixos do sistema de coordenadas adotado.

Como a cônica foi construída conhecendo-se os focos e a constante $2a$, é possível identificar todos os seus elementos. Entretanto, se nos fosse dada a equação com o

objetivo de, a partir dela, identificarmos seus elementos, o problema se tornaria mais elaborado, como veremos até o final desse trabalho.

1.3 Hipérbole

Agora falaremos sobre a hipérbole, sua definição e algumas características.

Definição 3. Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cujo valor absoluto da diferença das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante e menor do que a distância entre os focos.

Ou seja, se P é um ponto da hipérbole que tem por focos os pontos A e B , então $|d(P, A) - d(P, B)| = 2a$, em que a é uma constante real positiva tal que $a < c$, $C = (a, b)$, $D = (0, b)$, $E = (a, 0)$ e $\overline{OC} = c$

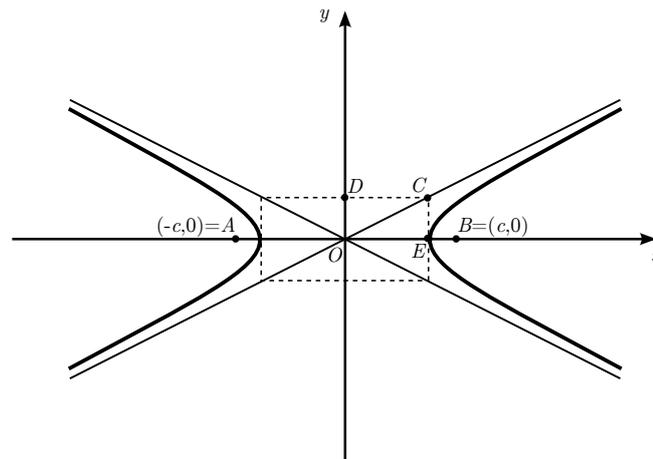


Figura 7: Hipérbole cêntrica.

Sem perda de generalidade, consideremos uma hipérbole centrada na origem do sistema de coordenadas, de tal modo que os focos estão localizados sobre o eixo Ox . Sejam $A = (-c, 0)$ e $B = (c, 0)$ os focos dessa hipérbole. Assim, para determinarmos a equação reduzida para o caso da diferença ser positiva, $2a$, fazemos:

$$\begin{aligned}
d(P, A) - d(P, B) &= 2a \\
\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a \\
\Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 &= (x-c)^2 + y^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
\Leftrightarrow cx - a^2 &= a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
\Leftrightarrow x^2(c^2 - a^2) - y^2a^2 &= a^2b^2.
\end{aligned}$$

Como $c^2 - a^2 = b^2$, temos que $x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2$. Dividindo ambos os membros da igualdade por a^2b^2 , temos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (8)$$

Logo, (8) é a equação canônica para a hipérbole cujo centro é a origem do sistema de coordenadas e a reta focal coincide com o eixo Ox . Aqui foi feita a análise para o ramo direito da hipérbole, para o caso da diferença ser positiva. Entretanto, de maneira análoga encontramos a mesma equação quando consideramos o caso da diferença ser negativa, isto é, para o ramo esquerdo da hipérbole.

Seguindo também o mesmo desenvolvimento, quando escolhida uma hipérbole centrada em $(0, 0)$ tal que a reta focal coincida com o eixo Oy , encontramos como equação canônica da hipérbole, a equação

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \quad (9)$$

Exemplo 6. Determine a equação geral da hipérbole cujos focos são $A = (0, 2\sqrt{5})$ e $B = (0, -2\sqrt{5})$, tal que o valor absoluto da diferença das distâncias de um ponto da hipérbole a cada um dos focos é $2a = 8$.

Solução: Como são conhecidos os focos da hipérbole, podemos determinar a distância entre eles, o centro da hipérbole, bem como a reta focal. No caso, se $d(A, B) = 2c$, então $c = 2\sqrt{5}$. Além disso, o centro é o ponto $(0, 0)$ e temos que $x = 0$ é a reta que passa pelos focos. Como $a = 4$, $c = 2\sqrt{5}$ e $b^2 = c^2 - a^2$, segue que $b = 2$. Colocando essas informações na equação (9), temos como equação dessa hipérbole, a equação

$$\frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1.$$

Desenvolvendo a equação, podemos reescrevê-la como $4x^2 - y^2 + 16 = 0$, em que essa é a equação geral dessa hipérbole. \square

Exemplo 7. Determine a equação geral da hipérbole em que $A = (2, 5)$ e $B = (-2, 3)$ são os focos e o módulo da diferença entre as distâncias de um ponto P da hipérbole a cada um dos focos é $2a = \sqrt{5}$.

Solução: Conhecidos os focos e o módulo da diferença entre as distâncias, é possível determinar alguns dos principais elementos dessa hipérbole, como a reta focal, a reta não focal e a distância focal $2c$. Além disso, se utilizarmos o fato de que $b^2 = c^2 - a^2$, podemos determinar b , por já serem conhecidos os valores de a e c . Pela definição, $d(P, A) - d(P, B) = 2a$, segue que:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2} - \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{5} + \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} \\ \Leftrightarrow & (x-2)^2 + (y-5)^2 = 5 + (x+2)^2 + (y-3)^2 + 2\sqrt{5}\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} \\ \Leftrightarrow & -8x - 4y + 11 = 2\sqrt{5}\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} \\ \Leftrightarrow & 64x^2 + 16y^2 + 121 + 64xy - 176x - 88y = 20(x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9) \\ \Leftrightarrow & 44x^2 + 64xy - 4y^2 - 256x + 32y - 139 = 0. \end{aligned}$$

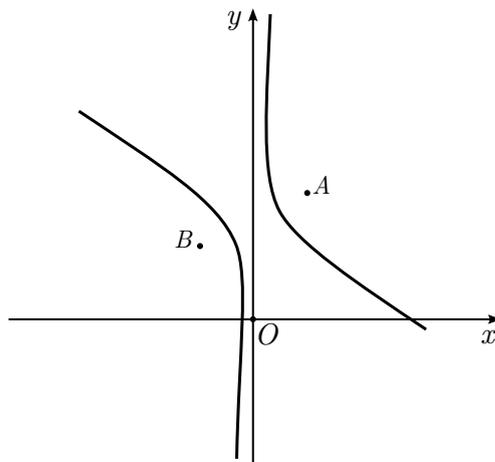


Figura 8: Hipérbole com focos $A = (2, 5)$ e $B = (-2, 3)$.

Determinada a equação geral da hipérbole, nota-se mais uma vez a ocorrência do termo quadrático misto, $64xy$. Na seção 2 desse trabalho veremos como, por meio de uma mudança de eixos, escrever a equação canônica dessa cônica de modo que seja possível identificar seus elementos. \square

1.4 Parábola

Nessa seção estudaremos a parábola e suas propriedades.

Definição 4. Parábola é o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam de uma reta e um ponto, fora dela, dados. A reta é denominada geratriz da parábola, enquanto o ponto é seu foco.

Ou seja, se P é um ponto da parábola cuja reta diretriz é r e o foco é o ponto A , por definição $d(P, r) = d(P, A)$. Para determinarmos a equação canônica de uma parábola, precisamos recordar como determinar a distância de um ponto a uma reta.

Proposição 1. Dados um ponto $P = (x_0, y_0)$ e uma reta $r : ax + by - c = 0$, em um plano, tem-se que a distância de P a r é dada por $d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

A demonstração para essa proposição pode ser feita utilizando o Teorema de Pitágoras, juntamente com o fato de que a distância de um ponto a uma reta é a menor das distâncias. Assim, tomando um ponto qualquer da reta e o pé da perpendicular baixada do ponto até a reta, é possível concluir essa demonstração. Mas, não é a intenção no momento fazê-la, e sim estudarmos a parábola.

Sem perda de generalidade, consideremos uma parábola cujo foco $A = \left(0, \frac{c}{b}\right)$ está sobre o eixo Oy e que tem a reta $r : y = \frac{-c}{b}$ por sua diretriz. Note que esses valores foram escolhidos de modo que o vértice da parábola coincida com a origem do sistema de coordenadas adotado, isto é, se V é o vértice dessa parábola, então $V = (0, 0)$.

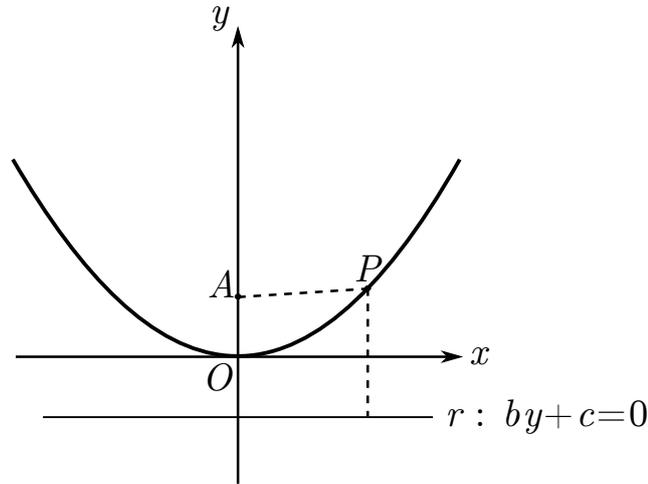


Figura 9: Parábola com vértice $(0, 0)$.

Seja $P = (x, y)$ um ponto dessa parábola, por definição $d(P, r) = d(P, A)$, então

$$\begin{aligned} \frac{|0x + by + c|}{\sqrt{0^2 + b^2}} &= \sqrt{(x - 0)^2 + \left(y - \frac{c}{b}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{(by + c)^2}{b^2} = x^2 + \left(y - \frac{c}{b}\right)^2 \\ \Leftrightarrow b^2y^2 + c^2 + 2bcy &= b^2x^2 + b^2y^2 + c^2 - 2bcy \\ \Leftrightarrow 4bcy &= b^2x^2 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{x^2}{4c/b} \end{aligned}$$

Perceba que $\frac{2c}{b}$ é a distância do foco à reta diretriz, a qual denominaremos parâmetro da parábola e representaremos por p . Portanto a equação canônica da parábola que tem a reta diretriz na mesma direção do eixo Ox e cujo vértice é o ponto $(0, 0)$ é $y = \frac{x^2}{2p}$.

Se a reta diretriz tiver a mesma direção do eixo Oy e vértice $(0, 0)$, então a sua equação canônica será $x = \frac{y^2}{2p}$, em que p corresponde à distância do foco à reta diretriz.

Exemplo 8. Determine, pela definição, a equação da parábola em que $x = -3$ é a reta diretriz e $(3, 0)$ as coordenadas do foco dessa parábola.

Solução: Pela definição, a parábola é o conjunto de pontos $P = (x, y)$ tal que $d(P, A) = d(P, r)$, em que A e r são o foco e a reta diretriz da parábola, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned}
d(P, A) &= d(P, r) \\
\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} &= \frac{|1x + 0y - 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \\
\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2} &= |1x - 3| \\
\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 &= x^2 - 6x + 9 \\
\Leftrightarrow x &= \frac{y^2}{12}.
\end{aligned}$$

Portanto, $x = \frac{y^2}{2 \cdot 6}$ é a equação canônica dessa parábola. \square

Veremos na seção seguinte que, transladando a parábola por um dado vetor, podemos escrever sua equação canônica, cujo vértice (x_0, y_0) é um ponto qualquer do plano, pelas seguintes equações:

$$y - y_0 = \frac{(x - x_0)^2}{2p} \quad \text{e} \quad x - x_0 = \frac{(y - y_0)^2}{2p} \quad (10)$$

Em que a primeira é para o caso da reta diretriz ter mesma direção do eixo Ox , e a segunda para o caso da reta diretriz ter mesma direção do eixo Oy .

Exemplo 9. Dada a parábola φ de equação $x^2 - 8x - 2y + 20 = 0$, determine sua equação canônica, as coordenadas do vértice e o parâmetro p (distância do foco à reta diretriz).

Solução: Reescrevendo a equação e completando quadrados, temos:

$$\begin{aligned}
x^2 - 8x - 2y + 20 &= 0 \\
\Leftrightarrow 2y - 20 &= x^2 - 8x \\
\Leftrightarrow 2y - 20 + 16 &= x^2 - 8x + 16 \\
\Leftrightarrow 2(y - 2) &= (x - 4)^2 \\
\Leftrightarrow (y - 2) &= \frac{(x - 4)^2}{2}.
\end{aligned}$$

Comparando com a equação (10), temos que $(4, 2)$ é o vértice dessa parábola e $p = 1$ seu parâmetro. \square

Exemplo 10. Determine a equação geral da parábola com foco $F = (2, 2)$ e reta diretriz $r : x + 2y = 1$.

Solução: Pela definição, uma parábola é o lugar geométrico dos pontos equidistantes ao foco e à reta diretriz, portanto, temos $d(P, F) = d(P, r)$ para todo ponto $P = (x, y)$ da parábola. Logo,

$$\begin{aligned}
 d(P, F) &= d(P, r) \\
 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} &= \frac{|1x + 2y - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \\
 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 &= \frac{(x + 2y - 1)^2}{5} \\
 \Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 - 20x - 20y + 40 &= x^2 + 4y^2 + 1 + 4xy - 2x - 4y \\
 \Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 - 18x - 16y + 39 &= 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

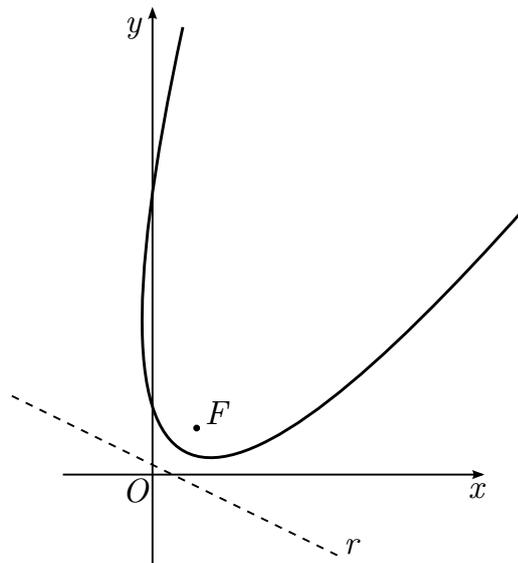


Figura 10: Parábola com reta diretriz $r : x + 2y = 1$.

Portanto, (11) é a equação geral da parábola φ . Note mais uma vez a ocorrência do termo quadrático misto. \square

2 Vetores no plano e translação

De origem no latim *vector* ou *vehere*, vetor é o que transporta, o que leva. Nessa parte do trabalho será abordada sua aplicação na translação de pontos em um plano. Entretanto, o que é vetor? Para entendermos o seu conceito, devemos retomar as definições de segmentos de reta orientados equipolentes.

Considere, em um plano, um sistema de coordenadas em que os pontos A e B são tais que $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$. Segundo Elon em [5], um segmento de reta é orientado quando se estabelece qual de suas extremidades é o ponto inicial e qual é o ponto final. Por exemplo, o segmento de reta orientado AB é aquele em que A é o ponto inicial e B , o final. Em contra partida, fica subtendido que o segmento de reta orientado BA é aquele em que B é o ponto inicial e A , o final. Para simplificar a escrita, utilizaremos apenas “segmento orientado” no lugar de “segmento de reta orientado”.

Sobre o segmento orientado, tem-se que seu comprimento pode ser obtido quando são conhecidas as coordenadas de suas extremidades. Por definição, esse comprimento corresponde à distância entre suas extremidades. Assim, o comprimento do segmento orientado AB é igual a $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$, como visto na seção 1.1. Note que um segmento degenerado, que tenha como pontos inicial e final o mesmo ponto, é denominado nulo e seu comprimento é zero.

Quanto à direção de um segmento orientado, essa está diretamente relacionada à inclinação da reta suporte do segmento. Portanto, dois segmentos orientados têm a mesma direção se suas retas suportes tiveram a mesma inclinação, isto é, ou esses segmentos são colineares ou estão contidos em retas paralelas.

Se AB e CD forem colineares e induzirem o mesmo sentido da reta que os contém, esses segmentos orientados têm o mesmo sentido. Caso contrário os segmentos serão considerados de sentido contrário.

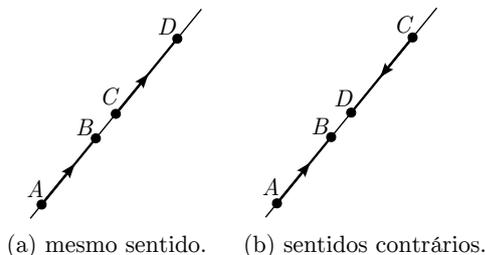


Figura 11: Segmentos colineares.

No caso de AB e CD estarem contidos em retas paralelas, se os segmentos AC e BD tiverem interseção vazia, então AB e CD serão de mesma direção; caso contrário os segmentos serão considerados de sentido contrário.

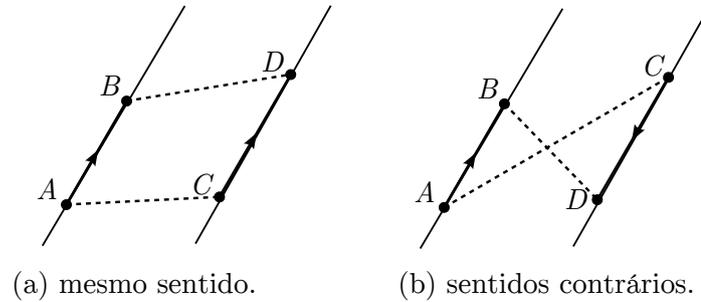


Figura 12: Segmentos paralelos.

Definição 5. Quando dois segmentos orientados, AB e CD , são ambos nulos ou têm o mesmo comprimento, direção e sentido, são chamados de equipolentes e representados por $AB \sim CD$, lê-se o segmento AB é equipolente ao segmento CD . Sendo a relação de equipolência uma relação de equivalência, valem as seguintes propriedades:

- (i) **Reflexiva:** $AB \sim AB$;
- (ii) **Simétrica:** $AB \sim CD$ se, e somente se, $CD \sim AB$;
- (iii) **Transitiva:** Se $AB \sim CD$ e $CD \sim EF$, então $AB \sim EF$.

Proposição 2. Dados um segmento orientado AB , não nulo, e um ponto C , existe um único ponto D tal que CD é equipolente a AB .

Demonstração. Consequência da Geometria Euclidiana Plana, essa proposição é demonstrada analisando duas possibilidades, visto que para serem equipolentes há a necessidade de terem a mesma direção: (i) os segmentos são colineares; (ii) os segmentos são paralelos.

- (i) No caso de A , B e C serem colineares, para determinar o ponto D , basta tomar sobre a reta AB , com mesma direção do segmento orientado AB , um ponto D tal que $d(C, D) = d(A, B)$.

(ii) Agora, se A , B e C não forem colineares, pela Geometria Euclidiana, temos que por uma reta e um ponto fora dela passa uma única reta paralela. Ou seja, por C passa uma única reta paralela à reta AB . Portanto, basta tomar um ponto D sobre essa reta paralela a AB , de modo que $d(C, D) = d(A, B)$ e $AC \cap BD = \emptyset$. \square

Compreendida a definição de segmentos orientados equipolentes, trazemos a seguinte definição de vetor.

Definição 6. O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes ao segmento orientado AB , tal que:

- (i) Dado um ponto P qualquer, o vetor $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$ é um vetor nulo.
- (ii) Pela definição de vetor e pela proposição 2, dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e um ponto $C = (x, y)$, existe um único ponto D tal que $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.
- (iii) O comprimento, ou módulo, de um vetor $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ é indicado por $d(A, B) = \|\vec{v}\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Definição 7. Dado $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, em que $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, dizemos que os números $\alpha = b_1 - a_1$ e $\beta = b_2 - a_2$ são as coordenadas do vetor \vec{v} . Fazendo o ponto inicial coincidir com a origem do sistema de coordenadas, tem-se que $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (0 + \alpha, 0 + \beta)$, isto é, $P = (\alpha, \beta)$.

Exemplo 11. Dados os pontos $A = (-2, 4)$, $B = (1, 1)$ e $C = (-4, -1)$, e o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, determine:

- (a) P , de modo que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, com $O = (0, 0)$.

Solução: Como $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, então $\vec{v} = (1 - (-2), 1 - 4) = (0 - 3, 0 - (-3)) = \overrightarrow{OP}$, portanto $P = (3, -3)$.

- (b) O ponto D , tal que $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.

Solução: Seja $(d_1, d_2) = D$. Fazendo $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, tem-se:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \\ \Leftrightarrow (d_1 - (-4), d_2 - (-1)) &= (1 - (-2), 1 - 4) \\ \Leftrightarrow (d_1 + 4, d_2 + 1) &= (3, -3) \\ \Leftrightarrow (d_1, d_2) &= (-1, -4)\end{aligned}$$

Portanto $D = (-1, -4)$.

(c) O módulo de \vec{v} .

Solução: $\vec{v} = (3, -3)$, portanto $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e um ponto C do plano, determinar um ponto D tal que CD seja um representante do vetor \vec{v} nos transmite a ideia de que o ponto C está sendo levado até o ponto D , caracterizando a translação de um ponto no plano, que será abordada a seguir.

2.1 Translação

A translação T_v , determinada por $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ em um plano Π é uma transformação em que, para cada ponto $P = (x, y)$ em Π , faz corresponder um ponto $T_v(P) = P' = (x + \alpha, y + \beta)$.

$$\begin{aligned}T_v &: \Pi \longrightarrow \Pi \\ P &\longmapsto T_v(P).\end{aligned}$$

Observe que $\overrightarrow{PP'}$ é um representante do vetor \vec{v} , isto é, $\overrightarrow{PP'} = (\alpha, \beta)$.

Proposição 3. Se $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, com A' e B' suas respectivas imagens obtidas pela translação T_v , determinada por $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ em Π , então $d(A, B) = d(A', B')$.

Demonstração: Por definição, temos que $A' = (a_1 + \alpha, a_2 + \beta)$ e $B' = (b_1 + \alpha, b_2 + \beta)$. Então,

$$\begin{aligned}d(A', B') &= \sqrt{(b_1 + \alpha - a_1 - \alpha)^2 + (b_2 + \alpha - a_2 - \alpha)^2} \\ &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \\ &= d(A, B). \square\end{aligned}$$

Ou seja, a translação é uma transformação que preserva distâncias. Em outras palavras, se transladarmos uma curva, essa não sofrerá qualquer deformação. Vejamos:

Exemplo 12. Seja $A : y = x^2 + 3$, uma parábola cujo vértice V corresponde ao ponto $(0, 3)$. Determine a equação da parábola B , obtida pela translação de A pelo vetor $\vec{v} = (2, 1)$.

Solução: Por definição, a translação T_v é a relação que, para cada ponto $P = (x, y)$ faz corresponder um ponto $P' = (\bar{x}, \bar{y}) = (x + 2, y + 1)$. Isto é, $x = \bar{x} - 2$ e $y = \bar{y} - 1$. Substituindo esses valores de x e y na equação da parábola A , encontramos a equação de B , imagem de A , obtida através da translação pelo vetor \vec{v} . Vejamos:

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 3 \\ \Leftrightarrow \bar{y} - 1 &= (\bar{x} - 2)^2 + 3 \\ \Leftrightarrow \bar{y} &= \bar{x}^2 - 4\bar{x} + 8. \end{aligned}$$

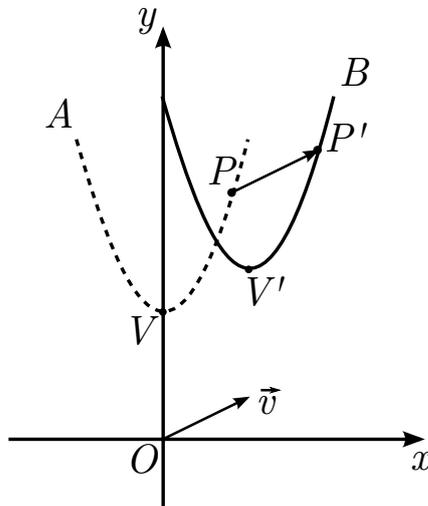


Figura 13: Translação da parábola $y = x^2 + 3$.

Ou seja, $y = x^2 - 4x + 8$ é a equação da parábola B , cujo vértice $V' = (v'_1, v'_2)$ é tal que $v'_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$ e $v'_2 = 4$. Observe que $V = (0, 3)$ é o vértice da parábola A e $V' = T_v(V)$ com $\vec{v} = (2, 1)$, então $V' = (0 + 2, 3 + 1) = (2, 4)$, como havíamos calculado. \square

Exemplo 13. Voltando ao exemplo 3, em que identificamos a cônica C , de equação $9x^2 + 25y^2 - 90x - 200y + 400 = 0$, como sendo uma elipse, analisaremos essa mesma equação sobre outro ponto de vista, o da translação. Queremos determinar um vetor \vec{v} tal que, transladando a cônica por esse vetor, façamos o centro dela coincidir com a origem do sistema de coordenadas. Em outras palavras, queremos determinar um novo sistema de eixos tal que a elipse seja cêntrica.

Solução: Seja $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ o vetor procurado. Isto é, para cada ponto $P = (x, y)$ da cônica C , existe um ponto $P' = (\bar{x}, \bar{y})$, tal que $\vec{v} = \overrightarrow{PP'}$. Mas se P' é a imagem de P pela translação T_v , então:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + \alpha \quad \text{e} \quad \bar{y} = y + \alpha \\ \Leftrightarrow x &= \bar{x} - \alpha \quad \text{e} \quad y = \bar{y} - \alpha.\end{aligned}$$

Assim, substituindo $x = \bar{x} - \alpha$ e $y = \bar{y} - \alpha$ na equação de C , temos:

$$\begin{aligned}9(\bar{x} - \alpha)^2 + 25(\bar{y} - \beta)^2 - 90(\bar{x} - \alpha) - 200(\bar{y} - \beta) + 400 &= 0 \\ \Leftrightarrow 9(\bar{x}^2 - 2\bar{x}\alpha + \alpha^2) + 25(\bar{y}^2 - 2\bar{y}\beta + \beta^2) - 90(\bar{x} - \alpha) - 200(\bar{y} - \beta) + 400 &= 0 \\ \Leftrightarrow 9\bar{x}^2 + 25\bar{y}^2 - (18\alpha + 90)\bar{x} - (50\beta + 200)\bar{y} = -9\alpha^2 - 25\beta^2 - 90\alpha - 200\beta - 400.\end{aligned}\tag{12}$$

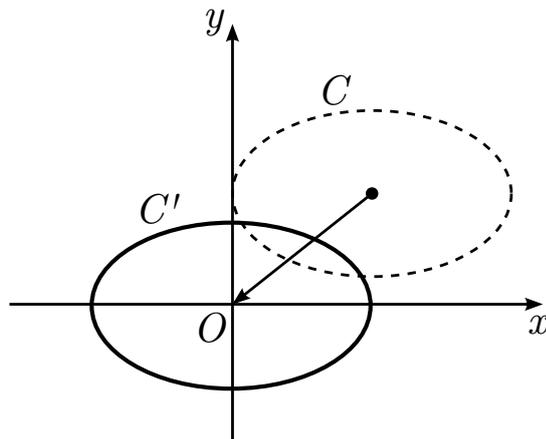


Figura 14: Translação da elipse $9x^2 + 25y^2 - 90x - 200y + 400 = 0$.

Queremos determinar α e β de modo que os termos lineares sejam eliminados. Isto é, queremos $18\alpha + 90 = 0$ e $50\beta + 200 = 0$, o que implica que $\alpha = -5$ e $\beta = -4$.

Portanto, $\vec{v} = (-5, -4)$. Substituindo α e β de volta em (12), temos:

$$9\bar{x}^2 + 25\bar{y}^2 = 225 \Rightarrow \frac{\bar{x}^2}{5^2} + \frac{\bar{y}^2}{3^2} = 1. \quad (13)$$

Logo (13) é a equação de $C' = T_v(C)$. Nesse novo sistema de eixos, identificar qual é a cônica e quais são seus principais elementos torna-se uma tarefa mais simples. Temos aqui uma elipse com raio maior igual a 5, e raio menor igual a 3, cujo centro em $\bar{x}O\bar{y}$ é o ponto $(0, 0)$. \square

No exemplo anterior, por meio de uma translação, reescrevemos a equação daquela elipse de modo que os termos lineares não apareçam mais. De modo geral, utilizaremos na próxima seção a translação com esse intuito, eliminar os termos lineares de uma equação do segundo grau.

Exemplo 14. Dada a função do segundo grau $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$, determine o vetor $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ tal que, transladando $f(x, y)$ por \vec{v} eliminamos os termos lineares.

Solução: Inicialmente fazemos $\bar{x} = x + \alpha$ e $\bar{y} = y + \beta$.

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = A(x + \alpha)^2 + B(x + \alpha)(y + \beta) + C(y + \beta)^2 + D(x + \alpha) + E(y + \beta) + F.$$

Desenvolvendo as potências e multiplicações, após agruparmos os termos semelhantes, teremos:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, \bar{y}) &= Ax^2 + Bxy + Cy^2 + (2A\alpha + B\beta + D)x + (B\alpha + 2C\beta + E)y + \\ &\quad + (A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F) \\ \Leftrightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) &= Ax^2 + Bxy + Cy^2 + (2A\alpha + B\beta + D)x + (B\alpha + 2C\beta + E)y + f(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes dos termos lineares a zero, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2A\alpha + B\beta + D = 0 \\ B\alpha + 2C\beta + E = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\alpha + \frac{B}{2}\beta + \frac{D}{2} = 0 \\ \frac{B}{2}\alpha + C\beta + \frac{E}{2} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Se o sistema for possível e determinado, dizemos que (α, β) é o centro de $f(x, y)$. Se o sistema for possível indeterminado, tomamos qualquer solução como vetor. Porém,

se o sistema for impossível, $f(x, y)$ não possui centro e, portanto, não existirá uma translação capaz de eliminar os termos lineares.

Conclusão: se existir algum vetor $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ tal que a translação de uma equação geral do segundo grau por esse vetor terá seus termos lineares cancelados, então esse vetor é solução do sistema (14). \square

Exemplo 15. Considere agora os vetores $\vec{u} = (3, 2)$ e $\vec{v} = (2, -4)$. Determine o ponto P'' , imagem de $P = (-2, 1)$ quando aplicadas duas translações, por \vec{u} e \vec{v} , respectivamente.

Solução: Seja $P' = T_u(P)$, logo $P' = P + \vec{u} = (-2 + 3, 1 + 2)$, o que implica que $P' = (1, 3)$. Em seguida, aplicando a translação $T_v(P')$, tem-se que $P'' = P' + \vec{v} = (1 + 2, 3 - 4) = (3, -1)$. \square

Nesse exemplo, P'' foi obtido pela translação de P' por \vec{v} , que por sua vez foi obtido pela translação de P por \vec{u} . Como $P'' = P' + \vec{v}$ e $P' = P + \vec{u}$, pode-se determinar P'' como sendo $P + \vec{u} + \vec{v}$, o que sugere que, se existir um vetor $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, poderíamos obter P'' fazendo $P'' = P + \vec{w}$. Caracterizando, portanto, a operação de adição de vetores, que será estudada a seguir.

2.2 Operações com vetores

Nessa seção apresentaremos as definições e principais propriedades das operações com vetores.

2.2.1 Adição de vetores

Definição 8. Dados os vetores \vec{u} e \vec{v} , tais que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Se \vec{w} é o vetor soma de \vec{u} com \vec{v} , com $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, então $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.

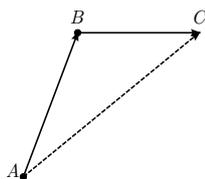


Figura 15: Adição de vetores.

Proposição 4. Se $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ e $\vec{v} = (\gamma, \delta)$, então $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (\alpha + \gamma, \beta + \delta)$.

Demonstração. Tomando um ponto fixo $A = (a_1, a_2)$. Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, tem-se que $B = (a_1 + \alpha, a_2 + \beta)$ e $C = (a_1 + \alpha + \gamma, a_2 + \beta + \delta)$. Por definição, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$, mas $\overrightarrow{AC} = (a_1 + \alpha + \gamma - a_1, a_2 + \beta + \delta - a_2) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta)$. \square

Para quaisquer vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , a adição de vetores está munida das seguintes propriedades:

- (i) **Comutativa:** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
- (ii) **Associativa:** $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;
- (iii) **Elemento neutro:** $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u}$;
- (iv) **Inverso aditivo:** $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, quem que $-\vec{u}$ é o *oposto*, *simétrico* ou *inverso aditivo* de \vec{u} .

Exemplo 16. Analisando novamente o exemplo (15), desta vez sob a ótica de adição de vetores, temos que, dados $P = (-2, 1)$, $\vec{u} = (3, 2)$ e $\vec{v} = (2, -4)$, se $P'' = P + \vec{u} + \vec{v}$, então $P'' = P + \vec{w}$, em que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

Solução: Pela definição de adição de vetores e pela proposição (4), $\vec{w} = (3 + 2, 2 - 4) = (5, -2)$. Segue daí que $P'' = P + \vec{w} = (-2 + 5, 1 - 2) = (3, -1)$, ou seja, o mesmo ponto obtido no exemplo (15). \square

2.2.2 Multiplicação de um vetor por um número real

Outra operação que pode ser definida com vetores, em um plano, é a multiplicação por um número real, ou por escalar como geralmente é referida.

Definição 9. Dados os vetores \vec{v} e um número real t , tem-se que

- (i) Se $\vec{v} = \vec{0}$ ou $t = 0$, então $t\vec{v} = \vec{0}$;
- (ii) Se $t \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, então $t\vec{v}$: tem a mesma direção de \vec{v} ; tem o mesmo sentido de \vec{v} se $t > 0$, ou sentido contrário se $t < 0$; e é tal que $\|t\vec{v}\| = |t| \|\vec{v}\|$.

Num dado sistema de coordenadas em que $\vec{v} = (\alpha, \beta)$, tem-se que $t\vec{v} = (t\alpha, t\beta)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Assim como na adição de vetores, na multiplicação de vetores por números reais, podemos observar algumas propriedades que são consequência das propriedades das operações com números reais. Dados os números reais s e t , e os vetores \vec{u} e \vec{v} , valem as seguintes propriedades:

(i) **Comutativa:** $t \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot t$;

(ii) **Associativa:** $(s \cdot t) \cdot \vec{u} = s \cdot (t \cdot \vec{u})$;

(iii) **Distributiva em relação à adição de números reais:** $(s + t) \cdot \vec{u} = s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{u}$;

(iv) **Distributiva em relação à adição de vetores:** $s \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = s \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$;

(v) **Elemento neutro:** $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Exemplo 17. Dados $P = (-2, 1)$ e $\vec{v} = (3, 2)$, determine $P' = T_w(P)$, em que $\vec{w} = 4 \cdot \vec{v}$.

Solução: Por definição, se $\vec{w} = 4 \cdot \vec{v}$, então $\vec{w} = (4 \cdot 3, 4 \cdot 2) = (12, 8)$. Deste modo, se $P' = T_w(P)$, então $P' = (-2 + 12, 1 + 8) = (10, 9)$. \square

Proposição 5. Dados os vetores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$, tem-se que \vec{u} é múltiplo de \vec{v} se, e somente se, $u_1v_2 - u_2v_1 = 0$.

Demonstração: (\Rightarrow) Se \vec{u} é múltiplo de \vec{v} , então existe um número real λ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, o que implica em $u_1 = \lambda v_1$ e $u_2 = \lambda v_2$. Segue daí que

$$u_1v_2 - u_2v_1 = (\lambda v_1)v_2 - (\lambda v_2)v_1 = 0. \quad (15)$$

(\Leftarrow) Queremos verificar que, se $u_1v_2 - u_2v_1 = 0$, então \vec{u} é múltiplo de \vec{v} . Vamos considerar dois casos: $v_1 \neq 0$ e $v_1 = 0$.

(i) ($v_1 \neq 0$) Segue de $u_1v_2 - u_2v_1 = 0$, que $u_2 = \frac{v_2u_1}{v_1}$. Portanto,

$$\vec{u} = (u_1, u_2) = \left(u_1, \frac{u_1v_2}{v_1}\right) = \left(\frac{u_1}{v_1}v_1, \frac{u_1}{v_1}v_2\right) = \frac{u_1}{v_1}(v_1, v_2) = \frac{u_1}{v_1}\vec{v}.$$

(ii) ($v_1 = 0$) Temos que $u_2v_1 = 0$, o que implica que $u_1v_2 = 0$ e, portanto, $u_1 = 0$ ou $v_2 = 0$. Se $v_2 = 0$, então $\vec{v} = (0, 0)$. Mas todo vetor é múltiplo do vetor nulo, logo \vec{u} é múltiplo de \vec{v} . Se $u_1 = 0$, então

$$\vec{u} = (0, u_2) = \left(0, \frac{v_2}{v_2}u_2\right) = \frac{u_2}{v_2}(0, v_2) = \frac{u_2}{v_2}\vec{v},$$

como queríamos demonstrar. \square

2.2.3 Produto interno

Antes de apresentar a definição para o produto interno, se faz necessário a compreensão da definição do ângulo entre vetores, como sendo o menor dos ângulos formados entre dois dos seus representantes que tenham a mesma origem. Isto é, se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, então o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} é o ângulo $B\hat{A}C$, tal que sua medida θ , em radianos, é tal que $0 < \theta < \pi$.

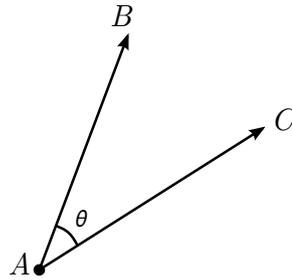


Figura 16: Ângulo entre vetores.

Pode-se exprimir o $\cos(\theta)$ em termos de \vec{u} e \vec{v} , ou de suas coordenadas. Sejam $\vec{u} = (a_1, a_2)$, $\vec{v} = (b_1, b_2)$ e $\vec{w} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, aplicando a Lei dos cossenos no triângulo ABC , tem-se:

$$\begin{aligned}\|w\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2 \cdot \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\theta) \\ (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 &= a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 - 2 \cdot \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\theta) \\ b_1^2 - 2a_1b_1 + a_1^2 + b_2^2 - 2a_2b_2 + a_2^2 &= a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 - 2 \cdot \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\theta) \\ -2(a_1b_1 + a_2b_2) &= -2 \cdot \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\theta) \\ \Rightarrow \cos(\theta) &= \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\|u\| \cdot \|v\|}.\end{aligned}\tag{16}$$

Definição 10. O produto interno de \vec{u} por \vec{v} , indicado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, é um número real tal que:

- (i) Se \vec{u} ou \vec{v} é o vetor nulo, então $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$;
- (ii) Se \vec{u} e \vec{v} não são nulos, então $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\theta)$, em que θ é a medida do ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{v} .

Se o ângulo θ entre os dois vetores for igual a $\frac{\pi}{2}$, então $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, já que, por definição, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta)$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Pela equação (16) e pela definição do produto interno, dados $\vec{u} = (a_1, a_2)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2)$, temos que:

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta) & \text{e} & & a_1b_1 + a_2b_2 &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta) \\ &\Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= & & a_1b_1 + a_2b_2. & \end{aligned} \quad (17)$$

Com a equação (17), considerando os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , bem como um número real t , o leitor pode verificar as seguintes igualdades:

- (i) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$;
- (ii) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$;
- (iii) $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$;
- (iv) $\langle t \cdot \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, t \cdot \vec{v} \rangle = t \cdot \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Um outro fato importante, é que $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2$, pois se $\vec{u} = (\alpha, \beta)$, então $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \alpha \cdot \alpha + \beta \cdot \beta = \alpha^2 + \beta^2$. Mas, como $\alpha^2 + \beta^2 \geq 0$ segue que $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = |\alpha^2 + \beta^2| = \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)^2 = \|\vec{u}\|^2$.

2.2.4 Projecção ortogonal de um vetor sobre outro

Até esse ponto do trabalho, reunimos vários pré-requisitos para abordarmos a mudança de eixos, entretanto falta-nos um bastante importante, que é a projecção ortogonal de um vetor sobre outro. Vejamos:

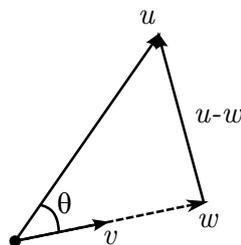


Figura 17: Projecção ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v} .

Dados os vetores \vec{u} e \vec{v} , queremos determinar o vetor \vec{w} que é a projeção ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v} . Observe que $\vec{u} - \vec{w}$ é ortogonal ao vetor \vec{v} e ainda que o vetor $\vec{w} = t \cdot \vec{v}$, isto é, \vec{w} é um múltiplo de \vec{v} . Deste modo, temos:

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} - \vec{w}, \vec{v} \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle \vec{u} - t \cdot \vec{v}, \vec{v} \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - t \cdot \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}. \end{aligned} \tag{18}$$

Mas, como $\vec{w} = t \cdot \vec{v}$, substituindo t por $\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$, temos $\vec{w} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \cdot \vec{v}$.

Exemplo 18. Dados os vetores $\vec{u} = (2, -1)$ e $\vec{v} = (3, 2)$, determine:

(a) A projeção ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v} .

Solução: Seja \vec{w} a projeção ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v} , logo $\vec{w} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \cdot \vec{v}$, então:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 2}{3^2 + 2^2} \cdot (3, 2) \\ \vec{w} &= \frac{4}{13} \cdot (3, 2) \\ \vec{w} &= \left(\frac{12}{13}, \frac{8}{13} \right). \end{aligned}$$

(b) A projeção ortogonal de \vec{v} sobre \vec{u} .

Solução: Seja \vec{z} a projeção ortogonal de \vec{v} sobre \vec{u} , logo $\vec{z} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \cdot \vec{u}$, então:

$$\begin{aligned} \vec{z} &= \frac{3 \cdot 2 - 2 \cdot 1}{2^2 + (-1)^2} \cdot (2, -1) \\ \vec{z} &= \frac{4}{5} \cdot (2, -1) \\ \vec{z} &= \left(\frac{8}{5}, \frac{-4}{5} \right). \end{aligned}$$

3 Rotação e mudança de eixos

Segundo Elon em [5], reescrever equações de forma mais simples, facilitando o reconhecimento de curvas, é a maior aplicação da mudança de eixos em Geometria Analítica.

Vimos no decorrer do trabalho que uma cônica tem como equação geral uma equação do segundo grau e que, dependendo da reta focal e do centro da cônica, a equação que a representa pode ser resumida, bastando para isso reescrever a equação em um novo sistema de coordenadas, no qual, por meio da equação canônica poderemos identificar qual é a cônica e quais os seus principais elementos.

Na seção 2.1 vimos como fazer isso por meio da translação, ou seja, dada a equação de uma curva, podemos por meio da translação reescrevê-la de modo que o seu centro coincida com a origem do sistema de coordenadas e, conseqüentemente, notamos a não ocorrência de termos lineares. Nessa seção veremos como a rotação pode ser útil nessa tarefa.

No exemplo 5, encontramos $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 128 = 0$ como a equação geral daquela elipse. Tendo apenas essa equação, a mudança de eixos é indicada para identificar qual é a cônica e quais são seus principais elementos (focos, vértices, reta focal, reta não focal, etc). Portanto, escrever a equação em relação a um sistema de coordenadas em que a reta focal é paralela a um dos eixos torna a tarefa um tanto quanto mais simples, como veremos.

As equações canônicas estudadas na seção 1 referiam-se à cônicas em que a reta focal tinha a mesma direção de um dos eixos, o que não foi visto no exemplo 5, o que sugere uma mudança de eixos que consista em uma rotação do eixo Ox , tornando-o paralelo à reta focal. Vejamos como isso pode ser feito.

3.1 Mudança de eixos

Consideraremos inicialmente apenas a rotação do sistema de coordenadas xOy , por um ângulo θ no sentido anti-horário, obtendo assim as coordenadas de um ponto em relação ao sistema $\bar{x}O\bar{y}$.

Seja (x, y) as coordenadas do ponto P em relação ao sistema xOy , e (\bar{x}, \bar{y}) suas coordenadas em relação ao sistema $\bar{x}O\bar{y}$ de coordenadas cartesianas.

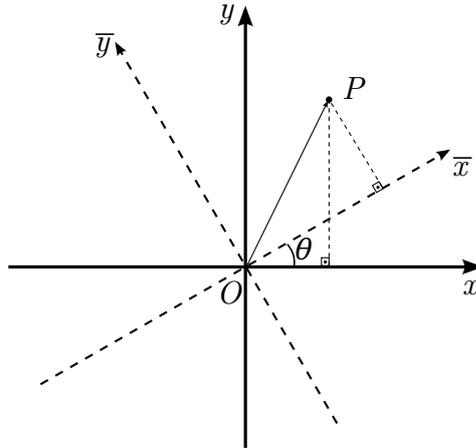


Figura 18: Rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário.

Note que a coordenada x do ponto P pode ser interpretada como sendo o módulo da projeção ortogonal do vetor \overrightarrow{OP} sobre um vetor que tem a mesma direção de Ox . Assim, a coordenada \bar{x} do ponto \bar{P} , em relação ao sistema de coordenadas $\bar{x}O\bar{y}$, pode ser determinada por meio da projeção do vetor \overrightarrow{OP} sobre um vetor que tenha a mesma direção do eixo $O\bar{x}$. Analogamente para y e \bar{y} .

Em relação ao sistema de coordenadas xOy , utilizaremos os vetores $\vec{e}_1 = (1, 0)$ e $\vec{e}_2 = (0, 1)$ como vetores unitários que têm as mesmas direções de Ox e Oy , respectivamente. Foram escolhidas vetores unitários para facilitar os cálculos, mas essa não é uma condição necessária.

Em relação ao sistema de coordenadas $\bar{x}O\bar{y}$, tomemos também dois vetores unitários, $\vec{f}_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ e $\vec{f}_2 = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$, que têm as mesmas direções de $O\bar{x}$ e $O\bar{y}$, respectivamente.

Determinando as coordenadas \bar{x} e \bar{y} através dos módulos das projeções do vetor $\overrightarrow{OP} = (x, y)$ sobre \vec{f}_1 e \vec{f}_2 , respectivamente, temos:

$$\bar{x} = \langle \overrightarrow{OP}, \vec{f}_1 \rangle = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$$

e

$$\bar{y} = \langle \overrightarrow{OP}, \vec{f}_2 \rangle = -x \sin(\theta) + y \cos(\theta).$$

Na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Podemos também determinar as coordenadas (x, y) do ponto P em xOy , conhecendo-se as coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) de \bar{P} . Observe o sistema:

$$\begin{cases} \bar{x} = x \cos(\theta) + y \text{sen}(\theta), \\ \bar{y} = -x \text{sen}(\theta) + y \cos(\theta). \end{cases}$$

Em relação à x e y , o sistema é possível determinado, visto que o determinante da matriz dos coeficientes de x e y é igual a 1. Resolvendo o sistema, encontramos:

$$x = \bar{x} \cos(-\theta) + \bar{y} \text{sen}(-\theta) = \bar{x} \cos(\theta) - \bar{y} \text{sen}(\theta)$$

e

$$y = -\bar{x} \text{sen}(-\theta) + \bar{y} \cos(-\theta) = \bar{x} \text{sen}(\theta) + \bar{y} \cos(\theta).$$

Que na forma matricial, é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}.$$

Ou seja, dadas as coordenadas de um ponto em relação a qualquer um dos dois sistemas, pode-se determinar suas coordenadas em relação ao outro sistema, bastando para isso conhecer qual é a medida θ do ângulo formado entre os eixos Ox e $O\bar{x}$.

Exemplo 19. Sejam $A = (2, 4)$ e $B = (4, -2)$ em xOy . Determine as coordenadas de A e B em relação ao sistema de eixos $\bar{x}O\bar{y}$, obtido por uma rotação de $\frac{\pi}{6}$ radianos, no sentido anti-horário. Verifique que a rotação é uma transformação que preserva distâncias.

Solução: Queremos determinar as coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) de cada um dos pontos. Para isso utilizaremos a igualdade obtida anteriormente.

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Mas $\theta = \frac{\pi}{6}$, portanto, $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$.

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Substituindo, em cada caso, (x, y) pelas coordenadas de cada ponto, teremos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} + 2 \\ -1 + 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} - 1 \\ -2 - \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\bar{A} = (\sqrt{3} + 2, -1 + 2\sqrt{3})$ e $\bar{B} = (2\sqrt{3} - 1, -2 - \sqrt{3})$. Queremos agora verificar se a rotação preserva distâncias, isto é, queremos verificar se $d(A, B) = d(\bar{A}, \bar{B})$.

$$d(A, B) = \sqrt{(2 - 4)^2 + (4 + 2)^2}$$

$$d(A, B) = 2^2 + 6^2$$

$$d(A, B) = 4 + 36$$

$$d(A, B) = 40$$

e

$$d(\bar{A}, \bar{B}) = \sqrt{(\sqrt{3} + 2 + 1 - 2\sqrt{3})^2 + (-1 + 2\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3})^2}$$

$$d(\bar{A}, \bar{B}) = (3 - \sqrt{3})^2 + (1 + 3\sqrt{3})^2$$

$$d(\bar{A}, \bar{B}) = 9 - 6\sqrt{3} + 3 + 1 + 6\sqrt{3} + 27$$

$$d(\bar{A}, \bar{B}) = 40.$$

Ou seja, a rotação, assim como a translação, preserva distâncias. \square

Conhecendo a medida do ângulo, determinar as coordenadas de um ponto em outro sistema não é difícil. Porém, o nosso problema é um pouco mais elaborado, queremos uma rotação que elimine o termo quadrático misto, mas, como determinar a medida desse ângulo? Antes de responder a essas perguntas, estudaremos as formas quádricas com duas variáveis.

3.2 Formas Quádricas

Definição 11. As formas quádricas de duas variáveis, x e y , são funções da forma $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, em que A , B e C são números reais não simultaneamente nulos.

Note que podemos representar essa função por um produto de matrizes:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Ou ainda, adotando $M = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$ como a matriz da forma quádrica, esse produto pode ser escrito da seguinte maneira:

$$f(x, y) = \langle M(x, y), (x, y) \rangle = Ax^2 + Bxy + Cy^2.$$

Agora, se $N = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ e $(x, y) = N(\bar{x}, \bar{y})$, em que (\bar{x}, \bar{y}) são as coordenadas de $P = (x, y)$ em relação ao novo sistema de coordenadas, então, fazemos a substituição de tal forma que o termo quadrático misto seja eliminado.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \langle M(x, y), (x, y) \rangle \\ \Rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) &= \langle M(N(\bar{x}, \bar{y})), N(\bar{x}, \bar{y}) \rangle = A'\bar{x}^2 + B'\bar{x}\bar{y} + C'\bar{y}^2. \end{aligned}$$

Seja $\vec{f}_1 = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta)) = (a, b)$ um vetor que está na mesma direção do eixo $O\bar{x}$. Desenvolvendo o produto acima e comparando os polinômios, segue que

$$\begin{cases} A' = Aa^2 + Bab + Cb^2 \\ B' = -Aab + \frac{B}{2}(a^2 - b^2) + Cab \\ C' = Ab^2 - Bab + Ca^2. \end{cases}$$

Fazendo $B' = 0$, temos $a(\frac{B}{2}a + Cb) - b(Aa + \frac{B}{2}b) = 0$, o que implica que $\vec{v} = (Aa + \frac{B}{2}b, \frac{B}{2}a + Cb)$ é múltiplo de (a, b) , isto é, existe λ real tal que:

$$\begin{cases} Aa + \frac{B}{2}b = \lambda a \\ \frac{B}{2}a + Cb = \lambda b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A - \lambda)a + \frac{B}{2}b = 0 \\ \frac{B}{2}a + (C - \lambda)b = 0 \end{cases}. \quad (19)$$

Para que esse sistema homogêneo tenha solução não trivial, se faz necessário que $\det \begin{bmatrix} A - \lambda & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C - \lambda \end{bmatrix} = 0$. Essa equação é denominada equação característica de f , ou da matriz M . Desenvolvendo a equação, temos:

$$\begin{aligned} (A - \lambda)(C - \lambda) - \frac{B^2}{2} &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 - (A + C)\lambda + AC - B^2 &= 0. \end{aligned}$$

Note que o discriminante dessa equação, $\Delta = (A + C)^2 - 4(AC - B^2) = (A - C)^2 + 4B^2 \geq 0$, o que implica que ela sempre tem solução real. As soluções λ_1 e λ_2 são denominados autovalores da matriz M .

Retornando ao sistema (19) com cada um dos autovalores, determina-se os autovetores (a, b) associados a cada autovalor. Um autovetor da matriz M é múltiplo de um dos vetores \vec{f}_1 ou \vec{f}_2 . Como \vec{f}_1 e \vec{f}_2 são os vetores unitários, determinado um autovetor $\vec{w} = (w_1, w_2)$, basta colocar \vec{f}_1 ou \vec{f}_2 igual a $\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = (a, b)$. E ainda, como \vec{f}_1 e \vec{f}_2 são perpendiculares, se $\vec{f}_1 = (a, b)$, podemos escolher $\vec{f}_2 = (-b, a)$.

Além disso, segundo Elon em [5], temos aí um bônus, pois $A' = \lambda_1$ e $C' = \lambda_2$, veja:

$$\begin{aligned} A' &= Aa^2 + Bab + Cb^2 \\ \Leftrightarrow Aa^2 + \frac{B}{2}ab + \frac{B}{2}ab + Cb^2 \\ \Leftrightarrow \left(Aa + \frac{B}{2}b\right)a + \left(\frac{B}{2}a + Cb\right)b \\ \Leftrightarrow \lambda_1 a^2 + \lambda_1 b^2 &= \lambda_1. \end{aligned}$$

De modo análogo podemos verificar que $C' = \lambda_2$. Portanto, a substituição de (x, y) por $N(\bar{x}, \bar{y})$, com $N = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, implica que a forma quádrlica $f(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2$,

em que λ_1 e λ_2 são as soluções para a equação característica associada à matriz M . Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 20. Dada a cônica $\varphi : 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 128 = 0$, determine uma mudança de eixos de modo que o termo quadrático misto seja eliminado. Nesse novo sistema de coordenadas, determine a forma canônica dessa cônica e identifique seus principais elementos.

Solução: Primeiramente reescrevemos a equação utilizando o produto interno:

$$\begin{aligned}\varphi &: \langle M(x, y), (x, y) \rangle = 128 \\ &\Leftrightarrow \langle M(N(\bar{x}, \bar{y})), N(\bar{x}, \bar{y}) \rangle = 128 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 = 128.\end{aligned}$$

Em que λ_1 e λ_2 são os autovalores de $M = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, isto é, são as raízes da equação característica de φ .

$$\begin{aligned}\det \begin{bmatrix} 5 - \lambda & 3 \\ 3 & 5 - \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (5 - \lambda)^2 - 3^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 16 &= 0.\end{aligned}$$

Resolvendo a equação, encontramos $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$. Logo, $\varphi : 2\bar{x}^2 + 8\bar{y}^2 = 128$. Escrevendo essa equação na forma canônica, temos:

$$\begin{aligned}2\bar{x}^2 + 8\bar{y}^2 &= 128 \\ \Leftrightarrow \frac{\bar{x}^2}{64} + \frac{\bar{y}^2}{16} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\bar{x}^2}{8^2} + \frac{\bar{y}^2}{4^2} &= 1.\end{aligned}$$

Isto é, em relação ao sistema $\bar{x}O\bar{y}$, φ é uma elipse cuja reta focal coincide com o eixo $O\bar{y}$, com distância focal $c = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$ ou seja $2c = 8\sqrt{3}$, como foi visto no

exemplo (5). Além disso, temos $\bar{F}_1 = (4\sqrt{3}, 0)$ e $\bar{F}_2 = (-4\sqrt{3}, 0)$ por focos dessa elipse, cuja excentricidade $e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Já sabemos que $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 128 = 0$ é a equação de uma elipse cujo raio maior a , o raio menor b e a distância focal c são respectivamente iguais a 8, 4 e $4\sqrt{3}$. Entretanto, em relação ao sistema xOy , quais as coordenadas dos focos? Qual é a reta focal? Ou ainda, qual a medida do ângulo entre os eixos Ox e $O\bar{x}$?

Para responder a essas perguntas, se faz necessário determinar os autovetores, de preferência unitários, da matriz M , associados aos autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$. Inicialmente para $\lambda_1 = 2$.

$$\begin{cases} (A - \lambda)w_1 + \frac{B}{2}w_2 = 0 \\ \frac{B}{2}w_1 + (C - \lambda)w_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (5 - 2)w_1 - 3w_2 = 0 \\ -3w_1 + (5 - 2)w_2 = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Note que as equações são equivalentes. Tomando $3w_1 - 3w_2 = 0$, encontramos que $w_1 = w_2$. Portanto $\vec{w} = (1, 1)$ é um autovetor de M associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$, o que implica que $\vec{f}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é o autovetor unitário associado a λ_1 . Além disso, $\vec{f}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é o vetor perpendicular a \vec{f}_1 , isto é, tem a mesma direção que o eixo $O\bar{y}$.

Como $f_1 = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$, segue que $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $N = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$. Para determinarmos as coordenadas (x, y) de um ponto qualquer, conhecidas as coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) , podemos utilizar a equação matricial encontrada no início dessa seção:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix},$$

assim,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}.$$

Calculando as coordenadas de (x, y) de F_1 , conhecendo as coordenadas $(4\sqrt{3}, 0)$ de \bar{F}_1 , temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Consequentemente, $F_2 = (-2\sqrt{6}, -2\sqrt{6})$ e $y = x$ é a reta focal de φ , em relação a xOy . \square

3.3 Equação geral do 2º grau

Uma equação geral do 2º grau com duas variáveis, como já foi falado no decorrer desse trabalho, é uma equação na forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com A , B e C não simultaneamente nulos.

Nessa seção veremos como reescrever essa equação em relação a um sistema de coordenadas de modo que o termo quadrático misto seja eliminado. Na seção 2.1, no exemplo (14), vimos que por uma translação de um vetor (α, β) , em que α e β são as coordenadas do centro da cônica, é possível reescrever uma equação geral do segundo grau sem os termos lineares e que a nova equação ficava assim:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + f(\alpha, \beta) = 0. \quad (21)$$

Em que $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ é a função do segundo grau associada à equação geral. E ainda, na seção 3.2, vimos como eliminar o termo quadrático misto de uma quádrlica, reescrevendo (21) da seguinte forma:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + f(\alpha, \beta) = 0.$$

Em que λ_1 e λ_2 são os autovalores de $M = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$, e (α, β) a solução do sistema:

$$\begin{cases} A\alpha + \frac{B}{2}\beta + \frac{D}{2} = 0 \\ \frac{B}{2}\alpha + C\beta + \frac{E}{2} = 0. \end{cases}$$

Se o sistema não tiver solução, isto é, se a cônica não tiver um centro, utilizaremos outro método que será estudado logo mais. Vejamos um exemplo:

Exemplo 21. Dada a curva $\gamma : x^2 - 6xy + y^2 + 2x - 8y - 4 = 0$, determine qual é a cônica e quais são os principais elementos de γ .

Solução: Inicialmente determinaremos o centro (α, β) tal que a translação pelo vetor $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ elimina os termos lineares. Como vimos anteriormente, (α, β) é solução do sistema:

$$\begin{cases} A\alpha + \frac{B}{2}\beta + \frac{D}{2} = 0 \\ \frac{B}{2}\alpha + C\beta + \frac{E}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\alpha - 3\beta + 1 = 0 \\ -3\alpha + 1\beta - 4 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo os sistema, encontramos $(\alpha, \beta) = (\frac{11}{8}, -\frac{1}{8})$. Se $f(x, y) = x^2 - 6xy + y^2 + 2x - 8y - 4$ é a função do segundo grau associada à equação geral, temos $f(\alpha, \beta) = \frac{15}{8}$. Assim,

$$\bar{\gamma} : A\bar{x}^2 + B\bar{x}\bar{y} + C\bar{y}^2 + f(\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow \bar{x}^2 - 6\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 + \frac{15}{8}.$$

Agora determinaremos λ_1 e λ_2 , raízes da equação característica associada à curva $\bar{\gamma}$, ou à matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

$$(1 - \lambda)(1 - \lambda) - 3 \cdot 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0.$$

Resolvendo a equação, encontramos $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -2$, portanto $\bar{\gamma} : 4\bar{x}^2 - 2\bar{y}^2 - \frac{39}{8} = 0$ é a equação obtida após a eliminação dos termos lineares e do termo quadrático misto. Escrevendo-a na forma canônica, temos:

$$\begin{aligned} 4\bar{x}^2 - 2\bar{y}^2 - \frac{39}{8} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\bar{x}^2}{39/32} - \frac{\bar{y}^2}{32/16} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\bar{x}^2}{\sqrt{39/32}} - \frac{\bar{y}^2}{\sqrt{32/16}} &= 1. \end{aligned}$$

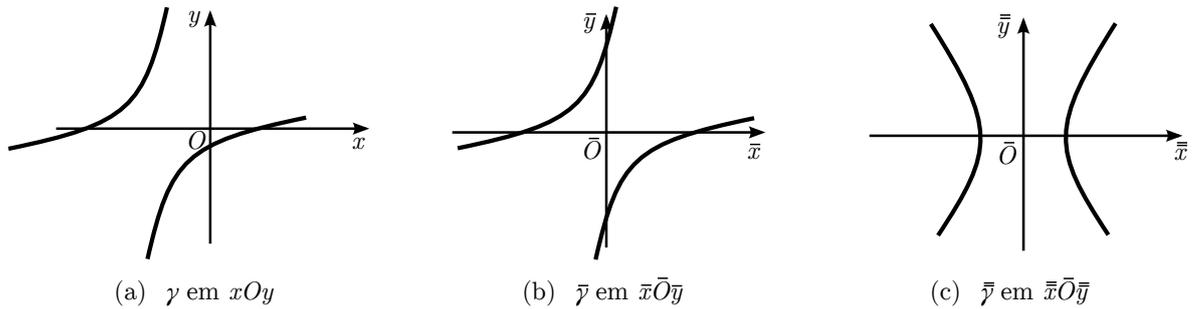


Figura 19: Translação e rotação da hipérbole $x^2 - 6xy + y^2 + 2x - 8y - 4 = 0$.

Portanto, $\bar{\gamma}$ é uma hipérbole centrada em $(0,0)$, com reta focal coincidente com o eixo $\bar{O}\bar{x}$, com $a = \sqrt{\frac{39}{32}}$, $b = \sqrt{\frac{39}{16}}$ e, como $c^2 = a^2 + b^2$, $c = \sqrt{\frac{117}{32}}$.

Resta agora, sabermos quais são os principais elementos de γ em relação ao sistema de coordenadas xOy . Quanto ao centro de γ , vimos que trata-se do ponto $(\alpha, \beta) = (\frac{-11}{8}, \frac{-1}{8})$. Agora resta saber qual a reta focal dessa hipérbole. Para isso, iremos “desfazer” as duas transformações que fizemos, a translação e a rotação.

Primeiramente “desfaremos” a rotação. Como vimos na seção 3.2, precisamos determinar os vetores unitários que têm a mesma direção dos eixos $\bar{O}\bar{x}$ e $\bar{O}\bar{y}$, respectivamente, determinados pela rotação que eliminou o termo quadrático misto. Para isso, determinaremos um autovetor associado a um autovalor.

Seja $\vec{w} = (w_1, w_2)$ um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 4$. Considere ainda que o vetor unitário procurado seja $\vec{f}_1 = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$.

$$\begin{cases} (1 - \lambda)w_1 - 3w_2 = 0 \\ -3w_1 + (1 - \lambda)w_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3w_1 - 3w_2 = 0 \\ -3w_1 - 3w_2 = 0. \end{cases}$$

Note que as equações são equivalentes, e que $w_2 = -w_1$ implica em $\vec{w} = (1, -1)$ e, portanto, $\vec{f}_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Além disso, como vimos anteriormente, $\vec{f}_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Desse modo, como $\bar{y} = -\bar{x} \sin(\theta) + \bar{y} \cos(\theta)$ e $\bar{y} = 0$ é a reta focal, segue que $-\bar{x} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \bar{y} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \bar{y} = -\bar{x}$ é a reta focal de $\bar{\gamma}$.

Precisamos agora “desfazer” a translação. Se a translação foi feita por um vetor $\vec{v} = (\alpha, \beta)$, basta agora fazer uma translação pelo vetor oposto, isto é, por $(-\alpha, -\beta) = (\frac{11}{8}, \frac{1}{8})$. Assim, se $\bar{y} = -\bar{x}$ é a reta focal de $\bar{\gamma}$, então $y + \frac{1}{8} = -(x + \frac{11}{8}) \Rightarrow y = -x - \frac{3}{2}$ é a reta focal de γ . \square

Exemplo 22. Determinar a equação de $\varphi : 3x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$ em um outro sistema de coordenadas, na forma canônica. Nesse sistema de coordenadas, identificar a cônica e seus principais elementos.

Solução: Fazendo uma translação por um vetor (α, β) , de tal modo que os termos lineares sejam eliminados, teremos $\varphi : 3\bar{x}^2 + 4\bar{x}\bar{y} + 4\bar{y}^2 + f(\alpha, \beta) = 0$, em que $f(x, y)$ é a função do segundo grau associada à curva φ . Além disso, vemos que (α, β) é a solução do sistema:

$$\begin{cases} A\alpha + \frac{B}{2}\beta + \frac{D}{2} = 0 \\ \frac{B}{2}\alpha + C\beta + \frac{E}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 2\beta - 1 = 0 \\ 2\alpha + 4\beta - 2 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $(\alpha, \beta) = (0, \frac{1}{2})$ e $f(\alpha, \beta) = -2$, logo $\bar{\varphi} = 3\bar{x}^2 + 4\bar{x}\bar{y} + 4\bar{y}^2 - 2 = 0$.

Agora faremos uma rotação que elimine o termo quadrático misto. Como já vimos, precisamos dos autovalores λ_1 e λ_2 associados à matriz $M = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$, ou seja, as

raízes da equação característica $\det \begin{bmatrix} A - \lambda & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C - \lambda \end{bmatrix} = 0$.

$$(3 - \lambda)(4 - \lambda) - 2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 8 = 0.$$

Resolvendo essa equação, determinamos as raízes $\lambda_1 = \frac{7+\sqrt{17}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{7-\sqrt{17}}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &: \left(\frac{7 + \sqrt{17}}{2} \right) \bar{x}^2 + \left(\frac{7 - \sqrt{17}}{2} \right) \bar{y}^2 - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\bar{x}^2}{4/(7 + \sqrt{17})} + \frac{\bar{y}^2}{4/(7 - \sqrt{17})} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\bar{x}^2}{(7 - \sqrt{17})/8} + \frac{\bar{y}^2}{(7 + \sqrt{17})/8} = 1. \end{aligned}$$

Ou seja, $\bar{\varphi}$ é uma elipse com reta focal $x = 0$, $a = \sqrt{\frac{7+\sqrt{17}}{8}}$, $b = \sqrt{\frac{7-\sqrt{17}}{8}}$ e $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \frac{\sqrt[4]{17}}{2}$.

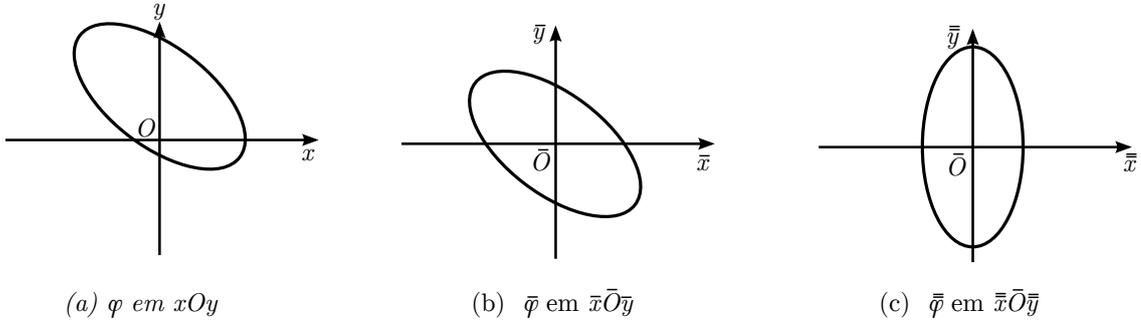


Figura 20: Translação e rotação da elipse $3x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$.

□

Foi falado anteriormente que, caso não haja uma translação capaz de eliminar os termos lineares, a equação pode ser de uma parábola. Para os casos em que a eliminação dos termos lineares não é imediata, utilizaremos outro método. Perceba que podemos representar uma função do segundo grau com duas variáveis utilizando produto interno:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = \langle M(x, y), (x, y) \rangle + \langle (D, E), (x, y) \rangle + F.$$

Em que $M = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$ é a matriz da forma quádrlica associada à equação geral do 2º grau. Seja N a matriz de rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário. Fazendo a substituição de (x, y) por $N(\bar{x}, \bar{y})$, temos:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \langle M(x, y), (x, y) \rangle + \langle (D, E), (x, y) \rangle + F \\ \Leftrightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) &= \langle M(N(\bar{x}, \bar{y})), N(\bar{x}, \bar{y}) \rangle + \langle (D, E), N(\bar{x}, \bar{y}) \rangle + F \\ \Leftrightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) &= \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + F. \end{aligned}$$

Mas $\bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} = \langle (D, E), N(\bar{x}, \bar{y}) \rangle$. Para facilitar esse cálculo, segue uma proposição:

Proposição 6. Se K é uma matriz real 2×2 e K^T sua matriz transposta, isto é, a matriz obtida trocando coluna por linha, então $\langle \vec{v}, K\vec{u} \rangle = \langle K^T\vec{v}, \vec{u} \rangle$, para quaisquer vetores \vec{v} e \vec{u} .

Isso significa que $\langle (D, E), N(\bar{x}, \bar{y}) \rangle = \langle N^T(D, E), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle$ e daí segue que $(\bar{D}, \bar{E}) = N^T(D, E)$, portanto,

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \langle N^T(D, E), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle + F. \quad (22)$$

Exemplo 23. Determinar a equação de $\delta : 4x^2 - 4xy + y^2 - 18x - 16y + 39 = 0$ em um outro sistema de coordenadas, na forma canônica. Nesse sistema de coordenadas, identificar a cônica e seus principais elementos.

Solução: Inicialmente verificamos a existência de um centro (α, β) , tal que a translação de δ por $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ elimine os termos lineares. Mas (α, β) é uma solução para o sistema:

$$\begin{cases} A\alpha + \frac{B}{2}\beta + \frac{D}{2} = 0 \\ \frac{B}{2}\alpha + C\beta + \frac{E}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2\beta - 9 = 0 \\ -2\alpha + \beta - 8 = 0. \end{cases}$$

Note que o sistema é incompatível, pois da primeira equação temos $4\alpha - 2\beta = 9$, enquanto que da segunda, $4\alpha - 2\beta = -16$. Portanto, não existe um vetor (α, β) tal que a translação elimine os termos lineares. Nesse caso, faremos primeiramente a rotação a fim de eliminar o termo quadrático misto.

Se $N = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ é a matriz de rotação em que os vetores unitários que têm as mesmas direções de $O\bar{x}$ e $O\bar{y}$ são respectivamente $\vec{f}_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ e $\vec{f}_2 = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$, então, em $\bar{x}O\bar{y}$, temos

$$\bar{\delta} : \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \langle N^T(D, E), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle + F = 0,$$

em que λ_1 λ_2 são os autovalores de M e \vec{f}_1 e \vec{f}_2 são autovetores unitários associados

aos autovalores λ_1 e λ_2 . Portanto, pela equação característica, temos

$$\begin{aligned} (4 - \lambda)(1 - \lambda) - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4 - 5\lambda + \lambda^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \text{ e } \lambda_2 = 5. \end{aligned}$$

Assim, $\bar{\delta} : 0\bar{x}^2 + 5\bar{y}^2 + \langle N^T(D, E), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle + F$. Tomando $\vec{w} = (w_1, w_2)$ como sendo um autovetor associado a $\lambda_1 = 0$, temos:

$$\begin{cases} 4w_1 - 2w_2 = 0 \\ -2w_1 + 2w_2 = 0. \end{cases}$$

Note que as equações são equivalentes e que $4w_1 - 2w_2 = 0 \Rightarrow w_2 = 2w_1$, logo $\vec{w} = (1, 2)$ é um autovetor de M associado a $\lambda_1 = 0$. Determinando $\vec{f}_1 = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, temos que $\vec{f}_2 = \left(\frac{-2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$. Segue daí que

$$N = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{-2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow N^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{-2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} N^T(D, E) &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{-2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -18 \\ -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10\sqrt{5} \\ 4\sqrt{5} \end{bmatrix}. \\ \Rightarrow \langle N^T(D, E), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle &= \langle (-10\sqrt{5}, 4\sqrt{5}), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle = -10\sqrt{5}\bar{x} + 4\sqrt{5}\bar{y}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \bar{\delta} : 5\bar{y}^2 - 10\sqrt{5}\bar{x} + 4\sqrt{5}\bar{y} + 39 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 5\left(\bar{y}^2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}\bar{y}\right) &= 10\sqrt{5}\bar{x} - 39 \\
 \Leftrightarrow 5\left(\bar{y}^2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}\bar{y} + \frac{4}{5}\right) &= 10\sqrt{5}\bar{x} - 39 + 4 \\
 \Leftrightarrow 5\left(\bar{y} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 &= 10\sqrt{5}\left(\bar{x} - \frac{7\sqrt{5}}{10}\right) \\
 \Leftrightarrow \left(\bar{y} - \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right)^2 &= \frac{\left(\bar{x} - \frac{7\sqrt{5}}{10}\right)}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{40}}.
 \end{aligned}$$

Tranta-se, portanto, de uma equação de uma parábola cuja reta focal é $y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, o vértice é o ponto $\left(\frac{7\sqrt{5}}{10}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ e o parâmetro p , distância do foco à reta diretriz é $\frac{\sqrt{5}}{40}$.

Entretanto, como vimos na seção 2 deste trabalho, se a transladarmos por um vetor $(\alpha, \beta) = \left(\frac{7\sqrt{5}}{10}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, conseguimos uma parábola cujo vértice coincide com a origem do sistema de coordenadas, deixando a equação um tanto quanto mais simples: $\bar{\varphi} : \bar{y}^2 = \frac{\bar{x}}{\sqrt{5}/20}$.

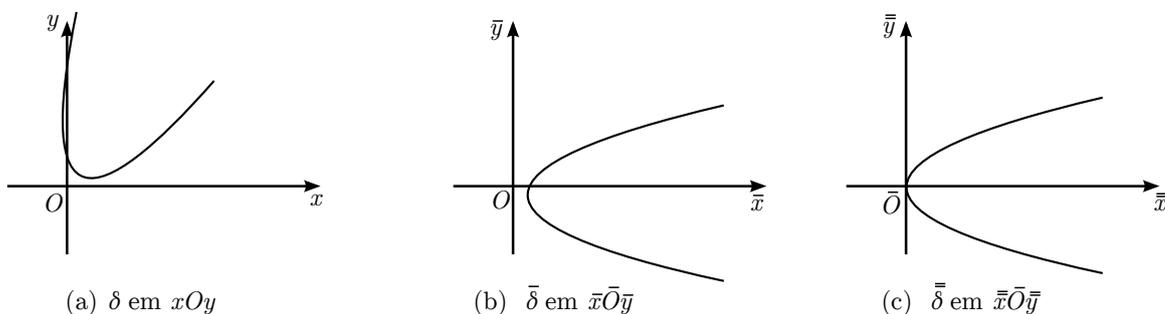


Figura 21: Rotação e translação da parábola $4x^2 - 4xy + y^2 - 18x - 16y + 39 = 0$.

□

4 Considerações finais

Utilizando-se apenas de sistemas e multiplicação de matrizes, conteúdos ministrados no Ensino Médio, vimos que é possível identificar qual é a cônica representada por uma equação geral do segundo grau. Justamente por reunir geometria analítica, vetores, trigonometria, matrizes e sistemas de equações, trabalhar com a rotação e a translação de curvas no plano pode ser uma atividade engrandecedora para os alunos, além de poder ser utilizada para revisar esses assuntos.

Vale ressaltar que o que foi apresentado aqui pode ser estendido às demais curvas estudadas no Ensino Médio, como os gráficos gerados por funções trigonométricas, afins, logarítmicas, exponenciais, etc.

A rotação e a translação em \mathbb{R}^2 pode ainda ser utilizado na resolução de problemas em geometria plana, além de situações envolvendo vetores em Física. Portanto, o estudo de equações gerais do segundo grau deveria ser mais abordado na educação básica, ainda que em turmas específicas, destinadas à alunos com maior interesse pela Matemática.

Referências

- [1] CAMARGO, IVAN DE; BOULOS, PAULO. *Geometria analítica, um tratamento vetorial*. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.
- [2] FEITOSA, MIGUEL OLIVA. *Cálculo vetorial e geometria analítica: exercícios propostos e resolvidos*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 1983.
- [3] HOWARD, ANTON; RORRES, CHRIS. *Álgebra linear com aplicações*. 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- [4] JULIANELLI, JOSÉ ROBERTO. *Cálculo vetorial e geometria analítica*. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2008.
- [5] LIMA, ELON LAJES. *Geometria analítica e álgebra linear*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [6] OLIVA, WALDYR MONIZ. *Vetores e geometria*. 1. ed. São Paulo: Edgard Blucher; Brasília: INL, 1973.