

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática



Dissertação de Mestrado em Matemática

3-Variedades Residualmente Livres

por

Jhoel Estebany Sandoval Gutierrez

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Sheila Campos Chagas

Brasília-DF

2014

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

3-Variedades Residualmente Livres

por

Jhoel Estebany Sandoval Gutierrez*

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 2013.

Comissão examinadora:

Prof^a.Dr^a. Sheila Campos Chagas - UNB (Orientadora)

Prof.Dr. Darlan Rabelo Girão - UFC

Prof^a.Dr^a. Aline Gomes da Silva - UNB

* O autor foi bolsista CNPq durante a elaboração deste.

Agradecimentos

De uma forma muito especial a Deus que tem sido um ótimo pai e por me dar grandes oportunidades. Se eu cheguei até aqui foi pela sua ajuda.

A minha mãe, Hilda Gutierrez Rojas, e a meu pai, Elmer Sandoval Pelaez, pela educação, pelo forte incentivo e por todos os conselhos. À minha família, pela ajuda durante a graduação e o mestrado.

À minha orientadora Sheila Campos Chagas, por sua enorme paciência em responder minhas inúmeras perguntas, pela dedicação a este trabalho e pela experiência que pude adquirir com seus ensinamentos.

A minha grande amiga Vanderlene Silva pelos cuidados que me deu.

Ao Roberto Vila Gabriel e Josimar Ramirez Aguirre pela companhia.

A Emerson Melo, Cleilton Aparecido, Alex Carrazedo pelas discussões e sugestões no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo financiamento.

Resumo

Neste trabalho estudamos a classificação das 3-variedades compactas e conexas com bordo incompressível toral cujos grupos fundamentais são residualmente livres não triviais. Particularmente, se uma 3-variedade M é prima, orientável e possui grupo fundamental residualmente livre não trivial, então M é homeomorfa à $\Sigma \times S^1$, onde $\Sigma \neq D^2$ é uma superfície. Exporemos a demonstração feita por Henry Wilton em [35].

Palavras-chave: 3-variedade, grupo residualmente livre.

Abstract

In this work we study the classification of compact and connected 3-manifolds with incompressible toral boundary whose fundamental groups are residually free non-trivial. Particularly, if a 3-manifold M is prime and orientable and has fundamental group residually free non-trivial then M is homeomorphic to $\Sigma \times S^1$, where $\Sigma \neq D^2$ is a surface. We exhibit the demonstration obtained by Henry Wilton in [35].

Keywords: 3-manifold, free residually group.

Sumário

Introdução	1
1 PRELIMINARES	1
1.1 Construções livres	1
1.1.1 Grupos Livres	1
1.1.2 Geradores e Relações	6
1.1.3 Produtos Livres	7
1.1.4 Produtos Livres com subgrupo amalgamado	11
1.1.5 HNN-Extensões	17
1.2 Fundamentos da Topologia Algébrica	21
1.2.1 Definições Previas	21
1.2.2 Grupo Fundamental	25
1.2.3 Espaços De Recobrimento	28
1.2.4 Grupo fundamental da n -esfera (S^n), do Toro bidimensional (\mathbb{T}^2) e do Plano projetivo (P^2)	32
1.2.5 Retrações, Retrações de Deformação e Tipos de Homotopia	35
1.2.6 Teorema de Seifert-Van Kampen	40
1.2.7 Teorema de Classificação Das Superfícies Compactas e Conexas	41
1.3 Algumas definições e Resultados Importantes sobre 3-variedades .	44
1.4 3-Variedades Hiperbólicas	46
1.4.1 O Espaço \mathbb{H}^3 , o Modelo da Bola Unitária e Transformações de Möbius	47
1.4.2 Variedades Hiperbólicas sem bordo	48
1.4.3 Variedade hiperbólica Com Bordo	53

1.5	3-Varieties Fibradas De Seifert	54
1.5.1	Orbifolds	54
1.5.2	3-Variety fibrada de Seifert	62
1.5.3	Toro fibrado sólido	62
1.5.4	Garrada de Klein Fibrada sólida	64
1.5.5	Definição e Propriedades	64
1.5.6	Recobrimentos de uma variedade fibrada de Seifert	66
1.5.7	A Classe de Euler de uma variedade fibrada de Seifert	66
1.5.8	Grupo fundamental de uma variedade fibrada de Seifert	67
1.5.9	Geometrização de uma variedade fibrada de Seifert sem bordo	72
1.6	Fibrados sobre S^1 com fibra \mathbb{T}^2	73
1.6.1	Grupo Fundamental de um Fibrado sobre S^1 com fibra \mathbb{T}^2 e Relações com a Variedade Fibrada de Seifert	74
1.7	Teorema de Decomposição Toral e Teorema de Hiperbolização de Thurston	75
2	GRUPO RESIDUALMENTE LIVRE E GRUPO TOTALMENTE RESIDUALMENTE LIVRE	78
2.1	Grupos Residualmente Livres	78
2.2	Grupos Totalmente Residualmente livres	80
2.3	Grupos CSA e transitivos Comutativos	83
2.4	Relações entre grupo Residualmente livre e totalmente livre	85
2.5	Superfícies Residualmente livres	90
2.6	Produtos Amalgamados e HNN-extensões residualmente livres	92
2.7	Retratos virtuais sobre subgrupos cíclicos	94
3	GRUPOS RESIDUALMENTE LIVRES SOBRE 3-VARIEDADES	97
3.1	Grupos residualmente livres sobre uma variedade atoroidal e uma variedade hiperbólica	97
3.2	Grupos residualmente livres sobre uma variedade fibrada de Seifert	100
3.3	Grupos residualmente livres sobre uma variedade orientável fibrada sobre S^1 com fibra \mathbb{T}^2	119
3.4	Grupos residualmente livres sobre uma grafo variedade	121
4	CONCLUSÃO	129

Introdução

A teoria dos grupos residualmente livres, e, em particular, os grupos totalmente residualmente livres foram introduzidos por Benjamin Baumslag (veja [1]). Estas classes de grupos tem sido objeto de intenso estudo recentemente, a maior parte devido ao importante papel que grupos totalmente residualmente livres finitamente gerados (também conhecidos como grupos limite) possuem a mesma teoria que os grupos livres (veja [28], [15], [16]).

Um grupo G é residualmente livre se para cada elemento não-trivial g existe um homomorfismo f de G para um grupo livre de modo que $f(g)$ não é trivial, G é totalmente residualmente livre se o mesmo vale quando o elemento g é substituído por um conjunto finito de elementos não-triviais. Os grupos livres e abelianos livres de posto finito são exemplos de grupos que são residualmente livres e além destes, outros exemplos de grupos residualmente livres, são em sua maioria, os grupos fundamentais das superfícies não orientáveis, compactas e conexas. Este ultimo exemplo foi provado por Benjamin Baumslag em [1].

A investigação da propriedade residualmente finito para grupos fundamentais de variedades de dimensão menor o igual a três teve bastante êxito, por exemplo as 3-variedades de Haken têm grupo fundamental residualmente finito (veja [12]). Então, é natural perguntar se as 3-variedades são residualmente livres, esta pergunta foi feita por Leonid Potyagailo em [27]. Mas precisamente, ele questionou:

Que grupos fundamentais de 3-variedades são residualmente livres?

Estudamos o artigo de Henry Wilton intitulado *Residually free 3-manifolds* (veja [35]), onde ele classifica as 3-variedades compactas e conexas com bordo incompressível toral cujos grupos fundamentais são residualmente livres, respondendo assim parcialmente a pergunta citada acima, no sentido que, no caso das 3-variedades fechadas a demonstração é mais simples e responde na totalidade à

pergunta. Por outro lado, na ausência da hipótese do bordo incompressível toral a questão está ainda em aberto e as técnicas usadas não podem ser aplicadas uma vez que o Teorema de Rigidez de Mostow não é aplicável neste caso.

O principal resultado da dissertação é o seguinte:

Teorema Principal: Se M é uma 3-variedade compacta, conexa, prima com bordo incompressível toral (possivelmente vazio), então $\pi_1(M)$ é um grupo residualmente livre não trivial se, e somente se, M é uma variedade fibrada de Seifert sem singularidades e é uma das seguintes variedades:

- 1) M é orientável, o espaço base de M é uma superfície orientável, compacta e conexa $\Sigma \neq D^2$ com bordo (possivelmente vazio), $\pi_1(\Sigma)$ é um grupo residualmente livre e $M = \Sigma \times S^1$ com homomorfismo de avaliação trivial.
- 2) M é não orientável, o espaço base de M é uma superfície não orientável, compacta e conexa Σ com bordo (possivelmente vazio), $\pi_1(\Sigma)$ é um grupo residualmente livre e M é qualquer variedade fibrada de Seifert sem singularidades compacta e conexa com homomorfismo de avaliação trivial.
- 3) M é não orientável, o espaço base Σ de M é o plano projetivo e M é a variedade de fibrada de Seifert sem singularidades conexa e compacta com característica de Euler 1 e homomorfismo de avaliação trivial. (**Esta variedade também é chamada o fibrado não orientável de S^2 sobre S^1**).

Produtos livres de grupos residualmente livres nem sempre são residualmente livres. No Corolário 4.0.3 removemos a suposição de que a 3-variedade é prima e classificamos todas as 3-variedades conexas, compactas com bordo incompressível toral cujos grupos fundamentais são residualmente livres.

Este trabalho é organizado da seguinte forma. Na capítulo 1, lembramos algumas definições e proposições que usaremos durante o desenvolvimento do trabalho. Por exemplo, na seção 1.1 lembramos a teoria de produtos livre amalgamados e HNN-extensões. Na seção 1.2, mostramos algumas definições e proposições básicas da topologia algébrica. Nas seções 1.3, 1.4 , 1.5 mostraremos uma teoria básica de variedades hiperbólicas, 3-variedades fibradas de Seifert e fibrados sobre S^1 com fibra \mathbb{T}^2 , respectivamente. Por ultimo, na seção 1.6, mostraremos o Teorema de Decomposição toral e o Teorema de Hiperbolização de Thurston.

No capítulo 2 mostraremos a teoria de grupos residualmente livres e grupos totalmente residualmente livres. Nas seções 2.1 e 2.2 mostramos as definições e

propriedades a respeito dos grupos residualmente e totalmente livres. Na seção 2.3, mostraremos algumas propriedades de grupos, por exemplo

Quando um grupo é transitivo comutativo?

Na seção 2.4 mostraremos algumas relações entre os grupos residualmente livres e os grupos totalmente residualmente livres. Na seção 2.5 mostraremos quais são as superfícies com bordo ou as sem bordo que têm grupo fundamental residualmente livre. Na seção 2.7 mostraremos propriedades de grupos residualmente livres expressados como produtos amalgamados ou HNN-extensões. A seção 2.5 contém uma prova fundamental do teorema que afirma que os subgrupos cíclicos de um grupo residualmente livre são retratos virtuais do grupo que os contém.

No capítulo 3, aplicaremos a teoria desenvolvida nos capítulos 1 e 2 à 3-variedades compactas com bordo incompressível (possivelmente vazio). Na seção 3.1 mostraremos que as variedades hiperbólicas não têm grupo fundamental residualmente livre. Na seção 3.2, classificaremos as variedades fibradas de Seifert com grupo fundamental residualmente livre não trivial. Na seção 3.3, mostramos que uma 3-variedade orientável fibrada sobre S^1 com fibra \mathbb{T}^2 com grupo fundamental residualmente livre não trivial é um 3-toro. Na seção 3.4 mostraremos que uma 3-variedade compacta, irredutível, orientável com bordo incompressível e grupo fundamental residualmente livre não trivial tem decomposição total trivial, ou seja, um grafo variedade com grupo fundamental residualmente livre não trivial é uma variedade fibrada de Seifert.

Finalmente no capítulo 4, daremos as considerações finais, mostrando que variedades compactas, orientáveis, irredutíveis com bordo incompressível total (possivelmente vazio) têm grupo fundamental residualmente livre não trivial.

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1 - Construções livres

Nesta seção, abordaremos os conceitos de grupos livres, produtos livres, produtos livres amalgamados e HNN-extensões, que são fundamentais no estudo de decomposição de grupos. Além disso, estudaremos os Teoremas da Forma Normal para produtos livre amalgamados e HNN-extensões (Teoremas 1.1.31 e 1.1.39).

1.1.1 Grupos Livres

Definição 1.1.1. Sejam X um conjunto não vazio, F um grupo e $i : X \mapsto F$ uma função. O par (F, i) é chamado **livre** sobre X se para qualquer grupo H e toda função $f : X \mapsto H$, existe um único homomorfismo $\phi : F \mapsto H$ com $\phi \circ i = f$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & F \\ & \searrow f & \swarrow \exists! \phi \\ & & H \end{array}$$

Exemplos 1.1.2. Se F é o grupo cíclico infinito gerado por a , então para qualquer conjunto unitário $\{x\}$, considerando $i : X \mapsto F$ tal que $i(x) = a$ (gerador do grupo), temos que o par (F, i) é livre sobre X .

Na seguinte proposição veremos que se dois grupos livres têm a mesma base, então eles são isomorfos.

Proposição 1.1.3. Sejam (F_1, i_1) e (F_2, i_2) livres sobre X . Então existe um isomorfismo $\phi : F_1 \mapsto F_2$ tal que $\phi \circ i_1 = i_2$, isto é, o grupo livre é único, a menos de isomorfismos.

Demonstração. Como (F_1, i_1) é livre sobre X , existe um homomorfismo $\phi : F_1 \rightarrow F_2$ com $\phi \circ i_1 = i_2$. Por outro lado, como (F_2, i_2) é livre sobre X , existe um homomorfismo $\psi : F_2 \rightarrow F_1$ com $\psi \circ i_2 = i_1$. Então $\psi \circ \phi \circ i_1 = i_1 = id_{F_1} \circ i_1$, onde id_{F_1} indica a aplicação identidade em F_1 . Pela propriedade da unicidade, temos $\psi \circ \phi = id_{F_1}$. Analogamente, $\phi \circ \psi = id_{F_2}$, então ϕ é um isomorfismo. ■

Proposição 1.1.4. *Seja (F, i) livre sobre X . Temos que :*

- i) Se existe um grupo G e uma função injetiva $f : X \rightarrow G$, então i é injetiva.*
- ii) $\wp(X)$, o conjunto das partes de X é um grupo com a operação binária sendo a diferença simétrica, e $x \mapsto \{x\}$ é injetiva.*
- iii) i é injetiva.*

Demonstração. (i) Suponhamos que exista um grupo G tal que $f : X \rightarrow G$ seja injetiva. Como F é livre sobre X , para qualquer função $f : X \rightarrow G$, existe um único homomorfismo $\phi : F \rightarrow G$ tal que $\phi \circ i = f$. Mas, se f é injetiva segue que i injetiva. É fácil verificar (ii). Finalmente, segue da proposição anterior que se F é livre sobre X , podemos considerar X como um subconjunto de F . Assim, (iii) segue de (i) e (ii), considerando $G = \wp(X)$ e $f : X \rightarrow \wp(X)$, $x \mapsto \{x\}$. ■

Estamos interessados agora em responder se dado um conjunto X , existe um grupo F e uma aplicação $i : X \rightarrow F$ (que pode ser a inclusão) tal que (F, i) é livre sobre X .

Seja X um conjunto qualquer não vazio. Denotemos por $M(X)$ o conjunto de todas sequências $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, ($n \geq 0$) de elementos de X (o caso $n = 0$ corresponde à sequência vazia e os elementos x_{ij} não são necessariamente distintos). Podemos definir uma multiplicação sobre $M(X)$ dada pela justaposição, isto é,

$$(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})(x_{j_1}, \dots, x_{j_m}) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n}, x_{j_1}, \dots, x_{j_m}).$$

Esta multiplicação é obviamente associativa com um elemento identidade (ou neutro) como sendo a sequência vazia, que vamos denotar por 1 ou $()$. Também a aplicação $X \rightarrow M(X)$; $x \mapsto (x)$ é obviamente injetiva, e se identificamos (x) com x , todo elemento de $M(X)$ pode ser unicamente escrito como um produto $x_{i_1} \dots x_{i_n}$. Portanto, temos que $M(X)$ é um monóide que é chamado de monóide livre sobre X .

Seja \bar{X} um conjunto com $X \cap \bar{X} = \emptyset$ e tal que existe uma bijeção $\varphi : X \rightarrow \bar{X}$; $x \mapsto \varphi(x)$. Vamos denotar $\varphi(x)$ por x^{-1} e (x) por x^1 . Podemos considerar agora os elementos do monóide $M(X \cup \bar{X})$, tais elementos são chamados palavras em

X . Se $u \in M(X \cup \overline{X})$ e $u = y_{i_1} \dots y_{i_n}$, com $y_{i_r} \in X \cup \overline{X}$ então n é chamado o comprimento de u , e é denotado por $|u|$ ou $l(u)$, e os elementos y_{i_r} são chamados letras de u .

Uma palavra $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$, $\epsilon_r = \pm 1$ é chamada **palavra reduzida** se, para $1 \leq r \leq n-1$, temos $i_{r+1} \neq i_r$ ou $i_{r+1} = i_r$, mas $\epsilon_{r+1} \neq -\epsilon_r$; a palavra vazia é também dita reduzida. Seja $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ uma palavra não reduzida, isto é, tal que $i_{r+1} = i_r$ e $\epsilon_{r+1} = -\epsilon_r$. Dizemos que w' é obtida de w por uma redução elementar se $w' = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_{r-1}}^{\epsilon_{r-1}} x_{i_{r+2}}^{\epsilon_{r+2}} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$, onde $i_{r+1} = i_r$ e $\epsilon_{r+1} = -\epsilon_r$.

Agora consideraremos sobre o monóide $M(X \cup \overline{X})$, a seguinte relação

$$w \sim w' \text{ se, e somente se, } w = w'$$

ou existe uma sequência $w = w_1 \dots w_k = w'$ tal que, para $1 \leq j \leq k-1$, ou w_{j+1} é obtido de w_j por uma redução elementar, ou w_j é obtido de w_{j+1} por uma redução elementar.

É fácil ver que, se $w = w'$, então $u.w.v \sim u.w'.v$ para quaisquer $u, v \in M(X \cup \overline{X})$. Se além disso, $u \sim u'$, então $u.w \sim u'.w'$. Segue que a multiplicação em $M(X \cup \overline{X})$ induz uma multiplicação em $F(X) := M(X \cup \overline{X})/\sim$, o conjunto das classes de equivalências, e esta multiplicação é associativa com um elemento identidade (neutro) 1, (a classe da sequência vazia). Ainda, $F(X)$ é um grupo, uma vez que se $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ e $w' = x_{i_n}^{-\epsilon_n} \dots x_{i_1}^{-\epsilon_1}$, temos $w.w' \sim 1$. A inclusão $X \subset M(X \cup \overline{X})$ induz uma aplicação (injetiva) $i : X \mapsto F(X)$; $x \mapsto \bar{x}$ (a classe da palavra reduzida), onde $F(X) = M(X \cup \overline{X})/\sim$ é claramente gerado por $i(X)$.

Teorema 1.1.5. *Sejam $(F(X), i)$ como definido anteriormente. Então $(F(X), i)$ é livre sobre X .*

Demonstração. Já vimos que $F(X)$ construído como acima é um grupo. Seja $f : X \mapsto G$ uma aplicação. Claramente, esta aplicação estende-se a uma aplicação $M(X \cup \overline{X}) \mapsto G$ dada por $x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n} \mapsto f(x_{i_1})^{\epsilon_1} \dots f(x_{i_n})^{\epsilon_n}$ que preserva multiplicação.

Note que, se $i_{r+1} = i_r$, $\epsilon_{r+1} = -\epsilon_r$, então

$$\begin{aligned} f(u) &= f(x_{i_1})^{\epsilon_1} \dots f(x_{i_n})^{\epsilon_n} \\ &= f(x_{i_1})^{\epsilon_1} \dots f(x_{i_{r-1}})^{\epsilon_{r-1}} f(x_{i_{r+2}})^{\epsilon_{r+2}} \dots f(x_{i_n})^{\epsilon_n} \\ &= f(u'), \end{aligned}$$

onde u' foi obtido de u por uma redução elementar.

Portanto, esta aplicação induz um homomorfismo $\phi : F(X) \mapsto G$, dado por $\bar{u} \mapsto f(u)$, onde \bar{u} indica a classe de equivalência de u , que satisfaz obviamente $\phi \circ i = f$. Como $i(X)$ gera $F(X)$, a aplicação é única. ■

No seguinte teorema provaremos que cada elemento de um grupo livre tem uma única palavra reduzida.

Teorema 1.1.6. (*Forma Normal para Grupos Livres*) *Seja (F, i) livre sobre X . Pela Proposição 1.1.3, podemos supor $F(X) = M(X \cup \bar{X})/\sim$, como definido anteriormente. Então, existe exatamente uma palavra reduzida em cada classe de equivalência.*

Demonstração. É claro que toda classe de equivalência contém pelo menos uma palavra reduzida.

A unicidade será provada pelo método de Van Der Waerden. Seja S o conjunto de todas as sequências finitas $(x_{i_1}^{\epsilon_1}, \dots, x_{i_n}^{\epsilon_n})$, $n \geq 0$, $\epsilon_r = \pm 1$, $1 \leq r \leq n$, e seja $G = B_{ij}(S)$ o conjunto das permutações de S . Tome $x^\epsilon \in X \cup \bar{X}$. Então a aplicação que associa

$$\begin{aligned} (x_{i_1}^{\epsilon_1}, \dots, x_{i_n}^{\epsilon_n}) &\mapsto (x^\epsilon, x_{i_1}^{\epsilon_1}, \dots, x_{i_n}^{\epsilon_n}), \text{ a menos que } x_{i_1} = x \text{ e } \epsilon \cdot \epsilon_1 = 1, \\ (x_{i_1}^{\epsilon_1}, \dots, x_{i_n}^{\epsilon_n}) &\mapsto (x_{i_2}^{\epsilon_2}, \dots, x_{i_n}^{\epsilon_n}), \text{ se } x_{i_1} = x \text{ e } \epsilon \cdot \epsilon_1 = 1, \end{aligned}$$

é obviamente uma permutação (bijeção) de S , que nós denotamos por $f(x^\epsilon)$. Portanto, temos uma aplicação $f : X \cup \bar{X} \mapsto G$, dado por $x^\epsilon \mapsto f(x^\epsilon)$.

Notemos que $f(x) \circ f(x^{-1}) = id$, assim, $f(x^\epsilon) = f(x)^\epsilon$. Tal aplicação induz pelo fato de $F(X)$ ser livre sobre X , como já foi justificado anteriormente, um homomorfismo $\phi : F(X) \mapsto G$, onde dado $\alpha \in F(X) = M(X \cup \bar{X})/\sim$, se $\alpha = \overline{y_1^{\epsilon_1} \dots y_j^{\epsilon_j} y_{j+1}^{\epsilon_{j+1}} \dots y_n^{\epsilon_n}}$, (com $y_1^{\epsilon_1} \dots y_n^{\epsilon_n}$ não necessariamente reduzida) definimos $\phi(\alpha) := f(y_1)^{\epsilon_1} \circ \dots \circ f(y_n)^{\epsilon_n}$. Observemos que o fato de ϕ estar bem definida, isto é, independe do representante escolhido para os elementos de $F(X)$, segue do fato de que $f(x) \circ f(x^{-1}) = id$, pois, por exemplo, se $y_j^{\epsilon_j} \cdot y_{j+1}^{\epsilon_{j+1}} = 1$, então $f(y_j)^{\epsilon_j} \circ f(y_{j+1})^{\epsilon_{j+1}} = id$.

Além disso, $\phi \circ i = f$, pois dado $x \in X$, então $\phi(i(x)) = \phi(\bar{x}) = f(x)$.

Seja agora $\beta \in F(X)$ e $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ uma palavra reduzida na classe de β , isto é, $\bar{w} = \beta$. É fácil ver que se $() \in S$ é uma sequência vazia, então $\phi(\beta)() = \phi(\bar{w})() = (x_{i_1}^{\epsilon_1}, \dots, x_{i_n}^{\epsilon_n})$. Pela igualdade de sequências, segue que w é a única palavra reduzida na classe $\beta = \bar{w}$ e é determinada por $\phi(\beta)()$. ■

Corolário 1.1.7. *Nas condições do teorema anterior, temos que $i : X \mapsto F(X)$ é injetiva.*

Demonstração. Se $x, x_1 \in X$, com $x \neq x_1$, então x, x_1 dão origem a palavras reduzidas distintas (também denotadas por x, x_1). Assim, x e x_1 não são equivalentes.

■

Poderíamos definir $F(X)$ como o conjunto das palavras reduzidas com a multiplicação induzida. Entretanto, não seria tão fácil mostrar a associatividade. Também, este método confunde duas questões importantes, a existência do grupo livre e a forma normal de seus elementos, pois ambas aparecem juntas. Normalmente, em questões algébricas, é fácil provar a existência de um objeto livre, mas é extremamente difícil encontrar a forma normal dos elementos.

Seja X um subconjunto de um grupo F e $i : X \mapsto F$ a inclusão. Se (F, i) é livre sobre X , chamamos X uma base de F , e simplesmente nos referimos a F como um grupo livre. Um grupo livre F tem muitas bases. Se θ é qualquer automorfismo de F então $\theta(X)$ é uma base se, e somente se, X também é.

Definição 1.1.8. O **posto** de um grupo livre é a cardinalidade de sua base livre X . Se G é um grupo qualquer, o posto de G é o posto do menor grupo livre F tal que existe uma aplicação sobrejetiva $\phi : F \mapsto G$.

O posto de um grupo livre é tudo que precisamos saber para caracterizá-lo, desta forma temos a seguinte proposição.

Proposição 1.1.9. *Sejam F_1 e F_2 dois grupos livres com bases X_1 e X_2 . Se X_1 e X_2 têm a mesma cardinalidade, então $F_1 \cong F_2$.*

Demonstração. Temos que existe uma bijeção $\psi : X_1 \mapsto X_2$. Podemos considerar $\psi : X_1 \mapsto F_2$ e $\psi^{-1} : X_2 \mapsto F_1$ que podem ser estendidas (pela definição de grupos livres) a homomorfismos $\bar{\psi} : F_1 \mapsto F_2$ e $\bar{\psi}^{-1} : F_2 \mapsto F_1$. Vamos mostrar que $(\bar{\psi}^{-1}) = (\bar{\psi})^{-1}$. Quando restrita a X_2 , $\bar{\psi} \circ \bar{\psi}^{-1} : F_2 \mapsto F_1$ é a inclusão de X_2 em F_2 . Como a identidade $id_{F_2} : F_2 \mapsto F_2$ também é uma extensão dessa inclusão, temos pela unicidade que $\bar{\psi} \circ \bar{\psi}^{-1} = id_{F_2}$. De maneira análoga provamos que $\bar{\psi}^{-1} \circ \bar{\psi} = id_{F_1}$ é a identidade em F_1 . Logo, F_1 e F_2 são isomorfos. ■

Proposição 1.1.10. *Seja X um subconjunto de um grupo G . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) G é livre com base X ;
- (ii) qualquer elemento de G pode ser unicamente escrito como $x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$, $n \geq 0$, $x_{i_r} \in X$, $\epsilon_r = \pm 1$, onde $\epsilon_{r+1} \neq -\epsilon_r$ se $i_{r+1} = i_r$ e $1 \leq r \leq n-1$;

(iii) X gera G e nenhum elemento $x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$, tal que $n \geq 0$, $x_{i_r} \in X$, $\epsilon_r = \pm 1$, com $\epsilon_{r+1} \neq -\epsilon_r$ se $i_{r+1} = i_r$ ($r < n$), é igual ao elemento identidade.

Demonstração. Podemos facilmente verificar que (ii) e (iii) são equivalentes. Ainda, se G é livre sobre X , então G tem estas propriedades (isto é, (i) \Rightarrow (ii) e (iii)).

Suponha que G satisfaz (iii). Existe obviamente um homomorfismo $F(X) \mapsto G$ que é a identidade sobre X . Esta aplicação é sobrejetora, uma vez que X gera G e é injetiva pela hipótese de que a imagem de uma palavra reduzida não trivial não é o elemento identidade. E assim G é livre sobre X . ■

Corolário 1.1.11. *Suponhamos que X gera G . Seja H um grupo e $\phi : G \mapsto H$ um homomorfismo de grupos que é injetivo sobre X e tal que $\phi(G)$ é livre com base $\phi(X)$, então G é livre com base X .*

Demonstração. Basta notar que a condição (iii) vale para X , uma vez que vale para $\phi(X)$. ■

1.1.2 Geradores e Relações

Faremos nesta subseção uma caracterização para grupos, iniciando com um importante resultado.

Proposição 1.1.12. *Qualquer grupo G é um quociente de algum grupo livre.*

Demonstração. Considere $(F(G), i)$ o grupo livre gerado por G . A aplicação identidade $id : G \mapsto G$ se estende a um homomorfismo $F(G) \mapsto G$ que é sobrejetor:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{i} & F(G) \\ & \searrow id & \swarrow \exists! \phi \\ & & G \end{array}$$

Assim, $G \simeq F(G)/Ker\phi$. ■

Definição 1.1.13. Sejam G um grupo, X um conjunto e $\phi : F(X) \mapsto G$ um epimorfismo. Então X é chamado um conjunto de geradores para G sob ϕ e a família $\{\phi(x) \mid x \in X\}$ é chamada uma **família de geradores** de G . (Claramente, $G = \langle \phi(x) \mid x \in X \rangle$). Chamamos $Ker(\phi)$ o conjunto de relações de G (sob ϕ).

Se $u = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ e $v = x_{j_1}^{\eta_1} \dots x_{j_m}^{\eta_m}$ são palavras (não necessariamente reduzidas) tais que uv^{-1} representam um elemento do $\text{Ker}(\phi)$ e $\phi(x_i) = a_i$, dizemos que $a_{i_1}^{\epsilon_1} \dots a_{i_n}^{\epsilon_n} = a_{j_1}^{\eta_1} \dots a_{j_m}^{\eta_m}$ é uma **relação** em G . Em particular, se u representa um elemento de $\text{Ker}(\phi)$, então $a_{i_1}^{\epsilon_1} \dots a_{i_n}^{\epsilon_n}$ é uma relação em G .

Para qualquer subconjunto S de um grupo H , $\langle S \rangle^H$ é chamado **fecho normal** de $\langle S \rangle$ em H , isto é, o menor subgrupo normal gerado por $\langle S \rangle$ em H .

Dizemos que $\mathfrak{R} \subseteq F(X)$ é um conjunto de relações de G (sob ϕ) se $\text{ker } \phi$ é o fecho normal de \mathfrak{R} , ou seja $\langle \mathfrak{R} \rangle^{F(X)} = \text{Ker}(\phi)$. Temos então um conjunto correspondente de relações de G .

Definição 1.1.14. Uma apresentação $\langle X; \mathfrak{R} \rangle^\phi$ de G consiste de um conjunto X , um epimorfismo ϕ de $F(X)$ em G , e um conjunto \mathfrak{R} de relações de G (sob ϕ). Frequentemente, omitimos ϕ , especialmente quando ϕ é a aplicação natural $F(X) \mapsto F(X)/\langle \mathfrak{R} \rangle^{F(X)}$ ou quando ϕ é injetiva sobre X . Escrevemos $G = \langle X | \mathfrak{R} \rangle^\phi$, ou ainda, mais simplesmente, $\langle X | \mathfrak{R} \rangle$. A notação $\langle X | \mathfrak{R} \rangle$ é muito usada. Se X é finito, G é dito **finamente gerado**. Se X e \mathfrak{R} são finitos, G é dito **finamente apresentado** e a apresentação é dita finita.

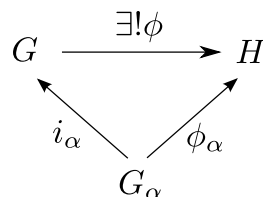
Exemplos 1.1.15.

- (1) Um grupo livre $F(X)$ tem $\langle X | \rangle$ como sua apresentação.
- (2) Uma apresentação para o grupo cíclico finito de ordem m é $\langle x; x^m \rangle$, pois $\frac{F(X)}{\langle \mathfrak{R}^{F(X)} \rangle} \cong \frac{\langle x \rangle}{\langle x^m \rangle} \cong \mathbb{Z}_m$.

Nas próximas subseções desta seção, abordaremos conceitos importantes para alcançarmos nosso primeiro objetivo que consiste na prova dos teoremas da Forma Normal para elementos dos produtos livres amalgamados e das HNN-extensões.

1.1.3 Produtos Livres

Definição 1.1.16. Sejam G_α , $\alpha \in \Lambda$ uma família de grupos, G um grupo e $i_\alpha : G_\alpha \mapsto G$ são homomorfismos tais que para quaisquer grupo H e homomorfismos $\phi_\alpha : G_\alpha \mapsto H$ existe um único homomorfismo $\phi : G \mapsto H$ com $\phi_\alpha = \phi \circ i_\alpha$, para todo α . Então $(G, \{i_\alpha\})$ é chamado um **produto livre dos grupos** G_α .



Da mesma forma que em grupos livres, uma pergunta natural é se produtos livres existem, são únicos e se as aplicações i_α são monomorfismos.

Proposição 1.1.17. *Se $(G, \{i_\alpha\})$ e $(H, \{j_\alpha\})$ são produtos livres dos grupos G_α , então existe um (único) isomorfismo $\phi : G \rightarrow H$ tal que $\phi \circ i_\alpha = j_\alpha$, para todo α .*

Demonstração. É similar à demonstração dada na Proposição 1.1.3, basta considerar os diagramas,

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\exists! \phi} & H \\ & \swarrow i_\alpha \quad \searrow j_\alpha & \\ & G_\alpha & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\exists! \psi} & G \\ & \swarrow j_\alpha \quad \searrow i_\alpha & \\ & G_\alpha & \end{array}$$

onde no primeiro diagrama usamos que G é o produto livre dos G_α e no segundo, que H é o produto livre dos G_α , obtendo assim os homomorfismos ϕ e ψ satisfazendo $\phi \circ i_\alpha = j_\alpha$ e $\psi \circ j_\alpha = i_\alpha$.

Além disso, $(\phi \circ \psi) \circ j_\alpha = j_\alpha = id \circ j_\alpha$, onde segue da unicidade que $\phi \circ \psi = id_H$. Similarmente, $\psi \circ \phi = id_G$. ■

Proposição 1.1.18. *Seja $(G, \{i_\alpha\})$ um produto livre de grupos G_α , $\alpha \in \Lambda$, então:*

- i) $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ é um monomorfismo se existir um grupo H e homomorfismos $\phi_\beta : G_\beta \rightarrow H$, para todo $\beta \in \Lambda$, de modo que ϕ_α é monomorfismo;*
- ii) i_α é um monomorfismo, para todo $\alpha \in \Lambda$.*

Demonstração.

- i) Considere H e $\phi_\beta : G_\beta \rightarrow H$ homomorfismo com ϕ_α monomorfismo. Pela definição de produto livre, existe um único $\phi : G \rightarrow H$ fazendo o seguinte diagrama comutar $\forall \beta \in \Lambda$.*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\exists! \phi} & H \\ & \swarrow i_\beta \quad \searrow \phi_\beta & \\ & G_\beta & \end{array}$$

Em particular, para $\beta = \alpha$, temos que $\phi \circ i_\alpha = \phi_\alpha$, e como ϕ_α é monomorfismo, segue que i_α é monomorfismo.

- ii) Para cada α (fixado), considere $H = G_\alpha$. Tome $\phi_\beta : G_\beta \mapsto H$ tal que $\phi_\beta = id_{G_\alpha}$ se $\beta = \alpha$ e $\phi_\beta = 0$, para $\beta \neq \alpha$. Por (i) segue o resultado. ■

Proposição 1.1.19. *Qualquer família de grupos G_α tem um produto livre.*

Demonstração. Para cada α , seja $\langle X_\alpha | \mathfrak{R}_\alpha \rangle^{\phi_\alpha}$, (onde $\phi_\alpha : F(X_\alpha) \mapsto G_\alpha$) uma apresentação de G_α . Podemos assumir que $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$, se $\alpha \neq \beta$ e daí, $G_\alpha \cap G_\beta = \{1\}$, para $\alpha \neq \beta$. Considere $G = \langle \bigcup X_\alpha | \bigcup \mathfrak{R}_\alpha \rangle$ e $i_\alpha : G_\alpha \mapsto G$ o homomorfismo canônico. Então $(G, \{i_\alpha\})$ será um produto livre. Com efeito, sejam H um grupo e $f_\alpha : G_\alpha \mapsto H$ homomorfismos. Existe um homomorfismo $F(\bigcup X_\alpha) \mapsto H$ obtido da aplicação $\bigcup X_\alpha \mapsto H$ que leva x_α em $(f_\alpha \circ \phi_\alpha)(x_\alpha)$. Como esta aplicação envia $\bigcup \mathfrak{R}_\alpha$ em 1, ele define então um homomorfismo $f : G \mapsto H$, visto que $G = \frac{F(\bigcup X_\alpha)}{\langle \bigcup \mathfrak{R}_\alpha \rangle^{F(\bigcup X_\alpha)}}$. Claramente, $f_\alpha = f \circ i_\alpha$. Também f é único, uma vez que G é gerado por $\bigcup i_\alpha(G_\alpha)$, ou ainda, por $\bigcup i_\alpha(\phi_\alpha(X_\alpha))$. ■

O produto livre dos grupos G_α é usualmente denotado por $*_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$, ou simplesmente por $*G_\alpha$ e o produto livre de dois grupos G_1 e G_2 por $G_1 * G_2$. Temos que $G_1 * G_2 \simeq G_2 * G_1$ e $(G_1 * G_2) * G_3 \simeq G_1 * (G_2 * G_3)$. Regras mais gerais de comutatividade e associatividade também valem.

Teorema 1.1.20. (Forma Normal para Produtos Livres) *Seja $G = *G_\alpha$ o produto livre dos G_α via homomorfismos $i_\alpha : G_\alpha \mapsto G$. Então,*

- (i) *Os Homomorfismos $i_\alpha : G_\alpha \mapsto G$ são monomorfismos;*
(ii) *Considerando, para todo α , i_α como a inclusão, qualquer elemento $g \in G$ pode ser unicamente escrito como $g_1 \dots g_n$, onde $n \geq 0$, $1 \neq g_i \in G_{\alpha_i}$ e $\alpha_r \neq \alpha_{r+1}$, $r = 1, \dots, n-1$, ou seja, os elementos (letras) adjacentes pertencem a G_α 's distintos.*

Demonstração. Denotaremos, por conveniência, $i_\alpha(g_\alpha)$ por $\overline{g_\alpha}$, (ao invés de g_α), para $g_\alpha \in G_\alpha$. (Note que (i) já foi provada por outro método (Proposição 1.1.18 (ii))). Provaremos o teorema se mostramos que para qualquer $u \in G$ existem únicos elementos $g_1 \dots g_n$ com $n \geq 0$, $1 \neq g_i \in G_{\alpha_i}$, $\alpha_r \neq \alpha_{r+1}$ e $u = \overline{g_1} \dots \overline{g_n}$. Como a construção de G (dada na proposição anterior) mostra que $\bigcup i_\alpha(G_\alpha)$ gera G , então qualquer u pode certamente ser escrito como $\overline{g_1} \dots \overline{g_n}$, com $n \geq 0$ e $1 \neq g_i \in G_{\alpha_i}$, onde podemos ter $\alpha_r = \alpha_{r+1}$ para algum r . Se $\alpha_{r+1} = \alpha_r$ e $g_{r+1} \neq g_r^{-1}$ podemos escrever $u = \overline{g_1} \dots \overline{g_{r-1} g_{r+2}} \dots \overline{g_n}$. Por indução sobre n , u pode ser escrito na forma requerida em (ii).

Para provar a unicidade vamos seguir o *método de Van der Waerden*. Seja S o conjunto de todas as sequências finitas (g_1, \dots, g_n) $n \geq 0$, $1 \neq g_i \in G_{\alpha_i}$, $\alpha_r \neq \alpha_{r+1}$; em particular, $()$, a sequência vazia, está em S .

Tome $g_\alpha \in G_\alpha$. Podemos definir uma aplicação de S em S , que vamos denotar por $\psi_\alpha(g_\alpha)$, da seguinte forma:

$$\begin{cases} (g_1, \dots, g_n) \mapsto (g_\alpha, g_1, \dots, g_n), \text{ se } \alpha_1 \neq \alpha \text{ (lembre-se que } g_1 \in G_{\alpha_1}), \\ (g_1, \dots, g_n) \mapsto (g_\alpha g_1, \dots, g_{n-1}, g_n), \text{ se } \alpha_1 = \alpha \text{ e } g_\alpha g_1 \neq 1, \\ (g_1, \dots, g_n) \mapsto (g_1, \dots, g_{n-1}), \text{ se } \alpha_1 = \alpha \text{ e } g_\alpha g_1 = 1. \end{cases}$$

Então temos uma aplicação $\psi_\alpha : G_\alpha \mapsto \mathfrak{S}(S, S)$; $g_\alpha \mapsto \psi_\alpha(g_\alpha)$, onde $\mathfrak{S}(S, S)$ denota o conjunto das aplicações de S em S , e podemos facilmente ver que ψ_α preserva aplicações, isto é, $\phi_\alpha(g_\alpha \cdot g'_\alpha) = \phi_\alpha(g_\alpha) \circ \phi_\alpha(g'_\alpha)$. Ainda, $\phi_\alpha(g_\alpha) \in \beta_{ij}(S)$, o conjunto das bijeções de S , uma vez que $\phi_\alpha(g_\alpha)$ tem como inversa a aplicação $\phi_\alpha(g_\alpha^{-1})$. (*)

Seja $\phi : G \mapsto \beta_{ij}(S)$ o homomorfismo tal que $\phi_\alpha = \phi \circ i_\alpha$, isto é, ϕ é assim definida:

$$\phi(\overline{g_\alpha}) = \phi(i_\alpha(g_\alpha)) := \phi_\alpha(g_\alpha)$$

e mais geralmente, $\phi(\overline{g_1} \dots \overline{g_n}) = \phi_{\alpha_1}(g_1) \dots \phi_{\alpha_n}(g_n)$. Tal homomorfismo fica bem definido por (*). Tome $u \in G$ e escreva-o como $u = \overline{g_1 g_2} \dots \overline{g_n}$, $n \geq 0$; $1 \neq g_i \in G_{\alpha_i}$, $\alpha_r \neq \alpha_{r+1}$. Agora, pode-se verificar (por indução) que $\phi(u)() = (g_1, \dots, g_n)$ e então g_1, \dots, g_n são unicamente determinados por u . ■

Proposição 1.1.21. *Sejam G_α subgrupos de um grupo G . Então $G = *G_\alpha$ se, e só se, todo elemento de G pode ser unicamente escrito como $g_1 \dots g_n$, $n \geq 0$, $g_i \in G_{\alpha_i}$, $\alpha_r \neq \alpha_{r+1}$, $1 \leq r \leq n-1$.*

Demonstração. (Veja [5], proposição 23) Se $G = *G_\alpha$, então (considerando i_α como inclusões) a condição vale. Por outro lado, se a condição vale, a aplicação $*G_\alpha \mapsto G$ induzida pelas inclusões $G_\alpha \mapsto G$ é claramente um isomorfismo. ■

Definição 1.1.22. Seja $g \in *G_\alpha$, $g = g_1 \dots g_n$, $g_i \in G_{\alpha_i}$, $\alpha_r \neq \alpha_{r+1}$. Chamamos n o **comprimento** de g .

Exemplos 1.1.23. (1) *O grupo livre sobre X , $F(X)$, é igual ao produto livre $*C_x$ com $x \in X$, onde C_x indica o grupo cíclico infinito com gerador x .*

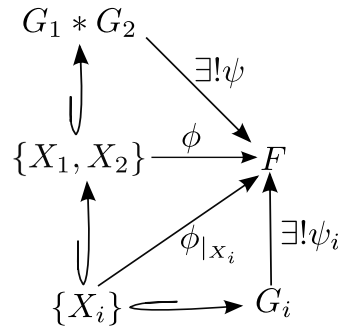
(2) *Seja \mathbb{Z}_2 o grupo cíclico de ordem 2. Então $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 = \langle a, b \mid a^2, b^2 \rangle \simeq \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^{-1}ab \rangle \simeq \langle a, c \mid a^2, (c^{-1}a)^{-2} \rangle \simeq \langle a, c; a^2, a^{-1}cac \rangle$. O último iso-*

morfismo nos diz que $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ é isomorfo ao grupo diedral infinito $D_\infty = \{x, y; x^2 = 1, xy = y^{-1}x\}$.

Proposição 1.1.24. Se G_1 é um grupo livre com base X_1 e G_2 é um grupo livre com base X_2 , então $G_1 * G_2$ é um grupo livre com base $\{X_1 \cup X_2\}$.

Demonstração. Seja $i : \{X_1, X_2\} \rightarrow G_1 * G_2$ a aplicação inclusão e F um grupo qualquer, provaremos que dada a aplicação $\phi : \{X_1, X_2\} \rightarrow F$, existe um único homomorfismo $\psi : G_1 * G_2 \rightarrow F$ tal que $\psi|_{\{X_1, X_2\}} = \phi$.

Considerando as aplicações $\phi|_{X_1}$ e $\phi|_{X_2}$ temos que, como G_1 e G_2 são grupos livres, então existem únicos homomorfismos $\psi_1 : G_1 \rightarrow F$ e $\psi_2 : G_2 \rightarrow F$ tal que $\psi_1|_{X_1} = \phi|_{X_1}$ e $\psi_2|_{X_2} = \phi|_{X_2}$. Assim, considerando as inclusões de G_1 e G_2 em $G_1 * G_2$ temos que, pela definição de produto livre de grupos, existe um único homomorfismo $\psi : G_1 * G_2 \rightarrow F$ tal que $\psi|_{G_1} = \psi_1$ e $\psi|_{G_2} = \psi_2$.

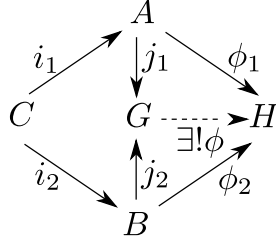


Agora só falta provar que $\psi|_{\{X_1 \cup X_2\}} = \phi$, de fato, seja $x \in X_i$, onde i pode ser 1 ou 2, logo $\phi(x) = \psi_i(x)$, além disso $\psi(x) = \psi_i(x)$. Portanto $\phi(x) = \psi(x)$, para todo $x \in \{X_1 \cup X_2\}$. ■

1.1.4 Produtos Livres com subgrupo amalgamado

Definição 1.1.25. Sejam C, A e B grupos, $i_1 : C \rightarrow A$, $i_2 : C \rightarrow B$ homomorfismos. Sejam G um grupo, $j_1 : A \rightarrow G$, $j_2 : B \rightarrow G$ homomorfismos. Chamamos (G, j_1, j_2) o push-out de C, A, B e (i_1, i_2) (ou simplesmente o push-out de (i_1, i_2)) se

- (i) $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$.
- (ii) Para qualquer grupo H e homomorfismos $\phi_1 : A \rightarrow H$ e $\phi_2 : B \rightarrow H$ com $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$ existe um único homomorfismo $\phi : G \rightarrow H$ com $\phi_r = \phi \circ j_r$ ($r = 1, 2$).



Exemplos 1.1.26. Considere os grupos cíclicos \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2 e \mathbb{Z}_3 e os homomorfismos canônicos $i_1 : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}_2$ tal que $i_1(x) = \bar{x}$ e $i_2 : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}_3$ tal que $i_2(x) = \bar{\bar{x}}$. Então o push-out de $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ e (i_1, i_2) é o grupo trivial $G = 0$ com os homomorfismos triviais $j_1 : \mathbb{Z}_2 \mapsto 0$ e $j_2 : \mathbb{Z}_3 \mapsto 0$. De fato, para qualquer grupo H e homomorfismo $\phi_1 : \mathbb{Z}_2 \mapsto H$, $\phi_2 : \mathbb{Z}_3 \mapsto H$, com $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$, considerando o homomorfismo óbvio $\phi : 0 \mapsto H$, temos $\phi \circ j_r = 0$, $r = 1, 2$. Agora, $\phi_r = 0$, pois chamando $\phi_1(\bar{1}) = h_0$ e $\phi_2(\bar{\bar{1}}) = h_1$ e usando a relação $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$, chegamos a $h_0 = h_1$. Como ϕ_1 e ϕ_2 são homomorfismos, temos que a ordem dos elementos h_0 e h_1 dividem 2 e 3, respectivamente. Assim, $o(h_0) = 1$ e então $h_0 = 0$. Logo, $\phi \circ j_r = 0 = \phi_r$, $r = 1, 2$, como desejado.

Mais geralmente, o push-out de $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m$ e homomorfismos canônicos, com n e m primos entre si, é o grupo trivial com os homomorfismos triviais $j_1 : \mathbb{Z}_n \mapsto 0$ e $j_2 : \mathbb{Z}_m \mapsto 0$.

Definição 1.1.27. Quando i_1 e i_2 são injetivos, G é chamado o **produto livre amalgamado de A e B com C amalgamado**, ou **produto livre de A e B amalgamado em C** . Neste caso, usualmente consideremos C como um subgrupo de A e B , identificando C com $i_1(C)$ e $i_2(C)$, respectivamente, e denotamos o push-out por

$$A *_C B.$$

Observação 1.1.28. i) Pode-se verificar facilmente que o push-out é único a menos de isomorfismo.

ii) Não faz sentido falar no "produto livre amalgamado $\mathbb{Z}_2 *_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_3$ ", pois não existem homomorfismos injetivos $i_1 : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}_2$ e $i_2 : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}_3$.

Teorema 1.1.29. Sejam C, A e B grupos. Qualquer par (i_1, i_2) de homomorfismos, com $i_1 : C \mapsto A$ e $i_2 : C \mapsto B$, tem um push-out.

Demonstração. Considere as apresentações dos grupos A e B , $A = \langle X_1, \mathfrak{R}_1 \rangle^{\varphi_1}$ e $B = \langle X_2, \mathfrak{R}_2 \rangle^{\varphi_2}$ com $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, isto é, X_1 é um conjunto, φ_1 um epimorfismo

de $F(X_1)$ em A e \mathfrak{R}_1 um conjunto de relações definidoras em A (sob φ_1). Similarmente, para B . Desta forma, temos que $A \simeq F(X_1)/\widetilde{\mathfrak{R}}_1$ e $B = F(X_2)/\widetilde{\mathfrak{R}}_2$, onde $\widetilde{\mathfrak{R}}_r$ é o menor subgrupo normal de $F(X_r)$ gerado por \mathfrak{R}_r , ($r = 1, 2$).

Seja Y um conjunto de geradores de C e escolha $w_{r_y} \in F(X)$ tal que $i_r(y) = \varphi_r(w_{r_y})$, $y \in Y, r = 1, 2$. (Note que se identificamos A e B com os quocientes acima e tomarmos φ_r as projeções naturais, então $i_1(y) = \overline{w_{1_y}}$ e $i_2(y) = \overline{w_{2_y}}$, onde $\overline{w_{1_y}}$ e $\overline{w_{2_y}}$ representam as classes dos elementos w_{1_y} e w_{2_y} nos quocientes A e B , respectivamente). Defina G como o grupo que tem apresentação

$$\langle X_1, X_2; \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \{w_{1_y} w_{2_y}, y \in Y\} \rangle$$

Para simplificar, denotaremos por J o subgrupo $\langle \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \widetilde{\{w_{1_y} w_{2_y}^{-1}, y \in Y\}} \rangle$ de $F(X_1, X_2)$ e por I_r , os subgrupos $\widetilde{\mathfrak{R}}_r$, $r = 1, 2$. Considere as aplicações $j_1 : A \mapsto G$ e $j_2 : B \mapsto G$ definidas a partir dos geradores X_1 de A e X_2 de B ; $j_r(x_r \cdot I_r) = x_r \cdot J$, $r = 1, 2$, onde estamos supondo $x_r \in X_r$ e estendidas de modo natural.

Observe que as aplicações j_r estão bem definidas, pois se $u \cdot I_r = v \cdot I_r$ então $v^{-1} \cdot u \in I_r \subset J$, ($r = 1, 2$).

Para ver que (G, j_1, j_2) é o push-out, seja H um grupo e considere $\phi : A \mapsto H$ e $\phi : B \mapsto H$ homomorfismos. Defina $\phi : G \mapsto H$ a partir dos geradores, isto é, $\phi(x_r \cdot J) = \phi(j_r(x_r \cdot I_r)) := \phi_r(x_r \cdot I_r)$, $x_r \in X_r, r = 1, 2$ e extenda para todo elemento de G :

$$\phi(z_1^{\epsilon_1} z_2^{\epsilon_2} \dots z_k^{\epsilon_k} \cdot J) = \phi_{s_1}(z_1^{\epsilon_1} \cdot I_{s_1}) \phi_{s_2}(z_2^{\epsilon_2} \cdot I_{s_2}) \dots \phi_{s_k}(z_k^{\epsilon_k} \cdot I_{s_k}),$$

onde

$$\begin{aligned} z_t \in X_1 &\Rightarrow s_t = 1, \text{ isto é } \phi_{s_t}(z_t^{\epsilon_t}) = \phi_1(z_t^{\epsilon_t} \cdot I_1) \\ z_t \in X_2 &\Rightarrow s_t = 2, \text{ isto é } \phi_{s_t}(z_t^{\epsilon_t}) = \phi_2(z_t^{\epsilon_t} \cdot I_2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}
& & F(X_1) & & \\
& & \downarrow \varphi_1 & & \\
& & A \simeq \frac{F(X_1)}{I_1} & & \\
& \nearrow i_1 & \downarrow j_1 & \searrow \phi_1 & \\
C = \langle Y \rangle & & G = \frac{F(X_1, X_2)}{J} & \xrightarrow{\exists! \bar{\phi}} & H \\
& \searrow i_2 & \uparrow j_2 & \nearrow \phi_2 & \\
& & B = \frac{F(X_2)}{I_2} & & \\
& & \uparrow \varphi_2 & & \\
& & F(X_2) & &
\end{array}$$

Claramente, $\phi \circ j_r = \phi_r$ ($r = 1, 2$). ■

Observação 1.1.30. 1) Se $A = \langle X_1, \mathfrak{R}_1 \rangle$, $B = \langle X_2, \mathfrak{R}_2 \rangle$ e Y é um conjunto de geradores de C , é usual também representar

$$G = \langle X_1, X_2; \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \{i_1(y)i_2(y)^{-1}, y \in Y\} \rangle.$$

2) É conveniente, às vezes, escrever $A *_{K \simeq L} B$ ou $A *_{i_2} B$, onde $K \subset A$, $L \subset B$, i_1 é a inclusão, i_2 um isomorfismo entre K e L . Neste caso, $A *_{K \simeq L} B = A * B / N$, onde N é o menor subgrupo normal de $A * B$ que contém os elementos da forma $i_1(x).i_2(x)^{-1} = x.i_2(x)^{-1}$, com $x \in K$.

Portanto, neste caso, temos a seguinte apresentação para $G = A *_{K \simeq L} B$, $G = \langle X_1, X_2 \mid \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \{x.i_2(x)^{-1}, \forall x \in K\} \rangle$.

Teorema 1.1.31. (Forma Normal para Produtos Livres com Subgrupo Amalgamados) Seja $G = A *_C B$ um produto livre amalgamado. Sejam T_A, T_B transversais à esquerda de C em A e B , respectivamente, com $1 \in T_A$, $1 \in T_B$ (isto é, T_A contém um membro de cada classe lateral à esquerda a C). Então,

(i) Qualquer elemento de G pode ser unicamente escrito como $\bar{u}_1 \dots \bar{u}_n \bar{c}$, onde $n > 0$, $c \in C$, denotando $j_1(a)$ por \bar{a} e $j_2(b)$ por \bar{b} , u_1, \dots, u_n são alternadamente elementos de $T_A \setminus \{1\}$ e $T_B \setminus \{1\}$;

(ii) Os homomorfismos $j_1 : A \rightarrow G$ e $j_2 : B \rightarrow G$ (da definição de produto livre amalgamado) são monomorfismos. Assim, considerando j_1 e j_2 como inclusões, qualquer elemento de G pode ser unicamente escrito como $u_1 \dots u_n c$, onde $n > 0$, $c \in C$ e u_1, \dots, u_n são alternadamente elementos de $T_A \setminus \{1\}$ e $T_B \setminus \{1\}$;

(iii) $j_1(A) \cap j_2(B) = C$.

Demonstração.

(i) Denotando temporariamente $j_1(a)$ por \bar{a} , é suficiente provar que, para qualquer $g \in G = A *_C B$, existem únicos u_1, \dots, u_n , com $n > 0$, $c \in C$, u_1, \dots, u_n elementos pertencentes alternadamente a $T_A \setminus \{1\}$ e $T_B \setminus \{1\}$ e $g = \bar{u}_1 \dots \bar{u}_n \bar{c}$.

Como a construção de produto livre amalgamado (ou ainda do push-out) mostra que $j_1(A) \cup j_2(B)$ gera G , qualquer $g \in G$ pode ser escrito como $g = \bar{g}_1 \dots \bar{g}_k$, $g_i \in A \cup B$. Se g_i e g_{i+1} estão ambos em A ou ambos em B , escrevemos $g = \bar{g}_1 \dots \bar{g}_{i-1} \overline{g_i g_{i+1}} \bar{g}_{i+2} \dots \bar{g}_k$. Continuando, podemos escrever

- $g = \bar{c}$, ou

- $g = \bar{g}_1 \dots \bar{g}_k$, onde g_1, \dots, g_k estão alternadamente em $A \setminus C$ e $B \setminus C$, pois se tivermos $g_i \in C$ e $g_{i+1} \in A$, então $g_i, g_{i+1} \in A$. Ainda, se $g_i \in C$ e $g_{i+1} \in A \setminus C$ então $g_i g_{i+1} \in A \setminus C$, pois claramente $g_i g_{i+1} \in A$ e se $g_i g_{i+1} \in C$, teríamos $g_{i+1} = g_i^{-1} c_1 \in C$, para algum $c_1 \in C$, o que nos dá uma contradição.

Similarmente, raciocinamos para $g_i \in C$ e $g_{i+1} \in B \setminus C$. Dessa forma, temos que se $g = \bar{c}$, $c \in C$, nada há mais a ser feito. Suponhamos então que $g = \bar{g}_1$, com $g_1 \in A \setminus C$ ou $g_1 \in B \setminus C$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $g_1 \in A \setminus C$. Como T_A é um transversal, $g_1 C = u_1 C$, para algum $u_1 \in T_A \setminus \{1\}$, e então $g_1 = u_1 c_2 c_1^{-1} \in u_1 C$, onde $c_1, c_2 \in C$. Daí, $g = \bar{g}_1 = \bar{u}_1 \bar{c}$, com $u_1 \in T_A \setminus \{1\}$. Agora, se $g = \bar{g}_1 \bar{g}_2$, onde supomos que $g_1 \in A \setminus C$ e $g_2 \in B \setminus C$, temos $g_1 C = u_1 C$, $u_1 \in T_A \setminus \{1\}$, onde $g_1 = u_1 c_1$ e $c_1 \in C$. Daí, $g = \bar{u}_1 \bar{c}_1 \bar{g}_2 = \bar{u}_1 (\bar{c}_1 \bar{g}_2)$. Mas, $c_1 g_2 C = u_2 C$ e então $c_1 g_2 = u_2 c$, $c \in C$ e $u_2 = c_1 g_2 c^{-1} \in C g_2 C$. Logo, $g = \bar{u}_1 \bar{u}_2 \bar{c}$, com $u_2 \in C g_2 C$. Se $g = \bar{g}_1 \dots \bar{g}_{k-1} \bar{g}_k$, escrevemos, indutivamente, $\bar{g}_1 \dots \bar{g}_{k-1}$ como $\bar{u}_1 \dots \bar{u}_{k-1} \bar{c}$, onde $u_i \in (T_A \cup T_B) \setminus \{1\}$ e, para cada i , $u_i \in C g_i C$, já que u_i vem alternadamente de $T_A \setminus \{1\}$ e $T_B \setminus \{1\}$. Então $g = \bar{g}_1 \dots \bar{g}_{k-1} \bar{g}_k = \bar{u}_1 \dots \bar{u}_{k-1} \bar{c} \bar{g}_k = \bar{u}_1 \dots \bar{u}_{k-1} \bar{c} \bar{g}_k = \bar{u}_1 \dots \bar{u}_{k-1} \bar{u}_k \bar{c}_1 = \bar{u}_1 \dots \bar{u}_{k-1} \bar{u}_k \bar{c}_1$, onde $c_1 \in C$, $u_k \in C g_k C$, $u_k \in T_A \cup T_B$ e $u_k \neq 1$ (pois $g_k \notin C$). Além disso, u_{k-1}, u_k vêm de diferentes fatores (pois o mesmo ocorre com g_{k-1} e g_k). Por indução, obtemos então, que qualquer elemento de $A *_C B$ pode ser escrito da forma requerida.

Para provar a unicidade, considere S o conjunto de todas as sequências finitas $(u_1, u_2, \dots, u_n, c)$, com $n > 0$, $c \in C$ e u_1, u_2, \dots, u_n alternadamente em $T_A \setminus \{1\}$ e $T_B \setminus \{1\}$. A pesar de a existência de ϕ ser imediata (pela definição), queremos definir um homomorfismo $\phi : G \mapsto \beta_{ij}(S)$ tal que se $g \in G = A *_C B$ e

$g = \overline{u_1} \dots \overline{u_n} \overline{c}$, com u_i e c como anteriormente, para então considerando () a palavra vazia, $\phi(g)() = (u_1, \dots, u_n, c)$ e daí, como no caso do produto livre, obtemos a unicidade.

Para obter ϕ , definimos primeiramente, homomorfismos $\phi_1 : A \mapsto \beta_{ij}(S)$ e $\phi_2 : B \mapsto \beta_{ij}(S)$, tais que $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$ e então ϕ segue da definição do produto livre amalgamado (push-out). Definimos $\phi_1 : A \mapsto \beta_{ij}(S)$ do seguinte modo:

$$a \in A \mapsto \phi_1(a); \phi_1(a)(u_1, u_2, \dots, u_n, c) = \begin{cases} (u_1, u_2, \dots, u_n, a', c'), & \text{se } u_n \notin A, ca = a'c' \text{ com } a' \in T_A - \{1\} \text{ e } c' \in C, \\ (u_1, u_2, \dots, u_n, c'), & \text{se } u_n \notin A, ca = c' \text{ com } c' \in C \text{ isto é, se } a \in C, \\ (u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, a', c'), & \text{se } u_n \in A \text{ e } u_n ca = a'c' \text{ com } a' \in T_A - \{1\} \text{ e } c' \in C, \\ (u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, c'), & \text{se } u_n \in A, u_n ca = c' \text{ com } c' \in C. \end{cases}$$

Não é difícil provar que ϕ_1 é um homomorfismo. Definimos ϕ_2 de modo análogo. Assim, pode-se verificar que $\phi_1(C) = \phi_2(C)$. De fato, seja $c_0 \in C$. Visto como elemento de A , $c_0 = i_1(c_0) = a_1$, daí, para $(u_1, u_2, \dots, u_n, c)$, $\phi_2(c_0)(u_1, u_2, \dots, u_n, c)$ é igual a:

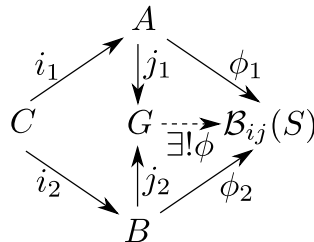
$$\begin{cases} (u_1, u_2, \dots, u_n, c'), & \text{se } u_n \in A \text{ e } cc_0 = c' \\ (u_1, u_2, \dots, u_n, c'), & \text{se } u_n \in A \text{ e } u_n cc_0 = c', \text{ com } c' \in C. \end{cases}$$

Visto como elemento de B , $c_0 = i_2(c_0)$, daí, para $(u_1, u_2, \dots, u_n, c)$, $\phi_2(c_0)(u_1, u_2, \dots, u_n, c)$ é igual a:

$$\begin{cases} (u_1, u_2, \dots, u_n, c''), & \text{se } u_n \notin B \text{ e } cc_0 = c'' \\ (u_1, u_2, \dots, u_n, c''), & \text{se } u_n \in B \text{ e } u_n cc_0 = c'', \text{ com } c'' \in C, \end{cases}$$

e assim, $\phi_1(c_0) = \phi_2(c_0)$, para $c_0 \in C$.

Logo, pela definição de produto livre amalgamado, existe um único homomorfismo $\phi : G \mapsto \beta_{ij}(S)$ tal que $\phi \circ j_1 = \phi_1$ e $\phi \circ j_2 = \phi_2$. Agora, por indução, vemos que $\phi(w)() = (u_1, u_2, \dots, u_n, c)$ para qualquer $w = u_1 u_2 \dots u_n c \in G$. De fato, suponhamos que $w = u_1 \dots u_n c$, como nas condições descritas anteriormente. Sem perda de generalidade, suponhamos que $u_1 \in T_A \setminus \{1\}$ e $u_n \in T_B \setminus \{1\}$. Daí $\phi(w)() = \phi(u_1 u_2 \dots u_n c)() = [\phi_1(u_1) \phi_2(u_2) \dots \phi_2(u_n) \phi_1(c)]() = u_1 u_2 \dots u_n c = w$.



(ii) Considerando ϕ como definida no item (i), afirmamos que $\phi \circ j_1$ e $\phi \circ j_2$ são injetivas. De fato, $(\phi \circ j_1)(a) = \phi(j_1(a)) = \phi(\overline{u_1} \overline{c})$. Agora, sendo $()$ a palavra vazia, temos $\phi(\overline{u_1} \overline{c})() = (u_1, c)$. Assim, se tivermos $\phi \circ j_1(a_1) = \phi \circ j_1(a_2)$ então $(u_1, c_1) = (u_2, c_2)$, com u_1 e u_2 em T_A e $c_1, c_2 \in C$. Donde vem que $u_1 = u_2$, $c_1 = c_2$ e assim, $a_1 = a_2$. Logo, $\phi \circ j_1$ é injetiva e portanto, j_1 é injetiva. Analogamente, concluimos que $\phi \circ j_2$ é injetiva e portanto j_2 é injetiva.

(iii) Seja $u \in j_1(A) \cap j_2(B)$. Então existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $j_1(a) = u = j_2(b)$. Assim, $\overline{u_1} \overline{c_1} = j_1(a) = u = j_2(b) = \overline{u_2} \overline{c_2}$. Aplicando ϕ em ambos os lados, temos que $\phi(\overline{u_1} \overline{c_1}) = \phi(\overline{u_2} \overline{c_2})$. Então $\phi(\overline{u_1} \overline{c_1})() = \phi(\overline{u_2} \overline{c_2})()$, o que implica $(u_1, c_1) = (u_2, c_2)$. Segue da unicidade de decomposição, de $u_1 \in T_A$ e $u_2 \in T_B$ que $\overline{u_1} = \overline{u_2} = 1$. Portanto, $u = 1 \cdot \overline{c_1} = 1 \cdot \overline{c_2} \in C$. ■

Proposição 1.1.32. *O centro de $G = A *_H \cong K B$, onde $A \neq H$ e $B \neq K$, é $H \cap Z(A) \cap Z(B)$.*

Demonstração. Veja [18] Corolário 4.5, pág 211. ■

Corolário 1.1.33. *Se $G = A *_H \cong K B$ é abeliano, então A é abeliano, B é abeliano e $A = H$ ou $B = K$.*

Demonstração. Pela contradição, suponha primeiro que A ou B não são abelianos, então G não é abeliano, pois A e B são subgrupos de G o qual é uma contradição. Agora suponha que $A \neq H$ e $B \neq K$, pela Proposição 1.1.32 temos que $G = Z(G) = H \cap Z(A) \cap Z(B) \subsetneq A$ o qual é uma contradição. ■

1.1.5 HNN-Extensões

Definição 1.1.34. Sejam G, A grupos, $i_0, i_1 : A \rightarrow G$ monomorfismos, e P um grupo cíclico infinito com gerador p . Seja N o menor subgrupo normal de $G * P$ gerado por $\{pi_0(a)p^{-1}i_1(a)^{-1}, a \in A\}$, (aqui a percorre A , ou equivalentemente, um conjunto de geradores de A). Então, o grupo quociente $\mathbb{H} = (G * P)/N$ é chamado uma **HNN-extensão** de G_0 com letra estável p e subgrupos associados $i_0(A)$ e $i_1(A)$. Tal grupo é as vezes denotado, desde que não haja confusão, por $G *_A$.

Observação 1.1.35.

- 1) *Á vezes usamos o termo grupo-HNN para nos referirnos a uma HNN-extensão.*
- 2) *É usual considerar A como um subgrupo de G e i_0 como a inclusão. Nesse caso, escrevemos $\mathbb{H} = \langle G, p \mid pap^{-1} = i_1(a), a \in A \rangle = \langle X, p \mid pap^{-1} = i_1(a), a \in X \rangle$ se*

X é um conjunto de geradores para G , ou ainda, $\mathbb{H} = \langle G, p \mid p.A.p^{-1} = B \rangle$, onde $B = i_1(A)$, embora essa notação não deixe a aplicação explícita.

3) Se $g_0, g_1 \in G$ e $j_0, j_1 : A \rightarrow G$ são aplicações dadas por $j_r(a) = g_r^{-1}i_r(a)g_r$, $r = 0, 1$, então os grupos-HNN $\langle G, p \mid pi_0(a)p^{-1} = i_1(a) \rangle$ e $\langle G, q \mid q.j_0(a).q^{-1} = j_1(a) \rangle$ são isomorfos, o isomorfismo leva G em G e p em $g_1.q.g_0^{-1}$.

4) Um definição mais geral de HNN-extensões pode ser dada: Considere uma família de grupos, A_α , $\alpha \in \Lambda$ e monomorfismos $i_{0_\alpha}, i_{1_\alpha} : A_\alpha \rightarrow G$, P livre sobre $\{p_\alpha\}$. Seja N o menor subgrupo normal gerado por $\{p_\alpha.i_{0_\alpha}(a_\alpha).p_\alpha^{-1}.i_{1_\alpha}(a_\alpha)^{-1}, a_\alpha \in A_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$. Então $\mathbb{H} = (G * P)/N$ é a HNN-extensão de G com letras estáveis p_α e pares de subgrupos associados $i_{0_\alpha}(A_\alpha)$ e $i_{1_\alpha}(A_\alpha)$. Se B_α e C_α denotam $i_{0_\alpha}(A_\alpha)$ e $i_{1_\alpha}(A_\alpha)$, respectivamente, \mathbb{H} é às vezes denotado por $\langle G, p_\alpha \mid p_\alpha.B_\alpha.p_\alpha^{-1} = C_\alpha \rangle$.

Aqui estamos interessados no caso mais simples, ou seja, quando a família tem apenas dois elementos (como na Definição 1.1.34).

Exemplos 1.1.36. Se tomamos $A = G$ e $i_0 = i_1 = id_A$, então a HNN-extensão de G com letra estável p e subgrupo associado A é $\mathbb{H} = \langle A, p \mid \{p.a.p^{-1}.a^{-1}, a \in A\} \rangle$. Em particular:

- (1) Tomando $G = A = \{1\}$, então $\mathbb{H} = \langle 1, p \mid p.1.p^{-1} \rangle = \langle 1, p \rangle = \langle p \rangle \simeq \mathbb{Z}$, isto é $\mathbb{Z} = \{1\} *_{\{1\}}$.
- (2) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle = \langle a, b \mid a.b.a^{-1}.b^{-1} \rangle$ é uma HNN-extensão. Basta tomar $G = A = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$ e b como letra estável, pois $\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} = \mathbb{H} = \langle a, b \mid b.a.b^{-1}.i_1(a)^{-1} \rangle = \langle a, b \mid b.a.b^{-1}.a^{-1} \rangle = \langle a, b \mid a.b.a^{-1}.b^{-1} \rangle = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Definição 1.1.37. Seja \mathbb{H} a HNN-extensão de G com letra estável p e subgrupos associados $i_0(A)$ e $i_1(A)$. Sejam T_0 e T_1 transversais à esquerda para $i_0(A)$ e $i_1(A)$ em G , respectivamente, ambos contendo o elemento neutro 1_G de G . Uma **palavra reduzida** é, por definição, uma palavra do tipo

$$g'_0 p^{\epsilon_0} g'_1 p^{\epsilon_1} \dots g'_{n-1} p^{\epsilon_{n-1}} g'_n,$$

onde $\epsilon_i = \pm 1$, $g'_i \in T_0$, se $\epsilon_i = -1$, $g'_i \in T_1$, se $\epsilon_i = 1$, $g'_i \neq 1$ se $\epsilon_{i-1} \neq \epsilon_i$, isto é, não podemos ter por exemplo, $p1_G p^{-1}$, e g'_n é arbitrário (podendo ser igual a 1_G).

Exemplos 1.1.38. (a) g'_0 é uma palavra reduzida, para todo $g'_0 \in G$;

(b) $1_G p^{-1} 1_G$ é uma palavra reduzida (aqui estamos considerando o primeiro 1_G que aparece como elemento de T_0 , o transversal para $i_0(A)$);

(c) Também $1_G p 1_G$ é uma palavra reduzida (vendo o primeiro 1_G como elemento de T_1);

(d) Mais geralmente, $1_G p^1 1_G p^1 \dots 1_G p^1 1_G$ e $1_G p^{-1} 1_G p^{-1} 1_G$ são palavras reduzidas.

Teorema 1.1.39. (Forma Normal para HNN-extensões) *Seja \mathbb{H} a HNN-extensão de G com letra estável p e subgrupos associados $i_0(A)$ e $i_1(A)$. Sejam T_0 e T_1 transversais à esquerda para $i_0(A)$ e $i_1(A)$ em G , respectivamente. Então,*

(i) *Qualquer elemento h de \mathbb{H} “pode ser representado” por uma palavra reduzida*

$$g'_0 p^{\epsilon_0} g'_1 p^{\epsilon_1} \dots g'_{n-1} p^{\epsilon_{n-1}} g'_n,$$

onde $n \geq 0$, $\epsilon_i = \pm 1$; $g'_i \in T_0$ se $\epsilon_i = -1$, $g'_i \in T_1$ se $\epsilon_i = 1$; $g'_i \neq 1$ se $\epsilon_{i-1} = -\epsilon_i$ e $g'_n \in G$ é arbitrário.

(ii) *A todo elemento h de \mathbb{H} podemos associar uma única palavra reduzida.*

(iii) *A aplicação canônica $j : G \mapsto \mathbb{H} = (G * \langle p \rangle) / N$ é um monomorfismo. Assim, identificando $j(g)$ com g , todo elemento de H pode ser unicamente representado por uma palavra reduzida.*

Demonstração. (i) Mostraremos que qualquer elemento $h \in \mathbb{H}$ pode ser representada por uma palavra reduzida. Para qualquer elemento $h \in \mathbb{H} = G * \langle p \rangle / N$, temos que $h = uN$, com $u \in G * \langle p \rangle$. Vamos representar o elemento uN do quociente por \bar{u} . Pela construção do produto livre temos que G e p geram $G * \langle p \rangle$. Assim, u pode ser escrito como $g_0 p^{r_0} g_1 p^{r_1} \dots g_{n-1} p^{r_{n-1}} g_n p^{r_n}$ com $g_i \in G$, $r_i \in \mathbb{Z}$ e $h = \bar{u}$. Por abuso de notação, vamos escrever $h = g_0 p^{r_0} g_1 p^{r_1} \dots g_{n-1} p^{r_{n-1}} g_n p^{r_n}$. Lembremos então que em \mathbb{H} temos as relações

$$i_0(a)p^{-1} = p^{-1}i_1(a) \text{ ou } i_1(a)p = pi_0(a), a \in A \quad (1.1)$$

(ou rigorosamente, $i_0(a)p^{-1}N = p^{-1}i_1(a)N$ ou $i_1(a)pN = pi_0(a)N$, $a \in A$).

Queremos obter uma forma reduzida para h . Para entender como obter uma tal forma, suponhamos por exemplo que h (ou melhor, u) é do tipo $g_0 p^{-2} g_1$. Considerando que G é a reunião disjunta das classes laterais, $G = \bigcup g'_j \cdot i_0(A)$, $g'_j \in T_0$, obtemos que $h = g_0 p^{-2} g_1 = (g'_0 i_0(a_0)) p^{-1} p^{-1} g_1$, com $g'_0 \in T_0$ e $i_0(a_0) \in i_0(A)$. Da primeira relação na equação 1.1, temos que, em \mathbb{H} , $i_0(a_0) p^{-1} = p^{-1} i_1(a_0)$, onde $h = g'_0 p^{-1} i_1(a_0) p^{-1} g_1$. Agora, para o elemento $i_1(a_0)$ de G , temos que $i_1(a_0) =$

$g'_1 i_0(a_1)$ e usando a equação 1.1 para $i_0(a_1)p^{-1}$, vem que $h = g'_0 p^{-1} g'_1 p^{-1} i_1(a_1) g_1 = g'_0 p^{-1} g'_1 p^{-1} g'_2$, onde tomamos $g'_2 := i_1(a_1) g_1 \in G$.

Se partimos de um elemento de $G * \langle p \rangle$ do tipo $g_0 p^2 g_1$ raciocinamos de modo similar, considerando nesse caso que G é a reunião disjunta das classes laterais, $G = \bigcup g'_k \cdot i_1(A)$, $g'_k \in T_1$, e usando a segunda relação da equação 1.1. Combinado esses dois casos pode-se mostrar, indutivamente, que podemos representar um elemento qualquer h de \mathbb{H} na forma reduzida. Para ser mais preciso, o que obtemos é $h = u'N = \overline{u'}$, onde $\overline{u'} = g'_0 p^{\epsilon_0} g'_1 p^{\epsilon_1} \dots g'_{n-1} p^{\epsilon_{n-1}} g'_n$ esta na forma reduzida.

(ii) Para mostrar a unicidade, considere S o conjunto de todas as sequências $(g'_0, \epsilon_0, g'_1, \epsilon_1, \dots, g'_{n-1}, \epsilon_{n-1}, g'_n)$ (associadas a palavras reduzidas). A ideia é definir um homomorfismo $\psi : \mathbb{H} \mapsto \beta_{ij}(S)$ que satisfaz a seguinte condição:

(1) Se $h \in \mathbb{H}$ e $h = \overline{g'_0 p^{\epsilon_0} g'_1 p^{\epsilon_1} \dots g'_{n-1} p^{\epsilon_{n-1}} g'_n}$ com $g'_0 p^{\epsilon_0} g'_1 p^{\epsilon_1} \dots g'_{n-1} p^{\epsilon_{n-1}} g'_n$ uma palavra reduzida, então $\psi(h)(1_G) = (g'_0, \epsilon_0, g'_1, \epsilon_1, \dots, g'_{n-1}, \epsilon_{n-1}, g'_n)$, donde se conclui, usando a igualdade de sequências, que existe uma única palavra reduzida em cada classe de equivalência, a qual é usada para representar o elemento (a classe) de \mathbb{H} . Para obter tal homomorfismo, primeiro definimos um homomorfismo $\phi : G \mapsto \beta_{ij}(S)$. Também definimos um elemento $\tau \in \beta_{ij}(S)$ (associado a p), de modo que ϕ e τ satisfazem:

$$\phi(i_1(a)) \circ \tau = \tau \circ \phi(i_0(a)), \forall a \in A. (2)$$

Considerando então tais homomorfismos obtemos um homomorfismo $\varphi : G * \langle p \rangle \mapsto \beta_{ij}(S)$ definido naturalmente como $\varphi(g) = \phi(g)$ para todo g em G , e $\varphi(p) = \tau$. Da relação (2), ou equivalentemente $\varphi(i_1(a)) \circ \varphi(p) = \varphi(p) \circ \varphi(i_0(a))$, segue que N , o menor subgrupo normal em $G * P$ gerado por

$$\{p i_0(a) p^{-1} i_1(a)^{-1}, a \in A\}$$

está contido em $\text{Ker}(\varphi)$, donde obtemos bem definida uma aplicação $\psi : \mathbb{H} = G * \langle p \rangle / N \mapsto \beta_{ij}(S)$, satisfazendo $\psi(j(g)) = \varphi(g)$, $\psi(p) = \tau$ que satisfaz a condição inicial (1) desejada. Vamos definir então ϕ e τ :

- $\phi : G \mapsto \beta_{ij}(S)$; $g \mapsto \phi(g) : S \mapsto S$, é definida por

$$\phi(g)(g_1, \epsilon_1, \dots, g_{n-1}, \epsilon_{n-1}, g_n) = (g_1, \epsilon_1, \dots, g_{n-1}, \epsilon_{n-1}, (g_n \cdot g)).$$

Temos que $\phi(g) \in \beta_{ij}(S)$ pois existe $(\phi(g))^{-1} = \phi_{g^{-1}}$.

- Para definir a permutação τ (correspondente a p), temos que considerar algumas situações:

Escreva $g_n = g'i_1(a)$, com $g' \in T_0$ e $a \in A$.

Se $g' \neq 1_G$, definimos $\tau(g_1, \epsilon_1, \dots, g_{n-1}, \epsilon_{n-1}, g_n) = (g_1, \epsilon_1, \dots, g_{n-1}, \epsilon_{n-1}, g', 1, i_0(a))$.

Se $g' = 1_G$, isto é, $g_n = i_1(a)$, $a \in A$, então $\tau(g_1, \epsilon_1, \dots, g_{n-1}, \epsilon_{n-1}, g_n) =$

$$\begin{cases} (g_1, \epsilon_1, \dots, g_{n-1}, 1, 1_G, 1, i_0(a)), & \text{se } \epsilon_{n-1} = 1 \\ (g_1, \epsilon_1, \dots, g_{n-1}, i_0(a)) & , \text{ se } \epsilon_{n-1} = -1 \end{cases}$$

Pode-se mostrar que $\tau \in \beta_{ij}(S)$ e ϕ e τ satisfazem (2).

A partir daí, obtemos então o homomorfismo $\psi : \mathbb{H} \mapsto \beta_{ij}(S)$ desejado (tal que $\psi(p) = \tau$ e $\psi \circ j = \phi$), e satisfazendo a condição (1), donde obtemos a unicidade da expressão reduzida para $h \in \mathbb{H}$.

(iii) Considerando a aplicação ϕ definida no item anterior, temos que ϕ é um monomorfismo. De fato, se $\phi(g) = id_{\beta_{ij}(S)}$, teremos $1_G g = \phi(g)(1_G) = id(1_G) = 1_G$ o que nos leva a $g = 1_G$. Agora, do fato que $\psi \circ j = \phi$, segue que j é monomorfismo. ■

Observação 1.1.40. *Se h é escrito como no Teorema 1.1.39 (i), devemos chamar n o comprimento de h .*

1.2 - Fundamentos da Topologia Algébrica

Nesta seção definimos o grupo fundamental e estudamos suas propriedades. Posteriormente as aplicamos a determinados problemas, incluindo o problema de demonstrar que alguns espaços, tais como a esfera S^2 e o toro bidimensional, não são isomorfos.

1.2.1 Definições Previas

Antes de definir o grupo fundamental de um espaço X , vamos a considerar caminhos sobre X e uma relação de equivalência entre eles conhecida como homotopia de caminhos. Posteriormente, definiremos certa operação sobre a coleção das classes de equivalência que a converte no que em álgebra se conhece como um grupoide.

Definição 1.2.1. Se f e g são aplicações contínuas do espaço topológico X no espaço topológico Y , dizemos que f é **homotópica** a g , se existe uma aplicação contínua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$ para cada $x \in X$ (aqui $I=[0,1]$). A aplicação F é chamada uma **homotopia** entre f e g . Se f

é homotópica a g escrevemos $f \simeq g$. Se $f \simeq g$ e g é uma aplicação constante, dizemos que f é homotopicamente nula.

Consideremos agora o caso especial no qual f é um caminho em X . Lembremos que se $f : [0, 1] \rightarrow X$ é uma aplicação contínua tal que $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$, dizemos que f é um caminho em X de x_0 até x_1 . Também dizemos que x_0 é o ponto inicial e x_1 é o ponto final do caminho f . Usaremos por conveniência, o intervalo $I = [0, 1]$, como o domínio de todos os caminhos.

Definição 1.2.2. Dois caminhos f e g , que aplicam o intervalo I em X são chamados de **homotópicos por caminhos** se eles têm o mesmo ponto inicial x_0 e o mesmo ponto final x_1 , e se existe uma aplicação contínua $F : I \times I \rightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= f(s) \text{ e } F(s, 1) = g(s) \\ F(0, t) &= x_0 \text{ e } F(1, t) = x_1, \end{aligned}$$

para cada $s \in I$ e cada $t \in I$.

Chamamos F uma homotopia por caminhos entre f e g . Se f é homotópico por caminhos a g , escrevemos $f \simeq_p g$.

A primeira condição da definição anterior diz que F é uma homotopia entre f e g e a segunda diz que para cada t , o caminho f_t definido pela equação $f_t(s) = F(s, t)$ é um caminho entre x_0 e x_1 .

Se f é um caminho, denotamos sua classe de equivalência de homotopias por caminhos por $[f]$.

Lema 1.2.3. *As relações \simeq e \simeq_p são relações de equivalência.*

Demonstração. Dados f, f', f'' caminhos sobre o espaço X .

$f \simeq f$, pois $F(x, t) = f(x)$ é a homotopia desejada. Se f é um caminho, então F é um caminho homotópico.

Suponhamos que $f \simeq f'$ e demonstraremos que $f' \simeq f$. De fato, seja F uma homotopia entre f e f' . Então $G(x, t) = F(x, 1 - t)$ é uma homotopia entre f' e f . Se F é uma homotopia por caminhos, então G também o é.

Suponha que $f \simeq f'$ e $f' \simeq f''$. Provamos que $f \simeq f''$. De fato, sejam F uma homotopia entre f e f' , e F' uma homotopia entre f' e f'' . Definamos $G : X \times I \rightarrow X$ pela equação.

$$G(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{para } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ F'(x, 2t - 1) & \text{para } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

A aplicação G está bem definida, já que, para $t = \frac{1}{2}$, temos $F(x, 2t) = f'(x) = F'(x, 2t - 1)$. Dado que G é contínuo em dois conjuntos fechados $X \times [0, \frac{1}{2}]$ e $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ de $X \times I$, então G é contínuo sobre todo $X \times I$. Portanto, G é a homotopia requerida. Verifica-se que se F e F' são homotópicos por caminhos, então também G o é. ■

Exemplos 1.2.4. *Se f e g são duas aplicações contínuas de um espaço X em \mathbb{R}^2 .*

A aplicação

$$F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x), \text{ para } t \in [0, 1],$$

é uma homotopia entre f e g , por tanto $f \simeq g$. Esta homotopia é chamada uma homotopia por retas.

Se f e g são caminhos de x_0 a x_1 , então F definido acima é um caminho homotópico. Mais geralmente, se A é qualquer conjunto convexo de \mathbb{R}^n , qualquer dois caminhos f, g em A de x_0 a x_1 são caminhos homotópicos em A , definindo a homotopia por retas, $F : I \times I \rightarrow A$ que envia $(x,t) \mapsto (1-t)f(x) + tg(x)$.

Exemplos 1.2.5. *Denotemos por X o plano furado, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Os seguintes caminhos em X , $f(s) = (\cos(\pi s), \sin(\pi s))$, $g(s) = (\cos(\pi s), 2\sin(\pi s))$ são caminhos homotópicos por caminhos; a homotopia por retas entre eles é uma homotopia aceitável. Para $h(s) = (\cos(\pi s), -\sin(\pi s))$ não é válido a homotopia por retas entre f e h .*

Introduziremos um pouco de álgebra em nossa situação geométrica. Definamos certa operação sobre as classes de homotopia de caminhos como segue:

Definição 1.2.6. Se f é um caminho em X de x_0 a x_1 , e g é um caminho em X de x_1 a x_2 , definamos o **produto** $f * g$ de f e g como o caminho h dado pela equação

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2s - 1) & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

A aplicação h está bem definida e é contínua; além disso é um caminho em X de x_0 a x_2 .

A operação produto sobre caminhos induz uma operação bem definida sobre classes de homotópia por caminhos, dada pela equação $[f] * [g] = [f * g]$.

Para comprovar essa afirmação, seja F uma homotópia de caminhos entre f e f' e seja G uma homotópia por caminhos entre g e g' . Definamos

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ G(2s - 1, t) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Dado que $F(1, t) = x_1 = G(0, t)$ para todo $t \in [0, 1]$, a aplicação H está bem definida e é contínua. Verificaremos que H é a homotópia de caminhos desejada entre $f * g$ e $f' * g'$. A operação $*$ sobre classes de homotópia satisfazem propriedades muito parecidas aos axiomas de grupo. Estas propriedades, são conhecidas como propriedades de grupoide de $*$. Uma diferença respeito das propriedades de grupo é que $[f] * [g]$ não está definida para qualquer par de classes, só para aqueles pares $[f], [g]$ para os que $f(1) = g(0)$.

Teorema 1.2.7. *A operação $*$ tem as seguintes propriedades :*

1) *Associativa.*

*Se $[f] * ([g] * [h])$ está bem definida, então também $([f] * [g]) * [h]$, e são iguais.*

2) *Identidades à esquerda e direita.*

Dado $x \in X$, denotemos por e_x o caminho constante $e_x : I \rightarrow X$ que leva todo I ao ponto x . Se f é um caminho em X de x_0 a x_1 , então

$$[f] * [e_{x_1}] = [f] \text{ e } [e_{x_0}] * [f] = [f]$$

3) *Inverso.*

Dado um caminho f em X de x_0 a x_1 . Se \bar{f} é o caminho o qual se conhece como inverso de f . Então

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \text{ e } [\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}].$$

Demonstração. Veja [23], Teorema 51.2, pág 326. ■

Sejam $[a, b]$ e $[c, d]$ dois intervalos em \mathbb{R} , existe uma única aplicação $p : [a, b] \rightarrow [c, d]$ da forma $p(x) = mx + k$ que leva a até c e b até d , chamada **aplicação positiva linear** de $[a, b]$ a $[c, d]$ porque seu gráfico é uma linha reta com coeficiente angular positiva.

Teorema 1.2.8. *Seja f um caminho em X e sejam a_0, \dots, a_n números tais que $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$. Seja $f_i : I \rightarrow X$ é o caminho igual à aplicação positiva linear de I sobre $[a_{i-1}, a_i]$ composta com f . Então $[f] = [f_1] * [f_2] \dots [f_n]$*

Demonstração. veja [23] Teorema 51.3, pág 329. ■

1.2.2 Grupo Fundamental

O conjunto das classes de homotopia de caminhos num espaço topológico X não é um grupo com a operação $*$, pois o produto de dois classes de homotopia de caminhos não sempre está definido. Mas, suponha que escolhemos um ponto x_0 de X e nós restringimos a aqueles caminhos que começam e terminam em x_0 , então o conjunto de suas classes de homotopia de caminhos é um grupo com a operação $*$. Este conjunto de classes de homotopia de caminhos será chamado o grupo fundamental de X .

Definição 1.2.9. *Seja X um espaço topológico e x_0 um ponto de X . Um caminho em X que começa e termina em x_0 chama-se laço com base em x_0 . O conjunto das classes de homotopia de caminhos associados aos laços com base em x_0 , com a operação $*$, chama-se **grupo fundamental** de X relativo à base x_0 . Este grupo é denotado por $\pi_1(X, x_0)$.*

Segue do Teorema 1.2.7 que a operação $*$ restrita a este conjunto satisfaz os axiomas de grupo.

Dado dois laços f e g com base em x_0 , o produto $f * g$ esta sempre bem definido e é um laço com base em x_0 . A associatividade, a existência do elemento identidade $[e_{x_0}]$, e a existência de um inverso $[\bar{f}]$ para $[f]$ são imediatos.

Exemplos 1.2.10. *Seja \mathbb{R}^n o espaço euclidiano n -dimensional. Então $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ é o grupo trivial, já que se f é um laço em \mathbb{R}^n com base em x_0 , a homotopia por retas é uma homotopia de caminhos entre f e o caminho constante x_0 . Logo, $[f] = [e_{x_0}]$. Em geral, se X é um subconjunto convexo de \mathbb{R}^n , então $\pi_1(X, x_0)$ é o grupo trivial. Em particular, a bola unitária B^n em \mathbb{R}^n .*

Uma pergunta imediata que nós podemos fazer é a dependência do ponto base no grupo fundamental. Consideremos está pergunta agora.

Definição 1.2.11. *Seja α um caminho em X de x_0 a x_1 . Definimos a aplicação $\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ onde $[f] \mapsto \hat{\alpha}[f] = [\bar{\alpha}] * ([f] * [\alpha])$. A aplicação $\hat{\alpha}$ é*

bem definida porque a operação $*$ é esta bem definida. Se f é um laço com base em x_0 , então $\bar{\alpha} * (f * \alpha)$ é um laço com base em x_1 . Logo, $\hat{\alpha}$ é uma aplicação de $\pi_1(X, x_0)$ sobre $\pi_1(X, x_1)$, como o desejamos, observar que $\hat{\alpha}$ depende só da classe de homotopias por caminhos de α .

Teorema 1.2.12. *A aplicação $\hat{\alpha}$ é um isomorfismo de grupos .*

Demonstração. Para provar que $\hat{\alpha}$ é um homomorfismo , calculemos

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g]) &= ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\bar{\alpha}] * [g] * [\alpha]) \\ &= [\bar{\alpha}] * [f] * [e_{x_0}] * [g] * [\alpha] \\ &= [\bar{\alpha}] * [f] * [g] * [\alpha] \\ &= \hat{\alpha}([f] * [g]). \end{aligned}$$

Provaremos que $\hat{\alpha}$ é um isomorfismo. De fato, se β denota o caminho $\bar{\alpha}$, qual é o reverso de α , então só resta provar que $\hat{\beta}$ é o inverso para $\hat{\alpha}$. Calculamos para cada elemento $[h]$ de $\pi_1(X, x_1)$,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}[h] &= ([\bar{\beta}] * [h] * [\beta]) = [\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}], \\ \hat{\alpha}(\hat{\beta}[h]) &= [\bar{\alpha}] * ([\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}]) * [\alpha] = [h]. \end{aligned}$$

Um cálculo similar, demonstra que $\hat{\beta}(\hat{\alpha}[f]) = [f]$, para todo $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. Portanto $\hat{\alpha}$ é um isomorfismo. ■

Se X é conexo por caminhos, então a aplicação $\hat{\alpha}$ existe para todo par de pontos x_0 e x_1 de X , logo claramente temos o seguinte corolário:

Corolário 1.2.13. *Se X é conexo por caminhos, e x_0 e x_1 são dois pontos de X , então $\pi_1(X, x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$.*

Suponha que X é um espaço topológico. Seja C uma componente por caminhos de X contendo x_0 . É fácil ver que $\pi_1(C, x_0) = \pi_1(X, x_0)$, já que todos os laços e homotopias em X que tem base x_0 devem permanecer no subespaço C . Deste modo, $\pi_1(X, x_0)$ depende somente da componente por caminhos de X contendo x_0 . Por esta razão, é muito comum trabalhar só com espaços conexos por caminhos quando se estuda o grupo fundamental.

Definição 1.2.14. Um espaço X é **simplesmente conexo** se X é um espaço conexo por caminhos e $\pi_1(X, x_0)$ é o grupo trivial para algum $x_0 \in X$ e portanto, para todo $x_0 \in X$. Expressamos sempre o fato que $\pi_1(X, x_0)$ é o grupo trivial escrevendo $\pi_1(X, x_0) = 1$.

Lema 1.2.15. *Num espaço simplesmente conexo X , qualquer dois caminhos tendo o mesmo ponto inicial e final são homotópicos por caminhos.*

Demonstração. Sejam α e β dois caminhos de x_0 até x_1 . Então $\alpha * \bar{\beta}$ esta bem definida e é um laço em X com base em x_0 . Dado que X é simplesmente conexo, então $\alpha * \bar{\beta}$ é homotópico por caminhos ao laço constante em x_0 . Então, $[\alpha * \bar{\beta}] = [e_{x_0}]$. Logo

$$[a * \bar{\beta}] * [\beta] = [e_{x_0}] * [\beta],$$

e portanto $[\alpha] = [\beta]$. ■

Intuitivamente está claro que o grupo fundamental é um **invariante topológico** do espaço X .

Suponha que $h : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua que leva o ponto x_0 de X ao ponto y_0 de Y , frequentemente denotamos isto escrevendo

$$h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0).$$

Se f é um laço em X com base em x_0 , então a composição $h \circ f : I \rightarrow Y$ é um laço em Y com base em y_0 . A correspondência $f \rightarrow h \circ f$, induz uma aplicação que leva $\pi_1(X, x_0)$ a $\pi_1(Y, y_0)$. Formalmente temos a seguinte definição:

Definição 1.2.16. Seja $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ uma aplicação contínua. Definamos $h_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ pela equação

$$h_{\#}([f]) = [h \circ f].$$

A aplicação $h_{\#}$ é chamada o **homomorfismo induzido por h** relativo ao ponto base x_0 .

A aplicação $h_{\#}$ é bem definida, já que se F é uma homotopia por caminhos entre os caminhos f e f' , então $h \circ F$ é um caminho homotópico entre $h \circ f$ e $h \circ f'$. O fato que $h_{\#}$ é um homomorfismo segue da equação $(h \circ f) * (h \circ g) = h \circ (f * g)$.

Teorema 1.2.17. *Se $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ e $k : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ são aplicações contínuas, então $(k \circ h)_{\#} = k_{\#} \circ h_{\#}$. Se $i : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ é a aplicação identidade, então $i_{\#}$ é o homomorfismo identidade.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 (k \circ h)_\#([f]) &= [(k \circ h) \circ f] \\
 &= [k \circ (h \circ f)] \\
 &= k_\#([h \circ f]) \\
 &= k_\#(h_\#([f])).
 \end{aligned}$$

Analogamente $i_\#([f]) = [i \circ f] = [f]$. ■

Corolário 1.2.18. *Se $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ é um homeomorfismo de X em Y , então $h_\#$ é um isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, y_0)$.*

Demonstração. Considere $k : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ a inversa de h . Então $k_\# \circ h_\# = (k \circ h)_\# = i_\#$, onde i é a aplicação identidade de (X, x_0) e $h_\# \circ k_\# = (h \circ k)_\# = j_\#$, onde j é a aplicação identidade de (Y, y_0) . Dado que $i_\#$ e $j_\#$ são os homomorfismos identidade dos grupos $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, y_0)$ respectivamente, então $k_\#$ é o inverso de $h_\#$. ■

1.2.3 Espaços De Recobrimento

Até aqui temos demonstrado que qualquer subespaço convexo de \mathbb{R}^n tem grupo fundamental trivial, restringiremos agora a tarefa de calcular alguns grupos fundamentais não triviais. Uma das ferramentas mais usuais para este propósito é a noção de espaço de recobrimento, o qual introduziremos nestes seção.

Sejam E e B dois espaços topológicos.

Definição 1.2.19. Seja $p : E \rightarrow B$ uma aplicação contínua e sobrejetora de E em B . Um conjunto aberto U de B diz-se **regularmente coberto** por p se a imagem inversa $p^{-1}(U)$ pode ser escrito como união disjunta de conjuntos abertos V_α em E , tais que para cada α , a restrição de p a V_α é um homeomorfismo de V_α em U . A coleção $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ é chamada uma **partição** de $p^{-1}(U)$ em fatias.

Seja $p : E \rightarrow B$ uma aplicação continua e sobrejetora de E em B , se U é um aberto que esta regularmente coberto por p e W é um aberto contendo a U , então W é também regularmente coberto por p . De fato:

$$\begin{aligned}
 p^{-1}(U) &= \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \\
 p^{-1}(W) &= \bigcup_{\alpha \in I} (V_\alpha \cap p^{-1}(W))
 \end{aligned}$$

Definição 1.2.20. Seja $p : E \rightarrow B$ uma aplicação contínua e sobrejetora. Se todo ponto b de B tem uma vizinhança U que é regularmente coberta por p , então p é chamada uma **aplicação de recobrimento** e E um **espaço de recobrimento** de B .

Observe que se $p : E \rightarrow B$ é uma aplicação recobrimento, então para cada $b \in B$ o subespaço $p^{-1}(b)$ de E tem a topologia discreta.

Também, se $p : E \rightarrow B$ é uma aplicação recobrimento, então p é uma aplicação aberta. De fato, suponha que A é um conjunto aberto de E . Dado $x \in p(A)$, existe uma vizinhança U de x que está regularmente coberta por p . Seja $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma partição de $p^{-1}(U)$ em fatias. Existe um ponto y de A tal que $p(y) = x$, logo $y \in p^{-1}(U)$ e $y \in V_{\alpha'}$, onde $\alpha' \in I$. O conjunto $V_{\alpha'} \cap A$ é um aberto em E , logo é um aberto em $V_{\alpha'}$. Como p se aplica homeomorficamente de $V_{\alpha'}$ em U , então o conjunto $p(V_{\alpha'} \cap A)$ é um aberto em U , portanto aberto em B e além é um entorno de x contendo $p(A)$, como desejamos.

Exemplos 1.2.21. *Seja X um espaço topológico e $i : X \rightarrow X$ a aplicação identidade. Então i é uma aplicação recobrimento. Mais geralmente, se E é o espaço $X \times \{1, \dots, n\}$. A aplicação $p : E \rightarrow X$ dado por $p(x, i) = x$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, é também uma aplicação recobrimento.*

Teorema 1.2.22. *A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada pela equação*

$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$$

é uma aplicação recobrimento de S^1

Demonstração. Veja [23] Teorema 53.1, pág 337. ■

Se $f : E \rightarrow B$ é uma aplicação recobrimento, então f é um homeomorfismo local de E em B , isto é, cada ponto x de E tem uma vizinhança que é aplicada homeomorficamente por f a um subconjunto aberto de B . De fato, dado que $f(x) \in B$ existe uma vizinhança U de $f(x)$ que é coberta regularmente por f , isto é $f^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$, onde V_α são disjuntos e $f|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$ é um homeomorfismo, logo $x \in V_{\alpha'}$, para algum $\alpha' \in I$.

A condição que f ser um homeomorfismo local não é suficiente para afirmar que f é uma aplicação recobrimento como podemos ver no exemplo a seguir.

Exemplos 1.2.23. *A aplicação $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow S^1$ dado pela equação*

$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$$

é sobrejetora e também é um homeomorfismo local. Mas não é uma aplicação recobrimento.

Demonstração. Veja [23], Exemplo 2, pag 328. ■

Teorema 1.2.24. *Seja $p : E \rightarrow B$ uma aplicação de recobrimento. Se B_0 é um subespaço de B e $E_0 = p^{-1}(B_0)$, então a aplicação $p_0 : E_0 \rightarrow B_0$ obtida pela restrição de f é uma aplicação recobrimento.*

Demonstração. Dado $b_0 \in B_0$, seja U um aberto em B que contém b_0 e que este coberto regularmente por p . Seja $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma partição de $p^{-1}(U)$ em fatias. Então $U \cap B_0$ é uma vizinhança de b_0 em B_0 e os conjuntos $V_\alpha \cap E_0$ são abertos disjuntos em E_0 cuja união é $p^{-1}(U) \cap E_0 = p^{-1}(U \cap B_0) = \bigcup_{\alpha \in I} (V_\alpha \cap E_0)$, além cada um deles aplica-se homeomorficamente sobre $U \cap B_0$ mediante p . ■

Teorema 1.2.25. *Se $p : E \rightarrow B$ e $p' : E' \rightarrow B'$ são aplicações recobrimentos, então $p \times p' : E \times E' \rightarrow B \times B'$ é uma aplicação recobrimento.*

Demonstração.

Dado $b \in B$ e $b' \in B'$, sejam U e U' vizinhanças de b e b' respectivamente, que são cobertos regularmente por p e p' , respectivamente. Sejam $\{V_\alpha\}$ e $\{V'_\beta\}$ partições em fatias de $p^{-1}(U)$ e $(p')^{-1}(U')$ respectivamente. Assim, temos as seguintes igualdades:

$$p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha, (p')^{-1}(U') = \bigcup V'_\beta \text{ e } p^{-1}(U) \times (p')^{-1}(U') = \bigcup V_\alpha \times \bigcup V'_\beta.$$

Logo,

$$(p^{-1} \times (p')^{-1})(U \times U') = p^{-1}(U) \times (p')^{-1}(U') = \bigcup (V_\alpha \times V'_\beta).$$

Portanto, $V_\alpha \times V'_\beta$ são abertos disjuntos de $E \times E'$, e cada $V_\alpha \times V'_\beta$ é aplicado homeomorficamente sobre $U \times U'$ por $p \times p'$. ■

Exemplos 1.2.26. *Consideramos o espaço $T = S^1 \times S^1$ chamado o toro bidimensional. A aplicação produto $p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1$ onde,*

$$(p \times p)(x, y) = (\cos 2\pi x, \sen 2\pi x, \cos 2\pi y, \sen 2\pi y)$$

é um recobrimento do toro pelo plano \mathbb{R}^2 . Cada retângulo unitário $[n, n + 1] \times [m, m + 1]$ é um recobrimento do toro pela aplicação $p \times p$.

O estudo dos espaços de recobrimento está intimamente relacionado com o estudo do grupo fundamental. Agora, estabeleceremos relações cruciais entre os dois conceitos.

Definição 1.2.27. Seja $p : E \rightarrow B$ uma aplicação de E em B . Se f é uma aplicação contínua do espaço topológico X sobre B , um **levantamento** de f é uma aplicação $\bar{f} : X \rightarrow E$ tal que $p \circ \bar{f} = f$.

Lema 1.2.28. *Seja $p : E \rightarrow B$ uma aplicação recobrimento com $p(e_0) = b_0$. Qualquer caminho $f : [0, 1] \rightarrow B$ começando em b_0 tem um único levantamento a um caminho \bar{f} em E que começa em e_0 .*

Demonstração. Veja [23] Lema 54.1, pagina 342. ■

Definição 1.2.29. Seja $p : E \rightarrow B$ uma aplicação recobrimento de B e $b_0 \in B$. Escolha e_0 tal que $p(e_0) = b_0$. Dado um elemento $[f] \in \pi_1(B, b_0)$, seja \hat{f} o levantamento de f a um caminho em E começando em e_0 . Denotamos $\phi([f])$ o ponto final $\hat{f}(1)$ de \hat{f} . Então, a aplicação $\phi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$ que envia $[f] \mapsto \phi([f]) = \hat{f}(1)$ é uma aplicação bem definida. Chamamos ϕ o **levantamento correspondente obtido pela aplicação de recobrimento** p . Esta aplicação depende da escolha do ponto e_0 .

Teorema 1.2.30. *Seja $p : E \rightarrow B$ uma aplicação recobrimento com $p(e_0) = b_0$. Se E é conexo por caminhos, então o correspondente levantamento $\phi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$ é sobrejetivo. Se E é simplesmente conexo, então ϕ é bijetivo.*

Demonstração. Seja E um espaço conexo por caminhos. Dado $e_1 \in p^{-1}(b_0) \subset E$, existe um caminho \hat{f} unindo e_0 e e_1 . De modo que $f = p \circ \hat{f}$ é um laço em B com base b_0 e $\phi([f]) = \hat{f}(1) = e_1$, por definição.

Suponha que E é simplesmente conexo. Sejam $[f]$ e $[g]$ dois elementos de $\pi_1(B, b_0)$ tais que $\phi([f]) = \phi([g])$. Sejam \hat{f} e \hat{g} os levantamentos de f e g respectivamente, a caminhos em E começando em e_0 , então $\hat{f}(1) = \hat{g}(1)$. Como E é simplesmente conexo, pelo Lema 1.2.15 existe um caminho homotópico \hat{F} em E entre \hat{f} e \hat{g} . Então $p \circ \hat{F}$ é uma homotopia de caminhos em B entre f e g . Portanto $[f] = [g]$. ■

Teorema 1.2.31. *Seja $p : E \rightarrow B$ uma aplicação de recobrimento com $p(e_0) = b_0$.*

(a) *O homomorfismo $p_{\#} : \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$ é um monomorfismo.*

(b) Seja $H = p_{\#}(\pi_1(E, e_0))$. O correspondente levantamento ϕ induz uma aplicação injetiva

$$\Phi : \pi_1(B, b_0) / H \rightarrow p^{-1}(b_0)$$

da coleção das classes pela direita de H em $p^{-1}(b_0)$, a qual é bijetiva se E é conexo por caminhos.

Demonstração. a) Suponha que \widehat{h} é um laço em E com base em e_0 e que $p_{\#}([\widehat{h}])$ é o elemento neutro. Seja F uma homotopia de caminhos entre $p \circ \widehat{h}$ e o laço constante. Se \widehat{F} é o levantamento de F a E tal que $\widehat{F}(0, 0) = e_0$, então \widehat{F} é uma homotopia de caminhos entre \widehat{h} e o laço constante em e_0 .

b) Dados laços f e g em B , sejam \widehat{f} e \widehat{g} seus respectivos levantamentos em E que começam em e_0 . Então $\phi([f]) = \widehat{f}(1)$ e $\phi([g]) = \widehat{g}(1)$. Demonstraremos que $\phi([f]) = \phi([g])$ se, e só se, $[f] \in H * [g]$.

Suponha primeiro que $[f] \in H * [g]$. Então $[f] = [h * g]$, onde $h = p \circ \widehat{h}$ para algum laço \widehat{h} em E com base em e_0 . Assim, o produto $\widehat{h} * \widehat{g}$ está bem definido e é o levantamento de $h * g$. Dado que $[f] = [h * g]$, os levantamentos \widehat{f} e $\widehat{h} * \widehat{g}$, os quais começam em e_0 , têm que terminar no mesmo ponto pertencente a E . Então \widehat{f} e \widehat{g} terminam no mesmo ponto pertencente a E , de maneira que $\phi([f]) = \phi([g])$.

Suponhamos agora que $\phi([f]) = \phi([g])$. Então \widehat{f} e \widehat{g} terminam no mesmo ponto pertencente a E . O produto de \widehat{f} e o inverso de \widehat{g} está bem definido e é um laço \widehat{h} em E com base em e_0 . Fazendo um cálculo direito, temos que $[\widehat{h} * \widehat{g}] = [\widehat{f}]$. Se \widehat{F} é uma homotopia de caminhos em E entre os laços $\widehat{h} * \widehat{g}$ e \widehat{f} , então $p \circ \widehat{F}$ é uma homotopia de caminhos em E entre os laços $\widehat{h} * \widehat{g}$ e \widehat{f} , então $p \circ \widehat{F}$ é uma homotopia de caminhos em B entre $h * g$ e f , onde $h = p \circ \widehat{h}$. Portanto $[f] \in H * [g]$, como desejávamos.

Se E é conexo por caminhos, então ϕ é sobrejetora e desta forma temos que Φ também é sobrejetora. ■

1.2.4 Grupo fundamental da n -esfera (S^n), do Toro bidimensional (\mathbb{T}^2) e do Plano projetivo (P^2)

Nesta subseção calcularemos o grupo fundamental da n -esfera (S^n), do Toro bidimensional (\mathbb{T}^2) e do Plano projetivo (P^2).

Teorema 1.2.32. *O grupo fundamental do círculo (S^1) é isomorfo a \mathbb{Z} .*

Demonstração. Veja [23] Teorema 54.5, pagina 345. ■

Teorema 1.2.33. *Suponha que X é um espaço topológico e $X = U \cup V$, onde U e V são conjuntos abertos de X . Suponha que $U \cap V$ é conexo por caminhos e que $x_0 \in U \cap V$. Se i e j são as aplicações inclusão de U e V respectivamente em X . Então as imagens dos homomorfismos induzidos $i_{\#} : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ e $j_{\#} : \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ geram $\pi_1(X, x_0)$.*

Demonstração. Veja [23] Teorema 59.1, pág 368. ■

O Teorema 1.2.33 é um caso especial do famoso teorema de topologia chamado **Teorema de Seifert-Van Kampen**, o qual mostra que o grupo fundamental do espaço $X = U \cup V$, quando $U \cap V$ é conexo por caminhos, é determinado em termos do grupo fundamental de U e V . Do Teorema 1.2.33 é fácil obter o seguinte corolário.

Corolário 1.2.34. *Supor $X = U \cup V$, onde U e V são conjuntos abertos de X . Suponha que $U \cap V$ é não vazio e conexo por caminhos. Se U e V são simplesmente conexos, então X é simplesmente conexo.*

Teorema 1.2.35. *Se $n \geq 2$, a n -esfera S^n é simplesmente conexa.*

Demonstração. Seja $p = (0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $q = (0, 0, \dots, -1)$ o polo norte e o polo sul de S^n , respectivamente. Para $n \geq 1$, $S^n - \{p\}$ é homeomorfa a \mathbb{R}^n . Defina

$$f : S^n - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ onde}$$

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n).$$

A aplicação f é chamada a **projeção estereográfica** e observe que f é um homeomorfismo, pois $g : \mathbb{R}^n \rightarrow (S^n \setminus \{p\})$ dado por $g(y) = g(y_1, \dots, y_n) = (t(y)y_1, \dots, t(y)y_n, 1 - t(y))$, onde $t(y) = \frac{2}{(1 + |y|^2)}$, é a inversa de f .

Notar que a reflexão $(x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$ define um homeomorfismo de $S^n \setminus \{p\}$ com $S^n \setminus \{q\}$, então $S^n \setminus \{q\}$ é homeomórfico a \mathbb{R}^n .

Agora seja $U = S^n \setminus \{p\}$ e $V = S^n \setminus \{q\}$ conjuntos abertos em S^n , note que S^n é conexo por caminhos, pois U e V são conexos por caminhos (por ser homeomorfos a \mathbb{R}^n) e têm o ponto $(1, 0, \dots, 0) \in S^n$ em comum.

Mostraremos que para $n \geq 2$, a esfera S^n é simplesmente conexa. De fato, os espaços U e V são simplesmente conexos, pois são homeomorfos a \mathbb{R}^n . Além $U \cap V$ é igual a $S^n \setminus \{p, q\}$ que é homeomorfo pela projeção estereográfica a $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Mas, $\mathbb{R}^n - \{0\}$ é conexo por caminhos, pois, como a bola aberta B^n é

homeomorfa a \mathbb{R}^n , então $B^n \setminus \{x\}$ é homeomorfa a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, onde $x \in B^n$. Logo B^n é conexa, então $B^n \setminus \{x\}$ é conexo por caminhos, pois $B^n \setminus \{x\}$ é conexo e aberto. Portanto $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é conexo por caminhos e desta forma $S^n \setminus \{p, q\}$ é conexo por caminhos.

Finalmente, usando o Corolário 1.2.34 temos que $\pi_1(S^n, x_0) = \{e_{x_0}\}$. ■

Teorema 1.2.36. *O grupo $\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$ é isomorfo a $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.*

Demonstração. Sejam $p : X \times Y \rightarrow X$ e $q : X \times Y \rightarrow Y$ as aplicações projeções. Se usarmos o ponto base na afirmação do teorema, induzimos os homomorfismos

$$p_{\#} : \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$q_{\#} : \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

Definamos um homomorfismo

$$\phi : \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

pela equação

$$\phi([f]) = p_{\#}([f]) \times q_{\#}([f]) = [p \circ f] \times [q \circ f].$$

Provaremos que ϕ é um isomorfismo. De fato, a aplicação ϕ é sobrejetiva, pois, seja $g : I \rightarrow X$ um laço com base em x_0 e $h : I \rightarrow Y$ um laço com base em y_0 .

Provaremos que $[g] \times [h]$ é um elemento da imagem de ϕ . Defina $f : I \rightarrow X \times Y$ pela equação

$$f(s) = g(s) \times h(s),$$

então f é um laço em $X \times Y$ com base em $x_0 \times y_0$ e $\phi([f]) = [p \circ f] \times [q \circ f] = [g] \times [h]$.

Vejam agora que ϕ é injetiva. Suponha que $f : I \rightarrow X \times Y$ é um laço em $X \times Y$ com base $x_0 \times y_0$ tal que $\phi([f]) = [p \circ f] \times [q \circ f] = [e_{x_0}]$ é o elemento identidade. Isto significa que $p \circ f \simeq_p e_{x_0}$ e $q \circ f \simeq_p e_{y_0}$. Agora, sejam G e H as respectivas homotopias de caminhos. Então a aplicação $F : I \times I \rightarrow X \times Y$ definida por

$$F(s, t) = G(s, t) \times H(s, t)$$

é uma homotopia por caminhos entre f e o laço constante com base em $x_0 \times y_0$. Logo o $\ker(\phi) = [e_{x_0} \times e_{y_0}]$.

Portanto ϕ é um isomorfismo. ■

Corolário 1.2.37. *O grupo fundamental do toro $T^2 = S^1 \times S^1$ é isomorfo ao grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

Demonstração. A demonstração segue facilmente dos Teoremas 1.2.32 e 1.2.36.

■

Definição 1.2.38. O **plano projetivo** P^2 é o espaço quociente obtido de S^2 identificando cada ponto x de S^2 com seu ponto antípoda.

Teorema 1.2.39. *O plano projetivo P^2 é uma superfície compacta, e a aplicação quociente $p : S^2 \rightarrow P^2$ é uma aplicação de recobrimento.*

Demonstração. Veja [23] Teorema 60.3, pág 372. ■

Corolário 1.2.40. *$\pi(P^2, y)$ é um grupo de ordem 2.*

Demonstração. A aplicação $p : S^2 \rightarrow P^2$ é uma aplicação de recobrimento pelo Teorema 1.2.39. Pelo Teorema 1.2.35 S^2 é simplesmente conexo. Sendo S^2 simplesmente conexo, então pelo Teorema 1.2.30, existe uma correspondência biunívoca entre $\pi_1(P^2, y)$ e o conjunto $p^{-1}(y)$. Agora, como $p^{-1}(y) = p^{-1}(p(x)) = \{x\} \cup \{-x\}$, então $\pi(P^2, y) \cong \mathbb{Z}_2$. ■

1.2.5 Retrações, Retrações de Deformação e Tipos de Homotopia

Uma forma de obter informação sobre o grupo fundamental de um espaço X é estudar os espaços de recobrimento de X . Agora mostramos uma outra forma, a qual precisa do conceito de tipo de homotopia. Isto proporciona um método para reduzir o problema de calcular o grupo fundamental de um espaço ao problema de calcular o grupo fundamental de algum outro espaço mais familiar.

Definição 1.2.41. Seja A um subconjunto de X , dizemos que uma **retração** de X em A é uma aplicação contínua $r : X \rightarrow A$ tal que $r|_A$ é a aplicação identidade de A . Se tal aplicação r existe, dizemos que A é um retrato de X .

Lema 1.2.42. *Se A é um retrato de X , então o homomorfismo de grupos fundamentais induzido pela inclusão $j : A \rightarrow X$ é injetivo.*

Demonstração. Se $r : X \rightarrow A$ é uma retração, então a aplicação composição $r \circ j$ é igual à identidade de A . Do Teorema 1.2.17, $r_{\#} \circ j_{\#} = (r \circ j)_{\#}$ é o homomorfismo identidade de $\pi_1(A, a)$, portanto $j_{\#}$ é injetivo. ■

Teorema 1.2.43. *Não existe uma retração de D^2 (disco em \mathbb{R}^2) sobre S^1 .*

Demonstração. Se S^1 fosse um retrato de B^2 , então o homomorfismo $j_{\#} : \pi_1(S^1, x_0) \rightarrow \pi_1(B^2, x_0)$ induzido pela inclusão $j : S^1 \rightarrow B^2$ é injetivo, o qual é uma contradição, pois o grupo fundamental de B^2 é trivial e o grupo fundamental de S^1 não é trivial. ■

Lema 1.2.44. *O grupo fundamental da figura oito é não abeliano.*

Demonstração. Veja [23] Lema 60.5, pág 373. ■

Teorema 1.2.45. *O grupo fundamental do Bitoro não é abeliano.*

Demonstração. A figura oito X é um retrato do Bitoro. Este fato implica que a inclusão $j : X \rightarrow (\text{Bitoro})$ induz um monomorfismo $j_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(\text{Bitoro}, x_0)$, logo $\pi_1(\text{Bitoro}, x_0)$ contém um subgrupo não abeliano, pois a figura oito tem grupo fundamental não abeliano pelo Lema 1.2.44. Portanto $\pi_1(\text{Bitoro}, x_0)$ não é abeliano. ■

Corolário 1.2.46. *A 2-esfera, o toro, o plano projetivo e o bitoro são topologicamente distintos.*

Demonstração. Todos eles têm grupo fundamental diferente. ■

Lema 1.2.47. *Sejam $h, k : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ duas aplicações contínuas. Se h e k são homotópicos e a imagem do ponto base x_0 de X permanece fixa em y_0 durante a homotopia, então os homomorfismos $h_{\#}$ e $k_{\#}$ coincidem.*

Demonstração. Pela hipótese, existe uma homotopia $H : X \times I \rightarrow Y$ entre h e k tal que $H(x_0, t) = y_0$, para todo $t \in I = [0, 1]$. Segue que se f é um laço em X com base em x_0 , então a composição

$$I \times I \xrightarrow{(f, \text{id})} X \times I \xrightarrow{H} Y$$

é uma homotopia entre $h \circ f$ e $k \circ f$. Além disso, é uma homotopia por caminhos porque f é um laço em x_0 e H aplica $x_0 \times I$ em y_0 . ■

Usando o Lema 1.2.47, generalizamos um resultado anterior que afirma que o homomorfismo induzido por la inclusão $j : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ não só é injetivo ele também é sobrejetivo. Mais claramente provamos o seguinte teorema.

Teorema 1.2.48. *A aplicação inclusão $j : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ induz um isomorfismo de grupos fundamentais.*

Demonstração. Seja $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ e $b_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Seja $r : X \rightarrow S^n$ a aplicação $r(x) = \frac{x}{|x|}$. Então, $r \circ j$ é a aplicação identidade de S^n de maneira que $(r \circ j)_\# = r_\# \circ j_\#$ é o homomorfismo identidade de $\pi_1(S^n, b_0)$. Consideremos agora a composição $j \circ r$, a qual aplica X em si mesmo

$$X \xrightarrow{r} S^n \xrightarrow{j} X,$$

esta aplicação não é a identidade de X , mas é homotópica à aplicação identidade. De fato, a homotopia por retas $H : X \times I \rightarrow X$, dada por

$$H(x, t) = \frac{(1-t)x + tx}{|x|}$$

é uma homotopia entre a aplicação identidade de X e a aplicação $j \circ r$. Observamos que $H(x, t)$ é contínua pois $|x| \neq 0$. O ponto b_0 permanece fixo durante a homotopia, já que $|b_0| = 1$. Logo, pelo Lema 1.2.47 temos que o homomorfismo $(j \circ r)_\# = j_\# \circ r_\#$ é o homomorfismo identidade de $\pi_1(X, b_0)$, portanto j induz um isomorfismo. ■

Definição 1.2.49. Seja A um subespaço de um espaço topológico X . Dizemos que A é um retrato de deformação de X , se a aplicação identidade de X é homotópica a uma aplicação que leva todo X em A e tal que cada ponto de A permanece fixo durante a homotopia. Isto significa que existe uma aplicação contínua

$$H : X \times I \rightarrow X,$$

tal que $H(x, 0) = x$ e $H(x, 1) \in A$, para todo $x \in X$, e $H(a, t) = a \ \forall a \in A$. A homotopia H chama-se **retração de deformação** de X em A .

A aplicação $r : X \rightarrow A$ definida pela equação $r(x) = H(x, 1)$ é uma retração de X em A e H é uma homotopia entre a aplicação identidade de X e a aplicação $j \circ r$, onde $j : A \rightarrow X$ é a inclusão.

Teorema 1.2.50. *Seja A um retrato de deformação de X e $x_0 \in A$. Então, a aplicação inclusão*

$$j : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

induz um isomorfismo de grupos fundamentais.

Demonstração. Sejam $x_0 \in A$, $r : X \rightarrow A$ a retração de X em A definida pela equação $r(x) = H(x, 1)$ e H uma homotopia entre a aplicação identidade de X e a aplicação $j \circ r$, onde $j : A \rightarrow X$ é a inclusão. Isto significa que existe uma

aplicação contínua $H : X \times I \rightarrow X$ tal que $H(x, 0) = x$ e $H(x, 1) \in A$ para cada $x \in X$ e $H(a, t) = a$, $\forall a \in A$. Como $id, j \circ r : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ são aplicações de (X, x_0) em (X, x_0) , então pelo Lema 1.2.47 temos que $j_{\#} \circ r_{\#} = id_{\#X}$, onde $id_{\#X}$ é o homomorfismo identidade de $\pi_1(X, x_0)$. Mas, por outro lado $r \circ j$ é a identidade de A , logo $r_{\#} \circ j_{\#} = id_{\#A}$, onde $id_{\#A}$ é o homomorfismo identidade de $\pi_1(A, x_0)$. Portanto $\pi_1(A, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$. ■

Definição 1.2.51. Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ duas aplicações contínuas. Suponhamos que a aplicação $g \circ f : X \rightarrow X$ seja homotópica à aplicação identidade de X e que a aplicação $f \circ g : Y \rightarrow Y$ seja homotópica à aplicação identidade de Y . Então as aplicações f e g chamam-se de equivalências homotópicas e cada uma delas diz-se que é inversa homotópica da outra. É direto comprovar que se $f : X \rightarrow Y$ é uma **equivalência homotópica** de X com Y e $h : Y \rightarrow Z$ é uma equivalência homotópica de Y com Z , então $h \circ f : X \rightarrow Z$ é uma equivalência homotópica de X com Z . Segue que a relação de equivalência homotópica é uma relação de equivalência. Dois espaços topológicos que são homotopicamente equivalentes são ditos possuir o mesmo tipo de homotopia.

Observamos que se A é um retrato de deformação de X , então A tem o mesmo tipo de homotopia que X . De fato, seja $j : A \rightarrow X$ a aplicação inclusão e seja $r : X \rightarrow A$ a aplicação retração. Então, a composição $r \circ j$ é a identidade de A e a composição $j \circ r$ é por hipótese homotópica à aplicação identidade de X .

Vamos a mostrar agora que, dois espaços que tenham o mesmo tipo de homotopia têm grupos fundamentais isomorfos.

Lema 1.2.52. Sejam $h, k : X \rightarrow Y$ duas aplicações contínuas com $h(x_0) = y_0$ e $k(x_0) = y_1$. Se h e k são homotópicos, então existe um caminho α em Y de y_0 a y_1 tal que $k_{\#} = \widehat{\alpha} \circ h_{\#}$. Certamente, se $H : X \times I \rightarrow Y$ é a homotopia entre h e k , então α é o caminho $\alpha(t) = H(x_0, t)$.

Demonstração. Seja $f : I \rightarrow X$ um laço em X com base em x_0 . Devemos provar que $k_{\#}([f]) = \widehat{\alpha}(h_{\#}([f]))$. Esta equação afirma que $[k \circ f] = [\widehat{\alpha}] * [h \circ f] * [\alpha]$, que é equivalente a

$$[\alpha] * [k \circ f] = [h \circ f] * [\alpha].$$

E é esta a equação que vamos a provar.

Para começar, consideremos os laços $f_0(s) = (f(s), 0)$ e $f_1(s) = (f(s), 1)$. Consideremos também o caminho C em $X \times I$ dado pela equação

$$C(t) = (x_0, t),$$

então, $H \circ f_0 = h \circ f$ e $H \circ f_1 = K = k \circ f$ e $H \circ C(t) = \alpha(t)$.

Seja $F : I \times I \rightarrow X \times I$ a aplicação $F(s, t) = (f(s), t)$. Consideremos os seguintes caminhos em $I \times I$ os quais se movimentam pelos quatro lados de $I \times I$;

$$\begin{aligned} B_0(s) &= (s, 0) \text{ e } B_1(s) = (s, 1) \\ \alpha_0(t) &= (0, t) \text{ e } \alpha_1(t) = (1, t), \end{aligned}$$

então, $F \circ B_0 = f_0$, $F \circ B_1 = f_1$, $F \circ \alpha_0 = F \circ \alpha_1 = C$. Os caminhos $B_0 * \alpha_1$ e $\alpha_0 * B_1$ são caminhos em $I \times I$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$. Como $I \times I$ é convexo, existe uma homotopia de caminhos G entre eles, então $F \circ G$ é uma homotopia de caminhos em $X \times I$ entre $f_0 * C$ e $C * f_1$. Assim, $H \circ (F \circ G)$ é uma homotopia de caminhos em Y entre

$$\begin{aligned} (H \circ f_0) * (H \circ C) &= (h \circ f) * \alpha \text{ e} \\ (H \circ C) * (H \circ f_1) &= \alpha * (k \circ f) \end{aligned}$$

como desejamos. ■

Um corolário imediato do Lema 1.2.52 é:

Corolário 1.2.53. *Sejam $h, k : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas homotópicas satisfazendo $h(x_0) = y_0$ e $k(x_0) = y_1$. Se $h_{\#}$ é injetiva, sobrejetiva ou trivial, então $k_{\#}$ também é.*

Corolário 1.2.54. *Seja $h : X \rightarrow Y$ uma aplicação. Se h é homotopicamente nula, então $h_{\#}$ é homotopicamente trivial.*

Demonstração. A aplicação constante induz o homomorfismo trivial, logo a conclusão segue do Lema 1.2.52. ■

Teorema 1.2.55. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua com $f(x_0) = y_0$. Se f é uma equivalência homotópica, então*

$$f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Seja $g : Y \rightarrow X$ uma inversa homotópica para f . Consideramos as aplicações $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (X, x_1) \xrightarrow{f} (Y, y_1)$, onde $x_1 = g(x_0)$ e $y_1 = f(x_1)$.

Temos os homomorfismos induzidos por f relativos aos pontos base tal como se mostra no diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{(f_{x_0})_{\#}} & \pi_1(Y, y_0) \\
& \searrow g_{\#} & \\
\pi_1(X, x_1) & \xrightarrow{(f_{x_1})_{\#}} & \pi_1(Y, y_1)
\end{array}$$

Mas, $g \circ f : (X, x_0) \rightarrow (X, x_1)$ é por hipótese homotópico à aplicação identidade, e pelo Lema 1.2.52 existe um caminho α em X de x_0 a x_1 tal que $(g \circ f)_{\#} = \hat{\alpha} \circ (id_X)_{\#} = \hat{\alpha}$, onde id_X é a identidade de X . Logo $g_{\#} \circ (f_{x_0})_{\#} = \hat{\alpha}$ é um isomorfismo. Analogamente, dado que $f \circ g$ é homotópico à aplicação identidade i_Y , o homomorfismo $(f \circ g)_{\#} = (f_{x_1})_{\#} \circ g_{\#}$ é um isomorfismo.

Do fato que $g_{\#} \circ (f_{x_0})_{\#}$ é um isomorfismo, temos que $g_{\#}$ é sobrejetivo e do fato que $(f_{x_1})_{\#} \circ g_{\#}$ é um isomorfismo, temos que $g_{\#}$ é injetiva. Logo, $g_{\#}$ é um isomorfismo. Segue que $(f_{x_0})_{\#} = (g_{\#})^{-1} \circ \hat{\alpha}$, portanto $(f_{x_0})_{\#}$ é um isomorfismo, pois é a composição de dois isomorfismos. ■

1.2.6 Teorema de Seifert-Van Kampen

Voltemos agora ao problema de determinar o grupo fundamental de um espaço X que pode ser escrito como a união dos subconjuntos abertos U e V que têm interseção conexa por caminhos. Provamos no Teorema 1.2.33 que se $x_0 \in U \cap V$, as imagens dos grupos $\pi_1(U, x_0)$ e $\pi_1(V, x_0)$ em $\pi_1(X, x_0)$, pelos homomorfismos induzidos pela inclusão, geram o $\pi_1(X, x_0)$. Nesta subseção provaremos que $\pi_1(X, x_0)$ está completamente determinado por $\pi_1(U, x_0)$, $\pi_1(V, x_0)$, $\pi_1(U \cap V, x_0)$ e os homomorfismos entre estes subgrupos induzidos pela inclusão. Este é um resultado básico sobre grupos fundamentais. Nos permitirá calcular os grupos fundamentais de numerosos espaços, incluindo as variedades compactas de dimensão dois.

Teorema 1.2.56 (Teorema de Seifert-Van Kampen). *Seja $X = U \cup V$, onde U e V são abertos em X , assumamos que $U, V, U \cap V$ são conexos por caminhos. Seja $x_0 \in U \cap V$ e H um grupo, se ϕ_1, ϕ_2 são homomorfismos e i_1, i_2, j_1, j_2 são homomorfismos inclusão indicados no diagrama*

$$\begin{array}{ccccc}
& & \pi_1(U, x_0) & & \\
& \nearrow i_1 & \downarrow j_1 & \searrow \phi_1 & \\
\pi_1(U \cap V, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\phi} & H \\
& \searrow i_2 & \uparrow j_2 & \nearrow \phi_2 & \\
& & \pi_1(V, x_0) & &
\end{array}$$

tal que $\phi \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$, então existe um único homomorfismo $\phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H$ tal que $\phi \circ j_1 = \phi_1$ e $\phi \circ j_2 = \phi_2$. No sentido algébrico

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0).$$

Demonstração. Veja [23] Teorema 70.1, pág 426. ■

Corolário 1.2.57. *Assuma as hipóteses do Teorema de Seifert-Van Kampen. Se $U \cap V$ é simplesmente conexo, então existe um isomorfismo*

$$k : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0).$$

Exemplo 1.2.58. *Calculamos o grupo fundamental do seguinte espaço X .*

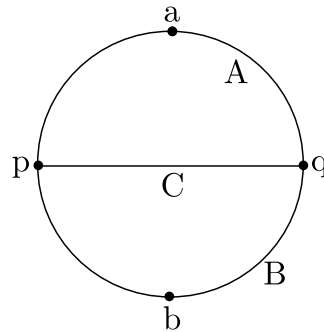


Figura 1.1: Espaço X

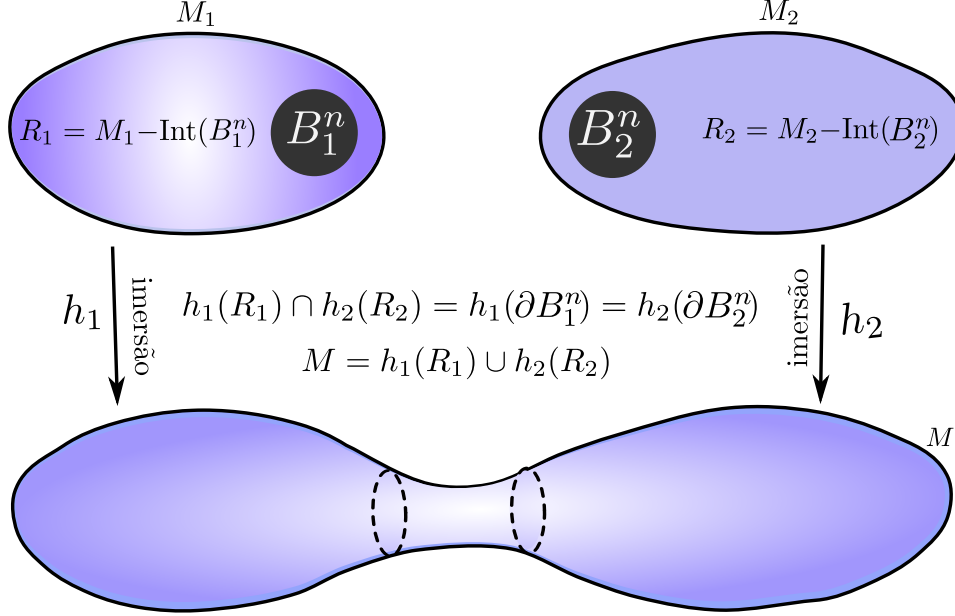
Seja a um ponto interior de A e b é um ponto interior de B . Escreva X como a união dos conjuntos abertos $U = X \setminus \{a\}$ e $V = X \setminus \{b\}$. O espaço $U \cap V = X \setminus \{a, b\}$ é simplesmente conexo, pois este é contratíl. Além disso, U e V têm grupo fundamental cíclico infinito, pois U tem o mesmo tipo de homotopia de $B \cup C$ e V tem o mesmo tipo de homotopia de $A \cup C$. Portanto, pelo Corolário 1.2.57, o grupo fundamental de X é o produto livre de dois grupos cíclicos infinitos.

1.2.7 Teorema de Classificação Das Superfícies Compactas e Conexas

Nesta subseção mostraremos a classificação das superfícies compactas e conexas com bordo ou sem bordo (fechadas), além disso explicitaremos o grupo fundamental de uma superfície compacta com bordo ou sem bordo (fechada).

Definição 1.2.59. Sejam M , M_1 e M_2 n -variedades conexas, se existem $B_i^n \subset \text{Int}(M_i)$ ($i = 1, 2$) e imersões $h_i : R_i \rightarrow M$ ($R_i = M_i - \text{Int}(B_i^n)$) com $h_1(R_1) \cap$

$h_2(R_2) = h_1(\partial B_1^n) = h_2(\partial B_2^n)$ ($i = 1, 2$) e $M = h_1(R_1) \cup h_2(R_2)$ então dizemos que M é uma **soma conexa** de M_1 e M_2 , e denotamos $M = M_1 \# M_2$.



Notação: $M = M_1 \# M_2$

Figura 1.2: Soma conexa de M_1 e M_2

Exemplos 1.2.60. *O Bitoro é soma conexa de dois toros.*

Teorema 1.2.61. *Todo superfície M compacta, fechada e conexa é homeomorfa a:*

- (i) *A esfera S^2 com característica de Euler igual a $\chi(S^2) = 2$, ou*
- (ii) *A soma conexa $S_g = \overbrace{T^2 \# T^2 \dots \# T^2}^{g\text{-vezes}}$ de g toros, com $g \geq 1$ e característica de Euler igual a $\chi(S_g) = 2 - 2g$, se M é orientável, ou*
- (iii) *A soma conexa $N_g = \overbrace{P^2 \# P^2 \dots \# P^2}^{g\text{-vezes}}$ de g planos projetivos, com $g \geq 1$ e característica de Euler igual a $\chi(N_g) = 2 - g$, se M é não orientável.*

Em termos de apresentações dos grupos fundamentais temos que $\pi_1(M)$ é um dos seguintes grupos:

- 1) $\pi_1(S^2) = 1$;
- 2) $\pi_1(S_g) = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid \prod_{j=1}^g [a_j, b_j] \rangle$, para $g \geq 1$;
- 3) $\pi(N_g) = \langle a_1, \dots, a_g \mid a_1^2 \dots a_g^2 \rangle$, para $g \geq 1$.

Demonstração. Veja [23] Teorema 74.3 e Teorema 74.4, páginas 452-453. ■

Observação 1.2.62.

- 1) O número g é chamado o **gênero** da superfície orientável S_g ou da superfície não orientável N_g .
- 2) Denotamos a esfera com r componentes de bordo por $S_{0,r}$.
- 3) Denotamos a superfície orientável S_g com $g \geq 1$ e r componentes de bordo por $S_{g,r}$.
- 4) Denotamos a superfície não orientável N_g com $g \geq 1$ e r componentes de bordo por $N_{g,r}$.

Agora generalizando o teorema anterior para superfícies compactas conexas com bordo temos o seguinte teorema.

Teorema 1.2.63. *Toda superfície compacta, conexa M com r componentes de bordo é homeomorfa a:*

- 1) $S_{0,r}$ com $r \geq 0$ e característica de Euler $\chi(S_{0,r}) = 2 - r$, ou
- 2) $S_{g,r}$ com $g \geq 1$, $r \geq 0$ e característica de Euler $\chi(S_{g,r}) = 2 - 2g - r$, se M é orientável, ou
- 3) $N_{g,r}$ com $g \geq 1$, $r \geq 0$ e característica de Euler $\chi(N_{g,r}) = 2 - g - r$, se M não é orientável.

Em termos das apresentações dos grupos fundamentais temos que $\pi_1(M)$ é um dos seguintes grupos;

$$a) \pi_1(S_{0,r}) = \langle s_1, \dots, s_r \mid \prod_{i=1}^r s_i \rangle;$$

$$b) \pi_1(S_{g,r}) = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, s_1, \dots, s_r \mid \prod_{j=1}^g [a_j, b_j] \prod_{i=1}^r s_i \rangle;$$

$$c) \pi_1(N_{g,r}) = \langle a_1, \dots, a_g, s_1, \dots, s_r \mid \prod_{j=1}^g a_j^2 \prod_{i=1}^r s_i \rangle.$$

Demonstração. Citar [2] pág 113, Teorema 26.9. Além disso, fazendo em a) uma transformação de Tietze, ou seja, colocando em evidência s_r , temos que $\pi_1(S_{0,r})$ é um grupo livre de posto $r - 1$. Da mesma forma fazendo a mesma transformação de Tietze em b) e c) obtemos que $\pi_1(S_{g,r})$ e $\pi_1(N_{g,r})$ são grupos livres de posto $2g + r - 1$ e $g + r - 1$ respectivamente. ■

1.3 - Algumas definições e Resultados Importantes sobre 3-variedades

Nesta seção daremos a conhecer as distintas características de uma 3-variedade, assim como alguns Teoremas e Lemas sobre 3-variedades primas, ressaltando entre todos eles o Teorema de Decomposição Prima de Kneser-Milnor.

Definição 1.3.1. Uma n -variedade (com bordo o sem bordo) M é um espaço de Hausdorff com base enumerável tal que cada ponto $x \in M$ tem uma vizinhança U_x homeomorfa a um aberto de \mathbb{R}^n ou a um aberto de \mathbb{H}^n (o semiespaço superior fechado de \mathbb{R}^n)

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}.$$

O conjunto de todos os pontos $x \in M$ os quais só possuem vizinhanças homeomorfas a \mathbb{H}^n constituem o bordo de X . O bordo de M é denotado por ∂M . Se o bordo de M é vazio, então M é uma variedade sem bordo.

A definição do bordo de uma variedade nem sempre coincide com a definição de bordo de um espaço topológico. Por exemplo, a variedade $M = D^n$ considerada como uma variedade não tem bordo mas como um subespaço de \mathbb{R}^n tem bordo S^{n-1} .

Teorema 1.3.2 (Teorema de Alexander). *Cada 2-esfera imersa em \mathbb{R}^3 é fronteira de uma 3-bola B^3 imersa em \mathbb{R}^3 .*

Demonstração. Veja [10] Teorema 1.1, pág 1. ■

Definição 1.3.3. Dizemos que uma superfície S compacta e conexa é **propriamente imersa** em uma 3-variedade M , se $\partial M \cap S = \partial S$.

Definição 1.3.4. Seja M uma 3-variedade e S uma superfície compacta e conexa imersa em M , dizemos que S é uma **superfície de 2-lados** em M , se S está propriamente imersa em M e existe uma imersão $h : S \times [0, 1] \mapsto M$ tal que $h(x, 0) = x$ para cada $x \in S$, $h(\partial S \times [0, 1]) \subset \partial M$ e $h(S \times [0, 1])$ é uma vizinhança de S em M .

Definição 1.3.5. Uma 3-variedade conexa M é uma **3-variedade prima**, se $M \simeq M_1 \# M_2$, então $M_1 = S^3$ ou $M_2 = S^3$.

Exemplos 1.3.6. S^3 é uma 3-variedade prima. Com efeito, seja $S^3 = M_1 \# M_2$, onde $M_1 \setminus S^2$ e $M_2 \setminus S^2$ têm uma componente de bordo homeomorfo a uma 2-esfera S^2 . Logo, pelo Teorema 1.3.2 uma 2-esfera S^2 limita uma 3-bola B^3 , o qual implica que $M_1 = S^3$, ou $M_2 = S^3$.

Definição 1.3.7. Uma 3-variedade M é dita **irreduzível** se cada esfera $S^2 \subset M$ limita uma 3-bola $B^3 \subset M$.

Exemplos 1.3.8. \mathbb{R}^3 é uma 3-variedade irreduzível, pelo Teorema de Alexander (Teorema 1.3.2).

Teorema 1.3.9. Seja M uma 3-variedade conexa. M é uma 3-variedade prima se, e somente se, M é irreduzível, ou é o fibrado orientável de S^2 sobre S^1 ($S^2 \times S^1$), ou é o fibrado não orientável de S^2 sobre S^1 .

Demonstração. Veja [13] pág 19, ou [11] Lema 3.13 pág 28. ■

Definição 1.3.10. Uma 3-variedade M é **P^2 -irreduzível**, se M é irreduzível e M não contém um plano projetivo P^2 de dois lados.

Lema 1.3.11. Se $M_1 \# M_2$ é uma decomposição em soma conexa de uma 3-variedade conexa M , então

$$\pi_1(M) \cong \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2)$$

Demonstração. Veja [11] Teorema 3.2, pág 25. ■

Definição 1.3.12. Uma superfície conexa S imersa numa 3-variedade M é dita **compressível** se S é homeomorfa a uma 2-esfera S^2 e S é o bordo de uma variedade homotópica a uma 3-bola B^3 em M . Caso contrário S é dita **incompressível**.

Definição 1.3.13. Dizemos que uma 3-variedade M tem **bordo incompressível**, se cada componente F do bordo de M não é S^2 nem um plano projetivo e o homomorfismo $i_{\#} : \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M)$ é injetivo, onde $i_{\#}$ é o homomorfismo induzido da inclusão de F em M .

Exemplos 1.3.14. • Seja D^2 um disco, $D^2 \times S^1$ é uma 3-variedade que não tem bordo incompressível, pois $\pi_1(D^2 \times S^1) = \mathbb{Z}$, Além disso, o bordo de $D^2 \times S^1$ é um toro com grupo fundamental $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Mas, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z}$.

- $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ é uma 3-variedade com bordo incompressível toral não vazio (bordo formado por toros).

Definição 1.3.15. Seja M uma 3-variedade com bordo não vazio, uma superfície orientável S (não necessariamente imersa) em M é chamada de **bordo paralelo** se $\pi_1(S)$ é conjugado de um subgrupo de $\pi_1(\partial_0 M)$, onde $\partial_0 M$ é uma componente do bordo de M .

Definição 1.3.16. Uma superfície fechada imersa numa 3-variedade M é chamada de **essencial**, se é incompressível e não é de bordo paralelo.

Definição 1.3.17. Uma 3-variedade M irredutível é chamada **atoroidal**, se cada toro \mathbb{T}^2 incompressível em M tem grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ sendo o conjugado de um subgrupo de $\pi_1(\partial_0 M)$, onde $\partial_0 M$ é uma componente do bordo de M , ou seja, cada toro \mathbb{T}^2 incompressível em M é de bordo paralelo. No caso que $\partial M = \emptyset$, M diz-se **atoroidal** se $\pi_1(M)$ não contém $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Exemplo 1.3.18. $D^2 \times S^1$ é uma variedade atoroidal.

Definição 1.3.19. Uma 3-variedade compacta M é chamada uma **Variedade de Haken**, se M é P^2 -irredutível e contém uma superfície incompressível de dois lados .

Teorema 1.3.20 (Hempel-1976). *Seja M uma 3-variedade compacta, P^2 -irredutível com bordo (possivelmente vazio). Se $\pi_1(M)$ tem o primeiro número de Betti positivo, ou seja $b(\pi_1(M)) > 0$, então M é uma variedade de Haken.*

Demonstração. Veja [11] Lema 6.6, pág 62. ■

Teorema 1.3.21 (Teorema de Decomposição Prima de Kneser(1928)-Milnor(1962)). *Uma 3-variedade M compacta e conexa pode ser escrito como uma soma conexa $M = M_1 \# M_2 \dots \# M_n$, onde cada M_i é uma variedade prima, compacta e conexa. Se $M = M_1 \# \dots \# M_n = M_1^* \# \dots \# M_m^*$, então $n = m$ e depois de um reordenamento M_i é homeomórfico a M_i^* , para $i = 1, \dots, n$. Além disso, $\pi_1(M) = \pi_1(M_1) * \dots * \pi_1(M_n)$.*

Demonstração. Veja [11] Teorema 3.15, pág 31 ou [21] pág 1-7. ■

1.4 - 3-Variedades Hiperbólicas

Nesta seção definiremos uma 3-variedade hiperbólica com bordo (possivelmente vazio), além disso daremos a conhecer os Teoremas e Corolários sobre 3-variedades hiperbólicas que usaremos no desenvolvimento do trabalho, por exemplo o Teorema de Rigidez de Mostow-Prasad-Marden.

1.4.1 O Espaço \mathbb{H}^3 , o Modelo da Bola Unitária e Transformações de Möbius

Existem dois modelos clássicos para espaços hiperbólicos. Primeiramente, temos o **modelo do semiespaço superior**, que consiste do aberto

$$\mathbb{H}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 > 0\},$$

de \mathbb{R}^3 munido da métrica hiperbólica

$$ds_{\mathbb{H}^3}^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_3^2}.$$

As geodésicas da 3-variedade $\mathbb{H}^3 = (\mathbb{H}^3, ds_{\mathbb{H}^3}^2)$ são retas e os semi-círculos (no sentido euclidiano usual destes termos) ortogonais ao hiperplano $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$. O segundo modelo é o **modelo da bola Unitária (ou modelo de Poincaré)**. Trata-se do aberto

$$B^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid \sum_{i=1}^3 x_i^2 < 1\}$$

de \mathbb{R}^3 munido da métrica hiperbólica

$$ds_{B^3}^2 = \frac{4(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}{(1 - \sum_{i=1}^3 x_i^2)^2}.$$

Denotamos $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ como $\widehat{\mathbb{R}}^3$. Uma **similaridade** S de \mathbb{R}^3 é dada por

$$S(p) = \lambda \cdot Ap + b \quad (\lambda > 0, A \in O(3), b \in \mathbb{R}^3),$$

onde $O(3)$ é o grupo das transformações ortogonais de \mathbb{R}^3 . Temos que $S(\infty) = \infty$ e S é um automorfismo de $\widehat{\mathbb{R}}^3$. Defina J por

$$J(p) = \frac{p}{|p|^2} \quad J(0) = \infty, \text{ e } J(\infty) = 0.$$

Observamos que $J : \widehat{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^3$ é também um automorfismo, o qual chamamos de **reflexão fundamental** de $\widehat{\mathbb{R}}^3$.

Definição 1.4.1. A **transformação de Möbius** de $\widehat{\mathbb{R}}^3$ é um automorfismo preservando orientação de $\widehat{\mathbb{R}}^3$ obtida como uma composição de um número finito de similaridades e reflexões fundamentais. O conjunto destas transformações é denotado por $Möb(\widehat{\mathbb{R}}^3)$.

Exemplos 1.4.2. Uma similaridade S de \mathbb{R}^3 e uma reflexão fundamental J de $\widehat{\mathbb{R}}^3$ são exemplos claros de transformações de Möbius.

Da definição, é fácil mostrar que qualquer transformação de Möbius aplica esferas e planos em esferas e planos respectivamente .

Para um subconjunto E em $\widehat{\mathbb{R}^3}$, denotamos por $Möb(E)$ o conjunto de todas as transformações de Möbius que preservam E , ou seja,

$$Möb(E) = \{T \in Möb(\widehat{\mathbb{R}^3}) \mid T(E) = E\}.$$

Denotamos por $Isom^+(\mathbb{H}^3)$ o grupo de todos os automorfismos preservando orientação de \mathbb{H}^3 que são isométricos com respeito à métrica hiperbólica.

Teorema 1.4.3. *$Isom^+(\mathbb{H}^3)$ é identificado com $Möb(B^3)$.*

Demonstração. Veja [20] Teorema 1.7, pág 19. ■

A bola unitária em \mathbb{R}^3 pode ser transformada em \mathbb{H}^3 por uma transformação de Möbius. Por exemplo, seja $e = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$, definimos um elemento $\varphi \in Möb(\widehat{\mathbb{R}^3})$ por

$$\varphi(p) = e + 2J(J(p) - e).$$

Então, temos que $\varphi(B^3) = \mathbb{H}^3$ e φ é chamada a **projeção estereográfica** em 3-dimensões. Pela definição do espaço \mathbb{H}^3 , o grupo de transformações de Möbius

$$Möb(\mathbb{H}^3) = \varphi Möb(B^3) \varphi^{-1},$$

qual preserva \mathbb{H}^3 , pode ser identificado com $Isom^+(\mathbb{H}^3)$. O espaço \mathbb{H}^3 é importante pois temos a seguinte representação de $Möb(\mathbb{H}^3)$.

Teorema 1.4.4. *Identificamos $Möb(\mathbb{H}^3)$ com o grupo das transformações lineares fracionárias*

$$Möb = \left\{ \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\}$$

e portanto com

$$PSL_2(\mathbb{C}) = \frac{SL_2(\mathbb{C})}{\{\pm I\}}.$$

Assim, $Isom^+(\mathbb{H}^3)$ pode ser identificado com $Möb$, $Möb(B^3)$ ou $PSL_2(\mathbb{C})$

Demonstração. Veja [20] Teorema 1.8, pág 20. ■

1.4.2 Variedades Hiperbólicas sem bordo

Nesta subseção daremos a definição das variedades hiperbólicas sem bordo e mostraremos que elas podem ser expressadas como espaços quocientes do espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 com um grupo Kleiniano.

Definição 1.4.5. Uma 3-variedade M conexa sem bordo é chamado uma **Vari-
edade Hiperbólica** se ela tem uma família (atlas), $\{(U_j, f_j)\}_{j \in J}$ que satisfaz as seguintes condições:

- (1) Cada U_j é um subconjunto aberto de M e $\{U_j\}$ recobre M ;
- (2) Cada f_j é um homeomorfismo de U_j em \mathbb{H}^3 ;
- (3) Se $U_{kj} = U_k \cap U_j$ é não vazio, então este é conexo e

$$f_{kj} = f_k \circ f_j^{-1} : f_j(U_{kj}) \rightarrow f_k(U_{kj})$$

é um difeomorfismo preservando a orientação, o qual preserva a métrica hiperbólica.

Cada f_{kj} na condição (3) da Definição 1.4.5 resulta ser a restrição de um elemento de $Isom^+(\mathbb{H}^3)$ a $f_j(U_{kj})$, qual pode ser visto na seguinte proposição.

Proposição 1.4.6. *Um homeomorfismo isométrico preservando orientação de um domínio D de \mathbb{H}^3 em \mathbb{H}^3 é necessariamente a restrição de um elemento de $Isom^+(H^3)$ a D .*

Demonstração. Veja [20] Teorema 1.10, pág 24. ■

Definição 1.4.7. Dada uma 3- variedade conexa diferenciável X e um subgrupo G do grupo de difeomorfismos $Diff(X)$, dizemos que um espaço Hausdorff conexo M é uma (G, X) -**variedade**, se existe uma família $(U_j, f_j)_{j \in J}$ qual satisfaz:

- (1) Cada U_j é um subconjunto aberto de M e $\{U_j\}_{j \in J}$ recobre M ;
- (2) Cada f_j é um homeomorfismo de U_j em \mathbb{H}^3 ;
- (3) Se $U_{kj} = U_k \cap U_j$ é não vazio, então este é conexo e $f_{kj} = f_k \circ f_j^{-1}$ é a restrição de um elemento de G à $f_j(U_{kj})$.

Pela Proposição 1.4.6, podemos dizer que as Variedades Hiperbólicas são variedades modeladas geometricamente pela geometria hiperbólica $(Iso^+(\mathbb{H}^3), H^3)$, ou seja, uma variedade hiperbólica é uma $(Iso^+(H^3), H^3)$ -variedade.

Definição 1.4.8. O terno (M_1, π, M_2) das 3-variedades hiperbólicas M_1, M_2 e uma aplicação $\pi : M_1 \rightarrow M_2$ é chamada **o recobrimento de M_2** , se para qualquer ponto p em M_2 , existe uma vizinhança U de p tal que $\pi|_V : V \rightarrow U$, a restrição de π a cada componente V de $\pi^{-1}(U)$, é um homeomorfismo sobrejetor

qual preserva a orientação e a métrica hiperbólica. Então, M_1 é chamado uma **variedade recobrimento** de M_2 e π é a projeção recobrimento. Quando M_1 é simplesmente conexa, (M_1, π, M_2) é chamado um **recobrimento universal**.

Definição 1.4.9. Para uma variedade hiperbólica M , a **aplicação desenvolvimento**, é a aplicação $\rho : \widehat{M} \rightarrow \mathbb{H}^3$ de um recobrimento universal \widehat{M} de M a um espaço hiperbólico, tal que para qualquer aberto simplesmente conexo U de M e qualquer homeomorfismo f de U em \mathbb{H}^3 ,

$$\rho \circ \pi^{-1} \circ f^{-1} : f(U) \rightarrow \mathbb{H}^3$$

é a restrição de algum elemento de $Isom^+(H^3)$ a $f(U)$.

Teorema 1.4.10. *Para qualquer 3-variedade hiperbólica M , existe uma aplicação desenvolvimento $\rho : \widehat{M} \rightarrow \mathbb{H}^3$. Quando M é uma variedade completa, ρ é um homeomorfismo sobrejetor e determinado de maneira única por um elemento de $Isom^+(\mathbb{H}^3)$.*

Demonstração. Seja (\widehat{M}, π, M) um recobrimento universal de M , fixamos um ponto \widehat{p} de \widehat{M} e escolhemos uma coordenada local (U, f) que contém $\pi(\widehat{p}) = p$. \widehat{U} denota a componente de $\pi^{-1}(U)$ contendo \widehat{p} e definimos :

$$\rho_{\widehat{U}} = f \circ \pi : \widehat{U} \rightarrow \mathbb{H}^3.$$

É fácil verificar que $\rho_{\widehat{U}}$ é uma isometria local. Agora observamos que $\rho_{\widehat{U}}$ pode ser estendido ao longo de qualquer caminho de \widehat{p} definindo assim uma isometria $\rho : \widehat{M} \rightarrow \mathbb{H}^3$, pois \widehat{M} é simplesmente conexa. Pela Proposição 1.4.6, temos que ρ é uma aplicação desenvolvimento .

Por outro lado, quando M é completo, \widehat{M} é também completo e o terno $(\widehat{M}, \rho, \mathbb{H}^3)$ é um recobrimento. Como \mathbb{H}^3 é simplesmente conexo, então ρ é um homeomorfismo. ■

Pela Teorema 1.4.10, podemos sempre identificar qualquer recobrimento universal de uma 3-variedade hiperbólica completa com \mathbb{H}^3 .

Grupos Kleinianos

Nesta subseção observaremos que uma 3-variedade hiperbólica completa N pode ser reconstruída como um espaço quociente \mathbb{H}^3/Γ , onde Γ é o recobrimento universal do grupo de transformações do recobrimento universal (\mathbb{H}^3, pr, M) , que é, por definição, o grupo de todos os automorfismos γ de \mathbb{H}^3 tal que satisfaz $pr \circ \gamma = pr$.

Proposição 1.4.11. *O grupo de transformações Γ do recobrimento universal de uma 3-variedade hiperbólica M satisfaz as seguintes condições:*

- (1) Γ é um subgrupo de $Isom^+(\mathbb{H}^3)$ e é isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(M)$;
- (2) Para qualquer dois pontos p e q em \mathbb{H}^3 , a condição $pr(p) = pr(q)$ é equivalente à condição que existe $\gamma \in \Gamma$ que satisfaz $\gamma(p) = q$;
- (3) Para qualquer ponto p em \mathbb{H}^3 , podemos encontrar uma vizinhança U de p que satisfaz $\gamma(U) \cap U = \emptyset$, para qualquer $\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}$. Em particular, cada elemento de γ , exceto a identidade, não tem ponto fixo em \mathbb{H}^3 .

Demonstração. Veja [20] Proposição 1.14, pág 26. ■

Obtemos um isomorfismo $\rho : \pi_1(M) \rightarrow Isom^+(\mathbb{H}^3)$ cuja imagem é o grupo de transformações do recobrimento universal Γ . A aplicação ρ é chamado representação de holonomia de $\pi_1(M)$

Proposição 1.4.12. *Se um subgrupo Γ de $Isom^+(\mathbb{H}^3)$ satisfaz a condição (3) da Proposição 1.4.11, o espaço quociente \mathbb{H}^3/Γ é considerado como uma 3-variedade hiperbólica completa. Em particular, para a imagem Γ da representação de holonomia do grupo fundamental da 3-variedade hiperbólica completa N , temos que \mathbb{H}^3/Γ é isometricamente equivalente à N .*

Demonstração. Veja [20] Proposição 1.14, pág 26. ■

É conhecido que, para um subgrupo Γ de $Isom^+(\mathbb{H}^3)$, uma condição suficiente para o espaço quociente $N = \mathbb{H}^3/\Gamma$ seja Hausdorff é que Γ age sobre \mathbb{H}^3 de modo propriamente descontínuo.

Definição 1.4.13. Seja Γ um subgrupo de $Isom^+(\mathbb{H}^3)$, dizemos que Γ age sobre \mathbb{H}^3 **propriamente descontínuo** se, para qualquer compacto K em \mathbb{H}^3 existe uma quantidade finita de elementos γ de Γ que satisfazem $\gamma(K) \cap K \neq \emptyset$.

Agora definimos grupos Klenianos, os quais são usados no Teorema 1.4.20, para provar que uma variedade hiperbólica é expressada como o espaço quociente de \mathbb{H}^3 por um grupo Kleiniano livre de torção.

Definição 1.4.14. Um subgrupo Γ de $Isom^+(\mathbb{H}^3)$ é chamado um **grupo Kleiniano** se Γ age sobre \mathbb{H}^3 de modo propriamente descontínuo. Com as identificações de $Isom^+(\mathbb{H}^3)$ com $Möb$, $Möb(B^3)$, $Möb(\mathbb{H}^3)$ e $PSL_2(\mathbb{C})$, os subgrupos correspondentes a estes grupos são chamados **grupos Kleinianos**.

Lema 1.4.15. *Para um subgrupo Γ de $Isom^+(\mathbb{H}^3)$, as seguintes duas condições são equivalentes:*

- (1) Γ satisfaz a condição (3) da Proposição 1.4.11;
- (2) Γ age sobre \mathbb{H}^3 de modo propriamente descontínua e nenhum outro elemento diferente da identidade tem um ponto fixo.

Demonstração. Veja [20] Lema 1.15, pág 27. ■

Portanto a imagem Γ da representação de holonomia do grupo fundamental de uma 3-variedade hiperbólica completa M é um grupo Kleiniano. De agora em diante, chamaremos a Γ um modelo Kleiniano de M .

Agora classificaremos os elementos dos grupos Kleinianos.

Definição 1.4.16. Qualquer elemento $\gamma \neq id$ de $Möb$ pode ser transformado por conjugação a:

- (1) $\gamma_0(z) = z + 1$ ou
- (2) $\gamma_0(z) = \lambda z$ ($\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$).

Chamamos ao conjugado de γ em (1) **parabólico**, a (2) com $|\lambda| = 1$ **elíptico**, e a (2) com $\lambda > 1$ **hiperbólico**. Além disso, também chamamos ao conjugado de γ em (2) com $|\lambda| \neq 1$ de **loxodromico**.

Esta classificação pode ser expressa em termos de pontos fixos, tal como veremos na seguinte proposição. A partir de agora a esfera no infinito de \mathbb{H}^3 é denotado por S^∞ .

A proposição e o corolário seguinte são consequências da Definição 1.4.16.

Proposição 1.4.17. *Um elemento $\gamma \neq id$ de $Isom^+(\mathbb{H}^3)$ é parabólico, loxodromico o elíptico se, e só se, o número de pontos fixos em $\mathbb{H}^3 \cup S^\infty$ é uma, dois, ou infinito respectivamente. Além disso, γ tem um ponto fixo em \mathbb{H}^3 se, e somente se, γ é elíptico.*

Corolário 1.4.18. *Um elemento γ de um grupo Kleiniano tem ordem finita se, e somente se, γ tem um ponto fixo em \mathbb{H}^3 .*

Definição 1.4.19. Dizemos que um grupo Γ é livre de torção se Γ não tem elementos de **ordem finita** diferente da unidade.

Portanto pelo Lema 1.4.15 temos que o modelo Kleiniano Γ de uma variedade hiperbólica completa é livre de torção. Somando todas as considerações anteriores, nós obtemos o seguinte teorema fundamental:

Teorema 1.4.20. *Para qualquer 3-variedade completa hiperbólica M , temos que existe um grupo Kleiniano livre de torção Γ tal que $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$. Tal Γ é único, salvo conjugação por elementos de $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$. Reciprocamente, para qualquer grupo Kleiniano livre de torção Γ , $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ é uma 3-variedade hiperbólica completa.*

O seguinte Corolário é dado no artigo de Peter Scott (Veja [26], Corolário 4.6, pág 449).

Corolário 1.4.21. *Seja M uma 3-variedade sem bordo com estrutura Hiperbólica, ou seja, M é uma 3-variedade Hiperbólica. Então $\pi_1(M)$, não contém um subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

1.4.3 Variedade hiperbólica Com Bordo

Nesta subseção introduziremos a definição de uma variedade hiperbólica com bordo (possivelmente vazio). Além disso, mostraremos teoremas que serão fatos muito importantes para demonstrar que o grupo fundamental de uma variedade hiperbólica completa de volume finito com bordo não vazio não é residualmente livre.

Definição 1.4.22.

- 1) Uma 3-variedade compacta M com bordo (possivelmente vazio) é chamada de **hiperbólica** se seu interior admite uma estrutura de uma variedade hiperbólica, ou seja, $\text{int}(M)$ é uma $(\text{isom}^+(\mathbb{H}^3), \mathbb{H}^3)$ -variedade.
- 2) Uma 3-variedade hiperbólica com bordo (possivelmente vazio) tem **volume finito** se seu interior tem volume finito.
- 3) Uma 3-variedade hiperbólica com bordo é **completa** se seu interior admite uma métrica completa.

Teorema 1.4.23. *Seja M é uma 3-variedade hiperbólica completa. então, M tem volume finito se, somente se, M não tem bordo ou tem bordo toral (isto é as componentes do bordo de M são toros).*

Demonstração. Veja [30], Teorema 5.11.1, pág 116. ■

Teorema 1.4.24 (Teorema de Rigidez de Mostow-Prasad-Marden). *Se M_1 e M_2 são 3-variedades hiperbólicas compactas (possivelmente com bordo não vazio) com volume finito e completas, então qualquer isomorfismo de grupos fundamentais $\phi : \pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_2)$ é induzido por uma única isometria entre M_1 e M_2 .*

Demonstração. Veja [30] Teorema 5.7.1. pág 101. ■

Corolário 1.4.25. *Se M é uma variedade hiperbólica, então o grupo de automorfismos externos $Out(\pi_1(M))$ é um grupo finito isomórfico ao grupo de isometrias de M .*

Demonstração. Veja [30] Corolário 5.7.4. pág 101. ■

Lema 1.4.26. *Seja M uma 3-variedade hiperbólica. Se T^2 (Toro bidimensional) é uma componente do bordo de M , então $\pi_1(T)$ é um subgrupo malnormal de $\pi_1(M)$.*

Demonstração. Veja [8] Lema 3.4, pág 28. ■

1.5 - 3-Variedades Fibradas De Seifert

1.5.1 Orbifolds

Uma **Orbifold** é um espaço topológico, localmente dado pelo quociente de \mathbb{R}^n (ou aberto de \mathbb{R}^n) pela ação de um grupo finito. Trata-se de uma generalização do conceito de variedade. Nesta subseção estudaremos as Orbifolds com ênfase no caso bi-dimensional. Orbifolds de dimensão dois aparecem como o espaço de fibras, ou seja, o espaço obtido quando identificamos cada fibra a um ponto, de uma variedade fibrada de Seifert de dimensão três, conforme veremos na subseção seguinte. Nosso trabalho será basicamente entender os tipos de Orbifold de dimensão dois.

Definição e Propriedades

Definição 1.5.1. Uma **orbifold** O de dimensão n é um espaço topológico X_O , dito **espaço subjacente** de O , juntamente com uma cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$, I conjunto de índices, por abertos de X_O , e um conjunto de pares (U_i, ϕ_i) , $i \in I$, ditos **cartas** de O , onde

$$\phi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i/\Gamma_i$$

é um homeomorfismo entre o aberto $U_i \subset X_0$ e o quociente \tilde{U}_i/Γ_i , onde Γ_i é um subgrupo finito de $O(n)$ (grupo de matrizes ortogonais de orden $n \times n$) agindo no aberto $\tilde{U}_i \subset \mathbb{R}^n$. Além disso, $\{U_i\}_{i \in I}$, dito um **atlas** de O , tem a seguinte propriedade: sempre que $U_i \subset U_j$, $i, j \in I$, existe um homomorfismo injetor

$$\psi_{ij} : \Gamma_i \rightarrow \Gamma_j$$

e uma imersão

$$\tilde{\phi}_{ij} : \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{U}_j$$

eqüivariante em relação a ψ_{ij} , ou seja,

$$\tilde{\phi}_{ij}(\gamma \cdot u) = \psi_{ij}(\gamma \cdot \tilde{\phi}_{ij}(u)), \forall \gamma \in \Gamma_i, \forall u \in \tilde{U}_i$$

e o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{U}_i & \xrightarrow{\tilde{\phi}_{ij}} & \tilde{U}_j \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{U}_i/\Gamma_i & \xrightarrow{\phi_{ij} = \tilde{\phi}_{ij}/\Gamma_i} & \tilde{U}_j/\psi_{ij}(\Gamma_i) \\
 \uparrow \phi_i & & \downarrow \\
 U_i & \xrightarrow{i} & U_j \\
 & & \uparrow \phi_i \\
 & & \tilde{U}_j/\Gamma_i
 \end{array}$$

onde $i : U_i \rightarrow U_j$ é a inclusão.

Se todas as imersões ψ_{ij} forem suaves, a Orbifold é dita suave. Para definir uma Orbifold com bordo, permitimos simplesmente que cada \tilde{U}_i seja aberto de $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$. O **bordo** da orbifold O é definido por

$$\partial O = \{p \in O \mid \exists i \in I, \text{ com } p = \phi_i^{-1}(x_i), x_i \in \tilde{U}_i \cap \partial \mathbb{H}^n\}.$$

Os conjuntos **abertos** e os conjuntos **fechados** de uma Orbifold são conjuntos abertos e conjuntos fechados do seu espaço subjacente. Logo, uma orbifold é **compacta** ou **conexa** quando o seu espaço subjacente assim o for. Uma orbifold sem bordo (mas possivelmente com espaço subjacente com bordo), compacta e conexa é dita **fechada**.

Convenção: Suporemos que todas as Orbifolds são conexas e suaves.

Para entendermos melhor a Definição 1.5.1 Consideremos o seguinte exemplo:

Exemplos 1.5.2. *Seja inteiro $r > 1$. A gota de lágrima (de ordem q) é uma Orbifold com espaço subjacente S^2 e um atlas como se segue. Fixe um ponto $p \in S^2$. Cubra S^2 com abertos $U_1 \dots U_4$ conforma à Figura 1.3. Considere $U_{ij} = U_i \cap U_j$ e $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$, sempre que essas interseções forem não vazias. Temos então um atlas com cartas*

$$\begin{aligned} \phi_i &: U_i \rightarrow U_i/\Gamma_i \\ \phi_{ij} &: U_{ij} \rightarrow \tilde{U}_{ij}/\Gamma_{ij}, \quad i < j \\ \phi_{ijk} &: U_{ijk} \rightarrow \tilde{U}_{ijk}/\Gamma_{ijk}, \quad i < j < k, \end{aligned}$$

onde todos os \tilde{U}_i 's, \tilde{U}_{ij} 's e \tilde{U}_{ijk} 's são discos e todos os Γ_i 's, Γ_{ij} 's e Γ_{ijk} 's são grupos triviais exceto Γ_1 , que é o grupo \mathbb{Z}_q , gerado por uma rotação, de um ângulo de $2\pi/q$, em torno de $\phi^{-1}(p) \in \tilde{U}_1$. A Figura 1.4 ilustra o diagrama da Definição 1.5.1 para $U_{12} \subset U_1$ no caso $q = 4$. Observe que p é uma singularidade dessa Orbifold. Trataremos das singularidades das Orbifolds de dimensão dois na próxima seção.

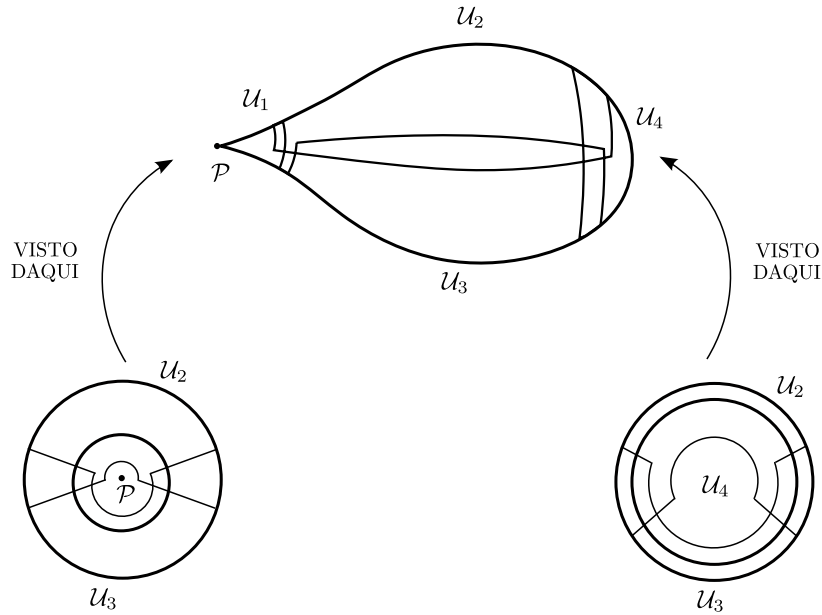


Figura 1.3: Abertos do atlas da gota de lágrima.

Singularidades de Orbifolds de dimensão dois

Sejam O uma orbifold n -dimensional e $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$, $\phi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i/\Gamma_i$ as **cartas** de O . Dado $x \in O$, $\Gamma_x = \bigcap_{x \in U_i} \Gamma_i$ é chamado de **grupo de isótopia** de x .

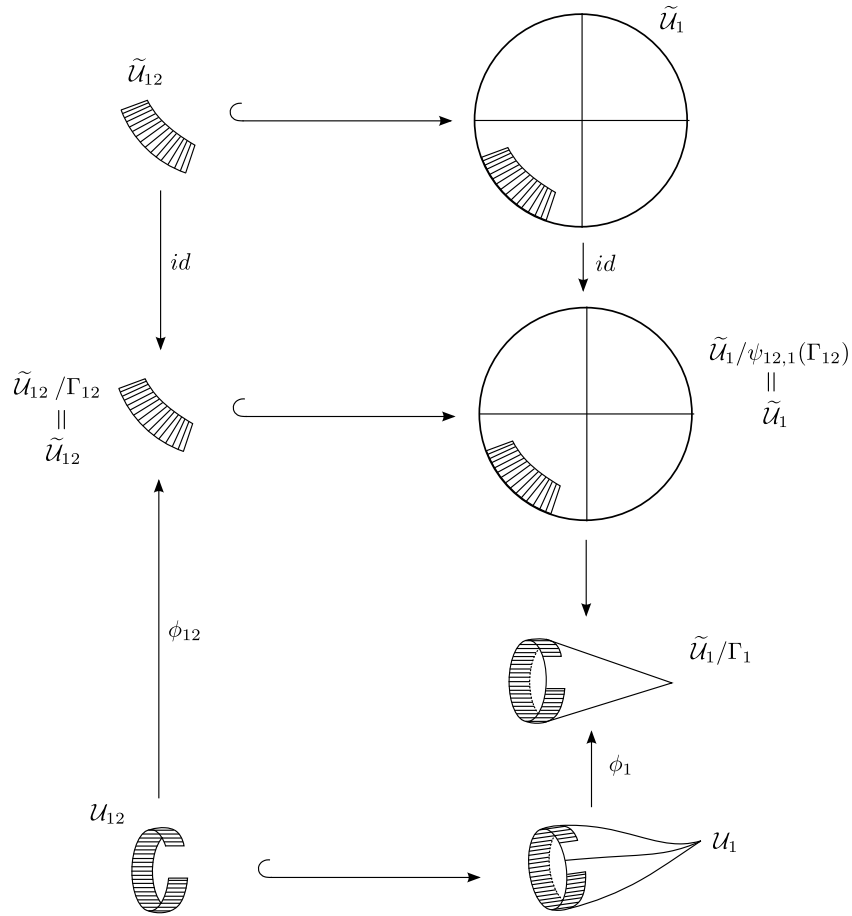


Figura 1.4: Troca de cartas do Exemplo 1.5.2.

Definição 1.5.3. O conjunto $\Sigma_O = \{x \in O \mid \Gamma_x \neq 1\}$ é o **singular locus** de uma orbifold O n -dimensional. Um ponto $x \in O$ é chamado **ponto singular** de O , se $\Gamma_x \neq 1$, caso contrário x é **ponto regular**.

Sejam O uma Orbifold bi-dimensional e $x \in O$, dado que Γ_x é um subgrupo finito de $O(2)$, então Γ_x tem 4 possibilidades:

- 1) $\Gamma_x = 1$.
- 2) $\Gamma_x = \mathbb{Z}_2$. Neste caso x é chamado **ponto de reflexão**.
- 3) $\Gamma_x = \mathbb{Z}_q$, para $q > 2$. Neste caso x é chamado **ponto de cone** de ordem q .
- 4) $\Gamma_x = D_{2q}$, para $q \geq 1$. Neste caso x é chamado **refletor de canto**.

Portanto o singular locus de uma Orbifold bi-dimensional só tem pontos de cone, pontos refletores e refletores de canto. Qualquer variedade tem estrutura de orbifold bi-dimensional sem singularidades, basta considerar os grupos finitos de

$O(2)$ (grupo das matrizes ortogonais de ordem 2×2) como sendo os triviais. A Figura 1.5 mostra localmente umas Orbifolds 2-dimensionais. Além disso, mostra os subgrupos finitos de $O(2)$. Uma consequência da definição 1.5.3 é o seguinte Teorema:

Teorema 1.5.4. *Uma Orbifold 2-dimensional O com singular locus trivial é uma superfície. Caso contrário, O tem espaço subjacente X_O sendo uma superfície com bordo (possivelmente vazio).*

Exemplos 1.5.5. *A gota de lágrima de ordem q (Exemplo 1.5.2) é uma Orbifold bidimensional com espaço subjacente S^2 e um ponto de cone de ordem q como única singularidade. De forma geral, podemos construir Orbifolds bidimensionais $S^2(q_1, \dots, q_r)$ com espaço subjacente S^2 e $r \geq 1$ pontos de cone de ordens $q_1, \dots, q_r > 1$ como únicas singularidades.*

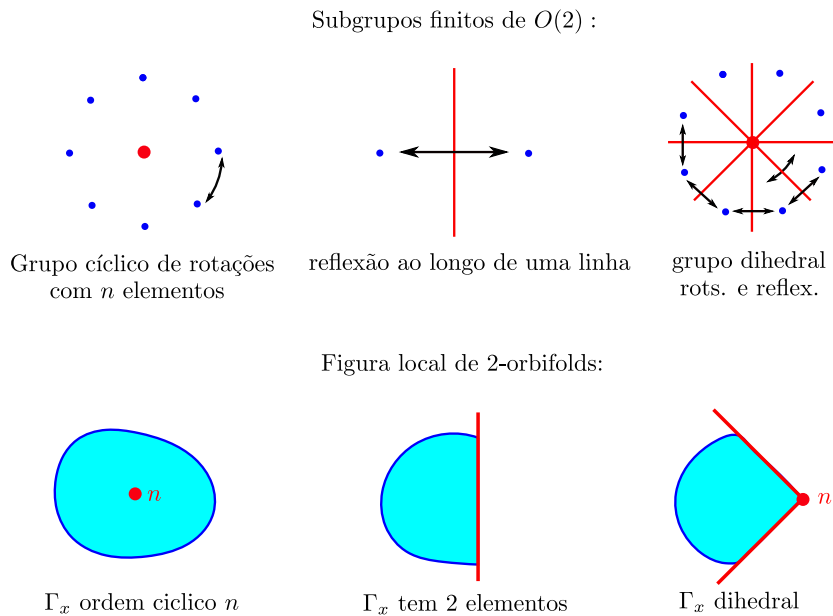


Figura 1.5: Subgrupos de $O(2)$ e umas Orbifolds bidimensionais vistas localmente.

Recobrimentos de uma Orbifold

Definição 1.5.6. Sejam O e \tilde{O} duas Orbifolds com espaços subjacentes X_O e $X_{\tilde{O}}$ respectivamente. Dizemos que o par (\tilde{O}, p) é um **recobrimento** de O se $p : X_{\tilde{O}} \rightarrow X_O$ é uma aplicação contínua tal que para cada $x \in X_O$ possui uma vizinhança U da seguinte forma. Se V é uma componente de $p^{-1}(U)$, existem cartas (U, ϕ) ,

$$\phi : U \rightarrow \tilde{U}/\Gamma,$$

do atlas de O , onde Γ é um grupo finito agindo no aberto \tilde{U} de \mathbb{R}^n (ou de \mathbb{H}^n , se O tem bordo), e (V, ψ) ,

$$\psi : V \rightarrow \tilde{U}/\Gamma',$$

do atlas de \tilde{O} , onde $\Gamma' < \Gamma$, e difeomorfismo $\tilde{p}_V : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{p}_V} & \tilde{U} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{U}/\Gamma' & \xrightarrow{p_V = \tilde{p}_V/\Gamma'} & \tilde{U}/\Gamma' \\ \uparrow \psi & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{p|_V} & U \end{array}$$

O recobrimento $p : \tilde{O} \rightarrow O$ é dito um **recobrimento por d folhas** se, para cada ponto regular y de O , $p^{-1}(y)$ é um conjunto finito de d elementos.

Definição 1.5.7. O recobrimento universal de uma Orbifold é definido da mesma forma que para um espaço topológico qualquer: é um recobrimento (\tilde{O}, p) de O , tal que se (\tilde{O}', p') é outro recobrimento de O , então (\tilde{O}, p) pode ser levantado a (\tilde{O}', p') , ou seja, existe uma aplicação

$$\phi : \tilde{O} \rightarrow \tilde{O}'$$

tal que

$$\begin{array}{ccc} \tilde{O} & \xrightarrow{\phi} & \tilde{O}' \\ & \searrow p' & \downarrow p \\ & & O \end{array}$$

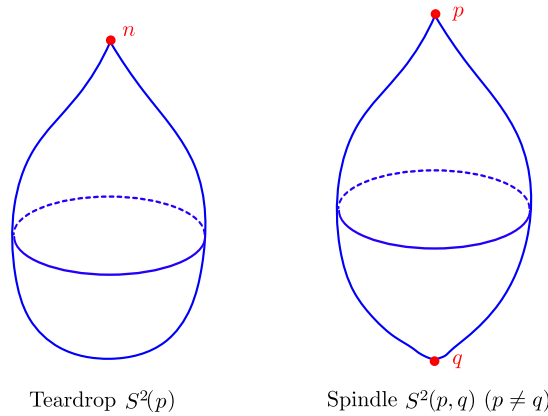
comuta.

Uma Orbifold bidimensional é dita **boa** se seu recobrimento universal é uma variedade. Caso contrario é **não é boa**.

Teorema 1.5.8. *As únicas Orbifolds não boas bi-dimensionais sem bordo são as seguintes:*

- (i) $S^2(p)$, esfera com um ponto de cone.
- (ii) $S^2(p, q)$ com $p \neq q$, esfera com dois pontos de cone.
- (iii) $D^2(p)$, disco com um refletor de canto.
- (iv) $D^2(p, q)$ com $p \neq q$, disco com dois refletores de canto.

As seguintes figuras representam a $S^2(p)$ e $S^2(p, q)$ respectivamente:



Demonstração. Para uma demonstração veja [26] Teorema 2.3, pág 425 . ■

Teorema 1.5.9. *Toda Orbifold bi-dimensional tem um recobrimento universal.*

Demonstração. Veja [31] seção 13. ■

O grupo fundamental de uma Orbifold

Definição 1.5.10. Seja (\tilde{O}, p) um recobrimento da Orbifold O . Dizemos que uma aplicação suave $T : \tilde{O} \rightarrow \tilde{O}$ é uma **transformação de recobrimento** de (\tilde{O}, p) , se $p = p \circ T$.

Definição 1.5.11. O **grupo fundamental** $\pi_1(O)$ de uma Orbifold O é o grupo das transformações de recobrimento do recobrimento universal de O .

Assim como fazemos para espaços topológicos, podemos dar uma interpretação para o grupo fundamental em termos de classes de homotopia de laços com um ponto base. Um **laço** em uma Orbifold O , com ponto base sendo o ponto regular x_0 de O , é entendido como uma curva fechada em X_O , com ponto base x_0 , que é a imagem por p de uma curva em $X_{\tilde{O}}$, onde (\tilde{O}, p) é o recobrimento universal de O . Dois laços são ditos **homotópicos** em O , se são imagens respectivas de curvas em $X_{\tilde{O}}$ homotópicas entre si, no sentido usual de homotopia em espaços

topológicos. O conjunto G de classes de equivalência de homotopia de laços com um ponto base x_0 regular em O tem uma operação produto análoga ao caso de espaços topológicos, dada por

$$[\alpha][\beta] := [\alpha * \beta],$$

onde α e β são laços com ponto base $x_0 \in X_O$ e $*$ é a operação produto de laços usual de espaços topológicos. Temos um isomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : G &\rightarrow \pi_1(O) \\ [\alpha] &\mapsto T_\alpha, \end{aligned}$$

onde T_α é a transformação de recobrimento de \tilde{O} que leva o ponto inicial de α no ponto final de α .

Teorema 1.5.12. *Seja O uma Orbifold 2-dimensional com espaço subjacente X_O uma superfície compacta e conexa com bordo (possivelmente vazio). Se O só tem singularidades dadas pelos pontos de cone q_1, q_2, \dots, q_n de ordens $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ respectivamente e X_O tem $m \geq 0$ componentes de bordo, então $\pi_1(O)$ tem a seguinte apresentação:*

a) *Se X_O é uma superfície compacta, conexa e orientável de gênero $g \geq 0$,*

$$\pi_1(O) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = 1, q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle$$

Neste caso, $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_1, \dots, d_m$ são os geradores de $\pi_1(X_O)$ e q_1, \dots, q_n são os representantes dos pontos cone de O .

b) *Se X_O é uma superfície compacta, conexa e não orientável de gênero $g \geq 1$,*

$$\pi_1(O) = \langle a_1, \dots, a_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m \mid \prod_{i=1}^g a_i^2 \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = 1, q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle$$

Neste caso, $a_1, \dots, a_g, d_1, \dots, d_m$ são os geradores de $\pi_1(X_O)$ e q_1, \dots, q_n são os representantes dos pontos cone de O .

Demonstração. Veja [26] pág 423-424. ■

Característica de Euler de uma Orbifold bidimensional

Definiremos a característica de Euler de uma orbifold 2-dimensional sem bordo, ou seja, a orbifold 2-dimensional não tem linhas refletoras (união de pontos de reflexão).

Definição 1.5.13. Se O é uma orbifold bidimensional sem bordo cujas únicas singularidades são pontos de cone q_1, \dots, q_n de ordens $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ cada um, então

$$\chi(O) = \chi(X_O) - \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right)$$

é chamada a **característica de Euler** de O , onde X_O é a superfície (espaço subjacente) do espaço base O .

Se, além desses pontos de cone, O tem m refletores de canto de ordens $2r_1, \dots, 2r_m$, então

$$\begin{aligned} \chi(O) &= \frac{1}{2} \left(2\chi(X_O) - 2n + 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i} - m + \sum_{j=1}^m \frac{1}{r_j} \right) \\ &= \chi(X_O) - \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{q_i}\right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{r_j}\right), \end{aligned}$$

que é conhecida como **Fórmula de Riemman-Hurwitz**.

1.5.2 3-Variedade fibrada de Seifert

Nesta seção trataremos a definição de uma variedade fibrada de Seifert de dimensão três. Para definir essa estrutura consideramos inicialmente o toro sólido e a garrafa de Klein sólida com folheações por círculos, que descrevemos agora. Sejam $D^2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ e $I = [0, 1]$. Considere $D^2 \times I$ com orientação fixa e com folheação produto $\{x\} \times I$, $x \in D^2$, cujas folhas chamaremos de **fibras**. No que se segue, faremos identificações nos extremos de $D^2 \times I$ de forma de obter toros sólidos e garrafas de Klein sólidas com folheações por círculos induzidas, que chamaremos **toros fibrados sólidos** e **garrafas de Klein fibradas sólidas**, cujas folhas também serão chamadas de fibras.

1.5.3 Toro fibrado sólido

Seja $\rho : D^2 \rightarrow D^2$ uma rotação em torno da origem de \mathbb{R}^2 por um ângulo de $2\pi\gamma/\alpha$, onde $\alpha > \gamma \geq 0$ são inteiros primos entre si. Se fizermos a identificação $(x, 1) \sim (\rho(x), 0)$ em $D^2 \times I$, teremos um toro T_ρ com folheação induzida por $\{x\} \times I$, o chamado **toro fibrado sólido**.

Se $\gamma = 0$, $T_\rho = T_{id}$, chamado **toro fibrado sólido trivial**, herda a folheação produto $\{x\} \times S^1$. Se $\gamma > 0$, T_ρ é denotado por $T_{\alpha,\gamma}$. Nesse caso, se $x = 0$, essa identificação apenas liga os extremos da **fibra central** $\{0\} \times I$, resultando

em um único círculo central $\{0\} \times S^1$. Se $x \in D^2 \setminus \{0\}$, cada folha $\{\rho^j(x)\} \times I$, $j = 0, \dots, \alpha - 2$, é ligada à folha $\{\rho^{j+1}(x)\} \times I$ e a folha $\{\rho^{\alpha-1}(x)\} \times I$ é ligada à folha $\{\rho^0(x)\} \times I = \{x\} \times I$, sempre resultando em um círculo em $T_{\alpha,\gamma}$. Este círculo intercepta $D^2 \times \{0\} \sim D^2 \times \{1\}$ em α pontos diferentes e dá γ voltas em torno da fibra central.

Na Figura 1.6, que ilustra isso, o bordo de $T_{\alpha,\gamma}$, que é um toro bi-dimensional, é representado por uma retângulo, onde os lados horizontais são identificados resultando no meridiano M , assim como os verticais, que resultam no paralelo P . Neste retângulo, as fibras, se supostas lineares, têm inclinação α/γ . Além disso, o espaço das fibras de $T_{\alpha,\gamma}$, ou seja, o espaço obtido quando identificamos cada fibra a um ponto, é uma orbifold, um cone de ângulo $2\pi/\alpha$. O que acontece é que

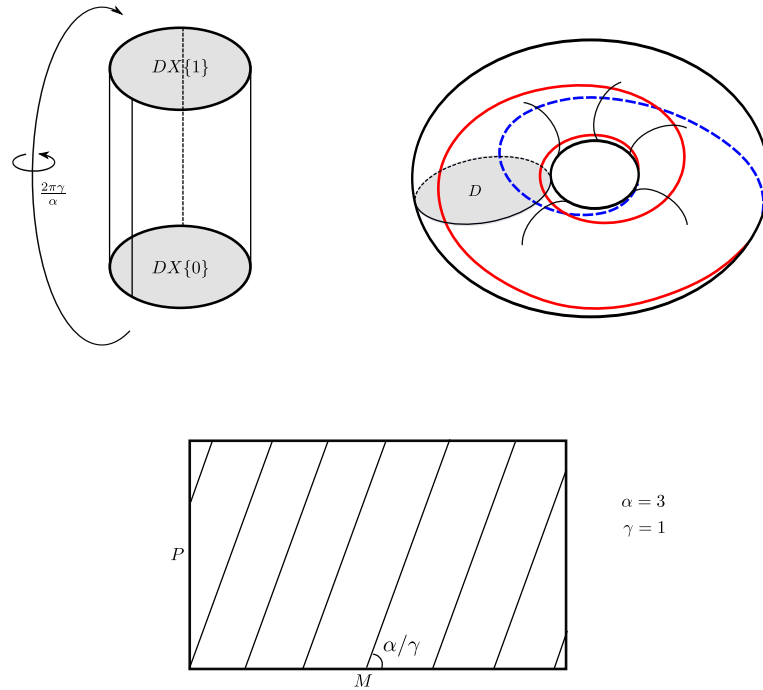


Figura 1.6: toro fibrado sólido com invariantes de órbita (3,1).

T_α é o quociente do toro fibrado sólido trivial T_{id} pela ação de \mathbb{Z}_α na qual seu gerador age por rotação por γ/α de volta na primeira coordenada e por $1/\alpha$ de volta na segunda coordenada. Essa ação desce ao disco D^2 resultando no cone de ângulo $2\pi/\alpha$. No caso do toro fibrado sólido trivial, o espaço de fibras é o próprio disco D^2 .

O par (α, γ) , com $0 \leq \gamma < \alpha$ primos entre si, são chamados os **invariantes de órbita** do toro fibrado sólido. Definimos os invariantes de órbita do toro fibrado sólido trivial como $(1, 0)$.

1.5.4 Garrada de Klein Fibrada sólida

Se $\rho : D^2 \rightarrow D^2$ for uma reflexão em um diâmetro $l \subset D^2$, a identificação $(x, 1) \sim (\rho(x), 0)$ resulta em uma garrafa de Klein K_ρ , dita **garrafa de Klein fibrada sólida**, e a folheação induzida por $\{x\} \times I$ é descrita como se segue. Cada fibra $\{x\} \times I$, com $x \in D^2 \setminus l$, é ligada à fibra $\{\rho(x)\} \times I$, oposta em relação a l , formando um único círculo. Estas fibras interceptam $D^2 \times \{0\} \simeq D^2 \times \{1\}$ em dois pontos opostos em relação à $l \times \{0\}$. As fibras que interceptam o subconjunto $l \times \{0\}$ interceptam $D^2 \times \{0\}$ num único ponto cada uma.

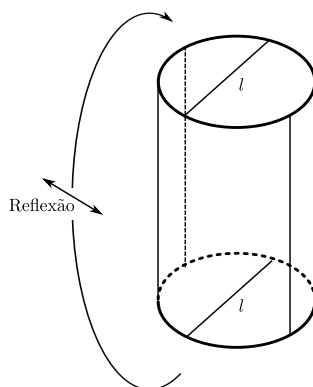


Figura 1.7: garrafa de Klein

Na realidade, K_ρ é o quociente de T_{id} pela ação de \mathbb{Z}_2 na qual seu gerador age por reflexão em l na primeira coordenada e por rotação por $1/2$ de volta na segunda coordenada.

Essa ação desce ao disco D^2 resultando numa Orbifold com bordo, um disco com uma linha refletora, que é o espaço de fibras de K_ρ .

1.5.5 Definição e Propriedades

Definição 1.5.14. Uma **variedade fibrada de Seifert** é uma variedade de dimensão três com uma decomposição disjunta por círculos, ditos fibras, tal que cada fibra possui uma vizinhança tubular isomorfa ou a um toro fibrado sólido ou a uma garrafa de Klein fibrada sólida.

Uma variedade fibrada de Seifert é uma folheação por círculos. Suporemos esta folheação sempre de classe C^∞ . D. Epstein mostrou em [6], que se uma variedade M compacta de dimensão três é folheada por círculos, então M é uma variedade fibrada de Seifert.

Observe que o espaço de fibras O de uma variedade fibrada de Seifert M , obtido identificando cada fibra a um ponto, é topologicamente uma superfície, então naturalmente possui uma estrutura de Orbifold bi-dimensional com pontos de cone provenientes de toros fibrados sólidos, e linhas refletoras que são provenientes da união de garrafas de Klein fibradas sólidas.

A orbifold O também é chamado **o espaço base** da variedade fibrada de Seifert M .

Note que se M é uma variedade fibrada de Seifert sem bordo, então O é uma orbifold sem bordo (as linhas refletoras não fazem parte do bordo da orbifold O), em geral ∂M é simplesmente a pré-imagem de ∂O pela aplicação quociente $\eta : M \rightarrow O$ que identifica cada fibra de M a um ponto. Além disso, é claro observar que, se M é uma 3-variedade fibrada de Seifert compacta, então ∂M é a união de toros e garrafas de Klein, portanto o número de fibras singulares em uma variedade fibrada de Seifert compacta é finita

Usaremos a notação (M, O, η) para uma variedade fibrada de Seifert M sobre uma orbifold O , com projeção (aplicação quociente) $\eta : M \rightarrow O$. As fibras de M sobre as singularidades de O são ditas as **fibras singulares** da variedade fibrada de Seifert e as demais são ditas as **fibras regulares**.

Se M é uma variedade fibrada de Seifert compacta e conexa, então o espaço base O , obtido pela aplicação quociente $\eta : M \rightarrow O$ que identifica cada fibra a um ponto, é compacto e conexo, pois a aplicação η é contínua.

Observe que duas variedades fibradas de Seifert isomorfas possuem espaço base isomorfos. Note que um toro fibrado sólido possui no máximo uma fibra singular. Esta fibra singular é a fibra central e a garrafa de Klein sólida tem uma família contínua de fibras singulares cuja união formam um anel $S^1 \times I$. Então, uma fibra singular de um espaço fibrado de Seifert M ou é isolada ou é uma fibra em uma garrafa de Klein sólida.

Teorema 1.5.15 (D. Epstein). *Se uma variedade M compacta de dimensão três é folheada por círculos, então M é uma variedade fibrada de Seifert.*

Demonstração. Veja [6]. ■

Proposição 1.5.16 (Allen Hatcher). *Toda variedade fibrada de Seifert compacta e conexa é irredutível, a menos que esta seja um fibrado de S^2 sobre S^1 ou $RP^3 \# RP^3$.*

Demonstração. Veja [10], Proposição 1.12, pág 18. ■

1.5.6 Recobrimentos de uma variedade fibrada de Seifert

Definição 1.5.17. Sejam $(\widetilde{M}, \widetilde{O}, \widetilde{\eta})$ e (M, O, η) duas variedades fibradas de Seifert. Dizemos que $(\widetilde{M}, \widetilde{O}, \widetilde{\eta})$ **recobre** (M, O, η) por $\widetilde{p} : \widetilde{M} \rightarrow M$ se \widetilde{p} é uma aplicação de recobrimento que leva fibra em fibra.

Nesse caso, \widetilde{p} induz um recobrimento $p : \widetilde{O} \rightarrow O$ de orbifolds tal que

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{\widetilde{p}} & M \\ \downarrow \widetilde{\eta} & & \downarrow \eta \\ \widetilde{O} & \xrightarrow{p} & O \end{array}$$

comuta.

Teorema 1.5.18. *Seja (M, O, η) uma variedade fibrada de Seifert. Então o recobrimento universal \widetilde{M} de M é homeomorfo a S^3, \mathbb{R}^3 ou $S^2 \times \mathbb{R}$. Além disso, o recobrimento universal \widetilde{M} induz um recobrimento \widetilde{O} sobre a orbifold O tal que \widetilde{O} é $S^2, \mathbb{R}^2, S^2(p)$ ou $S^2(p, q)$ com p e q coprimos.*

Demonstração. Veja [26], Lema 3.1. ■

Lema 1.5.19. *Seja (M, O, η) uma variedade fibrada de Seifert com espaço base sendo a orbifold O . Existe uma sequência exata curta*

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow \pi_1(M) \xrightarrow{\psi} \pi_1(O) \longrightarrow 1,$$

onde Z denota o subgrupo cíclico de $\pi_1(M)$ gerado por uma fibra regular. O grupo Z é infinito, exceto no caso que $\pi_1(M)$ é um grupo finito.

Demonstração. Veja [26], Lema 3.2. ■

Um corolário importante do Lema 1.5.19 é :

Corolário 1.5.20. *O bordo de uma variedade fibrada de Seifert M é incompressível, a menos que M seja homeomorfo a um Toro fibrado sólido ou a uma garrafa de Klein fibrada sólida.*

Demonstração. Veja [26], Corolário 3.3. ■

1.5.7 A Classe de Euler de uma variedade fibrada de Seifert

Seja (M, O, η) uma variedade fibrada de Seifert com espaço base O e aplicação quociente $\eta : M \rightarrow O$, uma **seção** de M é uma aplicação contínua $s : O \rightarrow M$ tal que $\eta(s(x)) = x$, para todo $x \in O$.

A obstrução à existência de uma seção em M é medida por um inteiro $b(M)$ chamado a **classe de Euler**. $b(M)$ é um elemento de $\mathbb{H}^2(M, \mathbb{Z})$ (Segundo grupo de Cohomologia). Em particular, se M é uma variedade fibrada de Seifert sem fibras singularidades, $b(M)$ é interpretado como a obstrução a encontrar uma superfície Σ transversa a cada fibra de M . O seguinte resultado é dado por Peter Scott em [26]:

Teorema 1.5.21. *Se M é uma variedade fibrada de Seifert, então:*

- a) $b(M) \in \mathbb{Z}$, se M é orientável e $b(M) \in \mathbb{Z}_2$, se M não é orientável.
- b) Se $\partial M \neq \emptyset$, então $b(M) = 0$.

Demonstração. Veja [26] pág 434. ■

1.5.8 Grupo fundamental de uma variedade fibrada de Seifert

Nesta subseção assumiremos que M é uma variedade fibrada de Seifert compacta com grupo fundamental infinito.

Pelo Lema 1.5.19 temos a sequência exata curta:

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(O) \rightarrow 1,$$

além disso, como $\pi_1(M)$ age por conjugação sobre \mathbb{Z} , então temos um homomorfismo $\psi : \pi_1(M) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$. Desta forma ψ induz o homomorfismo

$$\begin{aligned} \widehat{\phi} : \pi_1(M)/\mathbb{Z} &\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \\ g\mathbb{Z} &\mapsto \psi(g). \end{aligned}$$

Como $\pi_1(O)$ é isomorfo a $\pi_1(M)/\mathbb{Z}$, então existe um homomorfismo $\phi : \pi_1(O) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z})$, o qual é chamado o **homomorfismo de avaliação** de M . Claramente $\phi(\pi_1(O))$ é determinado por os valores de ϕ sobre os geradores de $\pi_1(O)$.

No seguinte teorema classificaremos as variedades fibradas de Seifert M , com espaço base O sendo uma orbifold orientável ou não orientável, como consequência do homomorfismo de avaliação e do espaço subjacente de O ser uma superfície orientável ou não orientável.

Teorema 1.5.22. *Se M é uma variedade fibrada de Seifert compacta e conexa com espaço base O e homomorfismo de avaliação ϕ , então M é uma destas possibilidades:*

1) Se o espaço subjacente X_O de O é uma superfície compacta, conexa e orientável e ϕ é 1 para todos os geradores de $\pi_1(X_O)$, então M é orientável.

2) Se o espaço subjacente X_O de O é uma superfície compacta, conexa e orientável e ϕ é -1 para todos os geradores de $\pi_1(X_O)$, então M é não orientável.

3) Se o espaço subjacente X_O de O é uma superfície compacta, conexa e não orientável e ϕ é 1 para todos os geradores de $\pi_1(X_O)$, então M é não orientável.

4) Se o espaço subjacente X_O de O é uma superfície compacta, conexa e não orientável e ϕ é -1 para todos os geradores de $\pi_1(X_O)$, então M é orientável.

5) Se o espaço subjacente X_O de O é uma superfície compacta, conexa e não orientável de gênero $g \geq 2$ e ϕ é 1 para um gerador de $\pi_1(X_O)$ e -1 para os outros, então M é não orientável.

6) Se o espaço subjacente X_O de O é uma superfície compacta, conexa e não orientável de gênero $g \geq 3$ e ϕ é 1 para dois geradores de $\pi_1(X_O)$ e -1 para os outros, então M é não orientável.

Demonstração. Veja [25], Teorema 2, pág 88. ■

Observação 1.5.23. (a) Pelo Teorema 1.5.12 temos que, se O é uma Orbifold 2-dimensional com espaço subjacente X_O uma superfície compacta e conexa com bordo (possivelmente vazio), O só tem singularidades dadas pelos pontos de cone q_1, q_2, \dots, q_n de ordens $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ respectivamente e X_O com $m \geq 0$ componentes de bordo, então $\pi_1(O)$ tem a seguinte apresentação:

• Se X_O é uma superfície orientável, compacta e conexa de gênero $g \geq 0$,

$$\pi_1(O) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = 1, q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle.$$

Neste caso, $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_1, \dots, d_m$ são os geradores de $\pi_1(X_O)$ e q_1, \dots, q_n são os representantes dos pontos cone de O .

• Se X_O é uma superfície não orientável, compacta e conexa de gênero $g \geq 1$,

$$\pi_1(O) = \langle a_1, \dots, a_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m \mid \prod_{i=1}^g a_i^2 \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = 1, q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle.$$

Neste caso, $a_1, \dots, a_g, d_1, \dots, d_m$ são os geradores de $\pi_1(X_O)$ e q_1, \dots, q_n são os representantes dos pontos cone de O .

(b) Seja O um espaço base de uma variedade fibrada de Seifert, se $q \in \pi_1(O)$ é um representante de um ponto de cone de O , então o homomorfismo

de avaliação ϕ em q é 1, ou seja $\phi(q) = 1$, onde $\phi : \pi_1(O) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ é o homomorfismo de avaliação.

(c) Se O é a orbifold dada no item (a), então usando o item (b) temos que nas possibilidades 1) e 3) do Teorema 1.5.22 o homomorfismo de avaliação $\phi : \pi_1(O) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ é o homomorfismo trivial.

Para o seguinte teorema vamos supor que M seja uma variedade fibrada de Seifert compacta e conexa que não possui componentes de bordo sendo garrafas de Klein, ou seja, que o espaço base O de M não tenha linhas refletoras como possíveis singularidades.

Teorema 1.5.24. *Seja M uma variedade fibrada de Seifert compacta e conexa com bordo (possivelmente vazio), com n fibras singulares possuindo invariantes de órbita $(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n)$, com número de Euler $b(M)$ e qualquer fibra regular representada por h . Então,*

1) *Se a superfície subjacente de O é compacta, conexa e orientável de gênero $g \geq 0$ com $m \geq 0$ componentes de bordo, então M é orientável e $\pi_1(M)$ tem a apresentação com geradores:*

$$a_1, b_1, \dots, a_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m, h$$

e com relações

$$\begin{aligned} a_i h a_i^{-1} &= h^{\phi(a_i)}, \quad b_i h b_i^{-1} = h^{\phi(b_i)}, \quad q_j h c_j^{-1} = h, \quad d_k h d_k^{-1} = h^{\phi(d_k)}, \\ q_j^{\alpha_j} h^{\beta_j} &= 1, \quad \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = 1, \quad q_j^{\alpha_j} = h^{b(M)}, \end{aligned}$$

com $\phi(a_i) = \phi(b_i) = 1$ para $i = 1, \dots, g$, $\phi(d_k) = 1$ para $k = 1, \dots, m$ e $b(M) \in \mathbb{Z}$.

Neste caso, $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_1, \dots, d_m$ são os geradores de $\pi_1(X_O)$, q_1, \dots, q_n são os representantes dos pontos cone de O e $\phi : \pi_1(O) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ é o homomorfismo de avaliação de M .

2) *Se a superfície subjacente de O é compacta, conexa e orientável de gênero $g \geq 0$ com $m \geq 0$ componentes de bordo, então M é não orientável e $\pi_1(M)$ tem a apresentação com geradores:*

$$a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m$$

e com relações

$$a_i h a_i^{-1} = h^{\phi(a_i)}, b_i h b_i^{-1} = h^{\phi(b_i)}, q_j h c_j^{-1} = h, d_k h d_k^{-1} = h^{\phi(d_k)},$$

$$q_j^{\alpha_j} h^{\beta_j} = 1, \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = 1, q_j^{\alpha_j} = h^{b(M)},$$

com $\phi(a_i) = \phi(b_i) = -1$ para $i = 1, \dots, g$, $\phi(d_k) = -1$ para $k = 1, \dots, m$ e $b(M) \in \mathbb{Z}_2$.

Neste caso, $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_1, \dots, d_m$ são os geradores de $\pi_1(X_O)$, q_1, \dots, q_n são os representantes dos pontos cone de O e $\phi : \pi_1(O) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ é o homomorfismo de avaliação de M .

3) Se a superfície subjacente de O é compacta, conexa e não orientável de gênero $g \geq 1$ com $m \geq 0$ componentes de bordo, então M é não orientável e $\pi_1(M)$ tem a apresentação com geradores:

$$a_1, \dots, a_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m$$

e com relações

$$a_i h a_i^{-1} = h^{\phi(a_i)}, q_j h c_j^{-1} = h, d_k h d_k^{-1} = h^{\phi(d_k)},$$

$$q_j^{\alpha_j} h^{\beta_j} = 1, \prod_{i=1}^g a_i^2 \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = h^{b(M)},$$

com $\phi(a_i) = 1$ para $i = 1, \dots, g$, $\phi(d_k) = 1$ para $k = 1, \dots, m$ e $b(M) \in \mathbb{Z}_2$.

Neste caso, $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_1, \dots, d_m$ são os geradores de $\pi_1(X_O)$, q_1, \dots, q_n são os representantes dos pontos cone de O e $\phi : \pi_1(O) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ é o homomorfismo de avaliação de M .

4) Se a superfície subjacente de O é compacta, conexa e não orientável de gênero $g \geq 1$ com $m \geq 0$ componentes de bordo, então M é orientável e $\pi_1(M)$ tem a apresentação com geradores:

$$a_1, \dots, a_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m$$

e com relações

$$a_i h a_i^{-1} = h^{\phi(a_i)}, q_j h c_j^{-1} = h, d_k h d_k^{-1} = h^{\phi(d_k)},$$

$$q_j^{\alpha_j} h^{\beta_j} = 1, \prod_{i=1}^g a_i^2 \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = h^{b(M)},$$

com $\phi(a_i) = -1$ para $i = 1, \dots, g$, $\phi(d_k) = -1$ para $k = 1, \dots, m$ e $b(M) \in \mathbb{Z}$.

Neste caso, $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_1, \dots, d_m$ são os geradores de $\pi_1(X_O)$, q_1, \dots, q_n são os representantes dos pontos cone de O e $\phi : \pi_1(O) \mapsto \mathbb{Z}_2$ é o homomorfismo de avaliação de M .

5) Se a superfície subjacente de O (espaço base de M) é compacta, conexa e não orientável de gênero $g \geq 2$ com $m \geq 0$ componentes de bordo, então M é não orientável e $\pi_1(M)$ tem a apresentação com geradores:

$$a_1, \dots, a_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m$$

e com relações

$$\begin{aligned} a_i h a_i^{-1} &= h^{\phi(a_i)}, \quad q_j h c_j^{-1} = h, \quad d_k h d_k^{-1} = h^{\phi(d_k)}, \\ q_j^{\alpha_j} h^{\beta_j} &= 1, \quad \prod_{i=1}^g a_i^2 \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = h^{b(M)}, \end{aligned}$$

com $\phi(a_1) = 1$, $\phi(a_i) = -1$ para $i = 2, \dots, g$, $\phi(d_k) = 1$ para $k = 1, \dots, m$ e $b(M) \in \mathbb{Z}_2$.

Neste caso, $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_1, \dots, d_m$ são os geradores de $\pi_1(X_O)$, q_1, \dots, q_n são os representantes dos pontos cone de O e $\phi : \pi_1(O) \mapsto \mathbb{Z}_2$ é o homomorfismo de avaliação de M .

6) Se a superfície subjacente de O é compacta, conexa e não orientável de gênero $g \geq 3$ com $m \geq 0$ componentes de bordo, então M é não orientável e $\pi_1(M)$ tem a apresentação com geradores:

$$a_1, \dots, a_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m$$

e com relações

$$\begin{aligned} a_i h a_i^{-1} &= h^{\phi(a_i)}, \quad q_j h c_j^{-1} = h, \quad d_k h d_k^{-1} = h^{\phi(d_k)}, \\ q_j^{\alpha_j} h^{\beta_j} &= 1, \quad \prod_{i=1}^g a_i^2 \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = h^{b(M)}, \end{aligned}$$

com $\phi(a_1) = \phi(a_2) = 1$, $\phi(a_i) = -1$ para $i = 3, \dots, g$, $\phi(d_k) = 1$ para $k = 1, \dots, m$ e $b(M) \in \mathbb{Z}_2$.

Neste caso, $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_1, \dots, d_m$ são os geradores de $\pi_1(X_O)$, q_1, \dots, q_n são os representantes dos pontos cone de O e $\phi : \pi_1(O) \mapsto \mathbb{Z}_2$ é o homomorfismo de avaliação de M .

Demonstração. Veja [4] Teorema 2.2.2, pág 91. ■

Observação 1.5.25. Observamos que nos casos 1) e 3) do Teorema 1.5.24, $h \in \pi_1(M)$ é central em $\pi_1(M)$, além disso, pelo item (b) da Observação 1.5.23 temos que ϕ é o homomorfismo de avaliação trivial nos casos 1) e 3) do Teorema 1.5.24.

Corolário 1.5.26. Seja M uma variedade fibrada de Seifert compacta e conexa sem singularidades, com bordo (possivelmente vazio) e com espaço base uma superfície Σ com bordo (possivelmente vazio). Se $b(M) = 0$ e ϕ é o homomorfismo de avaliação trivial, então $M = \Sigma \times S^1$, onde S^1 é um círculo.

1.5.9 Geometrização de uma variedade fibrada de Seifert sem bordo

Nesta subseção observamos que uma variedade fibrada de Seifert sem bordo é modelada por 6 das 8 geometrias sobre 3-variedades dadas por W. Thurston. Para detalhes sobre as 8 geometrias de Thurston veja [26] capítulo 4.

Um outro invariante de uma variedade fibrada de Seifert M com espaço base sendo a orbifold O é o **numero racional de Euler** $e(M)$. Este numero é uma obstrução à existência de uma superfície F em M ortogonal a cada fibra de M tal que $\eta|_F : F \rightarrow O$ é uma aplicação recobrimento, onde $\eta : M \rightarrow O$ é a aplicação quociente que identifica cada fibra de M à um ponto. Quando M é uma variedade fibrada de Seifert sem bordo e orientável com invariantes de órbita $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$, então

$$e(M) = -b(M) - \sum_{i=1}^r \frac{\beta_i}{\alpha_i},$$

onde $b(M) \in \mathbb{Z}$ é a classe de Euler de M . Quando M não é orientável, definimos $e(M) = 0$, onde $b(M) \in \mathbb{Z}_2$.

A estrutura geométrica de uma variedade fibrada de Seifert M sem bordo depende somente de $e(M)$ e $\chi(O)$, onde $\chi(O)$ é a característica de Euler de O dada na Definição 1.5.13 . As 6 possibilidades são observadas no seguinte quadro:

	$\chi(O) > 0$	$\chi(O) = 0$	$\chi(O) < 0$
$e(M) \neq 0$	S^3	Nil	$\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$
$e(M) = 0$	$S^2 \times E^1$	E^3	$\mathbb{H}^2 \times E^1$

Figura 1.8

Ter em conta que as geometrias que estão fora da Figura 1.8 são a geometria \mathbb{H}^3 (geometria Hiperbólica) e a geometria SOL . Para mais detalhes sobre estas ideias citar [26] capítulo 4.

1.6 - Fibrados sobre S^1 com fibra \mathbb{T}^2

Definição 1.6.1. Seja \mathbb{T}^2 um toro e $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ um homeomorfismo. O espaço quociente M_ϕ obtido de $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ identificando $(x, 0) \in \mathbb{T}^2 \times 0$ com $(\phi(x), 1) \in \mathbb{T}^2 \times 1$ é chamado um **Fibrado sobre S^1 com fibra \mathbb{T}^2** .

Definição 1.6.2. Seja X um espaço topológico, $h_1, h_2 : X \rightarrow X$ são **homeomorfismos isotópicos**, se existe uma aplicação contínua $\theta : [0, 1] \times X \rightarrow X$ tal que $\theta(0, x) = h_1(x)$, $\theta(1, x) = h_2(x)$ e $\theta_t(x)$ é um homeomorfismo $\forall t \in [0, 1]$.

Seja

$$M_\phi := \frac{\mathbb{T}^2 \times [0, 1]}{(x, 0) \sim (\phi(x), 1)}$$

o fibrado sobre S^1 com fibra \mathbb{T}^2 . Denotaremos um elemento em M_ϕ por $[(x, t)]$. Representamos o fibrado M_ϕ sobre S^1 com fibra \mathbb{T}^2 da seguinte forma:

$$\mathbb{T}^2 \hookrightarrow M_\phi \xrightarrow{p} S^1,$$

onde a aplicação projeção p é dado por $p([(x, t)]) = [t]$ e o círculo S^1 é considerado como o espaço quociente $\frac{[0, 1]}{0 \sim 1}$. Logo temos a seguinte sequência curta exata

$$1 \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}^2) \rightarrow \pi_1(M_\phi) \xrightarrow{\eta} \phi_1(S^1) \rightarrow 1$$

Observação 1.6.3. *Seja $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ um homeomorfismo com ponto fixo x_0 . Sem perda de generalidade podemos assumir esta hipótese, pois, se $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é um homeomorfismo com $\phi(x_1) = y_1$ segue-se do Lema 5.4.16 em [29] que existe um homeomorfismo $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ isotópico à identidade $Id : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ tal que $h(y_1) = x_1$.*

Seja $H : \mathbb{T}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$ uma isotopia entre h e Id com $H_0 = h$ e $H_1 = Id$. Definindo $G : \mathbb{T}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$ por $G_t(x) = H_t(\phi(x))$, temos que G é uma isotopia entre $h \circ \phi$ e ϕ . Observamos que $h \circ \phi(x_1) = h(y_1) = x_1$. Portanto todo homeomorfismo $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é isotópico a um homeomorfismo preservando ponto base.

Proposição 1.6.4. *Sejam $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ dois homeomorfismos. Então M_{ϕ_1} é homeomórfico a M_{ϕ_2} por um homeomorfismo preservando a fibra se, e somente se, ϕ_1 é isotópico à um conjugado de ϕ_2 .*

Demonstração. Suponha que ϕ_1 e $h\phi_2h^{-1}$ são isotópicos, onde $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é um homeomorfismo. Então, temos a aplicação $G : \mathbb{T}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$ tal que

$G(\cdot, 0) = \phi_1$ e $G(\cdot, 1) = h \circ \phi_2 \circ h^{-1}$. Seja $G'(\cdot, t) = h^{-1} \circ G(\cdot, t)$, $t \in [0, 1]$. Logo

$$G'(\cdot, 1) \circ \phi_1 = h^{-1} \circ h \circ \phi_2 \circ h^{-1} \circ \phi_1 = \phi_2 \circ h^{-1} \circ \phi_1 = \phi_2 \circ G'(\cdot, 0).$$

Portanto, temos um homeomorfismo entre M_{ϕ_1} e M_{ϕ_2} dado por $[x, t] \rightarrow [G'(x, t), t]$, pois $G'(x, 0) = (G(x, 0), 0) = (\phi_1(x), 0)$ e $G'(\phi_1(x), 1) = (G(\phi_1(x), 1), 1) = (\phi_2(\phi_1(x)), 1)$, logo $G'(x, 0) \sim \psi(\phi_1(x), 1)$ em M_{ϕ_2} . Por outro lado, temos que

$$p(\varphi([x, t])) = p([\theta_t(x), t]) = [t] = p([x, t]),$$

logo φ preserva a fibra .

Reciprocamente, suponha que existe um homeomorfismo $h : M_{\phi_1} \rightarrow M_{\phi_2}$ preservando a fibra. Então $h([x, t]) = [h_1(x, t), t]$ e $h_1(\cdot, 1) \circ \phi_1 = \phi_2 \circ h_1(\cdot, 0)$. Definamos $G : \mathbb{T}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$ por $G(x, t) = h_1^{-1}(x, 1) \circ \phi_2 \circ h_1(x, t)$. Então $G(x, 0) = h_1^{-1}(x, 1) \circ \phi_2 \circ h_1(x, 0) = \phi_1(x)$ e $G(x, 1) = h_1^{-1}(x, 1) \circ \phi_2 \circ h_1(x, 1)$. Portanto, ϕ_1 é isotópico a um conjugado de ϕ_2 . ■

Corolário 1.6.5. *As classes dos fibrados sobre S^1 com fibra \mathbb{T}^2 são classificados pelas classes de conjugação das classes de isotopias dos homeomorfismos preservando o ponto base.*

Demonstração. Pela Observação 1.6.3 temos que todo homeomorfismo $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é isotópico a um homeomorfismo preservando ponto base. Então, o resultado segue da Proposição 1.6.4. ■

1.6.1 Grupo Fundamental de um Fibrado sobre S^1 com fibra \mathbb{T}^2 e Relações com a Variedade Fibrada de Seifert

Consideramos um homeomorfismo ϕ tal que $\phi(x) = x$, para algum $x \in \mathbb{T}^2$. Então ϕ induz um automorfismo $\phi_{\#} : \pi_1(\mathbb{T}^2, x) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}^2, x)$. Consideremos um arco simples orientado $\hat{t} \subset \mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ começando em $(x, 0)$ até $(x, 1)$.

Geometricamente M_{ϕ} é descrita como a colagem do cilindro $\mathbb{T}^2 \times I$ ao longo de seus extremos. Logo, $\pi_1(M_{\phi}, [(x, 0)])$ é uma HNN-extensão do grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{T}^2 \times [0, 1], (x, 0))$ sobre $\pi_1(\mathbb{T}^2, x)$, onde x pertence a \mathbb{T}^2 . Portanto, $\pi_1(M_{\phi}, [(x, 0)])$ é isomorfo

$$\pi_1(\mathbb{T}^2 \times [0, 1], (x, 0)) *_{\pi_1(\mathbb{T}^2, x)} \cong \langle x_1, x_2, t \mid [x_1, x_2], tx_1t^{-1}\phi_{\#}(x_1), tx_2t^{-1} = \phi_{\#}(x_2) \rangle,$$

onde t é o representante do arco \hat{t} e é chamada de letra estável e $\phi_{\#} : \pi_1(\mathbb{T}^2, x) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}^2, x)$ é o automorfismo induzido por ϕ .

Observação 1.6.6. 1) O fibrado M_ϕ sobre S^1 com fibra \mathbb{T}^2 não tem bordo, pois \mathbb{T}^2 é uma superfície fechada.

2) Um fibrado M_ϕ sobre S^1 com fibra \mathbb{T}^2 é irredutível. De fato, pelo Teorema 1.3.2, temos que \mathbb{R}^3 é irredutível. Como \mathbb{R}^3 é o recobrimento universal de M , então da Proposição 1.6 de [10] o fibrado M_ϕ sobre S^1 com fibra \mathbb{T}^2 é irredutível.

3) $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é um homeomorfismo preservando orientação se, e somente se, M_ϕ é um fibrado orientável sobre S^1 com fibra \mathbb{T}^2 .

Teorema 1.6.7. *Seja M uma 3-variedade compacta irredutível orientável com $\pi_1(M)$ infinito e contendo um subgrupo normal cíclico infinito, então M é uma variedade fibrada de Seifert.*

Demonstração. Veja [3] Corolário 15.4 pág 61. ■

Teorema 1.6.8. *Seja M_ϕ um orientável fibrado sobre S^1 com fibra \mathbb{T}^2 . Se M_ϕ é uma variedade fibrada de Seifert, então M_ϕ tem uma estrutura de uma variedade fibrada de Seifert sobre \mathbb{T}^2 ou sobre uma garrafa de Klein.*

Demonstração. Veja [14] Lema 5.6, pág 34. ■

1.7 - Teorema de Decomposição Toral e Teorema de Hiperbolização de Thurston

Nesta seção observaremos que uma 3-variedade orientável, compacta com bordo incompressível admite uma decomposição ao longo de toros, tal que, o conjunto de componentes da decomposição de M está formado por variedades fibradas de Seifert e variedades atoroidais. Além disso, daremos a conhecer o Teorema de Hiperbolização de Thurston, o qual relaciona as variedades de Haken atoroidais com as variedades Hiperbólicas completas de volume finito.

Teorema 1.7.1 (Teorema de Descomposição Toral de Jaco-Shalen-Johannson). *Seja M uma 3-variedade compacta, orientável, irredutível e bordo ∂M incompressível (possivelmente vazio). Então, existe uma família disjunta $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^n$ finita de toros incompressíveis de 2-lados tal que:*

$$M \setminus \{\mathcal{F}_1 \cup \dots \mathcal{F}_n\}$$

tem componentes que são variedades fibradas de Seifert ou variedades atoroidais.

Demonstração. Veja [24] para uma excelente explicação de este resultado.

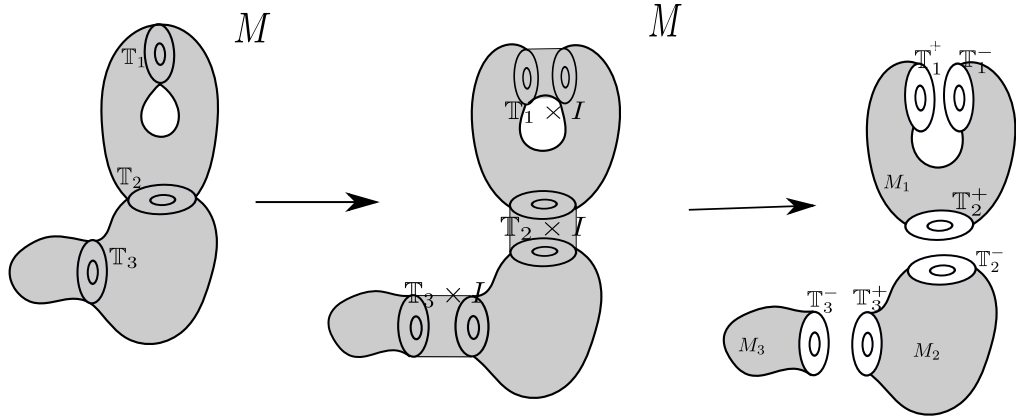


Figura 1.9: Decomposição toral de M

■

Observação 1.7.2. (Consequências do Teorema de Decomposição Toral)

- (1) Se M é conexa, então nenhuma componente de $M \setminus \{\mathcal{F}_1 \cup \dots \mathcal{F}_n\}$ é o $A \times S^1$, onde A é um anel, a menos que exista exactamente uma só componente em $M \setminus \{\mathcal{F}_1 \cup \dots \mathcal{F}_n\}$ e M não tenha bordo.
- (2) Cada componente de $M \setminus \{\mathcal{F}_1 \cup \dots \mathcal{F}_n\}$ é uma 3-variedade orientável, compacta e irredutível. Além disso, se M é conexa, então cada componente de $M \setminus \{\mathcal{F}_1 \cup \dots \mathcal{F}_n\}$ é uma 3-variedade conexa.
- (3) O grupo fundamental de cada componente de $M \setminus \{\mathcal{F}_1 \cup \dots \mathcal{F}_n\}$ é um subgrupo de $\pi_1(M)$.
- (4) Cada componente de $M \setminus \{\mathcal{F}_1 \cup \dots \mathcal{F}_n\}$ tem bordo incompressível não vazio mesmo que M não tenha bordo. Em particular, se M tem bordo incompressível toral (possivelmente vazio), então cada componente de $M \setminus \{\mathcal{F}_1 \cup \dots \mathcal{F}_n\}$ tem bordo incompressível toral não vazio.
- (5) Se M tem Decomposição Toral só formada por componentes que são variedades fibradas de Seifert, então as folheações por círculos induzidas sobre os toros da colagem são distintas, ou seja, por exemplo na Figura 1.9 temos que M_1 , M_2 e M_3 são variedades fibradas de Seifert, logo M_2 induz uma folheação por círculos sobre \mathcal{F}_3^- distinta à folheação por círculo que M_2 induz sobre \mathcal{F}_3^+ . Além disso, M_1 induz uma folheação por círculos distinta em \mathcal{F}_1^+ e \mathcal{F}_1^- .

Teorema 1.7.3 (Teorema de Hiperbolização de Thurston). *Seja M uma 3-variedade compacta, orientável e atoroidal tal que ∂M é vazio ou ∂M contém somente superfícies de gênero positivo. Se M é uma variedade de Haken, então M é uma 3-variedade hiperbólica completa de volume finito.*

Demonstração. A demonstração do Teorema está contido nos artigos [32], [33] e [34]. ■

GRUPO RESIDUALMENTE LIVRE E GRUPO TOTALMENTE RESIDUALMENTE LIVRE

Neste capítulo restringiremos nosso estudo a grupos residualmente livres e grupos totalmente livres, além disso, mostraremos diferenças entre estas classes de grupo e uma aplicação as 2-variedades compactas e conexas.

2.1 - Grupos Residualmente Livres

Nesta seção daremos a definição de um grupo residualmente livre, além disso exemplos e propriedades de um grupo residualmente livre.

Definição 2.1.1. Um grupo G é **residualmente livre** se para cada $g \in G \setminus \{1\}$ existe um grupo livre \mathbb{F} e um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $\varphi(g) \neq 1$.

No que segue \mathbb{F} denotará um grupo livre.

Exemplos 2.1.2.

1) [GRUPOS LIVRES] Grupos livres são residualmente livres. De fato, seja \mathbb{F} um grupo livre, considere o homomorfismo identidade $id : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$, logo \mathbb{F} é residualmente livre.

2) [FECHADO PARA SUBGRUPOS] Subgrupos de grupos residualmente livres são residualmente livres.

3) [FECHADO PARA PRODUCTO DIRETO] O produto direto de grupos residualmente livres é residualmente livre, em particular produto direto de grupos livres é residualmente livre. De fato, sejam H e G dois grupos residualmente livres e (h, g) um elemento não trivial em $H \times G$. Se $h \in H$ é não trivial, então existe um homomorfismo $\varphi : H \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $\varphi(h) \neq 1$. Definamos o homomorfismo $\phi : H \times G \rightarrow H$, que envia o par (a, b) para $\varphi(a)$. Logo temos que $\phi(h, g) \neq 1$. Analogamente segue o caso em que $g \neq 1$. Portanto $H \times G$ é residualmente livre.

Lema 2.1.3. Grupos residualmente livres são livres de torção.

Demonstração. Seja G um grupo residualmente livre, suponha por contradição que existe um $g \in G \setminus \{1\}$ e um número $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n = 1$. Como G é residualmente livre, existe um homomorfismo $\phi : G \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $\phi(g) \neq 1$. Mas $\phi(g) \in \mathbb{F}$ e $\phi(g)^n = 1$, o que é uma contradição, pois um grupo livre é livre de torção. ■

Lema 2.1.4. Cada grupo residualmente livre 2-gerado é isomorfo à 1 , \mathbb{Z} , $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ou \mathbb{F}_2 o grupo livre de posto 2.

Demonstração. Se G um grupo abeliano, e sendo G um grupo livre de torção 2-gerado, segue que G é abeliano livre de posto ≤ 2 . Logo, G é isomorfo a 1 , \mathbb{Z} ou $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Por outro lado, seja G não abeliano. Como G é residualmente livre gerado por a e b , com $[a, b] \neq 1$, então existe um homomorfismo $f : G \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $f([a, b]) \neq 1$. É claro que $f(G)$ é um subgrupo livre de \mathbb{F} e não abeliano, pois $f([a, b]) \neq 1$. Note que $f(G)$ é livre sobre $\{f(a), f(b)\}$, pois $f(G) = \langle f(a), f(b) \rangle$ e nenhuma palavra em $f(G)$ de comprimento positivo é igual a 1, neste caso $f(G) \cong F_2$, onde F_2 é o grupo livre de posto 2, pois pela Proposição 1.1.9 temos que grupos livres do mesmo posto são isomorfos. Já que $f(a) \neq f(b)$, então f é injetiva sobre $\{a, b\}$, logo pelo Corolário 1.1.11 temos que $G \cong \mathbb{F}_2$. ■

Lema 2.1.5. Se G é um grupo residualmente livre, então

$$C_G([G, G]) = Z(G).$$

Demonstração. Seja $z \in C_G([G, G])$. Como o centralizador $C_G([G, G])$ é dado por $C_G([G, G]) = \{g \in G \mid gh = hg \ \forall h \in [G, G]\}$, então segue que $[z, [z, g]] = 1, \forall g \in G$. Seja $\langle z, g \rangle$ um subgrupo 2-gerado de G . Se $\langle z, g \rangle$ não é abeliano, então pelo Lema 2.1.4 $\langle z, g \rangle \cong \mathbb{F}_2$ e portanto $\langle z, g \rangle$ é livre sobre $\{z, g\}$ e não abeliano. Como $[z, [z, g]] = 1$ temos que

$$\begin{aligned}
1 &= [z, [z, g]] \\
&= z[z, g]z^{-1}[g, z] \\
&= zzgz^{-1}g^{-1}z^{-1}gzg^{-1}z^{-1} \\
&= zgz^{-1}g^{-1}z^{-1}gzg^{-1}.
\end{aligned}$$

Mas $zgz^{-1}g^{-1}z^{-1}gzg^{-1} \in \langle z, g \rangle$ é uma palavra reduzida de comprimento positivo em $\langle z, g \rangle$, então $zgz^{-1}g^{-1}z^{-1}gzg^{-1}$ é diferente de 1, o qual é uma contradição. Então $\langle z, g \rangle$ é abeliano para todo $g \in G$. Portanto $[z, g] = 1 \forall g \in G$. Logo $z \in Z(G)$.

Reciprocamente, seja $z \in Z(G)$, então $[z, g] = 1, \forall g \in G$, em particular para $g \in [G, G]$. Então segue que $z \in C_G([G, G])$. ■

2.2 - Grupos Totalmente Residualmente livres

Nesta seção generalizamos o conceito de grupos residualmente livres. Além disso, veremos exemplos interessantes de grupos totalmente residualmente livres e uma definição equivalente de grupos totalmente residualmente livres.

Definição 2.2.1. Um grupo G é **totalmente residualmente livre** (no caso de G ser finitamente gerado chama-se um **grupo limite**) se para qualquer coleção finita de elementos $g_1, \dots, g_n \in G \setminus \{1\}$, existe um grupo livre \mathbb{F} e um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $\varphi(g_i) \neq 1$ para todo $1 \leq i \leq n$.

É fácil de notar que um grupo totalmente residualmente livre é um grupo residualmente livre.

Exemplos 2.2.2.

- 1) *[GRUPOS LIVRES]* Grupos livres são totalmente residualmente livre, em particular \mathbb{Z} é um grupo totalmente residualmente livre. De fato, seja \mathbb{F} um grupo livre, considere o homomorfismo identidade $id : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$. Logo \mathbb{F} é totalmente residualmente livre.
- 2) *[PRODUTO DIRETO DE GRUPOS ABELIANOS TOTALMENTES RESIDUALMENTE LIVRES]* Se $\{A_i\}_{i=1}^n$ é uma família finita de grupos abelianos

totalmente residualmente livres, então $\prod_{i=1}^n A_i$ é um grupo abeliano totalmente residualmente livre. Em particular o produto direto $\prod_{i=1}^n \mathbb{Z}$ é um grupo abeliano totalmente residualmente livre. De fato, usaremos a indução sobre n . Para $n=2$ temos que $A_1 \times A_2$ é um grupo abeliano, por outro lado, sejam $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ elementos não triviais de $A_1 \times A_2$. Sendo A_1 e A_2 grupos abelianos totalmente residualmente livres, existem homomorfismos $\phi : A_1 \rightarrow \mathbb{Z}$ e $\varphi : A_2 \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{aligned} \phi(a_i) &\neq 0, \text{ para todo } i \text{ tal que } a_i \neq 1 \\ \varphi(b_i) &\neq 0, \text{ para todo } i \text{ tal que } b_i \neq 1. \end{aligned}$$

Definamos então $\theta = \phi \times \varphi : A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ o homomorfismo dado por $\theta(a_i, b_i) = (\phi(a_i), \varphi(b_i))$, para $1 \leq i \leq n$. Seja x um número primo que não divide $\phi(a_i)$ nem $\varphi(b_i)$ para $1 \leq i \leq n$, definimos o seguinte homomorfismo $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, dado por $f(a, b) = ax + b$. Logo satisfaz-se $f(\phi(a_i), \varphi(b_i)) \neq 0$ e além disso, o homomorfismo dado pela composição $f \circ \theta : A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{Z}$ é tal que $f(\theta(a_i, b_i)) \neq 0$, para $1 \leq i \leq n$. Portanto $A_1 \times A_2$ é abeliano totalmente residualmente livre.

Suponha agora que para $n=k$ o produto direto $\prod_{i=1}^k A_i$ é totalmente residualmente livre. Mostraremos que o produto direto de $n = k + 1$ fatores abelianos é totalmente residualmente livre. Com efeito, como $\prod_{i=1}^k A_i$ é abeliano totalmente residualmente livre e A_{k+1} é abeliano totalmente residualmente livre, pelo caso $n = 2$ temos que $\prod_{i=1}^{k+1} A_i$ é abeliano totalmente residualmente livre.

3) [FECHAMENTO PARA SUBGRUPOS] Todo subgrupo de um grupo totalmente residualmente livre é totalmente residualmente livre e um grupo totalmente residualmente livre é residualmente livre.

4) [GRUPOS ABELIANOS LIVRES] Grupos abelianos livres de posto finito são totalmente residualmente livre. De fato, seja $n \in \mathbb{N}$ o posto de um grupo G abeliano livre de posto finito. Como $G \cong \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}$, então pelo exemplo 2 temos o resultado.

Proposição 2.2.3. Um grupo G é totalmente residualmente livre se, e somente se, para cada coleção finita de elementos g_1, \dots, g_n não triviais de G , existe um

subgrupo normal N de G tal que G/N é um grupo livre e $g_1, \dots, g_n \notin N$.

Demonstração. Sejam $g_1, \dots, g_n \in G \setminus \{1\}$, então existe um homomorfismo $\phi : G \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $\phi(g_i) \neq 1$, para $1 \leq i \leq n$. Seja $N = \ker(\phi) \trianglelefteq G$, pelo Primeiro Teorema Fundamental do Homomorfismo $G/N \cong \phi(G) \leq \mathbb{F}$. Como \mathbb{F} é um grupo livre, segue que G/N é um grupo livre e $g \notin N$, pois $\phi(g) \neq 1$.

Reciprocamente, sejam g_1, \dots, g_n uma coleção finita de elementos não triviais de G , considere o homomorfismo quociente $\phi : G \rightarrow G/N$, dado por $g \mapsto gN$, então temos que $\phi(g_i) = g_iN \neq N$, para $1 \leq i \leq n$. Portanto G é totalmente residualmente livre. ■

Em particular a Proposição 2.2.3 é válida para grupos residualmente livres.

Proposição 2.2.4. *Grupos abelianos residualmente livres são totalmente residualmente livres.*

Demonstração. Seja G um grupo abeliano residualmente livre e $X = G \setminus \{1\}$, pela Proposição 2.2.3 temos que para qualquer $g \in G \setminus \{1\}$ existe um subgrupo $N_g \trianglelefteq G$ tal que $g \notin N_g$ e G/N_g é livre. Logo, para todo $g \in G$ temos que $G/N_g \cong \mathbb{Z}$ pois G é abeliano. Agora definimos a aplicação $\phi : G \rightarrow \prod_{x \in X} G/N_x$, que aplica $g \mapsto (gN_x)_{x \in X}$. Mostraremos que ϕ é um homomorfismo, sejam $g, h \in X$, temos que

$$\begin{aligned} \phi(gh) &= (ghN_x)_{x \in X} \\ &= (gN_x hN_x)_{x \in X} \\ &= (gN_x)_{x \in X} (hN_x)_{x \in X} \\ &= \phi(g)\phi(h). \end{aligned}$$

Vejam agora que ϕ é injetiva. Com efeito, suponha por contradição que existe um elemento $g \neq 1$ tal que $g \in \ker(\phi)$. Então, temos que

$$\begin{aligned} \phi(g) &= (N_x)_{x \in X} \\ (gN_x)_{x \in X} &= (N_x)_{x \in X}. \end{aligned}$$

Logo, $g \in N_x$, para todo $x \in X$. Mas $g \notin N_g$, logo $g = 1$. Agora usando o fato que $G/N_g \cong \mathbb{Z}$ temos que $\prod_{x \in X} G/N_x \cong \prod_{i \in I} \mathbb{Z}$ (onde I é um conjunto de índices dependendo de X), então pelo Primeiro Teorema Fundamental do Homomorfismo temos que G está imerso no grupo $\prod_{i \in I} \mathbb{Z}$. Agora mostraremos que $\prod_{i \in I} \mathbb{Z}$ é

totalmente residualmente livre, sejam $(x_1^i)_{i \in I}, \dots, (x_n^i)_{i \in I}$ elementos não triviais do grupo $\prod_{i \in I} \mathbb{Z}$. Para cada $(x_r^i)_{i \in I}$ existe um elemento $x_r^{\theta_r} \in \mathbb{Z}$ não trivial, onde $\theta_r \in I$, ou seja existe um conjunto $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ tal que $x_r^{\theta_r} \in \mathbb{Z}$ não é um elemento trivial, para $1 \leq r \leq n$. Assim, obtemos que existe um conjunto finito $J \subset I$, onde $|J| = \max_{1 \leq r \leq n} \theta_r$ ($J = \{1, 2, \dots, \max_{1 \leq r \leq n} \theta_r\}$), tal que $(x_r^i)_{i \in J}$ não é um elemento trivial, para $1 \leq r \leq n$.

Definimos a aplicação $\phi : \prod_{i \in I} \mathbb{Z} \mapsto \prod_{i \in J} \mathbb{Z}$, dada por $(x^i)_{i \in I} \mapsto (x^i)_{i \in J}$. Note que ϕ é um homomorfismo, de fato, sejam $x = (x^i)_{i \in I}$ e $y = (y^i)_{i \in I}$. Já que $xy = ((xy)^i)_{i \in I} = (x^i)_{i \in I}(y^i)_{i \in I}$, temos que

$$\begin{aligned} \phi(xy) &= \phi(((xy)^i)_{i \in I}) \\ &= ((xy)^i)_{i \in J} \\ &= (x^i)_{i \in J}(y^i)_{i \in J} \\ &= \phi((x^i)_{i \in J}) \phi((y^i)_{i \in J}) \\ &= \phi(x)\phi(y), \end{aligned}$$

logo ϕ é um homomorfismo.

Já que $\prod_{i \in J} \mathbb{Z}$ é um grupo abeliano livre de posto finito, então $\prod_{i \in J} \mathbb{Z}$ é totalmente residualmente livre. Como $(x_1^i)_{i \in J}, \dots, (x_n^i)_{i \in J}$ são elementos não triviais de $\prod_{i \in J} \mathbb{Z}$, então existe um homomorfismo $\psi : \prod_{i \in J} \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{F}$ tal que $\psi((x_r^i)_{i \in J}) \neq 1$, para $1 \leq r \leq n$. Logo, $\psi \circ \phi : \prod_{i \in I} \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{F}$ é um homomorfismo tal que $(\psi \circ \phi)((x_r^i)_{i \in I}) \neq 1$, para $1 \leq r \leq n$. Portanto, $\prod_{i \in I} \mathbb{Z}$ é um grupo totalmente residualmente livre e como G está imerso em $\prod_{i \in I} \mathbb{Z}$, temos que G é totalmente residualmente livre, pois grupos totalmente residualmente livre são fechados para subgrupos. ■

2.3 - Grupos CSA e transitivos Comutativos

Nesta seção introduzimos grupos **CSA (abeliano completamente separado)** e **grupos transitivos comutativos**, sua importância será observada na seção 2.4. Eles permitem encontrar grupos que são residualmente livres, mas não totalmente residualmente livres. Além disso, estes grupos permitem encontrar condições para que um grupo residualmente livre seja totalmente residualmente livre.

Definição 2.3.1. Um subgrupo H de um grupo G é chamado **malnormal** se para todo $g \in G$ tal que $H \cap gHg^{-1} \neq 1$ temos que $g \in H$. Um grupo é chamado um **CSA (abeliano completamente separado)** se todos seus subgrupos abelianos maximais são malnormais.

É claro que um grupo abeliano G é *CSA*, pois um subgrupo maximal em G é o próprio grupo G . Além disso, um grupo livre é *CSA* (veja [22] Proposição 11, pág 17).

Lema 2.3.2. *Se $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é um subgrupo malnormal em $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$, então $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ é um grupo CSA.*

Demonstração. Basta mostrar que todo subgrupo abeliano maximal de $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ é malnormal. Seja A um subgrupo maximal de $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ e (x, y) um elemento de A . Se $x = 1$ então $A \subsetneq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, logo A não é subgrupo abeliano maximal. Portanto $x \neq 1$, além disso $A \subseteq C_{\mathbb{F}_2}(x) \times \mathbb{Z}$, mas o centralizador de um elemento em um grupo livre é isomorfo a \mathbb{Z} . Logo, como A é abeliano maximal, temos que $A = C_{\mathbb{F}_2}(x) \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, e desta forma A é malnormal. ■

Definição 2.3.3. Um grupo G é **transitivo comutativo** se, dados $a, b, c \in G \setminus \{1\}$ tal que $[a, b] = 1, [b, c] = 1$ então $[a, c] = 1$.

Equivalentemente o centralizador de cada elemento é abeliano.

Exemplos 2.3.4. *Um grupo livre G é comutativo transitivo.*

De fato, sejam $a, b, c \in G \setminus \{1\}$ tal que $[a, b] = 1, [b, c] = 1$, tem-se que a, b, c pertencem ao mesmo subgrupo cíclico de G , logo $[a, c] = 1$.

Proposição 2.3.5. *Se G é um grupo CSA então G é transitivo comutativo.*

Demonstração. Sejam $a, b, c \in G \setminus \{1\}$ tal que $[a, b] = 1, [b, c] = 1$, considere $C_G(b)$ o centralizador do elemento b , temos que $a, c \in C_G(b)$. Além disso, o subgrupo abeliano maximal A contendo b está contido em $C_G(b)$. Por outro lado, seja $h \in C_G(b)$. Como $b \in hAh^{-1} \cap A$ e G é *CSA*, temos que $h \in A$. Portanto $C_G(b) = A$ e $[a, c] = 1$. ■

Proposição 2.3.6. *Se G é um grupo totalmente residualmente livre, então G é transitivo comutativo.*

Demonstração. Sejam $x, y, z \in G \setminus \{1\}$ tal que $[x, y] = [y, z] = 1$. Mostraremos que $[x, z] = 1$. Suponha que $[x, z] \neq 1$, então sendo G totalmente residualmente

livre, existe um homomorfismo $\phi : G \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $\phi([x, z]) = [\phi(x), \phi(z)] \neq 1$ e $\phi(y) \neq 1$. Mas $[\phi(x), \phi(y)] = [\phi(y), \phi(z)] = 1$, o que contradiz o fato que o grupo livre \mathbb{F} é comutativo transitivo. Portanto G é transitivo comutativo. ■

Corolário 2.3.7. *Um grupo G totalmente residualmente livre não abeliano tem centro trivial.*

Demonstração. Suponha que $Z(G) \neq 1$. Como G não é abeliano existem $b_1, b_2 \in G \setminus \{1\}$ tal que $[b_1, b_2] \neq 1$, mas se $z \in Z(G)$ então $[z, b_1] = 1$ e $[b_2, z] = 1$. Logo pela Proposição 2.3.6, G é transitivo comutativo, logo temos que $[b_1, b_2] = 1$, o qual é uma contradição. Portanto $Z(G) = 1$. ■

Corolário 2.3.8. *Se A é um grupo não trivial e B um grupo não abeliano, então $A \times B$ não é totalmente residualmente livre.*

Demonstração. Suponha que $A \times B$ é totalmente residualmente livre, seja $a \in A \setminus \{1\}$. Como B não é abeliano então existe $c, b \in B$ tal que $[b, c] \neq 1$. Como $B \subset C_G(a)$ temos que $[a, c] = 1$ e $[b, a] = 1$. Por outro lado, pela Proposição 2.3.6 $A \times B$ é transitivo comutativo, logo $[b, c] = 1$, o que é uma contradição. ■

Exemplos 2.3.9.

- $\mathbb{Z} \times \mathbb{F}_2$, onde \mathbb{F}_2 é o grupo livre de posto 2, é residualmente livre mas não é totalmente residualmente livre.
- $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ é residualmente livre mas não é totalmente residualmente livre.

2.4 - Relações entre grupo Residualmente livre e totalmente livre

Como vimos na seção anterior a classe de grupos totalmente residualmente livres esta contido propriamente na classe de grupos residualmente livres. Demonstramos a seguir condições que garantem que um grupo residualmente livre seja totalmente residualmente livre. Além disso, provaremos que grupos residualmente livres não são fechados para produtos livres, e que grupos totalmente residualmente livres são fechados para produtos livres.

Definição 2.4.1. Um grupo G é **n-residualmente livre** se para qualquer n elementos $g_1, \dots, g_n \in G \setminus \{1\}$, existe um grupo livre \mathbb{F} e um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $\varphi(g_i) \neq 1$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Proposição 2.4.2. *Para um grupo residualmente livre G , as seguintes proposições são equivalentes:*

- (1) G é totalmente residualmente livre;
- (2) G é 2-residualmente livre;
- (3) G é transitivo comutativo;
- (4) G é CSA.

Demonstração. É claro que (1) implica em (2).

Assumimos (2). Sejam $x, y, z \in G \setminus \{1\}$ tal que $[x, y] = [y, z] = 1$. Mostraremos que $[x, z] = 1$. Suponha que $[x, z] \neq 1$, então sendo G 2-residualmente livre existe um homomorfismo $\phi : G \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $\phi([x, z]) = [\phi(x), \phi(z)] \neq 1$ e $\phi(y) \neq 1$. Mas $[\phi(x), \phi(y)] = [\phi(y), \phi(z)] = 1$, o que contradiz o fato que \mathbb{F} é comutativo transitivo. Logo (2) implica em (3).

Agora assumimos (3). Se G é abeliano é claro que G é CSA. Admitamos então que G não é abeliano. Por contradição, existe um subgrupo abeliano maximal M e $g \in G \setminus M$ tal que $M \cap gMg^{-1} \neq 1$. Para algum $m \in M$, com $m \neq 1$, $gmg^{-1} \in M$. Se $[g, m] = 1$, já que G é transitivo comutativo, temos que $\langle g, M \rangle$ é abeliano e $M = \langle g, M \rangle$, logo $g \in M$ o qual é contradição. Desta forma $[g, m] \neq 1$. Como $[g, m] \neq 1$, existe um homomorfismo $\phi : G \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $\phi([g, m]) \neq 1$, então $[\phi(m), \phi(g)] \neq 1$. Mas, $1 \neq \phi(gmg^{-1}) \in \phi(M) \cap \phi(g)\phi(M)\phi(g)^{-1}$. Sendo \mathbb{F} CSA, temos que o subgrupo abeliano maximal contendo $\phi(M)$ é malnormal, logo $\phi(g)$ está no subgrupo abeliano maximal de \mathbb{F} contendo $\phi(m)$. Assim, $[\phi(g), \phi(m)] = 1$ o que é uma contradição, portanto (3) implica em (4).

Finalmente assumiremos (4). Pela Proposição 2.3.5 G é comutativo transitivo. Se G é abeliano, temos pela Proposição 2.2.4 que G é totalmente residualmente livre. Assumimos agora que G não é abeliano, então se $x, y \in G \setminus \{1\}$, provaremos que existe $g \in G$ tal que $[gxg^{-1}, y] \neq 1$. Com efeito, se $[x, y] \neq 1$, então fazendo $g = 1$ temos que existe $g \in G$ tal que $[gxg^{-1}, y] \neq 1$.

No caso que $[x, y] = 1$, seja M o subgrupo abeliano maximal contendo y . Então o centralizador $C_G(y)$ contém x e M , e, além disso, como G é comutativo transitivo temos que $C_G(y)$ é abeliano. Então temos que $M = C_G(y)$, pois G não é abeliano.

Como G é CSA e não é abeliano, existe um $g \in G \setminus M$ tal que $M \cap gMg^{-1} = 1$, logo $gxg^{-1} \notin M$, e, desta forma, $[gxg^{-1}, y] \neq 1$. Agora sejam x_1, \dots, x_n elementos não triviais de G . Sejam $y_1 = x_1$, y_2 o conjugado de x_2 tal que $[y_2, y_1] \neq 1$, y_3 o

conjugado de x_3 tal que $[y_3, [y_2, y_1]] \neq 1$ e assim por diante. Obtemos elementos y_1, \dots, y_n tal que y_i é o conjugado de x_i e o comutador $[y_n, \dots, y_1] \neq 1$. Agora, sendo G residualmente livre, existe um homomorfismo $\phi : G \mapsto \mathbb{F}$, tal que $\phi([y_n, \dots, y_1]) \neq 1$, logo $\phi(y_i) \neq 1$, e conseqüentemente $\phi(x_i) \neq 1$, para $1 \leq i \leq n$. Isto prova que (4) implica (1). ■

Lema 2.4.3. *Se G é um grupo CSA, então cada subgrupo normal abeliano está contido no centro de G .*

Demonstração. Seja A um subgrupo abeliano normal de G . Então A está contido em um subgrupo abeliano maximal B de G . Seja $a \in A \setminus \{1\}$ e $x \in G \setminus \{1\}$. Então $xax^{-1} \in A$, pois A é normal. Já que $A \leq B$, então $a \in B$, $xax^{-1} \in B$ e $xax^{-1} \in B \cap xBx^{-1}$. Como G é CSA temos que B é malnormal e portanto $x \in B$. Já que B é abeliano, então $[a, x] = 1$, para todo $x \in G$. Portanto A está no centro de G . ■

Lema 2.4.4. *Cada subgrupo abeliano normal de um grupo residualmente livre G está contida no centro de G .*

Demonstração. Seja A um subgrupo normal abeliano de G . Seja $a \in A \setminus Z(G)$, então existe um elemento $b \in G$ com

$$x = [a, b] \neq 1.$$

Como G é residualmente livre, então pela Proposição 2.2.3 existe um subgrupo normal N_x de G , com G/N_x livre e $x \notin N_x$. Segue que $abN_x \neq baN_x$, logo G/N_x é um grupo livre não abeliano. Já que $ba^{-1}b^{-1} \in A$, então $x \in A$, logo temos que

$$AN_x/N_x \cong A/A \cap N_x,$$

é um subgrupo não trivial abeliano normal de G/N_x . Como G/N_x é um grupo livre e não abeliano, temos que G/N_x é um grupo CSA, além disso, $Z(G/N_x) = 1$. Logo, pelo Lema 2.4.3 temos que $AN_x/N_x = 1$, o qual é uma contradição. Portanto $A \leq Z(G)$. ■

Teorema 2.4.5. *Seja G um grupo residualmente livre. G é totalmente residualmente livre se, e somente se, G não contém $\mathbb{F} \times \mathbb{Z}$, onde \mathbb{F} é um grupo livre de posto 2 e \mathbb{Z} um grupo cíclico infinito.*

Demonstração. Admitamos que G contém $\mathbb{F} \times \mathbb{Z}$. Como \mathbb{F} é livre de posto 2 então \mathbb{F} não é abeliano, logo $\mathbb{F} \times \mathbb{Z}$ não é totalmente residualmente livre pelo Exemplo

2.3.9. Mas $\mathbb{F} \times \mathbb{Z}$ é um subgrupo de G , logo $\mathbb{F} \times \mathbb{Z}$ é totalmente residualmente livre, o qual é uma contradição. Portanto, G não contém $\mathbb{F} \times \mathbb{Z}$.

Reciprocamente, suponhamos que G não é totalmente residualmente livre. Pela Proposição 2.4.2 G não é comutativo transitivo, ou seja, existem elementos não triviais a, b, c de G tal que c comuta com a e b , mas $[a, b] \neq 1$. Seja $\mathbb{F} = \langle a, b \rangle$, pela Lema 2.1.4, \mathbb{F} é livre não abeliano de posto 2 e tem centro trivial. Sendo c um elemento de ordem infinita, temos que $\langle c \rangle$ é um grupo cíclico infinito. Como a, b comutam com c , tem-se que $\mathbb{F}\langle c \rangle$ é subgrupo de G e além disso $\mathbb{F} \cap \langle c \rangle = 1$. É fácil verificar que $\langle c \rangle$ e \mathbb{F} são subgrupos normais de $\mathbb{F}\langle c \rangle$, por tanto $\mathbb{F}\langle c \rangle$ é isomorfo a $\mathbb{F} \times \langle c \rangle \cong \mathbb{F} \times \mathbb{Z}$ ou seja G contém $\mathbb{F} \times \mathbb{Z}$, que é uma contradição à hipótese. ■

Do Teorema 2.4.5 podemos concluir que um grupo residualmente livre finitamente gerado é totalmente residualmente livre ou contém $\mathbb{F} \times \mathbb{Z}$.

A classe dos grupos residualmente livres são fechados para produtos diretos, mas nem sempre é fechado para produtos livre de grupos, como podemos ver no próximo lema.

Lema 2.4.6. *Se A_1 e A_2 são grupos, A_1 não trivial e A_2 não é totalmente residualmente livre então $A_1 * A_2$ não é residualmente livre.*

Demonstração. Segue da Proposição 2.4.2 que cada grupo 2-residualmente livre é totalmente residualmente livre. Agora, como A_2 não é totalmente residualmente livre então A_2 não é 2-residualmente livre, isto é, existem elementos não triviais $b_1, b_2 \in A_2$ tal que qualquer homomorfismo de A_2 num grupo livre \mathbb{F} leva b_1 ou b_2 para 1.

Seja $a \in A_1$ e defina $\xi = [b_1, [b_2, a]]$, logo $\xi = b_1 b_2 a b_2^{-1} a^{-1} b_1^{-1} a b_2 a^{-1} b_2^{-1}$ é uma palavra reduzida no produto $A_1 * A_2$, segue então que $\xi \neq 1$. Agora suponhamos que $A_1 * A_2$ é residualmente livre e considerando este elemento $\xi \neq 1$, existe um homomorfismo $f : A_1 * A_2 \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $f(\xi) \neq 1$.

$$\begin{array}{ccc}
 G = A_1 * A_2 & & \\
 \uparrow & \searrow f & \\
 A_i & \xrightarrow{f|_{A_i}} & \mathbb{F}
 \end{array}$$

Fazemos a identificação de $f(b_1) = f|_{A_2}(b_1)$, $f(b_2) = f|_{A_2}(b_2)$ e $f(a) = f|_{A_1}(a)$, logo como cada homomorfismo de A_2 ate \mathbb{F} leva b_1 ou b_2 a 1 então temos que

$f(b_1) = f|_{A_2}(b_1) = 1$ ou $f(b_2) = f|_{A_2}(b_2) = 1$. Disto temos que

$$\begin{aligned} f(\xi) &= f(b_1 b_2 a b_2^{-1} a^{-1} b_1^{-1} a b_2 a^{-1} b_2^{-1}) \\ &= f|_{A_2}(b_1) f|_{A_2}(b_2) f|_{A_1}(a) \cdots f|_{A_1}(a) f|_{A_2}(b_2) f|_{A_1}(a^{-1}) f|_{A_2}(b_2^{-1}) \\ &= 1, \end{aligned}$$

o qual é uma contradição já que $f(\xi) \neq 1$. Portanto $A_1 * A_2$ não é residualmente livre. ■

Exemplo 2.4.7. Como já vimos \mathbb{Z} é um grupo residualmente livre e pelo Exemplo 2.3.9 temos que $\mathbb{Z} \times \mathbb{F}_2$ é um grupo residualmente livre, mas não totalmente residualmente livre. Portanto, pelo Lema 2.4.6, $\mathbb{Z} * (\mathbb{Z} \times \mathbb{F}_2)$ não é um grupo residualmente livre.

Em contraste com a classe dos grupos residualmente livres os grupos totalmente residualmente livres são fechados para o produto livre.

Teorema 2.4.8. Sejam H e K dois grupos não triviais. Se H e K são totalmente residualmente livre, então $H * K$ é totalmente residualmente livre.

Demonstração. Sejam x_1, \dots, x_n elementos não triviais de $G = H * K$. Pelo Teorema da Forma Normal de um produto livre (veja Teorema 1.1.20) temos que

$$x_i = a_{i,1}, \dots, a_{i,k(i)},$$

onde os a_{ij} pertencem alternadamente a H ou K . Como H é totalmente residualmente livre, pela Proposição 2.4.2 H contém um subgrupo $N \trianglelefteq H$ com H/N sendo um grupo livre, tal que alguns a_{ij} não pertencem a N . Analogamente K , contém um subgrupo $M \trianglelefteq K$ com K/M livre, e alguns a_{ij} não pertencem a M . Consideremos os homomorfismos canônicos $proj_1 : H \rightarrow H/N$ e $proj_2 : K \rightarrow K/M$, e seja L o produto livre de H/N com K/M , ou seja, $L = H/N * K/M$. Então pela definição de produto livre temos que existe um homomorfismo f de G a $L = H/N * K/M$ que estende $proj_1$ e $proj_2$.

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ & \uparrow & \searrow \exists! f \\ K & \xrightarrow{proj_1} & K/M \hookrightarrow L \\ H & \xrightarrow{proj_2} & H/N \hookrightarrow L \end{array}$$

Além disso, como H/N e K/M são grupos livres, então pela Proposição 1.1.24 temos que L é livre. A imagem de x_i por f é $f(x_i) = proj_1(a_{i,1}) \cdots proj_2(a_{i,k(i)})$,

logo cada fator de $f(x_i)$ é diferente da unidade e pertence a H/N ou K/M , portanto $f(x_i)$ é uma palavra reduzida em L e $f(x_i) \neq 1$, assim G é totalmente residualmente livre. ■

Assim, a classe dos grupos totalmente residualmente livres são fechados para produto livre, mas não são para produtos diretos pelo Corolário 2.3.8.

2.5 - Superfícies Residualmente livres

Nesta seção analizaremos quais são as superfícies compactas e conexas sem bordo(fechadas) ou com bordo que têm grupo fundamental residualmente livre ou totalmente residualmente livre.

Definição 2.5.1. Se S é uma superfície compacta, conexa (não necessariamente fechada) e $\pi_1(S)$ é residualmente livre então S é chamado uma **superfície residualmente livre**.

Proposição 2.5.2. *Seja S uma superfície fechada. Se S é uma das superfícies não orientáveis de característica de Euler $\chi(S) = -1, 0$ ou 1 , então $\pi_1(S)$ não é residualmente livre. Caso contrário, $\pi_1(S)$ é totalmente residualmente livre, logo S é uma superfície residualmente livre. Além disso, se S é uma superfície com bordo, então $\pi_1(S)$ é totalmente residualmente livre, logo S é uma superfície residualmente livre.*

Demonstração. Analizaremos no caso que S não tem bordo:

(i) Se $\chi(S) = 1$, então pelo Teorema 1.2.61 temos que S é um plano projetivo com grupo fundamental $\pi_1(S) = \mathbb{Z}_2$ o qual não é residualmente, pois não é livre de torção, logo também não totalmente residualmente livre.

(ii) Se $\chi(S) = 0$, então pelo Teorema 1.2.61 segue que S é uma garrafa de Klein, já que $P^2 \# P^2$ é homeomorfa a uma garrafa de Klein, com grupo fundamental

$$\pi_1(S) = \langle a, b \mid a^2 b^2 = 1 \rangle = \langle a \rangle *_{\langle a^2 \rangle \cong \langle b^{-2} \rangle} \langle b \rangle \cong \mathbb{Z} *_{2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$$

Suponha que $\pi_1(S)$ é abeliano, pelo Corolário 1.1.33 temos que $\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$, o qual implica que $\pi_1(S)$ não é abeliano. Agora, se $\pi_1(S)$ é residualmente livre e não abeliano, pelo Lema 2.1.4 temos que $\pi_1(S)$ é livre sobre $\{a, b\}$, o que é contradição uma vez que temos a palavra reduzida $a^2 b^2 = 1$. Logo, temos que $\pi_1(S)$

não é residualmente livre, e assim $\pi(S)$ não é totalmente residualmente livre.

(iii) Se $\chi(S) = -1$, então pelo Teorema 1.2.61 S é a soma conexa de três planos projetivos com grupo fundamental $\pi_1(S) = \langle a, b, c | a^2 b^2 c^2 \rangle = 1$.

Suponha que $\pi_1(S)$ é um grupo residualmente livre não abeliano. Logo sem perda de generalidade, podemos admitir que $[a, b] \neq 1$. Então pela definição de grupo residualmente livre existe um homomorfismo $\phi : \pi_1(S) \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $\phi([a, b]) = ([\phi(a), \phi(b)]) \neq 1$. Mas por outro lado, temos que $\phi(a)^2 \phi(b)^2 = \phi(c^{-1})^2$ e pelo Argumento de Lyndon (veja [17]) $[\phi(a), \phi(b)] = 1$, o qual é uma contradição.

Suponha agora que $\pi_1(S)$ é um grupo residualmente livre abeliano, observe que

$$\pi_1(S) = \langle a, b \rangle *_{\langle a^2 b^2 \rangle \cong \langle c^{-2} \rangle} \langle c \rangle$$

é um produto amalgamado de um grupo livre gerado por $\{a, b\}$ e o grupo livre gerado por c , amalgamando os grupos cíclicos infinitos gerados por $\{a^2 b^2\}$ e $\{c^{-2}\}$. Já que $\langle a, b \rangle$ é um grupo livre dois gerado não abeliano contido em $\pi_1(S)$ então $\pi_1(S)$ não é abeliano o qual é contradição. Por tanto $\pi_1(S)$ não residualmente livre.

(iv) Para as demais superfícies sem bordo temos o seguinte argumento:

Se S é uma superfície não orientável com gênero $g \geq 4$, então pelo Teorema 1.2.61 seu grupo fundamental é $\pi_1(S) = \langle a_1, \dots, a_g | a_1^2 \dots a_g^2 = 1 \rangle$. $\pi_1(S)$ é totalmente residualmente livre (veja [1] pág 414), logo S é uma superfície residualmente livre, além disso, o grupo $\langle a_1, \dots, a_g | a_1^2 \dots a_g^2 = 1 \rangle$ tem um subgrupo da forma $\pi(S_{g-1}) = \langle a_1, \dots, a_{g-1}, b_1, \dots, b_{g-1} | \prod_{j=1}^{g-1} [a_j, b_j] \rangle$ (veja [37] pág 24-25). Como a classe de grupos totalmente residualmente livre é fechada para subgrupos, o grupo $\pi_1(S_{g-1})$ é totalmente residualmente livre para $g \geq 4$. Desta forma pelo Teorema 1.2.61 as superfícies orientáveis sem bordo e gênero maior ou igual a três têm grupo fundamental totalmente residualmente livre. Agora, resta analisar os casos quando o gênero da superfície orientável sem bordo é 0, 1 e 2. Se a superfície orientável sem bordo tem gênero 0, então a superfície é uma esfera, logo é claro que seu grupo fundamental é totalmente residualmente livre, pois ele é trivial. Portanto a esfera é uma superfície residualmente livre.

Sejam S_2 e S_1 as superfícies orientáveis sem bordo de gênero 2 e 1 respectivamente. Pelo Teorema 1.2.61 temos que o grupo fundamental de S_2 é $\pi_1(S_2) = \langle a_1, a_2, b_1, b_2 | [a_1, b_1][a_2, b_2] = 1 \rangle = \mathbb{F} *_{G_1 \cong G_2} \overline{\mathbb{F}}$, onde $G_1 = \langle a_1, b_1, a_1^{-1} b_1^{-1} \rangle$

e $G_2 = \langle a_2, b_2, a_2^{-1}b_2^{-1} \rangle$ são subgrupos de $\mathbb{F} = \langle a_1, b_1 \rangle$ e $\overline{\mathbb{F}} = \langle a_2, b_2 \rangle$ respectivamente. Neste caso $\pi_1(S_2)$ é também totalmente residualmente livre (veja [36] pág 6). Portanto S_2 é uma superfície residualmente livre

Finalmente, S_1 é um toro e seu grupo fundamental é $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, e como grupos abelianos livres de posto finito são totalmente residualmente livres temos que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é totalmente residualmente livre. Portanto S_1 é uma superfície residualmente livre.

Assim, concluímos que as superfícies sem bordo são superfícies residualmente livres, exceto quando a superfície é um plano projetivo, uma garrafa de Klein ou uma superfície não orientável de gênero 3.

No caso de superfícies com bordo temos que seu grupo fundamental é livre (veja Teorema 1.2.63). Logo têm grupo fundamental residualmente livre e portanto são superfícies residualmente livres. ■

2.6 - Produtos Amalgamados e HNN-extensões residualmente livres

Nesta seção serão abordadas propriedades de grupos residualmente livres que são expressados como produtos amalgamados e HNN-extensão.

Seja $Aut(G)$ o grupo de automorfismo de um grupo G e $Inn(G)$ o grupo de automorfismo internos de G . O grupo quociente $Aut(G)/Inn(G)$ é dito o **grupo das classes dos automorfismos externos** e denotado por $Out(G)$.

Teorema 2.6.1. *Cada grupo totalmente residualmente livre não cíclico tem infinitos automorfismos externos.*

Demonstração. Veja [28] Teorema 3.2. ■

Definição 2.6.2. Para qualquer subgrupo $H \leq G$, definimos o **núcleo normal** de H em G , como o maior subgrupo normal de G contendo H , isto é

$$Core_G(H) = \bigcap_{g \in G} H^g = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}.$$

Uma consequência imediata é que $Core_G(H) = H$ se, e somente se, H é normal em G .

Proposição 2.6.3. *Se $G = A *_C B$ é um produto amalgamado sobre um subgrupo abeliano e suponha que G é residualmente livre. Se A é não abeliano, então*

$$Z(A) \cap C \subset \text{Core}_B(C) = \bigcap_{b \in B} C^b = \bigcap_{b \in B} bCb^{-1}.$$

Demonstração. Seja $z \in Z(A) \cap C$. Como A é não abeliano existem $a, b \in A$ tal que $ab \neq ba$. O subgrupo $\langle a, b \rangle$ de A é residualmente livre não abeliano e 2-gerado, logo pelo Lema 2.1.4 $\langle a, b \rangle$ é isomorfo a \mathbb{F}_2 (grupo livre não abeliano de posto 2). Como C é um grupo abeliano, então $C \cap \langle a, b \rangle$ é um subgrupo abeliano em $\langle a, b \rangle$, portanto $C \cap \langle a, b \rangle$ é cíclico. Agora, como $\langle a, b \rangle$ é livre de posto 2, então o subgrupo comutador de $\langle a, b \rangle$ é infinitamente gerado, logo ele não pode estar contido em C . Assim, existem $a_1, a_2 \in A$ tal que $[a_1, a_2] \neq 1$ e $[a_1, a_2] \notin C$. Se $b \in C$, então $bzb^{-1} \in C$, logo $z \in b^{-1}Cb$. Se $b \in B \setminus C$, consideremos a palavra sobre G

$$\xi = [[a_1, a_2], [z, b]].$$

Afirmção *: Dado $b \in B \setminus C$ e $[a_1, a_2] \neq 1$ uma palavra em G , então para cada homomorfismo $f : G \rightarrow \mathbb{F}$, ou $f(z) = 1$ ou $f([a_1, a_2]) = 1$. De fato, suponhamos que $f(z) \neq 1$ e $f([a_1, a_2]) \neq 1$, para algum homomorfismo f . Como $z \in Z(A)$, então $[z, a_1] = 1$ e $[z, a_2] = 1$. Logo $[f(z), f(a_1)] = 1$ e $[f(z), f(a_2)] = 1$. Como $f(a_1), f(a_2), f(z)$ são elementos de \mathbb{F} eles pertencem ao mesmo subgrupo cíclico de \mathbb{F} . Portanto $f([a_1, a_2]) = 1$, o qual é uma contradição.

Agora, do que foi provado na afirmação segue que $f(z) = 1$ ou $f([a_1, a_2]) = 1$, para todo homomorfismo $f : G \rightarrow \mathbb{F}$. Logo $f(\xi) = 1$, e como G é residualmente livre, $\xi = 1$. Portanto

$$1 = \xi = [a_1, a_2][z, b][a_1, a_2]^{-1}[z, b]^{-1},$$

não é uma palavra reduzida no produto amalgamado $A *_C B$, então $[z, b] = zbz^{-1}b^{-1} \in C$. Desta forma, $bzb^{-1} \in C$ e $z \in b^{-1}Cb$. Assim, para todo $b \in B$ temos que $z \in b^{-1}Cb$. Portanto $z \in \bigcap_{b \in B} bCb^{-1} = \text{core}_B(C)$. ■

Proposição 2.6.4. *Seja $G = A *_C B$ uma HNN-extensão e suponha que G é residualmente livre. Se t é a letra estável, então*

$$(Z(A) \cap C)^t = t(Z(A) \cap C)t^{-1} \subset Z(A).$$

Demonstração. Seja $G = \langle A, t \mid tCt^{-1} = \overline{C} \rangle$ a apresentação do grupo. Se A é abeliano, então $Z(A) = A$ e assim

$$t(Z(A) \cap C)t^{-1} = t(A \cap C)t^{-1} = tCt^{-1} = \overline{C} \leq Z(A) = A,$$

portanto $t(Z(A) \cap C)t^{-1} \leq Z(A)$.

Seja A não abeliano. Existem $a_1, a_2 \in A$ tal que $[a_1, a_2] \neq 1$. Agora, seja $z \in (Z(A) \cap C)$ um elemento arbitrário. Consideremos a seguinte palavra,

$$\xi = [[a_1, a_2], [z, t]].$$

Da afirmação * feita na demonstração da Proposição 2.6.3, temos que para cada homomorfismo $f : G \rightarrow \mathbb{F}$, ou $f(z) = 1$ ou $f([a_1, a_2]) = 1$, logo $f(\xi) = 1$. Mas, como G é residualmente livre, $\xi = 1$. Se $tzt^{-1} = a$, então $a \in \overline{C} \leq A$.

$$1 = \xi = [[a_1, a_2], [z, t]] = [[a_1, a_2], za^{-1}] = [[a_1, a_2], a^{-1}],$$

Logo $1 = [[a_1, a_2], a^{-1}]$, e desta forma $a[a_1, a_2] = [a_1, a_2]a$, isto é, a comuta com cada comutador de A , portanto $a \in C_A([A, A])$. Mas, pelo Lema 2.1.5 $C_A([A, A]) = Z(A)$, logo $a = tzt^{-1} \in Z(A)$. Portanto

$$t(Z(A) \cap C)t^{-1} \subset Z(A).$$

.

■

2.7 - Retratos virtuais sobre subgrupos cíclicos

Nesta seção mostraremos que subgrupos cíclicos de um grupo residualmente livre são retratos virtuais do grupo que os contém.

Definição 2.7.1. Um subgrupo H de um grupo G é um **retrato** de G se, existe um homomorfismo $f : G \rightarrow H$ tal que $f|_H = id$, onde id é a identidade de H . Chamamos H um **retrato virtual** de G , se H é contido como um retrato de um subgrupo de índice finito de G .

Teorema 2.7.2. (Teorema de Marshall Hall Jr) Se \mathbb{F} é um grupo livre e H um subgrupo finamente gerado de \mathbb{F} , então existe um subgrupo K de \mathbb{F} de índice finito tal que $K = H * G$, onde $G \leq \mathbb{F}$.

Demonstração. Veja [9].

■

Lema 2.7.3. *Seja G um grupo residualmente livre e L um subgrupo cíclico de G . Então G tem um subgrupo de índice finito H , contendo L , tal que L é um retrato de H (isto é, L é um retrato virtual de G).*

Demonstração. Como $L = \langle z \rangle \neq 1$ é um subgrupo de G , então para $z \in L$ existe um homomorfismo $f : G \mapsto \mathbb{F}$ tal que $f(z) \neq 1$. Provaremos as seguintes afirmações:

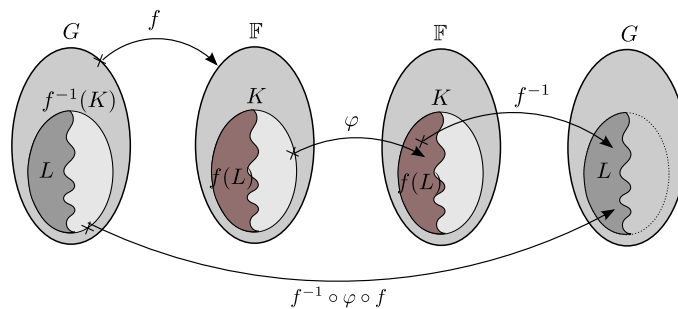
i) f é injetiva sobre L . De fato, seja $1 \neq x \in L$ tal que $f(x) = 1$. Como $x \in L$ então $x = z^m$ onde $m \in \mathbb{N}$. Logo $f(z)^m = 1$, mas como $f(z) \in \mathbb{F}$ segue que ele não pode ter ordem finita, pois \mathbb{F} é livre de torção, portanto $x = 1$.

(ii) Existe um subgrupo de índice finito K de \mathbb{F} tal que $f(L)$ é um retrato de K . De fato, observemos que $f(L)$ é um subgrupo livre de \mathbb{F} , então pelo Teorema de Marshall Hall Jr (Teorema 2.7.2), temos que existe um subgrupo K de \mathbb{F} de índice finito tal que $K = f(L) * M$ e $M \leq \mathbb{F}$.

$$\begin{array}{ccc}
 K & & \\
 \uparrow & \searrow \varphi & \\
 f(L) & \xrightarrow{id} & f(L) \\
 M & \xrightarrow{O} & 1
 \end{array}$$

Pela definição de produto livre temos que, existe $\varphi : K \mapsto f(L)$ tal que $\varphi|_{f(L)} = id|_{f(L)}$, portanto $f(L)$ é um retrato de K . E isto prova a afirmação.

Voltando à demonstração, tome $H = f^{-1}(K)$, então temos que $L \leq H$. Observando o seguinte diagrama



temos que $f^{-1} \circ \varphi \circ f : H = f^{-1}(K) \mapsto L$ é um homomorfismo tal que $f^{-1} \circ \varphi \circ f(z) = z, \forall z \in L$. Resta provar que $H = f^{-1}(K)$ é um subgrupo de índice finito de G , para concluir que L é um retrato virtual de G . Seja a função,

$$\begin{aligned}
 \psi : \{ \text{Classes laterais de } H \text{ em } G \} &\mapsto \{ \text{Classes laterais de } K \text{ em } \mathbb{F} \} \\
 gH &\mapsto f(g)K.
 \end{aligned}$$

Notemos que ψ é injetiva. Sejam g_1H e g_2H classes laterais de $H = f^{-1}(K)$ em G tal que $\psi(g_1H) = \psi(g_2H)$, logo $f(g_1g_2^{-1}) \in K$ e então $g_1g_2^{-1} \in H$. Portanto $g_1H = g_2H$ e assim ψ é uma função injetiva, e desta forma temos que H é um subgrupo de índice finito de G . ■

Capítulo 3

GRUPOS RESIDUALMENTE LIVRES SOBRE 3-VARIEDADES

Neste capítulo mostraremos que as variedades atoroidais, compactas e orientáveis com bordo toral (possivelmente vazio) e grupo fundamental não trivial não têm grupo fundamental residualmente livre e que as variedades hiperbólicas de volume finito com bordo não vazio não têm grupo fundamental residualmente livre, além disso daremos uma classificação das variedades fibradas de Seifert compactas e conexas com bordo incompressível (possivelmente vazio) e grupos fundamentais residualmente livres não triviais. Finalmente, mostraremos que um grafo variedade (variedade com decomposição toral formada só por componentes variedades fibradas de Seifert) conexo com bordo incompressível e grupo fundamental residualmente livre não trivial é uma variedade fibrada de Seifert.

3.1 - Grupos residualmente livres sobre uma variedade atoroidal e uma variedade hiperbólica

O objetivo desta seção é munir de uma estrutura geométrica às variedades irreduzíveis, atoroidais, orientáveis, compactas com bordo toral (possivelmente vazio) e grupo fundamental residualmente livre não trivial. Além disso, demonstraremos que uma variedade hiperbólica com bordo não vazio e grupo fundamental não trivial tem grupo fundamental não residualmente livre.

Teorema 3.1.1. *Se M é uma 3-variedade compacta, P^2 -irreduzível com bordo (possivelmente vazio) e grupo fundamental residualmente livre não trivial, então M é uma variedade de Haken.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.3.20 só restaria provar que o número de Betti de $\pi_1(M)$ é positivo, ou seja, $b_1(\pi_1(M)) > 0$. Já que M é uma 3-variedade compacta, então $\pi_1(M)$ é finitamente gerado. Seja g um elemento não trivial de $\pi_1(M)$, da Proposição 2.2.3 temos que existe um subgrupo $N \trianglelefteq \pi_1(M)$ tal que $g \notin N$ e $\pi_1(M)/N$ é um grupo livre. Já que $\pi_1(M)$ é finitamente gerado, então $\pi_1(M)/N$ é um grupo livre de posto finito, logo $\frac{\pi_1(M)/N}{(\pi_1(M)/N)'}$ é um grupo abeliano livre de posto finito. Já que $\frac{\pi_1(M)/N}{(\pi_1(M)/N)'}$ = $\frac{\pi_1(M)/N}{(\pi_1(M)'N)/N}$, então pelo 3º Teorema fundamental dos homomorfismos temos que $\frac{\pi_1(M)/N}{(\pi_1(M)'N)/N} \cong \pi_1(M)/(\pi_1(M)'N)$, logo $\pi_1(M)/(\pi_1(M)'N)$ é abeliano livre de posto finito. Pelo 3º Teorema fundamental dos homomorfismos, temos que $\pi_1(M)/(\pi_1(M)'N) \cong \frac{\pi_1(M)/\pi_1(M)'}{(\pi_1(M)'N)/\pi_1(M)'}$, logo $\frac{\pi_1(M)/\pi_1(M)'}{(\pi_1(M)'N)/\pi_1(M)'}$ é também abeliano livre de posto finito. Definamos o homomorfismo projeção

$$\begin{aligned} \phi : \pi_1(M)/\pi_1(M)' &\longmapsto \frac{\pi_1(M)/\pi_1(M)'}{(\pi_1(M)'N)/\pi_1(M)'} \\ \bar{g} &\longmapsto \bar{g}(\pi_1(M)'N)/\pi_1(M)', \text{ onde } \bar{g} = g\pi_1(M)'. \end{aligned}$$

De ϕ observamos que, como $\frac{\pi_1(M)/\pi_1(M)'}{(\pi_1(M)'N)/\pi_1(M)'}$ é abeliano livre de posto finito, $\pi_1(M)/\pi_1(M)'$ contém elementos de ordem infinita, pois $\frac{\pi_1(M)/\pi_1(M)'}{(\pi_1(M)'N)/\pi_1(M)'}$ contém elementos de ordem infinita.

Sabemos que o primeiro número de Betti de $\pi_1(M)$ é igual à quantidade de fatores \mathbb{Z} na decomposição do grupo abeliano finitamente gerado $\pi_1(M)/\pi_1(M)'$, logo como $\pi_1(M)/\pi_1(M)'$ tem elementos de ordem infinita, temos que existe pelo menos um fator \mathbb{Z} na decomposição do grupo abeliano $\pi_1(M)/\pi_1(M)'$, portanto $b(\pi_1(M)) > 0$. ■

Corolário 3.1.2. *Se M é uma 3-variedade compacta, orientável, atoroidal com bordo toral (possivelmente vazio) e grupo fundamental residualmente livre não trivial, então M é uma variedade hiperbólica completa de volume finito.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.1 temos que M é uma variedade de Haken. Logo, a conclusão segue direto do Teorema 1.7.3. ■

Corolário 3.1.3. *Se M é uma 3-variedade compacta, orientável, atoroidal com bordo vazio e grupo fundamental não trivial, então M tem grupo fundamental não residualmente livre.*

Demonstração. Suponha que $\pi_1(M)$ é residualmente livre. Pelo Teorema 2.4.5 temos que $\pi_1(M)$ contém $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ ou $\pi_1(M)$ é totalmente residualmente livre.

Pelo Corolário 3.1.2, temos que M é uma variedade hiperbólica completa de volumefinito. Usando o Corolário 1.4.21, temos que $\pi_1(M)$ não contém $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, logo $\pi_1(M)$ é totalmente residualmente livre. Se $\pi_1(M)$ não é cíclico, então pelo Teorema 2.6.1 temos que $\pi_1(M)$ tem infinitos automorfismos externos, pois $\pi_1(M)$ é finitamente gerado e não é cíclico. Mas, pelo Corolário 1.4.25, $\pi_1(M)$ tem finitos automorfismos externos, o qual nós dá uma contradição. Se $\pi_1(M)$ é cíclico, então pelo Teorema 1.6.7 temos que M é uma variedade fibrada de Seifert, logo é modelada por uma das geometrias na figura 1.6, o qual é uma contradição, pois M é uma variedade hiperbólica, logo é modelada pela geometria \mathbb{H}^3 .

Portanto $\pi_1(M)$ não é residualmente livre. ■

Teorema 3.1.4. *Se M é uma 3-variedade hiperbólica compacta de volume finito com grupo fundamental não trivial e bordo não vazio, então $\pi_1(M)$ é não residualmente livre.*

Demonstração.

Suponha que $\pi_1(M)$ é residualmente livre. Pelo Teorema 2.4.5 temos que $\pi_1(M)$ contém $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ ou $\pi_1(M)$ é totalmente residualmente livre. Separamos a demonstração em dois casos:

1) Suponha que $\pi_1(M)$ contém $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$. Pelo Teorema 1.4.23 temos que o bordo de M é toral, ou seja, o bordo de M é formado por toros. Pelo Teorema 1.4.26 temos que o grupo fundamental de uma componente do bordo de M é malnormal, ou seja, o grupo fundamental de um toro \mathbb{T}^2 contido no bordo de M é um subgrupo malnormal de $\pi_1(M)$. Já que o grupo fundamental de um toro é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, então $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é um subgrupo malnormal de $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$, pois $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ está contido em $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$, assim pelo Lema 2.3.2, temos que $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ é um grupo *CSA*. Logo, da Proposição 2.4.2, temos que $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ é totalmente residualmente livre, pois $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ é um grupo *CSA* e residualmente livre, o qual é uma contradição, já que pelo Exemplo 2.3.9 $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ não é totalmente residualmente livre.

2) Se $\pi_1(M)$ é totalmente residualmente livre, então pelo Teorema 2.6.1 temos que $\pi_1(M)$ tem infinitos automorfismos externos, pois $\pi_1(M)$ contém $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e é finitamente gerado. Mas, pelo Corolário 1.4.25, $\pi_1(M)$ tem finitos automorfismos externos, o qual dá uma contradição.

Portanto $\pi_1(M)$ não é residualmente livre. ■

3.2 - Grupos residualmente livres sobre uma variedade fibrada de Seifert

Nesta seção demonstraremos que as variedades fibradas de Seifert compactas, conexas com grupo fundamental residualmente livre não trivial e bordo incompressível (podendo ser vazio) não tem fibras singulares. Além disso, obtemos uma classificação das variedades fibradas de Seifert compactas, conexas sem singularidades com bordo incompressível toral (podendo ser vazio) cujos grupos fundamentais são residualmente livres não triviais.

Lema 3.2.1. *Seja M uma variedade fibrada de Seifert compacta com bordo incompressível não vazio. Se $\pi_1(M)$ é residualmente livre, então ∂M é incompressível toral.*

Demonstração. Para mostrar que ∂M é incompressível toral, basta mostrar que ∂M está formado somente por toros.

Sabemos que o bordo de uma variedade fibrada de Seifert compacta está formado por toros e garrafas de Klein. Se K^2 é uma garrafa de Klein no bordo de M , então $\pi_1(K^2)$ é um subgrupo de $\pi_1(M)$, pois M tem bordo incompressível. Logo $\pi_1(K^2)$ é um subgrupo residualmente livre de $\pi_1(M)$. Por outro lado, pela Proposição 2.5.2 temos que $\pi_1(K^2)$ não é um grupo residualmente livre, o qual é uma contradição. Portanto M tem bordo incompressível toral. ■

Lema 3.2.2. *Seja M uma variedade fibrada de Seifert compacta com bordo incompressível (possivelmente vazio). Se $\pi_1(M)$ é residualmente livre, então o espaço base O de M não tem linhas refletoras.*

Demonstração. Suponha que O possui uma linha refletora l , então l forma parte do bordo de O . Como M é uma 3-variedade compacta, então o bordo de M é formado por toros e garrafas de Klein. Já que a aplicação quociente $\psi : M \rightarrow O$, que identifica cada fibra de M em um ponto, leva bordo em bordo então a existência da linha refletora l no bordo de O implica a existência de uma garrafa de Klein \mathbb{K}^2 no bordo de M , pois toros no bordo de M não são levados por ψ a linhas refletoras em O . Mas, pelo Lema 3.2.1 temos que M tem bordo incompressível toral ou seja não existem garrafas de Klein no bordo de M , logo temos uma contradição.

Por outro lado, se M não tem bordo, então O não tem linhas refletoras, pois a existência de uma linha refletora implica a existência de uma garrafa de Klein no bordo de M . Portanto O não tem linhas refletoras. ■

Lema 3.2.3. *Seja M uma variedade fibrada de Seifert compacta e conexa com grupo residualmente livre e bordo incompressível (possivelmente vazio), então o homomorfismo de avaliação é trivial (o homomorfismo de avaliação leva todo elemento ao elemento trivial).*

Demonstração. Sejam $\phi : \pi_1(O) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ o homomorfismo de avaliação de M , onde O é o espaço base de M e X_O o espaço subjacente da orbifold O . Sabemos que a orbifold O tem pontos de cone e linhas refletoras como possíveis singularidades, assim, pelo Lema 3.2.2 temos que O só pode ter pontos de cone como singularidades. Desta forma, pelo Teorema 1.5.12 temos que $\pi_1(O)$ tem duas possibilidades:

a) Se o espaço subjacente X_O de O é uma superfície orientável, compacta e conexa de gênero $g \geq 0$ com m componentes de bordo, então o grupo fundamental da orbifold O tem a apresentação

$$\pi_1(O) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = 1, q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle,$$

onde $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_1, \dots, d_m\}$ são os geradores do grupo fundamental de X_O , $\{q_1, \dots, q_n\}$ são os representantes dos pontos de cone de O e $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ os ordens de q_1, \dots, q_n respectivamente.

b) Se o espaço subjacente X_O de O é uma superfície não orientável, compacta e conexa de gênero $g \geq 1$ com m componentes de bordo, então o grupo fundamental da orbifold O tem a apresentação

$$\pi_1(O) = \langle a_1, \dots, a_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m \mid \prod_{i=1}^g a_i^2 \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = 1, q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle,$$

onde $\{a_1, \dots, a_g, d_1, \dots, d_m\}$ são os geradores do grupo fundamental de X_O , $\{q_1, \dots, q_n\}$ são os representantes dos pontos de cone de O e $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ os ordens de q_1, \dots, q_n respectivamente.

Pelo Teorema 1.5.24 temos que para o caso a), $\pi_1(M)$ tem 2 possibilidades e para o caso b), $\pi_1(M)$ tem 4 possibilidades. Faremos primeiro as possibilidades para o caso a).

(1) Se o espaço subjacente X_O de O (espaço base de M) é uma superfície orientável, compacta e conexa de gênero $g \geq 0$ com m componentes de bordo,

então M é orientável e $\pi_1(M)$ tem a apresentação com geradores:

$$a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m, h$$

e com relações

$$\begin{aligned} a_i h a_i^{-1} &= h^{\phi(a_i)}, b_i h b_i^{-1} = h^{\phi(b_i)}, q_j h c_j^{-1} = h, \\ d_k h d_k^{-1} &= h^{\phi(d_k)}, q_j^{\alpha_j} h^{\beta_j} = 1, \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = 1, q_j^{\alpha_j} = h^{b(M)} \end{aligned}$$

com $\phi(a_i) = \phi(b_i) = 1$ para $i = 1, \dots, g$, $\phi(d_k) = 1$ para $k = 1, \dots, m$ e $b(M) \in \mathbb{Z}$. Neste caso $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_1, \dots, d_m\}$ são os geradores de $\pi_1(X_O)$ e $\{q_1, \dots, q_n\}$ são os representantes dos pontos cone de O .

Pela Observação 1.5.23 item (b), temos que $\phi(q_j) = 1$ para $j = 1, \dots, n$. Além disso, temos que $\phi(a_i) = \phi(b_i) = 1$ para $i = 1, \dots, g$, $\phi(d_k) = 1$ para $k = 1, \dots, m$, assim ϕ envia todos os geradores de $\pi_1(O)$ ao elemento trivial, portanto ϕ é o homomorfismo trivial.

(2) Se o espaço subjacente X_O de O (espaço base de M) é uma superfície orientável, compacta e conexa de gênero $g \geq 0$ com m componentes de bordo, então M é não orientável e $\pi_1(M)$ tem a apresentação com geradores:

$$a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m, h$$

e com relações

$$\begin{aligned} a_i h a_i^{-1} &= h^{\phi(a_i)}, b_i h b_i^{-1} = h^{\phi(b_i)}, q_j h c_j^{-1} = h, \\ d_k h d_k^{-1} &= h^{\phi(d_k)}, q_j^{\alpha_j} h^{\beta_j} = 1, \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = 1, q_j^{\alpha_j} = h^{b(M)} \end{aligned}$$

com $\phi(a_i) = \phi(b_i) = -1$ para $i = 1, \dots, g$, $\phi(d_k) = -1$ para $k = 1, \dots, m$ e $b(M) \in \mathbb{Z}_2$. Neste caso $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_1, \dots, d_m\}$ são os geradores de $\pi_1(X_O)$ e $\{q_1, \dots, q_n\}$ são os representantes dos pontos cone de O .

Pela Observação 1.5.23 item (b), temos que $\phi(q_j) = 1$ para $j = 1, \dots, n$. Seja x um elemento qualquer do conjunto $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_1, \dots, d_m\}$. Seja $N = \langle x, h \rangle$ o subgrupo de $\pi_1(M)$ gerado por x e h . Pelo Lema 2.1.4, temos que N é um grupo abeliano ou um grupo livre de posto 2 com base $\{x, h\}$. Da apresentação de $\pi_1(M)$ temos que $x h x^{-1} = h^{\phi(x)} = h^{-1}$, então N não é abeliano. Além disso N não é um grupo livre com base $\{x, h\}$, pois $x h x^{-1} = h^{\phi(x)} = h^{-1}$ é uma relação trivial sobre os geradores de N , portanto $\pi_1(M)$ não é residualmente livre, o qual é uma contradição.

Finalmente faremos as possibilidades para o caso (b).

(3) Se o espaço subjacente X_O de O (espaço base de M) é uma superfície não orientável, compacta e conexa de gênero $g \geq 1$ com m componentes de bordo, então M é não orientável e $\pi_1(M)$ tem a apresentação com geradores:

$$a_1, \dots, a_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m, h$$

e com relações

$$\begin{aligned} a_i h a_i^{-1} &= h^{\phi(a_i)}, q_j h c_j^{-1} = h, \\ d_k h d_k^{-1} &= h^{\phi(d_k)}, q_j^{\alpha_j} h^{\beta_j} = 1, \prod_{i=1}^g a_i^2 \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = 1, q_j^{\alpha_j} = h^{b(M)} \end{aligned}$$

com $\phi(a_i) = 1$ para $i = 1, \dots, g$, $\phi(d_k) = 1$ para $k = 1, \dots, m$ e $b(M) \in \mathbb{Z}_2$. Neste caso $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_1, \dots, d_m\}$ são os geradores de $\pi_1(X_O)$ e $\{q_1, \dots, q_n\}$ são os representantes dos pontos cone de O .

Pela Observação 1.5.23 item (b), temos que $\phi(q_j) = 1$ para $j = 1, \dots, n$. Além disso, temos que $\phi(a_i) = 1$ para $i = 1, \dots, g$, $\phi(d_k) = 1$ para $k = 1, \dots, m$, desta forma temos que ϕ envia todos os geradores de $\pi_1(O)$ ao elemento trivial, portanto ϕ é o homomorfismo trivial.

(4) Se o espaço subjacente X_O de O (espaço base de M) é uma superfície não orientável, compacta e conexa de gênero $g \geq 1$ com m componentes de bordo, então M é orientável e $\pi_1(M)$ tem a apresentação com geradores:

$$a_1, \dots, a_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m, h$$

e com relações

$$\begin{aligned} a_i h a_i^{-1} &= h^{\phi(a_i)}, q_j h c_j^{-1} = h, \\ d_k h d_k^{-1} &= h^{\phi(d_k)}, q_j^{\alpha_j} h^{\beta_j} = 1, \prod_{i=1}^g a_i^2 \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = 1, q_j^{\alpha_j} = h^{b(M)} \end{aligned}$$

com $\phi(a_i) = -1$ para $i = 1, \dots, g$, $\phi(d_k) = -1$ para $k = 1, \dots, m$ e $b(M) \in \mathbb{Z}$. Neste caso $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_1, \dots, d_m\}$ são os geradores de $\pi_1(X_O)$ e $\{q_1, \dots, q_n\}$ são os representantes dos pontos cone de O .

Pela Observação 1.5.23 item (b), temos que $\phi(q_j) = 1$ para $j = 1, \dots, n$. Seja x um elemento qualquer do conjunto $\{a_1, \dots, a_g, d_1, \dots, d_m\}$. Seja $N = \langle x, h \rangle$ o subgrupo de $\pi_1(M)$ gerado por x e h . Pelo Lema 2.1.4, temos que N é um grupo abeliano ou um grupo livre de posto 2 com base $\{x, h\}$. Da apresentação de

$\pi_1(M)$ temos que $xhx^{-1} = h^{\phi(x)} = h^{-1}$, então N não é abeliano. Além disso, N não é um grupo livre com base $\{x, h\}$, pois $xhx^{-1} = h^{\phi(x)} = h^{-1}$ é uma relação trivial sobre os geradores de N , portanto $\pi_1(M)$ não é residualmente livre, o qual é uma contradição.

(5) Se o espaço subjacente X_O de O (espaço base de M) é uma superfície não orientável, compacta e conexa de gênero $g \geq 2$ com m componentes de bordo, então M é não orientável e $\pi_1(M)$ tem a apresentação com geradores:

$$a_1, \dots, a_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m, h$$

e com relações

$$\begin{aligned} a_i h a_i^{-1} &= h^{\phi(a_i)}, q_j h c_j^{-1} = h, \\ d_k h d_k^{-1} &= h^{\phi(d_k)}, q_j^{\alpha_j} h^{\beta_j} = 1, \prod_{i=1}^g a_i^2 \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = 1, q_j^{\alpha_j} = h^{b(M)} \end{aligned}$$

com $\phi(a_1) = 1$, $\phi(a_i) = -1$ para $i = 2, \dots, g$, $\phi(d_k) = 1$ para $k = 1, \dots, m$ e $b(M) \in \mathbb{Z}_2$. Neste caso $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_1, \dots, d_m\}$ são os geradores de $\pi_1(X_O)$ e $\{q_1, \dots, q_n\}$ são os representantes dos pontos cone de O .

Pela Observação 1.5.23 item (b), temos que $\phi(q_j) = 1$ para $j = 1, \dots, n$. Seja $N = \langle a_2, h \rangle$ o subgrupo de $\pi_1(M)$ gerado por a_2 e h . Pelo Lema 2.1.4, temos que N é um grupo abeliano ou um grupo livre de posto 2 com base $\{a_2, h\}$. Da apresentação de $\pi_1(M)$ temos que $a_2 h a_2^{-1} = h^{\phi(a_2)} = h^{-1}$ então N não é abeliano. Além disso, N não é um grupo livre com base $\{a_2, h\}$, pois $a_2 h a_2^{-1} = h^{\phi(a_2)} = h^{-1}$ é uma relação trivial sobre os geradores de N , portanto $\pi_1(M)$ não é residualmente livre, o qual é uma contradição.

(6) Se o espaço subjacente X_O de O (i.e, espaço base de M) é uma superfície não orientável, compacta e conexa de gênero $g \geq 3$ com m componentes de bordo, então M é não orientável e $\pi_1(M)$ tem a apresentação com geradores:

$$a_1, \dots, a_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m, h$$

e com relações

$$\begin{aligned} a_i h a_i^{-1} &= h^{\phi(a_i)}, q_j h c_j^{-1} = h, \\ d_k h d_k^{-1} &= h^{\phi(d_k)}, q_j^{\alpha_j} h^{\beta_j} = 1, \prod_{i=1}^g a_i^2 \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = 1, q_j^{\alpha_j} = h^{b(M)} \end{aligned}$$

com $\phi(a_1) = \phi(a_2) = 1$, $\phi(a_i) = -1$ para $i = 3, \dots, g$, $\phi(d_k) = 1$ para $k = 1, \dots, m$ e $b(M) \in \mathbb{Z}_2$. Neste caso $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_1, \dots, d_m\}$ são os geradores de $\pi_1(X_O)$ e $\{q_1, \dots, q_n\}$ são os representantes dos pontos cone de O .

Pela Observação 1.5.23 item (b), temos que $\phi(q_j) = 1$ para $j = 1, \dots, n$. Seja $N = \langle a_3, h \rangle$ o subgrupo de $\pi_1(M)$ gerado por a_3 e h . Pelo Lema 2.1.4, temos que N é um grupo abeliano ou um grupo livre de posto 2 com base $\{a_3, h\}$. Da apresentação de $\pi_1(M)$ temos que $a_3 h a_3^{-1} = h^{\phi(a_3)} = h^{-1}$ então N não é abeliano. Além N não é um grupo livre com base $\{a_3, h\}$, pois $a_3 h a_3^{-1} = h^{\phi(a_3)} = h^{-1}$ é uma relação trivial sobre os geradores de N , portanto $\pi_1(M)$ não é residualmente livre, o qual é uma contradição.

Portanto de (1) e (3) temos que

$$\phi : \pi_1(O) \longmapsto \mathbb{Z}_2$$

é o homomorfismo trivial. ■

Lema 3.2.4. *Se M é uma variedade fibrada de Seifert compacta e conexa com grupo fundamental residualmente livre e bordo incompressível (possivelmente vazio), então $\pi_1(M)$ tem as seguintes apresentações:*

(1) *Se o espaço subjacente X_O de O (espaço base de M) é uma superfície orientável, compacta e conexa de gênero $g \geq 0$ com m componentes de bordo, então M é orientável e $\pi_1(M)$ tem a apresentação com geradores:*

$$a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m, h$$

e com relações

$$h \in Z(\pi_1(M)), q_j^{\alpha_j} h^{\beta_j} = 1, \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = 1, q_j^{\alpha_j} = h^{b(M)},$$

com $b(M) \in \mathbb{Z}$. Neste caso $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_1, \dots, d_m\}$ são os geradores de $\pi_1(X_O)$ e $\{q_1, \dots, q_n\}$ são os representantes dos pontos cone de O .

(2) *Se o espaço subjacente X_O de O (espaço base de M) é uma superfície não orientável, compacta e conexa de gênero $g \geq 1$ com m componentes de bordo, então M é não orientável e $\pi_1(M)$ tem a apresentação com geradores:*

$$a_1, \dots, a_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m$$

e com relações

$$h \in Z(\pi_1(M)), q_j^{\alpha_j} h^{\beta_j} = 1, \prod_{i=1}^g a_i^2 \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = 1, q_j^{\alpha_j} = h^{b(M)},$$

com $b(M) \in \mathbb{Z}_2$. Neste caso $\{a_1, \dots, a_g, d_1, \dots, d_m\}$ são os geradores de $\pi_1(X_O)$ e $\{q_1, \dots, q_n\}$ são os representantes dos pontos cone de O .

Demonstração. Segue direto da demonstração do Lema 3.2.3. ■

Teorema 3.2.5. *Seja M uma variedade fibrada de Seifert compacta e conexa com bordo incompressível (possivelmente vazio). Se $\pi_1(M)$ é não trivial e residualmente livre, então M não tem fibras singulares.*

Demonstração. Pelo Lema 1.5.19 temos a seguinte sequência curta exata

$$1 \rightarrow Z \rightarrow \pi_1(M) \xrightarrow{\psi} \pi_1(O) \rightarrow 1, \quad (3.1)$$

onde $Z = \langle h \rangle$ é o grupo cíclico infinito gerado pelo representante de uma fibra regular $h \in \pi_1(M)$ de M e O é o espaço base de M . Pelo Lema 3.2.4, segue que $\pi_1(M)$ somente tem a apresentação dada nos casos (1) e (3) do Teorema 1.5.24. Assim, $Z = \langle h \rangle$ está contido no centro de $\pi_1(M)$, pois h é um elemento central de $\pi_1(M)$. A demonstração será feita pela contradição.

Suponha que M tem fibras singulares. Isto implica que o singular locus de O (espaço base de M) não é trivial, então O contém pontos de cone e linhas refletoras. Como foi provado no Lema 3.2.2, O não tem linhas refletoras. Provaremos que O não tem pontos de cone. De fato, suponha que O possui pelo menos um ponto de cone. Seja q_1 o representante de um ponto de cone de O com ordem α_1 , ou seja, $q_1 \in \pi_1(O)$ e $q_1^{\alpha_1} = 1$. Da equação 3.1 existe um $x \in \pi_1(M)$ tal que $\psi(x) = q_1$, logo segue que $\psi(x^{\alpha_1}) = q_1^{\alpha_1} = 1$, portanto $x^{\alpha_1} \in Z = \langle h \rangle$. Já que $Z = \langle h \rangle$ está contido no centro de $\pi_1(M)$, então x^{α_1} é central em $\pi_1(M)$.

Mostraremos agora que q_1 não é central em $\pi_1(O)$. De fato, já que O não tem linhas refletoras, então pelo Teorema 1.5.12 temos que $\pi_1(O)$ tem as seguintes apresentações:

a) Se o espaço subjacente X_O de O é uma superfície orientável, compacta e conexa de gênero $g \geq 0$ e m componentes de bordo, temos

$$\pi_1(O) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = 1, q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle,$$

onde $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_1, \dots, d_m\}$ são os geradores do grupo fundamental de X_O , $\{q_1, \dots, q_n\}$ são os representantes dos pontos de cone de O e $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ os ordens de q_1, \dots, q_n respectivamente.

b) Se o espaço subjacente X_O de O é uma superfície não orientável, compacta e conexa de gênero $g \geq 1$ e M componentes de bordo, temos

$$\pi_1(O) = \langle a_1, \dots, a_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m \mid \prod_{i=1}^g a_i^2 \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = 1, q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle,$$

onde $\{a_1, \dots, a_g, d_1, \dots, d_m\}$ são os geradores do grupo fundamental de X_O , $\{q_1, \dots, q_n\}$ são os representantes dos pontos de cone de O e $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ os ordens de q_1, \dots, q_n respectivamente.

Tanto em $a)$ como em $b)$ temos uma quantidade finita de pontos de cone, pois M é compacta.

$i)$ Analizaremos primeiro a apresentação de $\pi_1(O)$ dada no item $a)$.

Se $m \neq 0$, então fazendo uma Transformação de Tietze temos que

$$\begin{aligned}\pi_1(O) &= \langle a_1, b_1, \dots, b_g, a_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_{m-1} \mid q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle \\ &= \langle a_1, b_1, \dots, b_g, a_g \rangle * \langle q_1, \dots, q_n \mid q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle * \langle d_1, \dots, d_{m-1} \rangle.\end{aligned}$$

Já que o centro de um produto livre de grupos não triviais é trivial, então o centro de $\pi_1(O)$ é trivial exacto quando $g = 0$, $n = 1$ e $m = 1$, portanto q_1 somente pode ser central quando $g = 0$, $n = 1$ e $m = 1$, ou seja, quando O é uma esfera com uma componente bordo e um ponto de cone. Se O é uma esfera com uma componente bordo e um ponto de cone, então a orbifold O é um disco com um ponto de cone, além disso, neste caso a variedade M é um Toro fibrado solido. Mas, pelo Corolário 1.5.20 um toro fibrado solido não tem bordo incompressível toral, com o qual temos uma contradição, pois M tem bordo incompressível por hipótese. Portanto q_1 não é um elemento central em $\pi_1(O)$.

Se $m = 0$, então $\pi_1(O)$ é um produto amalgamado, ou seja,

$$\begin{aligned}\pi_1(O) &= \langle a_1, b_1, \dots, b_g, a_g, q_1, \dots, q_n \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^n q_j = 1, q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle \\ &= \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \rangle * \langle q_1, \dots, q_n \mid q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle. \\ &\langle q_1 \rangle \cong \langle \left(\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \right)^{-1} \left(\prod_{j=2}^n q_j \right)^{-1} \rangle\end{aligned}$$

Considerando $m = 0$, analizaremos os seguintes casos:

Se $n = 1$ e $g = 0$, então $O = S^2(q_1)$ é uma esfera com um ponto de cone e $\pi_1(O)$ é trivial. Portanto q_1 não é um elemento central em $\pi_1(O)$.

Se $n \geq 1$ e $g \neq 0$, então

$$\begin{aligned}\pi_1(O) &= \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \rangle * \langle q_1, \dots, q_n \mid q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle \\ &\langle q_1 \rangle \cong \langle \left(\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \right)^{-1} \left(\prod_{j=2}^n q_j \right)^{-1} \rangle \\ &= \mathbb{F}_{2g} * \langle q_1, \dots, q_n \mid q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle, \\ &\langle q_1 \rangle \cong \langle \left(\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \right)^{-1} \left(\prod_{j=2}^n q_j \right)^{-1} \rangle\end{aligned}$$

onde \mathbb{F}_{2g} é o grupo livre gerado por $\{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}$, logo o centro de $\pi_1(O)$ é trivial pois, \mathbb{F}_2 tem centro trivial. Portanto q_1 não é um elemento central em $\pi_1(O)$.

Se $n > 2$ e $g = 0$, então

$$\begin{aligned}\pi_1(O) &= \langle q_1 | q_1^{\alpha_1} = 1 \rangle * \langle q_2, \dots, q_n | q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle, \\ \langle q_1 \rangle &\cong \langle \left(\prod_{j=2}^n q_j \right)^{-1} \rangle\end{aligned}$$

logo o centro de $\pi_1(O)$ é trivial, pois o grupo $\langle q_2, \dots, q_n | q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle$ pode ser expressado como $\langle q_2 | q_2^{\alpha_2} = 1 \rangle * \dots * \langle q_n | q_n^{\alpha_n} = 1 \rangle$, assim $\langle q_2, \dots, q_n | q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle$ tem centro trivial. Portanto q_1 não é um elemento central em $\pi_1(O)$.

Se $n = 2$ e $g = 0$, temos que $O = S^2(q_1, q_2)$, logo pela Proposição 10.10 de [7], $M = S^3$, $M = RP^3$ (plano projetivo de dimension 3), $M = S^2 \times S^1$ ou M é um **Espaço de Lentes** com grupo fundamental finito. Se $M = S^3$, então $\pi_1(M) = 1$ o que contradiz nossa hipótese. Se $M = RP^3$, então $\pi_1(M)$ tem grupo fundamental de ordem dois, isto é contradição ao fato de $\pi_1(M)$ ser livre de torção. Se $M = S^2 \times S^1$, então M não tem fibras singulares, isto contradiz o fato que M tem fibras singulares por hipótese. Finalmente, se M é um espaço de Lens, então $\pi_1(M)$ é um grupo finito, isto contradiz o fato que $\pi_1(M)$ é um grupo infinito. Portanto q_1 não é central em $\pi_1(O)$.

(ii) Analizaremos a apresentação de $\pi_1(O)$ dada no item b).

Se $m \neq 0$, então fazendo uma transformação de Tietze temos que

$$\begin{aligned}\pi_1(O) &= \langle a_1, \dots, a_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_m | \prod_{i=1}^g a_i^2 \prod_{j=1}^n q_j \prod_{k=1}^m d_k = 1, q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle \\ &= \langle a_1, \dots, a_g, q_1, \dots, q_n, d_1, \dots, d_{m-1} | q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle \\ &= \langle a_1, \dots, a_g \rangle * \langle q_1, \dots, q_n | q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle * \langle d_1, \dots, d_{m-1} \rangle,\end{aligned}$$

logo, se $g \geq 1$ temos que $\pi_1(O)$ é um produto livre de grupos não triviais, assim $\pi_1(O)$ tem centro trivial. Portanto q_1 não é um elemento central em $\pi_1(O)$.

Se $m = 0$, então $\pi_1(O)$ é um produto amalgamado, ou seja,

$$\begin{aligned}\pi_1(O) &= \langle a_1, \dots, a_g, q_1, \dots, q_n, | \prod_{i=1}^g a_i^2 \prod_{j=1}^n q_j = 1, q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle \\ &= \langle a_1, \dots, a_g \rangle * \langle q_1, \dots, q_n | q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle. \\ \langle q_1 \rangle &\cong \langle \left(\prod_{i=1}^g a_i^2 \right)^{-1} \left(\prod_{j=2}^n q_j \right)^{-1} \rangle\end{aligned}$$

Considerando $m = 0$, analizaremos os seguintes casos:

Se $g > 1$ e $n \geq 1$, então

$$\pi_1(O) = \langle a_1, \dots, a_g \rangle * \langle q_1, \dots, q_n \mid q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle,$$

$$\langle q_1 \rangle \cong \left\langle \left(\prod_{i=1}^g a_i^2 \right)^{-1} \left(\prod_{j=2}^n q_j \right)^{-1} \right\rangle$$

logo $\pi_1(O)$ tem centro trivial, pois $\langle a_1, \dots, a_g \rangle$ é livre de posto $g > 1$ e de centro trivial. Portanto q_1 não é um elemento central em $\pi_1(O)$.

Se $n > 1$ e $g \geq 1$, então

$$\pi_1(O) = \langle a_1, \dots, a_g \rangle * \langle q_1, \dots, q_n \mid q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle,$$

$$\langle q_1 \rangle \cong \left\langle \left(\prod_{i=1}^g a_i^2 \right)^{-1} \left(\prod_{j=2}^n q_j \right)^{-1} \right\rangle$$

logo $\pi_1(O)$ tem centro trivial, pois o grupo $\langle q_1, \dots, q_n \mid q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle$ pode ser expressado como $\langle q_1 \mid q_1^{\alpha_1} = 1 \rangle * \dots * \langle q_n \mid q_n^{\alpha_n} = 1 \rangle$, assim, $\langle q_1, \dots, q_n \mid q_j^{\alpha_j} = 1 \rangle$ tem centro trivial. Portanto q_1 não é um elemento central em $\pi_1(O)$.

Se $g = 1$ e $n = 1$, então O é um plano projetivo com um ponto de cone, ou seja, $O = P^2(q_1)$. Já que M não é orientável e $\chi(O) > 0$ (pela Definição 1.5.13), então pela Figura 1.8, temos que M é modelada pela geometria $S^2 \times \mathbb{R}$. No artigo [26] pág 457-459, Peter Scott caracterizou que as únicas 3-variedades compactas sem bordo modeladas por $S^2 \times \mathbb{R}$ são as variedades fibradas de Seifert $S^2 \times S^1$ não orientável, $S^2 \times S^1$ orientável, $P^2 \times S^1$ e $RP^3 \# RP^3$, onde RP^3 é o plano projetivo em dimensão 3. Se $M = S^2 \times S^1$ não orientável ou $M = S^2 \times S^1$ orientável, então M não tem singularidades, que contradiz o fato de M ter singularidades. Se $M = P^2 \times S^1$, então $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$, logo $\pi_1(M)$ tem um elemento de ordem 2, isto contradiz o fato de $\pi_1(M)$ ser livre de torção. Se $M = RP^3 \# RP^3$, então $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, logo $\pi_1(M)$ tem um elemento de ordem 2, isto contradiz o fato de $\pi_1(M)$ ser livre de torção. Portanto q_1 não é um elemento central em $\pi_1(O)$.

Dos itens (i) e (ii) temos que q_1 não é um elemento central em $\pi_1(O)$. Logo, existe um $s \in \pi_1(O)$ tal que $[q_1, s] \neq 1$. Da equação 3.1 existe um elemento $m \in \pi(M)$ tal que $\psi(m) = s$, logo $[q_1, s] = [\psi(x), \psi(m)] \neq 1$. Como x^{α_1} é um elemento central de $\pi_1(M)$, temos que $[x^{\alpha_1}, m] = 1$. Pelo Lema 2.1.4 temos que $\langle x, m \rangle$ é abeliano, isto contradiz o fato que $\psi(x)$ e $\psi(m)$ não comutam. Portanto O não tem pontos de cone.

Finalmente, temos que O não tem singularidades, o qual é contradição, já que O tinha singularidades. Portanto M não tem fibras singularidades. ■

Corolário 3.2.6. *Se M é uma 3-variedade fibrada de Seifert compacta e conexa com grupo fundamental residualmente livre não trivial e bordo incompressível*

vel (possivelmente vazio), então o espaço base de M é uma superfície com bordo (possivelmente vazio). Além $\pi_1(M)$ tem as seguintes apresentações:

(1) Se o espaço base é uma superfície orientável, compacta e conexa X_O de gênero $g \geq 0$ com m componentes de bordo, então M é orientável e $\pi_1(M)$ tem a apresentação com geradores:

$$a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_1, \dots, d_m, h$$

e com relações

$$h \in Z(\pi_1(M)), \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{k=1}^m d_k = 1, h^{b(M)} = 1,$$

com $b(M) \in \mathbb{Z}$. Neste caso $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_1, \dots, d_m\}$ são os geradores de $\pi_1(X_O)$.

(2) Se o espaço base é uma superfície não orientável, compacta e conexa X_O de gênero $g \geq 1$ com m componentes de bordo, então M é não orientável e $\pi_1(M)$ tem a apresentação com geradores:

$$a_1, \dots, a_g, d_1, \dots, d_m$$

e com relações

$$h \in Z(\pi_1(M)), \prod_{i=1}^g a_i^2 \prod_{k=1}^m d_k = 1, h^{b(M)} = 1,$$

com $b(M) \in \mathbb{Z}_2$. Neste caso $\{a_1, \dots, a_g, d_1, \dots, d_m\}$ são os geradores de $\pi_1(X_O)$.

Demonstração. Do Teorema 3.2.5 temos que M não tem fibras singularidades, logo o espaço base de M não tem singularidades, ou seja, o espaço base de M é uma superfície X_O com bordo (possivelmente vazio). Assim, a conclusão é uma consequência direta do Lema 3.2.4. ■

Observação 3.2.7. Nos Lemas 3.2.1 e 3.2.3 provamos que uma 3–variedade fibrada de Seifert compacta e conexa M com bordo incompressível (possivelmente vazio) e grupo fundamental residualmente livre tem o bordo incompressível total e o homomorfismo de avaliação trivial. Além disso, pelo Corolário 3.2.6, se M tem grupo fundamental residualmente livre não trivial, então seu espaço base é uma superfície, compacta e conexa Σ com bordo ou sem bordo.

Observação 3.2.8. Se M é uma variedade fibrada de Seifert compacta e conexa com bordo incompressível (possivelmente vazio) e grupo fundamental residualmente livre não trivial, então pela Corolário 3.2.6 temos somente dois casos a considerar:

- (1) M é uma variedade fibrada de Seifert compacta, conexa e orientável sem singularidades com bordo incompressível toral (possivelmente vazio), espaço base uma superfície orientável, compacta e conexa Σ com bordo (possivelmente vazio) e homomorfismo de avaliação trivial. Neste caso, a característica de Euler $b(M)$ é um número inteiro.
- (2) M é uma variedade fibrada de Seifert compacta, conexa e não orientável sem singularidades com bordo incompressível toral (possivelmente vazio), espaço base uma superfície não orientável, compacta e conexa Σ com bordo (possivelmente vazio) e homomorfismo de avaliação trivial. Neste caso, a característica de Euler $b(M)$ pertence a \mathbb{Z}_2 .

Com respeito ao primeiro caso da Observação 3.2.8, ou seja o item (1), temos o seguinte lema.

Lema 3.2.9. *Seja M uma variedade fibrada de Seifert compacta, conexa e orientável sem singularidades com bordo incompressível toral (possivelmente vazio) e espaço base uma superfície orientável, compacta e conexa Σ com bordo (possivelmente vazio). Então, $\pi_1(M)$ é residualmente livre não trivial se, e somente se, $\Sigma \neq D^2$ (onde D^2 é um disco) tem grupo fundamental residualmente livre, $M = \Sigma \times S^1$ e o homomorfismo de avaliação de M é trivial.*

Além disso, destas variedades só $S^2 \times S^1$, \mathbb{T}^3 (3-toro) e $A \times S^1$ onde A é um anel, são as variedades fibradas de Seifert compactas e conexas que têm grupo fundamental totalmente residualmente livre não trivial.

Demonstração. Observamos que para o primeiro caso da Observação 3.2.8, ou seja o item (1), a característica de Euler $b(M)$ de M é um número inteiro .

Seja M uma variedade fibrada de Seifert com bordo vazio, usando o Lema 3.2.3 temos que o homomorfismo de avaliação é trivial. Pelo Corolário 3.2.6 temos que $\pi_1(M)$ tem a apresentação:

$$\langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, h \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = h^{b(M)}, [a_1, h] = \dots = [b, h] = 1 \rangle, \quad (3.2)$$

onde $\{a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g\}$ são geradores do grupo fundamental da superfície orientável Σ sem bordo e com gênero $g \geq 0$.

Seja $b(M) \neq 0$. Como $\pi_1(M)$ é residualmente livre e $h \neq 1$, então existe um homomorfismo

$$f : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{F}$$

tal que $f(h) \neq 1$. Da equação 3.2 temos que $[f(a_i), f(h)] = 1$ e $[f(b_j), f(h)] = 1$ para $i, j = 1 \dots g$. Sendo um grupo livre transitivo comutativo temos que $[f(a_i), f(b_j)] = 1$, para $i, j = 1 \dots g$. Logo, temos que $f(\pi_1(M))$ é abeliano. Portanto, $f(h)^{b(M)} = \prod_{i=1}^g [f(a_i), f(b_i)] = 1$, o qual é uma contradição, pois $f(h)$ é um elemento não trivial livre de torção no grupo livre \mathbb{F} .

Logo $b(M) = 0$, o qual implica que $M = \Sigma \times S^1$ pelo Corolário 1.5.26. Já que $\pi_1(M)$ é igual a $\pi_1(\Sigma) \times \pi_1(S^1)$, então $\pi_1(\Sigma)$ é residualmente livre, pois $\pi_1(M)$ é residualmente livre.

Seja M uma variedade fibrada de Seifert com bordo incompressível toral não vazio, pelo Teorema 1.5.21 temos que $b(M) = 0$. Usando o Lema 3.2.3 temos que o homomorfismo de avaliação de M é trivial, logo pelo Corolário 1.5.26 temos que $M = \Sigma \times S^1$. Como M tem bordo incompressível toral, então pelo Corolário 1.5.20 $\Sigma \neq D^2$ (*disco*), pois $D^2 \times S^1$ é um toro solido fibrado trivial. Assim, $\pi_1(M) = \pi_1(\Sigma) \times \pi_1(S^1)$ e $\pi_1(\Sigma)$ é residualmente livre.

Reciprocamente, temos que $\pi_1(M) = \pi_1(\Sigma) \times \pi_1(S^1)$. Como Σ é uma superfície orientável com bordo (possivelmente vazio), então pela Proposição 2.5.2 temos que $\pi_1(\Sigma)$ é residualmente livre. Logo, $\pi_1(M)$ é produto direto de dois grupos residualmente livres, portanto $\pi_1(M)$ é residualmente livre.

Agora provaremos que $S^2 \times S^1$, \mathbb{T}^3 (*3-toro*), $A \times S^1$, onde A é um anel, são as únicas variedades fibradas de Seifert orientáveis sem singularidades com bordo incompressível toral (possivelmente vazio) que têm grupo fundamental totalmente residualmente livre. De fato, seja Σ uma superfície orientável com bordo vazio, se o gênero de Σ é zero, então Σ é a esfera. Assim $\pi_1(\Sigma)$ é o grupo trivial e portanto $\pi_1(\Sigma)$ é um grupo abeliano.

Se o gênero de Σ é 1 então Σ é o toro, logo $\pi_1(\Sigma)$ é $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e abeliano.

Se o gênero Σ é maior que 1, então o grupo fundamental é um produto amalgamado de um grupo livre não abeliano gerado por $\{a_1, \dots, a_{g-1}, b_1, \dots, b_{g-1}\}$ e um grupo livre gerado por $\{a_g, b_g\}$ amalgamando subgrupos cíclicos infinito gerado por $\prod_{i=1}^{g-1} [a_i, b_i]$ e $[a_g, b_g]^{-1}$

$$\pi_1(\Sigma) = \langle a_1, \dots, a_{g-1}, b_1, \dots, b_{g-1} \rangle * \langle a_g, b_g \rangle, \\ \langle \prod_{i=1}^{g-1} [a_i, b_i] \rangle \cong \langle [a_g, b_g]^{-1} \rangle$$

onde $g \geq 2$. Logo pela Proposição 1.1.32 temos que $\pi_1(\Sigma)$ não é abeliano, pois

$$\langle a_1, \dots, a_{g-1}, b_1, \dots, b_{g-1} \rangle$$

é um grupo livre de posto maior ou igual que 2.

Assim, considerando as superfícies Σ de gênero 0 e 1, ou seja, $\Sigma = S^2$ e $\Sigma = \mathbb{T}^2$, temos que $M = S^2 \times S^1$ e $M = T^2 \times S^1$ têm grupo fundamental \mathbb{Z} e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ respectivamente, portanto são grupos totalmente residualmente livres, mas se Σ tem gênero maior que 1, o grupo fundamental de Σ é não abeliano, logo pelo Corolário 2.3.8, $M = \Sigma \times S^1$ tem grupo fundamental não totalmente residualmente livre, pois $\pi_1(M)$ é produto direto de um grupo não abeliano e de um grupo cíclico infinito.

Finalmente, se Σ é uma superfície orientável com bordo não vazio, então pelo Teorema 1.2.63 Σ tem gênero $2 - 2g + n$, onde $g \geq 0$ e $n \geq 1$ é o número de componentes de bordo de Σ , pelo Teorema 1.2.63 temos que $\pi_1(\Sigma)$ é livre de posto $2g + n - 1$, logo $\pi_1(\Sigma)$ é abeliano somente se $g = 0$ e $n = 1$ ou $g = 0$ e $n = 2$, ou seja, se a superfície Σ é um disco D^2 ou um anel A . Caso contrário $\pi_1(\Sigma)$ é não abeliano. Se a superfície Σ não é um Disco nem um Anel, então pelo Corolário 2.3.8 temos que $\pi_1(M)$ não é totalmente residualmente livre, pois $\pi_1(M) = \pi_1(\Sigma) \times \pi_1(S^1)$ e $\pi_1(\Sigma)$ não é abeliano. Se $\Sigma = D^2$ ou $\Sigma = A$, então $\pi_1(\Sigma) = 1$ ou $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$, mas $\Sigma \neq D^2$. Assim, só $A \times S^1$ é a única variedade fibrada de Seifert sem singularidades com bordo não vazio que tem grupo fundamental totalmente residualmente livre. ■

Com respeito ao segundo caso da Observação 3.2.8, ou seja o item (2), temos o seguinte lema.

Lema 3.2.10. *Seja M uma variedade fibrada de Seifert compacta, conexa e não orientável sem singularidades com bordo incompressível toral (possivelmente vazio) e espaço base uma superfície não orientável, compacta e conexa Σ com bordo (possivelmente vazio). Então, $\pi_1(M)$ é residualmente livre não trivial se, e somente se, M assume uma das seguintes formas:*

- 1) Σ tem grupo fundamental residualmente livre e M é qualquer variedade fibrada de Seifert compacta, conexa e não orientável sem singularidades com homomorfismo de avaliação trivial, ou
- 2) M tem classe de Euler 1 (i.e, $b(M) = 1$), onde Σ é um plano projetivo e o homomorfismo de avaliação de M é trivial. (**Esta variedade é também chamada a fibrado não orientavel de S^2 sobre S^1**)

Além disso, destas variedades as únicas variedades fibradas de Seifert compactas e conexas com grupo fundamental totalmente residualmente livre não trivial são:

- A variedade M com classe de Euler 1 (i.e, $b(M) = 1$) com espaço base Σ um plano projetivo.
- A variedade $M = (\text{faixa de Mobius}) \times S^1$.

Demonstração. Observamos que para o segundo caso da Observação 3.2.8, ou seja o item (2), a característica de Euler $b(M)$ de M é um elemento de \mathbb{Z}_2 .

Seja M uma variedade fibrada de Seifert com bordo vazio, usando o Lema 3.2.3 temos que M tem homomorfismo de avaliação trivial. Pelo Corolário 3.2.6 temos que o grupo fundamental de M é

$$\pi_1(M) = \langle a_1, \dots, a_g, h \mid \prod_i^g a_i^2 = h^{b(M)}, [a_1, h] = \dots [a_n, h] = 1 \rangle, \quad (3.3)$$

onde $\{a_1, \dots, a_g\}$ é são geradores do grupo fundamental da superfície não orientável Σ sem bordo e com gênero $g \geq 1$. Existem dois valores para $b(M)$, ou é 0 ou é 1. Como $\pi_1(M)$ é residualmente livre, temos que $\pi_1(\Sigma)$ é residualmente livre ou não residualmente livre. Se $\pi_1(\Sigma)$ não é residualmente livre temos que Σ é P^2 (plano projetivo), \mathbb{K} (garrafa de Klein) ou uma superfície não orientável N_3 de gênero três.

Seja $\Sigma = P^2$, se $b(M) = 0$, então pelo Corolário 1.5.26 temos que $M = \Sigma \times S^1$, logo $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ tem um elemento de ordem dois e como um grupo residualmente livre é livre de torção, segue que $\pi_1(M)$ não é um grupo residualmente livre.

Se $\Sigma = \mathbb{K}$ ou $\Sigma = N_3$ e $b(M) \in \mathbb{Z}_2$, então $\pi_1(M)$ não é um grupo residualmente livre. De fato, observamos na demonstração da Proposição 2.5.2 que Σ tem grupo fundamental não abeliano, e pela equação 3.3 temos que $\pi_1(M)$ tem a seguinte apresentação

$$\pi_1(M) = \langle a_1 \dots a_g, h \mid \prod_{j=1}^g a_j^2 = h^{b(M)}, [a_1, h] = \dots [a_g, h] = 1 \rangle, \quad (3.4)$$

onde g é igual a 2 ou 3. Pelo Lema 1.5.19 temos a sequência curta exata

$$1 \rightarrow Z \rightarrow \pi_1(M) \xrightarrow{\psi} \pi_1(\Sigma) \rightarrow 1, \quad (3.5)$$

onde $Z = \langle h \rangle$, logo $\pi_1(\Sigma) \cong \pi_1(M) / \langle h \rangle$. Se $\pi_1(M)$ é abeliano, então $\pi_1(\Sigma)$ é abeliano o qual é contradição, pois $\pi_1(\Sigma)$ é não abeliano. Logo $\pi_1(M)$ não é abeliano, o qual implica que existem i, j diferentes tal que $[a_i, a_j] \neq 1$, onde $i, j = 1, 2$ ou $i, j = 1, 2, 3$ para $\Sigma = \mathbb{K}$ (garrafa de Klein) ou $\Sigma = N_3$ (superfície

não orientável de gênero 3) respectivamente. Como $\pi_1(M)$ é residualmente livre, temos que existe um homomorfismo $f : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $f([a_i, a_j]) \neq 1$, da equação 3.4 temos que $[a_i, h] = [a_j, h] = 1$. Logo $[f(a_i), f(h)] = [f(a_j), f(h)] = 1$, como $f(h)$ é diferente de 1, pois, se $f(h) = 1$, então no caso que $g = 2$ temos que $f(a_1)^2 f(a_2)^2 = 1$ o qual implica que $f(a_1) = f(a_2^{-1})$, logo $f([a_1, a_2]) = 1$ o qual é contradição, e no caso que $g = 3$ temos que $f(a_1)^2 f(a_2)^2 = f(a_3)^2$, logo pelo Argumento de Lyndon (veja [17]), temos que $f([a_i, a_j]) = 1$, para $i, j = 1, 2, 3$ e $i \neq j$. Assim, $f(h) \neq 1$, e como um grupo livre é transitivo comutativo temos que $[f(a_i), (a_j)] = 1$ o qual é uma contradição.

Portanto, Σ tem grupo residualmente livre ou M tem característica de Euler 1 com Σ sendo um plano projetivo.

Seja M com bordo incompressível toral não vazio, pelo Teorema 1.5.21 temos que $b(M) = 0$. Usando o Lema 3.2.3 temos que o homomorfismo de avaliação é trivial, logo pelo Corolário 1.5.26 temos que $M = \Sigma \times S^1$. Assim, $\pi_1(M) = \pi_1(\Sigma) \times \pi_1(S^1)$, logo $\pi_1(\Sigma)$ é residualmente livre.

Reciprocamente, seja M uma variedade fibrada de Seifert sem singularidades e sem bordo com classe de Euler 1, espaço base Σ um plano projetivo e homomorfismo de avaliação trivial. Pelo Corolário 3.2.6, temos que

$$\pi_1(M) = \langle a_1, h \mid a_1^2 = h, [a_1, h] = 1 \rangle,$$

logo $\pi_1(M)$ é cíclico infinito e portanto residualmente livre e totalmente livre.

Seja M uma variedade fibrada de Seifert sem singularidades e sem bordo, com espaço base uma superfície não orientável Σ com bordo vazio. Se $\pi_1(\Sigma)$ é residualmente livre e o homomorfismo de avaliação $\phi : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ de M é trivial, então $\pi_1(M)$ é residualmente livre. De fato, como Σ tem grupo fundamental residualmente livre, então pela Proposição 2.5.2 Σ tem gênero maior ou igual a 4, além disso $\pi_1(\Sigma)$ é igual a

$$\pi_1(\Sigma) = \langle a_1, \dots, a_g \mid \prod_{i=1}^g a_i^2 = 1 \rangle, \quad (3.6)$$

onde $g \geq 4$.

Como o homomorfismo de avaliação é trivial, então pelo Corolário 3.2.6 temos que $\pi_1(M)$ tem a seguinte apresentação

$$\pi_1(M) = \langle a_1 \dots a_g, h \mid \prod_{j=1}^g a_j^2 = h^{b(M)}, [a_1, h] = \dots [a_g, h] = 1 \rangle, \quad (3.7)$$

onde $g \geq 4$ e $b(M) \in \mathbb{Z}_2$. Pelo Lema 1.5.19 temos a sequência curta exata

$$1 \rightarrow Z \rightarrow \pi_1(M) \xrightarrow{\psi} \pi_1(\Sigma) \rightarrow 1, \quad (3.8)$$

onde $Z = \langle h \rangle$. Se $b(M) = 0$, então $\pi_1(M) = \pi_1(\Sigma) \times \mathbb{Z}$, logo $\pi_1(M)$ é residualmente livre, pois $\pi_1(M)$ é produto direto de dois grupos residualmente livres.

Seja $b(M) = 1$, da equação 3.8 vemos que, se $r \notin \langle h \rangle$, então $\psi(r) \neq 1$. Como $\pi_1(\Sigma)$ é residualmente livre então existe um homomorfismo $f_r : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $f_r(\psi(r)) \neq 1$. Portanto, para cada $r \notin \langle h \rangle$ existe um homomorfismo $f_r \circ \psi : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $f_r(\psi(r)) \neq 1$.

Agora demonstramos alguns fatos importantes:

i) $\langle h \rangle = Z(\pi_1(M))$. De fato, pela equação 3.7 temos que h é central em $\pi_1(M)$, logo $\langle h \rangle \subset Z(\pi_1(M))$. Seja $x \in Z(\pi_1(M)) \setminus \langle h \rangle$, da equação 3.6 temos que $\pi_1(\Sigma)$ é o produto amalgamado de um grupo livre de posto $g - 1$ e um grupo cíclico infinito amalgamando os grupos cíclicos infinitos gerados por $\prod_{i=1}^{g-1} a_i^2$ e a_g^{-2} respectivamente, como $\pi_1(\Sigma)$ contém um grupo livre de posto $g - 1$ não abeliano, então $\pi_1(\Sigma)$ não é abeliano, logo pela equação 3.8 existem $a, b \in \pi_1(M)$ tal que $[\psi(a), \psi(b)] \neq 1$. Da Proposição 2.5.2 temos que a superfície Σ de gênero $g \geq 4$ tem grupo totalmente residualmente livre, logo da Proposição 2.4.2, $\pi_1(\Sigma)$ é comutativo transitiva. Como x é central em $\pi_1(M)$, temos que $[x, a] = 1$ e $[x, b] = 1$, logo $[\psi(x), \psi(a)] = 1$ e $[\psi(x), \psi(b)] = 1$. Pela proposição 2.5.2 temos que $\pi_1(\Sigma)$ é totalmente residualmente livre, logo $\pi_1(\Sigma)$ é comutativo transitivo. Já que $\psi(x) \neq 1$, pois $x \notin \langle h \rangle$, temos que $[\psi(a), \psi(b)] = 1$, o qual é contradição. Portanto $\langle h \rangle = Z(\pi_1(M))$.

ii) $\langle h \rangle \cap \pi_1'(M) = 1$. De fato, suponha por contradição que existe um elemento não trivial $a \in \langle h \rangle \cap \pi_1'(M)$. Temos que $a = h^n = [x_1, y_1]^{\epsilon_1} \dots [x_m, y_m]^{\epsilon_m}$ tal que $x_i, y_i \notin \langle h \rangle$ para $i = 1, \dots, m$ e $n \in \mathbb{N}$. Da Proposição 2.5.2 temos que a superfície Σ de gênero $g \geq 4$ tem grupo totalmente residualmente livre. Da equação 3.8 temos que $\psi(x_i) \neq 1$ e $\psi(y_i) \neq 1$ para $i = 1, \dots, m$. Pela Proposição 2.5.2 temos que $\pi_1(\Sigma)$ é um grupo totalmente residualmente livre, logo existe um homomorfismo $\phi : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{F}$, tal que $\phi(\psi(x_i)) \neq 1$ e $\phi(\psi(y_i)) \neq 1$ para $i = 1 \dots m$. Mas, $1 = \phi(\psi(h))^n = \phi(\psi(a)) = [\phi(\psi(x_1)), \phi(\psi(y_1))]^{\epsilon_1} \dots [\phi(\psi(x_m)), \phi(\psi(y_m))]^{\epsilon_m}$, o qual é contradição, pois desta forma \mathbb{F} contém uma palavra trivial de comprimento positivo. Portanto, $\langle h \rangle \cap \pi_1'(M) = 1$.

Observamos que $\pi_1(M)/\pi_1'(M)$ é um grupo abeliano livre finitamente gerado, logo $\pi_1(M)/\pi_1'(M)$ é um grupo residualmente livre. Agora definamos a aplicação

projeção $\pi_N : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(M)/\pi'_1(M)$, onde $g \mapsto g\pi'_1(M)$, logo $\pi_N(g) \neq 1$ para todo $g \in \langle h \rangle$, pois $\langle h \rangle \cap \pi'_1(M) = 1$. Já que $\pi_1(M)/\pi'_1(M)$ é residualmente livre, então para cada $g \in \langle h \rangle$, existe um homomorfismo $\theta_g : \pi_1(M)/\pi'_1(M) \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $\theta_g(g\pi'_1(M)) \neq 1$, assim para cada $g \in \langle h \rangle$, existe um homomorfismo $\theta_g \circ \pi_N : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $(\theta_g \circ \pi_N)(g) \neq 1$. Portanto $\pi_1(M)$ é residualmente livre.

Seja M com bordo incompressível toral não vazio, pelo Teorema 1.5.21 temos que $b(M) = 0$. Como o homomorfismo de avaliação é trivial, então pelo Corolário 1.5.26 temos que $M = \Sigma \times S^1$. Desta forma $\pi_1(M) = \pi_1(\Sigma) \times \pi_1(S^1)$ e $\pi_1(\Sigma)$ é residualmente livre, então $\pi_1(M)$ é residualmente livre.

Agora provaremos que as únicas variedades fibradas de Seifert compactas e conexas não orientáveis sem singularidades com bordo incompressível toral (possivelmente vazio), grupo fundamental totalmente residualmente livre não trivial e com homomorfismo de avaliação trivial são :

- A variedade M com classe de Euler 1 (*i.e.*, $b(M) = 1$) com espaço base Σ um plano projetivo e homomorfismo de avaliação de M trivial.
- A variedade $M = (\text{faixa de Mobius}) \times S^1$.

De fato, seja M uma variedade fibrada de Seifert sem singularidades, sem bordo e com homomorfismo de avaliação trivial. Sejam $b(M) = 0$ e $\pi_1(\Sigma)$ residualmente livre. Então pela Proposição 2.5.2, Σ é diferente do plano projetivo, garrafa de Klein e da superfície não orientável de gênero três. Logo a apresentação de $\pi_1(\Sigma)$ é :

$$\langle a_1, \dots, a_g \mid \prod_{i=1}^g a_i^2 = 1 \rangle,$$

onde $g \geq 4$. Observamos que $\pi_1(\Sigma)$ é um produto amalgamado de um grupo livre gerado por $\{a_1, \dots, a_{g-1}\}$ com um grupo cíclico infinito gerado por $\{a_g\}$ amalgamando os grupos cíclicos $\langle \prod_{i=1}^{g-1} a_i^2 \rangle$ e $\langle a_g^{-2} \rangle$. Pelo Corolário 1.1.33 temos que $\pi_1(\Sigma)$ não é abeliano. Usando o Corolário 1.5.26 temos que $M = \Sigma \times S^1$, e desta forma $\pi_1(M)$ não é totalmente residualmente livre pelo Corolário 2.3.8, pois $\pi_1(\Sigma)$ não é abeliano.

Agora, seja $b(M) = 1$ e $\pi_1(\Sigma)$ um grupo residualmente livre. Temos que pelo Lema 3.2.4, $\pi_1(M)$ tem a apresentação

$$\langle h, a_1, \dots, a_g \mid a_i h a_i^{-1} = h, \prod_{i=1}^g a_i^2 = h \rangle,$$

onde $g \geq 4$. Já que foi provado no item *i*) e *ii*) que $\langle h \rangle = Z(\pi_1(M))$ e $\langle h \rangle \cap \pi_1'(M) = 1$, então temos que estas condições garantem que $\pi_1(M)$ não é totalmente residualmente livre. De fato, supor que $\pi_1(M)$ é totalmente residualmente livre, de *i*) e *ii*) temos que $\langle h \rangle = Z(\pi_1(M))$ e $\langle h \rangle \cap \pi_1'(M) = 1$, logo $\pi_1(M)$ não é abeliano, e pelo Corolário 2.3.7 temos que $\pi_1(M)$ tem centro trivial, o qual é uma contradição.

Seja M uma variedade fibrada de Seifert com bordo incompressível toral não vazio, pelo Teorema 1.5.21 temos que $b(M) = 0$. Como o homomorfismo de avaliação é trivial, então pelo Corolário 1.5.26 temos que $M = \Sigma \times S^1$. Segue que, $\pi_1(M) = \pi_1(\Sigma) \times \pi_1(S^1)$ é um grupo residualmente livre, então $\pi_1(\Sigma)$ é residualmente livre.

Pela Teorema 1.2.63, Σ tem gênero $2 - g + n$, onde $g \geq 1$ e $n \geq 1$ é o número de componentes de bordo, pelo Teorema 1.2.63 $\pi_1(\Sigma)$ é livre de posto $g + n - 1$, logo $\pi_1(\Sigma)$ é abeliano somente se $g = 1$ e $n = 1$, ou seja, se a superfície Σ é uma faixa de Mobius. Caso contrario $\pi_1(\Sigma)$ é não abeliano. Se a superfície Σ não é uma faixa de Mobius, então pelo Corolário 2.3.8 temos que $\pi_1(M)$ não é totalmente residualmente livre. Se $\Sigma =$ faixa de mobius, então $\pi_1(\Sigma) = \mathbb{Z}$ e $\pi_1(M) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, e assim $\pi_1(M)$ é totalmente residualmente livre. ■

O que provamos acima está resumido no seguinte teorema:

Teorema 3.2.11. *Seja M uma variedade fibrada de Seifert compacta, conexa e sem singularidades com bordo incompressível toral (possivelmente vazio) e espaço base uma superfície compacta e conexa Σ com bordo (possivelmente vazio). Então $\pi_1(M)$ é um grupo residualmente livre não trivial se, e só se, M assume uma das seguintes formas:*

- (1) *M é orientável, o espaço base é uma superfície orientável, compacta e conexa Σ com bordo (possivelmente vazio), $\pi_1(\Sigma)$ é um grupo residualmente livre, $M = \Sigma \times S^1$ e o homomorfismo de avaliação de M é trivial.*
- (2) *M é não orientável, o espaço base é uma superfície não orientável, compacta e conexa Σ com bordo (possivelmente vazio), $\pi_1(\Sigma)$ é um grupo residualmente livre, M é qualquer variedade fibrada de Seifert compacta, conexa e sem singularidades e o homomorfismo de avaliação de M é trivial.*
- (3) *M é não orientável, o espaço base Σ é o plano projetivo e M é a variedade fibrada de Seifert compacta, conexa e sem singularidades com caracterís-*

tica de Euler 1 e homomorfismo de avaliação trivial. (Esta variedade também é chamada a o fibrado não orientável de S^2 sobre S^1).

Além disso, destas variedades somente as variedades $S^2 \times S^1$, \mathbb{T}^3 (3-toro), $A \times S^1$ (onde A é um anel), $\Sigma \times S^1$ (onde Σ é a faixa de Moibus) e a variedade fibrada de Seifert compacta, conexa e sem singularidades com característica de Euler 1 e espaço base um plano projetivo, possuem grupo fundamental totalmente residualmente livre.

Demonstração. Pela Observação 3.2.8 M tem uma das seguintes formas:

- M é uma variedade fibrada de Seifert compacta, conexa e orientável sem singularidades com bordo incompressível toral (possivelmente vazio), espaço base uma superfície orientável, compacta e conexa Σ com bordo (possivelmente vazio) e homomorfismo de avaliação trivial. Neste caso, a característica de Euler $b(M)$ é um numero inteiro.

- M é uma variedade fibrada de Seifert compacta, conexa e não orientável sem singularidades com bordo incompressível toral (possivelmente vazio), espaço base uma superfície não orientável, compacta e conexa Σ com bordo (possivelmente vazio) e homomorfismo de avaliação trivial. Neste caso, a característica de Euler $b(M)$ pertence a \mathbb{Z}_2 .

Desta forma a demonstração do teorema é uma consequência direta dos Lemas 3.2.9 e 3.2.10. ■

3.3 - Grupos residualmente livres sobre uma variedade orientável fibrada sobre S^1 com fibra \mathbb{T}^2

Nesta seção observaremos que um toro fibrado sobre S^1 (fibrado sobre S^1 com fibra \mathbb{T}^2) com a condição que seu grupo fundamental seja residualmente livre é um 3-toro.

Teorema 3.3.1. *Se M é uma variedade orientável fibrada sobre S^1 com fibra \mathbb{T}^2 e $\pi_1(M)$ residualmente livre, então M é homeomorfo a um 3-toro.*

Demonstração. No fibrado sobre S^1 com fibra \mathbb{T}^2 temos a seguinte sequência exata:

$$1 \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}^2) \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow 1,$$

onde $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, disto temos que $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ é um subgrupo normal de $\pi_1(M)$.

Seja $a \in \pi(\mathbb{T}^2)$ um elemento não trivial. Pelo Lema 2.7.3 temos que existe um subgrupo H de $\pi_1(M)$ de índice finito e uma retração $\rho : H \rightarrow \langle a \rangle$. Como $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cap H$ é um subgrupo abeliano livre de $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ contendo o elemento a , então $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cap H \cong \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

i) Se $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cap H \cong \mathbb{Z}$, então $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cap H$ é um subgrupo normal cíclico infinito em $\pi_1(M)$. De fato, considere $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cap H = \langle b \rangle$, onde $b \in \pi_1(M)$. Seja $g \in \pi_1(M)$ um elemento não trivial arbitrário, como $gbg^{-1} \in \pi_1(M)$ então $gb^n g^{-1} \in H$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Como $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ é normal em $\pi_1(M)$, então $gb^n g^{-1} \in \pi_1(\mathbb{T}^2)$, logo $gb^n g^{-1} \in \pi_1(\mathbb{T}^2) \cap H$ e $gb^n g^{-1} = b^m$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 2.1.4 temos que $\langle b, g \rangle$ é abeliano. Como $g \in \pi_1(M)$ é arbitrário, então $\langle b, g \rangle$ é abeliano, para todo $g \in \pi_1(M)$. Portanto $\langle b \rangle$ é normal em $\pi_1(M)$.

ii) Se $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cap H \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, então existe um subgrupo normal cíclico infinito em $\pi_1(M)$. De fato, seja $D = \pi_1(\mathbb{T}^2) \cap H \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, logo H e $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ contêm ao subgrupo D isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Da seguinte igualdade $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cap \ker(\rho) = \pi_1(\mathbb{T}^2) \cap H \cap \ker(\rho) = D \cap \ker(\rho)$, temos que $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cap \ker(\rho)$ é isomorfo a 1 , \mathbb{Z} ou $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, pois $D \cap \ker(\rho)$ é um subgrupo de $\pi_1(\mathbb{T}^2)$. Se $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cap \ker(\rho) = 1$, então $D \cap \ker(\rho) = 1$, logo $\rho|_D : D \rightarrow \langle a \rangle$ é um homomorfismo injetivo, o qual é contradição, pois o subgrupo D não é isomorfo a um subgrupo de $\langle a \rangle$. Se $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cap \ker(\rho) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, então $D \cap \ker(\rho) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Como $a \in D$ e $a \notin \ker(\rho)$, então $\ker(\rho|_D) = D \cap \ker(\rho) \subsetneq D$, logo $D/\ker(\rho|_D)$ é um grupo finito não trivial. Pelo 1º teorema fundamental do homomorfismo temos que $D/\ker(\rho|_D)$ é isomorfo a um subgrupo não trivial finito de $\langle a \rangle$, o qual é contradição, pois $\langle a \rangle$ não contém subgrupos finitos.

Portanto, $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cap \ker(\rho) = \pi_1(\mathbb{T}^2) \cap H \cap \ker(\rho)$ é um grupo cíclico gerado por b . Para qualquer $g \in \pi_1(M)$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g^m \in H$, pois H tem índice finito. Então,

$$\rho(g^m b g^{-m}) = \rho(g^m) \rho(b) \rho(g^{-m}) = \rho(g^m) \rho(g^{-m}) = 1.$$

Logo $g^m b g^{-m} \in \ker(\rho)$, como $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ é normal em $\pi_1(M)$ temos que $g^m b g^{-m} \in \pi_1(\mathbb{T}^2)$. Portanto $g^m b g^{-m} \in \pi_1(\mathbb{T}^2) \cap H \cap \ker(\rho)$ e logo $g^m b g^{-m} = b^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Agora usando o Lema 2.1.4 temos que o subgrupo gerado por $\langle b, g \rangle$ é abeliano. Como g foi escolhido arbitrariamente temos que $\langle b, g \rangle$ é abeliano, para todo $g \in \pi_1(M)$, logo $\langle b \rangle$ é um subgrupo normal cíclico infinito de $\pi_1(M)$.

Assim, provamos a existência de um subgrupo normal cíclico infinito em $\pi_1(M)$, logo pelo Teorema 1.6.7, temos que M é um variedade fibrada de Seifert. Usando o Teorema 3.2.5, temos que M é uma variedade fibrada de Seifert

sem singularidades. Do Teorema 1.6.8 temos que M é uma variedade fibrada de Seifert sem singularidades com espaço base um toro ou uma garrafa de Klein. Finalmente, utilizando o Teorema 3.2.11 temos que M é um 3-toro, pois a garrafa de Klein faz que M seja não orientável. ■

3.4 - Grupos residualmente livres sobre uma grafo variedade

Seja M uma 3-variedade compacta, orientável, irredutível com bordo incompressível. Então, M é chamada de **grafo variedade** se as componentes do Teorema de Decomposição Toral (veja Teorema 1.7.1) em M são todas variedades fibradas de Seifert. É claro que se um grafo variedade M tem decomposição toral trivial, ou seja, não existe decomposição toral em M , então M é uma variedade fibrada de Seifert.

O seguinte teorema a provar afirma que, se M é um grafo variedade conexo com bordo incompressível (possivelmente vazio) e grupo fundamental residualmente livre não trivial, então M tem decomposição toral trivial, logo M é uma variedade fibrada de Seifert. Para a demonstração do teorema faremos uso importante das Proposições 2.6.3 e 2.6.4 da subseção 2.6 e das Observações 1.7.2 do Teorema de Decomposição Toral.

Teorema 3.4.1. *Seja M um grafo variedade conexo com bordo incompressível (possivelmente vazio). Se $\pi_1(M)$ é não trivial e residualmente livre, então M é uma variedade fibrada de Seifert.*

Demonstração. A prova será feita observando a Figura 1.9 dada no capítulo 1.

Da Figura 1.9 mostrada abaixo, observamos que na Decomposição Toral de M aparecem dois tipos de cortes.

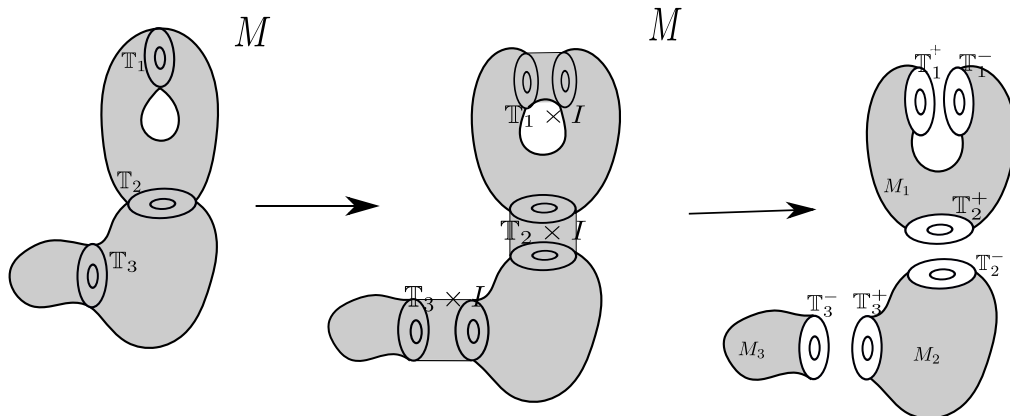


Figura 1.9: Decomposição toral de M

Para primeira possibilidade de corte, tal como se mostra na Figura 3.1, usamos HNN-extensões

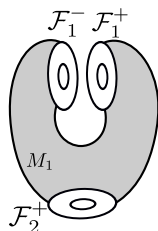


Figura 3.1: Primeira possibilidade de corte

e na segunda possibilidade de corte, tal como se mostra na Figura 3.2, usamos produto amalgamado.

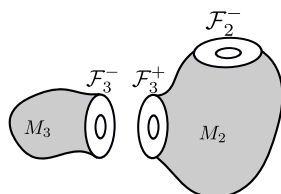


Figura 3.2: Segunda possibilidade de corte

O objetivo principal é mostrar que as folheações induzidas sobre os toros da colagem do Teorema de Decomposição Toral de M são compatíveis no momento que fazemos a colagem, ou seja, as folheações induzidas sobre os toros da colagem são iguais. Assim, contradizemos o item (5) das Observações 1.7.2 do Teorema de Decomposição Toral, desta forma M tem decomposição toral trivial e logo M é uma variedade fibrada de Seifert. Cabe notar que o item (5) das Observações 1.7.2 afirma que as folheações por círculos induzidas sobre os toros da colagem são distintas, ou seja, por exemplo na Figura 1.9 aplicamos o Teorema de Decomposição Toral a M , assim temos variedades M_1 , M_2 e M_3 que são variedades

fibradas de Seifert, logo M_3 induz uma folheação por círculos sobre \mathcal{F}_3^- distinta à folheação por círculo que M_2 induz sobre \mathcal{F}_3^+ , M_2 induz uma folheação por círculos sobre \mathcal{F}_2^- distinta à folheação por círculo que M_1 induz sobre \mathcal{F}_2^+ e M_1 induz uma folheação por círculos distinta em \mathcal{F}_1^+ e \mathcal{F}_1^- .

Agora daremos a demonstração do teorema:

a) Primeiro analizaremos o segundo corte, neste caso pela Figura 3.2, temos dois componentes de Seifert M_2 e M_3 , ou seja, M_2 e M_3 são variedades fibradas de Seifert. Segue das Observações 1.7.2 do Teorema de Decomposição Toral (veja itens (2), (3) e (4)), que M_2 e M_3 são variedades fibradas de Seifert compactas e conexas, $\pi_1(M_2)$ e $\pi_1(M_3)$ são subgrupos de $\pi_1(M)$ e que M_2 e M_3 têm o bordo incompressível não vazio, logo pelo Lema 3.2.1 M_2 e M_3 têm bordo incompressível toral não vazio, pois $\pi_1(M_2)$ e $\pi_1(M_3)$ são grupos residualmente livres. Além disso, como M_2 e M_3 têm bordo incompressível toral não vazio, então $\pi_1(M_2)$ e $\pi_1(M_3)$ são subgrupos residualmente livres não triviais de $\pi_1(M)$.

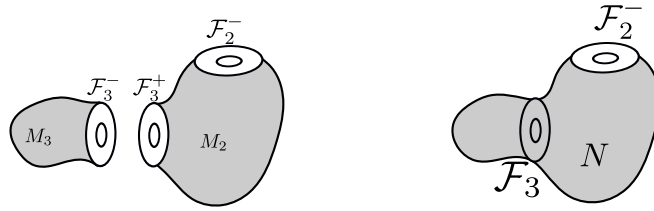


Figura 3.3: A variedade N após da colagem das variedades M_2 e M_3 .

Mostraremos que a variedade N da Figura 3.3 é uma variedade fibrada de Seifert, ou seja, a variedade obtida depois da colagem de M_2 e M_3 ao longo de \mathcal{F}_3^+ e \mathcal{F}_3^- é uma variedade fibrada de Seifert. De fato, suponha que N não é uma variedade fibrada de Seifert, logo pelo item (5) das Observações 1.7.2 do Teorema de decomposição Toral, temos que as folheações induzidas sobres os toros \mathcal{F}_3^+ e \mathcal{F}_3^- são diferentes.

Por definição os toros \mathcal{F}_3^+ e \mathcal{F}_3^- são da seguinte forma $\mathcal{F}_3^+ = S_2^1 \times S_2^1$ e $\mathcal{F}_3^- = S_3^1 \times S_3^1$, onde S_2^1, S_3^1 são círculos. Como M_2 e M_3 são variedades fibradas de Seifert com bordo incompressível toral não vazio, então pelos Teoremas 3.2.5 e 3.2.11 temos que para $i = 2, 3$, $M_i = \Sigma_i \times S_i^1$, onde Σ_i é uma superfície orientável com bordo não vazio, pois M_i tem bordo não vazio. Pelo Teorema 1.2.63, a característica de Euler de Σ_i é $\chi(\Sigma_i) = 2 - 2g - r$, onde g é o gênero da superfície e r o número de componentes de bordo de Σ_i , para $i = 2, 3$. Observamos que $r \geq 1$, pois Σ_i tem bordo não vazio, para $i = 2, 3$.

Analizaremos a característica de Euler de Σ_i , onde $i = 2, 3$, nos casos em que:

• Se $r = 1$ e $g = 0$, temos que Σ_i é um D^2 (*disco*), mas pelo Corolário 1.5.20 $D^2 \times S_i^1$ não tem bordo incompressível, pois $D^2 \times S_i^1$ é um toro fibrado solido trivial. Portanto este caso fica fora de nossa consideração.

• Se $r = 2$ e $g = 0$ temos que Σ_i é um anel, logo $M_i = A \times S_i^1$, onde A é um anel. Mas, este caso não ocorre em virtude de uma das Observações 1.7.2 (veja item (1)), a qual afirma que, se a Decomposição Toral de M tem mais de uma componente, então nenhuma de suas componentes é igual a um anel vezes um círculo, ou seja, $M_i \neq A \times S_i^1$, para $i=2,3$.

Então, tirando os casos quando $r = 1, g = 0$ e $r = 2, g = 0$ temos que duas consequências importantes:

* $\chi(\Sigma_i) < 0$, para $i = 2, 3$.

* $\pi_1(\Sigma_i)$ é livre de posto maior igual a dois, para $i = 2, 3$, pois o grupo fundamental de Σ_i é livre de posto $2g + r - 1$. Logo $\pi_1(\Sigma_i)$ é não abeliano, para $i = 2, 3$.

Continuando com a demonstração do teorema, provaremos as seguintes afirmações importantes:

i) O centro de $\pi_1(M_i)$ é $\pi_1(S_i^1)$, para $i = 2, 3$. De fato, como $\pi_1(\Sigma_i)$ não é abeliano, então existem dois elementos $x, y \in \pi_1(\Sigma_i)$ tal que $[x, y] \neq 1$. É claro que $\pi_1(S_i^1)$ está contido no centro de $\pi_1(M_i) = \pi_1(\Sigma_i) \times \pi_1(S_i^1)$. Suponha que exista um elemento $(z_1, z_2) \in Z(\pi_1(\Sigma_i) \times \pi_1(S_i^1))$ tal que z_1 não é trivial. Logo, como $[z_1, x] = 1$ e $[z_1, y] = 1$ num grupo livre, então $[x, y] = 1$ o qual contradiz o fato que $[x, y] \neq 1$. Concluimos então que o centro de $\pi_1(M_i)$ é $\pi_1(S_i^1)$, para $i = 2, 3$.

ii) $Core_{\pi_1(M_2)}(\pi_1(\mathcal{F}_3^+)) = \pi_1(S_2^1)$ e $Core_{\pi_1(M_3)}(\pi_1(\mathcal{F}_3^-)) = \pi_1(S_3^1)$. De fato, como $\pi_1(\mathcal{F}_3^+) = \pi_1(S_2^1) \times \pi_1(S_2^1)$ e $\pi_1(\mathcal{F}_3^-) = \pi_1(S_3^1) \times \pi_1(S_3^1)$ temos que

$$\begin{aligned} Core_{\pi_1(M_2)}\pi_1(\mathcal{F}_3^+) &= \bigcap_{(g_1, g_2) \in \pi_1(\Sigma_2) \times \pi_1(S_2^1)} (\pi_1(S_2^1) \times \pi_1(S_2^1))^{(g_1, g_2)} \\ &= \bigcap_{g_1 \in \pi_1(\Sigma_2)} (\pi_1(S_2^1))^{g_1} \times \pi_1(S_2^1). \end{aligned}$$

Suponha que $\bigcap_{g_1 \in \pi_1(\Sigma_2)} (\pi_1(S_2^1))^{g_1} \neq 1$. Então $\pi_1(S_2^1)^{g_1} \cap \pi_1(S_2^1) \neq 1, \forall g_1 \in \pi_1(\Sigma_2)$.

Logo, para cada $g_1 \in \pi_1(\Sigma_2)$ existem $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $g_1 z^n g_1^{-1} = z^m$, onde z é o gerador do grupo cíclico infinito $\pi_1(S_2^1)$. Como $\pi_1(\Sigma_2)$ é um grupo livre não abeliano (logo totalmente residualmente livre) e $\pi_1(S_2^1)$ é um subgrupo de $\pi_1(\Sigma_2)$, então pelo Lema 2.1.4 temos que $[g_1, z] = 1$, para cada $g_1 \in \pi_1(\Sigma_2)$. Além disso, como $\pi_1(\Sigma_2)$ é totalmente residualmente livre (logo comutativo transitivo), então

$[g_1, g_2] = 1$ para cada $g_1, g_2 \in \pi_1(\Sigma_2)$. Assim $\pi_1(\Sigma_2)$ é abeliano, o qual é uma contradição. Logo $\bigcap_{g_1 \in \pi_1(\Sigma_2)} (\pi_1(S_2^1))^{g_1} = 1$ e portanto,

$$\text{Core}_{\pi_1(M_2)} \pi_1(\mathcal{F}_3^+) = \pi_1(S_2^1).$$

Analogamente temos que

$$\text{Core}_{\pi_1(M_3)} \pi_1(\mathcal{F}_3^-) = \pi_1(S_3^1),$$

iii) Finalmente provaremos que as folheações induzidas sobre os toros \mathcal{F}_3^+ e \mathcal{F}_3^- são iguais. De fato, como

$$\begin{aligned} \pi_1(N) &= \pi_1(M_2) *_{\pi_1(\mathcal{F}_3^+) \cong \pi_1(\mathcal{F}_3^-)} \pi_1(M_3) \\ &= \pi_1(M_3) *_{\pi_1(\mathcal{F}_3^-) \cong \pi_1(\mathcal{F}_3^+)} \pi_1(M_2), \end{aligned}$$

então de *(i)*, *(ii)* e da Proposição 2.6.3, temos que $\pi_1(S_2^1) \cap \pi_1(\mathcal{F}_3^-) \subset \pi_1(S_3^1)$ e $\pi_1(S_3^1) \cap \pi_1(\mathcal{F}_3^+) \subset \pi_1(S_2^1)$, logo isto garante que as folheações induzidas sobre os toros \mathcal{F}_3^+ e \mathcal{F}_3^- são iguais.

De *(iii)* temos uma contradição, já que as folheações induzidas sobre os toros \mathcal{F}_3^+ e \mathcal{F}_3^- são diferentes. Portanto concluímos que a 3-variedade N é uma 3-variedade fibrada de Seifert.

b) Agora analizaremos o primeiro corte. Neste caso, temos dois subcasos a considerar:

b.1) Se aplicando o Teorema de Decomposição Toral a M , temos que M é decomposta em só uma componente fibrada de Seifert M_1 , ou seja, M é da forma da figura de abaixo.

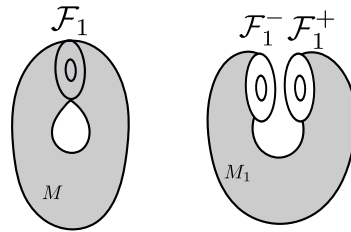


Figura 3.4: M com uma decomposição toral formada por uma só componente.

Observando a Figura 3.4 mostraremos que se colamos M_1 ao longo dos toros \mathcal{F}_1^+ e \mathcal{F}_1^- obtemos uma variedade fibrada de Seifert, ou seja, M é uma variedade fibrada de Seifert. De fato, por definição os toros \mathcal{F}_1^+ e \mathcal{F}_1^- são da seguinte forma $\mathcal{F}_1^+ = S^1 \times S^1$ e $\mathcal{F}_1^- = S_1^1 \times S_1^1$, onde S^1, S_1^1 são círculos. Das Observações 1.7.2 sobre o Teorema de Decomposição Toral (veja itens (2), (3) e (4)), temos que

M_1 é uma variedade fibrada de Seifert compacta e conexa, $\pi_1(M_1)$ é subgrupo de $\pi_1(M)$ e M_1 tem bordo incompressível não vazio, logo pelo Lema 3.2.1 M_1 tem bordo incompressível toral não vazio, pois $\pi_1(M_1)$ é um subgrupo residualmente livre de $\pi_1(M)$. Além disso, como M_1 tem bordo incompressível toral não vazio, então $\pi_1(M_1)$ é um subgrupo residualmente livre não trivial de $\pi_1(M)$.

Dos Teoremas 3.2.5 e 3.2.11 temos que $M_1 = \Sigma_1 \times S^1$, onde Σ_1 é uma superfície com bordo não vazio, pois M_1 é uma variedade com bordo não vazio.

Pelo Teorema 1.2.63 a característica de Euler de uma superfície com bordo é $\chi(\Sigma_1) = 2 - 2g - r$, onde g é o gênero e r é o número de componentes de bordo. Observamos que $r \geq 1$, pois Σ_1 tem bordo não vazio.

Desta forma a demonstração que M é uma variedade fibrada de Seifert será dada nos seguintes casos:

- Se $r = 1$ e $g = 0$, temos que Σ_1 é um D^2 (disco), logo $M_1 = D^2 \times S^1$. Mas, $M_1 = D^2 \times S^1$ não tem bordo incompressível pelo Corolário 1.5.20. Portanto este caso fica fora de nossa consideração.

- Se $r = 2$ e $g = 0$, temos que a superfície Σ_1 é um A (anel), logo $M_1 = A \times S^1$. Se M tem bordo incompressível toral não vazio, então temos uma contradição ao item (1) das Observações 1.7.2 do Teorema de Decomposição Toral. Assim, consideramos M sem bordo e, neste caso, observamos que a colagem de M_1 ao longo dos toros \mathcal{F}_1^- e \mathcal{F}_1^+ é uma variedade fibrada de Seifert. Com efeito, como o anel A é igual a $S^1 \times I$, onde I é um intervalo fechado e $S^1 \times S^1$ é igual ao toro \mathcal{F}_1^+ , então $M_1 = \mathcal{F}_1^+ \times I$ tal como se mostra na seguinte Figura 3.5.

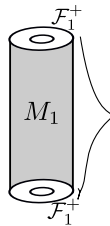


Figura 3.5: $\mathcal{F}_1^+ \times I$ (Toro de dois lados).

Logo, pela Definição 1.6.1, a colagem de $\mathcal{F}_1^+ \times I$ ao longo do toro \mathcal{F}_1^+ é um fibrado orientável sobre S^1 com fibra \mathcal{F}_1^+ , ou seja M é um fibrado orientável sobre S^1 com fibra \mathcal{F}_1^+ , portanto pelo Teorema 3.3.1 M é uma variedade fibrada de Seifert (isto é um 3-toro) e neste caso o teorema está provado.

- Retirando-se as possibilidades quando $r = 1, g = 0$ e $r = 2, g = 0$ temos duas consequências importantes:

(*) $\chi(\Sigma_1) < 0$.

(*) $\pi_1(\Sigma_1)$ é livre de posto maior igual a dois, pois o grupo fundamental de Σ_1 é livre de posto $2g + r - 1$. Logo $\pi_1(\Sigma_1)$ é não abeliano.

Mostraremos que a colagem de M_1 ao longo dos toros \mathcal{F}_1^- e \mathcal{F}_1^+ é uma variedade fibrada de Seifert. De fato, suponha que M não é uma variedade fibrada de Seifert, logo pelo item (5) das Observações 1.7.2 do Teorema de Decomposição Toral, temos que as folheações induzidas sobre os toros \mathcal{F}_1^+ e \mathcal{F}_1^- são diferentes. Já que $\pi_1(M_1) = \pi_1(\Sigma_1) \times \pi_1(S^1)$, então demonstramos que o centro de $\pi_1(M_1)$ é igual a $\pi_1(S^1)$. Com efeito, como $\pi_1(\Sigma_1)$ não é abeliano, então existem dois elementos $x, y \in \pi_1(\Sigma_1)$ tal que $[x, y] \neq 1$. É claro que $\pi(S_1^1)$ esta contido no centro de $\pi_1(M_1) = \pi_1(\Sigma_1) \times \pi_1(S_1^1)$. Suponha que exista um elemento $(z_1, z_2) \in Z(\pi_1(\Sigma_1) \times \pi_1(S_1^1))$ tal que z_1 não é trivial. Logo temos $[z_1, x] = 1$ e $[z_1, y] = 1$ num grupo livre, então $[x, y] = 1$ o qual contradiz o fato que $[x, y] \neq 1$. Concluimos então que o centro de $\pi_1(M_1)$ é $\pi_1(S_1^1)$.

Seja $\pi_1(M) = HNN$ -extensão $(\pi(M_1), \pi(\mathcal{F}_1^-), t)$, onde t é a letra estável, pela Proposição 2.6.4 temos que

$$t(\pi_1(S^1) \cap \pi_1(\mathcal{F}_1^-))t^{-1} \subset \pi_1(S^1).$$

Portanto a colagem de M_1 ao longo dos toros \mathcal{F}_1^+ e \mathcal{F}_1^- é compatível, ou seja, a folheação induzida sobre os toros \mathcal{F}_1^+ e \mathcal{F}_1^- são iguais, o qual é uma contradição, logo M é uma variedade fibrada de Seifert.

b.2) Se aplicando o Teorema de Decomposição Toral a M , temos que M é decomposta em várias componentes fibradas de Seifert tal como pode ser visto na Figura 1.9. Neste caso tem que existir uma componente onde é razoável usar HNN-extensões, ou seja, a Decomposição Toral de M tem que ter uma componente da forma como é mostrada na Figura 3.1.

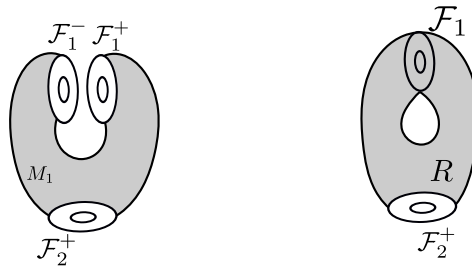


Figura 3.6: A variedade R obtida após da colagem da variedade M_1 ao longo de \mathcal{F}_1^- e \mathcal{F}_1^+ .

Observando as Figuras 3.1 e 3.6, mostraremos que a variedade R obtida após da colagem de M_1 ao longo dos toros \mathcal{F}_1^+ e \mathcal{F}_1^- é uma variedade fibrada de Seifert.

De fato, da mesma forma que fizemos no caso b.1), apenas observando a seguinte diferença dada nas Observações 1.7.2 (veja item (1)), a qual diz que M_1 não pode ser um anel vezes um círculo, pois a Decomposição Toral de M tem mais de uma componente. Após repetimos todo o argumento feito no caso b.1), portanto R é uma variedade de Seifert.

Finalizamos a demonstração do teorema aplicando o item a) às variedades fibradas de Seifert N e R tal como se mostra na Figura 3.7.

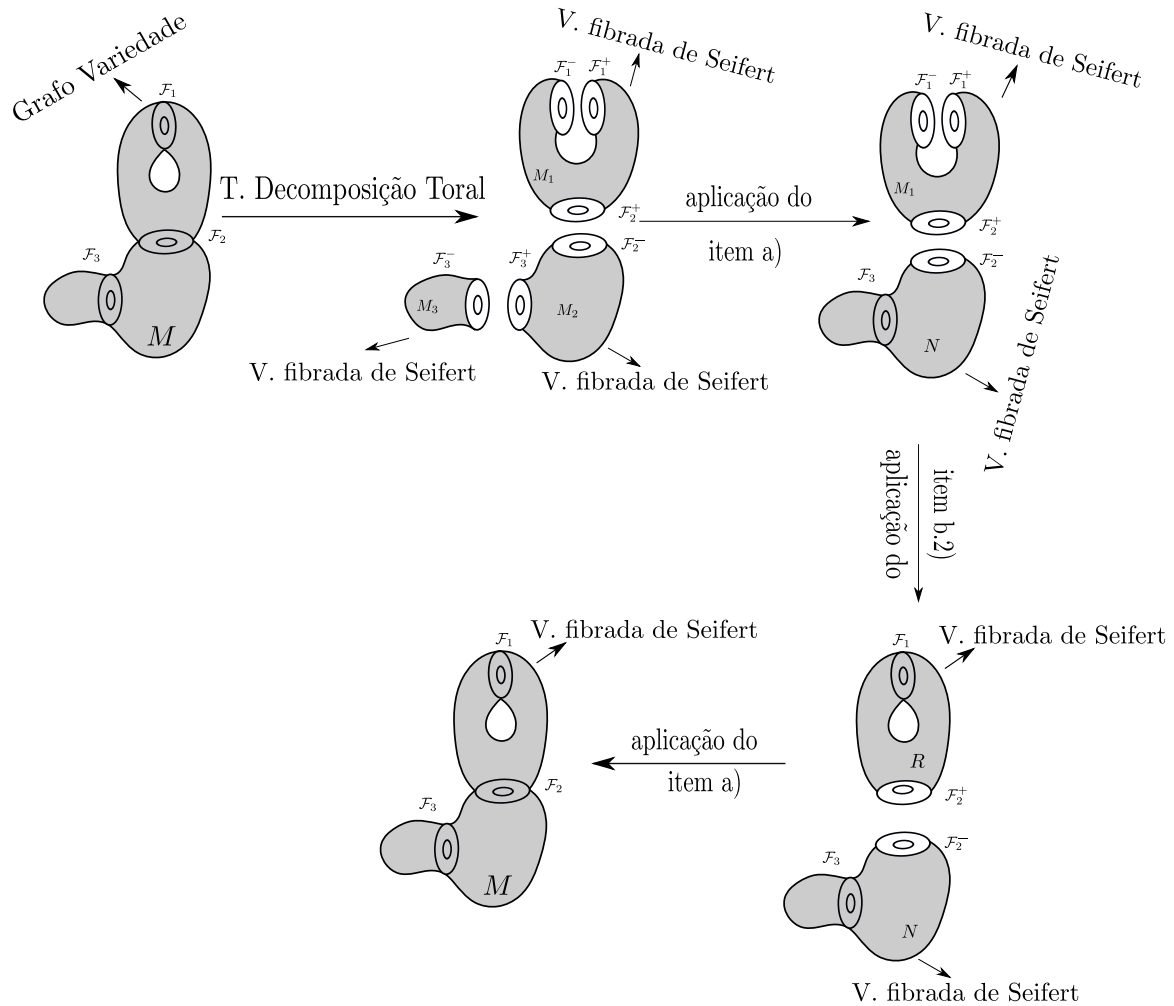


Figura 3.7

Portanto M é uma variedade fibrada de Seifert, ou seja, M tem Decomposição Toral trivial. ■

Capítulo 4

CONCLUSÃO

Agora classificaremos as 3–variedades compactas, conexas, primas com bordo incompressível toral (possivelmente vazio) e grupos fundamentais residualmente livres não triviais (veja Teorema 4.0.2). Também mostraremos a classificação das 3-variedades conexas, compactas com bordo incompressível toral (possivelmente vazio) e grupos fundamentais residualmente livres não triviais (veja Corolário 4.0.3), fazendo uso do Teorema de Descomposição Prima de Kneser-Milnor e do Teorema 4.0.2.

Teorema 4.0.2. *Se M é uma 3-variedade compacta, conexa, prima com bordo incompressível toral (possivelmente vazio), então $\pi_1(M)$ é um grupo residualmente livre não trivial se, e somente se, M é uma variedade fibrada de Seifert sem singularidades e é uma das variedades listadas no Teorema 3.2.11:*

- 1) *M é orientável, o espaço base de M é uma superfície orientável, compacta e conexa $\Sigma \neq D^2$ com bordo (possivelmente vazio), $\pi_1(\Sigma)$ é um grupo residualmente livre e $M = \Sigma \times S^1$ com homomorfismo de avaliação trivial.*
- 2) *M é não orientável, o espaço base de M é uma superfície não orientável, compacta e conexa Σ com bordo (possivelmente vazio), $\pi_1(\Sigma)$ é um grupo residualmente livre e M é qualquer variedade fibrada de Seifert sem singularidades compacta e conexa com homomorfismo de avaliação trivial.*
- 3) *M é não orientável, o espaço base Σ de M é o plano projetivo e M é a variedade de fibrada de Seifert sem singularidades conexa e compacta com característica de Euler 1 e homomorfismo de avaliação trivial. (**Esta variedade também é chamada o fibrado não orientável de S^2 sobre S^1 .**)*

Demonstração. Se M é uma 3-variedade prima, então pelo Teorema 1.3.9 M é irreduzível, ou é o fibrado não orientável de S^2 sobre S^1 ou é o fibrado orientável de S^2 sobre S^1 . Se M é o fibrado não orientável de S^2 sobre S^1 ou é o fibrado orientável de S^2 sobre S^1 , então M é uma variedade fibrada de Seifert, pois neste caso M é uma das variedades fibradas de Seifert listadas no Teorema 3.2.11.

Resta analisar o caso quando M é irreduzível.

1^o Caso: Seja M orientável. Se M é uma variedade atoroidal sem bordo, então pelo Corolário 3.1.3 M não tem grupo fundamental residualmente livre, o que contraria a hipótese. Se M é uma variedade atoroidal com bordo incompressível toral não vazio, então pelo Corolário 3.1.2 temos que M é uma variedade Hiperbólica completa de volume finito, mas pelo Teorema 3.1.4 M não tem grupo fundamental residualmente livre, o que novamente contraria nossa hipótese. Então, M não pode ser uma variedade atoroidal com bordo incompressível toral (possivelmente vazio).

Se M é uma variedade fibrada de Seifert com bordo incompressível toral (possivelmente vazio), então pelo Teorema 3.2.5 M é uma variedade fibrada de Seifert sem singularidades e logo M é uma das variedades listadas no Teorema 3.2.11 e a demonstração acabou.

Por outro lado, se M não é uma variedade fibrada de Seifert com bordo incompressível toral (possivelmente vazio), então aplicando a M o Teorema da Decomposição Toral de Jaco-Shalem 1.7.1 temos que as componentes da decomposição são variedades atoroidais ou são variedades fibradas de Seifert. Pelas Observações 1.7.2 (veja item (4)) temos que as variedades atoroidais e as variedades fibradas de Seifert da decomposição toral de M têm bordo incompressível toral não vazio. Pelo Corolário 3.1.2 temos que as variedades atoroidais com bordo incompressível toral não vazio da decomposição toral de M são variedades Hiperbólicas completas de volume finito. Dado que $\pi_1(M)$ é residualmente livre, então das Observações 1.7.2 (veja item (3)) os grupos fundamentais das variedades hiperbólicas completas de volume finito são subgrupos residualmente livres de $\pi_1(M)$. Mas, pelo Teorema 3.1.4, as variedades hiperbólicas completas de volume finito não têm grupo fundamental residualmente livre, logo conclui-se que a Decomposição Toral de Jaco-Shalem sobre M tem componentes somente formados por variedades fibradas de Seifert, assim M é um grafo variedade com bordo incompressível toral (possivelmente vazio). Pelo Teorema 3.4.1 temos que M é uma variedade fibrada de Seifert com bordo incompressível toral (possivelmente vazio), logo pelo Teorema 3.2.5 M é uma variedade fibrada de Seifert sem singu-

laridades. Como M é diferente do fibrado orientável de S^2 sobre S^1 ($S^2 \times S^1$), pois não é irreduzível, e M é diferente de $RP^3 \# RP^3$, pois $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ não é residualmente livre, então usando a Proposição 1.5.16 e o Teorema 3.2.11, temos que M tem a seguinte forma :

M é orientável, o espaço base de M é uma superfície orientável, compacta e conexa $\Sigma \neq \{D^2, S^2\}$ com bordo (possivelmente vazio), $\pi_1(\Sigma)$ é um grupo residualmente livre e $M = \Sigma \times S^1$ com homomorfismo de avaliação trivial.

2º **Caso:** No caso que M seja não orientável. Pelo Teorema 2.12 de [11], M tem um recobrimento compacto, conexo, orientável de 2 folhas \widetilde{M} e $\pi_1(\widetilde{M})$ é um subgrupo de $\pi_1(M)$. Se M contém um plano projetivo de dois lados P^2 , então pelo Corolário 6.2 de [11] temos que $\pi_1(P^2) \leq \pi_1(M)$, logo $\pi_1(M)$ tem um elemento de ordem dois o qual é uma contradição, pois $\pi_1(M)$ é livre de torção. Assim, M é P^2 -irreduzível, portanto pelo Lema 6.4 de [11] temos que \widetilde{M} é irreduzível.

É claro que se M não tem bordo se, e somente se, \widetilde{M} não tem bordo. Provaremos a seguinte afirmação:

Afirmação: Se M tem bordo incompressível toral não vazio, então \widetilde{M} tem bordo incompressível toral não vazio. De fato, seja $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ a aplicação recobrimento de 2 folhas tal que $S = p^{-1}(\mathbb{T}^2)$, onde S é uma componente do bordo de \widetilde{M} e \mathbb{T}^2 (Toro bidimensional) uma componente do bordo de M . Como p é a aplicação recobrimento de M , então $p|_S : S \rightarrow \mathbb{T}^2$ é uma aplicação recobrimento de 2-folhas de \mathbb{T}^2 . Como todo recobrimento finito do toro é um toro, então $S \simeq \mathbb{T}^2$, logo \widetilde{M} tem bordo toral. O bordo de \widetilde{M} é incompressível pois, sejam i_1 e i_2 inclusões de \mathbb{T}^2 no bordo de M e no bordo de \widetilde{M} respectivamente. Temos que provar que $(i_1)_\#$ é um homomorfismo injetivo. Com efeito, do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \partial \widetilde{M} \\ \cup \\ \mathbb{T}^2 \end{array} & \xrightarrow{i_1} & \widetilde{M} \\
 \downarrow p|_{\mathbb{T}^2} & & \downarrow p \\
 \begin{array}{c} \mathbb{T}^2 \\ \cap \\ \partial M \end{array} & \xrightarrow{i_2} & M
 \end{array}$$

temos que

$$p \circ i_1 = i_2 \circ p|_{\mathbb{T}^2}.$$

Logo $p_\# \circ (i_1)_\# = (i_2)_\# \circ (p|_{\mathbb{T}^2})_\#$. Como M tem bordo incompressível toral, então $(i_2)_\#$ é um homomorfismo injetivo, além disso, $(p|_{\mathbb{T}^2})_\#$ é um homomorfismo

injetivo, pois $p_{|\mathbb{T}^2} : \mathbb{T}^2 \mapsto \mathbb{T}^2$ é uma aplicação recobrimento, logo temos que $(i_2)_\# \circ (p_{|\mathbb{T}^2})_\#$ é injetiva. Portanto o homomorfismo $(i_1)_\#$ é injetivo, pois $p_\# \circ (i_1)_\# = (i_2)_\# \circ (p_{|\mathbb{T}^2})_\#$ e $p_\# \circ (i_1)_\#$ é injetiva. Desta forma o bordo de \widetilde{M} é incompressível toral e a afirmação esta provada.

Continuando com a demonstração, como \widetilde{M} é irredutível, compacta, conexo, orientável e com bordo incompressível toral (possivelmente vazio), então aplicamos o mesmo argumento feito no 1º Caso, assim \widetilde{M} é umas das variedades orientáveis listadas no Teorema 3.2.11, logo $\widetilde{M} = \Sigma \times S^1$, onde Σ é uma superfície orientável com bordo (possivelmente vazio), pois \widetilde{M} é orientável.

Sendo \widetilde{M} é conexo, temos que $[\pi_1(M) : \pi_1(\widetilde{M})] \leq 2$, ou seja, temos que $\pi_1(\widetilde{M})$ é subgrupo normal de $\pi_1(M)$. Seja $g \in \pi_1(M)$ um elemento arbitrário, como $\pi_1(\widetilde{M}) = \pi_1(\Sigma) \times \pi_1(S^1)$, então $g^2 \in \pi_1(\Sigma) \times \pi_1(S^1)$. Mas, $\pi_1(S^1)$ é normal em $\pi_1(\Sigma) \times \pi_1(S^1)$, então $g^2 z g^{-2} \in \pi_1(S^1)$, onde z é o gerador do grupo cíclico infinito $\pi_1(S^1)$. Assim, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g^2 z g^{-2} = z^m$, logo pelo Lema 2.1.4 temos que $[g, z] = 1$. Sendo g arbitrário, temos que $\pi_1(S^1)$ é normal em $\pi_1(M)$, assim utilizando o Teorema 1.6.7 temos que M é uma variedade fibrada de Seifert e pelo Teorema 3.2.5 M é uma variedade de Seifert sem singularidades. Como M é diferente do fibrado não orientável de S^2 sobre S^1 , pois não é irredutível, então usando a Proposição 1.5.16 e o Teorema 3.2.11, temos que M tem a seguinte forma:

M é não orientável, o espaço base de M é uma superfície não orientável, compacta e conexa Σ com bordo (possivelmente vazio), $\pi_1(\Sigma)$ é um grupo residualmente livre e M é qualquer variedade fibrada de Seifert sem singularidades compacta e conexa com homomorfismo de avaliação trivial.

Reciprocamente, todas as variedades fibradas de Seifert sem singularidades listadas no Teorema 3.2.11 têm grupo fundamental residualmente livre. Desta forma o Teorema está provado. ■

Corolário 4.0.3. *Se M é uma 3-variedade compacta, conexa com bordo incompressível toral (possivelmente vazio) e grupo fundamental residualmente livre não vazio, então M é uma das seguintes variedades:*

1) *Se $\pi_1(M)$ é totalmente residualmente livre, então M é a soma conexa de uma quantidade finita das seguintes variedades:*

a) $S^2 \times S^1$,

b) $\mathbb{T}^2 \times S^1$,

c) $D^2 \times S^1$,

d) Variedade fibrada de Seifert não orientável sem singularidades com base plano projetivo, classe de Euler 1 e homomorfismo de avaliação trivial, e

e) $Möb \times S^1$, onde $Möb$ é a faixa de Möbius.

- 2) Se $\pi_1(M)$ não é totalmente residualmente livre, então M é uma das variedades fibradas de Seifert listadas no Teorema 3.2.11 com grupo fundamental não totalmente residualmente livre.

Demonstração. Pelo Teorema de Decomposição Prima de Kneser-Milnor 1.3.21, temos que:

$$M = M_1 \# M_2 \dots \# M_n$$

onde cada $M_i \neq S^3$ é uma variedade prima, compacta e conexa. Além disso, $\pi_1(M) = \pi_1(M_1) * \dots * \pi_1(M_n)$.

É claro que as variedades M_i têm bordo incompressível toral (possivelmente vazio), para $i = 1, \dots, n$. Logo, se alguma variedade prima M_i não tem bordo, então pela **Conjetura de Poincaré** $\pi_1(M_i)$ não é trivial. Por outro lado, se todos as variedades primas M_i tem bordo incompressível toral não vazio, então $\pi_1(M_i)$ não é trivial, pois $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é um subgrupo de $\pi_1(M_i)$. Desta forma $\pi_1(M_i)$ é um subgrupo residualmente livre não trivial de $\pi_1(M)$, para $i = 1, \dots, n$. Agora, consideramos os seguintes casos:

- Se algum dos $\pi_1(M_i)$ não é um grupo totalmente residualmente livre não trivial, então $M = M_i$, pois se existe $j \neq i$ tal que $\pi_1(M_j) \neq 1$, então pelo Lema 2.4.6 $\pi_1(M_i) * \pi_1(M_j)$ é um subgrupo não residualmente livre de $\pi_1(M)$, o que é uma contradição. Pelo Teorema 4.0.2, temos que M é uma das variedades fibradas de Seifert listadas no Teorema 3.2.11 com grupo fundamental residualmente livre mas não totalmente residualmente livre.

- Se todos os $\pi_1(M_i)$ são grupos totalmente residualmente livres não triviais, então pelo Teorema 4.0.2, temos que M_i é uma das variedades fibradas de Seifert listadas no Teorema 3.2.11 com grupo fundamental totalmente residualmente livre, para $i = 1, \dots, n$. Neste caso M_i pode ser uma das seguintes variedades:

a) $S^2 \times S^1$,

b) $\mathbb{T}^2 \times S^1$,

c) $D^2 \times S^1$,

d) Variedade fibrada de Seifert não orientável sem singularidades com base plano projetivo, classe de Euler 1 e homomorfismo de avaliação trivial ou

e) $Möb \times S^1$, onde $Möb$ é a faixa de Möbius.

Portanto M é soma conexa de uma quantidade finita de cópias de $a)$, $b)$, $c)$, $d)$ e $e)$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Baumslag B., *Residually free groups*, Proceedings of the London Mathematical Society. Third Series, **17** (1967) 402-418.
- [2] Bogopolski O., *Introduction to Group Theory*, (EMS Textbooks in Mathematics)-European Mathematical Society (2008).
- [3] Bowditch B., *Planar groups and the Seifert conjecture*, J.Reine angew.Math., **576** 11-62 (2004).
- [4] Brin M., *Introductory notes on Seifert fibered 3-manifolds*. arXiv:0711.1346.
- [5] Cohen Daniel E., *Combinatorial group theory. A topological approach*, Queen Mary College Department of Pure Mathematics, London, 1978. Queen Mary College Mathematical Notes.
- [6] Epstein D. B. A., *Periodic flows on 3-manifolds*, Ann. of Math., **95** (1972), 66-82.
- [7] Fomenko A. T., Matveev S. V., *Algorithmic and Computer Methods for Three-Manifolds*, Springer Netherlands (1997).
- [8] Friedl S., *Centralizers in 3-manifold groups*, RIMS Kôkyûroku 1747 (2011), 23-34.
- [9] Hall M., *Subgroups of finite index in free groups*, Canadian Journal of Mathematics. Journal Canadien de Mathématiques, **1** (1949) 187-190.
- [10] Hatcher A., *Notes on Basic 3-Manifold Topology*.
- [11] Hempel J., *3-Manifolds*, (AM-86) Annals of Mathematics Studies (1976).

- [12] Hempel J., *Residual finiteness for 3-manifolds*, **volume 111** of Ann. of Math. Stud. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987, pages 379-396.
- [13] Jaco W., *Lectures on three-manifold*, topology-American Mathematical Society (1980).
- [14] Jaco W. H., Shalen P. B., *Seifert fibered spaces in 3-manifolds* Amer Mathematical Society (1981).
- [15] Kharlampovich O. and Myasnikov A., *Irreducible affine varieties over a free group. I. Irreducibility of quadratic equations and Nullstellensatz*, Journal of Algebra, **200** (1998), 472-516.
- [16] Kharlampovich O. and Myasnikov A., *Irreducible affine varieties over a free group. II. Systems in triangular quasi-quadratic form and description of residually free groups*, Journal of Algebra, **200** (1998), 517-570.
- [17] Lyndon R. C., *The equation $a^2b^2 = c^2$ in free groups*, The Michigan Mathematical Journal, **6** (1959) 89-95.
- [18] Magnus W., Karrass W., and Solitar D. *Combinatorial group theory*, 2nd ed., Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2004. Presentations of groups in terms of generators and relations.
- [19] Massey W., *A Basic Course in Algebraic Topology*.
- [20] Matsuzaki K., Taniguchi M., *Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups* (1998).
- [21] Milnor. J, *A unique decomposition theorem for 3-manifolds*, Amer. J. Math. **84** 1-7 (1962).
- [22] Myasnikov A.G., Remeslennikov V.N. *Exponential groups 2: Extensions of centralizers and tensor completion of CSA-groups*.
- [23] Munkres J., *Topology*, Prentice-Hall,2000.
- [24] Neumann W. D. and Swarup G. A., *Canonical decompositions of 3-manifolds*, Geometry and Topology, **1** 21-40 (1997).
- [25] Orlik P., *Seifert manifolds*, Lecture notes in mathematics **291**, Springer (1972).

- [26] Scott P., *The geometries of 3-manifolds*, The Bulletin of the London Mathematical Society, **15** (1983) 401-487.
- [27] Sela Z., *Diophantine geometry over groups: a list of research problems*. Preprint.
- [28] Sela Z., *Diophantine geometry over groups. I. Makanin - Razborov diagrams*, Publications Mathématiques. Institut de Hautes Études Scientifiques, (2001), pages 31-105.
- [29] Vick J. W., *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology* Academic Press (1973).
- [30] Thurston W.P., *Geometry and topology of 3-manifolds* (2002).
- [31] Thurston W.P., *Three-Dimensional Geometry and topology, apostila, Dept. of Mathematics, Princeton University (versão não publicada)*.
- [32] Thurston W.P., *Hyperbolic Structures on 3-manifolds, I: Deformations of acylindrical manifolds*, Annals of Math. **124** (1986), 203-246.
- [33] Thurston W.P., *Hyperbolic Structures on 3-manifolds, II: Surface groups and manifolds which fiber over S^1* , Preprint 1986.
- [34] Thurston W.P., *Hyperbolic Structures on 3-manifolds, III: Deformations of 3-manifolds with incompressible boundary*, Preprint 1986.
- [35] Wilton H., *Residually free 3-manifolds*. Algebr. Geom. Topol. 8, no. 4, 2031-2047, 2008.
- [36] Wilton H., *An Introduction to Limit Groups*, March 3, 2005.
- [37] Zieschang, Vogt E., Coldewey H., Stillwell J. *Surfaces and Planar Discontinuous Groups-Springer* (1980).