Thiago VedoVatto

Medidas de memória longa em séries temporais:

Comparação de métodos de estimação do coeficiente de Hurst

Brasília
2014

Thiago VedoVatto

Medidas de memória longa em séries temporais:

Comparação de métodos de estimação do coeficiente de Hurst

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília, para a obtenção de Título de Mestre em Ciências, na Área de Estatística.

Orientador: Peter Zörnig
Co-orientador: Raul Yukihiro Matsushita

Brasília
2014

VedoVatto, T.

Medidas de memória longa em séries temporais: Comparação de métodos de estimação do coeficiente de Hurst

97 páginas

Dissertação (Mestrado) - Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília. Departamento de Estatística.

1. Memória longa
2. Coeficiente de Hurst
3. Estimadores de memória longa
4. Autossimilaridade
5. Fractais aleatórios

I. Universidade de Brasília. Instituto de Ciências Exatas. Departamento de Estatística.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr.
Raul Yukihiro Matsushita

Prof. Dr.
Annibal Dias de Figueiredo Neto

Prof. Dr.
Peter Zörnig

Agradeço ao meu professor orientador que teve paciência e que me ajudou bastante à concluir este trabalho, agradeço também aos meus professores que durante o curso me ensinaram e que me mostraram o quanto estudar é gratificante.

Nessun Dorma

Nessun dorma! Nessun dorma!
Tu pure, o, principessa
Nella tua fredda stanza
Guardi le stelle
Che tremano d'amore
E di speranza.

Ma il mio mistero e chiuso in me
Il nome mio nessun saprá!
No, no, sulla tua bocca lo diró
Quando la luce splenderá!

Ed il mio bacio sciogliera il silenzio
Che ti fa mia!

(Il nome suo nessun saprá!
E noi dovrem, ahimé, morir!)

Dilegua, o notte!
Tramontate, stelle!
Tramontate, stelle!
All'alba vinceró!
Vinceró, vinceró!

Luciano Pavarotti

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, ao meu co-orientador, aos meus colaboradores, aos técnicos, à seção administrativa, à Capes que me forneceu auxílio financeiro durante toda a redação deste trabalho, aos meus amigos e à minha família.

Resumo

O Coeficiente de Hurst pode ser usado como medida de memória longa para uma série temporal. Nesse trabalho investiga-se o desempenho de alguns métodos de estimação do coeficiente de Hurst, com foco nos testes clássicos realizados sobre ruídos brancos gaussianos e em ruídos brancos que sigam distribuições com caudas longas (Cauchy e α-estável). Investiga-se o desempenho dos estimadores em séries temporais que apresentem quebras estruturais no decorrer do tempo. Uma última bateria de testes verifica o desempenho em séries temporais com diferentes configurações de construção de subséries no algoritmo de estimação.

Palavras-chave: Memória longa, Coeficiente de Hurst, Estimadores de memória longa, Autossimilaridade, Fractais aleatórios

Abstract

The Hurst exponent can be used as a measure of long memory in time series. In this paper we investigate the performance of some methods of estimating the Hurst exponent , with a focus on classic tests of Gaussian white noise and white noise that follow distributions with long tails (Cauchy and α-stable). We investigate the performance of the estimation for time series showing structural breaks over time. A final set of tests verifies the performance in time series with different settings for the construction of subseries in the estimation algorithm .

Keywords: Long Memory, Hurst exponent, Long memory estimators, Self-similarity, Random fractals

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Algoritmos

Nomenclatura

ARFIMA Modelo auto-regressivo fracionado integrado de médias móveis

DFA Análise de Flutuações Destendenciadas

MBF Movimento Browniano Fracionado

MBP Movimento browniano padrão

PAS Processo autosimilar

PASIE Processo autosimilar com incrementos estacionários

PBF Ponte browniana fracionada

PBP Ponte browniana padrão

PEE Processo estritamente estacionário

PFE Processo fracamente estacionário

PG Processo gaussiano

PIE Processo com incrementos estacionários

PML Processo de memória longa

RBF Ruído Branco Fraco

RBG Ruído Branco Gaussiano

RBI Ruído Branco Independente

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O coeficiente de Hurst (H) surgiu originalmente na hidrologia com os trabalhos de Hurst (1951); Hurst *et al.* (1965), sendo calculado por meio de procedimentos empíricos. Sua estimação em dados experimentais é fundamental no estudo de processos que apresentam memória longa e autosimilaridade. O seu uso como indicativo dessas características tem sido amplamente discutido em artigos científicos nos mais variados contextos, como feito em Ausloos e Ivanova (2000), Weron e Przybyłowicz (2000), Carbone *et al.* (2004), Grech e Mazur (2004), Matos *et al.* (2004, 2008), da Silva *et al.* (2007), Alvarez-Ramirez *et al.* (2008), Ayadi *et al.* (2009), Arsenos *et al.* (2012).

As técnicas modernas de estimação de H são influenciadas pela geometria fractal, pois seu valor está diretamente relacionado à dimensão fractal, sendo ambas as medidas úteis na descrição da regularidade de uma superfície. H está restrito ao intervalo (0,1) sendo que $H = 1/2$ é característico de ruídos brancos no qual há independência entre as realizações do processo. Uma série de dados com H próximo de 1 apresenta um valor pequeno para a dimensão fractal (superfície mais "rugosa" ou irregular) esta série apresenta comportamento persistente com efeitos de memória mais duradouros. Kale e Butar (2005, p. 12) ilustram que esse comportamento persistente indica que a série temporal cobre uma "distância" maior do que uma série gaussiana equivalente, em contrapartida uma série de dados com valor pequeno para H apresenta um alto valor para a dimensão fractal (superfície mais "lisa" ou regular) esta série apresenta comportamento antipersistente com efeitos de memória menos duradouros então a série temporal cobre uma "distância" menor do que uma série gaussiana equivalente.

A dimensão fractal é útil na determinação da rugosidade de superfícies, classificação de imagens, distinção entre tipos de paisagens, detecção de bandas espectrais ruidosas, determinação da escala operacional de fenômenos naturais em imagens digitais, análise da diversidade da paisagem, análise dos efeitos da conversão de dados em sistemas de informações geográficas, escalonamento aplicado às extensões espaciais em sensoriamento remoto, na análise de superfícies fraturadas, desgaste, erosão e corrosão.

Há também a chamada autosimilaridade estocástica que ocorre quando assumimos que qualquer trecho de uma série de dados apresenta as mesmas propriedades probabilísticas que o todo. Essa forma de autosimilaridade foi introduzida por Kolmogorov (1941), mas só passou a ter relevância a partir dos trabalhos de Mandelbrot (1967), Mandelbrot e Van Ness (1968), Mandelbrot e Wallis (1969). Atualmente é observada em dados de tráfego de rede, economia, física, cartografia, gráficos gerados por computador, biologia, medicina e várias outras áreas.

A estimativa do coeficiente de Hurst fornece uma forma de diferenciar quando uma série temporal é composta por um processo de ruído branco aleatório puro e quando apresenta uma tendência subjacente (comportamento persistente), no qual há dependência entre as realizações de um processo estocástico. Uma outra forma de verificar essas características está na função de autocorrelação da série de dados. Quando a autocorrelação da série de dados apresenta um decaimento muito lento (ou infinito) caracteriza-se o efeito de memória longa.

Esse texto possui dois objetivos. O primeiro é apresentar uma releitura da construção teórica do coeficiente de Hurst explicitando sua conexão com processos de memória longa e autosimilaridade. O segundo é comparar alguns dos principais métodos de estimá-lo. Vários estimadores para dependência de memória longa tem sido propostos, portanto, é importante comparar sua acurácia em séries com diferentes características. Existem vários artigos que promovem comparações entre esses diferentes métodos, tais como Lo (1991), Taqqu *et al.* (1995), Hu *et al.* (2001), Weron (2002), Giraitis *et al.* (2003), Cajueiro e Tabak (2005), Couillard e Davison (2005), Matsushita *et al.* (2007), Granero *et al.* (2008), Barunik e Kristoufek (2010), Racine (2011) e Kirichenko *et al.* (2011). Neste texto propõem-se comparações similares as que encontram-se nesses trabalhos com o acréscimo de que o conjunto de métodos aqui descritos difere dos métodos testados nos trabalhos acima.

Na seção 2.1 introduz-se os processos estocásticos, teoria assintótica, distribuições de probabilidade e outros conceitos preliminares necessários ao correto entendimento do restante deste trabalho. Na sequencia a seção 2.2 inicia a construção teórica dos processos com memória longa. Essa seção está diretamente ligada à seção 2.3 que introduz os processos autosimilares e ainda caracteriza a conexão entre memória longa, autosimilaridade e o coeficiente de Hurst. A seção 2.4 introduz a estatística ${}^{R}\!/\!{}_{S}$ necessária para a estimação de H pelo método pioneiro proposto por Hurst (1951). A seção 2.5 apresenta a definição clássica do coeficiente de Hurst. O capítulo 2 termina na seção 2.6 que define os movimentos brownianos padrão e fracionado.

O capítulo 3 é dedicado inteiramente à descrição de métodos de estimação do coeficiente de Hurst como os métodos ${}^{R}\!/\!{}_{S}$ clássico e modificado, KPSS, ${}^{V}\!/\!{}_{S}$, Análise de Variância das Médias e Análise de Flutuações Destendenciadas. Na seção 3.1 estão descritas técnicas sobre como cobrir uma série temporal por um conjunto de subséries por vários métodos diferentes.

A metologia utilizada nesse texto é apresentada no capítulo 4 onde descrevem-se os testes realizados. O trabalho é encerrado no capítulo 5 com as análise dos resultados obtidos seguido de comentários. Nos apêndices A, B e C estão os gráficos, as tabelas e os algoritmos referenciados no decorrer do texto.

Capítulo 2

Séries Temporais e o Coeficiente de Hurst

2.1 Conceitos e resultados preliminares

2.1.1 Processos estocásticos

Considere um conjunto de índices T. Um *processo estocástico* é uma família de variáveis aleatórias definida em um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbb{F}, P)$:

$$\begin{aligned} Z &= \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_t, Z_{t+1}\} \\ &= \{Z_t, t \in T\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

As funções $\{Z_t(\omega), \omega \in \Omega\}$ em T são as observações de (2.1) e chamam-se séries temporais do processo estocástico. Uma série temporal com n observações sucessivas será denotada:

$$\begin{aligned} Z_t &= \{Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n\} \\ &= \{z_1, \ldots, z_n\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Nesse contexto o valor observado do processo estocástico (2.1) no instante t será denotado z_t.

Considera-se qualquer trecho da série temporal (2.2) com τ observações sucessivas após o instante t como uma *subsérie* da série temporal original. Essa subsérie será denotada por:

$$Z_t^\tau = \{z_{t+1}, \ldots, z_{t+\tau}\} \tag{2.3}$$

No desenrolar todo esse texto impõem-se no processo (2.1) a restrição $E\,|Z_t^2| < \infty$. Sob essa condição a função média[1], $\mu(t) = \mu_t$, de (2.1) será dada por:

$$\mu(t) = E(Z_t) \tag{2.4}$$

A *função de autocovariância*, $\gamma(t_1,t_2) = \gamma_{(t1,t2)}$, de (2.1) será dada por:

$$\begin{aligned} \gamma(t_1,t_2) &= E[(Z_{t_1} - \mu_{t_1})(Z_{t_2} - \mu_{t_2})] \\ &= E(Z_{t_1} Z_{t_2}) - \mu_{t_1}\,\mu_{t_2} \end{aligned} \tag{2.5}$$

A *função de variância*, $\sigma^2(t) = \sigma_t^2$, de (2.1) será dada por:

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &= \gamma(t,t) \\ &= E[Z_t^2] - \mu_t^2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

E por fim a *função de autocorrelação*, $\rho(t_1,t_2) = \rho_{(t1,t2)}$, de (2.1) será dada por:

$$\rho(t_1,t_2) = \frac{\gamma(t_1,t_2)}{\sqrt{\sigma^2(t_1)\sigma^2(t_2)}} \tag{2.7}$$

O conceito de *estacionariedade* é apresentado em Morettin e Toloi (2006, p. 4)

[1] Nesse trabalho as notações $\mu(t)$ e μ_t serão usadas simultaneamente para a função média. Notações análogas foram adotadas para as funções de covariância, variância e correlação

como sendo a característica de uma série temporal que se desenvolve no tempo aleatoriamente ao redor de uma média constante, refletindo alguma forma de equilíbrio estável. Intuitivamente um processo estocástico é *estacionário* se todos os aspectos de seu comportamento se mantém constantes no decorrer do tempo.

Uma das características intrínsecas das séries temporais é que observações adjacentes são tipicamente *dependentes* e o interesse na investigação da natureza dessa dependência é o que, essencialmente, motiva a *análise de séries temporais*.

Uma série temporal é dita *estacionária* quando a variância é constante e as propriedades probabilísticas conservam-se no decorrer do tempo. Séries temporais *não-estacionárias* caracterizam-se pela existência de *tendências* de variação.

O processo (2.1) será *estritamente estacionário* (PEE) se, para qualquer inteiro τ finito e para qualquer conjunto de índices $t_1,\ldots,t_\tau$ a função de distribuição de probabilidade conjunta de $(Z_t,Z_{t_1},\ldots,Z_{t_\tau})$ depende somente de $t_1 - t,,\ldots,t_\tau - t$ e não depende de t.

Um PEE tem a mesma média e mesma variância para todo t, em particular, se $Z_1 \sim N(\mu,\sigma^2)$, então $Z_t \sim N(\mu,\sigma^2)$ qualquer que seja t. Dessa forma valem as propriedades:

$$\mu = E(Z_t) \tag{2.8}$$

$$\sigma^2 = E[(Z_t - \mu)^2] \tag{2.9}$$

O processo (2.1) será *fracamente estacionário*[2] se para todo $t,\tau \in \mathbb{Z}$ valerem as seguintes propriedades:

PFE 1: $E(Z_t) = \mu$;

PFE 2: $\text{var}(Z_t^2) = \sigma^2$;

PFE 3: $\text{cov}(Z_t,Z_{t+\tau}) = \gamma_\tau$

[2] Um PFE também é chamado de *processo com covariância estacionária* (PFE) ou *processo estacionário de segunda ordem*

As propriedades PFE 1 e PFE 2 garantem que os momentos de segunda ordem são invariantes em relação ao tempo, ou seja:

$$E(Z_t^2) = \mu^2 + \sigma^2 \tag{2.10}$$

A propriedade PFE 3 mostra que a covariância depende apenas de τ sendo invariante em relação ao tempo. Essa é a chamada *autocovariância* num intervalo de tamanho τ, assim, a *função de autocovariância*, $\gamma(\tau)$, de um PFE é dada por:

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= \text{cov}(Z_t, Z_{t+\tau}) \\ &= E(Z_t Z_{t+\tau}) - \mu^2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Veja que em (2.11) o índice t é mudo para o cálculo de $\gamma(\tau)$, assim, num PFE $\gamma(\tau)$ só depende de τ. Quando $\tau = 0$ obtém-se:

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= E[(z_t - \mu)^2] \\ &= \sigma^2 \end{aligned} \tag{2.12}$$

A *função de autocorrelação*, $\rho(\tau)$, de um PFE é dada por:

$$\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\sigma^2} \tag{2.13}$$

A função (2.13) é obtida por meio da normalização da função de autocovariância em (2.11) pela função de variância em (2.6). Note que pelas condições de estacionariedade em um PFE vale a propriedade:

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &= \sigma^2(t+\tau) \\ &= \sigma^2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Evidentemente num PFE a função de autocorrelação só depende de τ. Um fato importante de se notar é a restrição:

$$-1 < \rho(\tau) < 1 \tag{2.15}$$

É notável também que:

$$\rho(0) = 1 \tag{2.16}$$

Quanto mais próximo de 1 estiverem os valores da função de autocorrelação maior será a dependência temporal (correlação linear) direta entre as observações. Um processo que apresente $\rho(\tau) = 0$ para todo τ é dito *não correlacionado*[3].

Em todo PEE são satisfeitas as propriedades PFE 1, PFE 2 e PFE 3, pois a hipótese de estacionariedade estrita impõem que a distribuição de probabilidade conjunta de $(Z_t, Z_{t+\tau})$ dependa somente de τ e não dependa de t, isso equivale a exigir que os momentos de primeira e segunda ordem sejam constantes.

A média e a variância do processo (2.1) são estimados respectivamente pela média e variância amostrais:

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} z_t \tag{2.17}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(z_t - \bar{z}) \tag{2.18}$$

A verificação de que esses estimadores são não-viesados e consistentes é encontrada no livro de Rathie e Zörnig (2012, p. 338). Comentários acerta da eficiência desses estimadores quando aplicados em séries temporais estão no texto de Beran *et al.* (2013, p. 393).

A seguir são apresentados alguns exemplos de processos estocásticos:

[3]Vale lembrar também que esse fato por sí só não garante a independência das observações, pois o coeficiente de correlação mede apenas a correlação linear.

Exemplo 2.1 (Ruído Branco Independente - RBI)

Suponha que no processo (2.1) ocorra $Z_t \overset{iid}{\sim} (0{,}\sigma^2)$, ou seja, o processo tenha média zero, variância constante e as realizações sejam independentes e identicamente distribuídas. Esse processo será chamado *ruido branco independente* e denotado $Z \sim RBI(0{,}\sigma^2)$.

Da independência entre Z_t e $Z_{t+\tau}$ quando $\tau > 0$ decorre que $\gamma(\tau) = 0$ se $\tau > 0$.

Exemplo 2.2 (Ruído Branco Gaussiano[4] - RBG)

Suponha que no processo (2.1) ocorra $Z_t \overset{iid}{\sim} N(0{,}\sigma^2)$, ou seja, o processo tenha distribuição normal com média zero, variância constante e as realizações sejam independentes e identicamente distribuídas. Esse processo será chamado *ruido branco gaussiano* e denotado $Z \sim RBG(0{,}\sigma^2)$.

Da independência entre Z_t e $Z_{t+\tau}$ quando $\tau > 0$ decorre que $\gamma(\tau) = 0$ se $\tau > 0$.

Exemplo 2.3 (Ruído Branco Fraco - RBF)

Suponha que o processo (2.1) tenha uma distribuição determinada com média zero, variância constante e as realizações sejam não correlacionadas. Esse processo será chamado *ruido branco fraco* e denotado $Z \sim RBF(0{,}\sigma^2)$.

Da independência entre Z_t e $Z_{t+\tau}$ quando $\tau > 0$ decorre que $\gamma(\tau) = 0$ se $\tau > 0$.

Os operadores *n-ésimo antecessor* e *diferença* são dados, respectivamente, por:

$$B^n z_t = z_{t-n} \tag{2.19}$$

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1} \tag{2.20}$$

O uso recursivo do *operador diferença* ∇ é uma técnica útil para transformar uma série não-estacionária homogênea em uma série estacionária[5]. É útil expressar ∇z_t em função do operador antecessor:

$$\nabla z_t = (1 - B) z_t \tag{2.21}$$

[4]Também é conhecido como Processo Gaussiano

[5]Exemplos estão em Box *et al.* (2008, p. 8)

O operador da *n-ésima diferença* é expresso por:

$$\nabla^n z_t = \nabla[\nabla^{n-1} z_t] = (1 - B)^n z_t \tag{2.22}$$

A *série de incrementos* do processo estocástico (2.2) é a série temporal $Y = \{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ na qual:

$$\begin{aligned} y_i &= z_{i+1} - z_i, \quad i \in \{1, \ldots n-1\} \\ &= \nabla z_{i+1}, \quad i \in \{1, \ldots n-1\} \end{aligned} \tag{2.23}$$

Uma série temporal não-estacionária é dita *homogênea* quando ao aplicar-se o operador (2.22) com um n finito obtém-se uma série estacionária, ou seja, quando se realizando um número finito de diferenças a série se torna estacionária.

2.1.2 Distribuições de Probabilidade com Cauda Longa

Nesse texto serão usadas duas distribuições de probabilidade com a característica de terem caudas longas (cauda pesada), a distribuição de Cauchy-Lorentz e a distribuição α-estável.

Uma variável aleatória X é dita ter *distribuição de Cauchy-Lorentz com parâmetro* θ, $-\infty < \theta < \infty$, se sua densidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + (x - \theta)^2} \qquad -\infty < x < \infty \tag{2.24}$$

Notação: $X \sim \text{Cauchy}(\theta)$.

A sua média não é definida, logo, ela também não tem desvio padrão. O seu segundo momento é infinito. A distribuição de Cauchy pode ser simulada como a razão entre duas normais independentes quando $\theta = 0$.

A função de densidade de uma *distribuição α-estável* não possui forma analítica, sendo descrita por sua função característica[6]. Nesse trabalho adota-se a seguinte função característica para a distribuição α-estável:

$$\phi(u) = \begin{cases} \exp(-\gamma^{\alpha}|u|^{\alpha}\left[1 + i\beta\left(\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)(\operatorname{sign} u)(|\gamma u|^{1-\alpha} - 1)\right] + i\delta u) & \alpha \neq 1 \\ \exp(-\gamma|u|\left[1 + i\beta\frac{2}{\pi}(\operatorname{sign} u)\ln(\gamma|u|)\right] + i\delta u) & \alpha = 1 \end{cases} \tag{2.25}$$

Dessa forma a função de densidade de probabilidade é expressa por:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(u)\exp(-ixu)du \tag{2.26}$$

2.2 Processos com memória longa

Giraitis *et al.* (2003, p. 266) discutem que a memória longa é comumente usada para descrever a dependência persistente entre observações de séries temporais Z_t conforme a defasagem[7] entre elas aumente. Em sequencias estacionárias, a covariância é tipicamente caracterizada pelo *decaimento hiperbólico*, τ^{2d-1} $(0 < d < 1/2)$, da função de autocovariância (2.5), a qual não é absolutamente somável. A série é considerada de *memória curta* se a função de autocovariância é absolutamente somável.

A *função de densidade espectral* $f(\lambda)$ é a transformada de Fourier da função de autocorrelação de uma série temporal.

Segundo Bennett e Rice (1963, p. 2355), a função de densidade espectral de uma sequência aleatória de sinais define a distribuição da média do sinal em função da frequência, portanto, a função de autocorrelação é análoga à função de densidade espectral com a diferença de que a primeira está definida no domínio do tempo e a segunda no das frequências.

[6] A função característica corresponde à inversa da transformada de Fourier da função de densidade de probabilidade. Para uma leitura introdutória adequada sobre as transformadas de Fourier recomenda-se o texto de Boyce e DiPrima (2001)

[7] A defasagem entre Z_t e $Z_{t+\tau}$ é de τ

Beran (1994, p. 42) apresenta duas definições formais para o *processo de memória longa* (PML). Considere um processo estacionário que satisfaça ao menos uma das hipóteses:

Hipóteses 1. *Suponha que exista um número real* $\beta \in (0{,}1)$ *e uma constante* $c_f > 0$ *de modo que*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda)}{c_f |\lambda|^{-\beta}} = 1 \tag{2.27}$$

Hipóteses 2. . *Suponha que exista um número real* $\alpha \in (0{,}1)$ *e uma constante* $c_\rho > 0$ *de modo que*

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{\rho_\tau}{c_\rho \tau^{-\alpha}} = 1 \tag{2.28}$$

O processo (2.1) será *estacionário com memória longa* se satisfizer ao menos uma das hipóteses anteriores.

Note que em ambas as equações (2.28) e (2.27) a definição de PML é assintótica.

A equação (2.27) mostra que em um PML a densidade espectral $f(\lambda)$ é assintoticamente igual ao produto de uma constante c_f por $\lambda^{-\beta}$ nas proximidades de zero para algum $0 < \beta < 1$. Analogamente equação (2.28) deixa explícito que as correlações são assintoticamente iguais ao produto de uma constante c_ρ por $\tau^{-\alpha}$ para algum $0 < \alpha < 1$.

Considere agora:

$$H = 1 - \alpha/2 \tag{2.29}$$

onde α é a constante que aparece em (2.28). Na seção 2.5 H será reconhecido como *coeficiente de Hurst*.

Note que na Hipótese 2 α está restrito ao intervalo (0,1), portanto, em um PML:

$$1/2 < H < 1 \tag{2.30}$$

Beran (1994, p. 42) mostra que sob essa condição obtém-se o chamado movimento browniano fracionado que será discutido na seção 2.6.

Os teoremas 2.1 e 2.2 garantem a equivalência das hipóteses 1 e 2. A demonstração desse fato se encontra em Zygmund (1953).

Teorema 2.1. *Suponha que* $0 < \alpha = 2-2H < 1$ *na equação* (2.28)*. Então a densidade espectral* f *existe e:*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda)}{c_f(H)|\lambda|^{1-2H}} = 1$$

em que $c_f = \sigma^2 \pi^{-1} c_\rho \Gamma(2H-1)\sin(\pi - \pi H)$ *e* $\sigma^2 = \mathrm{var}(X_t)$

Teorema 2.2. *Suponha que* $0 < \beta = 2H - 1 < 1$ *na equação* (2.27)*. Então:*

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{\rho_\tau}{c_\rho \tau^{2H-2}} = 1$$

em que $c_\rho = {}^{c_\gamma}/_{\sigma^2}$ *e* $c_\gamma = 2c_f\Gamma(2-2H)\sin(\pi H - {}^{\pi}/_{2})$.

Considere agora o teorema à seguir que está demonstrado em Beran (1994):

Teorema 2.3. *Seja* X_t *um processo estacionário com memória longa. Então:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{c_\gamma n^{2H}} = \frac{1}{H(2H-1)} \tag{2.31}$$

Recordando (2.29) os lados direito e esquerdo de (2.31) podem ser reescritos como:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{var}(\sum_{i=1}^{n} X_i)}{c_\gamma n^{2H}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{var}(\bar{X})}{c_\gamma n^{-\alpha}} \tag{2.32}$$

$$\frac{1}{H(2H-1)} = \frac{1}{(1 - {}^{\alpha}/_{2})(1-\alpha)} \tag{2.33}$$

Considere agora a nova constante c_{var}:

$$c_{var} = \frac{c_\gamma}{(1 - {}^{\alpha}/_{2})(1-\alpha)} \tag{2.34}$$

Por fim, combinando (2.32), (2.33) e (2.34) obtêm-se:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\text{var}(\bar{X})}{c_{var} n^{-\alpha}} = 1 \tag{2.35}$$

A equação (2.35) mostra que em um PML a variância da média amostral $\text{var}(\bar{X})$ é assintoticamente igual ao produto de uma constante c_{var} por $n^{-\alpha}$ para algum $0 < \alpha < 1$.

Há vários modelos de processos estocásticos que garantem a ocorrência das condições previstas em (2.28) e (2.27), dois deles são os processos *autosimilares* e os processos *autoregressivos fracionários integrados de médias móveis* ou *ARFIMA*.

2.3 Processos autosimilares

Sapozhnikov e Foufoula-Georgiou (1996, p. 1430) definem *autoafinidade* como a característica dos *objetos autoafins*. Cada parte de um objeto autoafim é uma imagem (cópia) do todo (seja no sentido estrito ou estatístico) redimensionado com coeficientes distintos em direções diferentes.

Para compreender melhor a ideia considere uma região no formato retangular $X \times Y$ de um objeto qualquer. Quando ao reescalonar-se essa região diferentemente nas direções de X e Y obtenha-se o mesmo padrão do objeto todo, então o objeto é autoafim. Matematicamente isso equivale à:

$$M(X,Y) \sim X^{1/v_x} \sim Y^{1/v_y} \tag{2.36}$$

onde $M(X,Y)$ é a massa do objeto no retângulo considerado e v_x e v_y são os *expoentes fractais*.

A *autosimilaridade* é definida como um caso particular da autoafinidade, no qual (2.36) toma a forma:

$$M(R) \sim R^D \tag{2.37}$$

onde $R = X = Y$, o que significa que no contexto acima a região considerada é quadrada, e $v_x = v_y = {}^1\!/\!_D$. O coeficiente D é a *dimensão fractal*.

Isto significa que para perceber a autosimilaridade de um objeto autoafim é necessário reescaloná-lo mediante uma *transformação afim anisotrópica*[8].

A *autosimilaridade estocástica* é definida por Beran (1994, p. 48) em função da distribuição de um processo estocástico:

Seja (2.1) um processo estocástico com um parâmetro de tempo contínuo t. Z é chamado *processo autosimilar com parâmetro de autosimilaridade* H (PAS), se para qualquer fator de escala positivo τ, o processo estocástico $\tau^{-H} Z_{\tau t}$ reescalado com escala de tempo τt apresenta a mesma distribuição que Z_t.

$$Z_{\tau t} \stackrel{d}{=} \tau^H Z_t, \quad \forall \tau > 0 \tag{2.38}$$

Beran (1994, p. 48) esclarece que o conceito de autosimilaridade estocástica é inspirado na *autosimilaridade determinística* apresentado na Geometria Fractal. Uma forma com autosimilaridade determinística é composta basicamente por uma forma padrão básica que é repetida numa escala múltipla (ou infinita).

De (2.38) decorrem as seguintes propriedades:

$$E(Z_{\tau t}) = \tau^H \, E(Z_t), \quad \forall \tau > 0 \tag{2.39}$$

$$\mathrm{var}(Z_{\tau t}) = \tau^{2H} \, \mathrm{var}(Z_t), \quad \forall \tau > 0 \tag{2.40}$$

$$\rho(\tau t,\tau s) = \tau^{2H} \rho(t,s), \quad \forall \tau > 0 \tag{2.41}$$

Seja (2.1) um processo estocástico com um parâmetro de tempo contínuo t. Considere o conjunto de índices $\{t_1, \ldots, t_k\}$ com $k \geq 1$. Se a distribuição de $(Z_{t_1+\tau} - Z_{t_1+\tau-1}, \ldots, Z_{t_k+\tau} - Z_{t_k+\tau-1})$ for invariante com relação ao parâmetro de translação

[8] Uma transformação afim anisotrópica é aquela que não possui propriedades iguais em todas as direções.

$\tau \in \mathbb{R}$, então Z_t é um *processo com incrementos estacionários* (PIE).

Segue dessa definição que para um PIE:

$$E(Z_t) = E(Z_{t+\tau}) \quad \forall \tau > 0 \tag{2.42}$$

Considere o processo associado de incrementos Y como em (2.23). Devido a (2.42) obtém-se uma das propriedades mais importantes do PIE:

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= E(Z_t - Z_{t-1}) \\ &= E(Z_t) - E(Z_{t-1}) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Dada a propriedade (2.42), é comum assumir, sem perda de generalidade, que em um PIE $E(Z_t) = 0$. Assumindo também, sem perda de generalidade, que $Z_0 = 0$, então o PIE passa a ser um caso particular de um PFE, pois:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[(Z_t - Z_{t-1})^2] \\ &= E[(Z_1 - Z_0)^2] \\ &= E(Z_1^2) \end{aligned} \tag{2.44}$$

Vervaat (1987) apresenta algumas relações importantes entre o coeficiente de Hurst e os processos autosimilares com incrementos estacionários (PASIE). As demonstrações dos seguintes teoremas estão no supracitado material.

Teorema 2.4. *Considere $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência estacionária de variáveis aleatórias e $a_1, a_2, \ldots$ uma sequência positiva de constantes normalizantes tais que $\log a_n \to \infty$. Seja (2.1) um processo estocástico no qual $Z_1 \neq 0$ com probabilidade positiva sendo Z_t*

a distribuição assintótica da sequência de somas parciais normalizadas:

$$\frac{S_{nt}}{a_n} = \frac{\sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i}{a_n}, \quad n = 1{,}2, \ldots \tag{2.45}$$

onde $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x. Então existe $H > 0$ de modo que para qualquer $u > 0$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{nu}}{a_n} = u^H \tag{2.46}$$

e Z_t é um PASIE com parâmero de autosimilaridade H.

Pelo teorema 2.4 sempre que um processo é limite de uma soma normalizada de variáveis aleatórias, ele é necessariamente um PASIE.

Teorema 2.5. *Todo PASIE com parâmetro de autosimilaridade $H > 0$ pode ser obtido por meio das somas parciais normalizadas em (2.45).*

Assumindo, sem perda de generalidade, $t = 1$ na equação (2.38) obtêm-se:

$$Z_\tau \stackrel{d}{=} \tau^H Z_1, \quad \text{para todo } \tau > 0 \tag{2.47}$$

A equação (2.47) é naturalmente uma propriedade de todo PAS com parâmetro H. Os trabalhos de Vervaat (1985, 1987) apresentam o seguinte resultado:

Teorema 2.6. *Todo PAS descrito pela equação (2.47) apresenta o seguinte comportamento assintótico com $\tau \to \infty$:*

PAS 1: Se $H < 0$, então $Z_\tau \xrightarrow{d} 0$;

PAS 2: Se $H = 0$, então $Z_\tau \xrightarrow{d} Y_1$;

PAS 3: Se $H > 0$ e $Z_\tau \neq 0$, então $|Z_t| \xrightarrow{d} \infty$.

E o seguinte comportamento assintótico quando $\tau \to 0$:

PAS 4: Se $H < 0$ *e* $Z_\tau \neq 0$, *então* $|Z_t| \xrightarrow{d} \infty$;

PAS 5: Se $H = 0$, *então* $Z_\tau \xrightarrow{d} Z_1$;

PAS 6: Se $H > 0$, *então* $Z_\tau \xrightarrow{d} 0$.

No teorema 2.6 o PAS será estacionário apenas nos casos particulares em que $Z_\tau \equiv 0$ ou $H = 0$. Para todos os demais valores de H o processo não é estacionário. O interesse deste trabalho reside nos PASIE, logo, não há porque considerar esses casos particulares.

Os textos de Vervaat (1985, 1987) mostram que quando na equação (2.47) ocorrer $H < 0$ o processo é não-mensurável, por essa razão Beran (1994, p. 51) afirma que na modelagem de um PASIE o coeficiente de autosimilaridade pode ficar restrito a $H > 0$.

Na discussão de Beran (1994, p. 51-55), considere que (2.1) seja um PASIE com função de autocovariância dada por (2.5), assim:

$$\begin{aligned} E[(Z_t - Z_s)^2] &= E[(Z_{t-s} - Z_0)^2] \\ &= E[Z_{t-s}^2] \\ &= E[(t-s)^{2H} Y_1^2] \text{ por } (2.47) \\ &= \sigma^2 (t-s)^{2H} \end{aligned} \tag{2.48}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} E[(Z_t - Z_s)^2] &= E[Z_t^2] + E[Z_s^2] - 2\,E[Z_t Z_s] \\ &= \sigma^2\, t^{2H} + \sigma^2\, s^{2H} - 2\,\gamma(t,s) \text{ por } (2.47) \end{aligned} \tag{2.49}$$

Combinando as expressões (2.48) e (2.49) obtém-se:

$$\gamma(t,s) = \frac{\sigma^2}{2}[t^{2H} - (t-s)^{2H} + s^{2H}] \tag{2.50}$$

Considere agora o processo de incrementos Y dado por (2.23) com $t \in \mathbb{Z}_+$. A covariância entre Y_t e $Y_{t+\tau}$ com $\tau \geq 0$ é dada por:

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{2}\sigma^2[(\tau+1)^{2H} - 2\tau^{2H} + (\tau-1)^{2H}] \tag{2.51}$$

No caso de $\tau < 0$ em (2.51) tem-se:

$$\gamma(\tau) = \gamma(-\tau) \tag{2.52}$$

A função de autocorrelação é obtida mediante (2.13):

$$\rho(\tau) = \frac{1}{2}[(\tau+1)^{2H} - 2\tau^{2H} + (\tau-1)^{2H}] \tag{2.53}$$

No caso de $\tau < 0$ em (2.53) tem-se:

$$\rho(\tau) = \rho(-\tau) \tag{2.54}$$

Note que é possível exprimir (2.53) da seguinte forma:

$$\rho(\tau) = \frac{1}{2}\tau^{2H}g(\tau^{-1}) \tag{2.55}$$

onde:

$$g(x) = (1+x)^{2H} - 2 + (1-x)^{2H} \tag{2.56}$$

com base nessa observação Beran (1994, p. 52) mostra que se $0 < H < 1$ e $H \neq {}^{1}\!/_{2}$ então o primeiro termo não nulo da expansão de Taylor de (2.56) é equivalente a $2H(2H-1)x^2$ o que implica que:

$$\lim_{\tau \to \infty} \rho(\tau) = H(2H-1)\tau^{2H-2} \tag{2.57}$$

Beran (1994, p. 52) esclarece que quando ocorrer a condição (2.30) em (2.57) então as correlações decaem para zero tão lentamente que:

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \rho(\tau) = \infty \tag{2.58}$$

o que caracteriza um PML. Note que comparando (2.28) com (2.57) fica claro que $\alpha = 2 - 2H$ confirmando (2.29).

No caso de $H = 1/2$ em (2.57) as correlações para defasagens não-nulas são zero (observações não correlacionadas).

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \rho(\tau) = 0 \tag{2.59}$$

E se $0 < H < 1/2$ as correlações são somáveis de forma que:

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \rho(\tau) = -\infty \tag{2.60}$$

que segundo Beran (1994, p. 52) ocorre apenas em séries superdiferenciadas[9] e muito raramente em aplicações porque a condição (2.60) é muito instável. A ocorrência de valores de H nesse intervalo caracteriza uma série temporal antipersistente.

No caso de $H = 1$ o limite (2.57) se reduz à $\rho(\tau) \equiv 1$, de modo que todas as correlações serão iguais a 1 não importando quão distantes em tempo duas observações estejam, portanto, se trata de uma situação que não ocorre em dados reais.

Por fim no caso em que $H \geq 1$ o limite (2.57) diverge ao infinito o que contradiz o fato de que $-1 \leq \rho(\tau) < 1$.

Conclui-se que se $\rho(\tau)$ existir e $\lim_{\tau\to\infty} \rho(\tau) = 0$, então o parâmetro de autosimilaridade possui a seguinte restrição:

$$0 < H < 1 \tag{2.61}$$

[9]Pode-se encontrar mais informações sobre o conceito de séries superdiferenciadas em Morettin e Toloi (2006)

Deste modo um processo no qual $1/2 < H < 1$ será um PML (comportamento persistente), se $H = 1/2$ as observações não são correlacionadas o que caracteriza a ocorrência de ruído branco (passeio ao acaso) e se $0 < H < 1/2$ o processo apresenta memória curta (comportamento antipersistente).

Beran (1994, p. 53) comenta sobre duas situações particulares. A primeira é sobre os PASIE em que os segundos momentos sejam infinitos, nesse caso é possível a ocorrência de $H \geq 1$. Uma segunda situação é a não-existência dos segundos momentos, nesse caso $H \neq 1/2$ não é mais um indicativo de dependência dos incrementos do processo.

É comum ruídos aparentemente não-correlacionados apresentarem $H > 1/2$, nesses casos ocorre o chamado *ruído colorido*.

Nesse texto considera-se apenas PASIE momentos de segunda ordem finitos e $\lim_{\tau\to\infty} \rho(\tau) = 0$, o que assegura a restrição (2.61).

Em um PASIE é possível mostrar que a média amostral dos incrementos apresenta a propriedade:

$$\bar{Z} \quad \stackrel{d}{=} \quad n^{H-1}(Z_1 - Z_0) \tag{2.62}$$

e a partir de (2.31) e (2.62) mostra-se que a variância da média amostral dos incrementos de um PASIE pode ser dada por:

$$\text{var}(\bar{X}) = \sigma^2 n^{2H-2} \tag{2.63}$$

2.4 Estatística R/S

A *estatística* R/S como definida em Hurst (1951) é a razão das somas parciais dos desvios da série temporal em relação à média parcial, reescalada pelo seu desvio padrão. Nesse trabalho defini-se essa estatística baseando-se nas considerações de Hurst (1951, p. 312), Granero *et al.* (2008, p. 5544), Giraitis *et al.* (2003, p. 268), Peters (1994), Cajueiro e Tabak (2005, p. 174) e Beran (1994, p. 33). Esses autores apresentam definições ligeiramente diferentes para a estatística $^R/_S$, mas nessa breve discussão será provada a equivalência de todas.

Para calcular o valor da *estatística* $^R/_S$ para uma série temporal $Y = \{y_1, \ldots, y_{n+1}\}$, construa-se primeiramente sua série de incrementos $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ como em (2.23).

Seja $\bar{z}_{t,\tau}$ a *média parcial* de τ observações após o instante t:

$$\bar{z}_{t,\tau} = \frac{\sum_{i=t+1}^{t+\tau} z_i}{\tau} \tag{2.64}$$

Dessa forma (2.64) nada mais é do que a média das observações da subsérie (2.3).

Na equação (2.64) e no decurso de toda essa discussão devem ser observadas as restrições $t + \tau \leq n$, $t \geq 0$ e $\tau > 1$.

Considere o valor acumulado Y_t da série temporal (2.2) até o instante t.

$$Y_t = \sum_{i=1}^{t} z_i$$

A partir dessa definição obtêm-se:

$$Y_{t+\tau} - Y_t = \sum_{i=t+1}^{t+\tau} z_i \tag{2.65}$$

Esta expressão representa o valor acumulado da subsérie (2.3). Combinando as equações (2.64) e (2.65) obtêm-se:

$$\bar{z}_{t,\tau} = \frac{Y_{t+\tau} - Y_t}{\tau}$$

O *desvio acumulado* até a j-ésima observação da subsérie (2.3) corresponde à:

$$\sum_{i=t+1}^{j} (z_i - \bar{z}_{t,\tau})$$

Veja que o índice j assume valores no conjunto $\{t+1, \ldots, t+\tau\}$. Agora note que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=t+1}^{j} (z_i - \bar{z}_{t,\tau}) &= \sum_{i=t+1}^{j} z_i - \sum_{i=t+1}^{j} \bar{z}_{t,\tau} \\
&= (Y_j - Y_t) - (j-t)\bar{z}_{t,\tau} \\
&= (Y_j - Y_t) - (j-t)\left(\frac{Y_{t+\tau} - Y_t}{\tau}\right)
\end{aligned}$$

Assumindo que $k = j - t$ então $k = 1, \ldots, \tau$ e, portanto:

$$\sum_{i=t+1}^{t+k} (z_i - \bar{z}_{t,\tau}) = (Y_{t+k} - Y_t) - \frac{k}{\tau}(Y_{t+\tau} - Y_t) \tag{2.66}$$

Considere $D_{t,k,\tau} = (Y_{t+k} - Y_t) - \frac{k}{\tau}(Y_{t+\tau} - Y_t)$.

As formas de se definir $\{D_{t,k,\tau}\}$ variam na literatura, Beran (1994) usa o lado direito da expressão em (2.66), já nos textos de Giraitis *et al.* (2003) e Hurst (1951) há a preferencia pelo lado esquerdo.

Considerando a sequência de desvios acumulados $\{D_{t,k,\tau}\}$ para todos os possíveis valores de k define-se a *amplitude ajustada* para a subsérie (2.3) como:

$$R(t,\tau) = \max_{1\le k\le\tau}\{D_{t,k,\tau}\} - \min_{1\le k\le\tau}\{D_{t,k,\tau}\} \tag{2.67}$$

O *desvio padrão* da subsérie (2.3) é expresso por:

$$S(t,\tau) = \sqrt{\frac{\sum_{i=t+1}^{t+\tau} (z_i - \bar{z}_{t,\tau})^2}{\tau - 1}} \tag{2.68}$$

Um fato importante de se notar aqui é que se Z_t for um PFE então:

$$S^2(t,\tau) \xrightarrow{p} \mathrm{var}(Z_t) \tag{2.69}$$

A *estatística* R/S da subsérie (2.3) será determinada pela razão:

$$R/S = \frac{R(t,\tau)}{S(t,\tau)} \tag{2.70}$$

Na literatura a estatística R/S é também chamada de *amplitude ajustada reescalada.*

Weron (2002) realiza a comparação da estatística R/S com outros métodos de cálculo do coeficiente de Hurst. O autor também mostra como construir intervalos de confiança.

Lo (1991, p. 1287) mostra que a definição clássica da estatística R/S não é robusta à dependência de curta memória, como solução ao problema propõe a substituição de S_n por $\hat{S}_n(q)$ como na seção 3.3.

2.5 O coeficiente de Hurst

O coeficiente H de Hurst pode ser interpretado como uma aproximação da dimensão fractal, sendo uma medida para o efeito de memória longa em processos estocásticos, útil para segmentação e identificação de séries temporais. As primeiras aplicações surgiram na hidrologia com os trabalhos de Hurst (1951) e Hurst *et al.* (1965), baseando-se nas contribuições de Einstein a respeito do movimento browniano em partículas físicas. O nome de coeficiente de Hurst é uma homenagem ao seu criador.

Há várias definições para H. A definição clássica encontrada em Hurst (1951) onde é definido em termos da distribuição assintótica da amplitude reescalada como função do tamanho da janela τ de uma série temporal.

$$E\left[\frac{R(t,\tau)}{S(t,\tau)}\right] = c\tau^H, \quad \text{com} \quad \tau \to \infty \tag{2.71}$$

A esperança é calcula para τ fixo e t variável.

De acordo com essa definição o coeficiente de Hurst é a medida da regularidade de uma série temporal fractal baseada no comportamento assintótico da *estatística* R/S discutida na seção 2.4.

Também é possível defini-lo pela equação (2.29) e uma outra definição mais contemporânea é dada por (2.31) que, pela discussão nas seções 2.2 e 2.3, é um resultado fundamental na conexão entre os conceitos de memória longa e autosimilaridade.

Qian e Rasheed (2004) mostram que séries com valores altos para o coeficiente de Hurst podem ser preditas com mais acurácia do que as com valores próximos de 0.5.

Gneiting e Schlather (2004, p. 270) argumentam que em princípio a dimensão fractal e o coeficiente de Hurst são independentes um do outro: a dimensão fractal é uma propriedade local e a dependência de memória longa é uma característica global. No entanto as duas noções estão associadas na maior parte da literatura científica.

Mandelbrot (1982) mostra que para processos autosimilares as propriedades locais são refletidas globalmente, resultando na relação:

$$D + H = n \tag{2.72}$$

entre a dimensão fractal D e o coeficiente de Hurst H, para uma superfície autosimilar envolta no $\mathbb{R}^n$.

No contexto de séries temporais a dimensão do espaço topológico envolvente é $n = 2$. Além disso vale (2.61) o que implica que:

$$1 < D < 2 \tag{2.73}$$

Um texto contendo exemplos bastante didáticos sobre o cálculo da estatística R/S é Popescu *et al.* (2013).

2.6 Movimento browniano fracionado

Um processo estocástico como (2.1) é *gaussiano* (PG) se para qualquer conjunto $t_1, \ldots, t_n$ de T, as variáveis aleatórias $Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n}$ têm distribuição normal n-variada.

Um PG é determinado por suas médias e covariâncias. Um fato importante de se notar é que se um PG for um PFE então ele também será um PEE.

Seja W um processo estocástico contínuo como em (2.1). Este processo será um *movimento browniano padrão*[10] (MBP) se apresentar as características:

MBP 1: W_t é um PG;

MBP 2: $W_0 = 0$ quase certamente;

MBP 3: W_t tem incrementos independentes;

MBP 4: $E(W_t - W_s) = 0$;

MBP 5: $\text{var}(W_t - W_s) = \sigma^2 \, |t - s|$.

Note que pelas propriedades MBP 4 e MBP 5 e pelo resultado (2.48) um MBP é um PAS com parâmetro de autosimilaridade $H = 1/2$. Assim, de (2.38) vem que:

$$E(B_{\tau t}) = \tau^{\frac{1}{2}} \, E(Z_t) \tag{2.74}$$

Beran (1994, p. 55) mostra que a função de auto-covariância (2.5) se reduz à:

$$\gamma(t,s) = \sigma^2 \min(t,s) \tag{2.75}$$

Morettin e Toloi (2006, p. 30) destacam que todas as trajetórias um MBP são não-

[10] Na literatura o MBP também é chamado de *processo de Wiener*.

deriváveis em ponto algum, mas são contínuas. Com base em (2.75) obtém-se que:

$$\begin{aligned} \gamma(\tau t,\tau s) &= \tau\,\sigma^2 \min(t,s) \\ &= \operatorname{cov}\left(\tau^{1/2} B_t,\tau^{1/2} B_s\right) \end{aligned} \tag{2.76}$$

o que mostra que Z_t é autosimilar com parâmetro $H = 1/2$.

Considere a função de pesos w_H, para $\tau > 0$, dada por:

$$w_H(t,u) = \begin{cases} 0 \quad \text{para } t \le u \\ (t-u)^{H-1/2} \quad \text{para } 0 \le u < t \\ (t-u)^{H-1/2} - (-u)^{H-1/2} \quad \text{para } u < 0 \end{cases} \tag{2.77}$$

Considere também W_t como um MBP com $\sigma^2 = 1$. Assuma também a condição (2.61). O *movimento browniano fracionado*[11] *com parâmetro de autosimilaridade* H (MBF), denotado $W_H(t)$, é definido pela integral estocástica:

$$W_H(t) = \tau \int w_H(t,u) dZ_u \tag{2.78}$$

onde a convergência dessa integral é garantida pela L^2-norma com respeito à medida de Lebesgue[12] nos números reais.

Mandelbrot e Van Ness (1968, p. 423) mostram que o movimento browniano fracionado é a generalização do movimento browniano padrão para incluir correlação temporal. A correlação é descrita pelo coeficiente de Hurst, de modo que $H = 0.5$ corresponde à nenhuma correlação, $H < 0.5$ corresponde a anticorrelação e $H > 0.5$ à correlação. É comum referir-se ao MBF por *ruído* $1/f$.

Seja $W(t)$ um MBF com parâmetro H então a ponte browniana padrão (PBP) com

[11] Também conhecido como ruído browniano (gaussiano) fracionado

[12] O tratamento das integrais estocásticas foge do foco deste trabalho, uma leitura introdutória adequada é Isnard (2009).

esse mesmo parâmetro será dada por:

$$W^0(t) = W(t) - tW(1) \tag{2.79}$$

Seja $W_H(t)$ um MBF com parâmetro H então a ponte browniana fracionada (PBF) com mesmo parâmetro H será dada por:

$$W_H^0(t) = W_H(t) - tW_H(1) \tag{2.80}$$

Nesse trabalho foi usado o pacote de Huang (2013) do software R como recurso computacional para a simulação do MBF, e particular todos os testes foram baseados em simulações feitas com os argumentos padrões da função `fbm`, que corresponde ao método descrito em Kroese e Botev (2013).

Usando o script C.21 apresentado no apêndice é possível simular cinco versões de um MBF a partir de uma mesma semente variando-se apenas o valor de H, como visto na A.1.

Capítulo 3

Métodos de Estimação do Coeficiente de Hurst

Várias ferramentas para detectar a possibilidade de memória longa em séries temporais já foram propostas na econometria, estatística, física experimental e diversas outras áreas. Uma das ferramentas clássicas foi obtida por Hurst (1951) e é conhecida como o coeficiente H de Hurst. Nesse capítulo apresenta-se seis importantes algoritmos para a estimação de H. Os métodos que serão descritos tem caráter empírico. Beran *et al.* (2013, p. 386) ressalta que esses métodos possuem propriedades de convergência bastante pobres, razão pela qual devem ser aplicados com muita cautela. O leitor interessado na teoria assintótica que os sustenta poderá consultar os trabalhos de Beran (1994), Beran *et al.* (2013) e Giraitis *et al.* (2003).

No decorrer desse capítulo deseja-se estimar o valor do coeficiente de memória longa da série temporal:

$$\begin{aligned} Y &= \{Y_1 = y_1, \ldots, Y_{n+1} = y_{n+1}\} \\ &= \{y_1, \ldots, y_{n+1}\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Considera-se que a série de incrementos de Y é a série:

$$\begin{aligned} Z &= \{Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n\} \\ &= \{z_1, \ldots, z_n\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

dada por 2.23.

3.1 Técnicas de Cobertura

Descreve-se aqui três métodos para a construção coberturas necessários na análise $^R/_S$ e nas demais técnicas subsequentes. Diferentes formas de construir conjuntos de subséries são admissíveis devido ao caráter empírico dos métodos aqui estudados. No apêndice C.4 há uma função que permite construir conjuntos de subséries por qualquer um dos métodos descritos a seguir.

Considera-se uma *cobertura* de tamanho τ da série (2.2) a qualquer conjunto de subséries de tamanho τ. Nos métodos a seguir pretende-se criar k coberturas diferentes da série (2.2) de modo que os tamanhos mínimo e máximo das coberturas sejam τ_{min} e τ_{max} respectivamente.

3.1.1 Método Clássico

No método clássico a quantidade k de coberturas a serem criadas é determinada pelos valores de τ_{min} e τ_{max}. Originalmente esse método assume $\tau_{min} = 8$ e $\tau_{max} = n$, nesse trabalho optou-se por flexibilizar a técnica por razões que serão discutidas na seção 4.2.

O tamanho da i-ésima cobertura será:

$$\tau_i = \frac{\tau_{max}}{2^{i-1}}, \quad \text{onde} \quad i \in \{\mathbb{Z}_+^* | \tau_i \geq \tau_{min}\} \tag{3.3}$$

Uma cobertura de tamanho τ será o conjunto de $m_\tau = \lfloor n/\tau \rfloor$ subséries $Z^{\tau,j}$ tal que:

$$Z^{\tau,j} = \{z_{(j-1)\tau+1}, \ldots, z_{j\tau}\}, \quad \text{onde} \quad j \in \{1 \ldots, m_\tau\} \tag{3.4}$$

Este método torna os algoritmos mais rápidos, pois seleciona poucas coberturas e em cada cobertura não há muitas subséries.

3.1.2 Método de Varredura

O método de varredura cria a mesma quantidade k de coberturas que o método clássico e, além disso, o tamanho das coberturas criadas é dado por (3.3). A diferença fundamental é que uma cobertura de tamanho τ será o conjunto de $m_\tau = n - (\tau - 1)$ subséries $Z^{\tau,j}$ tal que:

$$Z^{\tau,j} = \{z_j, \ldots, z_{j+(\tau-1)}\}, \quad \text{onde} \quad j \in \{1 \ldots, n - (\tau - 1)\} \tag{3.5}$$

Evidentemente nesse método a quantidade de subséries em uma cobertura é muito maior do que no método clássico, o que torna os algoritmos muito lentos.

3.1.3 Método Exponencial

Inicialmente cria-se uma progressão aritmética de k termos onde o termo inicial seja $\ln \tau_{min}$ e o termo final seja $\ln \tau_{max}$. A razão r dessa progressão será:

$$r = \frac{\ln \tau_{max} - \ln \tau_{min}}{k - 1}$$

Desse modo os termos serão:

$$\{\ln \tau_{min}, \ldots, \ln \tau_{min} + ir, \ldots, \ln \tau_{min} + (k-1)r\} \quad i \in \{0, \ldots, (k-1)\}$$

Assim, as k coberturas terão seus tamanhos dados pelo maior inteiro menor ou igual à exponencial dos termos dessa progressão.

$$\{\lfloor \tau_{min} \rfloor, \ldots, \lfloor \tau_{min} \exp(ir) \rfloor, \ldots, \lfloor \tau_{min} \exp[(k-1)r] \rfloor\}$$

Uma cobertura de tamanho τ será o conjunto de subséries $Z^{\tau,j}$ como descrito em (3.4).

3.2 Análise $^R/_S$

O método mais antigo e também o mais popular para a estimação do coeficiente de Hurst é a *análise* $^R/_S$. Este método foi proposto por Mandelbrot e Wallis (1969) baseando-se nos trabalhos de Hurst (1951). Esse método é uma ferramenta central na análise de dados fractais (que apresentam autosimilaridade ou memória longa). Há apenas dois fatores usados nessa técnica:

- A diferença entre os valores máximo e mínimo acumulados como em (2.67);
- O desvio padrão das observações como em (2.68).

Inicialmente deve-se calcular o valor médio $(^R/_S)_\tau$ da estatística $^R/_S$ em (2.70) para todas as subséries de comprimento τ:

$$\left(\frac{R}{S}\right)_\tau = E\left[\frac{R(t,\tau)}{S(t,\tau)}\right] \tag{3.6}$$

Originalmente a análise $^R/_S$ usa o método de coberturas clássico descrito na seção 3.1.1. Essa será a configuração adotada nesse texto.

Assuma que (3.6) possua o seguinte comportamento assintótico:

$$\left(\frac{R}{S}\right)_\tau \xrightarrow{d} c\tau^H \tag{3.7}$$

onde H é o coeficiente de Hurst como descrito em (2.71). Note agora que é possível escrever (3.7) como:

$$\log\left(\frac{R}{S}\right)_\tau = \log c + H\log\tau \tag{3.8}$$

Na equação (3.8) fica claro que para obter H basta ajustar uma reta pelo método dos mínimos quadrados entre as variáveis $x(\tau) = \log\tau$ e $y(\tau) = \log\left({}^R/_S\right)_\tau$, para uma quantidade suficientemente grande de valores de τ. A estimativa de H será a inclinação da reta ajustada.

Uma implementação adequada desse método na linguagem R está no algoritmo C.12 no apêndice.

3.3 Análise ${}^R/_S$ Modificada

Foi proposta por Lo (1991) como uma modificação da estatística ${}^R/_S$ clássica. De modo que o desvio padrão descrito em (2.68) seja substituído pela estatística proposta por Newey e West (1987):

$$\hat{S}_q(t,\tau) = \sqrt{\frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^{\tau}(z_j - \bar{z}_\tau)^2 + 2\sum_{j=1}^{q}\omega_j(q)\hat{\gamma}_j} \tag{3.9}$$

onde $\omega_j(q)$ são os *pesos de Bartlett*:

$$\omega_j(q) = 1 - \frac{j}{q+1} \tag{3.10}$$

e $\hat{\gamma}_j$ são as covariâncias amostrais:

$$\hat{\gamma}_j = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{\tau-j}(z_i - \bar{z}_\tau)(z_{i+j} - \bar{z}_\tau), \quad 0 \le j < \tau \tag{3.11}$$

Note que:

$$S = \hat{S}_0(t,\tau) \tag{3.12}$$

o que mostra que a estatística R/S clássica é um caso particular da estatística R/S modificada.

Não é claro na literatura qual o valor que se deve atribuir à constante q apresentada em (3.10). Testes empíricos foram realizados por Phillips (1987), Lo e MacKinlay (1988), Lo (1991) e por Andrews (1991). Nesse trabalho optou-se por $q = \sqrt[4]{n}$. Essa escolha foi discutida no texto de Lo (1991) e também apresenta um melhor desempenho computacional, pois o valor de q é relativamente pequeno o que permite efetuar o cálculo de (3.9) mais rapidamente. No apêndice C.6 há um algoritmo que permite calcular o valor dessa estatística para uma série temporal dada e com qualquer q desejado.

Giraitis *et al.* (2003, p. 272) mostram que:

$$\left(\frac{q}{\tau}\right)^{H-1/2} \tau^{-1/2} \left(\frac{R}{\hat{S}_q}\right)_{\tau} \xrightarrow{d} \sup_{0\leq t\leq 1} W_H^0(t) - \inf_{0\leq t\leq 1} W_H^0(t) \tag{3.13}$$

onde H é o coeficiente de Hurst como em (2.71) e W_H^0 é uma PBF com parâmetro H como em (2.80). A expressão à direita pode ser encarada como uma constante c, assim, é possível escrever (3.13) como:

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{R}{\hat{S}_q}\right)_{\tau} &= \log c + H\log\tau - (H - 1/2)\log q \\ &= C + H\log\tau \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde $C = \log c - (H - 1/2)\log q$.

Originalmente a análise R/S modificada usa o método de coberturas clássico descrito na seção 3.1.1.

Na equação (3.14) nota-se que para estimar H basta ajustar uma reta pelo método dos mínimos quadrados entre as variáveis $x(\tau) = \log\tau$ e $y(\tau) = \log\left(R/\hat{S}_q\right)_{\tau}$, para uma quantidade suficientemente grande de valores de τ. A estimativa para H é o coeficiente angular da reta ajustada.

Uma implementação adequada desse método na linguagem R está no algoritmo

C.13 no apêndice. O desenvolvimento da teoria assintótica desse método é encontrado em Lo (1991).

3.4 Análise KPSS

Kwiatkowski *et al.* (1992) introduziram a estatística KPSS[1] como um teste de para estacionariedade de séries temporais, posteriormente Lee e Schmidt (1996) a usaram para testar a existência de memória longa em séries temporais estacionárias e por fim Lee e Amsler (1997) o fizeram em séries temporais não-estacionárias. O desenvolvimento da teoria assintótica desses métodos está nos referidos trabalhos.

O valor da estatística KPSS para uma subsérie de tamanho τ da série de incrementos (3.2) é dado por:

$$KPSS_\tau = \left[\frac{1}{\hat{S}_q(t,\tau)\tau}\right]^2 \sum_{k=1}^{\tau}\left[\sum_{j=1}^{k}(z_j - \overline{z_\tau})\right]^2 \tag{3.15}$$

onde $\hat{S}_q(t,\tau)$ é dado por (3.9).

Giraitis *et al.* (2003, p. 273) mostram que:

$$\left(\frac{q}{\tau}\right)^{2H-1} KPSS_\tau \xrightarrow{d} \int_0^1 [W_H^0(t)]^2 dt \tag{3.16}$$

onde H é o coeficiente de Hurst como descrito em (2.71) e W_H^0 é uma PBF com parâmetro H. A integral definida à direita pode ser encarada como uma constante c, logo, é possível escrever (3.16) como:

$$\begin{aligned} \log KPSS_\tau &= \log c + (2H-1)\log\left(\frac{\tau}{q}\right) \\ &= \log c + (2H-1)\log\tau - (2H-1)\log q \\ &= C + (2H-1)\log\tau \end{aligned} \tag{3.17}$$

[1]Originalmente foi chamada de estatística LM, mas posteriormente o nome foi alterado para KPSS em homenagem aos pesquisadores que publicaram o artigo

onde $C = \log c - (2H - 1)\log q$.

Originalmente a análise KPSS usa o método de coberturas clássico descrito na seção 3.1.1. Nesse trabalho optou-se pelo o método exponencial com 20 coberturas e $\tau \in (8, \lfloor n/8 \rfloor)$.

Na equação (3.17) fica claro que para obter H basta ajustar uma reta pelo método dos mínimos quadrados entre as variáveis $x(\tau) = \log \tau$ e $y(\tau) = \log KPSS_\tau$, para uma quantidade suficientemente grande de valores de τ. Seja β_1 a inclinação da reta ajustada. Então a estimativa de H será:

$$\hat{H} = \frac{\beta_1}{2} \tag{3.18}$$

Uma implementação adequada desse método na linguagem R está no algoritmo C.14 no apêndice.

3.5 Análise $^V/_S$

A estatística $^V/_S$ foi proposta originalmente por Giraitis *et al.* (2003, p. 269) e se trata de uma modificação da análise KPSS. O desenvolvimento da teoria assintótica desse método está na referência acima.

O valor da estatística VS para uma subsérie de tamanho τ da série de incrementos (3.2) é dado por:

$$VS_\tau = KPSS_\tau - \left[\frac{1}{\hat{S}_q(t,\tau)\tau}\right]^2 \frac{1}{\tau}\left[\sum_{k=1}^{\tau}\sum_{j=1}^{k}(z_j - \overline{z_\tau})\right]^2 \tag{3.19}$$

Beran *et al.* (2013, p. 414) mostram que

$$\left(\frac{q}{\tau}\right)^{2H-1} VS_\tau \xrightarrow{d} \int_0^1 [W_H^0(t)]^2 dt - \left[\int_0^1 W_H^0(t)dt\right]^2 \tag{3.20}$$

onde H é o coeficiente de Hurst como descrito em (2.71) e W_H^0 é uma PBF com parâmetro H. As integrais definidas à direita podem ser encaradas como uma constante c, logo, é possível escrever (3.20) como:

$$\begin{aligned}
\log VS_\tau &= \log c + (2H-1)\log\left(\frac{\tau}{q}\right) \\
&= \log c + (2H-1)\log\tau - (2H-1)\log q \\
&= C + (2H-1)\log\tau \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

onde $C = \log c - (2H-1)\log q$.

Originalmente a análise VS usa o método de coberturas clássico descrito na seção 3.1.1. Nesse texto optou-se pelo o método exponencial com 20 coberturas e $\tau \in (8, \lfloor n/8 \rfloor)$.

Na equação (3.21) fica claro que para obter H basta ajustar uma reta pelo método dos mínimos quadrados entre as variáveis $x(\tau) = \log\tau$ e $y(\tau) = \log VS_\tau$, para uma quantidade suficientemente grande de valores de τ. Seja β_1 a inclinação da reta ajustada. Então a estimativa de H será:

$$\hat{H} = \frac{\beta_1}{2} \qquad (3.22)$$

Da forma como está definida a estatística VS é possível mostrar que as variâncias dos valores estimados para H pelos métodos KPSS e VS é igual.

Uma implementação adequada desse método na linguagem R está no algoritmo C.15 no apêndice.

3.6 Análise das Variâncias das Médias

Uma técnica bastante simples para se estimar H é obtida a partir de (2.35). Consiste na análise da variância das médias[2] de subséries da série de incrementos (3.2). O limite em (2.35) permite escrever:

$$\mathrm{var}(\overline{Z}) \xrightarrow{d} cn^{2H-2} \qquad (3.23)$$

[2]Essa técnica é conhecida como *variance plot*

onde c é uma constante positiva.

Desse modo é possível estimar H por meio do procedimento descrito em Beran (1994, p. 92). Seja $\tau \in \mathbb{Z}$ tal que $2 \leq \tau \leq n/2$. Construa coberturas de (2.2) com diferentes valores de τ por meio de qualquer um dos métodos descritos na seção 3.1. Nesse trabalho optou-se pelo o método exponencial com 20 coberturas e $\tau \in (8, \lfloor n/8 \rfloor)$. Suponha que uma cobertura de tamanho τ contenha m_τ subséries. Calcule as médias amostrais $\overline{Z}_1(\tau), \ldots, \overline{Z}_{m_\tau}(\tau)$ e a média total da série:

$$\overline{Z} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Z_j \tag{3.24}$$

Para cada τ, calcule a variância amostral das médias amostrais $\overline{Z}_j(\tau)$, onde $j = 1, \ldots, m_\tau$:

$$S^2(\tau) = \frac{1}{m_\tau - 1} \sum_{j=1}^{m_\tau} [\overline{Z}_j(\tau) - \overline{Z}]^2 \tag{3.25}$$

Originalmente a análise das variâncias das médias usa o método de cobertura exponencial descrito na seção 3.1.3. Está é a configuração adotada nesse texto.

Note que a equação (3.23) permite escrever:

$$\log S^2(\tau) = \log c + (2H - 2) \log \tau \tag{3.26}$$

Ajuste uma reta de regressão simples entre as variáveis $x(\tau) = \log \tau$ e $y(\tau) = \log S^2(\tau)$. Seja β_1 a inclinação dessa reta, de acordo com (3.26):

$$\hat{H} = \frac{\beta_1 + 2}{2} \tag{3.27}$$

Uma implementação adequada desse método na linguagem R está no algoritmo C.16 no apêndice.

3.7 Análise de Flutuações Destendenciadas

O método conhecido como *análise de flutuações destendenciadas*[3] (DFA) é descrito originalmente no artigo de Peng *et al.* (1994) e é um método similar à análise R/S descrita na seção 3.2. Esse método é visto também como uma modificação do método da análise das variâncias das médias descrito em 3.6.

Para estimar o coeficiente de memória longa da série temporal (3.1) construa inicialmente sua série de incrementos como em (3.2) e em seguida construa a série temporal $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$ na qual:

$$X_i = \sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z}) \tag{3.28}$$

X é chamada de *perfil* de Y.

Em seguida o perfil é coberto de acordo com um dos métodos descritos em 3.1. Originalmente foi usado o método exponencial com 20 valores diferentes para τ, com $\tau_{min} = 10$ e $\tau_{max} = \lfloor n/2 \rfloor$, mas a literatura apresenta várias outras configurações.

Suponha que uma cobertura de tamanho τ contenha m_τ subséries. Ajuste uma reta de regressão em todas as m_τ subséries que a compõem. Seja $\hat{x}_i^{\tau,j}$ o valor estimado para a i-ésima observação do perfil pela reta de mínimos quadrados ajustada a j-ésima subsérie da cobertura de tamanho τ. Considere agora:

$$\epsilon_i^{\tau,j} = x_i - \hat{x}_i^{\tau,j} \tag{3.29}$$

como os erros (resíduos) para essa estimação.

Para uma cobertura de tamanho τ calcule a variância dos resíduos, $S_j^2(\tau)$, dada por:

$$S_j^2(\tau) = \frac{1}{m_\tau}\sum_{i=1}^{m_\tau}(\epsilon_i^{\tau,j})^2 \tag{3.30}$$

[3] Uma possível tradução para *detrended fluctuation analysis*

Para cada cobertura calcule o valor da *função de flutuação*, $F^2(\tau)$, dada por:

$$F^2(\tau) = \frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^{\tau} S_j^2(\tau) \tag{3.31}$$

Ajuste uma reta de regressão simples entre as variáveis $x(\tau) = \log \tau$ e $y(\tau) = \log F(\tau)$. A estimativa de H será o valor da inclinação da reta ajustada.

É importante ressaltar que em (3.29) pode-se estimar x_i por qualquer polinômio de mínimos quadrados. Na literatura é comum o ajuste com polinômios de grau 1 à 4. Nesse texto denota-se DFA(n) ao método que estima x_i por um polinômio de grau n.

No texto de Kirichenko *et al.* (2011, p. 382) observa-se que o estudo numérico de séries fractais com tendência polinomial com componente de ordem p apresenta uma estimação adequada para o coeficiente de Hurst quando se recorre ao método DFA(n) com $n > p$.

Segundo Bryce e Sprague (2012, p. 1) o método DFA é recomendado em caso de suspeita (ou evidência) de não estacionariedade.

Uma implementação adequada desse método na linguagem R está no algoritmo C.17 no apêndice.

Capítulo 4

Análises Comparativas

4.1 Comparação dos Métodos de Estimação de H

Os resultados apresentados em apêndice nas tabelas B.1 à B.4 podem ser replicados com o algoritmo C.22. Nela comparam-se os métodos por meio de suas configurações clássicas como descrito no capítulo 3. Esses testes objetivam verificar a eficiência dos métodos ao se estimar ruídos aleatórios com caudas pesadas em comparação com o RBG. Realizaram-se três séries de testes:

Na primeira séries de testes os algoritmos implementados estimam o coeficiente de Hurst em 4000 simulações de um RBG com distribuição $N(0,1)$. As simulações foram organizadas em grupos com 256, 512, 1024 e 2048 observações. Foram simuladas 1000 séries de cada grupo.

A segunda séries de testes é análoga a anterior, a diferença é que simulam-se ruídos brancos onde as observações seguem a distribuição de Cauchy(0.01) como descrita em (2.24).

A terceira séries de testes também é análoga a primeira, aqui simulam-se ruídos brancos onde as observações seguem a distribuição α-estável com parâmetros $\alpha = 1.1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ e $\delta = 0$ como descrita em (2.26).

Para simular as distribuições Normal e Cauchy usou-se o pacote padrão do software R, já a distribuição α-estável foi simulada com o pacote estatístico de Wuertz *et al.* (2013) desenvolvido para o software R.

4.2 Comparação dos Métodos de Cobertura

Nas tabelas B.5 à B.8 em apêndice encontram-se estatísticas sobre a estimação do coeficiente de Hurst em 1000 RBG gerados aleatoriamente. As séries geradas tinham tamanhos de 256, 512, 1024 e 2048 observações. Cada série teve seu coeficiente de Hurst estimado três vezes pelos métodos R/S, R/S modificado, KPSS, V/S e VP, sendo que em cada uma das três estimações utilizou-se um cobertura diferente. As coberturas usadas estão descritas nas seções 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3. O algoritmo C.23 localizado no apêndice C.1 replica os resultados.

4.3 Quebras Estruturais

Nessa terceira bateria de testes é analisado a sensibilidade dos estimadores a pequenas quebras estruturais nas médias e variâncias das séries temporais.

Nos testes com quebras estruturais nas médias simulam-se 100 séries de tamanho 1024 seguindo a distribuição $N(0{,}1)$. Em seguida modificam-se essas séries para que apresentem um dos tipos de quebras estruturais a seguir:

Definição 4.1 (Quebra na média tipo $1/2^j, \quad j \in \{1, \ldots, 4\}$)
São cinco modificações dessas séries de forma que as $1024/2^j, \quad j \in \{1, \ldots, 4\}$ últimas observações sejam acrescidas por um fator $\mu_i = i/10, \quad i \in \{1, \ldots, 5\}$ onde μ_i é a média na i-ésima quebra.

Definição 4.2 (Quebra na variância)
São cinco modificações dessas séries de forma que as 512 últimas observações sejam multiplicadas por um fator $\sigma^2 = i/5, \quad i \in \{1, \ldots, 5\}$ onde σ_i^2 é a variância na i-ésima quebra.

Nas definições 4.1 e 4.2 quanto maior o valor de i mais intensa é a quebra estrutural. Nesse trabalho considera-se apenas quebras estruturais que passem num teste de aderência para uma distribuição normal padrão. Desse modo as quebras implementadas são razoavelmente sutis o que impede a identificação das mesmas por meio de uma simples observação gráfica.

Estima-se o coeficiente de Hurst para todos os cinco tipos de quebras. Os resultados estão nas tabelas B.9 à B.13.

Os testes aqui descritos podem ser replicados pelo algoritmo C.24.

Capítulo 5

Considerações Finais

Em RBG os métodos $^{R}/_{S}$, $^{R}/_{S}$ modificado, DFA(3) e DFA(4) tendem a superestimar o coeficiente de Hurst enquanto que os demais métodos tendem a subestimar. Nos RBG a melhor estimativa ocorre com os métodos DFA(n).

Os métodos $^{R}/_{S}$, $^{R}/_{S}$ modificado tendem a superestimar H em ruídos brancos com a distribuição de Cauchy(0.01), nota-se inclusive redução na variância das estimativas o que agrava o seu viés. Os métodos DFA(n) tiveram seu maior desvio-padrão em ruídos com essas características, em geral cinco à dez vezes maior do que na estimação de RBG, porém a boa convergência das estimativas de H classifica esse método como o de melhor desempenho juntamente com o método KPSS. Os métodos $^{V}/_{S}$ e VP tendem respectivamente a superestimar e a subestimar o valor de H.

Quando se estima H em ruídos brancos com distribuição $\alpha-$estável(1.1,0,1,0) nota-se que o método $^{R}/_{S}$ continua apresentando tendência a superestimar H o $^{R}/_{S}$ modificado apresenta um sério aumento de viés e variância o tornando inadequado nesse tipo de situação. Os métodos KPSS, $^{V}/_{S}$ são inaceitáveis. O método VP apresentou-se indiferente as distribuições dos ruídos. A família DFA(n) começa a subestimar mais intensamente os valores de H e a variância do estimador aumenta em relação as feitas em RBG quando as séries são pequenas (menos de 512 observações), a medida em que as séries apresentem um maior número de observações a variância e o viés começam a ser reduzidos garantindo, assim, a robustez do método.

As coberturas com varredura representam um aperfeiçoamento do método clássico, pois os testes indicam que essa técnica permite, ao menos para o RBG, uma estimativa mais correta de H e com menor variância. As coberturas de varredura ganham destaque frente ao método clássico conforme o tamanho da série aumente.

Ainda com relação a seção 4.2 observa-se que o desempenho das coberturas exponenciais é claramente superior ao método clássico. Esse fato já era esperado, pois com as coberturas clássicas o coeficiente de Hurst é estimado a partir de um número relativamente pequeno de valores τ. Uma cobertura clássica de uma série com n observações apresenta $\lfloor \log_2 n \rfloor$ conjuntos de subséries distintos. As estimativas com o método exponencial usam exatamente 20 valores diferentes para τ o que melhora o ajuste das retas de regressão.

As análises em séries que apresentem pequenas quebras estruturais mostram que quando essa quebra ocorre na média os métodos claramente detectam memória longa na série a medida em que o tamanho da quebra aumente. É claro que os estimadores partem do princípio de que as séries são estacionárias, por isso a presença de quebras estruturais viola essa condição, porém em dados reais sua presença pode passar desapercebida. Os métodos KPSS e V/S se mostraram os mais resistentes na presença dessa característica.

Com relação as quebras estruturais na variância os métodos apresentaram uma tendência a subestimar o valor do coeficiente de Hurst. O viés aumenta gradativamente com o aumento da intensidade dessa quebra. Os métodos KPSS e V/S se mostraram os menos resistentes na presença dessa característica.

Como tópicos a serem estudados em trabalhos posteriores:

1. Verificar que a utilização de varredura em coberturas exponenciais ajuda a reduzir o viés e variância do estimador.

2. Construção dos intervalos de confiança para os estimadores, pois isso permite analisar a significância dos valores estimados;

Referências Bibliográficas

Alvarez-Ramirez, J., Alvarez, J., Rodriguez, E. e Fernandez-Anaya, G. Time-varying Hurst exponent for US stock markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(24):6159 – 6169. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437108005888, 2008.

Andrews, D. W. Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation. *Econometrics*, 59(3):817–858. URL http://www.jstor.org/stable/2938229, 1991.

Arsenos, P., Gatzoulis, K., Manis, G., Gialernios, T., Dilaveris, P., Tsiachris, D., Archontakis, S., Kartsagoulis, E., Mytas, D. e Stefanadis, C. Decreased scale-specific heart rate variability after multiresolution wavelet analysis predicts sudden cardiac death in heart failure patients. *International Journal of Cardiology*, 154(3):358 – 360. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167527311020560, 2012.

Ausloos, M. e Ivanova, K. Introducing False EUR and False EUR exchange rates. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 286(1–2):353 – 366. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437100003289, 2000.

Ayadi, O. F., Williams, J. e Hyman, L. M. Fractional dynamic behavior in Forcados Oil Price Series: An application of detrended fluctuation analysis. *Energy for Sustai-*

nable Development, 13(1):11 – 17. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0973082608000045, 2009.

Barunik, J. e Kristoufek, L. On Hurst Exponent Estimation Under Heavy-tailed Distributions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389(18):3844 – 3855. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437110004553, 2010.

Bennett, W. R. e Rice, S. O. Spectral Density and Autocorrelation Functions Associated with Binary Frequency-Shift Keying. *Bell System Technical Journal*, 42(5):2355–2385, 1963.

Beran, J. *Statistics for Long-Memory Processes*, volume 61 de *Monographs on Statistics & Applied Probability*. Taylor & Francis, New York. URL http://books.google.com.br/books?id=jdzDYWtfPC0C, 1994.

Beran, J., Feng, Y., Ghosh, S. e Kulik, R. *Long-memory Processes*. Springer, New York, 1 edição, 2013.

Box, G. E. P., Jenkins, G. M. e Reinsel, G. C. *Time Series Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 4 edição. URL http://dx.doi.org/10.1002/9781118619193.fmatter, 2008.

Boyce, W. E. e DiPrima, R. C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 7 edição, 2001.

Bryce, R. M. e Sprague, K. B. Revisiting detrended fluctuation analysis. *Scientific reports*, 2(315), 2012.

Cajueiro, D. O. e Tabak, B. M. The Rescaled Variance Statistic And The Determination Of The Hurst Exponent. *Mathematics and Computers in Simulation*, 70(3):172 – 179. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378475405001709, 2005.

Carbone, A., Castelli, G. e Stanley, H. Time-dependent Hurst exponent in financial time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 344(1–2):267 – 271. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437104009471, 2004.

Couillard, M. e Davison, M. A Comment On Measuring The Hurst Exponent Of Financial Time Series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 348(0):404 – 418. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437104012713, 2005.

da Silva, S., Matsushita, R., Gleria, I. e Figueiredo, A. Hurst exponents, power laws, and efficiency in the Brazilian foreign exchange market. *Economics Bulletin*, 7(1):1–11. URL http://www.accessecon.com/includes/CountdownloadPDF.aspx?PaperID=EB-06G10032, 2007.

Giraitis, L., Kokoszka, P., Leipus, R. e Teyssière, G. Rescaled Variance And Related Tests For Long Memory In Volatility And Levels. *Journal of Econometrics*, 112(2):265 – 294. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304407602001975, 2003.

Gneiting, T. e Schlather, M. Stochastic Models That Separate Fractal Dimension and the Hurst Effect. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 46(2):269–282. URL http://www.jstor.org/stable/20453506?origin=JSTOR-pdf, 2004.

Granero, M. S., Segovia, J. T. e Pérez, J. G. Some Comments On Hurst Exponent And The Long Memory Processes On Capital Markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(22):5543 – 5551. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437108004895, 2008.

Grech, D. e Mazur, Z. Can one make any crash prediction in finance using the local Hurst exponent idea? *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 336(1–2):133 – 145. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037843710400041X, 2004.

Hu, K., Ivanov, P. C., Chen, Z., Carpena, P. e Eugene Stanley, H. Effect of trends on detrended fluctuation analysis. *Phys. Rev. E*, 64(1):011.114. URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.64.011114, 2001.

Huang, J. *somebm: some Brownian motions simulation functions*. URL http://CRAN.R-project.org/package=somebm, 2013.

Hurst, H. E. Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society Civil Engineers*, 116:770–808, 1951.

Hurst, H. E., Black, R. e Simaika, Y. *Long-term storage*. Constable. URL http://books.google.com.br/books?id=X-7cAAAAIAAJ, 1965.

Isnard, C. *Introdução à medida e integração*. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2 edição, 2009.

Kale, M. D. e Butar, F. B. Tese de doutorado, Sam Houston State University. URL http://www.msme.us/2011-1-2.pdf, 2005.

Kirichenko, L., Radiloca, T. e Deineko, Z. Comparative analysis for estimating of the hurst exponent for stationary and nonstationary time-series. *International Journal Information Technologies and Knowledge*, 5:371–388, 2011.

Kolmogorov, A. N. The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers. *Proceedings Mathematical Physical & Engineering Sciences*, 434. URL http://libgen.org/scimag/index.php?s=10.1098/rspa.1991.0075, 1941.

Kroese, D. P. e Botev, Z. I. Spatial Process Generation. *MatLab Central*, 1:54 p. URL http://www.maths.uq.edu.au/~kroese/ps/MCSpatial.pdf, 2013.

Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P. e Shin, Y. Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic time series have a unit root? *Journal of Econometrics*, 54(1-3):159–178. URL http://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:econom:v:54:y:1992:i:1-3:p:159-178, 1992.

Lee, D. e Schmidt, P. On the power of the KPSS test of stationarity against fractionally-integrated alternatives. *Journal of Econometrics*, 73(1):285–302. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/B6VC0-3VW1TT8-C/2/21c9a54e9d26f5e12041160e85149b37, 1996.

Lee, H. S. e Amsler, C. Consistency of the {KPSS} unit root test against fractionally integrated alternative. *Economics Letters*, 55(2):151 – 160. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165176597000669, 1997.

Lo, A. e MacKinlay, A. Stock market prices do not follow random walks: evidence from a simple specification test. *Review of Financial Studies*, 1(1):41–66. URL http://rfs.oxfordjournals.org/content/1/1/41.full.pdf+html, 1988.

Lo, A. W. Long-term Memory in Stock Market Prices. *Econometrica*, 59(5):1279–1313. URL http://www.nber.org/papers/w2984, 1991.

Mandelbrot, B. B. How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. *Science Magazine*, 156(3775):636–638, 1967.

Mandelbrot, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. Henry Holt and Company, New York. URL http://books.google.com.br/books?id=SWcPAQAAMAAJ, 1982.

Mandelbrot, B. B. e Van Ness, J. Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, 10(4):422–437. URL http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1010093, 1968.

Mandelbrot, B. B. e Wallis, J. R. Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long run statistical dependence. *Water Resources Research*, 5(5):967–988. URL http://dx.doi.org/10.1029/WR005i005p00967, 1969.

Matos, J. A. O., Gama, S. M. A., Ruskin, H. J., Sharkasi, A. A. e Crane, M. Time and scale Hurst exponent analysis for financial markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(15):3910 – 3915. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437108000824, 2008.

Matos, J. M. O., de Moura, E. P., Krüger, S. E. e Rebello, J. M. A. Rescaled range analysis and detrended fluctuation analysis study of cast irons ultrasonic backscattered signals. *Chaos, Solitons & Fractals*, 19(1):55 – 60. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077903000808, 2004.

Matsushita, R. Y., Gleria, I., Figueiredo, A. e Silva, S. D. Are pound and euro the same currency? *Physics Letters A*, 368(3–4):173 – 180. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960107005294, 2007.

Morettin, P. A. e Toloi, C. M. C. *Análise de Séries Temporais*. ABE - Projeto Fisher. Edgard Blücher, São Paulo, 2 edição, 2006.

Newey, W. K. e West, K. D. A Simple, Positive Semi-definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. *Econometrica*, 55(3):703–08. URL http://www.jstor.org/stable/1913610, 1987.

Peng, C. K., Buldyrev, S. V., S Havlin, M. S., Stanley, H. E. e Goldberger, A. L. Mosaic organization of DNA nucleotides. *Physical review E*, 49(2):1685–1689, 1994.

Peters, E. E. *Fractal Market Analysis*. Wiley Finance Edition. John Willey & Sons, New York, 1 edição, 1994.

Phillips, P. C. B. Time Series Regression with a Unit Root. *Econometrica*, 55(2):277–301. URL http://www.jstor.org/stable/1913237, 1987.

Popescu, I.-I., Zörnig, P., Grzybek, P., Naumann, S. e Altmann, G. Some statistics for sequential text properties. *Glottometrics*, 26:50–94. URL http://www.peter-grzybek.eu/science/publications/2013/2013_grzybek_sequential-properties.pdf, 2013.

Qian, B. e Rasheed, K. Hurst exponent and financial market predictability. *Proceedings of The 2nd IASTED international conference on financial engineering and applications*. Department of Computer Science University of Georgia, páginas 203–209. URL http://qianbo.myweb.uga.edu/research/Hurst.pdf, 2004.

Racine, R. Relatório Técnico Estimating the Hurst Exponent, Swiss Federal Institute of Technology. URL http://www.mosaic.ethz.ch/research/docs/Racine2011.pdf, 2011.

Rathie, P. N. e Zörnig, P. *Teoria da Probabilidade*. Editora UnB, Brasília, 1 edição, 2012.

Sapozhnikov, V. e Foufoula-Georgiou, E. Self-Affinity in Braided Rivers. *Water Resources Research*, 32(5):1429–1439. URL http://dx.doi.org/10.1029/96WR00490, 1996.

Taqqu, M. S., Teverovsky, V. e Willinger, W. Estimators for Long-Range Dependence: An Empirical Study. *Fractals*, 03(04):785–798. URL http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218348X95000692, 1995.

Vervaat, W. Sample Path Properties of Self-Similar Processes with Stationary Increments. *The Annals of Probability*, 13(1):1–27. URL http://dx.doi.org/10.1214/aop/1176993063, 1985.

Vervaat, W. *Properties of general self-similar processes*. Department of Mathematics: Report. Department, Univ. URL http://books.google.com.br/books?id=xVekHAAACAAJ, 1987.

Weron, R. Estimating long-range dependence: finite sample properties and confidence intervals. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 312(1–2):285 – 299. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437102009615, 2002.

Weron, R. e Przybyłowicz, B. Hurst analysis of electricity price dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 283(3–4):462 – 468. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437100002314, 2000.

Wuertz, D., Maechler, M. e core team members., R. *stabledist: Stable Distribution Functions*. URL http://CRAN.R-project.org/package=stabledist, 2013.

Zygmund, A. *Trigonometric Series*, volume 2 de *Cambridge Mathematical Library*. Cambridge University Press, Warsaw, 1 edição. URL http://books.google.com.br/books?id=W9AxAjSiIaUC, 1953.

Apêndice A

Figuras e Gráficos

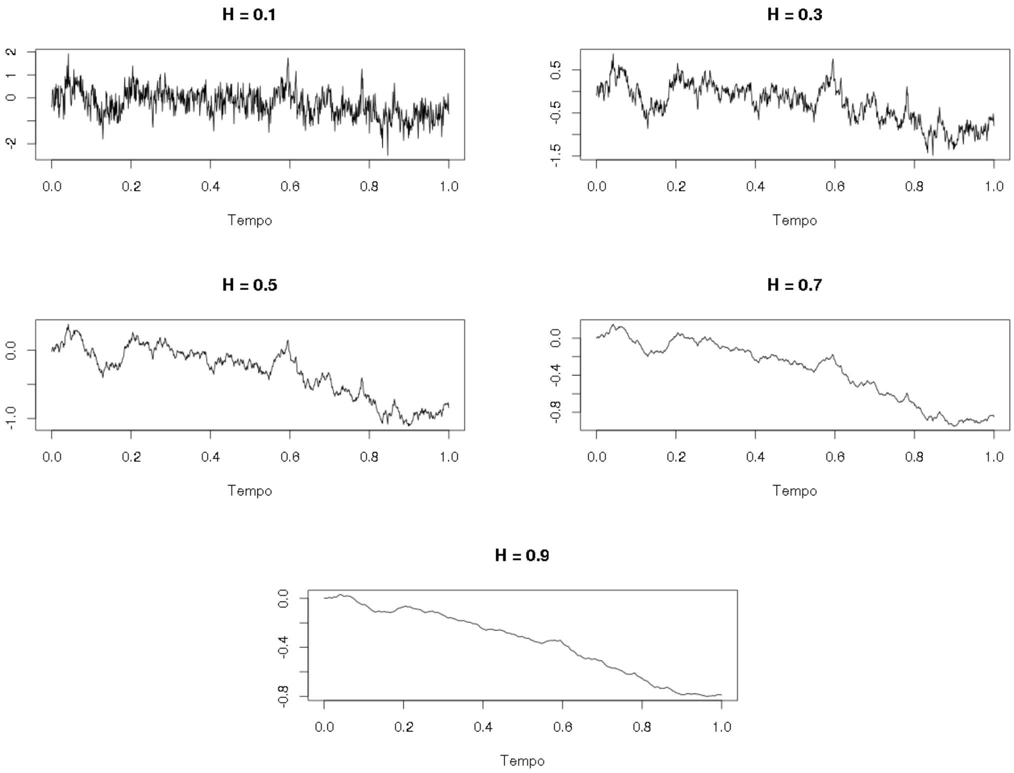

Figura A.1: Gráficos de um MBF com H variando de 0.1 à 0.9

Apêndice B

Tabelas

Método	Distribuição	Média	Variância	Mínimo	Máximo
	$N(0{,}1)$	0.56755	0.00575	0.34563	0.81463
RS	Cauchy(0.01)	0.52888	0.00287	0.33091	0.72578
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.53344	0.00321	0.32470	0.74066
	$N(0{,}1)$	0.54283	0.00510	0.33801	0.78003
RS.mod	Cauchy(0.01)	0.52433	0.00347	0.07707	0.95809
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.35751	0.06485	-1.04183	2.47612
	$N(0{,}1)$	0.44437	0.01320	0.05904	0.77701
KPSS	Cauchy(0.01)	0.49680	0.02385	-0.41135	0.90396
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.13485	0.23329	-1.94718	1.58488
	$N(0{,}1)$	0.48236	0.01320	0.09703	0.81501
VS	Cauchy(0.01)	0.53480	0.02385	-0.37336	0.94195
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.17284	0.23329	-1.90919	1.62287
	$N(0{,}1)$	0.47207	0.00791	0.18482	0.74144
VP	Cauchy(0.01)	0.48010	0.00544	0.08677	0.66671
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.48191	0.00632	0.06963	0.69753
	$N(0{,}1)$	0.48637	0.00749	0.23949	0.77526
DFA(1)	Cauchy(0.01)	0.46363	0.02331	-0.45031	0.93452
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.44893	0.02977	-0.73219	0.90408
	$N(0{,}1)$	0.49892	0.00533	0.30272	0.70559
DFA(2)	Cauchy(0.01)	0.47621	0.02357	-0.50613	0.99157
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.45966	0.02914	-0.66091	0.98524
	$N(0{,}1)$	0.51057	0.00429	0.29260	0.71363
DFA(3)	Cauchy(0.01)	0.48869	0.02311	-0.45715	0.99561
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.47030	0.02803	-0.66373	0.99208
	$N(0{,}1)$	0.52366	0.00364	0.34615	0.70559
DFA(4)	Cauchy(0.01)	0.50565	0.02286	-0.42848	0.98529
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.48660	0.02768	-0.62837	1.00546

Tabela B.1: Estatísticas da estimação de H com os métodos em suas configurações clássicas em ruídos brancos de tamanho 256

Método	Distribuição	Média	Variância	Mínimo	Máximo
	N(0,1)	0.55366	0.00388	0.36551	0.72718
RS	Cauchy(0.01)	0.52592	0.00169	0.40157	0.67180
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.52535	0.00187	0.38081	0.67108
	N(0,1)	0.53480	0.00361	0.35787	0.70354
RS.mod	Cauchy(0.01)	0.52050	0.00233	0.07831	0.70470
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.35681	0.03122	-0.35970	1.30221
	N(0,1)	0.45704	0.00617	0.19375	0.69025
KPSS	Cauchy(0.01)	0.49506	0.01156	-0.14569	0.74748
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.12556	0.10506	-1.01795	1.36857
	N(0,1)	0.48569	0.00617	0.22240	0.71890
VS	Cauchy(0.01)	0.52371	0.01156	-0.11704	0.77613
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.15422	0.10506	-0.98930	1.39722
	N(0,1)	0.48215	0.00462	0.26053	0.66869
VP	Cauchy(0.01)	0.48513	0.00423	0.09507	0.62942
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.48415	0.00476	-0.0162	0.66505
	N(0,1)	0.48101	0.00524	0.28614	0.69799
DFA(1)	Cauchy(0.01)	0.46156	0.02201	-0.70910	1.11708
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.46634	0.01859	-0.39164	0.99359
	N(0,1)	0.49061	0.00350	0.29949	0.67787
DFA(2)	Cauchy(0.01)	0.47035	0.02128	-0.62025	1.13952
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.47614	0.01814	-0.36006	0.98958
	N(0,1)	0.49904	0.00257	0.34276	0.65740
DFA(3)	Cauchy(0.01)	0.47908	0.02080	-0.61300	1.11926
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.48529	0.01763	-0.36731	0.99198
	N(0,1)	0.51056	0.00213	0.38223	0.64761
DFA(4)	Cauchy(0.01)	0.49229	0.02085	-0.63476	1.14902
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.49775	0.01725	-0.33910	1.00973

Tabela B.2: Estatísticas da estimação de H com os métodos em suas configurações clássicas em ruídos brancos de tamanho 512

Método	Distribuição	Média	Variância	Mínimo	Máximo
	N(0,1)	0.54579	0.00224	0.39952	0.71612
RS	Cauchy(0.01)	0.52021	0.00100	0.41647	0.63204
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.52264	0.00120	0.41564	0.63369
	N(0,1)	0.53056	0.00213	0.38354	0.69391
RS.mod	Cauchy(0.01)	0.51635	0.00111	0.37652	0.63020
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.35799	0.01568	-0.44760	0.91355
	N(0,1)	0.46805	0.00401	0.25670	0.65683
KPSS	Cauchy(0.01)	0.49790	0.00699	-0.08778	0.93236
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.08430	0.05584	-0.68608	0.80496
	N(0,1)	0.48968	0.00401	0.27833	0.67846
VS	Cauchy(0.01)	0.51953	0.00699	-0.06615	0.95399
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.10593	0.05584	-0.66446	0.82659
	N(0,1)	0.48539	0.00316	0.29997	0.64929
VP	Cauchy(0.01)	0.49052	0.00236	0.06085	0.65404
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.49053	0.00220	0.21256	0.62574
	N(0,1)	0.48363	0.00314	0.31403	0.65554
DFA(1)	Cauchy(0.01)	0.47893	0.01042	-0.14899	0.87204
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.48230	0.00966	-0.31783	1.05909
	N(0,1)	0.49202	0.00221	0.36902	0.64687
DFA(2)	Cauchy(0.01)	0.48496	0.00996	-0.14530	0.85025
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.48930	0.00916	-0.29747	1.09420
	N(0,1)	0.50012	0.00174	0.38505	0.64289
DFA(3)	Cauchy(0.01)	0.49195	0.00973	-0.14892	0.85129
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.49633	0.00888	-0.29000	1.10226
	N(0,1)	0.50911	0.00140	0.40736	0.63826
DFA(4)	Cauchy(0.01)	0.50234	0.00960	-0.12684	0.85376
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.50534	0.00882	-0.29762	1.11349

Tabela B.3: Estatísticas da estimação de H com os métodos em suas configurações clássicas em ruídos brancos de tamanho 1024

Método	Distribuição	Média	Variância	Mínimo	Máximo
	$N(0,1)$	0.54246	0.00155	0.41796	0.66383
RS	Cauchy(0.01)	0.51836	0.00074	0.42719	0.61280
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.51931	0.00075	0.41873	0.61752
	$N(0,1)$	0.53005	0.00150	0.40496	0.65190
RS.mod	Cauchy(0.01)	0.51539	0.00080	0.42602	0.61126
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.35821	0.00958	-0.26802	0.81103
	$N(0,1)$	0.47632	0.00241	0.30802	0.62493
KPSS	Cauchy(0.01)	0.49494	0.00504	-0.02548	0.71566
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.04548	0.03559	-0.57443	0.76571
	$N(0,1)$	0.49349	0.00241	0.32518	0.64210
VS	Cauchy(0.01)	0.51211	0.00504	-0.00831	0.73283
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.06265	0.03559	-0.55726	0.78288
	$N(0,1)$	0.49451	0.00237	0.32859	0.65284
VP	Cauchy(0.01)	0.49212	0.00161	0.23864	0.59347
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.49225	0.00161	0.21185	0.61232
	$N(0,1)$	0.48906	0.00210	0.35445	0.63616
DFA(1)	Cauchy(0.01)	0.47466	0.01019	-0.79167	0.90280
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.48599	0.00598	-0.01786	1.08359
	$N(0,1)$	0.49566	0.00144	0.39616	0.62003
DFA(2)	Cauchy(0.01)	0.48138	0.00984	-0.75469	0.92040
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.49193	0.00561	0.00379	1.08314
	$N(0,1)$	0.50151	0.00114	0.39407	0.61579
DFA(3)	Cauchy(0.01)	0.48639	0.00964	-0.73518	0.91762
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.49767	0.00554	0.00500	1.06734
	$N(0,1)$	0.50803	0.00093	0.41532	0.60239
DFA(4)	Cauchy(0.01)	0.49411	0.00965	-0.72807	0.91756
	$\alpha-$estável(1.1,0,1,0)	0.50495	0.00551	0.01913	1.07743

Tabela B.4: Estatísticas da estimação de H com os métodos em suas configurações clássicas em ruídos brancos de tamanho 2048

Método	Cobertura	Média	Variância	Mínimo	Máximo
RS	Clássica	0.55755	0.00678	**0.33437**	0.83877
	Varredura	**0.55681**	0.00662	0.33690	0.83885
	Exponencial	0.56745	**0.00522**	0.34329	**0.81143**
RS.mod	Clássica	**0.53471**	0.00593	0.32685	0.77840
	Varredura	0.53420	0.00588	0.32389	0.79574
	Exponencial	0.53441	**0.00440**	**0.32238**	**0.76127**
KPSS	Clássica	0.45011	0.02940	-0.37764	0.87833
	Varredura	**0.46328**	**0.00831**	**0.17961**	**0.70367**
	Exponencial	0.44437	0.01320	0.05904	0.77701
VS	Clássica	0.48682	0.02940	-0.34093	0.91504
	Varredura	**0.49999**	**0.00831**	**0.21632**	**0.74038**
	Exponencial	0.48236	0.01320	0.09703	0.81501
VP	Clássica	0.45239	0.03542	-0.63910	0.88409
	Varredura	0.43609	**0.01458**	**0.04118**	**0.83322**
	Exponencial	**0.45517**	0.02029	-0.06208	0.86000
DFA(1)	Clássica	0.47497	0.01050	0.21177	0.85596
	Varredura	0.47344	0.01085	0.19613	0.86768
	Exponencial	**0.47536**	**0.00853**	**0.21999**	**0.81851**

Tabela B.5: Estatísticas para a estimação do coeficiente de Hurst em séries de tamanho 256 com as várias técnicas de cobertura possíveis

Método	Cobertura	Média	Variância	Mínimo	Máximo
	Clássica	**0.55161**	0.00376	0.34024	0.73276
RS	Varredura	0.55193	0.00379	0.32382	0.74063
	Exponencial	0.56084	**0.00307**	**0.38488**	**0.72565**
	Clássica	**0.53384**	0.00345	0.32814	0.70483
RS.mod	Varredura	0.53424	0.00350	0.30575	0.71573
	Exponencial	0.53547	**0.00278**	**0.36036**	**0.68489**
	Clássica	0.45538	0.01459	-0.03647	0.74898
KPSS	Varredura	**0.47274**	**0.00431**	**0.27163**	**0.66614**
	Exponencial	0.45704	0.00617	0.19375	0.69025
	Clássica	0.48324	0.01459	-0.00862	0.77684
VS	Varredura	**0.50059**	**0.00431**	**0.29948**	**0.69399**
	Exponencial	0.48569	0.00617	0.22240	0.71890
	Clássica	0.46960	0.01608	-0.05768	0.79007
VP	Varredura	0.45523	**0.00870**	**0.15027**	**0.70483**
	Exponencial	**0.47276**	0.01031	0.10777	0.74380
	Clássica	0.48279	0.00613	0.25518	0.71085
DFA(1)	Varredura	0.48301	0.00655	0.24577	0.72610
	Exponencial	**0.48308**	**0.00522**	**0.26893**	**0.69656**

Tabela B.6: Estatísticas para a de estimação do coeficiente de Hurst em séries de tamanho 512 com as várias técnicas de cobertura possíveis

Método	Cobertura	Média	Variância	Mínimo	Máximo
	Clássica	0.54634	0.00243	0.37510	0.69786
RS	Varredura	**0.54602**	0.00242	0.37831	**0.69429**
	Exponencial	0.55425	**0.00191**	**0.41607**	0.70708
	Clássica	0.53204	0.00230	0.36675	**0.67409**
RS.mod	Varredura	**0.53184**	0.00230	0.36843	0.67493
	Exponencial	0.53338	**0.00180**	**0.40475**	0.67944
	Clássica	0.46603	0.00740	0.01212	0.68378
KPSS	Varredura	**0.48968**	**0.00401**	**0.27833**	0.67846
	Exponencial	0.46805	0.00401	0.25670	**0.65683**
	Clássica	0.48768	0.00740	0.03378	0.70543
VS	Varredura	**0.50173**	**0.00258**	**0.33925**	0.67848
	Exponencial	0.48968	0.00401	0.27833	**0.67846**
	Clássica	0.47623	0.00934	0.12525	0.72268
VP	Varredura	0.46443	**0.00538**	**0.25153**	**0.67103**
	Exponencial	**0.48034**	0.00649	0.22451	0.71820

Tabela B.7: Estatísticas para a de estimação do coeficiente de Hurst em séries de tamanho 1024 com as várias técnicas de cobertura possíveis

Método	Cobertura	Média	Variância	Mínimo	Máximo
	Clássica	**0.54087**	0.00154	0.40937	0.67232
RS	Varredura	0.54100	0.00152	0.41532	0.66890
	Exponencial	0.54748	**0.00119**	**0.43786**	**0.65945**
	Clássica	**0.52926**	0.00149	0.40064	0.65826
RS.mod	Varredura	0.52939	0.00148	0.40413	0.65333
	Exponencial	0.53055	**0.00115**	**0.42131**	**0.64210**
	Clássica	0.47643	0.00390	0.20542	0.65735
KPSS	Varredura	**0.48738**	**0.00158**	**0.35373**	0.62688
	Exponencial	0.47632	0.00241	0.30802	**0.62493**
	Clássica	0.49363	0.00390	0.22261	0.67454
VS	Varredura	**0.50457**	**0.00158**	**0.37092**	0.64407
	Exponencial	0.49349	0.00241	0.32518	**0.64210**
	Clássica	0.48128	0.00553	0.21225	0.67148
VP	Varredura	0.47225	**0.00332**	0.27840	**0.64850**
	Exponencial	**0.48487**	0.00386	**0.28057**	0.67106

Tabela B.8: Estatísticas para a de estimação do coeficiente de Hurst em séries de tamanho 2048 com as várias técnicas de cobertura possíveis

	μ da Quebra	Média	Variância	Mínimo	Máximo
RS	0.1	0.54287	0.00191	0.45241	0.66780
	0.2	0.52596	0.00183	0.43664	0.65065
	0.3	0.75721	0.00063	0.68987	0.81392
	0.4	0.82351	0.00049	0.77014	0.87689
	0.5	0.86826	0.00044	0.81620	0.91999
RS.mod	0.1	0.52596	0.00183	0.43664	0.65065
	0.2	0.64676	0.00107	0.56339	0.71596
	0.3	0.72992	0.00054	0.66869	0.78469
	0.4	0.77780	0.00041	0.72830	0.82758
	0.5	0.79631	0.00038	0.74830	0.84299
KPSS	0.1	0.46687	0.00294	0.31193	0.60346
	0.2	0.47217	0.00301	0.32784	0.60976
	0.3	0.48021	0.00308	0.33794	0.61785
	0.4	0.49027	0.00309	0.34500	0.63178
	0.5	0.50155	0.00302	0.35604	0.64540
VS	0.1	0.48850	0.00294	0.33356	0.62509
	0.2	0.49380	0.00301	0.34947	0.63139
	0.3	0.50184	0.00308	0.35957	0.63948
	0.4	0.51190	0.00309	0.36663	0.65341
	0.5	0.52318	0.00302	0.37767	0.66703
VP	0.1	0.50669	0.00424	0.32764	0.64138
	0.2	0.55821	0.00419	0.38218	0.68702
	0.3	0.62271	0.00357	0.44963	0.73748
	0.4	0.68591	0.00268	0.53171	0.78389
	0.5	0.74108	0.00187	0.60830	0.82472
DFA(1)	0.1	0.47530	0.00300	0.35861	0.60929
	0.2	0.62239	0.00188	0.52445	0.72581
	0.3	0.74951	0.00088	0.67497	0.82041
	0.4	0.86115	0.00045	0.80974	0.90733
	0.5	0.95533	0.00028	0.91622	0.99279
DFA(2)	0.1	0.48488	0.00196	0.39159	0.57971
	0.2	0.53714	0.00279	0.34996	0.64558
	0.3	0.62218	0.00187	0.48283	0.71854
	0.4	0.71663	0.00099	0.62780	0.79590
	0.5	0.80470	0.00055	0.74363	0.87033
DFA(3)	0.1	0.49158	0.00172	0.41234	0.59219
	0.2	0.52923	0.00222	0.38271	0.63411
	0.3	0.59111	0.00170	0.45850	0.68579
	0.4	0.66628	0.00105	0.57607	0.74442
	0.5	0.74167	0.00065	0.67849	0.80565
DFA(4)	0.1	0.49994	0.00152	0.42030	0.60015
	0.2	0.52415	0.00192	0.40344	0.62360
	0.3	0.56722	0.00164	0.44794	0.65698
	0.4	0.62886	0.00108	0.53516	0.70056
	0.5	0.69606	0.00069	0.62355	0.75423

Tabela B.9: Estatísticas para os valores estimados do coeficiente de Hurst em quebras estruturais na média em séries com 1024 observações em quebras do tipo $1/2$

	μ da Quebra	Média	Variância	Mínimo	Máximo
RS	0.1	0.56259	0.00278	0.43674	0.67371
	0.2	0.61044	0.00245	0.49879	0.703825
	0.3	0.66267	0.00189	0.54227	0.74093
	0.4	0.71050	0.00134	0.61341	0.77779
	0.5	0.75120	0.00100	0.66887	0.81116
RS.mod	0.1	0.54775	0.00268	0.41965	0.64898
	0.2	0.59427	0.00234	0.48160	0.68738
	0.3	0.64422	0.00176	0.52427	0.72155
	0.4	0.68884	0.00119	0.59365	0.75181
	0.5	0.72546	0.00085	0.64648	0.78041
KPSS	0.1	0.46501	0.00294	0.33625	0.59979
	0.2	0.46681	0.00291	0.33350	0.60028
	0.3	0.46993	0.00286	0.33327	0.60193
	0.4	0.47409	0.00280	0.33577	0.60454
	0.5	0.47900	0.00273	0.34079	0.60782
VS	0.1	0.48664	0.00294	0.35788	0.62142
	0.2	0.48844	0.00291	0.35513	0.62191
	0.3	0.49156	0.00286	0.35490	0.62356
	0.4	0.49572	0.00280	0.35740	0.62617
	0.5	0.50063	0.00273	0.36242	0.62945
VP	0.1	0.49880	0.00379	0.33782	0.66655
	0.2	0.53753	0.00383	0.39383	0.68749
	0.3	0.58923	0.00356	0.44940	0.71494
	0.4	0.64365	0.00303	0.48590	0.74478
	0.5	0.69445	0.00240	0.53516	0.77475
DFA(1)	0.1	0.49668	0.00297	0.36616	0.62682
	0.2	0.52442	0.00270	0.38698	0.63881
	0.3	0.55546	0.00228	0.42692	0.65683
	0.4	0.58422	0.00193	0.46603	0.68092
	0.5	0.60979	0.00168	0.50013	0.70309
DFA(2)	0.1	0.49610	0.00170	0.36737	0.59771
	0.2	0.50852	0.00160	0.38171	0.61072
	0.3	0.52423	0.00146	0.40288	0.62502
	0.4	0.54058	0.00133	0.42466	0.63919
	0.5	0.55650	0.00123	0.44595	0.65273
DFA(3)	0.1	0.50126	0.00144	0.38983	0.60484
	0.2	0.50565	0.00147	0.39114	0.61140
	0.3	0.51258	0.00150	0.39905	0.61884
	0.4	0.52146	0.00152	0.39274	0.62692
	0.5	0.53169	0.00151	0.39307	0.63544
DFA(4)	0.1	0.51021	0.00129	0.41327	0.59978
	0.2	0.51328	0.00130	0.41753	0.60330
	0.3	0.51812	0.00131	0.41856	0.60884
	0.4	0.52441	0.00132	0.41117	0.61521
	0.5	0.53182	0.00131	0.40856	0.62211

Tabela B.10: Estatísticas para os valores estimados do coeficiente de Hurst em quebras estruturais na média em séries com 1024 observações em quebras do tipo $1/4$

	μ da Quebra	Média	Variância	Mínimo	Máximo
	0.1	0.54873	0.00224	0.41559	0.65372
	0.2	0.57561	0.00238	0.42892	0.67341
RS	0.3	0.61146	0.00214	0.44878	0.69790
	0.4	0.64881	0.00170	0.51831	0.72792
	0.5	0.68338	0.00136	0.57013	0.75845
	0.1	0.53401	0.00214	0.40694	0.63132
	0.2	0.55988	0.00223	0.41764	0.64906
RS.mod	0.3	0.59404	0.00195	0.43680	0.67675
	0.4	0.62900	0.00149	0.50487	0.70167
	0.5	0.66047	0.00113	0.55757	0.72409
	0.1	0.48387	0.00386	0.30190	0.71179
	0.2	0.48727	0.00376	0.31472	0.71279
KPSS	0.3	0.49247	0.00365	0.32838	0.71391
	0.4	0.49909	0.00353	0.34255	0.71508
	0.5	0.50668	0.00339	0.35706	0.71625
	0.1	0.50550	0.00386	0.32352	0.73342
	0.2	0.50890	0.00376	0.33635	0.73442
VS	0.3	0.51410	0.00365	0.35001	0.73554
	0.4	0.52072	0.00353	0.36418	0.73671
	0.5	0.52831	0.00339	0.37869	0.73788
	0.1	0.49617	0.00392	0.33247	0.66385
	0.2	0.51811	0.00422	0.36496	0.68720
VP	0.3	0.55048	0.00429	0.38609	0.71239
	0.4	0.58852	0.00401	0.42217	0.73764
	0.5	0.62810	0.00350	0.46614	0.76175
	0.1	0.48369	0.00305	0.35659	0.57806
	0.2	0.49119	0.00296	0.36558	0.58696
DFA(1)	0.3	0.50251	0.00276	0.36207	0.59725
	0.4	0.51572	0.00251	0.37568	0.60808
	0.5	0.52942	0.00227	0.39644	0.61895
	0.1	0.49193	0.00203	0.39063	0.60556
	0.2	0.49788	0.00192	0.40099	0.60280
DFA(2)	0.3	0.50700	0.00178	0.40040	0.60595
	0.4	0.51798	0.00163	0.41059	0.61392
	0.5	0.52972	0.00148	0.42640	0.62204
	0.1	0.50123	0.00150	0.41802	0.61201
	0.2	0.50475	0.00144	0.41856	0.60757
DFA(3)	0.3	0.51000	0.00138	0.42241	0.60408
	0.4	0.51653	0.00132	0.43056	0.60186
	0.5	0.52389	0.00126	0.44099	0.60184
	0.1	0.50752	0.00122	0.43528	0.60031
	0.2	0.50876	0.00121	0.43252	0.59788
DFA(4)	0.3	0.51094	0.00120	0.43162	0.59567
	0.4	0.51394	0.00118	0.43276	0.59495
	0.5	0.51765	0.00115	0.43586	0.59883

Tabela B.11: Estatísticas para os valores estimados do coeficiente de Hurst em quebras estruturais na média em séries com 1024 observações em quebras do tipo $1/8$

	μ da Quebra	Média	Variância	Mínimo	Máximo
RS	0.1	0.54254	0.00207	0.42611	0.64879
	0.2	0.55183	0.00214	0.43904	0.66191
	0.3	0.56634	0.00219	0.42788	0.67611
	0.4	0.58421	0.00221	0.42373	0.69327
	0.5	0.60383	0.00218	0.43847	0.71211
RS.mod	0.1	0.52796	0.00199	0.41272	0.63640
	0.2	0.53674	0.00204	0.42467	0.64935
	0.3	0.55038	0.00208	0.41339	0.66303
	0.4	0.56699	0.00208	0.40917	0.67925
	0.5	0.58494	0.00202	0.42346	0.69669
KPSS	0.1	0.45925	0.00479	0.19887	0.62393
	0.2	0.46780	0.00487	0.21548	0.62604
	0.3	0.47856	0.00503	0.23395	0.63006
	0.4	0.49154	0.00505	0.25251	0.63895
	0.5	0.50560	0.00490	0.26996	0.64967
VS	0.1	0.48088	0.00479	0.22049	0.64556
	0.2	0.48943	0.00487	0.23711	0.64767
	0.3	0.50019	0.00503	0.25558	0.65169
	0.4	0.51317	0.00505	0.27414	0.66058
	0.5	0.52723	0.00490	0.29159	0.67130
VP	0.1	0.49068	0.00441	0.33265	0.64076
	0.2	0.50016	0.00434	0.34738	0.64128
	0.3	0.51528	0.00417	0.36907	0.64591
	0.4	0.53464	0.00392	0.39599	0.65411
	0.5	0.55674	0.00361	0.42698	0.66630
DFA(1)	0.1	0.47830	0.00272	0.35868	0.58985
	0.2	0.47952	0.00272	0.35810	0.59227
	0.3	0.48151	0.00270	0.35332	0.59503
	0.4	0.48413	0.00265	0.35088	0.59808
	0.5	0.48726	0.00259	0.35138	0.60134
DFA(2)	0.1	0.48805	0.00201	0.39218	0.59247
	0.2	0.48918	0.00201	0.38863	0.59395
	0.3	0.49112	0.00200	0.38685	0.59591
	0.4	0.49377	0.00198	0.38711	0.59830
	0.5	0.49699	0.00193	0.38936	0.60101
DFA(3)	0.1	0.49606	0.00182	0.37515	0.59203
	0.2	0.49699	0.00184	0.37232	0.59282
	0.3	0.49869	0.00184	0.37212	0.59401
	0.4	0.50107	0.00182	0.37450	0.59556
	0.5	0.50403	0.00179	0.37891	0.59744
DFA(4)	0.1	0.50570	0.00153	0.40578	0.59153
	0.2	0.50634	0.00155	0.40341	0.59238
	0.3	0.50756	0.00155	0.40266	0.59349
	0.4	0.50933	0.00155	0.40359	0.59483
	0.5	0.51157	0.00153	0.40604	0.59639

Tabela B.12: Estatísticas para os valores estimados do coeficiente de Hurst em quebras estruturais na média em séries com 1024 observações em quebras do tipo $^1/_{16}$

	σ da Quebra	Média	Variância	Mínimo	Máximo
RS	1.2	0.56870	0.00186	0.44098	0.67741
	1.4	0.54287	0.00192	0.45084	0.66395
	1.6	0.54330	0.00196	0.44958	0.66001
	1.8	0.54399	0.00198	0.44655	0.65614
	2	0.54467	0.00199	0.44296	0.65246
RS.mod	1.2	0.55385	0.00181	0.42561	0.66288
	1.4	0.52290	0.00183	0.43086	0.64243
	1.6	0.51970	0.00184	0.42311	0.63252
	1.8	0.51511	0.00185	0.41722	0.61972
	2	0.50928	0.00186	0.40910	0.59863
KPSS	1.2	0.45594	0.00316	0.26617	0.60266
	1.4	0.44366	0.00369	0.23223	0.59514
	1.6	0.41815	0.00591	0.15093	0.58303
	1.8	0.38463	0.00969	-0.05579	0.57241
	2	0.33768	0.01257	-0.14419	0.52145
VS	1.2	0.47486	0.00316	0.28509	0.62158
	1.4	0.46258	0.00369	0.25115	0.61406
	1.6	0.43707	0.00591	0.16985	0.60195
	1.8	0.40355	0.00969	-0.03687	0.59133
	2	0.35660	0.01257	-0.12527	0.54038
VP	1.2	0.48541	0.00427	0.32793	0.61236
	1.4	0.48429	0.00464	0.30726	0.61002
	1.6	0.48313	0.00507	0.29008	0.60818
	1.8	0.48204	0.00550	0.27591	0.60906
	2	0.48106	0.00590	0.26425	0.61124
DFA(1)	1.2	0.50834	0.00305	0.38409	0.63833
	1.4	0.46988	0.00301	0.35363	0.59601
	1.6	0.46495	0.00309	0.34837	0.59398
	1.8	0.46054	0.00321	0.34199	0.59514
	2	0.45663	0.00336	0.33627	0.59588
DFA(2)	1.2	0.49592	0.00227	0.36787	0.59193
	1.4	0.47939	0.00197	0.38233	0.58817
	1.6	0.47443	0.00204	0.37388	0.59447
	1.8	0.47003	0.00214	0.36632	0.59922
	2	0.46616	0.00226	0.35961	0.60286
DFA(3)	1.2	0.50095	0.00194	0.38770	0.59852
	1.4	0.48607	0.00174	0.40070	0.59853
	1.6	0.48114	0.00179	0.39028	0.60314
	1.8	0.47679	0.00185	0.38108	0.60653
	2	0.47298	0.00193	0.37300	0.60907
DFA(4)	1.2	0.50794	0.00170	0.41527	0.60203
	1.4	0.49432	0.00153	0.40721	0.60609
	1.6	0.48933	0.00157	0.39569	0.61047
	1.8	0.48496	0.00162	0.38565	0.61375
	2	0.48116	0.00168	0.37694	0.61624

Tabela B.13: Estatísticas para os valores estimados do coeficiente de Hurst em quebras estruturais na variância em séries com 1024 observações

Apêndice C

Algoritmos

Aqui estão listados todos os algoritmos implementados e usados nesse trabalho.

C.1 Funções úteis

Algoritmo C.1: Cálculo da amplitude ajustada

```
amplitude.ajustada <- function(serie){
  desvios <- cumsum(serie-mean(serie))
  R <- diff(range(desvios))
  return(R)
}
```

Algoritmo C.2: Cálculo da covariância amostral

```
covariancia.amostral <- function(serie,lag){
  n <- length(serie);
  serie.final <- serie[(lag+1):n]
  serie.inicio <- serie[1:(n-lag)]
  return(cov(serie.inicio,serie.final))
}
```

Algoritmo C.3: Cálculo do desvio padrão modificado

```
sd.modificado <- function(serie,q){
  if(q == 0){
    S <- sd(serie);
  }else{
    S0 <- sd(serie);
    n <- length(serie);
    if(n <= q){
      q <- n-1;
    }
    bartlett.weights <- function(j,q){
      bw <- 1 - j/(q+1);
      return(bw);
    }
    vetor.cov <- NULL;
    bw <- NULL;
    for(j in 1:q){
      bw[j] <- bartlett.weights(j,q);
      vetor.cov[j] <- covariancia.amostral(serie,lag = j);
    }
    Sq <- S0 + sum(vetor.cov*bw);
    if(Sq <= 0){
      S <- S0
    }else{
      S <- Sq
    }
  }
  return(S)
}
```

Algoritmo C.4: Construção dos conjuntos de subséries usadas

```
subseries <- function(serie,
                      cobertura="classico",
```

```
                    total.cobertura = 20,
                    tau.limites = c(10,length(serie))){
n <- length(serie);
lista.tau <- NULL;
lista.subseries <- NULL;
if(cobertura=="classico"){
  max.subseries <- max(tau.limites)%/%min(tau.limites);
  p.max <- floor(log2(x = max.subseries));
  quant.subseries <- 2^(0:p.max);
  j <- 0;
  for(i in quant.subseries){
    j <- j + 1;
    lista.tau[j] <- max(tau.limites)%/%i;
  }
  lista.tau <- unique(lista.tau,nmax = max.subseries)
  j <- 0;
  for(i in lista.tau){
    j <- j + 1;
    lista.subseries[[j]] <- matrix(data = serie[1:(n-n%%i)], nrow = i);
  }
}else if(cobertura=="varredura"){
  max.subseries <- max(tau.limites)%/%min(tau.limites);
  p.max <- floor(log2(x = max.subseries));
  quant.subseries <- 2^(0:p.max);
  j <- 0;
  for(i in quant.subseries){
    j <- j + 1;
    lista.tau[j] <- max(tau.limites)%/%i;
  }
  lista.tau <- unique(lista.tau,nmax = max.subseries);
  j <- 0;
  for(i in lista.tau){
    j <- j + 1;
```

```
      serie.recorte <- n-n%%i;
      quant.subseries <- serie.recorte-i+1;
      matriz.subseries <- matrix(NA,ncol = quant.subseries,nrow = i);
      for(k in 1:quant.subseries){
        matriz.subseries[,k] <- serie[k:(k+i-1)];
      }
      lista.subseries[[j]] <- matriz.subseries;
    }
  }else if(cobertura=="exponencial"){
    log.lista.tau <- seq(log(min(tau.limites)),
                         log(max(tau.limites)),
                         len=total.cobertura)
    lista.tau <- unique(floor(exp(log.lista.tau)))
    j <- 0;
    for(i in lista.tau){
      j <- j + 1;
      lista.subseries[[j]] <- matrix(data = serie[1:(n-n%%i)], nrow = i);
    }
  }
  return(list(
    lista.tau = lista.tau,
    lista.subseries = lista.subseries))
}
```

Algoritmo C.5: Cálculo da Estatística R/S

```
estatistica.rs <- function(serie){
  R <- amplitude.ajustada(serie);
  S <- sd(serie);
  R/S
}
```

Algoritmo C.6: Cálculo da Estatística R/S Modificada

```
estatistica.rs.modificada <- function(serie,q){
  R <- amplitude.ajustada(serie);
  S <- sd.modificado(serie, q = q);
  R/S
}
```

Algoritmo C.7: Cálculo da Estatística KPSS

```
estatistica.kpss <- function(serie,q=0){
  n <- length(serie);
  S <- sd.modificado(serie, q = q);
  medias.acumuladas <- cumsum(serie-mean(serie));
  KPSS <- (1/(n^2*S^2))*(sum(medias.acumuladas)^2)
  return(KPSS);
}
```

Algoritmo C.8: Cálculo da Estatística V/S

```
estatistica.vs <- function(serie,q=0){
  n <- length(serie);
  S <- sd.modificado(serie, q = q);
  medias.acum <- cumsum(serie-mean(serie));
  VS <- (1/(n^2*S^2))*(sum(medias.acum)^2-(1/n)*(sum(medias.acum))^2)
  return(VS);
}
```

Algoritmo C.9: Cálculo da Estatística DFA

```
estatistica.DFA <- function(subserie,polinomio.grau){
  x <- 1:length(subserie);
  if(polinomio.grau == 1){
    modelo <- lm(as.formula("subserie~x"));
  }else if(polinomio.grau == 2){
    modelo <- lm(as.formula("subserie~x+I(x^2)"));
  }else if(polinomio.grau == 3){
```

```
    modelo <- lm(as.formula("subserie~x+I(x^2)+I(x^3)"));
  }else if(polinomio.grau == 4){
    modelo <- lm(as.formula("subserie~x+I(x^2)+I(x^3)+I(x^4)"));
  }
  DFA <- mean(modelo$residuals^2);
  return(DFA)
}
```

Algoritmo C.10: Cálculo simultâneo das estatísticas R/S e R/S modificada

```
estatistica.RS.integrada <- function(serie,q){
  n <- length(serie);
  S <- sd.modificado(serie, q = 0);
  S.mod <- sd.modificado(serie, q = q);
  R <- amplitude.ajustada(serie)
  RS <- R/S;
  RS.mod <- R/S.mod;
  estatisticas <- c(RS,RS.mod)
  return(estatisticas);
}
```

Algoritmo C.11: Cálculo simultâneo das estatísticas V/S e KPSS

```
estatistica.VS.integrada <- function(serie,q){
  n <- length(serie);
  medias.acumuladas <- cumsum(serie-mean(serie));
  S.mod <- sd.modificado(serie, q = q);
  KPSS <- (1/(n^2*S.mod^2))*(sum(medias.acumuladas)^2);
  VS <- KPSS - (1/(n^2*S.mod^2))*((1/n)*(sum(medias.acumuladas))^2);
  estatisticas <- c(KPSS,VS)
  return(estatisticas);
}
```

C.2 Algoritmos para estimação do coeficiente de Hurst

Algoritmo C.12: Estimação de H pela Análise R/S

```
hurst.RS <- function(serie,
                     cobertura="classico",
                     tau.limites = c(8,floor(length(serie))),
                     grafico = FALSE,
                     total.cobertura = 20){
  if(cobertura == "classico"){
    LS <- subseries(serie = serie,
                    cobertura = "classico",
                    tau.limites = tau.limites);
  }else if(cobertura == "varredura"){
    LS <- subseries(serie = serie,
                    cobertura = "varredura",
                    tau.limites = tau.limites);
  }else if(cobertura == "exponencial"){
    LS <- subseries(serie = serie,
                    cobertura = "exponencial",
                    total.cobertura = total.cobertura,
                    tau.limites = tau.limites);
  }
  lista.tau <- LS$lista.tau;
  lista.subseries <- LS$lista.subseries;
  vetor.rs <- NULL;
  j <- 0;
  for(i in lista.tau){
    j <- j + 1;
    vetor.rs[j] <- mean(apply(X = lista.subseries[[j]],
                              MARGIN = 2,
                              FUN = estatistica.rs));
  }
  x = log(lista.tau)
```

```
  y = log(vetor.rs)
  modelo <- lm(y~x)
  if(grafico == TRUE){
    plot(y = y,
         x = x,
         xlab = "log(tau)",
         ylab = "log(RS)")
    abline(modelo)
  }
  return(unname(coefficients(modelo)[2]))
}
```

Algoritmo C.13: Estimação de H pela Análise $^{R}/_{S}$

```
hurst.RS.modificada<- function(serie,
                               cobertura="classico",
                               q = 2,
                               tau.limites = c(8,floor(length(serie))),
                               grafico = FALSE,
                               total.cobertura = 20){
  if(cobertura == "classico"){
    LS <- subseries(serie = serie,
                    cobertura = "classico",
                    tau.limites = tau.limites);
  }else if(cobertura == "varredura"){
    LS <- subseries(serie = serie,
                    cobertura = "varredura",
                    tau.limites = tau.limites);
  }else if(cobertura == "exponencial"){
    LS <- subseries(serie = serie,
                    cobertura = "exponencial",
                    total.cobertura = total.cobertura,
                    tau.limites = tau.limites);
  }
```

```
  lista.tau <- LS$lista.tau;
  lista.subseries <- LS$lista.subseries;
  vetor.rs <- NULL;
  j <- 0;
  for(i in lista.tau){
    j <- j + 1;
    estatistica.auxiliar <- function(serie){
      aux <- estatistica.rs.modificada(serie = serie, q = q);
      return(aux);
    }
    vetor.rs[j] <- mean(apply(X = lista.subseries[[j]],
                              MARGIN = 2,
                              FUN = estatistica.auxiliar));
  }
  x = log(lista.tau)
  y = log(vetor.rs)
  modelo <- lm(y~x)
  if(grafico == TRUE){
    plot(y = y,
         x = x,
         xlab = "log(tau)",
         ylab = "log(RS.mod)")
    abline(modelo)
  }
  return(unname(coefficients(modelo)[2]))
}
```

Algoritmo C.14: Estimação de H pela Análise KPSS

```
hurst.KPSS <- function(serie,
                       cobertura="exponencial",
                       q = 2,
                       tau.limites = c(8,floor(length(serie)/8)),
                       grafico = FALSE,
```

```
                         total.cobertura = 20){
  if(cobertura == "classico"){
    LS <- subseries(serie = serie,
                    cobertura = "classico",
                    tau.limites = tau.limites);
  }else if(cobertura == "varredura"){
    LS <- subseries(serie = serie,
                    cobertura = "varredura",
                    tau.limites = tau.limites);
  }else if(cobertura == "exponencial"){
    LS <- subseries(serie = serie,
                    cobertura = "exponencial",
                    total.cobertura = total.cobertura,
                    tau.limites = tau.limites);
  }
  lista.tau <- LS$lista.tau;
  lista.subseries <- LS$lista.subseries;
  vetor.kpss <- NULL;
  j <- 0;
  for(i in lista.tau){
    j <- j + 1;
    estatistica.auxiliar <- function(serie){
      aux <- estatistica.kpss(serie = serie, q = q);
      return(aux)
    }
    vetor.kpss[j] <- mean(apply(X = lista.subseries[[j]],
                                MARGIN = 2,
                                FUN = estatistica.auxiliar));
  }
  n <- length(lista.tau)
  x = log(lista.tau)
  y = log(vetor.kpss)
  modelo <- lm(y~x)
```

```
#  KPSS <- (unname(coefficients(modelo)[2])+1)/4
  KPSS <- unname(coefficients(modelo)[2])/2
if(grafico == TRUE){
  plot(y = y,
       x = x,
       xlab = "log(tau)",
       ylab = "log(KPSS)")
  abline(modelo)
}
  return(KPSS)
}
```

Algoritmo C.15: Estimação de H pela Análise V/S

```
hurst.VS <- function(serie,
                     cobertura="exponencial",
                     q = 2,
                     tau.limites = c(8,floor(length(serie)/8)),
                     grafico = FALSE,
                     total.cobertura = 20){
  if(cobertura == "classico"){
    LS <- subseries(serie = serie,
                    cobertura = "classico",
                    tau.limites = tau.limites);
  }else if(cobertura == "varredura"){
    LS <- subseries(serie = serie,
                    cobertura = "varredura",
                    tau.limites = tau.limites);
  }else if(cobertura == "exponencial"){
    LS <- subseries(serie = serie,
                    cobertura = "exponencial",
                    total.cobertura = total.cobertura,
                    tau.limites = tau.limites);
  }
```

```
  lista.tau <- LS$lista.tau;
  lista.subseries <- LS$lista.subseries;
  vetor.vs <- NULL;
  j <- 0;
  for(i in lista.tau){
    j <- j + 1;
    estatistica.auxiliar <- function(serie){
      aux <- estatistica.vs(serie = serie, q = q);
      return(aux)
    }
    vetor.vs[j] <- mean(apply(X = lista.subseries[[j]],
                              MARGIN = 2,
                              FUN = estatistica.auxiliar));
  }
  x = log(lista.tau)
  y = log(vetor.vs)
  modelo <- lm(y~x)
  VS <- unname(coefficients(modelo)[2])/2
  if(grafico == TRUE){
    plot(y = y,
         x = x,
         xlab = "log(tau)",
         ylab = "log(VS)")
    abline(modelo)
  }
  return(VS)
}
```

Algoritmo C.16: Estimação de H pela análise das variâncias das médias

```
hurst.VP <- function(serie,
                     cobertura="exponencial",
                     total.cobertura = 20,
                     tau.limites = c(8,floor(length(serie)/8)),
```

```
                     grafico = FALSE){
  if(cobertura == "classico"){
    LS <- subseries(serie = serie,
                    cobertura = "classico",
                    tau.limites = tau.limites);
  }else if(cobertura == "varredura"){
    LS <- subseries(serie = serie,
                    cobertura = "varredura",
                    tau.limites = tau.limites);
  }else if(cobertura == "exponencial"){
    LS <- subseries(serie = serie,
                    cobertura = "exponencial",
                    total.cobertura = total.cobertura,
                    tau.limites = tau.limites);
  }
  media <- mean(serie)
  lista.tau <- LS$lista.tau;
  lista.subseries <- LS$lista.subseries;
  vetor.VP <- NULL
  j <- 0;
  for(i in lista.tau){
    j <- j + 1;
    vetor.medias <- apply(X = lista.subseries[[j]],
                          MARGIN = 2,
                          FUN = mean)
    n.sub <- length(vetor.medias)
    vetor.VP[j] <- (1/(n.sub-1))*sum((vetor.medias-media)^2)
  }
  y <- log(vetor.VP,base = 10)
  x <- log(lista.tau,base = 10)
  modelo <- lm(y~x)
  if(grafico == TRUE){
    plot(y = y,
```

```
        x = x,
        xlab = "log(tau)",
        ylab = "log(VP)")
    abline(modelo)
  }
  VP <- (unname(coefficients(modelo)[2])+2)/2
  return(VP)
}
```

Algoritmo C.17: Estimação de H pela DFA

```
hurst.DFA <- function(serie,
                      cobertura="exponencial",
                      total.cobertura = 20,
                      polinomio.grau = 1,
                      tau.limites = c(10,floor(length(serie))),
                      grafico = FALSE){
  perfil.dfa <- cumsum(serie - mean(serie))
  if(cobertura == "classico"){
    LS <- subseries(serie = perfil.dfa,
                    cobertura = "classico",
                    tau.limites = tau.limites);
  }else if(cobertura == "varredura"){
    LS <- subseries(serie = perfil.dfa,
                    cobertura = "varredura",
                    tau.limites = tau.limites);
  }else if(cobertura == "exponencial"){
    LS <- subseries(serie = perfil.dfa,
                    cobertura = "exponencial",
                    total.cobertura = total.cobertura,
                    tau.limites = tau.limites);
  }
  lista.tau <- LS$lista.tau;
  lista.subseries <- LS$lista.subseries;
```

```
  vetor.DFA <- NULL
  j <- 0;
  estatistica.auxiliar <- function(serie){
    aux <- estatistica.DFA(serie,
                               polinomio.grau = polinomio.grau);
    return(aux)
  }
  for(i in lista.tau){
    j <- j + 1;
    vetor.DFA[j] <- sqrt(mean(apply(X = lista.subseries[[j]],
                                     MARGIN = 2,
                                     FUN = estatistica.auxiliar)));
  }
  y <- log(vetor.DFA)
  x <- log(lista.tau)
  modelo <- lm(y~x)
  if(grafico == TRUE){
    plot(y = y,
          x = x,
          xlab = "log(tau)",
          ylab = "log(DFA)")
    abline(modelo)
  }
  return(unname(coefficients(modelo)[2]))
}
```

Algoritmo C.18: Estimação de H pelos métodos $^R/_S$ e $^R/_S$ modificada

```
hurst.RS.integrada <- function(serie,
                                    cobertura="classico",
                                    q = 2,
                                    tau.limites = c(10,floor(length(serie))),
                                    total.cobertura = 20){
  if(cobertura == "classico"){
```

```
    LS <- subseries(serie = serie,
                    cobertura = "classico",
                    tau.limites = tau.limites);
  }else if(cobertura == "varredura"){
    LS <- subseries(serie = serie,
                    cobertura = "varredura",
                    tau.limites = tau.limites);
  }else if(cobertura == "exponencial"){
    LS <- subseries(serie = serie,
                    cobertura = "exponencial",
                    total.cobertura = total.cobertura,
                    tau.limites = tau.limites);
  }
  lista.tau <- LS$lista.tau;
  lista.subseries <- LS$lista.subseries;
  n <- length(lista.tau)
  matriz.hurst <- matrix(ncol = 2,nrow = n);
  j <- 0;
  for(i in lista.tau){
    j <- j + 1;
    estatistica.auxiliar <- function(x){
      aux <- estatistica.RS.integrada(x,q = q);
      return(aux);
    }
    matriz.estatisticas <- apply(X = lista.subseries[[j]],
                                 MARGIN = 2,
                                 FUN = estatistica.auxiliar);
    matriz.hurst[j,] <- colMeans(t(matriz.estatisticas));
  }
  x <- log(lista.tau)
  y.RS <- log(matriz.hurst[,1])
  y.RS.mod <- log(matriz.hurst[,2])
  inclinacao <- function(x,y){
```

```
    n <- length(x)
    x.bar <- sum(x)/n
    beta <- (sum(x*y)-n*x.bar*mean(y))/(sum(x^2)-n*x.bar^2)
    return(beta)
  }
  RS <- inclinacao(x,y.RS)
  RS.mod <- inclinacao(x,y.RS.mod)
  estimadores <- as.character(c("RS",
                                "RS.mod"))
  H <- matrix(data = c(RS,RS.mod),
              nrow = 1,
              ncol = 2,
              dimnames = list("H",estimadores))
  return(H)
}
```

Algoritmo C.19: Estimação de H pelos métodos V/S e KPSS

```
hurst.VS.integrada <- function(serie,
                               cobertura="exponencial",
                               q = 2,
                               tau.limites = c(8,floor(length(serie)/8)),
                               total.cobertura = 20){
  if(cobertura == "classico"){
    LS <- subseries(serie = serie,
                    cobertura = "classico",
                    tau.limites = tau.limites);
  }else if(cobertura == "varredura"){
    LS <- subseries(serie = serie,
                    cobertura = "varredura",
                    tau.limites = tau.limites);
  }else if(cobertura == "exponencial"){
    LS <- subseries(serie = serie,
                    cobertura = "exponencial",
```

```
                    total.cobertura = total.cobertura,
                    tau.limites = tau.limites);
}
lista.tau <- LS$lista.tau;
lista.subseries <- LS$lista.subseries;
n <- length(lista.tau)
matriz.hurst <- matrix(ncol = 2,nrow = n);
j <- 0;
for(i in lista.tau){
  j <- j + 1;
  estatistica.auxiliar <- function(x){
    aux <- estatistica.VS.integrada(x,q = q);
    return(aux);
  }
  matriz.estatisticas <- apply(X = lista.subseries[[j]],
                               MARGIN = 2,
                               FUN = estatistica.auxiliar);
  matriz.hurst[j,] <- colMeans(t(matriz.estatisticas));
}
x <- log(lista.tau)
y.KPSS <- log(matriz.hurst[,1])
y.VS <- log(matriz.hurst[,2])
inclinacao <- function(x,y){
  n <- length(x)
  x.bar <- sum(x)/n
  beta <- (sum(x*y)-n*x.bar*mean(y))/(sum(x^2)-n*x.bar^2)
  return(beta)
}
KPSS <- (inclinacao(x,y.KPSS))/2
VS <- (inclinacao(x,y.VS))/2
estimadores <- as.character(c("KPSS",
                              "VS"))
H <- matrix(data = c(KPSS,VS),
```

```
              nrow = 1,
              ncol = 2,
              dimnames = list("H",estimadores))
  return(H)
}
```

Algoritmo C.20: Estimação de H por todos os métodos em suas configurações clássicas

```
hurst <- function(serie){
  RS.integrado <- as.vector(hurst.RS.integrada(serie = serie))
  VS.integrado <- as.vector(hurst.VS.integrada(serie = serie))
  VP <- hurst.VP(serie = serie)
  DFA1 <- hurst.DFA(serie = serie,
                    polinomio.grau = 1)
  DFA2 <- hurst.DFA(serie = serie,
                    polinomio.grau = 2)
  DFA3 <- hurst.DFA(serie = serie,
                    polinomio.grau = 3)
  DFA4 <- hurst.DFA(serie = serie,
                    polinomio.grau = 4)
  estimadores <- as.character(c("RS",
                                "RS.mod",
                                "KPSS",
                                "VS",
                                "VP",
                                "DFA(1)",
                                "DFA(2)",
                                "DFA(3)",
                                "DFA(4)"))
  H <- matrix(data = c(RS.integrado,VS.integrado,VP,DFA1,DFA2,DFA3,DFA4),
              nrow = 1,
              ncol = 9,
              dimnames = list("H",estimadores))
  return(H)
```

```
}
```

C.3 Algoritmos das simulações

Algoritmo C.21: Script para Simulação de Movimento Browniano Fracionado

```
par(mfrow = c(3,2))
library(package = "somebm")
lista.H <- seq(from = 0.1,to = 0.9,by = 0.2)
for(H in lista.H){
  set.seed(seed=1)
  serie <- as.ts(fbm(n = 1000,hurst = H))
  plot(serie)
}

par(mfrow = c(1,1))
set.seed(seed=1)
serie <- as.ts(fbm(n = 1000,hurst = 0.9))
plot(serie,ylab = "",xlab = "Tempo",main="H␣=␣0.9")
```

Algoritmo C.22: Estimação de H pelas configurações clássicas dos métodos estudados em Ruídos Brancos Gaussiano simulados de tamanhos 256, 512, 1024, 2048

```
source(file = "principal.r")
set.seed(seed = 1);
total.simulacoes <- 1000;
estimadores <- as.character(c("RS",
                              "RS.mod",
                              "KPSS",
                              "VS",
                              "VP",
                              "DFA(1)",
                              "DFA(2)",
```

```
                              "DFA(3)",
                              "DFA(4)"))
estimacao <- 1:total.simulacoes
tamanhos <- c(256,512,1024,2048)
matriz.estimacoes <- matrix(data = NA,
                            nrow = total.simulacoes,
                            ncol = length(estimadores),
                            dimnames = list(estimacao,estimadores))
simulacoes <- list(n256 = matriz.estimacoes,
                   n512 = matriz.estimacoes,
                   n1024 = matriz.estimacoes,
                   n2048 = matriz.estimacoes)
simulacoes.cauchy <- simulacoes
simulacoes.normal <- simulacoes
simulacoes.stable <- simulacoes
N <- max(tamanhos)*total.simulacoes
normal <- rnorm(n = N)
cauchy <- rcauchy(n = N,scale=1000)
stable <- rstable(n = N,alpha = 1.1,beta = 0)
for(n in 1:length(tamanhos)){
  matriz.normal <- matrix(data = normal,
                          nrow = tamanhos[n],
                          byrow = FALSE)[,1:total.simulacoes]
  matriz.cauchy <- matrix(data = cauchy,
                          nrow = tamanhos[n],
                          byrow = FALSE)[,1:total.simulacoes]
  matriz.stable <- matrix(data = stable,
                          nrow = tamanhos[n],
                          byrow = FALSE)[,1:total.simulacoes]
  status <- dim(matriz.stable)
  cat("Estimando␣H␣em",status[2],"subséries␣de␣tamanho",status[1],"\n")
  H.normal <- apply(X = matriz.normal,
                    MARGIN = 2,
```

```
                    FUN = hurst)
  simulacoes.normal[[n]] <- matrix(data = t(H.normal),
                                   nrow = total.simulacoes,
                                   ncol = length(estimadores),
                                   dimnames = list(estimacao,estimadores))
  H.cauchy <- apply(X = matriz.cauchy,
                    MARGIN = 2,
                    FUN = hurst)
  simulacoes.cauchy[[n]] <- matrix(data = t(H.cauchy),
                                   nrow = total.simulacoes,
                                   ncol = length(estimadores),
                                   dimnames = list(estimacao,estimadores))
  H.stable <- apply(X = matriz.stable,
                    MARGIN = 2,
                    FUN = hurst)
  simulacoes.stable[[n]] <- matrix(data = t(H.stable),
                                   nrow = total.simulacoes,
                                   ncol = length(estimadores),
                                   dimnames = list(estimacao,estimadores))
  save(simulacoes.cauchy,
       simulacoes.normal,
       simulacoes.stable,
       file = "simulacoes3.rdata")
}
```

Algoritmo C.23: Algoritmo de comparação dos diferentes métodos de construção de subséries

```
source(file = "principal.r")
set.seed(seed = 1);
total.simulacoes <- 10000;
estimadores <- as.character(c("RS",
                              "RS.mod",
                              "KPSS",
```

```
                                "VS",
                                "VP",
                                "DFA(1)",
                                "DFA(2)",
                                "DFA(3)",
                                "DFA(4)"))
estimacao <- 1:total.simulacoes
cobertura <- as.character(c("classico","varredura","exponencial"))
tamanhos <- c(256,512,1024,2048)
matriz.estimacoes <- matrix(data = NA,
                                nrow = total.simulacoes,
                                ncol = length(estimadores),
                                dimnames = list(estimacao,estimadores))
lista.cobertura <- list(classico = matriz.estimacoes,
                        varredura = matriz.estimacoes,
                        exponencial = matriz.estimacoes)
lista.n <- list(n256 = lista.cobertura,
                n512 = lista.cobertura,
                n1024 = lista.cobertura,
                n2048 = lista.cobertura)
serie <- rnorm(n = max(tamanhos)*total.simulacoes)
for(p in 1:length(cobertura)){
  cat("Estimando para cobertura",cobertura[p],"\n")
  for(n in 1:length(tamanhos)){
    serie.matriz <- matrix(data = serie,
                            nrow = tamanhos[n],
                            byrow = FALSE)[,1:total.simulacoes]
    status <- dim(serie.matriz)
    cat("Estimando H em",status[2],"subséries de tamanho",status[1],"\n")
    hurst.aux <- function(x){
      H <- hurst(x,cobertura = cobertura[p])
      return(H)
    }
```

```
    H.est <- apply(X = serie.matriz,
                   MARGIN = 2,
                   FUN = hurst.aux)
    lista.n[[n]][[p]] <- matrix(data = t(H.est),
                                nrow = total.simulacoes,
                                ncol = length(estimadores),
                                dimnames = list(estimacao,estimadores))
    save(lista.n, file = "simulacoes-subseries.rdata")
  }
}
```

Algoritmo C.24: Algoritmo para comparação dos estimadores em séries com quebras estruturais no tempo para média e variância

```
source(file = "principal.r")
set.seed(seed = 1);
total.simulacoes <- 100;
quebras <- seq(from = 0.1,to = 0.5,by = 0.1)
varian <- seq(from = 1.2, to = 2, by = 0.2)
estimadores <- as.character(c("RS",
                              "RS.mod",
                              "KPSS",
                              "VS",
                              "VP",
                              "DFA(1)",
                              "DFA(2)",
                              "DFA(3)",
                              "DFA(4)"))
estimacao <- 1:total.simulacoes;
n.quebra.1 <- 512;
n.quebra.2 <- 256;
n.quebra.3 <- 128;
n.quebra.4 <- 64;
n.inicio.1 <- n.quebra.1;
```

```
n.inicio.2 <- 3*n.quebra.2;
n.inicio.3 <- 7*n.quebra.3;
n.inicio.4 <- 15*n.quebra.4;
matriz.estimacoes <- matrix(data = NA,
                            nrow = total.simulacoes,
                            ncol = length(estimadores),
                            dimnames = list(estimacao,estimadores))
simulacoes.quebra <- list(quebra01 = matriz.estimacoes,
                          quebra02 = matriz.estimacoes,
                          quebra03 = matriz.estimacoes,
                          quebra04 = matriz.estimacoes,
                          quebra05 = matriz.estimacoes)
simulacoes.quebra.1 <- simulacoes.quebra
simulacoes.quebra.2 <- simulacoes.quebra
simulacoes.quebra.3 <- simulacoes.quebra
simulacoes.quebra.4 <- simulacoes.quebra
simulacoes.varian <- list(var01 = matriz.estimacoes,
                          var02 = matriz.estimacoes,
                          var03 = matriz.estimacoes,
                          var04 = matriz.estimacoes,
                          var05 = matriz.estimacoes)
inicio.1 <- rnorm(n = n.inicio.1*total.simulacoes)
inicio.2 <- rnorm(n = n.inicio.2*total.simulacoes)
inicio.3 <- rnorm(n = n.inicio.3*total.simulacoes)
inicio.4 <- rnorm(n = n.inicio.4*total.simulacoes)
fim.1 <- rnorm(n= n.quebra.1*total.simulacoes)
fim.2 <- rnorm(n= n.quebra.2*total.simulacoes)
fim.3 <- rnorm(n= n.quebra.3*total.simulacoes)
fim.4 <- rnorm(n= n.quebra.4*total.simulacoes)
for(q in 1:length(quebras)){
  ##################Quebras Tipo 1#############################
  fim.quebra <- fim.1 + quebras[q]
  matriz.inicio <- matrix(data = inicio.1,
```

```
                        nrow = n.inicio.1,
                        byrow = FALSE)
matriz.fim.quebra <- matrix(data = fim.quebra,
                            nrow = n.quebra.1,
                            byrow = FALSE)
series.quebra <- rbind(matriz.inicio,matriz.fim.quebra)
cat("Estimando H em quebras estruturais tipo 1 de tamanho",quebras[q],"\n")
H.quebra <- apply(X = series.quebra,
                  MARGIN = 2,
                  FUN = hurst)
simulacoes.quebra.1[[q]] <- matrix(data = t(H.quebra),
                                   nrow = total.simulacoes,
                                   ncol = length(estimadores),
                                   dimnames = list(estimacao,estimadores))
##################Quebras Tipo 2############################
fim.quebra <- fim.2 + quebras[q]
matriz.inicio <- matrix(data = inicio.2,
                        nrow = n.inicio.2,
                        byrow = FALSE)
matriz.fim.quebra <- matrix(data = fim.quebra,
                            nrow = n.quebra.2,
                            byrow = FALSE)
series.quebra <- rbind(matriz.inicio,matriz.fim.quebra)
cat("Estimando H em quebras estruturais tipo 2 de tamanho",quebras[q],"\n")
H.quebra <- apply(X = series.quebra,
                  MARGIN = 2,
                  FUN = hurst)
simulacoes.quebra.2[[q]] <- matrix(data = t(H.quebra),
                                   nrow = total.simulacoes,
                                   ncol = length(estimadores),
                                   dimnames = list(estimacao,estimadores))
##################Quebras Tipo 3############################
fim.quebra <- fim.3 + quebras[q]
```

```
matriz.inicio <- matrix(data = inicio.3,
                        nrow = n.inicio.3,
                        byrow = FALSE)
matriz.fim.quebra <- matrix(data = fim.quebra,
                            nrow = n.quebra.3,
                            byrow = FALSE)
series.quebra <- rbind(matriz.inicio,matriz.fim.quebra)
cat("Estimando␣H␣em␣quebras␣estruturais␣tipo␣3␣de␣tamanho",quebras[q],"\n")
H.quebra <- apply(X = series.quebra,
                  MARGIN = 2,
                  FUN = hurst)
simulacoes.quebra.3[[q]] <- matrix(data = t(H.quebra),
                                   nrow = total.simulacoes,
                                   ncol = length(estimadores),
                                   dimnames = list(estimacao,estimadores))
##################Quebras Tipo 4#############################
fim.quebra <- fim.4 + quebras[q]
matriz.inicio <- matrix(data = inicio.4,
                        nrow = n.inicio.4,
                        byrow = FALSE)
matriz.fim.quebra <- matrix(data = fim.quebra,
                            nrow = n.quebra.4,
                            byrow = FALSE)
series.quebra <- rbind(matriz.inicio,matriz.fim.quebra)
cat("Estimando␣H␣em␣quebras␣estruturais␣tipo␣4␣de␣tamanho",quebras[q],"\n")
H.quebra <- apply(X = series.quebra,
                  MARGIN = 2,
                  FUN = hurst)
simulacoes.quebra.4[[q]] <- matrix(data = t(H.quebra),
                                   nrow = total.simulacoes,
                                   ncol = length(estimadores),
                                   dimnames = list(estimacao,estimadores))
##################Quebras na Variância############################
```

```
  cat("Estimando␣H␣em␣quebras␣na␣variancia␣de␣tamanho",varian[q],"\n")
  fim.varian <- fim.1*varian[q]
  matriz.fim.varian <- matrix(data = fim.varian,
                              nrow = n.quebra.1,
                              byrow = FALSE)
  series.varian <- rbind(matriz.inicio,matriz.fim.varian)
  H.varian <- apply(X = series.varian,
                    MARGIN = 2,
                    FUN = hurst)
  simulacoes.varian[[q]] <- matrix(data = t(H.varian),
                                   nrow = total.simulacoes,
                                   ncol = length(estimadores),
                                   dimnames = list(estimacao,estimadores))
  save(simulacoes.quebra.1,
       simulacoes.quebra.2,
       simulacoes.quebra.3,
       simulacoes.quebra.4,
       simulacoes.varian,
       file = "simulacoes-quebra-full.rdata")
}
```