Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

# Soluções blow-up para equações elípticas com peso singular ou expoente variável

por

**Luryane Ferreira de Souza**

Brasília

2015

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

# Soluções blow-up para equações elípticas com peso singular ou expoente variável

por

**Luryane Ferreira de Souza** *

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

**MESTRE EM MATEMÁTICA**

Brasília, 27 de fevereiro de 2015

Comissão Examinadora:

Dr. Jiazheng Zhou - UnB - Orientador

Dr. Ricardo Ruviaro - UnB - Examinador

Dr. Jefferson Abrantes dos Santos - UFCG - Examinador

*O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração deste trabalho.

*"Tudo é considerado impossível até acontecer"*
Nelson Mandela

# Agradecimentos

Primeiramente a Deus que me ilumina todos os dias e é de onde tiro toda coragem e determinação para seguir em frente e não desistir.

A meu pai, Nélio, por todo carinho, amizade, amor, e que durante o mestrado me ajudou incondicionalmente nos dias mais difíceis principalmente nos problemas de saúde. Você é o pilar da nossa família obrigada por ser meu porto seguro.

A minha mãe, Rita, que batalhou muito junto com meu pai para dar a melhor educação e as melhores oportunidades para mim e minhas irmãs. E que infelizmente não viveu para ver essa conquista. Só estou aqui hoje concluindo esse sonho porque você me inspira todos os dias.

As minhas irmãs Lydiane e Yanara pela amizade e alegria que trazem a minha vida, sempre com palavras de incentivo e tranquilizadoras.

Aos meus familiares e amigos, em especial aos que foram mais presentes nesse período meu avô Viterbo, Tio Clésio, Cleonice, Ranivar, Dayane, Rubs, Ana, Bruna, André, Jamer, Ilton, Júlia, Amparo, e a todos tios e tias, primos e primas, amigos e amigas que não citei aqui mas que sempre torceram por mim.

Ao meu orientador Zhou, primeiramente por aceitar me orientar, e pela atenção, paciência e dedicação sempre disposto a ajudar, muito obrigada.

Aos professores da banca Ricardo Ruviaro e Jefferson Abrantes dos Santos por terem aceito o convite e pelas correções e sugestões.

Aos professores e funcionários do departamento pela ajuda e dedicação.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Enfim a todos que contribuiram para a realização desse sonho.

Valeu galera!

# Resumo

Nesse trabalho consideramos o problema

$$\begin{cases} \triangle_p u = a(x)u^{q(x)} & \text{em} \quad \Omega \\ u = +\infty & \text{na} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado ou $\Omega = \mathbb{R}^n$, $p > 1$.

Vamos estudar a existência de solução para o problema (1) em dois casos:

1. $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $q(x) = q > p - 1$ e $a(x)$ é uma função não negativa, que pode ser singular na $\partial\Omega$.

2. $\Omega = \mathbb{R}^n$, para $n \geq 3$, $p = 2$, $a(x) = 1$ e $q$ é uma função Holder contínua, $q(x) \geq 1$ para $\|x\| \leq R$ e $0 < q(x) \leq 1$ para $\|x\| \geq R$, onde $R \geq 0$ é uma constante.

Além disso, estudamos a unicidade e comportamento na $\partial\Omega$ para a solução do caso 1.



**Palavras – Chaves**: Blow-up sub e supersolução, princípio da comparação, assíntotas, expoente variável.

# Abstract


In this work we consider the problem

$$\begin{cases} \triangle_p u = a(x)u^{q(x)} & \text{em} \quad \Omega \\ u = +\infty & \text{na} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain or $\Omega = \mathbb{R}^n$, $p > 1$.

We will study existence of solution for problem (2) in two cases:

1. $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $q(x) = q > p - 1$ and $a(x)$ is a nonnegative function, wich can be singular on $\partial\Omega$.

2. $\Omega = \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $p = 2$, $a(x) = 1$ and $q$ is Holder continuous function, $q(x) \geq 1$ for $\|x\| \leq R$ and $0 < q(x) \leq 1$ for $\|x\| \geq R$, where $R \geq 0$ is a constant.

Moreover, we study uniqueness and behavior on $\partial\Omega$ for solution of the first case.



**Key − Words** : Blow-up subsolution and supersolution, comparison principle, asymptotes, variable exponent.

# Sumário

# Introdução

Nesse trabalho vamos estudar existência e unicidade de solução para o problema

$$\begin{cases} \triangle_p u = a(x)u^{q(x)} & x \in \Omega \\ u(x) \to +\infty & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

onde $p > 1$, $a$ é uma função contínua não negativa e singular na fronteira de $\Omega$ e $q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, o subconjunto $\Omega$ pode ser um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^n$, com $u(x) \to +\infty$ quando $d(x, \partial\Omega) \to 0$ ou $\Omega = \mathbb{R}^n$ então $u(x) \to +\infty$ quando $|x| \to +\infty$.

Quando $q(x) = q > p - 1$, $p > 1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, temos que o problema (1) se transforma em

$$\begin{cases} \triangle_p u = a(x)u^{q} & x \in \Omega \\ u \to +\infty & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

( ver [5]). Alguns trabalhos, como [2], [13], [20] já provaram existência de solução para problemas parecidos com (2). Em [2] foi provado existência e unicidade de solução para o problema

$$\begin{cases} \triangle_p u = f(u) & x \in \Omega \\ u \to +\infty & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

onde $f \in C([0, \infty)$ e $f$ é uma função não linear. Já em [13]

$$\begin{cases} \triangle_p u = H(x,u) & x \in \Omega \\ u \to +\infty & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

onde $H(x, u) = a(x)f(u)$, foi mostrado a existência de solução blow-up para $a(x)$ limitada. Quando $a(x)$ não é limitada, $q > 1$, temos, para o caso $p = 2$, que existe uma solução para o problema

$$\begin{cases} \triangle u = a(x)u^{q} & x \in \Omega \\ u \to +\infty & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

(ver [20]). Outros trabalhos também estudam condições para $a(x)$, para garantir existência e unicidade de solução para (5).

Vamos estudar, também, o problema (1) quando $p = 2$, $a(x) = 1$, $\Omega = \mathbb{R}^n$ e $q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ uma função localmente Holder contínua, com $q(x) \leq 1$ quando $|x| \to +\infty$. Neste caso o problema (1) é dado por

$$\begin{cases} \triangle u = u^{q(x)} & x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x) \overset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty, & \end{cases} \tag{6}$$

como visto em [9]. Para $q$ constante positiva, temos dos Lemas 2 e 3 de [15] que $\triangle u = u^q$ tem uma solução quando $q \leq 1$. Já o problema

$$\begin{cases} \triangle u = u^{q(x)} & x \in \Omega \\ u = +\infty & \text{na} \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{7}$$

com $\Omega$ limitado, possui uma solução se $q(x) = q > 1$ pelo Teorema 1 em [10].

Esse trabalho foi dividido em três capítulos. No primeiro apresentamos algumas definições e resultados que serão usados nos demais capítulos. No Capítulo 2 estudamos a existência e unicidade de solução para o problema (2), na primeira seção desse capítulo provamos todos os teoremas que serão utilizados para provar nas seções seguintes existência, unicidade e a estimatima para o problema:

**Teorema 0.1** *Sejam $a \in C(\Omega)$ uma função não negativa e $q > p - 1$. Tome $a > 0$ numa vizinhança da fronteira $\partial\Omega$, e suponha que exista $Q \in C(\overline{\Omega})$, com $\gamma \in C^{\mu}(\overline{\Omega})$, $0 < \mu \leq 1$, tais que $Q(x) > 0$ na $\partial\Omega$ e $\gamma(x) < 0$ para $x \in \partial\Omega$ tais que*

$$\lim_{x \to x_0} d(x)^{\gamma(x)} a(x) = Q(x_0), \tag{8}$$

*onde $d(x) = d(x, \partial\Omega)$ e $x_0 \in \partial\Omega$. O problema (2) admite uma única solução fraca positiva $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap C^{1,\eta}_{loc}(\Omega)$ para algum $\eta \in (0, 1)$, que verifica*

$$\lim_{x \to x_0} d(x)^{\alpha(x)} u(x) = \left( \frac{(p-1)\alpha(x_0)^{p-1}(\alpha(x_0) + 1)}{Q(x_0)} \right)^{\frac{1}{q-p+1}}, \tag{9}$$

*para todo $x_0 \in \partial\Omega$, onde $\alpha(x) = \frac{p-\gamma(x)}{q-p+1}$.*

Assumindo que $q(x)$ é uma função limitada fora de uma bola de $\mathbb{R}^n$ verificando algumas das seguintes condições:

**Q1-** $q : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ é localmente Holder contínua

**Q2-**existe $R \geq 0$ tal que $q(x) \geq 1$ para $|x| \leq R$, e $0 < q(x) \leq 1$ para $|x| \geq R$.

Quando $R = 0$, a condição **Q2** é entendida como $0 < q(x) \leq 1$ em $\mathbb{R}^n$.

Então, mostraremos no capítulo 3, a existência de solução para o problema (6) a partir dos respectivos teoremas:

**Teorema 0.2** *Suponha $q$ satisfaz condições **Q1** e **Q2**. Se*

$$\int_0^r r\exp(\lambda r^2) q_{osc}(r)dr < \infty, \tag{10}$$

*para algum $\lambda$ tal que $2N\lambda > 1$, então o problema (6) admite infinitas soluções.*

E $q_{osc}(r) = q^*(r) - q_*(r)$, $q^*(r) := \max_{|x|=r} q(x)$ e $q_*(r) := \min_{|x|=r} q(x)$.

Para o próximo teorema definimos $\|q\|_\infty := \max\{q(x); x \in \mathbb{R}^n\}$, segue

**Teorema 0.3** *Assuma que $q(x)$ verifica a condição **Q1** e suponha que existam constantes $0 < R < \sqrt{2^{1-\|q\|_\infty}}$ e $0 < \beta \leq 1$ tais que $0 \leq q(x) \leq \beta$ para todo $|x| \geq R$. Mais ainda, assuma que $q_*(r) \leq 1$ para $r > 0$. Se*

$$\int_1^\infty r v_\beta(r) q_{osc}(r)dr \quad < \quad \infty, \tag{11}$$

*onde*

$$v_\beta(r) := \begin{cases} r^{\frac{2}{1-\beta}} & se \quad 0 < \beta < 1, r \ \in \ \mathbb{R} \\ \exp\left(r^2\right) & se \quad \beta = 1 e r \ \in \ \mathbb{R} \end{cases}$$

*então o problema (6) admite uma solução positiva.*

Capítulo

1

# Resultados Auxiliares

Nesse capítulo vamos revisar alguns resultados e definições que serão utilizados em todo o texto. Muitos dos resultados aqui apresentados não serão demonstrados, mas segue a referência onde há a demonstração.

## 1.1 Desigualdade de Gronwall

**Teorema 1.1.1** *(Desigualdade de Gronwall) Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas definidas num intervalo $I = [a, b)$ com $a < b \leq \infty$. Suponha que $v(x) \geq 0$, $x \in I$, e $u$ é uma função contínua que satisfaz*

$$u(t) \quad \leq \quad \alpha(t) + \int_a^t v(s)u(s)ds \qquad t \in I,$$

*então*

$$u(t) \quad = \quad \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)v(s)e^{\int_s^t v(r)dr}ds.$$

A demostração dessa desigualdade pode ser vista no Lema 1.1 de [12].

**Teorema 1.1.2** *(Desigualdade de Gronwall Generalizada) Sejam $g, f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis, não negativas e $a : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, não negativa tais que:*

$$g(t) \quad \leq \quad g_0 + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t a(s)g(s)ds,$$

*onde* $g_0$ *é uma constante não negativa. Então*

$$g(t) \;\leq\; \left(g_0 + \int_0^t f(s)ds\right) e^{\int_0^t a(s)ds}.$$

A demostração está apresentada no Teorema 1.15 de [11].

## 1.2 Supersolução e Subsolução

Considere o problema elíptico quasilinear do tipo

$$-divA(x,\nabla u) + B(x,u,\nabla u) = 0 \quad x \in \Omega \tag{1.1}$$

$$u = g \quad x \in \partial\Omega \tag{1.2}$$

onde $\Omega$ é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, $A$ é uma função vetorial de n-vetores cujas variáveis são $x$ e $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, B é uma função escalar dada, de variáveis $x$, $u$ e $\nabla u$, e $g$ uma função definida na fronteira de $\Omega$. A equação não linear pseudo-Laplaciana, isto é, $A(x,\nabla u) = |\nabla u|^{p-2}\nabla u$ e

$$-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + B(x,u,\nabla u) = 0 \quad x \in \Omega, \;\; p > 1 \tag{1.3}$$

é um caso especial de (1.1).

**Definição 1.2.1** *Uma função $u$ é dita uma solução de (1.1) em $\Omega$ se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $B(x,u,\nabla u) \in L^1_{loc}(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega \{(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla\varphi + B(x,u,\nabla u)\varphi\}dx = 0$$

*para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.*

**Definição 1.2.2** *Uma função $u$ é dita uma subsolução (ou uma supersolução) de (1.1) em $\Omega$ se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $B(x,u,\nabla u) \in L^1_{loc}(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega \{(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla\varphi + B(x,u,\nabla u)\varphi\}dx \leq 0 \quad (\geq 0)$$

*para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$ em $\Omega$.*

**Definição 1.2.3** *Uma função $u$ é dita W-subsolução da equação (1.1) em $\Omega$ se $u = \max\{u_i;\ i = 1,2,...,m\}$ em $\Omega$ para algum $m \in \mathbb{N}$, onde cada $u_i$ é uma subsolução de (1.1) em $\Omega$ e $u_i \in W^{1,p}(\Omega)$.*

*Uma função u é dita ser uma W-supersolução da equação (1.1) em* $\Omega$ *se* $u = \min\{u_i;\ i = 1, 2, ..., m\}$ *em* $\Omega$ *para algum* $m \in \mathbb{N}$*, onde cada* $u_i$ *é uma supersolução de (1.1) em* $\Omega$ *e* $u_i \in W^{1,p}(\Omega)$*.*

O próximo resultado será muito utilizado para garantir existência de solução para problemas do tipo (1.1) e (1.3).

**Teorema 1.2.1** *Sejam* $\varphi_1$ *e* $\varphi_2$ *respectivamente uma W-subsolução e uma W-supersolução de (1.1) em* $\Omega$ *tais que* $\varphi_1 \leq \varphi_2$ *em* $\Omega$ *e* $\varphi_1 \leq g \leq \varphi_2$ *na* $\partial\Omega$*. Suponha que existe uma constante positiva* $c_1$ *e uma função* $f_3 \in L^q(\Omega)$*, com* $q = \dfrac{p}{p-1}$ *e* $0 < p < \infty$ *tal que*

$$|B(x, t, \xi)| \leq |f_3(x)| + h(|t|) + c_1|\xi|^{p-1}$$

*para* $x \in \Omega$*,* $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*, onde* $h : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *é uma função não decrescente tal que* $h(|\varphi|) \in L^q(\Omega)$ *para* $\varphi \in L^p(\Omega)$*. Então o problema (1.1) e (1.2) tem uma solução u tal que* $\varphi_1 \leq u \leq \varphi_2$ *em* $\Omega$*.*

Este resultado foi provado em [8].

## 1.3 Princípio da comparação

Segundo Tolksdorf (prova em [18]) temos o seguinte resultado, que será muito usado nesse trabalho para comparar duas soluções.

**Teorema 1.3.1** *Seja* $G : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua com* $G(x, .)$ *não crescente para cada* $x \in \Omega$*. Se* $u, w \in W^{1,p}(\Omega)$ *satisfazem as inequações*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \leq \int_\Omega G(x, u)\varphi \quad e \qquad \int_\Omega |\nabla w|^{p-2} \nabla w \nabla \varphi \geq \int_\Omega G(x, w)\varphi$$

*para toda função não-negativa* $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$*, e além disso* $u \leq w$ *na* $\partial\Omega$ *então* $u \leq w$ *em* $\Omega$*.*

O próximo resultado diz respeito a regularidade interior para soluções fracas de equações quase lineares.

**Teorema 1.3.2** *Suponha* $h(x, t)$ *é mensurável em* $x \in \Omega$ *e contínua em* $t \in \mathbb{R}$ *tal que* $|h(x, t)| \leq \Gamma$ *em* $\Omega \times \mathbb{R}$*. Seja* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *uma solução fraca de* $\triangle_p u = h(x, u)$*. Dado um sub-domínio* $D \subset\subset \Omega$*, existe* $\alpha > 0$ *e uma constante positiva C, dependendo de* $n, p, \Gamma, \|u\|_\infty$ *e D tal que*

$$|\nabla u(x)| \leq C \quad e \quad |\nabla u(x) - \nabla u(y)| \leq C|x - y|^\alpha, x, y \in D.$$

A prova desse teorema pode ser encontrada em [3].

## 1.4 Teorema de Poincaré-Bendixson

Seja $A$ um subconjunto aberto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. A aplicação $X : A \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^k$ é um campo vetorial de classe $C^k$ com $1 \leq k \leq \infty$. Onde $X$ está associado a equação diferencial

$$x' = X(x). \tag{1.4}$$

As aplicações diferenciáveis $\varphi : I \to A$ (I um intervalo ), que são soluções das equações (1.4), tais que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t))$$

para todo $t \in I$, são chamadas tragetórias ou curvas integrais de $X$.

Um ponto $x \in A$ é dito ponto singular de $X$ se $X(x) = 0$ e ponto regular de $X$ se $X(x) \neq 0$.

Seja $\varphi(t) = \varphi(t,p)$ a curva integral de $X$ passando pelo ponto $p$ definida no seu intervalo máximo $I_p$, onde $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$. Se $\omega_+(p) = \infty$ defini-se o conjunto

$$\omega(p) = \{q \in A;\ \exists\ (t_n) \to \infty \ \text{ e } \ \varphi(t_n) \to q, \ \text{ quando } \ n \to \infty\}.$$

Analogamente, se $\omega_-(p) = -\infty$, defini-se o conjunto

$$\alpha(p) = \{q \in A;\ \exists\ (t_n) \to -\infty \ \text{ e } \ \varphi(t_n) \to q, \ \text{ quando } \ n \to \infty\}.$$

Os conjuntos $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ são chamados respectivamente de conjunto $\omega$-limite e conjunto $\alpha$-limite de p.

Para enunciarmos o teorema de Poincaré- Bendixson iremos denotar $\gamma_p^+$ como a semi-órbita positiva por $p$

$$\gamma_p^+ = \{\varphi(t,p); t \geq 0\}.$$

**Teorema 1.4.1** *(Poincaré-Bendixon) Seja $\varphi(t) = \varphi(t,p)$ uma curva integral de $X$, defina para todo $t \geq 0$, tal que $\gamma_p^+$ esteja contida num compacto $K \subset A$.*

*Suponha que o campo $X$ possua um número finito de singularidades em $\omega(p)$. Tem-se as seguintes alternativas:*

*a)Se $\omega(p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica;*

*b) Se $\omega(p)$contém pontos regulares e singulares, então $\omega(p)$consiste de um conjunto de*

*órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos singulares quando* $t \to \pm\infty$*;*
*c) Se* $\omega(p)$ *não contém pontos regulares, então* $\omega(p)$ *é um ponto singular.*

A demonstração desse teorema bem como mais resultados desse assunto se encontra no Capítulo VII de [17].

## 1.5 Desigualdade de Harnack

Seja a equação

$$divA(x,u,u_x) + B(x,u,u_x) = 0 \tag{1.5}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u_x = (u_{x_1}, ..., u_{x_n})$, a função $A(x,u,u_x)$ é uma função mensurável em $\mathbb{R}^n$ e a função $B(x,u,u_x)$ é uma função mensurável real, ambas definidas em $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, onde $\Omega$ é um domínio em $\mathbb{R}^n$.

Vamos assumir que para todo $M < \infty$ e para todo $(x,u,p) \in \Omega \times (-M, M) \times \mathbb{R}^n$, as seguintes condições são satisfeitas

$$\begin{aligned}
|A(x,u,p)| &\leq a_0|p|^{\alpha-1} + |a_1(x)u|^{\alpha-1} + (a_3(x))^{\alpha-1}, \\
pA(x,u,p) &\geq |p|^{\alpha} - |a_2(x)u|^{\alpha} - (a_4(x))^{\alpha}, \\
|B(x,u,p)| &\leq b_0|p|^{\alpha} + b_1(x)|p|^{\alpha-1} + (b_2(x))^{\alpha}|u|^{\alpha-1} + (b_3(x))^{\alpha}
\end{aligned}$$

onde $\alpha > 1$, $a_0$, $b_0$ são constantes, $a_i(x)$, $b_i(x)$ são funções mensuráveis não negativas, $\alpha$, $a_0$, $b_0$, $a_i(x)$, $b_i(x)$ podem depender de $M$.

Vamos considerar a desigualdade de Harnack para o cubo $K_{x_0}(p)$ denotado como um cubo em $\mathbb{R}^n$ de lado $p$ e centro $x_0$ cujos os lados são paralelos aos eixos coordenados. Em geral escrevemos $K(p) = K_{x_0}(p)$ assumindo o centro conhecido.

No teorema que segue, vamos denotar por $C$ uma função $C(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ que depende de $\lambda_1$, ..., $\lambda_n$ que são diferentes de $u(x)$.

Para a desigualdade de Harnack vamos assumir $a_3(x)$, $a_4(x)$ $, b_3(x) = 0$.

**Teorema 1.5.1** *Seja* $u(x)$ *uma solução fraca de (1.5) em um cubo* $K = K(3\rho) \subset \Omega$ *com* $0 \leq u < M$ *em* $K$*. Então*

$$\max_{K(\rho)} u(x) \leq C \min_{K(\rho)} u(x) \tag{1.6}$$

*onde* $C = C(\alpha, n, a_0, b_0 M, \mu\rho)$

## 1.6 Princípio do máximo forte

**Definição 1.6.1** *Dizemos que um ponto $x_0 \in \partial\Omega$ satisfaz a condição esférica interior se existe uma bola aberta $B = B_R(x_1) \subset \Omega$ tal que $\overline{B} \cap \partial\Omega = \{x_0\}$. E definimos o vetor unitário*

$$v = \frac{x_1 - x_0}{|x_1 - x_0|} \tag{1.7}$$

*$v$ é normal a $\partial B$ em $x_0$ na direção interior a $\Omega$.*

O próximo resultado garante existência de solução positiva ou identicamente nula em $\Omega$

**Teorema 1.6.1** *Seja $u \in C^1(\Omega)$ tal que $\triangle_p u \in L^2_{loc}(\Omega)$, $u \geq 0$ em $\Omega$, $\triangle_p u \leq \beta(u)$ em $\Omega$, com $\beta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ contínua, não decrescente, $\beta(0) = 0$ e $\beta(s) = 0$ para algum $s > 0$ ou $\beta(s) > 0$ para todo $s > 0$ e $\int_0^1 (\beta(s)s)^{-\frac{1}{p}} ds = +\infty$.*

*Então se $u$ não é nula em $\Omega$ então $u$ é positiva em $\Omega$.*

*E se $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$ para $x_0 \in \partial\Omega$ que satisfaz a condição esférica interior e $u(x_0) = 0$ então*

$$\frac{\partial u}{\partial v}(x_0) > 0 \tag{1.8}$$

*onde $v$ é um vetor normal interior em $x_0$ definido em* 1.7.

A prova desse Teorema está em Vázquez (1984) [19]

## 1.7 Função distância

Seja $\Omega$ um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ que possui $\partial\Omega$ não vazia. A função distância $d$ é definida por

$$d(x) = dist(x, \partial\Omega).$$

Para $\mu > 0$, seja $\Gamma_\mu = \{x \in \overline{\Omega} | d(x) < \mu\}$.

**Lema 1.7.1** *Seja $\Omega$ um conjunto limmitado e $\partial\Omega \in C^k$ para $k \geq 2$. Então existe uma constante positiva $\mu$ dependendo de $\Omega$ tal que $d \in C^k(\Gamma_\mu)$.*

A prova desse lema está em [7].

Capítulo

2

# Problema com p-Laplaciano e peso singular

Neste capítulo vamos obter uma descrição do conjunto de soluções para o problema elíptico, blow-up, quaselinear

$$\begin{cases} \triangle_p u = a(x)u^q(x), & x \in \Omega \\ u \to +\infty, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega$ é um domínio $C^2$ limitado de $\mathbb{R}^n$, $\triangle_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $p > 1$ e $q > p-1$. A função peso, $a(x)$ é contínua em $\Omega$, não negativa. A condição de fronteira $u \to +\infty$ na $\partial\Omega$ pode ser entendida como $u \to +\infty$ quando $d(x) \to 0^+$, onde $d(x)$ é a função distância $dist(x, \partial\Omega)$. Para isso provaremos o seguinte teorema.

**Teorema 2.1** *Sejam $a \in C(\Omega)$ uma função não negativa com $a > 0$ numa vizinhança da fronteira $\partial\Omega$ e $q > p-1$. Suponha que $Q \in C(\overline{\Omega})$ com $Q(x) > 0$ na $\partial\Omega$, e $\gamma \in C^\mu(\overline{\Omega})$, $0 < \mu \leq 1$, e $\gamma < 0$ na $\partial\Omega$ verificando:*

$$\lim_{x \to x_0} d(x)^{\gamma(x)} a(x) = Q(x_0) \tag{2.2}$$

*para todo $x_0 \in \partial\Omega$. O problema (2.1) admite uma única solução fraca positiva $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap C^{1,\eta}_{loc}(\Omega)$ para algum $\eta \in (0,1)$, verificando:*

$$\lim_{x \to x_0} d(x)^{\alpha(x)} u(x) = \left( \frac{(p-1)\alpha(x_0)^{p-1}(\alpha(x_0)+1)}{Q(x_0)} \right)^{\frac{1}{q-p+1}}, \tag{2.3}$$

*para todo* $x_0 \in \partial\Omega$, *onde* $\alpha(x) = \frac{p-\gamma(x)}{q-p+1}$.

Mas antes de provarmos o teorema, vamos estudar alguns resultados que serão importantes na prova desse resultado.

## 2.1 Resultados Preliminares

Nesta seção vamos estudar dois teoremas que vão auxiliar na prova da existência e garantir a estimativa (2.3).

**Teorema 2.1.1** *Seja* $f \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ *tal que* $|f| \leq C_0 d^{-\beta}$ *para* $C_0 > 0$, $\beta \in (0,p)$ *e* $d(x) := d(x, \partial\Omega)$. *Então o problema*

$$\begin{cases} -\triangle_p u = f, & x \ \in \Omega, \\ u = 0, & x \ \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

*tem uma única solução fraca* $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap C^{1,\eta}_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *para algum* $\eta \in (0,1)$. *Mais ainda, existe uma constante positiva* $C$ *que não depende de* $f$ *tal que*

$$|u| \leq C C_0^{\frac{1}{p-1}} d^{\frac{p-\beta}{p-1}}, \quad x \ \in \Omega. \tag{2.5}$$

**Prova:** a) Suponha $\beta \in (1,p)$. Seja $\phi \in W^{1,p}_0 \cap C^{1,\eta}(\overline{\Omega})$ para $\eta \in (0,1)$ a única solução do problema

$$\begin{cases} -\triangle_p \phi = 1, & em \quad \Omega, \\ \phi = 0, & na \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

uma vez que $\underline{\phi} = 0$ e $\overline{\phi} = 1$ são subsolução e supersolução de (2.6) respectivamente (pelo Teorema (1.2.1)).

Pelo princípio do máximo forte, desigualdade (1.8) Teorema (1.6.1), temos

$$\frac{\partial\phi}{\partial\eta}(x_0) > 0 \ \text{ com } \ x_0 \in \partial\Omega \tag{2.7}$$

onde $\eta$ é vetor normal unitário interno.

**Afirmação 1:** Existem constantes $\tilde{C}_1$ e $\tilde{C}_2$ tais que

$$\tilde{C}_1 d \leq \phi \leq \tilde{C}_2 d \ \ em \ \ \Omega. \tag{2.8}$$

De fato, como $\phi \in C^1(\Omega)$ e $\frac{\partial \phi}{\partial \eta} > 0$ na $\partial\Omega$, seja $\Omega_{\delta_1} = \{x \in \Omega \ / \ d(x) < \delta_1\}$ tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} > 0$$

em $\Omega_{\delta_1}$, onde $\eta$ é um vetor normal interior no ponto $x_0$.

Do Lema (1.7.1) temos que existe $\delta_2 > 0$ tal que $d \in C^1(\Omega_{\delta_2})$, com $\Omega_{\delta_2} = \{x \in \Omega \ / \ d(x) < \delta_2\}$ e

$$\frac{\partial d}{\partial \eta} > 0$$

em $\Omega_{\delta_2}$.

Agora tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ temos $\frac{\partial \phi}{\partial \eta} > 0$ e $\frac{\partial d}{\partial \eta} > 0$ em $\Omega_\delta$, como $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$ então existem $a_1, b_1 > 0$ tais que

$$\min_{\overline{\Omega_\delta}} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = a_1 \quad e \quad \max_{\overline{\Omega_\delta}} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = b_1.$$

Dados $x \in \Omega_\delta$ e $\hat{d} : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ onde $\hat{d}(y) = \|y - x\|$, como $\hat{d}$ é contínua e $\partial\Omega$ é compacta, existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $\hat{d}(x_0)$ é mínimo, então $d(x) = \|x - x_0\| = \hat{d}(x_0)$.

Considere $\eta = \dfrac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$ vetor normal interno unitário e

$$\varphi(t) = \phi(tx_0 + (1-t)x) \qquad t \in [0,1].$$

Observe que $\varphi(0) = \phi(x)$ e $\varphi(1) = \phi(x_0) = 0$ pois $x_0 \in \partial\Omega$. Segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\begin{aligned} \varphi(0) - \varphi(1) &= \int_1^0 \varphi'(t)dt = \int_1^0 \nabla\phi(tx_0 + (1-t)x) \cdot (x_0 - x)dt \\ &= \int_1^0 \nabla\phi(tx_0 + (1-t)x) \cdot \frac{(x_0 - x)}{\| x - x_0 \|} \| x - x_0 \| \, dt \\ &= \int_0^1 \nabla\phi(tx_0 + (1-t)x).\eta \| x - x_0 \| \, dt. \end{aligned}$$

Mas, como $\nabla\phi \cdot \eta = \dfrac{\partial \phi}{\partial \eta}$ temos

$$\begin{aligned} \varphi(0) - \varphi(1) &= \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(tx_0 + (1-t)x) \| x - x_0 \| \, dt \geq a_1 \| x - x_0 \| \\ \Longrightarrow & \qquad \phi(x) \geq a_1 \| x - x_0 \| . \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
\varphi(0)-\varphi(1) &= \int_0^1 \frac{\partial\phi}{\partial\eta}(tx_0+(1-t)x) \parallel x-x_0 \parallel dt \leq b_1 \parallel x-x_0 \parallel \\
\Longrightarrow &\qquad \phi(x) \leq b_1 \parallel x-x_0 \parallel .
\end{aligned}$$

Assim temos

$$a_1 \parallel x-x_0 \parallel \leq \phi(x) \leq b_1 \parallel x-x_0 \parallel \qquad \forall\, x \in \Omega_\delta. \tag{2.9}$$

Também existem $a_2, b_2 > 0$ tais que

$$a_2 = \min_{\overline{\Omega_\delta}} \frac{\partial d}{\partial\eta} \quad e \quad b_2 = \max_{\overline{\Omega_\delta}} \frac{\partial d}{\partial\eta}.$$

Definimos

$$\psi(t) = d(tx_0+(1-t)x) \qquad t \in [0,1]$$

e observamos que $\psi(0) = d(x)$ e $\psi(1) = d(x_0) = 0$ então

$$\begin{aligned}
\psi(0)-\psi(1) &= \int_1^0 \psi'(t)dt = \int_1^0 \nabla d(tx_0+(1-t)x)\cdot(x_0-x)dt \\
&= \int_1^0 \nabla d(tx_0+(1-t)x)\cdot \frac{(x_0-x)}{\parallel x_0-x \parallel} \parallel x_0-x \parallel dt \\
&= \int_0^1 \nabla d(tx_0+(1-t)x)\cdot \eta \parallel x_0-x \parallel dt.
\end{aligned}$$

Observando que $\frac{\partial d}{\partial\eta} = \nabla d\cdot\eta$, temos

$$\begin{aligned}
\psi(0)-\psi(1) &= \int_0^1 \nabla d(tx_0+(1-t)x)\cdot \eta \parallel x_0-x \parallel dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial d}{\partial\eta}(tx_0+(1-t)x) \parallel x_0-x \parallel dt \\
&\leq b_2 \parallel x-x_0 \parallel,
\end{aligned}$$

logo

$$d(x) \leq b_2 \parallel x-x_0 \parallel \tag{2.10}$$

e analogamente

$$\psi(0)-\psi(1)\geq a_2\|x-x_0\| \quad \Rightarrow \quad d(x)\geq a_2\|x_0-x\|. \tag{2.11}$$

Daí

$$a_2\|x_0-x\|\leq d(x)\leq b_2\|x_0-x\| \quad \forall x\in\Omega_\delta. \tag{2.12}$$

Assim, por (2.9) e (2.12) obtemos

$$\phi(x)\leq b_1\|x-x_0\|\leq \frac{b_1}{a_2}d(x), \quad \forall x\in\Omega_\delta$$

e

$$\phi(x)\geq a_1\|x-x_0\|\geq \frac{a_1}{b_2}d(x), \quad \forall x\in\Omega_\delta.$$

Portanto

$$\frac{a_1}{b_2}d(x)\leq \phi(x)\leq \frac{b_1}{a_2}d(x) \quad \forall x\in\Omega_\delta. \tag{2.13}$$

Como $\Omega\backslash\Omega_\delta$ é compacto e a função $\phi(x)d^{-1}(x)$ é contínua neste conjunto, temos

$$c_1\leq \phi(x)d^{-1}(x)\leq c_2 \quad \Rightarrow \quad c_1d(x)\leq\phi(x)\leq c_2d(x) \;\; em \;\; \Omega\backslash\Omega_\delta. \tag{2.14}$$

De (2.13) e (2.14), mostramos a Afirmação 1.

**Afirmação 2:** Seja $\alpha=\frac{p-\beta}{p-1}$, $\bar{u}=\phi^\alpha$ é uma supersolução de $-\triangle_p u=Cd^{-\beta}$ para algum $C>0$ que se anula na $\partial\Omega$. Para mostrar a Afirmação 2, devemos mostrar que:

$$\int_\Omega |\nabla\bar{u}|^{p-2}\nabla\bar{u}\nabla\varphi dx\geq\int_\Omega Cd^{-\beta}\varphi(x)dx$$

para $\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\varphi\geq 0$ e $\bar{u}\geq 0$ na $\partial\Omega$. Como $\bar{u}=\phi^\alpha$, temos $\nabla\bar{u}=\alpha\phi^{\alpha-1}\nabla\phi$ e $|\nabla\bar{u}|=\alpha\phi^{\alpha-1}|\nabla\phi|$. Segue que

$$|\nabla\bar{u}|^{p-2}\nabla\bar{u}=\alpha^{p-2}\phi^{(\alpha-1)(p-2)}|\nabla\phi|^{p-2}\alpha\phi^{\alpha-1}\nabla\phi=\alpha^{p-1}\phi^{(\alpha-1)(p-1)}|\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi.$$

Assim

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla\bar{u}|^{p-2}\nabla\bar{u}\nabla\varphi dx-\int_\Omega Cd^{-\beta}\varphi(x)dx &= \int_\Omega \alpha^{p-1}\phi^{(\alpha-1)(p-1)}|\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi\nabla\varphi dx\\ &- \int_\Omega Cd^{-\beta}\varphi dx.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi\nabla(\alpha^{p-1}\phi^{(\alpha-1)(p-1)}\varphi) &= |\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi\nabla(\alpha^{p-1}\phi^{(p-1)(\alpha-1)})\varphi \\ &+ \alpha^{p-1}\phi^{(p-1)(\alpha-1)}|\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi\nabla\varphi, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha^{p-1}\phi^{(\alpha-1)(p-1)}|\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi\nabla\varphi &= |\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi\nabla(\alpha^{p-1}\phi^{(p-1)(\alpha-1)}\varphi) \\ &- |\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi\nabla(\alpha^{p-1}\phi^{(\alpha-1)(p-1)})\varphi. \end{aligned} \tag{2.16}$$

De (2.16) e (2.15)

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla\bar{u}|^{p-2}\nabla\bar{u}\nabla\varphi dx &- \int_\Omega Cd^{-\beta}\varphi dx = \int_\Omega |\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi\nabla(\alpha^{p-1}\phi^{(p-1)(\alpha-1)}\varphi) \\ &- \int_\Omega |\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi\nabla(\alpha^{p-1}\phi^{(\alpha-1)(p-1)})\varphi - \int_\Omega Cd^{-\beta}\varphi dx. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Uma vez que $\phi$ é solução de (2.6), tem-se

$$\int_\Omega |\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi\nabla\Phi dx = \int_\Omega 1\Phi dx \qquad \forall\ \Phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular para $\Phi = \alpha^{p-1}\phi^{(\alpha-1)(p-1)}\varphi$ temos

$$\int_\Omega |\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi\nabla(\alpha^{p-1}\phi^{(\alpha-1)(p-1)}\varphi)dx = \int_\Omega \alpha^{p-1}\phi^{(\alpha-1)(p-1)}\varphi dx. \tag{2.18}$$

Agora observe que

$$\alpha - 1 = \frac{p-\beta}{p-1} - 1 = \frac{p-\beta-p+1}{p-1} = \frac{1-\beta}{p-1} < 0$$

pois $\beta > 1$ e $p > 1$. Deste fato

$$\begin{aligned}
\mid \nabla\phi \mid^{p-2} \nabla\phi\nabla(\alpha^{p-1}\phi^{(\alpha-1)(p-1)})\varphi &= \alpha^{p-1}(\alpha-1)(p-1)\phi^{(\alpha-1)(p-1)-1}\nabla\phi\varphi \mid \nabla\phi \mid^{p-2} \nabla\phi \\
&= \alpha^{p-1}(\alpha-1)(p-1)\phi^{(\alpha-1)(p-1)-1}\varphi \mid \nabla\phi \mid^{p} < 0
\end{aligned}$$

De (2.18) e (2.19), temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mid \nabla\bar{u} \mid^{p-2} \nabla\bar{u}\nabla\varphi dx - \int_\Omega Cd^{-\beta}\varphi dx &= \int_\Omega \alpha^{p-1}\phi^{(\alpha-1)(p-1)}\varphi dx - \int_\Omega Cd^{-\beta}\varphi dx \\
&+ \int_\Omega (1-\alpha)(p-1)\alpha^{p-1}\phi^{(p-1)(\alpha-1)-1} \mid \nabla\phi \mid^p \varphi dx \\
= \int_\Omega [\alpha^{p-1}\phi^{(\alpha-1)(p-1)} - Cd^{-\beta} &+ (1-\alpha)(p-1)\alpha^{p-1}\phi^{(\alpha-1)(p-1)-1} \mid \nabla\phi \mid^p]\varphi dx.
\end{aligned}$$

Como $\phi \leq C_2 d$ e $\alpha - 1 < 0$ temos que

$$\phi^{(\alpha-1)(p-1)} \geq C_2^{(\alpha-1)(p-1)} d^{(\alpha-1)(p-1)}$$

e

$$(\alpha-1)(p-1) - 1 = \alpha p - \alpha - p = p(\alpha-1) - \alpha < 0.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mid \nabla\bar{u} \mid^{p-2} \nabla\bar{u}\nabla\varphi dx - \int_\Omega Cd^{-\beta}\varphi dx \geq \int_\Omega [\alpha^{p-1}C_2^{(\alpha-1)(p-1)}d^{(\alpha-1)(p-1)} - Cd^{-\beta} \\
+(1-\alpha)(p-1)\alpha^{p-1}C_2^{(\alpha-1)(p-1)-1}d^{(\alpha-1)(p-1)-1} \mid \nabla\phi \mid^p]\varphi dx. \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$(\alpha-1)(p-1) = \left[\frac{p-\beta}{p-1} - 1\right](p-1) = \left[\frac{p-\beta-p+1}{p-1}\right](p-1) = 1-\beta,$$

a desigualdade (2.19) fica

$$\int_\Omega \mid \nabla \bar{u} \mid^{p-2} \nabla \bar{u} \nabla \varphi dx - \int_\Omega C d^{-\beta} \varphi dx \geq \int_\Omega [\alpha^{p-1} C_2^{1-\beta} d^{1-\beta} + (\beta-1)\alpha^{p-1} \mid \nabla \phi \mid^p C_2^{-\beta} d^{-\beta}$$
$$-C d^{-\beta}] \varphi dx$$
$$= \int_\Omega d^{-\beta} [\alpha^{p-1} C_2^{1-\beta} d + (\beta-1)\alpha^{p-1} \mid \nabla \phi \mid^p C_2^{-\beta} - C] \varphi dx.$$

**Afirmação 3:** Deste fato, para mostrarmos a Afirmação 2, basta mostrarmos

$$\alpha^{p-1} C_2^{(1-\beta)} d + (\beta-1)\alpha^{p-1} |\nabla \phi|^p C_2^{-\beta} - C > 0,$$

para um $C > 0$ adequado.

Vimos anteriormente que $|\nabla \phi| > 0$ em $\Omega \backslash \Omega'$ e $d > 0$ em $\Omega'$. Como $1-\alpha > 0$, $p-1 > 0$, $\alpha > 0$ e $\min\limits_{\Omega'} d > 0$, temos

$$\alpha^{p-1} C_2^{1-\beta} d + (\beta-1)\alpha^{p-1} |\nabla \phi|^p C_2^{-\beta} \geq \alpha^{p-1} C_2^{1-\beta} d > \alpha^{p-1} C_2^{(1-\beta)} \min_{\Omega'} d > 0. \text{ em } \Omega'$$

Agora

$$\begin{aligned} \alpha^{p-1} C_2^{1-\beta} d + (\beta-1)\alpha^{p-1} |\nabla \phi|^p C_2^{-\beta} &> (\beta-1)\alpha^{p-1} |\nabla \phi|^p C_2^{-\beta} \\ &\geq (\beta-1)\alpha^{p-1} C_2^{-\beta} \min_{\Omega \backslash \Omega'} |\nabla \phi|^p > 0, \quad \text{em } \Omega \setminus \Omega'. \end{aligned}$$

Sendo assim, tomando $C := \min\{\alpha^{p-1} C_2^{1-\beta} \min\limits_{\Omega'} d, (\beta-1)\alpha^{p-1} C_2^{-\beta} \min\limits_{\Omega \backslash \Omega'} |\nabla \phi|^p\} > 0$, temos finalmente que

$$\alpha^{p-1} C_2^{(1-\beta)} d + (\beta-1)\alpha^{p-1} |\nabla \phi|^p C_2^{-\beta} - C > 0.$$

Logo

$$-\triangle_p \bar{u} \geq C d^{-\beta} \tag{2.20}$$

Agora, considere a família de domínios $\Omega_k = \left\{ x \in \Omega;\ d(x) > \dfrac{1}{k} \right\}$. Tendo em vista que $f \in L^\infty(\Omega_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, o problema

$$\begin{cases} -\triangle_p u = f & x \in \Omega_k \\ u = 0 & x \in \partial \Omega_k \end{cases} \tag{2.21}$$

possui uma única solução $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega_k) \cap C^{1,\eta}(\bar{\Omega_k})$. Por hipótese, $|f| \leq C_0 d^{-\beta} \;\Rightarrow\; f \leq C_0 d^{-\beta}$, assim

$$-\triangle_p u_k = f \leq C_0 d^{-\beta} \leq -\triangle_p \left( \left(\frac{C_0}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}} \bar{u} \right) \quad em \quad \Omega_k,$$

pois

$$\begin{aligned} -\triangle_p \left( \left(\frac{C_0}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}} \bar{u} \right) &= -div \left( \left| \nabla \left[ \left(\frac{C_0}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}} \bar{u} \right] \right|^{p-2} \nabla \left[ \left(\frac{C_0}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}} \bar{u} \right] \right) \\ &= -\frac{C_0}{C} div \left( |\nabla \bar{u}|^{p-2} \nabla \bar{u} \right) = -\frac{C_0}{C} \triangle_p \bar{u} \;\geq\; \frac{C_0}{C} C d^{-\beta} \;=\; C_0 d^{-\beta} \end{aligned}$$

Pelo fato de $\phi^\alpha \geq (\tilde{C_1} d)^\alpha > 0$ em $\partial\Omega_k$, pois em $\partial\Omega_k$ a função $d > 0$, temos que $\left(\frac{C_0}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}} \bar{u} > 0 = u_k$ em $\partial\Omega_k$. Pelo princípio da comparação (Teorema 3.2.2), $u_k \leq \left(\frac{C_0}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}} \bar{u}$ em $\Omega_k$.

Vamos mostrar que

$$-\left(\frac{C_0}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}} \bar{u} \leq u_k. \tag{2.22}$$

De fato

$$\begin{aligned} -\triangle_p \left( -\left(\frac{C_0}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}} \bar{u} \right) &= -div \left( \left| \nabla \left(\frac{C_0}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}} \bar{u} \right|^{p-2} \nabla \left( -\left(\frac{C_0}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}} \bar{u} \right) \right) \\ = -\left( -\frac{C_0}{C} \right) div \left( |\nabla \bar{u}|^{p-2} \nabla \bar{u} \right) &= -\frac{C_0}{C} div \left( -|\nabla \bar{u}|^{p-2} \nabla \bar{u} \right) = -\frac{C_0}{C} \left( -\triangle_p \bar{u} \right). \end{aligned}$$

Como $-\triangle_p \bar{u} \geq C d^{-\beta}$ temos

$$-\frac{C_0}{C}(-\triangle_p \bar{u}) \;\leq\; -\frac{C_0}{C} C d^{-\beta} \;=\; -C_0 d^{-\beta} \leq f \;=\; -\triangle_p u_k. \tag{2.23}$$

Assim

$$\begin{cases} -\triangle_p\left(-\left(\dfrac{C_0}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}}\bar{u}\right) \leq -\triangle_p u_k, & x \in \Omega_k, \\ -\left(\dfrac{C_0}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}}\bar{u} \leq 0 = u_k & x \in \partial\Omega_k. \end{cases}$$

Pelo princípio da comparação

$$-\left(\frac{C_0}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}}\bar{u} \leq u_k, \quad x \in \Omega_k$$

Usando (2.8)

$$|u_k| \leq \left(\frac{C_0}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}}\bar{u} = \left(\frac{C_0}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}}\phi^{\frac{p-\beta}{p-1}} \leq \frac{C_0^{\frac{1}{p-1}}}{C^{\frac{1}{p-1}}}\tilde{C}_2^{\frac{p-\beta}{p-1}}d^{\frac{p-\beta}{p-1}} = \tilde{C}C_0^{\frac{1}{p-1}}d^{\frac{p-\beta}{p-1}}$$

onde $\tilde{C}$ não depende de $k$ ou $f$. Note que $\Omega_k \subsetneq \Omega_{k+1} \subsetneq \Omega$ e $\cup_{k=1}^{\infty}\Omega_k = \Omega$ e $|u_k| \leq \tilde{C}C_0^{\frac{1}{p-1}}d^{\frac{p-\beta}{p-1}} \ \forall \ k \in \mathbb{N}$. Neste caso, considere $u_{nk} = u_n|_{\Omega_k}$, $n \geq k$, onde $u_n$ é solução do problema

$$\begin{cases} -\triangle_p u = f \ \ em \ \ \Omega_n \\ \quad u = 0 \ \ em \ \ \partial\Omega_n. \end{cases} \tag{2.24}$$

Portanto em $\Omega_k$

$$|u_{nk}| \leq CC_0^{\frac{1}{p-1}}d^{\frac{p-\beta}{p-1}} \leq \tilde{C} \ \ \forall \ n \geq k.$$

Como $C^{1,\eta}(\bar{\Omega}_k)$ é reflexivo existe uma subsequência $\{u_{n_j,k}\} \subset \{u_{nk}\}$ que converve fracamente para $u^k$ quando $n_j \to \infty$, como $C^{1,\eta}\left(\bar{\Omega}_k\right) \overset{cpt}{\hookrightarrow} C^1\left(\bar{\Omega}_k\right)$ por [1], temos $u_{n_j,k} \to u^k$ forte em $\Omega_k$. Assim

$$u_{n_1,1} \ \ u_{n_2,1} \ \ u_{n_3,1} \ \ ... \ \ \to \ \ u^1 \ \ \text{em} \ \ C^1\left(\bar{\Omega}_1\right) \tag{2.25}$$

a partir de $u_{n_1,1}$ todas as funções acima estão definida em $\bar{\Omega}_2$ então fazendo o mesmo processo acima para a subsequência de (2.25), obtemos uma subsequência de (2.25)

$$u_{n_1,2} \ \ u_{n_2,2} \ \ u_{n_3,2} \ \ ... \ \ \to \ \ u^2 \ \ \text{em} \ \ C^1\left(\bar{\Omega}_2\right) \tag{2.26}$$

Tomando uma subsequência de (2.26) obtemos

$$u_{n_1,3} \ \ u_{n_2,3} \ \ u_{n_3,3} \ \ ... \ \ \to \ \ u^3 \ \ \text{em} \ \ C^1\left(\bar{\Omega}_3\right) \tag{2.27}$$

Esse processo é conhecido como processo diagonal.

Definimos $u(x) = u^k(x)$ com $x \in \Omega_k$, $u$ está bem definida pois $u^k(x) = u^{k+1}(x)$ com $x \in \Omega_k$ então $u(x) = \lim_{k\to\infty} u_{n_k,k}(x)$ em $C^1(\Omega)$. Agora dado $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $supp\phi \subset \Omega$ e existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\Omega_k \supset supp\phi$, assim

$$\int_\Omega |\nabla u_{n_k,k}|^{p-2} \nabla u_{n_k,k} \nabla\phi = \int_{\Omega_k} |\nabla u_{n_k,k}|^{p-2} \nabla u_{n_k,k} \nabla\phi = \int_{\Omega_k} f\phi dx = \int_\Omega f\phi dx$$

passando ao limite de $k \to \infty$, obtemos:

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla\phi = \int_\Omega f\phi dx. \tag{2.28}$$

Concluindo, assim a Afirmação 3.

**Afirmação 4:** $u(x) = 0$ em $\partial\Omega$

Tome $x_0 \in \partial\Omega$, existe uma sequência $(x_n) \subset \Omega$ tal que $x_n \to x_0$. Tomando $\Omega_k \subset \Omega$ tal que $x_l \in \partial\Omega_k$ sabemos que $u_k = 0$ em $\partial\Omega_k$ e existe uma subsequência $u_{n_k,k} \to u$

$$0 = \lim_{k,l\to\infty} u_{n_k,k}(x_l) \quad = \lim_{l\to\infty} u(x_l) = u(x_0)$$

então $u(x) = 0$ em $\partial\Omega$.

Para provar a unicidade seja $u$ e $v$ satisfazem (2.4), usando o princípio da comparação duas vezes

$$\begin{cases} -\triangle_p u = f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.29}$$

$$\begin{cases} -\triangle_p v = f, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.30}$$

temos $u = v$ em $\Omega$. Garantindo, assim, a unicidade.

b)Para provar o caso $0 < \beta \leq 1$ observe se $|f| \leq C_0 d^{-\beta}$ então

$$|f| \leq C_0 d^{-\beta} = C_0 d^{-\theta} d^{\theta-\beta} \leq C d^{-\theta}$$

para $\theta > \beta$ então $|f| \leq C d^{-\theta}$ para $\theta \in (1, p)$ usando o caso a), garantimos a existência da solução $u$ para o problema (2.4). ■

Os próximos resultados serão importantes para provar a estimativa (2.3).

**Lema 2.1.1** *Sejam $q > p-1$, $Q_0 > 0$ e $\gamma < p$ e $u \in W_{loc}^{1,p}(0,\infty)$ uma solução fraca* *positiva do problema*

$$\left\{\begin{array}{rcl}(|u'|^{p-2}u')' & = & Q_0x^{-\gamma}u^q, \quad com \quad x>0,\\ u(0)=+\infty, & & \end{array}\right. \tag{2.31}$$

*então*

$$u(x)=\left(\frac{(p-1)\alpha^{p-1}(\alpha+1)}{Q_0}\right)^{\frac{1}{q-p+1}}x^{-\alpha} \tag{2.32}$$

*onde* $\alpha=\dfrac{p-\gamma}{q-p+1}$.

**Prova:** Vamos verificar, primeiramente, que toda solução de (2.31) satisfaz

$$C_1x^{-\alpha}\le u\le C_2x^{-\alpha} \quad \text{com} \quad x>0 \tag{2.33}$$

para constantes positivas $C_1, C_2$. Para isso, fixe $x>0$ e considere

$$v(y)=x^{\alpha}u(x+xy) \quad \text{com} \quad |y|<\frac{1}{2}. \tag{2.34}$$

Observe que

$$v'(y)=\frac{d}{dy}(x^{\alpha}u(x+xy))=x^{\alpha+1}\frac{du}{dz}(z)=x^{\alpha+1}u'(z)$$

onde $z=x+xy$,

$$\begin{array}{rcl}|v'(y)|^{p-2} & = & x^{(\alpha+1)(p-2)}\,|u'(z)|^{p-2}\\ \\ |v'(y)|^{p-2}v'(y) & = & x^{(\alpha+1)(p-1)}\,|u'(z)|^{p-2}\,u'(z)\end{array}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\left(|v'(y)|^{p-2}v'(y)\right)' &= \left[x^{(\alpha+1)(p-1)}\,|u'(z)|^{p-2}\,u'(z)\right]' \\
&= x^{(\alpha+1)(p-1)}\frac{d}{dy}\left[|u'(z)|^{p-2}\,u'(z)\right] \\
&= x^{(\alpha+1)(p-1)}\frac{d}{d(z)}\left[|u'(z)|^{p-2}\,u'(z)\right]\frac{d(z)}{d(y)} \\
&= x^{(\alpha+1)(p-1)}Q_0(x+xy)^{-\gamma}u^q(x+xy)x \\
&= x^{[(\alpha+1)(p-1)-\gamma+1]}Q_0(1+y)^{-\gamma}u^q(x+xy) \\
&= x^{([\alpha+1)(p-1)-\gamma+1]}Q_0(1+y)^{-\gamma}v^q(y)x^{-\alpha q} \\
&= x^{[(\alpha+1)(p-1)-\gamma+1-\alpha q]}Q_0(1+y)^{-\gamma}v^q(y).
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
(\alpha+1)(p-1)-\gamma+1-\alpha q &= \alpha p-\alpha+p-1-\gamma+1-\alpha q = -\alpha(q-p+1)+p-\gamma \\
&= -p+\gamma+p-\gamma = 0.
\end{aligned}
$$

Sendo assim

$$
\left(|v'(y)|^{p-2}v'(y)\right)' = Q_0(1+y)^{-\gamma}v^q(y) \quad \text{com} \quad |y| < \frac{1}{2}.
$$

Seja $U$ a solução de

$$
\begin{cases}
(|U'|^{p-2}U')' = Q_0(1+y)^{-\gamma}U^q, & |y| < \frac{1}{2}, \\
U(\pm\frac{1}{2}) = +\infty.
\end{cases} \tag{2.35}
$$

O problema (2.35) possui solução positiva, uma vez que $Q_0(1+y)^{-\gamma} > 0$ com $|y| < \frac{1}{2}$ e $f(U) = U^q$ satisfaz a condição de Keller-Osserman (ver Apêndice A), então pelo Teorema (F.1) do Anexo 1 o problema (2.35) tem solução. Seja $U$ essa solução. Como

$$
\begin{cases}
(|v'|^{p-2}v')' &= Q_0(1+y)^{-\gamma}v^q(y), \\
(|U'|^{p-2}U')' &= Q_0(1+y)^{-\gamma}U^q(y), \\
v\left(\frac{1}{2}\right) &= x^\alpha u\left(\frac{3x}{2}\right) \le U\left(\frac{1}{2}\right) = +\infty, \\
v\left(-\frac{1}{2}\right) &= x^\alpha u\left(\frac{x}{2}\right) \le U\left(\frac{-1}{2}\right) = +\infty,
\end{cases} \tag{2.36}
$$

pelo princípio da comparação $v \le U$ em $\{y \in \mathbb{R}/|y| \le \frac{1}{2}\}$. Tomando $y = 0$ obtemos $x^\alpha u(x) \le U(0) \;\Rightarrow\; u(x) \le x^{-\alpha}U(0)$. A constante $U(0)$ é positiva pois do Teorema (1.6.1), temos $U > 0$ para $y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ então $U(0) > 0$.

Agora iremos provar o lado esquerdo da desigualdade (2.33). Para isso, seja $V$ a solução para o problema

$$\begin{cases} (|V'|^{p-2}V')' = Q_0(1+y)^{-\gamma}V^q, & |y|<1, \\ V(-1)=1 \;\; V(1)=0. \end{cases} \tag{2.37}$$

O problema (2.37) tem solução, pois $\underline{v}=0$ é subsolução e $\overline{v}=1$ é supersolução. Então como

$$\begin{cases} (|V'|^{p-2}V')' &=& Q_0(1+y)^{-\gamma}V^q, \\ (|v'|^{p-2}v')' &=& Q_0(1+y)^{-\gamma}v^q(y), \\ v(1) &=& x^\alpha u(2x) \geq 0 = V(1), \\ v(-1) &=& x^\alpha u(0) = +\infty \geq 1 = V(-1), \end{cases} \tag{2.38}$$

pelo princípio da comparação $v \geq V \;\; \Rightarrow \;\; V(0) \leq v(0) = x^\alpha u(x) \;\; \Rightarrow \;\; x^{-\alpha}V(0) \leq u(x)$. A constante $V(0)>0$, pois do Teorema (1.6.1), temos $V(y)>0$ para $y\in[-1,1]$, então $V(0)>0$.

Então conseguimos mostrar que

$$V(0)x^{-\alpha} \leq u(x) \leq U(0)x^{-\alpha}.$$

Pelo Lema (F.2)

$$(|u'(x)|^{p-2}u'(x) - |u'(y)|^{p-2}u'(y)).(u'(x)-u'(y)) > 0$$

se $x<y$, por hipótese $|u'(x)|^{p-2}u'(x)$ é não decrescente, segue que $u'(x)-u'(y)<0 \;\Rightarrow\; u'(x)<u'(y)$ então $u'$ é crescente. De (2.33) temos que $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = 0$, e do teorema do valor médio seja $\delta \in (x,2x)$ temos

$$u'(\delta) = \frac{u(2x)-u(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad \lim_{\delta\to\infty} u'(\delta) = \lim_{x\to\infty}[u(2x)-u(x)]\frac{1}{x} = 0.$$

já que $u'(x)$ é crescente, concluimos $u'<0$. Temos de (2.33)

$$(|u'|^{p-2}u')' = Q_0x^{-\gamma}u^q \leq Q_0x^{-\gamma}C_2^q x^{-\alpha q} = Q_0C_2^q x^{-(\gamma+\alpha q)} = Q_0C_2^q x^{-(\alpha+1)(p-1)-1} \tag{2.39}$$

pois

$$\begin{aligned}
(\alpha+1)(p-1)-\gamma-\alpha q+1 &= \alpha p-\alpha+p-1-\gamma-\alpha q+1\\
&= \alpha p-\alpha+p-\gamma-\alpha q\\
&= -\alpha(q-p+1)-\gamma+p\\
&= -p+\gamma-\gamma+p=0 \qquad \Rightarrow\\
-(\gamma+\alpha q) &= -(\alpha+1)(p-1)-1
\end{aligned}$$

Integrando (2.39)

$$\begin{aligned}
\int_x^y \left(|u'(t)|^{p-2}\, u'(t)\right)' dt &\leq Q_0C_2^q \int_x^y t^{-(\alpha+1)(p-1)-1} dt \Rightarrow\\
|u'(y)|^{p-2}\, u'(y)-|u'(x)|^{p-2}\, u'(x) &\leq \frac{Q_0C_2^q}{-(\alpha+1)(p-1)}[y^{-(\alpha+1)(p-1)}-x^{-(\alpha+1)(p-1)}]
\end{aligned}$$

fazendo $y \to +\infty$ temos

$$-|u'(x)|^{p-2}u'(x) \leq \frac{Q_0C_2^q}{(\alpha+1)(p-1)} x^{-(\alpha+1)(p-1)} = Cx^{-(\alpha+1)(p-1)} \tag{2.40}$$

$\forall\ x>0$. Pelo fato de $u'(x)<0$ em $(0,+\infty)$ temos $|u'(x)|=-u(x)$, assim

$$\begin{aligned}
-|u'(x)|^{p-2}u'(x) &= |u'(x)|^{p-2}|u'(x)| \leq Cx^{-(\alpha+1)(p-1)} \Rightarrow |u'(x)|^{p-1} \leq Cx^{-(\alpha+1)(p-1)}\\
|u'(x)| &\leq Cx^{-(\alpha+1)} \Rightarrow -u'(x) \leq Cx^{-(\alpha+1)} \quad \forall\ x>0. \qquad (2.41)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\left(|u'(x)|^{p-2}u'(x)\right)' &= Q_0x^{-\gamma}u^q \geq Q_0x^{-\gamma}C_1^q x^{-\alpha q} = Q_0 x^{-(\gamma+\alpha q)}C_1^q\\
&= Q_0x^{-(\alpha+1)(p-1)-1}C_1^q. \qquad (2.42)
\end{aligned}$$

Integrando (2.42) para $x<y$, temos

$$\int_x^y \left(|u'(t)|^{p-2}u'(t)\right)' dt \geq \int_x^y Q_0C_1^q t^{-(\alpha+1)(p-1)-1} dt,$$

donde

$$\begin{aligned}
|u'(y)|^{p-2}u'(y)-|u'(x)|^{p-2}u'(x) &\geq \frac{Q_0C_1^q}{(\alpha+1)(p-1)}[x^{-(\alpha+1)(p-1)}-y^{-(\alpha+1)(p-1)}] \Rightarrow\\
|u'(y)|^{p-2}u'(y)-|u'(x)|^{p-2}u'(x) &\geq \hat{C}[x^{-(\alpha+1)(p-1)}-y^{-(\alpha+1)(p-1)}]
\end{aligned}$$

tomando $y \to +\infty$

$$-|u'(x)|^{p-2}u'(x) \geq \hat{C}x^{-(\alpha+1)(p-1)}, \quad \forall\ x > 0.$$

Desde que $u'(x) < 0$ em $(0, \infty)$, tem-se

$$\begin{aligned} -|u'(x)|^{p-2}u'(x) &= |u'(x)|^{p-1} \geq \hat{C}x^{-(\alpha+1)(p-1)} \Rightarrow |u'(x)| \geq \hat{C}x^{-(\alpha+1)} \Rightarrow \\ -u'(x) &\geq \hat{C}x^{-(\alpha+1)}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

De (2.41) e (2.43) temos

$$\hat{C}x^{-(\alpha+1)} \leq -u'(x) \leq Cx^{-(\alpha+1)} \ \ \forall\ x > 0. \tag{2.44}$$

Uma vez que $u' < 0$ e $u \in C^2(0, +\infty)$ temos

$$\begin{aligned} Q_0 x^{-\gamma}u^q &= \left(|u'|^{p-2}u'\right)' = ((-u')^{p-2}u')' = (p-2)(-u')^{p-3}(-u'')u' + ((-u')^{p-2}u'') \\ &= (p-2)(-u')^{p-3}(u'')(-u') + (-u')^{p-2}u'' = (p-2)(-u')^{p-2}u'' + (-u')^{p-2}u'' \\ &= (p-1)(-u')^{p-2}u'' = (p-1)|u'|^{p-2}u'' \Rightarrow \end{aligned}$$

$$Q_0 x^{-\gamma}u^q = (p-1)|u'|^{p-2}u''. \tag{2.45}$$

Considerando $u = x^{-\alpha}v$,

$$\begin{aligned} u'(x) &= -\alpha x^{-\alpha-1}v + x^{-\alpha}v' \\ u''(x) &= \alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-2}v - \alpha x^{-\alpha-1}v' - \alpha x^{-\alpha-1}v' + x^{-\alpha}v'' \end{aligned}$$

Assim substituindo em (2.45) temos

$$\begin{aligned} Q_0 x^{-\gamma}x^{-\alpha q}v^q &= (p-1)|-\alpha x^{-(\alpha+1)}v + x^{-\alpha}v'|^{p-2}[\alpha(\alpha+1)x^{-(\alpha+2)}v - 2\alpha x^{-(\alpha+1)}v' + x^{-\alpha}v''] \\ Q_0 x^{-(\gamma+\alpha q)}v^q &= (p-1)x^{-(\alpha+1)(p-2)}|-\alpha v + xv'|^{p-2}x^{-(\alpha+2)}[\alpha(\alpha+1)v - 2\alpha xv' + x^2v'']. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} -(\alpha+1)(p-2) - (\alpha+2) &= -\alpha p + 2\alpha - p + 2 - \alpha - 2 = -\alpha p + \alpha - p \\ &= -\alpha p + \alpha + \alpha q - \alpha q - p = \alpha(q-p+1) - p - \alpha q \\ &= p - \gamma - p - \alpha q = -(\gamma + \alpha q). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} Q_0 x^{-(\gamma+\alpha q)} v^q &= (p-1)x^{-(\gamma+\alpha q)}|-\alpha v + xv'|^{p-2}[\alpha(\alpha+1)v - 2\alpha x v' + x^2 v''] \\ Q_0 v^q &= (p-1)|-\alpha v + xv'|^{p-2}[\alpha(\alpha+1)v - 2\alpha x v' + x^2 v'']. \end{aligned} \tag{2.46}$$

A função $v$ é limitada, pois de (2.33) temos

$$C_1 x^{-\alpha} \leq u(x) \leq C_2 x^{-\alpha} \Rightarrow C_1 \leq u(x)x^{\alpha} \leq C_2 \Rightarrow C_1 \leq v(x) \leq C_2.$$

Fazendo a mudança de variável $t = -\alpha \log x$ e $w(t) = v(x)$ a equação (2.46) com a nova mudança fica

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{dw(t)}{dx} = \frac{dw(t)}{dt}\frac{dt}{dx} = w'(t)\left(\frac{-\alpha}{x}\right) = -\alpha x^{-1} w'(t) \\ v''(x) &= \frac{dv'(x)}{dx} = \frac{d(-\alpha x^{-1} w'(t))}{dx} = \alpha x^{-2} w'(t) - \alpha x^{-1}\frac{dw'(t)}{dx} \\ &= \alpha x^{-2} w'(t) - \alpha x^{-1} w''(t)\left(\frac{-\alpha}{x}\right) = \alpha x^{-2} w'(t) + \alpha^2 x^{-2} w''(t). \end{aligned}$$

E substituindo em (2.46)

$$\begin{aligned} Q_0 w^q(t) &= (p-1)[\alpha w(t) + x\alpha x^{-1} w'(t)]^{p-2}[\alpha(\alpha+1)w(t) + 2\alpha^2 w'(t) + \alpha w'(t) + \alpha^2 w''(t)] \\ &= (p-1)[\alpha w(t) + \alpha w'(t)]^{p-2}\alpha[(\alpha+1)w(t) + 2\alpha w'(t) + w'(t) + \alpha w''(t)] \\ &= (p-1)\alpha^{p-1}(w+w')^{p-2}[\alpha w'' + (2\alpha+1)w' + (\alpha+1)w] \quad em \quad \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Tendo em vista que

$$\begin{aligned} u(x) &= x^{-\alpha} v(x) \\ u'(x) &= -\alpha x^{-\alpha-1} v(x) + x^{-\alpha} v'(x) = -\alpha x^{-(\alpha+1)} w(t) + x^{-\alpha}(-\alpha x^{-1} w'(t)) \\ &= -\alpha x^{-(\alpha+1)} w(t) - \alpha x^{-(\alpha+1)} w'(t) = -\alpha x^{-(\alpha+1)}[w(t) + w'(t)] \end{aligned}$$

segue de (2.44) que

$$\begin{aligned} C_1 x^{-(\alpha+1)} &\leq -(-\alpha)x^{-(\alpha+1)}[w(t) + w'(t)] \leq C_2 x^{-(\alpha+1)} \Rightarrow \\ \hat{C}_1 &\leq w(t) + w'(t) \leq \hat{C}_2. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Já que $v$ é uma função limitada temos $w$ é limitada e de (2.48) obtemos que $w'$ é limitada.

Nosso objetivo é mostrar que $w = A$, onde

$$A = \left[\frac{(p-1)\alpha^{p-1}(\alpha+1)}{Q_0}\right]^{\frac{1}{q-p+1}}. \tag{2.49}$$

Para isso vamos provar primeiramente que

$$\lim_{t\to\pm\infty} w(t) = A. \tag{2.50}$$

Observe que (2.47) não tem solução periódica, limitada em $\mathbb{R}$ exceto a constante $A$. De fato, se $w$ é periódica, seja $I$ um intervalo compacto que contém o período de $w$, então $w$ possui valores máximo e mínimo em $I$. Que são os valores máximo e mínimo global. Seja $t_1$ ponto de máximo e $t_2$ o ponto de mínimo. Então $w'(t_1) = w'(t_2) = 0$ e $w''(t_1) \leq 0$ e $w''(t_2) \geq 0$. De (2.47) segue que, para $t = t_1$

$$\begin{aligned} Q_0 w^q(t_1) &= (p-1)\alpha^{p-1}[w(t_1)]^{p-2}[\alpha w''(t_1) + (\alpha+1)w(t_1)] \leq (p-1)\alpha^{p-1}(\alpha+1)w(t_1)^{p-1}, \\ w(t_1)^{q-p+1} &\leq \frac{(p-1)\alpha^{p-1}(\alpha+1)}{Q_0} \Rightarrow w(t_1) \leq \left(\frac{(p-1)\alpha^{p-1}(\alpha+1)}{Q_0}\right)^{\frac{1}{q-p+1}}. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Para $t = t_2$

$$\begin{aligned} Q_0 w^q(t_2) &= (p-1)\alpha^{p-1}[w(t_2)]^{p-2}[\alpha w''(t_2) + (\alpha+1)w(t_2)] \geq (p-1)\alpha^{p-1}(\alpha+1)w(t_2)^{p-1}, \\ w(t_2)^{q-p+1} &\geq \frac{(p-1)\alpha^{p-1}(\alpha+1)}{Q_0} \Rightarrow w(t_2) \geq \left[\frac{(p-1)\alpha^{p-1}(\alpha+1)}{Q_0}\right]^{\frac{1}{q-p+1}}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

De (2.51) e (2.52) temos

$$w(t_1) \leq A \leq w(t_2) \tag{2.53}$$

e isso só ocorre se $w(t) = A$.

Podemos reescrever (2.47) como o sistema autônomo de equações diferenciais

$$\begin{cases} w'(t) = z(t) \\ z'(t) = \dfrac{Q_0 w^q(t)}{\alpha^p(p-1)(z+w)^{p-2}} - \dfrac{(2\alpha+1)z}{\alpha} - \dfrac{(\alpha+1)w}{\alpha}, \end{cases} \tag{2.54}$$

e observe que toda solução $w$ de (2.47) verifica (2.48) nos dando então uma solução limitada do sistema (2.54).

Como (2.47) não tem solução periódica então pelo teorema de Poincaré-Bendixon $\omega(p)$ contém pontos singulares, mas como o único ponto singular de (2.54) é $(A, 0)$ pois

$$\begin{aligned} w'(t) &= 0 \Rightarrow z(t) = 0, \\ z'(t) &= 0 \Rightarrow \frac{Q_0 w^q}{\alpha^p (p-1) w^{p-2}} - \frac{(\alpha+1)w}{\alpha} = 0 \Rightarrow Q_0 w^q = (\alpha+1)\alpha^{p-1}(p-1)w^{p-1} \Rightarrow \\ w^{q-p+1} &= \frac{(\alpha+1)\alpha^{p-1}(p-1)}{Q_0} \Rightarrow w = \left(\frac{(\alpha+1)\alpha^{p-1}(p-1)}{Q_0}\right)^{\frac{1}{q-p+1}} = A \end{aligned}$$

então $(A, 0) \in \omega(p)$. Pela definição de $\omega(p)$ temos se $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ temos $(w(t_n), z(t_n)) \to (A, 0)$, ou seja, quando $t \to \infty$ temos $(w(t), z(t)) \to (A, 0)$. Segue de (2.50) que

$$\lim_{t \to \pm\infty} w(t) = A. \tag{2.55}$$

Assuma que $\sup w > A$. De (2.50), existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $w$ atinge o máximo global em $t_0$. E análogo a prova de (2.53) obtemos $w(t_0) \leq A < \sup w$ absurdo. Então $\sup w \leq A$.

Suponha $\inf w < A$. De (2.50) temos que existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $w$ atinge o mínimo global em $t_1$. E análogo a prova de (2.53) obtemos $w(t_1) \geq A > \inf w$ absurdo. Então $\inf w \geq A$. Logo

$$\sup w \leq A \leq \inf w \Rightarrow w = A \Rightarrow w(t) = v(x) = A \Rightarrow$$
$$u(x) = x^{-\alpha} A = \left[\frac{(p-1)\alpha^{p-1}(\alpha+1)}{Q_0}\right]^{\frac{1}{q-p+1}} x^{-\alpha} \qquad \blacksquare$$

O próximo teorema será importante na prova da estimativa do Teorema 2.1. Usaremos, para provar o teorema a seguir, o Lema 2.1.1.

O próximo problema está definido em um espaço $D = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_1 > 0\}$, onde $x$ pode ser escrito como $x = (x_1, x')$.

**Teorema 2.1.2** *Seja $Q_0 > 0$, $\gamma < p$, $q > p-1$ e $u \in W^{1,p}_{loc}(D)$ uma solução positiva do problema*

$$\begin{cases} \triangle_p u = Q_0 x_1^{-\gamma} u^q, & x \in D, \\ u = +\infty, & x \in \partial D. \end{cases} \tag{2.56}$$

*Então*

$$u(x) = \left(\frac{(p-1)\alpha^{p-1}(\alpha+1)}{Q_0}\right)^{\frac{1}{q-p+1}} x_1^{-\alpha}, \tag{2.57}$$

*onde* $\alpha = \dfrac{p-\gamma}{q-p+1}$ *e* $D = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_1 > 0\}$.

**Prova:** Denote por $u_0$ a solução unidimensional do problema (2.56) dado por

$$u_0(x) = \left(\frac{(p-1)\alpha^{p-1}(\alpha+1)}{Q_0}\right)^{\frac{1}{q-p+1}} x_1^{-\alpha}$$

$u_0$ é solução de (2.56) pois

$$\begin{aligned}
\nabla u_0(x) &= \left(\left(\frac{(p-1)\alpha^{p-1}(\alpha+1)}{Q_0}\right)^{\frac{1}{q-p+1}} (-\alpha)x_1^{-(\alpha+1)}, 0, ..., 0\right), \\
|\nabla u_0(x)| &= \alpha\left(\frac{(p-1)\alpha^{p-1}(\alpha+1)}{Q_0}\right)^{\frac{1}{q-p+1}} |x_1|^{-(\alpha+1)}, \\
|\nabla u_0(x)|^{p-2}\nabla u_0(x) &= -\alpha^{p-1}\left(\frac{(p-1)\alpha^{p-1}(\alpha+1)}{Q_0}\right)^{\frac{p-1}{q-p+1}} x_1^{-(\alpha+1)(p-1)}(1,0,0,...,0), \\
div(|\nabla u_0(x)|^{p-2}\nabla u_0(x)) &= (\alpha+1)(p-1)\alpha^{p-1}\left(\frac{(p-1)\alpha^{p-1}(\alpha+1)}{Q_0}\right)^{\frac{p-1}{q-p+1}} x_1^{-(\alpha+1)(p-1)-1} \\
&= \frac{((\alpha+1)(p-1)\alpha^{p-1})^{\frac{q}{q-p+1}}}{Q_0^{\frac{p-1}{q-p+1}}} x_1^{-\gamma-\alpha q} \\
&= \frac{Q_0 x_1^{-\gamma}((\alpha+1)(p-1)\alpha^{p-1})^{\frac{q}{q-p+1}} x^{-\alpha q}}{Q^{\frac{p-1}{q-p+1}+1}} \\
&= Q_0 x_1^{-\gamma} u_0^q(x).
\end{aligned}$$

Usando essa solução vamos mostrar que o problema (2.56) tem uma solução maximal e minimal as duas dependendo somente da variável $x_1$.

Mostraremos, primeiramente, que (2.56) admite solução maximal $u_{max}$. Seja $\{D_k\}$ uma sequência de domínios limitados suaves tal que $D_k \subset\subset D_{k+1}$ e $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$. Como $D_k$ é um conjunto limitado para todo $k$, temos que $x_1^{-\gamma}$ é limitado e $x_1^{-\gamma}$ é positiva, o problema

$$\begin{cases} \triangle_p u = Q_0 x_1^{-\gamma} u^q, & x \in D_k, \\ u = +\infty, & x \in \partial D_k, \end{cases} \tag{2.58}$$

tem solução fraca positiva $u_k$.

A existência de solução em (2.58) é garantida pelo Lema (F.1) do Anexo 1. Onde $g(x) = Q_0 x_1^{-\gamma}$ e $f(u) = u^q$ satisfaz a condição de Keller-Osserman. Então o problema (2.58) admite uma solução $u_k$ não negativa $u \in W^{1,p}_{loc}(D_k) \cap C^{1,\beta}(D_k)$, $0 < \beta < 1$.

Como $u_{k+1}$ é contínua então $u_{k+1}(x) \leq \infty = u_k(x)$ na $\partial D_k$ e em $D_k$

$$\triangle_p u_{k+1} \leq Q_0 x_1^{-\gamma} u_{k+1}^q,$$
$$\triangle_p u_k \geq Q_0 x_1^{-\gamma} u_k^q.$$

Pelo Princípio da comparação ( ver Teorema (3.2.2)), temos $u_{k+1}(x) \leq u_k(x)$ em $D_k$. Do mesmo modo $u_0(x) \leq \infty = u_k(x)$ na $\partial D_k$

$$\triangle_p u_0 \leq Q_0 x_1^{-\gamma} u_0^q,$$
$$\triangle_p u_k \geq Q_0 x_1^{-\gamma} u_k^q,$$

logo $u_0 \leq u_k$ em $D_k$. Assim a sequência $\{u_k\}$ é não-crescente e limitada inferiormente, e portanto $u_k$ converge, isto é

$$u_{\max}(x) = \lim_{k\to\infty} u_k(x) \geq u_0(x).$$

Argumentando como na prova do Teorema (2.1.1) e usando o processo diagonal obtemos que $u_k$ converge em $C^1(D_k)$ para todo $k$, logo converge em $C^1(D)$.

Por isso $u_{\max}$ é solução fraca para (2.56).

**Afirmação 1** $u_{\max}$ é solução maximal

Suponha que $v$ é outra solução de (2.56), segue

$$\begin{aligned} v(x) \leq u_k(x) &= \infty, \quad \forall\, x \in \partial D_k, \\ \triangle_p v &\leq Q_0 x_1^{-\gamma} v^q, \\ \triangle_p u_k(x) &\geq Q_0 x_1^{-\gamma} u_k^q. \end{aligned}$$

Pelo princípio da comparação

$$v \leq u_k, \quad \text{em} \quad D_k, \quad \forall\, k$$

então

$$\begin{aligned} v = \lim_{k\to\infty} v \quad &\leq \quad \lim_{k\to\infty} u_k = u_{\max}, \quad \text{em} \quad D \Rightarrow \\ v \quad &\leq \quad u_{\max}, \quad \text{em} \quad D. \end{aligned}$$

Observe que $u_{\max}$ depende apenas de $x_1$. De fato, seja $t \in \mathbb{R}^{n-1}$ arbitrário. É fácil ver que a função $w(x) = u_{\max}(x_1, x' + t)$ é uma solução de (2.56) e que $w \leq u_{\max}$, pois

$$\begin{aligned} \nabla w(x) &= \left(\frac{\partial w(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial w(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial w(x)}{\partial x_n}\right) \\ &= \left(\frac{\partial u_{\max}(x_1, x'+t)}{\partial x_1}, \frac{\partial u_{\max}(x_1, x'+t)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u_{\max}(x_1, x'+t)}{\partial x_n}\right) \\ &= \left(\frac{\partial u_{\max}(x_1, x'+t)}{\partial x_1}, \frac{\partial u_{\max}(x_1, x'+t)}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial u_{\max}(x_1, x'+t)}{\partial z_{n-1}}\right) \\ &= \nabla u_{\max}(x_1, z) \end{aligned}$$

onde $z = x' + t = (x'_1 + t_1, ..., x'_{n-1} + t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

$$\begin{aligned} div(|\nabla w(x)|^{p-2}\nabla w(x)) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla w(x)|^{p-2}\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(|\nabla u_{\max}(x_1, z)|^{p-2}\frac{\partial u_{\max}(x_1, z)}{\partial x_1}\right) \\ &+ \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u_{\max}(x_1, z)|^{p-2}\frac{\partial u_{\max}(x_1, z)}{\partial z_{i-1}}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(|\nabla u_{\max}(x_1, z)|^{p-2}\frac{\partial u_{\max}(x_1, z)}{\partial x_1}\right) \\ &+ \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial}{\partial z_{i-1}}\left(|\nabla u_{\max}(x_1, z)|^{p-2}\frac{\partial u_{\max}(x_1, z)}{\partial z_{i-1}}\right) \\ &= div(|\nabla u_{\max}(x_1, z)|^{p-2}\nabla u_{\max}(x_1, z)), \end{aligned}$$

ou seja ,

$$\triangle_p w(x) \quad = \quad \triangle_p u_{\max}(x_1, z).$$

Se $x = (x_1, x') \in \partial D$ então $x_1 = 0$ logo $w(x) = u_{\max}(0, x' + t) = +\infty$. Mostrando que $w$ é solução de (2.56). Daí, segue da AFIRMAÇÃO 1 que $w(x) \leq u_{\max}(x)$, isto é $u_{\max}(x_1, x' + t) \leq u_{\max}(x_1, x')$. Uma vez que $u_{max}$ é $C^1(D)$,

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{u_{\max}(x_1, x' + st) - u_{\max}(x_1, x')}{s} \leq 0$$

e

$$\lim_{s \to 0^-} \frac{u_{\max}(x_1, x' + st) - u_{\max}(x_1, x')}{s} \geq 0$$

temos $\dfrac{\partial u_{\max}(x_1, x')}{\partial x'} = 0$. Concluindo que $u_{\max}$ não depende de $x'$. Logo $u_{\max}$ é solução para (2.31), segue do Lema (2.1.1), que $u_{\max} = u_0$.

Encontramos a solução mínima escolhendo a sequência de domínios $\{D'_k\}$ com $D'_k \subset D'_{k+1}$ e $D = \cup_{k=1}^{\infty} D'_k$. Tome $D'_k$ com a propriedade adicional $B_{3k}(0) \cap \partial D \subset \partial D'_k \cap \partial D$.

Fixe um inteiro positivo $k$ e escolha uma função suave $\psi_k$ com $0 \leq \psi_k \leq 1$, e $\psi_k = 1$ em $\partial D'_k \cap \partial D \cap B_k(0)$ e $\psi_k = 0$ em $\partial D'_k \setminus (B_{2k}(0) \cap \partial D)$. O problema

$$\begin{cases} \triangle_p v &= & Q_0 x_1^{-\gamma} v^q, & x \in D'_k, \\ v &= & n\psi_k, & x \in \partial D'_k \end{cases} \tag{2.59}$$

tem uma única solução positiva $v_{k,n}$ para todo $n$. Pois $\underline{v} = 0$ é uma subsolução para (2.59)

$$\begin{aligned} \triangle_p \underline{v} &= 0, & x &\in D'_k, \\ \underline{v} &= 0 \leq n\psi_k, & x &\in \partial D'_k \end{aligned}$$

e $\overline{v} = n$ é supersolução para (2.59)

$$\begin{aligned} \triangle_p \overline{v} = 0 &\leq Q_0 x^{-1} n, & x &\in D'_k \\ \overline{v} = n &\geq n\psi_k \end{aligned}$$

logo existe uma solução para (2.59).

Por comparação, vamos provar que $v_{k,n}$ é crescente em $n$. Como

$$\begin{aligned} \triangle_p v_{k,n} &= Q_0 x_1^{-\gamma} v_{k,n}^q, \\ \triangle_p v_{k,n+1} &= Q_0 x_1^{-\gamma} v_{k,n+1}^q, \\ v_{k,n}(x) = n\psi_k(x) &\leq (n+1)\psi_k(x) = v_{k,n+1}(x) \end{aligned}$$

segue que $v_{k,n} \leq v_{k,n+1}$ em $D'_k$, logo $v_{k,n}$ é crescente em $n$. Usando comparação, temos

$$\begin{array}{rcl} \triangle_p v_{k,n} & \leq & Q_0 x_1^{-\gamma} v_{k,n}^q, \\ \triangle_p u_0 & \leq & Q_0 x_1^{-\gamma} u_0^q, \\ v_{k,n}(x) & = & n\psi_k(x) \leq \infty = u_0(x) \quad x \in \partial D'_k \end{array}$$

assim $v_{k,n} \leq u_0$ em $D'_k$. Escolha $\psi_k$ tal que $\psi_k \leq \psi_{k+1}$ em $\partial D'_k \cap \partial D'_{k+1} \cap \partial D$ logo

$$v_{k,n}(x) = n\psi_k(x) \leq n\psi_{k+1}(x) = v_{k+1,n}(x)$$

em $\partial D'_k \cap \partial D'_{k+1} \cap \partial D$, então $v_{k,n}$ é crescente em $k$. Como a sequência é crescente em $k$ e limitada superiormente temos que $v_{k,n}$ converge em $C^1(D)$ para $v_n$ que é solução de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \triangle_p v & = & Q_0 x_1^{-\gamma} v^q, \quad x \in D \\ v & = & n, \quad x \in \partial D \end{array} \right. \tag{2.60}$$

quando $k \to \infty$. Como $\lim\limits_{k\to\infty} \psi_k = 1$ em $\partial D$. Portanto $v_n \leq u_0$ em $D$.

Como $v_n$ é crescente em $n$ e é limitada superiormente, temos que $v_n$ converge para $u_{\min}$, que é solução de (2.56) em $C^1(D)$ com $n \to \infty$. Além disso, $u_{\min}$ é solução minimal, pois se existe outra solução $u$ de (2.56), temos

$$\begin{array}{rcl} \triangle_p v_{k,n} & = & Q_0 x_1^{-\gamma} v_{k,n}^q, \\ \triangle_p u & = & Q_0 x_1^{-\gamma} u^q, \\ v_{k,n}(x) = n\psi_k & < & \infty = u(x) \ \text{ na } \ \partial D'_k. \end{array}$$

Pelo princípio da comparação

$$v_{n,k}(x) \leq u(x), \quad \forall\, x \in D'_k.$$

Tomando o limite em $k \to \infty$ e $n \to \infty$ temos

$$u_{\min}(x) \leq u(x), \quad x \in D. \tag{2.61}$$

E $u_{\min}$ depende apenas de $x_1$. De fato, seja $t \in \mathbb{R}^{n-1}$ arbitrário. Defina $w(x) = u_{\min}(x_1, x' + t)$

$$
\begin{aligned}
\nabla w(x) &= \left(\frac{\partial w(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial w(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial w(x)}{\partial x_n}\right) \\
&= \left(\frac{u_{\min}(x_1, z)}{\partial x_1}, \frac{u_{\min}(x_1, z)}{\partial z_1}, ..., \frac{u_{\min}(x_1, z)}{\partial z_{n-1}}\right) \\
&= \nabla u_{\min}(x_1, z)
\end{aligned}
$$

onde $z = x' + t \in \mathbb{R}^{n-1}$. Deste fato, temos:

$$
\begin{aligned}
div(|\nabla w(x)|^{p-2}\nabla w(x)) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_{\min}(x_1, z)}{\partial x_1}\right) \\
&+ \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} |\nabla w(x)|^{p-2} \frac{u_{\min}(x_1, z)}{\partial z_{i-1}} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_{\min}(x_1, z)}{\partial x_1}\right) \\
&+ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial z_i}\left(|\nabla w(x)|^{p-2} \frac{u_{\min}(x_1, z)}{\partial z_i}\right) \\
&= div(|\nabla u_{\min}(x_1, z)|^{p-2}\nabla u_{\min}(x_1, z)),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\triangle_p w = \triangle_p u_{\min}(x_1, z).$$

Quando $x \in \partial D$ então $x_1 = 0$ e

$$w(x) = u_{\min}(0, x' + t) = +\infty \quad \Rightarrow \quad w(x) = +\infty$$

assim $w(x)$ é solução de (2.56) e pelo que foi concluido em (2.61) $u_{\min}(x) \leq w(x)$ então

$$u_{\min}(x) \leq u_{\min}(x_1, x' + t), \quad \forall \;\; x_1 > 0, \;\; x' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Análogo ao que foi feito para a solução maximal, podemos concluir que para $t$ arbitrário, temos que $u_{\min}$ depende apenas de $x_1$. Assim $u_{\min}$ é solução de (2.31) e pelo Lema 2.1.1 obtemos $u_{\min} = u_0$.

Como a solução maximal e minimal de (2.56) coincidem, o problema tem uma única solução positiva que é $u_0$. Isto conclui a prova. ∎

Nosso próximo resultado será necessário para provar a estimativa (2.3) do Teorema (2.1).

**Lema 2.1.2** *Seja $u$ uma solução positiva para (2.1). Existe uma vizinhança $U$ de $\partial\Omega$ e constantes positivas $C_1$, $C_2$ tal que*

$$C_1 d(x)^{-\alpha(x)} \leq u(x) \leq C_2 d(x)^{-\alpha(x)} \tag{2.62}$$

*em $U$, onde $\alpha(x) = \frac{p-\gamma(x)}{q-p+1}$.*

**Prova:** Fixe $x_0 \in \partial\Omega$ e para $x \in \Omega$ introduza a função $v(y) = d(x)^{\alpha(x)} u(x + d(x)y)$, onde $y \in B_1(0)$. Então $v$ verifica

$$\triangle_p v = d(x)^{\gamma(x)} a(x + d(x)y) v^q \quad \text{em} \quad B_{\frac{1}{2}}(0)$$

já que

$$\nabla v(y) \;=\; \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}(y), ..., \frac{\partial v}{\partial y_n}(y)\right)$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial y_i}(y) \;=\; d(x)^{\alpha(x)} \frac{\partial u}{\partial z_i}(z) \frac{\partial z_i}{\partial y_i} \;=\; d(x)^{\alpha(x)} \frac{\partial u}{\partial z_i}(z) d(x) \;=\; d(x)^{\alpha(x)+1} \frac{\partial u}{\partial z_i}(z)$$

onde $z = x + d(x)y$, então

$$\nabla v(y) \;=\; d(x)^{\alpha(x)+1} \left(\frac{\partial u}{\partial z_1}(z), ..., \frac{\partial u}{\partial z_n}(z)\right) \;=\; d(x)^{\alpha(x)+1} \nabla u(x + d(x)y)$$

assim

$$
\begin{aligned}
|\nabla v(y)|^{p-2}\nabla v(y) &= d(x)^{(\alpha(x)+1)(p-2)}d(x)^{(\alpha(x)+1)}|\nabla u(x+d(x)y)|^{p-2}\nabla u(x+d(x)y)\\
&= d(x)^{(\alpha(x)+1)(p-1)}|\nabla u(x+d(x)y)|^{p-2}\nabla u(x+d(x)y)\\
&= d(x)^{(\alpha(x)+1)(p-1)}|\nabla u(z)|^{p-2}\nabla u(z)
\end{aligned}
$$

segue que

$$
\begin{aligned}
div(|\nabla v(y)|^{p-2}\nabla v(y)) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(d(x)^{(\alpha(x)+1)(p-1)}|\nabla u(z)|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial z_i}(z)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} d(x)^{(\alpha(x)+1)(p-1)}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(|\nabla u(z)|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial z_i}(z)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} d(x)^{(\alpha(x)+1)(p-1)}\frac{\partial}{\partial z_i}\left(|\nabla u(z)|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial z_i}(z)\right)\frac{\partial z_i}{\partial y_i}\\
&= \sum_{i=1}^{n} d(x)^{(\alpha(x)+1)(p-1)}\frac{\partial}{\partial z_i}\left(|\nabla u(z)|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial z_i}(z)\right)d(x)\\
&= d(x)^{(\alpha(x)+1)(p-1)+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left(|\nabla u(z)|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial z_i}(z)\right)\\
&= d(x)^{(\alpha(x)+1)(p-1)+1}\triangle_p u(x+d(x)y)\\
&= d(x)^{\gamma(x)+\alpha q}a(x+d(x)y)u^q(x+d(x)y)\\
&= d(x)^{\gamma(x)}a(x+d(x)y)[d(x)^{\alpha}u(x+d(x)y)]^q\\
&= d(x)^{\gamma(x)}a(x+d(x)y)v^q(y)
\end{aligned}
$$

onde $y \in B_{\frac{1}{2}}(0)$. Logo

$$
\triangle_p v = d(x)^{\gamma(x)}a(x+d(x)y)v^q(y) \quad \text{em} \quad B_{\frac{1}{2}}(0).
$$

Como

$$\lim_{x \to x_0} d(x)^{\gamma(x)} a(x) = Q(x_0)$$

para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta$ então

$$|d(x)^{\gamma(x)} a(x) - Q(x_0)| < \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad -\varepsilon + Q(x_0) < d(x)^{\gamma(x)} a(x) < \varepsilon + Q(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad C_1 < \ d(x)^{\gamma(x)} a(x) \ < C_2 \tag{2.63}$$

para $x$ próximo de $x_0$. Uma vez que $d(x + d(x)y) < d(x)$, temos

$$a(x) \geq C_1 d(x)^{-\gamma(x)} \quad \Rightarrow \quad a(x + d(x)y) \geq C_1 d(x + d(x)y)^{-\gamma(x+d(x)y)}$$

$$\Rightarrow \quad a(x + d(x)y) \quad \geq \quad C_1 d(x)^{-\gamma(x+d(x)y)}$$

para $x$ próximo de $x_0$. Deste modo, temos

$$\triangle_p v = d(x)^{\gamma(x)} a(x + d(x)y) v^q \geq C_1 d(x)^{\gamma(x) - \gamma(x+d(x)y)} v^q \tag{2.64}$$

em $B_{\frac{1}{2}}(0)$. Por outro lado, desde que $\gamma \in C^\mu(\overline{\Omega})$, temos

$$|\gamma(x) - \gamma(x + d(x)y)| \leq C d(x)^\mu \quad \Rightarrow$$

ou seja,

$$-Cd^\mu \leq \gamma(x) - \gamma(x + d(x)y) \leq Cd^\mu. \tag{2.65}$$

De (2.64) e (2.65)

$$\triangle_p v \quad \geq \quad C_1 d(x)^{\gamma(x) - \gamma(x+d(x)y)} v^q \geq C_1 d(x)^{C d(x)^\mu} v^q, \tag{2.66}$$

já que $d(x)$ é suficientemente pequeno.

Agora, observando que

$$\lim_{d(x) \to 0} d(x)^{C d(x)^\mu} \quad = \quad \lim_{d(x) \to 0} e^{\ln d(x)^{C d(x)^\mu}} = \lim_{d(x) \to 0} e^{C d(x)^\mu \ln d(x)}$$

e

$$\lim_{d(x)\to 0} Cd(x)^{\mu}\ln d(x) \;=\; C\lim_{d(x)\to 0}\frac{\ln d(x)}{d(x)^{-\mu}} = C\lim_{d(x)\to 0}\frac{1}{-\mu d(x)^{-\mu}} = \frac{-C}{\mu}\lim_{d(x)\to 0}\frac{1}{d(x)^{-\mu}} = 0,$$

temos

$$\lim_{d(x)\to 0} d(x)^{Cd(x)} \;=\; 1. \tag{2.67}$$

De (2.66) e (2.67) temos

$$\triangle_p v \geq C_1 v^q \qquad \text{em} \qquad B_{\frac{1}{2}}(0).$$

Seja $U \in W^{1,p}_{loc}(B_{\frac{1}{2}}(0)) \cap C^{1,\alpha}(B_{\frac{1}{2}}(0)),\;\; 0<\alpha<1$ a solução não-negativa de

$$\begin{cases} \triangle_p U \;=\; CU^q, & x \in B_{\frac{1}{2}}(0),\\ U \;=\; +\infty, & x \in \partial B_{\frac{1}{2}}(0),\end{cases} \tag{2.68}$$

a solução de (2.68) é garantida pelo Lema (F.1) no Anexo 1, onde a função $U^q$ satisfaz a condição de Keller-Osserman pelo Apêndice A. Como

$$\begin{aligned} -\triangle_p v \;&\leq\; -C_1 v^q,\\ -\triangle_p U \;&=\; -C_1 U^q,\\ v(y) \leq U(y) \;&=\; +\infty, \quad \text{na} \quad \partial B_{\frac{1}{2}}(0),\end{aligned}$$

pelo princípio da comparação $v \leq U$ em $B_{\frac{1}{2}}(0)$. Tomando $y=0$

$$v(0)\leq U(0) \;\Rightarrow\; d(x)^{\alpha(x)}u(x) \leq U(0) \;\Rightarrow\; u(x) \leq d(x)^{-\alpha(x)}U(0).$$

**Afirmação 1** $U(0) > 0$

Note que

- $\beta(s) = s^q$ é não-decrescente,
- $\beta(0) = 0$ e
- $\beta(s) > 0$ para todo $s > 0$.

Como $U(x) = +\infty$ na $\partial B_{\frac{1}{2}}(0)$, temos $U(x) \neq 0$ em algum ponto de $B_{\frac{1}{2}}(0)$ então pelo Teorema (1.6.1) temos $U(x) > 0$ em $B_{\frac{1}{2}}(0)$, assim $U(0) > 0$. Provamos, assim o lado direito de (2.62) para $x$ próximo da fronteira $\partial\Omega$.

Para provarmos o lado esquerdo de (2.62) seja $x_0 \in \partial\Omega$ fixado. Para um ponto $x \in \Omega$ perto de $x_0$ denote por $\overline{x}$ sua projeção sobre $\partial\Omega$. Denotamos $c_x = \overline{x} + d(x)\nu(\overline{x})$ onde $\nu(\overline{x})$ é o vetor unitário normal exterior a $\partial\Omega$ em $\overline{x}$. Observe que $c_x \notin \Omega$ para $x$ perto de $x_0$.

Considere o anel $A_x = \{y \in \Omega;\ d(x) < d(y) < 2d(x)\}$. Defina

$$w(y) = d(x)^{\alpha(x)} u(c_x + d(x)y)$$

onde $y \in Q_x = \{y \in A_{anel}\ ;\ c_x + d(x)y \in A_x\}$ onde $A_{anel} = \{y \in \mathbb{R}^n;\ 2 \leq |y| < 3\}$ é o anel normalizado. Então $w$ verifica

$$\triangle_p w = d(x)^{\gamma(x)} a(c_x + d(x)y) w^q \quad \text{em} \quad Q_x$$

Pois

$$\frac{\partial w}{\partial y_i}(y) = d(x)^{\alpha(x)} \frac{\partial}{\partial y_i} u(c_x + d(x)y) = d(x)^{\alpha(x)} \frac{\partial u}{\partial z_i}(z) d(x) = d(x)^{\alpha(x)+1} \frac{\partial u}{\partial z_i}(z)$$

onde $z = c_x + d(x)y$. Assim

$$\begin{aligned} \nabla w &= d(x)^{\alpha(x)+1} \left( \frac{\partial u}{\partial z_1}(z), ..., \frac{\partial u}{\partial z_n}(z) \right) = d(x)^{\alpha(x)+1} \nabla u(z) \quad \Rightarrow \\ |\nabla w|^{p-2} \nabla w &= d(x)^{(\alpha(x)+1)(p-1)} |\nabla u(z)|^{p-2} \nabla u(z) \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} \triangle_p w &= div\left(|\nabla w|^{p-2} \nabla w\right) = d(x)^{(\alpha(x)+1)(p-1)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( |\nabla u(z)|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial z_i}(z) \right) \\ &= d(x)^{(\alpha(x)+1)(p-1)+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i} \left( |\nabla u(z)|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial z_i}(z) \right) \\ &= d(x)^{\gamma(x)+\alpha(x)q} \triangle_p u(c_x + d(x)y) \\ &= d(x)^{\gamma(x)+\alpha(x)q} a(c_x + d(x)y) u^q(c_x + d(x)y) \\ &= d(x)^{\gamma(x)} a(c_x + d(x)y) [d(x)^{\alpha(x)} u(c_x + d(x)y)]^q \\ &= d(x)^{\gamma(x)} a(c_x + d(x)y) w(y)^q \end{aligned}$$

em $Q_x$. Usando a desigualdade a direita de (2.63), temos

$$d(x)^{\gamma(x)} a(x) \leq C_2 \quad \text{quando } x \text{ próximo de } x_0$$

temos

$$a(x) \leq C_2 d(x)^{-\gamma(x)} \quad \Rightarrow \quad a(c_x + d(x)y) \leq C_2 d(c_x + d(x)y)^{-\gamma(c_x + d(x)y)}.$$

Como

$$d(x) \leq d(c_x + d(x)y) \leq 2d(x) \quad \text{ para } y \in Q_x.$$

Assim

$$\begin{aligned} \triangle_p w &= d(x)^{\gamma(x)} a(c_x + d(x)y) w(y)^q \leq C_2 d(x)^{\gamma(x)} d(c_x + d(x)y)^{-\gamma(c_x + d(x)y)} w(y)^q \\ &\leq \widetilde{C} d(x)^{\gamma(x) - \gamma(c_x + d(x)y)} w^q(y) \end{aligned}$$

Como $\gamma \in C^\mu(\overline{\Omega})$ é Holder contínua,

$$|\gamma(x) - \gamma(c_x + d(x)y)| < C|x - c_x - d(x)y|^\mu = C|x - \overline{x} - d(x)\nu(\overline{x}) - d(x)y|^\mu \leq C_1 d(x)^\mu$$

então se $d(x)$ é suficientemente pequeno, temos

$$\triangle_p w \leq C w^q(y) \quad \text{ em } Q_x$$

Por outro lado, o problema

$$\begin{cases} \triangle_p z = C z^q & \text{em } A_{anel} \\ z = \eta & \text{em } |y| = 1 \\ z = 0 & \text{em } |y| = 3 \end{cases} \tag{2.69}$$

onde $\eta > 0$ uma constante qualquer, admite uma solução $z$, pois $\underline{z} = 0$ é uma subsolução e $\overline{z} = \eta$ é supersolução do problema (2.69). Pela desigualdade de Harnack temos que $0 < z \leq \eta$ em $A_{anel}$. Por Diaz [2] z é radialmente simétrica. Por comparação, como

$$\begin{aligned} -\triangle_p z &= -C z^q \ \text{ em } Q_x \\ -\triangle_p w &\geq -C w^q \ \text{ em } Q_x \\ w &\geq 0 \ \text{ em } \{y \in \partial Q_x; |y| = 3\} \\ z &\leq \eta \leq w(y) = +\infty \ \text{ em } \{y \in \partial Q_x; 1 \leq |y| \leq 3\} \end{aligned}$$

temos $w \geq z$ em $Q_x$. Como $-2\nu(\overline{x}) \in Q_x$, pois $-2\nu(\overline{x}) \in A_{anel}$ já que $|-2\nu(\overline{x})| = 2$ e

$$c_x + d(x)(-2\nu(\overline{x})) = \overline{x} + d(x)\nu(\overline{x}) - 2d(x)\nu(\overline{x}) = \overline{x} - d(x)\nu(\overline{x}) = x \in \Omega. \tag{2.70}$$

Assim

$$\begin{aligned} w(-2\nu(\overline{x})) &\geq z(-2\nu(\overline{x})) && \Rightarrow \\ d(x)^{\alpha(x)}u(c_x + d(x)(-2\nu(\overline{x}))) &\geq z(-2\nu(\overline{x})) && \overset{2.70}{\Rightarrow} \\ d(x)^{\alpha(x)}u(x) &\geq z(-2\nu(\overline{x})) && \Rightarrow \\ u(x) &\geq d(x)^{-\alpha(x)}z(-2\nu(\overline{x})), \end{aligned}$$

como $z$ é radialmente simétrica temos, $z(-2\nu(\bar{x})) = z(2) > 0$. Provamos, assim, o lado esquerdo de (2.62).

Portanto, para $x$ próximo de $x_0$

$$\widetilde{C}d(x)^{-\alpha(x)} \leq u(x) \leq Cd(x)^{-\alpha(x)}$$

por um argumento de compacidade podemos concluir a desigualdade é válida em uma vizinhança de $\partial\Omega$. ■

## 2.2 Prova da Existência

Nesta seção iremos provar a existência de solução para o problema (2.1).

Considere o problema

$$\begin{cases} \triangle_p u = a(x)u^q, & x \in \Omega, \\ u = n, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.71}$$

para $n$ inteiro positivo. Como a função $a$ é singular na $\partial\Omega$, para obter uma solução vamos truncar a função peso $a(x)$ como segue: escolha uma função suave $\psi(t)$ não decrescente tal que $0 \leq \psi \leq 1$, com $\psi = 0$ em $[0,1]$ e $\psi = 1$ em $[2, +\infty)$ e para um inteiro positivo $k$ seja $a_k(x) = \psi(kd(x))a(x)$. Como $a$ é não negativa a sequência $\{a_k\}$ é não decrescente em $k$,

$$\begin{aligned} a_k(x) &= \psi(kd(x))a(x), \\ a_{k+1}(x) &= \psi((k+1)d(x))a(x) = \psi(kd(x) + d(x))a(x). \end{aligned}$$

Como fizemos uma translação da função $\psi$ a esquerda, temos $\psi(kd(x)+d(x)) \geq \psi(kd(x))$ logo $a_{k+1}(x) \geq a_k(x)$ e $a_k(x) \leq a(x) \leq Cd(x)^{-\gamma(x)}$. Pois $\lim\limits_{x \to x_0} d(x)^{\gamma(x)}a(x) = Q(x_0)$ com

$x_0 \in \partial\Omega$, $\gamma(x) < p$ na $\partial\Omega$ então

$$\begin{aligned}
&\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \quad \text{tal que se} \;\; |x - x_0| < \delta \;\; \text{então} \\
|d(x)^{\gamma(x)}a(x) - Q(x_0)| < \varepsilon \quad &\Rightarrow \quad \varepsilon < d(x)^{\gamma(x)}a(x) - Q(x_0) < \varepsilon \quad \Rightarrow \\
Q(x_0) - \varepsilon < d(x)^{\gamma(x)}a(x) < Q(x_0) + \varepsilon \quad &\Rightarrow \quad C_1 < d(x)^{\gamma(x)}a(x) < C_2 \quad \Rightarrow \\
&d(x)^{-\gamma(x)}C_1 < a(x) < d(x)^{-\gamma(x)}C_2, \quad \text{em } |x - x_0| < \delta.
\end{aligned}$$

E em $\Omega_\delta = \Omega \setminus \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x - x_0| < \delta\}$ temos $\Omega_\delta$ é compacto e a função $g(x) = d(x)^{\gamma(x)}a(x)$ é contínua, portanto limitada logo $C_1 \le d(x)^{\gamma(x)}a(x) \le C_2$. Assim $C_1 d(x)^{-\gamma(x)} \le a(x) \le C_2 d(x)^{-\gamma(x)}$ em $\Omega_\delta$. Então para $x \in \Omega$ temos

$$C_1 d(x)^{-\gamma(x)} \le a(x) \le C_2 d(x)^{-\gamma(x)}. \tag{2.72}$$

E além disso $a_k \in L^\infty(\Omega)$ pois, quando $d(x) < \dfrac{1}{k}$ temos $\psi(kd(x)) = 0$ e $a_k(x) = 0$ e para $x \in \Omega - \{x;\ d(x) < \dfrac{1}{k}\}$ temos que $a_k$ é contínua em compacto, logo é limitada.

Considere o problema truncado

$$\begin{cases} \triangle_p u &= \; a_k(x)u^q, \quad x \in \Omega, \\ u &= \; n, \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.73}$$

$\underline{u} = 0$ é uma subsolução do problema (2.73) pois

$$\begin{aligned} \triangle_p \underline{u} &= 0 = a_k(x)0, \\ \underline{u} &= 0 < n, \quad \text{na} \;\; \partial\Omega \end{aligned}$$

e $\overline{u} = n$ é uma supersolução do problema (2.73) pois

$$\begin{aligned} \triangle_p \overline{u} = 0 \le a_k(x)n^q \quad &\Rightarrow \quad -\triangle_p \overline{u} \ge -a_k(x)n^q \\ \overline{u} = n, \quad \text{na} \;\; \partial\Omega. \end{aligned}$$

Então o problema (2.73) tem uma solução não negativa. E essa é única pelo princípio da comparação, pois se $u$ e $w$ são soluções de (2.73)

$$\begin{aligned} \triangle_p u &= a_k(x)u^q, \\ \triangle_p w &= a_k(x)w^q, \\ u = w &= n, \quad \text{na} \;\; \partial\Omega, \end{aligned}$$

então aplicando o princípio da comparação duas vezes, obtemos, $u = w$. Denotamos tal solução por $u_{k,n}$.

Nosso próximo passo é mostrar que podemos passar o limite com $k \to +\infty$. É neste passo que a condição $\gamma(x) < p$ é essencial. Defina $u_{k,n} = v_{k,n} + n$, então $v_{k,n}$ é solução de

$$\begin{cases} \triangle_p v &= a_k(x)(v_{k,n}+n)^q \quad x \in \Omega, \\ v &= 0 \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.74}$$

pois

$$\triangle_p v_{k,n} = \triangle_p u_{k,n} = a_k(x)(v_{k,n}+n)^q \quad \text{em } \Omega$$

e na $\partial\Omega$ temos $u_{k,n} = n \Rightarrow v_{k,n} + n = n \Rightarrow v_{k,n} = 0$.

Observe que o lado direito de (2.74) é limitado por $C_2 n^q d(x)^{-\gamma(x)}$ com $\gamma(x) < p$ na $\partial\Omega$, pois usando (2.72) temos

$$\triangle_p v_{k,n} = a_k(x)(v_{k,n}+n)^q \leq C_2 d(x)^{-\gamma(x)}(v_{k,n}+n)^q \leq C_2 d(x)^{-\gamma(x)} n^q,$$

já que $\overline{u} = n$ é supersolução de (2.73) então $u_{k,n} \leq n$ então

$$u_{k,n}^q \leq n^q \quad \Rightarrow \quad (v_{k,n}+n)^q \leq n^q.$$

Seja $\gamma_0 \in (0,p)$, e seja $\phi$ a única solução para

$$\begin{cases} -\triangle_p \phi &= d^{-\gamma_0}, \quad x \in \Omega, \\ \phi &= 0 \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.75}$$

a existência da solução de (2.75) é garantida pelo Teorema (2.1.1), e essa solução é positiva pois, já que $\underline{\phi} = 0$ é uma subsolução

$$-\triangle_p \underline{\phi} = 0 \leq d^{-\gamma_0}$$
$$\underline{\phi} = 0$$

então $\phi \geq 0$ e pelo Teorema 5 de [19] temos que $\phi > 0$. Como

$$-\triangle_p(-(Cn^q)^{\frac{1}{p-1}}\phi(x)) = -Cn^q(-\triangle_p \phi(x)) = -Cn^q d(x)^{-\gamma_0}, \quad \text{em } \Omega$$

e vimos que $\triangle_p v_{k,n} \leq C_2 d(x)^{-\gamma(x)} n^q$ então

$$-\triangle_p v_{k,n} \geq -C_2 d(x)^{-\gamma(x)} n^q$$

para $\gamma(x) < p$ na $\partial\Omega$.

**Afirmação 1** $-\triangle_p v_{k,n} \geq -Cd(x)^{-\gamma_0} n^q$ em $\Omega$

Para $x$ numa vizinhança $V$ de $\partial\Omega$ tal que $d(x)$ é suficientemente pequeno, $d(x) < 1$, como $\gamma(x) < \gamma_0 < p$ então $-\gamma_0 < -\gamma(x)$ assim

$$\begin{aligned} d(x)^{-\gamma_0} &\geq d(x)^{-\gamma(x)} \quad \Rightarrow \quad -d(x)^{-\gamma_0} \leq -d(x)^{-\gamma(x)} \\ -\triangle_p v_{k,n} &\geq -C_2 d(x)^{-\gamma(x)} n^q \geq -C_2 d(x)^{-\gamma_0} n^q. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Quando $x$ em $\Omega - V$ temos que o conjunto $\Omega - V$ é compacto e a função $d(x)^{-\gamma(x)}$ é contínua em um conjunto compacto então é limitada, e $d(x)^{-\gamma_0}$ também é limitada nesse conjunto, e $d(x)^{-\gamma_0} > 0$, assim existem $\tilde{C}, \bar{C}$, constantes positivas tais que

$$d(x)^{-\gamma(x)} \leq \bar{C} \;\text{ e }\; d(x)^{-\gamma_0} \geq \tilde{C} > 0$$

então

$$\begin{aligned} &-d(x)^{-\gamma(x)} C_2 n^q \geq -C_3 n^q, \quad \text{onde } \; C_3 = \bar{C} C_2, \\ &-d(x)^{-\gamma_0} \leq -\tilde{C} \;\; \Rightarrow \;\; -\frac{C_3}{\tilde{C}} d(x)^{-\gamma_0} n^q \;\leq\; -\frac{C_3}{\tilde{C}} \tilde{C} n^q = -C_3 n^q \;\; \Rightarrow \\ &-C_4 d(x)^{-\gamma_0} n^q \leq -C_3 n^q, \quad \text{onde } \; C_4 = \frac{C_3}{\tilde{C}}, \\ &-\triangle_p v_{k,n} \geq -C_2 d(x)^{-\gamma(x)} n^q \geq -C_3 n^q \geq -C_4 d(x)^{-\gamma_0} n^q \end{aligned}$$

tomando $C = \max\{C_2, C_4\}$ temos $-\triangle_p v_{k,n} \geq -Cd(x)^{-\gamma_0} n^q$ em $\Omega - V$ e $-\triangle_p v_{k,n} \geq -Cd(x)^{-\gamma_0} n^q$ em $V$ provando assim a **Afirmação 1**.

Na fronteira de $\Omega$ temos

$$v_{k,n} = 0 = -(Cn^q)^{\frac{1}{p-1}} \phi(x).$$

Por comparação

$$v_{k,n} \geq -(Cn^q)^{\frac{1}{p-1}} \phi(x), \qquad \text{em } \Omega. \tag{2.77}$$

E $-\triangle_p((Cn^q)^{\frac{1}{p-1}} \phi(x)) = Cn^q(-\triangle_p \phi(x)) = Cn^q d(x)^{-\gamma_0}$, em $\Omega$, e

$$-\triangle_p v_{k,n} = -a_k (v_{k,n} + n)^q \leq 0 \leq Cn^q d(x)^{-\gamma_0}$$

e na fronteira de $\Omega$, temos

$$v_{k,n}(x) = 0 = (Cn^q)^{\frac{1}{p-1}} \phi(x), \;\; \text{em } \;\partial\Omega$$

então por comparação

$$v_{k,n}(x) \leq (Cn^q)^{\frac{1}{p-1}}\phi(x), \quad \text{em } \Omega. \tag{2.78}$$

Então de (2.77) e (2.78) podemos concluir $|v_{k,n}(x)| \leq (Cn^q)^{\frac{1}{p-1}}\phi(x)$ em $\Omega$. Isto nos dá uma limitação local para a sequência $v_{k,n}$. Argumentando como na prova do Teorema (2.1.1) (usando o processo diagonal). Obtemos $v_{k,n} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} v_n$ em $C^1(\Omega)$. Como

$$|v_{k,n}| \leq (Cn^q)^{\frac{1}{p-1}}\phi(x) \quad \Rightarrow \quad |v_n| \leq (Cn^q)^{\frac{1}{p-1}}\phi(x).$$

Se $x_1 \in \partial\Omega$ existe $(x_j) \subset \Omega$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = x_1$

$$\begin{aligned} |v_n(x_j)| &\leq (Cn^q)^{\frac{1}{p-1}}\phi(x_j) \quad \Rightarrow \\ |v_n(x_1)| &= \lim_{j\to\infty} |v_n(x_j)| \leq (Cn^q)^{\frac{1}{p-1}}\phi(x_1) = 0 \ \ \forall x_1 \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} a_k(x) &= \lim_{k\to\infty} \psi(kd(x))a(x) = a(x) \lim_{k\to\infty} \psi(kd(x)) \\ &= 1a(x) = a(x). \end{aligned}$$

Passando o limite com $k \to \infty$ em (2.74) temos que $v_n$ é solução de

$$\begin{cases} \triangle_p v = a(x)(v+n)^q & x \in \Omega \\ v = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.79}$$

onde $u_n = v_n + n$ é uma solução não negativa de (2.71), pois

$$\nabla u_n = \nabla v_n \quad \Rightarrow \quad \triangle_p u_n = \triangle_p v_n.$$

E na fronteira $\partial\Omega$, temos

$$v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad u_n = n.$$

A unicidade de $u_n$ é obtida pelo princípio da comparação, pois se $u_n$ e $w_n$ são soluções de (2.71) temos

$$\begin{aligned} -\triangle_p u_n &= -a(x)u_n^q, \\ -\triangle_p w_n &= -a(x)w_n^q, \\ u_n = n &= w_n, \quad \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

usando comparação duas vezes, obtemos

$$u_n = w_n.$$

A sequência $\{u_n\}$ é crescente, pois a solução do problema

$$\begin{cases} \triangle_p u = a_k(x)u^q, & x \in \Omega, \\ u = n, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.80}$$

é $u_{k,n}$ e se $n < m$ então $u_{k,n}$ é subsolução e $m$ é supersolução de

$$\begin{cases} \triangle_p u = a_k(x)u^q, & x \in \Omega, \\ u = m, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.81}$$

Assim $u_{k,n} \leq u_{k,m} \leq m$, tomando $k \to \infty$ temos $u_n \leq u_m$. Agora temos que obter uma limitação uniforme local para a solução $u_n$. Como $a > 0$ numa vizinhança de $\partial\Omega$, por hipótese. Escolhemos $\delta > 0$ tal que $a > 0$ em $\Omega_\delta = \{x \in \Omega; d(x) < \delta\}$. Escolha $\varepsilon < \delta$ e um ponto $x_0 \in \Omega_\delta$ com $d(x_0) = \frac{\varepsilon}{2}$. Uma vez que $a(x) \geq a_0 > 0$ em $B(x_0, \frac{\varepsilon}{4})$, temos

$$\triangle_p u_n = a(x)u_n^q \geq a_0 u_n^q \quad \text{na } B(x_0, \frac{\varepsilon}{4}).$$

Seja

$$\begin{cases} \triangle_p U = a_0 U^q, & x \in B(x_0, \frac{\varepsilon}{4}), \\ U = +\infty, & x \in \partial B(x_0, \frac{\varepsilon}{4}). \end{cases} \tag{2.82}$$

O problema (2.82), tem solução pois $f(u) = u^q$ satisfaz as condições do Lema 2.1 de [13], então existe uma solução positiva $U$. Por comparação

$$\begin{aligned} -\triangle_p U &= -a_0 U^q, \\ -\triangle_p u_n &\leq -a_0 u_n^q, \\ u_n &\leq \infty, \quad \text{na } \partial B(x_0, \frac{\varepsilon}{4}) \end{aligned}$$

temos $u_n \leq U$ em $B(x_0, \frac{\varepsilon}{4})$. Isto mostra que $u_n$ é uniformemente limitada na $B(x_0, \frac{\varepsilon}{8})$. Assim, obtemos que $u_n$ é uniformemente limitado no conjunto $\{x \in \Omega; d(x) = \frac{\varepsilon}{2}\}$, isto é existe $c > 0$ tal que $u_n \leq c$ em $\{x \in \Omega; d(x) = \frac{\varepsilon}{2}\}$. E

$$\begin{aligned} \triangle_p u_n \geq 0, &\qquad \text{em } \Omega \backslash \{x \in \Omega; d(x) < \tfrac{\varepsilon}{2}\} \\ \triangle_p c = 0, &\qquad \Omega \backslash \{x \in \Omega; d(x) < \tfrac{\varepsilon}{2}\} \\ u_n \leq c, &\qquad \partial(\Omega \backslash \{x \in \Omega; d(x) = \tfrac{\varepsilon}{2}\}) = \{x \in \Omega; d(x) = \tfrac{\varepsilon}{2}\} \end{aligned}$$

por comparação

$$u_n \leq c \quad \text{em } \Omega \backslash \{x \in \Omega; d(x) < \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Como $\varepsilon$ é qualquer, tomando $\varepsilon \to 0$ e pelo o argumento de processo diagonal temos que uma subsequência de $u_n$ converge para $u$ em $C^1(\Omega)$, e $u$ é solução não negativa de (2.1). A solução $u$ de (2.1) é positiva pois $u(x) = +\infty$ na $\partial\Omega$ então existe uma vizinhança $V$ da fronteira de $\Omega$ tal que $u > 0$ e seja o conjunto $\Omega - V$, este conjunto é compacto e a função $a(x)$ é contínua e não negativa em $\Omega$ então $a(x)$ é limitada assim

$$\triangle_p u = a(x)u^q \leq Cu^q = \beta(u)$$

onde $\beta : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ é contínua, não decrescente e $\beta(0) = 0$ então pelo Teorema 5 de [19] temos $u > 0$ em $\Omega - V$. Assim $u$ é positiva em $\Omega$.

## 2.3 Estimativa (2.3) do Teorema (2.1)

Seja $x_0 \in \partial\Omega$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $x_0 = 0$ e o vetor normal unitário exterior $\nu(x_0) = -e_1$, onde $e_1$ é o primeiro vetor da base canônica de $R^n$. Tomando $x_n$ uma sequência em $\Omega$ tal que $x_n \to 0$. Para cada $x_n$ existe $d_n > 0$ tal que $x_n + d_n(-e_1) = \xi_n \in \partial\Omega$. Seja $z_n = \xi_n + d_n(-\nu(\xi_n))$. Note que $\xi_n$ é projeção de $z_n$ em $\partial\Omega$, se $x_n \to x_0$ então $z_n \to x_0$ e $d(z_n) = d_n$.

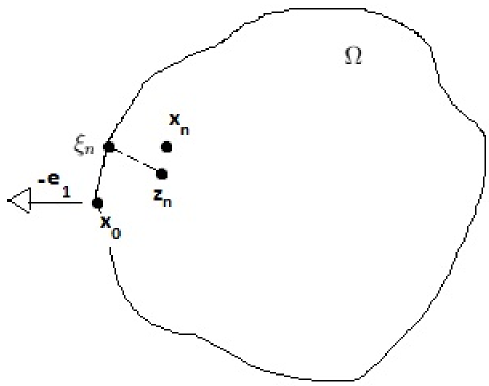



Figura 2.1:

Seja $\alpha_n = \alpha(z_n)$, definimos a função

$$v_n(y) = d_n^{\alpha_n} u(\xi_n + d_n y)$$

para $y \in \Omega_n := \{y \in \mathbb{R}^n; \xi_n + d_n y \in U\}$ onde $U$ é a vizinhança de $\partial\Omega$ dada pelo Lema (2.1.2). Observe que $\Omega_n \to D$ com $n \to \infty$, pois para $\xi_n + d_n y \in U$ como $x_n \to 0$ então

$z_n \to 0$ logo $d_n$ é bem pequeno, e se tivermos $y_1 < 0$ teremos que $\xi_n + d_n y$ não pertence a $U$. Então $y_1 > 0$. A função $v_n$ verifica a equação

$$\triangle_p v = d_n^{\gamma(z_n)-\gamma(\xi_n+d_n y)} d_n^{\gamma(\xi_n+d_n y)} a(\xi_n + d_n y) v_n^q \qquad \text{em } \Omega_n. \tag{2.83}$$

Pois

$$\nabla v_n(y) = \left( d_n^{\alpha_n} \frac{\partial u}{\partial z_1}(z) d_n, ..., d_n^{\alpha_n} \frac{\partial u}{\partial z_n}(z) d_n \right) = d_n^{\alpha_n+1} \nabla u(z)$$

onde $z = \xi_n + d_n y$

$$\begin{aligned} |\nabla v_n(y)|^{p-2} \nabla v_n(y) &= d_n^{(\alpha_n+1)(p-2)} d_n^{\alpha_n+1} |\nabla u(z)|^{p-2} \nabla u(z) \\ &= d_n^{(\alpha_n+1)(p-1)} |\nabla u(z)|^{p-2} \nabla u(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} div(|\nabla v_n(y)|^{p-2} \nabla v_n(y)) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( d_n^{(\alpha_n+1)(p-1)} |\nabla u(z)|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial z_i}(z) \right) \\ &= d_n^{(\alpha_n+1)(p-1)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i} \left( |\nabla u(z)|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial z_i}(z) \right) d_n \\ &= d_n^{(\alpha_n+1)(p-1)+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i} \left( |\nabla u(z)|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial z_i}(z) \right) \\ &= d_n^{\gamma(z_n)+\alpha(z_n)q} \triangle_p u(z) \\ &= d_n^{\gamma(z_n)+\alpha(z_n)q} a(\xi_n + d_n y) u(\xi_n + d_n y)^q \\ &= d_n^{\gamma(z_n)} a(\xi_n + d_n y)(d_n^{\alpha(z_n)} u(\xi_n + d_n y))^q \\ &= d_n^{\gamma(z_n)} a(\xi_n + d_n y) v_n^q(y) \\ &= d_n^{\gamma(z_n)-\gamma(\xi_n+d_n y)} d_n^{\gamma(\xi_n+d_n y)} a(\xi_n + d_n y) v_n^q(y) \quad \text{em } \Omega_n. \end{aligned}$$

Como $\gamma$ é Hölder contínua

$$\begin{aligned} |\gamma(z_n) - \gamma(\xi_n + d_n y)| &\leq C\|z_n - (\xi_n + d_n y)\|^\mu = C\|d_n(-\nu(\xi_n)) - d_n y\|^\mu \\ &= C(d_n\|\nu(\xi_n) + y\|)^\mu \leq C_1 d_n^\mu \end{aligned}$$

para $y$ em um subconjunto limitado de $D$. O primeiro termo a direita de (2.83) tende para 1 com $n \to \infty$, para $y$ em um subconjuto de $D$ e $d_n$ suficientemente pequeno. Pois, como vimos $\gamma(z_n) - \gamma(\xi_n + d_n y) \leq C_1 d_n^{\mu}$ então

$$d_n^{\gamma(z_n)-\gamma(\xi_n+d_n y)} \geq d_n^{C_1 d_n^{\mu}}$$

e $\lim\limits_{n\to\infty} d_n^{C_1 d_n^{\mu}} = 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} d_n^{\gamma(z_n)-\gamma(\xi_n+d_n y)} \geq 1$. Mas como

$$\begin{array}{rcll} -C_1 d_n^{\mu} & \leq & \gamma(z_n) - \gamma(\xi_n + d_n y) & \Rightarrow \\ d_n^{-C_1 d_n^{\mu}} & \geq & d_n^{\gamma(z_n)-\gamma(\xi_n+d_n y)} & \end{array}$$

e como $\lim\limits_{n\to\infty} d_n^{-C_1 d_n^{\mu}} = 1$ temos $\lim\limits_{n\to\infty} d_n^{\gamma(z_n)-\gamma(\xi_n+d_n y)} \leq 1$. Assim, temos $\lim\limits_{n\to\infty} d_n^{\gamma(z_n)-\gamma(\xi_n+d_n y)} = 1$. E temos que $\dfrac{d(\xi_n + d_n y)}{d_n} \to y_1$ pois como $d(\varepsilon_n) = 0$ e pelo Teorema do Valor Médio

$$\begin{array}{rcll} d(\xi_n + d_n y) - d(\xi_n) & = & \nabla d(\xi_n + \theta_n d_n y) d_n y & \Rightarrow \\ \dfrac{d(\xi_n + d_n y)}{d_n} & = & \nabla d(\xi_n + \theta_n d_n y) y & \Rightarrow \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d(\xi_n + d_n y)}{d_n} & = & \nabla d(0) y & \end{array}$$

no ponto 0 o gradiente de $d$ aponta no sentido que $d$ cresce, neste caso temos que $\nabla d(0) = e_1$ assim

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(\xi_n + d_n y)}{d_n} = e_1 y = y_1 \tag{2.84}$$

e obtemos pela condição (2.2) e de (2.84) que

$$\begin{array}{rcl} d_n^{\gamma(\xi_n+d_n y)} a(\xi_n + d_n y) & = & a(\xi_n + d_n y) d(\xi_n + d_n y)^{\gamma(\xi_n+d_n y)} \left(\dfrac{d_n}{d(\xi_n + d_n y)}\right)^{\gamma(\xi_n+d_n y)}, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} d_n^{\gamma(\xi_n+d_n y)} a(\xi_n + d_n y) & = & \lim\limits_{n\to+\infty} a(\xi_n + d_n y) d(\xi_n + d_n y)^{\gamma(\xi_n+d_n y)} \left(\dfrac{d_n}{d(\xi_n + d_n y)}\right)^{\gamma(\xi_n+d_n y)}, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} d_n^{\gamma(\xi_n+d_n y)} a(\xi_n + d_n y) & = & Q(0) y_1^{-\gamma(0)} = Q_0 y_1^{-\gamma_0} \end{array}$$

para $y$ em um subconjunto limitado de $D$. Agora usando a estimativa provada no Lema(2.1.2), existe constantes positivas $C_2$ tal que

$$v_n(y) \;\leq\; C_2 \left(\frac{d_n}{d(\xi_n + d_n y)}\right)^{\alpha_n} d(\xi_n + d_n y)^{\alpha_n - \alpha(\xi_n+d_n y)}.$$

Pois do Lema (2.1.2), temos

$$\begin{aligned} u(x) &\leq C_2 d(x)^{-\alpha(x)} \quad \Rightarrow \\ u(\xi_n + d_n y) &\leq C_2 d(\xi_n + d_n y)^{-\alpha(\xi_n + d_n y)} \quad \Rightarrow \\ d_n^{\alpha_n} u(\xi_n + d_n y) &\leq d_n^{\alpha_n} C_2 d(\xi_n + d_n y)^{-\alpha(\xi_n + d_n y)} \quad \Rightarrow \\ v_n(y) &\leq C_2 \frac{d_n^{\alpha_n}}{d(\xi_n + d_n y)^{\alpha_n}} d(\xi_n + d_n y)^{\alpha_n - \alpha(\xi_n + d_n y)}. \end{aligned} \tag{2.85}$$

E como

$$\begin{aligned} C_1 d(x)^{-\alpha(x)} &\leq u(x) \quad \Rightarrow \\ C_1 d(\xi_n + d_n y)^{-\alpha(\xi_n + d_n y)} &\leq u(\xi_n + d_n y) \quad \Rightarrow \\ C_1 d_n^{\alpha_n} d(\xi_n + d_n y)^{-\alpha(\xi_n + d_n y)} &\leq d_n^{\alpha_n} u(\xi_n + d_n y) \quad \Rightarrow \\ C_1 \left( \frac{d_n}{d(\xi_n + d_n y)} \right)^{\alpha_n} d(\xi_n + d_n y)^{\alpha_n - \alpha(\xi_n + d_n y)} &\leq v_n(y). \end{aligned} \tag{2.86}$$

Como o lado direito de (2.85) converge para $C_2 y_1^{-\alpha_0}$ pois $\alpha(x) = \frac{p-\gamma(x)}{q-p+1}$ então

$$\begin{aligned} \alpha_n - \alpha(\xi_n + d_n y) &= \frac{p - \gamma(z_n) - p + \gamma(\xi_n + d_n y)}{q - p + 1} = \frac{\gamma(\xi_n + d_n y) - \gamma(z_n)}{q - p + 1} \\ \lim_{n\to\infty} d(\xi_n + d_n y)^{\alpha_n - \alpha(\xi_n + d_n y)} &= \lim_{n\to\infty} [d(\xi_n + d_n y)^{\gamma(z_n) - \gamma(\xi_n + d_n y)}]^{\frac{-1}{q-p+1}} = 1 \end{aligned}$$

e o lado esquerdo de (2.86) converge para $C_1 y_1^{-\alpha_0}$. Obtemos que a sequência $v_n$ é uniformemente limitada em um subconjunto compacto de $D$. Passando para uma subsequência de $v_n$ que converge em $C^1(D)$ para uma função $v$ que verifica

$$\begin{cases} \triangle_p v = Q_0 y_1^{-\gamma_0} v^q, & x \in D, \\ v = +\infty, & x \in \partial D \end{cases} \tag{2.87}$$

e $v = +\infty$ na $\partial D$ pois de (2.86)

$$\begin{aligned} C_1 \left( \frac{d_n}{d(\xi_n + d_n y)} \right)^{\alpha_n} d(\xi_n + d_n y)^{\alpha_n - \alpha(\xi_n + d_n y)} &\leq v_n(y) \\ C_1 y_1^{-\alpha_0} &\leq \lim_{n\to\infty} v_n(y) = v(y) \end{aligned}$$

onde $\alpha_0 = \alpha(0) > 0$, mas como $y \in \partial D$ temos $y_1 = 0$ logo $\infty \leq v(y)$. E de (2.85) e (2.86) concluímos

$$C_1 y_1^{-\alpha_0} \leq v \leq C_2 y_1^{-\alpha_0}$$

e do Teorema (2.1.2), temos

$$v(y) \quad = \quad \left(\frac{(p-1)\alpha_0^{p-1}(\alpha_0+1)}{Q_0}\right)^{\frac{1}{q-p+1}} y_1^{-\alpha_0}$$

tomando $y = e_1$, temos

$$v(e_1) = \left(\frac{(p-1)\alpha_0^{p-1}(\alpha_0+1)}{Q_0}\right)^{\frac{1}{q-p+1}}.$$

Além disso,

$$v_n(e_1) = d_n^{\alpha_n} u(\xi_n + d_n e_1) = d_n^{\alpha_n} u(x_n) \tag{2.88}$$

tirando o limite dos dois lados de (2.88) temos

$$\lim_{x_n \to x_0} d_n^{\alpha_n} u(x_n) = v(e_1). \tag{2.89}$$

Usando o Teorema do Valor Médio existe $\theta_n \in t(x_n) + (1-t)\xi_n$ com $t \in [0,1]$ tal que

$$\begin{aligned} \left(\frac{d(x_n)}{d(z_n)}\right)^{\alpha(x_n)} &= \left(\frac{d(x_n) - d(\xi_n)}{d(z_n)}\right)^{\alpha(x_n)} = \left(\frac{|<\nabla d_n(\theta_n), d_n e_1>|}{d(z_n)}\right)^{\alpha(x_n)} \\ &= (|<\nabla d_n(\theta_n), e_1>|)^{\alpha(x_n)} \end{aligned}$$

tomando $n \to \infty$ temos

$$\lim_{x_n \to x_0} d(x_n)^{\alpha(z_n)} d(z_n)^{-\alpha(z_n)} \quad = \quad |<e_1, e_1>|^{\alpha(0)} = 1. \tag{2.90}$$

Pelo fato de $\lim\limits_{x_n \to x_0} d(x_n)^{\alpha(x_n)-\alpha(z_n)} = 1$, de (2.89) e de (2.90) temos que

$$\lim_{x_n \to x_0} d(x_n)^{\alpha(x_n)} u(x_n) \quad = \quad \lim_{x_n \to x_0} d(x_n)^{\alpha(x_n)-\alpha(z_n)} (d(x_n)^{\alpha(z_n)} d(z_n)^{-\alpha(z_n)}) d(z_n)^{\alpha(z_n)} u(x_n) = v(e_1)$$

assim, provamos a estimativa (2.3). ■

## 2.4 Unicidade do Teorema (2.1)

Sejam $u$ e $v$ soluções positivas de (2.1). De acordo com a estimativa (2.3) temos

$$\lim_{x \to x_0} d(x)^{\alpha(x)} u(x) d(x)^{-\alpha(x)} v(x)^{-1} = v(e_1) v(e_1)^{-1} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = 1$$

para todo $x_0 \in \partial\Omega$. Dado $\varepsilon > 0 \ \exists \ \ \delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| \leq \delta$ temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{u(x)}{v(x)} - 1\right| &< \varepsilon \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon < \frac{u(x)}{v(x)} - 1 < \varepsilon \quad \Rightarrow \\
1 - \varepsilon &< \frac{u(x)}{v(x)} < 1 + \varepsilon \quad \Rightarrow \\
(1 - \varepsilon)v(x) &< u(x) < (1 + \varepsilon)v(x) \qquad (2.91)
\end{aligned}$$

se $\|x - x_0\| \leq \delta$, ou seja, $d(x) \leq \delta$.

Denote $\Omega^\delta := \{x \in \Omega; d(x) > \delta\}$ e considere

$$\begin{cases} \triangle_p w = a(x)w^q, & x \in \Omega^\delta, \\ w = u, & x \in \partial\Omega^\delta \end{cases} \qquad (2.92)$$

esse problema tem solução, pois $\underline{w} = 0$ é subsolução e $\overline{w} = \max\limits_{\partial\Omega^\delta} u(x)$ é supersolução, e a solução é única já que podemos usar comparação duas vezes para mostrar que são iguais. Essa solução é claramente $w = u$. Por outro lado como $q > p - 1$, as funções $(1 - \varepsilon)v$ e $(1 + \varepsilon)v$ são sub e supersolução de (2.92). Pois

$$\begin{aligned}
\underline{u} &= (1 - \varepsilon)v \\
\triangle_p \underline{u} &= (1 - \varepsilon)^{p-1} \triangle_p v
\end{aligned}$$

como $p - 1 < q$ e $1 - \varepsilon < 1 \Rightarrow (1 - \varepsilon)^{p-1} > (1 - \varepsilon)^q$, obtemos

$$\triangle_p \underline{u} = (1 - \varepsilon)^{p-1} a(x) v^q \geq (1 - \varepsilon)^q a(x) v^q = a(x)\underline{u}^q$$

na $\partial\Omega^\delta$

$$\underline{u} = (1 - \varepsilon)v \leq u$$

então $\underline{u}$ é subsolução.

Onde $\overline{u} = (1 + \varepsilon)v$ é supersolução pois

$$\triangle_p \overline{u} = (1 + \varepsilon)^{p-1} \triangle_p v$$

como $p - 1 < q$ e $(1 + \varepsilon) > 1 \ \Rightarrow \ (1 + \varepsilon)^{p-1} < (1 + \varepsilon)^q$, assim

$$\triangle_p \overline{u} = (1 + \varepsilon)^{p-1} \triangle_p v \leq (1 + \varepsilon)^q a(x) v^q = a(x)\overline{u}^q$$

na $\partial\Omega^\delta$

$$\overline{u} = (1 + \varepsilon)v \geq u$$

então $\overline{u}$ é supersolução. Assim (2.91) vale em $\Omega^\delta$, logo

$$(1-\varepsilon)v(x) \leq u(x) \leq (1+\varepsilon)v(x). \tag{2.93}$$

Portanto de (2.91) e (2.93) temos

$$(1-\varepsilon)v(x) \leq u(x) \leq (1+\varepsilon)v(x), \quad \text{em } \Omega$$

tomando $\varepsilon \to 0$ temos $v = u$ em $\Omega$.

Capítulo

*3*

# Soluções Inteiras para Problemas Elípticos não Lineares com Expoentes Variáveis

Vamos estudar nesse capítulo a existência de solução positiva do problema

$$\begin{cases} \triangle u & = & u^{q(x)} \quad x \in \mathbb{R}^N \\ u(x) & \to & \infty, \quad \text{com } |x| \to \infty \end{cases} \tag{3.1}$$

que é chamada grande solução inteira, pois $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = +\infty$. Onde $N \geq 3$, e $q : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$ é localmente Hölder contínua, com $q(x) \leq 1$ para $|x| \to \infty$.

Para mostrar que existe solução do problema (3.1), vamos precisar de alguns resultados preliminares.

## 3.1 Resultados Preliminares

Nessa seção vamos mostrar a existência de solução para o problema

$$\begin{cases} u''(r) + \dfrac{N-1}{r} u'(r) = g(u(r), r), \\ u(0) = a > 0, \\ u'(0) = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $g$ satisfaz algumas condições. Para isso, vamos mostrar que existe uma solução positiva que satisfaz

$$u(r) = a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} g(u(s), s) ds \tag{3.3}$$

onde $g : (0, \infty) \times [0, \infty) \to (0, \infty)$ é uma função contínua que satisfaz uma ou mais das seguintes condições :

**G1** - A função $g(t, r)$ é não decrescente em $t$, para um $r$ fixado. Mais ainda, para cada $t > 0$, fixado existe uma constante $c_t$ que depende de $t$, tal que $g(t, r) > c_t$ para todo $r \geq 0$.

**G2** - Existe uma função não decrescente, diferenciável $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ satisfazendo

$$\int_0^1 \frac{1}{f(t)} dt = +\infty \qquad e \qquad \int_1^\infty \frac{1}{f(t)} dt < \infty \tag{3.4}$$

e existem constantes $R \geq 0$ e $0 < \beta \leq 1$ tais que

$$g(t, r) \leq \begin{cases} f(t) & \text{para} \quad 0 \leq r \leq R, \quad t \geq 0, \\ t^\beta & \text{para} \quad r \geq R, \quad t \geq 1. \end{cases}$$

**G3** - Existe uma função localmente limitada $\mu : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty)$ tal que

$$|g(t, r) - g(s, r)| \leq \mu(t, s)|t - s|, \qquad \forall \ t, s \in (0, \infty), 0 \leq r \leq R,$$

onde $R$ foi definido em **G2**.

**Observação** Quando $R = 0$ em **G2**, a condição (3.4) e a condição **G3** são vazias.

**Lema 3.1.1** *Suponha que $g$ satisfaz **G1,G2** com $R = 0$ em **G2**. Então, para qualquer $a > 0$, a equação (3.3) tem uma solução positiva $u$ definida para todo $r \geq 0$. Além disso, $u(r) \to \infty$ com $r \to \infty$.*

**Prova** Pelo Apêndice B conseguimos garantir a existência de uma função $u(r)$, para $r$ pequeno, que satisfaz (3.3). Seja $[0, R_a)$ o intervalo maximal de existência de $u(r)$. Vamos mostrar que $R_a = +\infty$. Como $g$ é não decrescente em relação a primeira variável, para $s$ fixado, e $u$ é não decrescente, pois $u' = r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} g(u(s), s) ds$ e como $r \geq 0$ e $g > 0$, temos que $u' \geq 0$, e para qualquer $r < R_a$

$$\begin{aligned}
u(r) &= a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} g(u(s), s) ds dt \\
&\leq a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} g(u(s)+1, s) ds dt \\
&\leq a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} (u(s)+1)^{\beta} ds dt, \quad \text{por } \mathbf{G2} \\
&\leq a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t t^{N-1} (u(t)+1)^{\beta} ds dt, \quad \text{já que } u \text{ não decrescente e } s < t \\
&= a + \int_0^r t^{1-N} t^{N-1} (u(t)+1)^{\beta} t dt \\
&= a + \int_0^r t (u(t)+1)^{\beta} dt \\
&\leq a + \int_0^r t (u(t)+1) dt, \quad \text{pois } 0 < \beta \leq 1 \\
&= a + \int_0^r t dt + \int_0^r t u(t) dt.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall generalizada temos

$$\begin{aligned}
u(r) &\leq \left( a + \int_0^r t dt \right) e^{\int_0^r s ds} \\
&= \left( a + \frac{t^2}{2}\Big|_0^r \right) e^{\frac{r^2}{2}} \\
&= \left( a + \frac{r^2}{2} \right) e^{\frac{r^2}{2}}
\end{aligned}$$

para $r \in [0, R_a)$ então $u(r) \leq C$ e

$$u'(r) = r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} g(u(s), s) ds \leq r^{1-N} r^{N-1} (u(r)+1)^{\beta} \int_0^r ds = r(u(r)+1)^{\beta} \leq C_1$$

pois $u$ é limitado e $r \in [0, R_a)$. Então $u$ e $u'$ são limitados, logo podemos estender a função $u$ em um intervalo maior que $[0, R_a)$ o que contradiz o fato desse intervalo ser o maximal. Então $R_a = \infty$. De **G1**, temos que para um $t$ fixo existe $c_t$ tal que $g(t, r) \geq c_t$,

assim

$$\begin{aligned}
u(r) &= a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} g(u(s), s) ds dt \\
&\geq a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} g(a, s) ds dt, \qquad \text{pois } u(r) \geq a \\
&\geq a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} c_a ds dt \\
&= a + \frac{1}{N} \int_0^r t c_a dt \\
&= a + \frac{c_a t^2}{2N}\Big|_0^r \\
&= a + C_2 r^2
\end{aligned}$$

então quando $r \to \infty$ $u(r) \to \infty$. ■

**Lema 3.1.2** *Suponha $g$ satisfaz as condições **G1** e **G2** para qualquer $R > 0$. Então existe $a > 0$ tal que a equação (3.3) tem uma solução positiva $u$ definida para todo $r \geq 0$. Além disso, $u(r) \to +\infty$ com $r \to +\infty$.*

**Prova:** Se uma solução de (3.3) positiva $u$ existe para todo $r$, então $\lim_{r\to+\infty} u(r) = +\infty$, pois $u(r)$ é uma função não decrescente. Vamos mostrar que existe uma solução de (3.3) para todo $r \geq 0$. Observe que para cada $a > 0$, a equação (3.3) tem uma solução $u_a$ em um intervalo $[0, R_a)$. Suponha que $[0, R_a)$ é um intervalo maximal de existência para a solução $u_a$. Vamos mostrar que $R_a > R$, onde $R$ foi definido em **G2**, e $a > 0$. Suponha que $R_a \leq R$ para todo $a > 0$. Como $[0, R_a)$ é um intervalo maximal de existência de $u_a$, e $u_a$ é positiva e não decrescente temos que $\lim_{r\to R_a^-} u_a(r) = +\infty$, pois se fosse finito pode ser estendido para $R_a$. Para $0 \leq s \leq R_a \leq R$, temos $g(u_a(s), s) \leq f(u_a(s))$ de **G2**. Diferenciando (3.3), usando a condição **G2**, o fato de $u$ e $f$ são não decrescente temos,

$$\begin{aligned}
u_a'(r) &= r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} g(u_a(s), s) ds \\
&\leq r^{1-N} \int_0^r s^{N-1} f(u_a(s)) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{s<r}{<} \quad r^{1-N}\int_0^r r^{N-1}f(u_a(r))ds \\ &= \quad f(u_a(r))r \qquad \Rightarrow \\ \frac{1}{f(u_a(r))} &\leq \quad \frac{r}{u_a'(r)} \end{aligned}$$

em $[0, R_a)$ tal que

$$\frac{u_a'(r)}{f(u_a(r))} \leq r$$

integrando sobre o intervalo $[0, \eta)$ para $\eta < R_a$ temos

$$\int_0^\eta \frac{u_a'(r)}{f(u_a(r))}dr \leq \frac{\eta^2}{2}$$

como

$$\frac{u_a'(r)}{f(u_a(r))} = \frac{d}{dr}\int_a^{u_a(r)} \frac{1}{f(t)}dt$$

temos

$$\begin{aligned} \int_0^\eta \frac{u_a'(r)}{f(u_a(r))}dr = \int_a^{u_a(\eta)} \frac{1}{f(t)}dt &\leq \frac{\eta^2}{2} \leq \frac{R_a^2}{2} \leq \frac{R^2}{2} \qquad \Rightarrow \\ \lim_{\eta\to R_a^-}\int_a^{u_a(\eta)} \frac{1}{f(t)}dt &\leq \lim_{\eta\to R_a^-}\frac{\eta^2}{2} \leq \frac{R^2}{2} \qquad \Rightarrow \\ \int_a^\infty \frac{1}{f(t)}dt &\leq \frac{R^2}{2} < \infty. \end{aligned}$$

Com isso, para todo $a > 0$, obtemos

$$\lim_{a\to 0}\int_a^\infty \frac{1}{f(t)}dt < \infty,$$

de (3.4) temos que o limite a esquerda da desigualdade acima é infinito, obtemos então, uma contradição. Portanto (3.3) tem uma solução válida em $[0, R]$ para algum $a > 0$.

Vamos mostrar que essa solução é, de fato, válida para todo $r \geq 0$. Como o $a$ já foi escolhido, vamos suprimir a dependência do $a$.

Como $u$ existe e é contínua em $[0, R]$, nós temos $u(R) < \infty$ tal que $u'(R) < \infty$ $(u'(R) \leq \frac{R}{N}f(u_a(R)) < \infty)$, então a solução $u$ de (3.3) pode ser estendida para o intervalo $[0, R+\varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$.

Seja $R_0 = \sup\{r;\ u$ é uma solução de (3.3) em $[0,r)\}$. Claramente $R_0 > R$. Se $R_0 = \infty$ acabamos. Suponha $R_0 < \infty$ tal que $\lim\limits_{r \to R_0^-} u(r) = +\infty$. Para $r < R_0$, temos

$$
\begin{aligned}
u(r) &= a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} g(u(s),s)\,ds\,dt \\
&= a + \int_0^R t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} g(u(s),s)\,ds\,dt + \int_R^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} g(u(s),s)\,ds\,dt \\
&= a + \int_0^R t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} g(u(s),s)\,ds\,dt + \int_R^r t^{1-N} \int_0^R s^{N-1} g(u(s),s)\,ds\,dt \\
&\quad + \int_R^r t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} g(u(s),s)\,ds\,dt \\
&= u(R) + \int_R^r t^{1-N} \int_0^R s^{N-1} g(u(s),s)\,ds\,dt + \int_R^r t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} g(u(s),s)\,ds\,dt \\
&= u(R) + \left( \int_0^R s^{N-1} g(u(s),s)\,ds \right) \left( \left. \frac{t^{2-N}}{2-N} \right|_R^r \right) + \int_R^r t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} g(u(s),s)\,ds\,dt \\
&= u(R) + \frac{r^{2-N} - R^{2-N}}{2-N} \int_0^R s^{N-1} g(u(s),s)\,ds + \int_R^r t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} g(u(s),s)\,ds\,dt \\
&= u(R) + \frac{1}{N-2} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{2-N} \right) R^{2-N} \int_0^R s^{N-1} g(u(s),s)\,ds \\
&\quad + \int_R^r t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} g(u(s),s)\,ds\,dt \\
&= u(R) + \frac{1}{N-2} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{2-N} \right) R u'(R) + \int_R^r t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} g(u(s),s)\,ds\,dt.
\end{aligned}
$$

Usando a inequação provada no Apêndice (C)

$$
\int_R^r t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} g(u(s),s)\,ds\,dt \ \leq \ \int_R^r s g(u(s),s)\,ds \tag{3.5}
$$

e as condições **G1** que garantem $g$ é não decrescente, ou seja, $g(u(s),s) \leq g(u(s)+1,s)$ e **G2** que para $R \leq s$ garante $g(u(s)+1,s) \leq (u(s)+1)^\beta$, obtemos

$$\begin{aligned}
u(r) &\leq u(R) + \frac{Ru'(R)}{N-2}\left(1 - \left(\frac{R}{r}\right)^{N-2}\right) + \int_R^r s(u(s)+1)^\beta ds \\
&\leq u(R) + \frac{Ru'(R)}{N-2} + \int_R^r s(u(s)+1)^\beta ds \\
&\leq u^*(R) + \int_R^r s(u(s)+1)ds \\
&\leq u^*(R) + \int_R^r sds + \int_R^r su(s)ds.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall generalizada

$$\begin{aligned}
u(r) &\leq \left(u^*(R) + \int_R^r sds\right) e^{\int_R^r sds} \\
&= \left(u^*(R) + \frac{s^2}{2}\bigg|_R^r\right) e^{\frac{r^2-R^2}{2}} \\
&= \left(u^*(R) + \frac{r^2-R^2}{2}\right) e^{\frac{r^2-R^2}{2}}
\end{aligned}$$

para $r \in [0, R_0)$, então $u(r) \leq c$, onde $u^*(R) = u(R) + \dfrac{Ru'(R)}{N-2}$.

Provamos que $u$ é uniformemente limitado em $[0, R_0)$. Mas tinhamos que $\lim\limits_{r \to R_0^-} u(r) = +\infty$, contradição. Então $R_0 = +\infty$. $\blacksquare$

**Lema 3.1.3** *Suponha que $g$ satisfaz as condições **G1**, **G2** e **G3**. Então, dado alguma constante $M > 0$, existe $a > 0$ tal que a solução inteira positiva $u_a$ de (3.3) correspondente ao valor $a$, satisfaz $u_a(R) > M$.*

**Prova:** Como visto no Apêndice (B), garantimos a existência de uma solução $u$ para a equação (3.3) em um intervalo $[0, R_a)$.

Seja $A = \sup\{a > 0;\ \text{ equação (3.3) tem uma solução inteira positiva }\}$. Se $A = +\infty$, pela definição de solução inteira, temos que para todo $a > 0$, $u_a(r)$ é solução de (3.3) para todo $r \in [0, \infty)$. Tome $a > M$, assim

$$\begin{aligned} u_a(R) &= a + \int_0^R t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} g(u(s), s) ds dt \\ &> M + \int_0^R t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} g(u(s), s) ds dt \\ &\geq M \end{aligned}$$

então $u_a(R) > M$.

Por outro lado suponha $A < \infty$. Primeiramente, provaremos que existe $R_A \leq R$ tal que $\lim_{r \to R_A^-} u_A(r) = +\infty$, onde $R$ foi definido em **G2**. Observe que para qualquer $a > A$, a solução $u_a$ é blow up para algum $R_a > 0$. E como $u_a$ é crescente em $a$, isto é, se $a < a'$ então $u_a < u_{a'}$, temos $R_{a'} \leq R_a$ (pois se $R_a < R_{a'} \Rightarrow \infty = u_a(R_a) < u_{a'}(R_a) < \infty$ absurdo). E pela definição de intervalo maximal de solução, temos que $R_a = \inf\{r > 0;\ u_a(r) = +\infty\}$. Em adição $R_a \leq R$ (pois $a > A$ e se $R_a > R$ então pela prova do Lema (3.1.2), $u_a(r)$ existe para todo $r$, ou seja $u_a$ é solução inteira, mas como $a > A$ temos que $u_a$ não é solução inteira). Como $R_{a'} \leq R_a$ para $a < a'$ e $R_a \leq R\ \forall a > A$ temos que $\lim_{a \to A^+} R_a$ existe e $\lim_{a \to A^+} R_a = R_A \leq R$.

**Afirmação 1** $\lim_{a \to A} u_a(r) = u_A(r), \quad \forall\ r \in [0, R_A)$ e que esta convergência é uniforme num subconjunto compacto de $[0, R_A)$.

Pelo Apêndice (D) e pela condição **G3**

$$\begin{aligned} |u_a(r) - u_A(r)| &\leq |a - A| + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} |g(u_a(s), s) - g(u_A(s), s)| ds dt \\ &\leq |a - A| + \int_0^r s |g(u_a(s), s) - g(u_A(s), s)| ds \\ &\leq |a - A| + \int_0^r s \mu(u_a(s), u_A(s)) |u_a(s) - u_A(s)| ds. \end{aligned}$$

Seja $\delta > 0$ dado, vamos mostrar que $\lim_{a \to A} u_a = u_A$ uniformemente num intervalo fechado $[0, R_A - \delta]$. Então para $s \in [0, R_A - \delta]$ temos que

$$A \leq u_A(s) \leq u_a(s) \leq u_a(R_A - \delta).$$

Como $\mu$ é localmente limitada existe uma constante $M_\delta > 0$ tal que

$$\mu(u_a(s), u_A(s)) \leq M_\delta \qquad 0 \leq s \leq R_A - \delta. \tag{3.6}$$

Portanto de (3.6)

$$|u_a(r) - u_A(r)| \leq |a - A| + M_\delta \int_0^r s|u_a(s) - u_A(s)|ds. \tag{3.7}$$

Pela desigualdade de Gronwall temos

$$\begin{aligned}
|u_a(r) - u_A(r)| &\leq |a - A| + M_\delta \int_0^r s|a - A|e^{\int_s^r M_\delta u du} ds \\
&= |a - A| + M_\delta |a - A| \int_0^r e^{\frac{M_\delta u^2}{2}}\Big|_s^r s ds \\
&= |a - A| + M_\delta |a - A| \int_0^r e^{\frac{M_\delta (r^2 - s^2)}{2}} s ds \\
&= |a - A| + M_\delta |a - A| \left( \frac{-e^{\frac{M_\delta (r^2 - s^2)}{2}}}{M_\delta} \right) \Big|_0^r \\
&= |a - A| + M_\delta |a - A| \frac{(-1 + e^{\frac{M_\delta r^2}{2}})}{M_\delta} \\
&= |a - A| e^{\frac{M_\delta r^2}{2}} \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

para $r \in [0, R_A - \delta]$. De (3.8) concluímos $\lim\limits_{a \to A} u_a(r) = u_A(r)$ para todo $r \in [0, R_A)$ com a convergência sendo uniforme num subconjunto compacto de $[0, R_A)$.

**Afirmação 2** $\lim\limits_{r \to R_A^-} u_A(r) = +\infty$

Observe que de **G2**, temos $g(u_a(r), r) \leq f(u_a(r))$ para todo $0 \leq r \leq R_A \leq R$ e defina a função $F : (0, \infty) \to (0, \infty)$ por

$$F(z) = \int_z^\infty \frac{ds}{f(s)}.$$

Observe que $F' < 0$ e $F'' \geq 0$

$$\begin{aligned}
F'(z) &= -\frac{1}{f(z)} < 0, \\
F''(z) &= \frac{f'(z)}{f(z)^2} \geq 0 \text{ pois } f \text{ é não decrescente}
\end{aligned}$$

e para qualquer $a > A$ e $r < R_a$, temos que

$$F''(u_a(r)) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial F(u_a(r))}{\partial u_a}u_a'\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial F(u_a(r))}{\partial u_a}\right)u_a' + \frac{\partial F(u_a(r))}{\partial u_a}u_a'' = \frac{\partial^2 F(u_a(r))}{\partial u_a^2}u_a'^2$$

$$+\frac{\partial F(u_a(r))}{\partial u_a}u_a'' \geq \frac{\partial F(u_a(r))}{\partial u_a}u_a'' = -\frac{u_a''(r)}{f(u_a(r))}.$$

Como

$$\begin{aligned} u_a'(r) &= r^{1-N}\int_0^r s^{N-1}g(u_a(s),s)ds, \\ u_a''(r) &= (1-N)r^{-N}\int_0^r s^{N-1}g(u_a(s),s)ds + r^{1-N}(r^{N-1}g(u_a(r),r)) \leq g(u_a(r),r). \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{\partial F(u_a(r))}{\partial u_a}u_a'' \geq \frac{-g(u_a(r),r)}{f(u_a(r))} \geq -1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^r \frac{\partial F(u_a(r))}{\partial u_a}u_a'' ds \geq \int_0^r -ds. \qquad (3.9)$$

Integrando por partes o lado esquerdo de (3.9), temos

$$\begin{aligned} u(s) &= \frac{\partial F}{\partial u_a}(u_a(s)) & du &= \frac{\partial^2 F}{\partial u_a^2}(u_a(s))u_a'(s)ds \\ dv &= u_a''(s)ds & v &= u_a'(s) \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} u_a'(s)\frac{\partial F}{\partial u_a}(u_a(s))\Big|_0^r - \int_0^r u_a'(s)\frac{\partial^2 F}{\partial u_a^2}u_a'(s)ds \geq -r \quad &\Rightarrow \\ u_a'(r)\frac{\partial F}{\partial u_a}(u_a(r)) \geq u_a'(r)\frac{\partial F}{\partial u_a}(u_a(r)) - \int_0^r u_a'^2(s)\frac{\partial^2 F}{\partial u_a^2}ds \geq -r \quad &\Rightarrow \\ u_a'(r)\frac{\partial F}{\partial u_a}(u_a(r)) \geq -r \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial F}{\partial r}(u_a(r)) \geq -r & \end{aligned}$$

integrando em relação a $r$, sobre $[s, R_a]$ e lembrando que $\lim\limits_{s\to R_a^-} u_a(s) = +\infty$ e $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$, temos

$$\begin{aligned} F(u_a(R_a)) - F(u_a(s)) \geq -\frac{(R_a^2 - s^2)}{2} \quad &\Rightarrow \\ -F(u_a(s)) \geq -\frac{(R_a^2 - s^2)}{2} \quad &\Rightarrow \\ F(u_a(s)) \leq \frac{(R_a^2 - s^2)}{2} \leq R_a^2 - s^2. & \end{aligned}$$

Como $F'(z) < 0$ então $F$ é decrescente, isso produz

$$u_a(r) \geq F^{-1}(R_a^2 - r^2)$$

tomando $a \to A^+$ temos

$$u_A(r) \geq F^{-1}(R_A^2 - r^2).$$

Como $\lim_{z\to 0^+} F^{-1}(z) = +\infty$, pois quando $x \to \infty$ temos $F(x) \to 0$, então $\lim_{r\to R_A^-} u_A(r) = +\infty$.

Para completar a prova, escolha $\delta_0 > 0$ pequeno tal que $u_A(r) > M+1$ para $r > R_A - \delta_0$ (definição de limite). Observe que

$$u_A(R_A - \frac{\delta_0}{2}) > M + 1.$$

Usando (3.8) com $\delta = \frac{\delta_0}{4}$ e $r = R_A - \frac{\delta_0}{2}$ temos

$$u_A(R_A - \frac{\delta_0}{2}) - u_a(R_A - \frac{\delta_0}{2}) < (A-a)e^{\frac{M_\delta (R_A - \frac{\delta_0}{2})^2}{2}} < (A-a)e^{\frac{M_\delta R_A^2}{2}}$$

escolha $\varepsilon > 0$ pequeno tal que $(A-a)e^{\lambda_0 R_A^2} < 1$, onde $\lambda_0 = \frac{M_\delta}{2}$, para $0 < A - a < \varepsilon$, então

$$u_A(R_A - \frac{\delta_0}{2}) - u_a(R_A - \frac{\delta_0}{2}) < 1 \tag{3.10}$$

onde $\lambda_0$ depende de $\delta_0$. Portanto de (3.10)

$$\begin{aligned} u_a(R_A - \frac{\delta_0}{2}) \quad &- \quad u_A(R_A - \frac{\delta_0}{2}) > -1 \qquad \Rightarrow \\ u_a(R_A - \frac{\delta_0}{2}) \quad &> \quad u_A(R_A - \frac{\delta_0}{2}) - 1 > M + 1 - 1 = M. \end{aligned}$$

Portanto $u_a(R) > M$ pois $R_A - \frac{\delta_0}{2} \leq R_A \leq R$ e $u_a$ é crescente. Então para algum $a$ próximo de $A$ temos $u_a(R) > M$. ■

**Lema 3.1.4** *Suponha $g$ satisfaz **G1**, **G2**,**G3**. Se $u$ é uma solução de (3.3), para todo $r \geq 0$ tal que $u(R) \geq 1$ então para $r \geq R$ a solução $u$ satisfaz*

$$u(r) \leq \begin{cases} \left( \dfrac{Ru'(R)}{N-2} + u(R) + r^2 \right)^{\frac{1}{1-\beta}}, & se \quad 0 < \beta < 1 \\ \\ u(R) \exp\left( \dfrac{Ru'(R)}{N-2} + \dfrac{r^2}{2N} \right), & se \quad \beta = 1. \end{cases} \tag{3.11}$$

**Prova:** Usamos **G1**, **G2** e **G3** para garantir, pelo Lema (3.1.3), que existe $a > 0$ tal que $u_a$ é uma solução de (3.3) para todo $r \geq 0$ e $u_a(R) \geq 1$.

Como visto na prova do Lema (3.1.2), podemos escrever

$$u(r) \;=\; u(R) + \frac{Ru'(R)}{N-2}\left(1 - \left(\frac{R}{r}\right)^{N-2}\right) + \int_R^r t^{1-N}\int_R^t s^{N-1}g(u(s),s)dsdt.$$

Portanto para $r \geq R$ note que $u(r) \geq 1$, pois $u(R) \geq 1$ e $u$ é crescente, e de **G2** temos

$$\begin{aligned}
u'(r) &= \frac{-R^{N-1}u'(R)}{N-2}(r^{2-N})' + r^{1-N}\int_R^r s^{N-1}g(u(s),s)ds \\
&= \frac{R^{N-1}u'(R)}{2-N}(2-N)r^{1-N} + r^{1-N}\int_R^r s^{N-1}g(u(s),s)ds \\
&\leq u'(R)\left(\frac{R}{r}\right)^{N-1} + r^{1-N}\int_R^r s^{N-1}u(s)^{\beta}ds, \qquad \text{pois } u(r) \geq 1 \text{ para } r \geq R \\
&\leq u'(R)\left(\frac{R}{r}\right)^{N-1} + r^{1-N}u(r)^{\beta}\int_R^r s^{N-1}ds \\
&= u'(R)\left(\frac{R}{r}\right)^{N-1} + u(r)^{\beta}r^{1-N}\frac{s^N}{N}\Big|_R^r \\
&= u'(R)\left(\frac{R}{r}\right)^{N-1} + u(r)^{\beta}r^{1-N}\frac{r^N - R^N}{N} \\
&= u'(R)\left(\frac{R}{r}\right)^{N-1} + u(r)^{\beta}\frac{r}{N}.
\end{aligned}$$

Multiplicando os dois lados da inequação por $u^{-\beta}$ e lembrando que $u(r) \geq 1$ para todo $r \geq R$, temos

$$\begin{aligned}
u(r)^{-\beta}u'(r) &\leq u'(R)\left(\frac{R}{r}\right)^{N-1}u(r)^{-\beta} + \frac{r}{N}, \quad \text{para } r \geq R \quad \overset{u(r)^{-1}\leq 1}{\Rightarrow} \\
u(r)^{-\beta}u'(r) &\leq u'(R)\left(\frac{R}{r}\right)^{N-1} + \frac{r}{N}, \quad \text{para } r \geq R. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Suponha que $0 < \beta < 1$. Integrando os dois lados de (3.12) no intervalo $(R, r)$ para qualquer $r > R$ temos

$$\int_R^r u(s)^{-\beta}u'(s)ds \;\leq\; \int_R^r \left(u'(R)\left(\frac{R}{s}\right)^{N-1} + \frac{s}{N}\right)ds \quad \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{u(s)^{1-\beta}}{1-\beta}\right|_R^r &\leq R^{N-1}u'(R)\int_R^r s^{1-N}ds + \frac{1}{N}\int_R^r sds \quad \Rightarrow \\
\frac{u(r)^{1-\beta}-u(R)^{1-\beta}}{1-\beta} &\leq R^{N-1}u'(R)\left.\frac{s^{2-N}}{2-N}\right|_R^r + \left.\frac{1}{N}\frac{s^2}{2}\right|_R^r \quad \Rightarrow \\
u(r)^{1-\beta}-u(R)^{1-\beta} &\leq (1-\beta)\left[R^{N-1}u'(R)\frac{r^{2-N}-R^{2-N}}{2-N} + \frac{r^2-R^2}{2N}\right] \\
&\leq R^{N-1}u'(R)\frac{(R^{2-N}-r^{2-N})}{N-2} + \frac{(r^2-R^2)}{2N} \\
&\leq \frac{Ru'(R)}{N-2} + \frac{r^2}{2N}.
\end{aligned}
$$

Consequentemente, temos

$$
\begin{aligned}
u(r)^{1-\beta} &\leq \frac{Ru'(R)}{N-2} + \frac{r^2}{2N} + u(R)^{1-\beta} \quad \Rightarrow \\
u(r)^{1-\beta} &\leq \frac{Ru'(R)}{N-2} + r^2 + u(R) \quad \Rightarrow \\
u(r) &\leq \left(\frac{Ru'(R)}{N-2} + r^2 + u(R)\right)^{\frac{1}{1-\beta}}
\end{aligned}
$$

provando assim a primeira desigualdade de (3.11). Quando $\beta = 1$, de (3.12) temos

$$
u(r)^{-1}u'(r) \leq u'(R)\left(\frac{R}{r}\right)^{N-1} + \frac{r}{N}, \qquad r \geq R
$$

integrando no intervalo $(R, r)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\ln u(s)\Big|_R^r &\leq \frac{u'(R)R}{N-2} + \frac{r^2}{2N} \quad \Rightarrow \\
\ln u(r) - \ln u(R) &\leq \frac{u'(R)R}{N-2} + \frac{r^2}{2N} \quad \Rightarrow \\
\ln u(r) &\leq \ln u(R) + \frac{u'(R)R}{N-2} + \frac{r^2}{2N} \quad \Rightarrow \\
u(r) &\leq u(R)e^{\frac{u'(R)R}{N-2}+\frac{r^2}{2N}}.
\end{aligned}
$$

Provando assim, a segunda desigualdade de (3.11). ■

**Observação 2:** Note que para provar as desigualdades, usamos apenas **G2**, no caso $r \geq R$. As outras condições foram necessárias apenas para garantir a existência de solução para (3.3) em todo $r \geq 0$.

## 3.2 Demonstração do teorema (3.2.1) e (3.2.2)

Definimos a função $g_*$ e $g^*$ de $(0,\infty) \times [0,\infty) \to (0,\infty)$ por

$$g_*(z,r) := \min\{z^{q_*(r)}, z^{q^*(r)}\} \qquad g^*(z,r) := \max\{z^{q_*(r)}, z^{q^*(r)}\} \tag{3.13}$$

onde

$$q^*(r) := \max_{|x|=r} q(x) \qquad q_*(r) := \min_{|x|=r} q(x)$$

e $q$ é dado em (3.1). Nós requeremos que $q$ satisfaz uma ou as duas condições que seguem:
**Q1-** $q : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ é localmente Hölder contínua;
**Q2-**existe $R \geq 0$ tal que $q(x) \geq 1$ para $|x| \leq R$, e $0 < q(x) \leq 1$ para $|x| \geq R$.

Quando $R = 0$, a condição **Q2** é entendida como $0 < q(x) \leq 1$ em $\mathbb{R}^n$.

**Lema 3.2.1** *Suponha $q$ satisfaz **Q1** e **Q2**. Então as funções $g_*$ e $g^*$ definida em (3.13) satisfazem **G1**, **G2** e **G3**.*

**Prova:** Temos que $g_*(z,r)$ e $g^*(z,r)$ são contínuas em $(0,\infty) \times [0,\infty) \to (0,\infty)$, pois as funções $z^{q_*(r)}$ e $z^{q^*(r)}$ são contínuas.

- Primeiramente vamos mostrar **G1**. Seja $r$ fixado e tome $t_1 \leq t_2$ então

$$t_1^{q_*(r)} \leq t_2^{q_*(r)} \quad \text{e} \quad t_1^{q^*(r)} \leq t_2^{q^*(r)}$$

assim $\min\{t_1^{q_*(r)}, t_1^{q^*(r)}\} \leq \min\{t_2^{q_*(r)}, t_2^{q^*(r)}\}$ então $g_*(t_1,r) \leq g_*(t_2,r)$, assim, $g_*(t,r)$ é não decrescente em relação a primeira variável. Analogamente provamos para $g^*(t,r)$.

Agora fixe um $t$, vamos mostrar que existe um $c_t > 0$ tal que $g_*(t,r) \geq c_t$. Para $R \geq 0$ temos, $q_*(r) \geq 1$, para $r \leq R$, mas como $q$ é contínua e estamos em um conjunto compacto, temos $1 \leq q_*(r) \leq M$ é limitada. Para $t \in (0,1]$ temos

$$t^{q_*(r)} > t^M$$

para $t \in [1,\infty)$ segue que

$$t^{q_*(r)} \geq t \geq 1.$$

No caso $0 < q_*(r) \leq 1 \leq M$ para $r \geq R$ segue que, se $t \in (0,1]$

$$t^{q_*(r)} \geq t \geq t^M$$

e se $t \in [1,\infty)$

$$t^{q_*(r)} > 1$$

tome $c_t = \min\{t^M, 1\}$ então $t^{q_*(r)} \geq c_t$. Analogamente provamos $t^{q^*(r)} \geq \tilde{c}_t$, então $g_*(t,r) = \min\{t^{q^*(r)}, t^{q_*(r)}\} \geq d_t$, como $g^*(t,r) = \max\{t^{q^*(r)}, t^{q_*(r)}\} \geq g_*(t,r) \geq d_t$ temos que $g_*(t,r)$ e $g^*(t,r)$ satisfazem **G1**.

- Se $R = 0$ e para $t \geq 1$, como $0 < q(x) \leq 1$, temos

$$q^*(r) = \max_{|x|=r} q(x) \leq 1, \qquad q_*(r) = \min_{|x|=r} q(x) > 0 \qquad \text{e} \quad q^*(r) > q_*(r)$$

então $t^{q_*(r)} < t^{q^*(r)} \quad \Rightarrow \quad g^*(t,r) = t^{q^*(r)}$ como $q^*(r) \leq 1$ temos $g^*(t,r) = t^{q^*(r)} \leq t$. Logo $g_*(t,r) \leq g^*(t,r) \leq t$. Assim $g_*$ e $g^*$ satisfazem **G2** para $R = 0$.

Suponha $R > 0$ então de **Q2** temos $q(x) \geq 1$ para $|x| \leq R$ logo para $0 \leq r \leq R$ obtemos que $q^*(r) \geq q_*(r) \geq 1$. Para $t \in (0,1]$ assim $g^*(t,r) = t^{q_*(r)} \leq t$. Para $t \in [1,\infty)$ temos $g^*(t,r) = t^{q^*(r)}$, seja $\zeta = \max\{q(x);\ |x| \leq R\} \geq 1$ e portanto $q^*(r) = \max_{|x|=r} q(x) \leq \zeta$ então $g^*(t,r) = t^{q^*(r)} \leq t^\zeta$ para $t \geq 1$. Defina

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{para} \quad t \in (0,1], \\ t^\zeta, & \text{para} \quad t \in [1,\infty), \end{cases}$$

$f(t)$ é crescente, contínua e

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{f(t)} dt &= \int_0^1 \frac{1}{t} dt = \ln t|_0^1 = +\infty, \\ \int_1^\infty \frac{1}{f(t)} dt &= \int_1^\infty \frac{1}{t^\zeta} dt = \frac{t^{1-\zeta}}{1-\zeta}\Big|_1^\infty = 0 - \frac{1}{1-\zeta} = \frac{1}{\zeta - 1} < \infty \end{aligned}$$

então $g^*(t,r) \leq f(t)$ para $0 \leq r \leq R$ e $t \geq 0$ e $g_*(t,r)$ também pois $g_*(t,r) \leq g^*(t,r) \leq f(t)$ para $0 \leq r \leq R$ e $t \geq 0$.

Para $r \geq R$ e $t \geq 1$ de **Q2,** $0 < q(x) \leq 1$ para $|x| \geq R$ então

$$g^*(t,r) = \max\{t^{q^*(r)}, t^{q_*(r)}\} = t^{q^*(r)}$$

seja $\beta = \max\{q(x)\ /\ |x| \geq R\}$ então $0 < \beta \leq 1$ logo $\beta \geq q^*(r)$, assim $g^*(t,r) \leq t^\beta$.

Então $g_*(t,r) \leq g^*(t,r) \leq t^\beta$. Assim $g_*$ e $g^*$ satisfazem **G2**.

- Para mostrar **G3** tome $0 \leq r \leq R$. Usando as definições de $g_*$ e $g^*$ do Apêndice (E) temos

$$\begin{aligned}|g_*(s,r) - g_*(t,r)| &= \Big| \frac{s^{q_*(r)} + s^{q^*(r)}}{2} - \frac{|s^{q_*(r)} - s^{q^*(r)}|}{2} - \left(\frac{t^{q_*(r)} + t^{q^*(r)}}{2}\right) \\ &+ \frac{|t^{q_*(r)} - t^{q^*(r)}|}{2} \Big|\end{aligned}$$

Para $0 < s < t < 1$ temos $s^{q_*(r)} > s^{q^*(r)}$ e $t^{q_*(r)} > t^{q^*(r)}$ então

$$\begin{aligned}|g_*(s,r) - g_*(t,r)| &= \Big| \frac{s^{q_*(r)} + s^{q^*(r)}}{2} - \frac{(s^{q_*(r)} - s^{q^*(r)})}{2} - \frac{(t^{q_*(r)} + t^{q^*(r)})}{2} \\ &+ \frac{t^{q_*(r)} - t^{q^*(r)}}{2} \Big| = |s^{q^*(r)} - t^{q^*(r)}|.\end{aligned}$$

Para $0 < s < 1$ e $1 \leq t$ temos $s^{q_*(r)} > s^{q^*(r)}$, $t^{q^*(r)} > t^{q_*(r)}$ e $s^{q^*(r)} < s^{q_*(r)} < t^{q_*(r)} < t^{q^*(r)}$ então

$$\begin{aligned}|g_*(s,r) - g_*(t,r)| &= \Big| \frac{s^{q_*(r)} + s^{q^*(r)}}{2} - \frac{(s^{q_*(r)} - s^{q^*(r)})}{2} - \frac{(t^{q_*(r)} + t^{q^*(r)})}{2} \\ &+ \frac{t^{q^*(r)} - t^{q_*(r)}}{2} \Big| = |s^{q^*(r)} - t^{q_*(r)}| \leq |s^{q^*(r)} - t^{q^*(r)}|.\end{aligned}$$

Para $s \geq 1$ e $t \geq 1$ obtemos que $s^{q_*(r)} \leq s^{q^*(r)}$ e $t^{q^*(r)} \geq t^{q_*(r)}$ então

$$\begin{aligned}|g_*(s,r) - g_*(t,r)| &= \Big| \frac{s^{q_*(r)} + s^{q^*(r)}}{2} - \frac{(s^{q^*(r)} - s^{q_*(r)})}{2} - \frac{(t^{q_*(r)} + t^{q^*(r)})}{2} \\ &+ \frac{t^{q^*(r)} - t^{q_*(r)}}{2} \Big| = |s^{q_*(r)} - t^{q_*(r)}|.\end{aligned}$$

Assim,

$$|g_*(s,r) - g_*(t,r)| \leq \max\{|s^{q_*(r)} - t^{q_*(r)}|, |s^{q^*(r)} - t^{q^*(r)}|\}.$$

Se $\max\{|s^{q_*(r)} - t^{q_*(r)}|, |s^{q^*(r)} - t^{q^*(r)}|\} = |s^{q_*(r)} - t^{q_*(r)}|$ então usando o Teorema do valor médio existe $c \in [s,t]$ ou $c \in [t,s]$ tal que

$$|s^{q_*(r)} - t^{q_*(r)}| = q_*(r) c^{q_*(r)-1} |s-t| \leq \begin{cases} \zeta(s+1+t)^{\zeta-1}|s-t|, \\ \zeta(t+1+s)^{\zeta-1}|s-t| \end{cases}$$

ou se $\max\{|s^{q_*(r)} - t^{q_*(r)}|, |s^{q^*(r)} - t^{q^*(r)}|\} = |s^{q^*(r)} - t^{q^*(r)}|$ então usando Teorema do valor médio existe $c \in [s,t]$ ou $c \in [t,s]$ tal que

$$|s^{q^*(r)} - t^{q^*(r)}| \quad = \quad q^*(r)c^{q^*(r)-1}|s-t| \leq \begin{cases} \zeta(s+1+t)^{\zeta-1}|s-t|, \\ \zeta(s+1+t)^{\zeta-1}|s-t| \end{cases}$$

então $\mu(t,s) = \zeta(s+1+t)^{\zeta-1}$ para $0 \leq r \leq R$, portanto provamos que $g_*$ satisfaz **G3**, analogamente provamos que $g^*$ satisfaz **G3**. ∎

Pelos Lemas (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4) e (3.2.1) temos

**Corolário 3.2.1** *Suponha que $q$ satisfaz as condições **Q1** e **Q2** e tomando $g$ em (3.3) como sendo $g_*$ ou $g^*$ como definido em (3.13). Então*

1. Se $R = 0$, então para qualquer $a > 0$ a equação (3.3) tem uma solução definida para todo $r \geq 0$ e $u(r) \to \infty$ com $r \to \infty$.

   **Prova:** se $R = 0$, $0 < q(x) \leq 1$ em $\mathbb{R}^n$ pelo Lema (3.2.1) temos que $g_*(z,r)$ e $g^*(z,r)$ satisfazem **G1** e **G2**. Pelo Lema (3.1.1) temos que para qualquer $a > 0$, a equação (3.3) tem uma solução positiva $u$ definida para todo $r \geq 0$, mais ainda $u(r) \to \infty$ com $r \to \infty$.

2. Se $R > 0$ e $M$ é qualquer constante positiva, então existe $a > 0$ tal que (3.3) tem uma solução $u$ definida para todo $r \geq 0$ para o qual $u(R) > M$ e $u(r) \to \infty$ com $r \to \infty$.

   **Prova:** Pelo Lema (3.2.1) temos que $g_*(z,r)$ e $g^*(z,r)$ satisfazem **G1**, **G2** e **G3**, pelo Lema (3.1.3) temos que dado $M > 0$ existe um $a > 0$ tal que a solução inteira positiva de (3.3) correspondente de $a$, satisfaz $u_a(R) > M$. Como $u_a$ é solução de (3.3), temos

$$u_a(r) = a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} g_*(u(s), s) ds dt$$

   como $u_a(s) > a$ e $g_*$ é não decrescente na primeira variável, temos

$$u_a(r) \geq a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} g_*(a,s) ds dt \overset{G1}{\geq} a + \frac{c_a r^2}{2N}$$

   então quando $r \to +\infty$ temos $u_a(r) \to +\infty$. Analogamente provamos para $g = g^*$

3. Se $u$ é uma solução de (3.3) definida para todo $r \geq 0$ e satisfazendo $u(R) \geq 1$, então $u$ satisfaz (3.11) para $r \geq R$.

**Prova:** Do Lema (3.2.1) temos $g_*$ e $g^*$ satisfazem **G1**, **G2** e **G3**, portanto pelo Lema (3.1.4) temos se $u$ é solução de (3.3) para todo $r \geq 0$ tal que $u(R) \geq 1$, então para $r \geq R$ a solução $u$ satisfaz (3.11).

O próximo resultado mostra que (3.1) tem infinitas soluções, para $q$ satisfazendo algumas condições.

**Teorema 3.2.1** *Suponha $q$ satisfaz condições **Q1** e **Q2**. Se*

$$\int_0^r r \exp(\lambda r^2) q_{osc}(r) dr < \infty, \tag{3.14}$$

*para algum $\lambda$ tal que $2N\lambda > 1$ então o problema (3.1) admite infinitas soluções.*

**Prova:** Considere as equações

$$\triangle v = g^*(v(r), r) \quad \text{e} \quad \triangle w = g_*(w(r), r), \quad \text{em } \mathbb{R}^n \tag{3.15}$$

cujas funções $g_*$ e $g^*$ são definidas em (3.13). Dado as constantes positivas $a$ e $b$, então $v(x) := v_a(|x|)$ e $w(x) := w_b(|x|)$, onde $v_a$ e $w_b$ são soluções da equação integral (3.3) com $v_a(0) = a$ e $w_b(0) = b$ respectivamente. Para $M = 1$ no Corolário (3.2.1), a condição 2 garante a existência de um $a > 0$ tal que $v_a$ é solução de (3.3) para todo $r \geq 0$ e, $v_a(R) \geq 1$.

Mostraremos que $b$ pode ser escolhido tal que $v_a \leq w_b$ em $(0, \infty)$. A partir deste ponto, não usaremos $v_a$ nem $w_b$, iremos suprimir os índices, mas lembre-se o $a$ já foi escolhido. Observe que $\beta = \sup\{q(x);\ |x| \geq R\} = 1$, pois para $|x| \geq R$ temos $0 < q(x) \leq 1$. Usando a condição 3 do Corolário (3.2.1) com $\beta = 1$, temos

$$v(r) \leq \zeta(r) \quad \text{com} \quad r \geq R \tag{3.16}$$

onde definimos $\zeta(r) := v(R)e^{\frac{Rv'(R)}{N-2} + \frac{r^2}{2N}}$.

Seja $R_0 := \sup\{r > 0;\ v(t) \leq w(t) \ \text{ para todo } \ 0 \leq t \leq r\}$.

Pelo Corolário (3.2.1) condição 2, escolha $b$ tal que

$$w_b(R) \quad > \quad v(R) + \frac{Rv'(R)}{N-2} + \int_0^\infty r q_{osc}(r) \zeta(r) \log \zeta(r) dr, \tag{3.17}$$

a integral do lado direito de (3.17) é finita pelo que foi visto no Apêndice F, então $v(R) < w(R)$ e $g^*(z, r) \geq g_*(z, r)$ usando o princípio de comparação temos que

$$v(r) \leq w(r), \qquad \text{para todo } 0 \leq r \leq R$$

então $R_0 > R$. Se $R_0 = +\infty$ então $v \leq w$ para todo $r \geq 0$. Suponha que $R_0 < \infty$. Então como $v(r) \geq 1$ para todo $r \geq R$, (pois $v(R) \geq 1$ e $v$ é não decrescente então $v(r) \geq 1$ para todo $r \geq R$) usando os mesmos cálculos do Lema (3.1.2) e o Apêndice E, temos

$$\begin{aligned}
v(R_0) &= a + \int_0^{R_0} t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} g^*(v(s), s) ds dt \\
&= v(R) + \frac{Rv'(R)}{N-2}\left(1 - \left(\frac{R}{R_0}\right)^{N-2}\right) + \int_R^{R_0} t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} g^*(v(s), s) ds dt \\
&= v(R) + \frac{Rv'(R)}{N-2}\left(1 - \left(\frac{R}{R_0}\right)^{N-2}\right) + \int_R^{R_0} t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} \frac{v(s)^{q_*(s)} + v(s)^{q^*(s)}}{2} ds dt \\
&+ \int_R^{R_0} t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} \frac{v(s)^{q^*(s)} - v(s)^{q_*(s)}}{2} ds dt
\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
s \geq R \quad \Rightarrow \quad v(s) \geq 1 \text{ e } q_*(s) &\leq q^*(s) \;\text{ então }\; v(s)^{q^*(s)} > v(s)^{q_*(s)} \quad \Rightarrow \\
|v(s)^{q_*(s)} - v(s)^{q^*(s)}| &= v(s)^{q^*(s)} - v(s)^{q_*(s)}.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
v(R_0) &= v(R) + \frac{Rv'(R)}{N-2}\left(1 - \left(\frac{R}{R_0}\right)^{N-2}\right) + \int_R^{R_0} t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} v(s)^{q^*(s)} ds dt \\
&= v(R) + \frac{Rv'(R)}{N-2}\left(1 - \left(\frac{R}{R_0}\right)^{N-2}\right) + \int_R^{R_0} t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} [v(s)^{q^*(s)} - v(s)^{q_*(s)}] ds dt \\
&+ \int_R^{R_0} t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} v(s)^{q_*(s)} ds dt.
\end{aligned}$$

Usando a hipótese $0 < q(x) \leq 1$ para $|x| \geq R$ e o teorema do valor médio, defina $f(x) = c^x$ para $c \geq 1$ e $0 \leq x \leq 1$ e $f'(x) = c^x \log c$. Então

$$c^\gamma - c^\alpha = c^\theta \log c(\gamma - \alpha) \leq c \log c(\gamma - \alpha) \tag{3.18}$$

para $0 < \alpha < \theta < \gamma < 1$.

Assim

$$\int_R^{R_0} t^{1-N}\int_R^t s^{N-1}[v(s)^{q^*(s)} - v(s)^{q_*(s)}]dsdt \leq \int_R^{R_0} t^{1-N}\int_R^t s^{N-1}v(s)\log v(s) q_{osc}(s)dsdt \tag{3.19}$$

onde $q_{osc}(s) = q^*(s) - q_*(s)$. Usando (3.19) e o fato de $1 \leq v(s) \leq w(s), \quad \forall s < R_0$ temos

$$\begin{aligned} v(R_0) &\leq v(R) + \frac{Rv'(R)}{N-2}\left(1 - \left(\frac{R}{R_0}\right)^{N-2}\right) + \int_R^{R_0} t^{1-N}\int_R^t s^{N-1}v(s)\log v(s) q_{osc}(s)dsdt \\ &+ \int_R^{R_0} t^{1-N}\int_R^t s^{N-1}w(s)^{q_*(s)}dsdt \\ &= v^*(R) + \int_R^{R_0} t^{1-N}\int_R^t s^{N-1}v(s)\log v(s) q_{osc}(s)dsdt + \int_R^{R_0} t^{1-N}\int_R^t s^{N-1}w(s)^{q_*(s)}dsdt \end{aligned}$$

onde $v^*(R) = v(R) + \frac{Rv'(R)}{N-2}$. Usando (3.16) e integração por partes, temos

$$\begin{aligned} \int_R^{R_0} t^{1-N}\int_R^t s^{N-1}v(s)\log v(s) q_{osc}(s)dsdt &\leq \int_R^{R_0} t^{1-N}\int_R^t s^{N-1}\zeta(s)\log \zeta(s) q_{osc}(s)dsdt \\ = \frac{R_0^{2-N}}{2-N}\int_R^{R_0} s^{N-1}q_{osc}(s)\zeta(s)\log\zeta(s)ds &- \int_R^{R_0}\frac{t}{2-N}q_{osc}(t)\zeta(t)\log\zeta(t)dt. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Mas a primeira integral depois da igualdade (3.20) é negativa, portanto

$$\begin{aligned} \int_R^{R_0} t^{1-N}\int_R^t s^{N-1}v(s)\log v(s) q_{osc}(s)dsdt &\leq \int_R^{R_0}\frac{t}{N-2}q_{osc}(t)\zeta(t)\log\zeta(t)dt \\ &\leq \int_R^{R_0} tq_{osc}(t)\zeta(t)\log\zeta(t)dt \\ &\leq \int_0^{\infty} tq_{osc}(t)\zeta(t)\log\zeta(t)dt. \end{aligned}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
v(R_0) &\leq v^*(R) + \int_0^\infty t q_{osc}(t)\zeta(t)\log\zeta(t)dt + \int_R^{R_0} t^{1-N}\int_R^t s^{N-1} w(s)^{q_*(s)} ds dt \\
&< w(R) + \frac{Rw'(R)}{N-2}\left(1-\left(\frac{R}{R_0}\right)^{N-2}\right) + \int_R^{R_0} t^{1-N}\int_R^t s^{N-1} w(s)^{q_*(s)} ds dt \\
&= w(R_0),
\end{aligned}
$$

observando que $g_*(w(s),s) = w(s)^{q_*(s)}$, pois para $R \leq s$ temos

$$
\begin{aligned}
1 \leq v(R) \leq w(R) \leq w(s) \quad \Rightarrow \quad w(s) \geq 1 \text{ e } q_*(s) &\leq q^*(s) \quad \Rightarrow \quad w(s)^{q_*(s)} \leq w(s)^{q^*(s)} \\
\Rightarrow \quad g_*(w(s),s) &= w(s)^{q_*(s)}.
\end{aligned}
$$

Então temos $v(R_0) < w(R_0)$ que contradiz a definição de $R_0$. Portanto $v \leq w$ em $\mathbb{R}^n$ e

- se $g^*(v(r),r) = \max\{v(r)^{q_*(r)}, v(r)^{q^*(r)}\} = v(r)^{q_*(r)}$ então $v(r) \leq 1$. Como $q_*(r) \leq q(x)$ temos que $v(r)^{q_*(r)} \geq v(r)^{q(x)}$ assim $\triangle v \geq v(r)^{q(x)}$.

- Se $g^*(v(r),r) = \max\{v(r)^{q_*(r)}, v(r)^{q^*(r)}\} = v(r)^{q^*(r)}$ então $v(r) \geq 1$. Como $q^*(r) \geq q(x)$ temos que $v(r)^{q(x)} \leq v(r)^{q^*(r)}$assim $\triangle v \geq v(r)^{q(x)}$.

- Se $g_*(w(r),r) = \min\{w(r)^{q_*(r)}, w(r)^{q^*(r)}\} = w(r)^{q_*(r)}$ então $w(r) \geq 1$. Como $q_*(r) \leq q(x)$ temos que $w(r)^{q_*(r)} \leq w(r)^{q(x)}$ assim $\triangle w \leq w(r)^{q(x)}$.

- Se $g^*(w(r),r) = \min\{w(r)^{q_*(r)}, w(r)^{q^*(r)}\} = w(r)^{q^*(r)}$ então $w(r) \leq 1$. Como $q^*(r) \geq q(x)$ temos que $w(r)^{q^*(r)} \leq w(r)^{q(x)}$ assim $\triangle w \leq w(r)^{q(x)}$.

Então $v$ é subsolução de (3.1) e $v \leq w$, do Teorema 2.10 de [14] existe a solução de (3.1), $u$, tal que $v_a \leq u_a \leq w_b$, escolhendo $a' > 0$ pela condição 2 do Corolário (3.2.1), tal que $v_{a'}(R) > u_a(R) \geq v_a(R) \geq 1$ então como na prova anterior existe $b' > 0$ tal que $v_{a'} \leq w_{b'}$, tal que

$$\triangle v_{a'} \geq v_{a'}^{q(x)} \quad \text{e} \quad \triangle w_{b'} \leq w_{b'}^{q(x)}$$

então existe uma solução de (3.1) $u_{a'}$ tal que

$$v_{a'} \leq u_{a'} \leq w_{b'}.$$

Observe que $u_a \neq u_{a'}$ pois

$$u_a(R) < v_{a'}(R) \leq u_{a'}(R).$$

Procedendo dessa maneira encontramos infinitas soluções. ■

Nossos próximos resultados nos mostram que para $R > 0$ suficientemente pequeno, podemos permitir $1 - q(x)$ mudar de sinal em $|x| \leq R$ e ainda assim obter existência da solução para (3.1). Para provarmos isso, precisamos do lema sobre a existência de solução para (3.2) com $g(v(r), r) = v(r)^{q^*(r)}$ isto é

$$\begin{cases} (r^{N-1}v')' &= r^{N-1}v^{q^*(r)}, \qquad r > 0 \\ v(0) &= a, \\ v'(0) &= 0. \end{cases} \tag{3.21}$$

No lema abaixo vamos assumir que $q \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e usar a notação $\|q\|_\infty := \max\{q(x);\ x \in \mathbb{R}^n\}$.

**Lema 3.2.2** *Suponha que $q(x) \leq 1$ para $|x| \geq R$ para algum $0 < R < \sqrt{2^{1-\|q\|_\infty}}$ então o problema (3.21) admite uma solução $v_a \geq a$ para algum $a \geq 1$, e $\lim_{r\to\infty} v_a(r) = +\infty$. Em particular, se $0 < \|q\|_\infty \leq 1$ o problema (3.21) admite tal solução $v_a$ para qualquer $a \geq 1$.*

**Prova:** Observe que se $0 < \|q\|_\infty \leq 1$ então $0 \leq 1 - \|q\|_\infty < 1$ e para qualquer $a \geq 1$ temos $2a \geq 2 \quad \Rightarrow \quad (2a)^{1-\|q\|_\infty} \geq 2^{1-\|q\|_\infty}$ então $0 < R < \sqrt{(2a)^{1-\|q\|_\infty}}$ para qualquer $a \geq 1$. Fixe $a \geq 1$ tal que $0 < R < \sqrt{(2a)^{1-\|q\|_\infty}}$.

Seja $v_0 = a$ e defina a sequência $\{v_j\}$ indutivamente como segue:

$$v_j(r) \;=\; a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1}(v_{j-1}(s))^{q^*(s)} ds dt \qquad r \geq 0.$$

Escolha $r_0$ tal que

$$R < \; r_0 \; < \sqrt{(2a)^{1-\|q\|_\infty}}.$$

Então, por indução, mostraremos que a $\leq v_j \leq 2a \quad r \in [0, r_0], \quad j = 0, 1, 2, 3, \ldots$ . Como $v_0 = a$ e $v_j$ é crescente então $v_j \geq a$ para $j = 1, 2, 3, \ldots$. Para $j = 1$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^r t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}(v_0(s))^{q^*(s)}dsdt &= \int_0^r t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}a^{q^*(s)}dsdt\\
&\leq \int_0^r t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}a^{\|q\|_\infty}dsdt, \qquad \text{pois } q^*(s)\leq \|q\|_\infty\\
&= \int_0^r t^{1-N}a^{\|q\|_\infty}\frac{s^N}{N}\Big|_0^t dt\\
&= \int_0^r t^{1-N}a^{\|q\|_\infty}\frac{t^N}{N}dt\\
&\leq \int_0^r ta^{\|q\|_\infty}dt\\
&= a^{\|q\|_\infty}\frac{t^2}{2}\Big|_0^r = a^{\|q\|_\infty}\frac{r^2}{2}\\
&= a^{\|q\|_\infty}\frac{(2a)^{1-\|q\|_\infty}}{2} = a2^{-\|q\|_\infty}\leq a, \text{ pois } r<\sqrt{(2a)^{1-\|q\|_\infty}}
\end{aligned}
$$

Assim $v_1(r)\leq a+a=2a$. Suponha que $j=k$ temos $a\leq v_k\leq 2a$ então

$$
\begin{aligned}
v_{k+1}(r) &= a+\int_0^r t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}(v_k(s))^{q^*(s)}dsdt\\
&\leq a+\int_0^r t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}(2a)^{q^*(s)}dsdt, \quad \text{já que } 1\leq v_k(s)\leq 2a\\
&\leq a+\int_0^r t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}(2a)^{\|q\|_\infty}dsdt, \quad \text{pois } \|q\|_\infty > q^*(s)\\
&= a+\int_0^r t^{1-N}(2a)^{\|q\|_\infty}\frac{t^N}{N}dt\\
&= a+\int_0^r (2a)^{\|q\|_\infty}\frac{t}{N}dt\\
&\leq a+(2a)^{\|q\|_\infty}\frac{r^2}{2}\\
&< a+(2a)^{\|q\|_\infty}\frac{(2a)^{1-\|q\|_\infty}}{2}\\
&= a+a=2a.
\end{aligned}
$$

Então por indução mostramos que $a\leq v_j(r)\leq 2a$ para todo $r\in[0,r_0]$ e $j=0,1,2,3,....$ Observe também que $v_j\leq v_{j+1}$ em $[0,r_0]$, também provamos isso por indução. De fato,

$$v_0=a\leq v_1.$$

Suponha $v_n \leq v_{n+1}$ como $v_n \geq a$ e $a \geq 1$ temos $v_n \geq 1$, assim

$$\begin{aligned} v_{n+2}(r) &= a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1}(v_{n+1}(s))^{q^*(s)} ds dt \\ &\geq a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1}(v_n(s))^{q^*(s)} ds dt = v_{n+1}(r) \end{aligned}$$

assim $v_j \leq v_{j+1}$ em $[0, r_0]$. Consequentemente $v_j$ converge para um $v$ em $[0, r_0]$ e $v$ satisfaz

$$v(r) = a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1}(v(s))^{q^*(s)} ds dt, \quad r \in [0, r_0]$$

então $v$ satisfaz (3.21). Seja $[0, r_1]$ para algum $r_1 \geq r_0$ o intervalo maximal de existência de $v$. Vamos mostrar que $r_1 = +\infty$. Suponhamos que $v(r) \to +\infty$ com $r \to r_1^-$ (pois se $v$ limitada em $[0, r_1]$, então

$$\begin{aligned} v'(r) &= r^{1-N} \int_0^r s^{N-1}(v(s))^{q^*(s)} ds \leq r^{1-N} \int_0^r s^{N-1}(2a)^{\|q\|_\infty} ds \\ &= r^{1-N}(2a)^{\|q\|_\infty} \frac{r^N}{N} \leq r(2a)^{\|q\|_\infty} \leq r_1(2a)^{\|q\|_\infty} \end{aligned}$$

logo $v'$ é limitada em $[0, r_1]$ então podemos estender a função $v$ além de $[0, r_1]$ o que é absurdo então $\lim_{r \to r_1^-} v(r) = +\infty$). Como $q^*(|x|) \leq 1$ para $R \leq |x| \leq r_1$ (pois $q(x) \leq 1$ para $|x| \geq R$) temos que $v$ é solução do problema

$$\triangle v = v^{q^*(|x|)}, \quad x \in B(0, r_1) \tag{3.22}$$

mas pelo Teorema 1 de [6] temos que o problema (3.22) não tem solução contradição, então $r_1 = +\infty$ logo o problema (3.21) admite solução para algum $a \geq 1$. E para $0 < \|q\|_\infty \leq 1$ e qualquer $a \geq 1$ temos (3.21) tem solução. ■

Para o próximo teorema, vamos considerar a seguinte notação. Dado $0 < \beta \leq 1$, temos

$$v_\beta(r) := \begin{cases} r^{\frac{2}{1-\beta}}, & \text{se} \quad 0 < \beta < 1, \\ \exp(r^2), & \text{se} \quad \beta = 1. \end{cases}$$

**Teorema 3.2.2** *Se $q$ satisfaz **Q1** e suponha que existem constantes $0 < R < \sqrt{2^{1-\|q\|_\infty}}$ e $0 < \beta \leq 1$ tal que $0 \leq q(x) \leq \beta$ para todo $|x| \geq R$. Mais ainda, assuma que $q_*(r) \leq 1$*

*para* $r > 0$. *Se*

$$\int_1^\infty r v_\beta(r) q_{osc}(r) dr \quad < \quad \infty, \tag{3.23}$$

*então o problema (3.1) admite uma solução positiva.*

**Prova:** Considere as equações

$$\triangle v = v^{q^*(r)} \qquad e \tag{3.24}$$

$$\triangle w = w^{q_*(r)}, \quad \text{em } \mathbb{R}^n \tag{3.25}$$

pelo Lema (3.2.2) fixe $a \geq 1$ tal que $R < \sqrt{(2a)^{1-\|q\|_\infty}}$. Então pelo Lema (3.2.2) o problema (3.21) admite solução $v_a \geq a$ para $a \geq 1$ e $\lim_{r\to\infty} v_a(r) = +\infty$. Então $v(x) = v_a(|x|)$, onde $v_a$ é uma solução do problema (3.21), é uma solução de (3.24)

$$v_a(r) \quad = \quad a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1}(v_a(s))^{q^*(s)} ds dt \qquad r \geq 0.$$

Assuma que $0 < \beta < 1$. Como $g(v_a(s), s) = (v_a(s))^{q^*(s)}$ vamos mostrar que essa função satisfaz **G2**. Para $|x| \geq R$ temos $0 \leq q(x) \leq \beta$ então $q^*(|x|) \leq \beta$, como $v_a \geq a \geq 1$ podemos concluir que $v_a^{q^*(|x|)} \leq v_a^\beta$. Como $g(v_a(s), s)$ satisfaz **G2** para o caso $s \geq R$ temos da Observação 2 do Lema (3.1.4) que

$$v(r) \leq \varpi(r) \qquad r \geq R \tag{3.26}$$

onde

$$\varpi(r) \quad = \quad \left( \frac{Rv'(R)}{N-2} + v(R) + r^2 \right)^{\frac{1}{1-\beta}}, \qquad r \geq 0, \quad 0 < \beta < 1.$$

Agora vamos garantir a existência de uma solução $w_b$ para (3.25). Para $R = 0$ a função $g(w_b(s), s) = w_b^{q_*(s)}$ satisfaz **G2**, pois como $q_*(r) \leq 1$ para $r \geq 0$ e para $b \geq 1$ temos $w_b \geq 1$ então $w_b^{q_*(r)} \leq w_b^1$. E além disso, a função $g(w_b(s), s) = w_b^{q_*(s)}$ satisfaz **G1**, pois se $z_1 \leq z_2 \quad \Rightarrow \quad z_1^{q_*(r)} \leq z_2^{q_*(r)}$ então $g(z, r) = z^{q_*(r)}$ é não decrescente na primeira coordenada e $w_b(s) \geq 1$ então $w_b(s)^{q_*(s)} \geq 1$. Assim, pelo Lema (3.1.1) temos que para qualquer $b \geq 1$ existe uma solução $w_b$ definida por:

$$w_b(r) \quad = \quad b + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} w_b(s)^{q_*(s)} ds dt.$$

Vamos mostrar que $b$ pode ser escolhido de tal forma que $1 \leq v_a \leq w_b$ em $(0, \infty)$. Essa prova é semelhante a prova do teorema (3.2.1).

Como $0 < \beta < 1$, observe que $\varpi^\beta(r) \log \varpi(r) \leq \varpi(r)$. De fato, seja $f(x) = x^\beta \log x - x = x(x^{\beta-1} \log x - 1) = x \left( \frac{\log x}{x^{1-\beta}} - 1 \right)$ então para $x$ suficientemente grande

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^{1-\beta}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{(1-\beta)x^{-\beta}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{(1-\beta)x^{1-\beta}} = 0$$

e

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x \left( \frac{\log x}{x^{1-\beta}} - 1 \right) = -\infty < 0,$$

ou seja, para todo $N > 0$ existe $M > 0$ tal que se $x > M$ então $f(x) < -N$. Assim para $x$ suficientemente grande $f(x) \leq 0$ logo $x^\beta \log x \leq x$. Ou seja, para $r > C$ temos $\varpi(r) \geq M$ então $\varpi(r)^\beta \log \varpi(r) \leq \varpi(r)$. E

- para $C \geq 1$ temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty r q_{osc}(r) \varpi^\beta(r) \log \varpi(r) dr &\leq \int_0^C r q_{osc}(r) \varpi^\beta(r) \log \varpi(r) dr + \int_C^\infty r q_{osc}(r) \varpi(r) dr \\
&\leq K_1 + \int_C^\infty r q_{osc}(r) \varpi(r) dr.
\end{aligned}$$

Como para $r \geq 1$ existe $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{Rv'(R)}{N-2} + v(R) \leq cr^2 \quad &\Rightarrow \quad \frac{Rv'(R)}{N-2} + v(R) + r^2 \leq (c+1)r^2 \quad \Rightarrow \\
\left( \frac{Rv'(R)}{N-2} + v(R) + r^2 \right)^{\frac{1}{1-\beta}} &\leq ((c+1)r^2)^{\frac{1}{1-\beta}} = K r^{\frac{2}{1-\beta}}.
\end{aligned}$$

Usando a hipótese (3.23) concluímos que a integral

$$\int_0^\infty r q_{osc}(r) \varpi^\beta(r) \log \varpi(r) dr \leq K_1 + \int_C^\infty r q_{osc}(r) K r^{\frac{2}{1-\beta}} dr < \infty.$$

é finita.

- para $C \leq 1$ temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty r q_{osc}(r) \varpi^\beta(r) \log \varpi(r) dr &\leq K_2 + \int_C^1 r q_{osc}(r) \varpi(r) dr + \int_1^\infty r q_{osc}(r) \varpi(r) dr \\
&\leq K_3 + \int_1^\infty r q_{osc}(r) \varpi(r) dr.
\end{aligned}$$

Como para $r \geq 1$ existe $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{Rv'(R)}{N-2} + v(R) \leq cr^2 \quad &\Rightarrow \quad \frac{Rv'(R)}{N-2} + v(R) + r^2 \leq (c+1)r^2 \quad \Rightarrow \\
\left(\frac{Rv'(R)}{N-2} + v(R) + r^2\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \quad &\leq \quad ((c+1)r^2)^{\frac{1}{1-\beta}} = Kr^{\frac{2}{1-\beta}}.
\end{aligned}$$

Usando a hipótese (3.23) concluímos que a integral

$$\int_0^\infty r q_{osc}(r)\varpi^\beta(r)\log\varpi(r)dr \quad \leq \quad K_3 + \int_1^\infty r q_{osc}(r) K r^{\frac{2}{1-\beta}} dr < \infty.$$

é finita.

Assim, tome $b$ tal que

$$b \quad > \quad v(R) + \frac{Rv'(R)}{N-2} + \frac{1}{N-2}\int_0^\infty r q_{osc}(r)\varpi^\beta(r)\log\varpi(r)dr. \tag{3.27}$$

Como de (3.27)

$$w_b(R) \quad > \quad b > v(R) + \frac{Rv'(R)}{N-2} + \frac{1}{N-2}\int_0^\infty r q_{osc}(r)\varpi^\beta(r)\log\varpi(r)dr > v(R)$$

temos que $w_b(R) > v_a(R) \geq 1$ e $g(z,r) = z^{q^*(r)} > z^{q_*(r)}$ para $z \geq 1$ usando o princípio da comparação $v_a(r) < w_b(r)$ para $0 \leq r \leq R$.

Defina $R_0 := \sup\{r > 0 \ / \ v_a(t) \leq w_b(t) \ \text{ para } 0 \leq t \leq r\}$. Como $v_a(R) < w_b(R)$ temos $R < R_0$. Se $R_0 = \infty$ então $v_a \leq w_b$ para $r \geq 0$. Suponha que $R_0 < \infty$ então

$$\begin{aligned}
v(R_0) \quad &= \quad a + \int_0^{R_0} t^{1-N}\int_0^t s^{N-1} v_a^{q^*(s)} ds dt \\
&= \quad v(R) + \frac{Rv'(R)}{N-2}\left(1 - \left(\frac{R}{r}\right)^{N-2}\right) + \int_R^{R_0} t^{1-N}\int_R^t s^{N-1} v_a^{q^*(s)} ds dt \\
&= \quad v^*(R) + \int_R^{R_0} t^{1-N}\int_R^t s^{N-1}[v_a^{q^*(s)} - v_a^{q_*(s)}] ds dt + \int_R^{R_0} t^{1-N}\int_R^t s^{N-1} v_a^{q_*(s)} ds dt.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Como $0 < q(x) \leq \beta$ para $|x| \geq R$, temos $q_*(|x|) \leq q(x) \leq q^*(|x|) \leq \beta$ e $v_a(s) \geq 1$. Fazendo uma conta análoga a (3.18) temos

$$v_a^{q^*(s)} - v_a^{q_*(s)} \quad \leq \quad (q^*(s) - q_*(s))v_a^\beta(s)\log v_a(s) = q_{osc}(s)v_a^\beta(s)\log v_a(s).$$

Assim em (3.28) temos

$$\begin{aligned} v(R_0) &\leq v^*(R) + \int_R^{R_0} t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} q_{osc}(s) v_a^\beta(s) \log v_a(s) ds dt + \int_R^{R_0} t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} v_a^{q_*(s)} ds dt \\ &\leq v^*(R) + \int_R^{R_0} t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} q_{osc}(s) v_a^\beta(s) \log v_a(s) ds dt + \int_R^{R_0} t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} w_b^{q_*(s)} ds dt. \end{aligned}$$

Como de (3.26) temos $v(s) \leq \varpi(s)$ para $s \geq R$

$$\int_R^{R_0} t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} q_{osc}(s) v_a^\beta(s) \log v_a(s) ds dt \leq \int_R^{R_0} t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} q_{osc}(s) \varpi^\beta(s) \log \varpi(s) ds dt. \tag{3.29}$$

Integrando por partes a integral a direita de (3.29)

$$\begin{aligned} u &= \int_R^t s^{N-1} q_{osc}(s) \varpi^\beta(s) \log \varpi(s) ds \qquad du = t^{N-1} q_{osc}(t) \varpi^\beta(t) \log \varpi(t) dt \\ dv &= t^{1-N} dt \qquad v = \frac{t^{2-N}}{2-N} \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \int_R^{R_0} t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} q_{osc}(s) \varpi^\beta(s) \log \varpi(s) ds dt &= \frac{R_0^{2-N}}{2-N} \int_R^{R_0} s^{N-1} q_{osc}(s) \varpi^\beta(s) \log \varpi(s) ds \\ &- \int_R^{R_0} \frac{t}{2-N} q_{osc}(t) \varpi^\beta(t) \log \varpi(t) dt \\ &\leq \frac{1}{N-2} \int_R^{R_0} t q_{osc}(t) \varpi^\beta(t) \log \varpi(t) dt \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} v(R_0) &\leq v^*(R) + \frac{1}{N-2} \int_0^\infty t q_{osc}(t) \varpi^\beta(t) \log \varpi(t) dt + \int_R^{R_0} t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} w_b^{q_*(s)} ds dt \\ &\overset{\text{de } 3.27}{<} w_b(R) + \frac{R w_b'(R)}{N-2} \left( 1 - \left( \frac{R}{R_0} \right)^{N-2} \right) + \int_R^{R_0} t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} w_b^{q_*(s)} ds dt \\ &= w(R_0) \end{aligned}$$

assim, temos que $v_a(R_0) < w_b(R_0)$ contradizendo a definição de $R_0$. Portanto $v_a \leq w_b$ para $r \geq 0$. E desta forma

$$\triangle v = v(r)^{q^*(r)} \geq v(x)^{q(x)} \quad \text{e} \quad \triangle w = w(r)^{q_*(r)} \leq w(x)^{q(x)} \text{ em } \mathbb{R}^n, \tag{3.30}$$

pois $v(x) = v_a(|x|) \geq a \geq 1$ e $w(x) = w_b(|x|) \geq v(r) \geq 1$. Portanto $v$ é subsolução do problema (3.1), pelo Teorema 2.10 de [14] existe uma solução $u$ para o problema (3.1) tal que $v \leq u \leq w$ em $\mathbb{R}^n$.

Para o caso $\beta = 1$ apenas algumas mudanças serão necessárias, mas o passo a passo da prova é o mesmo.

Vamos mostrar primeiramente que a integral

$$\int_0^\infty r q_{osc}(r) \varpi(r) \log \varpi(r) dr \tag{3.31}$$

é finita. Para isso, seja $f(x) = x \log x - x^{2N}$ e

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^{2N-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{(2N-1)x^{2N-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(2N-1)x^{2N-1}} = 0$$

então

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^{2N} \left( \frac{\log x}{x^{2N-1}} - 1 \right) = -\infty,$$

assim, para $N > 0$ existe $M > 0$ tal que $x > M$ então $f(x) < -N$. Assim para $x$ suficientemente grande $f(x) < 0$ e $x \log x < x^{2N}$. Ou seja, para $r > C$ temos $\varpi(r) > M$ então $\varpi(r) \log \varpi(r) < \varpi(r)^{2N}$

$$\int_0^\infty r q_{osc}(r) \varpi(r) \log \varpi(r) dr \leq k_1 + \int_C^\infty r q_{osc}(r) \varpi^{2N}(r).$$

Como para o caso $\beta = 1$ temos $\varpi(r) = u(R) e^{\left(\frac{Ru'(R)}{N-2} + \frac{r^2}{2N}\right)}$ então

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r q_{osc}(r) \varpi(r) \log \varpi(r) dr &\leq k_1 + \int_C^\infty r q_{osc}(r) C_2 e^{\frac{2NRu'(R)}{N-2}} e^{r^2} dr \\ &\leq k_1 + k_2 \int_C^\infty r q_{osc}(r) e^{r^2} dr < \infty. \end{aligned}$$

Assim provamos que a integral (3.31) é finita. Agora podemos tomar $b$ tal que

$$b > v(R) + \frac{Rv'(R)}{N-2} + \frac{1}{N-2} \int_0^\infty r q_{osc}(r) \varpi(r) \log \varpi(r) dr. \tag{3.32}$$

e continuando a prova análogo ao caso $0 < \beta < 1$ podemos concluir que (3.1) tem uma solução positiva. ■

Provamos assim que o problema (3.1) tem solução para o caso que $q(|x|) \leq 1$ desde que $|x|$ seja suficientemente grande.

Apêndice

$\mathcal{A}$

# A função $f(u) = u^q(x)$ satisfaz a condição de Keller-Osserman

**Definição A.1** *Seja $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ é uma função de classe $C^1$ não-decrescente tal que $f(0) = 0$, $f(s) > 0$ para todo $s > 0$ e $f(x)$ satisfaz*

$$\int_1^\infty \frac{1}{F(t)^{\frac{1}{p}}} dt < \infty \qquad \textit{onde} \qquad F(t) := \int_0^t f(s)ds$$

*então a função $f$ satisfaz a condição de Keller-Osserman.*

A função $f(u) = u^q$ é de classe $C^1$ em $[0, \infty)$ e é não-decrescente, pois

$$f'(u) = qu^{q-1} \geq 0$$

e, além disso, $f(0) = 0$ e $f(s) = s^q > 0$ para $s > 0$.

Uma função $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ satisfaz a condição de Keller-Osserman se

$$\int_1^\infty \frac{1}{(F(t))^{\frac{1}{p}}} dt < \infty \quad \text{onde} \quad F(t) := \int_0^t f(s)ds \tag{A.1}$$

a função $f(u) = u^q$ satisfaz a condição de Keller-Osserman, pois

$$\begin{aligned}
F(t) := \int_0^t f(s)ds &= \int_0^t s^q ds = \left.\frac{s^{q+1}}{q+1}\right|_0^t = \frac{t^{q+1}}{q+1} \\
\int_1^\infty \frac{1}{(F(t))^{\frac{1}{p}}}dt &= \int_1^\infty \frac{(q+1)^{\frac{1}{p}}}{t^{\frac{q+1}{p}}}dt = (q+1)^{\frac{1}{p}} \int_1^\infty t^{-\frac{q+1}{p}} \\
&= (q+1)^{\frac{1}{p}} \left.\frac{t^{1-\frac{q+1}{p}}}{1-\frac{q+1}{p}}\right|_1^\infty = 0 - \frac{(q+1)^{\frac{1}{p}}}{1-\frac{q+1}{p}} < \infty.
\end{aligned}$$

Apêndice $\mathcal{B}$

# Existência de uma solução $u(r)$ que satisfaz (3.3)

Para mostrar que existe solução para o problema (3.3) vamos usar o Teorema do Ponto Fixo (ver [4]). Para isso, temos que mostrar que o operador

$$T(u(r)) = a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} g(u(s), s) ds dt$$

é uma contração para $r$ suficientemente pequeno.

Como a função $g$ é contínua, usando aproximação em $C^\infty([0, r])$, existe $C > 0$ tal que

$$|g(u(s), s) - g(v(s), s)| \leq C|u(s) - v(s)|.$$

Então

$$\begin{aligned}
|T(u(r)) - T(v(r))| &\leq \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} |g(u(s), s) - g(v(s), s)| ds dt \\
&\leq \int_0^r t^{1-N} t^{N-1} \int_0^t |g(u(s), s) - g(v(s), s)| ds dt \\
&= \int_0^r \int_0^t C|u(s) - v(s)| ds dt \\
&\leq C \int_0^r \int_0^t |u - v|_\infty ds dt
\end{aligned}$$

$$= \quad C_1|u-v|_\infty r^2$$

para $r \in \left[0, \sqrt{\frac{1}{C_1}}\right)$ temos $T(u(r))$ é uma contração, logo pelo Teorema do Ponto Fixo existe $u(r)$ tal que $u(r) = T(u(r))$ assim existe uma solução para a equação (3.3). Portanto

$$u(r) \quad = \quad a + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} g(u(s), s) ds dt \tag{B.1}$$

para $r \in [0, C_2)$.

Apêndice $\mathcal{C}$

# Prova da Desigualdade (3.5)

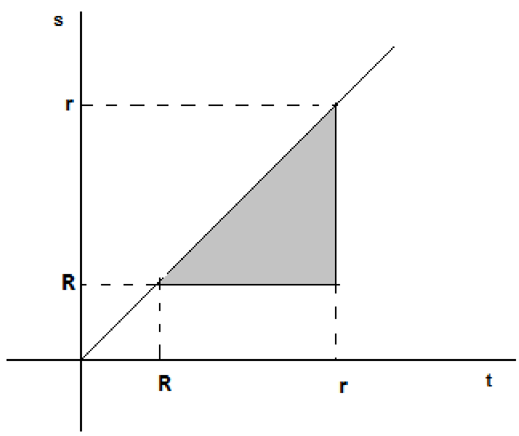
Para facilitar os cálculos no Lema (3.1.2) vamos usar o Teorema de Fubini na integral que segue:

$$\int_R^r t^{1-N} \int_R^t s^{N-1} g(u(s), s) ds dt = \int_R^r \int_R^t t^{1-N} s^{N-1} g(u(s), s) ds dt =$$

$$\int_R^r \int_s^r t^{1-N} s^{N-1} g(u(s), s) dt ds = \int_R^r s^{N-1} g(u(s), s) \frac{t^{2-N}}{2-N}\Big|_s^r ds =$$

$$\int_R^r \frac{r^{2-N} - s^{2-N}}{2-N} s^{N-1} g(u(s), s) ds \leq \int_R^r s^{2-N} g(u(s), s) s^{N-1} ds =$$

$$\int_R^r s g(u(s), s) ds$$



Apêndice

$\mathcal{D}$

# Majorando Integral

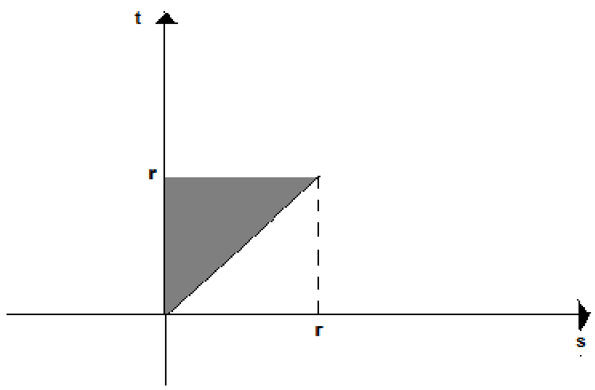
Vamos usar o Teorema de Fubini para majorar a seguinte integral

$$\int_0^r t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}|g(u_a(s),s)-g(u_A(s),s)|dsdt=\int_0^r\int_0^t t^{1-N}s^{N-1}|g(u_a(s),s)-g(u_A(s),s)|dsdt$$

$$=\int_0^r\int_s^r t^{1-N}s^{N-1}|g(u_a(s),s)-g(u_A(s),s)|dtds=\int_0^r s^{N-1}|g(u_a(s),s)-g(u_A(s),s)|\int_s^r t^{1-N}dtds$$

$$=\int_0^r s^{N-1}|g(u_a(s),s)-g(u_A(s),s)|\frac{r^{2-N}-s^{2-N}}{2-N}ds\leq\int_0^r s^{N-1}|g(u_a(s),s)-g(u_A(s),s)|s^{2-N}ds$$

$$=\int_0^r s|g(u_a(s),s)-g(u_A(s),s)|ds.$$



Apêndice

$\mathcal{E}$

# Propriedades das funções $g_*$ e $g^*$

As funções $g_*(z,r)$ $g^*(z,r)$ definidas na seção (3.2) como

$$g_*(z,r) = \min\{z^{q_*(r)}, z^{q^*(r)}\} \qquad g^*(z,r) = \max\{z^{q_*(r)}, z^{q^*(r)}\}$$

podem ser escritas por

$$\begin{aligned} g_*(z,r) &= \frac{z^{q_*(r)} + z^{q^*(r)}}{2} - \frac{|z^{q_*(r)} - z^{q^*(r)}|}{2} \\ g^*(z,r) &= \frac{z^{q_*(r)} + z^{q^*(r)}}{2} + \frac{|z^{q_*(r)} - z^{q^*(r)}|}{2}. \end{aligned}$$

De fato, se $g_*(z,r) = z^{q_*(r)} \quad \Rightarrow \quad z^{q_*(r)} \leq z^{q^*(r)}$ então

$$\frac{z^{q_*(r)} + z^{q^*(r)}}{2} - \frac{|z^{q_*(r)} - z^{q^*(r)}|}{2} = \frac{z^{q_*(r)} + z^{q^*(r)} + z^{q_*(r)} - z^{q^*(r)}}{2} = z^{q_*(r)} = g_*(z,r)$$

se $g_*(z,r) = z^{q^*(r)} \quad \Rightarrow \quad z^{q^*(r)} \leq z^{q_*(r)}$ então

$$\frac{z^{q_*(r)} + z^{q^*(r)}}{2} - \frac{|z^{q_*(r)} - z^{q^*(r)}|}{2} = \frac{z^{q_*(r)} + z^{q^*(r)} - z^{q_*(r)} + z^{q^*(r)}}{2} = z^{q^*(r)} = g_*(z,r).$$

E se $g^*(z,r) = z^{q_*(r)} \quad \Rightarrow \quad z^{q_*(r)} \geq z^{q^*(r)}$ então

$$\frac{z^{q_*(r)} + z^{q^*(r)}}{2} + \frac{|z^{q_*(r)} - z^{q^*(r)}|}{2} = \frac{z^{q_*(r)} + z^{q^*(r)} + z^{q_*(r)} - z^{q^*(r)}}{2} = z^{q_*(r)} = g^*(z,r)$$

e se $g^*(z,r) = z^{q^*(r)} \quad \Rightarrow \quad z^{q_*(r)} \leq z^{q^*(r)}$ então

$$\frac{z^{q_*(r)} + z^{q^*(r)}}{2} + \frac{|z^{q_*(r)} - z^{q^*(r)}|}{2} \quad = \quad \frac{z^{q_*(r)} + z^{q^*(r)} - z^{q_*(r)} + z^{q^*(r)}}{2} = z^{q^*(r)} = g^*(z,r).$$

Apêndice

$\mathcal{F}$

# A integral em (3.17) é finita

Vamos mostrar que a integral $\int_0^\infty rq_{osc}(r)\zeta(r)\log\zeta(r)dr$ é finita. Primeiramente mostraremos que $\zeta(r)\log\zeta(r) \leq \zeta(r)^{2N\lambda}$. Seja a função $f(x) = x\log x - x^{2N\lambda}$ então

$$f'(x) \;=\; x^{2N\lambda-1}\left(\frac{\log x}{x^{2N\lambda-1}} + \frac{1}{x^{2N\lambda-1}} - 2N\lambda\right)$$

como

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^{2N\lambda-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{(2N\lambda-1)x^{2N\lambda-2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(2N\lambda-1)x^{2N\lambda-1}} = 0 \qquad \text{(F.1)}$$

então usando (F.1) temos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; \lim_{x\to\infty}(x\log x - x^{2N\lambda}) = \lim_{x\to\infty} x^{2N\lambda}\left(\frac{\log x}{x^{2N\lambda-1}} - 1\right) = -\infty < 0.$$

Para $x$ suficientemente grande $f(x) < 0$ então $x\log x < x^{2N\lambda}$ então

$$\begin{aligned}\zeta(r)\log\zeta(r) \leq \zeta(r)^{2N\lambda} &= v(R)^{2N\lambda}\exp\left(\frac{2N\lambda Rv'(R)}{N-2} + \lambda r^2\right)\\ &= v(R)^{2N\lambda}\exp\left(\frac{2N\lambda Rv'(R)}{N-2}\right)e^{\lambda r^2} = Ce^{\lambda r^2}\end{aligned}$$

assim

$$\int_0^\infty rq_{osc}(r)\zeta(r)\log\zeta(r)dr \leq C\int_0^\infty rq_{osc}(r)e^{\lambda r^2}dr < \infty.$$

# Anexo 1

Considere o problema

$$\begin{cases} \triangle_p u &= g(x)f(u), \quad x \in D, \\ u(x) &\to \infty, \quad \text{com } d(x, \partial\Omega) \to 0 \end{cases}$$

vamos estudar a existência de solução $u \in W^{1,p}_{loc}(D) \cap C(D)$, onde $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, $g$ é uma função não negativa e a função $f$ é uma função não linear que satisfaz:

$f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ é uma função não decrescente $C^1$ tal que $f(0) = 0$ e $f(s) > 0$ para $s > 0$

e $f$ satisfaz a condição de Keller-Osserman.

A função $g$ é $C_\Omega$-positiva se satisfaz:

"para algum $x_0 \in D$ satisfazendo $g(x_0) = 0$, existe um sub domínio $O \subset D$ contendo $x_0$ tal que $g(x) > 0 \quad \forall x \in \partial D$."
então o próximo teorema garante existência de solução blow-up.

**Lema F.1** *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, e suponha $g \in C(\bar{D})$ e $C_\Omega$-positiva em $D$. Se $f$ satisfaz a condição de Keller-Osserman. Então o problema*

$$\begin{cases} \triangle_p u &= g(x)f(u), \quad x \in D, \\ u(x) &\to \infty, \quad \textit{com } d(x, \partial D) \to 0 \end{cases}$$

*admite uma solução não negativa $u \in W^{1,p}_{loc}(D) \cap C^{1,\alpha}(D)$ com $0 < \alpha < 1$.*

A demonstração se encontra em [13].

# Anexo 2

**Lema F.2** *Sejam* $x, y, \in \mathbb{R}^n$ *e seja* $<,>$*o produto escalar canônico de* $\mathbb{R}^n$. *Então:*

$$< |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y > \geq \begin{cases} c|x-y|^p & se \quad p \geq 2 \\ c\dfrac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}} & se \quad 1 < p < 2 \end{cases} \tag{F.2}$$

*onde* $c > 0$ *é uma constante que depende de* $p$.

A prova desse Lema pode ser encontrada em [16]

# Referências Bibliográficas


[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, (1975).

[2] G. Díaz, R. Letelier, *Explosive solutions of quasilinear elliptic equations: Existence and uniqueness*, Nonlinear Analysis, **20** (1993), 97−125.

[3] E. DiBenedetto, $C^{1+\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Analysis, **7** (1983), 827−850.

[4] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, American Mathematical Society, (1997) .

[5] J. García-Melián, *Large solutions for equations involving the p-Laplacian and singular weights*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, **60** (2009), 594−607.

[6] J. García-Melián, J. C. Sabina de Lis, *Large solutions for the Laplacian with a power nonlinearity given by a variable exponent*, Annales de l'Institut Henri Poincaré Analyse Non Linéaire, **26** (2009), 889−902.

[7] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, (1998).

[8] T. Kura, *The weak supersolution-subsolution method for second order quasilinear elliptic equations*, Hiroshima Mathematical Journal **19** (1989), 1−36.

[9] A. V. Lair, A. Mohammed, *Entire Large Solutions to Elliptic Equations of Power Non-linearities with Variable Exponents*, Advanced Nonlinear Studies **13** (2013), 699−719.

[10] A. V. Lair, A. W. Wood, *Large solutions of semilinear elliptic problems*, Nonlinear Analysis, **37** (1999), 805−812.

[11] A. T. Lourêdo, *Minicurso Introdução aos métodos Variacionais*, Universidade Estadual da Paraíba, (2014).

[12] L. S. Martin, *Notas de aulas de Equação Diferncial Ordinária*, UNICAMP.

[13] A. Mohammed, *Existence and asymptotic behavior of blow-up solutions to weighted quasilinear equations*,Journal of Mathematical Analysis and Applications **298** (2004), 621−637.

[14] W. M. Ni, *On the elliptic equation* $\triangle u + K(x)u^{\frac{(n+2)}{n-2}} = 0$*, its generalizations, and applications in geometry*, Indiana University Mathematics Journal, **31** nº 04 (1982), 493−529.

[15] R. Osserman, *On the inequality* $\triangle u \geq f(u)$, Pacific Journal of Mathematics, **7** (1957), 1641−1647.

[16] I. Peral, *Métodos Variacionales y Ecuaciones em Derivadas Parciales.*

[17] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides IMPA, (1942).

[18] P. Tolksdorf, *On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points*, Comm. in Partial Differential Equations **8** (1983), 773−817.

[19] J. L Vázquez, *A Strong Maximum Principle for Some Quasilinear Elliptic Equations*, Applied Mathematics and Optimization **12** (1984), 191−202.

[20] Z. Zhang, *A remark on the existence of explosive solutions for a class of semilinear elliptic equations*, Nonlinear Analysis, **41** (2000), 143−148.