

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Formulação analítica de modulações temporais  
em Eletrodinâmica Quântica de circuitos:  
Um Toy Model para o efeito Casimir dinâmico  
e novas aplicações**

Igor Melo de Sousa

*Orientador:* Prof. Dr. Alexandre Dodonov

Brasília

Março de 2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Mf           Melo de Sousa, Igor  
              Formulação analítica de modulações temporais em  
Eletrodinâmica Quântica de circuitos: Um Toy Model  
para o efeito Casimir dinâmico e novas aplicações /  
Igor Melo de Sousa; orientador Alexandre Dodonov. -  
Brasília, 2015.  
              143 p.

              Dissertação (Mestrado - Mestrado em Física) --  
Universidade de Brasília, 2015.

              1. Eletrodinâmica Quântica de circuitos. 2.  
Formalismo analítico para modulações temporais. 3.  
Efeito Casimir dinâmico e Anti-efeito Casimir  
dinâmico. 4. Toy Model. 5. Geração de estados  
emaranhados. I. Dodonov, Alexandre, orient. II.  
Título.

**“Formulação analítica de modulações temporais em Eletrodinâmica Quântica de circuitos: Um Toy Model para o efeito Casimir dinâmico e novas aplicações.”**

**Por**

**Igor Melo de Sousa**

Dissertação submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Aprovada por:



Prof. Alexandre Dodonov  
IF/UnB



Prof. Ademir Eugênio de Santana  
IF/UnB



Prof. Ronni Geraldo Gomes de Amorim  
UnB/Gama

Prof. Dr. Fernando de Oliveira Albuquerque  
Coordenador de Pós-Graduação  
Instituto de Física

---

## Resumo

No presente trabalho utilizamos a arquitetura de Eletrodinâmica Quântica de Circuitos (EQCc) para estudar a interação entre um “átomo artificial” e um único modo do campo eletromagnético quantizado confinado dentro de um ressonador de guia de onda sobre um chip supercondutor. Devido a EDQc ser formulado em um ambiente de alto controle de suas propriedades materiais, consideramos que um ou mais parâmetros do sistema sofre modulações temporais periódicas impostas externamente, o que caracteriza um sistema de EDQc não-estacionário. Construimos um formalismo matemático fechado utilizando a base de *estados vestidos* para descrever o comportamento geral do sistema. A principal equação que descreve a dinâmica do circuito é deduzida de acordo com um método consistente de aproximação, o famigerado método da RWA, que é justificado e generalizado neste trabalho.

Da equação principal, descreveremos a dinâmica para modulações simultâneas e multi-frequências, onde cada efeito físico será caracterizado pelo valor estipulado a frequência de modulação. Efeitos já conhecidos são recuperados rigorosamente, como: o efeito Casimir dinâmico (ECD) e o regime anti-Jaynes Cummings (AJC). Além desses efeitos, identificamos um novo comportamento, o anti-efeito Casimir dinâmico (AECD), onde um par de excitações pode ser coerentemente aniquilado devido à modulação de um ou mais parâmetro do sistema. Construimos Hamiltoniano efetivo que descreve a criação de pares de fótons via ECD, e propomos um *Toy Model* para o ECD na presença de uma placa dielétrica oscilante, vista como um conjunto de átomos de dois-níveis. O nosso modelo prediz que o crescimento do número médio de fótons na cavidade é limitado devido à presença de um termo não-linear no Hamiltoniano efetivo - o termo Kerr. Por último, discutimos a criação de estados quânticos emaranhados devido a possíveis modulações do sistema em diferentes regimes de parâmetros.

Brasília

2015

---

## *Abstract*

In this work we consider the circuit Quantum Electrodynamics (circuit QED) architecture to study the interaction between an “artificial atom” and a single mode of the quantized Electromagnetic field confined in a microwave waveguide resonator on a superconducting chip. The circuit QED is formulated in the solid state environment where the material properties are highly controllable, so we consider that one or more system parameters undergo periodic time-modulation prescribed externally. This regime characterizes the nonstationary circuit QED. By writing the wavefunction in the “dressed states” basis we develop a closed mathematical formalism to describe the general behavior of the system. The main equation that describes the dynamics of the circuit is derived using a consistent method of successive approximations employing the Rotating Wave Approximation (RWA), which is justified and generalized in our work.

From the main equation we will describe the dynamics for a single-tone and multi-tone modulations, pointing out that each physical effect takes place for a well defined modulation frequency. We derive in a rigorous manner the previously known effects, such as the dynamical Casimir effect (DCE) and the Anti-Jaynes-Cummings behavior. Besides, we discover a new effect we coined Anti-DCE, when a pair of system excitations can be coherently annihilated due to the modulation of one or more system parameters. We also deduce a effective Hamiltonian that describes the photon generation from vacuum via DCE and propose a *Toy Model* for the DCE in the presence of a oscillating dielectric slab, pictured as a set of noninteracting two-level atoms. Our model predicts that the photon growth is limited due to the presence of a nonlinear term in the effective Hamiltonian, namely, the Kerr term. Finally, we discuss schemes to create entangled light-matter states by means of the system modulation in different regimes of parameters.

Brasília

2015

---

## Lista de Abreviaturas

AECD: Anti-efeito Casimir dinâmico

AJC: Anti-Jaynes Cummings

APL: Amplificação paramétrica da Luz

CG: Coeficiente Gama

CM: Centro de massa

ECD: Efeito Casimir dinâmico

**ECDg**: Comportamento para o efeito Casimir dinâmico fundamental

**ECDe**: Comportamento para o efeito Casimir dinâmico excitado

ED: Estado de Dicke

EDQc: Eletrodinâmica Quântica de Circuitos

EDQC: Eletrodinâmica Quântica de Cavidades

EV: Estados vestidos

JC: Jaynes-Cummings

LD: Lado direito

LE: Lado esquerdo

RD: Regime dispersivo

RR: Regime ressonante

RWA: Aproximação de onda girante (Rotating Wave Approximation)

SFN: Shift de frequência negligenciado

*“Trabalho dedicado a pessoa que mais amei, minha avó Terezinha (in memoriam). ”*

*“A ciência conhece um único comando: contribuir com a ciência.”*

*Bertold Brecht (poeta e comunista)*



## Agradecimentos

Gostaria de agradecer a minha mãe, padrasto, pai, irmãos e familiares, por todo o apoio no decorrer da vida pessoal e acadêmica.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Alexandre Dodonov, pela orientação.

Aos amigos que a vida proporcionou.

A minha namorada Ana Paula por sua paciência, amor e grande companheirismo.

Ao colega Diego Veloso e Prof. Alexandre Dodonov, por boas conversas e grandes discussões a respeito do tema dissertado.

Aos professores Aleksandr Nikolaievich Pinzul, Tarcísio Marciano da Rocha Filho e Alexandre Dodonov, pelos excelentes cursos ministrados durante o mestrado.

A banca pela disponibilidade em avaliar o trabalho.

A CAPES pelo auxílio financeiro.

# Lista de Figuras

- 1.1 Ilustração artística do *Toy Model* para o ECD. A placa dielétrica oscila de acordo com lei externa de movimento, as propriedades dielétricas da placa podem ser moduladas externamente por campo *elétrico* ou *magnético*. A onda harmônica representa o campo confinado na cavidade, o feixe vermelho representa a modulação das propriedades materiais da placa. A ampliação na figura exemplifica átomo composto por um *próton* e *elétron*. . . . . 4

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modulação temporal em Eletrodinâmica Quântica de circuitos</b>	<b>11</b>
2.1	Descrição geral do problema . . . . .	12
2.1.1	Solução Geral . . . . .	13
2.1.2	Primeira transformação: eliminando $\hat{H}_1$ . . . . .	16
2.1.3	Segunda Transformação: Eliminando termos de $\sum_j'$ . . . . .	18
2.2	Grandes Aproximações . . . . .	20
2.2.1	Coeficientes de $\hat{H}_2$ . . . . .	21
2.2.2	Equação Exata para $B_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t)$ . . . . .	22
2.2.3	Aproximações . . . . .	27
2.2.4	Combinando Todas as Linhas . . . . .	34
2.2.5	Eliminando os Shifts de Frequência . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Regime dispersivo: ECD e similares</b>	<b>42</b>
3.1	Efeito Casimir Dinâmico $\eta^{(D)} \approx 2\omega_0$ . . . . .	47
3.1.1	Comportamento para o efeito Casimir dinâmico fundamental (ECDg) . . . . .	49
3.1.2	Comportamento para o efeito Casimir dinâmico excitado (ECDe) . . . . .	53
3.2	Comportamento Anti-efeito Casimir dinâmico (AECD) . . . . .	56
3.3	Regime Anti-Jaynes Cummings (AJC) . . . . .	58
3.4	Bombeio Externo clássico de 1-fóton . . . . .	61
3.4.1	Comportamento de cavidades no estado fundamental sob influência do bombeio . . . . .	61
3.4.2	Comportamento de cavidades no estado excitado sob influência do bombeio . . . . .	64

3.4.3	Comportamento de excitação atômica . . . . .	66
3.4.4	Comportamento do tipo anti-ECD (AECD) . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Toy Model ao efeito Casimir dinâmico</b>	<b>68</b>
4.1	Toy Model para ECDg . . . . .	69
4.2	Toy Model na presença bombeio externo . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Regime ressonante: ECD e similares</b>	<b>75</b>
5.1	Formulação do Regime . . . . .	75
5.1.1	Efeitos ECD, AJC e AECD . . . . .	77
5.1.2	Bombeio externo . . . . .	79
5.2	Efeito próximo ao regime ressonante . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Discussões finais e Conclusões</b>	<b>82</b>
6.1	Autovalor harmônico . . . . .	82
6.2	Conclusões . . . . .	84
6.2.1	Futuras aplicações do trabalho . . . . .	85
<b>A</b>	<b>Estados de Dicke</b>	<b>87</b>
<b>B</b>	<b>Estados Vestidos e Auto-Valores de JC</b>	<b>90</b>
B.1	Estados Vestidos . . . . .	90
B.2	Auto Valores de JC . . . . .	92
<b>C</b>	<b>Solução para o ansatz de <math>A_{m,\mathcal{T}}(t)</math></b>	<b>95</b>
<b>D</b>	<b>Primeira Aproximação</b>	<b>97</b>
<b>E</b>	<b>Segundo ansatz proposto</b>	<b>99</b>
<b>F</b>	<b>Aproximação de onda girante (Rotating Wave Approximation - RWA)</b>	<b>101</b>
F.1	Solução . . . . .	101
F.2	Aproximações . . . . .	104
<b>G</b>	<b>Aproximações</b>	<b>106</b>

---

<b>H</b>	<b>Eliminando o Shift de frequência</b>	<b>110</b>
<b>I</b>	<b>Formulação dos Regimes</b>	<b>113</b>
I.1	Formulação do regime ressonante . . . . .	115
I.2	Formulação do regime dispersivo . . . . .	117
I.2.1	Formulação Geral ao Regime Dispersivo $\mathcal{D} = \pm$ . . . . .	117
<b>J</b>	<b>Coeficientes de acoplamento e shifts de frequência</b>	<b>119</b>
J.1	Coeficientes e Shifts . . . . .	119
J.1.1	Regime dispersivo . . . . .	121
J.1.2	Regime ressonante . . . . .	124

# Capítulo 1

## Introdução

Em 1970, o trabalho de G. T. Moore [1] marcou o início da pesquisa sobre um efeito que relata a criação de partículas em cavidade, que ocorre devido a distúrbios causados no vácuo quântico pelo movimento de uma das paredes que compõe a cavidade, implicando em uma força dissipativa que age sobre a parede em movimento. Tal efeito foi denominado por E. Yablonovitch [2] de efeito Casimir dinâmico (ECD) e consolidado por J. Schwinger em seu trabalho sobre sonoluminescência [3]. Além do trabalho de G. T. Moore [1], outros autores foram pioneiros na investigação sobre o ECD, dentre esses destacamos os trabalhos [4–8].

Até aproximadamente o final da década de 80 todos os trabalhos sobre ECD consideravam casos ideais, sem nenhuma proposta experimental para o efeito. Um dos trabalhos teóricos pioneiros onde se inicia a idealização de um possível experimento para o ECD é dado por [9]. Desde então, vários trabalhos teóricos foram feitos, viabilizando esquema onde o ECD pudesse ser observado [10–16]. Em 1994 C. K. Law descreve pela primeira vez a condição de ressonância do ECD [17,18], através de Hamiltoniano efetivo equivalente ao de uma cavidade óptica com um meio não-linear, caracterizando o ECD como um fenômeno de amplificação paramétrica da luz, outros trabalhos também fazem a explanação do ECD como um caso de amplificação paramétrica [10,12–15]. Um trabalho bastante importante foi feito em [14], onde os autores estudam a geração e detecção de fótons através do ECD em cavidade 3D ressonante, estimulados por experimentos realizados em cavidades ópticas. No trabalho se constata o crescimento exponencial do número médio de fótons e geração de estados comprimidos, também atribuindo o ECD à ressonância paramétrica.

Uma das primeiras propostas de experimento para o ECD foi apresentada em 2005 por C.

Braggio *et al* [19]. Desde então alguns esquemas *experimentais* [20–27] e *teóricos* [28–36] foram propostos para a verificação do efeito. No entanto, somente em 2011 C. M. Wilson *et al* [23] anunciaram a detecção experimental do ECD no contexto da Eletrodinâmica Quântica de Circuitos (EDQc). A EDQc [37–41] estuda a interação entre um campo eletromagnético confinado em ressonador de guia de onda 1D com um átomo artificial (átomos artificiais são compostos por uma ou mais junções de Josephon [37–40]). A EDQc é uma área derivada da Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (EDQC), porém em uma formulação onde as propriedades de estado sólido do circuito são altamente controladas. A EDQC [42–45] é uma área fundamental de pesquisa em Óptica Quântica por ter alta aplicabilidade experimental. Em nosso trabalho não faremos uma explanação profunda a respeito da EDQC, porém indicamos como excelente artigo de revisão a tese de doutorado de *D. I. Schuster* [46].

Para primeiros experimentos de EDQc A. Blais *et al* [37] estimaram os seguintes valores para parâmetros do sistema:  $\omega_r/2\pi = 10$  GHz (valores para frequência de cavidade e transição atômica) e  $g/2\pi = 100$  MHz (frequência de acoplamento átomo-campo). Em experimento para medir análogo do ECD em EDQc P. Lähteenmäki *et al* [27] implementam a frequência de cavidade ressonante com o valor  $\omega_r/2\pi = 5.4$  GHz.

O efeito Casimir não-estacionário foi proposto inicialmente para circuitos em [47], onde a frequência da cavidade tinha dependência temporal. Com o desenvolvimento de EDQc a modulação temporal de parâmetros do sistema se tornou possível, assim, vários trabalhos na literatura estudam o ECD na arquitetura da EDQc variando a frequência da cavidade [48, 49]. Já outros trabalhos propõem o estudo variando a frequência de transição atômica [50] ou a modulação do parâmetro de acoplamento átomo-campo [51], o que caracteriza a EDQc não-estacionário. Em recente trabalho A. V. Dodonov [52] utiliza descrição matemática geral para EDQc não-estacionário, considerando as possíveis modulações simultâneas de todos os parâmetros do sistema, possibilitando a construção de um *Toy Model* para o ECD.

Para extensa revisão sobre o ECD quando o fenômeno é analisado devido a variação da geometria da cavidade ou a mudança das propriedades dentro da cavidade ver [25, 53–55], e em particular deixamos indicado o excelente artigo de revisão escrito em 2010 por V. V. Dodonov [54]. Embora o ECD tenha sido estudado teoricamente por mais de quatro décadas, alguns aspectos sobre o efeito ainda não são claros. Um caso bem específico é o comportamento assintótico da geração de fótons: alguns modelos predizem a saturação do número de fótons dentro da cavidade [13, 56] enquanto outros modelos predizem o crescimento exponencial na ausência de

forte dissipação [53,54]. Para resolver a controvérsia, iremos introduzir um modelo microscópico completo que descreve a interação entre um campo eletromagnético quantizado e um objeto que se move ou tem suas propriedades materiais moduladas no tempo, considerando que o objeto é constituído por átomos individuais. No entanto, a maioria dos estudos variam no tempo as condições de contorno do campo da cavidade, no intuito de ignorar interações complicadas entre luz e matéria [57–59].

Nosso estudo é motivado pelo seguinte argumento: as condições de contorno são artefatos matemáticos que controlam a interação entre fótons e um largo número de átomos (que formam a fronteira), portanto, ECD pode ser originado da interação entre luz e matéria quando os parâmetros do Hamiltoniano são não-estacionários. Portanto, consideraremos o caso especial onde ECD é implementado usando uma placa dielétrica, que tem movimento e propriedades materiais moduladas externamente, sendo tratada como um ensemble de  $N$  átomos de dois níveis. Na cavidade cada átomo se acopla com o campo via interação de dipolo elétrico [60] e as interações inter-atômicas são ignoradas em primeira análise.

Quando considerado o modelo de interação átomo-campo, para cavidade com meio material, generalizaremos a descrição usual de ECD. Em particular expressaremos a taxa de criação de fótons em termos dos parâmetros microscópicos. Constataremos que o crescimento de fótons dentro da cavidade é limitado pelo efeito Kerr (efeito óptico não-linear). Além disso, consideraremos a influência de um bombeio externo de luz na cavidade [37], que de acordo com a fase escolhida poderá aumentar significativamente a taxa de criação de fótons. Por último, consideraremos uma única modulação ou a multimodulação de todos os parâmetros do sistema e descreveremos um novo efeito, que denominamos de *Anti-efeito Casimir dinâmico* (AECD).

## Formulação matemática do problema

Descreveremos a formulação matemática do problema baseando-se na figura 1.1. Como se observa, o sistema se constitui de uma cavidade com paredes fixas, dentro da qual há uma pequena placa dielétrica em uma posição arbitrária, sujeita a um movimento pré-determinado com pequena amplitude. Além disso, as propriedades materiais da placa (por exemplo, *permissividade dielétrica*) são moduladas externamente por um feixe de laser, como exemplificado na figura. Assim, podemos quantizar o campo dentro da cavidade utilizando métodos padrões [60]. Consideraremos que os operadores de aniquilação e criação  $\hat{a}$  ( $\hat{a}^\dagger$ ) não dependerão explicitamente do tempo, com o estado de vácuo sendo definido  $\hat{a}|0\rangle = 0$  para todo o tempo. Caso oposto acontece



quando alguma das paredes da cavidade se movimentar, de modo que os operadores do campo tornam-se dependentes da frequência instantânea da cavidade.

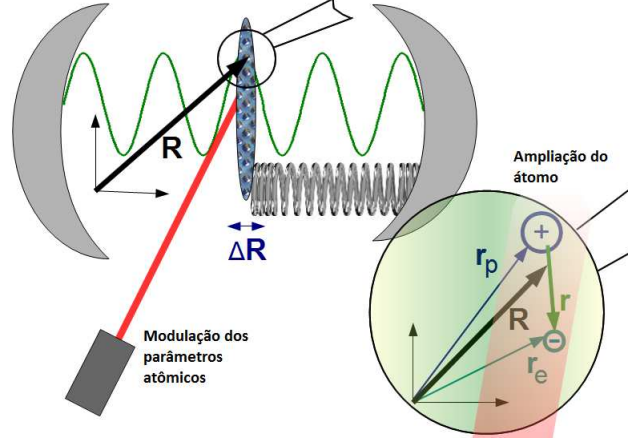


Figura 1.1: Ilustração artística do *Toy Model* para o ECD. A placa dielétrica oscila de acordo com lei externa de movimento, as propriedades dielétricas da placa podem ser moduladas externamente por campo *elétrico* ou *magnético*. A onda harmônica representa o campo confinado na cavidade, o feixe vermelho representa a modulação das propriedades materiais da placa. A ampliação na figura exemplifica átomo composto por um *próton* e *elétron*.

O fenômeno de criação de fótons a partir do estado de vácuo em uma cavidade não-estacionária é o que nomeamos de ECD. Dentro desta perspectiva o fenômeno deve estar intrinsecamente contido em qualquer forma de interação entre a luz e a matéria em cavidades. Portanto, escrevemos o Hamiltoniano apropriado à interação luz-matéria

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{e}{m} \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}, t) \cdot \hat{\mathbf{p}} + \frac{e^2}{2m} \hat{\mathbf{A}}^2(\hat{\mathbf{r}}, t) + e\Phi(\hat{\mathbf{r}}, t) + \mathcal{H}, \quad (1.1)$$

onde  $m$  representa o termo de massa da partícula,  $e$  a carga,  $\hat{\mathbf{p}}$  o operador momento,  $\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}, t)$  operador associado ao potencial vetor do campo eletromagnético,  $\Phi(\hat{\mathbf{r}}, t)$  o potencial escalar. Toda a formulação da interação entre o átomo e o campo é vista em [60]. Na equação (1.1) representamos o Hamiltoniano do campo livre como  $\mathcal{H} = \int d^3r \left[ \frac{1}{2}\epsilon_0 \hat{\mathbf{E}}^2(\hat{\mathbf{r}}, t) + \frac{1}{2}\mu_0 \hat{\mathbf{H}}^2(\hat{\mathbf{r}}, t) \right]$ , onde  $\epsilon_0$  é a permissividade do vácuo e  $\mu_0$  é a permeabilidade do vácuo,  $\hat{\mathbf{E}}$  e  $\hat{\mathbf{H}}$  representam os operadores do campo *elétrico* e *magnético*, respectivamente. A equação (1.1) é formulada quando adotado o calibre de Coulomb e o operador momento como  $\hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$ , o que dará ao Hamiltoniano o caráter quântico. Consideraremos  $V(\hat{\mathbf{r}}) = e\Phi(\hat{\mathbf{r}}, t)$ , que denota o termo da

energia potencial.

Quando consideramos um simples modelo microscópico, interpretamos a placa como um conjunto de  $N$  átomos de Hidrogênio que não interagem entre si. Como podemos ver na ampliação encontrada na figura 1.1, cada átomo é composto por um *próton* (*elétron*) com carga  $-e$  ( $e$ ) sendo a massa  $m_p$  ( $m_e$ ). O operador associado à posição da partícula é  $\hat{\mathbf{r}}_p$  ( $\hat{\mathbf{r}}_e$ ). Também introduzimos o operador posição  $\hat{\mathbf{R}}$  relativo ao movimento do centro de massa (CM) do átomo. Para se construir a interação do campo com o único átomo de Hidrogênio devemos considerar

$$V(\hat{\mathbf{r}}) \equiv -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|\hat{\mathbf{r}}|}, \quad (1.2)$$

o potencial que descreve interação coulombiana entre *próton* e *elétron*. Assim, escrevemos Hamiltoniano total para um átomo de Hidrogênio interagindo com o campo eletromagnético

$$\hat{H} = \hat{H}_e + \hat{H}_p + V(\hat{\mathbf{r}}_e - \hat{\mathbf{r}}_p). \quad (1.3)$$

Em (1.3) para simplificar a notação não levaremos em consideração o termo do campo livre  $\mathcal{H}$  escrito em (1.1). Baseando-se na equação (1.1) escreveremos os Hamiltonianos respectivos aos termos de *próton* (*elétron*) para um campo externo

$$\hat{H}_p \equiv \frac{\hat{\mathbf{P}}_p^2}{2m_p} + \frac{e}{m_p} \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}_p, t) \cdot \hat{\mathbf{p}}_p + \frac{e^2}{2m_p} \hat{\mathbf{A}}^2(\hat{\mathbf{r}}_p, t) \quad (1.4)$$

$$\hat{H}_e \equiv \frac{\hat{\mathbf{p}}_e^2}{2m_e} - \frac{e}{m_e} \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}_e, t) \cdot \hat{\mathbf{p}}_e + \frac{e^2}{2m_e} \hat{\mathbf{A}}^2(\hat{\mathbf{r}}_e, t). \quad (1.5)$$

Escreveremos o operador posição para o movimento do CM como  $\hat{\mathbf{R}} = (m_p \hat{\mathbf{r}}_p + m_e \hat{\mathbf{r}}_e) / M$ , sendo  $M$  a massa total das duas partículas  $M = m_e + m_p$ . O operador de posição relativa das partículas será escrito da seguinte forma  $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}_e - \hat{\mathbf{r}}_p$ , onde expressamos os operadores  $\hat{\mathbf{r}}_e = \hat{\mathbf{R}} + (m_p \hat{\mathbf{r}}) / M$  e  $\hat{\mathbf{r}}_p = \hat{\mathbf{R}} - (m_e \hat{\mathbf{r}}) / M$ . Referente ao operador momento canônico escrevemos  $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{p}}_e + \hat{\mathbf{p}}_p$  que está associado com o movimento da massa total  $M$ . Para expressar operador momento em função do *próton*(*elétron*) introduzimos  $\hat{\mathbf{p}} = (m_p \hat{\mathbf{p}}_e - m_e \hat{\mathbf{p}}_p) / M$ , que é operador associado ao movimento da massa reduzida  $\mu = m_e m_p / M$ . Com as definições podemos escrever os operadores  $\hat{\mathbf{p}}_e = m_e \hat{\mathbf{P}} / M + \hat{\mathbf{p}}$  e  $\hat{\mathbf{p}}_p = m_p \hat{\mathbf{P}} / M - \hat{\mathbf{p}}$ . Portanto, decompos a energia cinética total do sistema em um termo referente ao movimento do CM e outro relacionado ao movimento relativo entre *próton* e *elétron*, sendo  $\hat{\mathbf{p}}_e^2 / 2m_e + \hat{\mathbf{p}}_p^2 / 2m_p = \hat{\mathbf{P}}^2 / 2M + \hat{\mathbf{p}}^2 / 2\mu$ .

Com as definições feitas escrevemos o Hamiltoniano (1.3) como

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \hat{H}_H - \frac{e}{\mu} \left\{ \frac{\mu}{m_e} \hat{\mathbf{A}} \left[ \hat{\mathbf{R}} + \frac{m_p}{M} \hat{\mathbf{r}}, t \right] + \frac{\mu}{m_p} \hat{\mathbf{A}} \left[ \hat{\mathbf{R}} - \frac{m_e}{M} \hat{\mathbf{r}}, t \right] \right\} \cdot \hat{\mathbf{p}} \\ & - \frac{e}{M} \left\{ \hat{\mathbf{A}} \left[ \hat{\mathbf{R}} + \frac{m_p}{M} \hat{\mathbf{r}}, t \right] - \hat{\mathbf{A}} \left[ \hat{\mathbf{R}} - \frac{m_e}{M} \hat{\mathbf{r}}, t \right] \right\} \cdot \hat{\mathbf{P}} \\ & + \frac{e^2}{2m_e} \hat{\mathbf{A}}^2 \left[ \hat{\mathbf{R}} + \frac{m_p}{M} \hat{\mathbf{r}}, t \right] + \hat{\mathbf{A}}^2 \left[ \hat{\mathbf{R}} - \frac{m_e}{M} \hat{\mathbf{r}}, t \right]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Definimos  $\hat{H}_H$  como  $\hat{H}_H = \hat{\mathbf{P}}^2/2M + \hat{\mathbf{p}}^2/2\mu + V(\hat{\mathbf{r}})$ , Hamiltoniano que descreve o átomo de Hidrogênio na ausência do campo eletromagnético. A equação (1.6) descreve o acoplamento do átomo com o operador potencial vetor. Temos na equação acima duas formas de interação: a primeira interação acopla o operador momento  $\hat{\mathbf{p}}$  com a soma dos operadores potenciais vetoriais do *elétron* e *próton*; a segunda interação tem o acoplamento do momento  $\hat{\mathbf{P}}$  em relação ao movimento do CM com a diferença dos operadores potenciais vetoriais do *elétron* e *próton*. O último termo de (1.6) não caracteriza nenhuma forma de acoplamento, apenas representa o quadrado do potencial vetorial das partículas em função do movimento do CM  $\hat{\mathbf{R}}$  e das posições relativas  $\hat{\mathbf{r}}$ .

Para simplificar o Hamiltoniano (1.6) iremos aplicar o que chamamos de *aproximação de dipolo*. Escreveremos o operador potencial vetor como  $\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{R}} + \delta\hat{\mathbf{r}})$ , onde podemos definir que  $\delta\hat{\mathbf{r}} = -m_e/M\hat{\mathbf{r}}$  ou  $\delta\hat{\mathbf{r}} = m_p/M\hat{\mathbf{r}}$ . Portanto, expandiremos em série de Taylor o operador potencial vetorial  $\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{R}} + \delta\hat{\mathbf{r}})$  em torno de  $\hat{\mathbf{R}}$ , obtendo

$$\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{R}} + \delta\hat{\mathbf{r}}) \simeq \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{R}}) + (\delta\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{R}}}) \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{R}}) + \dots \quad (1.7)$$

Quando usamos a relação  $m_e/m_p \ll 1$  e considerando que  $\hat{\mathbf{r}}$  seja do tamanho do átomo estimamos a proporção entre a quantidade de correção  $|(\delta\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{R}}}) \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{R}})|$  em relação a  $|\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{R}})|$ . Consideramos que a proporção *tamanho do átomo/comprimento de onda* é muito menor que um, supondo que o tamanho do comprimento de onda é estimado por  $|\nabla_{\hat{\mathbf{R}}} \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{R}})|$ . Assim, concluímos que o operador potencial vetorial não se altera consideravelmente sobre o valor do átomo. Portanto, o operador potencial vetorial para o *elétron* e o *próton* são o mesmo operador, com dependência apenas da coordenada do CM. Escrevemos

$$\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}_e) \simeq \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}_p) \simeq \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{R}}). \quad (1.8)$$

A aproximação apresentada acima é nomeada *aproximação de dipolo* (nome utilizado mesmo quando consideramos o acoplamento  $\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{R}}, t) \cdot \hat{\mathbf{p}}$ ). Utilizando o primeiro termo da expansão em

Taylor dada por (1.7) e considerando a *aproximação de dipolo* escrevemos (1.6) como

$$\hat{H}^{(0)} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|\hat{\mathbf{r}}|} - \frac{e}{\mu} \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{R}}, t) \cdot \hat{\mathbf{p}} + \frac{e^2}{2\mu} \hat{\mathbf{A}}^2(\hat{\mathbf{R}}, t). \quad (1.9)$$

Na formulação de interação apresentada na equação acima o operador de posição relativa  $\hat{\mathbf{r}}$  não se acopla com o campo. O Hamiltoniano (1.9) é obtido no que chamamos *aproximação de dipolo* de ordem zero. No entanto, estamos interessados na *aproximação de dipolo* de ordem maior e onde possamos ter o acoplamento de  $\hat{\mathbf{r}}$  com o campo, descrevendo um Hamiltoniano completo e simplificado para a interação da luz com um átomo de Hidrogênio.

Para a *aproximação de dipolo* de primeira ordem iremos considerar (1.7) como  $\hat{\mathbf{A}}\left(\hat{\mathbf{R}} + \frac{m_p}{M}\hat{\mathbf{r}}, t\right) \simeq \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{R}}, t) + \frac{m_p}{M}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{R}}})\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{R}}, t)$  e  $\hat{\mathbf{A}}\left(\hat{\mathbf{R}} - \frac{m_e}{M}\hat{\mathbf{r}}, t\right) \simeq \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{R}}, t) - \frac{m_e}{M}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{R}}})\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{R}}, t)$ . Introduziremos a notação  $\Delta m = m_p - m_e$  e escreveremos o Hamiltoniano para a primeira ordem da *aproximação de dipolo*

$$\hat{H}^{(1)} = \frac{1}{2M} \left[ \hat{\mathbf{P}} - e(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{R}}})\hat{\mathbf{A}} \right]^2 + \frac{1}{2\mu} \left[ \hat{\mathbf{p}} - e\hat{\mathbf{A}} - e\frac{\Delta m}{M}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{R}}})\hat{\mathbf{A}} \right]^2 + V(\hat{\mathbf{r}}). \quad (1.10)$$

A equação (1.10) não é invariante por transformação de calibre, uma vez que contém o termo do operador potencial vetorial e termo de derivada relativo a  $\nabla_{\hat{\mathbf{R}}}$ .

Procederemos com a transformação de calibre clássica. Expressaremos o Hamiltoniano final em termos do operador campo *elétrico* e *magnético*. No entanto, devemos ressaltar que a construção intuitiva da interação entre luz e matéria pode ser feita de duas maneiras: quando consideramos o acoplamento entre  $\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{R}}, t) \cdot \hat{\mathbf{p}}$  ou quando consideramos o átomo como um dipolo interagindo com um campo *elétrico*, sendo o acoplamento  $e\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{R}}, t)$ , que chamamos *interação de dipolo*. Como mostrado em [60], os dois acoplamentos são equivalentes quando desconsiderado o movimento do CM e as funções de onda apropriadas aos Hamiltonianos são obtidas por transformação de calibre. Quando considerado o movimento do CM, as transformações para os acoplamentos são mais complicadas. Trataremos os termos referentes a *interação de dipolo* com o símbolo ( $\sim$ ). Por meio da transformação de Legendre escrevemos o Lagrangeano

$$L^{(1)} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{P}} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}} - \hat{H}^{(1)}. \quad (1.11)$$

Para obter expressão completa para (1.11) devemos calcular as quantidades que tratam a evolução da velocidade do movimento do CM e partículas, assim, calculamos

$$\dot{\mathbf{R}} = \partial \hat{H}^{(1)} / \partial \hat{\mathbf{P}} = \left[ \hat{\mathbf{P}} - e(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{R}}})\hat{\mathbf{A}} \right] / M \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{r}} = \partial \hat{H}^{(1)} / \partial \hat{\mathbf{p}} = \left[ \hat{\mathbf{p}} - e\hat{\mathbf{A}} - e\frac{\Delta m}{M}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{R}}})\hat{\mathbf{A}} \right] / \mu.$$

Usando as relações escrevemos a equação (1.11) como

$$L^{(1)} = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 + e\dot{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{A}} - V(\hat{\mathbf{r}}) + e\dot{\mathbf{R}} \cdot \left[ (\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{R}}})\hat{\mathbf{A}} \right] + e\frac{\Delta m}{M}\dot{\mathbf{r}} \cdot \left[ (\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{R}}})\hat{\mathbf{A}} \right]. \quad (1.12)$$

Escrevendo Lagrangeano análogo a (1.11), trataremos o caso para a *interação de dipolo*

$$\tilde{L}^{(1)} = L^{(1)} - \frac{d}{dt} \left\{ e\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{R}}, t) + \frac{e}{2} \frac{\Delta m}{M} \hat{\mathbf{r}} \cdot [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{R}}}) \hat{\mathbf{A}}] \right\}. \quad (1.13)$$

Derivaremos a equação acima com respeito ao tempo e usaremos a relação  $\hat{\mathbf{E}} = -\partial\hat{\mathbf{A}}/\partial t$  que expressa a relação entre o potencial vetorial e o campo *elétrico* no calibre de Coulomb. Negligenciaremos as derivadas de segunda ordem ao adotar somente a primeira ordem da expansão em Taylor. Também consideraremos a relação  $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{B}} = \nabla_{\hat{\mathbf{R}}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{A}}) - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{R}}}) \hat{\mathbf{A}}$ , assim, escrevemos explicitamente (1.13)

$$\tilde{L}^{(1)} = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\hat{\mathbf{r}}) + e\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}} - e\dot{\mathbf{R}} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{B}}) - \frac{e}{2} \frac{\Delta m}{M} \dot{\mathbf{r}} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{B}}) + \frac{e}{2} \frac{\Delta m}{M} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{R}}}) (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}}). \quad (1.14)$$

A aproximação de dipolo utilizada para a obtenção de (1.14) é análoga a (1.8) onde escrevemos  $\hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{r}}_e, t) \simeq \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{r}}_p, t) \simeq \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{R}}, t)$ .

Escreveremos o Hamiltoniano  $\tilde{H}^{(1)}$  que corresponde ao Lagrangeano (1.14)

$$\tilde{H}^{(1)} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{P}} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}} - \tilde{L}^{(1)}. \quad (1.15)$$

Para obter a forma explícita de (1.15) usaremos as relações  $\hat{\mathbf{P}} = \partial\tilde{L}^{(1)}/\partial\dot{\mathbf{R}} = M\dot{\mathbf{R}} - e(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{B}})$  e  $\hat{\mathbf{p}} = \partial\tilde{L}^{(1)}/\partial\dot{\mathbf{r}} = \mu\dot{\mathbf{r}} - e\Delta m(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{B}})/2M$ , também fazendo o uso das expressões já definidas para  $\dot{\mathbf{R}}$  e  $\dot{\mathbf{r}}$  obtemos

$$\tilde{H}^{(1)} = \frac{1}{2M} \left[ \hat{\mathbf{P}} + e(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{B}}) \right]^2 + \frac{1}{2\mu} \left[ \hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{2} \frac{\Delta m}{M} (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{B}}) \right]^2 + V(\hat{\mathbf{r}}) - e\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}} - \frac{e}{2} \frac{\Delta m}{M} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{R}}}) (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}}). \quad (1.16)$$

Este resultado expressa Hamiltoniano para a interação luz-matéria em termos dos campos *elétrico* e *magnético*, retransitando a *interação de dipolo*. Adequado ao tratamento quântico escreveremos o Hamiltoniano acima como

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(1)} = & \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M} + \hat{H}_f + \hat{H}_a - e\hat{\mathbf{r}} \cdot [\hat{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{B}}] + e^2 \left( \frac{1}{8\mu} - \frac{1}{M} \right) \left[ \hat{\mathbf{r}}^2 \hat{\mathbf{B}}^2 - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{B}})^2 \right] \\ & - \frac{e(m_p - m_e)}{2M} \left[ \frac{1}{\mu} \hat{\mathbf{B}} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}) + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{R}}}) \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}} \right]. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Em (1.17) o termo de  $\hat{H}_f$  é oriundo da quantização canônica do campo eletromagnético, sendo  $\hat{H}_f = \hbar\omega\hat{n}$  o termo livre da cavidade, com  $\omega$  sendo a frequência da cavidade e  $\hat{n}$  o operador número. O termo de  $\hat{H}_a$  representa o Hamiltoniano para a dinâmica interna do átomo,

sendo  $\hat{H}_a = \hat{\mathbf{p}}^2/2\mu + V(\hat{\mathbf{r}})$ . Os campos *elétrico* e *magnético* dentro da cavidade quantizada são escritos como

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}}\mathbf{u}(\mathbf{R})\left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right) \quad (1.18)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{R}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V\omega}}\vec{\nabla} \times \mathbf{u}(\mathbf{R})\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right), \quad (1.19)$$

onde  $V$  é o volume efetivo do modo e  $\mathbf{u}(\mathbf{R})$  é a função adimensional de modo determinada pelas condições de contorno independentes do tempo nas paredes da cavidade. Para o *Toy Model* da figura 1.1, consideraremos o caso simples de um átomo de dois níveis. O átomo é representado pelos estados de excitação atômica  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$ , que denotam os estados fundamental e excitado, respectivamente. Ao considerar a *interação de dipolo* de acordo com o Hamiltoniano  $\hat{H}_{\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{E}}} = -e\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}}$  escreveremos operador  $\hat{O}$  em termos dos estados de excitação do átomo de dois níveis, sendo  $\hat{O} = \sum_j \sum_k |j\rangle \langle j| \hat{O} |k\rangle \langle k|$ . Com isso, o Hamiltoniano do átomo se torna  $\hat{H}_a = \hbar\Omega\hat{\sigma}_z$ , sendo  $\Omega$  a frequência de transição atômica e  $\hat{\sigma}_z = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|$ . O operador posição é escrito como  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_0\hat{\sigma}_+ + \mathbf{r}_0^*\hat{\sigma}_-$ , sendo  $\mathbf{r}_0$  elemento não-diagonal na representação dos estados de energia. O termos  $\hat{\sigma}_+$  e  $\hat{\sigma}_-$  são escritos como  $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle \langle g|$  e  $\hat{\sigma}_- = |g\rangle \langle e|$ . Em (1.17) o quadrado do operador posição é  $\hat{\mathbf{r}}^2 = |\mathbf{r}_0|^2$  e o quadrado do campo magnético aparecem naturalmente, sendo proporcionais a  $\propto (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2$ .

Portanto, para o *Toy Model* apresentado podemos escrever o Hamiltoniano equivalente para a interação luz-matéria. Baseando-se na equação (1.17) e nos operadores obtidos para o Hamiltoniano  $\hat{H}_{\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{E}}}$  escrevemos Hamiltoniano geral para o *Toy Model*

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{n} + \sum_{l=1}^N \left[ \frac{\hbar\Omega}{2}\hat{\sigma}_z^{(l)} + \hbar g (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (\hat{\sigma}_+^{(l)} + \hat{\sigma}_-^{(l)}) \right] + i\hbar\chi (\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2) + i\hbar d (\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (1.20)$$

Na equação (1.20) o índice  $l$  relata os átomos idênticos e não interagentes. O termo  $\omega$  representa a frequência da cavidade,  $\Omega$  é a frequência de transição atômica, o termo proporcional ao acoplamento átomo-campo é dado por  $g$  e  $\chi$  pode ser visto como o termo de *squeezing*. Por considerar um sistema não-estacionário, todos os termos descritos estarão sujeitos a pequenas modulações externas, e a formulação da modulação temporal em EDQc será feita no próximo capítulo. Em (1.20) o termo de  $d$  representa o “bombeio” de clássico do campo por um único fóton (“one-photon process”, em inglês), que pode descrever um feixe laser ou o campo produzido por um gerador clássico de voltagem [61]. Referente a equação (1.20) ignoramos a forma exata dos termos dados pela equação (1.17), a estrutura geral da equação (1.17) é justamente a dada pela equação (1.20). Neste trabalho não perseguimos o valor exato dos parâmetros  $g$ ,  $\Omega$  e  $\chi$

em função dos parâmetros do átomo de Hidrogênio, já que esta identificação seria de pouco uso, pois na realidade usamos átomos artificiais muito mais complexos, mas que são geridos pelas mesmas equações.

## Capítulo 2

# Modulação temporal em Eletrodinâmica Quântica de circuitos

Efeito Casimir dinâmico em cavidades [1] (ECD) é um fenômeno não-estacionário que tem como característica a criação de fótons reais a partir do estado inicial de vácuo (e também para outros estados iniciais). O fenômeno ocorre quando alteramos a geometria da cavidade (por exemplo, o deslocamento de uma das paredes) ou suas propriedades materiais (por exemplo, a permissividade dielétrica do meio que preenche a cavidade). Nos últimos anos o ECD foi alvo de estudos por parte de vários pesquisadores, que estudaram diversas maneiras de implementar e detectar o fenômeno [9–18, 23, 27]. O ECD foi proposto em 1970 [1], porém sua confirmação experimental só foi anunciada em 2011 [23].

A observação do ECD [23, 27] se deu no contexto de Eletrodinâmica Quântica de Circuitos (EDQc) [37–41], uma vertente recente da área bem estabelecida, conhecida como Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (EDQC) [42–45]. Com o avanço da EDQc tornou-se possível estudar a interação de um átomo artificial com um modo do campo eletromagnético acoplados em um ressonador 1D de linha de transmissão. O estudo da interação é feito em um ambiente de alto controle das propriedades materiais dos componentes do circuito e temperaturas de ordem de alguns milikelvin. Assim, é possível modular experimentalmente as propriedades do sistema átomo-campo em tempo real ao aplicar campos elétricos e magnéticos externos. Com isso, a dinâmica do sistema muda drasticamente, como mostraremos nesta dissertação.

Estudaremos circuitos não-estacionários [52], onde todos os parâmetros do sistema estão sujeitos a pequenas modulações temporais prescritas externamente. O estudo analítico terá



como objetivo encontrar um método eficiente que possibilite a análise completa de todos os fenômenos decorrentes das modulações temporais periódicas. Como a dinâmica unitária do sistema é bastante sofisticada por si só, neste trabalho não vamos considerar os efeitos de dissipação e decoerência, deixando estes tópicos para futuras dissertações.

## 2.1 Descrição geral do problema

O sistema que analisamos se constitui de uma cavidade, onde um único modo do campo eletromagnético interage com  $N$  átomos de dois níveis (usualmente chamados na literatura de *qubits*). A descrição da interação entre o átomo e o campo é feita via *interação de dipolo*. A dinâmica dessa interação é dada pelo famigerado Hamiltoniano de Rabi

$$\hat{H}_R = \hbar\omega\hat{n} + \sum_{l=1}^N \left[ \frac{\hbar\Omega}{2}\hat{\sigma}_z^{(l)} + \hbar g \left( \hat{a} + \hat{a}^\dagger \right) \left( \hat{\sigma}_+^{(l)} + \hat{\sigma}_-^{(l)} \right) \right], \quad (2.1)$$

onde  $\omega$  representa a frequência da cavidade,  $\Omega$  a frequência de transição atômica e  $g$  o parâmetro de acoplamento átomo-campo (que também tem dimensão de frequência). Os termos  $\hat{a}$  ( $\hat{a}^\dagger$ ) são os operadores bosônicos, de aniquilação e criação, respectivamente. O termo  $\hat{n}$  é o operador número representado por  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ . Os operadores que representam as transições entre os estados atômicos são escritos como:  $\hat{\sigma}_-^{(l)} = |g^{(l)}\rangle\langle e^{(l)}|$ ,  $\hat{\sigma}_+^{(l)} = |e^{(l)}\rangle\langle g^{(l)}|$  e  $\hat{\sigma}_z^{(l)} = |e^{(l)}\rangle\langle e^{(l)}| - |g^{(l)}\rangle\langle g^{(l)}|$ , onde  $|g^{(l)}\rangle$  e  $|e^{(l)}\rangle$  denotam os estados fundamental e excitado do  $l$ -ésimo átomo. No sistema em análise também é considerado que o campo da cavidade pode ser alimentado por dois processos.

Descrevemos essa dinâmica com o Hamiltoniano que se segue

$$\hat{H}_F = i\hbar d \left( \hat{a}^\dagger - \hat{a} \right) + i\hbar\chi \left( \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2 \right), \quad (2.2)$$

onde o termo proporcional a  $d$  representa o “bombeio” clássico do campo (*pumping*, em inglês). Já o termo proporcional a  $\chi$  tem duas interpretações: quando é independente do tempo se refere ao termo de correção do Hamiltoniano de Rabi, devido ao quadrado do potencial vetorial no Hamiltoniano de interação radiação-matéria; quando o parâmetro  $\chi$  é dependente do tempo, dizemos que ele representa o termo de *squeezing*, responsável pelo processo de amplificação paramétrica do campo na cavidade devido a processos ópticos não-lineares. Ademais, como demonstrado por C. K. Law [17], este termo também descreve o caso mais simples de ECD em cavidades. O Hamiltoniano total que descreve a dinâmica do sistema é  $\hat{H} = \hat{H}_R + \hat{H}_F$ .

Como estudamos um circuito não-estacionário os parâmetros do sistema estão sujeitos a modulações temporais e supomos que cada parâmetro modulado obedece à seguinte função:

$X = X_0 + \varepsilon_X f_X$ , onde  $X = \{\omega, \Omega, g, \chi, d\}$ . O termo  $X_0$  representa os respectivos parâmetros não perturbados,  $\varepsilon_X$  é a profundidade da modulação temporal (*depth*, em inglês). Escrevemos a função adimensional que caracteriza a modulação arbitrária dos parâmetros como

$$f_X = \sum_j w_X^{(j)} \sin(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}) = \frac{1}{2i} \sum_j w_X^{(j)} \left\{ e^{i\phi_X^{(j)}} e^{it\eta^{(j)}} - e^{-i\phi_X^{(j)}} e^{-it\eta^{(j)}} \right\}, \quad (2.3)$$

onde o somatório  $\sum_j$  varre todas frequências de modulação ( $\eta^{(j)}$ ) não nulas,  $w_X^{(j)} \leq 1$  é o peso correspondente à modulação de  $X$  com a  $j$ -ésima frequência,  $\phi_X^{(j)}$  é a respectiva fase.

### 2.1.1 Solução Geral

Uma maneira simplificada de escrever a interação dos  $N$  qubits indistinguíveis com o campo na cavidade é propor um estado coletivo de  $N$  qubits. O estado que utilizaremos para simplificar o problema é o (*normalizado*) estado de Dicke (ED) [62] (a descrição completa do ED, bem como todas as transformações para sua base, são dadas no apêndice A). Escrevemos o ED com  $|\mathbf{k}\rangle$  excitações como

$$|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{k!(N-k)!/N!} \sum_p |e^{(1)}\rangle |e^{(2)}\rangle \dots |e^{(k)}\rangle |g^{(k+1)}\rangle \dots |g^N\rangle. \quad (2.4)$$

A soma presente na equação (2.4) é referente a todas possíveis permutações entre os qubits com estados excitados e não-excitados. O índice  $k$  assume os valores  $k = 0, 1, \dots, N$ . Quando se escolhe a base do ED é necessário que transformemos o Hamiltoniano (2.1). A partir deste instante consideraremos  $\hbar = 1$  e escreveremos o Hamiltoniano após a transformação para base do ED como

$$\hat{H}_R = \omega \hat{n} + \sum_{k=1}^N E_k \hat{\sigma}_{k,k} + \sum_{k=0}^{N-1} G_k (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (\hat{\sigma}_{k+1,k} + \hat{\sigma}_{k,k+1}), \quad (2.5)$$

onde definimos o operador que descreve o conjunto dos estados atômicos  $\sigma_{k,j} = |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{j}|$ . Em (2.1) os parâmetros presentes após a transformação assumem a forma  $E_k = k\Omega \equiv E_{0,k} + \varepsilon_{E,k} f_\Omega$  e  $G_k = g\sqrt{(k+1)(N-k)} \equiv G_{0,k} + \varepsilon_{G,k} f_g$ . A equação (2.5) contém termo denominado contra-girante e termo denominado de girante,  $(\hat{a}\hat{\sigma}_{k,k+1} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{k+1,k})$  e  $(\hat{a}\hat{\sigma}_{k+1,k} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{k,k+1})$ , respectivamente. Ao considerar somente os termos girantes, o Hamiltoniano (2.5) irá descrever a interação entre a luz e a matéria como

$$\hat{H}_{00} = \omega \hat{n} + \sum_{k=1}^N E_k \hat{\sigma}_{k,k} + \sum_{k=0}^{N-1} G_k (\hat{a}\hat{\sigma}_{k+1,k} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{k,k+1}). \quad (2.6)$$

A equação acima é o célebre Hamiltoniano de Jaynes-Cummings (JC), aqui escrito na base do ED. Desejamos escrever um Hamiltoniano  $\hat{H}$  que una todos as dinâmicas presentes no problema, logo a construção geral será

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2. \quad (2.7)$$

Devido a forma da função modulação dos parâmetros  $X = X_0 + \varepsilon_X f_X$ , sendo  $X = \{\omega, E_k, G_k, \chi, d\}$ , a equação de  $\hat{H}_{00}$  será dividida em duas partes:  $\hat{H}_0$  e  $\hat{H}_1$ . Temos

$$\hat{H}_0 = \omega_0 \hat{n} + \sum_{k=1}^N E_{0,k} \hat{\sigma}_{k,k} + \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} (\hat{a} \hat{\sigma}_{k+1,k} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{k,k+1}) \quad (2.8)$$

$$\hat{H}_1 = \varepsilon_\omega f_\omega \hat{n} + \sum_{k=1}^N \varepsilon_{E,k} f_{E,k} \hat{\sigma}_{k,k} + \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_{G,k} f_{G,k} (\hat{a} \hat{\sigma}_{k+1,k} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{k,k+1}). \quad (2.9)$$

Os termos que irão compor  $\hat{H}_2$  são dois, o primeiro oriundo da parte contra-girante de (2.5) e os restantes vindos de (2.2)

$$\hat{H}_2 = \sum_{k=0}^{N-1} G_k \left( \hat{a} \hat{\sigma}_{k,k+1} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{k+1,k} \right) + id \left( \hat{a}^\dagger - \hat{a} \right) + i\chi \left( \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2 \right). \quad (2.10)$$

## A função de onda

Utilizaremos o formalismo de Schrödinger para escrever a função de onda correspondente ao Hamiltoniano (2.7). Na base dos *estados vestidos* escrevemos

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{S}} e^{-it\lambda_{n,\mathcal{S}}} A_{n,\mathcal{S}}(t) |\varphi_{n,\mathcal{S}}\rangle, \quad (2.11)$$

onde o coeficiente  $A_{n,\mathcal{S}}(t)$  é a amplitude de probabilidade do autoestado que adotaremos,  $|\varphi_{n,\mathcal{S}}\rangle$  conhecido como *estado vestido* (termo autóctone da expressão em inglês, *dressed state*) (EV). O Hamiltoniano  $\hat{H}_0$  ao ser aplicado nos EV fornece o autovalor  $\lambda_{n,\mathcal{S}}$  (a formulação dos EV e dos autovalores é encontrada no apêndice B), onde o índice  $\mathcal{S}$  representa os autovalores de diferentes estados, porém com o mesmo número total de excitações  $n$ <sup>1</sup>. A equação de Schrödinger é escrita como

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (2.12)$$

<sup>1</sup>No caso de um único átomo de dois níveis, estudado nos capítulos posteriores, o índice  $\mathcal{S}$  assumirá os possíveis valores  $\mathcal{S} = \pm$ .

Derivando temporalmente (2.11) para obter a parcela do lado esquerdo (LE) de (2.12) e aplicando (2.7) em (2.11) referente ao lado direito (LD) de (2.12), obtemos

$$i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{S}} e^{-it\lambda_{n,\mathcal{S}}} \dot{A}_{n,\mathcal{S}}(t) |\varphi_{n,\mathcal{S}}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{S}} e^{-it\lambda_{n,\mathcal{S}}} A_{n,\mathcal{S}}(t) \hat{H}_1 |\varphi_{n,\mathcal{S}}\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{S}} e^{-it\lambda_{n,\mathcal{S}}} A_{n,\mathcal{S}}(t) \hat{H}_2 |\varphi_{n,\mathcal{S}}\rangle. \quad (2.13)$$

Restará agora multiplicar (2.13) por  $\langle \varphi_{m,\mathcal{T}} |$ , onde introduzimos o índice  $\mathcal{T}^2$ . Usaremos a definição do *delta de Kronecker*  $\langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle = \delta_{m,n} \delta_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$  devido a ortonormalidade dos autoestados de um operador Hermitiano. Assim, escrevemos equação diferencial para a amplitude de probabilidade  $A_{n,\mathcal{S}}(t)$

$$i \dot{A}_{m,\mathcal{T}}(t) = \sum_{\mathcal{S}} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}})} A_{m,\mathcal{S}}(t) \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{S}} e^{it(\lambda_{n,\mathcal{T}} - \lambda_{n,\mathcal{S}})} A_{n,\mathcal{S}}(t) \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle. \quad (2.14)$$

A partir da equação (2.14) buscaremos uma solução aproximada para a amplitude de probabilidade  $A_{m,\mathcal{S}}(t)$  resolvendo as equações diferenciais que se apresentarão e fazendo uma série de aproximações de maneira consistente.

### Coeficiente Gama

Na equação (2.14) um novo termo é apresentado,  $\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}$ , que denominaremos de *coeficiente gama* (CG). Ele é definido como

$$\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}} = \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_1 | \varphi_{m,\mathcal{S}} \rangle, \quad (2.15)$$

sendo essa a definição mais geral referente ao Hamiltoniano  $\hat{H}_1$ . Podemos escrever (2.15) em função de todos os termos de  $\hat{H}_1$  usando a definição feita em (2.3), obtendo

$$\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}} = \sum_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}\right) \times \left\{ \varepsilon_\omega w_\omega^{(j)} \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{n} | \varphi_{m,\mathcal{S}} \rangle + \sum_{k=1}^N \varepsilon_{E,k} w_\Omega^{(j)} \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{\sigma}_{k,k} | \varphi_{m,\mathcal{S}} \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_{G,k} w_g^{(j)} \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | (\hat{a} \hat{\sigma}_{k+1,k} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{k,k+1}) | \varphi_{m,\mathcal{S}} \rangle \right\}. \quad (2.16)$$

<sup>2</sup>Aqui o índice  $\mathcal{T}$  tem o mesmo significado  $\mathcal{S}$ .

Da equação (2.16) iremos definir novos termos que serão congêneres ao CG, porém cada termo estará restrito ao seu respectivo parâmetros  $X = \{\omega, \Omega, g\}$

$$\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{\omega,j} = \varepsilon_{\omega} w_{\omega}^{(j)} \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{n} | \varphi_{m,\mathcal{S}} \rangle \quad (2.17)$$

$$\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{\Omega,j} = \sum_{k=1}^N \varepsilon_{E,k} w_{\Omega}^{(j)} \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{\sigma}_{k,k} | \varphi_{m,\mathcal{S}} \rangle \quad (2.18)$$

$$\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{g,j} = \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_{G,k} w_g^{(j)} \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | (\hat{a} \hat{\sigma}_{k+1,k} + \hat{a}^{\dagger} \hat{\sigma}_{k,k+1}) | \varphi_{m,\mathcal{S}} \rangle. \quad (2.19)$$

Os coeficiente definidos em (2.17), (2.18) e (2.19) serão calculados em termos dos seus autoestados, a posteriori. Portanto, escreveremos definição mais geral para (2.15) como

$$\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}} = \sum_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{X,j} \sin \left( \eta^{(j)} t + \phi_X^{(j)} \right). \quad (2.20)$$

### 2.1.2 Primeira transformação: eliminando $\hat{H}_1$

A equação obtida para a amplitude de probabilidade  $A_{m,\mathcal{S}}(t)$  em (2.14) está escrita em termos do CG. Em (2.20) a definição encontra-se em função da frequência de modulação  $\eta^{(j)}$  que pode ser considerada como baixa ou alta. Portanto, iremos eliminar os termos de alta frequência que encontrarmos em (2.14), pois estes não vão produzir acoplamento ressonante entre diferentes amplitudes de probabilidades  $A_{m,\mathcal{S}}(t)$ . Abrindo o primeiro somatório, a equação (2.14) assume a forma

$$\begin{aligned} i\dot{A}_{m,\mathcal{T}}(t) &= A_{m,\mathcal{T}}(t) \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}} + \sum_{\mathcal{S} \neq \mathcal{T}} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}})} A_{m,\mathcal{S}}(t) \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{S}} e^{it(\lambda_{n,\mathcal{T}} - \lambda_{n,\mathcal{S}})} A_{n,\mathcal{S}}(t) \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle. \end{aligned} \quad (2.21)$$

A definição obtida em (2.20) será substituída no primeiro termo do LD de (2.21). Ao realizar a substituição e comparando a frequência de modulação  $\eta^{(j)}$  com a frequência da cavidade  $\omega_0$ , dizemos que a frequência de modulação será alta quando  $\eta^{(j)} \geq \omega_0$ ; para denotar a alta frequência usaremos o somatório  $\sum'_j$ . A frequência de modulação será baixa quando  $\eta^{(j)} \leq \omega_0$

e para descrever os termos de baixa frequência de modulação usaremos o somatório  $\sum_j''$ . Assim

$$\begin{aligned}
i\dot{A}_{m,\mathcal{T}}(t) &= A_{m,\mathcal{T}}(t) \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_k^{(j)}\right) \\
&+ A_{m,\mathcal{T}}(t) \sum_j'' \sum_{k=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}\right) \\
&+ \sum_{\mathcal{S} \neq \mathcal{T}} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}})} A_{m,\mathcal{S}}(t) \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{S}} e^{it(\lambda_{n,\mathcal{T}} - \lambda_{n,\mathcal{S}})} A_{n,\mathcal{S}}(t) \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

A equação diferencial para a amplitude de probabilidade  $A_{m,\mathcal{T}}(t)$  (2.22) é composta por quatro termos no LD. No entanto, ao considerarmos que o coeficiente contido no primeiro termo do LD é muito maior que os demais, podemos escrever (2.22) como

$$i\dot{A}_{m,\mathcal{T}}(t) = A_{m,\mathcal{T}}(t) \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_k^{(j)}\right). \tag{2.23}$$

A solução para (2.23) é encontrada no apêndice C. Portanto, propomos o seguinte ansatz para  $A_{m,\mathcal{T}}$

$$\begin{aligned}
A_{m,\mathcal{T}}(t) &= B_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t) \\
&\times \exp \left\{ i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos\left(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}\right) - \cos\left(\phi_X^{(j)}\right) \right] \right\}. \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Em (2.24) o termo  $B_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t)$  é um novo coeficiente dependente do tempo, também visto como amplitude probabilidade. O índice (1) em  $B_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t)$  denota o número de transformações alusivas a  $A_{m,\mathcal{T}}(t)$ , ou em outras palavras, quantas novas soluções foram dadas para a amplitude de probabilidade. Escrevendo (2.22) em função da solução do *ansatz* (2.24), obtemos

$$\begin{aligned}
i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t) &= B_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t) \sum_j'' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}\right) \\
&+ \sum_{\mathcal{S} \neq \mathcal{T}} B_{m,\mathcal{S}}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}})} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}} \\
&\times \exp \left\{ i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m,\mathcal{S},\mathcal{S}}^{X,j} - \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos\left(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}\right) - \cos\left(\phi_X^{(j)}\right) \right] \right\} \\
&+ \exp \left\{ -i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos\left(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}\right) - \cos\left(\phi_X^{(j)}\right) \right] \right\} \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{S}} e^{it(\lambda_{n,\mathcal{T}} - \lambda_{n,\mathcal{S}})} A_{n,\mathcal{S}}(t) \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle. \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Ao comparar (2.25) com (2.22) pode-se perceber a eliminação de um termo de alta frequência. O objetivo é eliminar todos os termos que sejam relativos às rápidas oscilações. Faremos agora a nossa primeira aproximação

$$\sum'_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{|\Gamma_{m,S,S}^{X,j} - \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}|}{\eta^{(j)}} \ll 1. \quad (2.26)$$

A aproximação (2.26) é explicitada no apêndice D, aproximações análogas a essas serão feitas no decorrer do trabalho. Referente ao primeiro termo do LD de (2.25) introduziremos nova definição com o desejo de simplificar a notação da equação. A definição descreve o termo com baixa frequência que não pode ser simplificado no caso geral abordado aqui

$$\mathcal{H}_{m,\mathcal{T},S} = \sum''_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} e^{it(\lambda_{m,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}})} \Gamma_{m,\mathcal{T},S}^{X,j} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}\right). \quad (2.27)$$

Em (2.25) substituiremos o CG e escreveremos a definição feita acima. Após pequenas manipulações escreveremos a equação diferencial para  $B_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t)$  como

$$\begin{aligned} i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t) &= \sum_S \mathcal{H}_{m,\mathcal{T},S} B_{m,S}^{(1)}(t) + \frac{1}{2i} \sum_{S \neq \mathcal{T}} \sum'_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},S}^{X,j} \\ &\times \left\{ e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)})} e^{i\phi_X^{(j)}} - e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)})} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} B_{m,S}^{(1)}(t) \\ &+ \exp \left\{ -i \sum'_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos\left(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}\right) - \cos\left(\phi_X^{(j)}\right) \right] \right\} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_S e^{it(\lambda_{n,\mathcal{T}} - \lambda_{n,S})} A_{n,S}(t) \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 | \varphi_{n,S} \rangle. \end{aligned} \quad (2.28)$$

### 2.1.3 Segunda Transformação: Eliminando termos de $\sum'_j$

Na obtenção da equação (2.28) foi feita uma única aproximação, o que não foi suficiente para o nosso problema, pois ainda pode-se encontrar termos de altas frequências. Novamente buscaremos alternativas para que se possa eliminar os termos indesejados. Para proceder, usaremos um método semelhante ao que fora usado para obtenção de (2.24) por intermédio de *ansatz*. Considerando que o coeficiente da segunda parcela do LD de (2.28) é muito maior que os demais coeficientes, temos

$$\begin{aligned} i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t) &\simeq \frac{1}{2i} \sum_{S \neq \mathcal{T}} \sum'_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},S}^{X,j} \left\{ e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)})} e^{i\phi_X^{(j)}} \right. \\ &\left. - e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)})} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} B_{m,S}^{(1)}(t). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Como esta equação pode ser resolvida aproximadamente (ver apêndice E), propomos o seguinte ansatz para a solução geral

$$B_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t) = B_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) - \frac{1}{2i} \sum_{\mathcal{S} \neq \mathcal{T}} \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{X,j} \left\{ \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} - \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} B_{m,\mathcal{S}}^{(2)}(t). \quad (2.30)$$

Em (2.30) definimos novo coeficiente,  $B_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t)$  que é um segundo nível de solução dado a amplitude  $A_{m,\mathcal{T}}(t)$ . Desejando eliminar os termos com alta oscilação, seguiremos o procedimento padrão, escrevendo nova equação diferencial, agora em termos da amplitude  $B_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t)$ . Para chegar no resultado desejado, vamos substituir (2.30) em (2.28) e assim obtemos

$$\begin{aligned} i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) &= \sum_{\mathcal{S}} \mathcal{H}_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}} B_{m,\mathcal{S}}^{(1)}(t) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{S} \neq \mathcal{T}} \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{X,j} \left\{ \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} - \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} \dot{B}_{m,\mathcal{S}}^{(2)}(t) \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{\mathcal{S} \neq \mathcal{T}} \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{X,j} \\ &\times \left\{ e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})} e^{i\phi_X^{(j)}} - e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} \\ &\times \sum_{\mathcal{R} \neq \mathcal{S}} \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{S},\mathcal{R}}^{X,j} \left\{ \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} - \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} B_{m,\mathcal{R}}^{(2)}(t) \\ &+ \exp \left[ -i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}) - \cos(\phi_X^{(j)}) \right] \right] \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{S}} e^{it(\lambda_n - \lambda_{n,\mathcal{S}})} A_{n,\mathcal{S}}(t) \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle. \end{aligned} \quad (2.31)$$

A equação (2.31) foi obtida por intermédio de um *ansatz*, gerando novo nível de solução para a amplitude de probabilidade. A equação obtida passará por transformações matemáticas, pois ainda contém os termos indesejados relativos à  $\sum_j'$ . Na equação (2.31) será feita a aproximação mais presente em todo o trabalho, o poderoso e conhecido método da *Aproximação de Onda Girante* (termo autóctone da expressão em inglês, Rotating Wave Approximation) (RWA). Todo o detalhamento do método de RWA é visto no apêndice F. Procedendo de acordo com a



metodologia proposta pela RWA consideraremos que  $\left| \Gamma_{m,S,\mathcal{R}\neq\mathcal{S}}^{X,j} \right|$  será muito menor que o argumento da exponencial  $(\lambda_{m,S} - \lambda_{m,\mathcal{R}\neq\mathcal{S}} \pm \eta^{(j)})$ , termos que correspondem a  $q$  e  $W$  introduzidos no apêndice F. Portanto, no limite em que  $q/W \ll 1$  eliminaremos termos de altas frequências e negligenciaremos os *shifts de frequências* (o termo em inglês *Frequency Shift* será escrito no trabalho como *Shift de Frequência*). A segunda aproximação deste trabalho é

$$\frac{1}{2} \sum_S \sum'_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\left| \Gamma_{m,S,\mathcal{R}\neq\mathcal{S}}^{X,j} \right|}{\lambda_{m,S} - \lambda_{m,\mathcal{R}\neq\mathcal{S}} \pm \eta^{(j)}} \ll 1. \quad (2.32)$$

A cada aproximação por meio da RWA alteramos ligeiramente o valor efetivo das auto-frequências de ordem dos *shifts de frequências*. Tais termos terão leve influência sobre o valor ressonante da frequência de modulação. Portanto, na eliminação das altas frequências nós introduzimos erros intrínsecos nos valores efetivos das auto-frequências, que chamamos de shifts de frequência negligenciados (SFN). Assim, o SFN referente a aproximação acima é de ordem de

$$\mathcal{O}(\Delta\nu) \simeq \sum_S \frac{\left( \sum'_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,S,\mathcal{R}\neq\mathcal{S}}^{X,j} \right)^2}{\lambda_{m,S} - \lambda_{m,\mathcal{R}\neq\mathcal{S}} \pm \eta^{(j)}}. \quad (2.33)$$

Com estas aproximações escrevemos nova equação diferencial para a amplitude de probabilidade

$$\begin{aligned} i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) &\simeq \sum_S \mathcal{H}_{m,\mathcal{T},S} B_{m,S}^{(1)}(t) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{S \neq \mathcal{T}} \sum'_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},S}^{X,j} \left\{ \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} \dot{B}_{m,S}^{(2)}(t) + \\ &+ \exp \left[ -i \sum'_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m,\mathcal{T},S}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}) - \cos(\phi_X^{(j)}) \right] \right] \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_S e^{it(\lambda_n - \lambda_{n,S})} A_{n,S}(t) \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 | \varphi_{n,S} \rangle. \end{aligned} \quad (2.34)$$

A equação (2.34) ainda contém termos tácitos, como por exemplo, os relacionados ao Hamiltoniano  $\hat{H}_2$  e derivada de termo já conhecido como  $B_{m,S}^{(2)}(t)$ , fato que nos conduzirá a futuras aproximações e substituições.

## 2.2 Grandes Aproximações

A equação (2.34) é relativa à amplitude de probabilidade  $A_{m,\mathcal{T}}(t)$ , em um segundo nível de solução. Na obtenção da equação (2.34) eliminamos termos relativos aos Hamiltonianos  $\hat{H}_0$  e

$\hat{H}_1$ , o que nos forneceu a solução encontrada na equação (2.24). Também levamos em consideração duas aproximações correntes: a primeira aproximação procedida pela expansão de termo exponencial e a segunda feita pelo método da RWA (vista no apêndice F). Escreveremos de forma resumida as soluções e aproximações encontradas até o momento

$$A_{m,\mathcal{T}}(t) = \left\{ B_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) - \frac{1}{2i} \sum_{\mathcal{S} \neq \mathcal{T}} \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{X,j} \left( \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} - \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right) B_{m,\mathcal{S}}^{(2)}(t) \right\} \\ \times \exp \left\{ i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}) - \cos(\phi_X^{(j)}) \right] \right\}, \quad (2.35)$$

com as aproximações correntes

$$\sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{|\Gamma_{m,\mathcal{S},\mathcal{S}}^{X,j} - \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}|}{\eta^{(j)}}, \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{S}} \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{|\Gamma_{m,\mathcal{S},\mathcal{R} \neq \mathcal{S}}^{X,j}|}{\lambda_{m,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{R} \neq \mathcal{S}} \pm \eta^{(j)}} \ll 1. \quad (2.36)$$

### 2.2.1 Coeficientes de $\hat{H}_2$

Quando nos deparamos com (2.34) encontramos  $\langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle$ , termo que deve ser explicitado para o prosseguimento da solução. Relembrando (2.10) definimos os coeficientes relativos a  $\hat{H}_2$

$$\Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} = \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{a} \hat{\sigma}_{k,k+1} | \varphi_{m+2,\mathcal{S}} \rangle$$

$$L_{k,m+k,\mathcal{T},\mathcal{S}} = \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{a}^k | \varphi_{m+k,\mathcal{S}} \rangle$$

$$\Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* = \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{k+1,k} | \varphi_{m-2,\mathcal{S}} \rangle$$

$$L_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* = \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{a}^{\dagger k} | \varphi_{m-k,\mathcal{S}} \rangle.$$

Ao definir os coeficientes, vamos escrever o último termo do LD de (2.34) em função dos novos coeficientes definidos

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{it(\lambda_{n,\mathcal{T}} - \lambda_{n,\mathcal{S}})} A_{n,\mathcal{S}}(t) \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle = \\ \sum_{k=0}^{N-1} G_k \left\{ \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} A_{m+2,\mathcal{S}}(t) \times e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}})} + \Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* A_{m-2,\mathcal{S}}(t) \right. \\ \left. \times e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}})} \right\} + i\chi \left\{ L_{2,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* A_{m-2,\mathcal{S}}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}})} \right. \\ \left. - L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} A_{m+2,\mathcal{S}}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}})} \right\} + id \left\{ L_{1,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* A_{m-1,\mathcal{S}}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-1,\mathcal{S}})} \right. \\ \left. - L_{1,m+1,\mathcal{T},\mathcal{S}} A_{m+1,\mathcal{S}}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+1,\mathcal{S}})} \right\}. \quad (2.37)$$

Na equação (2.37) os termos do LE estão escritos em função de  $n$ , já no LD os termos são escritos em função de  $m$ , ambos índices expressam o número total de excitações do sistema.

### 2.2.2 Equação Exata para $B_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t)$

Substituindo (2.37) em (2.34) obtemos explicitamente

$$\begin{aligned}
i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) &= \sum_{\mathcal{S}} \mathcal{H}_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}} B_{m,\mathcal{S}}^{(2)}(t) + \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{S} \neq \mathcal{T}} \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{X,j} \\
&\times \left\{ \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} - \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} \dot{B}_{m,\mathcal{S}}^{(2)}(t) \\
&+ \exp \left\{ -i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}) - \cos(\phi_X^{(j)}) \right] \right\} \\
&\times \left\{ \sum_{\mathcal{S}} \sum_{k=0}^{N-1} G_k \left\{ \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} A_{m+2,\mathcal{S}}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}})} \right. \right. \\
&+ \Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* A_{m-2,\mathcal{S}}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}})} \left. \right\} \\
&+ i\chi \left( L_{2,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* A_{m-2,\mathcal{S}}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}})} - L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} A_{m+2,\mathcal{S}}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}})} \right) \\
&+ id \left( L_{1,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* A_{m-1,\mathcal{S}}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-1,\mathcal{S}})} - L_{1,m+1,\mathcal{T},\mathcal{S}} A_{m+1,\mathcal{S}}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+1,\mathcal{S}})} \right) \left. \right\}. \tag{2.38}
\end{aligned}$$

No último termo do LD da equação acima há amplitudes de probabilidade escritas em termos de  $A_{m,\mathcal{S}}(t)$ . No entanto, já conhecemos a solução da amplitude  $A_{m,\mathcal{S}}(t)$ , encontrada em um

primeiro nível de solução. Substituindo  $A_{m,\mathcal{T}}(t)$  em (2.38), obtemos

$$\begin{aligned}
i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) &= \sum_S \mathcal{H}_{m,\mathcal{T},S} B_{m,S}^{(2)}(t) + \frac{1}{2} \sum_{S \neq \mathcal{T}} \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},S}^{X,j} \\
&\times \left\{ \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} - \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} \dot{B}_{m,S}^{(2)}(t) \\
&+ \sum_S \sum_{k=0}^{N-1} G_k \left\{ \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},S} B_{m+2,S}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,S})} \right. \\
&\times \exp \left\{ i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m+2,S,S}^{X,j} - \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}) - \cos(\phi_X^{(j)}) \right] \right\} \\
&+ \Lambda_{k,m,S,\mathcal{T}}^* B_{m-2,S}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S})} \\
&\times \exp \left\{ i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m-2,S,S}^{X,j} - \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}) - \cos(\phi_X^{(j)}) \right] \right\} \left. \right\} \\
&+ i\chi \left\{ L_{2,m,S,\mathcal{T}}^* B_{m-2,S}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S})} \right. \\
&\times \exp \left\{ i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m-2,S,S}^{X,j} - \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}) - \cos(\phi_X^{(j)}) \right] \right\} \\
&- L_{2,m+2,\mathcal{T},S} B_{m+2,S}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,S})} \\
&\times \exp \left\{ i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m+2,S,S}^{X,j} - \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}) - \cos(\phi_X^{(j)}) \right] \right\} \left. \right\} \\
&+ id \left\{ L_{1,m,S,\mathcal{T}}^* B_{m-1,S}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-1,S})} \right. \\
&\times \exp \left\{ i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m-1,S,S}^{X,j} - \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}) - \cos(\phi_X^{(j)}) \right] \right\} \\
&- L_{1,m+1,\mathcal{T},S} B_{m+1,S}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+1,S})} \\
&\times \exp \left\{ i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m+1,S,S}^{X,j} - \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}) - \cos(\phi_X^{(j)}) \right] \right\} \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Devido a (2.39) ser recorrente de substituição da primeira solução de  $A_{m,S}(t)$ , os termos exponenciais acompanhados de  $\sum_j'$  reaparecerão. Então, expandiremos os termos exponenciais que têm argumentos com rápida oscilação, método análogo ao feito em (2.26) (ver apêndice D).

Fazendo uma nova aproximação

$$\left| \frac{\Gamma_{m\pm 1,2,S,S}^{X,j} - \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \right| \ll 1, \tag{2.40}$$

temos

$$\begin{aligned}
i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) &\simeq \sum_{\mathcal{S}} \mathcal{H}_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}} B_{m,\mathcal{S}}^{(2)}(t) + \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{S} \neq \mathcal{T}} \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{X,j} \\
&\times \left\{ \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} - \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} \dot{B}_{m,\mathcal{S}}^{(2)}(t) \\
&+ \sum_{\mathcal{S}} \sum_{k=0}^{N-1} G_k \left\{ \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} B_{m+2,\mathcal{S}}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}})} \right. \\
&+ \Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* B_{m-2,\mathcal{S}}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}})} \left. \right\} \\
&+ i\chi \left\{ L_{2,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* B_{m-2,\mathcal{S}}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}})} \right. \\
&- L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} B_{m+2,\mathcal{S}}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}})} \left. \right\} \\
&+ id \left\{ L_{1,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* B_{m-1,\mathcal{S}}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-1,\mathcal{S}})} \right. \\
&- L_{1,m+1,\mathcal{T},\mathcal{S}} B_{m+1,\mathcal{S}}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+1,\mathcal{S}})} \left. \right\}. \tag{2.41}
\end{aligned}$$

No resultado de (2.41) temos o interesse de eliminar o termo relativo à derivada do coeficiente  $\dot{B}_{m,\mathcal{S}}^{(2)}(t)$ . Portanto, como é conhecido a solução (2.30), podemos escrever  $\dot{B}_{m,\mathcal{S}}^{(2)}(t)$  de forma aproximada, considerando a menor ordem  $\mathcal{O}(\Gamma/\eta^{(j)})$  [consideração análoga ao apêndice F quando se considera a menor ordem de  $(q/W)$ ]

$$\begin{aligned}
\dot{B}_{m,\mathcal{S}}^{(2)}(\text{ordem } 0) &= \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} \mathcal{H}_{m,\mathcal{S},\mathcal{R}} B_{m,\mathcal{R}}^{(2)}(t) \\
&+ \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} \sum_{k=0}^{N-1} G_k \left\{ \Lambda_{k,m+2,\mathcal{S},\mathcal{R}} B_{m+2,\mathcal{S}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{S}} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}})} \right. \\
&+ \Lambda_{k,m,\mathcal{R},\mathcal{S}}^* B_{m-2,\mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{S}} - \lambda_{m-2,\mathcal{R}})} \left. \right\} \\
&+ \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} i\chi \left\{ L_{2,m,\mathcal{R},\mathcal{S}}^* B_{m-2,\mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{S}} - \lambda_{m-2,\mathcal{R}})} \right. \\
&- L_{2,m+2,\mathcal{S},\mathcal{R}} B_{m+2,\mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{S}} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}})} \left. \right\} \\
&+ \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} id \left\{ L_{1,m,\mathcal{R},\mathcal{S}}^* B_{m-1,\mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{S}} - \lambda_{m-1,\mathcal{R}})} \right. \\
&- L_{1,m+1,\mathcal{S},\mathcal{R}} B_{m+1,\mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{S}} - \lambda_{m+1,\mathcal{R}})} \left. \right\}. \tag{2.42}
\end{aligned}$$

Substituindo (2.42) em (2.41) obtemos

$$\begin{aligned}
i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) &= \sum_S \mathcal{H}_{m,\mathcal{T},S} B_{m,S}^{(2)}(t) + \frac{1}{2} \sum_{S \neq \mathcal{T}} \sum'_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},S}^{X,j} \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} \mathcal{H}_{m,S,\mathcal{R}} B_{m,\mathcal{R}}^{(2)}(t) \\
&\times \left\{ \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} - \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{S \neq \mathcal{T}} \sum'_j \Gamma_{m,\mathcal{T},S}^{X,j} \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} \sum_{k=0}^{N-1} G_k \left\{ \Lambda_{k,m+2,S,\mathcal{R}} B_{m+2,S}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m,S} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}})} \right. \\
&+ \Lambda_{k,m,\mathcal{R},S}^* B_{m-2,\mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m,S} - \lambda_{m-2,\mathcal{R}})} \left. \right\} \\
&\times \left\{ \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} - \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{S \neq \mathcal{T}} \sum'_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},S}^{X,j} \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} i\chi \left\{ L_{2,m,\mathcal{R},S}^* B_{m-2,\mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m,S} - \lambda_{m-2,\mathcal{R}})} \right. \\
&- L_{2,m+2,S,\mathcal{R}} B_{m+2,\mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m,S} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}})} \left. \right\} \\
&\times \left\{ \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} - \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{S \neq \mathcal{T}} \sum'_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},S}^{X,j} \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} id \left\{ L_{1,m,\mathcal{R},S}^* B_{m-1,\mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m,S} - \lambda_{m-1,\mathcal{R}})} \right. \\
&- L_{1,m+1,S,\mathcal{R}} B_{m+1,\mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m,S} - \lambda_{m+1,\mathcal{R}})} \left. \right\} \\
&\times \left\{ \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} - \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} \\
&+ \sum_S \sum_{k=0}^{N-1} G_k \left\{ \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},S} B_{m+2,S}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,S})} \right. \\
&+ \Lambda_{k,m,S,\mathcal{T}}^* B_{m-2,S}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S})} \left. \right\} \tag{2.43} \\
&+ i\chi \left\{ L_{2,m,S,\mathcal{T}}^* B_{m-2,S}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S})} - L_{2,m+2,\mathcal{T},S} B_{m+2,S}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,S})} \right\} \\
&+ id \left\{ L_{1,m,S,\mathcal{T}}^* B_{m-1,S}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-1,S})} - L_{1,m+1,\mathcal{T},S} B_{m+1,S}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+1,S})} \right\}.
\end{aligned}$$

Na equação (2.43) é apropriado proceder com a RWA, escrevendo as seguinte aproximação

$$\sum_{S \neq \mathcal{T}} \sum'_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{|\Gamma_{m,\mathcal{T},S}^{X,j}|}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} \pm \eta^{(j)}} \ll 1,$$

e o SFN correspondente

$$\mathcal{O}(\Delta\nu) \simeq \sum_{S \neq \mathcal{T}} \sum'_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{(\Gamma_{m,\mathcal{T},S}^{X,j})^2}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} \pm \eta^{(j)}}.$$

Então reescreveremos (2.43) como

$$\begin{aligned}
i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) &= \sum_S \mathcal{H}_{m,\mathcal{T},S} B_{m,S}^{(2)}(t) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{S \neq \mathcal{T}} \sum_j' \Gamma_{m,\mathcal{T},S}^{X,j} \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} \sum_{k=0}^{N-1} G_k \left\{ \Lambda_{k,m+2,S,\mathcal{R}} B_{m+2,S}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m,S} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}})} \right. \\
&+ \Lambda_{k,m,\mathcal{R},S}^* B_{m-2,\mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m,S} - \lambda_{m-2,\mathcal{R}})} \left. \right\} \\
&\times \left\{ \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} - \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{S \neq \mathcal{T}} \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},S}^{X,j} \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} i\chi \left\{ L_{2,m,\mathcal{R},S}^* B_{m-2,\mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m,S} - \lambda_{m-2,\mathcal{R}})} \right. \\
&- L_{2,m+2,S,\mathcal{R}} B_{m+2,\mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m,S} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}})} \left. \right\} \\
&\times \left\{ \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} - \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{S \neq \mathcal{T}} \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},S}^{X,j} \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} id \left\{ L_{1,m,\mathcal{R},S}^* B_{m-1,\mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m,S} - \lambda_{m-1,\mathcal{R}})} \right. \\
&- L_{1,m+1,S,\mathcal{R}} B_{m+1,\mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m,S} - \lambda_{m+1,\mathcal{R}})} \left. \right\} \\
&\times \left\{ \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} - \frac{[e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)})} - 1]}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} \\
&+ \sum_S \sum_{k=0}^{N-1} G_k \left\{ \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},S} B_{m+2,S}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,S})} \right. \\
&+ \Lambda_{k,m,S,\mathcal{T}}^* B_{m-2,S}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S})} \left. \right\} \tag{2.44} \\
&+ i\chi \left\{ L_{2,m,S,\mathcal{T}}^* B_{m-2,S}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S})} - L_{2,m+2,\mathcal{T},S} B_{m+2,S}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,S})} \right\} \\
&+ id L_{1,m,S,\mathcal{T}}^* \left\{ B_{m-1,S}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-1,S})} - L_{1,m+1,\mathcal{T},S} B_{m+1,S}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+1,S})} \right\}.
\end{aligned}$$

Por fim, para obter equação diferencial exata, substituiremos em (2.44) a solução dada por (2.30), obtendo

$$i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) = \sum_S \mathcal{H}_{m,\mathcal{T},S} B_{m,S}^{(2)}(t) + \sum_{i=2}^7 \text{linha}_i. \tag{2.45}$$

A equação (2.45) expressa a forma mais exata e completa para o segundo nível de solução dada a  $A_{m,\mathcal{T}}(t)$ . No entanto, devido ao extenso tamanho dos termos que compõem (2.45) introduzimos a abreviação de linhas. Cada linha será escrita separadamente na seção seguinte, onde faremos sucessivas aproximações seguindo a RWA. Cada linha foi separada de acordo com o parâmetro  $X = \{G_k, \chi, d\}$ .

### 2.2.3 Aproximações

A equação (2.45) é exata para o *segundo nível* de solução dada a  $A_{m,\mathcal{T}}(t)$ . Porém, para se chegar ao resultado foram feitas substituições das soluções para a amplitude de probabilidade, em primeiro e segundo nível de solução. Também foram consideradas aproximações, por métodos de expansões e pelo método da RWA. Em (2.45) encontra-se termos que remetem às altas frequências. Faremos um conjunto de aproximações na equação (2.45) no desejo de eliminar os termos indesejados. Escreveremos os parâmetros do sistema obedecendo sua forma presumida  $X = X_0 + \varepsilon_X f_X$ , com  $X = \{G_k, \chi, d\}$ . Com isso, os termos referentes a modulação externa serão escritos explicitamente. Devido ao extenso tamanho de (2.45), procederemos as aproximações em linhas separadas. O primeiro termo de (2.45)  $\sum_{\mathcal{S}} \mathcal{H}_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}} B_{m,\mathcal{S}}^{(2)}(t)$  não passará pelos procedimentos de aproximações por conter termos que não podem ser simplificados no caso geral abordado aqui.

#### Linha 2

A parcela da equação (2.45) que denominaremos de *linha 2* é representado por

$$\begin{aligned} \text{linha}_2 = & \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{S} \neq \mathcal{T}} \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{X,j} \left\{ \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} \right. \\ & \left. - \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} \sum_{k=0}^{N-1} G_k \left\{ \Lambda_{k,m+2,\mathcal{S},\mathcal{R}} B_{m+2,\mathcal{S}}^{(2)}(t) \right. \\ & \left. e^{it(\lambda_{m,\mathcal{S}} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}})} + \Lambda_{k,m,\mathcal{R},\mathcal{S}}^* B_{m-2,\mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{S}} - \lambda_{m-2,\mathcal{R}})} \right\}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Na equação (2.46) iremos substituir o parâmetro  $G_k$  de acordo com sua definição

$$G_k = G_{0,k} + \varepsilon_{G,k} f_g,$$

e lembraremos que formato da modulação  $f_g$  é escrito como

$$f_g = \sum_h w_g^{(h)} \sin(\eta^{(h)} t + \phi_g^{(h)}) = \frac{1}{2i} \sum_h w_g^{(h)} \left\{ e^{i\phi_g^{(h)}} e^{it\eta^{(h)}} - e^{-i\phi_g^{(h)}} e^{-it\eta^{(h)}} \right\}.$$



Ao substituírmos em (2.46) as definições escritas acima e procedendo com a RWA obtemos

$$\begin{aligned}
linha_2 \simeq & \frac{1}{i} \frac{1}{2} \sum_S \sum_{\mathcal{R} \neq \mathcal{T}} \sum_j' \sum_{X=\omega, \Omega, g} \Gamma_{m, \mathcal{T}, \mathcal{R}}^{X, j} \left\{ \frac{\sum_{k=0}^{N-1} G_{0, k} \Lambda_{k, m+2, \mathcal{R}, \mathcal{S}} e^{i\phi_X^{(j)}}}{\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{R}} + \eta^{(j)}} e^{it(\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m+2, \mathcal{S}} + \eta^{(j)})} \right. \\
& \times B_{m+2, \mathcal{S}}^{(2)}(t) - \frac{\sum_{k=0}^{N-1} G_{0, k} \Lambda_{k, m, \mathcal{S}, \mathcal{R}}^* e^{-i\phi_X^{(j)}}}{\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{R}} - \eta^{(j)}} e^{it(\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m-2, \mathcal{S}} - \eta^{(j)})} B_{m-2, \mathcal{S}}^{(2)}(t) \left. \right\} \\
& + \frac{1}{4} \sum_{\mathcal{R}} \sum_j w_g^{(j)} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_{G, k} \sum_{\mathcal{S} \neq \mathcal{T}} \sum_h' \sum_{X=\omega, \Omega, g} \Gamma_{m, \mathcal{T}, \mathcal{S}}^{X, j} \left\{ \frac{e^{i\phi_X^{(h)}}}{\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{S}} + \eta^{(h)}} \right. \\
& - \frac{e^{-i\phi_X^{(h)}}}{\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{S}} - \eta^{(h)}} \left. \right\} \left\{ \Lambda_{k, m+2, \mathcal{S}, \mathcal{R}} B_{m+2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{i\phi_g^{(j)}} e^{it(\lambda_{m, \mathcal{S}} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}} + \eta^{(j)})} \right. \\
& \left. - \Lambda_{k, m, \mathcal{R}, \mathcal{S}}^* B_{m-2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{-i\phi_g^{(j)}} e^{it(\lambda_{m, \mathcal{S}} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}} - \eta^{(j)})} \right\}. \tag{2.47}
\end{aligned}$$

O resultado encontrado em (2.47) é obtido quando levamos em consideração as aproximações adicionais<sup>3</sup>

$$\frac{\sum_{k=0}^{N-1} G_{0, k} \Lambda_{k, m+2, \mathcal{S}, \mathcal{R}}}{\lambda_{m, \mathcal{S}} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}}}, \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_{G, k} \Lambda_{k, m, \mathcal{R}, \mathcal{S}}^*}{\lambda_{m, \mathcal{S}} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}} + \eta^{(h)}} \lesssim 1. \tag{2.48}$$

O mecanismo utilizado na obtenção de (2.47) e das linhas que serão aproximadas a seguir pode ser visto no apêndice G.

### Linha 3

A equação que representa a *linha 3* de (2.45) é

$$\begin{aligned}
linha_3 = & \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{S} \neq \mathcal{T}} \sum_j' \sum_{X=\omega, \Omega, g} \Gamma_{m, \mathcal{T}, \mathcal{S}}^{X, j} \left\{ \frac{e^{it(\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{S}} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{S}} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} \right. \\
& - \frac{e^{it(\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{S}} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{S}} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \left. \right\} \left\{ \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} i\chi L_{2, m, \mathcal{R}, \mathcal{S}}^* B_{m-2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) \right. \\
& \left. \times e^{it(\lambda_{m, \mathcal{S}} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}})} - L_{2, m+2, \mathcal{S}, \mathcal{R}} B_{m+2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m, \mathcal{S}} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}})} \right\}. \tag{2.49}
\end{aligned}$$

Com as aproximações

$$\frac{\frac{1}{2} L_{2, m+2, \mathcal{S}, \mathcal{R}} \varepsilon_\chi}{\lambda_{m, \mathcal{S}} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}} - \eta^{(h)}}, \frac{\chi_0 L_{2, m+2, \mathcal{S}, \mathcal{R}}}{\lambda_{m, \mathcal{S}} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}}} \lesssim 1, \tag{2.50}$$

<sup>3</sup>Para manter a escrita menos carregada, às vezes omitimos o símbolo do módulo nas desigualdades referentes às aproximações. Lembramos ao leitor que ao aplicar estas fórmulas os módulos devem ser restaurados, o que pode ser feito de maneira imediata.

obtemos

$$\begin{aligned}
linha_3 \simeq & -\frac{1}{2} \sum_{\mathcal{R} \neq \mathcal{T}} \sum'_j \sum_{X=\omega, \Omega, g} \Gamma_{m, \mathcal{T}, \mathcal{R}}^{X, j} \frac{1}{i} \sum_S i \chi_0 \left\{ \frac{L_{2, m, \mathcal{S}, \mathcal{R}}^* e^{-i\phi_X^{(j)}}}{\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{R}} - \eta^{(j)}} e^{it(\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m-2, \mathcal{S}} - \eta^{(j)})} \right. \\
& \times B_{m-2, \mathcal{S}}^{(2)}(t) + \frac{L_{2, m+2, \mathcal{R}, \mathcal{S}} e^{i\phi_X^{(j)}}}{\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{R}} + \eta^{(j)}} e^{it(\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m+2, \mathcal{S}} + \eta^{(j)})} B_{m+2, \mathcal{S}}^{(2)}(t) \left. \right\} \\
& + \frac{1}{4i} \sum_{\mathcal{R}} \sum'_j w_\chi^{(j)} \varepsilon_\chi \sum_{S \neq \mathcal{T}} \sum_{X=\omega, \Omega, g} \sum'_h \Gamma_{m, \mathcal{T}, \mathcal{S}}^{X, h} \left\{ \frac{e^{i\phi_X^{(h)}}}{\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{S}} + \eta^{(h)}} \right. \\
& \left. - \frac{e^{-i\phi_X^{(h)}}}{\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{S}} - \eta^{(h)}} \right\} \left\{ L_{2, m, \mathcal{R}, \mathcal{S}}^* B_{m-2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{-i\phi_X^{(j)}} e^{it(\lambda_{m, \mathcal{S}} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}} - \eta^{(j)})} \right. \\
& \left. + L_{2, m+2, \mathcal{S}, \mathcal{R}} B_{m+2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{i\phi_X^{(j)}} e^{it(\lambda_{m, \mathcal{S}} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}} + \eta^{(j)})} \right\}. \tag{2.51}
\end{aligned}$$

#### Linha 4

Referente à *linha 4* de (2.45) escrevemos

$$\begin{aligned}
linha_4 = & \frac{1}{2} \sum_{S \neq \mathcal{T}} \sum'_j \sum_{X=\omega, \Omega, g} \Gamma_{m, \mathcal{T}, \mathcal{S}}^{X, j} \left\{ \frac{e^{it(\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{S}} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{S}} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} \right. \\
& \left. - \frac{e^{it(\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{S}} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{S}} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} id \left\{ L_{1, m, \mathcal{R}, \mathcal{S}}^* B_{m-1, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m, \mathcal{S}} - \lambda_{m-1, \mathcal{R}})} \right. \\
& \left. - L_{1, m+1, \mathcal{S}, \mathcal{R}} B_{m+1, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m, \mathcal{S}} - \lambda_{m+1, \mathcal{R}})} \right\}. \tag{2.52}
\end{aligned}$$

Como o parâmetro  $d$  representa o termo de bombeio clássico, em nossa análise iremos considerar  $d_0 = 0$ , portanto  $d = \varepsilon_d f_d$ . Escrevemos a aproximação

$$\frac{\frac{1}{2} \varepsilon_d L_{1, m+1, \mathcal{S}, \mathcal{R}}}{\lambda_{m, \mathcal{S}} - \lambda_{m+1, \mathcal{R}} - \eta^{(h)}} \lesssim 1, \tag{2.53}$$

para obter

$$\begin{aligned}
linha_4 \simeq & -\frac{1}{4i} \sum_{\mathcal{R}} \sum'_j w_d^{(j)} \varepsilon_d \sum_{S \neq \mathcal{T}} \sum_{X=\omega, \Omega, g} \sum'_h \Gamma_{m, \mathcal{T}, \mathcal{S}}^{X, h} \left\{ \frac{e^{i\phi_X^{(h)}}}{\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{S}} + \eta^{(h)}} \right. \\
& \left. - \frac{e^{-i\phi_X^{(h)}}}{\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{S}} - \eta^{(h)}} \right\} \left\{ L_{1, m+1, \mathcal{S}, \mathcal{R}} B_{m+1, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{i\phi_d^{(j)}} e^{it(\lambda_{m, \mathcal{S}} - \lambda_{m+1, \mathcal{R}} + \eta^{(j)})} \right. \\
& \left. - L_{1, m, \mathcal{R}, \mathcal{S}}^* B_{m-1, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{-i\phi_d^{(j)}} e^{it(\lambda_{m, \mathcal{S}} - \lambda_{m-1, \mathcal{R}} - \eta^{(j)})} \right\}. \tag{2.54}
\end{aligned}$$



Obtemos equação aproximada para a *linha 5*

$$\begin{aligned}
\text{linha}_5 &\simeq \sum_S \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}})} B_{m+2,\mathcal{S}}^{(2)}(t) \\
&+ \sum_S \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}})} B_{m-2,\mathcal{S}}^{(2)}(t) \\
&+ \frac{i}{2} \sum_S e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}} + \eta^{(j)})} \left\{ - \sum_{k=0}^{N-1} \sum'_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} G_{0,k} \frac{\Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}}}{\eta^{(j)}} \right. \\
&+ \left. \sum_{\mathcal{R}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum'_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} G_{0,k} \frac{\Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{R}} \Gamma_{m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}}}{\lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} \right\} B_{m+2,\mathcal{S}}^{(2)}(t) \\
&+ \frac{i}{2} \sum_S e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{R}} - \eta^{(j)})} \left\{ - \sum_{k=0}^{N-1} \sum'_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} G_{0,k} \frac{\Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j} e^{-i\phi_X^{(j)}}}{\eta^{(j)}} \right. \\
&- \left. \sum_{\mathcal{R}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum'_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} G_{0,k} \frac{\Lambda_{k,m,\mathcal{R},\mathcal{T}}^* \Gamma_{m-2,\mathcal{R},\mathcal{S}}^{X,j} e^{-i\phi_X^{(j)}}}{\lambda_{m-2,\mathcal{R}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}} - \eta^{(j)}} \right\} B_{m-2,\mathcal{S}}^{(2)}(t) \\
&+ \frac{1}{2i} \sum_S \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_{G,k} \sum_j w_g^{(j)} \left\{ - \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} e^{-i\phi_g^{(j)}} e^{-it(\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \eta^{(j)})} B_{m+2,\mathcal{S}}^{(2)}(t) \right. \\
&+ \left. \Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* e^{i\phi_g^{(j)}} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})} B_{m-2,\mathcal{S}}^{(2)}(t) \right\} \\
&+ \frac{1}{2i} \sum_S \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_{G,k} \sum_j w_g^{(j)} \left\{ \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} e^{i\phi_g^{(j)}} e^{-it(\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} - \eta^{(j)})} B_{m+2,\mathcal{S}}^{(2)}(t) \right. \\
&- \left. \Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* e^{-i\phi_g^{(j)}} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})} B_{m-2,\mathcal{S}}^{(2)}(t) \right\}, \tag{2.56}
\end{aligned}$$

onde foi considerado o conjunto de aproximações:

$$\frac{\sum_S \sum_{k=0}^{N-1} \{G_{0,k}, \varepsilon_{G,k}\} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}}} \lesssim 1. \tag{2.57}$$

### Linha 6

A equação que representará a sexta linha de (2.45) é

$$\begin{aligned}
linha_6 = & \sum_S i\chi \left\{ L_{2,m,S,\mathcal{T}}^* e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S})} \left[ B_{m-2,S}^{(2)}(t) \right. \right. \\
& \times \exp \left\{ i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m-2,S,S}^{X,j} - \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}) - \cos(\phi_X^{(j)}) \right] \right\} \\
& - \frac{1}{2i} \sum_{\mathcal{R} \neq S} \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m-2,S,\mathcal{R}}^{X,j} B_{m-2,\mathcal{R}}^{(2)}(t) \\
& \times \left\{ \frac{e^{it(\lambda_{m-2,S} - \lambda_{m-2,\mathcal{R}} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m-2,S} - \lambda_{m-2,\mathcal{R}} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} - \frac{e^{it(\lambda_{m-2,S} - \lambda_{m-2,\mathcal{R}} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m-2,S} - \lambda_{m-2,\mathcal{R}} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} \\
& - L_{2,m+2,\mathcal{T},S} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,S})} \left[ B_{m+2,S}^{(2)}(t) \right. \\
& \times \exp \left[ i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m+2,S,S}^{X,j} - \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}) - \cos(\phi_X^{(j)}) \right] \right] \\
& - \frac{1}{2i} \sum_{\mathcal{R} \neq S} \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m+2,S,\mathcal{R}}^{X,j} B_{m+2,\mathcal{R}}^{(2)}(t) \\
& \times \left. \left. \left\{ \frac{e^{it(\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} - \frac{e^{it(\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} \right] \right\}. \quad (2.58)
\end{aligned}$$

Obteremos (2.58) de forma aproximada

$$\begin{aligned}
linha_6 \simeq & \sum_S i\chi_0 L_{2,m,S,\mathcal{T}}^* e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S})} B_{m-2,S}^{(2)}(t) \\
& - \sum_S i\chi_0 L_{2,m+2,\mathcal{T},S} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,S})} B_{m+2,S}^{(2)}(t) \\
& - \frac{i}{2} \sum_S \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} i\chi_0 e^{-i\phi_X^{(j)}} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S} - \eta^{(j)})} \left\{ \frac{L_{2,m,S,\mathcal{T}}^* \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j} e^{-i\phi_X^{(j)}}}{\eta^{(j)}} \right. \\
& + \left. \sum_{\mathcal{R}} \frac{L_{2,m,\mathcal{R},\mathcal{T}}^* \Gamma_{m-2,\mathcal{R},S}^{X,j}}{\lambda_{m-2,\mathcal{R}} - \lambda_{m-2,S} - \eta^{(j)}} \right\} B_{m-2,S}^{(2)}(t) \\
& + \frac{i}{2} \sum_S \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} i\chi_0 e^{i\phi_X^{(j)}} e^{-it(\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}} - \eta^{(j)})} \left\{ \frac{L_{2,m+2,\mathcal{T},S} \Gamma_{m+2,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} B_{m+2,S}^{(2)}(t) \right. \\
& - \left. \sum_{\mathcal{R}} \frac{L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{R}} \Gamma_{m+2,\mathcal{R},S}^{X,j}}{\lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \lambda_{m+2,S} + \eta^{(j)}} B_{m+2,S}^{(2)}(t) \right\} \\
& + \sum_S i\varepsilon_\chi \frac{1}{2i} \sum_h w_\chi^{(h)} \left\{ e^{i\phi_X^{(h)}} e^{it\eta^{(h)}} - e^{-i\phi_X^{(h)}} e^{-it\eta^{(h)}} \right\} \\
& \times \left\{ L_{2,m,S,\mathcal{T}}^* B_{m-2,S}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S})} - L_{2,m+2,\mathcal{T},S} B_{m+2,S}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,S})} \right\}, \quad (2.59)
\end{aligned}$$

o último resultado sendo obtido quando procedido pelas aproximações

$$\frac{\{\chi_0, \varepsilon_\chi\} L_{2,m,S,\mathcal{T}}^*}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S}} \lesssim 1. \quad (2.60)$$

### Linha 7

Para finalizar o conjunto das grandes aproximações, vamos escrever o termo que representa a última linha de (2.45)

$$\begin{aligned} linha_7 = & i \sum_S d \left\{ L_{1,m,S,\mathcal{T}}^* e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-1,S})} \left[ B_{m-1,S}^{(2)}(t) \right. \right. \\ & \times \exp \left\{ i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m-1,S,S}^{X,j} - \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos \left( \eta^{(j)} t + \phi_X^{(j)} \right) - \cos \left( \phi_X^{(j)} \right) \right] \right\} \\ & - \frac{1}{2i} \sum_{\mathcal{R} \neq S} \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m-1,S,\mathcal{R}}^{X,j} B_{m-1,\mathcal{R}}^{(2)}(t) \\ & \times \left[ \frac{e^{it(\lambda_{m-1,S} - \lambda_{m-1,\mathcal{R}} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m-1,S} - \lambda_{m-1,\mathcal{R}} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} - \frac{e^{it(\lambda_{m-1,S} - \lambda_{m-1,\mathcal{R}} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m-1,S} - \lambda_{m-1,\mathcal{R}} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right] \\ & - L_{1,m+1,\mathcal{T},S} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+1,S})} \left[ B_{m+1,S}^{(2)}(t) \right. \\ & \times \exp \left\{ i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m+1,S,S}^{X,j} - \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos \left( \eta^{(j)} t + \phi_X^{(j)} \right) - \cos \left( \phi_X^{(j)} \right) \right] \right\} \\ & - \frac{1}{2i} \sum_{\mathcal{R} \neq S} \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m+1,S,\mathcal{R}}^{X,j} B_{m+1,\mathcal{R}}^{(2)}(t) \\ & \times \left. \left. \left[ \frac{e^{it(\lambda_{m+1,S} - \lambda_{m+1,\mathcal{R}} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m+1,S} - \lambda_{m+1,\mathcal{R}} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} - \frac{e^{it(\lambda_{m+1,S} - \lambda_{m+1,\mathcal{R}} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m+1,S} - \lambda_{m+1,\mathcal{R}} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right] \right] \right\}. \quad (2.61) \end{aligned}$$

Impondo as condições

$$\frac{\varepsilon_d L_{1,m+1,\mathcal{T},S}}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+1,S}} \lesssim 1. \quad (2.62)$$

Obtemos

$$\begin{aligned} linha_7 \simeq & \frac{1}{2} \sum_S \varepsilon_d \sum_j w_d^{(j)} \left\{ \left\{ L_{1,m,S,\mathcal{T}}^* B_{m-1,S}^{(2)} e^{i\phi_d^{(j)}} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-1,S} + \eta^{(j)})} \right. \right. \\ & + L_{1,m+1,\mathcal{T},S} B_{m+1,S}^{(2)}(t) e^{-i\phi_d^{(h)}} e^{-it(\lambda_{m+1,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \eta^{(j)})} \left. \right\} \\ & - \left\{ L_{1,m,S,\mathcal{T}}^* B_{m-1,S}^{(2)} e^{-i\phi_d^{(h)}} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-1,S} - \eta^{(j)})} \right. \\ & \left. \left. + L_{1,m+1,\mathcal{T},S} B_{m+1,S}^{(2)}(t) e^{i\phi_d^{(j)}} e^{-it(\lambda_{m+1,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}} - \eta^{(j)})} \right\} \right\}. \quad (2.63) \end{aligned}$$

### 2.2.4 Combinando Todas as Linhas

A forma completa encontrada para a amplitude de probabilidade  $B_{m,\mathcal{T}}(t)$  é representada por (2.45). Na equação encontram-se termos de altas frequências, fato que nos levou a realizar conjuntos de aproximações. Consideramos (2.45) em linhas e a cada linha realizamos as aproximações cabíveis. Assim, obtemos as equações (2.47), (2.51), (2.54), (2.56), (2.59) e (2.63). Para escrever a forma aproximada referente à equação (2.45) devemos somar todas as equações relativas às linhas aproximadas. Para realizar a soma, iremos considerar as equações que têm os mesmos parâmetros do sistema  $X = \{G_k, \chi, d\}$ , operaremos as equações: (2.47) + (2.56), (2.51) + (2.59), (2.54) + (2.63). Cada operação de soma entre as linhas será seguida de aproximações, as mesmas utilizadas na obtenção das linhas aproximadas. Quando somamos todas as linhas e realizamos todas aproximações definimos um novo termo, com o intuito de simplificar a equação

$$\varepsilon_X^{(j)} \equiv \varepsilon_X w_X^{(j)} e^{i\phi_X^{(j)}}, \quad X = \{\omega, \Omega, g, \chi, d\} \quad (2.64)$$

e

$$\varepsilon_{G,k}^{(j)} \equiv \varepsilon_{G,k} w_g^{(j)} e^{i\phi_g^{(j)}}. \quad (2.65)$$

As definições acima englobam o peso, profundidade e a fase do respectivo parâmetro modulado. Portanto, a forma aproximada de (2.45) torna-se

$$\begin{aligned} i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) &\simeq \sum_S \mathcal{H}_{m,\mathcal{T},S} B_{m,S}^{(2)}(t) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_S \sum_j \varepsilon_d^{(j)} L_{1,m,S,\mathcal{T}}^* e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-1,S} + \eta^{(j)})} B_{m-1,S}^{(2)} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_S \sum_j \varepsilon_d^{(j)*} L_{1,m+1,\mathcal{T},S}(t) e^{-it(\lambda_{m+1,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \eta^{(j)})} B_{m+1,S}^{(2)} \\ &+ \sum_S e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,S})} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},S} \left[ G_{0,k} + \frac{i}{2} \sum_j \varepsilon_{G,k}^{(j)*} e^{-it\eta^{(j)}} \right] \right. \\ &+ \left. L_{2,m+2,\mathcal{T},S} \left[ \frac{1}{2} \sum_j \varepsilon_\chi^{(j)*} e^{-it\eta^{(j)}} - i\chi_0 \right] \right\} B_{m+2,S}^{(2)}(t) \\ &+ \sum_S e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S})} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda_{k,m,S,\mathcal{T}}^* \left[ G_{0,k} - \frac{i}{2} \sum_j \varepsilon_{G,k}^{(j)} e^{it\eta^{(j)}} \right] \right. \\ &+ \left. L_{2,m,S,\mathcal{T}}^* \left[ \frac{1}{2} \sum_j \varepsilon_\chi^{(j)} e^{it\eta^{(j)}} + i\chi_0 \right] \right\} B_{m-2,S}^{(2)}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_S \sum'_j e^{-it(\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}} - \eta^{(j)})} \left\{ \left\{ \sum_{\mathcal{R}} \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m+2,\mathcal{R},S}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}}}{\lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \lambda_{m+2,S} + \eta^{(j)}} \right. \right. \\
& \times \left[ i \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{R}} + \chi_0 L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{R}} \right] - \frac{\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}}}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} + \eta^{(j)}} \\
& \times \left. \left[ i \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{R},S} + \chi_0 L_{2,m+2,\mathcal{R},S} \right] \right\} - \varepsilon_{\chi}^{(j)} L_{2,m+2,\mathcal{T},S} \\
& - i \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_{G,k}^{(j)} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},S} \left. \right\} B_{m+2,S}^{(2)}(t) \\
& + \frac{1}{2} \sum_S \sum'_j e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{R}} - \eta^{(j)})} \left\{ \left\{ \sum_{\mathcal{R}} \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m-2,\mathcal{R},S}^{X,j} e^{-i\phi_X^{(j)}}}{\lambda_{m-2,\mathcal{R}} - \lambda_{m-2,S} - \eta^{(j)}} \right. \right. \\
& \times \left[ -i \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \Lambda_{k,m,\mathcal{R},\mathcal{T}}^* + \chi_0 L_{2,m,\mathcal{R},\mathcal{T}}^* \right] + \frac{\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{X,j} e^{-i\phi_X^{(j)}}}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} - \eta^{(j)}} \\
& \times \left. \left[ i \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \Lambda_{k,m,S,\mathcal{R}}^* - \chi_0 L_{2,m,S,\mathcal{R}}^* \right] \right\} + i \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_{G,k}^{(j)*} \Lambda_{k,m,S,\mathcal{T}}^* \\
& - \varepsilon_{\chi}^{(j)*} L_{2,m,S,\mathcal{T}}^* \left. \right\} B_{m-2,S}^{(2)}(t) \\
& - \frac{1}{2} \sum_S \sum_j \varepsilon_d^{(j)} L_{1,m+1,\mathcal{T},S}(t) e^{-it(\lambda_{m+1,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}} - \eta^{(j)})} B_{m+1,S}^{(2)} \\
& - \frac{1}{2} \sum_S \sum_j \varepsilon_d^{(j)*} L_{1,m,S,\mathcal{T}}^* e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-1,S} - \eta^{(j)})} B_{m-1,S}^{(2)}. \tag{2.66}
\end{aligned}$$

### 2.2.5 Eliminando os Shifts de Frequência

O resultado de (2.66) ainda será reescrito, mas grande parte da equação são termos que não serão mais simplificados. Para remover os termos que oscilam rapidamente reescrevemos (2.66)

$$\begin{aligned}
i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) & = \frac{1}{2} \sum_S \sum_j \varepsilon_d^{(j)*} L_{1,m+1,\mathcal{T},S}(t) e^{-it(\lambda_{m+1,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \eta^{(j)})} B_{m+1,S}^{(2)} \\
& + \frac{1}{2} \sum_S \sum_j \varepsilon_d^{(j)} L_{1,m,S,\mathcal{T}}^* e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-1,S} + \eta^{(j)})} B_{m-1,S}^{(2)} + \sum_{m,S} \mathcal{W}_{m,\mathcal{T},S}(t) B_{m,S}^{(2)}(t), \tag{2.67}
\end{aligned}$$



onde  $\sum_{m,S} \mathcal{W}_{m,\mathcal{T},S}(t) B_{m,S}^{(2)}(t)$  representa os demais termos de (2.66). Interessando em possíveis aproximações, escreveremos o conjunto de soluções aproximadas para  $B_{m+1,S}^{(2)}$

$$\begin{aligned}
 B_{m+1,S}^{(2)}(t) &\simeq B_{m+1,S}^{(2c)} e^{it\alpha_4} + \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{R}} \sum_j \frac{\varepsilon_d^{(j)*} L_{1,m+2,S,\mathcal{R}}}{\lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \lambda_{m+1,S} + \eta^{(j)}} \\
 &\times B_{m+1,\mathcal{R}}^{(2)}(t) \left\{ e^{-it(\lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \lambda_{m+1,S} + \eta^{(j)})} - e^{it\alpha_5} \right\} \\
 &- \frac{1}{2} \sum_S \sum_j \frac{\varepsilon_d^{(j)} L_{1,m+1,\mathcal{R},S}^*}{(\lambda_{m+1,S} - \lambda_{m,\mathcal{R}} + \eta^{(j)})} \left\{ e^{it(\lambda_{m+1,S} - \lambda_{m,\mathcal{R}} + \eta^{(j)})} - e^{it\alpha_6} \right\} B_{m,\mathcal{R}}^{(2)}(t) \\
 &- i \int dt' \sum_{m,\mathcal{R}} \mathcal{W}_{m+1,n,S,\mathcal{R}}(t) B_{m,\mathcal{R}}^{(2)}(t'). \tag{2.68}
 \end{aligned}$$

Para obter  $B_{m-1,S}^{(2)}(t)$  basta a substituição  $m \rightarrow m - 2$ . A metodologia utilizada na obtenção de (2.68) é demonstrada de forma completa no apêndice H. Nas equações acima dizemos que o termo  $B_{m+1,S}^{(2c)}$  é constante sob o segundo nível de solução dado à amplitude de probabilidade. Já os termos representados por  $\alpha_i$  são algumas constantes de pequena ordem e que serão canceladas no final, portanto não as especificamos. Substituiremos (2.68) em (2.67), mantendo somente os termos dependentes do tempo e, procedendo com aproximações que seguem o padrão RWA, obtemos

$$\begin{aligned}
 i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) &= \frac{1}{4} \sum_j \left| \varepsilon_d^{(j)} \right| \sum_S \left[ \frac{|L_{1,m,S,\mathcal{T}}|^2}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-1,S} + \eta^{(j)}} - \frac{|L_{1,m+1,\mathcal{T},S}(t)|^2}{\lambda_{m+1,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \eta^{(j)}} \right] B_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) \\
 &+ \sum_{m,S} \mathcal{W}_{m,\mathcal{T},S}(t) B_{m,S}^{(2)}(t). \tag{2.69}
 \end{aligned}$$

A aproximação usada na obtenção da equação acima é

$$\frac{\sum_j \varepsilon_d^{(j)*} L_{1,m+1,\mathcal{T},S}}{\lambda_{m+1,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \eta^{(j)}} \ll 1. \tag{2.70}$$

Na equação (2.69) encontramos na primeira parcela do LD termos que são independentes do tempo, com unidade de frequência, o que nos leva a definir um *shift de ressonância*

$$\nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} = \frac{1}{4} \sum_j \left| \varepsilon_d^{(j)} \right| \sum_S \left[ \frac{|L_{1,m,S,\mathcal{T}}|^2}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-1,S} + \eta^{(j)}} - \frac{|L_{1,m+1,\mathcal{T},S}|^2}{\lambda_{m+1,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \eta^{(j)}} \right], \tag{2.71}$$

resultado oriundo das aproximações feitas pela RWA e que quando substituído em (2.69) nos fornecerá

$$i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) = \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} B_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) + \sum_{m,S} \mathcal{W}_{m,\mathcal{T},S}(t) B_{m,S}^{(2)}(t). \tag{2.72}$$

Neste momento definiremos nova amplitude de probabilidade, escrita em um terceiro nível de solução para a amplitude  $A_{m,\mathcal{T}}(t)$

$$B_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) = e^{-it\nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)}} B_{m,\mathcal{T}}^{(3)}(t). \quad (2.73)$$

Substituindo (2.73) em (2.72), chegamos em

$$i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(3)}(t) = \sum_{m,\mathcal{S}} \mathcal{W}_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}(t) B_{m,\mathcal{S}}^{(2)}(t) e^{it\nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)}}, \quad (2.74)$$

a equação (2.74) contém a definição feita previamente quando sintetizamos (2.66) em (2.67).

Substituído  $\mathcal{W}_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}(t)$  obtemos

$$\begin{aligned} i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(3)}(t) &= \sum_{\mathcal{S}} e^{-it(\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \nu_{m+2,\mathcal{S}}^{(1)} - \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)})} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \left\{ G_{0,k} + \frac{i}{2} \sum_j \varepsilon_{G,k}^{(j)*} e^{-it\eta^{(j)}} \right\} \right. \\ &\quad \left. + L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_j \varepsilon_{\chi}^{(j)*} e^{-it\eta^{(j)}} - i\chi_0 \right\} \right\} B_{m+2,\mathcal{S}}^{(3)}(t) \\ &\quad + \sum_{\mathcal{S}} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}} - \nu_{m-2,\mathcal{S}}^{(1)} + \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)})} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* \left\{ G_{0,k} - \frac{i}{2} \sum_j \varepsilon_{G,k}^{(j)} e^{it\eta^{(j)}} \right\} \right. \\ &\quad \left. + L_{2,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* \left\{ \frac{1}{2} \sum_j \varepsilon_{\chi}^{(j)} e^{it\eta^{(j)}} + i\chi_0 \right\} \right\} B_{m-2,\mathcal{S}}^{(3)}(t) \\ &\quad + \sum_{m,\mathcal{S}} \mathcal{P}_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}(t) B_{m,\mathcal{T}}^{(3)}(t), \end{aligned} \quad (2.75)$$

onde é definido que

$$\begin{aligned}
\sum_{m,S} \mathcal{P}_{m,\mathcal{T},S}(t) B_{m,\mathcal{T}}^{(3)}(t) &= \sum_S \mathcal{H}_{m,\mathcal{T},S} B_{m,S}^{(3)}(t) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_S \sum_j' e^{-it(\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \nu_{m+2,S}^{(1)} - \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} - \eta^{(j)})} \left\{ \sum_{\mathcal{R}} \sum_{X=\omega,\Omega,g} \right. \\
&\times \left\{ \frac{\Gamma_{m+2,\mathcal{R},S}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}}}{\lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \lambda_{m+2,S} + \eta^{(j)}} \left[ i \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{R}} + \chi_0 L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{R}} \right] \right. \\
&- \frac{\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}}}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} + \eta^{(j)}} \left[ i \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{R},S} + \chi_0 L_{2,m+2,\mathcal{R},S} \right] \left. \right\} \\
&- \varepsilon_{\chi}^{(j)} L_{2,m+2,\mathcal{T},S} - i \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_{G,k}^{(j)} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},S} \left. \right\} B_{m+2,S}^{(3)}(t) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_S \sum_j' e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S} - \nu_{m-2,S}^{(1)} + \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} - \eta^{(j)})} \left\{ \sum_{\mathcal{R}} \sum_{X=\omega,\Omega,g} \right. \\
&\times \left\{ \frac{\Gamma_{m-2,\mathcal{R},S}^{X,j} e^{-i\phi_X^{(j)}}}{\lambda_{m-2,\mathcal{R}} - \lambda_{m-2,S} - \eta^{(j)}} \left[ -i \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \Lambda_{k,m,\mathcal{R},\mathcal{T}}^* + \chi_0 L_{2,m,\mathcal{R},\mathcal{T}}^* \right] \right. \\
&+ \frac{\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{X,j} e^{-i\phi_X^{(j)}}}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} - \eta^{(j)}} \left[ i \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \Lambda_{k,m,S,\mathcal{R}}^* - \chi_0 L_{2,m,S,\mathcal{R}}^* \right] \left. \right\} \\
&+ i \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_{G,k}^{(j)*} \Lambda_{k,m,S,\mathcal{T}}^* - \varepsilon_{\chi}^{(j)*} L_{2,m,S,\mathcal{T}}^* \left. \right\} B_{m-2,S}^{(3)}(t) \tag{2.76} \\
&- \frac{1}{2} \sum_S \sum_j \varepsilon_d^{(j)} L_{1,m+1,\mathcal{T},S}(t) e^{-it(\lambda_{m+1,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \nu_{m+1,S}^{(1)} - \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} - \eta^{(j)})} B_{m,S}^{(3)}(t) \\
&- \frac{1}{2} \sum_S \sum_j \varepsilon_d^{(j)*} L_{1,m,S,\mathcal{T}}^* e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-1,S} - \nu_{m-1,S}^{(1)} + \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} - \eta^{(j)})} B_{m,S}^{(3)}(t).
\end{aligned}$$

Resolveremos a equação (2.75) pelo mesmo método usado em (2.67). Escreveremos as soluções referentes a  $B_{m+2,S}^{(3)}(t)$

$$\begin{aligned}
B_{m+2,S}^{(3)}(t) &= B_{m+2,S}^{(3c)}(t) e^{it\alpha_6} + \sum_{\mathcal{R}} \left\{ \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda_{k,m+4,S,\mathcal{R}} G_{0,k} - i L_{2,m+4,S,\mathcal{R}} \chi_0 \right\} \right. \\
&\times \frac{e^{-it(\lambda_{m+4,\mathcal{R}} - \lambda_{m+2,S} + \nu_{m+4,\mathcal{R}}^{(1)} - \nu_{m+2,S}^{(1)} + \eta^{(j)})} - e^{it\alpha_7}}{\lambda_{m+4,\mathcal{R}} - \lambda_{m+2,S} + \nu_{m+4,\mathcal{R}}^{(1)} - \nu_{m+2,S}^{(1)}} + \frac{1}{2} \sum_j \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} i \Lambda_{k,m+4,S,\mathcal{R}} \varepsilon_{G,k}^{(j)*} \right. \\
&+ \left. L_{2,m+4,S,\mathcal{R}} \varepsilon_{\chi}^{(j)*} \right\} \frac{e^{-it(\lambda_{m+4,\mathcal{R}} - \lambda_{m+2,S} + \nu_{m+4,\mathcal{R}}^{(1)} - \nu_{m+2,S}^{(1)} + \eta^{(j)})} - e^{it\alpha_8}}{\lambda_{m+4,\mathcal{R}} - \lambda_{m+2,S} + \nu_{m+4,\mathcal{R}}^{(1)} - \nu_{m+2,S}^{(1)} + \eta^{(j)}} \left. \right\} B_{m+4,\mathcal{R}}^{(3)}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\mathcal{R}} \left\{ \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{R},S}^* G_{0,k} + iL_{2,m+2,\mathcal{R},S}^* \chi_0 \right\} \right. \\
& \left. \frac{e^{it(\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m,\mathcal{R}} - \nu_{m,\mathcal{R}}^{(1)} + \nu_{m+2,S}^{(1)})} - e^{it\alpha_9}}{\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m,\mathcal{R}} - \nu_{m,\mathcal{R}}^{(1)} + \nu_{m+2,S}^{(1)}} + \frac{1}{2} \sum_j \left\{ L_{2,m+2,\mathcal{R},S}^* \varepsilon_{\chi}^{(j)} \right. \right. \\
& \left. \left. - i \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{R},S}^* \varepsilon_{G,k}^{(j)} \right\} \frac{e^{it(\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m,\mathcal{R}} - \nu_{m,\mathcal{R}}^{(1)} + \nu_{m+2,S}^{(1)} + \eta^{(j)})} - e^{it\alpha_{10}}}{\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m,\mathcal{R}} - \nu_{m,\mathcal{R}}^{(1)} + \nu_{m+2,S}^{(1)} + \eta^{(j)}} \right\} B_{m,\mathcal{R}}^{(3)}(t) \\
& - \int dt' \sum_{m,\mathcal{R}} \mathcal{P}_{m,S,\mathcal{R}}(t') B_{m,\mathcal{R}}^{(3)}(t'). \tag{2.77}
\end{aligned}$$

Para obter  $B_{m-2,S}^{(3)}(t)$  basta levar  $m \rightarrow m - 4$ . Em (2.77) o termo  $B_{m+2,S}^{(3c)}(t)$  é constante no terceiro nível de solução e todos  $\alpha_i$  serão irrelevantes devido a sua ordem de grandeza e porque se cancelam no final. Em (2.75) usaremos o resultado obtido em (2.77), em seguida procederemos com algumas aproximações e manipulações. Portanto, encontraremos nova equação diferencial para a amplitude de probabilidade, apresentada em terceiro nível de solução. Temos

$$i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(3)}(t) = \nu_{m,\mathcal{T}}^{(2)} B_{m,\mathcal{T}}^{(3)}(t) + \sum_{m,S} \mathcal{P}_{m,\mathcal{T},S}(t) B_{m,S}^{(3)}(t), \tag{2.78}$$

resultado obtido quando consideradas as seguintes aproximações

$$\frac{\sum_{k=0}^{N-1} \Lambda_{k,m,S,\mathcal{T}}^* G_{0,k} + iL_{2,m,S,\mathcal{T}}^* \chi_0}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S} - \nu_{m-2,S}^{(1)} + \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)}}, \frac{L_{2,m,S,\mathcal{T}}^* \varepsilon_{\chi}^{(j)} - i \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda_{k,m,S,\mathcal{T}}^* \varepsilon_{G,k}^{(j)}}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S} + \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} - \nu_{m-2,S}^{(1)} + \eta^{(j)}} \ll 1. \tag{2.79}$$

Em (2.78) aparece  $\nu_{m,\mathcal{T}}^{(2)}$  também chamado de *shift de ressonância* em segundo nível de definição. Sua forma explícita é

$$\begin{aligned}
\nu_{m,\mathcal{T}}^{(2)} \equiv & \sum_S \left\{ \frac{\left| \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda_{k,m,S,\mathcal{T}} G_{0,k} - iL_{2,m,S,\mathcal{T}} \chi_0 \right|^2}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S} + \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} - \nu_{m-2,S}^{(1)}} \right. \\
& - \frac{\left| \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},S} G_{0,k} - iL_{2,m+2,\mathcal{T},S} \chi_0 \right|^2}{\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \nu_{m+2,S}^{(1)} - \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)}} \\
& + \frac{1}{4} \sum_j \left\{ \frac{\left| \sum_{k=0}^{N-1} i\Lambda_{k,m,S,\mathcal{T}} \varepsilon_{G,k}^{(j)*} + L_{2,m,S,\mathcal{T}} \varepsilon_{\chi}^{(j)*} \right|^2}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S} + \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} - \nu_{m-2,S}^{(1)} + \eta^{(j)}} \right. \\
& \left. - \frac{\left| \sum_{k=0}^{N-1} i\Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},S} \varepsilon_{G,k}^{(j)*} + L_{2,m+2,\mathcal{T},S} \varepsilon_{\chi}^{(j)*} \right|^2}{\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}} - \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} + \nu_{m+2,S}^{(1)} + \eta^{(j)}} \right\} \left. \right\}. \tag{2.80}
\end{aligned}$$

Definiremos nova amplitude de probabilidade correspondente a  $B_{m,\mathcal{T}}^{(3)}(t)$

$$B_{m,\mathcal{T}}^{(3)}(t) = e^{-it\nu_{m,\mathcal{T}}^{(2)}} b_{m,\mathcal{T}}, \quad (2.81)$$

e ao substituir (2.81) em (2.78) obteremos

$$i\dot{b}_{m,\mathcal{T}} = \sum_{m,\mathcal{S}} \mathcal{P}_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}(t) B_{m,\mathcal{S}}^{(3)}(t) e^{it\nu_{m,\mathcal{T}}^{(2)}}. \quad (2.82)$$

Substituiremos em (2.82) o termo explícito de (2.76) e em seguida usamos nova amplitude de probabilidade  $B_{m,\mathcal{S}}^{(2)}(t) = e^{-it(\nu_{m,\mathcal{S}}^{(1)} + \nu_{m,\mathcal{S}}^{(2)})} b_{m,\mathcal{S}}(t)$ . Portanto, a equação final para amplitude de probabilidade será escrita como

$$\begin{aligned} \dot{b}_{m,\mathcal{T}} = & -i \sum_{\mathcal{S}} \sum_j'' \sum_{X=\omega,\Omega,g} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{S}})} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{X,j} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}\right) b_{m,\mathcal{S}}(t) \\ & + \sum_{\mathcal{S}} \sum_j' \Theta_{m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2,\mathcal{S}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \eta^{(j)})} b_{m+2,\mathcal{S}}(t) \\ & - \sum_{\mathcal{S}} \sum_j' \Theta_{m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* e^{it(\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \tilde{\lambda}_{m-2,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})} b_{m-2,\mathcal{S}}(t) \\ & + \frac{i}{2} \sum_j \sum_{\mathcal{S}} \left\{ \varepsilon_d^{(j)} L_{1,m+1,\mathcal{T},\mathcal{S}}(t) e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+1,\mathcal{S}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \eta^{(j)})} b_{m+1,\mathcal{S}}(t) \right. \\ & \left. + \varepsilon_d^{(j)*} L_{1,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* e^{it(\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \tilde{\lambda}_{m-1,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})} b_{m-1,\mathcal{S}}(t) \right\}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

A equação obtida (2.83) é o resultado principal deste capítulo e um dos mais importantes do trabalho. Em sua obtenção consideramos a modulação temporal de todos os parâmetros do sistema e procedemos com sucessivas aproximações. A equação (2.83) descreve toda a dinâmica do sistema (átomo-campo interagindo em cavidade) usando a base dos EV. Em (2.83) obtemos nos argumentos exponenciais *autovalores corrigidos*, que aparecem devido a aproximações realizadas e que serão escritos logo mais. Também definimos os coeficientes de acoplamentos, termos independentes do tempo que fornecem valores para a taxa de acoplamento entre os EV. A equação (2.83) servirá como equação *piloto* e poderemos simplificá-las ainda mais de acordo com os possíveis cenários físicos. Em particular, vamos estudar os regimes de fácil implementação experimental: *ressonante* e *dispersivo* (em relação à dissintonia entre as frequências não-perturbadas

dos átomos e da cavidade). O coeficiente de acoplamento é dado por

$$\begin{aligned} \Theta_{m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} = & \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{R}} \left\{ \sum_{X=\omega,\Omega,g} \left( \frac{\sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{R}} - i\chi_0 L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{R}}}{\lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} \right) \Gamma_{m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}} \right. \\ & \left. - \frac{\sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}} - i\chi_0 L_{2,m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}}}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} + \eta^{(j)}} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}} \right\} \\ & - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_{G,k}^{(j)} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} - i\varepsilon_{\chi}^{(j)} L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Os autovalores corrigidos são definidos por

$$\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} \equiv \lambda_{m,\mathcal{T}} + \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} + \nu_{m,\mathcal{T}}^{(2)}, \quad (2.85)$$

ou seja, os shifts de ressonância são de suma importância para o ajuste fino da frequência ressonante de modulação.

No próximo capítulo aplicaremos a equação (2.83) para o caso de um único qubit interagindo com um modo da cavidade, como acontece no caso mais simples e marcante de EDQc. Os coeficientes definidos neste capítulo serão calculados nos apêndices e indicados no desenvolvimento do trabalho, o que possibilitará dar valores às taxas de acoplamento e autovalores corrigidos. Assim, o próximo capítulo será de análises físicas usando o ferramentário obtido no atual capítulo.

# Capítulo 3

## Regime dispersivo: ECD e similares

Neste capítulo consideraremos que o Hamiltoniano (2.7) tratará o caso mais fundamental  $N = 1$ , quando consideramos um único *qubit* interagindo com o campo. A simples interação entre a luz e a matéria estará sob condições não-estacionárias, pois consideramos que todos os parâmetros do sistema  $X = \{\omega, \Omega, g, \chi, d\}$  são elementos com pequenas modulações temporais, prescritas externamente pelas funções  $f_X$ . A motivação para considerar o sistema não-estacionário para um único *qubit* é baseada no desenvolvimento da Eletrodinâmica Quântica de Circuitos (EDQc) [37–41], área que estuda a interação luz-matéria, considerando um átomo artificial acoplado a um ressonador unidimensional de linha de transmissão (cavidade). A EDQc é implementada em um ambiente de estado sólido com alto grau de controle dos componentes, o que permite que as propriedades do sistema como a cavidade e *qubit* sejam modulados temporalmente por campos *elétrico* ou *magnético* externos ou por um bombeio clássico de *luz coerente*, como exemplificado no modelo apresentado pela figura 1.1.

O controle sobre os parâmetros do sistema nos possibilita modular a frequência  $\eta^{(j)}$  de acordo com as frequências ressonantes do sistema composto átomo-campo. As aplicações recorrentes ao sistema adotado podem ser vistas em efeitos como: criação de pares de fótons (ECD) para um *qubit* no estado fundamental ou excitado; quando considerado o *regime ressonante* acoplaremos estados emaranhados  $|\varphi_{n,S}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|g, n\rangle \pm |e, n-1\rangle\}$ ; um novo efeito também é encontrado, onde um par de excitações é aniquilado devido a modulação de um ou todos os parâmetros do sistema, no que chamamos de *Anti-efeito Casimir dinâmico* (AECD). Outros efeitos também serão descritos posteriormente.

No capítulo anterior descrevemos a formulação matemática apropriada a EDQc não-estacionária,

onde o principal resultado foi apresentado por (2.83) e que serve como equação *piloto* para descrever toda dinâmica do sistema. Escrevemos a função de onda (2.11) apropriada ao Hamiltoniano (2.7). No entanto, iremos propor uma função onda expandida e equivalente a (2.11)

$$|\psi(t)\rangle \simeq e^{-it\tilde{\lambda}_0} b_0(t) |\varphi_0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mathcal{S}\pm} e^{-it\tilde{\lambda}_{n,\mathcal{S}}} b_{n,\mathcal{S}}(t) |\varphi_{n,\mathcal{S}}\rangle. \quad (3.1)$$

A equação (3.1) é correspondente ao modelo de Jaynes-Cummings (JC) e para simplificar a notação omitimos pequenas correções à esta equação vistas no capítulo anterior. O coeficiente  $b_{n,\mathcal{S}}$  representa a amplitude de probabilidade dos *estados vestidos*  $|\varphi_{n,\mathcal{S}}\rangle$  e os termos  $\tilde{\lambda}_0$  e  $\tilde{\lambda}_{n,\mathcal{S}}$  são *autovalores corrigidos* de JC e definidos em (2.85). A dinâmica do modelo de JC é governada pelo Hamiltoniano

$$\hat{H}_{JC} = \omega_0 \hat{n} + \Omega_0 |e\rangle \langle e| + g_0 (\hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-). \quad (3.2)$$

Os autovalores de (3.2) são obtidos na formulação dos *estados vestidos* (EV) (apêndice B) e são escritos como

$$\lambda_{n,\mathcal{S}} = \omega_0 n - \frac{\Delta_-}{2} + \mathcal{S} \frac{\beta_n}{2}, \quad (3.3)$$

onde  $\beta_n = \sqrt{\Delta_-^2 + 4g_0^2 n}$ , e definimos como termo de *dissintonia* entre átomo-campo  $\Delta_- = \omega_0 - \Omega_0$ , sendo o índice  $\mathcal{S} = \pm$ . Para o estado fundamental temos  $\lambda_0 = 0$ .

Analisaremos dois possíveis regimes quando comparamos a frequência de acoplamento átomo-campo  $g_0$  com o termo de *dissintonia*  $\Delta_-$ : se considerado que  $g_0 \gg |\Delta_-|$ , em particular  $\Delta_- = 0$ , estaremos na formulação do *regime ressonante* (RR); se considerado que  $|\Delta_-|/2 \gg |g_0| \sqrt{n}$  teremos o limite de  $\frac{g_0 \sqrt{n}}{\Delta_-} \ll 1$ , adotando o *regime dispersivo* (RD). Em uma formulação mais geral os EV são escritos como

$$|\varphi_{n,\mathcal{S}}\rangle = s_{n,\mathcal{S}} |g, n\rangle + c_{n,\mathcal{S}} |e, n-1\rangle \quad (3.4)$$

$$|\varphi_0\rangle = |g, 0\rangle,$$

sendo definidos os coeficientes

$$\theta_{n>0} = \arctan \frac{\beta_n + \Delta_-}{2g_0 \sqrt{n}}$$

$$s_{n,+} = \sin \theta_n; \quad s_{n,-} = \cos \theta_n$$

$$c_{n,+} = \cos \theta_n; \quad c_{n,-} = -\sin \theta_n.$$



Neste capítulo adotaremos os limites do RD, considerando todas suas possíveis implicações. A análise referente ao RR será feita em capítulo posterior. Quando consideramos o RD (toda formulação de RD e RR é encontrada no apêndice I) aproximamos o termo de  $\beta_n$  como

$$\beta_n \simeq |\Delta_-| \left\{ 1 + 2 \frac{g_0^2}{\Delta_-^2} n - 2 \frac{g_0^4}{\Delta_-^4} n^2 + 4 \frac{g_0^6}{\Delta_-^6} n^3 \right\}. \quad (3.5)$$

O termo proporcional a  $n$  posteriormente será relacionado a um *shift de ressonância*, enquanto os termos de ordem mais alta serão interpretados como coeficientes de não-linearidades, por serem termos de ordem mais alta de  $\frac{g_0 \sqrt{n}}{\Delta_-}$ . Outros *shifts de ressonância* aparecerão, sendo derivados de termos presentes no Hamiltoniano (2.7), e estão discriminados abaixo

$$\delta_{\pm} = \frac{g_0^2}{\Delta_{\pm}}, \quad \alpha = \frac{g_0^4}{\Delta_{\pm}^3}, \quad \alpha_3 = 2 \frac{g_0^6}{\Delta_{\pm}^5} = 2\alpha \frac{g_0^2}{\Delta_{\pm}^2}, \quad \delta_{\chi} = \frac{4\chi_0^2}{\Delta_+} = \frac{4\chi_0^2}{2\omega_0 - \Delta_-} \approx \frac{2\chi_0^2}{\omega_0}, \quad \delta_{\varepsilon_x} = \sum_l \frac{|\varepsilon_x^{(l)}|^2}{2\omega_0 + \eta^{(l)}}. \quad (3.6)$$

Referente a  $\Delta_{\pm}$  podemos escrever

$$\Delta_+ = \omega_0 + \Omega_0 = 2\omega_0 - \Delta_- \quad (3.7)$$

$$2\omega_0 + \Delta_- = 3\omega_0 - \Omega_0. \quad (3.8)$$

No RD, podemos fazer duas considerações fundamentais referentes ao termo de *dissintonia*: considerar  $\Delta_- > 0$  ou  $\Delta_- < 0$ . Para simplificar a notação introduzimos a definição  $\mathcal{D} = \Delta_- / |\Delta_-|$ , que denominaremos como *símbolo de dissintonia*.

Na equação *piloto* (2.83), a resposta sobre a dinâmica do sistema, como por exemplo, os valores de ressonância para  $\eta^{(j)}$  estão contidas nos termos exponenciais. A diferença entre os autovalores corrigidos  $\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{S}}$  (já que o valor exato depende do SFN) fornecerá um valor aproximado de ressonância para  $\eta^{(j)}$ . Ademais, calcularemos os valores dos coeficientes de acoplamento  $\Theta_{m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}$  definidos em (2.84). O valor da taxa de acoplamento estará de acordo com cada valor de ressonância de  $\eta^{(j)}$ . Quando escolhemos os valores  $\mathcal{T}, \mathcal{S} = \pm\mathcal{D}$ , cada coeficiente de acoplamento servirá para indicar um fenômeno físico, que estará de acordo com as possíveis transições entre  $\pm\mathcal{D} \leftrightarrow \pm\mathcal{D}$  (no apêndice J são calculados os autovalores corrigidos e coeficientes para o RR e RD).

Calcularemos inicialmente a equação (2.84) escolhendo  $m = 0$ , representando o coeficiente para o estado de vácuo

$$\begin{aligned} \Theta_{2,\mathcal{T},\mathcal{S}} &= \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{R}=\pm} \sum_{X=\omega,\Omega,g} \left\{ \frac{g_0 \Lambda_{0,2,\mathcal{T},\mathcal{R}} - i\chi_0 L_{2,2,\mathcal{T},\mathcal{R}} \Gamma_{2,\mathcal{R},\mathcal{S}}^{X,j}}{\lambda_{2,\mathcal{R}} - \lambda_{2,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} \Gamma_{2,\mathcal{R},\mathcal{S}}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_g^{(j)} \Lambda_{0,2,\mathcal{T},\mathcal{S}} - i\varepsilon_{\chi}^{(j)} L_{2,2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Também consideraremos a menor ordem de  $\frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m}$ . Quando substituimos os valores dos coeficientes  $\Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{R}}$  e  $L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}$  na equação acima (os coeficientes são encontrados no apêndice I), obtemos

$$\begin{aligned} \Theta_{2,\mathcal{T},\mathcal{D}} &= \frac{1}{2} \sqrt{2} \left( \frac{\delta_- - i\chi_0}{\eta^{(j)}} 2 + \frac{\delta_- + 2i\chi_0 \left(\frac{g_0}{\Delta_-}\right)^2}{4\delta_0 + \Delta_- - \eta^{(j)}} \right) \varepsilon_\omega^{(j)} \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{2} \left( \frac{\delta_- - i\chi_0}{\eta^{(j)}} \frac{g_0^2}{\Delta_-^2} 2 - \frac{\delta_- + 2i\chi_0 \left(\frac{g_0}{\Delta_-}\right)^2}{4\delta_0 + \Delta_- - \eta^{(j)}} \right) \varepsilon_\Omega^{(j)} \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{2} \left( 4 \frac{\delta_- - i\chi_0}{\eta^{(j)}} \frac{g_0}{|\Delta_-|} - \frac{g_0 + 2i\chi_0 \frac{g_0}{\Delta_-}}{4\delta_0 + \Delta_- - \eta^{(j)}} \right) \varepsilon_g^{(j)} - \frac{1}{2} \sqrt{2} \left( \varepsilon_g^{(j)} \frac{g_0}{\Delta_-} - i\varepsilon_\chi^{(j)} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{2,\mathcal{T},-\mathcal{D}} &= \frac{1}{2} \left( 2 \frac{g_0 \frac{g_0}{\Delta_-} - i\chi_0}{4\delta_0 + \Delta_- + \eta^{(j)}} \frac{g_0}{|\Delta_-|} - \frac{g_0 + 2i\chi_0 \frac{g_0}{\Delta_-}}{\eta^{(j)}} \right) \varepsilon_\omega^{(j)} \\ &+ \frac{1}{2} \left( 4 \frac{g_0 \frac{g_0}{\Delta_-} - i\chi_0}{4\delta_0 + \Delta_- + \eta^{(j)}} \frac{g_0}{\Delta_-} - \frac{g_0 + 2i\chi_0 \frac{g_0}{\Delta_-}}{\eta^{(j)}} \right) \varepsilon_\Omega^{(j)} \\ &+ \frac{1}{2} \left( 2 \frac{g_0 \frac{g_0}{\Delta_-} - i\chi_0}{4\delta_0 + \Delta_- + \eta^{(j)}} + 4 \frac{\delta_- + 2i\chi_0 \left(\frac{g_0}{\Delta_-}\right)^2}{\eta^{(j)}} \right) \varepsilon_g^{(j)} + \frac{1}{2} \left( \varepsilon_g^{(j)} + 2i\varepsilon_\chi^{(j)} \frac{g_0}{\Delta_-} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Os coeficientes para  $m > 0$  são (ver apêndice I)

$$\begin{aligned} \Theta_{m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} &= \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{R}} \sum_{X=\omega,\Omega,g} \left\{ \frac{g_0 \Lambda_{0,m+2,\mathcal{T},\mathcal{R}} - i\chi_0 L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{R}}}{\lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} \Gamma_{m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{g_0 \Lambda_{0,m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}} - i\chi_0 L_{2,m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}}}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} + \eta^{(j)}} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}} \right\} \\ &- \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_g^{(j)} \Lambda_{0,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} - i\varepsilon_\chi^{(j)} L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Escolhendo  $\mathcal{S} = \pm\mathcal{D}$  e substituindo os valores de  $\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}$ ,  $\Lambda_{0,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}$  e  $L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}$  (de acordo com o RD, apêndice I) escreveremos os possíveis coeficientes oriundos de (3.12)

$$\begin{aligned} \Theta_{m+2,\mathcal{D},-\mathcal{D}} &= \frac{1}{2} g_0 \sqrt{m+1} \mathcal{D} \left\{ - \left( \frac{2i\chi_0}{\Delta_- + \eta^{(j)}} \frac{\Delta_- + 2\eta^{(j)}}{\Delta_-} + 1 \right) \frac{\varepsilon_\omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{2i\chi_0}{\Delta_- + \eta^{(j)}} + 1 \right] \frac{\varepsilon_\Omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} + \left[ i \frac{2\chi_0}{\Delta_- + \eta^{(j)}} + 1 \right] \frac{\varepsilon_g^{(j)}}{g_0} + i \frac{2\varepsilon_\chi^{(j)}}{\Delta_-} \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}} &= \frac{1}{2} \mathcal{D} \sqrt{m(m+2)(m+1)} \delta_- \frac{g_0}{\Delta_-} \left\{ \frac{\eta^{(j)} - 3\Delta_-}{(\eta^{(j)} - \Delta_-)} \frac{\varepsilon_\omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\eta^{(j)} + \Delta_-}{\eta^{(j)} - \Delta_-} \frac{\varepsilon_\Omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} + \frac{3\Delta_- - \eta^{(j)}}{\eta^{(j)} - \Delta_-} \frac{\varepsilon_g^{(j)}}{g_0} \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}} &= \frac{1}{2}\sqrt{(m+2)(m+1)} \left\{ \left[ \delta_- \frac{\eta^{(j)} - 2\Delta_-}{\eta^{(j)}(\eta^{(j)} - \Delta_-)} - 2\frac{i\chi_0}{\eta^{(j)}} \right] \varepsilon_\omega^{(j)} \right. \\
&\quad + \frac{1}{2}\delta_- \left( 1 + \frac{2i\chi_0}{\eta^{(j)}} \right) \frac{\varepsilon_\Omega^{(j)}}{(\eta^{(j)} - \Delta_-)} \\
&\quad \left. + \left[ \frac{2\Delta_- - \eta^{(j)}}{\eta^{(j)} - \Delta_-} - \frac{2i\chi_0}{\eta^{(j)} - \Delta_-} \left( \frac{\eta^{(j)} - 2\Delta_-}{\eta^{(j)}} \right) \right] \frac{g_0}{\Delta_-} \varepsilon_g^{(j)} + \frac{1}{2}i\varepsilon_\chi^{(j)} \right\} \quad (3.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{m+2,-\mathcal{D},-\mathcal{D}} &= \frac{1}{2}\sqrt{m(m+1)} \left\{ - \left[ \delta_- \frac{\eta^{(j)} + 2\Delta_-}{(\eta^{(j)} - \Delta_-)} + 2i\chi_0 \right] \frac{\varepsilon_\omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} \right. \\
&\quad \left. - \left[ 1 + \frac{2i\chi_0}{\Delta_-} \right] \delta_- \frac{\varepsilon_\Omega^{(j)}}{\eta^{(j)} - \Delta_-} + (\eta^{(j)} - 2\Delta_- - 2i\chi_0) \frac{\delta_-}{(\eta^{(j)} - \Delta_-)} \frac{\varepsilon_g^{(j)}}{g_0} + i\varepsilon_\chi^{(j)} \right\}. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Para calcular a diferença entre as autoenergias corrigidas  $\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{S}}$ , devemos lembrar a definição feita em (2.85)

$$\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} \equiv \lambda_{m,\mathcal{T}} + \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} + \nu_{m,\mathcal{T}}^{(2)},$$

para as definições (2.71) e (2.80). Continuaremos com a menor ordem de  $\frac{g_0}{\Delta_-}\sqrt{m}$  e negligenciaremos os *shifts de ressonância* da ordem  $\sim m\varepsilon_g^2/\omega_0$ , obtendo

$$\nu_{m \geq 0, \mathcal{T}}^{(1)} = -\frac{1}{4} \sum_j \frac{|\varepsilon_d^{(j)}|^2}{\omega_0 + \eta^{(j)}} \quad (3.17)$$

$$\nu_{0,\mathcal{T}}^{(2)} = - \left\{ \delta_+ + \frac{1}{4}\delta_\chi + \frac{1}{2}\delta_{\varepsilon_\chi} \right\} \quad (3.18)$$

$$\nu_{m > 0, \mathcal{D}}^{(2)} = - \left\{ (m+1)\delta_+ + \left(m + \frac{1}{2}\right)\delta_\chi + \frac{1}{2}(2m+1)\delta_{\varepsilon_\chi} \right\} \quad (3.19)$$

$$\nu_{m > 0, -\mathcal{D}}^{(2)} = - \left\{ -(m-1)\delta_+ + \left(m - \frac{1}{2}\right)\delta_\chi + \frac{1}{2}(2m-1)\delta_{\varepsilon_\chi} \right\}. \quad (3.20)$$

Os autovalores de JC são bem conhecidos e no RD são escritos como

$$\lambda_{m,\mathcal{D}} \approx \omega_0 m + \delta_- m - \alpha m^2 + \alpha_3 m^3 \quad (3.21)$$

e

$$\lambda_{m,-\mathcal{D}} \approx \omega_0 m - \Delta_- - \delta_- m + \alpha m n^2 - \alpha_3 m^3. \quad (3.22)$$

Com os resultados de (3.17)-(3.22), escolhendo  $\mathcal{S} = \pm\mathcal{D}$ , a definição (2.85) torna-se

$$\tilde{\lambda}_{m > 0, \mathcal{D}} = \omega_0 m + \delta_- m - \alpha m^2 + \alpha_3 m^3 - (m+1)\delta_+ - \left(m + \frac{1}{2}\right)\delta_\chi - \frac{1}{2}(2m+1)\delta_{\varepsilon_\chi} \quad (3.23)$$

e

$$\tilde{\lambda}_{m>0,-\mathcal{D}} = \omega_0 m - \Delta_- - \delta_- m + \alpha m^2 - \alpha_3 m^3 + (m-1)\delta_+ - \left(m - \frac{1}{2}\right)\delta_\chi - \frac{1}{2}(2m-1)\delta_{\varepsilon_\chi}. \quad (3.24)$$

O shift de frequência  $\nu_{m \geq 0, \mathcal{T}}^{(1)}$  devido ao bombeio clássico é constante no RD, sendo negligenciado no cálculo. Para o estado fundamental a autofrequência corrigida é escrita como

$$\tilde{\lambda}_{0,\mathcal{D}} \equiv \lambda_{0,\mathcal{D}} + \nu_{0,\mathcal{D}}^{(1)} + \nu_{0,\mathcal{D}}^{(2)},$$

tornando-se

$$\tilde{\lambda}_{0,\mathcal{D}} = -\delta_+ - \frac{1}{2}\delta_\chi - \frac{1}{2}\delta_{\varepsilon_\chi}.$$

Temos toda formulação necessária ao RD, com isso calcularemos os possíveis efeitos de acordo com os possíveis valores de  $\eta^{(j)}$ .

### 3.1 Efeito Casimir Dinâmico $\eta^{(D)} \approx 2\omega_0$

O efeito Casimir dinâmico (ECD) é um fenômeno relacionado com a criação de fótons em cavidades, que ocorre quando alteramos a geometria da cavidade ou suas propriedades materiais de acordo com uma modulação temporal prescrita externamente. Por ser um efeito ressonante, a literatura prediz que a ressonância natural do ECD é em torno de  $\eta^{(D)} \approx 2\omega_0$  [17], sendo  $\omega_0$  a frequência da cavidade. Para analisar o ECD na arquitetura da EDQc, vamos considerar que existe uma única modulação externa,  $\eta^{(D)}$ . Assim, escreveremos (2.83) de maneira apropriada para a modulação em questão, temos

$$\begin{aligned} \dot{b}_{m,\mathcal{T}} &= \sum_{\mathcal{S}} \Theta_{m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2,\mathcal{S}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \eta^{(D)})} b_{m+2,\mathcal{S}}(t) \\ &\quad - \sum_{\mathcal{S}} \Theta_{m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)^*} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \tilde{\lambda}_{m-2,\mathcal{S}} - \eta^{(D)})} b_{m-2,\mathcal{S}}(t). \end{aligned} \quad (3.25)$$

A dinâmica do ECD será extraída dos termos exponenciais de (3.25) que apresentam em seus argumentos as quantidades  $\tilde{\lambda}_{m+2,\mathcal{S}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}}$  e  $\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \tilde{\lambda}_{m-2,\mathcal{S}}$ . Baseado na diferença entre os autovalores corrigidos, escreveremos as diferenças sem as correções. Considerando  $\mathcal{T}, \mathcal{S} = \pm \mathcal{D}$  teremos

$$\lambda_{m+2,\mathcal{D}} - \lambda_{m,\mathcal{D}} = 2\omega_0 + 2\delta_- - \alpha \left[ (m+2)^2 + m^2 \right] + \alpha_3 \left[ (m+2)^3 - m^3 \right].$$

Considerando a menor ordem em  $\frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m}$  temos as possíveis diferenças de auto-valores e calculamos as possíveis diferenças

$$\begin{aligned}\lambda_{m+2,\mathcal{D}} - \lambda_{m,\mathcal{D}} &\simeq 2(\omega_0 + \delta_-) \\ \lambda_{m+2,-\mathcal{D}} - \lambda_{m,\mathcal{D}} &\simeq 2\omega_0 - \Delta_- - 2\delta_- (m+1) \\ \lambda_{m+2,\mathcal{D}} - \lambda_{m,-\mathcal{D}} &\simeq 2\omega_0 + \Delta_- + 2\delta_- (m+1) \\ \lambda_{m+2,-\mathcal{D}} - \lambda_{m,-\mathcal{D}} &\simeq 2(\omega_0 - \delta_-).\end{aligned}$$

Dentre as diferenças apresentadas acima, as que podemos aproximar ao valor de ressonância  $\eta^{(D)}$  são as diferenças que acoplam os estados  $\mathcal{D} \leftrightarrow \mathcal{D}$  e  $-\mathcal{D} \leftrightarrow -\mathcal{D}$ .

No RD os EV são representados por (em primeira ordem de  $\frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m}$ )

$$|\varphi_{m,\mathcal{D}}\rangle = \left\{ |g, m\rangle + \frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m} |e, m-1\rangle \right\}$$

e

$$|\varphi_{m,-\mathcal{D}}\rangle = -\mathcal{D} \left\{ |e, m-1\rangle - \frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m} |g, m\rangle \right\}.$$

Em ordem zero de  $\frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m}$ , teremos aproximadamente

$$|\varphi_{m,\mathcal{D}}\rangle \simeq |g, m\rangle, \quad |\varphi_{m,-\mathcal{D}}\rangle \simeq -\mathcal{D} |e, m-1\rangle. \quad (3.26)$$

Com os EV aproximados, podemos analisar o ECD de duas maneiras possíveis: a primeira é dizer que em (3.25) só haverá acoplamento entre os coeficientes  $b_{m,\mathcal{D}} \leftrightarrow b_{m\pm 2,\mathcal{D}}$ , com o *qubit* partindo do estado fundamental de acordo com (3.26) (para tal acoplamento denominaremos o **comportamento ECDg**); a segunda análise consiste em considerar que haverá acoplamento somente entre os coeficientes  $b_{m,-\mathcal{D}} \leftrightarrow b_{m\pm 2,-\mathcal{D}}$ , com *qubit* partindo do estado excitado de acordo com (3.26) (**comportamento ECDe**).

Os coeficientes de acoplamento apropriados a (3.25) serão calculados ao considerarmos a frequência de modulação  $\eta^{(D)} \approx 2\omega_0$ . Realizaremos aproximações como  $\chi_0/\omega_0 \ll 1$  e esceveremos (3.10), (3.11) e (3.13)-(3.16) de acordo com a modulação em questão, obtendo

$$\Theta_{2,\mathcal{T},\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} \approx \frac{1}{2} \sqrt{2} \left\{ \left( \frac{\Omega_0}{\Delta_+} - i \frac{\chi_0}{\delta_-} \right) \delta_- \frac{\varepsilon_\omega^{(D)}}{\omega_0} + \frac{\delta_-}{\Delta_+} \varepsilon_\Omega^{(D)} - \frac{2\Omega_0 \delta_-}{\Delta_+} \frac{\varepsilon_g^{(D)}}{g_0} + i \varepsilon_\chi^{(D)} \right\} \quad (3.27)$$

$$\Theta_{2,\mathcal{T},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} \approx -\frac{1}{4} \frac{g_0}{\omega_0} \left( 1 + \frac{4i\chi_0}{\Delta_-} \right) \varepsilon_\omega^{(D)} - \frac{1}{2} \frac{g_0}{2\omega_0} \varepsilon_\Omega^{(D)} + \frac{1}{2} \varepsilon_g^{(D)} + i \varepsilon_\chi^{(D)} \frac{g_0}{\Delta_-} \quad (3.28)$$

$$\Theta_{m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} \approx \frac{1}{2} \sqrt{(m+1)(m+2)} \left\{ \left( \frac{\Omega_0}{\Delta_+} - i \frac{\chi_0}{\delta_-} \right) \delta_- \frac{\varepsilon_\omega^{(D)}}{\omega_0} + \delta_- \frac{\varepsilon_\Omega^{(D)}}{\Delta_+} - \frac{2\delta_- \Omega_0}{\Delta_+} \frac{\varepsilon_g^{(D)}}{g_0} + i \varepsilon_\chi^{(D)} \right\} \quad (3.29)$$

$$\Theta_{m+2,\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} \approx \mathcal{D} \sqrt{m+1} \left\{ -\frac{1}{4} \frac{g_0}{\omega_0} \left( 1 + i \frac{4\chi_0}{\Delta_-} \right) \varepsilon_\omega^{(D)} - \frac{1}{2} \frac{g_0}{2\omega_0} \varepsilon_\Omega^{(D)} + \frac{1}{2} \varepsilon_g^{(D)} + i \varepsilon_\chi^{(D)} \frac{g_0}{\Delta_-} \right\} \quad (3.30)$$

$$\Theta_{m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} \approx \frac{1}{2} \mathcal{D} \sqrt{m(m+1)(m+2)} \delta_- \frac{g_0}{\Delta_-} \left\{ \frac{\varepsilon_\omega^{(D)}}{2\omega_0} + \frac{\varepsilon_\Omega^{(D)}}{2\omega_0} - \frac{\varepsilon_g^{(D)}}{g_0} \right\} \quad (3.31)$$

e

$$\Theta_{m+2,-\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} \approx \frac{1}{2} \sqrt{m(m+1)} \left\{ - \left( \delta_- \frac{\Omega_0}{\Delta_+} + i \chi_0 \right) \frac{\varepsilon_\omega^{(D)}}{\omega_0} - \delta_- \frac{\varepsilon_\Omega^{(D)}}{\Delta_+} + 2 \frac{\Omega_0 \delta_-}{\Delta_+} \frac{\varepsilon_g^{(D)}}{g_0} + i \varepsilon_\chi^{(D)} \right\}. \quad (3.32)$$

### 3.1.1 Comportamento para o efeito Casimir dinâmico fundamental (ECDg)

Escreveremos (3.25) escolhendo  $\mathcal{T} = \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \dot{b}_{m,\mathcal{D}} &= \sum_{\mathcal{S}} \Theta_{m+2,\mathcal{D},\mathcal{S}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2,\mathcal{S}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \eta^{(D)})} b_{m+2,\mathcal{S}}(t) \\ &\quad - \sum_{\mathcal{S}} \Theta_{m,\mathcal{S},\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)*} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \tilde{\lambda}_{m-2,\mathcal{S}} - \eta^{(D)})} b_{m-2,\mathcal{S}}(t). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Na equação acima, expandiremos o somatório  $\sum_{\mathcal{S}}$  escolhendo  $\mathcal{S} = \pm \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \dot{b}_{m,\mathcal{D}} &= \Theta_{m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} - \eta^{(D)})} b_{m+2,\mathcal{D}}(t) \\ &\quad + \Theta_{m+2,\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \eta^{(D)})} b_{m+2,-\mathcal{D}}(t) \\ &\quad - \Theta_{m,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)*} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-2,\mathcal{D}} - \eta^{(D)})} b_{m-2,\mathcal{D}}(t) \\ &\quad - \Theta_{m,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)*} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-2,-\mathcal{D}} - \eta^{(D)})} b_{m-2,-\mathcal{D}}(t). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Das diferenças já calculadas entre os autovalores de JC (voltando a considerar ordens mais altas em  $\frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m}$ ), percebemos que somente as diferenças que indicam acoplamento entre  $\mathcal{D} \leftrightarrow \mathcal{D}$  estarão dentro da ressonância apropriada ao ECD. Porém, iremos corrigir o valor de ressonância escrevendo  $\eta^{(D)} \approx 2(\omega_0 + \delta_-)$ . Portanto, na equação (3.34), somente alguns termos exponenciais estarão em ressonância para o regime do **ECDg**, com isso, os termos fora de ressonância serão considerados de alta frequência. Assim, usaremos o método da RWA para eliminar os termos fora de ressonância. Ao comparar os valores das exponenciais de (3.34) com seus respectivos coeficientes de acoplamento, escrevemos as aproximações

$$\frac{\left| \Theta_{m+2, \mathcal{D}, -\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} \right|}{|\Delta_-|}, \frac{\left| \Theta_{m+2, -\mathcal{D}, \mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} \right|}{|\Delta_-|}, \frac{\left| \Theta_{m+2, -\mathcal{D}, -\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} \right|}{|\delta_-|}, \frac{\left| \Theta_{2, \mathcal{T}, -\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} \right|}{|\Delta_-|} \ll 1, \quad (3.35)$$

e com o processo do SFN estimamos os valores

$$\mathcal{O}(\Delta\nu) \simeq \frac{\left( \Theta_{m+2, \mathcal{D}, -\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} \right)^2}{\Delta_-}, \frac{\left( \Theta_{m+2, -\mathcal{D}, \mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} \right)^2}{\Delta_-}, \frac{\left( \Theta_{m+2, -\mathcal{D}, -\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} \right)^2}{\delta_-}, \frac{\left( \Theta_{2, \mathcal{T}, -\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} \right)^2}{\Delta_-}. \quad (3.36)$$

Com as aproximações (3.34) torna-se

$$\begin{aligned} \dot{b}_{m, \mathcal{D}} &\simeq \Theta_{m+2, \mathcal{D}, \mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2, \mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m, \mathcal{D}} - \eta^{(D)})} b_{m+2, \mathcal{D}}(t) \\ &\quad - \Theta_{m, \mathcal{D}, \mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)*} e^{it(\tilde{\lambda}_{m, \mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-2, \mathcal{D}} - \eta^{(D)})} b_{m-2, \mathcal{D}}(t). \end{aligned} \quad (3.37)$$

A equação diferencial (3.37) descreve a dinâmica do **ECDg**. Os coeficientes de acoplamento contidos na equação (3.37) são definidos por (3.29). No coeficiente, seu valor é acompanhado de  $\sqrt{(m+1)(m+2)}$ , que aparece quando aplicamos  $\hat{a}^{\dagger 2}$  em  $|m\rangle$ .

Com o regime **ECDg** podemos de acordo com a modulação de  $\eta^{(D)}$ , criar novos estados quânticos, que se acoplam da seguinte forma  $|\varphi_{m, \mathcal{D}}\rangle \leftrightarrow |\varphi_{m\pm 2, \mathcal{D}}\rangle$ . Em cada acoplamento entre novos estados teremos a criação e aniquilação de pares de excitações  $m$ . Como aproximamos  $|\varphi_{m, \mathcal{D}}\rangle \simeq |g, m\rangle$  o efeito sempre será entre estados de excitação atômica fundamental, variando somente o estado de Fock  $|m\rangle$ . O acoplamento  $|\varphi_{m, \mathcal{D}}\rangle \leftrightarrow |\varphi_{m\pm 2, \mathcal{D}}\rangle$  quando  $m = 0$  é visto como  $|g, 0\rangle \leftrightarrow |g, 2\rangle$  e evidenciando a criação de pares de fótons quando os estados são acoplados.

Definiremos nova forma para a amplitude de probabilidade:  $b_{m, \mathcal{D}}(t) \equiv c_{m>0}(t)$  e  $b_0(t) \equiv c_0(t)$  (os coeficientes para o estado fundamental são  $b_0(t) \equiv b_{0, \mathcal{D}}(t)$  e  $b_{0, -\mathcal{D}}(t) \equiv 0$ ). Escrevemos (3.37) seguindo as novas definições

$$\dot{c}_m = \Theta_{m+2, \mathcal{D}, \mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2, \mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m, \mathcal{D}} - \eta^{(D)})} c_{m+2}(t) - \Theta_{m, \mathcal{D}, \mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)*} e^{it(\tilde{\lambda}_{m, \mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-2, \mathcal{D}} - \eta^{(D)})} c_{m-2}(t). \quad (3.38)$$

Calcularemos a diferença entre os autovalores corrigidos contidos nas exponenciais de (3.38)

$$\tilde{\lambda}_{m+2, \mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m, \mathcal{D}} = 2\omega_0 + 2\delta_- - 2\delta_+ - 2\delta_\chi - 2\delta_{\varepsilon_\chi} - 4\alpha(m+1) + 2\alpha_3(m+2)^3 + 2\alpha_3[4m^2 + 6m + 4].$$

Portanto, definiremos definiremos frequência efetiva para a cavidade

$$\omega_g \equiv (\omega_0 + \delta_- - \delta_+ - \delta_\chi - \delta_{\varepsilon_\chi}). \quad (3.39)$$

Reescrevendo a diferença entre as auto frequências corrigidas, teremos

$$\tilde{\lambda}_{m+2,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} = 2\omega_g - \alpha \left[ (m+2)^2 + m^2 \right] + \alpha_3 \left[ (m+2)^3 - m^3 \right],$$

o valor da diferença  $\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-2,\mathcal{D}}$  é obtido por processo idêntico. Assim, a equação (3.38) torna-se

$$\begin{aligned} \dot{c}_m &= \Theta_{m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} e^{-it(2\omega_g - \alpha[(m+2)^2 + m^2] + \alpha_3[(m+2)^3 - m^3] - \eta^{(D)})} c_{m+2}(t) \\ &\quad - \Theta_{m,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)*} e^{it(2\omega_g - \alpha[m^2 - (m-2)^2] + \alpha_3[m^3 - (m-2)^3] - \eta^{(D)})} c_{m-2}(t). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Com o desejo de otimizar a dinâmica do regime **ECDg**, escreveremos  $\eta^{(D)}$  como

$$\eta^{(D)} = 2(\omega_g - \zeta), \quad (3.41)$$

onde definimos o parâmetro  $\zeta$  como um parâmetro de ajuste fino. O ajuste do parâmetro terá como função a otimização do número de fótons criados dentro da cavidade. A frequência natural do ECD como dito anteriormente oscila em torno de  $2\omega_0$ , e em (3.41) a presença dos termos  $\omega_g$  e  $\zeta$  aparece devido a outros subsistemas que são colocados dentro da cavidade e aproximações adotadas. Substituindo (3.41) em (3.40), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{c}_m &= \Theta_{m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} e^{-it(2\zeta - \alpha[(m+2)^2 + m^2] + \alpha_3[(m+2)^3 - m^3])} c_{m+2}(t) \\ &\quad - \Theta_{m,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)*} e^{it(2\zeta - \alpha[m^2 - (m-2)^2] + \alpha_3[m^3 - (m-2)^3])} c_{m-2}(t). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Escreveremos o coeficiente  $\Theta_{m+2}$  para  $m > 0$  em função de nova definição

$$\Theta_{m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} = \frac{\vartheta_+}{2} \sqrt{(m+1)(m+2)}, \quad \vartheta_+ \equiv \left[ \frac{\Omega_0}{\Delta_+} - \frac{i\chi_0}{\delta_-} \right] \delta_- \frac{\varepsilon_\omega^{(D)}}{\omega_0} + \delta_- \frac{\varepsilon_\Omega^{(D)}}{\Delta_+} - \frac{2\Omega_0\delta_-}{\Delta_+} \frac{\varepsilon_g^{(D)}}{g_0} + i\varepsilon_\chi^{(D)}. \quad (3.43)$$

Usando as definições de (3.43) em (3.42), escrevemos  $\vartheta_+ = |\vartheta_+| e^{i\phi_+}$  e  $\vartheta_+^* = |\vartheta_+| e^{-i\phi_+}$ . Portanto, chegamos à equação final para o regime **ECDg**

$$\begin{aligned} \dot{c}_m &= \frac{|\vartheta_+|}{2} \left\{ e^{i\phi_+} \sqrt{(m+1)(m+2)} e^{-it(2\zeta - \alpha[(m+2)^2 + m^2] + \alpha_3[(m+2)^3 - m^3])} c_{m+2}(t) \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\phi_+} \sqrt{m(m-1)} e^{it(2\zeta - \alpha[m^2 - (m-2)^2] + \alpha_3[m^3 - (m-2)^3])} c_{m-2}(t) \right\}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde o resultado de (3.44) é válido nos limites de aproximação dada por (3.35).



### Hamiltoniano efetivo

Desejamos escrever um Hamiltoniano efetivo, onde possamos descrever a dinâmica do regime **ECDg** de maneira mais intuitiva. Para tal, escreveremos um a função onda expandida  $|\Psi\rangle$

$$|\Psi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \exp\{-it[z_1 m + z_2 m^2 + z_4 m^3]\} c_m(t) |m\rangle, \quad (3.45)$$

sendo  $|m\rangle$  o estado de Fock e  $c_m(t)$  coeficiente relativo a amplitude de probabilidade. Os coeficientes  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  são parâmetros que serão definidos posteriormente. Um Hamiltoniano apropriado para a função de onda é escrito como

$$\hat{H}_{eff} = z_1 \hat{S}^\dagger \hat{S} + z_2 (\hat{S}^\dagger \hat{S})^2 + z_4 (\hat{S}^\dagger \hat{S})^3 + iz_3 (\hat{S}^{\dagger 2} e^{-2iz_6} - \hat{S}^2 e^{2iz_6}), \quad (3.46)$$

onde  $\hat{A} = \hat{S} e^{iz_6}$  e  $\hat{A}^\dagger = \hat{S}^\dagger e^{-iz_6}$  são operadores bosônicos análogos a  $\hat{a}$  ( $\hat{a}^\dagger$ ) e que quando aplicado ao estado de Fock  $|n\rangle$  resulta em  $\hat{S}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ ; outra propriedade dita é  $\hat{S}^\dagger \hat{S}|n\rangle = n|n\rangle$ . Utilizando o formalismo de Schrödinger, escrevemos

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}_{eff} |\psi(t)\rangle. \quad (3.47)$$

Substituindo (3.45) e (3.46) em (3.47) e fazendo as devidas operações teremos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-it[z_1 n + z_2 n^2 + z_4 n^3]} i \dot{c}_n |n\rangle &= iz_3 e^{-2iz_6} \sqrt{(n+2)(n+1)} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} e^{-it[z_1(n+2) + z_2(n+2)^2 + z_4(n+2)^3]} c_{n+2}(t) |n+2\rangle \\ &- iz_3 e^{2iz_6} \sqrt{(n-1)n} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} e^{-it[z_1(n+2) + z_2(n+2)^2 + z_4(n+2)^3]} c_{n-2}(t) |n-2\rangle. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Multiplicaremos por  $\langle m|$  e dividiremos a equação acima por  $\exp\{-it[z_1 m + z_2 m^2 + z_4 m^3]\}$ , utilizaremos a definição do delta  $\langle m|n\rangle = \delta_{m,n}$ . Assim, encontramos equação diferencial para amplitude de probabilidade

$$\begin{aligned} \dot{c}_m &= -z_3 \left\{ e^{2iz_6} \sqrt{(m+2)(m+1)} e^{-it(2z_1 + z_2[(m+2)^2 - m^2] + z_4[(m+2)^3 - m^3])} c_{m+2}(t) \right. \\ &\quad \left. - e^{-2iz_6} \sqrt{(m-1)m} e^{it(2z_1 + z_2[m^2 - (m-2)^2] + z_4[m^3 - (m-2)^3])} c_{m-2}(t) \right\}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Comparando o resultado encontrado em (3.49) com o resultado de (3.44) escolheremos apropriadamente os parâmetros

$$z_1 = \zeta, \quad z_2 = \alpha, \quad z_3 = \frac{|\vartheta_+|}{2}, \quad z_4 = \alpha_3, \quad z_6 = \frac{\phi_+ + \pi}{2}.$$

Com os valores apresentados acima escreveremos o Hamiltoniano efetivo (3.46) como

$$\hat{H}_{eff} = \zeta \left( \hat{A}^\dagger \hat{A} \right) + \alpha \left( \hat{A}^\dagger \hat{A} \right)^2 + \alpha_3 \left( \hat{A}^\dagger \hat{A} \right)^3 + i \frac{|\vartheta_+|}{2} \left( \hat{A}^{\dagger 2} - \hat{A}^2 \right). \quad (3.50)$$

O Hamiltoniano efetivo apresentado em (3.50) é bastante estudado em Óptica Quântica Não Linear, por caracterizar a *amplificação paramétrica da luz* e efeitos não lineares como o efeito Kerr. Mais discussões sobre o Hamiltoniano serão introduzidas no capítulo seguinte, quando descreveremos um *Toy Model* microscópico para o efeito ECD.

### 3.1.2 Comportamento para o efeito Casimir dinâmico excitado (ECDe)

Para o regime **ECDe** consideraremos o *qubit* inicialmente no estado excitado. Usaremos todos os coeficientes calculados nas equações (3.27)-(3.32). A frequência de modulação seguirá a ressonância  $\eta^{(D)} \approx 2\omega_0$ . Para a equação (3.25) escolheremos o valor de  $\mathcal{T} = -\mathcal{D}$ , obtendo

$$\begin{aligned} \dot{b}_{m,-\mathcal{D}} &= \sum_j' \Theta_{m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \eta^{(D)})} b_{m+2,\mathcal{D}}(t) \\ &+ \sum_j' \Theta_{m+2,-\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \eta^{(D)})} b_{m+2,-\mathcal{D}}(t) \\ &- \sum_j' \Theta_{m,\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)*} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-2,\mathcal{D}} - \eta^{(D)})} b_{m-2,\mathcal{D}}(t) \\ &- \sum_j' \Theta_{m,-\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)*} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-2,-\mathcal{D}} - \eta^{(D)})} b_{m-2,-\mathcal{D}}(t), \end{aligned} \quad (3.51)$$

as diferenças entre os autovalores corrigidos já são calculadas e extraímos o valor de ressonância  $\eta^{(D)} \approx 2(\omega_0 - \delta_-)$ . Ao comparar o limite de ressonância com as diferenças dos autovalores corrigidos, perceberemos que haverá acoplamento entre  $-\mathcal{D} \leftrightarrow -\mathcal{D}$ . Utilizaremos o método da RWA para eliminarmos os termos fora de ressonância, procedemos com as aproximações

$$\frac{\left| \Theta_{m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} \right|}{|\Delta_-|}, \quad \frac{\left| \Theta_{m+2,\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} \right|}{|\Delta_-|}, \quad \frac{\left| \Theta_{m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} \right|}{|\delta_-|}, \quad \frac{\left| \Theta_{2,\mathcal{T},\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} \right|}{|\delta_-|} \ll 1, \quad (3.52)$$

com o método do SFN escrevemos as estimativas

$$\mathcal{O}(\Delta\nu) \simeq \frac{\left(\Theta_{m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)}\right)^2}{\Delta_-}, \frac{\left(\Theta_{m+2,\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)}\right)^2}{\Delta_-}, \frac{\left(\Theta_{m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)}\right)^2}{\delta_-}, \frac{\left(\Theta_{2,\mathcal{T},\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)}\right)^2}{\delta_-}.$$

Assim, escrevemos (3.51) de forma aproximada, temos

$$\begin{aligned} \dot{b}_{m,-\mathcal{D}} &\simeq \Theta_{m+2,-\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \eta^{(D)})} b_{m+2,-\mathcal{D}}(t) \\ &\quad - \Theta_{m,-\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)*} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-2,-\mathcal{D}} - \eta^{(D)})} b_{m-2,-\mathcal{D}}(t). \end{aligned} \quad (3.53)$$

A equação diferencial (3.53) descreve a dinâmica do regime **ECDe**. Os coeficientes de acoplamento contidos em (3.53) são encontrados em (3.29) e em seu valor encontramos a quantidade  $\sqrt{(m+1)m}$  que surgem dividido aplicarmos  $\hat{a}^{\dagger 2}$  em  $|m-1\rangle$ .

Os possíveis acoplamentos entre os estados quânticos no regime **ECDe** podem ser escritos como  $|\varphi_{m,-\mathcal{D}}\rangle \leftrightarrow |\varphi_{m\pm 2,-\mathcal{D}}\rangle$ , confirmando a criação de pares de excitações entre as transições dos estados. No RD aproximamos  $|\varphi_{m,-\mathcal{D}}\rangle \simeq -\mathcal{D}|e, m-1\rangle$ , assim, concluímos que todos os acoplamentos serão entre qubits com estados atômicos excitados. Por exemplo, quando escolhermos  $m=1$  teremos  $|e, 0\rangle \leftrightarrow |e, 2\rangle$ , o que representa a criação de fótons do vácuo, porém condicionada à presença do *qubit* em estado excitado. Portanto, escrevemos a equação diferencial para o regime **ECDe**

$$\begin{aligned} \dot{b}_{m>0,-\mathcal{D}} &= \Theta_{m+2,-\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \eta^{(D)})} b_{m+2,-\mathcal{D}}(t) \\ &\quad - \Theta_{m,-\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)*} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-2,-\mathcal{D}} - \eta^{(D)})} b_{m-2,-\mathcal{D}}(t). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Para obter análise completa sobre a dinâmica, calcularemos a diferença  $\tilde{\lambda}_{m+2,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}}$  escrita como

$$\tilde{\lambda}_{m+2,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} = 2\omega_0 - 2\delta_- + 2\delta_+ - 2\delta_\chi - 2\delta_{\varepsilon_\chi} + \alpha \left[ (m+2)^2 - m^2 \right] - \alpha_3 \left[ (m+2)^3 - m^3 \right], \quad (3.55)$$

onde definimos a frequência efetiva

$$\omega_e \equiv (\omega_0 - \delta_- + \delta_+ - \delta_\chi - \delta_{\varepsilon_\chi}). \quad (3.56)$$

Com isso, teremos

$$\tilde{\lambda}_{m+2,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} = 2\omega_e + \alpha \left[ (m+2)^2 + m^2 \right] - \alpha_3 \left[ (m+2)^3 - m^3 \right], \quad (3.57)$$

o termo  $\tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-2,-\mathcal{D}}$  tem valor semelhante ao resultado anterior.

Definindo  $C_m(t) = b_{m+1,-\mathcal{D}}(t)$ <sup>1</sup> (consideraremos aproximadamente que  $C_m(t)$  corresponde ao estado  $|e, m\rangle$  com átomo excitado e número de fótons  $m$ ), a equação (3.54) torna-se

$$\begin{aligned} \dot{C}_m &= \frac{1}{2} \sqrt{(m+1)(m+2)} \theta_- e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+3,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m+1,-\mathcal{D}} - \eta^{(D)})} C_{m+2}(t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{m(m-1)} \theta_-^* e^{it(\tilde{\lambda}_{m+1,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-1,-\mathcal{D}} - \eta^{(D)})} C_{m-2}(t), \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \Theta_{m+2}^- &= \Theta_{m+2,-\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(D)} \approx 2\omega_0)} = \frac{1}{2} \sqrt{(m+1)(m+2)} \theta_- \\ \theta_- &= \left\{ - \left( \delta_- \frac{\Omega_0}{\Delta_+} + i\chi_0 \right) \frac{\varepsilon_\omega^{(D)}}{\omega_0} - \delta_- \frac{\varepsilon_\Omega^{(D)}}{\Delta_+} + 2 \frac{\Omega_0 \delta_- \varepsilon_g^{(D)}}{\Delta_+ g_0} + i\varepsilon_\chi^{(D)} \right\}. \end{aligned}$$

As autoenergias corrigidas e apresentadas nas exponenciais de (3.58) são escritas como

$$\tilde{\lambda}_{m+3,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m+1,-\mathcal{D}} = 2\omega_e + 4\alpha(m+2) - 2\alpha_3(3m^2 + 12m + 13).$$

Igualmente ao regime **ECDg** escreveremos a frequência de modulação  $\eta^{(D)}$  como

$$\eta^{(D)} = 2(\omega_e - \zeta), \quad (3.59)$$

onde definimos o parâmetro de ajuste fino  $\zeta$ . Substituiremos (3.59) em (3.58) e escreveremos  $\theta_- \equiv |\theta_-| e^{i\phi_-}$  e  $\theta_-^* \equiv |\theta_-| e^{-i\phi_-}$ . Portanto, escreveremos a equação que descreverá a dinâmica do regime **ECDe**

$$\begin{aligned} \dot{C}_m &= \frac{|\theta_-|}{2} \left\{ e^{i\phi_-} \sqrt{(m+1)(m+2)} e^{-it(2\zeta + 4\alpha(m+2) - 2\alpha_3(3m^2 + 12m + 13))} C_{m+2}(t) \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\phi_-} \sqrt{m(m-1)} e^{it(2\zeta + 4\alpha m - 2\alpha_3(3m^2 + 1))} C_{m-2}(t) \right\}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

A equação obtida sempre será válida nos limites de aproximação encontrados em (3.52).

### Hamiltoniano efetivo

Para obter o Hamiltoniano efetivo ao regime em questão, seguiremos os mesmos passos utilizados para obter (3.50). Consideraremos a para a função de onda expandida

$$|\Psi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \exp\{-it[z_1 m + z_2 m^2 + z_4 m^3]\} C_m(t) |m\rangle. \quad (3.61)$$

<sup>1</sup>Para o regime **ECDe** sempre adotaremos  $m \geq 0$

Ao substituírmos (3.46) e (3.61) em (3.47) e com manipulações teremos equação semelhante a (3.49) (a diferença está entre  $C_n(t)$  e  $c_m(t)$ ), escrevemos

$$\dot{C}_m = -z_3 \left\{ 3e^{2iz_6} \sqrt{(m+2)(m+1)} e^{-it(2(z_1-2z_2+3z_4)+4(z_2-3z_4)(m+2)+2z_4(3m^2+12m+13))} C_{m+2}(t) \right. \\ \left. e^{-2iz_6} \sqrt{(m-1)m} e^{it(2(z_1-2z_2+3z_4)+4m(z_2-3z_4)+2z_4(3m^2+1))} C_{m-2}(t) \right\}. \quad (3.62)$$

Ao compararmos (3.62) com (3.60) escolhemos apropriadamente os valores

$$\zeta = (z_1 - 2z_2 + 3z_4), \quad \alpha = (z_2 - 3z_4), \quad \alpha_3 = -z_4$$

e

$$z_1 = (\zeta + 2\alpha - 3\alpha_3), \quad z_2 = \alpha - 3\alpha_3, \quad z_3 = \frac{|\vartheta_-|}{2}, \quad z_4 = -\alpha_3, \quad z_6 = \frac{\phi_- + \pi}{2}.$$

Assim, escrevemos o Hamiltoniano efetivo para o regime **ECDe**

$$\hat{H}_{eff} = (\zeta + 2\alpha - 3\alpha_3) \hat{A}^\dagger \hat{A} + (\alpha - 3\alpha_3) (\hat{A}^\dagger \hat{A})^2 - \alpha_3 (\hat{A}^\dagger \hat{A})^3 + i \frac{|\vartheta_-|}{2} (\hat{A}^{\dagger 2} - \hat{A}^2). \quad (3.63)$$

O resultado de (3.63) se assemelha ao de (3.50), porém algumas constantes se diferem. Apesar de ter como característica a criação de pares de fótons, o Hamiltoniano tem dinâmica quantitativa diferente de (3.50) devido a diferença no valor eficaz da “frequência da cavidade”, dado pelo primeiro termo do LD da equação (3.63).

## 3.2 Comportamento Anti-efeito Casimir dinâmico (AECD)

Partiremos da equação (3.25) para descrever um novo efeito que demoninaremos de *anti-efeito Casimir dinâmico* (AECD). Consideraremos que a frequência de modulação será em torno de  $\eta^{(AC)} \approx 2\omega_0 + \Delta_-$ . Relembrando as diferenças entre as autoenergias apropriadas para (3.25) e calculadas no desenvolvimento do **ECDg**, percebemos que somente a diferença entre autovalores que acoplam  $-\mathcal{D} \leftrightarrow \mathcal{D}$  estará de acordo com a ressonância dada a  $\eta^{(AC)}$ . Os coeficientes de acoplamento para a frequência  $\eta^{(AC)} \approx 2\omega_0 + \Delta_-$  serão

$$\Theta_{m+2, -\mathcal{D}, \mathcal{D}}^{(\eta^{(AC)} \approx 2\omega_0 + \Delta_-)} \approx \frac{1}{2} \mathcal{D} \sqrt{m(m+1)(m+2)} \delta_- \frac{g_0}{\Delta_-} \left\{ \frac{\varepsilon_\omega^{(AC)}}{2\omega_0} + \frac{\varepsilon_\Omega^{(AC)}}{2\omega_0} - \frac{\Omega_0 \varepsilon_g^{(AC)}}{\omega_0 g_0} \right\} \left\{ 1 + \frac{g_0}{\Delta_-} \right\} \quad (3.64)$$

$$\Theta_{m+2, -\mathcal{D}, -\mathcal{D}}^{(\eta^{(AC)} \approx 2\omega_0 + \Delta_-)} \approx \frac{1}{2} \sqrt{m(m+1)} \left\{ - \left[ \frac{\Delta_+}{2\omega_0} + \frac{2i\chi_0}{\delta_-} \right] \delta_- \frac{\varepsilon_\omega^{(AC)}}{2\omega_0} - \delta_- \frac{\varepsilon_\Omega^{(AC)}}{2\omega_0} + \frac{\Delta_+ \delta_- \varepsilon_g^{(AC)}}{2\omega_0 g_0} + i\varepsilon_X^{(AC)} \right\} \quad (3.65)$$

$$\Theta_{m+2, \mathcal{D}, -\mathcal{D}}^{(\eta^{(AC)} \approx 2\omega_0 + \Delta_-)} \approx \frac{1}{2} g_0 \mathcal{D} \sqrt{m+1} \left\{ - \left[ 1 + i \frac{4\chi_0}{\Delta_-} \right] \frac{\varepsilon_\omega^{(AC)}}{\eta^{(AC)}} - \frac{\varepsilon_\Omega^{(AC)}}{\eta^{(AC)}} + \frac{\varepsilon_g^{(AC)}}{g_0} + i \frac{2\varepsilon_\chi^{(AC)}}{\Delta_-} \right\} \quad (3.66)$$

$$\Theta_{m+2, \mathcal{D}, \mathcal{D}}^{(\eta^{(AC)} \approx 2\omega_0 + \Delta_-)} \approx \frac{1}{2} \sqrt{(m+1)(m+2)} \left[ \left( 1 - \frac{2i\chi_0}{\delta_-} \right) \delta_- \frac{\varepsilon_\omega^{(AC)}}{2\omega_0} + \delta_- \frac{\varepsilon_\Omega^{(AC)}}{2\omega_0} - \delta_- \frac{\varepsilon_g^{(AC)}}{g_0} + i\varepsilon_\chi^{(AC)} \right].$$

Escreveremos a equação (3.25) escolhendo apropriadamente  $\mathcal{T} = -\mathcal{D}$  teremos

$$\begin{aligned} \dot{b}_{m, -\mathcal{D}} &= \Theta_{m+2, -\mathcal{D}, \mathcal{D}}^{(\eta^{(AC)} \approx 2\omega_0 + \Delta_-)} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2, \mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m, -\mathcal{D}} - \eta^{(AC)})} b_{m+2, \mathcal{D}}(t) \\ &+ \Theta_{m+2, -\mathcal{D}, -\mathcal{D}}^{(\eta^{(AC)} \approx 2\omega_0 + \Delta_-)} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2, -\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m, -\mathcal{D}} - \eta^{(AC)})} b_{m+2, -\mathcal{D}}(t) \\ &- \Theta_{m, \mathcal{D}, -\mathcal{D}}^{(\eta^{(AC)} \approx 2\omega_0 + \Delta_-)*} e^{it(\tilde{\lambda}_{m, -\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-2, \mathcal{D}} - \eta^{(AC)})} b_{m-2, \mathcal{D}}(t) \\ &- \Theta_{m, -\mathcal{D}, -\mathcal{D}}^{(\eta^{(AC)} \approx 2\omega_0 + \Delta_-)*} e^{it(\tilde{\lambda}_{m, -\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-2, -\mathcal{D}} - \eta^{(AC)})} b_{m-2, -\mathcal{D}}(t). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Dentro do limite de  $\eta^{(AC)}$  somente a diferença  $\tilde{\lambda}_{m+2, \mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m, -\mathcal{D}}$  estará de acordo com a ressonância atual. Portanto, haverá somente o acoplamento entre os coeficientes  $b_{m, -\mathcal{D}} \leftrightarrow b_{m+2, \mathcal{D}}$ . Os demais coeficientes estarão acompanhados de termos fora da ressonância. Assim, recorreremos ao método RWA e escrevemos as aproximações

$$\frac{\left| \Theta_{m+2, -\mathcal{D}, -\mathcal{D}}^{(\eta^{(AC)} \approx 2\omega_0 + \Delta_-)} \right|}{|\Delta_-|}, \frac{\left| \Theta_{m+2, \mathcal{D}, -\mathcal{D}}^{(\eta^{(AC)} \approx 2\omega_0 + \Delta_-)} \right|}{|\Delta_-|}, \frac{\left| \Theta_{m+2, \mathcal{D}, \mathcal{D}}^{(\eta^{(AC)} \approx 2\omega_0 + \Delta_-)} \right|}{|\Delta_-|} \ll 1, \quad (3.68)$$

e com o método do SFN temos

$$\mathcal{O}(\Delta\nu) \simeq \frac{\left( \Theta_{m+2, -\mathcal{D}, -\mathcal{D}}^{(\eta^{(AC)} \approx 2\omega_0 + \Delta_-)} \right)^2}{\Delta_-}, \frac{\left( \Theta_{m+2, \mathcal{D}, -\mathcal{D}}^{(\eta^{(AC)} \approx 2\omega_0 + \Delta_-)} \right)^2}{\Delta_-}, \frac{\left( \Theta_{m+2, \mathcal{D}, \mathcal{D}}^{(\eta^{(AC)} \approx 2\omega_0 + \Delta_-)} \right)^2}{\Delta_-}. \quad (3.69)$$

Com isso, escrevemos (3.67) como

$$\dot{b}_{m, -\mathcal{D}} \simeq \Theta_{m+2, -\mathcal{D}, \mathcal{D}}^{(\eta^{(AC)} \approx 2\omega_0 + \Delta_-)} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2, \mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m, -\mathcal{D}} - \eta^{(AC)})} b_{m+2, \mathcal{D}}(t). \quad (3.70)$$

O valor da diferença entre as autoenergias corrigidas  $\tilde{\lambda}_{m+2, \mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m, -\mathcal{D}}$  é

$$\tilde{\lambda}_{m+2, \mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m, -\mathcal{D}} = 2\omega_0 + \Delta_- - 3\delta_\chi - 3\delta_{\varepsilon_\chi} + 2(\delta_- - \delta_+)(m+1) - \alpha \left( m^2 + (m+2)^2 \right) + \alpha_3 \left( m^3 + (m+2)^3 \right).$$

Escreveremos a frequência de modulação  $\eta_M^{(AC)}$  de forma corrigida (aqui desprezamos os termos não-lineares por simplicidade)

$$\eta_M^{(AC)} = 2\omega_0 + \Delta_- - 3\delta_\chi - 3\delta_{\varepsilon_\chi} + 2(\delta_- - \delta_+)(M+1),$$

sendo  $M$  um número inteiro e positivo.

Ao substituir a frequência de modulação em (3.70) escreveremos equação diferencial para as amplitudes de probabilidade, sendo

$$\begin{aligned} \dot{b}_{m,-\mathcal{D}} &= \Theta_{m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}} e^{-it2(\delta_- - \delta_+)(m-M)} b_{m+2,\mathcal{D}}(t) \\ \dot{b}_{m+2,\mathcal{D}} &= -\Theta_{m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(AC)} \approx 2\omega_0 + \Delta_-)^*} e^{it2(\delta_- - \delta_+)(m-M)} b_{m,-\mathcal{D}}(t). \end{aligned} \quad (3.71)$$

O resultado de (3.71) é válido para os limites de aproximação dados por (3.68). Quando modulamos um ou todos os parâmetros do sistema simultaneamente de acordo com frequência de modulação com valor  $\eta^{(AC)} \approx 2\omega_0 + \Delta_-$ , realizamos acoplamento entre as amplitudes de probabilidade  $b_{m,-\mathcal{D}} \leftrightarrow b_{m+2,\mathcal{D}}$ . O coeficiente de acoplamento apropriado para a ressonância  $\eta^{(AC)}$  é o apresentado em (3.64), que em seu resultado apresenta a quantidade  $\sqrt{m(m+1)(m+2)}$ , que implica em destruição de três fótons a partir do estado  $|g, m+2\rangle$  acompanhada de criação de uma excitação atômica (de modo a preservar o caráter de transição entre autoestados que diferem por duas excitações).

Quando modulamos o sistema com  $\eta^{(AC)}$  os estados quânticos criados se acoplam da seguinte maneira  $|\varphi_{m,-\mathcal{D}}\rangle \leftrightarrow |\varphi_{m+2,\mathcal{D}}\rangle$ . Por estar na formulação do RD, aproximamos os estados acoplados como  $|e, M-1\rangle \leftrightarrow |g, M+2\rangle$ . As transições entre os estados de fato fornece a interpretação que três excitações do campo são destruídas acompanhada da mudança do estado de excitação atômica. Outro modo em que podemos analisar o fenômeno é pelo acoplamento entre  $|\varphi_{m,\mathcal{D}}\rangle \leftrightarrow |\varphi_{m-2,-\mathcal{D}}\rangle$  que fornecerá a informação  $|g, M\rangle \leftrightarrow |e, M-3\rangle$ , evidenciando que pares de excitações são destruídos e o estado de excitação do *qubit* se altera. Portanto, denominaremos de *anti-efeito Casimir Dinâmico* (AECD) a destruição de um par de excitações. O AECD é um fenômeno que até então não é encontrado na literatura, talvez em parte devido à taxa de acoplamento muito baixa, que é de terceira ordem em  $\frac{g_0}{\Delta_-}$ , como visto na equação (3.64).

### 3.3 Regime Anti-Jaynes Cummings (AJC)

O regime Anti JC (AJC) é formulado quando escolhermos a frequência de modulação como  $\eta^{(A)} \approx 2\omega_0 - \Delta_- = \Delta_+$ . O termo AJC é referente à parte contra girante que encontramos no Hamiltoniano (2.7) e que representamos como

$$\hat{H}_{AJC} \propto \left( \hat{a} \hat{\sigma}_{k,k+1} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{k+1,k} \right). \quad (3.72)$$

Formularemos o regime partindo da equação (3.25), as diferenças entre as autoenergias foram calculadas no desenvolvimento do **ECDg**. Das diferenças inferimos que o regime AJC estará em ressonância quando houver acoplamento entre  $\mathcal{D} \rightarrow -\mathcal{D}$ . Calcularemos os coeficientes de acoplamento de acordo com  $\eta^{(A)}$ , obtendo

$$\Theta_{2,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(A)} \approx \Delta_+)} \approx \frac{1}{2} \sqrt{2} \left\{ \left[ 1 - \frac{2i\chi_0}{\delta_-} \right] \delta_- \frac{\varepsilon_\omega^{(A)}}{\Delta_+} + \delta_- \frac{\varepsilon_\Omega^{(A)}}{2\Omega_0} - \frac{g_0}{\Delta_-} \varepsilon_g^{(A)} + i\varepsilon_\chi^{(A)} \right\} \quad (3.73)$$

$$\Theta_{2,\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(A)} \approx \Delta_+)} \approx \frac{1}{2} g_0 \left( - \left( 1 + i4 \frac{\chi_0}{\Delta_-} \right) \frac{\varepsilon_\omega^{(A)}}{\Delta_+} - \frac{\varepsilon_\Omega^{(A)}}{\Delta_+} + \frac{\varepsilon_g^{(A)}}{g_0} + i \frac{2\varepsilon_\chi^{(A)}}{\Delta_-} \right) \quad (3.74)$$

$$\Theta_{m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(A)} \approx \Delta_+)} \approx \frac{1}{2} \sqrt{(m+1)(m+2)} \left\{ \left[ 1 - \frac{2i\chi_0}{\delta_-} \right] \delta_- \frac{\varepsilon_\omega^{(A)}}{\Delta_+} + \delta_- \frac{\varepsilon_\Omega^{(A)}}{2\Omega_0} - \frac{g_0}{\Delta_-} \varepsilon_g^{(A)} + i\varepsilon_\chi^{(A)} \right\} \quad (3.75)$$

$$\Theta_{m+2,\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(A)} \approx \Delta_+)} \approx \frac{1}{2} g_0 \mathcal{D} \sqrt{m+1} \left\{ - \left( 1 + i \frac{4\chi_0}{\Delta_-} \right) \frac{\varepsilon_\omega^{(A)}}{\Delta_+} - \frac{\varepsilon_\Omega^{(A)}}{\Delta_+} + \frac{\varepsilon_g^{(A)}}{g_0} + i \frac{2\varepsilon_\chi^{(A)}}{\Delta_-} \right\} \quad (3.76)$$

$$\Theta_{m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(A)} \approx \Delta_+)} \approx \frac{1}{2} \mathcal{D} \sqrt{m(m+1)(m+2)} \delta_- \frac{g_0}{\Delta_-} \left\{ \frac{\varepsilon_\omega^{(A)}}{\Delta_+} + \frac{\varepsilon_\Omega^{(A)}}{\Delta_+} - \frac{\varepsilon_g^{(A)}}{g_0} \right\}. \quad (3.77)$$

Conhecido os valores dos coeficientes, escreveremos a equação (3.25) escolhendo  $\mathcal{T} = \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \dot{b}_{m,\mathcal{D}} &= \sum_j' \Theta_{m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(A)} \approx \Delta_+)} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} - \eta^{(A)})} b_{m+2,\mathcal{D}}(t) \\ &+ \sum_j' \Theta_{m+2,\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(A)} \approx \Delta_+)} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} - \eta^{(A)})} b_{m+2,-\mathcal{D}}(t) \\ &- \sum_j' \Theta_{m,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(A)} \approx \Delta_+)*} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-2,\mathcal{D}} - \eta^{(A)})} b_{m-2,\mathcal{D}}(t) \\ &- \sum_j' \Theta_{m,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(A)} \approx \Delta_+)*} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-2,-\mathcal{D}} - \eta^{(A)})} b_{m-2,-\mathcal{D}}(t). \end{aligned} \quad (3.78)$$

De acordo com  $\eta^{(A)} \approx \Delta_+$  manteremos as diferenças entre as autoenergias que serão ressonante. As demais diferenças por serem termos de rápidas oscilações, nos possibilitarão aproximar (3.78) de acordo com o método da RWA, resultando em aproximações

$$\frac{\left| \Theta_{2,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(A)} \approx \Delta_+)} \right|}{|\Delta_+|}, \frac{\left| \Theta_{m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(A)} \approx \Delta_+)} \right|}{|\Delta_+|}, \frac{\left| \Theta_{m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(A)} \approx \Delta_+)} \right|}{|\Delta_+|}, \frac{\left| \Theta_{m+2,-\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(A)} \approx \Delta_+)} \right|}{|\Delta_+|} \ll 1, \quad (3.79)$$

e SFN obtemos



$$\mathcal{O}(\Delta\nu) \simeq \frac{\left(\Theta_{2,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(A)} \approx \Delta_+)}\right)^2}{\Delta_+}, \frac{\left(\Theta_{m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(A)} \approx \Delta_+)}\right)^2}{\Delta_+}, \frac{\left(\Theta_{m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\eta^{(A)} \approx \Delta_+)}\right)^2}{\Delta_+}, \frac{\left(\Theta_{m+2,-\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(A)} \approx \Delta_+)}\right)^2}{\Delta_+}.$$

Portanto, a equação diferencial para a amplitude de probabilidade no regime AJC ficará

$$\dot{b}_{m,\mathcal{D}} \simeq \Theta_{m+2,\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(A)} \approx \Delta_+)} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} - \eta^{(A)})} b_{m+2,-\mathcal{D}}(t). \quad (3.80)$$

Calculando a diferença entre as autoenergias corrigidas contida no termo exponencial de (3.80)

$\tilde{\lambda}_{m+2,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}}$ , escrevemos

$$\tilde{\lambda}_{m+2,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} = \Delta_+ - 2(\delta_- - \delta_+)(m+1) - \delta_\chi - \delta_{\varepsilon_\chi} + \alpha \left(m^2 + (m+2)^2\right) - \alpha_3 \left(m^3 + (m+2)^3\right). \quad (3.81)$$

Assim, escrevermos  $\eta_M^{(A)}$  de maneira corrigida

$$\eta_M^{(A)} = \Delta_+ - 2(\delta_- - \delta_+)(M+1) - \delta_\chi - \delta_{\varepsilon_\chi}, \quad (3.82)$$

com  $M$  sendo número inteiro e não-negativo. Escreveremos (3.80) substituindo o valor de (3.82) e por fim obtemos

$$\dot{b}_{m,\mathcal{D}} = \Theta_{m+2,\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(A)} \approx \Delta_+)} e^{-it(2(\delta_- - \delta_+)(M-m))} b_{m+2,-\mathcal{D}}(t) \quad (3.83)$$

$$\dot{b}_{m+2,-\mathcal{D}} = -\Theta_{m+2,\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\eta^{(A)} \approx \Delta_+)*} e^{it2(\delta_- - \delta_+)(M-m)} b_{m,\mathcal{D}}(t). \quad (3.84)$$

Os resultados obtidos acima são válidos quando considerados os limites de aproximação apresentados em (3.79). Ao modular o sistema com o valor de frequência imposto por  $\eta^{(A)}$  acoplamos somente as amplitudes de probabilidade  $b_{m,\mathcal{D}} \leftrightarrow b_{m+2,-\mathcal{D}}$ . Os estados quânticos se acoplarão de acordo com  $|\varphi_{m,\mathcal{D}}\rangle \leftrightarrow |\varphi_{m+2,-\mathcal{D}}\rangle$ . De acordo com os limites do RD escreveremos a transição entre os estados  $|g, M\rangle \leftrightarrow |e, M+1\rangle$ , assim, interpretamos o regime AJC como um processo de criação de único fóton acompanhado da mudança do estado de excitação atômica. O coeficiente de acoplamento que estará de acordo com a ressonância  $\Delta_+$  será o apresentado em (3.76), onde identificamos a interpretação de um único fóton criado quando consideramos a quantidade  $\sqrt{m+1}$ , que sugere a criação de uma única excitação do campo (e para preservar o caráter de transição por duas excitações, o átomo deve ficar excitado no processo).

## 3.4 Bombeio Externo clássico de 1-fóton

O sistema que consideramos pode ser bem representado pela figura 1.1. Sua dinâmica é representada pelo Hamiltoniano (2.7), onde consideramos que todos os parâmetros do sistema podem ser modulados no tempo quando inserimos feixes de lasers ou fluxos magnéticos externos, alterando as propriedades materiais do sistema. Outro caso de modulação é considerado ao inserirmos o bombeio clássico de luz, o que pode ser implementado de maneira direta em circuitos de microondas. A parcela do Hamiltoniano apropriado ao bombeio é apresentada como  $id(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$ . Ao analisarmos a equação (2.83) obtida no capítulo anterior, podemos considerar uma simples modulação da ordem de  $\eta^{(P)} \approx \omega_0$ . Assim, escrevemos

$$\begin{aligned} \dot{b}_{m,\mathcal{T}} = & \frac{i}{2} \sum_j \sum_S \left\{ \varepsilon_d^{(j)} L_{1,m+1,\mathcal{T},S} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+1,S} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \eta^{(j)})} b_{m+1,S}(t) \right. \\ & \left. + \varepsilon_d^{(j)*} L_{1,m,S,\mathcal{T}}^* e^{it(\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \tilde{\lambda}_{m-1,S} - \eta^{(j)})} b_{m-1,S}(t) \right\}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Já que o bombeio clássico é o que chamamos de processo de 1-fóton (“one-photon process”, em inglês), acoplaremos somente os coeficientes  $b_{m,\mathcal{T}} \leftrightarrow b_{m\pm 1,S}$ . As diferenças entre autoenergias cabíveis a equação (3.85) serão

$$\lambda_{m,\mathcal{D}} - \lambda_{m+1,\mathcal{D}} = \omega_0 + \delta_- - \alpha \left[ (m+1)^2 - m^2 \right] + \alpha_3 \left[ (m+1)^3 - m^3 \right],$$

e negligenciando os termos não lineares  $\alpha$  e  $\alpha_3$  obtemos

$$\lambda_{m+1,\mathcal{D}} - \lambda_{m,\mathcal{D}} \simeq \omega_0 + \delta_-.$$

As outras possíveis diferenças são escritas como

$$\lambda_{m+1,-\mathcal{D}} - \lambda_{m,\mathcal{D}} \simeq \omega_0 - \Delta_- - \delta_- (2m+1) = \Omega_0 - \delta_- (2m+1)$$

$$\lambda_{m+1,\mathcal{D}} - \lambda_{m,-\mathcal{D}} \simeq \omega_0 + \Delta_- + \delta_- (2m+1)$$

$$\lambda_{m+1,-\mathcal{D}} - \lambda_{m,-\mathcal{D}} \simeq (\omega_0 - \delta_-).$$

### 3.4.1 Comportamento de cavidades no estado fundamental sob influência do bombeio

Ao considerarmos as diferenças entre as autoenergias para o caso do bombeio externo, aproximamos a ressonância  $\eta^{(p)} \approx (\omega_0 + \delta_-)$ . Portanto, acoplaremos somente  $\mathcal{D} \leftrightarrow \mathcal{D}$ . Escrevendo a equação (3.85) considerando  $\mathcal{T} = \mathcal{D}$ , teremos

$$\begin{aligned}
\dot{b}_{m,\mathcal{D}} = & \frac{i}{2} \left\{ \varepsilon_d^{(p)} L_{1,m+1,\mathcal{D},\mathcal{D}} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+1,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m+1,\mathcal{D}}(t) \right. \\
& + \varepsilon_d^{(p)} L_{1,m+1,\mathcal{D},-\mathcal{D}} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+1,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m+1,-\mathcal{D}}(t) \\
& + \varepsilon_d^{(p)*} L_{1,m,\mathcal{D},\mathcal{D}}^* e^{it(\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-1,\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m-1,\mathcal{D}}(t) \\
& \left. + \varepsilon_d^{(p)*} L_{1,m,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^* e^{it(\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-1,-\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m-1,-\mathcal{D}}(t) \right\}. \quad (3.86)
\end{aligned}$$

Na equação (3.86) substituiremos os valores referentes aos parâmetros  $L_{1,m+1,\mathcal{T},\mathcal{S}}$  e  $L_{1,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^*$  (apêndice I) na formulação do RD. Com isso, escrevemos

$$\begin{aligned}
\dot{b}_{m,\mathcal{D}} = & \frac{i}{2} \left\{ \varepsilon_d^{(p)} \sqrt{m+1} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+1,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m+1,\mathcal{D}}(t) \right. \\
& + \varepsilon_d^{(p)} \frac{g_0}{|\Delta_-|} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+1,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m+1,-\mathcal{D}}(t) \\
& \left. + \varepsilon_d^{(p)*} \sqrt{m} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-1,\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m-1,\mathcal{D}}(t) \right\}. \quad (3.87)
\end{aligned}$$

Na equação acima eliminaremos os termos que estarão fora da ressonância  $\eta^{(p)} \approx (\omega_0 + \delta_-)$ . Utilizando o protocolo da RWA, escrevemos

$$\left| \frac{\varepsilon_d^{(p)} \sqrt{m}}{\delta_-} \right| \ll 1, \quad (3.88)$$

com o SFN estimamos

$$\mathcal{O}(\Delta\nu) \simeq \frac{\varepsilon_d^{(p)2}}{\delta_-}.$$

Portanto, a equação (3.87) torna-se

$$\begin{aligned}
\dot{b}_{m,\mathcal{D}} \simeq & \frac{i}{2} \left\{ \varepsilon_d^{(p)} \sqrt{m+1} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+1,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m+1,\mathcal{D}}(t) \right. \\
& \left. + \varepsilon_d^{(p)*} \sqrt{m} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-1,\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m-1,\mathcal{D}}(t) \right\}. \quad (3.89)
\end{aligned}$$

Da equação (3.89) calcularemos a diferença de autoenergias contida no termo exponencial  $\tilde{\lambda}_{m+1,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}}$

$$\tilde{\lambda}_{m+1,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} = \omega_g - \alpha \left[ (m+1)^2 - m^2 \right] + \alpha_3 \left[ (m+1)^3 - m^3 \right],$$

o termo de  $\omega_g$  foi definido previamente em (3.39) quando analisamos o regime **ECDg**. Escolhemos apropriadamente a frequência de modulação como

$$\eta^{(p)} = \omega_g - \zeta, \quad (3.90)$$

sendo  $\zeta$  frequência de ajuste fino. Substituindo (3.90) em (3.89), considerando as diferenças entre as autoenergias corridas e substituindo as definições  $c_{m>0}(t) \equiv b_{m,\mathcal{D}}(t)$  e  $c_0(t) \equiv b(t) = b_{0,\mathcal{D}}(t)$ , teremos

$$\dot{c}_m = \frac{i}{2} \left\{ \varepsilon_d^{(p)} \sqrt{m+1} e^{-it(\zeta - \alpha[(m+1)^2 - m^2] + \alpha_3[(m+1)^3 - m^3])} c_{m+1}(t) + \varepsilon_d^{(p)*} \sqrt{m} e^{it(\zeta - \alpha[(m+1)^2 - m^2] + \alpha_3[(m+1)^3 - m^3])} c_{m-1}(t) \right\}. \quad (3.91)$$

Da equação (3.89) visualizamos que haverá o acoplamento entre os coeficientes  $b_{m,\mathcal{D}} \leftrightarrow b_{m\pm 1,\mathcal{D}}$ . Quando modulamos nosso sistema com a frequência  $\eta^{(p)}$  teremos a geração de estados quânticos que se acoplam como  $|\varphi_{m,\mathcal{D}}\rangle \leftrightarrow |\varphi_{m\pm 1,\mathcal{D}}\rangle$ . Nos limites que compõe o RD assumimos sempre a menor ordem de  $\frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m}$ , assim podemos analisar as transições entre os estados como  $|g, m\rangle \leftrightarrow |g, m \pm 1\rangle$ . Assim, interpretamos que na presença do bombeio externo o *qubit* permanecerá no estado de excitação fundamental, porém haverá a criação de um único fóton entre as transições dos estados. O efeito é análogo ao encontrado no regime **ECDg**, porém devido o termo  $id(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$  geramos transições entre estados que se diferem por uma excitação.

### Hamiltoniano Efetivo

Para obter o Hamiltoniano efetivo que descreverá a dinâmica contida em (3.91), escrevemos a definição (3.45)

$$|\Psi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-it[z_1 m + z_2 m^2 + z_4 m^3]} c_m(t) |m\rangle.$$

O Hamiltoniano apropriado a função de onda será escrito como

$$\hat{H}_{eff} = z_1 \hat{A}^\dagger \hat{A} + z_2 (\hat{A}^\dagger \hat{A})^2 + z_4 (\hat{A}^\dagger \hat{A})^3 + i(z_3^* \hat{A}^\dagger - z_3 \hat{A}). \quad (3.92)$$

De acordo com o formalismo de Schrödinger, teremos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-it[z_1 n + z_2 n^2 + z_4 n^3]} i \dot{c}_n |n\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-it[z_1(n+1) + z_2(n+1)^2 + z_4(n+1)^3]} i z_3^* \sqrt{n+1} c_{n+1}(t) |n+1\rangle \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-it[z_1(n-1) + z_2(n-1)^2 + z_4(n-1)^3]} i z_3 \sqrt{n} c_{n-1}(t) |n-1\rangle. \end{aligned}$$

Multiplicaremos a equação acima por  $\langle m|$  e dividiremos por  $e^{-it[z_1 m + z_2 m^2 + z_4 m^3]}$ . Utilizaremos as propriedades do delta  $\langle m|n\rangle = \delta_{m,n}$  e obtemos

$$\dot{c}_m = - \left\{ e^{-it(z_1+z_2[(m+1)^2-m^2]+z_4[(m+1)^3-m^3])} z_3 \sqrt{m+1} c_{m+1}(t) - e^{-it(z_1+z_2[(m+1)^2-m^2]+z_4[(m+1)^3-m^3])} z_3^* \sqrt{m} c_{m-1}(t) \right\}, \quad (3.93)$$

e comparando (3.93) com (3.91), escrevemos

$$z_1 = \zeta, \quad z_2 = -\alpha, \quad z_3 = \frac{\varepsilon_d^{(p)}}{2}, \quad z_4 = \alpha_3.$$

Assim, o Hamiltoniano efetivo torna-se

$$\hat{H}_{eff} = \zeta \hat{A}^\dagger \hat{A} - \alpha \left( \hat{A}^\dagger \hat{A} \right)^2 + \alpha_3 \left( \hat{A}^\dagger \hat{A} \right)^3 + \frac{i}{2} \left( \varepsilon_d^{(p)*} \hat{A}^\dagger - \varepsilon_d^{(p)} \hat{A} \right). \quad (3.94)$$

Como era de se esperar o Hamiltoniano efetivo obtido não contém termos que caracterizará a *amplificação paramétrica da luz* (criação de pares de fótons). Uma análise sobre (3.94) será abordada no capítulo seguinte, quando formularmos o *Toy Model* para o ECD.

### 3.4.2 Comportamento de cavidades no estado excitado sob influência do bombeio

Dentro das possíveis diferenças entre autovalores para o bombeio externo extraímos a ressonância  $\eta^{(p)} \approx (\omega_0 - \delta_-)$ , que acoplará somente os índices  $-\mathcal{D} \leftrightarrow -\mathcal{D}$ . Escreveremos (3.85) considerando  $\mathcal{T} = -\mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \dot{b}_{m,-\mathcal{D}} = & \frac{i}{2} \sum_j \sum_{\mathcal{S}} \left\{ \varepsilon_d^{(p)} L_{1,m+1,-\mathcal{D},\mathcal{D}} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+1,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m+1,\mathcal{D}}(t) \right. \\ & + \varepsilon_d^{(p)} L_{1,m+1,-\mathcal{D},-\mathcal{D}} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+1,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m+1,-\mathcal{D}}(t) \\ & + \varepsilon_d^{(p)*} L_{1,m,\mathcal{D},-\mathcal{D}}^* e^{it(\tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-1,\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m-1,\mathcal{D}}(t) \\ & \left. + \varepsilon_d^{(p)*} L_{1,m,-\mathcal{D},-\mathcal{D}}^* e^{it(\tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-1,-\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m-1,-\mathcal{D}}(t) \right\}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Na equação (3.95) substituiremos os valores dos coeficientes e obteremos

$$\begin{aligned} \dot{b}_{m,-\mathcal{D}} = & \frac{i}{2} \left\{ \varepsilon_d^{(p)} \sqrt{m} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+1,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m+1,-\mathcal{D}}(t) \right. \\ & + \varepsilon_d^{(p)*} \frac{g_0}{|\Delta_-|} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-1,\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m-1,\mathcal{D}}(t) \\ & \left. + \varepsilon_d^{(p)*} \sqrt{m-1} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-1,-\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m-1,-\mathcal{D}}(t) \right\}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Utilizando o método da RWA, escrevemos a aproximação

$$\frac{|\varepsilon_d^{(p)*} \sqrt{m}|}{|\delta_-|} \ll 1,$$

e com o SFN estimamos

$$\mathcal{O}(\Delta\nu) \simeq \frac{\varepsilon_d^{(p)*2}}{\delta_-}.$$

Portanto, equação (3.96) torna-se

$$\begin{aligned} \dot{b}_{m,-\mathcal{D}} \simeq & \frac{i}{2} \left\{ \varepsilon_d^{(p)} \sqrt{m} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+1,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m+1,-\mathcal{D}}(t) \right. \\ & \left. + \varepsilon_d^{(p)*} \sqrt{m-1} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-1,-\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m-1,-\mathcal{D}}(t) \right\}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

A diferença entre as autoenergias  $\tilde{\lambda}_{m+1,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}}$  é escrita como

$$\tilde{\lambda}_{m+1,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} = \omega_e + \alpha \left[ (m+1)^2 - m^2 \right] - \alpha_3 \left[ (m+1)^3 - m^3 \right].$$

Escreveremos  $\eta^{(p)}$  de forma corrigida

$$\eta^{(p)} = \omega_e - \zeta. \quad (3.98)$$

sendo  $\omega_e$  frequência efetiva já definida em (3.56) e  $\zeta$  frequência de ajuste fino.

Definindo nova amplitude de probabilidade como  $C_m(t) = b_{m+1,-\mathcal{D}}(t)$ , onde  $m > 0$ . Escreveremos a equação diferencial final para a amplitude de probabilidade

$$\begin{aligned} \dot{C}_m = & \frac{i}{2} \left\{ \varepsilon_d^{(p)} \sqrt{m+1} e^{-it(\zeta + \alpha(2m+3) - \alpha_3(3m^2+9m+7))} C_{m+1}(t) \right. \\ & \left. + \varepsilon_d^{(p)*} \sqrt{m} e^{it(\zeta + \alpha(2m+1) - \alpha_3(3m^2+3m+1))} C_{m-1}(t) \right\}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Em (3.97) acoplamos as amplitudes  $b_{m,-\mathcal{D}} \leftrightarrow b_{m\pm 1,-\mathcal{D}}$ . Com isso, concluímos que os estados quânticos se acoplam como  $|\varphi_{m,-\mathcal{D}}\rangle \leftrightarrow |\varphi_{m\pm 1,-\mathcal{D}}\rangle$  e dentro dos limites do RD analisamos  $|e, m-1\rangle \leftrightarrow |e, m\rangle$ . Portanto concluímos que há como efeito a criação de fótons um a um com o estado atômico inalterado, resultado análogo ao regime **ECDe**, sendo o processo guiado por um único fóton.

### Hamiltoniano efetivo

Escreveremos a função de onda (3.61)

$$|\Psi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \exp\{-it[z_1 m + z_2 m^2 + z_4 m^3]\} C_m(t) |m\rangle.$$

Substituiremos (3.92) e (3.61) em (3.47) obteremos equação semelhante a (3.93) (a diferença entre  $C_m(t)$  e  $c_m(t)$ )

$$\begin{aligned} \dot{C}_m = & -iz_3\sqrt{m+1}e^{-it((z_1-2z_2+3z_4)+(z_2-3z_4)(2m+3)+z_4(3m^2+9m+7))}C_{m+1}(t) \\ & -z_3^*\sqrt{m}e^{it((z_1-2z_2+3z_4)+(z_2-3z_4)(2m+1)+z_4(3m^2+3m+1))}C_{m-1}(t) \end{aligned} \quad (3.100)$$

Ao comparar (3.100) com (3.99) escolheremos os parâmetros por comparação

$$\zeta = (z_1 - 2z_2 + 3z_4), \quad \alpha = (z_2 - 3z_4)$$

e

$$z_1 = (\zeta + 2\alpha - 3\alpha_3), \quad z_2 = (\alpha - 3\alpha_3), \quad z_3 = \frac{1}{2}\varepsilon_d^{(p)}, \quad z_4 = -\alpha_3.$$

Portanto, o Hamiltoniano efetivo torna-se

$$\hat{H}_{eff} = (\zeta + 2\alpha - 3\alpha_3) \hat{A}^\dagger \hat{A} + (\alpha - 3\alpha_3) (\hat{A}^\dagger \hat{A})^2 - \alpha_3 (\hat{A}^\dagger \hat{A})^3 + \frac{i}{2} (\varepsilon_d^{(p)*} \hat{A}^\dagger - \varepsilon_d^{(p)} \hat{A}). \quad (3.101)$$

A equação (3.101) se assemelha com (3.94), porém as equações se diferenciam por algumas constantes. Mesmo sendo responsável pela criação de fótons um a um, o Hamiltoniano (3.101) tem dinâmica pouco diferente de (3.94) devido a “frequência efetiva da cavidade” diferente, como visto no primeiro termo do LD da equação (3.101).

### 3.4.3 Comportamento de excitação atômica

Outro efeito pode ser considerado quando extraímos das diferença entre os autovalores o limite de ressonância  $\eta^{(p)} \approx \Omega_0$ , que acoplará somente os índices  $\mathcal{D} \leftrightarrow -\mathcal{D}$ . Escreveremos (3.85) escolhendo  $\mathcal{T} = \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \dot{b}_{m,\mathcal{D}} = & \frac{i}{2} \left\{ \varepsilon_d^{(p)} \sqrt{m+1} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+1,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m+1,\mathcal{D}}(t) \right. \\ & + \varepsilon_d^{(p)} \frac{g_0}{|\Delta_-|} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+1,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m+1,-\mathcal{D}}(t) \\ & \left. + \varepsilon_d^{(p)*} \sqrt{m} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-1,\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m-1,\mathcal{D}}(t) \right\}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Na equação acima eliminaremos os termos que estarão fora da ressonância  $\eta^{(p)} \approx \Omega_0$ , com o método da RWA escrevemos as aproximações

$$\frac{|\varepsilon_d^{(p)} \sqrt{m+1}|}{|\Delta_-|} \ll 1,$$

com o SFN teremos

$$\mathcal{O}(\Delta\nu) \simeq \frac{\varepsilon_d^{(p)2}}{\Delta_-}$$

Escrevendo  $\eta_M^{(p)}$  de forma corrigida

$$\eta_M^{(p)} = \Omega - (\delta_- - \delta_+) (2M + 1), \quad (3.103)$$

onde  $M \geq 0$ , obtemos as equações

$$\dot{b}_{m,\mathcal{D}} \simeq \frac{ig_0\varepsilon_d^{(p)}}{2|\Delta_-|} e^{-it2(\delta_- - \delta_+)(M-m)} b_{m+1,-\mathcal{D}}(t) \quad (3.104)$$

$$\dot{b}_{m+1,-\mathcal{D}} \simeq -\frac{ig_0\varepsilon_d^{(p)*}}{2|\Delta_-|} e^{it2(\delta_- - \delta_+)(M-m)} b_{m,\mathcal{D}}(t). \quad (3.105)$$

Com a ressonância de excitação atômica acoplamos os coeficientes  $b_{m,\mathcal{D}} \leftrightarrow b_{m+1,-\mathcal{D}}$ . Os novos estados quânticos gerados devido ao bombeio externo modulado por  $\eta_M^{(p)}$  podem ser visto como  $|\varphi_{m,\mathcal{D}}\rangle \leftrightarrow |\varphi_{m+1,-\mathcal{D}}\rangle$ . Quando consideramos os limites do RD os estados são escritos como  $|g,m\rangle \leftrightarrow |e,m\rangle$ . Assim, concluímos que o efeito do bombeio clássico será suave, fazendo apenas com que os estados atômicos do *qubit* transitem entre os estados *fundamental* e *excitado*, não havendo o processo de criação de fótons.

### 3.4.4 Comportamento do tipo anti-ECD (AECD)

O último efeito que analisaremos no capítulo será caracterizado pela frequência de modulação com limite de ressonância escrito como  $\eta^{(p)} \approx \omega_0 + \Delta_-$ , onde acoplamos os índices  $-\mathcal{D} \leftrightarrow \mathcal{D}$ . Escreveremos (3.85) escolhendo  $\mathcal{T} = -\mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \dot{b}_{m,-\mathcal{D}} = & \frac{i}{2} \left\{ \varepsilon_d^{(p)} \sqrt{m} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+1,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m+1,-\mathcal{D}}(t) \right. \\ & + \varepsilon_d^{(p)*} \frac{g_0}{|\Delta_-|} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-1,\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m-1,\mathcal{D}}(t) \\ & \left. + \varepsilon_d^{(p)*} \sqrt{m+1} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,-\mathcal{D}} - \tilde{\lambda}_{m-1,\mathcal{D}} - \eta^{(p)})} b_{m-1,-\mathcal{D}}(t) \right\}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

O termo  $L_{1,m+1,-\mathcal{D},\mathcal{D}} \approx 0$  (apêndice I). Portanto, a equação acima também vai a zero, pois todos os termos exponenciais estão fora da ressonância  $\eta^{(p)} \approx \omega_0 + \Delta_-$ . Assim, concluímos que para o bombeio externo não haverá nunca haverá aniquilação coerente de excitações. Isso comprova que AECD é um fenômeno novo que se deve exclusivamente à modulação temporal de um dos três (ou todos os três) parâmetros do sistema:  $\omega$ ,  $\Omega$  ou  $g$ .



# Capítulo 4

## Toy Model ao efeito Casimir dinâmico

Um *Toy Model* (*modelo de brinquedo*) para o efeito Casimir dinâmico (ECD) é construído a partir das seguintes considerações: há uma cavidade com paredes fixas e estamos interessados em um único modo do campo eletromagnético com frequência fixa e bem conhecida  $\omega$ . Dentro da cavidade há  $N$  átomos de dois níveis (representado pelos estados de excitação atômica  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$ , *fundamental* e *excitado*) com frequência de transição atômica  $\Omega$ . Portanto, haverá interação luz-matéria e desconhecemos os possíveis valores da frequência de transição atômica  $\Omega$  e frequência de acoplamento átomo-campo  $g$ , porém sabemos que  $\Omega$  é bem diferente de  $\omega$ . A figura 1.1 desenha um modelo bastante interessante de *Toy Model* para o ECD, como visto, a cavidade tem paredes fixas e com um modo do campo eletromagnético, contendo placa dielétrica fixa em um ponto arbitrário. A placa oscila de acordo com uma lei externa de movimento (como representado pela mola na figura). No entanto, para consolidar o *Toy Model*, consideraremos a placa um *ensemble* de  $N$  átomos de dois-níveis, assim manteremos a diferença  $\omega - \Omega$  bem maior que a taxa de acoplamento átomo-campo  $g$ , ou seja,  $|\omega - \Omega| \gg |g|$ . Os parâmetros do sistema  $X = \{\Omega, g, \chi\}$  serão perturbados externamente com variações escritas de acordo com  $X = X_0 + \varepsilon_x f_X$ , sendo  $f_X$  representado pela equação (2.3). Na figura, a perturbação externa dos parâmetros é feita pelo feixe vermelho, caracterizando a modulação das propriedades atômicas. Assim, teremos sistema com comportamento não-estacionário. Estudaremos o processo de criação de partículas a partir do estado de vácuo, caracterizado pelo ECD. Analisaremos o fenômeno por meio de uma das formas mais simples de interação na natureza, a interação luz-matéria na aproximação de dipolo.

## 4.1 Toy Model para ECDg

Ao considerar que a cavidade e átomos se encontram inicialmente no estado fundamental, escreveremos Hamiltoniano efetivo extraído da equação (3.50). O Hamiltoniano foi obtido na ocasião onde um único átomo interage com um modo da cavidade. A modulação externa é feita quando consideramos a frequência  $\eta^{(D)} = 2(\omega_g - \zeta)$ , ocasionando o fenômeno que chamamos **ECDg**. Portanto, escreveremos apropriadamente o Hamiltoniano efetivo

$$\hat{H}_{eff} = \zeta \left( \hat{A}^\dagger \hat{A} \right) + \alpha \left( \hat{A}^\dagger \hat{A} \right)^2 + \alpha_3 \left( \hat{A}^\dagger \hat{A} \right)^3 + i \frac{|\vartheta_+|}{2} \left( \hat{A}^{\dagger 2} - \hat{A}^2 \right),$$

resultado obtido quando considerado a menor ordem de  $\frac{g_0}{\Delta_-}$ , sendo  $\Delta_- = \omega - \Omega$  o termo de *dissintonia*. Definimos os operadores  $\hat{A} = \hat{S}e^{iz_6}$  e  $\hat{A}^\dagger = \hat{S}^\dagger e^{-iz_6}$ , que são análogos aos operadores bosônicos de aniquilação e criação  $\hat{a}$  ( $\hat{a}^\dagger$ ), obedecendo as mesmas propriedades algébricas. Para simplificar a notação vamos usar o operador de aniquilação “rotacionado”

$$\hat{a}_r = \hat{S}e^{iz_6}, \quad (4.1)$$

com  $\hat{a}_r$  satisfazendo a relação  $[\hat{a}_r, \hat{a}_r^\dagger] = 1$ . A evolução do operador será governada pelo Hamiltoniano independente do tempo e não-linear escrito para o ECD

$$\hat{H}_{ECD} = \omega_r \hat{n}_r + \alpha_r \hat{n}_r^2 + iq_r \left( \hat{a}_r^{\dagger 2} - \hat{a}_r^2 \right), \quad (4.2)$$

onde consideramos  $\omega_r = \zeta$  (*dissintonia efetiva*),  $\alpha_r = \alpha = \frac{g_0^4}{\Delta_-^3}$  (termo não-linear de Kerr),  $q_r = \frac{|\vartheta_+|}{2}$  (termo de *squeezing*) e  $\hat{n}_r = \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r$ . Ademais, desprezamos o termo proporcional a  $\alpha_3$  devido a sua ordem de grandeza  $\alpha_3 = \frac{g_0^6}{\Delta_-^5}$ . O Hamiltoniano (4.2) é bem conhecido das predições teóricas em Óptica Quântica Não Linear, pois descreve cavidade com meio ótico não-linear (efeito Kerr) guiado pelo processo de amplificação paramétrica da luz (*parametric down conversion*) (APL) [63]. A APL é interpretada como: um feixe de luz com frequência  $2\omega$ , ao ser inserido em meio ótico não-linear, gera dois feixes distintos, um com frequência  $\omega_1$  e outro com frequência  $2\omega - \omega_1$ , mantendo a conservação de energia. No caso lidamos com o processo degenerado, pois  $\omega_1 = \omega_2$ . O processo tem duas características fundamentais: a criação de pares de fótons e criação de estados comprimidos da luz (*squeezed states*), devido à presença do termo  $iq_r \left( \hat{a}_r^{\dagger 2} - \hat{a}_r^2 \right)$ , que descreve o caso mais simples para o ECD, como já previsto em [17]. Além disso, outros trabalhos na literatura consideram o ECD um efeito de amplificação paramétrica [54]. A presença do termo não-linear  $\alpha$  tem efeito físico interessante, pois altera

a dinâmica da criação de fótons dentro da cavidade, com o crescimento de fótons limitado por saturação [13, 56].

Assim, faremos a primeira conclusão resultante do *Toy Model* sugerido: o processo de criação de fótons a partir do estado de vácuo acontecerá juntamente com a excitação dos graus de liberdade internos dos átomos que compõe a placa. Portanto, teremos um sistema com átomo-campo emaranhando-se. Isto ocorre porque na prática são criados estados vestidos átomo-campo (que no RD são aproximadamente  $|g, n\rangle$ ), portanto o átomo adquire uma probabilidade pequena porém finita de ser encontrado em estado excitado. Para descrição realística do ECD devemos considerar a solução do Hamiltoniano não-linear (4.2). No entanto, conhecemos separadamente no formalismo de Heisenberg a solução para Hamiltoniano com termo referente ao simples caso do ECD ou caso que contém somente o termo de Kerr. Quando considerados em conjunto o termo de ECD e Kerr, ainda não se conhece a solução analítica. Assim, buscaremos respostas sobre a dinâmica de (4.2) considerando o caso da APL. Reescrevemos o Hamiltoniano (4.2) como

$$\hat{H}_{ECD} = \hat{D}_r \hat{n}_r + iq_r (\hat{a}_r^{\dagger 2} - \hat{a}_r^2), \quad (4.3)$$

sendo  $\hat{D}_r \equiv \omega_r + \alpha_r \hat{n}_r$ . Ao analisar somente o caso da APL, consideramos  $\langle \hat{D}_r \rangle$  como um número. Escreveremos a evolução de  $\hat{a}_r$  no formalismo de Heisenberg, usando apropriadamente a equação de Heisenberg [63]

$$\frac{d}{dt} \hat{a}_r(t) = -i [\hat{a}_r, \hat{H}_{ECD}]. \quad (4.4)$$

Para resolver (4.4), iniciaremos calculando o comutador entre  $\hat{a}_r$  e  $\hat{H}_{ECD}$

$$[\hat{a}_r, \hat{H}_{ECD}] = \langle \hat{D}_r \rangle [\hat{a}_r, \hat{n}_r] + iq_r \left\{ [\hat{a}_r, \hat{a}_r^{\dagger 2}] + [\hat{a}_r^2, \hat{a}_r] \right\}.$$

Com os valores  $[\hat{a}_r, \hat{n}_r] = \hat{a}_r$ ,  $[\hat{a}_r, \hat{a}_r^{\dagger 2}] = 2\hat{a}_r^{\dagger}$  e  $[\hat{a}_r^2, \hat{a}_r] = 0$  a equação diferencial para o operador  $\hat{a}_r(t)$  torna-se

$$\frac{d\hat{a}_r}{dt} = -i \langle \hat{D}_r \rangle \hat{a}_r + 2iq_r \hat{a}_r^{\dagger}. \quad (4.5)$$

Para obter resposta completa sobre dinâmica do operador  $\hat{a}_r$  derivaremos (4.5) em respeito ao tempo e obteremos

$$\frac{d^2 \hat{a}_r}{dt^2} - \left( 4q_r^2 - \langle \hat{D}_r^2 \rangle \right) \hat{a}_r = 0. \quad (4.6)$$

A solução proposta para a equação será do tipo  $\hat{a}_r(t) = \hat{a}_r(0) e^{\lambda t}$ . Com isso, ao substituirmos a solução em (4.6) obteremos equação característica  $\lambda^2 - \left( 4q_r^2 - \langle \hat{D}_r^2 \rangle \right) = 0$ . Portanto, teremos

os possíveis valores  $\lambda = \pm \sqrt{4q_r^2 - \langle \hat{D}_r^2 \rangle}$ , onde definiremos  $\mathcal{B} = \sqrt{4q_r^2 - \langle \hat{D}_r^2 \rangle}$ , então teremos como solução

$$\hat{a}_r(t) = \hat{A}_1 e^{\mathcal{B}t} + \hat{B}_1 e^{-\mathcal{B}t},$$

sendo  $\hat{A}_1$  e  $\hat{B}_1$  operadores definidos posteriormente. A primeira condição para a solução é considerar que para  $t = 0$  teremos  $\hat{a}_r(t) = \hat{a}_r(0)$  e assim

$$\hat{a}_r(0) = \hat{A}_1 + \hat{B}_1. \quad (4.7)$$

A segunda condição para solução é considerar a derivada temporal para o tempo inicial  $t = 0$ , assim obtemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \hat{a}_r(t) \right|_{t=0} &= -i \langle \hat{D}_r \rangle \hat{a}_r(0) + 2q_r \hat{a}_r^\dagger(0) = \mathcal{B} (\hat{A}_1 - \hat{B}_1) \\ \hat{a}_r^\dagger(0) &= \frac{(\mathcal{B} - i \langle \hat{D}_r \rangle) \hat{A}_1}{2q_r} - \frac{(\mathcal{B} + i \langle \hat{D}_r \rangle) \hat{B}_1}{2q_r}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Com os resultados obtidos em (4.7) e (4.8) temos conjunto de duas equações com duas variáveis a definir,  $\hat{A}_1$  e  $\hat{B}_1$ . Assim, procederemos com sucessivas manipulações, partindo da primeira consideração  $\hat{A}_1 = \hat{a}_r(0) - \hat{B}_1$  que será substituída em (4.8) fornecendo o valor para  $\hat{B}_1$ . Consequentemente, obtemos resposta para  $\hat{A}_1$ . Portanto, escrevemos a solução final para a dinâmica de  $\hat{a}_r(t)$

$$\hat{a}_r(t) = \mathcal{F}^* \hat{a}_r(0) + \mathcal{G} \hat{a}_r^\dagger(0), \quad (4.9)$$

onde definimos  $\mathcal{F} \equiv \left\{ \cosh(\mathcal{B}t) + \frac{i \langle \hat{D}_r \rangle}{\mathcal{B}} \sinh(\mathcal{B}t) \right\}$  e  $\mathcal{G} \equiv 2 \frac{q_r}{\mathcal{B}} \sinh(\mathcal{B}t)$ .

Com o resultado de (4.9) escrevemos a segunda conclusão do *Toy Model*: não haverá o crescimento exponencial no número de fótons dentro da cavidade caso tenhamos o termo não-linear de Kerr  $\alpha_r \neq 0$ . Isto ocorre porque quando tomamos  $\langle \hat{n}_r \rangle \rightarrow \infty$  e fixamos um valor para a dissintonia efetiva  $\omega_r$ , o valor de  $\mathcal{B}$  torna-se imaginário. Portanto, a dinâmica de  $\hat{a}_r(t)$  para tempos longos será limitada, fato que atribuímos ao meio não-linear de Kerr. Este resultado está de acordo com as predições de [54], onde é sugerido que o crescimento de fótons dentro de uma cavidade sem perdas é limitado. Assim, pelo menos neste caso super-idealizado, a controvérsia para o crescimento do números de fótons para longos tempos é resolvida. Para o caso onde consideramos tempo finito, temos resposta encontrada na equação apresentada em (3.50), que deve ser resolvida numericamente.

## 4.2 Toy Model na presença bombeio externo

Outra consideração importante a respeito do *Toy Model* é: a cavidade pode ser conduzida por modulações prescritas por bombeio de luz clássica. Portanto, estudaremos o *Toy Model* levando em consideração o efeito dos termos *id* ( $\hat{a}^\dagger - \hat{a}$ ) encontrados em (2.7). Partiremos do resultado obtido em (3.94), para o caso de cavidade contendo um único átomo sendo conduzida pelo bombeio clássico com frequência  $\eta^{(p)} = (\omega_g - \zeta)$ . A dinâmica é descrita pelo Hamiltoniano efetivo

$$\hat{H}_{eff} = \zeta \hat{A}^\dagger \hat{A} - \alpha \left( \hat{A}^\dagger \hat{A} \right)^2 + \alpha_3 \left( \hat{A}^\dagger \hat{A} \right)^3 + \frac{i}{2} \left( \varepsilon_d^{*(p)} \hat{A}^\dagger - \varepsilon_d^{(p)} \hat{A} \right),$$

resultado obtido quando considerado a menor ordem de  $\frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m}$ . Quando não levamos em consideração o termo não-linear de Kerr  $\alpha$  e desprezamos termos de ordens maiores que  $\frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m}$  a geração de fótons é otimizada para  $\zeta = 0$ . Neste caso obtemos Hamiltoniano efetivo apropriado ao bombeio externo

$$\hat{H}_{pump} = \frac{i}{2} \left( \varepsilon_d^{*(p)} \hat{A}^\dagger - \varepsilon_d^{(p)} \hat{A} \right). \quad (4.10)$$

Assim, ao somar (4.10) no lado direito de (3.50), mantendo os mesmos critérios de eliminação usado na obtenção de (4.10), definimos Hamiltoniano apropriado para ECD considerando o bombeio externo

$$\hat{H}_{pump} \equiv \rho \hat{a}_r + \rho^* \hat{a}_r^\dagger + \frac{1}{2} \xi \hat{a}_r^2 + \frac{1}{2} \xi^* \hat{a}_r^{\dagger 2}, \quad (4.11)$$

sendo  $\hat{a}_r$  definido em (4.1). Introduzimos  $\rho$  e  $\xi$  coeficientes complexos e independentes do tempo. Para descrever a dinâmica de  $\hat{a}_r$  sob condições do bombeio externo, usaremos o formalismo de Heisenberg escrevendo

$$\frac{d}{dt} \hat{a}_r(t) = -i \left[ \hat{a}_r, \hat{H}_{pump} \right]. \quad (4.12)$$

Resolveremos o comutador presente em (4.12)

$$\left[ \hat{a}_r, \hat{H}_{pump} \right] = \rho \left[ \hat{a}_r, \hat{a}_r \right] + \rho^* \left[ \hat{a}_r, \hat{a}_r^\dagger \right] + \frac{1}{2} \xi \left[ \hat{a}_r, \hat{a}_r^2 \right] + \frac{1}{2} \xi^* \left[ \hat{a}_r, \hat{a}_r^{\dagger 2} \right],$$

e portanto reescrevemos (4.12)

$$\frac{d}{dt} \hat{a}_r(t) = -i \left\{ \rho^* + \xi^* \hat{a}_r^\dagger \right\}. \quad (4.13)$$

O procedimento para obter a solução de (4.13) será análogo ao que fora utilizado na obtenção de (4.9). Portanto, derivaremos (4.13) em função do tempo, obtendo equação diferencial de

segunda ordem. Propomos solução escrita em função de termos exponenciais com constantes arbitrárias a serem definidas posteriormente. Em seguida, impomos condições iniciais para a solução e a primeira derivada quando considerado  $t = 0$ . Conseqüentemente, conseguimos encontrar valores para as constantes arbitrárias e assim escrevemos a solução de  $\hat{a}_r$  como

$$\hat{a}_r = \hat{a}_r(0) \cosh(|\xi| t) - i \frac{\xi^*}{|\xi|} \hat{a}_r^\dagger(0) \sinh(|\xi| t) + \frac{\rho}{\xi} [\cosh(|\xi| t) - 1] - i \frac{\rho^*}{|\xi|} \sinh(|\xi| t). \quad (4.14)$$

Analisaremos a dinâmica de (4.14) calculando o número médio de fótons  $\langle \hat{n}_r \rangle$  dentro da cavidade. O caso mais importante é considerando quando átomo e campo se encontram inicialmente no estado fundamental, para qual  $\hat{a}_r |0\rangle = 0$ . O cálculo do número médio será conduzido por  $\langle \hat{n}_r \rangle = \langle 0 | \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r | 0 \rangle$ , onde substituiremos o resultado de (4.14) e seu hermitiano conjugado na média. Assim, procederemos com algumas manipulações e obteremos o número médio dado por

$$\langle \hat{n}_r \rangle = \sinh^2(|\xi| t) + 2 \frac{|\rho|^2}{|\xi|^2} [\cosh(|\xi| t) - \sinh(|\xi| t) \sin(2\phi_\rho - \phi_\xi)] [\cosh(|\xi| t) - 1], \quad (4.15)$$

onde escrevemos  $\xi$  e  $\rho$  em termos de seus módulos e fases,  $\xi = |\xi| e^{i\phi_\xi}$  e  $\rho = |\rho| e^{i\phi_\rho}$ .

A primeira consideração que faremos para o número médio de fótons consiste em analisar a dinâmica para o tempo inicial. Para isso, consideraremos  $|\xi| t \ll 1$ , e expandiremos em série as funções trigonométricas em (4.15). Levaremos em consideração termos até a segunda ordem em  $|\xi| t$ , obtendo

$$\langle \hat{n}_r \rangle \approx (|\xi|^2 + |\rho|^2) t^2. \quad (4.16)$$

Portanto, concluímos que o número médio de fótons não tem dependência com as fases, quando consideramos o processo para o tempo inicial. No entanto, quando consideramos o número médio para tempos longos, as fases  $\phi_\rho$  e  $\phi_\xi$  terão grande importância. A diferença apropriada entre as fases  $(2\phi_\rho - \phi_\xi)$  alterará o comportamento do número médio dos fótons gerados na cavidade quando considerado o bombeio externo, como mostra a expressão exata

$$\langle \hat{n}_r \rangle = \sinh^2(|\xi| t) + 2 \frac{|\rho|^2}{|\xi|^2} e^{\pm|\xi|t} [\cosh(|\xi| t) - 1], \text{ para } 2\phi_\rho - \phi_\xi = \mp \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad (4.17)$$

com  $k$  sendo definido número inteiro. Podemos considerar os casos particulares para a diferença de fase considerada na equação acima. O valor do número médio de fótons para tempos grandes  $|\xi| t \gg 1$  será

$$\langle \hat{n}_r \rangle \approx \begin{cases} \frac{1}{4} e^{2|\xi|t} + \frac{|\rho|^2}{|\xi|^2} e^{2|\xi|t} & \text{para } 2\phi_\rho - \phi_\xi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \frac{1}{4} e^{2|\xi|t} + \frac{|\rho|^2}{|\xi|^2} & \text{para } 2\phi_\rho - \phi_\xi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}. \quad (4.18)$$

Portanto, o número médio de fótons dependerá diretamente da escolha apropriada de  $(2\phi_\rho - \phi_\xi)$ . Como percebemos em (4.18), a escolha  $(2\phi_\rho - \phi_\xi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$  se mostra mais vantajosa, pois explicita o crescimento exponencial nas duas parcelas do lado direito. Já a escolha de  $(2\phi_\rho - \phi_\xi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$  não é tão eficaz, pois é acompanhada de um único termo com crescimento exponencial e mais um termo constante. Assim, a escolha certa de  $(2\phi_\rho - \phi_\xi)$  pode amplificar consideravelmente a geração de fótons na presença do bombeio externo guiado por um processo de 1 – *fóton*. Além do mais, a verificação experimental do nosso modelo pode ser feita através da medição de  $\langle \hat{n}_r \rangle$ , onde podemos considerar que o número médio depende tanto da fase do bombeio externo, quanto da modulação dos parâmetros  $\varepsilon_X^{(j)}$  encontrados na definição (2.64).

# Capítulo 5

## Regime ressonante: ECD e similares

Vamos relembrar os autovalores do modelo de Jaynes-Cummings (JC)

$$\lambda_{n,S} = \omega_0 n - \frac{\Delta_-}{2} + \mathcal{S} \frac{\beta_n}{2}, \quad (5.1)$$

sendo  $\beta_n = \sqrt{\Delta_-^2 + 4g_0^2 n}$  e  $\Delta_- = \omega_0 - \Omega_0$  definido como termo de *dissintonia*. O sistema que consideramos (cavidade mais interação átomo-campo) nos forneceu duas análises: a primeira considera que o termo de dissintonia  $\Delta_-$  é bem maior que a frequência de acoplamento átomo-campo  $g_0$ ,  $\Delta_- \gg g_0$  o que caracteriza o *regime dispersivo* (RD); outra análise é extraída com o limite inverso, quando a frequência de acoplamento átomo-campo  $g_0$  é bem maior que o termo de *dissintonia*, nos levando a considerar que  $|\Delta_-|/g_0 \ll 1$ , o que caracteriza o *regime ressonante* (RR). No capítulo 3 consideramos somente a formulação do RD, analisando o efeito Casimir dinâmico, comportamento do regime Anti-Jaynes-Cummings e o novo efeito interpretado como Anti-efeito Casimir dinâmico. Neste capítulo analisaremos tais efeitos, porém na formulação do RR.

### 5.1 Formulação do Regime

Quando consideramos a formulação do RR consideramos  $g_0$  muito maior que o termo de *dissintonia*. Portanto, uma maneira simplificada de analisar a dinâmica é supôr que o termo dissintonia será nulo  $|\Delta_-| = 0$ , considerando  $\theta_{n>0} = \pi/4$  (apêndice B). A formulação do RR e seus respectivos valores é encontrada no apêndice I. Para o atual regime os autovalores de JC são escritos



como

$$\lambda_{n,\mathcal{S}} = \omega_0 n + \mathcal{S} |g_0| \sqrt{n}, \quad (5.2)$$

e para o estado fundamental  $\lambda_0 = 0$ . Escrevendo os possíveis valores de  $\mathcal{S} = \pm$  teremos a diferença entre as autoenergias

$$\lambda_{n,+} - \lambda_{n,-} = 2g_0 \sqrt{n}.$$

A dinâmica do circuito não-estacionário composto por um único átomo pode ser analisada com auxílio da equação (2.83.), que descreve o modelo matemático mais geral ao problema. Como feito no capítulo 3, calcularemos os coeficientes de acoplamento definidos em (2.84) apropriados ao RR (todos os valores usados para obter os coeficientes podem ser vistos nos apêndices I e J). Iniciaremos considerando que (2.84) assume valor de  $m = 0$  e obtemos

$$\Theta_{2,\mathcal{T},+} = \frac{1}{4} \sqrt{2} \left\{ \left\{ g_0 - 2i\chi_0 \sqrt{2} \right\} \frac{\varepsilon_\omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} + g_0 \frac{\varepsilon_\Omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} - \left\{ 1 + \frac{2i\chi_0}{\eta^{(j)}} \right\} \varepsilon_g^{(j)} + \sqrt{2} i \varepsilon_\chi^{(j)} \right\} \quad (5.3)$$

$$\Theta_{2,\mathcal{T},-} = -\frac{1}{4} \sqrt{2} \left\{ \left\{ g_0 + 2i\chi_0 \sqrt{2} \right\} \frac{\varepsilon_\omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} + g_0 \frac{\varepsilon_\Omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} - \left\{ 1 + \frac{2i\chi_0}{\eta^{(j)}} \right\} \varepsilon_g^{(j)} - i \sqrt{2} \varepsilon_\chi^{(j)} \right\}. \quad (5.4)$$

Agora considerando que (2.84) assume valores para  $m > 0$ , obtendo

$$\begin{aligned} \Theta_{m+2,(m>0),+,+} &= \frac{1}{4} \sqrt{m+1} \left\{ [g_0 - 2i\chi_0 (\sqrt{m+2} + \sqrt{m})] \frac{\varepsilon_\omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} + g_0 \frac{\varepsilon_\Omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{2i\chi_0}{\eta^{(j)}} \right) \varepsilon_g^{(j)} + i \varepsilon_\chi^{(j)} (\sqrt{m+2} + \sqrt{m}) \right\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{m+2,(m>0),+,-} &= -\frac{1}{4} \sqrt{m+1} \left\{ [g_0 + 2i\chi_0 (\sqrt{m+2} - \sqrt{m})] \frac{\varepsilon_\omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} + g_0 \frac{\varepsilon_\Omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{2i\chi_0}{\eta^{(j)}} \right) \varepsilon_g^{(j)} - i \varepsilon_\chi^{(j)} \sqrt{m+1} (\sqrt{m+2} - \sqrt{m}) \right\} \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{m+2,(m>0),-,+} &= \frac{1}{4} \sqrt{m+1} \left\{ [g_0 - 2i\chi_0 (\sqrt{m+2} - \sqrt{m})] \frac{\varepsilon_\omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} + g_0 \frac{\varepsilon_\Omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{2i\chi_0}{\eta^{(j)}} \right) \varepsilon_g^{(j)} + i \varepsilon_\chi^{(j)} (\sqrt{m+2} - \sqrt{m}) \right\} \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{m+2,(m>0),-,-} &= -\frac{1}{4} \sqrt{m+1} \left\{ [g_0 + 2i\chi_0 (\sqrt{m+2} + \sqrt{m})] \frac{\varepsilon_\omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} + g_0 \frac{\varepsilon_\Omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{2i\chi_0}{\eta^{(j)}} \right) \varepsilon_g^{(j)} - i \varepsilon_\chi^{(j)} (\sqrt{m+2} + \sqrt{m}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

No RR os coeficientes são obtidos sob o limite  $|g_0| \sqrt{m} \ll \omega_0$ , onde aproximamos que a frequência de modulação será da ordem da frequência da cavidade  $\eta^{(j)} \sim \omega_0$ . No capítulo 3 descrevemos a importância dos coeficientes de acoplamento ao analisar os efeitos físicos, pois cada coeficiente teve efetividade dentro de um limite de ressonância estipulada para a frequência de modulação. Novamente os estados quânticos se acoplam de acordo com as possíveis combinações de  $\pm$  encontrados nos coeficientes de acoplamento.

### 5.1.1 Efeitos ECD, AJC e AECD

Da equação (3.25) extraímos os *autovalores corrigidos*  $\tilde{\lambda}_{m+2,\mathcal{S}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}}$ , que estipularão os valores de ressonância para  $\eta^{(j)}$ . Portanto, todos os acoplamentos serão entre estados que transitam com excitações  $m \leftrightarrow m + 2$ . Assim, da equação (3.25) extraímos a diferença entre as autoenergias

$$\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} = 2\omega_0 + g_0 (\mathcal{S}\sqrt{m+2} - \mathcal{T}\sqrt{m}), \quad (5.9)$$

e quando substituimos os valores  $\mathcal{S}, \mathcal{T} = \pm$ , teremos

$$\lambda_{m+2,+} - \lambda_{m,+} = 2\omega_0 + g_0 (\sqrt{m+2} - \sqrt{m}) : \mathbf{ECDg} \quad (5.10)$$

$$\lambda_{m+2,+} - \lambda_{m,-} = 2\omega_0 + g_0 (\sqrt{m+2} + \sqrt{m}) : \mathbf{AECD} \quad (5.11)$$

$$\lambda_{m+2,-} - \lambda_{m,+} = 2\omega_0 - g_0 (\sqrt{m+2} + \sqrt{m}) : \mathbf{AJC} \quad (5.12)$$

$$\lambda_{m+2,-} - \lambda_{m,-} = 2\omega_0 - g_0 (\sqrt{m+2} - \sqrt{m}) : \mathbf{ECDe}. \quad (5.13)$$

As diferenças entre as autoenergias indicam os efeitos encontrados na análise do RD. Dos valores obtidos acima estipulamos a ressonância apropriada a cada efeito. Os EV em sua formulação mais geral são escritos como

$$|\varphi_{n,\mathcal{S}}\rangle = s_{n,\mathcal{S}} |g, n\rangle + c_{n,\mathcal{S}} |e, n-1\rangle, \quad (5.14)$$

com os coeficientes

$$\begin{aligned} s_{n,+} &= \sin \theta_n; \quad s_{n,-} = \cos \theta_n \\ c_{n,+} &= \cos \theta_n; \quad c_{n,-} = -\sin \theta_n. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Na formulação do atual regime consideramos  $\theta_{n>0} = \pi/4$ , com isso escrevemos os EV como

$$|\varphi_{n,\mathcal{S}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|g, n\rangle + \mathcal{S} |e, n-1\rangle\}. \quad (5.16)$$

De (5.16) inferimos que no RR os estados quânticos que se acoplarão devido as modulações externas são estados superpostos, com isso criamos estados emaranhados entre átomo e campo. Portanto, para as possíveis diferenças contidas em  $\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}}$  temos os acoplamentos entre os estados  $|\varphi_{m,\mathcal{T}}\rangle \leftrightarrow |\varphi_{m+2,\mathcal{S}}\rangle$  válidos para qualquer valor  $m$ ,  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{S}$ . Os possíveis acoplamentos entre estados serão guiados pelas possíveis ressonâncias  $\eta^{(r)} = \lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}}$ . Estudando o acoplamento referente ao ECDg (5.10), escrevemos para  $m > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \{|g, m\rangle + |e, m-1\rangle\} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \{|g, m+2\rangle + |e, m+1\rangle\}. \quad (5.17)$$

Quando consideramos que a modulação se inicia a partir do estado inicial de vácuo  $|g, 0\rangle$  criamos a superposição entre os estados

$$\{|g, 0\rangle\} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \{|g, 2\rangle + |e, 1\rangle\}. \quad (5.18)$$

No RR, acoplamos estados emaranhados que transitam entre  $|g, 0\rangle$ ,  $|e, 1\rangle$  e  $|g, 2\rangle$ . Para a frequência  $\eta^{(D)} \approx 2\omega_0$  geralmente espera-se criação de vários fótons via ECD. No RR o espectro do sistema átomo-campo é não-harmônico, portanto é impossível acoplar mais que um par de estados vestidos de uma só vez. Os resultados encontrados para o **ECDe** são obtidos quando analisamos  $\lambda_{m+2,-} - \lambda_{m,-}$ . Os coeficientes de acoplamento dos efeitos **ECDg** e **ECDe** são representados por (5.5) e (5.8) e efetivamente tem valores próximos e contém termo comum que denota a criação de um fóton  $\sqrt{m+1}$ . No RR, as taxas de criação de excitações são muito maiores que no regime dispersivo comparando os coeficientes nas fórmulas para  $\Theta_{m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}$ .

Para analisar o efeito denominado AJC no RR, escolheremos a diferença apropriada entre as autoenergias  $\lambda_{m+2,-} - \lambda_{m,+}$ , o que caracteriza o regime AJC, pois para **ECDg** o acoplamento é entre estados com  $|\varphi_{m,+}\rangle$  e  $|\varphi_{m+2,+}\rangle$ , portanto de acordo com a nomenclatura no RD para o regime AJC o acoplamento deve ser  $|\varphi_{m,+}\rangle$  e  $|\varphi_{m+2,-}\rangle$ . Isto acontece porque no RD tanto o **ECDg** quanto o AJC acontecem se o estado inicial tiver zero excitações (ou seja,  $|g, 0\rangle$ ), enquanto **ECDe** e **AECD** acontecem para o estado inicial com pelo menos uma excitação. A frequência de modulação terá valor de  $\eta^{(r)} = \lambda_{m+2,-} - \lambda_{m,+} \approx 2\omega_0$  quando consideremos  $|g_0| \sqrt{m} \ll \omega_0$ . De antemão, já podemos concluir que o comportamento AJC no RR também será caracterizado pela criação de um par de excitações. Para o comportamento AJC no RR, temos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \{|g, m\rangle + |e, m-1\rangle\} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \{|g, m+2\rangle - |e, m+1\rangle\}, \quad (5.19)$$

e quando considerado a partir do estado de vácuo assume a forma

$$\{|g, 0\rangle\} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \{|g, 2\rangle - |e, 1\rangle\}.$$

O regime AECD e ECDe serão como os demais, guiado pela criação de pares de excitações.

### 5.1.2 Bombeio externo

Para o bombeio externo analisaremos a dinâmica contida na equação (3.85), caso particular de (2.83) quando conduzida por frequência de modulação em torno de  $\eta^{(p)} \approx \omega_0$ . Da equação (3.85) podemos escrever a diferença entre os autovalores

$$\lambda_{m+1,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} = \omega_0 + g_0 (\mathcal{S}\sqrt{m+1} - \mathcal{T}\sqrt{m}), \quad (5.20)$$

e com  $\mathcal{S}, \mathcal{T} = \pm$  teremos

$$\begin{aligned} \lambda_{m+1,+} - \lambda_{m,+} &= \omega_0 + g_0 (\sqrt{m+1} - \sqrt{m}) : \text{Comportamento para cavidade fundamental} \\ \lambda_{m+1,+} - \lambda_{m,-} &= \omega_0 + g_0 (\sqrt{m+1} + \sqrt{m}) : \text{Comportamento anti-ECD} \\ \lambda_{m+1,-} - \lambda_{m,+} &= \omega_0 - g_0 (\sqrt{m+1} + \sqrt{m}) : \text{Comportamento de excitação atômica} \\ \lambda_{m+1,-} - \lambda_{m,-} &= \omega_0 - g_0 (\sqrt{m+1} - \sqrt{m}) : \text{Comportamento para cavidade excitada.} \end{aligned}$$

Das diferenças de autovalores percebemos que haverá no máximo um fóton criado, pois as ressonâncias de  $\eta^{(j)}$  serão em torno de  $\omega_0$ . A frequência de modulação estipulada ao bombeio externo no RR será aproximadamente  $\eta^{(p)} \approx \lambda_{m+1,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}}$  e com o bombeio clássico conseguimos acoplar os seguintes estados quânticos  $|\varphi_{m,\mathcal{T}}\rangle \leftrightarrow |\varphi_{m+1,\mathcal{S}}\rangle$ . Portanto, cria-se sempre uma excitação. O resultado é válido para todos  $m, \mathcal{T}$  e  $\mathcal{S}$ . Escolhendo o comportamento relatado por  $\lambda_{m+1,+} - \lambda_{m,+}$ , acoplamos os estados

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \{|g, m\rangle + |e, m-1\rangle\} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \{|g, m+1\rangle + |e, m\rangle\}.$$

Por exemplo, para o estado  $|g, 1\rangle$  acoplamos

$$\{|g, 1\rangle\} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \{|g, 2\rangle + |e, 1\rangle\}.$$

Da equação acima observamos a criação de apenas uma excitação, isto ocorre devido ao espectro não-harmônico do sistema total átomo-campo. No RD a diferença de energia entre algumas transições eram muito próximas (cavidade em estado fundamental e excitado) permitindo acoplamento entre mais de um par de estados. Já no RR as diferenças de energia são sempre diferentes, com isso, acoplamos apenas um par de EV para uma frequência de modulação.

Outros efeitos relatados pelas diferenças das autoenergias têm efeito final semelhante ao caso analisado. Criamos superposição de EV quando consideramos a modulação externa de um ou todos os parâmetros para o caso de bombeio externo, o que possibilita um alto grau de controle na criação dos novos estados superpostos.

## 5.2 Efeito próximo ao regime ressonante

Podemos considerar situação onde o regime de aproximação estará próximo dos limites ressonantes sendo escrito como  $|\Delta_-| \ll 2g_0$ . Para analisar os possíveis efeitos relativos a esta aproximação vamos escrever os autovalores do modelo de JC

$$\lambda_{n,S} = \omega_0 n - \frac{\Delta_-}{2} + \mathcal{S} \frac{1}{2} \beta_n,$$

onde escrevemos  $\beta_n = 2g_0\sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{\Delta_-^2}{4g_0^2n}}$ . Como consideramos  $|\Delta_-| \ll 2g_0$  aproximaremos o valor de  $\beta_n$  fazendo a expansão para  $\sqrt{1+x}$  considerando somente a primeira ordem de  $x$ , obtendo

$$\beta_n \approx 2g_0\sqrt{n} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta_-^2}{4g_0^2n} \right\}, \quad (5.21)$$

e reescrevemos as autoenergias de JC como

$$\lambda_{n,S} = \omega_0 n - \frac{\Delta_-}{2} + \mathcal{S} g_0 \sqrt{n} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta_-^2}{4g_0^2n} \right\}. \quad (5.22)$$

No apêndice B encontramos os valores de  $\sin \theta_n$  e  $\cos \theta_n$ , escreveremos tais quantidades já considerando as possíveis expansões devido ao limite adotado

$$\begin{aligned} \sin \theta_n &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \frac{\Delta_-}{4g_0\sqrt{n}} \right] \\ \cos \theta_n &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 - \frac{\Delta_-}{4g_0\sqrt{n}} \right]. \end{aligned}$$

Com os resultados das funções  $\sin \theta_n$  e  $\cos \theta_n$  aproximadas escreveremos os EV

$$|\varphi_{n,+}\rangle = \sin \theta_n |g, n\rangle + \cos \theta_n |e, n-1\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[ 1 + \frac{\Delta_-}{4g_0\sqrt{n}} \right] |g, n\rangle + \left[ 1 - \frac{\Delta_-}{4g_0\sqrt{n}} \right] |e, n-1\rangle \right\} \quad (5.23)$$

$$|\varphi_{n,-}\rangle = \cos \theta_n |g, n\rangle - \sin \theta_n |e, n-1\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[ 1 - \frac{\Delta_-}{4g_0\sqrt{n}} \right] |g, n\rangle - \left[ 1 + \frac{\Delta_-}{4g_0\sqrt{n}} \right] |e, n-1\rangle \right\}. \quad (5.24)$$

Assim, obtemos estados emaranhados que irão se acoplar de acordo com a modulação externa.

Uma maneira de escrever formulação geral aos EV próximo da ressonância é utilizar a definição

do símbolo de dissintonia  $\mathcal{D} = \Delta_- / |\Delta_-|$ . A formulação dos autovalores e dos EV quando considerado  $\mathcal{D} = \pm$  nos permite escrever formalismo único onde  $\mathcal{D}$  assume qualquer valor

$$\lambda_{n,\mathcal{D}} = \omega_0 n - \mathcal{D} \frac{|\Delta_-|}{2} + \mathcal{D} g_0 \sqrt{n} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta_-^2}{4g_0^2 n} \right\} \quad (5.25)$$

$$\lambda_{n,-\mathcal{D}} = \omega_0 n - \mathcal{D} \frac{|\Delta_-|}{2} - \mathcal{D} g_0 \sqrt{n} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta_-^2}{4g_0^2 n} \right\}, \quad (5.26)$$

e os EV são escritos como

$$|\varphi_{n,\mathcal{D}}\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[ 1 + \frac{|\Delta_-|}{4g_0 \sqrt{n}} \right] |g, n\rangle + \mathcal{D} \left[ 1 - \frac{|\Delta_-|}{4g_0 \sqrt{n}} \right] |e, n-1\rangle \right\} \quad (5.27)$$

$$|\varphi_{n,-\mathcal{D}}\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[ 1 - \frac{|\Delta_-|}{4g_0 \sqrt{n}} \right] |g, n\rangle - \mathcal{D} \left[ 1 + \frac{|\Delta_-|}{4g_0 \sqrt{n}} \right] |e, n-1\rangle \right\}. \quad (5.28)$$

Para uma breve análise do regime próximo da ressonância consideraremos a equação (3.25) e dela extraímos as possíveis diferenças entre autoenergias  $\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}}$ , que quando escolhermos  $\mathcal{S}, \mathcal{T} = \pm \mathcal{D}$  nos fornecerá como respostas

$$\begin{aligned} \lambda_{m+2,\mathcal{D}} - \lambda_{m,\mathcal{D}} &\approx 2\omega_0 + \mathcal{D} g_0 (\sqrt{m+2} - \sqrt{m}) \\ \lambda_{m+2,-\mathcal{D}} - \lambda_{m,\mathcal{D}} &\approx 2\omega_0 - \mathcal{D} g_0 (\sqrt{m+2} + \sqrt{m}) \\ \lambda_{m+2,\mathcal{D}} - \lambda_{m,-\mathcal{D}} &\approx 2\omega_0 + \mathcal{D} g_0 (\sqrt{m+2} + \sqrt{m}) \\ \lambda_{m+2,-\mathcal{D}} - \lambda_{m,-\mathcal{D}} &\approx 2\omega_0 - \mathcal{D} g_0 (\sqrt{m+2} - \sqrt{m}). \end{aligned}$$

É interessante observarmos as diferenças entre as autoenergias escritas acima, pois elas se assemelham com as diferenças entre as autoenergias para o RR com  $\Delta_- = 0$ . A diferença básica é que aqui são apresentadas com o símbolo de dissintonia  $\mathcal{D}$ . Os efeitos já analisados ECD, AJC e AECD são encontrados de acordo com as diferenças já conhecidas. Por exemplo, dependendo do valor que se escolhe a  $\mathcal{D}$  poderemos ter frequência de modulação em torno de  $\eta \approx 2\omega_0 \pm g_0 (\sqrt{m+2} - \sqrt{m})$ , o que descreve a fenomenologia dos conhecidos **ECDg** e **ECDe**. Outra situação de ressonância que poderá surgir é dada em torno de  $\eta \approx 2\omega_0 \pm g_0 (\sqrt{m+2} + \sqrt{m})$ , que de acordo com escolha apropriada de  $\mathcal{D}$  irá descrever os efeitos AJC e AECD. Assim, **ECDg** e **ECDe** pertencem a uma classe de fenômenos, enquanto AJC e AECD pertencem à outra classe de fenômenos no RR. No regime próximo ao RR, podemos criar mais de duas excitações usando multimodulações com mais de uma frequência ressonante, onde cada frequência acopla um par de EV. Portanto, embora tenhamos considerado apenas modulações harmônicas, o nosso formalismo também contempla modulações não-periódicas, que consistem de diferentes frequências próximas entre si. Não vamos detalhar tais esquemas aqui, pois a sua análise segue o procedimento geral elaborado acima.

# Capítulo 6

## Discussões finais e Conclusões

### 6.1 Autovalor harmônico

Desejamos ver o que acontece no sistema quando, por exemplo,  $N$  for par ou ímpar, assim como estudar a dinâmica quando  $N \rightarrow \infty$ , que de acordo com [36, 49] terá o comportamento de um oscilador harmônico. Começaremos nossa discussão partindo da equação (2.8) e vamos calcular os “autoestados harmônicos”. Escrevemos

$$\hat{H}_0 = \omega_0 \hat{n} + \sum_{k=1}^N E_{0,k} \hat{\sigma}_{k,k} + \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} (\hat{a} \hat{\sigma}_{k+1,k} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{k,k+1}), \quad (6.1)$$

relembrando que  $E_{0,k} = \Omega_0 k$ . Quando adotamos o regime ressonante (RR), temos  $\Omega_0 = \omega_0$ . Iremos definir o autoestado harmônico contendo  $M$  excitações como  $|\mathcal{H}_M\rangle$ . Portanto, desejamos que o autovalor do Hamiltoniano quando aplicado neste estado seja  $\lambda_M = \omega_0 M$ , que tem espectro similar ao de um oscilador harmônico. Escreveremos o Hamiltoniano como

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_{01} + \hat{H}_{02} \quad (6.2)$$

$$\hat{H}_{01} = \omega_0 \hat{n} + \sum_{k=1}^N \Omega_0 k \hat{\sigma}_{k,k} = \omega_0 \left\{ \hat{n} + \sum_{k=1}^N k \hat{\sigma}_{k,k} \right\} \quad (6.3)$$

$$\hat{H}_{02} = \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} (\hat{a} \hat{\sigma}_{k+1,k} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{k,k+1}). \quad (6.4)$$

A equação (6.3) contém termo diagonal para o número de excitações representado por  $(\hat{n} + \sum_{k=1}^N k \hat{\sigma}_{k,k})$ . Assim, consideramos  $\hat{H}_{01} |\mathcal{H}_M\rangle = \omega_0 M |\mathcal{H}_M\rangle$ . Portanto, encontramos o autovalor harmônico, porém necessitamos resolver a seguinte equação para encontrar o respectivo autoestado

$$\hat{H}_{02}|\mathcal{H}_M\rangle = 0. \quad (6.5)$$

Condiserando que  $N$  seja um número par, escrevemos o *ansatz*

$$|\mathcal{H}_M\rangle = \sum_{j=0}^{N/2} \alpha_j |\mathbf{2j}, M - 2j\rangle, \quad (6.6)$$

com  $\alpha_j$  constante de normalização. Ao aplicar (6.3) em (6.6) teremos

$$\begin{aligned} \hat{H}_{01}|\mathcal{H}_M\rangle &= \omega_0 \left\{ \sum_{j=0}^{N/2} (M - 2j) \alpha_j |\mathbf{2j}, M - 2j\rangle + 2j \sum_{j=0}^{N/2} \alpha_j |\mathbf{2j}, M - 2j\rangle \right\} \\ &= \omega_0 M |\mathcal{H}_M\rangle, \end{aligned} \quad (6.7)$$

o que confirma que  $|\mathcal{H}_M\rangle$  é um autoestado harmônico de (6.3) com autovalor harmônico.

Agora, devemos confirmar a hipótese apresentada em (6.5). Substituiremos o *ansatz* (6.6) em (6.5) e consideraremos que  $G_{0,N} = 0$ , obtendo

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^{N/2} \alpha_j \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} (\hat{a} \hat{\sigma}_{k+1,k} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{k,k+1}) |\mathbf{2j}, M - 2j\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{N/2} \left( \alpha_{j-1} \sqrt{M - 2j + 2} G_{0,2j-2} + \alpha_j \sqrt{M - 2j + 1} G_{0,2j-1} \right) |\mathbf{2j} - \mathbf{1}, M - 2j + 1\rangle. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Portanto, escrevemos a fórmula de recorrência

$$\alpha_j = -\alpha_{j-1} \frac{G_{0,2j-2} \sqrt{M - 2j + 2}}{G_{0,2j-1} \sqrt{M - 2j + 1}}. \quad (6.9)$$

Obtemos  $\alpha_j \neq 0$  partindo do resultado normalizado de  $\alpha_0$ . Assim, sempre que  $N$  for um número par haverá autoestado harmônico e a diferença entre os autovalores harmônicos será  $\lambda_{M+2} - \lambda_M = 2\omega_0$ . Portanto, a criação de fótons na cavidade será ilimitada para a modulação dos parâmetros com frequência  $2\omega_0$ .

Quando consideramos  $N$  um número ímpar, haverá um autoestado harmônico  $|\mathcal{H}_M\rangle$  somente para  $M \leq N - 1$

$$|\mathcal{H}_M\rangle = \sum_{j=0}^{(N-1)/2} \alpha_j |\mathbf{2j}, M - 2j\rangle. \quad (6.10)$$



Quando o número de excitações  $M$  for  $M > N - 1$ , escrevemos

$$\begin{aligned} \hat{H}_{02}|\mathcal{H}_M\rangle &= \sqrt{M - (N - 1)}G_{0,N-1}\alpha_{(N-1)/2}|\mathbf{N}, M - N\rangle \\ &+ \sum_{j=1}^{(N-1)/2} \alpha_{j-1}\sqrt{M - 2j + 2}G_{0,2j-2}|\mathbf{2j} - \mathbf{1}, M - 2j + 1\rangle \\ &+ \sum_{j=1}^{(N-1)/2} \alpha_j\sqrt{M - 2j + 1}G_{0,2j-1}|\mathbf{2j} - \mathbf{1}, M - 2j + 1\rangle. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Do autoestado harmônico temos a relação  $(\alpha_{j-1}\sqrt{M - 2j + 2}G_{0,2j-2} + \alpha_j\sqrt{M - 2j + 1}G_{0,2j-1}) = 0$ , porém para obter  $\hat{H}_{02}|\mathcal{H}_M\rangle = 0$  de acordo com (6.11) devemos impôr que  $G_{0,N-1}\alpha_{(N-1)/2} = 0$ . Quando  $G_{0,N-1} \neq 0$  (que é o caso aqui), isto irá implicar que  $\alpha_{(N-1)/2} = 0$  e então a equação para  $\alpha_j$  será zero. Portanto não existe autoestado harmônico para  $M > N - 1$ , assim, concluimos que somente  $N - 1$  fótons serão criados a partir do estado de vácuo. Resultados numéricos que comprovam a geração limitada ou ilimitada de fótons dependendo do valor de  $N$  podem ser encontrados em [36, 49].

## 6.2 Conclusões

Nesta dissertação nós estudamos teoricamente, a interação entre um “átomo artificial” e um único modo do campo eletromagnético confinado em um ressonador de guia de onda unidimensional. O trabalho foi desenvolvido no contexto de regime não-estacionário de Eletrodinâmica quântica de circuitos (EDQc), onde um ou mais parâmetros do sistema  $X = \{\omega, \Omega, g, \chi, d\}$  são modulados por funções periódicas (ou quase-periódicas)  $X = X_0 + \varepsilon_x f_X$ , impostas externamente. Além disso, consideramos que o sistema pode ser conduzido por um bombeio clássico de luz coerente. Obtemos formalismo matemático fechado na base de *estados vestidos* (EV) para descrever o comportamento não trivial do sistema não-estacionário, o resultado tendo sido encontrado por meio de sucessivas aproximações baseadas no método de RWA.

De acordo com a equação *piloto* obtida, podemos estipular valores para a frequência de modulação ressonante  $\eta^{(j)}$ . Ao adotar o regime dispersivo (RD) consideramos um possível valor  $\eta^{(D)} \approx 2\omega_0$ . Para este valor da frequência de modulação estamos no regime do efeito Casimir dinâmico (ECD), que tem como característica a criação de pares de excitações a partir de um estado inicial. O ECD foi analisado de duas maneiras: **ECDg** e **ECDe**. A primeira, o **ECDg** é caracterizado por ter o átomo partindo do estado de excitação fundamental, criando pares de fótons e acoplando os estados quânticos da seguinte maneira  $|\varphi_{m,\mathcal{D}}\rangle \leftrightarrow |\varphi_{m+2,\mathcal{D}}\rangle$ . A segunda

maneira, o **ECD**, é considerado quando o átomo encontra-se inicialmente no estado excitado, criando pares de fótons de acordo com o acoplamento  $|\varphi_{m,-\mathcal{D}}\rangle \leftrightarrow |\varphi_{m+2,-\mathcal{D}}\rangle$ .

Quando consideramos a modulação de um ou mais parâmetros do sistema por multi-frequências e escolhendo o valor  $\eta^{(AC)} \approx 2\omega_0 + \Delta_-$ , deduzimos microscopicamente um novo fenômeno, o anti-efeito Casimir dinâmico (AECD), que tem como característica a destruição coerente de um par de excitações do sistema e caracterizado por criar o seguinte acoplamento entre estados quânticos:  $|g, M\rangle \leftrightarrow |e, M - 3\rangle$ . Quando consideramos o valor  $\eta^{(A)} \approx 2\omega_0 - \Delta_-$  estamos na formulação do regime anti-Jaynes Cummings (AJC), processo caracterizado pela a criação de um único fóton acompanhado da mudança do estado de excitação atômica, sendo o acoplamento entre os estados quânticos dado da seguinte forma  $|g, M\rangle \leftrightarrow |e, M + 1\rangle$ .

Ao estudar a geração de fótons a partir do estado de vácuo, obtivemos Hamiltoniano efetivo, que pode servir de *Toy Model* para o ECD implementado por meio de um objeto dielétrico vibrante dentro da cavidade. O Hamiltoniano apropriado à interação luz-matéria é caracterizado por conter um termo responsável pela criação de pares de fótons e criação de estados comprimidos (*squeezed states*), além de apresentar um termo não-linear, o efeito Kerr. A combinação desses dois termos muda drasticamente o crescimento de fótons dentro da cavidade, esclarecendo a controvérsia duradoura a respeito do comportamento assintótico de ECD na ausência de perdas significativas.

Quando consideramos o bombeio externo clássico de 1-fóton, analisamos o caso onde podemos criar fótons um a um, para a frequência de modulação  $\eta^{(P)} \approx \omega_0$ . Outro efeito relacionado ao bombeio no regime dispersivo é chamado comportamento de excitação atômica, quando o sistema está sob bombeio não há criação de fótons, ocorrendo apenas a mudança no estado de excitação atômica. Destruição coerente de excitações não é observada quando considerado o bombeio clássico, comprovando que AECD ocorre apenas para modulação temporal de um dos parâmetros do sistema:  $g$ ,  $\Omega$  ou  $\omega$ .

No regime ressonante (RR) o principal efeito é a criação de estados emaranhados  $|\varphi_{m,S}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|g, n\rangle + \mathcal{S}|e, n - 1\rangle\}$ , que podem ser úteis nas áreas de Informação e Computação Quântica.

Todos os resultados dessa dissertação estão atualmente submetidos para publicação [64].

### 6.2.1 Futuras aplicações do trabalho

- Calcular numericamente os resultados encontrados no trabalho;

- 
- Estudar analiticamente casos mais realísticos, onde se considera sistema com perdas;
  - Obter resultados numéricos para sistemas com perdas;
  - Estudar caso de um ensemble com  $N \gg 1$ ;
  - Buscar soluções analíticas para as equações diferenciais encontradas;
  - Outras aplicações em aberto.

# Apêndice A

## Estados de Dicke

Consideraremos o conjunto de  $N$  átomos de dois níveis indistinguíveis interagindo com um modo do campo eletromagnético. Para descrever a interação usaremos o Hamiltoniano de Rabi

$$\hat{H}_R = \hbar\omega\hat{n} + \sum_{l=1}^N \left[ \frac{\hbar\Omega}{2}\hat{\sigma}_z^{(l)} + \hbar g (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (\hat{\sigma}_+^{(l)} + \hat{\sigma}_-^{(l)}) \right]. \quad (\text{A.1})$$

Por haver somente átomos indistinguíveis, podemos ter a seguinte base de estados

$$|\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n, \dots, \psi_{\text{campo}}\rangle, \quad (\text{A.2})$$

onde  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  podem representar  $g$  ou  $e$ , a representação do estado fundamental ou excitado, respectivamente. Definimos o Estado de Dicke (ED) com  $k$  excitações como

$$|N, \mathbf{k}\rangle = \mathcal{N} \sum_p |e^{(1)}\rangle |e^{(2)}\rangle \dots |e^{(k)}\rangle |g^{(k+1)}\rangle \dots |g^N\rangle, \quad (\text{A.3})$$

onde  $\mathcal{N}$  é a constante de normalização.

Ao considerar o conjunto de átomos juntamente com todas as possíveis excitações, podemos escrever uma combinação entre átomo e excitações

$$\langle N, \mathbf{k} | N, \mathbf{k} \rangle = \mathcal{N}^2 \binom{N}{k} = 1, \quad (\text{A.4})$$

sendo a combinação

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}, \quad (\text{A.5})$$

de onde extraímos

$$\mathcal{N} = \sqrt{\frac{k!(N-k)!}{N!}}.$$

Com isso escrevemos o ED normalizado

$$|N, \mathbf{k}\rangle = \sqrt{k!(N-k)!/N!} \sum_p |e^{(1)}\rangle |e^{(2)}\rangle \cdots |e^{(k)}\rangle |g^{(k+1)}\rangle \cdots |g^N\rangle, \quad (\text{A.6})$$

e escreveremos o estado normalizado acima como  $|N, \mathbf{k}\rangle \equiv |\mathbf{k}\rangle$ . Temos que  $|\mathbf{k}\rangle$  não é um autoestado do operador  $\hat{\sigma}_z^{(j)}$ , porém quando usamos  $\hat{S}_z = \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_z^{(j)}$ ,  $|\mathbf{k}\rangle$  é autoestado. Ao aplicarmos o operador  $\hat{S}_z$  no autoestado  $|\mathbf{k}\rangle$ , temos

$$\hat{S}_z |\mathbf{k}\rangle = (2k - N) |\mathbf{k}\rangle. \quad (\text{A.7})$$

Referente ao operador  $\hat{\sigma}_-^{(j)}$  teremos o somatório representando o seguinte operador  $\hat{S}_- = \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_-^{(j)}$  que quando aplicado no autoestado  $|\mathbf{k}\rangle$  produzirá  $N \binom{N-1}{k-1}$  termos, resultando em

$$\hat{S}_- |\mathbf{k}\rangle = \sqrt{k(N-k+1)} |\mathbf{k}-\mathbf{1}\rangle. \quad (\text{A.8})$$

Para o operador  $\hat{\sigma}_+^{(j)}$  escreveremos  $\hat{S}_+ = \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_+^{(j)}$  que ao ser aplicado em  $|\mathbf{k}\rangle$  irá produzir  $N \binom{N-1}{N-k-1}$  termos, resultando em

$$\hat{S}_+ |\mathbf{k}\rangle = \sqrt{(N-k)(k+1)} |\mathbf{k}+\mathbf{1}\rangle. \quad (\text{A.9})$$

Portanto, ao truncar um operador unitário  $\hat{1} = \sum_{k=0}^N |k\rangle \langle k|$  nos dois lados do operador  $\hat{S}_z$  obtemos

$$\hat{S}_z = \sum_{k'=0}^N \sum_{k=0}^N |k'\rangle \langle k'| \hat{S}_z |k\rangle \langle k| = \sum_{k=0}^N (2k - N) |k\rangle \langle k|, \quad (\text{A.10})$$

para  $\hat{S}_+$

$$\hat{S}_+ = \sum_{k'=0}^N \sum_{k=0}^N |k'\rangle \langle k'| \hat{S}_+ |k\rangle \langle k| = \sum_{k=0}^N \sqrt{(N-k)(k+1)} |k+1\rangle \langle k|, \quad (\text{A.11})$$

para  $\hat{S}_-$

$$\hat{S}_- = \sum_{k'=0}^N \sum_{k=0}^N |k'\rangle \langle k'| \hat{S}_- |k\rangle \langle k| = \sum_{k=0}^N \sqrt{k(N-k+1)} |k-1\rangle \langle k|. \quad (\text{A.12})$$

Com as transformações acima escreveremos o Hamiltoniano de Rabi na base do ED

$$\hat{H}_R = \hbar\omega\hat{n} + \sum_{l=1}^N \left\{ \frac{\hbar\Omega}{2} (2k - N) |k\rangle \langle k| + \hbar g (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \left\{ \sum_{k=0}^N \sqrt{(N-k)(k+1)} |k+1\rangle \langle k| + \sqrt{k(N-k+1)} |k-1\rangle \langle k| \right\} \right\}, \quad (\text{A.13})$$

onde definimos  $E_k = k\Omega$  e  $G_k = g\sqrt{(k+1)(N-k)}$ . Assim

$$\hat{H}_R = \omega\hat{n} + \sum_{k=1}^N E_k \hat{\sigma}_{k,k} + \sum_{k=0}^{N-1} G_k (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (\hat{\sigma}_{k+1,k} + \hat{\sigma}_{k,k+1}). \quad (\text{A.14})$$

# Apêndice B

## Estados Vestidos e Auto-Valores de JC

### B.1 Estados Vestidos

A interação entre a luz e a matéria se caracteriza como um dos processos mais fundamentais da natureza. Ao considerarmos o modelo em que um único modo de um campo eletromagnético interage com um átomo de dois níveis (*qubit*) espera-se a emissão ou absorção de um quanta de energia, como também a mudança dos estados atômico deste qubit. Um Hamiltoniano que descreve a interação luz-matéria é dado pelo formigerado modelo de Jaynes-Cummings (JC), como apresentamos

$$\hat{H}_{JC} = \omega_0 \hat{n} + \frac{\Omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + g_0 (\hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-), \quad (\text{B.1})$$

onde  $\omega_0$  é a frequência do campo,  $\Omega_0$  é a frequência de transição atômica e  $g_0$  é o termo de acoplamento átomo-campo. O termo  $\hat{n}$  é o operador número ( $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ ), os termos de  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{a}$  são os operadores criação e aniquilação. O operador do estado atômico é  $\hat{\sigma}_z$  (matrizes de Pauli) que pode ser representado por  $\hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+$ .

Aplicando a equação (B.1) no estado de excitação atômica fundamental, teremos

$$\hat{H}_{JC} |g, n\rangle = \left\{ \omega_0 n - \frac{\Omega_0}{2} \right\} |g, n\rangle + g_0 \sqrt{n} |e, n-1\rangle. \quad (\text{B.2})$$

Portanto, obtemos para o estado fundamental

$$\hat{H}_{JC} |g, 0\rangle = -\frac{\Omega_0}{2} |g, 0\rangle. \quad (\text{B.3})$$

O auto-valor apresentado pela equação (B.3) é menor valor de energia do sistema. Escreveremos (B.1) inserindo o autovalor obtido em (B.3)

$$\begin{aligned} \hat{H}_{JC} &\rightarrow \hat{H}_{JC} + \frac{\Omega_0}{2} \\ \hat{H}_{JC} &= \omega_0 \hat{n} + \Omega_0 |e\rangle \langle e| + g_0 \left( \hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- \right) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\hat{H}_{JC} |g, 0\rangle = 0. \quad (\text{B.5})$$

A equação (B.5) mostra o autovalor para o estado de vácuo sendo nulo, ou seja, a energia associada ao vácuo é mínima, onde  $\lambda_0 = 0$ .

Escrevemos o autoestado com  $n$  excitações como

$$|\varphi_n\rangle = \alpha |g, n\rangle + \beta |e, n-1\rangle. \quad (\text{B.6})$$

O estado apresentado em (B.6) é um estado normalizável e devido a isso escrevemos

$$|\langle \varphi_n | \varphi_n \rangle|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

o que nos induz a concluir que os valores dos coeficientes equivalem a  $\alpha^2 = \sin^2 \theta_n$  e  $\beta^2 = \cos^2 \theta_n$ .

Portanto, o estado apresentado na equação (B.6) torna-se

$$|\varphi_{n,+}\rangle = \sin \theta_n |g, n\rangle + \cos \theta_n |e, n-1\rangle \quad (\text{B.7})$$

ou

$$|\varphi_{n,-}\rangle = \cos \theta_n |g, n\rangle - \sin \theta_n |e, n-1\rangle. \quad (\text{B.8})$$

Estados quânticos como (B.7) e (B.8) são usualmente chamados na literatura de *estados vestidos* (*dressed states*) (EV), por descreverem a interação de átomo com o campo em um único estado.

No trabalho em análise, generalizaremos os EV como

$$|\varphi_{n,S}\rangle = s_{n,S} |g, n\rangle + c_{n,S} |e, n-1\rangle, \quad (\text{B.9})$$

onde  $S = \pm$ . Definimos os coeficientes

$$\begin{aligned} s_{n,+} &= \sin \theta_n; \quad s_{n,-} = \cos \theta_n \\ c_{n,+} &= \cos \theta_n; \quad c_{n,-} = -\sin \theta_n. \end{aligned}$$



O estado fundamental na representação dos EV será

$$|\varphi_0\rangle = |g, 0\rangle. \quad (\text{B.10})$$

Ademais, podemos escrever  $|g, n\rangle$  e  $|e, n-1\rangle$  em função dos EV

$$|g, n\rangle = \sin \theta_n |\varphi_{n,+}\rangle + \cos \theta_n |\varphi_{n,-}\rangle \quad (\text{B.11})$$

$$|e, n-1\rangle = \cos \theta_n |\varphi_{n,+}\rangle - \sin \theta_n |\varphi_{n,-}\rangle. \quad (\text{B.12})$$

## B.2 Auto Valores de JC

Escreveremos a equação de autovalor usando o estado apresentado em (B.9)

$$\hat{H}_{JC} |\varphi_{n,S}\rangle = \lambda_{n,S} |\varphi_{n,S}\rangle, \quad (\text{B.13})$$

$\lambda_{n,S}$  é a autovalor do Hamiltoniano empregado pelo modelo de JC.

Para obter valores de  $\lambda_{n,S}$ , lembraremos que  $S = \pm$  e escolheremos o índice  $+$  em (B.13)

$$\begin{aligned} \hat{H}_{JC} |\varphi_{n,+}\rangle &= \{\omega_0 n \sin \theta_n + g_0 \sqrt{n} \cos \theta_n\} |g, n\rangle \\ &+ \{g_0 \sqrt{n} \sin \theta_n + [\omega_0 (n-1) + \Omega_0] \cos \theta_n\} |e, n-1\rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

e utilizando da definição feita em (B.7), teremos

$$\hat{H}_{JC} |\varphi_{n,+}\rangle = \lambda_{n,+} \sin \theta_n |g, n\rangle + \lambda_{n,+} \cos \theta_n |e, n-1\rangle. \quad (\text{B.15})$$

Ao comparar (B.14) com (B.15), escrevemos as equações

$$\begin{aligned} \lambda_{n,+} \sin \theta_n &= \omega_0 n \sin \theta_n + g_0 \sqrt{n} \cos \theta_n \\ \lambda_{n,+} \cos \theta_n &= g_0 \sqrt{n} \sin \theta_n + [\omega_0 (n-1) + \Omega_0] \cos \theta_n. \end{aligned}$$

Para obter o autovalor  $\lambda_{n,+}$ , vamos isolar os termos de  $\cos \theta_n$

$$\cos \theta_n = \frac{\sin \theta_n \{\lambda_{n,+} - \omega_0 n\}}{g_0 \sqrt{n}} \quad (\text{B.16})$$

$$\cos \theta_n = \frac{g_0 \sqrt{n} \sin \theta_n}{\{\lambda_{n,+} - \omega_0 (n-1) - \Omega_0\}}. \quad (\text{B.17})$$

Igualando as duas últimas equações obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta_n \{\lambda_{n,+} - \omega_0 n\}}{g_0 \sqrt{n}} &= \frac{g_0 \sqrt{n} \sin \theta_n}{\{\lambda_{n,+} - \omega_0 (n-1) - \Omega_0\}} \\ g_0^2 n &= \{\lambda_{n,+} - \omega_0 n\} \{\lambda_{n,+} - \omega_0 n + \omega_0 - \Omega_0\}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Usaremos a definição de *dissintonia*  $\Delta_- = \omega_0 - \Omega_0$ . Assim, obtemos a seguinte equação quadrática

$$\lambda_{n,+}^2 + \lambda_{n,+} (\Delta_- - 2\omega_0 n) + \omega_0^2 n^2 - \omega_0 n \Delta_- - g_0^2 n = 0,$$

a solução para  $\lambda_{n,+}$  é obtida pelo método convencional de Bhaskara

$$\lambda_{n,+} = \frac{-\Delta_- + 2\omega_0 n \pm \sqrt{\Delta_-^2 + 4g_0^2 n}}{2}, \quad (\text{B.19})$$

onde definimos

$$\beta_n = \sqrt{\Delta_-^2 + 4g_0^2 n}.$$

Escrevemos a equação para  $\lambda_{n,+}$

$$\lambda_{n,+} = \omega_0 n \pm \frac{\beta_n}{2} - \frac{\Delta_-}{2},$$

escolhendo o sinal + com  $\theta_n = \frac{\pi}{2}$  a solução de  $\lambda_{n,+}$  será

$$\lambda_{n,+} = \omega_0 n + \frac{\beta_n}{2} - \frac{\Delta_-}{2}.$$

Para obter o autovalor relativo a  $\lambda_{n,-}$  usamos o mesmo método e como resposta, temos

$$\lambda_{n,-} = \omega_0 n - \frac{\beta_n}{2} - \frac{\Delta_-}{2}.$$

Obtida as equações para  $\lambda_{n,+}$  e  $\lambda_{n,-}$ , podemos generalizar as soluções para os auto-valores do Hamiltoniano de JC

$$\lambda_{n,S} = \omega_0 n + \mathcal{S} \frac{\beta_n}{2} - \frac{\Delta_-}{2}. \quad (\text{B.20})$$

Lembrando dos termos de  $\cos \theta_n$  teremos

$$\sin \theta_n = \frac{g_0 \sqrt{n} \cos \theta_n}{(\lambda_{n,+} - \omega_0 n)},$$

multiplicando os dois lados da expressão acima por  $1/\cos \theta_n$ , teremos

$$\tan \theta_n = \frac{g_0 \sqrt{n}}{(\lambda_{n,+} - \omega_0 n)},$$

substituindo  $\lambda_{n,+}$  na equação acima teremos

$$\tan \theta_n = \frac{2g_0 \sqrt{n}}{(\beta_n - \Delta_-)}.$$

Ao multiplicar a última equação por  $(\beta_n + \Delta_-)$ , teremos

$$\tan \theta_n = \frac{\beta_n + \Delta_-}{2g_0 \sqrt{n}},$$

logo, escrevemos o ângulo  $\theta_n$  como

$$\theta_n = \arctan \frac{\beta_n + \Delta_-}{2g_0 \sqrt{n}}, \quad (\text{B.21})$$

na equação (B.21) o valor de  $n$  sempre será de  $n > 0$  e  $\theta_n$  abedece ao intervalo de 0 a  $\pi/2$ . O resultado  $\lambda_{n,S}$  é válido nos limites impostos pela equação (B.21).

Também escrevemos

$$\sin^2 \theta_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\Delta_-}{\beta_n}$$

e

$$\cos^2 \theta_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta_-}{\beta_n}.$$

# Apêndice C

## Solução para o ansatz de $A_{m,\mathcal{T}}(t)$

Considerando a equação (2.22), escrevemos

$$\begin{aligned}
 i\dot{A}_{m,\mathcal{T}}(t) &= A_{m,\mathcal{T}}(t) \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_k^{(j)}\right) \\
 &+ A_{m,\mathcal{T}}(t) \sum_j'' \sum_{k=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}\right) \\
 &+ \sum_{\mathcal{S} \neq \mathcal{T}} e^{it(\lambda_{n,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}})} A_{m,\mathcal{S}}(t) \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}} \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{S}} e^{it(\lambda_{n,\mathcal{T}} - \lambda_{n,\mathcal{S}})} A_{n,\mathcal{S}}(t) \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle, \tag{C.1}
 \end{aligned}$$

quando consideramos que o coeficiente  $\sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}$  é muito maior que os demais coeficientes da equação acima, escreveremos o ansatz proposto por (2.23), temos

$$i\dot{A}_{m,\mathcal{T}}(t) = A_{m,\mathcal{T}}(t) \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_k^{(j)}\right). \tag{C.2}$$

A equação diferencial representada por (C.2) pode ser escrita na seguinte forma

$$i\dot{x} = \sum_j' \alpha^{(j)} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi^{(j)}\right) x, \tag{C.3}$$

onde comparamos  $\alpha^{(j)} = \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}$  e  $x = A_{m,\mathcal{T}}(t)$ . Resolveremos a equação (C.3) por método de integração direta

$$i \frac{dx}{dt} = \sum_j' \alpha^{(j)} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi^{(j)}\right) x \implies i \frac{dx}{x} = \sum_j' \alpha^{(j)} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi^{(j)}\right) dt, \tag{C.4}$$

para o processo de integração, faremos uma simples substituição de variáveis, onde  $\eta^{(j)}t + \phi^{(j)} = u$  e  $dt = u/\eta^{(j)}$ , assim

$$\begin{aligned} i \frac{dx}{x} &= \sum_j' \frac{\alpha^{(j)}}{\eta^{(j)}} \sin(u) du \\ i \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} &= \sum_j' \frac{\alpha^{(j)}}{\eta^{(j)}} \int \sin(u) du, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

escrevemos a solução final como

$$x(t) = x_0 \exp \left\{ \sum_j' \frac{i\alpha^{(j)}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos(\eta^{(j)}t + \phi^{(j)}) - \cos(\phi^{(j)}) \right] \right\}. \quad (\text{C.6})$$

Adaptando (C.6) ao problema em análise, escreveremos a solução do *ansatz*, teremos

$$A_{m,\mathcal{T}}(t) = B_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t) \exp \left\{ i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}) - \cos(\phi_X^{(j)}) \right] \right\},$$

onde  $B_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t)$  é coeficiente dependente do tempo e visto como amplitude de probabilidade.

# Apêndice D

## Primeira Aproximação

Escreveremos a equação (2.25) por conter termos de alta oscilações não desejados ao problema

$$\begin{aligned}
i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t) &= B_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t) \sum_j'' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}\right) \\
&+ \sum_{\mathcal{S} \neq \mathcal{T}} B_{m,\mathcal{S}}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}})} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}} \\
&\times \exp\left\{i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m,\mathcal{S},\mathcal{S}}^{X,j} - \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[\cos\left(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}\right) - \cos\left(\phi_X^{(j)}\right)\right]\right\} \\
&+ \exp\left\{-i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[\cos\left(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}\right) - \cos\left(\phi_X^{(j)}\right)\right]\right\} \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{S}} e^{it(\lambda_{n,\mathcal{T}} - \lambda_{n,\mathcal{S}})} A_{n,\mathcal{S}}(t) \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle, \tag{D.1}
\end{aligned}$$

procederemos com a seguinte aproximação baseado no argumento do primeiro termo exponencial de (D.1), que por ter alta frequência aproximaremos como

$$\sum_j' \left| \frac{\Gamma_{m,\mathcal{S},\mathcal{S}}^{X,j} - \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \right| \ll 1. \tag{D.2}$$

Portanto, expandiremos em série de Taylor o primeiro termo exponencial de (D.1) considerando até a primeira ordem da expansão. Adaptando ao nosso problema escrevemos

$$\begin{aligned}
&\exp\left\{i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m,\mathcal{S},\mathcal{S}}^{X,j} - \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[\cos\left(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}\right) - \cos\left(\phi_X^{(j)}\right)\right]\right\} \\
&\simeq 1 + i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m,\mathcal{S},\mathcal{S}}^{X,j} - \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[\cos\left(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}\right) - \cos\left(\phi_X^{(j)}\right)\right], \tag{D.3}
\end{aligned}$$

aplicando a expansão acima em (D.1)

$$\begin{aligned}
i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t) &= B_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t) \sum_j'' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}\right) \\
&+ \sum_{S \neq \mathcal{T}} B_{m,S}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S})} \Gamma_{m,\mathcal{T},S} \\
&\times \left\{ 1 + i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{1}{2} \frac{\Gamma_{m,S,S}^{X,j} - \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \left\{ e^{i(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)})} + e^{-i(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)})} \right\} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left\{ e^{i\phi_X^{(j)}} + e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} \right] \right\} \\
&+ \exp \left\{ -i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos\left(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}\right) - \cos\left(\phi_X^{(j)}\right) \right] \right\} \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_S e^{it(\lambda_{n,\mathcal{T}} - \lambda_{n,S})} A_{n,S}(t) \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 | \varphi_{n,S} \rangle. \tag{D.4}
\end{aligned}$$

Em (D.4) utilizaremos o método RWA (apêndice F) e faremos as seguintes aproximações

$$\sum_j' \frac{|\Gamma_{m,S,S}^{X,j} - \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}|}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} \pm \eta^{(j)}} \ll 1, \tag{D.5}$$

assim, (D.4) torna-se

$$\begin{aligned}
i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t) &\simeq \sum_S \sum_j'' \sum_{X=\omega,\Omega,g} B_{m,S}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{m,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}})} \Gamma_{m,\mathcal{T},S}^{X,j} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}\right) \\
&+ \sum_{S \neq \mathcal{T}} B_{m,S}^{(1)}(t) e^{it(\lambda_{n,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S})} \Gamma_{m,\mathcal{T},S} \\
&+ \exp \left\{ -i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos\left(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}\right) - \cos\left(\phi_X^{(j)}\right) \right] \right\} \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_S e^{it(\lambda_{n,\mathcal{T}} - \lambda_{n,S})} A_{n,S}(t) \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 | \varphi_{n,S} \rangle. \tag{D.6}
\end{aligned}$$

A metodologia descrita será utilizada em algumas ocasiões no decorrer do trabalho.

# Apêndice E

## Segundo ansatz proposto

Ao analisar a equação (2.28), desejamos obter solução para  $\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t)$

$$\begin{aligned}
 i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t) &= \sum_S \mathcal{H}_{m,\mathcal{T},S} B_{m,S}^{(1)}(t) + \frac{1}{2i} \sum_{S \neq \mathcal{T}} \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},S}^{X,j} \\
 &\times \left\{ e^{it(\lambda_{n,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)})} e^{i\phi_X^{(j)}} - e^{it(\lambda_{n,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)})} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} B_{m,S}^{(1)}(t) \\
 &+ \exp \left\{ -i \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{X,j}}{\eta^{(j)}} \left[ \cos(\eta^{(j)}t + \phi_X^{(j)}) - \cos(\phi_X^{(j)}) \right] \right\} \\
 &\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_S e^{it(\lambda_{n,\mathcal{T}} - \lambda_{n,S})} A_{n,S}(t) \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 | \varphi_{n,S} \rangle, \tag{E.1}
 \end{aligned}$$

considerando que  $\sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},S}^{X,j}$  é muito maior que os demais coeficientes, aproximaremos a equação acima como

$$\begin{aligned}
 i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t) &\simeq \frac{1}{2i} \sum_{S \neq \mathcal{T}} \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},S}^{X,j} \left\{ e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)})} e^{i\phi_X^{(j)}} \right. \\
 &\quad \left. - e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)})} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} B_{m,S}^{(1)}(t). \tag{E.2}
 \end{aligned}$$

Propomos como solução o *ansatz*

$$\begin{aligned}
 B_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t) &= B_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) - \frac{1}{2i} \sum_{S \neq \mathcal{T}} \sum_j' \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},S}^{X,j} \left\{ \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} B_{m,S}^{(2)}(t). \tag{E.3}
 \end{aligned}$$



Uma vez que a solução foi proposta, se faz necessário que verifiquemos sua validade, para tal, substituiremos a solução em (E.1)

$$\begin{aligned}
i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t) &= \frac{1}{2i} \sum_{\mathcal{S} \neq \mathcal{T}} \sum'_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{X,j} \left\{ e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})} e^{i\phi_X^{(j)}} \right. \\
&\quad \left. - e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} B_{m,\mathcal{S}}^{(2)}(t) + i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{S} \neq \mathcal{T}} \sum'_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{X,j} \left\{ \frac{\left[ e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})} - 1 \right]}{(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})} e^{i\phi_X^{(j)}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left[ e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})} - 1 \right]}{(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} \dot{B}_{m,\mathcal{S}}^{(2)}(t), \tag{E.4}
\end{aligned}$$

agora derivaremos a equação acima e procederemos com aproximação conduzida pelo método da RWA (apêndice F)

$$\sum'_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} \frac{|\Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{X,j}|}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} \pm \eta^{(j)}} \ll 1. \tag{E.5}$$

Obtemos o *ansatz* inicial dada por (E.2)

$$\begin{aligned}
i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t) &\simeq \frac{1}{2i} \sum_{\mathcal{S} \neq \mathcal{T}} \sum'_j \sum_{X=\omega,\Omega,g} \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{X,j} \left\{ e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})} e^{i\phi_X^{(j)}} \right. \\
&\quad \left. - e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} B_{m,\mathcal{S}}^{(2)}(t).
\end{aligned}$$

O resultado para a amplitude de probabilidade com o índice  $\mathcal{S}$  é verificado de maneira semelhante.

# Apêndice F

## Aproximação de onda girante (Rotating Wave Approximation - RWA)

### F.1 Solução

Em toda análise do problema teremos um sistema de duas equações diferenciais, que são escritas como

$$\frac{d}{dt}A = -iqe^{itW} B \quad (\text{F.1})$$

$$\frac{d}{dt}B = iqe^{-itW} A. \quad (\text{F.2})$$

Desejamos obter as soluções das duas equações apresentadas, portanto, isolaremos os termos de  $A$  e  $B$ . Assim, reescrevemos (F.1) e (F.2), obtendo

$$A = -\frac{i}{q}e^{itW} \frac{d}{dt}B \quad (\text{F.3})$$

$$B = \frac{i}{q}e^{-itW} \frac{d}{dt}A, \quad (\text{F.4})$$

em seguida, podemos derivar  $A$  ou  $B$  para obter equação desacoplada. Ao escolher derivar (F.4), tentaremos obter uma equação diferencial para  $A$

$$\frac{d}{dt}B = \frac{i}{q}e^{-itW} \frac{d^2}{dt^2}A + \frac{W}{q}e^{-itW} \frac{d}{dt}A, \quad (\text{F.5})$$

substituindo(F.2) em (F.5) e realizando simples manipulações, encontramos

$$\frac{d^2A}{dt^2} - iW \frac{dA}{dt} - q^2A = 0. \quad (\text{F.6})$$

O procedimento para obter equação diferencial para  $B$  é análogo ao utilizado na obtenção de (F.6), escrevemos

$$\frac{d^2B}{dt^2} + iW \frac{dB}{dt} - q^2B = 0. \quad (\text{F.7})$$

Os resultados (F.6) e (F.7) são equações diferenciais lineares de segunda ordem, homogêneas e com coeficientes constantes. O método geral para resolver as equações é sugerir uma solução da forma

$$A = e^{\lambda t}, \quad (\text{F.8})$$

sendo  $\lambda$  um parâmetro constante, ao substituir (F.8) em (F.6) e considerando que todo  $e^{\lambda t} \neq 0$ , obtemos a chamada *equação característica*

$$\lambda^2 - iW\lambda - q^2 = 0, \quad (\text{F.9})$$

então obtemos para  $\lambda$

$$\lambda = \frac{iW \pm i\sqrt{W^2 - 4q^2}}{2}, \quad (\text{F.10})$$

ao escolhermos que  $W^2 - 4q^2 > 0$ , temos duas raízes reais e distintas, escritas como

$$\lambda_1 = \frac{iW - i\sqrt{W^2 - 4q^2}}{2} \quad (\text{F.11})$$

e

$$\lambda_2 = \frac{iW + i\sqrt{W^2 - 4q^2}}{2}. \quad (\text{F.12})$$

A solução geral para (F.6) será

$$A = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (\text{F.13})$$

sendo  $A_1$  e  $A_2$  constantes arbitrárias. Escreveremos  $R = \sqrt{W^2 - 4q^2}$  e substituindo os valores de (F.11) e (F.12) em (F.13)

$$A = A_1 e^{it(W-R)/2} + A_2 e^{it(W+R)/2}, \quad (\text{F.14})$$

para  $B$  a solução é feita de forma semelhante e escrevemos

$$B = B_1 e^{-it(W-R)/2} + B_2 e^{-it(W+R)/2}. \quad (\text{F.15})$$

A condição inicial dada a (F.14) diz que para  $t = 0$  teremos  $A = A_0$ , com isso obtemos

$$A_0 = A_1 + A_2. \quad (\text{F.16})$$

Para  $B$  a condição inicial é a mesma, sendo  $B = B_0$ . Manipularemos algébricamente a equação (F.16) de maneira conveniente

$$A_0 = \left( \frac{2R}{2R} \right) A_0,$$

somando e subtraindo  $W$  da equação acima, temos

$$A_0 = \frac{A_0(W+R) - A_0(W-R)}{2R},$$

somando e subtraindo  $2qB_0$  na última expressão

$$A_0 = \frac{[A_0(W+R) + 2qB_0]}{2R} - \frac{[A_0(W-R) + 2qB_0]}{2R}. \quad (\text{F.17})$$

Portanto, ao comparar (F.17) com (F.16) concluímos que

$$A_1 = \frac{[A_0(W+R) + 2qB_0]}{2R} \quad (\text{F.18})$$

$$A_2 = -\frac{[A_0(W-R) + 2qB_0]}{2R}, \quad (\text{F.19})$$

ao substituir os valores de (F.18) e (F.19) em (F.14) e com simples manipulação, obtemos a solução final dada a equação (F.6)

$$A = \frac{e^{itW/2}}{2R} \left\{ e^{-itR/2} [(W+R)A_0 + 2qB_0] - e^{itR/2} [(W-R)A_0 + 2qB_0] \right\}, \quad (\text{F.20})$$

a solução para equação (F.7) é

$$B = -\frac{e^{-itW/2}}{2R} \left\{ e^{-itR/2} [(W-R)B_0 + 2qA_0] - e^{itR/2} [(W+R)B_0 + 2qA_0] \right\}. \quad (\text{F.21})$$

Na análise do atual apêndice as equações para  $A$  e  $B$  são equivalentes as equações  $A_{n,S}$  e  $A_{n,T}$ .

## F.2 Aproximações

Na obtenção das soluções (F.20) e (F.21) foi considerado  $W^2 - 4q^2 > 0$ , onde escrevemos que

$$R = \sqrt{W^2 - 4q^2}. \quad (\text{F.22})$$

O interesse prático da RWA acontece quando  $|q| \ll |W|$ . Consideraremos na análise presente que os termos  $W$  e  $q$  são frequências de alta e baixa oscilação, respectivamente. Dada a condição, iremos expandir a raiz contida em (F.22)

$$R \simeq W - \frac{2q^2}{W}. \quad (\text{F.23})$$

Substituindo (F.23) em (F.20), teremos

$$\begin{aligned} A &\simeq \frac{1}{2W} \left\{ e^{it\frac{q^2}{W}} [2WA_0 + 2qB_0] - e^{it\left(W - \frac{q^2}{W}\right)} 2qB_0 \right\} \\ A &\simeq A_0 e^{it\frac{q^2}{W}} + \frac{q}{W} B_0 \left\{ e^{it\frac{q^2}{W}} - e^{it\left(W - \frac{q^2}{W}\right)} \right\} \times e^{it\frac{q^2}{W}} e^{-it\frac{q^2}{W}}, \end{aligned}$$

e obtemos

$$A \simeq A_0 e^{it\frac{q^2}{W}} + \frac{q}{W} B_0 e^{-it\frac{q^2}{W}} (e^{2it\alpha} - e^{itW}) \simeq A_0 e^{it\alpha} + \frac{q}{W} B (e^{2it\alpha} - e^{itW}) \quad (\text{F.24})$$

$$B \simeq B_0 e^{-it\frac{q^2}{W}} + \frac{q}{W} A_0 e^{it\frac{q^2}{W}} (e^{-2it\alpha} - e^{-itW}) \simeq B_0 e^{-it\frac{q^2}{W}} + \frac{q}{W} A (e^{-2it\alpha} - e^{-itW}). \quad (\text{F.25})$$

Definimos  $\alpha$  constante da ordem de  $\sim \mathcal{O}(q_i^2/W_i)$ . Ao analisar as equações (F.24) e (F.25) reconhecemos os termos referentes a frequência  $q$  e  $W$ . Quando  $|q| \ll |W|$  podemos escrever

$$A \simeq A_0 e^{it\alpha}$$

$$B \simeq B_0 e^{-it\alpha}.$$

Um novo processo será introduzido, que chamamos de shifts de frequência negligenciados (SFN).

Assim, obtemos

$$A = A_0$$

$$B = B_0.$$

Ou de maneira equivalente, escrevemos

$$\frac{d}{dt} A = 0$$

$$\frac{d}{dt}B = 0.$$

A RWA terá a característica de eliminar os termos com altas oscilações. Aproximações como essas sempre serão cabíveis a situações onde tenhamos os limites aqui impostos.

# Apêndice G

## Aproximações

A solução mais geral e exata ao problema é dada pela equação (2.45). No trabalho a equação foi dividida num conjunto de 7 linhas, onde em cada linha foram realizadas aproximações que seguem o protocolo da RWA. O método de aproximação que será utilizado para todas as linhas seguem um mesmo padrão, portanto, exemplificaremos a aproximação referente a *linha 3* (2.49). Outras aproximações são feitas de forma semelhante. Escrevemos

$$\begin{aligned}
 \text{linha}_3 = & \frac{1}{2} \sum_{S \neq T} \sum'_j \sum_{X=\omega, \Omega, g} \Gamma_{m, T, S}^{X, j} \left\{ \frac{e^{it(\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} + \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} \right. \\
 & \left. - \frac{e^{it(\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} - \eta^{(j)})} - 1}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \right\} i\chi \left\{ \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} L_{2, m, \mathcal{R}, S}^* B_{m-2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) \right. \\
 & \left. \times e^{it(\lambda_{m, S} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}})} - L_{2, m+2, S, \mathcal{R}} B_{m+2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m, S} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}})} \right\}. \quad (\text{G.1})
 \end{aligned}$$

Para efetuarmos as possíveis aproximações em (2.49) vamos explicitar o parâmetro  $\chi$  escrevendo-o como

$$\chi = \chi_0 + \varepsilon_\chi f_\chi,$$

também usaremos a definição dada a função adimensional  $f_\chi$

$$f_\chi = \sum_h w_\chi^{(h)} \sin\left(\eta^{(h)} t + \phi_\chi^{(h)}\right) = \frac{1}{2i} \sum_h w_\chi^{(h)} \left( e^{i\phi_\chi^{(h)}} e^{it\eta^{(h)}} - e^{-i\phi_\chi^{(h)}} e^{-it\eta^{(h)}} \right).$$

Aplicando as duas últimas definições em (G.1) obteremos

$$\begin{aligned}
\ln_3 = & \frac{1}{2} \sum_{S \neq T} \sum'_j \sum_{X=\omega, \Omega, g} \Gamma_{m, T, S}^{X, j} \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} i \chi_0 \left\{ e^{it(\lambda_{m, T} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}} + \eta^{(j)})} L_{2, m, \mathcal{R}, S}^* B_{m-2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) \right. \\
& - L_{2, m, \mathcal{R}, S}^* B_{m-2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m, S} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}})} - e^{it(\lambda_{m, T} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}} + \eta^{(j)})} L_{2, m+2, S, \mathcal{R}} B_{m+2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) \\
& \left. + L_{2, m+2, S, \mathcal{R}} B_{m+2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m, S} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}})} \frac{e^{i\phi_X^{(j)}}}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} + \eta^{(j)}} \right\} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{S \neq T} \sum'_j \sum_{X=\omega, \Omega, g} \Gamma_{m, T, S}^{X, j} \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} i \chi_0 \left\{ e^{it(\lambda_{m, T} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}} - \eta^{(j)})} L_{2, m, \mathcal{R}, S}^* B_{m-2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) \right. \\
& - L_{2, m, \mathcal{R}, S}^* B_{m-2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m, S} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}})} - e^{it(\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} - \eta^{(j)})} L_{2, m+2, S, \mathcal{R}} B_{m+2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) \\
& \left. \times e^{it(\lambda_{m, S} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}})} + L_{2, m+2, S, \mathcal{R}} B_{m+2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m, S} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}})} \frac{e^{-i\phi_X^{(j)}}}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} - \eta^{(j)}} \right\} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{S \neq T} \sum'_j \sum_{X=\omega, \Omega, g} \Gamma_{m, T, S}^{X, j} \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} i \varepsilon_X \frac{1}{2i} \sum_h w_X^{(h)} e^{i\phi_X^{(h)}} \left\{ \frac{1}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} \right. \\
& \times \left( L_{2, m, \mathcal{R}, S}^* B_{m-2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m, S} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}} + \eta^{(h)})} - L_{2, m+2, S, \mathcal{R}} B_{m+2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m, S} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}} + \eta^{(h)})} \right) \\
& - \frac{1}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \left\{ L_{2, m, \mathcal{R}, S}^* B_{m-2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m, S} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}} + \eta^{(h)})} \right. \\
& \left. - L_{2, m+2, S, \mathcal{R}} B_{m+2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m, S} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}} + \eta^{(h)})} \right\} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{S \neq T} \sum'_j \sum_{X=\omega, \Omega, g} \Gamma_{m, T, S}^{X, j} \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} i \varepsilon_X \frac{1}{2i} \sum_h w_X^{(h)} e^{-i\phi_X^{(h)}} \left\{ \frac{1}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} \right. \\
& \times \left\{ L_{2, m, \mathcal{R}, S}^* B_{m-2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m, S} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}} - \eta^{(h)})} - L_{2, m+2, S, \mathcal{R}} B_{m+2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m, S} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}} - \eta^{(h)})} \right\} \\
& - \frac{1}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \left\{ L_{2, m, \mathcal{R}, S}^* B_{m-2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m, S} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}} - \eta^{(h)})} \right. \\
& \left. - L_{2, m+2, S, \mathcal{R}} B_{m+2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m, S} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}} - \eta^{(h)})} \right\} \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Eliminaremos os termos de alta frequência encontrados na equação acima com o auxílio das aproximações prévias que seguem a metodologia da RWA

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{1}{2} \sum_{S \neq T} \sum'_j \sum_{X=\omega, \Omega, g} \frac{\Gamma_{m, T, S}^{X, j}}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} \pm \eta^{(j)}} \chi_0 L_{2, m+2, S, \mathcal{R}} \right\} \frac{1}{\lambda_{m, S} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}}} \ll 1 \\
& \left\{ \frac{1}{2} \sum_{S \neq T} \sum'_j \sum_{X=\omega, \Omega, g} \frac{\Gamma_{m, T, S}^{X, j}}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} \pm \eta^{(j)}} \chi_0 L_{2, m, \mathcal{R}, S}^* \right\} \frac{1}{\lambda_{m, S} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}}} \ll 1 \\
& \left\{ \frac{1}{2} \sum_{S \neq T} \sum'_j \sum_{X=\omega, \Omega, g} \frac{\Gamma_{m, T, S}^{X, j}}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} \pm \eta^{(j)}} L_{2, m+2, S, \mathcal{R}} \varepsilon_X \frac{1}{2} \right\} \frac{1}{\lambda_{m, S} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}} - \eta^{(h)}} \ll 1 \\
& \left\{ \frac{1}{2} \sum_{S \neq T} \sum'_j \sum_{X=\omega, \Omega, g} \frac{\Gamma_{m, T, S}^{X, j}}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} \pm \eta^{(j)}} L_{2, m, \mathcal{R}, S}^* \varepsilon_X \frac{1}{2} \right\} \frac{1}{\lambda_{m, S} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}} + \eta^{(h)}} \ll 1.
\end{aligned}$$



Os SFN's pr3evios s3o

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2} \sum_{S \neq T} \sum'_j \sum_{X=\omega, \Omega, g} \frac{\Gamma_{m, T, S}^{X, j}}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} \pm \eta^{(j)}} \chi_0 L_{2, m+2, S, \mathcal{R}} \right\}^2 \frac{1}{\lambda_{m, S} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}}} \\ & \left\{ \frac{1}{2} \sum_{S \neq T} \sum'_j \sum_{X=\omega, \Omega, g} \frac{\Gamma_{m, T, S}^{X, j}}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} \pm \eta^{(j)}} \chi_0 L_{2, m, \mathcal{R}, S}^* \right\}^2 \frac{1}{\lambda_{m, S} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}}} \\ & \left\{ \frac{1}{2} \sum_{S \neq T} \sum'_j \sum_{X=\omega, \Omega, g} \frac{\Gamma_{m, T, S}^{X, j}}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} \pm \eta^{(j)}} L_{2, m+2, S, \mathcal{R}} \varepsilon_\chi \frac{1}{2} \right\}^2 \frac{1}{\lambda_{m, S} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}} - \eta^{(h)}} \\ & \left\{ \frac{1}{2} \sum_{S \neq T} \sum'_j \sum_{X=\omega, \Omega, g} \frac{\Gamma_{m, T, S}^{X, j}}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} \pm \eta^{(j)}} L_{2, m, \mathcal{R}, S}^* \varepsilon_\chi \frac{1}{2} \right\}^2 \frac{1}{\lambda_{m, S} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}} + \eta^{(h)}}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \text{lin}_3 & \simeq \frac{1}{2} \sum_{S \neq T} \sum'_j \sum_{X=\omega, \Omega, g} \Gamma_{m, T, S}^{X, j} \frac{1}{i} \sum_S i \chi_0 e^{it(\lambda_{m, T} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}} + \eta^{(j)})} L_{2, m, \mathcal{R}, S}^* B_{m-2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) \\ & - e^{it(\lambda_{m, T} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}} + \eta^{(j)})} L_{2, m+2, S, \mathcal{R}} B_{m+2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) \left\{ \frac{e^{i\phi_X^{(j)}}}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} + \eta^{(j)}} \right. \\ & - \frac{1}{2} \sum_{S \neq T} \sum'_j \sum_{X=\omega, \Omega, g} \Gamma_{m, T, S}^{X, j} \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} i \chi_0 \left\{ e^{it(\lambda_{m, T} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}} - \eta^{(j)})} L_{2, m, \mathcal{R}, S}^* B_{m-2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) \right. \\ & - e^{it(\lambda_{m, T} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}} - \eta^{(j)})} L_{2, m+2, S, \mathcal{R}} B_{m+2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) \left\{ \frac{e^{-i\phi_X^{(j)}}}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} - \eta^{(j)}} \right. \\ & - \frac{1}{2} \sum_{S \neq T} \sum'_j \sum_{X=\omega, \Omega, g} \Gamma_{m, T, S}^{X, j} \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} i \varepsilon_\chi \frac{1}{2i} \sum_h w_\chi^{(h)} e^{i\phi_X^{(h)}} \left\{ - \frac{1}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} \right. \\ & \times L_{2, m+2, S, \mathcal{R}} B_{m+2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m, S} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}} + \eta^{(h)})} + \frac{1}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \\ & L_{2, m+2, S, \mathcal{R}} B_{m+2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m, S} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}} + \eta^{(h)})} \left. \right\} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{S \neq T} \sum'_j \sum_{X=\omega, \Omega, g} \Gamma_{m, T, S}^{X, j} \frac{1}{i} \sum_{\mathcal{R}} i \varepsilon_\chi \frac{1}{2i} \sum_h w_\chi^{(h)} e^{-i\phi_X^{(h)}} \left\{ \frac{1}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} + \eta^{(j)}} e^{i\phi_X^{(j)}} \right. \\ & \times L_{2, m, \mathcal{R}, S}^* B_{m-2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m, S} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}} - \eta^{(h)})} - \frac{1}{\lambda_{m, T} - \lambda_{m, S} - \eta^{(j)}} e^{-i\phi_X^{(j)}} \\ & \left. \times L_{2, m, \mathcal{R}, S}^* B_{m-2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{it(\lambda_{m, S} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}} - \eta^{(h)})} \right\}. \end{aligned}$$

O resultado obtido ainda apresenta termos de alta oscila33o. No entanto, das aproxima33es previamente utilizadas, conclu3mos as aproxima33es finais

$$\frac{\chi_0 L_{2, m+2, S, \mathcal{R}}}{\lambda_{m, S} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}}}, \frac{\chi_0 L_{2, m, \mathcal{R}, S}^*}{\lambda_{m, S} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}}}, \frac{\frac{1}{2} L_{2, m+2, S, \mathcal{R}} \varepsilon_\chi}{\lambda_{m, S} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}} - \eta^{(h)}}, \frac{\frac{1}{2} L_{2, m, \mathcal{R}, S}^* \varepsilon_\chi}{\lambda_{m, S} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}} + \eta^{(h)}} \lesssim 1.$$

Portanto, obtemos a equação aproximada para (2.49)

$$\begin{aligned}
linha_3 \simeq & -\frac{1}{2} \sum_{\mathcal{R} \neq \mathcal{T}} \sum'_j \sum_{X=\omega, \Omega, g} \Gamma_{m, \mathcal{T}, \mathcal{R}}^{X, j} \frac{1}{i} \sum_S i \chi_0 \left\{ \frac{L_{2, m, \mathcal{S}, \mathcal{R}}^* e^{-i\phi_X^{(j)}}}{\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{R}} - \eta^{(j)}} e^{it(\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m-2, \mathcal{S}} - \eta^{(j)})} \right. \\
& \times B_{m-2, \mathcal{S}}^{(2)}(t) + \frac{L_{2, m+2, \mathcal{R}, \mathcal{S}} e^{i\phi_X^{(j)}}}{\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{R}} + \eta^{(j)}} e^{it(\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m+2, \mathcal{S}} + \eta^{(j)})} B_{m+2, \mathcal{S}}^{(2)}(t) \left. \right\} \\
& + \frac{1}{4i} \sum_{\mathcal{R}} \sum'_j w_\chi^{(j)} \varepsilon_\chi \sum_{\mathcal{S} \neq \mathcal{T}} \sum_{X=\omega, \Omega, g} \sum_h \Gamma_{m, \mathcal{T}, \mathcal{S}}^{X, h} \left\{ \frac{e^{i\phi_X^{(h)}}}{\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{S}} + \eta^{(h)}} \right. \\
& \left. - \frac{e^{-i\phi_X^{(h)}}}{\lambda_{m, \mathcal{T}} - \lambda_{m, \mathcal{S}} - \eta^{(h)}} \right\} \left\{ L_{2, m, \mathcal{R}, \mathcal{S}}^* B_{m-2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{-i\phi_\chi^{(j)}} e^{it(\lambda_{m, \mathcal{S}} - \lambda_{m-2, \mathcal{R}} - \eta^{(j)})} \right. \\
& \left. + L_{2, m+2, \mathcal{S}, \mathcal{R}} B_{m+2, \mathcal{R}}^{(2)}(t) e^{i\phi_\chi^{(j)}} e^{it(\lambda_{m, \mathcal{S}} - \lambda_{m+2, \mathcal{R}} + \eta^{(j)})} \right\}, \tag{G.2}
\end{aligned}$$

onde levamos o índice  $h \rightarrow j$ . As demais linhas seguem o mesmo padrão e todas as aproximações utilizadas se encontram no decorrer de desenvolvimento do problema.

# Apêndice H

## Eliminando o Shift de frequência

No apêndice F foram demonstrados os critérios de eliminação para termos de rápida oscilação. A eliminação é realizada pelo famoso método RWA. Seguindo os padrões de solução proposto no apêndice F, solucionaremos o conjunto de equações

$$\frac{d}{dt}A = -iB \sum_i q_i e^{itW_i} \quad (\text{H.1})$$

$$\frac{d}{dt}B = iA \sum_i q_i e^{-itW_i}. \quad (\text{H.2})$$

Para obtermos as soluções de (H.1) e (H.2) consideraremos que o índice  $i$  assumirá os valores de  $i = 1, 2, 3$ . Escrevemos

$$\frac{d}{dt}A = -iq_1 e^{itW_1} B_1 - iq_2 e^{itW_2} B_2 - iq_3 e^{itW_3} B_3. \quad (\text{H.3})$$

Quando adotamos o limite em que  $q_1 \gg q_2, q_3$  a equação (H.1) torna-se

$$\frac{d}{dt}A \simeq -iq_1 e^{itW_1} B_1. \quad (\text{H.4})$$

A solução será de acordo com o apêndice F onde adotamos o limite  $|q| \ll |W|$ . A solução aproximada será

$$A \simeq A_0 e^{it\alpha_1} + \frac{q_1}{W_1} B_1 \{e^{it\alpha_2} - e^{itW_1}\}, \quad (\text{H.5})$$

onde  $\alpha_i$  são constantes da ordem  $\sim \mathcal{O}(q_i^2/W_i)$ . O coeficiente  $A_0$  é considerado dependente do tempo devido ao limite adotado  $q_1 \gg q_2, q_3$ . Ao derivar (H.5) temporalmente obtemos

$$\frac{d}{dt}A = i\alpha_1 A_0 e^{it\alpha_1} + \dot{A}_0 e^{it\alpha_1} + \frac{q_1}{W_1} \dot{B}_1 \{e^{it\alpha_2} - e^{itW_1}\} + i\alpha_2 \frac{q_1}{W_1} e^{it\alpha_2} B_1 - iq_1 e^{itW_1} B_1. \quad (\text{H.6})$$

Referente ao termo  $\dot{B}_1$  em (H.6), usaremos as equações obtidas no desenvolvimento do método da RWA

$$\frac{d}{dt}B = iqe^{itW} A. \quad (\text{H.7})$$

Ao substituir (H.7) em (H.6) obtemos

$$\frac{d}{dt}A = i\alpha_1 A_0 e^{it\alpha_1} + \dot{A}_0 e^{it\alpha_1} + i\alpha_{01} e^{itW_1} \{e^{it\alpha_2} - e^{itW_1}\} A_1 + i\alpha_2 \frac{q_1}{W_1} e^{it\alpha_2} B_1 - iq_1 e^{itW_1} B_1. \quad (\text{H.8})$$

Como os termos  $\alpha_i$  são constantes da ordem  $\sim \mathcal{O}(q_i^2/W_i)$  vamos desprezá-los, incluindo a sua ordem de grandeza na estimativa dos SFN's. Manteremos sempre a menor ordem de  $\sim \mathcal{O}(q_i/W_i)$ , assim escrevemos

$$\frac{d}{dt}A = \dot{A}_0 e^{it\alpha_1} - iq_1 e^{itW_1} B_1. \quad (\text{H.9})$$

Substituindo o resultado (H.9) em (H.3) encontramos nova equação diferencial

$$\frac{d}{dt}A_0 = -iq_2 e^{itW_2} B_2 - iq_3 e^{itW_3} B_3.$$

Ao considerar limite  $q_2 \gg q_3$  a equação acima resultará em

$$\frac{d}{dt}A_0 \simeq -iq_2 e^{itW_2} B_2. \quad (\text{H.10})$$

A solução para (H.10) segue o mesmo procedimento empregado em (H.4), a solução será

$$A_0 \simeq A_{00} e^{it\alpha_3} + \frac{q_2}{W_2} B_2 \{e^{it\alpha_4} - e^{itW_2}\}. \quad (\text{H.11})$$

Derivando (H.11) em respeito ao tempo e negligenciando os termos de  $\alpha_i$ , escrevemos

$$\frac{d}{dt}A_0 = \dot{A}_{00} e^{it\alpha_3} - iq_2 e^{itW_2} B_2, \quad (\text{H.12})$$

portanto, substituiremos (H.12) em (H.10) obtendo

$$\dot{A}_{00} = -iq_3 e^{itW_3} B_3. \quad (\text{H.13})$$

A solução de (H.13) segue o mesmo padrão das soluções dadas as equações (H.4) e (H.10), sendo

$$A_{00} \simeq A_{000}^{(c)} e^{it\alpha_5} + \frac{q_3}{W_3} B_3 \{e^{it\alpha_6} - e^{itW_3}\}. \quad (\text{H.14})$$

Conhecida a equação (H.14), buscaremos resposta completa para (H.1). Para tal, substituiremos (H.14) em (H.11)

$$A_0 \simeq A_{000}^{(c)} e^{it\alpha_{53}} + \frac{q_3}{W_3} B_3 \{e^{it\alpha_6} - e^{itW_3}\} e^{it\alpha_3} + \frac{q_2}{W_2} B_2 \{e^{it\alpha_4} - e^{itW_2}\}. \quad (\text{H.15})$$

Quando colocamos (H.15) em (H.5), chega-se em

$$\begin{aligned} A \simeq & A_{000}^{(c)} e^{it\alpha_{531}} + \frac{q_1}{W_1} B_1 \{e^{it\alpha_2} - e^{itW_1}\} + \frac{q_2}{W_2} B_2 \{e^{it\alpha_4} - e^{itW_2}\} e^{it\alpha_1} \\ & + \frac{q_3}{W_3} B_3 \{e^{it\alpha_6} - e^{itW_3}\} e^{it\alpha_{31}}, \end{aligned} \quad (\text{H.16})$$

onde os termos  $\alpha_1$  e  $\alpha_{31}$  serão negligenciados. Escreveremos a constante  $A_{000}^{(c)}$  como  $A_0^{(c)}$  e  $\alpha_{531}$  será chamada de  $\alpha_1$  enquanto as demais constantes de mesma ordem serão chamadas  $\alpha_2$ . Assim, reescrevemos (H.16) de forma generalizada

$$A \simeq A_0^{(c)} e^{it\alpha_1} - iB \sum_i \frac{q_i}{iW_i} \{e^{itW_i} - e^{it\alpha_2}\}. \quad (\text{H.17})$$

A solução para a equação (H.2) é obtida pelo mesmo método utilizado para (H.1), sendo

$$B \simeq B_0^{(c)} e^{it\alpha_3} + iA \sum_i \frac{q_i}{-iW_i} \{e^{-itW_i} - e^{-it\alpha_4}\}. \quad (\text{H.18})$$

# Apêndice I

## Formulação dos Regimes

Na análise do problema foram feitas algumas definições, como exemplo, o *coeficiente Gama* (CG) e os coeficientes relativos a  $\hat{H}_2$ . As quantidades contidas em cada definição serão obtidas ao utilizarmos a definição dos *estados vestidos* (EV). Todas as quantidades serão fundamentais na formulação dos regimes que serão adotados: *regime ressonante* (RR) e *regime dispersivo* (RD). Começaremos calculando os parâmetros dentro de uma formulação geral.

Partindo da definição contida em (2.15)

$$\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}} = \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_1 | \varphi_{m,\mathcal{S}} \rangle,$$

ao considerar a forma expandida de  $\hat{H}_1$  obteremos os seguintes coeficientes

$$\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{\omega,j} = \varepsilon_{\omega} w_{\omega}^{(j)} \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{n} | \varphi_{m,\mathcal{S}} \rangle \quad (\text{I.1})$$

$$\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{\Omega,j} = \sum_{k=1}^N \varepsilon_{E,k} w_{\Omega}^{(j)} \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{\sigma}_{k,k} | \varphi_{m,\mathcal{S}} \rangle \quad (\text{I.2})$$

$$\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{g,j} = \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_{G,k} w_g^{(j)} \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | (\hat{a} \hat{\sigma}_{k+1,k} + \hat{a}^{\dagger} \hat{\sigma}_{k,k+1}) | \varphi_{m,\mathcal{S}} \rangle. \quad (\text{I.3})$$

Exemplificaremos a obtenção do autovalor para a primeira definição, lembrando que  $|\varphi_{m,\mathcal{S}}\rangle = s_{m,\mathcal{S}} |g, m\rangle + c_{m,\mathcal{S}} |e, m-1\rangle$ , obtemos

$$\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{\omega,j} = \varepsilon_{\omega} w_{\omega}^{(j)} [(m s_{m,\mathcal{S}} s_{m,\mathcal{T}} + (m-1) c_{m,\mathcal{S}} c_{m,\mathcal{T}})]. \quad (\text{I.4})$$

Explicitamente, temos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0,\mathcal{T},\mathcal{S}}^j &= 0 \\
\Gamma_{m,+,+}^{\omega,j} &= \varepsilon_\omega w_\omega^{(j)} [(m - \cos^2 \theta_m)] \\
\Gamma_{m,+,-}^{\omega,j} &= \varepsilon_\omega w_\omega^{(j)} [\sin \theta_m \cos \theta_m] \\
\Gamma_{m,-,+}^{\omega,j} &= \varepsilon_\omega w_\omega^{(j)} [\sin \theta_m \cos \theta_m] \\
\Gamma_{m,-,-}^{\omega,j} &= \varepsilon_\omega w_\omega^{(j)} [(m - \sin^2 \theta_m)].
\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{\Omega,j} &= \varepsilon_\Omega w_\Omega^{(j)} c_{m,\mathcal{T}} c_{m,\mathcal{S}} \\
\Gamma_{m,+,+}^{\Omega,j} &= \varepsilon_\Omega w_\Omega^{(j)} \cos^2 \theta_m \\
\Gamma_{m,+,-}^{\Omega,j} &= -\varepsilon_\Omega w_\Omega^{(j)} \sin \theta_m \cos \theta_m \\
\Gamma_{m,-,+}^{\Omega,j} &= -\varepsilon_\Omega w_\Omega^{(j)} \sin \theta_m \cos \theta_m \\
\Gamma_{m,-,-}^{\Omega,j} &= \varepsilon_\Omega w_\Omega^{(j)} \sin^2 \theta_m,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{g,j} &= \sqrt{m} \varepsilon_{G,k} w_g^{(j)} (s_{m,\mathcal{T}} c_{m,\mathcal{S}} + c_{m,\mathcal{T}} s_{m,\mathcal{S}}) \\
\Gamma_{0,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{g,j} &= 0 \\
\Gamma_{m,+,+}^{g,j} &= \sqrt{m} \varepsilon_{G,k} w_g^{(j)} \sin 2\theta_m \\
\Gamma_{m,+,-}^{g,j} &= \sqrt{m} \varepsilon_{G,k} w_g^{(j)} \cos 2\theta_m \\
\Gamma_{m,-,+}^{g,j} &= \sqrt{m} \varepsilon_{G,k} w_g^{(j)} \cos 2\theta_m \\
\Gamma_{m,-,-}^{g,j} &= -\sqrt{m} \varepsilon_{G,k} w_g^{(j)} \sin 2\theta_m.
\end{aligned}$$

Os coeficientes de  $\hat{H}_2$  são

$$\begin{aligned}
\Lambda_{0,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} &= \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{a} \hat{\sigma}_{0,1} | \varphi_{m+2,\mathcal{S}} \rangle \\
\Lambda_{0,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} &= \sqrt{m+1} s_{m,\mathcal{T}} c_{m+2,\mathcal{S}} \\
\Lambda_{0,m+2,+,+} &= \sqrt{m+1} \sin \theta_m \cos \theta_{m+2} \\
\Lambda_{0,m+2,+,-} &= -\sqrt{m+1} \sin \theta_m \sin \theta_{m+2} \\
\Lambda_{0,m+2,-,+} &= \sqrt{m+1} \cos \theta_m \cos \theta_{m+2} \\
\Lambda_{0,m+2,-,-} &= -\sqrt{m+1} \cos \theta_m \sin \theta_{m+2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{1,m+1,\mathcal{T},\mathcal{S}} &= \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{a} | \varphi_{m+1,\mathcal{S}} \rangle \\
L_{1,m+1,\mathcal{T},\mathcal{S}} &= \sqrt{m+1} s_{m,\mathcal{T}} s_{m+1,\mathcal{S}} + \sqrt{m} c_{m,\mathcal{T}} c_{m+1,\mathcal{S}} \\
L_{1,m+1,+,+} &= \sqrt{m+1} \sin \theta_m \sin \theta_{m+1} + \sqrt{m} \cos \theta_m \cos \theta_{m+1} \\
L_{1,m+1,+,-} &= \sqrt{m+1} \sin \theta_m \cos \theta_{m+1} - \sqrt{m} \cos \theta_m \sin \theta_{m+1} \\
L_{1,m+1,-,+} &= \sqrt{m+1} \cos \theta_m \sin \theta_{m+1} - \sqrt{m} \sin \theta_m \cos \theta_{m+1} \\
L_{1,m+1,-,-} &= \sqrt{m+1} \cos \theta_m \cos \theta_{m+1} + \sqrt{m} \sin \theta_m \sin \theta_{m+1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} &= \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{a}^2 | \varphi_{m+2,\mathcal{S}} \rangle \\
L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} &= \sqrt{(m+2)(m+1)} s_{m,\mathcal{T}} s_{m+2,\mathcal{S}} + \sqrt{(m+1)(m)} c_{m,\mathcal{T}} c_{m+2,\mathcal{S}} \\
L_{2,m+2,+,+} &= \sqrt{(m+2)(m+1)} \sin \theta_m \sin \theta_{m+2} + \sqrt{(m+1)(m)} \cos \theta_m \cos \theta_{m+2} \\
L_{2,m+2,+,-} &= \sqrt{(m+2)(m+1)} \sin \theta_m \cos \theta_{m+2} - \sqrt{(m+1)(m)} \cos \theta_m \sin \theta_{m+2} \\
L_{2,m+2,-,+} &= \sqrt{(m+2)(m+1)} \cos \theta_m \sin \theta_{m+2} - \sqrt{(m+1)(m)} \sin \theta_m \cos \theta_{m+2} \\
L_{2,m+2,-,-} &= \sqrt{(m+2)(m+1)} \cos \theta_m \cos \theta_{m+2} + \sqrt{(m+1)(m)} \sin \theta_m \sin \theta_{m+2}.
\end{aligned}$$

## I.1 Formulação do regime ressonante

Para  $\Delta_- = 0$  as expressões simplificadas são

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{\omega,j} e^{i\phi_\omega^{(j)}} &= 0, \quad \Gamma_{m,+,+}^{\omega,j} e^{i\phi_\omega^{(j)}} = \left(m - \frac{1}{2}\right) \varepsilon_\omega^{(j)}, \quad \Gamma_{m,+,-}^{\omega,j} e^{i\phi_\omega^{(j)}} = \frac{1}{2} \varepsilon_\omega^{(j)} \\
\Gamma_{m,-,+}^{\omega,j} e^{i\phi_\omega^{(j)}} &= \frac{1}{2} \varepsilon_\omega^{(j)}, \quad \Gamma_{m,-,-}^{\omega,j} e^{i\phi_\omega^{(j)}} = \left(m - \frac{1}{2}\right) \varepsilon_\omega^{(j)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{\Omega,j} e^{i\phi_\Omega^{(j)}} &= 0, \quad \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{\Omega,j} e^{i\phi_\Omega^{(j)}} = \varepsilon_\Omega^{(j)} c_{m,\mathcal{T}} c_{m,\mathcal{S}}, \quad \Gamma_{m,+,+}^{\Omega,j} e^{i\phi_\Omega^{(j)}} = \frac{1}{2} \varepsilon_\Omega^{(j)} \\
\Gamma_{m,+,-}^{\Omega,j} e^{i\phi_\Omega^{(j)}} &= -\frac{1}{2} \varepsilon_\Omega^{(j)}, \quad \Gamma_{m,-,+}^{\Omega,j} e^{i\phi_\Omega^{(j)}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_\Omega^{(j)}, \quad \Gamma_{m,-,-}^{\Omega,j} e^{i\phi_\Omega^{(j)}} = \frac{1}{2} \varepsilon_\Omega^{(j)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{g,j} e^{i\phi_g^{(j)}} &= 0, \quad \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{g,j} e^{i\phi_g^{(j)}} = \sqrt{m} \varepsilon_{G,k} \omega_g^{(j)} (s_{m,\mathcal{T}} c_{m,\mathcal{S}} + c_{m,\mathcal{T}} s_{m,\mathcal{S}}), \quad \Gamma_{m,+,+}^{g,j} e^{i\phi_g^{(j)}} = \sqrt{m} \varepsilon_g^{(j)} \\
\Gamma_{m,+,-}^{g,j} e^{i\phi_g^{(j)}} &= 0, \quad \Gamma_{m,-,+}^{g,j} e^{i\phi_g^{(j)}} = 0, \quad \Gamma_{m,-,-}^{g,j} e^{i\phi_g^{(j)}} = -\sqrt{m} \varepsilon_g^{(j)}.
\end{aligned}$$



Os parâmetros de  $\hat{H}_2$  são

$$\begin{aligned}\Lambda_{0,2,\mathcal{T},\mathcal{S}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{S}, \quad \Lambda_{0,m+2,+,+} = \sqrt{m+1}\frac{1}{2}, \quad \Lambda_{0,m+2,+,-} = -\sqrt{m+1}\frac{1}{2} \\ \Lambda_{0,m+2,-,+} &= \sqrt{m+1}\frac{1}{2}, \quad \Lambda_{0,m+2,-,-} = -\sqrt{m+1}\frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\Lambda_{0,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^2 = (m+1)\frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned}L_{1,m+1,\mathcal{T},\mathcal{S}} &= \sqrt{m+1}s_{m,\mathcal{T}}s_{m+1,\mathcal{S}} + \sqrt{m}c_{m,\mathcal{T}}c_{m+1,\mathcal{S}}, \quad L_{1,m+1,+,+} = \frac{1}{2}(\sqrt{m+1} + \sqrt{m}) \\ L_{1,m+1,+,-} &= \frac{1}{2}(\sqrt{m+1} - \sqrt{m}), \quad L_{1,m+1,-,+} = \frac{1}{2}(\sqrt{m+1} - \sqrt{m}), \quad L_{1,m+1,-,-} = \frac{1}{2}(\sqrt{m+1} + \sqrt{m}),\end{aligned}$$

$$L_{1,m+1,\mathcal{T},\mathcal{T}} = \frac{1}{2}(\sqrt{m+1} + \sqrt{m}), \quad L_{1,m+1,\mathcal{T},-\mathcal{T}} = \frac{1}{2}(\sqrt{m+1} - \sqrt{m}),$$

$$\sum_{\mathcal{S}=\pm} L_{1,m+1,\mathcal{T},\mathcal{S}}^2 = (m+1/2),$$

$$\begin{aligned}L_{2,m+2,+,+} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(m+2)(m+1)} + \sqrt{(m+1)(m)}\right) \\ L_{2,m+2,+,-} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(m+2)(m+1)} - \sqrt{(m+1)(m)}\right) \\ L_{2,m+2,-,+} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(m+2)(m+1)} - \sqrt{(m+1)(m)}\right) \\ L_{2,m+2,-,-} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(m+2)(m+1)} + \sqrt{(m+1)(m)}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{T}} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(m+2)(m+1)} + \sqrt{(m+1)(m)}\right) \\ L_{2,m+2,\mathcal{T},-\mathcal{T}} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(m+2)(m+1)} - \sqrt{(m+1)(m)}\right),\end{aligned}$$

$$\sum_{\mathcal{S}=\pm} L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^2 = \sum_{\mathcal{S}=\pm} L_{2,m+2,\mathcal{S},\mathcal{T}}^2 = (m+1)^2.$$

## I.2 Formulação do regime dispersivo

### I.2.1 Formulação Geral ao Regime Dispersivo $\mathcal{D} = \pm$

Finalizando a análise, generalizaremos o RD considerando  $\mathcal{D} = \pm$  e consideraremos a menor ordem de  $g_0/\Delta_-$ . Iniciaremos escrevendo os coeficientes como

$$\begin{aligned} c_{m,\mathcal{D}} &\approx \frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m} \\ c_{m,-\mathcal{D}} &\approx -\mathcal{D} \\ s_{m,\mathcal{D}} &\approx 1 \\ s_{m,-\mathcal{D}} &\approx \mathcal{D} \frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m}. \end{aligned}$$

Os EV são escritos da seguinte forma

$$|\varphi_{m,\mathcal{S}}\rangle = s_{m,\mathcal{S}} |g, m\rangle + c_{m,\mathcal{S}} |e, m-1\rangle, \quad (\text{I.5})$$

com  $\mathcal{S} = \pm\mathcal{D}$

$$|\varphi_{m,\mathcal{D}}\rangle = |g, m\rangle + \frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m} |e, m-1\rangle \quad (\text{I.6})$$

$$|\varphi_{m,-\mathcal{D}}\rangle = |e, m-1\rangle - \frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m} |g, m\rangle = -\mathcal{D} \left\{ |e, m-1\rangle - \frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m} |g, m\rangle \right\}. \quad (\text{I.7})$$

Os coeficientes generalizados para o RD são

$$\begin{aligned} \Gamma_{0,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{\omega,j} e^{i\phi_\omega^{(j)}} &= 0, \quad \Gamma_{m,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{\omega,j} e^{i\phi_\omega^{(j)}} \approx \varepsilon_\omega^{(j)} m, \quad \Gamma_{m,\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{\omega,j} e^{i\phi_\omega^{(j)}} \approx \frac{g_0}{|\Delta_-|} \varepsilon_\omega^{(j)} \sqrt{m} \\ \Gamma_{m,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{\omega,j} e^{i\phi_\omega^{(j)}} &\approx \frac{g_0}{|\Delta_-|} \varepsilon_\omega^{(j)} \sqrt{m}, \quad \Gamma_{m,-\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{\omega,j} e^{i\phi_\omega^{(j)}} \approx \varepsilon_\omega^{(j)} (m-1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{0,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{\Omega,j} e^{i\phi_\Omega^{(j)}} &= 0, \quad \Gamma_{m,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{\Omega,j} e^{i\phi_\Omega^{(j)}} \approx \varepsilon_\Omega^{(j)} \frac{g_0^2}{\Delta_-^2} m, \quad \Gamma_{m,\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{\Omega,j} e^{i\phi_\Omega^{(j)}} \approx -\varepsilon_\Omega^{(j)} \frac{g_0}{|\Delta_-|} \sqrt{m} \\ \Gamma_{m,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{\Omega,j} e^{i\phi_\Omega^{(j)}} &\approx -\varepsilon_\Omega^{(j)} \frac{g_0}{|\Delta_-|} \sqrt{m}, \quad \Gamma_{m,-\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{\Omega,j} e^{i\phi_\Omega^{(j)}} \approx \varepsilon_\Omega^{(j)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{0,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{g,j} &= 0, \quad \Gamma_{m,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{g,j} e^{i\phi_\Omega^{(j)}} \approx 2 \frac{g_0}{\Delta_-} m \varepsilon_g^{(j)}, \quad \Gamma_{m,\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{g,j} e^{i\phi_\Omega^{(j)}} \approx -\mathcal{D} \sqrt{m} \varepsilon_g^{(j)} \\ \Gamma_{m,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{g,j} e^{i\phi_\Omega^{(j)}} &\approx -\mathcal{D} \sqrt{m} \varepsilon_g^{(j)}, \quad \Gamma_{m,-\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{g,j} e^{i\phi_\Omega^{(j)}} \approx -2 \frac{g_0}{\Delta_-} m \varepsilon_g^{(j)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{0,2,\mathcal{T},\mathcal{D}} &\approx \frac{g_0}{|\Delta_-|} \sqrt{2}, \quad \Lambda_{0,2,\mathcal{T},-\mathcal{D}} \approx -\mathcal{D}, \quad \Lambda_{0,m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}} \approx \frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{(m+1)(m+2)} \\ \Lambda_{0,m+2,\mathcal{D},-\mathcal{D}} &\approx -\mathcal{D} \sqrt{m+1}, \quad \Lambda_{0,m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}} \approx \mathcal{D} \sqrt{m(m+2)(m+1)} \left( \frac{g_0}{\Delta_-} \right)^2 \\ \Lambda_{0,m+2,-\mathcal{D},-\mathcal{D}} &\approx -\frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m(m+1)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{1,1,\mathcal{T},\mathcal{D}} &\approx 1, \quad L_{1,1,\mathcal{T},-\mathcal{D}} \approx \frac{g_0}{|\Delta_-|}, \quad L_{1,m+1,\mathcal{D},\mathcal{D}} \approx \sqrt{m+1}, \quad L_{1,m+1,\mathcal{D},-\mathcal{D}} \approx \frac{g_0}{|\Delta_-|} \\ L_{1,m+1,-\mathcal{D},\mathcal{D}} &\approx 0, \quad L_{1,m+1,-\mathcal{D},-\mathcal{D}} \approx \sqrt{m},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{2,2,\mathcal{T},\mathcal{D}} &\approx \sqrt{2}, \quad L_{2,2,\mathcal{T},-\mathcal{D}} \approx 2 \frac{g_0}{|\Delta_-|}, \quad L_{2,m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}} \approx \sqrt{(m+2)(m+1)} \\ L_{2,m+2,\mathcal{D},-\mathcal{D}} &\approx 2 \frac{g_0}{|\Delta_-|} \sqrt{(m+1)}, \quad L_{2,m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}} \approx 0, \quad L_{2,m+2,-\mathcal{D},-\mathcal{D}} \approx \sqrt{(m+1)(m)}.\end{aligned}$$

# Apêndice J

## Coeficientes de acoplamento e shifts de frequência

### J.1 Coeficientes e Shifts

No apêndice I calculamos os valores de alguns coeficientes definidos no problema, como o *coeficiente gama* (CG) e os coeficientes relativos a  $\hat{H}_2$ . Neste apêndice calcularemos as definições dadas por (2.84), (2.71) e (2.80). Expressaremos o coeficiente de acoplamento independente do tempo e os *shifts de ressonância* de acordo com os limites impostos ao *regime ressonante* (RR) e *regime dispersivo* (RD). Iniciaremos escrevendo o valor de (2.71)

$$\nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} = \frac{1}{4} \sum_j \left| \varepsilon_d^{(j)} \right| \sum_{\mathcal{S}} \left\{ \frac{|L_{1,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}|^2}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-1,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} - \frac{|L_{1,m+1,\mathcal{T},\mathcal{S}}|^2}{\lambda_{m+1,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \eta^{(j)}} \right\}. \quad (\text{J.1})$$

Considerando a equação com  $m = 0$ , o que expressa o *shift* para o estado de vácuo

$$\nu_{0,\mathcal{T}}^{(1)} = -\frac{1}{4} \sum_j \left| \varepsilon_d^{(j)} \right| \sum_{\mathcal{S}} \frac{|L_{1,1,\mathcal{T},\mathcal{S}}|^2}{\lambda_{1,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}}, \quad (\text{J.2})$$

e ao substituir o valor de  $L_{1,1,\mathcal{T},\mathcal{S}}$  (apêndice I)

$$\nu_{0,\mathcal{T}}^{(1)} = -\frac{1}{4} \sum_j \left| \varepsilon_d^{(j)} \right|^2 \sum_{\mathcal{S}} \frac{|s_{1,\mathcal{S}}|^2}{\lambda_{1,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}}. \quad (\text{J.3})$$

Para  $m = 1$ , obtemos

$$\nu_{1,\mathcal{T}}^{(1)} = \frac{1}{4} \sum_j \left| \varepsilon_d^{(j)} \right| \sum_{\mathcal{S}} \left\{ \frac{L_{1,1,\mathcal{S},\mathcal{T}}^2}{\lambda_{m,\mathcal{T}} + \eta^{(j)}} - \frac{L_{1,m+1,\mathcal{T},\mathcal{S}}^2}{\lambda_{m+1,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \eta^{(j)}} \right\}, \quad (\text{J.4})$$

e para  $m > 1$

$$\nu_{m>1,\mathcal{T}}^{(1)} = \frac{1}{4} \sum_j |\varepsilon_d^{(j)}| \sum_S \left\{ \frac{L_{1,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^2}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-1,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} - \frac{L_{1,m+1,\mathcal{T},\mathcal{S}}^2}{\lambda_{m+1,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \eta^{(j)}} \right\}. \quad (\text{J.5})$$

Agora escreveremos a fomulação geral dada ao *shift de ressonância* em um segundo nível de definição

$$\begin{aligned} \nu_{m,\mathcal{T}}^{(2)} \equiv & \sum_S \left\{ \frac{\left| \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}} G_{0,k} - i L_{2,m,\mathcal{S},\mathcal{T}} \chi_0 \right|^2}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}} + \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} - \nu_{m-2,\mathcal{S}}^{(1)}} \right. \\ & - \frac{\left| \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} G_{0,k} - i L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \chi_0 \right|^2}{\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \nu_{m+2,\mathcal{S}}^{(1)} - \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)}} \\ & \left. + \frac{1}{4} \sum_j \left\{ \frac{\left| \sum_{k=0}^{N-1} i \Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}} \varepsilon_{G,k}^{(j)*} + L_{2,m,\mathcal{S},\mathcal{T}} \varepsilon_\chi^{(j)*} \right|^2}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}} + \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} - \nu_{m-2,\mathcal{S}}^{(1)} + \eta^{(j)}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\left| \sum_{k=0}^{N-1} i \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \varepsilon_{G,k}^{(j)*} + L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \varepsilon_\chi^{(j)*} \right|^2}{\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} - \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} + \nu_{m+2,\mathcal{S}}^{(1)} + \eta^{(j)}} \right\} \right\}. \quad (\text{J.6}) \end{aligned}$$

A partir deste momento, vamos negligenciar os termos de ordem de  $\sim M\varepsilon_g^2/\omega_0$  (também considerados *shifts de ressonância*). Para  $m = 0, 1, 2$ , temos

$$\nu_{0,\mathcal{T}}^{(2)} = - \sum_S \left\{ \frac{c_{2,\mathcal{S}}^2 g_0^2 + 2s_{2,\mathcal{S}}^2 \chi_0^2}{\lambda_{2,\mathcal{S}} + \nu_{2,\mathcal{S}}^{(1)} - \nu_{0,\mathcal{T}}^{(1)}} + \frac{1}{4} \sum_l \left\{ \frac{2s_{2,\mathcal{S}}^2 |\varepsilon_\chi^{(l)}|^2}{\lambda_{2,\mathcal{S}} + \nu_{2,\mathcal{S}}^{(1)} - \nu_{0,\mathcal{T}}^{(1)} + \eta^{(l)}} \right\} \right\} \quad (\text{J.7})$$

$$\begin{aligned} \nu_{m=1,\mathcal{T}}^{(2)} = & - \sum_S \left\{ \frac{\Lambda_{0,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^2 g_0^2 + L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^2 \chi_0^2}{\left( \lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \nu_{m+2,\mathcal{S}}^{(1)} - \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} \right)} \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \sum_l \frac{L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^2 |\varepsilon_\chi^{(l)}|^2}{\left( \lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \nu_{m+2,\mathcal{S}}^{(1)} - \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} + \eta^{(l)} \right)} \right\} \quad (\text{J.8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_{m=2,\mathcal{T}}^{(2)} = & \sum_S \left\{ \frac{\Lambda_{0,2,\mathcal{S},\mathcal{T}}^2 g_0^2 + L_{2,2,\mathcal{S},\mathcal{T}}^2 \chi_0^2}{\lambda_{m,\mathcal{T}} + \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} - \nu_{m-2,\mathcal{S}}^{(1)}} - \frac{\Lambda_{0,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^2 g_0^2 + L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^2 \chi_0^2}{\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \nu_{m+2,\mathcal{S}}^{(1)} - \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)}} \right. \\ & + \frac{1}{4} \sum_l |\varepsilon_\chi^{(l)}|^2 \left\{ \frac{L_{2,2,\mathcal{S},\mathcal{T}}^2}{\lambda_{m,\mathcal{T}} + \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} - \nu_{m-2,\mathcal{S}}^{(1)} + \eta^{(l)}} \right. \\ & \left. \left. - \frac{L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^2}{\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \nu_{m+2,\mathcal{S}}^{(1)} - \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} + \eta^{(l)}} \right\} \right\} \quad (\text{J.9}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nu_{m>2,\mathcal{T}}^{(2)} = & \sum_{\mathcal{S}} \left\{ \frac{\Lambda_{0,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^2 g_0^2 + L_{2,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^2 \chi_0^2}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}} + \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} - \nu_{m-2,\mathcal{S}}^{(1)}} - \frac{\Lambda_{0,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^2 g_0^2 + L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^2 \chi_0^2}{\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \nu_{m+2,\mathcal{S}}^{(1)} - \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)}} \right. \\
 & + \frac{1}{4} \sum_j \left| \varepsilon_{\chi}^{(j)} \right|^2 \left\{ \frac{L_{2,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}} + \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} - \nu_{m-2,\mathcal{S}}^{(1)} + \eta^{(j)}} \right. \\
 & \left. \left. - \frac{L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}}{\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} - \nu_{m,\mathcal{T}}^{(1)} + \nu_{m+2,\mathcal{S}}^{(1)} + \eta^{(j)}} \right\} \right\}. \tag{J.10}
 \end{aligned}$$

Na equação (2.83) definimos o coeficiente independente do tempo

$$\begin{aligned}
 \Theta_{m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} = & \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{R}} \left\{ \sum_{X=\omega,\Omega,g} \left( \frac{\sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{R}} - i\chi_0 L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{R}}}{\lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} \right) \Gamma_{m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}} \right. \\
 & \left. - \frac{\sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}} - i\chi_0 L_{2,m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}}}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} + \eta^{(j)}} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}} \right\} \\
 & - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_{G,k}^{(j)} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} - i\varepsilon_{\chi}^{(j)} L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \right\}. \tag{J.11}
 \end{aligned}$$

Quando calculamos o coeficiente com  $m = 0$ , temos

$$\Theta_{2,\mathcal{T},\mathcal{S}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{R}=\pm} \sum_{X=\omega,\Omega,g} \left\{ \frac{g_0 \Lambda_{0,2,\mathcal{T},\mathcal{R}} - i\chi_0 L_{2,2,\mathcal{T},\mathcal{R}}}{\lambda_{2,\mathcal{R}} - \lambda_{2,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} \Gamma_{2,\mathcal{R},\mathcal{S}}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_g^{(j)} \Lambda_{0,2,\mathcal{T},\mathcal{S}} - i\varepsilon_{\chi}^{(j)} L_{2,2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \right\}, \tag{J.12}$$

e para  $m > 0$

$$\begin{aligned}
 \Theta_{m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} = & \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{R}} \sum_{X=\omega,\Omega,g} \left\{ \frac{g_0 \Lambda_{0,m+2,\mathcal{T},\mathcal{R}} - i\chi_0 L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{R}}}{\lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} \Gamma_{m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}} \right. \\
 & \left. - \frac{g_0 \Lambda_{0,m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}} - i\chi_0 L_{2,m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}}}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} + \eta^{(j)}} \Gamma_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}} \right\} \\
 & - \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_g^{(j)} \Lambda_{0,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} - i\varepsilon_{\chi}^{(j)} L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \right\}. \tag{J.13}
 \end{aligned}$$

A formulação geral para os coeficientes de acoplamento e *shifts de ressonância* são expostos pelas equações acima. Nas seções que seguiremos escreveremos as definições, porém de acordo com os limites do RR e RD.

### J.1.1 Regime dispersivo

Toda formulação do regime dispersivo é encontrada no apêndice I. Relembrando que  $|\Delta_-|/2 \gg |g_0| \sqrt{m}$  sendo  $\mathcal{D} = \Delta_-/|\Delta_-|$ . Escreveremos os coeficientes de acoplamento a partir da equação

(J.12) e consideraremos os valores de  $\mathcal{R} = \pm$ , obtendo

$$\begin{aligned} \Theta_{2,\mathcal{T},\mathcal{S}} &= \frac{1}{2} \sum_{X=\omega,\Omega,g} \left\{ \left\{ \frac{g_0 \Lambda_{0,2,\mathcal{T},+} - i\chi_0 L_{2,2,\mathcal{T},+}}{\lambda_{2,+} - \lambda_{2,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} \right\} \Gamma_{2,+,\mathcal{S}}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{g_0 \Lambda_{0,2,\mathcal{T},-} - i\chi_0 L_{2,2,\mathcal{T},-}}{\lambda_{2,-} - \lambda_{2,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} \right\} \Gamma_{2,-,\mathcal{S}}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_g^{(j)} \Lambda_{0,2,\mathcal{T},\mathcal{S}} - i\varepsilon_\chi^{(j)} L_{2,2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{J.14})$$

Após algumas manipulações obtemos

$$\begin{aligned} \Theta_{2,\mathcal{T},\mathcal{D}} &= \frac{1}{2} \sqrt{2} \left\{ \frac{\delta_- - i\chi_0}{\eta^{(j)}} 2 + \frac{\delta_- + 2i\chi_0 \left( \frac{g_0}{\Delta_-} \right)^2}{4\delta_- + \Delta_- - \eta^{(j)}} \right\} \varepsilon_\omega^{(j)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{2} \left\{ \frac{\delta_- - i\chi_0}{\eta^{(j)}} \frac{g_0^2}{\Delta_-^2} 2 - \frac{\delta_- + 2i\chi_0 \left( \frac{g_0}{\Delta_-} \right)^2}{4\delta_- + \Delta_- - \eta^{(j)}} \right\} \varepsilon_\Omega^{(j)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{2} \left\{ 4 \frac{\delta_- - i\chi_0}{\eta^{(j)}} \frac{g_0}{|\Delta_-|} - \frac{g_0 + 2i\chi_0 \frac{g_0}{\Delta_-}}{4\delta_- + \Delta_- - \eta^{(j)}} \right\} \varepsilon_g^{(j)} - \frac{1}{2} \sqrt{2} \left\{ \varepsilon_g^{(j)} \frac{g_0}{\Delta_-} - i\varepsilon_\chi^{(j)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{J.15})$$

$$\begin{aligned} \Theta_{2,\mathcal{T},-\mathcal{D}} &= \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{g_0 \frac{g_0}{\Delta_-} - i\chi_0}{4\delta_- + \Delta_- + \eta^{(j)}} \frac{g_0}{|\Delta_-|} - \frac{g_0 + 2i\chi_0 \frac{g_0}{\Delta_-}}{\eta^{(j)}} \right\} \varepsilon_\omega^{(j)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ 4 \frac{g_0 \frac{g_0}{\Delta_-} - i\chi_0}{4\delta_- + \Delta_- + \eta^{(j)}} \frac{g_0}{\Delta_-} - \frac{g_0 + 2i\chi_0 \frac{g_0}{\Delta_-}}{\eta^{(j)}} \right\} \varepsilon_\Omega^{(j)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{g_0 \frac{g_0}{\Delta_-} - i\chi_0}{4\delta_- + \Delta_- + \eta^{(j)}} + 4 \frac{\delta_- + 2i\chi_0 \left( \frac{g_0}{\Delta_-} \right)^2}{\eta^{(j)}} \right\} \varepsilon_g^{(j)} + \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_g^{(j)} + 2i\varepsilon_\chi^{(j)} \frac{g_0}{\Delta_-} \right\} \end{aligned} \quad (\text{J.16})$$

$$\begin{aligned} \Theta_{m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}} &= \frac{1}{2} \sum_{X=\omega,\Omega,g} \left\{ \left\{ \frac{g_0 \Lambda_{0,m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}} - i\chi_0 L_{2,m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}}}{\lambda_{m+2,\mathcal{D}} - \lambda_{m+2,\mathcal{D}} + \eta^{(j)}} \right\} \Gamma_{m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}} \right. \\ &\quad + \left\{ \frac{g_0 \Lambda_{0,m+2,\mathcal{D},-\mathcal{D}} - i\chi_0 L_{2,m+2,\mathcal{D},-\mathcal{D}}}{\lambda_{m+2,-\mathcal{D}} - \lambda_{m+2,\mathcal{D}} + \eta^{(j)}} \right\} \Gamma_{m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}} \\ &\quad - \left\{ \frac{g_0 \Lambda_{0,m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}} - i\chi_0 L_{2,m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}}}{\lambda_{m,\mathcal{D}} - \lambda_{m,\mathcal{D}} + \eta^{(j)}} \right\} \Gamma_{m,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}} \\ &\quad - \left\{ \frac{g_0 \Lambda_{0,m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}} - i\chi_0 L_{2,m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}}}{\lambda_{m,-\mathcal{D}} - \lambda_{m,-\mathcal{D}} + \eta^{(j)}} \right\} \Gamma_{m,-\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{X,j} e^{i\phi_X^{(j)}} \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_g^{(j)} \Lambda_{0,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} - i\varepsilon_\chi^{(j)} L_{2,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{J.17})$$

Outro coeficiente que pode ser escrito na formulação do RD é o apresentado na equação (J.13).

Utilizaremos a formulação geral do RD, onde  $\mathcal{D}\Delta_- = |\Delta_-|$  e manteremos sempre a ordem mais baixa de  $g_0/\Delta_-$ . Após longas manipulações algébricas obtemos

$$\begin{aligned} \Theta_{m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}} &= \frac{1}{2}\sqrt{(m+1)(m+2)} \left\{ \left\{ \delta_- \frac{\eta^{(j)} - 2\Delta_-}{\eta^{(j)}(\eta^{(j)} - \Delta_-)} - \frac{2i\chi_0}{\eta^{(j)}} \right\} \varepsilon_\omega^{(j)} + \frac{1}{2}i\varepsilon_\chi^{(j)} \right. \\ &\quad \left. + \delta_- \left\{ 1 + \frac{2i\chi_0}{\eta^{(j)}} \right\} \frac{\varepsilon_\Omega^{(j)}}{\eta^{(j)} - \Delta_-} + \left\{ \frac{2\Delta_- - \eta^{(j)}}{\eta^{(j)} - \Delta_-} - \frac{2i\chi_0}{\eta^{(j)} - \Delta_-} \left( \frac{\eta^{(j)} - 2\Delta_-}{\eta^{(j)}} \right) \right\} \frac{g_0}{\Delta_-} \varepsilon_g^{(j)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{J.18})$$

$$\begin{aligned} \Theta_{m+2,-\mathcal{D},-\mathcal{D}} &= \frac{1}{2}\sqrt{m(m+1)} \left\{ - \left\{ \delta_- \frac{\eta^{(j)} + 2\Delta_-}{\eta^{(j)} - \Delta_-} + 2i\chi_0 \right\} \frac{\varepsilon_\omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ 1 + \frac{2i\chi_0}{\Delta_-} \right\} \delta_- \frac{\varepsilon_\Omega^{(j)}}{\eta^{(j)} - \Delta_-} + \left\{ \eta^{(j)} - 2\Delta_- - 2i\chi_0 \right\} \frac{\delta_-}{\eta^{(j)} - \Delta_-} \frac{\varepsilon_g^{(j)}}{g_0} + i\varepsilon_\chi^{(j)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{J.19})$$

$$\begin{aligned} \Theta_{m+2,\mathcal{D},-\mathcal{D}} &= \frac{1}{2}g_0\mathcal{D}\sqrt{m+1} \left\{ - \left\{ 1 + i\frac{2\chi_0}{\Delta_- + \eta^{(j)}} \frac{2\eta^{(j)} + \Delta_-}{\Delta_-} \right\} \frac{\varepsilon_\omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ 1 + i\frac{2\chi_0}{\Delta_- + \eta^{(j)}} \right\} \frac{\varepsilon_\Omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} + \left\{ 1 + i\frac{2\chi_0}{\Delta_- + \eta^{(j)}} \right\} \frac{\varepsilon_g^{(j)}}{g_0} + i\frac{2\varepsilon_\chi^{(j)}}{\Delta_-} \right\} \end{aligned} \quad (\text{J.20})$$

$$\begin{aligned} \Theta_{m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}} &= \frac{1}{2}\mathcal{D}\sqrt{m(m+1)(m+2)}\delta_- \frac{g_0}{\Delta_-} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\eta^{(j)} - 3\Delta_-}{\eta^{(j)} - \Delta_-} \frac{\varepsilon_\omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} + \frac{\eta^{(j)} + \Delta_-}{\eta^{(j)} - \Delta_-} \frac{\varepsilon_\Omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} + \frac{3\Delta_- - \eta^{(j)}}{\eta^{(j)} - \Delta_-} \frac{\varepsilon_g^{(j)}}{g_0} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{J.21})$$

Os coeficientes (J.15)-(J.21) são resultados mais gerais dentro do RD. Sendo que cada coeficiente poderá assumir valores distintos, de acordo a ressonância estipulada para  $\eta^{(j)}$ . São os limites de ressonância:  $\eta^{(D)} \approx 2\omega_0$ ;  $\eta^{(A)} \approx \Delta_+$  e  $\eta^{(AC)} \approx 2\omega_0 + \Delta_-$ . Por exemplo, quando escolhermos a frequência de ressonância  $\eta^{(AC)}$  sabemos que a diferença entre as autoenergias apropriada é  $\lambda_{m+2,-\mathcal{D}} - \lambda_{m,\mathcal{D}} \simeq 2\omega_0 + \Delta_-$ . Com isso o coeficiente de acoplamento servirá para acoplar  $-\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ . O coeficiente que melhor representa a ressonância  $\eta^{(AC)}$  é escrito em (J.21) e que caracterizará o efeito que denominaremos de “Anti-ECD”.

Os *shifts de ressonância* serão calculados de maneira semelhante aos coeficientes de acoplamento. Consideraremos a ordem mais baixa de  $g_0/\Delta_-$  negligenciaremos *shifts* da ordem de  $m\varepsilon_g^2/\omega_0$ , obtendo

$$\nu_{m>0,\mathcal{T}}^{(1)} = -\frac{1}{4} \sum_j \left| \varepsilon_d^{(j)} \right|^2 \left\{ \frac{1}{\omega_0 + \eta^{(j)}} + \frac{m \left( \frac{g_0}{\Delta_-} \right)^2}{\omega_0 + \eta^{(j)}} \right\},$$



eliminando o shift, teremos

$$\nu_{m>0,\mathcal{T}}^{(1)} = -\frac{1}{4} \sum_j \frac{|\varepsilon_d^{(j)}|^2}{\omega_0 + \eta^{(j)}}. \quad (\text{J.22})$$

Seguindo o mesmo procedimento de solução, escrevemos os demais *shifts de ressonância*

$$\nu_{0,\mathcal{T}}^{(2)} = - \left\{ \frac{g_0^2}{\Delta_+} + \frac{\chi_0^2}{\omega_0} + \frac{1}{2} \sum_l \frac{|\varepsilon_\chi^{(l)}|^2}{(2\omega_0 + \eta^{(l)})} \right\} \quad (\text{J.23})$$

$$\nu_{m>0,\mathcal{D}}^{(2)} = - \left\{ \frac{(m+1)g_0^2}{\Delta_+} + (2m+1) \frac{\chi_0^2}{\omega_0} + (2m+1) \frac{1}{2} \sum_l \frac{|\varepsilon_\chi^{(l)}|^2}{2\omega_0 + \eta^{(l)}} \right\} \quad (\text{J.24})$$

$$\nu_{m>0,-\mathcal{D}}^{(2)} = \left\{ \frac{(m-1)g_0^2}{\Delta_+} - (2m-1) \frac{\chi_0^2}{\omega_0} - \frac{1}{2} (2m-1) \sum_l \frac{|\varepsilon_\chi^{(l)}|^2}{2\omega_0 + \eta^{(l)}} \right\}. \quad (\text{J.25})$$

Em todo o RD usamos as seguintes aproximações

$$\varepsilon_\omega, \varepsilon_\Omega, g_0\sqrt{M}, \varepsilon_g\sqrt{M}, \varepsilon_d\sqrt{M}, \chi_0 M, \varepsilon_\chi M \ll \omega_0, \quad (\text{J.26})$$

e os shifts eliminados por SFN são

$$\left\{ \frac{g_0\sqrt{m}}{\Delta_-} \right\}^2 \frac{\varepsilon_\omega^2}{\omega_0}, \left\{ \frac{g_0\sqrt{m}}{\Delta_-} \right\}^2 \frac{\varepsilon_\Omega^2}{\omega_0}, \frac{m\varepsilon_g^2}{\omega_0}. \quad (\text{J.27})$$

### J.1.2 Regime ressonante

Aproximaremos  $|g_0|\sqrt{m} \ll \omega_0$ , sendo a ressonância  $\eta^{(j)} \simeq \omega_0$ . Assim, obtemos

$$\Theta_{2,\mathcal{T},+} = \frac{1}{4}\sqrt{2} \left\{ \left\{ g_0 - 2i\chi_0\sqrt{2} \right\} \frac{\varepsilon_\omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} + g_0 \frac{\varepsilon_\Omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} - \left\{ 1 + \frac{2i\chi_0}{\eta^{(j)}} \right\} \varepsilon_g^{(j)} + \sqrt{2}i\varepsilon_\chi^{(j)} \right\} \quad (\text{J.28})$$

$$\Theta_{2,\mathcal{T},-} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} \left\{ \left\{ g_0 + 2i\chi_0\sqrt{2} \right\} \frac{\varepsilon_\omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} + g_0 \frac{\varepsilon_\Omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} - \left\{ 1 + 2\frac{i\chi_0}{\eta^{(j)}} \varepsilon_g^{(j)} \right\} \varepsilon_g^{(j)} - i\sqrt{2}\varepsilon_\chi^{(j)} \right\} \quad (\text{J.29})$$

$$\begin{aligned} \Theta_{m+2,+,+} &= \frac{1}{4}\sqrt{m+1} \left\{ [g_0 - 2i\chi_0(\sqrt{m+2} + \sqrt{m})] \frac{\varepsilon_\omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} + g_0 \frac{\varepsilon_\Omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{2i\chi_0}{\eta^{(j)}} \right) \varepsilon_g^{(j)} + i\varepsilon_\chi^{(j)}(\sqrt{m+2} + \sqrt{m}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{J.30})$$

$$\begin{aligned} \Theta_{m+2,+,-} &= -\frac{1}{4}\sqrt{m+1} \left\{ \left[ g_0 + 2i\chi_0 \left( \sqrt{(m+2)} - \sqrt{(m)} \right) \right] \frac{\varepsilon_\omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} + g_0 \frac{\varepsilon_\Omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{2i\chi_0}{\eta^{(j)}} \right) \varepsilon_g^{(j)} - i\varepsilon_\chi^{(j)} \sqrt{m+1} \left( \sqrt{m+2} - \sqrt{m} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{J.31})$$

$$\begin{aligned} \Theta_{m+2,-,+} &= \frac{1}{4}\sqrt{m+1} \left\{ \left[ g_0 - 2i\chi_0 \left( \sqrt{m+2} - \sqrt{m} \right) \right] \frac{\varepsilon_\omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} + g_0 \frac{\varepsilon_\Omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{2i\chi_0}{\eta^{(j)}} \right) \varepsilon_g^{(j)} + i\varepsilon_\chi^{(j)} \left( \sqrt{m+2} - \sqrt{m} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{J.32})$$

$$\begin{aligned} \Theta_{m+2,-,-} &= -\frac{1}{4}\sqrt{m+1} \left\{ \left[ g_0 + 2i\chi_0 \left( \sqrt{(m+2)} + \sqrt{(m)} \right) \right] \frac{\varepsilon_\omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} + g_0 \frac{\varepsilon_\Omega^{(j)}}{\eta^{(j)}} \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{2i\chi_0}{\eta^{(j)}} \right) \varepsilon_g^{(j)} - i\varepsilon_\chi^{(j)} \left( \sqrt{m+2} + \sqrt{m} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{J.33})$$

Os *shifts de ressonância* serão calculados de maneira semelhante ao RD, consideraremos a aproximação  $|g_0| \sqrt{m} \ll \omega_0$  e negligenciaremos os *shifts* da ordem de  $\sim m\varepsilon_g^2/\omega_0$ . Substituindo os autovalores e os parâmetros no *shift*, teremos

$$\nu_{m>0,\mathcal{T}}^{(1)} = -\frac{1}{4} \sum_j \left| \varepsilon_d^{(j)} \right|^2 \left\{ \frac{1}{\omega_0 + \eta^{(j)}} + \frac{m \left( \frac{\varepsilon_g}{\omega_0} \right)^2}{\omega_0 + \eta^{(j)}} \right\},$$

eliminando o *shift*  $m\varepsilon_g^2/\omega_0$

$$\nu_{m>0,\mathcal{T}}^{(1)} = -\frac{1}{4} \sum_j \frac{\left| \varepsilon_d^{(j)} \right|^2}{\omega_0 + \eta^{(j)}}. \quad (\text{J.34})$$

Os outros *shifts de ressonância* apropriado ao RR serão

$$\begin{aligned} \nu_{0,\mathcal{T}}^{(2)} &\approx - \left\{ \frac{g_0^2}{2\omega_0} + \frac{\chi_0^2}{\omega_0} + \frac{1}{2} \sum_l \frac{\left| \varepsilon_\chi^{(l)} \right|^2}{(2\omega_0 + \eta^{(l)})} \right\} \\ \nu_{m>0,\mathcal{T}}^{(2)} &\approx - \left\{ \frac{g_0^2}{2\omega_0} + 2m \frac{\chi_0^2}{\omega_0} + m \sum_l \frac{\left| \varepsilon_\chi^{(l)} \right|^2}{(2\omega_0 + \eta^{(l)})} \right\}. \end{aligned}$$

Em toda a formulação do RR usamos as seguintes aproximações

$$\varepsilon_\omega, \varepsilon_\Omega, g_0\sqrt{M}, \varepsilon_g\sqrt{M}, \varepsilon_d\sqrt{M}, \chi_0 M, \varepsilon_\chi M \ll \omega_0, \quad (\text{J.35})$$

onde  $M$  representa o número máximo de excitações. Os *shifts* que passaram pelo processo do SFN são

---

$$\frac{\varepsilon_\omega^2}{\omega_0}, \frac{\varepsilon_\Omega^2}{\omega_0}, \frac{m\varepsilon_g^2}{\omega_0}. \quad (\text{J.36})$$

# Referências Bibliográficas

- [1] G. T. Moore, J. Math. Phys. **11**, 2679 (1970).
- [2] E. Yablonovitch, Phys. Rev. Lett. **62**, 1742 (1989).
- [3] J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **89**, 4091 (1992).
- [4] B. S. DeWitt, Phys. Rep. **19**, 295 (1975).
- [5] S. A. Fulling and P. C. W. Davies, Proc. R. Soc. London A **348**, 393 (1976).
- [6] P. C. W. Davies and S. A. Fulling, Proc. R. Soc. London A **354**, 59 (1977).
- [7] P. C. W. Davies and S. A. Fulling, Proc. R. Soc. London A **356**, 237 (1977).
- [8] L. H. Ford and A. Vilenkin, Phys. Rev. D. **25**, 10 (1982).
- [9] V. V. Dodonov, A. B. Klimov, V. I. Man'ko, Phys. Lett. A **142**, 511 (1989).
- [10] V. V. Dodonov, A. B. Klimov, D. E. Nikonov, Phys. Rev. A **47**, 4422 (1993).
- [11] P. A. Maia Neto, J. Phys. A **27**, 2167 (1994).
- [12] V. V. Dodonov, Phys. Lett. A **207**, 126 (1995).
- [13] A. Lambrecht, M. T. Jaekel, S. Reynaud, Phys. Rev. Lett. **77**, 615 (1996).
- [14] V. V. Dodonov and A. B. Klimov, Phys. Rev. A **53**, 2664 (1996).
- [15] V. V. Dodonov, Phys. Lett. A **244**, 517 (1998).
- [16] A. V. Dodonov and V. V. Dodonov, Phys. Lett. A **289**, 291 (2001).
- [17] C. K. Law, Phys. Rev. A **49**, 433 (1994).

- [18] C. K. Law, Phys. Rev. A **51**, 2537 (1995).
- [19] C. Braggio *et al.*, Europhys. Lett. **70**, 754 (2005).
- [20] C. Braggio *et al.*, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. Sect. A **603**, 451 (2009).
- [21] J. R. Johansson *et al.*, Phys. Rev. Lett. **103**, 147003 (2009).
- [22] T. Fujii *et al.*, Phys. Rev. B **84**, 174521 (2011).
- [23] C. M. Wilson *et al.*, Nature **479**, 376 (2011).
- [24] D. Faccio and I. Carusotto, Europhys. Lett. **96**, 24006 (2011).
- [25] P. D. Nation *et al.*, Rev. Mod. Phys. **84**, 1 (2012)
- [26] J.R. Johansson *et al.*, Phys. Rev. A **87**, 043804 (2013).
- [27] P. Lähteenmäki *et al.*, PNAS **110**, 4234 (2013).
- [28] V. V. Dodonov and A. V. Dodonov, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 6271 (2006).
- [29] V. V. Dodonov and A. V. Dodonov, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **39**, S749 (2006).
- [30] V. V. Dodonov and A. V. Dodonov, J. Phys.: Conf. Ser. **99**, 012006 (2008).
- [31] A. V. Dodonov and V. V. Dodonov, Phys. Rev. A **85**, 015805 (2012).
- [32] A. V. Dodonov and V. V. Dodonov, Phys. Lett. A **375**, 4261 (2011).
- [33] T. Kawakubo and K. Yamamoto, Phys. Rev. A **83**, 033819 (2011).
- [34] A. V. Dodonov and V. V. Dodonov, Phys. Scr. **T153**, 014017 (2013).
- [35] A. S. M. de Castro, A. Cacheffo, V. V. Dodonov, Phys. Rev. A **87**, 033809 (2013).
- [36] A. V. Dodonov, Phys. Scr. **87**, 038103 (2013).
- [37] A. Blais *et al.*, Phys. Rev. A **69**, 062320 (2004).
- [38] A. Wallraff *et al.*, Nature **431**, 162 (2004).
- [39] D. I. Schuster *et al.*, Nature **445**, 515 (2007).
- [40] R. J. Schoelkopf and S. M. Girvin, Nature **451**, 664 (2008).

- [41] J. Clarke and F. K. Wilhelm, *Nature* **453**, 1031 (2008).
- [42] J. M. Raimond, M. Brune, S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 565 (2001).
- [43] H. Mabuchi and A. C. Doherty, *Science* **298**, 1372 (2002).
- [44] S. De Liberato *et al.*, *Phys. Rev. A* **80**, 053810 (2009).
- [45] A. V. Dodonov, *Phys. Scr.* **82**, 038102 (2010).
- [46] D. I. Schuster, *Circuit Quantum Electrodynamics*, tese de doutorado (2007).
- [47] V. V. Dodonov, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, *J. Sov. Las. Res.* **10**, 413 (1989).
- [48] A. V. Dodonov and V. V. Dodonov, *Phys. Rev. A* **85**, 055805 (2012).
- [49] A. V. Dodonov and V. V. Dodonov, *Phys. Rev. A* **86**, 015801 (2012).
- [50] A. V. Dodonov, *J. Phys.: Conf. Ser.* **161**, 012029 (2009).
- [51] S. De Liberato, C. Ciuti, I. Carusotto, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 103602 (2007).
- [52] A. V. Dodonov, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47**, 285303 (2014).
- [53] V. V. Dodonov, *J. Phys.: Conf. Ser.* **161**, 012027 (2009).
- [54] V. V. Dodonov, *Phys. Scr.* **82**, 038105 (2010).
- [55] D. A. R. Dalvit, P. A. Maia Neto, F. D. Mazzitelli, (*Lecture Notes in Physics* **834**, Springer, Berlin, 2011), p. 419 [arXiv: 1006.4790].
- [56] F. X. Dezael and A. Lambrecht, *Europhys. Lett.* **89**, 14001 (2010).
- [57] D. F. Mundarain and P. A. Maia Neto, *Phys. Rev. A* **57**, 1379 (1998).
- [58] C. D. Fosco, F. C. Lombardo, F. D. Mazzitelli, *Phys. Rev. D* **87**, 105008 (2013).
- [59] A. L. Rego *et al.*, *Phys. Rev. D* **90**, 025003 (2014).
- [60] W. P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space* (Berlin: Wiley) 2001.
- [61] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (New York: Wiley) 1990.
- [62] R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **93**, 99 (1954).

- 
- [63] M. O. Scully, M. S. Zubairy, Quantum Optics (Cambridge: Cambridge University Press) 1997.
- [64] I. M. de Sousa and A. V. Dodonov, “Microscopic toy model for Cavity dynamical Casimir effect” (submitted to J. Phys. A, 2015).