

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS SEMI-  
EMBUTIDOS NA SIMULAÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO  
ARMADO**

**JUAN DAVID DEL RÍO GAITÁN**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS SEMI-  
EMBUTIDOS NA SIMULAÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO  
ARMADO**

**JUAN DAVID DEL RÍO GAITÁN**

**ORIENTADOR: RAÚL DARÍO DURAND FARFÁN**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO  
CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM-006A/15  
BRASÍLIA/DF: ABRIL – 2015**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS SEMI-  
EMBUTIDOS NA SIMULAÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO  
ARMADO**

**JUAN DAVID DEL RÍO GAITÁN**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:

---

**Prof. Raúl Darío Durand Farfán, D.Sc. (UnB)**  
(Orientador)

---

**Prof. Wiliam Taylor Matias Silva, Dr. Ing. (UnB)**  
(Examinador Interno)

---

**Prof. Lucival Malcher, D.Sc. (UnB)**  
(Examinador Externo)

**BRASÍLIA/DF, 17 DE ABRIL DE 2015.**

## FICHA CATALOGRÁFICA

DEL RÍO, JUAN DAVID.

Aplicação do Método de Elementos Finitos Semi-Embutidos na Simulação de Vigas de Concreto Armado. [Distrito Federal] 2015.

xvii, 100 p., 210x297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2015). Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Concreto Armado

2. Elementos Finitos

3. Método Semi-Embutidos

4. Vigas

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

DEL RÍO, J. D.; Aplicação do Método de Elementos Finitos Semi-Embutidos na Simulação de Vigas de Concreto Armado. Dissertação de Mestrado, Publicação E.DM-006A/15, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Universidade de Brasília. Brasília, DF, 100p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Juan David Del Río Gaitán

TÍTULO: Aplicação do Método de Elementos Finitos Semi-Embutidos na Simulação de Vigas de Concreto Armado.

GRAU: Mestre ANO: 2015

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Juan David Del Río Gaitán  
Calle 70B # 8A-04. Rincón de la Campiña.  
Ibagué – Colombia.  
e-mail: delriojuandavid@gmail.com.br

*A mi madre Nidia Gaitán por su amor y entrega, estaré eternamente agradecido.*

*A mi padre José Efraín por su apoyo, todo mi respeto y admiración.*

*Al amor de mi vida María Paula Susunaga, por su compañía y valentía.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por me permitir cumprir este grande objetivo.

Aos meus pais por me dar a vida e a confiança para desfrutar do mundo.

À minha esposa Maria Paula pelo seu amor, companhia e valentia durante este tempo.

Ao professor Raul Durand pelo apoio e pela ajuda para o desenvolvimento desse trabalho.

Aos meus amigos Nelson Afanador e Jorge Campuzano pelas ajudas e os auxílios. Muito obrigado por me ajudar sempre que eu precisei.

Aos meus colegas de turma Isabel, Jairo, Pablo e Fabian por fazer desta uma experiência inesquecível.

Agradeço à Capes pelo apoio financeiro.

# **APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS SEMI-EMBUTIDOS NA SIMULAÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO**

## **RESUMO**

Os métodos mais difundidos para realizar análises de concreto armado pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) são: o discreto, o distribuído (smeared) e o embutido (embedded) (Kwak & Filippou, 1990). No método discreto o processo de geração de malha é complexo devido à necessidade de condicionar a forma dos elementos sólidos com a posição dos elementos que representam a armadura. O método distribuído somente é conveniente na simulação de peças de concreto com distribuições regulares de armadura. O terceiro método, o embutido, permite que os elementos de armadura atravessem os elementos sólidos da malha mas não é possível descrever o comportamento da interface aço-concreto, onde eventualmente possa acontecer ruptura.

Visando atender algumas deficiências dos métodos descritos anteriormente, surgiu o método denominado de “semi-embutido” (Durand & Farias, 2012; Durand, 2008). Este método é bastante similar ao método embutido no sentido de permitir que elementos de barra atravessem elementos sólidos, mas incorpora elementos de interface entre eles. Uma vantagem desta abordagem é de permitir simular a interface aço-concreto incluindo o deslizamento relativo. Neste contexto, este trabalho propõe a aplicação do método semi-embutido no estudo do comportamento de vigas de concreto armado. Inicialmente, as características avaliadas neste estudo são os níveis de tensão e deformação no concreto e no aço e a flecha da viga no domínio elástico. Posteriormente foi feita a análise via elementos finitos de três vigas estudadas experimentalmente na literatura. Os resultados numéricos e experimentais da curva carga-deslocamento foram comparados nos três casos. Para as simulações numéricas foi utilizado o programa FemLab desenvolvido na linguagem de programação Julia. Os resultados das análises no domínio elástico por meio da metodologia de elementos finitos semi-embutidos são muito próximos em relação aos resultados obtidos pelas formulações analíticas propostas e pela modelagem através da metodologia discreta. Nas análises elasto-plásticas utilizando a metodologia semi-embutida, os resultados da curva carga-deslocamento das vigas estudadas forneceram valores muito próximos até 50% da carga aplicada.

# **APPLICATION OF THE SEMI-EMBEDDED FINITE ELEMENT METHOD IN REINFORCED CONCRETE BEAMS**

## **ABSTRACT**

The most widely used techniques to perform analysis of reinforced concrete using finite elements are the discrete, the smeared and the embedded methods (Kwak & Filippou, 1990). In the discrete method, the mesh generation process is complex since it is required that reinforcing elements were located at the edges of solid elements. The distributed method is just appropriate in the simulation of concrete members with regular distributions of reinforcement. The third method, the embedded, allows bar elements pass through the solid elements but it is not possible to describe the behavior of the steel-concrete interface, where rupture may happen.

The semi-embedded method (Durand & Farias, 2012; Durand, 2008) aims to fulfill certain limitations in the methods described above. This method is very similar to the embedded method since it allows bar elements pass through the solid elements, but also incorporates the behavior of the interface. An advantage of this approach is that it allows simulating the steel-concrete interface including slipping. In this context, this work presents the application of semi-embedded method on the study of reinforced concrete beams. First, this work studies the stress and strain fields and the deflection in reinforced concrete beams. Later, it is performed the finite element analysis of three beams that were studied experimentally by other authors. The numerical results were compared with the experimental ones for the three cases.

For the numerical simulations the program FEMLAB, written in the Julia programming language, was used. For the elastic analyses using the semi-embedded methodology, the results using the semi-embedded method were in excellent agreement with the ones obtained by the discrete approach. For the elastic-plastic analyses applied to the experimental beams, the semi-embedded method presented force-deflection diagrams very close to the experimental data up to 50% of the applied load.



# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1. OBJETIVOS	3
1.1.1. OBJETIVO GERAL	3
1.1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	3
1.2. ESCOPO DO TRABALHO	3
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>5</b>
2.1. PROJETO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO SEGUNDO A NBR 6118:2003	5
2.1.1. ESTADOS LIMITES	5
2.1.2. ESTÁDIOS DE SOLICITAÇÃO	6
2.1.3. DOMÍNIOS DE DEFORMAÇÕES	8
2.2. MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS	10
2.2.1. CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE WILLAM-WARNKE	12
2.2.2. CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE MOHR-COULOMB	14
2.2.3. CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE DRUCKER-PRAGER	16
2.2.4. MODELO UNIAXIAL ELÁSTICO-PERFEITAMENTE-PLÁSTICO	19
2.2.5. MODELO ELÁSTICO LINEAR	20
2.2.6. LEI DE ENDURECIMENTO	21
2.2.7. LEI DE FLUXO	21
2.3. APLICAÇÕES DE ELEMENTOS FINITOS EM CONCRETO ARMADO	21
<b>3. METODOLOGIA</b>	<b>28</b>
3.1. RESUMO DA NORMA	28
3.2. FORMULAÇÕES ANALÍTICAS	34
3.2.1. FORMULAÇÃO ANALÍTICA 1	35
3.2.2. FORMULAÇÃO ANALÍTICA 2	37
3.3. MÉTODO SEMI-EMBUTIDO	38
3.3.1. DISCRETIZAÇÃO DA ARMADURA	39
3.3.2. MODELAGEM DA INTERFACE	40
3.4. MODELAGEM DOS MATERIAIS	45
3.4.1. MODELAGEM DA ARMADURA	45
3.4.2. MODELAGEM DO CONCRETO	45

3.4.3. MODELAGEM DA INTERFACE	47
3.5. PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS	48
3.5.1. FEMLAB	48
3.5.2. ANSYS	49
<b>4. ESTUDO DE CASOS</b>	<b>51</b>
4.1. CONFIGURAÇÃO DAS VIGAS	51
4.2. FLECHA IMEDIATA EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO	53
4.2.1. AVALIAÇÃO DA FLECHA SEGUNDO NBR 6118:2003	54
4.2.2. AVALIAÇÃO DA FLECHA PELO MÉTODO SEMI-EMBTIDO	57
4.2.3. AVALIAÇÃO DA FLECHA PELO MÉTODO DISCRETO	58
4.2.4. COMPARATIVO DOS RESULTADOS OBTIDOS PARA A FLECHA ELÁSTICA	59
4.3. TENSÕES NO CONCRETO E NO AÇO	60
4.3.1. AVALIAÇÃO DAS TENSÕES NO DOMÍNIO ELÁSTICO PELA METODOLOGIA ANALÍTICA 1	61
4.3.2. AVALIAÇÃO DAS TENSÕES NO DOMÍNIO ELÁSTICO PELA METODOLOGIA ANALÍTICA 2	63
4.3.3. AVALIAÇÃO DAS TENSÕES NO DOMÍNIO ELÁSTICO PELO MÉTODO SEMI-EMBTIDO	66
4.3.4. AVALIAÇÃO DAS TENSÕES NO DOMÍNIO ELÁSTICO PELO MÉTODO DISCRETO	67
4.3.5. COMPARATIVO DOS RESULTADOS OBTIDOS PARA AS TENSÕES NO DOMÍNIO ELÁSTICO	68
4.4. ANÁLISE ELÁSTICO DE TENSÕES AO LONGO DO COMPRIMENTO	73
4.5. AVALIAÇÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS	83
4.5.1. VIGA DE ANGELAKOS	83
4.5.2. VIGA DE BUCKHOUSE	87
4.5.3. VIGA DE LEONHARDT	90
<b>5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES</b>	<b>93</b>
5.1. CONCLUSÕES	93
5.1.1. COM RELAÇÃO ÀS ABORDAGENS ANALÍTICAS E NUMÉRICAS	93
5.1.2. COM RELAÇÃO ÀS AVALIAÇÕES EXPERIMENTAIS	95
5.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	96
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>98</b>

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1. Semelhanças de triângulos para os limites do domínio 3.	29
Tabela 3.2. Valor do coeficiente $\alpha$ . Modificado de Jiménez Montoya <i>et al.</i> (2000).	33
Tabela 4.1. Configurações das vigas avaliadas na primeira etapa das análises.	52
Tabela 4.2. Calculo da flecha imediata para as vigas do grupo 1.	54
Tabela 4.3. Calculo da flecha imediata para as vigas do grupo 2.	55
Tabela 4.4. Calculo da flecha imediata para as vigas do grupo 3.	56
Tabela 4.5. Propriedades dos materiais para a avaliação da flecha pelo método semi-embutido.	57
Tabela 4.6. Flecha elástica obtida do método semi-embutido para os grupos 1, 2 e 3.	58
Tabela 4.7. Propriedades dos materiais para a avaliação da flecha pelo método discreto.	58
Tabela 4.8. Flecha elástica obtida do método discreto para os grupos 1, 2 e 3.	59
Tabela 4.9. Cálculo das tensões pela metodologia analítica 1 para o grupo 1.	61
Tabela 4.10. Cálculo das tensões pela metodologia analítica 1 para o grupo 2.	62
Tabela 4.11. Cálculo das tensões pela metodologia analítica 1 para o grupo 3.	62
Tabela 4.12. Cálculo das tensões pela metodologia analítica 2 para o grupo 1.	63
Tabela 4.13. Cálculo das tensões pela metodologia analítica 2 para o grupo 2.	64
Tabela 4.14. Cálculo das tensões pela metodologia analítica 2 para o grupo 3.	65
Tabela 4.15. Tensões no concreto no domínio elástico pelo FemLab para os grupos 1, 2 e 3.	66
Tabela 4.16. Tensão no aço no domínio elástico pelo FemLab para os grupos 1, 2 e 3.	67
Tabela 4.17. Tensões no concreto no domínio elástico pelo ANSYS para os grupos 1, 2 e 3.	68
Tabela 4.18. Tensão no aço no domínio elástico pelo ANSYS para os grupos 1, 2 e 3.	68
Tabela 4.19. Propriedades da viga avaliada ao longo do comprimento.	74
Tabela 4.20. Configuração dos apoios, da carga e da armadura na viga selecionada.	74
Tabela 4.21. Configuração da viga com carregamento de quatro pontos.	78
Tabela 4.22. Análise de convergência do FemLab para a viga com carga distribuída.	81
Tabela 4.23. Propriedades dos materiais para a modelagem da viga de Angelakos <i>et al.</i> (2001).	84
Tabela 4.24. Configuração geométrica e carregamento para a modelagem da viga de Angelakos <i>et al.</i> (2001).	84
Tabela 4.25. Parâmetros do concreto para a modelagem da viga de Angelakos <i>et al.</i> (2001).	85
Tabela 4.26. Propriedades dos materiais para a modelagem da viga de Foley & Buckhouse (1998).	88

Tabela 4.27. Configuração geométrica e carregamento para a modelagem da viga de Foley & Buckhouse (1998).	88
Tabela 4.28. Parâmetros do concreto para a modelagem da viga de Foley & Buckhouse (1998).	88
Tabela 4.29. Propriedades dos materiais para a modelagem da viga de Leonhardt e Walther (1962).	91
Tabela 4.30. Configuração geométrica e carregamento para a modelagem da viga de Leonhardt e Walther (1962).	91
Tabela 4.31. Parâmetros do concreto para a modelagem da viga de Leonhardt e Walther (1962).	91

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1. Ensaio de viga de concreto armado submetida à flexão.	7
Figura 2.2. Deformações e tensões ao longo do processo de carga da viga. Modificado de Jiménez Montoya, Meseguer García, & Morán Cabré (2000).	7
Figura 2.3. Domínios de deformação de uma seção transversal no estado limite último (Carvalho & Figueiredo Filho, 2013).	9
Figura 2.4. Resposta carga deslocamento típica de uma peça fletida de concreto armado. Modificado Bono (2008).	11
Figura 2.5. Superfície de ruptura do concreto simples sob condições triaxiais (Willam & Warnke, 1975).	13
Figura 2.6. Modelo de três parâmetros (Willam & Warnke, 1975). a) Seção hidrostática ( $\theta=0^\circ$ ); b) Seção desviadora ( $\sigma_a=-0.5f_{cu}$ ).	13
Figura 2.7. Critério de Mohr-Coulomb. Representação do plano de Mohr. Modificado de Souza Neto <i>et al.</i> (2008).	15
Figura 2.8. Superfície de escoamento do critério Mohr-Coulomb no espaço de tensões principais (de Souza Neto <i>et al.</i> , 2008).	15
Figura 2.9. Superfície de escoamento de Drucker-Prager (de Souza Neto <i>et al.</i> , 2008).	16
Figura 2.10. Seção da superfície de Mohr-Coulomb e as aproximações de Drucker-Prager. Modificado de Souza Neto <i>et al.</i> (2008).	17
Figura 2.11. Plano de tensões. Aproximação de Drucker-Prager à superfície Mohr-Coulomb em tensão e compressão uniaxial e biaxial. Modificado de Souza Neto <i>et al.</i> (2008).	18
Figura 2.12. Curva tensão-deformação do modelo elástico perfeitamente plástico. Modificado de Cerrolaza & Flórez-López (2000).	19
Figura 2.13. Conceito de modelagem de armadura pelo método distribuído (Ožbolt & Sharma, 2011).	24
Figura 2.14. Elemento quadrático sólido em 3D com armadura distribuída (Manjuprasad, Gopalakrishnan, & Appa Rao, 2001).	24
Figura 2.15. Abordagem discreta da armadura no concreto. Modificado de Tavárez (2001).	25
Figura 2.16. Comparação de malhas de elementos finitos para elementos discreto e embutido (Durand, 2008).	26
Figura 2.17. Malha de elementos finitos e reforço em um teste Pull-Out (Durand & Farias, 2012).	27

Figura 2.18. Relação de cisalhamento mobilizado com aplicação de diferentes níveis de carga externa (Durand & Farias, 2012).	27
Figura 3.1. Características do domínio 3. Modificado de Carvalho & Figueiredo Filho (2013).	29
Figura 3.2. Diagrama de tensões no concreto no estado limite último. Modificado de Carvalho & Figueiredo Filho (2013).	30
Figura 3.3. Reações nos apoios e momentos máximos atuantes em vigas com carregamento distribuído e pontual.	35
Figura 3.4. Seção transversal transformada.	36
Figura 3.5. Parâmetros para o cálculo de $\mathbf{y}$ .	36
Figura 3.6. Diagramas de deformação e tensão para viga elástica.	37
Figura 3.7. Discretização da armadura (Durand & Farias, 2012).	39
Figura 3.8. Elemento de junta especial (Durand & Farias, 2012).	40
Figura 3.9. Diferencial de área utilizado na integração do elemento de interface.	42
Figura 3.10. Deslocamentos totais dos nós da barra e dos nós embutidos.	44
Figura 3.11. Modelo Drucker-Prager no espaço $I_1 - \mathbf{J2D}$ . Modificado de Souza Neto <i>et al.</i> (2008).	46
Figura 3.12. Cálculo da coesão e ângulo de atrito de acordo com o critério Mohr-Coulomb	47
Figura 3.13. Elemento finito tipo SOLID65 (Tristão, 2002).	49
Figura 3.14. Elemento finito tipo LINK180 (SAS, 2013).	50
Figura 4.1. Configuração geométrica das vigas: (a) Geometria da viga e condições de contorno. (b) Seções correspondentes aos 3 grupos de vigas estudadas.	53
Figura 4.2. Visualização do deslocamento na viga V1-35 pelo método semi-embutido.	57
Figura 4.3. Visualização do deslocamento na viga V1-35 avaliada pelo método discreto.	58
Figura 4.4. Comparativa dos resultados da flecha para o grupo 1.	59
Figura 4.5. Comparativa dos resultados da flecha para o grupo 2.	59
Figura 4.6. Comparativa dos resultados da flecha para o grupo 3.	60
Figura 4.7. Tensões no concreto na viga V1-35 calculadas no <i>software</i> FemLab.	66
Figura 4.8. Tensões no aço na viga V1-35 calculada no <i>software</i> FemLab.	66
Figura 4.9. Visualização pelo ANSYS das tensões no concreto nas vigas avaliadas.	67
Figura 4.10. Visualização pelo ANSYS das tensões no aço nas vigas avaliadas.	68
Figura 4.11. Tensão máxima de compressão do concreto para o grupo 1.	69
Figura 4.12. Tensão máxima de compressão do concreto para o grupo 2.	69
Figura 4.13. Tensão máxima de compressão do concreto para o grupo 3.	70

Figura 4.14. Tensão na fibra mais tracionada do concreto para o grupo 1.	70
Figura 4.15. Tensão na fibra mais tracionada do concreto para o grupo 2.	71
Figura 4.16. Tensão na fibra mais tracionada do concreto para o grupo 3.	71
Figura 4.17. Tensão no aço para o grupo 1.	72
Figura 4.18. Tensão no aço para o grupo 2.	72
Figura 4.19. Tensão no aço para o grupo 3.	73
Figura 4.20. Diagrama de momento fletor da viga V1-35.	74
Figura 4.21. Tensão na fibra mais comprimida do concreto da viga selecionada.	75
Figura 4.22. Regiões Pontilhadas A e B da Figura 4.21.	75
Figura 4.23. Tensão na fibra mais tracionada do concreto.	76
Figura 4.24. Tensões de compressão (positivas) e tração (negativas) ao longo da viga selecionada.	77
Figura 4.25. Regiões Pontilhadas A e B da Figura 4.24.	77
Figura 4.26. Tensões no aço da viga selecionada.	78
Figura 4.27. Diagrama de momento fletor da viga com carregamento de quatro pontos.	79
Figura 4.28. Tensão na fibra mais comprimida do concreto para a viga com carregamento de quatro pontos.	79
Figura 4.29. Tensão na fibra mais tracionada do concreto para a viga com carregamento de quatro pontos.	80
Figura 4.30. Tensão no aço da viga com carregamento de quatro pontos.	80
Figura 4.31. Convergência do FemLab para a viga com carregamento distribuído.	82
Figura 4.32. Dimensões em mm da viga ensaiada por Angelakos <i>et al.</i> (2001).	83
Figura 4.33. Diagrama $\sigma-\epsilon$ . Modificado de Clímaco (2008).	84
Figura 4.34. Deslocamento no meio do vão pelo MEF da viga de Angelakos <i>et al.</i> (2001).	85
Figura 4.35. Dados numéricos e experimental de carga-deslocamento para a viga de Angelakos <i>et al.</i> (2001).	86
Figura 4.36. Dimensões em in da viga ensaiada por Foley & Buckhouse (1998).	87
Figura 4.37. Distribuição da armadura longitudinal e transversal da viga de Foley & Buckhouse (1998).	87
Figura 4.38. Distribuição de tensões na armadura pelo MEF da viga de Foley & Buckhouse (1998).	89
Figura 4.39. Dados numéricos e experimental de carga-deslocamento para a viga de Foley & Buckhouse (1998).	90

Figura 4.40. Dimensões em mm da viga ensaiada por Leonhardt e Walther (1962) <i>apud.</i> Lyra (2011).	90
Figura 4.41. Distribuição de tensões no concreto pelo MEF da viga de Leonhardt e Walther (1962)	92
Figura 4.42. Dados numéricos e experimental de carga-deslocamento para a viga de Leonhardt e Walther (1962).	92



## LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

$\alpha_{Mr}$	Coeficiente para o cálculo do momento de fissuração
$\varepsilon_c$	Deformação específica do concreto
$\varepsilon_{cd}$	Deformação no concreto
$\varepsilon_s$	Deformação específica do aço da armadura passiva
$\varepsilon_{yd}$	Deformação no aço
$\eta, \zeta, k, \alpha$	Parâmetros de Drucker Prager
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensões principais
$\sigma_c$	Tensão na fibra extrema de compressão no concreto
$\sigma_n$	Tensão normal
$\sigma_s$	Tensão no aço
$\sigma_t$	Tensão na fibra extrema de tração no concreto
$\phi$	Ângulo de atrito interno do material.
$\phi_b$	Diâmetro das barras de armadura
$(EI)_{eq}$	Rigidez equivalente da seção transversal
$\Phi(\sigma, c), f$	Funções de escoamento dos critérios de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager
$A_c$	Área do concreto
$A_s$	Área de aço
<b>B</b>	Matriz de forma
$b_w$	Espessura da seção
$c$	Coesão do material
cm	Centímetro
d	Altura útil da seção tomada desde o centro de gravidade da armadura de tração à fibra mais comprimida
$dA$	Diferencial de área
<b>D<sub>J</sub></b>	Matriz constitutiva de interfase
$E$	Modulo de elasticidade
$E_{cs}$	Módulo de elasticidade secante do concreto
ELS	Estados limites de serviço
ELU	Estado limite ultimo
$E_s$	Modulo de elasticidade do aço
$f_{cb}$	Resistencia à compressão biaxial
$f_{ck}$	Resistência à compressão do concreto
$f_{ct,m}$	Resistência à tração do concreto.
$f_{cu}$	Resistência à compressão uniaxial

$f_i$	Flecha imediata a partir da curvatura máxima da viga fletida
$f_t$	Resistência à tração uniaxial
Gpa	Gigapascais
h	Altura da seção transversal do elemento linear de concreto armado
$I_c$	Momento de inércia da seção bruta de concreto para seções retangulares
$I_{II}$	Momento de inercia da seção fissurada no estágio 2
$I_{tr}$	Momento de inercia transformada
$J$	Invariante
<b>K</b>	Matriz de rigidez
k	Variável auxiliar da formulação analítica 2
kN	Kilonewton
m	Metro
MEF	Método dos elementos finitos
mm	Milímetro
Mpa	Megapascais
$M_r$	Momento de fissuração do elemento estrutural
$M_{sd}$	Momento atuante na seção
<b>N</b>	Matriz que contém as funções de interpolação do elemento de barra
$n$	Relação de modulo de elasticidade do aço e o modulo de elasticidade secante do concreto
NBR	Norma Brasileira
<b>R</b>	Matriz que contém os cossenos diretores das direções $x'$ , $y'$ e $z'$ ;
$R_{cc}$	Força resultante do concreto à compressão
$R_{st}$	Força resultante do aço
<b>u</b>	Vetor de deslocamentos
$w$	Carga
$x$	Altura ou profundidade da linha neutra. Corresponde à distância da fibra mais comprimida do concreto até o ponto que não tem nenhuma deformação nem tensão.
$x_{II}$	Profundidade da linha neutra da seção no estágio 2
$y_t$	Metade da altura da seção
$z$	Braço de alavanca

# 1. INTRODUÇÃO

O concreto é um material estrutural muito utilizado no mundo inteiro, pela relativa facilidade de obtenção dos elementos que o compõem e as habilidades pouco complexas necessárias para sua preparação. Além disso, o concreto tem baixos custos gerados durante o processo construtivo em comparação com outros materiais estruturais.

A especial característica do concreto é a resistência à compressão que é dada pelos materiais pétreos que o integram. Porém, a resistência à tração é consideravelmente baixa em relação à anterior característica, produzindo no concreto trincas quando submetido a cargas ou mudanças de temperatura, que produz fenômenos de expansão e contração. O concreto armado pode balancear estas resistências tendo em conta os critérios de projeto especificados para cada tipo de elemento estrutural e assumindo um bom processo construtivo.

A qualidade do material usado como armadura do concreto deve garantir a compatibilidade das deformações, sendo o aço utilizado com maior frequência. O aço geralmente encontra-se em barras corrugadas, laminadas a quente, com resistência à tração muito maior que a do concreto simples. A interação dos materiais concreto e aço de armadura depende principalmente do encravamento mecânico produzido pelas rugosidades nas barras de aço, o atrito e a aderência química (Patrick & Bridge, 1994).

Os códigos de projeto adotam o método da resistência última para estudar o comportamento das estruturas no instante da ruptura, tendo em conta procedimentos simplificados baseados em provas de laboratório e representadas em formulações analíticas. Quando as estruturas apresentam ruptura parcial, a redistribuição de esforços internos passa a ter especial interesse para determinar os efeitos das cargas atuantes e prever o novo comportamento da estrutura. Para isto é importante conhecer o comportamento não linear do material, que não é definido em detalhe pelos códigos de projeto atuais.

Segundo Kwak & Filippou (1990) uma alternativa para efetuar análises lineares e não lineares mais detalhadas do comportamento de estruturas de concreto armado é dada pela aplicação de métodos numéricos como o método dos elementos finitos (MEF). Segundo Markou & Papadrakakis (2012) existem alguns métodos para realizar análises de concreto armado pelo MEF, por exemplo, modelos 1D de plasticidade concentrada ou distribuída, que não preveem o comportamento mecânico eficiente devido a sua incapacidade de captar fenômenos locais como cisalhamento, que afetam a resposta mecânica global da estrutura. Também existem

modelos em planos de tensões 2D que evitam simplificações dadas nos modelos 1D permitindo obter respostas sob a influência de tensões cisalhantes. Entretanto sua incapacidade para capturar as reações fora do plano torna-los inadequados para a análise das estruturas completas em 3D de concreto armado.

Em revisão ao exposto por Kwon & Spacone (2002), a análise tridimensional em estruturas de concreto armado pode fornecer as principais características da resposta não linear do concreto sob estados triaxiais de tensão, tais como o esmagamento por compressão, a fissuração por flexão e o incremento da resistência e ductilidade sob grandes tensões de confinamento.

Existem alguns métodos para realizar análises de concreto armado pelo MEF incluindo a simulação da armadura. Dentro destes métodos os três principais são: o smeared, o discreto e o embutido (Hartl, 2002). O método smeared é mais adequado para armaduras uniformemente distribuídas, como é o caso de estruturas de superfície planas. Para o caso de armadura escassa, aplica-se geralmente a formulação discreta ou embutida.

Na formulação discreta, as barras de armadura são representadas com elementos uniaxiais, dispostos no contorno dos elementos que representam o concreto. Tem a limitação que a malha deve coincidir com a geometria das barras de armadura. Por outro lado, o enfoque embutido tem por objeto facilitar o processo da geração de malha, que permite que as barras consigam atravessar os elementos sólidos com um posicionamento arbitrário e uma geometria livre.

Neste trabalho propõe-se o uso do método semi-embutido (Durand, 2008) para analisar estruturas de concreto armado, desta maneira, a geometria da malha usada representará de maneira global o elemento estrutural, sem necessidade de incluir outra malha que represente as barras da armadura. Assim, a armadura poderá situar-se em posições arbitrárias definidas pelo projeto estrutural sem o desgaste de ser posicionada dentro de pontos específicos do malhado global.

O método semi-embutido combina características dos métodos discretos e embutido onde as barras de armadura são embutidas arbitrariamente nos elementos sólidos que representam o concreto. As tensões e deformações podem ser obtidas facilmente após a solução do sistema de equações no MEF.

Neste sentido, propõe-se o estudo do comportamento de vigas de concreto armado, utilizando o MEF em 3D e comparar os resultados com as disposições presentes na NBR 6118:2003 e

formulações analíticas. O estudo de vigas é relativamente bem conhecido na literatura através de normas, informações das pesquisas de laboratório e artigos, permitindo obter dados de referência para avaliar a análise numérica.

## **1.1. OBJETIVOS**

### **1.1.1. Objetivo geral**

O objetivo geral desta pesquisa é a aplicação do método de elementos finitos semi-embutidos no estudo do comportamento de elementos estruturais de concreto armado por meio da simulação computacional.

### **1.1.2. Objetivos Específicos**

- Avaliar elementos estruturais dimensionados por meio da NBR 6118:2003 a partir de resultados obtidos de procedimentos numéricos;
- Especificar a metodologia do embutido de barras em malhas de elementos finitos;
- Analisar elementos de concreto armado de forma a verificar o desempenho da metodologia de elementos finitos semi-embutidos;
- Validar o método semi-embutido aplicado à simulação de estruturas de concreto armado.
- Testar diversas aproximações do modelo constitutivo para o concreto considerando estados de tensão triaxial, biaxial e uniaxial, comparando com resultados experimentais obtidos da literatura.

## **1.2. ESCOPO DO TRABALHO**

Os capítulos do presente trabalho descrevem o procedimento efetuado para avaliar a aplicação da metodologia semi-embutida nas estruturas de concreto armado. Desta forma, se começa com uma revisão da literatura para logo formular as análises a ser executadas e validar assim a metodologia empregada. A seguir, é apresentado um breve resumo de cada capítulo.

O segundo capítulo trata da revisão bibliográfica, descrevendo os temas de interesse para o estudo, quais sejam, o projeto de estruturas lineares submetidas à flexão segundo a NBR 6118:2003, com enfoque nos estados limites últimos e de serviço, os estádios de solicitação e domínios de deformações, com conceitos e parâmetros necessários para o projeto de vigas de

concreto armado submetidas à flexão pura. A seguir são descritos os critérios de escoamento de Willam e Warnke, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager e o modelo Elástico Perfeitamente Plástico utilizados para os materiais que compõem concreto armado. Finalmente foi feita uma revisão das abordagens distribuída, discreta embutida e semi-embutida na modelagem de estruturas de concreto armado pelo MEF.

O terceiro capítulo expõe os lineamentos dados pela NBR 6118:2003 para o dimensionamento de vigas de concreto com armadura à flexão e as variáveis necessárias para o cálculo da flecha elástica imediata. Além disso, se descrevem dois procedimentos para avaliar analiticamente o comportamento de vigas de concreto armado. Posteriormente é feita uma descrição do método semi-embutido focada na discretização das barras de armadura e a modelagem da interface concreto-aço. Por último, apresenta-se o software de elementos finitos empregado na análise numérica.

No quarto capítulo são expostos os casos de estudo e análises dos resultados da flecha elástica, das tensões de compressão e tração no concreto e das tensões no aço obtidos das formulações analíticas e numéricas para 9 vigas divididas em 3 grupos conforme a relação comprimento-altura das vigas. Posteriormente é feita um análise detalhado das tensões ao longo do comprimento de dois vigas com diferentes configurações de carregamento. Depois é feito uma análise de convergência para determinar o nível de acurácia dos resultados obtidos pela modelagem numérica em relação às formulações analíticas. A seguir é apresentada uma avaliação da metodologia semi-embutida e dos modelos constitutivos adotados para os materiais com 3 resultados experimentais presentes na literatura.

No quinto capítulo são apresentadas as conclusões do trabalho divididas em duas partes, as conclusões das análises elásticas e as conclusões da avaliação com resultados experimentais e as sugestões para pesquisas futuras.

## **2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

A revisão bibliográfica cobre a revisão da normatividade vigente para o projeto de estruturas de concreto no Brasil, tomando como referência a NBR 6118:2003, que fixa os requisitos básicos exigidos para o projeto de estruturas de concreto armado através de condições estabelecidas do comportamento dos elementos avaliados. Posteriormente, se apresenta um estudo dos modelos constitutivos necessários para representar os materiais que compõem o elemento avaliado. Logo é feita uma revisão histórica das principais abordagens para a modelagem de estruturas de concreto armado por meio do MEF, concluindo no método semi-embutido e suas principais vantagens para avaliar elementos sólidos reforçados com elementos de barra.

### **2.1. PROJETO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO SEGUNDO A NBR 6118:2003**

O projeto de estruturas de concreto simples, armado e protendido no Brasil deve atender os requisitos gerais e específicos a cada uma de suas etapas dados pela NBR 6118:2003 (ABNT, 2003). Esta norma estabelece uma classificação das exigências de qualidade das estruturas em três grupos:

- Capacidade resistente: consiste basicamente na segurança à ruptura das estruturas.
- Desempenho em serviço: é a capacidade de uma estrutura para manter-se em condições plenas de utilização, sem apresentar danos que comprometam em parte ou totalmente o uso para o qual foi projetada.
- Durabilidade: Consiste na capacidade de uma estrutura resistir às influências ambientais previstas e definidas pelo projetista estrutural e o contratante.

A capacidade resistente e o desempenho em serviço das estruturas estão relacionados com os denominados estado limite últimos e estado limite de serviço respectivamente. A exigência de durabilidade depende dos critérios de projeto estabelecidos pela NBR 6118:2003 em relação à drenagem, formas arquitetônicas e estruturais, qualidade do concreto de cobertura, detalhamento das armaduras, controle da fissuração e medidas especiais de revestimento e pinturas nas estruturas.

#### **2.1.1. Estados Limites**

O estado limite determina uma interrupção do funcionamento da estrutura ou desempenho fora dos alcances especificados para a utilização normal em relação à segurança, funcionalidade e

estética. Os estados limite podem se atribuir à estrutura toda, a elementos estruturais ou locais específicos de elementos (Clímaco, 2008). A NBR 6118:2003 determina os seguintes estados limite nas estruturas de concreto:

- Estado limite último (ELU). Estado limite relacionado ao colapso, ou a qualquer outra forma de ruína estrutural, que determine a paralisação do uso da estrutural. Segundo a NBR 6118:2003 deve-se verificar a segurança das estruturas de concreto em relação aos estados limites de perda do equilíbrio, de colapso progressivo, de esgotamento da capacidade resistente por solicitações normais e dinâmicas e por efeitos de segunda ordem entre outros que possam ocorrer em casos especiais.
- Estados limites de serviço (ELS). Segundo Clímaco (2008) um estado limite de serviço acontece quando as estruturas apresentam comportamentos não especificados no projeto para utilização normal sem perigo de ruína ou colapso do sistema. A NBR 6118:2003 estabelece os estados limites de formação e abertura de fissuras, de deformações que atingem os limites estabelecidos para a utilização normal, de descompressão e compressão e de vibrações excessivas.

### **2.1.2. Estádios de Solicitação**

Um elemento estrutural linear está submetido à flexão quando sua seção transversal sofre rotação e é sujeita às tensões normais produzidas pela atuação de momentos fletores. A NBR 6118:2003 estabelece que uma viga é um elemento linear submetido principalmente à flexão. A flexão pode ser classificada em relação aos esforços solicitantes que atuam na seção transversal de uma viga, assim (Clímaco, 2008):

- Flexão pura: A seção é solicitada pelo momento fletor ( $M$ ) e fica submetida exclusivamente a tensões normais.
- Flexão simples: O momento fletor e a força cortante ( $M; V$ ) produzem simultaneamente tensões normais e tangenciais na seção.
- Flexão composta: A seção está submetida a tensões normais causadas pelo momento fletor e a força normal conjuntamente.

A Figura 2.1 representa o ensaio de uma viga de concreto armado simplesmente apoiada e sujeita a estágios crescentes de carregamento que causam flexão pura no meio do vão. A informação obtida do ensaio fornece valores das deformações no concreto e na armadura,



flechas, curvaturas, etc. O carregamento é aumentado até atingir o colapso da viga permitindo identificar 3 níveis de deformação denominados estádios.

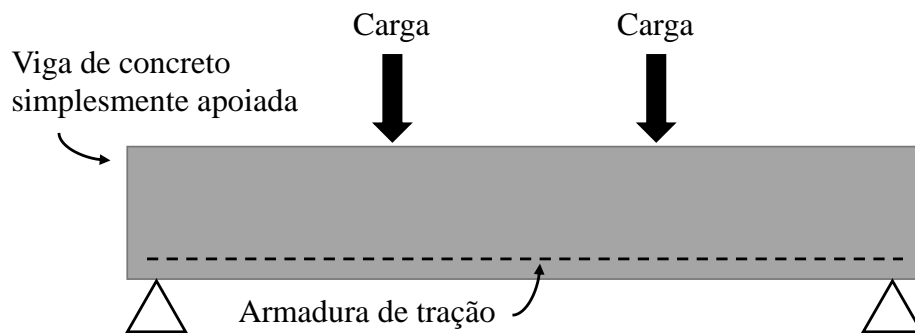


Figura 2.1. Ensaio de viga de concreto armado submetida à flexão.

A Figura 2.2 mostra os 3 estádios típicos da viga submetida à flexão pura. A seção transversal da viga em concreto retangular com uma área de aço à tração é indicada na esquerda da figura. Na direita da figura ficam os 3 estádios representados em deformações e tensões dos materiais.

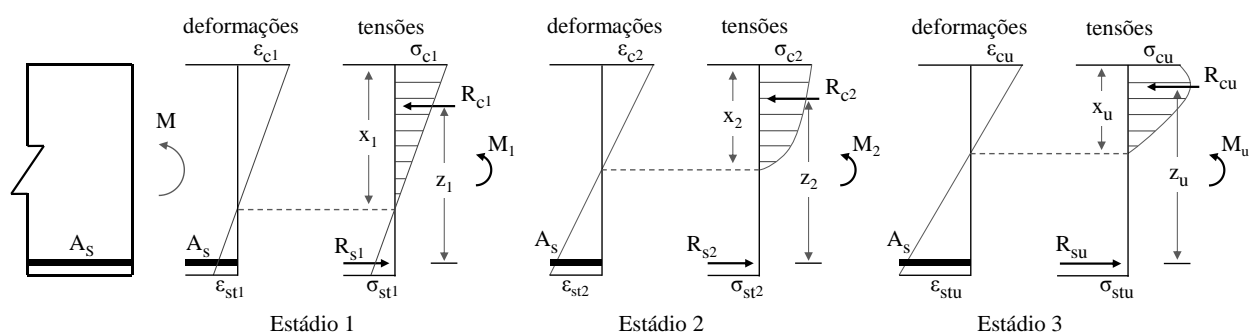


Figura 2.2. Deformações e tensões ao longo do processo de carga da viga. Modificado de Jiménez Montoya, Meseguer García, & Morán Cabré (2000).

Descrição dos estádios de solitação:

- Estádio 1: A viga é submetida ao momento fletor  $M_1$  que produz tensões de tração ( $\sigma_{st1}$ ) e compressão ( $\sigma_{c1}$ ) menores às resistências à tração e à compressão do concreto. As tensões nas fibras comprimidas têm variação linear com as deformações no concreto ( $\epsilon_{c1}$ ). A tensão máxima à tração varia entre 35% e 40% a resistência à tração do concreto. Neste estádio não há fissuras visíveis na viga (Jiménez Montoya *et al.*, 2000).
- Estádio 2: A armadura longitudinal de aço absorve as tensões de tração que o concreto não consegue resistir porque sua resistência característica à tração é inferior à

solicitada. Considere-se que o concreto comprimido e o aço tracionado estão na fase elástica com fissuras de tração no concreto na flexão (Clímaco, 2008).

O comportamento elástico admitido enquadrasse numa viga fletida nos estados limites de serviço. Assim o momento  $M_2$  é igual ao momento fletor característico resistente da seção ( $M_k$ ) (Clímaco, 2008).

- Estádio 3: O momento  $M_u$  corresponde a um valor aproximado ao momento ultimo de ruptura ( $M_{Sd}$ ). Os materiais atingem sua capacidade resistente no estado limite último. A peça tem esmagamento por compressão no concreto e escoamento do aço por tração. A linha neutra diminui sua profundidade devido à presença de fissuras maiores na região à tração da seção (Carvalho & Figueiredo Filho, 2013).

As vigas dimensionadas à flexão no ELU devem garantir não atingir o estágio 3 através de um fator de segurança que afeta o momento fletor característico resistente da seção ( $M_k$ ).

$$M_u = M_{Sd} = \gamma_f M_k \quad (2.1)$$

onde  $M_{Sd}$  é o momento último de ruptura ou de cálculo,  $\gamma_f$  é o coeficiente de ponderação das ações e  $M_k$  momento fletor característico ou de serviço.

### **2.1.3. Domínios de Deformações**

Segundo Carvalho & Figueiredo Filho (2013), os domínios de deformação representam diversos tipos de ruptura da seção transversal retangular de um elemento linear de concreto armado submetida a solicitações normais.

A NBR 6118:2003 estabelece que os domínios indicados na Figura 2.3 representam a distribuição das deformações de uma seção transversal no estado limite último.

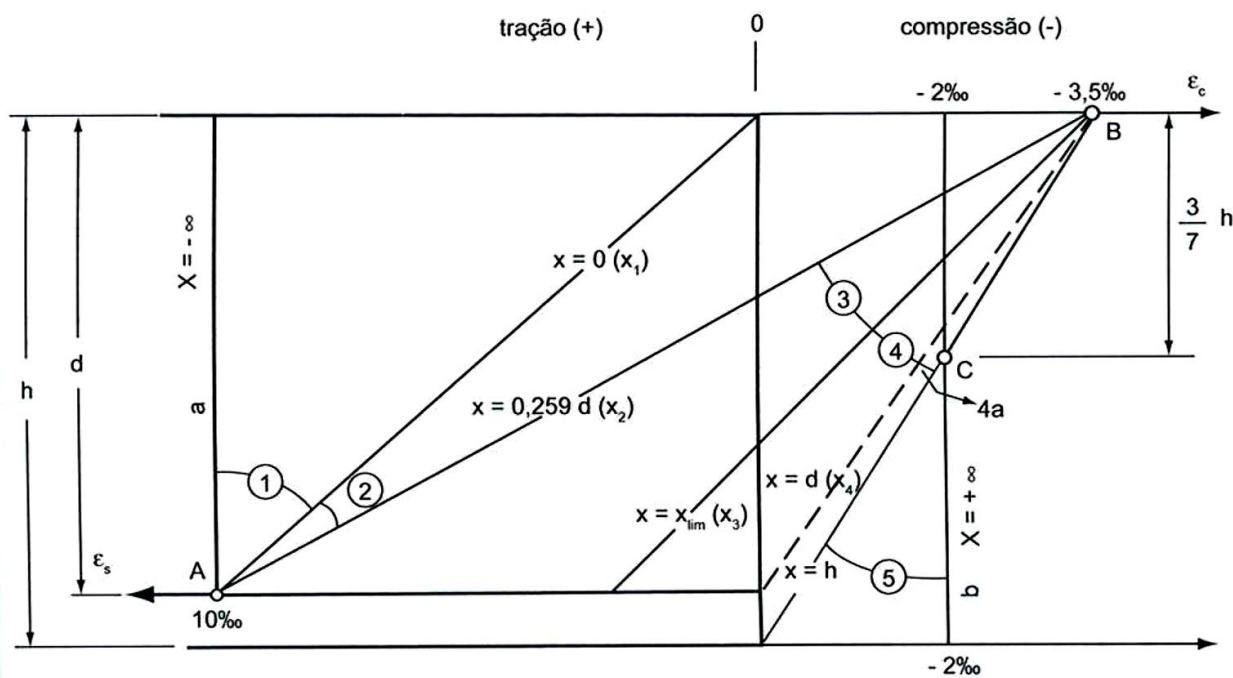


Figura 2.3. Domínios de deformação de uma seção transversal no estado limite último (Carvalho & Figueiredo Filho, 2013).

$d$  é altura útil da seção tomada desde o centro de gravidade da armadura de tração à fibra mais comprimida,  $h$  é a altura da seção transversal do elemento linear de concreto armado,  $\varepsilon_c$  é a deformação específica do concreto,  $\varepsilon_s$  é a deformação específica do aço da armadura passiva e  $x$  é a altura ou profundidade da linha neutra que corresponde à distância da fibra mais comprimida do concreto até o ponto que não tem nenhuma deformação nem tensão.

A seguir tem-se uma breve descrição dos domínios de deformação de acordo à Figura 2.3.

- Domínio 1: indica tração não uniforme na seção, sem compressão. A reta  $a$  representa a tração uniforme da seção transversal onde  $\varepsilon_c = \varepsilon_s = 0.01$  e  $x = -\infty$ . O concreto fica totalmente tracionado e fissurado desprezando sua resistência à tração. A peça rompe quando o aço atinge o alongamento de 0.01.
- Domínio 2: a peça apresenta flexão simples ou composta sem ruptura à compressão do concreto porque não atinge a ruptura ( $\varepsilon_c < 0.0035$ ). A resistência da seção é dada pelo concreto comprimido e o aço tracionado. Na literatura americana (Wight & MacGregor, 2011) o domínio 2 é característico de seções “balanceadas” onde o aço tracionado atinge a deformação por escoamento assim como a fibra mais comprimida do concreto atinge a deformação de compressão máxima admissível.

- Domínio 3: corresponde a uma peça submetida à flexão simples ou composta que apresenta grandes deformações antes de colapsar. O concreto e o aço que compõem a seção atingem sua capacidade resistente máxima simultaneamente. O tipo de ruptura da a peça obedece a uma situação ideal porque ocorre com aviso prévio através de fissurações excessivas e aproveitamento integral dos materiais. A NBR 6118:2003 e outras normas internacionais estabelecem formulações para o dimensionamento de peças estruturais neste domínio.
- Domínio 4: assim como no domínio 3, a peça é submetida à flexão simples ou composta com esmagamento no concreto mas sem o escoamento do aço. As seções do domínio 4 são superarmadas, tornando-se antieconômicas porque o aço não atinge sua capacidade resistente. A peça não apresenta grandes deformações e pode ter ruptura sem aviso porque o esmagamento do concreto acontece de forma súbita.
- Domínio 4a: caracterizado por flexão composta na seção com armaduras comprimidas. O encurtamento da armadura devido às tensões de compressão danifica o concreto produzindo ruptura frágil na seção sem fissuração ou deformação como advertência do colapso.
- Domínio 5: a seção está submetida à compressão não uniforme (simples ou composta), sem tração. O concreto e o aço estão comprimidos e a ruptura ocorre sem aviso com o encurtamento da armadura.

## **2.2. MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS**

Como é de conhecimento geral na Engenharia Civil, o concreto armado é um material constituído por barras de aço dispostas adequadamente dentro do concreto simples. Para Bono (2008), o aço na prática da análise estrutural do concreto armado apresenta propriedades físicas relativamente simplificadas, enquanto o comportamento integrado do aço e concreto apresenta um desempenho estrutural mais complexo, por causa da diferença entre as relações de tensão e compressão do concreto, não linearidade da relação tensão-deformação do concreto para níveis de tensão relativamente baixos, fenômenos de variação volumétrica devido a reações químicas ou de temperatura, aderência imperfeita entre o aço e o concreto onde encontra-se embutido, entre outros.

A Figura 2.4 mostra uma curva típica de tensão-deformação uniaxial para o concreto simples sujeito a tensão de compressão. Segundo Chen (1982) o material apresenta inicialmente

comportamento quase linear até o ponto A, após o qual o material é enfraquecidos por microfissuras internas até o ponto D. Como ilustrado na Figura 2.4, a deformação total  $\epsilon$  num material plástico pode ser considerada como a soma da deformação elástica reversível  $\epsilon^e$  e a deformação plástica permanente  $\epsilon^p$ .

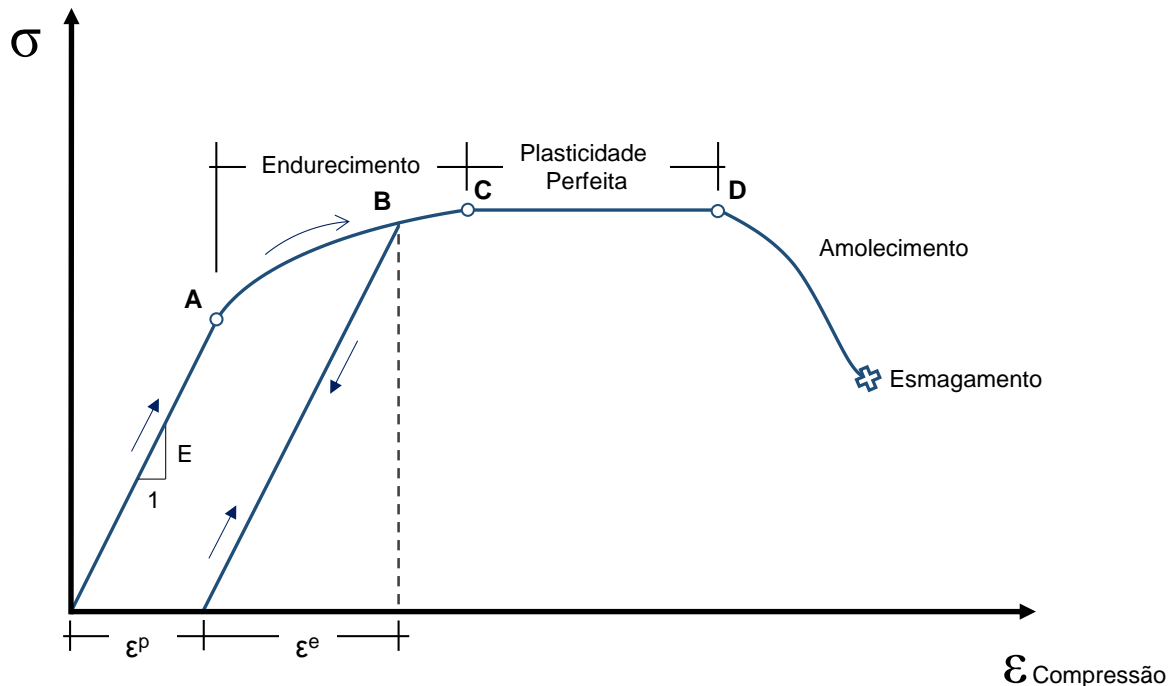


Figura 2.4. Curva típica de tensão-deformação uniaxial de uma peça fletida de concreto simples. Modificado de Chen (1982).

Segundo Bono (2008) a nível macroscópico os modelos podem ser classificados como modelos baseados na teoria da elasticidade, modelos baseados na teoria da plasticidade e modelos baseados na mecânica da fratura ou de dano.

De acordo ao CEB 230 (1996) *apud* Bono (2008), a teoria da elasticidade atende que o material apresenta deformações instantâneas reversíveis. As deformações específicas surgem ao mesmo tempo com as tensões correspondentes e permanecem constantes no tempo enquanto as tensões também permanecem. A teoria da plasticidade estabelece que existem deformações permanentes no material ainda sendo removidas as cargas que as originarem. Os modelos que trabalham com a mecânica da fratura consideram o conceito de crescimento gradual das microfissuras. Visam simular o comportamento das microfissuras e o crescimento de microcavidades que surgem em materiais frágeis como o concreto com incremento das deformações.

De acordo a Callister & William (2012), a resistência ao escoamento ou ponto de escoamento de um material é definido como a tensão máxima no qual o material começa a deformar-se plasticamente. Antes do ponto de escoamento, se apresenta a deformação elástica que permite ao material regressar à sua forma original quando a carga é aplicada e removida. Quando o ponto de escoamento é superado, o material terá alguma deformação permanente não reversível. No espaço tridimensional das tensões principais ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ ) vários pontos de escoamento formam uma superfície de escoamento. Um critério de escoamento ou superfície de escoamento é uma hipótese sobre o limite de elasticidade, sob qualquer combinação de tensões.

Segundo de Souza Neto, Peric, & Owen (2008) alguns dos critérios de escoamento mais comuns para materiais elástico-plásticos usados na pratica de engenharia são: o critério de Tresca, Von Mises, Mohr-Coulomb e Drucker Prager. Tresca descreve a plastificação em metais. Este critério assume que a plastificação inicia quando a tensão cisalhante máxima atinge um valor crítico. Von Mises também descreve a plastificação em metais, que inicia quando o invariante esforço desviador  $J_2$  atinge um valor crítico. Os critérios de Tresca e Von Mises são insensíveis à tensão confinante e adequados para descrever metais. Para materiais como o concreto, onde seu comportamento geralmente caracteriza-se por uma forte dependência ao limite elástico da tensão hidrostática, a apropriada descrição de plastificação requer a introdução da sensibilidade à tensão confinante.

A seguir são descritos os modelos clássicos que tem sido aplicados no estudo do comportamento mecânico do concreto.

### **2.2.1. Critério de escoamento de Willam-Warnke**

Willam & Warnke (1975) desenvolveram um critério de escoamento para a superfície de ruptura triaxial do concreto simples não confinado. A superfície de ruptura no espaço de tensões principais é mostrada na Figura 2.5. Os componentes de tensão  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , e  $\sigma_3$  representam as tensões principais (Wolanski, 2004).

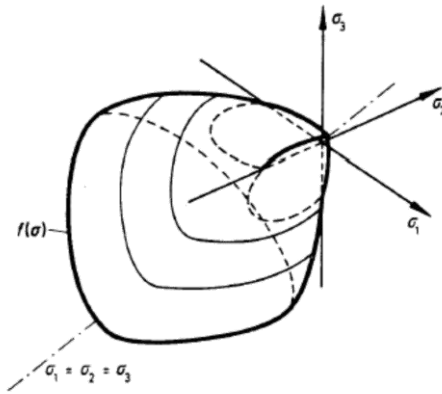


Figura 2.5. Superfície de ruptura do concreto simples sob condições triaxiais (Willam & Warnke, 1975).

Como mostrado na Figura 2.6 a superfície de ruptura é separada em seção hidrostática (variação de volume) e seção desviadora (mudança de forma).

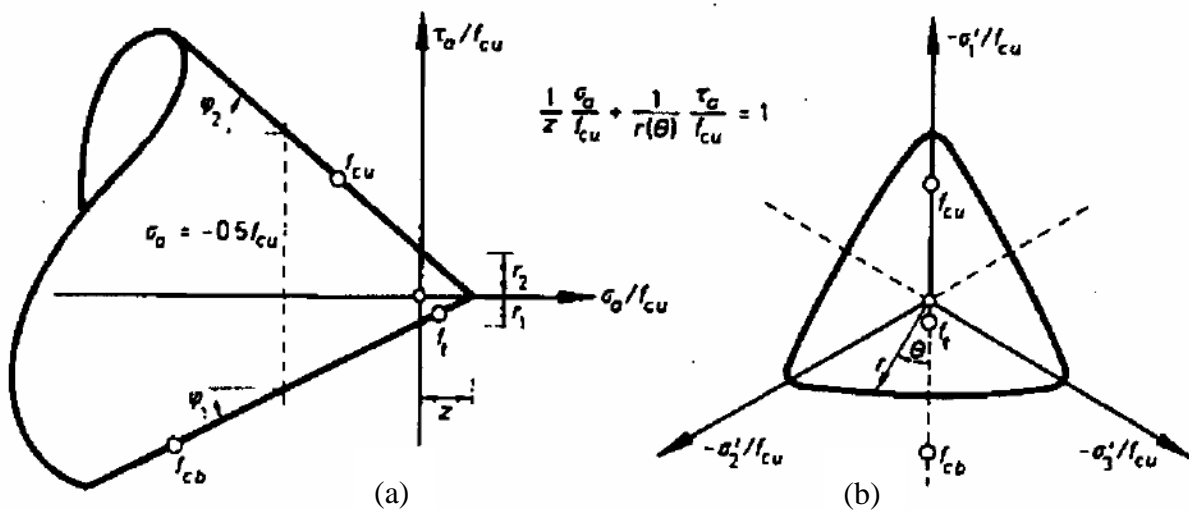


Figura 2.6. Modelo de três parâmetros (Willam & Warnke, 1975). a) Seção hidrostática ( $\theta=0^\circ$ ); b) Seção desviadora ( $\sigma_a=-0.5f_{cu}$ ).

A seção desviadora é descrita pelas coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ , onde  $r$  é o vector posição localizado na superfície de ruptura com ângulo  $\theta$ . A superfície de ruptura é definida por:

$$\frac{1}{Z} \frac{\sigma_a}{f_{cu}} + \frac{1}{r(\theta)} \frac{\tau_a}{f_{cu}} = 1 \quad (2.2)$$

onde  $\sigma_a$  e  $\tau_a$  são os componentes médios de tensão,  $Z$  é a posição do vértice da superfície e  $f_{cu}$  é a resistência à compressão uniaxial.

Os ângulos de abertura do cone hidrostático são definidos por  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . Os parâmetros livres da superfície de ruptura  $z$  e  $r$ , são identificados a partir da resistência à compressão uniaxial ( $f_{cu}$ ), resistência à compressão biaxial ( $f_{cb}$ ) e resistência à tração uniaxial ( $f_t$ ) (Wolanski, 2004).

De acordo com Wolanski (2004) o modelo matemático para a superfície de ruptura do concreto de Willam & Warnke tem as seguintes vantagens:

- Identificação simples dos parâmetros do modelo a partir de dados experimentais.
- Suavidade (superfícies contínuas com variação contínua de planos tangentes).
- Convexidade (superfície monotonamente curva sem pontos de inflexão).

Wolanski ainda afirma que o critério de escoamento é utilizado para prever quando a ruptura irá ocorrer em materiais tais como o concreto, a rocha, o solo, e cerâmicos.

### 2.2.2. Critério de escoamento de Mohr-Coulomb

O critério de Mohr-Coulomb (Coulomb 1773, Mohr 1882) é baseado na suposição de que o fenômeno macroscópico da deformação plástica é o resultado do atrito entre as partículas do material. Generalizando a lei de atrito de Coulomb, o critério estabelece que a deformação plástica inicia quando, sobre um plano no corpo, a tensão cisalhante e a tensão normal alcançam a combinação crítica (de Souza Neto et al., 2008):

$$\tau = c - \sigma_n \tan \phi \quad (2.3)$$

onde  $\tau$  é a tensão cisalhante,  $c$  é a coesão do material,  $\sigma_n$  é a tensão normal e  $\phi$  é o ângulo de atrito interno do material.

A Figura 2.7 representa graficamente a superfície de escoamento de Mohr-Coulomb no plano de Mohr. Cada círculo de Mohr associado com as tensões principais máximas e mínimas,  $\sigma_{max}$  e  $\sigma_{min}$ , respectivamente, é tangente da linha crítica definida pela Eq. (2.3). A função de escoamento,  $\Phi$ , de acordo a Figura 2.7 é equivalente à seguinte formulação em termos de tensões principais (de Souza Neto et al., 2008):

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, c) = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) + (\sigma_{max} + \sigma_{min}) \sin \phi - 2c \cos \phi \quad (2.4)$$



Uma vez que a função de escoamento do critério Mohr-Coulomb está definida em termos das tensões principais, a função de escoamento é uma função isotrópica de  $\sigma$ .

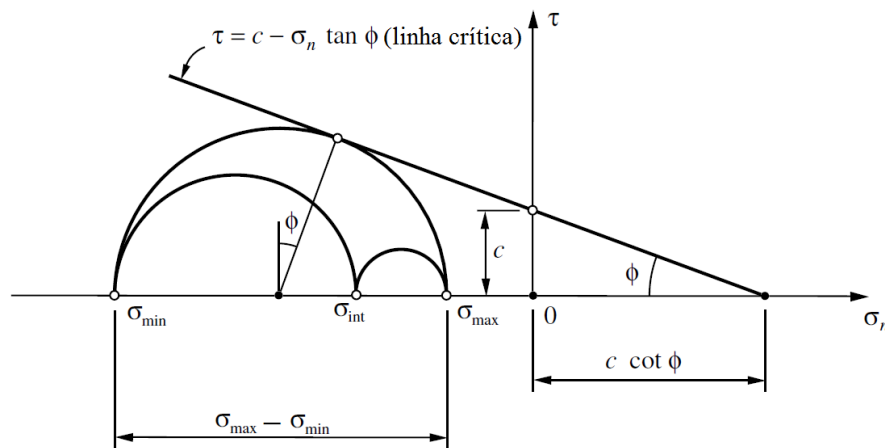


Figura 2.7. Critério de Mohr-Coulomb. Representação do plano de Mohr. Modificado de Souza Neto *et al.*(2008).

A correspondente superfície de escoamento ( $\Phi=0$ ) é uma pirâmide hexagonal (Figura 2.8) alinhada com o eixo hidrostático cujo vértice está situado em:

$$p = c \cot \phi \quad (2.5)$$

A Figura 2.8 ilustra a superfície hexagonal de Mohr-Coulomb. Não são permitidos estados de tensão fora da superfície de escoamento. O vértice da pirâmide define o limite de resistência do material à tensão de tração (de Souza Neto *et al.*, 2008).

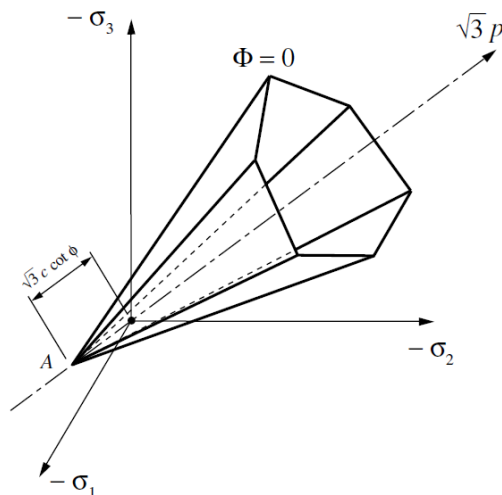


Figura 2.8. Superfície de escoamento do critério Mohr-Coulomb no espaço de tensões principais (de Souza Neto *et al.*, 2008).

### 2.2.3. Critério de escoamento de Drucker-Prager

Segundo de Souza Neto *et al.*, (2008), o critério de escoamento de Drucker-Prager, foi proposto como uma aproximação para a lei de Mohr-Coulomb. Estabelece que a plastificação começa quando o invariante  $J_2$  da tensão desviadora e a tensão hidrostática  $p$  atingem uma combinação crítica. O início da plastificação ocorre quando a seguinte equação é satisfeita:

$$\sqrt{J_2(\mathbf{s})} + \eta p = \bar{c} \quad (2.6)$$

Representado no espaço das tensões principais, a superfície de escoamento deste critério é um cone circular cujo eixo é a linha hidrostática.

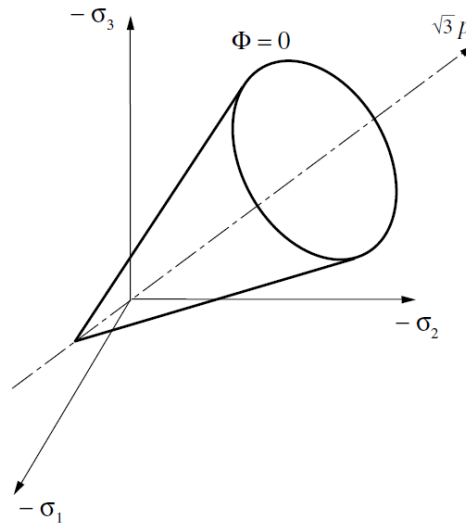


Figura 2.9. Superfície de escoamento de Drucker-Prager (de Souza Neto et al., 2008).

Para se aproximar à superfície de escoamento de Mohr-Coulomb, a função de escoamento de Drucker-Prager é definida como (de Souza Neto et al., 2008):

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, c) = \sqrt{J_2(\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}))} + \eta p(\boldsymbol{\sigma}) - \xi c \quad (2.7)$$

onde  $c$  é a coesão e os parâmetros  $\eta$  e  $\xi$  são escolhidos de acordo com a aproximação necessária para o critério de Mohr-Coulomb. Duas das aproximações utilizadas são obtidas combinando as superfícies de escoamento dos critérios de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb nas bordas externas ou internas da superfície de Mohr-Coulomb.

Quando a coincidência dada nas bordas exteriores, então:

$$\eta = \frac{6 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}, \quad \xi = \frac{6 \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (2.8)$$

Enquanto a coincidência nas bordas interiores é dada por:

$$\eta = \frac{6 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)}, \quad \xi = \frac{6 \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \quad (2.9)$$

De acordo a de Souza Neto *et al.*, (2008), os cones exterior e interior indicados na Figura 2.10 são conhecidos, respectivamente, como o cone de compressão e o cone de extensão. O cone interior coincide com o critério de Mohr-Coulomb em tração uniaxial e compressão biaxial. A aproximação da borda exterior coincide com a superfície de Mohr-Coulomb em compressão uniaxial e tensão biaxial.

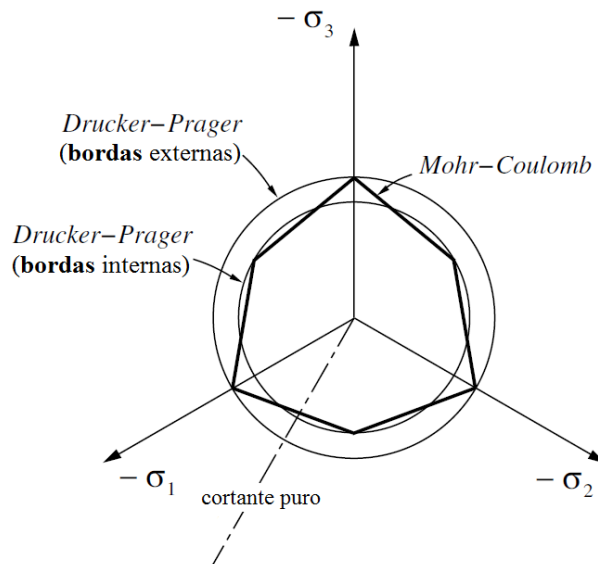


Figura 2.10. Seção da superfície de Mohr-Coulomb e as aproximações de Drucker-Prager. Modificado de Souza Neto *et al.* (2008).

A Figura 2.11 indica o correspondente cone Drucker-Prager que prevê as mesmas cargas de ruptura uniaxial obtido através de:

$$\eta = \frac{3 \sin \phi}{\sqrt{3}}, \quad \xi = \frac{2 \cos \phi}{\sqrt{3}} \quad (2.10)$$

Outra aproximação útil para o plano de tensões (Figura 2.11), onde o cone Drucker-Prager coincide com a superfície de Mohr-Coulomb em tensão biaxial (ponto  $f'_{bt}$ ) e compressão biaxial (ponto  $f'_{bc}$ ), é obtido através de (de Souza Neto et al., 2008):

$$\eta = \frac{3 \sin \phi}{2\sqrt{3}}, \quad \xi = \frac{2 \cos \phi}{\sqrt{3}} \quad (2.11)$$

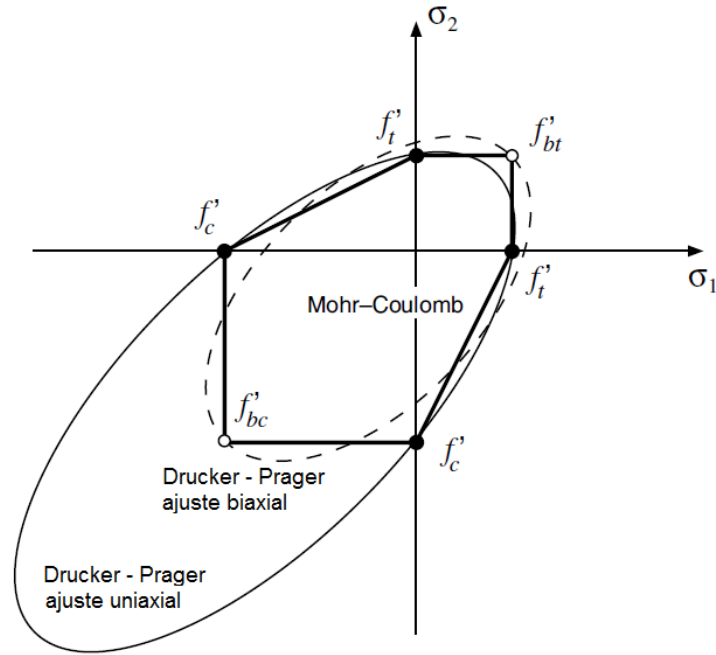


Figura 2.11. Plano de tensões. Aproximação de Drucker-Prager à superfície Mohr-Coulomb em tensão e compressão uniaxial e biaxial. Modificado de Souza Neto *et al.* (2008).

Na modelagem constitutiva de materiais o tensor de tensões pode ser dado como a soma de um componente hidrostático e um componente desviador, assim:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} + p\mathbf{I} \quad (2.12)$$

onde o invariante  $p$  é dado por  $\frac{1}{3}\mathbf{I}_1(\boldsymbol{\sigma})$ . De acordo à anterior relação, a Eq. (2.7) pode ser expressa da seguinte forma:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, c) = \sqrt{J_2(\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}))} + \alpha\mathbf{I}_1(\boldsymbol{\sigma}) - k \quad (2.13)$$

onde  $\alpha$  e  $\kappa$  são constantes do material em função do ângulo de atrito e da coesão, cujos valores, após aproximação com as bordas externas do modelo Mohr-Coulomb, são dados por:

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}, \quad \kappa = \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (2.14)$$

Segundo Lowes, (1999), o modelo Drucker-Prager consegue representar a resposta do concreto submetido à compressão multiaxial quando comparado com dados experimentais, mas o modelo superestima a capacidade do concreto submetido a cargas de tensão-compressão ou tensão-tensão.

#### 2.2.4. Modelo Uniaxial Elástico-Perfeitamente-Plástico

Este modelo é frequentemente utilizado para representar o comportamento das barras de aço da armadura de concreto armado e é caracterizado por uma curva idealizada de tensão normal-deformação como mostra a Figura 2.12 (Cerrolaza & Flórez-López, 2000).

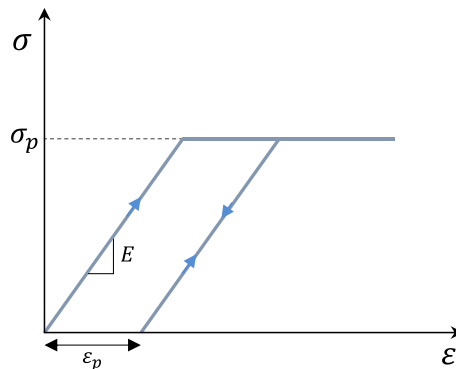


Figura 2.12. Curva tensão-deformação do modelo elástico perfeitamente plástico. Modificado de Cerrolaza & Flórez-López (2000).

Nesta curva não existem regiões de endurecimento. Apenas duas regiões são destacadas:

- A zona elástica caracterizada por ( $\sigma < \sigma_p$ ), onde  $\sigma$  é a tensão normal e  $\sigma_p$  é a tensão de escoamento. A última depende do material. Nesta área, não há deformações plásticas adicionais.
- A zona plástica caracterizada por ( $\sigma = \sigma_p$ ), em que ocorre um incremento indeterminado da deformação plástica. Neste modelo, a tensão de um ponto nunca pode exceder a tensão de escoamento.

A relação entre tensão e deformação é dada pela lei de Hooke de acordo com:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (2.15)$$

onde  $E$  é o módulo de Young e depende do material. A Eq. (2.15) é a lei do estado no modelo elástico perfeitamente plástico.

### 2.2.5. Modelo Elástico Linear

No modelo elástico linear a relação tensão-deformação é dada pela lei de Hooke generalizada, considerando que para baixos níveis de tensão, o acréscimo de tensões varia linearmente com o acréscimo de deformações. Este modelo, amplamente empregado em aço e concreto é representado por apenas dois tipos de parâmetros: o módulo de elasticidade  $E$  e o coeficiente de Poisson. Entre as limitações deste modelo estão a não previsão de ruptura, de deformações permanentes e dilatação.

A matriz constitutiva  $\mathbf{D}$  para o estado plano de deformação é dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.16)$$

Para o estado plano de tensão  $\mathbf{D}$  é dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \sigma_z = 0 \quad (2.17)$$

Para o caso tridimensional a matriz  $\mathbf{D}$  é dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

### 2.2.6. Lei de Endurecimento

Segundo Pedroso (2002), a lei de endurecimento regula a forma como poderá aumentar (endurecimento) o diminuir (amolecimento) a tensão ( $\sigma_p$ ) que indica plastificação (Fig. 2.12) com a ocorrência de deformações plásticas nos materiais submetidos a estados de tensão e deformação unidimensionais.

Para o estado tridimensional de tensão e deformação, deve se definir parâmetros de endurecimento visando controlar a variação do tamanho da superfície de plastificação.

### 2.2.7. Lei de fluxo

De acordo com Pedroso (2002), a direção do incremento do incremento de deformação é definida pela lei de fluxo que relaciona incrementos de deformação com os gradientes de função potencial plástico. No caso unidimensional, a direção do incremento de deformação é a mesma do componente de tensão. Quando a função potencial plástico é a mesma função de plastificação se diz que o modelo constitutivo utiliza lei de fluxo associada e que a condição de normalidade é satisfeita.

## 2.3. APLICAÇÕES DE ELEMENTOS FINITOS EM CONCRETO ARMADO

A análise não linear de estruturas tem a característica de prever o carregamento último, o modo de ruptura, a distribuição de tensões no concreto e no aço, os padrões de fissuração, entre outras respostas estruturais que devem ser semelhantes ao comportamento observado em ensaios experimentais.

A presença de longas fissuras nas vigas e a maneira que a armadura está ancorada no concreto faz que a análise baseada na compatibilidade de deformações e na continuidade das seções planas após das solicitações perca validade (Tavárez, 2001).

Para avaliar o comportamento não linear das vigas é necessário estabelecer uma alternativa de análise que consiga prever a capacidade máxima e modo de ruptura no elemento. Os métodos convencionais não têm a suficiente exatidão para considerar todos os possíveis estados limite nas vigas de concreto armado.

Chang, Taniguchi, & Chen (1987) estabelecem que o comportamento complexo do concreto armado aborda fatores tais como:

- Comportamento não linear do concreto em termos de resposta da tensão deformação, da tensão de fissuração, do endurecimento biaxial e o fenômeno de deformação por amolecimento (strain softening).
- Definição da ruptura do material sob estado de tensão multiaxial.
- Modelagem do comportamento pós-fraturamento.
- O efeito da interação entre o concreto e a armadura.

A complexidade de incluir todos estes fatores de comportamento do concreto num modelo confiável e eficiente tem provado ser uma tarefa difícil, e, por conseguinte, é ainda uma área de investigação contínua (Tavárez, 2001).

Segundo Tavárez (2001), o MEF surgiu como um método para análise estrutural que fornece aos engenheiros as ferramentas necessárias para modelar virtualmente qualquer sistema estrutural de engenharia. Particularmente, o MEF tem sido muito útil em problemas de modelagem envolvendo concreto armado. A principal característica deste método é sua versatilidade, uma vez que pode ser aplicado a vários problemas físicos onde os problemas analisados podem ter forma arbitrária, assim como cargas e condições de apoio (Cook, Malkus, Plesha, & Witt, 2001). Além disso, a malha pode misturar elementos de diferentes tipos, formas e propriedades físicas. Este procedimento numérico é normalmente utilizado quando o problema abordado é muito complicado de ser resolvido de forma satisfatória por métodos analíticos clássicos.



O MEF consegue simular respostas não lineares dos materiais e determinar as condições de ruptura nas vigas de concreto armado, proporcionando maiores informações sobre o comportamento do concreto e o aço. Os resultados obtidos destas análises podem ser utilizados como informações auxiliares no projeto de estruturas de concreto armado.

De acordo com Kwak & Filippou (1990), os pioneiros na análise de estruturas de concreto armado utilizando o método dos elementos finitos são Ngo e Scordelis em 1967, cujo estudo chamado de “*Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams*”, apresentam vigas simples analisadas utilizando elementos triangulares de deformação constante. Os autores representam o concreto, o aço de armadura e um elemento de ligação especial usado para conectar os primeiros de forma a descrever o efeito de deslocamento relativo. Os autores também realizaram análises linear elásticas de vigas com padrões pré-definidos de fissuração para determinar tensões principais no concreto, tensões no aço de armadura e tensões na ligação dos dois materiais.

Na pesquisa feita por Nilson em 1972, chamada “*Internal Measurement of Bond Slip*” foram introduzidas propriedades de não linearidade para o concreto e o aço, mais uma relação não linear para o deslocamento relativo no contato dentro da análise utilizando um método de carga incremental de análise não linear. Quatro elementos triangulares com deformação constante foram combinados para dar forma a um elemento quadrilateral. O método foi aplicado a membros de tração excêntrica e concêntrica de concreto armado, que foram submetidos a cargas aplicadas nas extremidades das barras de armadura e os resultados foram comparados com dados experimentais.

Nayak e Zienkiewicz em 1972, em seu estudo “*Elasto-Plastic stress Analysis*”, usaram elementos de tensão plana para avaliar o comportamento de sistemas estruturais apertados e de muros de concreto armado. Foram realizados dois estudos de esforços que incluem tensão e fissuração. O comportamento elástico-plástico do concreto em compressão assumiu uma aproximação inicial de esforço.

Barzegar & Maddipudi (1994) identificam as três abordagens mais comuns para utilizar o MEF no concreto com simulação do aço de armadura: o método distribuído (smeared), o discreto e o embutido. Tem-se primeiro o método distribuído, onde a taxa das barras de aço é constante e distribuída ao longo do elemento melhorando o desempenho na dispersão da armadura para elementos tipo laje ou outro tipo de estrutura que tenha armadura uniformemente distribuída.

A Figura 2.13 representa o conceito da modelação distribuída da armadura, onde inicialmente tem valores característicos para os dois materiais, concreto e aço de armadura e depois são integrados em uma formulação nova para representar o modelo distribuído.

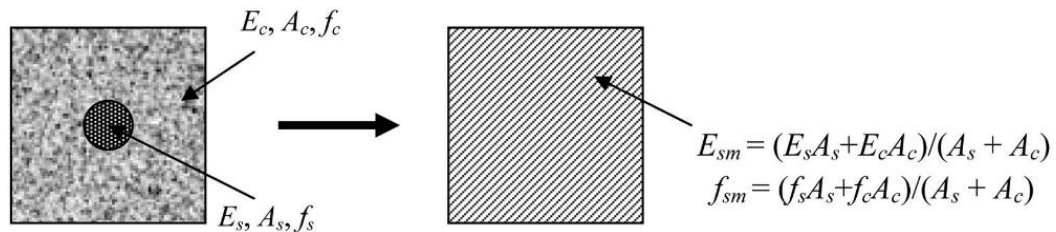


Figura 2.13. Conceito de modelagem de armadura pelo método distribuído (Ožbolt & Sharma, 2011).

Na Figura 2.14 pode-se observar como é modelada a armadura de maneira distribuída no interior da espessura do elemento sólido para o concreto, assumindo aderência perfeita entre os dois componentes. A distribuição de barras de armadura é feita como uma camada de membrana de duas dimensões e espessura equivalente. A camada é localizada na posição desejada em paralelo com uma superfície do elemento sólido.

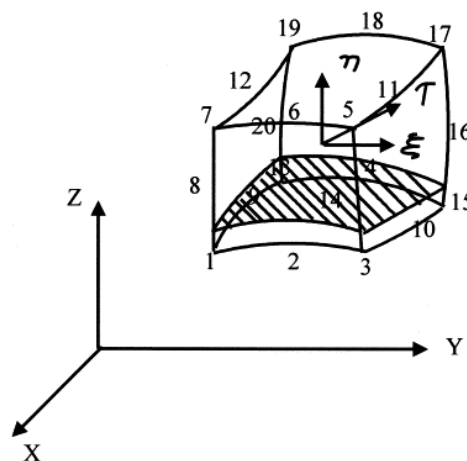


Figura 2.14. Elemento quadrático sólido em 3D com armadura distribuída (Manjuprasad, Gopalakrishnan, & Appa Rao, 2001).

Para o segundo método, chamado de método discreto, as barras de aço devem-se localizar necessariamente nas arestas dos elementos sólidos que representam o concreto, como indica a Figura 2.15. Desta forma, os elementos finitos são dependentes da posição da armadura.

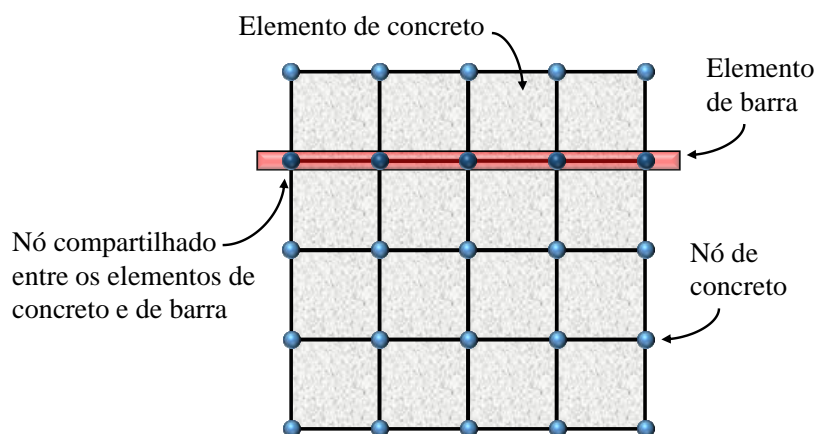


Figura 2.15. Abordagem discreta da armadura no concreto. Modificado de Tavárez (2001).

Segundo Hartl (2002), no método discreto as barras de armadura são modeladas como elementos de treliça individuais, ligados aos nós dos elementos de concreto. A principal desvantagem deste método é a geração da malha que depende da distribuição da armadura no modelo. Para cada configuração de armadura deve-se desenhar uma nova malha apropriada para o análise. Geralmente é assumida aderência perfeita entre o concreto e a armadura. Embora elementos de mola fictícios possam ser usados para modelar o deslizamento na ligação entre os elementos de concreto e os elementos de armadura nos casos em que o comportamento do contato seja de importância.

O terceiro método, chamado de método embutido, inicialmente formulado por Elwi & Hrudey (1989), e desenvolvido por Barzegar & Maddipudi (1994), indica que as barras de armadura estão embutidas nos elementos sólidos, portanto, a estrutura analisada é representada numa única malha. Nesta abordagem, a rigidez dos elementos de armadura é avaliada de forma independente aos elementos de concreto, mas o elemento é estabelecido dentro da malha do concreto de tal maneira que exista compatibilidade dos deslocamentos entre os materiais.

A formulação embutida é vantajosa em estruturas de concreto onde a armadura tem distribuição complexa. Além disso, os análises com representação embutida tem maior eficiência computacional do que aqueles com a representação discreta (Yamaguchi & Ohta, 1993).

A Figura 2.16 exemplifica os últimos dois métodos previamente descritos, o discreto e o embutido. No primeiro, as barras de armadura devem estar localizadas nas arestas dos elementos sólidos, portanto impõem um tipo de malhado para facilitar o seu posicionamento. No método embutido, as barras estão localizadas sem precisar alterações da malha de elementos sólidos.

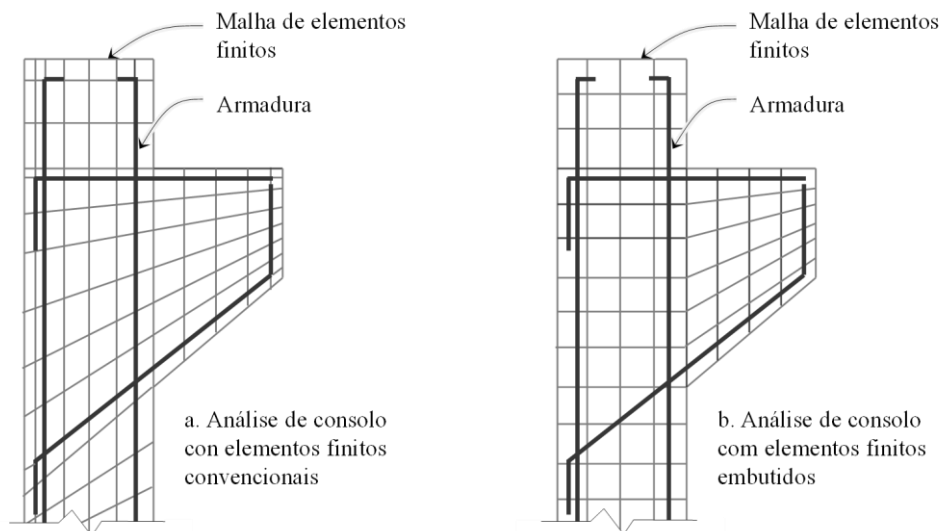


Figura 2.16. Comparação de malhas de elementos finitos para elementos discreto e embutido (Durand, 2008).

Durand & Farias, 2012 indicam que os três métodos expostos acima não consideram apropriadamente o comportamento da interface entre a barra de armadura e o material circundante. Onde a simulação do contato é notável para a análise porque a própria interface pode ser uma zona de ruptura crítica. Durand (2008) apresenta o método semi-embutido que combina características dos métodos discreto e embutido, de modo que permite que as barras de armadura sejam embutidas arbitrariamente nos elementos sólidos, no entanto, as barras são elementos discretos porque tem nós independentes e acrescentam graus de liberdade ao sistema. A simulação de um ensaio de arranchamento foi realizada por Durand & Farias, (2012) para avaliar se a resistência da interface está em concordância com os parâmetros de resistência propostos. A Figura 2.17 mostra a configuração do ensaio, onde foram gerados elementos sólidos de 8 nós e um elemento barra de três nós inclinado com 4 m de comprimento introduzido na malha. Os deslocamentos de todos os nós sólidos são fixados a fim de forçar os deslocamentos relativos ao longo da interface da barra. A força do ensaio é aplicada em incrementos de 1% da força total, até alcançar a ruptura total.

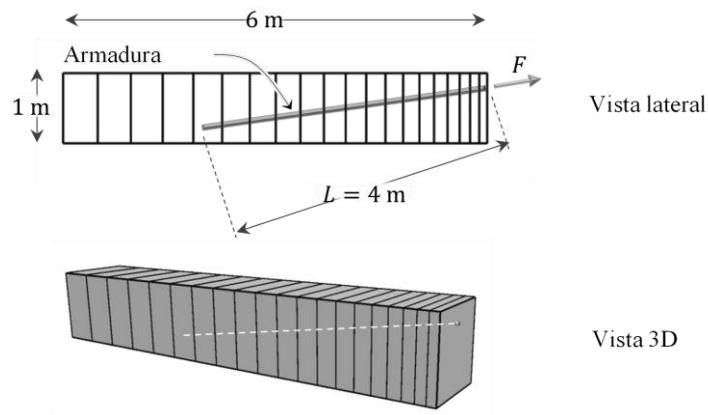


Figura 2.17. Malha de elementos finitos e reforço em um teste Pull-Out (Durand & Farias, 2012).

A Figura 2.18 mostra a relação  $(\tau/\tau_{max})$ , ou seja, a tensão de cisalhamento normalizada pela resistência ao cisalhamento previsto, para diferentes níveis de tração externa relativa ( $F/F_{max}$ ) como mostrado na legenda da figura. Pode ser observado que a resistência ao corte da interface é gradualmente mobilizada ao longo do comprimento da barra. A ruptura inicializa perto do nó da tração externa e se espalha gradualmente em direção à outra extremidade do reforço. A ruptura completa da interface foi alcançada quando a força externa atingiu a força máxima prevista. Este resultado representa uma excelente precisão obtida pela formulação da interface.

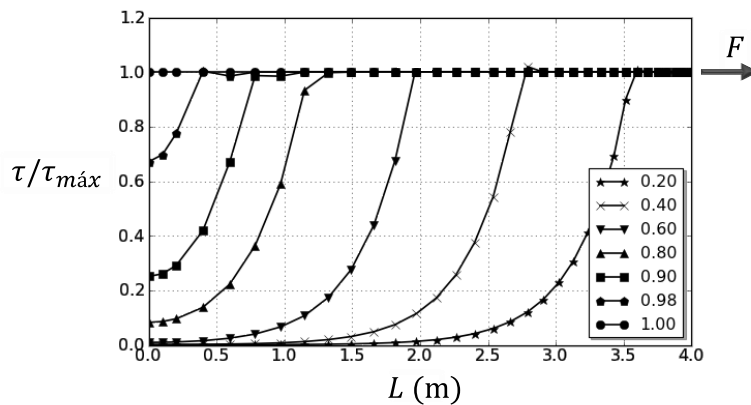


Figura 2.18. Relação de cisalhamento mobilizado com aplicação de diferentes níveis de carga externa (Durand & Farias, 2012).

### 3. METODOLOGIA

Para o desenvolvimento deste trabalho propõe-se seguir uma série de atividades que estão focadas em analisar elementos de concreto armado por formulações analíticas e pelo MEF e validar o método semi-embutido aplicado à simulação de estruturas de concreto armado, atingindo os objetivos estabelecidos. Foi feita uma revisão das especificações baseadas na NBR 6118:2003 para o dimensionamento em flexão de vigas em concreto armado, obtenção das formulações necessárias para o cálculo de momento atuante na seção, linha neutra e área da armadura longitudinal em flexão. Depois é descrito o método semi-embutido de elementos finitos. Em seguida são indicados os modelos constitutivos a ser utilizados para cada material na simulação das vigas. Finalmente se apresentará o software de elementos finitos e o software de pos-processamento dos resultados.

#### 3.1. RESUMO DA NORMA

Inicialmente são selecionados elementos lineares de concreto armado para ser projetados pela NBR 6118:2003, avaliando os diferentes critérios determinados nesta normativa para obter dimensões do elemento e quantidades de armadura capaz de resistir às cargas determinadas para o modelo.

Algumas considerações gerais aqui apresentadas para o dimensionamento por flexão das vigas de concreto armado, dados os requisitos da NBR 6118:2003, estão baseadas no livro de Carvalho & Figueiredo Filho (2013). De acordo como o autor, a partir do equilíbrio das forças atuantes na seção é feito o cálculo da quantidade de armadura longitudinal em vigas retangulares de concreto armado conhecendo a resistência do concreto ( $f_{ck}$ ), a largura da seção ( $b_w$ ), a altura útil ( $d$ ) e o tipo de aço ( $f_y$  e  $\varepsilon_{yd}$ ).

A Figura 3.1 permite identificar as relações de triângulos necessárias para determinar os limites do domínio 3. O dimensionamento deve atender as características do domínio 3 que é identificado através da relação entre a altura ou profundidade da linha neutra ( $x$ ) e a altura útil da seção ( $d$ ). A Tabela 3.1 indica as semelhanças de triângulos obtidas da Figura 3.1. Nesta tabela,  $\varepsilon_{yd}$  representa a deformação específica de escoamento de cálculo do aço.

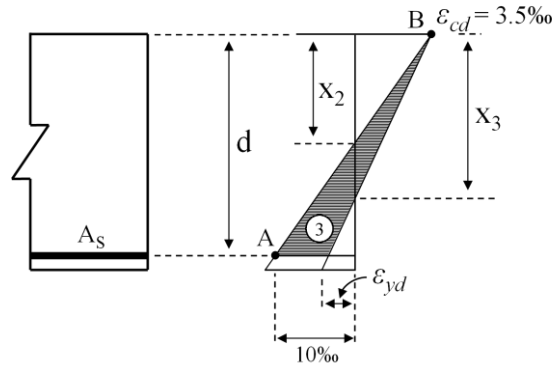


Figura 3.1. Características do domínio 3. Modificado de Carvalho & Figueiredo Filho (2013).

Tabela 3.1. Semelhanças de triângulos para os limites do domínio 3.

<i>Valor de x no limite entre os domínios 2 e 3.</i>	<i>Valor de x no limite entre os domínios 3 e 4.</i>
$\frac{0.0035}{x_2} = \frac{0.01}{d - x_2}$ $x_2 = 0.2593d$	$\frac{0.0035}{x_3} = \frac{\varepsilon_{yd}}{d - x_3}$ $x_3 = \frac{0.0035d}{\varepsilon_{yd} + 0.0035}$

Em uma seção conhecida, a posição da linha neutra ( $x$ ) no limite entre o domínio 3 e 4 depende de  $\varepsilon_{yd}$ . Para o cálculo de  $x$  deve se seguir as hipóteses básicas para o cálculo no estado limite último de elementos sujeitos a solicitações normais. As hipóteses básicas descritas no item 17.2.2 da NBR 6118:2003 adotam o diagrama de tensões na seção de concreto armado na ruptura por flexão indicado na Figura 3.2.

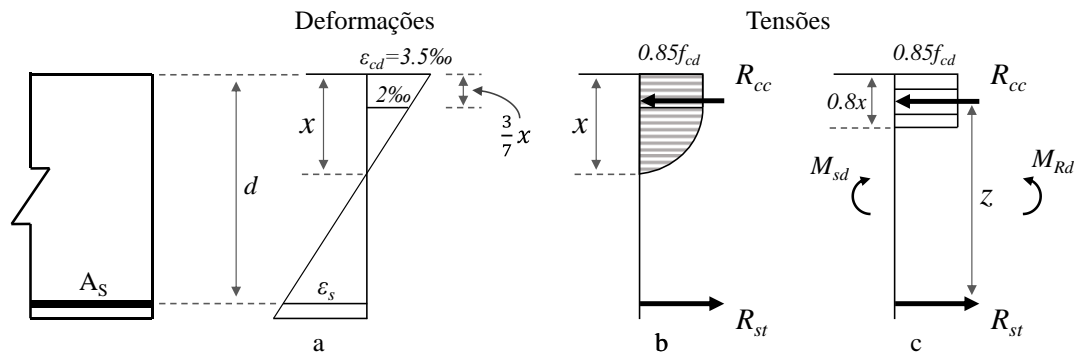


Figura 3.2. Diagrama de tensões no concreto no estado limite último. Modificado de Carvalho & Figueiredo Filho (2013).

O diagrama *a* indica as deformações na seção da viga com encurtamento máximo de compressão no concreto ( $\varepsilon_{cd}$ ) de 3.5‰. No diagrama *b* a tensão de compressão no concreto tem distribuição parábola retângulo com máxima de  $0.85f_{cd}$ . O anterior diagrama pode ser substituído pelo diagrama retangular simplificado *c*, que conserva a posição das resultantes de tensão por compressão ( $R_{cc}$ ) e por tração ( $R_{st}$ ), garantindo o mesmo braço de alavanca ( $z$ ).

O equilíbrio da seção da Figura 3.2 é dado pela somatória de forças e de momentos. O valor de  $x$  permite conhecer o domínio em que a peça trabalha e as resultantes das tensões de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ) e o braço de alavanca ( $z$ ). De acordo ao anterior, determina-se o valor de  $x$  resolvendo a equação de segundo grau definida por  $ax^2+bx+c=0$ .

$$x = 1.25 \cdot d \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{M_{sd}}{0.425 \cdot b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}}} \right) \quad (3.1)$$

Para o cálculo de vigas de concreto armado com aço CA-50 tem-se um valor da deformação específica de escoamento ( $\varepsilon_{yd}$ ) de 2.07 ‰. Com este valor é possível determinar o valor de  $x$  em função de  $d$  para o limite entre os domínios 3 e 4, assim:

$$x_3 = \frac{0.0035d}{\varepsilon_{yd} + 0.0035} \rightarrow x_3 = 0.6284d \quad (3.2)$$

As seguintes relações identificam o domínio da peça:

$$x < 0.2593d \rightarrow \text{domínio 2}$$



$$0.2593d < x < 0.6284d \rightarrow \text{domínio 3}$$

$$0.6284d < x \rightarrow \text{domínio 4}$$

A quantidade de armadura longitudinal necessária para uma seção retangular de viga em concreto relaciona o momento atuante na seção ( $M_{sd}$ ) com a resistência a tração do aço ( $f_{yd}$ ), a altura útil ( $d$ ) e a profundidade da linha neutra ( $x$ ).

$$A_s = \frac{M_{sd}}{f_{yd}(d - 0.4x)} \quad (3.3)$$

A Eq. (3.3) fornece o valor da área de armadura longitudinal de aço em tração para a seção transversal de viga.

O modelo de comportamento da estrutura admite comportamento linear-elástico para o concreto e o aço. Para a avaliação aproximada da flecha imediata em vigas é preciso estimar diversos parâmetros que caracterizam o elemento. Primeiro deve-se calcular a altura útil da seção transversal ( $d$ ) por meio da seguinte expressão:

$$d = h - \left( c + \frac{\phi_b}{2} \right) \quad (3.4)$$

onde  $h$  é a altura da viga,  $c$  é o cobrimento das barras e  $\phi_b$  é o diâmetro das barras de armadura. Logo tem-se a formulação que estabelece a aproximação do modulo de Young secante do concreto:

$$E_{cs} = 4760 f_{ck}^{1/2} \rightarrow f_{ck} (MPa) \quad (3.5)$$

A área de aço ( $A_s$ ) é calculada com base na quantidade de barras ( $n_b$ ) e o seu diâmetro ( $\phi_b$ ) como segue:

$$A_s = n_b \left( \frac{\pi}{4} \phi_b^2 \right) \quad (3.6)$$

A profundidade da linha neutra da seção no estágio 2 ( $x_{II}$ ) é definida na seguinte expressão:

$$X_{II} = \frac{n A_s}{b} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2bd}{nA_s}} \right) \quad (3.7)$$

onde  $b$  é a base e  $n$  é a relação entre o modulo de Young do aço ( $E_s$ ) e o modulo de Young do concreto ( $E_c$ ).

$$n = \frac{E_s}{E_{cs}} \quad (3.8)$$

O braço de alavanca ( $z$ ) das resultantes de tração e compressão é calculado em função da altura útil da seção ( $d$ ) e a linha profundidade da linha neutra da seção no estágio 2 ( $x_{II}$ ).

$$z = d - \frac{X_{II}}{3} \quad (3.9)$$

O momento de inercia da seção fissurada no estágio 2 ( $I_{II}$ ) é dado por:

$$I_{II} = nA_s z (d - X_{II}) \quad (3.10)$$

A aproximação da resistência à tração do concreto ( $f_{ct,m}$ ) é definida por:

$$f_{ct,m} = 0.3 f_{ck}^{2/3} \quad (3.11)$$

O momento de inercia da seção bruta do concreto para seções retangulares ( $I_c$ ) calculasse a seguir:

$$I_c = \frac{1}{12} b h^3 \quad (3.12)$$

O momento de fissuração do elemento estrutural é calculado em função de  $f_{ct,m}$ ,  $I_c$  e  $y_i$  que é igual a metade da altura ( $h$ ) da seção. Nesta formulação considerese o coeficiente  $\alpha_{Mr}$  igual a 1.5 para seções transversais retangulares.

$$M_r = \alpha_{M_r} \frac{f_{ct,m} I_c}{y_t} \quad (3.13)$$

A rigidez equivalente da seção transversal  $(EI)_{eq}$  faz um balanço da peça não fissurada e da peça fissurada em regime global elástico (Clímaco, 2008). A seguinte expressão determina o valor da  $(EI)_{eq}$ , onde onde  $M_a$  é igual a  $M_{sd}$ .

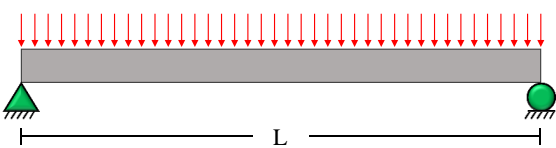
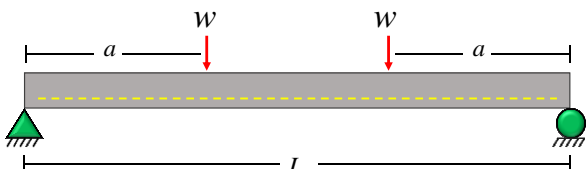
$$(EI)_{eq} = E_{cs} \left\{ \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] I_{II} \right\} \leq E_{cs} I_c \quad (3.14)$$

A flecha imediata a partir da curvatura máxima da viga ( $f_i$ ) é calculada com base no coeficiente  $\alpha$  que depende das condições de apoio e tipo de carregamento na viga (Tabela 3.2) e do comprimento do elemento ( $L$ ). A Eq. (3.15) fornece a flecha imediata da seção antes da fissuração, enquanto que a Eq. (3.16) calcula a flecha imediata da seção fissurada.

$$f_{i(EI)_{eq}} = \alpha \frac{M_{sd} L^2}{(EI)_{eq}} \quad (3.15)$$

$$f_{iE_{cs}I_c} = \alpha \frac{M_{sd} L^2}{E_{cs} I_c} \quad (3.16)$$

Tabela 3.2. Valor do coeficiente  $\alpha$ . Modificado de Jiménez Montoya *et al.* (2000).

<b>CONDIÇÕES DE APOIO E TIPO DE CARGA</b>	<b>COEFICIENTE <math>\alpha</math></b>
	$\frac{5}{48}$
	$\frac{3 - 4\left(\frac{a}{L}\right)^2}{24}$

### 3.2. FORMULAÇÕES ANALÍTICAS

Para avaliar o comportamento de vigas de concreto armado no domínio elástico são estudadas formulações analíticas baseadas nos conceitos de resistência dos materiais e em hipóteses fundamentais da teoria elástica que permitem obter valores de tensões nos materiais e deslocamento da seção transversal da viga ao longo do comprimento.

Essas formulações fornecem valores de tensões de compressão e tração no concreto, tensões axiais nas barras de armadura e flechas no meio do vão seguindo hipóteses adotadas para garantir o comportamento elástico linear do elemento avaliado. As hipóteses necessárias para a análise são:

- O concreto e o aço que compõem a viga são considerados materiais com comportamento elástico linear sem critério de ruptura.
- A seção transversal da viga submetida à tração é plana antes e depois do carregamento imposto.
- As deformações nas fibras de compressão e tração são proporcionais às tensões que as produzem.
- Existe aderência perfeita entre o concreto e as barras de aço garantindo a compatibilidade de deformações.

Deve-se calcular o momento máximo atuante na seção transversal da viga segundo o carregamento imposto, características geométricas e restrições nos apoios para obter os valores de tensão máxima nos materiais. A Figura 3.3 indica a formulação para os momentos máximos obtidos no meio do vão nas configurações de vigas utilizadas para o análise linear.

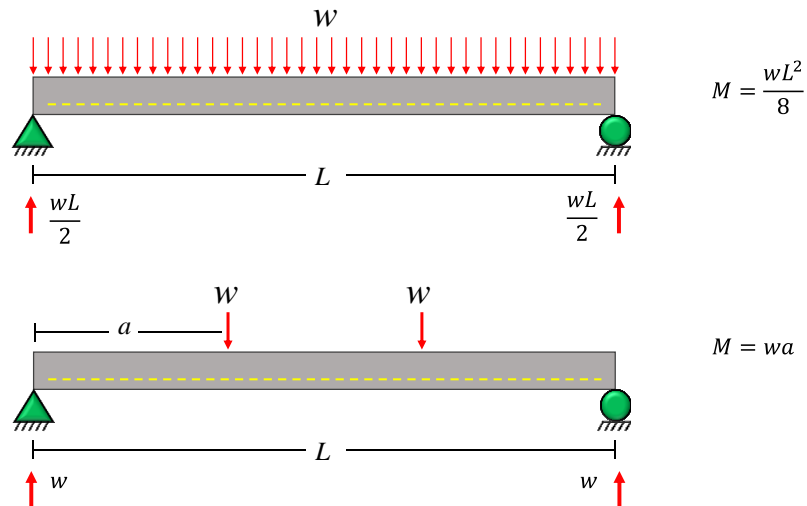


Figura 3.3. Reações nos apoios e momentos máximos atuantes em vigas com carregamento distribuído e pontual.

Duas formulações analíticas foram adotadas para obter dados que sirvam como referência para avaliar a modelagem numérica. Os itens a seguir descrevem as metodologias analíticas utilizadas.

### 3.2.1. Formulação analítica 1

Esta primeira formulação está baseada no projeto de vigas de concreto com armadura de flexão dado por Wight & MacGregor (2011).

As propriedades do material necessárias para a análise são:

- Momento de inércia da seção bruta de concreto expressado na Eq. (3.12).
- Módulo de elasticidade secante do concreto, calculado pela Eq. (3.5).

Para obter as tensões na fibra mais tracionada é preciso calcular o momento de inércia da seção transformado do concreto e do aço de armadura.

A Figura 3.4 indica a descrição de seção transversal transformada do concreto e do aço.

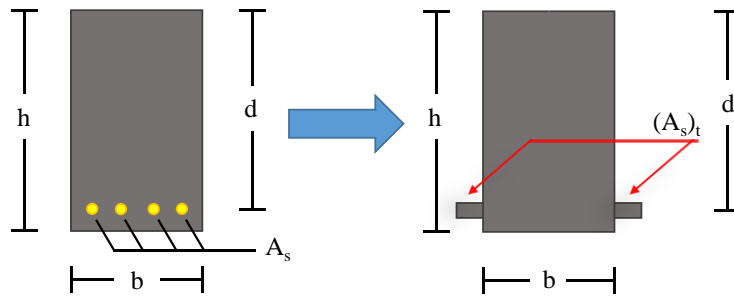


Figura 3.4. Seção transversal transformada.

Nesta figura,  $h$  é a altura da seção,  $b$  corresponde à base da seção,  $d$  representa a altura útil da seção,  $A_s$  é a área de aço em flexão na seção e  $(A_s)_t$  é a área transformada de aço dada por:

$$(A_s)_t = nA_s \quad (3.17)$$

onde  $n$  é calculado pela Eq. (3.8). Em seguida calcula-se a distância entre o topo da fibra ao eixo neutro do momento de inércia transformado seguindo a Figura 3.5, através da Eq. (3.18).

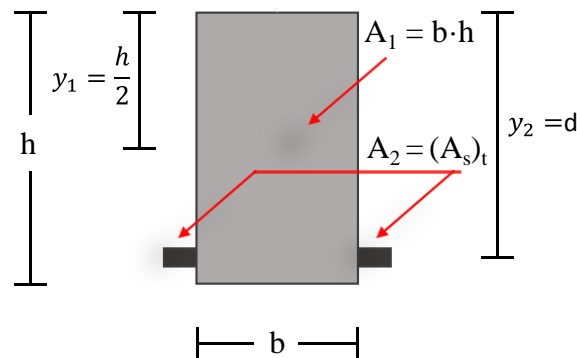


Figura 3.5. Parâmetros para o cálculo de  $\bar{y}$ .

$$\bar{y} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} \quad (3.18)$$

O momento de inercia da seção transformado é calculado por:

$$I_{tr} = [I_c + A_1(\bar{y} - y_1)^2] + A_2(d - \bar{y})^2 \quad (3.19)$$

A tensão na fibra mais tracionada do concreto é calculada por meio de:

$$\sigma_t = \frac{M(h - \bar{y})}{I_{tr}} \quad (3.20)$$

Por sua vez, a tensão no aço “neste ponto” é dada por:

$$\sigma_s = \frac{M(d - \bar{y})}{I_{tr}} \quad (3.21)$$

### 3.2.2. Formulação analítica 2

Nesta segunda formulação, as hipóteses assumidas anteriormente para as formulações analíticas permitem deduzir uma seção transversal de viga elástica como é mostrada na Figura 3.6, onde  $x$  é a posição do eixo neutro da seção.

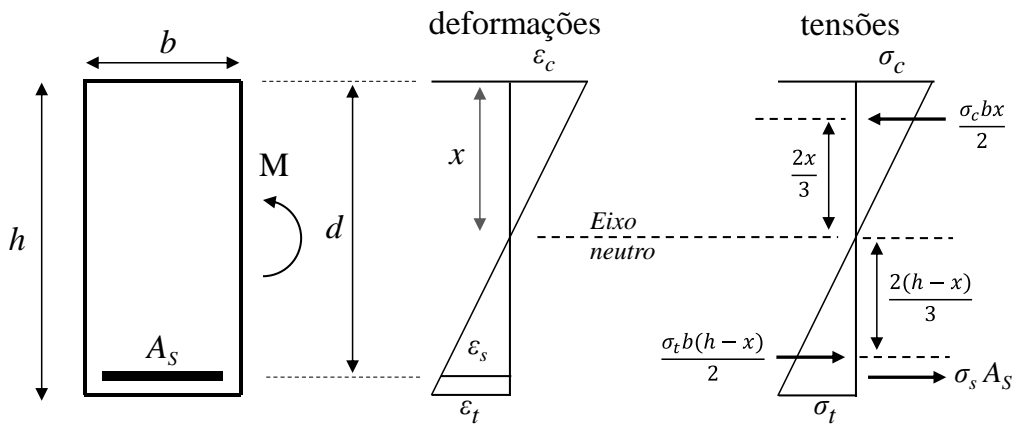


Figura 3.6. Diagramas de deformação e tensão para viga elástica.

Considerando um momento fletor  $M$  como valor conhecido e atendendo o equilíbrio de forças, o equilíbrio de momento fletor, a posição da linha neutra e a hipótese de compatibilidade de deformações, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\sigma_c b x}{2} - \frac{\sigma_t b (h - x)}{2} - \sigma_s A_s = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{\sigma_c b x}{2} \left( d - \frac{x}{3} \right) - \frac{\sigma_t b (h - x)}{2} \left[ \frac{1}{3} (h - x) - (h - d) \right] = M \quad (3.23)$$

$$x = \frac{\sigma_c h}{\sigma_c + \sigma_t} \quad (3.24)$$

$$\sigma_s = \sigma_t \frac{E_s d - x}{E_c h - x} \quad (3.25)$$

A solução de este sistema fornece diretamente os valores da posição da linha neutra ( $x$ ), da tensão na fibra mais comprimida ( $\sigma_c$ ) e mais tracionada ( $\sigma_t$ ) do concreto e da tensão no aço ( $\sigma_s$ ), com o uso de uma variável auxiliar ( $k$ ):

$$x = \frac{bE_{cs}h^2 + 2dA_sE_s}{2(bE_{cs}h + A_sE_s)} \quad (3.26)$$

$$\sigma_c = \frac{6Mx}{kbh} \quad (3.27)$$

$$\sigma_t = \frac{6M(h - x)}{kbh} \quad (3.28)$$

$$\sigma_s = \frac{3M(2x - h)}{kA_s} \quad (3.29)$$

$$k = -3hx + 2h^2 + 6xd - 3hd \quad (3.30)$$

### 3.3. MÉTODO SEMI-EMBUTIDO

No estudo de meios reforçados, como o concreto armado, Durand (2008) apresentou uma nova abordagem denominada método “semi-embutido” de forma a superar os inconvenientes dos métodos discreto e embutido. Este método é avaliado neste trabalho para simular numericamente estruturas de concreto armado.

De maneira similar ao método embutido este método permite que as armaduras atravessem os elementos sólidos. Entretanto, as porções de armadura contidos em cada elemento atravessado são considerados como elementos finitos de barra independentes. Estes, por sua vez, são ligados aos elementos atravessados por meio de elementos de junta que representam a interface aço-concreto.



A geração dos elementos de barra e elementos de junta são parte de uma rotina de pré-processamento durante o processo de geração da malha. Dado que as barras não se encontram mais “embutidas”, o método é chamado de “semi-embutido”. O fato da armadura ser representada por elementos convencionais de barra fornece várias vantagens. Por exemplo, as tensões e deformações podem ser obtidas facilmente após a solução do sistema de equações no MEF. Além disso, é possível atribuir condições de contorno nos nós dos elementos de barra. Esta característica é particularmente útil na simulação de ensaios de arrancamento e de concreto protendido. Por sua vez, o elemento de interface descreve o comportamento do contato e permite avaliar os níveis de tensão cisalhante e deslocamento relativo. Os parâmetros necessários à interface são a rigidez do contato e a tensão cisalhante de ruptura. Estes parâmetros devem ser obtidos a partir de ensaio de laboratório.

### 3.3.1. Discretização da armadura

Previamente à análise pelo método semi-embutido, durante a etapa de geração de malha, as armaduras devem ser discretizadas em elementos finitos de barra. Dado que as armaduras atravessam os elementos sólidos, cada porção de armadura contida dentro de cada elemento sólido é considerada com um novo elemento de barra (Figura 3.7).

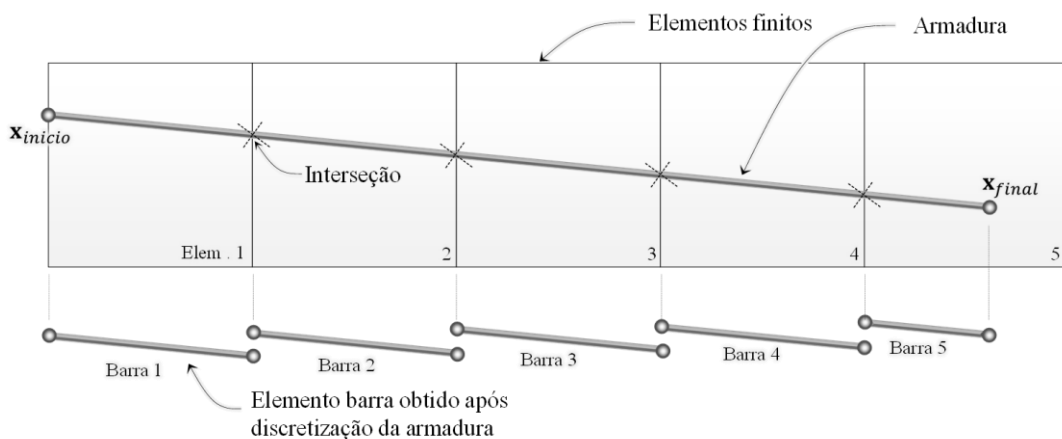


Figura 3.7. Discretização da armadura (Durand & Farias, 2012).

O processo de subdivisão é puramente geométrico e envolve a determinação dos pontos de interseção da armadura de aço com as faces (arestas) dos elementos sólidos. Existem vários algoritmos disponíveis para este fim (Barzegar & Maddipudi, 1994; Durand, 2008; Hartl, 2002; Markou & Papadrakakis, 2012).

Adicionalmente à geração dos elementos de barra, é necessário considerar também a geração de elementos de interface que irão conectar os elementos sólidos com os elementos de barra. O item a seguir trata com mais detalhe sobre a geometria dos elementos de interface.

### 3.3.2. Modelagem da interface

O elemento de interface é representado por um elemento de junta contínuo que permite a ligação entre o concreto e o aço sem adicionar graus de liberdade extra ao sistema. Através deste elemento é possível avaliar os níveis de tensão cisalhante no contato e o valor de deslocamento relativo (deslizamento).

A Figura 3.8 mostra uma interpretação geométrica do elemento de junta. Os círculos azuis representam os nós do elemento sólido atravessado, por exemplo, um elemento hexaédrico de oito nós. Os círculos vermelhos representam os nós do elemento de barra contido no elemento sólido. Os círculos brancos representam a posição inicial dos nós do elemento de barra no elemento sólido (nós embutidos).

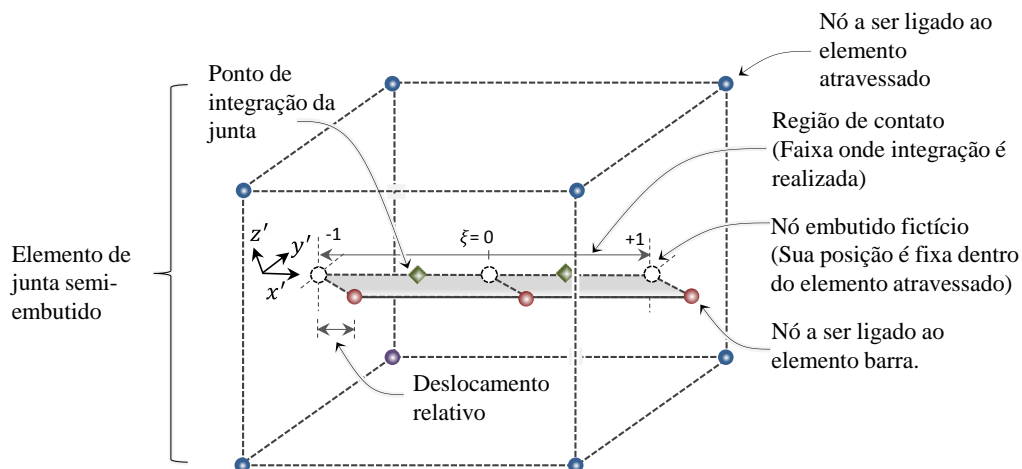


Figura 3.8. Elemento de junta especial (Durand & Farias, 2012).

Considera-se que o elemento de barra e o elemento de junta estão alinhados com o eixo  $x'$  de um sistema de coordenadas  $x'y'z'$  como mostrado na Figura 3.8. A região do contato é representada de forma simplificada pela região cinza e que se mostra como se já existisse deslocamento relativo. A conectividade do elemento de junta é dada pela sequência de nós do elemento sólido mais a do elemento de barra. Por exemplo, no caso da Figura 3.8, o elemento de junta possui 11 nós. Isto faz que seja possível interpolar os deslocamentos do elemento sólido e do elemento de barra de forma a encontrar o deslocamento relativo ao longo do contato. Em

relação à integração do elemento de junta, a mesma é realizada ao longo do contato, na direção  $x'$ , utilizando a coordenada local  $\xi$ , como é mostrado.

A seguir, descreve-se a formulação da matriz de rigidez para o elemento de junta. A princípio, esta matriz relaciona os deslocamentos em todos os nós da junta com as forças nodais correspondentes. Por outro lado, a relação constitutiva em este elemento é dada por uma relação tensão cisalhante versus deslocamento relativo. É possível considerar até três componentes de deslocamento relativo para cada ponto ao longo do contato.

O primeiro componente está orientado ao longo do eixo  $x'$  e descreve o deslizamento. Os outros dois componentes estão orientados em direções perpendiculares ( $y'$  e  $z'$ ). Cada deslocamento relativo está associado com um valor de rigidez. É importante que valores de rigidez elevada sejam atribuídos nas direções  $y'$  e  $z'$  de forma a garantir o deslizamento somente na direção  $x'$ .

Em geral, o vetor com as componentes de deslocamento relativo é dado por  $\mathbf{u}^{r'} = [u_{x'r'} \ u_{y'r'} \ u_{z'r'}]^T$ . Este vetor pode ser calculado a partir dos deslocamentos nodais do elemento de junta através do uso de uma matriz  $\mathbf{B}$  de forma que:

$$\mathbf{u}^{r'} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.31)$$

O vetor  $\mathbf{u}$  está composto pelos deslocamentos nodais do elemento sólido  $\mathbf{u}^s$  e do elemento de barra  $\mathbf{u}^b$  de acordo com:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}^b \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

Uma vez que se disponha da matriz  $\mathbf{B}$ , que será detalhada mais adiante, a matriz de rigidez do elemento de interface pode ser determinada de forma tradicional como:

$$\mathbf{K}_J = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D}_J \mathbf{B} dA \quad (3.33)$$

onde  $\mathbf{D}_J$  representa a matriz constitutiva da interface (junta) e relaciona incrementos do vetor de deslocamentos relativos  $\Delta \mathbf{u}^{r'}$  com os incrementos do vetor de tensão no contato  $\Delta \boldsymbol{\sigma} = [\Delta \tau_{x'} \ \Delta \sigma_{y'} \ \Delta \sigma_{z'}]^T$ . Por sua vez  $dA$  é o diferencial de área da superfície de contato como apresentado na Figura 3.9.

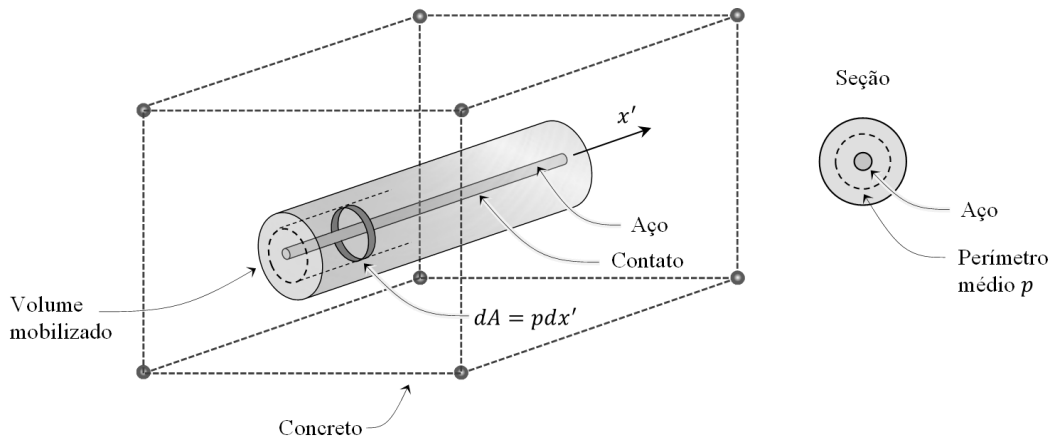


Figura 3.9. Diferencial de área utilizado na integração do elemento de interface.

Usando a quadratura de Gauss e considerando  $dA = p dx'$ , com  $p$  sendo o perímetro médio da seção mobilizada, a matriz de rigidez pode ser expressa como:

$$\mathbf{K}_J = p \sum_{i=1}^{nip} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_i |J_i| w_i \quad (3.34)$$

onde  $nip$  é o número de pontos de integração ao longo do contato,  $w_i$  é o peso de integração de acordo com a quadratura escolhida e  $J$  é a matriz de transformação de coordenadas da junta considerando somente a região de contato.

A matriz  $\mathbf{B}$  é fundamental na formulação da matriz de rigidez e a sua determinação é abordada a seguir. Inicialmente considera-se um vetor  $\mathbf{u}^*$  que contém os deslocamentos nos nós embutidos (círculos brancos na Figura 3.10). Estes deslocamentos podem ser obtidos por interpolação dos deslocamentos nodais do elemento sólido atravessado  $\mathbf{u}^s$  usando funções de forma  $M_{i,j}$  do elemento sólido atravessado. Neste caso,  $M_{i,j}$  representa a função de forma do nó  $i$  avaliado no nó embutido  $j$ . Considerando um elemento sólido com  $m$  nós e um elemento de interface com  $n$  nós embutidos, então o vetor  $\mathbf{u}^*$  é calculado através de:

$$\begin{Bmatrix} u_{x1}^* \\ u_{y1}^* \\ u_{z1}^* \\ u_{x2}^* \\ u_{y2}^* \\ \vdots \\ u_{xn}^* \\ u_{yn}^* \\ u_{zn}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1,1} & 0 & 0 & M_{2,1} & 0 & \cdots & M_{m,1} & 0 & 0 \\ 0 & M_{1,1} & 0 & 0 & M_{2,1} & \cdots & 0 & M_{m,1} & 0 \\ 0 & 0 & M_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & M_{m,1} \\ M_{1,2} & 0 & 0 & M_{2,2} & 0 & \cdots & M_{m,2} & 0 & 0 \\ 0 & M_{1,2} & 0 & 0 & M_{2,2} & \cdots & 0 & M_{m,2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{1,n} & 0 & 0 & M_{2,n} & 0 & \cdots & M_{m,n} & 0 & 0 \\ 0 & M_{1,n} & 0 & 0 & M_{2,n} & \cdots & 0 & M_{m,n} & 0 \\ 0 & 0 & M_{1,n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & M_{m,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ \vdots \\ u_{xm} \\ u_{ym} \\ u_{zm} \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

A Eq. (3.35) pode ser expressa de maneira condensada como:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{M}\mathbf{u}^s \quad (3.36)$$

Considerando temporariamente um vetor de deslocamentos nodais do elemento de interface na forma  $[\mathbf{u}^* \ \mathbf{u}^b]^T$  (ver Figura 3.10), o vetor de deslocamentos relativos no sistema  $x'y'z'$  avaliado em um ponto ao longo do contado pode ser expresso por:

$$\mathbf{u}^{r'} = \mathbf{R}[\mathbf{N} \quad -\mathbf{N}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^* \\ \mathbf{u}^b \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

onde  $\mathbf{R}$  é uma matriz que contém os cossenos diretores das direções  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$ ; e  $\mathbf{N}$  é uma matriz que contém as funções de interpolação do elemento de barra. A matriz  $\mathbf{N}$  pode ser escrita de forma expandida como:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

onde  $N_i$  é a função de forma do nó  $i$  do elemento de barra avaliada no ponto onde o vetor de deslocamentos relativos está sendo calculado.

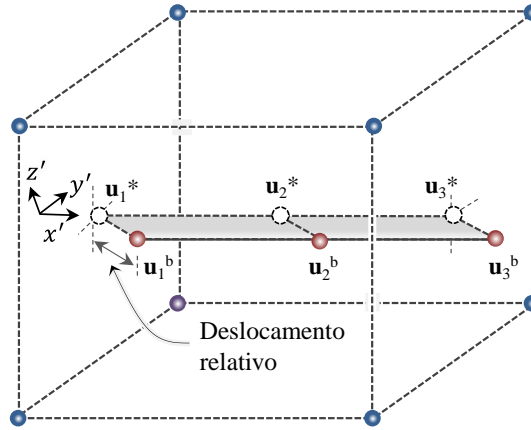


Figura 3.10. Deslocamentos totais dos nós da barra e dos nós embutidos.

Substituindo a Eq. (3.36) na Eq. (3.37), obtém-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{u}^{r'} = \mathbf{R}[\mathbf{N} \quad -\mathbf{N}] \begin{bmatrix} \mathbf{M}\mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}^b \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Após algumas operações algébricas, a Eq. (3.39) pode ser reescrita convenientemente como:

$$\mathbf{u}^{r'} = \mathbf{R}[\mathbf{NM} \quad -\mathbf{N}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}^b \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Através da Eq. (3.40) é possível calcular diretamente o vetor de deslocamentos relativos em um ponto em função dos deslocamentos nodais do elemento de junta que, por sua vez, está composto pelos deslocamentos nodais do elemento atravessado e do elemento de barra. Desta forma a matriz  $\mathbf{B}$  na Eq. (3.31) pode ser expressa simplesmente como:

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}[\mathbf{NM} \quad -\mathbf{N}] \quad (3.41)$$

Posteriormente, o vetor de forças internas em um elemento de junta pode ser calculado usando:

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.42)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  representa o vetor de tensões acumuladas em um ponto do contato  $\boldsymbol{\sigma} = [\tau x' \quad \sigma y' \quad \sigma z']^T$ .

Usando a quadratura de Gauss as forças internas são determinadas por:

$$\mathbf{F} = p \sum_i^{nip} \mathbf{B}_i^T \boldsymbol{\sigma}_i |J_i| w_i \quad (3.43)$$

Durand & Farias (2012), após realizar algumas análises, sugerem que para representar o aço sejam utilizados elementos de barra de três nós e consequentemente elementos de junta com três nós embutidos. Os autores também sugerem que durante a integração numérica nos elementos de junta seja utilizado um mínimo de três pontos de integração.

### 3.4. MODELAGEM DOS MATERIAIS

A modelagem de peças de concreto armado utilizando o método semi-embutido não somente requer a definição dos modelos para simular o concreto e o aço, mas também do modelo necessário para representar a interface aço-concreto. A seguir são descritos os modelos constitutivos utilizados para representar os materiais nesta metodologia.

#### 3.4.1. Modelagem da armadura

Para modelar o comportamento da armadura foi utilizado um modelo elástico perfeitamente plástico tanto em tração quanto em compressão. Neste modelo, considera-se que o aço possui comportamento linear elástico até atingir a tensão de escoamento  $\sigma_y = f_y / \gamma_s$ , onde  $\gamma_s$  é o coeficiente de ponderação da resistência no estado limite último dado pela NBR 6118:2003 para o aço com valor de 1,15. Qualquer incremento de tensão que tente superar este limite origina deformações plásticas. Este modelo é idealizado por uma relação tensão deformação como mostrada na Figura 2.12. O critério de ruptura deste modelo é dado por:

$$\sigma_s - \sigma_y = 0 \quad (3.44)$$

onde  $\sigma_s$  é a tensão no aço e  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento para esse material.

#### 3.4.2. Modelagem do concreto

Para modelar o concreto foi utilizado o modelo elástico linear com critério de ruptura Drucker-Prager (DP). No regime elástico apenas o módulo de Young e o coeficiente de Poisson são necessários. Já o critério DP foi inicialmente proposto como uma aproximação da lei de Mohr-Coulomb. Neste caso a plastificação começa quando o segundo invariante do tensor desvio

( $J_{2D}$ ) e a tensão hidrostática  $p$  atingem uma combinação crítica. A função de escoamento do modelo Drucker-Prager é definida por:

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_{2D}} - \kappa - H \bar{\varepsilon}_p = 0 \quad (3.45)$$

onde  $I_1$  representa o primeiro invariante do tensor de tensões ( $I_1=3p$ ) e  $\alpha$  e  $\kappa$  são parâmetros que descrevem o domínio elástico de acordo com a Figura 3.11.  $H$  é o módulo de endurecimento isotrópico linear e  $\bar{\varepsilon}_p$  é a deformação plástica acumulada. Os parâmetros  $\alpha$  e  $\kappa$  podem ser relacionados com os parâmetros  $c$  e  $\phi$ , coesão e ângulo de atrito respectivamente do critério de ruptura Mohr-Coulomb (MC), através das seguintes equações:

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}, \quad \kappa = \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}$$

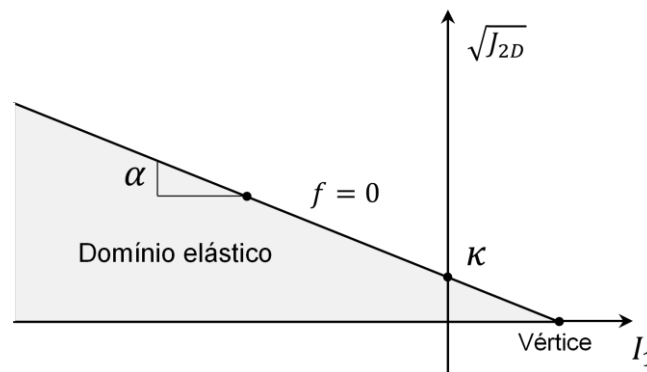


Figura 3.11. Modelo Drucker-Prager no espaço  $I_1 - \sqrt{J_{2D}}$ . Modificado de Souza Neto *et al.* (2008).

Por sua vez, os parâmetros  $c$  e  $\phi$  podem ser estimados em função da resistência à compressão simples  $\sigma_c$  e da resistência à tração simples  $\sigma_t$  do concreto com o auxílio dos círculos de Mohr mostrados na Figura 3.12.

As tensões  $\sigma_c$  e  $\sigma_t$  são calculadas em função da resistência à compressão do concreto. As seguintes equações mostram as expressões necessárias para o cálculo de  $c$  e  $\phi$  as quais podem ser derivadas geometricamente a partir da Figura 3.12.

$$\sigma_c = 0,85 f_{cd} = 0,85 \frac{f_{ck}}{1,4} \quad (3.46)$$



$$\sigma_t = 0,30 f_{ck}^{2/3} \quad (3.47)$$

$$c = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_c \sigma_t} \quad (3.48)$$

$$\phi = \arcsen \frac{\sigma_c - \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t} \quad (3.49)$$

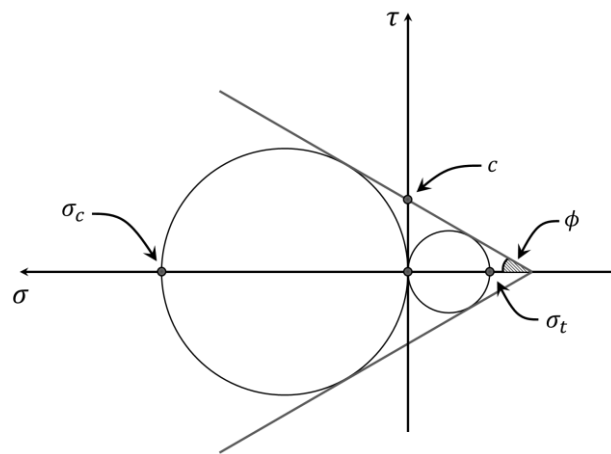


Figura 3.12. Cálculo da coesão e ângulo de atrito de acordo com o critério Mohr-Coulomb

### 3.4.3. Modelagem da interface

Em princípio, a modelagem da interface no método semi-embutido permite a previsão de ruptura no contato assim como a quantificação do deslocamento relativo. Para tal é necessário adotar um modelo elasto-plástico para a interface como, por exemplo, o modelo Mohr-Coulomb. Caso se deseje simular a condição de aderência perfeita entre o concreto e o aço apenas um modelo elástico é suficiente, desde que a rigidez do contato (relação tensão cisalhante versus deslocamento relativo) seja dado por um valor alto e que pode ser calibrado em testes preliminares. O uso de valores muito altos para a rigidez do contato é capaz de produzir instabilidade numérica.

Neste estudo não é focada a possibilidade de ruptura na interface, portanto, somente um modelo elástico é utilizado na interface onde uma matriz elástica **D** relaciona incrementos do vetor de tensões com incrementos de deslocamento relativo:

$$\Delta \sigma = \mathbf{D} \Delta \mathbf{u}^{r'} \quad (3.50)$$

A Eq. (3.50) pode ser escrita por extenso como:

$$\begin{bmatrix} \Delta\tau_{x'} \\ \Delta\sigma_{y'} \\ \Delta\sigma_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_J & 0 & 0 \\ 0 & K_n & 0 \\ 0 & 0 & K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u^r \\ \Delta u_{y'}^r \\ \Delta u_{z'}^r \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

onde  $\Delta\tau_{x'}$  é o incremento de tensão cisalhante no contato na direção longitudinal,  $\Delta\sigma_{y'}$  e  $\Delta\sigma_{z'}$  são incrementos de tensão nas direções perpendiculares,  $K_J$  é a rigidez da interface na direção longitudinal e  $K_n$  é a rigidez na direção normal à superfície de contato,  $\Delta u^r$  é o deslocamento relativo (deslizamento) na direção longitudinal e  $\Delta u_{y'}^r$  e  $\Delta u_{z'}^r$  são deslocamentos relativo nas direções normais. Em relação à modelagem elasto-plástica de interface, mais detalhes podem ser encontrados em Durand & Farias (2012).

### 3.5. PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS

A seguir são descritos os programas computacionais utilizados nas análises numéricas. O primeiro deles é o FemLab que permite o uso do método de elementos finitos semi-embutidos para modelagem de estruturas de concreto armado. Logo tem-se o programa ANSYS que permite análises numéricas através da abordagem discreta de elementos finitos.

#### 3.5.1. FemLab

Para o trabalho numérico com o método semi-embutido é utilizado o programa de elementos finitos FemLab desenvolvido na linguagem de programação *Julia*. Segundo Bezanson, Karpinski, & Shah (2012), *Julia* é uma linguagem de programação dinâmica de alto nível projetado para atender aos requisitos de alto desempenho da computação numérica e científica, enquanto também é eficaz para a programação de propósito geral. Recentemente seu uso em pesquisas de métodos numéricos vem crescendo tornando-se popular no meio científico. Por sua vez, a biblioteca FemLab permite realizar análises estáticas lineares e não lineares em duas e três dimensões utilizando elementos isoparamétricos. Esta biblioteca permite também realizar análises com o método semi-embutido e conta com um gerador de malhas apropriado para determinar as interseções dos reforços com os elementos sólidos.

O pós-processamento dos resultados de elementos finitos será feito por meio do programa Paraview® desenvolvido pela companhia Kitware, Inc. O Paraview® é um programa open-

source, multi-plataforma para análise de dados, visualização e exploração de dados de forma interativa em 2D e 3D.

### 3.5.2. ANSYS

O ANSYS® é um programa de simulação de engenharia para análises por elementos finitos. O programa permite a análise estáticas, dinâmicas e de estabilidade em estruturas. Além disso, podem ser realizadas análises não lineares tanto físicas e geométricas com grandes deslocamentos, deformações, plasticidade, viscoplasticidade e fluência. Para a modelagem discreta das vigas foi utilizado o modelo elástico linear visando obter resultados das tensões nos materiais e deslocamentos no meio do vão apenas no domínio elástico.

O ANSYS® oferece o modelo constitutivo não linear obtido a partir do critério de Willam & Warnke (1975), específico para determinação de ruptura de matérias frágeis como o concreto. Elementos SOLID65 de oito nós com três graus de liberdade por nó foram utilizados para modelar o concreto. Esses elementos são susceptíveis de deformação plástica, fissuração nas três direções ortogonais e esmagamento. Um diagrama esquemático do elemento é mostrado na Figura 3.13.

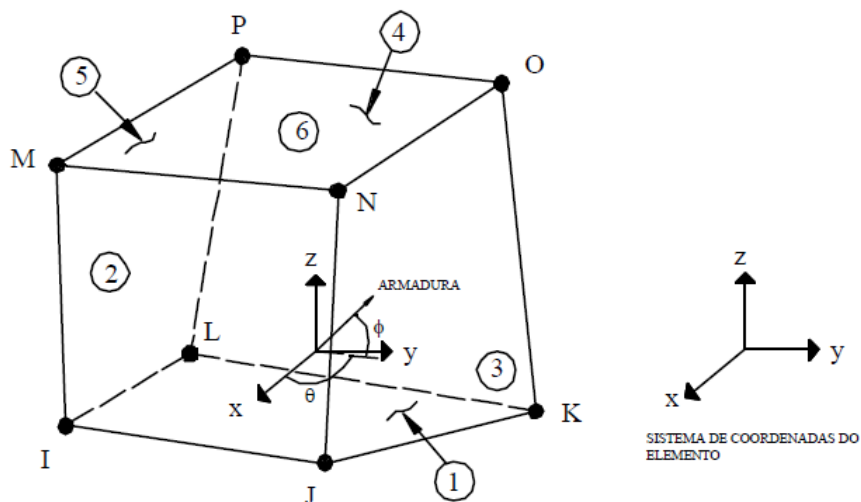


Figura 3.13. Elemento finito tipo SOLID65 (Tristão, 2002).

Elementos LINK180 foram usados para modelar as barras de armadura. Este elemento é um elemento de tensão-compressão uniaxial, com três graus de liberdade em cada nó. LINK180 é capaz de representar materiais que suportam somente compressão, somente tensão ou ambas. O elemento tem capacidade de fornecer rotação, grandes deflexões, grandes tensões, plasticidade

e fluência. A Figura 3.14 mostra a geometria, a localização dos nós e o sistema de coordenadas para este elemento.

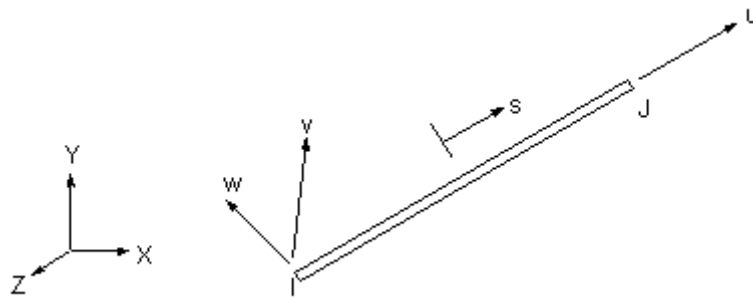


Figura 3.14. Elemento finito tipo LINK180 (SAS, 2013).

Nesta modelagem, os nós das barras e dos elementos sólidos que compartilhem posição são fundidos num só nó para garantir a transmissão de tensões e compatibilidade de formações.

## 4. ESTUDO DE CASOS

Para validar a metodologia de elementos finitos semi-embutidos, foram analisadas vigas simplesmente apoiadas com propriedades geométricas e de materiais especificadas na Tabela 4.1. Essas análises tem o propósito de avaliar o desempenho dos materiais no domínio elástico as tensões nos materiais e o deslocamento no meio do vão. Inicialmente são realizadas análises de vigas no regime elástico utilizando o método semi-embutido e o método discreto cujos resultados são comparados com estimativas analíticas.

Posteriormente foi selecionada aquela viga que apresentou menor discrepância com os resultados analíticos, os resultados da metodologia semi-embutido e os resultados pela metodologia discreta para avaliar o comportamento das tensões ao longo do comprimento. A seguir, foi proposta uma configuração de carregamento pontual para a viga previamente selecionada, levando em conta o comportamento estrutural previsto visando avaliar os resultados obtidos analiticamente e numericamente.

Finalmente, o método semi-embutido é avaliado por meio do estudo de 3 vigas analisadas experimentalmente presentes na literatura no que se refere ao comportamento não linear do elemento através da curva carga-deslocamento. O modelo Drucker-Prager foi abordado no estudo com as aproximações de tensão triaxial, biaxial e uniaxial com a superfície do modelo de Mohr-Coulomb. Além disso, foi implementado na metodologia semi-embutido o módulo de endurecimento ( $H$ ) para o critério de Drucker-Prager, visando atingir resultados mais próximos ao comportamento obtido experimentalmente das vigas avaliadas.

### 4.1. CONFIGURAÇÃO DAS VIGAS

Na primeira etapa deste estudo, propõe-se a avaliação do desempenho estrutural de 9 vigas com os seguintes parâmetros constantes: a base ( $b$ ), o comprimento ( $L$ ), a área transversal de armadura ( $A_s$ ) e a resistência a tração do aço ( $f_{yd}$ ). As 9 vigas são divididas em 3 grupos diferenciados pela relação do comprimento e da altura ( $L/h$ ). A relação ( $L/h$ ) do grupo 1 é 10; para o grupo 2 é próxima de 12 e para o grupo 3 é próxima de 14. Além disso, as 3 vigas de cada grupo têm valores diferentes para a resistência à compressão do concreto, de 25, 30 e 35 MPa, comumente usados no projeto de estruturas. Foi considerado aço de classificação CA-50 para a armadura. Esta classificação é comumente utilizada na indústria da construção civil e possui resistência característica de escoamento ( $f_y$ ) de 500 MPa.

A área de aço ( $A_s$ ) foi mantida fixa para todas as vigas em estudo. A seguir, o momento atuante na seção ( $M_{sd}$ ) e a carga distribuída ( $w$ ) correspondente para o estado limite último (ELU), foram calculadas utilizando as formulações descritas no item 3.1 desta dissertação. Desta forma, é possível caracterizar o desempenho das vigas com diferentes relações do comprimento e da altura ( $L/h$ ) e diferentes valores da resistência à compressão do concreto, conservando a quantidade de aço nas análises. A Tabela 4.1 indica as configurações antes descritas das vigas e os valores calculados. A Figura 4.1 esquematiza a configuração geométrica das vigas.

Tabela 4.1. Configurações das vigas avaliadas na primeira etapa das análises.

$L$ (m)	$b$ (m)	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	$f_{yd}$ (MPa)	<i>Grupo</i>	$h$ (m)	$f_{ck}$ (MPa)	$M_k$ (kN·m)	$M_{sd}$ (kN·m)	$w$ (kN/m)	<i>Código</i>
5	0.25	12.57	434.78 (verificar 3.4.1)	1	0.5	25	151.42	211.988	67.8362	V1-25
						30	156.1	218.54	69.9328	V1-30
						35	159.45	223.23	71.4336	V1-35
				2	0.42	25	120.2	168.28	53.8496	V2-25
						30	124.88	174.832	55.9462	V2-30
						35	128.23	179.522	57.447	V2-35
				3	0.36	25	96.78	135.492	43.3574	V3-25
						30	101.47	142.058	45.4586	V3-30
						35	104.81	146.734	46.9549	V3-35

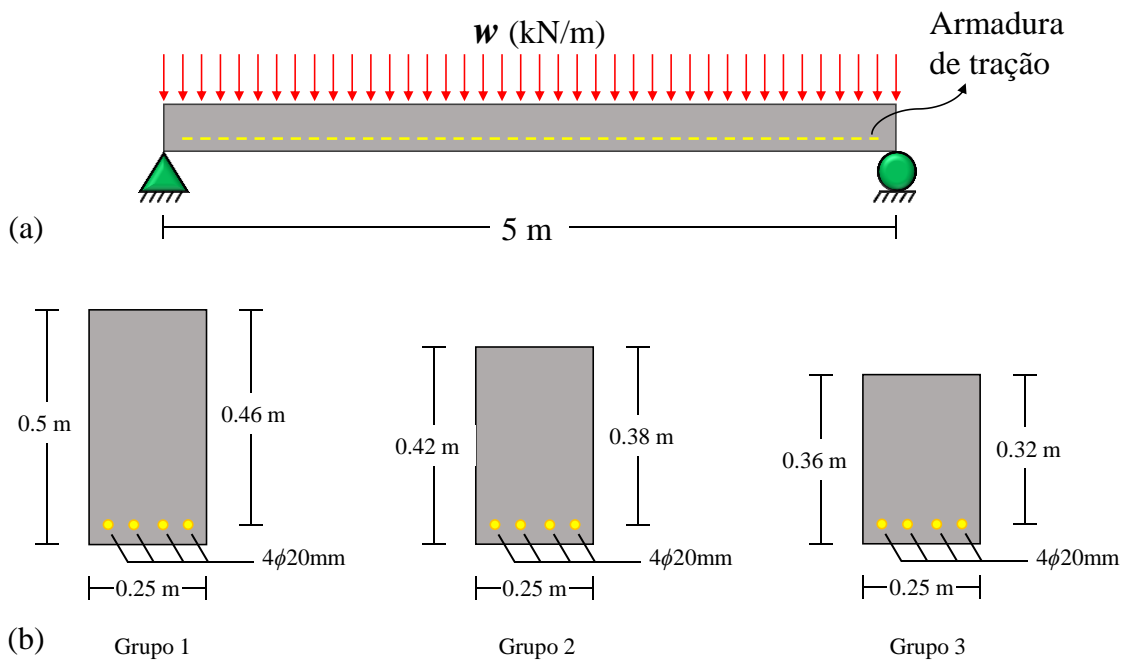


Figura 4.1. Configuração geométrica das vigas: (a) Geometria da viga e condições de contorno. (b) Seções correspondentes aos 3 grupos de vigas estudadas.

Na modelagem numérica das vigas pelo método semi-embutido no *software* FemLab, o volume que representa o concreto foi discretizado em 560 elementos hexaédricos de 20 nós com 27 pontos de integração. A armadura de flexão, composta por 4 vergalhões que atravessam os elementos sólidos, foi discretizada em elementos finitos de barra de 3 nós. Seguidamente, foram criados os correspondentes elementos de interface com 3 nós cada um, sendo estes elementos compatíveis com os elementos de barra.

Na modelagem feita pelo *software* ANSYS foram utilizados 6000 elementos sólidos tipo SOLID65 para representar o concreto e 200 elementos LINK180 para simular o aço discretizados ao longo das arestas dos elementos sólidos. A modelagem no *software* ANSYS corresponde ao método discreto.

## 4.2. FLECHA IMEDIATA EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO

Neste item são apresentados os valores obtidos da formulação analítica segundo a NBR 6118:2004 e das análises numéricas através do FemLab e da modelagem pelo *software* ANSYS para avaliar a flecha elástica nas vigas indicadas no item 4.1.

#### 4.2.1. Avaliação da flecha segundo NBR 6118:2003

Para a avaliação aproximada da flecha imediata em vigas, são utilizadas as Eqs. (3.4) até a (3.12). Os resultados obtidos para cada viga são apresentados nas Tabelas 4.2, 4.3 e 4.4. As regiões de cor cinza indicam as variáveis que devem ser fornecidas para o cálculo. A última linha das tabelas apresenta o cálculo da flecha no meio do vão obtida pela metodologia segundo a norma NBR 6118:2003 sem considerar fissuração.

Tabela 4.2. Cálculo da flecha imediata para as vigas do grupo 1.

<b>Grupo 1</b>			
<b>Calculo da flecha imediata</b>	<b>VI-25</b>	<b>VI-30</b>	<b>VI-35</b>
$f_{ck}$ (MPa)	25	30	35
$h$ (m)	0.50	0.50	0.50
$b$ (m)	0.25	0.25	0.25
$L$ (m)	5	5	5
$M_{sd}$ (kN·m)	211.998	218.540	223.230
$E_s$ (GPa)	210	210	210
Diâmetro barras $\phi_b$ (mm)	20	20	20
# barras $n_b$	4	4	4
Cobrimento $c$ (m)	0.03	0.03	0.03
$d$ (m)	0.46	0.46	0.46
$E_{cs}$ (MPa)	23800.00	26071.59	28160.54
$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	12.57	12.57	12.57
$n$	8.82	8.05	7.46
$x_{II}$ (m)	0.1625	0.1567	0.1520
$z$ (m)	0.4058	0.4078	0.4093
$I_{II}$ (m <sup>4</sup> )	1.34E-03	1.25E-03	1.18E-03
$I_c$ (m <sup>4</sup> )	2.60E-03	2.60E-03	2.60E-03
$E_{cs}I_c$ (kN·m <sup>2</sup> )	61979.17	67894.78	73334.74
$y_t$ (m)	0.25	0.25	0.25
$\alpha_{Mr}$	1.50	1.50	1.50
$f_{ct,m}$ (kN/m <sup>2</sup> )	2564.96	2896.47	3209.96
$M_r$ (kN·m)	40.08	45.26	50.16
$(EI)_{eq}$ (kN·m <sup>2</sup> )	32070.21	32948.72	33729.59
$\alpha = (5/48)$	0.10417	0.10417	0.10417
$f_i$ (m) para $(EI)_{eq}$	0.01721	0.01727	0.01723
<b><math>f_i</math> (mm) para <math>(EI)_{eq}</math></b>	<b>17.21</b>	<b>17.27</b>	<b>17.23</b>
$f_i$ (m) para $E_{cs}I_c$	0.00891	0.00838	0.00793
<b><math>f_i</math> (mm) para <math>E_{cs}I_c</math></b>	<b>8.91</b>	<b>8.38</b>	<b>7.93</b>



O valor da flecha imediata considerando fissuração no elemento é maior do que duas vezes o valor da flecha sem considerar fissuração por causa do valor da rigidez equivalente,  $(EI)_{eq}$ , que é menor ao valor da rigidez bruta da seção  $(E_{cs}I_c)$ . A variação da resistência à compressão do concreto fornece diferenças na ordem do 6% entre os valores obtidos da flecha imediata sem considerar fissuração.

Tabela 4.3. Calculo da flecha imediata para as vigas do grupo 2.

<b>Grupo 2</b>			
<b>Calculo da flecha imediata</b>	<b>V2-25</b>	<b>V2-30</b>	<b>V2-35</b>
$f_{ck}$ (MPa)	25	30	35
$h$ (m)	0.42	0.42	0.42
$b$ (m)	0.25	0.25	0.25
$L$ (m)	5	5	5
$M_{sd}$ (kN·m)	168.280	174.832	179.522
$E_s$ (GPa)	210	210	210
Diâmetro barras $\phi_b$ (mm)	20	20	20
# barras $n_b$	4	4	4
Cobrimento $c$ (m)	0.03	0.03	0.03
$d$ (m)	0.38	0.38	0.38
$E_{cs}$ (MPa)	23800.00	26071.59	28160.54
$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	12.57	12.57	12.57
$n$	8.82	8.05	7.46
$x_{II}$ (m)	0.1445	0.1395	0.1354
$z$ (m)	0.3318	0.3335	0.3349
$I_{II}$ (m <sup>4</sup> )	8.66E-04	8.12E-04	7.68E-04
$I_c$ (m <sup>4</sup> )	1.54E-03	1.54E-03	1.54E-03
$E_{cs}I_c$ (kN·m <sup>2</sup> )	36735.30	40241.50	43465.79
$y_t$ (m)	0.21	0.21	0.21
$\alpha_{Mr}$	1.50	1.50	1.50
$f_{ct,m}$ (kN/m <sup>2</sup> )	2564.96	2896.47	3209.96
$M_r$ (kN·m)	28.28	31.93	35.39
$(EI)_{eq}$ (kN·m <sup>2</sup> )	20696.20	21278.00	21781.22
$\alpha = (5/48)$	0.10417	0.10417	0.10417
$f_i$ (m) para $(EI)_{eq}$	0.02117	0.02140	0.02146
<b><math>f_i</math> (mm) para <math>(EI)_{eq}</math></b>	<b>21.17</b>	<b>21.40</b>	<b>21.46</b>
$f_i$ (m) para $E_{cs}I_c$	0.01193	0.01131	0.01076
<b><math>f_i</math> (mm) para <math>E_{cs}I_c</math></b>	<b>11.93</b>	<b>11.31</b>	<b>10.76</b>

O comportamento da flecha imediata no grupo 2 segue o comportamento do grupo 1 em relação à diferença entre a flecha com fissuração e a flecha sem fissuração, além da variação na flecha por causa da mudança na resistência à compressão do concreto. No entanto, o grupo 2 apresenta valores da flecha 25% maiores que os valores obtidos no grupo 1.

Tabela 4.4. Cálculo da flecha imediata para as vigas do grupo 3.

<b>Grupo 3</b>			
<b>Calculo da flecha imediata</b>	<b>V3-25</b>	<b>V3-30</b>	<b>V3-35</b>
$f_{ck}$ (MPa)	25	30	35
$h$ (m)	0.36	0.36	0.36
$b$ (m)	0.25	0.25	0.25
$L$ (m)	5	5	5
$M_{sd}$ (kN·m)	135.492	142.058	146.734
$E_s$ (GPa)	210	210	210
Diâmetro barras $\phi_b$ (mm)	20	20	20
# barras $n_b$	4	4	4
Cobrimento $c$ (m)	0.03	0.03	0.03
$d$ (m)	0.32	0.32	0.32
$E_{cs}$ (MPa)	23800.00	26071.59	28160.54
$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	12.57	12.57	12.57
$n$	8.82	8.05	7.46
$x_{II}$ (m)	0.1299	0.1255	0.1219
$z$ (m)	0.2767	0.2782	0.2794
$I_{II}$ (m <sup>4</sup> )	5.83E-04	5.48E-04	5.19E-04
$I_c$ (m <sup>4</sup> )	9.72E-04	9.72E-04	9.72E-04
$E_{cs}I_c$ (kN·m <sup>2</sup> )	23133.60	25341.59	27372.04
$y_t$ (m)	0.18	0.18	0.18
$\alpha_{Mr}$	1.50	1.50	1.50
$f_{ct,m}$ (kN/m <sup>2</sup> )	2564.96	2896.47	3209.96
$M_r$ (kN·m)	20.78	23.46	26.00
$(EI)_{eq}$ (kN·m <sup>2</sup> )	13917.28	14327.56	14677.97
$\alpha = (5/48)$	0.10417	0.10417	0.10417
$f_i$ (m) para $(EI)_{eq}$	0.02535	0.02582	0.02603
$f_i$ (mm) para $(EI)_{eq}$	<b>25.35</b>	<b>25.82</b>	<b>26.03</b>
$f_i$ (m) para $E_{cs}I_c$	0.01525	0.01460	0.01396
$f_i$ (mm) para $E_{cs}I_c$	<b>15.25</b>	<b>14.60</b>	<b>13.96</b>

O grupo 3 apresenta valores de flecha imediata nas vigas sem fissuração da ordem do 23% superiores que os valores da mesma flecha do grupo 2, por tanto, verificou-se que a relação  $L/h$  é diretamente proporcional à flecha imediata na viga.

#### 4.2.2. Avaliação da flecha pelo método semi-embutido

A modelagem numérica via elementos finitos semi-embutidos pelo FemLab utiliza a teoria descrita na seção 3.3 e 4.1. O modelo constitutivo utilizado para o concreto e o aço foi elástico linear com propriedades dos materiais indicadas na Tabela 4.5 além daquelas indicadas na Tabela 4.1 e Figura 4.1.

Tabela 4.5. Propriedades dos materiais para a avaliação da flecha pelo método semi-embutido.

<i>ELEMENTOS SÓLIDOS HEX 20 PARA O CONCRETO</i>		<i>ELEMENTOS TIPO BARRA PARA O AÇO</i>	<i>ELEMENTOS DE INTERFACE</i>
$E_{cs}$ (MPa)	<i>Poisson</i> ( $\nu$ )	$E_s$ (GPa)	<i>Rigidez do contato</i> (kN/m/m)
$0.85 * 5600 * \sqrt{f_{ck}}$	0.2	210 GPa	$10^8$

A Tabela 4.6, apresenta os resultados obtidos do cálculo da flecha elástica pelo FemLab. A

Figura 4.2 indica, a título de exemplo, o deslocamento na viga V1-35 avaliada com uma escala de 20.



Figura 4.2. Visualização do deslocamento na viga V1-35 pelo método semi-embutido.

Tabela 4.6. Flecha elástica obtida do método semi-embutido para os grupos 1, 2 e 3.

$f_{ck}$ (MPa)	<i>Flecha Elástica</i> (mm)		
	<i>Grupo 1</i>	<i>Grupo 2</i>	<i>Grupo 3</i>
25	7.91	10.32	12.96
30	7.53	9.91	12.57
35	7.18	9.51	12.14

#### 4.2.3. Avaliação da flecha pelo método discreto

A metodologia discreta empregando o software ANSYS utiliza o modelo elástico linear para os materiais com propriedades especificadas na Tabela 4.7. As condições de contorno e características geométricas das vigas foram as mesmas às aplicadas no caso anterior (FemLab). A Tabela 4.8 mostra os dados obtidos no cálculo da flecha elástica dos 3 grupos de vigas. A Figura 4.3 indica, a título de exemplo, o deslocamento na viga V1-35. Neste *software*, a escala da figura é automática.

Tabela 4.7. Propriedades dos materiais para a avaliação da flecha pelo método discreto.

<i>ELEMENTO SOLID65 PARA O CONCRETO</i>		<i>ELEMENTO LINK 180 PARA O AÇO</i>	
$E_{cs}$ (MPa)	<i>Poisson</i> ( $\nu$ )	$E_s$ (GPa)	<i>Poisson</i> ( $\nu$ )
$0.85 * 5600 * \sqrt{f_{ck}}$	0.2	210	0.3

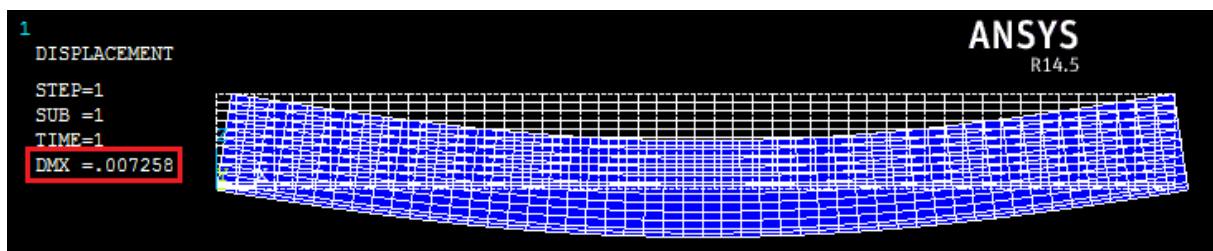


Figura 4.3. Visualização do deslocamento na viga V1-35 avaliada pelo método discreto.

Tabela 4.8. Flecha elástica obtida do método discreto para os grupos 1, 2 e 3.

$f_{ck}$ (MPa)	<i>Flecha Elástica</i> (mm)		
	<i>Grupo 1</i>	<i>Grupo 2</i>	<i>Grupo 3</i>
25	7.99	10.38	13.02
30	7.60	9.97	12.63
35	7.26	9.57	12.20

#### 4.2.4. Comparativo dos resultados obtidos para a flecha elástica

As Figuras 4.4, 4.5 e 4.6 mostram os dados obtidos das análises anteriores com o objetivo de fazer uma comparação das metodologias empregadas.

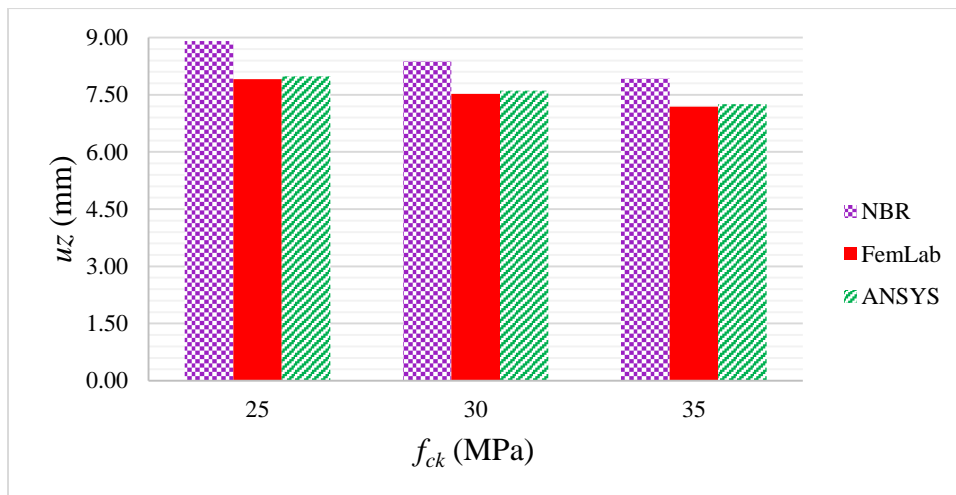


Figura 4.4. Comparativa dos resultados da flecha para o grupo 1.

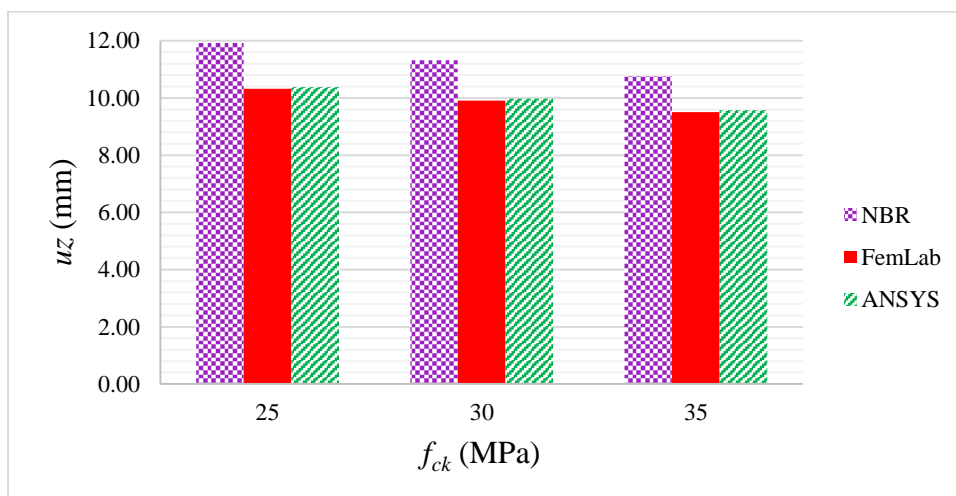


Figura 4.5. Comparativa dos resultados da flecha para o grupo 2.

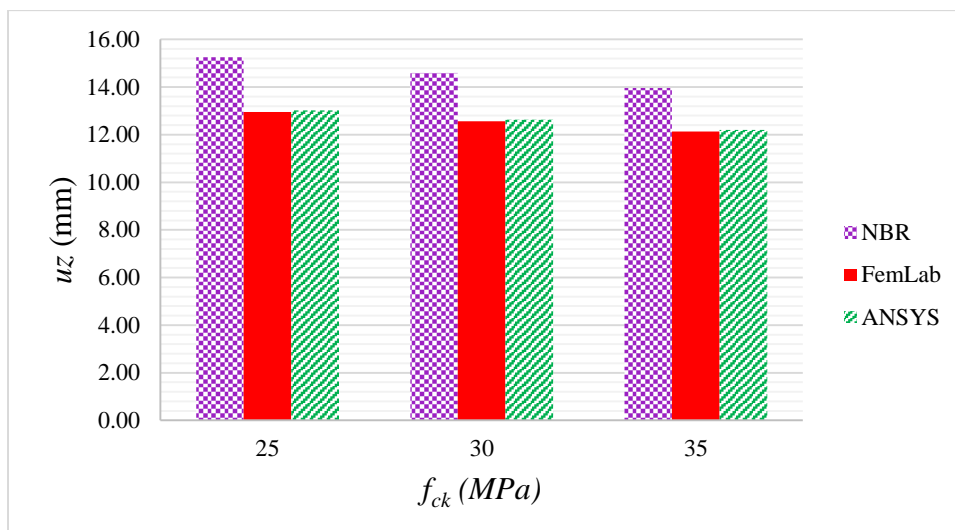


Figura 4.6. Comparativa dos resultados da flecha para o grupo 3.

Com base nos resultados obtidos, as 3 metodologias empregadas indicam que a flecha nas vigas aumenta do grupo 1 ao grupo 3, isto é, a relação do comprimento e da altura é proporcional ao incremento na flecha. O valor maior da flecha nas vigas avaliadas corresponde para o grupo 3 que tem uma relação do comprimento e da altura igual a 14.

Além disso, segundo os resultados obtidos pela formulação analítica e as metodologias numéricas, a resistência à compressão do concreto tem relação inversa ao valor da flecha. As vigas com  $f_{ck}$  de 25 MPa têm maior valor na flecha que as vigas com  $f_{ck}$  de 35 MPa. No método semi-embutido o comportamento antes descrito é reproduzido nos 3 grupos com resultados aproximadamente iguais aos resultados numéricos obtidos pelo método discreto.

A análise feita segundo a NBR 6118:2003 sem considerar a fissuração apresenta valores maiores daqueles obtidos numericamente para flecha nas vigas avaliadas, enquanto os resultados das análises numéricas têm valores muito próximos entre eles. A discrepância dos resultados numéricos com relação aos valores analíticos atribui-se à configuração dos apoios. A formulação analítica considera as restrições dos apoios na metade da altura para cada extremo da viga, embora esta característica não seja explícita na norma NBR6118:2003.

### 4.3. TENSÕES NO CONCRETO E NO AÇO

Neste item são apresentados os valores obtidos das formulações analíticas 1 e 2 e das análises numéricas através do FemLab e da modelagem pelo software ANSYS para avaliar as tensões na fibra mais tracionada e mais comprimida do concreto e tensão no aço para as vigas indicadas no item 4.1.

#### 4.3.1. Avaliação das tensões no domínio elástico pela metodologia analítica 1

A metodologia analítica 1 fornece a tensão na fibra mais tracionada no concreto ( $\sigma_t$ ) e a tensão no aço ( $\sigma_s$ ) através das formulações expostas no item 3.2.1. Os resultados obtidos para cada viga são apresentados nas Tabelas 4.9, 4.10 e 4.11. As regiões de cor cinza indicam as variáveis que devem ser fornecidas para o cálculo. As duas últimas linhas das tabelas apresentam o cálculo das tensões  $\sigma_t$  e  $\sigma_s$  no meio do vão obtidas pela metodologia analítica 1.

Tabela 4.9. Cálculo das tensões pela metodologia analítica 1 para o grupo 1.

<i>Grupo 1</i>			
<i>Calculo de <math>\sigma_t</math> e <math>\sigma_s</math> - Analítica 1</i>	<i>VI-25</i>	<i>VI-30</i>	<i>VI-35</i>
$f_{ck}$ (MPa)	25	30	35
$L$ (m)	5	5	5
$h$ (m)	0.5	0.5	0.5
$b$ (m)	0.25	0.25	0.25
$w$ (kN/m)	67.8362	69.9328	71.4336
$\phi_b$ (m)	0.02	0.02	0.02
$n_b$	4	4	4
<i>Cobrimento <math>c</math> (m)</i>	0.04	0.04	0.03
$E_s$ (GPa)	210	210	210
$E_{cs}$ (MPa)	23800.00	26071.59	28160.54
$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	12.57	12.57	12.57
$d$ (m)	0.46	0.46	0.46
$n$	8.82	8.05	7.46
$M_{sd}$ (kN·m)	211.988	218.54	223.23
$I_c$ (m <sup>4</sup> )	2.60E-03	2.60E-03	2.60E-03
$(A_s)_t$ (m <sup>2</sup> )	0.0111	0.0101	0.0094
$y^-$ (m)	0.2671	0.2657	0.2646
$I_{tr}$ (m <sup>4</sup> )	3.05E-03	3.0171E-03	2.99E-03
$\sigma_t$ (kN/m <sup>2</sup> )	<b>16170.02</b>	<b>16971.21</b>	<b>17582.88</b>
$\sigma_s$ (kN/m <sup>2</sup> )	<b>118172.25</b>	<b>113361.38</b>	<b>108839.44</b>

Verificou-se que as tensões de tração máxima no concreto são diretamente proporcionais à resistência à compressão do concreto, no entanto, a tensão no aço diminui cada que foi acrescentada a resistência à compressão das vigas.

Tabela 4.10. Cálculo das tensões pela metodologia analítica 1 para o grupo 2.

<i>Grupo 2</i>			
<i>Calculo de <math>\sigma_t</math> e <math>\sigma_s</math> - Analítica 1</i>	<i>V2-25</i>	<i>V2-30</i>	<i>V2-35</i>
$f_{ck}$ (MPa)	25	30	35
$L$ (m)	5	5	5
$h$ (m)	0.42	0.42	0.42
$b$ (m)	0.25	0.25	0.25
$w$ (kN/m)	53.8496	55.9462	57.447
$\phi_b$ (m)	0.02	0.02	0.02
$n_b$	4	4	4
Cobrimento $c$ (m)	0.04	0.04	0.04
$E_s$ (GPa)	210	210	210
$E_{cs}$ (MPa)	23800.00	26071.59	28160.54
$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	12.57	12.57	12.57
$d$ (m)	0.38	0.38	0.38
$n$	8.82	8.05	7.46
$M_{sd}$ (kN·m)	168.280	174.832	179.522
$I_c$ (m <sup>4</sup> )	1.54E-03	1.54E-03	1.54E-03
$(A_s)_t$ (m <sup>2</sup> )	0.0111	0.0101	0.0094
$y^-$ (m)	0.2262	0.2249	0.2239
$I_{tr}$ (m <sup>4</sup> )	1.83E-03	1.81E-03	1.79E-03
$\sigma_t$ (kN/m <sup>2</sup> )	<b>17788.70</b>	<b>18841.99</b>	<b>19643.77</b>
$\sigma_s$ (kN/m <sup>2</sup> )	<b>124563.01</b>	<b>120651.60</b>	<b>116608.06</b>

Conferiu-se que as tensões obtidas analiticamente no grupo 2 são maiores que as tensões do grupo 1. Neste caso, se aprecia que o momento de inercia da seção bruta tem relação inversa à magnitude das tensões nos materiais.

Tabela 4.11. Cálculo das tensões pela metodologia analítica 1 para o grupo 3.

<i>Grupo 3</i>			
<i>Calculo de <math>\sigma_t</math> e <math>\sigma_s</math> - Analítica 1</i>	<i>V3-25</i>	<i>V3-30</i>	<i>V3-35</i>
$f_{ck}$ (MPa)	25	30	35
$L$ (m)	5	5	5
$h$ (m)	0.36	0.36	0.36
$b$ (m)	0.25	0.25	0.25



$w$ (kN/m)	43.3574	45.4586	46.9549
$\phi_b$ (m)	0.02	0.02	0.02
$n_b$	4	4	4
Cobrimento $c$ (m)	0.04	0.04	0.04
$E_s$ (GPa)	210	210	210
$E_{cs}$ (MPa)	23800.00	26071.59	28160.54
$A_s$ (m <sup>2</sup> )	12.57	12.57	12.57
$d$ (m)	0.32	0.32	0.32
$n$	8.82	8.05	7.46
$M_{sd}$ (kN·m)	135.492	142.058	146.734
$I_c$ (m <sup>4</sup> )	9.72E-04	9.72E-04	9.72E-04
$(A_s)_t$ (m <sup>2</sup> )	0.0111	0.0101	0.0094
$y^-$ (m)	0.1954	0.1942	0.1932
$I_{tr}$ (m <sup>4</sup> )	1.1655E-03	1.1503E-03	1.1384E-03
$\sigma_t$ (kN/m <sup>2</sup> )	<b>19135.33</b>	<b>20475.13</b>	<b>21500.59</b>
$\sigma_s$ (kN/m <sup>2</sup> )	<b>127810.52</b>	<b>125133.76</b>	<b>121885.47</b>

As tensões do grupo 3 correspondem às maiores tensões obtidas na metodologia analítica 1. Este grupo contém as vigas com menor momento de inércia em relação às vigas dos grupos 1 e 2, confirmando a indecência deste parâmetro no comportamento da tensão de tração máxima do concreto e tensão no aço para nas vigas em estudo.

#### 4.3.2. Avaliação das tensões no domínio elástico pela metodologia analítica 2

A metodologia analítica 2 fornece a tensão na fibra mais comprimida e mais tracionada no concreto e a tensão no aço através das formulações expostas no item 3.2.2. Os resultados obtidos para cada viga são apresentados nas Tabelas 4.12, 4.13 e 4.14. As regiões de cor cinza indicam as variáveis que devem ser fornecidas para o cálculo. As três últimas linhas das tabelas apresentam o cálculo das tensões máximas de compressão ( $\sigma_c$ ) e tração ( $\sigma_t$ ) no concreto e a tensão no aço ( $\sigma_s$ ) no meio do vão obtidas pela metodologia analítica 2.

Tabela 4.12. Cálculo das tensões pela metodologia analítica 2 para o grupo 1.

<i>Grupo 1</i>			
Calculo de $\sigma_c$ , $\sigma_t$ e $\sigma_s$ - Analítica 2	VI-25	VI-30	VI-35
$f_{ck}$ (MPa)	25	30	35
$h$ (m)	0.5	0.5	0.5

$b$ (m)	0.25	0.25	0.25
$w$ (kN/m)	67.8362	69.9328	71.4336
$\varphi_b$ (m)	0.02	0.02	0.02
$n_b$	4	4	4
Cobrimento $c$ (m)	0.04	0.04	0.04
$E_s$ (GPa)	210	210	210
$L$ (m)	5	5	5
$E_{cs}$ (MPa)	23800.00	26071.59	28160.54
$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	12.57	12.57	12.57
$d$ (m)	0.46	0.46	0.46
$x$ (m)	0.2671	0.2657	0.2646
$k$	0.1466	0.1448	0.1434
$L/2$ (m)	2.5	2.5	2.5
$Msd$ (kN·m)	211.988	218.540	223.230
$\sigma_c$ (kN/m <sup>2</sup> )	<b>18545.20</b>	<b>19247.87</b>	<b>19767.32</b>
$\sigma_t$ (kN/m <sup>2</sup> )	<b>16169.33</b>	<b>16968.97</b>	<b>17579.48</b>
$\sigma_s$ (kN/m <sup>2</sup> )	<b>118166.15</b>	<b>113343.32</b>	<b>108814.16</b>

Verifica-se que as tensões no concreto são diretamente proporcionais à resistência à compressão do concreto, no entanto, a tensão no aço tem relação inversamente proporcional com o valor de  $f_{ck}$ .

Tabela 4.13. Cálculo das tensões pela metodologia analítica 2 para o grupo 2.

<b>Grupo 2</b>			
<b>Calculo de <math>\sigma_c</math>, <math>\sigma_t</math> e <math>\sigma_s</math> - Analítica 2</b>	<b>V2-25</b>	<b>V2-30</b>	<b>V2-35</b>
$f_{ck}$ (MPa)	25	30	35
$h$ (m)	0.42	0.42	0.42
$b$ (m)	0.25	0.25	0.25
$w$ (kN/m)	53.8496	55.9462	57.447
$\phi_b$ (m)	0.02	0.02	0.02
$n_b$	4	4	4
Cobrimento $c$ (m)	0.04	0.04	0.04
$E_s$ (MPa)	210000	210000	210000
$L$ (m)	5	5	5
$E_{cs}$ (MPa)	23800.00	26071.59	28160.54
$A_s$ (m <sup>2</sup> )	12.57	12.57	12.57
$d$ (m)	0.38	0.38	0.38
$x$ (m)	0.2262	0.2249	0.2239

$k$	0.1048	0.1034	0.1024
$L/2$ (m)	2.5	2.5	2.5
$Msd$ (kN·m)	168.280	174.832	179.522
$\sigma_c$ (kN/m <sup>2</sup> )	<b>20766.09</b>	<b>21724.48</b>	<b>22431.46</b>
$\sigma_t$ (kN/m <sup>2</sup> )	<b>17785.28</b>	<b>18837.45</b>	<b>19640.85</b>
$\sigma_s$ (kN/m <sup>2</sup> )	<b>124532.81</b>	<b>120615.01</b>	<b>116586.30</b>

A tensão máxima de compressão no concreto segue o mesmo comportamento antes descrito da tensão máxima de tração neste material, além de ter valores maiores para o grupo 2 em relação aos valores do grupo 1.

Tabela 4.14. Cálculo das tensões pela metodologia analítica 2 para o grupo 3.

<i>Grupo 3</i>			
<i>Calculo de <math>\sigma_c</math>, <math>\sigma_t</math> e <math>\sigma_s</math> - Analítica 2</i>	<i>V3-25</i>	<i>V3-30</i>	<i>V3-35</i>
$f_{ck}$ (MPa)	25	30	35
$h$ (m)	0.36	0.36	0.36
$b$ (m)	0.25	0.25	0.25
$w$ (kN/m)	43.3574	45.4586	46.9549
$\phi_b$ (m)	0.02	0.02	0.02
$n_b$	4	4	4
<i>Cobrimento <math>c</math></i> (m)	0.04	0.04	0.04
$E_s$ (GPa)	210	210	210
$L$ (m)	5	5	5
$E_{cs}$ (MPa)	23800.00	26071.59	28160.54
$A_s$ (m <sup>2</sup> )	12.57	12.57	12.57
$d$ (m)	0.32	0.32	0.32
$x$ (m)	0.1954	0.1941	0.1932
$k$	0.0777	0.0767	0.0759
$L/2$ (m)	2.5	2.5	2.5
$Msd$ (kN·m)	135.492	142.058	146.734
$\sigma_c$ (kN/m <sup>2</sup> )	<b>22710.82</b>	<b>23976.60</b>	<b>24903.90</b>
$\sigma_t$ (kN/m <sup>2</sup> )	<b>19140.42</b>	<b>20480.91</b>	<b>21500.28</b>
$\sigma_s$ (kN/m <sup>2</sup> )	<b>127855.46</b>	<b>125180.25</b>	<b>121883.11</b>

Neste ponto, as tensões obtidas pela formulação analítica 1 têm o mesmo comportamento das tensões fornecidas pela formulação analítica 2.

### 4.3.3. Avaliação das tensões no domínio elástico pelo método semi-embutido

A modelagem numérica via elementos finitos semi-embutidos pelo FemLab utiliza a teoria descrita na seção 3.3. O modelo constitutivo utilizado para o concreto e o aço foi elástico linear com propriedades dos materiais indicadas na Tabela 4.5 além daquelas indicadas na Tabela 4.1 e Figura 4.1. Nas Tabelas 4.15 e 4.16 são apresentados os resultados obtidos do cálculo das tensões no concreto e no aço no domínio elástico pelo FemLab. As Figuras 4.7 e 4.8 indicam, a título de exemplo, o campo de tensões  $\sigma_x$  no concreto e  $\sigma_s$  no aço na viga V1-35.

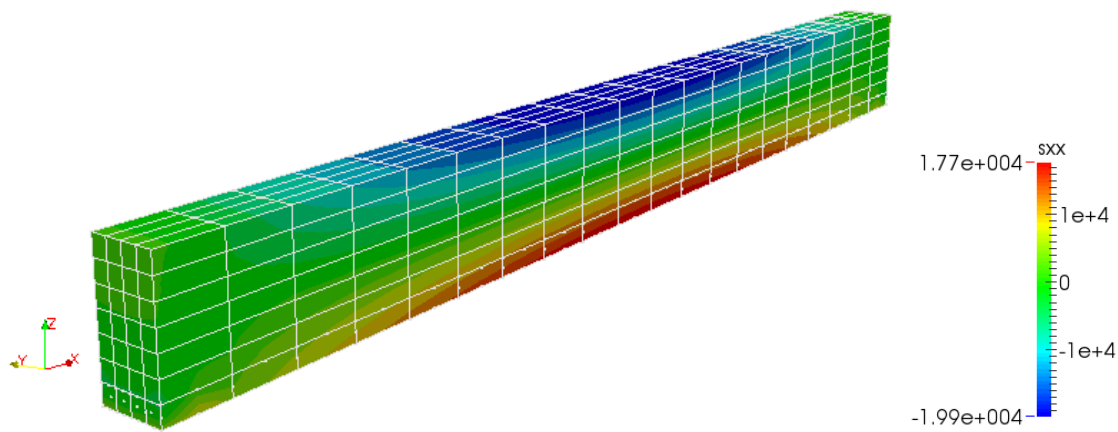


Figura 4.7. Tensões no concreto na viga V1-35 calculadas no *software* FemLab.

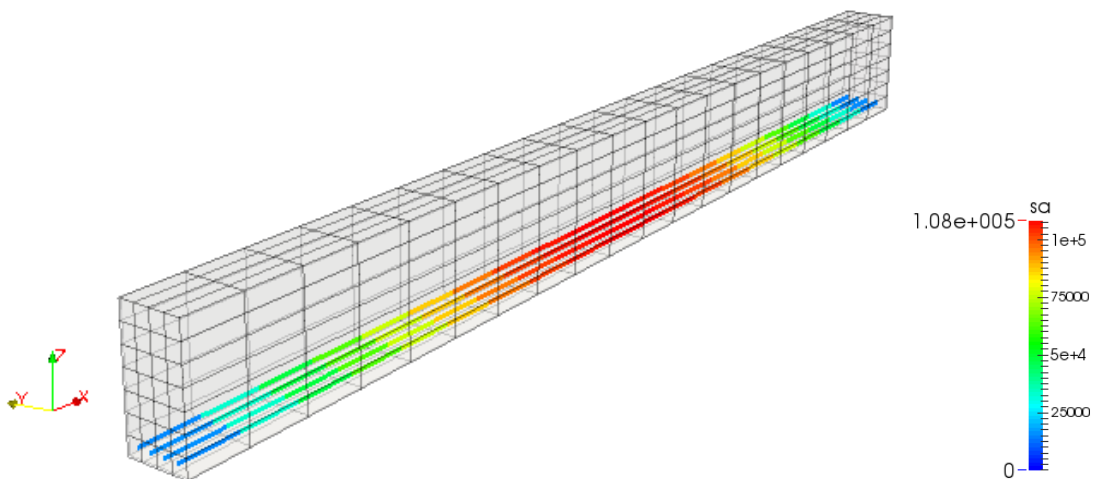


Figura 4.8. Tensões no aço na viga V1-35 calculada no *software* FemLab.

Tabela 4.15. Tensões no concreto no domínio elástico pelo FemLab para os grupos 1, 2 e 3.

$f_{ck}$ (MPa)	<i>Grupo 1</i>		<i>Grupo 2</i>		<i>Grupo 3</i>	
	$\sigma_c$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_t$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_c$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_t$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_c$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_t$ (kN/m <sup>2</sup> )

25	18642.9	16253	20854.9	17864.7	22792.3	19216.2
30	19348	17055.7	21816.2	18920.2	24061.4	20560.3
35	19869.1	17668.4	22525.1	19725.9	24991.1	21582.3

Tabela 4.16. Tensão no aço no domínio elástico pelo FemLab para os grupos 1, 2 e 3.

$f_{ck}$ (MPa)	$\sigma_s$ (kN/m <sup>2</sup> )		
	<i>Grupo 1</i>	<i>Grupo 2</i>	<i>Grupo 3</i>
25	117472	123776	127068
30	112678	119881	124406
35	108175	115875	121127

#### 4.3.4. Avaliação das tensões no domínio elástico pelo método discreto

A metodologia discreta empregando o software ANSYS utiliza o modelo elástico linear para os materiais com propriedades especificadas na Tabela 4.7. As condições de contorno e características geométricas das vigas foram as mesmas às aplicadas no caso anterior (FemLab). Nas Tabelas 4.17 e 4.18 são apresentados os resultados obtidos do cálculo das tensões no domínio elástico pelo ANSYS. As Figuras 4.9 e 4.10 indicam a título de exemplo a visualização pelo ANSYS das tensões no concreto e no aço nas vigas avaliadas.

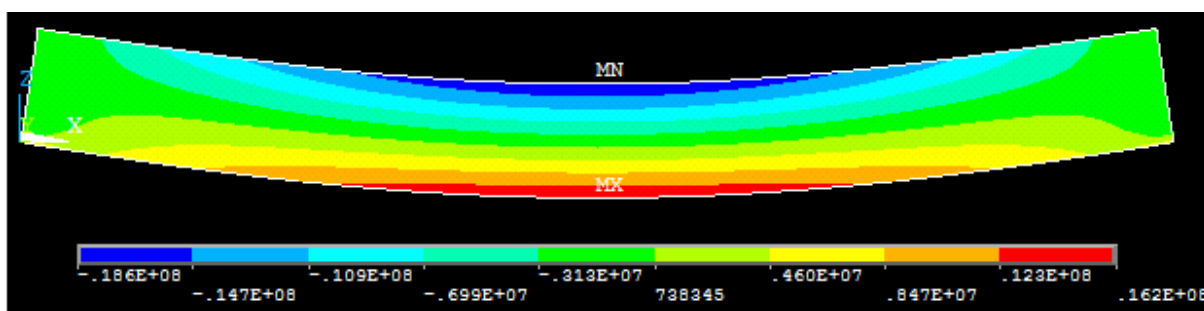


Figura 4.9. Visualização pelo ANSYS das tensões no concreto nas vigas avaliadas.

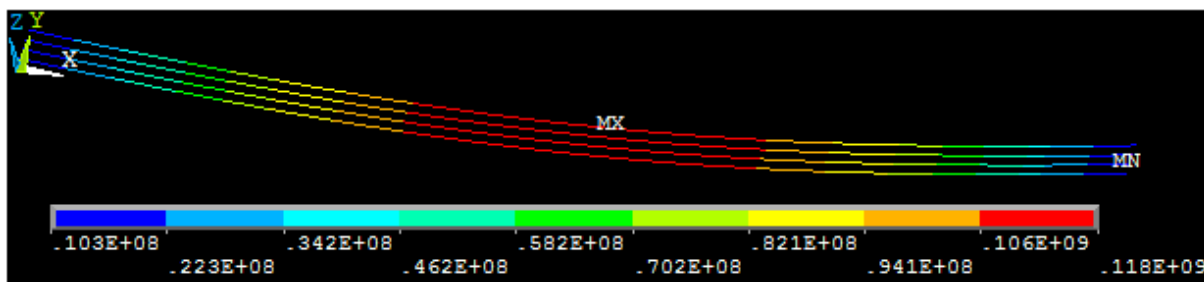


Figura 4.10. Visualização pelo ANSYS das tensões no aço nas vigas avaliadas.

Tabela 4.17. Tensões no concreto no domínio elástico pelo ANSYS para os grupos 1, 2 e 3.

$f_{ck}$ (MPa)	<b>GRUPO 1</b>		<b>GRUPO 2</b>		<b>GRUPO 3</b>	
	$\sigma_c$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_t$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_c$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_t$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_c$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_t$ (kN/m <sup>2</sup> )
25	18600	16200	20800	17800	22700	19200
30	19300	17000	21800	18900	24000	20500
35	19800	17600	22500	19700	24900	21500

Tabela 4.18. Tensão no aço no domínio elástico pelo ANSYS para os grupos 1, 2 e 3.

$f_{ck}$ (MPa)	$\sigma_s$ (kN/m <sup>2</sup> )		
	<b>GRUPO 1</b>	<b>GRUPO 2</b>	<b>GRUPO 3</b>
25	118000	124000	128000
30	113000	120000	125000
35	109000	116000	122000

#### 4.3.5. Comparativo dos resultados obtidos para as tensões no domínio elástico

Inicialmente são apresentados os resultados obtidos para a tensão máxima de compressão do concreto. As Figuras 4.11, 4.12 e 4.13 mostram os dados obtidos das tensões máximas de compressão do concreto com o objetivo de fazer uma comparação das metodologias empregadas.

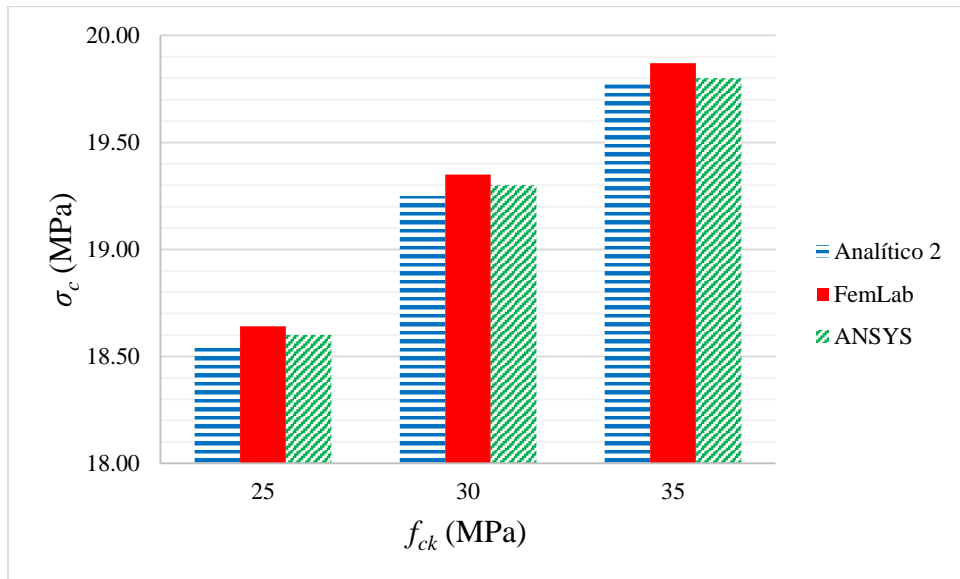


Figura 4.11. Tensão máxima de compressão do concreto para o grupo 1.

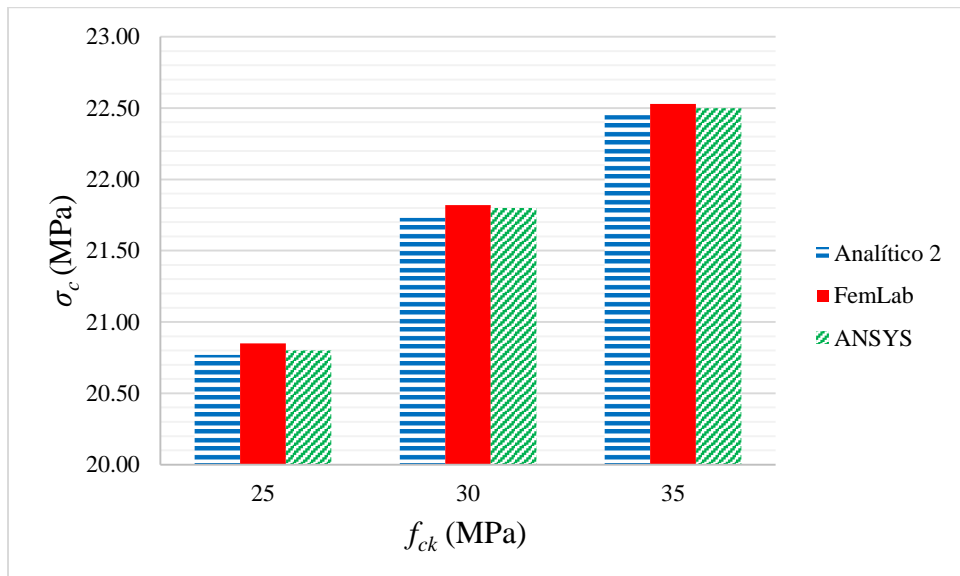


Figura 4.12. Tensão máxima de compressão do concreto para o grupo 2.

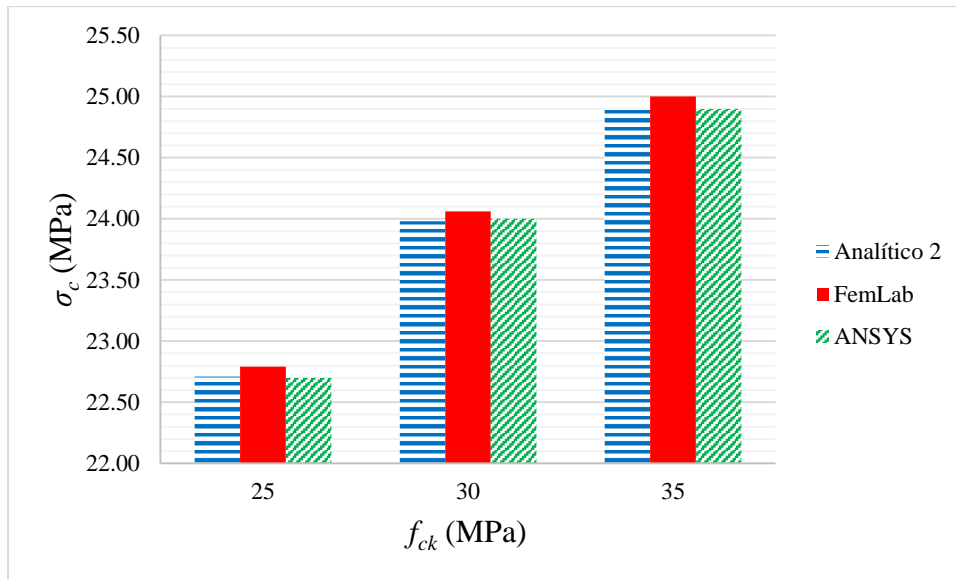


Figura 4.13. Tensão máxima de compressão do concreto para o grupo 3.

A resistência à compressão do concreto influi diretamente nas tensões à compressão do elemento; as vigas com maior valor da resistência à compressão experimentam os valores mais altos de tensões de compressão. A análise feita pelo método semi-embutido segue o comportamento anteriormente descrito para os 3 grupos, mas apresentando o maior valor de tensões em relação as outras metodologias abordadas. Uma das causas deste comportamento é o nível de discretização da malha. Na metodologia discreta a malha é mais refinada que a utilizada no método semi-embutido, conseguindo resultados muito próximos ao valor fornecido pela metodologia analítica 2, embora os resultados do método semi-embutido têm bom nível de aproximação em relação à metodologia analítica utilizada.

A seguir são apresentadas as Figuras 4.14, 4.15 e 4.16 que mostram um comparativo dos resultados da tensão máxima de tração.

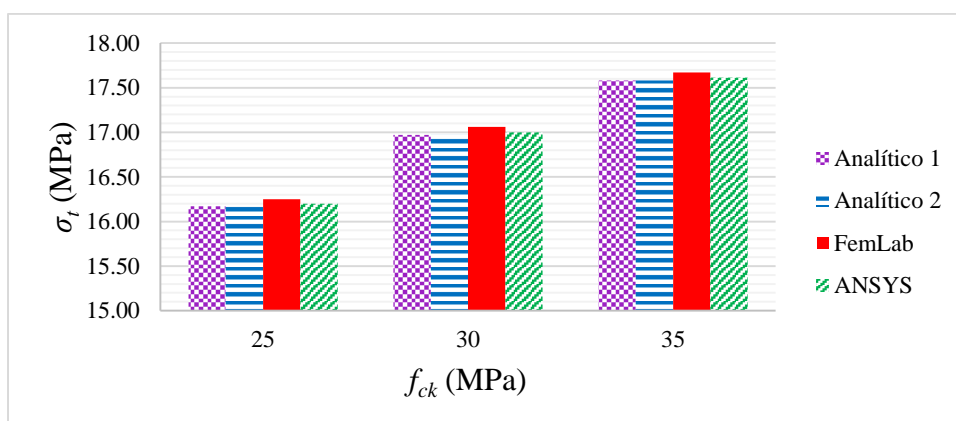


Figura 4.14. Tensão na fibra mais tracionada do concreto para o grupo 1.



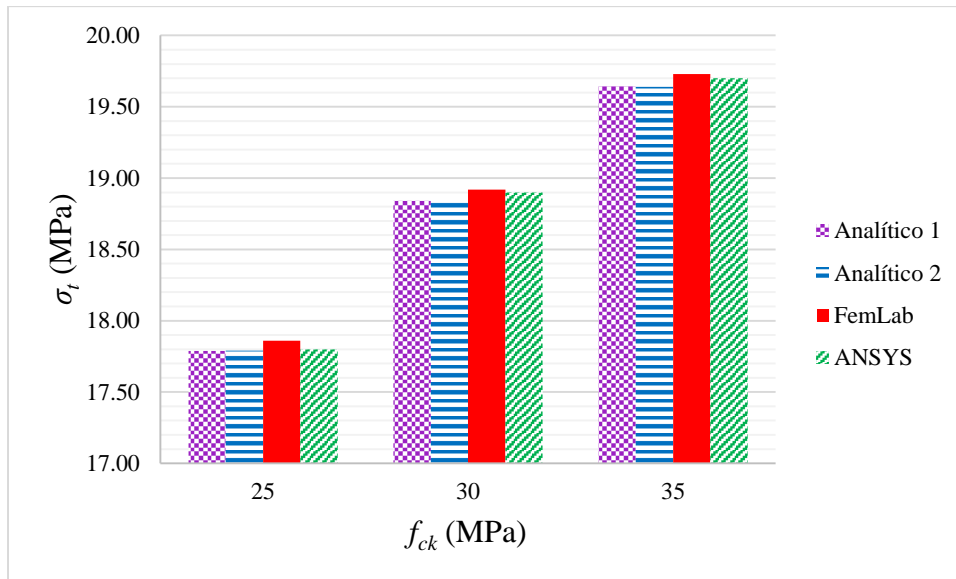


Figura 4.15. Tensão na fibra mais tracionada do concreto para o grupo 2.

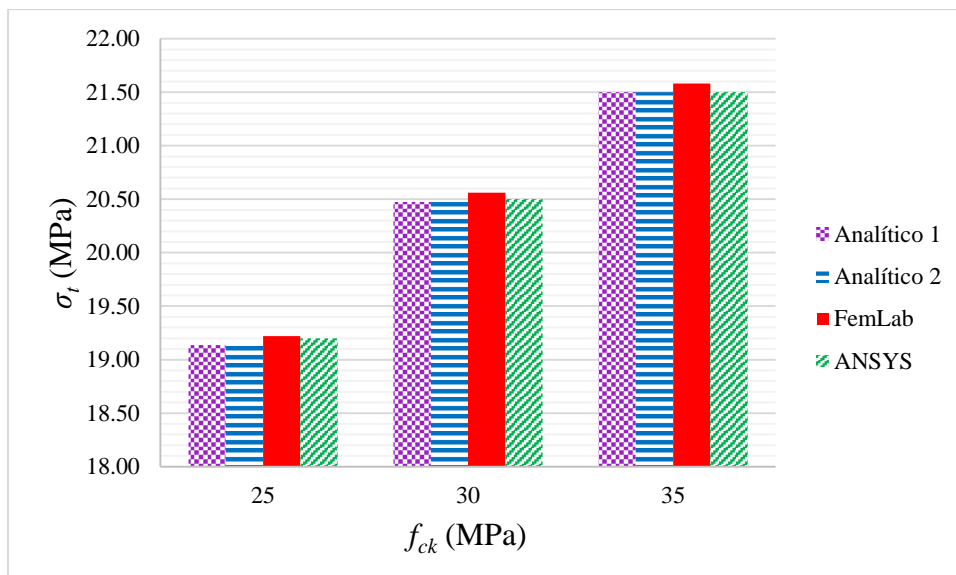


Figura 4.16. Tensão na fibra mais tracionada do concreto para o grupo 3.

O grupo 3 exibe a maior tensão de tração para os elementos avaliados, enquanto o grupo 1 nas 4 metodologias abordadas apresenta as menores tensões de tração no concreto. As vigas com resistência à compressão de 35 MPa têm os maiores valores de tensão máxima de tração no concreto em todos os grupos em relação daquelas vigas com resistências à compressão de 25 e 30 MPa.

As formulações analíticas apresentam valores de tensão de tração aproximadamente iguais. No entanto, a análise feita pelo FemLab consegue valores de tensão maiores aos obtidos pelo ANSYS e aos valores obtidos analiticamente para os 3 grupos por causa do malhado descrito

anteriormente. No entanto, a metodologia semi-embutida fornece resultados de tensões no domínio elástico para o concreto menores ao 1% de diferença em relação aos valores obtidos pelas formulações analíticas.

As Figuras 4.17, 4.18 e 4.19 indicam os resultados obtidos para as tensões no aço das vigas avaliadas.

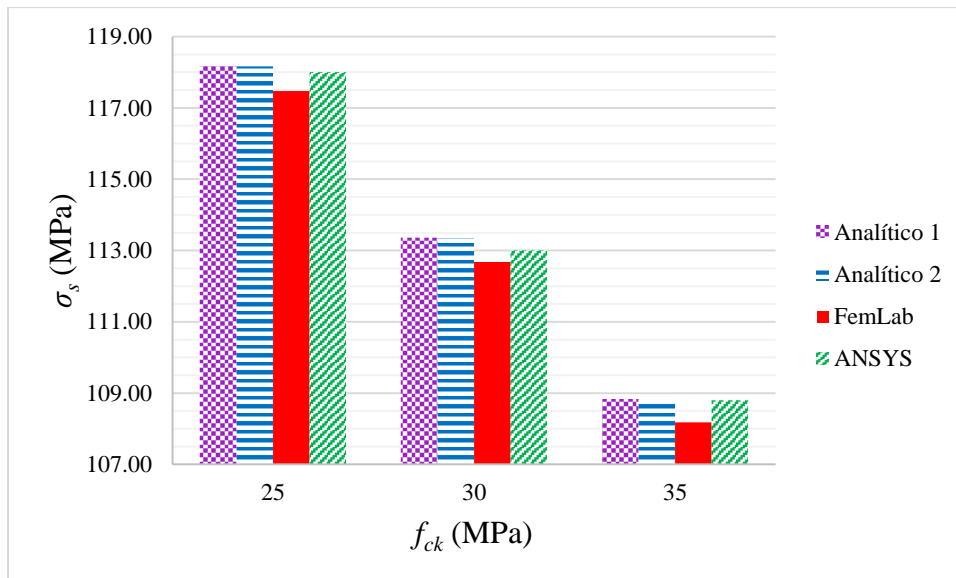


Figura 4.17. Tensão no aço para o grupo 1.

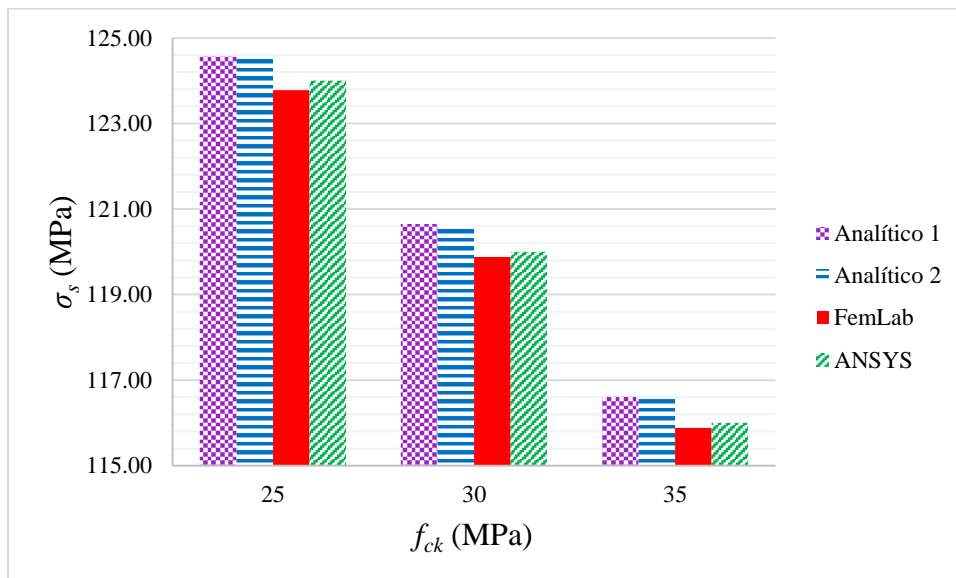


Figura 4.18. Tensão no aço para o grupo 2.

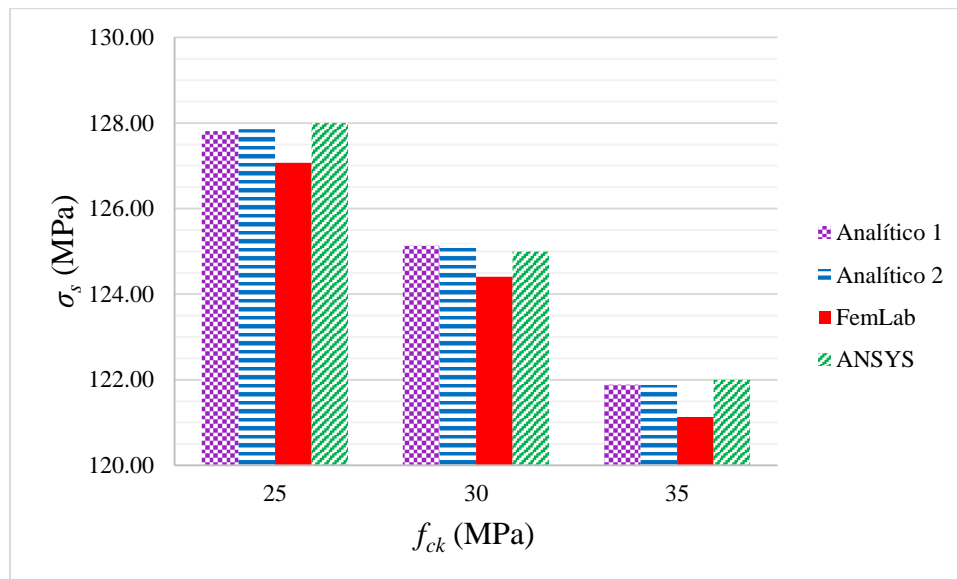


Figura 4.19. Tensão no aço para o grupo 3.

A tensão no aço tem tendência a aumentar conforme a relação do comprimento e da altura aumenta. No entanto, o valor das tensões diminui em variações menores ao 5% quando a resistência a compressão do concreto é acrescentada.

As formulações analíticas fornecem valores aproximadamente iguais com variações pouco significativas dos resultados obtidos pelas análises numéricas do FemLab e do ANSYS. O método semi-embutido fornece resultados de tensões no domínio elástico para o aço menores ao 5% de diferença em relação aos valores obtidos pelas formulações analíticas. atribui-se esta discrepância na discretização da malha na metodologia semi-embutida, embora os resultados sejam muito próximos às outras metodologias empregadas na análise das vigas.

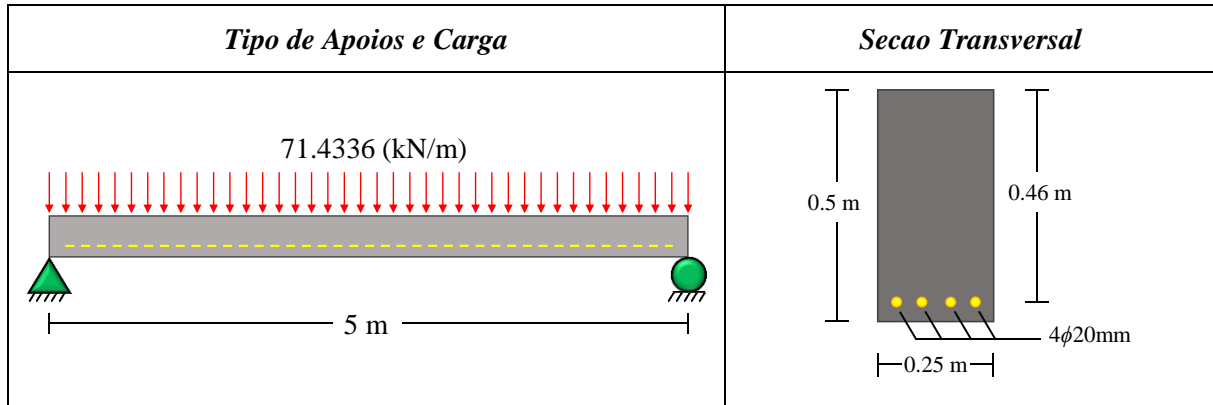
#### 4.4. ANÁLISE ELÁSTICO DE TENSÕES AO LONGO DO COMPRIMENTO

Das análises feitas nos itens 4.2 e 4.3 foi selecionada a viga V1-35 para ser avaliadas as tensões ao longo do comprimento. A seleção da viga corresponde à menor diferença entre os resultados das metodologias analíticas y numéricas. A formulação analítica 2 consegue descrever o comportamento das tensões no concreto e no aço ao longo do comprimento porque são diretamente proporcionais ao momento da seção. As Tabelas 4.19 e 4.20 indicam as propriedades geométricas, das solicitações e dos materiais da viga avaliada.

Tabela 4.19. Propriedades da viga avaliada ao longo do comprimento.

$L$ (m)	$b$ (m)	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	$f_{yd}$ (MPa)	$h$ (m)	$f_{ck}$ (MPa)	$M_k$ (kN·m)	$M_{sd}$ (kN·m)	$w$ (kN/m)
5	0.25	12.57	434.78	0.50	35	159.45	223.23	71.4336

Tabela 4.20. Configuração dos apoios, da carga e da armadura na viga selecionada.



O diagrama de momento fletor da viga selecionada e mostrado na Figura 4.20.

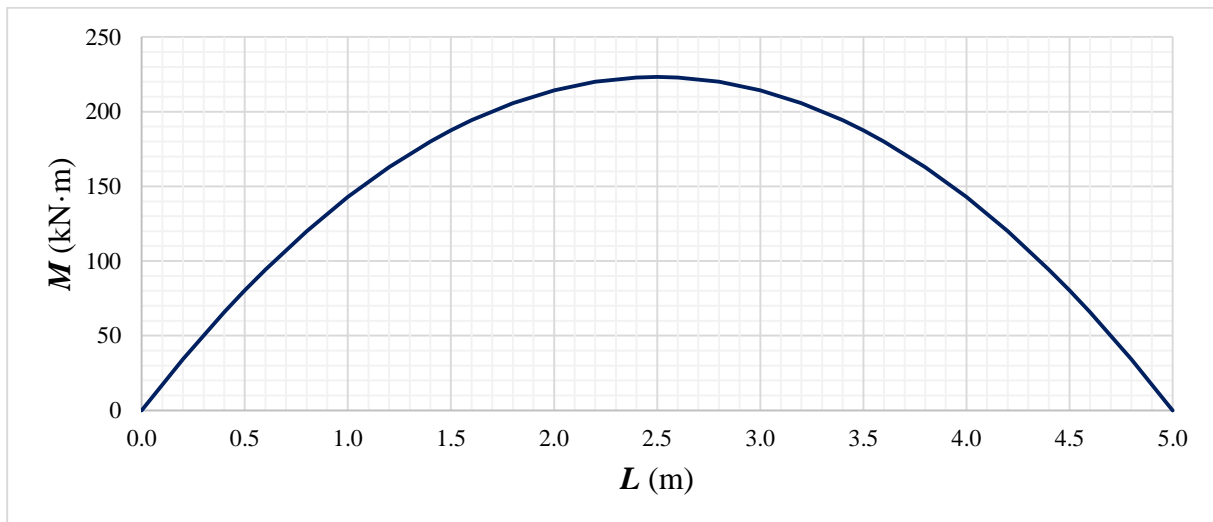


Figura 4.20. Diagrama de momento fletor da viga V1-35.

A Figura 4.21 mostra a tensão na fibra mais comprimida do concreto.

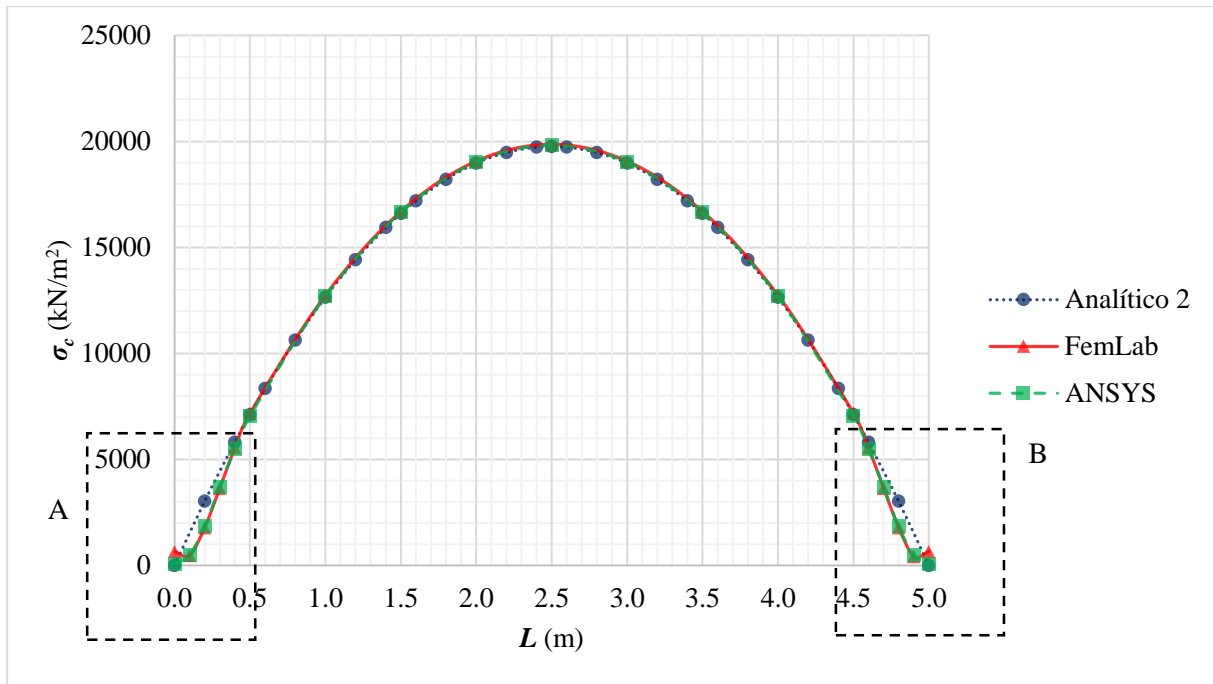


Figura 4.21. Tensão na fibra mais comprimida do concreto da viga selecionada.

A Figura 4.22 mostra as regiões pontilhadas A e B da Figura 4.21.

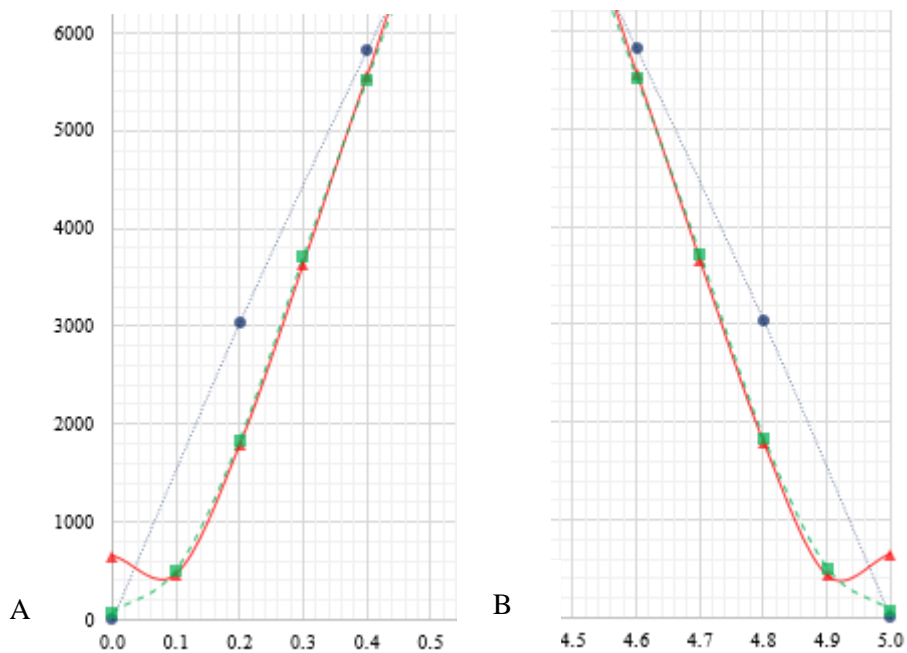


Figura 4.22. Regiões Pontilhadas A e B da Figura 4.21.

As metodologias numéricas conseguem representar as zonas de concentração de tensões na proximidade dos apoios. Nestas regiões os estados de tensão não são compatíveis com as hipóteses estabelecidas para as formulações analíticas. As tensões das metodologias numéricas

são menores às obtidas pela metodologia analítica numa distância menor á 50 cm dos apoios. No restante do comprimento, as metodologias empregadas conseguem resultados próximos dos obtidos pela metodologia analítica.

O primeiro e último dato da tensão na fibra mais comprimida obtido pelo FemLab (653.98 kN/m<sup>2</sup> e 653.97 kN/m<sup>2</sup> respectivamente) são significativamente superior aos dados obtidos pelo ANSYS (75.67 kN/m<sup>2</sup> no início e no final do comprimento) e pela metodologia analítica (0 kN/m<sup>2</sup> no início e no final do comprimento).

A Figura 4.23 mostra a tensão na fibra mais tracionada do concreto.

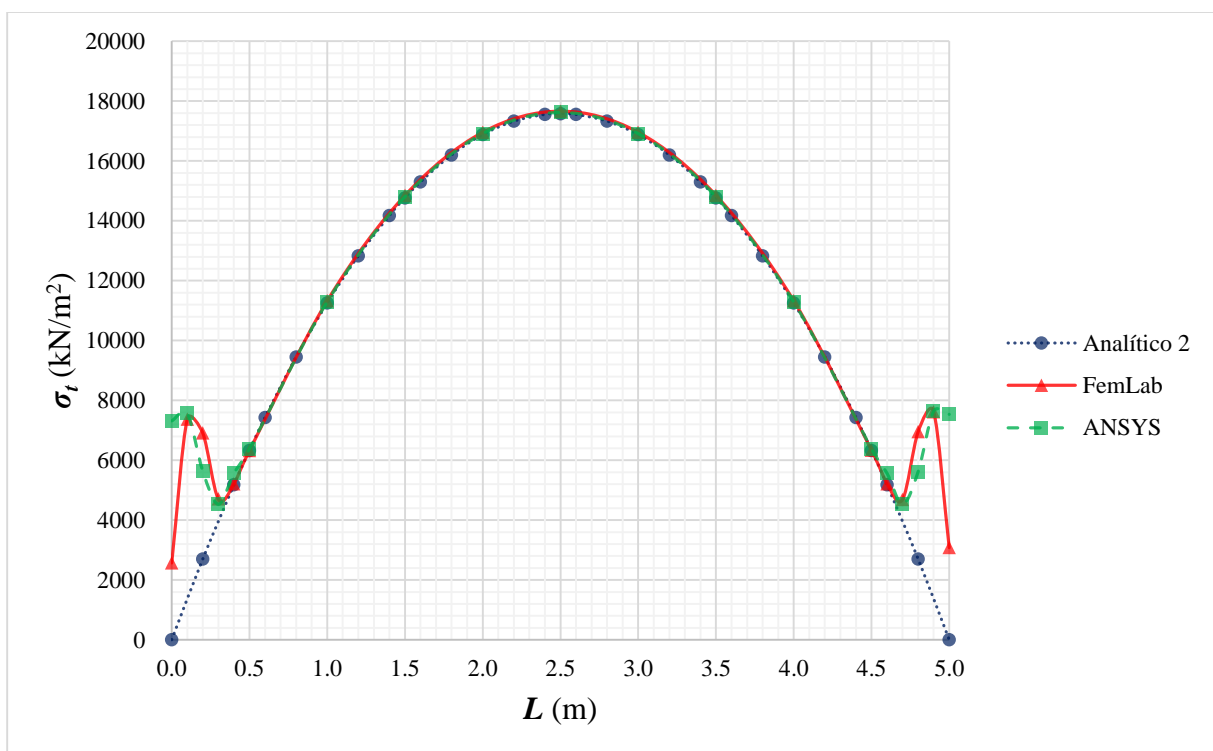


Figura 4.23. Tensão na fibra mais tracionada do concreto.

Na região de concentração de tensões perto dos apoios, o método discreto fornece os valores maiores em comparação com o método semi-embutido e a metodologia analítica 2. Na região central, todas as metodologias conseguem valores muito próximos.

A Figura 4.24 mostra as tensões de compressão ( $\sigma_c$ ) com valores positivos e tração ( $\sigma_s$ ) com valores negativos, ao longo da viga V1-35.

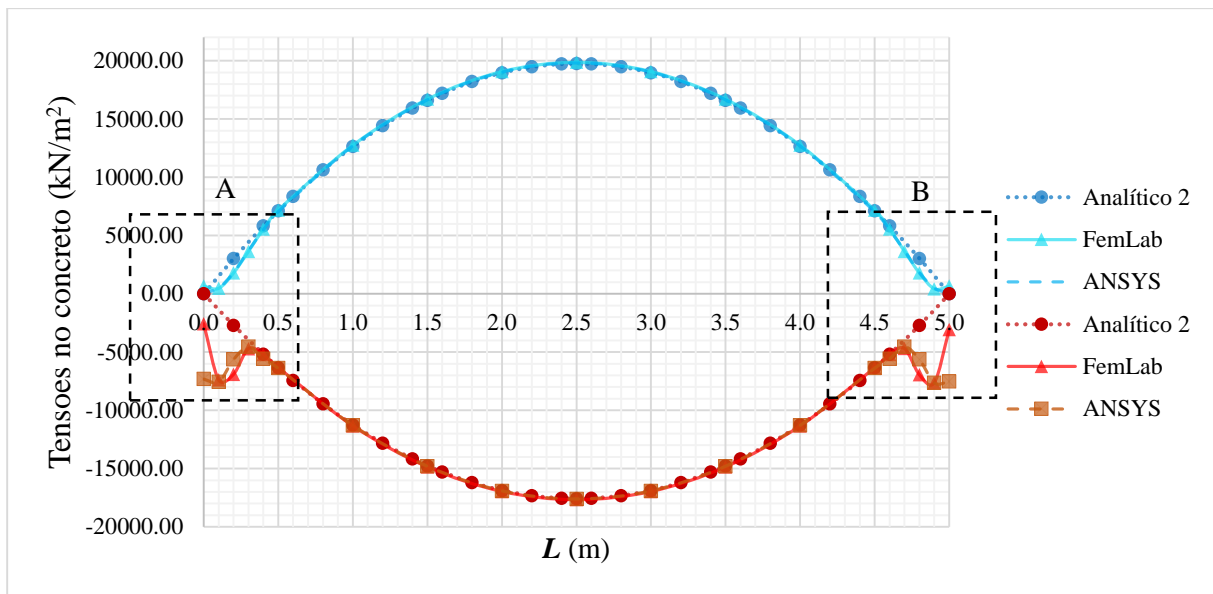


Figura 4.24. Tensões de compressão (positivas) e tração (negativas) ao longo da viga selecionada.

A Figura 4.25 mostra as regiões pontilhadas A e B da Figura 4.24.

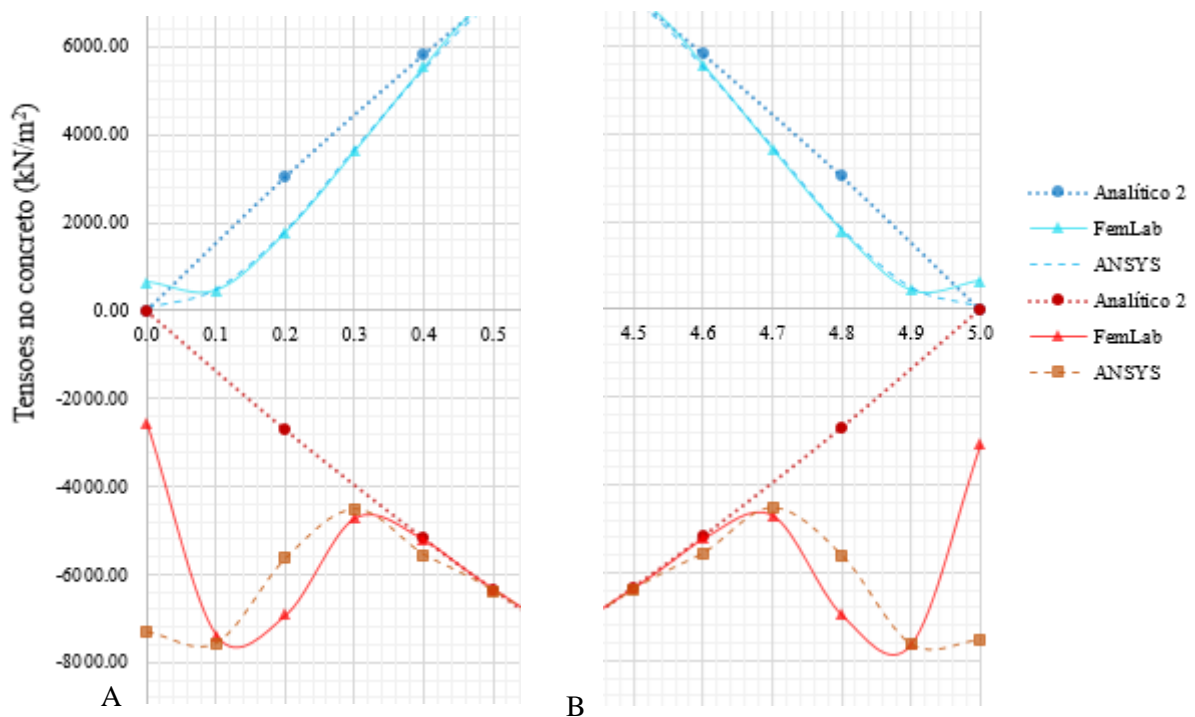


Figura 4.25. Regiões Pontilhadas A e B da Figura 4.24.

A região de maior concentração de tensões é representada pelas metodologias numéricas, enquanto a metodologia analítica não tem como obter valores de tensão nesta região relacionados com as reações nos apoios. Nestas regiões os estados de tensão não são compatíveis com as hipóteses estabelecidas para as formulações analíticas.

A Figura 4.26 indica as tensões no aço para a viga selecionada.

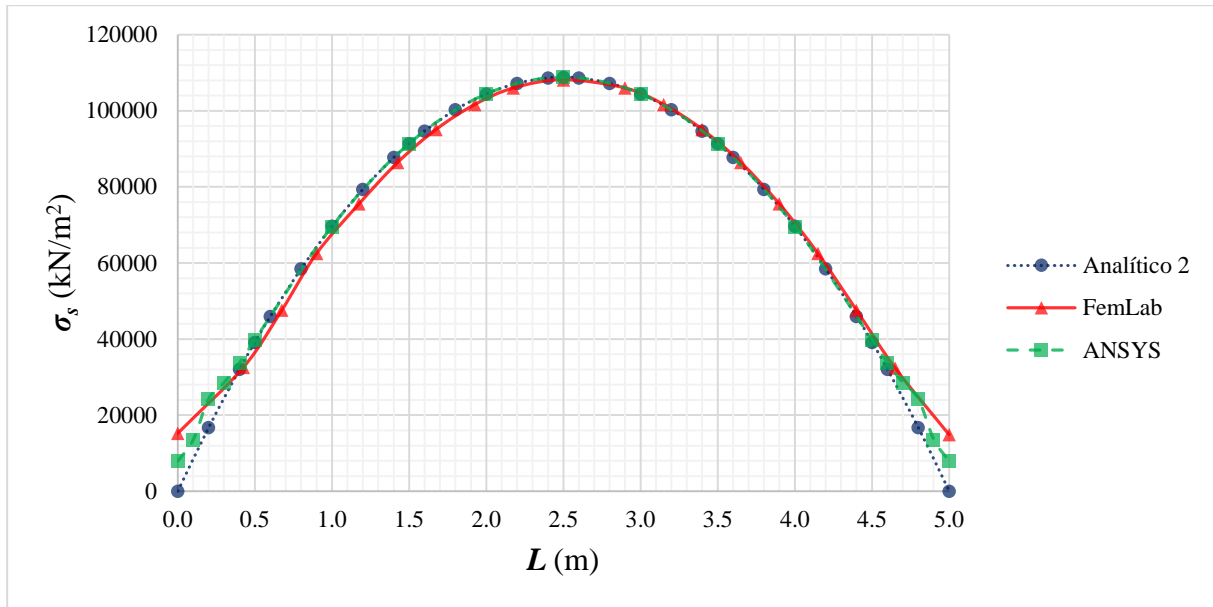


Figura 4.26. Tensões no aço da viga selecionada.

A metodologia analítica não consegue descrever o comportamento das tensões no aço perto dos apoios, mas as metodologias numéricas conseguem resultados baseados nas ações combinadas do momento e das reações nos apoios. A região perto dos apoios onde a diferença é notória corresponde a aproximadamente 40 cm. O FemLab fornece resultados confiáveis baseado nos resultados obtidos pelo ANSYS.

Para finalizar às análises elásticas, propõe-se avaliar uma viga com iguais características geométricas da viga selecionada mas com configuração de carga pontual (Ensaio de quatro pontos). A Tabela 4.21 indica as características geométricas e de carga da viga proposta, onde a carga ( $w$ ) é 133.938 kN e o momento fletor ( $M$ ) é de 223.23 kN·m.

Tabela 4.21. Configuração da viga com carregamento de quatro pontos.

<i>Tipo de Apoios e Carga</i>	<i>Secao Transversal</i>



A Figura 4.27 apresenta o diagrama de momento fletor da viga com carregamento de quatro pontos.

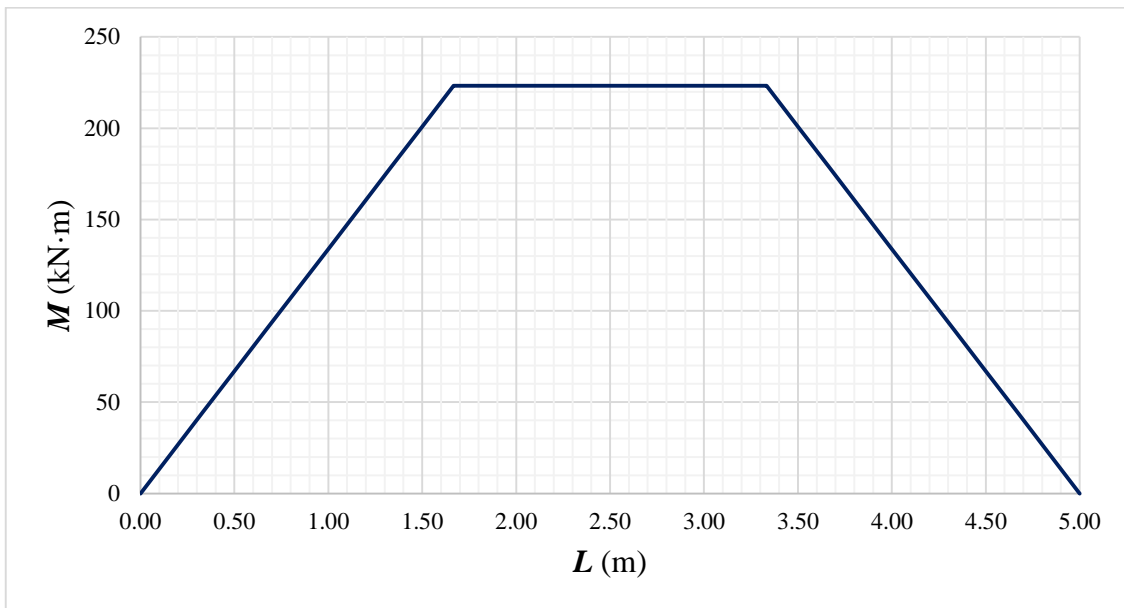


Figura 4.27. Diagrama de momento fletor da viga com carregamento de quatro pontos.

A Figura 4.28 mostra a tensão na fibra mais comprimida do concreto para a viga proposta.

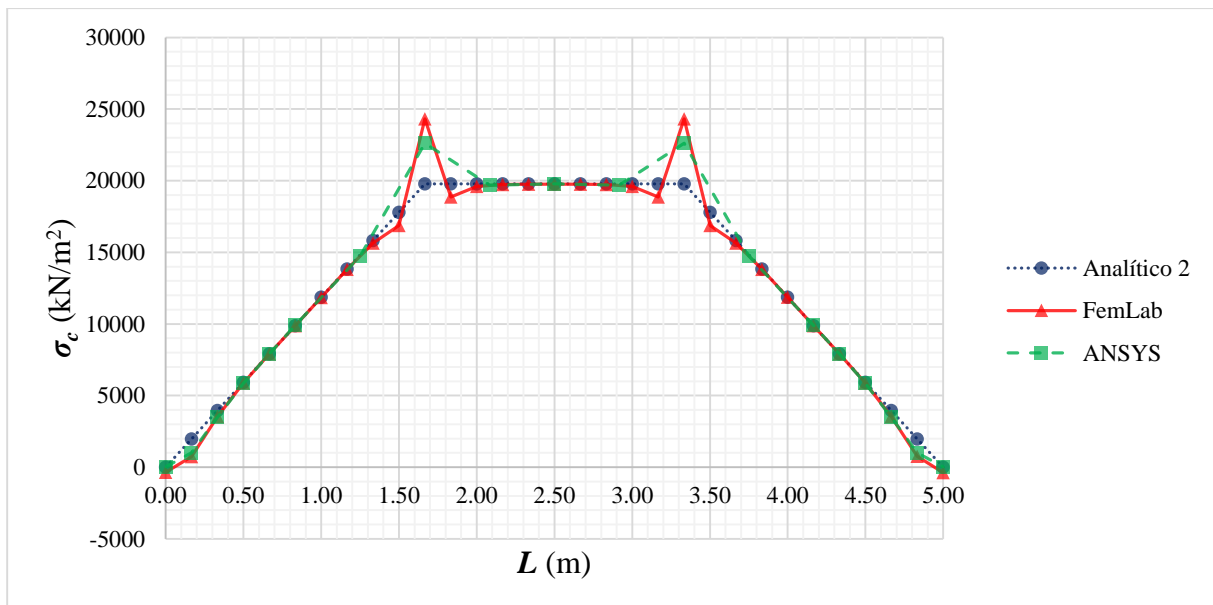


Figura 4.28. Tensão na fibra mais comprimida do concreto para a viga com carregamento de quatro pontos.

A região de aplicação da carga apresenta uma distribuição de tensões diferente para a metodologia analítica e para a metodologia numérica. O FemLab e o ANSYS conseguem

resultados que dependem da aplicação pontual da carga, enquanto a metodologia analítica só consegue tensões que dependem do momento na seção. Nos apoios as modelagens numéricas têm o comportamento descrito para a viga com carga distribuída. A Figura 4.29 mostra a tensão na fibra mais tracionada do concreto.

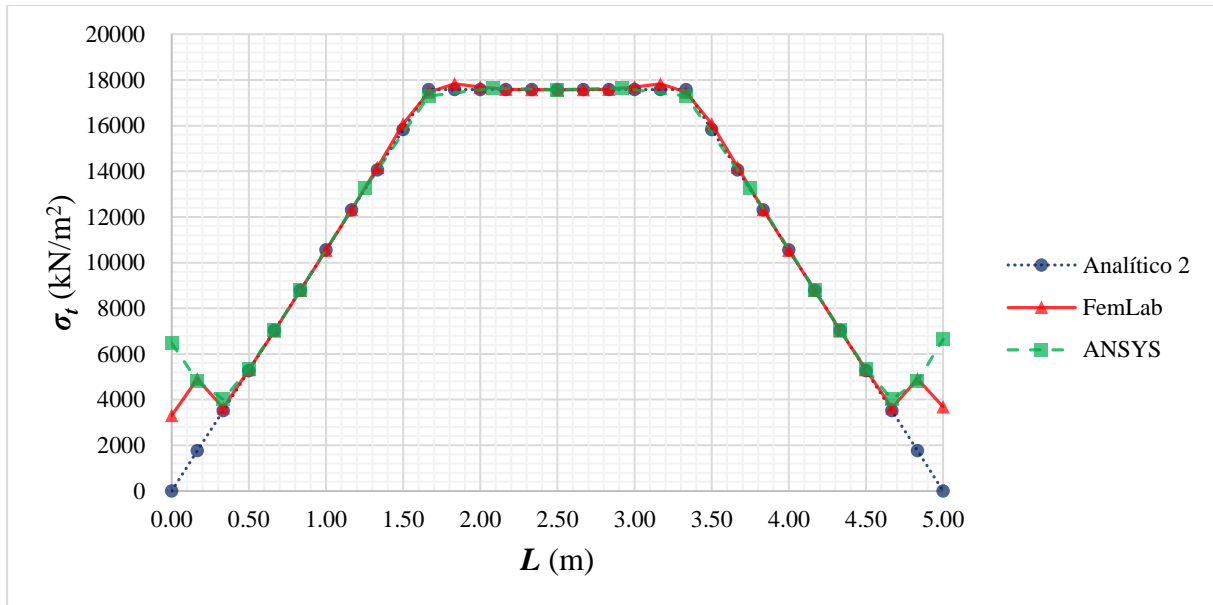


Figura 4.29. Tensão na fibra mais tracionada do concreto para a viga com carregamento de quatro pontos.

A região de concentração de tensões de tração é 50 cm perto dos apoios, onde as metodologias numéricas conseguem dados relacionados com as reações nos apoios mas a metodologia analítica depende do momento atuante na seção avaliada. A Figura 4.30 indica as tensões no aço para a viga selecionada.

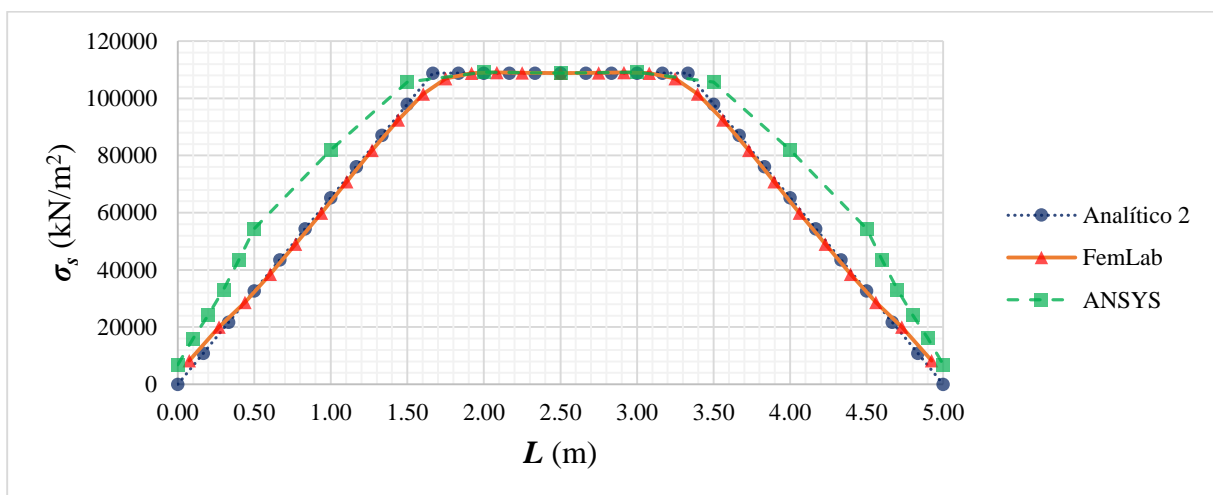


Figura 4.30. Tensão no aço da viga com carregamento de quatro pontos.

O ANSYS não consegue valores próximos das formulações analíticas e da modelagem feita pelo FemLab. Neste sentido, o FemLab obteve valores que seguem o comportamento analítico da viga. Isto sugere que o método semi-embutido é capaz de fornecer valores mais acurados para  $\sigma_s$ .

Por último, em razão da discrepância nos dados obtidos entre o método semi-embutido e o método discreto foi feita uma análise de convergência para a modelagem da viga com carregamento distribuído pelo FemLab. A Tabela 4.22 indica os resultados obtidos para diferentes tamanhos de elementos sólidos.  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$  indicam as divisões no eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente,  $n_e$  corresponde ao número de elementos sólidos gerados na modelagem e  $L_e$  é o comprimento do elemento solido medido como a raiz quadrada da soma dos lados do elemento ao quadrado. Inicialmente para a análise de convergência foram utilizados elementos sólidos HEX20 que são elementos hexaédricos de 20 nós e elementos lineares LIN3 com 3 nós. Logo foram utilizados elementos sólidos HEX8 de 8 nós e elementos lineares LIN2 de 2 nós. Os parâmetros de comparação de resultados são as tensões máximas de compressão ( $\sigma_c$ ) e de tração ( $\sigma_t$ ) no concreto e tensão axial no aço ( $\sigma_s$ ).

Tabela 4.22. Análise de convergência do FemLab para a viga com carga distribuída.

$u_x$	$u_y$	$u_z$	$n_e$	$L_e$	Elemento sólido	Elemento linear	$\sigma_c$		$\sigma_t$		$\sigma_s$	
							( $kN/m^2$ )	Erro	( $kN/m^2$ )	Erro	( $kN/m^2$ )	Erro
20	4	7	560	0.26741	HEX20	LIN3	19863.6	0.49%	17662.9	0.47%	108175	0.59%
1	1	1	1	5.03115	HEX20	LIN3	12856.6	34.96%	11757.4	33.12%	72287.1	33.57%
1	1	2	2	5.01248	HEX20	LIN3	13208.2	33.18%	11897.3	32.32%	72549.8	33.33%
1	1	4	4	5.00781	HEX20	LIN3	13226.1	33.09%	11931.6	32.13%	72570	33.31%
1	1	10	10	5.00650	HEX20	LIN3	13239.9	33.02%	11941	32.07%	72571.5	33.31%
1	1	15	15	5.00636	HEX20	LIN3	13241.8	33.01%	11941.7	32.07%	72570.2	33.31%
1	2	1	2	5.02649	HEX20	LIN3	12891.6	34.78%	11708.5	33.40%	72306.5	33.55%
1	3	1	3	5.02563	HEX20	LIN3	12885.3	34.82%	11706.5	33.41%	72309.3	33.55%
1	6	1	6	5.02511	HEX20	LIN3	12887.8	34.80%	11696.3	33.47%	72312.2	33.55%
2	1	1	2	2.56174	HEX20	LIN3	16955.2	14.23%	14735.8	16.18%	72172.9	33.67%
4	1	1	4	1.36931	HEX20	LIN3	19847.2	0.40%	17543.4	0.21%	98939.8	9.07%
10	1	1	10	0.75000	HEX20	LIN3	19853.9	0.44%	17640.3	0.35%	107045	1.63%

20	1	1	20	0.61237	HEX20	LIN3	19779	0.06%	17575.1	0.02%	108162	0.60%
30	1	1	30	0.58333	HEX20	LIN3	19761.7	0.03%	17559.9	0.11%	108366	0.41%
12	3	6	216	0.43301	HEX8	LIN2	15716.1	20.4945%	13990	20.4186%	85382.8	21.5334%
18	4	8	576	0.29150	HEX8	LIN2	17817.5	9.8639%	15854.7	9.8113%	96931.5	10.9201%
24	6	11	1584	0.21727	HEX8	LIN2	18669	5.5563%	16610.8	5.5103%	101696	6.5416%
33	8	16	4224	0.15783	HEX8	LIN2	19199.3	2.8735%	17078.3	2.8510%	104909	3.5888%
45	11	23	11385	0.11548	HEX8	LIN2	19499.9	1.3529%	17344.3	1.3378%	106549	2.0817%

De acordo à anterior tabela, o elemento HEX20 facilita a rápida convergência dos resultados somente discretizando no eixo  $x$ . Além disso, o número de elementos na modelagem não é determina propriamente o nível de convergência dos resultados, mas o comprimento do elemento tem relação direta com a convergência dos dados obtidos. A Figura 4.31, em escala logarítmica, apresenta a variação do erro de acordo com o tamanho característico do elemento para 5 discretizações feitas com elementos HEX8 e LIN2 para determinar o seu desempenho. Nesta figura, as linhas conseguem uma tendência quase reta indicando a acurácia da convergência dos resultados numéricos.

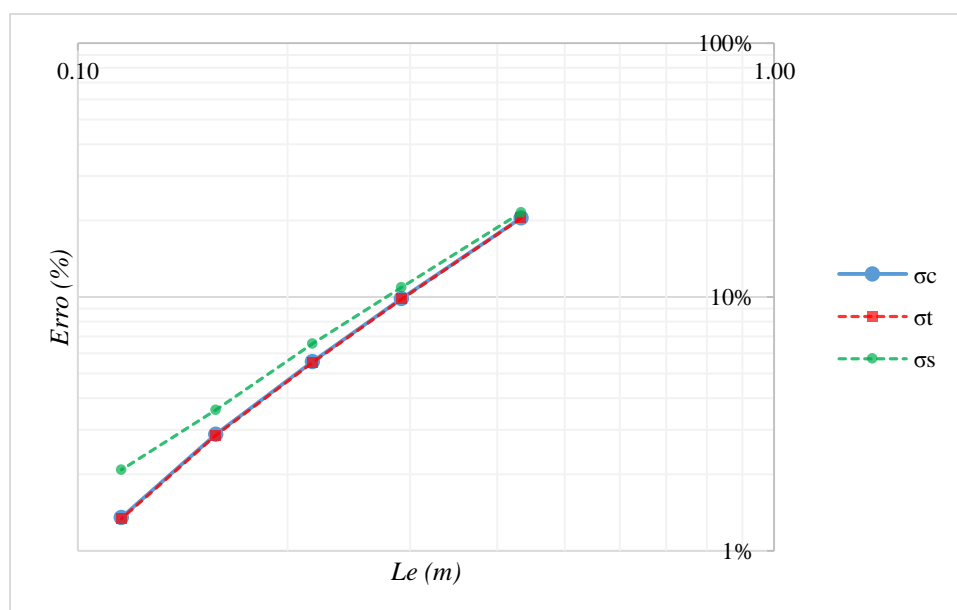


Figura 4.31. Convergência do FemLab para a viga com carregamento distribuído.

Dados 2 pontos de tensão no aço ( $\sigma_s$ ), a inclinação da reta pode ser estimada por meio da seguinte expressão:

$$m = \frac{\text{Log} \frac{\text{erro1}}{\text{erro2}}}{\text{Log} \frac{L_{e1}}{L_{e2}}} \quad (4.1)$$

onde  $m$  é a inclinação da reta, que para os pontos dados tem um valor aproximado de 1.8 o que é próximo ao valor esperado de 2 que indica a relação lineal existente entre o comprimento do elemento ( $L_e$ ) e o erro (%) dos resultados obtidos. O mais apropriado é realizar uma regressão linear.

#### 4.5. AVALIAÇÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Este item analisa o comportamento da metodologia semi-embutida para vigas submetidas à flexão usando os modelos constitutivos definidos para a armadura, o concreto e a interface. Para essa análise foram utilizados dados experimentais de vigas avaliadas por Angelakos, Bentz, & Collins (2001), Foley & Buckhouse (1998) e Leonhardt e Walther (1962) *apud* Kabele, Červenka, & Červenka (2010). O comportamento carga-deslocamento foi comparado entre os resultados numéricos e os experimentais. As vigas foram modeladas segundo as configurações geométricas e de carregamento estabelecidas pelos autores.

##### 4.5.1. Viga de Angelakos

A primeira viga avaliada numericamente foi baseada no ensaio de Angelakos *et al.* (2001). O comprimento total da viga é 6000 mm, 1000 mm de profundidade e 300 mm de largura, armada com aproximadamente 1% de aço longitudinal sem nenhuma armadura transversal. A carga de ruptura do ensaio é de 360 kN aplicada no meio do vão. A Figura 4.32 descreve a configuração da viga de Angelakos *et al.* (2001).

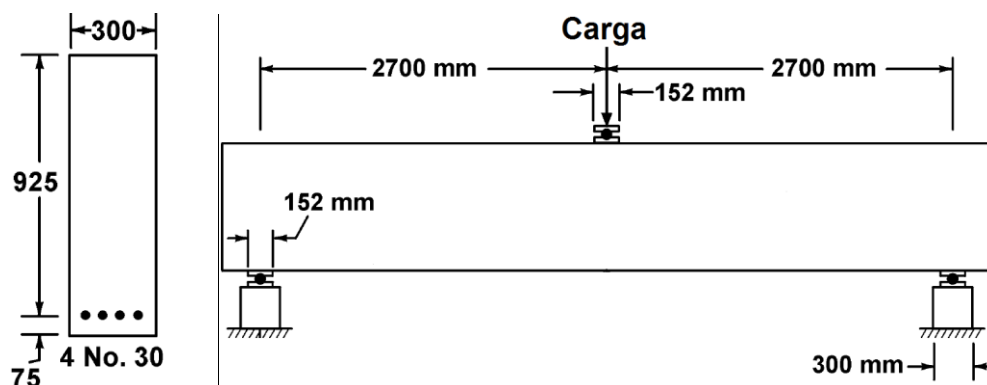


Figura 4.32. Dimensões em mm da viga ensaiada por Angelakos *et al.* (2001).

A Tabela 4.23 apresenta as propriedades utilizadas para o concreto e aço. O módulo de Young utilizado para o concreto é dado por um módulo secante  $E_{cs}^*$  calculado visando aproximar as deformações no momento de ruptura do concreto como mostra a Figura 4.33. Este módulo não corresponde ao módulo secante proposto pela norma,  $E_{cs}$ , e que é utilizado na determinação de esforços solicitantes e na verificação de estados limites de serviço. As características geométricas da viga estudada estão descritas na Tabela 4.24, onde  $L$  é o comprimento,  $b$  é a largura,  $h$  é a altura da viga,  $A_s$  é a área de aço longitudinal e  $w$  é a carga da viga.

Tabela 4.23. Propriedades dos materiais para a modelagem da viga de Angelakos *et al.* (2001).

<i>Concreto</i>			<i>Aço</i>	
$f_{ck}$ (MPa)	$E_{cs}^*$ (MPa)	$\nu$ (poisson)	$f_y$ (MPa)	$E_s$ (GPa)
32	16000	0.2	550	210

Tabela 4.24. Configuração geométrica e carregamento para a modelagem da viga de Angelakos *et al.* (2001).

$L$ (m)	$b$ (m)	$h$ (m)	$A_s$ (m <sup>2</sup> )	$w$ (kN)
6.0	0.30	1.0	0.0007	360

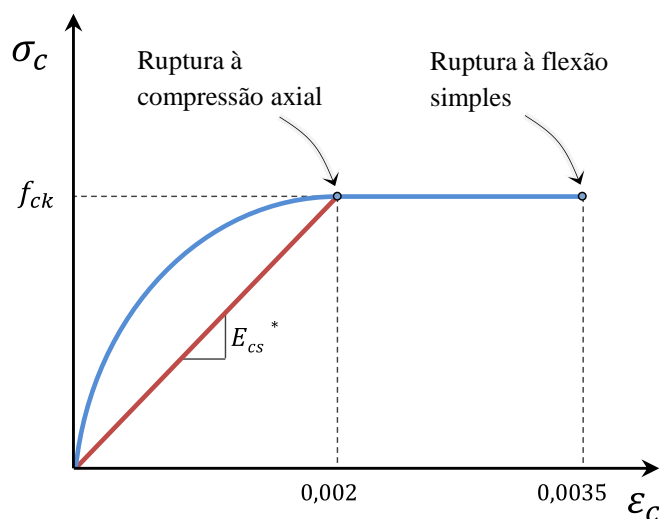


Figura 4.33. Diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$ . Modificado de Clímaco (2008).

Na modelagem numérica da viga o volume que representa o concreto foi discretizado em 728 elementos hexaédricos de 20 nós. A armadura de flexão, composta por 4 vergalhões que atravessam os elementos sólidos, foi discretizada em elementos finitos de barra de 3 nós. Seguidamente, foram criados os correspondentes elementos de interface. A partir das

propriedades do concreto, apresentadas na Tabela 4.23, foram determinados os parâmetros,  $\alpha$  e  $\kappa$ , necessários para o critério de ruptura de Drucker-Prager de acordo com o procedimento indicado nos itens 2.2.3 e 3.4.2, sem aplicação dos coeficientes de redução de resistências dos materiais especificados pela NBR 6118:2003.

$$E_{cs}^* = \frac{f_{ck}}{0.002} \quad (4.2)$$

$$\sigma_c = f_{ck} \quad (4.3)$$

$$f_{yd} = f_y \quad (4.4)$$

Onde  $f_{yd}$  é a resistência à tração do aço de cálculo e  $f_y$  é a resistência à tração do aço. A Tabela 4.25 apresenta os valores utilizados na determinação dos parâmetros do modelo Drucker-Prager.

Tabela 4.25. Parâmetros do concreto para a modelagem da viga de Angelakos *et al.* (2001).

<b>Drucker-Prager</b>	$\sigma_c$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_t$ (kN/m <sup>2</sup> )	<b>Coesão c</b> (kN/m <sup>2</sup> )	$\phi$ (°)	$\alpha$	$\kappa$ (kN/m <sup>2</sup> )
Triaxial	32000	3023.8105	4918.3823	55.83	0.4397	4404.9164
Biaxial	32000	3023.8105	4918.3823	55.83	0.2388	3190.1458
Uniaxial	32000	3023.8105	4918.3823	55.83	0.4777	3190.1458

A Figura 4.34 mostra, a título de exemplo, o deslocamento no meio do vão para a viga avaliada pelo MEF semi-embutido com escala de 20.

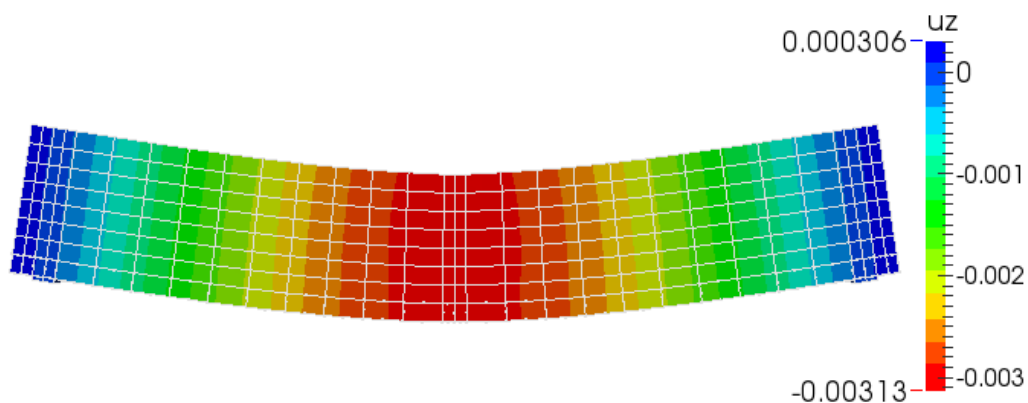


Figura 4.34. Deslocamento no meio do vão pelo MEF da viga de Angelakos *et al.* (2001).

O modelo consegue obter resultados similares de deslocamento no meio do vão da viga determinado por Angelakos *et al.* (2001) para o 50% da carga de rotura. No entanto, a carga total aplicada na modelagem leva a diferentes valores de aproximação com o deslocamento experimental, dependendo do tipo de parâmetro do Drucker-Prager, seja triaxial, biaxial ou uniaxial. Para os parâmetros do Drucker-Prager triaxial o modelo atingiu cerca de 56% do deslocamento experimental estimado por Angelakos *et al.* (2001). Na abordagem biaxial, o modelo obteve um valor aproximado ao 58% do deslocamento e para os parâmetros de Drucker-Prager uniaxial, o modelo conseguiu 62% de aproximação com o dado experimental de deslocamento.

Nesta modelagem, os parâmetros de Drucker-Prager uniaxial conseguem uma proximidade maior com os dados experimentais de deslocamento em relação aos parâmetros triaxial e biaxial, sem atingir ainda a carga de rotura pelo MEF. Com o uso do módulo de elasticidade secante proposto pela norma não é possível atingir valores próximos aos obtidos pelo ensaio experimental. No entanto, o modelo Drucker-Prager com módulo de endurecimento (HDP-uniaxial) consegue 78% de aproximação como o dado experimental de deslocamento. A Figura 4.35 apresenta um gráfico carga-deslocamento comparando os resultados do modelo numérico com o experimental.

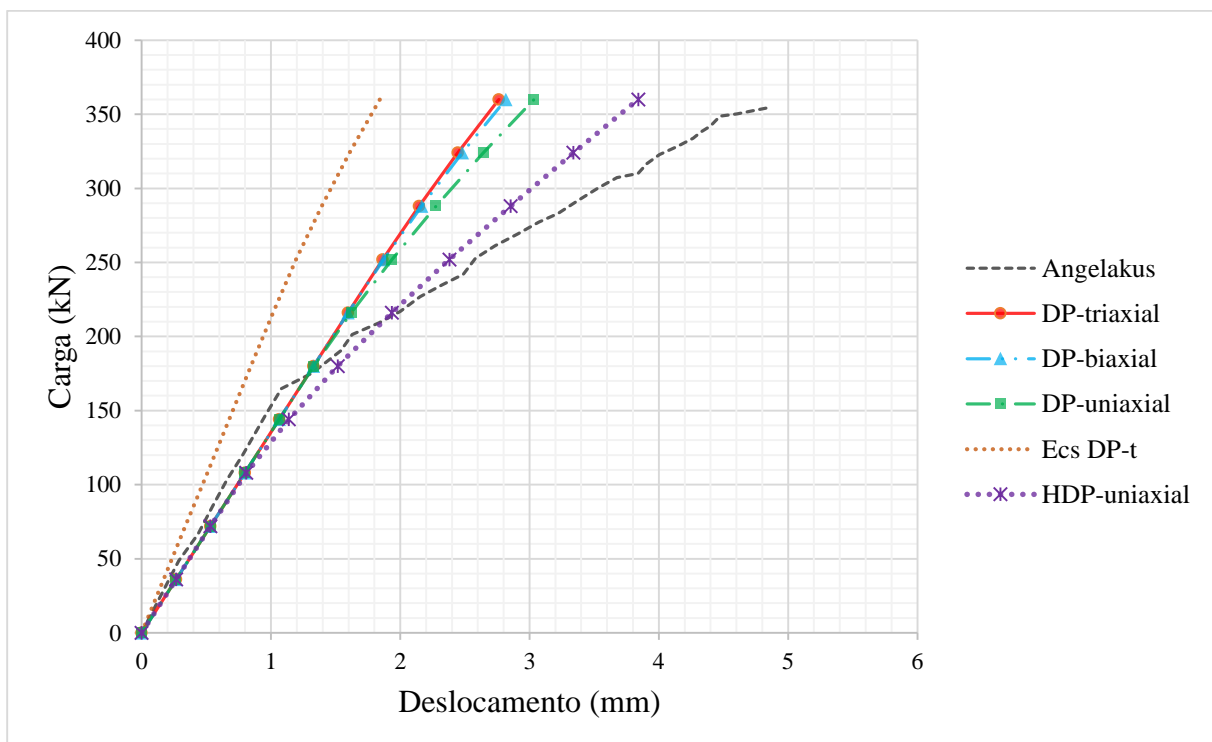


Figura 4.35. Dados numéricos e experimental de carga-deslocamento para a viga de Angelakos *et al.* (2001).



#### 4.5.2. Viga de Buckhouse

A segunda viga avaliada numericamente foi baseada no ensaio de Foley & Buckhouse (1998). O comprimento ( $L$ ) total da viga é 4.7244 m, 0.4638 m de profundidade ( $h$ ), 0.2576 m de largura ( $b$ ) e altura útil ( $d$ ) de 0.4051 m, armada com aço longitudinal e transversal. A carga de rotura do ensaio ( $w$ ) é de 72.55 kN aplicada em dois pontos equidistantes. A Figura 4.36 descreve a configuração da viga de Foley & Buckhouse (1998).

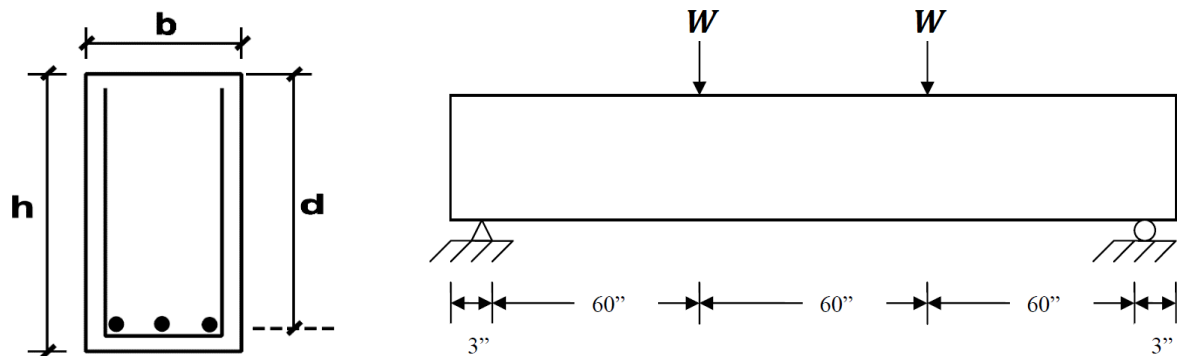


Figura 4.36. Dimensões em in da viga ensaiada por Foley & Buckhouse (1998).

A viga ensaiada por Foley & Buckhouse (1998) apresenta a distribuição de armadura mostrada na Figura 4.37.

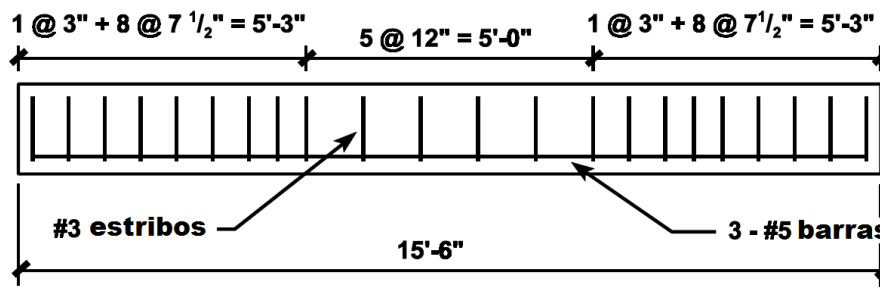


Figura 4.37. Distribuição da armadura longitudinal e transversal da viga de Foley & Buckhouse (1998).

A Tabela 4.26 apresenta as propriedades utilizadas para o concreto e aço. O módulo de Young utilizado para o concreto é dado por um módulo secante  $E_{cs}^*$  calculado anteriormente para a primeira viga. As características geométricas da viga estudada estão descritas na Tabela 4.27.

Tabela 4.26. Propriedades dos materiais para a modelagem da viga de Foley & Buckhouse (1998).

<i>Concreto</i>			<i>Aço</i>	
$f_{ck}$ (MPa)	$E_{cs}^*$ (MPa)	$\nu$ (poisson)	$f_y$ (MPa)	$E_s$ (GPa)
32.8673	16433.6366	0.2	413.685	200

Tabela 4.27. Configuração geométrica e carregamento para a modelagem da viga de Foley & Buckhouse (1998).

$L$ (m)	$b$ (m)	$h$ (m)	$A_s$ (m <sup>2</sup> )	$w$ (kN)
4.7244	0.2576	0.4638	0.0006	72.55

Na modelagem numérica da viga o volume que representa o concreto foi discretizado em 1720 elementos hexaédricos de 20 nós. A armadura de flexão, composta por 3 vergalhões longitudinais e 23 estribos que atravessam os elementos sólidos, foi discretizada em elementos finitos de barra de 3 nós. Seguidamente, foram criados os correspondentes elementos de interface. A partir das propriedades do concreto, apresentadas na Tabela 4.26, foram determinados os parâmetros,  $\alpha$  e  $\kappa$ , necessários para o critério de ruptura de Drucker-Prager de acordo com o procedimento indicado nos itens 2.2.3 e 3.4.2, sem aplicação dos coeficientes de redução de resistências dos materiais especificados pela NBR 6118:2003. A Tabela 4.28 apresenta os valores utilizados na determinação dos parâmetros do modelo Drucker-Prager.

Tabela 4.28. Parâmetros do concreto para a modelagem da viga de Foley & Buckhouse (1998).

<i>Drucker-Prager</i>	$\sigma_c$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_t$ (kN/m <sup>2</sup> )	<i>Coesão c</i> (kN/m <sup>2</sup> )	$\phi$ (°)	$\alpha$	$\kappa$ (kN/m <sup>2</sup> )
Triaxial	32867.2733	3078.2015	5029.2168	55.97	0.4407	4490.4841
Biaxial	32867.2733	3078.2015	5029.2168	55.97	0.2392	3250.0187
Uniaxial	32867.2733	3078.2015	5029.2168	55.97	0.4785	3250.0187

A Figura 4.38 mostra as barras de armadura longitudinal e transversal para a viga avaliada pelo MEF semi-embutido.

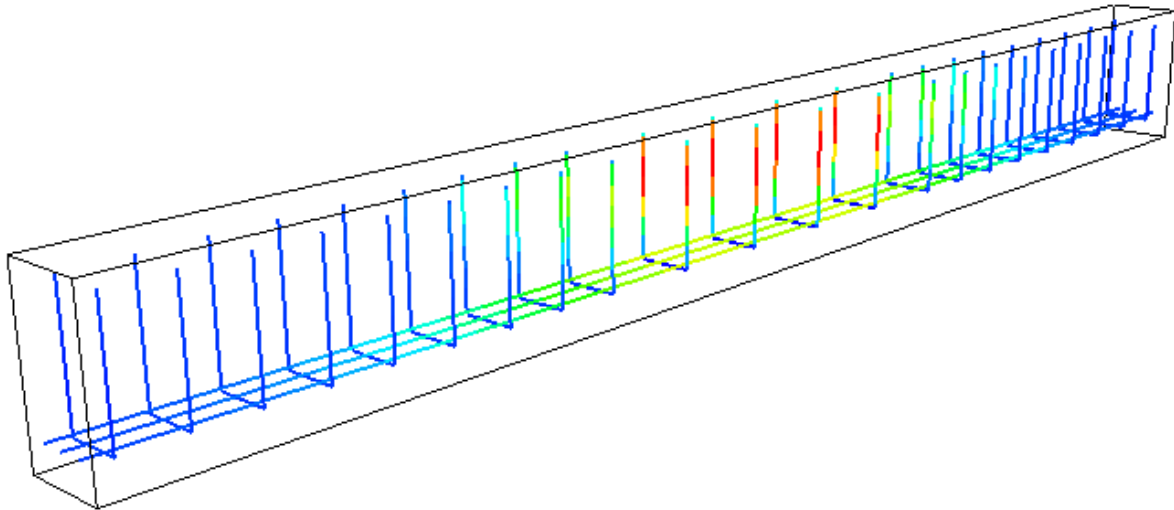


Figura 4.38. Distribuição de tensões na armadura pelo MEF da viga de Foley & Buckhouse (1998).

A modelagem fornece resultados muito próximos de deslocamento aos determinados por Foley & Buckhouse (1998) para o 30% da carga de ruptura. Para os parâmetros triaxial e uniaxial não existe diferença representativa entre os valores encontrados, entretanto, estes valores encontrados correspondem no máximo ao 8% do deslocamento máximo obtido no ensaio experimental. Para o caso da implementação do Drucker-Prager biaxial consegue-se o comportamento bilinear da curva carga-deslocamento com aproximação do 40% do valor final de deslocamento obtido experimentalmente. Nesta modelagem, o módulo de endurecimento no modelo Drucker-Prager uniaxial não representa aproximação significativa com o valor final de deslocamento na viga experimental. Os altos valores de deformação fornecidos pelo análise experimental são esclarecidos no trabalho de Park & Paulay (1994). Os autores estabelecem que o efeito de confinamento da armadura transversal para o concreto, é ativado para valores de tensão que se aproximam à resistência uniaxial, por conseguinte, as deformações transversais se tornar muito altas pelas fissuras internas progressivas. O concreto, fica encostado às armaduras transversais que exercem uma reação de confinamento, proporcionando um comportamento global dúctil.

Nesta modelagem, não é atingida a carga de ruptura pelo MEF. A Figura 4.39 apresenta o gráfico carga-deslocamento comparando os resultados do modelo numérico com o experimental.

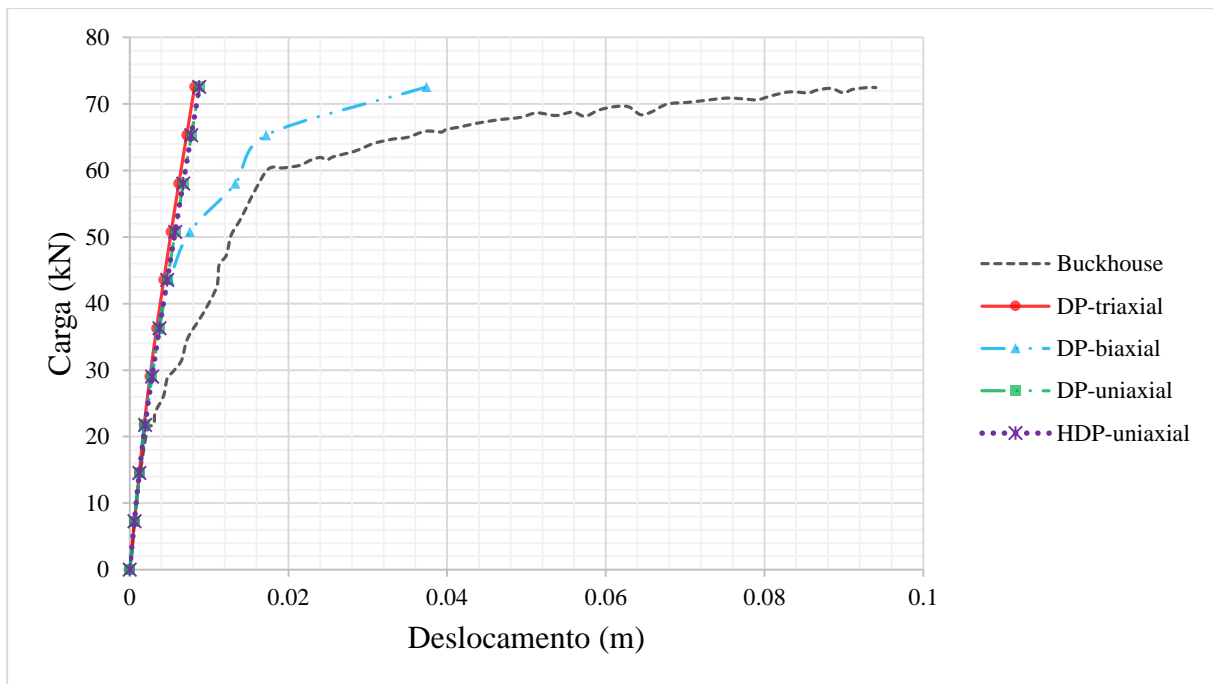


Figura 4.39. Dados numéricos e experimental de carga-deslocamento para a viga de Foley & Buckhouse (1998).

#### 4.5.3. Viga de Leonhardt

A terceira viga avaliada numericamente foi baseada no ensaio de Leonhardt e Walther (1962) *apud*. Kabele *et al.* (2010). O comprimento ( $L$ ) total da viga é 2.55 m, 0.32 m de profundidade ( $h$ ), 0.19 m de largura ( $b$ ) e altura útil ( $d$ ) de 0.27 m, armada com duas barras de aço de 26 mm de diâmetro. A carga de rotura do ensaio ( $w$ ) é de 70 kN aplicada em dois pontos ao longo do comprimento. A Figura 4.40 descreve a configuração da viga de Leonhardt e Walther.

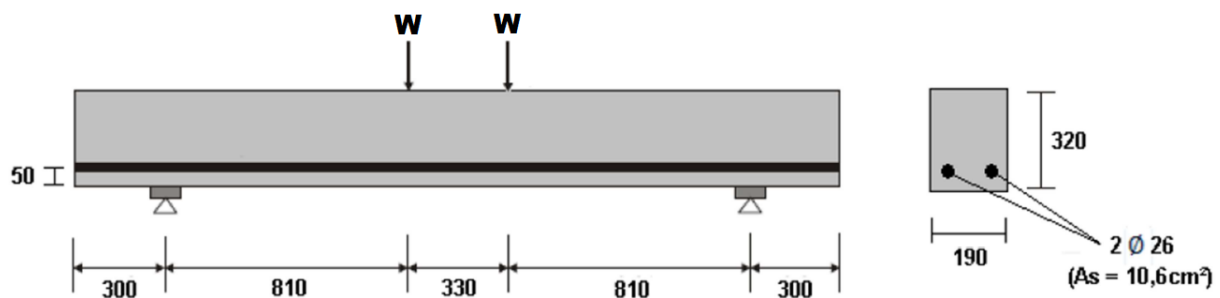


Figura 4.40. Dimensões em mm da viga ensaiada por Leonhardt e Walther (1962) *apud*. Lyra (2011).

A Tabela 4.29 apresenta as propriedades utilizadas para o concreto e aço. O módulo de Young utilizado para o concreto é dado por um módulo secante  $E_{cs}^*$  calculado anteriormente para a primeira viga. As características geométricas da viga estudada estão descritas na Tabela 4.30.

Tabela 4.29. Propriedades dos materiais para a modelagem da viga de Leonhardt e Walther (1962).

<i>Concreto</i>			<i>Aço</i>	
$f_{ck}$ (MPa)	$E_{cs}^*$ (MPa)	$\nu$ (poisson)	$f_y$ (MPa)	$E_s$ (GPa)
28.48	14240	0.2	560	208

Tabela 4.30. Configuração geométrica e carregamento para a modelagem da viga de Leonhardt e Walther (1962).

$L$ (m)	$b$ (m)	$h$ (m)	$A_s$ (m <sup>2</sup> )	$w$ (kN)
2.55	0.19	0.32	0.00106	70.00

Na modelagem numérica da viga o volume que representa o concreto foi discretizado em 536 elementos hexaédricos de 20 nós. A armadura de flexão, composta por 2 vergalhões que atravessam os elementos sólidos, foi discretizada em elementos finitos de barra de 3 nós. Seguidamente, foram criados os correspondentes elementos de interface. A partir das propriedades do concreto, apresentadas na Tabela 4.29, foram determinados os parâmetros,  $\alpha$  e  $\kappa$ , necessários para o critério de ruptura de Drucker-Prager de acordo com o procedimento indicado nos itens 2.2.3 e 3.4.2, sem aplicação dos coeficientes de redução de resistências dos materiais especificados pela NBR 6118:2003. A Tabela 4.31 apresenta os valores utilizados na determinação dos parâmetros do modelo Drucker-Prager.

Tabela 4.31. Parâmetros do concreto para a modelagem da viga de Leonhardt e Walther (1962).

<i>Drucker-Prager</i>	$\sigma_c$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_t$ (kN/m <sup>2</sup> )	<i>Coesão c</i> (kN/m <sup>2</sup> )	$\phi$ (°)	$\alpha$	$\kappa$ (kN/m <sup>2</sup> )
Triaxial	28480	2797.7866	4463.2096	55.20	0.4351	4050.1585
Biaxial	28480	2797.7866	4463.2096	55.20	0.2370	2941.6291
Uniaxial	28480	2797.7866	4463.2096	55.20	0.4741	2941.6291

A Figura 4.41 mostra a distribuição de tensões no concreto para a viga avaliada pelo MEF semi-embutido.

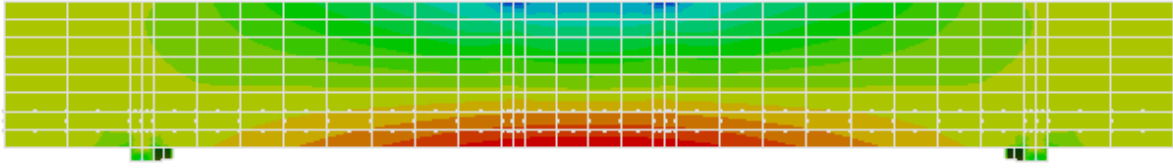


Figura 4.41. Distribuição de tensões no concreto pelo MEF da viga de Leonhardt e Walther (1962)

Os resultados dos deslocamentos da modelagem são similares aos determinados no meio da viga por Leonhardt e Walther (1962) *apud* Kabele *et al.* (2010) para o 50% da carga de ruptura, com uma variação entre eles não maior ao 15% nos valores do deslocamento. No entanto, a carga total aplicada na modelagem leva a diferentes valores de aproximação com o deslocamento experimental, dependendo da aproximação dos parâmetros do modelo Drucker-Prager, seja triaxial, biaxial ou uniaxial. Para os parâmetros do Drucker-Prager triaxial o modelo atingiu cerca de 72% do deslocamento experimental estimado por Leonhardt e Walther. Na abordagem biaxial, o modelo numérico obteve um valor aproximado ao 93% do deslocamento e para os parâmetros de Drucker-Prager uniaxial, o modelo conseguiu 76% de aproximação com o dado experimental de deslocamento.

Nesta modelagem, os parâmetros de Drucker-Prager biaxial conseguem resultados bem próximos aos dados experimentais de deslocamento, sem atingir ainda a carga de ruptura pelo MEF. O modelo Drucker-Prager com endurecimento na aproximação uniaxial (HDP-uniaxial) não fornece o melhor resultado de deslocamento para a carga de ruptura como aconteceu na viga de Angelakos. A Figura 4.42 apresenta um gráfico carga-deslocamento comparando os resultados do modelo numérico com o experimental.

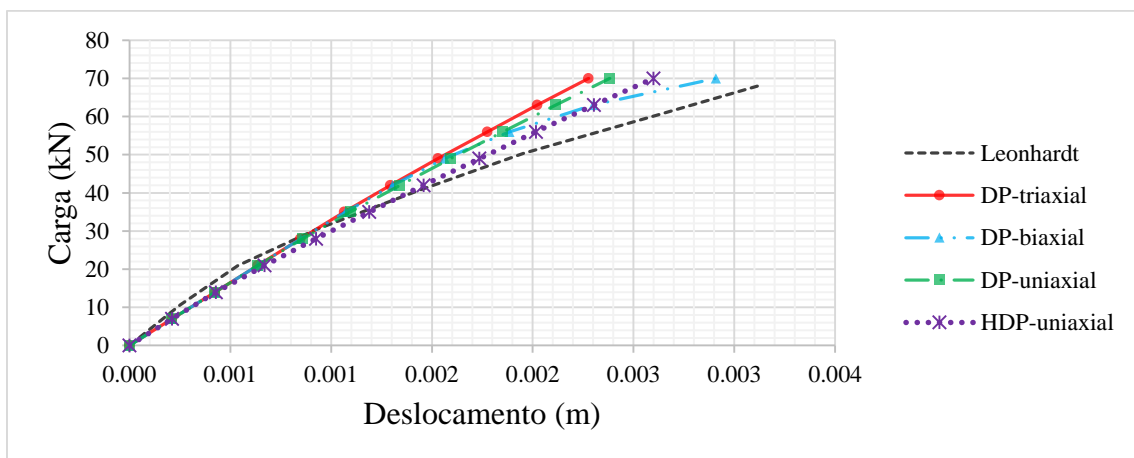


Figura 4.42. Dados numéricos e experimental de carga-deslocamento para a viga de Leonhardt e Walther (1962).

## 5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Esse trabalho apresentou modelagens numéricas de vigas de concreto armado com uso do método semi-embutido inicialmente no domínio elástico, fornecendo valores de tensão máxima de compressão ( $\sigma_c$ ) e de tração ( $\sigma_t$ ) no concreto, tensão no aço ( $\sigma_s$ ) e deslocamento no meio do vão. Os valores obtidos foram comparados com formulações analíticas e com a abordagem discreta de elementos finitos. O nível de aproximação dos resultados do método semi-embutido com as metodologias empregadas foi significativamente bom, com discrepâncias menores ao 5% para resultados de tensão no aço e menor ao 1% nos valores de tensões no concreto.

Posteriormente foi realizada uma análise detalhada de tensões ao longo da viga V1-35 com carregamento distribuído e com carregamento em quatro pontos, utilizando o método semi-embutido, o método discreto e a formulação analítica 2. Nesta análise, a metodologia semi-embutida consegue reproduzir resultados aproximados à metodologia discreta na região de concentração de tensões perto dos apoios das vigas avaliadas, além de fornecer dados relativamente próximos aos obtidos pela formulação analítica empregada.

Para finalizar as análises comparativas, foram avaliadas 3 vigas experimentais presentes na literatura. O modelo constitutivo Drucker-Prager utilizado para simular o concreto foi abordado com as aproximações de tensões triaxial, biaxial e uniaxial ao modelo de Mohr-Coulomb. Além disso, foi incluído nas análises o modelo de endurecimento de Drucker-Prager para conseguir atingir resultados mais próximos ao comportamento da curva carga-deslocamento obtida nos ensaios experimentais. Das análises efetuadas foram obtidas as seguintes conclusões e sugestões.

### 5.1. CONCLUSÕES

As conclusões foram divididas em duas partes. A primeira no que concerne às análises feitas pelas formulações analíticas e numéricas. A segunda parte no referente às avaliações com resultados experimentais.

#### 5.1.1. Com relação às abordagens analíticas e numéricas

- *Para os exemplos testados verificou-se que os valores da flecha imediata e das tensões no concreto e no aço são diretamente proporcionais à relação do comprimento e da altura da viga. Isto é, quanto maior o resultado da divisão do*

comprimento pela altura, maiores são os valores da flecha imediata e das tensões nos materiais no meio do vão da viga, em razão de que o valor da inércia na seção com relação  $L/h$  de 14 é menor que a inércia na seção com  $L/h$  de 10.

- *Conferiu-se que a resistência à compressão do concreto tem relação direta com as tensões de compressão e tração neste material.* Cada que foi acrescentado o valor da resistência à compressão, a viga conseguia estar submetida a valores maiores de tensão de compressão e de tração. A relação entre a resistência à compressão e flecha imediata e tensão no aço é inversamente proporcional. Cada incremento da resistência à compressão nas vigas gera redução nos valores da flecha e das tensões no aço no meio do vão.
- *A metodologia de elementos finitos semi-embutidos consegue representar o comportamento de vigas no domínio elástico, considerando mudanças nas propriedades geométricas dos elementos e dos materiais que os compõem para diferentes configurações de carregamento.* Os dados obtidos para as tensões no aço e no concreto pela modelagem de elementos finitos semi-embutidos são aproximadamente iguais aos dados fornecidos pelas abordagens analíticas e numérica, com diferenças menores ao 5%.
- *A modelagem do concreto pelos elementos sólidos HEX20 do FemLab consegue obter resultados das tensões neste material com diferença menor ao 1% em referência aos dados das formulações analíticas.* Para problemas de flexão, os elementos HEX20 fornecem erros pequenos e aceitáveis mesmo com discretizações grosseras. Após a análise de convergência foi observado que para o caso do estudo de vigas, o uso de elementos sólidos HEX20 com menor comprimento ( $L_e$ ) e maior número de nós fornece resultados mais acurados do comportamento estrutural.
- *O método semi-embutido permite usar menor quantidade de elementos para obter resultados semelhantes comparado aos do método discreto.* Isto representa uma vantagem nos cálculos computacionais para o método semi-embutido em relação à metodologia discreta do ANSYS. Além disso, a metodologia via elementos finitos semi-embutidos facilita o processo de geração de malha em relação à metodologia discreta do ANSYS por permitir inserir elementos lineares dentro dos elementos sólidos,



- *A metodologia de elementos finitos semi-embutidos por médio do FemLab consegue reproduzir as concentrações de tensões nos apoios.* Esta metodologia representa o comportamento da região dos apoios com um nível de aproximação relativamente bom, com base aos dados fornecidos pela modelagem discreta do ANSYS para à análise elástica detalhada ao longo do comprimento das vigas com carregamento distribuído e pontual.

### **5.1.2. Com relação às avaliações experimentais**

- *A modelagem via elementos finitos semi embutidos acompanha os deslocamentos obtidos experimentalmente até o 50% da carga aplicada utilizando os modelos para os materiais descritos no item 3.4.* Para a modelagem semi-embutida da viga de Angelakos *et al.* (2001) consegue-se resultados de deslocamento aproximadamente iguais para o 50% da carga de rotura. Na modelagem numérica da viga de Foley & Buckhouse (1998) o FemLab obter deslocamentos aproximados aos experimentais para o 30% da carga de rotura. Por último, a modelagem semi-embutido forneceu valores de deslocamento próximos aos experimentais para o 50% da carga de rotura.
- *Considerando as aproximações de tensões do modelo Drucker Prager uniaxial, biaxial e triaxial com a superfície de mohr-Coulomb, conclui-se que a abordagem triaxial fornece valores de deslocamento para carga de rotura bem discrepantes dos valores experimentais.* Os valores obtidos da abordagem triaxial representam uma rigidez maior para a viga, afastando o resultado final de deslocamento pelo MEF semi-embutidos em relação ao dado experimental.
- *Na modelagem numérica da viga de Angelakos, foram obtidos resultados na ordem do 75% do deslocamento embora distante do obtido experimentalmente.* As 3 aproximações do modelo Drucker Prager (triaxial, biaxial e uniaxial) não conseguem reproduzir os valores do deslocamento para cargas entre o 50% e 100% da carga de ruptura experimental nem o comportamento bilinear da gráfica carga-deslocamento obtida no ensaio de Angelakos *et al.* (2001). O uso do modulo de endurecimento na função de escoamento de Drucker-Prager permite obter 73% de aproximação ao deslocamento final para a carga de ruptura do ensaio experimental.
- *A metodologia de elementos finitos semi-embutidos com critério de ruptura de Ducker-prager para o concreto forneceu resultados de deslocamento bastante discrepantes em relação aos dados experimentais do ensaio de Buckhouse.* O

comportamento dúctil gerado pelos estribos na viga experimental favorece deslocamentos maiores que não são simulados apropriadamente pelo modelo constitutivo adotado para o concreto.

- *A modelagem numérica da viga de Leonhardt forneceu uma aproximação maior com os dados de deslocamento experimentais em relação às modelagens numéricas das vigas de Angelakos e Buckhouse. A aproximação bilinear do modelo Drucker-Prager obteve um valor aproximado ao 93% do deslocamento com o dado experimental, no entanto para os parâmetros triaxial e uniaxial, os valores são da ordem do 75% do deslocamento experimental.*
- *A implementação de Drucker-Prager com ajuste biaxial consegue reproduzir o comportamento bilinear da curva carga-deslocamento da viga de Buckhouse. Entre os parâmetros de Drucker-Prager avaliados, a aproximação bilinear obteve os resultados mais próximos aos dados obtidos experimentalmente.*
- *O modulo secante proposto pela norma não conseguiu prever os resultados experimentais mesmo no início do carregamento. Não se recomenda o uso deste modulo em simulações numéricas.*

## **5.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

- *Modificar o modelo Drucker-Prager incluindo critérios de endurecimento e dano. O objetivo desta modificação é conseguir respostas não lineares do concreto mais próximas do comportamento após da ruptura do material, considerando a mudança de rigidez ao longo dos passos de carregamento.*
- *Avaliar outro tipo de elementos estruturais submetidos a diferentes solicitações. Elementos de casca, pilares e muros que sejam submetidos a esforços de flexão pura, flexão simples e flexão composta, esforços de cisalhamento e torção.*
- *Verificar com outros ensaios experimentais com diferentes configurações geométricas e de carregamento. Desta forma são obtidos dados para ser avaliados numericamente pela metodologia de elementos finitos semi-embutidos considerando relações geométricas que determinem aspetos de cálculo que podem ser melhorados.*
- *Verificar dados obtidos por modelagens numéricas com abordagem distribuída de elementos finitos por meio da metodologia semi-embutido. Dado que em este trabalho a abordagem semi-embutido foi verificada em relação a formulações analíticas e*

modelagem numérica discreta pelo ANSYS, sugere-se verificar a abordagem distribuída de elementos finitos em diferentes elementos de concreto armado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABNT. NBR 6118. Projeto de estruturas de concreto (2003). Rio de Janeiro, Brazil: ABNT.
- Angelakos, D., Bentz, E. C., & Collins, M. P. (2001). Effect of concrete strength and minimum stirrups on shear strength of large members. *ACI Structural Journal*, v. 98, n. 98, pp. 290–300.
- Barzegar, B. F., & Maddipudi, S. (1994). Generating reinforcement in FE modeling of concrete structures. *Structural Engineering*, v. 120, n. 5, pp. 1656–1662.
- Bezanson, J., Karpinski, S., & Shah, V. B. (2012). Julia. Retrieved from <http://julialang.org/>.
- Bono, G. F. F. (2008). *Modelos constitutivos para análise tridimensional de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos*. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - RS, 181 p.
- Callister, J., & William, D. (2012). *Ciência Engenharia de Materiais - Uma Introdução*. LTC, p. 844.
- Carvalho, R. C., & Figueiredo Filho, J. R. de. (2013). *Calculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado*, São Carlos - SP, Edufscar, p. 368.
- Cerrolaza, M., & Flórez-López, J. (2000). *Modelos matemáticos en ingeniería moderna*. Universidad Central de Venezuela, Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico, p. 526.
- Chang, T. Y., Taniguchi, H., & Chen, W. F. (1987). Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Panels. *Journal of Structural Engineering*, v. 113, pp. 122–140. doi:10.1061/(ASCE)0733-9445(1987)113:1(122).
- Chen, W.-F. (1982). *Plasticity in Reinforced Concrete*. McGraw-Hill, New York, p. 479.
- Clímaco, J. C. T. de S. (2008). *Estruturas de concreto armado: fundamentos de projeto, dimensionamento e verificação*. Editora Universidade de Brasília, Brasília - DF, p. 410.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., & Witt, R. J. (2001). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, New York, p. 784.
- De Souza Neto, E. a., Peric, D., & Owen, D. R. J. (2008). *Computational methods for plasticity*. John Wiley & Sons, Chichester - UK. p. 791. doi:10.1002/9780470694626.
- Durand, R. (2003). *Método da rigidez embutida na análise tridimensional de reforços via elementos finitos*. Dissertação de mestrado. Universidade de Brasília, Brasília - DF, 95 p.
- Durand, R. (2008). *Análise tridimensional de estruturas geotécnicas submetidas a reforço e drenagem*. Tese de Doutorado. Universidade de Brasília, Brasília - DF, 153 p.

- Durand, R., & Farias, M. (2012). Nonlinear joint element for the analysis of reinforcement. São Paulo: World Congress on Computational Mechanics.
- Elwi, A. E., & Hrudey, T. M. (1989). Finite element model for curved embedded reinforcement. *Engineering Mechanics*, v. 115, n. 4, pp. 740-754.
- Foley, C. M., & Buckhouse, E. R. (1998). *Strengthening Existing Reinforced Concrete Beams for Flexure Using Bolted External Structural Steel Channels*. Structural Engineering Report MUST-98-1. Milwaukee, p. 72.
- Hartl, H. (2002). *Development of a continuum-mechanics-based tool for 3D finite element analysis of reinforced concrete structures and application to problems of soil-structure interaction*. Tese de Doutorado. Graz University of Technology, Graz-Austria, 260 p.
- Jiménez Montoya, P., Meseguer García, Á., & Morán Cabré, F. (2000). *Hormigon Armado*. Gustavo Gili, Ed, Barcelona. p. 882.
- Kabele, P., Červenka, V., & Červenka, J. (2010). Example Manual ATENA Engineering. Červenka Consulting s.r.o. Prague
- Kwak, H.-G., & Filippou, F. C. (1990). *Finite element analysis of reinforced concrete structures, Report No. UCB/SEMM-90/14*. University of California, Berkeley, 120 p.
- Kwon, M., & Spacone, E. (2002). Three-dimensional finite element analyses of reinforced concrete columns. *Computers & Structures*, v. 80, n. 2, pp. 199–212. doi:10.1016/S0045-7949(01)00155-9
- Lowes, L. N. (1999). *Finite Element Modeling of Reinforced Concrete Beam-Column Bridge Connections*. Tese de Doutorado. University of California, Berkeley.
- Lyra, P. H. C. de. (2011). *Modelagem numérica de estruturas de concreto armado utilizando o programa ATENA/P.H.C. de Lyra*. Dissertação de mestrado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo-SP, 117 p.
- Manjuprasad, M., Gopalakrishnan, S., & Appa Rao, T. V. S. . (2001). Non-linear dynamic response of a reinforced concrete secondary containment shell subjected to seismic load. *Engineering Structures*, v. 23, n. 5, pp. 397–406. doi:10.1016/S0141-0296(00)00070-5.
- Markou, G., & Papadrakakis, M. (2012). An efficient generation method of embedded reinforcement in hexahedral elements for reinforced concrete simulations. *Advances in Engineering Software*, v. 45, n 1, pp. 175–187. doi:10.1016/j.advengsoft.2011.09.025.
- Ožbolt, J., & Sharma, A. (2011). Numerical simulation of reinforced concrete beams with different shear reinforcements under dynamic impact loads. *International Journal of Impact Engineering*, v. 38, n. 12, pp. 940–950. doi:10.1016/j.ijimpeng.2011.08.003.
- Park, R., & Paulay, T. (1994). *Estructuras de concreto reforzado*. Noriega Editores. Mexico, D.F., p 796.

- Patrick, M., & Bridge, R. (1994). *Review of concepts concerning bond of steel decking*. Twelfth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures. St. Louis-EUA, pp. 335-359.
- Pedroso, D. (2002). *Modelos Elastoplásticos para Solos Argilosos: Capacidade de Previsão de Comportamento e Integração da Relação Constitutiva*. Dissertação de mestrado. Universidade de Brasília, Brasília - DF, 171 p.
- SAS. (2013). ANSYS 14.5 Mechanical APDL. SAS IP, Inc.
- Tavárez, F. a. (2001). *Simulation of behavior of composite grid reinforced concrete beams using explicit finite element methods*. Dissertação de mestrado. University of Wisconsin - Madison, 152 p.
- Tristão, G. A. (2002). *Comportamento de conectores de cisalhamento em vigas mistas aço-concreto com análise da resposta numérica*. Dissertação de mestrado. EESC-USP, São Paulo-SP, 146 p.
- Wight, J. K., & MacGregor, J. C. (2011). *Reinforced Concrete: Mechanics and Design*. Prentice Hall, New Jersey, p. 1176.
- Willam, K. J., & Warnke, E. P. (1975). Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. *International Association for Bridge and Structural Engineering Proceedings*, v. 19, pp. 1–30.
- Wolanski, A. J. (2004). *Flexural Behavior of Reinforced and Prestressed Concrete Beams Using Finite Element Analysis*. Dissertação de mestrado. Marquette University, Milwaukee-EUA, 87 p.
- Yamaguchi, E., & Ohta, T. (1993). Accurate and Efficient Method for Analysis of Reinforced Concrete Structures. *Journal of Structural Engineering*. v. 119, pp. 2017-2035. doi:10.1061/(ASCE)0733-9445(1993)119:7(2017).