

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS
UTILIZANDO A FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL E
ELEMENTOS DE VIGA UNIFICADOS BERNOULLI-
TIMOSHENKO**

AURÉLIO AUGUSTO CUNHA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E
CONSTRUÇÃO CIVIL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS
UTILIZANDO A FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL E
ELEMENTOS DE VIGA UNIFICADOS BERNOULLI-
TIMOSHENKO**

AURÉLIO AUGUSTO CUNHA

ORIENTADOR: WILLIAM TAYLOR MATIAS SILVA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E
CONSTRUÇÃO CIVIL**

PUBLICAÇÃO: E.DM-022A/15

BRASÍLIA/DF: NOVEMBRO – 2015

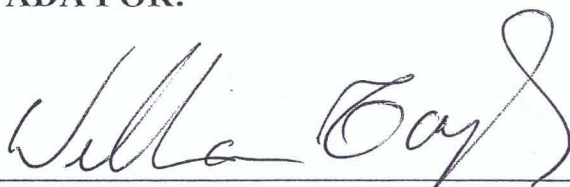
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

ANÁLISE NÃO LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS UTILIZANDO A
FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL E ELEMENTOS DE VIGA
UNIFICADOS BERNOULLI-TIMOSHENKO

AURÉLIO AUGUSTO CUNHA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA
FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE
BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA
A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E
CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:



Prof. William Taylor Matias Silva, Dr.Ing (UnB)
(Orientador)



Prof. Artur Antônio de Almeida Portela, DSc. (UnB)
(Examinador Interno)



Prof. Éder Lima de Albuquerque, DSc. (UnB)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 27 DE NOVEMBRO DE 2015

FICHA CATALOGRÁFICA

CUNHA, AURÉLIO AUGUSTO

Análise Não Linear de Pórticos Planos utilizando a Formulação Co-Rotacional e Elementos de Viga Unificados Bernoulli-Timoshenko [Distrito Federal] 2015.

cccxvi, 146p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2015). Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1.Formulação co-rotacional

2.Não linearidade geométrica

3.Elementos finitos

4.Elementos de viga unificados

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

CUNHA, A.A., (2015). Análise Não Linear de Pórticos Planos utilizando a Formulação Co-rotacional e Elementos de Viga Unificados Bernoulli-Timoshenko. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-022A/15 , Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 146p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Aurélio Augusto Cunha.

TÍTULO: Análise Não Linear de Pórticos Planos utilizando a Formulação Co-Rotacional e Elementos de Viga Unificados Bernoulli-Timoshenko.

GRAU: Mestre

ANO: 2015

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Aurélio Augusto Cunha

Rua 64, esq. c/ Rua 11, s/n, Expansão Parque Lago.

Formosa – Goiás – Brasil.

augustocunhaifg@gmail.com

DEDICATÓRIA

Aos meus avós, *Luiz Carlos Cunha (in memorian)* e *Avelina Mundim Cunha*: as bases sólidas da construção de minha essência. A vocês, dedico a minha maior conquista.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, às pessoas essenciais em minha vida durante todo esse processo: *Ariane Bocaletto Frare e Márcio Guerra de Carvalho*.

Ariane Bocaletto, minha eterna amiga/irmã. Obrigado pelos sonhos idealizados, as broncas por ora proferidas, o ombro amigo, o abraço acolhedor, o coração cheio de amor. Como você sempre me diz: “Tu te tornas eternamente responsável por aquilo que cativas”.

Márcio Guerra, meu querido companheiro. Obrigado por toda a dedicação concedida, a paciência obtida, a importância dada em minha vida. Obrigado pelo carinho ofertado, o apoio prestado, o amor doado.

À minha aluna, orientanda, amiga, *Mariana Morena Ramos*, pela enorme dedicação e interesse em meu trabalho. Obrigado pelo suporte de todos os tempos, os infinitos ensinamentos, a todas as horas de lamentos. Muita gratidão pelo seu apoio e muito orgulho de lhe ter como aluna.

Aos meus queridos amigos, *Rannier Ricardo Lisboa e Rafaella Câmpera*, que mesmo de longe, prestigiam todas as minhas conquistas.

Ao meu orientador, *William Taylor Matias Silva*, pela sua importante colaboração, dedicação e paciência.

Ao Instituto Federal de Goiás – *Câmpus Formosa*, pelo incentivo dado à qualificação docente e pela concessão do período de afastamento em dedicação exclusiva para a conclusão do meu curso de mestrado. Agradecimento especial aos professores *Edson Rodrigo Borges e Gláucia Mendes da Silva*.

E por último, a mim.

*“O tempo é o melhor autor:
sempre encontra um final perfeito.”*

Charlie Chaplin.

RESUMO

ANÁLISE NÃO LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS UTILIZANDO A FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL E ELEMENTOS DE VIGA UNIFICADOS BERNOULLI-TIMOSHENKO

Autor: Aurélio Augusto Cunha

Orientador: William Taylor Matias Silva, Dr. Ing.

Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, novembro de 2015.

O objetivo deste trabalho é realizar uma análise não linear geométrica de pórticos planos utilizando a formulação co-rotacional como descrição cinemática. Discretizam-se os pórticos planos com elementos de viga que unificam as teorias de Bernoulli e Timoshenko, denominados elementos de viga unificados. Inicialmente, obtém-se a matriz de rigidez para um elemento de viga unificado linear através do princípio dos trabalhos virtuais complementares com o propósito de verificar a ocorrência do fenômeno de travamento por cisalhamento. Conclui-se que a matriz de rigidez obtida apresenta fatores de correção de rigidez que não permitem a ocorrência do fenômeno de travamento por cisalhamento para elementos de viga formulados através de interpolação linear para deslocamentos e rotações. Aplicando a formulação co-rotacional para a análise não linear, a matriz de rigidez tangente do elemento de viga unificado é obtida através do princípio dos trabalhos virtuais complementares e da adoção dos modos naturais de deslocamento. As trajetórias de equilíbrio são fornecidas através de uma análise incremental-iterativa baseada no método de Newton-Raphson combinado com uma técnica de comprimento de arco. As soluções numéricas obtidas neste trabalho são comparadas com as encontradas por outros autores na literatura, comprovando-se o bom desempenho da formulação implementada.

Palavras chave: Formulação co-rotacional; Não linearidade geométrica; Elementos finitos; Elementos de viga unificados.

ABSTRACT

NONLINEAR ANALYSIS OF PLANE FRAMES USING A CO-ROTATIONAL FORMULATION AND UNIFIED BERNOULLI-TIMOSHENKO BEAM ELEMENTS

Author: Aurélio Augusto Cunha

Supervisor: William Taylor Matias Silva, Dr. Ing.

Postgraduate Program in Structure and Civil Construction Engineering

Brasília, november of 2015.

The purpose of this work is to perform a geometric nonlinear analysis of plane frames using the co-rotational formulation as a kinematic description. The plane frames are discretized with beam elements that unify the Bernoulli and Timoshenko's theory, known as unified beam elements. Initially, the stiffness matrix of a linear unified beam element is obtained by the principle of complementary virtual work to verify the occurrence of shear locking phenomenon. From this analysis, the results show that the stiffness matrix have stiffness correction factors that do not allow the shear locking phenomenon for those beam elements formulated by linear interpolation of displacements and rotations. Applying the co-rotational formulation to perform the nonlinear analysis, the tangent stiffness matrix to the unified beam element is obtained by the application of the principle of complementary virtual work and by the adoption of the natural modes of displacements. Newton-Raphson's method is combined with some arch-length technique to provide the equilibrium paths of the examples by the iterative-incremental analysis. The numerical solutions obtained by this work are compared with the results published by other authors in literature, proving the good performance of the implemented formulation.

Key words: Co-rotational formulation; geometric nonlinear analysis; Finite elements; Unified beam elements.

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 MOTIVAÇÕES.....	1
1.2 OBJETIVOS.....	3
1.3 METODOLOGIA	4
1.4 APRESENTAÇÃO DO TRABALHO.....	5
2 – NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA.....	7
2.1 DESCRIÇÕES CINEMÁTICAS.....	7
2.2 HISTÓRICO DA FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL	12
2.3 TRABALHOS DESENVOLVIDOS NA UnB	17
3 – ELEMENTO DE VIGA UNIFICADO LINEAR	21
3.1 CURVATURA.....	21
3.2 FLEXIBILIDADE AO CISALHAMENTO	25
3.3 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS COMPLEMENTARES	27
3.4 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE VIGA UNIFICADO LINEAR	30
3.4.1 Modos de deslocamento	30
3.4.2 Princípio dos trabalhos virtuais complementares.....	35
3.4.3 Vetor de forças nodais	38
3.4.4 Matriz de rigidez unificada linear	40
3.5 TRAVAMENTO POR CISALHAMENTO	43
3.5.1 Energia de deformação	43
3.5.2 Parâmetros de correção dos coeficientes de rigidez.....	50
3.5.3 Matriz de rigidez corrigida	55
3.5.4 Exemplos numéricos	57
4 – FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL APLICADA A PÓRTICOS PLANOS UTILIZANDO ELEMENTOS DE VIGA UNIFICADOS.....	65
4.1 DESCRIÇÃO CINEMÁTICA	65
4.1.1 Deslocamentos de corpo rígido	68
4.1.2 Deslocamentos deformacionais	69
4.2 MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE.....	77
4.2.1 Rotação de eixos	77

4.2.2 Princípio dos trabalhos virtuais.....	83
4.2.3 Matriz de rigidez tangente local.....	87
4.2.4 Matriz de rigidez tangente global.....	102
4.3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	103
5 – EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	106
5.1 VIGAS PLANAS.....	107
5.1.1 Viga em balanço com carga momento concentrado na extremidade livre	107
5.1.2 Viga em balanço com carga força concentrada na extremidade livre	112
5.2 PÓRTICOS PLANOS	116
5.2.1 Pórtico de Lee	116
5.2.2 Pórtico Toggle.....	120
5.2.3 Arco circular de grande altura	124
5.2.4 Pórtico diamante birrotulado	129
6 – CONCLUSÕES.....	138
6.1 CONCLUSÕES FINAIS	138
6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	139
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	141

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Descrições cinemáticas	8
Figura 2.2: Descrição lagrangiana total (<i>LT</i>).....	9
Figura 2.3: Descrição lagrangiana atualizada (<i>LA</i>)	10
Figura 2.4: Descrição co-rotacional (<i>CR</i>).....	11
Figura 3.1: Deformação de um elemento de viga prismático sob flexão pura	22
Figura 3.2: Curvatura de uma curva plana	23
Figura 3.3: Eixo de viga deformado sob flexão.....	23
Figura 3.4: Mecanismo de deformação: a) Bernoulli, b) Timoshenko.....	26
Figura 3.5: Elemento de viga: a) deslocamentos nodais, b) forças nodais	31
Figura 3.6: Deslocamentos nodais unitários.....	32
Figura 3.7: Deslocamentos de corpo rígido: a) transversal, b) rotacional.....	33
Figura 3.8: Rotação de corpo rígido	33
Figura 3.9: Modos deformacionais: a) rotação nodal simétrica, b) rotação nodal antissimétrica	34
Figura 3.10: Momento M_s associado à rotação nodal simétrica	34
Figura 3.11: Diagramas de esforços solicitantes para rotação nodal simétrica.....	34
Figura 3.12: Momento M_a associado à rotação nodal antissimétrica	35
Figura 3.13: Diagramas de esforços solicitantes para rotação nodal antissimétrica	35
Figura 3.14: Diagramas de esforços solicitantes virtuais para rotação nodal simétrica	36
Figura 3.15: Diagramas de esforços solicitantes virtuais para rotação nodal antissimétrica ...	37
Figura 3.16: Composição da rotação nodal simétrica	41
Figura 3.17: Composição da rotação nodal antissimétrica	41
Figura 3.18: Viga biapoiada sob flexão pura: a) estado inicial, b) deformada.....	43
Figura 3.19: Intersecção das funções $\theta(x)$ e $v'(x)$ na solução exata para $[0, L]$	45

Figura 3.20: Elemento finito de viga à flexão pura: a) estado inicial, b) deformada	46
Figura 3.21: Distribuição linear de θ ao longo do elemento de viga $[0, l]$	47
Figura 3.22: Ponto comum entre as funções $\theta(x)$ e $v'(x)$ devido à interpolação linear	47
Figura 3.23: Travamento por cisalhamento	49
Figura 3.24: Viga <i>a</i> : biapoiada sob flexão pura.....	58
Figura 3.25: Deflexão viga <i>a</i> : resultados analíticos e numéricos	59
Figura 3.26: Rotação viga <i>a</i> : resultados analíticos e numéricos.....	59
Figura 3.27: Viga <i>b</i> : engastada com carga concentrada na extremidade livre	60
Figura 3.28: Deflexão viga <i>b</i> : resultados analíticos e numéricos	61
Figura 3.29: Rotação viga <i>b</i> : resultados analíticos e numéricos.....	61
Figura 3.30: Viga <i>c</i> : biapoiada com carregamento uniformemente distribuído	62
Figura 3.31: Deflexão viga <i>c</i> : resultados analíticos e numéricos	63
Figura 3.32: Rotação viga <i>c</i> : resultados analíticos e numéricos.....	63
Figura 4.1: Elemento de viga plano em C_0	66
Figura 4.2: Graus de liberdade em relação ao eixo global	66
Figura 4.3: Deslocamentos globais.....	67
Figura 4.4: Forças globais	68
Figura 4.5: Movimento de corpo rígido: \mathbf{u}_r^t e θ_r	69
Figura 4.6: Modos naturais de deformação: a) deformação axial, b) deformação por rotação nodal simétrica e c) deformação por rotação nodal antissimétrica.....	70
Figura 4.7: Configuração deformacional: rotações	70
Figura 4.8: Modo natural de deformação: deformação axial.....	71
Figura 4.9: Esforço interno: normal	72
Figura 4.10: Modo natural de deformação: rotação nodal simétrica.....	72
Figura 4.11: Composição da deformação por rotação nodal simétrica	73
Figura 4.12: Esforço interno: momento simétrico.....	73

Figura 4.13: Diagrama de esforços internos para momento simétrico	74
Figura 4.14: Modo natural de deformação: rotação nodal antissimétrica	74
Figura 4.15: Composição da deformação por rotação nodal antissimétrica.....	75
Figura 4.16: Esforço interno: momento antissimétrico	76
Figura 4.17: Diagrama de esforços internos para momento antissimétrico	76
Figura 4.18: Transformação $\mathbf{f}^e \rightarrow \mathbf{f}$	78
Figura 4.19: Transformação $\mathbf{f}_d \rightarrow \mathbf{f}^e$	79
Figura 4.20: Transformação $\mathbf{u}_d \leftarrow \mathbf{u}^e$	81
Figura 4.21: Deslocamentos translacionais locais.....	81
Figura 4.22: Deslocamentos rotacionais locais	82
Figura 4.23: Elemento de viga co-rotacional	103
Figura 5.1: Viga em balanço com carga momento concentrado na extremidade livre	107
Figura 5.2: Trajetórias de equilíbrio para deslocamento vertical da viga em balanço com carga momento concentrado para cada processo de discretização	108
Figura 5.3: Trajetórias de equilíbrio para deslocamento horizontal da viga em balanço com carga momento concentrado para cada processo de discretização	109
Figura 5.4: <i>CST</i> x Fator de Carga para a viga em balanço com carga momento concentrado na extremidade livre	109
Figura 5.5: Configurações deformadas para a viga em balanço com carga momento concentrado na extremidade livre.....	110
Figura 5.6: Configurações deformadas para a viga em balanço com carga momento concentrado na extremidade livre, discretizado em 40 elementos de viga – 8 voltas completas	111
Figura 5.7: Viga em balanço com carga força concentrada na extremidade livre.....	112
Figura 5.8: Trajetória de equilíbrio da viga em balanço com carga força concentrada na extremidade livre para cada processo de discretização	113
Figura 5.9: Trajetórias de equilíbrio para deslocamento vertical e horizontal para a viga em balanço com carga força concentrada na extremidade	114

Figura 5.10: <i>CST</i> x Fator de Carga para a viga em balanço com carga força concentrada na extremidade livre	115
Figura 5.11: Configurações deformadas para a viga em balanço com carga força concentrada na extremidade livre	116
Figura 5.12: Pórtico de Lee	116
Figura 5.13: Trajetória de equilíbrio para o deslocamento horizontal do pórtico de Lee	117
Figura 5.14: Trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical do pórtico de Lee.....	118
Figura 5.15: Pontos limites e <i>turning points</i> para o pórtico de Lee	118
Figura 5.16: <i>CST</i> x Fator de Carga para o pórtico de Lee	119
Figura 5.17: Pivôs Negativos x Passos de Carga para o pórtico de Lee	119
Figura 5.18: Configurações deformadas para o pórtico de Lee.....	120
Figura 5.19: Pórtico Toggle.....	121
Figura 5.20: Trajetória de equilíbrio do pórtico Toggle para cada processo de discretização	122
Figura 5.21: Trajetória de equilíbrio vertical do pórtico Toggle.....	123
Figura 5.22: <i>CST</i> x Fator de Carga para o pórtico Toggle	123
Figura 5.23: Configurações deformadas para o pórtico Toggle	124
Figura 5.24: Arco circular de grande altura rotulado-engastado	125
Figura 5.25: Trajetória de equilíbrio vertical do arco rotulado-engastado	126
Figura 5.26: Pontos limites e <i>turning points</i> para o arco rotulado-engastado	126
Figura 5.27: <i>CST</i> x Fator de Carga para o arco rotulado-engastado.....	127
Figura 5.28: Pivôs Negativos x Passos de Carga para o arco rotulado-engastado	128
Figura 5.29: Configurações deformadas para o arco rotulado-engastado	128
Figura 5.30: Pórtico diamante birrotulado.....	129
Figura 5.31: Pórtico diamante birrotulado solicitado à compressão	130
Figura 5.32: Trajetória de equilíbrio do pórtico diamante birrotulado solicitado à compressão para cada processo de discretização	131

Figura 5.33: Trajetórias de equilíbrio do pórtico diamante birrotulado solicitado à compressão	131
Figura 5.34: <i>CST</i> x Fator de Carga para o pórtico diamante birrotulado solicitado à compressão	132
Figura 5.35: Configurações deformadas para o pórtico diamante birrotulado solicitado à compressão	133
Figura 5.36: Pórtico diamante birrotulado solicitado à tração.....	133
Figura 5.37: Trajetória de equilíbrio do pórtico diamante birrotulado solicitado à tração para cada processo de discretização	134
Figura 5.38: Trajetórias de equilíbrio do pórtico diamante birrotulado solicitado à tração ...	135
Figura 5.39: <i>CST</i> x Fator de Carga para o pórtico diamante birrotulado solicitado à tração	136
Figura 5.40: Configurações deformadas para o pórtico diamante birrotulado solicitado à tração	136

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1: Processo de discretização e análise da viga em balanço com carga momento concentrado na extremidade livre.....	108
Tabela 5.2: Comparativo de resultados analítico x numérico para a viga em balanço com carga momento concentrado na extremidade livre	111
Tabela 5.3: Processo de discretização e análise da viga em balanço com carga força concentrada na extremidade livre	113
Tabela 5.4: Comparativo de resultados analítico x numérico para a viga em balanço com carga força concentrada na extremidade livre	114
Tabela 5.5: Processo de discretização e análise do pórtico Toggle.....	121
Tabela 5.6: Processo de discretização e análise do pórtico diamante birrotulado solicitado à compressão	130
Tabela 5.7: Processo de discretização e análise do pórtico diamante birrotulado solicitado à tração	134

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURAS E ABREVIACÕES

- A – área da seção transversal;
- A_0 – área efetiva ao cisalhamento;
- b – base da seção transversal;
- C_D – configuração deformacional;
- C_R – configuração co-rotacional;
- C_o – configuração inicial ou de base;
- $d\mathbf{f}$ – variação incremental no vetor de forças global;
- $d\mathbf{f}_d$ – variação incremental no vetor de forças internas;
- $d\mathbf{f}^e$ – variação incremental no vetor de forças local;
- dl – variação incremental no comprimento do elemento de viga;
- dM_a – variação incremental do momento interno antissimétrico;
- dM_s – variação incremental do momento interno simétrico;
- dN – variação incremental do esforço interno normal;
- $d\mathbf{R}_c$ – variação incremental na matriz de rotação combinada;
- $d\mathbf{S}$ – variação incremental na matriz de transformação;
- ds – comprimento infinitesimal;
- $d\mathbf{u}$ – variação incremental no vetor de deslocamentos global;
- $d\mathbf{u}^e$ – variação incremental no vetor de deslocamentos local;
- $d\mathbf{u}_d$ – variação incremental no vetor de deslocamentos deformacional;
- dv – deslocamento transversal infinitesimal;
- dv^e – variação incremental no componente de deslocamento vertical local
- $d(\delta V)$ – variação incremental do trabalho virtual
- E – módulo de elasticidade longitudinal;
- f – fator de forma para cisalhamento;
- \mathbf{f} – vetor de forças global;
- \mathbf{f}^e – vetor de forças local;
- \mathbf{f}_d – vetor de forças internas;
- f_{x1}, f_{x2} – componentes horizontais do vetor de forças globais nos nós 1 e 2;
- f_{y1}, f_{y2} – componentes verticais do vetor de forças globais nos nós 1 e 2;
- f_{x1}^e, f_{x2}^e – componentes horizontais do vetor de forças locais nos nós 1 e 2;

f_{y1}^e, f_{y2}^e – componentes verticais do vetor de forças globais nos nós 1 e 2;
 G – módulo de elasticidade transversal;
 h – altura da seção transversal;
 I – momento de inércia da seção transversal;
 \mathbf{K} – matriz de rigidez tangente global;
 k_a – componente antissimétrico da matriz de rigidez geométrica local;
 \mathbf{K}_d – matriz de rigidez tangente relativa aos modos deformacionais;
 $\mathbf{K}_{d,mat}$ – matriz de rigidez tangente material;
 $\mathbf{K}_{d,geo}$ – matriz de rigidez tangente geométrica local;
 \mathbf{K}^e – matriz de rigidez tangente local;
 \mathbf{K}_r – matriz de rigidez tangente geométrica ou co-rotacional;
 k_s – componente simétrico da matriz de rigidez geométrica local;
 L – comprimento;
 l – comprimento final do elemento de viga;
 l_0 – comprimento inicial do elemento de viga;
 M – momento fletor;
 δM – momento fletor virtual;
 M_1, M_2 – momento fletor nos nós 1 e 2;
 M_a – momento interno antissimétrico;
 $M_a(x)$ – momento fletor devido ao momento antissimétrico;
 δM_a – momento fletor virtual antissimétrico;
 M_s – momento interno simétrico;
 δM_s – momento fletor virtual simétrico;
 $M_s(x)$ – momento fletor devido ao momento simétrico;
 m_{z1}, m_{z2} – componentes de momento do vetor de forças globais nos nós 1 e 2;
 m_{z1}^e, m_{z2}^e – componentes de momento do vetor de forças locais nos nós 1 e 2;
 \mathbf{n} – vetor normal;
 N – esforço interno normal;
 P_1, P_2 – forças transversais nos nós 1 e 2;
 p – forças distribuídas externas;
 Q – força transversal interna;
 δQ – esforço cortante virtual;
 $Q_a(x)$ – esforço cortante devido ao momento antissimétrico;
 δQ_a – esforço cortante virtual devido ao momento antissimétrico virtual;

$Q_s(x)$ – esforço cortante devido ao momento simétrico;
 $\delta Q_s(x)$ – esforço cortante virtual devido ao momento simétrico virtual;
 R – raio;
 \mathbf{R} – matriz de rotação;
 \mathbf{R}_c – matriz de rotação combinada;
 \mathbf{S} – matriz de transformação;
 U – energia de deformação;
 \mathbf{u} – vetor de deslocamentos globais;
 $\delta \mathbf{u}$ – vetor de deslocamentos globais virtuais;
 \mathbf{u}^e – vetor de deslocamentos locais;
 \mathbf{u}_d – vetor de deslocamentos deformacionais;
 \mathbf{u}_r – vetor de deslocamentos translacionais;
 u_1, u_2 – componentes horizontais do vetor de deslocamentos globais nos nós 1 e 2;
 u_1^e, u_2^e – componentes horizontais do vetor de deslocamentos locais nos nós 1 e 2;
 \bar{u}_1, \bar{u}_2 – deformação axial nos nós 1 e 2;
 δV – princípio dos trabalhos virtuais;
 v_1, v_2 – componentes verticais do vetor de deslocamentos globais nos nós 1 e 2;
 v_1^e, v_2^e – componentes verticais do vetor de deslocamentos locais nos nós 1 e 2;
 w – deslocamento vertical da linha elástica;
 δw – variação incremental do deslocamento vertical da linha elástica;

α – inclinação dos apoios do arco circular de grande altura;
 β – rotação proveniente da deformação cisalhante;
 γ – deformação cisalhante;
 $\delta \gamma$ – deformação cisalhante virtual;
 $\Delta \theta$ – variação angular;
 δ – componente virtual;
 ϵ_N – deformação normal;
 ξ – coordenada adimensional;
 η – fator de cisalhamento individual;
 θ – rotação da seção transversal;
 $\delta \theta$ – rotação virtual da seção transversal;

θ_a – rotação nodal deformacional antissimétrica;
 θ_r – rotação de corpo rígido;
 θ_s – rotação nodal deformacional simétrica;
 θ_1, θ_2 – componentes rotacionais do vetor de deslocamentos globais nos nós 1 e 2;
 θ_1^e, θ_2^e – componentes rotacionais do vetor de deslocamentos locais nos nós 1 e 2;
 $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$ – rotações deformacionais nos nós 1 e 2;
 $d\theta^e$ – componentes incrementais rotacionais do vetor de deslocamentos locais;
 $d\theta_a$ – variação incremental da rotação nodal deformacional antissimétrica;
 $d\theta_s$ – variação incremental da rotação nodal deformacional simétrica;
 κ – curvatura;
 $\delta\kappa$ – curvatura virtual;
 λ – fator de carga;
 ρ – raio de curvatura;
 σ_N – tensão normal;
 φ – rotação total global;
 φ_0 – rotação inicial;
 Φ – parâmetro de cisalhamento;
 ψ_a – coeficiente de momento antissimétrico;

PECC – Programa de Pós-Graduação em Engenharia e Construção Civil

UnB – Universidade de Brasília

LT – Descrição lagrangiana total

LA – Descrição lagrangiana atualizada

CR – Descrição co-rotacional

EICR – Element Independent Co-Rotational Formulation

ANDES – Assumed Natural Deviatoric Strains

CSSE – Consistent Simetrizable Self-Equilibrated

CST – Current Stiffness Parameter

PL – Ponto limite

TP – Turning point

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÕES

O avanço nas pesquisas referentes à área estrutural no ramo das engenharias, realizadas por pesquisadores ao redor do mundo, acarretaram em melhorias e no desenvolvimento de técnicas confiáveis para a análise estrutural.

Segundo Martha (2010), a análise estrutural corresponde a uma fase do projeto estrutural em que é feita a idealização do comportamento da estrutura, tendo como objetivo a determinação dos esforços internos e externos, as tensões correspondentes e a determinação dos deslocamentos e deformações da estrutura que está sendo projetada. Neste contexto, as estruturas podem ser modeladas computacionalmente em estruturas de respostas lineares e estruturas de respostas não lineares.

Os métodos de análise estrutural clássicos, cujo conhecimento se encontra consolidado devido a sua maior simplicidade de utilização, baseiam-se no modelo de estruturas lineares. Conforme Belo (2009), uma estrutura linear é aquela caracterizada por um modelo matemático que, para todas as possibilidades de variáveis de carregamento e deslocamento, conduzem a uma trajetória de equilíbrio linear, ou seja, a estrutura pode sustentar qualquer carregamento proporcionalmente à magnitude do deslocamento, não ocorrendo pontos críticos e de falha, os quais os tornam incapazes de resistir a carregamentos mais elevados sem que uma mudança significativa na sua geometria ocorra. Para estes modelos, o princípio da superposição de efeitos é válido e, removendo a carga, a estrutura retorna a posição inicial, admitindo conjuntamente a linearidade física.

Conforme expresso acima, o comportamento dos modelos lineares de estruturas está associado a duas relações de linearidade: (i) física e (ii) geométrica. Conforme Silva (2011) a linearidade física está relacionada ao comportamento mecânico do material constituinte da estrutura, estabelecendo uma relação linear entre as tensões e deformações, ou seja, as tensões internas apresentadas pelos modelos estruturais são proporcionais às deformações, de forma que o material trabalhe em condições para as quais a lei de Hooke é válida. A linearidade geométrica, por sua vez, estabelece uma relação linear entre as deformações e os deslocamentos. Na análise de uma estrutura sólida é habitual considerar que os

deslocamentos provocados pelas ações exteriores são muito pequenos quando comparados com as dimensões dos componentes da estrutura, admitindo então, que não existe influência da modificação da geometria da estrutura na distribuição dos esforços e das tensões. Sendo assim, o estudo da análise estrutural é feito com base na geometria inicial indeformada, garantindo a linearidade geométrica.

Porém, o desenvolvimento da ciência dos materiais tornou possível a utilização de estruturas cada vez mais esbeltas devido ao emprego de materiais de alta resistência e baixo peso próprio. Segundo Belo (2009), em decorrência disso, a resposta da estrutura, que poderia ser simplificada como sendo linear, torna-se obrigatoriamente não linear. De acordo com Menin (2006), estas estruturas esbeltas, cada vez mais utilizadas em edificações, pontes, cascos de navios, indústrias aeroespaciais, entre outras, podem estar sujeitas a fenômenos de instabilidade de equilíbrio, sendo necessária a realização de uma análise qualitativa e quantitativa do comportamento estrutural segundo a trajetória de equilíbrio apresentada, tanto na fase pré-crítica, na qual os fenômenos de instabilidade não ocorreram, quanto na fase posterior à perda de estabilidade de equilíbrio, denominada fase pós-crítica.

Os modelos estruturais não lineares estão associados às não linearidades física e/ou geométrica, opostas às linearidades já mencionadas. A não linearidade física ocorre quando o comportamento material da estrutura não permite o emprego das leis de Hooke, tornando necessário o conhecimento do comportamento material para que se possa definir um modelo a ser utilizado na análise computacional. Cortivo (2004), Belo (2009) e Silva (2011) estudaram a não linearidade física utilizando modelos elastoplásticos, modelos hiperelásticos e plasticidade por camadas, respectivamente.

A não linearidade geométrica, por sua vez, está associada a uma relação não linear entre deformação e deslocamento, admitindo a consideração de grandes rotações e translações do elemento, conjuntamente com a ocorrência de deformações infinitesimais, segundo Belo (2009). Neste âmbito, a análise estrutural é realizada considerando a geometria deformada da estrutura, demandando de cálculos mais complexos incrementais-iterativos e recursos computacionais. O método de análise da não linearidade geométrica leva em consideração a cinemática apresentada pelo problema, sendo a formulação co-rotacional um dos métodos a serem empregados para a descrição do movimento do elemento estrutural. Cortivo (2004), Menin (2006), Belo (2009), Silva (2011) e Silva (2013)

estudaram a não linearidade geométrica de elementos estruturais utilizando a formulação co-rotacional como descrição cinemática, adotada para descrever os movimentos de corpo rígido e deformacionais apresentados por seus modelos de elementos finitos.

Conforme Menin (2006), o estudo de modelos não lineares está associado ao conhecimento da trajetória de estabilidade de equilíbrio apresentada. A análise da perda de capacidade portante da estrutura está intimamente relacionada com a natureza da instabilidade de equilíbrio que possa ocorrer no sistema, tornando-se necessário conhecer o fenômeno para melhor avaliar o desempenho da capacidade resistente da estrutura, em especial, na fase pós-crítica.

Menin (2006) ainda relata que, no estudo dos fenômenos de instabilidade, observa-se que em um grande número de casos, a estrutura se comporta elasticamente mesmo na fase pós-crítica, de modo que ocorram apenas não linearidades geométricas, determinadas por grandes deslocamentos e rotações, acompanhados por pequenas deformações. Dessa forma, adota-se como hipótese simplificada que as deformações sejam infinitesimais, permitindo o uso de elementos finitos lineares para obter a resposta deformacional do sistema, considerando os movimentos de corpo rígido separadamente.

Diante do exposto, surge a necessidade de gerar modelos numéricos que sejam confiáveis e capazes de representar de maneira simples e eficiente um problema complexo da engenharia, quando se demanda realizar análises não lineares que levam em consideração a não linearidade física e/ou geométrica, comum nos dias atuais.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é realizar uma análise não linear geométrica de pórticos planos utilizando a formulação co-rotacional e elementos finitos de viga unificados Bernoulli-Timoshenko.

Para alcançar o objetivo final, o presente trabalho apresenta o desenvolvimento da formulação matemática, necessária para a realização da análise não linear proposta, em ordem crescente de complexidade, de forma a cumprir com os seguintes objetivos específicos:

* Análise estática linear:

- Obter a matriz de rigidez linear de um elemento finito de viga unificado considerando a influência da deformação cisalhante na flexão, sem o acoplamento dos esforços axiais, por meio do princípio dos trabalhos virtuais complementares;
- Validar, por meio de exemplos numéricos, que a matriz de rigidez linear obtida para o elemento finito de viga unificado acima não apresenta travamento por cisalhamento.

* Análise estática não linear:

- Desenvolver a formulação co-rotacional para o elemento de viga unificado, considerando o acoplamento dos esforços axiais, por meio do princípio dos trabalhos virtuais complementares e da adoção dos modos naturais de deslocamento;
- Obter a matriz de rigidez tangente para o elemento finito de viga unificado acima, validando que a mesma apresenta coeficientes que não permitem o fenômeno de travamento por cisalhamento;
- Implementar o algoritmo para análise não linear geométrica de pórticos planos em um programa de elementos finitos, obtido com o desenvolvimento da formulação teórica, para realizar as simulações numéricas e validar os resultados encontrados neste trabalho com as soluções propostas pela literatura.

1.3 METODOLOGIA

Para realizar as simulações numéricas com a formulação proposta neste trabalho, utiliza-se o programa de elementos finitos denominado *co_rotating_2Dbeam.f90*, em linguagem *Fortran*, gentilmente cedido pelo professor William Taylor Matias Silva, desenvolvido pelo grupo de estudos em Análise Não Linear de Estruturas do Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) da Universidade de Brasília (UnB), sob a orientação do mesmo.

Seis estruturas são escolhidas para compor os exemplos numéricos, sendo: viga em balanço com carga momento concentrado na extremidade livre, viga em balanço com carga força concentrada na extremidade livre, pórtico de Lee, pórtico Toggle, arco circular de

grande altura e pórtico diamante birrotulado. As análises resultam na obtenção da trajetória de equilíbrio nas direções dos graus de liberdade e na configuração deformada da estrutura, permitindo a comparação com os resultados obtidos por outros autores na literatura, de forma a realizar a validação dos resultados e comprovar a eficiência da formulação implementada.

O referido programa realiza análises não lineares geométrica utilizando a descrição cinemática co-rotacional, onde são implementados os elementos finitos de viga desenvolvidos por Krenk (2009).

1.4 APRESENTAÇÃO DO TRABALHO

Este capítulo introdutório apresentou algumas ideias gerais sobre o ramo da engenharia dedicado a análise de estruturas, estabelecendo um comparativo sucinto entre os modelos estruturais lineares e os modelos não lineares. Apontou as definições sobre as formas de linearidade ou não linearidade física e geométrica, bem como a complexidade exigida pela análise estrutural de modelos cujo comportamento é regido por fontes de não linearidade, além dos objetivos a serem alcançados e a metodologia a ser utilizada no desenvolvimento do trabalho.

O capítulo 2 é dedicado a um aprofundamento sobre a análise não linear geométrica de estruturas, apresentando as descrições cinemáticas usuais encontradas na literatura, aplicadas no contexto do método dos elementos finitos. Estabelece-se um foco principal na descrição cinemática co-rotacional, objetivo de estudo do presente trabalho, apresentando um breve histórico da formulação e algumas pesquisas já desenvolvidas pela Universidade de Brasília.

No capítulo 3, desenvolve-se a formulação para a obtenção da matriz de rigidez linear de um elemento finito de viga unificado, sem o acoplamento dos esforços axiais, baseado no princípio dos trabalhos virtuais complementares. Um resumo geral sobre a teoria clássica de flexão de vigas é apresentada, as quais dão origem ao elemento de viga Bernoulli, sendo em seguida, detalhado o procedimento da formulação de um elemento finito unificado Bernoulli-Timoshenko por meio da consideração da deformação cisalhante na flexão de vigas. Ao final, é dado o foco ao fenômeno de travamento por cisalhamento e as técnicas

para obter a matriz de rigidez corrigida, cujos coeficientes evitam o fenômeno de *shear locking*.

O capítulo 4 apresenta a formulação co-rotacional aplicada a elementos finitos de viga unificados, considerando o acoplamento dos esforços axiais. O procedimento de obtenção da matriz de rigidez tangente local e global é detalhado, bem como o vetor de forças e deslocamentos generalizados. Adota-se a formulação proposta por Krenk (2009), o qual considera a adoção dos modos naturais de deslocamento, divididos entre movimentos de corpo rígido, estabelecidos por translações e rotações, e os modos naturais de deformação, dados pelas deformações axial, deformação por rotação nodal simétrica e deformação por rotação nodal antissimétrica.

O capítulo 5 traz os exemplos numéricos analisados pelo programa de análise não linear geométrica de pórticos planos desenvolvido em linguagem *Fortran* e a discussão dos seus resultados.

Por fim, o capítulo 6 apresenta as conclusões finais deste trabalho, além de apontar as sugestões para trabalhos futuros.

2 NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

Este capítulo dedica-se a informações sobre a análise não linear geométrica de estruturas, apresentando as descrições cinemáticas usuais encontradas na literatura, aplicadas no contexto do método dos elementos finitos. Estabelece-se um foco principal na descrição cinemática co-rotacional, objetivo de estudo do presente trabalho, apresentando um breve histórico da formulação e algumas pesquisas já desenvolvidas pela Universidade de Brasília.

2.1 DESCRIÇÕES CINEMÁTICAS

A essência dos métodos de análise estrutural que consideram a não linearidade geométrica está no fato de estabelecer o equilíbrio da estrutura na sua configuração deformada, alcançada após a consideração de grandes deslocamentos e rotações. Percebe-se, portanto, a necessidade de se promover um estudo cinemático do sistema visando a determinação e/ou consideração do movimento apresentado pelo elemento estrutural até atingir a sua posição de equilíbrio.

Conforme Menin (2006), no contexto da análise não linear geométrica utilizando o método dos elementos finitos, três tipos de descrições cinemáticas têm sido amplamente utilizadas para a descrição do movimento do elemento, sendo: descrição lagrangiana total (*LT*), descrição lagrangiana atualizada (*LA*) e descrição co-rotacional (*CR*). A diferença entre as descrições cinemáticas citadas se dá pela escolha da configuração de referência.

Segundo Belo (2009), a descrição cinemática co-rotacional é uma das formulações mais recentes na análise estrutural de não linearidade geométrica de estruturas, e em função disto, ainda não atingiu o mesmo nível de desenvolvimento da formulação lagrangiana. Conforme Felippa (2001), a formulação lagrangiana total (*LT*) ainda é a formulação mais utilizada, ao passo que o interesse pela formulação lagrangiana atualizada (*LA*) tem diminuído bastante e sendo gradualmente substituída pela formulação co-rotacional (*CR*).

Para a definição e diferenciação das descrições cinemáticas citadas, considerar-se-á o exemplo ilustrado pela Figura 2.1. O elemento estrutural ab , em sua configuração inicial (descarregada e indeformada – configuração 0), pode ser definido em termos do sistema de coordenadas global fixo, x - y , ou em termos do sistema de coordenadas locais, x_0 - y_0 , no qual x_0 corresponde ao eixo da barra, direcionado no sentido dos nós a_0 e b_0 . Após a aplicação gradual do carregamento, o sistema muda da configuração 0 para a configuração t , de forma que todas as variáveis do problema já tenham sido determinadas nesta última configuração, estando o sistema em equilíbrio. Pode-se agora estabelecer como referência o elemento ab na configuração t , utilizando o sistema de coordenadas globais ou o novo sistema local atualizado, x_t - y_t , com x_t determinado pelos extremos do elemento na nova configuração. O elemento terá mudado a sua forma e dimensão neste processo, mas as equações de equilíbrio formuladas estarão satisfeitas e a posição de qualquer ponto material, na posição inicial p_0 , poderá ser mapeada na nova posição p_t .

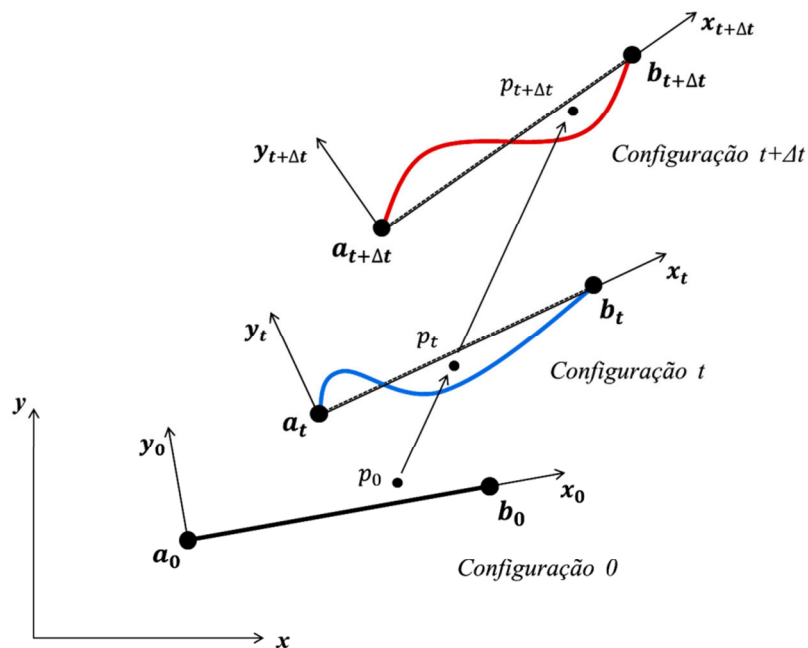


Figura 2.1: Descrições cinemáticas.

Tendo-se por base um estado de equilíbrio conhecido em uma configuração t , os procedimentos incrementais-iterativos procuram determinar o próximo estado de equilíbrio em uma nova configuração $t+\Delta t$.

a) Descrição lagrangiana total (LT):

Segundo Menin (2006), na descrição lagrangiana total (LT), as equações do método dos elementos finitos são formuladas em relação a uma configuração de referência fixa, sendo em geral, a própria configuração inicial assumida pela estrutura.

Sendo assim, todas as variáveis estáticas e cinemáticas no tempo $t+\Delta t$ são referidas à configuração inicial (indeformada) da estrutura, ou seja, o membro ab é referido a x_0-y_0 , conforme ilustrado pela Figura 2.2.

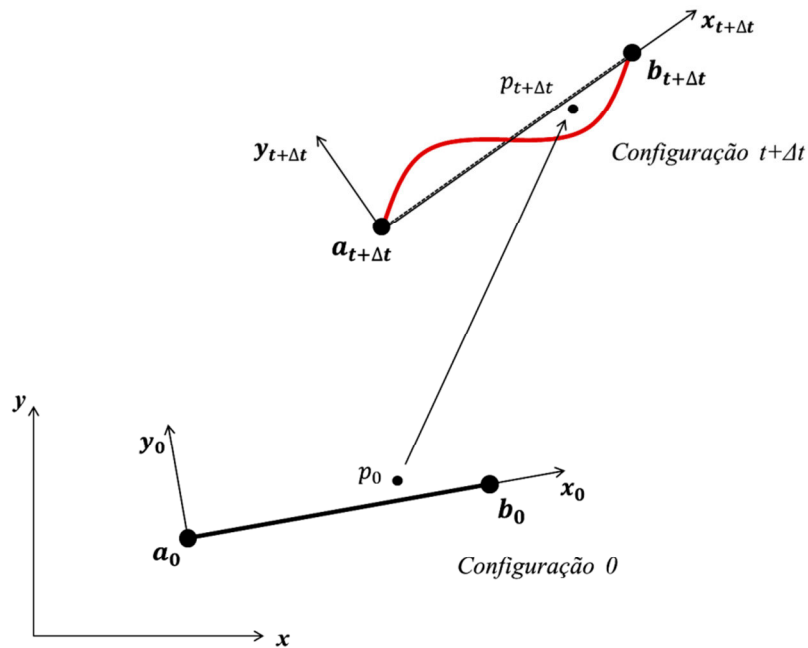


Figura 2.2: Descrição lagrangiana total (LT).

b) Descrição lagrangiana atualizada (LA):

Conforme Menin (2006), na descrição lagrangiana atualizada (LA), as equações do método dos elementos finitos são formuladas em relação à última configuração de equilíbrio, ou seja, a configuração de referência é mantida fixa durante o processo iterativo, dentro de um mesmo passo de carga, e, uma vez atingido o equilíbrio, todas as tensões e deformações da estrutura passam a ser definidas em função da nova configuração de equilíbrio.

Sendo assim, todas as variáveis estáticas e cinemáticas no tempo $t+\Delta t$ são referidas à última configuração de equilíbrio da estrutura, ou seja, o membro ab é referido a x_t-y_t , conforme ilustrado pela Figura 2.3.

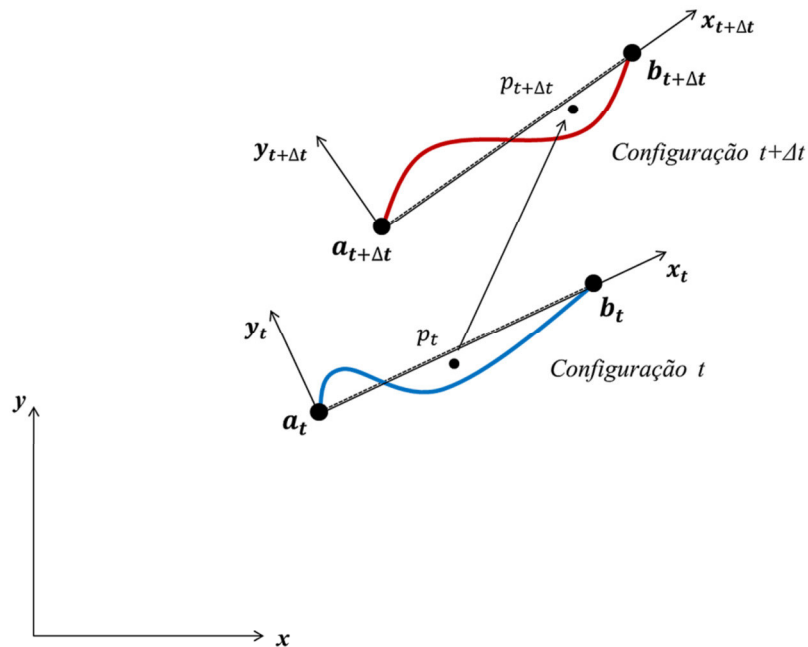


Figura 2.3: Descrição lagrangiana atualizada (LA).

c) Descrição co-rotacional (CR):

De acordo com Menin (2006), na descrição cinemática co-rotacional (CR), as equações do método dos elementos finitos de cada um dos elementos são definidas em relação a dois sistemas distintos: *i*) uma configuração de base, que permanece fixa ao longo de toda a análise, sendo utilizada para medir os deslocamentos de corpo rígido e, *ii*) uma configuração co-rotacional, que acompanha cada um dos elementos, a partir do qual são obtidos, exclusivamente, os deslocamentos deformacionais, usados posteriormente para definir as tensões e deformações do elemento.

Sendo assim, a descrição co-rotacional promove uma separação explícita entre os movimentos de corpo rígido e os movimentos deformacionais do elemento, conforme ilustrado pela Figura 2.4.

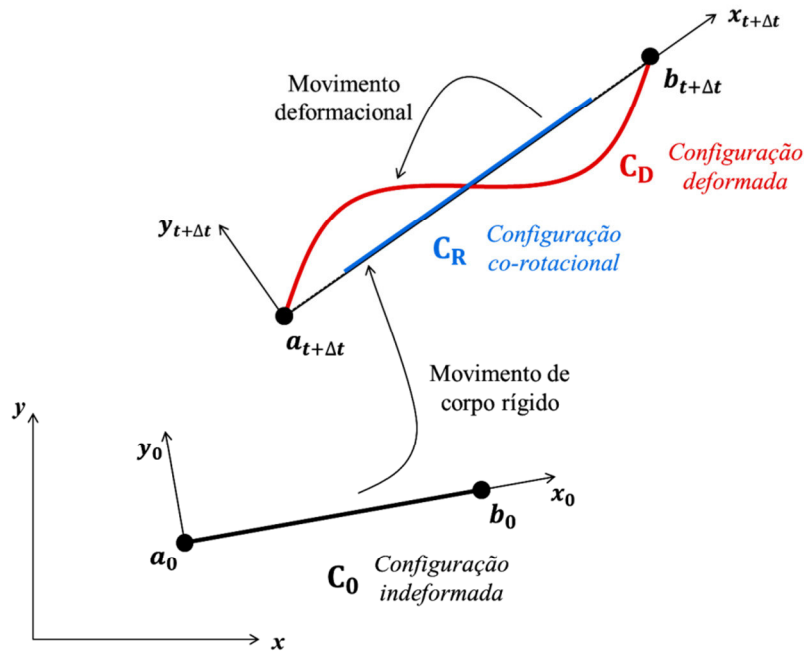


Figura 2.4: Descrição co-rotacional (CR).

Segundo Belo (2009), a ocorrência de dois sistemas de eixos referenciais na formulação co-rotacional, global e local, se configura em uma restrição à popularização da descrição CR nos códigos computacionais, aliada à questão da dificuldade da formulação das equações necessárias para a implementação do método.

Entretanto, a descrição co-rotacional apresenta uma série de vantagens sobre a formulação lagrangiana conforme destacadas por Menin (2006), sendo:

- Eficiência no tratamento de problemas envolvendo grandes rotações e pequenas deformações;
- Permite a reutilização de bibliotecas de elementos finitos lineares pré-existentes em uma análise não linear geométrica de estruturas. Conforme Belo (2009), o grande trunfo da formulação co-rotacional está nessa premissa, isto é, uma vez que o modelo permite as grandes rotações e deslocamentos, porém, com pequenas deformações, isso implica na possibilidade de utilizar a biblioteca existente dos elementos obtidos via método dos elementos finitos, formulados para análise linear, apenas com pequenas mudanças em seu código;
- Facilidade no estudo de não linearidades físicas, caracterizadas por pequenas deformações, juntamente com não linearidades geométricas;

- Facilidade de adaptação ao estudo de elementos estruturais com graus de liberdade de rotação (vigas, placas e cascas) submetidos a grandes rotações.

Algumas desvantagens também são atribuídas à descrição co-rotacional em relação à descrição lagrangiana conforme observadas por Menin (2006), sendo listadas abaixo:

- A formulação co-rotacional não é vantajosa no estudo de problemas envolvendo grandes deformações plásticas;
- Pode levar a uma matriz de rigidez tangente não simétrica para elementos com graus de liberdade de rotação no espaço. Porém, conforme já foi apresentado por um grande número de pesquisadores, pode-se utilizar processos de simetrização sem prejudicar os resultados finais, ou mesmo, o grau de convergência da solução;
- Envolve formulações matemáticas mais complexas na avaliação dos graus de liberdade de rotação;
- A formulação é eficiente somente para o caso de elementos finitos com geometria inicial simples: elementos de treliças e vigas contendo dois nós e elementos de placas ou cascas contendo três ou quatro nós. Para elementos com geometrias mais complexas, o nível de dificuldade aumenta bastante. Felizmente, os elementos com geometria simples são, geralmente, os elementos utilizados com maior frequência na análise não linear geométrica de estruturas.

2.2 HISTÓRICO DA FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL

O princípio da formulação co-rotacional tem o seu primórdio relacionado a uma ideia antiga pertencente ao âmbito da Mecânica dos Meios Contínuos, no qual estabelece que o movimento total de uma superfície contínua pode ser decomposta em movimento de corpo rígido e deformação relativa. Esta ideia surgiu inicialmente em teorias envolvendo pequenas deformações, acompanhadas por grandes movimentos de corpo rígido, sendo estudada pela primeira vez por Cauchy em 1827 (Truesdell, 1966).

As décadas de 50 e 60 trouxeram importantes avanços tecnológicos nas indústrias aeronáutica e aeroespacial, disseminando a ideia da descrição cinemática baseada na separação de movimentos de corpo rígido e deformacional entre os projetistas, que tinham

o objetivo de realizar análises de estruturas completas permitindo o monitoramento do movimento principal das mesmas. Neste sentido, a formulação foi definida baseando-se em um sistema de eixos cartesianos e ortogonais único que acompanhava o movimento do corpo e, em relação ao qual, os deslocamentos, velocidades e acelerações de um ponto material eram computados e referiam-se unicamente às variáveis deformacionais.

As vantagens apresentadas pelo método de análise não linear geométrica utilizado pela indústria aeronáutica logo foram ganhando destaque, de forma a ser acoplada ao contexto do Método dos Elementos Finitos com os trabalhos de Argyris (1965). Este foi o precursor do conceito de decomposição do movimento, o qual foi inicialmente denominado de “aproximação natural”.

A extensão desta ideia utilizada na indústria aeronáutica para o campo da análise não linear geométrica via método dos elementos finitos está baseada em uma modificação bastante simples: ao invés de utilizar um sistema de eixos único para a estrutura como um todo, deveria ser utilizado um sistema de eixos por elemento. Esta modificação é essencial para o sucesso da formulação co-rotacional, uma vez que ela ajuda a satisfazer uma premissa básica: a hipótese de pequenas deformações, ou seja, deslocamentos e rotações deformacionais infinitesimais em relação ao sistema de eixos co-rotacionais. A hipótese de pequenas deformações é o grande trunfo para a re-utilização de elementos finitos lineares em problemas envolvendo a não linearidade geométrica através da formulação co-rotacional.

Em 1969, Wempner aplica o conceito da descrição cinemática co-rotacional em um contexto do método dos elementos finitos desenvolvendo uma formulação para o estudo de cascas submetidas a pequenas deformações e grandes deslocamentos. Em seguida, Belytschko & Hsieh (1973) estudaram elementos finitos de viga submetidos a grandes rotações e propuseram um método baseado em um sistema de coordenadas curvilíneas denominado “*convected coordinates*”.

Posteriormente, Fraeijs de Veubeke (1976) desenvolveu para a indústria aeronáutica uma formulação co-rotacional para a análise dinâmica de estruturas, baseando-se na utilização de um único sistema de eixos co-rotacionais para a estrutura como um todo. O intuito era o de apresentar uma solução analítica do problema em questão, descrito como *shadow element* (elemento sombra), do que propor um elemento finito propriamente dito.

Entretanto, a determinação deste sistema de eixos único para a estrutura como um todo criava uma série de dificuldades, de modo que, o conceito da configuração fantasma, ou *shadow element*, foi levado para o nível do elemento por vários pesquisadores, dentre os quais se destacam Bergan & Horrigmoe (1976) e Bergan & Nygard (1989). Nos trabalhos de Bergan & Nygard (1989), o conceito da configuração fantasma transformou-se em uma ferramenta de visualização muito útil, facilitando o entendimento da formulação co-rotacional. Este conceito foi usado pelos autores para eliminar os movimentos de corpo rígido de cada um dos elementos e obter apenas o movimento deformacional, a partir do qual, pode ser computado o vetor de forças internas do elemento. Porém, as derivadas do vetor de forças internas não foram usadas diretamente na formação da matriz de rigidez tangente, fato que conduziu a uma perda de consistência.

Belytschko e Glaum (1979) introduziram o termo “co-rotacional” para se referir ao movimento do sistema de coordenada local anexado ao elemento, e esta terminologia se tornou a adotada na maior parte dos artigos publicados a partir de então.

Outra importante contribuição é atribuída a Rankin & Brogan (1986), introduzindo a chamada formulação *EICR* (*Element Independent Co-Rotational Formulation*), posteriormente refinada por Rankin & Nour-Omid (1988) e por Nour-Omid & Rankin (1991), sendo esta formulação implementada no programa *STAGS* (Almroth et al., 1979). A formulação *EICR* não faz uso explícito do conceito do “*shadow element*”, mas o caminho para a obtenção dos deslocamentos deformacionais, que se baseia no uso de operadores de projeção, é bastante similar ao processo utilizado por Bergan & Nygard (1989). Estes autores usaram a formulação co-rotacional diretamente para formar a matriz de rigidez tangente, proporcionando uma matriz de rigidez consistente.

A formulação proposta por Nour-Omid & Rankin (1991) ainda apresentava restrições no número de graus de liberdade que poderiam participar na rotação do sistema de coordenadas do elemento e, ao mesmo tempo, manter a consistência da matriz de rigidez tangente. Para resolver este problema, Haugen (1994) desenvolveu um trabalho aplicado para o estudo de cascas planas discretizadas por elementos triangulares e quadrangulares, que continham o grau de liberdade de rotação torsional, combinando as principais características das duas formulações anteriores (*shadow element* e *EICR*), ou seja, combinando a natureza invariável da formulação de Bergan e o equilíbrio e a consistência da formulação de Rankin.

Outras contribuições importantes são atribuídas a Hsiao & Hou (1987) e Hsiao et al. (1987), que apresentaram formulações simples e eficientes para a remoção da restrição de pequenas rotações entre dois passos de carga sucessivos em uma análise não linear geométrica de pórticos planos e espaciais. Pouco tempo depois, Cardona (1989) utilizou o conceito da formulação co-rotacional para o estudo de mecanismos.

Cole (1990) desenvolveu formulações consistentes para o estudo de vigas planas e espaciais utilizando a formulação co-rotacional, dando ênfase especial nos diferentes métodos para definição, atualização e parametrização de grandes rotações no espaço, bem como no estudo teórico e implementação computacional de programas capazes de estudar problemas com cargas seguidoras.

Crisfield (1990) apresentou uma formulação consistente para a análise não linear geométrica de pórticos espaciais. Peng & Crisfield (1992) apresentaram uma formulação consistente para o estudo de estruturas de cascas, utilizando uma combinação do elemento triangular de membrana com deformações constantes e do elemento triangular de placa com curvatura constante. Em 1996, Crisfield & Moita apresentaram um procedimento teórico, inicialmente introduzido para o estudo de elementos finitos sólidos, sendo o mesmo, em seguida, modificado de modo a abordar também o estudo de vigas espaciais e cascas.

Pacoste e Eriksson (1996) estudaram problemas de instabilidade para elementos de viga no plano e no espaço, comparando as descrições lagrangiana total e co-rotacional e, posteriormente, Pacoste (1998) fez estudos de instabilidade de cascas utilizando elementos finitos planos e triangulares de casca contendo três nós e seis graus de liberdade por nó, seguindo, basicamente, a formulação descrita por Nour-Omid & Rankin (1991) através da utilização de projetores, porém, implementando uma parametrização das rotações finitas no espaço, que leva a uma mudança adicional de variáveis, de modo que as variáveis relacionadas às rotações no espaço se tornem aditivas e, com isso, tornando desnecessário eventuais procedimentos de atualização.

Rodrigues (2000) desenvolveu ferramentas numéricas para análise estática não linear física e geométrica de estruturas reticuladas espaciais na exploração de petróleo offshore. A formulação co-rotacional para elementos de pórtico tridimensional com não linearidade geométrica é empregada para fornecer um tratamento preciso das rotações finitas. As técnicas do controle de deslocamento, do comprimento do arco constante e do controle de

deslocamento generalizado são utilizadas para se obter a completa trajetória não linear de equilíbrio e permitir a correta avaliação da carga limite ou de colapso.

De Souza (2000) apresentou uma formulação baseada no método das forças para análise inelástica e de grandes deslocamentos em pórticos planos e espaciais, e sua implementação numérica consistente em um programa geral de elementos finitos. A ideia principal do método é a utilização de funções de interpolação de força que satisfazem estritamente o equilíbrio na configuração deformada do elemento. O sistema de referência adequado para estabelecer estas funções de interpolação de força é um sistema de coordenadas básico sem modos de corpo rígido. Neste sistema, o elemento de rigidez tangente é não singular e pode ser obtido pela inversão da matriz de flexibilidade. A não-linearidade geométrica é tratada empregando-se a formulação co-rotacional.

Battini (2002) implementou elementos finitos de viga numa formulação co-rotacional, além de procedimentos numéricos que detectam pontos limites e de bifurcações, e que obtêm as trajetórias secundárias, para a análise de problemas de instabilidade elástica e elastoplástica em estruturas bi e tridimensionais.

Iura et al. (2003) examinou a eficiência de soluções numéricas obtidas com a implementação da formulação co-rotacional utilizando elementos finitos de viga Timoshenko 3D sujeitos a deformações finitas e a rotações finitas. Mostra-se que o uso das coordenadas secantes convencionais não fornecem soluções numéricas satisfatórias. Introduce-se, então, um novo sistema de coordenada local no qual é utilizado um elemento de viga linear para construir a função da energia de deformação. Desta forma, as soluções numéricas obtidas convergem para as soluções da teoria exata de vigas à medida que se aumenta o número de elementos utilizados na discretização do sistema.

Li (2007) utilizou a formulação co-rotacional e um elemento de viga 3D isoparamétrico de 3 nós para efetuar uma análise precisa de pórticos submetidos a grandes deslocamentos e rotações. Primeiramente, um eixo co-rotacional é fixado no nó interno do elemento, o qual acompanha as translações e as rotações do mesmo. Posteriormente, definem-se as variáveis vetoriais rotacionais, compostas por três componentes dos vetores principais da seção transversal em cada nó. Então, o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente local são derivados da energia de deformação do elemento a partir da primeira e da segunda derivada parcial em relação às variáveis locais, respectivamente, e uma matriz de rigidez simétrica é alcançada.

2.3 TRABALHOS DESENVOLVIDOS NA UnB

Ao longo da última década, a Universidade de Brasília realizou pesquisas relacionadas à análise não linear geométrica de estruturas utilizando a formulação co-rotacional como descrição cinemática, no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC). Alguns trabalhos consideraram também a não linearidade física dos elementos em conjunto com a não linearidade geométrica, desenvolvendo formulações teóricas aplicáveis a uma diversidade gama de elementos que compõe o Método dos Elementos Finitos. Ressaltam-se aqui, de forma resumida, os cinco trabalhos desenvolvidos ao longo desse período, a título de informação.

a) *Cortivo (2004)*:

A tese intitulada “Análise de estruturas de cascas finas utilizando-se uma formulação co-rotacional, um modelo plástico por camadas e o elemento finito *ANDES*” teve como objetivo desenvolver métodos para análises não lineares física e geométrica de estruturas de cascas finas, sujeitas a grandes deslocamentos, mas no domínio das pequenas deformações.

Utilizou-se como ponto de partida a formulação co-rotacional *CSSE (Consistent Simetrizable Self-equilibrated)*, o elemento finito de casca linear elástico triangular de três nós *ANDES (Assumed Natural Deviatoric Strains)* e o método de comprimento de arco, para análise da não linearidade geométrica. Como extensão, para acomodar a não linearidade física (plasticidade) foi adotado o modelo elastoplástico por camadas baseado no critério do escoamento plástico de von Mises, tanto para materiais com endurecimento isotrópico, quanto para materiais perfeitamente plásticos.

Foi criado um termo de acoplamento entre as rijezas básica e de alta ordem para a matriz de rigidez material do elemento finito *ANDES*, através da derivação do vetor das forças internas, apresentando grande influência na convergência global do processo iterativo da análise.

b) Menin (2006):

A tese intitulada “Aplicação da descrição cinemática co-rotacional na análise não linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas” teve como objetivo estudar a capacidade portante de diferentes tipologias estruturais após a perda ou bifurcação de equilíbrio, utilizando a formulação co-rotacional para avaliar o comportamento não linear geométrico de estruturas planas e espaciais em análise estática, discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas ou cascas planas triangulares.

Na análise não linear geométrica de treliças, a formulação co-rotacional foi implementada para o caso de estruturas planas e espaciais, sendo as variáveis cinemáticas e os deslocamentos deformacionais determinados em função dos parâmetros puramente geométricos.

No caso de pórticos planos, assim como para a análise de barras articuladas, as equações de transformação que permitem a separação dos movimentos de corpo rígido e deformacional, puderam ser obtidas de forma exata utilizando apenas parâmetros puramente geométricos. A formulação co-rotacional foi desenvolvida em função dos deslocamentos globais rotacionados, admitindo rotações totais de qualquer ordem de grandeza.

Para os pórticos espaciais, a análise não linear geométrica foi realizada utilizando a formulação *EICR (Element Independent Co-Rotational Formulation)*, desenvolvida por Nour-Omid & Rankin (1991), o qual obtêm os deslocamentos deformacionais da estrutura utilizando operadores de projeção.

A análise não linear geométrica de estruturas de cascas também foi realizada a partir da formulação *EICR* desenvolvida por Nour-Omid & Rankin (1991), propondo modificações no alinhamento do sistema co-rotacional de eixos, incluindo o operador de projeção associado à translação de centroide, utilizando o elemento finito de casca plano triangular do tipo *ANDES – Assumed Natural Deviatoric Strains*.

Métodos indiretos, como o parâmetro de rigidez *CST (Current Stiffness Parameter)* e a alteração do número de pivôs negativos da matriz de rigidez, foram capazes de detectar e classificar, com grande precisão, a ocorrência de pontos críticos e *turning points*. Para a resolução do sistema de equações não lineares e obtenção das trajetórias de equilíbrio foram implementados diversos métodos, como o método de comprimento de arco

cilíndrico, método de Riks-Wempner e o método de Ramm, combinados com o método de Newton-Raphson completo.

c) Belo (2009):

A tese intitulada “Desenvolvimento da formulação corrotacional em elementos finitos de casca para análise hiperelástica” teve como objetivo estudar as não linearidades geométrica, via formulação co-rotacional, e física, por meio da adoção da hiperelasticidade, propondo um elemento finito bidimensional de casca capaz de avaliar as fontes de não linearidade de uma estrutura de forma precisa e acurada, quando submetida a grandes deslocamentos e rotações.

O elemento adotado foi derivado do contexto da formulação deviatória natural (*ANDES – Assumed Natural Deviatoric Strains*), da formulação co-rotacional de elemento independente (*EICR – Element Independent Co-Rotational Formulation*) e dos métodos de Newton e do comprimento de arco.

O intuito era fazer o uso de um elemento finito linear de casca existente ser capaz de descrever corretamente os fenômenos físicos, adaptando-o ao comportamento de materiais hiperelásticos. A hiperelasticidade foi adotada devido à simplicidade de suas equações constitutivas quando comparadas a outras fontes de não linearidade física.

d) Silva (2011):

A dissertação intitulada “Análise não linear de pórticos planos utilizando uma formulação co-rotacional e plasticidade por camadas” teve como objetivo realizar uma análise não linear de pórticos planos utilizando a formulação co-rotacional como descrição cinemática da não linearidade geométrica, e a consideração da plasticidade por camadas como fonte de não linearidade física.

O pórtico plano foi discretizado considerando três elementos de viga 2D distintos: elemento Euler-Bernoulli C^1 , elemento Euler-Bernoulli C^2 e elemento Timoshenko C^0 . O vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente desses elementos foram obtidos utilizando o princípio dos trabalhos virtuais, e os coeficientes calculados por meio analítico

ou por integração numérica empregando dois pontos de Gauss ao longo do comprimento. Para evitar o travamento por cisalhamento no elemento de viga Timoshenko, utilizou-se apenas um ponto de Gauss.

A não linearidade física foi simulada adotando um modelo de elastoelasticidade unidimensional com endurecimento isotrópico. Os esforços seccionais foram obtidos por integração numérica, utilizando sete ou quinze pontos de Gauss ao longo da altura da seção transversal.

Para obter as trajetórias de equilíbrio, foi realizada uma análise incremental-iterativa baseada no método de Newton-Raphson combinado com a técnica do comprimento de arco.

e) da Silva (2013):

A tese intitulada “Análise dinâmica não linear de pórticos espaciais utilizando a formulação co-rotacional” teve como objetivo desenvolver um programa de elementos finitos para análise estática e dinâmica não linear geométrica de pórticos espaciais com o uso do elemento de viga 3D Euler-Bernoulli co-rotacional, em plataforma Matlab, implementando a formulação co-rotacional *EICR (Element Independent Co-Rotational Formulation)*, desenvolvida por Nour-Omid & Rankin (1991).

As trajetórias de equilíbrio nos problemas estáticos foram obtidas pela implementação do método do comprimento de arco cilíndrico em combinação com o método de Newton-Raphson.

Nas soluções dos problemas dinâmicos foi empregado o método de integração HHT- α em combinação com o método de Newton-Raphson, o qual é utilizado com a finalidade de se obter o equilíbrio das forças internas com os carregamentos externos, atualizando as variáveis translacionais e rotacionais.

No âmbito da análise dinâmica, as rotações finitas, velocidades e acelerações angulares foram tratadas empregando o procedimento de Newmark aplicado ao vetor de rotação incremental e as suas derivadas no tempo.

3 ELEMENTO DE VIGA UNIFICADO LINEAR

Este capítulo tem por finalidade desenvolver uma formulação para a obtenção da matriz de rigidez de um elemento de viga unificado linear baseado no princípio dos trabalhos virtuais complementares. Para isso, abordar-se-á inicialmente sobre curvatura de vigas, que se trata de uma deformação presente na teoria clássica de flexão de vigas de Bernoulli. Em seguida, a deformação angular ocasionada pelo fenômeno de cisalhamento será descrita e sua influência no fenômeno de flexão será analisada, conforme a teoria de vigas de Timoshenko. Uma vez conhecidos os mecanismos de deformação, a formulação para elementos de viga unificados será detalhada utilizando o princípio dos trabalhos virtuais complementares para determinar a matriz de rigidez unificada linear. Por último, será analisada a ocorrência do fenômeno de travamento por cisalhamento, comum às formulações de elementos finitos de viga que utilizam interpolações lineares para descrever os deslocamentos transversal e rotacional, com o intuito de estabelecer que a matriz de rigidez obtida pela formulação descrita promove uma análise isenta da ocorrência de travamento por cisalhamento.

Toda a formulação teórica necessária para a obtenção da matriz de rigidez unificada linear e a análise do fenômeno de travamento por cisalhamento estão baseadas em Krenk (2001).

3.1 CURVATURA

A teoria clássica de flexão de vigas de Bernoulli é proposta considerando elementos prismáticos retos, homogêneos e de comportamento linear-elástico, submetidos à flexão pura, caracterizada pela ocorrência de momentos fletores iguais e opostos que atuam no mesmo plano longitudinal.

As premissas básicas adotadas para a teoria de flexão de vigas se referem ao modo como a tensão atuante na seção transversal do elemento deforma o material, sendo: *i*) o eixo longitudinal que se encontra no interior da superfície neutra não sofre qualquer mudança de comprimento, *ii*) as seções transversais da viga permanecem planas e perpendiculares

ao eixo longitudinal durante a deformação e, *iii*) qualquer deformação da seção transversal dentro de seu próprio plano é desprezada. (Hibbeler, 2010).

A consideração de que as seções transversais permanecem perpendiculares ao eixo longitudinal após a deformação exige que a deformação do material imposta pelas tensões cisalhantes sejam desprezadas, de forma a considerar que a deformação da viga seja provocada apenas pela ocorrência do momento fletor M , dada pela medida da curvatura apresentada pela superfície neutra. A Figura 3.1 ilustra a deformação por flexão de um elemento de viga prismático.

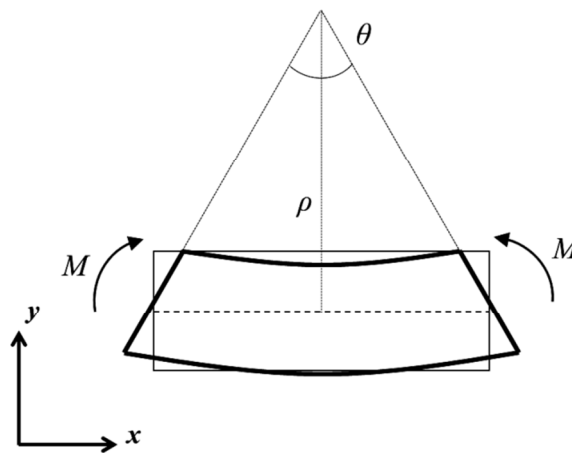


Figura 3.1: Deformação de um elemento de viga prismático sob flexão pura.

A medida da curvatura, k , é definida como o inverso do raio de curvatura ρ , e associa-se ao momento fletor pela relação momento-curvatura dada pela Resistência dos Materiais, conforme estabelecido pela Equação (3.1). Define-se EI como a rigidez à flexão do elemento e M o momento fletor atuante na seção transversal.

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (3.1)$$

Para curvas planas, a curvatura é definida matematicamente como a taxa de variação do ângulo, $\Delta\theta$, e o comprimento do arco, Δs , conforme ilustrado pela Figura 3.2 e expresso pela Equação (3.2).

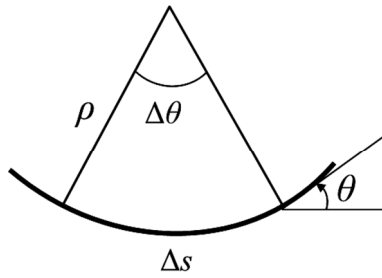


Figura 3.2: Curvatura de uma curva plana.

$$k = \frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} \quad (3.2)$$

Na maioria dos casos práticos, a variação na curvatura causada pelo momento fletor é muito pequena, tornando-se de especial interesse a determinação da curvatura exata pela teoria clássica de vigas através de aproximações que levam a obtenção de soluções simples.

A Figura 3.3 apresenta o eixo deformado de uma viga submetida à flexão. O eixo longitudinal x encontra-se no interior da superfície neutra e representa o eixo da viga indeformado. Após a deformação, o eixo da viga é descrito pela curva $(x, v(x))$ no sistema de coordenadas x - y ilustrado. A rotação do eixo da viga é descrita pelo ângulo $\theta(x)$, tendo a orientação de rotação anti-horária como positiva.

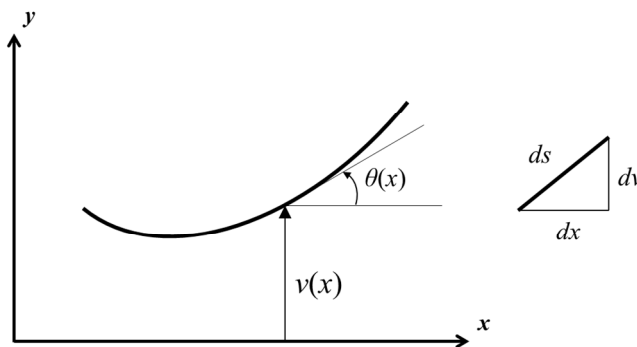


Figura 3.3: Eixo de viga deformado sob flexão.

O comprimento ao longo do eixo da viga é denotado por s e, a partir das relações trigonométricas apresentadas pelo pequeno triângulo da Figura 3.3, pode-se expressar que:

$$\text{sen } \theta = \frac{dv}{ds} \quad , \quad \text{cos } \theta = \frac{dx}{ds} \quad (3.3)$$

Diferenciando (3.3) em relação a s , tem-se que:

$$\frac{d}{ds}(\text{sen}\theta) = \frac{d}{ds}\left(\frac{dv}{ds}\right) \quad (3.4a)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\text{cos}\theta} \frac{d^2v}{ds^2} \quad (3.4b)$$

O ângulo θ é dado por:

$$\theta = \text{arc sen}\left(\frac{dv}{ds}\right) \quad (3.5)$$

Diferenciando (3.5) em relação a s , tem-se que:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d^2v}{ds^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dv}{ds}\right)^2}} \quad (3.6)$$

Por meio das relações (3.2), (3.4) e (3.6), pode-se concluir que:

$$k = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\text{cos}\theta} \frac{d^2v}{ds^2} = \frac{\frac{d^2v}{ds^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dv}{ds}\right)^2}} \quad (3.7)$$

No campo dos pequenos deslocamentos e deformações infinitesimais, o ângulo θ é considerado muito pequeno, $|\theta| \ll 1$, e algumas simplificações podem ser adotadas, conforme estabelecido pela relação (3.8).

$$\text{cos}\theta = \frac{dx}{ds} \approx 1 \quad \rightarrow \quad dx \approx ds \quad (3.8)$$

De acordo com (3.8), a equação resultante para a curvatura de vigas à flexão é dada por (3.9a) e a equação para a rotação da seção transversal é dada por (3.9b).

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (3.9a)$$

$$\theta = \frac{dv}{dx} \quad (3.9b)$$

Considerando que os deslocamentos sejam pequenos, pode-se aproximar a rotação da seção transversal pela tangente à elástica, conforme estabelecido pela Equação (3.9b), o qual representa uma equação de compatibilidade entre deslocamento e deformação.

Por consequência, a inclinação da linha elástica determinada por dv/dx será muito pequena e o quadrado dessa inclinação será desprezível em comparação com a unidade. Logo, adotando a quarta simplificação, tem-se que:

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (3.10)$$

No entanto, para a teoria clássica de flexão de vigas de Bernoulli, supondo material linear-elástico, com pequenos deslocamentos e deformações infinitesimais, e desprezando a influência das deformações cisalhantes, conclui-se que:

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (3.11)$$

3.2 FLEXIBILIDADE AO CISALHAMENTO

A hipótese básica da teoria clássica de vigas de Bernoulli considera que o único modo de deformação de um elemento de viga é a curvatura, estando relacionada a ocorrência de um momento fletor constante. Neste caso, a rotação da seção transversal é assumida idêntica à rotação da tangente ao eixo da viga. Além disso, as seções transversais permanecem planas e ortogonais ao eixo deformado do elemento. Porém, a teoria de vigas de Bernoulli se trata de uma aproximação, no qual a influência das deformações cisalhantes é desprezada. Os parâmetros básicos advindos da teoria clássica de flexão correspondem à rotação da seção transversal, $\theta(x)$, e a rotação da tangente à elástica, $dv(x)/dx$, relacionando-se conforme a Equação (3.9b).

Contudo, a presença do esforço cortante na seção transversal do elemento, e consequentemente a presença das tensões cisalhantes, introduzem deformações cisalhantes médias, γ , que provocam o deslizamento relativo da seção transversal (empenamento), resultando em uma variação angular, β , entre a tangente à elástica da viga e o vetor \mathbf{n}

perpendicular à seção transversal. Os mecanismos de deformação por flexão e por cisalhamento encontram-se ilustrados na Figura 3.4.

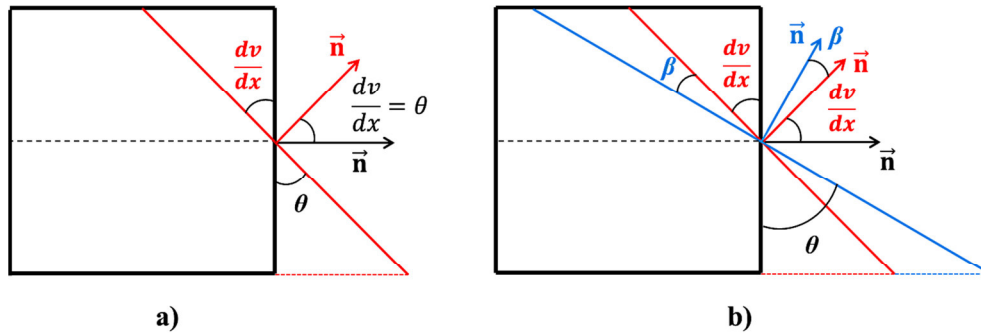


Figura 3.4: Mecanismo de deformação: a) Bernoulli, b) Timoshenko.

O mecanismo de deformação cisalhante ilustrado pela Figura 3.4b evidencia que a rotação total da seção transversal está associada à rotação da elástica da viga proveniente da flexão, dv/dx , em adição à rotação proveniente da deformação cisalhante, β . Assim, conclui-se que as relações cinemáticas para uma viga que apresenta a influência do cisalhamento na flexão são dadas conforme a Equação (3.12).

$$k = \frac{d\theta}{dx} \quad , \quad \theta = \frac{dv}{dx} - \gamma \quad (3.12)$$

É visível que para a teoria clássica de vigas de Bernoulli, tem-se que $\gamma = 0$.

Conforme exposto pela Equação (3.1), considerando a relação linear-elástica, a curvatura k é proporcional ao momento fletor M atuante na seção transversal. De forma similar, a deformação cisalhante é proporcional ao esforço cortante Q , segundo a relação constitutiva expressa pela Equação (3.13).

$$\gamma = \frac{Q}{GA_0} \quad (3.13)$$

O parâmetro GA_0 corresponde à rigidez cisalhante, consistindo do módulo de elasticidade transversal, G , e a área efetiva da seção transversal, A_0 . As tensões cisalhantes apresentam a característica de não serem uniformemente ou linearmente distribuídas ao longo da seção transversal, de forma que a área efetiva de cisalhamento, A_0 , é menor que a área total da seção transversal, A . Para geometrias retangulares, tem-se que $A_0 = \frac{5}{6}A$, e para seções

transversais I, a área efetiva para o cisalhamento é aproximadamente igual à área da alma da viga.

3.3 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS COMPLEMENTARES

A Equação (3.12) apresenta simples relações diferenciais que expressam as condições cinemáticas para a obtenção da equação da linha elástica de uma viga ao se considerar a influência da deformação cisalhante no fenômeno da flexão. Contudo, a resolução dos modelos estruturais pode se tornar bem trabalhosa, uma vez que a consideração das deformações cisalhantes implica na adição de termos à equação da linha elástica, resultando em procedimentos de integração extensos e por vezes dificultosos.

Para contornar essas dificuldades e facilitar o procedimento de cálculo dos deslocamentos transversais e das rotações em pontos escolhidos sobre o eixo da viga, o procedimento mais eficiente é a utilização do Princípio dos Trabalhos Virtuais (Princípio dos Deslocamentos Virtuais) e o Princípio dos Trabalhos Virtuais Complementares (Princípio das Forças Virtuais).

A principal diferença entre os métodos é apenas a ordem de consideração dos sistemas reais e virtuais. O princípio dos trabalhos virtuais considera o sistema de forças reais (campo estático real) em combinação com um sistema cinemático virtual (campo de deslocamentos virtuais). Já o princípio dos trabalhos virtuais complementares, por sua vez, considera o sistema cinemático real (campo de deslocamentos reais) em combinação com um sistema de forças virtuais (campo estático virtual). O principal interesse de ambos os métodos é determinar os deslocamentos transversais e as rotações de vigas elásticas, de forma que os campos virtuais e reais satisfaçam as relações estáticas e cinemáticas.

O desenvolvimento teórico do princípio dos trabalhos virtuais demonstrado considera a relação linear-elástica para elementos de viga submetidos à flexão, apresentando a influência das deformações cisalhantes na rotação total da seção transversal do elemento.

Considerando uma viga submetida a um conjunto de carregamentos externos reais, o equilíbrio das forças pode ser expresso segundo a Equação (3.14), baseando-se na relação diferencial de equilíbrio para um elemento infinitesimal de barra:

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} + p(x) = 0 \quad (3.14)$$

A relação (3.14) é então multiplicada pelo campo de deslocamento virtual $\delta v(x)$, e integrada ao longo de todo o comprimento da viga:

$$\int_0^l \delta v(x) \left(\frac{d^2M(x)}{dx^2} + p(x) \right) dx = 0 \quad (3.15)$$

Realizando a integração por partes do primeiro termo do integrando da Equação (3.15), tem-se que:

$$\int_0^l \delta v(x) \frac{d^2M(x)}{dx^2} dx = \left[\delta v(x) \frac{dM(x)}{dx} \right]_0^l - \int_0^l \frac{dM(x)}{dx} \frac{d(\delta v(x))}{dx} dx \quad (3.16)$$

Substituindo (3.16) em (3.15):

$$\left[\delta v(x) \frac{dM(x)}{dx} \right]_0^l + \int_0^l \left[-\frac{d(\delta v(x))}{dx} \frac{dM(x)}{dx} + \delta v(x)p(x) \right] dx = 0 \quad (3.17)$$

A parcela virtual da rotação da seção transversal é dada por:

$$\frac{d(\delta v(x))}{dx} = \delta\theta(x) + \delta\gamma(x) \quad (3.18)$$

Substituindo (3.18) em (3.17), tem-se que:

$$\left[\delta v(x)Q(x) \right]_0^l + \int_0^l \left[(-\delta\theta(x) - \delta\gamma(x)) \frac{dM(x)}{dx} + \delta v(x)p(x) \right] dx = 0 \quad (3.19)$$

Avaliando a integral da Equação (3.19) e realizando a distribuição do integral entre os termos da expressão, obtém-se:

$$\int_0^l \left(-\delta\theta(x) \frac{dM(x)}{dx} \right) dx + \int_0^l \left(-\delta\gamma(x) \frac{dM(x)}{dx} \right) dx + \int_0^l \delta v(x)p(x) dx \quad (3.20)$$

Ao realizar a integração por partes do primeiro termo do integrando da Equação (3.22), tem-se como resultado a Equação (3.21):

$$\int_0^l \delta\theta(x) \frac{dM(x)}{dx} dx = [\delta\theta(x)M(x)]_0^l - \int_0^l M(x) \delta k(x) dx \quad (3.21)$$

Substituindo (3.21) em (3.19), e realizando os ajustes algébricos, tem-se que:

$$\begin{aligned} & [\delta v(x)Q(x) + \delta\theta(x)M(x)]_0^l + \int_0^l \delta v(x)p(x) dx \\ & = \int_0^l (\delta\gamma(x)Q(x) + \delta k(x)M(x)) dx \end{aligned} \quad (3.22)$$

O primeiro membro da Equação (3.22) corresponde a relações de descontinuidade ocasionadas por cargas concentradas, conforme expresso pela relação (3.23):

$$Q(x_i^+) - Q(x_i^-) = -P_i \quad (3.23a)$$

$$M(x_j^+) - M(x_j^-) = -M_j \quad (3.23b)$$

Após reordenar os termos e introduzir os momentos e forças segundo a convenção global de sinais, o princípio dos trabalhos virtuais é obtido e expresso conforme (3.24):

$$\underbrace{\sum_i \delta w_i P_i + \sum_j \delta \theta_j M_j + \int_0^l \delta w p dx}_{\text{Trabalho Virtual Externo}} = \underbrace{\int_0^l (\delta\gamma Q + \delta k M) dx}_{\text{Trabalho Virtual Interno}} \quad (3.24)$$

Esta é a equação do trabalho virtual para uma viga considerando a influência da deformação cisalhante no fenômeno de flexão. O princípio dos trabalhos virtuais enunciado atesta que, para um campo de deslocamentos virtuais que satisfaça as relações cinemáticas, o trabalho virtual externo, proveniente das forças e deslocamentos externos, é igual ao trabalho virtual interno, proveniente das tensões e deformações internas.

A diferença explícita entre o princípio dos trabalhos virtuais obtido pela Equação (3.24) e o determinado pela teoria clássica de flexão de vigas de Bernoulli é que, no presente caso, o trabalho virtual interno considera a parcela referente à influência do cisalhamento, dada pelo produto $\delta\gamma Q$, assim como a parcela referente à flexão, dada por $\delta k M$.

Para o caso particular de vigas elásticas e devido ao Teorema de Betti, pode-se considerar uma combinação entre o sistema cinemático real e o sistema estático virtual, denominado de princípio dos trabalhos virtuais complementares.

Se o campo estático virtual corresponder a uma força virtual concentrada δP_i , o deslocamento real v_i será dado por:

$$v_i = \frac{1}{\delta P_i} \int_0^l (\delta Q \gamma + \delta M k) dx = \int_0^l \left(\delta Q \frac{Q}{GA_0} + \delta M \frac{M}{EI} \right) dx \quad (3.25)$$

Se o campo estático virtual corresponder a um momento virtual concentrado δM_i , a rotação real da seção transversal θ_j será dada por:

$$\theta_j = \frac{1}{\delta M_j} \int_0^l (\delta Q \gamma + \delta M k) dx = \int_0^l \left(\delta Q \frac{Q}{GA_0} + \delta M \frac{M}{EI} \right) dx \quad (3.26)$$

3.4 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE VIGA UNIFICADO LINEAR

3.4.1 Modos de deslocamento

O mecanismo de deformação para uma viga que apresenta a influência do cisalhamento na flexão consiste do somatório de duas parcelas contributivas: uma parcela referente à deformação por flexão, e uma parcela referente à deformação cisalhante. Essa propriedade pode ser explorada utilizando o princípio dos trabalhos virtuais complementares para obter a matriz de rigidez do elemento de viga de modo mais simples.

Considere o elemento de viga de dois nós e comprimento l representado pela barra isolada, conforme ilustrado pela Figura 3.5. Nos nós extremos estão representadas as variáveis locais correspondentes aos deslocamentos e forças nodais.

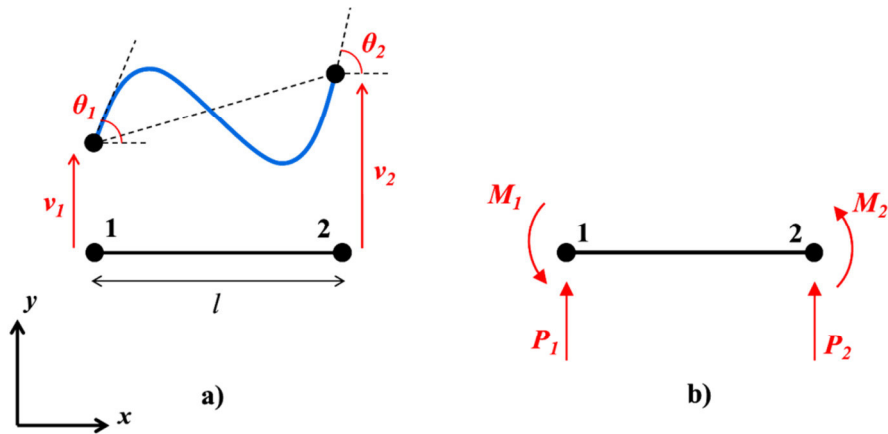


Figura 3.5: Elemento de viga: a) deslocamentos nodais, b) forças nodais.

O vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{u} , é composto por quatro componentes de deslocamento, sendo divididos em duas parcelas: deslocamento translacional (v) e deslocamento rotacional (θ).

$$\mathbf{u}_1 = (v_1, \theta_1) \quad , \quad \mathbf{u}_2 = (v_2, \theta_2) \quad (3.27a)$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.27b)$$

O vetor de forças nodais, \mathbf{f} , é composto por quatro componentes associados aos deslocamentos nodais, sendo representado conforme (3.28):

$$\mathbf{f}_1 = (P_1, M_1) \quad , \quad \mathbf{f}_2 = (P_2, M_2) \quad (3.28a)$$

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (3.28b)$$

A matriz de rigidez de um elemento de viga, \mathbf{K} , é estabelecida pela relação entre o vetor de deslocamentos nodais e o vetor de forças nodais, conforme demonstrado em (3.29):

$$\{\mathbf{f}\} = [\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{u}\} \quad (3.29)$$

O método tradicional para obter a matriz de rigidez do elemento de viga é baseado no cálculo das funções de forma relacionadas aos modos de deslocamentos unitários nodais.

As funções de forma consistem em coeficientes $\varphi(x)$ que multiplicam os parâmetros de deslocamentos nodais, de forma a empregar um deslocamento ou rotação unitária a um nó específico, enquanto todos os outros graus de liberdade permanecem nulos. A Figura 3.6 ilustra os deslocamentos unitários, transversal e rotacional, dos nós do elemento de viga.

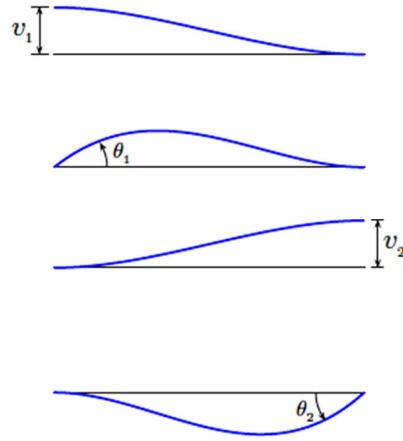


Figura 3.6: Deslocamentos nodais unitários.

Entretanto, a aplicação deste método para a obtenção da matriz de rigidez de um elemento de viga, considerando a influência do cisalhamento na flexão, pode se tornar um cálculo complexo devido à natureza das equações diferenciais obtidas após os procedimentos de interpolação, além de ser necessário o cálculo exato das funções de forma para a obtenção da correta matriz de rigidez.

Um método alternativo empregado para o cálculo da matriz de rigidez consiste na análise do campo de deslocamentos de um elemento de viga, separando-o em dois modos: deslocamento de corpo rígido e modo deformacional. O modo deformacional, por sua vez, pode ser analisado em termos da deflexão da linha elástica, sendo os resultados combinados para formar a matriz de rigidez do elemento.

a) Deslocamentos de corpo rígido:

O modo de deslocamento de um elemento de viga correspondente aos deslocamentos de corpo rígido, ou seja, deslocamentos em que não se consideram as deformações sofridas pela estrutura, estão ilustrados na Figura 3.7 e correspondem aos deslocamentos de translação vertical dos nós, v_r , e a rotação do eixo neutro, θ_r . A translação horizontal não

foi considerada devido ao fato de que o elemento de viga formulado não apresenta a influência dos esforços axiais.

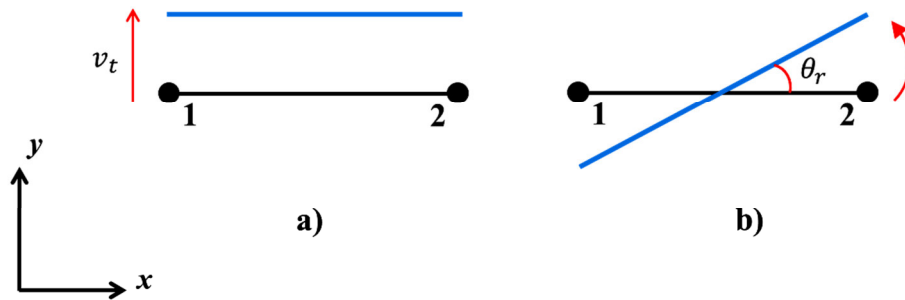


Figura 3.7: Deslocamentos de corpo rígido: a) transversal, b) rotacional.

Conforme ilustrado pela Figura 3.8, a rotação de corpo rígido, θ_r , é dada por:

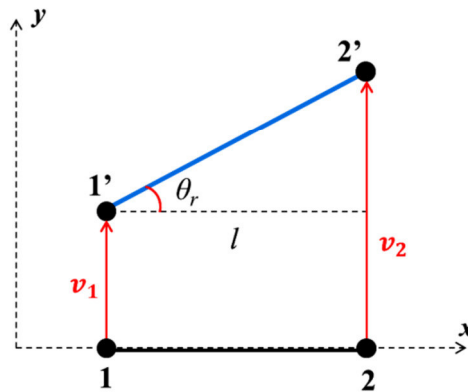


Figura 3.8: Rotação de corpo rígido.

$$\theta_r = \frac{(v_2 - v_1)}{l} \quad (3.30)$$

b) Modos deformacionais:

O modo deformacional de deslocamento considera apenas a configuração deformada do elemento de viga, sendo então, a parcela avaliada para a obtenção da matriz de rigidez. Os modos de deformação correspondem às possíveis configurações deformadas apresentada pela linha elástica, associadas à ocorrência de momentos fletores que caracterizam o processo de deformação como rotação nodal simétrica ou antissimétrica, dependendo da forma assumida pela linha elástica. Os modos deformacionais associados ao momento fletor estão ilustrados pela Figura 3.9.

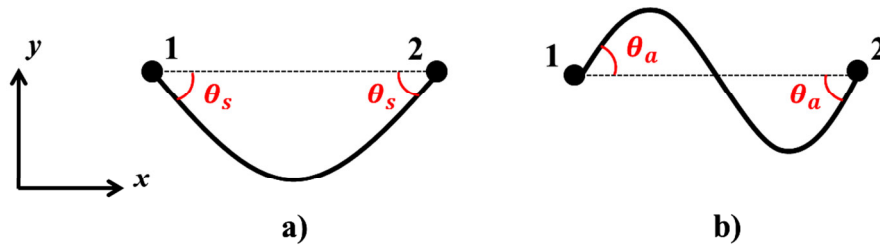


Figura 3.9: Modos deformacionais: a) rotação nodal simétrica, b) rotação nodal antissimétrica.

b.1) Rotação nodal simétrica:

A deformação por rotação nodal simétrica está associada à aplicação de um momento M_s nos nós extremos do elemento de viga, de forma a ser considerado em sentido horário no nó inicial (1) e anti-horário no nó final (2), conforme ilustrado pela Figura 3.10, tratando-se de um sistema auto equilibrante.

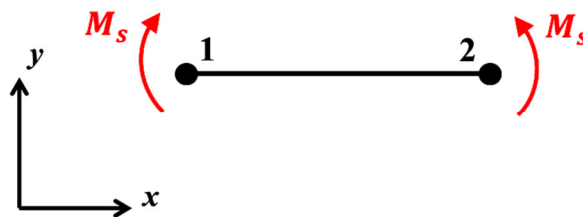


Figura 3.10: Momento M_s associado à rotação nodal simétrica.

A análise estática do momento M_s aplicado aos nós extremos do elemento de viga fornece os diagramas de esforços solicitantes ilustrados pela Figura 3.11, no qual se conclui que se trata da ocorrência de um momento fletor constante e ausência de esforços cisalhantes, o que caracteriza-se como flexão pura.

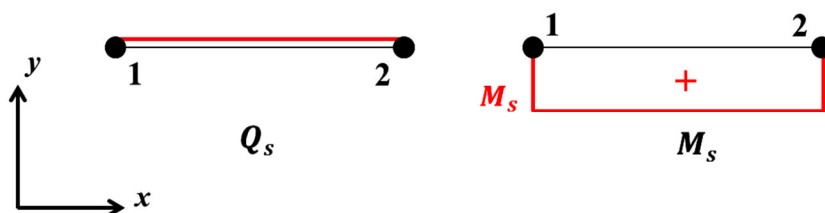


Figura 3.11: Diagramas de esforços solicitantes para rotação nodal simétrica.

b.2) Rotação nodal antissimétrica:

A deformação por rotação nodal antissimétrica está associada à aplicação de um momento M_a nos nós extremos do elemento de viga, de forma a ser considerado em sentido anti-horário no nó inicial (1) e no nó final (2). Como o sistema não se encontra em equilíbrio somente com a aplicação dos momentos extremos M_a , para ajustá-lo, é necessária a consideração de forças transversais iguais e opostas aplicadas aos nós extremos do elemento, sendo representadas por $Q = \frac{2}{l}M_a$, conforme ilustrado pela Figura 3.12.

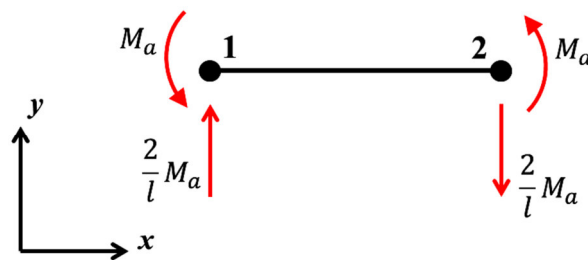


Figura 3.12: Momento M_a associado à rotação nodal antissimétrica.

A análise estática do momento M_a aplicado aos nós extremos do elemento de viga fornece os diagramas de esforços solicitantes ilustrados pela Figura 3.13, no qual se conclui que se trata da ocorrência de um momento fletor linear e a ocorrência de um esforço cisalhante constante, o que caracteriza-se como flexão simples.

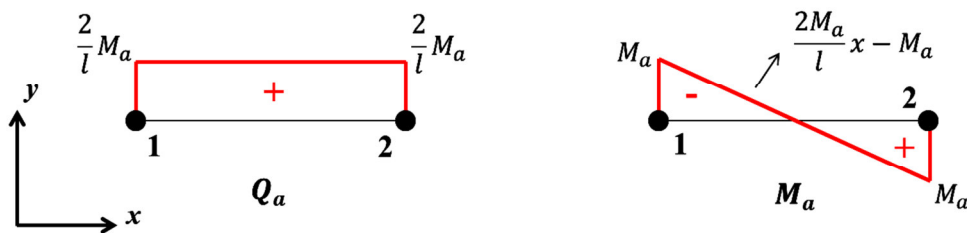


Figura 3.13: Diagramas de esforços solicitantes para rotação nodal antissimétrica.

3.4.2 Princípio dos trabalhos virtuais complementares

O princípio dos trabalhos virtuais complementares é utilizado para a determinação das rotações deformacionais dos nós extremos para as situações de rotação simétrica (θ_s) e rotação antissimétrica (θ_a), conforme os modos deformacionais adotados para o elemento de viga.

a) *Rotação nodal simétrica:*

A rotação deformacional simétrica dos nós do elemento de viga, θ_s , pode ser determinada pelo princípio dos trabalhos virtuais complementares, aplicando um par de momentos virtuais $\delta M_s = 1$, atuando no sentido horário no nó inicial (1) e no sentido anti-horário no nó final (2).

A análise estática do momento δM_s aplicado aos nós extremos do elemento de viga fornece os diagramas de esforços solicitantes virtuais ilustrados pela Figura 3.14, no qual conclui-se que se trata da ocorrência de um momento fletor constante e ausência de esforços cisalhantes, o que caracteriza-se como flexão simples.

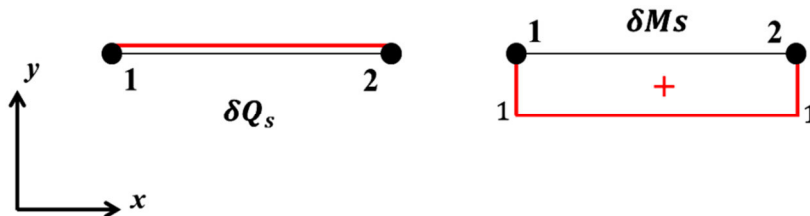


Figura 3.14: Diagramas de esforços solicitantes virtuais para rotação nodal simétrica.

A rotação dos nós resulta da seguinte análise através da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais complementares:

$$\sum_j \delta M_j \theta_j = \int_0^l \left(\delta Q \frac{Q}{GA_0} + \delta M \frac{M}{EI} \right) dx \quad (3.31a)$$

$$(\delta M_1 \theta_1 + \delta M_2 \theta_2) = \int_0^l \left(\delta Q \frac{Q}{GA_0} + \delta M \frac{M}{EI} \right) dx \quad (3.31b)$$

$$2\theta_s = \int_0^l \left(\delta Q \frac{Q}{GA_0} + \delta M \frac{M}{EI} \right) dx \quad (3.31c)$$

Calculando a primeira integral da Equação (3.31c), obtém-se:

$$\int_0^l \delta Q \frac{Q}{GA_0} dx = 0 \quad (3.32)$$

A segunda integral da Equação (3.31c) resulta em:

$$\int_0^l \delta M \frac{M}{EI} dx = \frac{l M_s}{EI} \quad (3.33)$$

Substituindo (3.32) e (3.33) em (3.31c), tem-se que:

$$\theta_s = \frac{1}{2} \frac{l M_s}{EI} \quad (3.34)$$

b) Rotação nodal antissimétrica:

A rotação deformacional antissimétrica dos nós extremos do elemento de viga, θ_a , pode ser determinada pelo princípio dos trabalhos virtuais complementares, aplicando um par de momentos virtuais $\delta M_a = 1$, atuando no sentido anti-horário em ambos os nós inicial (1) e final (2). Como o sistema não se encontra em equilíbrio somente com a aplicação dos momentos virtuais δM_a , para ajustá-lo, é necessária a consideração de forças virtuais transversais iguais e opostas aplicadas aos nós extremos do elemento, sendo representadas por δQ .

A análise estática do momento δM_a aplicado aos nós extremos do elemento de viga fornece os diagramas de esforços solicitantes virtuais ilustrados pela Figura 3.15, no qual conclui-se que se trata da ocorrência de um momento fletor linear e a ocorrência de um esforço cisalhante constante, o que caracteriza-se como flexão simples.

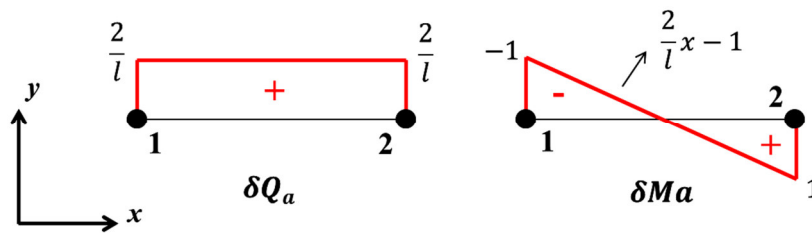


Figura 3.15: Diagramas de esforços solicitantes virtuais para rotação nodal antissimétrica.

A rotação dos nós resulta da seguinte análise através da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais complementares:

$$\sum_j \delta M_j \theta_j = \int_0^l \left(\delta Q \frac{Q}{GA_0} + \delta M \frac{M}{EI} \right) dx \quad (3.35a)$$

$$(\delta M_1 \theta_1 + \delta M_2 \theta_2) = \int_0^l \left(\delta Q \frac{Q}{GA_0} + \delta M \frac{M}{EI} \right) dx \quad (3.35b)$$

$$2\theta_a = \int_0^l \left(\delta Q \frac{Q}{GA_0} + \delta M \frac{M}{EI} \right) dx \quad (3.35c)$$

Calculando a primeira integral da Equação (3.35c), obtém-se:

$$\int_0^l \delta Q \frac{Q}{GA_0} dx = \frac{4l M_a}{GA_0 l^2} \quad (3.36)$$

A segunda integral da Equação (3.35c) resulta em:

$$\int_0^l \delta M \frac{M}{EI} dx = \frac{l M_a}{3EI} \quad (3.37)$$

Substituindo (3.36) e (3.37) em (3.35c), tem-se que:

$$\theta_a = \frac{l M_a}{6EI} \left(1 + \frac{12EI}{GA_0 l^2} \right) \quad (3.38a)$$

$$\theta_a = \frac{l M_a}{6EI} (1 + \Phi) \quad (3.38b)$$

Sendo Φ o parâmetro que expressa a influência da deformação cisalhante na flexão de vigas, dado por:

$$\Phi = \frac{12EI}{GA_0 l^2} \quad (3.39)$$

Nota-se que, pela teoria clássica de vigas de Bernoulli, o parâmetro Φ assume o valor nulo, $\Phi = 0$, na Equação (3.38b).

3.4.3 Vetor de forças nodais

Uma vez estabelecidas as relações estáticas das variáveis internas referentes aos modos deformacionais de rotação simétrica e antissimétrica no sistema local de referência do elemento de viga, M_s e M_a , e conhecidos os ângulos de rotação deformacional da linha elástica nos respectivos modos deformacionais, θ_s e θ_a , pode-se expressar as forças

externas aplicadas nos nós extremos do elemento de viga em referência às variáveis internas obtidas.

As forças nodais atuantes no sistema local do elemento de viga, representadas pela Figura 3.5b, são resultantes da superposição das forças internas estabelecidas pelos modos deformacionais, ilustrados pelas Figuras 3.10 e 3.12.

$$P_1 = 0 + \frac{2M_a}{l} \quad (3.40a)$$

$$M_1 = -M_s + M_a \quad (3.40b)$$

$$P_2 = 0 - \frac{2M_a}{l} \quad (3.40c)$$

$$M_2 = M_s + M_a \quad (3.40d)$$

O vetor de forças nodais, \mathbf{f} , pode então ser escrito matricialmente como:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + \frac{2M_a}{l} \\ -M_s + M_a \\ 0 - \frac{2M_a}{l} \\ M_s + M_a \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -l & l \\ 0 & -2 \\ l & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_s \\ M_a \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Reordenando as Equações (3.34) e (3.38) em termos dos esforços internos, tem-se que:

$$M_s = \frac{2EI}{l} \theta_s \quad (3.42)$$

$$M_a = \frac{6EI}{l(1 + \Phi)} \theta_a \quad (3.43)$$

Substituindo (3.42) e (3.43) nas relações dadas por (3.40), obtém-se:

$$P_1 = 0 + \frac{12EI}{l^2(1 + \Phi)} \theta_a \quad (3.44a)$$

$$M_1 = -\frac{2EI}{l} \theta_s + \frac{6EI}{l(1 + \Phi)} \theta_a \quad (3.44b)$$

$$P_2 = 0 - \frac{12EI}{l^2(1 + \Phi)}\theta_a \quad (3.44c)$$

$$M_2 = \frac{2EI}{l}\theta_s + \frac{6EI}{l(1 + \Phi)}\theta_a \quad (3.44d)$$

Substituindo as relações dadas por (3.44) em (3.41), o vetor de forças nodais, \mathbf{f} , é expresso como:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + \frac{12EI}{l^2(1 + \Phi)}\theta_a \\ -\frac{2EI}{l}\theta_s + \frac{6EI}{l(1 + \Phi)}\theta_a \\ 0 - \frac{12EI}{l^2(1 + \Phi)}\theta_a \\ \frac{2EI}{l}\theta_s + \frac{6EI}{l(1 + \Phi)}\theta_a \end{bmatrix} = \frac{2EI}{(1 + \Phi)l^2} \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -(1 + \Phi)l & 3l \\ 0 & -6 \\ (1 + \Phi)l & 3l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_s \\ \theta_a \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

3.4.4 Matriz de rigidez unificada linear

A matriz de rigidez do elemento de viga é estabelecida pela relação entre o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{u} , e o vetor de forças nodais, \mathbf{f} , conforme dado pela Equação (3.29). Os componentes do vetor de forças nodais foram inicialmente determinados em função dos esforços internos resultantes dos modos deformacionais, conforme (3.41), que por sua vez, foram posteriormente associados aos modos de deslocamentos deformacionais simétrico e antissimétrico, conforme (3.45).

Contudo, as rotações deformacionais, θ_s e θ_a , ilustradas pela Figura 3.9, podem ser relacionadas aos componentes do vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{u} , ilustrados pela Figura 3.5a.

A associação do modo deformacional de rotação simétrica com os componentes do vetor de deslocamentos nodais, ilustrado pela Figura 3.16, é estabelecida conforme a Equação (3.46), do qual se conclui que a deformação rotacional, θ_s , está associada exclusivamente às componentes de rotação nodal, θ_1 e θ_2 .

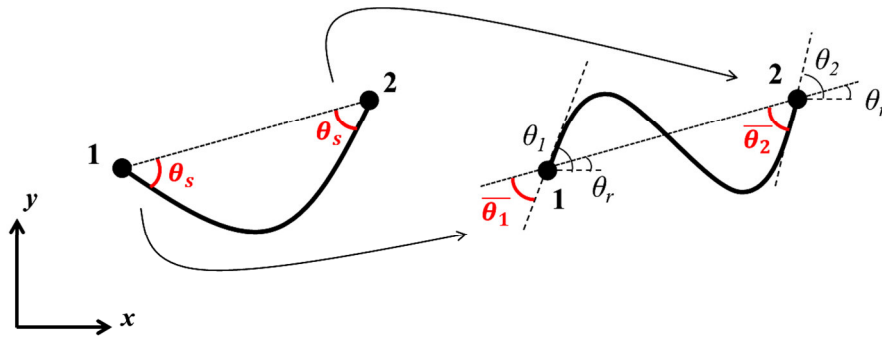


Figura 3.16: Composição da rotação nodal simétrica.

$$2\theta_s = \overline{\theta_2} - \overline{\theta_1} \quad (3.46a)$$

$$2\theta_s = -(\theta_1 - \theta_r) + (\theta_2 - \theta_r) \quad (3.46b)$$

$$\theta_s = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \quad (3.46c)$$

A associação do modo deformacional de rotação antissimétrica com os componentes rotacionais do vetor de deslocamentos nodais, ilustrado pela Figura 3.17, é estabelecida conforme a Equação (3.47), do qual se conclui que a deformação rotacional, θ_a , é composta da soma dos componentes de rotação nodal, θ_1 e θ_2 , subtraídos da rotação de corpo rígido, θ_r .

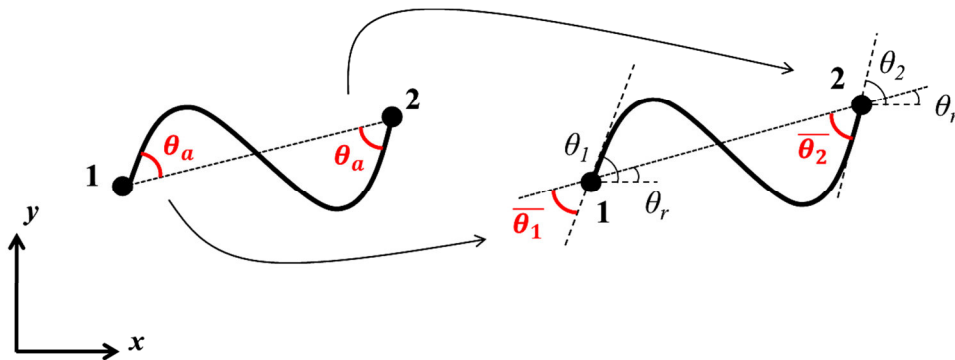


Figura 3.17: Composição da rotação nodal antissimétrica.

$$2\theta_a = \overline{\theta_1} + \overline{\theta_2} \quad (3.47a)$$

$$2\theta_a = (\theta_1 - \theta_r) + (\theta_2 - \theta_r) \quad (3.47b)$$

$$2\theta_a = (\theta_2 + \theta_1) - 2\theta_r \quad (3.47c)$$

Substituindo (3.30) em (3.47), tem-se que:

$$\theta_a = \frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_1) - \left(\frac{v_2 - v_1}{l}\right) \quad (3.48)$$

A substituição das relações (3.46) e (3.48) nas relações dadas por (3.44), resulta em:

$$P_1 = \frac{EI}{(1 + \Phi)l^2} \frac{1}{l} (12v_1 + 6\theta_1l - 12v_2 + 6\theta_2l) \quad (3.49a)$$

$$M_1 = \frac{EI}{(1 + \Phi)l^2} \frac{1}{l} [6lv_1 + (4 + \Phi)l^2\theta_1 - 6lv_2 + (2 - \Phi)l^2\theta_2] \quad (3.49b)$$

$$P_2 = \frac{EI}{(1 + \Phi)l^2} \frac{1}{l} (-12v_1 - 6\theta_1l + 12v_2 - 6\theta_2l) \quad (3.49c)$$

$$M_2 = \frac{EI}{(1 + \Phi)l^2} \frac{1}{l} [6lv_1 + (2 - \Phi)l^2\theta_1 - 6lv_2 + (4 + \Phi)l^2\theta_2] \quad (3.49d)$$

Substituindo as relações dadas por (3.49) na Equação (3.45), tem-se que:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{(1 + \Phi)l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & (4 + \Phi)l^2 & -6l & (2 - \Phi)l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & (2 - \Phi)l^2 & -6l & (4 + \Phi)l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

A matriz dada pela Equação (3.50) corresponde à matriz de rigidez do elemento de viga unificado para análise linear, conforme expresso pela relação (3.51).

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{(1 + \Phi)l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & (4 + \Phi)l^2 & -6l & (2 - \Phi)l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & (2 - \Phi)l^2 & -6l & (4 + \Phi)l^2 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Nota-se que, pela teoria clássica de vigas de Bernoulli, a matriz de rigidez correspondente é obtida admitindo que o parâmetro Φ assume o valor nulo, $\Phi = 0$, em (3.51).

3.5 TRAVAMENTO POR CISALHAMENTO

A análise de estruturas via método dos elementos finitos requer a utilização de funções aproximadoras que podem descrever o campo de deslocamentos ou o campo de tensões do elemento, dependendo da formulação que se utiliza (Assan, 2003). Para uma série de elementos finitos de vigas, cascas e placas formulados em termos de translações e rotações através da utilização de funções aproximadoras lineares (interpolação linear), a ocorrência do fenômeno de travamento por cisalhamento é bastante comum.

Este fenômeno será compreendido inicialmente por meio da análise da energia de deformação de uma viga biapoiada sob flexão pura, comparando a solução analítica exata e a solução aproximada, a fim de possibilitar o entendimento sobre a influência do fenômeno de travamento por cisalhamento nas soluções finais dos modelos. Posteriormente, será indicado o procedimento para a obtenção da matriz de rigidez corrigida de um elemento de viga unificado formulado por funções aproximadoras lineares, a qual evita a ocorrência do fenômeno de travamento por cisalhamento, por meio da análise das configurações dos modos deformacionais de deslocamento.

3.5.1 Energia de deformação

Para as análises seguintes, considera-se uma viga biapoiada sob flexão pura, conforme ilustrado pela Figura 3.18.

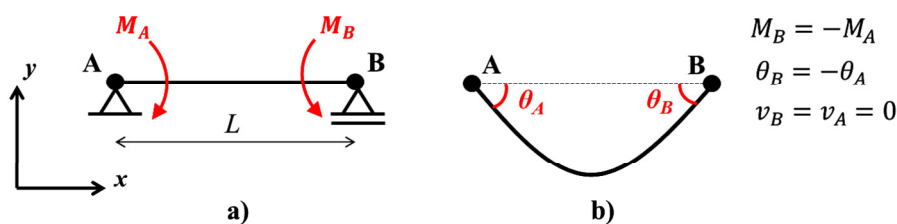


Figura 3.18: Viga biapoiada sob flexão pura: a) estado inicial, b) deformada.

A energia de deformação elástica armazenada pela viga biapoiada, considerando as condições cinemáticas apresentadas pelo modelo, é estabelecida conforme a Equação (3.52).

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (EI k^2 + GA_0 \gamma^2) dx \quad (3.52)$$

a) *Solução exata:*

Para a viga biapoiada submetida à flexão pura ilustrada pela Figura 3.18, a análise estática resulta nas seguintes equações para o esforço cortante e para o momento fletor:

$$Q(x) = 0 \quad ; \quad M(x) = M \quad (3.53)$$

Utilizando a Equação (3.12), a curvatura proveniente da flexão para a referida viga é dada por:

$$k = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{M}{EI} \quad (3.54)$$

A Equação (3.54) é então integrada para obter a rotação da seção transversal, $\theta(x)$:

$$\theta = \frac{M}{EI} x + C_1 \quad (3.55)$$

Utilizando a Equação (3.12), a relação para o deslocamento transversal da linha elástica é dada por:

$$\frac{dv}{dx} = \theta + \gamma = \left(\frac{M}{EI} x + C_1 \right) + \frac{Q(x)}{GA_0} \quad (3.56)$$

Conforme expresso pela Equação (3.53), o fenômeno de flexão pura reflete um estado de cisalhamento nulo, eliminando o segundo termo da Equação (3.56). Realizando a integração, obtém-se:

$$v = \frac{M}{2EI} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (3.57)$$

Analisando as condições de contorno para $x = 0$ e $x = L$, as constantes C_1 e C_2 são definidas, conforme expresso abaixo:

$$C_1 = -\frac{L M}{2EI} \quad ; \quad C_2 = 0 \quad (3.58)$$

Substituindo a relação (3.58) em (3.55) e (3.57), tem-se que:

$$\theta = \frac{M}{EI} \left(x - \frac{L}{2} \right) \quad (3.59)$$

$$v = \frac{M}{2EI} (x^2 - Lx) \quad (3.60)$$

Ao derivar a Equação (3.60) em relação a x , pode-se observar que:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{M}{EI} \left(x - \frac{L}{2} \right) = \theta \quad (3.61)$$

Assim, conclui-se que:

$$\gamma = -\theta + \frac{dv}{dx} = 0 \quad (3.62)$$

As rotações dos nós A e B são determinadas pelas condições $x = 0$ e $x = L$, respectivamente, fornecendo os seguintes valores:

$$\theta_A = -\frac{LM}{2EI} \quad ; \quad \theta_B = \frac{LM}{2EI} \quad (3.63)$$

Pode-se concluir que, para a solução exata, tem-se:

$$\theta_B = -\theta_A \quad ; \quad v_A = v_B = 0 \quad (3.64)$$

A Figura 3.19 ilustra a intersecção dos gráficos de $\theta(x)$ e $v'(x)$ ao longo do domínio de $[0, L]$ para a viga biapoada analisada.

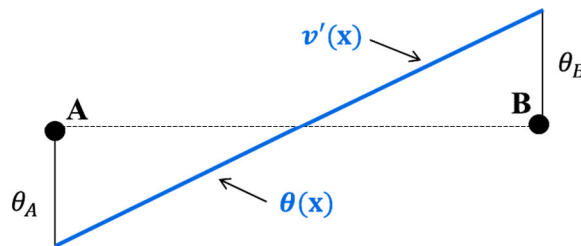


Figura 3.19: Intersecção das funções $\theta(x)$ e $v'(x)$ na solução exata para $[0, L]$.

A energia de deformação elástica exata, calculada pela contribuição da energia de deformação por flexão e pela energia de deformação por cisalhamento, é dada por:

$$U_{exata} = \frac{1}{2} \int_0^L (EI k^2 + GA_0 \gamma^2) dx = \frac{LM^2}{2EI} \quad (3.65)$$

b) Solução aproximada:

A viga biapoiada de comprimento L , ilustrada pela Figura 3.18, será discretizada em n elementos idênticos de comprimento $l = \frac{L}{n}$, sujeitos à flexão pura, conforme ilustrado pela Figura 3.20.

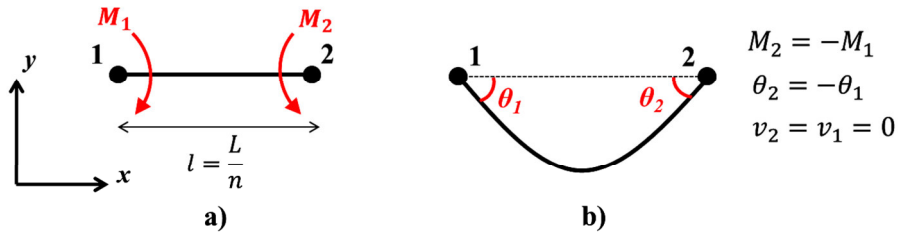


Figura 3.20: Elemento finito de viga à flexão pura: a) estado inicial, b) deformada.

As equações exatas para a rotação da linha elástica e o deslocamento transversal da mesma, para uma viga sujeita à flexão pura, encontram-se enunciadas por meio das Equações (3.59) e (3.60), respectivamente. Contudo, para a seguinte formulação em elementos finitos, o deslocamento transversal da linha elástica, v , e a rotação nodal, θ , serão representados por funções aproximadoras lineares (interpolação linear), conforme expressos pelas Equações (3.66) e (3.67).

$$v = \left(1 - \frac{x}{l}\right) v_1 + \frac{x}{l} v_2 \quad (3.66)$$

$$\theta = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \theta_1 + \frac{x}{l} \theta_2 \quad (3.67)$$

Por meio da Equação (3.67), a curvatura é dada por:

$$k = \frac{d\theta}{dx} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{l} \quad (3.68)$$

Associando o elemento de viga ilustrado pela Figura 3.20 à viga biapoiada ilustrada pela Figura 3.18, obtêm-se as seguintes relações:

$$\theta_2 = -\theta_1 \quad (3.69a)$$

$$\theta_1 = \frac{\theta_A}{n} \quad (3.69b)$$

Substituindo (3.69a) em (3.67) e (3.68), a expressão para a rotação da seção transversal do elemento de viga e a sua curvatura são dados por:

$$\theta = \left(1 - \frac{2}{l}x\right)\theta_1 \quad (3.70)$$

$$k = -\frac{2\theta_1}{l} \quad (3.71)$$

Analisando a Equação (3.70), percebe-se a natureza linear da função θ relacionada à rotação nodal θ_1 . Substituindo a relação (3.69b) em (3.70), obtém-se o seguinte gráfico da função θ , no intervalo de $[0, l]$, ilustrado pela Figura 3.21.

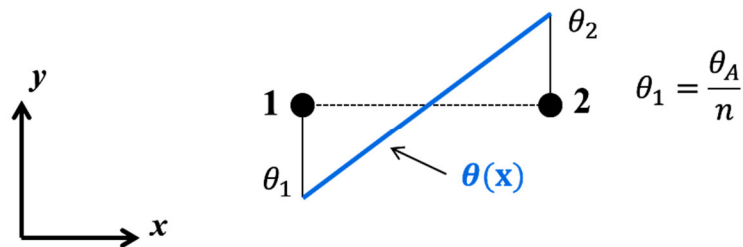


Figura 3.21: Distribuição linear de θ ao longo do elemento de viga $[0, l]$.

Por meio da Equação (3.66), a relação dv/dx é dada por:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v_2 - v_1}{l} \quad (3.72)$$

Analisando a Equação (3.72), percebe-se a natureza constante da função $v'(x)$ relacionada aos deslocamentos transversais nodais, v_1 e v_2 . Devido à interpolação linear de $v(x)$ no elemento, a sua derivada $v'(x)$ assume um valor constante de forma que, como o elemento deforma-se simetricamente, pois $\theta_1 = -\theta_2$, a função $v'(x)$ intersecta a função $\theta(x)$ na metade do elemento, como ilustrado pela Figura 3.22.

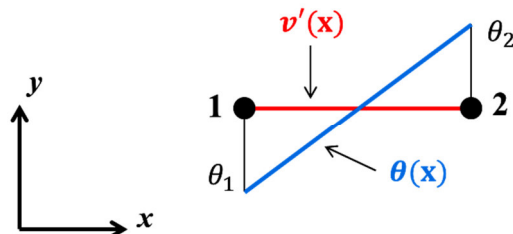


Figura 3.22: Ponto comum entre as funções $\theta(x)$ e $v'(x)$ devido à interpolação linear.

Como consequência, a utilização de funções aproximadoras lineares para a representação dos deslocamentos e rotações não resulta na anulação da deformação cisalhante para elementos de viga sob flexão pura. Assim, por meio das Equações (3.70) e (3.72), tem-se que a deformação por cisalhamento é dada por:

$$\gamma = -\theta + \frac{dv}{dx} = \left[-\left(1 - \frac{2}{l}x\right)\theta_1 \right] + \left(\frac{v_2 - v_1}{l}\right) \neq 0 \quad (3.73)$$

A energia de deformação do elemento de viga através da utilização de funções aproximadoras lineares é denominada de energia de deformação aproximada, sendo composta da parcela referente à energia de deformação por flexão e à energia de deformação cisalhante, conforme estabelecido pela Equação (3.74).

$$U_{aprox} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[EI \left(-\frac{2\theta_1}{l}\right)^2 + GA_0 \left[-\left(1 - \frac{2}{l}x\right)\theta_1 + \left(\frac{v_2 - v_1}{l}\right) \right]^2 \right] dx \quad (3.74)$$

Desta forma, como $\gamma \neq 0$, a parcela da energia de deformação referente ao cisalhamento não se anula.

$$\frac{1}{2} \int_0^l GA_0 \gamma^2 \neq 0 \quad (3.75)$$

Na formulação via método dos elementos finitos através do princípio da mínima energia potencial, a matriz de rigidez é obtida através do cômputo da energia de deformação de cada elemento. Sendo assim, a utilização de funções aproximadoras lineares para descrever o deslocamento transversal da linha elástica acarreta em inconsistências denominadas de travamento por cisalhamento, uma vez que $\gamma = v' - \theta$ é diferente de zero em cada elemento, enquanto que a solução exata é dada para $\gamma = 0$.

Considerando a discretização do sistema da viga biapoiada, representada pela Figura 3.18, em n elementos de viga, o fenômeno de travamento por cisalhamento é ilustrado pela Figura 3.23 no domínio de $[0, L]$, através da relação $\gamma = v' - \theta$. Percebe-se que a função $v'(x)$ é representada por uma função degrau.

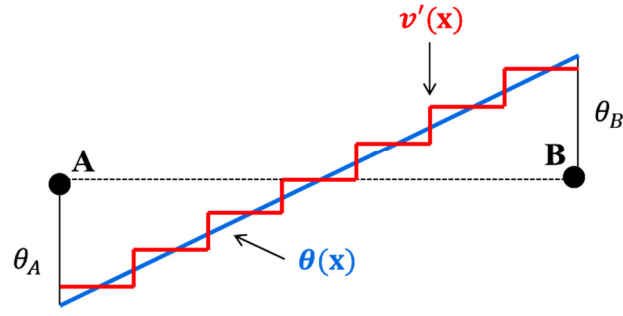


Figura 3.23: Travamento por cisalhamento.

Considerando as condições de contorno para o elemento de viga biapoado, tem-se que:

$$v_1 = v_2 = 0 \quad (3.76)$$

Substituindo (3.69b) e (3.76) em (3.73), a deformação cisalhante resulta em:

$$\gamma = -\left(1 - \frac{2}{l}x\right)\frac{\theta_A}{n} \quad (3.77)$$

A energia de deformação aproximada para o domínio de $[0, L]$ é então calculada por:

$$U_{aprox} = \frac{1}{2}n \int_0^L (EI k^2 + GA_0 \gamma^2) dx \quad (3.78a)$$

$$U_{aprox} = \frac{1}{2}n \int_0^L \left[EI \left(\frac{2\theta_A}{nl}\right)^2 + GA_0 \left(-\left(1 - \frac{2}{l}x\right)\frac{\theta_A}{n}\right)^2 \right] dx \quad (3.78b)$$

$$U_{aprox} = \frac{1}{2}EIL \left(\frac{2\theta_A}{L}\right)^2 + \frac{1}{6}GA_0L \left(\frac{\theta_A}{n}\right)^2 \quad (3.78c)$$

Substituindo (3.63) em (3.78), tem-se que:

$$U_{aprox} = \frac{M^2L}{2EI} + \frac{1}{n^2} \frac{GA_0L^2}{12EI} \frac{M^2L}{2EI} \quad (3.79)$$

Conforme (3.65), a Equação (3.79) é reescrita como:

$$U_{aprox} = \left(1 + \frac{1}{n^2\Phi_L}\right) U_{exata} \quad (3.80)$$

O coeficiente Φ_L corresponde ao parâmetro adimensional de cisalhamento, dado por:

$$\Phi_L = \frac{12EI}{GA_0L^2} \quad (3.81)$$

Para a teoria clássica de vigas de Bernoulli, a rigidez ao cisalhamento é infinita, o que implica em $\Phi_L = 0$ em (3.80). Portanto, conclui-se que a interpolação linear para as translações e rotações não reproduz a hipótese de Bernoulli para vigas.

A análise da Equação (3.80) permite concluir que o fenômeno de travamento por cisalhamento depende do parâmetro $n^2\Phi_L$, que corresponde ao fator de cisalhamento de um elemento individual, conforme expresso pela Equação (3.82).

$$\Phi = n^2\Phi_L = \frac{12EI}{GA_0l^2} \quad (3.82)$$

Ainda pela Equação (3.80), nota-se que o fator de cisalhamento introduz um aumento artificial na rigidez da viga biapoiada sob flexão pura. Este erro, proveniente da representação das translações e rotações por funções aproximadoras lineares, decresce com n^{-2} , ou seja, quanto maior o número de elementos de viga no processo de discretização, mais exata se tornará a energia de deformação aproximada. Porém, é indesejável realizar um aumento na discretização do sistema para obter soluções satisfatórias de simples problemas da teoria de vigas. Sendo assim, outras técnicas devem ser exploradas para evitar a ocorrência do fenômeno de travamento por cisalhamento ao se analisar estruturas pelo método dos elementos finitos utilizando interpolações lineares para deslocamentos.

3.5.2 Parâmetros de correção dos coeficientes de rigidez

A consideração de funções aproximadoras lineares para expressar a translação e a rotação dos nós do elemento de viga biapoiado sob flexão pura conduz a erros, de forma que o mais importante provavelmente seja o fenômeno de travamento por cisalhamento, o qual gera uma rigidez artificial no deslocamento do elemento, diminuindo a resposta quanto à magnitude das deflexões e rotações dos nós.

Para contornar esse problema e permitir a formulação em elementos finitos de vigas utilizando a interpolação linear para os deslocamentos, torna-se imprescindível que a matriz de rigidez obtida na formulação correspondente, expressa por (3.51), apresente coeficientes que evitem a ocorrência do fenômeno em questão. Segundo Krenk (2001), há

basicamente três diferentes modos de evitar o travamento por cisalhamento em elementos finitos com formulação em deslocamentos e interpolação linear.

O primeiro método a ser enunciado explora o fato de que para elementos simples, como o elemento de viga em questão, o travamento por cisalhamento pode ser resolvido através da utilização de funções aproximadoras que levem a representações consistentes da deformação cisalhante. Por meio das Equações (3.66) e (3.67), percebe-se que a equação exata para representar as rotações dos nós é de ordem linear, enquanto a equação exata para representar as translações do eixo longitudinal do elemento é de ordem quadrática. Sendo assim, a adoção de uma função aproximadora linear para $\theta(x)$ e uma função aproximadora quadrática para $v(x)$ resultaria em uma resposta consistente para a consideração da deformação cisalhante, uma vez que as funções $\theta(x)$ e $v'(x)$ apresentariam a mesma ordem, de forma que $\gamma = v' - \theta$ se anularia. Para elementos de viga, isto seria possível ao se considerar um nó no centro do elemento para os graus de liberdade translacionais ou a adoção de um modo de deformação adicional não associado a um nó em particular, sendo os graus de liberdade internos posteriormente eliminados a nível de elemento. Esta técnica é descrita em Ibrahimbegovic (1995).

O segundo método consiste em avaliar as propriedades do elemento por meio de integração reduzida. O termo “integração reduzida” é tipicamente utilizado na literatura de elementos finitos para denotar uma forma de integração numérica que é intencionalmente escolhida para não considerar certas contribuições, conforme descrito em Hughes (1987). No elemento de viga considerado isto equivale a avaliar a contribuição da deformação cisalhante no centro do elemento. Conforme a Figura 3.24, a indesejável presença da deformação cisalhante é nula neste ponto, tornando viável o procedimento de integração considerando apenas um ponto de Gauss no meio do elemento, evitando assim o fenômeno de travamento por cisalhamento.

O terceiro modo consiste na utilização de parâmetros modificados de rigidez, cuja função é compensar os erros introduzidos pela interpolação linear. O parâmetro modificado de rigidez à flexão, \overline{EI} , e o parâmetro modificado de rigidez ao cisalhamento, \overline{GA}_0 , são obtidos por meio da formulação de elementos de viga utilizando funções aproximadoras lineares para descrever os deslocamentos de translação e rotação dos nós. A formulação é adotada para simples elementos de viga prismáticos considerando as deformações provenientes da flexão como infinitesimais. Porém, os parâmetros modificados de rigidez

obtidos podem ser utilizados na implementação de elementos de viga que consideram grandes deslocamentos.

Para elementos de viga, os parâmetros modificados de rigidez à flexão e ao cisalhamento podem ser determinados através da análise dos modos de deformação por rotação nodal simétrica e antissimétrica.

a) *Rotação nodal antissimétrica:*

O modo de deformação por rotação nodal antissimétrica é analisado primeiramente. Conforme a Figura 3.13, o momento fletor varia linearmente de $-M_a$ a M_a , enquanto o esforço cortante é constante e de magnitude $Q = 2M_a / l$. Para a teoria linear-elástica de vigas, a energia de deformação exata é dada por:

$$U_{exata} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{M^2(x)}{EI} + \frac{Q^2(x)}{GA_0} \right) dx = \frac{M_a^2 l}{6EI} + \frac{2M_a^2 l}{GA_0 l^2} \quad (3.83)$$

A Equação (3.83) pode ser reescrita como:

$$U_{exata} = (1 + \Phi) \frac{M_a^2 l}{6EI} \quad (3.84)$$

O parâmetro Φ corresponde à influência da deformação cisalhante na flexão, já definido nas Equações (3.39) e (3.82). A rotação nodal antissimétrica θ_a pode ser obtida através da Equação (3.85), onde o fator 2 corresponde à igual contribuição do momento fletor M_a aplicado nas extremidades do elemento:

$$2\theta_a = \frac{\partial U}{\partial M_a} \quad (3.85)$$

Assim, a energia de deformação exata pode ser expressa em função da rotação nodal antissimétrica, resultando em:

$$U_{exata} = \frac{6}{(1 + \Phi)} \frac{EI}{l} \theta_a^2 \quad (3.86)$$

As representações dos deslocamentos transversal e rotacional por meio de funções aproximadoras lineares são dadas pelas Equações (3.66) e (3.67), respectivamente. Pela Figura 3.10, conclui-se que as rotações nodais são iguais em ambos os nós para o caso de

rotação antissimétrica, e assumindo a condição de viga biapoada para o elemento de viga, tem-se a seguinte relação:

$$v_1 = v_2 = 0 \quad (3.87a)$$

$$\theta_1 = \theta_2 \quad (3.87b)$$

Dessa forma, substituindo (3.87) em (3.66) e (3.67), a condição de interpolação linear para os deslocamentos resulta em:

$$\theta_a(x) = \theta_1 = \theta_a \quad (3.88)$$

$$v_a'(x) = \frac{v_2 - v_1}{l} = 0 \quad (3.89)$$

A curvatura e a deformação cisalhante relacionadas à rotação nodal antissimétrica são dadas pela substituição de (3.88) e (3.89) em (3.12):

$$k_a(x) = \frac{d\theta_a(x)}{dx} = 0 \quad (3.90)$$

$$\gamma_a(x) = \frac{dv_a(x)}{dx} - \theta_a(x) = -\theta_a \quad (3.91)$$

A energia de deformação aproximada, proveniente da interpolação linear dos deslocamentos, introduz os parâmetros modificados de rigidez à flexão e ao cisalhamento. Substituindo (3.90) e (3.91) em (3.52), tem-se que:

$$U_{aprox} = \frac{1}{2} \int_0^l (\overline{EI} k_a^2 + \overline{GA}_0 \gamma_a^2) dx = \frac{1}{2} \overline{GA}_0 l \theta_a^2 \quad (3.92)$$

Para determinar o parâmetro \overline{GA}_0 impõe-se que as expressões da energia de deformação exata (3.86) e a energia de deformação aproximada (3.92) sejam idênticas. Desta maneira, o parâmetro modificado de rigidez ao cisalhamento é dado por:

$$\overline{GA}_0 = \frac{\Phi}{(1 + \Phi)} GA_0 \quad (3.93)$$

b) Rotação nodal simétrica:

O modo de deformação por rotação nodal simétrica é analisado por um procedimento similar. Conforme a Figura 3.11, o momento fletor é constante e de magnitude M_s , enquanto o esforço cortante é nulo, $Q_s = 0$, o que caracteriza o fenômeno de flexão pura. Para a teoria linear-elástica de vigas, a energia de deformação é dada por:

$$U_{exata} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{M^2(x)}{EI} + \frac{Q^2(x)}{GA_0} \right) dx = \frac{l M_s^2}{2 EI} \quad (3.94)$$

A rotação nodal simétrica θ_s pode ser obtida através da Equação (3.95), onde o fator 2 corresponde à igual contribuição do momento fletor M_s aplicado nas extremidades do elemento:

$$2\theta_s = \frac{\partial U}{\partial M_s} \quad (3.95)$$

Assim, a energia de deformação exata pode ser expressa em função da rotação nodal simétrica, resultando em:

$$U_{exata} = \frac{2EI}{l} \theta_s^2 \quad (3.96)$$

As representações dos deslocamentos transversal e rotacional por meio de funções aproximadoras lineares são dadas pelas Equações (3.66) e (3.67), respectivamente. Pela Figura 3.9, conclui-se que as rotações nodais são iguais em magnitude em ambos os nós para o caso de rotação simétrica, mas apresentam direções contrárias. Assumindo a condição de viga biapoiada para o elemento de viga, tem-se a seguinte relação:

$$v_1 = v_2 = 0 \quad (3.97a)$$

$$\theta_1 = -\theta_2 \quad (3.97b)$$

Dessa forma, substituindo (3.97) em (3.66) e (3.67), a condição de interpolação linear para os deslocamentos resulta em:

$$\theta_s(x) = \left(1 - \frac{2x}{l}\right) \theta_1 = \left(1 - \frac{2x}{l}\right) \theta_s \quad (3.98)$$

$$v_s'(x) = \frac{v_2 - v_1}{l} = 0 \quad (3.99)$$

A curvatura e a deformação cisalhante relacionadas à rotação nodal simétrica são dadas pela substituição de (3.98) e (3.99) em (3.12):

$$k_s(x) = \frac{d\theta_s(x)}{dx} = -\frac{2\theta_s}{l} \quad (3.100)$$

$$\gamma_s(x) = \frac{dv_s(x)}{dx} - \theta_s(x) = \left(-1 + \frac{2x}{l}\right)\theta_s \quad (3.101)$$

A energia de deformação aproximada, proveniente da interpolação linear dos deslocamentos, introduz os parâmetros modificados de rigidez à flexão e ao cisalhamento. Substituindo (3.100) e (3.101) em (3.52), tem-se que:

$$U_{aprox} = \frac{1}{2} \int_0^l (\overline{EI}k_s^2 + \overline{GA}_0\gamma_s^2)dx = \left(\frac{2\overline{EI}}{l} + \frac{1}{6}\overline{GA}_0l\right)\theta_s^2 \quad (3.102)$$

Para determinar o parâmetro \overline{EI} impõe-se que as expressões da energia de deformação exata (3.96) e a energia de deformação aproximada (3.102) sejam idênticas, utilizando a Equação (3.93) que determina o parâmetro de correção \overline{GA}_0 . Desta maneira, o parâmetro modificado de rigidez à flexão é dado por:

$$\overline{EI} = \frac{\Phi}{(1 + \Phi)} EI \quad (3.103)$$

Conclui-se que este procedimento leva a fatores idênticos de correção das rigidezes EI e GA_0 .

3.5.3 Matriz de rigidez corrigida

No processo de implementação via método dos elementos finitos é bastante comum obter as matrizes de rigidez através da integração numérica. A matriz de rigidez do elemento pode ser obtida a partir da expressão da energia de deformação escrita em forma matricial como:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (3.104)$$

O termo \mathbf{u} corresponde ao vetor de deslocamentos nodais definido na Equação (3.27). Utilizando a interpolação linear dada em (3.66) e (3.67) e realizando a integração completa da energia de deformação expressa pela Equação (3.52), obtém-se a seguinte matriz de rigidez:

$$\mathbf{K} = \frac{\overline{EI}}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\overline{GA}_0}{6l} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

Por outro lado, utilizando a interpolação linear dada em (3.66) e (3.67) e considerando apenas um ponto de Gauss no meio do elemento para realizar a integração da energia de deformação expressa pela Equação (3.52), obtém-se a seguinte matriz de rigidez:

$$\mathbf{K} = \frac{\overline{EI}}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\overline{GA}_0}{4l} \begin{bmatrix} 4 & 2l & -4 & 2l \\ 2l & l^2 & -2l & l^2 \\ -4 & -2l & 4 & -2l \\ 2l & l^2 & -2l & l^2 \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

Substituindo os parâmetros \overline{GA}_0 e \overline{EI} dados pelas Equações (3.93) e (3.103), respectivamente, na expressão da matriz de rigidez dada pela Equação (3.106), obtém-se a matriz de rigidez corrigida do elemento de viga que contempla as hipóteses de Bernoulli e Timoshenko.

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{(1 + \Phi)l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & (4 + \Phi)l^2 & -6l & (2 - \Phi)l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & (2 - \Phi)l^2 & -6l & (4 + \Phi)l^2 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

Pode-se observar que a matriz de rigidez corrigida unificada linear da Equação (3.107) é a mesma matriz dada pela Equação (3.51), o qual foi obtida a partir do equilíbrio estático dos esforços internos gerados pelos modos de deformação simétrico e antissimétrico. Sendo assim, conclui-se que a formulação apresentada para elementos finitos de viga unificados não apresenta o problema relacionado ao fenômeno de travamento por cisalhamento, já que a matriz de rigidez resultante encontra-se corrigida pelos parâmetros modificados de rigidez à flexão e ao cisalhamento.

A substituição dos parâmetros modificados de rigidez dados pelas Equações (3.93) e (3.103) na expressão da matriz de rigidez dada pela Equação (3.105) também resultará na matriz de rigidez corrigida unificada linear fornecida pela Equação (3.107). Porém, manter os coeficientes de rigidez EI e GA_0 sem a correção pelo fator Φ resulta em uma matriz de rigidez do qual se podem obter informações acerca da influência do fenômeno de travamento por cisalhamento em elementos finitos com formulação em deslocamentos e utilização de interpolação linear. Sendo assim, a matriz de rigidez unificada sem correção será estabelecida conforme a Equação (3.108).

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{GA_0}{6l} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

3.5.4 Exemplos numéricos

As matrizes de rigidez dadas pelas Equações (3.107) e (3.108) foram implementadas em um programa de elementos finitos para análises lineares estáticas de pórticos planos denominado de *plane_frame.f90*, em linguagem *Fortran*, gentilmente cedido pelo professor William Taylor Matias Silva. Nos exemplos numéricos a seguir, consideram-se três vigas isostáticas. A primeira viga está submetida à flexão pura, a segunda sujeita a um esforço cortante constante e a terceira submetida a um esforço cortante linear. Para mostrar o travamento por cisalhamento, utiliza-se a matriz de rigidez não corrigida dada pela Equação (3.108). Por outro lado, para obter soluções isentas de travamento por cisalhamento, utiliza-se a matriz de rigidez corrigida dada pela Equação (3.107). Essas vigas foram discretizadas com 8 e 16 elementos. As vigas possuem seção transversal retangular e foram consideradas as seguintes relações: $L = 10h$, $h = 2b$, $E = 0.4G$, $A_0 = \frac{5}{6}A$ e $\Phi_L = 0.03$.

a) Viga biapoiada sob flexão pura:

Considera-se neste exemplo uma viga biapoiada sob flexão pura, conforme ilustrado pela Figura 3.24, o qual também informa as propriedades geométricas e mecânicas da viga. Os

valores exatos das máximas rotações e translações são mostrados nas Equações (3.109) e (3.110), respectivamente.

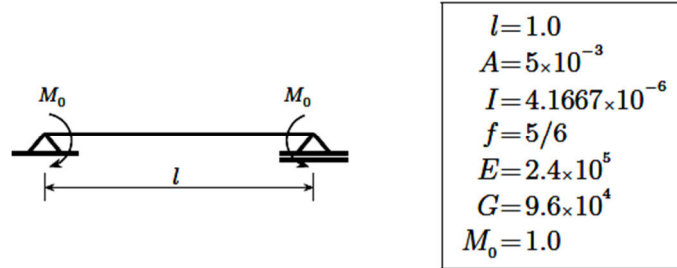


Figura 3.24: Viga *a*: biapoiada sob flexão pura.

$$\theta(x) = \frac{M_0}{EI} \left(x - \frac{l}{2} \right) \quad (3.109a)$$

$$\theta_A(x=0) = -\theta_B(x=l) = \frac{M_0 l}{2EI} \quad (3.109b)$$

$$v(x) = \frac{M_0}{2EI} (lx - x^2) \quad (3.110a)$$

$$v \left(x = \frac{l}{2} \right) = \frac{M_0 l^2}{8EI} \quad (3.110b)$$

Observa-se que, para este caso, o esforço cortante é nulo e, portanto, não há a influência da rigidez ao cisalhamento na deflexão da viga. Na Figura 3.25 são mostrados os resultados numéricos para as translações, enquanto que na Figura 3.26, são mostrados os resultados numéricos para as rotações, ambos contrastados com os resultados analíticos.

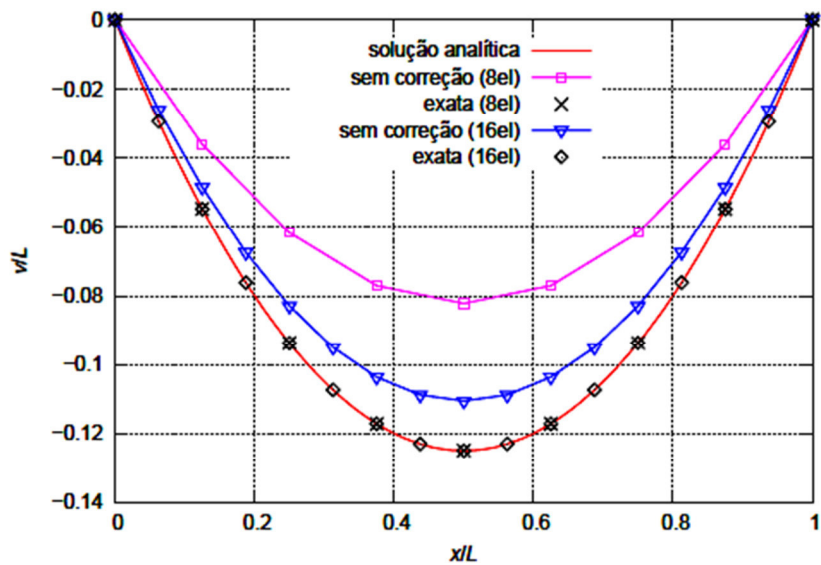


Figura 3.25: Deflexão viga a : resultados analíticos e numéricos.

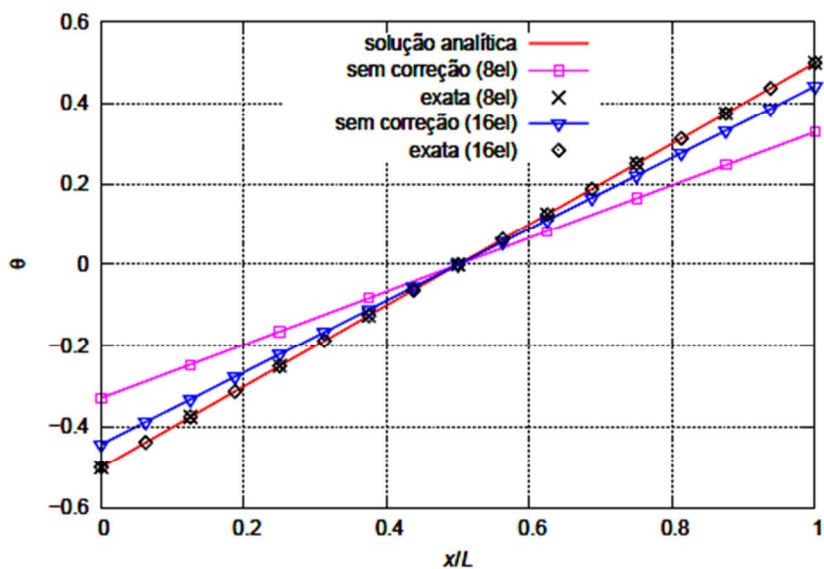


Figura 3.26: Rotação viga a : resultados analíticos e numéricos.

Observa-se que para os casos sem correção pelo parâmetro Φ , obteve-se uma sobrerigidez tanto para as translações quanto para as rotações, com 8 e 16 elementos, respectivamente. Para a malha de 8 elementos houve um aumento de rigidez de 34,25% tanto para a rotação quanto para a translação máximas, enquanto que, para a malha de 16 elementos, esse aumento foi de 11,52% para ambas rotação e translação máximas. Por outro lado, pode-se observar que os resultados numéricos obtidos com o uso do parâmetro Φ foram coincidentes com os valores exatos, tanto para as translações quanto para as rotações, o que

mostra que a matriz de rigidez dada pela Equação (3.107) é livre do fenômeno de travamento por cisalhamento, não causando uma sobrerigidez artificial.

b) Viga engastada com carga concentrada aplicada na extremidade livre:

Considera-se neste exemplo uma viga engastada com carga concentrada aplicada na extremidade livre, conforme ilustrado pela Figura 3.27, o qual também informa as propriedades geométricas e mecânicas da viga. Os valores exatos das máximas rotações e translações são mostrados nas Equações (3.111) e (3.112), respectivamente.

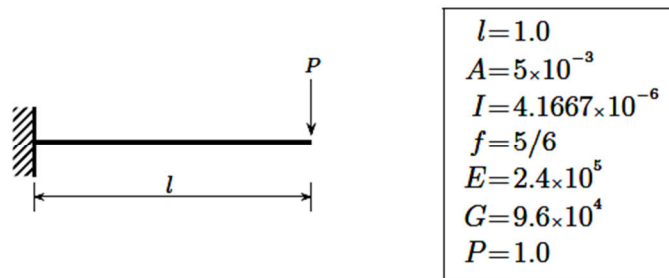


Figura 3.27: Viga *b*: engastada com carga concentrada na extremidade livre.

$$\theta(x) = \frac{Px}{EI} \left(\frac{x}{2} - l \right) \quad (3.111a)$$

$$\theta_A(x=0) = 0, \quad \theta_B(x=l) = -\frac{Pl^2}{2EI} \quad (3.111b)$$

$$v(x) = \frac{Px^2}{2EI} \left(l - \frac{x}{3} \right) + \frac{Px}{GA_0} \quad (3.112a)$$

$$v(x=l) = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pl}{GA_0} \quad (3.112b)$$

Observa-se que, devido a atuação do esforço cortante constante, há a influência da rigidez ao cisalhamento na deflexão da viga. Os resultados numéricos para as translações encontram-se ilustrados na Figura 3.28, enquanto que a Figura 3.29 ilustra os resultados numéricos para as rotações, ambos contrastados com os resultados analíticos.

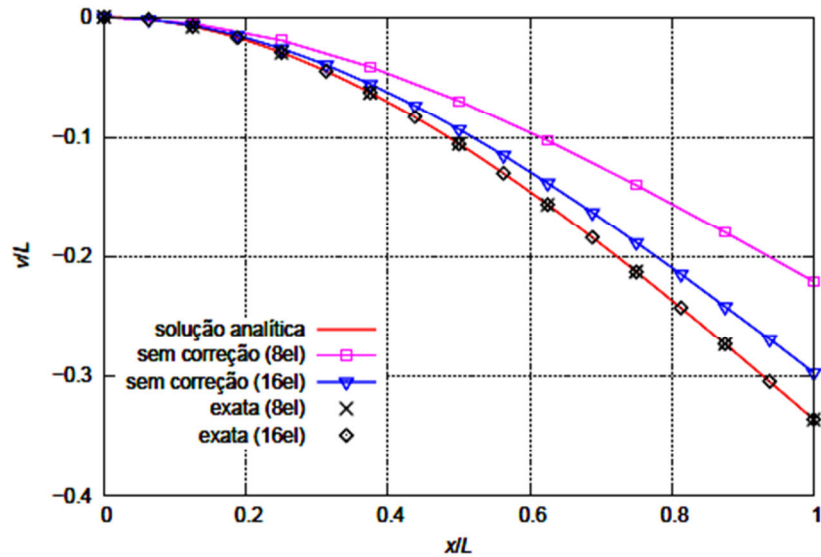


Figura 3.28: Deflexão viga b : resultados analíticos e numéricos.

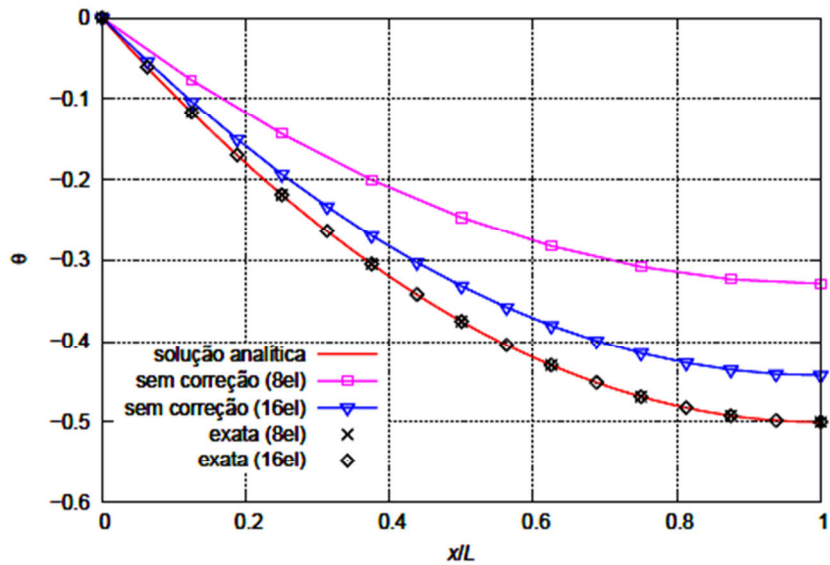


Figura 3.29: Rotação viga b : resultados analíticos e numéricos.

Observa-se que, para os casos sem a correção pelo parâmetro Φ , obteve-se uma sobrerigidez tanto para as translações quanto para as rotações com 8 e 16 elementos, respectivamente. Para a malha de 8 elementos houve um aumento de rigidez de 34,25% tanto para a rotação quanto para a translação máximas, enquanto que, para a malha de 16 elementos, esse aumento foi de 11,52% para ambas rotação e translação máximas. Os valores dos erros foram idênticos aos do exemplo anterior, pois o parâmetro de cisalhamento Φ adotado é o mesmo para os dois exemplos. Por outro lado, pode-se observar que os resultados numéricos obtidos com o uso do parâmetro Φ foram

coincidentes com os valores exatos, tanto para as translações quanto para as rotações, assim como no exemplo anterior. Conclui-se que a correção feita com o parâmetro Φ evita o fenômeno de travamento por cisalhamento e, conseqüentemente, não provoca uma sobrerigidez artificial.

c) *Viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído:*

Considera-se neste exemplo uma viga biapoiada sujeita a carregamento uniformemente distribuído, conforme ilustrado pela Figura 3.30, o qual também informa as propriedades geométricas e mecânicas da viga. Os valores exatos das máximas rotações e translações são mostrados nas Equações (3.113) e (3.114), respectivamente.

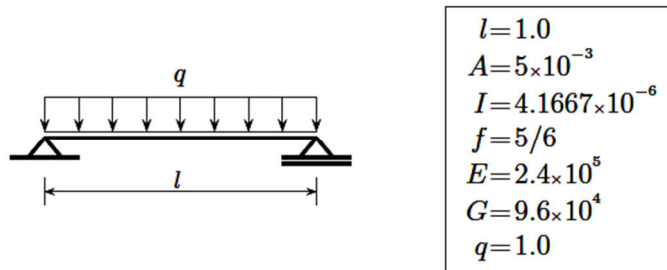


Figura 3.30: Viga c: biapoiada com carregamento uniformemente distribuído.

$$\theta(x) = \frac{q}{EI} \left(\frac{lx^2}{4} - \frac{x^3}{6} - \frac{l^3}{24} \right) \quad (3.113a)$$

$$\theta_A(x=0) = -\theta_B(x=l) = \frac{ql^3}{24EI} \quad (3.113b)$$

$$v(x) = \frac{qx}{12EI} \left(-lx^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{l^3}{2} \right) + \frac{qx}{2GA_0} (l-x) \quad (3.114a)$$

$$v \left(x = \frac{l}{2} \right) = \frac{5ql^4}{384EI} + \frac{ql^2}{8GA_0} \quad (3.114b)$$

Observa-se que, devido a atuação do esforço cortante, nota-se que há a influência da rigidez ao cisalhamento na deflexão da viga. Os resultados numéricos para as translações

encontram-se ilustrados na Figura 3.31, enquanto que a Figura 3.32 ilustra os resultados numéricos para as rotações, ambos contrastados com os resultados analíticos.

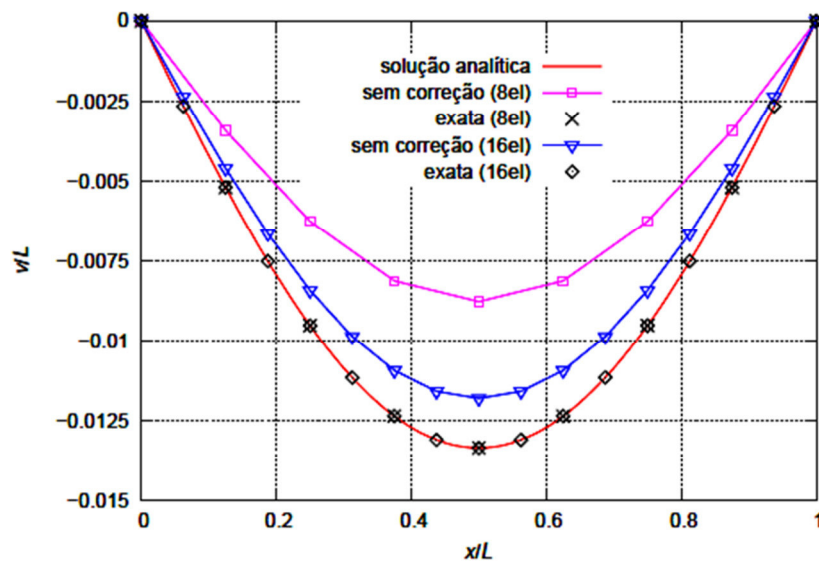


Figura 3.31: Deflexão viga c: resultados analíticos e numéricos.

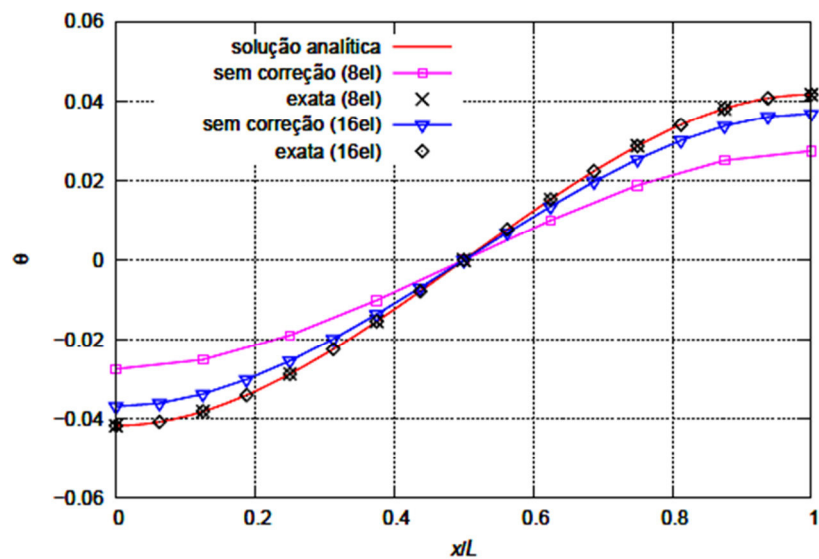


Figura 3.32: Rotação viga c: resultados analíticos e numéricos.

Observa-se que, para os casos sem a correção pelo parâmetro Φ , obteve-se uma sobrerigidez tanto para as translações quanto para as rotações com 8 e 16 elementos, respectivamente. Para a malha de 8 elementos houve um aumento de rigidez de 34,25% tanto para a rotação quanto para a translação máximas, enquanto que, para a malha de 16 elementos, esse aumento foi de 11,52% para ambas rotação e translação máximas. Os valores dos erros foram idênticos aos dois exemplos anteriores devido a adoção do mesmo

valor para o parâmetro de cisalhamento Φ para as três vigas apresentadas neste trabalho. Por outro lado, pode-se observar que os resultados numéricos obtidos com o uso do parâmetro Φ foram coincidentes com os valores exatos, tanto para as translações quanto para as rotações, assim como nos exemplos anteriores. Conclui-se que a correção feita com o parâmetro Φ evita o fenômeno de travamento por cisalhamento e, conseqüentemente, não provoca uma sobrerigidez artificial.

4 FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL APLICADA A PÓRTICOS PLANOS UTILIZANDO ELEMENTOS DE VIGA UNIFICADOS

Este capítulo apresenta a formulação co-rotacional aplicada a elementos finitos de viga unificados, considerando o acoplamento dos esforços axiais. O procedimento de obtenção da matriz de rigidez tangente local e global é detalhado adotando-se a formulação proposta por Krenk (2009), o qual considera a adoção dos modos naturais de deslocamento, divididos entre deslocamentos de corpo rígido, estabelecidos por translações e rotações, e os deslocamentos deformacionais, dados pela deformação axial, deformação por rotação nodal simétrica e deformação por rotação nodal antissimétrica. Os modos naturais de deslocamento foram propostos por Argyris et al. (1979).

4.1 DESCRIÇÃO CINEMÁTICA

A descrição cinemática da formulação co-rotacional baseia-se na separação explícita entre os movimentos de corpo rígido e os movimentos deformacionais sofridos por um elemento de viga, conforme apresentado no Capítulo 2 e ilustrado pela Figura 2.4, de forma que os movimentos translacionais e rotacionais são acompanhados pelo deslocamento do eixo local co-rotacional e as deformações impostas são descritas ao longo do eixo local deformacional.

É importante ressaltar que as formulações apresentadas referem-se somente a elementos de viga planos, de forma que a matriz de rigidez tangente pode ser obtida por procedimentos simples e diretos, o que não ocorre em problemas que consideram elementos de viga espaciais.

A Figura 4.1 ilustra um elemento de viga localizado em um plano x - y definido pelo sistema de eixo global material (X,Y) e espacial (x,y) , ocupando a configuração C_0 . A figura também indica o sistema de eixo local inicial, (x_0^e, y_0^e) , definido pela posição dos pontos nodais extremos 1 e 2 , de forma que o eixo x_{local} coincida com o eixo do elemento, passando pelos pontos 1 e 2 , e a origem seja localizada no ponto médio entre os nós

extremos. Considera-se que o elemento de viga apresenta uma rotação inicial em relação ao eixo x_{global} , dada por φ_0 .

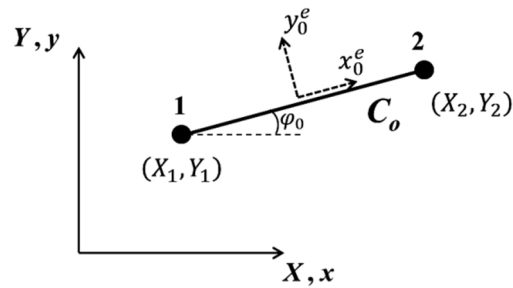


Figura 4.1: Elemento de viga plano em C_0 .

Os graus de liberdade associados aos nós 1 e 2, em relação ao eixo global, encontram-se ilustrados na Figura 4.2 com seus sentidos positivos.

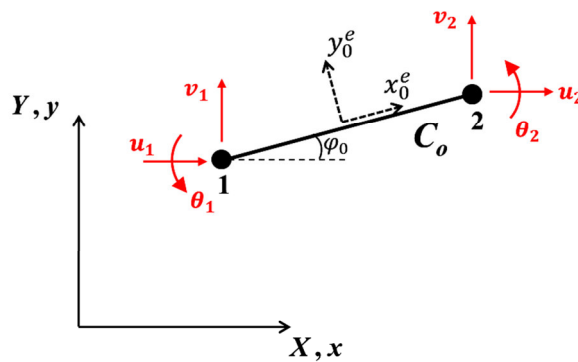


Figura 4.2: Graus de liberdade em relação ao eixo global.

A representação física dos graus de liberdade dos nós de um elemento corresponde aos deslocamentos executados, compostos pelas translações horizontais e verticais e pelas rotações dos nós extremos. Os deslocamentos globais de um elemento de viga encontram-se representados na Figura 4.3.

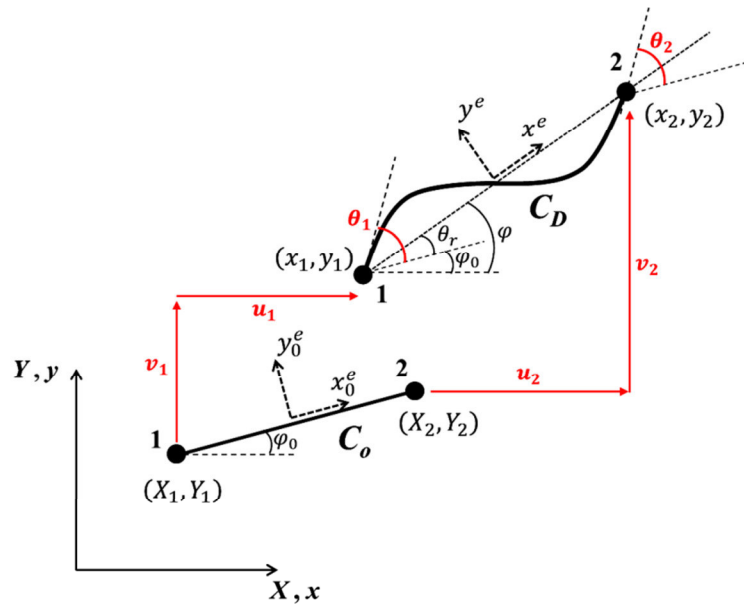


Figura 4.3: Deslocamentos globais.

Os deslocamentos globais ilustrados pela Figura 4.3 correspondem aos componentes do vetor de deslocamentos globais, \mathbf{u} .

$$\mathbf{u}_1^T = (u_1, v_1, \theta_1) \quad , \quad \mathbf{u}_2^T = (u_2, v_2, \theta_2) \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.1b)$$

Observa-se, então, que o movimento completo de um elemento de viga é caracterizado por seis componentes determinados pelos graus de liberdade apresentados. Em associação aos deslocamentos globais propostos, considera-se a atuação de forças e momentos aplicados aos nós extremos do elemento, conforme ilustrado pela Figura 4.4.

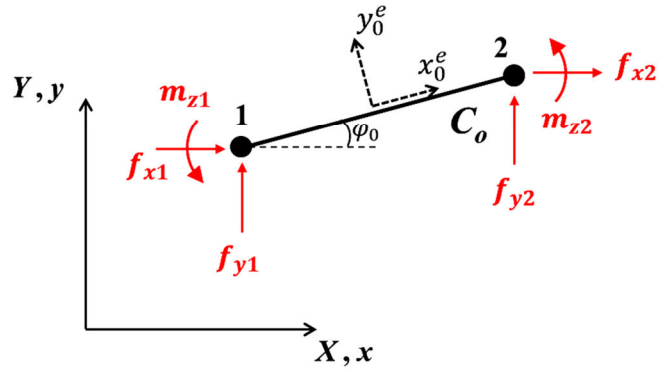


Figura 4.4: Forças globais.

As forças e momentos globais ilustrados pela Figura 4.4 correspondem aos componentes do vetor de forças globais, \mathbf{f} .

$$\mathbf{f}_1 = (f_{x_1}, f_{y_1}, m_{z_1}) \quad , \quad \mathbf{f}_2 = (f_{x_2}, f_{y_2}, m_{z_2}) \quad (4.2a)$$

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x_1} \\ f_{y_1} \\ m_{z_1} \\ f_{x_2} \\ f_{y_2} \\ m_{z_2} \end{Bmatrix} \quad (4.2b)$$

4.1.1 Deslocamentos de corpo rígido

Os deslocamentos de corpo rígido executado pelo elemento de viga são descritos pelas translações horizontais e verticais dos nós, $\mathbf{u}_r^t = [u, v]$, passando da configuração inicial, C_0 , para a configuração co-rotacional, C_R , e pela rotação de corpo rígido, θ_r , dada pelo ângulo formado entre o eixo local na configuração C_0 e o eixo local na configuração C_R . A Figura 4.5 ilustra a descrição cinemática de corpo rígido do elemento de viga adotado.

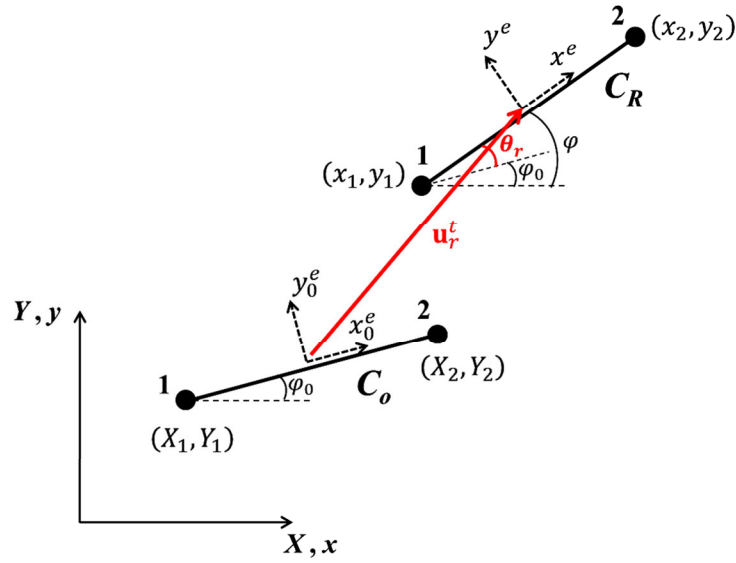


Figura 4.5: Movimento de corpo rígido: \mathbf{u}_r^t e θ_r .

Com base na Figura 4.5, pode-se determinar que o deslocamento de translação do eixo local é dado por (4.3):

$$\mathbf{u}_r^t = \begin{Bmatrix} \frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{X_2 + X_1}{2} \\ \frac{y_2 + y_1}{2} - \frac{Y_2 + Y_1}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{u_2 + u_1}{2} \\ \frac{v_2 + v_1}{2} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

A relação para a rotação de corpo rígido do elemento de viga é dada por (4.4):

$$\theta_r = \varphi - \varphi_0 \quad (4.4)$$

Logo, o vetor de deslocamento de corpo rígido é estabelecido por (4.5):

$$\mathbf{u}_r = \begin{Bmatrix} \frac{u_2 + u_1}{2} \\ \frac{v_2 + v_1}{2} \\ \theta_r \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

4.1.2 Deslocamentos deformacionais

Ao atingir a configuração deformacional, C_D , o elemento de viga sofre as influências dos esforços internos que acarretam na deformação da linha elástica segundo as direções axial e transversal. Inúmeras configurações de deformação da linha elástica podem ser apresentadas pelo elemento de viga, porém, a adoção dos modos naturais de deformação,

propostos por Argyris et al. (1979), é o objetivo do presente trabalho. Estes se dividem em três configurações, sendo: (i) deformação axial, (ii) deformação por rotação nodal simétrica e (iii) deformação por rotação nodal antissimétrica. As possíveis configurações da linha elástica do elemento de viga ao atingir o estágio final de equilíbrio estão ilustradas pela Figura 4.6, baseando-se nos modos naturais de deformação mencionados.

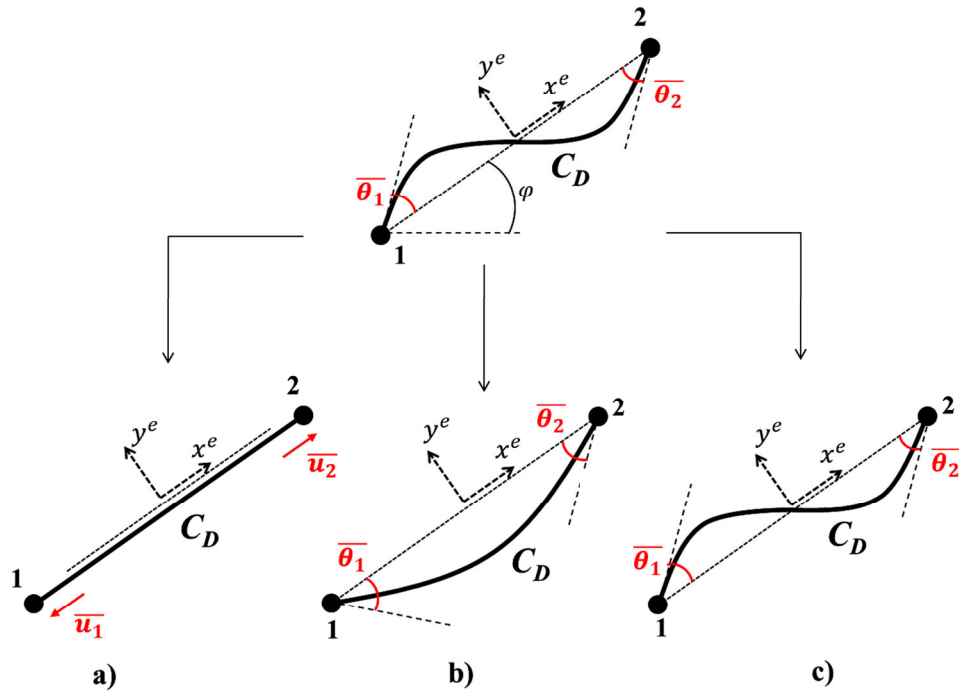


Figura 4.6: Modos naturais de deformação: a) deformação axial, b) deformação por rotação nodal simétrica e c) deformação por rotação nodal antissimétrica.

Um esquema generalizado da configuração deformacional, apresentando a composição das rotações deformacionais a partir das rotações globais do elemento, encontra-se ilustrada na Figura 4.7.

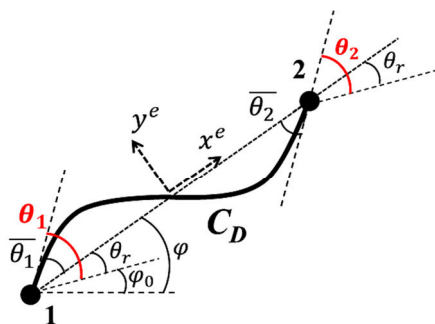


Figura 4.7: Configuração deformacional: rotações.

Com base na Figura 4.7, as rotações deformacionais da linha elástica podem ser determinadas segundo as relações a seguir:

$$\bar{\theta}_1 = \theta_1 - \theta_r \quad (4.6a)$$

$$\bar{\theta}_2 = \theta_2 - \theta_r \quad (4.6b)$$

a) Deformação axial:

A deformação axial corresponde à deformação de alongamento (tração) ou encurtamento (compressão) da linha elástica na direção paralela ao eixo x_{local} . A Figura 4.8 ilustra o alongamento axial da linha elástica nos nós extremos 1 e 2, de módulo $\frac{1}{2}u$, correspondendo a uma deformação axial total de módulo u .

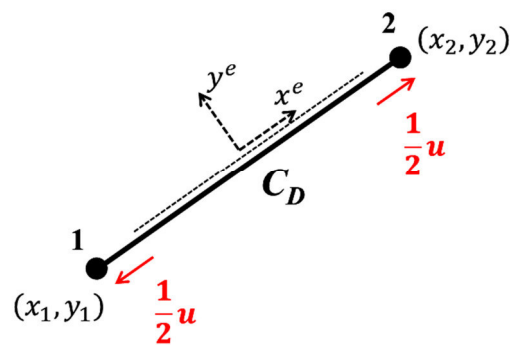


Figura 4.8: Modo natural de deformação: deformação axial.

A extensão u sofrida pelo elemento de viga promove uma alteração no comprimento inicial do elemento, de forma que a variação do comprimento é dada por:

$$u = l - l_0 \quad (4.7)$$

À deformação axial está associado o esforço interno normal, N , atuante nos nós extremos do elemento, cujo sentido positivo encontra-se ilustrado na Figura 4.9. Se o esforço normal corresponder a uma deformação de alongamento da linha elástica, será denominado de esforço normal de tração, convencionado como positivo. Se corresponder a uma deformação por encurtamento do elemento de viga, será denominado de esforço normal de compressão, convencionado como negativo.

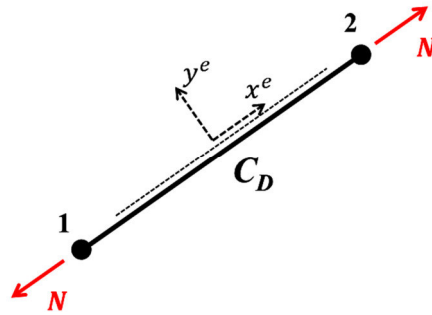


Figura 4.9: Esforço interno: normal.

b) Deformação por rotação nodal simétrica:

A deformação por rotação nodal simétrica, θ_s , caracteriza-se pela rotação da linha elástica no sentido horário, no nó extremo 1, e no sentido anti-horário, no nó extremo 2, conforme ilustrado na Figura 4.10.

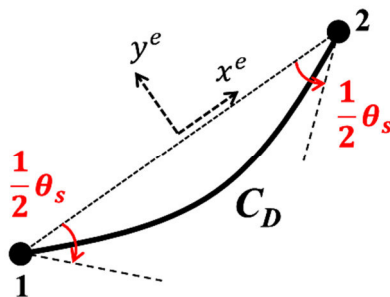


Figura 4.10: Modo natural de deformação: rotação nodal simétrica.

A Figura 4.11 estabelece um comparativo entre o modo de deformação por rotação nodal simétrica com o elemento de viga presente na configuração C_D , a fim de ilustrar a composição do ângulo deformacional simétrico, θ_s , convencionando a rotação anti-horária como positiva.

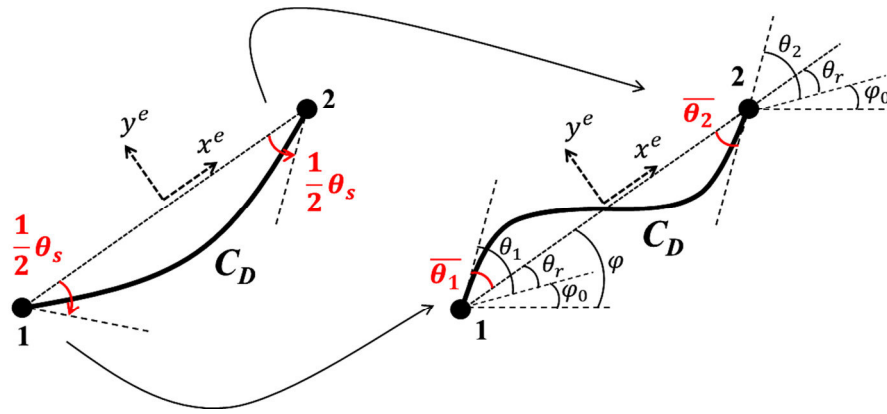


Figura 4.11: Composição da deformação por rotação nodal simétrica.

A partir da Figura 4.11 e das Equações (4.6a) e (4.6b), relaciona-se que:

$$\frac{1}{2}\theta_s + \frac{1}{2}\theta_s = -\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 \quad (4.8a)$$

$$\theta_s = -(\theta_1 - \theta_r) + \theta_2 - \theta_r \quad (4.8b)$$

$$\theta_s = \theta_2 - \theta_1 \quad (4.8c)$$

À deformação por rotação nodal simétrica está associado o esforço interno de momento simétrico, M_s , atuante nos nós extremos do elemento, apresentando o sentido de rotação horária no nó 1 e rotação anti-horária no nó 2, conforme ilustrado na figura 4.12, tratando-se de um sistema auto equilibrante.

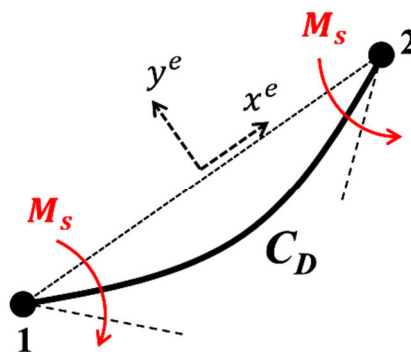


Figura 4.12: Esforço interno: momento simétrico.

A análise estática do momento M_s aplicado aos nós extremos do elemento de viga fornece os diagramas de esforços solicitantes ilustrados pela Figura 4.13, no qual conclui-se que se

trata da ocorrência de momento fletor constante e ausência de esforços cortantes, o que caracteriza-se como flexão pura.

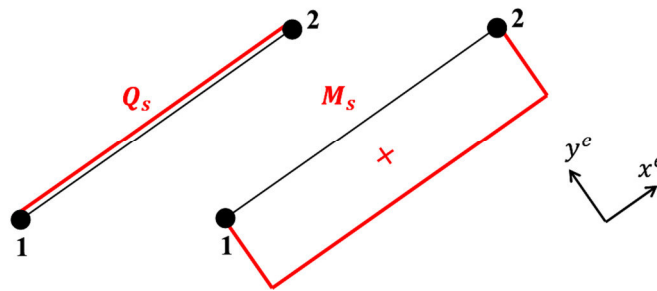


Figura 4.13: Diagrama de esforços internos para momento simétrico.

$$Q_s(x) = 0 \quad (4.9a)$$

$$M_s(x) = M_s \quad (4.9b)$$

c) *Deformação por rotação nodal antissimétrica:*

A deformação por rotação nodal antissimétrica, θ_a , caracteriza-se pela rotação da linha elástica no sentido anti-horário, atuando em ambos nós extremos, 1 e 2, conforme ilustrado na Figura 4.14.

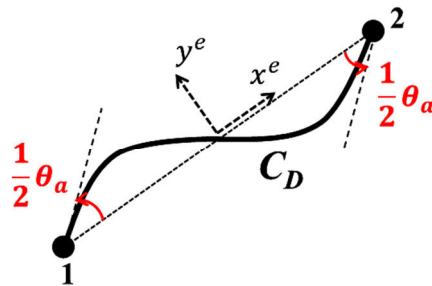


Figura 4.14: Modo natural de deformação: rotação nodal antissimétrica.

A Figura 4.15 estabelece um comparativo entre o modo de deformação por rotação nodal antissimétrica com o elemento de viga presente na configuração C_D , a fim de ilustrar a composição do ângulo deformacional antissimétrico, θ_a , convencionando a rotação anti-horária como positiva.

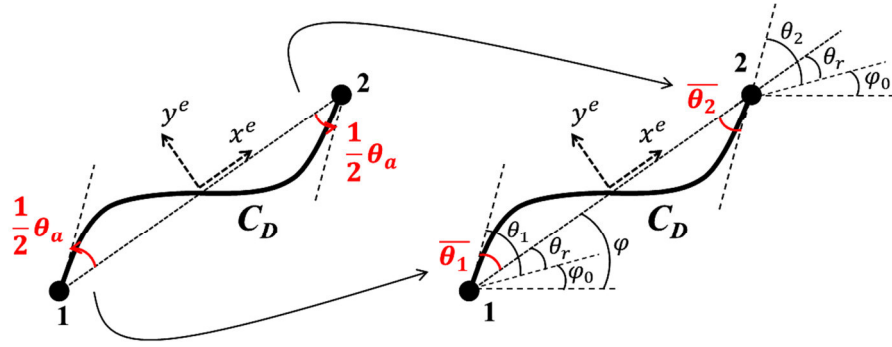


Figura 4.15: Composição da deformação por rotação nodal antissimétrica.

A partir da Figura 4.15 e das Equações (4.4), (4.6a), (4.6b), relaciona-se que:

$$\frac{1}{2}\theta_a + \frac{1}{2}\theta_a = \bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 \quad (4.10a)$$

$$\theta_a = \theta_1 + \theta_2 - 2\theta_r \quad (4.10b)$$

$$\theta_a = \theta_1 + \theta_2 - 2(\varphi - \varphi_0) \quad (4.10c)$$

Percebe-se pela Equação (4.10c) que o ângulo deformacional antissimétrico é composto da soma dos ângulos de rotação da linha elástica subtraídos do ângulo de rotação de corpo rígido.

À deformação por rotação nodal antissimétrica está associada à aplicação de um momento interno antissimétrico, M_a , atuante nos nós extremos do elemento de viga, de forma a ser considerado em sentido anti-horário no nó inicial 1 e no nó final 2. Como o sistema não se encontra em equilíbrio somente com a aplicação dos momentos extremos M_a , para ajustá-lo, é necessária a consideração de forças transversais iguais e opostas, Q , aplicadas aos nós extremos do elemento, conforme ilustrado pela figura 4.16.

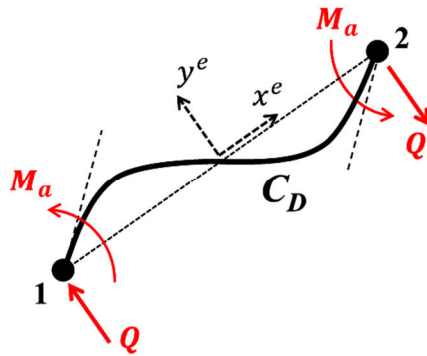


Figura 4.16: Esforço interno: momento antissimétrico.

Pela Figura 4.16, percebe-se que o equilíbrio estático dos momentos resulta em:

$$Q = \frac{2M_a}{l} \quad (4.11)$$

A análise estática do momento M_a aplicado aos nós extremos do elemento de viga fornece os diagramas de esforços solicitantes ilustrados pela Figura 4.17, no qual conclui-se que se trata da ocorrência de momento fletor linear e a ocorrência de esforço cortante constante, o que caracteriza-se como flexão simples.

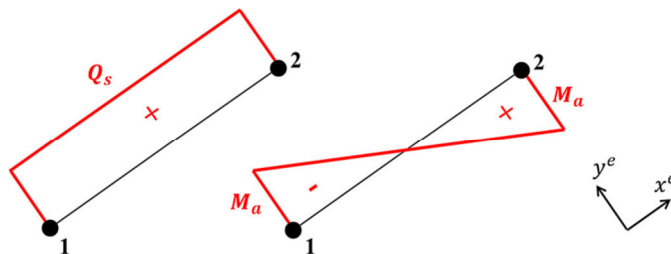


Figura 4.17: Diagrama de esforços internos para momento antissimétrico.

$$Q_a(x) = \frac{2M_a}{l} \quad (4.12a)$$

$$M_a(x) = M_a \left(\frac{2}{l}x - 1 \right) \quad (4.12b)$$

4.2 MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

4.2.1 Rotação de eixos

O objetivo da análise não linear de estruturas pela formulação co-rotacional é determinar a matriz de rigidez tangente do elemento em relação ao sistema de eixo global de referência. Para isso, são necessárias algumas operações de transformações de coordenadas, que visam estabelecer as componentes estáticas e cinemáticas dos pontos nodais em distintos sistemas de eixos referenciais. A formulação apresentada envolve duas transformações essenciais:

1º) *Sistema Local Deformacional* → *Sistema Local*: Transformação do conjunto de variáveis locais “internas” dadas pelos componentes do vetor de deslocamentos deformacionais (\mathbf{u}_d) e pelos componentes do vetor de forças internas (\mathbf{f}_d), em um conjunto de variáveis “externas” atuantes nos nós extremos, as quais representam os componentes do vetor de deslocamentos locais (\mathbf{u}^e) e os componentes do vetor de forças locais (\mathbf{f}^e).

2º) *Sistema Local* → *Sistema Global*: Transformação do sistema de variáveis locais, \mathbf{u}^e e \mathbf{f}^e , em um conjunto pertencente ao sistema global, dado pelos componentes do vetor de deslocamentos globais, \mathbf{u} , e pelos componentes do vetor de forças globais, \mathbf{f} .

a) *Transformação de forças*:

A transformação dos componentes do vetor de forças locais para componentes referenciadas em relação ao eixo global se dá por meio da matriz de rotação, representada por \mathbf{R} , cujos coeficientes matriciais são determinados por (4.13):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\text{sen } \varphi & 0 \\ \text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Para um elemento de viga de dois nós, 1 e 2, a operação de transformação dos componentes do vetor de forças do sistema local para o sistema global é realizada por meio da matriz de rotação combinada, \mathbf{R}_c , conforme expressa em (4.14).

$$\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \\ & \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\text{sen } \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & -\text{sen } \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

A operação de transformação dos componentes do vetor de forças do sistema local para o sistema global é dada por (4.15) e encontra-se ilustrada pela Figura 4.18.

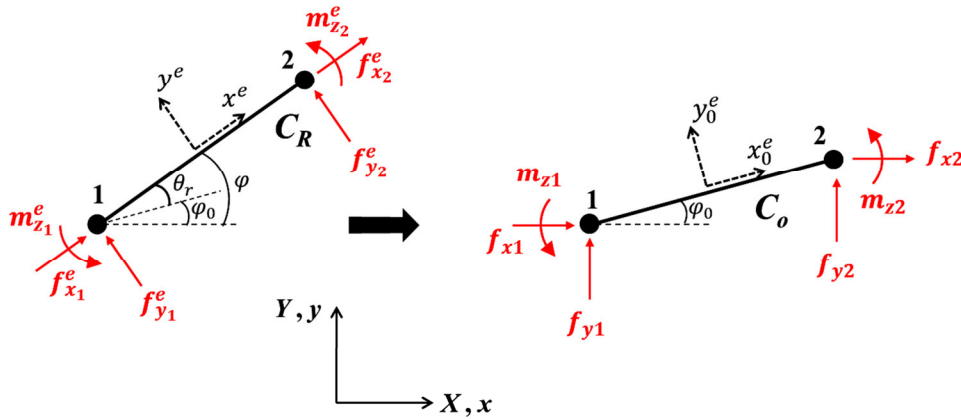


Figura 4.18: Transformação $\mathbf{f}^e \rightarrow \mathbf{f}$.

$$\mathbf{f} = \mathbf{R}_c \mathbf{f}^e \quad (4.15)$$

A operação de transformação contrária, ou seja, do sistema global para o sistema local de referência, é dada por:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{f} \quad (4.16)$$

Como a matriz \mathbf{R}_c é uma matriz ortogonal, tem-se que:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{R}_c^T \mathbf{f} \quad (4.17)$$

Os componentes do vetor de forças locais podem ser expressos em função dos componentes do vetor de forças internas, os quais são provenientes das configurações deformadas. A Figura 4.19 ilustra os componentes dos vetores de forças internas e forças locais a fim de representar o processo de superposição dos componentes da configuração C_D para a configuração C_R .

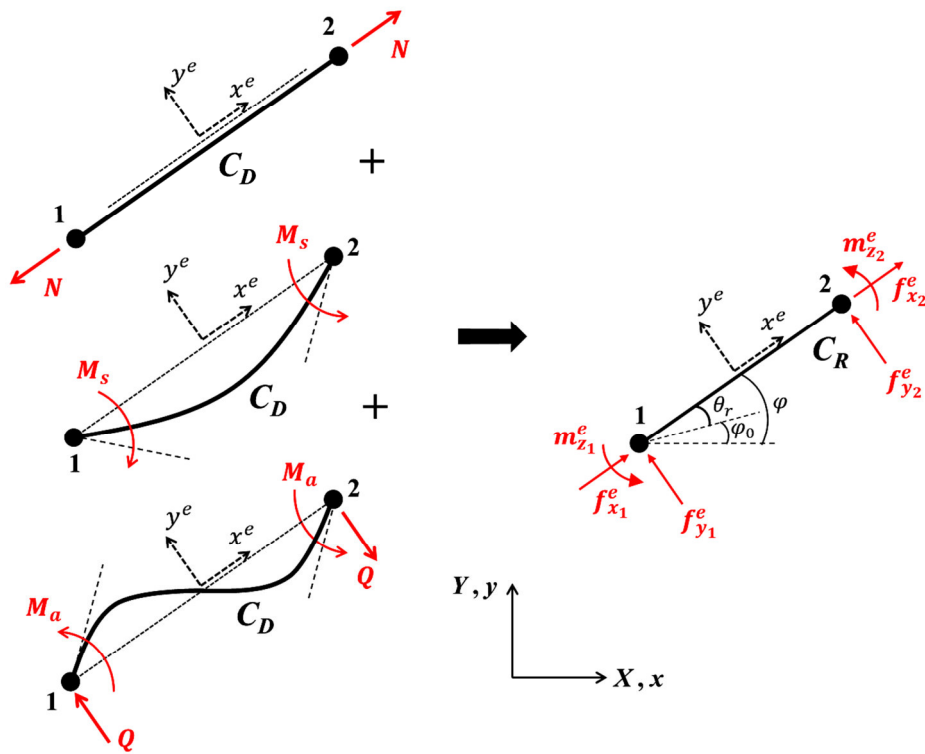


Figura 4.19: Transformação $\mathbf{f}_d \rightarrow \mathbf{f}^e$.

- Nó 1:

$$f_{x_1}^e = -N \quad (4.18a)$$

$$f_{y_1}^e = \frac{2M_a}{l} \quad (4.18b)$$

$$m_{z_1}^e = -M_s + M_a \quad (4.18c)$$

- Nó 2:

$$f_{x_2}^e = N \quad (4.19a)$$

$$f_{y_2}^e = -\frac{2M_a}{l} \quad (4.19b)$$

$$m_{z_2}^e = M_s + M_a \quad (4.19c)$$

Matricialmente, as relações (4.18) e (4.19) são expressas como:

$$\begin{Bmatrix} f_{x_1}^e \\ f_{y_1}^e \\ m_{z_1}^e \\ f_{x_2}^e \\ f_{y_2}^e \\ m_{z_2}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/l \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/l \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M_s \\ M_a \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

A matriz de ordem 6x3 dada por (4.21b) é denominada matriz de transformação e representada pela letra **S**. Para a transformação referente ao nó 1, tem-se **S**₁, e para o nó 2, **S**₂.

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/l \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/l \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.21a)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/l \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/l \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.21b)$$

A Equação (4.20) é resumida da seguinte forma:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{S} \mathbf{f}_d \quad (4.22)$$

Como a matriz **S** não é uma matriz ortogonal, o procedimento de transformação dos componentes do vetor de forças locais em esforços internos deformacionais é realizado por:

$$\mathbf{f}_d = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{f}^e \quad (4.23)$$

b) Transformação de deslocamentos:

Os componentes do vetor de deslocamentos deformacionais podem ser relacionados com os componentes do vetor de deslocamentos locais por meio das operações matriciais de transformação. A Figura 4.20 ilustra a composição dos deslocamentos nodais para a transformação dos componentes do eixo local para o eixo deformacional, estando representados os graus de liberdade locais na configuração C_0 .

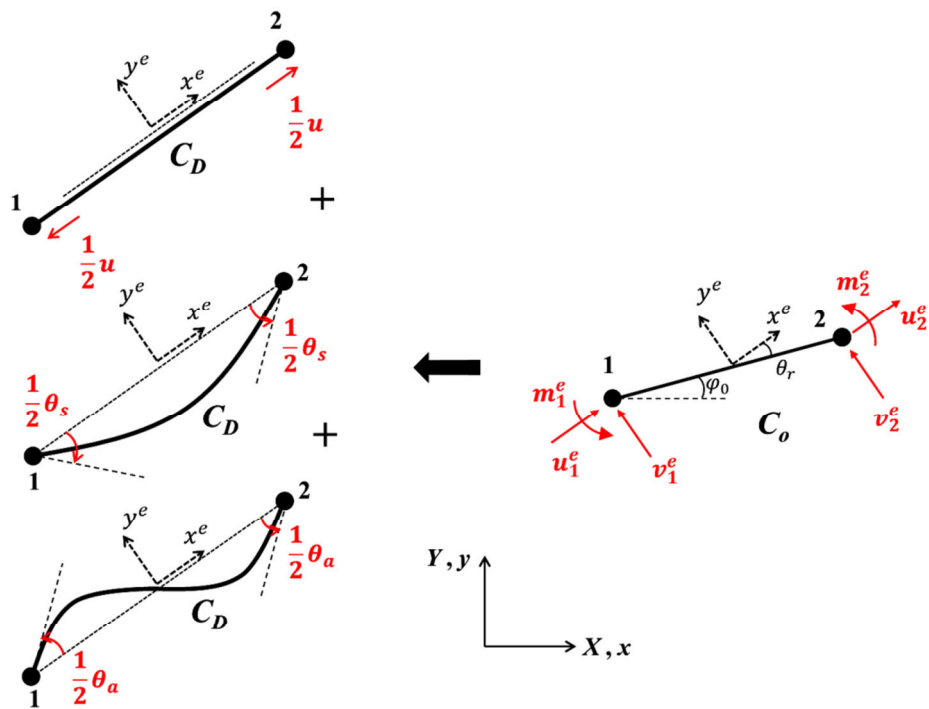


Figura 4.20: Transformação $\mathbf{u}_d \leftarrow \mathbf{u}^e$.

Os deslocamentos translacionais locais do elemento de viga encontram-se ilustrados na Figura 4.21.

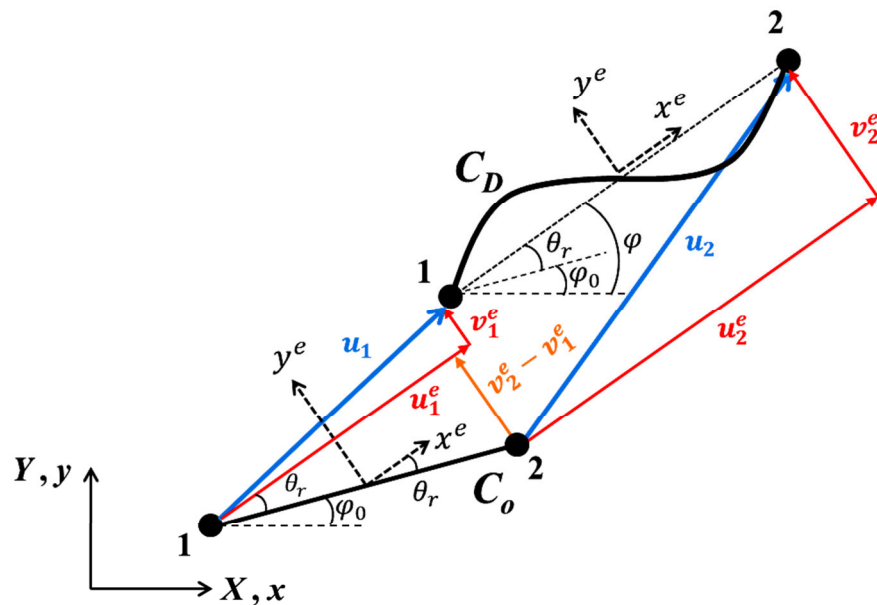


Figura 4.21: Deslocamentos translacionais locais.

Os deslocamentos rotacionais locais do elemento de viga encontram-se ilustrados na Figura 4.22.

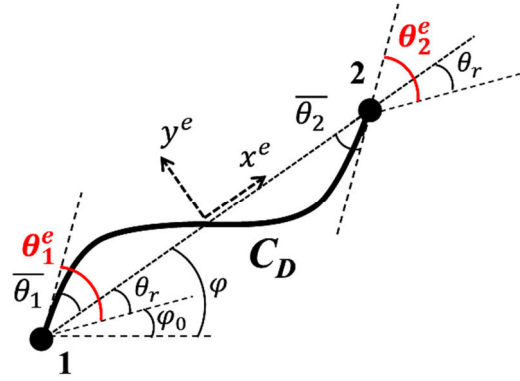


Figura 4.22: Deslocamentos rotacionais locais.

Através das análises das Figuras 4.20, 4.21 e 4.22, as seguintes relações podem ser expressas:

- Deslocamento deformacional axial:

$$\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u = -u_1^e + u_2^e \quad (4.24a)$$

$$u = -u_1^e + u_2^e \quad (4.24b)$$

- Deslocamento deformacional rotacional simétrico:

$$\theta_s = -\theta_1^e + \theta_2^e \quad (4.25)$$

- Deslocamento deformacional rotacional antissimétrico:

$$\theta_a = \theta_1^e + \theta_2^e - 2\theta_r \quad (4.26)$$

Pela hipótese de deslocamentos infinitesimais, tem-se que:

$$\text{sen}\theta_r \approx \theta_r \quad , \quad \theta_r = \frac{v_2^e - v_1^e}{l} \quad (4.27)$$

Substituindo (4.27) em (4.26), tem-se:

$$\theta_a = \theta_1^e + \theta_2^e - 2\left(\frac{v_2^e - v_1^e}{l}\right) \quad (4.28)$$

A relação matricial de transformação entre os componentes do vetor de deslocamentos deformacionais e os componentes do vetor de deslocamentos locais é então dada por:

$$\begin{Bmatrix} u \\ \theta_s \\ \theta_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{l} & 1 & 0 & -\frac{2}{l} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ \theta_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

Nota-se que a matriz de transformação em (4.29) corresponde à matriz transposta \mathbf{S}^T . Sendo assim, a notação matricial condensada para a transformação dos deslocamentos locais em deslocamentos deformacionais pode ser expressa por (4.30):

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{S}^T \mathbf{u}^e \quad (4.30)$$

A transformação dos componentes do vetor de deslocamentos globais, \mathbf{u} , em componentes do vetor de deslocamentos locais, \mathbf{u}^e , apresenta o mesmo procedimento para a conversão dos componentes do vetor de forças, dada por:

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{R}_c^T \mathbf{u} \quad (4.31)$$

Os incrementos aplicados às Equações (4.30) e (4.31) podem ser expressos por:

$$d\mathbf{u}^e = \mathbf{R}_c^T d\mathbf{u} \quad (4.32)$$

$$d\mathbf{u}_d = \mathbf{S}^T \mathbf{R}_c^T d\mathbf{u} \quad (4.33)$$

Assim, conclui-se que a matriz de transformação \mathbf{S} tem como função expandir o vetor de forças internas (\mathbf{f}_d) em um conjunto de forças locais (\mathbf{f}^e), enquanto a sua matriz transposta, \mathbf{S}^T , extrai o vetor de deslocamentos deformacionais (\mathbf{u}_d) do vetor de deslocamentos locais (\mathbf{u}^e).

4.2.2 Princípio dos trabalhos virtuais

O trabalho virtual das forças externas é dado pela Equação (4.34), o qual considera a relação de equilíbrio entre o vetor de forças globais e o vetor de deslocamentos virtuais resultante.

$$\delta V = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (4.34)$$

O procedimento padrão para a obtenção da matriz de rigidez tangente na presente formulação consiste em considerar o incremento do trabalho virtual externo, $d(\delta V)$, conforme expresso pela Equação (4.35).

$$d(\delta V) = d(\delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}) \quad (4.35)$$

Ao calcular este incremento, o vetor $\delta \mathbf{u}$ é considerado constante, resultando em:

$$d(\delta V) = \delta \mathbf{u}^T d\mathbf{f} \quad (4.36)$$

Comparando as Equações (4.34) e (4.36), conclui-se que a expressão para o incremento do trabalho virtual externo, $d(\delta V)$, apresenta a mesma forma da expressão que governa o trabalho virtual externo total, δV , quando o vetor de forças globais, \mathbf{f} , é substituído pelo vetor de forças globais incrementais, $d\mathbf{f}$.

Substituindo (4.22) em (4.15), o incremento do vetor de forças globais resulta na seguinte relação:

$$d\mathbf{f} = d(\mathbf{R}_c \mathbf{S} \mathbf{f}_d) \quad (4.37a)$$

$$d\mathbf{f} = \mathbf{R}_c \mathbf{S} d\mathbf{f}_d + \mathbf{R}_c d\mathbf{S} \mathbf{f}_d + d\mathbf{R}_c \mathbf{S} \mathbf{f}_d \quad (4.37b)$$

Pode-se concluir que o incremento do vetor de forças globais implica em variações de cada um dos fatores determinantes, resultando em um somatório de parcelas incrementais incidentes individualmente sobre cada um dos parâmetros. Desta forma, a relação incremental envolve as seguintes alterações:

- variação no vetor de forças internas, $d\mathbf{f}_d$, o que promove variações nas configurações dos modos deformacionais;
- variação na matriz de transformação, $d\mathbf{S}$, em virtude da alteração do comprimento l do elemento de viga;
- variação na matriz de rotação, $d\mathbf{R}$, em virtude da alteração do ângulo de rotação, φ , do elemento de viga.

As forças internas atuantes nos nós extremos do elemento são resultantes das deformações impostas ao elemento de barra, representadas pelos três modos deformacionais possíveis.

A relação entre o vetor de forças internas e o vetor de deslocamentos deformacionais pode ser expressa conforme a equação (4.38):

$$\mathbf{f}_d = \mathbf{K}_d \mathbf{u}_d \quad (4.38)$$

O termo \mathbf{K}_d representa uma matriz de ordem 3x3 denominada matriz de rigidez tangente relativa aos modos deformacionais. Considerando (4.32) e (4.33), a relação incremental para o vetor de forças internas expresso em (4.38) resulta em:

$$d\mathbf{f}_d = d(\mathbf{K}_d \mathbf{u}_d) \quad (4.39a)$$

$$d\mathbf{f}_d = \mathbf{K}_d \mathbf{S}^T d\mathbf{u}^e \quad (4.39b)$$

Substituindo (4.39b) em (4.37b), tem-se que:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{R}_c \mathbf{S} \mathbf{K}_d \mathbf{S}^T d\mathbf{u}^e + \mathbf{R}_c d\mathbf{S} \mathbf{f}_d + d\mathbf{R}_c \mathbf{S} \mathbf{f}_d \quad (4.40a)$$

$$d\mathbf{f} = \mathbf{R}_c [\mathbf{S} \mathbf{K}_d \mathbf{S}^T d\mathbf{u}^e + (d\mathbf{S} + \mathbf{R}_c^T d\mathbf{R}_c \mathbf{S}) \mathbf{f}_d] \quad (4.40b)$$

Ao multiplicar a Equação (4.40b) pelo termo \mathbf{R}_c^T , realiza-se a conversão dos parâmetros do eixo global para o eixo local.

$$\mathbf{R}_c^T d\mathbf{f} = \mathbf{R}_c^T \mathbf{R}_c [\mathbf{S} \mathbf{K}_d \mathbf{S}^T d\mathbf{u}^e + (d\mathbf{S} + \mathbf{R}_c^T d\mathbf{R}_c \mathbf{S}) \mathbf{f}_d] \quad (4.41a)$$

$$d\mathbf{f}^e = \mathbf{I} [\mathbf{S} \mathbf{K}_d \mathbf{S}^T d\mathbf{u}^e + (d\mathbf{S} + \mathbf{R}_c^T d\mathbf{R}_c \mathbf{S}) \mathbf{f}_d] \quad (4.41b)$$

$$d\mathbf{f}^e = \mathbf{S} \mathbf{K}_d \mathbf{S}^T d\mathbf{u}^e + (d\mathbf{S} + \mathbf{R}_c^T d\mathbf{R}_c \mathbf{S}) \mathbf{f}_d \quad (4.41c)$$

Uma análise dos termos da Equação (4.41c) fornece a seguinte conclusão:

- $\mathbf{S}^T d\mathbf{u}^e \rightarrow$ A matriz \mathbf{S}^T reduz o vetor de deslocamentos locais incrementais de ordem 6x1, $d\mathbf{u}^e$, em um vetor de deslocamentos deformacionais incrementais, $d\mathbf{u}_d$, de ordem 3x1.
- $\mathbf{K}_d \mathbf{S}^T d\mathbf{u}^e \rightarrow$ Fornece o vetor de forças internas incrementais, $d\mathbf{f}_d$, de ordem 3x1.
- $\mathbf{S} \mathbf{K}_d \mathbf{S}^T d\mathbf{u}^e \rightarrow$ Expande o vetor de forças internas incrementais, $d\mathbf{f}_d$, de ordem 3x1, em um vetor de forças locais incrementais, $d\mathbf{f}_l^e$, de ordem 6x1.

$$d\mathbf{f}_1^e = \mathbf{S} \mathbf{K}_d \mathbf{S}^T d\mathbf{u}^e \quad (4.42)$$

- $d\mathbf{S} \mathbf{f}_d \rightarrow$ Expande o vetor de forças internas, \mathbf{f}_d , de ordem 3x1, em um vetor de forças locais incrementais, $d\mathbf{f}_2^e$, de ordem 6x1, considerando as relações incrementais provenientes da matriz de transformação \mathbf{S} , dada por (4.21b).

$$d\mathbf{f}_2^e = d\mathbf{S} \mathbf{f}_d \quad (4.43)$$

$$d\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/l^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/l^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dl \quad (4.44)$$

O incremento de comprimento no elemento de barra, proveniente da atuação do esforço interno normal, é dado por:

$$dl = du_2^e - du_1^e \quad (4.45)$$

Percebe-se então que, a consideração do incremento da matriz de transformação $d\mathbf{S}$, inclui a influência da variação do cisalhamento na análise do elemento de viga.

- $\mathbf{S} \mathbf{f}_d \rightarrow$ Expande o vetor de forças internas, \mathbf{f}_d , de ordem 3x1, em um vetor de forças locais, \mathbf{f}^e , de ordem 6x1.

- $d\mathbf{R}_c \mathbf{S} \mathbf{f}_d \rightarrow$ Fornece o vetor de forças globais incrementais, $d\mathbf{f}$, de ordem 6x1, considerando as relações incrementais provenientes da matriz de rotação \mathbf{R}_c , dada por (4.14).

$$d\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} -\text{sen } \varphi & -\text{cos } \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{cos } \varphi & -\text{sen } \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \varphi & -\text{cos } \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{cos } \varphi & -\text{sen } \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\varphi \quad (4.46)$$

Analisando (4.27), o incremento de rotação no elemento de barra é dado por:

$$\varphi = \theta_r - \varphi_0 \quad (4.47a)$$

$$d\varphi = \frac{dv_2^e - dv_1^e}{l} \quad (4.47b)$$

- $\mathbf{R}_c^T d\mathbf{R}_c \mathbf{S} \mathbf{f}_d \rightarrow$ Transforma o vetor de forças globais incrementais, $d\mathbf{f}$, de ordem 6×1 , em um vetor de forças locais incrementais, $d\mathbf{f}_3^e$, de ordem 6×1 .

$$d\mathbf{f}_3^e = \mathbf{R}_c^T d\mathbf{R}_c \mathbf{S} \mathbf{f}_d \quad (4.48)$$

Resumindo:

$$d\mathbf{f}^e = d\mathbf{f}_1^e + d\mathbf{f}_2^e + d\mathbf{f}_3^e \quad (4.49)$$

4.2.3 Matriz de rigidez tangente local

A Equação (4.41c) pode ser reescrita simplificadamente como mostra a Equação (4.50):

$$d\mathbf{f}^e = \mathbf{K}^e d\mathbf{u}^e \quad (4.50)$$

O termo \mathbf{K}^e corresponde à matriz de rigidez tangente local do elemento de viga, sendo determinada pela Equação (4.51):

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{S} \mathbf{K}_d \mathbf{S}^T + \mathbf{K}_r \quad (4.51)$$

Percebe-se pela Equação (4.51) que a matriz de rigidez tangente local é composta pela adição de duas parcelas de rigidez: a matriz de rigidez tangente relativa aos modos deformaçionais, \mathbf{K}_d , e a matriz de rigidez tangente geométrica, \mathbf{K}_r .

a) Matriz de rigidez tangente geométrica

A matriz de rigidez tangente geométrica, também denominada de matriz de rigidez co-rotacional, resulta da análise do segundo termo da Equação (4.41c), de forma que:

$$\mathbf{K}_r d\mathbf{u}^e = (d\mathbf{S} + \mathbf{R}_c^T d\mathbf{R}_c \mathbf{S}) \mathbf{f}_d \quad (4.52)$$

Substituindo (4.11), (4.14), (4.21b) e (4.46) em (4.52), tem-se que o segundo termo da Equação (4.52) resulta em:

$$\mathbf{R}_c^T d\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\varphi \quad (4.53a)$$

$$\mathbf{R}_c^T d\mathbf{R}_c \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2/l \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/l \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\varphi \quad (4.53b)$$

$$\mathbf{R}_c^T d\mathbf{R}_c \mathbf{S} \mathbf{f}_d = d\varphi \begin{Bmatrix} -Q \\ -N \\ 0 \\ Q \\ N \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.53c)$$

Utilizando (4.47), tem-se que:

$$(dv_2^e - dv_1^e) \begin{Bmatrix} -Q/l \\ -N/l \\ 0 \\ Q/l \\ N/l \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Q/l & 0 & 0 & -Q/l & 0 \\ 0 & N/l & 0 & 0 & -N/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Q/l & 0 & 0 & Q/l & 0 \\ 0 & -N/l & 0 & 0 & N/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du_1^e \\ dv_1^e \\ d\theta_1^e \\ du_2^e \\ dv_2^e \\ d\theta_2^e \end{Bmatrix} \quad (4.54)$$

Substituindo (4.44) em (4.52), tem-se que o primeiro termo da Equação (4.52) resulta em:

$$d\mathbf{S} \mathbf{f}_d = dl \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/l^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/l^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M_s \\ M_a \end{Bmatrix} = dl \begin{Bmatrix} 0 \\ -Q/l \\ 0 \\ 0 \\ Q/l \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.55)$$

Utilizando (4.45), tem-se que:

$$(du_2^e - du_1^e) \begin{Bmatrix} 0 \\ -Q/l \\ 0 \\ 0 \\ Q/l \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q/l & 0 & 0 & -Q/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Q/l & 0 & 0 & Q/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du_1^e \\ dv_1^e \\ d\theta_1^e \\ du_2^e \\ dv_2^e \\ d\theta_2^e \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

Logo:

$$\mathbf{K}_r d\mathbf{u}^e = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & Q & 0 & 0 & -Q & 0 \\ Q & N & 0 & -Q & -N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Q & 0 & 0 & Q & 0 \\ -Q & -N & 0 & Q & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du_1^e \\ dv_1^e \\ d\theta_1^e \\ du_2^e \\ dv_2^e \\ d\theta_2^e \end{Bmatrix} \quad (4.57)$$

Assim, a matriz de rigidez tangente geométrica é dada por:

$$\mathbf{K}_r = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & Q & 0 & 0 & -Q & 0 \\ Q & N & 0 & -Q & -N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Q & 0 & 0 & Q & 0 \\ -Q & -N & 0 & Q & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

O resultado da Equação (4.58) é convenientemente escrito em formato de matriz bloco, dado por:

$$\mathbf{K}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^r & \mathbf{K}_{12}^r \\ \mathbf{K}_{21}^r & \mathbf{K}_{22}^r \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Os coeficientes da matriz de rigidez tangente geométrica, \mathbf{K}_{ij}^r , são dados por:

$$\mathbf{K}_{11}^r = \mathbf{K}_{22}^r = -\mathbf{K}_{12}^r = -\mathbf{K}_{21}^r = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & Q & 0 \\ Q & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

A matriz de rigidez tangente geométrica representa o efeito combinado da co-rotação do eixo local com o fator de variação do esforço cortante, o qual é proveniente da adoção do modo de deformação por rotação nodal antissimétrica, devido à alteração do comprimento l do elemento de viga.

b) Matriz de rigidez tangente relativa aos modos deformacionais

A rigidez associada aos modos deformacionais do elemento de viga, dada por \mathbf{K}_d , divide-se em duas parcelas: uma rigidez correspondente à parcela constitutiva da rigidez local, sendo

denominada de matriz de rigidez tangente material, $\mathbf{K}_{d,mat}$, e uma parcela de rigidez geométrica adicional, denominada de matriz de rigidez tangente geométrica local, $\mathbf{K}_{d,geo}$.

b.1) Matriz de rigidez tangente material:

As propriedades constitutivas do elemento de viga estão contidas na matriz de rigidez tangente material, $\mathbf{K}_{d,mat}$, dadas pelos coeficientes matriciais da relação incremental entre as variáveis estáticas e cinemáticas dos modos deformacionais, conforme expresso por (4.61).

$$\begin{pmatrix} dN \\ dM_s \\ dM_a \end{pmatrix} = [\mathbf{K}_{d,mat}] \begin{pmatrix} du \\ d\theta_s \\ d\theta_a \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

No presente trabalho, o elemento de viga é considerado homogêneo e elástico, o que simplifica o procedimento de cálculo da matriz $\mathbf{K}_{d,mat}$, pois as rigidezes provenientes das análises de cada modo deformacional podem ser consideradas separadamente, tornando a matriz $\mathbf{K}_{d,mat}$ uma matriz diagonal.

- Deformação axial:

O primeiro modo deformacional a ser analisado é a deformação axial. Para um elemento de viga homogêneo e elástico sujeito a esforço interno axial, a tensão normal atuante, σ_N , é dada por:

$$\sigma_N = \frac{N}{A} \quad (4.62)$$

A deformação normal relacionada, ε_N , é dada por:

$$\varepsilon_N = \frac{u}{l} \quad (4.63)$$

Pela lei de Hooke, tem-se que:

$$\sigma_N = E \varepsilon_N \quad (4.64)$$

Substituindo (4.62) e (4.63) em (4.64), tem-se que:

$$N = \frac{EA}{l} u \quad (4.65)$$

Considerando os parâmetros E , A e l como constantes, a relação diferencial para (4.65) torna-se:

$$dN = \frac{EA}{l} du \quad (4.66)$$

O coeficiente EA / l é denominado de rigidez axial do elemento e corresponde ao primeiro coeficiente da matriz diagonal $\mathbf{K}_{d,mat}$.

- Deformação por rotação nodal simétrica:

O modo de deformação correspondente à rotação nodal simétrica é dado devido à aplicação do par de momentos M_s nos nós extremos do elemento, considerando a convenção de rotação no sentido horário para o nó 1, e sentido anti-horário para o nó 2, conforme ilustrado pela Figura 4.12.

A rigidez devido à deformação proveniente da rotação nodal simétrica segue da avaliação do princípio dos trabalhos virtuais complementares que, para um elemento de viga homogêneo e elástico, é expresso conforme a Equação (4.67).

$$M_s \theta_s = \int_0^l \frac{M(x)^2}{EI} dx \quad (4.67)$$

Substituindo (4.9b) em (4.67), tem-se que:

$$M_s = \frac{EI}{l} \theta_s \quad (4.68)$$

Considerando os parâmetros E , I e l como constantes, a relação diferencial para (4.68) torna-se:

$$dM_s = \frac{EI}{l} d\theta_s \quad (4.69)$$

O coeficiente EI / l é denominado de rigidez à flexão devido à rotação nodal simétrica do elemento e corresponde ao segundo coeficiente da matriz diagonal $\mathbf{K}_{d,mat}$.

- Deformação por rotação nodal antissimétrica:

O modo de deformação correspondente à rotação nodal antissimétrica é dado devido à aplicação do par de momentos M_a nos nós extremos do elemento, considerando a convenção de rotação no sentido anti-horário para os nós 1 e 2, conforme ilustrado pela Figura 4.16.

A rigidez devido à deformação proveniente da rotação nodal antissimétrica segue da avaliação do princípio dos trabalhos virtuais complementares que, para um elemento de viga homogêneo e elástico, é expresso conforme a Equação (4.70).

$$M_a \theta_a = \int_0^l \left[\frac{M(x)^2}{EI} + \frac{Q(x)^2}{GA_0} \right] dx \quad (4.70)$$

Substituindo (4.12b) em (4.70), a integral relativa ao momento fletor, resulta em:

$$\int_0^l \frac{M(x)^2}{EI} dx = \frac{M_a^2 l}{3EI} \quad (4.71)$$

Substituindo (4.12a) em (4.70), a integral relativa ao esforço cortante, resulta em:

$$\int_0^l \frac{Q(x)^2}{GA_0} dx = \frac{4M_a^2 l}{GA_0 l^2} \quad (4.72)$$

Realizando a substituição de (4.71) e (4.72) em (4.70), tem-se que:

$$M_a \theta_a = l \left(\frac{1}{3} \frac{M_a^2}{EI} + \frac{4M_a^2}{GA_0 l^2} \right) \quad (4.73)$$

Após algebrismos simples, conclui-se que:

$$M_a = 3\psi_a \frac{EI}{l} \theta_a \quad (4.74)$$

Sendo:

$$\psi_a = \frac{1}{1 + \Phi} \quad (4.75a)$$

$$\Phi = \frac{12EI}{GA_0 l^2} \quad (4.75b)$$

O termo Φ corresponde ao parâmetro que considera o efeito da deformação cisalhante na flexão de elementos de vigas, já enunciado por (3.41)

Considerando os parâmetros E , I , G , A e l como constantes, a relação diferencial para (4.74) torna-se:

$$dM_a = 3\psi_a \frac{EI}{l} d\theta_a \quad (4.76)$$

O coeficiente $3\psi_a EI / l$ é denominado de rigidez à flexão devido à rotação nodal antissimétrica do elemento e corresponde ao terceiro coeficiente da matriz diagonal $\mathbf{K}_{d,mat}$.

Após o cálculo de todas as rigidezes correspondentes aos modos deformacionais, a matriz de rigidez tangente material é, então, dada por:

$$\mathbf{K}_{d,mat} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & 3\psi_a EI \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

b.2) Matriz de rigidez tangente geométrica local

O elemento de viga na configuração deformacional está sujeito à ocorrência de esforço normal e momento fletor, provenientes da adoção dos modos naturais de deformação. Sendo assim, o elemento se comporta localmente como uma viga-coluna, contribuindo com uma parcela adicional de rigidez geométrica devido à presença do esforço normal.

Considerando o elemento linear-elástico, a equação diferencial que rege o comportamento de uma viga-coluna é dada por:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - N \frac{d^2 w}{dx^2} - p = 0 \quad (4.78)$$

Como não há carregamento transversal distribuído atuando no elemento na configuração deformacional, a Equação (4.78) torna-se:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - N \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (4.79)$$

O trabalho virtual interno, δV , é obtido pelo produto da parcela de deslocamento virtual, δw , na relação de equilíbrio estático dada por (4.79), sendo:

$$\delta V = \int_0^l \delta w \left(EI \frac{d^4 w}{dx^4} - N \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx = 0 \quad (4.80)$$

Realizando a integração por partes do primeiro termo do integrando da Equação (4.80), tem-se que:

$$\int_0^l \delta w EI \frac{d^4 w}{dx^4} dx = \left[\delta w EI \frac{d^3 w}{dx^3} \right]_0^l - \int_0^l \frac{d\delta w}{dx} EI \frac{d^3 w}{dx^3} dx \quad (4.81)$$

Realizando a integração por partes do segundo termo do integrando da Equação (4.80), tem-se que:

$$\int_0^l \delta w N \frac{d^2 w}{dx^2} dx = \left[\delta w N \frac{dw}{dx} \right]_0^l - \int_0^l \frac{d\delta w}{dx} N \frac{dw}{dx} dx \quad (4.82)$$

Substituindo (4.81) e (4.82) em (4.80), o trabalho virtual interno resulta em:

$$\begin{aligned} \delta V &= \left[\delta w \left(EI \frac{d^3 w}{dx^3} - N \frac{dw}{dx} \right) \right]_0^l - \int_0^l \frac{d\delta w}{dx} EI \frac{d^3 w}{dx^3} dx + \int_0^l \frac{d\delta w}{dx} N \frac{dw}{dx} dx \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.83)$$

Realizando a integração por partes do primeiro integrando da Equação (4.83), tem-se que:

$$\int_0^l \frac{d\delta w}{dx} EI \frac{d^3 w}{dx^3} dx = \left[\frac{d\delta w}{dx} EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_0^l - \int_0^l \frac{d^2 \delta w}{dx^2} EI \frac{d^2 w}{dx^2} dx \quad (4.84)$$

Substituindo (4.84) em (4.83), tem-se que:

$$\begin{aligned} \delta V &= \left[\delta w \left(EI \frac{d^3 w}{dx^3} - N \frac{dw}{dx} \right) - \frac{d\delta w}{dx} EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_0^l \\ &\quad + \int_0^l \left(\frac{d^2 \delta w}{dx^2} EI \frac{d^2 w}{dx^2} dx + \frac{d\delta w}{dx} N \frac{dw}{dx} dx \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.85)$$

Sabe-se que, para o elemento de viga-coluna, as seguintes relações diferenciais são válidas:

$$-EI \frac{d^3 w}{dx^3} + N \frac{dw}{dx} = Q \quad (4.86a)$$

$$-EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M \quad (4.86b)$$

$$-\frac{d\delta w}{dx} = \delta\theta \quad (4.86c)$$

Substituindo (4.86a), (4.86b) e (4.86c) em (4.85), tem-se que:

$$\delta V = [-\delta w Q - \delta\theta M]_0^l + \int_0^l \left(\frac{d^2 \delta w}{dx^2} EI \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d\delta w}{dx} N \frac{dw}{dx} \right) dx = 0 \quad (4.87a)$$

$$\int_0^l \left(\frac{d^2 \delta w}{dx^2} EI \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d\delta w}{dx} N \frac{dw}{dx} \right) dx = [\delta w Q + \delta\theta M]_0^l \quad (4.87b)$$

A rigidez geométrica local é obtida a partir da análise do incremento do trabalho virtual interno, dado por:

$$d \left[\int_0^l \left(\frac{d^2 \delta w}{dx^2} EI \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d\delta w}{dx} N \frac{dw}{dx} \right) dx \right] = d \left[(\delta w Q + \delta\theta M) \right]_0^l \quad (4.88)$$

A relação incremental do lado esquerdo da Equação (4.88) resulta em:

$$\int_0^l \left[d \left(\frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right) EI \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 \delta w}{dx^2} EI d \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) + d \left(\frac{d\delta w}{dx} \right) N \frac{dw}{dx} + \frac{d\delta w}{dx} N d \left(\frac{dw}{dx} \right) \right] dx \quad (4.89)$$

A relação incremental do lado direito da Equação (4.88) resulta em:

$$[d(\delta\theta)M + \delta\theta d(M) + d(\delta w)Q + \delta w d(Q)]_0^l \quad (4.90)$$

Na ausência de rotações espaciais, pode-se considerar que:

$$d(\delta w) = d \left(\frac{d\delta w}{dx} \right) = d \left(\frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right) = 0 \quad (4.91)$$

Considerando (4.91), a relação incremental do trabalho virtual dado por (4.88), resulta em:

$$\int_0^l \left[\frac{d^2 \delta w}{dx^2} EI d \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{d \delta w}{dx} N d \left(\frac{dw}{dx} \right) \right] dx = [\delta \theta d(M) + \delta w d(Q)]_0^l \quad (4.92)$$

A Equação (4.92) considera a equação da elástica do elemento de viga na configuração deformacional, no qual se divide entre o modo natural de deformação por rotação nodal simétrica e no modo natural de deformação por rotação nodal antissimétrica. Para sua resolução, é conveniente substituir a coordenada x por uma coordenada adimensional ξ , dada por:

$$x = \frac{l}{2}(1 + \xi) \quad , \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (4.93)$$

- Deformação por rotação nodal simétrica:

Considera-se um elemento de viga biapoado de comprimento l , sujeito à aplicação de momento M_s atuando no sentido horário no nó 1 e no sentido anti-horário no nó 2. As equações para a rotação da seção transversal e para a linha elástica são:

$$\theta(x) = \frac{M_s}{EI} \left(x - \frac{l}{2} \right) \quad (4.94a)$$

$$w(x) = \frac{M_s}{2EI} (x^2 - lx) \quad (4.94b)$$

Conclui-se que:

$$\theta_2 = -\theta_1 = \frac{M_s l}{2EI} \quad (4.95)$$

Para a configuração deformacional por rotação simétrica, ilustrada pela Figura 4.10, tem-se que:

$$\frac{1}{2} \theta_s = \theta_1 = \frac{Ml}{2EI} \quad (4.96)$$

Substituindo (4.93) e (4.96) em (4.94b), resulta em:

$$w = -\frac{l}{8}(1 - \xi^2)\theta_s \quad (4.97)$$

As relações diferenciais para a equação da linha elástica devido à rotação simétrica são dadas por:

$$dw = -\frac{l}{8}(1 - \xi^2)d\theta_s \quad (4.98a)$$

$$\frac{d(dw)}{dx} = \frac{d(dw)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{4}\xi d\theta_s \frac{2}{l} = \frac{1}{2}\xi d\theta_s \quad (4.98b)$$

As relações diferenciais para o deslocamento transversal virtual, δw , são dadas por:

$$\delta w = -\frac{l}{8}(1 - \xi^2)\delta\theta_s \quad (4.99a)$$

$$\frac{d(\delta w)}{dx} = \frac{d(\delta w)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{4}\xi\delta\theta_s \frac{2}{l} = \frac{1}{2}\xi\delta\theta_s \quad (4.99b)$$

A rigidez geométrica local relativa ao modo de deformação por rotação nodal simétrica segue da substituição de (4.98b) e (4.99b) em (4.92):

$$\int_0^l \frac{d\delta w}{dx} N d\left(\frac{dw}{dx}\right) dx = [\delta\theta_s dM_s]_0^l \quad (4.100a)$$

$$\delta\theta_s \left(\frac{l}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}\xi\right) N \left(\frac{1}{2}\xi\right) d\theta_s d\xi \right) = \delta\theta_s dM_s \quad (4.100b)$$

$$dM_s = \frac{1}{12} Nl d\theta_s \quad (4.100c)$$

A partir de (4.100c), conclui-se que a rigidez geométrica relativa ao modo de deformação por rotação nodal simétrica, k_s , é dada por:

$$k_s = \frac{1}{12} Nl \quad (4.101)$$

- Deformação por rotação nodal antissimétrica:

Considera-se um elemento de viga biapoiado de comprimento l , sujeito à aplicação de momento M_a atuando no sentido anti-horário no nó 1 e no sentido anti-horário no nó 2. As equações para a rotação da seção transversal e para a linha elástica são:

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_a}{l} x^2 - M_a x \right) + \frac{M_a l}{6EI} \quad (4.102a)$$

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_a}{3l} x^3 - \frac{M_a}{2} x^2 \right) + \frac{M_a l}{6EI} x \quad (4.102b)$$

Conclui-se que:

$$\theta_2 = \theta_1 = \frac{M_a l}{6EI} \quad (4.103)$$

Para a configuração deformacional por rotação antissimétrica, ilustrada pela Figura 4.14, tem-se que:

$$\frac{1}{2} \theta_a = \theta_1 = \frac{M_a l}{6EI} \quad (4.104)$$

Substituindo (4.93) e (4.104) em (4.102b), resulta em:

$$w = -\frac{l}{8} (1 - \xi^2) \xi \theta_a \quad (4.105)$$

As relações diferenciais para a equação da linha elástica devido à rotação simétrica são dadas por:

$$dw = -\frac{l}{8} (1 - \xi^2) \xi d\theta_a \quad (4.106a)$$

$$\frac{d(\delta w)}{dx} = \frac{d(\delta w)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{4} (1 - 3\xi^2) d\theta_a \quad (4.106b)$$

As relações diferenciais para o deslocamento transversal virtual, δw , são dadas por:

$$\delta w = -\frac{l}{8} (1 - \xi^2) \xi \delta\theta_a \quad (4.107a)$$

$$\frac{d(\delta w)}{dx} = \frac{d(\delta w)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{4}(1 - 3\xi^2)\delta\theta_a \quad (4.107b)$$

A rigidez geométrica local relativa ao modo de deformação por rotação nodal simétrica segue da substituição de (4.106b) e (4.107b) em (4.92):

$$\int_0^l \frac{d\delta w}{dx} N d\left(\frac{dw}{dx}\right) dx = [\delta\theta_a dM_a]_0^l \quad (4.108a)$$

$$\delta\theta_a \left(\frac{l}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(1 - 3\xi^2) N \frac{1}{4}(1 - 3\xi^2) d\theta_a d\xi \right) = \delta\theta_a dM_a \quad (4.108b)$$

$$dM_a = \frac{1}{20} Nl d\theta_a \quad (4.108c)$$

A partir de (4.108c), conclui-se que a rigidez geométrica relativa ao modo de deformação por rotação nodal antissimétrica, k_a , é dada por:

$$k_a = \frac{1}{20} Nl \quad (4.109)$$

Após o cálculo de todas as rigidezes correspondentes aos modos deformacionais, a matriz de rigidez tangente geométrica local é, então, dada por:

$$\mathbf{K}_{d,geo} = l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}N & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20}N \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

c) Matriz de rigidez tangente local total

Substituindo (4.77) e (4.110) em (4.51), a matriz de rigidez tangente local é dada por:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{S}(\mathbf{K}_{d,mat} + \mathbf{K}_{d,geo})\mathbf{S}^T + \mathbf{K}_r \quad (4.111)$$

Esta relação básica é facilmente programável, tendo em vista que depende apenas da matriz de rigidez relativa aos modos deformacionais \mathbf{K}_d , da matriz de rigidez geométrica

\mathbf{K}_r e da matriz de transformação \mathbf{S} . Como a matriz de rigidez geométrica foi expressa em forma de bloco segundo a Equação (4.59), o cálculo da matriz de rigidez tangente local resulta em uma matriz em formato de bloco, sendo expressa por:

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^e & \mathbf{K}_{12}^e \\ \mathbf{K}_{21}^e & \mathbf{K}_{22}^e \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

Assim, as sub-matrizes elementares locais, \mathbf{K}_{ij}^e , podem ser calculadas segundo a Equação (4.113):

$$\mathbf{K}_{ij}^e = (\mathbf{S}_i \mathbf{K}_{d,mat} \mathbf{S}_j^T)_{material} + (\mathbf{S}_i \mathbf{K}_{d,geo} \mathbf{S}_j^T + \mathbf{K}_{ij}^r)_{geométrica} \quad (4.113)$$

As parcelas da rigidez local referentes à rigidez tangente material são dadas por:

$$\mathbf{K}_{ij_{mat}}^e = \mathbf{S}_i \mathbf{K}_{d,mat} \mathbf{S}_j^T \quad (4.114)$$

Para $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$, tem-se que:

$$\mathbf{K}_{11_{mat}}^e = \mathbf{S}_1 \mathbf{K}_{d,mat} \mathbf{S}_1^T \quad (4.115a)$$

$$\mathbf{K}_{12_{mat}}^e = \mathbf{S}_1 \mathbf{K}_{d,mat} \mathbf{S}_2^T \quad (4.115b)$$

$$\mathbf{K}_{21_{mat}}^e = \mathbf{S}_2 \mathbf{K}_{d,mat} \mathbf{S}_1^T \quad (4.115c)$$

$$\mathbf{K}_{22_{mat}}^e = \mathbf{S}_2 \mathbf{K}_{d,mat} \mathbf{S}_2^T \quad (4.115d)$$

Substituindo as relações dadas por (4.21) nas Equações (4.115), tem-se que:

$$\mathbf{K}_{11_{mat}}^e = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} EA l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12\psi_a EI & 6\psi_a EIl \\ 0 & 6\psi_a EIl & (3\psi_a + 1)EIl^2 \end{bmatrix} \quad (4.116a)$$

$$\mathbf{K}_{22_{mat}}^e = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} EA l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12\psi_a EI & -6\psi_a EIl \\ 0 & -6\psi_a EIl & (3\psi_a + 1)EIl^2 \end{bmatrix} \quad (4.116b)$$

$$\mathbf{K}_{12mat}^e = \mathbf{K}_{21mat}^e{}^T = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} -EAl^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12\psi_a EI & 6\psi_a EIl \\ 0 & -6\psi_a EIl & (3\psi_a - 1)EIl^2 \end{bmatrix} \quad (4.116c)$$

As parcelas da rigidez local referentes à rigidez tangente geométrica são dadas por:

$$\mathbf{K}_{ijgeo}^e = \mathbf{S}_i \mathbf{K}_{d,geo} \mathbf{S}_j^T + \mathbf{K}_{ij}^r \quad (4.117)$$

Para $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$, tem-se que:

$$\mathbf{K}_{11geo}^e = \mathbf{S}_1 \mathbf{K}_{d,geo} \mathbf{S}_1^T + \mathbf{K}_{11}^r \quad (4.118a)$$

$$\mathbf{K}_{12geo}^e = \mathbf{S}_1 \mathbf{K}_{d,geo} \mathbf{S}_2^T + \mathbf{K}_{12}^r \quad (4.118b)$$

$$\mathbf{K}_{21geo}^e = \mathbf{S}_2 \mathbf{K}_{d,geo} \mathbf{S}_1^T + \mathbf{K}_{21}^r \quad (4.118c)$$

$$\mathbf{K}_{22geo}^e = \mathbf{S}_2 \mathbf{K}_{d,geo} \mathbf{S}_2^T + \mathbf{K}_{22}^r \quad (4.118d)$$

Substituindo as relações dadas por (4.21) nas Equações (4.118), tem-se que:

$$\mathbf{K}_{11geo}^e = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & Q & 0 \\ Q & \frac{6}{5}N & \frac{1}{10}Nl \\ 0 & \frac{1}{10}Nl & \frac{2}{15}Nl^2 \end{bmatrix} \quad (4.119a)$$

$$\mathbf{K}_{22geo}^e = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & Q & 0 \\ Q & \frac{6}{5}N & -\frac{1}{10}Nl \\ 0 & -\frac{1}{10}Nl & \frac{2}{15}Nl^2 \end{bmatrix} \quad (4.119b)$$

$$\mathbf{K}_{12geo}^e = \mathbf{K}_{21geo}^e{}^T = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & -Q & 0 \\ -Q & -\frac{6}{5}N & \frac{1}{10}Nl \\ 0 & -\frac{1}{10}Nl & -\frac{1}{30}Nl^2 \end{bmatrix} \quad (4.119c)$$

4.2.4 Matriz de rigidez tangente global

Para finalizar o procedimento de análise por meio da formulação co-rotacional, há a necessidade de expressar as variáveis locais segundo o eixo de referência global. Para realizar essa conversão, multiplica-se a Equação (4.50) pela matriz de rotação dada por (4.14).

$$\mathbf{R}_c d\mathbf{f}^e = \mathbf{R}_c \mathbf{K}^e d\mathbf{u}^e \quad (4.120a)$$

$$d\mathbf{f} = \mathbf{R}_c \mathbf{K}^e d\mathbf{u}^e \quad (4.120b)$$

Substituindo (4.32) em (4.120b), o vetor de forças globais incrementais pode ser reescrito como:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{R}_c \mathbf{K}^e \mathbf{R}_c^T d\mathbf{u} \quad (4.121)$$

A Equação (4.121) corresponde à relação geral entre as variáveis estáticas e cinemáticas expressas segundo o eixo global. A partir dela, conclui-se que a matriz de rigidez tangente global é dada por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}_c \mathbf{K}^e \mathbf{R}_c^T \quad (4.122)$$

Conforme (4.122), a matriz de rigidez tangente local, \mathbf{K}^e , apresenta formato de bloco, e a relação da Equação (4.122) pode ser reescrita conforme (4.123):

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{R} \mathbf{K}_{ij}^e \mathbf{R}^T \quad (4.123)$$

Os elementos das sub-matrizes são dados abaixo:

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.124)$$

Os sub-índices i e j variam conforme o intervalo $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$, e adotando (4.13) para a matriz de rotação, conclui-se que:

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{R} \mathbf{K}_{11}^e \mathbf{R}^T \quad (4.125a)$$

$$\mathbf{K}_{12} = \mathbf{R} \mathbf{K}_{12}^e \mathbf{R}^T \quad (4.125b)$$

$$\theta_a = \frac{\text{mod}}{2\pi} (\theta_a + \pi) - \pi \quad (4.128)$$

Os componentes do vetor de forças internas, \mathbf{f}_d , correspondem ao esforço normal N , ao momento simétrico M_s e ao momento antissimétrico M_a . Pela teoria linear apresentada, os esforços internos são determinados pelas relações carga-deslocamento dadas pelas Equações (4.65), (4.68) e (4.74), respectivamente, aqui agrupadas:

$$N = \frac{EA}{l} u, \quad M_s = \frac{EI}{l} \theta_s, \quad M_a = 3\psi_a \frac{EI}{l} \theta_a \quad (4.129)$$

A partir da obtenção dos esforços internos, os componentes do vetor de forças locais, \mathbf{f}^e , são determinados pela Equação (4.22), e a matriz de rigidez tangente local é determinada pela Equação (4.111).

O passo final corresponde a transformar os parâmetros obtidos do eixo local para o eixo global. Sendo assim, os componentes do vetor de forças globais, \mathbf{f} , são determinados pela Equação (4.15) e a matriz de rigidez tangente global dada pela Equação (4.123).

O Quadro 4.1 abaixo ilustra o algoritmo utilizado para a formulação co-rotacional de elementos de viga unificados.

Quadro 4.1: Algoritmo para elementos de viga planos co-rotacionais unificados.

1) Ângulo de rotação total:

$$\varphi = 2 \arctan\left(\frac{l - x_{21}}{y_{21}}\right)$$

2) Vetor de deslocamentos deformacionais, \mathbf{u}_d :

$$u = l - l_0$$

$$\theta_s = \theta_2 - \theta_1$$

$$\theta_a = \theta_2 + \theta_1 - 2(\varphi - \varphi_0)$$

$$\theta_a = \frac{\text{mod}}{2\pi} (\theta_a + \pi) - \pi$$

3) Vetor de forças internas, \mathbf{f}_d :

$$\mathbf{f}_d = \mathbf{K}_d \mathbf{u}_d$$

4) Vetor de forças globais, \mathbf{f} :

$$\mathbf{f} = \mathbf{R}_c \mathbf{S} \mathbf{f}_d$$

5) Matriz de rigidez tangente global:

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{R} \mathbf{K}_{ij}^e \mathbf{R}^T$$

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Para realizar as simulações numéricas com a formulação desenvolvida no Capítulo 4, utilizou-se o programa de elementos finitos denominado *co_rotating_2Dbeam.f90*, em linguagem *Fortran*, gentilmente cedido pelo professor William Taylor Matias Silva, desenvolvido pelo grupo de estudos em Análise Não Linear de Estruturas do Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) da Universidade de Brasília (UnB), sob a orientação do mesmo. Seis estruturas são escolhidas para compor os exemplos numéricos, sendo: viga em balanço com carga momento concentrado na extremidade livre, viga em balanço com carga força concentrada na extremidade livre, pórtico de Lee, pórtico Toggle, arco circular de grande altura e pórtico diamante birrotulado.

O objetivo das análises corresponde em verificar a eficiência da formulação proposta através da obtenção da trajetória de equilíbrio nas direções dos graus de liberdade e no conhecimento da configuração deformada da estrutura. A análise da trajetória de equilíbrio apresentada por cada modelo permite o conhecimento da resposta estrutural quanto à estabilidade do equilíbrio a partir da obtenção de pontos críticos, definidos pelos critérios do parâmetro de rigidez *CST* (*current stiffenss parameter*), estabelecido por Bergan (1980), e pelo número de pivôs negativos da matriz de rigidez tangente, o qual determinam a presença de pontos limites e/ou *turning points*. Utiliza-se o método de Newton-Raphson completo e o método de comprimento de arco para a resolução dos sistemas de equações não lineares provenientes da relação entre o vetor de forças globais e o vetor de deslocamentos globais. Investiga-se, também, o efeito do número de elementos adotados na discretização de algumas das estruturas estudadas.

As estruturas escolhidas são exemplos clássicos da literatura, ou seja, suas respostas numéricas e/ou experimentais são muito conhecidas, o qual permitem a aferição dos resultados e a validação da implementação computacional desenvolvida.

O referido programa realiza análises não lineares geométrica utilizando a descrição cinemática co-rotacional, onde são implementados os elementos finitos de viga unificados desenvolvidos por Krenk (2009).

5.1 VIGAS PLANAS

5.1.1 Viga em balanço com carga momento concentrado na extremidade livre

A estrutura representada pela Figura 5.1 corresponde a uma viga em balanço sujeita à flexão pura através da aplicação de uma carga momento positivo (sentido anti-horário) concentrado na sua extremidade livre. As características mecânicas e geométricas do elemento analisado encontram-se também ilustradas pela Figura 5.1.

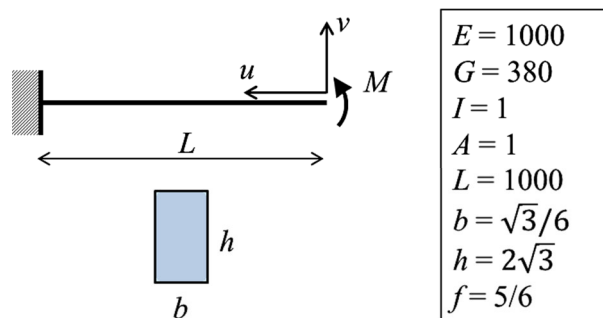


Figura 5.1: Viga em balanço com carga momento concentrado na extremidade livre.

Este modelo estrutural tem sido amplamente utilizado em diversas pesquisas para demonstrar a capacidade do elemento de viga formulado em resistir a grandes rotações. Pesquisadores como Simo (1986), Crivelli (1991), Faria (1998), Menin (2006) e Krenk (2009), utilizaram esta tipologia estrutural para estudos diversos no ramo de análise não linear de estruturas.

A viga em questão é analisada considerando três modos de discretização da estrutura total, compreendendo análises com 10, 20 e 40 elementos de viga unificados de mesmo comprimento, com a carga momento aplicada na extremidade livre em todas as situações. A Tabela 5.1 agrupa as informações relativas a cada discretização realizada para o referido modelo.

Tabela 5.1: Processo de discretização e análise da viga em balanço com carga momento concentrado na extremidade livre.

Número de Elementos	Nó de Referência	Passos de Carga	Número Máximo de Iterações	Tolerância	Comprimento de Arco	Média de Iterações
10	11	80	10	10^{-5}	0,628	5,5
20	21	80	10	10^{-5}	0,628	5,1
40	41	80	10	10^{-5}	0,628	6,0

As Figuras 5.2 e 5.3 apresentam as trajetórias de equilíbrio não linear para os deslocamentos vertical e horizontal do nó na extremidade livre (nó de referência para cada processo de discretização distinto) em função do fator de carga adimensional $ML/2\pi EI$. Observa-se que a estrutura apresenta elevada capacidade de realizar grandes deslocamentos e rotações, o que caracteriza a análise não linear geométrica proposta.

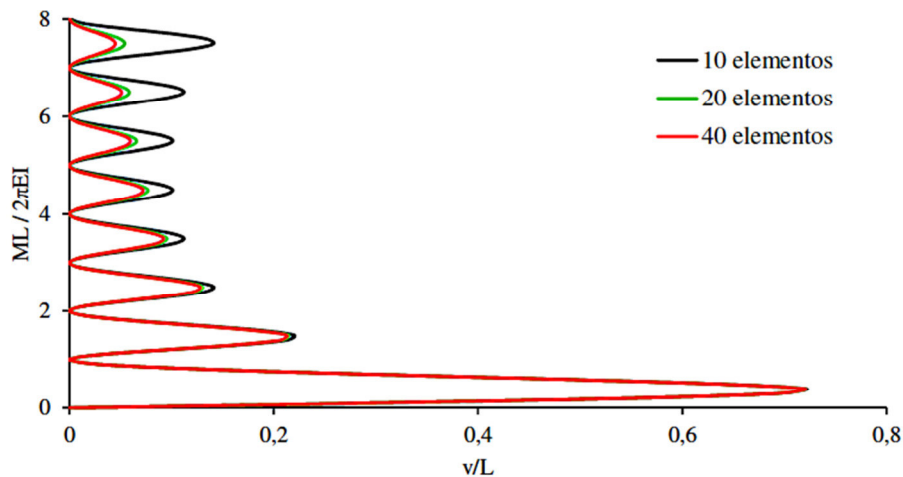


Figura 5.2: Trajetórias de equilíbrio para deslocamento vertical da viga em balanço com carga momento concentrado para cada processo de discretização.

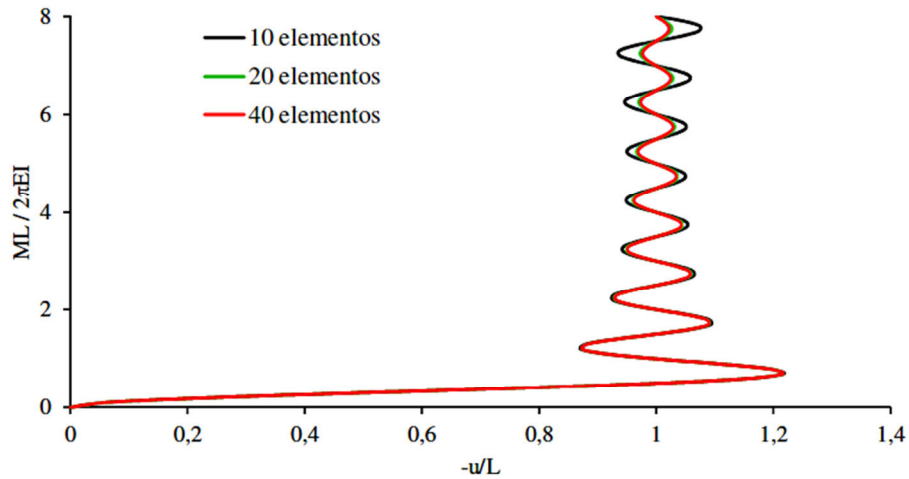


Figura 5.3: Trajetórias de equilíbrio para deslocamento horizontal da viga em balanço com carga momento concentrado para cada processo de discretização.

A análise da curva carga x deslocamento indica uma tendência não linear para as trajetórias de equilíbrio, representando a resposta de uma estrutura em equilíbrio estável. Percebe-se que o aumento do número de elementos no processo de discretização resulta em uma melhor aproximação do comportamento da estrutura real em relação à análise numérica, obtendo uma boa precisão de resultados a partir da discretização do sistema em 40 elementos finitos de viga unificados.

A matriz de rigidez tangente não apresenta singularidades ao longo da curva de equilíbrio, o que é evidenciado pelo cálculo do parâmetro *CST*. A Figura 5.4 ilustra a relação entre o parâmetro de rigidez *CST* e o fator de carga adimensional para o modelo analisado, referente à discretização em 40 elementos de viga unificados.

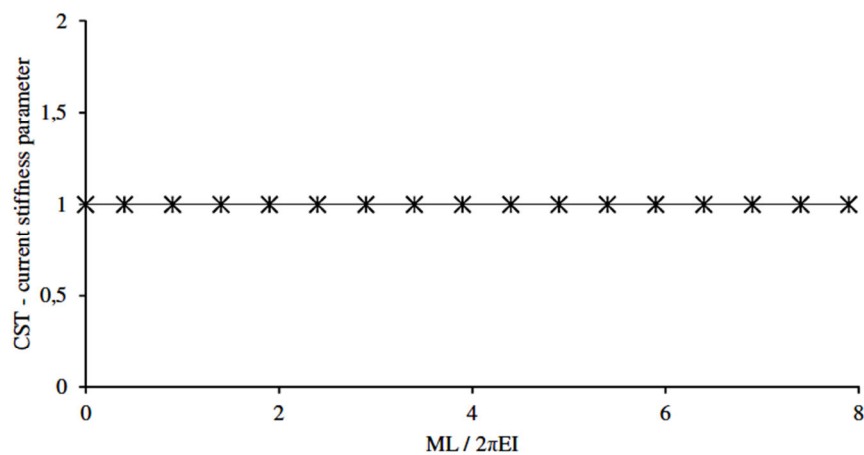


Figura 5.4: *CST* x Fator de Carga para a viga em balanço com carga momento concentrado na extremidade livre.

Conclui-se que a estrutura apresenta uma rigidez constante à medida que o fator de carga aumenta. Como o parâmetro CST não apresenta valores nulos para o modelo em questão, não existem trechos de instabilidade caracterizados por pontos com tangente horizontal nula na curva carga x deslocamento ilustrada pela Figura 5.2.

De modo a facilitar o entendimento da trajetória de equilíbrio e obter uma melhor visualização do comportamento da estrutura, a Figura 5.5 apresenta as configurações deformadas do sistema discretizado em 20 elementos de viga unificados, para os 10 primeiros incrementos de carga, no qual o modelo realiza 1 volta completa. Verifica-se que a viga está sujeita a grandes deslocamentos e rotações, o que caracteriza a não linearidade geométrica da formulação.

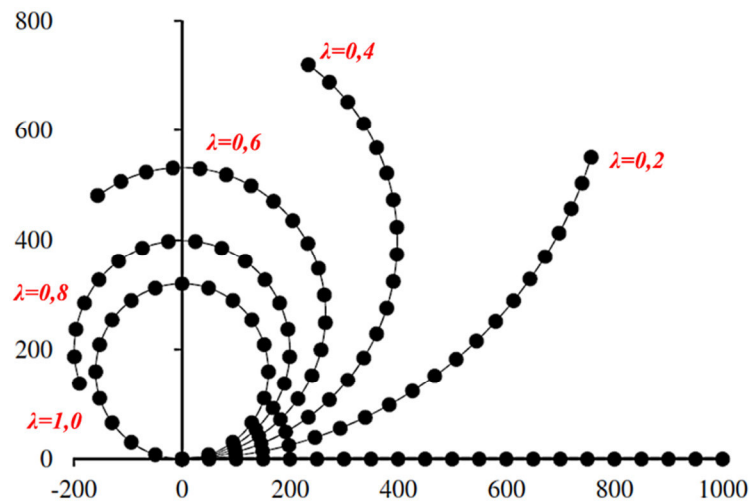


Figura 5.5: Configurações deformadas para a viga em balanço com carga momento concentrado na extremidade livre.

Analiticamente, a viga descreve uma trajetória circular de curvatura $k = 1/R = M/EI$. Assim, quando $M = 2\pi EI/L$, os nós inicial e final do sistema discretizado se encontram. A partir da Figura 5.5, observa-se que, para $\lambda = 1,0$, os nós 1 e 21 se encontram, e a viga se torna um círculo de diâmetro $d = L/\pi = 318,31$ unidades de comprimento. Para fatores de carga $\lambda \geq 1,0$, o elemento continuará a descrever deformadas de círculos completos devido à implementação da função módulo na formulação do elemento de viga dada pela Equação (4.128), o qual permite rotações superiores a 2π . A Figura 5.6 ilustra a configuração deformada para o sistema discretizado em 40 elementos de viga, composta por 8 ciclos completos.

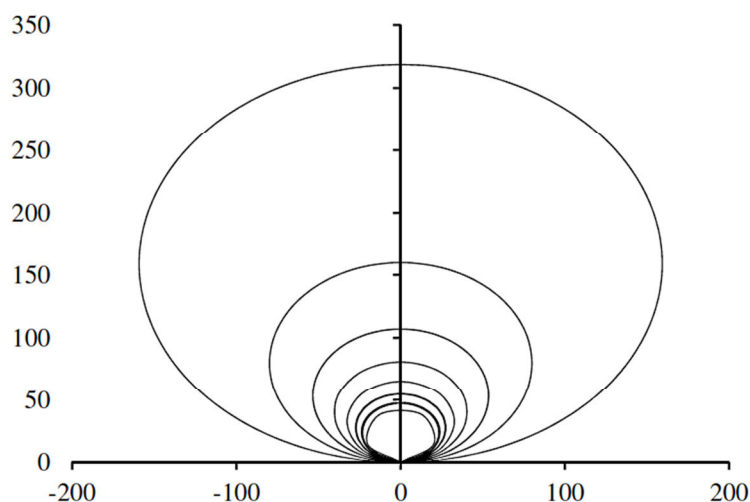


Figura 5.6: Configurações deformadas para a viga em balanço com carga momento concentrado na extremidade livre, discretizado em 40 elementos de viga – 8 voltas compeltas.

A Tabela 5.2 apresenta os valores dos deslocamentos vertical e horizontal apresentados pelo modelo para quatro fatores de carga, em comparação com os valores obtidos pela solução analítica.

Tabela 5.2 Comparativo de resultados analítico x numérico para a viga em balanço com carga momento concentrado na extremidade livre.

λ	u (unidades de comprimento)		v (unidades de comprimento)	
	Atual	Analítico	Atual	Analítico
0,25	-369,25	-363,36	622,19	636,64
0,50	-1000,00	-1000,00	636,78	636,64
0,75	-1202,85	-1212,21	217,70	212,21
1,00	-1000,00	-1000,00	0,00	0,00

A equivalência entre os resultados obtidos pela presente formulação e os apresentados pela solução analítica evidencia a eficiência da formulação para o elemento de viga unificado e a estratégia de solução não linear empregada, bem como a ausência do fenômeno de travamento por cisalhamento.

5.1.2 Viga em balanço com carga força concentrada na extremidade livre

A estrutura representada pela Figura 5.7 corresponde a uma viga em balanço de comprimento L solicitada por uma carga força concentrada aplicada na extremidade livre. As características mecânicas e geométricas do elemento analisado encontram-se também ilustradas pela Figura 5.7.

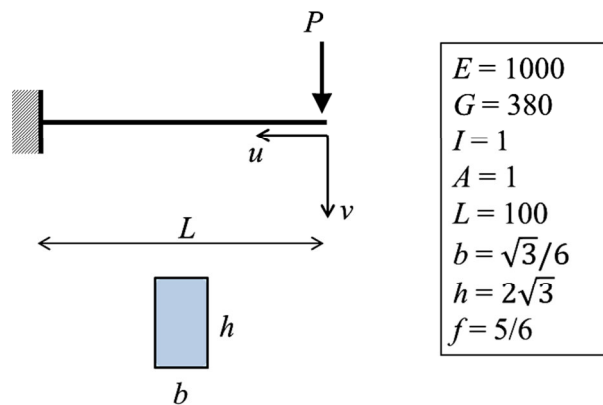


Figura 5.7: Viga em balanço com carga força concentrada na extremidade livre.

Mattiasson (1981) realizou uma análise não linear analítica da estrutura representada pela Figura 5.7 e obteve os valores exatos dos deslocamentos e rotações do nó extremo (nó de aplicação da carga) utilizando integrais elípticas. O fato de se conhecer a solução analítica do modelo contribui para que o mesmo seja utilizado em testes de formulações destinadas a análise não linear de estruturas. Além disso, o modelo é capaz de demonstrar a influência da matriz de rigidez geométrica na formulação do elemento implementado, devido a ocorrência da flexão simples. Pesquisadores como Kondoh e Atluri (1987), Marques (1990), Crivelli (1991), Park e Lee (1996), Faria (1998), Rodrigues (2000), Battini (2002) e Silva (2011), utilizaram esta tipologia estrutural para estudos diversos no ramo da análise não linear de estruturas.

A viga em questão é analisada considerando quatro modos de discretização da estrutura total, compreendendo análises com 2, 4, 6 e 8 elementos de viga unificados de mesmo comprimento, com a carga concentrada aplicada na extremidade livre em todas as situações. A Tabela 5.3 agrupa as informações relativas a cada discretização realizada para o referido modelo.

Tabela 5.3: Processo de discretização e análise da viga em balanço com carga força concentrada na extremidade livre.

Número de Elementos	Nó de Referência	Incrementos de Carga	Número Máximo de Iterações	Tolerância	Comprimento de Arco	Média de Iterações
2	3	10	50	10^{-5}	-8,49	4,5
4	5	10	50	10^{-5}	-8,20	4,4
6	7	10	50	10^{-5}	-8,15	4,4
8	9	20	50	10^{-5}	-4,07	4,0

Com o objetivo de comparar as respostas das trajetórias de equilíbrio do modelo estrutural em relação aos diferentes modos de discretização promovidos, a Figura 5.8 apresenta as trajetórias de equilíbrio para o deslocamento vertical do nó na extremidade livre (nó de referência para cada processo de discretização distinto) em função do fator de carga adimensional PL^2/EI . Observa-se que a estrutura apresenta elevada capacidade de realizar grandes deslocamentos, o que caracteriza a análise não linear geométrica proposta.

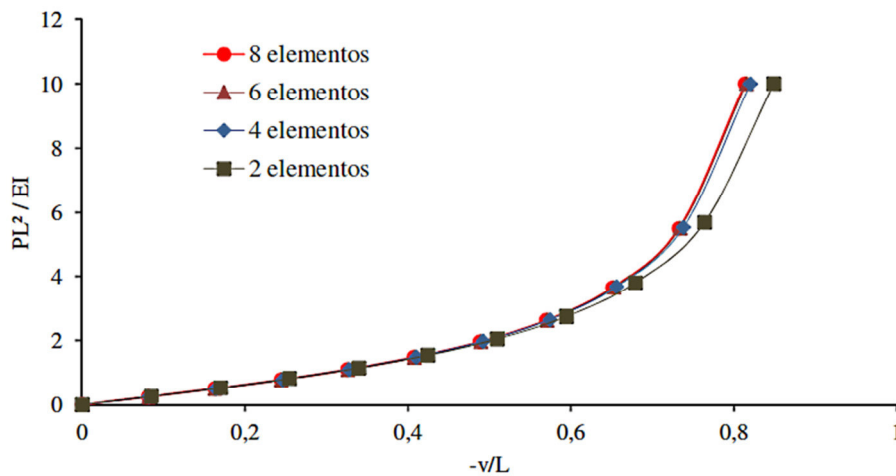


Figura 5.8: Trajetória de equilíbrio da viga em balanço com carga força concentrada na extremidade livre para cada processo de discretização.

A análise da curva carga x deslocamento representada pela Figura 5.8 indica uma tendência não linear suave para a trajetória de equilíbrio no grau de liberdade vertical, representando a resposta de uma estrutura em equilíbrio estável. Percebe-se que o aumento do número de elementos no processo de discretização resulta em uma melhor aproximação do comportamento da estrutura real em relação à análise numérica, obtendo uma boa precisão de resultados a partir da discretização do sistema em 4 elementos finitos de viga unificados.

A Figura 5.9 ilustra as trajetórias de equilíbrio não linear para os deslocamentos vertical e horizontal referentes ao nó da extremidade livre, para a discretização do sistema em 8 elementos de viga, comparados com os resultados analíticos obtidos por Mattiasson (1981).

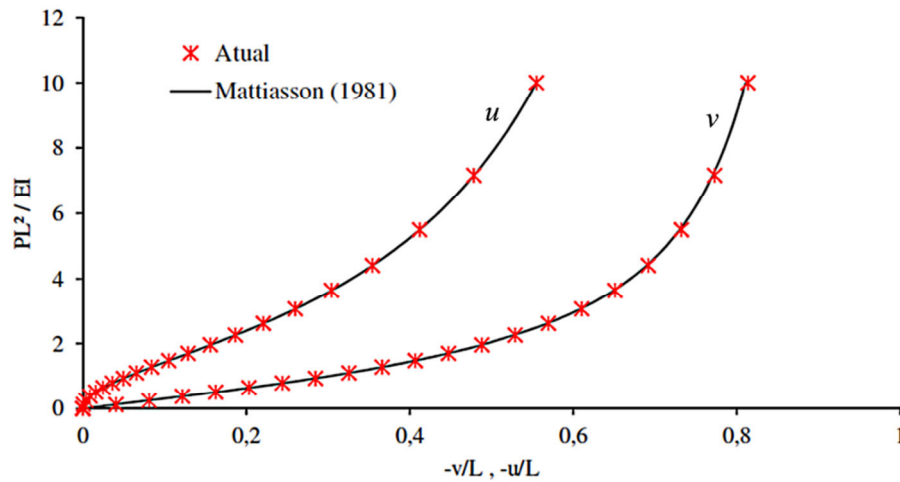


Figura 5.9: Trajetórias de equilíbrio para deslocamento vertical e horizontal para a viga em balanço com carga força concentrada na extremidade livre.

A Tabela 5.4 apresenta os valores dos deslocamentos vertical e horizontal obtidos ao longo dos processos de discretização do modelo em comparação com os resultados analíticos obtidos por Mattiasson (1981), para os valores de carga referentes à metade e ao final do nível de carregamento.

Tabela 5.4: Comparativo de resultados analítico x numérico para a viga em balanço com carga força concentrada na extremidade livre.

N_{elem}	$PL^2/EI = 5$		$PL^2/EI = 10$	
	$-u/L$	$-v/L$	$-u/L$	$-v/L$
2	0,38453	0,73311	0,56792	0,84907
4	0,38278	0,71455	0,55601	0,82021
6	0,38316	0,71169	0,55533	0,81543
8	0,38590	0,71396	0,55524	0,81390
Análítico	0,38763	0,71379	0,55500	0,81061

A equivalência entre os resultados obtidos pelo presente trabalho e os apresentados por Mattiasson (1981) evidencia a eficiência da formulação para o elemento de viga unificado e a estratégia de solução não linear empregada, bem como a ausência do fenômeno de travamento por cisalhamento.

A análise do parâmetro de rigidez *CST* demonstra que a matriz de rigidez tangente não apresenta singularidades ao longo da curva de equilíbrio. A Figura 5.10 ilustra a relação entre o parâmetro de rigidez *CST* e o fator de carga adimensional para o modelo analisado, referente à discretização em 8 elementos de viga.

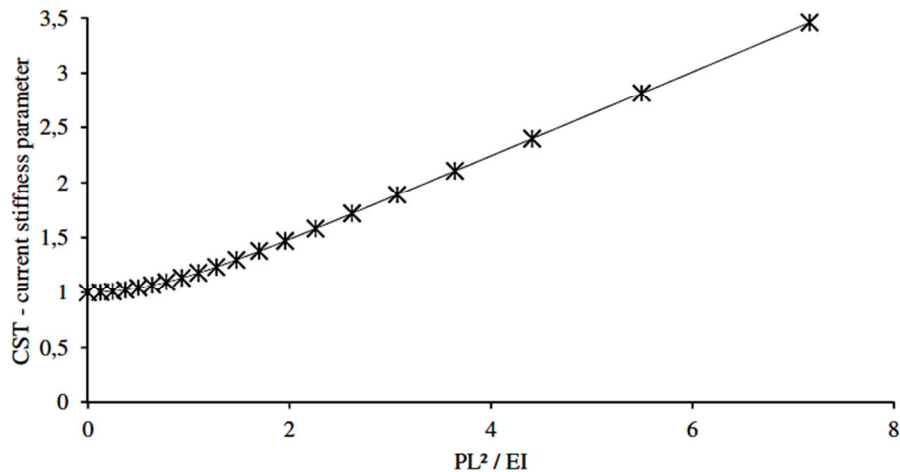


Figura 5.10: *CST* x Fator de Carga para a viga em balanço com carga força concentrada na extremidade livre.

Conclui-se que a estrutura apresenta um ganho de rigidez à medida que o fator de carga aumenta. Como o parâmetro *CST* não apresenta valores nulos para o modelo em questão, não existem trechos de instabilidade caracterizados por pontos com tangente horizontal nula na curva carga x deslocamento ilustrada pela Figura 5.8.

De modo a facilitar o entendimento da trajetória de equilíbrio e obter uma melhor visualização do comportamento da estrutura, a Figura 5.11 apresenta as configurações deformadas do sistema discretizado em 8 elementos de viga. Verifica-se que o modelo está sujeito a grandes deslocamentos e rotações, o que caracteriza a não linearidade geométrica da formulação.

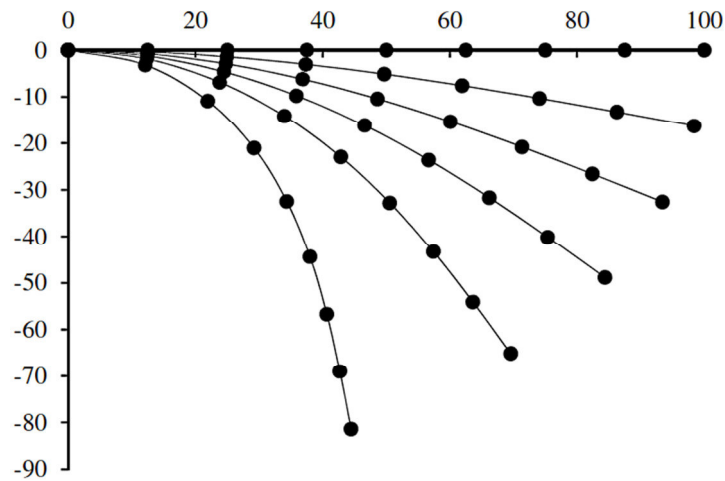


Figura 5.11: Configurações deformadas para a viga em balanço com carga força concentrada na extremidade livre.

5.2 PÓRTICOS PLANOS

5.2.1 Pórtico de Lee

A estrutura representada pela Figura 5.12, conhecida como pórtico de Lee, corresponde a um pórtico plano formado pela conexão rígida entre uma viga (barra horizontal) e uma coluna (barra vertical), apresentando apoios extremos que liberam a rotação e impedem a translação. As características mecânicas e geométricas do elemento analisado encontram-se também ilustradas pela Figura 5.12.

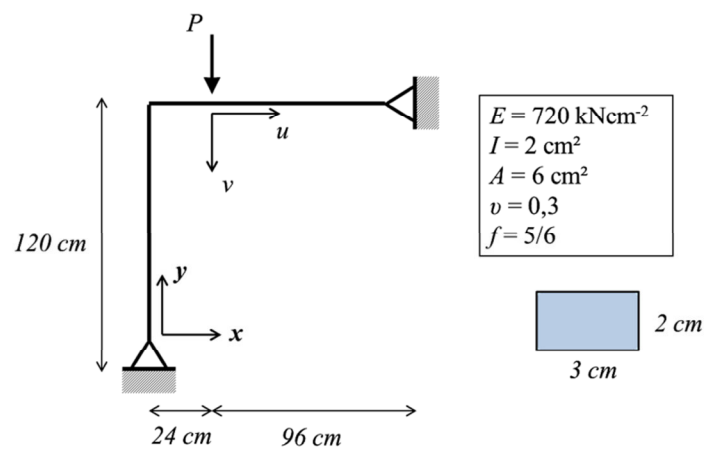


Figura 5.12: Pórtico de Lee.

O pórtico de Lee foi apresentado inicialmente por Lee (1968) para a análise da estabilidade de pórticos elásticos submetidos a grandes deslocamentos, tornando-se uma referência na literatura para estudos de análise não linear de estruturas. Cichón (1984), Schweizerhof e Wriggers (1986), Park e Lee (1996), Meek e Xue (1996), Rodrigues (2000), Battini (2002), Menin (2006) e Silva (2011) também utilizaram esta tipologia estrutural para estudos diversos no ramo da análise não linear geométrica e física de estruturas.

A análise da estrutura representada pela Figura 5.12 é realizada discretizando-a em 20 elementos de viga unificados de igual comprimento, apresentando um total de 21 nós. A carga vertical encontra-se aplicada no nó 13, tornando-se o nó de referência para a análise da configuração de equilíbrio da estrutura quanto aos deslocamentos translacionais. O nó de referência encontra-se localizado na barra horizontal, distante de 24 unidades de comprimento da ligação rígida. São realizados 62 passos de carga estabelecendo o número máximo de iterações admissíveis por passo igual a 25. Adotando-se o comprimento de arco $s = 10,5$ e a tolerância relativa às normas residuais de 10^{-5} , a média de iterações por passos de carga apresentada é de 4,3.

As trajetórias de equilíbrio não linear para os deslocamentos horizontal e vertical referentes ao nó 13 estão ilustradas pelas Figuras 5.13 e 5.14. Verifica-se boa concordância em relação aos resultados encontrados por Battini (2002) e Menin (2006).

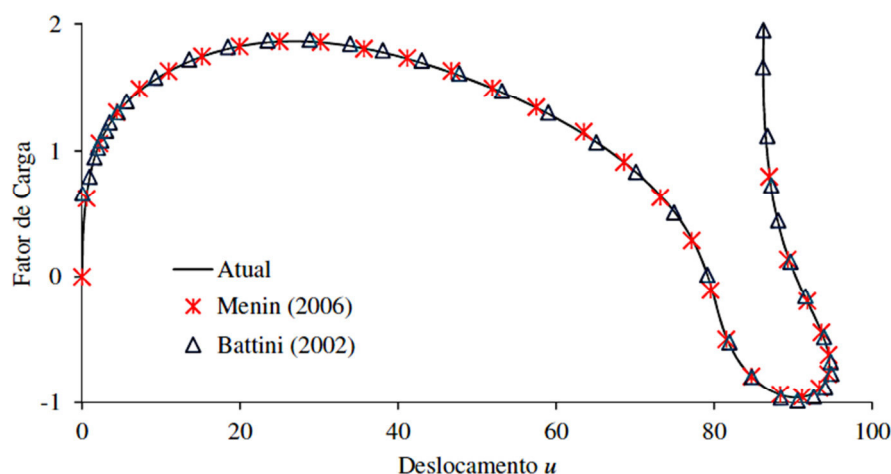


Figura 5.13: Trajetória de equilíbrio para o deslocamento horizontal do pórtico de Lee.

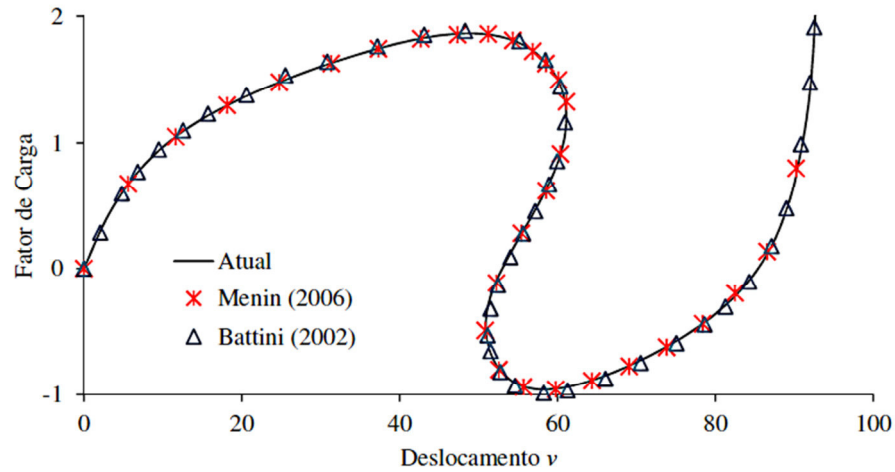


Figura 5.14: Trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical do pórtico de Lee.

A trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical apresenta dois pontos limites (tangente horizontal) e dois *turning points* (tangente vertical), conforme expresso pela Figura 5.15.

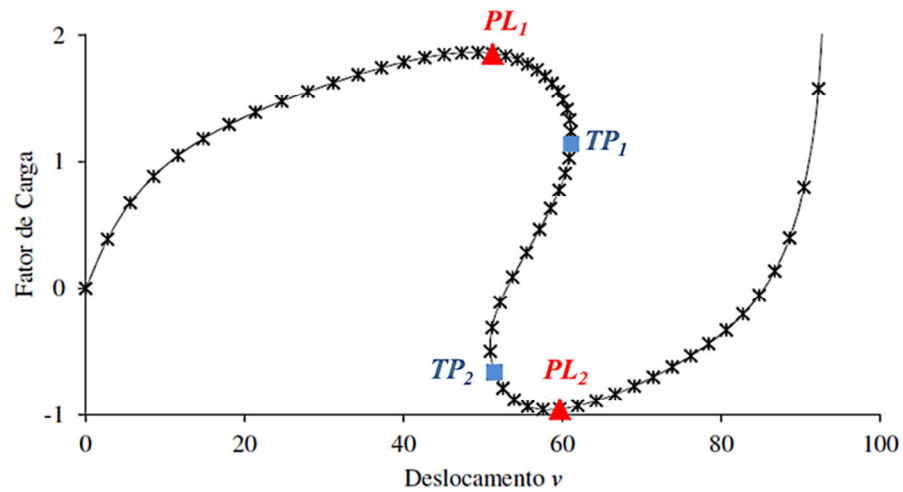


Figura 5.15: Pontos limites e *turning points* para o pórtico de Lee.

A obtenção dos pontos limites e *turning points* é realizada através do cálculo do parâmetro de rigidez *CST* – *current stiffness parameter*, que se anula quando esses tipos de pontos são encontrados. A Figura 5.16 ilustra o parâmetro *CST* em função do fator de carga, constatando-se que o mesmo se anula 4 vezes, sendo 2 pontos correspondentes a pontos limites e 2 pontos correspondentes a *turning points*.

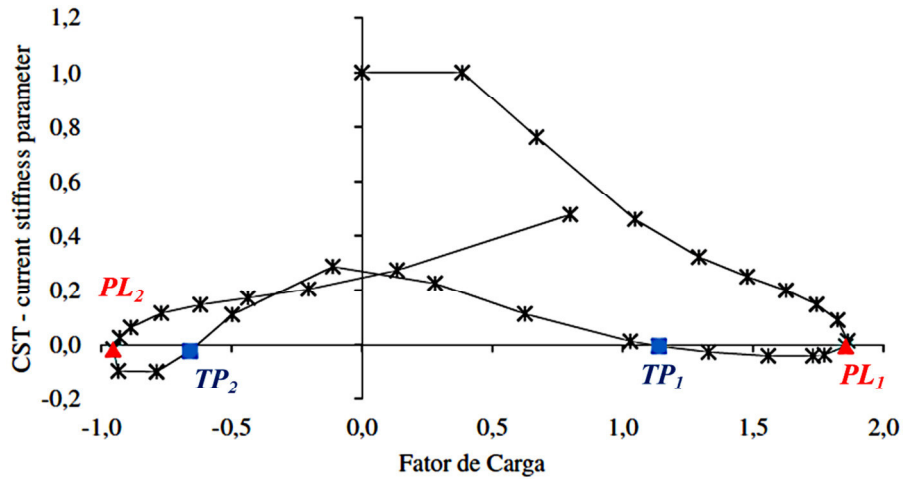


Figura 5.16: CST x Fator de Carga para o pórtico de Lee.

A identificação dos pontos críticos é estabelecida pela análise da alteração do número de pivôs negativos da matriz de rigidez tangente. A Figura 5.17 apresenta o número de pivôs negativos da matriz de rigidez tangente em função do número de passos de carga, constatando-se que o mesmo apresenta 2 alterações correspondendo aos 2 pontos limites (PL). A alteração do número de pivôs negativos não detecta *turning points*, uma vez que estes pontos não são considerados pontos críticos, mas seu conhecimento é de grande interesse pelo fato de poderem afetar o desempenho do algoritmo de resolução do sistema.

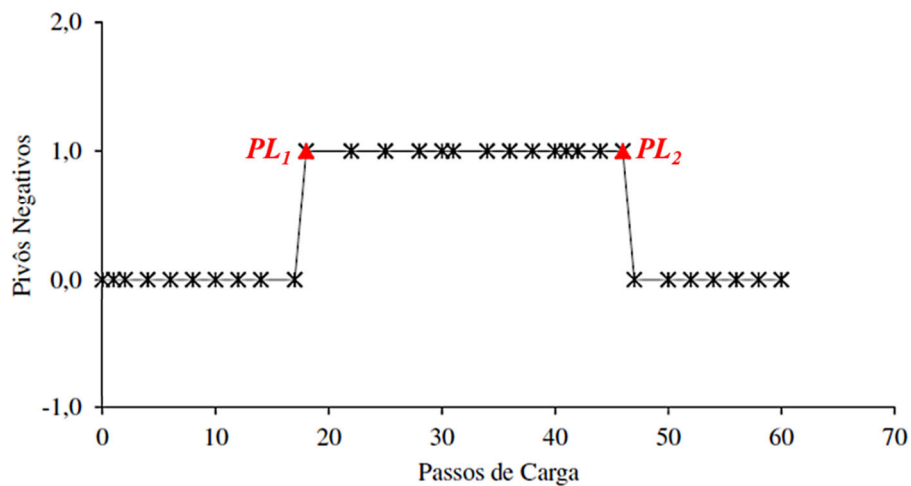


Figura 5.17: Pivôs Negativos x Passos de Carga para o pórtico de Lee.

Verifica-se, através das Figuras 5.15 à 5.17, que o primeiro ponto limite (PL_1) ocorre para um carregamento $P = 1,857 \text{ kN}$, no 18º passo de carga, apresentando deslocamento vertical de $v = 51,2181$ unidades de comprimento; e o segundo ponto limite (PL_2) ocorre

para um carregamento $P = -0,954 \text{ kN}$, no 46° passo de carga, apresentando deslocamento vertical de $v = 59,6893$ unidades de comprimento.

De modo a facilitar o entendimento das trajetórias de equilíbrio e obter uma melhor visualização do comportamento pós-crítico da estrutura, a Figura 5.18 apresenta as configurações deformadas do sistema para os carregamentos referentes aos pontos limites PL_1 e PL_2 . Verifica-se que o pórtico está sujeito a grandes deslocamentos e rotações, o que caracteriza a não linearidade geométrica da formulação.

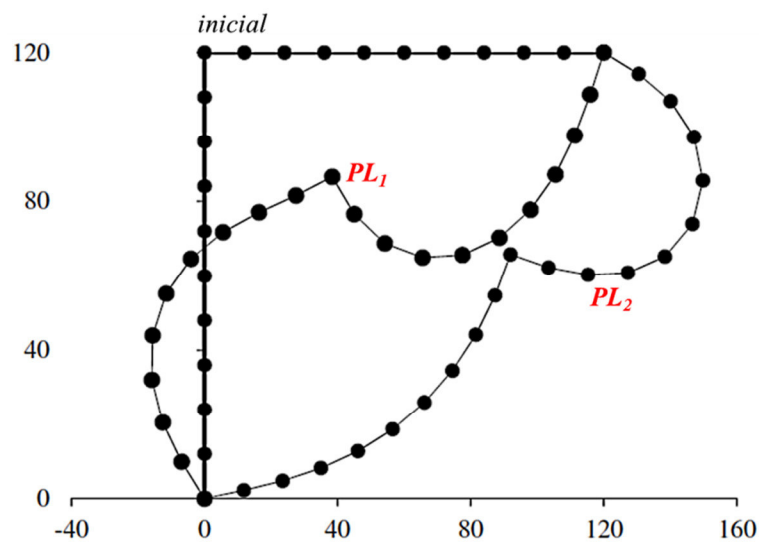


Figura 5.18: Configurações deformadas para o pórtico de Lee.

Através das trajetórias de equilíbrio analisadas, percebe-se grande equivalência entre os resultados obtidos pela presente formulação e os apresentados por outros autores da literatura, evidenciando a eficiência da formulação para o elemento de viga unificado e a estratégia de solução não linear empregada, bem como a ausência do fenômeno de travamento por cisalhamento.

5.2.2 Pórtico Toggle

A estrutura representada pela Figura 5.19 corresponde a um pórtico plano simétrico composto por duas barras de igual comprimento, rigidamente interligadas, formando um ângulo obtuso no ponto de ligação. As condições de contorno das duas barras são tais que impedem os deslocamentos transversais e rotacionais, caracterizando-o como um pórtico

biengastado. As características mecânicas e geométricas do elemento analisado encontram-se também ilustradas pela Figura 5.19.

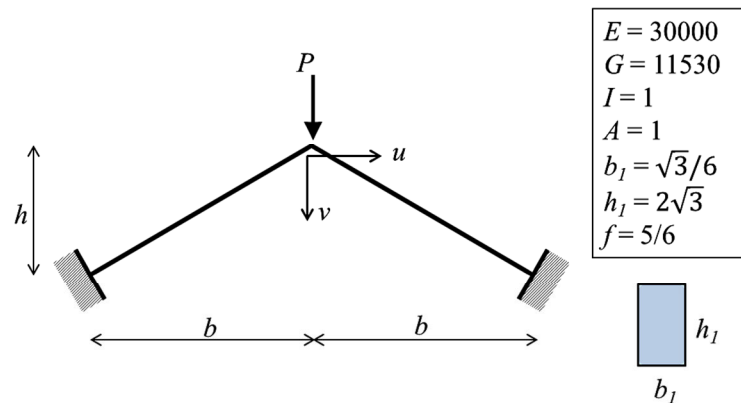


Figura 5.19: Pórtico Toggle.

A estrutura dada pela Figura 5.19 tem sido utilizada para se verificar a eficiência de formulações numéricas no tratamento de trajetórias de equilíbrio que apresentam o caráter “*snap-through*”, ou seja, estruturas que possuem uma transição do ponto crítico para a trajetória pós crítica com a ocorrência de inversão dos esforços, caracterizado por um aumento relativo de rigidez (salto à frente). Esta foi inicialmente resolvida de maneira analítica e experimental por Williams (1964), tornando-se uma referência na literatura para outros pesquisadores que utilizaram desta tipologia estrutural, como Wood e Zienkiewicz (1976), Marques (1990), Wagner (1991), Meek e Xue (1996), Warren (1997), Battini (2002), Krenk (2009) e Silva (2011).

O pórtico em questão é analisado considerando uma discretização da estrutura total em 10 e 20 elementos de viga unificados de mesmo comprimento, sendo a carga concentrada aplicada no nó rígido de ligação, em ambas as situações. A Tabela 5.5 agrupa as informações relativas a cada discretização realizada para o referido modelo.

Tabela 5.5: Processo de discretização e análise do pórtico Toggle.

Número de Elementos	Nó de Referência	Passos de Carga	Número Máximo de Iterações	Tolerância	Comprimento de Arco	Média de Iterações
10	6	20	50	10^{-5}	-0,416	3,0
20	11	20	50	10^{-5}	-0,416	3,0

A Figura 5.20 apresenta as trajetórias de equilíbrio não linear para o deslocamento vertical do nó central (nó de referência para cada processo de discretização distinto) em função do fator de carga adimensional PL^2/EI . Observa-se que a estrutura apresenta elevada capacidade de realizar grandes deslocamentos, o que caracteriza a análise não linear geométrica proposta.

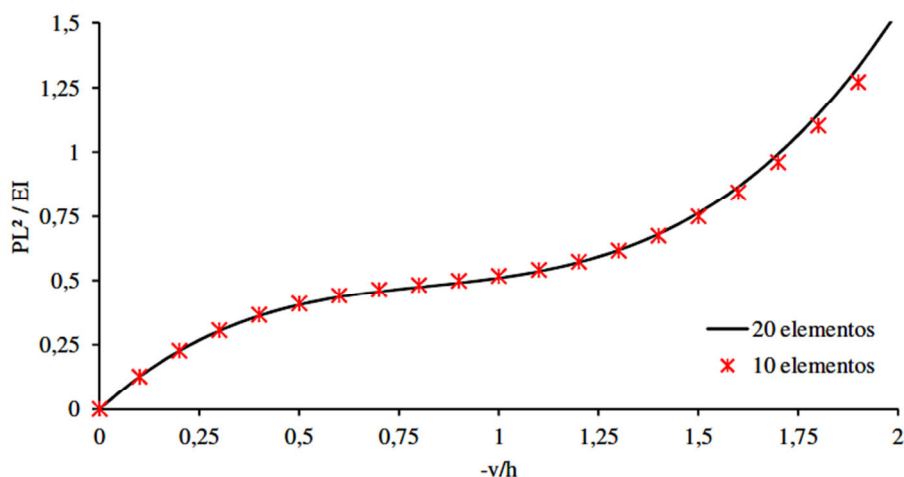


Figura 5.20: Trajetória de equilíbrio do pórtico Toggle para cada processo de discretização.

A análise da Figura 5.20 permite observar que o modelo estrutural em questão não apresenta o comportamento “*snap-through*” quanto à trajetória de equilíbrio no grau de liberdade vertical do nó de referência analisado. A ocorrência do fenômeno de *snap-through* depende da relação h/b adotada, da esbeltez das barras e das condições de contorno. Percebe-se que o aumento do número de elementos no processo de discretização resulta em uma melhor aproximação do comportamento da estrutura real em relação à análise numérica, obtendo uma boa precisão de resultados a partir da discretização do sistema em 20 elementos finitos de viga unificados.

A Figura 5.21 ilustra um comparativo entre a resposta numérica obtida pela presente formulação e a resposta analítica obtida por Williams (1964), em relação ao grau de liberdade vertical do nó de referência analisado. Ressalta-se que a relação h/b em ambas as trajetórias é de 0,024. Verifica-se boa concordância em relação ao resultado analítico encontrado.

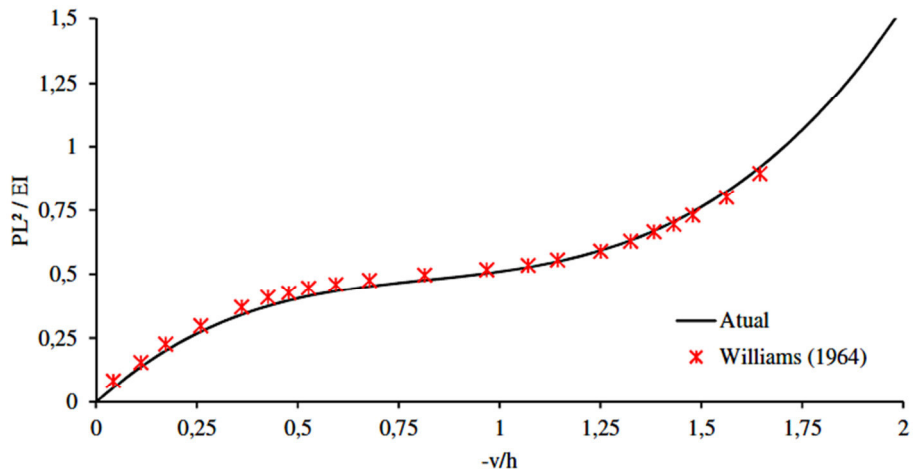


Figura 5.21: Trajetória de equilíbrio vertical do pórtico Toggle.

A relação carga x deslocamento obtida representa a resposta de uma estrutura em equilíbrio estável. Logo, a matriz de rigidez tangente não apresenta singularidades ao longo da curva de equilíbrio, o que é evidenciado pelo cálculo do parâmetro *CST*. A Figura 5.22 ilustra a relação entre o parâmetro de rigidez *CST* e o fator de carga adimensional para o modelo analisado referente à discretização em 20 elementos de viga.

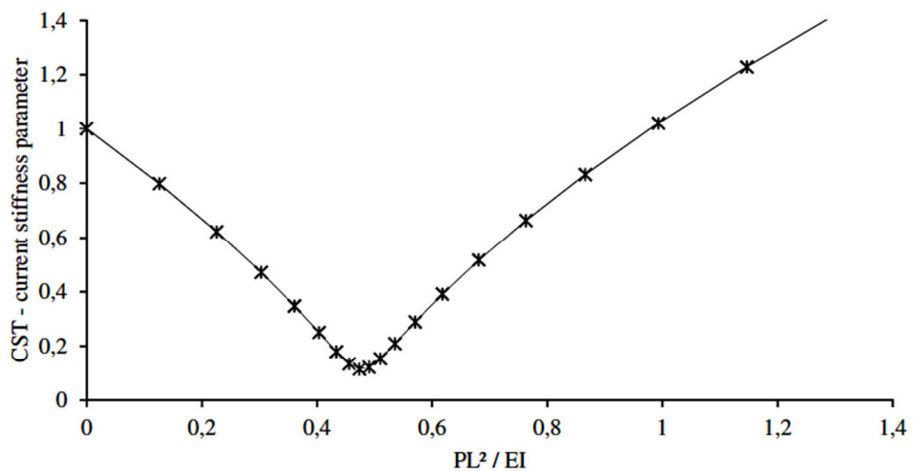


Figura 5.22: *CST* x Fator de Carga para o pórtico Toggle.

Conclui-se que a estrutura apresenta uma perda de rigidez até alcançar o valor para o fator de carga de $PL^2/EI = 0,473$, no 9º passo de carga, retomando o ganho de rigidez após esse ponto. Como o parâmetro *CST* não apresenta valores nulos para o modelo em questão, não existem trechos de instabilidade caracterizados por pontos com tangente horizontal nula na curva carga x deslocamento ilustrada pela Figura 5.21.

De modo a facilitar o entendimento da trajetória de equilíbrio e obter uma melhor visualização do comportamento da estrutura, a Figura 5.23 apresenta as configurações deformadas do sistema discretizado em 20 elementos de viga unificados. Verifica-se que o pórtico está sujeito a grandes deslocamentos e rotações, o que caracteriza a não linearidade geométrica da formulação, e a deformações simétricas.

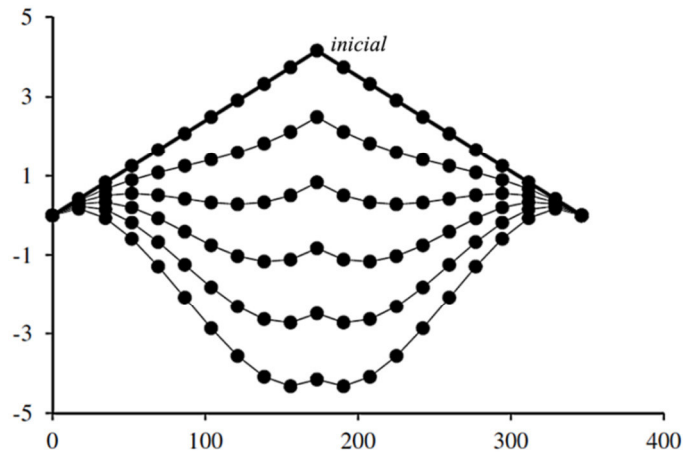


Figura 5.23: Configurações deformadas para o pórtico Toggle.

A equivalência entre os resultados obtidos pela presente formulação e os apresentados por outros autores evidencia a eficiência da formulação para o elemento de viga unificado e a estratégia de solução não linear empregada, bem como a ausência do fenômeno de travamento por cisalhamento.

5.2.3 Arco circular de grande altura

A estrutura representada pela Figura 5.24 corresponde a um arco circular de grande altura, submetido à ação de uma carga vertical concentrada no ápice, apresentando como condições de contorno um apoio rotulado, que impede a translação e libera a rotação (vínculo esquerdo), e um engaste, que impede os deslocamentos de translação e rotação (vínculo direito). As características mecânicas e geométricas do elemento analisado encontram-se também ilustradas pela Figura 5.24.

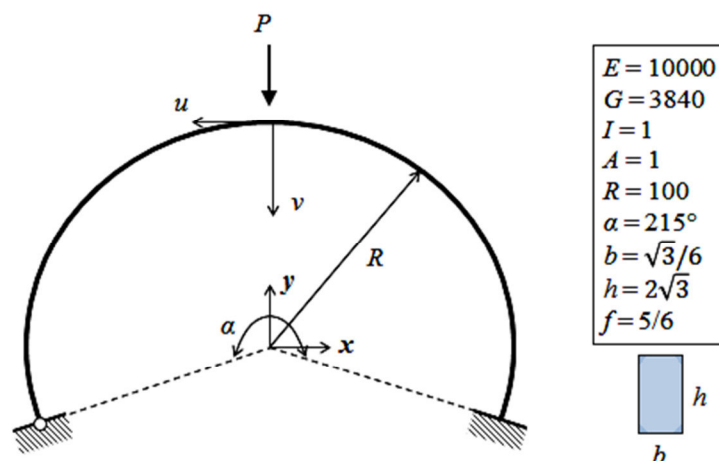


Figura 5.24: Arco circular de grande altura rotulado-engastado.

Wriggers e Simo (1990), Wagner (1991), Faria (1998), Battini (2002) e Menin (2006), realizaram pesquisas utilizando o arco circular de grande altura com variadas condições de contorno para estudos diversos no ramo da análise não linear geométrica e física de estruturas.

A análise da estrutura representada pela Figura 5.24 é realizada discretizando-a em 20 elementos de viga unificados de igual comprimento, apresentando um total de 21 nós. A carga vertical encontra-se aplicada no nó 11, tornando-se o nó de referência para a análise da configuração de equilíbrio da estrutura quanto aos deslocamentos translacionais. São realizados 100 passos de carga estabelecendo o número máximo de iterações admissíveis por passo igual a 50. Adotando-se o comprimento de arco $s = 12,0$ e a tolerância relativa às normas residuais de 10^{-5} , a média de iterações por passos de carga apresentada é de 4,2.

A Figura 5.25 apresenta a trajetória de equilíbrio não linear para o deslocamento vertical do nó central (nó de referência 11) em função do fator de carga. Observa-se que a estrutura apresenta elevada capacidade de realizar grandes deslocamentos, o que caracteriza a análise não linear geométrica proposta. Verifica-se boa concordância em relação aos resultados encontrados por Faria (1998) e Menin (2006).

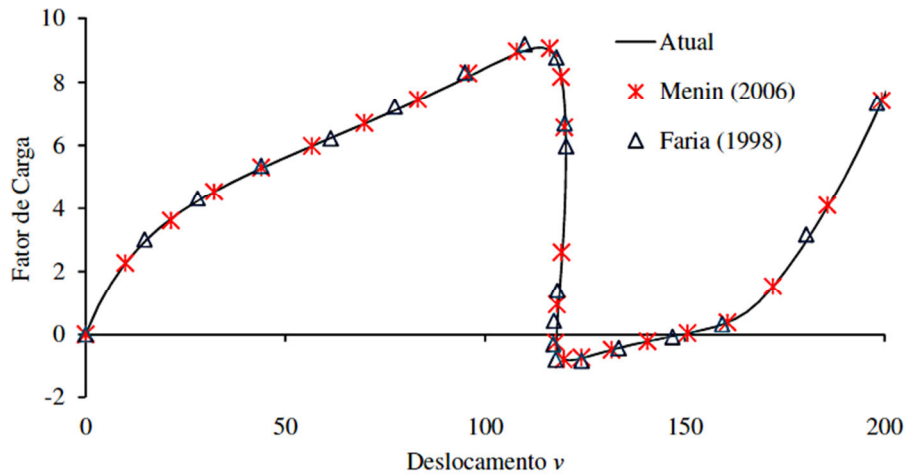


Figura 5.25: Trajetória de equilíbrio vertical do arco rotulado-engastado.

A trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical apresenta dois pontos limites (tangente horizontal) e dois *turning points* (tangente vertical), caracterizados pela inspeção do parâmetro de rigidez CST e pelo número de pivôs negativos da matriz de rigidez tangente. A Figura 5.26 ilustra os pontos críticos apresentados pela trajetória de equilíbrio do arco circular de grande altura rotulado-engastado.

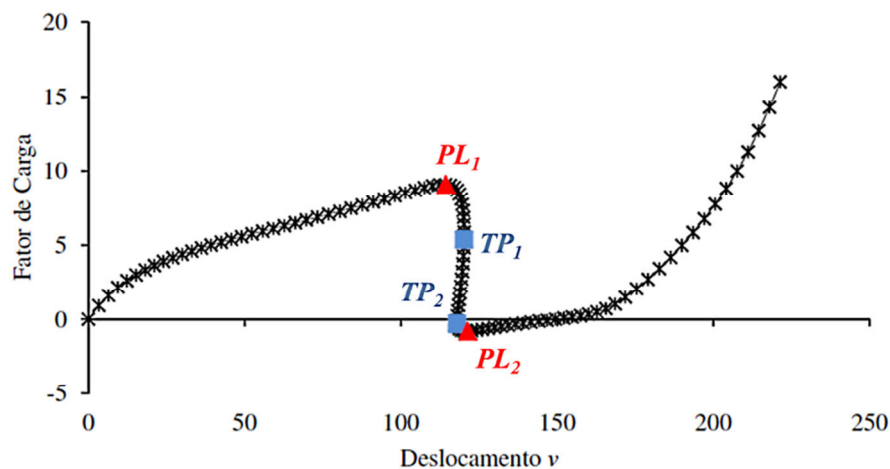


Figura 5.26: Pontos limites e *turning points* para o arco rotulado-engastado.

Pela curva carga x deslocamento da Figura 5.26, observa-se que na fase pré-crítica, anterior ao primeiro ponto crítico, a estrutura sofre grandes deslocamentos até atingir o ponto limite PL_1 . A partir deste ponto, a estrutura perde a sua estabilidade de equilíbrio, apresentando uma fase de forte não linearidade compreendida entre os dois *turning points*, TP_1 e TP_2 . A rigidez é novamente estabelecida na fase pós-crítica ao se atingir o segundo ponto limite PL_2 , apresentando grandes deslocamentos e rotações na continuação da

trajetória de equilíbrio. Ocorre uma inversão dos esforços a partir do segundo ponto limite, PL_2 , o que evidencia o fenômeno de *snap-through*.

A obtenção dos pontos limites e *turning points* é realizada através do cálculo do parâmetro de rigidez CST – *current stiffness parameter*, que se anula quando esses tipos de pontos são encontrados. A Figura 5.27 ilustra o parâmetro CST em função do fator de carga, constatando-se que o mesmo se anula 4 vezes, sendo 2 pontos correspondentes a pontos limites (PL) e 2 pontos correspondentes a *turning points* (TP).

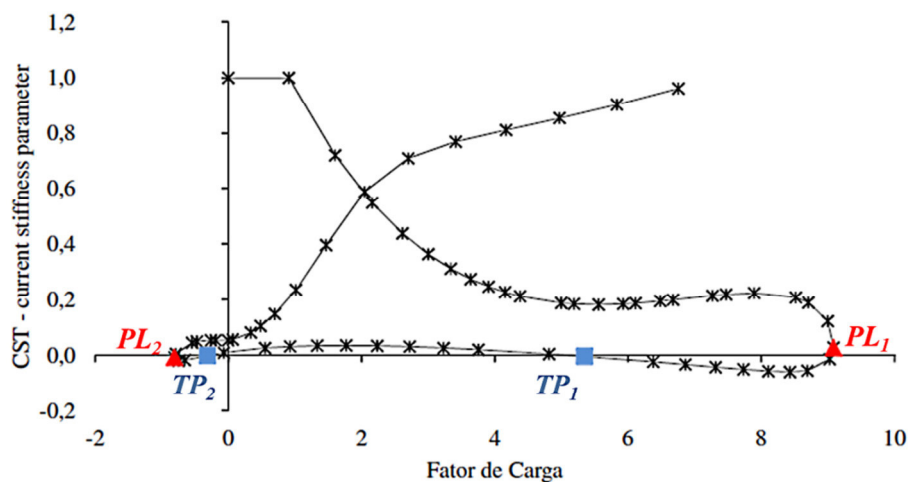


Figura 5.27: CST x Fator de Carga para o arco rotulado-engastado.

A identificação dos pontos críticos é estabelecida pela análise da alteração do número de pivôs negativos da matriz de rigidez tangente. A Figura 5.28 apresenta o número de pivôs negativos da matriz de rigidez tangente em função do número de passos de carga. Através desta figura, pode ser constatado que o número de pivôs negativos apresentou 2 alterações, correspondendo aos 2 pontos limites (PL). A alteração do número de pivôs negativos não detecta *turning points*, uma vez que estes pontos não são considerados pontos críticos, mas seu conhecimento é de grande interesse pelo fato de poderem afetar o desempenho do algoritmo de resolução do sistema.

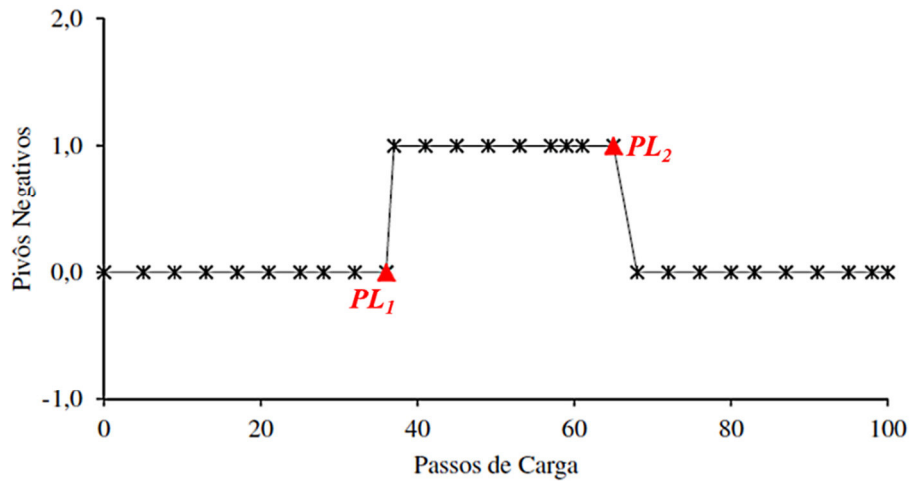


Figura 5.28: Pivôs Negativos x Passos de Carga para o arco rotulado-engastado.

Verifica-se, através das Figuras 5.26 à 5.28, que o primeiro ponto limite (PL_1) ocorre para um carregamento $P = 9,0860$ unidades de força, no 36° passo de carga, apresentando deslocamento vertical de $v = 114,3110$ unidades de comprimento; e o segundo ponto limite (PL_2) ocorre para um carregamento $P = -0,8095$ unidades de força, no 65° passo de carga, apresentando deslocamento vertical de $v = 121,3590$ unidades de comprimento.

De modo a facilitar o entendimento das trajetórias de equilíbrio e obter uma melhor visualização do comportamento pós-crítico da estrutura, a Figura 5.29 apresenta as configurações deformadas do sistema para os carregamentos referentes aos pontos limites PL_1 e PL_2 . Verifica-se que o pórtico está sujeito a grandes deslocamentos e rotações, apresentando deformações não simétricas desde o início do carregamento, o que caracteriza a não linearidade geométrica da formulação.

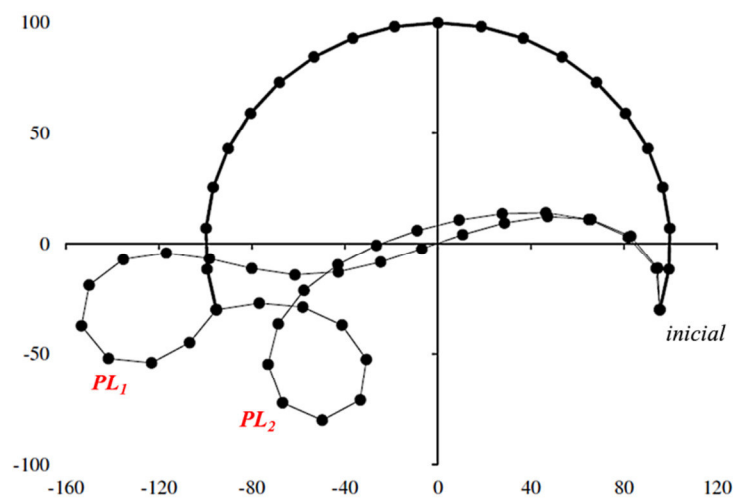


Figura 5.29: Configurações deformadas para o arco rotulado-engastado.

Através das trajetórias de equilíbrio analisadas, percebe-se grande equivalência entre os resultados obtidos pela presente formulação e os apresentados por outros autores da literatura, evidenciando a eficiência da formulação para o elemento de viga unificado e a estratégia de solução não linear empregada, bem como a ausência do fenômeno de travamento por cisalhamento.

5.2.4 Pórtico diamante birrotulado

A estrutura representada pela Figura 5.30 corresponde a um pórtico diamante simétrico, apresentando dois nós articulados em relação à diagonal vertical. A estrutura é analisada segundo duas formas de carregamento: tração e compressão, sendo a carga externa aplicada nos dois nós articulados, em ambas as situações. As características mecânicas e geométricas do elemento analisado encontram-se também ilustradas pela Figura 5.30.

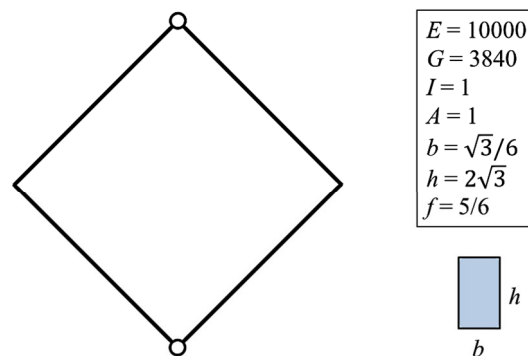


Figura 5.30: Pórtico diamante birrotulado.

Mattiasson (1981) realizou uma análise não linear analítica da estrutura representada pela Figura 5.30 e obteve os valores exatos dos deslocamentos e rotações do nó de aplicação da carga utilizando integrais elípticas. Pesquisadores como Jenkins e Seitz (1966) e Krenk (2009) também utilizaram esta tipologia estrutural para estudos diversos no ramo da análise não linear de estruturas.

a) Pórtico diamante birrotulado solicitado à compressão

A Figura 5.31 ilustra o modelo estrutural do pórtico diamante birrotulado solicitado à compressão.

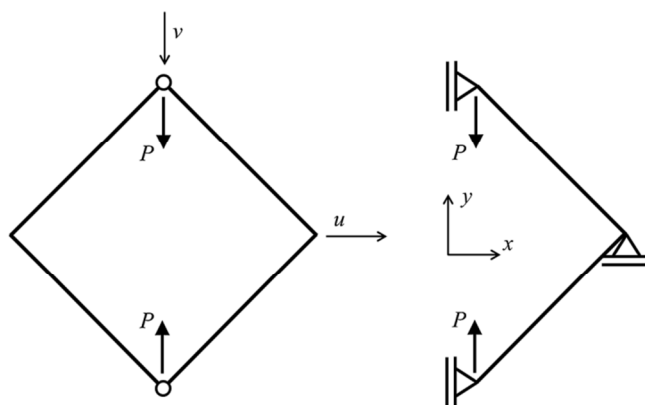


Figura 5.31: Pórtico diamante birrotulado solicitado à compressão.

O pórtico em questão é analisado considerando uma discretização da estrutura total em 4, 8 e 16 elementos de viga unificados de mesmo comprimento por lado, sendo a carga concentrada aplicada nos nós articulados, em ambas as situações. A Tabela 5.6 agrupa as informações relativas a cada discretização realizada para o referido modelo.

Tabela 5.6: Processo de discretização e análise do pórtico diamante birrotulado solicitado à compressão.

Número de Elementos	Nós de Referência	Incrementos de Carga	Número Máximo de Iterações	Tolerância	Comprimento de Arco	Média de Iterações
4	1, 3 e 5	20	50	10^{-5}	-6,78	4,1
8	1, 5 e 9	20	50	10^{-5}	-6,56	4,1
16	1, 9 e 17	20	50	10^{-5}	-6,54	4,0

Com o objetivo de comparar as respostas das trajetórias de equilíbrio do modelo estrutural em relação aos diferentes modos de discretização promovidos, a Figura 5.32 apresenta a trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical do nó de referência para cada processo de discretização distinto, em função do fator de carga adimensional PL^2/EI . Observa-se que a estrutura apresenta elevada capacidade de realizar grandes deslocamentos, o que caracteriza a análise não linear geométrica proposta.

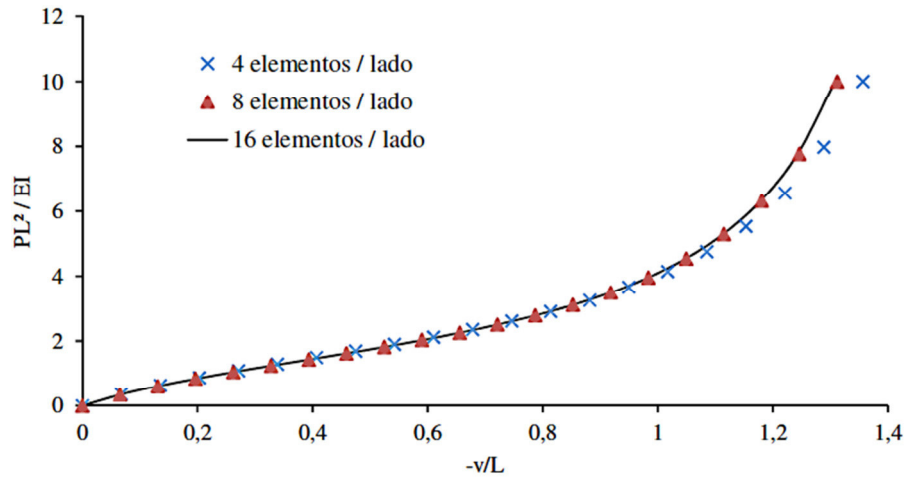


Figura 5.32: Trajetória de equilíbrio do pórtico diamante birrotulado solicitado à compressão para cada processo de discretização.

A análise da curva carga x deslocamento representada pela Figura 5.32 indica uma tendência não linear para a trajetória de equilíbrio no grau de liberdade vertical, representando a resposta de uma estrutura em equilíbrio estável. Percebe-se que o aumento do número de elementos no processo de discretização resulta em uma melhor aproximação do comportamento da estrutura real em relação à análise numérica, obtendo uma boa precisão de resultados a partir da discretização do sistema em 8 elementos finitos de viga unificados por lado.

A Figura 5.33 ilustra um comparativo entre a resposta numérica obtida pela presente formulação e a resposta analítica obtida por Mattiasson (1981), observando-se boa concordância entre os mesmos.

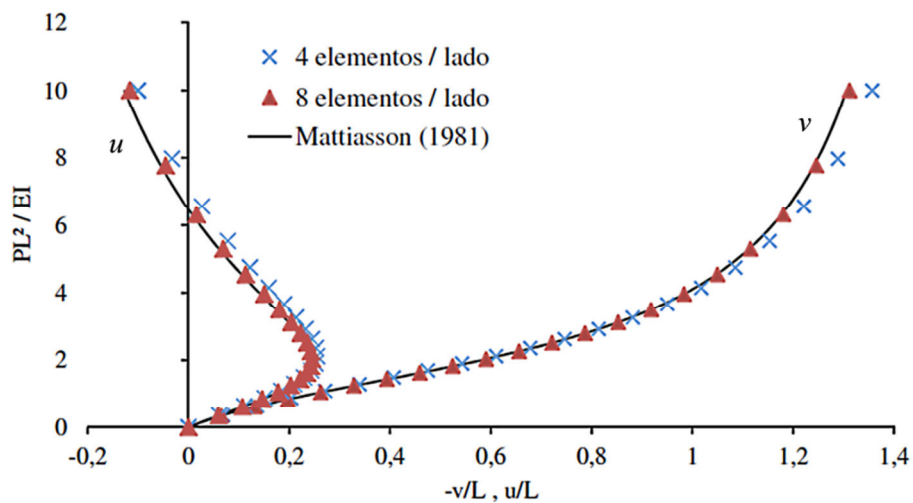


Figura 5.33: Trajetórias de equilíbrio do pórtico diamante birrotulado solicitado à compressão.

A matriz de rigidez tangente não apresenta singularidades ao longo da curva de equilíbrio, o que é evidenciado pelo cálculo do parâmetro *CST*. A Figura 5.34 ilustra a relação entre o parâmetro de rigidez *CST* e o fator de carga adimensional para o modelo analisado referente à discretização em 16 elementos de viga por lado.

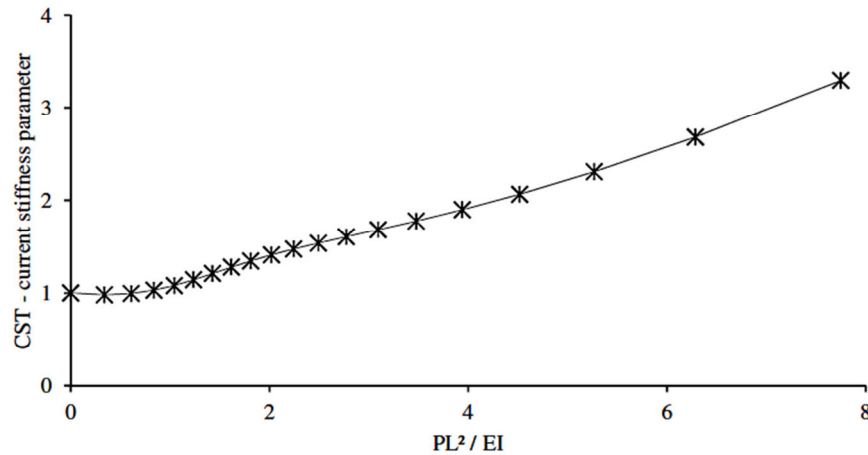


Figura 5.34: *CST* x Fator de Carga para o pórtico diamante birrotulado solicitado à compressão.

Conclui-se que a estrutura apresenta uma leve perda de rigidez entre o 1^o e 3^o passos de carga, recuperando a rigidez nos incrementos de carga seguintes. Como o parâmetro *CST* não apresenta valores nulos para o modelo em questão, não existem trechos de instabilidade caracterizados por pontos com tangente horizontal nula na curva carga x deslocamento ilustrada pela Figura 5.33.

De modo a facilitar o entendimento da trajetória de equilíbrio e obter uma melhor visualização do comportamento da estrutura, a Figura 5.35 apresenta as configurações deformadas do sistema discretizado em 16 elementos de viga unificados por lado. Verifica-se que o pórtico está sujeito a grandes deslocamentos e rotações, o que caracteriza a não linearidade geométrica da formulação.

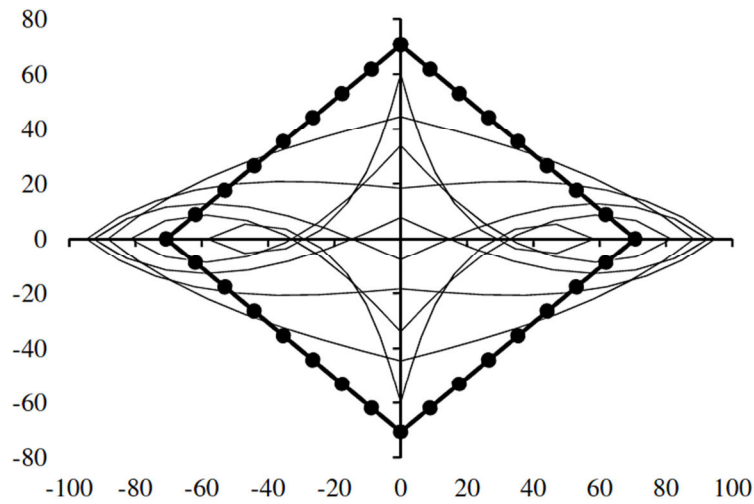


Figura 5.35: Configurações deformadas para o pórtico diamante birrotulado solicitado à compressão.

Através das trajetórias de equilíbrio analisadas, percebe-se grande equivalência entre os resultados obtidos pela presente formulação e os apresentados por outros autores da literatura, evidenciando a eficiência da formulação para o elemento de viga unificado e a estratégia de solução não linear empregada, bem como a ausência do fenômeno de travamento por cisalhamento.

b) Pórtico diamante birrotulado solicitado à tração

A Figura 5.36 ilustra o modelo estrutural do pórtico diamante birrotulado solicitado à tração.

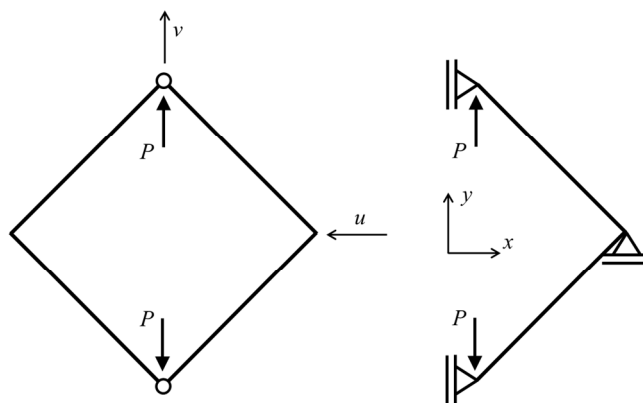


Figura 5.36: Pórtico diamante birrotulado solicitado à tração.

O pórtico em questão é analisado considerando uma discretização da estrutura total em 4, 8 e 16 elementos de viga unificados de mesmo comprimento por lado, sendo a carga concentrada aplicada nos nós articulados, em ambas as situações. A Tabela 5.7 agrupa as informações relativas a cada discretização realizada para o referido modelo.

Tabela 5.7: Processo de discretização e análise do pórtico diamante birrotulado solicitado à tração.

Número de Elementos	Nós de Referência	Incrementos de Carga	Número Máximo de Iterações	Tolerância	Comprimento de Arco	Média de Iterações
4	1, 3 e 5	20	50	10^{-5}	1,28	3,7
8	1, 5 e 9	20	50	10^{-5}	1,24	4,0
16	1, 9 e 17	20	50	10^{-5}	1,23	4,0

Com o objetivo de comparar as respostas das trajetórias de equilíbrio do modelo estrutural em relação aos diferentes modos de discretização promovidos, a Figura 5.37 apresenta as trajetórias de equilíbrio para os deslocamentos vertical e horizontal dos nós de referência para cada processo de discretização distinto, em função do fator de carga adimensional PL^2/EI . Observa-se que a estrutura apresenta elevada capacidade de realizar grandes deslocamentos, o que caracteriza a análise não linear geométrica proposta.

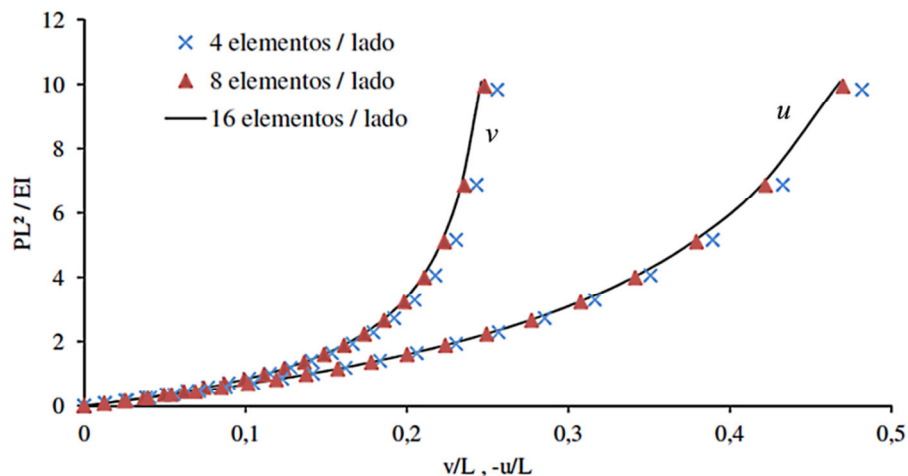


Figura 5.37: Trajetória de equilíbrio do pórtico diamante birrotulado solicitado à tração para cada processo de discretização.

A análise da curva carga x deslocamento representada pela Figura 5.37 indica uma tendência não linear para a trajetória de equilíbrio nos graus de liberdade vertical e horizontal, representando a resposta de uma estrutura em equilíbrio estável. Percebe-se que

o aumento do número de elementos no processo de discretização resulta em uma melhor aproximação do comportamento da estrutura real em relação à análise numérica, obtendo uma boa precisão de resultados a partir da discretização do sistema em 8 elementos finitos de viga unificados por lado.

A Figura 5.38 ilustra um comparativo entre a resposta numérica obtida pela presente formulação e a resposta analítica obtida por Mattiasson (1981), observando-se boa concordância entre os mesmos.

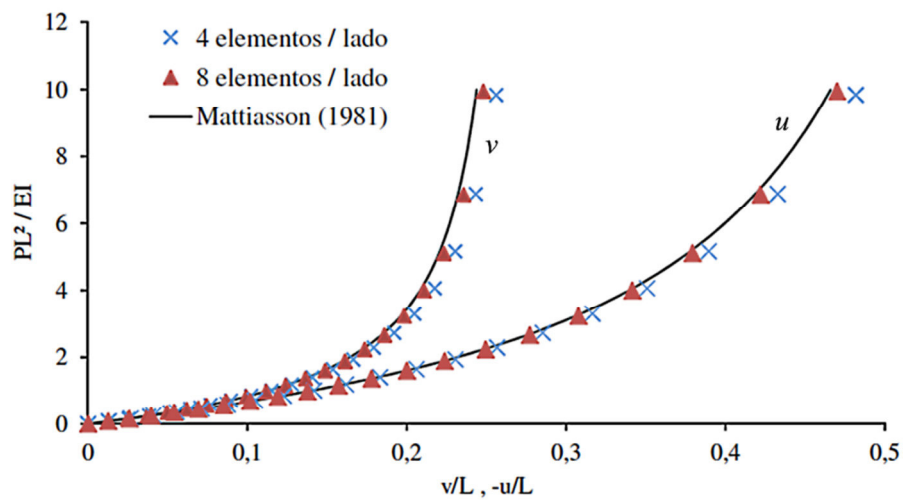


Figura 5.38: Trajetórias de equilíbrio do pórtico diamante birrotulado solicitado à tração.

A matriz de rigidez tangente não apresenta singularidades ao longo da curva de equilíbrio, o que é evidenciado pelo cálculo do parâmetro CST . A Figura 5.39 ilustra a relação entre o parâmetro de rigidez CST e o fator de carga adimensional para o modelo analisado referente à discretização em 16 elementos de viga por lado.

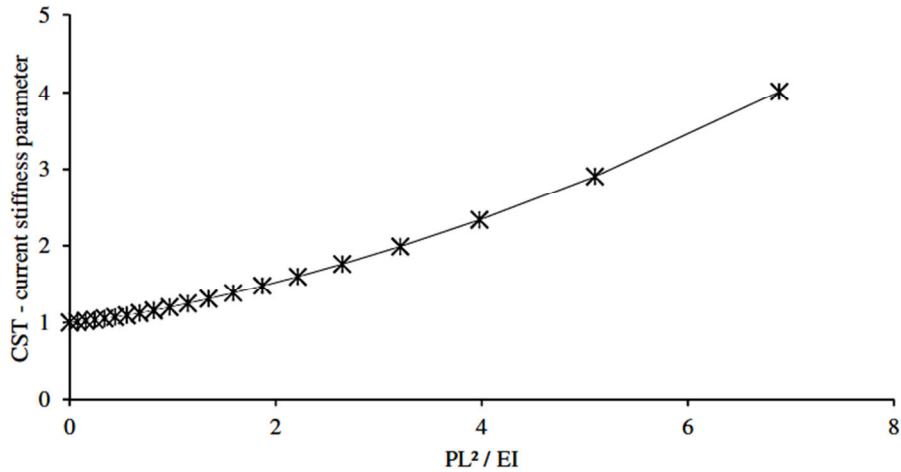


Figura 5.39: *CST* x Fator de Carga para o pórtico diamante birrotulado sollicitado à tração.

Conclui-se que a estrutura apresenta uma rigidez crescente ao longo dos processos incrementais-iterativos. Como o parâmetro *CST* não apresenta valores nulos para o modelo em questão, não existem trechos de instabilidade caracterizados por pontos com tangente horizontal nula na curva carga x deslocamento ilustrada pela Figura 5.38.

De modo a facilitar o entendimento da trajetória de equilíbrio e obter uma melhor visualização do comportamento da estrutura, a Figura 5.40 apresenta as configurações deformadas do sistema discretizado em 16 elementos de viga unificados por lado. Verifica-se que o pórtico está sujeito a grandes deslocamentos e rotações, o que caracteriza a não linearidade geométrica da formulação.

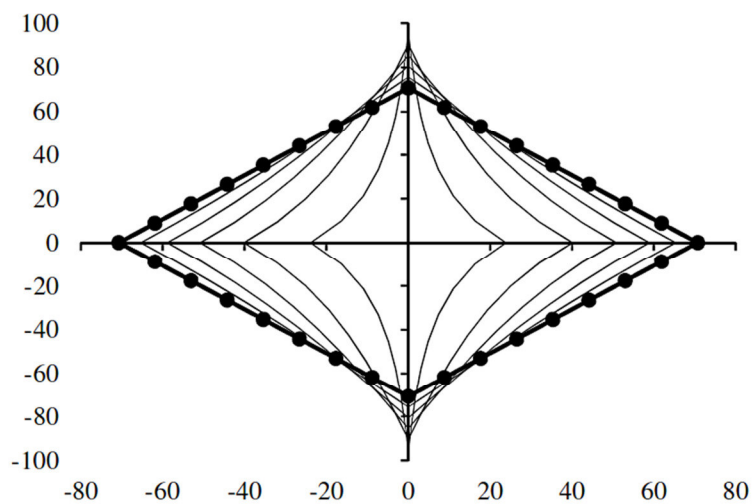


Figura 5.40: Configurações deformadas para o pórtico diamante birrotulado sollicitado à tração.

Através das trajetórias de equilíbrio analisadas, percebe-se grande equivalência entre os resultados obtidos pela presente formulação e os apresentados por outros autores da literatura, evidenciando a eficiência da formulação para o elemento de viga unificado e a estratégia de solução não linear empregada, bem como a ausência do fenômeno de travamento por cisalhamento.

6 CONCLUSÕES

6.1 CONCLUSÕES FINAIS

No presente trabalho, a formulação co-rotacional foi utilizada como descrição cinemática com o objetivo de avaliar o comportamento não linear geométrico na análise estática de sistemas estruturais, permitindo o estudo das trajetórias de equilíbrio apresentadas e a consequente análise da capacidade portante das mesmas.

A formulação do elemento de viga unificado foi obtida inicialmente para a realização de análises de modelos lineares e, posteriormente, aplicada ao contexto da não linearidade geométrica, o qual utilizou os conceitos básicos da formulação co-rotacional: decomposição dos deslocamentos totais em deslocamentos de corpo rígido e deformacional. Conclui-se que a separação do movimento do elemento de viga em movimento de corpo rígido e em movimento deformacional permitiu incluir os efeitos da não linearidade geométrica de modo satisfatório, evidenciado pelos estudos dos modelos estruturais no Capítulo 5, os quais apresentaram trajetórias de equilíbrio que permitiram grandes deslocamentos translacionais e rotacionais.

Para a obtenção dos elementos de viga unificados foram adotados os modos naturais de deslocamentos e o princípio dos trabalhos virtuais complementares. Em relação aos modos naturais de deslocamentos deformacionais, a adoção dos modos de deformação por rotação nodal simétrica (estado de flexão pura) e deformação por rotação nodal antissimétrica (estado de flexão simples) permitiu gerar facilmente os respectivos esforços internos. As matrizes de rigidez tangente foram obtidas empregando-se o princípio dos trabalhos virtuais complementares (método das forças), o qual incluem as considerações das hipóteses de Euler-Bernoulli e Timoshenko de forma conjunta e unificada, através do parâmetro Φ , que determina a influência da deformação cisalhante no fenômeno de flexão.

As matrizes de rigidez obtidas não apresentaram a ocorrência do fenômeno de travamento por cisalhamento, não produzindo uma sobrerigidez artificial nos modelos estruturais analisados. Verifica-se que as trajetórias de equilíbrio obtidas para cada exemplo do Capítulo 5 apresentaram boa concordância com as trajetórias de equilíbrio obtidas por

outros pesquisadores na literatura. A ausência da ocorrência de *shear locking* deve-se aos fatores de correção de rigidezes EI e GA_0 , o qual permitem a utilização de funções aproximadoras lineares para descrever o campo de deslocamentos do elemento de viga unificado.

A análise da capacidade portante dos sistemas estruturais exemplificados no Capítulo 5 foi realizada a partir do conhecimento das trajetórias de equilíbrio nos graus de liberdade apresentadas pelos nós de referência. Métodos indiretos como o parâmetro de rigidez CST – *Current Stiffness Parameter* e a alteração do número de pivôs negativos da matriz de rigidez foram capazes de detectar e classificar a ocorrência de pontos limites (PL) e *turning points* (TP). Para a resolução do sistema de equações não lineares e obtenção das trajetórias de equilíbrio foram utilizados o método de comprimento de arco combinado com o método de Newton-Raphson completo.

Por fim, através das trajetórias de equilíbrio analisadas, percebe-se grande equivalência entre os resultados obtidos pela presente formulação e os apresentados por outros autores da literatura, evidenciando a eficiência da formulação para o elemento de viga unificado e a estratégia de solução não linear empregada, bem como a ausência do fenômeno de travamento por cisalhamento.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Apresentam-se algumas sugestões para futuras linhas de pesquisa, a fim de abordar aspectos não estudados no presente trabalho.

- Implementação de algoritmos de elementos de viga unificados para análises não lineares de pórticos espaciais, possibilitando a análise de coberturas de grandes vãos, edifícios de grande altura, etc.;
- Efeitos da não linearidade física do material (plasticidade);
- Análise de instabilidade dinâmica;
- Implementação de estratégias numéricas capazes de obter trajetórias secundárias de equilíbrio;

- Comparação entre as respostas obtidas pelo programa *co_rotating_2Dbeam.f90* com as respostas fornecidas por softwares comerciais;
- Considerações de outras seções transversais, tornando possível o uso de seções comerciais correntes;
- Desenvolvimento de interfaces para as fases de pré e pós-processamento, auxiliando na visualização e interpretação dos resultados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Almroth, B.O., Brogan, F., Stanley, G.M., (1979), Structural analysis of general shells, Volume II. User's instructions for STAGSC-1, Lockheed Report LMSC-D633873, Lockheed Palo Alto Research Laboratory, Palo Alto – CA, USA.
- Argyris, J.H., (1965), Continua and discontinua, Proceedings 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, Air Force Institute of Tecnology, Dayton, Ohio-USA.
- Assan, A.E., (2003), Método dos elementos finitos: primeiros passos, 2ª ed., Campinas, SP: Editora da Unicamp.
- Battini, J.N., (2002), Co-rotational beam elements in instability problems, Ph.D Thesis, Royal Institute of Tecnology – Departament of Mechanics, Stockholm / Sweeden.
- Belo, I.M., (2009), Desenvolvimento da formulação co-rotacional em elementos finitos de casca para análise hiperelástica., Tese de doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina-SC, Brasil.
- Belytschko, T. & Glaum, L., (1979), Application of high order corotational stretch theories to nonlinear finite element analysis. Computers and Structures, 10, 175-182.
- Belytschko, T. & Hsieh, B.J., (1973), Non-linear transient finite element analysis with convected co-coordinates, Int. J. Numer. Methods in Engineering, Vol 7, pp 255-271.
- Bergan, P.G. & Horrigmoe, G., (1976), Incremental variational principles and finite element models for nonlinear problems, Computer Methods in Applied Mech. Engineering, Vol. 7, pp 201-217.
- Bergan, P.G. & Nygard, M.K., (1989), Nonlinear shell analysis using Free Formulation finite elements, Finite Element Methods for Nonlinear Problems, Springer Verlag, Berlim, pp 317-338.
- Bergan, P.G., (1980), Solution algorithms for non-linear structural problems, Computers & Structures, Vol. 12, pp 497-509.

- Cardona, A., (1989), An integrated approach to mechanism analysis, Ph.D thesis, University of Liege, Belgium.
- Cichón, C., (1984), Large displacements in plane analysis of elastic-plastic frames, Computers & Structures, Vol. 19, pp 737-745.
- Cole, G., (1990), Consistent co-rotational formulation for geometrically nonlinear beam elements with special reference to large rotations, Ph.D thesis, School of Civil Engineering – Kingston Polytechnic, UK.
- Cortivo, N., (2004), Análise de estruturas de cascas finas utilizando-se uma formulação co-rotacional, um modelo elastoplástico por camadas e o elemento finito ANDES, Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Universidade de Brasília/DF, Brasil.
- Crisfield, M.A. & Moita, G.F., (1996), A unified co-rotational framework for solids , shells and beams, International Journal of Solids and Structures, Vol. 33, No 20-22, pp 2969-2992.
- Crisfield, M.A., (1990), A consistent co-rotational formulation for non-linear three-dimensional beam elements, Computer Methods Appl. Mech. Engineering, Vol. 81, pp 131-150.
- Crivelli, L.A., (1991), A Total-Lagrangian beam element for analysis of nonlinear space structures, Ph.D. Thesis, Department of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado, Colorado.
- Da Silva, W.A., (2013), Análise Dinâmica Não-Linear de Pórticos Espaciais Utilizando a Formulação Corrotacional. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD-A/11, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 176p.
- De Souza, R.M., (2000), Force –Based Finite Element for Large Displacement Inelastic Analysis of Frames, Ph.D Dissertation, University of California at Berkeley, Berkeley, CA, USA.
- Faria, H.P., (1998), Análise não-linear de instabilidade elástica de pórticos planos., Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília – UnB / DF, Brasil.

- Felippa, C.A., (2001), Non-linear finite element methods / NFEM, Lecture notes for the course non-linear finite element methods, Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder/USA.
- Fraeijns de Veubeke, B.M., (1976), The dynamics of flexible bodies, *Int. J. Engineering Science*, Pergamon Press, 895-913.
- Haugen, B., (1994), Buckling and Stability Problems for Thin Shell Structures Using High Performance Finite Elements, Ph.D Thesis, University of Colorado, USA.
- Hibbeler, R. C., (2010), Resistência dos Materiais, 7^a ed., São Paulo: Pearson Prentice Hall.
- Hsiao, K.M. & Hou, F.Y., (1987), Nonlinear finite element analysis of elastic frames, *Computers & Structures*, Vol. 26, pp 693-701.
- Hsiao, K.M., Jann, H., Chen, Y.R., (1987), A corotational procedure that handles large rotations of spacial beam structures, *Computers & Structures*, Vol. 27, pp 769-781.
- Hughes, T.J.R., (1997), The finite element method, linear static and dynamic finite element analysis, Dover.
- Ibrahimbegovic, A., (1995), On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: Three-dimensional curved beam elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 122, pp 11-26.
- Iura, M., Suetake, Y., Atluri, S.N., (2003), Accuracy of co-rotational formulation for 3D Timoshenko's beam, *Computer Modeling in Engineering*.
- Jenkins, J. A., Seitz, T. B., Przemieniecki, J. S., (1966), Large deflections of diamond-shaped frames, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 2, pp. 591-603.
- Kondoh, K., Atluri, N., (1987), Large-deformation, elasto-plastic analysis of frames under nonconservative loading, using explicitly derived tangent stiffness based on assumed stresses. *Comp. Mech.*, 2:1-25
- Krenk, S., (2001), Mechanics and analysis of beams, columns and cables, 2nd. Edition, Springer.

- Krenk, S., (2009), Non-linear modeling and analysis of solids and structures, Cambridge University Press, 2009.
- Li, Z.X., (2007), A co-rotational formulation for 3D beam element using vectorial rotational variables, *Computational Mechanics*, pp 309-322.
- Marques, S.P.C., (1990), Análise não linear física e geométrica de pórticos espaciais., Dissertação de Mestrado, UFRGS, Porto Alegre/RS/Brasil.
- Martha, L. F., (2010), Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos, Rio de Janeiro: Elsevier.
- Mattiasson, K., (1981), Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp 145-153.
- Meek, J.L., Xue, Q., (1996), A study on the instability problems for 2D-frames. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 136, pp. 347-361.
- Menin, R.C.G., (2006), Aplicação da descrição co-rotacional na análise não-linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas, Tese de doutorado, E.TD-004^a/06, Brasília : ENC/FT/UnB.
- Nour-Omid, B. & Rankin, C.C., (1991), Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors, *Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 93, pp. 353-384.
- Pacoste, C. & Eriksson, A., (1996), Beam element in instability problems, *Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 144, pp 163-197.
- Pacoste, C., (1998), Co-rotational flat facet triangular elements for shell instability analyses, *Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 156, pp 75-110.
- Park, M.S., Lee, B.C., (1996), Geometrically non-linear and elastoplastic three-dimensional shear flexible beam element of von-Mises-type hardening material. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 39:383-408.

- Peng, X. & Crisfield, M.A., (1992), A consistent co-rotational formulation for shells using the constant stress / constant moment triangle, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, pp 1829-1847.
- Rankin, C.C. & Brogan, F.A., (1986), An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations, *ASME J. Pressure Vessel Technology*, Vol. 108, pp 165-174.
- Rankin, C.C. & Nour-Omid, B., (1988), The use of projectors to improve finite element performance, *Computers & Structures*, Vol. 30, pp 257-267.
- Rodrigues, P.F.N., (2000), Ferramentas numéricas para a análise não-linear física e geométrica de estruturas reticuladas na exploração de petróleo offshore., Tese de Doutorado, COOPE : Rio de Janeiro, Brasil.
- Schweizerhof, K. & Wriggers, P., (1986), “Consistent linearization for path following methods in nonlinear F.E. Analysis”, *Computer Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 59, pp 261-279, North-Holland.
- Silva, S.S., (2011), Análise não linear de pórticos planos utilizando uma formulação co-rotacional e plasticidade por camadas, *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.DM-002^a/11*, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 164p.
- Simo, J.C. & Vu-Quoc, L., (1986), A three-dimensional finite strain rod model. Part 2: Computational Aspects, *Computer Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 58, pp 79-116.
- Truesdell, C., (1966), *Continuum mechanics I: the mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics*, Gordon & Breach, New York, USA.
- Wagner, W., (1991), A path following algorithm with quadratic predictor, *Computers & Structures*, Vol. 39, pp 339-348.
- Warren, J.E., (1997), Nonlinear stability analysis of frame-type structures with random geometric imperfections using a total-lagrangian finite element formulation, *Doctoral Thesis*, Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Wempner, G.A., (1969), Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells, *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 5, pp 117-153.

- Williams, F. W., (1964), An approach to the non-linear behavior of the members of a rigid jointed plane framework with finite deflections, *Quart. Journ. Mech. And Applied Math*, Vol XVII, Pt 4, pp 451-469.
- Wood, R. D. and Zienkiewicz, O. C., (1976), Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells. *Computers & Structures*, 7, 725-735.
- Wriggers, P., Simo, J. C., (1990), A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30, 155-176.