

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Um estudo da dinâmica de duas partículas clássicas carregadas

Rodrigo Ribeiro da Silva
Orientador: Prof. Dr. Annibal Dias de Figueiredo Neto

Brasília
16 de fevereiro de 2016

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

RSI586 Ribeiro da Silva, Rodrigo
e Um estudo da dinâmica de duas partículas clássicas
carregadas / Rodrigo Ribeiro da Silva; orientador
Annibal Dias de Figueiredo Neto. -- Brasília, 2016.
132 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Física) --
Universidade de Brasília, 2016.

1. Sistemas Dinâmicos . I. Dias de Figueiredo
Neto, Annibal , orient. II. Título.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus pela vida e pelas oportunidades que me foram apresentadas.

Ao professor Annibal, pela orientação, paciência, disponibilidade de sanar minhas dúvidas e a motivação pelo trabalho desenvolvido.

A minha mãe Lara, meu pai Luiz e a minha avó Cleuzeni que são os meus pilares e agradeço por tudo que eles já fizeram por mim, pois o que eu sou hoje é o reflexo do amor incondicional e da dedicação deles. A Edineuza que é uma segunda mãe que aconselha e protege. A minha irmã Ana pelo carinho e pela sua alegria contagiante.

A Lydiane pela amizade e incrível namorada que tenho. Amorosa e companheira em todos os momentos.

Aos meus amigos (Isis, Pedro, Quintiliano, Leonardo, Gabriel, Diana , Patrícia, Lucas Costa, Carol, Natan, Arthur, Deborah, Moises, Hailleen, Waldenor, Solano, ...) por estarem na minha vida e por serem pessoas tão maravilhosas e divertidas.

A Cnpq pelo apoio financeiro.

Resumo

A partir dos campos eletromagnéticos obtidos dos potenciais de Liénard-Wiechert gerados por uma carga pontual elétrica em movimento, construímos as equações de movimento para duas partículas carregadas. Para construir as equações de movimento usamos a força de Lorentz, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, onde \mathbf{E} e \mathbf{B} são os campos elétrico e magnético respectivamente e \mathbf{p} é o momento relativístico. Fazendo um reescalonamento temporal e espacial obtemos um sistema de equações diferenciais que depende de apenas um parâmetro: a razão das massas. Com a dinâmica do sistema dependendo apenas da razão das massas e das condições iniciais, podemos simular um sistema elétron-pósitron e qualquer outro sistema de duas cargas elétricas pontuais. Para cada sistema podemos analisar a aceleração, velocidade e posição das partículas, a aceleração relativa, velocidade relativa e posição relativa das partículas bem como a do centro de massa e o tempo de decaimento. Analisando as equações do movimento em coordenadas polares deduzimos uma expressão para o tempo de decaimento das partículas, o qual depende do raio inicial e da razão entre as massas.

Abstract

From the electromagnetic fields obtained from the Liénard-Wiechert potentials generated by an electric point charge in motion, we build the equations of motion for two charged particles. To build the equations of motion we use the Lorentz force, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, where \mathbf{E} and \mathbf{B} are the electric and magnetic fields respectively and \mathbf{p} is the relativistic momentum. Making a temporal and spatial rescaling we obtain a system of differential equations which depends on only one parameter: the ratio of the masses. With the dynamics of the system depending only on the ratio of the masses and the initial conditions, we can simulate an electron-positron system and any other system two point electric charges. For each system we can analyze the acceleration, velocity and position of the particles, the relative acceleration, relative velocity and relative position of the particles as well as the center of mass and the decay time. Analyzing the equations of motion in polar coordinates we deduce an expression for the decay time of the particles, which depends on the initial radius and the ratio of the masses.

Sumário

Introdução	2
I Campos Eletromagnéticos	3
1.1 Potenciais Escalares e Vetoriais e Calibre de Lorentz	3
1.2 Potenciais e Campos de Liénard-Wiechert	6
II Equação de Movimento Para Duas Partículas Pontuais	12
2.1 Formulação do Problema	12
2.2 Reescalamento das Equações	16
2.3 Coordenadas do Centro de Massa e Relativa	23
III Solução das Equações de Movimento	25
3.1 Análise do Sistema em Função de η	25
3.2 Movimento do Centro de Massa	47
3.3 Condição Inicial Diferente do Movimento Circular	54
IV Solução Analítica do Tempo de Decaimento	71
4.1 Tempo de Decaimento	71
4.2 Reescalamento do Momento Angular	76
4.3 Solução do Tempo de Decaimento	80
V Potência Irradiada por uma Carga Acelerada	85
5.1 Vetor de Poynting e Potência de Radiação	85
5.2 Radiação Emitida em Baixas Velocidades	87
VI Conclusão	91
6.1 Resultados e Perspectivas	91
Apêndice A Eletromagnetismo	92
1.1 Função de Green para as equações de Onda	92
1.2 Cálculo dos campos de Lienard-Wiechert	99
Apêndice B Contas do capítulo II	108
2.1 Equação de Movimento	108
2.2 Coordenada relativa e de centro de massa	112
2.3 Coordenadas polares	114
Apêndice C Código Fonte	118
3.1 Códigos para solução numérica	118

Lista de Figuras

1.2.1 Carga pontual em movimento	8
2.1.1 Partículas Pontuais em Movimento	12
3.1.1 Momento relativístico e clássico	28
3.1.2 Posição das partículas 1 e 2 - $\eta = 1$. As coordenadas x e y estão nas unidades reescaladas. O movimento em espiral ocorre no sentido anti-horário.	29
3.1.3 Velocidade das partículas 1 e 2 - $\eta = 1$. As velocidades V_x e V_y estão nas unidades reescaladas.	30
3.1.4 Aceleração das partículas 1 e 2 - $\eta = 1$. As acelerações A_x e A_y estão nas unidades reescaladas.	30
3.1.5 Posição relativa - $\eta = 1$. As coordenadas x e y representam a posição relativa das partículas que estão nas unidades reescaladas. O movimento em espiral ocorre no sentido anti-horário.	31
3.1.6 Velocidade relativa - $\eta = 1$. Os termos v_x e v_y são as velocidades relativas das partículas que estão nas unidades reescaladas.	32
3.1.7 Aceleração relativa - $\eta = 1$. Os termos a_x e a_y são as acelerações relativas das partículas que estão nas unidades reescaladas.	32
3.1.8 Módulo da velocidade das partículas 1 e 2 em função do tempo para $\eta = 1$. Os termos V e t estão nas unidades reescaladas.	33
3.1.9 Posição relativa das partículas em função do tempo para $\eta = 1$. Os termos r e t estão nas unidades reescaladas.	33
3.1.10 Posição das partículas 1 e 2 - $\eta = 2$. As coordenadas x e y estão nas unidades reescaladas. O movimento em espiral ocorre no sentido anti-horário.	34
3.1.11 Velocidade das partículas 1 e 2 - $\eta = 2$. As velocidades V_x e V_y estão nas unidades reescaladas.	35
3.1.12 Aceleração das partículas 1 e 2 - $\eta = 2$. As acelerações A_x e A_y estão nas unidades reescaladas.	35
3.1.13 Posição relativa - $\eta = 2$. As coordenadas x e y representam a posição relativa das partículas que estão nas unidades reescaladas. O movimento em espiral ocorre no sentido anti-horário.	36
3.1.14 Velocidade relativa - $\eta = 2$. Os termos v_x e v_y são as velocidades relativas das partículas que estão nas unidades reescaladas.	36
3.1.15 Aceleração relativa - $\eta = 2$. Os termos a_x e a_y são as acelerações relativas das partículas que estão nas unidades reescaladas.	37
3.1.16 Posição do centro de massa - $\eta = 2$. As coordenadas x e y representam a posição do centro de massa nas unidades reescaladas.	37
3.1.17 Velocidade do centro de massa - $\eta = 2$. Os termos V_x e V_y são as velocidades do centro de massa que estão nas unidades reescaladas.	39

3.1.18	Aceleração do centro de massa - $\eta = 2$. Os termos A_x e A_y são as acelerações do centro de massa que estão nas unidades reescaloadas. . . .	39
3.1.19	Módulo da velocidade das partículas 1 e 2 em função do tempo para $\eta = 2$. Os termos V e t estão nas unidades reescaloadas.	40
3.1.20	Posição relativa das partículas em função do tempo para $\eta = 2$. Os termos r e t estão nas unidades reescaloadas.	40
3.1.21	Posição das partículas 1 e 2 - $\eta = 10$. As coordenadas x e y estão nas unidades reescaloadas. O movimento em espiral ocorre no sentido anti-horário.	41
3.1.22	Velocidade das partículas 1 e 2 - $\eta = 10$. As velocidades V_x e V_y estão nas unidades reescaloadas.	42
3.1.23	Aceleração das partículas 1 e 2 - $\eta = 10$. As acelerações A_x e A_y estão nas unidades reescaloadas.	42
3.1.24	Posição relativa - $\eta = 10$. As coordenadas x e y representam a posição relativa das partículas que estão nas unidades reescaloadas. O movimento em espiral ocorre no sentido anti-horário.	43
3.1.25	Velocidade relativa - $\eta = 10$. Os termos v_x e v_y são as velocidades relativas das partículas que estão nas unidades reescaloadas.	43
3.1.26	Aceleração relativa - $\eta = 10$. Os termos a_x e a_y são as acelerações relativas das partículas que estão nas unidades reescaloadas.	44
3.1.27	Posição do centro de massa - $\eta = 10$. As coordenadas x e y representam a posição do centro de massa nas unidades reescaloadas.	44
3.1.28	Velocidade do centro de massa - $\eta = 10$. Os termos V_x e V_y são as velocidades do centro de massa que estão nas unidades reescaloadas. . . .	45
3.1.29	Aceleração do centro de massa - $\eta = 10$. Os termos A_x e A_y são as acelerações do centro de massa que estão nas unidades reescaloadas. . . .	45
3.1.30	Módulo da velocidade das partículas 1 e 2 em função do tempo para $\eta = 10$. Os termos V e t estão nas unidades reescaloadas.	46
3.1.31	Posição relativa das partículas em função do tempo para $\eta = 10$. Os termos r e t estão nas unidades reescaloadas.	46
3.2.32	Posição da partícula 1 e 2 para a 1ª condição inicial.	47
3.2.33	Posição da partícula 1 e 2 para a 2ª condição inicial.	48
3.2.34	Movimento do centro de massa para 1ª e a 2ª condição inicial - $\eta = 2$. .	49
3.2.35	Posição da partícula 1 e 2 para a 3ª condição inicial.	50
3.2.36	Posição da partícula 1 e 2 para a 4ª condição inicial.	51
3.2.37	Movimento do centro de massa para 3ª e a 4ª condição inicial - $\eta = 2$. .	51
3.2.38	Movimento do centro de massa - $\eta = 2$	52
3.2.39	Movimento do centro de massa para 1ª e a 2ª condição inicial - $\eta = 10$.	52
3.2.40	Movimento do centro de massa para 1ª e a 2ª condição inicial - $\eta = 10$. .	53
3.2.41	Movimento do centro de massa - $\eta = 10$	53
3.3.42	Posição das partículas 1 e 2 - $\eta = 1$. As coordenadas x e y estão nas unidades reescaloadas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	55
3.3.43	Velocidade das partículas 1 e 2 - $\eta = 1$. As velocidades V_x e V_y estão nas unidades reescaloadas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	55
3.3.44	Aceleração das partículas 1 e 2 - $\eta = 1$. As acelerações A_x e A_y estão nas unidades reescaloadas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	56
3.3.45	Posição relativa - $\eta = 1$. As coordenadas x e y representam a posição relativa das partículas que estão nas unidades reescaloadas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	56

3.3.46	Velocidade relativa - $\eta = 1$. Os termos v_x e v_y são as velocidades relativas das partículas que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	57
3.3.47	Aceleração relativa - $\eta = 1$. Os termos a_x e a_y são as acelerações relativas das partículas que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	57
3.3.48	Módulo da velocidade das partículas 1 e 2 em função do tempo para $\eta = 1$. Os termos V e t estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	58
3.3.49	Posição relativa das partículas em função do tempo para $\eta = 1$. Os termos r e t estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	58
3.3.50	Posição das partículas 1 e 2 - $\eta = 2$. As coordenadas x e y estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	59
3.3.51	Velocidade das partículas 1 e 2 - $\eta = 2$. As velocidades V_x e V_y estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	59
3.3.52	Aceleração das partículas 1 e 2 - $\eta = 2$. As acelerações A_x e A_y estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	60
3.3.53	Posição relativa - $\eta = 2$. As coordenadas x e y representam a posição relativa das partículas que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	60
3.3.54	Velocidade relativa - $\eta = 2$. Os termos v_x e v_y são as velocidades relativas das partículas que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	61
3.3.55	Aceleração relativa - $\eta = 2$. Os termos a_x e a_y são as acelerações relativas das partículas que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	61
3.3.56	Posição do centro de massa - $\eta = 2$. As coordenadas x e y representam a posição do centro de massa nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	62
3.3.57	Velocidade do centro de massa - $\eta = 2$. Os termos V_x e V_y são as velocidades do centro de massa que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	62
3.3.58	Aceleração do centro de massa - $\eta = 2$. Os termos A_x e A_y são as acelerações do centro de massa que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	63
3.3.59	Módulo da velocidade das partículas 1 e 2 em função do tempo para $\eta = 2$. Os termos V e t estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	63
3.3.60	Posição relativa das partículas em função do tempo para $\eta = 2$. Os termos r e t estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	64
3.3.61	Posição das partículas 1 e 2 - $\eta = 10$. As coordenadas x e y estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	64
3.3.62	Velocidade das partículas 1 e 2 - $\eta = 10$. As velocidades V_x e V_y estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	65
3.3.63	Aceleração das partículas 1 e 2 - $\eta = 10$. As acelerações A_x e A_y estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	65

3.3.64	Posição relativa - $\eta = 10$. As coordenadas x e y representam a posição relativa das partículas que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	66
3.3.65	Velocidade relativa - $\eta = 10$. Os termos v_x e v_y são as velocidades relativas das partículas que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	66
3.3.66	Aceleração relativa - $\eta = 10$. Os termos a_x e a_y são as acelerações relativas das partículas que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	67
3.3.67	Posição do centro de massa - $\eta = 10$. As coordenadas x e y representam a posição do centro de massa nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	67
3.3.68	Velocidade do centro de massa - $\eta = 10$. Os termos V_x e V_y são as velocidades do centro de massa que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	68
3.3.69	Aceleração do centro de massa - $\eta = 10$. Os termos A_x e A_y são as acelerações do centro de massa que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	68
3.3.70	Módulo da velocidade das partículas 1 e 2 em função do tempo para $\eta = 10$. Os termos V e t estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	69
3.3.71	Posição relativa das partículas em função do tempo para $\eta = 10$. Os termos r e t estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.	69
4.1.1	Posição relativa das partículas em função do tempo para diferentes valores de η com raio inicial $r_0 = 10000$. Os termos r e T estão nas unidades reescaladas.	73
4.1.2	Posição relativa das partículas em função do tempo para diferentes valores de η com raio inicial $r_0 = 20000$. Os termos r e T estão nas unidades reescaladas.	73
4.1.3	Tempo de decaimento em função de η	74
4.1.4	Partículas m_1 e m_2	75
4.2.5	Partículas m_1 e m_2 em movimento no plano xy	77
4.3.6	Posição relativa das partículas em função do tempo para $\eta = 1$ com a condição inicial $V_0 \neq 0$ e $V_0 = 0$. Os termos r e t estão nas unidades reescaladas.	81
4.3.7	Posição relativa das partículas em função do tempo para $\eta = 2$ com a condição inicial $V_0 \neq 0$ e $V_0 = 0$. Os termos r e t estão nas unidades reescaladas.	81
4.3.8	Posição relativa das partículas em função do tempo para $\eta = 10$ com a condição inicial $V_0 \neq 0$ e $V_0 = 0$. Os termos r e t estão nas unidades reescaladas.	82
4.3.9	Solução analítica para o tempo de decaimento	84
5.2.1	Potência emitida - $\eta = 1$	88
5.2.2	Potência emitida - $\eta = 2$	89
5.2.3	Potência emitida - $\eta = 10$	89
5.2.4	Potência emitida - $\eta = 10$	90

Capítulo

Introdução

A partir do modelo atômico de Bohr para o átomo de hidrogênio no estado fundamental, temos que o elétron move-se em uma órbita circular de raio $a_0 = 0.53 \times 10^{-10} m$ ao redor do próton. Como o elétron é acelerado uma análise clássica sugere que ele irá continuamente irradiar energia, e, portanto, o raio da órbita iria diminuir com o tempo[1]. O caso em que a órbita do elétron pode ser considerado quase circular é uma situação simples o bastante e também corresponde bem ao regime conhecido das trajetórias clássicas do elétron irradiando. Devido à emissão de radiação clássica, qualquer órbita limitada, que é inicialmente elíptica, torna-se quase circular enquanto o elétron espirala em direção ao núcleo [3],[4] e [5].

Sabemos que pelo modelo de Schrödinger o átomo de hidrogênio no estado fundamental é estável, portanto não observamos o colapso do elétron. Entretanto, se desconsiderarmos o modelo de Schrödinger e fizermos uma análise clássica qual seria o tempo de decaimento do elétron? Não somente esta questão surge, mas também podemos nos perguntar sobre a dinâmica destas duas partículas. E se considerarmos outras duas partículas carregadas que tenham massas diferentes das do próton e do elétron?

O objetivo deste trabalho é fazer uma análise da dinâmica de duas partículas clássicas carregadas em um regime não relativístico. A construção desse sistema apresenta algumas dificuldades na integração numérica que pode levar a sérios problemas: (i) Como tratar o tempo de retardo nas equações de movimento para definir órbitas físicas regulares e (ii) evitar soluções explosivas [2].

No capítulo (I) faremos uma breve revisão das equações de Maxwell para construir os potenciais de Liénard-Wichert, uma vez que os campos eletromagnéticos gerados por uma carga carregada em movimento são obtidas a partir destes potenciais. No capítulo (II) utilizaremos os campos calculados no capítulo (I) para construir as equações de movimento para duas partículas pontuais carregadas. Uma vez obtido o sistema de equações diferenciais que descreve a dinâmica das duas cargas, realizaremos uma transformação das escalas temporal e espacial de modo que as equações de movimento dependam apenas de um parâmetro: a razão das massas das partículas. No capítulo (III) faremos um estudo analítico e numérico das equações e assim obter a aceleração, velocidade e posição das partículas, tempo de decaimento, posição, velocidade, aceleração relativa e do centro de massa. No capítulo (IV) encontraremos uma expressão para descrever o tempo de decaimento em função do raio inicial e a razão das massas das partículas. No capítulo (V) iremos tratar da radiação emitida pelas partículas e por fim no capítulo (VI), iremos fazer as considerações finais do trabalho bem como as perspectivas futuras.

Capítulo I

Campos Eletromagnéticos

Neste capítulo revisaremos alguns conceitos do eletromagnetismo e usaremos os conceitos estabelecidos para obter a equação diferencial desejada para o estudo do problema.

1.1 Potenciais Escalares e Vetoriais e Calibre de Lorentz

As equações de Maxwell na forma,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.1.4)$$

formam um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem parciais e acopladas. Para casos simples, elas podem ser resolvidas e obtemos os campos elétrico e magnético de uma distribuição de carga $\rho(\mathbf{r}, t)$ e uma distribuição de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$. Porém, a sua resolução para um caso geral não é tão simples, ou seja, não é uma tarefa fácil determinar $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ dados $\rho(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ para um caso geral. Para o caso estático, eletrostático e magnetostático, as leis de Coulomb e Biot-Savart podem ser aplicadas e algumas técnicas podem ser utilizadas para resolver o problema, entretanto se analisarmos um caso geral, em que todas as grandezas físicas relevantes ao problema podem depender do tempo, aquelas duas equações, que são válidas para a condição estática, não podem ser empregadas na forma usual em que conhecemos. Precisamos então estender a validade delas para o caso geral.

Nos problemas de eletrostática e magnetostática utiliza-se o conceito de potencial escalar e vetorial para a resolução desses problemas. Da mesma forma exploraremos o conceito de potencial escalar e potencial vetorial para o caso geral.

Seja a equação (1.1.2)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

que estabelece que o fluxo magnético através de uma superfície fechada é zero. Quando o divergente de um campo vetorial é nulo, ele pode ser escrito como sendo o rotacional de outro campo vetorial, conforme a relação

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0.$$

Assim, podemos definir um campo vetorial \mathfrak{A} de modo que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathfrak{A}. \quad (1.1.5)$$

O campo \mathfrak{A} é o potencial vetor magnético e devemos lembrar que $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathbf{r}, t)$. Pela equação (1.1.3),

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

o campo elétrico não pode ser escrito simplesmente como $\mathbf{E} = -\nabla V$, que é verdade somente para o caso estático quando $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Utilizando o potencial vetor magnético na equação (1.1.3), podemos reescrevê-la da seguinte forma

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathfrak{A}), \\ \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Agora temos uma grandeza cujo rotacional é nulo, portanto podemos escrever essa grandeza como o gradiente de um escalar.

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

e então,

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}. \quad (1.1.6)$$

Assim temos os campos elétrico e magnético em termo dos potenciais. Considerando a equação (1.1.1),

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

e da expressão (1.1.6), temos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(-\nabla V - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ -\nabla \cdot (\nabla V) - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ -\nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathfrak{A}) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathfrak{A}) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Partindo agora da lei de Ampère-Maxwell (1.1.4),

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

e usando (1.1.5) e (1.1.6),obtemos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathfrak{A}) = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla V - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right).$$

Aplicando a identidade $\nabla \times (\nabla \times \mathfrak{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathfrak{A}) - \nabla^2 \mathfrak{A}$ na equação anterior obteremos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \mathfrak{A}) - \nabla^2 \mathfrak{A} &= \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla V) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right) \\ \nabla(\nabla \cdot \mathfrak{A}) + \nabla \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \nabla^2 \mathfrak{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla^2 \mathfrak{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathfrak{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) &= -\mu_0 \mathbf{J} \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

essa é a equação derivada da lei de Ampère-Maxwell.

As equações (1.1.7) e (1.1.8) podem ser simplificadas mediante uso de transformações de gauge (ou transformação de calibre), uma vez que as expressões (1.1.5) e (1.1.6) não definem univocamente um potencial escalar V e um potencial vetorial \mathfrak{A} .

Podemos analisar isto observando novamente a equação (1.1.5)

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathfrak{A},$$

e utilizando a seguinte relação

$$\nabla \times (\nabla \theta) = 0.$$

Portanto, se considerarmos

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \nabla \theta, \quad (1.1.9)$$

temos que o campo magnético correspondente será

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= \nabla \times \mathfrak{A}' \\ \mathbf{B}' &= \nabla \times (\mathfrak{A} + \nabla \theta) \\ \mathbf{B}' &= \underbrace{\nabla \times \mathfrak{A}}_{\mathbf{B}} + \underbrace{\nabla \times (\nabla \theta)}_{=0} \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B}, \end{aligned}$$

portanto o campo magnético permanece invariante sob transformação (1.1.9). Olhemos agora o campo elétrico (1.1.6),

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$$

submetido a transformação (1.1.9)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\nabla V' - \frac{\partial \mathfrak{A}'}{\partial t}, \\ &= -\nabla V' - \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{A} + \nabla \theta), \\ &= -\nabla V' - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \theta), \\ &= -\nabla \left(V' + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Se definirmos a transformação

$$V' = V - \frac{\partial\theta}{\partial t}, \quad (1.1.10)$$

ficamos com

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\nabla \left(V - \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial t} \right) - \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{E}' &= -\nabla V - \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} = \mathbf{E}, \end{aligned}$$

tornando o campo elétrico também invariante. As transformações de calibre (1.1.9) e (1.1.10) deixam os campos eletromagnéticos invariantes sob transformação de calibre. Dentre várias transformações de calibre analisaremos o calibre de Lorentz que é de grande importância para chegarmos ao nosso objetivo.

Para determinar o calibre de Lorentz, primeiro escolhemos a divergência do potencial vetor magnético de modo a desacoplar a equação (1.1.7) e (1.1.8). Assim no calibre de Lorentz escolhemos como

$$\nabla \cdot \mathfrak{A} = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Com isso, temos

$$\nabla^2 V - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1.11)$$

e

$$\nabla^2 \mathfrak{A} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (1.1.12)$$

Definindo o operador D'Alembertiano como

$$\square = \nabla^2 - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

podemos reescrever as equações acima da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \square V &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \square \mathfrak{A} &= -\mu_0 \mathbf{J}. \end{aligned}$$

As duas equações acima são equações da onda, sendo uma para o potencial escalar e a outra para o potencial vetor magnético.

1.2 Potenciais e Campos de Liérnad-Wiechert

Agora temos como objetivo resolver as equações de onda,

$$\begin{aligned} \nabla^2 V - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \mathfrak{A} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J}, \end{aligned}$$

para obter os potenciais $V(\mathbf{r}, t)$ e $\mathfrak{A}(\mathbf{r}, t)$ associados às distribuições de carga $\rho(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$, respectivamente e, a partir deles, determinar os campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Sabemos que no caso estático as equações (1.1.11) e (1.1.12) são

$$\begin{aligned}\nabla^2 V &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla^2 \mathfrak{A} &= -\mu_0 \mathbf{J},\end{aligned}$$

cujas soluções são

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV \quad (1.2.13)$$

$$\mathfrak{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV. \quad (1.2.14)$$

No caso estático as fontes dos campos e potenciais são fixos no tempo. No caso geral elas não são constantes no tempo, de modo que as variações temporais nas fontes vão produzir alterações nos potenciais por eles gerados. Temos as cargas localizadas na posição \mathbf{r}' e o ponto de observação dos potenciais localiza-se na posição \mathbf{r} , a "informação" de que houve uma alteração na fontes deve percorrer uma distância $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$. Como há uma diferença de tempo entre o instante em que as fontes emitem uma "informação" da posição \mathbf{r}' e o instante em que ela é recebida na posição \mathbf{r} , definimos que este valor é dado da seguinte maneira

$$t' = \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}{c}. \quad (1.2.15)$$

Os potenciais observados no ponto \mathbf{r} no instante do tempo t não dependem instantaneamente da configuração das cargas e das correntes no tempo t , mas sim de como elas estavam num instante de tempo t_r anterior, quando a "informação" foi emitida. Esse tempo t_r , chamado de tempo retardado, é dado por

$$t_r = t - t' = t - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}{c}. \quad (1.2.16)$$

Com o uso do tempo retardado, as soluções das equações (1.1.11) e (1.1.12) tornam-se, mediante um extensão natural de (1.2.13) e (1.2.14),

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV \quad (1.2.17)$$

$$\mathfrak{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV. \quad (1.2.18)$$

Neste caso ρ e \mathbf{J} são determinados no instante de tempo retardado t_r , por isso os potenciais acima são chamados de potenciais retardados.

Para a construção destes potenciais utilizamos simplesmente uma construção lógica, entretanto não deduzimos e muito menos resolvemos as equações diferenciais relacionadas a elas. No apêndice A na seção (1.1) é estabelecido um modo de resolução utilizando as funções de Green. Consideremos uma partícula de carga q movendo-se no espaço de modo que a sua posição atual seja descrita por $\mathbf{r}_q(t)$, como mostra a figura abaixo.

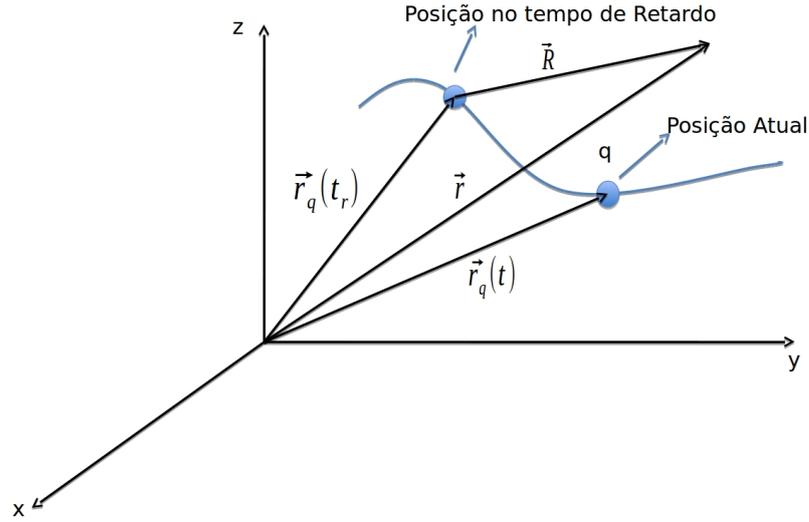


Figura 1.2.1: Carga pontual em movimento

A posição no tempo de retardo é dado por $\mathbf{r}_q(t_r)$ e o ponto onde será determinado os potenciais de retardo é indicado por \mathbf{r} , que independe do tempo t . O vetor \mathbf{R} representa a diferença entre \mathbf{r} e $\mathbf{r}_q(t_r)$, isto é,

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t_r)$$

e por consequência, o tempo de retardo é determinado por meio da expressão

$$R = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t_r)\| = c(t - t_r). \quad (1.2.19)$$

A carga da partícula é dado por

$$q = \int_V \rho(\mathbf{r}_q(t), t_r) dV,$$

em que $\rho(\mathbf{r}_q(t), t_r)$ é a densidade de carga calculada no tempo retardado t_r . Se a partícula não tivesse em movimento, a integral acima seria calculada sobre toda a distribuição de cargas num único instante de tempo, e teríamos o valor da carga normal. Como a partícula está em movimento, as contribuições de diferentes partes da distribuição de cargas são calculadas em tempos retardados, $t_r = t - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t_r)\|}{c}$, diferentes e isso altera o valor da carga total observada por um determinado fator geométrico.

A dilatação geométrica produzida pelo movimento de um objeto, com velocidade \mathbf{v} quando é visto na posição \mathbf{r}' por um observador situado em \mathbf{r} é

$$L' = L \left[1 - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right]^{-1},$$

onde L é o comprimento do objeto em movimento e L' é o comprimento com que ele é percebido. Os comprimentos perpendiculares à direção do movimento não são alterados pelo fator acima, pois não há movimento nessas direções. Portanto, o volume do objeto é alterado por um fator

$$V' = \frac{V}{1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}$$

onde

$$\hat{R} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \text{ e } \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}.$$

Assim, o elemento de volume de um corpo em movimento torna-se

$$dV' = \frac{dV}{1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}, \quad (1.2.20)$$

portanto a carga da partícula é dado por meio de

$$\int_V \rho(\mathbf{r}_q(t), t_r) \frac{dV}{1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}.$$

Para realizar a integral, é preciso escrever a densidade de carga para uma carga pontual. Nesse caso, utilizamos uma função delta de Dirac,

$$\rho(\mathbf{r}_q(t), t_r) = q\delta(\mathbf{r}_q(t) - \mathbf{r}_q(t_r)) \quad (1.2.21)$$

então a carga é

$$\int_V \frac{q\delta(\mathbf{r}_q(t) - \mathbf{r}_q(t_r))}{1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} dV = \frac{q}{1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}$$

sendo agora $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t_r)$,

$$\hat{R} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(\mathbf{t}_r)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(\mathbf{t}_r)\|}$$

e $\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}(t_r)}{c}$ calculados no tempo de retardo. Agora podemos calcular o potencial retardado mediante

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}_q(t), t_r)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(\mathbf{t})\|} dV,$$

assim obtemos

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{q\delta(\mathbf{r}_q(t) - \mathbf{r}_q(t_r))}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(\mathbf{t})\|} \frac{dV}{1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}},$$

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}, \quad (1.2.22)$$

onde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t_r)$ e que $\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}(t_r)}{c}$. O potencial acima é o potencial escalar retardado para uma partícula pontual de carga q movendo-se com velocidade $\mathbf{v}(t_r)$ num tempo t_r .

O potencial vetor magnético definido em (1.2.14) é

$$\mathfrak{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV.$$

Para determinar a densidade de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)$, temos que o elemento de carga é definido como

$$dq = \rho dV = \rho dA \|d\mathbf{l}\|,$$

onde dA é a área perpendicular ao movimento do elemento de carga dq que ocupa um volume $dV = dA \parallel d\mathbf{l} \parallel$ e $|d\mathbf{l}|$ orienta-se na direção e sentido da velocidade de dq . Derivando a relação acima em relação ao tempo, temos

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= \rho dA \frac{\parallel d\mathbf{l} \parallel}{dt}, \\ di &= \rho dA v.\end{aligned}$$

O lado esquerdo corresponde a corrente produzida pelo elemento de carga dq . A densidade de corrente é obtida mediante

$$J = \frac{di}{dA} = \rho v,$$

ou na forma vetorial, temos

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v},$$

assim achamos

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}_q(t), t_r) = \rho(\mathbf{r}_q(t), t_r) \mathbf{v}(t_r). \quad (1.2.23)$$

Utilizando o mesmo argumento para introduzir o fator geométrico, o potencial vetor magnético é

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}_q(t), t_r) \mathbf{v}(t_r)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \frac{dV}{1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}, \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{q\delta(\mathbf{r}_q(t) - \mathbf{r}_q(t_r)) \mathbf{v}(t_r)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \frac{dV}{1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}, \\ &= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int_V \frac{\delta(\mathbf{r}_q(t) - \mathbf{r}_q(t_r)) \mathbf{v}(t_r)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \frac{dV}{1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}, \\ &= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\mathbf{v}(t_r)}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}, \\ &= \frac{\mu_0 \epsilon_0}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \mathbf{v}(t_r),\end{aligned} \quad (1.2.24)$$

utilizando $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ e a expressão (1.2.22), obtemos

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0 \epsilon_0}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \mathbf{v}(t_r), \\ \mathfrak{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mathbf{v}(t_r)}{c^2} \underbrace{\frac{q}{4\pi \epsilon_0 R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}}_{V(\mathbf{r}, t)}, \\ \mathfrak{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mathbf{v}(t_r)}{c^2} V(\mathbf{r}, t).\end{aligned} \quad (1.2.25)$$

Os potenciais retardados dados por (1.2.22) e (1.2.24) - (1.2.25) são conhecidos como potenciais de Liénard-Wiechert para uma carga pontual em movimento.

A partir dos potenciais retardados podemos determinar os campos retardados utilizando as relações abaixo

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla V - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathfrak{A},\end{aligned}$$

portanto,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2)}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{\mathbf{R} \times ((\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a})}{c^2(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right)_{t_r}, \quad (1.2.26)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{R}(t_r)}{c} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (1.2.27)$$

A construção dos campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ é bastante laborioso, portanto o desenvolvimento matemático pode ser visto no apêndice A na seção (1.2).

Capítulo II

Equação de Movimento Para Duas Partículas Pontuais

Neste capítulo formularemos as equações de movimento de duas cargas pontuais que interagem entre si através dos seus campos eletromagnéticos. Dada as equações de movimento, faremos uma transformação de escala para obter somente um parâmetro. Também analisaremos essas equações nas coordenadas do centro de massa e relativa.

2.1 Formulação do Problema

Consideremos duas cargas pontuais q_1 e q_2 e suas respectivas massas m_1 e m_2 em movimento.

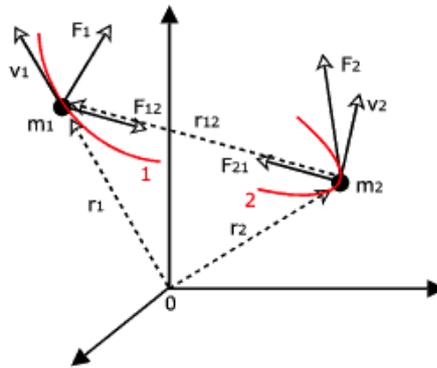


Figura 2.1.1: Partículas Pontuais em Movimento

Sejam os campos $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}_i(\mathbf{r}, t)$ que atuam na partícula $i = 1, 2$ com $i \neq j$,

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(\mathbf{R}_i(t) - R_i(t)\boldsymbol{\beta}_j(t_r))(1 - \beta_j^2(t_r))}{(R_i(t) - \mathbf{R}_i(t) \cdot \boldsymbol{\beta}_j(t_r))^3} + \frac{\mathbf{R}_i(t) \times ((\mathbf{R}_i(t) - R_i(t)\boldsymbol{\beta}_j(t_r)) \times \mathbf{A}_j(t_r))}{c^2(R_i(t) - \mathbf{R}_i(t) \cdot \boldsymbol{\beta}_j(t_r))^3} \right),$$

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{R}_i(t)}{c} \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t),$$

onde

$$\mathbf{R}_i(t) = \mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t_r). \quad (2.1.1)$$

Para as partículas localizadas em $\mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2(t)$ no tempo t temos:

$$\mathbf{F}_i(t) = q_i (\mathbf{v}_i(t) \times \mathbf{B}_i(t) + \mathbf{E}_i(t)) \quad (2.1.2)$$

A força \mathbf{F}_i é dada pela derivada temporal do momento relativístico \mathbf{p}_i , isto é,

$$\mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}.$$

Assim, a força sobre a partícula i pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i &= \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} (\gamma_i m_i \mathbf{v}_i), \\ &= \frac{d\gamma_i}{dt} m_i \mathbf{v}_i + \gamma_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}, \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} \right) m_i \mathbf{v}_i + \gamma_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}, \\ &= \frac{\gamma_i^3 m_i \mathbf{v}_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}_i)}{c^2} + \gamma_i m_i \mathbf{A}_i \end{aligned}$$

Portanto a equação diferencial na forma mais explícita é

$$\frac{\gamma_i^3 m_i \mathbf{v}_i(t) (\mathbf{v}_i(t) \cdot \mathbf{A}_i(t))}{c^2} + \gamma_i m_i \mathbf{A}_i(t) = \mathbf{F}_i(t). \quad (2.1.3)$$

Antes de resolvermos o sistema de equações faremos as seguintes aproximações: (i) iremos desconsiderar o efeito de retardo, isto é, iremos considerar que toda "informação propagada" é transmitida de forma instantânea, logo o tempo t_r é dado por

$$t_r = t - \frac{\mathbf{R}(\mathbf{t}_r)}{c} \approx t, \quad (2.1.4)$$

(ii) iremos desconsiderar o termo relativístico a esquerda da equação (2.1.3), portanto a equação torna-se

$$m_i \mathbf{A}_i(t) = \mathbf{F}_i(t). \quad (2.1.5)$$

Realizando essa aproximação, observamos o surgimento do acoplamento das acelerações. Como veremos nas equações abaixo temos as acelerações provenientes do termo newtoniano, ou seja a expressão a esquerda da igualdade e as acelerações provenientes das cargas em movimento expressa a direita da igualdade.

Definimos X_1, Y_1, Z_1 e V_{1x}, V_{1y}, V_{1z} e A_{1x}, A_{1y}, A_{1z} como as componentes cartesianas das posições, velocidades e acelerações da partícula 1 e X_2, Y_2, Z_2 e V_{2x}, V_{2y}, V_{2z} e A_{2x}, A_{2y}, A_{2z} como as componentes cartesianas das posições, velocidades e acelerações da partícula 2 e que e_X, e_Y e e_Z são

$$e_X = \frac{X_2 - X_1}{r}, \quad e_Y = \frac{Y_2 - Y_1}{r}, \quad e_Z = \frac{Z_2 - Z_1}{r}.$$

As equações diferenciais para o sistema tridimensional serão dadas por¹:

¹No apêndice B, tratamos com mais detalhes as contas realizadas para chegar no sistema descrito abaixo.

$$\begin{aligned}
m_1 A_{1x} = & -\frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r} \frac{1}{|c + e_x V_{2x} + e_y V_{2y} + e_z V_{2z}|^3} q_1 q_2 \left((e_X^2 + e_Z^2) \right. \\
& V_{1z} V_{2z} + (e_X^2 + e_Y^2) V_{1y} V_{2y} + e_Y e_Z (V_{1z} V_{2y} + V_{1y} V_{2z}) + \\
& \left. c^2 (e_Y^2 + e_Z^2) + e_Y c V_{2y} + e_Z c V_{2z} + e_Z c V_{1z} + e_Y c V_{1y} \right) A_{2x} \\
& + \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r} \frac{1}{|c + e_x V_{2x} + e_y V_{2y} + e_z V_{2z}|^3} q_1 q_2 \left(V_{1y} e_X c + \right. \\
& V_{1y} V_{2z} e_X e_Z + V_{1z} V_{2x} e_Y e_Z + e_X e_Y (c^2 - V_{1z} V_{2z}) + \\
& \left. V_{1y} V_{2x} (e_X^2 + e_Y^2) + V_{2x} e_Y c \right) A_{2y} \\
& + \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r} \frac{1}{|c + e_x V_{2x} + e_y V_{2y} + e_z V_{2z}|^3} q_1 q_2 \left(V_{1z} e_X c + \right. \\
& e_X e_Z (c^2 - V_{1y} V_{2y}) + V_{1z} V_{2x} (e_X^2 + e_Z^2) + V_{1y} V_{2x} e_Y e_Z \\
& \left. + V_{1z} V_{2y} e_X e_Y + V_{2x} e_Z c \right) A_{2z} \\
& + \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r^2} \frac{1}{|c + e_x V_{2x} + e_y V_{2y} + e_z V_{2z}|^3} q_1 q_2 \left(V_{2x}^2 + V_{2y}^2 \right. \\
& \left. + V_{2z}^2 - c^2 \right) \left(e_X c^2 - V_{1y} V_{2y} e_X - V_{1z} V_{2z} e_X + V_{1y} V_{2x} e_Y \right. \\
& \left. + e_Z V_{1z} V_{2x} + c V_{2x} \right)
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

$$\begin{aligned}
m_1 A_{1y} = & \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r} \frac{1}{|c + e_x V_{2x} + e_y V_{2y} + e_z V_{2z}|^3} q_1 q_2 \left(V_{1x} V_{2y} (e_X^2 + e_Y^2) \right. \\
& \left. + e_Y c V_{1x} + e_X e_Y (c^2 - V_{1z} V_{2z}) + e_X c V_{2y} + e_Y e_Z V_{1x} V_{2z} + e_X e_Z \right. \\
& \left. V_{1z} V_{2y} \right) A_{2x} \\
& - \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r} \frac{1}{|c + e_x V_{2x} + e_y V_{2y} + e_z V_{2z}|^3} q_1 q_2 \left((e_X^2 + e_Y^2) V_{1x} V_{2x} \right. \\
& \left. + (e_Y^2 + e_Z^2) V_{1z} V_{2z} c^2 e_X^2 + e_X e_Z (V_{1z} V_{2x} + V_{1x} V_{2z}) + e_Z c (V_{1z} \right. \\
& \left. + V_{2z}) + e_X c V_{2x} + V_{1x} e_X c \right) A_{2y} \\
& - \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r} \frac{1}{|c + e_x V_{2x} + e_y V_{2y} + e_z V_{2z}|^3} q_1 q_2 \left(-V_{1z} V_{2y} (e_Y^2 + e_Z^2) \right. \\
& \left. - e_Z c V_{2z} - V_{1x} V_{2y} e_X e_Z - e_X e_Y V_{1z} V_{2x} + e_Y e_Z (V_{1x} V_{2x} - c^2) \right. \\
& \left. - V_{1z} e_Y c \right) A_{2z} \\
& - \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r^2} \frac{1}{|c + e_x V_{2x} + e_y V_{2y} + e_z V_{2z}|^3} q_1 q_2 \left(V_{2x}^2 + V_{2y}^2 + V_{2z}^2 - \right. \\
& \left. c^2 \right) \left(-V_{1x} V_{2y} e_X + V_{1x} V_{2x} e_Y + V_{1z} V_{2z} e_Y - e_Y c^2 - c V_{2y} \right. \\
& \left. - e_Z V_{1z} V_{2y} \right)
\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

$$\begin{aligned}
m_1 A_{1z} = & \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r} \frac{1}{|c + e_x V_{2x} + e_y V_{2y} + e_z V_{2z}|^3} q_1 q_2 (V_{1x} e_Z c + e_X e_Z \\
& (c^2 - V_{1y} V_{2y}) + V_{1x} V_{2z} (e_X^2 + e_Z^2) + e_x c V_{2z} + V_{1x} V_{2y} e_Y e_Z \\
& + V_{1y} V_{2z} e_X e_Y) A_{2x} \\
& - \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r} \frac{1}{|c + e_x V_{2x} + e_y V_{2y} + e_z V_{2z}|^3} q_1 q_2 (-V_{1y} V_{2z} (e_Y^2 + e_Z^2) \\
& + e_Y e_Z (V_{1x} V_{2x} - c^2) - e_X e_Z V_{1y} V_{2x} - V_{1x} V_{2z} e_X e_Y - V_{2z} e_Y c \\
& - V_{1y} e_Z c) A_{2y} \\
& - \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r} \frac{1}{|c + e_x V_{2x} + e_y V_{2y} + e_z V_{2z}|^3} q_1 q_2 ((e_X^2 + e_Z^2) V_{1x} V_{2x} \\
& + (e_Y^2 + e_Z^2) V_{1y} V_{2y} + c^2 (e_X^2 + e_Y^2) + e_X e_Y (V_{1x} V_{2y} + V_{1y} V_{2x}) \\
& + V_{1x} e_X c + V_{1y} e_Y c + e_Y c V_{2y} + e_X c V_{2x}) A_{2z} \\
& - \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r^2} \frac{1}{|c + e_x V_{2x} + e_y V_{2y} + e_z V_{2z}|^3} q_1 q_2 (V_{2x}^2 + V_{2y}^2 + V_{2z}^2 \\
& - c^2) (e_Z V_{1x} V_{2x} + e_Z V_{1y} V_{2y} - c V_{2z} - e_Z c^2 - V_{1x} V_{2z} e_X \\
& - e_Y V_{1y} V_{2z})
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

$$\begin{aligned}
m_2 A_{2x} = & -\frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r} \frac{1}{|-c + e_x V_{1x} + e_y V_{1y} + e_z V_{1z}|^3} q_1 q_2 (c^2 (e_Y^2 + \\
& e_Z^2) + (e_X^2 + e_Z^2) V_{1z} V_{2z} + (e_X^2 + e_Y^2) V_{1y} V_{2y} + e_Y e_Z (V_{1z} V_{2y} \\
& + V_{1y} V_{2z}) - e_Y c V_{2y} - e_Z c V_{2z} + V_{1z} e_Z c - V_{1y} e_Y c) A_{1x} \\
& + \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r} \frac{1}{|-c + e_x V_{1x} + e_y V_{1y} + e_z V_{1z}|^3} q_1 q_2 (-e_X c V_{2y} + V_{1x} \\
& V_{2y} (e_X^2 + e_Y^2) + e_X e_Y (c^2 - V_{1z} V_{2z}) - e_Y c V_{1x} + e_X e_Z V_{1z} V_{2y} \\
& + e_Y e_Z V_{1x} V_{2z}) A_{1y} \\
& + \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r} \frac{1}{|-c + e_x V_{1x} + e_y V_{1y} + e_z V_{1z}|^3} q_1 q_2 (V_{1x} V_{2z} (e_X^2 + e_Z^2) \\
& + e_X e_Z (c^2 - V_{1y} V_{2y}) - V_{1x} e_Z c + V_{1y} V_{2z} e_X e_Y - e_X c V_{2z} + V_{1x} V_{2y} \\
& e_Y e_Z) A_{1z} \\
& - \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r^2} \frac{1}{|-c + e_x V_{1x} + e_y V_{1y} + e_z V_{1z}|^3} q_1 q_2 (V_{1x}^2 + V_{1y}^2 + V_{1z}^2 \\
& - c^2) (-V_{1z} V_{2z} e_X - V_{1y} V_{2y} e_X + e_X c^2 + V_{1x} V_{2y} e_Y + V_{1x} V_{2z} e_Z \\
& - V_{1x} c)
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

$$\begin{aligned}
m_2 A_{2y} = & \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r} \frac{1}{| -c + e_x V_{1x} + e_y V_{1y} + e_z V_{1z} |^3} q_1 q_2 (V_{1y} V_{2x} (e_X^2 \\
& + e_Y^2) + V_{1z} V_{2x} e_Y e_Z - V_{1y} e_X c - V_{2x} e_Y c + V_{1z} V_{2z} e_X e_Z \\
& + e_X e_Y (c^2 - V_{1z} V_{2z})) A_{1x} \\
& - \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r} \frac{1}{| -c + e_x V_{1x} + e_y V_{1y} + e_z V_{1z} |^3} q_1 q_2 (c^2 (e_X^2 + e_Z^2) \\
& + (e_Y^2 + e_Z^2) V_{1z} V_{2z} + (e_X^2 + e_Y^2) V_{1x} V_{2x} - V_{1x} e_X c - V_{1z} e_Z c \\
& + e_X e_Z (V_{1z} V_{2x} + V_{1x} V_{2z}) - e_Z c V_{2z} - e_X c V_{2x}) A_{1y} \\
& - \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r} \frac{1}{| -c + e_x V_{1x} + e_y V_{1y} + e_z V_{1z} |^3} q_1 q_2 (-V_{1y} V_{2z} (e_Y^2 \\
& + e_Z^2) + V_{2z} e_Y c + V_{1y} e_Z c + e_Y e_Z (V_{1x} V_{2x} - c^2) - V_{1x} V_{2z} \\
& e_X e_Z - e_X e_Z V_{1y} V_{2x}) A_{1z} \\
& + \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r^2} \frac{1}{| -c + e_x V_{1x} + e_y V_{1y} + e_z V_{1z} |^3} q_1 q_2 (V_{1x}^2 + V_{1y}^2 + \\
& V_{1z}^2 - c^2) (-e_X V_{1y} V_{2x} - e_Z V_{1y} V_{2z} - e_Y c^2 + V_{1z} V_{2z} e_Y \\
& + V_{1x} V_{2x} e_Y + V_{1y} c)
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

$$\begin{aligned}
m_2 A_{2z} = & \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r} \frac{1}{| -c + e_x V_{1x} + e_y V_{1y} + e_z V_{1z} |^3} q_1 q_2 (V_{1z} V_{2x} (e_X^2 \\
& + e_Z^2) - V_{2x} e_Z c + e_X e_Z (c^2 - V_{1y} V_{2y}) + V_{1y} V_{2x} e_Y e_Z \\
& - V_{1z} e_X c + V_{1z} V_{2y} e_X e_Y) A_{1x} \\
& - \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r} \frac{1}{| -c + e_x V_{1x} + e_y V_{1y} + e_z V_{1z} |^3} q_1 q_2 (-V_{1z} V_{2y} \\
& (e_Y^2 + e_Z^2) + V_{2y} e_Z c + V_{1z} e_Y c + e_Y e_Z (V_{1x} V_{2x} - c^2) \\
& - e_X e_Y V_{1z} V_{2x} - V_{1x} V_{2y} e_X e_Z) A_{1y} \\
& - \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r} \frac{1}{| -c + e_x V_{1x} + e_y V_{1y} + e_z V_{1z} |^3} q_1 q_2 ((e_Y^2 e_Z^2) + \\
& V_{1y} V_{2y} + (e_X^2 + e_Z^2) V_{1x} V_{2x} + c^2 (e_X^2 + e_Y^2) - e_Y c V_{2y} \\
& - e_X c V_{2x} + e_X e_Y (V_{1x} V_{2y} + V_{1y} V_{2x}) - V_{1y} e_Y c \\
& - V_{1x} e_X c) A_{1z} \\
& + \frac{1}{4 c \epsilon_0 \pi r^2} \frac{1}{| -c + e_x V_{1x} + e_y V_{1y} + e_z V_{1z} |^3} q_1 q_2 (V_{1x}^2 + V_{1y}^2 \\
& + V_{1z}^2 - c^2) (-V_{1z} V_{2x} e_X - e_Y V_{1z} V_{2y} + e_Z V_{1y} V_{2y} \\
& + e_Z V_{1x} V_{2x} - e_Z c^2 + V_{1z} c)
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

este é o sistema de 6 equações diferenciais que descreve o movimento das partículas.

2.2 Reescalamento das Equações

Faremos uma transformação de escala de modo que as equações de movimento dependam apenas de um único parâmetro: A razão das massas.

Consideremos o seguinte reescalamento:

$$x = L\bar{x}, \quad y = L\bar{y}, \quad z = L\bar{z}, \quad t = T\bar{t}. \quad (2.2.12)$$

Calculando as velocidades, obtemos

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{L d\bar{x}}{T d\bar{t}} = \frac{L}{T} V_{\bar{x}} = cV_{\bar{x}}, \\ V_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{L d\bar{y}}{T d\bar{t}} = \frac{L}{T} V_{\bar{y}} = cV_{\bar{y}}, \\ V_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{L d\bar{z}}{T d\bar{t}} = \frac{L}{T} V_{\bar{z}} = cV_{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Assim temos as seguintes relações,

$$c = \frac{L}{T}, \quad V_x = cV_{\bar{x}}, \quad V_y = cV_{\bar{y}}, \quad V_z = cV_{\bar{z}}. \quad (2.2.13)$$

Dando prosseguimento,

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{d}{dt} \left(\frac{L d\bar{x}}{T d\bar{t}} \right) = \frac{1}{T} \frac{d}{d\bar{t}} \left(\frac{L d\bar{x}}{T d\bar{t}} \right) = \frac{L}{T^2} \frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} = \frac{c}{T} A_{\bar{x}}, \\ A_y &= \frac{d}{dt} \left(\frac{L d\bar{y}}{T d\bar{t}} \right) = \frac{1}{T} \frac{d}{d\bar{t}} \left(\frac{L d\bar{y}}{T d\bar{t}} \right) = \frac{L}{T^2} \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{t}^2} = \frac{c}{T} A_{\bar{y}}, \\ A_z &= \frac{d}{dt} \left(\frac{L d\bar{z}}{T d\bar{t}} \right) = \frac{1}{T} \frac{d}{d\bar{t}} \left(\frac{L d\bar{z}}{T d\bar{t}} \right) = \frac{L}{T^2} \frac{d^2\bar{z}}{d\bar{t}^2} = \frac{c}{T} A_{\bar{z}}, \end{aligned}$$

temos o escalonamento das acelerações como

$$A_x = \frac{c}{T} A_{\bar{x}}, \quad A_y = \frac{c}{T} A_{\bar{y}}, \quad A_z = \frac{c}{T} A_{\bar{z}}. \quad (2.2.14)$$

Substituindo os termos escalonados definidos em (2.2.12), (2.2.13) e (2.2.14) nas equações (2.1.6), (2.1.7), (2.1.8), (2.1.9), (2.1.10) e (2.1.11), temos

$$\begin{aligned} \frac{c}{T} m_1 A_{1\bar{x}} &= -\frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L} \frac{c^2(\dots)}{c^3(\dots)} \frac{c}{T} A_{2\bar{x}} + \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L} \frac{c^2(\dots)}{c^3(\dots)} \frac{c}{T} A_{2\bar{y}} \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L} \frac{c^2(\dots)}{c^3(\dots)} \frac{c}{T} A_{2\bar{z}} + \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L^2} \frac{c^4(\dots)}{c^3(\dots)}, \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{c}{T} m_1 A_{1\bar{y}} &= \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L} \frac{c^2(\dots)}{c^3(\dots)} \frac{c}{T} A_{2\bar{x}} - \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L} \frac{c^2(\dots)}{c^3(\dots)} \frac{c}{T} A_{2\bar{y}} \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L} \frac{c^2(\dots)}{c^3(\dots)} \frac{c}{T} A_{2\bar{z}} - \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L^2} \frac{c^4(\dots)}{c^3(\dots)}, \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{c}{T} m_1 A_{1\bar{z}} &= \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L} \frac{c^2(\dots)}{c^3(\dots)} \frac{c}{T} A_{2\bar{x}} - \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L} \frac{c^2(\dots)}{c^3(\dots)} \frac{c}{T} A_{2\bar{y}} \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L} \frac{c^2(\dots)}{c^3(\dots)} \frac{c}{T} A_{2\bar{z}} - \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L^2} \frac{c^4(\dots)}{c^3(\dots)}, \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{c}{T} m_2 A_{2\bar{x}} &= -\frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L} \frac{c^2(\dots)}{c^3(\dots)} \frac{c}{T} A_{1\bar{x}} + \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L} \frac{c^2(\dots)}{c^3(\dots)} \frac{c}{T} A_{1\bar{y}} \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L} \frac{c^2(\dots)}{c^3(\dots)} \frac{c}{T} A_{1\bar{z}} - \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L^2} \frac{c^4(\dots)}{c^3(\dots)}, \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{c}{T} m_2 A_{2\bar{y}} &= \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L} \frac{c^2(\dots)}{c^3(\dots)} \frac{c}{T} A_{1\bar{x}} - \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L} \frac{c^2(\dots)}{c^3(\dots)} \frac{c}{T} A_{1\bar{y}} \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L} \frac{c^2(\dots)}{c^3(\dots)} \frac{c}{T} A_{1\bar{z}} + \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L^2} \frac{c^4(\dots)}{c^3(\dots)}, \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{c}{T} m_2 A_{2\bar{z}} &= \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L} \frac{c^2(\dots)}{c^3(\dots)} \frac{c}{T} A_{1\bar{x}} - \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L} \frac{c^2(\dots)}{c^3(\dots)} \frac{c}{T} A_{1\bar{y}} \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L} \frac{c^2(\dots)}{c^3(\dots)} \frac{c}{T} A_{1\bar{z}} + \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{L^2} \frac{c^4(\dots)}{c^3(\dots)}. \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Os termos em parênteses são os mesmos das equações antes do escalonamento, porém agora com a barra escrita acima das posições, velocidades e acelerações para diferenciar e indicar a nova escala.

Multiplicando todas as equações por $\frac{T}{cm_2}$ e definido $\frac{m_1}{m_2} = \eta$, com $m_2 \leq m_1$, temos

$$\begin{aligned} \eta A_{1\bar{x}} &= -\frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots) A_{2\bar{x}} + \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots) A_{2\bar{y}} \\ &\quad + \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots) A_{2\bar{z}} + \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta A_{1\bar{y}} &= \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots) A_{2\bar{x}} - \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots) A_{2\bar{y}} \\ &\quad - \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots) A_{2\bar{z}} - \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta A_{1\bar{z}} &= \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots) A_{2\bar{x}} - \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots) A_{2\bar{y}} \\ &\quad - \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots) A_{2\bar{z}} - \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2\bar{x}} &= -\frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots) A_{1\bar{x}} + \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots) A_{1\bar{y}} \\ &\quad + \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots) A_{1\bar{z}} - \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2\bar{y}} &= \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots) A_{1\bar{x}} - \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots) A_{1\bar{y}} \\ &\quad - \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots) A_{1\bar{z}} + \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots), \end{aligned}$$

$$A_{2\bar{z}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots) A_{1\bar{x}} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots) A_{1\bar{y}} \\ - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots) A_{1\bar{z}} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} (\dots).$$

Para que as constantes sumam das expressões acima temos que fazer

$$\frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon_0 m_2 c^2} \frac{1}{L} = 1,$$

portanto,

$$L = \frac{1}{4} \frac{|q_1||q_2|}{\pi\epsilon_0 m_2 c^2}, \quad (2.2.21)$$

e

$$T = \frac{L}{c} = \frac{1}{4} \frac{|q_1||q_2|}{\pi\epsilon_0 m_2 c^3}, \quad (2.2.22)$$

e por fim temos o parâmetro S

$$S = \text{sgn}(q_1 q_2) \quad (2.2.23)$$

em que S pode assumir o valor 1 para o sistema repulsivo e -1 para o sistema atrativo. Feito o reescalonamento nas equações (2.1.6),(2.1.7),(2.1.8), (2.1.9), (2.1.10) e (2.1.11) podemos escrever este sistema na forma matricial, (Para simplificação de notação retiramos a barra acima na notação das posições, velocidades e acelerações.)

$$\begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & \eta & 0 & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & \eta & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & 0 & 1 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1x} \\ A_{1y} \\ A_{1z} \\ A_{2x} \\ A_{2y} \\ A_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix}$$

tal que

$$a_{14} = \frac{S}{r|1 + e_X V_{2x} + e_Y V_{2y} + e_Z V_{2z}|^3} (e_Y e_Z (V_{1y} V_{2z} + V_{1z} V_{2y}) + (e_X^2 + e_Y^2) V_{1y} V_{2y} + e_Z^2 + e_Y^2 \\ + (e_X^2 + e_Z^2) V_{1z} V_{2z} + e_Y V_{2y} + e_Z V_{2z} + e_Z V_{1z} + e_Y V_{1y})$$

$$a_{15} = - \frac{S(e_X e_Y (1 - V_{1z} V_{2z}) + e_X V_{1y} + e_Y V_{2x} + V_{1y} V_{2x} (e_X^2 + e_Y^2) + V_{1z} V_{2x} e_Y e_Z + e_X e_Z V_{1y} V_{2z})}{r|1 + e_X V_{2x} + e_Y V_{2y} + e_Z V_{2z}|^3}$$

$$a_{16} = - \frac{S(e_X V_{1z} + e_Z V_{2x} + e_Y e_Z V_{1y} V_{2x} + e_X e_Z (1 - V_{1y} V_{2y}) + e_X e_Y V_{1z} V_{2y} + (e_X^2 + e_Z^2) V_{1z} V_{2x})}{r|1 + e_X V_{2x} + e_Y V_{2y} + e_Z V_{2z}|^3}$$

$$a_{24} = - \frac{S(V_{1x} V_{2y} (e_X^2 + e_Y^2) + e_Y V_{1x} + e_X e_Y (1 - V_{1z} V_{2z}) + e_X V_{2y} + e_Y e_Z V_{1x} V_{2z} + e_X e_Z V_{1z} V_{2y})}{r|1 + e_X V_{2x} + e_Y V_{2y} + e_Z V_{2z}|^3}$$

$$\begin{aligned}
a_{25} &= \frac{S}{r|1 + e_X V_{2x} + e_Y V_{2y} + e_Z V_{2z}|^3} \left((e_X^2 + e_Y^2) V_{1x} V_{2x} + (e_Z^2 + e_Y^2) V_{1z} V_{2z} + e_X^2 + e_X e_Z (V_{1z} V_{2x} \right. \\
&\quad \left. + V_{1x} V_{2z}) + e_X (V_{1x} + V_{2x}) + e_Z (V_{2z} + V_{1z}) + e_Z^2 \right) \\
a_{26} &= \frac{S(-V_{1z} V_{2y} (e_Z^2 + e_Y^2) - e_Z V_{2y} - V_{1x} V_{2y} e_X e_Z + e_Y e_Z (V_{1x} V_{2x} - 1) - e_X e_Y V_{1z} V_{2x} - e_Y V_{1z})}{r|1 + e_X V_{2x} + e_Y V_{2y} + e_Z V_{2z}|^3} \\
a_{34} &= -\frac{S(V_{1x} e_Z + e_X e_Z (1 - V_{1y} V_{2y}) + V_{1x} V_{2z} (e_X^2 + e_Z^2) + e_X V_{2z} + V_{1x} V_{2y} e_Y e_Z + V_{1y} V_{2z} e_X e_Y)}{r|1 + e_X V_{2x} + e_Y V_{2y} + e_Z V_{2z}|^3} \\
a_{35} &= \frac{S(-V_{1y} V_{2z} (e_Z^2 + e_Y^2) + e_Y e_Z (V_{1x} V_{2x} - 1) - e_X e_Z V_{1y} V_{2x} - V_{1x} V_{2z} e_X e_Y - V_{2z} e_Y - V_{1y} e_Z)}{r|1 + e_X V_{2x} + e_Y V_{2y} + e_Z V_{2z}|^3} \\
a_{36} &= \frac{S}{r|1 + e_X V_{2x} + e_Y V_{2y} + e_Z V_{2z}|^3} \left((e_X^2 + e_Z^2) V_{1x} V_{2x} + (e_Z^2 + e_Y^2) V_{1y} V_{2y} + e_X^2 + e_Y^2 + e_X e_Y (V_{1x} V_{2y} \right. \\
&\quad \left. + V_{1y} V_{2x}) + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y} + e_Y V_{2y} + e_X V_{2x} \right) \\
a_{41} &= \frac{S}{r|-1 + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y} + e_Z V_{1z}|^3} \left(e_Z^2 + e_Y^2 + (e_X^2 + e_Z^2) V_{1z} V_{2z} + (e_X^2 + e_Y^2) V_{1y} V_{2y} + e_Y e_Z (V_{1y} \right. \\
&\quad \left. V_{2z} + V_{1z} V_{2y}) - e_Y (V_{1y} + V_{2y}) - e_Z (V_{2z} + V_{1z}) \right) \\
a_{42} &= -\frac{S(-e_X V_{2y} + V_{1x} V_{2y} (e_X^2 + e_Y^2) + e_X e_Y (1 - V_{1z} V_{2z}) - e_Y V_{1x} + e_X e_Z V_{1z} V_{2y} + e_Y e_Z V_{1x} V_{2z})}{r|-1 + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y} + e_Z V_{1z}|^3} \\
a_{43} &= -\frac{S(-e_X V_{2z} + V_{1x} V_{2z} (e_X^2 + e_Z^2) + e_X e_Z (1 - V_{1y} V_{2y}) - V_{1x} e_Z + V_{1y} V_{2z} e_X e_Y + V_{1x} V_{2y} e_Y e_Z)}{r|-1 + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y} + e_Z V_{1z}|^3} \\
a_{51} &= -\frac{S(V_{1y} V_{2x} (e_X^2 + e_Y^2) + V_{1z} V_{2x} e_Y e_Z - e_X V_{1y} - e_Y V_{2x} + e_X e_Z V_{1y} V_{2z} + e_X e_Y (1 - V_{1z} V_{2z}))}{r|-1 + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y} + e_Z V_{1z}|^3} \\
a_{52} &= \frac{S}{r|-1 + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y} + e_Z V_{1z}|^3} \left(e_X^2 + e_Z^2 + (e_Z^2 + e_Y^2) V_{1z} V_{2z} + (e_X^2 + e_Y^2) V_{1x} V_{2x} - e_X (V_{1x} \right. \\
&\quad \left. + V_{2x}) - e_Z (V_{2z} + V_{1z}) + e - X e_Z (V_{1z} V_{2x} + V - 1x V_{2z}) \right) \\
a_{53} &= \frac{S(-V_{1y} V_{2z} (e_Z^2 + e_Y^2) + V_{2z} e_Y + V_{1y} e_Z + e_Y e_Z (V_{1x} V_{2x} - 1) - V_{1x} V_{2z} e_X e_Y - e_X e_Z V_{1y} V_{2x})}{r|-1 + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y} + e_Z V_{1z}|^3} \\
a_{61} &= -\frac{S((e_X^2 + e_Z^2) V_{1z} V_{2x} - e_Z V_{2x} + e_X e_Z (1 - V - 1y V_{2y}) + e_Y e_Z V_{1y} V_{2x} - e_X V_{1z} + e_X e_Y V_{1z} V_{2y})}{r|-1 + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y} + e_Z V_{1z}|^3} \\
a_{62} &= \frac{S(-V_{1z} V_{2y} (e_Z^2 + e_Y^2) + e_Z V_{2y} + e_Y V_{1z} - e_X e_Y V_{1z} V_{2x} + e_Y e_Z (V_{1x} V_{2x} - 1) - V_{1x} V_{2y} e_X e_Z)}{r|-1 + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y} + e_Z V_{1z}|^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{63} &= \frac{S}{r|-1 + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y} + e_Z V_{1z}|^3} \left((e_Z^2 + e_Y^2) V_{1y} V_{2y} + e_X e_Y (V_{1x} V_{2y} + V_{1y} V_{2x}) - e_X (V_{1x} + V_{2x}) \right. \\
&\quad \left. - e_Y (V_{1y} + V_{2y}) + e_X^2 + e_Y^2 + (e - X^2 + e_Z^2) V_{1x} V_{2x} \right) \\
b_1 &= \frac{S(V_{2x}^2 + V_{2y}^2 + V_{2z}^2 - 1)(e_X - V_{1y} V_{2y} e_X - V_{1z} V_{2z} e_X + V_{1y} V_{2x} e_Y + e_Z V_{1z} V_{2x} + V_{2x})}{r^2|1 + e_x V_{2x} + e_y V_{2y} + e_z V_{2z}|^3} \\
b_2 &= -\frac{S(V_{2x}^2 + V_{2y}^2 + V_{2z}^2 - 1)(V_{1x} V_{2y} e_X + V_{1x} V_{2x} e_Y + V_{1z} V_{2z} e_Y - e_Y - V_{2y} - e_Z V_{1z} V_{2y})}{r^2|1 + e_x V_{2x} + e_y V_{2y} + e_z V_{2z}|^3} \\
b_3 &= -\frac{S(V_{2x}^2 + V_{2y}^2 + V_{2z}^2 - 1)(V_{1x} V_{2x} e_Z + V_{1y} V_{2y} e_Z - V_{2z} - e_Z - V_{1x} V_{2z} e_X - e_Y V_{1y} V_{2z})}{r^2|1 + e_x V_{2x} + e_y V_{2y} + e_z V_{2z}|^3} \\
b_4 &= -\frac{S(V_{1x}^2 + V_{1y}^2 + V_{1z}^2 - 1)(e_X - V_{1y} V_{2y} e_X - V_{1z} V_{2z} e_X + V_{1x} V_{2y} e_Y + V_{1x} V_{2z} e_Z - V_{1x})}{r^2|1 + e_x V_{1x} + e_y V_{1y} + e_z V_{1z}|^3} \\
b_5 &= \frac{S(V_{1x}^2 + V_{1y}^2 + V_{1z}^2 - 1)(-e_X V_{1y} V_{2x} - e_Z V_{1y} V_{2z} - e_Y + V_{1z} V_{2z} e_Y + V_{1x} V_{2x} e_Y + V_{1y})}{r^2|1 + e_x V_{1x} + e_y V_{1y} + e_z V_{1z}|^3} \\
b_6 &= \frac{S(V_{1x}^2 + V_{1y}^2 + V_{1z}^2 - 1)(-V_{1z} V_{2x} e_X - e_Y V_{1z} V_{2y} + V_{1y} V_{2y} e_Z + V_{1x} V_{2x} e_Z - e_Z + V_{1z})}{r^2|1 + e_x V_{1x} + e_y V_{1y} + e_z V_{1z}|^3}
\end{aligned}$$

Note que só foi possível construir tal sistema matricial pelo fato de desconsiderarmos o termo de retardo gerando assim o acoplamento das acelerações. Devemos observar que o sistema original é uma formulação newtoniana com tempo de retardo. Os sistemas newtonianos, sejam eles conservativos ou não, tradicionalmente são tratados considerando a noção de instantaneidade.

Resolvendo o sistema matricial, obtemos as equações de movimento para as duas partículas (Para mais detalhes olhar o apêndice B). Como estamos no regime de baixas velocidades consideramos somente até os termos lineares nas velocidades (Após termos as acelerações em termos das velocidades e das posições, aplicamos a série de Taylor e consideramos os termos até a ordem em que as velocidades são lineares), portantoo

$$\begin{aligned}
A_{1x} &= -\frac{S e_X}{\eta r^2} + \frac{(S - \eta r)(1 - e_X^2)}{\eta r^2(1 - \eta r^2)} V_{1x} + \frac{S(2e_X^2 - S\eta r(1 - e_X^2) + \eta r^2(1 - 3e_X^2))}{\eta r^2(1 - \eta r^2)} V_{2x} \\
&\quad - \frac{e_X e_Y (S - \eta r)}{\eta r^2(1 - \eta r^2)} V_{1y} + \frac{e_Y e_X S(S\eta r - 3\eta r + 2)}{\eta r^2(1 - \eta r^2)} V_{2y} - \frac{e_X e_Z (S - \eta r)}{\eta r^2(1 - \eta r^2)} V_{1z} \\
&\quad + \frac{e_Z e_X S(S\eta r + 2 - 3\eta r^2)}{\eta r^2(1 - \eta r^2)} V_{2z}
\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

$$\begin{aligned}
A_{1y} &= -\frac{S e_Y}{\eta r^2} + \frac{e_Y e_X (S - \eta r)}{\eta r^2(1 - \eta r^2)} V_{1x} + \frac{e_X e_Y S(S\eta r + 2 - 3\eta r^2)}{\eta r^2(1 - \eta r^2)} V_{2x} + \frac{(S - \eta r)(1 - e_Y^2)}{\eta r^2(1 - \eta r^2)} V_{1y} \\
&\quad + \frac{S(-(1 - e_Y^2)S\eta r + \eta r^2(1 - 3e_Y^2) + 2e_Y^2)}{\eta r^2(1 - \eta r^2)} V_{2y} - \frac{e_Z e_Y (S - \eta r)}{\eta r^2(1 - \eta r^2)} V_{1z} \\
&\quad + \frac{e_Y e_Z S(S\eta r + 2 - 3\eta r^2)}{\eta r^2(1 - \eta r^2)} V_{2z}
\end{aligned} \tag{2.2.25}$$

$$\begin{aligned}
A_{1z} = & -\frac{Se_Z}{\eta r^2} + \frac{e_X e_Z (S - \eta r)}{\eta r^2 (1 - \eta r^2)} V_{1x} + \frac{e_X e_Z S (S \eta r + 2 - 3 \eta r^2)}{\eta r^2 (1 - \eta r^2)} V_{2x} - \frac{e_Z e_Y (S - \eta r)}{\eta r^2 (1 - \eta r^2)} V_{1y} \\
& + \frac{e_Y e_Z S (S \eta r + 2 - 3 \eta r^2)}{\eta r^2 (1 - \eta r^2)} V_{2y} + \frac{(S - \eta r)(1 - e_Z^2)}{\eta r^2 (1 - \eta r^2)} V_{1z} \\
& + \frac{S(-S \eta r(1 - e_Z^2) + \eta r^2(1 - 3e_Z^2) + 2e_Z^2)}{\eta r^2 (1 - \eta r^2)} V_{2z}
\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

$$\begin{aligned}
A_{2x} = & \frac{Se_X}{r^2} + \frac{S(-Sr(1 - e_X^2) + 2e_X^2 + \eta r^2(1 - 3e_X^2))}{r^2(1 - \eta r^2)} V_{1x} + \frac{(1 - e_X^2)(S - r)}{r^2(1 - \eta r^2)} V_{2x} \\
& + \frac{e_Y e_X S (Sr - 3 \eta r^2 + 2)}{r^2(1 - \eta r^2)} V_{1y} - \frac{e_X e_Y (S - r)}{r^2(1 - \eta r^2)} V_{2y} + \frac{e_X e_Z S (Sr - 3 \eta r^2 + 2)}{r^2(1 - \eta r^2)} V_{1z} \\
& - \frac{e_X e_Z (S - r)}{r^2(1 - \eta r^2)} V_{2z}
\end{aligned} \tag{2.2.27}$$

$$\begin{aligned}
A_{2y} = & \frac{Se_Y}{r^2} + \frac{e_Y e_X S (Sr - 3 \eta r^2 + 2)}{r^2(1 - \eta r^2)} V_{1x} - \frac{e_X e_Y (S - r)}{r^2(1 - \eta r^2)} V_{2x} \\
& + \frac{S(\eta r^2(1 - 3e_Y^2) - Sr(1 - e_Y^2) + 2)}{r^2(1 - \eta r^2)} V_{1y} + \frac{(S - r)(1 - e_Y^2)}{r^2(1 - \eta r^2)} V_{2y} \\
& + \frac{e_Y e_Z S (sr - 3 \eta r^2 + 2)}{r^2(1 - \eta r^2)} V_{1z} + \frac{e_Y e_Z (S - r)}{r^2(1 - \eta r^2)} V_{2z}
\end{aligned} \tag{2.2.28}$$

$$\begin{aligned}
A_{2z} = & \frac{Se_Z}{r^2} + \frac{e_Z e_X S (Sr - 3 \eta r^2 + 2)}{r^2(1 - \eta r^2)} V_{1x} + \frac{e_X e_Z (S - r)}{r^2(1 - \eta r^2)} V_{2x} \\
& + \frac{e_Y e_Z S (Sr - 3 \eta r^2 + 2)}{r^2(1 - \eta r^2)} V_{1y} - \frac{e_Z e_Y (s - r)}{r^2(1 - \eta r^2)} V_{2y} \\
& + \frac{S(-Sr(1 - e_Z^2) + \eta r^2(1 - 3e_Z^2) + 2e_Z^2)}{r^2(1 - \eta r^2)} V_{1z} + \frac{(1 - e_Z^2)(S - r)}{r^2(1 - \eta r^2)} V_{2z}
\end{aligned} \tag{2.2.29}$$

Se considerarmos as condições iniciais no plano xy toda a dinâmica estará contida neste plano, portanto de modo a simplificar a análise estudaremos o sistema bidimensional. As equações (2.1.6), (2.1.7), (2.1.8), (2.1.9), (2.1.10) e (2.1.11) tornam-se,

$$\begin{aligned}
A_{1x} = & -\frac{Se_X}{\eta r^2} + \frac{e_Y^2(-S + \eta r)}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)} V_{1x} - \frac{e_Y e_X(-S + \eta r)}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)} V_{1y} \\
& + \frac{(-3e_Y^2 \eta r^2 + 2e_Y^2 + 2\eta r^2 - 2 + Se_Y^2 \eta r)S}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)} V_{2x} \\
& - \frac{e_Y e_X(-3\eta r^2 + 2 + S\eta r)S}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)} V_{2y},
\end{aligned} \tag{2.2.30}$$

$$\begin{aligned}
A_{1y} = & -\frac{Se_Y}{\eta r^2} - \frac{e_Y e_X(-S + \eta r)}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)} V_{1x} + \frac{e_X^2(-S + \eta r)}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)} V_{1y} \\
& - \frac{e_Y e_X(-3\eta r^2 + 2 + S\eta r)S}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)} V_{2x} \\
& + \frac{(-2 + 2e_X^2 - 3\eta r^2 e_X^2 + Se_X^2 \eta r + 2\eta r^2)S}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)} V_{2y},
\end{aligned} \tag{2.2.31}$$

$$\begin{aligned}
A_{2x} = & \frac{Se_X}{r^2} - \frac{S(-2\eta r^2 - Se_Y^2 r - 2e_Y^2 + 3e_Y^2 \eta r^2 + 2)}{r^2(-1 + \eta r^2)} V_{1x} \\
& + \frac{e_Y Se_X(-rS - 2 + 3\eta r^2)}{r^2(-1 + \eta r^2)} V_{1y} - \frac{e_Y^2(-r + S)}{r^2(-1 + \eta r^2)} V_{2x} \\
& + \frac{e_Y e_X(-r + S)}{r^2(-1 + \eta r^2)} V_{2y}, \tag{2.2.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{2y} = & \frac{e_Y S}{r^2} + \frac{Se_Y e_X(-rS - 2 + 3\eta r^2)}{r^2(-1 + \eta r^2)} V_{1x} \\
& - \frac{S(3\eta r^2 e_X^2 + 2 - 2e_X^2 - Se_X^2 r - 2\eta r^2)}{r^2(-1 + \eta r^2)} V_{1y} \\
& + \frac{e_Y e_X(-r + S)}{r^2(-1 + \eta r^2)} V_{2x} - \frac{e_X^2(-r + S)}{r^2(-1 + \eta r^2)} V_{2y}. \tag{2.2.33}
\end{aligned}$$

2.3 Coordenadas do Centro de Massa e Relativa

Considerando a velocidade do centro de massa e a velocidade relativa,

$$\begin{aligned}
V_x = & \frac{\eta V_{1x} + V_{2x}}{\eta + 1}, \quad V_y = \frac{\eta V_{1y} + V_{2y}}{\eta + 1}, \\
v_x = & V_{2x} - V_{1x}, \quad v_y = V_{2y} - V_{1y}.
\end{aligned}$$

Seja o vetor unitário em coordenadas polares:

$$\begin{aligned}
\hat{r} = & \cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}, \\
\hat{\theta} = & -\sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y}.
\end{aligned}$$

Com essas definições obtemos as seguintes acelerações ²:

- Aceleração radial e angular na coordenada relativa

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 r}{dt^2} = & \frac{2(\eta - 1) \cos \theta S}{(\eta r^2)} V_x + \frac{2(\eta - 1) \sin \theta S}{(\eta r^2)} V_y \\
& - \frac{4S}{r^2(\eta + 1)} \frac{dr}{dt} + \frac{(\eta + 1)S}{(\eta r^2)} + r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2, \tag{2.3.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \theta}{dt^2} = & \frac{(\eta - 1)(\eta r^2 + 1) \sin \theta S}{(-1 + \eta r^2)r^3 \eta} V_x - \frac{(\eta - 1)(\eta r^2 + 1) \cos \theta S}{(-1 + \eta r^2)r^3 \eta} V_y \\
& + \frac{S(-1 - \eta^2 + 2\eta^2 r^2)}{r^2(\eta + 1)\eta(-1 + \eta r^2)} \frac{d\theta}{dt} - \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt}. \tag{2.3.35}
\end{aligned}$$

²O desenvolvimento matemático realizado para encontrar as acelerações está feito com mais detalhe no apêndice B

- Aceleração na coordenada do centro de massa

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 X}{dt^2} = & -\frac{2}{(-1 + \eta r^2)r^2(\eta + 1)}((- \eta r \sin^2 \theta - 2S\eta r^2 \\
& + 3\eta S r^2 \sin^2 \theta + 2S - r \sin^2 \theta - S \sin^2 \theta))V_x \\
& + \frac{2(3S\eta r^2 - \eta r - S - r) \sin \theta \cos \theta}{(-1 + \eta r^2)r^2(\eta + 1)}V_y \\
& + \frac{2(\eta - 1) \cos \theta S}{r^2(\eta + 1)^2} \frac{dr}{dt} \\
& + \frac{(\eta - 1) \sin \theta(-\eta r + S\eta r^2 + S - r)}{(\eta + 1)^2 r(-1 + \eta r^2)} \frac{d\theta}{dt}, \tag{2.3.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 Y}{dt^2} = & \frac{2(3S\eta r^2 - \eta r - S - r) \sin \theta \cos \theta}{(-1 + \eta r^2)r^2(\eta + 1)}V_x \\
& - \frac{2}{(-1 + \eta r^2)r^2(\eta + 1)}(-\eta r \cos^2 \theta + 3S\eta r^2 \cos^2 \theta \\
& - 2S\eta r^2 + 2S - S \cos^2 \theta - r \cos^2 \theta)V_y \\
& + \frac{2(\eta - 1)S \sin \theta}{r^2(\eta + 1)^2} \frac{dr}{dt} \\
& - \frac{(\eta - 1) \cos \theta(-\eta r + S\eta r^2 + S - r)}{(\eta + 1)^2 r(-1 + \eta r^2)} \frac{d\theta}{dt}. \tag{2.3.37}
\end{aligned}$$

Da equação (2.2.30) a equação (2.3.37) temos um conjunto de sistemas de equações diferenciais ordinárias que descrevem a dinâmica planar de duas cargas pontuais carregadas no regime não relativístico em que o tempo de retardo é desconsiderado.

Para termos uma idéia em que escala estamos trabalhando substituindo os valores de ϵ_0 , c , $q_1 = q_2 = e$, isto é, a carga elementar e $m_2 = m_e$, a massa do elétron, nas expressões (2.2.21) e (2.2.22), obtemos as seguintes transformações

$$L = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon_0 m_2 c^2} = 2,8 \times 10^{-15} m, \quad T = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon_0 m_2 c^3} = 9,3 \times 10^{-24} s. \tag{2.3.38}$$

Capítulo III

Solução das Equações de Movimento

Neste capítulo iremos analisar o sistema de equações definido no capítulo anterior em função de η e observar como este simples parâmetro tem um grande impacto para os resultados que serão apresentados durante todo o trabalho. Resolveremos numericamente os casos para η igual a 1, 2 e 10, por fim faremos uma análise do comportamento das acelerações, velocidades, posições, do centro de massa e o tempo de decaimento das partículas.

3.1 Análise do Sistema em Função de η

Para começarmos a análise tomaremos o caso $\eta = 1$, assim as equações (2.2.30), (2.2.32), (2.2.31) e (2.2.33) tornam-se

- $\eta = 1$

$$\begin{aligned} A_{1x} = & -\frac{Se_X}{r^2} + \frac{e_Y^2(-S+r)}{r^2(-1+r^2)}V_{1x} - \frac{e_Y e_X(-S+r)}{r^2(-1+r^2)}V_{1y} \\ & + \frac{(-3e_Y^2 r^2 + 2e_Y^2 + 2r^2 - 2 + Se_Y^2 r)S}{r^2(-1+r^2)}V_{2x} \\ & - \frac{e_Y e_X(-3r^2 + 2 + Sr)S}{r^2(-1+r^2)}V_{2y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{1y} = & -\frac{Se_Y}{r^2} - \frac{e_Y e_X(-S+r)}{r^2(-1+r^2)}V_{1x} + \frac{e_X^2(-S+r)}{r^2(-1+r^2)}V_{1y} \\ & - \frac{e_Y e_X(-3r^2 + 2 + Sr)S}{r^2(-1+r^2)}V_{2x} \\ & + \frac{(-2 + 2e_X^2 - 3r^2 e_X^2 + Se_X^2 r + 2r^2)S}{r^2(-1+r^2)}V_{2y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2x} = & \frac{Se_X}{r^2} - \frac{S(-2r^2 - Se_Y^2 r - 2e_Y^2 + 3e_Y^2 r^2 + 2)}{r^2(-1+r^2)}V_{1x} \\ & + \frac{e_Y Se_X(-rS - 2 + 3r^2)}{r^2(-1+r^2)}V_{1y} - \frac{e_Y^2(-r+S)}{r^2(-1+r^2)}V_{2x} \\ & + \frac{e_Y e_X(-r+S)}{r^2(-1+r^2)}V_{2y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{2y} = & \frac{e_Y S}{r^2} + \frac{S e_Y e_X (-rS - 2 + 3r^2)}{r^2(-1 + r^2)} V_{1x} \\
& - \frac{S(3r^2 e_X^2 + 2 - 2e_X^2 - S e_X^2 r - 2r^2)}{r^2(-1 + r^2)} V_{1y} \\
& + \frac{e_Y e_X (-r + S)}{r^2(-1 + r^2)} V_{2x} - \frac{e_X^2 (-r + S)}{r^2(-1 + r^2)} V_{2y}.
\end{aligned}$$

Para a aceleração radial e angular as equações são

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{2S}{r^2} \frac{dr}{dt} + \frac{2S}{r^2} + r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad (3.1.1)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{S}{r^2} \frac{d\theta}{dt} - \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt}. \quad (3.1.2)$$

Para a aceleração do centro de massa

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 X}{dt^2} = & -\frac{(3S \sin^2 \theta r^2 - 2r^2 S - 2 \sin^2 \theta r - S \sin^2 \theta + 2S)}{(r^2 - 1) r^2} V_x \\
& + \frac{(3r^2 S - S - 2r) \cos \theta \sin \theta}{(r^2 - 1) r^2} V_y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 Y}{dt^2} = & \frac{(3r^2 S - S - 2r) \cos \theta \sin \theta}{(r^2 - 1) r^2} V_x \\
& - \frac{(3 \cos^2 \theta S r^2 - 2r^2 S - 2 \cos^2 \theta r - S \cos^2 \theta + 2S)}{(r^2 - 1) r^2} V_y.
\end{aligned}$$

As duas equações que descrevem a aceleração da parte radial e angular ((3.1.1) e (3.1.2)) não mais apresentam o termo correspondente a velocidade do centro de massa, portanto observamos o desacoplamento das coordenadas relativas em relação as coordenadas do centro de massa. Se considerarmos como condição inicial o centro de massa em repouso este permanecerá da mesma forma enquanto a dinâmica evolui no tempo. Outro caso relevante é considerar o valor de η tender ao infinito.

- $\eta \rightarrow \infty$

Quando $\eta \rightarrow \infty$ temos que as equações (2.2.30), (2.2.32), (2.2.31) e (2.2.33) tornam-se

$$\begin{aligned}
A_{1x} &= 0, \\
A_{1y} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{2x} &= -\frac{S(3e_Y^2 V_{1x} - 3e_X e_Y V_{1y} - 2V_{1x} - e_X)}{r^2}, \\
A_{2y} &= \frac{S(3e_X e_Y V_{1x} - 3e_X^2 V_{1y} + 2V_{1y} + e_Y)}{r^2}.
\end{aligned}$$

Para a aceleração radial e angular as equações são

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{2S \cos \theta}{r^2} V_x + \frac{2S \sin \theta}{r^2} V_y + \frac{S}{r^2} + r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad (3.1.3)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{S \sin \theta}{r^3} V_x - \frac{S \cos \theta}{r^3} V_y - \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt}. \quad (3.1.4)$$

Para a aceleração do centro de massa

$$\begin{aligned}\frac{d^2 X}{dt^2} &= 0, \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} &= 0.\end{aligned}$$

Quando consideramos η tender para o infinito observamos que a aceleração da partícula 1 é zero e partido das equações (3.1.3) e (3.1.4) se considerarmos novamente o centro de massa parado este mais uma vez permanecerá parado, entretanto observaremos órbitas estáveis diferente do caso anterior ou para qualquer outro valor de η . Este resultado para η muito grande é uma aproximação com correções de uma força puramente coulombiana, na qual há órbitas estáveis. Como a aceleração do centro de massa é zero o centro de massa pode permanecer em repouso ou apresentar um movimento retilíneo uniforme.

Feito o estudo mais analítico das equações, agora resolveremos o mesmo sistema de equações diferenciais usando o método de Runge Kutta. Porém, antes de resolver o sistema de fato, temos que definir as condições iniciais do nosso problema, isto é, devemos dar valores iniciais as posições e as velocidades das duas partículas. Como estamos interessados no sistema atrativo temos que $S = -1$ e como queremos analisar o comportamento das acelerações, posições, centro de massa e decaimento, utilizaremos valores diferentes para η . Considerando as condições iniciais para a força coulombiana que gera órbitas circulares utilizaremos as mesmas condições para o nosso sistema. Como as equações estão reescaloadas as condições iniciais também devem ser reescaloadas, portanto consideremos inicialmente o raio r_0 ,

$$r_0 = \frac{a_0}{L} = 18783, \quad (3.1.5)$$

em que a_0 é o raio de Bohr.

Para determinar a velocidade angular inicial consideramos a equação (2.3.34) com o centro de massa em repouso, ou seja, $V_x = V_y = 0$ e uma distância radial r tal que $\frac{dr}{dt} = 0$, isto é, estamos considerando uma condição inicial em que a força que atua sobre as partículas seja somente a coulombiana, portanto temos:

$$0 = \frac{(\eta + 1)S}{\eta r^2} + r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2,$$

como $S = -1$,

$$\begin{aligned}\frac{(\eta + 1)}{\eta r^2} &= r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \left(\frac{\eta + 1}{\eta} \right)^{1/2} \frac{1}{r^{3/2}}.\end{aligned}$$

A condição inicial para a velocidade angular será

$$V_\theta(t = 0) = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{\theta(t=0)} = \left(\frac{\eta + 1}{\eta} \right)^{1/2} \frac{1}{r_0^{3/2}}, \quad (3.1.6)$$

portanto para um tempo, $t_0 = 0$, temos as seguintes condições iniciais

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -\frac{r_0}{\eta + 1}, \quad V_{1x}(t_0) = 0, \\
 y_1 &= 0, \quad V_{1y}(t_0) = x_1 V_\theta(t_0), \\
 x_2 &= \frac{\eta r_0}{\eta + 1}, \quad V_{2x}(t_0) = 0, \\
 y_2 &= 0, \quad V_{2y}(t_0) = x_2 V_\theta(t_0),
 \end{aligned}$$

Como estamos no regime não relativístico o sistema de equações deve respeitar esse limite, portanto no código para o cálculo numérico há uma condição de parada do programa em que o módulo da velocidade das partículas pode atingir no máximo 10 % da velocidade da luz.

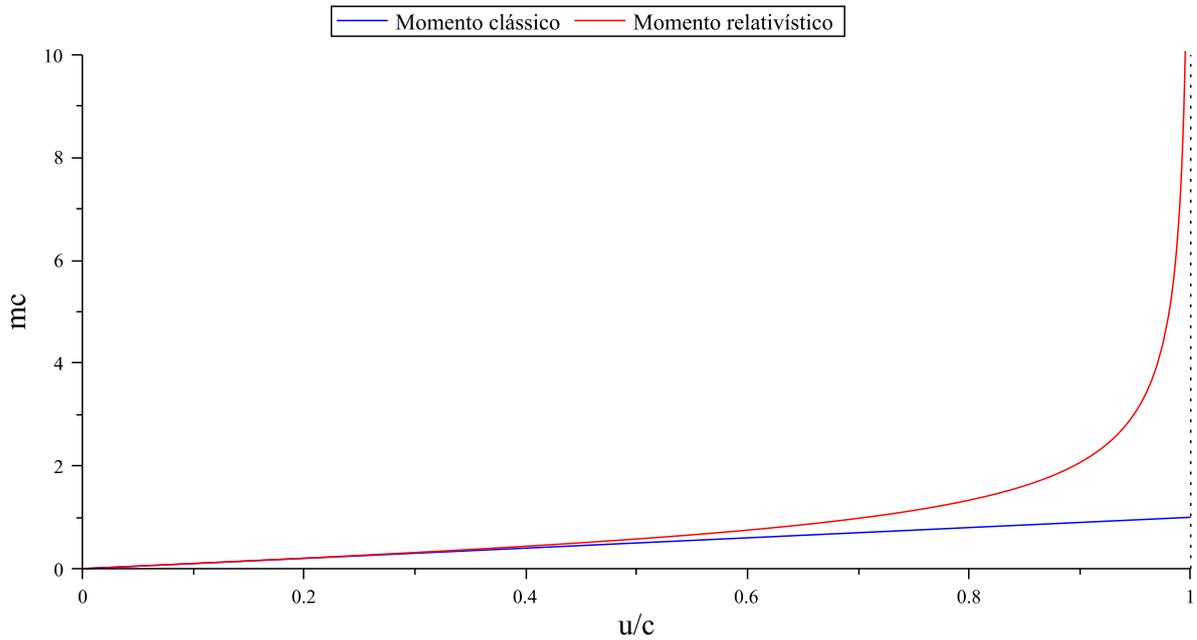


Figura 3.1.1: Momento relativístico e clássico

O gráfico acima mostra o momento relativístico dado por

$$p = \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

versus $\frac{u}{c}$, onde u é a velocidade do objeto relativo ao observador. A magnitude do momento p é plotado em unidades de mc e a linha azul mostra o momento clássico mu em comparação.

Consideremos alguns valores para η tais como $\eta = 1$, $\eta = 2$ e $\eta = 10$ obtemos

- 1. $\eta = 1$

Devemos observar que as unidades das posições, velocidades e acelerações estão nas unidades reescaladas. A primeira análise que obtemos do gráfico abaixo é que conforme a dinâmica evolui as partículas apresentam um movimento em espiral que diminui até ocorrer a colisão. A velocidade e a aceleração das partículas apresentam o sentido de rotação anti-horário.

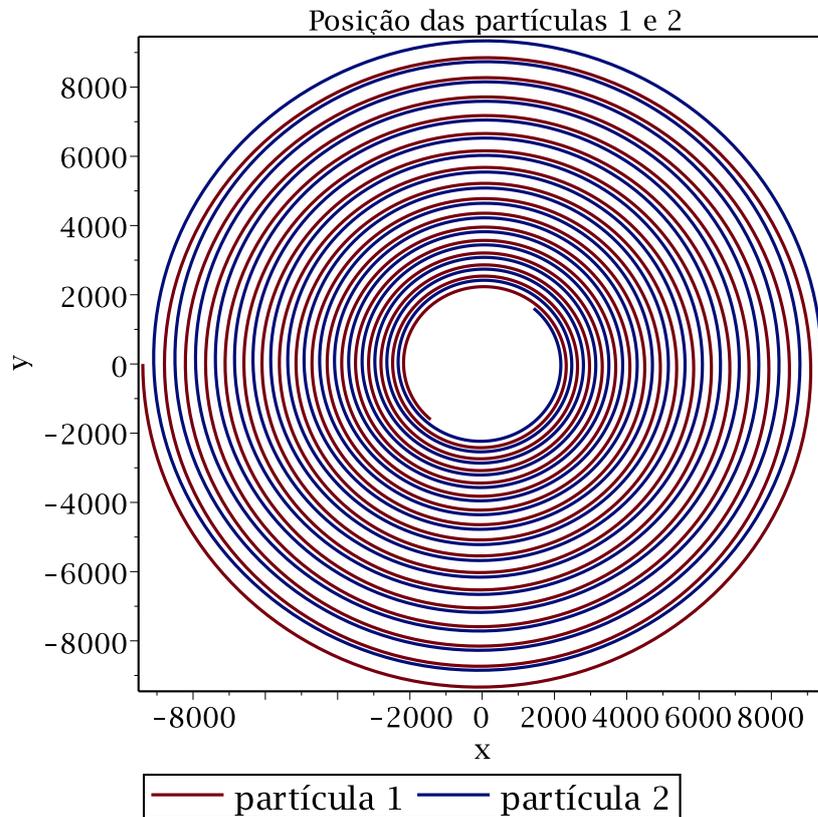


Figura 3.1.2: Posição das partículas 1 e 2 - $\eta = 1$. As coordenadas x e y estão nas unidades reescaladas. O movimento em espiral ocorre no sentido anti-horário.

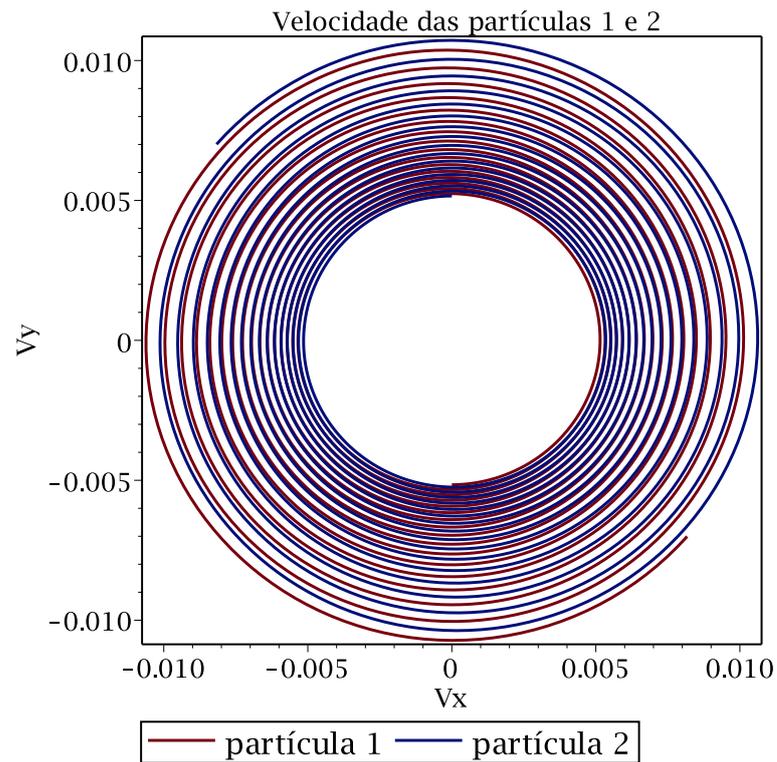


Figura 3.1.3: Velocidade das partículas 1 e 2 - $\eta = 1$. As velocidades V_x e V_y estão nas unidades reescaladas.

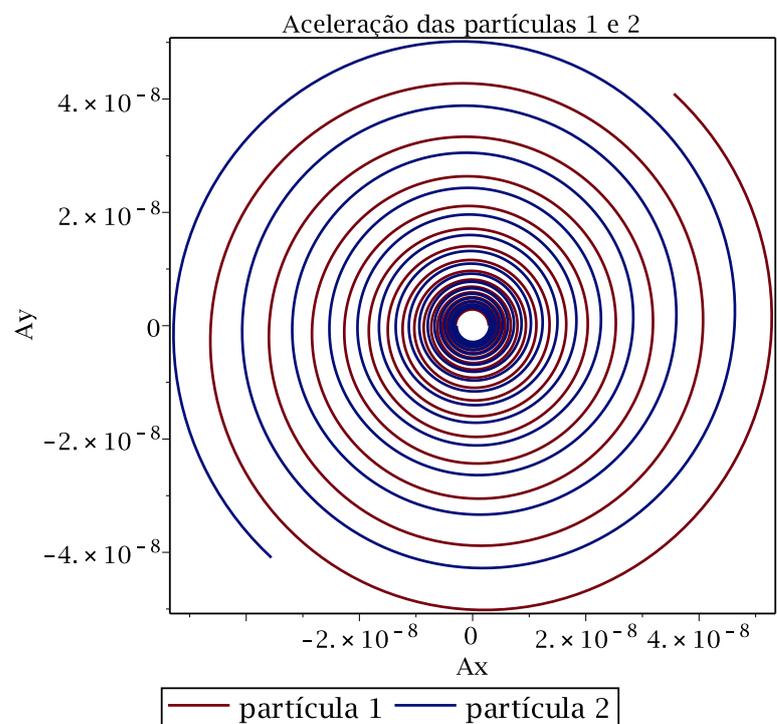


Figura 3.1.4: Aceleração das partículas 1 e 2 - $\eta = 1$. As acelerações A_x e A_y estão nas unidades reescaladas.

A partir da posição relativa podemos observar com mais clareza o movimento espiralado que diminui conforme a evolução temporal. Da mesma forma o sentido de rotação é anti-horário para velocidade e aceleração.

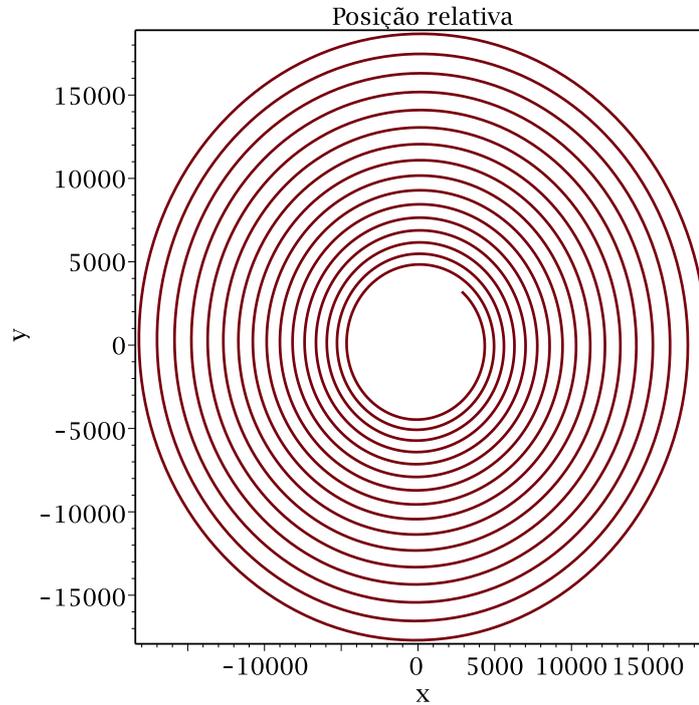


Figura 3.1.5: Posição relativa - $\eta = 1$. As coordenadas x e y representam a posição relativa das partículas que estão nas unidades reescaladas. O movimento em espiral ocorre no sentido anti-horário.

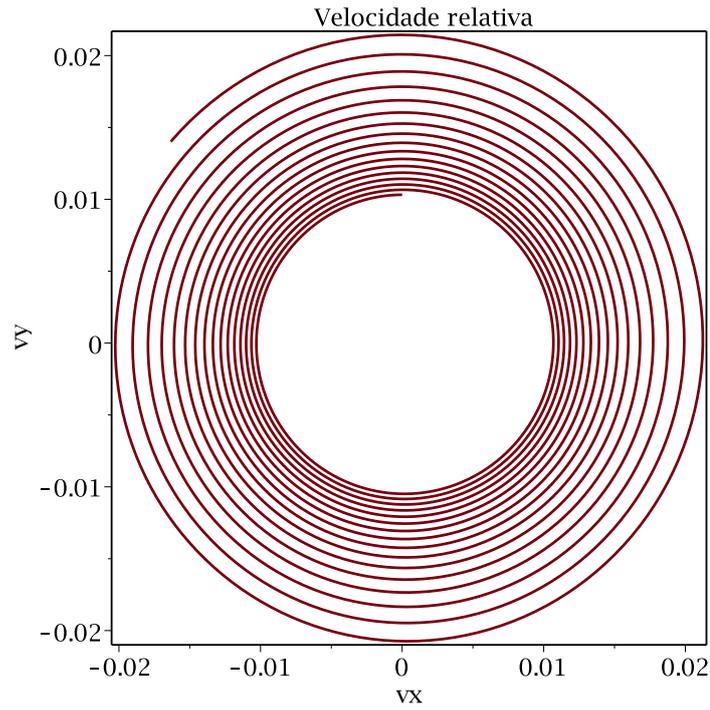


Figura 3.1.6: Velocidade relativa - $\eta = 1$. Os termos v_x e v_y são as velocidades relativas das partículas que estão nas unidades reescaladas.

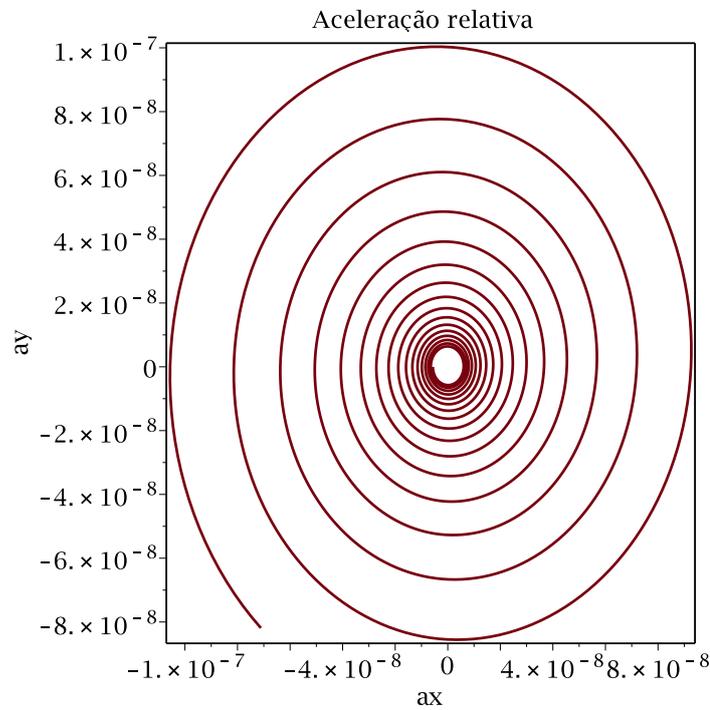


Figura 3.1.7: Aceleração relativa - $\eta = 1$. Os termos a_x e a_y são as acelerações relativas das partículas que estão nas unidades reescaladas.

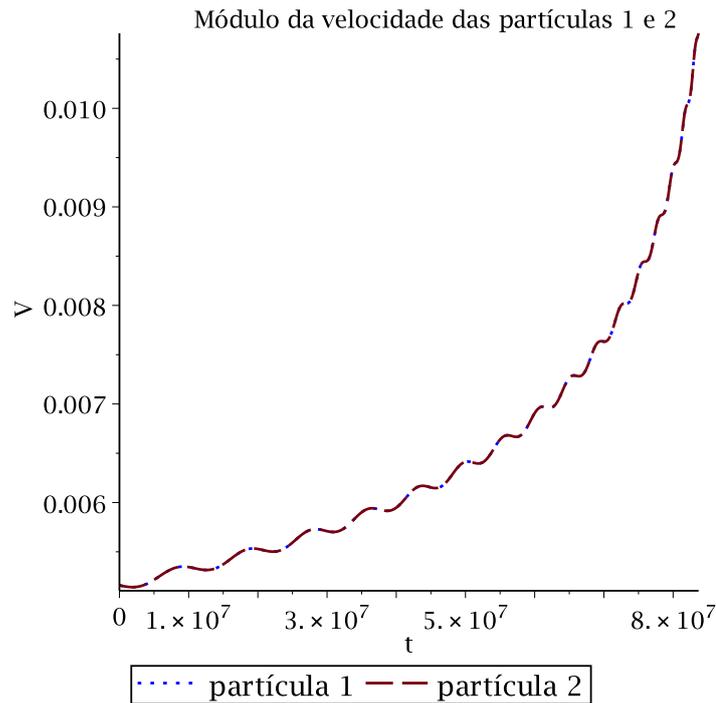


Figura 3.1.8: Módulo da velocidade das partículas 1 e 2 em função do tempo para $\eta = 1$. Os termos V e t estão nas unidades reescaladas.

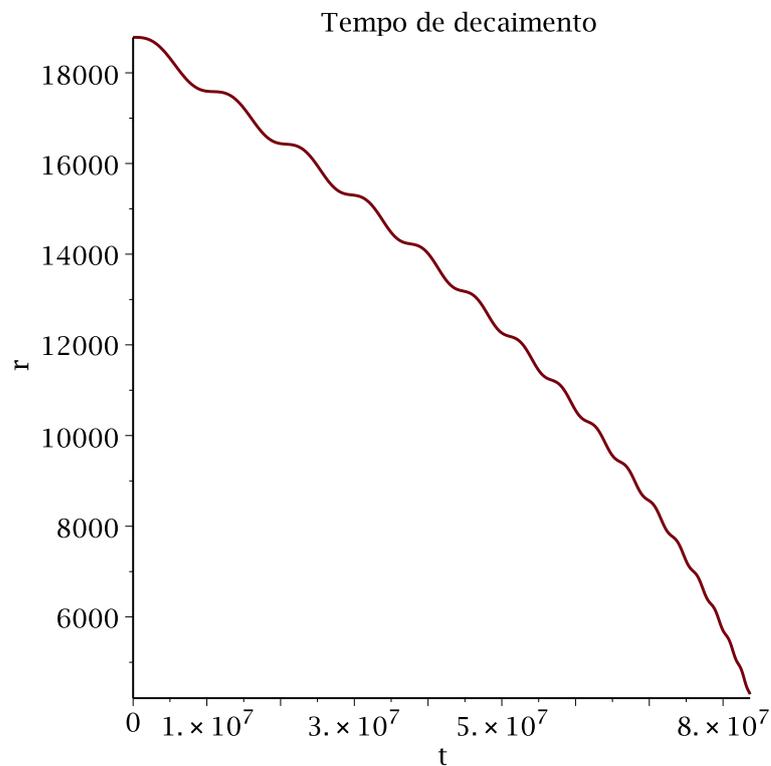


Figura 3.1.9: Posição relativa das partículas em função do tempo para $\eta = 1$. Os termos r e t estão nas unidades reescaladas.

- 2. $\eta = 2$

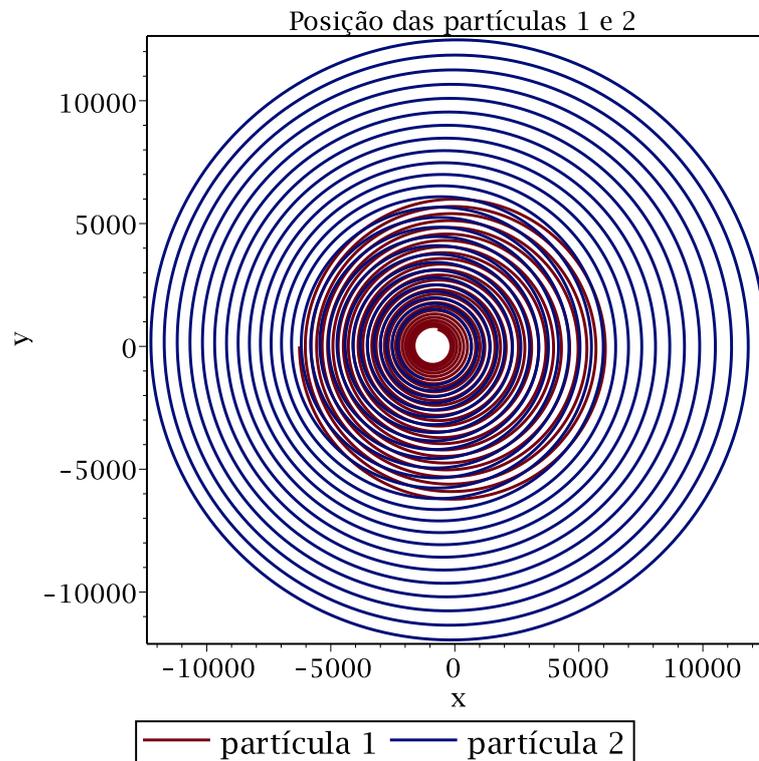


Figura 3.1.10: Posição das partículas 1 e 2 - $\eta = 2$. As coordenadas x e y estão nas unidades reescaladas. O movimento em espiral ocorre no sentido anti-horário.

O movimento das partículas novamente é espiralado e a distância entre elas diminui ao longo da evolução temporal, porém em outra escala espacial e temporal uma vez que estamos tratando do caso $\eta = 2$. O sentido da velocidade e aceleração é anti-horário aumentando o seu valor em módulo.

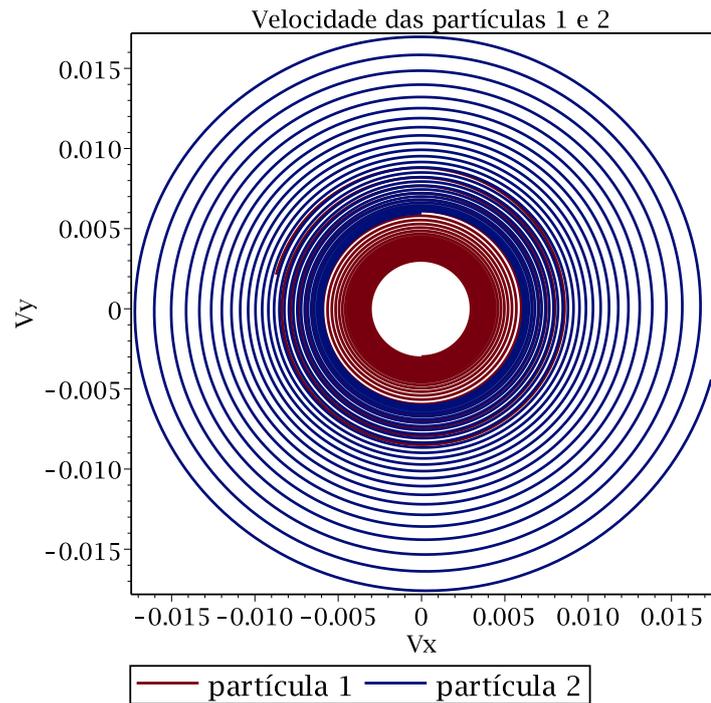


Figura 3.1.11: Velocidade das partículas 1 e 2 - $\eta = 2$. As velocidades V_x e V_y estão nas unidades reescaladas.

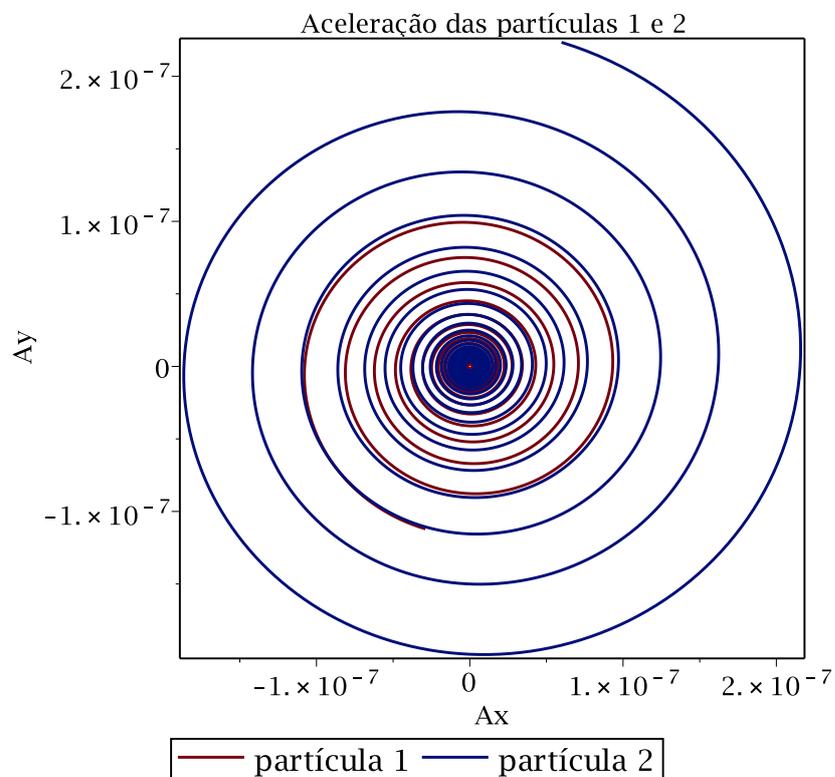


Figura 3.1.12: Aceleração das partículas 1 e 2 - $\eta = 2$. As acelerações A_x e A_y estão nas unidades reescaladas.

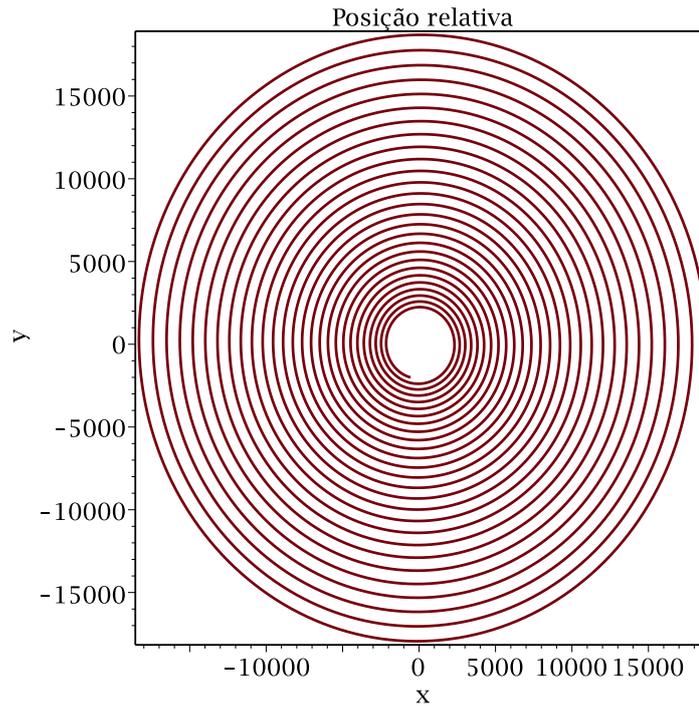


Figura 3.1.13: Posição relativa - $\eta = 2$. As coordenadas x e y representam a posição relativa das partículas que estão nas unidades reescaladas. O movimento em espiral ocorre no sentido anti-horário.

Novamente observamos o movimento espiralado que diminui ao longo do tempo e o sentido de rotação anti-horário da velocidade e aceleração.

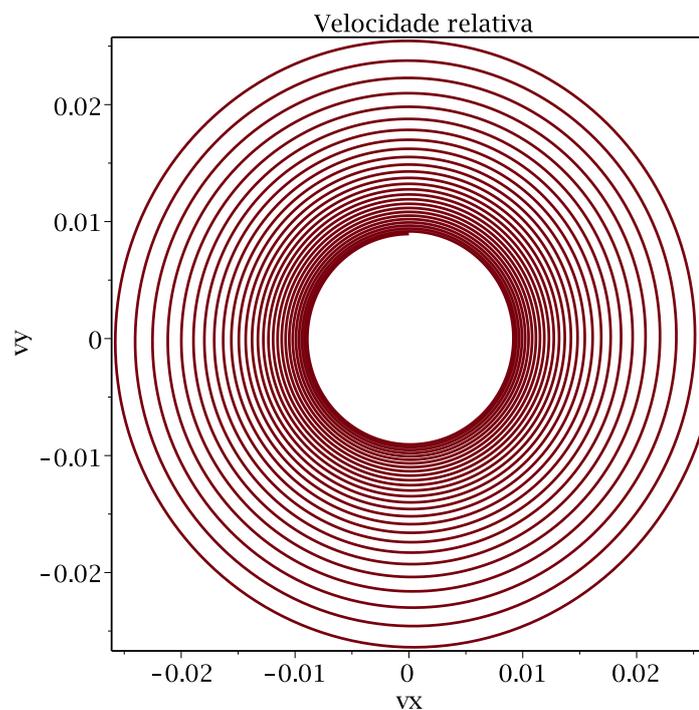


Figura 3.1.14: Velocidade relativa - $\eta = 2$. Os termos v_x e v_y são as velocidades relativas das partículas que estão nas unidades reescaladas.

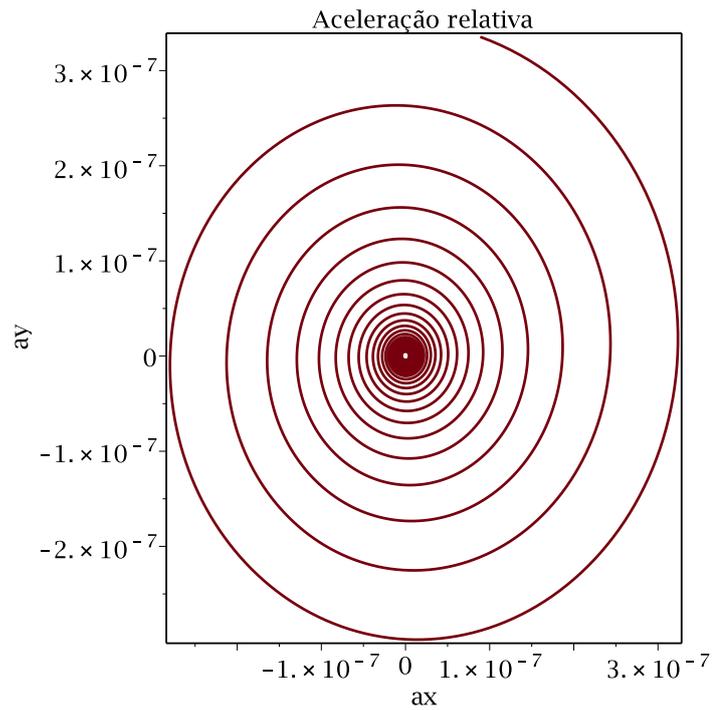


Figura 3.1.15: Aceleração relativa - $\eta = 2$. Os termos a_x e a_y são as acelerações relativas das partículas que estão nas unidades reescaladas.

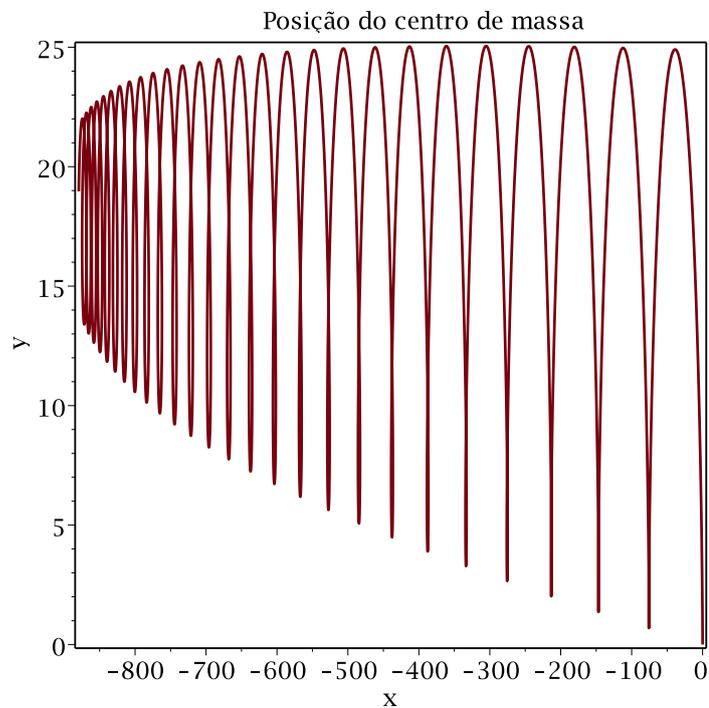


Figura 3.1.16: Posição do centro de massa - $\eta = 2$. As coordenadas x e y representam a posição do centro de massa nas unidades reescaladas.

Para o caso $\eta = 2$ observamos um movimento abrupto do centro de massa que sai do repouso e começa a deslocar no eixo x para a esquerda. Diferente do caso analisado anteriormente que o centro de massa permanecia em repouso para o caso $\eta = 2$ isto não mais acontece.

Considerando a variação do momento da partícula 1 devido a força da partícula 2 atuando na partícula 1 e vice-versa, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{21} \\ \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{12} \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) &= \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12}, \\ \frac{d}{dt}(m_1\mathbf{V}_1 + m_2\mathbf{V}_2) &= \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12}, \\ M \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1\mathbf{V}_1 + m_2\mathbf{V}_2}{M} \right) &= \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12}, \\ 0 \neq M \frac{d}{dt}(\mathbf{V}_{cm}) &= \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12}. \end{aligned}$$

Implicando

$$\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} \neq 0.$$

O deslocamento do centro de massa evidência a violação da 3ª lei de Newton o que sugere a ação de uma força externa no sistema que provoca o deslocamento. Com o movimento do centro de massa temos os gráficos da velocidade e da aceleração correspondentes a $\eta = 2$.

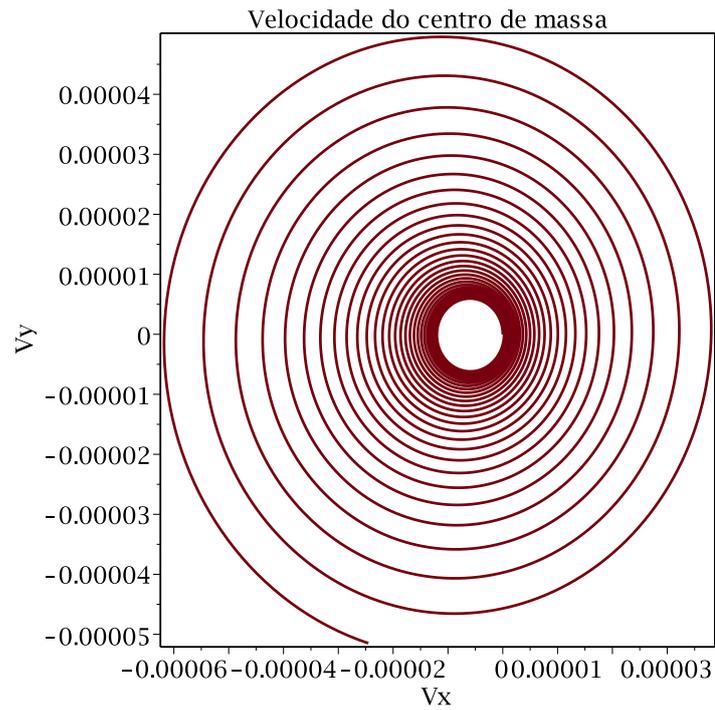


Figura 3.1.17: Velocidade do centro de massa - $\eta = 2$. Os termos V_x e V_y são as velocidades do centro de massa que estão nas unidades reescaladas.

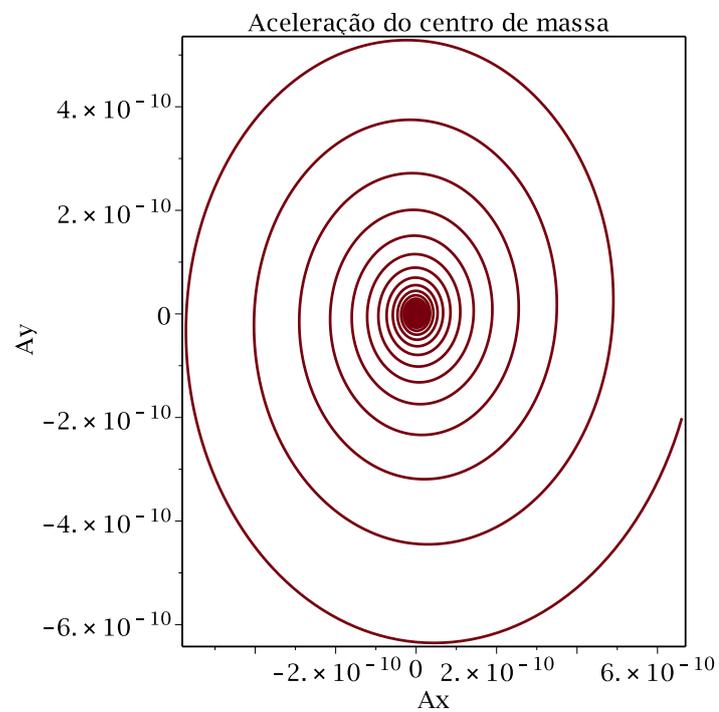


Figura 3.1.18: Aceleração do centro de massa - $\eta = 2$. Os termos A_x e A_y são as acelerações do centro de massa que estão nas unidades reescaladas.

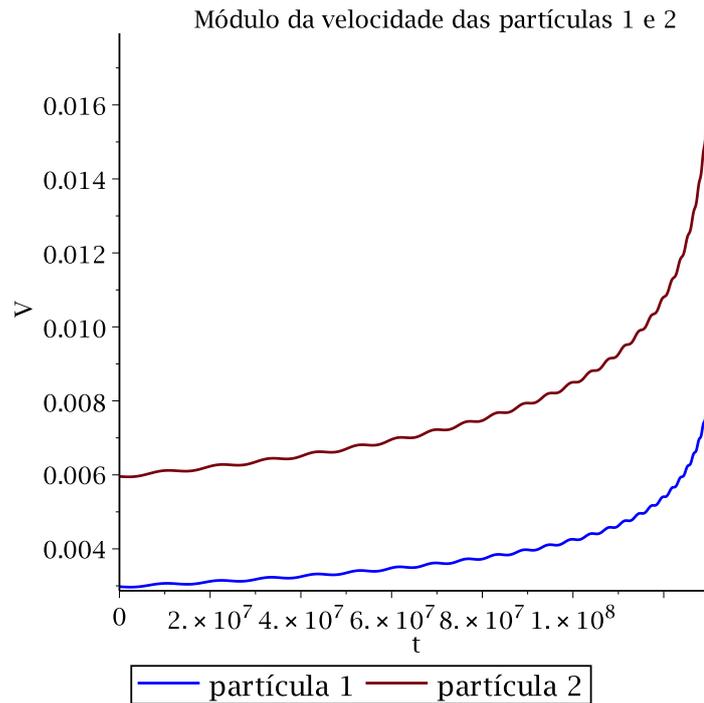


Figura 3.1.19: Módulo da velocidade das partículas 1 e 2 em função do tempo para $\eta = 2$. Os termos V e t estão nas unidades reescaladas.

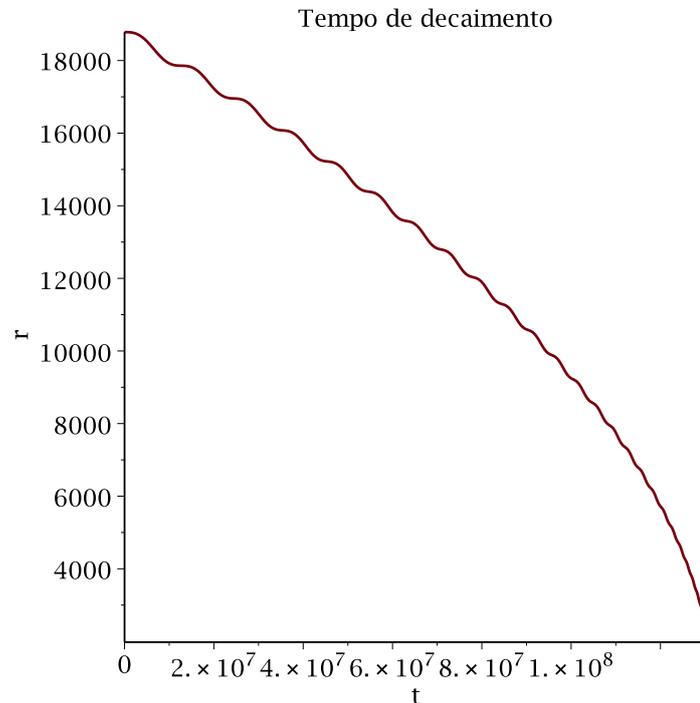


Figura 3.1.20: Posição relativa das partículas em função do tempo para $\eta = 2$. Os termos r e t estão nas unidades reescaladas.

Para $\eta = 2$ partindo das mesmas condições iniciais temos que o tempo de decaimento aumenta, porém a curva de decaimento é muito similar ao caso $\eta = 1$. Podemos observar também que tanto no caso anterior como neste há uma oscilação da curva durante o

decaimento. Esta oscilação será tratado com mais detalhes no próximo capítulo, quando estivermos procurando uma forma analítica de descrever o tempo de decaimento.

- 3. $\eta = 10$

Para o caso de $\eta = 10$ temos as mesmas análises feitas para o caso $\eta = 2$.

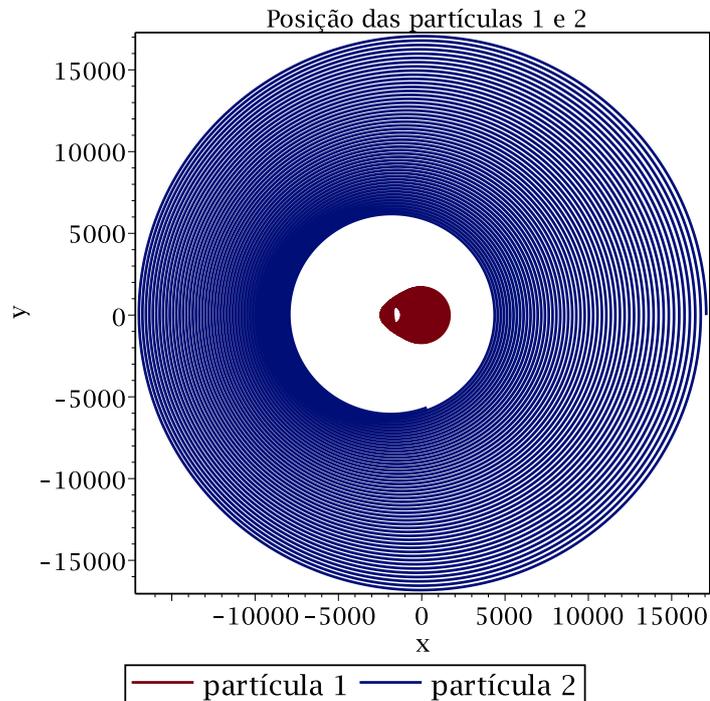


Figura 3.1.21: Posição das partículas 1 e 2 - $\eta = 10$. As coordenadas x e y estão nas unidades reescaladas. O movimento em espiral ocorre no sentido anti-horário.

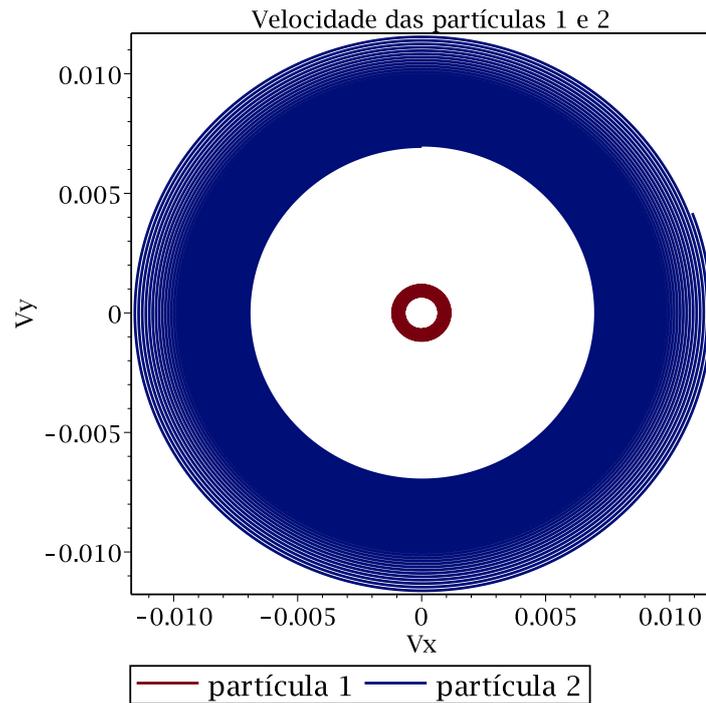


Figura 3.1.22: Velocidade das partículas 1 e 2 - $\eta = 10$. As velocidades V_x e V_y estão nas unidades reescaladas.

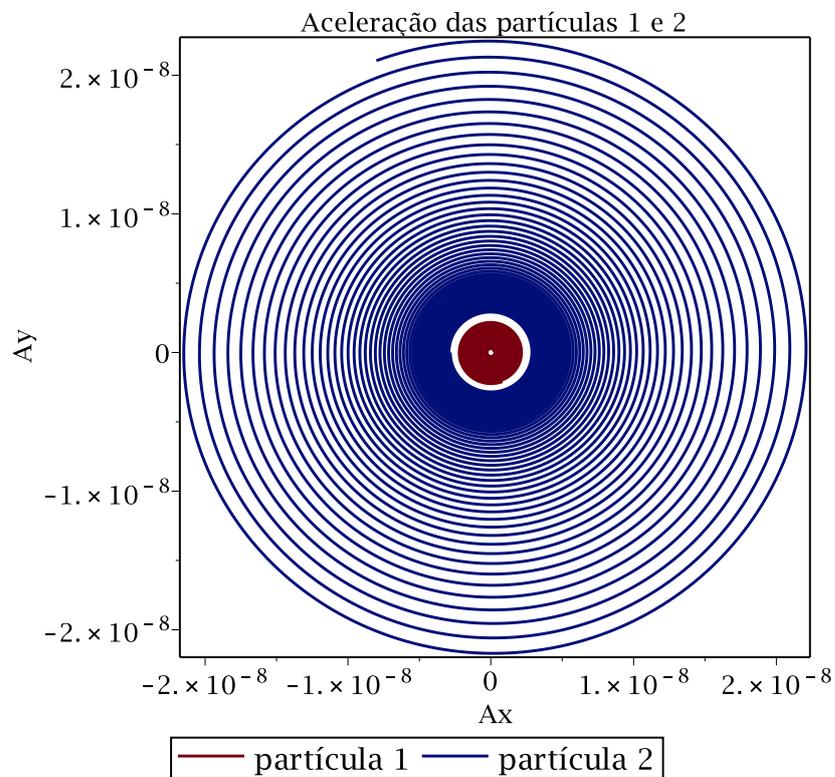


Figura 3.1.23: Aceleração das partículas 1 e 2 - $\eta = 10$. As acelerações A_x e A_y estão nas unidades reescaladas.

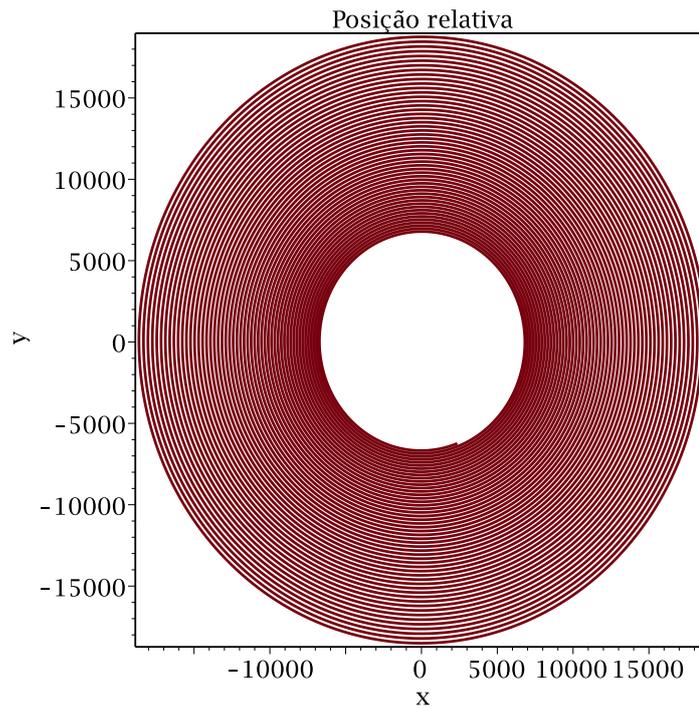


Figura 3.1.24: Posição relativa - $\eta = 10$. As coordenadas x e y representam a posição relativa das partículas que estão nas unidades reescaladas. O movimento em espiral ocorre no sentido anti-horário.

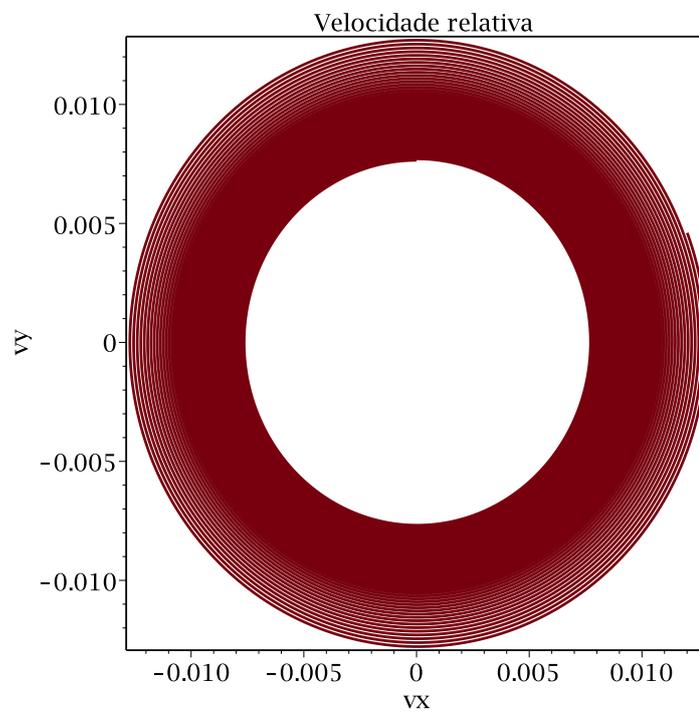


Figura 3.1.25: Velocidade relativa - $\eta = 10$. Os termos v_x e v_y são as velocidades relativas das partículas que estão nas unidades reescaladas.

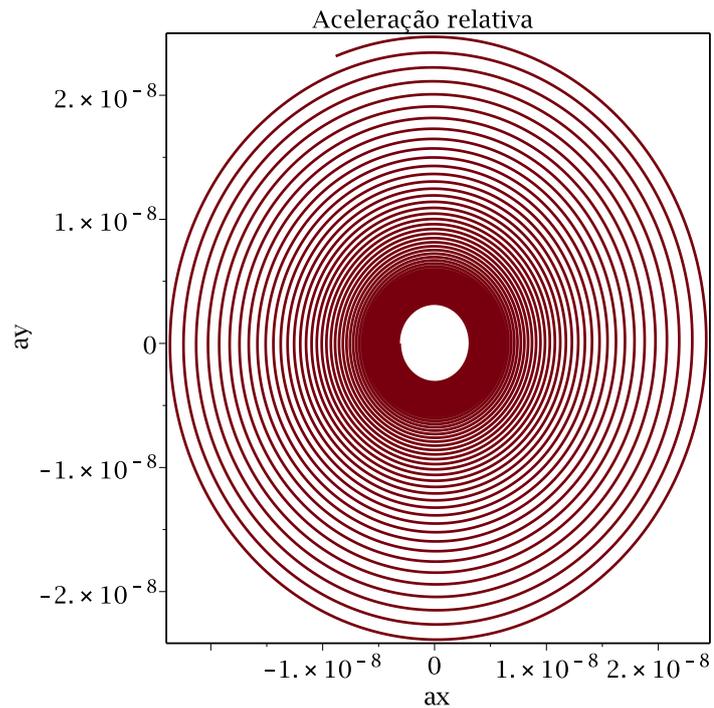


Figura 3.1.26: Aceleração relativa - $\eta = 10$. Os termos a_x e a_y são as acelerações relativas das partículas que estão nas unidades reescaladas.

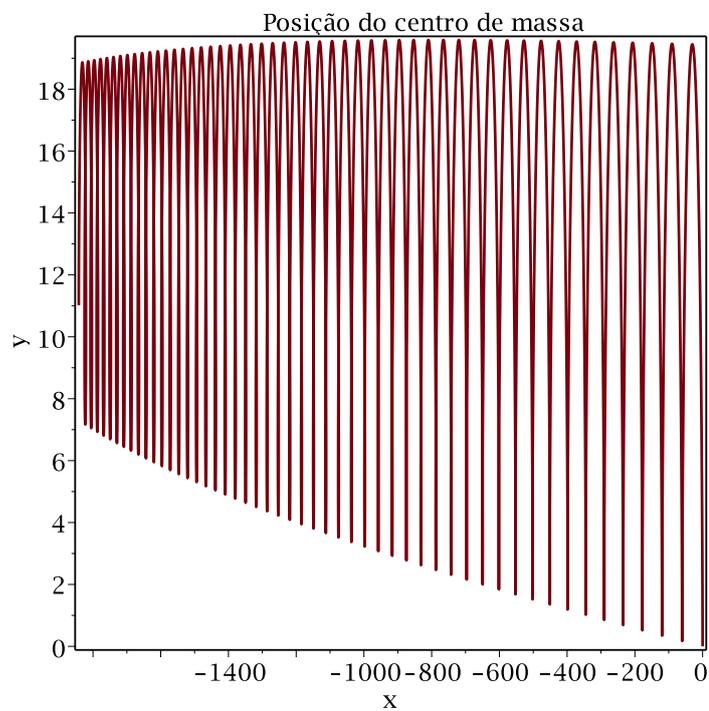


Figura 3.1.27: Posição do centro de massa - $\eta = 10$. As coordenadas x e y representam a posição do centro de massa nas unidades reescaladas.

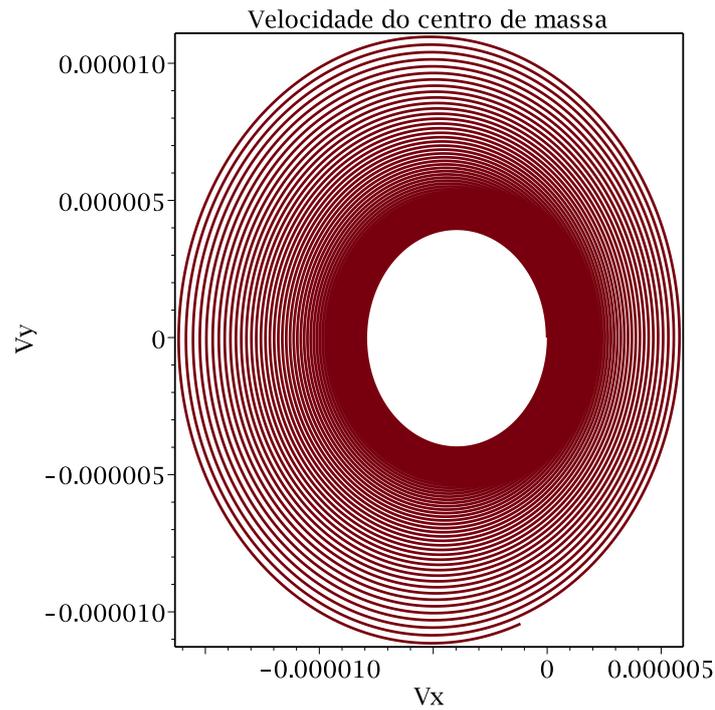


Figura 3.1.28: Velocidade do centro de massa - $\eta = 10$. Os termos V_x e V_y são as velocidades do centro de massa que estão nas unidades reescaladas.

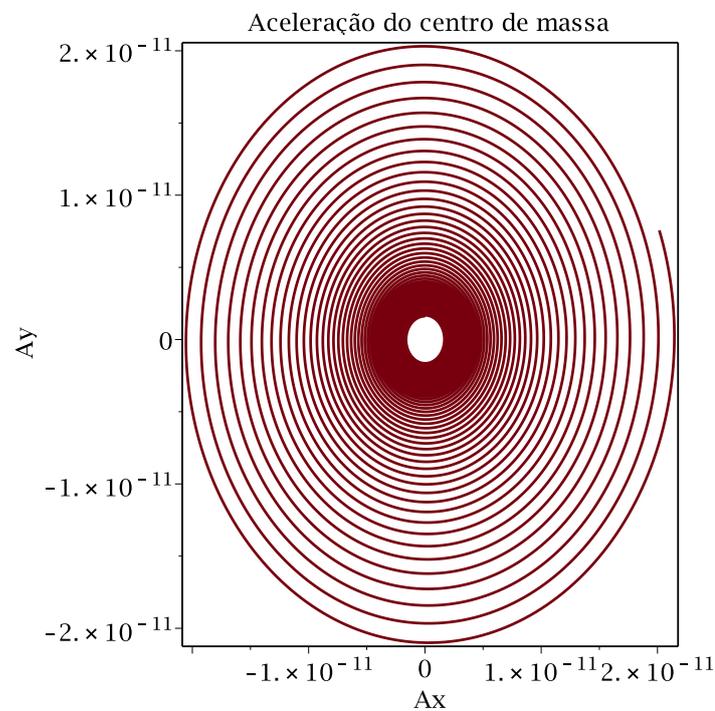


Figura 3.1.29: Aceleração do centro de massa - $\eta = 10$. Os termos A_x e A_y são as acelerações do centro de massa que estão nas unidades reescaladas.

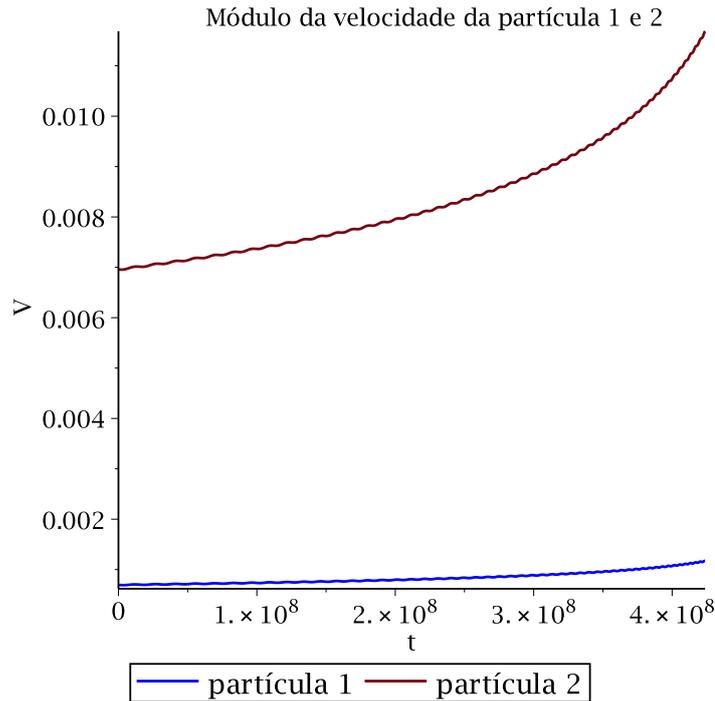


Figura 3.1.30: Módulo da velocidade das partículas 1 e 2 em função do tempo para $\eta = 10$. Os termos V e t estão nas unidades reescaloadas.

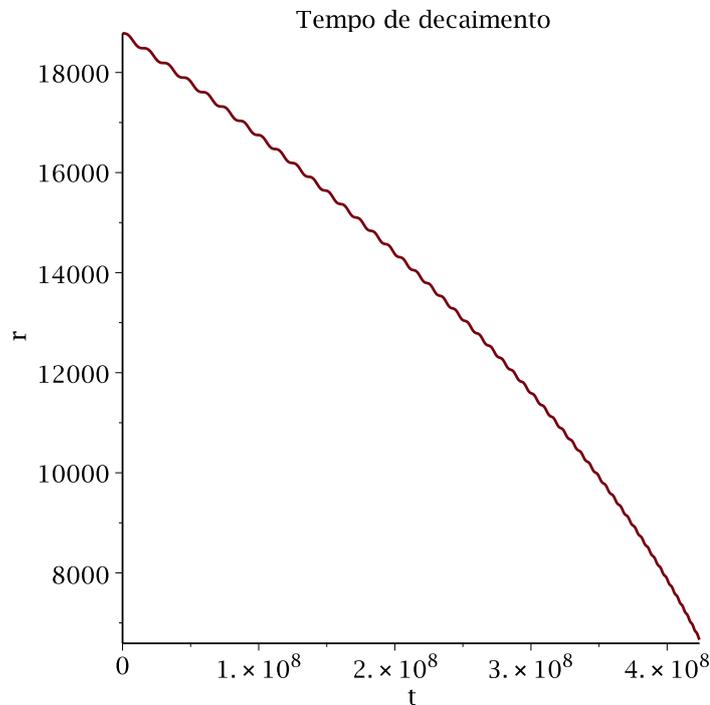


Figura 3.1.31: Posição relativa das partículas em função do tempo para $\eta = 10$. Os termos r e t estão nas unidades reescaloadas.

Da análise realizada do sistema descrito neste capítulo podemos enfatizar que a dinâmica depende da razão das massas η . A dinâmica para diferentes valores de η gera dinâmicas distintas, isto é para cada valor de η teremos uma curva característica

que descreve a posição, velocidade, aceleração e o tempo de decaimento, porém se dois sistemas com parâmetros totalmente diferentes: Valores distintos de cargas, permissividade elétrica, permeabilidade magnética e massas, não obstante a razão das massas para esses dois sistemas forem as mesmas surge uma simetria de escala em que há um mapeamento de um sistema ao outro por uma simples transformação de escala espacial e temporal.

3.2 Movimento do Centro de Massa

Para os valores de η iguais a 2 e 10 observa-se o deslocamento do centro de massa. Para estes dois casos aplicaremos condições iniciais diferentes nas posições das partículas e observaremos o comportamento da trajetória do centro de massa. Assim, para $\eta = 2$ com as seguintes condições iniciais

- 1ª Condição Inicial

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{r_0}{\eta + 1}, \\y_1 &= 0, \\x_2 &= \frac{\eta r_0}{\eta + 1}, \\y_2 &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{1x}(t_0) &= 0, \\V_{1y}(t_0) &= x_1 V_\theta(t_0), \\V_{2x}(t_0) &= 0, \\V_{2y}(t_0) &= x_2 V_\theta(t_0),\end{aligned}$$

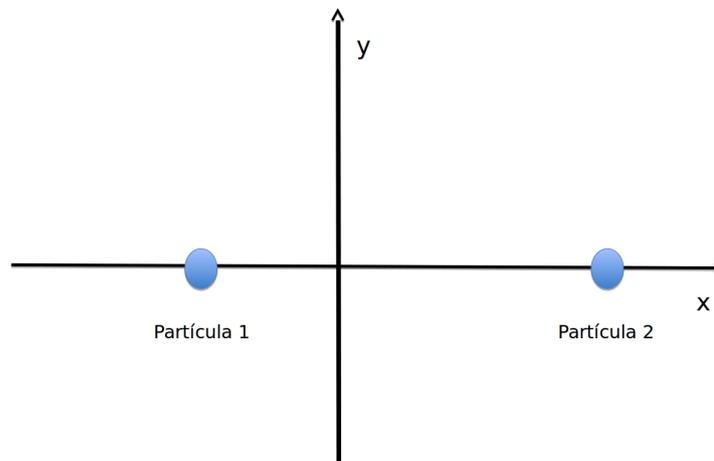


Figura 3.2.32: Posição da partícula 1 e 2 para a 1ª condição inicial.

- 2ª Condição Inicial

$$\begin{aligned}x'_1 &= \frac{r_0}{\eta + 1}, \\y'_1 &= 0, \\x'_2 &= -\frac{\eta r_0}{\eta + 1}, \\y'_2 &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V'_{1x}(t_0) &= 0, \\V'_{1y}(t_0) &= x'_1 V_\theta(t_0), \\V'_{2x}(t_0) &= 0, \\V'_{2y}(t_0) &= x'_2 V_\theta(t_0),\end{aligned}$$

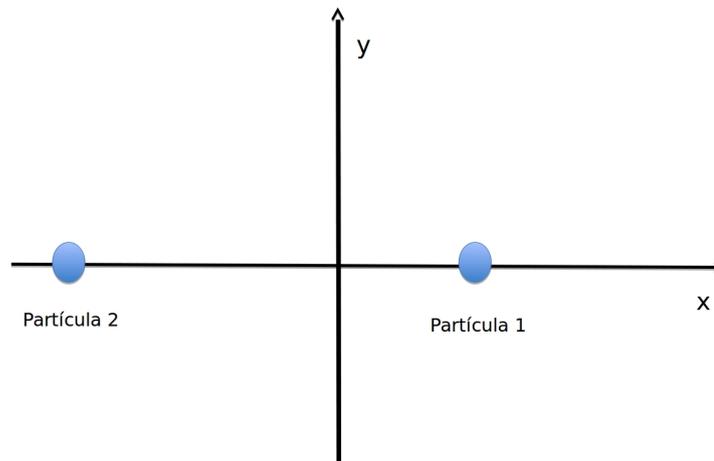


Figura 3.2.33: Posição da partícula 1 e 2 para a 2ª condição inicial.

Com a primeira condição inicial temos o deslocamento do centro de massa representado na cor verde e com a segunda condição inicial temos o deslocamento do centro de massa representado na cor azul como mostra o gráfico a seguir.

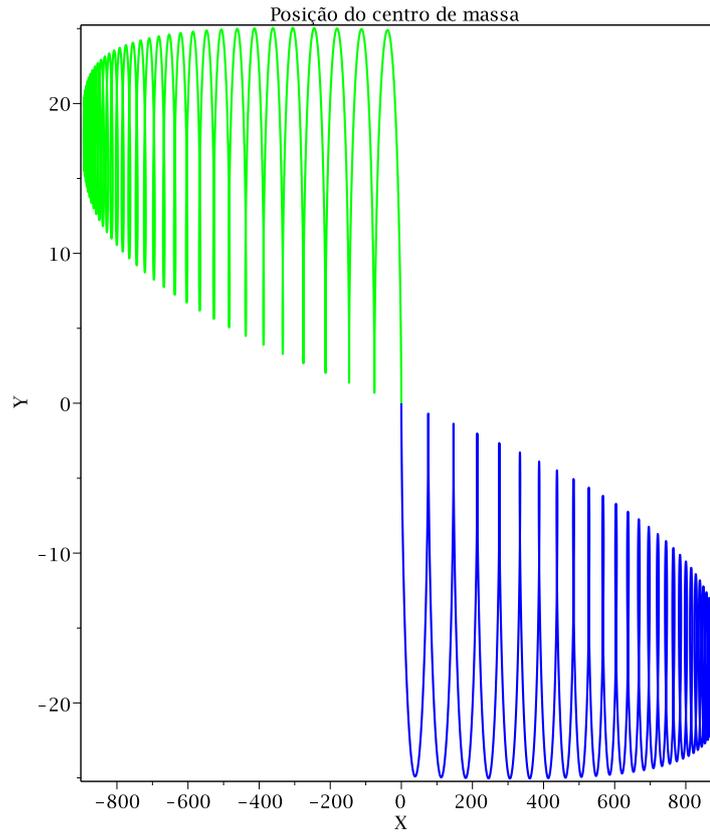


Figura 3.2.34: Movimento do centro de massa para 1ª e a 2ª condição inicial - $\eta = 2$

Considerando novas condições iniciais temos,

- 3ª Condição inicial

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{r_0}{\eta + 1}, \\ x_1 &= 0, \\ y_2 &= \frac{\eta r_0}{\eta + 1}, \\ x_2 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{1y}(t_0) &= 0, \\ V_{1x}(t_0) &= y_1 V_\theta(t_0), \\ V_{2y}(t_0) &= 0, \\ V_{2x}(t_0) &= y_2 V_\theta(t_0), \end{aligned}$$

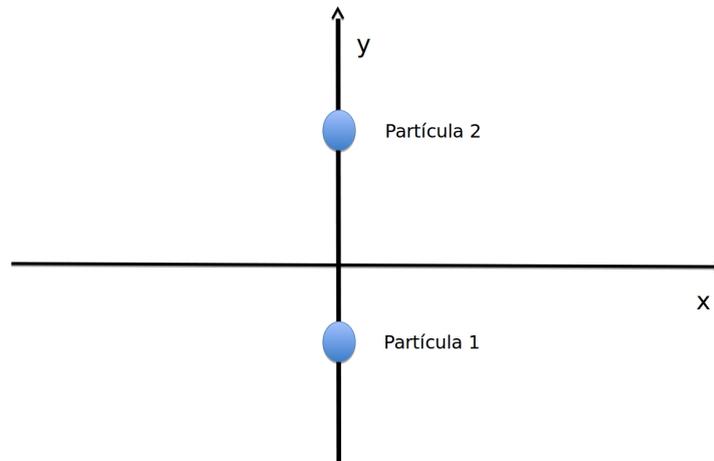


Figura 3.2.35: Posição da partícula 1 e 2 para a 3ª condição inicial.

- 4ª Condição inicial

$$\begin{aligned} y'_1 &= \frac{r_0}{\eta + 1}, \\ x'_1 &= 0, \\ y'_2 &= -\frac{\eta r_0}{\eta + 1}, \\ x'_2 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V'_{1y}(t_0) &= 0, \\ V'_{1x} &= y'_1 V_\theta(t_0), \\ V'_{2y}(t_0) &= 0, \\ V'_{2x} &= y'_2 V_\theta(t_0), \end{aligned}$$

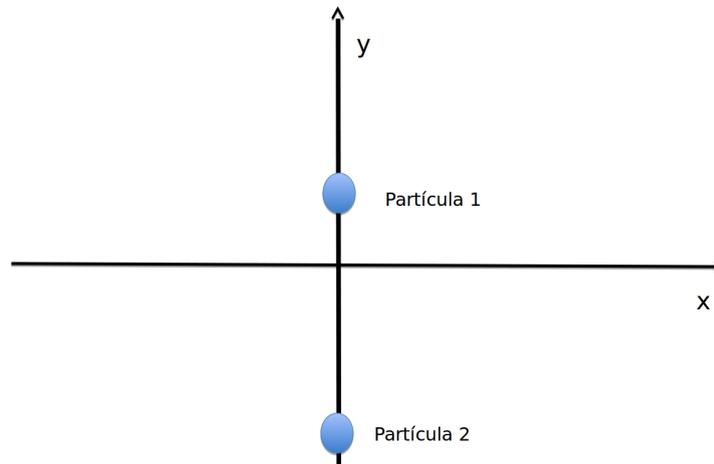


Figura 3.2.36: Posição da partícula 1 e 2 para a 4ª condição inicial.

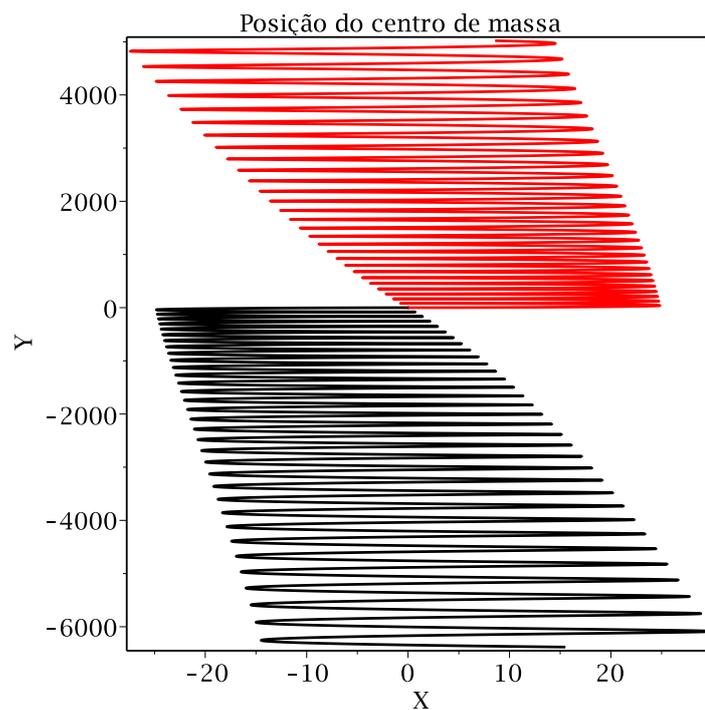


Figura 3.2.37: Movimento do centro de massa para 3ª e a 4ª condição inicial - $\eta = 2$

Com a terceira condição inicial temos o deslocamento do centro de massa representado na cor vermelha e com a quarta condição inicial temos o deslocamento do centro de massa representado na cor preta como mostra o gráfico a cima. Portanto, com as quatro condições iniciais diferentes obtemos o seguinte gráfico.

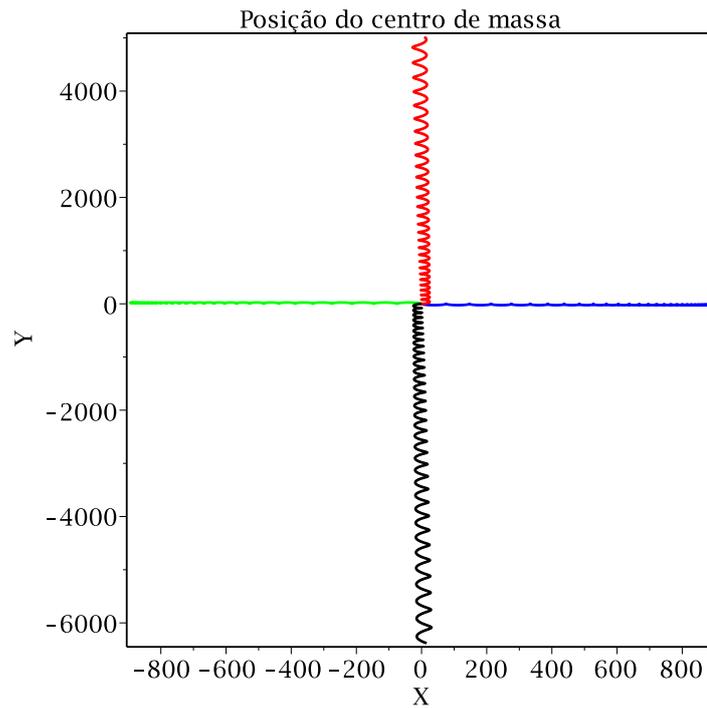


Figura 3.2.38: Movimento do centro de massa - $\eta = 2$

Considerando $\eta = 10$ e partindo das mesmas condições iniciais apresentadas anteriormente obtemos os seguintes gráficos.

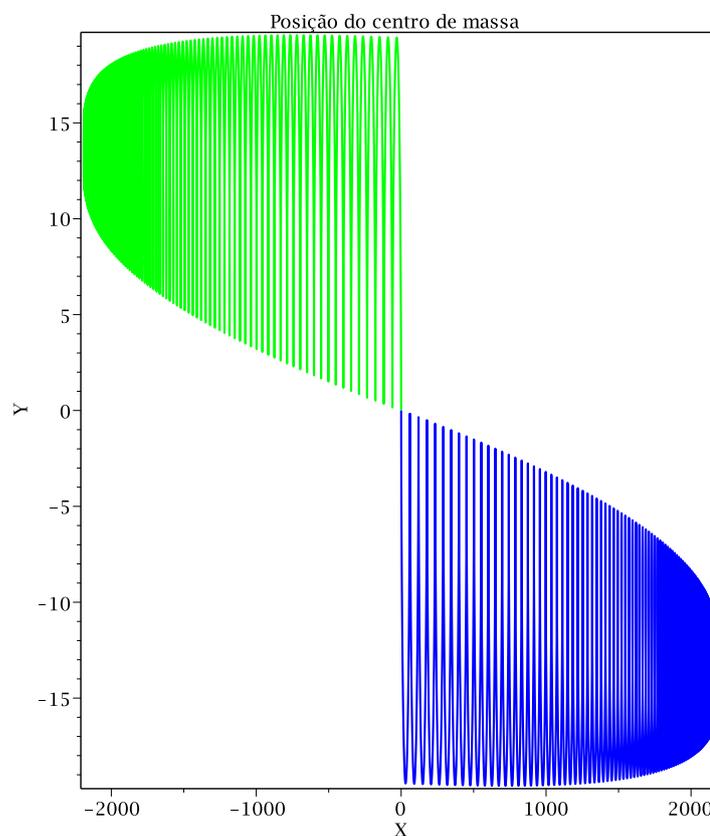


Figura 3.2.39: Movimento do centro de massa para 1ª e 2ª condição inicial - $\eta = 10$

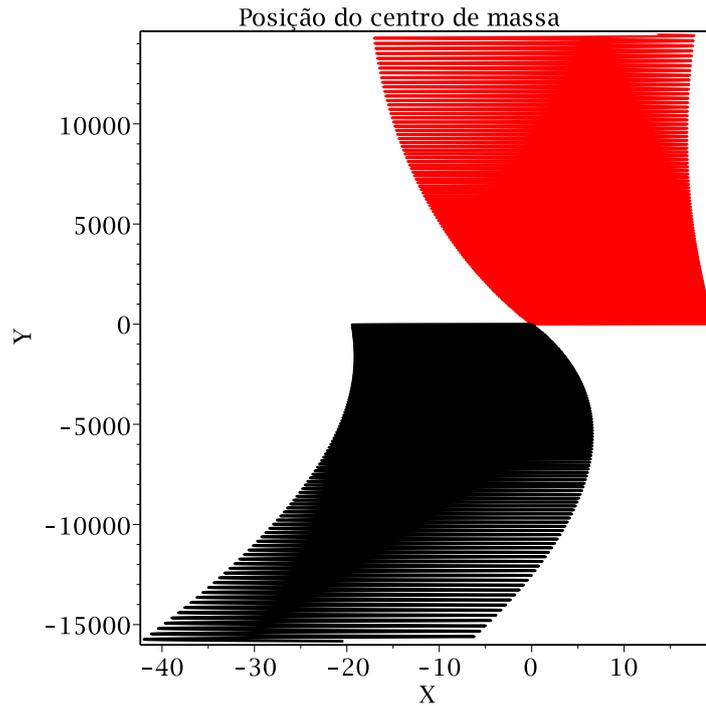


Figura 3.2.40: Movimento do centro de massa para 1ª e a 2ª condição inicial - $\eta = 10$

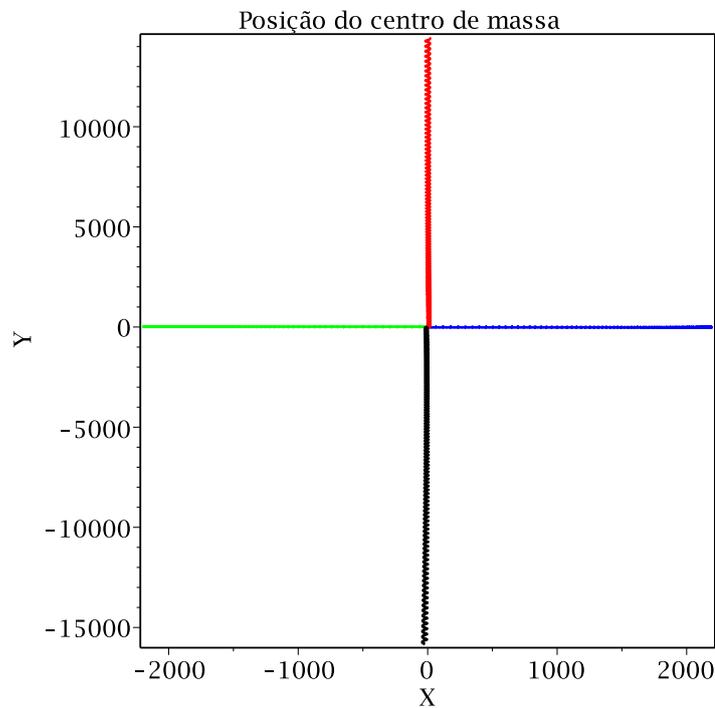


Figura 3.2.41: Movimento do centro de massa - $\eta = 10$

Quando consideramos a 1ª e a 2ª condição inicial observamos o espelhamento da trajetória do centro de massa. O mesmo ocorre para a 3ª e a 4ª condição inicial com os dois valores de η avaliados.

3.3 Condição Inicial Diferente do Movimento Circular

A análise realizada até o presente momento da dinâmica é considerando a condição inicial para uma força coulombiana que gera orbitas circulares. Porém, podemos realizar novamente todo estudo da dinâmica para uma condição inicial diferente. Para fins de contemplação do comportamento da dinâmica deste sistema, iremos colocar como condição inicial o movimento das partículas em uma elipse e assim obter os gráficos das acelerações, velocidades, posições e do tempo de decaimento. Portanto, definimos a condição inicial para as posições

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{r_0}{\eta + 1} \frac{\sqrt{2}}{2}, \\y_1 &= -\frac{r_0}{2} \frac{1}{\eta + 1} \frac{\sqrt{2}}{2}, \\x_2 &= \frac{\eta r_0}{\eta + 1} \frac{\sqrt{2}}{2}, \\y_2 &= \frac{1}{2} \frac{\eta r_0}{\eta + 1} \frac{\sqrt{2}}{2},\end{aligned}$$

e para as velocidades

$$\begin{aligned}V_{1x}(t_0) &= -y_1 V_\theta(t_0), \\V_{1y}(t_0) &= x_1 V_\theta(t_0), \\V_{2x}(t_0) &= -y_2 V_\theta(t_0), \\V_{2y}(t_0) &= x_2 V_\theta(t_0).\end{aligned}$$

As unidades das posições, velocidades, acelerações e os tempos para os diferentes valores de η estão nas unidades reescaladas. O primeiro gráfico temos a evolução das trajetórias das partículas para o caso $\eta = 1$. Nota-se o movimento em espiral elíptico diminuindo a distância entre as partículas conforme o tempo evolui. A velocidade e aceleração das partículas apresentam o sentido de rotação anti-horário.

- 1. $\eta = 1$

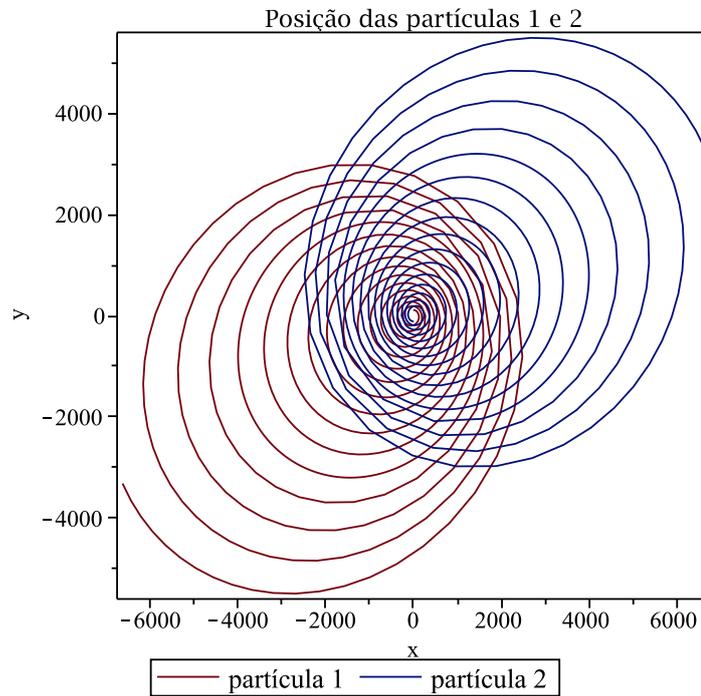


Figura 3.3.42: Posição das partículas 1 e 2 - $\eta = 1$. As coordenadas x e y estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

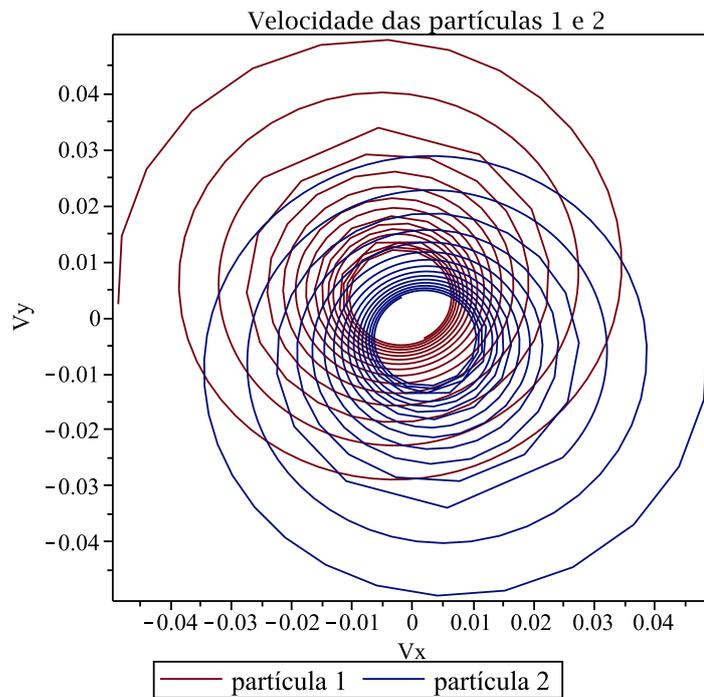


Figura 3.3.43: Velocidade das partículas 1 e 2 - $\eta = 1$. As velocidades V_x e V_y estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

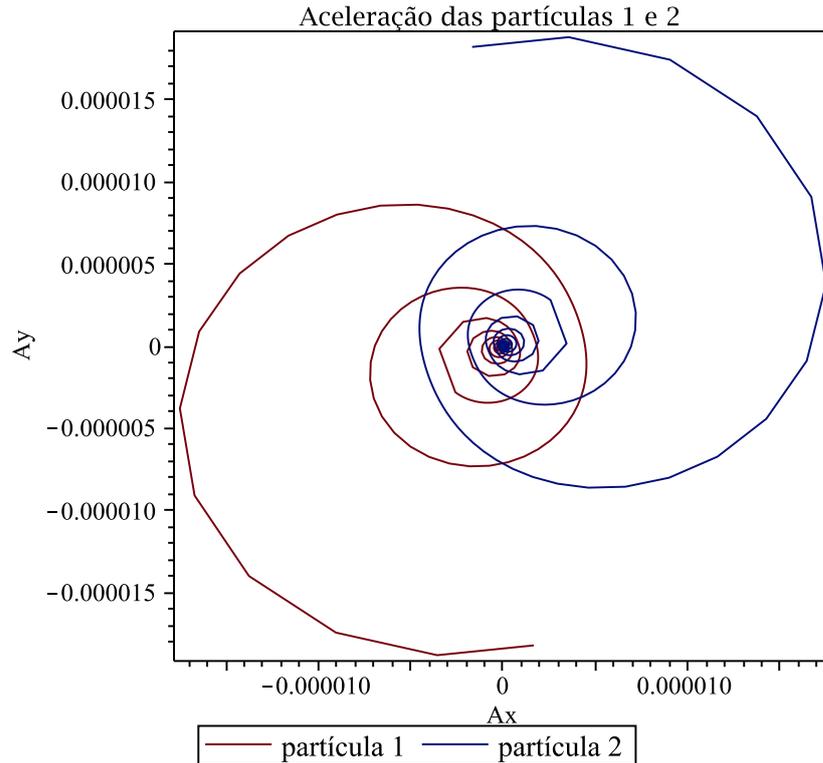


Figura 3.3.44: Aceleração das partículas 1 e 2 - $\eta = 1$. As acelerações A_x e A_y estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

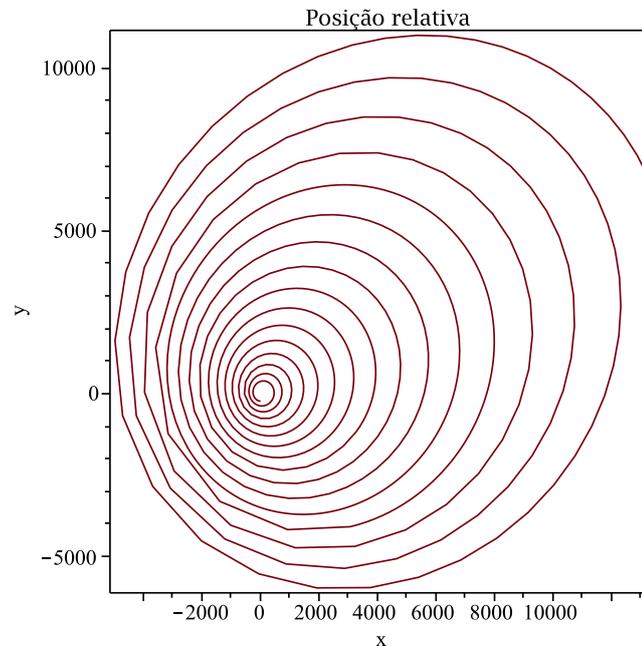


Figura 3.3.45: Posição relativa - $\eta = 1$. As coordenadas x e y representam a posição relativa das partículas que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

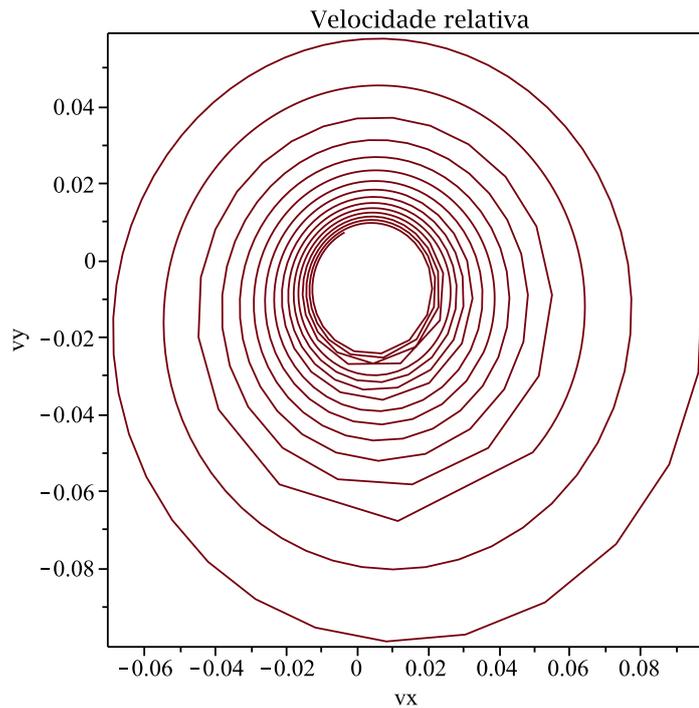


Figura 3.3.46: Velocidade relativa - $\eta = 1$. Os termos v_x e v_y são as velocidades relativas das partículas que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

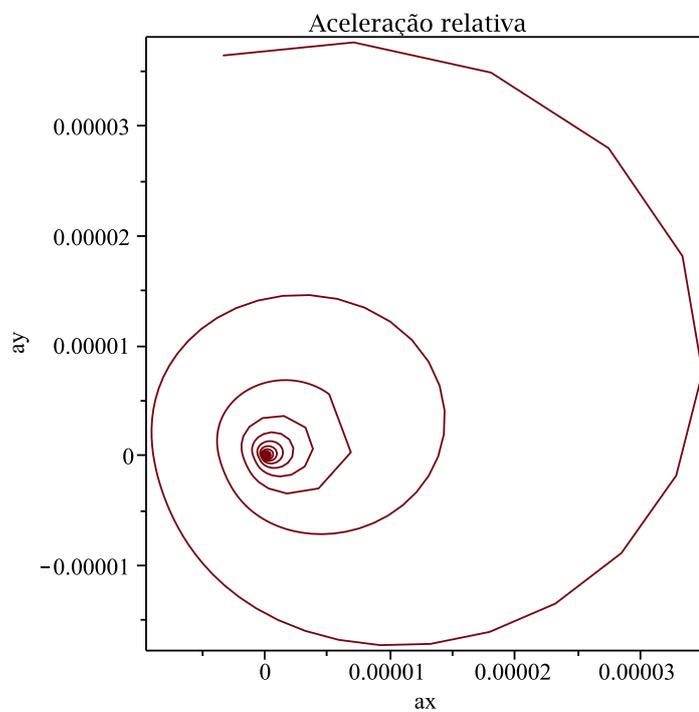


Figura 3.3.47: Aceleração relativa - $\eta = 1$. Os termos a_x e a_y são as acelerações relativas das partículas que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

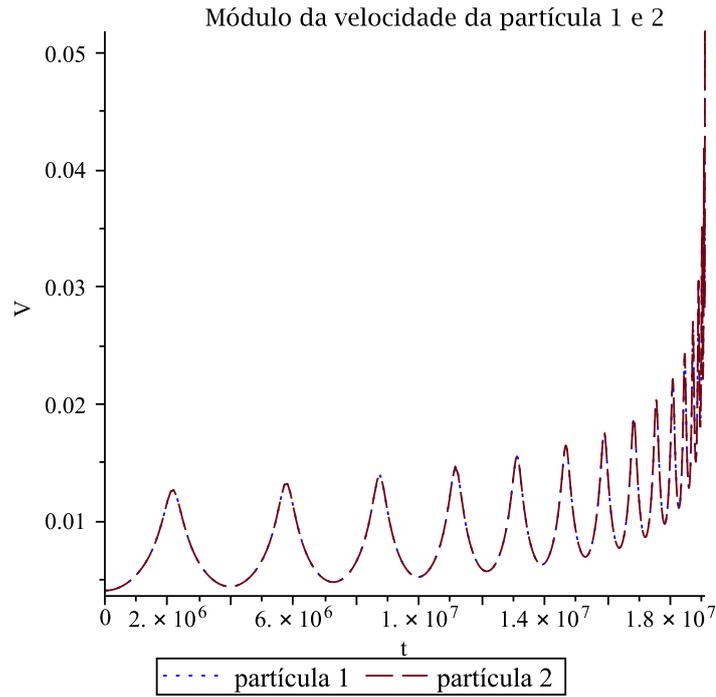


Figura 3.3.48: Módulo da velocidade das partículas 1 e 2 em função do tempo para $\eta = 1$. Os termos V e t estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

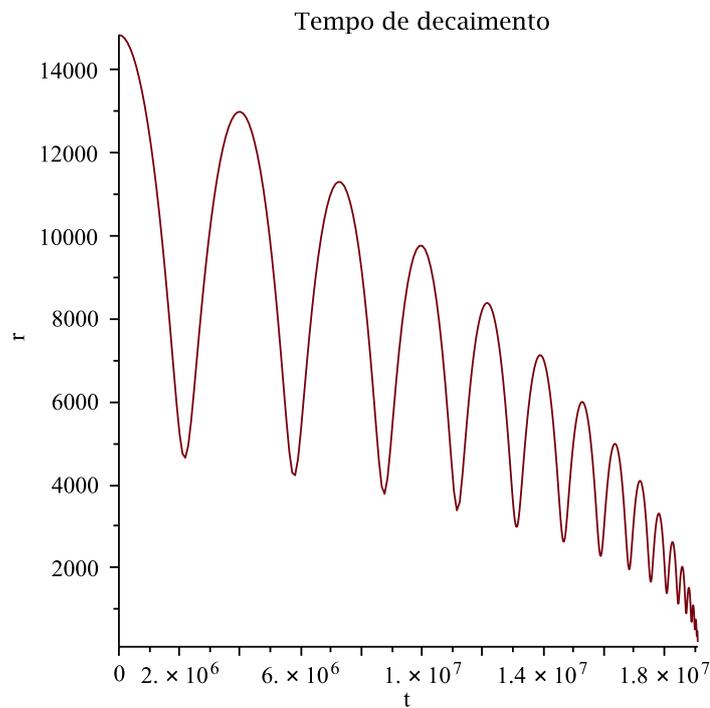


Figura 3.3.49: Posição relativa das partículas em função do tempo para $\eta = 1$. Os termos r e t estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

- 2. $\eta = 2$

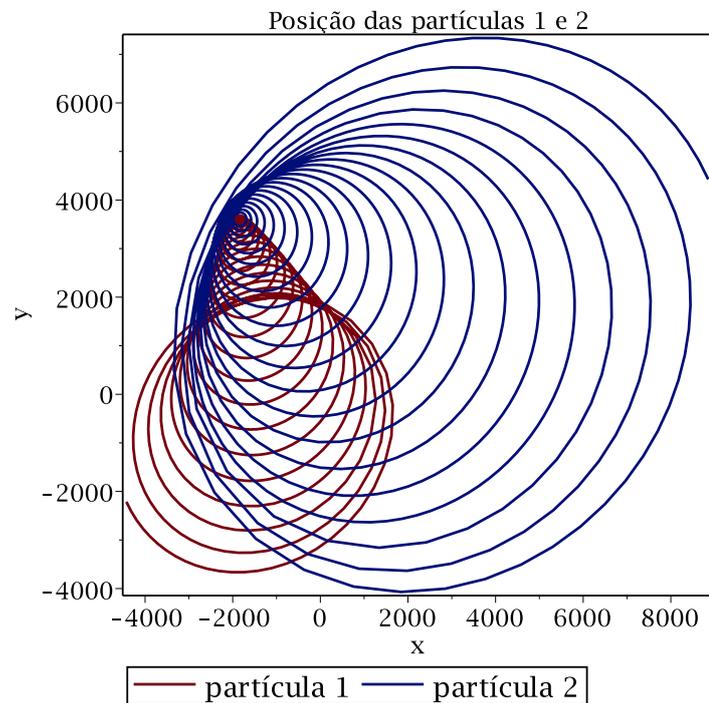


Figura 3.3.50: Posição das partículas 1 e 2 - $\eta = 2$. As coordenadas x e y estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

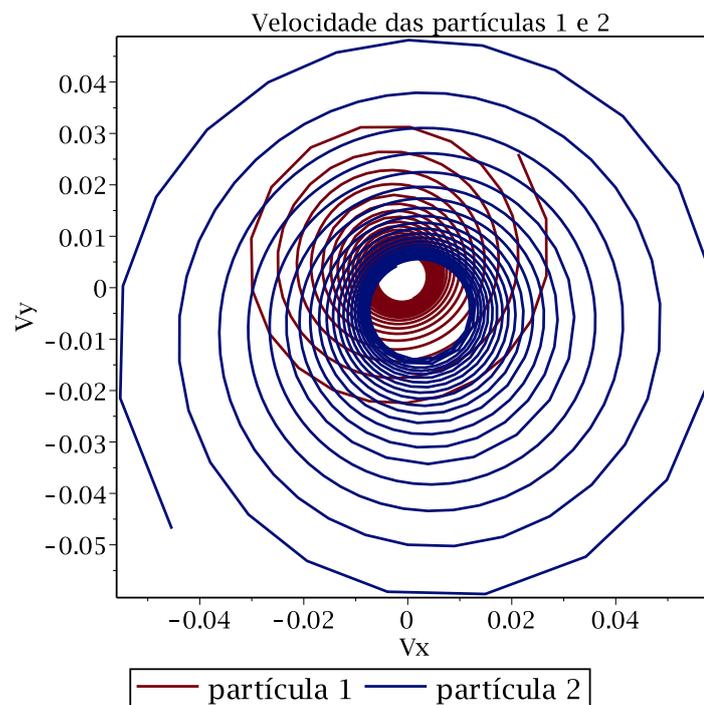


Figura 3.3.51: Velocidade das partículas 1 e 2 - $\eta = 2$. As velocidades V_x e V_y estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

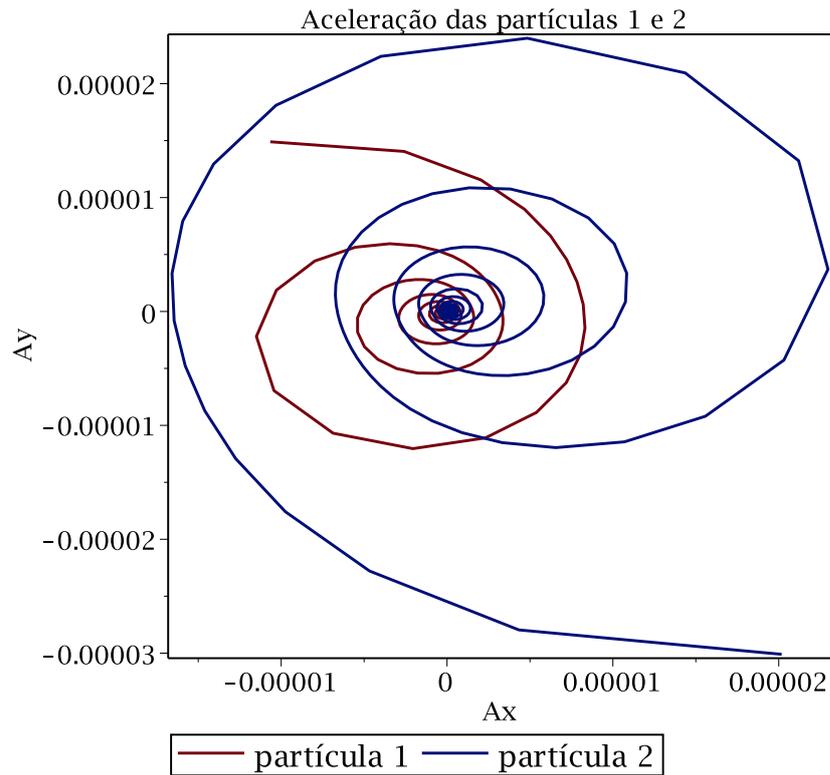


Figura 3.3.52: Aceleração das partículas 1 e 2 - $\eta = 2$. As acelerações A_x e A_y estão nas unidades reescaloadas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

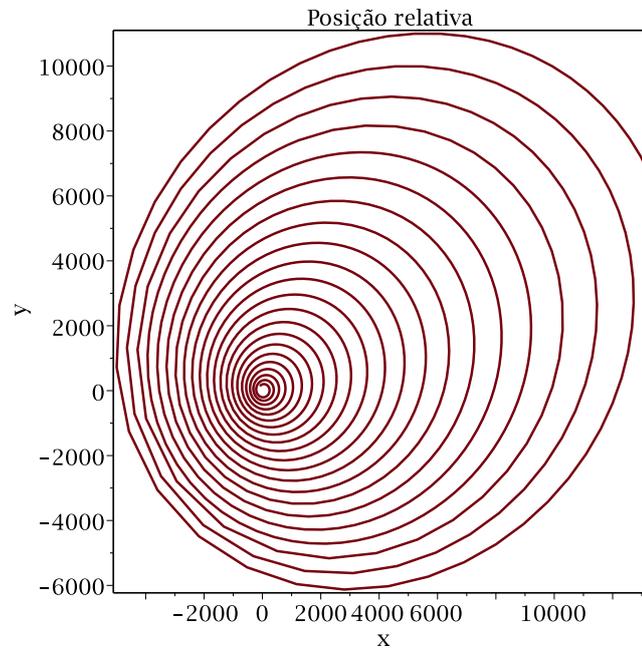


Figura 3.3.53: Posição relativa - $\eta = 2$. As coordenadas x e y representam a posição relativa das partículas que estão nas unidades reescaloadas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

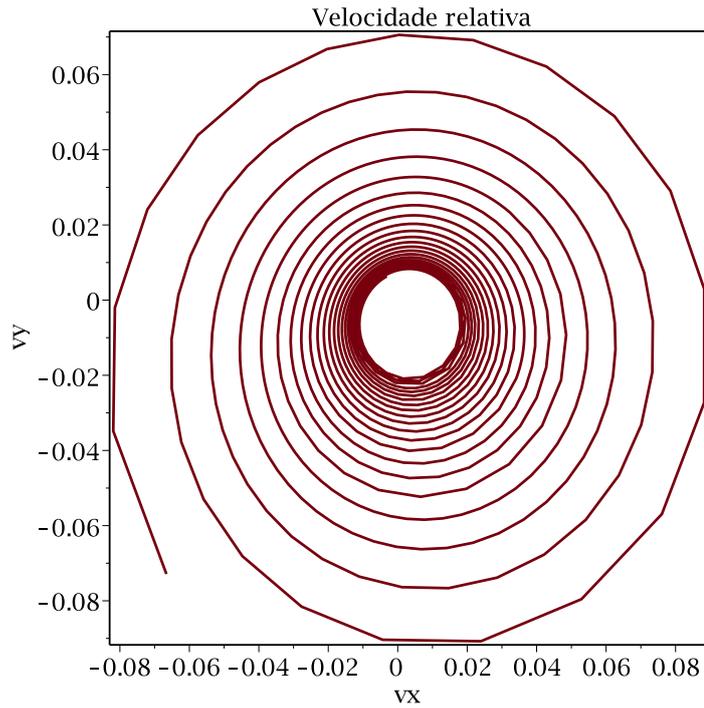


Figura 3.3.54: Velocidade relativa - $\eta = 2$. Os termos v_x e v_y são as velocidades relativas das partículas que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

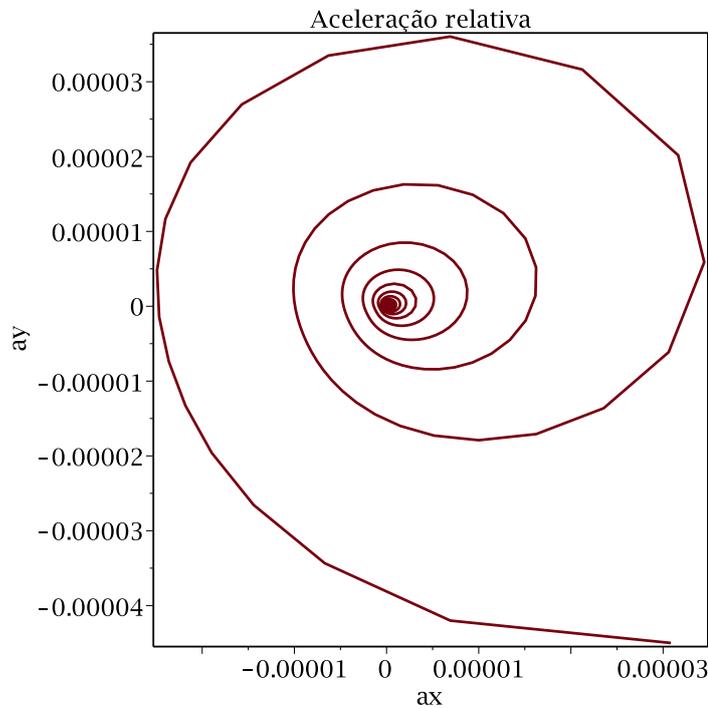


Figura 3.3.55: Aceleração relativa - $\eta = 2$. Os termos a_x e a_y são as acelerações relativas das partículas que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

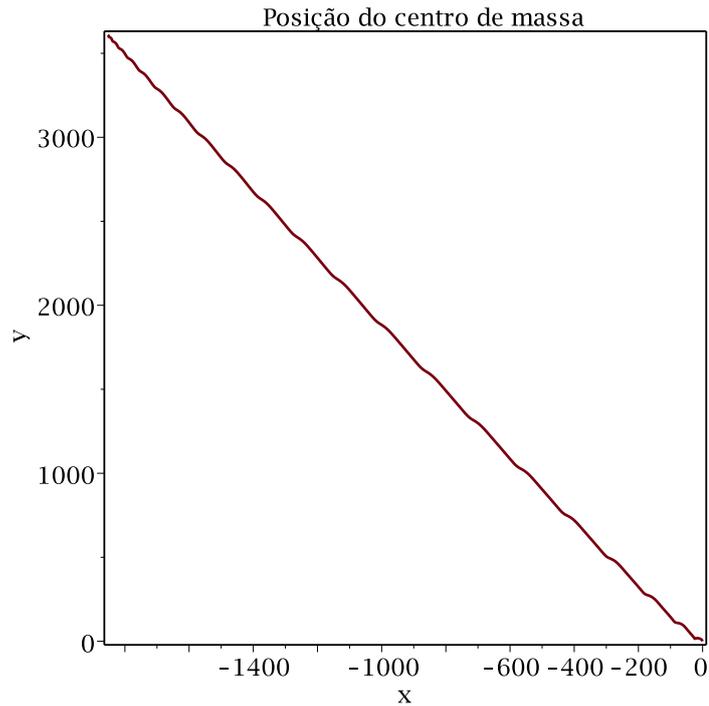


Figura 3.3.56: Posição do centro de massa - $\eta = 2$. As coordenadas x e y representam a posição do centro de massa nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

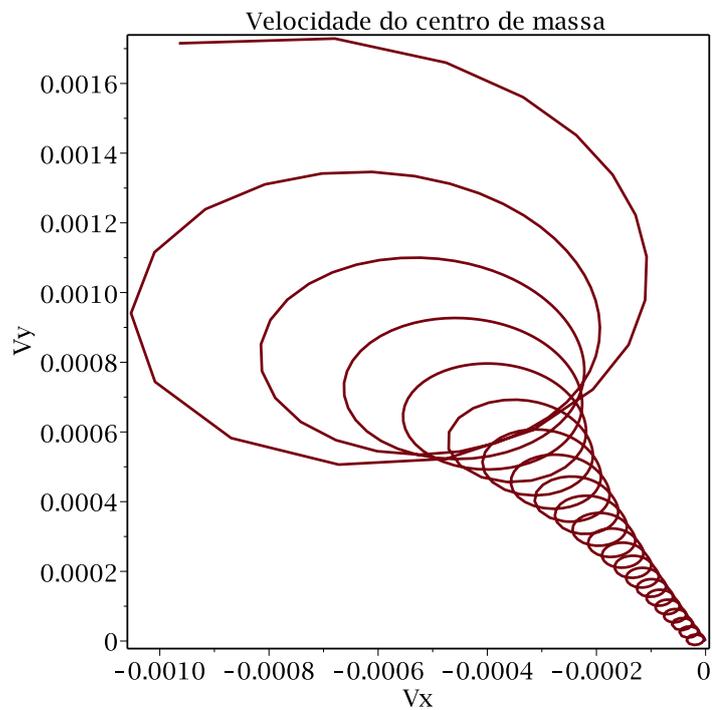


Figura 3.3.57: Velocidade do centro de massa - $\eta = 2$. Os termos V_x e V_y são as velocidades do centro de massa que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

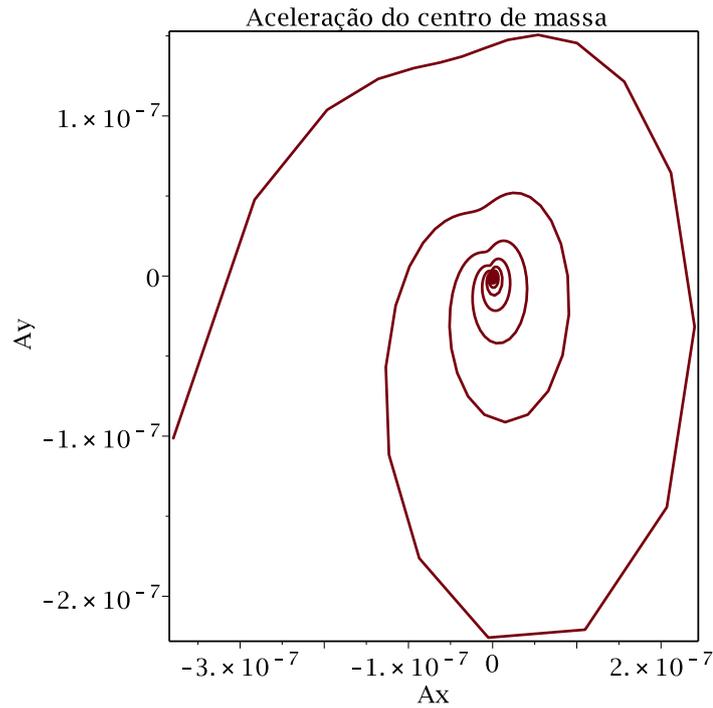


Figura 3.3.58: Aceleração do centro de massa - $\eta = 2$. Os termos A_x e A_y são as acelerações do centro de massa que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

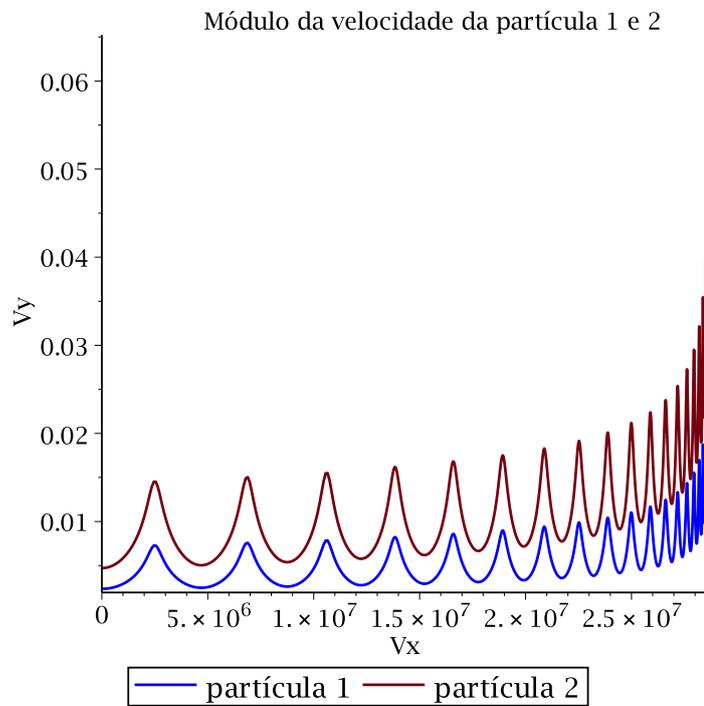


Figura 3.3.59: Módulo da velocidade das partículas 1 e 2 em função do tempo para $\eta = 2$. Os termos V e t estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

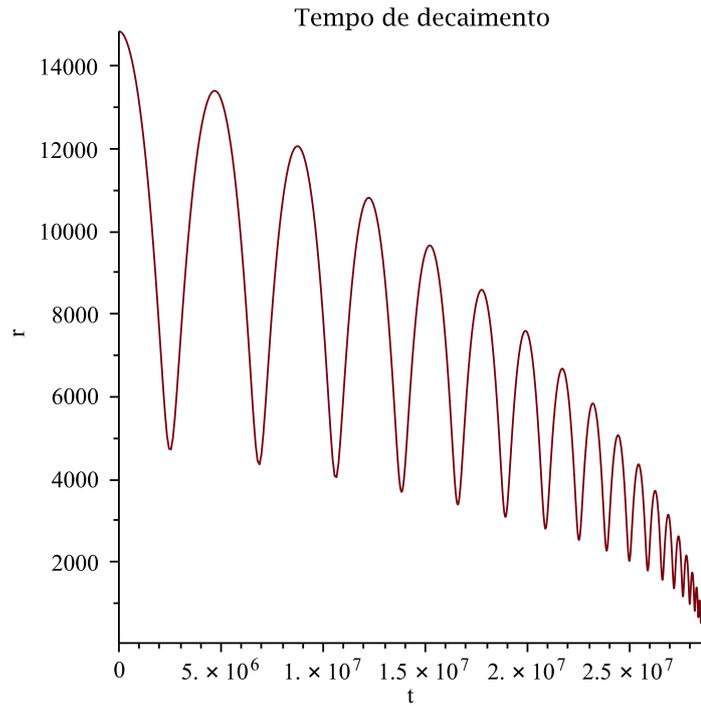


Figura 3.3.60: Posição relativa das partículas em função do tempo para $\eta = 2$. Os termos r e t estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

- 3. $\eta = 10$

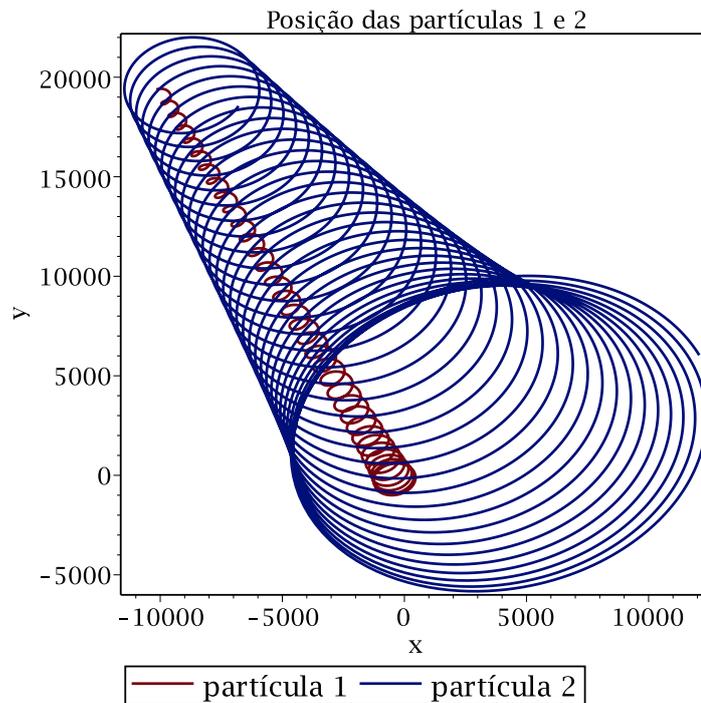


Figura 3.3.61: Posição das partículas 1 e 2 - $\eta = 10$. As coordenadas x e y estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

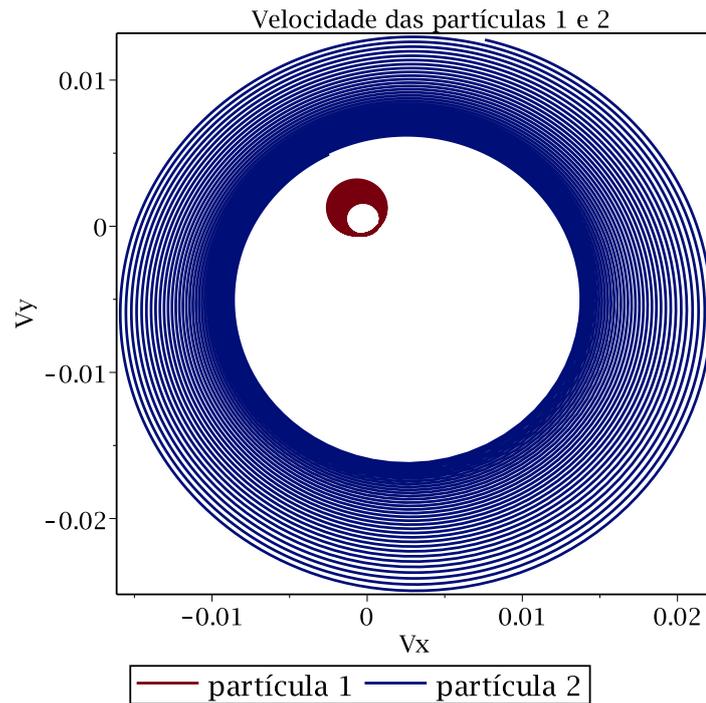


Figura 3.3.62: Velocidade das partículas 1 e 2 - $\eta = 10$. As velocidades V_x e V_y estão nas unidades rescalonadas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

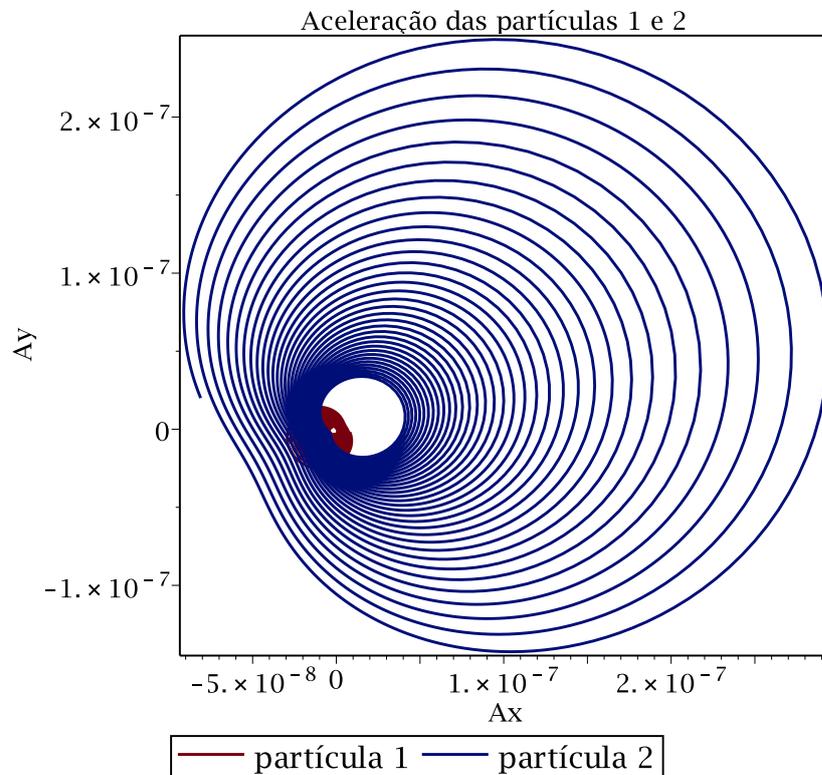


Figura 3.3.63: Aceleração das partículas 1 e 2 - $\eta = 10$. As acelerações A_x e A_y estão nas unidades rescalonadas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

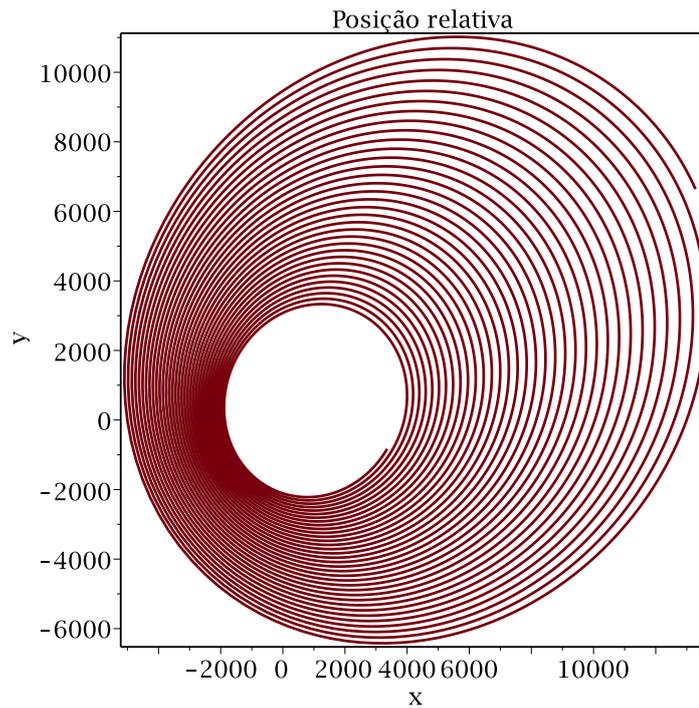


Figura 3.3.64: Posição relativa - $\eta = 10$. As coordenadas x e y representam a posição relativa das partículas que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

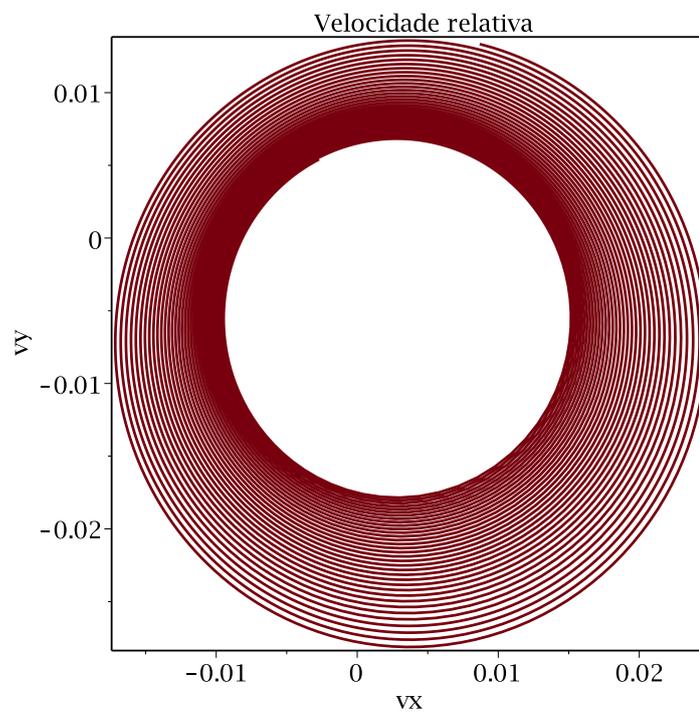


Figura 3.3.65: Velocidade relativa - $\eta = 10$. Os termos v_x e v_y são as velocidades relativas das partículas que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

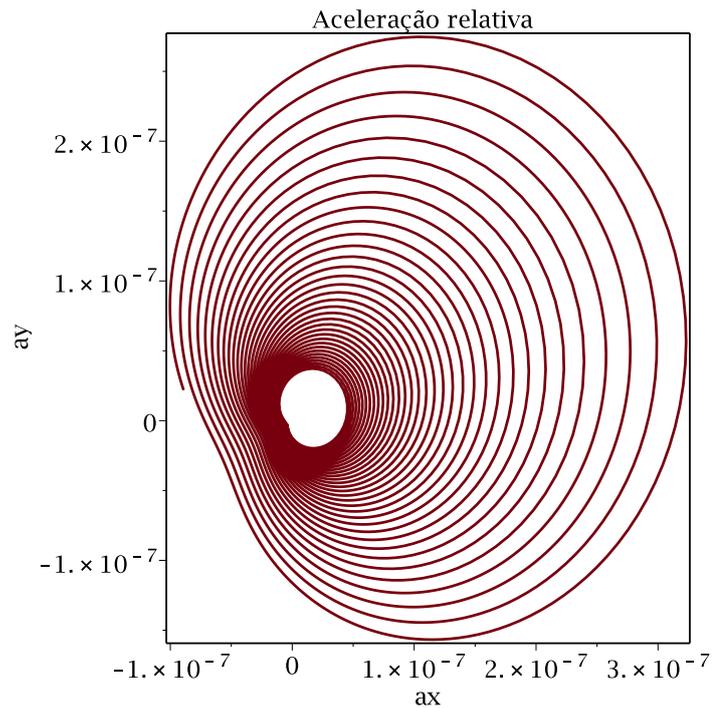


Figura 3.3.66: Aceleração relativa - $\eta = 10$. Os termos a_x e a_y são as acelerações relativas das partículas que estão nas unidades reescaloadas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

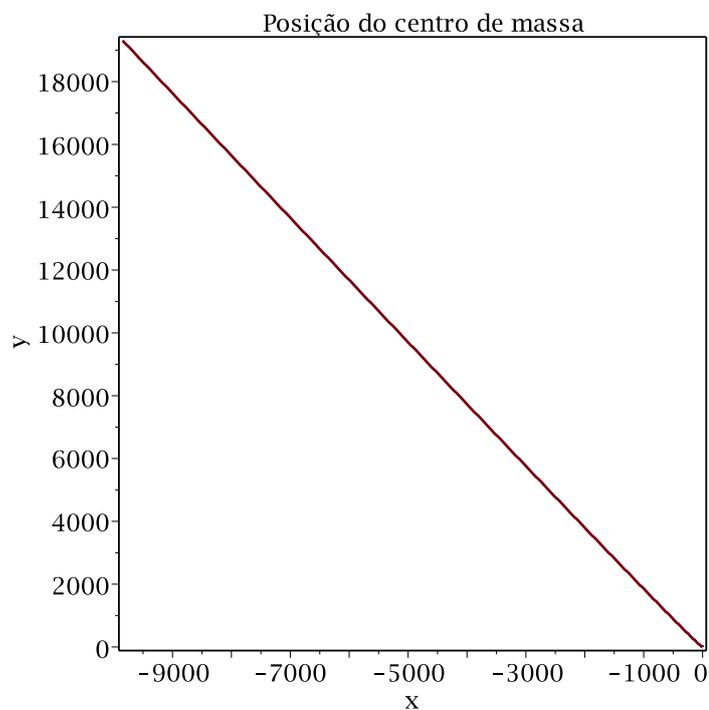


Figura 3.3.67: Posição do centro de massa - $\eta = 10$. As coordenadas x e y representam a posição do centro de massa nas unidades reescaloadas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

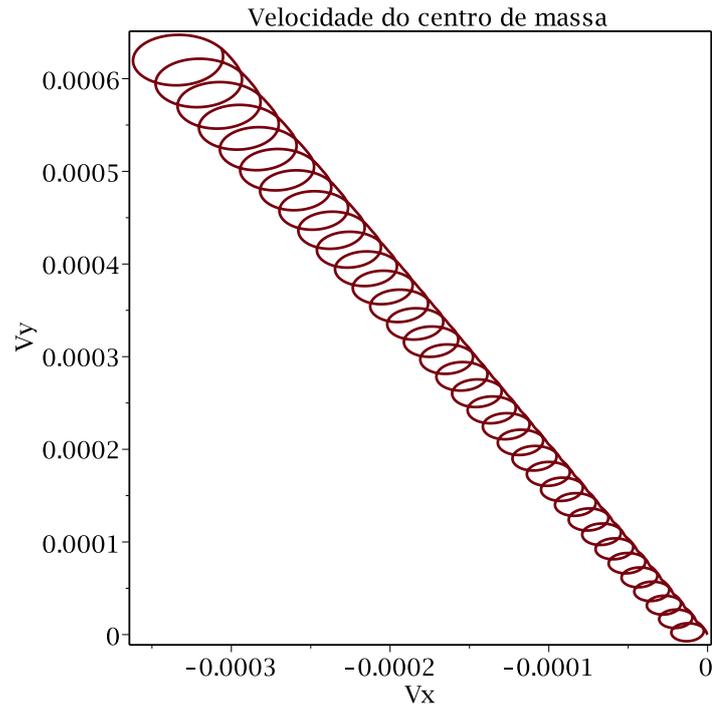


Figura 3.3.68: Velocidade do centro de massa - $\eta = 10$. Os termos V_x e V_y são as velocidades do centro de massa que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

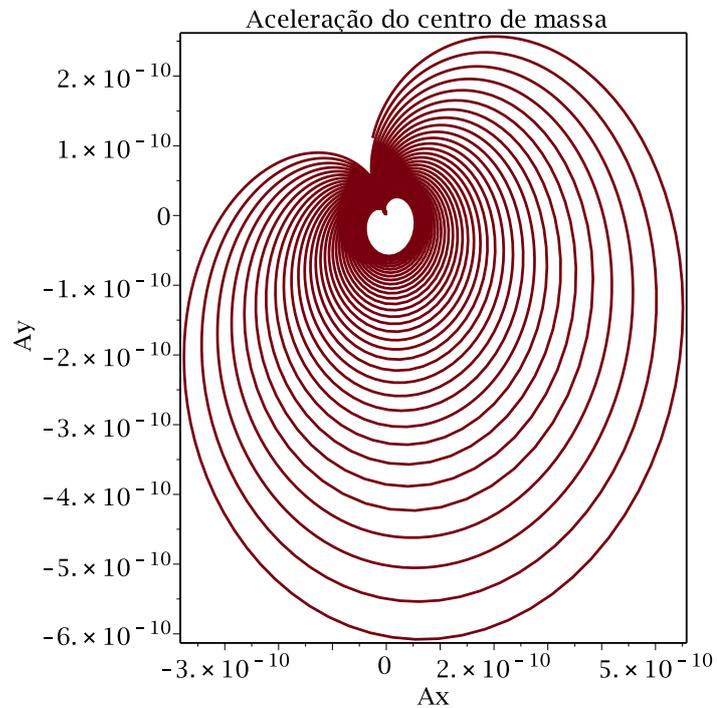


Figura 3.3.69: Aceleração do centro de massa - $\eta = 10$. Os termos A_x e A_y são as acelerações do centro de massa que estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

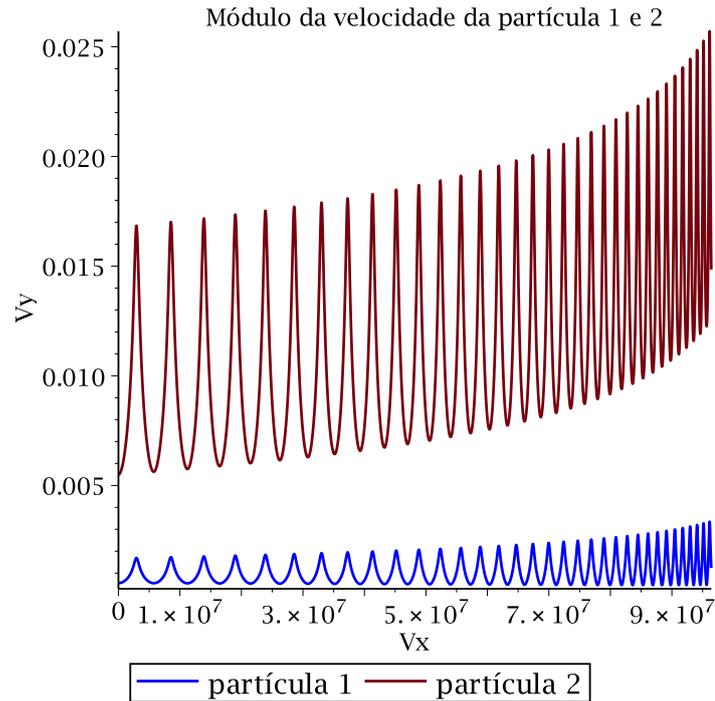


Figura 3.3.70: Módulo da velocidade das partículas 1 e 2 em função do tempo para $\eta = 10$. Os termos V e t estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

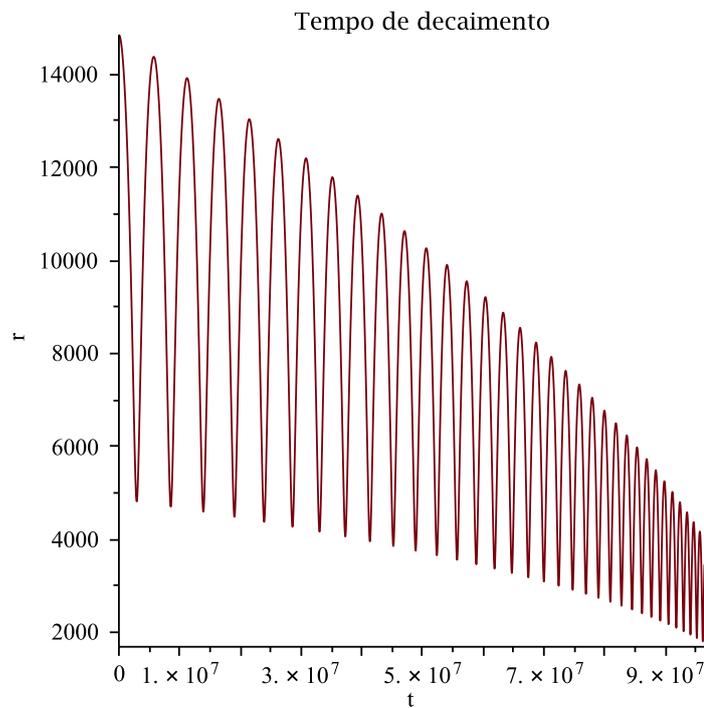


Figura 3.3.71: Posição relativa das partículas em função do tempo para $\eta = 10$. Os termos r e t estão nas unidades reescaladas. Condição inicial de trajetórias elípticas.

Quando consideramos a condição inicial de uma força coulombiana com trajetórias elípticas obtemos como resultado que a curva da distância relativa entre as partículas em função do tempo possui uma maior oscilação que o caso das trajetórias circulares. Esta oscilação é observada em todos os casos analisados para η . Outra característica da nova condição inicial é as trajetórias do centro de massa que possuem um comportamento totalmente diferente daqueles analisados para trajetórias circulares.

Capítulo IV

Solução Analítica do Tempo de Decaimento

Neste capítulo definiremos o momento angular para o sistema de duas partículas de modo a podermos reescrever as equações de movimento em novas variáveis e determinar uma solução analítica para o tempo de decaimento que depende do valor de η .

Numericamente o tempo de decaimento é determinado considerando que a simulação é interrompida quando o módulo da velocidade da partícula atinge no máximo 10 % da velocidade da luz. Alcançado este valor temos os dados para plotar o gráfico do tempo de decaimento para diferentes valores de η .

4.1 Tempo de Decaimento

O tempo clássico de decaimento do átomo de Bohr pode ser calculado impondo algumas condições [1]. Assumindo que o elétron sempre descreve uma órbita quase circular e que a taxa de radiação de energia é bem aproximada pela eletrodinâmica não relativística clássica, podemos determinar o tempo de decaimento clássico.

Para o elétron de carga $-e$ e massa de repouso m_0 em uma órbita de raio r em volta de um núcleo fixo de carga $+e$, temos que a energia total perdida deste sistema é dado por

$$\frac{dE}{dt} = -P = -\frac{2e^2 a^2}{3c^3},$$

onde P é a fórmula de Larmor (Será deduzida no próximo capítulo) nas unidades gaussianas. O termo \mathbf{a} é a aceleração do elétron. Como a força que atua na partícula é coulombiana, então temos que \mathbf{a} é a aceleração centrípeta, logo

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^6}{3r^4 m^2 c^3} = -\frac{2r_0^3}{3r^4} m_0 c^3, \quad (4.1.1)$$

onde $r_0 = \frac{e^2}{m_0 c^2} = 2,8 \times 10^{-15}$ é o raio clássico do elétron. A energia total do elétron não relativística é a soma da energia cinética com a energia potencial eletrostática

$$E = \frac{m_0 v^2}{2} - \frac{e^2}{r} = \frac{e^2}{2r} - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r},$$

portanto

$$E = \frac{e^2}{2r^2} = -\frac{r_0}{2r} m_0 c^2. \quad (4.1.2)$$

Substituindo a equação (4.1.2) na equação (4.1.1), obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{r_0}{2r} m_0 c^2 \right) = -\frac{2}{3} \frac{r_0^3}{r^4} m_0 c^3,$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{2r^2} \dot{r} m_0 c^2 &= -\frac{2}{3} \frac{r_0^3}{r^4} m_0 c^3, \\ \dot{r} &= -\frac{4}{3} \frac{r_0^2}{r^2} c, \\ \frac{dr}{dt} &= -\frac{4}{3} \frac{r_0^2}{r^2} c, \\ \int r^2 dr &= -\int \frac{4}{3} r_0^2 c dt, \\ r^3 &= -4r_0^2 ct + C_1. \end{aligned}$$

Definido $r(0) = a_0$ como o raio de Bohr, obtemos a seguinte expressão

$$r^3 = -4r_0^2 ct + a_0^3.$$

O tempo de decaimento do elétron ocorre quando $r(t_{\text{decaimento}}) = 0$, portanto

$$t_{\text{decaimento}} = \frac{a_0^3}{4r_0^2 c} = 1,6 \times 10^{-11} \text{ s}. \quad (4.1.3)$$

Em que $r_0 = 2,8 \times 10^{-15} \text{ m}$ e $a_0 = 5,3 \times 10^{-11} \text{ m}$.

Podemos analisar o tempo de decaimento através do sistema de equações (2.3.34) e (2.3.35). Considerando o centro de massa deste sistema em repouso, isto é, $V_x = 0$ e $V_y = 0$, obtemos

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{4S}{r^2(\eta+1)} \frac{dr}{dt} + \frac{(\eta+1)S}{(\eta r^2)} + r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad (4.1.4)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = +\frac{S(-1-\eta^2+2\eta^2 r^2)}{r^2(\eta+1)\eta(-1+\eta r^2)} \frac{d\theta}{dt} - \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt}. \quad (4.1.5)$$

Resolvido o sistema de equações diferenciais (4.1.4) e (4.1.5) numericamente, obtemos o tempo de decaimento para diferentes valores de η com diferentes valores de raios iniciais. Uma característica que observamos é que quanto maior o valor de η maior será o tempo de decaimento e que este tempo é finito exceto o caso $\eta \rightarrow \infty$, na qual observamos órbitas estáveis.

- 1. Raio inicial - $r_0 = 10000$

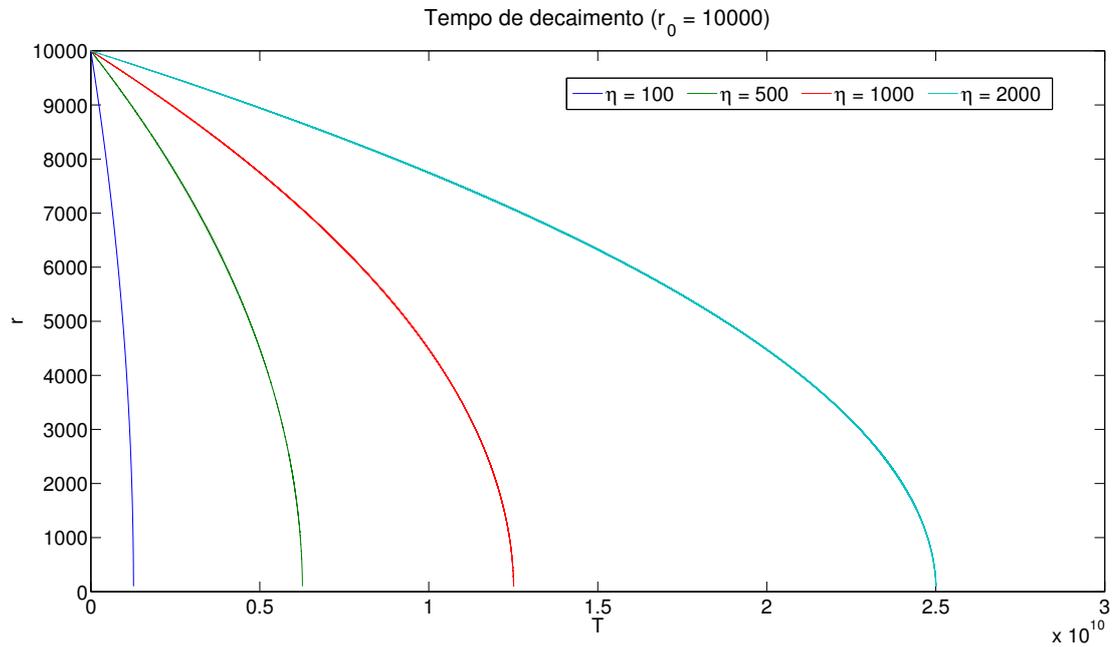


Figura 4.1.1: Posição relativa das partículas em função do tempo para diferentes valores de η com raio inicial $r_0 = 10000$. Os termos r e T estão nas unidades reescaladas.

- 2. Raio inicial - $r_0 = 20000$

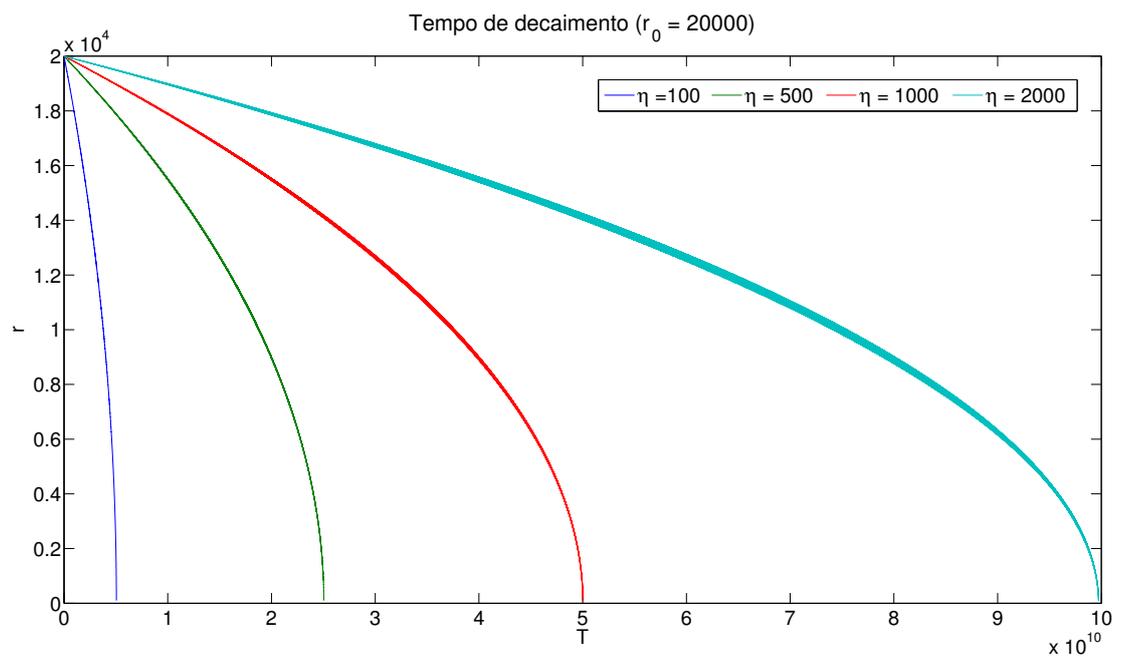


Figura 4.1.2: Posição relativa das partículas em função do tempo para diferentes valores de η com raio inicial $r_0 = 20000$. Os termos r e T estão nas unidades reescaladas.

Da análise do tempo de decaimento em função de η para diferentes valores do raio inicial, obtemos o seguinte gráfico.

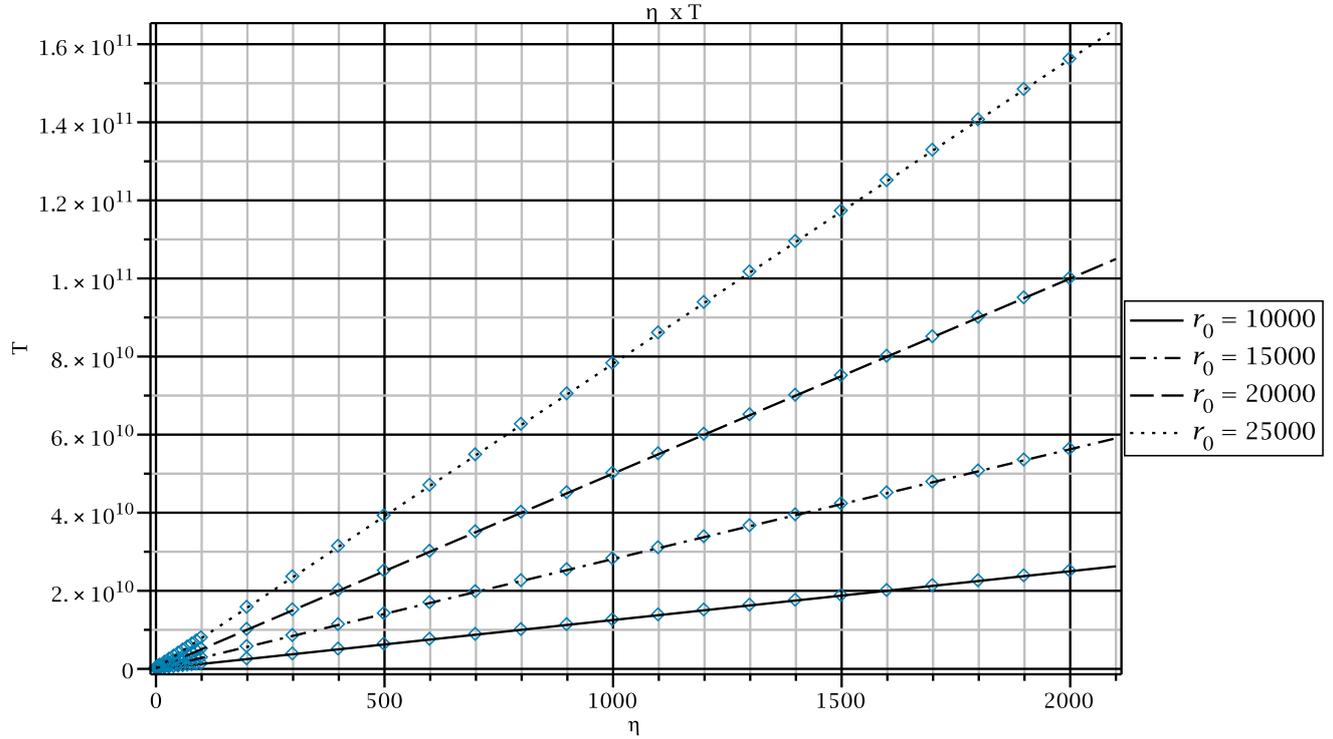


Figura 4.1.3: Tempo de decaimento em função de η .

Dos pontos obtidos realiza-se uma regressão linear e obtem-se as seguintes funções lineares.

- $r_0=10000$

$$T = 1,250 \times 10^7 \eta + 1,295 \times 10^7$$

- $r_0=15000$

$$T = 2.811 \times 10^7 \eta + 3.012 \times 10^7$$

- $r_0=20000$

$$T = 4.997 \times 10^7 \eta + 5.518 \times 10^7$$

- $r_0=25000$

$$T = 7.806 \times 10^7 \eta + 8.958 \times 10^7$$

Os resultados observados na figura (4.1.3) sugerem uma expressão analítica para o tempo de decaimento em função da razão das massas η . Consideremos novamente as equações (4.1.4) e (4.1.5).

$$\ddot{r} = -\frac{4S}{r^2(\eta+1)}\dot{r} + \frac{(\eta+1)S}{(\eta r^2)} + r(\dot{\theta})^2, \quad (4.1.6)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{S(-1-\eta^2+2\eta^2 r^2)}{r^2(\eta+1)\eta(-1+\eta r^2)}\dot{\theta} - \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta}. \quad (4.1.7)$$

O momento angular de um sistema de partículas é dado por

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i.$$

Como o sistema possui duas partículas o momento angular é

$$\mathbf{L} = m_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2,$$

e a posição do centro de massa é

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

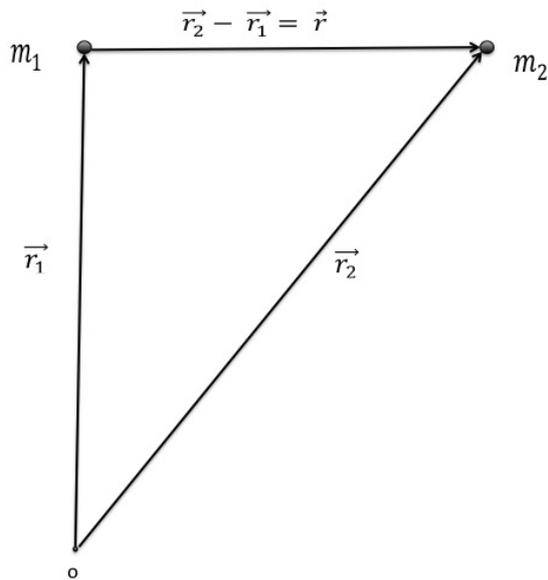


Figura 4.1.4: Partículas m_1 e m_2

Determinando \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 em função de \mathbf{r}_{cm} e \mathbf{r} . Como

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r} + \mathbf{r}_1, \end{aligned}$$

logo,

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 (\mathbf{r} + \mathbf{r}_1)}{m_1 + m_2},$$

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \mathbf{r}_{\text{cm}} &= m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 (\mathbf{r} + \mathbf{r}_1), \\ (m_1 + m_2) \mathbf{r}_{\text{cm}} &= (m_1 + m_2) \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}, \\ \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_{\text{cm}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Com a relação

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + \mathbf{r}_1,$$

temos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_{\text{cm}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} + \mathbf{r}, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_{\text{cm}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}.\end{aligned}$$

Assim, temos as seguintes relações

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_{\text{cm}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{\text{cm}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_{\text{cm}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{\text{cm}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}.\end{aligned}$$

Substituindo essas relações no momento angular, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= m_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2, \\ \mathbf{L} &= m_1 \left(\mathbf{r}_{\text{cm}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \right) \times \left(\mathbf{v}_{\text{cm}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \right) + \\ &\quad m_2 \left(\mathbf{r}_{\text{cm}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \right) \times \left(\mathbf{v}_{\text{cm}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \right), \\ \mathbf{L} &= (m_1 + m_2) \mathbf{r}_{\text{cm}} \times \mathbf{v}_{\text{cm}} + \frac{(m_1^2 m_2 + m_1 m_2^2)}{(m_1 + m_2)^2} \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \\ \mathbf{L} &= (m_1 + m_2) \mathbf{r}_{\text{cm}} \times \mathbf{v}_{\text{cm}} + \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2} \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \\ \mathbf{L} &= (m_1 + m_2) \mathbf{r}_{\text{cm}} \times \mathbf{v}_{\text{cm}} + \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \mathbf{r} \times \mathbf{v}.\end{aligned}$$

Como

$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = 0,$$

temos

$$\mathbf{L} = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \mathbf{r} \times \mathbf{v}. \quad (4.1.8)$$

4.2 Reescalonamento do Momento Angular

Retomando a equação (4.1.8), realizaremos uma reescalonamento da seguinte forma

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} (cL) \left(\frac{\mathbf{r}}{L} \times \frac{\mathbf{v}}{c} \right), \\ &= m_2 (cL) \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \times \mathbf{v},\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{r}}{L} &\equiv \mathbf{r}, \\ \frac{\mathbf{v}}{c} &\equiv \mathbf{v}.\end{aligned}$$

\mathbf{r} e \mathbf{v} estão em unidades reescaladas. Afim de economizar a notação mantemos as mesmas letras.

Seja L a transformação de escala espacial, temos que o momento angular pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= m_2(cL)\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}\times\mathbf{v}, \\ &= m_2c\left(\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0c^2m_2}\right)\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}\times\mathbf{v}, \\ &= \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0c}\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}\times\mathbf{v}.\end{aligned}$$

O termo

$$\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}\times\mathbf{v}$$

é o momento angular nas unidades reescaladas que definiremos como \mathbf{L}_R , portanto

$$\mathbf{L}_R = \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}\times\mathbf{v}. \quad (4.2.9)$$

Como já definimos anteriormente $\eta = m_1/m_2$, podemos escrever \mathbf{L}_R em função de η .

$$\mathbf{L}_R = \frac{\eta}{\eta+1}\mathbf{r}\times\mathbf{v}. \quad (4.2.10)$$

Considerando o plano xy o momento angular \mathbf{L}_R é paralelo ao eixo z , portanto para encontrar a expressão de $L_R\hat{z}$, temos

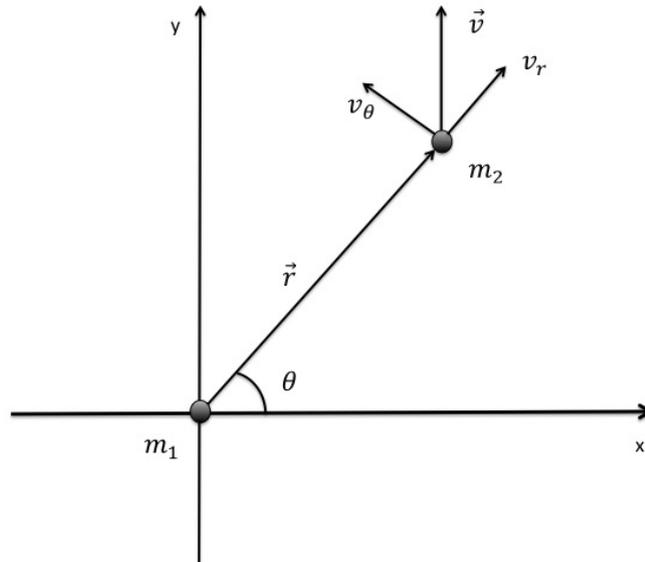


Figura 4.2.5: Partículas m_1 e m_2 em movimento no plano xy

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_R &= \frac{\eta}{\eta+1} \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \\
&= \frac{\eta}{\eta+1} (r\hat{r}) \times (v_\theta\hat{\theta} + v_r\hat{r}), \\
&= \frac{\eta}{\eta+1} r v_\theta \underbrace{(\hat{r} \times \hat{\theta})}_{\hat{z}}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$L_{Rz} = \frac{\eta}{\eta+1} r v_\theta,$$

em que L_{Rz} é a componente \hat{z} do momento reescalado.

Renomeando L_{Rz} por l , isto é, $L_{Rz} = l$, temos

$$\begin{aligned}
l &= \frac{\eta}{\eta+1} r \underbrace{v_\theta}_{r\dot{\theta}}, \\
l &= \frac{\eta}{\eta+1} r^2 \dot{\theta}.
\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Reescreveremos o sistema de equações em \dot{r} e $\dot{\theta}$ em termos de r e l , a partir das equações (4.1.6) e (4.1.7). Seja

$$l = \frac{\eta}{\eta+1} r^2 \dot{\theta}, \quad \dot{\theta} = \frac{\eta+1}{\eta} \frac{l}{r^2}.$$

Realizando a derivada temporal na primeira relação, temos

$$\dot{l} = \frac{\eta+1}{\eta} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = \frac{\eta+1}{\eta} (2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}). \tag{4.2.12}$$

Da equação (4.1.7),

$$\ddot{\theta} = \frac{S(-1 - \eta^2 + 2\eta^2 r^2)}{r^2(\eta+1)\eta(-1 + \eta r^2)} \dot{\theta} - \frac{2}{r} \dot{r}\dot{\theta},$$

substituindo-a na equação (4.2.12) temos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
\dot{l} &= \frac{\eta+1}{\eta} (2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}), \\
&= \frac{\eta+1}{\eta} \left(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2 \left(\frac{S(-1 - \eta^2 + 2\eta^2 r^2)}{r^2(\eta+1)\eta(-1 + \eta r^2)} \dot{\theta} - \frac{2}{r} \dot{r}\dot{\theta} \right) \right), \\
&= \frac{\eta+1}{\eta} \left(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2 \frac{S(-1 - \eta^2 + 2\eta^2 r^2)}{r^2(\eta+1)\eta(-1 + \eta r^2)} \dot{\theta} - 2r\dot{r}\dot{\theta} \right), \\
&= \underbrace{\frac{\eta+1}{\eta} r^2 \dot{\theta}}_l \left(\frac{S(-1 - \eta^2 + 2\eta^2 r^2)}{r^2(\eta+1)\eta(-1 + \eta r^2)} \right),
\end{aligned}$$

$$\dot{l} = l \left(\frac{S(2\eta^2 r^2 - (1 + \eta^2))}{\eta(\eta+1)(\eta r^2 - 1)r^2} \right). \tag{4.2.13}$$

Da equação (4.1.6),

$$\ddot{r} = -\frac{4S}{r^2(\eta+1)}\dot{r} + \frac{(\eta+1)S}{(\eta r^2)} + r(\dot{\theta})^2,$$

substituindo $\dot{\theta}$ por

$$\dot{\theta} = \frac{\eta+1}{\eta} \frac{l}{r^2},$$

temos a seguinte expressão

$$\ddot{r} = -\frac{4S}{r^2(\eta+1)}\dot{r} + \left(\frac{\eta+1}{\eta}\right)^2 \frac{l^2}{r^3} + \frac{(\eta+1)S}{(\eta r^2)}. \quad (4.2.14)$$

Assim temos o sistema de equação diferenciais

$$\ddot{r} = -\frac{4S}{r^2(\eta+1)}\dot{r} + \left(\frac{\eta+1}{\eta}\right)^2 \frac{l^2}{r^3} + \frac{(\eta+1)S}{(\eta r^2)}, \quad (4.2.15)$$

$$\dot{l} = l \left(\frac{S(2\eta^2 r^2 - (1 + \eta^2))}{\eta(\eta+1)(\eta r^2 - 1)r^2} \right). \quad (4.2.16)$$

Definindo uma nova variável da seguinte maneira

$$C = \frac{l^2}{r}. \quad (4.2.17)$$

Fazendo a derivada temporal em C , temos

$$\frac{dC}{dt} = \frac{2l\dot{l}}{r} - \frac{l^2}{r^2}\dot{r},$$

substituindo o valor de \dot{l} na equação acima

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \frac{2l}{r} l \left(\frac{S(2\eta^2 r^2 - (1 + \eta^2))}{\eta(\eta+1)(\eta r^2 - 1)r^2} \right) - \frac{l^2}{r^2}\dot{r}, \\ &= \frac{l^2}{r} \left(\frac{2S(2\eta^2 r^2 - (1 + \eta^2))}{\eta(\eta+1)(\eta r^2 - 1)r^2} \right) - \frac{l^2}{r^2}\dot{r}, \\ &= C \left(\frac{2S(2\eta^2 r^2 - (1 + \eta^2))}{\eta(\eta+1)(\eta r^2 - 1)r^2} \right) - \frac{l^2}{r^2}\dot{r}, \\ &= C \left(\frac{2S(2\eta^2 r^2 - (1 + \eta^2))}{\eta(\eta+1)(\eta r^2 - 1)r^2} \right) - \frac{C}{r}\dot{r}, \end{aligned}$$

portanto

$$\frac{dC}{dt} = \frac{C}{r} \left(\frac{2S(2\eta^2 r^2 - (1 + \eta^2))}{\eta(\eta+1)(\eta r^2 - 1)r} - \dot{r} \right) = \dot{C}. \quad (4.2.18)$$

Por fim o nosso sistema de equações diferenciais fica na seguinte forma

$$\ddot{r} = -\frac{4S}{(\eta+1)r^2}\dot{r} + \frac{S(\eta+1)}{(\eta r^2)} + \left(\frac{\eta+1}{\eta}\right)^2 \frac{C}{r^2}, \quad (4.2.19)$$

$$\dot{C} = \frac{C}{r} \left(\frac{2S(2\eta^2 r^2 - (1 + \eta^2))}{\eta(\eta+1)(\eta r^2 - 1)r} - \dot{r} \right). \quad (4.2.20)$$

4.3 Solução do Tempo de Decaimento

Para $r \gg 1$ a equação (4.2.20) torna-se

$$\dot{C} = \frac{C}{r} \left(\frac{4S}{(\eta+1)r} - \dot{r} \right). \quad (4.3.21)$$

Considerando C uma constante, temos $\dot{C} = 0$, assim

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{4S}{(\eta+1)r} - \dot{r}, \\ \dot{r} &= \frac{4S}{(\eta+1)r}. \end{aligned}$$

Realizando a derivada temporal na expressão acima, temos

$$\ddot{r} = -\frac{4S}{\eta+1} \frac{\dot{r}}{r^2}, \quad (4.3.22)$$

substituindo esse termo na equação (4.2.19), chegamos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} -\frac{4S}{\eta+1} \frac{\dot{r}}{r^2} &= -\frac{4S}{(\eta+1)r^2} \dot{r} + \frac{S(\eta+1)}{(\eta r^2)} + \left(\frac{\eta+1}{\eta} \right)^2 \frac{C}{r^2}, \\ \left(\frac{\eta+1}{\eta} \right)^2 \frac{C}{r^2} &= -\frac{S(\eta+1)}{(\eta r^2)}, \\ \left(\frac{\eta+1}{\eta} \right)^2 C &= -\frac{S(\eta+1)}{\eta}, \\ C(t) &= -\frac{\eta}{\eta+1} S. \end{aligned}$$

Portanto para $r \gg 1$ temos as equações

$$\dot{r} = \frac{4S}{(\eta+1)r}, \quad C(t) = -\frac{\eta}{\eta+1} S.$$

Quando consideramos $r \gg 1$ e que $\dot{C} = 0$ conseguimos uma solução particular em que o parâmetro C descrito acima é um invariante e obtemos a seguinte equação para a velocidade

$$\dot{r} = \frac{4S}{(\eta+1)r}. \quad (4.3.23)$$

As oscilações observadas nas curvas de decaimento ocorrem pelo fato das condições iniciais não serem as mesmas dada pela solução particular (4.3.23), entretanto quando consideramos a condição de órbitas circulares devido somente a força coulombiana a condição particular se aproxima com boa precisão e quanto maior for η melhor a precisão. Portanto para fins de estabelecer com uma boa exatidão o tempo de decaimento podemos considerar a solução particular.

Nos gráficos abaixo temos o tempo de decaimento considerando a condição inicial ($\dot{r} \neq 0$) dada pela equação (4.3.23) e a condição inicial de órbitas circulares devido somente a força coulombiana ($\dot{r} = 0$). Podemos suspeitar que a condição inicial dada pela equação (4.3.23) gere trajetórias médias para o decaimento, pois observamos que a solução $\dot{r} = 0$ oscila em torno da solução particular. Outro ponto de questionamento é considerar o limite da solução particular como uma média das trajetórias de decaimento uma vez que a condição inicial deixa de ser circular.

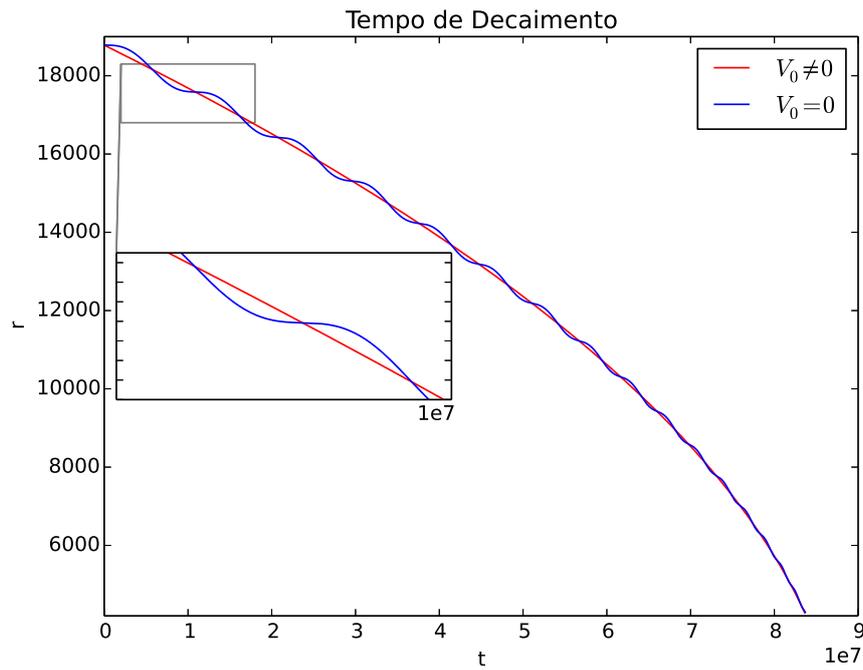


Figura 4.3.6: Posição relativa das partículas em função do tempo para $\eta = 1$ com a condição inicial $V_0 \neq 0$ e $V_0 = 0$. Os termos r e t estão nas unidades reescaladas.

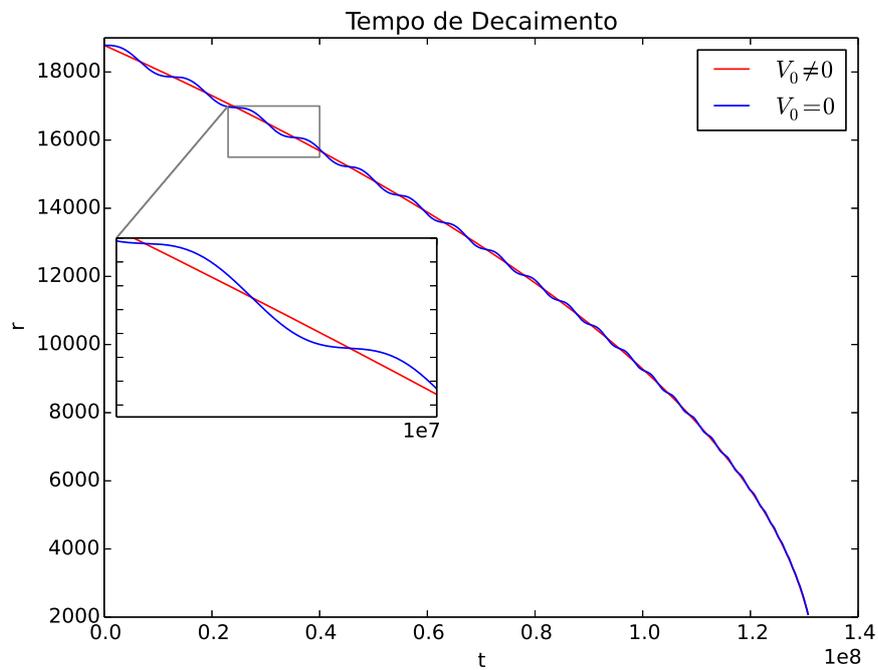


Figura 4.3.7: Posição relativa das partículas em função do tempo para $\eta = 2$ com a condição inicial $V_0 \neq 0$ e $V_0 = 0$. Os termos r e t estão nas unidades reescaladas.

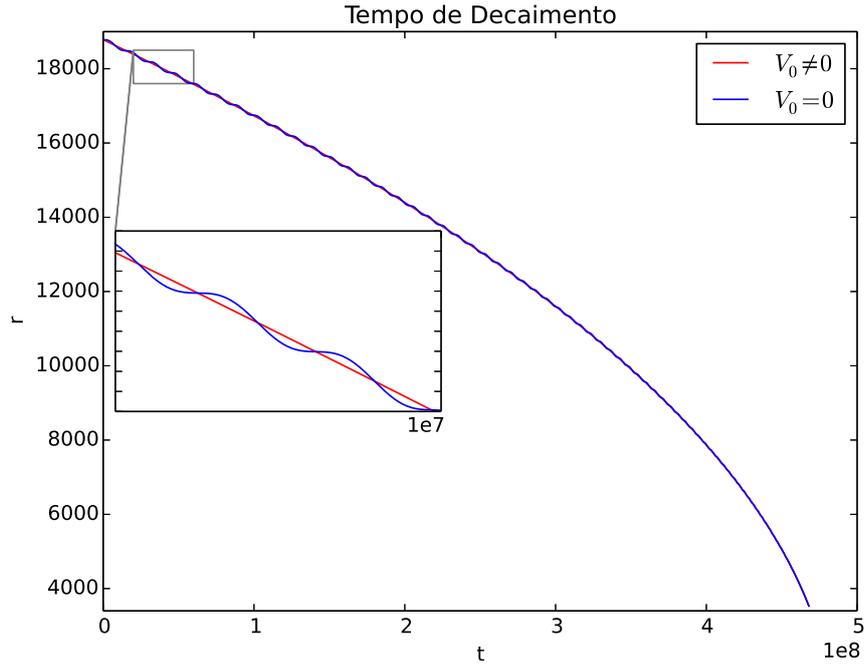


Figura 4.3.8: Posição relativa das partículas em função do tempo para $\eta = 10$ com a condição inicial $V_0 \neq 0$ e $V_0 = 0$. Os termos r e t estão nas unidades reescaladas.

Integrando a equação (4.3.23), temos

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{4S}{(\eta + 1)r}, \\ r dr &= \frac{4S}{\eta + 1} dt, \\ \int r dr &= \int \frac{4S}{\eta + 1} dt, \\ \frac{r^2}{2} + c_0 &= \frac{4S}{\eta + 1} t + c_1, \\ r^2 &= \frac{8S}{\eta + 1} t + c. \end{aligned}$$

Dada a condição inicial em que $r_0 = r(0)$

$$\begin{aligned} r_0^2 &= \frac{8S}{\eta + 1}(0) + c, \\ r_0^2 &= c. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{8S}{\eta + 1} t + r_0^2, \\ r^2 &= \frac{r_0^2(\eta + 1) + 8St}{\eta + 1}. \end{aligned} \tag{4.3.24}$$

O tempo de singularidade, ou seja o tempo crítico (t_c), ocorre quando

$$r(t_c) = 0,$$

assim

$$r_0^2(\eta + 1) + 8St_c = 0,$$

$$t_c = -\frac{r_0^2(1 + \eta)}{8S}.$$

Como estamos considerando partículas atrativas, temos que $S = -1$, logo a equação para t_c nas unidades reescaloadas é

$$t_c = \frac{r_0^2(1 + \eta)}{8}. \quad (4.3.25)$$

Sem o reescalamento temos que o tempo crítico ou tempo de decaimento em função de η é

$$t_c = \frac{T}{L^2} \frac{r_0^2(1 + \eta)}{8},$$

como

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{m_1}{m_2}, \\ T &= \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon_0 m_2 c^3}, \\ L &= \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon_0 m_2 c^2}, \end{aligned}$$

temos por fim

$$t_c = \frac{\pi r_0^2}{2} \frac{\epsilon_0 c (m_1 + m_2)}{|q_1||q_2|}. \quad (4.3.26)$$

Substituindo alguns valores para o tempo de decaimento e considerando que o raio r_0 é o raio de Bohr, temos

1 . Elétron-Pósitron

$$t_c = 8,3 \times 10^{-16} s$$

2 . Próton-Elétron

$$t_c = 7,6 \times 10^{-13} s$$

Comparando os resultados numéricos obtidos pelas equações (4.1.6) e (4.1.7) e a equação (4.3.25), obtemos o seguinte gráfico

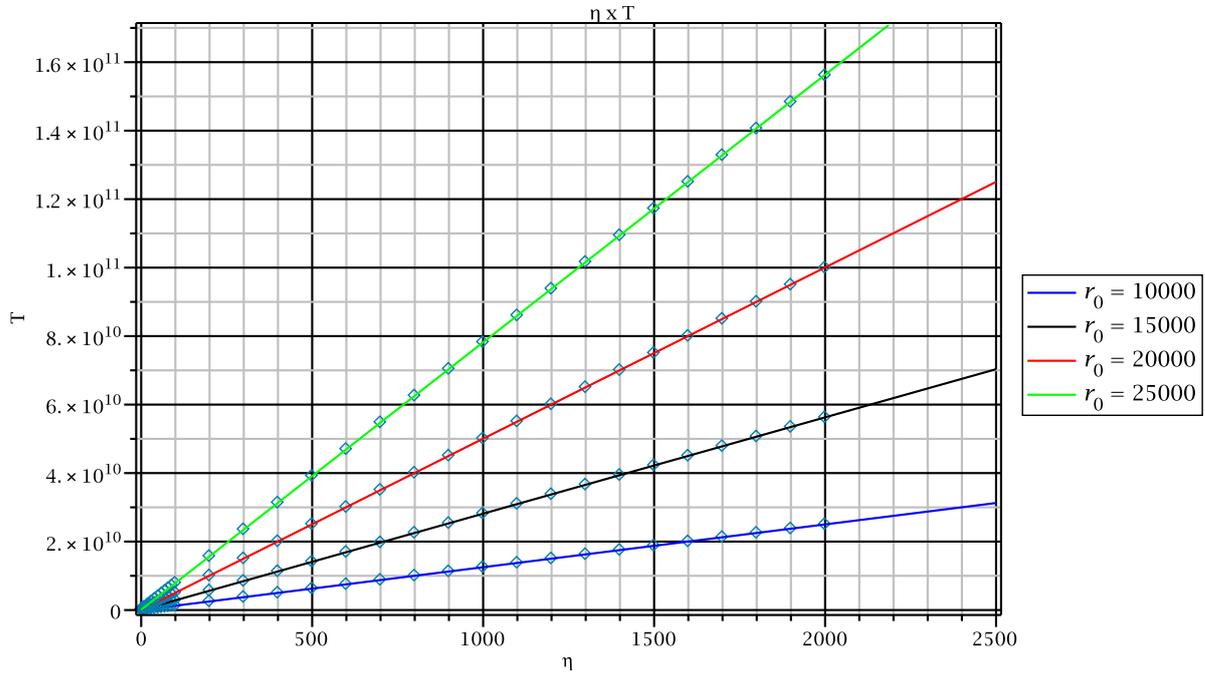


Figura 4.3.9: Solução analítica para o tempo de decaimento

A solução particular (4.3.23) possibilita estimar o tempo de decaimento em função de η para diferentes valores de raio r_0 . Um dos resultados mais importantes deste trabalho foi deduzir uma expressão analítica para o tempo de decaimento que nas unidades não reescaladas depende dos valores das cargas, massas e o raio.

Quando aplicamos a condição que o elétron descreve uma órbita quase circular e que a taxa de radiação de energia é bem aproximada pela fórmula de Lammor obtemos o tempo de decaimento é igual a $1,6 \times 10^{-11} s$. A suposição feita neste trabalho é considerar um sistema clássico newtoniano de duas partículas pontuais carregadas interagindo entre si. A partir desta suposição temos que o tempo de decaimento do átomo de Bohr é de $7,6 \times 10^{-13} s$. Supor que a órbita torna-se quase circular implica no tempo maior de decaimento e como obtemos no capítulo anterior que a órbita que o elétron descreve dado a condição inicial de uma força coulombiana que gere órbitas circulares é de fato uma espiral e continua em uma trajetória em espiral, afirmar que as órbitas são próximas do círculo levam erroneamente ao tempo clássico de decaimento.

Capítulo V

Potência Irrradiada por uma Carga Acelerada

5.1 Vetor de Poynting e Potência de Radiação

Como visto no capítulo I, os campos produzidos por uma carga pontual em movimento são dados pelas expressões

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2)}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{\mathbf{R} \times ((\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a})}{c^2(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right)_{t_r}, \quad (5.1.1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{R}(t_r)}{c} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (5.1.2)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_q(t_r), \\ \boldsymbol{\beta}(t_r) &= \frac{\mathbf{v}(t_r)}{c}. \end{aligned}$$

O termo $\mathbf{r}_q(t_r)$ dita a posição da carga q no tempo de retardo, \mathbf{v} é a velocidade e \mathbf{a} é a aceleração, todos calculado no tempo t_r .

Os campos são formados por duas parcelas, uma relacionada apenas à velocidade da carga e a outra que envolve além da velocidade a sua aceleração. O campo elétrico de velocidade é dado por,

$$\mathbf{E}_v(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2)}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right), \quad (5.1.3)$$

enquanto o campo elétrico de aceleração é descrito por

$$\mathbf{E}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(\frac{\mathbf{R} \times ((\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a})}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right). \quad (5.1.4)$$

O vetor de Poynting é dado pela expressão

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (5.1.5)$$

Substituindo a expressão para o campo magnético e utilizando a propriedade do produto triplo vetorial,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C},$$

obtemos a seguinte expressão para o vetor de Poynting

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0 c} \left(E^2 \hat{R}(t_r) - (\mathbf{E} \cdot \hat{R}(t_r)) \mathbf{E} \right). \quad (5.1.6)$$

Para determinar a potência emitida pela carga, integra-se o vetor de Poynting numa superfície S . Assim, consideremos uma superfície esférica centrada na posição da carga no tempo retardado, com um raio $R(t_r) = c(t - t_r)$.

O elemento de área de uma casca esférica, em coordenadas esféricas é $dA = r^2 d\theta d\phi$, portanto proporcional a R^2 . Pela expressão (5.1.6) vemos que o campo elétrico aparece elevado ao quadrado. Da equação (5.1.1), podemos analisar que o campo elétrico ao quadrado apresenta termos proporcionais a R^{-4} , campo de velocidade multiplicado por ele mesmo, R^{-3} , campo de velocidade multiplicado pelo de aceleração e R^{-2} , campo de aceleração multiplicado por ele mesmo. Assim, apenas o termo derivado do campo de aceleração pode contribuir para o limite $R \rightarrow \infty$, ou seja, a energia que será transportada para muito longe, já que os outros termos se anulam nesse limite.

Como o campo elétrico de radiação é perpendicular a \hat{R} , temos que a expressão final para o vetor de Poynting é

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0 c} E_{\mathbf{a}}^2 \hat{R}(t_r). \quad (5.1.7)$$

O vetor de Poynting representa um fluxo de energia por unidade de área e tempo. Reescrevendo o elemento de área como $dA = R^2 d\Omega$, onde Ω é o ângulo sólido de modo que a potência irradiada que passa pela esfera no tempo t por unidade de área é dada pelo módulo do vetor de Poynting, ou seja,

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = (\mathbf{S} \cdot \hat{R}) R^2 = \frac{1}{\mu_0 c} E_{\mathbf{a}}^2 (R(t_r))^2. \quad (5.1.8)$$

A potência calculada é no tempo t , porém, não é a mesma que saiu da carga no tempo t_r . Calculando portanto no tempo t_r , obtemos

$$\begin{aligned} P(t_r) &= \frac{dW}{dt_r} = \frac{dW}{dt} \frac{\partial t}{\partial t_r} = P(t) \frac{\partial t}{\partial t_r} \\ P(t_r) &= \left(1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta} \right) P(t) \end{aligned}$$

O termo $\frac{\partial t}{\partial t_r}$ é deduzido a partir equação (1.2.58) do apêndice A e assim,

$$\frac{dP(t_r)}{d\Omega} = \left(1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta} \right) (\mathbf{S} \cdot \hat{R}) R^2 = \frac{\left(1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta} \right)}{\mu_0 c} E_{\mathbf{a}}^2 R^2(t_r). \quad (5.1.9)$$

Portanto a potência irradiada, $P(t_r)$, é dada por

$$P(t_r) = \oint_S \frac{P(t_r)}{d\Omega} d\Omega = \oint_S \frac{1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}{\mu_0 c} E_{\mathbf{a}}^2 R^2(t_r) d\Omega. \quad (5.1.10)$$

5.2 Radiação Emitida em Baixas Velocidades

Admitindo que a carga q possua uma velocidade muito menor que a velocidade da luz podemos considerar o limite em que $\beta \rightarrow 0$. Assim a equação para o campo de aceleração fica

$$\mathbf{E}_{\mathbf{a}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \mathbf{a})}{R}, \quad (5.2.11)$$

ou, usando a identidade para o produto triplo vetorial temos,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{a}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(\hat{R} \cdot \mathbf{a})\hat{R} - (\hat{R} \cdot \hat{R})\mathbf{a}}{R}, \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(\hat{R} \cdot \mathbf{a})\hat{R} - \mathbf{a}}{R}. \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Para obter o vetor de Poynting devemos calcular, $\mathbf{E}_{\mathbf{a}}^2$, portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{a}}^2 &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 c^4} \frac{\left((\hat{R} \cdot \mathbf{a})\hat{R} - \mathbf{a}\right) \cdot \left((\hat{R} \cdot \mathbf{a})\hat{R} - \mathbf{a}\right)}{R^2}, \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 c^4} \frac{(\hat{R} \cdot \mathbf{a})^2 - 2(\hat{R} \cdot \mathbf{a})^2 + a^2}{R^2}, \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 c^4} \frac{a^2 - (\hat{R} \cdot \mathbf{a})^2}{R^2}. \end{aligned}$$

Considerando que o ângulo entre \hat{R} e \mathbf{a} seja θ , temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{a}}^2 &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 c^4} \frac{a^2 - a^2 \cos^2(\theta)}{R^2}, \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 c^4} \frac{a^2 \sin^2(\theta)}{R^2}. \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Utilizando a relação

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0},$$

podemos escrever o vetor de Poynting como

$$\mathbf{S} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c R^2} \sin^2(\theta) \hat{R}(t_r). \quad (5.2.14)$$

Considerando que, $\beta \rightarrow 0$, então a potência irradiada por unidade de ângulo sólido é dado por

$$\frac{dP(t_r)}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \sin^2(\theta), \quad (5.2.15)$$

portanto a potência total emitida pela carga é

$$\begin{aligned}
P(t_r) &= \oint_S \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \sin^2(\theta) d\Omega, \\
&= \oint_S \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \sin^3(\theta) d\theta d\phi, \\
&= \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} 2\pi \underbrace{\int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta}_{\frac{4}{3}}, \\
&= \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}.
\end{aligned} \tag{5.2.16}$$

Realizando a aproximação do tempo de retardo para o tempo instantâneo, $t_r = t$, temos que a potência total no tempo t é

$$P(t) = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}. \tag{5.2.17}$$

A equação acima é conhecida como a fórmula de Larmor para a radiação emitida por uma partícula.

Portanto, para os casos $\eta = 1$, $\eta = 2$ e $\eta = 10$, obtemos os seguintes gráficos

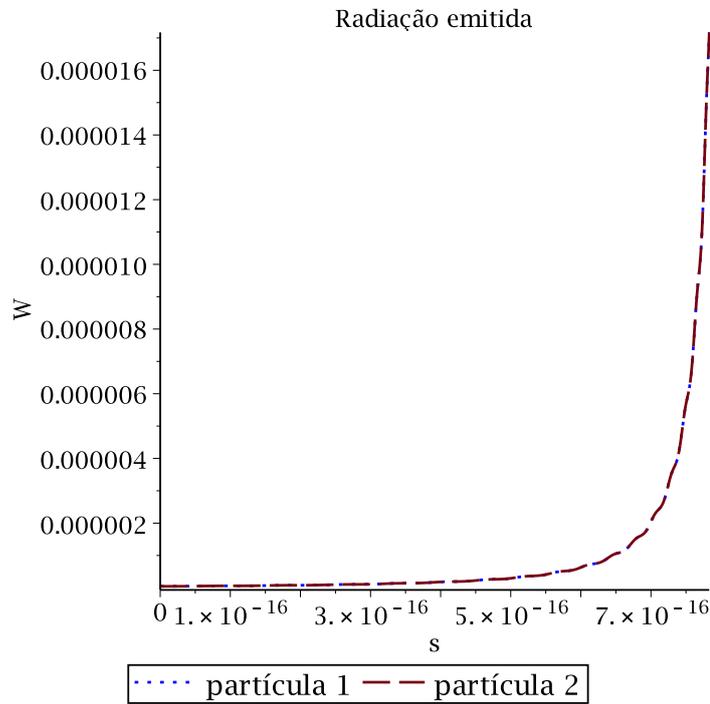
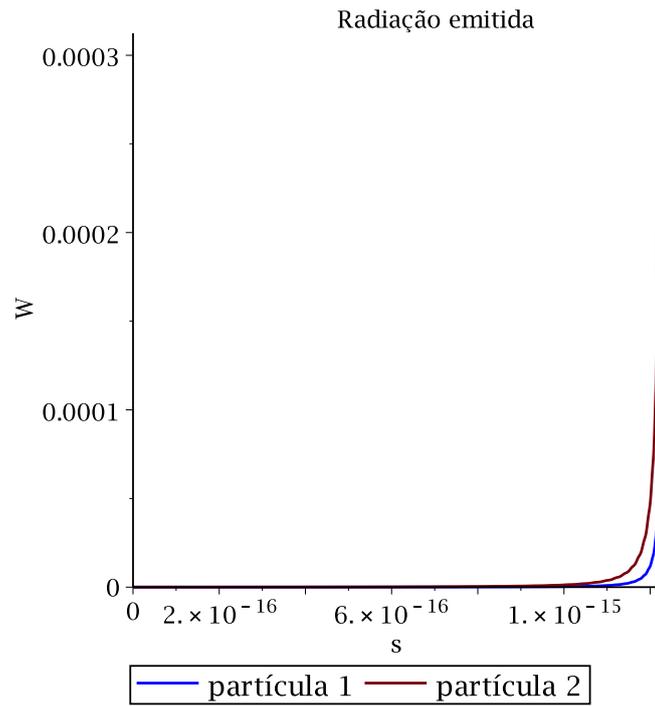
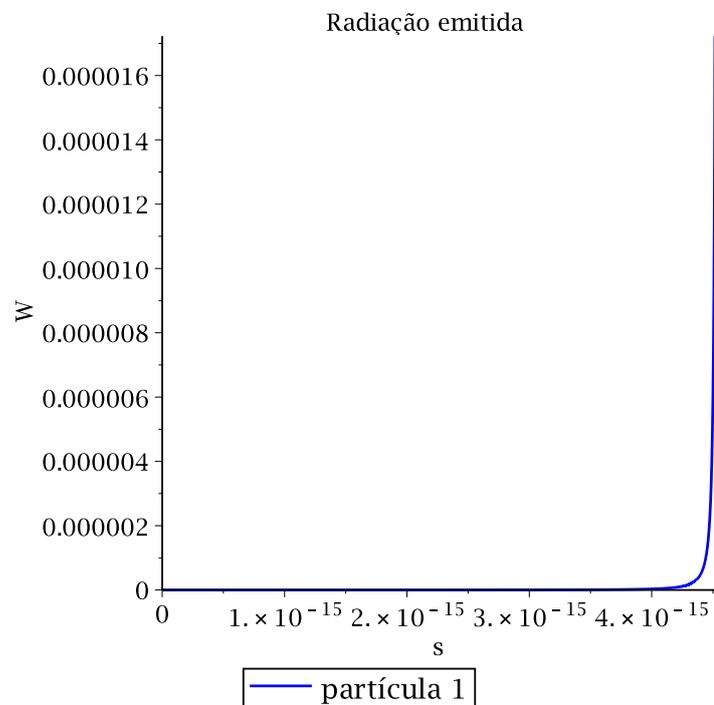
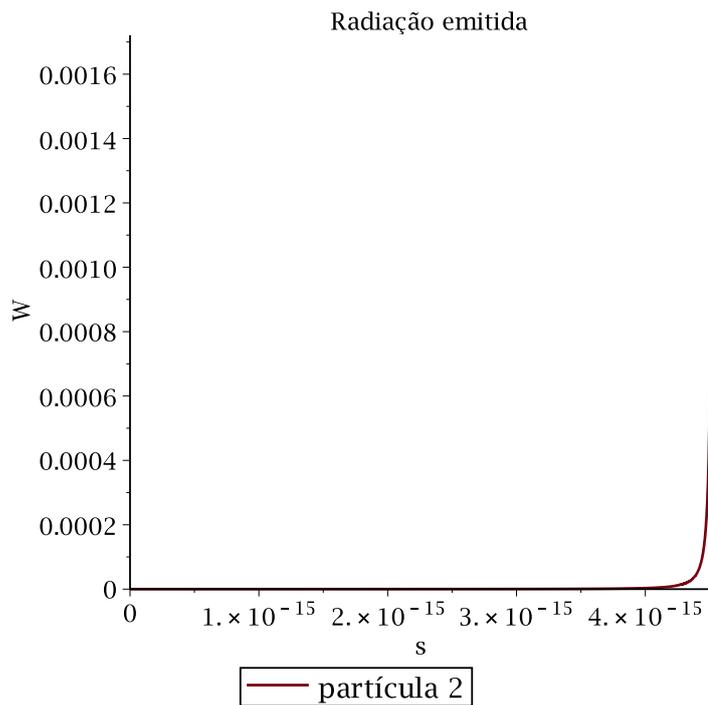


Figura 5.2.1: Potência emitida - $\eta = 1$

Figura 5.2.2: Potência emitida - $\eta = 2$ Figura 5.2.3: Potência emitida - $\eta = 10$

Figura 5.2.4: Potência emitida - $\eta = 10$

Os gráficos para as partícula 1 e 2 com $\eta = 10$ estão separados devido a diferença de escalas.

Capítulo VI

Conclusão

6.1 Resultados e Perspectivas

Neste trabalho obtivemos as equações de movimento para duas partículas pontuais carregadas interagindo entre si e assim obtivemos a dinâmica destas partículas. Introduzimos uma escala temporal e espacial de modo que a dinâmica do sistema depende apenas da razão entre as massas η . Concluimos que sistemas com parâmetros diferentes mas cujo valor de η é o mesmo possuem uma simetria de escala em que há um mapeamento de um sistema ao outro por uma transformação de escala espacial e temporal. Também constatamos uma violação da 3ª lei de Newton, uma vez que observamos a aceleração do centro de massa.

Dentre os objetivos citados durante o trabalho conseguimos analisar numericamente o tempo de decaimento para diferentes valores de η com diferentes valores de raio inicial. Com intuito de compreender melhor este tempo obtivemos a equação (4.3.23) que possibilitou determinar uma expressão analítica para o tempo de decaimento e calculamos a radiação liberada por essas partículas.

Os próximos passos a serem tomados é considerar o tempo de retardo e o momento relativístico nas equações de movimento. Introduzindo estes novos fatores temos como objetivo observar como se dará o comportamento das trajetórias e se existe uma grande mudança no tempo de decaimento.

Com a introdução destes novos fatores devemos procurar outros métodos para simulação que envolvam equações diferenciais com retardo, isto é, equações diferenciais no qual a derivada da função desconhecida em um certo tempo é dada em termos dos valores da função em tempos anteriores [6].

Estamos interessados também no estudo da eletrodinâmica estocástica para analisarmos a estabilidade das órbitas. As equações de movimento deduzidas neste trabalho não possuem termos estocásticos, porém temos como intuito encontrar um forma de introduzir o termo estocástico nas equações de movimento para analisarmos a estabilidade do ponto de vista estocástico. Portanto temos como novo objetivo dar um descrição da estabilidade do elétron, de forma que as leis do eletromagnetismo permaneçam válidas, porém introduzindo elementos estocásticos na análise clássica.

Apêndice A

Eletrromagnetismo

1.1 Função de Green para as equações de Onda

As equações de onda no calibre de Lorentz

$$\begin{aligned}\nabla^2 V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \mathfrak{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J},\end{aligned}$$

partilham da mesma estrutura matemática, elas podem ser escritas como

$$\nabla^2 \gamma - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = -4\pi \nu(\mathbf{r}, t) \quad (1.1.1)$$

sendo $\gamma(\mathbf{r}, t)$ representado pelos potenciais, $c = 1/\mu_0 \epsilon_0$ a velocidade da luz no vácuo e $\nu(\mathbf{r}, t)$ as fontes dos potenciais. Para a resolução desta equação diferencial não homogênea, usaremos a técnica de transformação de Fourier. Escrevemos γ e ν como

$$\gamma(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.1.2)$$

e

$$\nu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \nu(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.1.3)$$

com as seguintes transformadas inversas

$$\gamma(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt \quad (1.1.4)$$

e

$$\nu(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \nu(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt. \quad (1.1.5)$$

Aplicando as expressões (1.1.2) e (1.1.3) em (1.1.1), temos

$$\begin{aligned}\nabla^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] &= \\ &= -4\pi \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \nu(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \gamma(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\mathbf{r}, \omega) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (e^{-i\omega t}) d\omega = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -4\pi\nu(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \gamma(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\mathbf{r}, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} (e^{-i\omega t}) d\omega = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -4\pi\nu(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Seja

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad (1.1.6)$$

temos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\nabla^2 \gamma + k^2 \gamma + 4\pi\nu] e^{-i\omega t} d\omega = 0.$$

Para que a integral seja nula é preciso que

$$\nabla^2 \gamma + k^2 \gamma = -4\pi\nu \quad (1.1.7)$$

que é a equação diferencial conhecida como a equação de Helmholtz não homogênea.

Podemos resolver a equação (1.1.7) utilizando adequadamente as funções de Green que estão sujeitas a equação

$$\nabla^2 F_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 F_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.1.8)$$

Quando não há superfícies limitantes que formam fronteiras entre duas regiões distintas, a função de Green acima deve ter uma simetria esférica, de modo que ela deve depender apenas de $\mathbf{R} = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$. Portanto a equação (1.1.8) pode ser simplificada reescrevendo o operador ∇^2 em coordenadas esféricas

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

Como F_k , é uma função de $\mathbf{R} = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (RF_k) + k^2 F_k &= -4\pi\delta(\mathbf{R}) \\ \frac{d^2}{dR^2} (RF_k) + k^2 (RF_k) &= -4\pi\delta(\mathbf{R}). \end{aligned}$$

A função Delta contribui somente quando $\mathbf{R} = 0$, isto é $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Quando $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$, a equação torna-se

$$\frac{d^2}{dR^2} (RF_k) + k^2 (RF_k) = 0,$$

que é uma equação homogênea, a qual pode ser simplificada definindo

$$F_k = \frac{f_k(R)}{R}.$$

Portanto a equação fica

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dR^2} \left(R \frac{f_k(R)}{R} \right) + k^2 \left(R \frac{f_k(R)}{R} \right) &= 0, \\ \frac{d^2}{dR^2} (f_k(R)) + k^2 (f_k(R)) &= 0.\end{aligned}$$

Supondo que

$$f_k = Ae^{mR}$$

e substituindo na equação diferencial acima, temos

$$\begin{aligned}Am^2 e^{mR} + K^2 Ae^{mR} &= 0 \\ Ae^{mR}(m^2 + k^2) &= 0.\end{aligned}$$

Para que a equação acima seja sempre verificado, basta que

$$\begin{aligned}m^2 + k^2 &= 0 \\ m &= \pm ik.\end{aligned}$$

Portanto, a solução da equação diferencial são dados pelas funções

$$f_k^+(R) = e^{ikR} \quad f_k^-(R) = e^{-ikR}$$

e assim as funções de Green ficam

$$F_k^+(R) = \frac{f_k^+(R)}{R} = \frac{e^{ikR}}{R} \quad (1.1.9)$$

e

$$F_k^-(R) = \frac{f_k^-(R)}{R} = \frac{e^{-ikR}}{R} \quad (1.1.10)$$

resultando na função de Green geral

$$F_k(R) = A \frac{e^{ikR}}{R} + B \frac{e^{-ikR}}{R} \quad (1.1.11)$$

em que A e B são coeficientes que dependem das condições do problema. Os dois termos a direita da equação (1.1.11) representam ondas esféricas. O primeiro termo indica uma onda partindo da origem, em $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, e o segundo termo uma onda esférica dirigindo-se para a origem. Quando a fonte de um potencial é acionada no instante de tempo $t = 0$, a onda emitida deve divergir a partir do ponto em que está a fonte, assim $f_k^+(R)$ tem um interpretação simples, porém, $F_k^-(R)$, associada a uma onda convergindo para a origem, não tem uma interpretação tão simples diretamente, porém dependendo das condições de contorno no tempo ela pode ser utilizada facilitando o desenvolvimento matemático.

Para melhor compreensão das duas funções de Green, consideramos as mesmas dependentes do tempo, que deve estar sujeita, por analogia com (1.1.7), à equação

$$\nabla^2 F_k(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} F_k(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (1.1.12)$$

Definindo as transformadas de Fourier

$$F_k(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_k(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}', \omega') e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.1.13)$$

e

$$F_k(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}', \omega') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_k(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') e^{i\omega t} dt. \quad (1.1.14)$$

Além disso, o termo de fonte em (1.1.7) pode ser identificado com as funções Delta em (1.1.12), ou seja

$$\nu(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (1.1.15)$$

de modo que por (1.1.5), temos

$$\begin{aligned} \nu(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') e^{i\omega t} dt, \\ \nu(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{i\omega t'}. \end{aligned}$$

Assim, pela equação (1.1.3), obtemos

$$\nu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{i\omega t'} e^{-i\omega t} d\omega$$

substituindo (1.1.15) na equação acima, temos

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{i\omega t'} e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.1.16)$$

simplificando

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') &= \frac{1}{2\pi} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega \\ \delta(t - t') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega. \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

Para obter a função de Green dependente do tempo que esteja sujeita a equação (1.1.12), substituiremos (1.1.13) e (1.1.16) na equação diferencial, portanto

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_k(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}', \omega') e^{-i\omega t} d\omega \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_k(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}', \omega') e^{-i\omega t} d\omega \right] &= \\ &= \frac{-4\pi}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-i\omega(t-t')} d\omega \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 F_k(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}', \omega') e^{-i\omega t} d\omega - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_k(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}', \omega') \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (e^{-i\omega t}) d\omega &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-4\pi}{\sqrt{2\pi}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-i\omega(t-t')} d\omega \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\nabla^2 F_k(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}', \omega') + k^2 \nabla^2 F_k(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}', \omega') + \frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{i\omega t'} \right] e^{-i\omega t} d\omega &= 0. \end{aligned}$$

Assim obtemos a seguinte equação diferencial

$$\nabla^2 F_k(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}', \omega') + k^2 F_k(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}', \omega') = -4\pi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{i\omega t'}. \quad (1.1.18)$$

Supondo que a função de Green $F_k(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}', \omega')$ possa ser escrita na forma de um produto entre uma função de Green independente do tempo e uma função que tenha como dependência na frequência, e consequentemente no tempo, obtemos

$$F_k(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}', \omega') = F_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Omega(\omega, \omega') \quad (1.1.19)$$

e substituindo (1.1.19) em (1.1.18), ficamos com

$$\begin{aligned} \nabla^2 [F_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Omega(\omega, \omega')] + k^2 [F_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Omega(\omega, \omega')] &= -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{e^{i\omega t'}}{\sqrt{2\pi}} \\ \Omega(\omega, \omega') [\nabla^2 F_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 F_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] &= -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{e^{i\omega t'}}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Omega(\omega, \omega') &= \frac{e^{i\omega t'}}{\sqrt{2\pi}} \\ \nabla^2 F_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 F_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

Sendo a última equação exatamente igual a equação (1.1.8), cujas soluções são

$$F_k(R) = A \frac{e^{ikR}}{R} + B \frac{e^{-ikR}}{R}.$$

Portanto a equação (1.1.19), pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} F_k(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}', \omega') &= F_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Omega(\omega, \omega') \\ &= \left[A \frac{e^{ikR}}{R} + B \frac{e^{-ikR}}{R} \right] \frac{e^{i\omega t'}}{\sqrt{2\pi}}, \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

assim temos uma função de Green que depende do tempo.

Portanto podemos escrever $F_k(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}', \omega')$, como

$$F_k(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}', \omega') = F_k^+(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}', \omega') + F_k^-(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}', \omega')$$

em que

$$F_k^+(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}', \omega') = A \frac{e^{ikR}}{R} \frac{e^{i\omega t'}}{\sqrt{2\pi}} \quad (1.1.22)$$

$$F_k^-(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}', \omega') = B \frac{e^{-ikR}}{R} \frac{e^{i\omega t'}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (1.1.23)$$

Retomando a transformada de Fourier (1.1.13), obtemos

$$F_k^+(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{e^{i\omega t'}}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} d\omega$$

$$F_k^+(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikR} e^{-i\omega(t-t')} d\omega$$

$$F_k^+(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\omega}{c}R - i\omega(t-t')} d\omega$$

$$F_k^+(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t' - \frac{R}{c})} d\omega$$

$$F_k^+(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega[t' - (t - \frac{R}{c})]} d\omega.$$

Realizando uma mudança de variável, temos:

$$\begin{aligned}\Omega &= -\omega & d\Omega &= -d\omega \\ \Omega \rightarrow \infty &\Rightarrow \omega \rightarrow -\infty \\ \Omega \rightarrow -\infty &\Rightarrow \omega \rightarrow \infty\end{aligned}$$

Assim,

$$F_k^+(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{-\infty} e^{i(-\Omega)[t' - (t - \frac{R}{c})]} (-d\omega)$$

trocando os limites de integração ficamos com

$$F_k^+(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Omega[t' - (t - \frac{R}{c})]} d\Omega. \quad (1.1.24)$$

Já sabemos que,

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega.$$

Alterando t com t' , obtemos

$$\delta(t' - t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t'-t)} d\omega. \quad (1.1.25)$$

Comparando com (1.1.24), obtemos

$$F_k^+(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{R} \delta \left[t' - \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]. \quad (1.1.26)$$

Fazendo a mesma mudança de variável definida anteriormente em (1.1.17) achamos

$$\begin{aligned}\delta(t - t') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\infty} e^{-i(-\Omega)(t-t')} d(-\Omega) \\ \delta(t - t') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Omega(t-t')} d(\Omega)\end{aligned}$$

e então, ficamos com

$$\delta(t - t') = \delta(t' - t). \quad (1.1.27)$$

A outra função de Green, equação (1.1.23), tem a transformada

$$\begin{aligned}F_k^-(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikR}}{R} \frac{e^{i\omega t'}}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} d\omega \\ F_k^-(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikR} e^{-i\omega(t-t')} d\omega \\ F_k^-(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t' + \frac{R}{c})} d\omega \\ F_k^-(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega[t' - (t + \frac{R}{c})]} d\omega.\end{aligned}$$

Novamente utilizamos a mesma mudança de variável, ou seja, trocamos ω por $-\Omega$, e obtemos

$$F_k^-(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{R} \delta \left[t' - \left(t + \frac{R}{c} \right) \right]. \quad (1.1.28)$$

Portanto as funções de Green (1.1.26) e (1.1.28) podem ser escritas como

$$F_k^+(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \delta \left[t' - \left(t - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}{c} \right) \right] \quad (1.1.29)$$

$$F_k^-(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \delta \left[t' - \left(t + \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}{c} \right) \right]. \quad (1.1.30)$$

Logo, em termos da função de Green, as soluções da equação diferencial (1.1.1),

$$\nabla^2 \gamma - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = -4\pi \nu(\mathbf{r}, t)$$

são dadas mediante

$$\begin{aligned} \gamma^\pm(\mathbf{r}, t) &= \int \int_V F_k^\pm(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \nu(\mathbf{r}', t') dV dt' \\ \gamma^\pm(\mathbf{r}, t) &= \int \int_V \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \delta \left[t' - \left(t \mp \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}{c} \right) \right] \nu(\mathbf{r}', t') dV dt' \end{aligned}$$

trocando a ordem das integrais, temos

$$\gamma^\pm(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{\nu \left(\mathbf{r}', t \mp \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}{c} \right)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV.$$

Como definido anteriormente o tempo retardado t_r ,

$$t_r = t - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}{c},$$

e o tempo avançado definido como

$$t_a = t + \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}{c}, \quad (1.1.31)$$

as soluções podem ser escritas como

$$\gamma^+(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{\nu(\mathbf{r}', t_r)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV \quad (1.1.32)$$

e

$$\gamma^-(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{\nu(\mathbf{r}', t_a)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV. \quad (1.1.33)$$

Após todo esse desenvolvimento podemos compreender melhor as soluções acima. A primeira solução referente a tempo retardado explicita uma "informação" propagando-se a partir de \mathbf{r}' que foi emitida num tempo t' e por causa da velocidade finita da luz, leva um certo tempo até atingir um ponto de observação \mathbf{r} no espaço, sendo percebida num instante de tempo t posterior a t' . A outra solução para um tempo avançado apresenta dificuldade quanto a sua interpretação física porque representa uma informação emitida

num tempo t' a partir de um ponto \mathbf{r}' e que é recebida num ponto \mathbf{r} em um instante de tempo t anterior a t' , violando a questão da causalidade, isto é os efeitos precedem as causas. Entretanto esta solução matemática pode ser usado como artifício de cálculo em algum problema.

Como resolvemos a equação (1.1.1) que era uma equação genérica para às equações de onda no calibre de Lorentz,

$$\begin{aligned}\nabla^2 V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \mathfrak{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J}\end{aligned}$$

que terão, como soluções, as expressões no calibre de Lorentz

$$\begin{aligned}V(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV, \\ \mathfrak{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV.\end{aligned}$$

Portanto foi demonstrado que as equações (1.2.17) e (1.2.18).

1.2 Cálculo dos campos de Lienard-Wiechert

A partir dos potenciais podemos determinar os campos utilizando as relações abaixo

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathfrak{A}, \\ \mathbf{E} &= -\nabla V - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t},\end{aligned}$$

com os seguintes potenciais retardados

$$\begin{aligned}V(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}, \\ \mathfrak{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0 \epsilon_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \mathbf{v}(t_r).\end{aligned}$$

Calculando inicialmente ∇V

$$\nabla V = \nabla \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right).$$

O operador ∇ atua sobre r e $r_q(tr)$, pois

$$t_r = t - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t_r)\|}{c} = t - \frac{\mathbf{R}}{c}.$$

Temos então,

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (-) \frac{1}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \nabla(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) \\ \nabla V &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} (\nabla R - \nabla \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}).\end{aligned}\tag{1.2.34}$$

Já sabemos que

$$R = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t_r)\| = c(t - t_r),$$

portanto

$$\begin{aligned}\nabla R &= c\nabla(t - t_r) \\ &= -c\nabla t_r.\end{aligned}\tag{1.2.35}$$

Por outro lado, temos também

$$\nabla R = \nabla\sqrt{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}} = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}}\nabla(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}).\tag{1.2.36}$$

Dada a identidade

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

de modo que

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) &= (\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{R} + \mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{R}) + (\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{R} + \mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{R}) \\ \nabla(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) &= 2(\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{R} + 2\mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{R}).\end{aligned}\tag{1.2.37}$$

Primeiro, determinamos

$$\begin{aligned}(\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{R} &= (\mathbf{R} \cdot \nabla)[\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_r)], \\ &= (\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{r} - (\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{r}(t_r).\end{aligned}\tag{1.2.38}$$

Definindo

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}, \\ \mathbf{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \\ \mathbf{r}(t_r) &= x_t(t_r)\hat{i} + y_t(t_r)\hat{j} + z_t(t_r)\hat{k},\end{aligned}$$

temos que o primeiro termo

$$\begin{aligned}(\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{r} &= \left((R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right) \right) (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}), \\ &= \left(R_x\frac{\partial}{\partial x} + R_y\frac{\partial}{\partial y} + R_z\frac{\partial}{\partial z} \right) (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}), \\ &= R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}, \\ &= \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Portanto

$$(\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{R}.\tag{1.2.39}$$

O segundo termo

$$\begin{aligned}(\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{r}(t_r) &= \left((R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right) \right) (\mathbf{r}(t_r)), \\ &= \left(R_x\frac{\partial}{\partial x} + R_y\frac{\partial}{\partial y} + R_z\frac{\partial}{\partial z} \right) (\mathbf{r}(t_r)), \\ &= R_x\frac{d\mathbf{r}(t_r)}{dt_r}\frac{\partial t_r}{\partial x} + R_y\frac{d\mathbf{r}(t_r)}{dt_r}\frac{\partial t_r}{\partial y} + R_z\frac{d\mathbf{r}(t_r)}{dt_r}\frac{\partial t_r}{\partial z}, \\ &= R_x\mathbf{v}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial x} + R_y\mathbf{v}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial y} + R_z\mathbf{v}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial z}.\end{aligned}$$

Portanto

$$(\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{r}(t_r) = \mathbf{v}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_r). \quad (1.2.40)$$

Reunindo (1.2.39) e (1.2.40) em (1.2.38), achamos

$$(\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{R} = \mathbf{R} - \mathbf{v}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_r). \quad (1.2.41)$$

Calculando agora

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{R} &= \nabla \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_r)), \\ &= \underbrace{\nabla \times \mathbf{r}}_{=0} - \nabla \times \mathbf{r}(t_r), \\ &= -\nabla \times \mathbf{r}(t_r). \end{aligned} \quad (1.2.42)$$

Entretanto

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{r}(t_r) &= \left(\frac{\partial z_q(t_r)}{\partial y} - \frac{\partial y_q(t_r)}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial x_q(t_r)}{\partial z} - \frac{\partial z_q(t_r)}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial y_q(t_r)}{\partial x} - \frac{\partial x_q(t_r)}{\partial y} \right) \hat{k}, \\ &= \left(\frac{dz_q(t_r)}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} - \frac{dy_q(t_r)}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{dx_q(t_r)}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} - \frac{dz_q(t_r)}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} \right) \hat{j} \\ &\quad + \left(\frac{dy_q(t_r)}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} - \frac{dx_q(t_r)}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} \right) \hat{k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{r}(t_r) &= \left(v_z \frac{\partial t_r}{\partial y} - v_y \frac{\partial t_r}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(v_x \frac{\partial t_r}{\partial z} - v_z \frac{\partial t_r}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(v_y \frac{\partial t_r}{\partial x} - v_x \frac{\partial t_r}{\partial y} \right) \hat{k}, \\ &= -\mathbf{v} \times \nabla t_r, \end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{r}(t_r) = -\mathbf{v} \times \nabla t_r. \quad (1.2.43)$$

Voltando para equação (1.2.44),

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{R} &= -\nabla \times \mathbf{r}(t_r), \\ \nabla \times \mathbf{R} &= -(-\mathbf{v} \times \nabla t_r), \\ \nabla \times \mathbf{R} &= \mathbf{v} \times \nabla t_r. \end{aligned} \quad (1.2.44)$$

Usando (1.2.41) e (1.2.44) em (1.2.37), ficamos com

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) &= 2(\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{R} + 2\mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{R}), \\ \nabla(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) &= 2(\mathbf{R} - \mathbf{v}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_r)) + 2\mathbf{R} \times (\mathbf{v} \times \nabla t_r), \end{aligned}$$

e, retornando a (1.2.36)

$$\begin{aligned} \nabla R &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}} \nabla(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}), \\ \nabla R &= \frac{1}{2\mathbf{R}} (2(\mathbf{R} - \mathbf{v}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_r)) + 2\mathbf{R} \times (\mathbf{v} \times \nabla t_r)), \\ \nabla R &= \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{v}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_r)) + \mathbf{R} \times (\mathbf{v} \times \nabla t_r)}{R}. \end{aligned}$$

Dada a propriedade do produto triplo vetorial,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C},$$

temos que

$$\mathbf{R} \times (\mathbf{v} \times \nabla(t_r)) = (\mathbf{R} \cdot \nabla(t_r))\mathbf{v} - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})\nabla(t_r)$$

portanto,

$$\begin{aligned}\nabla R &= \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{v}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_r)) + (\mathbf{R} \cdot \nabla(t_r))\mathbf{v} - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})\nabla(t_r)}{R}, \\ \nabla R &= \frac{\mathbf{R} - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})\nabla(t_r)}{R}.\end{aligned}$$

Utilizando a equação (1.2.35), obtemos

$$\begin{aligned}-c\nabla t_r &= \frac{\mathbf{R} - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})\nabla(t_r)}{R} \\ -c\nabla t_r &= \hat{R} - (\hat{R} \cdot \mathbf{v})\nabla(t_r) \\ \hat{R} &= (-c + \hat{R} \cdot \mathbf{v})\nabla(t_r) \\ \nabla(t_r) &= \frac{\hat{R}}{-c + \hat{R} \cdot \mathbf{v}} \\ \nabla(t_r) &= -\left(\frac{1}{c}\right) \frac{\mathbf{R}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}.\end{aligned}\tag{1.2.45}$$

A equação (1.2.35) fica,

$$\begin{aligned}\nabla R &= -c\nabla t_r, \\ \nabla R &= -c \left(\frac{-1}{c}\right) \frac{\mathbf{R}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}, \\ \nabla R &= \frac{\mathbf{R}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}.\end{aligned}\tag{1.2.46}$$

Para calcular $\nabla(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})$, utilizaremos a seguinte identidade

$$\nabla(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{R} \cdot \nabla)\boldsymbol{\beta} + \mathbf{R} \times (\nabla \times \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla)\mathbf{R} + \boldsymbol{\beta} \times (\nabla \times \mathbf{R}).\tag{1.2.47}$$

O primeiro fator $(\mathbf{R} \cdot \nabla)\boldsymbol{\beta}$ é obtido da mesma forma que a expressão (1.2.40)

$$\begin{aligned}(\mathbf{R} \cdot \nabla)\boldsymbol{\beta} &= \left((R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \right) \boldsymbol{\beta}, \\ &= \left(R_x \frac{\partial}{\partial x} + R_y \frac{\partial}{\partial y} + R_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \boldsymbol{\beta}, \\ &= R_x \frac{d\boldsymbol{\beta}(t_r)}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} + R_y \frac{d\boldsymbol{\beta}(t_r)}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} + R_z \frac{d\boldsymbol{\beta}(t_r)}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z}, \\ &= \frac{1}{c} \left(R_x \mathbf{a}(t_r) \frac{\partial t_r}{\partial x} + R_y \mathbf{a}(t_r) \frac{\partial t_r}{\partial y} + R_z \mathbf{a}(t_r) \frac{\partial t_r}{\partial z} \right), \\ &= \frac{\mathbf{a}(t_r)}{c} (\mathbf{R} \cdot \nabla t_r)\end{aligned}$$

utilizando (1.2.45)

$$\begin{aligned}(\mathbf{R} \cdot \nabla)\boldsymbol{\beta} &= \frac{\mathbf{a}(t_r)}{c} (\mathbf{R} \cdot \nabla t_r), \\ (\mathbf{R} \cdot \nabla)\boldsymbol{\beta} &= \frac{\mathbf{a}(t_r)}{c} \left(\mathbf{R} \cdot \left(\frac{-1}{c} \right) \frac{\mathbf{R}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right), \\ (\mathbf{R} \cdot \nabla)\boldsymbol{\beta} &= -\frac{R^2 \frac{\mathbf{a}}{c^2}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}.\end{aligned}\tag{1.2.48}$$

O termo $\mathbf{R} \times (\nabla \times \boldsymbol{\beta})$ pode ser calculado seguindo os mesmos passos realizados para determinar a expressão (1.2.43), tal que

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{\beta} &= -\frac{\mathbf{a}}{c} \times \nabla t_r, \\ \nabla \times \boldsymbol{\beta} &= -\frac{\mathbf{a}}{c} \times \left(\frac{-1}{c} \right) \frac{\mathbf{R}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}, \\ \nabla \times \boldsymbol{\beta} &= \frac{\frac{\mathbf{a}}{c^2} \times \mathbf{R}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}},\end{aligned}$$

logo

$$\mathbf{R} \times (\nabla \times \boldsymbol{\beta}) = \frac{\mathbf{R} \times \frac{\mathbf{a}}{c^2} \times \mathbf{R}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}.$$

Sabendo que

$$\begin{aligned}\mathbf{R} \times \frac{\mathbf{a}}{c^2} \times \mathbf{R} &= (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) \frac{\mathbf{a}}{c^2} - \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c^2} \right) \mathbf{R}, \\ &= R^2 \frac{\mathbf{a}}{c^2} - \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c^2} \right) \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{R} \times (\nabla \times \boldsymbol{\beta}) = \frac{R^2 \frac{\mathbf{a}}{c^2} - \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c^2} \right) \mathbf{R}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}. \quad (1.2.49)$$

O terceiro termo $(\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla) \mathbf{R}$, utilizando com base a expressão (1.2.41) deduzida, temos

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla) \mathbf{R} &= \boldsymbol{\beta} - \mathbf{v}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_r), \\ (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla) \mathbf{R} &= \boldsymbol{\beta} - \mathbf{v} \left(\mathbf{R} \cdot \left(\frac{-1}{c} \right) \frac{\mathbf{R}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right), \\ (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla) \mathbf{R} &= \boldsymbol{\beta} + \frac{\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}, \\ (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla) \mathbf{R} &= \frac{\boldsymbol{\beta} R}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}.\end{aligned} \quad (1.2.50)$$

o último termo $\boldsymbol{\beta} \times (\nabla \times \mathbf{R})$, por (1.2.44), temos

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{R} &= \mathbf{v} \times \nabla t_r, \\ &= \mathbf{v} \times \left(\left(\frac{-1}{c} \right) \frac{\mathbf{R}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right), \\ &= -\frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{R}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \\ \boldsymbol{\beta} \times (\nabla \times \mathbf{R}) &= \boldsymbol{\beta} \times \left(-\frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{R}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right), \\ \boldsymbol{\beta} \times (\nabla \times \mathbf{R}) &= -\left(\frac{\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{R}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right), \\ \boldsymbol{\beta} \times (\nabla \times \mathbf{R}) &= -\left(\frac{(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})\boldsymbol{\beta} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{R}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right), \\ \boldsymbol{\beta} \times (\nabla \times \mathbf{R}) &= \frac{\boldsymbol{\beta}^2 \mathbf{R} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})\boldsymbol{\beta}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}.\end{aligned} \quad (1.2.51)$$

Portanto a expressão (1.2.47), fica

$$\nabla(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) = -\frac{R^2 \frac{\mathbf{a}}{c^2}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} + \frac{R^2 \frac{\mathbf{a}}{c^2} - (\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c^2}) \mathbf{R}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} + \frac{\boldsymbol{\beta} R}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} + \frac{\beta^2 \mathbf{R} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) \boldsymbol{\beta}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}, \quad (1.2.52)$$

$$\nabla(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) = \frac{\boldsymbol{\beta} R - (\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c^2}) \mathbf{R} + \beta^2 \mathbf{R} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) \boldsymbol{\beta}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}. \quad (1.2.53)$$

Assim a equação (1.2.34), aplicando (1.2.46) e (1.2.53), achamos

$$\nabla V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \left(\frac{\mathbf{R}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} - \frac{\boldsymbol{\beta} R - (\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c^2}) \mathbf{R} + \beta^2 \mathbf{R} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) \boldsymbol{\beta}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right),$$

$$\nabla V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \left(\mathbf{R} - \boldsymbol{\beta} R + \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c^2} \right) \mathbf{R} - \beta^2 \mathbf{R} + (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) \boldsymbol{\beta} \right),$$

$$\nabla V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \beta^2) \mathbf{R} + \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c^2} \right) \mathbf{R} + [(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) - R] \boldsymbol{\beta}}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3}. \quad (1.2.54)$$

Determinando a derivada temporal de \mathfrak{A} dado por (1.2.24) no capítulo 1,

$$\mathfrak{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\mathbf{v}(t_r)}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}},$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} &= \frac{\mu_0 q c}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{v}(t_r)}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right) = \frac{\mu_0 c q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right), \\ &= \frac{\mu_0 c q}{4\pi} \left(\frac{1}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \frac{\partial}{\partial t} (R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) \right). \end{aligned}$$

Como já sabemos temos que

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t_r)$$

e que

$$t_r = t - \frac{R}{c},$$

portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t_r)) = -\frac{\partial \mathbf{r}_q(t_r)}{\partial t}, \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathbf{r}_q(t_r)}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial t}, \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} &= -\mathbf{v}(t_r) \frac{\partial t_r}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.2.55)$$

Para R , a derivada temporal é

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Utilizando a equação (1.2.55), temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial t} &= \underbrace{\frac{\mathbf{R}}{R}}_{\hat{R}} \cdot \left(-\mathbf{v}(t_r) \frac{\partial t_r}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= - \left(\hat{R} \cdot \mathbf{v}(t_r) \right) \frac{\partial t_r}{\partial t}.\end{aligned}\tag{1.2.56}$$

Sabemos que

$$R = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_r)\| = c(t - t_r)$$

portanto,

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (c(t - t_r)) = c \left(1 - \frac{\partial t_r}{\partial t} \right).\tag{1.2.57}$$

Comparando as equações (1.2.56) e (1.2.57), obtemos

$$\begin{aligned}- \left(\hat{R} \cdot \mathbf{v}(t_r) \right) \frac{\partial t_r}{\partial t} &= c \left(1 - \frac{\partial t_r}{\partial t} \right), \\ - \left(\hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}(t_r) \right) \frac{\partial t_r}{\partial t} &= 1 - \frac{\partial t_r}{\partial t}, \\ \frac{\partial t_r}{\partial t} &= \frac{1}{1 - (\hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta})}.\end{aligned}\tag{1.2.58}$$

Substituindo o termo acima nas equações (1.2.55) e (1.2.56), temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} &= -\mathbf{v}(t_r) \frac{\partial t_r}{\partial t} = -\mathbf{v}(t_r) \frac{1}{1 - (\hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta})}, \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} &= -\frac{\mathbf{v}(t_r)}{1 - (\hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta})},\end{aligned}\tag{1.2.59}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial t} &= - \left(\hat{R} \cdot \mathbf{v}(t_r) \right) \frac{\partial t_r}{\partial t}, \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= -\frac{\hat{R} \cdot \mathbf{v}(t_r)}{1 - (\hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta})}.\end{aligned}\tag{1.2.60}$$

Derivando $\boldsymbol{\beta}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{v}(t_r)}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial t}, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} &= \frac{\mathbf{a}}{c} \frac{1}{1 - (\hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta})}, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} &= \frac{\frac{\mathbf{a}}{c}}{1 - (\hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta})}.\end{aligned}$$

Onde a é a aceleração da partícula no tempo retardado t_r . Por fim, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) &= \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\beta} - \mathbf{R} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t}, \\ &= -\frac{\hat{R} \cdot \mathbf{v}}{1 - (\hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta})} + \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\beta}}{1 - (\hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta})} - \frac{\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c}}{1 - (\hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta})}, \\ &= \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\beta} - \hat{R} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c}}{1 - (\hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta})}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} &= \frac{\mu_0 c q}{4\pi} \left(\frac{1}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \frac{\frac{\mathbf{a}}{c}}{1 - (\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\beta} - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c}}{1 - (\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right), \\ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} &= \frac{\mu_0 c q}{4\pi} \left(\frac{1}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \frac{R \frac{\mathbf{a}}{c}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\beta} - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c}}{1 - (\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right), \\ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} &= \frac{\mu_0 c q}{4\pi} \left(\frac{R \frac{\mathbf{a}}{c}}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} - \frac{R \boldsymbol{\beta} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\beta} - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c})}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right).\end{aligned}$$

Como $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$, podemos escrever $\mu_0 c = \frac{1}{c \epsilon_0}$, logo

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} &= \frac{q}{4\pi \epsilon_0 c} \left(\frac{R \frac{\mathbf{a}}{c} (R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} - \frac{c R \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta} - \mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c^2})}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right), \\ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} &= \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{R \frac{\mathbf{a}}{c^2} (R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} - \frac{R \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta}^2 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta} - \mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c^2})}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right), \\ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} &= \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{R^2 \frac{\mathbf{a}}{c^2} - R(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) \frac{\mathbf{a}}{c^2} - R R \boldsymbol{\beta}^2 + R \boldsymbol{\beta} (\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}) + R \boldsymbol{\beta} (\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c^2})}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3}. \quad (1.2.61)\end{aligned}$$

Dado o campo elétrico,

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t},$$

substituindo os resultados encontrados de ∇V e $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{(1 - \beta^2) \mathbf{R} + (\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c^2}) \mathbf{R} + [(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) - R] \boldsymbol{\beta}}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \\ &\quad - \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{R^2 \frac{\mathbf{a}}{c^2} - R(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) \frac{\mathbf{a}}{c^2} - R R \boldsymbol{\beta}^2 + R \boldsymbol{\beta} (\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}) + R \boldsymbol{\beta} (\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c^2})}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{(1 - \beta^2) \mathbf{R} + (\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c^2}) \mathbf{R} + [(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) - R] \boldsymbol{\beta}}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathbf{R} \cdot (\mathbf{R} - R \boldsymbol{\beta}) \frac{\mathbf{a}}{c^2} - R R \boldsymbol{\beta}^2 + R \boldsymbol{\beta} (\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}) + R \boldsymbol{\beta} (\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c^2})}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{(1 - \beta^2) \mathbf{R} + R \boldsymbol{\beta} \beta^2 - R \boldsymbol{\beta}}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c^2}) \mathbf{R} - R \boldsymbol{\beta} (\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c^2}) - \mathbf{R} \cdot (\mathbf{R} - R \boldsymbol{\beta}) \frac{\mathbf{a}}{c^2}}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right),\end{aligned}$$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{(1 - \beta^2) \mathbf{R} - R \boldsymbol{\beta} (1 - \beta^2)}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{(\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c^2}) (\mathbf{R} - \beta \mathbf{R}) - \mathbf{R} \cdot (\mathbf{R} - R \boldsymbol{\beta}) \frac{\mathbf{a}}{c^2}}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right),$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(\mathbf{R}(t) - R(t)\boldsymbol{\beta}(t_r))(1 - \beta^2(t_r))}{(R(t) - \mathbf{R}(t) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_r))^3} + \frac{\mathbf{R}(t) \times ((\mathbf{R}(t) - R(t)\boldsymbol{\beta}(t_r)) \times \mathbf{a}(t_r))}{c^2(R(t) - \mathbf{R}(t) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_r))^3} \right), \quad (1.2.62)$$

que é o campo elétrico de Liénard-Wiechert. Para o campo magnético temos a seguinte relação

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{R}(t_r)}{c} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (1.2.63)$$

Apêndice B

Contas do capítulo II

2.1 Equação de Movimento

Neste apêndice o objetivo é expor com mais detalhes as contas realizadas no capítulo II. Portanto, voltamos novamente com as definições dos campos $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}_i(\mathbf{r}, t)$ que atuam na partícula $i = 1, 2$ com $i \neq j$

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(\mathbf{R}_i(t) - R_i(t)\boldsymbol{\beta}_j(t_r))(1 - \beta_j^2(t_r))}{(R_i(t) - \mathbf{R}_i(t) \cdot \boldsymbol{\beta}_j(t_r))^3} + \frac{\mathbf{R}_i(t) \times ((\mathbf{R}_i(t) - R_i(t)\boldsymbol{\beta}_j(t_r)) \times \mathbf{a}_j(t_r))}{c^2(R_i(t) - \mathbf{R}_i(t) \cdot \boldsymbol{\beta}_j(t_r))^3} \right),$$

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{R}_i(t)}{c} \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t),$$

onde

$$\mathbf{R}_i(t) = \mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t_r). \quad (2.1.1)$$

Para as partículas localizadas em $\mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2(t)$ no tempo t temos:

$$\mathbf{F}_i(t) = q_i (\mathbf{v}_i(t) \times \mathbf{B}_i(t) + \mathbf{E}_i(t)) \quad (2.1.2)$$

Como estamos desconsiderando o efeito de retardo, temos que o tempo t_r será calculado em t , ou seja, $t_r = t$, assim definido os vetores $\mathbf{R}_1 = (X_1 - X_2, Y_1 - Y_2, Z_1 - Z_2)$ e $\mathbf{R}_2 = (X_2 - X_1, Y_2 - Y_1, Z_2 - Z_1)$ que representam as posições da partícula 1 em relação a partícula 2 e a posição da partícula 2 em relação a partícula 1 respectivamente e os seus vetores unitários

$$\begin{aligned} \hat{R}_1 &= \frac{\mathbf{R}_1}{\|\mathbf{R}_1\|}, \\ \hat{R}_2 &= \frac{\mathbf{R}_2}{\|\mathbf{R}_2\|}, \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}_1\| &= \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2}, \\ \|\mathbf{R}_2\| &= \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}. \end{aligned}$$

Portanto o sistema de equações para a partícula 1 e para a partícula 2 é

$$\begin{cases} m_1 A_1 = q_1 (\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{B}_1) + (\mathbf{E}_1)) \\ m_2 A_2 = q_2 (\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{B}_2) + (\mathbf{E}_2)) \end{cases}$$

Como $\|\mathbf{R}_1\| = \|\mathbf{R}_2\|$, podemos escrever

$$\begin{aligned} r^2 &= \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}, \\ r^2 &= \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2}, \end{aligned}$$

e assim definir novas variáveis para simplificar mais a notação das posições das partículas, assim definimos e_X , e_Y e e_Z da seguinte maneira

$$e_X = \frac{X_2 - X_1}{r}, \quad e_Y = \frac{Y_2 - Y_1}{r}, \quad e_Z = \frac{Z_2 - Z_1}{r}.$$

Descrevendo as posições das partículas por e_X , e_Y e e_Z simplificamos bastante a notação das equações e obtemos as equações (2.1.6), (2.1.7), (2.1.8), (2.1.9), (2.1.10) e (2.1.11) do capítulo II. Como estamos analisando as soluções no plano xy e realizando o reescalamento, obtemos as seguintes equações

$$\begin{aligned} \eta A_{1x} &+ \frac{S(e_Y^2 + e_Y V_{1y} + e_Y V_{2y} + V_{1y} V_{2y}) A_{2x}}{r |1 + e_X V_{2x} + e_Y V_{2y}|^3} \\ &- \frac{S(e_Y e_X + e_Y V_{2x} + V_{1y} e_X + V_{2x} V_{1y}) A_{2y}}{r |1 + e_X V_{2x} + e_Y V_{2y}|^3} \\ &+ \frac{S}{r^2 |1 + e_X V_{2x} + e_Y V_{2y}|^3} (e_X + V_{2x} - V_{1y} e_X V_{2y} \\ &- V_{2y}^2 e_X + e_Y V_{1y} V_{2x} - V_{2x}^2 e_X - V_{2x} (V_{2x}^2 + V_{2y}^2) \\ &+ V_{1y} (V_{2x}^2 + V_{2y}^2) (-e_Y V_{2x} + e_X V_{2y})) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta A_{1y} &- \frac{S(e_Y e_X + V_{1x} e_Y + e_X V_{2y} + V_{1x} V_{2y}) A_{2x}}{r |1 + e_X V_{2x} + e_Y V_{2y}|^3} \\ &+ \frac{S(e_X^2 + e_X V_{1x} + e_X V_{2x} + V_{1x} V_{2y}) A_{2y}}{r |1 + e_X V_{2x} + e_Y V_{2y}|^3} \\ &+ \frac{S}{r^2 |1 + e_X V_{2x} + e_Y V_{2y}|^3} (e_Y + V_{2y} - V_{2y}^2 e_Y \\ &+ V_{1x} e_X V_{2y} - V_{2x}^2 e_Y - V_{1x} e_Y V_{2x} - V_{2y} (V_{2x}^2 + V_{2y}^2) \\ &- V_{1x} (V_{2x}^2 + V_{2y}^2) (-e_Y V_{2x} + e_X V_{2y})) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2x} &+ \frac{S(e_Y^2 - e_Y V_{1y} - e_Y V_{2y} + V_{1y} V_{2y}) A_{1x}}{r |-1 + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y}|^3} \\ &- \frac{S(e_Y e_X - V_{1x} e_Y - e_X V_{2y} + V_{1x} V_{2y}) A_{1y}}{r |-1 + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y}|^3} \\ &- \frac{S}{r^2 |-1 + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y}|^3} (e_X - V_{1x} - V_{1y}^2 e_X \\ &+ e_Y V_{2y} V_{1x} - V_{1y} e_X V_{2y} - V_{1x}^2 e_X + V_{1x} (V_{1x}^2 + V_{1y}^2) \\ &- V_{2y} (V_{1x}^2 + V_{1y}^2) (V_{1x} e_Y - V_{1y} e_X)) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{2y} & - \frac{S(e_Y e_X - V_{1y} e_X - e_Y V_{2x} + V_{2x} V_{1y}) A_{1x}}{r|-1 + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y}|^3} \\
& + \frac{S(e_X^2 - e_X V_{1x} - e_X V_{2x} + V_{1x} V_{2y}) A_{1y}}{r|-1 + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y}|^3} \\
& - \frac{S}{r^2|-1 + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y}|^3} (e_Y - V_{1y} + e_X V_{2x} V_{1y} \\
& - V_{1x} e_Y V_{2x} - V_{1x}^2 e_Y - V_{1y}^2 e_Y + V_{1y}(V_{1x}^2 + V_{1y}^2) \\
& + V_{2x}(V_{1x}^2 + V_{1y}^2)(V_{1x} e_Y - V_{1y} e_X)) = 0
\end{aligned}$$

Colocando as equações acima na forma matricial, obtemos

$$\begin{pmatrix} \eta & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & \eta & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1x} \\ A_{1y} \\ A_{2x} \\ A_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

$$a_{13} = \frac{S(e_Y^2 + e_Y V_{1y} + e_Y V_{2y} + V_{1y} V_{2y})}{r|1 + e_X V_{2x} + e_Y V_{2y}|^3},$$

$$a_{14} = -\frac{S(e_Y e_X + e_Y V_{2x} + e_X V_{1y} + V_{2x} V_{1y})}{r|1 + e_X V_{2x} + e_Y V_{2y}|^3},$$

$$a_{23} = -\frac{S(e_Y e_X + e_Y V_{1x} + e_X V_{2y} + V_{1x} V_{2y})}{r|1 + e_X V_{2x} + e_Y V_{2y}|^3},$$

$$a_{24} = \frac{S(e_X^2 + e_X V_{1x} + e_X V_{2x} + V_{1x} V_{2y})}{r|1 + e_X V_{2x} + e_Y V_{2y}|^3},$$

$$a_{31} = \frac{S(e_Y^2 - e_Y V_{1y} - e_Y V_{2y} + V_{1y} V_{2y})}{r|-1 + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y}|^3},$$

$$a_{32} = \frac{-S(e_Y e_X - V_{1x} e_Y - e_X V_{2y} + V_{1x} V_{2y})}{r|-1 + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y}|^3},$$

$$a_{41} = \frac{-S(e_Y e_X - e_X V_{1y} - e_Y V_{2x} + V_{2x} V_{1y})}{r|-1 + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y}|^3},$$

$$a_{42} = \frac{S(e_X^2 - e_X V_{1x} - e_X V_{2x} + V_{1x} V_{2x})}{r|-1 + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y}|^3},$$

$$\begin{aligned}
b_1 & = \frac{-S}{r^2|1 + e_X V_{2x} + e_Y V_{2y}|^3} (e_X + V_{2x} - e_X V_{1y} V_{2y} - V_{2y}^2 e_X + e_Y V_{1y} V_{2x} - V_{2x}^2 e_X - V_{2x}(V_{2y}^2 + V_{2x}^2) \\
& + V_{1y}(V_{2y}^2 + V_{2x}^2)(-e_Y V_{2x} + e_X V_{2y})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 & = \frac{-S}{r^2|1 + e_X V_{2x} + e_Y V_{2y}|^3} (e_Y + V_{2y} - V_{2y}^2 e_Y + V_{1x} e_X V_{2y} - V_{2x}^2 e_Y - e_Y V_{1x} V_{2x} - V_{2y}(V_{2y}^2 + V_{2x}^2) \\
& - V_{1x}(V_{2y}^2 + V_{2x}^2)(-e_Y V_{2x} + e_X V_{2x})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_3 & = \frac{S}{r^2|-1 + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y}|^3} (e_X - V_{1x} - V_{1y}^2 e_X + e_Y V_{2y} V_{1x} - e_X V_{1y} V_{2y} - V_{1x}^2 e_X + V_{1x}(V_{1x}^2 + V_{1y}^2) \\
& - V_{2y}(V_{1x}^2 + V_{1y}^2)(e_Y V_{1x} - e_X V_{1y})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_4 & = \frac{S}{r^2|-1 + e_X V_{1x} + e_Y V_{1y}|^3} S(e_Y - V_{1y} + e_X V_{2x} V_{1y} - e_Y V_{1x} V_{2x} - (V_{1x}^2 + V_{1y}^2)e_Y + V_{1y}(V_{1x}^2 + V_{1y}^2) \\
& + V_{2x}(V_{1x}^2 + V_{1y}^2)(e_Y V_{1x} - e_X V_{1y})).
\end{aligned}$$

Com a matriz em mãos podemos achar a aceleração em função das posições e velocidades. Resolvido o sistema matricial iremos realizar uma aproximação na velocidade, isto é, consideraremos somente os termos lineares na velocidades, portanto as acelerações serão dadas por

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = \mathbf{A}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{V}_1 = 0, \mathbf{V}_2 = 0) + \left(\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial \mathbf{V}_1} \right)_{\mathbf{V}_1=0} \mathbf{V}_1 + \left(\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial \mathbf{V}_2} \right)_{\mathbf{V}_2=0} \mathbf{V}_2,$$

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = \mathbf{A}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{V}_1 = 0, \mathbf{V}_2 = 0) + \left(\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial \mathbf{V}_1} \right)_{\mathbf{V}_1=0} \mathbf{V}_1 + \left(\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial \mathbf{V}_2} \right)_{\mathbf{V}_2=0} \mathbf{V}_2.$$

Escrevendo a aceleração em termos das componentes temos que A_{1x} , A_{1y} , A_{2x} e A_{2y} será dado por

$$\begin{aligned} A_{1x} &= A_{1x}(\mathbf{V}_1 = 0, \mathbf{V}_2 = 0) + \left(\frac{\partial A_{1x}}{\partial V_{1x}} \right)_{V_{1x}=0} V_{1x} + \left(\frac{\partial A_{1x}}{\partial V_{1y}} \right)_{V_{1y}=0} V_{1y} \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_{1x}}{\partial V_{2x}} \right)_{V_{2x}=0} V_{2x} + \left(\frac{\partial A_{1x}}{\partial V_{2y}} \right)_{V_{2y}=0} V_{2y}, \\ A_{1y} &= A_{1y}(\mathbf{V}_1 = 0, \mathbf{V}_2 = 0) + \left(\frac{\partial A_{1y}}{\partial V_{1x}} \right)_{V_{1x}=0} V_{1x} + \left(\frac{\partial A_{1y}}{\partial V_{1y}} \right)_{V_{1y}=0} V_{1y} \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_{1y}}{\partial V_{2x}} \right)_{V_{2x}=0} V_{2x} + \left(\frac{\partial A_{1y}}{\partial V_{2y}} \right)_{V_{2y}=0} V_{2y}, \\ A_{2x} &= A_{2x}(\mathbf{V}_1 = 0, \mathbf{V}_2 = 0) + \left(\frac{\partial A_{2x}}{\partial V_{1x}} \right)_{V_{1x}=0} V_{1x} + \left(\frac{\partial A_{2x}}{\partial V_{1y}} \right)_{V_{1y}=0} V_{1y} \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_{2x}}{\partial V_{2x}} \right)_{V_{2x}=0} V_{2x} + \left(\frac{\partial A_{2x}}{\partial V_{2y}} \right)_{V_{2y}=0} V_{2y}, \\ A_{2y} &= A_{2y}(\mathbf{V}_1 = 0, \mathbf{V}_2 = 0) + \left(\frac{\partial A_{2y}}{\partial V_{1x}} \right)_{V_{1x}=0} V_{1x} + \left(\frac{\partial A_{2y}}{\partial V_{1y}} \right)_{V_{1y}=0} V_{1y} \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_{2y}}{\partial V_{2x}} \right)_{V_{2x}=0} V_{2x} + \left(\frac{\partial A_{2y}}{\partial V_{2y}} \right)_{V_{2y}=0} V_{2y}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A_{1x} &= -\frac{Se_X}{\eta r^2} + \frac{e_Y^2(-S + \eta r)V_{1x}}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)} - \frac{e_Y e_X(-S + \eta r)V_{1y}}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)} \\ &\quad + \frac{(-3e_Y^2 \eta r^2 + 2e_Y^2 + 2\eta r^2 - 2 + Se_Y^2 \eta r)SV_{2x}}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)} \\ &\quad - \frac{e_Y e_X(-3\eta r^2 + 2 + S\eta r)SV_{2y}}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)}, \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

$$\begin{aligned} A_{1y} &= -\frac{Se_Y}{\eta r^2} - \frac{e_Y e_X(-S + \eta r)V_{1x}}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)} + \frac{e_X^2(-S + \eta r)V_{1y}}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)} \\ &\quad - \frac{e_Y e_X(-3\eta r^2 + 2 + S\eta r)SV_{2x}}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)} \\ &\quad + \frac{(-2 + 2e_X^2 - 3\eta r^2 e_X^2 + Se_X^2 \eta r + 2\eta r^2)SV_{2y}}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)}, \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

$$\begin{aligned}
A_{2x} = & \frac{Se_X}{r^2} - \frac{S(-2\eta r^2 - Se_Y^2 r - 2e_Y^2 + 3e_Y^2 \eta r^2 + 2)V_{1x}}{r^2(-1 + \eta r^2)} \\
& + \frac{e_Y Se_X(-rS - 2 + 3\eta r^2)V_{1y}}{r^2(-1 + \eta r^2)} - \frac{e_Y^2(-r + S)V_{2x}}{r^2(-1 + \eta r^2)} \\
& + \frac{e_Y e_X(-r + S)V_{2y}}{r^2(-1 + \eta r^2)}, \tag{2.1.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{2y} = & \frac{e_Y S}{r^2} + \frac{Se_Y e_X(-rS - 2 + 3\eta r^2)V_{1x}}{r^2(-1 + \eta r^2)} \\
& - \frac{S(3\eta r^2 e_X^2 + 2 - 2e_X^2 - Se_X^2 r - 2\eta r^2)V_{1y}}{r^2(-1 + \eta r^2)} \\
& + \frac{e_Y e_X(-r + S)V_{2x}}{r^2(-1 + \eta r^2)} - \frac{e_X^2(-r + S)V_{2y}}{r^2(-1 + \eta r^2)}. \tag{2.1.6}
\end{aligned}$$

2.2 Coordenada relativa e de centro de massa

Para um sistema de massas discreto, formado por um conjunto de massas pontuais, o centro de massa é definido como:

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{\sum_i (\mathbf{r}_i m_i)}{\sum_i m_i}$$

- m_i - Massa pontual i -ésima,
- \mathbf{r}_i - Posição da massa i -ésima respectivo ao eixo de referência assumido.

Portanto,

$$\begin{aligned}
X &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \\
Y &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2},
\end{aligned}$$

substituindo

$$\frac{m_1}{m_2} = \eta,$$

obtemos

$$X = \frac{\eta x_1 + x_2}{\eta + 1}, \tag{2.2.7}$$

$$Y = \frac{\eta y_1 + y_2}{\eta + 1}. \tag{2.2.8}$$

A partir de (2.2.7) e (2.2.8), obtemos a velocidade e a aceleração do centro de massa

$$\begin{aligned}
V_x &= \frac{dX}{dt} = \frac{\eta V_{1x} + V_{2x}}{\eta + 1}, \\
V_y &= \frac{dY}{dt} = \frac{\eta V_{1y} + V_{2y}}{\eta + 1}, \\
A_x &= \frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{\eta A_{1x} + A_{2x}}{\eta + 1}, \\
A_y &= \frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{\eta A_{2x} + A_{2y}}{\eta + 1}.
\end{aligned}$$

Definido também a velocidade relativa como

$$v_x = V_{2x} - V_{1x},$$

$$v_y = V_{2y} - V_{1y},$$

podemos escrever V_{1x} , V_{1y} , V_{2x} e V_{2y} em função da velocidade do centro de massa e a velocidade relativa, ou seja,

$$V_{1x} = \frac{-v_x + V_x \eta + V_x}{\eta + 1}, \quad (2.2.9)$$

$$V_{1y} = \frac{-v_y + V_y \eta + V_y}{\eta + 1}, \quad (2.2.10)$$

$$V_{2x} = \frac{V_x \eta + V_x + \eta v_x}{\eta + 1}, \quad (2.2.11)$$

$$V_{2y} = \frac{V_y \eta + V_y + \eta v_y}{\eta + 1}. \quad (2.2.12)$$

Como a aceleração do centro de massa no eixo x é

$$A_x = \frac{\eta A_{1x} + A_{2x}}{\eta + 1},$$

substituímos as equações (2.1.3) e (2.1.5) na equação acima e as velocidades V_{1x} , V_{1y} , V_{2x} e V_{2y} em função da velocidade do centro de massa e a velocidade relativa. Portanto a aceleração do centro de massa no eixo x é

$$\begin{aligned} A_x = & -\frac{2(3S e_Y^2 \eta r^2 - 2S \eta r^2 - e_Y^2 \eta r - S e_Y^2 - e_Y^2 r + 2S) V_x}{(\eta r^2 - 1) r^2 (\eta + 1)} \\ & + \frac{2(3S \eta r^2 - \eta r - S - r) e_X e_Y V_y}{(\eta r^2 - 1) r^2 (\eta + 1)} \\ & - \frac{(\eta - 1)(3S e_Y^2 \eta r^2 - 2S \eta r^2 - e_Y^2 \eta r - S e_Y^2 - e_Y^2 r + 2S) v_x}{(\eta r^2 - 1) r^2 (\eta + 1)^2} \\ & + \frac{e_X e_Y (\eta - 1)(3S \eta r^2 - \eta r - S - r) v_y}{(\eta r^2 - 1) r^2 (\eta + 1)^2}. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, temos que a aceleração do centro de massa no eixo y é dado por

$$A_y = \frac{\eta A_{2x} + A_{2y}}{\eta + 1},$$

substituímos as equações (2.1.4) e (2.1.6) na equação acima e as velocidades V_{1x} , V_{1y} , V_{2x} e V_{2y} em função da velocidade do centro de massa e a velocidade relativa. Portanto a aceleração do centro de massa no eixo y é

$$\begin{aligned} A_y = & 2 \frac{(3S \eta r^2 - r \eta - S - r) e_X e_Y V_x}{(\eta r^2 - 1) r^2 (\eta + 1)} \\ & - 2 \frac{(3S \eta e_X^2 r^2 - 2 \eta S r^2 - e_X^2 \eta r - e_X^2 S - e_X^2 r + 2S) V_y}{(\eta r^2 - 1) r^2 (\eta + 1)} \\ & + \frac{e_X e_Y (\eta - 1)(3 \eta S r^2 - \eta r - S - r) v_x}{(\eta + 1)^2 r^2 (\eta r^2 - 1)} \\ & - \frac{(\eta - 1)(3S \eta e_X^2 r^2 - 2 \eta S r^2 - e_X^2 \eta r - e_X^2 S - e_X^2 r + 2S) v_y}{(\eta + 1)^2 r^2 (\eta r^2 - 1)} \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Definindo a aceleração relativa como

$$\begin{aligned} a_x &= A_{2x} - A_{1x}, \\ a_y &= A_{2y} - A_{1y}, \end{aligned}$$

aplicamos os mesmos procedimentos realizados anteriormente chegamos nas seguintes expressões

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{S e_X (\eta + 1)}{\eta r^2} - \frac{(\eta - 1) (3 e_Y^2 \eta r^2 - 2 \eta r^2 - e_Y^2 + 2) S V_x}{\eta r^2 (\eta r^2 - 1)} \\ &+ \frac{(\eta - 1) (3 \eta r^2 - 1) e_Y e_X S V_y}{\eta r^2 (\eta r^2 - 1)} \\ &+ \frac{S (6 e_Y^2 \eta^2 r^2 - e_Y^2 \eta^2 - 4 r^2 \eta^2 - 4 e_Y^2 \eta - e_Y^2 + 4 \eta) v_x}{(\eta + 1) \eta r^2 (\eta r^2 - 1)} \\ &- \frac{e_Y e_X S (6 r^2 \eta^2 - \eta^2 - 4 \eta - 1) v_y}{(\eta + 1) \eta r^2 (\eta r^2 - 1)}, \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

$$\begin{aligned} a_y &= \frac{S e_Y (\eta + 1)}{\eta r^2} + \frac{(\eta - 1) (3 \eta r^2 - 1) S e_X e_Y V_x}{\eta r^2 (-1 + \eta r^2)} \\ &- \frac{(\eta - 1) (-2 \eta r^2 + 3 r^2 \eta e_X^2 + 2 - e_X^2) S V_y}{\eta r^2 (-1 + \eta r^2)} \\ &- \frac{S e_X e_Y (-1 - \eta^2 - 4 \eta + 6 \eta^2 r^2) v_x}{(\eta + 1) \eta r^2 (-1 + \eta r^2)} \\ &+ \frac{S (-e_X^2 + 6 \eta^2 e_X^2 r^2 - 4 e_X^2 \eta - e_X^2 \eta^2 + 4 \eta - 4 \eta^2 r^2) v_y}{(\eta + 1) \eta r^2 (-1 + \eta r^2)}. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

2.3 Coordenadas polares

Para determinarmos a aceleração radial e angular da forma descrita no capítulo II consideremos uma partícula movendo-se no plano xy o vetor posição é

$$\mathbf{r} = x \hat{x} + y \hat{y},$$

e o vetor aceleração é

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 x}{dt^2} \hat{x} + \frac{d^2 y}{dt^2} \hat{y}.$$

Definindo novos vetores unitários \hat{r} e $\hat{\theta}$ e os vetores \mathbf{r} e $\boldsymbol{\theta}$ para expressar os vetores acima em termos das coordenadas polares. Portanto, o vetor unitário \hat{r} é

$$\hat{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

como

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta), \\ y &= r \sin(\theta), \end{aligned}$$

podemos reescrever \hat{r} como

$$\hat{r} = \hat{x} \cos(\theta) + \hat{y} \sin(\theta).$$

Em coordenadas polares, o vetor velocidade, dado por

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

é reescrito como

$$\mathbf{v} = \frac{d(r\hat{r})}{dt},$$

logo

$$\mathbf{v} = \frac{d(r\hat{r})}{dt} = \hat{r} \frac{dr}{dt} + r \frac{d\hat{r}}{dt}.$$

A derivada temporal de \hat{r} é

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{r}}{dt} &= \hat{x} \frac{d \cos(\theta)}{dt} + \hat{y} \frac{d \sin(\theta)}{dt}, \\ &= -\hat{x} \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} + \hat{y} \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt}, \\ &= \frac{d\theta}{dt} \underbrace{(-\hat{x} \sin(\theta) + \hat{y} \cos(\theta))}_{=\hat{\theta}}, \\ &= \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta}. \end{aligned}$$

Assim, a velocidade da partícula pode ser escrita como

$$\mathbf{v} = \hat{r} \frac{dr}{dt} + r \frac{d\hat{r}}{dt} = \hat{r} \frac{dr}{dt} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta}.$$

Calculando a derivada temporal do vetor unitário $\hat{\theta}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\theta}}{dt} &= -\hat{x} \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} - \hat{y} \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} \\ &= (-\hat{x} \cos(\theta) - \hat{y} \sin(\theta)) \frac{d\theta}{dt} \\ &= -\hat{r} \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

Realizado as derivadas primeiras dos vetores unitários \hat{r} e $\hat{\theta}$ podemos calcular as derivadas segundas

$$\begin{aligned} \frac{d^2\hat{r}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} \right), \\ &= \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\theta} + \frac{d\theta}{dt} \frac{d\hat{\theta}}{dt}, \\ &= \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\theta} + \frac{d\theta}{dt} \left(-\hat{r} \frac{d\theta}{dt} \right), \\ &= \hat{\theta} \frac{d^2\theta}{dt^2} - \hat{r} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\hat{\theta}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\hat{\theta}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(-\hat{r} \frac{d\theta}{dt} \right), \\
&= -\hat{r} \frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{d\theta}{dt} \frac{d\hat{r}}{dt}, \\
&= -\hat{r} \frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta}, \\
&= -\hat{r} \frac{d^2\theta}{dt^2} - \hat{\theta} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2.
\end{aligned}$$

Assim a aceleração da partícula é

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right), \\
&= \frac{d}{dt} \left(\hat{r} \frac{dr}{dt} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} \right), \\
&= \frac{d\hat{r}}{dt} \frac{dr}{dt} + \hat{r} \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{d}{dt} \left(r \frac{d\theta}{dt} \right) \hat{\theta} + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\hat{\theta}}{dt}, \\
&= \hat{\theta} \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} + \hat{r} \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} + r \hat{\theta} \frac{d^2\theta}{dt^2} + r \frac{d\theta}{dt} \left(-\hat{r} \frac{d\theta}{dt} \right), \\
&= \hat{r} \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) + \hat{\theta} \left(2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right), \\
\mathbf{a} &= \hat{r} \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) + \hat{\theta} \left(2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right). \tag{2.3.17}
\end{aligned}$$

Dado os vetores unitários \hat{r} e $\hat{\theta}$ em função dos vetores unitários \hat{x} e \hat{y} ,

$$\begin{cases} \hat{r} = \cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y} \\ \hat{\theta} = -\sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y} \end{cases}$$

resolvemos o sistema acima para termos os vetores unitários \hat{x} e \hat{y} em função dos vetores unitários \hat{r} e $\hat{\theta}$, ou seja,

$$\begin{cases} \hat{x} = \cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta} \\ \hat{y} = \sin(\theta)\hat{r} + \cos(\theta)\hat{\theta} \end{cases}$$

Escrevendo a aceleração como

$$\mathbf{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y},$$

substituímos os termos \hat{x} e \hat{y} , assim obtemos

$$\mathbf{a} = a_x (-\sin(\theta)\hat{\theta} + \cos(\theta)\hat{r}) + a_y (\cos(\theta)\hat{\theta} + \sin(\theta)\hat{r}), \tag{2.3.18}$$

em que os termos a_x e a_y são dados pelas equações (2.2.15) e (2.2.16) respectivamente. Podemos escrever as velocidades relativas v_x e v_y da seguinte maneira

$$v_x = \frac{dr}{dt} \cos(\theta) - r \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt}, \tag{2.3.19}$$

$$v_y = \frac{dr}{dt} \sin(\theta) + r \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt}. \tag{2.3.20}$$

Substituindo v_x e v_y conforme acima em a_x e a_y na equação (2.3.18), obtemos igualando esta com a equação (2.3.17) as seguintes expressões

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} = & \frac{2(\eta - 1) \cos \theta S V_x}{(\eta r^2)} + \frac{2(\eta - 1) \sin \theta S V_y}{(\eta r^2)} \\ & - \frac{4S}{r^2(\eta + 1)} \frac{dr}{dt} + \frac{(\eta + 1)S}{(\eta r^2)} + r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta}{dt^2} = & \frac{(\eta - 1)(\eta r^2 + 1) \sin \theta S V_x}{(-1 + \eta r^2)r^3 \eta} - \frac{(\eta - 1)(\eta r^2 + 1) \cos \theta S V_y}{(-1 + \eta r^2)r^3 \eta} \\ & + \frac{S(-1 - \eta^2 + 2\eta^2 r^2)}{r^2(\eta + 1)\eta(-1 + \eta r^2)} \frac{d\theta}{dt} - \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt}. \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Podemos também reescrever as equações (2.2.13) e (2.2.14) utilizando as equações (2.3.19) e (2.3.20), na qual resulta as seguintes expressões para a aceleração do centro de massa

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} = & - \frac{2}{(-1 + \eta r^2)r^2(\eta + 1)} ((-\eta r \sin^2 \theta - 2S\eta r^2 \\ & + 3\eta S r^2 \sin^2 \theta + 2S - r \sin^2 \theta - S \sin^2 \theta)) V_x \\ & + \frac{2(3S\eta r^2 - \eta r - S - r) \sin \theta \cos \theta V_y}{(-1 + \eta r^2)r^2(\eta + 1)} \\ & + \frac{2(\eta - 1) \cos \theta S}{r^2(\eta + 1)^2} \frac{dr}{dt} \\ & + \frac{(\eta - 1) \sin \theta (-\eta r + S\eta r^2 + S - r)}{(\eta + 1)^2 r (-1 + \eta r^2)} \frac{d\theta}{dt}. \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y}{dt^2} = & \frac{2(3S\eta r^2 - \eta r - S - r) \sin \theta \cos \theta V_x}{(-1 + \eta r^2)r^2(\eta + 1)} \\ & - \frac{2}{(-1 + \eta r^2)r^2(\eta + 1)} (-\eta r \cos^2 \theta + 3S\eta r^2 \cos^2 \theta \\ & - 2S\eta r^2 + 2S - S \cos^2 \theta - r \cos^2 \theta) V_y \\ & + \frac{2(\eta - 1) S \sin \theta}{r^2(\eta + 1)^2} \frac{dr}{dt} \\ & - \frac{(\eta - 1) \cos \theta (-\eta r + S\eta r^2 + S - r)}{(\eta + 1)^2 r (-1 + \eta r^2)} \frac{d\theta}{dt}. \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

Apêndice C

Código Fonte

3.1 Códigos para solução numérica

Neste apêndice encontra-se o primeiro código fonte para a resolução das equações diferenciais (2.1.3), (2.1.4), (2.1.5) e (2.1.6).

```
> restart;  
> with(linalg);  
> with(LinearAlgebra);  
> with(VectorCalculus);
```

$$\begin{aligned} > A_{1x} = & -\frac{Se_X}{\eta r^2} + \frac{e_Y^2(-S + \eta r)V_{1x}}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)} - \frac{e_Y e_X(-S + \eta r)V_{1y}}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)} \\ & + \frac{(-3e_Y^2 \eta r^2 + 2e_Y^2 + 2\eta r^2 - 2 + Se_Y^2 \eta r)SV_{2x}}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)} \\ & - \frac{e_Y e_X(-3\eta r^2 + 2 + S\eta r)SV_{2y}}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > A_{1y} = & -\frac{Se_Y}{\eta r^2} - \frac{e_Y e_X(-S + \eta r)V_{1x}}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)} + \frac{e_X^2(-S + \eta r)V_{1y}}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)} \\ & - \frac{e_Y e_X(-3\eta r^2 + 2 + S\eta r)SV_{2x}}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)} \\ & + \frac{(-2 + 2e_X^2 - 3\eta r^2 e_X^2 + Se_X^2 \eta r + 2\eta r^2)SV_{2y}}{\eta r^2(-1 + \eta r^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > A_{2x} = & \frac{Se_X}{r^2} - \frac{S(-2\eta r^2 - Se_Y^2 r - 2e_Y^2 + 3e_Y^2 \eta r^2 + 2)V_{1x}}{r^2(-1 + \eta r^2)} \\ & + \frac{e_Y Se_X(-rS - 2 + 3\eta r^2)V_{1y}}{r^2(-1 + \eta r^2)} - \frac{e_Y^2(-r + S)V_{2x}}{r^2(-1 + \eta r^2)} \\ & + \frac{e_Y e_X(-r + S)V_{2y}}{r^2(-1 + \eta r^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > A_{2y} = & \frac{e_Y S}{r^2} + \frac{Se_Y e_X(-rS - 2 + 3\eta r^2)V_{1x}}{r^2(-1 + \eta r^2)} \\ & - \frac{S(3\eta r^2 e_X^2 + 2 - 2e_X^2 - Se_X^2 r - 2\eta r^2)V_{1y}}{r^2(-1 + \eta r^2)} \\ & + \frac{e_Y e_X(-r + S)V_{2x}}{r^2(-1 + \eta r^2)} - \frac{e_X^2(-r + S)V_{2y}}{r^2(-1 + \eta r^2)}, \end{aligned}$$

```

> eta1 := 2:

> s1 := {S = -1, V1x = diff(x1(t),t), V1y = diff(y1(t),t), V2x = diff(x2(t),t),
      V2y = diff(y2(t),t),
      eX = (x2(t)-x1(t))/sqrt((x2(t)-x1(t))^2+(y2(t)-y1(t))^2),
      eY = (y2(t)-y1(t))/sqrt((x2(t)-x1(t))^2+(y2(t)-y1(t))^2),
      eta = eta1,
      r = sqrt((x2(t)-x1(t))^2+(y2(t)-y1(t))^2)}:

> EQ1:= diff(x1(t),t$2) = subs(s1,A1x):
> EQ2:= diff(y1(t),t$2) = subs(s1,A1y):
> EQ3:= diff(x2(t),t$2) = subs(s1,A2x):
> EQ4:= diff(y2(t),t$2) = subs(s1,A2y):

> Digits := 20;
> r0 := 18783.0:
> Dt0 := evalf((eta1+1)^(1/2)/(eta1^(1/2)*r0^(3/2))):

> n := 330:
  N := 30:
  step := evalf(2*Pi/(Dt0*n)):

> X1 := -r0/(eta1+1):
  Y1 := 0:
  DX1 := 0:
  DY1 := X1*Dt0:
  X2 := eta1*r0/(eta1+1):
  Y2 := 0:
  DX2 := 0:
  DY2 := X2*Dt0:
  T0 := 0:

> dsol:=dsolve({EQ1,EQ2,EQ3,EQ4,x1(0)=X1,x2(0)=X2,y1(0)=Y1,y2(0)=Y2,
  (D(x1))(0)=DX1,(D(x2))(0)=DX2,(D(y1))(0)=DY1,(D(y2))(0)=DY2},numeric):

> p := n*N:
  VX1 := array(1 .. p+1):
  VY1 := array(1 .. p+1):
  VDX1:= array(1 .. p+1):
  VDY1:= array(1 .. p+1):
  VX2 := array(1 .. p+1):
  VY2 := array(1 .. p+1):
  VDX2:= array(1 .. p+1):
  VDY2:= array(1 .. p+1):
  prov := dsol(0.0):
  prov := {prov[2], prov[3], prov[4], prov[5], prov[6],
          prov[7], prov[8], prov[9]}:
  VX1[1] := subs(prov, [T0, x1(t)]):
  VY1[1] := subs(prov, [T0, y1(t)]):
  VDX1[1] := subs(prov, [T0, diff(x1(t), t)]):

```

```

VDY1[1] := subs(prov, [T0, diff(y1(t), t)]):
VX2[1] := subs(prov, [T0, x2(t)]):
VY2[1] := subs(prov, [T0, y2(t)]):
VDX2[1] := subs(prov, [T0, diff(x2(t), t)]):
VDY2[1] := subs(prov, [T0, diff(y2(t), t)]):

VR2[1] := subs(prov, [T0, (x2(t)^2+y2(t)^2)^(1/2)]):
VT2[1] := subs(prov, [T0, arctan(y2(t)/x2(t))]):
VDR2[1] := subs(prov, [T0, diff((x2(t)^2+y2(t)^2)^(1/2), t)]):
VDT2[1] := subs(prov, [T0, diff(arctan(y2(t)/x2(t)), t)]):
VR1[1] := subs(prov, [T0, (x1(t)^2+y1(t)^2)^(1/2)]):
VT1[1] := subs(prov, [T0, arctan(y1(t)/x1(t))]):
VDR1[1] := subs(prov, [T0, diff((x1(t)^2+y1(t)^2)^(1/2), t)]):
VDT1[1] := subs(prov, [T0, diff(arctan(y1(t)/x1(t)), t)]):

T:=T0:
k:=1:
  for j from 1 to N do
    for i from 1 to n do
      T:=T+step:
      k:=k+1:
      prov1:=dsol(step):
      prov2:={prov1[2],prov1[3],prov1[4],prov1[5],
              prov1[6],prov1[7],prov1[8],prov1[9]}:
      VX1[k]:=subs(prov2, [T,x1(t)]):
      VY1[k]:=subs(prov2, [T,y1(t)]):
      VDX1[k]:=subs(prov2, [T,diff(x1(t),t)]):
      VDY1[k]:=subs(prov2, [T,diff(y1(t),t)]):
      VX2[k]:=subs(prov2, [T,x2(t)]):
      VY2[k]:=subs(prov2, [T,y2(t)]):
      VDX2[k]:=subs(prov2, [T,diff(x2(t),t)]):
      VDY2[k]:=subs(prov2, [T,diff(y2(t),t)]):

      VR2[k] := subs(prov2, [T, (x2(t)^2+y2(t)^2)^(1/2)]):
      VT2[k] := subs(prov2, [T, arctan(y2(t)/x2(t))]):
      VDR2[k] := subs(prov2, [T, diff((x2(t)^2+y2(t)^2)^(1/2),t)]):
      VDT2[k] := subs(prov2, [T, diff(arctan(y2(t)/x2(t)),t)]):

      dsol:=dsolve({EQ1,EQ2,EQ3,EQ4} union subs(prov2,{x1(0)=x1(t),D(x1)
              (0)=diff(x1(t),t),y1(0)=y1(t),D(y1)(0)=diff(y1(t),t),
              x2(0)=x2(t),D(x2)(0)=diff(x2(t),t),y2(0)=y2(t),D(y2)(0)
              =diff(y2(t),t)}),numeric):

    od:
      vvx:=VDX2[k][2]-VDX1[k][2]:
      vvy:=VDY2[k][2]-VDY1[k][2]:
      rr:=sqrt((VX2[k][2]-VX1[k][2])^2+(VY2[k][2]-VY1[k][2])^2):
      eex:=(VX2[k][2]-VX1[k][2])/rr:
      eey:=(VY2[k][2]-VY1[k][2])/rr:
      DT:=(-vvx*eey+vvy*eex)/rr:

```

```

step:=evalf((2*Pi)/(DT)*1/(n)):

od:

> S2 := {S = -1, eta = eta1}:
> a1x := subs(S2, A1x):
  a1y := subs(S2, A1y):
  a2x := subs(S2, A2x):
  a2y := subs(S2, A2y):

> XY1 := [[VX1[1][2], VY1[1][2]]$1 = 1 .. p+1]:
XY2 := [[VX2[1][2], VY2[1][2]]$1 = 1 .. p+1]:
RXY := [[VX2[1][2]-VX1[1][2], VY2[1][2]-VY1[1][2]]$1 = 1 .. p+1]]:
R := [[VX1[1][1], sqrt((VX2[1][2]-VX1[1][2])^2+(VY2[1][2]-VY1[1][2])^2)
      $1 = 1 .. p+1]:
CM := [[(eta1*VX1[1][2]+VX2[1][2])/(eta1+1),
        (eta1*VY1[1][2]+VY2[1][2])/(eta1+1)]
      $1 = 1 .. p+1]:

VCM := [[(eta1*VDX1[1][2]+VDX2[1][2])/(eta1+1),
          (eta1*VDY1[1][2]+VDY2[1][2])/(eta1+1)]
        $1 = 1 .. p+1]:

VCMx := [[VX1[1][1], (eta1*VDX1[1][2]+VDX2[1][2])/(eta1+1)] $1 = 1 .. p+1]:
VCMy := [[VY1[1][1], (eta1*VDY1[1][2]+VDY2[1][2])/(eta1+1)] $1 = 1 .. p+1]:

VV2 := [[VR2[1][1], sqrt(VDR2[1][2]^2+(VR2[1][2]*VDT2[1][2])^2) $1 = 1 .. p+1]:

eX:=(VX2[1][2]-VX1[1][2])/sqrt((VX2[1][2]-VX1[1][2])^2+(VY2[1][2]-VY1[1][2])^2):
eY:=(VY2[1][2]-VY1[1][2])/sqrt((VX2[1][2]-VX1[1][2])^2+(VY2[1][2]-VY1[1][2])^2):
r:= sqrt((VX2[1][2]-VX1[1][2])^2+(VY2[1][2]-VY1[1][2])^2):

V1x := VDX1[1][2]:
V1y := VDY1[1][2]:
V2x := VDX2[1][2]:
V2y := VDY2[1][2]:

A1xy := [[a1x, a1y]$1 = 1 .. p+1]:
A2xy := [[a2x, a2y]$1 = 1 .. p+1]:
A1T := [[(VX1[1][1], sqrt(a1x^2+a1y^2)]$1 = 1 .. p+1]:
A2T := [[VX2[1][1], sqrt(a2x^2+a2y^2)]$1 = 1 .. p+1]:

```

Para valores diferentes de η basta colocar no código o valor desejado assim como a quantidade de pontos escolhendo adequadamente os valores de n e N . O segundo código fonte é para a resolução do sistema de equações diferenciais (2.3.34) e (2.3.35) com o centro de massa parado.

```
#####
with(linalg);
with(stats);
Digits := 20;
eta := 500;
S := -1.0;
beta := 1.0;
r0 := 10000.0;
n := 30;
vC := .1
#####
RK:=proc(eta ,S ,beta ,r0 ,n ,vC)
  local
    Dr0, Dt0, t0, step, T0, EQ1, EQ2, dsol, cond, T, i, prov1, prov2,
    VR, VT, VDR, VDT, flag, traj, TR, j:

  Dr0 := 0.0:
  Dt0 := beta*sqrt((eta+1)/eta)/r0^(3/2):
  t0 := 0:
  step := evalf(2*Pi/(Dt0*n)):
  T0 := 0.0:

  EQ1 := diff(r(t),t$2) = -4*S*(diff(r(t), t))/((eta+1)*r(t)^2)+(eta+1)*S/
    (eta*r(t)^2)+r(t)*(diff(theta(t), t))^2:

  EQ2 := diff(theta(t),t$2) = S*(-1-eta^2+2*eta^2*r(t)^2)*(diff(theta(t),t))/
    ((eta*r(t)^2-1)*eta*(eta+1)*r(t)^2)-2*(diff(r(t),t))*(diff(theta(t),t))/r(t):

  dsol := dsolve({EQ1, EQ2, r(0) = r0, theta(0) = t0, (D(r))(0) = Dr0,
    (D(theta))(0) = Dt0}, numeric):

  cond:=sqrt((Dr0)^(2)+(r0)^(2)*(Dt0)^(2)):
  T:=T0:
  for i from 1 by 1 while cond<vC do
    T := T+step:
    prov1 := dsol(step):
    prov2 := {prov1[2], prov1[3], prov1[4], prov1[5]}; VR := subs(prov2, r(t)):
    VT := subs(prov2, theta(t)):
    VDR := subs(prov2, diff(r(t),t)):
    VDT := subs(prov2, diff(theta(t),t)):
    dsol := dsolve('union'({EQ1, EQ2}, subs(prov2, {r(0) = r(t), theta(0) =
      theta(t), (D(r))(0) = diff(r(t), t),
      (D(theta))(0) = diff(theta(t), t)})), numeric):

  flag:=i-trunc(i/(n))*n:
  if flag=0
    then step:=evalf((2*Pi)/(VDT)*1/(n)):
  fi:
  cond:=sqrt((VDR)^(2)+(VR)^(2)*(VDT)^(2)):
  traj[i] := [T, VR, VDR, VR*VDT, cond]:

```

```
end do:

TR:=array(1..i-1):
for j from 1 to i-1 do
TR[j]:=traj[j]:
od:
evalm(TR);
end:
#####
T := RK(eta, S, beta, r0, n, vC):
NC := vectdim(T):
ff := fopen(' traj.txt ', WRITE):
aa := array(1 .. NC, 1 .. 5);
for i to NC do
aa[i, 1] := T[i][1]:
aa[i, 2] := T[i][2]:
aa[i, 3] := T[i][3]:
aa[i, 4] := T[i][4]:
aa[i, 5] := T[i][5]:
od:
writedata(ff, aa);
close(' traj.txt ');
#####
```

Referências Bibliográficas

- [1] J. Olsen and K. McDonald, “Classical lifetime of a bohr atom,” 2005.
- [2] J. De Luca, “Geometric integration of the electromagnetic two-body problem,” *Journal of mathematical physics*, vol. 48, no. 1, p. 012702, 2007.
- [3] H. M. França, H. Franco, C. P. Malta, “A stochastic electrodynamics interpretation of spontaneous transitions in the hydrogen atom ,” *European Journal of Physics*, vol. 18, p.343, 1997.
- [4] R. Silva , H. M. França, “A Estabilidade do Átomo de Hidrogênio Segundo a Eletrodinâmica Estocástica ,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 24, p. 23-29, 2002.
- [5] Landau, L.D. and Lifshitz, E.m., *The Classical Theory of Fields*. Butterworth-Heinemann, 1975.
- [6] Driver, R.D., *Ordinary and Delay Differential Equations*. Springer New York, 2012.
- [7] Smith, G.S., *An Introduction to Classical Electromagnetic Radiation*. Cambridge University Press, 1997 .
- [8] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998.
- [9] Goldstein, H. and Poole, C.P. and Safko, J.L., *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 2002.