Universidade de Brasília
Programa de Pós-Graduação em Física
Instituto de Física

Breytner Ribeiro Morais

Aceleração e termodinâmica do horizonte aparente da métrica de FLRW no contexto do TEGR

Brasília - DF
Agosto de 2015

Breytner Ribeiro Morais

Aceleração e termodinâmica do horizonte aparente da métrica de FLRW no contexto do TEGR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador:
Prof. Dr. José Francisco da Rocha Neto

Brasília - DF
Agosto de 2015

"Se pude ver mais longe é porque me apoiei em ombros de gigantes!"
(Isaac Newton)

Dedico,

a todos que me apoiaram!

Agradecimentos

A Deus em primeiríssimo lugar, aos meus pais e a toda minha família, ao meu orientador, aos meus amigos...

Resumo

A solução de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) é uma solução exata das equações de Einstein que descreve um modelo de universo isotrópico e homogêneo que pode está expandindo ou contraindo de forma acelerada. Dados observacionais recentes sugerem que o presente universo é aproximadamente plano e que este está expandindo acelerado. Nesta dissertação, no contexto do Teleparallelismo Equivalente à Relatividade Geral (TERG), tentaremos entender a razão pela qual o universo, baseado no modelo de FLRW, está expandindo de forma acelerada. Apresentaremos também uma relação para a primeira lei da termodinâmica para a superfície do horizonte aparente do modelo de FLRW, de onde extrairemos uma expressão para a temperatura no horizonte aparente.

Abstract

The Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) solution, is an exact solution of Einstein equations that describes a homogeneous, isotropic model of universe that may be expanding or contracting in an accelerated way. Recent observational data suggests that the present universe is approximately flat and that it is expanding accelerated. In this Dissertation, in the context of the Teleparallelism Equivalent of General Relativity (TEGR), we will try to understand the cause on which the universe, based in the FLRW model, is expanding in an accelerated way. We also present a relation to the first law of thermodynamics to the apparent horizon of the FLRW model, and from this relation we will obtain a expression to the temperature at the apparent horizon.

Sumário

Capítulo I

Introdução

A Teoria da Relatividade Especial de Einstein, baseada no princípio de que as leis da física assumem a mesma forma em todo referencial inercial, foi desenvolvida inicialmente para descrever eventos observados de diferentes referenciais inerciais, ou seja, referenciais que não estão acelerados uns em relação aos outros. Posteriormente baseado no princípio da equivalência, que estabelece a equivalência entre um sistema de referência uniformente acelerado e um sistema de referência inercial na presença de um campo gravitacional homogêneo, Einstein desenvolveu sua teoria da gravitação ou teoria da relatividade geral. Nesta teoria Einstein propôs que a gravidade não fosse mais considerada como uma força no sentido convencional, mas sim como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo produzida pela presença de matéria.

Na teoria da relatividade geral, o espaço tempo é descrito em termos de um tensor métrico e as equações desenvolvidas por Einstein para gravitação, ou simplesmente equações de Einstein, descrevem a dinâmica do espaço-tempo na presença ou não de matéria. Quando descrita em termos do tensor métrico a teoria de Einstein permite que se defina apenas pseudos-tensores de energia-momento, que são quantidades dependentes de sistema de coordenadas, e portanto tal dependência implica na impossibilidade de se obter expressões bem definidas para energia e momento angular do campo gravitacional. Tais quantidades para distintos sistemas de coordenadas fornecem distintos valores.

Por meio de um formalismo alternativo equivalente à teoria da relatividade é possível se obter expressões bem definidas para energia, momento angular e pressão do campo gravitacional. Neste formalismo, chamado de Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TERG)[1, 2, 3, 4], o campo gravitacional é descrito em termos de um campo de tétradas autoparalelas. A teoria é desenvolvida no espaço-tempo de Weitzenböck, onde a curvatura é nula e a torção é diferente de zero.

Uma solução exata das equações de Einstein é a solução de FLRW, que descreve a dinâmica de um modelo de universo homogêneo e isotrópico contendo um fluido perfeito na presença ou não de uma constante cosmológica. Neste modelo o universo pode está em expansão ou contração acelerada. Dados observacionais recentes indicam que o universo é aproximadamente plano e que o mesmo está em expansão acelerada. Neste trabalho, no contexto do TERG, faremos um estudo sobre o comportamento do horizonte aparente do modelo de universo de FLRW com o intuito de entender a expansão acelerada do universo. Baseado na primeira lei da termodinâmica estabeleceremos uma expressão para a temperatura no horizonte aparente. Usaremos como entropia a forma padrão da literatura, isto é, a entropia será assumida como sendo um quarto da área do horizonte aparente.

No capítulo 2 apresentamos uma breve introdução à Teoria da Relatividade Geral, sendo que no final deste capítulo, apresentamos as esquações de Einstein na presença da constante cosmológica. No capítulo 3 apresentamos um resumo do TERG bem como as expressões para a energia total e a pressão total. No capítulo 4 apresentamos o modelo de FLRW e em seguida, deduzimos as expressões para a energia total contida no interior do horizonte aparente e a pressão total sob a superfície do horizonte aparente. Esta pressão total é positiva para modelos de universo em expansão acelerada. Ainda no capítulo 4, por meio da primeira lei da termodinâmica, deduziremos uma expressão para a temperatura na superfície do horizonte aparente. No capítulo 5 apresentamos as conclusões.

Notação: os índices latinos do meio do alfabeto em diante, i, j, k... reprentam índices do tipo espaço e assumem os valores $1, 2, 3$. Os índices gregos e latinos do início do alfabeto são índices do espaço-tempo e do grupo $SO(3,1)$ respectivamente. Eles variam de 0 a 3 da seguine forma, $\alpha = \{0, i\}$, $a = \{(0), (i)\}$. A assinatura usada será $(-1, 1, 1, 1)$. Se adotará a convenção de Einstein e unidades onde as constantes $c = G = h = K_B = 1$.

Capítulo II

A Teoria da Gravitação de Einstein

2.1 A Teoria da Relatividade Especial

Claramente os eventos físicos podem ser observados com relação a um sistema de referência S mas também com relação a um outro sistema de referência S', que pode estar orientado e ou se movendo em relação a S de forma arbitrária. Existe um classe de sistemas de referência especiais chamados de inerciais, definidos como aqueles nos quais a primeira lei de Newton é válida. Na ausência de gravidade se S e S' são dois sistemas de referência inerciais, S' só pode diferir de S por uma translação, e ou uma rotação, e ou um movimento relativo com velocidade constante, caso contrário a primeira lei de Newton não é mais válida. O conceito de sistemas de referência é fundamental para a formulação da teoria da relatividade. Para sistemas de referência inerciais, as leis de Newton permanecem tendo as mesmas formas.

Dado um evento P, a teoria Newtoniana e a relatividade especial diferem apenas em como as coordenadas do evento P em dois sistemas de referência inercias S e S' estão relacionadas. Na teoria Newtoniana as coordenadas do evento P com relação a S' estão relacionadas com as coordenadas do evento P em relação a S pelas transformações de Galilei, onde o tempo é o mesmo para todos os observadores. Por outro lado, na teoria da relatividade especial, as coordenadas do evento P com relação a S' estão relacionadas com as coordenadas de P em relação a S pelas transformações de Lorentz, onde o tempo não é mais absoluto.

Na formulação da teoria da relatividade especial, Einstein [5] fez dois postulados básicos: (i) as leis da física devem manter as suas formas em todos os refênciais inerciais, (ii) a velocidade c da luz é a mesma em todos os referênciais inerciais. Dessa forma, uma nova concepção de espaço e tempo foi introduzida, onde o espaço e o tempo formam uma estrutura quadri-dimensional pseudo-euclidiana chamada espaço-tempo de Minkowski [6] onde a teoria da relatividade especial é desenvolvida.

Por exemplo, para um referencial inercial S' que se move apenas na direção do eixo x

com uma velocidade constante v em relação a um referencial inercial S, as transformações de Lorentz, que relacionam as coordenadas de um evento P em relação aos dois sistemas de referência, podem ser escritas como

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\left(x - vt\right), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Onde c é a velocidade da luz no vácuo, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ e $\beta = v/c$. Essas transformações relacionam as coordenadas (x, y, z, t) de um evento P quando visto por um observador em S com as coordenadas (t', x', y', z') desse mesmo evento quando visto por um observador em S'. Neste caso dizemos que (2.1.1) é um "boost"ao longo do eixo x.

As variáveis do sistema de equações (2.1.1) podem ser redefinidas em termos da notação de Einstein como $x^\mu = (t, x, y, z)$ onde $\mu = 0, 1, 2, 3$ e $c = 1$, de modo que, em termos matriciais, o sistema (2.1.1) pode ser reescrito como

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{2.1.2}$$

onde

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.1.3}$$

e devemos ter $\Lambda^{\mu\nu}\Lambda_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}_{\lambda}$. Nesta notação, de forma implícita, há um somatório em um índice repetido desde que um deles apareça em cima e o outro apareça em baixo, tal como no segundo membro da equação (2.1.2).

De modo geral se considerarmos dois eventos separados infinitesimalmente um do outro num referencial S, o intervalo entre eles é dado, no espaço-tempo de Minkowski, por

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{2.1.4}$$

e tal intervalo é invariante por qualquer transformação de Lorentz $SO(3,1)$ [7].

A métrica pseudo-euclidiana $\eta_{\mu\nu}$ é chamada métrica de Minkowski e é dada por

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.1.5}$$

A teoria da relatividade especial se refere a sistemas de referência inerciais que se movem com velocidades constantes uns em relação aos outros. Ao buscar uma generalização da relatividade restrita para referenciais acelerados, Einstein levou em consideração o fato de que um sistema de referência na presença de um campo gravitacional uniforme e um sistema de referência com aceleração constante possuem propriedades físicas equivalentes. Isso ocorre graças à igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional dos corpos, sendo esse princípio postulado por Einstein como Princípio da Equivalência [8].

Quando os campos gravitacionais são uniformes o princípio da equivalência é facilmente compreendido, mas se um campo gravitacional não for uniforme, o princípio da equivalância só é válido localmente. Então, não é mais possível equiparar todos os pontos de um campo gravitacional não uniforme a um referencial acelerado. Para contornar esse problema, Einstein incorporou o princípio da equivalência à teoria e passou a utilizar a Geometria Riemanniana para descrever completamente os fenômenos gravitacionais. Nessas condições, o espaço-tempo passa a ter uma geometria não euclidiana, vindo a ser uma estrutura quadridimensional curva onde a gravidade seria compreendida não mais como uma força entre os corpos mas, como uma deformação do espaço-tempo causada pela presença da matéria. Esta é a ideia central que dá suporte à Teoria da Relatividade Geral.

O princípio da equivalência restringe a geometria do epaço-tempo curvo à geometria pseudo-Riemanniana, onde os pontos deste espaço-tempo são descritos por quatro coordenadas arbitrárias $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Esse novo sistema de coordenadas mais geral é denominadas de Coordenadas Gaussianas. Nesse sistema de coordenadas o intervalo que separa dois eventos infinitesimalmente próximos é dado pela forma quadrática

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \tag{2.1.6}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é chamado de tensor métrico e é uma função das coordenadas x^μ. O tensor métrico caracteriza a relação geométrica entre eventos próximos, ou seja, ele descreve a geometria do espaço-tempo e também, consequentemente, o campo gravitacional no sistema de coordenadas gaussianas, o que o torna a peça fundamental da RG. A utilidade do tensor métrico ainda vai além: com ele se realizam outras operações geométricas em espaços curvos, como o transporte paralelo de vetores e outros objetos matemáticos. Através dele que se obtém a expressão para a curvatura do espaço-tempo e o Tensor de

Einstein que sumariza a interação da geometria com a matéria. A curvatura do espaço-tempo significa que não podemos encontrar sistemas de coordenadas nos quais $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ em todos os pontos do espaço-tempo ou seja, a presença de um campo gravitacional distorce a geometria do espaço-tempo, gerando neste uma curvatura.

O tensor métrico pode variar sob transformações gerais de coordenadas contudo, a forma quadrática acima permanece invariante. A arbitrariedade na escolha do sistema de coordenadas no espaço-tempo de Riemann leva à definição do Princípio da Covariância Generalizada. Esse princípio afirma que as leis da física mantêm sua forma em todos os sistemas de coordenadas gaussianas, isto é, as leis da física devem ser covariantes sob transformações gerais de coordenadas.

2.2 Geometria Riemanianna

No contexto da teoria da relatividade especial, no espaço-tempo de Minkowski, um vetor é caracterizado pelo seu comportamento sob as transformações de Lorentz as quais dexam a forma quadrática $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ invariante. Por outro lado no contexto da teoria da relatividade geral, um vetor no espaço-tempo de Riemann é caracterizado pelo seu comportamento sob transformações de coordenadas generalizadas. Assim, a quantidade A_μ será um vetor covariante sob transformações de coordenadas generalizadas se sua lei de transformação for dada por

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu, \tag{2.2.7}$$

ou seja, A_μ se transforma como um tensor por transformações gerais de coordenadas. Essa generalização é importante porque em espaços-tempo Riemaniannos a simples diferenciação parcial de um vetor não mais se transformará como um tensor, o caráter tensorial que se tinha no espaço-tempo de Minkowski da derivada parcial é perdido em espaços-tempo Riemannianos.

Para que possamos construir um tensor por diferenciação, precisamos introduzir o conceito de derivada covariante. Para isto, seja dois pontos infinitesimalmente próximos um do outro com coordenadas x^μ e $x^\mu + dx^\mu$, então, vetorialmente, a separação infinitesimal entre eles é

$$d\mathbf{s} = \mathbf{e}_\mu(x) dx^\mu, \tag{2.2.8}$$

onde $\mathbf{e}_\mu(x)$ são vetores de base que definem um espaço tangene em um ponto x^ν. Da relação acima temos que

$$ds^2 = d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) dx^\mu dx^\nu, \tag{2.2.9}$$

de onde concluimos que o tensor métrico é dado por $g_{\mu\nu}(x) = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu$ e de onde segue que $g^{\mu\nu}(x) = \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu$ onde $\mathbf{e}^\mu$ são vetores de base dual à base $\mathbf{e}_\mu(x)$. Em um sistema de coordenadas arbitrário x^ν sobre uma variedade, se considerarmos os vetores $\mathbf{e}_\mu$ em dois pontos infinitesimalmente próximos um do outro x^ν e $x^\nu + \delta x^\nu$, podemos obter a derivada parcial de $\mathbf{e}_\nu$ em relação a x^ν da seguinte forma

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\nu} = \left(\lim_{\delta x^\nu \to 0} \frac{\delta e_\mu}{\delta x^\nu} \right). \tag{2.2.10}$$

Em geral a derivada parcial acima não resulta em um vetor tangente à variedade no ponto x^ν, desta forma definimos a derivada parcial de um vetor de base, em um ponto x^ν da variedade, projetando a quantidade acima no espaço tangente no ponto em questão da seguinte forma

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\nu} \equiv \partial_\nu \mathbf{e}_\mu = \Gamma^\gamma{}_{\mu\nu}(x)\mathbf{e}_\gamma(x). \qquad (2.2.11)$$

onde os coeficientes $\Gamma^\gamma{}_{\mu\nu}(x)$ são chamados de conexões afim.

Seja agora um vetor de campo $\mathbf{A}$ definido sobre alguma região de uma variedade Riemanianna. Se escrevermos este vetor em termos de suas componentes covariantes e dos vetores de base ou seja, $\mathbf{A} = A^\mu(x)\mathbf{e}_\mu(x)$, sua derivada parcial, usando o resultado apresentado na equação (2.2.11), será dada por

$$\partial_\nu \mathbf{A} = \partial_\nu(A^\mu \mathbf{e}_\mu) = (\nabla_\nu A^\mu)\mathbf{e}_\mu, \qquad (2.2.12)$$

onde a quantidade

$$\nabla_\nu A^\mu \equiv \partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu{}_{\gamma\nu} A^\gamma, \qquad (2.2.13)$$

é definida como a derivada covariante das componentes do vetor de campo $\mathbf{A}$. Usando a relação $\mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \delta^\mu_\nu$ podemos mostrar imediatamente que

$$\nabla_\nu A_\mu = \partial_\nu A_\mu - \Gamma^\gamma{}_{\mu\nu} A_\gamma. \qquad (2.2.14)$$

A derivada covariante definida acima se transforma como um tensor por transformações gerais de coordenadas e é de fundamental importância na formulação da teoria da relatividade geral.

Essa última operação pode ser aplicada a tensores em geral [9]. Por exemplo, se tomarmos a derivada covariante do tensor métrico obtemos,

$$\nabla_\beta g_{\mu\nu} = \partial_\beta g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda{}_{\mu\beta} - g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\beta} \qquad (2.2.15)$$

e assumindo que as conexões afim são conexões métricas [10], ou seja, que o tensor métrico é constante em relação à derivada covariante ($\nabla_\gamma g_{\mu\nu} = 0$) segue que

$$\partial_\beta g_{\mu\nu} = g_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda{}_{\mu\beta} + g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\beta}\,. \qquad (2.2.16)$$

Fazendo uma permutação cíclica nos índices da equação (2.2.16) obtemos

$$\partial_\nu g_{\beta\mu} = g_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda{}_{\beta\nu} + g_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\beta\mu}$$

e

$$\partial_\mu g_{\nu\beta} = g_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} + g_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}. \qquad (2.2.17)$$

Agora assumindo que $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}$ e somando as equações (2.2.17), (2.2.17) e subtraindo a equação (2.2.16), pode-se expressar a conexão afim em termos do tensor métrico como

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\beta}(\partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\nu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \tag{2.2.18}$$

Sendo que $g^{\mu\nu}$ representa a matriz inversa do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. As conexões afim, determinadas pela equação (2.2.18), são conhecidas como Símbolos de Christoffel.

Para resolver o problema de se medir a curvatura de um espaço-tempo Riemanianno em qualquer ponto da variedade, considera-se a troca na ordem de duas derivadas covariantes, as quais são generalização de derivadas parciais e que em geral não comutam. Seja um vetor de campo arbitrário A_β sobre uma variedade Riemanniana, calculando a diferença $\nabla_\mu \nabla_\nu A_\beta - \nabla_\nu \nabla_\mu A_\beta$ obtemos facilmente o tensor [11]

$$\nabla_\nu \nabla_\mu A_\beta - \nabla_\mu \nabla_\nu A_\beta = R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} A_\alpha \tag{2.2.19}$$

onde

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} - \partial_\mu \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} + \Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu} \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\beta\mu} \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu} \tag{2.2.20}$$

é o tensor de curvatura de Riemann que determina a curvatura em qualquer ponto do espaço-tempo Riemanniano.

A contração no primeiro e no terceiro índice do tensor de Riemann gera um tensor de segunda ordem, $R_{\beta\nu} = R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\nu}$, chamado de tensor de Ricci, dado por

$$R_{\beta\nu} = \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\sigma}{}_{\beta\alpha} \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu} + \Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu} \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\alpha} \tag{2.2.21}$$

E, finalmente, contraindo os índices do tensor de Ricci se obtem o escalar de curvatura R dado por

$$R = \partial_\alpha \Gamma^{\alpha\nu}{}_{\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha\nu}{}_{\alpha} - \Gamma^{\sigma\nu}{}_{\alpha} \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu} + \Gamma^{\sigma\nu}{}_{\nu} \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\alpha} \tag{2.2.22}$$

Onde para se fazer as contrações usa-se o tensor métrico $g^{\mu\nu}$ da seguinte forma: $\Gamma^{\alpha\nu}{}_{\alpha} = g^{\mu\nu} \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha}$.

Baixando o índice α na equação (2.2.20), o tensor de curvatura pode ser escrito como

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\partial_\nu \partial_\alpha g_{\beta\mu} - \partial_\beta \partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\mu \partial_\alpha g_{\beta\nu}) \\ &+ g_{\sigma\rho}(\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\nu} \Gamma^{\rho}{}_{\beta\mu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\mu} \Gamma^{\rho}{}_{\beta\nu}), \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

de onde segue imediatamente as seguintes propriedades de simetria

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}, \;\; R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}, \tag{2.2.24}$$

isto é, o tensor de curvatura é antisimétrico nos indices α, β e μ, ν e simétrico nos pares de índices (α, β) e (μ, ν). Também pode se verificar que a soma ciclítica em quaisquer três índices de $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ é zero

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0. \tag{2.2.25}$$

Em um ponto P de um sistema de coordenadas localmente geodésico $(\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = 0)_P$, a derivada covariante do tensor de curvatura em P pode ser escrita como

$$(\nabla_\rho R_{\alpha\beta\mu\nu})_P = (\partial_\rho R_{\alpha\beta\mu\nu})_P = (\partial_\rho \partial_\mu \Gamma_{\alpha\beta\nu} - \partial_\rho \partial_\nu \Gamma_{\alpha\beta\mu})_P, \tag{2.2.26}$$

e devido o caráter tensorial de $R_{\alpha\beta\mu\nu}$, usando a equação (2.2.25) e o resultado acima, obtemos para qualquer ponto da variedade que

$$\nabla_\rho R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + \nabla_\beta R^{\alpha}{}_{\mu\nu\rho} + \nabla_\mu R^{\alpha}{}_{\nu\rho\beta} = 0, \tag{2.2.27}$$

que são as identidades de Bianchi. Usando as propriedades de simetrias apresentadas na equação (2.2.24), podemos obter o seguinte resultado

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0, \tag{2.2.28}$$

onde

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \tag{2.2.29}$$

é o tensor de Einstein, que é um tensor fundamental nas equações de campo da relatividade geral. Estas equações serão obtidas na próxima seção.

2.3 Equações de Einstein

No ano de 1915, Einstein publicou as equações de campo gravitacional, as quais descrevem como a matéria modifica a geometria do espaço-tempo. Na dedução de suas equações, baseadas em geometria diferencial, Einstein impôs que elas deveriam ser covariantes sob transformações de coordenadas generalizadas e, além disso, ele também impôs a validade local do princípio da equivalência para referênciais não inerciais. Uma maneira mais fácil de se obter as equações de Einsten foi desenvolvida por Hilbert também em 1915, a qual usa o princípio da mínima ação de Hamilton. Uma das vantagens de seguir esse caminho é que ele permite conectar mais naturalmente a teoria da relatividade geral com outras teorias de campos clássicas como por exemplo, o eletromagnetismo de Maxwell, que também pode ser formulado em termos do princípio da ação mínima.

A ação de Einstein-Hilbert [12] para o campo gravitacional no vácuo pode ser escrita como

$$I_g = \int \mathcal{L}_g \, d^4x = \kappa \int \sqrt{-g}\, R \, d^4x. \tag{2.3.30}$$

A integral acima é sobre todo o espaço-tempo, sendo que g é o determinante do tensor métrico, R é o escalar de curvatura de Ricci, $\mathcal{L}_g = \kappa\sqrt{-g}R$ é a densidade de lagrangiana do campo gravitacional e $\kappa = 1/16\pi$. Adicionando à ação acima, I_m, um termo devido a campos de matéria e que contém uma densidade de lagrangiana, $\mathcal{L}_m = \sqrt{-g}\, L_m$, obtemos a ação total I dada por

$$I = I_g + I_m = \int \left[\kappa\sqrt{-g}R + \mathcal{L}_m\right] \, d^4x, \tag{2.3.31}$$

que será considerada como um funcional do tensor métrico e suas primeiras derivadas.

Aplicando o princípio da mínima ação de Hamilton à integral de ação acima i.e, $\delta I = 0$, em relação à $g^{\mu\nu}$, obtemos as equações de Einstein na presença de matéria. Para calcular a variação de I primeiramente vamos considerar apenas a parte gravitacional da ação ou seja,

$$\delta I_g = \int \kappa\delta(\sqrt{-g}R) \, d^4x = 0. \tag{2.3.32}$$

Lembrando que $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ e usando que $\delta\sqrt{-g} = -(\sqrt{-g}/2)g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}$, a variação da parte gravitacional da ação I pode ser escrita como

$$\delta(\kappa\sqrt{-g}R) = \kappa\sqrt{-g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\delta g^{\mu\nu} + \kappa\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}. \tag{2.3.33}$$

Usando a relação $\nabla_\alpha(\sqrt{-g}l^\alpha) = \partial_\alpha(\sqrt{-g}l^\alpha)$, o último termo na equação (2.3.33) acima pode ser escrito como

$$\kappa\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \kappa\sqrt{-g}[\nabla_\nu(\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha}) - \nabla_\alpha(\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu})] = \kappa\partial_\nu v^\nu, \tag{2.3.34}$$

onde

$$v^\nu \equiv [\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\nu{}_{\mu\alpha})]. \tag{2.3.35}$$

O último termo na equação (2.3.33) pode ser transformado em um termo de superfície usando-se o teorema da divergência porém, mesmo para o caso de espaços-tempo assintoticamente planos este termo, quando levado na integral de ação I_g, pode não se anular no contorno do espaço-tempo [13]. Para se contornar este problema, adiciona-se à integral de ação do campo gravitacional um termo de superfície dado por,

$$\sigma = -[\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} - g^{\mu\alpha}\Gamma^\nu{}_{\mu\alpha})],$$

de modos que a ação gravitacional I_g passa a ser escrita como

$$I'_g = \kappa \int (\sqrt{-g}R + \sigma) d^4x, \tag{2.3.36}$$

que quando submetida ao princípio da ação mínima os termos de superfície que aparecerão serão nulos no contorno da integral de ação

$$\delta I'_g = \kappa \int \left[\sqrt{-g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)]\delta g^{\mu\nu}\, d^4x \tag{2.3.37}$$

Para obter o cálculo da variação da ação da matéria I_m usa-se o teorema de Gauss e impõe-se que $\delta g^{\mu\nu} = 0$[14] nos limites da integral de tal forma que obtém-se

$$\delta I_m = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})}\right)\right] \delta^g \mu\nu\, d^4x. \tag{2.3.38}$$

Definindo o tensor de energia momento $T_{\mu\nu}$ dos campos de matéria como

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}}\left[\partial_\alpha\left(\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}}\right], \tag{2.3.39}$$

a variação dada em (2.3.38) fica

$$\delta I_m = -\frac{1}{2}\int \sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} d^4x \tag{2.3.40}$$

Desta forma aplicando o princípio da ação mínima $\delta I = \delta I'_g + \delta I_m = 0$, segue das equações (2.3.37) e (2.3.40) que

$$\kappa \int \left[\sqrt{-g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)]\delta g^{\mu\nu}\, d^4x - \frac{1}{2}\int \sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} d^4x = 0, \tag{2.3.41}$$

usando o fato de que $\delta g^{\mu\nu}$ é arbitrário nas integrais acima, as equações de Eisntein para o campo gravitacional na presença de matéria ficam

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2\kappa}T_{\mu\nu}. \tag{2.3.42}$$

Na tentativa de obter um modelo de universo estável, Einstein também deduziu uma equação para a gravitação com a presença de uma constante cosmológica Λ. Essa versão pode ser facilmente obtida ao se incluir o termo $-2\sqrt{-g}\Lambda$ na integral de ação $I = I'_g + I_m$, de modo que a integral de ação fica

$$I = \int \left[\kappa\sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + \sigma + \mathcal{L}_m\right] \, d^4x, \tag{2.3.43}$$

que quando submetida ao princípio da ação mínima $\delta I = 0$ resulta na equação

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \tag{2.3.44}$$

Ambas as equações (2.3.42) e (2.3.44) propostas por Einstein descrevem uma relação entre a métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo e a distribuição de matéria descrita pelo tensor $T_{\mu\nu}$, ou seja, estas equações descrevem como a geometria do espaço-tempo é afetada pela distribuição de matéria sem ou com a presença da constante cosmológica.

Capítulo III

Formalismo Teleparalelo Equivalente à Relatividade Geral

3.1 Introdução

O Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral TERG é um formulação da teoria da Relatividae Geral onde os efeitos do campo gravitacional são descritos em termos de um campo de tétradas autoparalelas. Neste formalismo o tensor de curvatura de Riemann é nulo porém os tensores de torção são não nulos e a teoria é agora desenvolvida no espaço-tempo de Weitzenböck[15]. Conforme veremos, há uma explícita equivalência entre as equações de campo de Einstein e as equações de campo na formulação teleparalela.

A noção de paralelismo absoluto, utilizando um campo de tétradas para a descrição do campo gravitacional, foi introduzida por Einstein em 1928[16, 17] na tentativa de uma unificação de sua teoria da gravitação com o eletromagnetismo. Posteriormente, Møller[18], baseado nas idéias de Einstein mostrou que só em termos de um campo de tétradas seria possível se obter uma densidade de lagrangiana que levaria a um tensor de energia momento gravitacional. Baseados nos trabalos de Møller, Pellegrini e Plebanski obtiveram uma formulação lagrangiana para a gravitação em termos de tétradas[19]. E então, em 1963, Schwinger obteve uma expressão para a energia *total* do campo gravitacional[20].

Uma expressão para a energia do campo gravitacional para ser bem definida localmente deve depender de uma densidade de energia que seja independente de sistema de coordenadas. No contexto do TERG é possível mostrar que tal expressão surge naturalmente. Outra vantagem deste formalismo é que no contexto de sua formulação hamiltoniana a evolução temporal da estrutura dos vículos da teoria é bem definida. Além de uma expressão que permite calcular a energia gravitacional contida em um volume abitrário do espaço, no contexto do TERG, também surge de forma natural uma equação da continuidade para o campo gravitacional a partir da qual obtém-se uma definição de pressão para o campo gravitacional [21].

3.2 Campos de tétradas e o espaço-tempo de Weitzenböck

Um campo de tétradas autoparalelas, também conhecido simplesmente por tétradas, é formado por um conjunto de quatro vetores linearmente independentes e ortonormais entre si, formando uma base adaptada a um sistema de coordenadas local, ou seja, em um ponto arbitrário x do espaço-tempo este conjunto é dado por

$$e^a{}_\mu(x) = \left\{e^{(0)}{}_\mu,\, e^{(1)}{}_\mu,\, e^{(2)}{}_\mu,\, e^{(3)}{}_\mu\right\} \tag{3.2.1}$$

Onde os índices $\mu = (0,1,2,3)$ são índices do espaço-tempo e os índices $a = [(0),(1),(2),(3)]$ são índices do grupo $SO(3,1)$ local de Lorentz. Sendo que o vetor $e^{(0)}{}_\mu(x)$ é do tipo tempo e os vetores $e^{(i)}{}_\mu(x)$ são do tipo espaço, com $i = (1,2,3)$.

O campo de tétradas satisfaz às seguintes relações de ortogonalidade

$$e^a_\mu\, e^{b\mu} = \eta^{ab}, \quad e_a{}^\mu\, e_{b\mu} = \eta_{ab}. \tag{3.2.2}$$

onde η^{ab} é a métrica de Minkowski apresentada na equação (2.1.5). Usando a métrica de Minkowski podemos levantar e abaixar os índices locais de Lorentz da seguinte forma

$$e_{a\mu} = \eta_{ab}\, e^b{}_\mu,$$

e

$$e^{a\nu} = \eta^{ab}\, e_b{}^\nu.$$

De forma análoga, os índices do espaço-tempo do campo de tétradas podem ser abaixados ou levantados respectivamente, usando se o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ ou o seu inverso $g^{\mu\nu}$ da seguinte forma

$$e^a{}_\mu = g_{\mu\lambda}\, e^{a\lambda},$$

e

$$e_a{}^\nu = g^{\nu\lambda}\, e_{a\lambda}.$$

De onde segue facilmente uma relação entre as tétradas e o tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu\, e_{a\nu} = e^a{}_\mu\, e^b{}_\nu\, \eta_{ab}, \quad g^{\mu\nu} = e^{a\mu}\, e_a{}^\nu = e^{a\mu}\, e^{b\nu}\, \eta_{ab}. \tag{3.2.3}$$

Desta forma, podemos observar que as tétradas convertem índices de Lorentz em índices do espaço-tempo e índices do espaço-tempo em índices de Lorentz.

A ocorrência de um paralelismo de vetores em pontos distantes do espaço-tempo, que é chamado de teleparalelismo, é garantido por meio de uma derivada covariante em relação a uma conexão com curvatura nula e torção diferente de zero. Em relação a esta conexão o transporte paralelo de vetores é independente de caminho e o transporte paralelo de vetores em relação a esta conexão é covariantemente constante[22]. Desta forma a derivada covariante das tétradas é nula em relação a esta conexão

$$\nabla_\nu e_a{}^\mu = \partial_\nu e_a{}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}\, e_a{}^\lambda = 0, \tag{3.2.4}$$

de onde segue que a conexão afim, $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$, é dada por

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = e^{a\lambda}\, \partial_\mu e_{a\nu}, \tag{3.2.5}$$

Esta conexão é chamada de conexão de Weitzenböck[15] que é assimétrica nos índices μ e ν.

As componentes de um vetor V^μ em um ponto x do espaço-tempo em relação à um campo de tétradas são dadas por $V^a(x) = e^a{}_\mu(x) V^\mu(x)$. Dizemos que os vetores são transportados paralelamente se suas componentes em relação ao campo de tétradas em pontos distintos são idênticas, ou seja, para pontos infinitesimalmente próximos temos que

$$V^a(x+dx) = V^a(x) + DV^a(x),$$

onde

$$DV^a(x) = e^a{}_\nu(x)(\nabla_\mu V^\nu)(x) dx^\mu = 0 \ \rightarrow \nabla_\mu V^\nu = 0,$$

com a derivada covariante acima dada em termos da conexão (3.2.5). O fato desta derivada covariante se anular é o que garante o paralelismo absoluto de vetores e tensores.

Uma vez que a conexão afim dada na equação (3.2.5) é assimétrica esta gera um tensor de torção não nulo dado por

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}, \tag{3.2.6}$$

que contraído com $e^a{}_\lambda$ pode ser escrito como

$$T^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu. \tag{3.2.7}$$

Ao contrário do tensor de torção (3.2.6) que é não nulo, a conexão afim (3.2.5) quando levada na definição do tensor de Riemann (2.2.20), fornece um tensor de curvatura identicamente nulo. Este espaço-tempo dotado de um paralelismo absoluto dos vetores com torção não nula e curvatura identicamente nula é chamado espaço-tempo de Weitzenböck[15]. É neste espaço-tempo onde o teleparalelismo equivalente à relatividade geral TERG é desenvolvido.

3.3 Formalismo Lagrangiano do TERG

Nesta seção apresentaremos uma densidade de lagrangiana para o TERG e a equivalença deste formalismo com a teoria da relatividade geral de Einstein. Para isto mostraremos que os simbolos de Christoffel, os quais denotaremos a partir de agora, como $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ podem ser escritos em termos da conexão de Weitzenböck e da conexão de Levi-Civita na forma de uma identidade. E em seguida mostraremos que o escalar de curvatura construido em termos da conexão de Levi-Civita pode ser escrito em termos de uma combinação quadrática dos tensores de torção.

Para isto, seja o simbolo de Christoffel abaixo

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right), \tag{3.3.8}$$

usando a relação entre o campo de tétradas e o tensor métrico $g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e_{a\nu}$, podemos escrever a relação acima como uma identidade em termos das conexões de Levi-Civita e Weitzenböck, ou seja,

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} = \overset{\circ}{\omega}_{\mu\lambda\nu} + \Gamma_{\lambda\mu\nu}, \tag{3.3.9}$$

onde

$$\overset{\circ}{\omega}_{\mu\lambda\nu} = \frac{1}{2}\left(T_{\nu\mu\lambda} + T_{\mu\nu\lambda} + T_{\lambda\nu\mu}\right) \tag{3.3.10}$$

é a conexão de Levi-Civita projetada no campo de tétradas, isto é,

$$\overset{\circ}{\omega}_{\mu ab} = e_a{}^\lambda e_b{}^\nu \overset{\circ}{\omega}_{\mu\lambda\nu}, \tag{3.3.11}$$

que é a conexão de Levi-Civita[23].

O tensor de curvatura em termos da conexão de Levi-Civita é dado por

$$R^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu \overset{\circ}{\omega}_\nu{}^a{}_b - \partial_\nu \overset{\circ}{\omega}_\mu{}^a{}_b + \overset{\circ}{\omega}_\mu{}^a{}_c \overset{\circ}{\omega}_\nu{}^c{}_b - \overset{\circ}{\omega}_\nu{}^a{}_c \overset{\circ}{\omega}_\mu{}^c{}_b. \tag{3.3.12}$$

Com o tensor de curvatura dado por (3.3.12) e o determinante do campo de tétradas podemos construir uma importante identidade que relaciona o escalar de curvatura $R(e) = e_a{}^\nu e^{b\mu} R^a{}_{b\mu\nu}$ e uma combinação quadrática dos tensores de torção $T^\lambda{}_{\mu\nu}$ dada por,

$$eR(e) = -e\Sigma^{\lambda\mu\nu}T_{\lambda\mu\nu} + 2\partial_\mu(eT^\mu), \tag{3.3.13}$$

onde $T^\mu = T^\lambda{}_{\lambda\mu}$ e $e = det(e^a{}_\mu)$ sendo o tensor $\Sigma^{\lambda\mu\nu}$ definido como

$$\Sigma^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{4}(T^{\lambda\mu\nu} + T^{\mu\lambda\nu} - T^{\nu\lambda\mu}) + \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\nu}T^\mu - \eta^{\lambda\mu}T^\nu), \tag{3.3.14}$$

de onde segue a seguinte relação

$$\Sigma^{\lambda\mu\nu}T_{\lambda\mu\nu} = \left(\frac{1}{4}T^{\lambda\mu\nu}T_{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2}T^{\lambda\mu\nu}T_{\nu\lambda\mu} - T^{\lambda}T_{\lambda}\right), \tag{3.3.15}$$

portanto, de (3.3.13) e (3.3.14) vemos que o escalar de curvatura multiplicado pelo determinante do campo de tétradas pode ser identicamente escrito como uma cobinação quadrática dos tensores de torção mais um divergente total.

A densidade de lagrangiana para o TERG na presença de campos de matéria é então dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_m = -\kappa e\Sigma^{abc}T_{abc} + 2\kappa\partial_{\mu}(eT^{\mu}) + \mathcal{L}_m, \tag{3.3.16}$$

onde $\mathcal{L}_m$ é a densidade de lagrangiana dos campos de matéria que pode depender de $e_{a\mu}$. A densidade de lagrangiana dada por (3.3.16) é invariante por transformações $SO(3,1)$ locais do grupo de Lorentz e por transformações gerais de coordenadas. Eliminando o termo de superfície em (3.3.16) $\mathcal{L}$ passa a ser invariante por transformações $SO(3,1)$ globais do grupo de Lorentz.

Eliminando o termo de superfície em $\mathcal{L}$ e tomando sua variação em relação a $e^{a\mu}$ obtemos as equações de campo para os campos de tétradas

$$e_{a\lambda}e_{b\mu}\partial_{\nu}(e\Sigma^{b\lambda\nu}) - e\left(\Sigma^{b\nu}{}_{a}T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4}e_{a\mu}\Sigma^{bcd}T_{bcd}\right) = \frac{1}{\kappa}eT_{a\mu}, \tag{3.3.17}$$

onde $T_{a\mu} = \frac{1}{e}\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta e^{a\mu}}$ é o tensor energia-momento dos campos de matéria. Manipulando o lado esquerdo da equação acima podemos reescrevê-la como

$$R_{a\mu}(e) - \frac{1}{2}e_{a\mu}R(e) = \frac{1}{\kappa}eT_{a\mu}, \tag{3.3.18}$$

que é o análogo das equações de Einstein em termos do tensor métrico. Por meio da relação (3.2.3) $g_{\mu\nu} = e^{a}{}_{\mu}\,e_{a\nu}$, pode se mostrar que estas equações de campo são equivalentes às equações de Einstein.

3.4 Formalismo Hamiltoniano do TERG

Nesta seção apresentaremos um resumo do formalismo Hamiltoniano do TERG. O formalismo Hamiltoniano do TERG pode ser obtido a partir do formalismo Lagrangiano através de uma transformada de Legendre. O procedimento consiste em expressar as derivadas temporais das tétradas em termos dos seus momentos canonicamente conjugados e demais quantidades de campo.

A parte gravitacional $\mathcal{L}_g$ da densidade de Lagrangiana dada por (3.3.16) pode ser reescrita na seguinte forma canônica

$$\mathcal{L}_g = \Pi^{ak}\dot{e}_{ak} - \mathcal{H}_0, \tag{3.4.19}$$

onde Π^{ak} são os momentos canonicamente conjugados a e_{ak}, obtidos variariando a densidade de Lagrangiana (3.3.16) em relação a $\dot{e}_{ak} \equiv \partial_0 e_{ak}$, isto é,

$$\Pi^{ak} \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_g}{\delta \dot{e}_{ak}} = -4\kappa e \Sigma^{a0k}, \tag{3.4.20}$$

e $\mathcal{H}_0$ é a densidade de Hamiltoniana primária. Por inspeção direta é possível observar que a densidade de Lagrangiana $\mathcal{L}_g$ não depende das derivadas temporais de e_{a0}, ou seja, de $\dot{e}_{a0}$ e, portanto o momento Π^{a0} é identicamente nulo.

Usando a definição dada na equação (3.3.14) podemos reescrever os momentos Π^{ak} como

$$\begin{aligned} \Pi^{ak} &= \kappa e[g^{00}(-g^{kj}T^a{}_{0j} - e^{aj}T^k{}_{0j} + 2e^{ak}T^j{}_{0j}) \\ &+ g^{0k}(g^{0j}T^a{}_{0j} + e^{aj}T^0{}_{0j}) + e^{a0}(g^{0j}T^k{}_{0j} + g^{kj}T^0{}_{0j}) \\ &- 2(e^{a0}g^{0k}T^j{}_{0j}) - g^{0i}g^{kj}T^a{}_{ij} + e^{ai}(g^{0j}T^k{}_{ij} \\ &- g^{kj}T^0{}_{ij}) - 2(g^{0i}e^{ak} - g^{ik}e^{a0})T^j{}_{ij}] \end{aligned} \tag{3.4.21}$$

Um ponto importante nesta análise é o fato de que apenas a parte simétrica dos momentos

$$\Pi^{(ij)} = \frac{1}{2}\left(e_a{}^i\Pi^{aj} + e_a{}^j\Pi^{ai}\right),$$

dependem das derivadas temporais $\dot{e}_{ak}$, enquanto que a parte antisimétrica dos momentos

$$\Pi^{[ij]} = \frac{1}{2}\left(e_a{}^i\Pi^{aj} - e_a{}^j\Pi^{ai}\right),$$

são relações entre os momentos e as tétradas que não dependem de $\dot{e}_{ak}$ e que, portanto, juntamente com $\Pi^{a0} = 0$ constituem vínculos de primeira classe[24].

A evolução temporal do vínculo $\Pi^{a0} = 0$ segundo a prescrição de Dirac gera um novo vínculo secundário C^a de primeira classe, ou seja,

$$C^a = \dot{\Pi}^{a0} = \{\Pi^{a0}, \mathcal{H}_0\} = \frac{\delta \mathcal{H}_0}{\delta e_{a0}} = 0, \tag{3.4.22}$$

que é dado por[4]

$$\begin{aligned} C^a &= \partial_i \Pi^{ai} + e^{a0}[-\frac{1}{4g^{00}}\kappa e(g_{ik}g_{jl}P^{ij}P^{kl} - \frac{1}{2}P^2) + \\ &+ \kappa e(\frac{1}{4}g^{im}g^{nj}T^b{}_{mn}T_{bij} + \frac{1}{2}g^{nj}T^i{}_{mn}T^m{}_{ij} - g^{ik}T^m{}_{mi}T^n{}_{nk})] - \\ &- \frac{1}{2g^{00}}ke(g_{ik}g_{jl}\gamma^{aij}P^{kl} - \frac{1}{2}g_{ij}\gamma^{aij}P) - \kappa e e^{ai}(g^{0m}g^{nj}T^b{}_{ij}T_{bmn} + \\ &+ g^{nj}T^0{}_{mn}T^m{}_{ij} + g^{0j}T^n{}_{mj}T^m{}_{ni} - 2g^{0k}T^m{}_{mk}T^n{}_{ni} - \\ &- 2g^{ik}T^0{}_{ij}T^n{}_{nk}), \end{aligned} \tag{3.4.23}$$

onde

$$\begin{aligned} P^{ki} &= \frac{1}{ke}\Pi^{(ki)} - g^{0m}(g^{kj}T^i{}_{mj} + g^{ij}T^k{}_{mj} - 2g^{ik}T^j{}_{mj}) \\ &- (g^{km}g^{0i} + g^{im}g^{0k})T^j{}_{mj}, \end{aligned} \tag{3.4.24}$$

com γ^{aij} dado por

$$\begin{aligned} \gamma^{aij} &= -e^{ak}[g^{00}(g^{jm}T^i{}_{km} + g^{im}T^j{}_{km} + 2g^{ij}T^m{}_{mk}) + \\ &+ g^{0m}(g^{0j}T^i{}_{mk} + g^{0i}T^j{}_{mk}) - 2g^{0i}g^{0j}T^m{}_{mk} + \\ &+ (g^{jm}g^{0i} + g^{im}g^{0j} - 2g^{ij}g^{0m})T^0{}_{mk}]. \end{aligned} \tag{3.4.25}$$

É possível mostrar por cálculo direto que os vínculos C^a Γ^{ab} são tais que $\mathcal{H}_0 = e_{a0}C^a$, $\frac{\delta C^a}{\delta e_{c0}} = e^{a0}C^c - e^{a0}C^c \equiv 0$ e que $\frac{\delta \Gamma^{ab}}{\delta e_{c0}} \equiv 0$[24] e, portanto nenhum novo vínculo aparece devido a evolução temporal de C^a e Γ^{ab}. Uma vez que Π^{a0} é identicamente nulo, os vínculos primários relacionados à parte antisimétrica dos momentos $\Pi^{[ij]}$ podem ser escritos como,

$$\Gamma^{ab} = 2\Pi^{[ab]} - 4\kappa e(\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a}) = 0, \tag{3.4.26}$$

e como nenhum vínculo secudário surge devido a evolução temporal de C^a e Γ^{ab}, a densidade de hamiltoniana total $\mathcal{H}$ pode ser escrita como[4, 24]

$$\mathcal{H} = e_{a0}C^a + \alpha_{ab}\Gamma^{ab}, \tag{3.4.27}$$

onde α_{ab} são multiplicadores de Lagrange e como a variação de $\mathcal{H}$ em relação a e_{a0} gera o vínculo C^a, e_{a0} em (3.4.27) surge naturalmente como um multiplicador de Lagrange.

A álgebra dos vínculos Γ^{ab} e C^a é dada por[24]

$$\{C^a(x), C^b(y)\} = 0 \tag{3.4.28}$$

$$\{C^a(x), \Gamma^{bc}(y)\} = \left(\eta^{ab}C^c - \eta^{ac}C^b\right)\delta(x-y), \tag{3.4.29}$$

e

$$\{\Gamma^{ab}(x), \Gamma^{cd}(y)\} = \left(\eta^{ac}\Gamma^{db} + \eta^{bc}\Gamma^{ad} - \eta^{ad}\Gamma^{cb} - \eta^{bd}\Gamma^{ac}\right)\delta(x-y). \tag{3.4.30}$$

A álgebra dos vínculos tem a mesma estrutura da álgebra do grupo de Poincaré e tem a mesma forma na presença ou não do termo de constante cosmológica[24].

O vínculo C^a dado em (3.4.23) carrega um termo de divergência espacial que, conforme veremos, quando submetido a integração leva à definição do quadrivetor energia-momento do TERG [4].

3.5 Expressões para a energia e a pressão

A seguir apresentaremos as expressões para a energia total e para a pressão do campo gravitacional na presença de matéria [21]. Para isto partiremos da equação de movimento dada em (3.3.17) reescrevendo-a como

$$\partial_\mu(e\Sigma^{a\lambda\mu}) = \frac{1}{4\kappa}ee^a{}_\mu(t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu}), \tag{3.5.31}$$

onde $T^{\lambda\mu} = e_a{}^\lambda T^{a\mu}$ é o tensor energia-momento dos campos de matéria e

$$t^{\lambda\mu} = \kappa(4\Sigma^{bc\lambda}T_{bc}{}^\mu - g^{\lambda\mu}\Sigma^{bcd}T_{bcd}), \tag{3.5.32}$$

é identificado como sendo o tensor energia-momento do campo gravitacional[21].

Usando a propriedade de simetria $\Sigma^{a\mu\nu} = -\Sigma^{a\nu\mu}$ na equação (3.5.31) segue imediatamente que

$$\partial_\mu[ee^a{}_\nu(t^{\mu\nu} + T^{\mu\nu})] = 0, \tag{3.5.33}$$

de onde segue a equação da continuidade para o campo gravitacional na presença de matéria

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x ee^a{}_\mu(t^{0\mu} + T^{0\mu}) = -\oint_S dS_i[ee^a{}_\mu(t^{j\mu} + T^{j\mu})], \tag{3.5.34}$$

onde, nas integrais acima, V é um volume arbitrário do espaço tridimensional e S é uma superfície que envolve V. Do lado direito da equação acima temos a derivada temporal do quadri-vetor energia-momento total P^a no interior do volume V, isto é

$$P^a = \int_V d^3 ee^a{}\mu(t^{0\mu} + T^{0\mu}) \tag{3.5.35}$$

Novamente usando a anti-simetria nos dois últimos índices de $\Sigma^{a\mu\nu}$ e lembrando que $\Pi^{ai} = -4\kappa\Sigma^{a0i}$, tomando $\mu = 0$ em (3.5.31), segue que

$$\partial_i\Pi^{ai} = -ee^a{}_\mu(t^{0\mu} + T^{0\mu}), \tag{3.5.36}$$

e portanto,

$$P^a = -\int_V d^3x\partial_i\Pi^{ai} = -\oint_S dS_i\Pi^{ai}, \tag{3.5.37}$$

A componente $P^{(0)}$ na equação acima fornece a energia total devido o campo gravitacional e os campos de matéria.

Levando a equação (3.5.36) do lado esquerdo de (3.5.34) e usando a equação (3.5.31) com $\lambda = j$ do lado direito de (3.5.34) podemos rescrevê-la como

$$\frac{d}{dt}P^a = -\int_V d^3x\partial_j\phi^{aj} = -\oint_S dS_j\phi^{aj}, \tag{3.5.38}$$

onde ϕ^{aj} é dado por

$$\phi^{aj} = 4\kappa\partial_\mu(e\Sigma^{aj\mu}) = ee^a{}_\mu(t^{j\mu} + T^{j\mu}). \tag{3.5.39}$$

Tomando $a = (i)$ na equação (3.5.38) temos,

$$\frac{d}{dt}P^{(i)} = -\oint dS_j\phi^{(i)j}. \tag{3.5.40}$$

Do lado direito da equação acima temos a derivada temporal do vetor momento total que tem dimensão de força, portanto, em coordenadas cartesianas $\phi^{(i)j}$, representa a densidade de pressão total devido o campo gravitacional e os campos de matéria na direção (i) sobre o elemento de área na direção j. Desta forma defininimos uma força $f^{(i)}$ dada por

$$f^{(i)} = -\oint_S dS_j\phi^{(i)j} \tag{3.5.41}$$

como sendo a força total devido os campo gravitacional e de matéria na direção (i).

Capítulo IV

A métrica FLRW e o TERG

4.1 O modelo FLRW

Neste capítulo aplicaremos as definições de energia total dada por $E = P^{(0)}$ em termos de (3.5.37) e a definição de força dada por (3.5.41) à métrica de Friedmann-Lemaître-Roberston-Walker, com o objetivo de estudar as propriedades termodinâmicas deste espaço e também obter alguma relação com a expansão acelerada do universo.

O princípio cosmologico estabelece que em qualquer instante de tempo particular o universo visto por qualquer observador em qualquer direção é equivalente[22]. Uma solução das equações de Einstein baseada no princípio cosmológico é aquela que descreve um modelo de universo homogêneo e isotrópico em expansão ou contração acelerada. Esta solução fornece a chamada métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) que representa uma aproximação em larga escala para um modelo de universo a partir do *big bang*, ou seja, ela pode ser utilizada como primeira aproximação para a evolução do universo e, também, pode ser estendida de forma a modelar as variações de temperatura do universo em diferentes escalas.

No modelo de universo de FLRW, assume-se que o espaço-tempo é constituído de fatias do tipo espaço com a quadri-velocidade de qualquer observador ortogonal às hipersuperfícies do tipo espaço as quais são parametrizadas por um tempo cósmico $t = cte$. Além disso, assume-se que as coordenadas espaciais (x^1, x^2, x^3) são constantes ao longo de qualquer linha mundo, de modos que cada observador tem estas coordenadas fixas. Estas coordenadas são chamdas de coordenadas comóvel. Uma vez que cada hipersuperfície para $t = cte$ é ortogonal à linha mundo de cada observador, o elemento de linha para a métrica de FLRW tem a forma,

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j, \tag{4.1.1}$$

onde g_{ij} são funções das coordendas (t, x^1, x^2, x^3).

Seja uma linha mundo de um observador fundamental descrita por $X^\mu(\tau)$ com τ o tempo próprio ao longo da linha mundo. Logo por construção $X^\mu(\tau)$ é caraciterizada por

$$x^0 = \tau, \ \ x^i = cte.$$

Como $dx^i = 0$, ao longo de $X^\mu(\tau)$ temos que $ds = cd\tau = cdt$ logo, $t = \tau$, e portanto τ ao longo da linha mundo é igual ao tempo cosmológico t. Além disso, como a quadri-velocidade de um observador fundamental nas coordenadas comóvel é dada por

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (1, 0, 0, 0),$$

e como qualquer vetor sobre as hipersuperfícies $t = cte$ tem a forma $a^\mu = (0, a^1, a^2, a^3)$, e como $g_{i0} = 0$, segue que

$$g_{\mu\nu} u^\mu a^\nu = u^\mu a_\mu = 0.$$

Logo as quadri-velocidades são ortogonais às hipersuperfícies conforme mecionado acima.

Para que a métrica em (4.1.1) contemple a homogeneidade e a isotropia devemos impor sobre esta que todos os pontos sobre uma particular hipersuperfície do tipo espaço, bem como todas as direções devem ser equivalentes. Desta forma, sobre uma superfície do tipo espaço, se cosiderarmos um triângulo formado por três galáxias próximas em um tempo t, a isotropia requer que o triângulo formado por estas mesmas galáxias em um tempo posterior deve ter a mesma forma. Além disso, a homogeneidade requer que o fator de ampliação temporal deste triângulo deve ser independente de sua posição sobre a superfície espacial. Isto significa que t só pode entrar em g_{ij} através de um fator comum e, portanto, o elemento de linha em (4.1.1) deve ter a forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2)\right], \tag{4.1.2}$$

cuja a métrica associada é dada por,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 sen^2\theta \end{pmatrix}, \tag{4.1.3}$$

onde k assume os valores $-1, 0, 1$ dependendo da curvatura espacial ser negativa, nula ou positiva, respectivamente. E $a(t)$ é o fator de escala que caracteriza a dinâmica da geometria do espaço-tempo.

Para determinar $a(t)$ devemos resolver as equações de Einstein na presença de matéria as quais na presença da constante cosmológica são dadas pela equação (2.3.44), onde $T_{\mu\nu}$

é o tensor energia momento para um fluido perfeito caracterizado por sua densidade ρ e sua pressão p dado por

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (\rho + p)\, u_\mu u_\nu, \tag{4.1.4}$$

onde u_μ é a quadri-velocidade do fluido. Como estamos procurando por soluções homogênas e isotrópicas, ρ e p são funções apenas de t.

Quando levamos o tensor energia-energia momento dado por (4.1.4) na equação (2.3.44), obtemos duas equações diferenciais para a evolução temporal de $a(t)$ dadas por

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \Lambda = -8\pi p, \tag{4.1.5}$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi\rho}{3}, \tag{4.1.6}$$

que são conhecidas como equações de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. No caso em que $\Lambda = 0$ elas são chamadas de equações de Friedmann[22]. Podemos reescrever a equação (4.1.6) como

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi\rho}{3}, \tag{4.1.7}$$

que são equações a serem usadas posteriormente.

Para determinar a localização do horizonte aparente associado à métrica (4.1.2), definimos $\tilde{r} = a(t)r$ e a métrica bidimensional $h_{ij} = diag(-1, a^2/(1-kr^2)), i = 0, 1; j = 0, 1$. O horizonte aparente, que é um horizonte dinâmico, é determinado pela relação $h^{ij}\partial_i\tilde{r}\partial_j\tilde{r} = 0$, o que que implica que o horizonte aparente está localizado sobre uma superfície de expansão nula, ou seja os vetores $\partial_i\tilde{r}$ são vetores nulos sobre a superfície do horizonte aparente[25]. Ao contrário de horizontes de eventos e horizonte de partículas, o horizonte aparente sempre existe para espaços FLRW, portanto, é este último tipo de horizonte o melhor candidato para se formular leis da termodinâmica neste tipo de espaço[25]. Usando a condição mencionada acima obtemos:

$$R_A = \frac{1}{\sqrt{H^2 + k/a^2}}, \tag{4.1.8}$$

onde $H = \dot{a}\ a$ é o parâmetro de Hubble. Diferentemente de um horizonte de eventos para um buraco negro que independe de observador, no espaço-tempo de FLRW o horizonte aparente não é uma propriedade absoluta do espaço-tempo. O horizonte aparente é dependente do observador, ou seja, cada observador comóvel em distinto ponto sobre uma hipersuperfície $t = cte$ do espaço-tempo de FLRW verá seu próprio horizonte aparente[25].

Subtraindo (4.1.5) de (4.1.6) obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}\left(\rho' + 3p'\right), \tag{4.1.9}$$

onde $\rho' = \rho + \rho_\Lambda$, $p' = p - \rho_\Lambda$ com $\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi}$ sendo a densidade de energia do vácuo[22]. Uma vez que $R_A \geq 0$, para modelos de universo em expansão acelerada segue de (4.1.5) e de (4.1.9) que $p' < 0$ e $\rho' + 3p' < 0$.

4.2 Tétradas para a métrica FLRW

Um campo de tétradas $e^a{}_\mu$ tem como função básica projetar quantidades do espaço-tempo físico, em um ponto x^μ, no espaço-tempo de referência também chamado de espaço-tempo tangente[26]. Por exemplo, as diferenciais dx^μ, em um ponto x^μ do espaço-tempo físico, podem ser projetadas em diferenciais dq^a do espaço-tempo de referência como

$$dq^a = e^a{}_\mu dx^\mu, \tag{4.2.10}$$

onde q^a representa as coordenadas no espaço-tempo de referência.

Quando a relação em (4.2.10) for integrável globalmente ela é dita uma relação holonômica e ambos os espaços mencionados acima são planos com $e^a{}_\mu$ podendo ser escrito em termos de gradientes, isto é,

$$e^a{}_\mu = \frac{\partial q^a}{\partial x^\mu}, \tag{4.2.11}$$

o que resulta em tensores de torção $T^a{}_{\mu\nu} = 0$. Na presença de campo gravitacional a relação (4.2.10) é dita não-holonômica e não pode ser integrada globalmente porque, neste caso, os tensores de torção $T^a{}_{\mu\nu}$ não são nulos.

Um campo de tétradas, que são as variáveis básicas do TERG, pode ser naturalmente visto como um sistema de referência adaptado a observadores em cada ponto do espaço-tempo[27]. Para isto, seja $X^\mu(\tau)$ a linha mundo de um observador ao longo de uma curva C no espaço-tempo, onde τ é o tempo próprio do observador. A quadri-velocidade do observador ao longo de C é dada por $u^\mu(\tau) = dX^\mu/d\tau$ que é identificada com a componente (0) de $e_a{}^\mu$ ou seja, $u^\mu(\tau) = e_{(0)}{}^\mu$ ao longo de C. Portanto, por meio da relação $g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e_{a\nu}$, para cada tensor métrico solução das equações de Einstein temos uma classe de tétradas adaptadas a diferentes observadores.

Para estudar as propriedades físicas de um tensor métrico escolhemos uma campo de tétradas adaptado a um observador estático. Isto pode ser feito impondo sobre $e_{a\mu}$ duas condições. A primeira condição é que $e_{(0)}{}^i = 0$, o que implica que $e_{(i)}{}^0 = 0$, o que significa que a velocidade de translação espacial do observador é zero. Na segunda condição impomos que os três eixos espaciais adaptados ao observador não estejam girando em relação a um sistema de referência que não gire[28]. Um campo de tétradas adaptado a um observador estático que está associado à métrica (4.1.2) é dado por

$$e_{a\mu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\, sen\theta\, cos\phi & ar cos\theta\, cos\phi & -ar sen\theta\, sen(\phi) \\ 0 & \alpha\, sen\theta\, sen\phi & ar cos\theta\, sen\theta & ar sen\theta\, cos\theta \\ 0 & \alpha\, cos\theta & -ar sen\theta & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.2.12}$$

onde

$$\alpha = \frac{a(t)}{\sqrt{1-kr^2}}. \tag{4.2.13}$$

Na próxima seção calcularemos a energia total e a pressão total associadas ao campo de tétradas (4.2.12) para posteriormente, fazermos uma análise das propriedades termodinâmicas do modelo de universo de FLRW.

4.3 Energia e pressão no universo de FLRW

Nesta seção apresentaremos os tensores de torção associados ao campo de tétradas dadas em (4.2.12). Em seguida, usando a definição de energia obtida a partir da equação (3.5.37), calcularemos a energia no interior do horizonte aparente do modelo de universo de FLRW. Também obteremos a expressão para a força total que atua sobre a superfície do horizonte aparente e, em seguida a expressão para a pressão total que atua sobre a superfície do horizonte aparente. Aplicando a definição de torção dada em (3.2.7) ao campo de tétradas dado por (3.5.37), as componentes não nulas das torções são:

$$
\begin{aligned}
T_{(1)01} &= -T_{(1)10} = \dot{\alpha}\, sen\theta\, cos\phi,\\
T_{(1)02} &= -T_{(1)20} = \dot{a}r\, cos\theta, \cos\phi,\\
T_{(1)03} &= -T_{(1)30} = -\dot{a}r\, sen\theta\, sen\phi,\\
T_{(1)12} &= -T_{(1)21} = (a-\alpha)\, cos\theta\, cos\phi,\\
T_{(1)13} &= -T_{(1)31} = (\alpha-a)\, sen\theta\, sen\phi,\\
T_{(2)01} &= -T_{(2)10} = \dot{\alpha}\, sen\theta\, sen\phi,\\
T_{(2)02} &= -T_{(2)20} = \dot{a}r\cos\theta\, sen\phi,\\
T_{(2)03} &= -T_{(2)30} = \dot{a}r\, sen\theta\, cos\phi,\\
T_{(2)12} &= -T_{(2)21} = (a-\alpha)\, cos\theta\, sen\phi,\\
T_{(2)13} &= -T_{(2)31} = (a-\alpha)\, sen\theta\, cos\phi,\\
T_{(3)01} &= -T_{(3)10} = \dot{\alpha}\, cos\theta,\\
T_{(3)02} &= -T_{(3)20} = -\dot{a}r\, sen\theta,\\
T_{(3)12} &= -T_{(3)21} = (\alpha-a)\, sen\theta,
\end{aligned}
\tag{4.3.14}
$$

onde o ponto denota a derivada em relação a t.

Para calcular a energia contida no interior do horizonte aparente e a pressão total sobre a superfície do horizonte aparente do modelo de universo de FLRW precisamos primeiro obter as quantidades abaixo associadas a $\Sigma^{\alpha\mu\nu}$ definidas na equação (3.3.14)

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(0)01} &= -arsen\theta(1-\sqrt{1-kr^2}), \\
\Sigma^{110} &= -\frac{\dot{a}}{a\alpha^2}, \\
\Sigma^{220} &= -a\dot{a}r^2, \\
\Sigma^{330} &= \frac{\dot{a}}{a^3r^2sen^2\theta}, \\
\Sigma^{212} &= \frac{(\alpha-a)}{2r^3a^3\alpha^2}, \\
\Sigma^{313} &= \frac{(\alpha-a)}{2r^3a^3sen^2\theta\alpha^2}.
\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

Integrando em θ e ϕ a densidade de energia $\Pi^{(0)1} = -4\kappa e\Sigma^{(0)01}$ sobre uma superfície de raio r constante, obtemos a energia E no interior desta superfície, isto é,

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \Pi^{(0)1}, \\
&= ar(1-\sqrt{1-kr^2}),
\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

onde para obter o resultado acima usamos $\kappa = \frac{1}{16\pi}$. Na equação (4.3.16) assumimdo $r = r'$ tal que $R_A = ar'$ e usando a definição de R_A dada na equação (4.1.8), obtemos a energia contida dentro do horizonte aparente do universo de FLRW que é dada por

$$E_A = R_A(1-\sqrt{1-kR_A^2/a^2}). \tag{4.3.17}$$

Usando as eqs. (4.1.7) e (4.1.8) podemos escrever a expressão da energia como

$$E_A = 2M_A - R_A^2 H, \tag{4.3.18}$$

onde M_A é a massa efetiva no interior do horizonte aparente definida como

$$M_A = \frac{4\pi R_A^3}{3}(\rho+\rho_\Lambda), \tag{4.3.19}$$

onde

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi}.$$

M_A é a massa de Misner-Sharp-Hernandez na presença da constante cosmológica[25] que só pode ser definida para espaços com simetria esférica. Pela equação (4.3.18) observamos que a energia total no interior do horizonte aparente, para universos em expansão, $H > 0$, possui um termo negativo que, do ponto de vista gravitacional, é repulsivo. Na próxima seção a expressão da energia dada por (4.3.18) será usada para escrevermos a primeira lei da termodinâmica sobre o horizonte aparente do modelo de FLRW.

Antes de prosseguirmos é importante salientar que para um modelo de universo plano temos $k = 0$ e $1 - R_a H = 0$, portanto, E_A dada por (4.3.17) é zero. Neste caso a energia do campo gravitacional se cancela com a energia dos campos de matéria. No caso do modelo de universo fechado $k = 1$, $1 - R_A H > 0$ e a energia $E_A > 0$. E para o modelo de universo aberto $k = -1$, $E_A < 0$.

Para obter a expressão da pressão sobre o horizonte aparente do modelo de FLRW, vamos primeiro calcular a expressão da força radial $f(r)$ sobre a superfície de uma esfera de raio r constante usando a definição de força dada em (3.5.36) e, em seguida usaremos a definição de horizonte aparente apresentada na equação (4.1.9) para, em seguida, obtermos a pressão total sobre a superfície do horizonte aparente. Da equação (3.5.41) $f(r)$ é dada por

$$f(r) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} (-\phi^{(r)1}) d\theta, \tag{4.3.20}$$

onde $\phi^{(r)1}$ é $\phi^{(i)1}$ projetado na direção radial, ou seja,

$$-\phi^{(r)1} = -(\phi^{(1)1} sen\theta cos\phi + \phi^{(2)1} sen\theta sen\phi + \phi^{(3)1} cos\theta), \tag{4.3.21}$$

e pela equação (3.5.39) temos que $\phi^{(i)j} = 4\kappa \partial_\mu (e\Sigma^{(i)j\mu})$. Usando a inversa da métrica em (4.1.3), o campo de tétradas em (4.2.12), as quantidades dadas em (4.3.15) e lembrando que $e^{(i)}{}_0 = 0$ obtemos

$$\begin{aligned}
\phi^{(1)1} &= -4\kappa \left[\partial_0(\dot{a}a)r^2 + 1 - \sqrt{1 - kr^2}\right] sen^2\theta cos\theta, \\
\phi^{(2)1} &= -4\kappa \left[\partial_0(\dot{a}a)r^2 + 1 - \sqrt{1 - kr^2}\right] sen^2\theta sen\phi, \\
\phi^{(3)1} &= -4\kappa \left[\partial_0(\dot{a}a)r^2 + 1 - \sqrt{1 - kr^2}\right] sen\theta cos\theta.
\end{aligned} \tag{4.3.22}$$

Levando os resultados da última equação em (4.3.21) obtemos

$$-\phi^{(r)1} = 4\kappa \left[\partial_0(\dot{a}a)r^2 + (1 - \sqrt{1 - kr^2})\right] sen\theta. \tag{4.3.23}$$

Agora levando $\phi^{(r)1}$ na equação (4.3.20) e integrando em ϕ e θ obtemos

$$f(r) = \left[\partial_0(\dot{a}a)r^2 + (1 - \sqrt{1 - kr^2})\right], \tag{4.3.24}$$

onde usamos $\kappa = \frac{1}{16\pi}$.

Novamente na equação acima assumimdo $r = r'$ tal que $R_A = ar'$ e usando a definição de R_A apresentada na equação (4.1.8), obtemos a força total atuando sobre o horizonte aparente do modelo de FLRW que é dada por

$$f(R_A) = \left[\partial_0(\dot{a}a)\frac{R_A^2}{a^2} + 1 - R_A H \right]. \tag{4.3.25}$$

Uma vez que para a superfície esférica definida por R_A, $f(R_A)$ é homogênea, podemos obter a pressão total exercida sobre esta superfície como sendo dada por,

$$P_A = f(R_A)/4\pi R_A^2 = \frac{1}{4\pi R_A^2}\left[\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) R_A^2 + 1 - R_A H \right]. \tag{4.3.26}$$

Para modelos de universo em expansão acelerada, ou seja, $\ddot{a} > 0$, usando a definição de R_A apresentada na equação (4.1.8), podemos mostrar que para $k = 0$ ou $k = 1$, $1 - R_A H \geq 0$ e para $k = -1$ temos que $H^2 R_A^2 + 1 - HR_A > 0$ e, portanto a força total $f(R_A)$ e consequentemente a pressão total $P(R_A)$ sobre o horizonte aparente são grandezas positivas. Note que mesmo para um modelo de universo plano $k = 0$ onde a energia total no interior do horizonte aparente é zero, a pressão total sobre a superfícicie do horizonte aparente é diferente de zero e positiva.

Do ponto de vista da análise feita nesta seção no contexto do TERG, pelas equações (4.3.25) e (4.3.26), concluimos que a expansão acelerada do universo é consequência do próprio campo gravitacional gerado pelo fluído em movimento presente no universo. A expansão acelerada é uma consequência de a pressão total $P(R_A)$, devido o campo gravitacional e a matéria em movimento ser positiva, ou seja, qualquer observador estático sempre verá a pressão total empurrar para frente a superfície do horizonte aparente. Desta forma, não se faz necessário invocar qualquer forma de energia exótica e totalmente desconhecida para se explicar a expansão acelerada do universo. Muitas vezes a equação (4.1.9) é analisada em um contexto Newtoniano para invocar alguma forma de energia desconhecida, chamada de *energia escura*, para explicar a expansão acelerada do universo, ou seja, uma forma de energia que gera uma pressão p' negativa responsável pela expansão acelerada[33]. No entanto, tal análise só leva em consideração a pressão devido à constante cosmológica e ao fluido presente no universo, deixando de fora a pressão do campo gravitacional.

Para entender melhor a dinâmica da solução de FLRW, vamos comparar a razão da expansão de uma grandeza $\dot{\delta}/\delta$ com H que é a razão de expansão da matéria no universo[25]. Para R_A e E_A com $k \neq 0$ temos que

$$\frac{\dot{R}_A}{R_A} - H = -\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) R_A^2, \tag{4.3.27}$$

$$\frac{\dot{E}_A}{E_A} - H = -\left(\frac{\ddot{a}R_A}{a}\right)\left(R_A + \frac{R_A^2}{(1 - R_A H)}\frac{k}{a^2}\right). \tag{4.3.28}$$

Das duas equações acima podemos mostrar que

$$\frac{\dot{E}_A}{E_A} - \frac{\dot{R}_A}{R_A} = -\frac{R_A^3}{(1 - R_A H)} \frac{k}{a^3} \ddot{a}. \tag{4.3.29}$$

Portanto, pela equação (4.3.27) fica claro que para modelos de universo em expansão acelerada, o horizonte de evento aparente expande mais devagar do que a matéria que é comóvel logo, existe um fluxo de matéria saindo do interior do horizonte aparente, ou seja, à medida que o tempo cosmológico aumenta tem-se cada vez menos matéria no interior do horizonte aparente para frear a expansão acelerada. A diferença dada na equação (4.3.28), para modelos de universo em expansão acelerada, é negativa, logo a energia total E_A no interior do horizonte aparente expande mais devagar que a matéria. Finalmente, a equação (4.3.29) estabelece que para modelos de universo em expansão acelerada, a energia total no interior do horizonte aparente expande mais lentamente do que o horizonte aparente. Embora a energia total aumente com o tempo, este crescimento não é suficiente para impedir a expansão acelerada. Note que para o caso $k = 0$, $E_A = 0$, a energia do campo gravitacinal se cancela com a energia devido à matéria, porém, pela equação (4.3.27) ainda temos um fluxo de matéria saindo do horizonte aparente para expansões aceleradas o que gera uma pressão não nula e positiva sobre a superfície do horizonte aparente.

4.4 Primeira lei da termodinâmica para o horizonte aparente

Nesta seção usaremos as definições de energia e pressão, obtidas no contexto do TERG para escrevermos uma relação para a primeira lei da termodinâmica no horizonte aparente do espaço-tempo de FLRW. Nesta análise assumiremos que a entropia associada com o horizonte aparente é dada por um quarto da área do horizonte aparente[25] e, a partir desta relação para a primeira lei, obteremos uma expressão para a temperatura no horizonte aparente.

A análise termodinâmica de sistemas gravitacionais foi inicialmente desenvolvida tendo como foco o estudo de buracos negros estáticos ou estacionários. Posteriormente tal análise, num contexto cosmológico, foi extendida para o estudo da termodinâmica de horizontes que evoluem com o tempo como o horizonte aparente do espaço-tempo de FLRW[34, 35, 36].

Usando a equação (4.1.8) em (4.3.17) podemos reescrever E_A como

$$E_A = \left(R_A - R_A^2 H\right). \tag{4.4.30}$$

Para escrever uma equação para a primeira lei da termodinâmcia no horizonte aparente temos que calcular a variação de E_A devido uma variação infinitesimal dt no tempo cosmológico. Para isto, usando as relações, $dR_A = \dot{R}_A dt$ e $dH = \dot{H}dt$, segue de (4.4.30) que

$$dE_A = \left(1 - 2R_A H - \frac{R_A^2 \dot{H}}{\dot{R}_A}\right) \frac{dS_A}{2\pi R_A}, \tag{4.4.31}$$

onde S_A é a entropia dada por

$$S_A = \frac{A_A}{4} = \pi R_A^2.$$

O termo de trabalho devido a P_A, na primeira lei, é dado por

$$P_A dV_A = \left[\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) R_A^2 + 1 - R_A H\right] \frac{dS_A}{2\pi R_A}, \tag{4.4.32}$$

onde

$$V_A = \frac{4}{3}\pi R_A^3.$$

é o volume areal do horizonte aparente, o qual contém a energia E_A cuja superfície está sob a ação da pressão P_A.

Com as expressões em (4.4.31) e (4.4.32) a relação para a primeira lei da termodinâmica é escrita como:

$$dE_A + P_A dV_A = T_A dS_A, \tag{4.4.33}$$

onde a quantidade T_A é identificada como sendo a temperatura na superfície do horizonte aparente e é dada por

$$T_A = \frac{1}{2\pi R_A}\left[-2\kappa' R_A + (1 - R_A H)^2 - \left(R_A H + \frac{R_A^2 \dot{H}}{\dot{R}_A}\right)\right], \tag{4.4.34}$$

onde κ' é a gravidade de superfície de Kodoma-Hayward[25] dada por

$$\kappa' = -\frac{R_A}{2}\left(\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{k}{a^2}\right).$$

O último termo entre parênteses na expressão (4.4.34) pode ser simplificado e escrito como

$$-\frac{k\ddot{a}a}{\dot{a}}R_A\frac{1}{(\dot{a}^2 + k - a\ddot{a})},$$

e portanto a temperatura T_A pode ser escrita como

$$T_A = \frac{1}{2\pi R_A}\left[-2\kappa' R_A + (1 - R_A H)^2 - \frac{k\ddot{a}a}{\dot{a}}\frac{R_A}{(\dot{a}^2 + k - a\ddot{a})}\right]. \tag{4.4.35}$$

Para modelos de universo em expansão acelerada $\dot{R}_A \geq 0$ portanto $\rho' + p' \geq 0$ ou seja, que não viole a condição de energia mínima na presença da constante cosmológica, a temperatura acima é positiva.

O primeiro termo em (4.4.35) é exatamente metade da temperatura de Kodama-Hayward no horizonte aparente do modelo de FLRW que é dada por[25]

$$T_{KH} = -\frac{\kappa'}{2\pi},$$

e que depende da escolha de κ', porém, existem várias prescrições inequivalentes para esta quantidade[37] e portanto várias expressões inequivalentes para T_{KH}. Para o caso de modelos de universo plano $k = 0$, os dois últimos termos em (4.4.35) se anulam e T_A reduz a

$$T_A = \frac{T_{KH}}{2}. \tag{4.4.36}$$

Finalmente, é sabido que a solução de FLRW admite modelos de universo em contração acelerada $\ddot{a} < 0$ porém, neste caso da definição de R_A em (4.1.8) devemos ter

$$\dot{R}_A = R_A^3\left(H^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a}\right) < 0,$$

o que implica em

$$\frac{1}{R_A^2} = H^2 + \frac{k}{a^2} < \frac{\ddot{a}}{a} < 0$$

e portanto neste caso o raio do horizonte aparente se tornaria complexo, fato este que parece não ter ainda sido apontado na literatura.

Capítulo V

Conclusões

Nesta dissertação, no capítulo 2, fizemos uma breve revisão da teoria da relatividade de Einstein, onde procuramos mostrar a importância de se encontrar as formas covariantes para as leis da física até se chegar às equações de campo de Einstein para a gravitação na presença ou não da constante cosmológica.

No capítulo 3, usando um campo de tétradas como variável fundamental, apresentamos uma formulação equivalente à teoria da gravitação de Einstein que é denominada de teleparalelismo equivalente à relatividade geral TERG. Discutimos brevemente as formulações Lagrangiana e Hamiltoniana do TERG; mostramos que no contexto deste formalismo é possível obter uma expressão localmente bem definida para a energia do campo gravitacional. Mostramos também que a partir das equações de campo e da definição de energia é possível obter, a partir de uma equação de continuidade, uma expressão para a pressão gravitacional na presença ou não de matéria.

No quarto capítulo, na seção 1, apresentamos o modelo de universo de FLRW que é uma solução exata das equações de Einstein que descreve modelos de universos homogêneos e isotrópicos em expansão ou contração acelerada. Apresentamos a definição de horizonte aparente do modelo de FRLW. Em seguida, na seção 2, construimos um campo de tétradas adaptadas a observadores espacialmente estáticos associados à métrica de FRLW. Na seção 3 do capitulo 4, no contexto do TERG, calculamos a energia total contida no interior do horizonte aparente, calculamos também a pressão total sobre a superfície do horizonte aparente. Mostramos que para modelos de universo em expansão acelerada a pressão total sobre a superfície do horizonte aparente é positiva podendo ser responsável pela expansão acelerada do universo atualmente.

Finalmente, na seção 4 do quarto capítulo, usando as expressões para a energia e pressão obtidas anteriormente, escrevemos uma relação para a primeira lei da termodinâmica na superfície do horizonte aparente. Para isto adotamos a entropia como sendo dada por um quarto da área da superfície do horizonte aparente. A partir da relação para a primeira lei, extraimos uma expressão para temperatura na superfície do horizonte aparente. Em seguida mostramos que para modelos de universo em expansão acelerada e que não viole a condição de energia mínima na presença da constante cosmológica, a temperatura é positiva. Em particular para modelos de universo plano esta temperatura reduz-se à metade da temperatura de de Kodoma-Hayward[25] na superfície do horizonte aparente.

Os resultados obtidos neste trabalho mostram que, no contexto do TERG, é possível escrever uma relação para a primeira lei da termodinâmica mesmo para horizontes que não sejam estáticos ou estacionários haja visto, que o horizonte aparente é um horizonte dinâmico.

Referências Bibliográficas

[1] M. Schweizer and N. Straumann, Phys. Lett. **71A**, 493 (1979).

[2] M. Schweizer, N. Straumann and A. Wipf, Gen. Rel. Grav. **12**, 951 (1980).

[3] J. Nitsch and F. W. Hejl, Phys. Lett. **96B**, 98 (1980).

[4] J. W. Maluf and J. F. da Rocha Neto, Phis. Rev. D **64**, 084014, (2001).

[5] Ivan S. Oliveira, Física Moderna para iniciados, interessados e aficionados, Vol. 1 Livraria da Física, São Paulo - SP, (2005).

[6] H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski and H. Weyl, The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoris, Dover New York NY, (1952).

[7] N. Hammermesh, Group Theory and Its Application to Physical Problems, Dover New York NY, (1962).

[8] L. P. Eisenhart, Riemannian Geometry, Princeton University Press, Princeton, 6th print NJ, (1966).

[9] A. Einstein, Ann. d. Phys. (Leipzig) **55**, (1918).

[10] H. C. Ohanian and R. Ruffini, Gravitation and Spacetime, W. W. Norton, New York, NY, (1994).

[11] Michael Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 2, p. 135 Publish or Perish, Delaware, (1975).

[12] Richard P. Feynman, Feynman Lectures on Gravitation, Addison-Wesley, Redwood City, CA, (1995).

[13] L. D. Faddeev, Sov. Phys. Usp. **25**, 130 (1982).

[14] L. D. Landau and E. M. Lishftz, *The Classical Theory of Fields* (Pergamon Press, Oxford, 1994).

[15] R. Weitzenböck, Invarianten Theore (Nordhoff, Groningen), (1923).

[16] A. Eistein, Berliner Sitzungsber, 217, (1928).

[17] A. Einstein, Beliner Sitzungsber, 156, (1929).

[18] C. Møller, Conservation Laws in the Tetrad Theory of Gravitaion. Proceedings of the conference on Theory of Gravitation, Warszawa and Jablona, 1962. Scientific Publishes, Warszawa e Gauthier - Vilars, Paris, (1964).

[19] C. Pellegrini and J. Plebanski, Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk **2** (2), (1962).

[20] J. Schwinger, Phys. Rev. **130** (3), 1253, (1963).

[21] J. W. Maluf, Ann. Phys. **14**, 723 (2005).

[22] M. P. Hobsom, G. Efstathiou and A. N. Lasenby, General Relativity, *A introduction for Physics*, Cambridge University Press, (2003).

[23] Mikio Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (section 7.4), Iop Publishing Ltd, (2003)

[24] J. F. da Rocha Neto, J. W. Maluf and S. C. Ulhoa, Phys. Rev. D **82**, 124035, (2010).

[25] Valerio Faraoni, Phys. Rev. D **84**, 024003 (2011).

[26] J. W. Maluf, J. F. da Rocha Neto, T. M. L. Toríbio and K. H. Castelo Branco, Phys. Rev. D **65**, 124001, (2003).

[27] F. W. Hehl, J. Lemke and E. W. Mielke, *Two Lectures on Fermions and Gravity in Geometry and Theoritical Physics*, edited by S. J. Debrus and A. C. Hirshfieldpring Berlin, Heidelberg, (1991).

[28] J. W. Maluf, S. C. Ulhoa and F. F. Faria, Phys. Rev. D **80**, 044036 (2009).

[29] S. P. Permutter et al., Nauture **391**, 51 (1998).

[30] S. P. Permutter et al., Astrophys. J. **517**, 565 (1999).

[31] G. Riess et al., Astron. J. **116** 1009 (1998).

[32] B. Schmidt et al,. Astrophys. J. **507**, 46 (1998).

[33] W. Rindler, *Relativity: Special, General and Cosmology* (2nd ed., Oxford University Press, Oxford, 2006).

[34] W. Collins, Phys. Rev. D **45**, 495 (1992).

[35] S. A. Hayward, S. Mukohyama, and M. C. Ashwort, Phys. Rev. Lett. A **256**, 347 (1999).

[36] S. A. Hayward, Classical Quantum Gravity **15**, 3147 (1998).

[37] A. B. Nielson and J. H. Yoon, Classical Quantum Gravity **25**, 085010 (2008).