Universidade de Brasília
FACE – Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Ciências da Informação e Documentação
Departamento de Economia – Programa de Pós-Graduação

MAXMIN WITH MULTIPLE TASTES AND BELIEFS

Bruno Beltrão Léo

Brasília – DF

2016

Bruno Beltrão Léo

MAXMIN WITH MULTIPLE TASTES AND BELIEFS

Tese apresentada ao Departamento de Economia da Universidade de Brasília, como requisito à obtenção do título de Doutor em Economia.

Orientador: Gil Riella

BANCA EXAMINADORA:

Prof. PhD Gil Riella (Orientador - Unb/Eco)

Prof. PhD José Guilherme de Lara Resende (Unb/Eco)

Prof. PhD Leandro Gonçalves do Nascimento (Unb/Eco)

Prof. PhD Rogério Mazali (Universidade Católica de Brasília)

Doutor Luís Fernando Brands Barbosa (Banco Central do Brasil)

Brasília - DF

Ao meu grande amor, Adriana Maria

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma axiomatização de um modelo de preferências completas sob incerteza que propicia uma multiplicidade de gostos (utilidades) e crenças (*priors*). Tal qual Gilboa e Schmeidler (1989), trabalhamos em um *set-up* de Anscombe-Aumann e cada ato é avaliado pelo pior cenário. A diferença é que, enquanto no modelo de Gilboa e Schmeidler (1989) os múltiplos cenários são compostos de um conjunto de crenças, aqui eles serão representados por um conjunto formado de pares crenças-utilidades. Axiomatizamos, também, o caso especial quando os múltiplos cenários resultam apenas de uma multiplicidade de utilidades.

Palavras-chave: preferências incompletas; preferências completas; múltiplas crenças; múltiplas utilidades.

Abstract

In this work, we present an axiomatization of a model of complete preferences under uncertainty that allows for a multiplicity of tastes and beliefs. As in Gilboa and Schmeidler (1989), we work in an Anscombe-Aumann setup and each act is evaluated by the worst case scenario. The difference is that while in Gilboa and Schmeidler (1989) the multiple scenarios are composed of a set of priors, here they are composed of a set of probability-utility pairs. We axiomatize also the special case when the multiple scenarios are a consequence of the multiplicity of tastes only.

Key-words: incomplete preferences; complete preferences; multiple priors; multiple utilities.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por sempre estar comigo.

Agradeço a eterna proteção de Nossa Senhora, minha mãezinha querida.

Agradeço a minha mulher, Adriana Maria, pelo amor, apoio e compreensão nos momentos difíceis. Meus filhinhos, Maria Clara, João Guilherme e Henrique, também são muito importantes e tornam minha vida muito mais saborosa.

Agradeço também ao meu orientador e amigo Gil Riella, pela competente e dedicada orientação. Aos membros da banca examinadora, professores José Guilherme de Lara Resende, Leandro Gonçalves do Nascimento, Rogério Mazali e Luís Fernando Brands Barbosa, meu sincero agradecimento.

1 Introdução

Na teoria da decisão, pelo menos nas últimas décadas, encontramos uma grande quantidade de trabalhos que procuram modelar aversão a ambiguidade e demonstrar que essa aversão é incompatível com a maioria dos axiomas padrão encontrados na teoria da utilidade esperada. A literatura, em geral, pressupõe que poderá surgir ambiguidade tanto a partir de uma multiplicidade de crenças (*priors*), de uma multiplicidade de utilidades (*tastes*), ou de ambos. Multiplicidade de crenças frequentemente está relacionada à inexistência de medidas de probabilidade completamente especificadas, a partir de evidências cientificamente comprovadas. Multiplicidade de utilidades tem a ver com algum tipo de dificuldade ou incapacidade que os tomadores de decisão tem de comparar, ou avaliar, possíveis resultados para si mesmos (ambiguidade de gostos). Isto é, quando se deparam com uma escolha entre alternativas que não são plenamente compreendidas, ou não prontamente comparáveis, os tomadores de decisão muitas vezes têm dificuldade para expressar suas preferências de forma coerente. Isto já foi constatado, há algum tempo, por von Neumann e Morgenstern (1947). Nesse contexto, o axioma de completude acaba por ser bastante questionável e a literatura que aborda modelos de preferências incompletas sob incerteza, que permitem a multiplicidade de utilidades e de crenças, tem se tornado muito profícua nesses últimos anos.

Como exemplo, e em consonância com os modelos de preferências incompletas, encontramos os trabalhos de García del Amo and Ríos Insua (2002), Nau (2006), Seidenfeld, Schervish, and Kadane (1995), Ok, Ortoleva, and Riella (2012), Galaabaatar and Karni (2013) e Riella (2015). Em particular, Nau (2006), Galaabaatar and Karni (2013) e Riella (2015) fornecem axiomatizações para os modelos *Multi-prior expected multi-utility* sob incerteza. Ok et al. (2012), Galaabaatar and Karni (2013) e Riella (2015) também apresentam axiomatizações para versões do modelo de *Single-prior expected multi-utility*. Quando as preferências são completas, contudo, podemos citar os trabalhos de Gilboa and Schmeidler (1989), Maccheroni (2002), Maccheroni, Marinacci, and Rustichini (2006) e Cerreia-Vioglio, Maccheroni, Marinacci, and Montrucchio (2011) como os mais relevantes.

Como este trabalho apresenta uma axiomatização de um modelo de preferências completas sob incerteza sob um escopo mais amplo, porém semelhante ao apresentado por Gilboa and Schmeidler (1989) (de agora em diante, modelo GS), descreveremos, abaixo, de forma sucinta, os aspectos fundamentais do modelo GS.

Gilboa and Schmeidler (1989) assumem que o tomador de decisão é avesso a incerteza e impõem vários axiomas padrão com respeito a relação de preferências. No entanto, o usual axioma de independência é substituído por uma versão mais fraca e mais convincente de independência, que se aplica apenas quando dois atos genéricos são ambos misturados com um mesmo ato constante — o axioma chamado *C-Independence*. Dada a evidência experimental, conforme descrita por Ellsberg (1961), o novo axioma proposto torna-se, de fato, mais aceitável: "um tomador de decisão que prefere (um ato) f a (um ato) g pode mais facilmente visualizar as misturas de f e g com um ato constante h do que com um ato arbitrário qualquer e, portanto, torna-se menos provável que ele reverta suas preferências" (Gilboa and Schmeidler (1989)). Assim, usando a estrutura de Anscombe and Aumann

(1963), Gilboa and Schmeidler (1989) proporcionam um fundamento axiomático para a regra de decisão *maxmin expected utility,* caracterizando relações de preferência sobre atos que possuem uma representação numérica por um funcional em um modelo *Multi-prior expected single-utility*.

Maccheroni (2002) também axiomatiza uma versão do modelo GS, em um mundo onde existe apenas o risco objetivo. No modelo de Maccheroni (2002), o tomador de decisão possui múltiplas utilidades, porém apenas uma crença.

Apesar de correlata, a ideia contida neste trabalho é mais geral do que a do modelo GS, pois, no nosso caso, ao tomador de decisão é permitido possuir não apenas uma multiplicidade de crenças, mas também uma multiplicidade de gostos (utilidades). Ainda, iremos generalizar o modelo de Maccheroni (2002) para o mundo dos atos de Anscombe-Aumann e, então, obteremos o modelo *Single-prior expected multi-utility*.

Para isso, iremos definir uma preordem incompleta "induzida" e mostrar que ela satisfaz um conjunto de axiomas que implicam que terá uma representação de acordo com o principal resultado de Riella (2015). Iremos, então, propor uma versão modificada do axioma *C-Independence*, conforme introduzido por Dillenberger (2010), e mostrar que isso nos conduzirá ao principal resultado de nosso trabalho, que é uma versão do modelo maxmin de GS, com múltiplas crenças e múltiplas utilidades.

Vale dizer, neste momento, que o presente trabalho é o primeiro a abordar a multiplicidade de utilidades e de crenças para o caso de relações de preferência completas.

O trabalho está organizado conforme segue abaixo.

A Seção 2 apresenta a estrutura, que coincide com a mesma estrutura geral descrita em Riella (2015). Assim como Riella (2015), iremos impor a restrição de que o espaço de prêmios é um conjunto finito. No final da seção, apresentamos o principal resultado deste trabalho – um teorema de representação *Multi-prior expected multi-utility*, para o caso de preferências completas.

Na Seção 3, um novo postulado é adicionado (o axioma chamado *Extreme Objective and Subjective Bets Independence*) à representação descrita no resultado principal (Teorema 1) a fim de se obter uma representação onde o tomador de decisão possua apenas uma única crença, porém múltiplas utilidades. Vamos então verificar que, para tal caso, é possível se trabalhar em uma estrutura mais geral, na qual o espaço de prêmios pode vir a ser um espaço métrico compacto (não necessariamente finito).

A Seção 4 fornece uma prova alternativa e mais simples do principal resultado de Gilboa and Schmeidler (1989), utilizando-se o nosso resultado principal (Teorema 1).

A Seção 5 propõe uma nova versão de nosso resultado principal para o caso de funções utilidade dependentes do estado. Para se obter tal representação, quaisquer formas de monotonicidade tem que ser suprimidas e um novo postulado é adicionado – o axioma *Unambiguous Best and Worst*.

Na Seção 6, intitulada Racionalidade Objetiva e Subjetiva com Múltiplas Crenças e Utilidades, faz-se um exercício utilizando-se o modelo de representação maxmin com múltiplas crenças e utilidades da Seção 2 e o modelo de preferências incompletas com múltiplas crenças e utilidades de Riella (2015), de forma análoga ao que foi feito em Gilboa, Maccheroni, Marinacci, and Schmeidler (2010), onde é apresentada uma ligação entre o modelo maxmin de Gilboa and Schmeidler (1989) e o modelo sob incertezas Knightiano de Bewley (2002).

A Seção 7 descreve a literatura relacionada, que basicamente se divide em dois tipos: literaturas relacionadas a preferências incompletas e literaturas que envolvem relações de preferência completas.

A Seção 8 apresenta as conclusões.

As provas estão descritas ao Apêndice.

2 Preferências Maxmin com Múlltiplas Crenças e Utilidades

2.1 Estrutura

Trabalharemos com a estrutura de Anscombe and Aumann (1963) tal como reformulada por Fishburn (1970). Seja X um espaço métrico compacto de prêmios, em geral. Entretanto, algumas vezes, iremos impor a restrição de que X seja um conjunto finito. Denotaremos os elementos de X por x, y, z, etc. Escreveremos $\Delta(X)$ para representar o espaço de Borel de medidas de probabilidade em X. Metrizamos $\Delta(X)$ de tal modo que a convergência métrica coincida com a convergência fraca de Borel de medidas de probabilidade. Os elementos de $\Delta(X)$ são chamados de loterias e denotados por p, q, r, etc. A loteria degenerada que paga o prêmio $x \in X$ com probabilidade um é denotada por δ_x. O espaço linear de todos os mapeamentos reais contínuos em X será denotado por $C(X)$. A métrica considerada para $C(X)$ é a norma do supremo (*supnorm*). A esperança matemática de qualquer função $u \in C(X)$ com respeito à medida de probabilidade $p \in \Delta(X)$ será denotada por $\mathbb{E}_p(u)$. Ou seja,

$$\mathbb{E}_p(u) := \int_X udp.$$

Seja S um espaço de estados de dimensão finita. Denotaremos o espaço de medidas de probabilidade em S por $\Delta(S)$. Um ato é uma função que mapeia o espaço de estados S no espaço de loterias $\Delta(X)$. Denotaremos o espaço de todos os atos por $\mathcal{F}$. Ou seja, $\mathcal{F} := \Delta(X)^S$. Metrizamos $\mathcal{F}$ pela métrica do produto e representamos os elementos de $\mathcal{F}$ por f, g, h, etc. Faremos o habitual abuso de notação e escreveremos simplesmente p para representar o ato constante que paga a loteria p em todo estado da natureza. Assim, frequentemente escrevemos $f(s)$ para representar o ato constante que paga a loteria $f(s)$ em todo estado da natureza. Para qualquer subconjunto T de S, e quaisquer dois atos f e g, escrevemos fTg para representar o ato h tal que $h(s) = f(s)$ para todo $s \in T$ e $h(s) = g(s)$ para todo $s \in S \setminus T$. Nossa primitiva será uma preordem **completa** (*i.e.*, uma relação binária reflexiva e transitiva) $\succsim \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$. Como usual, a parte assimétrica desta preordem é denotada por $\succ$, e sua parte simétrica por $\sim$.

Nesta seção, trabalharemos com o caso especial da estrutura descrita acima na qual o espaço de prêmios X é finito. Imporemos os seguintes axiomas à relação de preferências $\succsim$.

Axiom 1 (Continuidade). *$\succsim$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$.*[1]

Axiom 2 (Unambiguous Best). *Se $x \in X$ é tal que $\delta_x \succsim \delta_y$ para todo $y \in X$, então $\alpha\delta_x + (1-\alpha)g \succsim \alpha f + (1-\alpha)g$ para todo $f, g \in \mathcal{F}$, e $\alpha \in [0,1]$.*

Axiom 3 (Extremal Elements Independence). *Se $x \in X$ é tal que $\delta_x \succsim \delta_y$ para todo $y \in X$, ou $\delta_y \succsim \delta_x$ para todo $y \in X$, então, para cada $f, g \in \mathcal{F}$, e $\alpha \in (0,1]$, $f \succsim g \Leftrightarrow \alpha f + (1-\alpha)\delta_x \succsim \alpha g + (1-\alpha)\delta_x$.*

Axiom 4 (Aversão a Incerteza). *Para todo $f, g \in \mathcal{F}$, e $\lambda \in [0,1]$, $f \sim g \Rightarrow \lambda f + (1-\lambda)g \succsim g$*

Axiom 5 (One Side Mixture Monotonicity). *Se f, g e h em $\mathcal{F}$, e $\lambda \in [0,1]$ são tais que $\lambda f(s) + (1-\lambda)h \succsim g$ para todo $s \in S$, então $\lambda f + (1-\lambda)h \succsim g$.*

O axioma da Continuidade é padrão. O axioma *Unambiguous Best* diz que se um prêmio x é melhor do que qualquer outro prêmio, então o ato que paga o prêmio x em cada estado é inequivocamente preferido a qualquer outro ato, no sentido de que mesmo se misturarmos, conjuntamente, δ_x e um ato f com algum ato g, o tomador de decisão continuará a preferir a mistura que contém δ_x.

Extremal Elements Independence impoõe que se x for o melhor ou o pior prêmio, então o axioma da independência será válido quando misturamos um par de atos com δ_x. Notamos que este é um caso particular do axioma *C-Independence* de Gilboa and Schmeidler (1989), no qual o ato constante usado naquele axioma necessariamente paga o melhor, ou o pior prêmio, com probabilidade unitária. O postulado de Aversão a Incerteza também é padrão.

Finalmente, temos uma propriedade forte de monotonicidade que chamamos de *One Side Mixture Monotonicity*. Esta propriedade funde o axioma *Mixture Monotonicity* de Riella (2015) com o postulado de Dominância de Galaabaatar and Karni (2013).

2.2 Teorema de Representação

Depois de impor as restrições descritas pelos axiomas acima, vamos enunciar nosso principal resultado. Mas antes, vamos considerar a seguinte definição.

Definition. Dado um subconjunto não-vazio $\mathcal{U}$ de $\mathbf{C}(X)$, dizemos que $\mathcal{U}$ é n-bounded se existirem x_0 e x_1 em X com $u(x_1) = 1 \geq u(x) \geq 0 = u(x_0)$ para todo $x \in X$, para

[1] Ou seja, para quaisquer sequências convergentes (f^m) e (g^m) em $\mathcal{F}$, com $f^m \succsim g^m$ para cada m, temos $\lim f^m \succsim \lim g^m$. Notamos que nos resultados deste trabalho que fazem uso de um espaço de prêmios X finito, esta propriedade pode ser substituída pela condição mais fraca de que os conjuntos $\{\alpha : \alpha f + (1-\alpha)g \succsim h\}$ e $\{\alpha : h \succsim \alpha f + (1-\alpha)g\}$ sejam fechados em $[0,1]$, para quaisquer f, g e h em $\mathcal{F}$.

todo $u \in \mathcal{U}$. Dizemos que um subconjunto não-vazio $\mathcal{M}$ de $\Delta(S)\times$ $\mathbf{C}(X)$ é n-bounded se $\{u \in \mathbf{C}(X) : (\mu, u) \in \mathcal{M}$ para algum $\mu \in \mathcal{M}$ $\}$ é um subconjunto não-vazio de $\mathbf{C}(X)$. Finalmente, dizemos que um subconjunto $\mathcal{U}$ de $\mathbf{C}(S \times X)$ é n-bounded se existirem x_0 e x_1 em X com $u(s, x_1) \geq u(s, x) \geq 0 = u(s, x_0)$, para todo $u \in \mathcal{U}$, $x \in X$ e $s \in S$, e, para todo $u \in \mathcal{U}$, $\sum_{s \in S} u(s, x_1) = 1$.

Podemos agora enunciar o primeiro resultado:

Theorem 1. *As afirmações seguintes são equivalentes.*

1. *Existe um subconjunto n-bounded não-vazio $\mathcal{M}$ de $\Delta(S) \times \mathbf{C}(X)$ tal que a função $V : \mathcal{F} \to \mathcal{R}$ definida por*

$$V(f) := \min_{(\mu,u)\in\mathcal{M}} \sum_{s\in S} \mu(s)\mathbb{E}_{f(s)}(u)$$

   representa $\succsim$;

2. *$\succsim$ satisfaz os axiomas: Continuidade, Unambiguous Best, Extremal Elements Independence, Aversão a Incerteza e One Side Mixture Monotonicity.*

O Teorema 1 mostra que os axiomas discutidos nesta seção são necessários e suficientes para caracterizar a versão do modelo de múltiplas priors de Gilboa and Schmeidler (1989), para um modelo no qual o tomador de decisão possui múltiplas crenças e múltiplas utilidades. Um caso especial natural do Teorema 1 seria a versão do modelo acima na qual o tomador de decisão possui múltiplas utilidades, mas detem uma única crença (*single prior*). Tal caso especial será discutido na Seção 3. Antes, porém, daremos uma intuição da prova do Teorema 1 na Subseção 2.3, a seguir.

2.3 Esboço da prova do Teorema 1

A seguir, faremos um esboço da prova do Teorema 1. Uma prova completa será apresentada no Apêndice A.2. Daremos ênfase apenas na parte da suficiência da prova.

Primeiramente, é necessário definir a relação binária $\succcurlyeq \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ por $f \succcurlyeq g \Leftrightarrow \lambda f + (1 - \lambda)h \succsim \lambda g + (1 - \lambda)h$, para todo $f, g, h \in \mathcal{F}$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$ e mostrar que tal relação satisfaz o axioma da Continuidade. Posteriormente, mostramos que para cada $f, g, h \in \mathcal{F}$ e $\lambda \in (0, 1)$, $f \succcurlyeq g$ implica $\lambda f + (1 - \lambda)h \succcurlyeq \lambda g + (1 - \lambda)h$. E como $\succcurlyeq$ é contínua, usamos o mesmo argumento do Lema 1 de Dubra, Maccheroni, and Ok (2004) para mostrar que ela satisfaz o axioma da Independência. Então mostramos que para cada par de atos f e g em $\mathcal{F}$, se $f(s) \succcurlyeq g$ para todo $s \in S$, então $f \succcurlyeq g$. Ou seja, $\succcurlyeq$ satisfaz o postulado de *One Side Monotonicity* de Riella (2015).

O próximo passo é mostrar que existem x_0 e x_1 em X tais que, para todo $f \in \mathcal{F}$, $\delta_{x_1} \succcurlyeq f \succcurlyeq \delta_{x_0}$, e não é verdade que $\delta_{x_0} \succcurlyeq \delta_{x_1}$. Logo, como $\succcurlyeq$ satisfaz todos os postulados da 3^a afirmação de equivalência do Teorema 2 de Riella (2015), sabemos que existe um subconjunto não-vazio n-bounded $\mathcal{M}$ de $\Delta(S)\times$ $\mathbf{C}(X)$ tal que, para todo par de atos f e g em $\mathcal{F}$, $f \succcurlyeq g$ se, e somente se,

$$\sum_{s\in S}\mu(s)\mathbb{E}_{f(s)}(u) \geq \sum_{s\in S}\mu(s)\mathbb{E}_{g(s)}(u), \text{ para todo } (\mu,u)\in\mathcal{M}.$$

Fazemos então x_0, $x_1 \in X$ serem tais que $u(x_1) = 1 \geq u(x) \geq 0 = u(x_0)$ para todo $x \in X$ e todo $(\mu, u) \in \mathcal{M}$ a fim de mostrar que para todo $f \in \mathcal{F}$, existe um único α_f $\in [0,1]$ tal que $f \sim \alpha_f\delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0}$. Então notamos que, para todo par $f, g \in \mathcal{F}$, $f \succsim g \Leftrightarrow \alpha_f\delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0} \succsim \alpha_g\delta_{x_1} + (1-\alpha_g)\delta_{x_0} \Leftrightarrow \alpha_f \geq \alpha_g$. Completamos a prova mostrando que, para todo $f \in \mathcal{F}$,

$$\alpha_f = \min_{(\mu,u)\in\mathcal{M}}\sum_{s\in S}\mu(s)\mathbb{E}_{f(s)}(u)$$

3 Preferências Maxmin com uma Única Crença e Múltiplas Utilidades

Nesta seção, axiomatizamos a versão da representação do Teorema 1 na qual o tomador de decisão possui uma única crença μ e um conjunto de utilidades $\mathcal{U}$. Acontece que agora pode-se trabalhar com uma estrutura mais geral na qual o espaço de prêmios X é um espaço métrico compacto. A razão para isso é inerentemente técnica e está relacionada com os resultados relativos a representação de preferências incompletas sob incerteza com multiplicidade de crenças e utilidades.

Imporemos o seguinte postulado adicional à relação de preferências $\succsim$.

Axiom 6 (Extreme Objective and Subjective Bets Independence - EOSBI). *Sejam x^*, x_* $\in X$ tais que $\delta_{x^*} \succsim \delta_y \succsim \delta_{x_*}$ para todo $y \in X$. Fixe $\alpha \in [0,1]$ e $T \subseteq S$. Então, para todo $\lambda \in (0,1]$ e $h \in \mathcal{F}$, $\lambda[\alpha\delta_{x^*}+(1-\alpha)\delta_{x_*}]+(1-\lambda)h \succsim \lambda\delta_{x^*}T\delta_{x_*}+(1-\lambda)h \Leftrightarrow \alpha\delta_{x^*}+(1-\alpha)\delta_{x_*} \succsim$ $\delta_{x^*}T\delta_{x_*}$.*

Para compreender o axioma acima, primeiramente notamos que $\alpha\delta_{x^*} + (1-\alpha)\delta_{x_*}$ pode ser entendido como uma loteria objetiva que paga o melhor prêmio, x^*, com probabilidade α e paga o pior prêmio, x_*, com probabilidade $(1-\alpha)$. Similarmente, $\delta_{x^*}T\delta_{x_*}$ pode ser visto como uma loteria subjetiva que paga x^* se o evento T acontece e paga x_*, caso contrário. O axioma então afirma que para comparações entre esses dois tipos de loterias, o axioma de independência será válido.

3.1 Teorema de Representação

Podemos agora enunciar o seguinte resultado.

Theorem 2. *As afirmações seguintes são equivalentes.*

1. *Existem um subconjunto n-bounded não-vazio* $\mathcal{U}$ *de* $\mathbf{C}(X)$ *e uma crença* $\mu \in \Delta(S)$ *tais que a função* $V : \mathcal{F} \to \mathcal{R}$ *definida por*

$$V(f) := \inf_{u \in \mathcal{U}} \sum_{s \in S} \mu(s) \mathbb{E}_{f(s)}(u)$$

   é contínua e representa $\succsim$*;*

2. $\succsim$ *satisfaz os axiomas: Continuidade, Unambiguous Best, Extremal Elements Independence, Aversão a Incerteza, One Side Mixture Monotonicity e Extreme Objective and Subjective Bets Independence.*

Em adição ao fato de que para a representação obtida no Teorema 2 teremos uma única crença sobre o conjunto de estados da natureza, também iremos perceber algumas outras diferenças entre os Teoremas 1 e 2. Conforme mencionado acima, o Teorema 2 é válido mesmo quando X for um espaço métrico compacto arbitrário. Contudo, enquanto no Teorema 1 podemos assumir, sem perda de generalidade, que o conjunto $\mathcal{M}$ é compacto, no Teorema 2 não poderemos garantir a mesma coisa para o conjunto $\mathcal{U}$, a menos que X seja finito. Isto traz duas consequencias para o enunciado do Teorema 2. Primeiramente, no Teorema 2 não podemos garantir que a utilidade mínima de um ato f será atingida, e por isso teremos que usar o ínfimo (inf) ao invés do mínimo (min). Em segundo lugar, sem a compacidade do conjunto $\mathcal{U}$ a representação sozinha não assegura que a preordem $\succsim$ é contínua e, consequentemente, teremos que impor essa condição. Tais problemas não acontecem quando o espaço de prêmios X for finito. Formalmente, teremos o seguinte resultado:

Theorem 3. *Suponha que* X *é um conjunto finito. As afirmações seguintes são equivalentes.*

1. *Existem um subconjunto n-bounded não-vazio* $\mathcal{U}$ *de* $\mathbf{C}(X)$ *e uma crença* $\mu \in \Delta(S)$ *tais que a função* $V : \mathcal{F} \to \mathcal{R}$ *definida por*

$$V(f) := \min_{u \in \mathcal{U}} \sum_{s \in S} \mu(s) \mathbb{E}_{f(s)}(u)$$

   representa $\succsim$*;*

2. $\succsim$ *satisfaz os axiomas: Continuidade, Unambiguous Best, Extremal Elements Independence, Aversão a Incerteza, One Side Mixture Monotonicity e Extreme Objective and Subjective Bets Independence.*

Segue de imediato que nossa representação se reduz ao resultado de Maccheroni (2002) quando existir apenas um único estado da natureza.

4 Preferências Maxmin com Múltiplas Crenças e uma Única Utilidade

Podemos, também, usar o Teorema 1 para fornecer uma prova alternativa do principal resultado obtido em Gilboa and Schmeidler (1989) (quando S é finito e X é um espaço métrico compacto).

Para isso, faremos uso dos seguintes postulados adicionais:

Axiom 7 (C-Independence)**.** *Para todo $f, g \in \mathcal{F}$, $\alpha \in (0,1]$ e $p \in \Delta(X)$, $f \succsim g \Leftrightarrow \alpha f + (1-\alpha)p \succsim \alpha g + (1-\alpha)p$.*

Conforme discutimos acima, o Axioma 3 (*Extremal Elements Independence*) é simplesmente a versão do postulado acima onde p é permitido ser apenas uma loteria degenerada que paga a melhor ou a pior alternativa em X com probabilidade um. Precisaremos também do seguinte postulado padrão:

Axiom 8 (Monotonicidade)**.** *Para todo $f, g \in \mathcal{F}$, se $f(s) \succsim g(s)$ para todo $s \in S$, então $f \succsim g$.*

Podemos agora enunciar o seguinte resultado:

Theorem 4 (GS (1989))**.** *Suponha que X é um espaço métrico compacto. As afirmações seguintes são equivalentes.*

1. *Existem um subconjunto não-vazio $\mathcal{M}$ of $\Delta(S)$ e uma função $u \in \mathbf{C}(X)$ tais que a função $V : \mathcal{F} \to \mathcal{R}$ definida por*

$$V(f) := \min_{\mu \in \mathcal{M}} \sum_{s \in S} \mu(s) \mathbb{E}_{f(s)}(u)$$

   representa $\succsim$;

2. *$\succsim$ satisfaz Continuidade, C- Independence, Aversão a Incerteza e Monotonicidade.*

Proof. Iremos mostrar apenas que 2 implica 1. Como $\succsim$ satisfaz Continuidade e *C-Independence*, a restrição de $\succsim$ para atos constantes admite uma representação de Von Neumann-Morgenstern para a utilidade esperada. Ou seja, existe uma função $u \in \mathbf{C}(X)$ tal que, para todo $p, q \in \Delta(X)$, $p \succsim q \Leftrightarrow \mathbb{E}_p(u) \geq \mathbb{E}_q(u)$. Sem perda de generalidade (em razão de X ser compacto), podemos assumir que existem x^* e x_* em X tais que $u(x^*) = 1 \geq u(x) \geq 0 = u(x_*)$ para todo $x \in X$. Agora, para cada ato $f \in \mathcal{F}$, defina um ato f^u tal que, para cada $s \in S$, $f^u(s) := \mathbb{E}_{f(s)}(u)\delta_{x^*} + (1 - \mathbb{E}_{f(s)}(u))\delta_{x_*}$. Por construção, teremos que, para cada $s \in S$, $\mathbb{E}_{f(s)}(u) = \mathbb{E}_{f^u(s)}(u)$. Monotonicidade, então, implica que $f \sim f^u$.

Agora, olhemos para a restrição de $\succsim$ ao conjunto $\{f^u : f \in \mathcal{F}\}$. Notamos que essa é uma estrutura com espaço de alternativas com apenas dois elementos, x^* e x_*. Está claro, então, que sob tal restrição, *C-Independence* implica *Extremal Elements Independence*. Também é fácil de ver que Monotonicidade implica que a restrição de $\succsim$ ao conjunto $\{f^u : f \in \mathcal{F}\}$ satisfaz *Unambiguous Best*.

Finalmente, suponha que $f, g, h \in \mathcal{F}$ e $\lambda \in [0,1]$ são tais que $\lambda f(s) + (1-\lambda)h \succsim g$ para todo $s \in S$. Seja $s_* \in S$ tal que $f(s) \succsim f(s_*)$ para todo $s \in S$. Por *C-Independence* e Monotonicidade, temos que $\lambda f + (1-\lambda)h \succsim \lambda f(s_*) + (1-\lambda)h \succsim g$. Ou seja, $\succsim$ satisfaz *One Side Mixture Monotonicity*.

As observações acima mostram que a restrição de $\succsim$ ao conjunto $\{f^u : f \in \mathcal{F}\}$ satisfaz todos os postulados do Teorema 1. Por aquele teorema, podemos encontrar um conjunto de crenças $\mathcal{M} \subseteq \Delta(S)$ tal que, para todo par de atos $f, g \in \mathcal{F}$,

$$f^u \succsim g^u \Leftrightarrow \min_{\mu \in \mathcal{M}} \sum_{s \in S} \mu(s) \mathbb{E}_{f^u(s)}(u) \geq \min_{\mu \in \mathcal{M}} \sum_{s \in S} \mu(s) \mathbb{E}_{g^u(s)}(u)$$

Como $f \sim f^u$, $g \sim g^u$, $\mathbb{E}_{f(s)}(u) = \mathbb{E}_{f^u(s)}(u)$ e $\mathbb{E}_{g(s)}(u) = \mathbb{E}_{g^u(s)}(u)$ para todo $s \in S$, nós obtemos que

$$f \succsim g \Leftrightarrow \min_{\mu \in \mathcal{M}} \sum_{s \in S} \mu(s) \mathbb{E}_{f(s)}(u) \geq \min_{\mu \in \mathcal{M}} \sum_{s \in S} \mu(s) \mathbb{E}_{g(s)}(u),$$

que é exatamente a representação que estávamos procurando. $\|$

5 Funções Utilidade Dependentes do Estado

Vale a pena notar que os postulados de monotonicidade impostos nas representações que foram descritas até o presente momento foram os responsáveis pelo fato de que as funções utilidade que constam de seus respectivos teoremas fossem independentes do estado. Contudo, tem havido muitas discussões de representações de preferências nas quais as funções utilidade são dependentes do estado. No que descreveremos a seguir, iremos retirar as condições de monotonicidade e apresentar uma representação de preferências para o caso de funções utilidade dependentes do estado. Para isso, precisaremos também reforçar um pouco nosso postulado *Unambiguous Best*:

Axiom 9 (Unambiguous Best and Worst)**.** *Para todo $f, g \in \mathcal{F}$, e $\alpha \in (0,1]$, se $x \in X$ é tal que $\delta_x \succsim (\precsim)\ \delta_y$, para todo $y \in X$, então $\alpha\delta_x + (1-\alpha)g \succsim (\precsim)\ \alpha f + (1-\alpha)g$.*

Theorem 5. *As afirmações seguintes são equivalentes.*

1. *Existe um subconjunto n-bounded não-vazio $\mathcal{U}$ de $\mathbf{C}(S \times X)$ tal que a função $V : \mathcal{F} \to \mathcal{R}$ definida por*

$$V(f) := \inf_{u \in \mathcal{U}} \sum_{s \in S} \mathbb{E}_{f(s)}(u(s, \cdot))$$

é contínua e representa $\succsim$;

2. *$\succsim$ satisfaz Continuidade, Unambiguous Best and Worst, Extremal Elements Independence e Aversão a Incerteza.*

A mesma observação que foi feita para o Teorema 2 é também verdadeira para o Teorema 5. Ou seja, quando X é finito, o inf que aparece no enunciado do teorema será sempre atingido (convertendo-se em min) e também não precisamos mais ter que impor explicitamente que a função V seja contínua. Formalmente, poderemos escrever a seguinte versão do resultado acima:

Theorem 6. *Suponha que X seja um conjunto finito. As afirmações seguintes são equivalentes.*

1. *Existe um subconjunto n-bounded não-vazio $\mathcal{U}$ de $\mathbf{C}(S \times X)$ tal que a função $V : \mathcal{F} \to \mathcal{R}$ definida por*

$$V(f) := \min_{u \in \mathcal{U}} \sum_{s \in S} \mathbb{E}_{f(s)}(u(s, \cdot))$$

representa $\succsim$;

2. *$\succsim$ satisfaz Continuidade, Unambiguous Best and Worst, Extremal Elements Independence e Aversão a Incerteza.*

6 Racionalidade Objetiva e Subjetiva com Múltiplas Crenças e Utilidades

Gilboa et al. (2010) apresentam uma curiosa ligação entre o modelo de preferências Maxmin de GS (1989) e o modelo de incertezas Knightiano de Bewley (2002). Formalmente, eles trabalham com duas relações binárias, $\succsim^*$ e $\succsim$. A relação $\succsim^*$ é uma preordem incompleta que admite uma representação com múltiplas crenças (*priors*) tal como em Bewley (2002), enquanto $\succsim$ é uma preordem completa que admite uma representação como em Gilboa and Schmeidler (1989). Gilboa et al. (2010) identificam as condições que caracterizam quando os conjuntos de *priors* usados em ambas representações são os mesmos.

Iremos, agora, executar um exercício similar entre o modelo de preferências maxmin com múltiplas priors e utilidades da Seção 2 e o modelo de preferências incompletas com múltiplas priors e utilidades de Riella (2015). Trabalharemos na mesma estrutura do Teorema 1. Ou seja, imporemos a restrição de que X seja um conjunto finito.

Considere duas relações binárias $\succsim^*$ e $\succsim$ em $\mathcal{F}$. Consoante Gilboa et al. (2010), interpretamos $\succsim^*$ como representando as escolhas que são racionais em um sentido objetivo. Ou seja, o tomador de decisão pode convencer outros de que ele está correto na escolha que fez. A relação $\succsim$, por sua vez, é racional no sentido subjetivo: o tomador de decisão não pode ser convencido pelos outros de que ele não está certo na decisão que tomou. Com essa interpretação, passamos a investigar as consequencias dos seguintes postulados que relacionam $\succsim^*$e $\succsim$:

Axiom 10 (Consistência). *Para cada par de atos f e g em $\mathcal{F}$, $f \succsim^* g$ implica $f \succsim g$.*

Axiom 11 (Best and Worst Caution). *Se x^*e x_* em X são tais que $\delta_{x^*} \succsim^* \delta_x \succsim^* \delta_{x_*}$ para todo $x \in X$, então, para todo $\alpha \in [0,1]$ e $f \in \mathcal{F}$, $\alpha\delta_{x^*} + (1-\alpha)\delta_{x_*} \succsim f$ sempre que não for verdade que $f \succsim^* \alpha\delta_{x^*} + (1-\alpha)\delta_{x_*}$.*

Axiom 12 (Default to Best and Worst). *Se x^*e x_* em X são tais que $\delta_{x^*} \succsim \delta_x \succsim \delta_{x_*}$ para todo $x \in X$, então, para todo $\alpha \in [0,1]$ e $f \in \mathcal{F}$, $\alpha\delta_{x^*} + (1-\alpha)\delta_{x_*} \succ f$ sempre que não for verdade que $f \succsim^* \alpha\delta_{x^*} + (1-\alpha)\delta_{x_*}$.*

Iremos impor também as seguintes propriedades a relação de preferências $\succsim^*$:

Axiom 13 (Independência). *Para quaisquer atos f, g e h em $\mathcal{F}$, e $\lambda \in (0,1)$, $f \succsim^* g$ implica $\lambda f + (1-\lambda)h \succsim^* \lambda g + (1-\lambda)h$.*

Axiom 14 (Best and Worst). *Existem x_0 e x_1 em X tais que, para todo $x \in \mathcal{F}$, $\delta_{x_1} \succsim^* \delta_x \succsim^* \delta_{x_0}$, e $\delta_{x_1} \succ^* \delta_{x_0}$.*

Axiom 15 (One Side Monotonicity). *Para quaisquer dois atos f e g em $\mathcal{F}$, $f(s) \succsim^* g$ para todo $s \in S$ implica $f \succsim^* g$.*

Podemos agora enunciar o seguinte resultado:

Theorem 7. *As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *Existe um subconjunto não-vazio e n-bounded $\mathcal{M}$ de $\Delta(S)\times$ $\mathbf{C}(X)$ tal que, para quaisquer dois atos f e g em $\mathcal{F}$, $f \succsim^* g$ se, e somente se,*

$$\sum_{s\in S} \mu(s)\mathbb{E}_{f(s)}(u) \geq \sum_{s\in S} \mu(s)\mathbb{E}_{g(s)}(u) \text{ para todo } (\mu, u) \in \mathcal{M},$$

   e $f \succsim g$ se, e somente se,

$$\min_{(\mu,u)\in\mathcal{M}} \sum_{s\in S} \mu(s)\mathbb{E}_{f(s)}(u) \geq \min_{(\mu,u)\in\mathcal{M}} \sum_{s\in S} \mu(s)\mathbb{E}_{g(s)}(u);$$

2. *$\succsim^*$satisfaz Continuidade, Independência, Best and Worst e One Side Monotonicity, $\succsim$ é Completa e Contínua, e juntas $\succsim^*$e $\succsim$ satisfazem Consistência e Defaut to Best and Worst;*

3. *$\succsim^*$satisfaz Continuidade, Independência, Best and Worst e One Side Monotonicity, $\succsim$ é Completa, Contínua e satisfaz Extremal Elements Independence, e juntas $\succsim^*$e $\succsim$ satisfazem Consistência e Best and Worst Caution.*

7 Literatura Relacionada

Os resultados aqui apresentados estão ligados a dois tipos de literatura – trabalhos que estudam modelos associados com preferências incompletas, e os trabalhos que analisam modelos que descrevem relações de preferência completas.

Quando consideramos os modelos sob incerteza que abordam a incompletude, oriunda de uma multiplicidade de utilidades e de crenças, vamos falar primeiro no trabalho de Nau (2006), que apresenta uma axiomatização para um modelo que utiliza uma preordem como primitiva e se sustenta em um postulado chamado *Strong State-Independence*. De forma sucinta, o postulado de Nau exige que sempre que uma preferência fraca entre duas loterias arbitrárias é preservada após uma mistura objetiva com duas loterias constantes condicionais, ambas condicionadas a um evento comum não-nulo, então a mesma preferência será preservada após uma mistura com as mesmas loterias constantes condicionadas a qualquer outro evento comum. Vale a pena notar que tal axioma pode ser considerado como uma versão mais forte do axioma *Mixture Separability* de Riella (2015).

Do ponto de vista comportamental e investigando-se o modelo clássico de escolha sob incerteza de Anscombe-Aumann com preferências incompletas, Ok et al. (2012) distinguem entre a dualidade de "multiplicidade de crenças" e "multiplicidade de gostos (utilidades)". Fazem-no através da substituição da hipótese de completude pelo postulado de que os tomadores de decisão podem reduzir a incerteza subjectiva à incerteza objectiva, de modo a se obter uma representação *single-prior expected multi-utility* que pode ser vista como a "dual" do modelo de incerteza Knightiano – a chamada representação *multi-prior expected single-utility*. Ok et al. (2012) caracterizam axiomaticamente seu modelo *single-prior expected multi-utility* e mostram que, sob independência e continuidade, os dois modelos podem ser caracterizados conjuntamente por meio de uma propriedade chamada *partial completeness*.

Em consonância com o trabalho de Nau (2006), Galaabaatar and Karni (2013) estendem o modelo de utilidade esperada subjetiva de tomada de decisão sob incerteza para incluir incompleteza em razão de multiplicidade de utilidades e de crenças para apresentar axiomatizações ao modelo de representação *multi-prior expected multi-utility*, agora fazendo uso de uma ordem parcial estrita. Galaabaatar and Karni (2013) mostram que, quando uma propriedade que pode ser interpretada como um postulado de integralidade de crenças (*completeness of beliefs*) é adicionada a axiomatização de uma representação *multi-prior expected multi-utility*, pode ser obtida uma representação *single-prior expected multi-utility* .

Adicionalmente, no escopo de modelos de preferências incompletas, Riella (2015) fornece uma axiomatização da representação *multi-prior expected multi-utility* e, tal como Nau (2006), utiliza uma preordem como primitiva do modelo. Riella (2015) adiciona três propriedades para obter seu resultado: a primeira propriedade é o postulado chamado *Mixture Separability* que, conforme mencionado acima, é uma versão mais fraca e mais simples do postulado *Strong State-independence* de Nau (2006). A segunda, chamada *One Side Monotonicity*, é uma adaptação natural do axioma de Dominância de Galaabaatar and Karni 2013) para o caso de uma preordem. A terceira é o postulado *Mixture Monotonicity*. E tal como Galaabaatar and Karni (2013), Riella (2015) também mostra que se um axioma de *Complete Beliefs* é adicionado a sua axiomatização da representação *multi-prior expected* *multi-utility*, obtém-se uma representação *single-prior expected multi-utility*. Como aplicação, Riella (2015) fornece um resultado no espírito do principal resultado de Gilboa et al. (2010) para o modelo *single-prior expected multi-utility* e generaliza o principal resultado de Cerreia-Vioglio, Dillenberger, and Ortoleva (2015) para o caso de múltiplas utilidades sob incerteza.

Para modelos de preferências completas, Gilboa and Schmeidler (1989) assumem aversão a incerteza and substituem o axioma usual de independência por uma versão mais fraca e mais atraente de independência que restringe a mistura a atos constantes – o axioma chamado *C-Independence*. Assim, usando a estrutura de Anscombe and Aumann (1963), Gilboa and Schmeidler (1989) propõem uma fundamentação axiomática da regra de decisão *maxmin expected utility* caracterizando relações de preferência sobre atos que possuem uma representação numérica por um funcional em um modelo *Multi-prior expected single-utility*. Conforme mostramos acima (Seção 4), utilizamos nosso principal resultado para fornecer uma prova relativamente mais simples do resultado obtido por Gilboa and Schmeidler (1989).

Em um mundo onde só há o risco objetivo, Maccheroni (2002) propõe uma representação *maxmin multi-utility* de preferências completas sob incerteza onde é permitido ao tomador de decisão possuir múltiplas utilidades. O Teorema 2 do presente trabalho é, portanto, uma generalização da representação de Maccheroni para o mundo de atos de Anscombe-Aumann.

Em um modelo similar a Gilboa and Schmeidler (1989), na estrutura de Anscombe and Aumann (1963) para modelos de preferências completas, Maccheroni et al. (2006) caracterizam preferências para as quais existem uma única função utilidade e um índice de ambiguidade no conjunto de probabilidades sobre os estados da natureza. Tal índice de ambiguidade pretende capturar as atitudes de ambiguidade do tomador de decisão. Assim, a incerteza pode ser vista como o resultado da ambiguidade, possivelmente resultante da má qualidade da informação com a qual os tomadores de decisão fundamentam suas escolhas.

Vale a pena também mencionar o trabalho de Cerreia-Vioglio et al. (2011) relativamente a preferências com aversão a incerteza. Eles definem que uma relação de preferências é avessa a incerteza se satisfaz a três axiomas básicos: Ordem Fraca (portanto, completa e transitiva), Monotonicidade e Convexidade. O principal resultado encontrado pelos autores é uma representação para preferências com aversão a incerteza e está fundamentada nos axiomas originais de Gilboa and Schmeidler (1989), com a exceção de sua hipótese de independência entre atos incertos, que eles substituíram por um axioma mais fraco (*Risk Independence*), que se aplica apenas a atos constantes. Sua representação é, ao mesmo tempo, geral e rica em estrutura, e devido a sua generalidade, é capaz de unificar muitos casos especiais de critérios de escolha comumente utilizados em modelos de escolha sob incerteza.

Recentemente, em um trabalho ainda não publicado, Hill (2015) propõe e caracteriza, por meio de uma abordagem bastante técnica, um modelo de preferências completas sob incerteza que busca simultaneamente acomodar multiplas utilidades, múltiplas crenças e utilidades dependentes do estado. Postulados padrão e alguns pouco comuns são apresentados (tal como o axioma *Coherent calibration*) a fim de caracterizar sua representação. Ele também propõe uma nova noção de independência de estado no contexto de representações com múltiplas utilidades, que é caracterizada por monotonicidade.

8 Conclusão

As análises e resultados obtidos neste trabalho abrem espaço para uma importante questão. A questão diz respeito a axiomatização do modelo *Multi-prior expected multi-utility* quando o espaço de prêmios não for finito. Os argumentos usados na prova do Teorema 2 em Riella (2015) (que foram utilizados na prova de nosso principal resultado), e também em representações similares do modelo Multi-prior expected multi-utility que tem aparecido em uma gama de outros trabalhos são válidos apenas em espaços de dimensão finita e, até o presente momento, ainda não está claro de como se poderia generalizá-los para o caso em que o espaço de prêmios é um espaço métrico compacto, por exemplo. Vale a pena esclarecer aqui, que isso não se trata apenas de uma questão meramente técnica. Em muitas aplicações, como as que possuem espaços de prêmios que correspondem a intervalos monetários fechados (portanto, contínuo e infinito), uma tal generalização se configura bastante essencial. Logo, pesquisas futuras nessa área e uma subsequente extensão do presente trabalho parecem ser prementes.

Um outro aspecto que merece atenção é o fato de que poderá existir uma propriedade oposta ao axioma de Aversão a Incerteza que leva ao comportamento pessimista que é capturado pela regra de escolha do maxmin. Podemos definir tal propriedade oposta, ou tal comportamento otimista, como uma Inclinação a Ambiguidade, conforme definimos abaixo:

Axiom 16 (Inclinação a Ambiguidade)**.** *Para todo* $f, g \in \mathcal{F}$, *e* $\lambda \in [0,1]$, $f \sim g \Rightarrow f \succsim \lambda f + (1-\lambda)g$

Já se tem conhecido da literatura que se segue a Gilboa and Schmeidler (1989) que, conjuntamente com outros axiomas do modelo maxmin (em uma estrutura de Anscombe and Aumann (1963) para modelos com incerteza), Inclinação a Ambiguidade caracteriza uma regra de decisão otimista que pode ser associada com *maxmax expected utility.* Assim, iremos afirmar, sem apresentar uma prova, que uma conclusão similar pode ser derivada do modelo sob incerteza que propomos neste trabalho, com a *maxmax expected utility* substituindo a regra aqui obtida.

A Provas

A.1 Resultados preliminares

Para os resultados desta seção, iremos assumir que X é um espaço métrico compacto arbitrário. Começamos com a seguinte observação:

Lemma 1. *Seja* $\succsim \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ *uma preordem completa que satisfaz Aversão a Incerteza e Continuidade. Então, para todo* $f \in \mathcal{F}$, $\{g \in \mathcal{F} : g \succsim f\}$ *é um conjunto convexo.*

Proof. Suponha que $f, g, h \in \mathcal{F}$ são tais que $g \succsim f$ e $h \succsim f$. Fixe $\alpha \in (0,1)$. Suponha $f \succ \alpha g + (1- \alpha)h$. Suponha, sem perda de generalidade, que $g \succsim h$. Por Continuidade e Completeza de $\succsim$, existe $\beta \in (0,1]$ tal que $h \sim \beta g + (1- \beta)(\alpha g + (1- \alpha)h)$. Mas então, existe $\gamma > \alpha$ tal que $\gamma g + (1- \gamma)h \sim h$. Agora, Aversão a Incerteza implica que para todo $\hat{\alpha} \leq \gamma$ temos $\hat{\alpha} g + (1- \hat{\alpha})h \succsim h \succsim f$. Em particular, isso é válido para $\hat{\alpha} = \alpha$, o que é uma contradição. Concluímos que $\alpha g + (1- \alpha)h \succsim f$. ‖

Lemma 2. *Suponha que* $\succsim \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ *é uma preordem completa que satisfaz Continuidade, Extremal Elements Independence e Aversão a Incerteza. Suponha também que* x_0 *e* x_1 *em* X *são tais que* $\delta_{x_1} \succsim f \succsim \delta_{x_0}$ *para todo* $f \in \mathcal{F}$. *Então, para todo* f, $h \in \mathcal{F}$ *e* $\gamma, \lambda \in [0,1]$, $f \succsim \lambda\delta_{x_1} + (1-\lambda)\delta_{x_0}$ *implica* $\gamma f + (1-\gamma)h \succsim \gamma(\lambda\delta_{x_1} + (1-\lambda)\delta_{x_0}) + (1-\gamma)h$.

Proof. Suponha que $\succsim$, x_0 e x_1 são como no enunciado do Lema, para algum $\lambda \in [0,1]$. *Tome* $f \in \mathcal{F}$ e suponha que $f \succsim \lambda\delta_{x_1} + (1-\lambda)\delta_{x_0}$. Sabemos que existe α_f tal que $\alpha_f\delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0} \sim f \succsim \lambda\delta_{x_1} + (1-\lambda)\delta_{x_0}$. Isso implica que $\alpha_f \geq \lambda$. Agora, fixe $h \in \mathcal{F}$ e $\gamma \in [0,1]$. Note que, como

$$\delta_{x_1} \succsim \left(\frac{\lambda}{\alpha_f}\delta_{x_1} + (1-\frac{\lambda}{\alpha_f})\delta_{x_0}\right)$$

o axioma *Extremal Elements Independence* implica que

$$\begin{gathered}
\gamma\left(\alpha_f\delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0}\right) + (1-\gamma)h \\
= \\
\alpha_f\delta_{x_1} + (1-\gamma\alpha_f)\left[\frac{\gamma(1-\alpha_f)}{1-\gamma\alpha_f}\delta_{x_0} + (1-\frac{\gamma(1-\alpha_f)}{1-\gamma\alpha_f})h\right] \\
\succsim \\
\gamma\alpha_f\left(\frac{\lambda}{\alpha_f}\delta_{x_1} + (1-\frac{\lambda}{\alpha_f})\delta_{x_0}\right) + (1-\gamma\alpha_f)\left[\frac{\gamma(1-\alpha_f)}{1-\gamma\alpha_f}\delta_{x_0} + (1-\frac{\gamma(1-\alpha_f)}{1-\gamma\alpha_f})h\right] \\
= \\
\gamma(\lambda\delta_{x_1} + (1-\lambda)\delta_{x_0}) + (1-\gamma)h
\end{gathered}$$

Logo,

$$\gamma\left(\alpha_f\delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0}\right) + (1-\gamma)h \succsim \gamma(\lambda\delta_{x_1} + (1-\lambda)\delta_{x_0}) + (1-\gamma)h$$

Iremos mostrar agora que, como $f \succsim \lambda\delta_{x_1} + (1-\lambda)\delta_{x_0}$, por hipótese,

$$\gamma f + (1-\gamma)h \succsim \gamma\left(\alpha_f\delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0}\right) + (1-\gamma)h$$

para todo $\gamma \in (0,1)$ e $h \in \mathcal{F}$. Primeiramente, suponha que

$$h \sim f \sim \alpha_f \delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0}$$

Pelo axioma de Aversão a Incerteza, nós temos que

$$\gamma f + (1-\gamma)h \succsim f$$

e pelo axioma *Extremal Elements Independence*,

$$\gamma\left[\alpha_f \delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0}\right] + (1-\gamma)h \sim \alpha_f \delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0}$$

Logo, podemos escrever

$$\gamma f + (1-\gamma)h \succsim f \sim \alpha_f \delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0} \sim \gamma\left[\alpha_f \delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0}\right] + (1-\gamma)h$$

Agora, suponha que não é verdade que $h \sim f$. Também, tome qualquer $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e defina o seguinte ato:

$$y = \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)x_h + \left(\frac{1-2\beta}{1-\beta}\right)x_f$$

onde $x_h = \alpha_h \delta_{x_1} + (1-\alpha_h)\delta_{x_0} \sim h$ e $x_f = \alpha_f \delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0} \sim f$. Note que

$$\beta x_f + (1-\beta)y = \beta x_f + (1-\beta)\left[\left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)x_h + \left(\frac{1-2\beta}{1-\beta}\right)x_f\right] = \beta x_h + (1-\beta)x_f \sim \beta h + (1-\beta)x_f$$

Novamente, por *Extremal Elements Independence*, podemos escrever

$$\beta f + (1-\beta)y \sim \beta x_f + (1-\beta)y \sim \beta h + (1-\beta)x_f$$

Assim, do que aprendemos anteriormente, segue-se que

$$\gamma\left(\beta f + (1-\beta)y\right) + (1-\gamma)\left(\beta h + (1-\beta)x_f\right) \succsim \gamma\left(\beta x_f + (1-\beta)y\right) + (1-\gamma)\left(\beta h + (1-\beta)x_f\right)$$

A expressão acima é equivalente a

$$\beta\left(\gamma f + (1-\gamma)h\right) + (1-\beta)\left(\gamma y + (1-\gamma)x_f\right) \succsim \beta\left(\gamma x_f + (1-\gamma)h\right) + (1-\beta)\left(\gamma y + (1-\gamma)x_f\right)$$

Mais uma vez, por *Extremal Elements Independence*, nós temos que

$$\gamma f + (1-\gamma)h \succsim \gamma\left[\alpha_f \delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0}\right] + (1-\gamma)h \text{ for all } \gamma \in (0,1) \textit{ and } h \in \mathcal{F}$$

para todo $\gamma \in (0,1)$ e $h \in \mathcal{F}$. Logo, podemos escrever

$$\gamma f + (1-\gamma)h \succsim \gamma(\lambda\delta_{x_1} + (1-\lambda)\delta_{x_0}) + (1-\gamma)h$$

Assim, concluímos que a relação $\succsim$ satisfaz o resultado enunciado em nosso Lema. $\|$

Lemma 3. *Se $\succsim$ é uma preordem completa que satisfaz Aversão a Incerteza, Continuidade, One Side Mixture Monotonicity, Unambiguous Best e Extremal Elements Independence, então existe $x_0 \in X$ tal que, para todo $f, h \in \mathcal{F}$ e $\lambda \in [0,1]$, $\lambda f + (1-\lambda)h \succsim \lambda\delta_{x_0} + (1-\lambda)h$*

A fim de provar este Lema, necessitaremos dos seguintes *claims*:

Claim 1. *Se $\succsim$ é uma preordem completa que satisfaz Aversão a Incerteza e Continuidade, então existe $x_0 \in X$ tal que $p \succsim \delta_{x_0}$ para todo $p \in \Delta(X)$.*

Proof. Como X é finito e $\succsim$ é completa, existe $x_0 \in X$ tal que $\delta_x \succsim \delta_{x_0}$ para todo $x \in X$. Vamos mostrar por indução no tamanho do suporte das loterias que $p \succsim \delta_{x_0}$ para todo $p \in \Delta(X)$. Argumentamos que isto é verdadeiro sempre que $|supp(p)| = 1$. Suponha agora que isso é verdade sempre que $|supp(p)| = n$ e tome uma loteria q com $|supp(p)| = n+1$. É fácil verificar que podemos escrever q como $q = \alpha p + (1-\alpha)\delta_x$, onde $\alpha \in (0,1)$, $|supp(p)| = n$ e $x \in X$. Pela hipótese de indução, sabemos que $p \succsim \delta_{x_0}$ e $\delta_x \succsim \delta_{x_0}$. Como $\succsim$ é uma preordem completa que satisfaz Continuidade e Aversão a Incerteza, sabemos que os conjuntos de contorno superior de todos os elementos de $\mathcal{F}$ são convexos (pelo Claim 1). Isso então implica que $q = \alpha p + (1-\alpha)\delta_x \succsim \delta_{x_0}$. $\|$

Claim 2. *Se $\succsim$ é uma preordem completa que satisfaz One Side Mixture Monotonicity e $x_0 \in X$ é tal que $p \succsim \delta_{x_0}$ para todo $p \in \Delta(X)$, então $f \succsim \delta_{x_0}$ para todo $f \in \mathcal{F}$.*

Proof. Fixe $f, h \in \mathcal{F}$, e faça $\lambda = 1$. Note que, por hipótese, $\lambda f(s) + (1-\lambda)h \succsim \delta_{x_0}$para todo $s \in S$. Mas então, *One Side Mixture Monotonicity* implica que $f = \lambda f + (1-\lambda)h \succsim \delta_{x_0}$. $\|$

Proof of Lemma 3. Assim, consoante os *claims* acima, existe $x_0 \in X$ tal que $f \succsim \delta_{x_0}$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Como X é finito e $\succsim$ é uma preordem completa, existe $x_1 \in X$ tal que $\delta_{x_1} \succsim \delta_x$ para todo $x \in X$. Por *Unambiguous Best*, isso implica que $\lambda\delta_{x_1} + (1-\lambda)h \succsim \lambda f + (1-\lambda)h$ para todo $f, h \in \mathcal{F}$ e $\lambda \in [0,1]$. Podemos usar isso e *Extremal Elements Independence* para mostar que $\succsim$ satisfaz o Lema 1 com relação a x_1 e x_0. Como $f \succsim \delta_{x_0}$ para todo $f \in \mathcal{F}$, isso agora implica que $\lambda f + (1-\lambda)h \succsim \lambda\delta_{x_0} + (1-\lambda)h$ para todo $f, h \in \mathcal{F}$ e $\lambda \in [0,1]$. $\|$

A.2 Prova do Teorema 1

[Necessidade]. Seja $\succsim \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ uma relação binária que possui uma representação como no enunciado do teorema para algum conjunto n-bounded $\mathcal{M}$. Fixe $x_0, x_1 \in X$ tais que $u(x_1) = 1 \geq u(x) \geq 0 = u(x_0)$ para todo $x \in X$ e todo $(\mu, u) \in \mathcal{M}$. Um argumento padrão mostra que $\succsim$ é uma preordem completa e contínua que satisfaz Aversão a Incerteza. Se $x \in X$ é tal que $\delta_x \succsim \delta_y$ para todo $y \in X$, então, está claro que $u(x) = u(x_1) = 1$ para todo $(\mu, u) \in \mathcal{M}$. Isso agora implica que

$$\sum_{s \in S} \mu(s) u(x) \geq \sum_{s \in S} \mu(s) \mathbb{E}_{f(s)}(u)$$

para todo $f \in \mathcal{F}$ e $(\mu, u) \in \mathcal{M}$. É fácil ver que isso implica que $\alpha\delta_x + (1-\alpha)g \succsim \alpha f + (1-\alpha)g$

para todo $\alpha \in [0,1]$ e todo $f, g \in \mathcal{F}$. Novamente, suponha que $x \in X$ é tal que $\delta_x \succsim \delta_y$ para todo $y \in X$ ou $\delta_y \succsim \delta_x$ para todo $y \in X$. Isso implica que, ou $u(x) = 1$ para todo $(\mu, u) \in \mathcal{M}$, ou $u(x) = 0$ para todo $(\mu, u) \in \mathcal{M}$. Mas então devemos ter

$$\min_{(\mu,u) \in \mathcal{M}} \sum_{s \in S} \mu(s) \mathbb{E}_{\alpha f(s) + (1-\alpha)\delta_x}(u) = \alpha \min_{(\mu,u) \in \mathcal{M}} \sum_{s \in S} \mu(s) \mathbb{E}_{f(s)}(u) + \delta$$

onde $\delta = 1$ ou $\delta = 0$, para todo $f \in \mathcal{F}$. Isso implica que, para todo $f, g \in \mathcal{F}$ e $\alpha \in (0, 1]$,

$$f \succsim g \;\Leftrightarrow\; \alpha f + (1-\alpha)\delta_x \succsim \alpha g + (1-\alpha)\delta_x$$

Ou seja, $\succsim$ satisfaz *Extremal Elements Independence*. Agora suponha que $f, g, h \in \mathcal{F}$ e $\lambda \in [0, 1]$ são tais que $\lambda f(s) + (1-\lambda)h \succsim g$ para todo $s \in S$. Seja $(\mu^*, u^*) \in \mathcal{M}$ tal que

$$\sum_{s \in S} \mu^*(s) \mathbb{E}_{\lambda f(s) + (1-\lambda)h(s)}(u^*) = \alpha \min_{(\mu,u) \in \mathcal{M}} \sum_{s \in S} \mu(s) \mathbb{E}_{\lambda f(s) + (1-\lambda)h(s)}(u)$$

Seja $s^* \in S$ tal que $\mathbb{E}_{f(s)}(u^*) \geq \mathbb{E}_{f(s^*)}(u^*)$ para todo $s \in S$. Note que

$$\begin{aligned}
\min_{(\mu,u) \in \mathcal{M}} \sum_{s \in S} \mu(s) \mathbb{E}_{\lambda f(s) + (1-\lambda)h(s)}(u) &= \sum_{s \in S} \mu^*(s) \mathbb{E}_{\lambda f(s) + (1-\lambda)h(s)}(u^*) \\
&\geq \lambda \mathbb{E}_{f(s^*)}(u^*) + (1-\lambda) \sum_{s \in S} \mu^*(s) \mathbb{E}_{h(s)}(u^*) \\
&\geq \min_{(\mu,u) \in \mathcal{M}} \sum_{s \in S} \mu(s) \mathbb{E}_{\lambda f(s^*) + (1-\lambda)h(s)}(u) \\
&\geq \min_{(\mu,u) \in \mathcal{M}} \sum_{s \in S} \mu(s) \mathbb{E}_{g(s)}(u)
\end{aligned}$$

Ou seja, $\lambda f + (1-\lambda)h \succsim g$. Concluímos que $\succsim$ satisfaz *One Side Mixture Monotonicity.*

[Suficiência]. Suponha agora que $\succsim$ é uma preordem completa que satisfaz os cinco postulados no enunciado do teorema. Defina uma relação binária $\succcurlyeq \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ por

$$f \succcurlyeq g \;\Leftrightarrow\; \lambda f + (1-\lambda)h \succsim \lambda g + (1-\lambda)h$$

para todo $h \in \mathcal{F}$ e todo $\lambda \in [0,1]$, para todo $f, g \in \mathcal{F}$. É fácil verificar que $\succcurlyeq$ é uma preordem. Inicialmente precisaremos do seguinte *claim*:

Claim 1. *$\succcurlyeq$ satisfaz Continuidade.*

Proof of claim. Note que

$$\{(f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : f \succcurlyeq g\}$$
$$=$$
$$\{(f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : (\alpha f + (1-\alpha)h \succsim \alpha g + (1-\alpha)h, \forall \alpha \in [0,1] \text{ e } h \in \mathcal{F}\}$$
$$=$$
$$\bigcap_{(\alpha,h)\in[0,1]\times\mathcal{F}} \{(f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : (\alpha f + (1-\alpha)h \succsim \alpha g + (1-\alpha)h\}.$$

Como $\succsim$ é contínua, a expressão acima é uma interseção de conjuntos fechados. Portanto, também é fechada. Logo, $\succcurlyeq$ satisfaz Continuidade. $\|$

Agora precisamos do seguinte *claim*:

Claim 2. *Para todo $f, g, h \in \mathcal{F}$ e $\lambda \in (0,1)$, $f \succcurlyeq g$ implica $\lambda f + (1-\lambda)h \succcurlyeq \lambda g + (1-\lambda)h$.*

Proof of claim. Suponha $f \succcurlyeq g$. Fixe $\lambda \in (0,1)$ e $h \in \mathcal{F}$. Fixe também $\gamma \in (0,1)$ e $h' \in \mathcal{F}$. Note que:

$$\gamma(\lambda f + (1-\lambda)h) + (1-\gamma)h' = \gamma\lambda f + (1-\gamma\lambda)\left[\frac{1-\lambda}{1-\gamma\lambda}h + \frac{1-\gamma}{1-\gamma\lambda}h'\right]$$

Similarmente,

$$\gamma(\lambda g + (1-\lambda)h) + (1-\gamma)h' = \gamma\lambda g + (1-\gamma\lambda)\left[\frac{1-\lambda}{1-\gamma\lambda}h + \frac{1-\gamma}{1-\gamma\lambda}h'\right]$$

Como $f \succcurlyeq g$, temos

$$\gamma\lambda f + (1-\gamma\lambda)\left[\frac{1-\lambda}{1-\gamma\lambda}h + \frac{1-\gamma}{1-\gamma\lambda}h'\right] \succsim \gamma\lambda g + (1-\gamma\lambda)\left[\frac{1-\lambda}{1-\gamma\lambda}h + \frac{1-\gamma}{1-\gamma\lambda}h'\right]$$

Logo,

$$\gamma(\lambda f + (1-\lambda)h) + (1-\gamma)h' \succsim \gamma(\lambda g + (1-\lambda)h) + (1-\gamma)h'$$

Como γ e h' foram arbitrariamente escolhidos, temos que $\lambda f + (1-\lambda)h \succcurlyeq \lambda g + (1-\lambda)h$. $\|$

Como $\succcurlyeq$ é contínua, podemos utilizar agora o mesmo argumento do Lema 1 de Dubra et al. (2004) para mostrar que $\succcurlyeq$ satisfaz o axioma de Independência. Ou seja, para todo $f, g, h \in \mathcal{F}$ e $\lambda \in (0,1)$, $f \succcurlyeq g \Leftrightarrow \lambda f + (1-\lambda)h \succcurlyeq \lambda g + (1-\lambda)h$.

Prosseguimos com a seguinte observação:

Claim 3. *Para todo par de atos f e g em $\mathcal{F}$, se $f(s) \succcurlyeq g$ para todo $s \in S$, então $f \succcurlyeq g$.*

Proof of claim. Suponha que f e g em $\mathcal{F}$ são tais que $f(s) \succcurlyeq g$ para todo $s \in S$. Fixe $\lambda \in [0,1]$ e $h \in \mathcal{F}$. Pela definição de $\succcurlyeq$, sabemos que $\lambda f(s) + (1-\lambda)h \succsim \lambda g + (1-\lambda)h$ para todo $s \in S$. Como $\succsim$ satisfaz *One Side Mixture Monotonicity*, isso implica que $\lambda f + (1-\lambda)h \succsim \lambda g + (1-\lambda)h$. Como λ e h foram arbitrariamente escolhidos, temos que $f \succcurlyeq g$. ‖

O *Claim* 3 mostra que $\succcurlyeq$ satisfaz o postulado *One Side Monotonicity* de Riella (2015). O Claim 4 abaixo irá mostrar que $\succcurlyeq$ também satisfaz o postulado *Best and Worst* daquele mesmo *paper*.

Claim 4. *Existem x_0 e x_1 em X tais que, para qualquer $f \in \mathcal{F}$, $\delta_{x_1} \succcurlyeq f \succcurlyeq \delta_{x_0}$, e não é verdade que $\delta_{x_0} \succcurlyeq \delta_{x_1}$.*

Proof of claim. Primeiro, seja $x_1 \in X$ tal que $\delta_{x_1} \succsim \delta_x$ para todo $x \in X$. Pelo postulado *Unambiguous Best*, isso implica que $\delta_{x_1} \succcurlyeq f$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Pelo Lema 3 acima, existe $x_0 \in X$ tal que $f \succcurlyeq \delta_{x_0}$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Como $\succsim \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, não podemos ter $\delta_{x_0} \succcurlyeq \delta_{x_1}$. ‖

Os *claims* acima mostram que $\succcurlyeq$ satisfaz todos os postulados descritos na 3^a afirmação de equivalência do Teorema 2 em Riella (2015). Por aquele teorema, sabemos que existe um subconjunto n-bounded não-vazio $\mathcal{M}$ de $\Delta(S)\times$ $\mathbf{C}(X)$ tal que, para todo par de atos f e g em $\mathcal{F}$, $f \succcurlyeq g$ se, e somente se,

$$\sum_{s\in S} \mu(s)\mathbb{E}_{f(s)}(u) \geq \sum_{s\in S} \mu(s)\mathbb{E}_{g(s)}(u), \text{ para todo } (\mu, u) \in \mathcal{M}$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\mathcal{M}$ é um subconjunto fechado (e portanto, compacto) de $\Delta(S)\times$ $\mathbf{C}(X)$. Sejam x_0, $x_1 \in X$ tais que $u(x_1) = 1 \geq u(x) \geq 0 = u(x_0)$ para todo $x \in X$ e todo $(\mu, u) \in \mathcal{M}$. Pela representação de $\succcurlyeq$, está claro que, para todo $\alpha, \beta \in [0,1]$,

$$\alpha\delta_{x_1} + (1-\alpha)\delta_{x_0} \succcurlyeq \beta\delta_{x_1} + (1-\beta)\delta_{x_0}$$

se, e somente se, $\alpha \geq \beta$. Pelo Lema 1 e pela definição de $\succcurlyeq$, teremos que, para todo $\alpha, \beta \in [0,1]$,

$$\alpha\delta_{x_1} + (1-\alpha)\delta_{x_0} \succsim \beta\delta_{x_1} + (1-\beta)\delta_{x_0}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\alpha\delta_{x_1} + (1-\alpha)\delta_{x_0} \succcurlyeq \beta\delta_{x_1} + (1-\beta)\delta_{x_0}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\alpha \geq \beta$$

Como $\succsim$ é contínua e completa, o argumento padrão baseado na conexidade do intervalo $[0,1]$ e a observação acima implicam que, para todo $f \in \mathcal{F}$, existe um único $\alpha_f \in [0,1]$ tal que $f \sim \alpha_f\delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0}$.

Agora, fixe qualquer $f \in \mathcal{F}$. Pelo Lema 2, sabemos que $f \succcurlyeq \alpha_f \delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0}$. Pela representação de $\succcurlyeq$, isso implica que

$$\min_{(\mu,u)\in\mathcal{M}} \sum_{s\in S} \mu(s)\mathbb{E}_{f(s)}(u) \geq \alpha_f$$

Suponha que $\min\limits_{(\mu,u)\in\mathcal{M}} \sum_{s\in S} \mu(s)\mathbb{E}_{f(s)}(u) > \alpha_f$ e fixe $\alpha \in (\alpha_f, \min\limits_{(\mu,u)\in\mathcal{M}} \sum_{s\in S} \mu(s)\mathbb{E}_{f(s)}(u))$. Pela representação de $\succcurlyeq$, isso implica que $f \succcurlyeq \alpha\delta_{x_1} + (1-\alpha)\delta_{x_0}$, o que implica que $f \succsim \alpha\delta_{x_1} + (1-\alpha)\delta_{x_0}$. Como também temos que $\alpha\delta_{x_1} + (1-\alpha)\delta_{x_0} > \alpha_f\delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0} \sim f$, isso é uma contradição. Concluímos que, para todo $f \in \mathcal{F}$,

$$\min_{(\mu,u)\in\mathcal{M}} \sum_{s\in S} \mu(s)\mathbb{E}_{f(s)}(u) = \alpha_f$$

Para terminar a prova, note que, para todo par $f, g \in \mathcal{F}$,

$$f \succsim g \Leftrightarrow \alpha_f\delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0} \succsim \alpha_g\delta_{x_1} + (1-\alpha_g)\delta_{x_0} \Leftrightarrow \alpha_f \geq \alpha_g$$

A.3 Prova do Teorema 2

[Necessidade]. Suponha que $\succsim$ é uma preordem completa que admite uma representação $(\Pi, \mathcal{U})$ como no enunciado do teorema. Defina a função V, também como no enunciado do teorema. A hipótese de que V é contínua garante que $\succsim$ é contínua. Os argumentos que mostram que $\succsim$ satisfaz os axiomas *Unambiguous Best*, *Extremal Elements Independence*, Aversão a Incerteza e *One Side Mixture Monotonicity* são similares aos utilizados na prova do Teorema 1. Para ver que $\succsim$ satisfaz *Extreme Objective and Subjective Bets Independence* (EOSBI), fixe $\alpha \in [0,1]$, $T \subseteq S$, $h \in \mathcal{F}$ e $\lambda \in (0,1]$. Como $u(x^*) = 1$ e $u(x_*) = 0$ para todo $u \in \mathcal{U}$, está claro que

$$\lambda[\alpha\delta_{x^*} + (1-\alpha)\delta_{x_*}] + (1-\lambda)h \succsim \lambda\delta_{x^*}T\delta_{x_*} + (1-\lambda)h \Leftrightarrow \alpha \geq \Pi(T) \Leftrightarrow \alpha\delta_{x^*} + (1-\alpha)\delta_{x_*} \succsim \delta_{x^*}T\delta_{x_*}$$

Ou seja, $\succsim$ satisfaz EOSBI.

[Suficiência]. Agora suponha que $\succsim$ é uma preordem completa que satisfaz todos os postulados descritos no enunciado do teorema. Defina a relação binária $\succcurlyeq$ tal como na prova do Teorema 1. Os mesmos argumentos usados na prova daquele teorema mostram que $\succcurlyeq$ satisfaz todos os postulados do enunciado do Teorema 4 de Riella (2015), exceto *Complete Beliefs*. Agora fixe $\alpha \in [0,1]$ e $T \subseteq S$. Suponha, primeiramente, que $\alpha\delta_{x^*} + (1-\alpha)\delta_{x_*} \succsim \delta_{x^*}T\delta_{x_*}$. Pelo axioma EOSBI, devemos ter $\lambda[\alpha\delta_{x^*} + (1-\alpha)\delta_{x_*}] + (1-\lambda)h \succsim \lambda\delta_{x^*}T\delta_{x_*} + (1-\lambda)h$ para todo $\lambda \in (0,1]$ e $h \in \mathcal{F}$. Ou seja, $\alpha\delta_{x^*} + (1-\alpha)\delta_{x_*} \succcurlyeq \delta_{x^*}T\delta_{x_*}$. Agora, suponha que $\delta_{x^*}T\delta_{x_*} \succsim \alpha\delta_{x^*} + (1-\alpha)\delta_{x_*}$ e não é verdade que $\alpha\delta_{x^*} + (1-\alpha)\delta_{x_*} \succsim \delta_{x^*}T\delta_{x_*}$. Pelo axioma EOSBI, isso pode acontecer se, e somente se, para todo $\lambda \in (0,1]$ e $h \in \mathcal{F}$, tivermos $\lambda\delta_{x^*}T\delta_{x_*} + (1-\lambda)h \succsim \lambda[\alpha\delta_{x^*} + (1-\alpha)\delta_{x_*}] + (1-\lambda)h$, mas não $\lambda[\alpha\delta_{x^*} + (1-\alpha)\delta_{x_*}] + (1-\lambda)h \succsim$

$\lambda\delta_{x^*}T\delta_{x_*} + (1-\lambda)h$. Isso agora implica que $\delta_{x^*}T\delta_{x_*} \succcurlyeq \alpha\delta_{x^*} + (1-\alpha)\delta_{x_*}$. Isso mostra que $\succcurlyeq$ satisfaz os axiomas de *Complete Beliefs* descritos em Riella (2015) para apostas objetivas e subjetivas que pagam apenas δ_{x^*} e δ_{x_*}. Pela Observação 3 (*Remark 3*) de Riella (2015), $\succcurlyeq$ admite uma representação na forma do Teorema 4 daquele *paper*. Ou seja, existem um subconjunto n-bounded não-vazio $\mathcal{U} \subseteq \mathbf{C}(X)$ e uma crença $\mu \in \Delta(S)$ tais que, para todo par de atos f e g em $\mathcal{F}$,

$$f \succcurlyeq g \Leftrightarrow \sum_{s\in S} \mu(s)\mathbb{E}_{f(s)}(u) \geq \sum_{s\in S} \mu(s)\mathbb{E}_{g(s)}(u) \quad \forall\, u \in \mathcal{U}$$

Agora fixe x_0 e x_1 em X tais que $u(x_1) = 1 \geq u(x) \geq 0 = u(x_0)$ para todo $u \in \mathcal{U}$ e $x \in X$. Seguindo os mesmos passos da prova do Teorema 1, podemos mostrar que, para cada $f \in \mathcal{F}$, existe um único $\alpha_f \in [0,1]$ tal que $f \sim \alpha_f\delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0}$. Pelo Lema 2, sabemos que, para todo $f \in \mathcal{F}$, $f \succcurlyeq \alpha_f\delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0}$. Pela representação da relação $\succcurlyeq$, obtemos que

$$\inf_{u\in\mathcal{U}} \sum_{s\in S} \mu(s)\mathbb{E}_{f(s)}(u) \geq \alpha_f$$

O mesmo argumento usado na prova do Teorema 1 mostra que a expressão acima deve valer com igualdade. Ou seja, para todo $f \in \mathcal{F}$, teremos

$$\inf_{u\in\mathcal{U}} \sum_{s\in S} \mu(s)\mathbb{E}_{f(s)}(u) = \alpha_f$$

Isso mostra que a função $V : \mathcal{F} \to \mathcal{R}$ definida por

$$V(f) := \inf_{u\in\mathcal{U}} \sum_{s\in S} \mu(s)\mathbb{E}_{f(s)}(u)$$

todo $f \in \mathcal{F}$, representa $\succsim$. Falta mostrar que V é contínua. Para ver isso, tome qualquer sequência convergente $(f^m) \in \mathcal{F}^\infty$. Seja $f := \lim f^m$. Precisamos mostrar que $V(f^m) \longrightarrow V(f)$. Como $(V(f^m))$ é limitada, tudo o que precisamos mostrar é que toda subsequência convergente de $V(f^m)$ converge para $V(f)$. Tome uma subsequência convergente, $(V(f^{m_k}))$ de $(V(f^m))$, então. Para cada k, seja $\alpha^k := V(f^{m_k})$, e seja $\alpha := \lim V(f^{m_k})$. Pela definição de V, sabemos que $f^{m_k} \sim \alpha^k\delta_{x_1} + (1-\alpha^k)\delta_{x_0}$, para todo k. Como $f^{m_k} \longrightarrow f$, $\alpha^k \longrightarrow \alpha$, e $\succsim$ é contínua, isso implica que $f \sim \alpha\delta_{x_1} + (1-\alpha)\delta_{x_0}$. Concluímos que $\alpha = V(f)$. Como $V(f^{m_k})$ foi arbitrariamente escolhido, isso mostra que V é contínua. $\square$

A.4 Prova do Teorema 3

Está claro que o conjunto $\mathcal{U}$ que aparece bo Teorema 2 pode ser escolhido fechado, sem perda de generalidade. Quando X é finito, isso faz com que $\mathcal{U}$ seja compacto. Portanto, o inf no enunciado do teorema é sempre atingido e V é automaticamente contínua. $\square$

A.5 Prova do Teorema 5

[Necessidade]. Suponha que $\succsim$ é uma preordem completa que admite uma representação por um conjunto n-bounded $\mathcal{U}$ de funções dependentes do estado como no enunciado do teorema. Como no caso do Teorema 2, a hipótese de que a função V é contínua, conforme definida no enunciado do teorema, garante que a relação $\succsim$ é contínua. Além disso, os argumentos que mostram que $\succsim$ satisfaz os outros postulados do Teorema 5 são, novamente, bastante similares aos utilizados na prova do Teorema 1.

[Suficiência]. Suponha agora que $\succsim$ é uma preodem completa que satisfaz todos os postulados do enunciado do teorema. Defina a relação $\succcurlyeq$ como nas provas dos Teoremas 1 and 2. Os mesmos argumentos usados na prova do Teorema 1 mostram que $\succcurlyeq$ satisfaz todos os postulados do Teorema 1 de Riella (2015). Consoante aquele teorema, sabemos que existe um subconjunto não-vazio $\mathcal{U} \subseteq \mathbf{C}(S \times X)$ tal que, para cada par de atos f, $g \in \mathcal{F}$, $f \succcurlyeq g$ se, e somente se,

$$\sum_{s \in S} \mathbb{E}_{f(s)}(u(s,.)) \geq \sum_{s \in S} \mathbb{E}_{g(s)}(u(s,.)) \text{ para todo } u \in \mathcal{U}. \tag{1}$$

Sabemos que existem x^* e x_* em X tal que $\delta_{x^*} \succcurlyeq f \succcurlyeq \delta_{x_*}$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Em particular, isso implica que, para toda alternativa $y \in X$ e estado $s \in S$, $\delta_{x^*} \succcurlyeq \delta_{y\{s\}}\delta_{x^*}$ e $\delta_{y\{s\}}\delta_{x_*} \succcurlyeq \delta_{x_*}$. Por (1), devemos ter que, para todo $y \in X$, $s \in S$ e $u \in \mathcal{U}$, $u(s,x^*) \geq u(s,y) \geq u(s,x_*)$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que o conjunto $\mathcal{U}$ não possui funções constantes. Portanto, podemos normalizar cada função $u \in \mathcal{U}$ de modo que $u(s,x^*) \geq u(s,y) \geq u(s,x_*) = 0$, para todo $y \in X$ e $s \in S$, e $\sum_{s \in S} u(s,x^*) = 1$. Ou seja, podemos escolher o conjunto $\mathcal{U}$ para ser n-bounded. Depois dessa observação, os mesmos passos utilizados na prova do Teorema 2 nos fornece a desejada representação. $\square$

A.6 Prova do Teorema 6

O argumento é o mesmo usado na prova do Teorema 3. $\square$

A.7 Prova do Teorema 7

É facilmente verificado que 1 implica 2 e 3. Primeiro mostramos que 2 implica 1. Suponha que 2 seja satisfeito. Pelo Teorema 2 em Riella (2015), existe um subconjunto não-vazio, fechado e n-bounded $\mathcal{M}$ de $\Delta(S)\times$ $\mathbf{C}(X)$ tal que, para qualquer par de atos f e g em $\mathcal{F}$, $f \succsim^* g$ se, e somente se,

$$\sum_{s \in S} \mu(s)\mathbb{E}_{f(s)}(u) \geq \sum_{s \in S} \mu(s)\mathbb{E}_{g(s)}(u) \text{ para todo } (\mu, u) \in \mathcal{M}.$$

Agora, sejam x_0 e x_1 em X tais que $\delta_{x_1} \succsim^* \delta_x \succsim^* \delta_{x_0}$ para todo $x \in X$. Pela representação de $\succsim^*$, está claro que $\delta_{x_1} \succsim^* f \succsim^* \delta_{x_0}$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Pela Consistência, temos que $\delta_{x_1} \succsim f \succsim \delta_{x_0}$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Para cada $f \in \mathcal{F}$, defina $\alpha_f \in [0,1]$ por $\alpha_f := \max\{\alpha \in [0,1] : f \succsim \alpha\delta_{x_1} + (1-\alpha)\delta_{x_0}\}$. Como $\succsim$ é contínua, para todo $f \in \mathcal{F}$, α_f está bem definido e $f \succsim \alpha_f\delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0}$. Além disso, como $\succsim$ é completa, está claro que, para quaisquer dois atos f e g em $\mathcal{F}$, $f \succsim g$ se, e somente se, $\alpha_f \geq \alpha_g$. Nós iremos obter a desejada representação se pudermos mostrar que, para cada ato $f \in \mathcal{F}$,

$$\alpha_f = \min_{(\mu,u)\in\mathcal{M}} \sum_{s\in S} \mu(s)\mathbb{E}_{f(s)}(u)$$

Para isso, primeiro notamos que, como $f \succsim \alpha_f\delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0}$, *Defaut to Best and Worst* implica que $f \succsim^* \alpha_f\delta_{x_1} + (1-\alpha_f)\delta_{x_0}$. Pela representação de $\succsim^*$, devemos ter

$$\min_{(\mu,u)\in\mathcal{M}} \sum_{s\in S} \mu(s)\mathbb{E}_{f(s)}(u) \geq \alpha_f.$$

Suponha que existe $\alpha \in [0,1]$ tal que

$$\min_{(\mu,u)\in\mathcal{M}} \sum_{s\in S} \mu(s)\mathbb{E}_{f(s)}(u) \geq \alpha > \alpha_f.$$

Isso implica que $f \succsim^* \alpha\delta_{x_1} + (1-\alpha)\delta_{x_0}$ e, pela Consistência, temos que $f \succsim \alpha$. Isso é uma contradição à definição de α_f. Nós concluímos que

$$\min_{(\mu,u)\in\mathcal{M}} \sum_{s\in S} \mu(s)\mathbb{E}_{f(s)}(u) = \alpha_f,$$

o que nos dá a desejada representação. Ou seja, 1 é satisfeita.

Vamos mostrar agora que 3 implica 2. Suponha que 3 seja satisfeito. Precisamos apenas mostrar que $\succsim^*$ e $\succsim$ satisfazem *Defaut to Best and Worst*. Para isso, fixe $f \in \mathcal{F}$ e $\alpha \in [0,1]$ e suponha que não é verdade que $f \succsim^* \alpha\delta_{x_1} + (1-\alpha)\delta_{x_0}$. Para isso acontecer, está claro que devemos ter $\alpha > 0$. Como $\succsim^*$é contínua, deve existir $\hat{\alpha} \in (0,\alpha)$ tal que não é verdade que $f \succsim^*$ $\hat{\alpha}\delta_{x_1} + (1-\hat{\alpha})\delta_{x_0}$. Por *Best and Worst Caution*, obtemos que $\hat{\alpha}\delta_{x_1} + (1-\hat{\alpha})\delta_{x_0} \succsim f$. Porém, um simples argumento baseado no fato de que $\succsim$ satisfaz *Extremal Elements Independence* mostra que $\alpha\delta_{x_1} + (1-\alpha)\delta_{x_0} \succ \hat{\alpha}\delta_{x_1} + (1-\hat{\alpha})\delta_{x_0}$. Portanto, $\alpha\delta_{x_1} + (1-\alpha)\delta_{x_0} \succ f$ e então concluímos que $\succsim^*$ e $\succsim$ satisfazem *Default to Best and Worst.* □

References

Anscombe, F. J. and R. J. Aumann (1963). A definition of subjective probability. *Annals of Mathematical Statistics 34*(1), 199–205.

Bewley, T. F. (2002). Knightian uncertainty theory: part i. *Decisions in Economics and Finance 25*(2), 79–110.

Cerreia-Vioglio, S., D. Dillenberger, and P. Ortoleva (2015). Cautious expected utility and the certainty effect. *Econometrica 83*(2), 693–728.

Cerreia-Vioglio, S., F. Maccheroni, M. Marinacci, and L. Montrucchio (2011). Uncertainty averse preferences. *Journal of Economic Theory 146*, 1275–1330.

Dillenberger, D. (2010). Preferences for one-shot resolution of uncertainty and allais-type behavior. *Econometrica 78*(6), 1973–2004.

Dubra, J., F. Maccheroni, and E. A. Ok (2004). Expected utility theory without the completeness axiom. *Journal of Economic Theory 115*, 118–133.

Ellsberg, D. (1961). Risk, ambiguity, and the savage axioms. *Quarterly Journal of Economics 75*(4), 643–669.

Fishburn, P. C. (1970). *Utility Theory for Decision Making*. New York: Wiley.

Galaabaatar, T. and E. Karni (2013). Subjective expected utility with incomplete preferences. *Econometrica 81*(1), 255–284.

García del Amo, A. and D. Ríos Insua (2002). A note on an open problem in the foundation of statistics. *Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. 96*(1), 55–61.

Gilboa, I., F. Maccheroni, M. Marinacci, and D. Schmeidler (2010). Objective and subjective rationality in a multiple prior model. *Econometrica 78*(2), 755–770.

Gilboa, I. and D. Schmeidler (1989). Maxmim expected utility with non-unique prior. *Journal of Mathematical Economics 18*(2), 141–153.

Hill, B. (2015). Uncertainty aversion, multi utility representations and state independence of utility. *mimeo*, HEC Paris.

Maccheroni, F. (2002). Maxmin under risk. *Economic Theory 19*, 823–831.

Maccheroni, F., M. Marinacci, and A. Rustichini (2006). Ambiguity aversion, robustness, and the variational representation of preferences. *Econometrica 74*(6), 1447 – 1498.

Nau, R. (2006). The shape of incomplete preferences. *Annals of Statistics 34*(5), 2430–2448.

Ok, E. A., P. Ortoleva, and G. Riella (2012). Incomplete preferences under uncertainty: Indecisiveness in beliefs versus tastes. *Econometrica 80*(4), 1791–1808.

Riella, G. (2015). On the representation of incomplete preferences under uncertainty with indecisiveness in tastes and beliefs. *Economic Theory 58*(3), 571–600.

Seidenfeld, T., M. J. Schervish, and J. B. Kadane (1995). A representation of partially ordered preferences. *Annals of Statistics 23*(6), 2168–2217.