Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Involuções Coloridas em Anéis Graduados Primitivos

por

Keidna Cristiane Oliveira Souza

Orientadora: Professora Doutora Irina Sviridova

Brasília

2016

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Involuções Coloridas em Anéis Graduados Primitivos

por

Keidna Cristiane Oliveira Souza

Orientadora: Professora Doutora Irina Sviridova

Brasília

2016

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Involuções Coloridas em Anéis Primitivos Graduados

por

Keidna Cristiane Oliveira Souza

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

DOUTORA EM MATEMÁTICA

20 de maio de 2016

Comissão Examinadora:

Irina Sviridova

Profa. Dra. Irina Sviridova - Orientadora (MAT-UnB)

José Antônio O. Freitas

Prof. Dr. José Antônio O. de Freitas (MAT-UnB)

Prof. Dr. Norai Romeu Rocco (MAT-UnB)

Prof. Dr. Ivan Chestakov (IME-USP)

Dimas José Gonçalves

Prof. Dr. Dimas José Gonçalves (UFSCar)

*A autora foi bolsista CAPES e CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Dedido este trabalho aos meus pais,
Benicio e Ana;
Aos meus irmãos,
Wipson e Kelle;
À minha avó,
Coraci.
Sem vocês eu nada seria.
A vocês o meu amor e reconhecimento eterno...

Agradecimentos

A Deus por me proporcionar realizar mais este sonho. Reconheço, em todo o percurso, a sua mão grandiosa sobre minha vida.

Ao meu suporte, à minha família, pelo apoio, referência, carinho e compreensão. Especialmente, aos meus pais, Ana Carvalho e Benicio Teixeira, à minha avó, Coraci Rodrigues, e aos meus irmãos, Kelle Oliveira e Wipson ney Oliveira, pelo amor incondicional, estando sempre ao meu lado nos bons e maus momentos da minha vida. A vocês, qualquer conjunto de palavras não seria suficiente para expressar meu carinho, amor e gratidão.

À minha querida orientadora, Irina Sviridova, meus sinceros agradecimentos por ter acreditado em mim e ter me proporcionado tantas oportunidades. Pela confiança, pelo cuidado, pela preocupação, pela paciência em responder minhas inúmeras dúvidas, pelo incentivo e pela dedicação durante todo esse tempo. Levarei comigo seu exemplo de profissionalismo. Vou ser para sempre grata.

Aos professores da banca examinadora Ivan Chestakov, Dimas José Gonçalves, Norai Romeu Rocco e José Antônio O. de Freitas pela leitura atenta e pelas valiosas correções que enriqueceram este trabalho.

À UFT-Campus de Arraias, agradeço a cada professor que contribuiu, de uma forma ou de outra, para a minha formação. Em especial, aos professores Adriano Rodrigues e Eudes Costa, pelo incentivo.

Aos meus amigos do Departamento de Matemática-UnB, pelas inúmeras experiências compartilhadas, apoio, incentivo e amizade. Especialmente, Otto, José Carlos, Ilana, Kaliana, Edimilson, Emerson, Mayer, Daiane, Lais, Sunamita, Regiane, Valter, Alex, Bruno, Ricardo, Camila, Gérsica e Alan. Obrigada por terem tornado esse período mais especial.

Aos meus amigos, Anádria, Gláucia, Fernanda, Maria, Jakelyne, Alexsandra, Flávia e

Pedro Júnior, pelas valiosas e confortantes palavras nos momentos difíceis, pela amizade e carinho de anos. Sem vocês, a vida seria um deserto de alegrias.

A todos os meus tios, em especial a Levi, Clea, Cleuza, Claudio, Selma, Adelia, Luciana e Valder, pelo apoio e incentivo.

Aos meus queridos primos, pelos momentos de ímpar descontração.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática-UnB, pelo auxílio na minha formação profissional e na realização deste trabalho.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para que esse momento fosse possível, meu muito obrigada!

Resumo

Seja G um grupo abeliano finito e seja F um corpo. Suponha que $\mathcal{R}$ seja um anel (F-álgebra) G-graduado e σ um 2-cociclo anti-simétrico. Neste trabalho, caracterizamos anéis (F-álgebras) G-graduados primitivos à direita com um ideal à direita graduado minimal em termos de pares bilineares não degenerados graduados. Se G é um grupo de ordem p, onde p é um número primo, a caracterização de anéis (F-álgebras) G-graduados primitivos à direita com um ideal à direita graduado minimal e uma σ-involução está relacionada com uma forma sesquilinear não degenerada hermitiana ou anti-hermitiana graduada. Além de generalizarem o Teorema de Kaplansky que trata da classificação de involuções em anéis primitivos, esses resultados também generalizam os resultados de Racine, em [25], e Bahturin, Bresăr e Kochetov, em [1], que classificam superinvoluções em superanéis primitivos e involuções graduadas em anéis graduados primitivos, respectivamente. Ainda no caso em que G é um grupo de ordem prima p, obtemos corolários relacionados com uma descrição de σ-involuções em álgebras graduadas simples. Em particular, obtemos descrição de σ-involuções no anel $\mathbb{Z}_3$-graduado $\mathcal{R} = M_n(\mathcal{D})$ de matrizes $n \times n$ sobre um anel $\mathbb{Z}_3$-graduado de divisão $\mathcal{D}$ no caso de algumas classes de graduações elementares em $\mathcal{R}$.

Palavras-chave: Anel graduado primitivo, σ-involução, 2-cociclo, σ-adjunta e anel graduado de divisão.

Abstract

Let G be a finite abelian group and F a field. Suppose that $\mathcal{R}$ is a G-graded ring (or F-algebra) and σ is an anti-symmetric 2-cocycle. In this work, we characterize right primitive G-graded rings (F-algebras) with a minimal graded right ideal in terms of nondegenerate graded bilinear pairs. If G is a group of order p, where p is a prime number, the characterization of a right primitive G-graded ring with a minimal graded right ideal and a σ-involution is related to a nondegenerate ϵ-hermitian sesquilinear graded form. This generalises the theorem of Kaplansky about the classification of involutions in primitive rings, and similar results of Racine, in [25], for superinvolutions, and of Bahturin, Bresǎr, and Kochetov, in [1], for graded involutions. Also, when G is a group of a prime order p, we obtain some corollaries about description of σ-involutions in simple graded algebras. In particular, we describe σ-involutions in the $\mathbb{Z}_3$-graded ring $\mathcal{R} = M_n(\mathcal{D})$ of $n \times n$ matrices over a $\mathbb{Z}_3$-graded division ring $\mathcal{D}$, for some classes of elementary gradings of $\mathcal{R}$.

Keywords: Graded primitive ring, σ-involution, 2-cocycle, σ-adjoint and graded division ring.

Sumário

Introdução

Seja G um grupo abeliano finito e seja F um corpo. Consideramos anéis associativos e F-álgebras associativas, ambos de característica diferente de 2. Um anel (F-álgebra) $\mathcal{R}$ é G-graduado se é escrito como soma direta de subgrupos aditivos abelianos (F-subespaços) $\mathcal{R} = \bigoplus_{\alpha \in G} \mathcal{R}_\alpha$ tais que $\mathcal{R}_\alpha \mathcal{R}_\beta \subseteq \mathcal{R}_{\alpha+\beta}$ para todos $\alpha, \beta \in G$.

Seja $\sigma : G \times G \longrightarrow Z$ um 2-cociclo tal que $\sigma(\alpha, \beta) = \sigma(\beta, \alpha)^{-1}$ para todos $\alpha, \beta \in G$, onde $Z = \{1, -1\}$ se $\mathcal{R}$ é um anel G-graduado e $Z = F^\times$ se $\mathcal{R}$ é uma F-álgebra G-graduada. Uma σ-involução em um anel G-graduado $\mathcal{R}$ é uma aplicação $\mathbb{Z}$-linear graduada de grau neutro $*_\sigma : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ que satisfaz as relações

$$r^{*_\sigma *_\sigma} = r \qquad \text{e} \qquad (r_\alpha r_\beta)^{*_\sigma} = \sigma(\alpha, \beta) r_\beta^{*_\sigma} r_\alpha^{*_\sigma}$$

para quaisquer $r \in \mathcal{R}, r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha, r_\beta \in \mathcal{R}_\beta$ e $\alpha, \beta \in G$. De maneira análoga, uma σ-involução em uma F-álgebra G-graduada $\mathcal{A}$ é uma aplicação F-linear graduada de grau neutro $*_\sigma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que

$$a^{*_\sigma *_\sigma} = a \qquad \text{e} \qquad (a_\alpha a_\beta)^{*_\sigma} = \sigma(\alpha, \beta) a_\beta^{*_\sigma} a_\alpha^{*_\sigma}$$

para quaisquer $a \in \mathcal{A}, a_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha, a_\beta \in \mathcal{A}_\beta$ e $\alpha, \beta \in G$.

Se σ é um bicaracter anti-simétrico, dizemos que $*_\sigma$ é uma involução colorida. Se $\sigma(\alpha, \beta) = 1$ para todos $\alpha, \beta \in G$, então $*_\sigma$ é uma involução graduada. Se $G = \mathbb{Z}_2$ e $\sigma(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (-1)^{\alpha\beta}$ para $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in G$, então $*_\sigma$ é uma superinvolução. Por fim, se $\sigma(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (-1)^{\alpha\beta}$, com $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{Z}_3$, $*_\sigma$ é uma $\mathbb{Z}_3$-involução.

Entendemos por anel graduado primitivo à direita um anel graduado $\mathcal{R}$ tal que existe um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado M irredutível e fiel. Vários autores contribuíram com o estudo da teoria estrutural de anéis primitivos com um ideal minimal unilateral. Informações sobre o assunto podem ser encontradas, por exemplo, em [19], [22], [26]. Em particular, uma demonstração do Teorema de Kaplansky, que caracteriza involuções em anéis primitivos à direita com um ideal à direita minimal em termos de formas não degeneradas hermitianas e alternadas [[22], Theorem 4.6.8]. Vale mencionar que uma das aplicações do Teorema de Kaplansky é a descrição de involuções do primeiro tipo na F-álgebra $M_n(F)$ das matrizes $n \times n$ sobre um corpo F algebricamente fechado de característica 0.

Motivado pelo que é apresentado em [16], [19], [22] e [26], Racine em [25] mostra resultados estruturais análogos para superanéis. Em [12], Villa prova a existência de superinvoluções em superálgebras primitivas. Já em [25], Racine também apresenta dois teoremas: [Theorem 6] e [Theorem 7]. Nestes, Racine classifica anéis primitivos com um superideal unilateral minimal e com superinvolução em termos de aplicações bi-aditivas não degeneradas graduadas e em termos de formas hermitianas e anti-hermitianas não degeneradas graduadas. E mais, quando o corpo F é algebricamente fechado e de característica diferente de 2, Bahturin, M. Tvalavadze e T. Tvalavadze descrevem as superálgebras simples de dimensão finita com superinvolução [3].

Jaber em [18] estuda a existência de $\mathbb{Z}_3$-involuções na álgebra $\mathbb{Z}_3$-graduada $\mathcal{A} = M_{p+q+p}(\mathcal{D})$, onde $\mathcal{D}$ é uma álgebra de divisão.

Sejam G um grupo abeliano finito e F um corpo algebricamente fechado de característica diferente de 2. Em [1], Bahturin, Bresǎr e Kochetov, com o objetivo de classificar, a menos de isomorfismo, todas as G-graduações da F-álgebra de Lie finitária simples de transformações lineares (linear especial, ortogonal e simplética) em espaço vetorial de dimensão infinita sobre um corpo F, provaram uma caracterização para F-álgebras (ou anéis) G-graduadas primitivas à esquerda com um ideal à esquerda G-graduado minimal e involução graduada, similar ao apresentado em [25]. Em [27], Sviridova descreve todas as álgebras $*_{gr}$-graduadas simples de dimensão finita, onde $G = \mathbb{Z}_q$, q é um número primo ou $q = 4$, F é um corpo algebricamente fechado de característica zero e $*_{gr}$ é uma involução graduada. Também para involuções graduadas Bahturin, Shestakov e Zaicev, em [4], e Bahturin e Zaicev, em [5], descrevem as involuções graduadas em $M_n(F)$ quando F é um corpo algebricamente fechado de característica diferente de 2. Já Bahturin e Giambruno em [2] descrevem G-graduação em $M_n(F)$ admitindo uma involução graduada, também para F um corpo algebricamente fechado e de característica diferente de 2.

Bergen e Grzeszczuk mostram em [9] como álgebras de Jordan coloridas simples surgem naturalmente de álgebras associativas graduadas simples e de álgebras associativas graduadas simples com involução colorida.

Nós podemos observar que casos particulares de σ-involuções (involuções graduadas, superinvoluções, involuções coloridas, etc) aparecem em vários estudos. Motivados por essa teoria desenvolvida em [1], [12], [22] e [25], nosso trabalho seguirá nessa linha. Estudamos a estrutura de anéis G-graduados primitivos à direita e F-álgebras G-graduadas primitivas à direita com um ideal à direita G-graduado minimal. Trabalhamos com dois tipos de aplicações graduadas: par bilinear não degenerado graduado e forma sesquilinear não degenerada graduada. Definimos a σ-adjunta de um elemento homogêneo do anel graduado de endomorfismos de um módulo graduado.

O objetivo deste trabalho é classificar anéis (F-álgebras) G-graduados primitivos à direita com um ideal à direita G-graduado minimal em termos de pares bilineares não degenerados graduados e anéis graduados primitivos à direita com um ideal à direita graduado minimal e com σ-involução em termos de formas sesquilineares não degeneradas graduadas, como feito em [22]. No primeiro teorema exigimos como hipótese que G seja um grupo abeliano finito e no segundo teorema que G seja um grupo de ordem p, onde p é um número primo.

Sejam $\mathcal{D}$ um anel (F-álgebra) G-graduado de divisão, V um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda G-graduado e W um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à direita G-graduado, $\langle -, - \rangle_\nu$ um par bilinear não degenerado graduado associado ao par de espaços duais com torção $V \times W$ e $*_\sigma$ a σ-adjunta associada a $\langle -, - \rangle_\nu$ (veja **Definição 3.2.1** e **Definição 3.2.3**). Denotamos por $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$ o subanel (F-subálgebra) graduado de $End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)$ de todos os operadores que possuem σ-adjunta e $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ o ideal bilateral graduado de $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$ de todos os operadores que possuem posto finito e possuem σ-adjunta. As classificações que obtivemos estão relacionadas com $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$ e $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$. A saber, provamos os:

Teorema 3.4.2. *Seja G um grupo abeliano finito. Se $\mathcal{R}$ é um anel (F-álgebra) G-graduado primitivo à direita com um ideal à direita graduado minimal e σ é um 2-cociclo anti-simétrico tal que $\sigma(\alpha, -\alpha)^2 = 1$ para todo $\alpha \in G$, então existe um par de espaços duais com torção ${}_{\mathcal{D}}V$ e $W_{\mathcal{D}}$ tal que*

$$\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V),$$

onde $\mathcal{D}$ é um anel (F-álgebra) G-graduado de divisão. Reciprocamente, dado um par de espaços duais com torção V e W sobre um anel G-graduado de divisão $\mathcal{D}$, qualquer anel G-graduado $\mathcal{R}$ satisfazendo

$$\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$$

é graduado primitivo à direita e $\mathcal{R}$ contém um ideal à direita graduado minimal. Além disso, $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ é o único ideal graduado minimal de $\mathcal{R}$.

Teorema 4.3.1. *Sejam G um grupo cíclico de ordem prima e $\mathcal{R}$ um anel (F-álgebra) G-graduado. Então, $\mathcal{R}$ é um anel graduado primitivo à direita com um ideal à direita* *graduado minimal e uma σ-involução $\star_\sigma$ se, e somente se, existe um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado V tal que:*

a) *$V \times V$ é um par sesquilinear à esquerda com torção;*

b) *$End_{\mathcal{R}}^{gr}(V)$ possui uma σ-involução;*

c) *$\star_\sigma$ é a σ-adjunta associada a uma forma sesquilinear hermitiana ou anti-hermitiana não degenerada graduada;*

d) *$\mathcal{F}_V^{gr} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr}$* e *$\mathcal{R}$ é invariante pela ação de $\star_\sigma$.*

O **Teorema 3.4.2** generaliza os teoremas [[25], Theorem 6] e [[1], Theorem 3.3], os quais os dois últimos se realizam em $\sigma(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (-1)^{\alpha\beta}$ para todos $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{Z}_2$ e $\sigma(\alpha, \beta) = 1$ para todos $\alpha, \beta \in G$, respectivamente. No **Teorema 3.4.2** caracterizamos anéis graduados primitivos à direita com um ideal à direita graduado minimal em termos de pares bilineares não degenerados graduados. É importante ressaltar que nesse teorema não pedimos que exista uma σ-involução na F-álgebra (anel) G-graduada de divisão, pois se $\mathcal{D}$ é uma F-álgebra G-graduada de divisão pode existir um 2-cociclo σ tal que $\mathcal{D}$ não admite uma σ-involução. Assim é o caso da álgebra de divisão $\mathbb{Z}_2$-graduada $F[\mathbb{Z}_2]$, visto que $F[\mathbb{Z}_2]$ não admite superinvoluções (veja [14]).

Já o **Teorema 4.3.1** consiste em uma generalização do teorema [[25], Theorem 7]. Nesse caracterizamos anéis graduados primitivos à direita com um ideal à direita graduado minimal e σ-involuções em termos de formas sesquilineares ϵ-hermitianas não degeneradas graduadas. Mostramos ainda que o anel (F-álgebra) graduado de divisão $\mathcal{D}$ admite uma σ-involução.

Várias consequências e aplicações são obtidas de todos esses resultados.

Para o aprofundamento dessas discussões, dividimos este trabalho em quatro capítulos. O **Capítulo 1**, intitulado "Preliminares"possui seis seções, onde apresentamos os resultados básicos relacionados à teoria de anéis associativos graduados e à teoria de álgebras associativas graduadas por grupos abelianos finitos utilizados no decorrer de todo texto. O **Capítulo 2** trata dos resultados antecedentes exibidos em [1], [9], [12], [18], [22], [25] e [27]. No terceiro capítulo definimos σ-involução, par de espaços duais graduados com torção e provamos o **Teorema 3.4.2**. Por fim, no **Capítulo 4**, verificamos que a estrutura apresentada na **Seção 3.2** continua válida para uma forma sesquilinear ϵ-hermitiana não degenerada graduada e, além disso, provamos o **Teorema 4.3.1**. São feitas, então, algumas consequências e exemplos. Em particular, entre as consequências, obtemos uma descrição de σ-involuções em F-álgebras graduadas simples de dimensão finita para G-graduações por um grupo cíclico de ordem prima. Provamos que todas as σ-involuções nessas F-álgebras são induzidas por adjunção em respeito de uma forma sesquilinear ϵ-hermitiana não degenerada graduada em um espaço graduado de dimensão finita. O trabalho termina com "Considerações finais", onde levantamos algumas questões, por exemplo, hipótese mais fracas para o grupo G.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e alguns resultados relacionados à teoria de anéis associativos graduados e à teoria de álgebras associativas graduadas por grupos abelianos finitos, os quais fazem parte da fundamentação teórica necessária às discussões deste trabalho. Esse aparato teórico pode ser encontrado em [6], [7], [8], [11] e [23]. Em todo trabalho, G é um grupo abeliano aditivo finito.

1.1 Anéis Graduados

O objetivo principal aqui é apresentar definições e resultados básicos sobre anéis graduados.

Seja $(\mathcal{R}, +, .)$ um anel associativo e seja $(G, +)$ um grupo abeliano finito com elemento neutro 0.

Definição 1.1.1. *Um anel $\mathcal{R}$ é chamado G-graduado se $\mathcal{R}$ pode ser escrito como soma direta de subgrupos aditivos $\mathcal{R}_\alpha$*

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{\alpha \in G} \mathcal{R}_\alpha \tag{1.1}$$

tais que $\mathcal{R}_\alpha \mathcal{R}_\beta \subseteq \mathcal{R}_{\alpha+\beta}$ para todos $\alpha, \beta \in G$.

Em particular, se $G = \mathbb{Z}_2$, dizemos que $\mathcal{R}$ é um superanel.

A graduação é dita não trivial se $\mathcal{R}_\alpha \neq (0)$ para algum $0 \neq \alpha \in G$.

Os elementos do conjunto $h(\mathcal{R}) = \bigcup_{\alpha \in G} \mathcal{R}_\alpha$ são chamados de elementos homogêneos do anel $\mathcal{R}$. Um elemento não nulo $r \in \mathcal{R}_\alpha$ é denominado elemento homogêneo de grau α.

Qualquer elemento não nulo $r \in \mathcal{R}$ é expresso de forma única como soma finita de elementos homogêneos: $r = \sum_{\alpha \in G} r_\alpha$, onde $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$. Os elementos não nulos r_α na decomposição são chamados de componentes homogêneas de r.

Se $\mathcal{X}$ é um subanel não nulo de $\mathcal{R}$, então escrevemos $\mathcal{X}_\alpha = \mathcal{X} \cap \mathcal{R}_\alpha$ para $\alpha \in G$. Dizemos que $\mathcal{X}$ é um subanel graduado de $\mathcal{R}$ se $\mathcal{X} = \bigoplus_{\alpha \in G} \mathcal{X}_\alpha$. Analogamente, obtemos as notações e noções de ideal à esquerda graduado , ideal à direita graduado e ideal bilateral graduado quando $\mathcal{X}$ é, respectivamente, um ideal à esquerda, um ideal à direita e um ideal bilateral. Observamos que um subanel (ou ideal) é graduado se, e somente se, ele é gerado como anel (ideal) por elementos homogêneos. No caso em que $\mathcal{I}$ é um ideal bilateral graduado de $\mathcal{R}$, o quociente $\mathcal{R}/I$ é um anel graduado com graduação dada por: $(\mathcal{R}/I)_\alpha := (\mathcal{R}_\alpha + I)/I$ e $\mathcal{R}/I = \bigoplus_{\alpha \in G} (\mathcal{R}/I)_\alpha$.

Exemplo 1.1.1. *Sejam R um anel associativo e $S = R[x_1, \ldots, x_d]$ o anel de polinômios comutativos e associativos nas variáveis $x_1, \ldots, x_d$. Dado uma d-upla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d$, o anel S é munido com a seguinte $\mathbb{Z}$-graduação:*

$$S = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} S_n,$$

onde

$$S_n = \left\{ \sum_{(m_1, \ldots, m_d) = \bar{m} \in \mathbb{Z}^d} r_{\bar{m}} x_1^{m_1} \ldots x_d^{m_d} \mid r_{\bar{m}} \in R,\ \alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_d m_d = n \right\}.$$

Observamos que no exemplo acima G é um grupo infinito.

De posse da definição de anel graduado, temos os seguintes resultados bem conhecidos na literatura (veja [[7], Proposition 1] e [[23], Proposition 1.1.1]).

Proposição 1.1.1. *Seja $\mathcal{R} = \bigoplus_{\alpha \in G} \mathcal{R}_\alpha$ um anel G-graduado unitário. Então, valem as seguintes propriedades:*

a) *$1 \in \mathcal{R}_0$ e $\mathcal{R}_0$ é um subanel de $\mathcal{R}$;*

b) *se r^{-1} é o inverso do elemento homogêneo $r \in \mathcal{R}_\alpha$, então $r^{-1} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$.*

Demonstração. **a)** Como $\mathcal{R}_0\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}_0$ e $\mathcal{R}_0$ é um subgrupo de $\mathcal{R}$, basta mostrar que $1 \in \mathcal{R}_0$. Seja $1 = \sum_{\alpha \in G} r_\alpha$ a decomposição de 1 com $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$. Então, para todo $s_\beta \in \mathcal{R}_\beta$, temos que

$$s_\beta = s_\beta 1 = \sum_{\alpha \in G} s_\beta r_\alpha \quad \text{e} \quad s_\beta r_\alpha \in \mathcal{R}_{\alpha+\beta}.$$

Consequentemente, $s_\beta r_\alpha = 0$ para todo $\alpha \neq 0$. Assim, para qualquer $s \in \mathcal{R}$, $sr_\alpha = 0$ para todo $\alpha \neq 0$. Em particular, para $s = 1$, obtemos $r_\alpha = 0$ para qualquer $\alpha \neq 0$. Portanto, $1 = r_0 \in \mathcal{R}_0$ e, com isso, concluímos que $\mathcal{R}_0$ é um subanel de $\mathcal{R}$.

b) Assuma que $r \in \mathcal{R}_\lambda$ é invertível. Se $r^{-1} = \sum_{\alpha \in G} (r^{-1})_\alpha$, onde $(r^{-1})_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$, então $1 = rr^{-1} = \sum_{\alpha \in G} r(r^{-1})_\alpha$. Já que $1 \in \mathcal{R}_0$ e $r(r^{-1})_\alpha \in \mathcal{R}_{\lambda+\alpha}$, temos que $r(r^{-1})_\alpha = 0$ para todo $\alpha \neq -\lambda$. Como r é invertível, segue que $(r^{-1})_\alpha \neq 0$ para $\alpha = -\lambda$. Portanto, $r^{-1} = (r^{-1})_{-\lambda} \in \mathcal{R}_{-\lambda}$. E isto finaliza a prova da proposição.

$\square$

Vale ressaltar que $\mathcal{R}_\alpha$ é um $\mathcal{R}_0$-bimódulo para todo $\alpha \in G$.

Definição 1.1.2. *Um anel unitário G-graduado é denominado um anel G-graduado de divisão se todos os seus elementos homogêneos não nulos são invertíveis.*

Se $\mathcal{R}$ é um anel graduado de divisão, claramente $\mathcal{R}_0$ é um anel de divisão.

Definição 1.1.3. *Seja $\mathcal{R}$ um anel G-graduado. O anel oposto G-graduado de $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^{op_{gr}}$, é o grupo aditivo graduado $\mathcal{R}$ com multiplicação dada por*

$$r_\alpha \circ_{op_{gr}} r_\beta := r_\beta r_\alpha \tag{1.2}$$

para quaisquer $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha, r_\beta \in \mathcal{R}_\beta$ e $\alpha, \beta \in G$.

Finalizamos esta seção com a definição de isomorfismo de anéis graduados, que é similar à definição de isomorfismo de anéis.

Definição 1.1.4. *Sejam $\mathcal{R} = \bigoplus_{\alpha \in G} \mathcal{R}_\alpha$ e $\mathcal{B} = \bigoplus_{\alpha \in G} \mathcal{B}_\alpha$ dois anéis G-graduados. Um homomorfismo (isomorfismo) de anéis $\phi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{B}$ é chamado de homomorfismo (isomorfismo) de anéis graduados se ϕ preserva a estrutura graduada, isto é, $\phi(\mathcal{R}_\alpha) \subseteq \mathcal{B}_\alpha$ para todo $\alpha \in G$.*

Sejam $\mathcal{R} = \bigoplus_{\alpha \in G} \mathcal{R}_\alpha$ e $\mathcal{B} = \bigoplus_{\alpha \in G} \mathcal{B}_\alpha$ anéis G-graduados. Uma aplicação aditiva de anéis $\varphi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{B}$ é chamada de graduada de grau (homogêneo) β se $\varphi(\mathcal{R}_\alpha) \subseteq \mathcal{B}_{\alpha+\beta}$ para todo $\alpha \in G$.

Em particular, um isomorfismo (homomorfismo) de anéis graduados é um isomorfismo (homomorfismo) graduado de grau 0 (neutro) de anéis graduados.

1.2 Módulos Graduados

A seguir, apresentaremos propriedades básicas de um importante objeto de estudo, a saber, módulos graduados. O estudo de tal objeto motivou inúmeros avanços na teoria de álgebras graduadas, tal como a classificação de álgebras graduadas simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado.

Seja $\mathcal{R}$ um anel G-graduado. Considere $(M,+)$ um grupo abeliano.

Definição 1.2.1. *Um $\mathcal{R}$-módulo à direita M é chamado G-graduado se*

$$M = \bigoplus_{\alpha \in G} M_\alpha,$$

onde $\{M_\alpha \mid \alpha \in G\}$ é uma família de subgrupos aditivos do grupo abeliano $(M,+)$ e $m_\alpha r_\beta \in M_{\alpha+\beta}$ para quaisquer $r_\beta \in \mathcal{R}_\beta,\ m_\alpha \in M_\alpha$ e $\alpha, \beta \in G$.

Os elementos do conjunto $h(M) = \bigcup_{\alpha \in G} M_\alpha$ são chamados elementos homogêneos do módulo M, e qualquer elemento não nulo $m = \sum_{\alpha \in G} m_\alpha$ é decomposto de forma única como soma finita de elementos homogêneos m_α.

Um $\mathcal{R}$-submódulo N de um $\mathcal{R}$-módulo G-graduado M é G-graduado se

$$N = \bigoplus_{\alpha \in G} N_\alpha,$$

onde $N_\alpha = N \cap M_\alpha$, ou equivalentemente, para cada $n \in N$, todas as suas componentes homogêneas também pertencem a N. Em particular, um ideal à direita G-graduado é um $\mathcal{R}$-módulo graduado.

Um $\mathcal{R}$-módulo graduado M induz uma graduação no $\mathcal{R}$-módulo quociente M/N, onde N é um submódulo graduado de M. Tal graduação é dada por: $(M/N)_\alpha := \{m+N \mid m \in M_\alpha\}$. Analogamente, podemos definir $\mathcal{R}$-módulo à esquerda G-graduado e $\mathcal{R}$-bimódulo G-graduado. Em geral, todo módulo à direita graduado M contém pelo menos dois submódulos graduados, M e $\{0\}$, os quais são chamados triviais.

Seja M um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado. É bem conhecido que o anulador à direita de um $\mathcal{R}$-módulo M, $Ann^r_{\mathcal{R}}(M) = \{r \in \mathcal{R} \mid mr = 0,\ \forall\ m \in M\}$, é um ideal bilateral de $\mathcal{R}$. O lema abaixo mostra que $Ann^r_{\mathcal{R}}(M)$ herda a estrutura graduada de $\mathcal{R}$.

Lema 1.2.1. *Seja M um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado. Então, $Ann^r_{\mathcal{R}}(M)$ é um ideal bilateral graduado de $\mathcal{R}$.*

Demonstração. Para cada $\alpha \in G$, considere $Ann^r_{\mathcal{R}}(M)_\alpha = \{r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha \mid mr_\alpha = 0,\ \forall\ m \in M\}$. Primeiramente observamos que $Ann^r_{\mathcal{R}}(M)_\alpha$ é um subgrupo de $Ann^r_{\mathcal{R}}(M)$ para todo $\alpha \in G$. Por outro lado, se $r \in Ann^r_{\mathcal{R}}(M)_\alpha \cap \sum_{\alpha \neq \beta \in G} Ann^r_{\mathcal{R}}(M)_\beta$, então $r \in \mathcal{R}_\alpha \cap \sum_{\alpha \neq \beta \in G} \mathcal{R}_\beta$. Como $\mathcal{R}_\alpha \cap \sum_{\alpha \neq \beta \in G} \mathcal{R}_\beta = (0)$, temos que $r = 0$. Com isso, a soma $\sum_{\alpha \in G} Ann^r_{\mathcal{R}}(M)_\alpha$ é direta. Seja $r \in Ann^r_{\mathcal{R}}(M)$, então $r = \sum_{\alpha \in G} r_\alpha$, onde $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ para todo $\alpha \in G$, e $mr = 0$ para todo $m \in M$. Em particular, $0 = m_\beta r = \sum_{\alpha \in G} m_\beta r_\alpha$ para todo $\beta \in G$. Assim, como M é graduado, temos que $m_\beta r_\alpha = 0$ para todo $\alpha \in G$. Logo, $Ann^r_{\mathcal{R}}(M) \subseteq \bigoplus_{\alpha \in G} Ann^r_{\mathcal{R}}(M)_\alpha$. E, portanto, $Ann^r_{\mathcal{R}}(M) = \bigoplus_{\alpha \in G} Ann^r_{\mathcal{R}}(M)_\alpha$. □

Analogamente, o anulador à esquerda de um $\mathcal{R}$-módulo à esquerda J, $Ann^l_{\mathcal{R}}(J) = \{r \in \mathcal{R} \mid rj = 0,\ \forall\ j \in J\}$, é um ideal bilateral graduado de $\mathcal{R}$.

Em particular, para um anel graduado $\mathcal{R}$ podemos considerar o anulador à esquerda $Ann^l_{\mathcal{R}}({}_{\mathcal{R}}\mathcal{R})$ e o anulador à direita $Ann^r_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})$. Ambos são ideais bilaterais graduados de $\mathcal{R}$.

Definição 1.2.2. *Um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado M é dito fiel se $Ann^r_{\mathcal{R}}(M) = (0)$.*

Definição 1.2.3. *Um $\mathcal{R}$-módulo graduado M é dito irredutível se 0 e M são seus únicos $\mathcal{R}$-submódulos graduados.*

Seja K um conjunto de elementos homogêneos do $\mathcal{R}$-módulo à direita G-graduado M. Então, $K = \bigcup_{\beta \in G} K_\beta$, onde K_β é o subconjunto de K de todos os elementos homogêneos de grau $\beta \in G$. Seja I um ideal à direita graduado de $\mathcal{R}$. Denotamos $KI = \{\sum_{l,j}^{m_l,n_j} k_j i_l \mid k_j \in K, i_l \in I, m_l, n_j \in \mathbb{N}\ \}$.

Lema 1.2.2. *Sejam M um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado e I um ideal à direita graduado de $\mathcal{R}$. Se $K \subseteq M$ é um conjunto de elementos homogêneos ou um submódulo graduado, então KI é um $\mathcal{R}$-submódulo graduado de M.*

Demonstração. De fato, como I é um ideal à direita graduado e $K \subseteq M$, temos que $KI \subseteq M$ e KI é um $\mathcal{R}$-submódulo de M. Vamos mostrar que é graduado. Considere o seguinte subgrupo de M

$$(KI)_\tau = \sum_{\{\alpha,\beta \in G \mid \alpha+\beta=\tau\}} K_\alpha I_\beta.$$

Como M é graduado e $(KI)_\tau \subseteq M_\tau$, temos que $(KI)_\tau \cap \sum_{\tau\neq\gamma\in G}(KI)_\gamma = (0)$. Assim, a soma $\sum_{\tau\in G}(KI)_\tau$ é direta. Ademais, é fácil ver que $KI = \bigoplus_{\tau\in G}(KI)_\tau$. Agora, dados $m_\alpha \in K, r_\beta \in I_\beta$ e $r_\tau \in \mathcal{R}_\tau$, temos

$$(m_\alpha r_\beta)r_\tau = m_\alpha(r_\beta r_\tau),$$

já que $m_\alpha \in M$ e M é um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado. Como I é um ideal à direita graduado, temos que $r_\beta r_\tau \in I_{\beta+\tau}$. Logo, KI é um submódulo à direita graduado de M. $\square$

Em particular, aplicando o lema anterior para $K = \{m_\alpha\} \in M_\alpha$, obtemos que $m_\alpha I$ é um $\mathcal{R}$-submódulo à direita graduado de M.

1.3 Álgebras Graduadas

Nesta seção, recordaremos alguns conceitos básicos sobre F-álgebras G-graduadas, onde F é um corpo e G é um grupo abeliano finito. As definições que serão apresentadas aqui são análogas as apresentadas na **Seção 1.1**. Vale lembrar que, em particular, uma F-álgebra é um anel.

Definição 1.3.1. *Dizemos que uma F-álgebra $\mathcal{A}$ é G-graduada se $\mathcal{A}$ pode ser escrita como a soma direta de F-subespaços*

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha\in G}\mathcal{A}_\alpha \tag{1.3}$$

tais que para quaisquer $\alpha, \beta \in G$, $\mathcal{A}_\alpha\mathcal{A}_\beta \subseteq \mathcal{A}_{\alpha+\beta}$.

Diremos que $\mathcal{A}$ é uma superálgebra se $G = \mathbb{Z}_2$.

Uma vez que na definição acima temos uma soma direta de espaços vetoriais, todo elemento de $\mathcal{A}$ pode ser escrito de forma única como soma finita de elementos homogêneos.

Um subespaço $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ é graduado ou homogêneo se $\mathcal{B} = \bigoplus_{\alpha\in G}(\mathcal{B}\cap\mathcal{A}_\alpha)$. Em outras palavras, $\mathcal{B}$ é graduado se, para qualquer $b = \sum_{\alpha\in G} b_\alpha \in B$, tem-se necessariamente $b_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ para todo $\alpha \in G$. De forma análoga, podemos definir subálgebra graduada e ideais graduados.

Observe que para F-álgebras G-graduadas, anéis graduados e módulos graduados é suficiente definir a operação de multiplicação apenas nos elementos homogêneos.

Definição 1.3.2. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas F-álgebras G-graduadas. Dizemos que um homomorfismo de F-álgebras $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é um homomorfismo de F-álgebras G-graduadas (ou homomorfismo graduado de grau neutro) se, para todo $\alpha \in G$, temos $\varphi(\mathcal{A}_\alpha) \subseteq \mathcal{B}_\alpha$. Se φ for também bijetivo, dizemos que φ é um isomorfismo (ou isomorfismo graduado de grau neutro) de F-álgebras G-graduadas e $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são F-álgebras G-graduadas isomorfas.*

Em geral, vamos considerar homomofismos de anéis (F-álgebras) graduados de grau neutro.

Definição 1.3.3. *Uma F-álgebra G-graduada $\mathcal{A}$ é dita simples se $\mathcal{A}^2 \neq (0)$ e $\mathcal{A}$ não contém ideais bilaterais G-graduados não triviais.*

Como ilustração das definições acima, apresentaremos dois exemplos clássicos de álgebras graduadas. Estas álgebras são de grande importância no estudo das álgebras graduadas simples.

Exemplo 1.3.1. [[6], *Example* 2.1] *Seja $\mathcal{R} = M_n(F)$ a álgebra de matrizes $n \times n$ sobre um corpo F e seja G um grupo abeliano. Fixe uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in G^n$ de elementos de G. Então, a n-upla α define uma G-graduação em $\mathcal{R}$ da seguinte maneira: Sejam $e_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$, matrizes unitárias da álgebra $\mathcal{R}$. Para cada $\beta \in G$, considere o conjunto*

$$\mathcal{R}_\beta = Span\{e_{ij} \mid \alpha_j - \alpha_i = \beta\}.$$

Verifica-se imediatamente que $\mathcal{R}_\tau \mathcal{R}_\beta \subseteq \mathcal{R}_{\tau+\beta}$ para quaisquer $\tau, \beta \in G$ e, portanto,

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{\tau \in G} \mathcal{R}_\beta$$

é uma G-graduação. Esta G-graduação é chamada de graduação elementar definida pela n-upla α.

Exemplo 1.3.2. [[6], *Example* 2.4] *Seja $\mathcal{R} = F[G]$ a álgebra de grupo de G sobre um corpo F, ou seja, $\mathcal{R} = Span\{r_\alpha \mid \alpha \in G\}$ com o produto $r_\alpha r_\beta = r_{\alpha+\beta}$, onde $\{r_\alpha \mid \alpha \in G\}$ é uma base de $\mathcal{R}$. A álgebra $\mathcal{R}$ é equipada com a G-graduação canônica $\mathcal{R} = \bigoplus_{\alpha \in G} \mathcal{R}_\alpha$, onde $\mathcal{R}_\alpha = Span\{r_\alpha\}$ é um espaço vetorial de dimensão 1 e todos os elementos homogêneos não nulos são invertíveis.*

Um fato conhecido é que, em geral, uma F-álgebra graduada simples não é necessariamente simples como F-álgebra. Por exemplo, a F-álgebra $F[G]$ de grupo de G sobre F, onde G é um grupo não trivial, não é simples, mas é simples como F-álgebra graduada com graduação canônica apresentada no **Exemplo 1.3.2** (veja [6]).

Definição 1.3.4. *Uma F-álgebra G-graduada é chamada de álgebra G-graduada de divisão se é unitária e todo elemento homogêneo não nulo possui inverso.*

Observamos que se $\mathcal{D}$ é uma F-álgebra graduada de divisão, então $\mathcal{D}_0$ é uma F-álgebra de divisão.

Claramente, toda F-álgebra graduada de divisão é uma F-álgebra graduada simples. Porém, a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, a F-álgebra de matrizes com graduação elementar é graduada simples, mas não é uma F-álgebra graduada de divisão.

Atentamos ainda que F-álgebras graduadas de divisão e anéis graduados de divisão não contêm ideais unilaterais graduados não triviais.

Definição 1.3.5. *Um módulo à direita (à esquerda) graduado sobre um anel (F-álgebra) graduado de divisão é chamado espaço vetorial à direita (à esquerda) graduado.*

Sejam $\mathcal{D}$ um anel (F-álgebra) graduado de divisão e M um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à direita. Um conjunto $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} \subseteq h(M)$ é $\mathcal{D}$-dependente (ou linearmente dependente sobre $\mathcal{D}$) se existem elementos $d_1, \ldots, d_n \in h(\mathcal{D})$, não todos nulos, tais que $\sum_{i=1}^{k} m_i d_i = 0$. Por [10], [24] e [28], todos os resultados padrões de álgebra linear, como independência linear e conjunto gerador, continuam valendo para espaços vetoriais sobre anéis (F-álgebras) graduados de divisão, pois são módulos livres, veja [[24], Proposition 4.6.1] e [[28], Proposition 2.5]. Mostram também que todas as bases homogêneas de M têm a mesma cardinalidade e, portanto, faz sentido falar de dimensão do módulo à direita graduado M, a qual denotamos por $dim_{\mathcal{D}}(M)$. Como $\mathcal{D}_0$ é um anel (F-álgebra) de divisão, temos que cada M_α, para todo $\alpha \in G$, é um $\mathcal{D}_0$-espaço vetorial à direita. É fácil ver que um conjunto $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} \subseteq M_\alpha$ é $\mathcal{D}$-dependente se, e somente se, $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ é $\mathcal{D}_0$-dependente. Năstăsescu e Oystaeyen mostraram em [24] que se $\mathcal{D}$ é um anel graduado de divisão, então as seguintes condições são equivalentes:

1) M é finitamente gerado sobre $\mathcal{D}$;

2) M tem base finita sobre $\mathcal{D}$;

3) M tem uma base homogênea finita sobre $\mathcal{D}$.

1.4 Homomorfismos Graduados

Nesta seção, $\mathcal{R}$ é um anel (F-álgebra) G-graduado.

Seja M um $\mathcal{R}$-módulo à direita G-graduado. Denotamos por $End(M)$ o anel de todos os endomorfismos de M. Vale ressaltar que $End(M)$ é um anel com as operações usuais, soma e composição de funções.

Um endomorfismo graduado (ou homogêneo) de módulos graduados de grau α é um endomorfismo de grupo $f : M \longrightarrow M$ tal que

$$M_\beta f \subseteq M_{\alpha+\beta}$$

para qualquer $\beta \in G$.

O conjunto de todos os endomorfismos graduados de grau α constituem um subgrupo aditivo $End(M)_\alpha$ do anel $End(M)$. Considere $End^{gr}(M) = \sum_{\alpha \in G} End(M)_\alpha$. É relativamente fácil verificar que $End^{gr}(M)$ é um subanel de $End(M)$ e que a soma $\sum_{\alpha \in G} End(M)_\alpha$ é direta. Logo, $End^{gr}(M) = \bigoplus_{\alpha \in G} End(M)_\alpha$ é anel graduado. Além disso, se M é um $\mathcal{R}$-módulo fiel, então $\mathcal{R} \subseteq End^{gr}(M)$ via o monomorfismo de anéis graduados

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathcal{R} & \longrightarrow & End^{gr}(M) \\ & r & \longmapsto & \mathfrak{R}_r : M \to M \\ & & & \quad m \longmapsto mr. \end{array}$$

Sejam $M = \bigoplus_{\alpha \in G} M_\alpha$ e $N = \bigoplus_{\beta \in G} N_\beta$ $\mathcal{R}$-módulos à direita graduados. Denotemos por $Hom_{\mathcal{R}}(M, N)$ o grupo abeliano aditivo de todos os homomorfismos de $\mathcal{R}$-módulos graduados de M em N.

Uma aplicação $\mathcal{R}$-linear $f : M \longrightarrow N$ é chamada de homomorfismo graduado (ou homogêneo) de grau α, $\alpha \in G$, se

$$M_\beta f \subseteq N_{\alpha+\beta}$$

para qualquer $\beta \in G$.

O conjunto de todos os homomorfismos graduados de grau α é um subgrupo aditivo $Hom_{\mathcal{R}}(M, N)_\alpha$ do grupo $Hom_{\mathcal{R}}(M, N)$. Consideramos

$$Hom^{gr}_{\mathcal{R}}(M, N) = \sum_{\alpha \in G} Hom_{\mathcal{R}}(M, N)_\alpha.$$

Facilmente verifica-se que a soma é direta e, portanto, $Hom^{gr}_{\mathcal{R}}(M, N) = \bigoplus_{\alpha \in G} Hom_{\mathcal{R}}(M, N)_\alpha$ é um grupo abeliano graduado. Observamos que $Hom^{gr}_{\mathcal{R}}(M, M)$ é um anel graduado com as operações usuais de funções, que denotamos por $End^{gr}_{\mathcal{R}}(M)$. Dizemos que $End^{gr}_{\mathcal{R}}(M)$ é o anel de endomorfismos graduados do $\mathcal{R}$-módulo M.

De modo geral, $Hom^{gr}_{\mathcal{R}}(M,N) \subsetneq Hom_{\mathcal{R}}(M,N)$. Um exemplo de que existe $f \in Hom_{\mathcal{R}}(M,N)$ e $f \notin Hom^{gr}_{\mathcal{R}}(M,N)$, pode ser encontrado em [[23], Example 2.4.1]. O seguinte resultado mostra em que condições vale a igualdade.

Corolário 1.4.1. [*[23], Corollaries 2.4.4-2.4.6*] *Se M é finitamente gerado, então $Hom^{gr}_{\mathcal{R}}(M,N) = Hom_{\mathcal{R}}(M,N)$.*

Observe que se o anel graduado $\mathcal{R}$ é unitário, então $End^{gr}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}) = End_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}) \simeq \mathcal{R}$ são isomorfos como anéis graduados (veja [23]).

Para cada homomorfismo homogêneo $f : M \longrightarrow N$, os submódulos $Ker(f) \subseteq M$ e $Img(f) \subseteq N$ são também graduados. Se $N \subseteq M$ são módulos graduados, então o epimorfismo canônico $\pi : M \longrightarrow M/N$ é homogêneo de grau 0. Obviamente, a aplicação identidade $1 : M \longrightarrow M$ é homogênea de grau 0.

1.5 Anéis Graduados Primitivos

Discutiremos aqui resultados da teoria estrutural de anéis graduados primitivos, os quais são análogos aos da teoria de anéis apresentados em [19], [22] e [25].

Definição 1.5.1. *Seja $\mathcal{R}$ um anel G-graduado. Dizemos que $\mathcal{R}$ é um anel G-graduado primo se para quaisquer ideais bilaterais G-graduados não nulos I e J ocorre $IJ \neq (0)$.*

Mostraremos que na definição acima podemos considerar ideais unilaterais graduados.

Lema 1.5.1. *Um anel G-graduado $\mathcal{R}$ é G-graduado primo se, e somente se, para quaisquer ideais à direita (à esquerda) graduados não nulos I e J de $\mathcal{R}$ tem-se $IJ \neq (0)$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{R}$ um anel graduado primo. Sejam I e J ideias à direita graduados não nulos de $\mathcal{R}$. Então, $\mathcal{R}I$ e $\mathcal{R}J$ são ideais bilaterais graduados de $\mathcal{R}$. Pelo **Lema 1.2.1**, $Ann^{r}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R})$ é um ideal bilateral graduado de $\mathcal{R}$. Além disso, $(Ann^{r}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}))^2 = (0)$. Como $\mathcal{R}$ é um anel graduado primo, temos que $Ann^{r}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) = (0)$. Assim, $\mathcal{R}I$ e $\mathcal{R}J$ são ideais bilaterais graduados não nulos de $\mathcal{R}$. Novamente, como $\mathcal{R}$ é um anel graduado primo, $\mathcal{R}I\mathcal{R}J \neq (0)$. Logo, $I\mathcal{R}J \neq (0)$ e $(0) \neq I\mathcal{R}J \subseteq IJ$. Portanto, $IJ \neq (0)$.

A recíproca é imediata, já que todo ideal bilateral graduado é um ideal à esquerda graduado e um ideal à direita graduado. $\square$

Definição 1.5.2. *Seja $\mathcal{R}$ um anel G-graduado. Dizemos que $\mathcal{R}$ é um anel G-graduado semiprimo se $\mathcal{R}$ não contém ideais bilaterais G-graduados nilpotentes não nulos.*

Assim como para anel graduado primo, na **Definição 1.5.2**, podemos considerar ideais unilaterais graduados.

Lema 1.5.2. *Um anel G-graduado $\mathcal{R}$ é G-graduado semiprimo se, e somente se, $\mathcal{R}$ não contém ideais à direita (à esquerda) G-graduados nilpotentes não nulos.*

Demonstração. Seja $\mathcal{R}$ um anel graduado semiprimo. Suponha que I seja um ideal à direita graduado não nulo de $\mathcal{R}$. Então, $\mathcal{R}I$ é um ideal bilateral graduado de $\mathcal{R}$. Pelo **Lema 1.2.1**, $Ann^r_{\mathcal{R}}(\mathcal{R})$ é um ideal bilateral graduado de $\mathcal{R}$. Ademais, $(Ann^r_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}))^2 = (0)$. Como $\mathcal{R}$ é um anel graduado semiprimo, temos que $Ann^r_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) = (0)$. Assim, $\mathcal{R}I$ é um ideal bilateral graduado não nulo de $\mathcal{R}$. Logo, $\mathcal{R}I^n \supset (\mathcal{R}I)^n \neq (0)$ e, portanto, $I^n \neq (0)$ para todo n.

A recíproca é imediata, já que todo ideal bilateral graduado é um ideal à esquerda graduado e um ideal à direita graduado. □

Definição 1.5.3. *Seja $\mathcal{R}$ um anel G-graduado. Dizemos que $\mathcal{R}$ é um anel G-graduado primitivo à direita se existe um $\mathcal{R}$-módulo à direita G-graduado irredutível e fiel.*

Analogamente, dizemos que um anel G-graduado $\mathcal{R}$ é primitivo à esquerda se existe um $\mathcal{R}$-módulo à esquerda G-graduado irredutível e fiel.

Em geral, as noções graduadas correspodem, frequentemente, as propriedades clássicas não graduadas aplicadas para elementos homogêneos. Em particular, podemos ver isso para anéis primitivos, primos e semiprimos da seguinte maneira.

Lema 1.5.3. *Um anel $\mathcal{R}$ é graduado primo se, e somente se, $a_\alpha \mathcal{R} b_\beta \neq (0)$ para quaisquer elementos não nulos $a_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ e $b_\beta \in \mathcal{R}_\beta$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{R}$ um anel graduado primo. Suponha que $0 \neq a_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ e $0 \neq b_\beta \in \mathcal{R}_\beta$. Vimos que $Ann^l_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) = \{a \in \mathcal{R} \mid a\mathcal{R} = 0\}$ é um ideal bilateral graduado de $\mathcal{R}$. Além disso, $(Ann^l_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}))^2 = (0)$. Como $\mathcal{R}$ é um anel graduado primo, temos que $Ann^l_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) = (0)$. Assim, $a_\alpha \mathcal{R}$ e $b_\beta \mathcal{R}$ são ideais à direita graduados não nulos de $\mathcal{R}$. Pelo **Lema 1.5.1**, $a_\alpha \mathcal{R} b_\beta \mathcal{R} \neq (0)$. Portanto, $a_\alpha \mathcal{R} b_\beta \neq (0)$.

Reciprocamente, suponha que para quaisquer elementos não nulos $a_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ e $b_\beta \in \mathcal{R}_\beta$ tenhamos $a_\alpha \mathcal{R} b_\beta \neq (0)$. Se I e J são ideais bilaterais graduados não nulos de $\mathcal{R}$, existem elementos homogêneos não nulos $a_\alpha \in I_\alpha \subseteq \mathcal{R}_\alpha$ e $b_\beta \in J_\beta \subseteq \mathcal{R}_\beta$ para alguns $\alpha, \beta \in G$.

Por hipótese, $a_\alpha \mathcal{R} b_\beta \neq (0)$. Dessa forma, $(0) \neq a_\alpha \mathcal{R} b_\beta \subseteq I\mathcal{R}J \subseteq IJ$. Portanto, $IJ \neq (0)$. Com isso, concluímos a demonstração do lema. $\square$

Pelo **Lema 1.5.1** e **Lema 1.5.3**, temos:

Corolário 1.5.4. *Seja $\mathcal{R}$ uma anel G-graduado. As seguintes condições são equivalentes:*

a) *$\mathcal{R}$ é graduado primo;*

b) *$a_\alpha \mathcal{R} b_\beta \neq (0)$ para quaisquer elementos homogêneos não nulos $a_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ e $b_\beta \in \mathcal{R}_\beta$ para todos $\alpha, \beta \in G$;*

c) *quaisquer ideais à direita (à esquerda) graduados não nulos I e J de $\mathcal{R}$ tem-se $IJ \neq (0)$.*

Com argumento similar ao do lema anterior, segue o seguinte resultado.

Lema 1.5.5. *O anel $\mathcal{R}$ é graduado semiprimo se, e somente se, $a_\alpha \mathcal{R} a_\alpha \neq (0)$ para qualquer elemento homogêneo não nulo $a_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ e todo $\alpha \in G$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{R}$ um anel graduado semiprimo e seja $0 \neq a_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ para algum $\alpha \in G$. Então, $a_\alpha \mathcal{R}$ é um ideal à direita não nulo de $\mathcal{R}$. Assim, $a_\alpha \mathcal{R} a_\alpha \mathcal{R} = (a_\alpha \mathcal{R})^2 \neq (0)$. Logo, $a_\alpha \mathcal{R} a_\alpha \neq (0)$.

Reciprocamente, suponha que para qualquer elemento homogêneo não nulo $a_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ com $\alpha \in G$, tenhamos $a_\alpha \mathcal{R} a_\alpha \neq (0)$. Seja I um ideal bilateral graduado não nulo de $\mathcal{R}$. Então, para algum $\alpha \in G$, existe um elemento não nulo $a_\alpha \in I_\alpha$. Assim, existe $b_\beta \in \mathcal{R}_\beta$ tal que $a_\alpha b_\beta a_\alpha \neq 0$. Além do mais, $a_\alpha b_\beta a_\alpha \in I^2 \subseteq I$. Logo, $I^2 \neq (0)$. Novamente, por hipótese, $a_\alpha b_\beta a_\alpha \mathcal{R} a_\alpha b_\beta a_\alpha \neq (0)$. Como $a_\alpha b_\beta a_\alpha \mathcal{R} a_\alpha b_\beta a_\alpha \subseteq I^3$, temos que $I^3 \neq (0)$. Então, existe $c_\tau \in \mathcal{R}_\tau$ tal que $a_\alpha b_\beta a_\alpha c_\tau a_\alpha b_\beta a_\alpha \neq 0$. Recursivamente, temos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $I^n \neq (0)$. Com isso, concluímos a demonstração do lema. $\square$

Pelo **Lema 1.5.2** e **Lema 1.5.5**, temos:

Corolário 1.5.6. *Seja $\mathcal{R}$ uma anel G-graduado. As seguintes condições são equivalentes:*

a) *$\mathcal{R}$ é graduado semiprimo;*

b) *$a_\alpha \mathcal{R} a_\alpha \neq (0)$ para qualquer elemento homogêneo não nulo $a_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ e qualquer $\alpha \in G$;*

c) *qualquer ideal à direita (à esquerda) graduado I de $\mathcal{R}$ tal que $I^n = (0)$, para algum n, implica $I = (0)$.*

Os resultados a seguir apresentam relações entre anel graduado primitivo, anel graduado primo e anel graduado semiprimo.

Lema 1.5.7. *Seja $\mathcal{R}$ um anel graduado primitivo à direita, então $\mathcal{R}$ é graduado primo.*

Demonstração. De fato, suponha que I e J sejam ideais bilaterias graduados não nulos de $\mathcal{R}$. Seja K um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado irredutível e fiel. Como K é fiel, $KI \neq (0)$ e $KJ \neq (0)$. Com isso, pela irredutibilidade de K, $KI = KJ = K$. Assim, $0 \neq K = KJ = KIJ$. Logo, $IJ \neq (0)$ e, portanto, $\mathcal{R}$ é graduado primo. $\square$

Segue do **Lema 1.5.3** e do **Lema 1.5.5** o seguinte corolário:

Corolário 1.5.8. *Se $\mathcal{R}$ é um anel graduado primo, então $\mathcal{R}$ é um anel graduado semiprimo.*

Consequentemente, se $\mathcal{R}$ é um anel graduado primitivo à direita, então $\mathcal{R}$ é um anel graduado semiprimo.

Lema 1.5.9. *Seja $\mathcal{R}$ um anel graduado primo. Se I é um ideal à direita graduado de $\mathcal{R}$ e J é um ideal à esquerda graduado de $\mathcal{R}$, então $IJ = (0)$ implica $I = (0)$ ou $J = (0)$.*

Demonstração. Sejam I um ideal à direita e J um ideal à esquerda graduados não nulos de $\mathcal{R}$. Então, $\mathcal{R}I$ e $J\mathcal{R}$ são ideais bilaterais graduados de $\mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}$ é um anel graduado primo, temos que $Ann^r_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) = (0) = Ann^l_{\mathcal{R}}(\mathcal{R})$. Assim, $\mathcal{R}I$ e $J\mathcal{R}$ são ideais bilaterais graduados não nulos de $\mathcal{R}$. Logo, $\mathcal{R}IJ\mathcal{R} \neq (0)$ e, portanto, $IJ \neq (0)$. $\square$

Os seguintes lemas são resultados básicos na estrutura de anéis graduados.

Lema 1.5.10. *Seja $\mathcal{R}$ um anel associativo G-graduado. Suponha que $M = \bigoplus_{\alpha \in G} M_\alpha$ seja um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado irredutível. Se $M_\alpha \neq (0)$, então M_α é um $\mathcal{R}_0$-módulo à direita irredutível e, para cada $0 \neq m_\alpha \in M_\alpha$, $m_\alpha \mathcal{R}_\beta = M_{\alpha+\beta}$ para todo $\beta \in G$.*

Demonstração. Seja N_α um $\mathcal{R}_0$-submódulo à direita não nulo de M_α. Então

$$N = (N_\alpha + N_\alpha \mathcal{R}_0) \oplus \Big(\bigoplus_{\beta \in G \setminus \{0\}} N_\alpha \mathcal{R}_\beta \Big)$$

é um $\mathcal{R}$-submódulo à direita graduado não nulo de M. Pela irredutibilidade de M, temos que $M = N$ e, portanto, $N_\alpha + N_\alpha \mathcal{R}_0 = M_\alpha$. Como $N_\alpha \mathcal{R}_0 \subseteq N_\alpha$ e $N_\alpha \subseteq M_\alpha$, segue que $N_\alpha = M_\alpha$. Logo, M_α é um $\mathcal{R}_0$-módulo à direita irredutível.

Suponha que exista um elemento não nulo $m_\alpha \in M_\alpha$ tal que

$$m_\alpha \mathcal{R}_0 = (0). \tag{1.4}$$

Assim, $N_\alpha = \{n_\alpha \in M_\alpha \mid n_\alpha \mathcal{R}_0 = (0)\}$ é um $\mathcal{R}_0$-submódulo à direita não nulo de M_α. Daí, pela irredutibilidade de M_α, temos que $M_\alpha = N_\alpha$. Por contradição, suponha que para todo $\beta \in G$, tenhamos

$$M_\alpha \mathcal{R}_\beta = (0). \tag{1.5}$$

Então, $M_\alpha \mathcal{R} = (0)$ e, assim, M_α é um $\mathcal{R}$-submódulo à direita graduado próprio de M, o que contradiz a irredutibilidade de M. Logo, existe $\beta \in G$ tal que $M_\alpha \mathcal{R}_\beta \neq (0)$. Com isso, temos que $(0) \neq M' = \bigoplus_{\gamma \in G} M_\alpha \mathcal{R}_\gamma$ é um $\mathcal{R}$-submódulo graduado próprio de M ($M'_\alpha = M_\alpha \mathcal{R}_0 = (0)$ e $M_\alpha \mathcal{R}_\beta \neq (0)$), o que, novamente, contradiz o fato de M ser um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado irredutível. Todas essas contradições ocorreram de (1.4). Logo, para todo elemento não nulo $m_\alpha \in M_\alpha$, temos que

$$m_\alpha \mathcal{R}_0 \neq (0). \tag{1.6}$$

Pela irredutibilidade de M_α e por (1.6), segue que $m_\alpha \mathcal{R}_0 = M_\alpha$ para todo $m_\alpha \neq 0$. Por outro lado, uma vez que $m_\alpha \mathcal{R}_\beta \supseteq m_\alpha \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_\beta = M_\alpha \mathcal{R}_\beta$, temos $m_\alpha \mathcal{R}_\beta = M_\alpha \mathcal{R}_\beta$ para todo $\beta \in G$. Note que $M_\alpha \mathcal{R}_\beta$ é um $\mathcal{R}_0$-submódulo de $M_{\alpha+\beta}$ e, assim, resta mostrar que $M_{\alpha+\beta} = M_\alpha \mathcal{R}_\beta$ para todo $\beta \in G$. De fato, se $M_\alpha \mathcal{R}_\beta \neq M_{\alpha+\beta}$ para algum $\beta \in G$, então $M' = \bigoplus_{\gamma \in G} M_\alpha \mathcal{R}_\gamma$ é, novamente, um $\mathcal{R}$-submódulo graduado próprio de M (caso contrário, $M'_{\alpha+\beta} = M_\alpha \mathcal{R}_\beta \neq M_{\alpha+\beta}, 0 \neq m_\alpha \mathcal{R}_0 \subseteq M'_\alpha$). Portanto, $m_\alpha \mathcal{R}_\beta = M_\alpha \mathcal{R}_\beta = M_{\alpha+\beta}$ para todo $\beta \in G$. $\square$

Lema 1.5.11. *Sejam $\mathcal{R} = \bigoplus_{\alpha \in G} \mathcal{R}_\alpha$ um anel graduado e $I = \bigoplus_{\alpha \in G} I_\alpha$ um ideal à direita graduado minimal de $\mathcal{R}$. Se $a_\alpha \in I_\alpha$ é um elemento homogêneo de I tal que $a_\alpha I \neq (0)$, então existe um elemento idempotente minimal $e_0 \in I_0$ tal que $I = e_0 \mathcal{R}$ e $a_\alpha e_0 = a_\alpha = e_0 a_\alpha$. Mais do que isso, qualquer elemento homogêneo $f \in I_0$ que satistaz $a_\alpha f = a_\alpha$ é um idempotente minimal e $I = f\mathcal{R}$.*

Demonstração. Seja $a_\alpha \in I_\alpha$ tal que $a_\alpha I \neq (0)$ para algum $\alpha \in G$. Então, $a_\alpha I$ é um ideal à direita graduado não nulo de $\mathcal{R}$. Além disso, $a_\alpha I \subseteq I$, e pela minimalidade de I, temos que $a_\alpha I = I$. Como $a_\alpha \in I_\alpha$, existe $e_0 \in I_0$ tal que $a_\alpha e_0 = a_\alpha$. Assim, $a_\alpha e_0^2 = a_\alpha e_0$ e $a_\alpha(e_0^2 - e_0) = 0$. Pelo raciocínio análogo ao **Lema 1.2.1**, $Ann_I^r(a_\alpha) = \{r \in I \mid a_\alpha r = 0\}$ é um ideal à direita graduado de $\mathcal{R}$ contido em I, então, pela minimalidade de I, segue que $Ann_I^r(a_\alpha) = (0)$ ou $Ann_I^r(a_\alpha) = I$. Como $a_\alpha I = I \neq (0)$, temos que $Ann_I^r(a_\alpha) = (0)$. Por conseguinte, $e_0^2 = e_0$, ou seja, e_0 é um elemento idempotente. Além do mais, $(0) \neq e_0 \mathcal{R} \subseteq$

I, novamente, pela minimalidade de I, segue que $I = e_0\mathcal{R}$. Por outro lado, como $a_\alpha \in I$, existe $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ tal que $a_\alpha = e_0 r_\alpha$. Daí, $e_0 a_\alpha = e_0 e_0 r_\alpha = e_0 r_\alpha = a_\alpha$, ou seja, $e_0 a_\alpha = a_\alpha$. Assim, $e_0 a_\alpha e_0 = a_\alpha e_0 = a_\alpha = e_0 a_\alpha$.

Se $f \in I_0$ é tal que $a_\alpha f = a_\alpha$, obtemos novamente, $a_\alpha f^2 = a_\alpha f = a_\alpha$. Daí, $(f^2 - f) \in Ann_I^r(a_\alpha) = (0)$. Assim, $f^2 = f$, ou seja, f é um idempotente. Como $(0) \neq f\mathcal{R} \subseteq I$, pela minimalidade de I, temos que $I = f\mathcal{R}$. Com isso, finalizamos a demonstração do resultado. De fato, $f - e_0 \in Ann_I^r(a_\alpha) = (0)$, logo, $f = e_0$. □

Lema 1.5.12. *Sejam $\mathcal{R} = \bigoplus_{\alpha \in G} \mathcal{R}_\alpha$ um anel graduado e I um ideal à direita graduado minimal de $\mathcal{R}$. Se $e_0 \in \mathcal{R}_0$ é um idempotente minimal tal que $I = e_0\mathcal{R}$, então $e_0\mathcal{R}e_0 = \bigoplus_{\alpha \in G} e_0\mathcal{R}_\alpha e_0 = \mathcal{D}$ é um anel graduado de divisão. Em particular, I é um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda graduado.*

Demonstração. Claramente $\mathcal{D}$ é um anel graduado e e_0 é a identidade de $\mathcal{D}$. Seja $b_\beta \in \mathcal{R}_\beta$ tal que $e_0 b_\beta e_0 \neq 0$, então $(0) \neq e_0 b_\beta e_0 \mathcal{R} \subseteq I$ é um ideal à direita graduado de $\mathcal{R}$. Pela minimalidade de I, $e_0 b_\beta e_0 \mathcal{R} = I = e_0\mathcal{R}$. A igualdade $e_0 b_\beta e_0 \mathcal{R} e_0 = e_0 \mathcal{R} e_0$ garante a existência de um $c_{-\beta} \in \mathcal{R}_{-\beta}$ tal que $(e_0 b_\beta e_0)(e_0 c_{-\beta} e_0) = e_0 b_\beta e_0 c_{-\beta} e_0 = e_0$. Por outro lado, existe $d_\beta \in \mathcal{R}_\beta$ tal que $e_0 c_{-\beta} e_0 e_0 d_\beta e_0 = e_0$. Assim, $e_0 b_\beta e_0 e_0 c_{-\beta} e_0 e_0 d_\beta e_0 = e_0 d_\beta e_0 = e_0 b_\beta e_0$. Logo, $e_0 b_\beta e_0 = e_0 d_\beta e_0$. Portanto, $\mathcal{D}$ é um anel graduado de divisão com identidade e_0.

Agora vamos mostrar que $I = e_0\mathcal{R}$ é um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda graduado, ou seja, $\mathcal{D}$-módulo à esquerda graduado. De fato, dados $v = e_0 r, v' = e_0 r' \in I, d = e_0 a e_0, d' = e_0 b e_0 \in \mathcal{D}, d_\gamma = e_0 a_\gamma e_0 \in \mathcal{D}_\gamma, v_\alpha = e_0 r_\alpha \in I_\alpha$, temos

$$\begin{array}{lcl}
dv & = & e_0 a e_0 e_0 r \in I, \\
d(v+v') & = & e_0 a e_0 (e_0 r + e_0 r') \\
& = & e_0 a e_0 e_0 r + e_0 a e_0 e_0 r' \\
& = & dv + dv', \\
(dd')v & = & (e_0 a e_0 e_0 b e_0) e_0 r \\
& = & e_0 a e_0 (e_0 b e_0 e_0 r) \\
& = & d(d'v), \\
0v & = & 0, \\
d0 & = & 0, \\
e_0 v & = & e_0 e_0 r \\
& = & e_0 r \\
& = & v, \\
d_\gamma v_\alpha & = & e_0 a_\gamma e_0 e_0 r_\alpha \in I_{\gamma+\alpha}
\end{array}$$

para quaisquer $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha, a_\gamma \in \mathcal{D}_\gamma, \gamma, \alpha \in G$. Logo, I é um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda graduado. □

Lema 1.5.13. *Seja $\mathcal{R} = \bigoplus_{\alpha \in G} \mathcal{R}_\alpha$ um anel graduado semiprimo. Se $I = \bigoplus_{\alpha \in G} I_\alpha$ é um ideal à direita graduado minimal de $\mathcal{R}$, então existe um elemento idempotente minimal $e_0 \in I_0$*

tal que $I = e_0\mathcal{R}$*,* $e_0\mathcal{R}e_0 = \bigoplus_{\alpha\in G} e_0\mathcal{R}_\alpha e_0$ *é um anel graduado de divisão e* $\mathcal{R}e_0$ *é um ideal à esquerda graduado minimal de* $\mathcal{R}$*. Reciprocamente, se* $e_0 \in \mathcal{R}_0$ *é um elemento idempotente tal que* $e_0\mathcal{R}e_0$ *é um anel graduado de divisão, então* $I = e_0\mathcal{R}$ *é um ideal à direita graduado minimal de* $\mathcal{R}$ *e* $\mathcal{R}e_0$ *é um ideal à esquerda graduado minimal de* $\mathcal{R}$*.*

Demonstração. Considere I um ideal à direita graduado minimal de $\mathcal{R}$. Visto que $\mathcal{R}$ é um anel graduado semiprimo, pelo **Lema 1.5.2**, temos que

$$I^2 \neq (0).$$

Então, existe $a_\alpha \in I_\alpha$ tal que $a_\alpha I \neq (0)$ para algum $\alpha \in G$. Pelo **Lema 1.5.11**, existe um idempotente minimal $e_0 \in I_0$ tal que $I = e_0\mathcal{R}$. Pelo **Lema 1.5.12**, $e_0\mathcal{R}e_0 = \mathcal{D}$ é um anel graduado de divisão com identidade e_0.

Resta-nos mostrar que $L = \mathcal{R}e_0$ é um ideal à esquerda graduado minimal. De fato, seja $L = \mathcal{R}e_0 = \bigoplus_{\alpha\in G} \mathcal{R}_\alpha e_0 = \bigoplus_{\alpha\in G} L_\alpha$. É fácil ver que L é um ideal à esquerda graduado de $\mathcal{R}$. Se $(0) \neq L' = \bigoplus_{\alpha\in G} L'_\alpha \subseteq L$ é um ideal à esquerda graduado de $\mathcal{R}$, então $L'^2 \neq (0)$, pois $\mathcal{R}$ é um anel graduado semiprimo, e existe $b_\alpha \in L'_\alpha$ tal que $L'b_\alpha \neq (0)$ para algum $\alpha \in G$. Assim, $e_0 b_\alpha \neq 0$, pois caso contrário $0 \neq L'b_\alpha \subseteq \mathcal{R}e_0 b_\alpha = 0$ ($L' \subseteq L = \mathcal{R}e_0$). Por outro lado, como $b_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha e_0$, temos que $b_\alpha e_0 = b_\alpha$ e $0 \neq e_0 b_\alpha = e_0 b_\alpha e_0 \in \mathcal{D}$. Então, $e_0 b_\alpha e_0$ possui inverso em $\mathcal{D}_{-\alpha}$, isto é, existe $c_{-\alpha} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ tal que

$$e_0 = e_0 c_{-\alpha} e_0 b_\alpha e_0 = e_0 c_{-\alpha} e_0 e_0 b_\alpha e_0 = e_0 c_{-\alpha} e_0 e_0 b_\alpha \in L'.$$

Logo, $L' = L$.

Com o argumento acima também mostramos que se para algum elemento idempotente $e_0 \in \mathcal{R}_0$, $e_0\mathcal{R}e_0$ é um anel graduado de divisão, então $\mathcal{R}e_0$ é um ideal à esquerda graduado minimal e $e_0\mathcal{R}$ é um ideal à direita graduado minimal. Concluímos, portanto, a recíproca do lema. $\square$

Lema 1.5.14. *Seja* $\mathcal{R} = \bigoplus_{\alpha\in G} \mathcal{R}_\alpha$ *um anel graduado semiprimo. Se* $a_\alpha\mathcal{R} = I$ *é um ideal à direita graduado minimal de* $\mathcal{R}$*, para algum* $a_\alpha \in I_\alpha$ *e* $\alpha \in G$*, então* $\mathcal{R}a_\alpha$ *é um ideal à esquerda graduado minimal de* $\mathcal{R}$*.*

Demonstração. Seja $a_\alpha \in I_\alpha$ com $\alpha \in G$ tal que $a_\alpha\mathcal{R} = I$ é um ideal à direita graduado minimal de $\mathcal{R}$. Pelo **Lema 1.5.13**, existe um idempotente minimal $e_0 \in I_0$ tal que $I = e_0\mathcal{R}$ e $e_0\mathcal{R}e_0$ é um anel graduado de divisão. Assim, $a_\alpha\mathcal{R} = I = e_0\mathcal{R}$. Por hipótese, $a_\alpha \in I_\alpha$, então existe $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ tal que $e_0 r_\alpha = a_\alpha$. Daí,

$$e_0 a_\alpha = e_0 e_0 r_\alpha = e_0 r_\alpha = a_\alpha.$$

Como $\mathcal{R}$ é um anel graduado semiprimo, temos que $\mathcal{R}a_\alpha \neq (0)$. É fácil ver que $\mathcal{R}a_\alpha$ é um ideal à esquerda graduado de $\mathcal{R}$. Ainda pelo **Lema 1.5.13**, $\mathcal{R}e_0$ é um ideal à esquerda graduado minimal de $\mathcal{R}$. Observe que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{R}e_0 & \longrightarrow & (\mathcal{R}e_0)a_\alpha \\ & re_0 & \longmapsto & (re_0)a_\alpha \end{array}$$

é um homomorfismo graduado homogêneo de grau α de $\mathcal{R}$-módulos à esquerda graduados. Como $Ker(\varphi)$ é um $\mathcal{R}$-submódulo graduado de $\mathcal{R}e_0$, temos, pela minimalidade de $\mathcal{R}e_0$, que $Ker(\varphi) = (0)$ ou $Ker(\varphi) = \mathcal{R}e_0$. Como $(e_0e_0)\varphi = a_\alpha \neq 0$, segue que $Ker(\varphi) = (0)$. Dado $re_0a_\alpha \in (\mathcal{R}e_0)a_\alpha$, temos que $(re_0)\varphi = re_0a_\alpha$. Logo, φ é uma isomorfismo. Como $\mathcal{R}e_0$ é um $\mathcal{R}$-módulo à esquerda graduado irredutível, segue que $\mathcal{R}e_0a_\alpha = \mathcal{R}a_\alpha$ também é um $\mathcal{R}$-módulo à esquerda graduado irredutível. Portanto, $\mathcal{R}a_\alpha$ é um ideal à esquerda graduado minimal. $\square$

Por simetria, segue:

Lema 1.5.15. *Seja* $\mathcal{R} = \bigoplus_{\alpha \in G} \mathcal{R}_\alpha$ *um anel graduado semiprimo. Se* $\mathcal{R}b_\alpha = J$ *é um ideal à esquerda graduado minimal de* $\mathcal{R}$*, para algum* $b_\alpha \in J_\alpha$ *e* $\alpha \in G$*, então* $b_\alpha\mathcal{R}$ *é um ideal à direita graduado minimal de* $\mathcal{R}$*.*

Como temos visto, muitos dos resultados da teoria de anéis associativos e álgebras associativas continuam válidos para o caso graduado. Naturalmente, o importante Lema de Schur também se estende para esse caso.

Lema 1.5.16. [*[11], Lemma 2.4*] *Seja* $\mathcal{R}$ *um anel (*F*-álgebra) graduado. Suponha que* V *seja um* $\mathcal{R}$*-módulo à direita graduado irredutível. Então,* $\mathcal{D} = End^{gr}_{\mathcal{R}}(V)$ *é um anel (*F*-álgebra) graduado de divisão.*

Demonstração. Primeiramente observamos que $\mathcal{D}$ é um anel (F-álgebra) graduado unitário. Dado um elemento homogêneo não nulo $d_\alpha \in \mathcal{D}_\alpha$, temos que $Ker(d_\alpha)$ e $Img(d_\alpha)$ são $\mathcal{R}$-submódulos graduados de V. Como V é um $\mathcal{R}$-módulo graduado irredutível e $1 \in \mathcal{D}$, resulta que $Ker(d_\alpha) = (0)$ e $Img(d_\alpha) = V$, ou seja, existe $d^{-1} \in End(V)$ tal que $d^{-1}d_\alpha = d_\alpha d^{-1} = 1$. Agora vamos mostrar que $d^{-1} \in \mathcal{D}$. Com efeito, a linearidade de d^{-1} segue da linearidade de d_α. Pela bijeção de d_α, dado $v_\beta \in V_\beta$, existe $v_{\beta-\alpha} \in V_{\beta-\alpha}$ tal que $v_{\beta-\alpha}d_\alpha = v_\beta$. Dessa forma, para todo $r_\gamma \in \mathcal{R}_\gamma$, temos

$$\begin{aligned} (v_\beta r_\gamma)d^{-1} &= ((v_{\beta-\alpha}d_\alpha)r_\gamma)d^{-1} \\ &= (v_{\beta-\alpha}r_\gamma)d_\alpha d^{-1} \\ &= v_{\beta-\alpha}r_\gamma \\ &= (v_\beta d^{-1})r_\gamma \end{aligned}$$

para quaisquer $\beta, \gamma \in G$. Assim, provamos que $d^{-1} \in End_{\mathcal{R}}(V)$. Ademais, $(v_\beta)d_\alpha \in V_{\beta+\alpha}$ para todo $\beta \in G$. Daí, $v_\beta = ((v_\beta)d_\alpha)d^{-1}$ implica $d^{-1} \in \mathcal{D}_{-\alpha}$. Portanto, $\mathcal{D}$ é um anel (F-álgebra) graduado de divisão. Isso conclui a demonstração do lema. $\square$

O próximo resultado é uma versão análoga ao obtido em [[25], Proposition 4] quando $G = \mathbb{Z}_2$ e ao obtido em [[19], III.5] quando $\mathcal{R}$ é um anel (F-álgebra) associativo para o caso de anel (F-álgebra) associativo G-graduado.

Proposição 1.5.17. *Seja $\mathcal{R}$ um anel (F-álgebra) graduado primitivo à direita com um ideal à direita graduado minimal. Então, quaisquer dois $\mathcal{R}$-módulos à direita graduados irredutíveis e fiéis são isomorfos.*

Demonstração. Se I é um ideal à direita graduado minimal de $\mathcal{R}$ e M é um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado irredutível e fiel, então $m_\alpha I \neq 0$ para algum $0 \neq m_\alpha \in M_\alpha$. Assim, $m_\alpha I = M$. Como a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & I & \longrightarrow & m_\alpha I \\ & i & \longmapsto & m_\alpha i \end{array}$$

é um isomorfismo graduado de grau α de $\mathcal{R}$-módulos graduados, tem-se que qualquer $\mathcal{R}$-módulo graduado é isomorfo a I. O resultado segue-se disso. $\square$

Definição 1.5.4. *Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{C}$ anéis G-graduados. Dizemos que M é um $(\mathcal{R}, \mathcal{C})$-bimódulo G-graduado se M é um $\mathcal{R}$-módulo à esquerda G-graduado e um $\mathcal{C}$-módulo à direita G-graduado tal que*

$$(r_\alpha m_\beta)c_\tau = r_\alpha(m_\beta c_\tau) \tag{1.7}$$

para quaisquer $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha, c_\tau \in \mathcal{C}_\tau, m_\beta \in M_\beta$ e $\alpha, \beta, \tau \in G$.

Agora, trazemos algumas definições e um resultado para anéis associativos graduados que serão aplicados nos próximos capítulos.

Definição 1.5.5. *Seja S um anel G-graduado associativo. Um S-contexto à direita G-graduado é um sistema (S, N, D, M, T), onde*

a) *N é um S-módulo à direita G-graduado,*

b) *$D = End^{gr}(N_S)$ é o anel de endomorfismos G-graduados do S-módulo G-graduado N_S,*

c) *M é um D-módulo à esquerda G-graduado,*

d) *T é um S-submódulo à direita G-graduado de $Hom^{gr}({}_DM, {}_DN)$.*

Veja que N é um (D,S)-bimódulo G-graduado.

Definição 1.5.6. *Dado um S-contexto à direita G-graduado (S,N,D,M,T), dizemos que:*

a) *N é fechado se dados um submódulo G-graduado não nulo U_S de N_S e um homomorfismo graduado de S-módulos graduados $f : U_S \longrightarrow N_S$, existe $\lambda \in D$ tal que $\lambda u = f(u)$ para todo $u \in U$;*

b) *T é total se qualquer $0 \neq m \in M$ satisfaz $mT \neq 0$;*

c) *T é fracamente denso se dados quaisquer elementos homogêneos $m_1, \ldots, m_k \in M$ com $m_1 \notin \sum_{i=2}^{k} Dm_i$, existe $t \in T$ tal que $m_1 t \neq 0$ e $m_i t = 0$ para todo $i \neq 1$.*

Observamos que um S-contexto à esquerda G-graduado é definido de forma análoga.

Teorema 1.5.18. [*[8], Theorem 2.10*] *Sejam S um anel associativo G-graduado e (S,N,D,M,T) um S-contexto à direita G-graduado. Suponha que N_S seja fechado e T seja total. Então, T é fracamente denso.*

O teorema acima também é válido se considerarmos S-contexto à esquerda G-graduado.

Teorema 1.5.19. *Sejam S um anel associativo G-graduado e (S,N,D,M,T) um S-contexto à esquerda G-graduado. Suponha que ${}_SN$ seja fechado e T seja total. Então, T é fracamente denso.*

Definição 1.5.7. *Sejam $\mathcal{D}$ um anel graduado de divisão, $\mathcal{R}$ um anel graduado e M um $(\mathcal{D},\mathcal{R})$-bimódulo. Dizemos que $\mathcal{R}$ age densamente em M sobre $\mathcal{D}$ se para qualquer inteiro positivo n, quaisquer elementos homogêneos $v_\alpha^1, \ldots, v_\alpha^n \in M_\alpha$ linearmente independentes sobre $\mathcal{D}_0$ e quaisquer $w_\beta^1, \ldots, w_\beta^n \in M_\beta$, existe $r_{\beta-\alpha} \in \mathcal{R}_{\beta-\alpha}$ tal que $v_\alpha^i r_{\beta-\alpha} = w_\beta^i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e todos $\alpha, \beta \in G$.*

É importante ressaltar que quando um anel graduado $\mathcal{R}$ age densamente em um módulo graduado M, então o módulo graduado M é irredutível. Se o $\mathcal{R}$-módulo M é fiel, então $\mathcal{R}$ é um anel graduado primitivo à direita.

O teorema abaixo é um dos mais importantes na teoria de anéis graduados primitivos. Segundo [8], na década de 1990, uma série de resultados relacionados ao teorema da densidade para anéis graduados por um grupo foram obtidos e, finalmente, o teorema da densidade para os anéis graduados primitivos foi provado em [21]. Neste trabalho, enunciamos uma versão cuja demonstração pode ser encontrada em [[11], Theorem 2.5].

Teorema 1.5.20. [*[11], Theorem 2.5*] *Seja $\mathcal{R}$ uma F-álgebra G-graduada. Suponha que V seja um $\mathcal{R}$-módulo à esquerda graduado irredutível e seja $\mathcal{D} = End^{gr}_{\mathcal{R}}(V)$. Se $v_1, \ldots, v_n \in V$ são elementos homogêneos linearmente independentes sobre $\mathcal{D}$, então para quaisquer $w_1, \ldots, w_n \in V$, existe $r \in \mathcal{R}$ tal que $rv_i = w_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Como consequência do **Teorema 1.5.20**, temos o seguinte resultado para F-álgebras graduadas simples de dimensão finita sobre F.

Teorema 1.5.21. [*[11], Theorem 2.6*] *Seja $\mathcal{R}$ uma F-álgebra G-graduada. Se $\mathcal{R}$ é graduada simples e satisfaz a condição de cadeia descendente de ideais à esquerda G-graduados, então existem uma F-álgebra G-graduada de divisão $\mathcal{D}$, um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à direita V de dimensão finita sobre $\mathcal{D}$ tais que $\mathcal{R}$ é isomorfa a $End^{gr}_{\mathcal{D}}(V)$.*

Os dois últimos permanecem válidos se considerarmos $\mathcal{R}$-módulos à direita graduados em vez de $\mathcal{R}$-módulos à esquerda graduados.

1.6 Álgebras Graduadas Simples de Dimensão Finita

Nas últimas décadas, anéis associativos graduados e F-álgebras associativas graduadas tem sido alvos de constantes investigações. Nessa direção, para o desenvolvimento da teoria estrutural de tais objetos, é natural o estudo sobre F-álgebras graduadas simples, principalmente sua descrição. Um dos primeiros resultados nessa direção foi a classificação de superálgebras associativas simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado (veja [[13], Theorem 3.5.3]).

Nesta seção, apresentaremos a descrição de F-álgebras G-graduadas simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado F de característica zero ou característica que não divide a ordem do grupo G, exibida por Bahturin, Zaicev e Sehgal em [6]. Para maiores informações sobre este interessante assunto, ver [6].

Consideramos o F-espaço vetorial da álgebra de grupo $F[G]$ e definimos um novo produto em $F[G]$. Tal produto é definido por

$$r_\alpha r_\beta = \sigma(\alpha, \beta) r_{\alpha+\beta} \tag{1.8}$$

nos elementos homogêneos da base de $F[G]$, onde $\sigma(\alpha, \beta) \in F^\times$ é um escalar não nulo para quaisquer $\alpha, \beta \in G$. O produto (1.8) pode ser linearmente estendido em todo o espaço vetorial da $F[G]$. Para que o produto (1.8) em $F[G]$ seja associativo, a aplicação $\sigma : G \times G \longrightarrow F^\times$ deve satisfazer a relação

$$\sigma(\alpha, \beta)\sigma(\alpha + \beta, \gamma) = \sigma(\beta, \gamma)\sigma(\alpha, \beta + \gamma) \tag{1.9}$$

para todos $\alpha, \beta, \gamma \in G$.

Uma aplicação $\sigma : G \times G \longrightarrow F^{\times}$ que satisfaz (1.9) é chamada de 2-cociclo em G com valores em $F^{\times}$. No **Capítulo 3** apresentaremos algumas propriedades de 2-cociclo, pois esse objeto será de importância fundamental para o nosso trabalho.

A F-álgebra associativa $F^{\sigma}[G] = Span\{r_{\alpha} \mid \alpha \in G\}$ com o produto definido por (1.8) é chamada de F-álgebra torcida do grupo G definida por σ. Quando $\sigma \equiv 1$, $F^{\sigma}[G]$ é a F-álgebra $F[G]$. Observamos que $F^{\sigma}[G]$ também é graduada com graduação canônica definida por $deg_G(r_{\alpha}) = \alpha$ para todo $\alpha \in G$. Além do mais, $F^{\sigma}[G]$ é uma F-álgebra G-graduada de divisão.

Exemplo 1.6.1. [[6], *Example* 2.3] *Seja $\mathcal{R} = M_n(F^{\sigma}[G])$ a álgebra de matrizes $n \times n$ com entradas na F-álgebra $F^{\sigma}[G]$. Fixe uma n-upla $(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in G^n$ de elementos de G. Então, a n-upla $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ define uma G-graduação em $\mathcal{R}$ da seguinte maneira: sejam $e_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$, matrizes unitárias da álgebra $\mathcal{R}$. Para cada $\beta \in G$, considere o conjunto*

$$\mathcal{R}_{\beta} = Span\{e_{ij}\eta_{\xi} \mid -\theta_i + \xi + \theta_j = \beta\},$$

para todos $\eta_{\xi} \in F^{\sigma}[G]_{\xi}, \xi \in G$ e $1 \leq i, j \leq n$. Verifica-se que $\mathcal{R}_{\tau}\mathcal{R}_{\beta} \subseteq \mathcal{R}_{\tau+\beta}$ para quaisquer $\tau, \beta \in G$ e, portanto,

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{\tau \in G} \mathcal{R}_{\beta}$$

é uma G-graduação. Esta G-graduação é chamada de graduação canônica definida pela n-upla $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$. Em particular, quando $\sigma(\alpha, \beta) = 1$ para todos $\alpha, \beta \in G$, temos a graduação canônica em $M_n(F[G])$.

Como observamos anteriormente, $F^{\sigma}[G]$ é uma F-álgebra graduada de divisão. Assim, $M_n(F^{\sigma}[G])$, com graduação canônica, é uma álgebra G-graduada simples. O próximo resultado garante a recíproca com algumas hipótese para o corpo F.

Teorema 1.6.1. [*[6], Theorem 3*] *Seja F um corpo algebricamente fechado e de característica zero. Então, qualquer álgebra G-graduada simples de dimensão finita $\mathcal{C}$ sobre F é isomorfa a $M_k(F^{\zeta}[H])$, a álgebra de matrizes sobre a F-álgebra graduada de divisão $F^{\zeta}[H]$, onde H é um subgrupo do grupo G e $\zeta : H \times H \longrightarrow F^{\times}$ é um 2-cociclo em H. A G-graduação em $M_k(F^{\zeta}[H])$ é definida por uma k-upla $(\theta_1, \ldots, \theta_k) \in G^k$ e $deg_G(e_{ij}\eta_{\xi}) = -\theta_i + \xi + \theta_j$ para qualquer matriz unitária e_{ij} e elementos da base η_{ξ} de $F^{\zeta}[H]$, $\xi \in H$.*

Capítulo 2

Resultados Antecedentes

Neste capítulo, apresentaremos conceitos e resultados que nos motivaram a delimitar o nosso objeto de estudo. Além disso, assim como no **Capítulo 1**, as noções e resultados aqui exibidos servirão como ferramentas para os próximos capítulos. O objetivo deste capítulo é apresentar alguns resultados demonstrados em [1], [9], [18], [22], [25] e [27].

2.1 Anel Primitivo com Involução

Nesta seção, apresentaremos o famoso Teorema de Kaplansky que caracteriza involuções em anéis primitivos à direita com um ideal à direita minimal em termos de formas não degeneradas hermitianas e alternadas. Esse resultado permite a descrição de involuções na álgebra $M_n(F)$, onde F é um corpo algebricamente fechado de característica zero, e, portanto, descreve as involuções em álgebras simples de dimensão finita sobre corpos algebricamente fechados de característica zero. Todos os conceitos e resultados apresentados aqui podem ser encontrados em [22].

Um espaço vetorial à esquerda V e um espaço vetorial à direita W sobre uma F-álgebra (anel) de divisão Δ são chamados um par de duais sobre Δ se existe uma forma não degenerada bilinear $\langle -,- \rangle$ em V e W, ou seja,

a) $\langle -,- \rangle : V \times W \longrightarrow \Delta$;

b) $$\begin{aligned} \langle v_1 + v_2, w \rangle &= \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle, \\ \langle v, w_1 + w_2 \rangle &= \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle; \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} \langle dv, w \rangle &= d\langle v, w \rangle, \\ \langle v, wd \rangle &= \langle v, w \rangle d; \end{aligned}$$

d) $$\begin{array}{rcl} \langle v, W\rangle & = & 0 \text{ implica } v = 0, \\ \langle V, w\rangle & = & 0 \text{ implica } w = 0 \end{array}$$

para todos $v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W$ e $d \in \Delta$. Uma aplicação $a \in End_\Delta(V)$ possui uma adjunta $a^* \in End_\Delta(W)$ se $\langle va, w\rangle = \langle v, a^*w\rangle$ para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$.

Agora, considere os conjuntos:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_W(V) & = & \{a \in End_\Delta(V) \mid \exists\ a^* \in End_\Delta(W)\} \\ \mathcal{F}_W(V) & = & \{a \in End_\Delta(V) \mid \exists\ a^* \in End_\Delta(W) \\ & & \text{e } dim_\Delta(Va) < \infty\}. \end{array}$$

Observe que $\mathcal{L}_W(V)$ é um subanel de $End_\Delta(V)$ e o conjunto $\mathcal{F}_W(V)$ é um ideal bilateral do anel $\mathcal{L}_W(V)$.

Doravante, trataremos de conceitos básicos sobre involuções em anéis e, logo em seguida, traremos uma ligação envolvendo os conceitos trabalhados acima e involuções em anéis primitivos à direita.

Definição 2.1.1. *Uma involução em um anel associativo R é um antiautomorfismo de ordem 2. Uma involução (do primeiro tipo) em uma F-álgebra A é um antiautomorfismo F-linear de ordem 2.*

Seja $*$ uma involução no anel R. Um elemento $x \in R$ é denominado um elemento simétrico de R se $x^* = x$. Um elemento $x \in R$ é denominado um elemento anti-simétrico de R se $x^* = -x$. O conjunto $S = S(R) = \{x \in R \mid x^* = x\}$, munido com a operação aditiva de R e o produto de Jordan $x \circ y = xy + yx$, é um anel de Jordan. Já o conjunto $K = K(R) = \{x \in R \mid x^* = -x\}$, munido com a operação aditiva herdade de R e o produto de Lie $[x, y] = xy - yx$, é um anel de Lie.

A partir de agora, R denota um anel associativo com ideal à direita minimal.

Definição 2.1.2. *Uma involução $*$ em um anel primo R é do tipo transposta se existir um elemento idempotente minimal simétrico e é dita ser do tipo simplética se $ee^* = 0$ para todo elemento idempotente minimal $e \in R$.*

Em [22], é provado que se R é um anel primitivo à direita e $*$ é uma involução em R, então $*$ é do tipo transposta ou $*$ é do tipo simplética.

Involuções do tipo transposta e do tipo simplética estão naturalmente ligadas as formas bilineares não degeneradas hermitianas e alternadas. Mais precisamente, involuções do tipo transposta correspodem as formas hermitianas e involuções do tipo simplética correspondem as formas alternadas.

Sejam Δ um anel (F-álgebra) de divisão com involução $^{-}$, V um Δ-espaço vetorial à esquerda e $\langle -,-\rangle : V \times V \longrightarrow \Delta$ uma aplicação bi-aditiva tal que

$$\langle dv, d_1 w\rangle = d\langle v, w\rangle \bar{d}_1$$

para quaisquer $v, w \in V$ e $d, d_1 \in \Delta$.

Diz-se que $\langle -,-\rangle$ é hermitiana associada a involução $^{-}$ se

$$\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$$

para todos $v, w \in V$.

Diz-se que $\langle -,-\rangle$ é alternada se $d = \bar{d}$ para todo $d \in \Delta$, $char(\Delta) \neq 2$ e

$$\langle v, w\rangle = -\langle w, v\rangle$$

para todos $v, w \in V$.

Enfim, estamos prontos para enunciar o Teorema de Kaplansky.

Teorema 2.1.1. [*[22], Theorem 4.6.8*] *Seja R um anel primitivo à direita com um ideal à direita minimal e $charR \neq 2$. Então, qualquer involução em R é do tipo transposta ou do tipo simplética. Além disso, R tem uma involução $*$ do tipo transposta (resp. do tipo simplética) se, e somente se, existe um espaço vetorial V sobre um anel de divisão Δ com uma forma não degenerada hermitiana (resp. alternada) $\langle w, v\rangle$ tal que $\mathcal{F}_V(V) \subseteq R \subseteq \mathcal{L}_V(V)$ e $*$ é a adjunta associada a $\langle w, v\rangle$.*

Sabe-se que álgebras simples de dimensão finita sobre corpos algebricamente fechados são isomorfas as álgebras de matrizes (veja [17]). Com isso, e aplicando o Teorema de Kaplansky, obtemos precisamente as involuções em $M_n(F)$, onde F é um corpo algebricamente fechado de característica diferente de 2, já que $M_n(F) \cong End_F(V)$, onde $dim_F V = n < \infty$.

Corolário 2.1.2. [*[22], Corollary 4.6.13*] *Seja $*$ uma involução em $M_n(F)$ do primeiro tipo, onde F é um corpo algebricamente fechado de característica diferente de 2. Então, existe um automorfismo interno ϕ tal que $\phi : (M_n(F), *) \longrightarrow (M_n(F), t)$ ou $\phi : (M_n(F), *) \longrightarrow (M_n(F), s)$, onde*

a) $t : \sum_{i=1}^{n} d_{ij}e_{ij} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} d_{ij}e_{ji}$ *(transposta),*

b) $\sum_{i=1}^{n} d_{ij}e_{ij} \longmapsto S(\sum_{i=1}^{n} d_{ij}e_{ji})S^{-1}$, $n = 2m$ *(simplética), onde* $S = e_{1,2m} + \ldots + e_{m,m+1} - (e_{m+1,m} + \ldots + e_{2m,1})$.

e $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ *são matrizes unitárias.*

2.2 Superálgebras Primitivas com Superinvoluções

Em [12], é provada a existência de superinvoluções em superálgebras primitivas. A existência de superinvoluções em álgebras graduadas garante uma fonte de superálgebras de Lie e de Jordan. Entretanto, nem todas as superálgebras primitivas admitem superinvoluções (Veja [14]).

Em [25], é demonstrada a teoria estrutural para superálgebras primitivas análoga à teoria estrutural de álgebras primitivas apresentada em [22].

Nosso objetivo aqui é apresentar esses resultados que são similares aos da teoria exposta na seção anterior.

Sejam $V = V_0 + V_1$ um espaço vetorial à esquerda $\mathbb{Z}_2$-graduado e $W = W_0 + W_1$ um espaço vetorial à direita $\mathbb{Z}_2$-graduados sobre uma superálgebra (superanel) de divisão $\mathcal{D}$. Dizemos que V e W são um par de espaços duais graduados sobre $\mathcal{D}$ se existir uma aplicação bi-aditiva não degenerada graduada $\langle -,-\rangle_\nu$ em V e W de grau $\nu \in \mathbb{Z}_2$ tal que:

a) $\langle -,-\rangle_\nu : V \times W \longrightarrow \mathcal{D}$;

b) $\langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\nu \in \mathcal{D}_{\alpha+\beta+\nu}$;

c) $$\begin{array}{rcl} \langle v+v', w\rangle_\nu & = & \langle v, w\rangle_\nu + \langle v', w\rangle_\nu; \\ \langle v, w+w'\rangle_\nu & = & \langle v, w\rangle_\nu + \langle v, w'\rangle_\nu; \end{array}$$

d) $$\begin{array}{rcl} \langle d_\delta v_\alpha, w_\beta\rangle_\nu & = & d_\delta \langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\nu; \\ \langle v_\alpha, w_\beta d_\delta\rangle_\nu & = & \langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\nu d_\delta; \end{array}$$

e) $$\begin{array}{rcl} \langle v_\alpha, W\rangle_\nu & = & 0 \text{ implica } v_\alpha = 0; \\ \langle V, w_\beta\rangle_\nu & = & 0 \text{ implica } w_\beta = 0 \end{array}$$

para todos $v, v' \in V, v_\alpha \in V_\alpha, w, w' \in W, w_\beta \in W_\beta, d_\delta \in \mathcal{D}_\delta$ e $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Z}_2$. Dizemos que uma aplicação $a_\alpha \in End_{\mathcal{D}}(V)_\alpha$ possui uma adjunta (superadjunta) $a_\alpha^{*\mathbb{Z}_2} \in End_{\mathcal{D}}(W)_\alpha$ se para quaisquer $v_\tau \in V_\tau$ e $w_\beta \in W_\beta$ tem-se $\langle v_\tau a_\alpha, w_\beta\rangle_\nu = (-1)^{\alpha\beta}\langle v_\tau, w_\beta a_\alpha^{*\mathbb{Z}_2}\rangle_\nu$.

Considere os anéis $\mathbb{Z}_2$-graduados

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_W^{\mathbb{Z}_2}(V) & = & \{a \in End_{\mathcal{D}}^{gr}(V) \mid \exists\, a^{*\mathbb{Z}_2} \in End_{\mathcal{D}}^{gr}(W)\} \\ \mathcal{F}_W^{\mathbb{Z}_2}(V) & = & \{a \in End_{\mathcal{D}}^{gr}(V) \mid \exists\, a^{*\mathbb{Z}_2} \in End_{\mathcal{D}}^{gr}(W) \\ & & \text{e } dim_{\mathcal{D}}(Va) < \infty\}. \end{array}$$

Observe que $\mathcal{F}_W^{\mathbb{Z}_2}(V)$ é um superideal do superanel $\mathcal{L}_W^{\mathbb{Z}_2}(V)$.

Os próximos dois teoremas constituem uma versão do Teorema de Kaplansky para superanéis primitivos à direita. Suas demonstrações encontram-se em [25].

Teorema 2.2.1. [*[25], Theorem 6*] *Se $\mathcal{R}$ é um superanel primitivo à direita com um superideal minimal à direita, então existem um superanel de divisão $\mathcal{D}$ e um par de espaços duais $\mathbb{Z}_2$-graduados V e W sobre $\mathcal{D}$ tais que*

$$\mathcal{F}_W^{\mathbb{Z}_2}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{\mathbb{Z}_2}(V). \tag{2.1}$$

Reciprocamente, dados um par de espaços duais graduados V e W sobre um superanel de divisão $\mathcal{D}$, qualquer superanel que satisfaça (2.1) *é primitivo à direita e contém um superideal à direita minimal. Além disso, $\mathcal{F}_W^{\mathbb{Z}_2}(V)$ é o único superideal minimal de $\mathcal{R}$.*

Para enunciar o teorema seguinte, precisamos trazer alguns conceitos.

Uma superinvolução em uma superálgebra $\mathcal{A}$ é uma transformação linear graduada de grau 0

$$\begin{array}{rccc} \natural_{\mathbb{Z}_2}: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & a & \longmapsto & a^{\natural_{\mathbb{Z}_2}} \end{array}$$

tal que

$$(a)^{\natural_{\mathbb{Z}_2}\natural_{\mathbb{Z}_2}} = a \text{ e } (a_{\bar{\alpha}}a_{\bar{\beta}})^{\natural_{\mathbb{Z}_2}} = (-1)^{\alpha\beta}a_{\bar{\beta}}^{\natural_{\mathbb{Z}_2}}a_{\bar{\alpha}}^{\natural_{\mathbb{Z}_2}}$$

para todos $a \in \mathcal{A}, a_\theta \in \mathcal{A}_\theta, \theta \in \mathbb{Z}_2$.

Seja $^{-}$ uma superinvolução na superálgebra (superanel) de divisão $\mathcal{D}$. Dizemos que um par de espaços duais $\langle -, - \rangle_\nu : V \times W \longrightarrow \mathcal{D}$ é um par sesquilinear de $\mathcal{D}$-espaços vetoriais à esquerda se

$$\begin{array}{rcl} \langle d_\delta v_\alpha, w_\beta \rangle_\nu & = & d_\delta \langle v_\alpha, w_\beta \rangle_\nu \\ \langle v_\alpha, d_\delta w_\beta \rangle_\nu & = & (-1)^{\delta\beta} \langle v_\alpha, w_\beta \rangle_\nu \bar{d}_\delta \end{array}$$

para quaisquer $v_\alpha \in V_\alpha, w_\beta \in W_\beta, d_\delta \in \mathcal{D}_\delta$. Vamos nos referir a $\langle -, - \rangle_\nu$ associado ao par sesquilinear $V \times V$ como superforma.

Seja $\epsilon \in Z(\mathcal{D})$ tal que $\epsilon\bar{\epsilon} = 1$. Uma superforma ϵ-hermitiana é uma superforma que satisfaz

$$\langle v_\alpha, w_\beta \rangle_\nu = (-1)^{\alpha\beta}\overline{\epsilon \langle w_\beta, v_\alpha \rangle_\nu}$$

para $v_\alpha \in V_\alpha, w_\beta \in V_\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$. Uma superforma $\langle -, - \rangle_\nu$ é dita par se $\nu = 0$ e é dita ser ímpar se $\nu = 1$. Se $\epsilon = 1$ (resp., -1), dizemos que $\langle -, - \rangle_\nu$ é hermitiana (resp., anti-hermitiana).

Definição 2.2.1. *Seja M um $\mathcal{R}$-módulo à direita $\mathbb{Z}_2$-graduado. O super-comutador de $\mathcal{R}$ em M é o superanel $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1$, onde $\mathcal{C}_\alpha = \{c_\alpha \in End(M)_\alpha \mid c_\alpha r_\beta = (-1)^{\alpha\beta} r_\beta c_\alpha, \ \forall\ r_\beta \in \mathcal{R}_\beta, \ \beta \in G\}$.*

Por fim, encerramos esta seção com os seguintes resultados.

Teorema 2.2.2. [*[25], Theorem 7*] *Um superanel primitivo à direita $\mathcal{R}$ com um superideal à direita minimal tem uma superinvolução* $*_{\mathbb{Z}_2}$ *se, e somente se, $\mathcal{R}$ tem um par de espaços duais $V \times V$, onde V é um $\mathcal{R}$-módulo graduado, e o super-comutador de $\mathcal{R}$ em V possui uma superinvolução* $*_{\mathbb{Z}_2}$*, que é a adjunta associada a superforma hermitiana ou anti-hermitiana em V.*

Como consequência do **Teorema 2.2.2** e do **Teorema 1.5.20** para superanéis, tem-se:

Corolário 2.2.3. [*[12], Corollary 23*] *Se $\mathcal{A}$ é uma F-superálgebra simples de dimensão finita com $\mathcal{A}_1 \neq (0)$ e uma superinvolução* $*_{\mathbb{Z}_2}$*, então apenas uma das afirmações abaixo segue:*

a) *existem uma F-superálgebra de divisão de dimensão finita com superinvolução $(\mathcal{D},\, ^-)$, um $\mathcal{D}$-módulo à esquerda de dimensão finita V, com $V_0 \neq 0$, dotado com uma superforma não degenerada hermitiana par $\langle -, - \rangle_0 : V \times V \longrightarrow \mathcal{D}$, e $End^{gr}_{\mathcal{D}}(V)$ e $\mathcal{A}$ são isomorfas como superálgebras com superinvoluções. Além disso, a superinvolução em $End^{gr}_{\mathcal{D}}(V)$ é a adjunta associada a superforma;*

b) *existem uma F-álgebra de divisão com graduação trivial de dimensão finita com involução $(\Delta,\, ^-)$, um espaço vetorial de dimensão finita $\mathbb{Z}_2$-graduado V dotado com uma superforma não degenerada hermitiana ímpar $\langle -, - \rangle_1 : V \times V \longrightarrow \Delta$, e $End^{gr}_{\Delta}(V)$ e $\mathcal{A}$ são isomorfas como superálgebras com superinvoluções.*

Reciprocamente, qualquer tal superálgebra é simples e é dotada com uma superinvolução.

2.3 $\mathbb{Z}_3$-involução na álgebra $\mathbb{Z}_3$-graduada $M_{p+q+r}(\mathcal{D})$

Em [18], é investigada a existência de $\mathbb{Z}_3$-involuções na álgebra $\mathbb{Z}_3$-graduada $\mathcal{A} = M_{p+q+p}(\mathcal{D})$, onde $\mathcal{D}$ é uma álgebra de divisão e $p, q > 0$. É bem conhecido que $\mathcal{A}$ é uma álgebra $\mathbb{Z}_3$-graduada primitiva.

Definição 2.3.1. *Seja $\mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha=0}^{2} \mathcal{A}_\alpha$ uma álgebra $\mathbb{Z}_3$-graduada. Uma transformação linear graduada de grau 0 de ordem 2* $*_{\mathbb{Z}_3} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ *é chamada $\mathbb{Z}_3$-involução se*

$$(a_\alpha b_\beta)^{*_{\mathbb{Z}_3}} = (-1)^r (b_\beta)^{*_{\mathbb{Z}_3}} (a_\alpha)^{*_{\mathbb{Z}_3}}$$

para quaisquer $a_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha, b_\beta \in \mathcal{A}_\beta$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_3$, onde $r = \alpha\beta (mod\ 3)$.

Jaber, em [18], apresenta também uma caracterização de $\mathbb{Z}_3$-involuções em $M_{p+q+r}(\mathcal{D})$ relacionada a um tipo especial de forma $\mathbb{Z}_3$-graduada.

Teorema 2.3.1. [*[18], Theorem 2.10*] *Uma $\mathbb{Z}_3$-forma simétrica não degenerada $\langle,\rangle : V \times V \longrightarrow F$ induz uma $\mathbb{Z}_3$-involução $*_{\mathbb{Z}_3}$ em $End_F^{gr}(V)$ via*

$$\langle v_\alpha a_\tau, v_\beta\rangle = (-1)^{\tau\beta}\langle v_\alpha, v_\beta a_\tau^{*_{\mathbb{Z}_3}}\rangle$$

para quaisquer $v_\alpha \in V_\alpha, v_\beta \in V_\beta, a_\tau \in (End_F^{gr}(V))_\tau$, onde V é um espaço vetorial $\mathbb{Z}_3$-graduado de dimensão finita sobre o corpo F.

O teorema seguinte determina a $\mathbb{Z}_3$-involução na álgebra $\mathbb{Z}_3$-graduada $M_{p+q+p}(\mathcal{D})$.

Teorema 2.3.2. [*[18], Theorem 4.2*] *Seja $\mathcal{D}$ uma álgebra de divisão e seja $\mathcal{A} = M_{p+q+r}(\mathcal{D}), p, q, r > 0$, com a seguinte $\mathbb{Z}_3$-graduação:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \mid f \in M_p(\mathcal{D}), g \in M_q(\mathcal{D}), h \in M_r(\mathcal{D}) \right\}, \\
\mathcal{A}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \mid a \in M_{q\times p}(\mathcal{D}), b \in M_{r\times q}(\mathcal{D}), c \in M_{p\times r}(\mathcal{D}) \right\}, \\
\mathcal{A}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid y \in M_{q\times r}(\mathcal{D}), x \in M_{p\times q}(\mathcal{D}), z \in M_{r\times p}(\mathcal{D}) \right\}.
\end{aligned}$$

Suponha que $A = \left\{ \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \mid f \in M_p(\mathcal{D}), h \in M_r(\mathcal{D}) \right\}$. Se $*_{\mathbb{Z}_3}$ é uma $\mathbb{Z}_3$-involução em $\mathcal{A}$ com $(A, {}^{*_{\mathbb{Z}_3}}|_A)$ simples, então $p = r$, $\mathcal{D}$ tem uma involução $^-$, e $(\mathcal{A}, *_{\mathbb{Z}_3})$ é isomorfa a $M_{p+q+r}(\mathcal{D})$ com a $\mathbb{Z}_3$-involução dada por

$$\begin{pmatrix} f & x & c \\ a & g & y \\ z & b & h \end{pmatrix}^{*_{\mathbb{Z}_3}} = \begin{pmatrix} \tilde{h} & \frac{\tilde{y}}{\alpha} & -\mu\tilde{c} \\ \frac{\tilde{b}}{\alpha} & \tilde{g} & \alpha\tilde{x} \\ -\tilde{\mu}\tilde{z} & \bar{\alpha}\tilde{a} & \tilde{f} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

para $\mu, \alpha \in F$ tais que $\mu\tilde{\mu} = 1$ e $\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} = \mu$, onde $\tilde{a} = \bar{a}^t$ para qualquer matriz sobre $\mathcal{D}, t$ é a involução transposta. Se $\tilde{}$ é do primeiro tipo, então μ e α podem ser escolhidos iguais a 1. Reciprocamente, se $\mathcal{D}$ tem uma involução $^-$, então (2.2) define uma $\mathbb{Z}_3$-involução na álgebra $\mathbb{Z}_3$-graduada simples.

2.4 Involuções Graduadas

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados de involuções graduadas, os quais são encontrados em [1] e [27]. Bahturin, Bresăr e Kochetov em [1] apresentam uma versão do **Teorema 2.2.1** para o caso G-graduado, onde G é um grupo abeliano finito. Em [27], Sviridova descreveu todas as álgebras $*_{gr}$-graduadas simples de dimensão finita, em que $G = \mathbb{Z}_q$, onde q é um número primo ou $q = 4$ e F é um corpo algebricamente fechado de característica zero. Primeiro vamos enunciar os resultados de Bahturin, Bresǎr e Kochetov e depois a descrição apresentada por Sviridova.

Considere G um grupo abeliano finito e $\mathcal{D}$ um anel (F-álgebra) G-graduada de divisão. Suponha que V seja um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à direita G-graduado. O dual graduado V^{gr} é definido como $Hom^{gr}_{\mathcal{D}}(V, \mathcal{D})$. Note que V^{gr} é um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda com ação de $\mathcal{D}$ definida por $(df)(v) := d(f(v))$ para $f \in V^{gr}, d \in \mathcal{D}$ e $v \in V$.

Seja V um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à direita G-graduado e seja $W \subseteq V^{gr}$ um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda G-graduado. Uma aplicação $\mathcal{D}$-bilinear não degenerada graduada $\langle -, - \rangle_\nu : W \times V \longrightarrow \mathcal{D}$ de grau ν é uma aplicação bi-aditiva de modo que sejam válidas, para quaisquer $v_\beta \in V_\beta,\ w_\delta \in W_\delta, d_\gamma \in \mathcal{D}_\gamma$ e $\beta, \delta, \gamma \in G$, as seguintes propriedades:

a) $\langle w_\delta, v_\beta \rangle_\nu \in \mathcal{D}_{\beta+\delta+\nu}$;

b) $\langle d_\gamma w_\delta, v_\beta \rangle_\nu = d_\gamma \langle w_\delta, v_\beta \rangle_\nu$;

c) $\langle w_\delta, v_\beta d_\gamma \rangle_\nu = \langle w_\delta, v_\beta \rangle_\nu d_\gamma$;

d) $\begin{array}{lll} \langle w_\alpha, V \rangle_\nu = \{0\} & \text{implica} & w_\alpha = 0; \\ \langle W, v_\beta \rangle_\nu = \{0\} & \text{implica} & v_\beta = 0. \end{array}$

Neste caso, o subespaço graduado W de V^{gr} é chamado de subespaço graduado total.

Dizemos que uma aplicação $a \in End^{gr}_{\mathcal{D}}(V)$ possui uma adjunta $a^{*_{gr}} \in End^{gr}_{\mathcal{D}}(W)$ se para quaisquer $v_\tau \in V_\tau$ e $w_\beta \in W_\beta$ tem-se $\langle w_\beta, v_\tau a \rangle_\nu = \langle w_\beta a^{*_{gr}}, v_\tau \rangle_\nu$. Observamos que se $deg_G(a) = \alpha$, então $deg_G(a^{*_{gr}}) = \alpha$.

Analogamente a **Seção 2.2**, temos os anéis G-graduados

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}^{gr}_W(V) & = & \{a \in End^{gr}_{\mathcal{D}}(V) \mid \exists\ a^{*_{gr}} \in End^{gr}_{\mathcal{D}}(W)\} \\ \mathcal{F}^{gr}_W(V) & = & \{a \in End^{gr}_{\mathcal{D}}(V) \mid \exists\ a^{*_{gr}} \in End^{gr}_{\mathcal{D}}(W) \\ & & \text{e } dim_{\mathcal{D}}(W a^{*_{gr}}) < \infty\}. \end{array}$$

Além disso, $\mathcal{F}^{gr}_W(V)$ é um ideal G-graduado do anel G-graduado $\mathcal{L}^{gr}_W(V)$.

O próximo teorema, demonstrado em [1], é um análogo ao **Teorema 2.2.1**. Ambos generalizam o Teorema de Kaplansky.

Teorema 2.4.1. [*[1], Theorem 3.3*] *Seja $\mathcal{R}$ uma F-álgebra (ou anel) G-graduada. Então, $\mathcal{R}$ é graduado primitivo à esquerda com um ideal à esquerda G-graduado minimal se, e somente se, existem uma álgebra G-graduada de divisão $\mathcal{D}$, um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à direita V e um $\mathcal{D}$-subespaço graduado total W de V^{gr} tal que $\mathcal{R}$ é isomorfa a uma subálgebra* *(subanel) graduada de $\mathcal{L}_W^{gr}(V)$ contendo $\mathcal{F}_W^{gr}(V)$. Além disso, $\mathcal{F}_W^{gr}(V)$ é o único ideal G-graduado minimal de $\mathcal{R}$.*

Nesse mesmo trabalho, Bahturin e Kochetov investigaram sob quais condições uma F-álgebra (anel) graduada descrita pelo **Teorema 2.4.1** admite um antiautomorfismo graduado. Para enunciar o resultado obtido por eles, exibiremos algumas definições antes. Assumiremos que $\mathcal{R}$ é um anel (F-álgebra) graduado primitivo à esquerda com um ideal à esquerda graduado minimal e $\mathcal{F}_W^{gr}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr}(V)$, onde V é um espaço vetorial à direita graduado sobre um anel (F-álgebra) graduado de divisão $\mathcal{D}$ e W é um espaço vetorial à esquerda graduado sobre $\mathcal{D}$. O subespaço W é identificado com um subespaço total de V^{gr}, já que $\langle -, - \rangle_\nu$ é uma forma $\mathcal{D}$-bilinear não degenerada.

Fixemos:

1) φ_0 um antiautomorfismo no anel (F-álgebra) graduado de divisão $\mathcal{D}$;

2) φ um isomorfismo de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{R}^{op}$;

3) φ_1 uma apliação φ_0-semilinear, em outros termos, $\varphi_1(vd) = \varphi_0(d)\varphi(v)$ para todos $d \in \mathcal{D}, v \in V$.

Definimos uma forma F-bilinear não degenerada $B : V \times V \longrightarrow \mathcal{D}$ do seguinte modo:

$$B(u, v) := \langle \varphi_1(u), v \rangle_\nu$$

para quaisquer $u, v \in V$. Obtemos que B também satisfaz

$$B(ud, v) = \varphi_0(d)B(u, v) \text{ e } B(u, vd) = B(u, v)d$$

para todos $u, v \in V, d \in \mathcal{D}$. Por abreviação, diremos que B é φ_0-sesquilinear.

Dizemos que uma φ_0-sesquilinear forma não degenerada $B : V \times V \longrightarrow \mathcal{D}$ é fracamente hermitiana se existe um φ_0^{-2}-semilinear isomorfismo $Q : V \longrightarrow V$ de espaços vetoriais graduados tal que seja válido

$$\bar{B}(u, v) = B(Qu, v)$$

para todos $v, u \in V$, onde $\bar{B}(u, v) := \varphi_0^{-1}(B(u, v))$.

Por fim, o resultado abaixo nos traz sob quais condições uma F-álgebra (anel) graduada descrito pelo **Teorema 2.4.1** admite um antiautomorfismo graduado.

Teorema 2.4.2. [*[1], Theorem 3.16*] *Seja G um grupo abeliano. Sejam $\mathcal{D}$ um anel (F-álgebra) G-graduado de divisão, V um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à direita graduado e W um $\mathcal{D}$-subespaço vetorial graduado de V^{gr}. Suponha que $\mathcal{R}$ seja um anel (F-álgebra) G-graduado* *tal que*

$$\mathcal{F}_W^{gr}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr}(V).$$

Se φ é um antiautomorfismo no anel (F-álgebra) graduado $\mathcal{R}$, então existe um antiautomorfismo φ_0 no anel (F-álgebra) graduado de divisão $\mathcal{D}$ e uma φ_0-sesquilinear forma $B : V \times V \longrightarrow \mathcal{D}$ fracamente hermitiana não degenerada homogênea tal que as seguintes propriedades são válidas:

a) a aplicação

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^{gr} \\ u & \longmapsto & f_u, \end{array}$$

onde $f_u(v) := B(u, v)$ para todo $v \in V$, leva V em W;

b) para qualquer $r \in \mathcal{R}$, $\varphi(r)$ é a adjunta associada B, isto é, $B(\varphi(r)u, v) = B(u, \varphi(r)v)$ para todos $u, v \in V$.

Se φ_0' é um antiautomorfismo em $\mathcal{D}$, B' é uma φ_0'-sesquilinear forma de $V \times V \longrightarrow \mathcal{D}$ que define W e φ é como em a) e b), então existe um elemento homogêneo não nulo $d \in \mathcal{D}$ tal que $B' = dB$ e $\varphi_0'(x) = d\varphi_0(x)d^{-1}$ para todo $x \in \mathcal{D}$. Como uma recíproca parcial, se φ_0 é um antiautomorfismo de anel (F-álgebra) graduado de divisão $\mathcal{D}$ e $B : V \times V \longrightarrow \mathcal{D}$ é uma φ_0-sesquilinear forma fracamente hermitiana não degenerada homogênea, então a adjunta associada a B define um antiautomorfismo φ no anel (F-álgebra) graduado $\mathcal{L}_W^{gr}(V)$ tal que $\varphi(\mathcal{F}_W^{gr}(V)) = \mathcal{F}_W^{gr}(V)$, onde com $W = \{f_u \mid u \in V\}$.

Agora, iremos apresentar a descrição das F-álgebras $*_{gr}$-graduadas simples de dimensão finita, em que $G = \mathbb{Z}_q$, onde q é um número primo ou $q = 4$ e F é um corpo algebricamente fechado de característica 0. Para tanto, faremos algumas definições.

Seja $\mathcal{A} = \bigoplus_{\theta \in G} \mathcal{A}_\theta$ uma F-álgebra G-graduada. Suponhamos que uma involução $*_{gr}$ em $\mathcal{A}$ seja graduada de grau nulo, ou seja, $\mathcal{A}_\alpha^{*_{gr}} = \mathcal{A}_\alpha$ para todo $\alpha \in G$. De agora em diante, vamos chama-lá de involução graduada.

Um ideal graduado $I \subseteq \mathcal{A}$ da F-álgebra graduada $\mathcal{A}$ é denominado um $*_{gr}$-ideal graduado se I é invariante pela ação da involução $*_{gr}$. Uma F-álgebra graduada com involução $*_{gr}$ é chamada de F-álgebra $*_{gr}$-graduada simples se não contém $*_{gr}$-ideais graduados não triviais.

Definição 2.4.1. *Uma involução graduada na F-álgebra G-graduada simples $M_k(F^\zeta(H))$ é chamada de elementar se satisfaz a condição*

$$(e_{ij}\eta_\xi)^{*_{gr}} = \alpha_{i,j,\eta} e_{i'j'}\eta_{\xi'}, 1 \leq i', j' \leq k, \xi' \in H, \alpha_{i,j,\eta} \in \{1, -1\} \tag{2.3}$$

para todos $i, j = 1, \dots, k, \eta \in H$ e matrizes unitárias e_{ij}.

Teorema 2.4.3. [*[27], Theorem 6.1*] *Seja q um número primo ou $q = 4$ e seja G um grupo cíclico de ordem q. Suponha que F seja um corpo algebricamente fechado de característica 0, e $\mathcal{C}$ seja uma álgebra G-graduada de dimensão finita sobre F com involução graduada. Então, $\mathcal{C}$ é uma álgebra $*_{gr}$-graduada simples se, e somente se, $\mathcal{C}$ é isomorfa, como $*_{gr}$-álgebra graduada, a uma das álgebras listadas abaixo:*

a) *ao produto direto $\mathcal{B} \times \mathcal{B}^{op}$ de uma álgebra graduada simples $\mathcal{B} = M_k(F[H])$ e sua álgebra oposta $\mathcal{B}^{op}$ com a involução troca $\overline{*_{gr}}$, onde $F[H]$ é a álgebra do grupo H e H é um subgrupo de G;*

b) *a álgebra de matrizes $M_k(F)$ com uma graduação elementar e uma involução elementar;*

c) *a álgebra de matrizes $M_k(F[H])$ sobre a álgebra de grupo $F[H]$ com graduação induzida pela graduação de $F[H], deg_G\chi_\theta\eta_\theta = \theta$, e involução $(\sum\limits_{\theta\in H}\chi_\theta\eta_\theta)^{*_{gr}} = \sum\limits_{\theta\in H}\chi_\theta^{\boldsymbol{t}}\eta_\theta$, onde $\boldsymbol{t}$ é a involução transposta ou simplética na álgebra de matrizes $M_k(F), \chi_\theta \in M_k(F), \theta \in H, H$ é um subgrupo de G;*

d) *a álgebra de matrizes $M_k(F[H])$ sobre a álgebra de grupo $F[H]$ com graduação induzida pela graduação natural de $F[H], deg_G\chi_\theta\eta_\theta = \theta$, e involução $(\sum\limits_{\theta\in H}\chi_\theta\eta_\theta)^{*_{gr}} = \sum\limits_{\theta\in H}(-1)^\theta\chi_\theta^{\boldsymbol{t}}\eta_\theta$, onde $\boldsymbol{t}$ é a involução transposta ou simplética na álgebra de matrizes $M_k(F), \chi_\theta \in M_k(F)$, e $H \cong \dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ ou $H \cong \dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$;*

e) *a álgebra de matrizes $M_k(F[H])$ sobre a álgebra do grupo de $H = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ com $\dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$-graduação, $deg_G(e_{ij}\eta_\xi) = -\theta_i + \xi + \theta_j$, definida por uma k-upla $(\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \{\bar{0}, \bar{1}\}^k$ e uma involução elementar, onde $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^k$ são matrizes unitárias e $\xi \in H$.*

2.5 Álgebra de Jordan Colorida

Bergen e Grzeszczuk mostraram em [9] como álgebras de Jordan simples surgem naturalmente de álgebras associativas graduadas simples e álgebras associativas graduadas simples com involução colorida. O trabalho de Bergen and Grzeszczuk foi motivado pelo trabalho de Herstein [15], onde foi provado que se A é uma álgebra associativa simples, então A é uma álgebra de Jordan simples com multiplicação de Jordan (simétrica) definida por $r \circ s = rs + sr$ para quaisquer $r, s \in A$. Herstein também mostrou que se A é uma álgebra sobre um corpo F de característica diferente de 2 com involução $*$, então o conjunto $S = \{s \in A \mid s^* = s\}$, com multiplicação de Jordan (simétrica), também é uma álgebra de Jordan simples. Os resultados apresentados aqui podem ser encontrados em [9]. Nesta seção, podemos considerar álgebras não necessariamente comutativas ou associativas.

Seja F um corpo. Um 2-cociclo $\sigma : G \times G \longrightarrow F^\times$ é chamado bicaracter se

$$\sigma(\alpha+\beta,\gamma) = \sigma(\alpha,\gamma)\sigma(\beta,\gamma) \;\text{ e }\; \sigma(\alpha,\beta+\gamma) = \sigma(\alpha,\beta)\sigma(\alpha,\gamma)$$

para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in G$. Dizemos que σ é anti-simétrico se

$$\sigma(\alpha,\beta) = \sigma(\beta,\alpha)^{-1}$$

para quaisquer $\alpha, \beta \in G$. Note que, neste caso, $\sigma(\alpha,\alpha) = \pm 1$ para todo $\alpha \in G$.

Nesta seção, ϵ denota um bicaracter anti-simétrico.

Definição 2.5.1. *Seja J uma álgebra (não associativa e não comutativa) sobre um corpo F de característica diferente de 2 com uma multiplicação bilinear $\circ$. Se $J = \bigoplus_{\alpha\in G} J_\alpha$ é graduado por um grupo abeliano e $\epsilon : \times G \longrightarrow F^\times$ é um bicaracter anti-simétrico, então J é uma álgebra de Jordan colorida se*

a) $x_\alpha \circ y_\beta = \epsilon(\alpha,\beta)\ y_\beta \circ x_\alpha$;

b)

$$\epsilon(\gamma,\alpha+\tau)(x_\alpha \circ y_\beta)\circ(r_\tau \circ z_\gamma) + \epsilon(\beta,\gamma+\tau)(z_\gamma \circ x_\alpha)\circ(r_\tau \circ y_\beta) +$$

$$\epsilon(\alpha,\beta+\tau)(y_\beta \circ z_\gamma)\circ(r_\tau \circ x_\alpha) = \epsilon(\gamma,\alpha+\tau)((x_\alpha \circ y_\beta)\circ r_\tau)\circ z_\gamma +$$

$$\epsilon(\beta,\gamma+\tau)((z_\gamma \circ x_\alpha)\circ r_\tau)\circ y_\beta + \epsilon(\alpha,\beta+\tau)((y_\beta \circ z_\gamma)\circ r_\tau)\circ x_\alpha$$

para quaisquer $x_\alpha \in J_\alpha, r_\tau \in J_\tau, y_\beta \in J_\beta, z_\gamma \in J_\gamma$.

Seja ϵ um bicaracter anti-simétrico. O ϵ-centro de uma F-álgebra graduada R é o subespaço graduado $Z_\epsilon = \bigoplus_{\alpha\in G} (Z_\epsilon)_\alpha$, onde $(Z_\epsilon)_\alpha = \{a_\alpha \in R_\alpha \mid [a_\alpha, r_\beta] = a_\alpha r_\beta - \epsilon(\alpha,\beta) r_\beta a_\alpha = 0,\ \forall\ \ r_\beta \in R_\beta, \beta \in G\}$.

Sejam R uma F-álgebra associativa graduada e ϵ um bicaracter anti-simétrico. Uma involução colorida (ϵ-involução) em R é uma aplicação F-linear graduada $*_c : R \longrightarrow R$ que satisfaz as relações

$$a^{*_c *_c} = a \;\text{ e }\; (a_\alpha a_\beta)^{*_c} = \epsilon(\alpha,\beta)(a_\beta^{*_c} a_\alpha^{*_c}) \tag{2.4}$$

para quaisquer elementos homogêneos $a_\alpha \in R_\alpha, a_\beta \in R_\beta,\ a \in R$. Denotamos o conjunto dos elementos simétricos por $S = \{s \in R \mid s^{*_c} = s\}$. Definimos em S o produto nos elementos homogêneos por:

$$a_\alpha b_\beta + \epsilon(\alpha,\beta) b_\beta a_\alpha$$

para todos $a_\alpha \in S_\alpha, b_\beta \in S_\beta, \alpha, \beta \in G$. Com esse produto S é uma álgebra de Jordan colorida.

Seja G um grupo. Particionamos o grupo G em dois subconjuntos em relação a um bicaracter anti-simétrico ϵ:

$$G_+ = \{\alpha \in G \mid \epsilon(\alpha,\alpha) = 1\} \text{ e } G_- = \{\alpha \in G \mid \epsilon(\alpha,\alpha) = -1\}.$$

Se A é um subespaço G-graduado de R, consideramos os seguintes subespaços de A :

$$A_+ = \bigoplus_{\alpha \in G_+} A_\alpha \text{ e } A_- = \bigoplus_{\alpha \in G_-} A_\alpha.$$

Assim, temos a decomposição $A = A_+ \oplus A_-$.

Dados A e B F-subespaços graduados de R. Denotaremos $A \circ B$ o F-subespaço gerado por elementos da forma $a \circ b$ para quaisquer elementos homogêneos $a \in A$ e $b \in B$.

Seja A uma álgebra de Jordan colorida. Dizemos que um subespaço graduado $U \subseteq A$ é um ϵ-Jordan ideal de A se $U \circ A \subseteq U$.

Exemplo 2.5.1. [*[9], Example 1.2*] *Considere G um grupo abeliano com um bicaracter ϵ tal que $G \neq G_+$. Sejam A uma F-álgebra G_+-graduada tal que A é igual ao seu ϵ-centro e β um elemento de G_-. Então, $R = M_2(A)$ é G-graduado com a graduação*

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} A_\alpha & 0 \\ 0 & A_\alpha \end{pmatrix}$$

se $\alpha \in G_+$ e

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & A_{\alpha-\beta} \\ A_{\alpha+\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

se $\alpha \in G_-$. A aplicação homogênea linear $*_c : M_2(A) \longrightarrow M_2(A)$ definida como

$$\begin{pmatrix} a_\nu & b_\gamma \\ c_\omega & d_\tau \end{pmatrix}^{*_c} = \begin{pmatrix} \epsilon(\tau,\beta) d_\tau & b_\gamma \\ -c_\omega & \epsilon(\beta,\nu) a_\nu \end{pmatrix}$$

é uma involução colorida em R chamada involução simplética colorida.

Seja $\sigma : G \times G \longrightarrow F^\times$ um 2-cociclo e seja $\epsilon : G \times G \longrightarrow F^\times$ um bicaracter. Dizemos que σ e ϵ são color compatíveis se

$$\epsilon = \begin{cases} \frac{\sigma(\alpha,\beta)}{\sigma(\beta,\alpha)} & \text{quando} \quad \alpha \in G \text{ ou } \beta \in G_+; \\ -\frac{\sigma(\alpha,\beta)}{\sigma(\beta,\alpha)} & \text{quando} \quad \alpha, \beta \in G_-. \end{cases}$$

Agora, podemos enunciar o teorema.

Teorema 2.5.1. [*[9], Theorem 5.1*] *Sejam ϵ um bicaracter anti-simétrico e R uma F-álgebra associativa graduada simples com ϵ-involução. Então S é uma álgebra de Jordan colorida simples, exceto nos seguintes casos especiais:*

a) *R é a álgebra torcida de grupo $F^{\sigma}[G]$, R_- é o único ϵ-Jordan ideal próprio de R, $R_- \circ R_- = 0$ e o 2-cociclo σ e o bicaracter ϵ são color compatíveis. Este caso ocorre apenas quando $Z_\epsilon \nsubseteq S_+$. Além disso, neste caso, S_- é único ϵ-Jordan ideal de S.*

b) *R e $M_2(Z_\epsilon)$ são isomorfas como álgebras com ϵ-involuções, onde $M_2(Z_\epsilon)$ é a álgebra de matrizes 2×2 com involução simplética colorida. Este caso ocorre apenas quando $Z_\epsilon \subseteq S_+$ e $S_+^2 \subseteq Z_\epsilon$*

Como dissemos, as seções **2.1**- **2.5** constituem a motivação do nosso trabalho. O que apresentaremos nos próximos capítulos é uma generalização de alguns dos resultados dessas seções para anéis graduados e álgebras graduadas com σ-involução. Além disso, os resultados que iremos apresentar podem também ser aplicados para obter álgebras de Jordan colorida simples, pois segundo Bergen and Grzeszczuk, [9], algumas classes de álgebras de Jordan simples coloridas surgem naturalmente de álgebras associativas graduadas simples com involução colorida.

Capítulo 3

Anéis Graduados Primitivos com σ-involuções e Par de Espaços Duais Graduados com Torção

O objetivo principal deste capítulo é definir σ-involução e estender o **Teorema 2.2.1** e o **Teorema 2.4.1** para anéis graduados primitivos à direita com um ideal à direita graduado. Vamos mostrar que anéis graduados primitivos à direita com ideias à direita graduados estão naturalmente relacionados com pares bilineares não degenerados graduados. Aqui, os anéis G-graduados e F-álgebras G-graduadas são, ambos, de característica diferente de 2.

3.1 2-cociclo

Recordaremos a definição de 2-cociclo e apresentaremos algumas de suas propriedades.

Seja G um grupo finito abeliano e seja F um corpo. Uma aplicação $\sigma : G \times G \longrightarrow F^{\times}$ é dita um 2-cociclo se

$$\sigma(\alpha,\beta)\sigma(\alpha+\beta,\gamma) = \sigma(\beta,\gamma)\sigma(\alpha,\beta+\gamma)$$

para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in G$. Se σ satisfaz

$$\begin{array}{rcl} \sigma(\alpha,\beta+\gamma) & = & \sigma(\alpha,\beta)\sigma(\alpha,\gamma), \\ \sigma(\alpha+\beta,\gamma) & = & \sigma(\alpha,\gamma)\sigma(\beta,\gamma) \end{array} \tag{3.1}$$

para todos $\gamma, \beta, \alpha \in G$, dizemos que σ é um bicaracter. Se

$$\sigma(\alpha,\beta) = \frac{\rho(\alpha)\rho(\beta)}{\rho(\alpha+\beta)} \tag{3.2}$$

para todos $\alpha, \beta \in G$ e alguma função $\rho : G \longrightarrow F^{\times}$, então σ é um 2-cociclo, neste caso, dizemos que σ é um cobordo. Um 2-cociclo σ que satisfaz

$$\sigma(\alpha, \beta) = \sigma(\beta, \alpha), \tag{3.3}$$

para todos $\alpha, \beta \in G$, é denominado simétrico. O 2-cociclo σ é chamado anti-simétrico se

$$\sigma(\alpha, \beta)\sigma(\beta, \alpha) = 1 \tag{3.4}$$

para todos $\alpha, \beta \in G$.

Segue da definição de 2-cociclo que $\sigma(\alpha, 0) = \sigma(0, \beta)$ para quaisquer $\alpha, \beta \in G$. E, da definição de cobordo, todo cobordo é simétrico.

Observamos ainda que se uma função $\sigma : G \times G \longrightarrow F^{\times}$ é um bicaracter, então σ é um 2-cociclo. Por outro lado, veremos no exemplo abaixo que a recíproca não é verdadeira. Outro comentário relevante é, se um 2-cociclo σ é tal que $\sigma \in \{1, -1\}$, então σ é simétrico se, e somente se, σ é anti-simétrico. Ainda, se σ é um 2-cociclo anti-simétrico, então $\sigma(\alpha, \alpha) \in \{1, -1\}$ para todo $\alpha \in G$.

Observe que as aplicações $\sigma, \pi : G \times G \longrightarrow F^{\times}$ definidas por $\sigma(\alpha, \beta) = 1$ e $\pi(\alpha, \beta) = -1$ para quaisquer $\alpha, \beta \in G$ são exemplos triviais de 2-cociclo em qualquer grupo G.

Vejamos mais alguns exemplos de 2-cociclo.

Exemplo 3.1.1. *Seja $G = \mathbb{Z}_n$. A aplicação definida por $\sigma(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (-1)^{\alpha\beta}$ é um bicaracter simétrico e anti-simétrico, enquanto a aplicação $\pi(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \begin{cases} 1, & se \quad \alpha + \beta < n \\ -1, & se \quad \alpha + \beta \geq n \end{cases}$,$0 \leq \alpha, \beta < n$, é um cobordo anti-simétrico, mas não é um bicaracter.*

Exemplo 3.1.2. *Seja $G = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$. A aplicação definida pela relação*

$\alpha \setminus \beta$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$
$(\bar{0}, \bar{0})$	1	1	1	1
$(\bar{0}, \bar{1})$	1	1	1	1
$(\bar{1}, \bar{0})$	1	-1	1	-1
$(\bar{1}, \bar{1})$	1	-1	1	-1

é um 2-cociclo, não é um bicaracter, não é simétrico e nem anti-simétrico.

O lema a ser exibido é uma importante propriedade de 2-cociclo quando o grupo G é cíclico e finito. Ele garante que todo 2-cociclo definido sobre um grupo cíclico finito com valores em um corpo algebricamente fechado de característica zero é um cobordo, em particular, é simétrico.

Lema 3.1.1. *Sejam G um grupo cíclico finito e F um corpo algebricamente fechado. Então, $\sigma : G\times G \longrightarrow F^{\times}$ é um 2-cociclo se, e somente se, existe uma função $\rho : G \longrightarrow F^{\times}$ tal que $\sigma(\alpha, \beta) = \dfrac{\rho(\alpha)\rho(\beta)}{\rho(\alpha+\beta)}$ para todos $\alpha, \beta \in G$.*

Demonstração. Sejam G um grupo cíclico e finito de ordem n e σ um 2-cociclo definido sobre G. Primeiro vamos mostrar, usando indução sobre os elementos de G, que $\rho : G \longrightarrow F^{\times}$ dada por

$$\begin{array}{rcl}
\rho(\overline{0}) & = & \sigma(\overline{0},\overline{0}) \\
\rho(\overline{1}) & = & \sqrt[n]{\sigma(\overline{1},\overline{1})\sigma(\overline{1},\overline{2})\cdots\sigma(\overline{1},\overline{n-1})\sigma(\overline{0},\overline{0})}, \\
\rho(\overline{m}) & = & \dfrac{\sqrt[n]{[\sigma(\overline{1},\overline{1})\sigma(\overline{1},\overline{2})\sigma(\overline{1},\overline{3})\sigma(\overline{1},\overline{4})\cdots\sigma(\overline{1},\overline{n-1})\sigma(\overline{0},\overline{0})]^m}}{\sigma(\overline{1},\overline{1})\sigma(\overline{1},\overline{2})\sigma(\overline{1},\overline{3})\cdots\sigma(\overline{1},\overline{m-1})}
\end{array}$$

para qualquer $0 \leq m \leq n-1$. Afirmamos que

$$\sigma(\alpha,\beta) = \frac{\rho(\alpha)\rho(\beta)}{\rho(\alpha+\beta)} \tag{3.5}$$

para todos $\alpha, \beta \in G$. Com efeito, primeiro vejamos o caso $\alpha = \overline{1}$. Observe que

$$\frac{\rho(\overline{1})\rho(\overline{m})}{\rho(\overline{1+m})} = \frac{\sigma(\overline{1},\overline{1})\sigma(\overline{1},\overline{2})\cdots\sigma(\overline{1},\overline{m})}{\sigma(\overline{1},\overline{1})\sigma(\overline{1},\overline{2})\cdots\sigma(\overline{1},\overline{m-1})} = \sigma(\overline{1},\overline{m})$$

para todo $0 \leq m \leq n-1$. No caso $\alpha = \overline{2}$, precisamos usar a seguinte propriedade de 2-cociclo

$$\sigma(\alpha,\beta)\sigma(\alpha+\beta,\gamma) = \sigma(\alpha,\beta+\gamma)\sigma(\beta,\gamma). \tag{3.6}$$

Para qualquer $0 \leq m \leq n-1$, temos

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{\rho(\overline{2})\rho(\overline{m})}{\rho(\overline{2+m})} & = & \dfrac{\sigma(\overline{1},\overline{1})\sigma(\overline{1},\overline{2})\cdots\sigma(\overline{1},\overline{m+1})}{\sigma(\overline{1},\overline{1})\cdots\sigma(\overline{1},\overline{m-1})\sigma(\overline{1},\overline{1})} \\
& = & \dfrac{\sigma(\overline{1},\overline{m})\sigma(\overline{1},\overline{m+1})}{\sigma(\overline{1},\overline{1})} \\
& \stackrel{(3.6)}{=} & \dfrac{\sigma(\overline{1},\overline{1})\sigma(\overline{2},\overline{m})}{\sigma(\overline{1},\overline{1})} \\
& = & \sigma(\overline{2},\overline{m}).
\end{array}$$

Admita que a igualdade (3.5) é válida para cada $s \leq k$ $(0 \leq s \leq k < n-1)$. Como no caso em que $\alpha = \overline{2}$, vamos usar a propriedade (3.6). Veja que

$$\frac{\rho(\overline{k+1})\rho(\overline{m})}{\rho(\overline{k+m+1})} = \frac{\sigma(\overline{1},\overline{1})\sigma(\overline{1},\overline{2})\cdots\sigma(\overline{1},\overline{m+k})}{\sigma(\overline{1},\overline{1})\cdots\sigma(\overline{1},\overline{m-1})\sigma(\overline{1},\overline{1})\cdots\sigma(\overline{1},\overline{k})}$$

e, por hipótese de indução,

$$\sigma(\overline{k},\overline{m}) = \frac{\sigma(\overline{1},\overline{1})\sigma(\overline{1},\overline{2})\cdots\sigma(\overline{1},\overline{m+k-1})}{\sigma(\overline{1},\overline{1})\cdots\sigma(\overline{1},\overline{m-1})\sigma(\overline{1},\overline{1})\cdots\sigma(\overline{1},\overline{k-1})}$$

para todo $0 \leq m \leq n-1$. Daí,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\rho(\overline{k+1})\rho(\overline{m})}{\rho(\overline{k+m+1})} & = & \dfrac{\sigma(\overline{k},\overline{m})\sigma(\overline{1},\overline{k+m})}{\sigma(\overline{1},\overline{k})} \\ & \overset{(3.6)}{=} & \dfrac{\sigma(\overline{1},\overline{k})\sigma(\overline{k+1},\overline{m})}{\sigma(\overline{1},\overline{k})} \\ & = & \sigma(\overline{k+1},\overline{m}). \end{array}$$

Portanto, $\sigma(\alpha,\beta) = \dfrac{\rho(\alpha)\rho(\beta)}{\rho(\alpha+\beta)}$ para quaisquer $\alpha, \beta \in G$.

Reciprocamente, é imediato verificar que $\sigma(\alpha,\beta) = \dfrac{\rho(\alpha)\rho(\beta)}{\rho(\alpha+\beta)}$ é um 2-cociclo. Com isso, finalizamos a prova do lema. $\square$

Para finalizar esta seção, vamos apresentar um interessante resultado que envolve 2-cociclo.

Lema 3.1.2. *Sejam F um corpo e G um grupo abeliano finito. Suponha que $\sigma, \sigma' : G \times G \longrightarrow F^\times$ sejam 2-cociclos e a função $\rho : G \longrightarrow F^\times$ seja tal que $\sigma(\alpha,\beta) = \sigma'(\alpha,\beta)\frac{\rho(\alpha)\rho(\beta)}{\rho(\alpha+\beta)}$. Então, $M_n(F^\sigma[G])$ e $M_n(F^{\sigma'}[G])$ são F-álgebras graduadas isomorfas, onde a G-graduação em ambas é a canônica induzida por uma mesma n-upla $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$.*

Demonstração. Seja $\{e_{ij}\}, 1 \leq i,j \leq n$, o conjunto de matrizes unitárias da álgebra $M_n(F[G])$. Defina

$$\begin{array}{rccc} \phi: & M_n(F^\sigma[G]) & \longrightarrow & M_n(F^{\sigma'}[G]) \\ & e_{ij}\eta_\alpha & \longmapsto & e_{ij}\tilde{\eta}_\alpha\rho(\alpha), \end{array}$$

onde $\tilde{\eta}_\alpha$ é o elemento correspondente a η_α em $F^{\sigma'}[G]$. Estendendo ϕ por linearidade, obtemos um homomorfismo de F-espaços vetoriais graduados. Como ϕ está definida na base de $M_n(F^\sigma[G])$ e as álgebras $M_n(F^\sigma[G])$ e $M_n(F^{\sigma'}[G])$ tem a mesma dimensão sobre F, ϕ é uma bijeção. Resta mostrar que ϕ preserva a operação multiplicação. Dados $e_{ij}\eta_\alpha \in M_n(F^\sigma[G])_{-\theta_i+\theta_j+\alpha}$ e $e_{kl}\eta_\beta \in M_n(F^\sigma[G])_{-\theta_k+\theta_l+\beta}$, temos

$$\begin{array}{rcl} \phi(e_{ij}\eta_\alpha e_{kl}\eta_\beta) & = & \phi(\eta_\alpha\eta_\beta\delta_{jk}e_{il}) \\ & = & \phi(\sigma(\alpha,\beta)\eta_{\alpha+\beta}\delta_{jk}e_{il}) \\ & = & \sigma(\alpha,\beta)\tilde{\eta}_{\alpha+\beta}\rho(\alpha+\beta)\delta_{jk}e_{il} \\ & = & \sigma'(\alpha,\beta)\rho(\alpha)\rho(\beta)\tilde{\eta}_{\alpha+\beta}\delta_{jk}e_{il} \\ & = & \tilde{\eta}_\alpha\tilde{\eta}_\beta\rho(\alpha)\rho(\beta)\delta_{jk}e_{il} \\ & = & \phi(e_{ij}\eta_\alpha)\phi(e_{kl}\eta_\beta). \end{array}$$

Portanto, $M_n(F^\sigma[G]) \cong M_n(F^{\sigma'}[G])$. $\square$

Em particular, se F é algebricamente fechado e de característica zero e G é um grupo cíclico e finito, então, pelos **Teorema 1.6.1** e **Lema 3.1.2**, qualquer F-álgebra G-graduada simples de dimensão finita é isomorfa a $M_n(F[G])$. A recíproca do **Lema 3.1.2** é verdadeira, veja [[11], Corollary 2.22].

3.2 Par de Espaços Duais Graduados com Torção

Nesta seção, começaremos uma discussão acerca dos espaços duais. Os resultados obtidos aqui são análagos aos encontrados em [1], [22] e [25].

A partir de agora, G denota um grupo abeliano finito, $\mathcal{D}$ uma F-álgebra (anel) G-graduada de divisão e σ um 2-cociclo sobre G com valores não nulos no corpo F tal que σ satisfaz

$$\begin{array}{rcl} \sigma(\alpha,\beta)\sigma(\beta,\alpha) & = & 1 \\ \sigma(\alpha,-\alpha)^2 & = & 1 \end{array} \tag{3.7}$$

para quaisquer $\alpha, \beta \in G$. Vale lembrar que como $\sigma(\alpha,\beta)\sigma(\beta,\alpha) = 1$, temos que $\sigma(0,0) \in \{-1,1\}$. Com isso, $\sigma(0,\alpha) \in \{-1,1\}$ para todo $\alpha \in G$.

Definição 3.2.1. *Seja V um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda G-graduado e seja W um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à direita G-graduado. Um par bilinear $\langle -,- \rangle_\nu : V \times W \longrightarrow \mathcal{D}$ de grau ν é uma aplicação bi-aditiva de modo que sejam válidas, para quaisquer $v_\beta \in V_\beta$, $w_\delta \in W_\delta, d_\gamma \in \mathcal{D}_\gamma$ e $\beta, \delta, \gamma \in G$, as seguintes propriedades:*

a) $\langle v_\beta, w_\delta \rangle_\nu \in \mathcal{D}_{\beta+\delta+\nu}$;

b) $\langle d_\gamma v_\beta, w_\delta \rangle_\nu = d_\gamma \langle v_\beta, w_\delta \rangle_\nu$;

c) $\langle v_\beta, w_\delta d_\gamma \rangle_\nu = \langle v_\beta, w_\delta \rangle_\nu d_\gamma$.

Segue da definição acima que

$$\langle v, 0\rangle_\nu = \langle 0, w\rangle_\nu = 0 \quad \text{e} \quad \langle -v, w\rangle_\nu = \langle v, -w\rangle_\nu = -\langle v, w\rangle_\nu$$

para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$.

O par bilinear de grau ν é não degenerado se

$$\langle v_\alpha, W\rangle_\nu = \{0\} \text{ implica } v_\alpha = 0 \text{ e } \langle V, w_\beta \rangle_\nu = \{0\} \text{ implica } w_\beta = 0.$$

Dizemos que V e W são um par de espaços duais com torção se $\langle -,- \rangle_\nu$ é não degenerado.

Definição 3.2.2. *Dados $\mathcal{R}$ um anel G-graduado e σ um 2-cociclo definido sobre G. O anel oposto graduado σ-torcido de $\mathcal{R}$ é o grupo aditivo graduado $\mathcal{R}$ com multiplicação dada por*

$$a_\alpha \circ_{op_\sigma} b_\beta := \sigma(\alpha,\beta) b_\beta a_\alpha \tag{3.8}$$

para quaisquer $b_\beta \in \mathcal{R}_\beta$, $a_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ e $\beta, \alpha \in G$. Denotaremos o anel oposto σ-torcido por $\mathcal{R}^{op_\sigma}$.

Observamos que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}^{op_\sigma}$ coincidem como conjunto. Ademais, quando $\sigma(\alpha,\beta)=1$ para quaisquer $\alpha,\beta\in G$, temos que $\mathcal{R}^{op_\sigma}$ coincide com $\mathcal{R}^{op_{gr}}$ (anel oposto graduado).

Se $\mathcal{D}$ é uma F-álgebra (anel) graduada de divisão, então $\mathcal{D}^{op_\sigma}$ também é uma F-álgebra (anel) graduada de divisão, a qual chamaremos de álgebra σ-torcida graduada de divisão. Note que a identidade de $\mathcal{D}^{op_\sigma}$ é $1_{\mathcal{D}^{op_\sigma}}=\sigma(0,0)1_{\mathcal{D}}$, onde $1_{\mathcal{D}}$ é a identidade de $\mathcal{D}$. Se $a_\alpha\in\mathcal{D}^{op_\sigma}_\alpha$ é um elemento homogêneo não nulo de $\mathcal{D}^{op_\sigma}$, então $a_\alpha^{-1_{\mathcal{D}^{op_\sigma}}}=\sigma(\alpha,-\alpha)\sigma(0,0)a_\alpha^{-1}$ para todo $\alpha\in G$, onde a_α^{-1} é o inverso de a_α em $\mathcal{D}$.

Lema 3.2.1. *Se W é um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à direita, então W é um $\mathcal{D}^{op_\sigma}$-espaço vetorial à esquerda via a seguinte igualdade estendida por linearidade vetorial e escalar*

$$d_\gamma w_\beta := \sigma(\gamma,\beta)w_\beta d_\gamma. \tag{3.9}$$

Demonstração. Com efeito, para todos $d_\alpha,d'_\alpha\in\mathcal{D}_\alpha,\ w_\beta,w'_\beta\in W,\ f\in F$, temos:

$$\begin{array}{lcl}
d_\alpha(w_\beta+w'_\beta) &=& \sigma(\alpha,\beta)(w_\beta+w'_\beta)d_\alpha\\
&=& \sigma(\alpha,\beta)(w_\beta d_\alpha+w'_\beta d_\alpha)\\
&=& \sigma(\alpha,\beta)w_\beta d_\alpha+\sigma(\alpha,\beta)w'_\beta d_\alpha\\
&=& d_\alpha w_\beta+d_\alpha w'_\beta;\\
(d_\alpha+d'_\alpha)w_\beta &=& \sigma(\alpha,\beta)w_\beta(d_\alpha+d'_\alpha)\\
&=& \sigma(\alpha,\beta)(w_\beta d_\alpha+w_\beta d'_\alpha)\\
&=& \sigma(\alpha,\beta)w_\beta d_\alpha+\sigma(\alpha,\beta)w_\beta d'_\alpha\\
&=& d_\alpha w_\beta+d'_\alpha w_\beta;\\
1_{\mathcal{D}^{op_\sigma}}w_\beta &=& \sigma(0,\beta)w_\beta 1_{\mathcal{D}^{op_\sigma}}\\
&=& \sigma(0,\beta)\sigma(0,0)w_\beta 1_{\mathcal{D}}\\
&=& w_\beta 1_{\mathcal{D}}\\
&=& w_\beta;\\
d_\alpha(fw_\beta) &=& \sigma(\alpha,\beta)(fw_\beta)d_\alpha\\
&=& \sigma(\alpha,\beta)f(w_\beta d_\alpha)\\
&=& f(d_\alpha w_\beta)\\
&=& (fd_\alpha)w_\beta.
\end{array}$$

Assim, só nos resta mostrar que $d_\gamma(d_\tau w_\beta)=(d_\gamma\circ_{op_\sigma}d_\tau)w_\beta$. Dados $d_\gamma\in\mathcal{D}_\gamma,d_\tau\in\mathcal{D}_\tau$ e $w_\beta\in W_\beta$, temos

$$\begin{array}{lcl}
(d_\gamma\circ_{op_\sigma}d_\tau)w_\beta &=& \sigma(\gamma+\tau,\beta)w_\beta(d_\gamma\circ_{op_\sigma}d_\tau)\\
&=& \sigma(\gamma+\tau,\beta)\sigma(\gamma,\tau)w_\beta(d_\tau d_\gamma);\\
d_\gamma(d_\tau w_\beta) &=& \sigma(\gamma,\tau+\beta)(d_\tau w_\beta)d_\gamma\\
&=& \sigma(\gamma,\tau+\beta)\sigma(\tau,\beta)(w_\beta d_\tau)d_\gamma
\end{array}$$

para quaisquer $\tau,\gamma,\beta\in G$. Pelas propriedades de 2-cociclo,

$$\sigma(\gamma+\tau,\beta)\sigma(\gamma,\tau)=\sigma(\gamma,\tau+\beta)\sigma(\tau,\beta)$$

para todos $\beta,\gamma,\tau\in G$. Logo, $(d_\gamma\circ_{op_\sigma}d_\tau)w_\beta=d_\gamma(d_\tau w_\beta)$ para quaisquer $d_\theta\in\mathcal{D}_\theta,\ w_\beta\in W_\beta,\ \theta,\beta\in G$. Por fim, por linearidade, concluímos a afirmação. $\square$

Definição 3.2.3. *Sejam V e W um par de espaços duais com torção associado a um par bilinear $\langle -,-\rangle_\nu$ sobre uma F-álgebra (anel) G-graduada de divisão $\mathcal{D}$. Um elemento $a_\alpha^{*\sigma} \in End_{\mathcal{D}^{op_\sigma}}(W)_\alpha$ chama-se σ-adjunta de um elemento homogêneo $a_\alpha \in End_{\mathcal{D}}(V)_\alpha$ quando*

$$\langle v_\beta a_\alpha, w_\delta\rangle_\nu = \sigma(\alpha,\delta)\langle v_\beta, w_\delta a_\alpha^{*\sigma}\rangle_\nu \tag{3.10}$$

para todos $v_\beta \in V_\beta, w_\delta \in W_\delta, \delta,\beta \in G$.

Para cada $\alpha \in G$, denotaremos por $\mathcal{L}_W^\sigma(V)_\alpha$ o subgrupo aditivo de $End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)_\alpha$ de todos os elementos de $End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)_\alpha$ que possuem uma σ-adjunta. Assim, $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V) = \sum_{\alpha\in G} \mathcal{L}_W^\sigma(V)_\alpha$ é um subgrupo de $End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)$. Agora, considere $\mathcal{F}_W^\sigma(V)_\alpha = \{a_\alpha \in \mathcal{L}_W^\sigma(V)_\alpha \mid dim_{\mathcal{D}}(Va_\alpha) < \infty\}$. Claramente, $\mathcal{F}_W^\sigma(V)_\alpha$ é um subgrupo aditivo de $\mathcal{L}_W^\sigma(V)_\alpha$. Então, $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) = \sum_{\alpha\in G} \mathcal{F}_W^\sigma(V)_\alpha$ é um subgrupo de $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$. Em particular, se V (ou W) é de dimensão finita sobre $\mathcal{D}$, então $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V) = \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$.

Dizemos que um elemento $a \in End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)$ é de posto n se $dim_{\mathcal{D}}(Va) = n$. Em particular, se $a \in End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)$ é de posto 1, então $Va = \mathcal{D}v$ para algum $v \in V$.

Conforme visto, $End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)$ é um anel graduado e V é um $(\mathcal{D}, End_{\mathcal{D}}^{gr}(V))$-bimódulo graduado. Em particular, se $\mathcal{R}$ é um subanel graduado de $End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)$, então V é um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado.

Para os conjuntos $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ e $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$, temos os seguintes resultados.

Lema 3.2.2. *O conjunto $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$ é um subanel graduado do anel graduado $End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)$.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que a soma $\sum_{\alpha\in G} \mathcal{L}_W^\sigma(V)_\alpha$ é direta. De fato, se $a \in \mathcal{L}_W^\sigma(V)_\alpha \cap \sum_{\alpha\neq\beta\in G} \mathcal{L}_W^\sigma(V)_\beta$, então $a \in End_{\mathcal{D}}(V)_\alpha \cap \sum_{\alpha\neq\beta\in G} End_{\mathcal{D}}(V)_\beta$. Como $End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)$ é um anel graduado, temos que $End_{\mathcal{D}}(V)_\alpha \cap \sum_{\alpha\neq\beta\in G} End_{\mathcal{D}}(V)_\beta = (0)$. Logo, $a = 0$ e, portanto, a soma $\sum_{\alpha\in G} \mathcal{L}_W^\sigma(V)_\alpha$ é direta.

Desejamos mostrar que o elemento $a_\alpha b_\beta \in \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$ para quaisquer $a_\alpha \in \mathcal{L}_W^\sigma(V)_\alpha$ e $b_\beta \in \mathcal{L}_W^\sigma(V)_\beta$ e para todos $\alpha,\beta \in G$. Afirmamos que $(a_\alpha b_\beta)^{*\sigma} := \sigma(\alpha,\beta) b_\beta^{*\sigma} a_\alpha^{*\sigma}$ é a σ-adjunta de $(a_\alpha b_\beta)$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\langle v_\gamma(a_\alpha b_\beta), w_\tau\rangle_\nu &= \langle (v_\gamma a_\alpha) b_\beta, w_\tau\rangle_\nu \\
&= \sigma(\beta,\tau)\langle (v_\gamma) a_\alpha, w_\tau b_\beta^{*\sigma}\rangle_\nu \\
&= \sigma(\beta,\tau)\sigma(\alpha,\beta+\tau)\langle v_\gamma, (w_\tau b_\beta^{*\sigma}) a_\alpha^{*\sigma}\rangle_\nu.
\end{aligned}$$

Como
$$\sigma(\beta,\tau)\sigma(\alpha,\beta+\tau)=\sigma(\alpha,\beta)\sigma(\beta+\alpha,\tau),$$
temos que
$$\begin{aligned}\langle v_\gamma(a_\alpha b_\beta),w_\tau\rangle_\nu &= \sigma(\beta,\tau)\sigma(\alpha,\beta+\tau)\langle v_\gamma,(w_\tau b_\beta^{*\sigma})a_\alpha^{*\sigma}\rangle_\nu\\ &= \sigma(\alpha,\beta)\sigma(\beta+\alpha,\tau)\langle v_\gamma,(w_\tau b_\beta^{*\sigma})a_\alpha^{*\sigma}\rangle_\nu\\ &= \sigma(\beta+\alpha,\tau)\langle v_\gamma,w_\tau(\sigma(\alpha,\beta)b_\beta^{*\sigma}a_\alpha^{*\sigma})\rangle_\nu\\ &= \sigma(\alpha+\beta,\tau)\langle v_\gamma,w_\tau(a_\alpha b_\beta)^{*\sigma}\rangle_\nu.\end{aligned}$$
Logo, $a_\alpha b_\beta\in\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$ e, portanto, $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$ é um anel graduado. □

Lema 3.2.3. *$\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ é um ideal graduado de $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$.*

Demonstração. Sejam $a_\alpha\in\mathcal{F}_W^\sigma(V)_\alpha$ e $b_\beta\in\mathcal{L}_W^\sigma(V)_\beta$. Como a_α possui posto finito, segue que $(a_\alpha b_\beta)$ possui posto finito e $(b_\beta a_\alpha)$ possui posto finito. Daí, como no **Lema 3.2.2**, $(a_\alpha b_\beta)^{*\sigma}:=\sigma(\alpha,\beta)b_\beta^{*\sigma}a_\alpha^{*\sigma}$ é a σ-adjunta de $(a_\alpha b_\beta)$ e $(b_\beta a_\alpha)^{*\sigma}=\sigma(\beta,\alpha)a_\alpha^{*\sigma}b_\beta^{*\sigma}$ é a σ-adjunta de $(b_\beta a_\alpha)$. Disso, segue que
$$(b_\beta a_\alpha),(a_\alpha b_\beta)\in\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V).$$
Se $a\in\mathcal{F}_W^\sigma(V)_\alpha\cap\sum_{\alpha\neq\beta\in G}\mathcal{F}_W^\sigma(V)_\beta$, então $a\in\mathcal{L}_W^\sigma(V)_\alpha\cap\sum_{\alpha\neq\beta\in G}\mathcal{L}_W^\sigma(V)_\beta$. Como $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$ é um anel graduado, temos que $\mathcal{L}_W^\sigma(V)_\alpha\cap\sum_{\alpha\neq\beta\in G}\mathcal{L}_W^\sigma(V)_\beta=(0)$. Logo, $a=0$ e, portanto, $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ é um ideal graduado de $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$. □

Definição 3.2.4. *Sejam V e W um par de espaços duais com torção associado a um par bilinear $\langle -,-\rangle_\nu$ sobre uma F-álgebra (anel) G-graduada de divisão $\mathcal{D}$. Um elemento $b_\alpha^{\circledast\sigma}\in End_{\mathcal{D}}(V)_\alpha$ chama-se σ-coadjunta de um elemento homogêneo $b_\alpha\in End_{\mathcal{D}^{op_\sigma}}(W)_\alpha$ quando*
$$\langle v_\beta b_\alpha^{\circledast\sigma},w_\delta\rangle_\nu=\sigma(\alpha,\delta)\langle v_\beta,w_\delta b_\alpha\rangle_\nu \tag{3.11}$$
para todos $v_\beta\in V_\beta$ e $w_\delta\in W_\delta$.

Salientamos que $b_\alpha^{\circledast\sigma}$ é a σ-coadjunta de b_α se, e somente se, b_α é a σ-adjunta de $b_\alpha^{\circledast\sigma}$.

De maneira similar, podemos considerar, para cada $\alpha\in G$, o subgrupo aditivo $\mathcal{L}_V^\sigma(W)_\alpha$ de $End_{\mathcal{D}^{op_\sigma}}^{gr}(W)_\alpha$ de todos os elementos de $End_{\mathcal{D}^{op_\sigma}}^{gr}(W)_\alpha$ que possuem uma σ-coadjunta. Desse jeito, $\mathcal{L}_V^{gr_\sigma}(W)=\sum_{\alpha\in G}\mathcal{L}_V^\sigma(W)_\alpha$ é um subgrupo de $End_{\mathcal{D}^{op_\sigma}}^{gr}(W)$. Consideramos também $\mathcal{F}_V^\sigma(W)_\alpha=\{a_\alpha\in\mathcal{L}_V^\sigma(W)_\alpha\mid dim_{\mathcal{D}}(Wa_\alpha)<\infty\}$. Novamente, $\mathcal{F}_V^\sigma(W)_\alpha$ é um subgrupo aditivo de $\mathcal{L}_V^\sigma(W)_\alpha$ e $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}(W)=\sum_{\alpha\in G}\mathcal{F}_V^\sigma(W)_\alpha$ é um subgrupo de $\mathcal{L}_V^{gr_\sigma}(W)$.

Como visto, temos que $End_{\mathcal{D}^{op_\sigma}}^{gr}(W)$ é um anel graduado e W é um $(\mathcal{D}^{op_\sigma},End_{\mathcal{D}^{op_\sigma}}^{gr}(W))$-bimódulo graduado.

Evidentemente, valem resultados análogos aos **Lema 3.2.2** e **Lema 3.2.3** para os conjuntos $\mathcal{L}_V^{gr_\sigma}(W)$ e $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}(W)$.

Lema 3.2.4. *$\mathcal{L}_V^{gr_\sigma}(W)$ é um subanel graduado de $End_{\mathcal{D}op_\sigma}^{gr}(W)$.*

Lema 3.2.5. *$\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}(W)$ é um ideal graduado de $\mathcal{L}_V^{gr_\sigma}(W)$.*

Lema 3.2.6. *Sejam V e W um par de espaços duais com torção associado a um par bilinear $\langle -,- \rangle_\nu$ sobre um anel graduado de divisão Δ. Se $\{v_\alpha^1, \dots, v_\alpha^{n_\alpha}, \dots, v_\beta^1, \dots, v_\beta^{n_\beta}\}$ é um conjunto de vetores homogêneos de V linearmente independentes sobre Δ, então existem elementos homogêneos $w_{-\alpha-\nu}^1, \dots, w_{-\alpha-\nu}^{n_\alpha}, \dots, w_{-\beta-\nu}^1, \dots, w_{-\beta-\nu}^{n_\beta}$ de W tais que $\langle v_\alpha^i, w_{-\gamma-\nu}^j \rangle_\nu = \delta_{ij}\delta_{\alpha\gamma} \in \Delta_0$ para todos $i \in \{1, \dots, n_\alpha\}, j \in \{1, \dots, n_\gamma\}, \alpha, \gamma \in G$, onde $\delta_{ij}\delta_{\alpha\gamma} = \begin{cases} 1 \in \Delta_0, & se \quad i = j \ e \ \alpha = \gamma \\ 0 \in \Delta_0, & caso \ \ contrário. \end{cases}$*

Demonstração. Seja $V_{gr}^{*\sigma} = \sum_{\beta \in G} Hom({}_\Delta V, {}_\Delta\Delta)_\beta$. Note que $V_{gr}^{*\sigma}$ é um Δ-módulo à direita com ação dada por

$$(v)(\phi d) = ((v)\phi)d,$$

onde $v \in V, \phi \in V_{gr}^{*\sigma}, d \in \Delta$. Essa ação de Δ em $V_{gr}^{*\sigma}$ satisfaz $\phi_\alpha d_\beta \in Hom({}_\Delta V, {}_\Delta\Delta)_{\beta+\alpha}$ para todos $\alpha, \beta \in G$, $d_\beta \in \Delta_\beta, \phi_\alpha \in Hom({}_\Delta V, {}_\Delta\Delta)_\alpha$. Além disso, a soma $\sum_{\beta \in G} Hom({}_\Delta V, {}_\Delta\Delta)_\beta$ é direta. Logo, $V_{gr}^{*\sigma} = \bigoplus_{\beta \in G} Hom({}_\Delta V, {}_\Delta\Delta)_\beta$ é um Δ-módulo à direira graduado.

Fixemos um elemento qualquer $w \in W$. Temos que

$$\begin{array}{rccl} \langle -, w \rangle_\nu : & V & \longrightarrow & \Delta \\ & v & \longmapsto & \langle v, w \rangle_\nu \end{array}$$

é um funcional Δ-linear. Assim, a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & W & \longrightarrow & V_{gr}^{*\sigma} \\ & w & \longmapsto & \langle -, w \rangle_\nu \end{array}$$

é um homomorfismo de Δ-módulos graduados. De fato, para quaisquer $w_\alpha \in W_\alpha, w, w' \in W, v \in V, d \in \Delta$ e $\alpha \in G$, temos

$$\begin{array}{lcl} \varphi(w_\alpha) & = & \langle -, w_\alpha \rangle_\nu \in Hom({}_\Delta V, {}_\Delta\Delta)_{\alpha+\nu} \\ \langle v, wd \rangle_\nu & = & \langle v, w \rangle_\nu d \\ \langle v, w + w' \rangle_\nu & = & \langle v, w \rangle_\nu + \langle v, w' \rangle_\nu. \end{array}$$

Logo, φ é um homomorfismo graduado (de grau ν) de Δ-módulos à direita graduados. Como $\langle -,- \rangle_\nu$ é não degenerado, temos que $Ker(\varphi) = (0)$. Logo, pelo Teorema do Isomorfismo, W é isomorfo a $W' = Img(\varphi)$, onde $W' = \bigoplus_{\alpha \in G} W'_\alpha$ e $W'_\alpha = \{\varphi(w_{\alpha-\nu}) \mid w_{\alpha-\nu} \in W_{\alpha-\nu}\}$, é um Δ-subespaço graduado de $V_{gr}^{*\sigma}$.

A fim de aplicar o **Teorema 1.5.18**, considere $T = W'$, $M = V$, $S = D = N = \Delta \simeq End^{gr}_{\Delta}(\Delta_\Delta)$. O sistema $(\Delta, \Delta, \Delta, V, W')$ é um Δ-contexto à direita graduado. Afirmamos que $N = \Delta_\Delta$ é fechado e $T = W'$ é total. De fato, como Δ é um anel graduado de divisão, temos que Δ_Δ não possui submódulos graduados próprios. Como Δ é um anel graduado unitário, para todo homomorfismo graduado de Δ-módulos graduados $f : \Delta_\Delta \longrightarrow \Delta_\Delta$, temos que $f(a) = f(1a) = (f(1))a$ para todo $a \in \Delta$, ou seja, qualquer homomorfismo graduado de Δ-módulos graduados f é a multiplicação à esquerda por $f(1) = \lambda \in \Delta$. Logo, $\Delta = N$ é fechado. Agora, se $v \in V$ é tal que $vT = 0$, segue que $\langle v, w\rangle_\nu = 0$ para todo $w \in W$. Como $\langle -, -\rangle_\nu$ é não degenerado, temos $v = 0$ e, portanto, T é total. Pelo **Teorema 1.5.18**, T é fracamente denso. Sejam $v^1_\alpha, \ldots, v^{n_\alpha}_\alpha, \ldots, v^1_\beta, \ldots, v^{n_\beta}_\beta$ vetores homogêneos de V linearmente independentes sobre Δ, então $v^i_\alpha \notin (\sum_{\alpha\neq\tau\in G}\sum_{j=1}^{n_\tau}\Delta v^j_\tau + \sum_{i\neq j}^{n_\alpha}\Delta v^j_\alpha)$ e existe $t^{(i,\alpha)} \in T$ tal que

$$v^i_\alpha t^{(i,\alpha)} \neq 0 \text{ e } \ v^j_\tau t^{(i,\alpha)} = 0 \tag{3.12}$$

para todos os pares $(j, \tau) \neq (i, \alpha), \tau \in G, j \in \mathbb{N}$. Considere o seguinte Δ-submódulo graduado não nulo de W'

$$J^{(i,\alpha)} = \{w' \in W' \mid v^j_\tau w' = 0, \text{ para todos } (j, \tau) \neq (i, \alpha), \tau \in G, j \in \mathbb{N}\}.$$

Por (3.12), $0 \neq v^i_\alpha J^{(i,\alpha)}$. É fácil ver que $v^i_\alpha J^{(i,\alpha)}$ é um ideal à direita graduado de Δ. Como Δ é um anel graduado de divisão, temos que Δ não contém ideais unilaterais graduados não triviais. Com isso, $v^i_\alpha J^{(i,\alpha)} = \Delta$. Como vimos, existe $t^{(i,\alpha)} \in J^{(i,\alpha)}$ tal que $0 \neq v^i_\alpha t^{(i,\alpha)}$ e $0 = v^j_\tau t^{(i,\alpha)}$ para todos os pares $(j, \tau) \neq (i, \alpha), \tau \in G, j \in \mathbb{N}$. Em particular, existe $t^{(i,\alpha)}_\gamma \in J^{(i,\alpha)}_\gamma$ tal que

$$0 \neq v^i_\alpha t^{(i,\alpha)}_\gamma \quad \text{e} \quad v^j_\tau t^{(i,\alpha)}_\gamma = 0 \tag{3.13}$$

para todos os pares $(j, \tau) \neq (i, \alpha), \tau \in G, j \in \mathbb{N}$ e algum $\gamma \in G$. Sendo Δ um anel graduado de divisão, existe $d^{(i,\alpha)}_{-\gamma-\alpha} \in \Delta_{-\gamma-\alpha}$ tal que $v^i_\alpha t^{(i,\alpha)}_\gamma d^{(i,\alpha)}_{-\gamma-\alpha} = 1$. Por (3.13),

$$v^j_\tau t^{(i,\alpha)}_\gamma d^{(i,\alpha)}_{-\gamma-\alpha} = 0 \tag{3.14}$$

para todos os pares $(j, \tau) \neq (i, \alpha), \tau \in G, j \in \mathbb{N}$. Note que $t^{(i,\alpha)}_\gamma d^{(i,\alpha)}_{-\gamma-\alpha} \in W'_{-\alpha} = \{\varphi(w_{-\alpha-\nu}) \mid w_{-\alpha-\nu} \in W_{-\alpha-\nu}\}$. Disso decorre que existe $w^i_{-\alpha-\nu} \in W_{-\alpha-\nu}$ tal que

$$\langle v^i_\alpha, w^i_{-\alpha-\nu}\rangle_\nu = v^i_\alpha t^{(i,\alpha)}_\gamma d^{(i,\alpha)}_{-\gamma-\alpha} = 1.$$

Além disso, por (3.13) e (3.14),

$$\begin{aligned} \langle v^i_\alpha, w^j_{-\alpha-\nu}\rangle_\nu &= 0 \\ \langle v^i_\tau, w^j_{-\alpha-\nu}\rangle_\nu &= 0 \\ \langle v^i_\tau, w^i_{-\alpha-\nu}\rangle_\nu &= 0 \end{aligned}$$

para todos os pares $(j,\tau) \neq (i,\alpha), \tau \in G, j \in \mathbb{N}$. Logo, $\langle v_\beta^i, w_{-\alpha-\nu}^j \rangle_\nu = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} \in \Delta_0$. Assim, finalizamos a demonstração do lema. $\square$

Lema 3.2.7. *Sejam V e W um par de espaços duais com torção associado a um par bilinear $\langle -,- \rangle_\nu$ sobre um anel graduado de divisão Δ. Se $\{w_\alpha^1, \ldots, w_\alpha^n\} \subseteq W_\alpha$ é linearmente independente sobre Δ, então existem elementos homogêneos $v_{-\alpha-\nu}^1, \ldots, v_{-\alpha-\nu}^n \in V_{-\alpha-\nu}$ tais que $\langle v_{-\alpha-\nu}^i, w_\alpha^j \rangle_\nu = \delta_{ij} \in \Delta_0$ para todos $\alpha \in G, i,j \in \{1,\ldots,n\}$, onde* $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \in \Delta_0, & se \quad i=j \\ 0 \in \Delta_0, & caso \;\; contrário. \end{cases}$

Demonstração. Seja $W_{gr}^{*\sigma} = \displaystyle\sum_{\beta \in G} Hom(W_\Delta, \Delta_\Delta)_\beta$. Observe $W_{gr}^{*\sigma}$ é um Δ-módulo à esquerda com ação dada por

$$(d\phi)(w) = d(\phi(w)),$$

onde $w \in W, \phi \in W_{gr}^{*\sigma}, d \in \Delta$. Essa ação de Δ em $W_{gr}^{*\sigma}$ satisfaz $d_\beta \phi_\alpha \in Hom(W_\Delta, \Delta_\Delta)_{\beta+\alpha}$ para todos $\alpha, \beta \in G$, $d_\beta \in \Delta_\beta, \phi_\alpha \in Hom(W_\Delta, \Delta_\Delta)_\alpha$. Além disso, a soma $\displaystyle\sum_{\beta \in G} Hom(W_\Delta, \Delta_\Delta)_\beta$ é direta. Logo, $W_{gr}^{*\sigma} = \displaystyle\bigoplus_{\beta \in G} Hom(W_\Delta, \Delta_\Delta)_\beta$ é um Δ-módulo à esquerda graduado.

Fixe um elemento qualquer $v \in V$. Então,

$$\begin{array}{rccl} \langle v, - \rangle_\nu : & W & \longrightarrow & \Delta \\ & w & \longrightarrow & \langle v, w \rangle_\nu \end{array}$$

é um funcional linear. Agora, a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & V & \longrightarrow & W_{gr}^{*\sigma} \\ & v & \longmapsto & \langle v, - \rangle_\nu \end{array}$$

é um homomorfismo de Δ-módulos graduados. De fato, para quaisquer $v_\alpha \in V_\alpha, v, v' \in V, w \in W, d \in \Delta, \alpha \in G$, temos

$$\begin{array}{lcl} \varphi(v_\alpha) & = & \langle v_\alpha, - \rangle_\nu \in Hom(W_\Delta, \Delta_\Delta)_{\alpha+\nu} \\ \langle dv, w \rangle_\nu & = & d\langle v, w \rangle_\nu \\ \langle v+v', w \rangle_\nu & = & \langle v, w \rangle_\nu + \langle v', w \rangle_\nu. \end{array}$$

Logo, φ é um homomorfismo graduado (de grau ν) de Δ-módulos graduados. Como $\langle -,- \rangle_\nu$ é não degenerado, temos que $Ker(\varphi) = (0)$. Logo, pelo Teorema do Isomorfismo, V é isomorfo a $V' = Img(\varphi)$, onde $V' = \displaystyle\bigoplus_{\beta \in G} V'_\beta$ e $V'_\beta = \{\varphi(v_{\beta-\nu}) \mid v_{\beta-\nu} \in V_{\beta-\nu}\}$, é um Δ-subespaço graduado de $W_{gr}^{*\sigma}$.

Considere $T = V'$, $M = W$, $S = D = N = \Delta \simeq End_\Delta^{gr}({}_\Delta\Delta)$. O sistema $(\Delta, \Delta, \Delta, W, V')$ é um Δ-contexto à esquerda graduado. Com o argumento análogo usado no **Lema 3.2.6**, $N = {}_\Delta\Delta$ é fechado. Afirmamos que $T = V'$ é total. Se $w \in W$ é tal que

$Tw = 0$, então $\langle v, w\rangle_\nu = 0$ para todo $v \in V$. Como $\langle -, -\rangle_\nu$ é não degenerado, temos $w = 0$ e, portanto, T é total. Pelo **Teorema 1.5.19**, T é fracamente denso. Se $\{w_\alpha^1, \ldots, w_\alpha^n\}$ é um conjunto de vetores homogêneos de grau α de W linearmente independente sobre Δ, então $w_\alpha^i \notin \sum_{j\neq i}^{n} w_\alpha^j \Delta$ e existe $t^i \in T$ tal que

$$t^i w_\alpha^i \neq 0 \;\text{ e } t^i w_\alpha^j = 0 \tag{3.15}$$

para $j \neq i$. Tome o seguinte Δ-submódulo graduado não nulo de V'

$$J^i = \{v' \in V' \mid v' w_\alpha^j = 0, \text{ para todo } j \neq i\}.$$

Novamente, por (3.15) e $0 \neq J^i w_\alpha^i$, $J^i w_\alpha^i$ é um ideal à esquerda graduado de Δ. Consequentemente, $J^i w_\alpha^i = \Delta$, já que anéis graduados de divisão não contêm ideais unilaterais graduados não triviais. Como vimos, existe $t^i \in J^i$ tal que $0 \neq t^i w_\alpha^i$ e $0 = t^i w_\alpha^j$ para todo $i \neq j$. Em particular, existe $t_\beta^i \in J_\beta^i$ tal que $0 \neq t_\beta^i w_\alpha^i$ e $t_\beta^i w_\alpha^j = 0$ para todo $i \neq j$ e algum $\beta \in G$. Sendo Δ um anel graduado de divisão, existe $d_{-\beta-\alpha} \in \Delta_{-\beta-\alpha}$ tal que $d_{-\beta-\alpha} t_\beta^i w_\alpha^i = 1$ e $d_{-\beta-\alpha} t_\beta^i w_\alpha^j = 0$ para todo $i \neq j$. Note que $d_{-\beta-\alpha} t_\beta^i \in V'_{-\alpha} = \{\varphi(v_{-\alpha-\nu}) \mid v_{-\alpha-\nu} \in V_{-\alpha-\nu}\}$. Então, existe $v_{-\alpha-\nu}^i \in V_{-\alpha-\nu}$ tal que

$$\langle v_{-\alpha-\nu}^i, w_\alpha^i\rangle_\nu = d_{-\beta-\alpha} t_\beta^i w_\alpha^i = 1.$$

Além disso,

$$\langle v_{-\alpha-\nu}^j, w_\alpha^i\rangle_\nu = 0$$

para todo $i \neq j$. Logo, $\langle v_{-\alpha-\nu}^j, w_\alpha^i\rangle_\nu = \delta_{ij} \in \Delta_0$. Com isso, finalizamos a demonstração do lema. □

Lema 3.2.8. *Sejam V e W um par de espaços duais com torção associado a um par bilinear $\langle -, -\rangle_\nu$ sobre um anel G-graduado de divisão $\mathcal{D}$. Então, o elemento homogêneo*

$$\begin{array}{rccl} \varphi_\alpha = \langle -, \mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\rangle_\nu \mathbf{u}_\gamma : & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & (v)\varphi_\alpha = \langle v, \mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\rangle_\nu \mathbf{u}_\gamma, \end{array} \tag{3.16}$$

pertence a $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$, para todos $\gamma \in G, \mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu} \in W_{\alpha-\gamma-\nu}$ e $\mathbf{u}_\gamma \in V_\gamma$. Além disso, se $\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}$ e $\mathbf{u}_\gamma$ são não nulos, então $\varphi_\alpha \neq 0$.

Demonstração. Para cada $\alpha \in G$, sejam $\gamma \in G$ e elementos quaisquer não nulos $\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu} \in W_{\alpha-\gamma-\nu}$ e $\mathbf{u}_\gamma \in V_\gamma$. Segue facilmente das propriedades de $\langle -, -\rangle_\nu$ que

$$\begin{array}{rccl} \varphi_\alpha : & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & (v)\varphi_\alpha = \langle v, \mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\rangle_\nu \mathbf{u}_\gamma \end{array} \in End_{\mathcal{D}}(V)_\alpha.$$

Como $(V)\varphi_\alpha$ é gerado por $\{\mathbf{u}_\gamma\}$ e $\langle -, -\rangle_\nu$ é não degenerado, temos que φ_α é de posto 1.

Agora, defina

$$\begin{array}{rcl} \psi_\alpha : {}_{\mathcal{D}^{op_\sigma}}W & \longrightarrow & {}_{\mathcal{D}^{op_\sigma}}W \\ w & \longmapsto & (w)\psi_\alpha = (\sum_{\tau\in G} w_\tau)\psi_\alpha = \sum_{\tau\in G}\sigma(\tau,\alpha)\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\langle\mathbf{u}_\gamma, w_\tau\rangle_\nu \end{array}$$

para todo $w = \sum_{\tau\in G} w_\tau \in W$. Observamos que para todo $w_\tau \in W_\tau$, temos

$$(w_\tau)\psi_\alpha = \sigma(\tau,\alpha)\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\langle\mathbf{u}_\gamma, w_\tau\rangle_\nu.$$

Afirmamos que ψ_α é a σ-adjunta associada a φ_α. Com efeito, convém observar que, pelo **Lema 3.2.1**, W é um $\mathcal{D}^{op_\sigma}$-módulo à esquerda graduado. Como $Img(\psi_\alpha)$ é gerado por $\{\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\}$, $\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}$ e $\mathbf{u}_\gamma$ são não nulos e $\langle -,-\rangle_\nu$ é não degenerado, segue que ψ_α possui posto 1. Dados $w = \sum_{\tau\in G} w_\tau,\ w' = \sum_{\tau\in G} w'_\tau \in W$, temos

$$\begin{array}{rcl} (w+w')\psi_\alpha & = & (\sum_{\tau\in G} w_\tau + \sum_{\tau\in G} w'_\tau)\psi_\alpha \\ & = & (\sum_{\tau\in G}(w_\tau + w'_\tau))\psi_\alpha \\ & = & \sum_{\tau\in G}\sigma(\tau,\alpha)\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\langle\mathbf{u}_\gamma, w_\tau + w'_\tau\rangle_\nu \\ & = & \sum_{\tau\in G}\sigma(\tau,\alpha)\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\langle\mathbf{u}_\gamma, w_\tau\rangle_\nu + \sum_{\tau\in G}\sigma(\tau,\alpha)\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\langle\mathbf{u}_\gamma, w'_\tau\rangle_\nu \\ & = & (w)\psi_\alpha + (w')\psi_\alpha, \end{array}$$

ou seja, ψ_α é aditiva. Sejam $d_\beta \in \mathcal{D}_\beta$ e $w_\tau \in W_\tau$ com $\tau,\beta \in G$, então

$$\begin{array}{rcl} d_\beta((w_\tau)\psi_\alpha) & = & \sigma(\beta,\tau+\alpha)((w_\tau)\psi_\alpha)d_\beta \\ & = & \sigma(\beta,\tau+\alpha)\sigma(\tau,\alpha)\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\langle\mathbf{u}_\gamma, w_\tau\rangle_\nu d_\beta, \\ (d_\beta w_\tau)\psi_\alpha & = & \sigma(\beta+\tau,\alpha)\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\langle\mathbf{u}_\gamma, d_\beta w_\tau\rangle_\nu \\ & = & \sigma(\beta+\tau,\alpha)\sigma(\beta,\tau)\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\langle\mathbf{u}_\gamma, w_\tau d_\beta\rangle_\nu \\ & = & \sigma(\beta+\tau,\alpha)\sigma(\beta,\tau)\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\langle\mathbf{u}_\gamma, w_\tau\rangle_\nu d_\beta. \end{array}$$

Como

$$\sigma(\beta,\tau+\alpha)\sigma(\tau,\alpha) = \sigma(\beta+\tau,\alpha)\sigma(\beta,\tau),$$

temos que $d_\beta((w_\tau)\psi_\alpha) = (d_\beta w_\tau)\psi_\alpha$ para todos $d_\beta \in \mathcal{D}_\beta, w_\tau \in W_\tau,\ \beta,\tau \in G$. Assim, dados $d = \sum_{\beta\in G} d_\beta \in \mathcal{D},\ w = \sum_{\tau\in G} w_\tau \in W$, temos

$$\begin{array}{rcl} d((w)\psi_\alpha) & = & (\sum_{\beta\in G} d_\beta)(\sum_{\tau\in G}\sigma(\tau,\alpha)\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\langle\mathbf{u}_\gamma, w_\tau\rangle_\nu) \\ & = & \sum_{\tau\in G}\sigma(\tau,\alpha)(\sum_{\beta\in G} d_\beta\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\langle\mathbf{u}_\gamma, w_\tau\rangle_\nu) \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\tau\in G}\sigma(\tau,\alpha)(\sum_{\beta\in G}\sigma(\beta,\alpha+\tau)\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\langle\mathbf{u}_\gamma, w_\tau\rangle_\nu d_\beta)\\
&= \sum_{\tau\in G}\sum_{\beta\in G}\sigma(\beta,\alpha+\tau)\sigma(\tau,\alpha)\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\langle\mathbf{u}_\gamma, w_\tau d_\beta\rangle_\nu\\
&= \sum_{\tau\in G}\sum_{\beta\in G}\sigma(\beta+\tau,\alpha)\sigma(\beta,\tau)\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\langle\mathbf{u}_\gamma, w_\tau d_\beta\rangle_\nu\\
&= \sum_{\tau\in G}\sum_{\beta\in G}\sigma(\beta+\tau,\alpha)\sigma(\beta,\tau)\sigma(\tau,\beta)\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\langle\mathbf{u}_\gamma, d_\beta w_\tau\rangle_\nu\\
&= \sum_{\tau\in G}\sum_{\beta\in G}\sigma(\beta+\tau,\alpha)\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\langle\mathbf{u}_\gamma, d_\beta w_\tau\rangle_\nu\\
&= (\sum_{\tau\in G}\sum_{\beta\in G}d_\beta w_\tau)\psi_\alpha\\
&= (dw)\psi_\alpha.
\end{aligned}
$$

Logo, $\psi_\alpha \in End_{\mathcal{D}^{op_\sigma}}(W)$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
\langle v_\beta\varphi_\alpha, w_\tau\rangle_\nu &= \langle\langle v_\beta, \mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\rangle_\nu\mathbf{u}_\gamma, w_\tau\rangle_\nu\\
&= \langle v_\beta, \mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\rangle_\nu\langle\mathbf{u}_\gamma, w_\tau\rangle_\nu,\\
\langle v_\beta, w_\tau\psi_\alpha\rangle_\nu &= \langle v_\beta, \sigma(\tau,\alpha)\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\langle\mathbf{u}_\gamma, w_\tau\rangle_\nu\rangle_\nu\\
&= \sigma(\tau,\alpha)\langle v_\beta, \mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\rangle_\nu\langle\mathbf{u}_\gamma, w_\tau\rangle_\nu.
\end{aligned}
$$

Como $\sigma(\alpha,\tau)\sigma(\tau,\alpha) = 1$, temos que $\langle v_\beta\varphi_\alpha, w_\tau\rangle_\nu = \sigma(\alpha,\tau)\langle v_\beta, w_\tau\psi_\alpha\rangle_\nu$ para todos $v_\beta \in V, w_\tau \in W_\tau, \beta,\tau \in G$. Isso nos dá, finalmente, $\varphi_\alpha \in \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$. Agora, como $\mathbf{u}_\gamma$ e $\mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}$ são não nulos e $\langle -,-\rangle_\nu$ é não degenerado, temos que $\varphi_\alpha \neq 0$. □

Lema 3.2.9. *Todo elemento homogêneo $\varphi_\alpha \in \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)_\alpha$ de posto 1 é da forma*

$$
\varphi_\alpha = \langle -, \mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\rangle_\nu\mathbf{u}_\gamma : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V\\ v & \longmapsto & (v)\varphi_\alpha = \langle v, \mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu}\rangle_\nu\mathbf{u}_\gamma,\end{array} \tag{3.17}
$$

para alguns $\gamma \in G, \mathbf{w}_{\alpha-\gamma-\nu} \in W_{\alpha-\gamma-\nu}$ e $\mathbf{u}_\gamma \in V_\gamma$.

Demonstração. Como $0 \neq \varphi_\alpha$ é homogêneo, temos que $Img(\varphi_\alpha)$ é um $\mathcal{D}$-módulo à esquerda G-graduado, ou seja, $Img(\varphi_\alpha)$ é um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda G-graduado. Como $dim_{\mathcal{D}}(Img(\varphi_\alpha)) = 1$, existe $0 \neq \tilde{v}_\beta \in V_\beta$ tal que $Img(\varphi_\alpha) = \bigoplus_{\gamma\in G}\mathcal{D}_\gamma\tilde{v}_\beta$ para algum $\beta \in G$. Pelo **Lema 3.2.6**, existe $w_{-\beta-\nu} \in W_{-\beta-\nu}$ tal que $\langle\tilde{v}_\beta, w_{-\beta-\nu}\rangle_\nu = 1$. Sejam $\gamma \in G$ e $v_\gamma \in V_\gamma$, então

$$
v_\gamma\varphi_\alpha = d_{\gamma+\alpha-\beta}\tilde{v}_\beta \tag{3.18}
$$

para algum $d_{\gamma+\alpha-\beta} \in \mathcal{D}_{\gamma+\alpha-\beta}$. Daí,

$$
\langle v_\gamma\varphi_\alpha, w_{-\beta-\nu}\rangle_\nu = \langle d_{\gamma+\alpha-\beta}\tilde{v}_\beta, w_{-\beta-\nu}\rangle_\nu = d_{\gamma+\alpha-\beta}. \tag{3.19}
$$

Por outro lado,

$$
\langle v_\gamma\varphi_\alpha, w_{-\beta-\nu}\rangle_\nu = \sigma(\alpha,-\beta-\nu)\langle v_\gamma, w_{-\beta-\nu}\varphi_\alpha^{*\sigma}\rangle_\nu. \tag{3.20}
$$

Assim, de (3.18) – (3.20), temos que

$$\begin{aligned} v_\gamma\varphi_\alpha &= d_{\gamma+\alpha-\beta}\tilde{v}_\beta \\ &= \langle v_\gamma\varphi_\alpha, w_{-\beta-\nu}\rangle_\nu \tilde{v}_\beta \\ &= \sigma(\alpha,-\beta-\nu)\langle v_\gamma, w_{-\beta-\nu}\varphi_\alpha^{*_\sigma}\rangle_\nu \tilde{v}_\beta \\ &= \langle v_\gamma, \sigma(\alpha,-\beta-\nu) w_{-\beta-\nu}\varphi_\alpha^{*_\sigma}\rangle_\nu \tilde{v}_\beta \end{aligned}$$

para quaisquer $v_\gamma \in V_\gamma, \gamma \in G$. Seja $\mathbf{w}_{\alpha-\beta-\nu} = \sigma(\alpha,-\beta-\nu)w_{-\beta-\nu}\varphi_\alpha^{*_\sigma} \in W_{\alpha-\beta-\nu}$. Logo, $\varphi_\alpha = \langle -, \mathbf{w}_{\alpha-\beta-\nu}\rangle_\nu \tilde{v}_\beta$. □

Lema 3.2.10. *Sejam V e W um par de espaços duais com torção associado a um par bilinear $\langle -,-\rangle_\nu$ sobre um anel G-graduado de divisão $\mathcal{D}$. Um elemento homogêneo de grau α a_α pertence a $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ se, e somente se, a_α se exprime como soma de elementos da forma φ_α dada em* (3.16).

Demonstração. Pelo **Lema 3.2.8**, φ_α, definido em (3.16), pertence a $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ e, como $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ é um ideal graduado, temos que qualquer soma desses elementos também pertence a $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$.

Reciprocamente, suponha que $0 \neq a_\alpha \in \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$. Então, Va_α tem dimensão finita sobre $\mathcal{D}$. Novamente, como a_α é homogêneo, temos que $Img(a_\alpha) = \bigoplus_{\beta\in G} Img(a_\alpha)_\beta$ é um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda G-graduado. Como $dim_{\mathcal{D}}(Img(\varphi_\alpha))$ é finita, podemos considerar uma base finita de elementos homogêneos $\mathfrak{X} = \bigcup_{\beta\in G}\{\tilde{v}_\beta^1, \ldots, \tilde{v}_\beta^{n_\beta}\}$ para $Img(a_\alpha)$ sobre $\mathcal{D}$. Se $v_{\gamma+\alpha} \in Img(a_\alpha)_{\alpha+\gamma}$, existe $\bar{v}_\gamma \in V_\gamma$ tal que

$$v_{\gamma+\alpha} = \bar{v}_\gamma a_\alpha = \sum_{\tau\in G}\sum_{k=1}^{n_\tau} d_{\gamma+\alpha-\tau}^k \tilde{v}_\tau^k,$$

onde $d_{\gamma+\alpha-\tau}^k \in \mathcal{D}_{\gamma+\alpha-\tau}$ e $\tilde{v}_\tau^k \in \mathfrak{X}$ para quaisquer $1 \leq k \leq n_\tau, \tau \in G$. Pelo **Lema 3.2.6**, existem elementos homogêneos $\bigcup_{\tau\in G}\{w_{-\tau-\nu}^1, \ldots, w_{-\tau-\nu}^{n_\tau}\}$ de W tais que $\langle \tilde{v}_\tau^i, w_{-\omega-\nu}^j\rangle_\nu = \delta_{ij}\delta_{\tau\omega}$ para todos $i \in \{1,\ldots,n_\tau\}, j \in \{1,\ldots,\omega\}$ e $\omega, \tau \in G$. Com isso,

$$\langle \bar{v}_\gamma a_\alpha, w_{-\tau-\nu}^k\rangle_\nu = \langle d_{\gamma+\alpha-\tau}^k \tilde{v}_\tau^k, w_{-\tau-\nu}^k\rangle_\nu = d_{\gamma+\alpha-\tau}^k.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \bar{v}_\gamma a_\alpha &= \sum_{\tau\in G}\sum_{i=1}^{n_\tau} \langle \bar{v}_\gamma a_\alpha, w_{-\tau-\nu}^i\rangle_\nu \tilde{v}_\tau^i \\ &= \sum_{\tau\in G}\sum_{i=1}^{n_\tau} \sigma(\alpha,-\tau-\nu)\langle \bar{v}_\gamma, w_{-\tau-\nu}^i a_\alpha^{*_\sigma}\rangle_\nu \tilde{v}_\tau^i \\ &= \sum_{\tau\in G}\sum_{i=1}^{n_\tau} \langle \bar{v}_\gamma, \sigma(\alpha,-\tau-\nu) w_{-\tau-\nu}^i a_\alpha^{*_\sigma}\rangle_\nu \tilde{v}_\tau^i \\ &= \sum_{\tau\in G}\sum_{i=1}^{n_\tau} \langle \bar{v}_\gamma, \mathbf{w}_{\alpha-\tau-\nu}^i\rangle_\nu \tilde{v}_\tau^i \end{aligned}$$

para quaisquer $\bar{v}_\gamma \in V_\gamma, \gamma \in G$, onde $\mathbf{w}^i_{\alpha-\tau-\nu} = \sigma(\alpha, -\tau-\nu)w^i_{-\tau-\nu}a^{*\sigma}_\alpha \in W_{\alpha-\tau-\nu}$. Portanto, a_α é uma soma de elementos φ_α definido em (3.16). Com isso, concluímos a demonstração do lema. □

Proposição 3.2.11. *Sejam V e W um par de espaços duais com torção associado a um par bilinear $\langle -, -\rangle_\nu$ sobre um anel graduado de divisão $\mathcal{D}$. Então, $\mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$ age densamente em V.*

Demonstração. Sejam $\{v^1_\alpha, \ldots, v^n_\alpha\} \subset V_\alpha$ linearmente independente sobre o anel de divisão $\mathcal{D}$ e elementos quaisquer $u^1_\beta, \ldots, u^n_\beta \in V_\beta$. Pelo **Lema 3.2.6**, existem $w^1_{-\alpha-\nu}, \ldots, w^n_{-\alpha-\nu} \in W_{-\alpha-\nu}$ tais que $\langle v^i_\alpha, w^j_{-\alpha-\nu}\rangle_\nu = \delta_{ij}$ para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Como visto no **Lema 3.2.8**, $\langle -, w^i_{-\alpha-\nu}\rangle_\nu u^i_\beta \in \mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$. Ponha $t_{\beta-\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \langle -, w^i_{-\alpha-\nu}\rangle_\nu u^i_\beta$. Pelo **Lema 3.2.10**, $t_{\beta-\alpha} \in \mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$. Além disso,

$$v^k_\alpha t_{\beta-\alpha} = u^k_\beta \tag{3.21}$$

para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. Segue disso que $\mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$ age densamente em V. □

Nas hipóteses da **Proposição 3.2.11**, afirmamos que V é um $\mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$-módulo à direita graduado irredutível e fiel. De fato, $Ann^r_{\mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)}(V) = \{a \in \mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V) \mid va = 0,\ \forall\ v \in V\}$. Se $a \in \mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$ é tal que $(V)a = 0$, então, pela definição de função, $a = 0$, já que $a \in \mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V) \subseteq End^{gr}_{\mathcal{D}}(V)$. Logo, $Ann^r_{\mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)}(V) = (0)$ e, portanto, V é fiel $\mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$-módulo à direita graduado. Agora, suponha que $(0) \neq V' \subseteq V$ seja um $\mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$-módulo à direita graduado. Dado $\alpha \in G$, seja $v_\alpha \in V_\alpha$. Como $V' \neq (0)$, existe um elemento homogêneo não nulo $u_\beta \in V'_\beta$ para algum $\beta \in G$. Pelo **Lema 3.2.6**, existe $w_{-\beta-\nu} \in W_{-\beta-\nu}$ tal que $\langle u_\beta, w_{-\beta-\nu}\rangle_\nu = 1$. Pelo **Lema 3.2.8**, $t_{\alpha-\beta} = \langle -, w_{-\beta-\nu}\rangle_\nu v_\alpha \in \mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$. Assim,

$$\begin{aligned} v_\alpha &= \langle u_\beta, w_{-\beta-\nu}\rangle_\nu v_\alpha \\ &= u_\beta t_{\alpha-\beta} \in V'_\alpha \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in G$. Logo, $V = V'$. Portanto, V é um $\mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$-módulo à direita graduado irredutível e fiel.

Assim, podemos enunciar o seguinte corolário.

Corolário 3.2.12. *Sejam V e W um par de espaços duais com torção associado a um par bilinear $\langle -, -\rangle_\nu$ e $\mathcal{R}$ um anel graduado. Se $\mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}^{gr_\sigma}_W(V)$, então $\mathcal{R}$ é um anel graduado primitivo à direita.*

Demonstração. Da **Proposição 3.2.11** resulta que $\mathcal{R}$ age densamente em V, desde que $\mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}^{gr_\sigma}_W(V)$. Portanto, V é um $\mathcal{R}$-módulo graduado irredutível e fiel. □

3.3 σ-involução

Nesta seção, apresentaremos a definição de σ-involução em um anel associativo graduado e em uma F-álgebra associativa graduada. Como dissemos, a definição de σ-involução generaliza as definições de involução colorida, superinvolução, involução graduada e $\mathbb{Z}_3$-involução apresentadas no **Capítulo 2**.

Relembramos que G é um grupo abeliano finito, F é um corpo e σ é um 2-cociclo anti-simétrico em G tal que $\sigma(\alpha,-\alpha)\in\{-1,1\}$ e $\sigma(0,\alpha)=\sigma(\alpha,0)=\sigma(0,0)\in\{-1,1\}$ para qualquer $\alpha\in G$.

Para a definição abaixo, pediremos que $\sigma : G\times G\longrightarrow\{-1,1\}$.

Definição 3.3.1. *Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{C}$ anéis G-graduados. Um σ-anti-homomorfismo de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{C}$ é uma aplicação $\mathbb{Z}$-linear graduada de grau neutro $\varphi_\sigma : \mathcal{R}\longrightarrow\mathcal{C}$ que satisfaz*

$$(r_\alpha r_\beta)^{\varphi_\sigma}=\sigma(\alpha,\beta)r_\beta^{\varphi_\sigma}r_\alpha^{\varphi_\sigma} \tag{3.22}$$

para quaisquer $r_\alpha\in\mathcal{R}_\alpha, r_\beta\in\mathcal{R}_\beta$ e $\alpha,\beta\in G$.

Dois anéis G-graduados $\mathcal{R}$ e $\mathcal{C}$ são σ-anti-isomorfos se existe um σ-anti-homomorfismo de anéis graduados bijetivo.

Exemplo 3.3.1. *Sejam $\mathcal{R}$ um anel G-graduado e $\sigma : G\times G\longrightarrow\{-1,1\}$ um 2-cociclo anti-simétrico. A aplicação*

$$\begin{array}{cccc}\varphi_\sigma : & \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{R}^{op_\sigma}\\ & r & \longmapsto & r\end{array}$$

é um σ-anti-isomorfismo de anéis graduados.

Para a definição de σ-anti-homomorfismo de F-álgebras graduadas, consideramos $\sigma : G\times G\longrightarrow F^\times$ um 2-cociclo anti-simétrico em G.

Definição 3.3.2. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ F-álgebras G-graduadas. Um σ-anti-homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ é uma aplicação F-linear graduada de grau neutro $\varphi_\sigma : \mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ tal que*

$$(a_\alpha a_\beta)^{\varphi_\sigma}=\sigma(\alpha,\beta)a_\beta^{\varphi_\sigma}a_\alpha^{\varphi_\sigma} \tag{3.23}$$

para quaisquer $a_\alpha\in\mathcal{A}_\alpha, a_\beta\in\mathcal{A}_\beta$ e $\alpha,\beta\in G$.

Dizemos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são σ-anti-isomorfas se existe um σ-anti-homomorfismo de F-álgebras graduadas bijetivo.

Exemplo 3.3.2. *Sejam $\mathcal{A}$ uma F-álgebra G-graduada e $\sigma : G \times G \longrightarrow F^{\times}$ um 2-cociclo anti-simétrico. A aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_\sigma : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}^{op_\sigma} \\ & a & \longmapsto & a \end{array}$$

é um σ-anti-isomorfismo de F-álgebras graduadas.

Assim como para homomorfismos de anéis, homomorfismos de anéis graduados, homomorfismos de F-álgebras e homomorfismos de F-álgebras graduadas, temos os seguintes resultados.

Proposição 3.3.1. *Seja $\varphi_\sigma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um σ-anti-homomorfismo de anéis (F-álgebras) graduados, então $0^{\varphi_\sigma} = 0$. Além disso, se φ_σ é um σ-anti-isomorfismo de anéis (F-álgebras) unitários graduados, então $1_{\mathcal{A}}^{\varphi_\sigma} = \sigma(0,0)1_{\mathcal{B}}$ e $(-1_{\mathcal{A}})^{\varphi_\sigma} = \sigma(0,0)(-1_{\mathcal{B}}) = -\sigma(0,0)1_{\mathcal{B}}$.*

Demonstração. De fato, $0^{\varphi_\sigma} = (0+0)^{\varphi_\sigma} = 0^{\varphi_\sigma} + 0^{\varphi_\sigma}$. Logo, $0^{\varphi_\sigma} = 0$.

Agora, suponha que φ_σ seja um σ-anti-isomorfismo. Devemos mostrar que $\sigma(0,0)1_{\mathcal{A}}^{\varphi_\sigma} = 1_{\mathcal{B}}$. Temos

$$\begin{array}{rcl} \sigma(0,0)1_{\mathcal{A}}^{\varphi_\sigma} b_\gamma & = & \sigma(0,0)1_{\mathcal{A}}^{\varphi_\sigma}(a_\gamma)^{\varphi_\sigma} \\ & = & \sigma(0,0)\sigma(\gamma,0)(a_\gamma 1_{\mathcal{A}})^{\varphi_\sigma} \\ & = & (a_\gamma)^{\varphi_\sigma} \\ & = & b_\gamma, \\ b_\gamma \sigma(0,0)1_{\mathcal{A}}^{\varphi_\sigma} & = & (a_\gamma)^{\varphi_\sigma}\sigma(0,0)1_{\mathcal{A}}^{\varphi_\sigma} \\ & = & (1_{\mathcal{A}} a_\gamma)^{\varphi_\sigma} \\ & = & (a_\gamma)^{\varphi_\sigma} \\ & = & b_\gamma, \\ 0 & = & 0^{\varphi_\sigma} \\ & = & (-1_{\mathcal{A}} + 1_{\mathcal{A}})^{\varphi_\sigma} \\ & = & (-1_{\mathcal{A}})^{\varphi_\sigma} + 1_{\mathcal{A}}^{\varphi_\sigma} \end{array}$$

para todos $a_\gamma \in \mathcal{A}_\gamma, b_\gamma \in \mathcal{B}_\gamma, \gamma \in G$, onde $b_\gamma = a_\gamma^{\varphi_\sigma}$. Logo, $1_{\mathcal{B}} = \sigma(0,0)1_{\mathcal{A}}^{\varphi_\sigma}$ e, com isso, $(-1_{\mathcal{A}})^{\varphi_\sigma} = -\sigma(0,0)1_{\mathcal{B}}$. □

Proposição 3.3.2. *Seja $\varphi_\sigma : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ um σ-anti-homomorfismo de anéis (F-álgebras) graduados. Então, $Ker(\varphi_\sigma)$ é um ideal graduado de $\mathcal{R}$ e $Img(\varphi_\sigma)$ é um subanel graduado de $\mathcal{C}$.*

Demonstração. De fato, como φ_σ é $\mathbb{Z}$-linear (F-linear), temos que $Ker(\varphi_\sigma)$ e $Img(\varphi_\sigma)$ são subgrupos (F-subespaços) de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente. Sejam $r = \sum_{\alpha \in G} r_\alpha \in \mathcal{R}$ e $k = \sum_{\beta \in G} k_\beta \in Ker(\varphi_\sigma) \subseteq \mathcal{R}$, então, pela linearidade de φ_σ, $0 = k^{\varphi_\sigma} = \sum_{\beta \in G} k_\beta^{\varphi_\sigma}$. Como $\mathcal{C}$ é graduado e φ_σ é homogêneo de grau 0, temos que $k_\beta^{\varphi_\sigma} = 0$ para todo $\beta \in G$. Portanto, $Ker(\varphi_\sigma)$ é um subespaço graduado de $\mathcal{R}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
(rk)^{\varphi_\sigma} &= \sum_{\alpha,\beta\in G} (r_\alpha k_\beta)^{\varphi_\sigma} \\
&= \sum_{\alpha,\beta\in G} \sigma(\alpha,\beta) k_\beta^{\varphi_\sigma} r_\alpha^{\varphi_\sigma} = 0, \\
(kr)^{\varphi_\sigma} &= \sum_{\alpha,\beta\in G} (k_\beta r_\alpha)^{\varphi_\sigma} \\
&= \sum_{\alpha,\beta\in G} \sigma(\beta,\alpha) r_\alpha^{\varphi_\sigma} k_\beta^{\varphi_\sigma} = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $rk, kr \in Ker(\varphi_\sigma)$. Portanto, $Ker(\varphi_\sigma)$ é um ideal bilateral graduado de $\mathcal{R}$.

Sejam $r_1', r_2' \in Img(\varphi_\sigma)$, então existem $a = \sum_{\alpha\in G} a_\alpha, b = \sum_{\beta\in G} b_\beta \in \mathcal{R}$ tais que $a^{\varphi_\sigma} = r_1'$ e $b^{\varphi_\sigma} = r_2'$. Daí,

$$\begin{aligned}
r_1' r_2' &= a^{\varphi_\sigma} b^{\varphi_\sigma} \\
&= \sum_{\alpha\in G}\sum_{\beta\in G} a_\alpha^{\varphi_\sigma} b_\beta^{\varphi_\sigma} \\
&= \sum_{\alpha\in G}\sum_{\beta\in G} \sigma(\alpha,\beta)(b_\beta a_\alpha)^{\varphi_\sigma} \\
&= (\sum_{\alpha\in G}\sum_{\beta\in G} \sigma(\alpha,\beta)(b_\beta a_\alpha))^{\varphi_\sigma} \\
&= (c)^{\varphi_\sigma},
\end{aligned}$$

onde $c = \sum_{\alpha\in G}\sum_{\beta\in G} \sigma(\alpha,\beta)(b_\beta a_\alpha) \in \mathcal{R}$. Logo, $Img(\varphi_\sigma)$ é um subanel de $\mathcal{C}$. Por fim, como φ_σ é homogêneo de grau 0, temos que $Img(\varphi_\sigma)$ é graduado, onde $(\mathcal{R}_\beta)^{\varphi_\sigma} = Img(\varphi_\sigma)_\beta$ para todo $\beta \in G$. Portanto, $Img(\varphi_\sigma)$ é um subanel graduado de $\mathcal{C}$. $\square$

Os resultados abaixo são de verificação imediata.

Proposição 3.3.3. *Seja $\varphi_\sigma : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ um σ-anti-homomorfismo de anéis (F-álgebras) graduados. Então, $Ker(\varphi_\sigma) = (0)$ se, e somente se, φ_σ é injetivo.*

Os objetos a serem definidos a seguir são objetos centrais do nosso estudo, assim como anéis graduados primitivos. Eles são casos particulares de σ-anti-isomorfismo.

Definição 3.3.3. *Seja $\mathcal{R}$ um anel G-graduado. Uma σ-involução $*_\sigma$ em $\mathcal{R}$ é um σ-anti-isomorfismo de ordem 2, isto é, $*_\sigma : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ é $\mathbb{Z}$-linear de grau neutro e*

$$r^{*_\sigma *_\sigma} = r \qquad e \qquad (r_\alpha r_\beta)^{*_\sigma} = \sigma(\alpha,\beta) r_\beta^{*_\sigma} r_\alpha^{*_\sigma} \tag{3.24}$$

para quaisquer $r \in \mathcal{R}, r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha, r_\beta \in \mathcal{R}_\beta$ e $\alpha, \beta \in G$.

Relembramos que na definição de σ-anti-isomorfismo de anéis graduados o 2-cociclo anti-simétrico σ assume valores $\{-1, 1\}$.

Definição 3.3.4. *Uma σ-involução em uma F-álgebra G-graduada $\mathcal{A}$ é uma aplicação F-linear graduada de grau neutro $*_\sigma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que*

$$a^{*_\sigma *_\sigma} = a \qquad e \qquad (a_\alpha a_\beta)^{*_\sigma} = \sigma(\alpha, \beta) a_\beta^{*_\sigma} a_\alpha^{*_\sigma} \tag{3.25}$$

para quaisquer $a \in \mathcal{A}, a_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha, a_\beta \in \mathcal{A}_\beta$ e $\alpha, \beta \in G$.

Ou seja, uma σ-involução em uma F-álgebra G-graduada é um σ-anti-isomorfismo de F-álgebra graduadas de ordem 2. Novamente, relembramos que na definição de σ-anti-isomorfismo de F-álgebras graduadas o 2-cociclo σ assume valores em $F^\times$ e é anti-simétrico.

A condição que o 2-cociclo σ seja anti-simétrico, na definição de σ-involução, é necessária para que $*_\sigma^2 = id$, isto é, $a^{*_\sigma *_\sigma} = a$ para todos $a \in \mathcal{R}$. Em particular,

$$\begin{aligned} a_\alpha b_\beta &= (a_\alpha b_\beta)^{*_\sigma *_\sigma} \\ &= (\sigma(\alpha, \beta) b_\beta^{*_\sigma} a_\alpha^{*_\sigma})^{*_\sigma} \\ &= \sigma(\alpha, \beta)\sigma(\beta, \alpha) a_\alpha^{*_\sigma *_\sigma} b_\beta^{*_\sigma *_\sigma} \\ &= \sigma(\alpha, \beta)\sigma(\beta, \alpha) a_\alpha b_\beta, \end{aligned}$$

ou seja, a igualdade acima é válida se, e somente se, $\sigma(\alpha, \beta)\sigma(\beta, \alpha) = 1$ para todo $\alpha, \beta \in G$.

Se σ é um bicaracter anti-simétrico, então $*_\sigma$ é uma involução colorida. Se $\sigma(\alpha, \beta) = 1$ para todos $\alpha, \beta \in G$, então $*_\sigma$ é uma involução graduada. Se $G = \mathbb{Z}_2$ e $\sigma(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (-1)^{\alpha\beta}$ para $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{Z}_2$, então $*_\sigma$ é uma superinvolução. Por fim, se $\sigma(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (-1)^{\alpha\beta}$ com $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{Z}_3$, então $*_\sigma$ é uma $\mathbb{Z}_3$-involução.

Observe que, na **Definição 3.3.4**, no caso em que $\sigma(0, 0) = 1$, $*_\sigma$ age como a aplicação identidade em F. Além disso, em qualquer situação, $\sigma(0, 0) \in \{1, -1\}$, $*_\sigma$ é F-linear.

É importante ressaltar que dado um 2-cociclo σ, nem toda F-álgebra graduada admite uma σ-involução. Por exemplo, se $G = \mathbb{Z}_2$ e $\sigma(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (-1)^{\alpha\beta}$, então a F-álgebra $M_n(F[\mathbb{Z}_2])$ não possui superinvolução (veja [14]). No **Capítulo 4**, apresentaremos uma outra versão da demonstração desse resultado.

Proposição 3.3.4. *Seja $\mathcal{R}$ um anel (F-álgebra) G-graduado. Então, $\mathcal{R}$ admite σ-involução se, e somente se, existe um isomorfismo de ordem 2 $\varphi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}^{op_\sigma}$ de anéis (F-álgebras) gradudos de grau neutro.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{R}$ admita uma σ-involução $*_\sigma$. Então,

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{R}^{op_\sigma} \\ & r & \longmapsto & \varphi(r) = r^{*_\sigma} \end{array}$$

é um isomorfismo de anéis (F-álgebras) graduados de grau neutro. De fato, como $*_\sigma$ é $\mathbb{Z}$-linear (F-linear), graduado de grau neutro e de ordem 2, temos que φ também é $\mathbb{Z}$-linear (F-linear), graduado de grau neutro e de ordem 2. Dados $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha, r_\beta \in \mathcal{R}_\beta$ com $\alpha, \beta \in G$, temos

$$\begin{array}{rcl} \varphi(r_\alpha r_\beta) & = & (r_\alpha r_\beta)^{*_\sigma} \\ & = & \sigma(\alpha,\beta) r_\beta^{*_\sigma} r_\alpha^{*_\sigma} \\ & = & r_\alpha^{*_\sigma} \circ_{op_\sigma} r_\beta^{*_\sigma} \\ & = & \varphi(r_\alpha) \circ_{op_\sigma} \varphi(r_\beta). \end{array}$$

Com isso e pela $\mathbb{Z}$-linearidade (F-linearidade) de φ, obtemos que $\varphi(rr') = \varphi(r) \circ_{op_\sigma} \varphi(r')$. Logo, φ é um isomorfismo de ordem 2 de anéis (F-álgebras) graduados de grau neutro.

Reciprocamente, seja $\varphi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}^{op_\sigma}$ um isomorfismo de ordem 2 de anéis (F-álgebras) graduados de grau neutro. Defina

$$\begin{array}{rccl} *_\sigma : & \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ & r & \longmapsto & r^{*_\sigma} = \varphi(r). \end{array}$$

Como φ é um isomorfismo de ordem 2 de anéis (F-álgebras) graduados de grau neutro, segue que $*_\sigma$ é $\mathbb{Z}$-linear (F-linear) de ordem 2. Além disso, para todos $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha, r_\beta \in \mathcal{R}_\beta$ com $\alpha, \beta \in G$, temos que

$$\begin{array}{rcl} (r_\alpha r_\beta)^{*_\sigma} & = & \varphi(r_\alpha r_\beta) \\ & = & \varphi(r_\alpha) \circ_{op_\sigma} \varphi(r_\beta) \\ & = & \sigma(\alpha,\beta)\varphi(r_\beta)\varphi(r_\alpha) \\ & = & \sigma(\alpha,\beta) r_\beta^{*_\sigma} r_\alpha^{*_\sigma}. \end{array}$$

Logo, $*_\sigma$ é uma σ-involução em $\mathcal{R}$. □

Observação 3.3.5. *Se $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$ é um anel (F-álgebra) de divisão munido de uma involução $^-$, então $M_k(\mathcal{D})$ possui uma involução $\tilde{}$, dada por $\tilde{a} = \bar{a}^t$, onde t é a involução transposta em $M_k(\mathcal{D})$.*

A proposição a seguir é um resultado análogo ao **Teorema 2.3.2**, cuja demonstração encontra-se em [[18], Theorem 4.2]. Isso também apresenta exemplos de σ-involuções no anel de matrizes $\mathbb{Z}_3$-graduado $M_k(\mathcal{D})$.

Recordemos que quando um 2-cociclo σ é anti-simétrico e assume valores apenas 1 ou -1, então σ é também simétrico, ou seja, $\sigma(\alpha,\beta) = \sigma(\beta,\alpha)$ para quaisquer $\alpha, \beta \in G$. Neste caso, $\sigma(\alpha,\beta)^2 = 1$ para todos $\alpha, \beta \in G$.

Proposição 3.3.6. *Sejam $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$ um anel de divisão munido de uma involução $^-$ e $\sigma : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \{-1, 1\}$ um 2-cociclo anti-simétrico.*

a) *Considere $\mathcal{A} = M_{p+p}(\mathcal{D})$ com $p > 0$, $\mathbb{Z}_3$-graduada por*

$$\mathcal{A}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in M_p(\mathcal{D}) \right\},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in M_p(\mathcal{D})\right\},\\ \mathcal{A}_2 &= \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in M_p(\mathcal{D})\right\}.\end{aligned}$$

Então, $*_\sigma$ *definida por*

$$\begin{pmatrix} f & x \\ y & z \end{pmatrix}^{*_\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{z} & c\tilde{x} \\ \sigma(1,2)\sigma(0,0)\bar{c}\tilde{y} & \sigma(0,0)\tilde{f} \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

é uma σ*-involução em* $\mathcal{A}$*, em que* $\tilde{}$ *é a involução* $\tilde{a} = \bar{a}^t$ *em* $M_p(\mathcal{D})$ *e* $c \in Z(\mathcal{D})$ *é tal que* $c\bar{c} = 1$.

b) *Considere* $\mathcal{B} = M_{p+q+p}(\mathcal{D})$, $p, q > 0$, *com a* $\mathbb{Z}_3$*-graduação dada por*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_0 &= \left\{\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \mid x, z \in M_p(\mathcal{D}), y \in M_q(\mathcal{D})\right\},\\ \mathcal{B}_1 &= \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \mid a \in M_{q\times p}(\mathcal{D}), b \in M_{p\times q}(\mathcal{D}), c \in M_p(\mathcal{D})\right\},\\ \mathcal{B}_2 &= \left\{\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid y \in M_{q\times p}(\mathcal{D}), x \in M_{p\times q}(\mathcal{D}), z \in M_p(\mathcal{D})\right\}.\end{aligned}$$

Então, $*_\sigma$ *é uma* σ*-involução em* $\mathcal{B}$ *pondo*

$$\begin{pmatrix} f & x & c \\ a & g & y \\ z & b & h \end{pmatrix}^{*_\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{h} & \alpha\tilde{y} & \beta\tilde{c} \\ \tau\tilde{b} & \sigma(0,0)\tilde{g} & \gamma\tilde{x} \\ \omega\tilde{z} & \eta\tilde{a} & \sigma(0,0)\tilde{f} \end{pmatrix}, \tag{3.27}$$

onde $\tilde{}$ *é a involução* $\tilde{a} = \bar{a}^t$ *em* $M_p(\mathcal{D})$ *e* $M_q(\mathcal{D}), \alpha, \beta, \tau, \eta, \omega, \gamma \in Z(\mathcal{D})$ *são tais que*

$$\begin{array}{l} \beta\tau = \sigma(1,1)\gamma, \quad \beta\eta = \sigma(1,1)\alpha, \quad \eta\tau = \sigma(1,1)\omega, \\ \alpha\gamma = \sigma(2,2)\beta, \gamma\omega = \sigma(2,2)\tau, \quad \omega\alpha = \sigma(2,2)\eta, \\ \sigma(1,2)\beta\omega = \sigma(1,2)\tau\alpha = \sigma(2,1)\eta\gamma = \sigma(0,0) \\ \bar{\tau}\eta = \gamma\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta} = \omega\bar{\omega} = 1. \end{array} \tag{3.28}$$

Demonstração. **a)** Dado $\begin{pmatrix} f & x \\ y & z \end{pmatrix} \in M_{p+p}$, temos

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f & x \\ y & z \end{pmatrix}^{*_\sigma *_\sigma} &= \begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{z} & c\tilde{x} \\ \sigma(1,2)\sigma(0,0)\bar{c}\tilde{y} & \sigma(0,0)\tilde{f} \end{pmatrix}^{*_\sigma}\\ &= \begin{pmatrix} \sigma(0,0)\sigma(0,0)\tilde{\tilde{f}} & c(\bar{c}\tilde{\tilde{x}}) \\ \sigma(1,2)\sigma(0,0)\sigma(1,2)\sigma(0,0)\bar{c}\;\bar{\bar{c}}\;\tilde{\tilde{y}} & \sigma(0,0)\sigma(0,0)\tilde{\tilde{z}} \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \sigma(0,0)^2 f & c\bar{c}x \\ \sigma(1,2)^2\sigma(0,0)^2\bar{c}cy & \sigma(0,0)^2 z \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} f & x \\ y & z \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Observe que para quaisquer $A, B \in \mathcal{A}_1, C, D \in \mathcal{A}_2$, tem-se

$$\begin{aligned}
(AB)^{*_\sigma} &= 0\\
&= \sigma(1,1)B^{*_\sigma}A^{*_\sigma},\\
(CD)^{*_\sigma} &= 0\\
&= \sigma(2,2)D^{*_\sigma}C^{*_\sigma}.
\end{aligned}$$

Sejam $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_1$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_2$. Então,

$$\begin{aligned}
(AC)^{*_\sigma} &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^{*_\sigma}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}^{*_\sigma}\\
&= \begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{b}\tilde{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\\
C^{*_\sigma}A^{*_\sigma} &= \begin{pmatrix} 0 & c\tilde{b} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma(1,2)\sigma(0,0)\bar{c}\tilde{a} & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \sigma(1,2)\sigma(0,0)c\bar{c}\tilde{b}\tilde{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&= \sigma(1,2)\sigma(0,0)\begin{pmatrix} \tilde{b}\tilde{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\\
(CA)^{*_\sigma} &= \left[\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}\right]^{*_\sigma}\\
&= \begin{pmatrix} ba & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{*_\sigma}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma(0,0)\tilde{a}\tilde{b} \end{pmatrix},\\
A^{*_\sigma}C^{*_\sigma} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma(1,2)\sigma(0,0)\bar{c}\tilde{a} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c\tilde{b} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma(1,2)\sigma(0,0)\bar{c}c\tilde{a}\tilde{b} \end{pmatrix}\\
&= \sigma(1,2)\sigma(0,0)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a}\tilde{b} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Como $\sigma(1,2) = \sigma(2,1)$, temos que $(AC)^{*_\sigma} = \sigma(1,2)C^{*_\sigma}A^{*_\sigma}$ e $(CA)^{*_\sigma} = \sigma(2,1)A^{*_\sigma}C^{*_\sigma}$. Agora, sejam $E = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_0$, então,

$$\begin{aligned}
(AE)^{*_\sigma} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ax & 0 \end{pmatrix}^{*_\sigma}\\
&= \sigma(1,2)\sigma(0,0)\bar{c}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{x}\tilde{a} & 0 \end{pmatrix}\\
(EA)^{*_\sigma} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ya & 0 \end{pmatrix}^{*_\sigma}\\
&= \sigma(1,2)\sigma(0,0)\bar{c}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{a}\tilde{y} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
E^{*_\sigma}A^{*_\sigma} &= \begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{y} & 0 \\ 0 & \sigma(0,0)\tilde{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma(1,2)\sigma(0,0)\bar{c}\tilde{a} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sigma(1,2)\bar{c}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{x}\tilde{a} & 0 \end{pmatrix}, \\
A^{*_\sigma}E^{*_\sigma} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma(1,2)\sigma(0,0)\bar{c}\tilde{a} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{y} & 0 \\ 0 & \sigma(0,0)\tilde{x} \end{pmatrix} \\
&= \sigma(1,2)\bar{c}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{a}\tilde{y} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Relembramos que $\sigma(0,0) = \sigma(0,1) = \sigma(1,0) = \sigma(0,2) = \sigma(2,0)$. Com isso, temos $(AE)^{*_\sigma} = \sigma(1,0)E^{*_\sigma}A^{*_\sigma}$ e $(EA)^{*_\sigma} = \sigma(0,1)A^{*_\sigma}E^{*_\sigma}$. Analogamente,

$$\begin{aligned}
(EC)^{*_\sigma} &= \begin{pmatrix} 0 & xb \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{*_\sigma} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & c\tilde{b}\tilde{x} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
(CE)^{*_\sigma} &= \begin{pmatrix} 0 & by \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{*_\sigma} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & c\tilde{y}\tilde{b} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
E^{*_\sigma}C^{*_\sigma} &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma(0,0)c\tilde{y}\tilde{b} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
C^{*_\sigma}E^{*_\sigma} &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma(0,0)c\tilde{b}\tilde{x} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

E, portanto, $(EC)^{*_\sigma} = \sigma(0,2)C^{*_\sigma}E^{*_\sigma}$ e $(CE)^{*_\sigma} = \sigma(2,0)E^{*_\sigma}C^{*_\sigma}$. Finalmente, dado $D = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_0$, temos

$$(ED)^{*_\sigma} = \begin{pmatrix} xz & 0 \\ 0 & yp \end{pmatrix}^{*_\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{p}\tilde{y} & 0 \\ 0 & \sigma(0,0)\tilde{z}\tilde{x} \end{pmatrix} = \sigma(0,0)D^{*_\sigma}E^{*_\sigma}.$$

Logo, $*_\sigma$ é uma σ-involução em $\mathcal{A}$.

b) Dado $\begin{pmatrix} f & x & c \\ a & g & y \\ z & b & h \end{pmatrix} \in M_{p+q+p}(\mathcal{D})$, temos

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f & x & c \\ a & g & y \\ z & b & h \end{pmatrix}^{*_\sigma *_\sigma} &= \begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{h} & \alpha\tilde{y} & \beta\tilde{c} \\ \tau\tilde{b} & \sigma(0,0)\tilde{g} & \gamma\tilde{x} \\ \omega\tilde{z} & \eta\tilde{a} & \sigma(0,0)\tilde{f} \end{pmatrix}^{*_\sigma} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma(0,0)^2\tilde{\tilde{f}} & \widetilde{\alpha\gamma\tilde{x}} & \widetilde{\beta\beta\tilde{c}} \\ \widetilde{\tau\eta\tilde{a}} & \sigma(0,0)^2\tilde{\tilde{g}} & \widetilde{\gamma\alpha\tilde{y}} \\ \widetilde{\omega\omega\tilde{z}} & \widetilde{\eta\tau\tilde{b}} & \sigma(0,0)^2\tilde{\tilde{h}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f & \alpha\bar{\gamma}x & \beta\bar{\beta}c \\ \tau\bar{\eta}a & g & \gamma\bar{\alpha}y \\ \omega\bar{\omega}z & \eta\bar{\tau}b & h \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Como

$$\alpha\bar{\gamma} = \gamma\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta} = \eta\bar{\tau} = \tau\bar{\eta} = \omega\bar{\omega} = 1,$$

temos que

$$\begin{pmatrix} f & x & c \\ a & g & y \\ z & b & h \end{pmatrix}^{*_\sigma *_\sigma} = \begin{pmatrix} f & x & c \\ a & g & y \\ z & b & h \end{pmatrix}.$$

Sejam $\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}$ duas matrizes em $\mathcal{A}_1$, então

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}\right\}^{*_\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & cy & 0 \\ 0 & 0 & az \\ bx & 0 & 0 \end{pmatrix}^{*_\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\tilde{z}\tilde{a} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\tilde{y}\tilde{c} \\ \omega\tilde{x}\tilde{b} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\sigma(1,1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta\tilde{z} \\ \tau\tilde{y} & 0 & 0 \\ 0 & \eta\tilde{x} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta\tilde{c} \\ \tau\tilde{b} & 0 & 0 \\ 0 & \eta\tilde{a} & 0 \end{pmatrix} = \sigma(1,1)\begin{pmatrix} 0 & \beta\eta\tilde{z}\tilde{a} & 0 \\ 0 & 0 & \tau\beta\tilde{y}\tilde{c} \\ \eta\tau\tilde{x}\tilde{b} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\beta\eta = \sigma(1,1)\alpha, \tau\beta = \sigma(1,1)\gamma$ e $\eta\tau = \sigma(1,1)\omega$, segue que $(XY)^{*_\sigma} = \sigma(1,1)Y^{*_\sigma}X^{*_\sigma}$ para quaisquer $X, Y \in \mathcal{A}_1$. Além disso,

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}^{*_\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & az \\ bx & 0 & 0 \\ 0 & cy & 0 \end{pmatrix}^{*_\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta\tilde{z}\tilde{a} \\ \tau\tilde{y}\tilde{c} & 0 & 0 \\ 0 & \eta\tilde{x}\tilde{b} & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}^{*_\sigma}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}^{*_\sigma} &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha\tilde{z} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\tilde{y} \\ \omega\tilde{x} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \alpha\tilde{b} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\tilde{a} \\ \omega\tilde{c} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma\tilde{z}\tilde{a} \\ \gamma\omega\tilde{y}\tilde{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega\alpha\tilde{x}\tilde{b} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Pelas igualdades $\alpha\gamma = \sigma(2,2)\beta, \gamma\omega = \sigma(2,2)\tau$ e $\omega\alpha = \sigma(2,2)\eta$, temos $(AB)^{*_\sigma} = \sigma(2,2)B^{*_\sigma}A^{*_\sigma}$ para quaisquer $A, B \in \mathcal{A}_2$.

Sejam $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_1$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_2$. Então,

$$\begin{aligned}(XA)^{*_\sigma} = \begin{pmatrix} cx & 0 & 0 \\ 0 & ay & 0 \\ 0 & 0 & bz \end{pmatrix}^{*_\sigma} &= \begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{z}\tilde{b} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma(0,0)\tilde{y}\tilde{a} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma(0,0)\tilde{x}\tilde{c} \end{pmatrix} \\ &= \sigma(1,2)\begin{pmatrix} \alpha\tau\tilde{z}\tilde{b} & 0 & 0 \\ 0 & \eta\gamma\tilde{y}\tilde{a} & 0 \\ 0 & 0 & \beta\omega\tilde{x}\tilde{c} \end{pmatrix} \\ &= \sigma(1,2)\begin{pmatrix} 0 & \alpha\tilde{z} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\tilde{y} \\ \omega\tilde{x} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta\tilde{c} \\ \tau\tilde{b} & 0 & 0 \\ 0 & \eta\tilde{a} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \sigma(1,2)A^{*_\sigma}X^{*_\sigma}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(AX)^{*_\sigma} = \begin{pmatrix} ya & 0 & 0 \\ 0 & zb & 0 \\ 0 & 0 & xc \end{pmatrix}^{*_\sigma} &= \begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{c}\tilde{y} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma(0,0)\tilde{b}\tilde{z} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma(0,0)\tilde{a}\tilde{x} \end{pmatrix} \\
&= \sigma(1,2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta\tilde{c} \\ \tau\tilde{b} & 0 & 0 \\ 0 & \eta\tilde{a} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha\tilde{z} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\tilde{y} \\ \omega\tilde{x} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sigma(2,1) X^{*_\sigma} A^{*_\sigma}.
\end{aligned}$$

Relembramos que $\sigma(2,1) = \sigma(1,2)$, $\beta\omega = \tau\alpha = \sigma(0,0)\sigma(2,1)$ e $\eta\gamma = \sigma(1,2)\sigma(0,0)$.

De forma similar, para quaisquer $Z = \begin{pmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_0$, temos

$$\begin{aligned}
(PZ)^{*_\sigma} &= \left[\begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix} \right]^{*_\sigma} \\
&= \begin{pmatrix} fl & 0 & 0 \\ 0 & gm & 0 \\ 0 & 0 & hn \end{pmatrix}^{*_\sigma} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{n}\tilde{h} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma(0,0)\tilde{m}\tilde{g} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma(0,0)\tilde{l}\tilde{f} \end{pmatrix} \\
&= \sigma(0,0)^3 \begin{pmatrix} \tilde{n} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{m} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{g} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{f} \end{pmatrix} \\
&= \sigma(0,0) Z^{*_\sigma} P^{*_\sigma}, \\
(ZP)^{*_\sigma} &= \left[\begin{pmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \right]^{*_\sigma} \\
&= \begin{pmatrix} lf & 0 & 0 \\ 0 & mg & 0 \\ 0 & 0 & nh \end{pmatrix}^{*_\sigma} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{h}\tilde{n} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma(0,0)\tilde{g}\tilde{m} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma(0,0)\tilde{f}\tilde{l} \end{pmatrix} \\
&= \sigma(0,0)^3 \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{g} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{n} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{m} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{l} \end{pmatrix} \\
&= \sigma(0,0) P^{*_\sigma} Z^{*_\sigma}, \\
(PX)^{*_\sigma} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & fc \\ ga & 0 & 0 \\ 0 & hb & 0 \end{pmatrix}^{*_\sigma} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta\tilde{c}\tilde{f} \\ \tau\tilde{b}\tilde{h} & 0 & 0 \\ 0 & \eta\tilde{a}\tilde{g} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma(0,1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma(0,0)\beta\tilde{c}\tilde{f} \\ \sigma(0,0)\tau\tilde{b}\tilde{h} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma(0,0)\eta\tilde{a}\tilde{g} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sigma(0,1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta\tilde{c} \\ \tau\tilde{b} & 0 & 0 \\ 0 & \eta\tilde{a} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{h} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma(0,0)\tilde{g} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma(0,0)\tilde{f} \end{pmatrix} \\
&= \sigma(0,1)X^{*_\sigma}P^{*_\sigma} \\
(XP)^{*_\sigma} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & ch \\ af & 0 & 0 \\ 0 & bg & 0 \end{pmatrix}^{*_\sigma} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta\tilde{h}\tilde{c} \\ \tau\tilde{g}\tilde{b} & 0 & 0 \\ 0 & \eta\tilde{f}\tilde{a} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sigma(1,0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma(0,0)\beta\tilde{h}\tilde{c}\tilde{f} \\ \sigma(0,0)\tau\tilde{g}\tilde{b} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma(0,0)\eta\tilde{f}\tilde{a} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sigma(1,0)\begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{h} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma(0,0)\tilde{g} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma(0,0)\tilde{f} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta\tilde{c} \\ \tau\tilde{b} & 0 & 0 \\ 0 & \eta\tilde{a} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sigma(1,0)P^{*_\sigma}X^{*_\sigma} \\
(AP)^{*_\sigma} &= \begin{pmatrix} 0 & yg & 0 \\ 0 & 0 & zh \\ xf & 0 & 0 \end{pmatrix}^{*_\sigma} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \alpha\tilde{h}\tilde{z} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\tilde{g}\tilde{y} \\ \omega\tilde{f}\tilde{x} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sigma(2,0)\begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{h} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma(0,0)\tilde{g} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma(0,0)\tilde{f} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \alpha\tilde{z} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\tilde{y} \\ \omega\tilde{x} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sigma(2,0)P^{*_\sigma}A^{*_\sigma} \\
(PA)^{*_\sigma} &= \begin{pmatrix} 0 & fy & 0 \\ 0 & 0 & gz \\ hx & 0 & 0 \end{pmatrix}^{*_\sigma} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \alpha\tilde{z}\tilde{g} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\tilde{y}\tilde{f} \\ \omega\tilde{x}\tilde{h} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sigma(0,2)\begin{pmatrix} 0 & \alpha\tilde{z} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\tilde{y} \\ \omega\tilde{x} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{h} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma(0,0)\tilde{g} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma(0,0)\tilde{f} \end{pmatrix} \\
&= \sigma(2,0)A^{*_\sigma}P^{*_\sigma}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $*_\sigma$ é uma σ-involução em $\mathcal{A}$.

$\square$

Além dos 2-cociclos triviais, o **Exemplo 3.1.1** apresenta dois exemplos de 2-cociclos para os quais a proposição anterior vale.

Definição 3.3.5. *Seja $*_\sigma$ uma σ-involução na F-álgebra (anel) G-graduada $\mathcal{A}$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é $*_\sigma$-simples se $\mathcal{A}$ não possui ideais bilaterais graduados invariantes pela ação de $*_\sigma$.*

Qualquer F-álgebra graduada simples com $*_\sigma$-involução é $*_\sigma$-simples. Em particular, a **Proposição 3.3.6** apresenta dois exemplos de F-álgebras $*_\sigma$-simples.

3.4 Anéis Graduados Primitivos e Pares de Espaços Duais Graduados com Torção

Encerramos este capítulo com o nosso primeiro teorema, que é uma versão análoga aos **Teorema 2.2.1** e **Teorema 2.4.1**. Esse resultado é uma caracterização de anéis graduados primitivos à direita. Para tanto, pedimos que σ seja um 2-cociclo anti-simétrico que satisfaça $\sigma(\alpha,-\alpha)^2 = 1$ para todo $\alpha \in G$.

Lema 3.4.1. *Sejam $\mathcal{R}$ um anel G-graduado primitivo à direita, $e_0 \in \mathcal{R}_0$ um idempotente minimal tal que $V = e_0\mathcal{R}$ é um ideal à direita minimal e $e_0\mathcal{R}e_0 = \mathcal{D}$ é um anel graduado de divisão. Então, a aplicação*

$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & \mathcal{R} & \longrightarrow & End_{\mathcal{D}}^{gr}(V) \\ & r & \longmapsto & \mathfrak{R}_r, \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rrcl} \mathfrak{R}_r: & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & (v)\mathfrak{R}_r = vr, \end{array}$$

é um monomorfismo de anéis graduados.

Demonstração. Pelo **Lema 1.5.13**, $\mathcal{D} = e_0\mathcal{R}e_0$ é um anel graduado de divisão e $V = e_0\mathcal{R}$ é um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda graduado. Fixe um elemento $r \in \mathcal{R}$ e defina

$$\begin{array}{rrcl} \mathfrak{R}_r: & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & (v)\mathfrak{R}_r = vr. \end{array}$$

Dados $v, v' \in V, d \in \mathcal{D}$, temos

$$\begin{array}{rcl} (v+v')\mathfrak{R}_r & = & (v+v')r \\ & = & vr + v'r \\ & = & (v)\mathfrak{R}_r + (v')\mathfrak{R}_r, \\ (dv)\mathfrak{R}_r & = & (dv)r \\ & = & d(vr) \\ & = & d(v)\mathfrak{R}_r. \end{array}$$

Note que para todos $\sum_{\alpha\in G} r_\alpha = r \in \mathcal{R}$ e $v \in V$, temos

$$\begin{aligned}(v)\mathfrak{R}_r &= vr\\ &= v(\sum_{\alpha\in G} r_\alpha)\\ &= \sum_{\alpha\in G} vr_\alpha,\end{aligned}$$

ou seja, $\mathfrak{R}_r = \sum_{\alpha\in G} \mathfrak{R}_{r_\alpha}$. Em particular, se $r = r_\alpha$ é homogêneo de grau α, temos

$$\begin{aligned}(v_\beta)\mathfrak{R}_{r_\alpha} &= v_\beta r_\alpha \in V_{\beta+\alpha}\\ (d_\delta v_\beta)\mathfrak{R}_{r_\alpha} &= d_\delta v_\beta r_\alpha \in V_{\delta+\beta+\alpha}\end{aligned}$$

para quaisquer $d_\delta \in \mathcal{D}_\delta$, $v_\beta \in V_\beta$ e $\delta, \beta \in G$. Assim, $\mathfrak{R}_{r_\alpha} \in End_{\mathcal{D}}(V)_\alpha$. Logo, $\mathfrak{R}_r \in End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)$.

Considere a aplicação

$$\begin{aligned}\varphi:\ \mathcal{R} &\longrightarrow End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)\\ r &\longmapsto \mathfrak{R}_r.\end{aligned}$$

Dados $r, r' \in \mathcal{R}, v \in V$,

$$\begin{aligned}(v)\mathfrak{R}_{r+r'} &= v(r+r')\\ &= vr + vr'\\ &= (v)\mathfrak{R}_r + (v)\mathfrak{R}_{r'},\\ (v)\mathfrak{R}_{rr'} &= (v)rr'\\ &= (vr)r'\\ &= (vr)\mathfrak{R}_{r'}\\ &= ((v)\mathfrak{R}_r)\mathfrak{R}_{r'},\end{aligned}$$

ou seja, $\varphi(r+r') = \varphi(r) + \varphi(r')$ e $\varphi(rr') = \varphi(r)\varphi(r')$. Assim, φ é um homomorfismos de anéis. Como vimos acima, para quaisquer $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ e $\alpha \in V$, temos $\varphi(r_\alpha) = \mathfrak{R}_{r_\alpha} \in End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)_\alpha$. Logo, φ é um homomorfismo graduado de anéis graduados de grau 0.

Observe que $Ker(\varphi) = \{r \in \mathcal{R} \mid Vr = 0\} = Ann_{\mathcal{R}}^r(V)$ é um ideal bilateral graduado de $\mathcal{R}$. Suponha, por contradição, que $Ann_{\mathcal{R}}^r(V) \neq (0)$, então existe $0 \neq r_\alpha \in Ann_{\mathcal{R}}^r(V)_\alpha$ para algum $\alpha \in G$. Daí, $0 = Vr_\alpha = e_0\mathcal{R}r_\alpha$. Por outro lado, como $\mathcal{R}$ é um anel graduado primitivo à direita, pelo **Lema 1.5.7**, $\mathcal{R}$ é um anel graduado primo, assim, pelo **Lema 1.5.3**, $e_0\mathcal{R}r_\alpha \neq (0)$, já que e_0 e r_α são não nulos. Logo, $Ker(\varphi) = Ann_{\mathcal{R}}^r(V) = (0)$. Com isso, $\mathcal{R}$ é isomorfo a $Img(\varphi)$. Assim, podemos ver $\mathcal{R}$ como um subanel graduado de $End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)$. □

Teorema 3.4.2. *Se $\mathcal{R}$ é um anel (F-álgebra) G-graduado primitivo à direita com um ideal à direita graduado minimal e σ é um 2-cociclo anti-simétrico tal que $\sigma(\alpha,-\alpha)^2 = 1$ para todo $\alpha \in G$, então existe um par de espaços duais com torção ${}_{\mathcal{D}}V$ e $W_{\mathcal{D}}$ tal que*

$$\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V),$$

onde $\mathcal{D}$ é um anel G-graduado de divisão. Reciprocamente, dado um par de espaços duais com torção V e W sobre um anel G-graduado de divisão $\mathcal{D}$, qualquer anel G-graduado $\mathcal{R}$ satisfazendo

$$\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$$

é graduado primitivo à direita, $\mathcal{R}$ contém um ideal à direita graduado minimal. Além disso, $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ é o único ideal graduado minimal de $\mathcal{R}$.

Demonstração. Seja I um ideal à direita graduado minimal de $\mathcal{R}$. Pelo **Lema 1.5.13**, existe um elemento idempotente minimal $e_0 \in I_0$ tal que $\mathcal{D} = e_0\mathcal{R}e_0$ é um anel graduado de divisão, $V = e_0\mathcal{R} = I$ é um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda graduado e $W = \mathcal{R}e_0$ é um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à direita graduado. Observe ainda que V é um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado e W é um $\mathcal{R}$-módulo à esquerda graduado. Se $v \in V$ e $w \in W$, então existem $r, r' \in \mathcal{R}$ tais que $v = e_0 r$ e $w = r' e_0$. Defina

$$\begin{array}{rccl} \langle -, - \rangle_0 : & V \times W & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ & (v, w) & \longmapsto & \langle v, w \rangle_0 = e_0 r r' e_0 \end{array}.$$

Em particular, se $v = v_\alpha \in V_\alpha$ e $w = w_\beta \in W_\beta$, então $\langle v_\alpha, w_\beta \rangle_0 = e_0 r_\alpha r_\beta e_0$, onde $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha, r_\beta \in \mathcal{R}_\beta, \alpha, \beta \in G$ e $v_\alpha = e_0 r_\alpha, w_\beta = r_\beta e_0$. É relativamente fácil verificar que $\langle -, - \rangle_0$ é um par bilinear. Resta mostrar que $\langle -, - \rangle_0$ é não degenerado. Com efeito, pelo **Lema 1.5.7**, $\mathcal{R}$ é um anel graduado primo, assim, pelo **Lema 1.5.3**, $a_\alpha \mathcal{R} b_\beta \neq (0)$ se a_α, b_β são não nulos. Com isso,

$$\langle v_\alpha, W \rangle_0 = 0 \Rightarrow e_0 r_\alpha \mathcal{R} e_0 = 0 \Rightarrow v_\alpha = e_0 r_\alpha = 0,$$

pois $e_0 \neq 0$. De maneira análoga, temos

$$\langle V, w_\beta \rangle_0 = 0 \Rightarrow w_\beta = 0.$$

Portanto, V e W são um par de espaços duais com torção sobre $\mathcal{D}$ associado a $\langle -, - \rangle_0$.

Agora, vamos mostrar que $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$. Fixe um elemento $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ e defina

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{R}_{r_\alpha} : & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & (v)\mathfrak{R}_{r_\alpha} = v r_\alpha. \end{array}$$

Afirmamos que $\mathfrak{R}_{r_\alpha} \in \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$ para todo $\alpha \in G$. Pelo **Lema 3.4.1**, $\mathfrak{R}_{r_\alpha} \in End_{\mathcal{D}}(V)_\alpha$. Seja

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{L}_{r_\alpha} : & W & \longrightarrow & W \\ & w & \longmapsto & (w)\mathfrak{L}_{r_\alpha} = \displaystyle\sum_{\gamma \in G} \sigma(\gamma, \alpha) r_\alpha w_\gamma, \end{array}$$

onde $w = \sum_{\gamma \in G} w_\gamma$. Vamos mostrar que $\mathfrak{L}_{r_\alpha}$ é a σ-adjunta de $\mathfrak{R}_{r_\alpha}$ associada a $\langle -, - \rangle_0$. Recordemos que a ação de $\mathcal{D}^{op_\sigma}$ em W é dada no **Lema 3.2.1**. Para todos $w = \sum_{\gamma\in G} w_\gamma,\ w' = \sum_{\gamma\in G} w'_\gamma \in W$ e $d \in \mathcal{D}^{op_\sigma}$, temos

$$\begin{aligned}
(w+w')\mathfrak{L}_{r_\alpha} &= (\sum_{\gamma\in G} w_\gamma + \sum_{\gamma\in G} w'_\gamma)\mathfrak{L}_{r_\alpha}\\
&= \sum_{\gamma\in G}(w_\gamma + w'_\gamma)\mathfrak{L}_{r_\alpha}\\
&= \sum_{\gamma\in G}\sigma(\gamma,\alpha)r_\alpha(w_\gamma + w'_\gamma)\\
&= \sum_{\gamma\in G}\sigma(\gamma,\alpha)r_\alpha w_\gamma + \sum_{\gamma\in G}\sigma(\gamma,\alpha)r_\alpha w'_\gamma\\
&= (w)\mathfrak{L}_{r_\alpha} + (w')\mathfrak{L}_{r_\alpha},\\
(dw)\mathfrak{L}_{r_\alpha} &= \sum_{\gamma\in G}\sum_{\beta\in G}(d_\beta w_\gamma)\mathfrak{L}_{r_\alpha}\\
&= \sum_{\gamma\in G}\sum_{\beta\in G}\sigma(\beta+\gamma,\alpha)r_\alpha(d_\beta w_\gamma)\\
&= \sum_{\gamma\in G}\sum_{\beta\in G}\sigma(\beta+\gamma,\alpha)\sigma(\beta,\gamma)r_\alpha(w_\gamma d_\beta)\\
&= \sum_{\gamma\in G}\sum_{\beta\in G}\sigma(\beta+\gamma,\alpha)\sigma(\beta,\gamma)r_\alpha w_\gamma d_\beta,\\
d(w)\mathfrak{L}_{r_\alpha} &= \sum_{\beta\in G} d_\beta(\sum_{\gamma\in G}\sigma(\gamma,\alpha)r_\alpha w_\gamma)\\
&= \sum_{\gamma\in G}\sum_{\beta\in G}\sigma(\gamma,\alpha)\sigma(\beta,\alpha+\gamma)r_\alpha w_\gamma d_\beta.
\end{aligned}$$

Como $\sigma(\gamma,\alpha)\sigma(\beta,\alpha+\gamma) = \sigma(\beta+\gamma,\alpha)\sigma(\beta,\gamma)$, temos que $(dv)\mathfrak{L}_{r_\alpha} = d(w)\mathfrak{L}_{r_\alpha}$. Para quaisquer $d_\beta \in \mathcal{D}_\beta, w_\gamma \in W_\gamma, \beta,\gamma \in G$, temos

$$(d_\beta w_\gamma)\mathfrak{L}_{r_\alpha} = \sigma(\beta+\gamma,\alpha)\sigma(\beta,\gamma)r_\alpha w_\gamma d_\beta \in W_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Logo, $\mathfrak{L}_{r_\alpha} \in End_{\mathcal{D}^{op_\sigma}}(W)_\alpha$. Dados $v_\beta = e_0 r_\beta \in V_\beta, w_\gamma = r_\gamma e_0 \in W_\gamma$, temos

$$\begin{aligned}
\langle v_\beta \mathfrak{R}_{r_\alpha}, w_\gamma\rangle_0 &= \langle v_\beta r_\alpha, w_\gamma\rangle_0\\
&= e_0 r_\beta r_\alpha r_\gamma e_0,\\
\langle v_\beta, w_\gamma \mathfrak{L}_{r_\alpha}\rangle_0 &= \langle v_\beta, \sigma(\gamma,\alpha)r_\alpha w_\gamma\rangle_0\\
&= \sigma(\gamma,\alpha)\langle v_\beta, r_\alpha w_\gamma\rangle_0\\
&= \sigma(\gamma,\alpha)e_0 r_\beta r_\alpha r_\gamma e_0
\end{aligned}$$

para todo $\beta,\gamma,\alpha \in G$ e $r_\beta \in \mathcal{R}_\beta, r_\gamma \in \mathcal{R}_\gamma$. Como σ é anti-simétrico, temos que

$$\langle v_\beta \mathfrak{R}_{r_\alpha}, w_\gamma\rangle_0 = \sigma(\alpha,\gamma)\langle v_\beta, w_\gamma \mathfrak{L}_{r_\alpha}\rangle_0.$$

Logo, $\mathfrak{R}_{r_\alpha} \in \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)_\alpha$ para todo $\alpha \in G$. Note que para todos $\sum_{\alpha\in G} r_\alpha = r \in \mathcal{R}$ e $v \in V$, temos

$$\begin{aligned}(v)\mathfrak{R}_r &= vr\\ &= v(\sum_{\alpha\in G} r_\alpha)\\ &= \sum_{\alpha\in G} vr_\alpha,\end{aligned}$$

ou seja, $\mathfrak{R}_r = \sum_{\alpha\in G}\mathfrak{R}_{r_\alpha}$. Como $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$ é um anel graduado e $\mathfrak{R}_{r_\alpha} \in \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)_\alpha$ para todos $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha, \alpha \in G$, temos que $\mathfrak{R}_r \in \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$ para todo $r \in \mathcal{R}$. Isso mostra que $Im(\varphi) \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$, onde φ é dada no **Lema 3.4.1**. Como φ é injetiva, $\mathcal{R}$ é isomorfo a $Img(\varphi)$ que é um subanel graduado de $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$. Dessa forma, podemos ver $\mathcal{R}$ como um subanel de $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$ via o homomorfismo φ. Portanto, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$.

Seja $b_\beta \in \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ de posto 1. Pelo **Lema 3.2.9**, existem $\mathbf{u}_\gamma \in V_\gamma$ e $\mathbf{w}_{\beta-\gamma} \in W_{\beta-\gamma}$ tais que b_β é da forma

$$\begin{aligned} b_\beta : \quad V &\longrightarrow V\\ v_\alpha &\longmapsto \langle v_\alpha, \mathbf{w}_{\beta-\gamma}\rangle_0 \mathbf{u}_\gamma.\end{aligned}$$

Observe ainda que $\mathbf{u}_\gamma = e_0 r_\gamma$ e $\mathbf{w}_{\beta-\gamma} = c_{\beta-\gamma} e_0$ para alguns $r_\gamma \in \mathcal{R}_\gamma$ e $c_{\beta-\gamma} \in \mathcal{R}_{\beta-\gamma}$. Daí, para quaisquer $v_\alpha = e_0 a_\alpha \in V_\alpha, a_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha, \alpha \in G$

$$\begin{aligned} v_\alpha b_\beta &= \langle v_\alpha, \mathbf{w}_{\beta-\gamma}\rangle_0 \mathbf{u}_\gamma\\ &= e_0 a_\alpha c_{\beta-\gamma} e_0 e_0 r_\gamma\\ &= v_\alpha(c_{\beta-\gamma} e_0 r_\gamma)\\ &= v_\alpha \mathfrak{R}_{c_{\beta-\gamma} e_0 r_\gamma}\end{aligned}$$

para qualquer $v_\alpha \in V_\alpha$ e todo $\alpha \in G$. Isso significa que $b_\beta = \mathfrak{R}_{c_{\beta-\gamma}e_0 r_\gamma}$, ou seja, $b_\beta \in Img(\varphi)$. Como $Img(\varphi)$ é um subanel graduado, temos que $Img(\varphi)$ contém todas as somas de elementos homogêneos de posto 1. Assim, aplicando o **Lema 3.2.10**, $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq Img(\varphi)$. Logo, podemos ver $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ como um subanel de $\mathcal{R}$ via $\varphi^{-1} : Img(\varphi) \longrightarrow \mathcal{R}$. Portanto, $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R}$.

Reciprocamente, estamos nas hipóteses do **Corolário 3.2.12** e, assim, $\mathcal{R}$ é um anel graduado primitivo à direita. Agora, fixe um elemento homogêneo não nulo $\mathbf{u}_0 \in V_0$ e considere, para cada $\alpha \in G$, o conjunto

$$M_\alpha = \{r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha \mid V_\beta r_\alpha \subseteq \mathcal{D}_{\alpha+\beta}\mathbf{u}_0,\ \forall\, \beta \in G\} \subseteq \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)_\alpha \subseteq \mathcal{R}_\alpha.$$

Obviamente,

$$M = \bigoplus_{\gamma\in G} M_\gamma$$

é um ideal à esquerda graduado de $\mathcal{R}$. Pelo **Lema 3.2.8**, M é não nulo. Afirmamos que M é minimal. De fato, para um elemento fixo $0 \neq \mathbf{y}_{\beta-\nu} \in W_{\beta-\nu}$, tome o seguinte elemento $b_\beta \in End_{\mathcal{D}}(V)_\beta$ de posto 1

$$\begin{aligned} b_\beta : \quad {}_{\mathcal{D}}V &\longrightarrow {}_{\mathcal{D}}V\\ v &\longmapsto \langle v, \mathbf{y}_{\beta-\nu}\rangle_\nu \mathbf{u_0}.\end{aligned}$$

Note que $b_\beta \in M_\beta \subseteq \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R}$ e, pela demonstração do **Lema 3.2.8**, sua σ-adjunta $b_\beta^{*_\sigma}$ é dada por

$$\begin{array}{rcl} b_\beta^{*_\sigma}: \ {}_{\mathcal{D}^{op_\sigma}}W & \longrightarrow & {}_{\mathcal{D}^{op_\sigma}}W \\ w & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\delta\in G} \sigma(\delta,\beta)\mathbf{y}_{\beta-\nu}\langle \mathbf{u}_0, w_\delta\rangle_\nu, \end{array}$$

onde $w = \displaystyle\sum_{\delta\in G} w_\delta \in W$. Vamos mostrar que qualquer elemento homogêneo em M_α é a multiplicação à direita por b_β. Seja $a_\alpha \in M_\alpha$. Observamos que $M_\alpha \subseteq \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R}$. Pelo **Lema 3.2.6**, existe $\mathbf{w}_{-\nu} \in W_{-\nu}$ tal que $\langle \mathbf{u}_0, \mathbf{w}_{-\nu}\rangle_\nu = 1$. Daí, para todos $\gamma \in G, v_\gamma \in V_\gamma$

$$\begin{array}{rcl} v_\gamma a_\alpha = d_{\gamma+\alpha}\mathbf{u}_0 & = & \langle d_{\gamma+\alpha}\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_{-\nu}\rangle_\nu \mathbf{u}_0 \\ & = & \langle v_\gamma a_\alpha, \mathbf{w}_{-\nu}\rangle_\nu \mathbf{u_0} \\ & = & \sigma(\alpha,-\nu)\langle v_\gamma, \mathbf{w}_{-\nu} a_\alpha^{*_\sigma}\rangle_\nu \mathbf{u}_0 \end{array}$$

e

$$v_\gamma b_\beta = \sigma(\beta,-\nu)\langle v_\gamma, \mathbf{w}_{-\nu} b_\beta^{*_\sigma}\rangle_\nu \mathbf{u}_0.$$

Novamente, como $b_\beta \neq 0$, então $\mathbf{w}_{-\nu} b_\beta^{*_\sigma} \neq 0$. Assim, pelo **Lema 3.2.7**, podemos escolher $x_{-\beta} \in V_{-\beta}$ tal que

$$\sigma(\beta,-\nu)\langle x_{-\beta}, \mathbf{w}_{-\nu} b_\beta^{*_\sigma}\rangle_\nu = \langle x_{-\beta}, \sigma(\beta,-\nu)\mathbf{w}_{-\nu} b_\beta^{*_\sigma}\rangle_\nu = 1.$$

Defina

$$\begin{array}{rcl} c_{\alpha-\beta} := \sigma(\alpha,-\nu)\langle -, \mathbf{w}_{-\nu} a_\alpha^{*_\sigma}\rangle_\nu x_{-\beta}: \ {}_{\mathcal{D}}V & \longrightarrow & {}_{\mathcal{D}}V \\ v & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\gamma\in G} \sigma(\alpha,-\nu)\langle v_\gamma, \mathbf{w}_{-\nu} a_\alpha^{*_\sigma}\rangle_\nu x_{-\beta}. \end{array}$$

Pelo **Lema 3.2.8**, $c_{\alpha-\beta} \in \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$. Assim, temos

$$\begin{array}{rcl} v_\gamma c_{\alpha-\beta} b_\beta & = & \sigma(\beta,-\nu)\langle v_\gamma c_{\alpha-\beta}, \mathbf{w}_{-\nu} b_\beta^{*_\sigma}\rangle_\nu \mathbf{u}_0 \\ & = & \sigma(\beta,-\nu)\langle \sigma(\alpha,-\nu)\langle v_\gamma, \mathbf{w}_{-\nu} a_\alpha^{*_\sigma}\rangle_\nu x_{-\beta}, \mathbf{w}_{-\nu} b_\beta^{*_\sigma}\rangle_\nu \mathbf{u_0} \\ & = & \sigma(\alpha,-\nu)\sigma(\beta,-\nu)\langle v_\gamma, \mathbf{w}_{-\nu} a_\alpha^{*_\sigma}\rangle_\nu \langle x_{-\beta}, \mathbf{w}_{-\nu} b_\beta^{*_\sigma}\rangle_\nu \mathbf{u}_0 \\ & = & \sigma(\alpha,-\nu)\langle v_\gamma, \mathbf{w}_{-\nu} a_\alpha^{*_\sigma}\rangle_\nu \mathbf{u}_0 \\ & = & v_\gamma a_\alpha \end{array}$$

para todos $v_\gamma \in V_\gamma$ e $\gamma \in G$. Em outras palavras, qualquer $a_\alpha \in M_\alpha$ é da forma $a_\alpha = c_{\alpha-\beta} b_\beta$ para algum $c_{\alpha-\beta} \in \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)_{\alpha-\beta} \subseteq \mathcal{R}_{\alpha-\beta}$, ou seja, $M = \mathcal{R} b_\beta$, onde b_β é de posto 1.

Suponha que $(0) \neq M' \subseteq M$ seja um ideal à esquerda graduado de $\mathcal{R}$. Seja $0 \neq a_\alpha \in M'_\alpha \subseteq M_\alpha$. Então,

$$v_\gamma a_\alpha = \sigma(\alpha,-\nu)\langle v_\gamma, \mathbf{w}_{-\nu} a_\alpha^{*_\sigma}\rangle_\nu \mathbf{u}_0.$$

Como $a_\alpha \neq 0$, temos que $\mathbf{w}_{-\nu} a_\alpha^{*_\sigma}$. Assim, pelo **Lema 3.2.7**, existe $\mathbf{u}_{-\alpha} \in V_{-\alpha}$ tal que $\sigma(\alpha,-\nu)\langle \mathbf{u}_{-\alpha}, \mathbf{w}_{-\nu} a_\alpha^{*_\sigma}\rangle_\nu = 1$. Daí,

$$\mathbf{u}_{-\alpha} a_\alpha = \sigma(\alpha,-\nu)\langle \mathbf{u}_{-\alpha}, \mathbf{w}_{-\nu} a_\alpha^{*_\sigma}\rangle_\nu \mathbf{u}_0 = \mathbf{u_0}.$$

Defina

$$\begin{array}{rrcl} t_{\beta-\alpha}: & {}_{\mathcal{D}}V & \longrightarrow & {}_{\mathcal{D}}V \\ & v & \longmapsto & \langle v, \mathbf{y}_{\beta-\nu}\rangle_{\nu} u_{-\alpha}. \end{array}$$

Pelo **Lema 3.2.8**, $t_{\beta-\alpha} \in \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ e $t_{\beta-\alpha} \neq (0)$. Temos ainda

$$\begin{array}{rcl} (v_\tau)t_{\beta-\alpha}a_\alpha & = & \sigma(\alpha,-\nu)\langle (v_\tau)t_{\beta-\alpha}, \mathbf{w}_{-\nu}a_\alpha^{*\sigma}\rangle_\nu \mathbf{u}_0 \\ & = & \sigma(\alpha,-\nu)\langle v_\tau, \mathbf{y}_{\beta-\nu}\rangle_\nu \langle \mathbf{u}_{-\alpha}, \mathbf{w}_{-\nu}a_\alpha^{*\sigma}\rangle_\nu \mathbf{u}_0 \\ & = & \langle v_\tau, \mathbf{y}_{\beta-\nu}\rangle_\nu (\sigma(\alpha,-\nu)\langle \mathbf{u}_{-\alpha}, \mathbf{w}_{-\nu}a_\alpha^{*\sigma}\rangle_\nu \mathbf{u}_0) \\ & = & \langle v_\tau, \mathbf{y}_{\beta-\nu}\rangle_\nu \mathbf{u}_0 \\ & = & (v_\tau)b_\beta \end{array}$$

para todos $v_\tau \in V_\tau$ e $\tau \in G$. Logo, $t_{\beta-\alpha}a_\alpha = b_\beta$. Como M' é um ideal à esquerda graduado de $\mathcal{R}$, temos que $b_\beta \in M'_\beta$. Assim, como M' contém o gerador de M, temos que $M' = M$. Portanto, M é um ideal à esquerda graduado minimal de $\mathcal{R}$. Logo, pelo **Lema 1.5.13**, $\mathcal{R}$ contém um ideal à direita graduado minimal.

Seja I um ideal graduado não nulo de $\mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}$ é um anel graduado primitivo à direita e, portanto, $\mathcal{R}$ é um anel graduado primo, temos que $Ann^r_{\mathcal{R}}(I) = (0)$. De fato, $IAnn^r_{\mathcal{R}}(I) = (0)$ e $I, Ann^r_{\mathcal{R}}(I)$ são ideais bilaterais graduados de $\mathcal{R}$. Para qualquer $0 \neq b_\beta \in \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)_\beta$ de posto 1, temos $Ib_\beta \neq (0)$, caso contrário $b_\beta \in Ann^r_{\mathcal{R}}(I)$. Assim, existe $d_\gamma \in I_\gamma$ tal que $0 \neq d_\gamma b_\beta \in I_{\gamma+\beta}$. Além disso, $d_\gamma b_\beta$ é de posto 1. Pelo **Lema 3.2.9**, existem elementos homogêneos não nulos $\mathbf{w}_{\beta-\tau-\nu} \in W_{\beta-\tau-\nu}$ e $\mathbf{u}_\tau \in V_\tau$ tais que

$$\begin{array}{rrcl} b_\beta = \langle -, \mathbf{w}_{\beta-\tau-\nu}\rangle_\nu \mathbf{u}_\tau: & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & (v)b_\beta = \langle v, \mathbf{w}_{\beta-\tau-\nu}\rangle_\nu \mathbf{u}_\tau. \end{array}$$

Observe que para quaisquer $v_\mu \in V_\mu$ e $\mu \in G$, temos

$$(v_\mu)d_\gamma b_\beta = \langle v_\mu d_\gamma, \mathbf{w}_{\beta-\tau-\nu}\rangle_\nu \mathbf{u}_\tau = \sigma(\gamma, \beta-\tau-\nu)\langle v_\mu, \mathbf{w}_{\beta-\tau-\nu}d_\gamma^{*\sigma}\rangle_\nu \mathbf{u}_\tau.$$

Como $d_\gamma b_\beta \neq 0$, temos que $\mathbf{w}_{\beta-\tau-\nu}d_\gamma^{*\sigma} \neq 0$. Pelo **Lema 3.2.7**, existe $\mathbf{u}_{-\beta+\tau-\gamma} \in V_{-\beta+\tau-\gamma}$ tal que

$$\sigma(\gamma, \beta-\tau-\nu)\langle \mathbf{u}_{-\beta+\tau-\gamma}, \mathbf{w}_{\beta-\tau-\nu}d_\gamma^{*\sigma}\rangle_\nu = 1.$$

Seja

$$\begin{array}{rrcl} r_{-\gamma} = \langle -, \mathbf{w}_{\beta-\tau-\nu}\rangle_\nu \mathbf{u}_{-\beta+\tau-\gamma}: & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & (v)r_{-\gamma} = \langle v, \mathbf{w}_{\beta-\tau-\nu}\rangle_\nu \mathbf{u}_{-\beta+\tau-\gamma}. \end{array}$$

Pelo **Lema 3.2.8**, $r_{-\gamma} \in \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R}$. Além disso, para quaisquer $v_\mu \in V_\mu$ e $\mu \in G$, temos

$$\begin{array}{rcl} (((v_\mu)r_{-\gamma})d_\gamma)b_\beta & = & \langle ((v_\mu)r_{-\gamma})d_\gamma, \mathbf{w}_{\beta-\tau-\nu}\rangle_\nu \mathbf{u}_\tau \\ & = & \sigma(\gamma, \beta-\tau-\nu)\langle v_\mu r_{-\gamma}, \mathbf{w}_{\beta-\tau-\nu}d_\gamma^{*\sigma}\rangle_\nu \mathbf{u}_\tau \\ & = & \langle v_\mu, \mathbf{w}_{\beta-\tau-\nu}\rangle_\nu \sigma(\gamma, \beta-\tau-\nu)\langle \mathbf{u}_{-\beta-\tau-\gamma}, \mathbf{w}_{\beta-\tau-\nu}d_\gamma^{*\sigma}\rangle_\nu \mathbf{u}_\tau \\ & = & \langle v_\mu, \mathbf{w}_{\beta-\tau-\nu}\rangle_\nu \mathbf{u}_\tau \\ & = & v_\mu b_\beta. \end{array}$$

Como I é um ideal bilateral graduado de $\mathcal{R}$, segue que $b_\beta \in I$. Logo, I contém todos os elementos de posto 1 e, portanto, $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq I$. $\square$

Teorema 3.4.3. *Sejam V e W um par de espaços duais com torção associados a um par bilinear $\langle -,- \rangle_\nu$ sobre um anel graduado de divisão $\mathcal{D}$. Suponha que σ seja um 2-cociclo anti-simétrico tal que $\sigma(\alpha,-\alpha)^2 = 1$. Então, a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} *_\sigma: & \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V) & \longrightarrow & \mathcal{L}_V^{gr_\sigma}(W) \\ & a & \longmapsto & a^{*_\sigma} \end{array}$$

é um σ-anti-isomorfismo.

Demonstração. Seja $a \in \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$. Vimos que a possui σ-adjunta $a^{*_\sigma} = b \in End_{\mathcal{D}^{op}}^{gr}(W)$ se, e somente se, $a = b^{\circledast_\sigma}$ é σ-coadjunta de $a^{*_\sigma} = b$. Com isso obtemos que $a^{*_\sigma} \in \mathcal{L}_V^{gr_\sigma}(W)$ e $*_\sigma$ é sobrejetiva. Além disso, pela definição de σ-adjunta e σ-coadjunta, $*_\sigma$ é homogênea de grau 0.

Para quaisquer $r_\beta, r'_\beta \in \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)_\beta,\ r_\gamma \in \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)_\gamma,\ v_\alpha \in V_\alpha, w_\tau \in W_\tau$ e $\alpha,\beta,\tau,\gamma \in G$, temos:

- $$\begin{aligned} \sigma(\beta,\tau)\langle v_\alpha, w_\tau(r_\beta^{*_\sigma} + {r'_\beta}^{*_\sigma})\rangle_\nu &= \sigma(\beta,\tau)\langle v_\alpha, w_\tau r_\beta^{*_\sigma} + w_\tau {r'_\beta}^{*_\sigma}\rangle_\nu \\ &= \sigma(\beta,\tau)\langle v_\alpha, w_\tau r_\beta^{*_\sigma}\rangle_\nu + \sigma(\beta,\tau)\langle v_\alpha, w_\tau {r'_\beta}^{*_\sigma}\rangle_\nu \\ &= \langle v_\alpha r_\beta, w_\tau\rangle_\nu + \langle v_\alpha r'_\beta, w_\tau\rangle_\nu \\ &= \langle v_\alpha(r_\beta + r'_\beta), w_\tau\rangle_\nu \\ &= \sigma(\beta,\tau)\langle v_\alpha, w_\tau(r_\beta + r'_\beta)^{*_\sigma}\rangle_\nu. \end{aligned}$$

  Logo, $*_\sigma$ é aditiva, pois $\langle -,- \rangle_\nu$ é não degenerado.

- $$\begin{aligned} \sigma(\beta+\gamma,\tau)\sigma(\beta,\gamma)\langle v_\alpha, w_\tau r_\gamma^{*_\sigma} r_\beta^{*_\sigma}\rangle_\nu &= \sigma(\gamma,\tau)\sigma(\beta,\tau+\gamma)\langle v_\alpha, w_\tau r_\gamma^{*_\sigma} r_\beta^{*_\sigma}\rangle_\nu \\ &= \sigma(\gamma,\tau)\langle v_\alpha r_\beta, w_\tau r_\gamma^{*_\sigma}\rangle_\nu \\ &= \langle (v_\alpha r_\beta) r_\gamma, w_\tau\rangle_\nu \\ &= \langle v_\alpha(r_\beta r_\gamma), w_\tau\rangle_\nu \\ &= \sigma(\beta+\gamma,\tau)\langle v_\alpha, w_\tau(r_\beta r_\gamma)^{*_\sigma}\rangle_\nu. \end{aligned}$$

  Como $\langle -,- \rangle_\nu$ é não degenerado, temos $(r_\beta r_\gamma)^{*_\sigma} = \sigma(\beta,\gamma) r_\gamma^{*_\sigma} r_\beta^{*_\sigma}$.

Agora, vamos mostrar que $Ker(*_\sigma) = (0)$. Pelo **Lema 3.3.2**, $Ker(*_\sigma)$ é um ideal graduado de $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$. Assim, podemos considerar apenas elementos homogêneos de $Ker(*_\sigma)$. Se $a_\alpha \in Ker(*_\sigma)$, então para todo $w \in W$, temos $w a_\alpha^{*_\sigma} = 0$. Daí, para todos $v \in V, w_\beta \in W_\beta$ e $\beta \in G$,

$$0 = \sigma(\alpha,\beta)\langle v, w_\beta a_\alpha^{*_\sigma}\rangle_\nu = \langle v a_\alpha, w_\beta\rangle_\nu.$$

Como $\langle -,- \rangle_\nu$ é não degenerado, temos que $v a_\alpha = 0$ para todo $v \in V$. Daí, $a_\alpha = 0$ para qualquer que seja $\alpha \in G$. Logo, $Ker(*_\sigma) = (0)$.

Para cada $a \in \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$, temos que $a^{*_\sigma \circledast_\sigma} = a$. Logo, $*_\sigma$ é um σ-anti-isomorfismo e $\circledast_\sigma = *_\sigma^{-1}$. $\square$

Capítulo 4

Anéis Graduados Primitivos com σ-involuções e Formas Sesquilineares ϵ-hermitianas Graduadas

Neste capítulo, iremos caracterizar σ-involuções em anéis graduados primitivos à direita com um ideal à direita graduado minimal em termos de formas sesquilineares ϵ-hermitianas graduadas com torção, a saber, formas sesquilineares hermitianas graduadas e formas sesquilineares anti-hermitianas graduadas. Apresentaremos também algumas consequências do teorema principal. Em todo capítulo, os anéis G-graduados e F-álgebras G-graduadas são, ambos de característica diferente de 2, G denota um grupo de ordem p, onde p é um número primo, e relembramos que σ é um 2-cociclo anti-simétrico em G tal que $\sigma(\alpha, -\alpha) \in \{-1, 1\}$, $\sigma(0, \alpha) = \sigma(\alpha, 0) = \sigma(0, 0) \in \{-1, 1\}$ para qualquer $\alpha \in G$.

4.1 Forma Sesquilinear Graduada com Torção

Nesta seção, definiremos formas sesquilineares ϵ-hermitianas e obteremos resultados similares aos encontrados na **Seção 3.2**. A fim de cumprir nosso objetivo, procederemos para definir este tipo de forma que será relevante para o teorema principal.

Definição 4.1.1. *Sejam $\mathcal{D}$ uma F-álgebra (anel) G-graduada de divisão com uma σ-involução $^-$ e V um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda G-graduado. Uma aplicação bi-aditiva de $\mathcal{D}$-espaços vetoriais à esquerda $(-,-)_\nu : V \times V \longrightarrow \mathcal{D}$ é chamada forma sesquilinear graduada de grau ν se são válidas as seguintes propriedades, para quaisquer $v_\beta \in V_\beta$, $w_\delta \in V_\delta, d_\gamma \in \mathcal{D}_\gamma$ e $\beta, \delta, \gamma \in G$:*

a) $(v_\beta, w_\delta)_\nu \in \mathcal{D}_{\beta+\delta+\nu}$;

b) $(d_\gamma v_\beta, w_\delta)_\nu = d_\gamma (v_\beta, w_\delta)_\nu$;

c) $(v_\beta, d_\gamma w_\delta)_\nu = \sigma(\gamma,\delta)(v_\beta, w_\delta)_\nu \bar{d}_\gamma$.

Neste caso, dizemos que $V \times V$ é um par sesquilinear à esquerda com torção.

Uma forma sesquilinear graduada de grau ν é não degenerada se

$$(v_\alpha, V)_\nu = \{0\} \text{ implica } v_\alpha = 0 \text{ e } (V, w_\beta\ )_\nu = \{0\} \text{ implica } w_\beta = 0. \tag{4.1}$$

Novamente,

$$(v,0)_\nu = (0,w)_\nu = 0 \ \text{ e } \ (-v,w)_\nu = (v,-w)_\nu = -(v,w)_\nu$$

para quaisquer $v, w \in V$.

Suponha que $^-$ seja uma σ-involução na F-álgebra (anel) graduada de divisão $\mathcal{D}$. Pela **Proposição 3.3.1**, $\bar{1} = \sigma(0,0)1$ e $(\overline{-1}) = \sigma(0,0)(-1)$. Pela **Proposição 1.1.1**, $-1, 1 \in \mathcal{D}_0$. Assim, $\{-1, 1, \bar{1}, \overline{-1}\} \subseteq Z(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D}_0$, onde $Z(\mathcal{D})$ é o centro de $\mathcal{D}$.

Com isso, se $\mathcal{D}$ é uma F-álgebra (anel) graduada de divisão munida com uma σ-involução $^-$, existe $\epsilon \in Z(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D}_0$ tal que

$$\epsilon\bar{\epsilon} = \sigma(0,0)1_{\mathcal{D}} = 1_{\mathcal{D}^{op_\sigma}}. \tag{4.2}$$

Por exemplo, $1_{\mathcal{D}}$ e $-1_{\mathcal{D}}$ satisfazem essas condições.

Considere $\epsilon \in Z(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D}_0$ tal que ϵ satisfaz (4.2), nestas condições, temos a seguinte definição.

Definição 4.1.2. *Dizemos que uma forma sesquilinear $(-,-)_\nu : V \times V \longrightarrow \mathcal{D}$ de grau ν é uma forma sesquilinear ϵ-hermitiana graduada se*

$$(v_\alpha, w_\beta)_\nu = \sigma(\alpha,\beta)\epsilon\overline{(w_\beta, v_\alpha)_\nu} \tag{4.3}$$

para todos $v_\alpha \in V_\alpha, w_\beta \in V_\beta$ e $\alpha, \beta \in G$. Quando $\epsilon = 1$ ($\epsilon = -1$), dizemos que $(-,-)_\nu$ é uma forma sesquilinear hermitiana (anti-hermitiana) graduada.

Observamos que $\overline{(w_\beta, v_\alpha)_\nu} = \sigma(0,0)\bar{\epsilon}\sigma(\beta,\alpha)(v_\alpha, w_\beta)$ e $\bar{\epsilon}$ é o inverso para ϵ em $\mathcal{D}^{op_\sigma}$.

Lema 4.1.1. *Seja $(-,-)_\nu : V \times V \longrightarrow \mathcal{D}$ uma forma sesquilinear ϵ-hermitiana graduada. Então, $(v_\alpha, V)_\nu = 0$ se, e somente se, $(V, v_\alpha)_\nu = 0$ para qualquer $v_\alpha \in V_\alpha$ e $\alpha \in G$.*

Demonstração. De fato, para quaisquer $w_\beta \in V_\beta$ e $\beta \in G$

$$0 = (v_\alpha, w_\beta) \Leftrightarrow 0 = \sigma(\alpha,\beta)\epsilon\overline{(w_\beta, v_\alpha)_\nu}.$$

Como $\mathcal{D}$ é um anel graduado de divisão e $\sigma(\alpha,\beta)\epsilon \neq 0$, temos que $0 = \overline{(w_\beta, v_\alpha)_\nu}$. Como $^-$ tem ordem 2, segue que $0 = \overline{\overline{(w_\beta, v_\alpha)_\nu}} = (w_\beta, v_\alpha)_\nu$ para todos $w_\beta \in V_\beta, \beta \in G$. $\square$

Definição 4.1.3. *Sejam $\mathcal{D}$ uma F-álgebra (anel) G-graduada de divisão com uma σ-involução $^-$ e $V \times V$ um par sesquilinear à esquerda com torção associado a $(-,-)_\nu$ sobre $\mathcal{D}$. Um elemento $a_\alpha^{\star_\sigma} \in End_{\mathcal{D}}(V)_\alpha$ chama-se σ-adjunta de um elemento homogêneo $a_\alpha \in End_{\mathcal{D}}(V)_\alpha$ quando*

$$(v_\beta a_\alpha, w_\delta)_\nu = \sigma(\alpha,\delta)(v_\beta, w_\delta a_\alpha^{\star_\sigma})_\nu \tag{4.4}$$

para todos $v_\beta \in V_\beta$ e $w_\delta \in V_\delta$.

Definição 4.1.4. *Sejam $\mathcal{D}$ uma F-álgebra (anel) G-graduada de divisão com uma σ-involução $^-$ e $V \times V$ um par sesquilinear à esquerda com torção associado a $(-,-)_\nu$ sobre $\mathcal{D}$. Um elemento $b_\alpha^{\bigstar_\sigma} \in End_{\mathcal{D}}(V)_\alpha$ chama-se σ-coadjunta de um elemento homogêneo $b_\alpha \in End_{\mathcal{D}}(V)_\alpha$ quando*

$$(v_\beta b_\alpha^{\bigstar_\sigma}, w_\delta)_\nu = \sigma(\alpha,\delta)(v_\beta, w_\delta b_\alpha)_\nu \tag{4.5}$$

para todos $v_\beta \in V_\beta$ e $w_\delta \in W_\delta$.

Mais uma vez, destacamos que $b_\alpha^{\bigstar_\sigma}$ é a σ-coadjunta de b_α se, e somente se, b_α é a σ-adjunta de $b_\alpha^{\bigstar_\sigma}$.

Seja $(-,-)_\nu$ uma forma sesquilinear graduada. Para cada $\alpha \in G$, considere:

1) $(\mathcal{L}_V^\sigma)_\alpha = \{a_\alpha \in End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)_\alpha \mid \ \exists\ a_\alpha^{\star_\sigma} \in End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)_\alpha\}$;

2) $\mathcal{L}_V^{gr_\sigma} = \sum_{\alpha \in G} (\mathcal{L}_V^\sigma)_\alpha$;

3) $(\mathcal{F}_V^\sigma)_\alpha = \{a_\alpha \in (\mathcal{L}_V^\sigma)_\alpha \mid dim_{\mathcal{D}}(Va_\alpha) < \infty\}$;

4) $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma} = \sum_{\alpha \in G} (\mathcal{F}_V^\sigma)_\alpha$;

5) $(\mathcal{L}_V^{\bigstar_\sigma})_\alpha = \{b_\alpha \in End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)_\alpha \mid \ \exists\ b_\alpha^{\bigstar_\sigma} \in End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)_\alpha\}$;

6) $\mathcal{L}_V^{\bigstar_\sigma} = \sum_{\alpha \in G} (\mathcal{L}_V^{\bigstar_\sigma})_\alpha$;

7) $(\mathcal{F}_V^{\bigstar_\sigma})_\alpha = \{b_\alpha \in (\mathcal{L}_V^{\bigstar_\sigma})_\alpha \mid dim_{\mathcal{D}}(Vb_\alpha) < \infty\}$;

8) $\mathcal{F}_V^{\bigstar_\sigma} = \sum_{\alpha \in G} (\mathcal{F}_V^{\bigstar_\sigma})_\alpha$.

Estes objetos são análogos aos definidos na **Seção 3.2** e, como já era de se esperar, possuem as mesmas propriedades. A demonstração do resultado abaixo é similar ao **Lema 3.2.2** e ao **Lema 3.2.3**.

Lema 4.1.2. *Sejam $\mathcal{D}$ uma F-álgebra (anel) G-graduada de divisão com uma σ-involução $^-$ e $V \times V$ um par sesquilinear à esquerda com torção associado a $(-,-)_\nu$ sobre $\mathcal{D}$. Então:*

a) *$\mathcal{L}_V^{gr_\sigma}$ e $\mathcal{L}_V^{\bigstar_\sigma}$ são subanéis graduados do anel graduado $End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)$;*

b) *$\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$ é um ideal graduado de $\mathcal{L}_V^{gr_\sigma}$ e $\mathcal{F}_V^{\bigstar_\sigma}$ é um ideal graduado de $\mathcal{L}_V^{\bigstar_\sigma}$.*

Dizemos que um elemento $a \in End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)$ é de posto n se $dim_{\mathcal{D}}(Va) = n$.

Proposição 4.1.3. *Sejam $\mathcal{D}$ uma F-álgebra (anel) G-graduada de divisão com uma σ-involução $^-$ e V um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda G-graduado. Seja $(-,-)_0 : V \times V \longrightarrow \mathcal{D}$ uma aplicação bi-aditiva de grau 0 de $\mathcal{D}$-espaços vetoriais à esquerda que satisfaz:*

a) $(v_\beta, w_\delta)_0 \in \mathcal{D}_{\beta+\delta}$;

b) $(d_\gamma v_\beta, w_\delta)_0 = d_\gamma (v_\beta, w_\delta)_0$;

c) $(v_\beta, w_\delta)_0 = \sigma(\beta,\delta)\epsilon\overline{(w_\delta, v_\beta)_0}$

para quaisquer $v_\beta \in V_\beta$, $w_\delta \in V_\delta, d_\gamma \in \mathcal{D}_\gamma, \beta, \delta, \gamma \in G$, onde $\epsilon \in Z(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D}_0$ está fixado e satisfaz $\epsilon\bar{\epsilon} = \sigma(0,0)1_{\mathcal{D}}$. Então, $(-,-)_0$ satisfaz $(v_\beta, d_\gamma w_\delta)_0 = \sigma(\gamma,\delta)(v_\beta, w_\delta)_0 \bar{d}_\gamma$.

Demonstração. De fato, dados $v_\beta \in V_\beta, w_\delta \in V_\delta, d_\gamma \in \mathcal{D}_\gamma$ e $\beta, \gamma, \delta \in G$, temos que

$$\begin{array}{rcl} \overline{(d_\gamma w_\delta, v_\beta)_0} & = & \overline{d_\gamma (w_\delta, v_\beta)_0} \\ & = & \sigma(\gamma, \delta+\beta)\overline{(w_\delta, v_\beta)_0}\bar{d}_\gamma \\ & = & \sigma(\gamma, \delta+\beta)\sigma(0,0)\bar{\epsilon}\sigma(\delta,\beta)(v_\beta, w_\delta)_0\bar{d}_\gamma \\ & = & \sigma(0,0)\bar{\epsilon}\sigma(\gamma+\delta,\beta)\sigma(\gamma,\delta)(v_\beta, w_\delta)_0\bar{d}_\gamma. \end{array}$$

Por outro lado,

$$\overline{(d_\gamma w_\delta, v_\beta)_0} = \sigma(0,0)\bar{\epsilon}\sigma(\gamma+\delta,\beta)(v_\beta, d_\gamma w_\delta)_0.$$

Logo, $(v_\beta, d_\gamma w_\delta)_0 = \sigma(\gamma,\delta)(v_\beta, w_\delta)_0\bar{d}_\gamma$. Dessa maneira, concluímos a demonstração. □

Seja $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$ um anel (F-álgebra) de divisão com graduação trivial. Observamos que $\mathcal{D}$ admite uma σ-involução $^-$ se $^-$ é uma aplicação aditiva (F-linear) de ordem 2 tal que $\overline{dd'} = \sigma(0,0)\bar{d'}\bar{d}$ para todos $d, d' \in \mathcal{D}$.

Proposição 4.1.4. *Seja $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$ uma F-álgebra (anel) de divisão com graduação trivial e uma σ-involução $^-$. Sejam V um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda G-graduado e $(-,-)_\nu : V \times V \longrightarrow \mathcal{D}$ uma aplicação bi-aditiva de $\mathcal{D}$-espaços vetoriais à esquerda que satisfaz:*

a) $(v_\beta, w_\delta)_\nu \in \mathcal{D}_{\beta+\delta+\nu}$;

b) $(d_\gamma v_\beta, w_\delta)_\nu = d_\gamma (v_\beta, w_\delta)_\nu$;

c) $(v_\beta, w_\delta)_\nu = \sigma(\beta, \delta)\epsilon\overline{(w_\delta, v_\beta)_\nu}$

para quaisquer $v_\beta \in V_\beta$, $w_\delta \in V_\delta, d_\gamma \in \mathcal{D}_\gamma, \beta, \delta, \gamma \in G$, onde $\epsilon \in Z(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D}_0$ está fixado e satisfaz $\epsilon\bar{\epsilon} = \sigma(0,0)1_{\mathcal{D}}$. Então, $(-,-)_\nu$ satisfaz $(v_\beta, d_\gamma w_\delta)_\nu = \sigma(\gamma, \delta)(v_\beta, w_\delta)_\nu \bar{d}_\gamma$.

Demonstração. Como $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$, temos que $(v_\beta, w_\delta)_\nu = (0)$ se $\beta + \delta \neq -\nu$. Assim, dados $v_\beta \in V_\beta, w_\delta \in V_\delta, d_0 \in \mathcal{D}_0$ e $\beta, \delta \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
(v_\beta, d_0 w_\delta)_\nu &= \epsilon\sigma(\beta, 0+\delta)\overline{(d_0 w_\delta, v_\beta)_\nu} \\
&= \epsilon\sigma(\beta, \delta)\overline{d_0 (w_\delta, v_\beta)_\nu} \\
&= \epsilon\sigma(\beta, \delta)\sigma(0, \delta+\beta+\nu)\overline{(w_\delta, v_\beta)_\nu}\bar{d}_0 \\
&= \epsilon\bar{\epsilon}\sigma(0,0)\sigma(\beta, \delta)\sigma(\delta, \beta)\sigma(0, \delta+\beta+\nu)(v_\beta, w_\delta)_\nu \bar{d}_0 \\
&= \sigma(0, \delta+\beta+\nu)(v_\beta, w_\delta)_\nu \bar{d}_0 \\
&= \sigma(0, \delta)(v_\beta, w_\delta)_\nu \bar{d}_0.
\end{aligned}$$

Se $\gamma \neq 0$, então $d_\gamma = 0$. Com isso, $(v_\beta, d_\gamma w_\delta)_\nu = 0 = \sigma(\gamma, \delta)(v_\alpha, w_\delta)_\nu \bar{d}_\gamma$. Assim, concluímos a afirmação. □

Em outras palavras, nas condições dessas duas últimas proposições, as aplicações $(-,-)_\nu$ e $(-,-)_0$ são formas sesquilineares ϵ-hermitianas graduadas.

Como mencionamos anteriormente, $b_\beta^{\star_\sigma} \in End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)_\beta$ é a σ-adjunta de $b_\beta \in End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)_\beta$ se, e somente se, b_β é a σ-coadjunta de $b_\beta^{\star_\sigma}$.

Lema 4.1.5. *Seja $V \times V$ um par sesquilinear à esquerda com torção associada a uma forma sesquilinear ϵ-hermitiana não degenerada graduada $(-,-)_\nu$ de grau ν sobre um anel (F-álgebra) graduado de divisão $\mathcal{D}$. Se $b_\beta^{\star_\sigma} \in End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)_\beta$ é a σ-adjunta de $b_\beta \in End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)_\beta$, então $b_\beta^{\star_\sigma}$ possui uma σ-adjunta. Além disso, b_β é a σ-adjunta de $b^{\star_\sigma}$. Em particular, $b^{\star_\sigma}$ é a σ-coadjunta de b_β e $b_\beta^{\star_\sigma \star_\sigma} = b_\beta$.*

Demonstração. Dados $v_\alpha \in V_\alpha, w_\tau \in V_\tau$ e $\alpha, \tau \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
(v_\alpha b_\beta^{\star_\sigma}, w_\tau)_\nu &= \epsilon\sigma(\alpha+\beta, \tau)\overline{(w_\tau, v_\alpha b_\beta^{\star_\sigma})_\nu} \\
&= \epsilon\sigma(\alpha+\beta, \tau)\sigma(\alpha, \beta)\overline{(w_\tau b_\beta, v_\alpha)_\nu} \\
&= \bar{\epsilon}\epsilon\sigma(0,0)\sigma(\alpha+\beta, \tau)\sigma(\alpha, \beta)\sigma(\tau+\beta, \alpha)(v_\alpha, w_\tau b_\beta)_\nu \\
&= \sigma(\alpha+\beta, \tau)\sigma(\alpha, \beta)\sigma(\tau+\beta, \alpha)(v_\alpha, w_\tau b_\beta)_\nu \\
&= \sigma(\alpha, \beta+\tau)\sigma(\tau+\beta, \alpha)\sigma(\beta, \tau)(v_\alpha, w_\tau b_\beta)_\nu \\
&= \sigma(\beta, \tau)(v_\alpha, w_\tau b_\beta)_\nu.
\end{aligned}$$

Logo, b_β é a σ-adjunta de $b^{\star_\sigma}$. Com isso, temos:

1) $b_\beta^{\star_\sigma}$ possui σ-adjunta b_β;

2) b_β é a σ-coadjunta de $b_\beta^{\star_\sigma}$;

3) b_β é a σ-adjunta de $b^{\star_\sigma}$;

4) $b_\beta^{\star_\sigma}$ possui σ-coadjunta b_β.

Assim, $\star_\sigma = \bigstar_\sigma$ e $b_\beta = b_\beta^{\star_\sigma \bigstar_\sigma} = b_\beta^{\star_\sigma \star_\sigma}$, ou seja, $\star_\sigma$ tem ordem 2. $\square$

Como consequência do **Lema 4.1.5**, temos.

Corolário 4.1.6. *$\mathcal{L}_V^{gr_\sigma} = \mathcal{L}_V^{\bigstar_\sigma}$ e $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma} = \mathcal{F}_V^{\bigstar_\sigma}$.*

Apresentaremos resultados análogos aos **Lema 3.2.6**, **Lema 3.2.8**, **Lema 3.2.10** e **Proposição 3.2.11**. Os resultados abaixos são versões desses para forma sesquilinear graduada.

Lema 4.1.7. *Seja $V \times V$ um par sesquilinear à esquerda com torção não degenerado associado a $(-,-)_\nu$ sobre um anel (F-álgebra) graduado de divisão Δ. Se $\{v_\alpha^1, \ldots, v_\alpha^{n_\alpha}, \ldots, v_\beta^1, \ldots, v_\beta^{n_\beta}\}$ é um conjunto de vetores homogêneos de V linearmente independentes sobre Δ, então existem elementos homogêneos $w_{-\alpha-\nu}^1, \ldots, w_{-\alpha-\nu}^{n_\alpha}, \ldots, w_{-\beta-\nu}^1, \ldots, w_{-\beta-\nu}^{n_\beta}$ de V tais que $(v_\alpha^i, w_{-\gamma-\nu}^j)_\nu = \delta_{ij}\delta_{\alpha\gamma} \in \Delta_0$ para todos $i \in \{1, \ldots, n_\alpha\}, j \in \{1, \ldots, n_\gamma\}, \alpha, \gamma \in G$, onde $\delta_{ij}\delta_{\alpha\gamma} = \begin{cases} 1 \in \Delta_0, & se\ i = j\ e\ \alpha = \gamma \\ 0 \in \Delta_0, & caso\ contrário. \end{cases}$*

Demonstração. Seja $V_{gr}^{*_\sigma} = \sum_{\beta \in G} Hom({}_\Delta V, {}_\Delta\Delta)_\beta$. Note que $V_{gr}^{*_\sigma}$ é um Δ-módulo à direita com ação dada por

$$(v)(\phi d) = ((v)\phi)d,$$

onde $v \in V, \phi \in V_{gr}^{*_\sigma}, d \in \Delta$. Essa ação de Δ em $V_{gr}^{*_\sigma}$ satisfaz $\phi_\alpha d_\beta \in Hom({}_\Delta V, {}_\Delta\Delta)_{\beta+\alpha}$ para todos $\alpha, \beta \in G,\ d_\beta \in \Delta_\beta, \phi_\alpha \in Hom({}_\Delta V, {}_\Delta\Delta)_\alpha$. Além disso, a soma $\sum_{\beta \in G} Hom({}_\Delta V, {}_\Delta\Delta)_\beta$ é direta. Logo, $V_{gr}^{*_\sigma} = \bigoplus_{\beta \in G} Hom({}_\Delta V, {}_\Delta\Delta)_\beta$ é um Δ-módulo à direira graduado.

Fixemos um elemento qualquer $w \in V$. Temos que

$$\begin{array}{rccc} (-,w)_\nu : & V & \longrightarrow & \Delta \\ & v & \longmapsto & (v,w)_\nu \end{array}$$

é um funcional Δ-linear. Consideramos em V uma estrutura de Δ-espaço vetorial à direita graduado via a seguinte igualdade estendida por linearidade vetorial e escalar

$$v_\beta d_\tau := \sigma(\beta,\tau)\bar{d}_\tau v_\beta, \tag{4.6}$$

onde $d_\tau \in \Delta_\tau, v_\beta \in V_\beta, \tau, \beta \in G$. Como V é um Δ-espaço vetorial à esquerda graduado e $\bar{}$ é aditiva (F-linear), fica claro que V é um Δ-espaço vetorial à esquerda. Basta verificar as propriedades abaixo. Dados $v_\alpha \in V_\alpha, d_\tau \in \Delta_\tau, d_\beta \in \Delta_\beta, \alpha, \beta, \tau \in G$, temos que

$$\begin{array}{rcl}
(v_\alpha)(d_\beta d_\tau) & = & \sigma(\alpha,\beta+\tau)\overline{(d_\beta d_\tau)}(v_\alpha) \\
& = & \sigma(\alpha,\beta+\tau)\sigma(\beta,\tau)\bar{d}_\tau\bar{d}_\beta(v_\alpha) \\
& = & \sigma(\alpha+\beta,\tau)\sigma(\alpha,\beta)\bar{d}_\tau\bar{d}_\beta(v_\alpha) \\
& = & \sigma(\alpha+\beta,\tau)\bar{d}_\tau(v_\alpha d_\beta) \\
& = & (v_\alpha d_\beta)d_\tau, \\
(v_\alpha)1_\Delta & = & \sigma(\alpha,0)\bar{1}_\Delta v_\alpha \\
& = & \sigma(\alpha,0)\sigma(0,0)1_\Delta v_\alpha \\
& = & v_\alpha.
\end{array}$$

Denotaremos esse Δ-espaço vetorial à direita graduado por V_Δ. Assim, a aplicação

$$\begin{array}{rccc}
\varphi: & V_\Delta & \longrightarrow & V_{gr}^{*\sigma} \\
& w & \longmapsto & (-,w)_\nu
\end{array}$$

é um homomorfismo de Δ-módulos à direita graduados. De fato, para quaisquer $w_\alpha \in V_\alpha, w, w' \in V, v \in V, d_\beta \in \Delta_\beta$ e $\alpha, \beta \in G$, temos

$$\begin{array}{rcl}
\varphi(w_\alpha) & = & (-,w_\alpha)_\nu \in Hom({}_\Delta V, {}_\Delta\Delta)_{\alpha+\nu}, \\
(v, w_\alpha d_\beta)_\nu & = & \sigma(\alpha,\beta)(v,\bar{d}_\beta w_\alpha)_\nu \\
& = & \sigma(\alpha,\beta)\sigma(\beta,\alpha)(v,w_\alpha)_\nu\bar{\bar{d}}_\beta \\
& = & (v,w_\alpha)_\nu d_\beta, \\
(v, w+w')_\nu & = & (v,w)_\nu + (v,w')_\nu.
\end{array}$$

Logo, φ é um homomorfismo graduado (de grau ν) de Δ-módulos à direita graduados. Como $(-,-)_\nu$ é não degenerada, temos que $Ker(\varphi) = (0)$. Logo, pelo Teorema do Isomorfismo, V_Δ é isomorfo a $V' = Img(\varphi)$, onde $V' = \bigoplus_{\alpha\in G} V'_\alpha$ e $V'_\alpha = \{\varphi(w_{\alpha-\nu}) \mid w_{\alpha-\nu} \in V_{\alpha-\nu}\}$, é um Δ-subespaço graduado de $V_{gr}^{*\sigma}$.

A fim de aplicar o **Teorema 1.5.18**, considere $T = V'$, $M = V$, $S = D = N = \Delta \simeq End_\Delta^{gr}(\Delta_\Delta)$. O sistema $(\Delta, \Delta, \Delta, V, V')$ é um Δ-contexto à direita graduado. Afirmamos que $N = \Delta_\Delta$ é fechado e $T = V'$ é total. De fato, como Δ é um anel graduado de divisão, temos que Δ_Δ não possui submódulos graduados próprios. Como Δ é um anel graduado unitário, para todo homomorfismo graduado de Δ-módulos graduados $f : \Delta_\Delta \longrightarrow \Delta_\Delta$, temos que $f(a) = f(1a) = (f(1))a$ para todo $a \in \Delta$, ou seja, qualquer homomorfismo graduado de Δ-módulos graduados f é a multiplicação à esquerda por $f(1) = \lambda \in \Delta$. Logo, $\Delta_\Delta = N$ é fechado. Agora, se $v \in V$ é tal que $vT = 0$, segue que $(v,w)_\nu = 0$

para todo $w \in V$. Como $(-,-)_\nu$ é não degenerada, temos $v = 0$ e, portanto, T é total. Pelo **Teorema 1.5.18**, T é fracamente denso. Sejam $v_\alpha^1, \ldots, v_\alpha^{n_\alpha}, \ldots, v_\beta^1, \ldots, v_\beta^{n_\beta}$ vetores homogêneos de V linearmente independentes sobre Δ, então $v_\alpha^i \notin (\sum_{\alpha \neq \tau \in G} \sum_{j=1}^{n_\tau} \Delta v_\tau^j + \sum_{i \neq j}^{n_\alpha} \Delta v_\alpha^j)$ e existe $t^{(i,\alpha)} \in T$ tal que

$$v_\alpha^i t^{(i,\alpha)} \neq 0 \text{ e } \ v_\tau^j t^{(i,\alpha)} = 0 \tag{4.7}$$

para todos os pares $(j,\tau) \neq (i,\alpha), \tau \in G, j \in \mathbb{N}$. Considere o seguinte Δ-submódulo graduado não nulo de V'

$$J^{(i,\alpha)} = \{w' \in V' \mid v_\tau^j w' = 0, \text{ para todos } (j,\tau) \neq (i,\alpha), \tau \in G, j \in \mathbb{N}\}.$$

Por (4.7), $0 \neq v_\alpha^i J^{(i,\alpha)}$. É fácil ver que $v_\alpha^i J^{(i,\alpha)}$ é um ideal à direita graduado de Δ. Como Δ é um anel graduado de divisão, temos que Δ não contém ideais unilaterais graduados não triviais. Com isso, $v_\alpha^i J^{(i,\alpha)} = \Delta$. Como vimos, existe $t^{(i,\alpha)} \in J^{(i,\alpha)}$ tal que $0 \neq v_\alpha^i t^{(i,\alpha)}$ e $0 = v_\tau^j t^{(i,\alpha)}$ para todos os pares $(j,\tau) \neq (i,\alpha), \tau \in G, j \in \mathbb{N}$. Em particular, existe $t_\gamma^{(i,\alpha)} \in J_\gamma^{(i,\alpha)}$ tal que

$$0 \neq v_\alpha^i t_\gamma^{(i,\alpha)} \quad \text{e} \quad v_\tau^j t_\gamma^{(i,\alpha)} = 0 \tag{4.8}$$

para todos os pares $(j,\tau) \neq (i,\alpha), \tau \in G, j \in \mathbb{N}$ e algum $\gamma \in G$. Sendo Δ um anel graduado de divisão, existe $d_{-\gamma-\alpha}^{(i,\alpha)} \in \Delta_{-\gamma-\alpha}$ tal que $v_\alpha^i t_\gamma^{(i,\alpha)} d_{-\gamma-\alpha}^{(i,\alpha)} = 1$. Por (4.8),

$$v_\tau^j t_\gamma^{(i,\alpha)} d_{-\gamma-\alpha}^{(i,\alpha)} = 0 \tag{4.9}$$

para todos os pares $(j,\tau) \neq (i,\alpha), \tau \in G, j \in \mathbb{N}$. Note que $t_\gamma^{(i,\alpha)} d_{-\gamma-\alpha}^{(i,\alpha)} \in V'_{-\alpha} = \{\varphi(w_{-\alpha-\nu}) \mid w_{-\alpha-\nu} \in V_{-\alpha-\nu}\}$. Disso decorre que existe $w_{-\alpha-\nu}^i \in V_{-\alpha-\nu}$ tal que

$$(v_\alpha^i, w_{-\alpha-\nu}^i)_\nu = v_\alpha^i t_\gamma^{(i,\alpha)} d_{-\gamma-\alpha}^{(i,\alpha)} = 1.$$

Além disso, por (4.8) e (4.9),

$$\begin{array}{rcl} (v_\alpha^i, w_{-\alpha-\nu}^j)_\nu & = & 0 \\ (v_\tau^i, w_{-\alpha-\nu}^j)_\nu & = & 0 \\ (v_\tau^i, w_{-\alpha-\nu}^i)_\nu & = & 0 \end{array}$$

para todos os pares $(j,\tau) \neq (i,\alpha), \tau \in G, j \in \mathbb{N}$. Logo, $(v_\beta^i, w_{-\alpha-\nu}^j)_\nu = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} \in \Delta_0$. Assim, finalizamos a demonstração do lema. □

Observação 4.1.8. *Para os próximos resultados, supomos que $\mathcal{D}$ é um anel (F-álgebra) graduado de divisão com uma σ-involução $^-$ tal que $(-,-)_\nu$ é uma das duas formas abaixo:*

a) *É uma forma sesquilinear ϵ-hermitiana não degenerada de grau 0.*

b) *Se não for possível escolher* $\nu = 0$*, então* $(-,-)_\nu : V \times V \longrightarrow \mathcal{D}$ *é uma forma sesquilinear* ϵ*-hermitiana não degenerada de grau* $\nu \neq 0$ *e* $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$*.*

Lema 4.1.9. *Seja* $V \times V$ *um par sesquilinear à esquerda com torção associada a uma forma sesquilinear* ϵ*-hermitiana não degenerada graduada* $(-,-)_0$ *de grau* 0 *sobre um anel (*F*-álgebra) graduado de divisão* $\mathcal{D}$*. Então,*

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_\alpha = (-, \mathbf{w}_{\alpha-\beta})_0 \mathbf{u}_\beta : & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & (v)\varphi_\alpha = (v, \mathbf{w}_{\alpha-\beta})_0 \mathbf{u}_\beta, \end{array} \tag{4.10}$$

pertence a $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$ *e tem posto* 1*, para todo* $\beta \in G$ *e para quaisquer* $\mathbf{w}_{\alpha-\beta} \in V_{\alpha-\beta}, \mathbf{u}_\beta \in V_\beta$*. Se* $\mathbf{u}_\beta$ *e* $\mathbf{w}_{\alpha-\beta}$ *são não nulos, então* $\varphi_\alpha \neq 0$*.*

Demonstração. Para cada $\alpha \in G$, sejam $\gamma \in G$ e elementos quaisquer não nulos $\mathbf{w}_{\alpha-\beta} \in V_{\alpha-\beta}$ e $\mathbf{u}_\beta \in V_\beta$. Pelas propriedades de $(-,-)_0$, temos que

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_\alpha : & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & (v)\varphi_\alpha = (v, \mathbf{w}_{\alpha-\beta})_0 \mathbf{u}_\beta \end{array} \in End_{\mathcal{D}}(V)_\alpha.$$

Evidentemente, φ_α é de posto 1, em virtude da sua definição. Defina

$$\begin{array}{rrcl} \psi_\alpha : & V & \longrightarrow & V \\ & w & \longmapsto & (w)\psi_\alpha = \sum_{\tau \in G} \epsilon^{-1}\sigma(\alpha-\beta,\beta)(w_\tau, \mathbf{u}_\beta)_0 \mathbf{w}_{\alpha-\beta}. \end{array}$$

Afirmamos que ψ_α é a σ-adjunta associada a φ_α. Com efeito, como $Img(\psi_\alpha)$ é gerado por $\{\mathbf{w}_{\alpha-\beta}\}$, $\mathbf{w}_{\alpha-\beta}$ e $\mathbf{u}_\beta$ são não nulos e $(-,-)_0$ é não degenerada, segue que ψ_α possui posto 1. Dados $w = \sum_{\tau \in G} w_\tau$, $w' = \sum_{\tau \in G} w'_\tau \in V$, temos

$$\begin{aligned} (w+w')\psi_\alpha &= \sum_{\tau \in G} (w_\tau + w'_\tau)\psi_\alpha \\ &= \sum_{\tau \in G} \epsilon^{-1}\sigma(\alpha-\beta,\beta)(w_\tau + w'_\tau, \mathbf{u}_\beta)_0 \mathbf{w}_{\alpha-\beta} \\ &= \sum_{\tau \in G} \epsilon^{-1}\sigma(\alpha-\beta,\beta)((w_\tau, \mathbf{u}_\beta)_0 \mathbf{w}_{\alpha-\beta} + (w'_\tau, \mathbf{u}_\beta)_0 \mathbf{w}_{\alpha-\beta}) \\ &= \sum_{\tau \in G} \epsilon^{-1}\sigma(\alpha-\beta,\beta)(w_\tau, \mathbf{u}_\beta)_0 \mathbf{w}_{\alpha-\beta} + \sum_{\tau \in G} \epsilon^{-1}\sigma(\alpha-\beta,\beta)(w'_\tau, \mathbf{u}_\beta)_0 \mathbf{w}_{\alpha-\beta} \\ &= (w)\psi_\alpha + (w')\psi_\alpha, \end{aligned}$$

ou seja, ψ_α é aditiva. Sejam $d \in \mathcal{D}$ e $w \in V$, então

$$\begin{aligned} d((w)\psi_\alpha) &= d(\sum_{\tau \in G} \epsilon^{-1}\sigma(\alpha-\beta,\beta)(w_\tau, \mathbf{u}_\beta)_0 \mathbf{w}_{\alpha-\beta}) \\ &= \sum_{\tau \in G} \epsilon^{-1}\sigma(\alpha-\beta,\beta) d(w_\tau, \mathbf{u}_\beta)_0 \mathbf{w}_{\alpha-\beta} \\ &= \sum_{\tau \in G} \epsilon^{-1}\sigma(\alpha-\beta,\beta)(dw_\tau, \mathbf{u}_\beta)_0 \mathbf{w}_{\alpha-\beta} \\ &= (dw)\psi_\alpha. \end{aligned}$$

Além disso, $(w_\tau)\psi_\alpha = \epsilon^{-1}\sigma(\alpha-\beta,\beta)(w_\tau,\mathbf{u}_\beta)_0\mathbf{w}_{\alpha-\beta} \in V_{\tau+\alpha}$ para quaisquer $w_\tau \in V_\tau$ e $\tau \in G$. Logo, $\psi_\alpha \in End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)_\alpha$. Agora vamos verificar que ψ_α é a σ-adjunta associada a φ_α. Recorde que $\sigma(0,0)\bar{\epsilon} = \epsilon^{-1}$. Primeiramente suponha que a G-graduação em $\mathcal{D}$ seja não trivial. Para quaisquer $v_\delta \in V_\delta, w_\tau \in V_\tau$ e $\tau,\delta \in G$, temos

$$(v_\delta\varphi_\alpha, w_\tau)_0 = (v_\delta, \mathbf{w}_{\alpha-\beta})_0(\mathbf{u}_\beta, w_\tau)_0$$

e

$$\begin{array}{rcl}(v_\delta, w_\tau\psi_\alpha)_0 & = & (v_\delta, \bar{\epsilon}\sigma(0,0)\sigma(\alpha-\beta,\beta)(w_\tau,\mathbf{u}_\beta)_0\mathbf{w}_{\alpha-\beta})_0 \\ & = & \sigma(\alpha-\beta,\beta)\sigma(0,0)\sigma(\tau+\beta,\alpha-\beta)(v_\delta,\mathbf{w}_{\alpha-\beta})_0\overline{\epsilon(w_\tau,\mathbf{u}_\beta)_0} \\ & = & \bar{\epsilon}\epsilon\sigma(0,0)\sigma(0,0)^2\sigma(\alpha-\beta,\beta)\sigma(\tau+\beta,\alpha-\beta)\sigma(\tau,\beta)(v_\delta,\mathbf{w}_{\alpha-\beta})_0(\mathbf{u}_\beta,w_\tau)_0 \\ & = & \sigma(\tau,\beta)\sigma(\tau+\beta,\alpha-\beta)\sigma(\alpha-\beta,\beta)(v_\delta,\mathbf{w}_{\alpha-\beta})_0(\mathbf{u}_\beta,w_\tau)_0 \\ & = & \sigma(\tau,\alpha)(v_\delta,\mathbf{w}_{\alpha-\beta})_0(\mathbf{u}_\beta,w_\tau)_0.\end{array} \tag{4.11}$$

Na igualdade acima usamos que:

$$\sigma(\tau,\beta)\sigma(\tau+\beta,\alpha-\beta) = \sigma(\tau,\alpha)\sigma(\beta,\alpha-\beta),$$

$$\sigma(\alpha-\beta,\beta)\sigma(\beta,\alpha-\beta) = 1.$$

Agora suponha que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$. Então,

$$(v_\delta\varphi_\alpha, w_\tau)_0 = \begin{cases} 0, & \text{se } \delta \neq \beta-\alpha \\ 0, & \text{se } \tau \neq -\beta \\ (v_{\beta-\alpha},\mathbf{w}_{\alpha-\beta})_0(\mathbf{u}_\beta,w_{-\beta})_0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{4.12}$$

e

$$(v_\delta, w_\tau\psi_\alpha)_0 = 0, \text{se } \tau \neq -\beta \tag{4.13}$$

Por outro lado, se $\tau = -\beta$

$$(v_\delta, w_\tau\psi_\alpha)_0 = \begin{cases} 0, & \text{se } \delta \neq \beta-\alpha \\ \sigma(\alpha-\beta,\beta)\sigma(-\beta,\beta)\sigma(0,\alpha-\beta)(v_\delta,\mathbf{w}_{\alpha-\beta})_0(\mathbf{u}_\beta,w_{-\beta})_0, & \text{se } \delta = \beta-\alpha. \end{cases} \tag{4.14}$$

Como

$$\sigma(\alpha-\beta,\beta)\sigma(-\beta,\beta)\sigma(0,\alpha-\beta) = \sigma(\alpha-\beta,\beta)\sigma(\beta,\alpha-\beta)\sigma(-\beta,\alpha) = \sigma(-\beta,\alpha),$$

temos que

$$(v_\delta\varphi_\alpha, w_\tau)_0 = \sigma(\alpha,\tau)(v_\delta, w_\tau\psi_\alpha)_0.$$

Logo, $(v_\delta\varphi_\alpha, w_\tau)_0 = \sigma(\alpha,\tau)(v_\delta, w_\tau\psi_\alpha)_0$ para quaisquer $\delta,\tau \in G$ e $v_\delta \in V_\delta, w_\tau \in V_\tau$. □

Lema 4.1.10. *Seja $V \times V$ um par sesquilinear à esquerda com torção associada a uma forma sesquilinear ϵ-hermitiana não degenerada graduada $(-,-)_\nu$ de grau ν sobre um anel*

(F-álgebra) graduado de divisão $\mathcal{D}$. Suponha que a graduação em $\mathcal{D}$ seja trivial e $\nu \neq 0$. Então,

$$\begin{array}{rccl} \varphi_\alpha = (-, \mathbf{w}_{-\gamma-\nu})_\nu \mathbf{u}_{\gamma+\alpha}: & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & (v)\varphi_\alpha = (v, \mathbf{w}_{-\gamma-\nu})_\nu \mathbf{u}_{\gamma+\alpha}, \end{array} \tag{4.15}$$

pertence a $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$ e tem posto 1, para todo $\gamma \in G$ e para quaisquer $\mathbf{w}_{-\gamma-\nu} \in V_{-\gamma-\nu}, \mathbf{u}_{\gamma+\alpha} \in V_{\gamma+\alpha}$. Se $\mathbf{u}_{\gamma+\alpha}$ e $\mathbf{w}_{-\gamma-\nu}$ são não nulos, então $\varphi_\alpha \neq 0$.

Demonstração. Claramente, $\varphi_\alpha \in End_{\mathcal{D}}(V)_\alpha$, φ_α tem posto 1 e $(v_\beta)\varphi_\alpha = 0$ para todo $v_\beta \in V_\beta$ com $\beta \neq \gamma$. Defina

$$\begin{array}{rccl} \psi_\alpha: & V & \longrightarrow & V \\ & w & \longmapsto & (\sum\limits_{\tau \in G} w_\tau)\psi_\alpha = \bar{\epsilon}\omega(w_{-\gamma-\alpha-\nu}, \mathbf{u}_{\gamma+\alpha})_\nu \mathbf{w}_{-\gamma-\nu}, \end{array}$$

onde $\sum\limits_{\tau \in G} w_\tau = w \in V$ e

$$\omega = \sigma(-\gamma-\alpha-\nu, \alpha)\sigma(\gamma+\alpha, -\gamma-\alpha-\nu).$$

Primeiro vamos mostrar que $\psi_\alpha \in End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)_\alpha$ e depois mostraremos que ψ_α é a σ-adjunta associada a φ_α. De fato, dados $w = \sum\limits_{\tau \in G} w_\tau, w' = \sum\limits_{\tau \in G} w'_\tau \in V$ e $d \in \mathcal{D} = \mathcal{D}_0$, temos

$$\begin{array}{rcl} (w + w')\psi_\alpha & = & (\sum\limits_{\tau \in G} w_\tau + w'_\tau)\psi_\alpha \\ & = & \bar{\epsilon}\omega(w_{-\gamma-\alpha-\nu} + w'_{-\gamma-\alpha-\nu}, \mathbf{u}_{\gamma+\alpha})_\nu \mathbf{w}_{-\gamma-\nu} \\ & = & \bar{\epsilon}\omega((w_{-\gamma-\alpha-\nu}, \mathbf{u}_{\gamma+\alpha})_\nu \mathbf{w}_{-\gamma-\nu} + (w'_{-\gamma-\alpha-\nu}, \mathbf{u}_{\gamma+\alpha})_\nu \mathbf{w}_{-\gamma-\nu}) \\ & = & \bar{\epsilon}\omega(w_{-\gamma-\alpha-\nu}, \mathbf{u}_{\gamma+\alpha})_\nu \mathbf{w}_{-\gamma-\nu} + \bar{\epsilon}\omega(w'_{-\gamma-\alpha-\nu}, \mathbf{u}_{\gamma+\alpha})_\nu \mathbf{w}_{-\gamma-\nu} \\ & = & (w)\psi_\alpha + (w')\psi_\alpha \\ (dw)\psi_\alpha & = & (\sum\limits_{\tau \in G} dw_\tau)\psi_\alpha \\ & = & \bar{\epsilon}\omega(dw_{-\gamma-\alpha-\nu}, \mathbf{u}_{\gamma+\alpha})_\nu \mathbf{w}_{-\gamma-\nu} \\ & = & \bar{\epsilon}\omega d(w_{-\gamma-\alpha-\nu}, \mathbf{u}_{\gamma+\alpha})_\nu \mathbf{w}_{-\gamma-\nu} \\ & = & d(w)\psi_\alpha. \end{array}$$

Além disso, se $\tau \neq -\gamma-\alpha-\nu$, então $(w_\tau)\psi_\alpha = 0 \in V_{\alpha+\tau}$. Se $\tau = -\gamma-\alpha-\nu$, temos $(w_{-\gamma-\alpha-\nu})\psi_\alpha = \bar{\epsilon}\omega(w_{-\gamma-\alpha-\nu}, \mathbf{u}_{\gamma+\alpha})_\nu \mathbf{w}_{-\gamma-\nu} \in V_{-\gamma-\nu}$. Logo, $\psi_\alpha \in End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)_\alpha$.

Para quaisquer $v_\gamma \in V_\gamma,\ w_{-\gamma-\alpha-\nu} \in V_{-\gamma-\alpha-\nu}$, temos

$$\begin{array}{rcl} (v_\gamma, w_{-\gamma-\alpha-\nu}\psi_\alpha)_\nu & = & (v_\gamma, \bar{\epsilon}\omega(w_{-\gamma-\alpha-\nu}, \mathbf{u}_{\alpha+\gamma})_\nu \mathbf{w}_{-\gamma-\nu})_\nu \\ & = & \epsilon\omega(v_\gamma, \mathbf{w}_{-\gamma-\nu})_\nu \overline{(w_{-\gamma-\alpha-\nu}, \mathbf{u}_{\alpha+\gamma})_\nu} \\ & = & \sigma(0,0)\epsilon\bar{\epsilon}\omega\sigma(-\gamma-\alpha-\nu, \gamma+\alpha)(v_\gamma, \mathbf{w}_{-\gamma-\nu})_\nu(\mathbf{u}_{\alpha+\gamma}, w_{-\gamma-\alpha-\nu})_\nu \\ & = & \sigma(-\gamma-\alpha-\nu, \alpha)(v_\gamma, \mathbf{w}_{-\gamma-\nu})_\nu(\mathbf{u}_{\alpha+\gamma}, w_{-\gamma-\alpha-\nu})_\nu, \\ (v_\gamma\varphi_\alpha, w_{-\gamma-\alpha-\nu})_\nu & = & (v_\gamma, \mathbf{w}_{-\gamma-\nu})_\nu(\mathbf{u}_{\alpha+\gamma}, w_{-\gamma-\alpha-\nu})_\nu. \end{array}$$

Usamos acima que

$$\begin{aligned}
\omega\sigma(-\gamma-\alpha-\nu,\gamma+\alpha) &= \sigma(-\gamma-\alpha-\nu,\alpha)\sigma(\gamma+\alpha,-\gamma-\alpha-\nu)\sigma(-\gamma-\alpha-\nu,\gamma+\alpha)\\
&= \sigma(-\gamma-\alpha-\nu,\alpha).
\end{aligned}$$

Logo, $(v_\gamma\varphi_\alpha, w_{-\gamma-\alpha-\nu})_\nu = \sigma(\alpha,-\gamma-\alpha-\nu)(v_\gamma, w_{-\gamma-\alpha-\nu}\psi_\alpha)_\nu$. Para quaisquer $\beta\neq\gamma$ e $v_\beta\in V_\beta$, temos que

$$\sigma(\alpha,-\gamma-\alpha-\nu)(v_\beta, w_{-\gamma-\alpha-\nu}\psi_\alpha)_\nu = 0 = (v_\beta\varphi_\alpha, w_{-\gamma-\alpha-\nu})_\nu.$$

Para qualquer $\tau\neq-\gamma-\alpha-\nu$, temos

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha,\tau)(v_\gamma, w_\tau\psi_\alpha)_\nu &= \sigma(\alpha,\tau)(v_\gamma, \bar{\epsilon}\omega(0,\mathbf{u}_0)_\nu\mathbf{w}_{-\gamma-\nu})_\nu\\
&= \sigma(\alpha,\tau)(v_\gamma,0)_\nu\\
&= 0,\\
(v_\gamma\varphi_\alpha, w_\tau)_\nu &= (v_\gamma,\mathbf{w}_{-\gamma-\nu})_\nu(\mathbf{u}_\gamma, w_\tau)_\nu\\
&= (v_\gamma,\mathbf{w}_{-\gamma-\nu})_\nu 0\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, $(v_\beta\varphi_\alpha, w_\tau)_\nu = \sigma(\alpha,\tau)(v_\beta, w_\tau\psi_\alpha)_\nu$ para quaisquer $v_\beta\in V_\beta, w_\tau\in W_\tau, \beta,\tau\in G$. □

Lema 4.1.11. *Seja $V\times V$ um par sesquilinear à esquerda com torção associada a uma forma sesquilinear ϵ-hermitiana não degenerada graduada $(-,-)_0$ de grau 0 sobre um anel (F-álgebra) graduado de divisão $\mathcal{D}$. Então, todo elemento homogêneo $\varphi_\alpha\in(\mathcal{F}_V^{gr_\sigma})_\alpha$ de posto 1 é da forma*

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha = (-,\mathbf{w}_{\alpha-\beta})_0\mathbf{u}_\beta : \quad V &\longrightarrow V\\
v &\longmapsto (v)\varphi_\alpha = (v,\mathbf{w}_{\alpha-\beta})_0\mathbf{u}_\beta,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

para algum $\gamma\in G$ e para alguns $\mathbf{w}_{\alpha-\beta}\in V_{\alpha-\beta}, \mathbf{u}_\beta\in V_\beta$.

Demonstração. Como φ_α é homogêneo, temos que $Img(\varphi_\alpha)$ é um $\mathcal{D}$-módulo à esquerda G-graduado, ou seja, $Img(\varphi_\alpha)$ é um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda G-graduado. Como $dim_{\mathcal{D}}(Img(\varphi_\alpha)) = 1$, temos que existe $0\neq\tilde{v}_\beta\in V_\beta$ tal que $Img(\varphi_\alpha) = \bigoplus_{\gamma\in G}\mathcal{D}_\gamma\tilde{v}_\beta$ para algum $\beta\in G$. Pelo **Lema 4.1.7**, existe $w_{-\beta}\in V_{-\beta}$ tal que $(\tilde{v}_\beta, w_{-\beta})_0 = 1$. Sejam $\gamma\in G$ e $v_\gamma\in V_\gamma$, então

$$v_\gamma\varphi_\alpha = d_{\gamma+\alpha-\beta}\tilde{v}_\beta \tag{4.17}$$

para algum $d_{\gamma+\alpha-\beta}\in\mathcal{D}_{\gamma+\alpha-\beta}$. Daí,

$$(v_\gamma\varphi_\alpha, w_{-\beta})_0 = (d_{\gamma+\alpha-\beta}\tilde{v}_\beta, w_{-\beta})_0 = d_{\gamma+\alpha-\beta}. \tag{4.18}$$

Por outro lado,

$$(v_\gamma\varphi_\alpha, w_{-\beta})_0 = \sigma(\alpha,-\beta)(v_\gamma, w_{-\beta}\varphi_\alpha^{\star_\sigma})_0. \tag{4.19}$$

Assim, de (4.17)-(4.19), temos que

$$\begin{array}{rcl} v_\gamma\varphi_\alpha & = & d_{\gamma+\alpha-\beta}\tilde{v}_\beta \\ & = & (v_\gamma\varphi_\alpha, w_{-\beta})_0\tilde{v}_\beta \\ & = & \sigma(\alpha,-\beta)(v_\gamma, w_{-\beta}\varphi_\alpha^{\star_\sigma})_0\tilde{v}_\beta \\ & = & (v_\gamma, \sigma(\alpha,-\beta)w_{-\beta}\varphi_\alpha^{\star_\sigma})_0\tilde{v}_\beta \end{array}$$

para quaisquer $v_\gamma \in V_\gamma, \gamma \in G$. Seja $\mathbf{w}_{\alpha-\beta} = \sigma(\alpha,-\beta)w_{-\beta}\varphi_\alpha^{\star_\sigma} \in V_{\alpha-\beta}$. Logo, $\varphi_\alpha = (-, \mathbf{w}_{\alpha-\beta})_0\tilde{v}_\beta$. □

Lema 4.1.12. *Seja $V \times V$ um par sesquilinear à esquerda com torção associada a uma forma sesquilinear ϵ-hermitiana não degenerada graduada $(-,-)_\nu$ de grau ν sobre um anel (F-álgebra) graduado de divisão $\mathcal{D}$. Suponha que a graduação em $\mathcal{D}$ seja trivial e $\nu \neq 0$. Então, todo elemento homogêneo $\varphi_\alpha \in (\mathcal{F}_V^{gr_\sigma})_\alpha$ de posto 1 é da forma*

$$\begin{array}{rccl} \varphi_\alpha = (-, \mathbf{w}_{-\gamma-\nu})_\nu\mathbf{u}_{\gamma+\alpha} : & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & (v)\varphi_\alpha = (v, \mathbf{w}_{-\gamma-\nu})_\nu\mathbf{u}_{\gamma+\alpha}, \end{array} \tag{4.20}$$

para algum $\gamma \in G$ e para alguns $\mathbf{w}_{-\gamma-\nu} \in V_{-\gamma-\nu}, \mathbf{u}_{\gamma+\alpha} \in V_{\gamma+\alpha}$.

Demonstração. Como $dim_{\mathcal{D}}(Img(\varphi_\alpha)) = 1$, temos que existe $0 \neq \tilde{v}_\beta \in V_\beta$ tal que $Img(\varphi_\alpha) = \mathcal{D}_0\tilde{v}_\beta = \mathcal{D}\tilde{v}_\beta$ para algum $\beta \in G$. Pelo **Lema 4.1.7**, existe $w_{-\beta-\nu} \in V_{-\beta-\nu}$ tal que $(\tilde{v}_\beta, w_{-\beta-\nu})_\nu = 1$. Sejam $\gamma \in G$ e $\bar{v}_\gamma \in V_\gamma$ tais que $\bar{v}_\gamma\varphi_\alpha \neq 0$. Então, $\beta = \gamma + \alpha$ e assim

$$\bar{v}_\gamma\varphi_\alpha = d_0\tilde{v}_{\gamma+\alpha} \tag{4.21}$$

para algum $d_0 \in \mathcal{D}_0$. Daí, seja $w_{-\gamma-\alpha-\nu} \in V_{-\gamma-\alpha-\nu}$ tal que $(\tilde{v}_{\gamma+\alpha}, w_{-\gamma-\alpha-\nu})_\nu = 1$. Com isso,

$$(\bar{v}_\gamma\varphi_\alpha, w_{-\gamma-\alpha-\nu})_\nu = (d_0\tilde{v}_{\gamma+\alpha}, w_{-\gamma-\alpha-\nu})_\nu = d_0. \tag{4.22}$$

Além disso,

$$(\bar{v}_\gamma\varphi_\alpha, w_{-\gamma-\alpha-\nu})_\nu = \sigma(\alpha, -\gamma-\alpha-\nu)(\bar{v}_\gamma, w_{-\gamma-\alpha-\nu}\varphi_\alpha^{\star_\sigma})_\nu. \tag{4.23}$$

Assim, de (4.21)-(4.23), temos que

$$\begin{array}{rcl} \bar{v}_\gamma\varphi_\alpha & = & d_0\tilde{v}_{\gamma+\alpha} \\ & = & (\bar{v}_\gamma\varphi_\alpha, w_{-\gamma-\alpha-\nu})_\nu\tilde{v}_{\gamma+\alpha} \\ & = & \sigma(\alpha,-\gamma-\alpha-\nu)(\bar{v}_\gamma, w_{-\gamma-\alpha-\nu}\varphi_\alpha^{\star_\sigma})_\nu\tilde{v}_{\gamma+\alpha} \\ & = & (\bar{v}_\gamma, \sigma(\alpha,-\gamma-\alpha-\nu)w_{-\gamma-\alpha-\nu}\varphi_\alpha^{\star_\sigma})_\nu\tilde{v}_{\gamma+\alpha} \end{array}$$

para quaisquer $\bar{v}_\gamma \in V_\gamma, \gamma \in G$. Seja $\mathbf{w}_{-\gamma-\nu} = \sigma(\alpha,-\gamma-\alpha-\nu)w_{-\gamma-\alpha-\nu}\varphi_\alpha^{\star_\sigma} \in V_{-\gamma-\nu}$. Logo, $\varphi_\alpha = (-, \mathbf{w}_{-\gamma-\nu})_\nu\tilde{v}_{\gamma+\alpha}$. □

Lema 4.1.13. *Seja $V \times V$ um par sesquilinear à esquerda com torção associada a uma forma sesquilinear ϵ-hermitiana não degenerada graduada $(-,-)_0$ sobre um anel (F-álgebra) graduado de divisão $\mathcal{D}$. Um elemento homogêneo a_α pertence $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$ se, e somente se, a_α se exprime como soma de elementos da forma φ_α como em (4.16).*

Demonstração. Pelo **Lema 4.1.9**, φ_α, definido em (4.16), pertence a $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$ e, como $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$ é um ideal graduado, temos que qualquer soma desses elementos também pertence a $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$.

Reciprocamente, suponha que $a_\alpha \in \mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$. Então, Va_α tem dimensão finita sobre $\mathcal{D}$. Novamente, a_α homogêneo, implica que $Img(a_\alpha) = \bigoplus_{\beta\in G} Img(a_\alpha)_\beta$ é um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda G-graduado. Como $dim_{\mathcal{D}}(Img(a_\alpha))$ é finita, podemos considerar uma base finita de elementos homogêneos $\mathfrak{X} = \bigcup_{\beta\in G} \{\tilde{v}_\beta^1, \ldots, \tilde{v}_\beta^{n_\beta}\}$ para $Img(a_\alpha)$ sobre $\mathcal{D}$. Se $v_{\gamma+\alpha} \in Img(a_\alpha)_{\alpha+\gamma}$, então existe $\bar{v}_\gamma \in V_\gamma$ tal que

$$v_{\gamma+\alpha} = \bar{v}_\gamma a_\alpha = \sum_{\tau\in G}\sum_{k=1}^{n_\tau} d^k_{\gamma+\alpha-\tau}\tilde{v}^k_\tau,$$

onde $d^k_{\gamma+\alpha-\tau} \in \mathcal{D}_{\gamma+\alpha-\tau}, \tilde{v}^k_\tau \in \mathfrak{X}$ e $1 \leq k \leq n_\tau, \tau \in G$. Pelo **Lema 4.1.7**, existem $\bigcup_{\tau\in G} \{w^1_{-\tau}, \ldots, w^{n_\tau}_{-\tau}\}$ elementos homogêneos de V tais que $(\tilde{v}^i_\tau, w^j_{-\beta})_0 = \delta_{ij}\delta_{\tau\beta}$ para todos $i, j \in \{1, \ldots, n_\tau\}, \tau \in G$. Com isso,

$$(\bar{v}_\gamma a_\alpha, w^k_{-\tau})_0 = (d^k_{\gamma+\alpha-\tau}\tilde{v}^k_\tau, w^k_{-\tau})_0 = d^k_{\gamma+\alpha-\tau}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\bar{v}_\gamma a_\alpha &= \sum_{\tau\in G}\sum_{i=1}^{n_\tau} (\bar{v}_\gamma a_\alpha, w^i_{-\tau})_0\tilde{v}^i_\tau \\
&= \sum_{\tau\in G}\sum_{i=1}^{n_\tau} \sigma(\alpha, -\tau)(\bar{v}_\gamma, w^i_{-\tau}a_\alpha^{\star_\sigma})_0\tilde{v}^i_\tau \\
&= \sum_{\tau\in G}\sum_{i=1}^{n_\tau} (\bar{v}_\gamma, \sigma(\alpha, -\tau)w^i_{-\tau}a_\alpha^{\star_\sigma})_0\tilde{v}^i_\tau \\
&= \sum_{\tau\in G}\sum_{i=1}^{n_\tau} (\bar{v}_\gamma, \mathbf{w}^i_{\alpha-\tau})_0\tilde{v}^i_\tau
\end{aligned}$$

para quaisquer $\bar{v}_\gamma \in V_\gamma, \gamma \in G$, onde $\mathbf{w}^i_{\alpha-\tau} = \sigma(\alpha, -\tau)w^i_{-\tau}a_\alpha^{\star_\sigma} \in V_{\alpha-\tau}$. Portanto, a_α é uma soma de elementos φ_α definido em (4.16). Com isso, concluímos a demonstração do lema. □

Lema 4.1.14. *Seja $V \times V$ um par sesquilinear à esquerda com torção associada a uma forma sesquilinear ϵ-hermitiana não degenerada graduada $(-,-)_\nu$ sobre um anel (F-álgebra) graduado de divisão $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$ e $\nu \neq 0$. Um elemento homogêneo a_α pertence $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$ se, e somente se, a_α se exprime como soma de elementos da forma φ_α como em* (4.20).

Demonstração. Pelo **Lema 4.1.10**, φ_α, definido em (4.20), pertence a $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$ e, como $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$ é um ideal graduado, temos que qualquer soma desses elementos também pertence a $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$.

Reciprocamente, suponha que $a_\alpha \in \mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$. Então, Va_α tem dimensão finita sobre $\mathcal{D}_0$. Novamente, como a_α é homogêneo, temos que $Img(a_\alpha) = \bigoplus_{\beta \in G} Img(a_\alpha)_\beta$ é um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda G-graduado. Como $dim_{\mathcal{D}_0}(Img(a_\alpha))$ é finita, podemos considerar uma base finita de elementos homogêneos $\mathfrak{X} = \bigcup_\beta \{\tilde{v}_\beta^1, \ldots, \tilde{v}_\beta^{n_\beta}\}$ para $Img(a_\alpha)$. Assim, se $v'_{\gamma+\alpha} \in Img(a_\alpha)_{\alpha+\gamma}$, então existe $\bar{v}_\gamma \in V_\gamma$ tal que

$$v'_{\gamma+\alpha} = \bar{v}_\gamma a_\alpha = \sum_{i=1}^{n_{\gamma+\alpha}} d^i \tilde{v}^i_{\gamma+\alpha},$$

onde $d^i \in \mathcal{D}_0$, $\tilde{v}^i_{\gamma+\alpha} \in \mathfrak{X}, 1 \leq i \leq n_{\gamma+\alpha}$, para algum $\gamma \in G$. Pelo **Lema 4.1.7**, existem $\{w^1_{-\alpha-\gamma-\nu}, \ldots, w^{n_{\gamma+\alpha}}_{-\alpha-\gamma-\nu}\} \subseteq V_{-\alpha-\gamma-\nu}$ tais que $(\tilde{v}^i_{\alpha+\gamma}, w^j_{-\alpha-\gamma-\nu})_\nu = \delta_{ij}$ para todos $i, j \in \{1, \ldots, n_{\gamma+\alpha}\}$. Com isso,

$$(\bar{v}_\gamma a_\alpha, w^k_{-\alpha-\gamma-\nu})_\nu = (d^k \tilde{v}^k_{\alpha+\gamma}, w^k_{-\alpha-\gamma-\nu})_\nu = d^k.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\bar{v}_\gamma a_\alpha &= \sum_{i=1}^{n_{\gamma+\alpha}} (\bar{v}_\gamma a_\alpha, w^i_{-\alpha-\gamma-\nu})_\nu \tilde{v}^i_{\alpha+\gamma} \\
&= \sum_{i=1}^{n_{\gamma+\alpha}} \sigma(\alpha, -\alpha-\gamma-\nu)(\bar{v}_\gamma, w^i_{-\alpha-\gamma-\nu} a_\alpha^{\star_\sigma})_\nu \tilde{v}^i_{\alpha+\gamma} \\
&= \sum_{i=1}^{n_{\gamma+\alpha}} (\bar{v}_\gamma, \sigma(\alpha, -\alpha-\gamma-\nu) w^i_{-\alpha-\gamma-\nu} a_\alpha^{\star_\sigma})_\nu \tilde{v}^i_{\gamma+\alpha} \\
&= \sum_{i=1}^{n_{\gamma+\alpha}} (\bar{v}_\gamma, \mathbf{w}^i_{-\gamma-\nu})_\nu \tilde{v}^i_{\gamma+\alpha}
\end{aligned}$$

para quaisquer $\bar{v}_\gamma \in V_\gamma, \gamma \in G$, onde $\mathbf{w}^i_{-\gamma-\nu} = \sigma(\alpha, -\alpha-\gamma-\nu) w^i_{-\alpha-\gamma-\nu} a_\alpha^{\star_\sigma} \in V_{-\gamma-\nu}$. Portanto, a_α é uma soma de elementos φ_α definido em (4.20). Com isso, concluímos a demonstração do lema. □

Proposição 4.1.15. *Seja $V \times V$ um par sesquilinear à esquerda com torção associada a uma forma sesquilinear ϵ-hermitiana graduada não degenerada $(-,-)_\nu$ sobre um anel (F-álgebra) graduado de divisão $\mathcal{D}$. Então, $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$ age densamente em V. Se $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr_\sigma}$, então $\mathcal{R}$ é um anel graduado primitivo à direita.*

Demonstração. Sejam $\{v_\alpha^1, \ldots, v_\alpha^n\} \subset V_\alpha$ linearmente independente sobre o anel de divisão $\mathcal{D}$ e elementos quaisquer $u_\beta^1, \ldots, u_\beta^n \in V_\beta$. Pelo **Lema 4.1.7**, existem $w^1_{-\alpha-\nu}, \ldots, w^n_{-\alpha-\nu} \in V_{-\alpha-\nu}$ tais que $(v^i_\alpha, w^j_{-\alpha-\nu})_\nu = \delta_{ij}$ para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Como visto no **Lema 4.1.9** e no **Lema 4.1.10** , $(-, w^i_{-\alpha-\nu})_\nu u^i_\beta \in \mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Defina $t_{\beta-\alpha} = \sum_{i=1}^n (\ , w^i_{-\alpha-\nu})_\nu u^i_\beta$. Pelo **Lema 4.1.13** e **Lema 4.1.14**, $t_{\beta-\alpha} \in \mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$. Além disso,

$$v^k_\alpha t_{\beta-\alpha} = u^k_\beta \tag{4.24}$$

para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. Segue daí que $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$ age densamente em V.

Afirmamos que V é um $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$-módulo à direita graduado irredutível e fiel. De fato, $Ann^r_{\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}}(V) = \{a \in \mathcal{F}_V^{gr_\sigma} \mid va = 0, \ \forall\ v \in V\}$. Se $a \in \mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$ é tal que $(V)a = 0$, então, pela definição de função, $a = 0$, já que $a \in \mathcal{F}_V^{gr_\sigma} \subseteq End^{gr}_{\mathcal{D}}(V)$. Logo, $Ann^r_{\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}}(V) = (0)$ e, portanto, V é um fiel $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$-módulo à direita graduado. Agora, suponha que $(0) \neq V' \subseteq V$ seja um $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$-módulo à direita graduado. Seja $v_\alpha \in V_\alpha$. Como $V' \neq (0)$, existe um elemento homogêneo não nulo $u_\beta \in V'_\beta$ para algum $\beta \in G$. Pelo **Lema 4.1.7**, existe $w_{-\beta-\nu} \in V_{-\beta-\nu}$ tal que $(u_\beta, w_{-\beta-\nu})_\nu = 1$. Pelo **Lema 4.1.9** e **Lema 4.1.10**, $t_{\alpha-\beta} = (-, w_{-\beta-\nu})_\nu v_\alpha \in \mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$. Assim,

$$\begin{aligned} v_\alpha &= (u_\beta, w_{-\beta-\nu})_\nu v_\alpha \\ &= u_\beta t_{\alpha-\beta} \in V'_\alpha \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in G$. Logo, $V = V'$. Portanto, V é um $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$-módulo à direita graduado irredutível e fiel. Em particular, se $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr_\sigma}$, então $\mathcal{R}$ é um anel graduado primitivo à direita. $\square$

Proposição 4.1.16. *Seja $V \times V$ um par sesquilinear à esquerda com torção associada a uma forma sesquilinear ϵ-hermitiana graduada não degenerada $(-,-)_\nu$ sobre um anel (F-álgebra) graduado de divisão $\mathcal{D}$. Se $\star_\sigma$ é a σ-adjunta associada a $(-,-)_\nu$, então $\star_\sigma$ é uma σ-involução em $\mathcal{L}_V^{gr_\sigma}$. Se $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr_\sigma}$ e $\mathcal{R}$ é invariante pela ação de $\star_\sigma$, então $\star_\sigma$ é uma σ-involução em $\mathcal{R}$.*

Demonstração. Seja

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{L}_V^{gr_\sigma} & \longrightarrow & \mathcal{L}_V^{gr_\sigma} \\ & a & \longmapsto & a^{\star_\sigma}. \end{array}$$

Pela definição de σ-adjunta, a aplicação $\star_\sigma$ é homogênea de grau 0. Dados $v_\alpha \in V_\alpha, w_\tau \in V_\tau, b_\beta, a_\beta \in (\mathcal{L}_V^{gr_\sigma})_\beta, b_\gamma \in (\mathcal{L}_V^{gr_\sigma})_\gamma$ e $\alpha, \tau, \beta, \gamma \in G$, temos

$$\begin{aligned} (v_\alpha(b_\beta b_\gamma), w_\tau)_\nu &= \sigma(\beta+\gamma, \tau)(v_\alpha, w_\tau(b_\beta b_\gamma)^{\star_\sigma})_\nu, \\ ((v_\alpha b_\beta)b_\gamma, w_\tau)_\nu &= \sigma(\gamma, \tau)(v_\alpha b_\beta, w_\tau b_\gamma^{\star_\sigma})_\nu \\ &= \sigma(\gamma, \tau)\sigma(\beta, \tau+\gamma)(v_\alpha, w_\tau b_\gamma^{\star_\sigma} b_\beta^{\star_\sigma})_\nu \\ &= \sigma(\beta, \gamma)\sigma(\beta+\gamma, \tau)(v_\alpha, w_\tau b_\gamma^{\star_\sigma} b_\beta^{\star_\sigma})_\nu, \\ (v_\alpha(b_\beta + a_\beta), w_\tau)_\nu &= (v_\alpha b_\beta, w_\tau)_\nu + (v_\alpha a_\beta, w_\tau)_\nu \\ &= \sigma(\beta, \tau)(v_\alpha, w_\tau b_\beta^{\star_\sigma})_\nu + \sigma(\beta, \tau)(v_\alpha, w_\tau a_\beta^{\star_\sigma})_\nu \\ &= \sigma(\beta, \tau)(v_\alpha, w_\tau(b_\beta^{\star_\sigma} + a_\beta^{\star_\sigma}))_\nu. \end{aligned}$$

Como $(v_\alpha(b_\beta b_\gamma), w_\tau)_\nu = ((v_\alpha b_\beta)b_\gamma, w_\tau)_\nu$ e $(v_\alpha(b_\beta + a_\beta), w_\tau)_\nu = (v_\alpha b_\beta, w_\tau)_\nu + (v_\alpha a_\beta, w_\tau)_\nu$ e $(-,-)_\nu$ é não degenerada, temos $(b_\beta b_\gamma)^{\star_\sigma} = \sigma(\beta, \gamma) b_\gamma^{\star_\sigma} b_\beta^{\star_\sigma}$ e $(b_\beta + a_\beta)^{\star_\sigma} = b_\beta^{\star_\sigma} + a_\beta^{\star_\sigma}$ para todos $b_\beta, a_\beta \in (\mathcal{L}_V^{gr_\sigma})_\beta, b_\gamma \in (\mathcal{L}_V^{gr_\sigma})_\gamma$ e $\alpha, \tau, \beta, \gamma \in G$.

Pelo **Lema 4.1.5**, $b_\beta^{\star_\sigma \star_\sigma} = b_\beta$ para todo $b_\beta \in (\mathcal{L}_V^{gr_\sigma})_\beta$ e $\beta \in G$. Segue disso e da $\mathbb{Z}$-linearidade de $\star_\sigma$ que $a^{\star_\sigma \star_\sigma} = a$ para todo $a \in \mathcal{L}_V^{gr_\sigma}$. Portanto, $\star_\sigma$ é uma σ-involução em

$\mathcal{L}_V^{gr_\sigma}$. Em particular, se $\mathcal{R}$ é invariante pela ação de $\star_\sigma$, temos que $\star_\sigma$ é uma σ-involução em $\mathcal{R}$. $\square$

4.2 Resultados Auxiliares

Os resultados obtidos aqui são ferramentas primordiais na demonstração do teorema principal. O ponto de partida é o lema abaixo.

Lema 4.2.1. *Seja $\mathcal{R}$ um anel graduado primitivo à direita com uma σ-involução $\star_\sigma$. Suponha que para todo ideal à direita graduado minimal I de $\mathcal{R}$, tenhamos $a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma} I = (0)$ para todos $a_\alpha \in I_\alpha$ e $\alpha \in G$. Então, existe um ideal à direita graduado minimal J de $\mathcal{R}$ tal que $b_\beta b_\beta^{\star_\sigma} = 0$ para quaisquer $b_\beta \in J_\beta$ e $\beta \in G$.*

Demonstração. Seja I um ideal à direita graduado minimal de $\mathcal{R}$ e suponha que exista um elemento homogêneo $a_\alpha \in I_\alpha$ tal que $a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma} \neq 0$. Como $\mathcal{R}$ é um anel graduado primitivo à direita, temos que $(0) \neq a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma}\mathcal{R}$. Além disso, $a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma}\mathcal{R} \subseteq I$. Pela minimalidade de I,

$$a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma}\mathcal{R} = a_\alpha\mathcal{R} = I.$$

Mais uma vez, $\mathcal{R}a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma} \neq (0)$, pois $\mathcal{R}$ é um anel graduado primitivo à direita, e $\mathcal{R}a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma}$ é um $\mathcal{R}$-módulo à esquerda graduado. Vamos mostrar que $\mathcal{R}a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma} = I^{\star_\sigma}$. Seja $a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma} r \in I$, onde $r = \sum_{\beta\in G} r_\beta \in \mathcal{R}$. Então, $r' a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma} = \sum_{\beta\in G} \sigma(\alpha,\beta+\alpha)\sigma(\alpha,\beta) r_\beta^{\star_\sigma} a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma} = (a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma} r)^{\star_\sigma}$, onde $r' = \sum_{\beta\in G}\sigma(\alpha,\beta+\alpha)\sigma(\alpha,\beta) r_\beta^{\star_\sigma} \in \mathcal{R}$. Assim, $\mathcal{R}a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma} \supseteq I^{\star_\sigma}$. Por outro lado, se $r \in \mathcal{R}$, então $r = \sum_{\beta\in G} r_\beta$ e $r^{\star_\sigma} = \sum_{\beta\in G} r_\beta^{\star_\sigma}$. Seja $r a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma} \in \mathcal{R}a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma}$. Considere o elemento $\tilde{r} = \sum_{\beta\in G}\sigma(\alpha+\beta,\beta)\sigma(\beta,\alpha) r_\beta^{\star_\sigma} \in \mathcal{R}$. Temos que

$$\begin{aligned}
(a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma}\tilde{r})^{\star_\sigma} &= \sum_{\beta\in G}\sigma(\beta+\alpha,\alpha)\sigma(\beta,\alpha)(a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma} r_\beta^{\star_\sigma})^{\star_\sigma} \\
&= \sum_{\beta\in G}\sigma(\beta+\alpha,\alpha)\sigma(\alpha,\beta+\alpha)\sigma(\alpha,\beta)\sigma(\beta,\alpha) r_\beta^{\star_\sigma\star_\sigma} a_\alpha^{\star_\sigma\star_\sigma} a_\alpha^{\star_\sigma} \\
&= r a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma}.
\end{aligned}$$

Logo, $I^{\star_\sigma} = \mathcal{R}a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma}$. Agora, suponha que $I^{\star_\sigma}$ contenha um submódulo graduado próprio J, então, como $\star_\sigma$ tem ordem 2, $J^{\star_\sigma}$ é um submódulo graduado próprio não nulo de I, o que contradiz a minimalidade de I. Portanto, $I^{\star_\sigma} = \mathcal{R}a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma}$ é um $\mathcal{R}$-módulo à esquerda graduado minimal de $\mathcal{R}$. Além disso,

$$I^{\star_\sigma} = \mathcal{R}a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma} = \mathcal{R}a_\alpha^{\star_\sigma}.$$

Por hipótese, temos $a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma} I = (0)$, o que implica

$$I^{\star_\sigma} I = \mathcal{R} a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma} I = (0). \tag{4.25}$$

Pelo **Lema 1.5.14** e **Lema 1.5.15**, $a_\alpha^{\star_\sigma}\mathcal{R} = J$ é um ideal à direita graduado minimal de $\mathcal{R}$ e $J^{\star_\sigma} = \mathcal{R}a_\alpha$ é um ideal à esquerda graduado minimal de $\mathcal{R}$, já que $a_\alpha\mathcal{R} = I$ é um ideal à direita graduado minimal de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}a_\alpha^{\star_\sigma} = I^{\star_\sigma}$ é um ideal à esquerda graduado minimal de $\mathcal{R}$. Se $b_\beta b_\beta^{\star_\sigma} = 0$ para todos $b_\beta \in J_\beta, \beta \in G$, então J é o ideal à direita graduado minimal que queremos. Agora, se existir um elemento homogêneo $x_\beta \in J_\beta$ tal que $x_\beta x_\beta^{\star_\sigma} \neq 0$ para algum $\beta \in G$. Então,

$$a_\alpha^{\star_\sigma}\mathcal{R} = J = x_\beta x_\beta^{\star_\sigma}\mathcal{R}.$$

Daí, $J^{\star_\sigma} = \mathcal{R}x_\beta x_\beta^{\star_\sigma} = \mathcal{R}a_\alpha$. Pela hipótese do lema, como J é um ideal à direita graduado minimal de $\mathcal{R}$, $x_\beta \in J_\beta$ e $x_\beta x_\beta^{\star_\sigma} \neq 0$, temos que

$$(0) = J^{\star_\sigma} J = \mathcal{R}a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma}\mathcal{R} = \mathcal{R}x_\beta x_\beta^{\star_\sigma} J.$$

Logo, $\mathcal{R}a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma}\mathcal{R} = (0)$. Como $\mathcal{R}$ é um anel graduado primitivo à direita, pelo **Lema 1.5.7**, $\mathcal{R}$ é um anel graduado primo, assim, $a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma}\mathcal{R} = (0)$, já que $\mathcal{R} \neq (0)$. Novamente, como $\mathcal{R}$ é um anel graduado primo,

$$a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma} = 0. \tag{4.26}$$

□

Teorema 4.2.2. *Seja $\mathcal{R}$ um anel graduado primitivo à direita com característica diferente de 2 e com um ideal à direita graduado minimal. Seja $\star_\sigma$ uma σ-involução em $\mathcal{R}$. Então, ocorre uma e apenas uma das seguintes situações:*

a) *existe um elemento idempotente minimal $e_0 \in \mathcal{R}_0$ tal que $e_0^{\star_\sigma} = e_0$;*

b) *existe um elemento idempotente minimal $e_0 \in \mathcal{R}_0$ tal que $e_0^{\star_\sigma} = -e_0$;*

c) *existe um elemento idempotente minimal $e_0 \in \mathcal{R}_0$ tal que $e_0 e_0^{\star_\sigma} = 0$.*

Demonstração. Primeiro, assuma que existem um ideal à direita graduado minimal I e um elemento homogêneo $a_\alpha \in I_\alpha$ tal que $a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma} I \neq (0)$. Então, tome $x = a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma}$ e note que $x^{\star_\sigma} = \sigma(\alpha,\alpha)x$. Pelo **Lema 1.5.11**, existe um elemento idempotente minimal $f_0 \in I_0$ tal que $I = f_0\mathcal{R}$ e $xf_0 = f_0x = x$. Assim,

$$\begin{aligned} xf_0f_0^{\star_\sigma} &= xf_0^{\star_\sigma} \\ &= \sigma(0,\alpha+\alpha)(f_0x^{\star_\sigma})^{\star_\sigma} \\ &= \sigma(0,\alpha+\alpha)\sigma(\alpha,\alpha)(f_0x)^{\star_\sigma} \\ &= \sigma(0,\alpha+\alpha)\sigma(\alpha,\alpha)(x)^{\star_\sigma} \\ &= \sigma(0,0)x. \end{aligned}$$

Seja $e_0 = \sigma(0,0)f_0f_0^{\star_\sigma}$. Pela igualdade acima, $xe_0 = x$. Assim, pelo **Lema 1.5.11**, e_0 é um idempotente minimal. Além disso, $e_0^{\star_\sigma} = f_0f_0^{\star_\sigma} = \sigma(0,0)e_0 = {}^{\pm}e_0$, já que $\sigma(0,0) \in \{1,-1\}$. Com isso, provamos **a)** e **b)**.

Agora, assuma que para qualquer ideal à direita graduado minimal K de $\mathcal{R}$ e qualquer elemento homogêneo $a_\alpha \in K_\alpha$, tenhamos $a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma}K = (0)$. Segue do **Lema 4.2.1** que existe um ideal à direita graduado minimal J de $\mathcal{R}$ tal que $b_\alpha b_\alpha^{\star_\sigma} = 0$ para todos $b_\alpha \in J_\alpha, \alpha \in G$. Em particular, se $e_0 \in J_0$ é um idempotente minimal, então $e_0e_0^{\star_\sigma} = 0$. □

Lema 4.2.3. *Seja $\mathcal{R}$ um anel graduado primitivo à direita com uma σ-involução $\star_\sigma$. Suponha que I seja um ideal à direita graduado minimal de $\mathcal{R}$. Então, $a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma} = (0)$ para todos $a_\alpha \in I_\alpha$ e $\alpha \in G$ se, e somente se, $e_0e_0^{\star_\sigma} = 0$ para todo idempotente minimal $e_0 \in I_0$.*

Demonstração. Se $a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma} = (0)$ para todos $a_\alpha \in I_\alpha$ e $\alpha \in G$, em particular, a igualdade é válida para todo idempotente minimal $e_0 \in I_0$.

Reciprocamente, suponha que $e_0e_0^{\star_\sigma} = 0$ para todo idempotente minimal $e_0 \in I_0$. Suponha, por contradição, que exista $a_\alpha \in I_\alpha$ tal que $a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma} \neq 0$ para algum $\alpha \in G$. Daí, pelo **Lema 4.2.1**, $a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma}I \neq (0)$. Vemos que $(a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma})^{\star_\sigma} = \sigma(\alpha,\alpha)a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma}$. Assim, como na demonstração do **Lema 4.2.2**, existe um idempotente minimal $f_0 \in I_0$ tal que $f_0^{\star_\sigma} = \sigma(0,0)f_0$, o que contradiz $e_0e_0^{\star_\sigma} = 0$ para todo idempotente minimal $e_0 \in I_0$. Logo, $a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma} = 0$ para todos $a_\alpha \in I_\alpha$ e $\alpha \in G$. E isto termina a prova do resultado. □

Lema 4.2.4. *Seja $\mathcal{R}$ um anel graduado primitivo à direita com um ideal à direita graduado minimal e seja $\star_\sigma$ uma σ-involução em $\mathcal{R}$. Suponha que exista um elemento idempotente minimal $e_0 \in \mathcal{R}_0$ tal que $e_0^{\star_\sigma} = \epsilon e_0$, onde $\epsilon = \sigma(0,0) \in \{1,-1\}$. Então, existem um anel (F-álgebra) graduado de divisão $\mathcal{D}$ com uma σ-involução $^-$, um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda V e uma forma sesquilinear hermitiana não degenerada graduada $(-,-)_0 : V \times V \longrightarrow \mathcal{D}$ tais que $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr_\sigma}$ e $\star_\sigma$ é a σ-adjunta associada a $(-,-)_0$.*

Demonstração. Consideramos as alternativas **a)** e **b)** do **Teorema 4.2.2**. Se $e_0 \in \mathcal{R}_0$ é um idempotente minimal tal que $e_0^{\star_\sigma} = e_0$, então $\sigma(0,0) = 1$. Agora, caso $e_0 \in \mathcal{R}_0$ é um idempotente minimal tal que $e_0^{\star_\sigma} = -e_0$, então $\sigma(0,0) = -1$. Pelo **Lema 1.5.12**, $\mathcal{D} = e_0\mathcal{R}e_0$ é um anel graduado de divisão e $V = e_0\mathcal{R}$ é um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda. Afirmamos que a aplicação $^- = {}^{\star_\sigma}|_{\mathcal{D}}$ é uma σ-involução sobre $\mathcal{D}$. Com efeito, dado $d_\alpha \in \mathcal{D}_\alpha$, existe $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ tal que $d_\alpha = e_0r_\alpha e_0$. Daí,

$$\begin{aligned}
(d_\alpha)^{\star_\sigma} &= (e_0r_\alpha e_0)^{\star_\sigma} \\
&= \sigma(0,\alpha)\sigma(\alpha,0)e_0^{\star_\sigma}r_\alpha^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} \\
&= e_0^{\star_\sigma}r_\alpha^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} \\
&= \epsilon^2 e_0r_\alpha^{\star_\sigma}e_0 \\
&= e_0r_\alpha^{\star_\sigma}e_0 \in \mathcal{D}_\alpha
\end{aligned}$$

para qualquer $\alpha \in G$. Assim,

$$\begin{aligned}(d)^{\star_\sigma} &= \sum_{\alpha\in G} {d_\alpha}^{\star_\sigma}\\ &= e_0(\sum_{\alpha\in G} r_\alpha)^{\star_\sigma} e_0\\ &= e_0 r^{\star_\sigma} e_0 \in \mathcal{D},\end{aligned}$$

onde $r = \sum_{\alpha\in G} r_\alpha \in \mathcal{R}$ e $d = e_0 r e_0 \in \mathcal{D}$. Logo, $\mathcal{D}$ é fechado pela ação de $^{-} = {}^{\star_\sigma}|_{\mathcal{D}}$ e, portanto, $^{-}$ é uma σ-involução sobre $\mathcal{D}$.

Observe que $(e_0 b_\beta)^{\star_\sigma} = \sigma(0,\beta) b_\beta^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} = b_\beta^{\star_\sigma} e_0$ para todos $b_\beta \in \mathcal{R}_\beta$ e $\beta \in G$. Assim,

$$(e_0 b)^{\star_\sigma} = b^{\star_\sigma} e_0$$

para todo $b \in \mathcal{R}$. Defina

$$\begin{aligned}(-,-)_0 \;:\; & V \times V \longrightarrow \mathcal{D}\\ & (v,w) \longmapsto (v,w)_0 := e_0 a (e_0 b)^{\star_\sigma} = e_0 a b^{\star_\sigma} e_0\end{aligned}, \tag{4.27}$$

onde $v = e_0 a \in V$ e $w = e_0 b \in V$ com $a, b \in \mathcal{R}$. Afirmamos que $(-,-)_0$ é uma forma sesquilinear. De fato, como V é um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado e $\star_\sigma$ é linear, temos que $(-,-)_0$ é bi-aditiva. Além disso, $(v_\alpha, w_\beta)_0 = e_0 a_\alpha b_\beta^{\star_\sigma} e_0 \in \mathcal{D}_{\alpha+\beta}$ para quaisquer $\alpha, \beta \in G$ e $a_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha, b_\beta \in \mathcal{R}_\beta$. Assim, $(-,-)_0$ é graduada de grau 0. Agora, para cada $e_0 r_\delta e_0 = d_\delta \in \mathcal{D}_\delta$, temos

$$\begin{aligned}(d_\delta v_\alpha, w_\beta)_0 &= d_\delta e_0 a_\alpha b_\beta^{\star_\sigma} e_0\\ &= d_\delta (v_\alpha, w_\beta)_0,\\ (v_\alpha, d_\delta w_\beta)_0 &= e_0 a_\alpha (e_0 r_\delta e_0 e_0 b_\beta)^{\star_\sigma}\\ &= \sigma(\delta,\beta) e_0 a_\alpha b_\beta^{\star_\sigma} e_0 e_0 r_\delta^{\star_\sigma} e_0\\ &= \sigma(\delta,\beta)(v_\alpha, w_\beta)_0 \bar{d}_\delta,\\ \overline{(w_\beta, v_\alpha)_0} &= \overline{e_0 b_\beta a_\alpha^{\star_\sigma} e_0}\\ &= \sigma(\beta,\alpha) e_0 a_\alpha^{\star_\sigma\star_\sigma} b_\beta^{\star_\sigma} e_0\\ &= \sigma(\beta,\alpha)(v_\alpha, w_\beta)_0.\end{aligned}$$

Assim, $(v_\alpha, w_\beta)_0 = \sigma(\alpha,\beta)\overline{(w_\beta, v_\alpha)_0}$. Provamos então que $(-,-)_0$ é uma forma sesquilinear hermitiana de grau 0.

Sejam $v_\alpha \in V_\alpha, w_\beta \in V_\beta$ tais que $(v_\alpha, V)_0 = 0$ e $(V, w_\beta)_0 = 0$. Então, $e_0 a_\alpha \mathcal{R} e_0 = 0$ e $e_0 \mathcal{R} b_\beta^{\star_\sigma} e_0 = 0$. Como $\mathcal{R}$ é um anel graduado primitivo à direita, segue que $\mathcal{R}$ é um anel graduado primo pelo **Lema 1.5.7**, assim temos que $e_0 a_\alpha = 0$ ou $e_0 = 0$ e $b_\beta^{\star_\sigma} e_0 = 0$ ou $e_0 = 0$. Como $e_0 \neq 0$, segue que $e_0 a_\alpha = 0$ e $b_\beta^{\star_\sigma} e_0 = 0$. Daí, como $\star_\sigma$ é de ordem 2, $e_0 b_\beta = 0$. Com isto, $v_\alpha = 0$ e $w_\beta = 0$. Portanto, $(-,-)_0$ é não degenerada.

Pelo **Lema 3.4.1**, $\mathcal{R} \subseteq End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)$ via o monomorfismo graduado φ. Além disso, para cada $r_\tau \in \mathcal{R}_\tau$ com $\tau \in G$, temos

$$
\begin{aligned}
(v_\alpha r_\tau, w_\beta)_0 &= e_0 a_\alpha r_\tau b_\beta^{\star_\sigma} e_0 \\
(v_\alpha, w_\beta r_\tau^{\star_\sigma})_0 &= e_0 a_\alpha (b_\beta r_\tau^{\star_\sigma})^{\star_\sigma} e_0 \\
&= \sigma(\beta,\tau) e_0 a_\alpha r_\tau^{\star_\sigma \star_\sigma} b_\beta^{\star_\sigma} e_0 \\
&= \sigma(\beta,\tau) e_0 a_\alpha r_\tau b_\beta^{\star_\sigma} e_0 \\
&= \sigma(\beta,\tau)(v_\alpha r_\tau, w_\beta)_0.
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
(v_\alpha r_\tau, w_\beta)_0 = \sigma(\tau,\beta)(v_\alpha, w_\beta r_\tau^{\star_\sigma})_0. \tag{4.28}
$$

Assim, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr_\sigma}$ via monomorfismo dado no **Lema 3.4.1**. Seja $b_\beta \in \mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$ de posto 1. Pelo **Lema 4.1.11**, existem $\mathbf{u}_\tau \in V_\tau$ e $\mathbf{w}_{\beta-\tau} \in V_{\beta-\tau}$ tais que b_β é da forma

$$
\begin{aligned}
b_\beta : \quad V &\longrightarrow V \\
v_\alpha &\longmapsto (v_\alpha, \mathbf{w}_{\beta-\tau})_0 \mathbf{u}_\tau.
\end{aligned}
$$

Observe ainda que $\mathbf{u}_\tau = e_0 r_\tau$ e $\mathbf{w}_{\beta-\tau} = e_0 c_{\beta-\tau}$ para alguns $r_\tau \in \mathcal{R}_\tau$ e $c_{\beta-\tau} \in \mathcal{R}_{\beta-\tau}$. Daí,

$$
\begin{aligned}
v_\alpha b_\beta &= (v_\alpha, \mathbf{w}_{\beta-\tau})_0 \mathbf{u}_\tau \\
&= e_0 a_\alpha c_{\beta-\tau}^{\star_\sigma} e_0 e_0 r_\tau \\
&= v_\alpha (c_{\beta-\tau}^{\star_\sigma} e_0 r_\tau) \\
&= v_\alpha \mathfrak{R}_{c_{\beta-\tau}^{\star_\sigma} e_0 r_\tau}
\end{aligned}
$$

para todo $v_\alpha \in V_\alpha$. Isso significa que $b_\beta = \mathfrak{R}_{c_{\beta-\tau}^{\star_\sigma} e_0 r_\tau}$, ou seja, $b_\beta \in Img(\varphi)$. Como $Img(\varphi)$ é um subanel graduado de $End_{\mathcal{D}}^{gr}(V)$, temos que $Img(\varphi)$ contém todos os elementos homogêneos de posto 1 e, portanto, $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma} \subseteq Img(\varphi)$. Assim, $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma} \subseteq \mathcal{R}$ via $\varphi^{-1} : Im(\varphi) \longrightarrow \mathcal{R}$ dada no **Lema 3.4.1**. Além do mais, por (4.28), $\star_\sigma$ é a σ-adjunta associada a $(-,-)_0$. Com isso, finalizamos a demonstração do lema. □

No **Lema 4.2.4**, em ambos os casos $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = -1$, a forma é hermitiana.

Sejam $\mathcal{R}$ um anel graduado com uma σ-involução $\star_\sigma$ e $\mathcal{D} = e_0 \mathcal{R} e_0$ um anel graduado de divisão, onde $e_0 \in \mathcal{R}_0$ é um idempotente minimal. Já sabemos que $\mathcal{D}^{\star_\sigma}$ é um anel graduado de divisão com identidade $1_{\mathcal{D}^{\star_\sigma}} = \sigma(0,0)1_{\mathcal{D}}$. Além disso, se G é cíclico de ordem prima p e $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}_0$, então $\mathcal{D}_\gamma \neq (0)$ para todo $\gamma \in G$. De fato, como a graduação em $\mathcal{D}$ é não trivial, existe $0 \neq \tau \in G$ tal que $\mathcal{D}_\tau \neq (0)$. Seja $0 \neq d_\tau \in \mathcal{D}_\tau$, então $0 \neq d_\tau^n \in \mathcal{D}_{n\tau}$ para todo $1 \leq n \leq p$, já que $\mathcal{D}$ é um anel graduado de divisão. Por outro lado, G é cíclico de ordem prima, então todo elemento não nulo de G gera G. Assim, todas as componentes homogêneas de $\mathcal{D}$ são não nulas.

Lema 4.2.5. *Seja $\mathcal{R}$ um anel graduado primitivo à direita com um ideal à direita graduado minimal e seja $\star_\sigma$ uma σ-involução em $\mathcal{R}$. Suponha que I seja um ideal à direita graduado minimal de $\mathcal{R}$ tal que $I = e_0\mathcal{R}$, onde $e_0 \in I_0$ é um idempotente minimal e $e_0 e_0^{\star_\sigma} = 0$. Então, existem um anel (F-álgebra) graduado de divisão $\mathcal{D}$ com uma σ-involução $^-$, um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda V e uma forma sesquilinear ϵ-hermitiana não degenerada* *graduada $(-,-)_\nu : V \times V \longrightarrow \mathcal{D}$, onde $\epsilon = {}^{\pm}1$ tais que $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr_\sigma}$ e $\star_\sigma$ é a σ-adjunta associada a $(-,-)_\nu$. Além disso, se $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}_0$, então $\nu = 0$.*

Demonstração. Consideramos $I = e_0\mathcal{R} = V$, $\mathcal{D} = \bigoplus_{\alpha\in G} e_0\mathcal{R}_\alpha e_0$ um anel graduado de divisão e V um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda G-graduado. Observe que $\mathcal{D}^{\star_\sigma} = e_0^{\star_\sigma}\mathcal{R}e_0^{\star_\sigma} = \bigoplus_{\alpha\in G} e_0^{\star_\sigma}\mathcal{R}_\alpha e_0^{\star_\sigma}$ também é um anel graduado de divisão com identidade $\sigma(0,0)e_0^{\star_\sigma}$.

Como $\mathcal{R}$ é graduado primitivo à direita, pelo **Lema 1.5.7**, $\mathcal{R}$ é graduado primo. Assim, pelo **Lema 1.5.3**, $e_0\mathcal{R}e_0^{\star_\sigma} \neq (0)$. Seja $\nu \in G$ tal que $e_0\mathcal{R}_\nu e_0^{\star_\sigma} \neq (0)$. Se possível, vamos escolher $\nu = 0$. Veremos agora quando será possível escolher $\nu = 0$.

1) Se $\nu = 0$, então $e_0\mathcal{R}_0 e_0^{\star_\sigma} \neq (0)$.

2) Suponha que $\nu \neq 0$ e $\mathcal{D}_\nu \neq (0)$, ou seja, a G-gradução em $\mathcal{D}$ é não trivial. Neste caso, como G é cíclico de ordem prima, temos que $\mathcal{D}_\gamma \neq (0)$ para todo $\gamma \in G$, já que $\mathcal{D}$ é um anel graduado de divisão. Como a G-gradução em $\mathcal{D}$ é não trivial, temos que $\mathcal{D}^{\star_\sigma}$ também possui graduação não trivial, pois $\star_\sigma$ é de grau neutro e tem ordem 2. Assim, $e_0^{\star_\sigma}\mathcal{R}_{-\nu}e_0^{\star_\sigma} \neq (0)$. Ou seja,

$$e_0\mathcal{R}_\nu e_0^{\star_\sigma} \neq (0) \;\text{ e }\; e_0^{\star_\sigma}\mathcal{R}_{-\nu}e_0^{\star_\sigma} \neq (0). \tag{4.29}$$

Suponha, por contradição, que

$$e_0\mathcal{R}_\nu e_0^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma}\mathcal{R}_{-\nu}e_0^{\star_\sigma} = (0).$$

Por (4.29), existem elementos não nulos $e_0 r_\nu e_0^{\star_\sigma} \in e_0\mathcal{R}_\nu e_0^{\star_\sigma}$ e $e_0^{\star_\sigma} r_{-\nu} e_0^{\star_\sigma} \in e_0^{\star_\sigma}\mathcal{R}_{-\nu}e_0^{\star_\sigma}$. Como $\mathcal{D}^{\star_\sigma}$ é um anel graduado de divisão, temos que existe $e_0^{\star_\sigma} r'_\nu e_0^{\star_\sigma} \in e_0^{\star_\sigma}\mathcal{R}_\nu e_0^{\star_\sigma}$ tal que $e_0^{\star_\sigma} r_{-\nu} e_0^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} r'_\nu e_0^{\star_\sigma} = 1_{\mathcal{D}^{\star_\sigma}}$. Daí,

$$\begin{aligned} 0 &= e_0 r_\nu e_0^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} r_{-\nu} e_0^{\star_\sigma} \\ &= e_0 r_\nu e_0^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} r_{-\nu} e_0^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} r'_\nu e_0^{\star_\sigma} \\ &= e_0 r_\nu e_0^{\star_\sigma} 1_{\mathcal{D}^{\star_\sigma}} \\ &= e_0 r_\nu e_0^{\star_\sigma}, \end{aligned}$$

o que contradiz $e_0 r_\nu e_0^{\star_\sigma} \neq (0)$. Logo, $e_0\mathcal{R}_\nu e_0^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma}\mathcal{R}_{-\nu}e_0^{\star_\sigma} \neq (0)$. Como $e_0\mathcal{R}_\nu e_0^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma}\mathcal{R}_{-\nu}e_0^{\star_\sigma} \subseteq e_0\mathcal{R}_0 e_0^{\star_\sigma}$, temos que $e_0\mathcal{R}_0 e_0^{\star_\sigma} \neq (0)$.

Portanto, sempre que a graduação em $\mathcal{D}$ for não trivial, podemos escolher $\nu = 0$.

Seja $e_0\mathcal{R}_\nu e_0^{\star_\sigma} \neq (0)$. Então, existe $t_\nu \in \mathcal{R}_\nu$ tal que $e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} \neq 0$. Consideramos qualquer elemento homogêneo $t_\nu \in \mathcal{R}_\nu$ tal que $e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} \neq 0$. Como $\mathcal{R}$ é graduado primitivo à direita, pelo **Lema 1.5.7**, $\mathcal{R}$ é graduado primo. Por consequência, pelo **Lema 1.5.3**,

$0 \neq e_0^{\star_\sigma}\mathcal{R}e_0t_\nu e_0^{\star_\sigma}$. Por outro lado, é fácil ver que $e_0^{\star_\sigma}\mathcal{R}e_0t_\nu e_0^{\star_\sigma}$ é um ideal à esquerda de $\mathcal{D}^{\star_\sigma}$. Como $\mathcal{D}^{\star_\sigma}$ é um anel graduado de divisão, $\mathcal{D}^{\star_\sigma}$ não possui ideais unilaterais próprios. Sendo assim, $e_0^{\star_\sigma}\mathcal{R}e_0t_\nu e_0^{\star_\sigma} = \mathcal{D}^{\star_\sigma}$. Daí, deve existir $s_{-\nu} \in \mathcal{R}_{-\nu}$ tal que

$$e_0^{\star_\sigma}s_{-\nu}e_0t_\nu e_0^{\star_\sigma} = \sigma(0,0)e_0^{\star_\sigma} \in \mathcal{D}^{\star_\sigma}. \tag{4.30}$$

Se existir $r_\nu \in \mathcal{R}_\nu$ tal que

$$e_0(r_\nu + r_\nu^{\star_\sigma})e_0^{\star_\sigma} \neq 0, \tag{4.31}$$

obtemos, denotando $t_\nu = r_\nu + r_\nu^{\star_\sigma}$,

$$(e_0t_\nu e_0^{\star_\sigma})^{\star_\sigma} = \sigma(0,\nu)(t_\nu e_0^{\star_\sigma})^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} = \sigma(0,\nu)\sigma(\nu,0)e_0t_\nu^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} = e_0t_\nu e_0^{\star_\sigma}. \tag{4.32}$$

No caso

$$e_0(r_\nu + r_\nu^{\star_\sigma})e_0^{\star_\sigma} = 0 \tag{4.33}$$

para todo $r_\nu \in \mathcal{R}_\nu$, temos

$$e_0r_\nu e_0^{\star_\sigma} = -e_0r_\nu^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma}. \tag{4.34}$$

Por (4.34),

$$(e_0r_\nu e_0^{\star_\sigma})^{\star_\sigma} = \sigma(0,\nu)\sigma(\nu,0)e_0r_\nu^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} = e_0r_\nu^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} = -e_0r_\nu e_0^{\star_\sigma}. \tag{4.35}$$

Neste caso, escolhemos $t_\nu = r_\nu$. Logo, em ambos os casos,

$$(e_0t_\nu e_0^{\star_\sigma})^{\star_\sigma} = \epsilon' e_0t_\nu e_0^{\star_\sigma}, \tag{4.36}$$

onde $\epsilon' = \pm 1$. Aplicando $\star_\sigma$ em (4.30), obtemos

$$e_0 = \sigma(-\nu,\nu)\epsilon' e_0t_\nu e_0^{\star_\sigma}s_{-\nu}^{\star_\sigma}e_0. \tag{4.37}$$

Por (4.37) e (4.30), segue

$$e_0^{\star_\sigma}s_{-\nu}e_0 = \sigma(-\nu,\nu)\epsilon' e_0^{\star_\sigma}s_{-\nu}e_0t_\nu e_0^{\star_\sigma}s_{-\nu}^{\star_\sigma}e_0 = \sigma(0,0)\sigma(-\nu,\nu)\epsilon' e_0^{\star_\sigma}s_{-\nu}^{\star_\sigma}e_0. \tag{4.38}$$

Novamente, aplicando $\star_\sigma$ em (4.38), temos

$$(e_0^{\star_\sigma}s_{-\nu}e_0)^{\star_\sigma} = e_0^{\star_\sigma}s_{-\nu}^{\star_\sigma}e_0 = \sigma(0,0)\sigma(\nu,-\nu)\epsilon' e_0^{\star_\sigma}s_{-\nu}e_0. \tag{4.39}$$

Por (4.37) e (4.39), vemos que

$$e_0 = \sigma(0,0)e_0t_\nu e_0^{\star_\sigma}s_{-\nu}e_0. \tag{4.40}$$

Considere elementos homogêneos arbitrários de $V = e_0\mathcal{R}$, $v_\alpha = e_0a_\alpha \in V_\alpha$ e $w_\beta = e_0b_\beta \in$

V_β em que $a_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ e $b_\beta \in \mathcal{R}_\beta$. Temos que

$$\begin{aligned} v_\alpha w_\beta^{\star\sigma} &= \sigma(0,\beta)e_0 a_\alpha b_\beta^{\star\sigma} e_0^{\star\sigma} \\ &= e_0 a_\alpha b_\beta^{\star\sigma} e_0^{\star\sigma} s_{-\nu} e_0 t_\nu e_0^{\star\sigma}, \end{aligned}$$

para quaisquer $a_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha, b_\beta \in \mathcal{R}_\beta, \alpha, \beta \in G$. Vamos definir a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} (-,-)_{-\nu} : \ V \times V &\longrightarrow \mathcal{D} \\ (v,w) &\longmapsto (v,w)_{-\nu} = \sigma(0,0) v w^{\star\sigma} s_{-\nu} e_0. \end{aligned}$$

Assim, $\sigma(0,0) v w^{\star\sigma} s_{-\nu} e_0 = \sigma(0,0) e_0 a w^{\star\sigma} s_{-\nu} e_0 \in \mathcal{D}$, onde $v = e_0 a$ com $a \in \mathcal{R}$. Em particular, para elementos homogêneos, temos

$$(v_\alpha, w_\beta)_{-\nu} = e_0 a_\alpha b_\beta^{\star\sigma} e_0^{\star\sigma} s_{-\nu} e_0 \in \mathcal{D}_{\alpha+\beta-\nu} \tag{4.41}$$

para quaisquer $v_\alpha = e_0 a_\alpha \in V_\alpha, w_\beta = e_0 b_\beta \in V_\beta, a_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha, b_\beta \in \mathcal{R}_\beta, \alpha, \beta \in G$. Primeiro vamos mostrar que $(-,-)_{-\nu}$ é bem definida. Se $v = e_0 a$ e $v = e_0 a'$, onde $r, r' \in \mathcal{R}$, temos que $e_0(a - a') = 0$. Assim,

$$\sigma(0,0)e_0(a-a')w^{\star\sigma} s_{-\nu} e_0 = 0 \Rightarrow \sigma(0,0) e_0 a w^{\star\sigma} s_{-\nu} e_0 = \sigma(0,0) e_0 a' w^{\star\sigma} s_{-\nu} e_0$$

para qualquer $w \in V$. Se $w = e_0 b$ e $w = e_0 b'$, então $(b - b')^{\star\sigma} e_0^{\star\sigma} = 0$. Daí,

$$\sigma(0,0) v (b-b')^{\star\sigma} e_0^{\star\sigma} s_{-\nu} e_0 = 0 \Rightarrow \sigma(0,0) v b^{\star\sigma} e_0^{\star\sigma} s_{-\nu} e_0 = \sigma(0,0) v b'^{\star\sigma} e_0^{\star\sigma} s_{-\nu} e_0$$

para qualquer $v \in V$. Com isso, $(-,-)_{-\nu}$ é bem definida.

Da definição de $(-,-)_{-\nu}$ e do fato que V é um $(\mathcal{D},\mathcal{R})$-bimódulo, seguem facilmente a bi-aditividade de $(-,-)_{-\nu}$ e $(d_\delta v_\alpha, w_\beta)_{-\nu} = d_\delta (v_\alpha, w_\beta)_{-\nu}$ para quaisquer $d_\delta = e_0 r_\delta e_0 \in \mathcal{D}_\delta, v_\alpha \in V_\alpha, w_\beta \in W_\beta$ com $r_\delta \in \mathcal{R}_\delta$.

Se $(v_\alpha, V)_{-\nu} = (0)$, então $e_0 a_\alpha \mathcal{R} e_0^{\star\sigma} s_{-\nu} e_0 = (0)$. Pelo **Lema 1.5.3**, $e_0 a_\alpha = 0$, já que $e_0 \neq 0$ e $e_0^{\star\sigma} s_{-\nu} e_0 \neq 0$, onde $v_\alpha = e_0 a_\alpha$, com $a_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ e $\alpha \in G$. Analogamente, se $(V, v_\alpha)_{-\nu} = (0)$, então $e_0 \mathcal{R} a_\alpha^{\star\sigma} e_0^{\star\sigma} s_{-\nu} e_0 = (0)$. Assim, decorre mais uma vez do **Lema 1.5.3** que

$$a_\alpha^{\star\sigma} e_0^{\star\sigma} s_{-\nu} e_0 = 0 \Rightarrow a_\alpha^{\star\sigma} = a_\alpha^{\star\sigma} e_0^{\star\sigma} s_{-\nu} e_0 t_\nu e_0^{\star\sigma} = 0 e_0 t_\nu e_0^{\star\sigma} = 0.$$

Como $\star_\sigma$ tem ordem 2, temos que $a_\alpha = 0$. Disso segue que $v_\alpha = e_0 a_\alpha = 0$. Portanto, $(-,-)_{-\nu}$ é não degenerada.

Precisamos exibir uma σ-involução $^-$ em $\mathcal{D}$ tal que

$$(v_\alpha, d_\delta w_\beta)_{-\nu} = \sigma(\delta,\beta)(v_\alpha, w_\beta)_{-\nu} \bar{d}_\delta$$

para quaisquer $v_\alpha \in V_\alpha, w_\beta \in W_\beta, d_\delta \in \mathcal{D}_\delta$ e $\delta, \alpha, \beta \in G$. Note que

$$\begin{aligned} (v_\alpha, d_\delta w_\beta)_{-\nu} &= e_0 a_\alpha (d_\delta e_0 b_\beta)^{\star\sigma} e_0^{\star\sigma} s_{-\nu} e_0 \\ &= \sigma(\delta,\beta)\sigma(\beta,0) e_0 a_\alpha b_\beta^{\star\sigma} e_0^{\star\sigma} d_\delta^{\star\sigma} e_0^{\star\sigma} s_{-\nu} e_0 \\ &= \sigma(\delta,\beta) e_0 a_\alpha b_\beta^{\star\sigma} e_0^{\star\sigma} s_{-\nu} e_0 t_\nu e_0^{\star\sigma} d_\delta^{\star\sigma} e_0^{\star\sigma} s_{-\nu} e_0 \\ &= \sigma(\delta,\beta)(v_\alpha, w_\beta)_{-\nu} \bar{d}_\delta, \end{aligned}$$

onde $\bar{d}_\delta = e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} d_\delta^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0$. Afirmamos que $^-$ é uma σ-involução em $\mathcal{D}$. De fato, $^-$ é linear, pois $\star_\sigma$ é linear. Aplicando (4.36), (4.39) e (4.40), temos que

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{d}}_\delta &= e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} (e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} d_\delta^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0)^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 \\
&= \sigma(\nu, \delta-\nu) e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} (d_\delta^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0)^{\star_\sigma} (e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma})^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 \\
&= \sigma(\nu, \delta-\nu)\sigma(\delta, -\nu)\epsilon' e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} (e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0)^{\star_\sigma} d_\delta e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 \\
&= \sigma(\nu, \delta-\nu)\sigma(\delta, -\nu)\sigma(\nu, -\nu)\sigma(0,0)^2 \epsilon'^2 e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 d_\delta e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 \\
&= \sigma(0,0)\sigma(\nu, \delta-\nu)\sigma(\delta, -\nu)\sigma(\nu, -\nu) e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 d_\delta e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 \\
&= \sigma(0,0)\sigma(\nu, \delta-\nu)\sigma(\delta, -\nu)\sigma(-\nu, \nu) e_0 d_\delta e_0 \\
&= \sigma(\nu, \delta-\nu)\sigma(\delta-\nu, \nu)\sigma(\delta, -\nu)^2 e_0 d_\delta e_0 \\
&= \sigma(\delta, -\nu)^2 d_\delta .
\end{aligned}$$

Se $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$, temos que $d_\delta \neq 0$ se, e somente se, $\delta = 0$. Como $\sigma(0, -\nu)^2 = 1$, temos $\bar{\bar{d}}_0 = d_0$ e $\bar{\bar{d}}_\delta = \bar{d}_\delta = 0$ para todo $\delta \in G \setminus \{0\}$. Se $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}_0$, então consideramos $\nu = 0$. Assim, $\sigma(\delta, -\nu)^2 = \sigma(\delta, 0)^2 = 1$ para qualquer $\delta \in G$. Logo, em todos os casos,

$$\bar{\bar{d}}_\delta = d_\delta$$

para qualquer $\delta \in G$.

Para quaisquer $e_0 r_\delta e_0 = d_\delta \in \mathcal{D}_\delta$ e $e_0 r_\gamma e_0 = d_\gamma \in \mathcal{D}_\gamma$, onde $r_\delta \in \mathcal{R}_\delta$ e $r_\gamma \in \mathcal{R}_\gamma$, aplicando (4.30), obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{d_\gamma d_\delta} &= e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} (d_\gamma d_\delta)^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 \\
&= \sigma(\gamma, \delta) e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} d_\delta^{\star_\sigma} d_\gamma^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 \\
&= \sigma(\gamma, \delta)\sigma(\gamma, 0) e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} d_\delta^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} d_\gamma^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 \\
&= \sigma(\gamma, \delta) e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} d_\delta^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} d_\gamma^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 \\
&= \sigma(\gamma, \delta) e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} d_\delta^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} d_\gamma^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 \\
&= \sigma(\gamma, \delta)(e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} d_\delta^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0)(e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} d_\gamma^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0) \\
&= \sigma(\gamma, \delta)\bar{d}_\delta \bar{d}_\gamma .
\end{aligned}$$

Portanto,$^-$ é uma σ-involução em $\mathcal{D}$ e $(v_\alpha, d_\delta w_\beta)_{-\nu} = \sigma(\delta, \beta)(v_\alpha, w_\beta)_{-\nu}\bar{d}_\delta$.

Pondo $\epsilon = \sigma(0,0)\epsilon' e_0$, temos $\bar{\epsilon} = \epsilon' e_0$, $\epsilon \in Z(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D}_0$ e $\epsilon\bar{\epsilon} = \sigma(0,0)e_0$. Ademais,

$$\begin{aligned}
\overline{(w_\beta, v_\alpha)_{-\nu}} &= \overline{e_0 b_\beta a_\alpha^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0} \\
&= e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} (e_0 b_\beta a_\alpha^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0)^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 \\
&= \sigma(\beta+\alpha, -\nu) e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} (e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0)^{\star_\sigma} (e_0 b_\beta a_\alpha^{\star_\sigma})^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 \\
&= \sigma(\beta+\alpha, -\nu)\sigma(\nu, -\nu)\sigma(0,0)\sigma(\beta, \alpha)\sigma(0, \beta)\epsilon' e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 a_\alpha b_\beta^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 \\
&= \sigma(\beta+\alpha, -\nu)\sigma(\nu, -\nu)\sigma(\beta, \alpha)\epsilon' e_0 t_\nu e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 a_\alpha b_\beta^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 \\
&= \sigma(\beta+\alpha, -\nu)\sigma(\nu, -\nu)\sigma(\beta, \alpha)\epsilon' \sigma(0,0) e_0 a_\alpha b_\beta^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 \\
&= \sigma(\beta+\alpha, -\nu)\sigma(\nu, -\nu)\sigma(\beta, \alpha)\epsilon (v_\alpha, w_\beta)_{-\nu} .
\end{aligned}$$

Se $-\nu = 0$, segue que $\sigma(\beta+\alpha, 0)\sigma(0,0) = 1$. Deste modo,

$$\overline{(w_\beta, v_\alpha)_{-\nu}} = \sigma(\beta, \alpha)\epsilon(v_\alpha, w_\beta)_{-\nu} = \sigma(\beta, \alpha)\sigma(0,0)\bar{\epsilon}(v_\alpha, w_\beta)_{-\nu}.$$

Se $\nu \neq 0$, assumimos que $\mathcal{D}_\gamma = (0)$ para qualquer $\gamma \neq 0$. Logo, $(v_\alpha, w_\beta)_{-\nu} \neq 0$ apenas quando $\alpha + \beta - \nu = 0$, ou seja, quando $\alpha + \beta = \nu$. Portanto, como $\sigma(\nu, -\nu)^2 = 1$, segue

que
$$\overline{(w_\beta, v_\alpha)_{-\nu}} = \sigma(\beta,\alpha)\epsilon(v_\alpha, w_\beta)_{-\nu} = \sigma(\beta,\alpha)\sigma(0,0)\bar{\epsilon}(v_\alpha, w_\beta)_{-\nu}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}(v_\alpha r_\tau, w_\beta)_{-\nu} &= e_0 a_\alpha r_\tau b_\beta^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0\\ &= \sigma(0,0) e_0 a_\alpha r_\tau b_\beta^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0\\ &= \sigma(\tau,\beta)\sigma(0,0)\sigma(0,\beta) e_0 a_\alpha (e_0 b_\beta r_\tau^{\star_\sigma})^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0\\ &= \sigma(\tau,\beta)(v_\alpha, w_\beta r_\tau^{\star_\sigma})_{-\nu}.\end{aligned} \tag{4.42}$$

Logo, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr_\sigma}$ via homomorfismo φ dado no **Lema 3.4.1**.

Seja $b_\beta \in \mathcal{F}_V^{gr_\sigma}$ de posto 1. Pelo **Lema 4.1.11** e **Lema 4.1.12** , existem $\mathbf{u}_\theta \in V_\theta$ e $\mathbf{w}_\tau \in V_\tau$ tais que b_β é da forma

$$\begin{aligned} b_\beta :\ & V \longrightarrow V\\ & v_\alpha \longmapsto (v_\alpha, \mathbf{w}_\tau)_{-\nu}\mathbf{u}_\theta,\end{aligned}$$

onde $\tau = \beta - \alpha, \theta = \alpha$ se $-\nu = 0$ e $\tau = -\gamma + \nu, \theta = \gamma + \beta$ se $-\nu \neq 0$ para alguns $\gamma, \alpha \in G$. Já que $\mathbf{u}_\theta \in V_\theta$ e $\mathbf{w}_\tau \in V_\tau$, existem $r_\theta \in \mathcal{R}_\theta$ e $c_\tau \in \mathcal{R}_\tau$ tais que $\mathbf{u}_\theta = e_0 r_\theta$ e $\mathbf{w}_\tau = e_0 c_\tau$. Daí,

$$\begin{aligned} v_\xi b_\beta &= (v_\xi, \mathbf{w}_\tau)_{-\nu}\mathbf{u}_\theta\\ &= e_0 a_\alpha c_\tau^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 e_0 r_\theta\\ &= v_\xi (c_\tau^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 r_\theta)\\ &= v_\xi \mathfrak{R}_{c_\tau^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 r_\theta}\end{aligned}$$

para todos $v_\xi \in V_\xi, \xi \in G$. Logo, $b_\beta = \mathfrak{R}_{c_\tau^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} s_{-\nu} e_0 r_\theta} \in Img(\varphi)$ para todos $b_\beta \in (\mathcal{F}_V^{gr_\sigma})_\beta$ de posto 1 e $\beta \in G$. Como $Img(\varphi)$ é um subanel graduado de $\mathcal{L}_V^{gr_\sigma}$, segue que $Img(\varphi)$ contém todas as somas de elementos de posto 1, com isso e aplicando os **Lema 4.1.13** e **Lema 4.1.14**, concluímos que $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma} \subseteq \mathcal{R}$ via $\varphi^{-1} : Img(\varphi) \longrightarrow \mathcal{R}$. Além do mais, por (4.42), $\star_\sigma$ é a σ-adjunta associada a $(-,-)_{-\nu}$. Assim, finalizamos a demonstração do lema. □

Proposição 4.2.6. *Seja $\mathcal{R} = \bigoplus_{\alpha\in G} \mathcal{R}_\alpha$ um anel graduado primitivo à direita com um ideal à direita graduado minimal $I = e_0\mathcal{R}$ e seja $\mathcal{D} = \bigoplus_{\alpha\in G} e_0\mathcal{R}_\alpha e_0$ um anel graduado de divisão com uma σ-involução $^{-}$, onde $e_0 \in I_0$ é um idempotente minimal. Então, $\mathcal{D}^{op_{gr}}$ e $End_{\mathcal{R}}^{gr}(I)$ são anéis graduados isomorfos e $End_{\mathcal{R}}^{gr}(I)$ possui uma σ-involução.*

Demonstração. Primeiramente observamos que o anel graduado de divisão $\mathcal{D} = e_0\mathcal{R}e_0$ é um subanel graduado de $\mathcal{R}$ e $I = e_0\mathcal{R}$ é um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda graduado.

Considere o anel oposto de divisão graduado $\mathcal{D}^{op_{gr}}$. Vamos mostrar que todo elemento de $End_{\mathcal{R}}^{gr}(I)$ é a multiplicação à esquerda por elementos de $\mathcal{D}$. Sejam $d = e_0 a e_0 \in \mathcal{D}$ e $v = e_0 r, v' = e_0 r' \in I$, com $a, r, r', b \in \mathcal{R}$, temos que

$$\begin{array}{rcl}
(v)\mathfrak{L}_d & = & dv \\
& = & e_0ae_0e_0r \in I, \\
(v+v')\mathfrak{L}_d & = & d(v+v') \\
& = & dv + dv' \\
& = & (v)\mathfrak{L}_d + (v')\mathfrak{L}_d, \\
(vb)\mathfrak{L}_d & = & d(vb) \\
& = & dvb \\
& = & (dv)b \\
& = & (v)\mathfrak{L}_d b.
\end{array}$$

Além disso, para quaisquer $d_\alpha = e_0 r_\alpha e_0 \in \mathcal{D}_\alpha$ e $v = e_0 r_\beta \in I_\beta$, temos

$$(v_\beta)\mathfrak{L}_{d_\alpha} = d_\alpha v_\beta = e_0 r_\alpha e_0 e_0 r_\beta \in I_{\alpha+\beta}.$$

Logo, $\mathfrak{L}_d \in End_{\mathcal{R}}^{gr}(I)$ para todo $d \in \mathcal{D}$.

Por outro lado, se $f \in End_{\mathcal{R}}^{gr}(I)$, como $e_0 \in I$, temos que $(e_0)f \in I$. Então, existe $r \in \mathcal{R}$ tal que

$$(e_0)f = e_0 r. \tag{4.43}$$

Agora, como $e_0^2 = e_0 \in I \subseteq \mathcal{R}$ e f é um homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos à direita graduados, temos que

$$(e_0)f = (e_0e_0)f = (e_0)fe_0. \tag{4.44}$$

De (4.43) e (4.44), obtemos que $a := (e_0)f \in \mathcal{D}$. Além disso, dado $v = e_0 r' \in I$, temos que

$$(v)f = (e_0r')f = (e_0)fr' = (e_0)fe_0r' = (v)\mathfrak{L}_a, \tag{4.45}$$

isto é, f coincide com a multiplicação à esquerda pelo elemento $a := (e_0)f \in \mathcal{D}$.

Com isso, fica bem definida a aplicação

$$\begin{array}{rcl}
\phi : \mathcal{D}^{op_{gr}} & \longrightarrow & End_{\mathcal{R}}^{gr}(I) \\
d & \longmapsto & \mathfrak{L}_d.
\end{array}$$

Como $\mathcal{D}^{op_{gr}}$ é um anel graduado de divisão e $I = e_0\mathcal{R} \neq (0)$, temos que ϕ é não nula ($\phi(e_0) = id$). Além disso, claramente ϕ é aditiva e preserva a graduação. Afirmamos que ϕ preserva a multiplicação. De fato, dados $d, d' \in \mathcal{D}$ e $v \in I$, temos

$$\begin{array}{rcl}
(v)\mathfrak{L}_{d \circ_{op_{gr}} d'} & = & d \circ_{op_{gr}} d'(v) \\
& = & d'd(v) \\
& = & d'(dv) \\
& = & (dv)\mathfrak{L}_{d'} \\
& = & ((v)\mathfrak{L}_d)\mathfrak{L}_{d'})
\end{array}$$

para todo $v \in I$. Logo,

$$\phi(d \circ_{op_{gr}} d') = \phi(d)\phi(d').$$

Portanto, ϕ é um homomorfismo de anéis graduados.

Seja $d = e_0re_0 \in Ker(\phi)$. Então, $0 = e_0re_0I = e_0re_0e_0\mathcal{R} = e_0re_0\mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}$ é um anel graduado primitivo à direita, $Ann^l_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) = (0)$. Assim, $e_0re_0 = 0$. Logo, $Ker(\phi) = (0)$.

Por (4.45) todo $f \in End^{gr}_{\mathcal{R}}(I)$ é a multiplicação à esquerda pelo elemento $(e_0)f \in \mathcal{D}$. Assim, $\phi((e_0)f) = f$ e, com isso, concluímos a sobrejetividade de ϕ. Logo, $\mathcal{D}^{op_{gr}}$ e $End^{gr}_{\mathcal{R}}(I)$ são isomorfos como anéis graduados.

Como $\mathcal{D}$ é munido de uma σ-involução $^{-}$, segue que $\mathcal{D}^{op_{gr}}$ também é munido de uma σ-involução

$$\begin{array}{rccc} \natural: & \mathcal{D}^{op_{gr}} & \longrightarrow & \mathcal{D}^{op_{gr}} \\ & d & \longmapsto & d^{\natural} = \bar{d}. \end{array}$$

Por fim, $\hat{}$ definida por

$$\begin{array}{rccc} \hat{}: & End^{gr}_{\mathcal{R}}(I) & \longrightarrow & End^{gr}_{\mathcal{R}}(I) \\ & f & \longmapsto & \hat{f} = \phi([\phi^{-1}(f)]^{\natural}). \end{array}$$

é uma σ-involução em $End^{gr}_{\mathcal{R}}(V)$. De fato, quaisquer $f \in End^{gr}_{\mathcal{R}}(I)$ e elementos homogêneos $f_\gamma \in End^{gr}_{\mathcal{R}}(V)_\gamma, f_\tau \in End^{gr}_{\mathcal{R}}(V)_\tau$, temos

$$\begin{array}{rcl} \hat{\hat{f}} & = & (\phi(\widehat{[\phi^{-1}(f)]^{\natural}})) \\ & = & \phi([\phi^{-1}(\phi[\phi^{-1}(f)]^{\natural})]^{\natural}) \\ & = & \phi([\phi^{-1}(f)]^{\natural\natural}) \\ & = & \phi(\phi^{-1}(f)) \\ & = & f, \\ \widehat{(f_\gamma f_\tau)} & = & \phi([\phi^{-1}(f_\gamma f_\tau)]^{\natural}) \\ & = & \phi([\phi^{-1}(f_\gamma)\phi^{-1}(f_\tau)]^{\natural}) \\ & = & \sigma(\gamma,\tau)\phi([\phi^{-1}(f_\tau)]^{\natural}[\phi^{-1}(f_\gamma)]^{\natural}) \\ & = & \sigma(\gamma,\tau)\phi([\phi^{-1}(f_\tau)]^{\natural})\phi([\phi^{-1}(f_\gamma)]^{\natural}) \\ & = & \sigma(\gamma,\tau)\hat{f}_\tau\hat{f}_\gamma. \end{array}$$

Com isso, finalizamos a demonstração da proposição. $\square$

Do que foi demonstrado acima resulta, em particular, que se um anel graduado $\mathcal{R}$ admite uma σ-involução e esta induz uma σ-involução em $\mathcal{D} = e_0\mathcal{R}e_0$, então $End^{gr}_{\mathcal{R}}(I)$ possui uma σ-involução que é induzida pela σ-involução em $\mathcal{R}$.

4.3 Teorema Principal

Teorema 4.3.1. *Sejam G um grupo cíclico de ordem prima e $\mathcal{R}$ um anel (F-álgebra) G-graduado. Então, $\mathcal{R}$ é um anel graduado primitivo à direita com um ideal à direita graduado minimal e uma σ-involução $\star_\sigma$ se, e somente se, existe um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado V tal que:*

a) *$V \times V$ é um par sesquilinear à esquerda com torção;*

b) *$End^{gr}_{\mathcal{R}}(V)$ possui uma σ-involução;*

c) *$\star_\sigma$ é a σ-adjunta associada a uma forma sesquilinear hermitina ou anti-hermitiana não degenerada graduada;*

d) *$\mathcal{F}^{gr}_V \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}^{gr}_V$ e $\mathcal{R}$ é invariante pela ação de $\star_\sigma$.*

Demonstração. Pelo **Teorema 4.2.2**, existem três casos.

Caso 1: Existe um elemento idempotente minimal $e_0 \in \mathcal{R}_0$ tal que $e_0^{\star_\sigma} = e_0$. Neste caso, pelo **Lema 4.2.4**, seguem os itens **a)**, **c)** e **d)**.

Caso 2: Existe um elemento idempotente minimal $e_0 \in \mathcal{R}_0$ tal que $e_0^{\star_\sigma} = -e_0$. Assim, também pelo **Lema 4.2.4**, os itens **a)**, **c)** e **d)** seguem.

Caso 3: Para todo elemento idempotente minimal $e_0 \in \mathcal{R}_0$ tem-se $e_0 e_0^{\star_\sigma} = 0$. Neste caso, o **Lema 4.2.5**, garante os itens **a)**, **c)** e **d)**.

Por fim, nos **Lema 4.2.4** e **Lema 4.2.5**, a σ-involução em $\mathcal{R}$ induz uma σ-involução em $\mathcal{D}$. Daí, pela **Proposição 4.2.6**, $End^{gr}_{\mathcal{R}}(V)$ possui uma σ-involução induzida da σ-involução $^-$ em $\mathcal{D}$ e, portanto, induzida de $\star_\sigma$. Com isso, obtemos **b)** e concluímos as afirmações de **a)**-**d)**.

Reciprocamente, pela **Proposição 4.1.15** e **Proposição 4.1.16**, $\mathcal{R}$ é graduado primitivo com uma σ-involução que é a σ-adjunta associada a $(-,-)_\nu$. □

4.4 Algumas Consequências

Nesta seção, exibiremos algumas consequências do **Teorema 4.3.1**.

Corolário 4.4.1. *Se $\nu = 0$, então $(-,-)_0$ restrita a V_0 é não degenerada.*

Demonstração. Com efeito, se $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$, então $(V_0, V_\gamma)_0 \subseteq \mathcal{D}_\gamma = (0)$ para qualquer $\gamma \neq 0$. Assim, como $(-,-)_0$ é não degenerada, temos que $(V_0, V_0)_0 \neq (0)$. Agora, se $\mathcal{D} \supsetneq \mathcal{D}_0$ e $(v_0, w_\nu)_0 = d_\nu \neq 0$, temos

$$1 = \sigma(\nu, -\nu)(v_0, \bar{d}_\nu^{-1} w_\nu)_0 \in \mathcal{D}_0,$$

onde $d_\nu^{-1} \in \mathcal{D}_{-\nu}$ é o inverso de d_ν. Portanto, $(V_0, V_0)_0 \neq 0$. □

Corolário 4.4.2. *Seja $\mathcal{R}$ um anel graduado primitivo à direita com uma σ-involução $\star_\sigma$. Suponha que I seja um ideal à direita graduado minimal de $\mathcal{R}$ tal que $a_\alpha a_\alpha^{\star_\sigma} = 0$ para quaisquer $a_\alpha \in I_\alpha$ e $\alpha \in G$. Se $\nu = 0$, então $\mathcal{D}_0$ é um corpo.*

Demonstração. De fato, das igualdades

$$\begin{aligned} 0 = e_0(e_0 + r_0)(e_0 + r_0)^{\star_\sigma} e_0^{\star_\sigma} &= e_0e_0e_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} + e_0e_0r_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} + e_0r_0e_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} + e_0r_0r_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} \\ &= e_0e_0r_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} + e_0r_0e_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} \\ &= e_0r_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} + \sigma(0,0)e_0r_0e_0^{\star_\sigma}, \end{aligned}$$

obtemos

$$e_0r_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} = -\sigma(0,0)e_0r_0e_0^{\star_\sigma} \tag{4.46}$$

para todo $r_0 \in \mathcal{R}_0$. Se existe $r_0 \in \mathcal{R}_0$ tal que $e_0(r_0 + r_0^{\star_\sigma})e_0^{\star_\sigma} \neq 0$, escrevemos $r_0 + r_0^{\star_\sigma} = t_0$ e obtemos

$$(e_0t_0e_0^{\star_\sigma})^{\star_\sigma} = e_0t_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} = e_0t_0e_0^{\star_\sigma}. \tag{4.47}$$

Neste caso, $\epsilon' = 1$. Por outro lado, por (4.46),

$$e_0t_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} = -\sigma(0,0)e_0t_0e_0^{\star_\sigma}.$$

Assim,

$$e_0t_0e_0^{\star_\sigma} = e_0t_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} = -\sigma(0,0)e_0t_0e_0^{\star_\sigma}.$$

Logo,

$$\sigma(0,0) = -1$$

e

$$e_0r_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} = e_0r_0e_0^{\star_\sigma}, \tag{4.48}$$

para todo $r_0 \in \mathcal{R}_0$. Aplicando esta última relação, para quaisquer $a_0, b_0 \in \mathcal{R}_0$, segue que

$$\begin{aligned} e_0a_0e_0b_0e_0t_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} &= e_0b_0e_0a_0e_0t_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} \\ &= e_0a_0e_0(b_0e_0t_0)^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} \\ &= e_0a_0e_0t_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma}b_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} \\ &= e_0(a_0e_0t_0^{\star_\sigma})^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma}b_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} \\ &= e_0t_0e_0^{\star_\sigma}a_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma}b_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} \\ &= e_0e_0t_0e_0^{\star_\sigma}a_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma}b_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} \\ &= e_0(e_0t_0e_0^{\star_\sigma}a_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma}b_0^{\star_\sigma})e_0^{\star_\sigma} \\ &= -e_0b_0(e_0t_0e_0^{\star_\sigma}a_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma})^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} \\ &= e_0b_0(a_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma})^{\star_\sigma}(e_0t_0e_0^{\star_\sigma})^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} \\ &= -e_0b_0e_0a_0e_0t_0e_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} \\ &= e_0b_0e_0a_0e_0t_0e_0^{\star_\sigma} \\ &= e_0b_0e_0a_0e_0t_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} \end{aligned}$$

o que nos dá

$$\begin{aligned} 0 = [e_0a_0e_0, e_0b_0e_0]\, e_0t_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} &= [e_0a_0e_0, e_0b_0e_0]\, e_0t_0e_0^{\star_\sigma} \\ &= [e_0a_0e_0, e_0b_0e_0]\, \sigma(0,0)e_0t_0e_0^{\star_\sigma}s_0^{\star_\sigma}e_0 \\ &= [e_0a_0e_0, e_0b_0e_0]\, e_0 \\ &= [e_0a_0e_0, e_0b_0e_0]\,. \end{aligned}$$

Logo, $e_0a_0e_0e_0b_0e_0 = e_0b_0e_0e_0a_0e_0$. Em outras palavras, $\mathcal{D}_0$ é um corpo. Além disso, a forma sesquilinear é de grau 0 e anti-hermitiana, já que $\epsilon' = 1$ e $\epsilon = -1$.

Agora, se para todo $r_0 \in \mathcal{R}_0$ ocorre $e_0(r_0 + r_0^{\star_\sigma})e_0^{\star_\sigma} = 0$, então

$$e_0r_0e_0^{\star_\sigma} = -e_0r_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} \tag{4.49}$$

e, neste caso, $\epsilon = -1$. Comparando esta com (4.46), obtemos que

$$\sigma(0,0) = 1$$

e, portanto, $\epsilon' = -1$. Novamente, por (4.49),

$$\begin{aligned} e_0a_0e_0b_0e_0t_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} &= -e_0a_0(b_0e_0t_0^{\star_\sigma})^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} \\ &= -e_0a_0(e_0t_0e_0^{\star_\sigma}b_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma}) \\ &= -(e_0a_0e_0t_0e_0^{\star_\sigma})b_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} \\ &= (e_0t_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma}a_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma})b_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} \\ &= -e_0b_0e_0a_0e_0t_0e_0^{\star_\sigma} \\ &= e_0b_0e_0a_0e_0t_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma}. \end{aligned}$$

Logo, para todos $a_0, b_0 \in \mathcal{R}_0$, temos que

$$e_0a_0e_0b_0e_0t_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} = e_0b_0e_0a_0e_0t_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma}$$

o que implica

$$\begin{aligned} 0 = [e_0a_0e_0, e_0b_0e_0]\, e_0t_0^{\star_\sigma}e_0^{\star_\sigma} &= [e_0a_0e_0, e_0b_0e_0]\, e_0t_0e_0^{\star_\sigma} \\ &= -[e_0a_0e_0, e_0b_0e_0]\, \sigma(0,0)e_0t_0e_0^{\star_\sigma}s_0^{\star_\sigma}e_0 \\ &= [e_0a_0e_0, e_0b_0e_0]\, e_0 \\ &= [e_0a_0e_0, e_0b_0e_0]\,. \end{aligned}$$

Assim, $e_0a_0e_0e_0b_0e_0 = e_0b_0e_0e_0a_0e_0$, ou seja, $\mathcal{D}_0$ é um corpo. $\square$

Suponha que $\mathcal{A}$ seja uma F-álgebra G-graduada simples de dimensão finita com um ideal à direita G-graduado. Pelo **Teorema 1.5.21**, $\mathcal{A} \cong End_{\mathcal{C}}^{gr}(V)$, onde $\mathcal{C} = (End_{\mathcal{A}}^{gr}(V))^{op_{gr}}$, e V é um $\mathcal{A}$-módulo à direita G-graduado de dimensão finita sobre $\mathcal{C}$. Pela **Proposição 4.2.6**, $(e_0\mathcal{A}e_0)^{op_{gr}} \cong (\mathcal{C})^{op_{gr}}$, onde $e_0 \in \mathcal{A}_0$ é um idempotente minimal. Aplicando o **Teorema 4.3.1**, obtemos:

Corolário 4.4.3. *Seja $\mathcal{A}$ uma F-álgebra graduada simples de dimensão finita sobre F. Então $\mathcal{A}$ é uma F-álgebra graduada simples com uma σ-involução $\star_\sigma$ se, e somente se,*

$$(\mathcal{A}, \star_\sigma) \cong (End_{\mathcal{D}^{op_{gr}}}^{gr}(V), *_\sigma),$$

onde

a) *$\mathcal{D}$ é uma F-álgebra graduada de divisão de dimensão finita sobre F com uma σ-involução $^-$;*

b) *V é um $\mathcal{D}$-espaço vetorial à esquerda graduado dotado com uma não degenerada forma ϵ-hermitiana graduada $(-,-)_\nu : V \times V \longrightarrow \mathcal{D}$, onde $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = -1$.*

Além disso, $*_\sigma$ é a σ-adjunta associada a $(-,-)_\nu$.

Lema 4.4.4. *Se $\mathcal{A}$ é uma F-álgebra graduada com σ-involução $\star_\sigma$ tal que $(\mathcal{A}, \star_\sigma)$ é simples, então $\mathcal{A}$ é simples (como uma F-álgebra graduada) ou $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}^{\star_\sigma}$, onde $\mathcal{B}$ é uma F-álgebra graduada simples.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{B} \neq (0)$ seja um ideal graduado não nulo de $\mathcal{A}$. Então, $\mathcal{B} + \mathcal{B}^{\star_\sigma}$ e $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}^{\star_\sigma}$ são $\star_\sigma$-ideais graduados de $(\mathcal{A}, \star_\sigma)$. Como $(\mathcal{A}, \star_\sigma)$ é simples, temos $\mathcal{B} + \mathcal{B}^{\star_\sigma} = \mathcal{A}$. Se $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{A}$, então $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}^{\star_\sigma} = (0)$ e $\mathcal{B} \oplus \mathcal{B}^{\star_\sigma} = \mathcal{A}$. Logo, $\mathcal{A}$ não é simples como álgebra graduada. $\square$

Observamos que se F é um corpo, então as únicas σ-involuções em F são as aplicações multiplicação por 1_F e multiplicação por -1_F. O resultado abaixo nos dá uma descrição de σ-involuções em F-álgebras $\mathbb{Z}_p$-graduadas de divisão de dimensão finita, maior que 2, sobre um corpo F algebricamente fechado e de característica 0, onde p é um número primo.

Teorema 4.4.5. *Sejam p um número primo e F um corpo algebricamente fechado e de característica 0. Suponha que a F-álgebra $\mathbb{Z}_p$-graduada de divisão $F[\mathbb{Z}_p]$ admita uma σ-involução $\star_\sigma$. Então, existe uma função $\omega : G \longrightarrow \{1, -1\}$ tal que $\sigma(\alpha, \beta) = \dfrac{\omega(\alpha+\beta)}{\omega(\alpha)\omega(\beta)}$ e $\star_\sigma : F[\mathbb{Z}_p] \longrightarrow F[\mathbb{Z}_p]$ é definida por*

$$(\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_p} \eta_\alpha \alpha)^{\star_\sigma} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_p} \eta_\alpha \omega(\alpha)\alpha. \tag{4.50}$$

Reciprocamente, se $\mathcal{D}$ é uma F-álgebra $\mathbb{Z}_p$-graduada de divisão de dimensão finita sobre F com uma σ-involução $*_\sigma$, então $(\mathcal{D}, *_\sigma)$ e $(F[\mathbb{Z}_p], \star_\sigma)$ são isomorfas como F-álgebras $\mathbb{Z}_p$-graduadas com σ-involução, onde $\star_\sigma$ é definida por (4.50).

Demonstração. De fato, seja $\star_\sigma$ uma σ-involução em $F[\mathbb{Z}_p]$. Como $\star_\sigma$ preserva a graduação e é de ordem 2, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, temos

$$\begin{aligned}
(\alpha)^{\star_\sigma} &= \omega(\alpha)\alpha, \\
\alpha &= (\alpha)^{\star_\sigma\star_\sigma} \\
&= (\omega(\alpha)\alpha)^{\star_\sigma} \\
&= (\omega(\alpha))^2\alpha,
\end{aligned}$$

onde $\omega(\alpha) \in F^{\times}$. Logo, $(\omega(\alpha))^2 = 1$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. Além do mais, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$,

$$\begin{aligned}\omega(\alpha+\beta)(\alpha\beta) &= (\alpha\beta)^{\star_\sigma}\\ &= \sigma(\alpha,\beta)\beta^{\star_\sigma}\alpha^{\star_\sigma}\\ &= \sigma(\alpha,\beta)\omega(\alpha)\omega(\beta)(\alpha\beta)\end{aligned}$$

e, portanto, $\sigma(\alpha,\beta) = \dfrac{\omega(\alpha+\beta)}{\omega(\alpha)\omega(\beta)}$. Assim, pela linearidade de $\star_\sigma$, para todo $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_p} \eta_\alpha \alpha \in F[\mathbb{Z}_p]$, temos

$$(\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_p} \eta_\alpha \alpha)^{\star_\sigma} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_p} \eta_\alpha \omega(\alpha)\alpha.$$

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{D}$ seja uma F-álgebra $\mathbb{Z}_p$-graduada de divisão e $*_\sigma$ seja uma σ-involução em $\mathcal{D}$. Pelo **Teorema 1.6.1**, $\mathcal{D} \cong F^{\sigma'}[\mathbb{Z}_p]$, onde σ' é um 2-cociclo em G. Por outro lado, $\mathbb{Z}_p$ é cíclico, então, pelo **Lema 3.1.1**, σ' é um cobordo e, pelo **Lema 3.1.2**, $F[\mathbb{Z}_p] \cong F^{\sigma'}[\mathbb{Z}_p]$. Afirmamos que $(\mathcal{D}, *_\sigma)$ e $(F[\mathbb{Z}_p], \star_\sigma)$ são isomorfas como F-álgebra $\mathbb{Z}_p$-graduadas com σ-involução, onde $\star_\sigma$ é uma σ-involução em $F[\mathbb{Z}_p]$ induzida de $*_\sigma$ pelo isomorfismo $\mathcal{D} \cong F[\mathbb{Z}_p]$. De fato, seja $\varphi : \mathcal{D} \longrightarrow F[\mathbb{Z}_p]$ o isomorfismo de F-álgebras $\mathbb{Z}_p$-graduadas garantido pelos **Teorema 1.6.1** e **Lema 3.1.2**. Defina

$$\begin{array}{rccl}\star_\sigma : & F[\mathbb{Z}_p] & \longrightarrow & F[\mathbb{Z}_p]\\ & a & \longmapsto & a^{\star_\sigma} = \varphi([\varphi^{-1}(a)]^{*_\sigma}).\end{array}$$

Vamos mostrar que $\star_\sigma$ é uma σ-involução em $F[\mathbb{Z}_p]$. Dados $a \in F[\mathbb{Z}_p]$ e $a_\alpha \in F[\mathbb{Z}_p]_\alpha, a_\beta \in F[\mathbb{Z}_p]_\beta, \alpha, \beta \in G$, temos

$$\begin{aligned}a^{\star_\sigma\star_\sigma} &= (\varphi([\varphi^{-1}(a)]^{*_\sigma}))^{\star_\sigma}\\ &= \varphi([\varphi^{-1}(\varphi([\varphi^{-1}(a)]^{*_\sigma}))]^{*_\sigma})\\ &= \varphi([\varphi^{-1}(a)]^{*_\sigma*_\sigma})\\ &= \varphi(\varphi^{-1}(a))\\ &= a,\\ (a_\alpha a_\beta)^{\star_\sigma} &= \varphi([\varphi^{-1}(a_\alpha a_\beta)]^{*_\sigma})\\ &= \sigma(\alpha,\beta)\varphi([\varphi^{-1}(a_\beta)^{*_\sigma}\varphi^{-1}(a_\alpha)^{*_\sigma}])\\ &= \sigma(\alpha,\beta)\varphi([\varphi^{-1}(a_\beta)]^{*_\sigma})\varphi([\varphi^{-1}(a_\alpha)]^{*_\sigma})\\ &= \sigma(\alpha,\beta)a_\beta^{\star_\sigma}a_\alpha^{\star_\sigma}.\end{aligned}$$

Pela linearidade de φ e $*_\sigma$, segue que $\star_\sigma$ também é linear. Como φ e $*_\sigma$ são de grau neutro, temos que $\star_\sigma$ é de grau neutro. Logo, $\star_\sigma$ é uma σ-involução em $F[\mathbb{Z}_p]$. Daí,

$$\begin{array}{rccl}\psi : & (\mathcal{D}, *_\sigma) & \longrightarrow & (F[\mathbb{Z}_p, \star_\sigma)]\\ & d & \longmapsto & \varphi(d^{*_\sigma})\end{array}$$

é um isomorfismo de F-álgebras $\mathbb{Z}_p$-graduadas com σ-involução. Por hipótese, $\star_\sigma$ é definida por (4.50). Com isso, concluímos a demonstração do resultado. $\square$

Em [14] é feita a demonstração do resultado abaixo. Aqui apresentamos uma outra demonstração aplicando o **Teorema 4.4.5**.

Corolário 4.4.6. *Sejam F um corpo algebricamente fechado de característica zero e $G = \mathbb{Z}_2$. Então, $F[\mathbb{Z}_2]$ não possui superinvoluções.*

Demonstração. De fato, suponha por contradição que $F[\mathbb{Z}_2]$ admita uma superinvolução. Então, pelo **Teorema 4.4.5**, existe $\rho : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow F^{\times}$ tal que $\sigma(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \dfrac{\rho(\overline{\alpha+\beta})}{\rho(\bar{\alpha})\rho(\bar{\beta})} = (-1)^{\alpha\beta}$ com $\rho(\bar{\gamma}) \in \{1, -1\}$ para todo $\bar{\gamma} \in \mathbb{Z}_2$. Assim,

$$\sigma(\bar{0}, \bar{0}) = \sigma(\bar{0}, \bar{1}) = \sigma(\bar{1}, \bar{0}) = \rho(\bar{0}) = 1,$$

$$-1 = \sigma(\bar{1}, \bar{1}) = \frac{\rho(\bar{0})}{\rho(\bar{1})\rho(\bar{1})} = \frac{1}{\rho(\bar{1})^2},$$

o que contradiz o fato de que $\rho(\bar{\alpha}) \in \{1, -1\}$ para todo $\bar{\alpha} \in \mathbb{Z}_2$. Logo, $F[\mathbb{Z}_2]$ não possui superinvoluções. Em particular, $M_n(F^{\sigma}[\mathbb{Z}_2])$ não possui superinvoluções para qualquer 2-cociclo $\sigma : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow F^{\times}$, pois, caso contrário, $F[\mathbb{Z}_2]$ também possuiria. □

4.5 σ-involuções no anel de Matrizes $\mathbb{Z}_3$-Graduado

Nesta seção, apresentaremos resultados análogos ao **Teorema 2.3.2** demonstrado em [18]. Em toda seção, σ é um 2-cociclo anti-simétrico com valores em $\{1, -1\}$. Como visto, neste caso, σ é também simétrico, ou seja, $\sigma(\alpha, \beta) = \sigma(\beta, \alpha)$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_3$.

Considere $\mathcal{D}$ um anel de divisão com graduação trivial. Estudaremos as σ-involuções nos seguintes anéis com $\mathbb{Z}_3$-graduação:

1) $\mathcal{A} = M_{p+p}(\mathcal{D}) = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in M_p(\mathcal{D}) \right\}, \\
\mathcal{A}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in M_p(\mathcal{D}) \right\}, \\
\mathcal{A}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \mid y \in M_p(\mathcal{D}) \right\}.
\end{aligned}$$

2) $\mathcal{A} = M_{p+q+p}(\mathcal{D}) = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, onde

$$\begin{aligned}
A_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in M_p(\mathcal{D}), b \in M_q(\mathcal{D}) \right\}, \\
\mathcal{A}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ y & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix} \mid x \in M_p(\mathcal{D}), y \in M_{q\times p}(\mathcal{D}), z \in M_{p\times q}(\mathcal{D}) \right\}, \\
\mathcal{A}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & g \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid f \in M_{p\times q}(\mathcal{D}), g \in M_{q\times p}(\mathcal{D}), h \in M_p(\mathcal{D}) \right\}.
\end{aligned}$$

Proposição 4.5.1. *Suponha que $M_n(\mathcal{D})$ seja um anel G-graduado munido de uma σ-involução $*_\sigma$ e $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$, então $\mathcal{D}$ possui uma involução $^-$ induzida da σ-involução $*_\sigma$ em $M_n(\mathcal{D})$.*

Demonstração. Primeiro, observe que $\mathcal{D} \subset M_n(\mathcal{D})$, para qualquer que seja $n > 0$, via o monomorfismo

$$\phi : d \longmapsto \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & d & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Defina

$$\begin{array}{rccl} ^-: & \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ & d & \longmapsto & \bar{d} = \sigma(0,0)\phi^{-1}([\phi(d)]^{*_\sigma}), \end{array} \tag{4.51}$$

onde $\phi^{-1} : Img(\phi) \longrightarrow \mathcal{D}$. Afirmamos que $^-$ é uma involução em $\mathcal{D}$. Com efeito, dados $d, c \in \mathcal{D}$, temos

$$\begin{aligned} \bar{\bar{d}} &= \sigma(0,0)\overline{(\phi^{-1}([\phi(d)]^{*_\sigma}))} \\ &= \phi^{-1}([\phi(\phi^{-1}[\phi(d)]^{*_\sigma})]^{*_\sigma}) \\ &= \phi^{-1}(\phi(d)^{*_\sigma *_\sigma}) \\ &= \phi^{-1}(\phi(d)) \\ &= d \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \overline{dc} &= \sigma(0,0)\left\{\begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & d & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & c & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c \end{pmatrix}\right\}^{*_\sigma} \\ &= \sigma(0,0)\sigma(0,0)\begin{pmatrix} c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & c & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c \end{pmatrix}^{*_\sigma}\begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & d & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d \end{pmatrix}^{*_\sigma} \\ &= \bar{c}\bar{d}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{D}$ admite uma involução $^-$. □

Vale lembrar que se $\mathcal{D}$ admite uma involução $^-$, então $M_p(\mathcal{D})$ admite uma involução $\tilde{}$, onde $\tilde{a} = \bar{a}^t, a \in M_p(\mathcal{D})$ e t é a involução transposta em $M_p(\mathcal{D})$.

Proposição 4.5.2. *Seja $\mathcal{A} = M_{p+p}(\mathcal{D})$ com a $\mathbb{Z}_3$-graduação dada em **1)**. Se $*_\sigma$ é uma σ-involução em $\mathcal{A}$, então $*_\sigma$ é uma das aplicações abaixo:*

a)

$$\begin{pmatrix} f & x \\ y & z \end{pmatrix}^{*_\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{z} & c\tilde{x} \\ \sigma(1,2)\sigma(0,0)\bar{c}\tilde{y} & \sigma(0,0)\tilde{f} \end{pmatrix} \tag{4.52}$$

e, neste caso, $\mathcal{A}_0$ é $*_\sigma$-simples.

b)
$$\begin{pmatrix} f & x \\ y & z \end{pmatrix}^{*_\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{f} & \sigma(0,0)\sigma(1,2)\tilde{c}\tilde{y} \\ c\tilde{x} & \sigma(0,0)\tilde{z} \end{pmatrix}.$$

e, neste caso, $\mathcal{A}_0$ não é $*_\sigma$-simples.

Onde $c \in Z(\mathcal{D})$ é tal que $c\bar{c} = 1$, $\tilde{a} = \bar{a}^t$ é uma involução em $M_p(\mathcal{D})$, $^-$ é a involução em $\mathcal{D}$ definida em (4.51) *e t é a involução transposta em $M_p(\mathcal{D})$.*

Demonstração. Considere $e_{ij}, 1 \leq i,j \leq 2p$, as matrizes unitárias de $\mathcal{A}$. Sejam $^-$ e $^\sim$ involuções em $\mathcal{D}$ e $M_p(\mathcal{D})$, respectivamente. Observe que $a^{*_\sigma} = \sigma(0,0)\tilde{a}$ para todo $a \in M_p(\mathcal{D})$. Se

$$f_{11} = \sum_{i=1}^{p} e_{ii}, \quad f_{22} = \sum_{i=1}^{p} e_{i+p\ i+p}, \quad f_{12} = \sum_{i=1}^{p} e_{i\ p+i}, \quad f_{21} = \sum_{i=1}^{p} e_{p+i\ i},$$

então

$$\mathcal{A}_0 = M_p(\mathcal{D})f_{11} \oplus M_p(\mathcal{D})f_{22}, \quad \mathcal{A}_1 = M_p(\mathcal{D})f_{21}, \text{ e } \mathcal{A}_2 = M_p(\mathcal{D})f_{12}.$$

Como $\mathcal{A}$ possui uma σ-involução, temos duas possibilidades: $f_{11}^{*_\sigma} = \sigma(0,0)f_{22}$ ou $f_{11}^{*_\sigma} = \sigma(0,0)f_{11}$.

a) Se $f_{11}^{*_\sigma} = \sigma(0,0)f_{22}$, então $f_{22}^{*_\sigma} = \sigma(0,0)f_{11}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} (f_{12})^{*_\sigma} &= (f_{11}f_{12}f_{22})^{*_\sigma} \\ &= f_{11}f_{12}^{*_\sigma}f_{22} \\ &= cf_{12} \end{aligned}$$

para algum $c \in M_p(\mathcal{D})$. Por outro lado, para qualquer $a \in M_p(\mathcal{D})$, temos

$$\begin{aligned} (af_{12})^{*_\sigma} &= ((af_{11})f_{12})^{*_\sigma} \\ &= \sigma(0,2)f_{12}^{*_\sigma}(af_{11})^{*_\sigma} \\ &= \sigma(0,2)cf_{12}(af_{11})^{*_\sigma} \\ &= \sigma(0,2)\sigma(0,0)cf_{12}f_{11}^{*_\sigma}a^{*_\sigma} \\ &= \sigma(0,2)\sigma(0,0)\sigma(0,0)\sigma(0,0)cf_{12}(\tilde{a}f_{22}) \\ &= c\tilde{a}f_{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (af_{12})^{*_\sigma} &= (f_{12}(af_{22}))^{*_\sigma} \\ &= \sigma(2,0)(af_{22})^{*_\sigma}f_{12}^{*_\sigma} \\ &= \sigma(2,0)\sigma(0,0)\sigma(0,0)\sigma(0,0)f_{11}\tilde{a}cf_{12} \\ &= f_{11}\tilde{a}cf_{12} \\ &= \tilde{a}cf_{12}, \end{aligned}$$

ou seja, $c \in Z(M_p(\mathcal{D}))$. Além disso,

$$\begin{aligned} f_{12} &= (f_{12})^{*_\sigma *_\sigma} \\ &= (cf_{12})^{*_\sigma} \\ &= \sigma(0,2)c^{*_\sigma}f_{12}^{*_\sigma} \\ &= \sigma(0,2)\sigma(0,0)\tilde{c}cf_{12} \\ &= \tilde{c}cf_{12}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\tilde{c}c = 1. \tag{4.53}$$

Analogamente, $f_{21} = df_{21}$, onde $d \in Z(M_p(\mathcal{D}))$ e $d\tilde{d} = 1$. Temos ainda que

$$\begin{array}{rcl} \sigma(0,0)f_{22} & = & f_{11}^{*_\sigma} \\ & = & (f_{12}f_{21})^{*_\sigma} \\ & = & \sigma(2,1)f_{21}^{*_\sigma}f_{12}^{*_\sigma} \\ & = & \sigma(2,1)dcf_{21}f_{12} \\ & = & \sigma(2,1)dcf_{22}, \end{array}$$

o que nos mostra que $dc = \sigma(1,2)\sigma(0,0)$. Como $\sigma(1,2) = \sigma(2,1)$, temos

$$dc = \sigma(1,2)\sigma(0,0) = \sigma(2,1)\sigma(0,0). \tag{4.54}$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} f & x \\ y & z \end{pmatrix}^{*_\sigma} = \begin{pmatrix} \tilde{z} & c\tilde{x} \\ \sigma(1,2)\sigma(0,0)\tilde{c}\tilde{y} & \sigma(0,0)\tilde{f} \end{pmatrix}.$$

Além do mais, $\mathcal{A}_0$ é $*_\sigma$-simples.

b) Se $f_{11}^{*_\sigma} = \sigma(0,0)f_{11}$, então $f_{22}^{*_\sigma} = \sigma(0,0)f_{22}$. Similar ao que foi feito em **a)**, $f_{12}^{*_\sigma} = af_{21}$ e $f_{21}^{*_\sigma} = df_{12}$, onde $c, d \in Z(M_p(\mathcal{D}))$, com

$$\begin{array}{rcl} c\tilde{c} & = & 1, \\ d\tilde{d} & = & 1, \\ cd & = & \sigma(1,2)\sigma(0,0) \\ & = & \sigma(2,1)\sigma(0,0) \end{array}$$

e

$$\begin{pmatrix} f & x \\ y & z \end{pmatrix}^{*_\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{f} & \sigma(0,0)\sigma(1,2)\tilde{c}\tilde{y} \\ c\tilde{x} & \sigma(0,0)\tilde{z} \end{pmatrix}.$$

Entretanto, aqui, $\mathcal{A}_0$ não é $*_\sigma$-simples.

□

Vemos que da **Proposição 3.3.6**, **Proposição 4.5.1** e **Proposição 4.5.2**, obtemos o resultado a seguir.

Teorema 4.5.3. *Seja $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$ um anel de divisão com $\mathbb{Z}_3$-graduação trivial. Se $\mathcal{A} = M_{p+q}(\mathcal{D})$ é um anel $\mathbb{Z}_3$-graduado com σ-involução $*_\sigma$ tal que $(\mathcal{A}_0, {}^{*_\sigma}|_{\mathcal{A}_0})$ é simples, então $p = q$, $\mathcal{D}$ possui uma involução $^-$ e $\mathcal{A}$ é isomorfo a $M_{p+p}(\mathcal{D})$ com σ-involução $*_\sigma$ dada em* (4.52). *Reciprocamente, se $\mathcal{D}$ é um anel de divisão com involução $^-$, então* (4.52) *define uma σ-involução no anel $\mathbb{Z}_3$-graduado simples $M_{p+p}(\mathcal{D})$.*

Teorema 4.5.4. *Seja $\mathcal{D}$ um anel de divisão com $\mathbb{Z}_3$-graduação trivial. Considere $\mathcal{A} = M_{p+q+r}(\mathcal{D}), p, q, r > 0$, um anel $\mathbb{Z}_3$-graduado com a seguinte graduação:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \mid f \in M_p(\mathcal{D}), h \in M_r(\mathcal{D}), g \in M_q(\mathcal{D}) \right\}, \\
\mathcal{A}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \mid a \in M_{q\times p}(\mathcal{D}), b \in M_{r\times q}(\mathcal{D}), c \in M_p(\mathcal{D}) \right\}, \\
\mathcal{A}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid y \in M_{q\times r}(\mathcal{D}), x \in M_{p\times q}(\mathcal{D}), z \in M_{r\times p}(\mathcal{D}) \right\}.
\end{aligned}$$

Suponha que $A = \left\{ \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \mid f \in M_p(\mathcal{D}), h \in\in M_r(\mathcal{D}) \right\}$. Se $*_\sigma$ é uma σ-involução em $\mathcal{A}$ com $(A, {}^{*_\sigma}|_A)$ simples, então $p = r, \mathcal{D}$ tem uma involução $^-$ e $(\mathcal{A}, *_\sigma)$ é isomorfo a $M_{p+q+p}(\mathcal{D})$ com a σ-involução dada por

$$\begin{pmatrix} f & x & c \\ a & g & y \\ z & b & h \end{pmatrix}^{*_\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{h} & \alpha\tilde{y} & \beta\tilde{c} \\ \tau\tilde{b} & \sigma(0,0)\tilde{g} & \gamma\tilde{x} \\ \omega\tilde{z} & \eta\tilde{a} & \sigma(0,0)\tilde{f} \end{pmatrix}, \tag{4.55}$$

onde $\tilde{}$ é a involução $\tilde{a} = \bar{a}^t$ em $M_p(\mathcal{D}), M_q(\mathcal{D})$ e $\alpha, \beta, \tau, \eta, \omega, \gamma \in Z(\mathcal{D})$ são tais que

$$\begin{array}{l}
\beta\tau = \sigma(1,1)\gamma, \quad \beta\eta = \sigma(1,1)\alpha, \quad \eta\tau = \sigma(1,1)\omega, \\
\alpha\gamma = \sigma(2,2)\beta, \gamma\omega = \sigma(2,2)\tau, \quad \omega\alpha = \sigma(2,2)\eta, \\
\sigma(1,2)\beta\omega = \sigma(1,2)\tau\alpha = \sigma(2,1)\eta\gamma = \sigma(0,0) \\
\bar{\tau}\eta = \gamma\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta} = \omega\bar{\omega} = 1.
\end{array} \tag{4.56}$$

Reciprocamente, se $\mathcal{D}$ possui uma involução $^-$, então (4.55) define uma σ-involução em $M_{p+q+p}(\mathcal{D})$.

Demonstração. Pela **Proposição 4.5.1**, $\mathcal{D}$ possui uma involução $^-$. Seja $\tilde{}$ a involução de $M_p(\mathcal{D})$ dada por $\tilde{a} = \bar{a}^t$, onde $a \in M_p(\mathcal{D})$. Estendemos a involução $\tilde{}$ para $A = M_p(\mathcal{D}) \oplus \{0\} \oplus M_r(\mathcal{D})$. Como A é $*_\sigma$-simples, temos que $M_p(\mathcal{D})$ é anti-isomorfa a $M_r(\mathcal{D})$. Além disso, o isomorfismo de anéis graduados com σ-involução é dado por

$$\begin{array}{lcl}
\varphi : (A, *_\sigma) & \longrightarrow & (A, \sharp_\sigma) \\
(a, 0, b) & \longmapsto & (b^{*_\sigma}, 0, a^{*_\sigma})^{\sharp_\sigma},
\end{array}$$

onde $(a,0,b)^{\sharp_\sigma} = \sigma(0,0)\widetilde{(a,0,b)}$. Note que $\varphi^{-1} = \sharp_\sigma *_\sigma$ e

$$\begin{aligned}
\varphi((a,0,b)^{*_\sigma}) &= \varphi((b^{*_\sigma}, 0, a^{*_\sigma})) \\
&= (a^{*_\sigma *_\sigma}, 0, b^{*_\sigma *_\sigma})^{\sharp_\sigma} \\
&= (a, 0, b)^{\sharp_\sigma}.
\end{aligned}$$

Suponha $p \leq q$ (o caso $q \leq p$ é análogo). Seja

$$f_{11}=\sum_{i=1}^{p}e_{ii},\quad f_{22}=\sum_{i=p+1}^{2p}e_{ii},\qquad f_{33}=\sum_{i=p+q+1}^{p+q+p}e_{ii},$$
$$f_{12}=\sum_{i=1}^{p}e_{i\ p+i},\qquad f_{13}=\sum_{i=1}^{p}e_{i\ p+q+i},$$
$$f_{21}=\sum_{i=1}^{p}e_{p+i\ i},\qquad f_{23}=\sum_{i=1}^{p}e_{p+i\ p+q+i},$$
$$f_{31}=\sum_{i=1}^{p}e_{p+q+i\ i},\quad f_{32}=\sum_{i=1}^{p}e_{p+q+i\ p+i}.$$

Então,

$$\mathcal{A}_0=M_p(\mathcal{D})f_{11}\oplus M_q(\mathcal{D})f_{22}\oplus M_p(\mathcal{D})f_{33},$$

$$\mathcal{A}_1=M_p(\mathcal{D})f_{13}\oplus(M_q(\mathcal{D})f_{21}+f_{21}M_p(\mathcal{D}))\oplus(M_p(\mathcal{D})f_{32}+f_{32}M_q(\mathcal{D})),$$

$$\mathcal{A}_2=M_p(\mathcal{D})f_{31}\oplus(M_p(\mathcal{D})f_{12}+f_{12}M_q(\mathcal{D}))\oplus(M_q(\mathcal{D})f_{23}+f_{23}M_p(\mathcal{D})).$$

e

$$f_{11}^{*_\sigma}=\sigma(0,0)f_{33},\quad f_{33}^{*_\sigma}=\sigma(0,0)f_{11}\text{ e }f_{22}^{*_\sigma}=\sigma(0,0)f_{22}.$$

Com os mesmos argumentos da **Proposição 4.5.2**, temos que

$$\begin{array}{lll} f_{11}^{*_\sigma}=\sigma(0,0)f_{33}, & f_{33}^{*_\sigma}=\sigma(0,0)f_{11}, & f_{22}^{*_\sigma}=\sigma(0,0)f_{22}\\ f_{13}^{*_\sigma}=\beta f_{13}, & f_{31}^{*_\sigma}=\omega f_{31}, & f_{12}^{*_\sigma}=\gamma f_{12}\\ f_{32}^{*_\sigma}=\tau f_{21}, & f_{23}^{*_\sigma}=\alpha f_{12}, & f_{21}^{*_\sigma}=\eta f_{32}, \end{array}$$

onde $\beta,\omega,\gamma,\tau,\alpha,\eta\in Z(M_p(\mathcal{D}))$ são tais que

$$\begin{array}{l} \beta\tau=\sigma(1,1)\gamma,\quad \beta\eta=\sigma(1,1)\alpha,\quad \eta\tau=\sigma(1,1)\omega,\\ \alpha\gamma=\sigma(2,2)\beta,\gamma\omega=\sigma(2,2)\tau,\quad \omega\alpha=\sigma(2,2)\eta,\\ \sigma(1,2)\beta\omega=\sigma(1,2)\tau\alpha=\sigma(2,1)\eta\gamma=\sigma(0,0)\\ \bar{\tau}\eta=\gamma\bar{\alpha}=\beta\bar{\beta}=\omega\bar{\omega}=1. \end{array}$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} f & x & c\\ a & g & y\\ z & b & h \end{pmatrix}^{*_\sigma}=\begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{h} & \alpha\tilde{y} & \beta\tilde{c}\\ \tau\tilde{b} & \sigma(0,0)\tilde{g} & \gamma\tilde{x}\\ \omega\tilde{z} & \eta\tilde{a} & \sigma(0,0)\tilde{f} \end{pmatrix}.$$

Reciprocamente, pela **Proposição 3.3.6**, se $\mathcal{D}$ é um anel de divisão com involução $^-$, então (4.55) define uma σ-involução no anel graduado simples $M_{p+q+p}(\mathcal{D})$. □

Capítulo 5

Considerações Finais

No decorrer do texto, apresentamos vários resultados que antecederam nossa pesquisa. A saber:

1) se A é uma F-álgebra de dimensão finita com involução do primeiro tipo sobre um corpo algebricamente fechado de característica 0, então, temos a descrição completa das álgebras simples com involução (veja [22]);

2) se $\mathcal{A}$ é uma superálgebra de dimensão finita com superinvolução sobre um corpo algebricamente fechado de característica 0, encontramos em [3] e [25] uma descrição das superálgebras simples com superinvolução;

3) no caso em que $\mathcal{A}$ é uma álgebra $\mathbb{Z}_3$-graduada de dimensão finita, há respostas parciais para álgebras $\mathbb{Z}_3$-graduadas com $\mathbb{Z}_3$-involução (veja [18]);

4) se $\mathcal{A}$ é uma álgebra $\mathbb{Z}_q$-graduada de dimensão finita com involução graduada, $*_{gr}$, sobre um corpo algebricamente fechado de característica 0, em [27] encontramos uma descrição das álgebras $*_{gr}$-graduadas simples quando q é um número primo ou $q = 4$. Para involuções graduadas, temos também as descrições de Bahturin, Shestakov e Zaicev, em [4], e Bahturin e Zaicev, em [5], na álgebra G-graduada $M_n(F)$ quando F é um corpo algebricamente fechado de característica diferente de 2 e G é um grupo abeliano finito.

No presente trabalho, obtivemos uma caracterização de anéis G-graduados primitivos à direita com um ideal à direita G-graduado minimal relacionada com pares bilineares não degenerados graduados, onde G é um grupo abeliano finito. Além disso, se $G = (\mathbb{Z}_p, +)$, onde p é um número primo, caracterizamos σ-involuções em anéis G-graduados primitivos à direita com um ideal à direita G-graduado minimal. Com essa caracterização, obtivemos corolários relacionados com uma descrição de σ-involuções em álgebras graduadas simples.

É evidente que o estudo de álgebras simples, álgebras graduadas simples, álgebras simples com involuções, álgebras graduadas simples com involuções graduadas é importante e tem causado interesse em muitos pesquisadores.

Nessa linha, encerramos este trabalho apresentando algumas questões. Estas, até o momento, estão sem resposta.

Questão 1: Descrição das F-álgebras G-graduadas $*_\sigma$-simples de dimensão finita, onde $*_\sigma$ é uma σ-involução, G é um grupo abeliano finito e F é um corpo algebricamente fechado de característica 0.

Questão 2: Sejam G um grupo abeliano finito e $\mathcal{R}$ um anel (F-álgebra) G-graduado. Então, $\mathcal{R}$ é um anel graduado primitivo à direita com um ideal à direita graduado minimal e uma σ-involução $\star_\sigma$ se, e somente se, existe um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado V tal que:

a) $V \times V$ é um par sesquilinear à esquerda com torção;

b) $End_{\mathcal{R}}^{gr}(V)$ possui uma σ-involução;

c) $\star_\sigma$ é a adjunta associada a uma forma sesquilinear não degenerada graduada hermitina ou anti-hermitiana;

d) $\mathcal{F}_V^{gr} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr}$ e $\mathcal{R}$ é invariante pela ação de $\star_\sigma$.

Referências Bibliográficas

[1] Yu. A. Bahturin, M. Bresăr, M. Kochetov, *Group gradings on finitary simple Lie algebras*, Int. J. Algebra Comp, **22**(2012), 125-146.

[2] Yu. A. Bahturin, A. Giambruno, *Group gradings on associative algebras with involution*, Canad. Math. Bull., **51** (2008), 182-194.

[3] Yu. A. Bahturin, M. Tvalavadze, T. Tvalavadze, *Group gradings on superinvolution simple superalgebras*, Linear Algebra and its Applications, **431**(2009), 1054-1069.

[4] Yu. A. Bahturin, I. P. Shestakov, M. V. Zaicev, *Gradings on simple Jordan and Lie algebras*, J. Algebras, **283** (2005), 849-868.

[5] Yu. A. Bahturin, M. V. Zaicev, *Involutions on graded matrix algebras*, J. Algebra, **315**(2007), 527-540.

[6] Yu. A. Bahturin, M. V. Zaicev, S. K. Sehgal, *Finite-dimensional simple graded algebras*, Sb. Math, **199**(2008), 965-983.

[7] I. N. Balaba, A. L. Kanunnikov, A. V. Mikhalev, *Quotient rings of graded associative rings I*, Journal of Mathematical Sciences, vol. 186, n^o 4, October, 2012.

[8] I. N. Balaba, S. V. Limarenko, A. V. Mikhalev, S. V. Zelenov, *Density theorems for graded rings*, Journal of Mathematical Sciences, vol. 128, n^o 6, 2005.

[9] J. Bergen, P. Grzeszczuk, *Simple Jordan Color algebras arising from associative graded algebras* J. Algebra, **246**(2001), 915-950.

[10] T. S. Chen, C. F. Huang, J. W. Liang, *Extended Jacobson density theorem for graded rings with derivations and automorphisms*, Taiwanese Journal Mathematics, vol. 14 (5), october 2010, 1993-2014.

[11] A. Elduque, M. Kochetov, *Gradings on simple Lie algebras*, Amer. Math. Soc., Mathematical Surveyus and Monographs, vol.189, 2013.

[12] A. Elduque, O. Villa, *The existence of superinvolutions* , J. Algebra **319** (2008), 4338-4359.

[13] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods*, Amer. Math. Soc., Math. Surveys and Monographs, vol. 122, Providence, R.I., 2005.

[14] C. Gómez-Ambrosi, I. P. Shestakov, *On the Lie structure of the skew-elements of a simple superalgebra with superinvolution*, J. Algebra, **208** (1998), 43-71.

[15] I. N. Herstein, *On the Lie and Jordan rings of a simple associative ring*, Amer. J. Math. **77** (1955), 279-285.

[16] I. N. Herstein, *Rings with involution*, Chicago Lectures in Math., Univ. of Chicago Press, Chicago, 1976.

[17] I. N. Herstein, *Noncommutative rings*, Carus Monograph n^o 15, MAA Utreck, 1968.

[18] A. Jaber, *Division $\mathbb{Z}_3$-algebras*, International Electronic J. Algebra, **7**(2010), 1-11.

[19] N. Jacobson, *Structure of rings*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 37, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1956.

[20] M. A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, J. P. Tignol, *The book of involutions*, AMS Colloquium Publications, vol. 44, 1998.

[21] S. X. Liu , M. Beattie, H. J. Fang, *Graded division rings and the Jacobson density theorem*, J. Beijing Normal University (Natural Science), **27**(2)(1991), 129-134.

[22] A. V. Mikhalev, K.I. Beidar, W.S. Martindale III, *Rings with generalized identities, pure and applied mathematics*, A series of Monographs and Textbooks, New York, 1996.

[23] C. Năstăsescu, F. Van Oystaeyen, *Graded ring theory*, North-Holland, Amsterdam, 2004.

[24] C. Năstăsescu, F. Van Oystaeyen, *Methods of graded rings*, Lecture Notes in Mathematics, 1836 edição, Springer, 2004.

[25] M. L. Racine, *Primitive superalgebras with superinvolution*, J. Algebra, **206** (1998), 588-614.

[26] L. H. Rowen, *Ring theory*, vol. 1, Academic Press, 1988.

[27] I. Sviridova, *Identities of finitely generated graded algebras with involution*, arXiv: 1410.222v2, 6 Dec. 2014, 1-34.

[28] J.-P. Tignol, A. R. Wadsworth, *Value functions on simple algebras, and associated graded rings*, Springers Monographs in Mathematics, 2015.